THÈSE DE DOCTORAT

DE l'UNIVERSITÉ PARIS EST

soutenue le 11 Décembre 2013 par

Aych Ismaïl BOUSELMI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Options Américaines & Processus de Lévy

Jury

Rapporteur	*Bruno BOUCHARD*
Rapporteur	*Peter TANKOV*
Examinateur	*Romuald ELIE*
Examinateur	*Monique JEANBLANC*
Directeur de thèse	*Damien LAMBERTON*

A Lhamdlelah, à qui je dois tout et plus encore...
A la mémoire de Yomma Kafia

Remerciements

Durant ces dernières années, j'ai eu la chance de faire la connaissance d'un bon nombre de personnes qui ont rendu possible l'aboutissement de cette thèse de doctorat et que je tiens à remercier.

Je tiens tout d'abord à remercier les rapporteurs de mon manuscrit : Peter TANKOV et Bruno BOUCHARD pour avoir accepté de rapporter ce travail et pour leurs remarques et questions pertinentes. Merci à Monique JEANBLANC et à Romuald ELIE d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier Damien LAMBERTON, mon directeur de thèse pour sa disponibilité, sa patience et ses précieux conseils. Merci pour les nombreuses heures passées dans ton bureau, durant lesquelles, j'ai fais la connaissance de ce que fait un mathématicien, à savoir la rigueur, la patience et la persévérance. Merci pour la façon dont tu transmets ton savoir, avec déférence et merci pour ta bienveillance.

Je remercie également toutes les personnes que j'ai côtoyées au LAMA, et qui font de ce laboratoire un lieu où il fait bon travailler. C'est d'ailleurs dans ce cadre que j'ai fait la connaissance de Lokman ABBAS-TURKI et Mohamed MIKOU, que je tiens à remercier et avec qui il m'a été très agréable de collaborer dans le cadre d'un travail qui fait l'objet de la deuxième partie de ce manuscrit.

Enfin, je souhaiterai remercier ma grande famille pour leur soutien pendant ma thèse. Merci à mes parents et à ma femme qui m'a en plus offert les plus beaux cadeaux de ma vie, mes enfants.

On garde toujours le meilleur pour la fin alors : Merci à Wassila et Nog'nog, que j'aime de tout mon cœur et pour qui ce manuscrit représente l'aboutissement de plusieurs années d'investissement.

Introduction

Les marchés financiers ont connu, grâce aux études réalisées durant les trois dernières décennies, une expansion considérable et ont vu l'apparition de produits dérivés divers et variés. Les plus utilisés parmi ces produits dérivés sont les options américaines.

Une option américaine est par définition une option qu'on a le droit d'exercer avant l'échéance convenue T. Les plus basiques sont le put ou le call américain (respectivement option de vente $(K-x)^+$ ou d'achat $(x-K)^+$). Une question découle naturellement de la définition de l'option américaine ;
À quel moment est-il optimal d'exercer son option ?
La réponse à cette question a été clarifiée grâce à différents travaux. Dans la plupart de ces travaux, on se place sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans le cadre de la théorie des martingales (voir [8, 9, 13]), l'absence d'opportunité d'arbitrage se traduit par l'existence d'une probabilité équivalente dite probabilité risque neutre, sous laquelle, les processus modélisant les prix actualisés des actifs risqués sont des martingales. On note S_t le processus décrivant le prix d'un actif risqué (risky asset). On supposera donnée une probabilité risque neutre, sous laquelle $S_t = S_0 e^{X_t} = e^{x_0+X_t}$ avec $x_0 = \ln(S_0)$ et X_t un processus de Lévy. Sans perte de généralité, on peut considérer, modulo un changement de variable logarithmique, la fonction pay-off comme une fonction de $(X_t^{x_0})$ avec $X_t^{x_0} = x_0 + X_t$. La théorie moderne des options américaines due à Bensoussan [2] et à Karatzas [16] relie la valeur d'une option américaine à la théorie de l'arrêt optimal. Le prix d'une option américaine d'échéance T et de pay-off f (fonction de $X_t^{x_0}$), à une date $t \leq T$, est donné par l'enveloppe de Snell du processus $e^{-rs} f(X_s^{x_0})$ (la plus petite surmartingale majorant ce dernier), qui dans le cadre Markovien (voir [10]), est donnée par

$$P_t = ess \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left(e^{-r(\tau-t)} f(X_\tau^{x_0}) | X_t\right) = u_f(t, X_t^{x_0}),$$

où $\mathcal{T}_{t,T}$ est l'ensemble des $\mathbb{F}$-temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$, avec $\mathbb{F}$ la filtration

naturelle de $(X_t)_{t\geq 0}$ et la fonction u_f est définie pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$, par

$$u_f(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(e^{-r(\tau-t)}f(X_\tau^{x_0})|X_t = x - x_0) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau}f(X_\tau^x)).$$

On a aussi une caractérisation du plus petit temps d'arrêt optimal τ^* (voir[11]), par

$$\tau^* \quad = \quad \inf\left\{s\in[0,T-t], u_f(t+s,X_s^x) = f(X_s^x)\right\}.$$

On obtient donc,

$$u_f(t,x) = \mathbb{E}(e^{-r\tau^*}f(X_{\tau^*}^x)).$$

Le prix d'une option américaine peut également être vu comme étant la solution d'une inéquation variationnelle faisant intervenir le générateur infinitésimal $\mathcal{A}_X$ du processus X (voir [3, 15] et [29, 21, 22] dans le cas des modèles exponentiels de Lévy avec des pay-off continus bornés)

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_f}{\partial t} + \mathcal{A}_X u_f - rf & = & 0 \text{ sur } \{u_f > f\} \\ \frac{\partial u_f}{\partial t} + \mathcal{A}_X u_f - rf & \leq & 0 \text{ sur } \{u_f = f\} \\ u_f(T,.) & = & f \end{array}\right.$$

Comme on peut le voir, les deux caractérisations du prix de l'option américaine font intervenir l'ensemble crucial

$$\mathcal{E} = \{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d, u_f(t,x) = f(x)\}.$$

Cet ensemble est appelé la région d'exercice et comme son nom l'indique, il représente exactement la réponse à la question posée plus haut. On note $\mathcal{E}_t = \{x, (t,x)\in\mathcal{E}\}$ ses t-sections. Etant donné l'importance du rôle que joue cette région aussi bien dans le pricing de l'option américaine que dans l'élaboration de stratégies optimisant les gains d'un détenteur d'une telle option, elle a été très tôt l'objet de nombreuses études, surtout dans le cadre du modèle de Black Scholes.

La frontière de la région d'exercice (frontière libre) n'étant pas explicite, même dans le cas du modèle de Black Scholes unidimensionnel, de nombreuses études se sont ainsi intéressées à sa caractérisation (voir [17, 14, 1, 26] et [5, 35, 6] pour le cas

multidimensionnel). Pour mieux les comprendre, le comportement de la frontière près de l'échéance a aussi été largement étudié. Ainsi dans le cas unidimensionnel, les t-sections de la région d'exercice d'un put américain s'écrivent

$$\left\{x \in \mathbb{R}^+;\ x \leq b(t)\right\},$$

où $b(t)$ est une fonction continue strictement croissante sur $[0, T[$ (voir [12, 28, 21]) qu'on appelle le prix critique d'un put américain. La limite du prix critique $b(t)$ quand t tend vers l'échéance T est caractérisée dans ([28, 17]) par

$$b(T) = \lim_{t \to T} b(t) = \begin{cases} \frac{\delta}{r} K & \text{si} \quad r - \delta \leq 0 \\ K & \text{si} \quad r - \delta > 0 \end{cases},$$

avec $r > 0$ le taux d'intérêt sans risque, $\delta \geq 0$ le taux de dividende et K le Strike du Put. Dans le cas multidimensionnel, on a une caractérisation de la région d'exercice limite $\mathcal{E}_T$ d'une option d'achat ou de vente sur un panier d'actifs $(\langle x, \alpha \rangle - K)^+$ (voir [35]).

On ne s'est pas intéressé uniquement à l'identification de la limite du prix critique, mais il y a eu aussi plusieurs travaux dans lesquels on s'est également intéressé à la vitesse de convergence vers cette limite. En effet, Barles et al.[1] et Lamberton[19] se sont penchés sur l'étude de cette problématique. Dans le modèle de Black Scholes, dans le cas où $r > 0$ et $\delta = 0$. Le résultat qu'ils ont obtenu s'étend au cas où $\delta > 0$ et $r - \delta > 0$ (voir [36]). Les cas où $r - \delta < 0$ et $r - \delta = 0$ ont été étudiés par Lamberton et Villeneuve dans [35]. Ainsi, grâce à ces travaux, on a

$$\frac{b(T) - b(t)}{\sigma b(T)} \sim_{t \to T} \begin{cases} \sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|} & \text{si} \quad r - \delta > 0 \quad (b(T) = K), \\ \sqrt{2}\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|} & \text{si} \quad r - \delta = 0 \quad (b(T) = K), \\ y_0 \sqrt{(T-t)} & \text{si} \quad r - \delta < 0 \quad (b(T) < K), \end{cases}$$

où $0 < y_0 < 1$.

D'autre part l'étude des processus de Lévy a aussi connu une grande effervescence ces dernières décennies. Leur grande flexibilité (asymétrie, épaisseur des queues de distribution, discontinuités des trajectoires ...) d'une part et leur nature Markovienne homogène en temps, font d'eux des processus idéaux pour la modélisation financière. Ainsi les options américaines ont été étudiées dans le cadre de modèles exponentiels

de Lévy plus larges que le modèle de Black Scholes et plusieurs des résultats établis dans le cadre Black Scholes leur ont été généralisés.
Pham [29] donne une caractérisation du prix d'un put américain, dans le cadre Jump-diffusion, à l'aide une inéquation variationnelle. Ce résultat a été démontré (voir [23]) dans un cadre plus large d'un processus de Lévy en s'affranchissant de la condition $\sigma \neq 0$.
En effet, si on note ξ la solution de l'équation $rK - \delta x - \int (xe^y - K)^+ \nu(dy) = 0$ avec ν la mesure de Lévy du processus X, alors

$$b(T) = \lim_{t \to T} b(t) = \begin{cases} \xi & \text{si} \quad r - \delta - \int (e^y - 1)^+ \nu(dy) \leq 0 \\ K & \text{si} \quad r - \delta - \int (e^y - 1)^+ \nu(dy) > 0 \end{cases}.$$

Pham [29] s'est intéressé aussi à sa vitesse de convergence dans le cas où l'on considère un modèle à sauts, plus précisément un processus X Jump-diffusion, sous des hypothèses $r - \int (e^y - 1)^+ \nu(dy) > 0$ et $\delta = 0$, il a montré que la vitesse restait inchangée par rapport au cas Black Scholes,

$$\frac{b(T) - b(t)}{\sigma b(T)} \sim_{t \to T} \sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|},$$

Ce qui se traduit par le fait que les sauts n'ont aucune influence sur le comportement asymptotique du prix critique. Ces résultats restent vrais dans le cas où $\delta > 0$ et $r - \delta - \int (e^y - 1)^+ \nu(dy) > 0$ (voir [23]). Toujours dans le cas $r - \delta - \int (e^y - 1)^+ \nu(dy) > 0$, Lamberton et Mikou s'intéressent, dans [23], à des processus de Lévy sans terme de diffusion ($\sigma = 0$). Ils étudient, entre autres, un certain type de processus ayant un comportement α-stable pour des temps petits. Ils montrent que,

$$\frac{b(T) - b(t)}{b(T)} \underset{t \to T}{\sim} C(T-t)^{\frac{1}{\alpha}} |\ln(T-t)|^{1-\frac{1}{\alpha}},$$

avec $C > 0$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des options américaines dans le cadre des modèles exponentiels de Lévy. Notre contribution à ces travaux, à travers cette thèse, consiste en :
Premièrement, étendre, à des fonctions de gain non bornées définies sur $\mathbb{R}^d$,une caractérisation du prix de l'option américaine associée à l'aide d'une inéquation variationnelle. Ceci est une conséquence d'une caractérisation analytique de la propriété

de surmartingale à l'aide du générateur infinitésimal du processus de Lévy établi antérieurement (chapitre 1).
Deuxièmement, nous donnons quelques propriétés des régions d'exercice ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la région d'exercice soit non vide (résultat établi dans le cadre Black Scholes dans [35]). Ensuite, on regarde de plus près le cas d'options d'achat américaines sur un panier d'actifs. Nous montrerons une propriété de continuité par rapport au temps des t-sections ainsi que certaines de leurs propriétés topologiques. Nous caractériserons aussi la région limite des t-sections (chapitre 2).
Troisièmement, nous nous replaçons dans le cas d'un put unidimensionnel et nous étudions la vitesse de convergence du prix critique, dans un cadre Jump-diffusion, dans les cas où $r - \delta - \int (e^y - 1)^\nu (dy) \leq 0$. Nous montrerons, notamment, qu'à l'encontre du cas où $r - \delta - \int (e^y - 1)^\nu (dy) > 0$ (voir [23, 29]), les sauts ne sont pas toujours sans conséquences sur la vitesse de convergence du prix critique (chapitre 3).
Quatrièmement, on s'intéressera à la vitesse de convergence du prix critique d'un put américain dans un modèle où le processus de Lévy n'a pas de terme de diffusion ($\sigma = 0$) mais qui, près de l'origine, a un comportement proche de celui d'un α-stable (chapitre 4). Le cas où $b(T) = K$ a été étudié dans [23], nous nous intéresserons donc dans le chapitre 4 au cas où $d^+ < 0$

La deuxième partie de cette thèse est indépendante de la première et est consacrée à la valorisation de la CAV (Credit Valuation Adjustement). En effet, après la crise économique de 2007, plusieurs lois ont été émises pour une meilleure régulation financière. Parmi les mesures les plus importantes sont celles prises à Bâle III qui considèrent le calcul de la CVA comme une partie importante des règles prudentielles. Dans une transaction financière entre une partie A qui doit payer à une autre partie B une certaine somme V, la valeur de la CVA est le prix du contrat d'assurance qui couvre le défaut de paiement de la somme entière par la partie A. Formellement, la valeur de la CVA est donnée par (voir [13, 14])

$$\begin{aligned} \mathrm{CVA}_{t,T} &= (1-R) E_t \left(V_\tau^+ 1_{t<\tau\leq T} \right) \\ &= (1-R) \int_t^T E_t \left(V_u^+ | \tau = u \right) P_\tau(du), \end{aligned} \tag{1}$$

où R (supposée égale à zéro dans ce document) est le recouvrement à faire sur le portefeuille, s'il y a défaut de la contrepartie, E_t désigne l'espérance conditionnelle sachant toute l'information disponible à la date t, le processus V_t modélise la valeur de l'exposition, τ est le temps de défaut de la contrepartie, T est la maturité de la protection et la fonction "partie positive" est notée par $(.)^+$ ou $(.)_+$. Donc, dans un

cadre où on suppose l'indépendance entre le temps de défaut τ et l'exposition V_t, la CVA sera donnée par

$$\mathrm{CVA}_{t,T} \quad = \quad \int_t^T E_t\left(V_u^+\right) P_\tau(du).$$

La simulation de la CVA entraîne donc la simulation des trajectoires de V_u et conduit à un problème d'approximation de l'espérance conditionnelle.

Outre le fait que l'hypothèse d'indépendance entre le temps de défaut τ et l'exposition V_t n'est pas très réaliste, une difficulté supplémentaire subsiste dans le fait que le portefeuille d'exposition V_t peut contenir, non seulement des actifs, mais aussi des contrats européens et américains. Dans le cas où il n'y a pas d'échange de contrats américains, la méthode Monte Carlo "carré" (MC2) est une méthode de référence car elle est parallélisable (d'un point de vue implémentation) et suffisamment précise pour un choix standard du nombre de trajectoires. Lorsque le portefeuille contient des contrats américains, on a recours aux algorithmes fondés sur la régression. L'avantage de ces méthodes provient de leur rapidité, néanmoins on ne dispose pas de façon standard du choix de la base de régression pour les différents modèles et contrats. De plus, ces méthodes ne sont pas efficaces pour des modèles à grande dimension et ne permettent pas le calcul de sensibilités.

Dans cette partie, on présentera un travail fait conjointement avec L. A. Abbas-Turki et M. A. Mikou dans lequel nous développons une méthode basée sur le calcul de Malliavin dans un cadre où les prix des actifs sont donnés par la dynamique :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = r_i dt + \sum_{j=1}^{i} \sigma_{ij}(t) dW_t^j, \quad S_0^i = z_i, \quad i = 1, .., d, \tag{2}$$

où r_i sont des constantes et $\sigma(t) = \{\sigma_{ij}(t)\}_{1\leq i,j\leq d}$ est une matrice triangulaire déterministe ($\{\sigma_{ij}(t)\}_{i<j} = 0$), inversible, bornée et uniformément elliptique. Nous verrons que les résultats obtenus peuvent être étendus à d'autres modèles et qu'il est possible d'utiliser le calcul de Malliavin pour simuler la densité backward des processus.
Nous exposerons une étude détaillée de la complexité de notre méthode comparée aux MC2 et les méthodes fondées sur la régression.

Table des matières

I Options Américaines **13**

1 Inéquation Variationnelle **15**
1.1 Processus de Lévy . . . 15
1.1.1 Définitions et propriétés . . . 15
1.1.2 Générateur infinitésimal . . . 18
1.2 Caractérisation de la propriété de surmartingale . . . 22
1.3 Options américaines et Inéquation variationnelle . . . 27
1.3.1 Inéquation variationnelle . . . 28

2 Région d'exercice multidimensionnelle **33**
2.1 Propriétés générales des régions d'exercice . . . 36
2.2 Région d'exercice d'options Basket américaines . . . 40
2.2.1 Propriétés et régularité des sections temporelles . . . 41
2.2.2 Région d'exercice limite . . . 48

3 Convergence rate in the Jump-diff model **57**
3.1 Introduction . . . 57
3.2 Preliminary results . . . 60
3.2.1 American option in the exponential Levy model . . . 60
3.2.2 Regularity estimate for the value function in the jump diffusion model . . . 61
3.3 The regular case . . . 62
3.3.1 An expansion of the American Put price near maturity . . . 62
3.3.2 An auxiliary optimal stopping problem . . . 76
3.3.3 Convergence rate of the critical price b(t) . . . 77
3.4 The limit case . . . 79

4 Convergence rate α-stable tempéré **101**

4.1 Hypothèses et processus de Lévy limite . . . 102
4.2 Propriété du modèle . . . 103
4.3 Un problème d'arrêt optimal auxiliaire . . . 106
4.4 Le développement limité . . . 107
4.5 Vitesse de convergence de $b(t)$ . . . 116

II Simulation de CVA **135**

5 simulations de CVA **137**
5.1 Introduction . . . 137
5.2 Model families . . . 140
5.2.1 CVA intensity models including WWR/RWR . . . 142
5.2.2 CVA structural models including WWR/RWR . . . 145
5.3 Computing the value exposure, its sensitivity 147
5.3.1 The conditional expectation value and its gradient . . . 147
5.3.2 Backward conditional density estimation . . . 152
5.4 Complexity comparison of different approaches . . . 158
5.4.1 Square Monte Carlo benchmark and regression method . . . 158
5.4.2 MCM as an alternative . . . 161
5.5 Numerical tests using parallel implementation . . . 163
5.5.1 Benchmarking setup . . . 163
5.5.2 MCM accuracy for CVA and CVA sensitivities . . . 166

Première partie

Options Américaines

Chapitre 1

Inéquation Variationnelle

Dans ce premier chapitre, nous commençons par rappeler la définition d'un processus de Lévy ainsi que certaines de ces propriétés qui nous seront utiles tout le long de ce document. Ensuite, nous présenterons les hypothèses de notre cadre de travail et nous élargirons ainsi le champ d'action du générateur infinitésimal afin de l'appliquer à certaines fonctions qui ne sont ni bornées ni $\mathcal{C}^2$. On caractérisera à l'aide du générateur infinitésimal une condition suffisante et nécessaire pour qu'un processus $(f(X_t))_{t\geq 0}$ soit une surmartingale. Enfin, comme application de cette caractérisation, nous montrerons que le prix d'une option américaine, dont le pay-off est continu et vérifie certaines hypothèses d'intégrabilité, est l'unique solution au sens des distributions d'une certaine inéquation variationnelle qu'on précisera.

1.1 Processus de Lévy

1.1.1 Définitions et propriétés

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé un processus de Lévy, si

a) ses accroissements $(X_t - X_s)$ sont stationnaires (homogènes) et indépendants,

b) il est $\mathbb{P}$-presque sûrement issu de 0, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

c) il est continu stochastiquement, $\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|X_t - X_s| > \epsilon) \underset{t\to s}{\longrightarrow} 0$,

d) ses trajectoires sont $\mathbb{P}$-presque sûrement càdlàg (continue à droite limite à gauche),

où $|.|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Remarque:
La propriété d) n'est pas essentielle car un processus de Lévy en loi, c'est à dire vérifiant a), b) et c), admet une modification càdlàg (voir [33], chapitre 2) .

On désignera, dorénavant par $\mathbb{F}$ la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, où $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0, \mathcal{N})$, $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s\ , s \leq t)$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties $\mathbb{P}$-négligeables. La filtration $\mathbb{F}$ est une filtration continue à droite, pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.

Grâce à la décomposition de Lévy-Itô, un processus de Lévy X peut s'écrire comme somme de trois processus indépendants

$$X \ = \ X^1 + X^2 + X^3$$

X^1 représente la partie diffuse du processus,

$$X_t^1 = \gamma t + \Sigma B_t,$$

avec B_t un mouvement brownien d-dimensionnel, $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ et γ un vecteur de $\mathbb{R}^d$, on notera $A = \Sigma^t\Sigma$.

X^2 Un processus de Poisson composé,

$$X_t^2 = \int_0^t \int_{|y|\geq 1} yJ(ds, dy),$$

X_t^3 Une martingale de carré intégrable ,

$$X_t^3 = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^t \int_{\epsilon<|y|<1} y\widetilde{J}(ds, dy),$$

La mesure J est la mesure rendant compte des sauts de X, c'est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ d'intensité $ds\nu(dy)$. La mesure $\widetilde{J}$ est la mesure compensé de J, $\widetilde{J}(ds, dy) = J(ds, dy) - ds\nu(dy)$, la mesure ν est appelée mesure de Lévy et vérifie $\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} |y|^2 \wedge 1\nu(dy) < \infty$.
La loi du processus de Lévy X est caractérisée par le triplet (A, γ, ν) ou par son exposant caractéristique qui est donné par la formule de Lévy-Kintchine

$$\begin{aligned}\Psi(p) &= \frac{1}{t}\ln \mathbb{E}(e^{i\langle p, X_t\rangle}) = i\langle p, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle p, Ap\rangle - \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle p,y\rangle} - 1 - i\langle p, y\rangle 1_{|y|<1}\nu(dy) \\ &= \left(i\langle p, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle p, Ap\rangle\right) - \left(\int_{|y|\geq 1}(e^{i\langle p,y\rangle} - 1)\nu(dy)\right) - \left(\int_{|y|<1}(e^{i\langle p,y\rangle} - 1 - i\langle p, y\rangle)\nu(dy)\right).\end{aligned}$$

La décomposition de la somme dans la deuxième égalité est pour faire le lien avec la décomposition de Lévy-Itô.
Exemples Mouvement Brownien ,Processus de Poisson composé ,Jump-diffusion...

On définit les g-moments d'un processus de Lévy par $\mathbb{E}(g(X_t))$. Les propositions suivantes lient la finitude de ces moments à sa mesure de Lévy.
Définition 1.1.1 *Une fonction g de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^+$ est dite sous-multiplicative s'il existe une constante positive a telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$0 \leq g(x+y) \leq ag(x)g(y).$$

Proposition 1.1.1 *Soient g une fonction mesurable sous-multiplicative localement bornée de $\mathbb{R}^d$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy d-dimensionnel de mesure de Lévy ν. Alors, $\mathbb{E}(g(X_t)) < \infty$ pour tout t si et seulement si $\int_{|y|>1} g(y)\nu(dy) < \infty$.*
Proposition 1.1.2 *Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy d-dimensionnel, et g une fonction positive continue sous-multiplicative de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui croît vers l'infini. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes*
– $\mathbb{E}(g(\sup_{s\in[0,t]} |X_s|)) < \infty$ *pour un certain $t > 0$.*
– $\mathbb{E}(g(\sup_{s\in[0,t]} |X_s|)) < \infty$ *pour tout $t > 0$.*
– $\mathbb{E}(g(|X_t|)) < \infty$ *pour un certain $t > 0$.*
– $\mathbb{E}(g(|X_t|)) < \infty$ *pour tout $t > 0$.*

Pour les preuves de ces résultats, on peut voir [33].

Étant donné qu'on s'intéressera, dans la suite, à la modélisation des prix des actifs risqués par des exponentielles de processus de Lévy, nous énonçons ici une proposition qui caractérise la propriété martingale de tels processus (voir [7] propositions 3.17 et 3.18 ou [33])
Proposition 1.1.3 *Soit X_t un processus de Lévy unidimensionnel de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν). Alors, on a*

1. *Le processus (X_t) est une martingale si et seulement si $\int_{|y|\geq 1} |y|\nu(dy) < \infty$ et*

$$\gamma + \int_{|y|\geq 1} y\nu(dy) = 0.$$

2. *Le processus (e^{X_t}) est une martingale si et seulement si $\int_{|y|\geq 1} e^y\nu(dy) < \infty$ et*

$$\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int (e^y - 1 - y1_{|y|<1})\nu(dy) = 0.$$

3. *Si pour un certain $u \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(e^{uX_t}) < \infty$, pour tout $t \geq 0$, alors le processus $\left(\frac{e^{uX_t}}{E(e^{uX_t})}\right)$ est une martingale.*

Les processus de Lévy sont quasi-continus à gauche , cette propriété est l'objet de la proposition suivante (voir [18]).

Proposition 1.1.4 *Soient τ un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt et $(\tau_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de $\mathbb{F}$-temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. Alors, on a presque sûrement $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau$ sur $\{\tau < \infty\}$. Donc, si pour tout n, $\tau_n < \tau$, alors le processus X est continu à gauche en τ sur l'ensemble $\{\tau < \infty\}$.*

On finit cette partie, par une formulation du lemme d'Itô pour les processus de Lévy (voir[7]).

Proposition 1.1.5 *Soit X_t un processus de Lévy de triplet caractéristique (A, γ, ν). Alors, pour toute fonction g de $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, on a*

$$dg(X_t) = dV_t + dM_t,$$

avec la partie drift

$$dV_t = \left[\gamma.\nabla g + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\mathbb{R}^d} [g(X_{t^-} + y) - g(X_{t^-}) - \nabla g.y1_{|y|<1}]\nu(dy)\right] dt$$

et la partie martingale locale

$$dM_t = \nabla g.AdB_t + \int_{\mathbb{R}^d} g(X_{t^-} + y) - g(X_{t^-})\tilde{J}_X(dt, dy).$$

1.1.2 Générateur infinitésimal

Le générateur infinitésimal de X est défini, pour tout $g \in \mathcal{C}_b^2$ fonction bornée deux fois dérivable et dont les dérivées sont aussi bornées, par

$$\mathcal{A}_X(g)(x) = \mathcal{A}_X^c(g)(x) + \mathcal{B}_X(g)(x),$$

avec

$$\mathcal{A}_X^c(g)(x) = \gamma.\nabla g(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x),$$

et

$$\mathcal{B}_X(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(x + y) - g(x) - \nabla g(x).y1_{|y|<1}\right)\nu(dy).$$

On peut définir aussi le générateur infinitésimal au sens des distributions pour toute fonction bornée g. En effet, $\mathcal{A}_X^c(g)$ peut être défini au sens des distributions pour toute fonction g localement intégrable. Et pour toute fonction $g \in \mathbb{L}^\infty$, on peut définir la distribution $\mathcal{B}_X(g)$ telle que pour la fonction $\phi \in D(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on a

$$\langle \mathcal{B}_X(g), \phi \rangle = \langle g, \mathcal{B}_X^*(\phi) \rangle,$$

où $\mathcal{B}_X^*$ est donné par

$$\mathcal{B}_X^*(\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y) - \phi(x) + y.\nabla\phi(x) 1_{\{|y|\leq 1\}} \nu(dy).$$

La fonction $\mathcal{B}_X^*(\phi)(x)$ est continue intégrable (voir [21]).

Nous présentons, maintenant, les hypothèses qui nous permettront de nous affranchir de l'hypothèse de bornitude de f dans ce qui précède. On définit pour toute la suite l'ensemble $\mathcal{D}^\nu$ comme l'ensemble des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse

(A) Il existe une fonction continue, positive, croissante et sous-multiplicative Φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ avec $\Phi(x) \to_\infty \infty$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |f(x)| \leq \Phi(|x|) \\ \qquad \int_{|y|>1} \Phi(|y|)\nu(dy) < \infty \end{cases} \tag{1.1}$$

Nous considérerons, par abus de notation, qu'une fonction $g(t,x)$ sur $I \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{D}^\nu$ si pour tout $t \in I \subset \mathbb{R}^+$, la fonction $g(t,.) \in \mathcal{D}^\nu$.

Proposition 1.1.6 *Soient une fonction $f \in \mathcal{D}^\nu$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors,*

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq T} |f(X_t^x)|) < \infty,$$

avec $X_t^x = x + X_t$.

Preuve :
Soit $f \in \mathcal{D}^\nu$, on a alors, $\sup_{t\in[0,T]} |f(X_t^x)| \leq \sup_{t\in[0,T]} \Phi(|X_t^x|)$. Comme Φ est croissante et sous-multiplicative, on a aussi

$$\sup_{t\in[0,T]} \Phi(|x+X_t|) \leq C\Phi(|x|) \sup_{t\in[0,T]} \Phi(|X_t|).$$

La croissance de Φ nous donne aussi

$$\sup_{t\in[0,T]} \Phi(|X_t|) \leq \Phi(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|).$$

Enfin grâce aux propositions 1.1.1 et 1.1.2, on obtient

$$\mathbb{E}(\Phi(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|)) < \infty,$$

donc

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]}|f(X_t^x)|) \leq C\Phi(|x|)\mathbb{E}(\Phi(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|)) < \infty.$$

□

Pour un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$, on note $D(U)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U.

Proposition 1.1.7 *Soit g une fonction de $\mathcal{D}^\nu$. Alors, l'application T_g définie sur $D(\mathbb{R})$ par*

$$T_g : \phi \mapsto \langle g, \mathcal{B}_X^*(\phi)\rangle = \int g(x)\mathcal{B}_X^*(\phi)(x)dx,$$

est une distribution sur $D(\mathbb{R}^d)$.

Preuve :
La linéarité de T_g découle de celle de $\mathcal{B}_X^*$.
Soient g une fonction mesurable vérifiant (A) et ϕ une fonction de $D(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}
|\langle g, \mathcal{B}_X^*(\phi)\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \int |\phi(x-y) - \phi(x) - y.\nabla\phi(x)1_{\{|y|\leq 1\}}|\nu(dy)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{|y|\leq 1} |g(x)||\phi(x-y) - \phi(x) + y.\nabla\phi(x)|\nu(dy)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{|y|>1} |g(x)||\phi(x-y) - \phi(x)|\nu(dy)dx.
\end{aligned}$$

Soit K un compact tel que $supp\phi \subset K$. Alors pour tout $y \in B(0,1)$, la boule unité fermée, on a $supp\phi(.-y) \subset K + B(0,1)$, d'où

$$(\phi(x-y)-\phi(x)+y.\nabla\phi(x))1_{\{|y|\leq 1\}} = (\phi(x-y)-\phi(x)+y.\nabla\phi(x))1_{\{|y|\leq 1\}}.1_{K+B(0,1)}(x).$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
|\langle g, \mathcal{B}_X^*(\phi)\rangle| &\leq \int_{K+B(0,1)} |g(x)| \underbrace{\frac{1}{2}||D^2\phi||_\infty \int_{|y|\leq 1} |y|^2\nu(dy)}_{=C}\, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{|y|>1} |g(x)||\phi(x-y)|\nu(dy)dx + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{|y|>1} |g(x)||\phi(x)|\nu(dy)dx \\
&\leq C\int_{K+B(0,1)} |g(x)|dx + \int_{|y|>1}\int_K |g(x+y)||\phi(x)|dx\nu(dy) \\
&\quad + \nu(|y|>1)\int_K |g(x)||\phi(x)|dx.
\end{aligned}$$

Comme $g \in \mathcal{D}^\nu$, on a $|g(x+y)| \leq a\Phi(|x|)\Phi(|y|)$ et Φ localement bornée (continue), donc

$$\begin{aligned}
|T_g(\phi)| &\leq C\int_{K+B(0,1)} \Phi(|x|)\left(1 + |\phi(x)|\int_{|y|>1}(a\Phi(|y|)+1)\nu(dy)\right)dx \quad (1.2)\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Si $(\varphi_p)_p$ une suite de $D(\mathbb{R}^d)$ convergente[1] vers 0, alors $(\varphi_p)_p$ et $(D^2\varphi_p)_p$ sont uniformément convergentes sur $K + B(0,1)$. On conclut, grâce à (1.2), que

$$T_g(\varphi_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Remarque:
Si la fonction g est dans $\mathcal{C}^2 \cap \mathcal{D}^\nu$ et que $\|\nabla g\|$ et $\|D^2 g\|$ sont aussi dans $\mathcal{D}^\nu$, alors on retrouve

$$\langle \mathcal{B}_X(g), \phi\rangle = \langle T_g, \phi\rangle.$$

On désignera, dans toute la suite, pour toute fonction $g \in \mathcal{D}^\nu$, par $\mathcal{B}_X(g)$ la distribution T_g, et par $\mathcal{A}_X(g)$ la distribution $\mathcal{A}_X^c(g) + \mathcal{B}_X(g)$. On notera aussi $\mathcal{A}_X^*(g)$ l'opérateur adjoint de $\mathcal{A}_X$, pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mathcal{A}_X(g), \varphi\rangle = \langle g, \mathcal{A}_X^*(\varphi)\rangle.$$

1. Il existe un compact K et un entier N tels que pour tout $p \geq N$, $supp(\varphi_p) \subset K$, et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, chacune des suites de dérivées $\partial^\alpha\varphi_p$ converge uniformément sur K.

On a $\mathcal{A}_X^*(g) = \mathcal{A}_X^{c^*}(g) + \mathcal{B}_X^*(g)$.

Dans ce qui suit, nous étendrons certaines propriétés de $\mathcal{B}_X$ vérifiées pour les fonctions de $\mathbb{L}^\infty$ aux fonctions de $\mathcal{D}^\nu$. Ces proposition nous permettent d'utiliser la régularisation.

Proposition 1.1.8 *Soient $(g_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}^\nu$ et deux fonctions $g, \phi \in \mathcal{D}^\nu$ telles que $(g_n)_n$ converge simplement vers g et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|g_n| \leq \phi$. Alors, on a la convergence de la suite de distributions $(\mathcal{A}_X(g_n))_n$ vers $\mathcal{A}_X(g)$.*

La preuve de cette proposition est une conséquence direct du théorème de convergence dominée.

Lemme 1.1.1 *Soit g une fonction de $\mathcal{D}^\nu$, alors pour toute fonction φ dans $D(\mathbb{R}^d)$, $g * \varphi$ est aussi une fonction de $\mathcal{D}^\nu$.*

Preuve :
Soient g une fonction mesurable vérifiant (A) et ϕ une fonction de $D(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|g(x-y)| \leq \Phi(|x| + |y|)$, d'où

$$\begin{aligned} |g * \varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(|x| + |y|)|\varphi(y)|dy &\leq a\left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(|y|)|\varphi(y)|dy\right)\Phi(|x|) \\ &= \left[a\left(\Phi(|.|) * |\varphi|\right)(0)\right]\Phi(|x|). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.9 *Soit g une fonction de $\mathcal{D}^\nu$. Alors pour toute fonction $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\mathcal{B}_X(g * \varphi) = \mathcal{B}_X(g) * \varphi.$$

(cette égalité est au sens des distributions)

La preuve de cette proposition est très similaire au cas où g est bornée [21].

1.2 Caractérisation de la propriété de surmartingale

On définit, pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ et tout $x \in U$, le temps d'arrêt

$$\tau_U^x = \inf\{t \geq 0, x + X_t \notin U\}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit f une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{D}^\nu$ et $\|\nabla f(x)\|, \|D^2 f(x)\| \in \mathcal{D}^\nu$ et soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors, on a équivalence entre les deux propositions suivantes*
– *Le processus $f(X^x_{t\wedge\tau^x_U})$ est une surmartingale pour tout x de U.*
– *Pour tout $x \in U$, on a $\mathcal{A}_X f(x) \leq 0$.*

Preuve :
Par le lemme d'Itô on a $f(x + X_t) = f(x) + \int_0^t \mathcal{A}_X f(X_s + x)ds + M_t$ où M_t est une martingale locale. Soit $(\tau_n)_{n\geq 1}$ une suite de temps d'arrêt croissante telle que
– $\tau_n \to \infty$ p.s.
– pour tout $n \geq 1$, $M_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale
Supposons que $f(X^x_{t\wedge\tau^x_U})$ est une surmartingale pour tout x de U. Considérons ensuite un $x \in U$ choisi arbitrairement, on a alors pour tout $t \in]0, T[$

$$\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau^x_U\wedge\tau_n})) \leq f(x).$$

Donc grâce au lemme d'Itô, on obtient

$$\mathbb{E}(\frac{1}{t}\int_0^{t\wedge\tau^x_U\wedge\tau_n} \mathcal{A}_X f(X_s + x)ds) = \frac{1}{t}\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau^x_U\wedge\tau_n}) - f(x)) \leq 0.$$

Afin d'appliquer le théorème de convergence dominée, nous majorons $|\mathcal{A}_X f(X_s + x)|$, pour tout $s \leq t$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_X f(X_s + x)| &\leq |\gamma|\|\nabla f(X^x_s)\| + C_1\|D^2 f(X^x_s)\| \\
&\quad + \int_{|y|\leq 1} |f(X^x_{s^-} + y) - f(X^x_{s^-}) - \nabla f(X^x_{s^-}).y|\nu(dy) \\
&\quad + \int_{B^c(0,1)} |f(X^x_{s^-} + y) - f(X^x_{s^-})|\nu(dy) \\
&\leq C'_1\Phi(|X^x_s|) + C'_2 \sup_{|u|\leq 1} ||D^2 f(u + X^x_s)|| \int_{|y|\leq 1} |y|^2\nu(dy)ds \\
&\quad + \int_{B^c(0,1)} \Phi(|X^x_s|)(\Phi(|y|) + 1)\nu(dy)ds \\
&\leq \Phi(|x|) \sup_{s\leq t} \Phi(|X_s|) \left(C'_1 + C'_2\Phi(1) \int_{|y|\leq 1} |y|^2\nu(dy)ds + \int_{B^c(0,1)} (\Phi(|y|) + 1)\nu(dy)ds \right).
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on a $t\wedge\tau^x_U\wedge\tau_n \to t\wedge\tau^x_U$ et par convergence dominée, on obtient donc

$$\mathbb{E}(\frac{1}{t}\int_0^{t\wedge\tau^x_U} \mathcal{A}_X f(X_s + x)ds) \leq 0.$$

Étant donné que $f \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{D}^\nu$ et que X est continu à droite p.s. , on a $\mathcal{A}_X f(X_s + x)$ est continue à droite p.s. et comme $\tau_U^x > 0$ p.s, on obtient, en faisant tendre t vers 0, que pour tout x dans U,

$$\mathcal{A}_X f(x) \leq 0.$$

Supposons, à présent, que pour tout x dans U, on a $\mathcal{A}_X f(x) \leq 0$. Soient $x \in U$ et deux réels positifs t, s tels que $s \leq t$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n})|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}\left[(f(x) + \int_0^{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n} \mathcal{A}_X f(X_v + x)dv + \int_{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n} \mathcal{A}_X f(X_v + x)dv + M_{t\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n})|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \underbrace{f(x) + \int_0^{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n} \mathcal{A}_X f(X_v + x)dv + \overbrace{\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s)}^{=M_{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n}}}_{=f(x+X_{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n})} + \mathbb{E}\left(\int_{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n} \mathcal{A}_X f(X_v + x)dv\right) \\
&= f(x + X_{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n}) + \mathbb{E}\left(\int_s^t \mathcal{A}_X f(X_v + x)1_{\{v<\tau_U^x\wedge\tau_n\}}dv\right).
\end{aligned}$$

Or par hypothèse, on a $\mathcal{A}_X f(X_v + x)1_{v<\tau_U^x} \leq 0$, donc

$$\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n})|\mathcal{F}_s) \leq f(x + X_{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n}).$$

Comme f est continue et que le processus X_t est quasi-continu à gauche, on a

$$f(x + X_{s\wedge\tau_U^x\wedge\tau_n}) \longrightarrow_{n\to\infty} f(x + X_{s\wedge\tau_U^x}).$$

Enfin, puisque $\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |f(X_t^x)|) < \infty$, on conclut par convergence dominée que

$$\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau_U^x})|\mathcal{F}_s) \leq f(x + X_{s\wedge\tau_U^x}).$$

□

On étend maintenant cette proposition aux fonctions dans $\mathcal{D}^\nu$ mais non obligatoirement dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.2.2 *Soient f une fonction continue de $\mathcal{D}^\nu$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors, on a équivalence entre les deux assertions suivantes*

- *$f(X^x_{t\wedge\tau_U^x})$ est une surmartingale pour tout x de U.*
- *$\mathcal{A}_X f \leq 0$ sur U, au sens des distributions.*

Preuve :
On rappelle que, pour tout ouvert $I \subset \mathbb{R}^d$ et tout $z \in I$, on désigne par τ_I^z le temps d'arrêt ainsi défini $\tau_I^z = \inf\{t \geq 0; z + X_t \notin I\}$.
Soit f une fonction continue vérifiant (A).
1) Supposons que $f(X^x_{t\wedge\tau_U^x})$ est une surmartingale pour tout x dans U.
On a alors, pour tout x dans U et tout temps d'arrêt τ,

$$\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau_U^x\wedge\tau})) \leq f(x). \tag{1.3}$$

Soient $a > 0$ un réel positif arbitrairement choisi et $V_a \subsetneq U$ un ouvert tel que tout $z \in V_a$ vérifie $d(z, U^c) > a$ (quitte à choisir a suffisamment petit). Considérons aussi une suite régularisante ρ_n tel que pour tout n, $supp(\rho_n) \subset B(0, \frac{a}{3})$. Pour tout $x \in V_a$ et $y \in B(0, \frac{a}{3})$, le temps d'arrêt $\tau^x_{V_a} \leq \tau_U^{x-y}$. En effet,

supposons que $\tau_U^{x-y} < \tau^x_{V_a} = \inf\{t \geq 0; x + X_t \notin V_a\}$, on a alors $x + X_{\tau_U^{x-y}} \in V_a$, d'où

$$x - y + X_{\tau_U^{x-y}} \in V_a + B(0, \frac{a}{3}).$$

Or $d\left(V_a + B(0, \frac{a}{3}), U^c\right) \geq a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3} > 0$, d'où $x - y + X_{\tau_U^{x-y}} \notin U$, ce qui est absurde.
Donc, en appliquant (1.3) avec le temps d'arrêt $\tau = \tau^x_{V_a}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f((x-y) + X_{t\wedge\tau^x_{V_a}})) &\leq f(x-y)\\
\mathbb{E}(f((x-y) + X_{t\wedge\tau^x_{V_a}}))\rho_n(y) &\leq f(x-y)\rho_n(y)\\
\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(f((x-y) + X_{t\wedge\tau^x_{V_a}}))\rho_n(y)dy &\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\rho_n(y)dy\\
\mathbb{E}(f * \rho_n(x + X_{t\wedge\tau^x_{V_a}})) &\leq f * \rho_n(x).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.1.1, les fonctions $f * \rho_n$ vérifient les hypothèses de la proposition 1.2.1, on en déduit alors, que pour tout entier n et pour tout $x \in V_a$, on a

$$\mathcal{A}_X(f * \rho_n)(x) \leq 0.$$

On a aussi, d'après la proposition 1.1.9, l'égalité suivante au sens des distributions,

$$\mathcal{A}_X(f) * \rho_n = \mathcal{A}_X(f * \rho_n) \leq 0.$$

Donc en faisant tendre n vers l'infini, on a

$$\mathcal{A}_X f \leq 0, \qquad \text{sur } V_a \text{ (au sens des distributions).}$$

Puisque V_a a été choisi arbitrairement, l'inégalité s'étend donc sur tout U.

2) Supposons que $\mathcal{A}_X f$ est une mesure négative sur U.
On considère la suite strictement croissante d'ouverts $\left(V_{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $V_{\frac{1}{n}} \uparrow U$. Soit ρ_n une suite régularisante telle que $supp(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$, alors pour tout $m \geq n$, on a sur $V_{\frac{1}{n}}$, au sens des mesures

$$\mathcal{A}_X(f) * \rho_m \leq 0.$$

En effet, pour toute fonction positive ϕ de $D(V_{\frac{1}{n}})$, on a en notant pour tout m, $\check{\rho}_m(x) = \rho_m(-x)$

$$\langle \mathcal{A}_X(f) * \rho_m, \phi\rangle = \langle \mathcal{A}_X(f), \phi * \check{\rho}_m\rangle,$$

et puisque $supp(\phi * \check{\rho}_m) \subset supp(\rho_m) + supp(\phi) \subset B(0, \frac{1}{m}) + V_{\frac{1}{n}} \subset U$ (i.e $\phi * \check{\rho}_m \in D(U)$), alors par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_X(f) * \rho_m, \phi\rangle &= \langle \mathcal{A}_X(f), \phi * \check{\rho}_m\rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on a l'égalité au sens des distributions $\mathcal{A}_X(f * \rho_m) = \mathcal{A}_X(f) * \rho_m \leq 0$ sur $V_{\frac{1}{n}}$ et donc, par régularité de $f*\rho_m$, on a $\mathcal{A}_X(f*\rho_m)(x) \leq 0$ pour tout $x \in V_{\frac{1}{n}}$. En appliquant la proposition 1.2.1, on obtient que $f * \rho_m(X^x_{t\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}})$ est une surmartingale pour tout $x \in V_{\frac{1}{n}}$ et donc

$$\mathbb{E}(f * \rho_m(x + X_{t\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}})|\mathcal{F}_s) \leq f * \rho_m(x + X_{s\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}}).$$

On fait tendre m vers l'infini

$$f * \rho_m(x + X_{s\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}}) \to f(x + X_{s\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}}),$$

et

$$\mathbb{E}(f * \rho_m(x + X_{t\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}})|\mathcal{F}_s) \to \mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}})|\mathcal{F}_s),$$

d'où

$$\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}})|\mathcal{F}_s) \leq \mathbb{E}(f(x + X_{s\wedge\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}})).$$

Montrons, maintenant, que $\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} \to \tau^x_U$ p.s.
On a $V_{\frac{1}{n}} \nearrow U$, d'où $\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}$ est croissante et $\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} \leq \tau^x_U$. En particulier, sur l'ensemble $\{\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} = \infty\}$, on a

$$\tau^x_U 1_{\{\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} = \infty\}} = \lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} = \infty 1_{\{\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} = \infty\}}.$$

Sur l'ensemble $\{\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} < \infty\}$, on a

$$dis(X^x_{\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}}, U^c) \leq \frac{1}{n},$$

de plus, grâce à la quasi-continuité de X et la continuité de la fonction distance, on obtient

$$dis(X^x_{\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}}, U^c) = 0,$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} \geq \tau^x_U$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}} = \tau^x_U.$$

À présent, en faisant tendre n vers l'infini, toujours par quasi-continuité de X_t et continuité de f, on conclut que $f(X_{\tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}} + x)$ converge vers $f(X_{\lim_{n\to\infty} \tau^x_{V_{\frac{1}{n}}}} + x) = f(X_{\tau^x_U} + x)$. Enfin, par convergence dominée ($f \in \mathcal{D}^\nu$), on a bien

$$\mathbb{E}(f(x + X_{t\wedge\tau^x_U})|\mathcal{F}_s) \leq f(x + X_{s\wedge\tau^x_U}).$$

□

Corollaire 1.2.1 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, un processus de Lévy X_t de mesure de Lévy ν et f une fonction continue de $\mathcal{D}^\nu$. Alors, le processus $e^{-rt}f(X^x_t)$ est une martingale (respectivement une sous-martingale) pour tout $x \in U$ si et seulement si la mesure $\mathcal{A}^r f = 0$ sur U (respectivement $\mathcal{A}^r f \geq 0$ sur U), où*

$$\mathcal{A}^r f = \mathcal{A}_X f - rf.$$

1.3 Options américaines et Inéquation variationnelle

La valeur d'une option américaine d'échéance T et de pay-off f, à une date $t \leq T$, est donnée par l'expression suivante

$$P_t = ess \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left(e^{-r(\tau-t)}f(X_\tau)|\mathcal{F}_t\right),$$

où X_t est un processus de Lévy et $\mathcal{T}_{t,T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t, T]$. Dans ce cadre Markovien et sous les hypothèses d'intégrabilité nécessaires, on a la proposition suivante (voir [15, 11])

Proposition 1.3.1 *On définit la fonction u_f, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, par*

$$u_f(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(e^{-r(\tau-t)} f(X_\tau^{t,x}) | \mathcal{F}_t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} f(X_\tau^{0,x})).$$

Alors,

$$u_f(t, X_t) = ess \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left(e^{-r(\tau-t)} f(X_\tau) | \mathcal{F}_t\right) = P_t.$$

Le processus $(e^{-rt} u_f(t, X_t))_{0 \le t \le T}$ est l'enveloppe de Snell du processus $(e^{-rt} f(t, X_t))_{0 \le t \le T}$, la plus petite surmartingale qui majore ce dernier. On a aussi une caractérisation du plus petit temps d'arrêt optimal τ^* (voir [11]), par

$$\tau^* = \inf\left\{s \in [0,T], u_f(t+s, X_s^{0,x}) = f(X_s^{0,x})\right\}.$$

On a donc

$$u_f(t,x) = \mathbb{E}(e^{-r\tau^*} f(X_{\tau^*}^{0,x})).$$

1.3.1 Inéquation variationnelle

Il a été déjà démontré, dans le cas où f est continue bornée (voir [27]), que la fonction u_f est continue. Nous commençons donc par montrer la continuité de u_f quand $f \in \mathcal{D}^\nu$. Ensuite, nous établirons le résultat principal de cette partie qui caractérise le prix d'une option américaine comme l'unique solution d'une inéquation variationnelle.

Proposition 1.3.2 *Soient f une fonction continue bornée et $T > 0$ un réel positif fixé, alors la fonction $u_f(t,x)$ est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.*

Dans la proposition suivante, on établit la continuité de u_f quand f n'est plus borné mais $f \in \mathcal{D}^\nu$.

Proposition 1.3.3 *Soient f une fonction continue de $\mathcal{D}^\nu$ et T un réel positif fixé, alors la fonction $u_f(t,x)$ est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.*

Preuve :

Soit f une fonction de continue de $\mathcal{D}^\nu$ et considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \ge 1}$ définie comme ceci

$$\begin{cases} -n & \text{if } f(x) < -n \\ f(x) & \text{if } f(x) \in [-n, n] \\ n & \text{if } f(x) > n \end{cases}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue bornée donc grâce à la proposition u_{f_n} est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. On considère à présent un compact $K \subset \mathbb{R}^d$, arbitrairement choisi, alors pour tout $(t,x) \in [0,T] \times K$ on a

$$\begin{aligned}
|u_f(t,x) - u_{f_n}(t,x)| &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}(e^{-r\tau}|f(X_\tau^x) - f_n(X_\tau^x)|) \\
&\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}(e^{-r\tau}|f(X_\tau^x)|1_{\{|f(X_\tau^x)|>n\}}) \\
&\leq \mathbb{E}(\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} |f(X_\tau^x)|1_{\{|f(X_\tau^x)|>n\}}) \\
&\leq \mathbb{E}(\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \Phi(|x + X_\tau^x|)1_{\{\Phi(|x+X_\tau^x|)>n\}}) \\
&\leq C \sup_{x \in K}(\Phi(|x|))\mathbb{E}(\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \Phi(|X_\tau|)1_{\{C \sup_{x\in K} \Phi(|x|) \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \Phi(|X_\tau|)>n\}}).
\end{aligned}$$

Donc par convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}(\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \Phi(|X_\tau|)1_{\{C \sup_{x\in K} \Phi(|x|)\Phi(|X_\tau|)>n\}}) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Ce qui nous assure la convergence uniforme des u_{f_n} vers u_f sur chaque compact $[0,T] \times K$ et par suite, la continuité de u_f.

□

Proposition 1.3.4 *Soient f une fonction continue de $\mathcal{D}^\nu$, alors u_f est l'unique solution continue dans $\mathcal{D}^\nu$ de l'inéquation variationnelle suivante (au sens des distributions)*

$$(E)\begin{cases}
1) & v(T,.) = f \text{ sur } \mathbb{R}^d. \\
2) & v \geq f. \\
3) & \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{A}_X v - rv \leq 0 \qquad \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^d \\
4) & \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{A}_X v - rv = 0 \quad \text{sur } \{(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^d | v(t,x) > f(x)\}
\end{cases}$$

l'inéquation variationnelle (E) est équivalente à

$$(E)\begin{cases}
\max\{\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{A}_X v - rv, f - v\} &\leq 0, \quad \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^d. \\
v(T,.) &= f
\end{cases}$$

Preuve :
Tout d'abord, vérifions que u_f est bien dans $\mathcal{D}^\nu$. Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, on

a

$$\begin{aligned} u_f(t,x) &\leq u_f(0,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} f(x+X_\tau)) \\ &\leq \underbrace{C \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}(\Phi(|X_\tau|))}_{=C'<\infty} \Phi(|x|). \end{aligned}$$

Ensuite, nous montrons que u_f est bien une solution,

1. soit $x \in \mathbb{R}^d$

$$u_f(T,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,0}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} f(x+X_\tau) = \mathbb{E}(f(x)) = f(x).$$

2. soit $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} u_f(t,x) &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} f(x+X_\tau)) \\ &\geq f(x). \end{aligned}$$

3. Comme $e^{-rt}u_f(t,x+X_t)$ est l'enveloppe de Snell du processus $e^{-rt}f(x+X_t)$, donc une surmartingale, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la proposition 1.2.2 nous donne
$$\frac{\partial u_f}{\partial t} + \mathcal{A}_X u_f - r u_f \leq 0, \quad \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^d .$$

4. Sur $\{(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^d | u_f(t,x) > f(x)\}$, toujours grâce à la théorie des enveloppes de Snell (voir [11]), $e^{-rt}u_f(t,x+X_t)$ est une martingale et donc encore une fois due à la proposition 1.2.2, on a
$$\frac{\partial u_f}{\partial t} + \mathcal{A}_X u_f - r u_f = 0, \text{ sur } \{(t,x)|u_f(t,x) > f(x)\}.$$

Enfin, nous montrons l'unicité de cette solution. Soit u_f^1 une fonction vérifiant (A) et l'inéquation variationnelle. Alors (3.) et (2.) impliquent que le processus $(e^{-rt}u_f^1(t,x+X_t))_{0\leq t\leq T}$ est une surmartingale majorant le processus $(e^{-rt}f(x+X_t))_{0\leq t\leq T}$, or par définition de l'enveloppe de Snell, $(e^{-rt}u_f(t,x+X_t))_{0\leq t\leq T}$ est la plus petite surmartingale dominant $(e^{-rt}f(x+X_t))_{0\leq t\leq T}$ et donc

$$u_f \leq u_f^1.$$

D'autre part, considérons le temps d'arrêt $\bar{\tau} = \inf\{t \geq 0 | u_f^1(t,x+X_t) = f(x+X_t)\}$. Comme, on a $\frac{\partial u_f^1}{\partial t} + \mathcal{A}_X u_f^1 - r u_f^1 = 0$, sur $\{u_f^1 > f\}$, alors grâce à la proposition 1.2.2,

pour tout temps d'arrêt $\tau^* < \bar{\tau}$, on a que $(e^{-r(t\wedge\tau^*)}u_f^1(t, x + X_{t\wedge\tau^*}))_{0\leq t\leq T}$ est une martingale, il en est de même pour $(e^{-r(t\wedge\bar{\tau})}u_f^1(t, x + X_{t\wedge\bar{\tau}}))_{0\leq t\leq T}$ car u_f^1 est continue et X quasi continu à gauche. On a donc

$$u_f^1(0,x) = \mathbb{E}(e^{-r\bar{\tau}}u_f(\tau, x+X_{\bar{\tau}})) = \mathbb{E}(e^{-r\bar{\tau}}f(x+X_{\bar{\tau}})) \leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}(e^{-r\tau}f(x+X_\tau)) = u_f(0,x),$$

d'où, $u_f^1(0,x) = u_f(0,x)$. En changeant l'origine du temps 0 en t et en remplaçant $\mathcal{T}_{0,T}$ par $\mathcal{T}_{0,T-t}$, on obtient $u_f^1(t,x) = u_f(t,x)$.

□

On désignera dans toute la suite de ce document par ψ le pay-off de l'option américaine considérée au lieu de f et par P son prix.

Chapitre 2

Région d'exercice d'options américaines

Dans ce deuxième chapitre, nous nous intéresserons aux régions d'exercice d'une option américaine $\{(t,x)\ ;\ P(t,x) = \psi(x)\}$ en général. Nous montrerons certaines propriétés déjà établies dans le cadre Black and Scholes ([35]). En particulier, nous donnerons une condition suffisante et nécessaire pour que la région d'exercice soit non vide. Ensuite, nous nous intéresserons plus particulièrement aux régions d'exercice des options américaines sur un panier d'actifs. Nous établirons quelques propriétés topologiques des t-sections de la région d'exercice ainsi qu'une propriété de régularité (continuité) par rapport à t, qui dans le cas unidimensionnel, est équivalente à la continuité du prix critique d'un put ou call américain (voir [21]). Enfin, nous caractériserons la région d'exercice limite en fonction du générateur infinitésimal. Ce résultat peut être considéré comme étant la généralisation de la caractérisation de la limite du prix critique dans le cas unidimensionnel modélisé par une exponentielle de Lévy [21] ou également celle de la région d'exercice limite dans le cadre Black and Scholes [35].

On étudie le comportement des régions d'exercice d'options américaines portant sur d actifs sous-jacents. Notons $r > 0$ le taux d'intérêt de l'actif sans risque, $\delta_i \geq 0$ le taux de dividende du i^{ieme} actif sous-jacent et (S_t^i) son prix à l'instant t. Afin de modéliser ces prix $(S_t^i)_{1\leq i\leq d}$, on considère un processus de Lévy X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, ce dernier étant muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ et du produit scalaire $< .,. >$. On pose alors pour tout $0 \leq i \leq d$,

$$S_t^i = S_{i_0} e^{<X_t, e_i>}.$$

Notons que

$$X_t = \gamma t + \Sigma B_t + \int_0^t \int_{|y|\geq 1} yJ(ds,dy) + \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^t \int_{\epsilon<|y|<1} y\tilde{J}(ds,dy),$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}^d$, Σ une matrice $d\times d$, $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{0\leq i,j\leq d}$, J une mesure de Poisson aléatoire sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d_{\setminus\{0\}}$ d'intensité ν et $\tilde{J}$ sa mesure compensée, on note ${}^t\Sigma\Sigma = A$. La loi du processus est caractérisé par le triplet caractéristique (A,γ,ν).
Sous une probabilité risque neutre, pour tout $0 \leq i \leq d$, le processus $(e^{-(r-\delta_i)t}S^i_t)_{t\geq 0}$ est une martingale. La proposition 1.1.3 nous donne alors

$$\int_{|y|>1} e^{\langle y,e_i\rangle}\nu(dy) = \int_{|y|>1} e^{y_i}\nu(dy) < \infty,$$

et

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma^2_{i,j} + (\gamma_i - r + \delta_i) + \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle y,e_i\rangle} - 1 - \langle y,e_i\rangle 1_{|y|<1}\nu(dy) = 0, \tag{2.1}$$

on rappelle que $\sum_{j=1}^d \sigma^2_{i,j} = A_{i,i}$.
Ces deux propriétés nous permettent de réécrire l'opérateur $\mathcal{A}_X$. En effet, en notant $e^y = (e^{y_1}\dots e^{y_n})$ et $1 = (1\dots 1)$, on peut déduire de l'équation (2.1), que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\langle \gamma, u\rangle &= \sum_{i=1}^d \left((r-\delta_i) - \frac{1}{2}A_{i,i} - \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle y,e_i\rangle} - 1 - \langle y,e_i\rangle 1_{|y|<1}\nu(dy)\right) u_i \\ &= \sum_{i=1}^d \left((r-\delta_i) - \frac{1}{2}A_{i,i}\right) u_i - \int_{\mathbb{R}^d} \langle e^y - 1, u\rangle - \langle y,u\rangle 1_{|y|<1}\nu(dy).\end{aligned} \tag{2.2}$$

En remplaçant $\langle \gamma, \nabla f\rangle$ par son expression (2.2) dans la formule du générateur infinitésimal, on obtient pour toute fonction deux fois continument $f \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{D}^\nu$ telle que $\|\nabla f\|, \|D^2 f\| \in \mathcal{D}^\nu$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_X f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \left((r-\delta_i) - \frac{1}{2}A_{i,i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} \langle e^y - 1, \nabla f\rangle - \langle y, \nabla f\rangle 1_{|y|<1}\nu(dy) + \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) - f(x) - \langle y, \nabla f\rangle 1_{|y|<1}\nu(dy) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \left(r - \delta_i - \frac{1}{2}A_{i,i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) - f(x) - \langle e^y - 1, \nabla f\rangle \nu(dy).\end{aligned}$$

Nous noterons dans toute la suite, $\mathcal{A}^r$ l'opérateur ainsi défini :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^r f(x) &= \mathcal{A}_X f(x) - r f(x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d}\left(r - \delta_i - \frac{1}{2}A_{i,i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) - f(x) - \langle e^y - 1, \nabla f\rangle\, \nu(dy) - r f(x).\end{aligned}$$

Hypothèses

On note H l'image de $\mathbb{R}^d$ par Σ, $H = \mathcal{I}m(\Sigma)$, et L l'ensemble suivant

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^d;\ \int_{|y|\leq 1} |\langle x, y\rangle|\, \nu(dy) < \infty \right\}.$$

L'ensemble $L^\perp$ est l'orthogonal de L.

On considère dans toute la suite les trois hypothèses suivantes

H1 : le pay-off ψ de l'option américaine est une fonction continue de $\mathcal{D}^\nu$.

H2 : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$, on a $\mathbb{P}(\psi(x + X_t) > 0) > 0$

H3 : $H + L^\perp = \mathbb{R}^d$.

Les hypothèses H1 et H2 seront toujours supposé satisfaites.
L'hypothèse H3 sera compte à elle motionnée à chaque fois qu'on aura besoin. On rappelle que le domaine générateur infinitésimal de X peut être étendue au sens des distributions à l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}^\nu$ aux sens des distributions et que le prix P de l'option américaine associée au pay-off ψ est continue et caractérisé comme l'unique solution au sens des distributions d'une inéquation variationnelle (voir *chapitre 1*). L'hypothèse H3 nous permet d'affirmer que le support de la loi du processus X contient toutes les fonctions continues. On trouve une caractérisation plus précise du support dans [34].

Proposition 2.0.5 *Soient X un processus de Lévy vérifiant $H + L^\perp = \mathbb{R}^d$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $t > 0$ et tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t} |X_s - f(s)| < \epsilon) > 0.$$

2.1 Propriétés générales des régions d'exercice

Définition 2.1.1 *Soit* $\mathcal{E} := \left\{(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^d; P(t,x) = \psi(x)\right\}$. *On appelle* $\mathcal{E}$ *la région d'exercice d'une option américaine de pay-off* ψ.
On définit aussi les t-sections par $\mathcal{E}_t = \left\{x \in \mathbb{R}^d; P(t,x) = \psi(x)\right\}$ *pour chaque* $t \in [0,T[$ *fixé. On a clairement* $\mathcal{E} = \cup_{t<T}(\{t\} \times \mathcal{E}_t)$.

Les premières propriétés des régions d'exercice découlent directement de la définition et des propriétés classiques de l'option américaine.

Proposition 2.1.1 *Supposons que* ψ *est une fonction positive non nulle et continue*

i) *L'ensemble* $\mathcal{E}$ *est un fermé de* $[0,T[\times\mathbb{R}^d$.

ii) *la famille* $(\mathcal{E}_t)_{t<T}$ *est croissante.*

iii) *pour tout* $t \in [0,T[$, $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{O} = \left\{x \in \mathbb{R}^d; \psi(x) > 0\right\}$.

Preuve :
i) Découle de la continuité de P et ψ.
ii) Soient $s < t \leq T$ et $x \in \mathcal{E}_s$, alors la décroissance de P en t donne $P(t,x) \leq P(s,x) = \psi(x)$, donc $P(t,x) = \psi(x)$ et $x \in \mathcal{E}_t$.
iii) On a pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^d$, $P(t,x) \geq \mathbb{E}\left(e^{-r(T-t)}\psi\left(X_{T-t}^{0,x}\right)\right)$. Or, vu que pour tout $s > 0$, le support de X_s est $\mathbb{R}^d$, X_s charge en particulier $\mathcal{O}$, donc

$$P(t,x) \geq \mathbb{E}\left(e^{-r(T-t)}\psi\left(X_{T-t}^{0,x}\right)1_{\mathcal{O}}\left(X_{T-t}^{0,x}\right)\right) > 0.$$

Si maintenant, $x \in \mathcal{E}_t$, on a $P(t,x) = \psi(x) > 0$ et donc $x \in \mathcal{O}$.

□

Grâce à l'inéquation variationnelle satisfaite par P, on obtient une caractérisation des régions d'exercice à l'aide de la mesure $\mathcal{A}^r P$. En effet, $\mathcal{A}^r P \geq 0$ sur $\mathcal{E}^c$ et $\mathcal{A}^r P \leq 0$ sur $\mathcal{E}$. Étant donné, qu'on a plus de visibilité avec $\mathcal{A}^r\psi$ que $\mathcal{A}^r P$, on essayera, à travers les propositions suivantes, de relier les $\mathcal{E}_t$ à $\mathcal{A}^r\psi$.
Pour tout ensemble A, on notera $\mathring{A}$ son intérieur.

Proposition 2.1.2

i) *S'il existe* $t \in [0,T[$ *tel que* $\mathring{\mathcal{E}}_t \neq \emptyset$, *alors* $\mathcal{A}^r\psi \leq 0$ *sur l'ouvert* $\bigcup_{s<T}\mathring{\mathcal{E}}_s$, *(sens des distributions).*

ii) *Sur* $\left(\overline{\bigcup_{s<T}\mathcal{E}_s}\right)^c$, *on a* $\mathcal{A}^r\psi \geq 0$ *(sens des distributions).*

Preuve :
i) Supposons qu'il existe $t \in [0,T[$ tel que $\mathring{\mathcal{E}}_t \neq \emptyset$. D'après l'inéquation variationnelle,

on a $\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{A}^r P \leq 0$, en particulier sur $]t,T[\times \mathring{\mathcal{E}}_t$, or pour tout $(s,x) \in]t,T[\times \mathring{\mathcal{E}}_t$, on a $P(s,x) = \psi(x)$ donc $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ sur $]t,T[\times \mathring{\mathcal{E}}_t$. On obtient donc

$$\mathcal{A}^r P \leq 0 \text{ sur }]t,T[\times \mathring{\mathcal{E}}_t.$$

On en déduit de la continuité de P par rapport à s, que pour tout $s \in]t,T[$, on a $\mathcal{A}^r P(s,.) \leq 0$ sur $\mathring{\mathcal{E}}_t$. Enfin, en faisant tendre s vers T et toujours par continuité de P en s, on obtient que $\mathcal{A}^r P(T,.) = \mathcal{A}^r \psi \leq 0$ sur $\cup_{t<T} \mathring{\mathcal{E}}_t$.
ii) Notons $\mathcal{E}_T = \overline{\bigcup_{s<T} \mathring{\mathcal{E}}_s}$ et $\Lambda = \mathcal{E}_T^c$. Alors, pour tout $(t,x) \in]0,T[\times \Lambda$, on a

$$P(t,x) > \psi(x),$$

donc sur $]0,T[\times \Lambda$, on a $\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{A}^r P = 0$. Or vu la décroissance de P en t, on obtient $\mathcal{A}^r P \geq 0$. Considérons, maintenant, φ et ϕ deux fonctions tests positives définies sur $]0,T[$ et sur Λ, on a alors

$$< \mathcal{A}^r P, \varphi \otimes \phi >= \int_{]0,T[} \int_\Lambda \varphi(t) P(t,x) \mathcal{A}^{r*} \phi(x) dx dt \geq 0$$

$$= \int_{]0,T[} \varphi(t) \int_\Lambda P(t,x) \mathcal{A}^{r*} \phi(x) dx dt.$$

Comme P est continue en t, ceci revient à dire que pour tout t

$$\int_\Lambda P(t,x) \mathcal{A}^{r*} \phi(x) dx \geq 0.$$

En faisant tendre $t \to T$, par continuité de P et convergence dominée, on obtient

$$\lim_{t\to T} < \mathcal{A}^r P(t,.), \phi >= \lim_{t\to T} \int_\Lambda P(t,x) \mathcal{A}^{r*} \phi(x) dx$$

$$= \int_\Lambda \lim_{t\to T} P(t,x) \mathcal{A}^{r*} \phi(x) dx = \int_\Lambda P(T,x) \mathcal{A}^{r*} \phi(x) dx$$

$$= \int_\Lambda \psi(x) \mathcal{A}^{r*} \phi(x) dx =< \mathcal{A}^r \psi, \phi > \geq 0$$

donc $\mathcal{A}^r \psi$ est une mesure positive sur Λ.

□

Théorème 2.1.1 *La région d'exercice d'une option américaine est vide si et seulement si $\mathcal{A}^r \psi$ est une mesure positive non nulle.*

Preuve du théorème 2.1.1:

1)⇒) Supposons que $\mathcal{E} = \emptyset$, ce qui est équivalent à $\left(\overline{\bigcup_{s<T} \mathcal{E}_s}\right) = \emptyset$. Or d'après la proposition (2.1.2,ii), $\mathcal{A}^r\psi \geq 0$ sur $\left(\overline{\bigcup_{s<T} \mathcal{E}_s}\right)^c = \mathbb{R}^d$.
Si $\mathcal{A}^r\psi = 0$ sur $\mathbb{R}^d$, alors d'après la proposition (1.2.2), pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ le processus $e^{-rt}\psi(x + X_t)$ est une martingale. Donc, $P(t, x) = \psi(x)$, ce qui est contradictoire avec $\mathcal{E} = \emptyset$.

2)⇐)Supposons que $\mathcal{A}^r\psi$ est une mesure positive non nulle sur $\mathbb{R}^d$.
D'après la corollaire 1.2.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $e-rt\psi(x+X_t)$ est une sous martingale. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout τ temps d'arrêt, on a

$$\psi(x) \leq \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\psi(x + X_\tau)\right).$$

Supposons, en plus qu'il existe au moins $(t, x) \in \mathcal{E}$. Alors, pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}$, on a

$$P(t, x) = \psi(x) \geq \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\psi(x + X_\tau)\right).$$

On en déduit que le processus $\left(e^{-r(u\wedge T-t)}\psi(X^x_{u\wedge T-t})\right)_{u\geq 0}$ est une martingale. Or, $e^{-ru}P(t + u, x + X_u)$ est son enveloppe de Snell, donc la plus petite surmartingale le majorant, d'ou pour tout $u \in]0, T - t[$, on a

$$e^{-ru}P(t + u, x + X_u) = e^{-ru}\psi(x + X_u) \quad \text{p.s.}$$

La quasi-continuité de X ainsi que la continuité de $P(t+u, .)$ et ψ nous assurent que pour tout $(u, y) \in [0, T - t] \times supp(X_u) + x$, on a

$$P(t + u, y) = \psi(y).$$

Or par hypothèse, on a, pour tout u, $supp(X_u) = \mathbb{R}^d$, donc $\mathcal{E}_u = \mathbb{R}^d$. La proposition (2.1.2,i) nous assure alors que $\mathcal{A}^r\psi \leq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ et donc que $\mathcal{A}^r\psi = 0$ sur $\mathbb{R}^d$. Ce qui est contradictoire.

□

Nous énonçons à présent, une version plus locale de la proposition 2.1.2. Néanmoins, nous aurons besoin dans ce résultat de l'hypothèse H3, qui nous assure le support de la loi du processus X contient l'ensemble des fonctions continues.

Proposition 2.1.3
Supposons que l'hypothèse H3 soit vérifiée. Si on a

i) *$\mathcal{A}^r\psi$ est une mesure positive sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{R}^d$.*

ii) *La fonction ψ est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $V \subset U$.*

iii) *Pour tout $x \in V$, $\mathcal{A}^r\psi(x) > 0$.*

Alors, pour tout $(t,x) \in (0,T) \times U$, on a

$$P(t,x) > \psi(x).$$

Preuve :
Soient $x \in U$ et ρ_j une suite régularisante et notons $\rho_j * \psi = \psi_j$. Considérons un ouvert connexe U_1 tel que $x \in U_1$ et $V \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U$. On définit ensuite le temps d'arrêt $\tau_1 = inf\{t \geq 0; X_t^x \notin U\}$, alors pour j assez grand, $\mathcal{A}^r\psi_j \geq 0$ sur U_1. En effet, on a pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U_1) < \mathcal{A}^r\psi_j, \phi > = < \rho_j * \mathcal{A}^r\psi, \phi > = < \mathcal{A}^r\psi, \check{\rho}_j * \phi >$, avec $\check{\rho}(x) = \rho(-x)$. Or pour j assez grand,

$$supp(\check{\rho}_j * \phi) \subset supp\check{\rho}_j * supp\phi \subset supp\check{\rho}_j * U_1 \subset U.$$

Par la formule d'Itô, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{-r(\tau_1 \wedge T - t)}\psi_j\left(X^x_{\tau_1 \wedge T - t}\right)\right) = \psi_j(x) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_1 \wedge T - t} e^{-rs}\mathcal{A}^r\psi_j\left(X_s^{0,x}\right)ds\right)$$

Comme $s < \tau_1$ et que $\mathcal{A}^r\psi_j \geq 0$ sur U_1, on a

$$\mathbb{E}\left(e^{-r(\tau_1 \wedge T - t)}\psi_j\left(X_t^{0,x}\right)\right) \geq \psi_j(x) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_1 \wedge T - t} e^{-rs}\mathcal{A}^r\psi_j\left(X_s^{0,x}\right)1_{\left(X_s^{0,x} \in V\right)}ds\right)$$

donc par convergence uniforme de $\psi_j \to \psi$ on obtient,

$$\mathbb{E}\left(e^{-r(\tau_1 \wedge T - t)}\psi\left(X_t^{0,x}\right)\right) \geq \psi(x) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_1 \wedge T - t} e^{-rs}\mathcal{A}^r\psi\left(X_s^{0,x}\right)1_{\left(X_s^{0,x} \in V\right)}ds\right)$$

Montrons que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_1 \wedge T - t} e^{-rs}\psi\left(X_s^{0,x}\right)1_{\left(X_s^{0,x} \in V\right)}ds\right) > 0.$$

Or, puisque X est càdlàg

$$\mathbb{P}\left(\int_0^{\tau_1 \wedge T - t} 1_{\{X_s \in V\}}ds > 0\right) = \mathbb{P}(\tau_V < T - t \wedge \tau_1),$$

avec $\tau_V = \inf\{t \geq 0,\ X_t \in V\}$. Comme U est un ouvert connexe et que $V \cup \{x_0\} \subset U$, il existe alors, une fonction continue de $[0,\theta]$ dans U telle que $f(0) = x_0$ et $f(\frac{\theta}{2}) \in V$. De plus, comme $[0,\theta]$ est un compact, on peut supposer que pour tout $s \in [0,\theta]$, la boule ouverte $B(f(s),\epsilon) \subset U$. On note $\tau^\epsilon = \inf\{s \geq 0;\ x_0 + X_s \notin B(f(s),\epsilon)\}$, on a donc, l'ensemble

$$\{\tau_\epsilon \leq \theta\} \subset \{\tau_V < \tau_U \wedge \theta\}.$$

On conclut finalement, grâce à la proposition 2.0.5, qui nous assure que

$$\mathbb{P}(\tau_\epsilon \leq \theta) > 0.$$

□

2.2 Région d'exercice d'options Basket américaines

On se propose dans ce qui suit d'étudier une classe particulière d'options qu'on définit par $\mathcal{B} = \left\{\psi : \exists\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \in \mathbb{R}^{*d};\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \psi(x) = \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i e^{x_i} - K\right)_+\right\}$. On supposera dans cette section que la mesure ν satisfait

$\mathcal{H}_1$:

$$\int_{|y|\geq 1} e^{|y|}\nu(dy) < \infty.$$

Sous cette hypothèse, on a bien

$$\psi \in \mathcal{D}^\nu.$$

On adoptera les notations suivantes

- pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\ln x = (\ln x_1, \ln x_2, ..., \ln x_d)$
- pour toute fonction ϕ, pour tout $x \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^d$, $\tilde{\phi}(x) = \phi(\ln(x))$
- la région d'exercice, $\tilde{\mathcal{E}} = \left\{(t,x) \in]0,T[\times]0,+\infty[^d; \tilde{P}(t,x) = \tilde{\psi}(x)\right\}$ et $\tilde{\mathcal{E}}_t$ ses t-sections
- l'ensemble $\tilde{\mathcal{O}} = \left\{x \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^d; \tilde{\psi}(x) > 0\right\}$
- l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}^r$, tel que $\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x) = \mathcal{A}^r\psi(\ln x)$
- $I = \{i \in \{1\ldots d\}; \alpha_i > 0\}$

On a alors, sur $\left\{\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i e^{x_i} - K\right) > 0\right\}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(e^x) &= \mathcal{A}^r\psi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d A_{i,i}\alpha_i e^{x_i} + \sum_{i=1}^d \left(r - \delta_i - \frac{1}{2}A_{i,i}\right)\alpha_i e^{x_i} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i e^{x_i+y_i} - K\right)_+ - \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i e^{x_i} - K\right) - \sum_{i=1}^d \left(e^{y_i} - 1\right)\alpha_i e^{x_i}\nu(dy) \\
&\quad - r\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i e^{x_i} - K\right) \\
&= rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i\delta_i e^{x_i} + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i e^{x_i+y_i} - K\right)_+ - \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i e^{x_i+y_i} - K\right)\nu(dy),
\end{aligned}$$

donc

$$\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x) = rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i\delta_i x_i + \int_{\mathbb{R}^d} \left(K - \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i e^{y_i}\right)_+ \nu(dy).$$

2.2.1 Propriétés et régularité des sections temporelles

Nous donnons ici une condition suffisante et nécessaire pour avoir une région d'exercice non vide.

Théorème 2.2.1 *La région d'exercice $\mathcal{E}$ est non vide si et seulement s'il existe $i_0 \in \{1, ..., d\}$ tel que $\alpha_{i_0} > 0$ et $\delta_{i_0} > 0$.*

Preuve :
Soit $x \in \tilde{\mathcal{O}} = \{z \in (\mathbb{R}_+)^d \ ; \ \tilde{\psi}(z) > 0\}$, on a alors

$$\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x) = rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i\delta_i x_i + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(K - \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i e^{y_i}\right)_+ \nu(dy)$$

Supposons qu'il existe i_0 tel que $\alpha_{i_0} > 0$ et $\delta_{i_0} > 0$ et définissons la suite

$$(\tilde{x}_i^n)_{1\le i\le d} = \left((\tilde{x}_1)\dots(\tilde{x}_{i_0-1}), (n\tilde{x}_{i_0})_{n\ge 1}, (\tilde{x}_{i_0+1}), \dots (\tilde{x}_d)\right).$$

Comme $\tilde{\psi}$, est croissante par rapport à la i_0^{ieme} composante, on a $\tilde{x}_n \in \tilde{\mathcal{O}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f_n(y) := \left(K - n\alpha_{i_0}\tilde{x}_{i_0}e^{y_{i_0}} - \sum_{i\neq i_0}\alpha_i\tilde{x}_i e^{y_i}\right)_+$ est une suite décroissante de

fonctions positives qui converge simplement vers 0. On obtient donc par convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(K - \alpha_{i_0} \tilde{x}^n_{i_0} e^{y_{i_0}} - \sum_{i \neq i_0} \alpha_i \tilde{x}_i e^{y_i} \right)_+ \nu(dy) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

On obtient donc

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}(\tilde{x}^n) = \lim_{n\to\infty} rK - \sum_{i\neq i_0}^{d} \alpha_i \delta_i \tilde{x}_i - \alpha_{i_0} \delta_{i_0} \tilde{x}^n_{i_0} \longrightarrow_{n\to\infty} -\infty.$$

La continuité $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}$ sur $\tilde{\mathcal{O}}$ et le théorème 2.1.1 nous permettent d'affirmer que la région d'exercice $\mathcal{E}$ est non vide.

Supposons que pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $\alpha_i \delta_i \leq 0$. Alors, d'une part, on a $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi} \geq 0$ sur $\tilde{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{O}}$. D'autre part, d'après la proposition 2.1.2 on a $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi} \geq 0$ sur $\bar{\mathcal{E}}^c$. Donc, toujours grâce au théorème 2.1.1, la région d'exercice $\mathcal{E}$ est vide.

□

On supposera dans tout ce qui suit qu'il existe un i_0 tel que $\alpha_{i_0} > 0$ et $\delta_{i_0} > 0$.

Proposition 2.2.1 *Pour tout $t \in [0, T[$ on a :*

1. *$\tilde{\mathcal{E}}_t$ est un convexe fermé de $]0, +\infty[^d$.*
2. *$\tilde{\mathcal{E}}_t$ est d'intérieur non vide*

Preuve :

1. Soit $x, y \in \tilde{\mathcal{E}}_t$, on a, par convexité de $\tilde{\psi}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(t, (1-\lambda)x + \lambda y) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau} \tilde{\psi}\left((\lambda y + (1-\lambda)\, x)\, e^{X_\tau} \right) \right] \\
&\leq \lambda \sup_{\mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau} \tilde{\psi}\left(y e^{X_\tau} \right) \right) + (1-\lambda) \sup_{\mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau} \psi\left(x e^{X_\tau} \right) \right) \\
&\leq \lambda \tilde{P}(t, y) + (1-\lambda) \tilde{P}(t, x).
\end{aligned}$$

   Or $x, y \in \tilde{\mathcal{E}}_t \subset \tilde{\mathcal{O}}$, et $\tilde{\psi}$ est linéaire sur $\tilde{\mathcal{O}}$, d'où

$$\tilde{P}(t, (1-\lambda)x + \lambda y) \leq \lambda \tilde{\psi}(y) + (1-\lambda)\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}\left((1-\lambda)\, x + \lambda y \right).$$

   Donc

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \tilde{\mathcal{E}}_t.$$

2. Montrons que pour tout $\eta > 0$ on a $\tilde{\mathcal{E}}_\eta \neq \emptyset$. En effet, si ceci est vrai, indépendamment du choix de la maturité T, alors on aura $\tilde{\mathcal{E}}_\eta \neq \emptyset$ pour une option de maturité $T + \eta$, et donc $\tilde{\mathcal{E}}_0 \neq \emptyset$ pour la même option de maturité T.
Supposons que $\tilde{\mathcal{E}}_\eta = \emptyset$ pour un certain $\eta \in]0, T[$, alors pour le temps d'arrêt

$$\tau^* := \{t \geq 0 \ ; \ \tilde{P}(t, S_t^x) = \tilde{\psi}(S_t^x)\},$$

on a $\tau^* \geq \eta \ \ p.s.$ et τ^* est un temps d'arrêt optimal pour $\tilde{P}(0, x)$,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(0,x) = \quad & \mathbb{E}\left(e^{-r\tau^*}\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i S_{\tau^*}^{i,x_i} - K\right)_+\right) \\
\leq \quad & \mathbb{E}\left(e^{-r\tau^*}\left(\sum_{i\in I}^d \alpha_i S_{\tau^*}^{i,x_i}\right)\right) \\
\leq \quad & \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I}^d e^{-\delta_i\tau^*} e^{-(r-\delta_i)\tau^*} \alpha_i S_{\tau^*}^{i,x_i}\right) \\
\leq \quad & \sum_{\alpha_i>0}^d \alpha_i x_i e^{-\delta_i \eta}.
\end{aligned}$$

Il existe un $i_0 \in \{1, ..., d\}$ tel que $\alpha_{i_0} > 0$ et $\delta_{i_0} > 0$ (par hypothèse). Donc en considérant $\tilde{x}$ tel que $\tilde{x}_i = x_i$ pour $i \neq i_0$ et $\tilde{x}_{i_0} \geq x_{i_0}$, pour $\tilde{x}_{i_0}$ assez grand, on a $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{O}}$ et

$$\tilde{P}(0, \tilde{x}) \leq \sum_{\alpha_i>0}^d \alpha_i \tilde{x}_i e^{-\delta_i \eta} < \sum_{i=1}^d \alpha_i \tilde{x}_i - K.$$

En effet, puisque $(e^{-\delta_{i_0}\eta} - 1) < 0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha_i>0}^d \alpha_i \tilde{x}_i e^{-\delta_i\eta} - \sum_{i=1}^d \alpha_i \tilde{x}_i - K \\
&= \alpha_{i_0}\tilde{x}_{i_0}(e^{-\delta_{i_0}\eta} - 1) + \sum_{\alpha_i>0, i\neq i_0}^d \alpha_i \tilde{x}_i (e^{-\delta_i\eta} - 1) - K \\
&\longrightarrow_{\tilde{x}_{i_0}\to+\infty} -\infty
\end{aligned}$$

et donc $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{E}}_0$, ce qui est contradictoire.
Montrons à présent que $\tilde{\mathcal{E}}_0$ est d'intérieur non vide. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq d}$ tel que, $\lambda_i > 1$

pour $i \in I$ et $0 < \lambda_i < 1$ pour $i \notin I$. Alors, pour tout temps d'arrêt τ, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\alpha_i S_\tau^{i,x_i}-K\right)_+\right]\\
&= \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\left(\sum_{i=1}^{d}(\lambda_i-1)\,\alpha_i S_\tau^{i,x_i}+\sum_{i=1}^{d}\alpha_i S_\tau^{i,x_i}-K\right)_+\right)\\
&\leq \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\sum_{i=1}^{d}(\lambda_i-1)\,\alpha_i S_\tau^{i,x_i}\right)+\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\left(\sum_{i=1}^{d}\alpha_i S_\tau^{i,x_i}-K\right)_+\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{d}(\lambda_i-1)\,\alpha_i\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}S_\tau^{i,x_i}\right)+\tilde{\mathbb{P}}\,(t,x)\,.
\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\tilde{\mathcal{E}}_0$ est non vide, d'où il existe au moins $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{E}}_0$, on obtient donc que pour tout temps d'arrêt τ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\alpha_i S_\tau^{i,\tilde{x}_i}-K\right)_+\right] &\leq \sum_{i=1}^{d}(\lambda_i-1)\,\alpha_i\tilde{x}^i+\tilde{\psi}\,(\tilde{x})\\
&= \left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\alpha_i\tilde{x}_i-K\right).
\end{aligned}$$

Donc l'ouvert $\prod_{i=1}^{d} A_i$, où les $A_i =]\tilde{x}_i, \infty[$ si $i \in I$ et $A_i =]0, \tilde{x}_i[$ sinon, est bien un ouvert contenu dans $\tilde{\mathcal{E}}_t$.

□

Dans le cas du put américain unidimensionnel dans le modèle exponentiel de Lévy, la région d'exercice $\mathcal{E} = \{(t,x)|\ x \leq b(t)\}$ où $b(t)$ est une fonction continue en t et appelée prix critique (voir [27]). On étend, dans la proposition suivante, cette propriété au cas de notre étude.

Proposition 2.2.2 *Continuité des t-sections*

1. $\tilde{\mathcal{E}}_t = \bigcap_{u>t}\tilde{\mathcal{E}}_u$ *pour tout* t.
2. $\tilde{\mathcal{E}}_t = \overline{\bigcup_{s<t}\tilde{\mathcal{E}}_s}$ *pour tout* t.

Preuve :

1. Soit $x \in \bigcap_{u>t} \tilde{\mathcal{E}}_u$, alors pour tout $u > t$, on a $\tilde{P}(u,x) = \tilde{\psi}(x)$. Considérons la suite $(t_n)_n$ telle que $t_n \searrow t$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{P}(t_n,x) = \psi(x)$. Sachant que $\tilde{P}$ est continue t, on fait tendre $n \to \infty$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}(t_n,x) - \psi(x) = \tilde{P}(t,x) - \psi(x)$$

Donc $x \in \tilde{\mathcal{E}}_t$ et $\bigcap_{u>t} \tilde{\mathcal{E}}_u \subset \tilde{\mathcal{E}}_t$. D'après la proposition 2.1.1 (la croissance des $\tilde{\mathcal{E}}_s$), il est clair que $\tilde{\mathcal{E}}_t \subset \bigcap_{u>t} \tilde{\mathcal{E}}_u$.

2. Supposons que $\overline{\bigcup_{s<t} \tilde{\mathcal{E}}_s} \subsetneq \tilde{\mathcal{E}}_t$ et notons $\Lambda_t = \left(\overline{\bigcup_{u>t} \tilde{\mathcal{E}}_s}\right)^c$, on a alors $\Lambda_t \cap \tilde{\mathcal{E}}_t \neq \emptyset$. De plus, d'après la proposition 2.2.1, l'ensemble $\tilde{\mathcal{E}}_t$ est un convexe fermé d'intérieur non vide d'où $\tilde{\mathcal{E}}_t = \left(\overline{\mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t}\right)$ et donc $\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$ est un ouvert non vide. Pour tout $(s,x) \in]0,t[\times \left(\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t\right)$, on a $\tilde{P}(s,x) > \tilde{\psi}(x)$, d'où $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P} \geq 0$ sur l'ouvert $]0,t[\times \left(\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t\right)$. Donc, pour toutes fonctions tests φ et ϕ définies respectivement sur $]0,t[$ et sur $\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$, on a

$$\begin{aligned} < \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}, \varphi\phi > &= \int_{]0,t[} \int_{\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t} \varphi(s) \tilde{P}(s,x) \tilde{\mathcal{A}}^{r^*} \phi(x) dx ds \\ &= \int_{]0,t[} \varphi(s) \int_{\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t} \tilde{P}(s,x) \tilde{\mathcal{A}}^{r^*} \phi(x) dx ds \geq 0. \end{aligned}$$

Comme P est dans $\mathcal{D}^\nu$ et continue en s, ceci revient à dire que pour tout $s < t$,

$$\int_{\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t} \tilde{P}(s,x) \tilde{\mathcal{A}}^{r^*} \phi(x) dx \geq 0.$$

En faisant tendre $s \to t$, toujours par continuité de P et convergence dominée, on a

$$\lim_{s\to t} \int_{\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t} \tilde{P}(s,x) \tilde{\mathcal{A}}^{r^*} \phi(x) dx = \int_{\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t} \tilde{P}(t,x) \tilde{\mathcal{A}}^{r^*} \phi(x) dx$$

donc sur $\left(\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t\right)$, on a , au sens des distributions

$$\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,.) \geq 0 \quad sur \quad \left(\Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t\right). \tag{2.3}$$

D'autre part, sur $\mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$, on a

$$\tilde{P}(t,x) = \tilde{\psi}(x) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i - K,$$

d'où, grâce à l'inéquation variationnelle, on a pour tout $x \in \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$,

$$\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,x) = rK - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \delta_i x_i + \int P(t, xe^y) - (K - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i e^{y_i}) \nu(dy) \leq 0. \quad (2.4)$$

On en déduit, grâce à (2.3), que pour tout $x \in \Lambda_t \cap \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$,

$$\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,x) = rK - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \delta_i x_i + \int P(t, xe^y) - (K - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i e^{y_i}) \nu(dy) = 0. \quad (2.5)$$

Il est clair que $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,x)$ est convexe sur $\mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$, de plus $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,x) = 0$ sur un ouvert non vide de $\mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$, donc, vu (2.4), on a $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,x) = 0$ pour tout $x \in \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$.
Considérons $x_0 \in \mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$, alors, comme on a vu dans la preuve de la proposition 2.2.1, $\prod_{i=1}^{d} A_{x_i^0}$ est un ouvert de $\mathring{\tilde{\mathcal{E}}}_t$, où $A_{x_i^0} =]x_i^0, +\infty[$ si $i \in I$ et $A_{x_i^0} =]0, x_i^0[$ sinon. Considérons, ensuite, une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset \prod_{i=1}^{d} A_{x_i^0}$ telle que

$$\begin{cases} x_i^n \nearrow +\infty & \text{si} \quad i \in I \\ x_i^n \searrow 0 & \text{si} \quad i \notin I. \end{cases}$$

On rappelle que $I = \{i \in \{1,..,d\}; \alpha_i > 0\}$ et par hypothèse il existe $i_0 \in I$ tel que δ_{i_0}, d'où

$$rK - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \delta_i x_i^n \longrightarrow_{n\to\infty} -\infty.$$

En remarquant que pour tout $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,a_i x_i^{n+1}} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,a_i x_i^n} = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\alpha_i (x_i^{n+1} - x_i^n)}_{\geq 0} e^{X_t^i} a_i \geq 0,$$

et d'où la croissance de la suite $\left(\tilde{\psi}(S_t^{ax_n})\right)_{n\geq 1}$, on a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \tilde{P}(t, x_{n+1}e^y) - \tilde{P}(t, x_n e^y) \\
&= \sup_{\tau\in[0,T-t]} E(e^{-r\tau}(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,x_i^{n+1}} e^{y_i} - K)_+) - \sup_{\tau\in[0,T-t]} E(e^{-r\tau}(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,x_i^{n}} e^{y_i} - K)_+) \\
&\leq \sup_{\tau\in[0,T-t]} E(e^{-r\tau}((\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,x_i^{n+1}} e^{y_i} - K)_+ - (\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,x_i^{n}} e^{y_i} - K)_+)),
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que la fonction $(x-K)^+$ soit lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &\leq \tilde{P}(t, x_{n+1}e^y) - \tilde{P}(t, x_n e^y) \\
&\leq \sup_{\tau\in[0,T-t]} E(e^{-r\tau}(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,x_i^{n+1}} e^{y_i} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_t^{i,x_i^{n}} e^{y_i})) \\
&= \sup_{\tau\in[0,T-t]} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i (x_i^{n+1} - x_i^n) e^{-\delta_i\tau} e^{-(r-\delta_i)+X_\tau^i} e^{y_i}\right) \\
&= \sup_{\tau\in[0,T-t]} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (x_i^{n+1} - x_i^n) e^{y_i} \mathbb{E}\left(e^{-\delta_i\tau} e^{-(r-\delta_i)+X_\tau^i}\right).
\end{aligned}$$

On rappelle que pour tout $i \in \{1,..,d\}$, le processus $\left(e^{-(r-\delta_i)+X_\tau^i}\right)$ est une martingale et $\delta_i \geq 0$, d'où

$$\begin{aligned}
0 &\leq \tilde{P}(t, x_{n+1}e^y) - \tilde{P}(t, x_n e^y) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i^{n+1} e^{y_i} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i^n e^{y_i} \\
&= (\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i^{n+1} e^{y_i} - K) - (\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i^n e^{y_i} - K)
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$0 \leq \tilde{P}(t, x_{n+1}e^y) - (\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i^{n+1} e^{y_i} - K) \leq \tilde{P}(t, x_n e^y) - (\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i^n e^{y_i} - K)$$

On obtient donc

$$\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,x_n) \leq \underbrace{rK - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \delta_i x_i^n}_{\longrightarrow -\infty} + \int_{\mathbb{R}^d} (\tilde{P}(t, x_0 e^y) - (\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i^0 e^{y_i} - K))\nu(dy) \longrightarrow_{n\to\infty} -\infty,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{P}(t,x) = 0$ sur $\tilde{\mathcal{E}}_t$.

□

On étudie le comportement des régions d'exercice d'options américaines portant sur d actifs sous-jacents.

2.2.2 Région d'exercice limite

Dans cette section, on caractérise la région d'exercice limite d'une option de la classe $\mathcal{B}$. On retrouve ainsi le résultat de S.Villeneuve [35] dans le cadre d'un modèle de Black Scholes.

Théorème 2.2.2 *Supposons l'hypothèse H3 vérifiée et qu'il existe un entier i_0 tel que $\delta_{i_0} > 0$ et $\alpha_{i_0} > 0$ (la région d'exercice non vide). Alors, la région d'exercice limite est caractérisée par*

$$\bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t = \left\{ x \in (\mathbb{R}_+^*)^d \quad | \quad \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i - K > 0 \quad et \quad \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}(x) < 0 \right\}$$

La nécessité de H3 dans ce résultat vient du fait qu'on a besoin de la proposition 2.1.3 dans sa démonstration.

Proposition 2.2.3 *Pour tout*

$$x \in \left\{ z \in (\mathbb{R}_+^*)^d \quad | \quad \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i - K > 0 \quad et \quad \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}(z) = 0 \right\},$$

on a

$$\tilde{P}(t,x) > \tilde{\psi}(x).$$

Preuve du théorème 2.2.2:

Du fait que $\tilde{P}(t,x) > 0$, il est clair que $\bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t \subset \tilde{\mathcal{O}}$. Or, sur l'ouvert $\tilde{\mathcal{O}}$, on a

$$\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}(x) = rK - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \delta_i x_i + \int \left(K - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i e^{y_i} \right)^+ \nu(dy).$$

Grâce à la proposition 2.1.3 et la régularité de $\tilde{\psi}(x)$ sur $\tilde{\mathcal{O}}$, on a donc, par continuité de $\tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}$ sur $\tilde{\mathcal{O}}$,

$$\bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t \subset \tilde{\mathcal{O}} \cap \left\{ \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}(x) \leq 0 \right\}$$

De plus la proposition 2.2.3 nous donne

$$\bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t \cap \tilde{\mathcal{O}} \cap \left\{ \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}(x) = 0 \right\} = \emptyset.$$

Donc

$$\bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t \subset \left\{ x \in (\mathbb{R}_+^*)^d \quad | \quad \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i - K > 0 \quad et \quad \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi}(x) < 0 \right\}.$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse.
D'après la proposition 2.1.2, l'ouvert $\tilde{\mathcal{O}} \cap \left\{ \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi} < 0 \right\} \subset \overline{\bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t}$ d'où

$$\tilde{\mathcal{O}} \cap \left\{ \tilde{\mathcal{A}}^r \tilde{\psi} < 0 \right\} \subset \overline{\overset{\circ}{\bigcup_{t<T}} \tilde{\mathcal{E}}_t} \subset \bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t,$$

la dernière inclusion étant dûe à la convexité de $\bigcup_{t<T} \tilde{\mathcal{E}}_t$.

□

Pour la preuve de la proposition 2.2.3, on aura besoin des deux résultats suivants

Lemme 2.2.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite, nulle en 0, non nulle. On suppose que, pour un $T > 0$, $\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq T} |X_s| < \infty$, et que, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(X_t \neq 0) > 0$. On a alors*

$$\forall t \in]0,T], \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds \right) > 0.$$

Preuve :
On a, pour $t \in]0,T]$,

$$tX_t = \int_0^t sdX_s + \int_0^t X_s ds \text{ p.s.}$$

On en déduit que pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[0,t]$,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right) = \mathbb{E}\left(\tau X_\tau\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^{\tau\wedge t} X_s ds &= \mathbb{E}\left(\tau \wedge tX_{\tau\wedge t}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\tau X_\tau 1_{\{\tau\le t\}}\right) + \mathbb{E}\left(tX_t 1_{\{\tau>t\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\tau X_\tau 1_{\{\tau\le t\}}\right) + \mathbb{E}\left(tX_t\right) - \mathbb{E}\left(tX_t 1_{\{\tau\le t\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\tau X_\tau 1_{\{\tau\le t\}}\right) - \mathbb{E}\left(tX_t 1_{\{\tau\le t\}}\right),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la propriété de martingale. On a aussi, par le théorème d'arrêt,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t 1_{\{\tau\le t\}}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t 1_{\{\tau\le t\}} \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge t}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_{\tau\wedge t} 1_{\{\tau\le t\}}\right) = \mathbb{E}\left(X_\tau 1_{\{\tau\le t\}}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}\int_0^{\tau\wedge t} X_s ds = \mathbb{E}\left((\tau - t)X_\tau 1_{\{\tau\le t\}}\right) = \mathbb{E}\left((\tau - t)X_\tau 1_{\{\tau<t\}}\right). \tag{2.6}$$

Pour $\epsilon > 0$, prenons

$$\tau = \tau_{-\epsilon} = \inf\{t \ge 0 \mid X_t \le -\epsilon\}.$$

On a, sur $\{\tau_{-\epsilon} < \infty\}$, $X_{\tau_{-\epsilon}} \le -\epsilon < 0$. Donc, pour obtenir $\mathbb{E}\int_0^{\tau_{-\epsilon}\wedge t} X_s ds > 0$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(\tau_{-\epsilon} < t) > 0$. Et pour montrer le lemme, il suffit d'avoir cela pour au moins un $\epsilon > 0$. Or, si pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(\tau_{-\epsilon} \ge t) = 1$, on a $\mathbb{P}(X_{t/2} > -\epsilon) = 1$, donc $X_{t/2} \ge 0$ p.s., et comme X est une martingale nulle en 0, $X_{t/2} = 0$ p.s., ce qui est contradictoire.

□

Proposition 2.2.4 *Soit $(X_t)_{t\ge0}$ un processus de Lévy réel, à variation infinie, issu de 0, intégrable. On a*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right)}{t^2} = +\infty. \tag{2.7}$$

Remarque:
Si X est intégrable à variation finie, on a $\mathbb{E}|X_t| = O(t)$ pour $t \downarrow 0$. Donc

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right) = O(t^2).$$

Preuve de la Proposition 2.2.4 ::
On remarque d'abord qu'on peut supposer que X est une martingale. Ensuite, si le processus X se décompose sous la forme $X = X^1 + X^2$, où X^1 et X^2 sont des Lévy martingales indépendants, on a, en considérant des temps d'arrêt de la filtration de X^1, $\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right) \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X^1_s ds\right)$. On en déduit que si X a une partie brownienne, $\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right) \geq C \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau B_s ds\right)$, avec $C > 0$, où B est un mouvement brownien standard et, par scaling,

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau B_s ds\right) = t^{3/2} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau B_s ds\right).$$

On en déduit (2.7).

On suppose maintenant que X est sans partie brownienne. On peut supposer que la mesure de Lévy de X est à support dans $[-1, 0[\cup]0, 1]$. Plus précisément, on va considérer deux cas :
1) la mesure de Lévy est à support dans $[-1, 0[$ et $\int_{[-1,0[} y\nu(dy) = -\infty$,
2) la mesure de Lévy est à support dans $]0, 1]$ et $\int_{]0,1]} y\nu(dy) = +\infty$.

Dans le premier cas, on introduit, pour $\epsilon \in]0, 1]$, le processus

$$X^\epsilon_t = \int_{[0,t]\times[-1,-\epsilon]} yJ(ds, dy),$$

où J est la mesure des sauts compensée de X. On a aussi

$$X^\epsilon_t = \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s 1_{\{-1\leq \Delta X_s \leq -\epsilon\}} - c_\epsilon t,$$

avec

$$c_\epsilon = \int_{[-1,-\epsilon]} y\nu(dy).$$

Notons que

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right) \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X^\epsilon_s ds\right)$$

On note T_1^ϵ le premier temps de saut de X^ϵ, et on prend comme temps d'arrêt

$$\tau = \begin{cases} T_1^\epsilon \text{ si } T_1^\epsilon \leq t \text{ et } c_\epsilon T_1 - c_\epsilon/\lambda_\epsilon > 0 \\ t \text{ sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda_\epsilon = \nu([-1,-\epsilon])$. On a alors, en utilisant (2.6) et l'indépendance entre T_1^ϵ et $\Delta X_{T_1^\epsilon}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s^\epsilon ds\right) &= \mathbb{E}\left((t-T_1^\epsilon)\left(c_\epsilon T_1^\epsilon - \Delta X_{T_1^\epsilon}\right) 1_{\{T_1^\epsilon < t\wedge 1/\lambda_\epsilon\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left((t-T_1^\epsilon)\left(c_\epsilon T_1^\epsilon - c_\epsilon/\lambda_\epsilon\right) 1_{\{T_1^\epsilon < t\wedge 1/\lambda_\epsilon\}}\right) \\ &= -c_\epsilon \int_0^{t\wedge 1/\lambda_\epsilon} (t-s)\left(\frac{1}{\lambda_\epsilon} - s\right)\lambda_\epsilon e^{-\lambda_\epsilon s} ds \\ &= -c_\epsilon t^2 \int_0^{1\wedge 1/(\lambda_\epsilon t)} (1-u)\left(\frac{1}{\lambda_\epsilon t} - u\right)\lambda_\epsilon t e^{-\lambda_\epsilon t u} du \\ &= -c_\epsilon t^2 \int_0^{1\wedge 1/(\lambda_\epsilon t)} (1-u)\left(1-\lambda_\epsilon t u\right) e^{-\lambda_\epsilon t u} du \end{aligned}$$

D'où, en fixant ϵ et en faisant tendre t vers 0,

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right)}{t^2} \geq -c_\epsilon \int_0^1 (1-u)du = -c_\epsilon/2.$$

On conclut en utilisant $\lim_{\epsilon\downarrow 0} c_\epsilon = -\infty$.

Dans le deuxième cas, on prend, comme dans la démonstration du Lemme 2.2.1, on applique (2.6), avec

$$\tau = \tau_{-\epsilon} = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \leq -\epsilon\}.$$

Notons que, X n'ayant pas de saut négatif, sur $\{\tau_{-\epsilon} < \infty\}$, $X_{\tau_{-\epsilon}} = -\epsilon$ On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\int_0^{\tau_{-\epsilon}\wedge t} X_s ds &= \epsilon \mathbb{E}\left(t - \tau_{-\epsilon}\right)_+ \\ &\geq \epsilon \frac{t}{2}\mathbb{P}(\tau_{-\epsilon} \leq t/2). \end{aligned}$$

Par ailleurs, le processus de Lévy $-X$ étant une martingale à variation infinie sans sauts positifs et sans partie brownienne, on a $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \tau_{-\epsilon}/\epsilon = 0$ presque sûrement

(voir [33]). Prenons alors $\epsilon = \lambda t/2$, avec $\lambda > 0$ fixé. On a alors $\epsilon\frac{t}{2}\mathbb{P}(\tau_{-\epsilon} \leq t/2) = \lambda\frac{t^2}{4}\mathbb{P}(\tau_{-\epsilon} \leq \epsilon/\lambda)$ et par conséquent

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau X_s ds\right)}{t^2} \geq \lambda/4,$$

et comme λ est arbitraire, on a (2.7).

□

Preuve de la proposition 2.2.3:
Soient l'ouvert $\tilde{\mathcal{O}} = \{x \in (\mathbb{R}_*^+)^d; \tilde{\psi}(x) > 0\}$ et l'ensemble $\mathcal{H} = \{x \in (\mathbb{R}_*^+)^d; \tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x) = 0\}$. Soit $x_0 \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{H}$, alors pour tout $\theta > 0$ et tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_{0,\theta}$, on a

$$\tilde{P}(T-\theta, x_0) \quad \geq \quad \tilde{\psi}(x_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta} e^{-rs}\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x_0e^{X_s})ds\right).$$

Comme $\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}$ est convexe et que $\{\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x) < 0\} \cap \tilde{\mathcal{O}} \neq \emptyset$ (car $\delta_{i_0}\alpha_{i_0} > 0$), le point x_0 n'est pas un minimum. Donc, il existe un vecteur $c = (c_1, ..., c_d) \neq 0$ tel que pour tout $s \geq 0$

$$\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x_0e^{X_s}) \geq \tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x_0) + \langle c, x_0e^{X_s} - x_0\rangle.$$

Or, par hypothèse $\tilde{\mathcal{A}}^r\tilde{\psi}(x_0) = 0$, ce qui nous donne alors

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t, x_0) \quad &\geq \quad \tilde{\psi}(x_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta} e^{-rs}\langle c, x_0e^{X_s} - x_0\rangle ds\right) \\ &\geq \quad \tilde{\psi}(x_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta} \sum_{i=1}^d c_i x_0^i e^{-rs}(e^{X_s^i} - 1)ds\right).\end{aligned}$$

Montrons que $\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta} \sum_{i=1}^d c_i x_0^i e^{-rs}(e^{X_s^i} - 1)ds\right) > 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta} e^{-rs}\langle c, x_0e^{X_s} - x_0\rangle ds \\ &= \int_0^{\tau\wedge\theta} e^{-rs}\langle c, x_0e^{X_s} - x_0\rangle ds - \int_{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta}^{\tau\wedge\theta} e^{-rs}\langle c, x_0e^{X_s} - x_0\rangle ds. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta}^{\tau\wedge\theta} e^{-rs}\langle c, x_0 e^{X_s} - x_0\rangle ds \\
&\leq \; C\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(\int_{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta}^{\tau\wedge\theta}(e^{X_s^i}+1)ds 1_{\{\tau_{\mathcal{O}}\leq\tau\}}\right) \\
&\leq \; C\sum_{i=1}^{d}\left\{\theta\mathbb{P}\{\tau_{\mathcal{O}}\leq\tau\} + \int_0^{\theta}\mathbb{E}\left(e^{X_s^i}1_{\{\tau_{\mathcal{O}}\leq\tau\}}\right)ds\right\}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in \{1,..,d\}$, le processus $(e^{-(r-\delta_i)s}e^{X_s^i})$ est une martingale de moyenne 1. Donc sous la le changement de probabilité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}^i}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_s} = e^{-(r-\delta_i)s}e^{X_s^i}$ (La transformé d'Escher voir [7, 18]), les processus X^i restent des processus de Lévy. On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\int_{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta}^{\tau\wedge\theta} e^{-rs}\langle c, x_0 e^{X_s} - x_0\rangle ds\right| \\
&\leq \; C\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(\int_{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta}^{\tau\wedge\theta}(e^{X_s^i}+1)ds 1_{\{\tau_{\mathcal{O}}\leq\tau\}}\right) \\
&\leq \; C\left\{d\theta\mathbb{P}\{\tau_{\mathcal{O}}\leq\tau\} + \sum_{i=1}^{d}\theta\tilde{\mathbb{P}}^i\{\tau_{\mathcal{O}}\leq\tau\}\right\}.
\end{aligned}$$

Soient Y un processus de Lévy d-dimensionnel, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $x_0 \notin U$ et φ une fonction de $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ telle que $\varphi(x_0) = 0$, pour tout $x \in U$, $\varphi(x) = 1$ et $\|\mathcal{A}_Y\varphi\|_{\infty} < \infty$. Alors,

$$\mathbb{P}(\tau_U \leq \tau) \leq \mathbb{E}(\varphi(x_0 + X_{\tau_U\wedge\tau})) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_U\wedge\tau}\mathcal{A}_Y\varphi(x_0+X_u)du\right) \leq A\theta,$$

où A est une constante positive. D'où

$$\left|\mathbb{E}\int_{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta}^{\tau\wedge\theta} e^{-rs}\langle c, x_0 e^{X_s} - x_0\rangle ds\right| = O(\theta^2).$$

D'autre part,on a

$$\mathbb{E}\left|e^{X_s^i} - 1 - X_s^i\right| = O(\theta).$$

En effet, si on note h_i la fonction définie par

$$h_i(x) = e^{x_i} - 1 - x_i,$$

alors, h_i est une fonction positive deux fois continument dérivable et $h_i, \|\nabla h_i\|, \|D^2 h_i\| \in \mathcal{D}^\nu$, (toutes les trois étant majorées par $Ce^{|x|}$). En appliquant le générateur infinitésimal, on obtient

$$\mathbb{E}(h_i(X_s)) = h_i(X_0) + \mathbb{E}\int_0^s \mathcal{A}_X h_i(X_u)du.$$

Or, $|\mathcal{A}_X^c h_i(x)| \leq C_0(e^{x_i}+1)$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_X h_i(x) &= \int h_i(x+y) - h_i(x) - \langle y.\nabla h_i(x)\rangle 1_{\{|y|\leq 1\}}\nu(dy)\\ &= \int \left(e^{x_i}(e^{y_i} - 1 - y_i 1_{\{|y|\leq 1\}}) - y_i 1_{\{|y|>1\}}\right)\nu(dy).\end{aligned}$$

Donc, $|\mathcal{A}_X h_i(x)| \leq C(e^{x_i}+1)$, et par suite

$$\mathbb{E}(h_i(X_s)) \leq h_i(X_0) + C\int_0^s (\mathbb{E}(e^{X_u^i}) + 1)du = O(s).$$

On obtient, donc au final,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge\theta}\sum_{i=1}^d c_i x_0^i e^{-rs}(e^{X_s^i}-1)ds\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge\theta}\langle\tilde{c}, X_s^i\rangle ds\right) + O(\theta^2),\end{aligned}$$

où $\tilde{c_i} = c_i x_i^0$. Comme $\tilde{c} \neq 0_{\mathbb{R}^d}$, on rappelle qu'une conséquence de l'hypothèse $H + L^\perp = \mathbb{R}^d$ est que pour tout vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^d$, le processus $(\langle a, X_t\rangle)_{t\geq 0}$ est à variation infinie. Donc en appliquant la proposition 2.2.4, on obtient, pour tout t suffisamment proche de T

$$P(t,x) - \psi(x) > 0$$

Ce qui prouve, finalement, grâce à la croissance des $\mathcal{E}_t$ que

$$x_0 \notin \bigcup_{t<T}\mathcal{E}_t.$$

□

Chapitre 3

Comportement du prix critique dans le cadre Jump-diffusion

3.1 Introduction

Denote the critical price of the American put by $b(t)$, it is defined by

$$b(t) = \inf\left\{x > 0; P(t,x) > (K-x)^+\right\},$$

where P is the American put price. The behavior of $b(t)$, near the maturity, has been extensively studied. Its limit when t goes to T, is characterized, in Black Scholes model by $b(T) := \lim_{t\to T} b(t) = \min(K, \frac{r}{\delta}K)$ where $r > 0$ is the interest rate and $\delta \geq 0$ the dividend rate. In 1995, Burdeau et al. and Lamberton gave an equivalent for the convergence rate of $b(t)$, in the Black Scholes model. This study was done in the case where there is no dividend rate, $\delta = 0$ ($b(T) = K$). This convergence rate is given by

$$\frac{K - b(t)}{\sigma K} \sim_{t\to T} \sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|},$$

where the expression $f(t) \sim_{t\to a} g(t)$ (or $f(t) \sim g(t)$ if there is no ambiguity) denotes two functions f and g satisfying $\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$. This result remains true in the case where $\delta > 0$, as long as $r - \delta > 0$.

In 2003, Lamberton and Villeneuve reconsidered the case where $r - \delta \leq 0$ in the Black-Scholes model and established that, for $r - \delta = 0$,

$$\frac{K - b(t)}{\sigma K} \sim_{t\to T} \sqrt{2(T-t)|\ln(T-t)|},$$

and for $r-\delta<0$, there exists $y_0 \in (0,1)$ such that

$$\frac{b(T)-b(t)}{\sigma b(T)} \sim_{t\to T} y_0\sqrt{(T-t)}.$$

Notice that in this latter case $b(T)<K$.

The critical price has been also studied in the jump diffusion model. In fact, (Pham) proved in 1997 in [29] that the result obtained in "1995" remains exactly the same in the Jump diffusion model, in the case where $r-\int(e^y-1)^+\nu(dy)>0$ and $\delta=0$. This remains true if $r-\delta-\int(e^y-1)^+\nu(dy)>0$ (see [27]). Notice that the latter condition is a generalization of the condition $r-\delta>0$ in the Black-Scholes Model.

The purpose of this paper is to study the convergence rate of the critical American price in the jump diffusion model with $r-\delta-\int(e^y-1)^+\nu(dy)\leq 0$. Considering the results of Pham in [29], we expect to obtain the same results as the study performed by Lamberton and Villeneuve in the Black-Scholes model when ($r-\delta\leq 0$), meaning that jumps do not have any influence on the convergence rate. Surprisingly, we obtain the expected result only for the case $r-\delta-\int(e^y-1)^+\nu(dy)=0$. Indeed, we obtain for $r-\delta-\int(e^y-1)^+\nu(dy)=0$,

$$\frac{K-b(t)}{\sigma K} \sim_{t\to T} \sqrt{2(T-t)|\ln(T-t)|},$$

and for $r-\delta-\int(e^y-1)^+\nu(dy)<0$,

$$\frac{b(T)-b(t)}{\sigma b(T)} \sim_{t\to T} y_\alpha\sqrt{(T-t)},$$

where y_α is a real satisfying $y_\alpha \geq y_0$, and depending on $\nu(\frac{K}{b(T)})$ we can have $y_\alpha > y_0$. This point will be discussed in more details in section 3.3.

This study is composed of four sections. In section 1, we recall some useful results on the American Put which will be used throughout this study. In section 2, we give some results on the regularity of the American Put price and the early exercise premium. In section 3, we investigate the case where the limit of the critical price is far from the singularity K. Therefore, we have enough regularity to give an expansion of the American put price near maturity from which the American critical price behavior will be deduced. Section 4 is devoted to the study of the case $d=0$. In this case $b(T)=K$, hence we have no longer enough smoothness to obtain an expansion around the limit point $(T,b(T))$. Then we will study the behavior of the European critical price $b_e(t)$ instead of the American one. Thereafter, we prove that $b(t)$ and $b_e(t)$ have the same behavior.

Model

We denote by $(S_t)_{t\geq 0}$ the stock price process, and we consider

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t+\tilde{Z}_t} = S_0 e^{\tilde{X}_t},$$

where $r > 0$ is the interest rate, $\delta \geq 0$ the dividend rate, $(B_t)_{t\geq 0}$ a Standard Brownian Motion (SBM) and

$$\tilde{Z}_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k - t\int (e^y - 1)\nu(dy) = Z_t - t\int (e^y - 1)\nu(dy),$$

with $(Z_t)_{t\geq 0}$ a Compound Poisson Process and ν its Levy measure. We then have

$$dS_t = S_{t^-}\left(\gamma_0 dt + \sigma dB_t + d\bar{Z}_t\right),$$

with

$$\bar{Z}_t = \Sigma_{0<s\leq t}(e^{\Delta Z_s} - 1)$$

and $\gamma_0 = r - \delta - \int (e^y - 1)\nu(dy)$. Suppose that the following assumptions are satisfied

* $\sigma > 0$
* $\nu(\mathbb{R}) < \infty$
* $\int e^y \nu(dy) < \infty$
* $d^+ = r - \delta - \int_{y>0}(e^y - 1)\nu(dy) \leq 0,$

The two last assumptions imply that $\left(e^{-(r-\delta)t}S_t\right)$ is a martingale, then we are under a risk-neutral probability.
The price of an American put with maturity $T > 0$ and strike $K > 0$, at an instant $t = T - \theta$ with $S_t = x$, is given by

$$P(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau}(K - xe^{\tilde{X}_\tau})_+),$$

where $\mathcal{T}_{0,T-t}$ is the set of stopping times taking values in $[0, T-t]$.
The critical price of this American put, at each $t \in [0,T]$, is given by

$$b(t) = \inf\left\{x > 0; P(t,x) > (K-x)^+\right\}.$$

We denote, from now on, by θ the time to maturity $T - t$. Recall that the price of a European put with maturity T and strike K, in this model, is given at t by

$$P_e(t,x) = \mathbb{E}(e^{-r\theta}(K - S_\theta)_+ | S_0 = x).$$

Let F be the function defined by $F(t,x) = P_e(t,x) - (K-x)$, then F is $\mathcal{C}^1$ on $(0,T)\times(0,K)$ and satisfies $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial P_e}{\partial x}(t,x) + 1 > 0$. We define, for all $t \in (0,T)$, the critical European put price, $b_e(t)$, as the unique solution of

$$F(t,x) = P_e(t,x) - (K-x) = 0$$

It is easy to check that, for all $t \in (0,T)$, $b_e(t)$ is well defined, $b_e(t) \in (0,K)$ and $\lim_{t\to T} b_e(t) = K$. It is also straightforward that $P_e \leq P$, therefore $b(t) \leq b_e(t)$.

3.2 Preliminary results

3.2.1 American option in the exponential Levy model

The American option price under the exponential Levy models is characterized, under some integrability assumption (see chapter 1) as the unique solution of a variational inequality. In the case of the American put, we have (see [27])

Theorem 3.2.1 *The price of the American Put P is characterized as the unique continuous and bounded solution of the following variational inequality.*

1. $P(T,.) = \psi$ *on* $\mathbb{R}^d$.
2. $P \geq \psi$.
3. $\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{A}P - rP \leq 0$ *on* $]0,T[\times\mathbb{R}^d$ *(in the sense of distributions).*
4. $\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{A}P - rP = 0$ *on the open set* $\{(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^d | P(t,x) > \psi(x)\}$ *(in the sense of distributions).*

Where $\mathcal{A}$ is the infinitismal generator of the process S.

The two sets $\{P > \psi\}$ and $\{P = \psi\}$ are called respectively, continuation region and exercise region. The critical price is the free boundary of this variational inequality,

$$\{P(t) > \psi(x)\} = \{(t,x); b(t) < x\} \qquad \text{and} \qquad \{P(t,x) = \psi\} = \{(t,x); b(t) \geq x\}.$$

The limit of (b(t)) near maturity is characterized by the following result (see [21]).

Theorem 3.2.2 *We set $d^+ = r - \delta - \int (e^y - 1)^+ \nu(dy)$ and denote by $b(t)$ the critical price of an American option with maturity T and strike price K. We thus have*

$$\lim_{t\to T} b(t) = b(T) < K$$

if and only if $d^+ < 0$, *and in this case* $b(T)$ *is the unique solution in* $]0, K[$ *of*

$$rK - \delta x - \int (xe^y - K)^+ \nu(dy) = 0.$$

See theorem 2.2.2 for the multidimensional case.

The quantity $(P - P_e)$ is called the early exercise premium and it is characterized for the American Put in the exponential Levy model as follows (see[27])

Theorem 3.2.3 *Under the model hypothesis, the price of the American put* P *can be written as follows*

$$P(t,x) = P_e(t,x) + e(T-t,x),$$

with $P_e(t,x)$ *the price of the European put. If we set* $\theta = T - t$, *then the early exercise prime,* $e(\theta, x)$, *is given by*

$$e(\theta,x) = \mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}\left(rK - \delta S_s^x - \int_{y>0}\left[P(t+s, S_s^x e^y) - (K - S_s^x e^y)\right]\nu(dy)\right) 1_{\{S_s^x < b(t+s)\}} ds\right\}.$$

Notice that for all $x \geq 0$,

$$0 \leq e(\theta,x) \leq rK\theta.$$

3.2.2 Regularity estimate for the value function in the jump diffusion model

In this section, we study the spatial derivatives behavior of P, P_e and $e(\theta, x)$ near $(T, b(T))$. We also give a lower bound for the second spatial derivative near $(T, b(T))$.

Lemma 3.2.1 *Under the model assumption, we have*

1. *For all* $x \in (0, b_e(t) \wedge b(T)]$, *we have*

$$\left|\frac{\partial e}{\partial x}(\theta,x)\right| = \frac{1}{x} o(\sqrt{\theta}),$$

with $o(\sqrt{\theta})$ *independent of* x.

2. For all $x \in (0, b(T) \wedge b_e(t)]$, we have

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) + 1 = (1 + \frac{1}{x})o(\sqrt{\theta}),$$

with $o(\sqrt{\theta})$ independent of x.

Lemma 3.2.2 *According to the hypothesis of the model, we have, for all $b(t) \leq x < b(T) \wedge b_e(t)$ and for all $\theta = T - t$ small enough, the following inequality*

$$\inf_{b(t)<u<x} \frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) \geq \quad \left(\bar{\delta} - \epsilon(\theta)\right)(b(T) - x) - \alpha\mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - \ln(\frac{b(T)}{x})\right)^+ + o(\sqrt{\theta}),$$

with $\epsilon(\theta) \longrightarrow_{\theta\to 0} 0$, $\bar{\delta} = \delta + \int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)}\}} e^y \nu(dy)$ and $\alpha = \frac{\nu\{\ln\left(\frac{K}{b(T)}\right)\}}{\delta}\frac{K}{b(T)}$.

Remarque:
The expression $\inf_{b(t)<u<x} \frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u)$ is justified thanks to the smoothness of P in the continuation region which can be proved thanks to PDE arguments (see for instance [**?**]). Nevertheless, we will only need this lower bound of the second derivative in the distribtion sens ($\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, du)$).

3.3 The case $b(T) < K$ (i.e $d^+ < 0$)

Since $b(T) < K$, we can also call this section "The regular case". We start it by giving an expansion of the American Put price (P) near maturity, which will lead to an auxiliary optimal stopping problem. In a second paragraph we investigate this auxiliary problem and state some of its properties. This auxiliary study and the expansion will provide us with the needed tools to deal with the convergence rate of $b(t)$.

3.3.1 An expansion of the American Put price near maturity

Theorem 3.3.1 *Let a be a negative number ($a < 0$) and $b(T)$ denote the limit of $b(t)$ when t goes to T, $b(T) = \lim_{t\to T} b(t)$. According to the model hypothesis, if $b(T) < K$,*

then,

$$P(T-\theta, b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) = (K - b(T)e^{a\sqrt{\theta}})^+ + C\theta^{\frac{3}{2}}\upsilon_{\alpha,\beta}(\frac{a}{\sigma}) + o(\theta^{\frac{3}{2}}),$$

where $C = \sigma b(T)\bar{\delta}e^{\lambda}$ *with* $\lambda = \nu\{\ln\frac{K}{b(T)}\}$, $\bar{\delta} = \delta + \int_{y>\ln(K/b(T))} e^y\nu(dy)$ *and* $\upsilon_{\alpha,\beta}(y)$ *is defined by*

$$\upsilon_{\alpha,\beta}(y) = \sup_{\tau\in\hat{\mathcal{T}}_{0,1}} \mathbb{E}\left[e^{\lambda(\tau-1)}1_{\{\tau<\hat{T}_1\}}\int_0^\tau (y+B_s) + \alpha\,(y+B_s)^+ds + \frac{\beta}{2}(\tilde{L}_\tau^{-y} - \tilde{L}_{\hat{T}_1\wedge\tau}^{-y})\right],$$

with :

- B *a standard Brownian motion and* $\tilde{L}^x$ *denotes its local time at* x
- $\hat{T}_1$ *the first jump time of a Poisson process* N_t *independent of* B *and of intensity* $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}$
- $\hat{\mathcal{T}}_{0,1}$ *is the set of all* $\sigma(N_t, B_t)_{t\geq 0}$*-stopping times with values in* $[0,1]$ *and*

$$\alpha = \frac{K\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}}{b(T)(\delta + \int_{y>\ln(\frac{K}{b(T)})} e^y\nu(dy))}\ ,\ \beta = \frac{K}{b(T)(\delta + \int_{y>\ln(\frac{K}{b(T)})} e^y\nu(dy))}.$$

Remark 1 *Notice that if* ν *does not charge* $\left\{\ln(\frac{K}{b(T)})\right\}$, *meaning that* $\alpha = 0$ *and* $\hat{T}_1 = \infty a.s.$ *, then,*

$$\upsilon_{\alpha,\beta}(a) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau (a+B_s)\,ds\right).$$

In this case, the American Put price will have the same expansion as in Black&Scholes model, (see [25]). Consequently, we obtain the same behavior as in ([25]).

Before proving this result, we introduce this useful estimation of the expectation of the local time of a Brownian motion.

Lemma 3.3.1 *For all real number* a *and for all* $t > 0$, *we have*

$$0 \leq \mathbb{E}(a - B_t)_+ - a_+ \leq \sqrt{t}\frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}}$$

proof of lemma 3.3.1 :

The first inequality follows from Jensen's inequality. For the other inequality, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(a-B_t)_+ &= \int_{-\infty}^{a/\sqrt{t}}(a-\sqrt{t}y)e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= a\int_{-\infty}^{a/\sqrt{t}}e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}+\sqrt{t}\frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Then, if $a \leq 0$,

$$\mathbb{E}(a-B_t)_+ \leq \sqrt{t}\frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

If $a \geq 0$, we can write

$$\mathbb{E}(a-B_t)_+ - a = -\int_{a/\sqrt{t}}^{+\infty}e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}+\sqrt{t}\frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \sqrt{t}\frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

□

In this model, we have, from Meyer-Itô formula (see [30])

$$(K-S_t)_+ = (K-S_0)_+ + \int_0^t(-1_{\{S_s\leq K\}})S_s(\gamma_0 ds+\sigma dB_s)+\sum_{0<s\leq t}(K-S_s)_+-(K-S_{s^-})_+ + \frac{1}{2}L_t^K, \tag{3.1}$$

where L_t^K is the local time of the process at K until the date t. We give, in the following lemma, an estimation of $\mathbb{E}L_t^K$, for small time t, which will allow us to neglect a part of the contribution of the local time in the expansion of $P(t,x)$, near maturity.

Lemma 3.3.2 *Let a be a negative number, $a<0$. If $b(T)<K$ then we have,*

$$\mathbb{E}\left(L_t^K \mid S_0 = b(T)e^{a\sqrt{t}}\right) = \mathbb{E}\left[L_t^K - L_{t\wedge\hat{T}_1}^K\right] + o(t^{3/2}) \leq w^0 t^{3/2} + o(t^{3/2}),$$

where $\hat{T}_1 = \inf\{s\geq 0\ ;\ \Delta X_t = \ln(\frac{K}{b(T)})\}$ and w^0 a non-negative constante independent of a and $w_0 = 0$ if $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)}\}$.

proofof Lemma 3.3.2 :
Let T_1 be the first jump time of the process Z. We have

$$\begin{aligned}L_t^K = L_{t\wedge T_1}^K + L_t^K - L_{t\wedge T_1}^K &= L_{t\wedge T_1}^K + 1_{\{T_1<t\}}\left(L_t^K - L_{T_1}^K\right) \\ &\leq L_{t\wedge T_1}^K + 1_{\{T_1<t\}}\left(L_{T_1+t}^K - L_{T_1}^K\right).\end{aligned}$$

Estimate of $\mathbb{E}L^K_{t\wedge T_1}$

In the stochastic interval $[0, T_1[$, the process (S_t) matches with the process $(\check{S}_t)$ defined by

$$\check{S}_t = S_0 e^{(\gamma_0 - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

We deduce (when observing that the process L^K is continuous) that

$$L^K_{t\wedge T_1} = \check{L}^K_{t\wedge T_1} \leq \check{L}^K_t,$$

where $\check{L}^K$ is the local time at K of the process $\check{S}$. We denote

$$\frac{1}{2}\check{L}^K_t = (K - \check{S}_t)_+ - (K - S_0)_+ - \int_0^t (-1_{\{\check{S}_s \leq K\}})\check{S}_s(\gamma_0 ds + \sigma dB_s).$$

As the process $(\check{L}^K_t)$ increases only on $\{\check{S}_t = K\}$, we have

$$\check{L}^K_t = \check{L}^K_t 1_{\{\tau_K < t\}},$$

and, by Hölder,

$$\mathbb{E}\check{L}^K_t \leq (\mathbb{P}(\tau_K < t))^{1-\frac{1}{p}} \, ||\check{L}^K_t||_p, \quad p > 1.$$

We easily deduce that $\mathbb{E}\check{L}^K_t = o(t^n)$, for all $n > 0$.

Estimate of $\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(L^K_{T_1+t} - L^K_{T_1}\right)\right]$

By the strong Markov's property

$$\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(L^K_{T_1+t} - L^K_{T_1}\right)\right] = \mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}}\mathbb{E}_{S_{T_1}}(L^K_t)\right), \tag{3.2}$$

where $\mathbb{E}_x$ is the expectation associated to $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{P}_x$ defines the law of S_t when $S_0 = x$.

Estimate of $\mathbb{E}_x\left(L^K_t\right)$

Let T_1 be the first jump time of the process Z. We then have

$$L^K_t = L^K_{t\wedge T_1} + L^K_t - L^K_{t\wedge T_1}$$

According to equality (3.1) we deduce, using the compensation formula (see [33, 7, 4])

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L^K_t &= (K - S_t)_+ - (K - S_0)_+ + \int_0^t 1_{\{S_{s^-} \leq K\}} S_{s^-}(\gamma_0 ds + \sigma dB_s) \\ &\quad - \int_0^t ds \int \Phi(S_{s^-}, y)\nu(dy) + M_t,\end{aligned}$$

where $\Phi(x,y) = (K - xe^y)_+ - (K-x)_+$ and (M_t) is a martingale equal to zero at 0. Let $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of stopping time localizing the local martingale $\int_0^t 1_{\{S_s\leq K\}} S_s \sigma dB_s$. We have

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(L^K_{t\wedge\tau_n}\right) = \mathbb{E}(K-S_{t\wedge\tau_n})_+ - (K-S_0)_+ + \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n}\left(\gamma_0 S_s 1_{\{S_s\leq K\}} - \int \Phi(S_s,y)\nu(dy)\right)ds.$$

We deduce easily from this equality that

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_x\left(L^K_t\right) = \mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ + xO(t)$$

with $O(t)$ independent of x. We have

$$\mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ \;=\; \mathbb{E}_x(K - xe^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t+\tilde{Z}_t})_+ - (K-x)_+$$

We also have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t+\tilde{Z}_t} - e^{\sigma B_t}\right| &= e^{\sigma^2 t/2}\mathbb{E}\left|e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\tilde{Z}_t} - 1\right| \\ &= O(t)\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ &= \mathbb{E}(K-xe^{\sigma B_t})_+ - (K-x)_+ + xO(t) \\ &= \mathbb{E}(K-x(1+\sigma B_t))_+ - (K-x)_+ + xO(t) \\ &= x\sigma\left(\mathbb{E}\left(\frac{K-x}{x\sigma} - B_t\right)_+ - \left(\frac{K-x}{x\sigma}\right)_+\right) + xO(t).\end{aligned}$$

Therefore, using lemma 3.3.1 above,

$$\mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ \leq x\sigma\sqrt{t/(2\pi)}\exp\left(-\frac{(K-x)^2}{2x^2\sigma^2 t}\right) + xO(t).$$

Let's return to (3.2), we obtain

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(L^K_{T_1+t} - L^K_{T_1}\right)\right] \\ &\leq \sigma\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}}S_{T_1}\exp\left(-\frac{(K-S_{T_1})^2}{2S^2_{T_1}\sigma^2 t}\right)\right) + \mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}}S_{T_1}\right)O(t) \\ &= \sigma\sqrt{\frac{t}{2\pi}}S_0\mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}}e^{(\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2})T_1+\sigma B_{T_1}+Z_{T_1}}\exp\left(-\frac{(K-S_{T_1})^2}{2S^2_{T_1}\sigma^2 t}\right)\right) + O(t).\end{aligned}$$

At this stage, we notice that $\mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = O(t)$ and that, conditionally to $\{T_1 \leq t\}$, T_1 is distributed uniformly on $[0, t]$.

As Z_{T_1} is independent of both T_1 and B, we see that, conditionally to $\{T_1 < t\}$, S_{T_1} has the same law as

$$K \exp\left\{\left(V - \ln(\frac{K}{b(T)})\right) + \sqrt{t}\left(a + (\gamma_0 - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{t}U + \sigma g\sqrt{U}\right)\right\},$$

where U, g and V are two independent random variables, U is uniform on $[0, 1]$, g Gaussian centered reduced and V has the same law as Z_{T_1}. Therefore, we can state that there exists a non negative constante independent of a such that

$$\mathbb{E}(L_t^K \mid S_0 = b(T)e^{a\sqrt{t}}) \leq w^0 t^{3/2} = O(t^{3/2}).$$

Estimate of $\mathbb{E}\left[L_t^K - L_{t\wedge T_1}^K\right]$ in the case where $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\} = 0$:
If we assume $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\} = 0$, which means that $V - \ln(\frac{K}{b(T)}) \neq 0$ a.s , we obtain, by dominated convergence that

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathbb{E}\left(S_{T_1} \exp\left(-\frac{K^2(1 - \frac{S_{T_1}}{K})^2}{2S_{T_1}^2\sigma^2 t}\right) \mid T_1 < t\right) = 0.$$

Therefore $\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(L_{T_1+t}^K - L_{T_1}^K\right)\right] = o(t^{3/2})$, hence

$$\mathbb{E}\left(L_t^K \mid S_0 = b(T)e^{a\sqrt{t}}\right) = o(t^{3/2})$$

Estimate of $\mathbb{E}\left[L_t^K - L_{t\wedge T_1}^K\right]$ in the case where $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\} > 0$:
Let us introduce the processes $\hat{X}$ and $\hat{Z}$ such that

$$\hat{Z}_t = \sum_{s<t} \Delta\tilde{X}_s 1_{\{\Delta\tilde{X}_s = \ln\frac{K}{b(T)}\}} \quad \text{and} \quad \hat{X} = \tilde{X} - \hat{Z},$$

and $\hat{T}_1 = \inf\{s \geq 0, \quad \hat{Z}_t \neq 0\}$. Then

$$\mathbb{E}\left[L_{t\wedge\hat{T}_1}^K - L_{t\wedge T_1}^K\right] = \mathbb{E}\left[(L_{t\wedge\hat{T}_1}^K - L_{t\wedge T_1}^K)1_{\{T_1<t\wedge\hat{T}_1\}}\right] = o(t^{\frac{3}{2}}).$$

Indeed, on $\{t < \hat{T}_1\}$, the process $\tilde{X}$ matches with the process $\hat{X}$ whose Levy measure does not charge the point $\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}$, (we are in the same case as $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\} = 0$). And on $\{T_1 < \hat{T}_1 \leq t\}$, the process Z has jumped two times before t, however, $\mathbb{P}\left(\sum_{s\leq t} 1_{\{\Delta Z_s \neq 0\}} \geq 2\right) = O(t^2)$. Thus,

$$\mathbb{E}\left[L_t^K - L_{t\wedge T_1}^K\right] = \mathbb{E}\left[L_t^K - L_{t\wedge \hat{T}_1}^K\right] + o(t^{3/2}).$$

□

proof of Theorem 3.3.1 :

First of all, we recall that we denote by $\check{X}_t = \tilde{X}_t - Z_t$, $\check{S}_t = \tilde{S}_t/e^{Z_t}$ (i.e the continuous part of the processes) and T_1 the first jump time $T_1 = \inf\{t > 0 | Z_t \neq 0\}$ and from now on, we consider S_0 as a function of θ. More precisely, we denote by $S_0^\theta = b(T)e^{a\sqrt{\theta}} = e^{x_0 + a\sqrt{\theta}}$, with $a < 0$ and $x_0 = \ln(b(T))$.
According to equation (3.1), we have for all stopping times $\tau \in \mathcal{T}_{0,\theta}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}(K - S_\tau)_+\right] - (K - S_0)^+ \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \left(e^{-rs} 1_{\{S_s \leq K\}} \left(-rK + \delta S_s + S_s \int (e^y - 1)\nu(du)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + e^{-rs} \int \left[(K - S_s e^y)^+ - (K - S_s)^+\right])\nu(dy)\right) ds\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-rs} dL_s^K\right) \\
&= \mathcal{I}^a(\tau) + \mathcal{J}^a(\tau), \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^a(\tau) &= \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \left(e^{-rs} 1_{\{S_s \leq K\}} \left(-rK + \delta S_s + S_s \int (e^y - 1)\nu(du)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + e^{-rs} \int \left[(K - S_s e^y)^+ - (K - S_s)^+\right])\nu(dy)\right) ds\right]
\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{J}^a(\tau) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-rs} dL_s^K\right).$$

At this stage, since $\mathcal{J}^a \geq 0$, we can state that , given $S_0 = b(T)e^{\lambda\sqrt{\theta}}$, we have

$$\mathcal{I}^a(\tau) \leq \mathbb{E}\left[e^{-r\tau}(K - S_\tau)_+\right] - (K - S_0)^+ = \mathcal{I}^a(\tau) + \mathcal{J}^a(\tau) \leq \mathcal{I}^a(\tau) + w^0\theta^{\frac{3}{2}}, \quad (3.4)$$

the last inequality follows from Lemma 3.3.2. In what follows, we will express $\mathcal{I}^a$ and $\mathcal{J}^a$ in more appropriate forms. Let us start by $\mathcal{J}^a$.

Estimate of $\mathcal{J}^a$:
Recall that $\hat{T}_1 = \inf\{t \geq 0\ ;\ \Delta\tilde{X}_t = \ln\frac{K}{b(T)}\}$, then according to Lemma 3.3.2, for all $\lambda < 0$, we have $\mathbb{E}\left(L_t^K \mid S_0 = b(T)e^{\lambda\sqrt{\theta}}\right) = O(\theta^{3/2})$,

$$\mathcal{J}^a(\tau) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(L_\tau^K\right) + o(\theta^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L_\tau^K - L_{\tau\wedge\hat{T}_1}^K\right] + o(\theta^{3/2})$$

however

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L_\tau^K - L_{\tau\wedge\hat{T}_1}^K\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(L_\tau^K - L_{\tau\wedge\hat{T}_1}^K)1_{\hat{T}_1<\tau}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left((K-S_\tau)^+ - (K-S_{\hat{T}_1})^+\right)1_{\hat{T}_1<\tau}\right] + o(\theta^{3/2}) \\
&= \mathbb{E}\left[\left((K - \frac{S_0K}{b(T)}e^{\hat{X}_{\hat{T}_1}-\tilde{X}_{\hat{T}_1}+\tilde{X}_\tau})^+ - (K-\frac{S_0K}{b(T)}e^{\hat{X}_{\hat{T}_1}})^+\right)1_{\hat{T}_1<\tau}\right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

As it was mentioned above, if there is more than a single jump of $\tilde{X}$ before θ, than it can be dominated by $O(\theta^2)$, since $\mathbb{P}\left(\sum_{s\leq\theta} 1_{\{\Delta\tilde{X}_s\neq 0\}} \geq 2\right) = O(\theta^2)$. Conditionally to $\{\hat{T}_1 < \tau\}$, one can then suppose that $N_\theta = 1$, where N_t denote the number of jumps of $\tilde{X}$ up to θ, $N_\theta = \sum_{s\leq\theta} 1_{\{\Delta\tilde{X}_s\neq 0\}} = \sum_{s\leq\theta} 1_{\{\Delta Z_s\neq 0\}}$. Noticing that $\frac{S_0K}{b(T)} = Ke^{a\sqrt{\theta}}$, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^a(\tau) &= \mathbb{E}\left[\left((K - \frac{S_0K}{b(T)}e^{\hat{X}_{\hat{T}_1}-\tilde{X}_{\hat{T}_1}+\tilde{X}_\tau})^+ - (K-\frac{S_0K}{b(T)}e^{\hat{X}_{\hat{T}_1}})^+\right)1_{\{N_\theta=1\}}1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}) \\
&= K\mathbb{E}\left[\left((1-e^{a\sqrt{\theta}+\mu\tau+\sigma B_\tau})^+ - (1-e^{a\sqrt{\theta}+\mu\hat{T}_1+\sigma B_{\hat{T}_1}})^+\right)1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}) \\
&= K\mathbb{E}\left[\left((-a\sqrt{\theta}-\mu\tau-\sigma B_\tau)^+ - (-a\sqrt{\theta}-\mu\hat{T}_1-\sigma B_{\hat{T}_1})^+\right)1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}) \\
&= K\mathbb{E}\left[\left((-a\sqrt{\theta}-\sigma B_\tau)^+ - (-a\sqrt{\theta}-\sigma B_{\hat{T}_1})^+\right)1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

The two last equalities follow from $\mathbb{P}(\hat{T}_1 < \tau) = O(\theta)$, $\left|(1-e^x+x)1_{\{x\leq 0\}}\right| \leq \frac{x^2}{2}$ and the fact that, for all stropping time ϱ with values in $[0,\theta]$, we have

$$\theta\mathbb{E}\left(a + \mu\frac{\varrho}{\sqrt{\theta}} + \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}}B_\varrho\right)^2 \leq C\theta.$$

Estimate of $\mathcal{I}^a$:
First of all, remark that we have

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \left(e^{-rs}1_{\{S_s>K\}}\int \left[(K-S_se^y)^+ - (K-S_s)^+\right]\nu(dy)\right)ds\right] \\
&\leq\ K\nu(\mathbb{R})\int_0^\theta \mathbb{P}\{S_s>K\}ds \\
&\leq\ K\nu(\mathbb{R})\int_0^\theta \mathbb{P}\{S_s>K, T_1>\theta\}+\mathbb{P}\{S_s>K, T_1\leq\theta\}ds \qquad (3.6)\\
&\leq\ K\nu(\mathbb{R})\left(\int_0^\theta \mathbb{P}\{\check{S}_s>K\}ds+\theta\mathbb{P}\{T_1\leq\theta\}\right)=O(\theta^2).
\end{aligned}$$

And noticing that

$$1_{\{x\leq K\}}\left(x(e^y-1)+\left[(K-xe^y)^+-(K-x)^+\right]\right)=(xe^y-K)^+1_{\{x\leq K\}},$$

we thus obtain

$$\mathcal{I}^a(\tau)=\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-rs}1_{\{S_s\leq K\}}\left(-rK+\delta S_s+\int(S_se^y-K)^+\nu(dy)\right)ds\right)+o(\theta^{\frac{3}{2}}).$$

We can also omit e^{-rs} in the expression as an error of the order of $O(\theta^2)$. Then we obtain, for all stopping times τ with values in $[0,\theta]$

$$\mathcal{I}^a(\tau)=\mathbb{E}\left(\int_0^\tau 1_{\{S_s\leq K\}}\left(-rK+\delta S_s+\int(S_se^y-K)^+\nu(dy)\right)ds\right)+o(\theta^{\frac{3}{2}}).$$

We denote

$$h(x)=-rK+\delta e^x+\int(e^xe^y-K)^+\nu(dy),$$

and recall that $S_t=S_0^\theta e^{\tilde{X}_t}=b(T)e^{a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_t}=b(T)e^{\tilde{X}_t^{a\sqrt{\theta}}}=e^{x_0+\tilde{X}_t^{a\sqrt{\theta}}}$, where $\tilde{X}_t^y$ is the process $\tilde{X}_t$ starting from y . We thus have

$$\mathcal{I}^a(\tau)\ =\ \underbrace{\mathbb{E}\left(\int_0^\tau 1_{\{a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_s\leq\ln\frac{K}{b(T)}\}}h(x_0+a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_s)ds\right)}_{(I)}+o(\theta^{\frac{3}{2}}). \qquad (3.7)$$

Now, we will try to express the quantity (I) under a more appropriate form. The first step is to neglect the contribution of the finite variation part of the process. Notice that

$$\left|1_{\{x\leq \ln(K)\}}h(x)\right| \leq K(r\vee|d^+|) \quad \text{and} \quad |h(x)-h(y)| \leq |e^x-e^y|\left(\delta+\int_{y>0}e^y\nu(du)\right).$$

Moreover, for all $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, we have

$$\begin{aligned}
&\left|1_{\{x\leq \ln(K)\}}h(x)-1_{\{y\leq \ln(K)\}}h(y)\right| \\
&\quad = \left|(h(x)-h(y))\,1_{\{x\vee y\leq \ln(K)\}}+h(x)1_{\{x\leq \ln(K)<y\}}-h(y)1_{\{y\leq \ln(K)<x\}}\right| \\
&\quad \leq A_0\,|e^x-e^y|\,1_{\{x\vee y\leq \ln(K)\}}A_1\left(1_{\{\ln(K)<y\}}+1_{\{\ln(K)<x\}}\right),
\end{aligned}$$

where $A_1=K(r\vee|d^+|)>0$ and $A_0=\delta+\int_{y>0}e^y\nu(du)$. Let $k_b=\ln\left(\frac{K}{b(T)}\right)>0$ and recall that $\tilde{X}_t-\sigma B_t=(\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2})t+Z_t$, then

$$\begin{aligned}
&\left|1_{\{x_0+a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_s\leq \ln K\}}h(x_0+a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_s)-1_{\{x_0+a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\leq \ln K\}}h(x_0+a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)\right| \\
&\leq A_0\left|e^{x_0+a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_s}-e^{x_0+a\sqrt{\theta}+\sigma B_s}\right|1_{\{\tilde{X}_s\vee\sigma B_s\leq k_b-a\sqrt{\theta}\}}+C(1_{\{k_b-a\sqrt{\theta}<\sigma B_s\}}+1_{\{k_b-a\sqrt{\theta}<\tilde{X}_s\}}) \\
&\leq A_0b(T)e^{\sigma B_s}\left|e^{(\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2})s+Z_s}-1\right|+C(1_{\{k_b<\sigma B_s\}}+1_{\{k_b<\tilde{X}_s\}}),
\end{aligned}$$

the last inequality is due to $a<0$ and $e_0^x=B(T)$.
Taking the expectation, we obtain, for all $s\in[0,\theta]$

$$\mathbb{P}(k_b<\sigma B_s)\leq\mathbb{P}(\frac{k_b}{\sigma\sqrt{\theta}}<\sigma B_1)\leq C\sqrt{\theta}e^{-\frac{k_b^2}{2\sigma^2\theta}},$$

for θ small enough, we have $\frac{k_b}{2}<k_b-(\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2})s$, then

$$\mathbb{P}(k_b<\tilde{X}_s)\leq\mathbb{P}(\frac{k_b-(\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2})s}{\sigma\sqrt{\theta}}<B_1)+\mathbb{P}(T_1\leq\theta)\leq C\sqrt{\theta}e^{-\frac{k_b^2}{8\sigma^2\theta}}+A\theta$$

and

$$\mathbb{E}\left(e^{\sigma B_s}\left|e^{(\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2})s+Z_s}-1\right|\right)\leq e^{\frac{\sigma^2}{2}s}\left|e^{(\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2})s}-1\right|+e^{\gamma_0 s}\mathbb{E}\left|e^{Z_s}-1\right|\leq D\theta.$$

Hence,

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \mathbb{E}\Big(\Big|&1_{\{x_0+a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_s\leq \ln K\}}h(x_0+a\sqrt{\theta}+\tilde{X}_s) \\
&-1_{\{x_0+a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\leq \ln K\}}h(x_0+a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)\Big|\Big)\,ds=O(\theta^2).
\end{aligned}$$

Thanks to this estimation, equation (3.7) becomes

$$\mathcal{I}^a(\tau) = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau 1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s \leq \ln\frac{K}{b(T)}\}} h(x_0 + a\sqrt{\theta} + \sigma B_s)ds\right) + o(\theta^{\frac{3}{2}}). \tag{3.8}$$

The function h is convex, therefore it is right and left differentiable. Particularly, we have all $x < \ln(K)$,

$$h'_g(x) = e^x\left(\delta + \int e^y 1_{\{y>\ln(K)-x\}}\nu(dy)\right)$$

and

$$h'_d(x) = e^x\left(\delta + \int e^y 1_{\{y\geq\ln(K)-x\}}\nu(dy)\right).$$

Hence, we can write

$$h'_d(x_0)(x-x_0)^+ - h'_g(x_0)(x-x_0)^- \leq h(x) - h(x_0) \leq h'_g(x)(x-x_0)^+ - h'_d(x)(x-x_0)^-,$$

hence

$$\begin{aligned} 0 &\leq h(x) - \left(h(x_0) + h'_d(x_0)(x-x_0)^+ - h'_g(x_0)(x-x_0)^-\right) \\ &\leq \left(h'_g(x) - h'_d(x_0)\right)(x-x_0)^+ + \left(h'_g(x_0) - h'_d(x)\right)(x-x_0)^- \\ &= \left(h'_g(x\vee x_0) - h'_d(x\wedge x_0)\right)|x-x_0|. \end{aligned}$$

Thanks to theorem 3.2.2, we have $h(x_0) = h(\ln(b(T)) = 0$. We thus obtain, by setting $\Delta h'(x_0) = h'_d(x_0) - h'_g(x_0)$,

$$h(x_0+x) = \Delta h'(x_0)x^+ + h'_g(x_0)x + |x|\,\tilde{R}(x),$$

where $\tilde{R}(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$, and

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{R}(x) &\leq \left(h'_g(x_0+x^+) - h'_d(x_0-x^-)\right) \\ &\leq L\left(1+e^x\right), \end{aligned}$$

with L a positive constant.

We can then write

$$\begin{aligned} &1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s \leq \ln\frac{K}{b(T)}\}} h(x_0 + a\sqrt{\theta} + \sigma B_s) \\ &= \left(\Delta h'(x_0)(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)^+ + h'_g(x_0)a\sqrt{\theta} + \sigma B_s\right)\left(1 - 1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s > \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right) \\ &\quad + \left|a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\right|\tilde{R}(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)1_{\{\tilde{X}_s^{a\sqrt{\theta}} \leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

We state that

$$\left|\mathbb{E}\int_0^\tau \left|a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\right| \tilde{R}(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)1_{\{\tilde{X}_s^{a\sqrt{\theta}}\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}ds\right| = o(\theta^{\frac{3}{2}}) \tag{3.10}$$

$$\left|\mathbb{E}\int_0^\tau \left(\Delta h'(x_0)(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)^+ + h'_g(x_0)a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\right)1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s>\ln\frac{K}{b(T)}\}}ds\right| = o(\theta^{\frac{3}{2}}), \tag{3.11}$$

Indeed, we have for (3.10), by setting $s=u\theta$,

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \left|a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\right| \tilde{R}(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}ds\right)\right| \\ &= \theta^{\frac{3}{2}}\int_0^1 \mathbb{E}\left[|a+\sigma B_s|\,\tilde{R}(\sqrt{\theta}(a+\sigma B_s))1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma\sqrt{\theta}B_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right]ds.\end{aligned}$$

As $|\tilde{R}(x)|\leq L(e^x+1)$ and $|\tilde{R}(x)|\longrightarrow_{x\to 0}0$, we have by bounded convergence

$$\int_0^1 \mathbb{E}\left[|a+\sigma B_s|\,\tilde{R}(\tilde{X}_{\theta s}^{a\sqrt{\theta}})1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right]ds \quad\longrightarrow_{\theta\to 0}\quad 0.$$

And for the estimate in (3.11), we have

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\int_0^\tau \left(\Delta h'(x_0)(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)^+ + h'_g(x_0)a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\right)1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s>\ln\frac{K}{b(T)}\}}ds\right| \\ &\leq C\sqrt{\theta}\int_0^\theta \mathbb{E}\left[\left(|a|+\sigma\sqrt{\frac{s}{\theta}}\,|B_1|\right)1_{\{a+\sigma B_1>\frac{1}{\sqrt{\theta}}\ln\frac{K}{b(T)}\}}\right]ds \\ &\leq C\theta^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathbb{E}\left(|a|+|B_1|\right)^2}\sqrt{\mathbb{P}\{a+\sigma B_1>\frac{1}{\sqrt{\theta}}\ln\frac{K}{b(T)}\}} \\ &= O(\theta^n).\end{aligned}$$

Therefore, taking the expectation of the integral of (3.9) between 0 and all stopping time $\tau\in\mathcal{T}_{0,\theta}$ gives

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^a(\tau) &= \mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}h(x_0+a\sqrt{\theta}+\sigma B_s)ds \\ &= h'_g(x_0)\mathbb{E}\int_0^\tau\Big(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\Big)\,ds + \Delta h'(x_0)\mathbb{E}\int_0^\tau\Big(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\Big)^+ds + o(\theta^{\frac{3}{2}}), \\ &= b(T)\bar{\delta}\mathbb{E}\int_0^\tau\Big(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\Big) + \alpha\left(a\sqrt{\theta}+\sigma B_s\right)^+ds + o(\theta^{\frac{3}{2}}),\end{aligned} \tag{3.12}$$

with $\bar{\delta} = \delta + \int_{(\ln \frac{K}{b(T)}, +\infty)} e^y \nu(dy)$, $\alpha = \frac{K\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\}}{b(T)\bar{\delta}}$ and we recall that

$$h'_g(x_0) = b(T)\left(\delta + \int_{(\ln \frac{K}{b(T)}, +\infty)} e^y \nu(dy)\right) \quad \text{and} \quad \Delta h'(x_0) = K\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\}.$$

Comming back to à (3.3) and using (3.5) and (3.12), we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+\right) &= (K - S_0)^+ + \mathbb{E}\left(b(T)\bar{\delta}\int_0^\tau \left(a\sqrt{\theta} + \sigma B_s + \alpha(a\sqrt{\theta} + \sigma B_s)^+\right) ds\right) \\ &\quad + K1_{\{\hat{T}_1 < \tau\}}\left((a\sqrt{\theta} + \sigma B_\tau)^+ - (a\sqrt{\theta} + \sigma B_{\hat{T}_1})^+\right)\Big) + o(\theta^{3/2}),\end{aligned}$$

with $o(\theta^{3/2})$ independent of τ. Hence

$$P(T - \theta, b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) = (K - b(T)e^{a\sqrt{\theta}})^+ + \sigma b(T)\bar{\delta} v_{\alpha,\beta,\theta}(a/\sigma) + o(\theta^{3/2}),$$

where $\beta = K/(b(T)\bar{\delta})$ and $\bar{v}_{\alpha,\beta}$ defined by

$$\bar{v}_{\alpha,\beta,\theta}(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\theta}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau f_\alpha(y\sqrt{\theta} + B_s)ds + \beta 1_{\{\hat{T}_1 < \tau\}}\left((y\sqrt{\theta} + B_\tau)^+ - (y\sqrt{\theta} + B_{\hat{T}_1})^+\right)\right),$$

with $f_\alpha(x) = x + \alpha x^+$. To simplify the expression of $\bar{v}_{\alpha,\beta,\theta}$, we notice first that, if we set $B^\theta_t = B_{\theta t}/\sqrt{\theta}$, we can write

$$\begin{aligned}\bar{v}_{\alpha,\beta,\theta} &= \sqrt{\theta}\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\theta}} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau f_\alpha(y + B^\theta_{s/\theta})ds + \beta 1_{\{\hat{T}_1 < \tau\}}\left((y + B^\theta_{\tau/\theta})^+ - (y + B^\theta_{\hat{T}_1/\theta})^+\right)\right) \\ &= \sqrt{\theta}\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\theta}} \mathbb{E}\left(\theta\int_0^{\tau/\theta} f_\alpha(y + B^\theta_s)ds + \beta 1_{\{\hat{T}_1 < \tau\}}\left((y + B^\theta_{\tau/\theta})^+ - (y + B^\theta_{\hat{T}_1/\theta})^+\right)\right)\end{aligned}$$

We also notice that $\tau \in \mathcal{T}_{0,\theta}$ if and only if $\tau/\theta \in \mathcal{T}^\theta_{0,1}$, where $\mathcal{T}^\theta_{0,1}$ is the set of the stopping times of the filtration $(\mathcal{F}_{\theta t})_{t\geq 0}$, with values in $[0, 1]$, then

$$\bar{v}_{\alpha,\beta,\theta} = \sqrt{\theta}\sup_{\tau \in \mathcal{T}^\theta_{0,1}} \mathbb{E}\left(\theta\int_0^\tau f_\alpha(y + B^\theta_s)ds + \beta 1_{\{\hat{T}_1 < \theta\tau\}}\left((y + B^\theta_\tau)^+ - (y + B^\theta_{\hat{T}_1/\theta})^+\right)\right)$$

Note that $\bar{v}_{\alpha,\beta,\theta}(y)$ does not change if we replace $\mathcal{T}^\theta_{0,1}$ by $\hat{\mathcal{T}}_{0,1}$ the set of the stopping times of the natural filtration of the couple $(B^\theta_t, \hat{N}_{\theta t})$, where $\hat{N}$ is defined by

$$\hat{N}_t = \sum_{0<s\leq t} 1_{\{\Delta Z_s = \ln(K/b(T))\}}.$$

The processes $(\hat{N}_{\theta t})_{t\geq 0}$ is a Poisson process of intensity $\theta\lambda$, where $\lambda = \nu\{\ln(K/b(T))\}$. Under the probability $\hat{\mathbb{P}}$, defined by

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \theta^{\hat{N}_1} e^{-\lambda(\theta-1)},$$

the process $(B_t, \hat{N}_t)_{0\leq t\leq 1}$ has the same law as $(B^\theta_t, \hat{N}_{\theta t})_{0\leq t\leq 1}$. Hence,

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{\alpha,\beta,\theta}(y) &= \sqrt{\theta} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left[\theta^{\hat{N}_1} e^{-\lambda(\theta-1)}\left(\theta\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds + \beta 1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\left((y+B_\tau)^+ - (y+B_{\hat{T}_1})^+\right)\right)\right] \\
&= \sqrt{\theta} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left[\theta^{\hat{N}_\tau} e^{-\lambda\tau(\theta-1)}\left(\theta\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds + \frac{\beta}{2} 1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\left(L^{-y}_\tau(B) - L^{-y}_{\hat{T}_1}(B)\right)\right)\right],
\end{aligned}$$

where $L^{-y}(B)$ denotes the B at $-y$. We have for $\tau\in\mathcal{T}_{0,1}$,

$$\mathbb{E}\left[\theta^{\hat{N}_\tau} e^{\lambda\tau(\theta-1)}\left(\theta\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds\right)\right] = \theta\mathbb{E}\left[1_{\{\hat{N}_\tau=0\}} e^{-\lambda\tau(\theta-1)}\left(\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds\right)\right] + \theta R_\tau,$$

and if $\theta\leq 1$

$$|R_\tau| \leq \theta\mathbb{E}\left[1_{\{\hat{N}_\tau\geq 1\}} e^{-\lambda\tau(\theta-1)}\left(\int_0^1 |f_\alpha(y+B_s)|ds\right)\right] = O(\theta).$$

Hence,

$$\mathbb{E}\left[\theta^{\hat{N}_\tau} e^{-\lambda\tau(\theta-1)}\left(\theta\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds\right)\right] = \theta\mathbb{E}\left[1_{\{\hat{N}_\tau=0\}} e^{\lambda\tau}\left(\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds\right)\right] + O(\theta^2),$$

Besides,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\theta^{\hat{N}_1} e^{-\lambda(\theta-1)} 1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\left((L^{-y}_\tau(B) - L^{-y}_{\hat{T}_1}(B)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\theta^{\hat{N}_\tau} e^{-\lambda\tau(\theta-1)} 1_{\{\hat{T}_1<\tau\}}\left((L^{-y}_\tau(B) - L^{-y}_{\hat{T}_1}(B)\right)\right] \\
&= \theta\mathbb{E}\left[e^{\lambda\tau} 1_{\{\hat{N}_\tau=1\}}\left((L^{-y}_\tau(B) - L^{-y}_{\hat{T}_1}(B)\right)\right] + O(\theta^2).
\end{aligned}$$

We then have

$$\bar{v}_{\alpha,\beta,\theta}(y) = \theta^{3/2} v_{\alpha,\beta}(y) + o(\theta^{3/2}),$$

with

$$v_{\alpha,\beta}(y) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left[e^{\lambda\tau} 1_{\{\hat{N}_\tau=0\}}\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds + \frac{\beta}{2} e^{\lambda\tau} 1_{\{\hat{N}_\tau=1\}}\left(L^{-y}_\tau(B) - L^{-y}_{\hat{T}_1}(B)\right)\right].$$

Finally, we obtain

$$P(T-\theta, b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) - (K - b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) \;=\; \theta^{\frac{3}{2}}(\sigma b(T)\bar{\delta}e^{\lambda})v_{\alpha,\beta}\left(\frac{a}{\sigma}\right) + o(\theta^{\frac{3}{2}}),$$

□

In view of Theorem 3.3.1, we are lead to the following auxiliary optimal stopping problem

3.3.2 An auxiliary optimal stopping problem

Let α be a non-negative number, B_s be a standard Brownian motion with a local time at x denoted by $\tilde{L}^x$, we denote by $\mathcal{T}_{0,1}$ the set of all $\sigma\left(B_t\ ;\ t \geq 0\right)$-adapted stopping times with values in $[0,1]$. Consider also a Poisson process N_s independent of B with intensity λ, we denote $\hat{T}_1$ its first jump time and $\hat{\mathcal{T}}_{0,1}$ the set of all $\sigma\left((N_t, B_t)\ ;\ t \geq 0\right)$-adapted stopping times with values in $[0,1]$. We define the functions $v_{\alpha,\beta}$ with $\beta = \frac{\alpha}{\lambda}$ and u_α as following

$$v_{\alpha,\beta}(y) \;=\; \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left[e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{N}_\tau=0\}}\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds + \frac{\beta}{2}e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{N}_\tau=1\}}\left(L_\tau^{-y}(B) - L_{\hat{T}_1}^{-y}(B)\right)\right].$$

Lemma 3.3.3 *There exists* $y_{\alpha,\beta} \in \left(0, (\alpha+1+\lambda\beta(1+e^{\lambda}))\right)$ *such that such that*

$$\forall y < -y_{\alpha,\beta}, \quad v_{\alpha,\beta}(y) = 0.$$

$$y_{\alpha,\beta} = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid v_{\alpha,\beta}(x) > 0\}.$$

We finish this paragraph by a very useful inequality, which will be needed when we derive a lower bound for the second derivative of P (see the proof of the upper bound in Theorem 3.3.2).
We define the function C on $\mathbb{R}$ by $C(x) = x - \alpha\ \mathbb{E}(B_1 - x)^+$ Thanks to proposition 3.3.3, we already have that $y_{\alpha,\beta} \in \left[0, \left(\alpha+1+\lambda\beta(1+e^{\lambda})\right)\right]$. Moreover, we have the following proposition
Lemma 3.3.4 *For all* $x > y_{\alpha,\beta}$, *we have*

$$C(x) > 0.$$

These results will be proved in *Annex 2 : A study of* u_α.

3.3.3 Convergence rate of the critical price b(t)

Theorem 3.3.2 *Under the hypothesis of the model, if* $b(T) < K$ *and* $\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\} = 0$, *then we have*

$$\lim_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{\sigma b(T)\sqrt{(T-t)}} = y_0,$$

with $y_0 = -\sup\{x \in \mathbb{R}\ ;\ v_{0,0}(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}(\int_0^\tau (x + B_s)ds) = 0\}$.
If $\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\} > 0$, *we then have*

$$\lim_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{\sigma b(T)\sqrt{(T-t)}} = y_{\alpha,\beta},$$

with $y_{\alpha,\beta}$ *as defined in Lemma 3.3.3, for*

$$\alpha = \frac{K\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\}}{b(T)\bar{\delta}}\ ,\ \beta = \frac{K}{b(T)\bar{\delta}} \text{ and } \quad \bar{\delta} = \delta + \int_{y>\ln(K/b(T))} e^y \nu(dy).$$

proofof Theorem 3.3.2 :
According to Theorem 3.3.1, we have for all $a < 0$,

$$P(T-\theta, b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) = (K - b(T)e^{a\sqrt{\theta}})^+ + C\theta^{\frac{3}{2}} v_{\alpha,\beta}(\frac{a}{\sigma}) + o(\theta^{\frac{3}{2}}).$$

Lower bound for $b(T) - b(t)$
Specifically, we have for all $a > -\sigma y_{\alpha,\beta}$, where $y_{\alpha,\beta}$ is defined by Lemma 3.3.3,

$$v_{\alpha,\beta}(\frac{a}{\sigma}) > 0,$$

we thus obtain for θ close to 0,

$$P(t, b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) > (K - b(T)e^{a\sqrt{\theta}}),$$

and then

$$\ln(b(T)) + a\sqrt{\theta} > \ln(b(t)),$$

hence

$$\frac{b(T) - b(t)}{b(t)\sqrt{\theta}} > -a.$$

Noting that $b(T) > 0$ (see Theorem 3.2.2), by making t tend to T then a to $-\sigma y_{\alpha,\beta}$, we obtain

$$\liminf_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{b(T)\sqrt{T-t}} \geq \sigma y_{\alpha,\beta}.$$

Upper bound for $b(T) - b(t)$

Let's consider $a \leq -\sigma y_{\alpha,\beta}$, we have thus $\upsilon_{\alpha,\beta}(\frac{a}{\sigma}) = 0$ and consequently,

$$P(t, b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) - (K - b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) = g(\theta),$$

with $g(\theta) = o(\theta^{\frac{3}{2}})$.
In addition, we have for all $b(t) < x < K$,

$$P(t,x) - P(t,b(t)) - (x - b(t))\frac{\partial P}{\partial x}(t, b(t)) = \int_{b(t)}^{x} (u - b(t))\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, du),$$

since $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, du)$ is a positive measure on $]0, +\infty[$. As the smooth-fit is satisfied, $\frac{\partial P}{\partial x}(t, b(t)) = -1$ (see [22]), we have for all $b(t) < x < K$,

$$P(t,x) - (K - x) \quad = \quad \int_{b(t)}^{x} (u - b(t))\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, du).$$

Then, for $b(t) < x = b(T)e^{a\sqrt{\theta}}$, we have according to Lemma 3.2.2,

$$\begin{aligned}
\frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) &\geq b(T)\bar{\delta}\left((1 - e^{a\sqrt{\theta}}) - \alpha\sqrt{\theta}\sigma\mathbb{E}\left(B_1 + \frac{a}{\sigma}\right)^+\right) + o(\sqrt{\theta}) \\
&\geq b(T)\bar{\delta}\sqrt{\theta}\sigma\left(-\frac{a}{\sigma} - \alpha\mathbb{E}\left(B_1 + \frac{a}{\sigma}\right)^+\right) + o(\sqrt{\theta})
\end{aligned}$$

Hence

$$P(t,x) - (K - x) \geq [(x - b(t))^+]^2\left(\frac{C(-\frac{a}{\sigma})}{b(0)^2\sigma^2}\sqrt{\theta} + o(\sqrt{\theta})\right),$$

where $C(x) = x - \alpha\mathbb{E}(B_1 - x)^+$. Due to lemma 3.3.4 and to the continuity of the function $x \mapsto x - \alpha\mathbb{E}(B_1 - x)^+$, we have, for $\frac{-a}{\sigma}$ close enough to $y_{\alpha,\beta}$, $C(-\frac{a}{\sigma}) > 0$. Moreover,

$$P(t, b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) - (K - b(T)e^{a\sqrt{\theta}}) = g(\theta) = o(\theta^{\frac{3}{2}}).$$

Therefore, for θ small enough, there exists a positive constant A such that

$$[(b(T)e^{a\sqrt{\theta}} - b(t))^+]^2 \leq Ab(0)^2\sigma^2 \frac{g(\theta)}{C(-\frac{a}{\sigma})\sqrt{\theta}} = o(\theta) \tag{3.13}$$

$$(b(T)e^{a\sqrt{\theta}} - b(t))^+ = o(\sqrt{\theta}),$$

and then, for θ small enough,

$$\frac{b(T) - b(t)}{b(T)\sqrt{\theta}} \leq -a + o(1).$$

Finally, by making a tend to $-\sigma y_{\alpha,\beta}$, we obtain

$$\limsup_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{b(T)\sqrt{T-t}} \leq \sigma y_{\alpha,\beta}.$$

□

3.4 The limit case $d^+ = 0$

In this part, we consider the limit case where $r - \delta - \int_{y>0}(e^y - 1)\nu(dy) = 0$ and according to the theorem 3.2.2, we have $b(T) = K$. Before stating the main theorem of this section, we will state and prove two propositions from which theorem 3.4.1 will follows.

We denote by

$$\alpha(\theta) = \frac{\ln(\frac{K}{b_e(t)}) - \mu\theta}{\sigma\sqrt{\theta}},$$

where $\mu = \gamma_0 - \frac{\sigma^2}{2} = r - \delta - \int(e^y - 1)\nu(dy) - \frac{\sigma^2}{2}$ (see section Model for the definition of b_e).

Proposition 3.4.1 *Under the model hypothesis, if $d^+ = 0$, then we have*

i) $\sqrt{\theta}\alpha(\theta) \longrightarrow_{\theta\to 0} 0$
ii) $\alpha(\theta) \longrightarrow_{\theta\to 0} +\infty$
iii) $\alpha(\theta) \sim \sqrt{2\ln(\frac{1}{\theta})}$
iv) $\lim_{\theta\to 0} \frac{K - b_e(t)}{\sigma K\sqrt{|\theta\ln(\theta)|}} = \sqrt{2}$

Proof of Proposition 3.4.1:
i) Since $b(t) \leq b_e(t) \leq K$ and $b(t) \to K$, the first point easly follows.

ii) In order to prove the second point, we will first establish this equality

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{K - b_e(t)}{\sigma\sqrt{\theta}} = +\infty. \tag{3.14}$$

We have

$$K - b_e(t) = e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\left(K - b_e(t)e^{\tilde{X}_\theta}\right)^+\right] \tag{3.15}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}} &= e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}} + b_e(t)\frac{1 - e^{\tilde{X}_\theta}}{\sqrt{\theta}}\right)^+\right] \\
&= e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}} + b_e(t)\frac{1 - e^{\sigma\sqrt{\theta}B_1 + \mu\theta + Z_\theta}}{\sqrt{\theta}}\right)^+\right]
\end{aligned}$$

Now, if we notice that $\frac{1-e^{\sigma\sqrt{\theta}B_1+\mu\theta+Z_\theta}}{\sqrt{\theta}} \longrightarrow^{p.s}_{\theta\to 0} -\sigma B_1$, we have by Fatou lemma

$$\begin{aligned}
\liminf_{\theta \to 0} \frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}} &\geq \mathbb{E}\left[\left(\liminf_{\theta \to 0} \frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}} - \sigma K B_1\right)^+\right] \\
&= \liminf_{\theta \to 0} \frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}} + \mathbb{E}\left[\left(\sigma K B_1 - \liminf_{\theta \to 0} \frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}}\right)^+\right]
\end{aligned}$$

which is equivalent to

$$\mathbb{E}\left[\left(\sigma K B_1 - \liminf_{\theta \to 0} \frac{K - b_e(t)}{\sqrt{\theta}}\right)^+\right] \leq 0.$$

This gives (3.14) which yields the wanted result.

iii) We rewrite equation (3.15) to obtain

$$K - b_e(t) = e^{-r\theta}K - b_e(t)e^{-\delta\theta} + e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\left(b_e(t)e^{\tilde{X}_\theta} - K\right)^+\right],$$

therefore

$$e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\left(e^{\tilde{X}_\theta} - e^{\ln(\frac{K}{b_e(t)})}\right)^+\right] = \frac{K}{b_e(t)}(1 - e^{-r\theta}) - (1 - e^{-\delta\theta}). \tag{3.16}$$

We will give an expansion for each side of the equation. For the left hand side of the equation, we have

$$\begin{aligned} & e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\left(e^{\tilde{X}_\theta} - e^{\ln(\frac{K}{b_e(t)})}\right)^+\right] \\ &= e^{-r\theta+\theta\mu+\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\mathbb{E}\left[\left(e^{\sigma\sqrt{\theta}B_1+Z_\theta-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}} - 1\right)^+\right] \\ &= e^{-r\theta+\theta\mu+\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\mathbb{E}\left[\left(U_\theta e^{Z_\theta} - 1\right)^+\right], \end{aligned}$$

where $U_\theta = e^{\sigma\sqrt{\theta}B_1-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}$. Since the process Z_t is independent of U_θ, we can write

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(U_\theta e^{Z_\theta} - 1\right)^+ |U_\theta\right] \\ &= (U_\theta - 1)^+ + \mathbb{E}\left[\int_0^\theta ds \int \left(\left(U_\theta e^{Z_s+y} - 1\right)^+ - \left(U_\theta e^{Z_s} - 1\right)^+\right)\nu(dy)|U_\theta\right] \\ &= (U_\theta - 1)^+ + \int_0^\theta ds \int \left((U_\theta e^y - 1)^+ - (U_\theta - 1)^+\right)\nu(dy) + U_\theta O(\theta^2), \end{aligned}$$

where $O(\theta^2)$ is detrministic. Indeed,

$$\begin{aligned} & \left|\mathbb{E}\left[\int_0^\theta ds \int \left(\left(U_\theta e^y e^{Z_s} - 1\right)^+ - (U_\theta e^y - 1)^+\right)\nu(dy)|U_\theta\right]\right| \\ &\leq U_\theta \int e^y \nu(du) \int_0^\theta \mathbb{E}\left|e^{Z_s} - 1\right| ds = U_\theta O(\theta^2). \end{aligned}$$

Taking the expectation, we thus obtain,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(U_\theta e^{Z_\theta} - 1\right)^+\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] + \theta \int \mathbb{E}\left[(U_\theta e^y - 1)^+\right]\nu(dy) - \nu(\mathbb{R})\theta\mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] + O(\theta^2). \end{aligned}$$

Since $\alpha(\theta) \to \infty$, we have like in [19]

$$\mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] \sim \sigma\sqrt{\theta}\mathbb{E}\left(B_1 - \alpha(\theta)\right)^+ = o(\sqrt{\theta}),$$

then

$$\mathbb{E}\left[\left(U_\theta e^{Z_\theta} - 1\right)^+\right] = \mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] + \theta \int \mathbb{E}\left[(U_\theta e^y - 1)^+\right]\nu(dy) + o(\theta^{\frac{3}{2}}).$$

We recall that $U_\theta = e^{\sigma\sqrt{\theta}B_1 - \sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}$, then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(U_\theta e^y - 1)^+\right] - \left(e^{y-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}} - 1\right)^+ \\
&\leq \quad e^{y-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\mathbb{E}\left|e^{\sigma\sqrt{\theta}B_1} - 1\right| = e^y O(\sqrt{\theta}).
\end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(U_\theta e^{Z_\theta} - 1\right)^+\right] \\
&= \quad \mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] + \theta\int\left(e^{y-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}} - 1\right)^+\nu(dy) + O(\theta^{\frac{3}{2}}) \\
&= \quad \mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] + \theta\int_{y>0}\left(e^{y-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}} - 1\right)\nu(dy) \\
&\quad -\theta\int_{0<y<\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\left(e^{y-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}} - 1\right)\nu(dy) + O(\theta^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

Since $(1 - e^{-x}) \leq x$, we then have

$$\left|\int_{\left(0,\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}\right)}(e^{y-\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}} - 1)\nu(dy)\right| \quad \leq \quad \underbrace{\overbrace{\nu\{0 < y < \sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}\}}^{\longrightarrow_{\theta\to 0}0}\,\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}_{=o(\alpha(\theta)\theta^{\frac{1}{2}})},$$

and noticing that $\theta^{\frac{3}{2}} = o(\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}})$, we obtain

$$\mathbb{E}\left(U_\theta e^{Z_\theta} - 1\right)^+ = \mathbb{E}\left(U_\theta - 1\right)^+ + \theta\int(e^y - 1)^+\nu(dy) - \alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}}\sigma\int_{y>0}e^y\nu(dy) + o(\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}}).$$

The left hand side of equation (3.16) becomes

$$\begin{aligned}
&e^{-r\theta}\mathbb{E}\left[\left(e^{\tilde{X}_\theta} - e^{\ln(\frac{K}{b_e(t)})}\right)^+\right] = e^{-r\theta+\theta\mu+\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\mathbb{E}\left[\left(U_\theta e^{Z_\theta} - 1\right)^+\right] \\
&= \quad e^{-r\theta+\theta\mu+\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] \\
&+ \quad \left(1 + \sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta} + o(\alpha(\theta)\sqrt{\theta})\right)\left(\theta\int(e^y - 1)^+\nu(dy) \; -\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}}\sigma\int_{y>0}e^y\nu(dy) + o(\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}})\right) \\
&= \quad e^{-r\theta+\theta\mu+\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\mathbb{E}\left[(U_\theta - 1)^+\right] + \theta\int(e^y - 1)^+\nu(dy) - \nu(\mathbb{R}^+)\sigma\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}} + o(\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}}). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Besides, the right hand side of (3.16)

$$\begin{aligned}\frac{K}{b_e(t)}(1-e^{-r\theta})-(1-e^{-\delta\theta}) &= e^{\sigma\sqrt{\theta}\alpha(\theta)+\mu\theta}r\theta-\delta\theta+O(\theta^2)\\ &= (r-\delta)\theta+r\sigma\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta)+o(\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta))\\ &= \left(\int(e^y-1)^+\nu(dy)\right)\theta+r\sigma\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}}+o(\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta)).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Thanks to (3.17) and (3.18), equation (3.16) becomes,

$$e^{-r\theta+\theta\mu+\sigma\alpha(\theta)\sqrt{\theta}}\mathbb{E}\left[(U_\theta-1)^+\right]=\sigma\left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}}+o(\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta)).$$

Hence,

$$\mathbb{E}\left[(U_\theta-1)^+\right]\sim\sigma\left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\alpha(\theta)\theta^{\frac{3}{2}}.$$

As explained above, thanks to proposition 2.1 in [L], we have

$$\mathbb{E}\left[(U_\theta-1)^+\right]\sim\sigma\sqrt{\theta}\mathbb{E}(B_1-\alpha(\theta))^+\sim\frac{\sigma\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}\alpha^2(\theta)e^{\frac{\alpha^2(\theta)}{2}}}.$$

Thus, we have

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha^2(\theta)e^{\frac{\alpha^2(\theta)}{2}}}\sim\left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\theta\alpha(\theta), \tag{3.19}$$

hence

$$\alpha(\theta)\sim\sqrt{2\ln(\frac{1}{\theta})}. \tag{3.20}$$

iiii) Since $\frac{K-b_e(t)}{K\sigma\sqrt{\theta}}\sim\alpha(\theta)$, we obtain

$$\frac{K-b_e(t)}{\sigma K}\sim\sqrt{2\theta\ln(\frac{1}{\theta})}.$$

□

Lemma 3.4.1 *The critical European put price, $b_e(t)$, is differentiable on $(0,T)$ and for t close to T, we have*

$$b_e'(t)\geq 0.$$

Proof of Lemma 3.4.1:
We recall that F is the function defined by $F(t,x)=P_e(t,x)-(K-x)$, F is $\mathcal{C}^1$ on

$(0,T)\times(0,K)$ and satisfies $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,x)+1>0$. Due to its definition, $b_e(t)$ satisfies the following equation, $P_e(t,b_e(t))-(K-b_e(t))=0$. Then, thanks to the implicit function theorem, $b_e(t)$ is differentiable on $(0,T)$ and

$$b_e'(t)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,b_e(t))}{\frac{\partial F}{\partial x}(t,b_e(t))}=-\frac{\frac{\partial P_e}{\partial t}(t,b_e(t))}{\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,b_e(t))+1},$$

which means that

$$-b_e'(t)\frac{\partial P_e}{\partial t}(t,b_e(t))\leq 0.$$

We will study the sign of $\frac{\partial P_e}{\partial t}(t,b_e(t))$ instead of that of $b_e'(t)$.
The European put price satisfies the following equation

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_e}{\partial t}(t,b_e(t))\\
&= rP_e(t,b_e(t))-\frac{\sigma^2 b_e(t)^2}{2}\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}(t,b_e(t))-(r-\delta)b_e(t)\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,b_e(t))\\
&\quad-\int\left[P_e(t,b_e(t)e^y)-P_e(t,b_e(t))-b_e(t)(e^y-1)\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,b_e(t))\right]\nu(dy)\\
&= r(K-b_e(t))-\frac{\sigma^2 b_e(t)^2}{2}\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}(t,b_e(t))-\left(r-\delta-\int(e^y-1)^+\nu(dy)\right)b_e(t)\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,b_e(t))\\
&\quad-\int_{y>0}\left[P_e(t,b_e(t)e^y)-P_e(t,b_e(t))\right]\nu(dy)\\
&\quad-\int_{y<0}\left[P_e(t,b_e(t)e^y)-P_e(t,b_e(t))-b_e(t)(e^y-1)\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,b_e(t))\right]\nu(dy)\\
&= r(K-b_e(t))-\frac{\sigma^2 b_e(t)^2}{2}\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}(t,b_e(t))-\int_{y>0}P_e(t,b_e(t)e^y)\nu(dy)+P_e(t,b_e(t))\nu(\mathbb{R}^+)\\
&\quad-\int_{y<0}\left[P_e(t,b_e(t)e^y)-P_e(t,b_e(t))-b_e(t)(e^y-1)\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,b_e(t))\right]\nu(dy).
\end{aligned}$$

Since $P_e(t,.)$ is a convex function, we have

$$\int_{y<0}\left[P_e(t,b_e(t)e^y)-P_e(t,b_e(t))-b_e(t)(e^y-1)\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,b_e(t))\right]\nu(dy)\geq 0,$$

so that

$$\frac{\partial P_e}{\partial t}(t,b_e(t))\leq\left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)(K-b_e(t))-\frac{\sigma^2 b_e(t)^2}{2}\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}(t,b_e(t)).$$

Thanks to lemma 3.4.1, we have an equivalent for $(K - b_e(t))$. Now, let's have a look at the estimate of $\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}(t, b_e(t))$ near T. We have

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,x) &= -e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[e^{\tilde{X}_{T-t}}1_{\{K-xe^{\tilde{X}_{T-t}}>0\}}\right] \\ &= -e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{x})} e^u p_{\tilde{X}_{T-t}}(u)du,\end{aligned}$$

where p_X denotes the density of X and $\tilde{X}_{T-t} = \mu(T-t) + \sigma B_{T-t} + Z_{T-t}$. Then, we have

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}(t,x) &= e^{-r(T-t)}\frac{K}{x^2}\, p_{\tilde{X}_{T-t}}\left(\ln(\frac{K}{x})\right) \\ &= e^{-r(T-t)}\frac{K}{x^2}\int p_{\mu(T-t)+\sigma B_{T-t}}\left(\ln(\frac{K}{x}) - y\right)\mathbb{P}_{Z_{T-t}}(dy) \\ &\geq e^{-r(T-t)}\frac{K}{x^2}p_{\mu(T-t)+\sigma B_{T-t}}\left(\ln(\frac{K}{x})\right)\mathbb{P}(Z_{T-t}=0) \\ &\geq e^{-r(T-t)}\frac{K}{x^2}p_{\mu(T-t)+\sigma B_{T-t}}\left(\ln(\frac{K}{x})\right)\mathbb{P}(T_1>\theta) \\ &= e^{-r\theta}\frac{K}{x^2\sigma\sqrt{2\pi\theta}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\ln(K/x)-\mu\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)^2}\mathbb{P}(T_1>\theta)\end{aligned}$$

Then,

$$\frac{\partial P_e}{\partial t}(t,b_e(t)) \leq \left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)(K-b_e(t)) - e^{-r\theta}\frac{\sigma K}{2\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}\mathbb{P}(T_1>\theta).$$

We can easily check that $K - b_e(t) \sim \sigma K\sqrt{\theta}\alpha(\theta) = o(\alpha^3(\theta)\sqrt{\theta})$, and we recall the equivalency (3.19)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha^2(\theta)e^{\frac{\alpha^2(\theta)}{2}}} \sim \left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\theta\alpha(\theta),$$

which yields

$$e^{-r\theta}\frac{\sigma K}{2\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}\mathbb{P}(T_1>\theta) \sim \sigma K\frac{e^{-\frac{\alpha^2(\theta)}{2}}}{2\sqrt{2\pi\theta}} \sim \frac{\sigma K}{2}\left(r+\nu(R^+)\right)\alpha^3(\theta)\sqrt{\theta}.$$

Then, we have, for θ small enough

$$\frac{\partial P_e}{\partial t}(t,b_e(t)) \leq -\frac{\sigma K}{2}\left(r+\nu(R^+)\right)\alpha^3(\theta)\sqrt{\theta} + o(\alpha^3(\theta)\sqrt{\theta}) < 0,$$

which proves that $b_e'(t)$ is a non decreasing function for t close to T.

□

The previous proposition will allows us to dominate $b_e(t) - b(t)$.

Proposition 3.4.2 *According to the model hypothesis, if $d^+ = 0$, then there exists $C > 0$ such that*

$$0 \leq \frac{b_e(t) - b(t)}{\sqrt{T-t}} \leq C.$$

Proof of proposition 3.4.2:

An expansion of $P(t,x)$ around $(t, b(t))$ gives

$$P(t,x) - P(t,b(t)) - (x - b(t))\frac{\partial P}{\partial x}(t,b(t)) = \int_{b(t)}^{x} (u - b(t))\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,du),$$

and thanks to the smooth-fit which is satisfied at $b(t)$, we obtain

$$P(t,x) - (K-x) \;\geq\; \frac{(x-b(t))^2}{2} \inf_{b(t)\leq u\leq x} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u).$$

First, we are going to give, as in Lemma 3.2.2, a lower bound for $\inf_{b(t)\leq u\leq b_e(t)} \frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u)$.

The variational inequality gives, for $u \in (b(t), K)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) \\
&\geq\; rP(t,u) - (r-\delta)u\frac{\partial P}{\partial x}(t,u) - \int\left(P(t,ue^y) - P(t,u) - u(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,u)\right)\nu(dy) \\
&\geq\; r(K-u) - \left(r - \delta - \int_{y>0}(e^y-1)\nu(dy)\right)u\frac{\partial P}{\partial x}(t,u) - \int_{y>0} P(t,ue^y) - P(t,u)\nu(dy) \\
&\quad - \int_{y<0}\left(P(t,ue^y) - (K-u) - u(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,u)\right)\nu(dy).
\end{aligned}$$

Since $P(t,.)$ is non increasing and $d^+ = 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) &\geq r(K-u) - \int_{y<0}\left(P(t,ue^y) - (K-u) - u(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,u)\right)\nu(dy) \\
&\geq\; r(K-u) - \int_{y<0} P(t,ue^y) - (K-ue^y)\nu(dy) - u\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,u) + 1\right)\left(\int_{y<0}(1-e^y)\nu(dy)\right).
\end{aligned}$$

Thanks to the convexity of P, $\frac{\partial P}{\partial x}(t,u)$ is non decreasing. We then have, for all $t<T$,

$$\begin{aligned}\inf_{b(t)\le u\le b_e(t)} \frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) &\geq r(K-b_e(t))-\int_{y<0} P(t,b_e(t)e^y)-(K-b_e(t)e^y)\nu(dy)\\ &\quad -b_e(t)\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,b_e(t))+1\right)\left(\int_{y<0}(1-e^y)\nu(dy)\right)\\ &\geq r(K-b_e(t))-\int_{y<0} P_e(t,b_e(t)e^y)-(K-b_e(t)e^y)\nu(dy)+o(\sqrt{\theta}).\end{aligned}$$

We obtained the last inquality, using the estimate of $e(\theta,x)=O(\theta)$ and $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)+1 = o(\sqrt{\theta})$ (see Lemma 3.2.1).
Since $y<0$, we also have $P(t,b_e(t)e^y)-(K-b_e(t)e^y)\le 0$, thus

$$\inf_{b(t)\le u\le b_e(t)} \frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) \geq r(K-b_e(t))+o(\sqrt{\theta}).$$

Besides, for θ small enough, we have $\sqrt{\theta}\le K-b_e(t)$, then we obtain

$$P(t,b_e(t))-(K-b_e(t)) \geq \frac{[(b_e(t)-b(t))^+]^2}{b_e^2(t)\sigma^2} r(K-b_e(t))(1+o(1)).$$

Furthermore,

$$\begin{aligned}&P(t,b_e(t))-(K-b_e(t)) = e(\theta,b_e(t))\\ &= \mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}\left(rK-\delta S_s^{b_e(t)}-\int_{y>0} P(t+s,S_s^{b_e(t)}e^y)-\left(K-S_s^{b_e(t)}e^y\right)\nu(dy)\right)1_{\{S_s^{b_e(t)}<b(t+s)\}}ds\right\}\\ &\le \mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}\left(rK-\delta S_s^{b_e(t)}-\int_{y>0}\left(S_s^{b_e(t)}e^y-K\right)^+\nu(dy)\right)1_{\{S_s^{b_e(t)}<b(t+s)\}}ds\right\}\end{aligned}$$

Since $\delta = r-\int_{y>0}(e^y-1)\nu(dy)$, we have

$$\begin{aligned}0 &\le \left(rK-\delta x-\int_{y>0}(xe^y-K)^+\nu(dy)\right)1_{\{x<b(t+s)\}}\\ &\le \left(r(K-x)-\int_{y>0}(xe^y-K)^+-(xe^y-x)^+\nu(dy)\right)1_{\{x<K\}}\\ &\le \left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)(K-x)^+,\end{aligned}$$

thus,

$$\begin{aligned} e(\theta, b_e(t)) &\leq \mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}\left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)(K - S_s^{b_e(t)})1_{\{S_s^{b_e(t)}<b(t+s)\}}ds\right\} \\ &\leq \left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}\left(K - S_s^{b_e(t)}\right)^+ ds\right\} \\ &= \left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\int_0^\theta P_e(T-s, b_e(t))ds \\ &= \left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\int_0^\theta P_e(t+u, b_e(t))du. \end{aligned}$$

And as we saw in lemma 3.4.1, near T, $b_e(t)$ is non-decreasing, then $b_e(t) \leq b_e(t+u)$. Due to the non-decreasing of $P_e(t,x) - (K-x)$ on x, we thus have

$$P_e(t+u, b_e(t)) \leq K - b_e(t),$$

In conclusion, we have

$$e(\theta, b_e(t)) \leq \left(r+\nu(\mathbb{R}^+)\right)\theta(K - b_e(t))$$

and

$$e(\theta, b_e(t)) \geq \frac{[b_e(t) - b(t)]^2}{b^2(t)\sigma^2}\bar{\delta}(K - b_e(t)).$$

Which gives the wanted result : There exists a constant C such that

$$\frac{b_e(t) - b(t)}{\sqrt{\theta}} \leq C.$$

□

Now we can easily establish, thanks to the propositions 3.4.2 and 3.4.1, the main Theorem of this section.

Theorem 3.4.1 *According to the model hypothesis, if $d^+ = 0$, then, we have*

$$\lim_{t\to T} \frac{K - b(t)}{\sigma K\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}} = \sqrt{2}$$

Appendix 1 : proofs of lemmas

proof of Lemma 3.2.1 :
According to theorem 3.2.3, we have,

$$P(t,x) = P_e(t,x) + e(T-t,x)$$

and

$$e(\theta,x) = \mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}\Phi(t+s, xS_s^1)1_{\{xS_s^1<b(t+s)\}}ds\right\},$$

with

$$\Phi(t,x) = rK - \delta x - \int_{y>0} P(t,xe^y) - (K-xe^y)\,\nu(dy).$$

Notice that Φ is a continuous function and $\|\Phi'_x\|_\infty \leq \delta + \int_{y>0} e^y\nu(dy)$.
1) It is obvious that $0 \leq e(\theta,x) \leq \theta rK = O(\theta)$, since $0 \leq \Phi(t,x)1_{\{x<b(t+s)\}} \leq rK$.
2) For all random variable X, we denote by p_X its density, we thus have for all fixed $s \in [0,\theta]$,

$$\begin{aligned} p_{-\tilde{X}_s}(x) &= p_{-\mu s-\sigma B_s} * p_{-Z_s}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{(-x+\mu s-u)^2}{2\sigma^2 s}}p_{-Z_s}(u)du \\ &\leq C^{te}\frac{1}{\sqrt{s}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

We can state

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x}(\theta,x) &= \mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}S_s^1\Phi'_x(t+s,xS_s^1)1_{\{xS_s^1<b(t+s)\}}ds\right\} \\ &\quad - \int_0^\theta \frac{\Phi(t+s,b(t+s))}{x}p_{-\tilde{X}_s}\left(\ln(\frac{x}{b(t+s)})\right)ds. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Then, we have

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial e}{\partial x}(\theta,x)\right| &\leq \left|\mathbb{E}\left\{\int_0^\theta e^{-rs}S_s^1\Phi'_x(t+s,xS_s^1)1_{\{xS_s^1<b(t+s)\}}ds\right\}\right| \\ &\quad + \left|\int_0^\theta \frac{\Phi(t+s,b(t+s))}{x}p_{-\tilde{X}_s}\left(\ln(\frac{x}{b(t+s)})\right)ds\right| \\ &\leq \|\Phi'_x\|_\infty\frac{b(T)}{x}\theta + \left|\int_0^\theta \frac{\Phi(t+s,b(t+s))}{x}p_{-\tilde{X}_s}\left(\ln(\frac{x}{b(t+s)})\right)ds\right|. \end{aligned}$$

According to inequality (3.21) , we also have

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\theta \frac{\Phi(t+s,b(t+s))}{x} p_{-\tilde{X}_s}\left(\ln(\frac{x}{b(t+s)})\right) ds\right| \\
&\quad \leq C^{te}\left|\int_0^\theta \frac{\Phi(t+s,b(t+s))}{x\sqrt{s}} ds\right| \\
&\quad = \frac{C^{te}}{x}\theta\left|\int_0^1 \frac{\Phi(t+\theta u,b(t+\theta u))}{\sqrt{\theta u}} du\right| \\
&\quad \leq \frac{C^{te}}{x}\sqrt{\theta}\sup_{t\leq u\leq t+\theta}|\Phi(u,b(u))|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
&\quad \leq \frac{C^{te}}{x}\sqrt{\theta}\sup_{T-\theta\leq u\leq T}|\Phi(u,b(u))|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du.
\end{aligned}$$

However, thanks to the continuity of $b(u)$ and of $\Phi(t,x)$, we have $\lim_{\theta\to 0}\sup_{T-\theta\leq u\leq T}|\Phi(u,b(u))| = |\Phi(T,b(T))| = 0$. Therefore, we conclude that $\left|\frac{\partial e}{\partial x}(\theta,x)\right| = \frac{1}{x}o(\sqrt{\theta})$.
3) Using the previous point, we have $\left|\frac{\partial e}{\partial x}(\theta,x)\right| = o(\sqrt{\theta})$, then for all $x \leq b_e(t)\wedge b(T)$ and θ small enough , we have

$$\begin{aligned}
0 \leq 1+\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) &\leq \left(1+\frac{\partial P_e}{\partial x}(t,x)\right)+o(\sqrt{\theta}) \\
&= 1-\mathbb{E}\left[(e^{X_\theta})1_{\{X_\theta<\ln\frac{K}{x}\}}\right]+o(\sqrt{\theta}) \\
&\leq 1-\mathbb{E}\left[(e^{X_\theta})1_{\{X_\theta<\ln\frac{K}{b_e(t)\wedge b(T)}\}}\right]+o(\sqrt{\theta}).
\end{aligned}$$

If $b(T)=K$, then for $x\leq b_e(t)$,

$$1-\mathbb{E}\left[(e^{X_\theta})1_{\{X_\theta<\ln\frac{K}{b_e(t)\wedge b(T)}\}}\right] = \mathbb{P}(B_\theta\geq\sqrt{\theta}\alpha(\theta))-\mathbb{E}\left(\sigma B_\theta 1_{\{B_\theta<\sqrt{\theta}\alpha(\theta)\}}\right)+o(\sqrt{\theta}).$$

Since $\alpha(\theta)\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow}\infty$, we have

$$\left|\mathbb{E}\left(\sigma B_\theta 1_{\{B_\theta<\sqrt{\theta}\alpha(\theta)\}}\right)\right| = \sigma\sqrt{\theta}\mathbb{E}\left(B_1 1_{\{B_1<\alpha(\theta)\}}\right) = o(\sqrt{\theta}),$$

and using equivalencies (3.19) and (3.20), we also have

$$\mathbb{P}\left(B_1\geq\alpha(\theta)\right)\leq\frac{e^{-\frac{\alpha^2(\theta)}{2}}}{\alpha(\theta)}\leq C\theta\alpha^2(\theta) = O(\theta|\ln\theta|) = o(\sqrt{\theta}).$$

If $b(T) < K$, then for θ small enough $b(T) < b_e(t)$ and

$$\begin{aligned}
&1 - \mathbb{E}\left[(e^{X_\theta})1_{\{X_\theta < \ln\left(\frac{K}{b(T)}\right)\}}\right] \\
&= \mathbb{P}\left(B_1 \geq \frac{1}{\sqrt{\theta}}\ln(\frac{K}{b(T)})\right) + \sigma\sqrt{\theta}\mathbb{E}\left(B_1 1_{\left\{B_1 \geq \frac{\ln\frac{K}{b(T)}}{\sqrt{\theta}}\right\}}\right) + o(\sqrt{\theta}) \\
&\leq \sqrt{\theta}\left(\frac{1}{\ln(\frac{K}{b(T)})} + \sigma\right)\frac{e^{-\frac{1}{2\theta}\ln^2(\frac{K}{b(T)})}}{\sqrt{2\pi}} + o(\sqrt{\theta}) \\
&= o(\sqrt{\theta}).
\end{aligned}$$

□

proof of lemma 3.2.2 :
Let be $x \in (b(t), b(T))$, then the variational inequality gives, for almost $u \in (b(t), x)$,

$$\begin{aligned}
\frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) &\geq rP(t,u) - (r-\delta)u\frac{\partial P}{\partial x}(t,u) \\
&\quad - \int\left(P(t,ue^y) - P(t,u) - u(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,u)\right)\nu(dy).
\end{aligned}$$

Notice that $P(t,u) \geq K - u$, thus

$$\begin{aligned}
\frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) &\geq r(K-u) + (r-\delta)\,u \\
&\quad - \int\left(P(t,ue^y) - (K-u) + u(e^y-1)\right)\nu(dy) \\
&\quad -u\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,u) + 1\right)\left((r-\delta) - \int(e^y-1)\nu(dy)\right) \qquad (3.23) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.24)
\end{aligned}$$

And thanks to Lemma 3.2.1, we also have, for all $b(0) \leq u \leq x \leq b_e(t) \wedge b(T)$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,u) + 1 = o(\sqrt{\theta}),$$

independently of u, therefore,

$$\frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) \geq rK - \delta u - \int\left(P(t,ue^y) - (K - ue^y)\right)\nu(dy) + o(\sqrt{\theta}) \qquad (3.25)$$

As the right hand side of equality (3.25) is non increasing in u, we obtain

$$\inf_{b(t)\le u\le x}\frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) \;\geq\; rK-\delta x-\int\left(P(t,xe^y)-(K-xe^y)\right)\nu(dy)+o(\sqrt{\theta}). \tag{3.26}$$

Notice that

$$\begin{aligned}\int P(t,xe^y)\nu(dy) &= P_e(t,xe^y)+e(\theta,xe^y)\\ &= \int \mathbb{E}(K-xe^ye^{X_\theta})^+\nu(dy)+o(\sqrt{\theta})\\ &= \int \mathbb{E}\left(K-xe^y(1+\sigma B_\theta)\right)^+\nu(dy)+o(\sqrt{\theta})\\ &= \int \mathbb{E}\left((K-xe^y)-xe^y\sigma B_\theta\right)^+\nu(dy)+o(\sqrt{\theta}).\end{aligned}$$

Let's consider the integral $\int P(t,xe^y)\nu(dy)$ over these sets $\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}$, $\{\ln(\frac{K}{b(T)})<y\}$ and $\{y=\ln(\frac{K}{b(T)})\}$. Then, on the set $\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}$, we have

$$\begin{aligned}&\int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}P(t,xe^y)\nu(dy)=\int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}\mathbb{E}\left(K-xe^y)-xe^y\sigma B_\theta\right)^+\nu(dy)+o(\sqrt{\theta})\\ &= \int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}(K-xe^y)\mathbb{P}(xe^y\sigma B_\theta<(K-xe^y))\nu(dy)\\ &\quad-\int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}xe^y\sigma\mathbb{E}\left(B_\theta 1_{\{xe^y\sigma B_\theta<(K-xe^y)\}}\right)\nu(dy)+o(\sqrt{\theta})\\ &\le \int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}(K-xe^y)\nu(dy)-x\sigma\sqrt{\theta}\int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}e^y\mathbb{E}\left(B_1 1_{\{B_1<\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{x}e^{-y}-1)\}}\right)\nu(dy)+o(\sqrt{\theta}).\end{aligned}$$

For all $y<\ln(\frac{K}{b(T)})$, we have $\frac{K}{x}e^{-y}-1>\frac{K}{b(T)}e^{-y}-1>0$, therefore

$$\begin{aligned}0\le -\mathbb{E}\left(B_1 1_{\{B_1<\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{x}e^{-y}-1)\}}\right)&=\mathbb{E}\left(B_1 1_{\{B_1\ge\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{x}e^{-y}-1)\}}\right)\\ &\le \mathbb{E}\left(B_1 1_{\{B_1\ge\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{b(T)}e^{-y}-1)\}}\right)\longrightarrow_{\theta\to 0}0.\end{aligned}$$

By the dominated convergence we obtain,

$$\int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}P(t,xe^y)\nu(dy) \;\le\; \int_{\{y<\ln(\frac{K}{b(T)})\}}(K-xe^y)\nu(dy)+o(\sqrt{\theta}). \tag{3.27}$$

On the set $\{y > \ln(\frac{K}{b(T)})\}$, we have $K < b(T)e^y$, therefore

$$\begin{aligned}
\int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} P(t, xe^y)\nu(dy) &= \int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} \mathbb{E}\left((K - xe^y) - xe^y\sigma B_\theta\right)^+ \nu(dy) + o(\sqrt{\theta}) \\
&\leq \int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} \mathbb{E}\left[\left(b(T)e^y - xe^y - xe^y\sigma\sqrt{\theta}B_1\right) 1_{\{xe^y\sigma\sqrt{\theta}B_1<(K-xe^y)\}}\right] \nu(dy) + o(\sqrt{\theta}) \\
&= (b(T) - x)\int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} e^y \mathbb{P}\left(B_1 < \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left(\frac{K}{x}e^{-y} - 1\right)\right)\nu(dy) \\
&\quad -\sqrt{\theta}x\int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} e^y\sigma\mathbb{E}\left(B_1 1_{\{B_1<\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{x}e^{-y}-1)\}}\right)\nu(dy) + o(\sqrt{\theta})
\end{aligned}$$

Notice that for all $y > \ln(\frac{K}{b(T)})$, we have $\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left(\frac{K}{x}e^{-y} - 1\right) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{b(t)}e^{-y} - 1) \to -\infty$, thus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1 < \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{x}e^{-y} - 1)) &\leq \mathbb{P}(B_1 < \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{b(t)}e^{-y} - 1)) \\
&\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|B_1|1_{\{B_1<\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{x}e^{-y}-1)\}}\right) &\leq \mathbb{E}\left(|B_1|1_{\{B_1<\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{b(t)}e^{-y}-1)\}}\right) \\
&\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Therefore, by dominated convergence, we obtain

$$\int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} e^y\mathbb{P}(B_1 < \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{b(t)}e^{-y} - 1))\nu(dy) \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

and

$$-\sqrt{\theta}x\int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} e^y\sigma\mathbb{E}\left(B_1 1_{\{xe^y\sigma\sqrt{\theta}B_1<(K-xe^y)\}}\right)\nu(dy) = o(\sqrt{\theta})$$

Consequently, if we denote by $\epsilon(\theta) = \int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} e^y\mathbb{P}(B_1 < \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}(\frac{K}{b(t)}e^{-y} - 1))\nu(dy)$, we obtain

$$\int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} P(t, xe^y)\nu(dy) \leq (b(T) - x)\epsilon(\theta) + o(\sqrt{\theta}), \tag{3.28}$$

with $\epsilon(\theta) \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Finally, on the set $\{y = \ln(\frac{K}{b(T)})\}$, we have

$$\begin{aligned}
\int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} P(t,xe^y)\nu(dy) &= \int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} \mathbb{E}\left((K-xe^y) - xe^y\sigma B_\theta\right)^+ \nu(dy) + o(\sqrt{\theta}) \\
&= \int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} (K-xe^y)\nu(dy) + \int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} \mathbb{E}\left(xe^y\sigma B_\theta - (K-xe^y)\right)^+ \nu(dy) + o(\sqrt{\theta}) \\
&= \int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} (K-xe^y)\nu(dy) + \int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} xe^y \mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - (\frac{K}{x}e^{-y} - 1)\right)^+ \nu(dy) \\
&= \int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} (K-xe^y)\nu(dy) + \frac{xK}{b(T)}\nu\left\{\ln\left(\frac{K}{b(T)}\right)\right\} \mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - \left(\frac{b(T)}{x} - 1\right)\right)^+ \\
&\leq \int_{\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}} (K-xe^y)\nu(dy) + K\nu\left\{\ln\left(\frac{K}{b(T)}\right)\right\} \mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - \ln\left(\frac{b(T)}{x}\right)\right)^+
\end{aligned}$$

We have thus proved that

$$\begin{aligned}
\int P(t,xe^y)\nu(dy) \quad \leq \quad & \int_{\{y\leq \ln(\frac{K}{b(T)})\}} (K-xe^y)\nu(dy) + K\nu\left\{\ln\left(\frac{K}{b(T)}\right)\right\} \mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - \ln\left(\frac{b(T)}{x}\right)\right)^+ \\
& + \left(b(T)-x\right)\epsilon(\theta) + o(\sqrt{\theta}),
\end{aligned}$$

Coming back to inequality (3.26), we obtain

$$\begin{aligned}
&\int P(t,xe^y) - (K-xe^y)\nu(dy) \\
&\quad \leq \quad -\int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)})\}} (K-xe^y)\nu(dy) + K\nu\left\{\ln\left(\frac{K}{b(T)}\right)\right\} \mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - \ln\left(\frac{b(T)}{x}\right)\right)^+ \\
&\qquad + \left(b(T)-x\right)\epsilon(\theta) + o(\sqrt{\theta}).
\end{aligned}$$

Finally, since $rK = \delta b(T) + \int (b(t)e^y - K)^+\nu(y)$, we have

$$\begin{aligned}
&\inf_{b(t)\leq u\leq x} \frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) \\
&\geq \quad rK - \delta x - \int \left(P(t,xe^y) - (K-xe^y)\right)\nu(dy) + o(\sqrt{\theta}) \\
&\geq \left(b(T)-x\right)\left(\delta + \int_{\{y>\ln\frac{K}{b(T)}\}} e^y\nu(dy) + \epsilon(\theta)\right) - K\nu\left\{\ln\frac{K}{b(T)}\right\} \mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - \ln(\frac{b(T)}{x})\right)^+ + o(\sqrt{\theta}).
\end{aligned}$$

We note $\alpha = \frac{\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}}{\bar{\delta}} \frac{K}{b(T)}$ and $\bar{\delta} = \delta + \int_{\{y>\ln(\frac{K}{b(T)}\}} e^y \nu(dy)$, we then have for all u and all x such that $b(t) \leq u \leq x < b(T)$

$$\begin{aligned}
&\inf_{b(t)\leq u\leq x} \frac{u^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,u) \\
&\geq \quad b(T)\bar{\delta}\left(\frac{(b(T)-x)}{b(T)} - \alpha\mathbb{E}\left(\sigma B_\theta - \ln(\frac{b(T)}{x})\right)^+\right) - (b(T)-x)\,\epsilon(\theta) + o(\sqrt{\theta}).
\end{aligned}$$

□

Appendix 2 : A study of $v_{\alpha,\beta}$

***Lemma** 3.3.3 : There exists $y_{\alpha,\beta} \in \left(0, (\alpha + 1 + \lambda\beta(1+e^\lambda)\right)$ such that such that*

$$\forall y < -y_{\alpha,\beta}, \quad v_{\alpha,\beta}(y) = 0.$$

$$y_{\alpha,\beta} = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid v_{\alpha,\beta}(x) > 0\}.$$

proof of Lemma 3.3.3 :
We have

$$v_{\alpha,\beta}(y) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \left(I_0(\tau) + I_1(\tau)\right),$$

with

$$I_0(\tau) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau} 1_{\{\hat{N}_\tau=0\}} \int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds\right),$$

and

$$I_1(\tau) = \beta\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau} 1_{\{\hat{N}_\tau=1\}} \left((y+B_\tau)^+ - (y+B_{\hat{T}_1})^+\right)\right).$$

we will study $I_0(\tau)$ and $I_1(\tau)$. First of all, we note that the process $(M_t^0)_{t\geq 0}$ defined by $M_t^0 = e^{\lambda t} 1_{\{\hat{N}_t=0\}}$ is a non negative martingale with $M_0^0 = 1$. Under the probability $\mathbb{P}^0$ with density M_t^0 on $\mathcal{F}_t$, it is straightforward to check that $(B)_{t\geq 0}$ remains a $\mathbb{F}$-

Brownian motion. We have if $y \leq 0$,

$$\begin{aligned} I_0(\tau) &= \mathbb{E}^0\left(\int_0^\tau f_\alpha(y+B_s)ds\right) \\ &= \mathbb{E}^0\left(y\tau + \int_0^\tau B_s ds + \alpha\int_0^\tau (y+B_s)^+ ds\right) \\ &\leq y\mathbb{E}^0(\tau) + (1+\alpha)\mathbb{E}^0\left(\int_0^\tau B_s^+ ds\right) \\ &\leq y\mathbb{E}^0(\tau) + (\alpha+1)\mathbb{E}^0\left(\int_0^\tau \mathbb{E}^0\left(B_\tau^+ \mid \mathcal{F}_s\right) ds\right). \end{aligned}$$

Notice that, for $\tau \in \mathcal{T}_{0,1}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0\left(\int_0^\tau \mathbb{E}^0\left(B_\tau^+ \mid \mathcal{F}_s\right) ds\right) &= \mathbb{E}^0\left(\int_0^1 1_{\{\tau>s\}}\mathbb{E}^0\left(B_\tau^+ \mid \mathcal{F}_s\right) ds\right) \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}^0\left(1_{\{\tau>s\}}\mathbb{E}^0\left(B_\tau^+ \mid \mathcal{F}_s\right)\right) ds \\ &= \mathbb{E}^0\left(\tau B_\tau^+\right) \\ &\leq \mathbb{E}^0\left(\frac{\tau^2 + B_\tau^2}{2}\right) \leq \mathbb{E}^0(\tau), \end{aligned}$$

where, we used $0 \leq \tau \leq 1$, for the last inequality. We then have

$$I_0(\tau) \leq (y+\alpha+1)\mathbb{E}^0(\tau).$$

For the study of $I_1(\tau)$, let us introduce the martingale $(M_t^1)_{0\leq t\leq 1}$ defined by

$$\begin{aligned} M_t^1 &= \mathbb{E}\left(e^\lambda 1_{\{\hat{N}_1=1\}} \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^\lambda 1_{\{\hat{N}_1=1,\hat{N}_t=0\}} \mid \mathcal{F}_t\right) + \mathbb{E}\left(e^\lambda 1_{\{\hat{N}_1=1,\hat{N}_t=1\}} \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= 1_{\{\hat{N}_t=0\}} e^\lambda \mathbb{P}(\hat{N}_1 - \hat{N}_t = 1) + 1_{\{\hat{N}_t=1\}} e^\lambda \mathbb{P}(\hat{N}_1 - \hat{N}_t = 0) \\ &= 1_{\{\hat{N}_t=0\}}\lambda(1-t)e^{\lambda t} + 1_{\{\hat{N}_t=1\}} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Under the probability $\mathbb{P}^1$ with density M_t^1/λ on $\mathcal{F}_t$, it is straightforward to check that $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ remains a $\mathbb{F}$-Brownian motion. We have for $y < 0$,

$$\begin{aligned} I_1(\tau) &= \lambda\beta\mathbb{E}^1\left((y+B_\tau)^+ - (y+B_{\hat{T}_1\wedge\tau})^+\right) \\ &\leq \lambda\beta\mathbb{E}^1\left((y+B_\tau)^+\right) \\ &\leq \lambda\beta\mathbb{E}^1\left(B_\tau 1_{\{B_\tau > -y\}}\right) \\ &\leq \lambda\beta\mathbb{E}^1\left(B_\tau^2/|y|\right) = \lambda\beta\mathbb{E}^1(\tau)/|y|. \end{aligned}$$

Using the two upper bound of $I_0(\tau)$ and $I_1(\tau)$, we obtain

$$\begin{aligned} v_{\alpha,\beta}(y) &\leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \left((y+\alpha+1)\mathbb{E}^0(\tau) + \frac{\lambda\beta}{|y|}\mathbb{E}^1(\tau)\right) \\ &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left((y+\alpha+1)\tau M^0(\tau) + \frac{\beta}{|y|}\tau M^1(\tau)\right) \\ &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left((y+\alpha+1)\tau e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{N}_\tau=0\}} + \frac{\beta}{|y|}\tau\left(1_{\{\hat{N}_\tau=0\}}\lambda(1-\tau)e^{\lambda\tau} + 1_{\{\hat{N}_\tau=1\}}e^{\lambda\tau}\right)\right) \\ &\leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left(f(\tau,\hat{N}_\tau)\right), \end{aligned}$$

with

$$f(t,x) = 1_{\{x=0\}}te^{\lambda t}\left(y+\alpha+1+\lambda\frac{\beta}{|y|}\right) + 1_{\{x=1\}}\beta te^{\lambda t}/|y|.$$

Notice that

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\left(f(\tau,\hat{N}_\tau)\right) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}(\hat{N})} \mathbb{E}\left(f(\tau,\hat{N}_\tau)\right),$$

where $\mathcal{T}_{0,1}(\hat{N})$ denotes the set of the stopping times of the natural completed filtration of the process $(\hat{N}_t)_{t\geq 0}$, with values in $[0,1]$.

Then, if $\tau \in \mathcal{T}_{0,1}(\hat{N})$, there exists , thanks to Lemma 3.4.2, $t_0 \in [0,1]$, such that

$$\tau \wedge \hat{T}_1 = t_0 \wedge \hat{T}_1.$$

we then have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\tau e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{N}_\tau=0\}}\right) &= \mathbb{E}\left(\tau e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{T}_1>\tau\}}\right) \\ &= t_0e^{\lambda t_0}\mathbb{P}(\hat{T}_1>\tau) \\ &= t_0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\tau e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{N}_\tau=1\}}\right) &\leq \mathbb{E}\left(\tau e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{T}_1\leq\tau\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\tau e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{T}_1\leq t_0\}}\right) \\ &\leq e^{\lambda}\mathbb{P}(\hat{T}_1\leq t_0) \\ &= e^{\lambda}(1-e^{-\lambda t_0}) \leq \lambda e^{\lambda}t_0. \end{aligned}$$

we deduce that

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}(\hat{N})}\mathbb{E}\left(f(\tau,\hat{N}_\tau)\right) \leq \sup_{0\leq t_0\leq 1}\left(t_0\left(y+\alpha+1+\lambda\frac{\beta(1+e^\lambda)}{|y|}\right)\right).$$

The right hand side of this equation will be equal to 0 if

$$y+\alpha+1+\lambda\frac{\beta(1+e^\lambda)}{|y|}\leq 0,$$

and particularly, if $y\leq -\left(\alpha+1+\lambda\beta(1+e^\lambda)\right)$, then

$$-y_{\alpha,\beta}\geq -\left(\alpha+1+\lambda\beta(1+e^\lambda)\right).$$

To prove $-y_{\alpha,\beta}<0$, we consider $y=0$. Since for all stopping time τ,

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{N}_\tau=0\}}\int_0^\tau\alpha(y+B_s)^+ds+\beta e^{\lambda\tau}1_{\{\hat{N}_\tau=1\}}\left((y+B_\tau)^+-(y+B_{\hat{T}_1})^+\right)\right)\geq 0.$$

we have

$$v_{\alpha,\beta}(0)\geq\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}}\mathbb{E}\int_0^\tau B_sds>0,$$

the last inequality follows from Lemma 2.2.1. □

Lemma 3.4.2 *Let $N=(N_t)_{t\geq 0}$ a homogenous Poisson process with intensity λ, and T_1 its first jump time. if τ is a stopping time of the natural completed filtration of N such that $\tau\leq T_1$ a.s., then, $\tau=T_1$ a.s., or there exists $t_0\geq 0$, such that $\tau=t_0\wedge T_1$ a.s.*

proof We denote by $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ the natural completed filtration of N. First of all, notice that for all $t\geq 0$ and $A\in\mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{P}(A\mid N_t=0)\in\{0,1\}.$$

Indeed, the A having this property form a sub σ-algebra of $\mathcal{F}_t$ which contains the events of the form $\{N_s=n\}$, with $0\leq s\leq t$ and $n\in\mathbb{N}$.

Now, let τ be a $\mathbb{F}$-stopping time. We have for all $t\geq 0$, $\mathbb{P}(\tau>t\mid N_t=0)\in\{0,1\}$. We set

$$I=\{t\in[0,+\infty[\mid\mathbb{P}(\tau>t\mid N_t=0)=0\}.$$

Notice that $t \in I$ if and only if $\mathbb{P}(\tau > t, T_1 > t) = 0$, or

$$t \in I \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\tau \wedge T_1 \leq t\right) = 1.$$

If $\tau \leq T_1$ a.s. and if $\mathbb{P}(\tau < T_1) > 0$, there exists $s > 0$ (rational number) such that $\mathbb{P}(\tau \leq s, s < T_1) > 0$, hence $\mathbb{P}(\tau \leq s \mid N_s = 0) > 0$, and $\mathbb{P}(\tau > s \mid N_s = 0) = 0$. We deduce that I is non empty and we can write

$$I = [t_0, +\infty[, \text{ avec } t_0 = \inf\{t \geq 0 \mid \mathbb{P}(\tau > t \mid N_t = 0) = 0\}.$$

We then have $\tau \wedge T_1 \leq t_0$ a.s., hence $\tau \leq t_0 \wedge T_1$. Moreover, for $s < t_0$, we have $\mathbb{P}(\tau > s \mid N_s = 0) = 1$ and $\mathbb{P}(\tau \leq s \mid N_s = 0) = 0$, hence $\mathbb{P}(\tau \leq s, s < T_1) = 0$.Therefore, $\mathbb{P}(\tau < t_0 \wedge T_1) = 0$ and consequently $\tau = t_0 \wedge T_1$ a.p. □

Lemma *3.3.4 : For all $x > y_{\alpha,\beta}$, we have*

$$C(x) > 0.$$

.

proof We have $v_{\alpha,\beta}(-y_{\alpha,\beta}) = 0$, considering the stopping time $\tau = 1$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda} 1_{\{\hat{N}_1 = 0\}} \int_0^1 f_\alpha(B_s - y_{\alpha,\beta})ds + \beta e^{\lambda} 1_{\{\hat{N}_1 = 1\}} \left((B_1 - y_{\alpha,\beta})^+\right) - (B_{\hat{T}_1} - y_{\alpha,\beta})^+\right] \leq 0.$$

However, we have, using the independence between $\hat{N}$ and B,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\lambda} 1_{\{\hat{N}_1 = 0\}} \int_0^1 f_\alpha(B_s - y_{\alpha,\beta})ds\right] &= e^{\lambda}\mathbb{P}(\hat{N}_1 = 0)\left(-y_{\alpha,\beta} + \alpha\mathbb{E}\int_0^1 (B_s - y_{\alpha,\beta})^+ ds\right) \\
&= -y_{\alpha,\beta} + \alpha\mathbb{E}\int_0^1 (B_s - y_{\alpha,\beta})^+ ds. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\beta e^{\lambda} 1_{\{\hat{N}_1 = 1\}} \left((B_1 - y_{\alpha,\beta})^+\right) - (B_{\hat{T}_1} - y_{\alpha,\beta})^+\right] \\
&= \beta e^{\lambda}\mathbb{P}(\hat{N}_1 = 1)\left[\mathbb{E}(B_1 - y_{\alpha,\beta})^+ - \mathbb{E}\left((B_{\hat{T}_1} - y_{\alpha,\beta})^+ | \hat{N}_1 = 1\right)\right] \\
&= \beta\lambda\left[\mathbb{E}(B_1 - y_{\alpha,\beta})^+ - \mathbb{E}\left((B_{\hat{T}_1} - y_{\alpha,\beta})^+ | \hat{T}_1 \leq 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Noticing that $\lambda\beta = \alpha$ and that conditionally to $\{\hat{T}_1 \leq 1\}$, $\hat{T}_1$ is uniformly distributed on $[0, 1]$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\beta e^{\lambda} 1_{\{\hat{N}_1 = 1\}} \left((B_1 - y_{\alpha,\beta})^+\right) - (B_{\hat{T}_1} - y_{\alpha,\beta})^+\right] \\
&= \alpha\left[\mathbb{E}(B_1 - y_{\alpha,\beta})^+ - \mathbb{E}\left(\int_0^1 (B_s - y_{\alpha,\beta})^+ ds\right)\right]. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Combining (3.29) and (3.30), we have

$$-y_{\alpha,\beta} + \alpha\mathbb{E}(B_1 - y_{\alpha,\beta})^+ = -C(y_{\alpha,\beta}) \leq 0$$

To conclude the proof, we use the strict increasing of C, hence for all $x > y_{\alpha,\beta}$, we have

$$C(x) > C(y_{\alpha,\beta}) \geq 0.$$

□

Chapitre 4

Comportement du prix critique dans un cadre α-stable tempéré

On modélise le prix d'un actif par une exponentielle de Lévy sous la forme

$$S_t = S_0 e^{\tilde{X}_t},$$

où $\tilde{X}_t$ est un processus de Lévy dont $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle. On note r le taux d'intérêt sans risque, δ le taux de dividende. Sous une probabilité risque neutre, le prix du PUT américain de maturité T et de prix d'exercice K est alors, donné par $P(t, S_t)$ où la fonction P est définie par

$$P(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - xe^{X_\tau})^+],$$

avec $\mathcal{T}_{0,T-t}$ l'ensemble des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêts à valeurs dans $[0, T-t]$. On définit le prix critique de cette option par $b(t) = \inf\{x \geq 0; P(t,x) > K - x\}$, on notera aussi $d^+ = r - \delta - \int (e^y - 1)^+ \nu(dy)$.
Il est déja établi, que dans des cadres où le terme de diffusion est non nul, le prix critique changeait de comportement selon que l'on ait suffisamment de régularité à la limite du prix critique ($\lim_T b(t) < K$) ou pas ($\lim_T b(t) = K$)), c'est à dire selon le signe de d^+ (voir *chapitre 3* et [29, 23] pour des modèles Jump-diffusion et [1, 19] et [25] pour les modèles Black Scholes). Ainsi, dans le modèle Black Scholes, quand $d^+ > 0$ ([29, 23] et [1, 19]), alors $b(t) \longrightarrow_{t\to T} K$ et

$$\lim_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{b(T)\sqrt{|(T-t)\ln(T-t)|}} = C_0^{te} > 0$$

et si $d^+ < 0$ (*chapitre 3* et [25]), alors $b(t) \longrightarrow_{t\to T} \frac{r}{\delta}K < K$ et

$$\lim_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{b(T)\sqrt{T-t}} = C_{\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\}} > 0,$$

avec $C_{\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\}}$ dépendant de $\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\}$ et ν est la mesure de Lévy du processus utilisé dans la modélisation.
D.Lamberton et M.Mikou ont étudié la vitesse de convergence du prix critique $b(t)$, quand $d^+ > 0$, pour des modèles régis par certains processus de Lévy sans terme de diffusion ($\sigma = 0$) et ayant un comportement, aux abords de l'origine, proche (dans un sens qu'on précisera) d'un processus α-stable avec $\alpha \in]1, 2]$. Ils ont établi dans ce cas[23], que si $d^+ > 0$, alors

$$\lim_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{b(T)(T-t)^{\frac{1}{\alpha}} \left|\ln(T-t)\right|^{1-\frac{1}{\alpha}}} = C_3^{te} > 0.$$

Nous essayerons dans ce papier d'étudier la vitesse de convergence de $b(t)$ dans le cas où $d^+ < 0$.

4.1 Hypothèses et processus de Lévy limite

On se place dans le cadre du modèle exponentiel de Lévy :

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t+X_t},$$

où le processus X_t est un processus de Lévy de fonction caractéristique donnée par

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX_t}\right) = \exp\left(t\int \left(e^{iuy} - 1 - iu(e^y - 1)\right)\nu(dy)\right),$$

avec les hypothèses suivantes sur la mesure de Lévy ν.

1. $\int_{]0,+\infty[} e^y\nu(dy) < \infty$ et il existe $\beta_0 \in]1, \alpha[$ tel que $\int_{]-\infty,1[} |y|^{\beta_0}\nu(dy) < \infty$.
2. $d^+ = r - \delta - \int (e^y - 1)_+\nu(dy) < 0$.
3. Pour un réel $\chi < 0$, on a

$$1_{\{\chi<y<0\}}\nu(dy) = \frac{\eta(y)}{|y|^{1+\alpha}} 1_{\{\chi<y<0\}}dy,$$

où $1 < \alpha < 2$ et η est une fonction borélienne positive sur $[\chi, 0[$, vérifiant

$$\lim_{y\to 0} \eta(y) = \eta_0 > 0.$$

4.2 Propriété du modèle

Dans cette cette section nous présentons quelques propriétés que confèrent nos hypothèses au processus X.
On note X_u^θ le processus défini par $X_u^\theta = \frac{X_{\theta u}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}$, on a alors, la convergence en loi du processus X_u^θ vers un processus α-stable (voir [31, 32])
Proposition 4.2.1 *Sous ces hypothèses, le processus normalisé* $(X_{\theta t}/\theta^{1/\alpha})_{t\geq 0}$ *converge en loi quand* θ *tend vers* 0 *vers un processus de Lévy* X^0 *dont la fonction caractéristique est donnée par*

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX_t^0}\right) = \exp\left(t\eta_0 \int_0^{+\infty} \left(e^{-iuz} - 1 + iuz\right) \frac{dz}{z^{1+\alpha}}\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

On pose V le processus défini par

$$V_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s 1_{\{\Delta X_s \geq 0\}} - t\int_{\mathbb{R}^+} (e^y - 1)\nu(dy),$$

et $\bar{X}$ le processus défini par

$$\bar{X}_t = X_t - V_t.$$

Selon les hypothèses du modèle (en particulier $\int_{y>0} e^y \nu(dy) < \infty$) V est un processus à variation finie.

On a aussi, une estimation de la transformée de Laplace de $\bar{X}$,
Lemme 4.2.1 *Soit* $(\bar{X}_t)$ *un processus de Lévy défini plus haut. Pour tout* $p > 0$ *et tout* $t > 0$, *on a*

$$\mathbb{E}(e^{pX_t}) = e^{t\phi(p)},$$

avec $\phi(p) = \int_{-\infty}^0 e^{yp} - 1 - p(e^y - 1)\nu(dy)$.
Alors, pour tout $a \in [a_0, 0[$ *et tout* $p > 0$ *on a*

$$p^\alpha H_a(p) - \nu_a - p\tilde{\nu}_a \leq \phi(p) \leq p^\alpha H_a(p) + p\nu_a,$$

où $\nu_a = \nu(]-\infty, a_0])$, $\tilde{\nu}_a = \int_0^{|a|}(e^{-y} - 1 + y)\nu(dy)$
et $H_a(p) = \int_0^{|a|p}(e^{-y} - 1 + y)\frac{\eta(-y/p)}{y^{\alpha+1}}dy$

Voir ([23] *lemme 7.3*) pour une démonstration de ce lemme.

Lemme 4.2.2 *Soit $(\bar{X}_t)$ le processus défini plus haut et soient deux réels $\theta > 0$ et $K > 0$ et τ_K un temps d'arrêt défini par*

$$\bar{\tau}_K = \inf\{t \geq 0; \bar{X}_t \geq K\}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(\bar{\tau}_K \leq \theta) = o(\theta^n).$$

Proposition 4.2.2 *Soit Y_t un processus de Lévy vérifiant, pour tout $u \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{iuY_t}) = e^{t\phi_Y(u)}$ où*

$$\phi_Y(u) = \int_\chi^0 (e^{iyu} - 1 - iuy)\eta(y)\frac{dy}{|y|^{\alpha+1}}$$

avec $1 < \alpha < 2$ et η une fonction positive bornée qui vérifie $\lim_{x\to 0^-} \eta(x) = \lambda > 0$. Alors pour tout $1 < \beta < \alpha$, il existe une constante positive D tel que

$$\mathbb{E}(|Y_t|^\beta) \leq Dt^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Corollaire 4.2.1 *Soit X un processus de Lévy vérifiant les hypothèses du modèle. Alors, on a, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, il existe une constante positive D telle que pour t assez petit*

$$\mathbb{E}(|X_t|^\beta) \leq Dt^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

preuve Grâce à la décomposition d'Ito, on peut écrire, sous les hypothèses de notre modèle, $X_t = Y_t + Z_t$, où le processus Y vérifie les hypothèse de la proposition 4.2.2 et Z un processus à variation finie.
On a, pour tout $1 < \beta < \beta_0$,

$$\mathbb{E}|X_t|^\beta = \mathbb{E}|Y_t + Z_t|^\beta \leq 2^\beta \left(\mathbb{E}|X_t|^\beta + \mathbb{E}|Z_t|^\beta\right) \leq D_1 t^{\frac{\beta}{\alpha}} + 2^\beta \mathbb{E}|Z_t|^\beta$$

Or, par hypothèse, il existe $\beta_0 > 1$ tel que $\int_{]-a_0,0[^c} |x|^{\beta_0}\nu(dx) < \infty$, donc pour tout $t \leq 1$ et tout $\beta < \beta_0$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{Z_t}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\beta\right] \leq A_{0,\beta_0} t^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \leq A_{0,\beta_0}$$

□

On finit cette section par une estimation, fort utile, du temps local de $\bar{X}$.

Lemme 4.2.3 *Pour tout nombre réel a et pour tout $t > 0$, on a*

$$0 \leq \mathbb{E}(a - \bar{X}_t)_+ - a_+ \leq t^{\frac{1}{\alpha}} \bar{\rho}(t, a),$$

avec $\bar{\rho}$ une fonction positive bornée qui vérifie pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{t \to 0} \sup_{|x| > \epsilon} \bar{\rho}(t, x) = 0$$

preuve Si $a \leq 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(a - \bar{X}_t)_+ &\leq -\mathbb{E}(-\bar{X}_t 1_{\{\bar{X}_t < a\}})_+ \\
&\leq t^{\frac{1}{\alpha}} \left(\mathbb{E} \left| \frac{\bar{X}_t}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_0}} \mathbb{P}^{1 - \frac{1}{\beta_0}}(\bar{X}_t < a) 1_{\{a<0\}} \\
&\leq C t^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{P}^{1 - \frac{1}{\beta_0}}(\bar{X}_t < a).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est due au corollaire 4.2.1.
Enfin, on a , en notant X^0 le processus α-stable limite de X^θ, on a $\lim_t \mathbb{P}(\frac{\bar{X}_t}{t^{\frac{1}{\alpha}}} < \frac{a}{t^{\frac{1}{\alpha}}}) = \mathbb{P}(X_1^0 < -\infty) = 0$.
Si $a > 0$, on a pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(a - \bar{X}_t)_+ - a^+ &= \mathbb{E}(\bar{X}_t - a)_+ \\
&\leq \frac{1}{p} \mathbb{E}(e^{X_t - a}) \leq \frac{1}{p} e^{C' t p^\alpha - pa},
\end{aligned}$$

avec C' une constante positive. La dernière égalité est une conséquence du lemme 4.2.1 . En choisissant $p = \left(\frac{a}{C' t \alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$, on obtient

$$\mathbb{E}(a - \bar{X}_t)_+ - a^+ \leq \bar{C} t^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} e^{-(\frac{\alpha - 1}{\alpha})(\frac{1}{C' \alpha})^{\frac{1}{\alpha - 1}} \left(\frac{a}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}} 1_{\{a<0\}} \right),$$

et d'une façon plus globale

$$\bar{\rho}(t, a) t^{\frac{1}{\alpha}} \leq \bar{C} t^{\frac{1}{\alpha}} \left(\mathbb{P}^{1 - \frac{1}{\beta_0}}(\bar{X}_t < a) 1_{\{a<0\}} + \left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} e^{-(\frac{\alpha - 1}{\alpha})(\frac{1}{C' \alpha})^{\frac{1}{\alpha - 1}} \left(\frac{a}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}} 1_{\{a<0\}} + \delta_0(a) \right),$$

Avec $\bar{C}$ et C' deux constantes positives,d'où le résultat voulu. □

On trouvera les preuves du lemme 4.2.2 et de la proposition 4.2.2 dans *Annexe 1*

4.3 Un problème d'arrêt optimal auxiliaire

Pour $a \geq 0$, on pose

$$u_a^0(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}^0} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \left((y + X_s^0) + a(y + X_s^0)^+ \right) ds \right),$$

où $\mathcal{T}_{0,1}^0$ est l'ensemble des temps d'arrêt de X^0 à valeurs dans $[0,1]$. On a alors,

Lemme 4.3.1 *Soit X_t^0 le processus de Lévy α-stable défini plus haut, et $\mathcal{T}_{0,1}$ l'ensemble des $\mathcal{F}_t^0$-temps d'arrêts à valeurs dans $[0,1]$.Alors, la fonction*

$$u_a^0(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \int_0^\tau (y + X_s) + a\,(y + X_s)^+ ds$$

est une fonction positive croissante et il existe un réél $y_a > 0$ tel que

$$-y_a = \sup\{y \in \mathbb{R}; u_a^0(y) = 0\}.$$

Voir Annexe 2 pour l'étude de u_a^0.
On aura besoin de l'hypothèse suivante sur y_a :

(Ha) Le nombre y_a vérifie

$$y_a - a\mathbb{E}\left(X_1^0 - y_a\right)^+ > 0.$$

L'hypothèse (Ha) est évidemment vérifiée pour $a = 0$, nous conjecturons qu'elle est vérifiée quel que soit $a > 0$, pour tout $\alpha \in]1,2[$ (on a eu affaire à la même inégalité dans le cas jump-diffusion (voir le lemme 3.3.4).
Notons à présent,

$$u_a^\theta(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}^\theta} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \left((y + X_s^\theta) + a(y + X_s^\theta)^+ \right) ds \right),$$

où $\mathcal{T}_{0,1}^\theta$ est l'ensemble des temps d'arrêt de $X^\theta = \frac{X_{\theta s}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}$ à valeurs dans $[0,1]$, on alors la proposition suivante,

Proposition 4.3.1 *On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$u_a^\theta(\lambda) \underset{\theta \to 0}{\longrightarrow} u_a^0(\lambda).$$

On trouvera les preuves des résultats de cette section dans l'*Annexe 2 : Étude de u_α*.

4.4 Le développement limité

On note P la fonction de prix du put américain d'échéance T et de prix d'exercice K et $b(t)$ le prix critique à la date t. Avec les hypothèses sur ν (en particulier $r-\delta-\int(e^y-1)_+\nu(dy)<0$), on sait que la limite $\lim_{t\uparrow T} b(t)$, notée $b(T)$ dans la suite, est l'unique nombre $\xi\in]0,K[$ vérifiant

$$-rK+\delta\xi+\int(\xi e^y-K)^+\nu(dy)=0. \tag{4.1}$$

Théorème 4.4.1 *Sous les hypothèses du modèle, pour tout $\lambda<0$ et $\theta=T-t$ assez petit, on a,*

$$\begin{aligned}&P(t,b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})-(K-,b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+\geq b(T)\bar\delta\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}u_a^0(\lambda)+o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}})\\ &\quad et\\ &P(t,b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})-(K-b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+\leq b(T)\bar\delta\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}(u_a^0(\lambda)+w^0)+o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}),\end{aligned} \tag{4.2}$$

avec u_α^0 définie dans la section 4.3, $w^0\geq 0$, et

$$\bar\delta=\delta+\int_{]\ln(\frac{K}{b(T)},+\infty[}e^y\nu(dy)\ \text{ et }\ a=\frac{K\nu\{\ln\frac{K}{b(T)})\}}{\bar\delta b(T)}.$$

Remarque:
On notera que $w_0=0$ et $a=0$ quand $\nu\{\ln\frac{K}{b(T)})\}=0$.
On déduit de l'équation vérifiée par $b(T)$ que $\bar\delta>0$.
Lemma 4.4.1 *On pose pour tout $t\geq 0$,*

$$\mathcal{I}^K(t)=\left\{\int_0^t 1_{\{S_s>K\}}\left(\int(K-S_se^y)^+\nu(dy)\right)ds+\frac{1}{2}L_t^K\right\},$$

avec L^K le temps local du processus S en K, et soit λ un réel strictement négatif, $\lambda<0$.
Si $b(T)<K$, alors on a, pour tout temps d'arrêt à valeurs dans $[0,t]$

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{I}_\tau^K\mid S_0=b(T)e^{\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=\mathbb{E}\left[\mathcal{I}^K(\tau)-\mathcal{I}^K(\tau\wedge\hat T_1)\mid S_0=b(T)e^{\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}}\right]+o(t^{1+\frac{1}{\alpha}}),$$

où $\hat{T}_1 = \inf\{s \geq 0\ ;\ \Delta X_s = \ln(\frac{K}{b(T)})\}$. *Et*

$$E\left(\mathcal{I}_\tau^K \mid S_0 = b(T)e^{\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \leq \bar{w}^0 t^{1+\frac{1}{\alpha}} + o(t^{1+\frac{1}{\alpha}}),$$

avec $\bar{w}^0$ *une constante positive indépendante de* λ *et* τ.

On fait remarquer que si la mesure de Lévy ne charge pas le point $\{\ln\frac{K}{b(T)}\}$, alors on a presque sûrement $\hat{T}_1 = \infty$, d'où $\mathbb{E}\left(\mathcal{I}_\tau^K |\ S_0 = b(T)e^{\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = o(t^{1+\frac{1}{\alpha}})$

preuve du lemme 4.4.1 :
Dans ce modèle, en partant de la formule de Meyer-Ito (voir [30]), on a

$$\begin{aligned}
(K-S_t)_+ &= (K-S_0)_+ + \int_0^t (-1_{\{S_s\leq K\}})S_s(r-\delta)ds \\
&\quad + \int_0^t \int \left((K-S_se^y)^+ - (K-S_s)^+ + 1_{\{S_s\leq K\}}S_s(e^y-1)\right)\nu(dy)ds \\
&\quad + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} \left[(K-S_se^y)^+ - (K-S_s)^+\right]\tilde{J}(ds,dy) + \frac{1}{2}L_t^K, \\
&= (K-S_0)_+ + \int_0^t 1_{\{S_s\leq K\}}\left(S_s(\delta-r) + \int (S_se^y-K)^+\nu(dy)\right)ds \\
&\quad + \int_0^t \int \left((K-S_se^y)^+ 1_{\{S_s>K\}}\right)\nu(dy)ds + \frac{1}{2}L_t^K + M_t, \\
&= (K-S_0)_+ + \int_0^t 1_{\{S_s\leq K\}}\left(S_s(\delta-r) + \int (S_se^y-K)^+\nu(dy)\right)ds + \mathcal{I}^K(t) + M_t,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

où L_t^K est le temps local du processus S_t en K et M_t la partie martingale locale avec $M_0 = 0$. L'avant dernière égalité s'obtient en remarquant que

$$(K-S_se^y)^+ - (K-S_s)^+ + 1_{\{S_s\leq K\}}S_s(e^y-1) = (S_se^y-K)^+ 1_{\{S_s\leq K\}} + (K-S_se^y)^+ 1_{\{S_s>K\}}.$$

On montre aisément, comme dans le cas Jump-diffusion (voir proof of Lemma 3.3.2) en utilisant une suite de temps d'arrêt localisants la martingale locale M_t, que pour tout temps d'arrêt à valeurs dans $[0,\theta]$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{(K-S_\tau)_+ - (K-S_0)_+ - \int_0^\tau 1_{\{S_s\leq K\}}\left[S_s(\delta-r) + \int (S_se^y-K)^+\nu(dy)\right]ds\right\} \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \int \left((K-S_se^y)^+ 1_{\{S_s>K\}}\right)\nu(dy)ds + \frac{1}{2}L_\tau^K\right), \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\mathcal{I}^K(\tau)\right),
\end{aligned}$$

on remarquera que

$$\int \left((K - S_s e^y)^+ 1_{\{S_s > K\}}\right) \nu(dy) = \int_{y<0} \left((K - S_s e^y)^+ 1_{\{S_s > K\}}\right) \nu(dy)$$

et

$$\int \left((S_s e^y - K)^+ 1_{\{S_s \leq K\}}\right) \nu(dy) = \int_{y>0} \left((S_s e^y - K)^+ 1_{\{S_s \leq K\}}\right) \nu(dy).$$

On notera ensuite T_1 le premier temps de saut du processus à sauts positifs $Z_t^+ = \sum_{\Delta X_s > 0}^{s \leq t} \Delta X_s$ et N_t le nombre de ses sauts jusqu'à la date t, $N_t = \sum_{s<t} 1_{\{\Delta X_s > 0\}}$. Le processus N_t est donc un processus de Poisson d'intensité $\nu(\mathbb{R}^+)$, on notera que $\mathbb{P}(N_\theta \geq 1) = O(\theta)$ et $\mathbb{P}(N_\theta \geq 2) = O(\theta^2)$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathcal{I}^K(t)) &= \mathbb{E}(\mathcal{I}^K(t \wedge T_1)) + \mathbb{E}\left(\mathcal{I}(t, S_0) - \mathcal{I}^K(t \wedge T_1)\right) \\
&= \mathbb{E}(\mathcal{I}^K(t \wedge T_1)) + \mathbb{E}\left(1_{\{T_1 < t\}} \left(\mathcal{I}^K(t) - \mathcal{I}^K(T_1)\right)\right) \\
&\leq \mathbb{E}(\mathcal{I}^K(t \wedge T_1)) + \mathbb{E}\left(1_{\{T_1 < t\}} \left(\mathcal{I}^K(t + T_1) - \mathcal{I}^K(T_1)\right)\right),
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant due à la croissance de $\mathcal{I}$.

Estimation de $\mathcal{I}^K(t \wedge T_1)$

Sur l'intervalle stochastique $[0, T_1[$, le processus (S_t) coïncide avec le processus $(\bar{S}_t)$ défini par

$$\bar{S}_t = S_0 e^{d^+ t + \bar{X}_t},$$

notons que $\mathbb{E}e^{iu\bar{X}_t} = e^{t\int_{y<0} e^{iuy} - 1 - iu(e^y - 1)\nu(dy)}$. On en déduit (en observant que le processus $\mathcal{I}^K$ est continu en t) que

$$\mathcal{I}^K(t \wedge T_1) = \bar{\mathcal{I}}^K(t \wedge T_1) \leq \bar{\mathcal{I}}^K(t),$$

où $\bar{\mathcal{I}}^K$ est défini à l'aide de $\bar{S}$ de la même manière que $\mathcal{I}^K$ avec S. Notant que $\bar{\mathcal{I}}^K(0) = 0$ et que $\bar{\mathcal{I}}^K(t)$ ne croit que sur $\{\bar{S}_t \geq K\}$, on a

$$\bar{\mathcal{I}}^K(t) = \bar{\mathcal{I}}^K(t) 1_{\{\bar{\tau}_K \leq t\}}.$$

et de la même manière que (4.3), on a

$$\bar{\mathcal{I}}^K(t) = (K - \bar{S}_t)_+ - (K - S_0)_+ - \int_0^t (-1_{\{\bar{S}_s \leq K\}}) \bar{S}_s d^+ ds - \bar{M}_t,$$

on en déduit que $|\bar{M}_t| \leq \bar{\mathcal{I}}^K(t) + K(2 + t|d^+|)$. De plus, comme $\bar{S}_{\tau_K} = K$ (les sauts de $\bar{S}$ n'étant que négatifs), on a $\bar{\mathcal{I}}^K(\tau_K) = \bar{L}^K_{\tau_K} = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{\mathcal{I}}^K(t) 1_{\{\bar{\tau}_K \leq t\}}) &\leq K(2 + t|d^+|)\mathbb{P}(\bar{\tau}_K \leq t) + \left|\mathbb{E}(\bar{M}_{\tau_K} 1_{\{\bar{\tau}_K \leq t\}})\right| \\
&\leq 2K(2 + t|d^+|)\mathbb{P}(\bar{\tau}_K \leq t).
\end{aligned}$$

On en déduit aisément, grâce au lemme 4.2.2 que $\mathbb{E}(\bar{\mathcal{I}}^K(t)) = o(t^n)$, pour tout $n > 0$.

Estimation de $\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(\mathcal{I}^K(t) - \mathcal{I}^K(t \wedge T_1)\right)\right]$

Par la propriété de Markov forte, on a

$$\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(\mathcal{I}^K(T_1+t) - \mathcal{I}^K(T_1)\right)\right] = \mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}}\mathbb{E}_{S_{T_1}}(\mathcal{I}^K(t))\right) \tag{4.4}$$

Estimation de $\mathbb{E}_x\left(\mathcal{I}^K(t)\right)$

De l'égalité (4.3) on déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^K(t) &= (K-S_t)_+ - (K-S_0)_+ \\ &\quad + \int_0^t 1_{\{S_s\le K\}}\left(S_s(\delta - r) + \int_{y>0}(S_s e^y - K)^+\nu(dy)\right)ds + M_t.\end{aligned}$$

Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de temps d'arrêt localisant M_t. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathcal{I}^K_{t\wedge\tau_n}\right) &= \mathbb{E}(K-S_{t\wedge\tau_n})_+ - (K-S_0)_+ \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n} 1_{\{S_s\le K\}}\left(S_s(\delta - r) + \int_{y>0}(S_s e^y - K)^+\nu(dy)\right)ds.\end{aligned}$$

On déduit aisément de cette égalité que

$$\mathbb{E}_x\left(\mathcal{I}^K_t\right) = \mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ + xO(t),$$

avec un $O(t)$ indépendant de x. On a

$$\mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ = \mathbb{E}_x(K - xe^{d^+t+\bar{X}_t+Z_t^+})_+ - (K-x)_+.$$

En notant que

$$\mathbb{E}\left|e^{d^+t+\bar{X}_t+Z_t^+} - e^{\bar{X}_t}\right| = \mathbb{E}\left|e^{d^+t+Z_t^+} - 1\right| = O(t),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ &= \mathbb{E}(K - xe^{\bar{X}_t})_+ - (K-x)_+ + xO(t) \\ &= \mathbb{E}(K - x(1+\bar{X}_t))_+ - (K-x)_+ + xO(t) \\ &= x\left(\mathbb{E}\left(\frac{K-x}{x} - \bar{X}_t\right)_+ - \left(\frac{K-x}{x}\right)_+\right) + xO(t),\end{aligned}$$

en effet, $\mathbb{E}\left(e^{\bar{X}_t} - (1+\bar{X}_t)\right) = O(t^{\frac{2}{\alpha}}) = o(t)$.
D'où, en utilisant le lemme 4.2.3,

$$\mathbb{E}_x(K-S_t)_+ - (K-x)_+ \leq t^{\frac{1}{\alpha}} x\bar{\rho}(t, \frac{K-x}{x}) + xO(t),$$

où $\bar{\rho}$ est défini dans le lemme 4.2.3.
Revenant à (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(\mathcal{I}^K(T_1+t) - \mathcal{I}^K(T_1)\right)\right] \\
&\leq \bar{C}t^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}} S_{T_1}\bar{\rho}(t, \frac{K-S_{T_1}}{S_{T_1}})\right) + \mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}}S_{T_1}\right)O(t) \\
&= \bar{C}t^{\frac{1}{\alpha}} S_0 \mathbb{E}\left(1_{\{T_1<t\}} e^{d^+T_1 + \bar{X}_{T_1} + Z^+_{T_1}}\bar{\rho}(t, \frac{1-\frac{S_{T_1}}{K}}{\frac{S_{T_1}}{K}})\right) + O(t^2).
\end{aligned}$$

A ce stade, on observe que $\mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = O(t)$ et que, conditionnellement à $\{T_1 \leq t\}$, T_1 est uniformément distribué sur $[0,t]$. On constate donc qu'il existe une constante positive $\bar{w}^0$ (due à la domination de $\bar{\rho}$) telle que

$$\mathbb{E}(\mathcal{I}^K(t) \mid S_0 < K) \leq \bar{w}^0 t^{1+\frac{1}{\alpha}} + o(t^{1+\frac{1}{\alpha}}) = O(t^{1+\frac{1}{\alpha}}).$$

En posant $S_0 = b(T)e^{\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}}$, comme $Z^+_{T_1}$ est indépendant de T_1 et de $\bar{X}$, on voit que, conditionnellement à $\{T_1 < t\}$, S_{T_1} a même loi que

$$K\exp\left\{\left(V - \ln\frac{K}{b(T)}\right) + t^{\frac{1}{\alpha}}\left(\lambda + d^+ t^{1-\frac{1}{\alpha}}U + \frac{\bar{X}_{Ut}}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right\},$$

où U et V sont des variables aléatoires indépendantes, U est uniforme sur $[0,1]$ et V a même loi que $Z^+_{T_1}$.

Le cas où $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\} = 0$:
En supposant que $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\} = 0$, on a presque sûrement $V - \ln(\frac{K}{b(T)}) \neq 0$, et donc $\bar{\rho}\left(t, \frac{1-\frac{S_{T_1}}{K}}{\frac{S_{T_1}}{K}}\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a donc par convergence dominée (voir la domination de $\bar{\rho}$ dans le lemme 4.2.3)

$$\lim_{t\downarrow 0}\mathbb{E}\left(S_{T_1}\bar{\rho}\left(t, \frac{1-\frac{S_{T_1}}{K}}{\frac{S_{T_1}}{K}}\right) \mid T_1 < t\right) = 0.$$

d'où $\mathbb{E}\left[1_{\{T_1<t\}}\left(\mathcal{I}^K(T_1+t)-\mathcal{I}^K(T_1)\right) \mid S_0=b(T)e^{\lambda\sqrt{t}}\right]=o(t^{1+\frac{1}{\alpha}})$, et donc

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{I}^K(t) \mid S_0=b(T)e^{\lambda\sqrt{t}}\right)=o(t^{1+\frac{1}{\alpha}})$$

Le cas où $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}>0$:
On considère à présent les processus $\hat{X}$ et $\hat{Z}$ tels que

$$\hat{Z}_t=\sum_{s<t}\Delta\tilde{X}_s 1_{\{\Delta X_s=\ln\frac{K}{b(T)}\}} \quad \text{and} \quad \hat{X}=X-\hat{Z},$$

et $\hat{T}_1=\inf\{s\geq 0, \quad \hat{Z}_t\neq 0\}$. Alors

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{I}^K(t\wedge\hat{T}_1)-\mathcal{I}^K(t\wedge T_1)\right]=\mathbb{E}\left[(\mathcal{I}^K(t\wedge\hat{T}_1)-\mathcal{I}^K(t\wedge T_1))1_{\{T_1<t\wedge\hat{T}_1\}}\right]=o(t^{1+\frac{1}{\alpha}}).$$

En effet, sur $\{t<\hat{T}_1\}$, le processus X coïncide avec le processus $\hat{X}$ dont la mesure de Lévy ne charge pas le point $\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}$, (on est dans le même cas plus haut où $\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}=0$). Et sur $\{T_1<\hat{T}_1\leq t\}$, le processus Z deux fois avant t, or $\mathbb{P}\left(\sum_{s\leq t}1_{\{\Delta Z_s\neq 0\}}\geq 2\right)=O(t^2)$. Donc,

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{I}^K(t)-\mathcal{I}^K(t\wedge T_1)\right]=\mathbb{E}\left[\mathcal{I}^K(t)-\mathcal{I}^K(t\wedge\hat{T}_1)\right]+o(t^{1+\frac{1}{\alpha}}).$$

□

preuve du théorème 4.4.1 :
Soit τ_K le temps d'arrêt défini par $\tau_K=\inf\{t\geq 0; S_t\geq K\}$.

Grâce à l'égalité (4.3), on a pour tout temps d'arrêt $\tau\in\mathcal{T}_{0,\theta}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+\right]-(K-S_0)^+=& \\ \mathbb{E}\left\{\int_0^\tau e^{-rs}\left(-rK+\delta S_s+\int_{y>0}(S_se^y-K)^+\nu(dy)\right)1_{\{S_s\leq K\}}ds\right\}&+\mathcal{J}(\tau,S_0),\end{aligned} \tag{4.5}$$

avec

$$\mathcal{J}(\tau,S_0)=E\left\{\int_0^\tau e^{-rs}1_{\{S_s>K\}}\left(\int(K-S_se^y)^+\nu(dy)\right)ds+\frac{1}{2}\int_0^\tau e^{-rs}dL_s^K\right\}. \tag{4.6}$$

Il est clair, à travers cette expression, que $\mathcal{J}$ est une fonction positive. Dorénavant, on considèrera S_0 comme une fonction de θ. Plus précisément, on note $S_0^\theta = b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{x_0+\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}}$, avec $\lambda < 0$ et $x_0 = \ln(b(T))$. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{e^{-r\tau}(K-S_\tau)_+\right\} - (K-S_0^\theta)^+ - \mathcal{J}(\tau, b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})\\ &\quad = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-rs}1_{\{S_s\le K\}}\left(-rK+\delta S_s + \int(S_se^y-K)^+\nu(dy)\right)ds\right).\end{aligned}$$

On peut omettre e^{-rs} dans l'expression comme une erreur de l'ordre de $O(\theta^2)$(car la fonction $1_{\{x\le K\}}\left(-rK+\delta x+\int(xe^y-K)^+\nu(dy)\right)$ est bornée). On obtient alors, pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[0,\theta]$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{e^{-r\tau}(K-S_\tau)_+\right\} - (K-S_0^\theta)^+ - \mathcal{J}(\tau, b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})\\ &\quad = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau 1_{\{S_s\le K\}}\left(-rK+\delta S_s + \int(S_se^y-K)^+\nu(dy)\right)ds\right) + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}).\end{aligned}$$

En rappelant que $S_t = S_0^\theta e^{\tilde{X}_t} = e^{x_0+\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_t}$ où $\tilde{X}_t = (r-\delta)t + X_t$, on a aussi

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{e^{-r\tau}(K-S_\tau)_+\right\} - (K-S_0^\theta)^+ - \mathcal{J}(\tau, b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\tau 1_{\{x_0+\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\le \ln K\}}h(x_0+\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s)ds\right) + o(1+\theta^{\frac{1}{\alpha}}),\end{aligned} \tag{4.7}$$

avec

$$h(x) = -rK + \delta e^x + \int(e^xe^y-K)^+\nu(dy).$$

La fonction h étant la même fonction utilisé dans le chapitre 3, (convexe, dérivable à droite et à gauche). Plus précisément, on a, en notant $x_0 = \ln\frac{K}{b(T)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, en posant $\Delta h'(x_0) = h'_d(x_0) - h'_g(x_0)$,

$$h(x_0+x) = \Delta h'(x_0)x^+ + h'_g(x_0)x + |x|\,\tilde{R}(x),$$

où $\tilde{R}(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$, et

$$\begin{aligned}0\le\tilde{R}(x) &\le \left(h'_g(x_0+x^+) - h'_d(x_0-x^-)\right)\\ &\le L\left(1+e^x\right),\end{aligned}$$

avec L une constante positive.
L'égalité (4.7) devient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{e^{-r\tau}(K-S_\tau)_+)\right\} - (K-b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+ - \mathcal{J}(\tau, b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}}) = \\ + \quad \mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\left[h'_g(x_0)(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s)+\Delta h'(x_0)(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s)^+\right]ds \\ +\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\left|\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\right|\tilde{R}(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s)ds + o(1+\theta^{\frac{1}{\alpha}}),\end{aligned}$$

Or, pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_{0,\theta}$, on a

$$\mathbb{E}\int_0^\tau \left(1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\tilde{R}(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s) + C1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s> \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right)\left|\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\right|ds = o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}), \tag{4.8}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^\tau \left(1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\tilde{R}(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s) + C1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s> \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right)\left|\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\right|ds \\ &\leq \quad \int_0^\theta \mathbb{E}\left(1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\tilde{R}(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s) + C1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s> \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right)\left|\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s\right|ds, \\ &\leq \quad \theta^{1+\frac{1}{\alpha}}\int_0^1 \mathbb{E}\left(1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_{s\theta}\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\tilde{R}(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_{\theta s}) + C1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_{s\theta}> \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right)\left|\lambda+\frac{\tilde{X}_{s\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right|ds,\end{aligned}$$

d'après le corollaire 4.2.1, on a, pour $s\in[0,1]$ et θ assez petit, $\mathbb{E}\left|\frac{\tilde{X}_{s\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right| \leq \left(\mathbb{E}\left|\frac{\tilde{X}_{s\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right|^{\beta}_0\right)^{\frac{1}{\beta_0}} \leq A$ et comme $\left(1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_{s\theta}\leq \ln\frac{K}{b(T)}\}}\tilde{R}(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_{\theta s}) + C1_{\{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_{s\theta}> \ln\frac{K}{b(T)}\}}\right)$ est bornée et tends vers 0, on a par convergence dominée (4.8).

On a donc, pour tout temps d'arrêt $\tau\in\mathcal{T}_{0,\theta}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+\right\} - (K-S_0^\theta)^+ - \mathcal{J}(\tau, b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}}) \\ &\quad = \mathbb{E}\int_0^\tau \left[h'_g(x_0)(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s)+\Delta h'(x_0)(\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}+\tilde{X}_s)^+\right]ds + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}) \\ &\quad = b(T)\bar{\delta}\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}\int_0^{\frac{\tau}{\theta}}\left[(\lambda+\frac{X_{u\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}})+a(\lambda+\frac{X_{u\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+\right]du + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}),\end{aligned}$$

avec $a = \frac{\Delta h'(x_0)}{h'_g(x_0)} = \frac{K\nu\{\ln(K/b(T))\}}{\bar{\delta}b(T)}$, $h'_g(x_0) = b(T)\bar{\delta}$ et $\bar{\delta} = \delta + \int_{y>\ln(K/b(T))} e^y \nu(dy)$.

Dans la deuxième égalité, on a négligé la contribution de la partie drift $(r-\delta)t = \tilde{X}_t - X_t$, en effet l'erreur faite ϵ est dominée par $|\epsilon| \leq C\int_0^\theta |r-\delta| s ds = O(\theta^2)$ et on a aussi effectué le changement de variable suivant $\theta u = s$.
On rappelle les expressions de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$

$$\mathcal{J}(\tau, S_0) = E\left\{\int_0^\tau e^{-rs} 1_{\{S_s>K\}} \left(\int (K - S_s e^y)^+ \nu(dy)\right) ds + \frac{1}{2}\int_0^\tau e^{-rs} dL_s^K\right\},$$

$$\mathcal{I}^K(t) = \int_0^t \int \left((K - S_s e^y)^+ 1_{\{S_s>K\}}\right) \nu(dy) ds + \frac{1}{2} L_t^K.$$

Donc $\mathcal{J}$ est minorée par $e^{-r\theta}\mathbb{E}(\mathcal{I}^K(\tau))$ et majorée par$\mathbb{E}(\mathcal{I}^K(\tau))$, or d'après le lemme 4.4.1, on a pour tout temps d'arrêt à valeurs dans $[0,\theta]$, $\mathbb{E}(\mathcal{I}^K(\tau)) \leq \bar{w}^0\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}})$, on a donc d'une part

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+\right\} - (K - S_0^\theta)^+ \\
&\leq \; b(T)\bar{\delta}\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} \left(w^0 + \mathbb{E}\int_0^{\frac{\tau}{\theta}} \left[(\lambda + \frac{X_{u\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}) + a(\lambda + \frac{X_{u\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+\right] du\right) + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}),
\end{aligned}$$

avec $w^0 = \frac{\bar{w}^0}{b(T)\bar{\delta}}$. Et d'autre part, comme $\mathcal{J} \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+\right\} - (K - S_0^\theta)^+ \\
&\geq \; b(T)\bar{\delta}\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} \left(\mathbb{E}\int_0^{\frac{\tau}{\theta}} \left[(\lambda + \frac{X_{u\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}) + a(\lambda + \frac{X_{u\theta}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+\right] du\right) + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}).
\end{aligned}$$

Afin de retrouver la fonction prix P, on passe au sup sur l'ensemble $\mathcal{T}_{0,\theta}$, on obtient alors l'encadrement suivant,

$$0 \leq P(t,,b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}}) - (K-,b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+ - b(T)\bar{\delta}\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} u_a^\theta(\lambda) + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}) \leq b(T)\bar{\delta}\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} w^0,$$

où u_α^θ est définie dans la seciton 4.3.
Enfin, grâce à la proposition 4.3.1, on a la convergence suivante $u_a^\theta \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} u_a^0$, où la fonction u_a^0 est la fonction u_a associé au processus α-stable X^0, on en déduit donc, que pour tout $\lambda < 0$ et θ assez petit, on a

$$0 \leq P(t, b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}}) - (K-, b(T)e^{\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}})^+ - b(T)\bar{\delta}\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} u_a^0(\lambda) + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}) \leq b(T)\bar{\delta}\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} w^0,$$

□

4.5 Vitesse de convergence de $b(t)$

On rappelle que X^0 désigne le processus α-stable de même loi que $\lim_{\theta\to 0} X^\theta$, la fonction u_a^0 définie pour tout $a \geq 0$, par $u_a^0(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E}\int_0^\tau (x + X_u^0) + a\,(x + X_u^0)^+ du$ et pour tout $a \geq 0$, $y_a = -\sup\{y \in \mathbb{R}; u_a^0(y) = 0\}$. On a alors, le résultat suivant

Théorème 4.5.1 *Sous les hypothèses du modèle, en particulier $d^+ < 0$, on a alors :*

- *Si $\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\} = 0$,*
$$\lim_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{(T-t)^{\frac{1}{\alpha}} b(T)} = y_0,$$
- *Si $\nu\{\ln \frac{K}{b(T)}\} > 0$, et l'hypothèse (Ha) est vérifiée*
$$y_0 < y_a \leq \liminf_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{(T-t)^{\frac{1}{\alpha}} b(T)} \text{ et } \limsup_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{(T-t)^{\frac{1}{\alpha}} b(T)} < \infty$$

avec $a = \frac{K\nu\{\ln(\frac{K}{b(T)})\}}{b(T)\left(\delta + \int_{e^z > K/b(T)} e^z \nu(dz)\right)}$.

preuve du théorème 4.5.1 :
L'estimation $\liminf_{t\uparrow T} \frac{b(T)-b(t)}{b(T)(T-t)^{1/\alpha}} \geq y_a$**.**

Au vu de l'encadrement (4.2) dans le théorème 4.4.1, on a pour tout $\lambda < 0$,

$$P(t, b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}) \geq \left(K - b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}\right)^+ + \bar{\delta} b(T)\theta^{1+1/\alpha} u_a^0(\lambda) + o(\theta^{1+1/\alpha}).$$

Or, pour tout $\lambda > -y_a$ et θ suffisamment petit, on a $u_a^0(\lambda) > 0$ et donc

$$P(t, x_0 + \lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}) > \psi(x_0 + \lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \ln(b(t)) &< x_0 + \lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}} \\ \ln(b(T)) - \ln(b(t)) &> -\lambda\theta^{\frac{1}{\alpha}} \\ \frac{b(T) - b(t)}{b(t)\theta^{\frac{1}{\alpha}}} &> -\lambda. \end{aligned}$$

En faisant tendre $\lambda \to -y_a$ puis $t \to T$, on obtient

$$\liminf_{t\to T} \frac{b(T) - b(t)}{b(T)(T-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \geq y_a > 0$$

L'estimation $\limsup_{t\uparrow T} \frac{b(T)-b(t)}{b(T)(T-t)^{1/\alpha}}$.

Dans l'ouvert $\{(t,x) \in]0,T[\times]0,+\infty[\mid x > b(t)\}$, on a, d'après l'inéquation variationnelle,

$$\begin{aligned}\int \left(P(t,xe^y) - P(t,x) - x(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\right)\nu(dy)\\ = \quad -\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) + rP(t,x) - (r-\delta)x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \geq r(K-x) - (r-\delta)x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x),\end{aligned} \tag{4.9}$$

où on a utilisé la décroissance de $t \mapsto P(t,x)$ et l'inégalité $P(t,x) \geq K - x$.

Cette inégalité va nous permettre de dégager l'estimation suivante.

Lemme 4.5.1 *Pour $t \in]0,T[$ et $x \in]b(t),b(T)[$, on pose*

$$I(t,x) = \int_{]-\infty,0[} \left(P(t,xe^y) - P(t,x) - x(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\right)\nu(dy),$$

et, pour $\lambda \in]-\infty,0[$, on pose (si $b(t) < b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}$)

$$i(\lambda,\theta) = \inf_{x\in]b(t),b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}[} I(t,x).$$

On a alors

$$\liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{i(\lambda,\theta)}{\theta^{1/\alpha}} \geq b(T)\bar{\delta}\left(-\lambda - a\mathbb{E}(X_1^0+\lambda)^+\right).$$

preuve Pour $b(t) < x < b(T)$, on a, d'après (4.9),

$$\begin{aligned} & I(t,x)\\ & \geq \quad r(K-x) - (r-\delta)x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - P(t,x) - x(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\right)\nu(dy)\\ & = \quad r(K-x) - \left(r-\delta - \int (e^y-1)^+\nu(dy)\right)x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - P(t,x)\right)\nu(dy)\\ & \geq \quad r(K-x) + \left(r-\delta - \int (e^y-1)^+\nu(dy)\right)x - \int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - P(t,x)\right)\nu(dy)\\ & = \quad rK - \delta x - \int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - P(t,x) + x(e^y-1)\right)\nu(dy),\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de convexité $\frac{\partial P}{\partial x} \geq -1$ et l'inégalité $r-\delta-\int(e^y-1)^+\nu(dy) < 0$. Introduisons maintenant la fonction j définie par

$$j(x) = rK - \delta x - \int_{y>0} (xe^y - K)^+ \nu(dy).$$

Notons que $j(b(T)) = 0$. On peut réécrire la dernière inégalité sous la forme

$$\begin{aligned} I(t,x) &\geq j(x) - \int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - P(t,x) + x(e^y-1) - (xe^y-K)^+\right)\nu(dy) \\ &= j(x) - \int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - (K-xe^y)^+ - P(t,x) + K - x\right)\nu(dy) \\ &\geq j(x) - \int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - (K-xe^y)^+\right)\nu(dy). \end{aligned}$$

La fonction j est décroissante. Donc, si $x \in]b(t), b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}[$, on a, en utilisant $j(b(T)) = 0$

$$\begin{aligned} j(x) &\geq j(b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}) \\ &= j_g'(b(T))b(T)\left(e^{\lambda\theta^{1/\alpha}} - 1\right) + o(\theta^{1/\alpha}) \\ &= -\bar{\delta}b(T)\lambda\theta^{1/\alpha} + o(\theta^{1/\alpha}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pour estimer l'intégrale $\int_{\{y>0\}} \left(P(t,xe^y) - (K-xe^y)^+\right)\nu(dy)$, on introduit la notation

$$\Delta(t,z) = P(t,z) - (K-z)^+.$$

On remarque d'abord que, pour tout $z > 0$, on a, en utilisant la formule de la prime d'exercice anticipé,

$$\begin{aligned} \Delta(t,z) &\leq P_e(t,z) - (K-z)^+ + rK(T-t) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{-r\theta}\left(K - ze^{(r-\delta)\theta + X_\theta}\right)^+\right) - (K-z)^+ + rK\theta \\ &\leq \mathbb{E}\left(K - z - zX_\theta\right)^+ - (K-z)^+ + C\theta(1+z), \end{aligned} \tag{4.11}$$

où C est une constante positive indépendante de z.

On en déduit, en posant $\Delta_e(\theta,z) = \mathbb{E}\,(K-z-zX_\theta)^+ - (K-z)^+$ et $\hat\nu(dy) = 1_{\{y\neq \ln(K/b(T))\}}\nu(dy)$, que, pour $x \le b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}$,

$$\begin{aligned}\int_{\{y>0\}} \Delta(t,xe^y)\nu(dy) &= \Delta(t,xK/b(T))\nu\{\ln(K/b(T))\} + \int_{\{y>0\}} \Delta(t,xe^y)\hat\nu(dy)\\ &\le \Delta(t,Ke^{\lambda\theta^{1/\alpha}})\nu\{\ln(K/b(T))\} + \int_{\{y>0\}} \Delta(t,xe^y)\hat\nu(dy)\\ &\le \Delta_e(\theta,Ke^{\lambda\theta^{1/\alpha}})\nu\{\ln(K/b(T))\} + \int_{\{y>0\}} \Delta_e(\theta,xe^y)\hat\nu(dy) + C'\theta\end{aligned}$$

avec C' constante positive indépendante de x, la première inégalité résultant du fait que $x\mapsto\Delta(t,x)$ est croissante sur $[0,K]$ et la deuxième de (4.11).

On a

$$\begin{aligned}\Delta_e(\theta,Ke^{\lambda\theta^{1/\alpha}}) &= K\left(\mathbb{E}\left(1-e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}-e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}X_\theta\right)^+ - (1-e^{\lambda\theta^{1/\alpha}})\right)\\ &= K\left(\mathbb{E}\left(-\lambda\theta^{1/\alpha}-X_\theta\right)^+ + \lambda\theta^{1/\alpha}\right) + o(\theta^{1/\alpha})\\ &= K\mathbb{E}\left(X_\theta+\lambda\theta^{1/\alpha}\right)^+ + o(\theta^{1/\alpha})\\ &= K\theta^{1/\alpha}\mathbb{E}\left(X_1^0+\lambda\right)^+ + o(\theta^{1/\alpha}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a l'estimation

$$\Delta_e(\theta,z) \le z\theta^{1/\alpha}\rho(\theta,(K-z)/z),$$

où ρ est une fonction bornée vérifiant, pour tout $\epsilon>0$, $\lim_{\theta\downarrow0}\sup_{|x|\ge\epsilon}\rho(\theta,x) = 0$.

On en déduit que

$$\sup_{b(t)<x<b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}}\int_{\{y>0\}}\Delta_e(\theta,xe^y)\hat\nu(dy) \le \theta^{1/\alpha}\int_{\{y>0\}}\zeta(\theta,y)\hat\nu(dy),$$

avec $\zeta(\theta,y) = \sup_{b(t)<x<b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}} xe^y\rho(\theta,xe^y)$. On a $\zeta(\theta,y)\le Ce^y$, pour une constante $C>0$. De plus, pour $y\neq\ln(K/b(T))$, on a aisément $\lim_{\theta\downarrow0}\zeta(\theta,y)=0$. Comme $\hat\nu$ ne charge pas $\ln(K/b(T))$, on a par convergence dominée, $\lim_{\theta\downarrow0}\int_{\{y>0\}}\zeta(\theta,y)\hat\nu(dy) = 0$.

D'où

$$\limsup_{\theta\downarrow 0} \frac{\sup_{b(t)<x<b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}} \int_{\{y>0\}} \Delta(t,xe^y)\nu(dy)}{\theta^{1/\alpha}} \leq K\nu\{\ln(K/b(T))\}\mathbb{E}\left(X_1^0+\lambda\right)^+. \tag{4.12}$$

En réunissant (4.10) et (4.12), on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{i(\lambda,\theta)}{\theta^{1/\alpha}} &\geq \bar{\delta}b(T)\left(-\lambda - \frac{K\nu\{\ln(K/b(T))\}}{\bar{\delta}b(T)}\mathbb{E}\left(X_1^0+\lambda\right)^+\right)\\ &= \bar{\delta}b(T)\left(-\lambda - a\mathbb{E}\left(X_1^0+\lambda\right)^+\right).\end{aligned}$$

□

Fixons maintenant $\lambda < 0$ et $t \in]0,T[$. On suppose $b(t) < b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}$. Pour $x \in]b(t), b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}[$, on a

$$\begin{aligned}I(t,x) &= \int_{]-\infty,\ln\frac{b(t)}{x}]}\left(P(t,xe^y)-P(t,x)-x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)(e^y-1)\right)\nu(dy)\\ &\quad+\int_{]\ln\frac{b(t)}{x},0[}\left(P(t,xe^y)-P(t,x)-x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)(e^y-1)\right)\nu(dy).\end{aligned}$$

Si $y \leq \ln\frac{b(t)}{x}$, on a

$$\begin{aligned}P(t,xe^y)-P(t,x)-x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)(e^y-1) &= (K-xe^y)-P(t,x)-x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)(e^y-1)\\ &\leq (K-xe^y)-(K-x)-x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)(e^y-1)\\ &= x\left(1+\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\right)(1-e^y).\end{aligned}$$

Pour $y \in]\ln(b(t)/x), 0[$, on a, en utilisant la convexité de $P(t,.)$,

$$\begin{aligned}P(t,xe^y)-P(t,x)-x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)(e^y-1) &\leq x(e^y-1)\frac{\partial P}{\partial x}(t,xe^y)-x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)(e^y-1)\\ &= x\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial P}{\partial x}(t,xe^y)\right)(1-e^y).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}I(t,x) &\leq x\left(1+\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\right)\int_{]-\infty,\ln\frac{b(t)}{x}]}(1-e^y)\,\nu(dy)\\ &\quad+\int_{]\ln\frac{b(t)}{x},0[} x\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial P}{\partial x}(t,xe^y)\right)(1-e^y)\,\nu(dy).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Posons maintenant, pour $\xi \in \left]0, \ln(b(T)/b(t)) + \lambda\theta^{1/\alpha}\right[$,

$$g_t(\xi) = P(t, b(t)e^{\xi}).$$

Remarquons que la dérivée de g_t est donnée par

$$g_t'(\xi) = b(t)e^{\xi}\frac{\partial P}{\partial x}(t, b(t)e^{\xi}),$$

et que, par la propriété de "smooth fit", $g_t'(0) = -b(t)$. On a aussi $|g_t'(\xi)| \leq b(T) \leq K$. En appliquant (4.13) avec $x = b(t)e^{\xi}$, on obtient

$$\begin{aligned} i(\lambda,\theta) &\leq \left(g_t'(\xi) - g_t'(0)e^{\xi}\right)\int_{]-\infty,-\xi]}(1-e^y)\,\nu(dy) \\ &\quad \int_{]-\xi,0[}\left(g_t'(\xi) - g_t'(\xi+y)e^{-y}\right)(1-e^y)\,\nu(dy) \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \left(g_t'(\xi) - g_t'(0)e^{\xi}\right)\int_{]-\infty,-\xi]}(1-e^y)\,\nu(dy) &= \left(g_t'(\xi) - g_t'(0)\right)\int_{]-\infty,-\xi]}(1-e^y)\,\nu(dy) \\ &\quad + g_t'(0)(1-e^{\xi})\int_{]-\infty,-\xi]}(1-e^y)\,\nu(dy). \end{aligned}$$

Il résulte des hypothèses sur ν qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant

$$\left(e^{\xi}-1\right)\int_{]-\infty,-\xi]}(1-e^y)\,\nu(dy) \leq C\xi^{2-\alpha},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} i(\theta,\lambda) &\leq \left(g_t'(\xi) - g_t'(0)\right)\int_{(-\infty,-\xi]}(1-e^y)\,\nu(dy) \\ &\quad + \int_{]-\xi,0[}\left(g_t'(\xi) - g_t'(\xi+y)e^{-y}\right)(1-e^y)\,\nu(dy) + C\xi^{2-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Soit maintenant $\zeta \in \left(0, \ln(b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}/b(t))\right)$. En intégrant (4.14) par rapport à ξ de 0 à ζ, on obtient

$$\zeta i(\theta,\lambda) \leq j_1(\zeta) + j_2(\zeta) + C\zeta^{3-\alpha},$$

avec $C > 0$,

$$j_1(\zeta) = \int_0^\zeta d\xi \left(g_t'(\xi) - g_t'(0)\right) \left(\int_{]-\infty,-\xi]} \left(1 - e^y\right) \nu(dy)\right)$$

et

$$j_2(\zeta) = \int_0^\zeta d\xi \int_{]-\xi,0[} \nu(dy) \left(g_t'(\xi) - g_t'(\xi + y)e^{-y}\right) \left(1 - e^y\right).$$

Pour estimer $j_1(\zeta)$ on remarque que, pour $\xi \in]0, \zeta[$,

$$\begin{aligned} g_t'(\xi) &= b(t)e^\xi \frac{\partial P}{\partial x}(t, b(t)e^\xi) \\ &\leq b(t)e^\xi \frac{\partial P}{\partial x}(t, b(t)e^\zeta) = e^{\xi-\zeta} g_t'(\zeta) \leq e^{-\zeta} g_t'(\zeta), \end{aligned}$$

où la première inégalité résulte de la convexité de $P(t, .)$ et la seconde de $g_t'(\zeta) \leq 0$. D'où

$$\begin{aligned} j_1(\zeta) &\leq \left(e^{-\zeta} g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) \int_0^\zeta d\xi \left(\int_{]-\infty,-\xi]} \left(1 - e^y\right) \nu(dy)\right) \\ &= \left(e^{-\zeta} g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \left(1 - e^y\right) \left(\int_0^{\zeta \wedge (-y)} d\xi\right). \end{aligned}$$

Notons que $e^{-\zeta} g_t'(\zeta) - g_t'(0) = b(t) \left(1 + \frac{\partial P}{\partial x}(t, b(t)e^\zeta)\right) \geq 0$. En utilisant les hypothèses sur ν, on peut trouver $\chi_0 < 0$ tel que, pour $y \in]\chi_0, 0[$,

$$\nu(dy) \leq \frac{2\eta_0}{|y|^{1+\alpha}} dy,$$

de sorte que, en utilisant l'inégalité $e^y \geq 1 + y$,

$$\begin{aligned} j_1(\zeta) &\leq \left(e^{-\zeta} g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) \left(\zeta \int_{]-\infty,\chi_0]} \nu(dy) \left(1 - e^y\right) + \int_{]\chi_0,0[} \frac{2\eta_0 dy}{|y|^{1+\alpha}} \left(1 - e^y\right) \left(\int_0^{(\zeta \wedge -y)} d\xi\right)\right) \\ &\leq \left(e^{-\zeta} g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) \left(\zeta \nu(]-\infty, \chi_0]) + \int_0^\zeta d\xi \int_\xi^{|\chi_0|} \frac{2\eta_0 dy}{|y|^{1+\alpha}} |y|\right) \\ &\leq \left(e^{-\zeta} g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) \left(\zeta \nu(]-\infty, \chi_0]) + \frac{2\eta_0}{\alpha - 1} \int_0^\zeta \xi^{1-\alpha} d\xi\right) \\ &= \left(e^{-\zeta} g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) \left(\zeta \nu(]-\infty, \chi_0]) + \frac{2\eta_0}{(2-\alpha)(\alpha-1)} \zeta^{2-\alpha}\right) \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} j_1(\zeta) &\leq C\zeta^{2-\alpha}\left(e^{-\zeta}g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) \\ &= C\zeta^{2-\alpha}\left(g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) + Cg_t'(\zeta)\zeta^{2-\alpha}\left(e^{-\zeta} - 1\right) \\ &\leq C\zeta^{2-\alpha}\left(g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) + CK\zeta^{3-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

On montre de façon analogue (voir [23], page 36-37) que la fonction j_2 vérifie

$$j_2(\zeta) \leq C\zeta^{2-\alpha}\left(g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) + C\zeta^{3-\alpha}, \tag{4.16}$$

avec $C > 0$. En réunissant (4.15) et (4.16), on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\zeta i(\theta, \lambda) \leq C\zeta^{2-\alpha}\left(g_t'(\zeta) - g_t'(0)\right) + C\zeta^{3-\alpha}$$

ou encore

$$\frac{i(\theta, \lambda)}{C}\zeta^{\alpha-1} \leq g_t'(\zeta) - g_t'(0) + \zeta.$$

On intègre maintenant par rapport à ζ de 0 à $\zeta_t = \ln(b(T))/b(t)) + \lambda\theta^{1/\alpha}$, obtenant

$$\zeta_t^\alpha i(\theta, \lambda) \leq C\left(g_t(\zeta_t) - \zeta_t g_t'(0) - g_t(0)\right),$$

avec $C > 0$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\zeta_t^\alpha i(\theta, \lambda) &\leq P(t, b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}) + b(t)\ln\frac{b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}}{b(t)} - P(t, b(t)) \\ &\leq P(t, b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}) + b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}} - b(t) - (K - b(t)) \\ &= P(t, b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}) - (K - b(T)e^{\lambda\theta^{1/\alpha}}). \end{aligned}$$

Donc pour tout $\lambda < -y_a$, d'après le théorème 4.4.1 et le lemme 4.3.1, on a donc

$$\frac{1}{C}\zeta_t^\alpha i(\theta, \lambda) \leq w^0\theta^{1+\frac{1}{\alpha}} + o(\theta^{1+\frac{1}{\alpha}}),$$

on rappelle que $w^0 = 0$, si $\nu\{\ln\frac{K}{b(T)}\} = 0$.
D'après le lemme 4.5.1, il existe $C' > 0$ tel que

$$C'\zeta_t^\alpha b(T)\bar{\delta}\left(-\lambda - a\mathbb{E}(X_1^0 + \lambda)^+\right) \leq C'\zeta_t^\alpha \liminf_{\theta\downarrow 0}\frac{i(\lambda, \theta)}{\theta^{1/\alpha}} \leq w^0\theta + o(\theta).$$

En utilisant $-\ln(x) \geq 1 - x$, on a $\frac{b(T)-b(t)}{b(T)} + \lambda\theta^{1/\alpha} \leq \zeta_t$ et en utilisant la conjecture $C_{y_a} = |y_a| - a\mathbb{E}\left(X_1^0 - |y_a|\right)^+ > 0$,

$$\frac{b(T) - b(t)}{b(T)} + \lambda\theta^{1/\alpha} \leq w^1\theta^{1/\alpha} + o(\theta^{1/\alpha}).$$

où w^1 est une constante positive. Évidement, si $w^0 = 0$ alors $w^1 = 0$.
Enfin, on obtient en faisant tendre λ vers $-y_a$,

$$\frac{b(T) - b(t)}{b(T)} - y_a^0 \theta^{1/\alpha} \leq w^1 \theta^{1/\alpha} + o(\theta^{1/\alpha}).$$

Le résultat découle en faisant tendre θ vers 0.

$$\limsup_{\theta \downarrow 0} \frac{b(T) - b(t)}{b(T)\theta^{1/\alpha}} \leq y_a + w^1.$$

□

Annexe 1 : Preuves des propriétés du modèle

preuve du lemme 4.2.2 :
Pour tout $p \geq 0$, on définit la transformée de Laplace de X_t,

$$\mathbb{E}(e^{pX_t}) = e^{t\phi(p)}$$

Où $\phi(p) = \int_{-\infty}^{0} e^{py} - 1 - p(e^y - 1)\nu(dy)$. Or, d'après la proposition 4.2.1, il existe un $P > 0$ assez grand tel pour tout $p > P$, on a $0 < \phi(p) < Cp^\alpha$, où $C > 0$.
Le processus $(e^{pX_t - t\phi(p)})_{t \geq 0}$ est une martingale de moyenne 1, on a donc pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}(e^{-\tau_K \wedge t\phi(p)}) = e^{-pK}\mathbb{P}(\tau_K \leq t) + \mathbb{E}(e^{pX_t} 1_{\{\tau_K > t\}})$$

Comme $\mathbb{E}(e^{pX_t} 1_{\{\tau_K > t\}}) \leq e^{pK}\mathbb{P}(\{\tau_K > t\})$ et que $\tau_K < \infty$ p.s., on obtient en faisant tendre t vers ∞

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\tau_K \phi(p)}) &= e^{-pK} \\ &\geq \mathbb{E}(e^{-C\tau_K p^\alpha}) \\ &\geq e^{-C\theta p^\alpha}\mathbb{P}(\tau_K \leq \theta) \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(\tau_K \leq \theta) \leq e^{C\theta p^\alpha - pK}$, ou $C\theta p^\alpha - pK$ atteint sa valeur minimale en

$$p_\theta = \left(\frac{K}{C\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha-1}}} = A^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

Remarquons que pour θ assez petit, $p_\theta > P$, donc en est bien dans le cadre de nos hypothèses d'estimation.

$$\begin{aligned} C\theta p_\theta^\alpha - p_\theta K &= C\theta^{1-\frac{\alpha}{\alpha-1}} A^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - A^{\frac{1}{\alpha-1}} K\theta^{-\frac{1}{\alpha-1}} \\ &= (CA-K)\, A^{\frac{1}{\alpha-1}}\theta^{-\frac{1}{\alpha-1}} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}_{<0} \underbrace{KA^{\frac{1}{\alpha-1}}}_{>0}\theta^{-\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Donc ils existent $\theta_0 > 0$ et une constante $C(\alpha, K) > 0$ tels quel pour tout $\theta \leq \theta_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(\tau_K \leq \theta) \leq e^{-C(\alpha,K)\theta^{-\frac{1}{\alpha-1}}} = o(\theta^n)$$

□

preuve Lemme4.2.2 :
On commence par prendre la partie réelle de la fonction caractéristique,

$$\mathbb{E}(\cos(uX_t^1)) = e^{-th_0(u)}\cos(th_1(u))$$

avec

$$\begin{aligned} h_0(u) &= \textstyle\int_a^0 (1-\cos(yu))\frac{\eta(y)}{|y|^{\alpha+1}}dy; \quad h_1(u) = \int_a^0 (\sin(yu)-yu)\frac{\eta(y)}{|y|^{\alpha+1}}dy \\ h_0(u) &= \textstyle\int_0^{|a|} (1-\cos(yu))\frac{\eta(-y)}{y^{\alpha+1}}dy; \quad h_1(u) = \int_0^{|a|} (yu-\sin(yu))\frac{\eta(-y)}{y^{\alpha+1}}dy \end{aligned}$$

On a donc, pour $1 < \beta < \alpha < 2$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1-\cos(u|X_t^1|)}{u^{\beta+1}}\right) = \frac{1-e^{-th_0(u)}\cos(th_1(u))}{u^{\beta+1}}.$$

En intégrant, à présent, par rapport à la variable u entre 0 et $+\infty$, on obtient

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\left(\frac{1-\cos(u|X_t^1|)}{u^{\beta+1}}\right)du = \int_0^\infty \frac{1-e^{-th_0(u)}\cos(th_1(u))}{u^{\beta+1}}du. \tag{4.17}$$

D'une part, on a

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \frac{1-\cos(u|X_t^1|)}{u^{\beta+1}}du\right) = \mathbb{E}(|X_t^1|^\beta)\int_0^\infty \frac{1-\cos(w)}{w^{\beta+1}}dw,$$

avec $\int_0^\infty \frac{1-\cos(w)}{w^{\beta+1}}dw < \infty$. En effet, pour w grand, on a $\frac{1-\cos(w)}{w^{\beta+1}} O(w^{-(\beta+1)})$ et $\beta+1 > 1$, pour w petit, on a $\frac{1-\cos(w)}{w^{\beta+1}} = O(w^{1-\beta})$ et $1-\beta > -1$.

D'autre part, en effectuant un premier changement de variable $w = uy$ dans les expressions de h_0 et h_1, on obtient

$$h_0(u) = \int_0^{|a|} (1-\cos(yu))\frac{\eta(-y)}{y^{\alpha+1}}dy = u^\alpha \int_0^{|a|u} \frac{(1-\cos(w))}{w^{\alpha+1}}\eta\left(\frac{-w}{u}\right)dw$$

et

$$h_1(u) = u^\alpha \int_0^{|a|u} \frac{(w-\sin(w))}{w^{\alpha+1}}\eta(\frac{-w}{u})dw.$$

on note

$$\tilde{h}_0(u) = \int_0^{|a|u} \frac{(1-\cos(w))}{w^{\alpha+1}}\eta\left(\frac{-w}{u}\right)dw \quad , \tilde{h}_1(u) = \int_0^{|a|u} \frac{(w-\sin(w))}{w^{\alpha+1}}\eta(\frac{-w}{u})dw.$$

En réinjectant h_1 et h_2 dans l'intégrale de droite dans (4.17) et en faisant le changement de variable suivant, $tu^\alpha = s$, on obtient

$$\int_0^\infty \left[1-e^{-tu^\alpha \tilde{h}_0(u)}\cos(tu^\alpha \tilde{h}_1(u))\right]\frac{du}{u^{\beta+1}} = \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha}\int_0^\infty \left[1-e^{-s\tilde{h}_0(\frac{s}{t})^{\frac{1}{\alpha}})}\cos\left(s\tilde{h}_1((s/t)^{\frac{1}{\alpha}})\right)\right]\frac{ds}{s^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}$$

Remarquons aussi que pout tout $t > 0$ et pour tout $s > 0$, on a

$$0 \le \tilde{h}_1((s/t)^{\frac{1}{\alpha}}) = \int_0^{|a|(\frac{s}{t})^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{(w-\sin(w))}{w^{\alpha+1}}\eta\left(-w(\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}\right)dw \le \|\eta\|_\infty \int_0^\infty \frac{(w-\sin(w))}{w^{\alpha+1}}dw \le D_0$$

$$0 \le \tilde{h}_0((\frac{s}{t})^{\frac{1}{\alpha}}) = \int_0^{|a|(\frac{s}{t})^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{(1-\cos(w))}{w^{\alpha+1}}\eta\left(-w(\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}\right)dw \le \|\eta\|_\infty \int_0^\infty \frac{(1-\cos(w))}{w^{\alpha+1}}dw \le D_1.$$

On notera $D = \max(D_0, D_1)$.
Sur $(0, \frac{\pi}{2})$, les fonctions $\cos(.)$ et $e^{-(.)}$ sont positives décroissantes, on a donc, pour tout $s \in (0, \frac{\pi}{2D})$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2D}} \frac{1-e^{-th_0(u)}\cos(th_1(u))}{u^{\beta+1}}ds \le \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2D}} \frac{1-e^{-Ds}\cos(Ds)}{s^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}ds = \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha}A < \infty.$$

Sur $[\frac{\pi}{2}, \infty)$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2D}}^{\infty} \frac{1 - e^{-th_0(u)} \cos(th_1(u))}{u^{\beta+1}} du \leq \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha} \int_{\frac{\pi}{2D}}^{\infty} \frac{2}{s^{\frac{\beta}{\alpha}+1}} du < \infty$$

Donc, pour conclure la démonstration, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t^1|^\beta) \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(w)}{w^{\beta+1}} dw &\leq \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2D}} \frac{1 - e^{-Ds} \cos(Ds)}{s^{\frac{\beta}{\alpha}+1}} ds + \int_{\frac{\pi}{2D}}^{\infty} \frac{2}{s^{\frac{\beta}{\alpha}+1}} du \right) \\ \mathbb{E}\left(\left| \frac{X_t^1}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^\beta \right) &\leq C^{te}_{(\alpha,\beta,\|\eta\|_\infty)}. \end{aligned}$$

□

Annexe 2 : Étude de u_a

Lemme 4.3.1

Soit X_t^0 le processus de Lévy α-stable défini plus haut, et $\mathcal{T}_{0,1}$ l'ensemble des $\mathcal{F}_t^0$-temps d'arrêts à valeurs dans $[0,1]$.Alors, la fonction

$$u_a^0(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \int_0^{\tau} (y + X_s) + a\,(y + X_s)^+ ds$$

est une fonction positive croissante et il existe $y_a^0 > 0$ tel que

$$-y_a^0 = \sup\{y \in \mathbb{R}; u_a(y) = 0\}.$$

preuve du lemme 4.3.1 :
Il est clair que la fonction u_a^0 est croissante, convexe, positive et on montre que $u_a^0(0) > 0$ et qu'il existe un $M < 0$ tel que $u_a^0(M) < 0$. On pose

$$y_a = -\sup\{y \in \mathbb{R} \mid u_a^0(y) = 0\}.$$

Le nombre y_a est strictement positif

$$u_a^0(0) > 0$$

Comme X est une martingale, on a, en notant ν la mesure de Lévy de X, $\int_{\{|x|\geq 1\}} |x|\nu(dx) < \infty$ donc d'après le *théorème 25.18* dans [33] $\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}|X_s| < \infty$. On a donc $\int_0^t \mathbb{E}(X_s)ds < \infty$

D'autre part, on a, pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t X_s ds = tX_t - \int_0^t s dX_S$$

On en déduit que la martingale locale $\left(\int_0^t X_s ds\right)_{t\geq 0}$ est une vrai martingale et que pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_{0,t}$,

$$\mathbb{E}(\int_0^\tau X_s ds) = \mathbb{E}(\tau X_\tau)$$

– On a pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_{0,1}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau (y+X_s)+a(y+X_s)^+ds\right) &\leq y\mathbb{E}(\tau)+\mathbb{E}\left(\int_0^\tau (1+a)(X_s)^+ds\right)\\ &\leq y\mathbb{E}(\tau)+(1+a)\mathbb{E}\left(\tau(X_\tau)^+\right)\end{aligned}$$

Grâce à la décomposition Lévy-Ito on peut écrire le processus X comme somme de deux processus à sauts négatifs (hypothèse sur X) compensés, X^1 (respectivement $\hat{X}$) a pour mesure de Lévy la restriction de ν sur $]-\infty,-1[$ (respectivement sur $[-1,0[$), d'où

$$\mathbb{E}\left(\tau(X_\tau)^+\right) \leq \mathbb{E}\left(\tau(X_\tau^1)^+\right) + \mathbb{E}\left(\tau(\hat{X}_\tau)^+\right).$$

Or, on a

$$\begin{aligned}X_t^1 &= \sum_{s<t;\Delta X_s^1<-1} \Delta X_s^1 - t\int_{]-\infty,-1[} z\nu(dz)\\ &\leq t\int_{]-\infty,-1[} -z\nu(dz),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\tau(X_\tau)^+\right) &\leq \mathbb{E}\left(\tau(X_\tau^1)^+\right) + \mathbb{E}\left(\tau(\hat{X}_\tau)^+\right)\\ &\leq \int_{]-\infty,-1[} -z\nu(dz)\mathbb{E}(\tau^2) + \mathbb{E}\left(\frac{\tau^2+\hat{X}_\tau^2}{2}\right)\\ &\leq \mathbb{E}(\tau)\left(\int_{]-\infty,-1[} -z\nu(dz) + \frac{1+\int_{-1\leq z<0} z^2\nu(dz)}{2}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour vue que

$$y < -(1+a)\int_{]-\infty,-1[} -z\nu(dz) + \frac{1+\int_{-1\leq z<0} z^2\nu(dz)}{2},$$

on aura $u_a^0(y) < 0$.

– Comme, par le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}X_\tau = 0$, on peut écrire

$$\mathbb{E}(\tau X_\tau) = \mathbb{E}((\tau - t)X_\tau). \tag{4.18}$$

Pour $\epsilon > 0$, posons

$$\tau_{-\epsilon} = \inf\{t \geq 0; \quad X_t \leq -\epsilon\}.$$

En appliquant (4.18) au temps d'arrêt $\tau_{-\epsilon} \wedge t$, on obtient

$$\mathbb{E}(\int_0^{\tau_{-\epsilon}\wedge t} X_s ds) = \mathbb{E}((\tau_{-\epsilon}\wedge t - t)X_{\tau_{-\epsilon}\wedge t}) = \mathbb{E}\left((\tau_{-\epsilon} - t)X_{\tau_{-\epsilon}} = \{(\tau_{-\epsilon}\wedge t - t)X_{\tau_{-\epsilon}<t}\}\right)$$

On a, sur $\{\tau_{-\epsilon} < \infty\}$, $X_{\tau_{-\epsilon}} < -\epsilon < 0$. Et pour montrer le lemme, il suffit d'avoir cela pour au moins un $\epsilon > 0$. Or, si pour tout $\epsilon >$, $\mathbb{P}(\tau_{-\epsilon} < t) = 1$, on a $\mathbb{P}(X_{\frac{1}{2}} > -\epsilon) = 1$, donc $X_{\frac{t}{2}} \geq 0$ p.s., et comme X est une martingale nulle en 0, X serait nulle partout.

□

proposition 4.3.1 : *On a pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u_a^\theta(\lambda) \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} u_a^0(\lambda)$$

preuve de la proposition 4.3.1 :

La preuve de cette proposition est une adaptation de celle du *théorème 1.2* dans [24]. On considère une subdivision ρ de $[0,1]$ et $\mathcal{T}_\rho^\theta$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans ρ du processus X^θ. On note

$$u_a^{\theta,\rho}(y) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_\rho^\theta} \mathbb{E}\int_0^\tau (y+X_s) + a\,(y+X_s)^+ ds,$$

on montre alors que

$$|u_a^\theta(y) - u_a^{\theta,\rho}(y)| \leq C|\rho|,$$

C étant une constante positive indépendante de ρ et $|\rho|$ désigne le pas de la subdivision. On montre ensuite grâce un argument de programmation dynamique que $u_a^{\theta,\rho}(y)$ converge uniformément sur tout compact vers $u_a^{0,\rho}(y)$, quand θ tend vers 0. □

Bibliographie

[1] Guy Barles, Julien Burdeau, Marc Romano, and Nicolas Samsœn, *Estimation de la frontière libre des options américaines au voisinage de l'échéance*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique **316** (1993), no. 2, 171–174.

[2] Alain Bensoussan, *On the theory of option pricing*, Acta Applicandae Mathematica **2** (1984), no. 2, 139–158.

[3] Alain Bensoussan and Jacques-Louis Lions, *Impulse control and quasi-variational inequalities*, Bordas Editions, 1984.

[4] Jean Bertoin, *Lévy processes, volume 121 of cambridge tracts in mathematics*, 1996.

[5] Mark Broadie and Jérôme Detemple, *The valuation of american options on multiple assets*, Mathematical Finance **7** (1997), no. 3, 241–286.

[6] E Chevalier, *Exercise boundary near maturity for an american option on several assets*, Stochastic Analysis and Applications **28** (2010), no. 4, 623–647.

[7] Rama Cont and Peter Tankov, *Financial modelling with jump processes*, vol. 133, Chapman & Hall/CRC Boca Raton, 2004.

[8] F. Delbaen and W. Schachermayer, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Mathematische Annalen **300** (1994), 463–520.

[9] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer, *The mathematics of arbitrage*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[10] N El Karoui, JP Lepeltier, and A Millet, *A probabilistic approach of the reduite*, Probability and Mathematical Statistics **13** (1992), 97–121.

[11] Nicole El Karoui, *Les aspects probabilistes du contrôle stochastique*, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IX-1979, Springer, 1981, pp. 73–238.

[12] Avner Friedman, *Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary*, Journal of functional analysis **18** (1975), no. 2, 151–176.

[13] J Michael Harrison and Stanley R Pliska, *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic processes and their applications **11** (1981), no. 3, 215–260.

[14] SD 1 Jacka, *Optimal stopping and the american put*, Mathematical Finance **1** (1991), no. 2, 1–14.

[15] Patrick Jaillet, Damien Lamberton, and Bernard Lapeyre, *Variational inequalities and the pricing of american options*, Acta Applicandae Mathematica **21** (1990), no. 3, 263–289.

[16] Ioannis Karatzas, *On the pricing of american options*, Applied mathematics and optimization **17** (1988), no. 1, 37–60.

[17] IN Kim, *The analytic valuation of american options*, Review of financial studies **3** (1990), no. 4, 547–572.

[18] Andreas Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of lévy processes with applications (universitext)*, Springer, 2006.

[19] Damien Lamberton, *Critical price for an american option near maturity*, Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Springer, 1995, pp. 353–358.

[20] ———, *Optimal stopping with irregular reward functions*, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009), no. 10, 3253–3284.

[21] Damien Lamberton and Mohammed Mikou, *The critical price for the american put in an exponential lévy model*, Finance and Stochastics **12** (2008), no. 4, 561–581.

[22] ———, *The smooth-fit property in an exponential lévy model*, Journal of Applied Probability **49** (2012), no. 1, 137–149.

[23] Damien Lamberton and Mohammed Adam Mikou, *Exercise boundary of the american put near maturity in an exponential lévy model*, Finance and Stochastics (2013), 1–40.

[24] Damien Lamberton and Gilles Pagès, *Sur l'approximation des réduites*, Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques, vol. 26, Gauthier-Villars, 1990, pp. 331–355.

[25] Damien Lamberton and Stéphane Villeneuve, *Critical price near maturity for an american option on a dividend-paying stock*, The Annals of Applied Probability **13** (2003), no. 2, 800–815.

[26] SZ Levendorskii, *Pricing of the american put under lévy processes*, International Journal of Theoretical and Applied Finance **7** (2004), no. 03, 303–335.

[27] Mohammed Mikou, *Options américaines dans les modèles exponentiels de lévy*, Ph.D. thesis, Université Paris-Est, 2009.

[28] Pierre Moerbeke, *On optimal stopping and free boundary problems*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **60** (1976), no. 2, 101–148.

[29] Huyên Pham, *Optimal stopping, free boundary, and american option in a jump-diffusion model*, Applied Mathematics and Optimization **35** (1997), no. 2, 145–164.

[30] Philip Protter, *Stochastic integration and differential equations : Version 2.1*, vol. 21, Springer, 2004.

[31] Mathieu Rosenbaum and Peter Tankov, *Asymptotic results for time-changed lévy processes sampled at hitting times*, Stochastic processes and their applications **121** (2011), no. 7, 1607–1632.

[32] Jan Rosiński, *Tempering stable processes*, Stochastic processes and their applications **117** (2007), no. 6, 677–707.

[33] Ken-iti Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge university press, 1999.

[34] Thomas Simon, *Sur les petites déviations d'un processus de lévy*, Potential Analysis **14** (2001), no. 2, 155–173.

[35] Stephane Villeneuve, *Exercise regions of american options on several assets*, Finance and Stochastics **3** (1999), no. 3, 295–322.

[36] ———, *Options américaines dans un modèle de black-scholes multi-dimensionnel*, Ph.D. thesis, 1999.

Deuxième partie

Simulation de CVA

Chapitre 5

Toward a coherent Monte Carlo simulation of CVA

L. A. Abbas-Turki[*], **A. I. Bouselmi**[†] and **M. A. Mikou**[‡]

This paper is devoted to the simulation of the Credit Valuation Adjustment (CVA) using a pure Monte Carlo technique with Malliavin Calculus (MCM). The procedure presented is based on a general theoretical framework that includes a large number of models as well as various contracts, and allows both the computation of CVA and its sensitivity with respect to the different assets. Moreover, we provide the expression of the backward conditional density of assets vector that can be simulated off-line in order to reduce the variance of the CVA estimator. Regarding computational aspects, both complexity and accuracy are studied for MCM and regression methods and compared to the square Monte Carlo benchmark.

5.1 Introduction

After the 2007 economic crisis, several laws were issued for better financial regulation. Among the most important measures are those taken at Basel III that include the calculation of the CVA (Credit Valuation Adjustment) as an important part of the prudential rules. In a financial transaction between a party A that has to pay another party B some amount V, the CVA value is the price of the insurance contract that covers the default of party A to pay the whole sum V. In other words, in the absence

of arbitrage opportunities, the CVA is the value of liquid products that must be saved to deal with counterparty default (see [13, 14]).

Formally speaking, the CVA is given by the following equality

$$\begin{aligned} \mathrm{CVA}_{t,T} &= (1-R)E_t\left(V_\tau^+ 1_{t<\tau\leq T}\right) \\ &= (1-R)\int_t^T E_t\left(V_u^+|\tau=u\right)P_\tau(du), \end{aligned} \tag{5.1}$$

where R (assumed equal to zero in this paper) is the recovery to make on the portfolio if the counterparty defaults, E_t denotes the conditional expectation knowing all the available information at t, V_t is the process of the value exposure to the counterparty, τ is the random default time of the counterparty, T is the protection time horizon and the positive part function is denoted either by $^+$ or $_+$.

What makes difficult the numerical approximation of (5.1) is the expression of V_t that does not only includes assets, but also European contracts and American contracts. Said differently, once the stochastic model of the assets is fixed, one needs to simulate contracts before simulating the value of the CVA. The approximation of (5.1) is performed through three steps : First, simulating the assets $S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ trajectories, then simulating the contracts trajectories to get V_t trajectories as a sum over the whole exposure :

$$V_t = \sum_{ie} \phi_{ie}^{exp}(S_t) + \sum_{ii} \phi_{ii}^{eui}(S_t) + \sum_{id} \phi_{id,t}^{eud}(S_t) + \sum_{ia} \phi_{ia,t}^{am}(S_t), \tag{5.2}$$

where ie, ii, id and ia are the exposure indices and :

ϕ^{exp} is an explicit function that represents pure assets transaction, for example : $\phi^{exp}(S_{t_k}) = S_{t_k}^1 - S_{t_k}^2$.

ϕ^{eui} is a path-independent European contract. It is a contract involving only the simulation of the assets S_t at $t = T$ and whose expression is given thanks to an explicit payoff function f^{eui} by

$$\phi^{eui}(S_{t_k}) = E(f^{eui}(S_T)|S_{t_k}), \text{ with } t_k \in [0,T], \tag{5.3}$$

for example : $f^{eui}(S_T) = (S_T^1 - S_T^2)_+$.

ϕ_t^{eud} is a path-dependent European contract. It is a contract involving the simulation of the whole discretized path of S_t at $t \in \{t_0, t_1, ..., T\}$ and whose expression is given thanks to a path-dependent payoff function f_t^{eud}, at each time t_k by

$$\phi_{t_k}^{eud}(S_{t_k}) = E(f_{t_k}^{eud}(S_{t_{k+1}})|S_{t_k}), \tag{5.4}$$

for example : $f^{eud}_{t_k}(S_{t_{k+1}}) = (\max_{i=0,..,k} S^1_{t_i} \vee S^1_{t_{k+1}} - S^2_{t_{k+1}})_+$ where $\vee$ is the maximum operator. In the previous example, the dependence of the payoff according to the information available at time t_k is illustrated by $\max_{i=0,..,k} S^1_{t_i}$.

ϕ^{am}_t is an American contract. It is a contract that depends on the assets path through an optimal stopping problem implemented by the dynamic programming algorithm

$$\phi^{am}_{t_k}(S_{t_k}) = f(S_{t_k}) \vee E(\phi^{am}_{t_{k+1}}(S_{t_{k+1}})|S_{t_k}) \tag{5.5}$$

with f an explicit payoff that generally does not depend on the asset path.

Without loss of generality, assuming $t = 0$ and $R = 0$ in (5.1), the last step of approximating $\text{CVA}_{0,T}$ is based on a time discretization, to get

$$\text{CVA}_{0,T} \approx \sum_{k=0}^{N-1} E\left(V^+_{t_k} 1_{\tau\in(t_k,t_{k+1}]}\right) \tag{5.6}$$

and N must be smaller or equal to the number of time steps used to approximate the trajectories of the assets.

The last point that has to be specified is the model used for the default time τ and how it should be related to the dynamic of V_t. In this paper, the two main families of modeling default time are studied : i) The reduced form family, ii) The structural family. For each family, a specific model involving dependence between the exposure and the default time (so called WWR/RWR) is considered with its associated expressions of the computation of $\text{CVA}_{0,T}$ and $\partial_{S^i_0}\text{CVA}_{0,T}$, where S^i_0 is the i^{th} spot price. The latter quantities will be expressed only as a function of the exposure and its gradient vector.

The common point between the expressions (5.3), (5.4) and (5.5) is the computation of a conditional expectation that should be simulated before the approximation (5.6). In this paper, we reexpress both the conditional expectation involved and its gradient using Malliavin Calculus. Denoting $E(f(S_{t_{k+1}})|S_{t_k}) = \varphi(S_{t_k})$, we aim at computing

$$\varphi(x) = E(f(S_{t_{k+1}})|S_{t_k} = x) \text{ and } \partial_{x_i}\varphi(x) \text{ with } x_i \in \{x_1, ..., x_d\}. \tag{5.7}$$

Inspired from papers [2, 3] dedicated to American contracts, we rewrite (5.7) as a quotient of expectations that can be simulated by Monte Carlo. Going beyond the latter result, we express the backward conditional density and its gradient as a quotient of expectations that can be simulated by Monte Carlo. When this density

and its gradient are known off-line for some trajectories (after discretization), then the values given in (5.7) can be efficiently approximated for any path-dependent or path-independent function f.

One could wonder why it is more advantageous to use Malliavin Calculus with Monte Carlo simulation (MCM) when compared to the direct use of a square [1] Monte Carlo simulation. We will see that MCM is justified by its computational complexity which is smaller than square Monte Carlo, in particular for the CVA that involves American contracts. Moreover, in contrast to regression methods used in [14], we will justify that MCM is a nonparametric method whose accuracy depends only on the number of simulated trajectories. Consequently, one can increase "indefinitely" the accuracy by simulating more trajectories and using more computational resources thanks to an efficient parallel implementation.

The easy adaptability to various models is a key advantage of our procedure, then we present in Section 5.2 a brief summary of the different models that can be used. In Section 5.3, we provide, on the one hand, the expression of the conditional expectation (5.7) as well as its partial derivative and we introduce, on the other hand, the value of the backward conditional density that can be simulated off-line to speedup the convergence of the CVA estimator. In Section 5.4, we compare the computational complexity of MCM with the method that involves regressions and with the square Monte Carlo method used as a benchmark. In addition to the MCM general framework, its adaptability to parallel architecture and its good accuracy studied in Section 5.5 suffice to justify its use as a real alternative to regression methods.

5.2 Model families

In this Section, we present the general modelling framework of asset prices and counterparty default for which MCM could be applied. We also express $\mathrm{CVA}_{0,T}$ and $\partial_{S_0^i}\mathrm{CVA}_{0,T}$ using V_t and $\partial_{S_0^i}V_t$ whose values are given by (5.2) and

$$\partial_{S_0^i}V_t = \sum_{ie}\partial_{S_0^i}\phi_{ie}^{exp}(S_t) \quad + \quad \sum_{ii}\partial_{S_0^i}\phi_{ii}^{eui}(S_t) \quad + \quad \sum_{id}\partial_{S_0^i}\phi_{id,t}^{eud}(S_t) \\ + \quad \sum_{ia}\partial_{S_0^i}\phi_{ia,t}^{am}(S_t). \tag{5.8}$$

1. This is a two levels Monte Carlo simulation, one for simulating assets trajectories and another one for simulating contracts trajectories. We refer the reader to Section 5.4 for a detailed explanation of the term square.

The value of each ϕ term in (5.2) and its derivative in (5.8) has the general formulation (5.7) given by φ and its derivative which are both computed thanks to the results presented in Section 5.3. Without loss of generality, we remind that we assume $R = 0$ in (5.1).

Let T be the protection time horizon, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a probability space on which we define a d-dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, ..., W^d)$ and $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s\}_{s \leq T}$ the P-completion of the filtration generated by W until T. We denote by S_t the vector of asset prices $S_t^1, ..., S_t^d$. which are the solutions of the following stochastic differential equations

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = r_i dt + \sum_{j=1}^{i} \sigma_{ij}(t) dW_t^j, \quad S_0^i = z_i, \quad i = 1, .., d, \tag{5.9}$$

where r_i are constants and $\sigma(t) = \{\sigma_{ij}(t)\}_{1 \leq i,j \leq d}$ is a deterministic triangular matrix ($\{\sigma_{ij}(t)\}_{i<j} = 0$). We suppose that the matrix $\sigma(t)$ is invertible, bounded and uniformly elliptic which ensures the existence of the inverse matrix $\rho(t) = \sigma^{-1}(t)$ and its boundedness. Dynamics (5.9) is widely used for equity models, HJM interest rate models and variance swap models. One should note that in the case where the dynamics of S is given by local volatility model, we can use a discretization scheme to reduce it to an SDE of type (5.9) on subintervals. The methodology developed in Section 5.3 can be extended to jump diffusion and stochastic volatility models, Indeed :

i) We can replace (5.9) by the following SDE

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = r_i dt + \sum_{j=1}^{i} \sigma_{ij}(t) dW_t^j + dJ_t^i, \quad S_0^i = z_i, \quad i = 1, .., d,$$

where $J = (J^1, ..., J^d)$ is a jump process independent from W. Then the conditional expectation in (5.7) is given by

$$\varphi(x) = E\left(E[f(S_{t_{k+1}})|\sigma\left((J_u)_{0 \leq u \leq t}\right), S_{t_k} = x]|S_{t_k} = x\right), \; x = (x_1, ..., x_d). \tag{5.10}$$

The computations performed in Section 5.3 can be implemented to the inner expectation in (5.10).

ii) We can replace (5.9) by the following stochastic volatility model,

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = r_i dt + \sum_{j=1}^{i} \sigma_{ij}(t, \widetilde{W}_t) dW_t^j, \quad S_0^i = z_i, \quad i = 1, .., d,$$

where $\widetilde{W}$ is a multidimensional Brownian motion correlated to W as it is done in [2]. Then the conditional expectation in (5.7) is given by

$$\varphi(x)=E\left(E[f(S_{t_{k+1}})|\sigma\left((\widetilde{W}_u)_{0\leq u\leq t}\right),S_{t_k}=x]|S_{t_k}=x\right),\ x=(x_1,...,x_d) \tag{5.11}$$

and the inner expectation in (5.11) and its partial derivative according to each x_i can be computed as explained in Section 5.3.

In addition to the large number of asset models that can be used, when assuming independence between V_u and τ in (5.1), one has a wide choice of the counterparty default time distribution $P_\tau(du)$. In fact, under the independence assumption, we have

$$\mathrm{CVA}_{0,T}=\int_0^T E\left(V_u^+|\tau\right)P_\tau(du)=\int_0^T E\left(V_u^+\right)P_\tau(du),$$

$$\partial_{S_0^i}\mathrm{CVA}=\int_0^T E\left(\partial_{S_0^i}V_u 1_{\{V_u>0\}}\right)P_\tau(du).$$

The permutation of the differentiation $\partial_{S_0^i}$ and the expectation is possible thanks to Remark 2 ii).

In the following, we consider CVA models involving WWR or RWR, this implies that V_u and τ are no longer assumed to be independent. ISDA (the International Swaps and Derivatives Association) defines Wrong Way Risk as the risk that occurs when the "exposure to a counterparty is adversely correlated with the credit quality of that counterparty", when the Right Way Risk (RWR) refers to the opposite correlation. Consequently, the choice of the counterparty default model will influence the CVA and $\partial_{S_0^i}$CVA expressions.

Using the literature [6, 5, 12, 13], we distinguish two main ways to model the default time : i) The structural family (firm value) and ii) The reduced form (intensity) family. However, as pointed out by the authors of [18], there is no standard way to specify the dependence between the counterparty default and the exposure. Subsequently, we will only give an example for each default model with its CVA expressions.

5.2.1 CVA intensity models including WWR/RWR

In these models, we assimilate the default time as the first jumping time of a Poisson process, where we denote by λ its intensity. We point out that λ can be even consi-

dered as deterministic, either constant or time dependent, and even stochastic like in Cox model. If λ is deterministic, we have $P(\tau > \theta) = e^{-\lambda\theta}$ and more precisely

$$P(\tau \in (t, t+dt] | \tau > t) = \frac{P(\tau \in (t, t+dt])}{P(\tau > t)} = \lambda dt.$$

The same formula is true when λ_t is $\mathcal{F}_t$-adapted by conditioning with respect to $\mathcal{F}_t$. Defined by

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds,$$

the function Λ is commonly known as the hazard function or cumulated intensity and λ represents the intensity or hazard rate.
When Λ is deterministic [2], the Poisson process properties imply that $\Lambda(\tau)$ is an exponential random variable with $E(\Lambda(\tau)) = 1$. Notice also that $\Lambda(\tau)$ is independent from the default-free market information $\mathbb{F}$. Thus we obtain,

$$P(\tau > t) = P(\Lambda(\tau) > \Lambda(t)) = e^{-\Lambda(t)} = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}.$$

If the hazard function is stochastic, we get

$$P(\tau > t) = E\left(e^{-\int_0^t \lambda_s ds}\right).$$

Specific example with its CVA and CVA sensitivity estimation
We present the model proposed in [18], involving WWR or RWR. The intensity model is assumed to have a stochastic $\mathcal{F}_t$-adapted hazard rate λ_t. Particularly, we suppose that

$$\lambda(t) = f(t, V_t),$$

where f is some "known" positive function and V_t represents the exposure at t. In some cases, one can take

$$\lambda(t) = g(t, S_t),$$

where S_t is the $\mathbb{R}^d$ process describing the underlying asset prices. In [18], the authors assume that either

$$\lambda(t) = \exp\left(a(t) + bV_t\right) \text{ or } \lambda(t) = \ln\left[1 + \exp\left(a(t) + bV_t\right)\right],$$

2. If Λ is $\mathcal{F}_t$-adapted, we obtain the same result by conditioning with respect to $\mathcal{F}_t$.

where $a(t)$ is a deterministic function that is useful for the calibration and b represents the dependence (WWR or RWR). In our work, we test a simpler model that takes into account only WWR and given by

$$\lambda_t = \alpha'' + \alpha'(V_t)_+, \text{ with } \alpha' \geq 0 \text{ and } \alpha'' \geq 0. \tag{5.12}$$

Assuming that we are able to estimate the process V_t on a time discretized grid $\{t_0 < t_1 < t_2 < .. < t_n = T\}$ (see Section 5.3), the value of the $\text{CVA}_{0,T}$ will be given by

$$\text{CVA}_{0,T} = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} V^+_{t_{k+1}} P\left(\tau \in (t_k, t_{k+1}]|\mathcal{F}_{t_{k+1}}\right)\right). \tag{5.13}$$

The sensitivity of the $\text{CVA}_{0,T}$ according to the i^{th} spot price S^i_0 is as follows,

$$\begin{aligned}\partial_{S^i_0}\text{CVA}_{0,T} &= E\left(\sum_{k=0}^{n-1} \partial_{S^i_0} V_{t_{k+1}} 1_{\{V_{t_{k+1}}>0\}} P(\tau \in (t_k, t_{k+1}]|\mathcal{F}_{t_{k+1}})\right) \\ &\quad + E\left(\sum_{k=0}^{n-1} V^+_{t_{k+1}} \partial_{S^i_0} P(\tau \in (t_k, t_{k+1}]|\mathcal{F}_{t_{k+1}})\right).\end{aligned}$$

The permutation of the operator $\partial_{S^i_0}$ and the expectation is justified in Remark 2 ii). Regarding the derivative $\partial_{S^i_0} P(\tau \in (t_k, t_{k+1}])$, we have

$$\begin{aligned}\partial_{S^i_0} P(\tau \in (t_k, t_{k+1}]|\mathcal{F}_{t_{k+1}}) &= \partial_{S^i_0}\left(P(\tau > t_k|\mathcal{F}_{t_{k+1}}) - P(\tau > t_{k+1}|\mathcal{F}_{t_{k+1}})\right) \\ &= \partial_{S^i_0}\left(e^{-\int_0^{t_k} f(s,V_s)ds} - e^{-\int_0^{t_{k+1}} f(s,V_s)ds}\right).\end{aligned}$$

Using the chain rule and the expression of the hazard rate given in (5.12), this

derivative becomes

$$\begin{aligned}
\partial_{S_0^i} P(\tau \in (t_k, t_{k+1}]|\mathcal{F}_{t_{k+1}}) &= -P(\tau > t_k|\mathcal{F}_{t_{k+1}}) \int_0^{t_k} \partial_{V_s} f(s, V_s) \partial_{S_0^i} V_s ds \\
&\quad + P(\tau > t_{k+1}|\mathcal{F}_{t_{k+1}}) \int_0^{t_{k+1}} \partial_{V_s} f(s, V_s) \partial_{S_0^i} V_s ds \\
&= -P\left(\tau \in (t_k, t_{k+1}]|\mathcal{F}_{t_{k+1}}\right) \int_0^{t_k} \partial_{V_s} f(s, V_s) \partial_{S_0^i} V_s ds \\
&\quad + P(\tau > t_{k+1}|\mathcal{F}_{t_{k+1}}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \partial_{V_s} f(s, V_s) \partial_{S_0^i} V_s ds \\
&= -P\left(\tau \in (t_k, t_{k+1}]|\mathcal{F}_{t_{k+1}}\right) \int_0^{t_k} \alpha' \partial_{S_0^i} V_s 1_{\{V_s > 0\}} ds \\
&\quad + P(\tau > t_{k+1}|\mathcal{F}_{t_{k+1}}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha' \partial_{S_0^i} V_s 1_{\{V_s > 0\}} ds.
\end{aligned}$$

Both V_t and $\partial_{S_0^i} V_t$ are provided in (5.2) and (5.8).

5.2.2 CVA structural models including WWR/RWR

First introduced by Merton [21], the default time in these models is defined according to the behavior of the positive firm value process $(X_t)_{t \geq 0}$. Merton's example assumes that default occurs if, at the final time T, the firm value X_T is below a given threshold L which generally represents a promised terminal payoff.
Inspired by this model, Black and Cox proposed to modelize the default time by

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \quad | \quad X_t \leq L_t\}$$

where

$$L_t = \begin{cases} e^{-\gamma(T-t)} K & \text{if} \quad t < T \\ L & \text{if} \quad t = T \end{cases}$$

with γ smaller than the risk neutral interest rate and $K \leq L$. In this situation, the "critical" threshold L_t must not be crossed by the firm value process. For more details, we refer the reader to [11]. In the structural model presented in Section 5.5, we will assume that L_t is constant.

Specific example with its CVA and CVA sensitivity estimation

The dependence between the default time variable τ and the exposure V_t is modelized thanks to the correlation between some Brownian motion W_t^0 that drives the process X_t and $\left(W_t^1, .., W_t^d\right)$ which drive the asset prices S_t.
Thus, $\text{CVA}_{0,T}$ is given by

$$\begin{aligned} \text{CVA}_{0,T} &= E\left(\sum_{k=0}^{n-1} V_\tau^+ 1_{\{\tau\in(t_k,t_{k+1}]\}}\right) \\ &\approx E\left(\sum_{k=0}^{n-1} V_{t_k}^+ 1_{\{\tau\in(t_k,t_{k+1}]\}}\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

The sensitivity of $\text{CVA}_{0,T}$ according to the i^{th} spot price S_0^i is given by

$$\begin{aligned} \partial_{S_0^i}\text{CVA}_{0,T} &= \sum_{k=0}^{n-1} \partial_{S_0^i} E\left(V_{t_k}^+ | \tau\in(t_k,t_{k+1}]\right) P(\tau\in(t_k,t_{k+1}]) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} E\left(V_{t_k}^+ | \tau\in(t_k,t_{k+1}]\right) \partial_{S_0^i} P(\tau\in(t_k,t_{k+1}]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\partial_{S_0^i} V_{t_k} 1_{\{V_{t_k}>0\}} 1_{\{\tau\in(t_k,t_{k+1}]\}}\right) \end{aligned}$$

which is ensured by the assumption $\partial_{S_0^i} P(\tau\in(t_k,t_{k+1}]) = 0$ and Remark 2 ii) that allows the permutation of the operator $\partial_{S_0^i}$ and the expectation.

Both V_t and $\partial_{S_0^i} V_t$ are provided in (5.2) and (5.8). Using the same argument presented in (5.10) and (5.11), the dependence according to τ is not an important issue for computations performed in Section 5.3. In fact, the conditional expectation (5.7) is equal to

$$\varphi(x) = E\left(E[f(S_{t_{k+1}})|\sigma\left((W_u^0)_{0\le u\le t}\right), S_{t_k}=x]|S_{t_k}=x\right),\ x=(x_1,...,x_d) \tag{5.15}$$

and the inner expectation can be computed as if the trajectory of $\{X_u\}_{0\le u\le t}$ is completely known. For more details, we refer the reader to Section 5.5 in which a more specific example is presented.

5.3 Computing the value exposure, its sensitivity ...

Estimating the value exposure to the counterparty V_t is crucial in the CVA computation. In order to calculate V_t using (5.2), one has to express the conditional expectation involved in each contract. Using Malliavin calculus for American contracts pricing, this conditional expectation was expressed as a ratio of two expectations (see for example [2, 3]). We aim here to adapt the previous results to the CVA problem. Moreover, we give an explicit formulation of the sensitivity with respect to the initial value of the stock price. In Section 5.3.2, we will be interested by rather a theoretical result that provides the value of the backward conditional density of the process (5.9) and of multidimensional stochastic volatility and jump diffusion models that extends (5.9). The backward transition probability does not depend on the payoff, then it should be computed off-line and stored to be re-used, in the same fashion as it is done in [4, 22].

In this section we suppose that the stock price S is given by (5.9). To simplify the notations, we denote $H_i^x(S_s^i) = H(S_s^i - x_i) := 1_{S_s^i \geq x_i}$ for the Heaviside function of the difference between the i^{th} stock and the i^{th} coordinate of the positive vector x. Throughout this article, we assume that $g \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ is a measurable function with polynomial growth

$$\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \ : \ \exists C > 0 \text{ and } m \in \mathbb{N};\ |f(y)| \leq C(1 + |y|_d)^m) \right\} \tag{5.16}$$

where $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ is the set of measurable functions on $\mathbb{R}^d$ and $|\cdot|_d$ is the euclidean norm. The elements of the set $\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ satisfy the finiteness of the expectations computed in this article. Besides, we usually use Malliavin derivative D_u^j for the differentiation with respect to the j^{th} Brownian motion.

5.3.1 The conditional expectation value and its gradient

We have already seen that V_t and $\partial_{S_0^i} V_t$ are given by (5.2) and (5.8) where the value of each contract is expressed using (5.3), (5.4) and (5.5). The only point that remains to be specified is the conditional expectation and its partial derivative in (5.7). Theorem 5.3.1 deals with the latter issue, but before that we need to introduce some definitions.

Definition 1 *We define the random variable* $\Gamma_{s,t} = \Gamma^1_{s,t}$ *and* $\Gamma^1_{s,t}$ *can be computed by the following induction scheme*

$$\Gamma^d_{s,t} = \pi^{d,d}_{s,t},\ \Gamma^k_{s,t} = \Gamma^{k+1}_{s,t}\pi^{k,d}_{s,t} - \sum_{j=k+1}^{d}\int_0^t D^j_u\Gamma^{k+1}_{s,t}D^j_u\pi^{k,d}_{s,t}du,\ \ k \in \{1,...,d-1\},$$

where $\pi^{k,d}_{s,t}$ *is given by*

$$\pi^{k,d}_{s,t} = 1 + \sum_{j=k}^{d}\int_0^t \varphi_{jk}(u)dW^j_u,\ \varphi_{jk}(u) = \frac{1}{s}\rho_{jk}(u)1_{u\in(0,s)} - \frac{1}{t-s}\rho_{jk}(u)1_{u\in(s,t)}.$$

with ρ *is the inverse of the volatility matrix* σ.

Theorem 5.3.1 *For any* $s \in (0,t)$, $g \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ *and* $x = (x_1,...,x_d)$ *with* $x_i > 0$,

$$E\left(g(S_t)\Big|S_s = x\right) = \frac{T_{s,t}[g](x)}{T_{s,t}[1](x)}, \tag{5.17}$$

and its partial derivative

$$\partial_{x_i}E\left(g(S_t)\Big|S_s = x\right) = \frac{R^i_{s,t}[g](x)T_{s,t}[1](x) - T_{s,t}[g](x)R^i_{s,t}[1](x)}{T_{s,t}[1](x)^2}, \tag{5.18}$$

where $T_{s,t}[f](x)$ *and* $R^i_{s,t}[f](x)$ *are defined for every function*[3] $f \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ *by*

$$T_{s,t}[f](x) = E\Big(f(S_t)\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\Big), \tag{5.19}$$

$$R^i_{s,t}[f](x) = -E\left(\frac{f(S_t)}{S^i_s}\widehat{H}^x(S_s)\Big(\Gamma_{s,t}(1+\pi^{i,d}_{s,t}) - \sum_{j=i}^{d}\int_0^t D^j_u\pi^{i,d}_{s,t}D^j_u\Gamma_{s,t}du\Big)\right), \tag{5.20}$$

with $\widehat{H}^x(S_s) = \prod_{k=1}^{d}\frac{H^x_k(S^k_s)}{S^k_s}$, $\Gamma_{s,t}$ *and* $\pi^{k,d}_{s,t}$ *are given in Definition 1.*

$H^x_k(S^k_s)$ is the Heaviside function of the difference between the k^{th} stock and the k^{th} coordinate of the positive vector x, $\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ is defined in (5.16).

Using Theorem 5.3.1, the conditional expectation in (5.7) and its derivative are given by (5.17) and (5.18). To prove Theorem 5.3.1, we need the following two lemmas which are proved in [2]. It follows from Lemma 5.3.1 that the sum $\sum_{j=i}^{d}\rho_{ji}(u)D^j_u f(S_t)$ does not depend on u.

3. In our case $f = g$ or $f = 1$

Lemma 5.3.1 *For any $u \in (0,t)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ and S given by the SDE (5.9), we have*

$$\sum_{j=i}^{d} \rho_{ji}(u) D_u^j f(S_t) = S_t^i \partial_{x_i} f(S_t). \tag{5.21}$$

The second lemma is based on the duality property of the Malliavin calculus.
Lemma 5.3.2 *For any interval $I \subset (0,t)$, $h \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$, $F \in Dom(D)$ and S given by the SDE (5.9), we have*

$$\begin{aligned} E\left(\int_I \frac{F D_u^i h(S_s^i)}{\sigma_{ii}(u)} du\right) &= E\left(h(S_s^i) F \sum_{j=i}^{d} \int_I \rho_{ji}(u) dW_u^j\right) \\ &- E\left(h(S_s^i) \sum_{j=i}^{d} \int_I \rho_{ji}(u) D_u^j F du\right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Preuve of Theorem 5.3.1:
The equalities (5.17) and (5.19) are proved in [2], the new result of this theorem is the partial derivative value (5.18). Regarding this part, it is sufficient to prove that

$$\partial_{x_i} T_{s,t}[f](x) = R_{s,t}^i[f](x).$$

Let $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ be a mollifier function with support equal to $[-1,1]$ and such that $\int_{\mathbb{R}} \phi(u) du = 1$, then for any $u \in \mathbb{R}$ we define

$$h_{mi}(u) = (H_i^x * \phi_m)(u) \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}), \quad \phi_m(u) = m\phi(mu), \quad m \in \mathbb{N}.$$

The dependence with respect to x_i can be dominated and the differentiation under the integral sign provides

$$\partial_{x_i} E\left(f(S_t)\Gamma_{s,t} \frac{h_{mi}(S_s^i)}{S_s^i} \widehat{H}^i(S_s)\right) = -E\left(f(S_t)\Gamma_{s,t} \frac{h'_{mi}(S_s^i)}{S_s^i} \widehat{H}^i(S_s)\right), \tag{5.23}$$

where $\widehat{H}^i(S_s) = \prod_{k=1;k\neq i}^{d} \frac{H_k^x(S_s^i)}{S_s^i}$.

Under our assumptions, the distribution of the vector $(S_s^1, ..., S_s^d, S_t^1, ..., S_t^d)$ admits a lognormal joint distribution density $p_{s,t}$ with respect to the Lebesgue measure on

$\mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^d_+$. Similar to the argument presented in proof of Theorem 2.1 in [2], using $p_{s,t}$ one gets the limit as $m \longrightarrow \infty$

$$\partial_{x_i} E\left(f(S_t)\Gamma_{s,t}\frac{h_{mi}(S^i_s)}{S^i_s}\widehat{H}^i(S_s)\right) \longrightarrow \partial_{x_i} T_{s,t}[f](x),$$

that provides

$$\partial_{x_i} T_{s,t}[f](x) = -\lim_{m\to+\infty} E\left(f(S_t)\Gamma_{s,t}\frac{h'_{mi}(S^i_s)}{S^i_s}\widehat{H}^i(S_s)\right). \tag{5.24}$$

We introduce the following notations

$$\Pi(S_s) = \frac{\widehat{H}^i(S_s)}{(S^i_s)^2}, \quad \widehat{h}_{mi}(S_s) = \frac{h_{mi}(S^i_s)}{S^i_s}\widehat{H}^i(S^i_s).$$

We have by the chain rule $h'_{mi}(S^i_s) = \frac{D^i_u h_{mi}(S^d_s)}{D^i_u S^i_s}$ and $D^i_u S^i_s = \sigma_{ii}(u)S^i_s$ for every $u \in (0,s)$, thus

$$\begin{aligned} E\left(f(S_t)\Gamma_{s,t}\frac{h'_{mi}(S^i_s)}{S^i_s}\widehat{H}^i(S_s)\right) &= E\left(\frac{1}{s}\int_0^s f(S_t)\Gamma_{s,t}\widehat{H}^i(S_s)\frac{D^i_u h_{mi}(S^i_s)}{S^i_s D^i_u S^i_s}du\right) \\ &= E\left(\frac{1}{s}\int_0^s f(S_t)\Gamma_{s,t}\widehat{H}^i(S_s)\frac{D^i_u h_{mi}(S^i_s)}{\sigma_{ii}(u)(S^i_s)^2}du\right). \end{aligned}$$

Using Lemma 5.3.2 with

$$F = f(S_t)\Gamma_{s,t}\frac{\widehat{H}^i(S_s)}{(S^i_s)^2} = f(S_t)\Gamma_{s,t}\Pi(S_s),$$

we get

$$\begin{aligned} &E\left(f(S_t)\Gamma_{s,t}\frac{h'_{mi}(S^i_s)}{S^i_s}\widehat{H}^i(S_s)\right) = E\left(h_{mi}(S^i_s)F\frac{1}{s}\sum_{j=i}^d\int_0^s \rho_{ji}(u)dW^j_u\right) \\ &- E\left(h_{mi}(S^i_s)\frac{1}{s}\sum_{j=i}^d\int_0^s \rho_{ji}(u)\left[\begin{array}{c}\Gamma_{s,t}\Pi(S_s)D^j_u f(S_t) + f(S_t)\Gamma_{s,t}D^j_u\Pi(S_s) \\ +f(S_t)\Pi(S_s)D^j_u\Gamma_{s,t}\end{array}\right]du\right) \\ &= E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S^i_s)}{S^i_s}f(S_t)\frac{1}{s}\Big(\Gamma_{s,t}(\sum_{j=i}^d\int_0^s \rho_{ji}(u)dW^j_u + 2s) - \sum_{j=i}^d\int_0^s \rho_{ji}(u)D^j_u\Gamma_{s,t}du\Big)\right) \\ &- E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S^i_s)}{S^i_s}\Gamma_{s,t}\frac{1}{s}\Big(\sum_{j=i}^d\int_0^s \rho_{ji}(u)D^j_u f(S_t)du\Big)\right), \end{aligned} \tag{5.25}$$

since, using Lemma 5.3.1, we have

$$\sum_{j=i}^{d} \rho_{ji}(u) D_u^j \Pi(S_s) = S_s^i \partial_{x_i} \Pi(S_s) = -2\Pi(S_s).$$

Let us develop the last term in (5.25), using Lemma 5.3.1

$$\begin{aligned}
&E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S_s^i)}{S_s^i}\Gamma_{s,t}\frac{1}{s}\Big(\sum_{j=i}^{d}\int_0^s \rho_{ji}(u)D_u^j f(S_t)du\Big)\right)\\
&= E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S_s^i)}{S_s^i}\frac{1}{t-s}\Big(\sum_{j=i}^{d}\Gamma_{s,t}\int_s^t \rho_{ji}(u)D_u^j f(S_t)du\Big)\right)\\
&= E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S_s^i)}{S_s^i}\frac{1}{t-s}\sum_{j=i}^{d} E\Big(\Gamma_{s,t}\int_s^t \rho_{ji}(u)D_u^j f(S_t)du\Big|\mathcal{F}_s\Big)\right)\\
&= E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S_s^i)}{S_s^i}\frac{1}{t-s}\sum_{j=i}^{d} E\Big(f(S_t)\Gamma_{s,t}\int_s^t \rho_{ji}(u)dW_u^j\Big|\mathcal{F}_s\Big)\right)\\
&= E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S_s^i)}{S_s^i}\frac{1}{t-s}\sum_{j=i}^{d} E\Big(f(S_t)(\Gamma_{s,t}\int_s^t \rho_{ji}(u)dW_u^j - \int_s^t \rho_{ji}(u)D_u^j\Gamma_{s,t}du)\Big|\mathcal{F}_s\Big)\right).
\end{aligned}$$

Thus, (5.25) becomes

$$\begin{aligned}
&E\left(f(S_t)\Gamma_{s,t}\frac{h'_{mi}(S_s^i)}{S_s^i}\widehat{H}^i(S_s)\right) \qquad (5.26)\\
&= E\left(\frac{\widehat{h}_{mi}(S_s^i)}{S_s^i}f(S_t)\Big(\Gamma_{s,t}(1+\pi_{s,t}^{i,d}) - \sum_{j=i}^{d}\int_0^t D_u^j\pi_{s,t}^{i,d}D_u^j\Gamma_{s,t}du\Big)\right).
\end{aligned}$$

Using a dominated convergence argument, from (5.24) and (5.26) we get

$$\partial_{x_i}T_{s,t}[f](x) = -E\left(\frac{f(S_t)}{S_s^i}\prod_{k=1}^{d}\frac{H_k^x(S_s^k)}{S_s^k}\Big(\Gamma_{s,t}(1+\pi_{s,t}^{i,d}) - \sum_{j=i}^{d}\int_0^t D_u^j\pi_{s,t}^{i,d}D_u^j\Gamma_{s,t}du\Big)\right).$$

□

Remark 2 *i) Its is* **important** *to point out that* $\Gamma_{s,t}$ *and* $\sum_{j=i}^{d}\int_0^t D_u^j\pi_{s,t}^{i,d}D_u^j\Gamma_{s,t}du$ *can be simulated efficiently using the trick given in [2] which will be detailed in Remark 3.*

ii) For every $g \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$, one can show that the functions $R^i_{s,t}[g]$ and $T_{s,t}[g]$ are continuous since the Heaviside function is continuous except on the negligible set $\{S_s = x\}$. The latter fact implies that the partial derivative of the conditional expectation (5.18) is locally bounded when its payoff is in $\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$.

5.3.2 Backward conditional density estimation

The authors of [22] proposed a Karhunen-Loeve expansion of Brownian motion and provide in [26] an optimal choice[4] of the couple (space discretization, probability weights) to approximate the standard Gaussian distribution. Known as quantization, this method of using preloaded files should be the method of choice for problems involving Brownian motion or Brownian bridge. Indeed, for this model, the effectiveness of quantization and its good accuracy for dimensions bigger than 3 make it relevant for various problems. Nevertheless, it is not straightforward to use this method for other multidimensional stochastic volatility or jump diffusion models.

Developed for various models, our method of computing (5.7) employing Malliavin Calculus is more complex than using directly preloaded files as done with the quantization method. However, one can use also Malliavin Calculus to express the backward conditional density. Provided that we are employing the same pseudo random number generator, one can first approximate the backward conditional density off-line for some points of assets trajectories and store it, then re-use them directly as preloaded files to have the distribution of each contract which is sufficient to compute the CVA or develop any other risk hedging strategy. Moreover, when the backward conditional density is already stored, using it to compute (5.7) is better, from a variance reduction point of view, than using (5.17) and (5.18). In fact, we provide in (5.29) and (5.30) the value of the backward conditional density and of its partial derivative. First, let us introduce some notations.

Definition 2 *The random variables $\overline{\Gamma}_{s,t}$ and $\widehat{\Gamma}^i_{s,t}$ are the solution $X_{s,t}$ of the following induction scheme*

$$X_{s,t} = X^1_{s,t},\ X^k_{s,t} = X^{k+1}_{s,t}\bar{\pi}^{k,d}_{s,t} - \sum_{j=k}^{d}\int_0^t D^j_u X^{k+1}_{s,t} D^j_u \bar{\pi}^{k,d}_{s,t} du, \quad k \in \{1, ..., d\},$$

with the terminal values

$$\overline{\Gamma}^{d+1}_{s,t} = \Gamma_{s,t}, \quad \textit{and} \quad \widehat{\Gamma}^{d+1,i}_{s,t} = \Gamma_{s,t}(1 + \pi^{i,d}_{s,t}) - \sum_{j=i}^{d}\int_0^t D^j_u \pi^{i,d}_{s,t} D^j_u \Gamma_{s,t} du,$$

4. In a sense explained in their paper.

where $\Gamma_{s,t}$, $\pi^{i,d}_{s,t}$ *are defined in Defintion 1 and* $\bar{\pi}^{k,d}_{s,t}$ *is given by*

$$\bar{\pi}^{k,d}_{s,t} = 1 + \frac{1}{t-s}\sum_{j=k}^{d}\int_s^t \rho_{jk}(u)dW^j_u, \text{ with } \rho \text{ is the inverse of the volatility matrix } \sigma.$$

Theorem 5.3.2 *For any* $s \in (0,t)$, $g \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$, $x = (x_1, ..., x_d)$ *and* $y = (y_1, ..., y_d)$ *with* $x_i > 0$ *and* $y_i > 0$,

$$T_{s,t}[f](x) = E\left(f(S_t)\bar{h}(x, S_t)\right), \tag{5.27}$$

$$R^i_{s,t}[f](x) = E\left(f(S_t)\hat{h}(x, S_t)\right), \tag{5.28}$$

where

$$\bar{h}(x,y) = E\left(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\Big|S_t = y\right) = \frac{E\left(\overline{\Gamma}_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{H}^y(S_t)\right)}{E(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^y(S_t))} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}\hat{h}(x,y) &= E\left(\left(\Gamma_{s,t}(1+\pi^{i,d}_{s,t}) - \sum_{j=i}^{d}\int_0^t D^j_u\pi^{i,d}_{s,t}D^j_u\Gamma_{s,t}du\right)\frac{\widehat{H}^x(S_s)}{S^i_s}\Big|S_t = y\right)\\ &= \frac{E\left(\frac{\widehat{\Gamma}_{s,t}}{S^i_s}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{H}^y(S_t)\right)}{E(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^y(S_t))},\end{aligned} \tag{5.30}$$

with $\widehat{H}^y(S_t) = \prod_{j=1}^{d}\frac{H^y_j(S^j_t)}{S^j_t}$, $\Gamma_{s,t}$, $\pi^{i,d}_{s,t}$, $\overline{\Gamma}_{s,t}$ *and* $\widehat{\Gamma}_{s,t}$ *are given in Definition 1 and Definition 2.*

Proof I:
n

□

the same fashion as in the beginning of the proof of Theorem 5.3.1, we regularize the heaviside function H^y_i by $h_i \in \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R})$. In order to lighten the notations, we remove in this proof the dependence on m in h_{mi} ($m \to \infty$). Then, we need to prove that for $0 \le k \le d$, we have

$$E\left(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\prod_{i=1}^{d}h'_i(S^i_t)\right) = E\left(\overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\prod_{i=1}^{k}h'_i(S^k_t)\prod_{i=k+1}^{d}\frac{h_i(S^k_t)}{S^k_t}\right), \tag{5.31}$$

with (5.27) obtained directly from (5.31) when $k=0$. In fact, $E\left(\Gamma_{s,t}\prod_{j=1}^{d}\frac{H_j(S_s^j)}{S_s^j}\Big|S_t=y\right)$ can be viewed heuristically as $\frac{E\left(\Gamma_{s,t}\prod_{j=1}^{d}\frac{H_j(S_s^j)}{S_s^j}\varepsilon_y(S_t)\right)}{E\left(\varepsilon_y(S_t)\right)}$ where ε_y is the Dirac distribution at y and we know that $\varepsilon_{y_i}=(H_i^y)'$. In order to make the reasoning rigorous, one replace the expectation of $\varepsilon_y(S_t)$ by the density of S_t evaluated at y.

Now let us prove (5.31) by induction, we introduce the following notations

$$\widehat{h}_k^d(S_t)=\prod_{i=k}^{d}\frac{h_i(S_t^i)}{S_t^i},\quad \widehat{h'}_k(S_t)=\prod_{i=1}^{k}h_i'(S_t^i).$$

When $k=d$, we have by the chain rule $h_d'(S_t^d)=\frac{D_u^d h_d(S_t^d)}{D_u^d S_t^d}$ and $D_u^d S_t^d=\sigma_{dd}(u)S_t^d$ for every $u\in(s,t)$, thus

$$\begin{aligned}E\left(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_d(S_t)\right) &= E\left(\frac{1}{t-s}\int_s^t\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{d-1}(S_t)\frac{D_u^d h_d(S_t^d)}{D_u^d S_t^d}du\right)\\ &= E\left(\frac{1}{t-s}\int_s^t\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{d-1}(S_t)\frac{D_u^d h_d(S_t^d)}{\sigma_{dd}(u)S_t^d}du\right).\end{aligned}$$

Using Lemma 5.3.2 with

$$F=\frac{\Gamma_{s,t}}{S_t^d}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{d-1}(S_t)$$

and the fact that $\widehat{h'}_{d-1}(S_s)$ does not depend on the d^{th} coordinate of the Brownian motion yields

$$\begin{aligned}&E\left(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_d(S_t)\right)\\ &= E\left(Fh_d(S_t^d)\frac{1}{t-s}\int_s^t\frac{dW_u^d}{\sigma_{dd}(u)}\right)-E\left(h_d(S_t^d)\frac{1}{t-s}\int_s^t D_u^d F\frac{du}{\sigma_{dd}(u)}\right)\\ &= E\left(h_d(S_t^d)\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{d-1}(S_t)\Big(\frac{\Gamma_{s,t}}{S_t^d}(\bar{\pi}_{s,t}^{d,d}-1)-\frac{1}{t-s}\int_s^t D_u^d\frac{\Gamma_{s,t}}{S_t^d}\frac{du}{\sigma_{dd}(u)}\Big)\right)\\ &= E\left(\frac{h_d(S_t^d)}{S_t^d}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{d-1}(S_t)\Big(\Gamma_{s,t}\bar{\pi}_{s,t}^{d,d}-\frac{1}{t-s}\int_s^t D_u^d\Gamma_{s,t}\frac{du}{\sigma_{dd}(u)}\Big)\right) \qquad (5.32)\\ &= E\left(\overline{\Gamma}_{s,t}^d\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{d-1}(S_t)\frac{h_d(S_t^d)}{S_t^d}\right)\end{aligned}$$

where the equality (5.32) comes from the fact that for $u\in(s,t)$

$$\frac{1}{\sigma_{dd}}D_u^d\frac{\Gamma_{s,t}}{S_t^d}=\frac{1}{S_t^d\sigma_{dd}}D_u^d\Gamma_{s,t}-\frac{\Gamma_{s,t}}{S_t^d}.$$

Now, let us suppose that (5.31) is satisfied for k and prove it for $k-1$. We have by the chain rule $h'_k(S^k_s) = \frac{D^k_u h_k(S^k_s)}{D^k_u S^k_s}$ and $D^k_u S^k_s = \sigma_{kk}(u) S^k_s$, thus

$$E\left(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_d(S_t)\right) = E\left(\overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_k(S_t)\widehat{h}^d_{k+1}(S_t)\right)$$
$$= E\left(\frac{1}{t-s}\int_s^t \overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{k-1}(S_t)\widehat{h}_{k+1}(S_t)\frac{D^k_u h_k(S^k_t)}{\sigma_{kk}(u)S^k_t}du\right).$$

As before, using Lemma 5.3.2 with in this time

$$F = \frac{\overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}}{S^k_t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{k-1}(S_t)\widehat{h}_{k+1}(S_t)$$

and the fact that $\widehat{h'}_{k-1}(S_t)$ and $\widehat{h}_{k+1}(S_t)$ are not depend on the k^{th} coordinate of the Brownian motion, we obtain

$$E\left(\Gamma_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_d(S_t)\right)$$
$$= \sum_{i=k}^{d} E\left(h_k(S^k_s)\widehat{h}_{k+1}(S_t)\widehat{h'}_{k-1}(S_t)\frac{\widehat{H}^x(S_s)}{t-s}\left(\frac{\overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}}{S^k_t}\int_s^t \rho_{ik}(u)dW^i_u - \int_s^t \rho_{ik}(u)D^i_u\frac{\overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}}{S^k_t}du\right)\right)$$
$$= E\left(\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{k-1}(S_t)\widehat{h}_k(S_t)\left(\overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}\overline{\pi}^{k,d}_{s,t} - \frac{1}{t-s}\int_s^t D^i_u\overline{\Gamma}^{k+1}_{s,t}D^i_u\overline{\pi}^{k,d}_{s,t}du\right)\right)$$
$$= E\left(\overline{\Gamma}^{k}_{s,t}\widehat{H}^x(S_s)\widehat{h'}_{k-1}(S_t)\widehat{h}_k(S_t)\right)$$

Similarly, one can prove (5.28).

In Remark 3, we use the set of the second order permutations $\overline{\mathcal{P}}_{1,d}$ defined by

$$\overline{\mathcal{P}}_{1,d} = \{p \in \mathcal{P}_{1,d};\ p \circ p = Id\}, \tag{5.33}$$

where $\mathcal{P}_{1,d}$ is the set of permutations on $\{1,...,d\}$ and Id is the identity application.

Remark 3 *In order to make easier the implementation of (5.19), it was shown in [2] that $\Gamma_{s,t}$ given in Definition 1 can be computed as a determinant of a given matrix A*

$$\Gamma_{s,t} = \sum_{p\in\overline{\mathcal{P}}_{1,d}} \epsilon(p)\prod_{i=1}^{d} A_{i,p(i)}, \tag{5.34}$$

with $\epsilon(p)$ as the signature of the permutation $p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}$, and

$$A = \begin{pmatrix} \pi_{s,t}^{1,d} & C_{1,2} & C_{1,3} & \cdots & C_{1,d} \\ 1 & \pi_{s,t}^{2,d} & C_{2,3} & \cdots & C_{2,d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \pi_{s,t}^{d-1,d} & C_{d-1,d} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \pi_{s,t}^{d,d} \end{pmatrix},$$

where

$$C_{k,l} = Cov(\pi_{s,t}^{k,d}, \pi_{s,t}^{l,d}) = \sum_{j=k\vee l}^{d} \left(\frac{1}{s^2} \int_0^s \rho_{jk}(u)\rho_{jl}(u)du + \frac{1}{(t-s)^2} \int_s^t \rho_{jk}(u)\rho_{jl}(u)du \right).$$

Using the same idea, we can deduce a generating method for the computation of $\overline{\Gamma}_{s,t}$ and $\widehat{\Gamma}_{s,t}$. In fact, the solution $X_{s,t}$ of the induction scheme in Definition 2 can be expressed in a similar way as follow

$$X_{s,t} = \sum_{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d+1}} \epsilon(p) \prod_{i=1}^{d+1} \bar{A}_{i,p(i)},$$

with $\epsilon(p)$ is the signature of the permutation $p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d+1}$ and

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\pi}_{s,t}^{1,d} & \bar{C}_{1,2} & \bar{C}_{1,3} & \cdots & \bar{C}_{1,d+1} \\ 1 & \bar{\pi}_{s,t}^{2,d} & \bar{C}_{2,3} & \cdots & \bar{C}_{2,d+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \bar{\pi}_{s,t}^{d,d} & \bar{C}_{d,d+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & X_{s,t}^{d+1,d} \end{pmatrix},$$

where $\bar{C}_{k,d+1} = \left\langle \bar{\pi}_{s,.}^{k,d}, X_{s,.}^{d+1,d} \right\rangle_t$ and

$$\bar{C}_{k,l} = Cov(\bar{\pi}_{s,t}^{k,d}, \bar{\pi}_{s,t}^{l,d}) = \sum_{j=k\vee l}^{d} \frac{1}{(t-s)^2} \int_s^t \rho_{jk}(u)\rho_{jl}(u)du, \ k,l \in \{1,..,d\}.$$

Let denote $\Gamma_{s,t}^{-k}$ the second order permutation determinant of the matrix A^{-k} that comes from A by suppressing both line and column "k"

$$\Gamma_{s,t}^{-k} = \sum_{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}^{k}} \epsilon(p) \prod_{i=1;i\neq k}^{d} A_{i,p(i)},$$

where $\overline{\mathcal{P}}_{1,d}^{k} = \{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}, \quad p(k) = k\}$. The following lemma gives a generating way to implement the term " $\sum_{j=i}^{d} \int_0^t D_u^j \pi_{s,t}^{i,d} D_u^j \Gamma_{s,t} du$" which appear in both Theorem 5.3.1 and Theorem 5.3.2.

Lemma 5.3.3 *Let $i \in \{1, ..., d\}$ and $s \in (0, t)$. We have*

$$\sum_{j=i}^{d} \int_0^t D_u^j \pi_{s,t}^{i,d} D_u^j \Gamma_{s,t} du = \sum_{l=1}^{d} \Gamma_{s,t}^{-l} C_{l,i}.$$

Proof F:
i

□

rst, using (5.34), we have for every $u \in (0, t)$

$$\begin{aligned} D_u^j \Gamma_{s,t} &= \sum_{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}} \epsilon(p) D_u^j \left(\prod_{i=1}^{d} A_{i,p(i)} \right) \\ &= \sum_{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}} \epsilon(p) \sum_{l=1}^{d} \left(\prod_{i=1; i \neq l}^{d} A_{i,p(i)} \right) D_u^j A_{l,p(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{d} \sum_{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}^{l}} \epsilon(p) \left(\prod_{i=1; i \neq l}^{d} A_{i,p(i)} \right) D_u^j \pi_{s,t}^{l,d}, \end{aligned}$$

where the last equality is due to the fact that $A_{l,p(l)}$ is deterministic except for $p(l) = l$ for which $A_{l,l} = \pi_{s,t}^{l,d}$. Now, since $\pi_{s,t}^{l,d}$ does not depend on the Brownien motion W^j when $l > j$, using Fubini theorem we get

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{d} \int_0^t D_u^j \pi_{s,t}^{i,d} D_u^j \Gamma_{s,t} du &= \sum_{j=i}^{d} \sum_{l=1}^{j} \sum_{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}^{l}} \epsilon(p) \prod_{i=1; i \neq l}^{d} A_{i,p(i)} \int_0^t D_u^j \pi_{s,t}^{i,d} D_u^j \pi_{s,t}^{l,d} du \\ &= \sum_{l=1}^{d} \sum_{j=l \vee i}^{d} \sum_{p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d}^{l}} \epsilon(p) \prod_{i=1; i \neq l}^{d} A_{i,p(i)} \int_0^t D_u^j \pi_{s,t}^{i,d} D_u^j \pi_{s,t}^{l,d} du \\ &= \sum_{l=1}^{d} \Gamma_{s,t}^{-l} C_{l,i}. \end{aligned}$$

5.4 Complexity comparison of different approaches

5.4.1 Square Monte Carlo benchmark and regression method

As we saw in the introduction, to approximate the CVA value using (5.6), one needs first to simulate assets trajectories, also known as simulating scenarios [14], that corresponds to the outer expectation, then compute the conditional expectation given by (5.7) involved in (5.3), (5.4) and (5.5). For some models and some contracts, this computation could be explicit or semi-explicit using Fourier transform [12]. When the dimension is 2 or 3 and for a large choice of models and contracts, numerical methods for PDEs [5] become more appropriate because faster than a Monte Carlo simulation. However, for the most general models and contracts and for dimensions bigger than 4, the only option that remains is the use of Monte Carlo for both simulating asset trajectories and the conditional expectation in (5.7).

When only exchanging European contracts with the counterparty and the number of simulated trajectories is big enough, using a square Monte Carlo for CVA computation gives reference results. The parallel suitability of Monte Carlo allows to increase the accuracy using more computing resources including many-cores architectures as done in [1]. Nevertheless, the complexity of square Monte Carlo remains too high. Indeed, if we denote by d the dimension of the problem in terms of assets, by M the number of simulated trajectories and by N the number of time steps of the simulation [6], then we shall simulate exactly $dNM[1+(M-1)(N-1)/2]$ segments of trajectory (see Figure 5.1). The proof of this result is built on the assumption that we use the same number of trajectories for both Monte Carlo simulations involved. In fact, we have to draw dMN segments for the first Monte Carlo and at each time step t_k, we should simulate $(M-1)(N-k)$ segments of trajectories at each point from the first dMN set, which leads to

$$dMN + \sum_{k=1}^{N} dM(M-1)(N-k) \quad = \quad dMN\left(1 + \frac{(M-1)(N-1)}{2}\right).$$

Thus, if we denote by $\mathcal{T}$ the complexity of the simulation of a segment of a trajectory, the complexity of square Monte Carlo is of order $O(\mathcal{T}dM^2N^2)$. Another inconvenient

5. Partial Differential Equations
6. Supposed here equal to the number of time steps of the SDE discretization

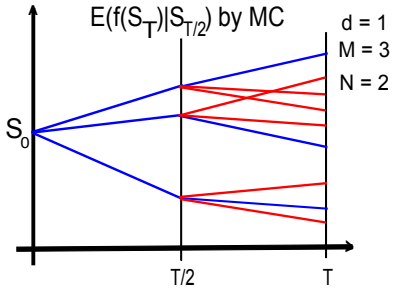


FIGURE 5.1 – The price of the contract at $T/2$ is approximated by a Monte Carlo simulation.

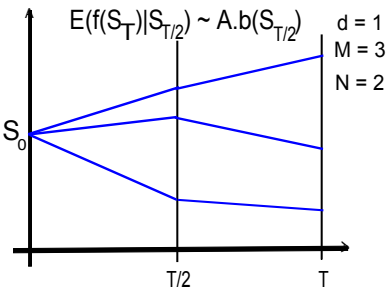


FIGURE 5.2 – The price of the contract at $T/2$ is approximated by a linear regression on a finite basis.

of this method comes from the fact that it has an exponential complexity according to the number of trajectories when employed for American contracts. Indeed, according to induction (5.5), to get $\phi_{t_k}^{am}(S_{t_k})$ we must have M trajectories of the function $\phi_{t_{k+1}}^{am}(S_{t_{k+1}})$ and so on.

For all the previous reasons, practitioners prefer the use of methods based on regression whose complexity can be decomposed into two terms : A part associated to the scenarios generation which is of order $O(\mathcal{T}dMN)$ and another part for the approximation of the conditional expectation by a regression on a polynomial basis $b(S_{t_k})$: $E\left(f(S_{t_{k+1}})|S_{t_k}\right) \approx A.b(S_{t_k})$ (see Figure 5.2). The vector A minimizes the quadratic error

$$\left|\left|f(S_{t_{k+1}}) - A.b(S_{t_k})\right|\right|_{L^2} \tag{5.35}$$

and thus equal to

$$A = \Psi^{-1} E\left(f(S_{t_{k+1}})b(S_{t_k})\right), \tag{5.36}$$

where the matrix $\Psi = E\left(b(S_{t_k})b^t(S_{t_k})\right)$. Consequently, at each time step, the matrix inversion (5.36) can be implemented by the Singular Value Decomposition (SVD) explained in [23] and the expectations are approximated by an arithmetic average

$$E\left(f(S_{t_{k+1}})b(S_{t_k})\right) \approx \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} f(S_{t_{k+1}}^{(l)})b(S_{t_k}^{(l)}),$$

$$E\left(b(S_{t_k})b^t(S_{t_k})\right) \approx \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} b(S_{t_k}^{(l)})b^t(S_{t_k}^{(l)}).$$

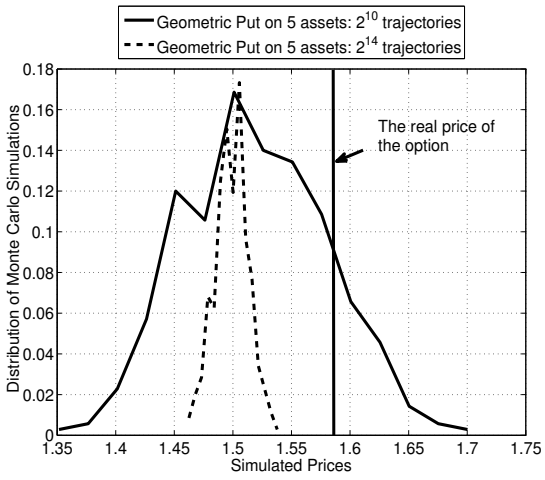


FIGURE 5.3 – Histogram of prices obtained by Monte Carlo using Longstaff-Schwartz algorithm with maturity $T = 1$ and thirty exercise dates.

Due to the SVD inversion performed at each time step after an expectation approximation, the complexity of the regression phase is of order $O(K_M^3 MN)$, where K_M is the cardinal of the vector $b(S_{t_k})$. The overall regression method for CVA computation has a complexity of order $O((\mathcal{T}d + K_M^3)MN)$ even when American contracts are involved. Although this method is less complex than square Monte Carlo, it is not well suited to parallel implementation (see [1]) because of the matrix inversion phase. Moreover, computing CVA with regression method involves generally the implementation of several regressions, each one uses a different vector $b(S_{t_k})$ for each contract. Finally, the accuracy cannot be increased only by increasing the number of trajectories, because one has also to take bigger values of K_M. The latter fact becomes a real issue when the dimension d is big enough which could be seen in Figure 5.3 for $d = 5$, as the obtained prices remain far from the real price even when taking more trajectories. This limitation was studied by the authors of [17] that recommend to have a number of polynomials $K_M \sim O(\sqrt{\log(M)})$. Despite of these drawbacks and because this method is quite fast, practitioners, like in [14], prefer to use it with some heuristics to improve the simulated results.

Although we discussed here the basic implementation of the regression method, we point out the existence of different versions of it. Among those versions, the authors of [16] propose the use of a local regression basis and derived a full convergence analysis of their method. The algorithm based on their idea can be considered in the midway

between a basic global regression and MCM which is a pure local method. Indeed, the algorithm proposed uses regressions iteratively that keeps the overall complexity similar to a basic regression method and it improves the results locally. Nevertheless, this algorithm inherits the problem of choosing the right local regression, especially when dealing with American contracts, in which case one has to perform iterative regressions for each contract.

5.4.2 MCM as an alternative

From a theoretical point of view, MCM is really interesting because it is general enough to a large choice of models and contracts. Thus, unlike regression methods, there is no heuristic choice of the vector $b(S_{t_k})$ that should be specified according to the model and to the contract. Indeed, as already mentioned in Section 5.2 as well as in [2] and will be discussed also in Section 5.5, we can apply MCM to path-dependent contracts and with models as multidimensional Heston models and usual jump diffusion models and others. From a computational point of view, because it is a pure Monte Carlo method, MCM is as suited to parallel implementation as a square Monte Carlo method. MCM could be also used for CVA computation that involves American contracts. Also, in contrast to regression algorithms, MCM aims at a nonparametric algorithm in which the accuracy can be improved by increasing only the number of the simulated trajectories and adding more computing resources to speed up simulations. This fact is demonstrated on Figure 5.4 in which we can see that MCM performs better [7] than Longstaff-Schwartz (LS) algorithm [8] when we increase the number of simulated trajectories. Moreover, according to Figure 5.4, MCM is as efficient as LS because it could provide sufficiently good results even when simulating very few number of trajectories, here only 2^{10}. In Section 5.5, we will see that the accurate results obtained by MCM goes beyond the computation of the CVA, because it allows to have compelling approximation of the delta sensitivity.

Although MCM is both less complex than square Monte Carlo and applicable for CVA involving American contracts, it is more complex than regression methods. Indeed, with MCM we need only to simulate the assets trajectories once, but the approximation of the conditional expectation as a quotient of two expectations is implemented for each path. The complexity of this method is then of order $O(C_d \mathcal{T} d M^2 N)$,

7. When only American options are involved. The error should be bigger when simulating the CVA on various American options

8. An algorithm based on regression.

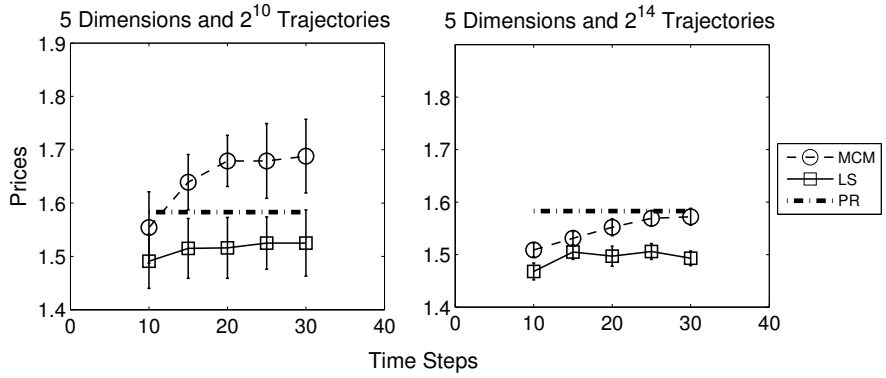


FIGURE 5.4 – LS vs. MCM for 5 dimensional American option, the real price is given by PR.

where C_d depends on the dimension d. If the backward conditional density, introduced in Section 5.3, is computed off-line then $C_d = 1$. Otherwise, $C_d = O(n_d)$ where n_d is the number of terms involved in the quasi-determinant $\Gamma_{s,t}$ and expressed in the following proposition.

Proposition 5.4.1 *For $d \geq 3$, n_d satisfies the following induction*

$$n_d = n_{d-1} + (d-1)n_{d-2} \tag{5.37}$$

with: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$.

Proposition 5.4.1 can be easily proved by induction using the relation

$$\overline{\mathcal{P}}_{1,d} = \{\tau_{d-1}^{d-1} \circ p;\ p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d-1}\} \cup \{\tau_{d-1}^{l} \circ p; p \in \overline{\mathcal{P}}_{1,d-1}, p(l) = l, l \in \{1, ..., d-1\}\},$$

where $\tau_i^j : i \leftrightarrow j$ is the transposition application on $\{1, ..., d-1\}$ that swaps only i to j and j to i. This relation is another version of the relation (2.16) given in [2]. Although the induction (5.37) provides an n_d which is by far smaller than $d!$, n_d can be quite big for high dimensions, for example : $n_5 = 26$, $n_6 = 76$, $n_7 = 232$ and $n_{10} = 9496$. To overcome this problem, we explain, in the example given in Section 5.5 how to group contracts together in order to reduce the number of Brownian motions involved and reduce d.

As proposed in [9], using the multidimensional quick sort changes the term M^2 that appears in $O(C_d \mathcal{T} d M^2 N)$ into $M(\ln M)^{(d-1)\vee 1}$. However, we prefer in our work to use the straight implementation because the parallelization of the multidimensional quick sort on GPU make the overall implementation generally either less efficient or barely more efficient for the usual values of M and d.

5.5 Numerical tests using parallel implementation

In the previous sections, we presented the theoretical framework of CVA estimation using MCM and studied its computational complexity. To finalize this work one has to give some theoretical approximations of the error of the estimation. However, this part is delayed to future work which can be based on works dedicated to American options like [8]. Nevertheless, we demonstrate here the accuracy of MCM by comparing it to square Monte Carlo and to a regression method. When using large number of trajectories, square Monte Carlo provides benchmark values for both path-independent and path-dependent European contracts that will be considered as the real values. Consequently, we study the accuracy of MCM for CVA that involves only European contracts. In order to have an idea of how MCM behaves when dealing with American contracts, we refer the reader to [2, 9]. Before summarizing the results of the different simulations, we start by presenting the considered models and how simulating European path-dependent contracts could be performed.

5.5.1 Benchmarking setup

Based on Section 5.2, we implement one example from the intensity family and one example from the structural family. Each model will be completely specified by the assets dynamics and either the dependence between the assets S_t and the default time τ or between the value exposure V_t and τ.

Regarding the intensity model, we take the constant volatility version of (5.9) :

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sigma_i \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \varrho_{ij} dW_t^j, \quad S_0^i = z_i, \quad i = 1, .., d, \\ \lambda_t = \alpha'' + \alpha'(V_t)_+, \text{ with } \alpha' \geq 0 \text{ and } \alpha'' \geq 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

with $T = 1$, the risk neutral interest rate $r = \ln(1.1)$, the time discretization is defined using the time steps that is given as a parameter in each simulation, $S_0^i = 100$ and $\sigma_{ij} = \sigma_i \varrho_{ij}$ with $\sigma_i = 0.2$ where $\varrho = \{\varrho_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq d}$ comes from the Cholesky decomposition of the correlation matrix $\delta_{i-j} + \alpha(1 - \delta_{i-j})$ such that $\alpha \in [0, 1)$ and δ is the Kronecker symbol.

Regarding the structural model, we take the constant volatility version of (5.9) and we correlate it with the Brownian motion W_t^0 that drives the firm value process

X_t :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma_0 dW_t^0, \quad X_0 = z_0, \\ \dfrac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sigma_i \displaystyle\sum_{j=0}^{i} \varrho_{ij} dW_t^j, \quad S_0^i = z_i, \quad i = 1, .., d, \end{cases} \tag{5.39}$$

with $T = 1$, the risk neutral interest rate $r = \ln(1.1)$, the time discretization is defined using the time steps that is given as a parameter in each simulation, $S_0^i = 100$ and $\sigma_{ij} = \sigma_i \varrho_{ij}$ with $\sigma_i = 0.2$ where $\varrho = \{\varrho_{ij}\}_{0 \leq i,j \leq d}$ comes from the Cholesky decomposition of the correlation matrix $\delta_{i-j} + \alpha(1 - \delta_{i-j})$ such that $\alpha \in [0, 1)$ and δ is the Kronecker symbol. With this specific example, one understands better the sense of (5.15) and how the Malliavin Calculus can be implemented on $W = (W^1, ..., W^d)$ without considering the dependence with respect to W^0.

Using MCM, simulating CVA that involves only European path-independent contracts (5.3) is quite simple when compared to adding European path-dependent contracts (5.4). Then, some details should be provided for the implementation of (5.4). To simplify the explanations, we assume that N involved in (5.6) is equal to the number of time steps used to approximate the trajectories of the assets. Let us consider the problem of approximating the conditional expectation

$$E\left((\max_{i=0,..,N} S_{t_i}^1 - S_{t_N}^2)_+ | \mathcal{F}_{t_k} \right).$$

Using Markov property and notation $\overline{S}_{t_k}^1 = \max_{i=0,..,k} S_{t_i}^1$, this conditional expectation can be rewritten as

$$\begin{aligned} E\left((\max_{i=0,..,N} S_{t_i}^1 - S_{t_N}^2)_+ | \mathcal{F}_{t_k} \right) &= E\left((\overline{S}_{t_k}^1 \vee \max_{i=k+1,..,N} S_{t_i}^1 - S_{t_N}^2)_+ \Big| \overline{S}_{t_k}^1, S_{t_k}^1, S_{t_k}^2 \right) \\ &= \Theta_{S_{t_k}^1, S_{t_k}^2}(\overline{S}_{t_k}^1) \end{aligned} \tag{5.40}$$

with :

$$\Theta_{S_{t_k}^1, S_{t_k}^2}(y) = E\left((y \vee \max_{i=k+1,..,N} S_{t_i}^1 - S_{t_N}^2)_+ \Big| S_{t_k}^1, S_{t_k}^2 \right) \tag{5.41}$$

and for each asset trajectory, we have a specific value y and once it is fixed as a payoff parameter, we can compute the conditional expectation using the result of Theorem 5.3.1 or Theorem 5.3.2.

The previous idea for implementing European path-dependent contract can be applied for lookback as well as barrier and Asian contract. In order to have a better approximation of some SDEs and path-dependent contracts, one can also take the number of time steps bigger than N [9]. Indeed, considering the previous path-dependent example, it is possible to increase the accuracy of the approximation of $\sup_{0\leq s\leq t_k} S_s$ and $\sup_{t_k<s\leq t_N} S_s$ if we have more than k points and $N-k$ points in the intervals $[0,t_k]$ and $[t_k,t_N]$ respectively.

We should also discuss the parameters C_d and n_d introduced in Section 5.4.2. Previously, we pointed out that the induction (5.37) provides important values when d is big. However, not all contracts require the d-dimensional information, fact that can be seen with our previous example given in (5.41). Actually, assuming $d=10$, to evaluate (5.40) we need only two Brownian motions if we are using intensity model (5.38) and three Brownian motions [10] when using structural model (5.39).

We finish the benchmarking setup by presenting two numerical tricks : The first one should improve the Monte Carlo estimator of (5.19) and (5.20) and the second one removes the contributions that are "Wrong".

Localization with truncation

In order to approximate numerically (5.19) and (5.20), we remind that we are using the same set of trajectories which makes MCM less complex than a square Monte Carlo. However, some trajectories must not be added [11] to the Monte Carlo estimator of $T_{s,t}[f](x)$ and $R^i_{s,t}[f](x)$ because they are far from the point x. This technique is known by localization and some papers, as [3, 7], propose some "optimal" choice of localizing functions. We use here a simpler idea based on truncation. Without loss of generality, ignoring the dependence on the default time and introducing a subset $\Upsilon\in\mathbb{R}^d$, we replace

$$V_{t_k}=E\left(V_{t_{k+1}}|S_{t_k}\right)=E\left(V_{t_{k+1}}1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon}|S_{t_k}\right)+E\left(V_{t_{k+1}}1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon^c}|S_{t_k}\right)$$

9. We remind the reader that N is associated to the discretization of the time integral.
10. Because of W^0.
11. Or added with a much smaller weight.

in $E\left((V_{t_k})_+\right)$ to get the inequality

$$\begin{aligned} E\left((V_{t_k})_+\right) &\leq E\left(\left[E\left(V_{t_{k+1}}1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon^c}|S_{t_k}\right)\right]_+ + \left[E\left(V_{t_{k+1}}1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon}|S_{t_k}\right)\right]_+\right) \\ &\leq \quad E\left(\left[V_{t_{k+1}}\right]_+ 1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon^c}\right) + \left(\left[E\left(V_{t_{k+1}}1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon}|S_{t_k}\right)\right]_+\right). \end{aligned} \tag{5.42}$$

The error value $E\left(\left[V_{t_{k+1}}\right]_+ 1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon^c}\right)$ can be estimated, and if it has the order of the errors induced by the Central Limit Theorem (95% confidence interval) it can be neglected and we consider :

$$E\left((V_{t_k})_+\right) \approx \left(\left[E\left(V_{t_{k+1}}1_{S_{t_{k+1}}\in\Upsilon}|S_{t_k}\right)\right]_+\right).$$

From an implementation point of view, we choose Υ such that we include the most likely asset trajectories, with probability between $[85\%, 95\%]$ depending on the dimension of the problem. For example, for $d = 1$ or 2, we include only the 95% probability trajectories. Formally speaking, for a fixed $S_s^i = x_i$, we take into account only the trajectories associated to S_t^i that could occur with probability 95%.

Removing "Wrong" values of the conditional expectation

For a fixed set of simulated trajectories M and fixed trajectory $l \in \{1, ..., M\}$, this idea is based on the fact that we want the conditional expectation $E\left(V_{t_{k+1}}|S_{t_k}^l\right)$ to be included in $\left[\min_{j\in\{1,...,M\}} V_{t_{k+1}}^j, \max_{j\in\{1,...,M\}} V_{t_{k+1}}^j\right]$. If this condition is not fulfilled, we consider that our estimator gives us a wrong value and we stop taking into account the conditional expectations generated by the trajectory of index l.

5.5.2 MCM accuracy for CVA and CVA sensitivities

First, we need to point out that we were able to perform our accuracy study thanks to a parallel GPU [12] implementation on an Nvidia 480 GTX card. Indeed, one of the advantageous of MCM algorithm is its suitability to parallel architecture. The goal of this section is to prove the good accuracy of even a basic implementation of MCM

12. Graphic Processing Unit

without reducing the variance using the backward conditional density introduced in section 5.3.2. More advanced numerical study of the backward conditional density will be performed in the future.

TABLE 5.1 – Examples of simulated CVA : MCM (2^{16} trajectories), regression Reg (2^{16} trajectories), square Monte Carlo MC2 (2^{14} trajectories), $N = 10$.

Payoff	$d = 2$					
	$\alpha = 0$			$\alpha = 0.5$		
	MCM	Reg	MC2	MCM	Reg	MC2
Call on average	11.4	12.9	11.6	11.9	14.5	12.6
Call on max	20.9	23.7	22.1	18.3	21.4	19.5
$(\overline{S}_T^2 - S_T^1)_+$	14.5	17.8	15.7	12.4	14.8	13.4
Payoff	$d = 3$					
	$\alpha = 0$			$\alpha = 0.5$		
	MCM	Reg	MC2	MCM	Reg	MC2
Call on average	10.0	10.9	10.0	12.1	13.1	11.6
Call on max	30.3	29.2	28.0	25.6	25.4	23.3
$(\overline{S}_T^3 - \frac{S_T^1+S_T^2}{2})_+$	15.6	15.5	13.8	13.5	12.3	13.4

We present two parts of the accuracy study : The first one compares MCM to the linear regression method to compute (5.6) when $1_{\tau\in(t_k,t_{k+1}]}$ is assumed to be equal to 1 and V_{t_k} is the price of each contract associated to each payoff specified in Table 5.1. Thus, in this part we do not take into account the dependence according to the default time simply because we do not know a standard way to do it for the regression method. In the second part, we study the MCM accuracy for both computing the CVA and its sensitivity for the intensity model (5.38) and the structural model (5.39). In tables 5.1 and 5.2, the errors associated to the confidence interval of 95% are smaller than 5% of the showed CVA values. As for Table 5.3, the confidence interval of 95% is specified thanks to the $\pm$ sign.

When considering the values given by the square Monte Carlo (MC2) as the real values, according to Table 5.1, the values obtained by MCM are almost always better than regression method (Reg). In cases when MCM is less accurate, it is sufficient to increase the number of simulated trajectories. This fact is not true for regression methods because they require the increase of the cardinal of the regression family. Also unlike regression methods, the accurate results obtained by MCM allows to

compute Δ sensitivity either by using the finite difference (FD) of two MCM prices or by simulating $R^i_{s,t}[f](x)$ introduced in (5.20).

TABLE 5.2 – Examples of CVA and sensitivity computations : MCM (2^{18} trajectories), square Monte Carlo MC2 (2^{14} trajectories).

Payoff	Intensity model			
	$\text{CVA}_{0,T}$		$\partial_{S_0^2}\text{CVA}_{0,T}$	
	MC2	MCM	using (5.20)	using FD
$(S_T^2 - S_T^1)_+$	1.31	1.39	0.08	0.10
$(\overline{S}_T^2 - S_T^1)_+$	2.55	2.70	0.10	0.13
Call on max	3.55	3.54	0.12	0.10
Payoff	Structural model			
	$\text{CVA}_{0,T}$		$\partial_{S_0^2}\text{CVA}_{0,T}$	
	MC2	MCM	using (5.20)	using FD
$(S_T^2 - S_T^1)_+$	2.11	2.26	0.04	0.06
$(\overline{S}_T^2 - S_T^1)_+$	3.84	4.13	0.10	0.12
Call on max	0.95	0.90	0.044	0.050

TABLE 5.3 – Examples of CVA values for $d = 3$: MCM (2^{14} trajectories), square Monte Carlo MC2 (2^{14} trajectories).

Payoff	Intensity model		Structural model	
	MC2	MCM	MC2	MCM
Call on average	0.21 ± 0.04	0.27 ± 0.01	0.03 ± 0.01	0.04 ± 0.01
Call on max	0.67 ± 0.01	0.84 ± 0.05	0.22 ± 0.03	0.31 ± 0.05
$(\overline{S}_T^3 - \frac{S_T^1+S_T^2}{2})_+$	0.80 ± 0.07	0.86 ± 0.09	0.25 ± 0.06	0.30 ± 0.01

Once more, according Table 5.2, when the number of simulated trajectories is sufficient, we obtain accurate values of the CVA and its sensitivity for both intensity and structural modelling framework. Table 5.3 shows sufficiently accurate results for $d = 3$ for intensity and structural models even when only 2^{14} trajectories are simulated. For $d = 3$, the results of the sensitivity using (5.20) and using FD do not coincides as good as in Table 5.2 except when we compute the sensitivity according to an asset that is highly involved in the CVA.

Based on what is discussed before, we summarize the comparison of the three methods in the following table

TABLE 5.4 – Comparison of the different algorithms

	Monte Carlo square	Monte Carlo with regression	Monte Carlo with Malliavin calculus
Complexity	$O(dM^2N^2)$	$O((\mathcal{T}d + K_M^3)MN)$	$O(C_d\mathcal{T}dM^2N)$
Parallelization	Suited	Limited	Suited
American Op.	No	Yes	Yes
Dimensions	Unlimited !	Very limited	Limited
Delta	Expensive	Not possible	Limited

In Table 5.4, very limited in dimension means limited and not standard in the sense of choosing the vector basis.

Bibliographie

[1] L. A. Abbas-Turki, S. Vialle, B. Lapeyre and P. Mercier, *Pricing derivatives on graphics processing units using Monte Carlo simulation,* Concurrency and Computation : Practice and Experience, 2012.

[2] L. A. Abbas-Turki and B. Lapeyre, *American Options by Malliavin Calculus and Nonparametric Variance and Bias Reduction Methods,* SIAM Journal on Financial Mathematics, 3(1) : 479–510, 2012.

[3] V. Bally, L. Caramellino and A. Zanette, *Pricing American options by Monte Carlo methods using a Malliavin calculus approach,* Monte Carlo Methods and Applications, 11 : 97–133, 2005.

[4] V. Bally and G. Pagès, *A Quantization Algorithm for Solving Multidimensional Discrete-Time Optimal Stopping Problems,* Bernoulli, 9(3) : 1003–1049, 2003.

[5] T. R. Bielicki, M. Jeanblanc and M. Rutkowski, *Credit Risk Modeling*, Center of the study of finance and Insurance, Osaka University, Japan.

[6] T. R. Bielecki and M. Rutkowski, Credit Risk : Modelling, Valuation and Hedging. *Springer- Verlag*, Berlin Heidelberg New York, 2002.

[7] B. Bouchard, I. Ekeland and N. Touzi, *On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations,* Finance and Stochastics, 8, 45–71, 2004.

[8] B. Bouchard and N. Touzi, *Discrete-Time Approximation and Monte-Carlo Simulation of Backward Stochastic Differential Equations,* Stochastic Processes and their Applications, 111(2), 175–206, 2004.

[9] B. Bouchard and X. Warin, *Monte-Carlo Valuation of American Options : Facts and New Algorithms to Improve Existing Methods,* Numerical Methods in Finance, Springer Proceedings in Mathematics, 12, 215–255, 2012.

[10] A. Boukhobza and J. Maetz, *CVA, Wrong Way Risk, Hedging and Bermudan Swaption*, August 2012. http://mpra.ub.uni-muenchen.de/42144/.

[11] F. Black and J. C. Cox, *Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions*, Journal of Finance, 31 : 351–367, 1976.

[12] D. Brigo and F. Mercurio, Interest Rate Models - Theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit, *Springer Finance*, 2007.

[13] D. Brigo, M. Morini and A. Pallavicini, Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding : With Pricing Cases For All Asset Classes, *John Wiley and Sons*, 2013.

[14] G. Cesari & al, Modelling, Pricing and Hedging Counterparty Credit Exposure, *Springer Finance*, 2009.

[15] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux and P.-L. Lions, *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II*, Finance and Stochastics, 5, 201–236, 2001.

[16] E. Gobet, J.-P. Lemor and X. Warin, *A Regression-based Monte Carlo method to solve Backward Stochastic Differential Equations,* The Annals of Applied Probability, 15(3), 2172–2202, 2005.

[17] P. Glasserman and B. Yu, *Number of Paths Versus Number of Basis Functions in American Option Pricing,* The Annals of Applied Probability, 14(4) : 2090–2119, 2004.

[18] J. Hull and A. White, *CVA and Wrong Way Risk,* Financial Analysts Journal, 68(5) : 58–69, 2012.

[19] A. Kohatsu-Higa and R. Pettersson, *Variance reduction methods for simulation of densities on Wiener space,* SIAM Journal on Numerical Analysis, 40(2) : 431–450, 2002.

[20] P.-L. Lions and H. Regnier, *Calcul du prix et des sensibilités d'une option américaine par une méthode de Monte Carlo,* preprint, 2001.

[21] R. Merton, *On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates,* Journal of Finance, 3 :449–470, 1974.

[22] G. Pagès and J. Printems, *Functional quantization for numerics with an application to option pricing,* Monte Carlo Methods and Applications, 11(11) : 407–446, 2005.

[23] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, Numerical Recipes in C++ : The Art of Scientific Computing, *Cambridge University Press*, 2002.

[24] M. Pykhtin, *Modeling credit exposure for collateralized counterparties,* The Journal of Credit risk, 5(4) : 3–27, Winter 2009/10.

[25] D. Rosen and D. Saunders, *CVA and wrong way,* Journal of Risk Management in Financial Institutions, 5(3) : 353–372, 2012.

[26] http://www.quantize.maths-fi.com/gaussian_process_database.