



Transport de neutrinos dans les supernovas gravitationnelles

Bruno Peres

► To cite this version:

Bruno Peres. Transport de neutrinos dans les supernovas gravitationnelles. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Observatoire de Paris, 2013. Français. NNT : . tel-00943896

HAL Id: tel-00943896

<https://theses.hal.science/tel-00943896>

Submitted on 9 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS

ECOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

DOCTORAT
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Auteur :

Bruno PERES

Transport de neutrinos dans les supernovas gravitationnelles

Thèse dirigée par Jérôme NOVAK et Micaela OERTEL

Soutenue le Mercredi 3 Juillet 2013

Jury :

Daniel ROUAN	Président
José-María IBÁÑEZ	Rapporteur
Elias KHAN	Rapporteur
Frédéric DAIGNE	Examineur
Bernhard MÜLLER	Examineur
Loïc VILLAIN	Examineur
Jérôme NOVAK	Directeur de Thèse
Micaela OERTEL	Directrice de Thèse

*For every beautiful simulation result there exists a simple, elegant, convincing,
wrong physical explanation.*

Ewald Müller

There are some people born with the feeling that the universe is solvable.

Terry Pratchett

Résumé

Les supernovas gravitationnelles sont un sujet d'étude passionnant, aussi bien par la diversité et la richesse de la physique mise en jeu que par l'émerveillement que peut exercer l'apparition d'un nouvel objet brillant dans le ciel. Les supernovas incitent les chercheurs aussi bien que les profanes au rêve et à l'imagination.

Cette thèse traite des simulations numériques des supernovas gravitationnelles, et en particulier du problème du transport des neutrinos. Les neutrinos jouent un rôle crucial dans le chauffage et le refroidissement de la matière, et donc dans l'explosion d'une supernova. Leur implémentation numérique est difficile, à cause des connaissances très détaillées nécessaires pour le traitement des interactions, mais surtout à cause de la très grande exigence en temps de calcul des équations à résoudre. Après une première partie sur le contexte physique dans lequel se trouvent les supernovas gravitationnelles actuellement, je fais le point sur leur traitement numérique, avec un accent sur les méthodes numériques présentes dans le code que j'ai utilisé tout au long de ma thèse, le code COCoNuT.

Pour le traitement des neutrinos, deux pistes sont proposées. La troisième partie de cette thèse propose de fortement simplifier le traitement des neutrinos. C'est ce qui est fait dans l'implémentation du schéma de fuite, que j'ai pu par la suite utiliser pour étudier la formation de trous noirs. Dans cette optique, je montre l'influence de l'ajout de particules exotiques (pions et hypérons) sur la formation du trou noir. La présence de pions ou d'hypérons déclenche l'effondrement plus vite que dans les simulations où leur présence n'est pas prise en compte. De plus, les hypérons présentent une transition de phase, intéressante à étudier, par exemple pour la contrepartie en ondes gravitationnelles.

La deuxième piste proposée pour le traitement des neutrinos est la résolution de l'équation de Boltzmann en relativité générale. La dérivation de cette équation dans le cadre de la relativité générale, et plus précisément en formalisme $3 + 1$, fait l'objet de la quatrième partie de cette thèse. Enfin, la cinquième partie de cette thèse introduit un nouveau code de résolution numérique de l'équation de Boltzmann. Je montre d'une part les méthodes utilisées, et d'autre part des tests numériques, qui valident le bon fonctionnement du code.

Remerciements

Un nouveau pas de ma MCMC personnelle.

Cédric Villani

Ma marche au hasard personnelle m'a conduit au LUTh. J'y ai passé trois belles années, riche en émotions (à peu près toutes les émotions), marquées par des périodes intenses et des périodes creuses. Mais je pense que mon enthousiasme pour la modélisation des supernovas, comme l'entropie et le nombre de papiers jetés négligemment sur mon bureau, n'a fait que croître. J'ai peut-être oublié des gens dans ces remerciements, je souhaite qu'ils ne m'en tiennent pas rigueur.

Je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui sans Jérôme Novak et Micaela Oertel. C'est un plaisir de travailler avec vous. J'ai appris énormément grâce à vous, et c'est aussi grâce à vous que j'ai échappé à une part considérable de la pression ressentie par tout doctorant. Je vous en remercie infiniment.

Je remercie également l'ensemble du LUTh, chercheurs ou non, pour leur accueil, les pauses café, ... Un merci particulier à Zakaria, qui croit toujours être post-doc. Un merci aux administratifs, en particulier David et Nathalie, pour être bien là quand on a besoin de vous (y compris quand il s'agit de pauses café). Merci aussi à la "fabuleuse team informatique" du LUTh, en particulier Stéphane, Fabrice et Jean-Yves, qui m'ont beaucoup aidé (et qui se seront reconnus dans l'appellation).

Un merci particulier va à l'équipe relativité et objets compacts dans laquelle j'ai passé ces trois dernières années. J'ai particulièrement apprécié la cohésion au sein de l'équipe, et la disponibilité de chacun pour répondre à mes questions. Je suis redevable à Silvano, c'est de lui que vient l'idée même de traiter l'équation de Boltzmann par des méthodes spectrales. Merci à Éric, pour tes conseils, en particulier la relecture attentive des parties les plus techniques de la dérivation de l'équation de Boltzmann. Bien sûr, je retiendrai aussi ton enthousiasme au débouchage de bouteilles. Merci à Philippe, pour ta suggestion sur les tests de convergence qui m'a sauvé la vie ce jour-là. Je retiendrai aussi le partage du bureau, les coccinelles, les discussions foot, et les encouragements pour la difficile étape à venir que sont les concours de recrutement.

Les remerciements à l'équipe ne seraient pas complets sans un grand merci aux thésards et post-doc qui sont passés par chez nous. Parmi eux, Luc, Claire, qui a finalement décidé de quitter son nid et de prendre son envol. Morgane, avec qui j'ai tellement partagé (mots croisés, raclettes, déprimés, ragots, courses poursuites dans les couloirs, scot-

chage à la chaise, vodka bien cachée, séjour à Bora-Bora, la liste étant non exhaustive). Merci aussi à Odèle, Isabel, et Jason, qui m'a beaucoup aidé pour le code lui-même.

Merci également aux membres du jury d'avoir accepté de jouer le jeu, et merci à toute l'équipe de Valencia qui m'accueillera prochainement. C'est un grand plaisir de venir parmi vous.

Merci aux différents membres du journal club SN2NS, et un merci particulier à Anthea qui m'a beaucoup conseillé durant mon stage et le début de ma thèse.

L'ambiance telle que je la conçois ne serait rien sans mes camarades thésards. Merci donc à Matteo, Vincent (et Vincent), Floriane (et les petits chats !). Merci à Clotilde pour les pauses café, le partage des moments de déprime, et aussi pour Elbereth et pour ton invitation à ton mariage, qui était formidable. Merci à Irène, grâce à qui j'ai découvert xkcd. Merci également à Petar, avec qui j'ai partagé la découverte de la lutte contre les pseudo-sciences, à la fois formidable, drôle et passionnante.

Merci à mes différents co-bureau, Georges (merci pour les nombreux morceaux de chocolat), Olivier, et Guillaume, brièvement.

J'adresse un merci et une pensée particulière pour les Meudonnais de ma promo, parmi lesquels Céline, Lionel, Anne-Lise (merci aussi pour tes invitations chez toi, les jeux de société, la passion pour Terry Pratchett, les pauses café, Elbereth...).

Merci également à mes camarades de promo, parmi lesquels Kévin (on se recroisera... dans le train), Guillaume (le punk c'est bien parce que quand tu joues mal tu joues bien), Long (connu aussi sous le nom de "ouaaah, trop bien, des schtroumpfs !"), Sihane (chargée de TD et chargée de supporter plein de blagues pas drôles), Cédric, Etienne, David, Nicolas (merci pour les balades à Valence).

Merci également à mes amis de longue date, Walter, Sébastien, Pierre-Alexandre et Tuyet, Jean-Philippe, Michael. C'est toujours un plaisir de vous revoir.

Merci à ma famille et tout particulièrement à Olivier, et à ma Maman, qui m'a supporté, encouragé, qui a toujours été là dans les moments difficiles, et bien plus encore.

Et enfin, merci à Marine, championne toutes catégories (surtout pour moi). Pour tout ce qu'on a et qu'on va partager, et particulièrement pour ton soutien ces derniers temps, quand la charge de travail par jour ne faisait qu'augmenter.

Table des matières

Introduction	15
I Contexte	19
1 Histoires de supernovas	21
1.1 Figures Historiques	22
1.1.1 Supernova de 185 observée en Chine	22
1.1.2 Supernova de Tycho	22
1.2 La supernova 1987A	23
1.3 Classification spectrale et SN IA	24
2 Les supernovas gravitationnelles, premières phases	27
2.1 Progéniteur et cœur de fer	28
2.1.1 Les étapes de la vie d'une étoile	28
2.1.2 Incertitudes liées au progéniteur	30
2.2 Effondrement	30
2.2.1 Déclenchement de l'effondrement	30
2.2.2 Captures électroniques	32
2.2.3 L'équilibre β	32
2.3 Rebond	33
2.3.1 Cœur homologue	33
2.3.2 Création de la proto-étoile à neutrons	33
2.4 Propagation et arrêt du choc	33
2.4.1 Perte d'énergie	33
2.4.2 Pic du flux neutrinique	34
3 Les supernovas gravitationnelles, dernières phases	35
3.1 Le choc repart : explosion par le chauffage des neutrinos	37
3.1.1 Zone de refroidissement et zone de gain	39
3.1.2 Échec du mécanisme en symétrie sphérique	39
3.1.3 SASI	39
3.1.4 Convection à petite échelle	40
3.1.5 Le chauffage par les neutrinos multidimensionnel	42

3.2	Explosion magnétohydrodynamique	43
3.2.1	Mécanisme d'explosion	43
3.2.2	Sursaut gamma	43
3.3	Oscillation des neutrinos	44
3.4	Autres mécanismes	45
3.4.1	Transition de phase vers la matière de quarks	45
3.4.2	Mécanisme acoustique	46
3.5	Effondrement en trou noir	46
3.5.1	Dès l'effondrement	46
3.5.2	Échec du mécanisme d'explosion	47
3.5.3	Explosion et réeffondrement	47
3.5.4	Proto-étoile à neutrons marginalement stable	47
3.6	Nucléosynthèse	48
3.6.1	Contribution à l'explosion	48
3.6.2	Processus r	48
3.7	Les autres supernovas gravitationnelles	49
3.7.1	Les supernovas à effondrement de cœur O-Ne-Mg	49
3.7.2	Les supernovas à instabilité de paire	49
3.8	Observables	50
3.8.1	Courbe de lumière	50
3.8.2	Asphéricité, énergétique, rémanants et spectres	51
3.8.3	L'étoile à neutrons	51
3.8.4	Détection des neutrinos	52
3.8.5	Détection d'ondes gravitationnelles	52
II	Les supernovas numériques	55
4	Relativité générale	59
4.1	Motivation	60
4.1.1	Relativité restreinte	60
4.1.2	Conséquences de la gravitation relativiste	60
4.2	Différents référentiels en relativité générale	61
4.2.1	Référentiel des coordonnées	61
4.2.2	Référentiel eulérien	61
4.2.3	Référentiel lagrangien	62
4.3	Le potentiel gravitationnel de CoCoNuT	62
4.4	Trouveur d'horizon apparent	65
4.5	Extraction d'ondes gravitationnelles : formule du quadrupôle	65

5	Hydrodynamique relativiste	67
5.1	L'hydrodynamique relativiste de CoCoNuT	68
5.1.1	Fluide parfait	68
5.1.2	Les équations résolues	68
5.2	Méthodes numériques	69
6	Équations d'état	71
6.1	Contraintes	72
6.1.1	Expériences	72
6.1.2	PSR J1614-2230	73
6.2	L'équation d'état de Lattimer et Swesty	74
6.3	Extensions pions et hypérons	75
III	Formation de trous noirs	79
7	Refroidissement de la PNS : implémentation du schéma de fuite	83
7.1	Neutrinosphère	84
7.2	Potentiel chimique effectif	85
7.3	Création et advection des neutrinos	85
7.3.1	Processus impliqués	85
7.3.2	Approximations liées au schéma de fuite	86
7.4	Calcul du nombre de neutrinos et déviation à l'équilibre thermique	88
7.5	Pertes d'énergie et d'impulsion	89
7.5.1	Régime libre	91
7.5.2	Régime piégé	91
7.6	Advection	92
7.6.1	Quantités advectées	92
7.6.2	Termes sources	93
7.7	Paramètres du schéma de fuite	93
8	Formation de trous noirs : résultats	95
8.1	Modèle de référence	96
8.2	Modèle avec pions et le progéniteur u40	97
8.3	Modèle avec hypéron Λ et le progéniteur u40	99
8.3.1	Contraction de la PNS	99
8.3.2	Transition de phase	101
8.3.3	Influence de la diffusion ν - Λ	102
8.3.4	Luminosité des neutrinos	103
8.4	Résultats avec le progéniteur WWs40	104
8.5	Résultats en symétrie axiale	107
8.5.1	Convection	107
8.5.2	Adoucissement de la transition de phase	107

8.5.3	Extraction d'ondes gravitationnelles	108
IV	Transport des neutrinos : équation de Boltzmann	113
9	Formulation de l'équation de Boltzmann	115
9.1	L'équation de Boltzmann non relativiste	116
9.1.1	Utilité de l'équation de Boltzmann	116
9.1.2	Physique, astrophysique et équation de Boltzmann	117
9.1.3	Limites de l'équation de Boltzmann	117
9.2	Théorie cinétique relativiste : cadre mathématique	117
9.2.1	Fibré tangent	117
9.2.2	Coquille de masse	118
9.2.3	Espace des phases	118
9.3	La fonction de distribution	119
9.3.1	Définition avec une moyenne d'ensemble	119
9.3.2	Définition avec le nombre de particules	119
9.3.3	Caractère scalaire de la fonction de distribution	119
9.4	Éléments de volume invariants	120
9.4.1	Tenseur de Levi-Civita	120
9.4.2	Éléments de volume	120
9.5	Formulation de l'équation de Boltzmann	122
9.5.1	Opérateur de Liouville	122
9.5.2	Équation de Boltzmann	123
10	Adaptation aux neutrinos dans les supernovas	125
10.1	Formalisme des tétrades	126
10.1.1	Matrice de transformation de tétrade	126
10.1.2	Dérivées et connexion	127
10.1.3	Lien entre les différents coefficients de connexion	128
10.2	Calcul des coefficients de rotation de Ricci en $3 + 1$	128
10.2.1	Propriétés des coefficients de rotation de Ricci	129
10.2.2	La transformation de tétrade en $3 + 1$	130
10.2.3	Coefficients de rotation de Ricci sans dérivée temporelle	131
10.2.4	Approximation conformément plate	132
10.3	Forme finale de l'équation de Boltzmann	133
10.3.1	Dérivées spatiales et temporelles	133
10.3.2	Connexions	134
10.3.3	4-impulsion	134
10.3.4	Jacobien de changement de coordonnées	134
10.3.5	Équation de Boltzmann	135

V Résolution de l'équation de Boltzmann par des méthodes spectrales

11 Méthodes spectrales	141
11.1 Bases de décomposition	142
11.1.1 Choix des bases	142
11.1.2 La dépendance en Θ	143
11.1.3 La dépendance en θ	144
11.1.4 La dépendance en Φ	145
11.2 Points de collocation et singularités	146
11.2.1 Points de collocation	146
11.2.2 Éviter les singularités	146
11.3 Opérateur de collision	147
11.4 Classe de régularité attendue de la fonction de distribution	148
12 Résultats	151
12.1 Tests de convergence	152
12.2 Conservation du nombre de particules en relativité générale	153
12.3 Test de l'effet Einstein	155
Conclusion et perspectives	157
Annexes	163
A Changement de référentiel pour les termes sources	165
B Taux de réactions des neutrinos pour le schéma de fuite	169
B.1 Opacités	170
B.1.1 Diffusion élastique sur un proton	170
B.1.2 Diffusion élastique sur un neutron	171
B.1.3 Diffusion élastique sur un noyau lourd	171
B.1.4 Absorption d'un ν_e par un neutron	172
B.1.5 Absorption d'un $\bar{\nu}_e$ par un proton	172
B.1.6 Diffusion élastique sur un hyperon Λ	173
B.2 Taux de création de neutrinos	173
B.2.1 Capture électronique et positronique	173
B.2.2 Annihilation électron-positron	175
B.2.3 Désintégration de plasmon	175
B.3 Énergies moyennes	176
B.3.1 Capture électronique	176
B.3.2 Capture positronique	176

B.3.3	Annihilation électron-positron	176
B.3.4	Désintégration de plasmon	177
C	Coordonnées doublement sphériques	179
C.1	Coordonnées doublement sphériques	180
C.2	Opérateur de Liouville sans forces extérieures	181
C.2.1	Partie spatiale de l'opérateur de Liouville	181
C.2.2	Opérateur de Liouville complet	181
C.2.3	Termes additionnels	182
C.2.4	Forme finale de l'opérateur de Liouville	182
D	Coefficients de rotation de Ricci : termes additionnels	185
D.1	Géométrie sphérique et convention LORENE	186
D.2	Terme $\bar{\Gamma}_{0j}^i$	186
D.2.1	Terme d_{j0}^i	186
D.2.2	Terme d_{0j}^i	188
E	Bibliographie personnelle	191
	Bibliographie	192

Introduction

En partie **I**, une brève description de supernovas historiques est proposée en chapitre **1**, ainsi qu'un point sur le contexte général lié aux supernovas. Ensuite, les chapitres **2** et **3** présentent l'état de l'art actuel de la recherche en modélisation des supernovas. L'accent est mis sur les efforts vers la compréhension du mécanisme d'explosion, ainsi que sur la formation de trous noirs. Je présente aussi brièvement les observables associées.

La partie **II** présente les outils numériques nécessaires à la simulation d'une supernova. Ces outils sont la gravitation relativiste (chapitre **4**), l'hydrodynamique relativiste (chapitre **5**) et l'équation d'état (chapitre **6**). L'exemple du code COCoNuT, que j'ai utilisé pendant toute ma thèse, est donné à chaque fois. Le traitement des neutrinos est laissé aux parties suivantes.

Dans la partie **III** est abordée la formation de trous noirs. Un schéma simplifié du traitement des neutrinos, le schéma de fuite, est montré en chapitre **7**. Ce schéma est celui que j'ai utilisé pour les résultats sur la formation de trous noirs montrés en chapitre **8**. Parmi ces résultats, la réduction du temps passé dans la phase d'accrétion avec l'implémentation des pions ou des hypérons, la caractérisation de la transition de phase vers la matière hypéronique, l'adoucissement de cette transition de phase en symétrie axiale par rapport à la symétrie sphérique ou l'extraction d'ondes gravitationnelles.

Ensuite, la partie **IV** est consacrée à l'équation de Boltzmann. la formulation de l'équation de Boltzmann en relativité générale est faite dans le chapitre **9**, alors que le chapitre **10** est consacré à l'adaptation de celle-ci au problème des neutrinos dans les supernovas.

Enfin, en partie **V** je présente un nouveau code de résolution de l'équation de Boltzmann, qui utilise des méthodes spectrales. Je détaille ces méthodes en chapitre **11**, et montre des tests sur ce nouveau code en chapitre **12**.

Dans tout le manuscrit, on adopte la convention de sommation d'Einstein. Les indices grecs vont de 0 à 3 tandis que les indices latins vont de 1 à 3. Sauf indication contraire, les unités utilisées sont telles que $c = G = k_b = \hbar = 1$.

Première partie

Contexte

Chapitre 1

Histoires de supernovas

Sommaire

1.1	Figures Historiques	22
1.1.1	Supernova de 185 observée en Chine	22
1.1.2	Supernova de Tycho	22
1.2	La supernova 1987A	23
1.3	Classification spectrale et SN IA	24

Any attempt to address human origins may need to begin with an understanding of core-collapse supernovae.

Kei Kotake

1.1 Figures Historiques

Les supernovas (SN) sont assez brillantes pour être vues dans le ciel en plein jour si elles sont proches de nous, et assez fascinantes pour que les astronomes de tous temps s’y soient intéressés. Cette section présente brièvement deux observations marquantes dans l’histoire des supernovas, parmi une quinzaine de supernovas historiques répertoriées. Notons également que la distinction entre les supernovas gravitationnelles, que j’ai étudiées, et les supernovas thermonucléaires est faite seulement à partir de la section 1.3, car aucune différence notable n’apparaît à l’œil nu. Pour un travail plus exhaustif sur les supernovas historiques, voir [Stephenson & Green \(2002\)](#).

1.1.1 Supernova de 185 observée en Chine

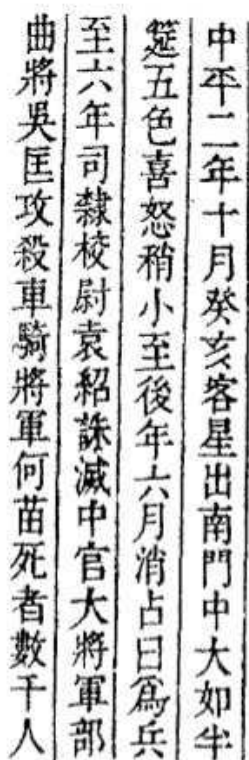
La première mention d’une étoile nouvelle que l’on peut probablement associer à une supernova fait partie d’un texte chinois de l’an 185 de notre ère. Ce texte est reporté en figure 1.1, et peut se traduire en Français comme suit

“La deuxième année de l’ère Chung-p’ing, sous le règne de l’empereur Hsiao-ling, le dixième mois, jour “kuei-hai”, une étoile-hôte apparut dans Nam-mên. Elle était aussi grande que la moitié d’un tapis ; elle brillait de cinq couleurs, et elle scintillait. Elle devint de plus en plus nette et disparut pendant le sixième mois de l’année suivante”

voir [Stephenson & Green \(2002\)](#), et [Gourgoulhon \(2005\)](#) en Français. L’interprétation de supernova semble acquise, d’autant plus qu’il existe un rémanent de supernova (c’est-à-dire ce qui reste après l’explosion, voir section 3.8) qui correspond dans la même région du ciel. Cependant certains points de traduction restent délicats, notamment “elle scintillait”, que l’on comprend à partir d’une traduction plus littérale qui donnerait “elle était à la fois plaisante et en colère”, et “grande comme la moitié d’un tapis”, qui laisse perplexe en l’absence d’un tapis-étalon de référence.

1.1.2 Supernova de Tycho

Bien plus tard, en 1572, Tycho Brahe observa une “étoile nouvelle” dans le ciel. En effet, une supernova est considérablement plus brillante que son étoile progénitrice, pas forcément visible à l’œil nu, et peut donc apparaître là où on ne voyait pas d’étoile auparavant. Tycho Brahe écrivit soigneusement la variation, en particulier de la luminosité, du phénomène dans un livre qu’il nomma *De Stella Nova*. Le nom est resté, le préfixe super- étant dû aux astronomes Baade et Zwicky ([Baade & Zwicky \(1934\)](#)), qui par ailleurs furent les premiers à suggérer qu’une supernova est une étoile qui explose.



中平二年十月癸亥客星出南門中大如半
筵五色喜怒稍小至後年六月消占曰爲兵
至六年司隸校尉袁紹誅滅中官大將軍部
曲將吳匡攻殺車騎將軍何苗死者數千人

FIGURE 1.1 – Extrait du traité astronomique de *Hou Hanshu*, qui annonce l'apparition d'une étoile-hôte. De [Stephenson & Green \(2002\)](#).

L'observation par Tycho Brahe d'une supernova constitua une véritable révolution scientifique, puisqu'il fallut bien admettre que cet objet, de toute évidence hors du système solaire, évoluait dans le temps et dans l'espace, contredisant le paradigme aristotélicien de l'époque qui affirmait que les étoiles lointaines étaient immuables.

La supernova de Tycho (SN 1572) est très probablement une SN Ia (voir section 1.3), un rémanent de supernova (voir section 3.8) associé a également été détecté.

1.2 La supernova 1987A

Le 24 février 1987, le rayonnement électromagnétique de l'explosion de l'étoile 1 de Sanduleak arrive jusqu'à la Terre. C'est une supernova gravitationnelle (ou supenova à effondrement de cœur) exceptionnelle en bien des aspects, essentiellement parce qu'on a pu l'observer de manière bien plus précise que n'importe quelle autre supernova historique, grâce à l'évolution des télescopes, des détecteurs de neutrinos et des théories sous-jacentes.

SN 1987A est unique d'abord par la détection, dans la nuit du 23 février, de neutrinos qui ont pu être associés à celle-ci. Ont été reportés, 11 neutrinos par le détecteur japo-

nais Kamiokande II (Hirata *et al.* (1987)), 5 par le détecteur russe Baksan (Alexeyev *et al.* (1988)), 8 par le détecteur américain IMB (Bionta *et al.* (1987)) et 5 par le détecteur italien LSD (Dadykin *et al.* (1987)). Bien qu'il puisse y avoir des faux positifs dans ces données, ces neutrinos sont les seuls neutrinos issus de supernovas jamais détectés. Leur analyse, ainsi que le fait qu'ils soient arrivés quelques heures avant le rayonnement électromagnétique confirme dans les grandes lignes le scénario des supernovas gravitationnelles élaboré par les théoriciens, présenté en détails (y compris les avancées significatives depuis 1987) aux chapitres 2 et 3.

Le progéniteur, l'étoile 1 de Sanduleak, était une supergéante bleue juste avant l'explosion (Plotkin & Clayton (2004)). Ce fait était très inattendu, les modèles d'évolution stellaire prévoyant jusque-là des étoiles supergéantes rouges ou des étoiles Wolf-Rayet comme progéniteurs des supernovas gravitationnelles, à part peut-être dans des systèmes multiples.

Enfin, l'explosion de SN 1987A a donné lieu à une série d'observations à la recherche de l'étoile à neutrons ou de l'objet compact formé. Malgré tous les efforts des observateurs, aucune détection n'a eu lieu jusqu'à maintenant (Manchester (2007)). L'existence de cette étoile à neutrons n'est pas encore complètement exclue. Elle pourrait être difficile à observer, en particulier si sa rotation est lente et son champ magnétique faible. La non-détection d'une étoile à neutrons suggère néanmoins une autre hypothèse, en l'occurrence la formation d'un trou noir, sans doute par l'effondrement d'une partie de la matière partiellement éjectée sur la proto-étoile à neutrons (voir section 3.5).

1.3 Classification spectrale et SN IA

La première classification des supernovas fut observationnelle. En fonction des raies présentes ou absentes de son spectre, une supernova est classée dans l'une ou l'autre des catégories (voir par exemple Filippenko (2005) et Gourgoulhon (2005)).

- *Type I* : Le spectre ne contient pas de raies d'hydrogène.
 - *Type Ia* : Le spectre contient des raies de silicium, en particulier Si II.
 - *Type Ib* : Le spectre ne contient pas de silicium, mais contient de l'hélium, en particulier He I.
 - *Type Ic* : Ni silicium, ni hélium.
- *Type II* : Présence d'hydrogène dans le spectre. On peut sous-diviser le type II en fonction de la forme de la courbe de lumière ou de particularités bien définies
 - *Type II-P* : La luminosité reste à peu près constante (d'où la dénomination P pour "plateau") pendant une longue période, qui peut être plusieurs mois.
 - *Type II-L* : La luminosité décroît rapidement avec le temps (bien plus vite que linéairement, malgré le L pour "linéaire").

- *Type IIn* : Le n pour “narrow” désigne des raies étroites dans le spectre, alors que la grande majorité des SN ont des raies larges, dues à l’effet Doppler dans un éjectat avec une vitesse très importante.
- *Type I Ib* : Intermédiaire entre le type II et le type Ib, c’est une SN avec de l’hydrogène, mais très peu. [Woosley et al. \(1987\)](#) ont proposé SN 1987A comme représentant de ce sous-type de SN.

D’autres sous-classes de supernovas de type II sont possibles, dans des cas marginaux ou intermédiaires. On parle aussi parfois de supernovas particulières. Des milliers de supernovas ont été observées ([Leaman et al. \(2011\)](#)), parmi lesquelles environ 70% sont de type II (tous sous-types confondus), 20% sont de type Ia et 10% de type Ib ou Ic.

Malheureusement, il s’avère que la classification spectrale ne rend pas du tout compte du mécanisme physique sous-jacent. Les supernovas de type Ib, Ic et II (incluant tous les sous-types) sont des supernovas gravitationnelles, dont le mécanisme d’explosion est présenté en détails aux chapitres 2 et 3.

Les supernovas Ia, ou, d’un point de vue de théoricien, supernovas thermonucléaires ont un progéniteur et un mécanisme d’explosion entièrement différent : il s’agit d’une naine blanche dont la masse atteint environ la masse de Chandrasekhar (par exemple [Shapiro & Teukolsky \(1983\)](#)). Deux scénarios sont généralement évoqués, soit la collision de deux naines blanches, soit l’accrétion de masse par une naine blanche d’une étoile compagnon. Plus précisément, la naine blanche atteint les conditions de densité et température pour déclencher la fusion des éléments au centre (en général, le carbone). C’est le début de l’explosion thermonucléaire (d’où l’appellation), qui ne laisse pas d’objet compact derrière elle. D’autres scénarios existent, par exemple si la fusion du carbone est retardée et que la naine blanche atteint sa masse de Chandrasekhar (voir section 2.2.1.1), elle pourrait s’effondrer et donner une étoile à neutrons avant d’exploser (voir [Canal et al. \(1990\)](#)). L’énergie totale mise en jeu est moindre que dans une supernova gravitationnelle, mais la luminosité ainsi que l’énergie cinétique sont supérieures. En effet, ce sont les neutrinos qui emportent la quasi-totalité de l’énergie d’une supernova gravitationnelle.

Chapitre 2

Les supernovas gravitationnelles, premières phases

Sommaire

2.1	Progénéateur et cœur de fer	28
2.1.1	Les étapes de la vie d'une étoile	28
2.1.2	Incertitudes liées au progénéateur	30
2.2	Effondrement	30
2.2.1	Déclenchement de l'effondrement	30
2.2.2	Captures électroniques	32
2.2.3	L'équilibre β	32
2.3	Rebond	33
2.3.1	Cœur homologue	33
2.3.2	Création de la proto-étoile à neutrons	33
2.4	Propagation et arrêt du choc	33
2.4.1	Perte d'énergie	33
2.4.2	Pic du flux neutrinique	34

Dans ce chapitre, on suit l'ordre chronologique des événements dans une supernova, jusqu'à l'arrêt du choc. On commence par la description du progéniteur, puis le mécanisme de supernova lui-même : l'effondrement, le rebond ; puis la propagation et l'arrêt du choc. Les phases plus tardives sont l'objet du chapitre 3. Cette séparation vient essentiellement du fait que les premières phases sont plutôt bien comprises, alors que les phases tardives sont bien plus spéculatives.

2.1 Progéniteur et cœur de fer

Le progéniteur d'une supernova gravitationnelle est une étoile massive en fin de vie. C'est la masse de l'étoile¹ qui scelle le devenir de celle-ci : en dessous de $\sim 8 M_{\odot}$ (par exemple Heger (2012)), l'étoile expulse doucement ses couches externes. On observe une nébuleuse planétaire et l'objet compact associé, une naine blanche. Au dessus de $8 M_{\odot}$, c'est l'explosion en supernova². La limite à $8 M_{\odot}$ n'est pas clairement établie, en particulier, le chiffre exact dépend de paramètres additionnels (en particulier la métallicité, voir Ibeling & Heger (2013), et dans une moindre mesure la rotation, le champ magnétique, etc.), notre compréhension de l'évolution stellaire, et en particulier les phases les plus tardives, étant loin d'être complète (Heger (2012), Woosley *et al.* (2002)).

2.1.1 Les étapes de la vie d'une étoile

2.1.1.1 Fusion de l'hydrogène

Une étoile massive passe 90 % de son temps de vie sur la séquence principale, c'est-à-dire à fusionner de l'hydrogène. Les réactions de fusion de l'hydrogène en hélium sont source d'énergie. Elles se traduisent par une pression qui compense la gravitation et un rayonnement, essentiellement de corps noir. Tant que l'étoile rayonne grâce à la fusion des éléments au centre, on dit (de façon très anthropomorphe) qu'elle vit.

2.1.1.2 Les autres fusions successives

La fusion de l'hydrogène crée un cœur relativement sphérique d'hélium et une couche externe d'hydrogène. Si l'étoile est assez massive, les conditions de densité et de température au centre pour la fusion de l'hélium sont atteintes. La fusion de l'hélium crée du carbone (et de l'oxygène), on a donc un cœur de carbone, une couche interne d'hélium et une couche externe d'hydrogène, qui peut continuer à fusionner.

1. Toutes les masses de progéniteurs sont des masses à un âge zéro sur la séquence principale (ZAMS). La masse correspondante, au moment de l'explosion, est très incertaine, et parler de masse ZAMS est une manière de s'affranchir de cette incertitude (ou dans les simulations, de la dépendance dans le modèle de perte de masse employé), même si cette dénomination peut être assez trompeuse.

2. ou l'effondrement en trou noir. Comme détaillé au chapitre suivant, on ne sait pas discriminer avec certitude entre explosion et effondrement

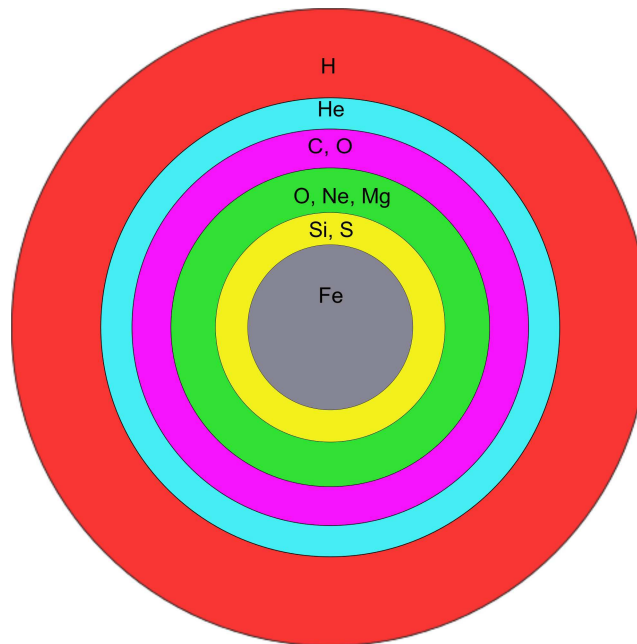


FIGURE 2.1 – Structure en pelure d’oignon d’une étoile massive en fin de vie (les différentes couches ne sont pas à l’échelle).

Quand les conditions pour la fusion du carbone sont atteintes, celle-ci crée du néon et du magnésium. L’oxygène créé par la fusion de l’hélium est toujours présent, et on a alors un cœur d’oxygène, de néon et de magnésium (O-Ne-Mg). Si l’étoile fait entre $8 M_{\odot}$ et $10 M_{\odot}$, elle explose à ce moment là en un type particulier de supernova, détaillé en section 3.7.1.

Si l’étoile fait plus de $\sim 10 M_{\odot}$, le néon et l’oxygène peuvent enclencher de nouvelles réactions de fusion nucléaire, qui créent du silicium. Le silicium à son tour fusionne et crée du fer, ainsi que quelques autres noyaux du groupe du fer (c’est à dire proches du fer), en particulier ^{52}Fe , ^{54}Fe , ^{56}Ni , le plus abondant étant ^{56}Fe . L’étoile ressemble alors à la figure 2.1, où différentes couches concentriques (l’enveloppe d’hydrogène étant en général beaucoup plus grande que les autres couches) font penser à une structure en “pelure d’oignon”. Quelle que soit la masse de l’étoile, la fusion s’arrête au groupe du fer, car ce sont les éléments avec les énergies de liaison par nucléon les plus grandes. Leur fusion serait endothermique et ne se fait pas spontanément.

Chaque fusion successive est de plus en plus rapide. En particulier, quand l’étoile est assez chaude pour créer spontanément des paires neutrino-antineutrino (typiquement, au moment de la fusion du carbone, voir [Heger \(2012\)](#)), ces neutrinos emportent de l’énergie, ce qui entraîne la contraction du cœur, donc l’augmentation de la densité et de la température, ce qui favorise les réactions de fusion nucléaire. Le temps entre le début de la fusion du silicium et l’effondrement du cœur de fer n’est que de quelques jours à une semaine.

2.1.2 Incertitudes liées au progéniteur

Le progéniteur en lui-même, point de départ de l'étude des supernovas, a beaucoup d'incertitudes associées, aussi bien numériquement que physiquement. L'évolution stellaire dans les phases les plus tardives est complexe, car l'étoile est hors équilibre. Elle perd de la masse par vent stellaire, perd de l'énergie par les neutrinos. Le détail du mélange entre les différentes couches concentriques de la figure 2.1 par convection est aussi un phénomène mal connu. L'inclusion de la rotation ou du champ magnétique pourrait également avoir une influence non négligeable sur l'évolution.

De plus, si l'étoile appartient à un système double (ou plus généralement, un système multiple), l'évolution stellaire, en particulier la perte de masse est profondément affectée et change le problème.

Rappelons enfin que l'observation de supernovas peut toujours ébranler les théories, ainsi la découverte inattendue d'une supergéante bleue comme progéniteur de SN 1987A.

Dans cette thèse, j'ai étudié uniquement des progéniteurs d'étoile simple (Woosley *et al.* (2002); Woosley & Weaver (1995)), de type supergéante rouge ou Wolf-Rayet (dans le cas où l'enveloppe d'hydrogène est perdue par vent stellaire).

2.2 Effondrement

Les articles de revue récents sur le mécanisme d'effondrement et de rebond des supernovas à effondrement de cœur sont nombreux (par exemple, Janka (2012); Janka *et al.* (2012); Kotake *et al.* (2012a,b); Burrows (2012)). C'est un indicateur du fait que le domaine évolue rapidement et que certains aspects ne sont pas encore complètement compris. Je souhaite donc que ce chapitre soit, lui aussi, rapidement caduc, et que la recherche en supernovas reste dynamique et enthousiaste pendant encore longtemps.

2.2.1 Déclenchement de l'effondrement

Dans le cœur de fer, la gravitation créée par la masse du cœur lui-même (l'auto-gravitation) est compensée par la pression de dégénérescence des électrons, avec également une petite composante de pression thermique. Puisque la gravitation vient essentiellement des baryons (plus massifs), alors que la pression vient essentiellement des électrons, le rapport du nombre d'électrons sur le nombre de baryons³ joue un rôle crucial dans le déclenchement de l'effondrement. Ce rapport est appelé fraction électronique

$$Y_e = \frac{n_{e^-} - n_{e^+}}{n_b}. \quad (2.1)$$

3. Dans toute la thèse, n désigne une densité en nombre, par exemple n_{e^-} est le nombre d'électrons par unité de volume. ρ désigne la masse volumique, appelée souvent (à tort) densité.

Au moment où le cœur de fer commence à s'effondrer, il a un rayon d'environ 1500 km, une température centrale d'environ 10^{10} K, une densité centrale d'environ 10^9 g.cm^{-3} , une entropie de $0.7 - 1 k_b$ par baryon (Janka *et al.* (2012)). Y_e au centre varie, selon le progéniteur, entre 0.42 et 0.45 (Woosley *et al.* (2002)). Cette valeur ainsi que le profil initial de Y_e dépendent essentiellement de la composition du cœur de fer, c'est-à-dire des abondances relatives des différents isotopes du groupe du fer (^{52}Fe , ^{54}Fe , ^{56}Ni , ^{56}Fe , etc.).

Le déclenchement de l'effondrement se fait en première approximation lorsque le cœur de fer atteint sa masse de Chandrasekhar.

2.2.1.1 Masse de Chandrasekhar

La masse de Chandrasekhar est la masse maximum qu'un objet peut supporter lorsque la pression qui s'oppose à la gravitation est la pression de dégénérescence. Un calcul (Shapiro & Teukolsky (1983)) donne ⁴

$$M_{ch} \simeq 5.83 Y_e^2 M_{\odot} . \quad (2.2)$$

Pour une naine blanche, $Y_e = 0.5$ et $M_{ch} = 1.4 M_{\odot}$. Pour le cœur de fer d'une étoile en fin de vie, Y_e n'est pas constant en fonction du rayon, et le calcul est plus compliqué. On trouve $M_{ch} \simeq 1.1 - 1.2 M_{\odot}$. On voit donc que le profil initial de Y_e du progéniteur a une grande importance sur le déclenchement de l'effondrement, et a une influence sur la masse du cœur de fer et sur le taux d'accrétion après le rebond.

2.2.1.2 Photodissociation des noyaux de fer

Quelques noyaux de fer peuvent être photodissociés

$$\gamma + {}^{56}_{26}\text{Fe} \rightarrow 13\alpha + 4n , \quad (2.3)$$

sans que les α et les neutrons résultants se recombinent (Janka (2012)). Même si cette réaction concerne peu de noyaux, elle est fortement endothermique (124 MeV, Shapiro & Teukolsky (1983)), et l'énergie consommée diminue la pression thermique. Ce phénomène est suffisant pour déclencher l'effondrement (Janka (2012)).

2.2.1.3 Indice adiabatique

L'indice adiabatique est défini par la relation

$$\gamma = \left. \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right|_s , \quad (2.4)$$

4. Différentes masses de Chandrasekhar existent selon les approximations faites (par exemple gaz purement polytropique ou avec une composante thermique). La formule proposée est celle qui représente assez bien un cœur de fer, voir Shapiro & Teukolsky (1983). Voir également Adam (1986); Ibanez Cabanell (1984) pour différentes corrections (en particulier, des corrections magnétiques et coulombiennes) à la masse de Chandrasekhar

s étant l'entropie. Ici γ est bien l'indice adiabatique et n'a rien à voir avec le photon dans la formule 2.3.

Un gaz relativiste dégénéré a $\gamma = 4/3$. Toute valeur en dessous de $4/3$ est instable, ce qui veut dire que l'on peut voir l'effondrement du cœur de fer en termes d'indice adiabatique : sa valeur initiale est $4/3$ et tout processus qui le diminue déclenche (ou amplifie) l'effondrement. C'est le cas de la photodissociation des noyaux de fer (ci-dessus) et de la capture électronique (ci-dessous).

2.2.2 Captures électroniques

La capture électronique⁵

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e, \quad (2.5)$$

devient de plus en plus probable à mesure que le cœur se contracte (Langanke *et al.* (2003), par exemple, montrent l'importance de la capture électronique sur les noyaux). Une fois les captures électroniques enclenchées, le fluide perdant des électrons, il perd de la pression et l'auto-gravitation l'emporte d'autant plus sur la pression. Il y a donc emballement de l'effondrement. À partir de ce moment, l'effondrement est essentiellement une chute libre, et pour cette raison dépend peu des détails du progéniteur ou de la rotation (contrairement aux phases après le rebond, voir le chapitre 3).

Le cœur étant essentiellement composé de noyaux de fer, c'est la capture électronique sur ceux-ci qui domine au début de l'effondrement. Ensuite et pendant tout l'effondrement, la capture électronique sur les différents noyaux créés domine sur la capture sur les protons libres, peu abondants.

Les neutrinos créés par la réaction 2.5 s'échappent librement, et emportent donc de l'énergie et de l'entropie. En effet, le cœur n'est pas encore assez dense pour que les neutrinos puissent être piégés.

2.2.3 L'équilibre β

La contraction du cœur continue. Lorsque la densité atteint $\sim 10^{12} \text{g.cm}^{-3}$, les neutrinos commencent à être piégés dans le fluide. Leur espace des phases se remplit progressivement, ce qui induit un équilibre dans les réactions de capture électronique

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu_e, \quad (2.6)$$

si bien que le taux net de création de neutrinos est nul. Les autres réactions β (transformant un proton en neutron ou inversement) s'équilibrent également. C'est cet équilibre qu'on appelle équilibre β .

L'effondrement continue de manière quasi-adiabatique jusqu'au rebond. Y_e au centre s'établit à ~ 0.28 (Liebendörfer (2005)). L'incertitude associée à cette valeur est assez grande, par exemple Lentz *et al.* (2012b) montrent que leur Y_e central vaut 0.20 et 0.37, en faisant varier le traitement des neutrinos et de la gravitation dans leurs simulations.

5. Ici, dans un sens général de capture sur un proton libre ou un proton dans un noyau.

2.3 Rebond

La densité augmente jusqu'à atteindre, puis dépasser la densité de saturation nucléaire, $\rho_0 \sim 2.6 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ (par exemple [Burrows \(2012\)](#), voir aussi le chapitre 6). L'interaction nucléaire devient alors fortement répulsive, et la matière devient très dure (voir le chapitre 6 pour la modélisation par l'équation d'état).

2.3.1 Cœur homologue

Au moment du rebond, la matière nucléaire très dure s'étend sur quelques kilomètres. La matière qui tombe sur ce cœur ne peut plus le compresser. Elle rebondit alors, ce qui crée un choc qui se propage vers l'extérieur.

Le choc ne se crée donc pas au centre de l'étoile mais au bord du cœur homologue (c'est à dire où $v \propto r$, qui reste subsonique). Celui-ci fait typiquement $\sim 10 - 20 \text{ km}$ (par exemple [Burrows \(2012\)](#)), taille proportionnelle à Y_e^2 , c'est à dire proportionnelle à la masse de Chandrasekhar instantanée (voir par exemple [Lentz et al. \(2012b\)](#)).

2.3.2 Création de la proto-étoile à neutrons

La matière riche en neutrons dans les ~ 15 premiers kilomètres de l'étoile constitue la proto-étoile à neutrons (PNS). Une fois la matière autour éjectée lors de l'explosion en supernova, la PNS se refroidit et donne une étoile à neutrons. La différence est donc essentiellement la température : une PNS est un objet chaud, et par conséquent capable de piéger les neutrinos (alors qu'une étoile à neutrons est transparente aux neutrinos). Une PNS est également plus riche en protons et en électrons, le refroidissement favorisant les captures électroniques et donc la neutronisation.

La PNS n'ayant pas de surface bien définie, la transition entre la PNS et le reste de l'étoile est continue. La définition de la surface de la PNS est donc très arbitraire et peut être prise, par exemple, à une densité donnée, autour de $10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$, comme dans [Müller et al. \(2012b\)](#).

Enfin, on peut aussi créer un trou noir au lieu d'une proto-étoile à neutrons ou à partir d'une proto-étoile à neutrons. Ces mécanismes sont détaillés en section 3.5.

2.4 Propagation et arrêt du choc

2.4.1 Perte d'énergie

La propagation du choc dans le cœur de fer consomme son énergie cinétique surtout par la photodissociation des noyaux de fer (formule 2.3) et également par la capture électronique (formule 2.5). Ces réactions augmentent l'entropie à $3 - 4k_b$ par baryon et consomment $1.7 \times 10^{51} \text{ erg}$ d'énergie (l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique du choc)

pour chaque $0.1 M_{\odot}$ traversé (Janka (2012)). Le choc ne peut alors se propager que pendant quelques millisecondes. Ensuite, la masse accrétée qui s’accumule sur la PNS peut encore le “pousser” (Buras *et al.* (2006)), mais sans qu’il retrouve une vitesse positive⁶. Cette phase dure pendant quelques millisecondes, en fonction du taux d’accrétion du progéniteur. Le choc s’arrête bien avant la limite du cœur de fer, à environ 100 – 200 km du centre.

2.4.2 Pic du flux neutrinique

Au moment où le choc se propage il emporte avec lui de la matière où les neutrinos sont piégés. Puisqu’il se propage vers l’extérieur, il se propage vers des densités de plus en plus petites et donc vers un régime où la matière est transparente aux neutrinos. La propagation du choc elle-même induit également un très grand nombre de création de neutrinos par captures électroniques et par production de paires neutrino-antineutrinos, déclenchées par la forte hausse de température.

Ces trois sources d’émission de neutrinos par la propagation du choc correspond au pic du flux neutrinique, c’est à dire au moment où l’émission des neutrinos est la plus intense. Le taux d’énergie correspondant est de $3 - 4 \times 10^{53} \text{ erg.s}^{-1}$ pendant 10 ms (par exemple Burrows (2012)).

6. Avec la convention qu’un flux allant vers le centre a une vitesse négative alors qu’un flux allant vers l’extérieur a une vitesse positive.

Chapitre 3

Les supernovas gravitationnelles, dernières phases

Sommaire

3.1	Le choc repart : explosion par le chauffage des neutrinos	37
3.1.1	Zone de refroidissement et zone de gain	39
3.1.2	Échec du mécanisme en symétrie sphérique	39
3.1.3	SASI	39
3.1.4	Convection à petite échelle	40
3.1.5	Le chauffage par les neutrinos multidimensionnel	42
3.2	Explosion magnétohydrodynamique	43
3.2.1	Mécanisme d'explosion	43
3.2.2	Sursaut gamma	43
3.3	Oscillation des neutrinos	44
3.4	Autres mécanismes	45
3.4.1	Transition de phase vers la matière de quarks	45
3.4.2	Mécanisme acoustique	46
3.5	Effondrement en trou noir	46
3.5.1	Dès l'effondrement	46
3.5.2	Échec du mécanisme d'explosion	47
3.5.3	Explosion et réeffondrement	47
3.5.4	Proto-étoile à neutrons marginalement stable	47
3.6	Nucléosynthèse	48
3.6.1	Contribution à l'explosion	48
3.6.2	Processus r	48
3.7	Les autres supernovas gravitationnelles	49
3.7.1	Les supernovas à effondrement de cœur O-Ne-Mg	49
3.7.2	Les supernovas à instabilité de paire	49

3.8	Observables	50
3.8.1	Courbe de lumière	50
3.8.2	Asphéricité, énergétique, rémanants et spectres	51
3.8.3	L'étoile à neutrons	51
3.8.4	Détection des neutrinos	52
3.8.5	Détection d'ondes gravitationnelles	52

Now considering the great numerical and physical complexity of a collapsing stellar core, it is not surprising that determining the ultimate fate of a massive star is one of the most difficult problems of theoretical astrophysics. The difficulty results, in part, from the complicated global interplay between hydrodynamical and gravitational forces on the one hand, and neutrino transport on the other. In addition, there are still residual uncertainties in our understanding of the local microphysics of hot, dense matter. It is understandable why, to date, virtually all computer model calculations of core collapse and supernova explosion have some known fault that potentially alters the final outcome of the simulations.

de Shapiro & Teukolsky (1983)

Malgré de nombreuses avancées techniques et malgré l'évolution considérable de notre compréhension de la physique, trente ans après, cet avertissement sur la faiblesse de l'état de l'art des supernovas gravitationnelles de Shapiro & Teukolsky (1983) est encore incroyablement d'actualité. Les détails des difficultés techniques sont énoncés en partie II. Pour ce chapitre sur la physique sous-jacente, il convient donc de se rappeler que les simulations à partir desquelles ces interprétations ont été faites sont toutes imparfaites et incomplètes.

L'énergie consommée par la photodissociation des noyaux de fer est tellement grande que très vite a émergé un consensus selon lequel le choc ne peut pas faire exploser l'étoile directement. Il doit donc s'arrêter puis repartir.

Ce chapitre présente la physique liée à différents aspects des supernovas après l'arrêt du choc ; il est focalisé sur l'explosion ou l'échec de l'explosion. Le mécanisme d'explosion par le chauffage des neutrinos, puis des scénarios alternatifs sont exposés. Je présente ensuite l'oscillation des neutrinos et la nucléosynthèse, phénomènes qui pourraient avoir un lien étroit avec l'explosion. La formation de trous noirs est également revue. Pour être complet, un point sur les supernovas O-Ne-Mg, sur les supernovas à instabilité de paires ainsi que sur les différentes observables est fait.

3.1 Le choc repart : explosion par le chauffage des neutrinos

Colgate & White (1966) furent les premiers à suggérer que les neutrinos émis peuvent déposer de l'énergie derrière le choc, qui contribue ensuite à l'énergie cinétique totale de l'explosion. Les neutrinos emportent plus de 99% de l'énergie totale du phénomène de supernova (par exemple Kotake *et al.* (2012a)). Il existe donc un refroidissement par les neutrinos, et à l'inverse si les neutrinos déposent leur énergie derrière le choc, un chauffage par les neutrinos. Il suffirait qu'une petite fraction des neutrinos contribuent au chauffage pour arriver à une explosion.

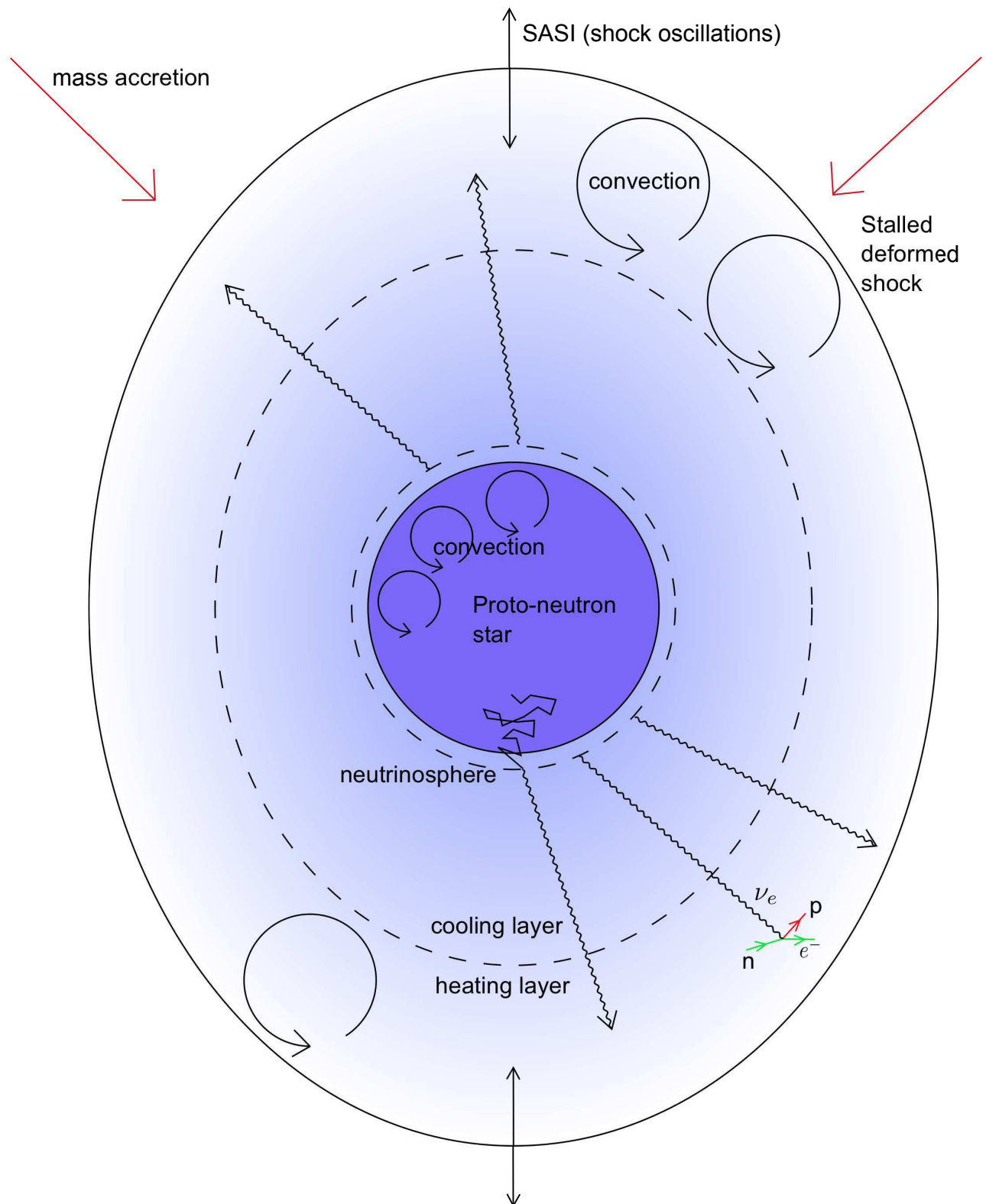


FIGURE 3.1 – Schéma du mécanisme de chauffage par les neutrinos. Celui-ci, aidé par SASI et la convection, est en compétition avec l'accrétion de masse pour éventuellement faire repartir le choc.

3.1.1 Zone de refroidissement et zone de gain

Comme on peut le voir sur la figure 3.1, au moment où le choc s'est arrêté, la zone entre la proto-étoile à neutrons et le choc se divise en deux : une zone proche de la PNS dominée par le refroidissement et une zone proche du choc dominée par le chauffage, qu'on appelle aussi zone de gain.

En effet, la densité et la température diminuent avec le rayon, et avec eux l'efficacité du chauffage et du refroidissement. Mais le refroidissement étant, en première approximation, proportionnel à T^6 , son efficacité diminue très vite, alors que l'efficacité du chauffage diminue comme T^2 , voir Janka *et al.* (2012). Il existe donc un rayon de gain où le chauffage compense le refroidissement et une zone extérieure où le chauffage domine.

Les neutrinos sont essentiellement émis dans les quelques dizaines de kilomètres autour de la neutrinosphère, c'est-à-dire la zone où les neutrinos se découplent de la matière. En deçà, les neutrinos sont piégés et doivent d'abord arriver à se propager jusqu'à la neutrinosphère pour se propager librement. Au delà, la diminution de la température et de la densité fait que les réactions de création de neutrinos sont toutes de moins en moins favorisées. Enfin, la diminution de la densité étant continue, l'endroit exact où se situe la neutrinosphère est assez arbitraire, mais toujours non loin de la surface de la proto-étoile à neutrons.

Le mécanisme de chauffage par les neutrinos est donc le dépôt d'énergie par les neutrinos dans la zone de gain, en concurrence avec l'accrétion de masse, qui a tendance à s'opposer à l'expansion du choc.

3.1.2 Échec du mécanisme en symétrie sphérique

Liebendörfer *et al.* (2004) conclurent définitivement à l'échec du mécanisme en symétrie sphérique. Malgré la grande quantité d'énergie disponible dans les neutrinos, ils ne réagissent pas assez avec la matière derrière le choc pour arriver à le faire repartir. Ce fait inattendu fut confirmé par toutes les autres simulations, par exemple Thompson *et al.* (2003); Rampp & Janka (2000); Sumiyoshi *et al.* (2005). Seuls les cœurs de O-Ne-Mg, moins massifs et moins liés, peuvent exploser en symétrie sphérique (voir section 3.7.1).

Après l'étude détaillée de la microphysique mise en jeu et l'implémentation de la relativité générale (voir Liebendörfer *et al.* (2004) et la partie II), il apparut de plus en plus clairement que l'ingrédient manquant était la déviation à la symétrie sphérique, plus précisément les instabilités hydrodynamiques multidimensionnelles.

3.1.3 SASI

SASI (pour *Standing Accretion Shock Instability*) est le nom d'une instabilité qui concerne un choc d'accrétion, indépendante du chauffage par les neutrinos, voir Blondin & Mezzacappa (2003); Fogliizzo *et al.* (2007a,b). Cette instabilité entraîne une déformation globale (à

grande échelle, c'est-à-dire à petits l si on décompose les modes en harmoniques sphériques). Le choc entier se déforme, oscille, prend une forme allongée (voir figure 3.1).

L'explication la plus couramment admise est un cycle advectif/acoustique (par exemple Foglizzo (2009); Sato *et al.* (2009)). Des perturbations d'entropie et de vorticité sont advectées du choc vers la surface de la proto-étoile à neutrons. Elle sont couplées à des ondes acoustiques qui repartent de la surface de la proto-étoile à neutrons vers le choc, et le cycle peut recommencer. Selon le couplage et l'efficacité des "réflexions", les perturbations peuvent s'amplifier.

L'échelle de temps de développement de SASI dépend beaucoup du taux d'accrétion (Scheck *et al.* (2008)). Cependant un temps caractéristique de $\sim 50 - 100$ ms semble être un minimum pour voir une déformation significative du choc (Müller *et al.* (2012a)).

Il semble que dans presque toutes les simulations, SASI mette plus de temps à se développer que la convection à petite échelle (voir ci-dessous). Cependant, Müller *et al.* (2012a) ont montré récemment que SASI comme la convection peuvent être inhibées. On peut alors dans certains cas voir SASI se développer plus vite et donc être la principale instabilité hydrodynamique responsable de l'explosion.

La présence de SASI, particulièrement en régime non linéaire, induit de la convection dans la zone de gain, et en conséquence des vitesses non radiales importantes et donc rallonge le temps passé par la matière dans la zone de gain (Scheck *et al.* (2008); Müller *et al.* (2012a)). De plus, cette matière pousse le choc à un rayon moyen plus important qu'en symétrie sphérique. La zone de gain est par conséquent plus grande (Scheck *et al.* (2008)).

Ces deux mécanismes aident le chauffage par les neutrinos, puisque la matière reste plus longtemps dans la zone de gain et que celle-ci est plus grande, comparée au cas à symétrie sphérique. Différents auteurs (Suwa *et al.* (2010); Takiwaki *et al.* (2012); Müller *et al.* (2012a,b); Bruenn *et al.* (2012)) sont en faveur de ces explications, alors qu'une certaine controverse existe sur l'efficacité, voire la pertinence quant à l'explosion ou même la présence en 3D de SASI. Pour Dolence *et al.* (2012); Burrows (2012), la SASI n'existe pas, ou marginalement, en 3D, et par conséquent ne joue aucun rôle dans l'explosion en 3D.   l'inverse, récemment Hanke *et al.* (2013) trouvent la SASI dans leur simulation et pensent qu'elle joue un rôle clé dans l'explosion.

3.1.4 Convection à petite échelle

La convection apparaît dans une supernova de la même manière que dans une casserole d'eau en train de chauffer : le fluide plus chaud est moins dense et subit une poussée d'archimède supérieure au fluide moins chaud. Le fluide plus chaud est alors advect  vers l'extérieur (ou vers le haut, dans le cas de la casserole). Le critère employé pour établir si un fluide est instable à la convection est le critère de Schwarzschild-Ledoux (voir Müller *et al.* (2010)). Pour un fluide à un seul composant (ou plus précisément, donc la fraction leptonique Y_l ne varie pas), celui-ci se réduit au critère de Schwarzschild, qui n'est autre que le gradient d'entropie

$$C_S = \frac{ds}{dr}. \quad (3.1)$$

Dans une supernova, la fraction leptonique varie dans l'espace et dans le temps, mais un gradient d'entropie négatif est un bon indicateur de l'instabilité convective (Janka (2012)).

Rappelons également que les progéniteurs utilisés dans les simulations de supernovas gravitationnelles sont calculés en symétrie sphérique. De petits écarts à la symétrie sphérique dans le cœur de fer sont attendus, par exemple par mélange (également convectif) avec la couche de silicium. Ces petites perturbations pourraient avoir une influence non négligeable sur le développement de la convection après le rebond (par exemple Ott (2009b), ou Nordhaus *et al.* (2010); Hanke *et al.* (2011) pour l'utilisation de perturbations aléatoires directement dans les simulations).

3.1.4.1 Convection dans la proto-étoile à neutrons

La convection dans la proto-étoile à neutrons commence directement après le passage du choc, car celui-ci laisse derrière lui un gradient d'entropie et de fraction leptonique (Ott (2009b); Müller *et al.* (2012c)). Bien qu'importante, en particulier pour la signature en ondes gravitationnelles des supernovas (voir section 3.8), l'influence de cette convection sur l'explosion est négligeable.

3.1.4.2 Convection dans la zone de gain

Le chauffage dans la zone de gain n'est pas homogène mais diminue, globalement, comme T^2 , voir la section 3.1.1. Le chauffage par les neutrinos est donc plus important dans les régions les plus internes de la zone de gain, et de moins en moins important à mesure qu'on se rapproche du choc. L'efficacité du chauffage dépend donc du rayon, et cette dépendance entraîne la formation d'un gradient d'entropie dans la zone de gain (Ott (2009b)), qui entraîne à son tour l'apparition de la convection (comme on peut le voir sur la figure 3.1).

Une zone chauffée proche du rayon de gain peut donc être advectée vers le choc par convection, et participer au chauffage derrière le choc, alors que si la convection ne peut pas se mettre en place (c'est à dire en symétrie sphérique), cette zone a tendance à tomber dans la zone de refroidissement et à réémettre des neutrinos (Janka (2012)).

C'est donc une convection anisotrope (par petits éjectats de matière) et déclenchée par les neutrinos qui se met en place. Le couplage avec le chauffage par les neutrinos se fait essentiellement par la présence de surdensités, qui augmentent la probabilité de réagir avec les neutrinos, et la présence de vitesses non radiales, qui augmente le temps passé par la matière dans la zone de gain.

3.1.5 Le chauffage par les neutrinos multidimensionnel

Les neutrinos interagissent très peu avec la matière dans la zone de gain, à cause de leurs faibles sections efficaces. La convection et SASI augmentent la taille de la zone de gain et le temps passé par la matière dans cette zone, et donc ces deux instabilités aident au chauffage par les neutrinos. D'autre part, l'entrée en phase non linéaire de SASI entraîne un couplage avec la convection (Foglizzo *et al.* (2007a); Scheck *et al.* (2008)), et donc finalement une convection plus efficace pour le chauffage. Enfin, l'expansion du choc grâce à SASI peut saturer (Guilet *et al.* (2010)), en particulier à cause d'instabilités de Rayleigh–Taylor¹ et de Kelvin–Helmholtz².

Notons également que l'émergence des simulations 3D ouvre la voie à l'étude de la turbulence dans les supernovas. En particulier, la cascade d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles pourrait changer la dynamique après le rebond dans les supernovas (Dolence *et al.* (2012); Ott *et al.* (2012a)), sans doute en donnant un plus grand rôle à la convection à petite échelle par rapport à SASI. L'effet de la 3D (en particulier, si la 3D aide ou non à l'explosion dans le cadre du scénario de chauffage par les neutrinos) est pour l'instant controversé (Dolence *et al.* (2012); Takiwaki *et al.* (2012); Hanke *et al.* (2011); Nordhaus *et al.* (2010)), car ces simulations contiennent beaucoup d'approximations.

Enfin, le défaut majeur de toutes les simulations actuelles d'explosions de supernovas gravitationnelles est que l'énergie cinétique du choc n'arrive pas à la valeur canonique observée de 10^{51} erg (voir aussi la section 3.8). L'énergie cinétique est systématiquement basse (Marek & Janka (2009); Suwa *et al.* (2010); Takiwaki *et al.* (2012); Müller *et al.* (2012b); Bruenn *et al.* (2012)), et le mécanisme de chauffage par les neutrinos est finalement assez peu efficace.

Ce scénario, qui constitue le paradigme actuel, a donc une faiblesse majeure. Une très grande partie des efforts des chercheurs contemporains qui s'intéressent à l'explosion des supernovas gravitationnelles est consacrée à la résolution de ce problème. Parmi les améliorations les plus couramment envisagées, on peut citer le passage à une hydrodynamique en trois dimensions (par exemple Takiwaki *et al.* (2012); Nordhaus *et al.* (2010); Hanke *et al.* (2011)) ou un meilleur traitement des neutrinos (par exemple Endeve *et al.* (2012), voir aussi la partie V de cette thèse), des pistes qui ont l'inconvénient d'être extrêmement exigeantes en temps de calcul.

Au niveau microphysique, l'amélioration des interactions dans la matière ou l'ajout de nouvelles particules, c'est-à-dire du point de vue numérique l'amélioration de l'équation d'état (par exemple Oertel *et al.* (2012); Hempel *et al.* (2012); Shen *et al.* (2011), voir aussi le chapitre 6 de cette thèse), et l'amélioration des calculs de taux de réaction des

1. L'instabilité de Rayleigh–Taylor est présente à l'interface entre deux fluides de densité différentes (dans la supernova, une partie et une autre du fluide, à des densités différentes). Si le système est instable, le fluide plus dense a tendance à s'immiscer dans le fluide moins dense par endroits isolés (on parle de doigts).

2. L'instabilité de Kelvin–Helmholtz s'enclenche quand deux couches de fluides ont des vitesses différentes au niveau de leur interface. Celles-ci engendrent un cisaillement qui peut à son tour générer une rotation, et finalement de la turbulence

neutrinos (Fantina *et al.* (2012); Lentz *et al.* (2012a); Buras *et al.* (2003)) sont aussi des domaines très productifs.

3.2 Explosion magnétohydrodynamique

Si le cœur de fer est fortement magnétisé et en rotation rapide, l'explosion magnétohydrodynamique (MHD) est possible. L'évolution stellaire prédit que seulement une petite partie des progéniteurs remplissent ces conditions (Janka (2012)). C'est donc un mécanisme complémentaire du chauffage par les neutrinos, qui explique seulement une petite proportion d'explosions, parmi les plus énergétiques.

3.2.1 Mécanisme d'explosion

Après le rebond, pour que l'explosion MHD se produise, l'énergie contenue dans la rotation différentielle du cœur doit être convertie en énergie magnétique. Cette conversion est possible soit par effet dynamo (Kotake *et al.* (2012b); Takiwaki *et al.* (2009); Cerdá-Durán *et al.* (2007)), où le champ magnétique toroïdal est amplifié par induction, soit par l'instabilité magnétorotationnelle (Balbus & Hawley (1992); Obergaulinger *et al.* (2009)), une instabilité qui se manifeste dans le cas d'un champ magnétique faible dans un fluide en rotation.

Si cette conversion est assez efficace pour que le champ magnétique atteigne $\sim 10^{15}$ G au niveau de la proto-étoile à neutrons, la dissipation d'énergie magnétique dans le fluide ainsi que la pression magnétique peuvent pousser le choc assez pour le faire repartir (Kotake *et al.* (2012b); Janka (2012)).

Les simulations du mécanisme MHD montrent des explosions très énergétiques, dipolaires (Burrows *et al.* (2007); Takiwaki *et al.* (2009)), qui pourraient donc rendre compte de supernovas observées dont l'énergie cinétique atteint $\sim 10^{52}$ erg, qu'on appelle aussi hypernovas (voir également la section 3.8).

3.2.2 Sursaut gamma

Les sursauts gamma longs (d'une durée de l'ordre de la seconde) sont des épisodes d'émission de photons gamma (typiquement, ~ 100 KeV par photon, soit $\sim 10^{51}$ erg pour l'événement entier (Woosley & Bloom (2006)).

Le scénario le plus communément admis est qu'ils proviennent d'une supernova gravitationnelle (Woosley & Bloom (2006)). Avec un progéniteur candidat pour une explosion MHD (c'est-à-dire avec une rotation et un champ magnétique initiaux élevés), il est possible de créer un disque autour de l'objet central, soit un trou noir soit un magnétar, puis de lancer un jet (Dessart *et al.* (2008)) collimaté et relativiste qui donnerait l'émission gamma. Ce scénario est communément admis mais doit encore est confirmé par les simulations numériques.

Les supernovas associées à des sursauts gammas sont toutes de type spectral Ic (sans enveloppe d'hydrogène ni d'hélium, [Woosley & Bloom \(2006\)](#); [Janka \(2012\)](#)), ce qui semble indiquer des étoiles Wolf-Rayet comme progéniteurs, desquelles le jet peut émerger plus facilement.

3.3 Oscillation des neutrinos

Le neutrino est une particule élémentaire, ce qui veut dire qu'on ne lui connaît pas de sous-structure. C'est un fermion (spin $1/2$). Il n'est pas soumis à l'interaction forte ni à l'interaction électromagnétique. Sa masse est non nulle (sinon les oscillations seraient impossibles) mais très petite (< 2 eV pour le ν_e , [Amsler et al. \(2008\)](#)). Outre la gravitation (dans le cadre de la relativité générale), on peut donc considérer que le neutrino n'est soumis qu'à l'interaction faible. Il existe trois saveurs de neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ), correspondant chacune à un lepton chargé.

Un autre phénomène fascinant de la physique des neutrinos est l'oscillation. Les neutrinos interagissent en tant qu'état propre de saveur (ν_e, ν_μ, ν_τ) mais se propagent en tant qu'état propre de masse (ν_1, ν_2, ν_3). Les masses de ces trois états propres étant légèrement différentes, chacun se propage à une vitesse légèrement différente. C'est ce phénomène qui est à l'origine de l'oscillation des neutrinos : si on crée un neutrino d'une certaine saveur, qu'on le laisse se propager et qu'on le fait interagir ensuite, il existe une probabilité non nulle pour qu'il interagisse en tant que neutrino d'une saveur différente de la saveur initiale ([Waltham \(2004\)](#)).

Dans le vide, la propagation des neutrinos entraîne le phénomène d'oscillations (par exemple les neutrinos atmosphériques créés par la désintégration de muons). Dans la matière ordinaire (ici, dans le sens où il y a beaucoup plus d'électrons que de muons ou de taus), on rencontre l'effet MSW (pour Mikheyev, Smirnov, Wolfenstein, voir par exemple [Waltham \(2004\)](#)). Une densité d'électrons non nulle altère très légèrement le comportement du ν_e par rapport aux deux autres, et change donc la manière dont les neutrinos oscillent. C'est cet effet qui explique l'oscillation des neutrinos dans le Soleil.

Dans les supernovas, un troisième type d'oscillations est possible. De la même manière que la présence d'électrons influe sur les oscillations, la présence d'autres neutrinos joue un rôle. C'est donc une interaction des neutrinos avec eux-même ([Duan & Kneller \(2009\)](#)), qui vient des conditions recontrées dans les supernovas, en particulier un très grand flux de neutrinos émis à peu près au niveau de la neutrinosphère.

Puisque les neutrinos interagissent avec eux-même, il est théoriquement possible d'avoir une oscillation collective des neutrinos, c'est-à-dire que tous les neutrinos d'une saveur changent de saveur en même temps. Dans un modèle simplifié à deux neutrinos (ν_e et $\nu_x = \nu_{\mu,\tau}$), les oscillations collectives sont particulièrement intéressantes pour aider à faire repartir le choc. En effet, les ν_x sont plus énergétiques mais ont une probabilité d'interaction moindre que les ν_e . Les oscillations collectives permettent d'"inverser" les spectres (tous les ν_e deviennent des ν_x et inversement) et donc d'obtenir un spectre de ν_e plus dur, qui permet de déposer plus d'énergie derrière le choc.

Les simulations en symétrie sphérique de cet effet montrent des conséquences non négligeables sur le chauffage du choc (par exemple [Pejcha et al. \(2012\)](#)). La paramétrisation du chauffage supplémentaire dans une simulation 2D montre même un résultat spectaculaire ([Suwa et al. \(2011\)](#)), avec une énergie cinétique qui atteint les 10^{51} erg.

Il semble cependant que la déviation à la symétrie sphérique détruise la cohérence entre les différents neutrinos émis (par exemple [Dasgupta et al. \(2012\)](#)), condition nécessaire pour que le phénomène d'oscillations apparaisse. Le rôle des oscillations dans le chauffage du choc semble donc finalement négligeable.

Enfin, l'oscillation des neutrinos reste un phénomène important pour d'autres domaines des supernovas, par exemple le calcul du flux de neutrinos observable dans un détecteur donné.

3.4 Autres mécanismes

Le mécanisme de chauffage par les neutrinos ayant le défaut majeur d'être systématiquement sous-énergétique, la piste selon laquelle un autre mécanisme sous-jacent serait à l'œuvre a été explorée. Tous ces mécanismes ont également des défauts, sans doute rédhibitoires, ou ne s'appliquent que dans des cas particuliers (comme le mécanisme MHD, robuste mais qui ne concerne qu'une petite partie des supernovas, voir la section 3.2). Les mécanismes présentés dans cette section sont les deux scénarios alternatifs les plus souvent retenus.

3.4.1 Transition de phase vers la matière de quarks

[Sagert et al. \(2009\)](#) proposent que la proto-étoile à neutrons, en refroidissant et en se contractant, soit sujette à une transition de phase vers la matière de quarks. Dans leurs simulations, la transition de phase apparaît alors que le choc s'est arrêté. Celle-ci induit un réeffondrement de la PNS sur elle-même et un deuxième rebond. Dans le cas de la transition de phase vers la matière de quarks, ce rebond est assez violent pour induire l'apparition d'un second choc ([Fischer et al. \(2011\)](#)), qui pousse le premier et induit l'explosion.

Le principal défaut de ce mécanisme est que les équations d'état utilisées donnent des masses maximales pour les étoiles à neutrons de $1.56 M_{\odot}$ et $1.50 M_{\odot}$, bien loin de la contrainte de masse imposée par l'observation d'une étoile à neutrons de $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ par [Demorest et al. \(2010\)](#). (voir le chapitre 6 pour la présentation des équations d'état et de la contrainte sur la masse maximale). Il semble également que l'utilisation d'équations d'état plus proche de cette contrainte diminue l'énergie disponible dans le second choc et diminue par la même occasion l'efficacité de ce mécanisme.

3.4.2 Mécanisme acoustique

Burrows *et al.* (2006) montrent dans leurs simulations que des modes de vibration de la PNS se déclenchent. Ce sont des vibrations de type acoustique, qui peuvent devenir des chocs secondaires qui se dissipent ensuite et laissent leur énergie dans la zone de gain.

Là encore, des défauts subsistent. L'explosion est tardive (~ 1 s), et l'énergétique de l'explosion étant étroitement liée au moment de son déclenchement, ce mécanisme ne pourrait donner que des explosions peu énergétiques. De plus, ces simulations n'ont pas pu être reproduites, et enfin, il semble possible que ces ondes acoustiques disparaissent avec une meilleure résolution (Janka (2012)).

3.5 Effondrement en trou noir

Avec l'explosion, l'effondrement en trou noir est un des aspects des supernovas gravitationnelles les plus étudiés (Ugliano *et al.* (2012); Sumiyoshi *et al.* (2007); Fischer *et al.* (2009); O'Connor & Ott (2011); Hempel *et al.* (2012); Peres *et al.* (2013a)). L'objet compact au centre, à la fin de l'explosion, peut être soit une étoile à neutrons soit un trou noir. Actuellement, il n'est pas possible de savoir avec certitude quel progéniteur donne une étoile à neutrons et quel progéniteur donne un trou noir, car trop d'incertitudes subsistent : une connaissance détaillée de l'équation d'état (voir le chapitre 6), des interactions des neutrinos (voir les parties III, V ainsi que l'appendice B) et du mécanisme d'explosion serait nécessaire pour tirer des conclusions définitives. Dans cette section, il est simplement question d'esquisser les différents scénarios possibles d'effondrement en trou noir.

3.5.1 Dès l'effondrement

Le cœur de fer s'effondrant sur lui-même, il est envisageable que l'effondrement continue jusqu'à la formation d'un trou noir. L'étoile entière disparaîtrait derrière l'horizon sans qu'un choc soit créé.

Ce scénario semble exclu par toutes les simulations récentes, où un rebond est systématiquement observé. La masse du cœur au moment du rebond est sans doute trop faible (c'est à dire inférieure à la masse de Chandrasekhar instantanée), même avec les taux d'accrétion les plus extrêmes, pour que la gravitation l'emporte sur l'interaction nucléaire qui devient violemment répulsive.

Enfin, la contrepartie observationnelle de la création d'un trou noir dès l'effondrement serait une étoile qui s'éteint brusquement, un phénomène qui n'a pas encore été observé.

3.5.2 Échec du mécanisme d'explosion

Si le rebond a lieu et que le choc s'arrête, on peut imaginer que les neutrinos (ou un autre mécanisme d'explosion) échouent à faire repartir le choc. C'est un scénario envisagé en particulier pour les progéniteurs induisant un taux d'accrétion très élevé. Après le rebond, la proto-étoile à neutrons devient de plus en plus massive avec l'accrétion, et "refroidit" avec l'émission de neutrinos³. Si le choc n'arrive pas à regagner une vitesse positive, la PNS finit par atteindre sa masse maximale puis s'effondrer en trou noir. C'est le scénario que j'ai étudié dans la partie III de cette thèse, et également étudié, par exemple, dans Fischer *et al.* (2009); O'Connor & Ott (2011); Hempel *et al.* (2012).

La contrepartie optique de ce scénario serait une étoile qui s'éteint brusquement, mais contrairement au mécanisme précédent, ici le pic de flux neutrinique (voir section 2.4.2) est toujours présent. Il est donc envisageable de mettre en évidence ce phénomène par une observation conjointe en optique et en neutrinos.

3.5.3 Explosion et réeffondrement

Au moment de l'explosion, la matière dans les environs du choc n'est plus liée au cœur et peut partir avec une vitesse positive. Il reste de la matière entre le choc et la PNS, qui continue à tomber. Une fraction de celle-ci finit par être expulsée, surtout dans les régions à forte entropie, car la PNS continue à émettre un flux intense de neutrinos (appelé vent neutrinique, voir Arcones & Thielemann (2013) une fois que l'explosion est lancée).

La masse de la PNS augmente donc encore après le lancement de l'explosion. Si, à ce moment, la PNS atteint sa masse maximale, elle s'effondre et forme un trou noir par réeffondrement (Ugliano *et al.* (2012)).

C'est un phénomène envisagé pour SN1987A (voir la section 1.2), pour laquelle on n'a pas détecté d'étoile à neutrons jusqu'à présent.

3.5.4 Proto-étoile à neutrons marginalement stable

Une fois que l'explosion est lancée et que toute la matière disponible est soit dans l'éjectat soit dans la PNS, l'effondrement en trou noir est encore possible, car la PNS refroidit.

La pression thermique diminue à mesure que la PNS refroidit (principalement grâce aux neutrinos dans les premières secondes), et à cause de cette pression thermique, la masse maximale que peut soutenir une étoile à neutrons froide est inférieure à celle que peut soutenir une proto-étoile à neutrons. Il est donc envisageable que la masse de la PNS devienne supérieure à la masse maximale autorisée au cours du refroidissement,

3. La perte d'énergie par neutrinos de la PNS induit bien un refroidissement. Puisqu'elle perd de la pression thermique, une conséquence est que la PNS se contracte. L'effet produit est alors une augmentation de la température, mais on parle toujours de refroidissement.

après l'explosion. Le refroidissement des (proto-)étoiles à neutrons est un domaine de recherche qui sort du cadre de cette thèse.

3.6 Nucléosynthèse

3.6.1 Contribution à l'explosion

Une fois le choc reparti, sa propagation induit une brusque augmentation de l'entropie et de la température dans la matière. Des réactions endothermiques sont possibles, comme la photodissociation du fer, par la formule (2.3), ou celle du silicium. Des réactions exothermiques sont également possibles, l'énergie libérée pourrait alors contribuer à l'énergie cinétique totale de l'explosion.

Yamamoto *et al.* (2012) montrent que la principale contribution à l'énergie est la recombinaison de protons et neutrons libres en particules α . En effet, au cœur de la supernova la matière est assez dense et chaude pour casser les particules α . L'état le plus favorisé est alors un mélange de protons et neutrons libres. À mesure que le choc se propage vers de plus faibles densités et températures, les particules α deviennent favorisées.

Le choc se propageant ensuite vers des densités et températures encore plus faibles, les particules α , à leur tour, se recombinent. Les noyaux créés sont principalement ^{56}Ni et ^{28}Si . L'énergie totale gagnée grâce à ces recombinaisons pourrait être du même ordre de grandeur que l'énergie déposée par les neutrinos (Yamamoto *et al.* (2012)). De plus, les simulations de Yamamoto *et al.* (2012) prévoient une masse de ^{56}Ni compatible avec les observations (voir la section 3.8).

3.6.2 Processus r

Les éléments au-delà du fer ne sont pas créés lors de réactions de fusion endothermiques. Il faut donc des conditions exceptionnelles pour les créer, et une explosion de supernova est l'idée qui vient naturellement pour la nucléosynthèse explosive des éléments lourds au-delà du fer. Plus précisément, c'est le processus r (pour rapide) qui est le plus attendu et le moins compris.

Il a été proposé que le processus r ait lieu après le lancement de l'explosion, aidé par le vent neutrinique. En effet, le processus r requiert des régions de grande entropie, se propageant rapidement, et riches en neutrons ($Y_e \sim 0.4$, Arcones & Thielemann (2013)). Un éjectat riche en neutrons est nécessaire, car il faut que les captures de neutrons sur les noyaux soient plus rapides (d'où le nom) que la désintégration.

Pour l'instant, les simulations les plus détaillées semblent indiquer que les éjectats sont plutôt riches en protons (Fischer *et al.* (2010); Arcones & Thielemann (2013)), ce qui exclue la possibilité de processus r . Cette conclusion est peu robuste, et change avec les détails de la microphysique utilisée dans les simulations (Arcones & Thielemann (2013)). Les oscillations des neutrinos, par exemple, pourraient avoir une importance

non négligeable. Une solution proposée par [Winteler et al. \(2012\)](#) est que le processus r ait lieu préférentiellement dans les explosions magnétohydrodynamiques.

Une autre piste envisagée est la prise en compte d'effets de milieu : les protons et neutrons libres impliqués dans les captures électroniques et positroniques (voir les équations (7.8) et (7.10)) sont en général considérés dans le vide. [Roberts et al. \(2012\)](#) et [Martínez-Pinedo et al. \(2012\)](#) montrent que lever cette approximation et considérer que les neutrons et les protons sont dans la matière change les taux de réaction. Une des conséquences de ce changement est que les éjectats sont plutôt riches en neutrons, ce qui est donc en faveur de la présence du processus r dans les supernovas ([Martínez-Pinedo et al. \(2012\)](#)).

3.7 Les autres supernovas gravitationnelles

3.7.1 Les supernovas à effondrement de cœur O-Ne-Mg

Si l'étoile a une masse dans la limite basse des progéniteurs qui explosent en supernovas (entre environ $8 M_{\odot}$ et $10 M_{\odot}$), les captures électroniques sont déclenchées dans le cœur d'oxygène, néon et magnésium, avant la fusion du néon. Pour cette raison on appelle parfois ces supernovas des "supernovas à captures électroniques".

Le cœur s'effondre, crée une proto-étoile à neutrons et un choc qui se propage puis s'arrête rapidement, comme dans une supernova à cœur de fer. Un cœur O-Ne-Mg étant moins lié qu'un cœur de fer, le choc se propage et repart plus facilement. D'autre part, le très fort gradient de densité dans le progéniteur entraîne une diminution abrupte du taux d'accrétion de masse au niveau du choc. Le mécanisme de chauffage par les neutrinos est alors beaucoup plus efficace (voir par exemple [Kitauro et al. \(2006\)](#); [Janka et al. \(2008\)](#); [Janka \(2012\)](#)).

Le choc gagne de l'énergie et repart grâce aux neutrinos. Un dépôt d'énergie supplémentaire vient de la fusion exothermique de certains éléments (voir [Janka et al. \(2008\)](#), et également la section 3.6). Enfin, la contrepartie observationnelle est une supernova relativement peu énergétique ($\sim 10^{50}$ erg) et peu lumineuse (la masse de nickel radioactif éjectée est $\sim 0.015 M_{\odot}$) ([Kitauro et al. \(2006\)](#)).

3.7.2 Les supernovas à instabilité de paire

À l'autre extrémité de l'échelle de masse, on trouve des étoiles capable de créer $\gtrsim 42 M_{\odot}$ d'hélium ([Heger et al. \(2003\)](#)), ce qui correspond à des étoiles de $\sim 100 M_{\odot}$ ([Janka \(2012\)](#)). En considérant qu'il n'y a pas de perte de masse, elles explosent par le mécanisme d'instabilité de paire.

Dans ces étoiles, la pression de radiation est le fait de photons assez énergétiques pour créer spontanément des paires $e^+ e^-$. Cette réaction entraîne en même temps une perte de pression et une augmentation de la masse, ce qui peut déclencher une instabilité et l'effondrement de l'étoile. Il est attendu ([Heger et al. \(2003\)](#); [Janka \(2012\)](#)) que

les supernovas à instabilité de paire les moins massives s’effondrent en trou noir sans exploser, alors que les plus massives exploseraient sans laisser d’objet compact derrière elles. Cependant, il existe encore des incertitudes sur ce scénario.

Ces étoiles extrêmement massives sont rares. Peu d’observations ont été liées de manière univoque à ce mécanisme (à l’exception notable de [Gal-Yam et al. \(2009\)](#)), et les scénarios de formation stellaire ont du mal à rendre compte d’étoiles de plus de $150 M_{\odot}$. Cependant, on pense également que les étoiles de première génération (appelées “population III”), formées à partir de gaz primordial ultra pauvre en métaux pourraient avoir été beaucoup plus massives que celles observées actuellement. De plus, la perte de masse par vent stellaire est beaucoup moins efficace à faible métallicité, ce qui pourrait valider l’hypothèse d’absence de perte de masse. Ceci indiquerait que les supernovas à instabilité de paire pourraient avoir existé.

De manière observationnelle, on s’attend à voir une explosion très énergétique ($\sim 10^{53}$ erg) et très lumineuse ($\sim 50 M_{\odot}$ de nickel), voir par exemple [Janka \(2012\)](#). Ces explosions très lumineuses sont parfois appelées hypernovas, voir section 3.2, voir aussi [Vink et al. \(2013\)](#) pour une revue récente sur la détection et les propriétés des étoiles très massives.

3.8 Observables

Puisqu’elle est visible même en plein jour, l’observation d’une supernova proche est aisée. Il n’est donc pas étonnant que l’on dispose d’observables auxquelles on peut confronter la théorie. Cependant, pour la modélisation numérique de l’effondrement du cœur d’une supernova gravitationnelle, ces observables sont toutes indirectes et liées à une phase plus tardive, à l’exception notable des neutrinos et des futures détections d’ondes gravitationnelles. Il faut par exemple attendre la fin d’une simulation pour avoir l’énergie totale de l’explosion, et on dispose, finalement, de peu de contraintes.

3.8.1 Courbe de lumière

3.8.1.1 Transition vers un milieu transparent aux photons

Le choc induit l’explosion de l’étoile, et donc un éjectat de plus en plus dilué à mesure qu’il se propage dans le milieu interstellaire. C’est le passage de l’hydrogène ionisé à l’hydrogène neutre qui en général marque la photosphère, où le milieu devient transparent aux photons.

3.8.1.2 Désintégration du nickel radioactif

Le choc se propage dans le milieu interstellaire et est en plus alimenté en énergie par la désintégration du ^{56}Ni en ^{56}Co . Comme décrit dans [Colgate & McKee \(1969\)](#), le

milieu est opaque aux rayons gamma de cette désintégration β , qui peuvent donc déposer leur énergie. La demi-vie du ^{56}Ni est de 6 jours. Au bout d’une vingtaine de jours, c’est la désintégration du noyau fils ^{56}Co qui supplante ^{56}Ni comme principale source d’énergie, jusqu’à la transparence complète. Le cobalt radioactif donne du ^{56}Fe avec une demi-vie de 77 jours. La masse de nickel synthétisée est donc directement corrélée avec la luminosité totale optique d’une supernova. On notera également que c’est parce que le ^{56}Ni et le ^{56}Co sont instables que le cœur d’une étoile massive est en fer et non en nickel.

3.8.2 Asphéricité, énergétique, rémanants et spectres

Les supernovas observées ont souvent une déviation à la symétrie sphérique assez prononcée (sondée, par exemple, par spectropolarimétrie, [Leonard et al. \(2006\)](#)). L’explosion elle-même pourrait dévier de la sphéricité par la SASI ([Müller et al. \(2012b\)](#)). D’autre part, une explosion fortement dipolaire serait un indice du mécanisme magnétohydrodynamique ([Kotake et al. \(2012b\)](#) et section 3.2).

L’énergie cinétique observée des supernovas est typiquement de quelques 10^{51} erg ([Utrobin & Chugai \(2011\)](#)). Comme expliqué en section 3.1, cette contrainte est la préoccupation majeure des théoriciens qui travaillent sur le mécanisme d’explosion.

Les spectres renseignent sur la métallicité de la SN et la masse de ^{56}Ni produit. Une fois le mécanisme d’explosion validé, on peut imaginer que les théoriciens auront à cœur de reproduire l’énergie d’une explosion en même temps que la masse de Nickel radioactif à partir d’un progéniteur correspondant à une SN donnée (comme par exemple SN1987A, [Yamamoto et al. \(2012\)](#)).

Enfin, une fois l’explosion enclenchée, l’enveloppe de l’étoile devenue transparente aux photons continue à se déplacer dans le milieu interstellaire. On parle alors de rémanent de supernova, et c’est donc la phase dans laquelle sont toutes les supernovas historiques (dont SN185, [Williams et al. \(2011\)](#) et SN1572, [Tian & Leahy \(2011\)](#), citées en chapitre 1. Notons que ce sont tous deux des rémanents de SNIa, tous les types de supernovas produisant des rémanents.), et c’est un domaine de recherche qui sort du cadre de cette thèse.

3.8.3 L’étoile à neutrons

Dans les rémanants de supernovas, une étoile à neutrons peut être détectée, soit sous forme de pulsar soit par son émission en rayons X. Une propriété intéressante des étoiles à neutrons détectées est la présence de “kick”, c’est-à-dire une vitesse linéaire très importante, qui peut dépasser les 1000 km.s^{-1} ([Arzoumanian et al. \(2002\)](#)). Le kick est assez bien reproduit dans les simulations numériques 2D ([Nordhaus et al. \(2012\)](#)) et 3D ([Wongwathanarat et al. \(2012\)](#)).

La détection de l’étoile à neutrons et la mesure de sa masse sont aussi des observables très recherchées. Par exemple, la mesure de masses d’étoiles à neutrons donne

des contraintes sur la frontière entre étoile à neutrons et trou noir, et donc des contraintes sur l'équation d'état (voir section 6.1.2).

3.8.4 Détection des neutrinos

La détection des neutrinos d'une prochaine supernova proche (galactique ou d'une galaxie satellite de la nôtre) est très attendue. SN1987A a démontré la faisabilité d'une telle détection, et les nouvelles générations de détecteurs, plus performants, devraient voir un flux considérablement plus grand qu'en 1987 (estimé à 10000 $\bar{\nu}_e$ pour le détecteur japonais Super-Kamiokande, dans le cas d'une supernova à 10 kpc, voir Kotake (2011)).

Pour les modélisateurs, les neutrinos détectés signent d'abord le pic de flux neutrinique, puis la région émettrice est autour de la neutrinosphère. Cette région est sensible à la taille de la proto-étoile à neutrons, et des contraintes sur les équations d'états (voir chapitre 6) pourraient être obtenues, sans doute en tenant compte des neutrinos et des ondes gravitationnelles en même temps.

D'autre part, la variation du flux neutrinique après le pic est sensible aux déplacements du choc. Si la résolution est assez bonne, on peut imaginer voir soit des variations à haute fréquence (signature de la convection) soit des variations à basse fréquence (signature de SASI), ce qui donnerait un indice quant au mécanisme d'explosion (Janka (2012); Ott *et al.* (2012b)).

Du point de vue de la physique des neutrinos, il est possible qu'une future détection de neutrinos d'une supernova nous renseigne sur les propriétés, mal connues, des neutrinos. En particulier, des contraintes sur les masses (ou différences de masses) et sur les propriétés des oscillations, y compris les oscillations collectives présentées en section 3.3, sont attendues (Volpe (2013)).

Scholberg (2012) estime que 5 détecteurs de neutrinos opérationnels actuellement pourraient voir plus de 100 événements si une supernova située à 10 kpc nous atteignait aujourd'hui (Super-Kamiokande, LVD, KamLAND, MiniBooNE et Borexino). D'autres détecteurs en projet pourraient voir plus de neutrinos. Par exemple, les projets NO ν A, MEMPHYS et Hyper-Kamiokande devraient voir des milliers, voire même plusieurs dizaines de milliers d'événements liés à une supernova, une fois opérationnels.

3.8.5 Détection d'ondes gravitationnelles

Contrairement aux neutrinos, les ondes gravitationnelles n'ont pas encore été mises en évidence, que ce soit d'une supernova ou d'un autre contexte astrophysique.

La théorie de la relativité générale prévoit qu'aucune onde gravitationnelle ne peut être émise d'un milieu à symétrie sphérique. Les différents mécanismes responsables de l'émission d'ondes gravitationnelles sont donc intimement liés aux instabilités multidimensionnelles, qui brisent la symétrie sphérique (voir la section 3.1).

L'émission d'ondes gravitationnelles dans une supernova est donc liée à la convection "rapide" qui se met en place dès le passage du choc, la convection dans la proto-étoile à neutrons, la SASI et la convection dans la zone de gain, la déviation à la sphéricité de l'émission des neutrinos, et enfin la déviation à la sphéricité du choc lui même (Kotake (2011); Müller *et al.* (2012c); Ott (2009a,b)).

D'un point de vue technique, un signal en ondes gravitationnelles d'une supernova semble difficile à détecter, car il n'a pas une signature "standard" claire, contrairement par exemple à une coalescence de trous noirs. Par contre, la détection de photons et de neutrinos d'une SN proche entraînera forcément une recherche à posteriori d'un signal en ondes gravitationnelles.

Enfin, les ondes gravitationnelles sondent directement l'intérieur d'une SN mieux que tout autre observable. Comme dit en section 3.8.4, avec les neutrinos, les ondes gravitationnelles pourraient alors donner des contraintes sur les équations d'état ou sur les proto-étoiles à neutrons, voire même trancher sur le mécanisme d'explosion (Ott (2009a)).

Deuxième partie

Les supernovas numériques

The supernova modelers will keep their efforts (as they have done since time immemorial).

Kei Kotake

Dans cette partie, je décris les différents ingrédients physiques nécessaires aux simulations modernes de supernovas. Ces ingrédients viennent de différentes physiques (relativité générale, hydrodynamique, transport radiatif, évolution stellaire, physique nucléaire ...), ce qui fait toute la complexité et l'attractivité des supernovas numériques. La simulation de référence vers laquelle la recherche tend aurait

- un progéniteur aussi détaillé que possible⁴ (voir [Woosley et al. \(2002\)](#), et également la section 2.1)
- une résolution des équations d'Einstein de la relativité générale pour la métrique de l'espace-temps (exposée au chapitre 4)
- une (magnéto-)hydrodynamique relativiste à trois dimensions (exposée au chapitre 5)
- une équation d'état moderne calculée à partir de physique nucléaire pour décrire les interactions dans le fluide (exposée au chapitre 6)
- un traitement des neutrinos par la résolution de l'équation de Boltzmann (détaillé dans les parties IV et V), ce qui implique d'une part le traitement du transport des neutrinos (dépendant du temps) et d'autre part une connaissance détaillée des processus d'interaction faible par lesquels interagissent les neutrinos (entrant dans le terme de collision de l'équation de Boltzmann, voir la section 11.3 et l'annexe B)

Mettre tous ces ingrédients à la fois n'est pour l'instant pas possible car ce serait beaucoup trop exigeant en temps de calcul. La modélisation des supernovas est donc un compromis entre une physique détaillée et un temps de calcul raisonnable.

Dans cette partie, ces différents ingrédients physiques utiles aux supernovas sont décrits dans un contexte général puis dans le cas particulier du code COCONUT ([Dimmelmeier et al. \(2005\)](#)), que j'ai utilisé tout au long de ma thèse.

4. Les progéniteurs venant d'autres codes numériques, le détail des approximations faites est omis ici. On peut citer notamment la perte de masse, phénomène très important pour l'évolution stellaire mais très peu contraint, et l'utilisation de la symétrie sphérique, qui empêche la formation d'inhomogénéités dans le cœur de fer ou aux interfaces où la fusion a lieu.

Chapitre 4

Relativité générale

Sommaire

4.1 Motivation	60
4.1.1 Relativité restreinte	60
4.1.2 Conséquences de la gravitation relativiste	60
4.2 Différents référentiels en relativité générale	61
4.2.1 Référentiel des coordonnées	61
4.2.2 Référentiel eulérien	61
4.2.3 Référentiel lagrangien	62
4.3 Le potentiel gravitationnel de CoCoNuT	62
4.4 Trouveur d'horizon apparent	65
4.5 Extraction d'ondes gravitationnelles : formule du quadrupôle	65

Dans ce chapitre, j'introduis des concepts, puis des outils liés à la relativité générale, qui m'ont servi pour l'étude de la formation de trous noirs et pour la formulation de l'équation de Boltzmann.

4.1 Motivation

4.1.1 Relativité restreinte

Le choc induit par le rebond de la matière sur la proto-étoile à neutrons nouvellement formée atteint des vitesses de l'ordre de $0.3c$, voire $0.5c$ dans le cas d'une formation de trou noir. Il ne fait donc pas de doute que le fluide est relativiste, au sens de la relativité restreinte.

Nombre de simulations ont été faites avec une hydrodynamique en relativité restreinte et un potentiel gravitationnel newtonien (par exemple [Burrows et al. \(2007\)](#); [Buras et al. \(2006\)](#)). La relativité générale s'inscrit naturellement dans la démarche de sophistication progressive des simulations.

4.1.2 Conséquences de la gravitation relativiste

La gravitation relativiste est indispensable dans le cadre de l'étude de formation de trous noirs, car la notion de trou noir n'a de sens qu'en RG (relativité générale). Pour une simulation de l'explosion d'une supernova, une proto-étoile à neutrons a un rayon de ~ 50 km pour une masse de $\sim 1.4 M_{\odot}$ quelques millisecondes après le rebond. Sa compacité est alors $\Xi = GM/Rc^2 = 0.041$, ce qui en fait un objet marginalement relativiste. Cependant, la relativité générale s'est avérée importante ([Müller et al. \(2012b\)](#); [Lentz et al. \(2012b\)](#)).

Le potentiel gravitationnel calculé par la relativité générale est plus important que son équivalent newtonien, ce qui fait que la matière accrétée est tirée plus fortement vers le centre et que la PNS est plus compacte.

La conséquence immédiate est que la neutrinosphère (la région où les neutrinos se découplent de la matière, voir section 7.1) se trouve dans une région plus intérieure, donc où la température est plus élevée. Les neutrinos émis sont donc plus durs, leur énergie moyenne est plus élevée que dans une simulation newtonienne.

L'accrétion a tendance à pousser le choc vers la PNS, tandis qu'un spectre de neutrinos plus dur a tendance à favoriser l'explosion. La dynamique du choc est donc profondément affectée ([Müller et al. \(2012b\)](#)), en faveur de l'explosion. Ces effets sont assez grands pour qu'une simulation qui n'explose pas en newtonien explose en relativité générale.

On note cependant que certains auteurs ajoutent des corrections au potentiel newtonien, ce qui évite d'appliquer le formalisme de la relativité générale ([Marek et al. \(2006\)](#); [Hanke et al. \(2013\)](#)). La petite compacité de la proto-étoile à neutrons incite à penser que ce potentiel effectif est suffisant pour traiter la relativité générale. Cependant, dans

Müller *et al.* (2012b), les auteurs comparent leur modèle de $15 M_{\odot}$ (en relativité générale et en CFC, voir ci-dessous) avec l'équivalent de Marek *et al.* (2006) avec potentiel effectif. Le résultat est, ici aussi, une différence assez grande pour que celui simulé en relativité générale explose et l'autre non.

4.2 Différents référentiels en relativité générale

Dans cette section, je définis les référentiels utilisés dans toute cette thèse. Le schéma de fuite (chapitre 7), ainsi que l'équation de Boltzmann (chapitre 10) se servent de changements de référentiels. D'autre part, COCONUT résout les équations hydrodynamiques d'un point de vue eulérien.

4.2.1 Référentiel des coordonnées

4.2.1.1 Définition

Le référentiel des coordonnées (CF) est associé à la base naturelle. En relativité numérique, il coïncide la plupart du temps avec la grille numérique. Dans le cas, par exemple, d'une grille sphérique, trois vecteurs de base spatiaux et un vecteur de base temporel définissent la grille : $\vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\phi, \vec{\partial}_t$. On définit également sur le CF les coordonnées r, θ, ϕ et le temps coordonnée t . Ces définitions sont indépendantes du fluide, de la gravitation ou d'autre physique.

Le CF étant fixe et indépendant de la physique sous-jacente il n'est pas associé à un observateur, et les coordonnées r, θ, ϕ, t ne sont pas des observables. Il peut aussi arriver que le vecteur $\vec{\partial}_t$ soit du genre espace.

4.2.1.2 La métrique

Les composantes matricielles $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont définies sur le CF,

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\vec{\partial}_\mu, \vec{\partial}_\nu), \quad (4.1)$$

avec les mêmes notations que Gourgoulhon (2012, 2010), c'est à dire que la matrice des différentes composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$ est donnée par le produit scalaire au sens de la métrique $\mathbf{g}$ des vecteurs de base $\vec{\partial}_\mu$.

4.2.2 Référentiel eulérien

Le référentiel eulérien (EF) est le référentiel localement inertiel en relativité générale. Il est associé à l'observateur eulérien.

L'observateur eulérien se déplace de manière orthogonale à des hypersurfaces de genre espace. La base $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ du référentiel eulérien est orthonormée, et donc la

représentation de la métrique engendrée par ses quatre vecteurs de base est une matrice de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu). \quad (4.2)$$

Les transformations du CF vers le EF sont détaillées dans la section 10.1 par l'intermédiaire de tétrades.

L'observateur eulérien, au repos sur des hypersurfaces de genre espace Σ , voit des événements liés causalement à lui. La base des $\vec{e}_\mu$ est une base orthonormée. C'est pourquoi on peut associer un observateur au EF et non au CF. On voit clairement sur l'équation (4.2) que si l'espace-temps est plat, EF et CF sont les mêmes référentiels. Par construction, en formalisme $3 + 1$, seul $\vec{e}_0$ est de genre temps (et orthogonal à Σ). Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont de genre espace et appartiennent à Σ . Dans cette base, l'observateur eulérien a une 4-vitesse $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Enfin, l'observateur eulérien n'est pas forcément fixe dans l'espace, il subit en particulier la dérive des coordonnées.

4.2.3 Référentiel lagrangien

Le référentiel lagrangien (LF) est le référentiel où le fluide est au repos. L'observateur associé a la 4-vitesse du fluide, et est donc localement au repos par rapport au fluide.

Comme pour le EF, la métrique est représentée sur le LF par une matrice de Minkowski. La seule différence est alors la 3-vitesse (eulérienne) du fluide, et la transformation du EF vers le LF est donc une transformation spéciale de Lorentz.

Dans le problème du transport des neutrinos dans les supernovas, il apparaît inévitable de considérer les composantes de la 4-impulsion dans le LF. Puisque les coordonnées (t, r, θ, ϕ) et les dérivées partielles appartiennent au CF, il est inévitable de faire des changements de référentiels (voir le chapitre 10 pour le cas de l'équation de Boltzmann et l'annexe A pour les sources hydrodynamiques liées au schéma de fuite). Il existe une exception notable, les codes lagrangiens, où les coordonnées sont définies dans le LF (par exemple Liebendörfer *et al.* (2004)). Ceci simplifie considérablement les équations mais restreint généralement les simulations au cas à symétrie sphérique.

4.3 Le potentiel gravitationnel de CoCoNuT

CoCoNuT utilise un formalisme contraint pour résoudre les équations d'Einstein¹ par l'appel à LORENE, une bibliothèque écrite en C++ pour la résolution d'équations

1. Les équations d'Einstein sont liées au tenseur de Riemann, qui lui-même doit satisfaire aux identités de Bianchi. Ces identités enlèvent des degrés de liberté aux équations d'Einstein, d'où l'appellation d'équations de contraintes. En principe, résoudre toutes les équations d'Einstein n'est donc pas obligatoire : les contraintes doivent être satisfaites automatiquement. Dans le cas d'une résolution numérique des équations d'Einstein, les contraintes ne sont pas parfaitement satisfaites automatiquement. On peut donc accumuler des erreurs numériques indésirables si on ne résout pas les équations de contraintes.

de RG à l'aide de méthodes spectrales (voir [Grandclément & Novak \(2009\)](#)). Pour plus de détails sur les méthodes spectrales, voir également la partie [V](#)). COCONUT utilise donc des méthodes spectrales pour la partie gravitation et des méthodes de volumes finis (HRSC, voir la section [5.2](#)) pour l'hydrodynamique, une méthode originale appelée "mariage des maillages" (voir [Dimmelmeier et al. \(2005\)](#)).

Les équations de RG ci-après, résolues par LORENE, sont les mêmes que [Dimmelmeier et al. \(2005\)](#); [Cordero-Carrión et al. \(2009\)](#).

COCONUT utilise une approche 3+1 de la relativité générale (par exemple [Gourgoulhon \(2012\)](#)), dans laquelle la 4-métrique $g_{\mu\nu}$ est décrite en terme du lapse α , du shift β^i et de la 3-métrique spatiale γ_{ij} . On peut alors écrire

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) . \quad (4.3)$$

En plus de cette approche générale, COCONUT utilise l'approximation conformément plate (ou CFC pour *conformally flat condition*, [Wilson et al. \(1996\)](#); [Isenberg \(2008\)](#)), dans laquelle la 3-métrique s'écrit

$$\gamma_{ij} = \Psi^4 f_{ij} , \quad (4.4)$$

où f_{ij} est la 3-métrique plate et Ψ le facteur conforme. Cette approximation ne peut reproduire certains aspects de la RG (elle ne contient pas d'ondes gravitationnelles, elle ne peut pas décrire exactement un trou noir de Kerr ou un fluide en rotation), mais elle s'est avérée être une très bonne approximation pour le cas des supernovas gravitationnelles ([Shibata & Sekiguchi \(2004\)](#); [Cerdá-Durán et al. \(2005\)](#)).

Des équations (4.3) et (4.4), on peut déduire que la 4-métrique $g_{\mu\nu}$ en CFC s'écrit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i, & \beta_r, & \beta_\theta, & \beta_\phi, \\ \beta_r, & \Psi^4, & 0, & 0, \\ \beta_\theta, & 0, & \Psi^4 r^2, & 0, \\ \beta_\phi, & 0, & 0, & \Psi^4 r^2 \sin^2 \theta, \end{pmatrix} . \quad (4.5)$$

Les équations d'Einstein s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (4.6)$$

avec $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci et R le scalaire de Ricci. La formulation ci-après en est une adaptation. $T^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion, dont la décomposition 3 + 1 est

$$T^{\mu\nu} = E n^\mu n^\nu + n^\mu S^\nu + S^\mu n^\nu + S^{\mu\nu} , \quad (4.7)$$

où E est la densité d'énergie de la matière, S^i la densité d'impulsion de la matière, et S^{ij} le tenseur des contraintes, tous mesurés par l'observateur eulérien. Remarquons que S^i et S^{ij} sont orthogonaux à n^μ , il peuvent donc être décrits comme des 3-tenseurs tangents aux hypersurfaces.

En CFC, on définit la courbure extrinsèque comme

$$K^{ij} = \frac{1}{2\alpha\Psi^4} \left(\mathcal{D}^i\beta^j + \mathcal{D}^j\beta^i - \frac{2}{3}f^{ij}\mathcal{D}_k\beta^k \right), \quad (4.8)$$

où $\mathcal{D}_j$ est la dérivée covariante associée à la métrique plate f_{ij} . On peut alors définir la quantité

$$A^{ij} = \Psi^{10} K^{ij}, \quad (4.9)$$

et une des équations de contrainte, appelée contrainte impulsione, s'écrit alors

$$\mathcal{D}_j A^{ij} = 8\pi\Psi^{10} S^i = 8\pi\Psi^6 f^{ij} S_j = 8\pi f^{ij} S_j^*, \quad (4.10)$$

avec $S_j^* = \Psi^6 S_j$, calculé dans la partie hydrodynamique du code (voir section 5.1.2).

On approxime alors A^{ij} par

$$A^{ij} = \mathcal{D}^i X^j + \mathcal{D}^j X^i - \frac{2}{3}\mathcal{D}_k X^k f^{ij}, \quad (4.11)$$

où X^i est un 3-vecteur (voir [Cordero-Carrión et al. \(2009\)](#), où les auteurs montrent que cette approximation est moins importante que l'approximation CFC déjà supposée). En combinant les équations (4.10) et (4.11) on trouve

$$\Delta X^i + \frac{1}{3}\mathcal{D}^i \mathcal{D}_j X^j = 8\pi f^{ij} S_j^*, \quad (4.12)$$

qui est la première équation résolue par le code pour obtenir X^i ; d'où on déduit A^{ij} par l'équation (4.11). On peut alors résoudre une autre équation de contrainte, la contrainte hamiltonienne

$$\Delta\Psi = -2\pi\Psi^{-1}E^* - \Psi^{-7} \frac{f_{il}f_{jm}A^{lm}A^{ij}}{8}, \quad (4.13)$$

où $E^* = \Psi^6 E$, également calculé dans la partie hydrodynamique du code (section 5.1.2). Cette équation donne le facteur conforme, avec lequel on peut résoudre l'équation

$$\Delta(\Psi\alpha) = 2\pi\alpha\Psi^{-1}(E^* + 2S^*) + \alpha\Psi^{-7} \frac{7f_{il}f_{jm}A^{lm}A^{ij}}{8}, \quad (4.14)$$

avec $S^* = \Psi^6 \gamma_{ij} S^{ij}$ la trace du tenseur des contraintes (voir l'équation (4.7)) multipliée par le facteur conforme, qui vient également de l'hydrodynamique. On obtient alors le lapse. Ensuite, on résout

$$\Delta\beta^i + \frac{1}{3}\mathcal{D}^i(\mathcal{D}_j\beta^j) = \mathcal{D}_j(2\alpha\Psi^{-6}A^{ij}), \quad (4.15)$$

pour obtenir le shift. On a alors toutes les quantités nécessaires à la description du potentiel gravitationnel, c'est à dire la métrique donnée par la formule 4.5.

4.4 Trouveur d'horizon apparent

Un autre outil développé pour la relativité générale de COCONUT est le trouveur d'horizon apparent (AH), décrit en détails dans [Lin & Novak \(2007\)](#), que j'ai utilisé pour détecter la formation d'un trou noir, comme décrit en partie III. Il détecte une surface marginalement piégée. Par le théorème sur les singularités, la présence d'une surface piégée induit nécessairement la formation d'une singularité, et par la conjecture de censure cosmique, si une singularité apparaît alors un horizon des événements apparaît également. La présence d'une surface piégée induit donc la présence d'un trou noir.

J'ai utilisé ce trouveur d'horizon apparent dans mon étude de formation de trous noirs (partie III). Dans une simulation, la PNS se contracte, par l'effet conjugué de l'accrétion de masse et du refroidissement. À un moment, dépendant de l'équation d'état (voir chapitre 6), la PNS devient instable (la gravité l'emporte sur la pression, comme pour le cœur de fer), s'effondre sur elle même et devient un trou noir. Ce moment est très facilement identifiable, car la densité, la température, la pression, l'énergie interne augmentent toutes très rapidement.

Le lapse, au contraire, diminue très rapidement, d'environ $\alpha \simeq 1$ dans la limite newtonienne à zéro au centre. Il est donc possible de considérer qu'un trou noir est formé quand on atteint une valeur arbitraire du lapse, $\alpha \ll 1$ (par exemple [Fischer et al. \(2009\)](#)). Mais utiliser un trouveur d'horizon apparent est une manière plus rigoureuse de traiter la formation de trous noirs, et de plus cet outil prend peu de temps de calcul. En effet, le calcul de la détection d'un horizon n'est fait qu'à la toute fin d'une simulation, quand l'effondrement de la PNS a commencé. Il est déclenché par une valeur arbitrairement choisie du facteur conforme au centre (typiquement, $\Phi(r=0) \geq 2$).

4.5 Extraction d'ondes gravitationnelles : formule du quadrupôle

L'approximation CFC enlève tous les degrés de liberté liés aux ondes gravitationnelles (GW). Il n'y a donc pas d'énergie ni d'impulsion perdue ou réabsorbée par le fluide (en particulier, par la PNS) lié aux ondes gravitationnelles.

Il est toujours possible d'appliquer à posteriori la formule du quadrupôle pour extraire des ondes gravitationnelles. Dans la formulation (par exemple de [Dimmelmeier et al. \(2005\)](#)) qui utilise des moments, on utilise, dans COCONUT le premier de ces moments.

En pratique, les simulations dans lesquelles j'ai pu extraire des ondes gravitationnelles sont en axisymétrie (2D, voir le chapitre 8). Dans une telle configuration, seul le degré de liberté correspondant à la polarisation + des GW existe. Dans l'approximation de la formule du quadrupôle, dans la jauge transverse et sans trace, ce mode de polarisation est relié à l'amplitude quadrupolaire du signal par la formule (voir [Dimmelmeier et al. \(2002\)](#); [Dimmelmeier et al. \(2008\)](#))

$$h_+^{\text{TT}}(t, r, \theta) = \frac{1}{r} A_{20}^{\text{E2}}(t - r) \sin^2 \theta \frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}}. \quad (4.16)$$

L'amplitude $A_{20}^{\text{E2}}(t)$ est calculée à chaque pas de temps comme la dérivée seconde de $I = I_{33} - I_{22}$ par rapport au temps, correspondant à la seule composante indépendante non nulle du tenseur I_{ij} , le moment quadrapolaire. Ce tenseur n'est pas défini de manière unique (seule sa limite newtonienne est contrainte). Ici, on suit le choix de [Shibata & Sekiguchi \(2003\)](#); [Dimmelmeier et al. \(2005\)](#),

$$I_{ij} = STF \left(\int \rho^* x_i x_j d^3x \right), \quad (4.17)$$

où STF signifie "symmetric trace-free part", c'est à dire la partie sans trace symétrique, et $\rho^* = W \Psi^6 \rho$ avec W le facteur de Lorentz.

Le calcul numérique de la dérivée seconde temporelle de l'équation (4.17) introduit un bruit numérique important. Pour l'éviter, la dérivée temporelle de ρ^* est remplacée par des dérivées spatiales en utilisant l'équation de continuité (équation (5.5) avec $U = D$)

$$\frac{dI_{ij}}{dt} = STF \left(\int \rho^* v_i x_j d^3x \right). \quad (4.18)$$

La deuxième dérivée temporelle est calculée numériquement. On obtient finalement

$$A_{20}^{\text{E2}} = 8 \sqrt{\frac{\pi}{15}} \frac{d^2 I}{dt^2}, \quad (4.19)$$

(voir [Dimmelmeier et al. \(2005\)](#)).

Chapitre 5

Hydrodynamique relativiste

Sommaire

5.1	L'hydrodynamique relativiste de CoCoNuT	68
5.1.1	Fluide parfait	68
5.1.2	Les équations résolues	68
5.2	Méthodes numériques	69

5.1 L'hydrodynamique relativiste de CoCoNuT

5.1.1 Fluide parfait

Le fluide est considéré comme étant un fluide parfait de quadrivitesse u^μ . La densité baryonique étant n_b , on peut définir $n_b u^\mu$ comme étant un quadricourant. CoCoNuT utilise la masse volumique $\rho = m_n n_b$, avec m_n la masse du neutron, par commodité¹. Le quadricourant est alors

$$J^\mu = \rho u^\mu . \quad (5.1)$$

Le tenseur énergie-impulsion est donné par

$$T^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

avec P la pression du fluide et $h = (e + P)/\rho$ l'enthalpie spécifique; e étant la densité d'énergie du fluide. Ces deux quantités obéissent localement à deux équations de conservation,

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (5.3)$$

où ∇_μ est la dérivée covariante associée à la 4-métrique $g_{\mu\nu}$. La fraction électronique $Y_e = (n_{e^-} - n_{e^+})/n_b$ est advectée séparément. C'est aussi le cas de la fraction des neutrinos électroniques $Y_{\nu_e} = n_{\nu_e}/n_b$ et de la fraction des antineutrinos électroniques $Y_{\bar{\nu}_e} = n_{\bar{\nu}_e}/n_b$ quand le schéma de fuite est utilisé (voir chapitre 7).

5.1.2 Les équations résolues

L'espace-temps quadridimensionnel est feuilleté, en formalisme 3 + 1, par des hypersurfaces de dimension 3 de genre espace. Il est donc naturel de décrire l'hydrodynamique du point de vue de l'observateur eulérien (voir section 4.2).

L'observateur eulérien voit le fluide avec une 3-vitesse $v^i = u^i/(\alpha u^0) + \beta^i/\alpha$. Pour simplifier les notations, on utilise aussi la vitesse $\hat{v}^i = v^i - \beta^i/\alpha$. Enfin, pour écrire explicitement les équations hydrodynamiques comme des équations de conservation, on définit les quantités conservées

$$D = \rho W, \quad S^i = \rho h W^2 v^i, \quad \mathcal{E} = E - D = \rho h W^2 - P - D , \quad (5.4)$$

(voir Banyuls *et al.* (1997)) où $W = \alpha u^0 = 1/\sqrt{1 - v_i v^i}$ est le facteur de Lorentz.

1. En hydrodynamique, on définit une masse volumique par habitude. Cependant, l'utilisation ici de la relativité et d'équations d'état provenant de modèles de physique nucléaire (voir chapitre 6) font de la masse une quantité qui n'est pas conservée. Pour se ramener à une masse volumique, on doit donc multiplier la densité n_b (quantité conservée) par une masse constante, arbitraire.

À partir des équations (5.3) et (5.4), avec les trois équations d'advection pour $Y_e, Y_{\nu_e}, Y_{\bar{\nu}_e}$, on obtient les équations de conservation² hyperboliques recherchées,

$$\frac{\partial \sqrt{\gamma} \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathbf{F}^i}{\partial x^i} = \sqrt{-g} \Sigma, \quad (5.5)$$

(voir Banyuls *et al.* (1997)) avec

$$\mathbf{U} = [D, S_j, \mathcal{E}, DY_e, DY_{\nu_e}, DY_{\bar{\nu}_e}], \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F}^i = [D\hat{v}^i, S_j\hat{v}^i + \delta_j^i P, \mathcal{E}\hat{v}^i + P\hat{v}^i, DY_e\hat{v}^i, DY_{\nu_e}\hat{v}^i, DY_{\bar{\nu}_e}\hat{v}^i], \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \Sigma = & [0, \frac{T^{\mu\nu}}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^j}, T^{00} \left(K_{ij} \beta^i \beta^j - \beta^i \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \right) + \\ & T^{0i} \left(2K_{ij} \beta^j - \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \right) + T^{ij} K_{ij}, \Sigma_e, \Sigma_{\nu_e}, \Sigma_{\bar{\nu}_e}]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

g et γ sont les déterminants des métriques $g_{\mu\nu}$ et $\gamma_{\mu\nu}$, respectivement, et K_{ij} est la courbure extrinsèque, définie par l'équation (4.8). $\Sigma_e, \Sigma_{\nu_e}, \Sigma_{\bar{\nu}_e}$ sont les termes de création et annihilation utilisés dans le cadre du schéma de fuite, donnés par l'équation 7.22. Les calculs détaillés sont fait en annexe B. Avec ces équations d'advection pour les quantités Y_e, Y_{ν_e} et $Y_{\bar{\nu}_e}$, on suit l'évolution de ces espèces séparément. Concrètement, on a donc trois équations

$$\frac{\partial \sqrt{\gamma} DY_a}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{-g} DY_a \hat{v}^i}{\partial x^i} = \sqrt{-g} \Sigma_a, \quad (5.9)$$

avec $a = e, \nu_e, \bar{\nu}_e$. Ces équations permettent, entre autres, de suivre l'effondrement avec le schéma de fuite, ce qui est détaillé dans le chapitre 7.

5.2 Méthodes numériques

La plupart des simulations modernes d'hydrodynamique relativiste emploient des méthodes de volumes finis adaptées pour bien résoudre les chocs. Par exemple, COCONUT emploie des méthodes HRSC (pour "high resolution shock capturing schemes", par exemple Font (2008)).

Les méthodes HRSC que j'ai utilisées sont adaptées des méthodes de Godunov. Dans une grille numérique, chaque point (par exemple, en r, θ, ϕ en géométrie sphérique) est considéré comme le centre d'une cellule. Dans un premier temps, on reconstruit les quantités à l'interface entre ces cellules (dans COCONUT, celle employée dans mes simulations est la reconstruction PPM pour "piecewise parabolic method", voir Colella & Woodward (1984); Martí (1996)). À chaque interface, on a alors un état d'un côté et un état de l'autre côté séparés par une discontinuité. C'est ce qu'on appelle

2. Ces équations ont une forme d'équation de conservation, car elles viennent des équations (5.3), qui sont, elles, à divergence nulle et donc strictement conservatives. Par contre, les équations (5.5) ont des termes sources et ne sont donc pas strictement conservatives.

le problème de Riemann, que l'on peut résoudre par exemple par la méthode HLLE (Harten *et al.* (1983)), que j'ai utilisée dans toutes mes simulations. C'est aussi une méthode souvent utilisée dans un contexte de simulation de supernova. HLLE est un bon compromis entre efficacité et temps de calcul, cependant la méthode est critiquée pour avoir une assez grande diffusivité numérique, une conséquence est qu'elle ne rend pas bien compte de la convection (par exemple Müller *et al.* (2010)).

Enfin, ajoutons que l'hydrodynamique d'une supernova souffre de quelques défauts. La diffusivité numérique, comme évoqué ci-dessus, est souvent problématique. De plus, l'attractivité grandissante des simulations 2D et 3D tend à produire des simulations multidimensionnelles mais à basse résolution (Takiwaki *et al.* (2012)). La dépendance dans la résolution des conclusions tirées est pour l'instant controversée (Dolence *et al.* (2012)).

Chapitre 6

Équations d'état

Sommaire

6.1 Contraintes	72
6.1.1 Expériences	72
6.1.2 PSR J1614-2230	73
6.2 L'équation d'état de Lattimer et Swesty	74
6.3 Extensions pions et hypérons	75

L'équation d'état (EoS) relie les quantités hydrodynamiques trouvées à chaque pas de temps (précisément, la densité baryonique, la température et la fraction électronique pour les EoS que j'ai utilisées) aux quantités thermodynamiques telles que la pression, l'entropie ou les potentiels chimiques des différentes espèces présentes.

Nombre de simulations hydrodynamiques, dans d'autres domaines physiques, travaillent avec des équations d'état de type polytrophe $P = \kappa \rho^\gamma$ ou gaz parfait $P = n_b k_b T$, qui ne renvoient que la pression. La grande richesse des interactions au cœur d'une étoile, ainsi que les conditions extrêmes de densité et température rend les équations d'état plus détaillées nécessaires. Les équations d'état calculées à partir de microphysique permettent de mieux rendre compte par exemple de l'écart à l'équilibre β , des interactions entre nucléons ou des abondances en noyaux par l'application de l'équilibre statistique nucléaire (NSE).

En pratique, la grande majorité des simulations de supernovas emploient l'équation d'état de Lattimer et Swesty (LS EoS, [Lattimer & Swesty \(1991\)](#)) ou celle de Shen (HShen EoS, [Shen et al. \(1998\)](#)). La LS EoS, que j'ai utilisée dans toutes mes simulations, est détaillée en section 6.2. La HShen EoS est construite avec un autre type d'interaction nucléaire, et par conséquent d'autres approximations et d'autres paramètres. Beaucoup de simulations ont comparé ces deux EoS ([Sumiyoshi et al. \(2007\)](#); [Fischer et al. \(2009\)](#); [O'Connor & Ott \(2011\)](#)). Bien que très peu de différences soient visibles avant le rebond, il a été montré par [Suwa et al. \(2012\)](#) qu'après le rebond, deux simulations qui diffèrent seulement par l'usage de ces deux EoS peuvent diverger assez pour que l'une explose (celle avec la LS EoS) et l'autre non. D'une manière générale, les simulations de supernova sont donc très sensibles à la physique contenue dans les équations d'état.

Ces équations d'état ont le contenu en particules suivant : des neutrons et protons libres, des particules α , un noyau moyen, des électrons, des positrons et des photons. La possibilité d'inclure de nouvelles particules est discutée en section 6.3, base qui m'a servie à l'étude de la formation de trous noirs, exposée dans la partie III de cette thèse.

6.1 Contraintes

Les contraintes sur les équations d'état viennent d'une part d'expériences de physique nucléaire et d'autre part d'observations astrophysiques. Comme pour les observations de supernovas (section 3.8), ces contraintes sont indirectes. Il y a donc une assez grande liberté dans la construction des EoS (surtout à température finie), et leur amélioration est un enjeu majeur pour la physique des supernovas.

6.1.1 Expériences

6.1.1.1 Énergie de symétrie

On définit le paramètre d'asymétrie d'isospin

$$\alpha_s = Y_n - Y_p, \quad (6.1)$$

où $Y_n = n_n/n_b$ est la fraction de neutrons et $Y_p = n_p/n_b$ est la fraction de protons. On fait alors un double développement en séries de Taylor en α_s et en $u = n_b/n_0$ avec n_0 la densité de saturation¹

$$E(u, \alpha_s) = E(1, 0) + \frac{K}{18}(u - 1)^2 + \frac{K'}{162}(u - 1)^3 + S(u)\alpha_s^2 + \dots \quad (6.2)$$

(voir par exemple [Lattimer & Lim \(2012\)](#); [Fattoyev et al. \(2013\)](#)). $S(u)$ est l'énergie de symétrie et a une composante cinétique en $u^{2/3}$ et une composante potentielle en u^γ , γ étant un paramètre ([Lattimer \(2011\)](#)). K est le module d'incompressibilité et K' le paramètre de distorsion.

Des expériences en laboratoire ou dans les accélérateurs d'ions lourds sont possibles pour mesurer cette énergie de symétrie ([Lattimer & Prakash \(2007\)](#); [Lattimer & Lim \(2012\)](#)). La valeur numérique suggérée par [Lattimer & Lim \(2012\)](#) est ~ 30 MeV. Malheureusement, les conditions dans lesquelles ces expériences sont faites ne reflètent pas l'état de la matière dans les supernovas ([Suwa et al. \(2012\)](#)), car le développement dans l'équation 6.2 est fait autour de $u = 1$ et $\alpha_s = 0$ alors que dans une supernova, la matière, par endroits, est loin de $u = 1$ et $\alpha_s = 0$ ². Les valeurs extraites sont donc sujettes à caution.

6.1.1.2 Module d'incompressibilité

Le module d'incompressibilité est défini par l'équation (6.2). Comme l'énergie de saturation, il existe d'autres manières de le définir (par exemple [Khan et al. \(2010\)](#); [Lattimer & Lim \(2012\)](#); [Shlomo et al. \(2006\)](#)).

Une valeur de K autour de $K = 240 \pm 30$ MeV est suggérée expérimentalement (par exemple, [Shlomo et al. \(2006\)](#)). De la même façon que l'énergie de symétrie, le module d'incompressibilité est sondé dans des conditions très différentes de celles dans les supernovas. Le développement autour de $u = 1$ et $\alpha_s = 0$ est donc également sujet à caution. Notons aussi que l'extraction de K à partir des données expérimentales n'est pas simple (à cause, par exemple, d'effets de surface) et peut induire des erreurs non-négligeables ([Khan \(2009\)](#); [Khan et al. \(2010\)](#)).

6.1.2 PSR J1614-2230

PSR J1614-2230 est une étoile à neutrons dont la masse a été mesurée très précisément par l'effet Shapiro ([Demorest et al. \(2010\)](#)). La masse reportée est de $1.97 \pm 0.04 M_\odot$.

La masse maximale correspondant à une EoS dépend des interactions en jeu une fois dépassée la densité de saturation nucléaire. L'addition de particules exotiques, pions,

1. La densité de saturation est la densité autour de laquelle l'énergie de liaison de la matière nucléaire symétrique (sans pression extérieure) est minimale, et correspond à $n_0 = 0.15 - 0.17 \text{ fm}^{-3}$.

2. La neutronisation après le passage du choc entraîne la présence d'une région à Y_e très bas. Par exemple, les données de Liebendörfer utilisées en section 7.4 montrent un point à $\rho = 3 \times 10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$ et $Y_e = 0.11$, ce qui donne $u = 1.15 \times 10^{-3}$ et $\alpha_s = 0.78$. Dans ce régime-là, on est donc bien loin des conditions $u = 1$ et $\alpha_s = 0$

hypérons, kaons, quarks dans une EoS donnée font en général baisser la masse maximale de celle-ci. En effet, si on ajoute des degrés de libertés fermioniques, on ajoute des états à peupler avant d'atteindre la dégénérescence, et donc ajouter des particules fait en général baisser la pression de dégénérescence. Beaucoup d'EoS sont alors exclues, car elles ne peuvent pas rendre compte de l'observation d'une étoile à neutrons de $1.97 M_{\odot}$. Mais il est également possible de construire des EoS où des particules supplémentaires apparaissent et qui soient compatibles avec cette observation. C'est le travail qui a été fait dans, par exemple, [Weissenborn et al. \(2012\)](#); [Bednarek et al. \(2012\)](#), et également le travail fait dans [Oertel et al. \(2012\)](#) et décrit en section 6.3.

6.2 L'équation d'état de Lattimer et Swesty

L'équation d'état de Lattimer et Swesty ([Lattimer & Swesty \(1991\)](#)) utilise le contenu standard en particules énoncé précédemment.

Les électrons et les positrons sont traités comme un gaz relativiste sans interaction en équilibre de paires, où l'on néglige l'écrantage des électrons. Les photons sont un gaz parfait ultra-relativiste. On suppose l'équilibre établi pour l'interaction forte et pour l'interaction électromagnétique, mais sans contrainte sur l'équilibre β (qui dépend de l'interaction faible), ce qui est nécessaire dans une simulation de supernova. Pour les noyaux, un modèle de goutte liquide (avec quelques corrections) est utilisé, avec une transition de phase entre la matière inhomogène et la matière homogène (où les noyaux n'existent plus). Celle-ci est décrite par une construction de Maxwell (à Y_p constant). L'interaction nucléon-nucléon est basée sur un modèle de Skyrme simplifié, sans dépendance en impulsion. Le modèle de Skyrme est un modèle effectif non-relativiste.

Pour l'abondance en noyaux, l'équilibre statistique nucléaire est calculé, mais seul les particules α d'une part, et un noyau lourd moyen d'autre part apparaissent dans l'EoS. C'est une simplification qui est de plus en plus critiquée (par exemple, [Lentz et al. \(2012b,a\)](#)) dans le cadre des calculs d'interactions avec les neutrinos, car les captures électroniques sur les différents noyaux jouent un grand rôle dans la phase d'effondrement, et toutes les subtilités ne peuvent être rendues par un seul noyau moyen. Par contre, cette approximation semble suffisante pour la thermodynamique.

L'énergie de symétrie de la LS est 29.3 MeV. Pour rendre compte de l'incertitude sur la valeur du module d'incompressibilité, trois valeurs différentes de celui-ci existent, $K = 180, 220, 375$ MeV. Les expériences nucléaires semblent favoriser la valeur $K = 220$ MeV, c'est celle-ci que j'ai utilisée dans mes simulations. Tous les autres paramètres gardés constants, changer K change le comportement de la PNS : plus K est petit, plus la PNS est compressible et rétrécit rapidement, et plus le choc lancé au rebond est fort.

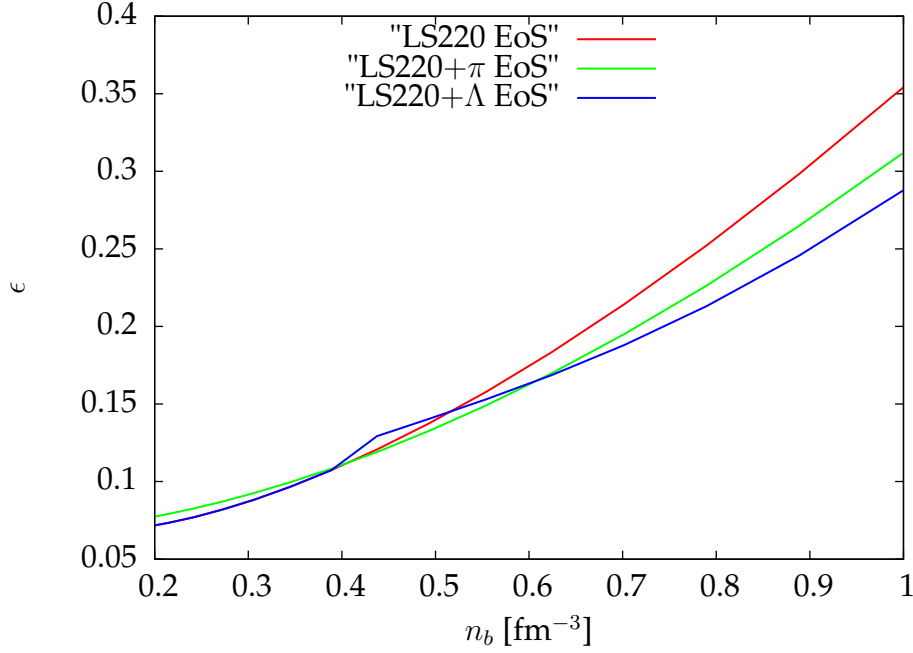


FIGURE 6.1 – Densité d'énergie spécifique $\epsilon = (e - \rho_p)/\rho_p$ avec e la densité d'énergie et $\rho_p = m_p n_b$, en fonction de la densité baryonique n_b . La température est fixée à $T = 4.62 \times 10^{11}$ K et Y_e est fixé à $Y_e = 0.11$.

6.3 Extensions pions et hypérons

La physique au delà de la densité de saturation nucléaire est mal connue. À de telles densités, avec une température élevée comme dans une supernova, on peut s'attendre à l'apparition de pions, de kaons, d'hypérons (Λ , Σ , Ξ), de muons, de résonances nucléaires, voire de quarks déconfinés. Toutes ces possibilités sont négligées dans la LS EoS.

L'inclusion de particules supplémentaires est plus répandue dans les EoS froides, utilisées pour la simulation d'étoiles à neutrons, que pour les EoS à température finie utilisées pour les PNS et les supernovas.

L'inclusion de nouvelles particules a été faite, dans le cadre d'équations d'états à température finie, par l'extension de la HShen EoS par [Ishizuka et al. \(2008\)](#); [Sumiyoshi et al. \(2009\)](#); [Nakazato et al. \(2012\)](#). Ces résultats montrent surtout que la formation de trou noir intervient plus rapidement quand on utilise les EoS avec particules additionnelles (pions, hypérons, ...). Le signal neutrinique est très peu affecté (contrairement aux résultats du chapitre 8 de cette thèse, voir la figure 8.7). De plus, [Nakazato et al. \(2012\)](#) étudie l'impact de la variation des paramètres de couplage des hypérons (voir la section 6.3), et trouve peu de changements. Enfin, signalons que ces extensions de la HShen EoS ne sont pas compatibles avec l'observation d'une étoile à neutrons de $1.97 M_\odot$ exposée en section 6.1.2 : les masses maximales d'étoiles à neutrons froides, avec les EoS

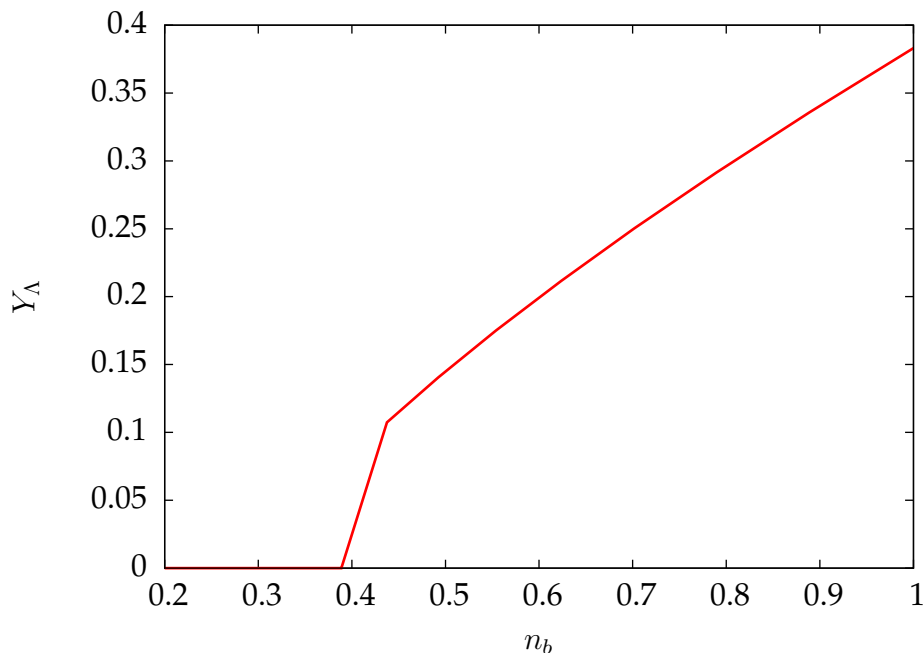


FIGURE 6.2 – Fraction d’hypérons Λ (Y_Λ) en fonction de la densité n_b dans les mêmes conditions que la figure 6.1. Les changements de pente indiquent la présence de la transition de phase.

de [Ishizuka et al. \(2008\)](#) avec différents paramètres pour l’interaction des hypérons, des muons et des pions, sont 1.55, 1.63 et 1.65 $M_\odot$. Pour l’extension de la HShen EoS présentée dans [Shen et al. \(2011\)](#), l’étoile à neutrons la plus massive fait 1.75 $M_\odot$.

L’étude de formation de trous noirs présentée en partie III fait suite à la construction de nouvelles EoS basées sur la LS EoS ([Oertel et al. \(2012\)](#)). Dans ce travail, les particules ajoutées aux équations d’état sont des pions (π^+ , π^0 , π^-) et des muons comme gaz parfait, et des hypérons (Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^+ , Ξ^0 et Ξ^-), avec différents paramètres pour les interactions.

Les équations d’états dont je me suis servi dans la partie III sont d’une part, une EoS avec des pions (π^+ , π^0 , π^- en tant que gaz parfait). D’autre part, la LS EoS a été étendue pour inclure des hypérons Λ . Le choix du Λ se justifie par le fait qu’il est le plus abondant des hypérons avec le Σ^- . Celui-ci étant chargé, il est un peu plus compliqué à inclure dans l’EoS. Les interactions $\Lambda\Lambda$ et ΛN sont prises de [Balberg & Gal \(1997\)](#), et pour mes simulations l’EoS est construite avec les paramètres 220BG de [Oertel et al. \(2012\)](#).

Les hypérons Λ apparaissent via une transition de phase de premier ordre, et une construction de Gibbs est employée pour décrire la zone de coexistence ([Gulminelli et al. \(2012\)](#); [Gulminelli et al. \(2013\)](#)).

Enfin, ces équations d’état sont, pour la première fois, des extensions avec pions et hypérons compatibles (ou marginalement compatibles) avec la contrainte de masse de presque 2 $M_\odot$ discutée en section 6.1.2. L’EoS incluant des pions (LS220+ π EoS) donne

une étoile à neutrons froide de masse maximale gravitationnelle $M = 1.95 M_{\odot}$, alors que l'EoS incluant des hypérons (LS220+ Λ EoS) donne une étoile à neutrons froide de masse maximale gravitationnelle $M = 1.91 M_{\odot}$. La première valeur est donc dans la barre d'erreur de la masse de PSR J1614-2230, la seconde est très légèrement en dessous.

Pour illustration, la figure 6.1 représente la densité d'énergie spécifique en fonction de la densité baryonique n_b pour les trois EoS étudiées au chapitre 8, c'est à dire l'EoS LS220, sans particules additionnelles, l'EoS LS220+ π et l'EoS LS220+ Λ . La température est fixée à $T = 4.62 \times 10^{11}$ K et Y_e est fixé à $Y_e = 0.11$. On voit de petites différences, l'EoS LS220 prévoyant un ϵ plus grand que l'EoS LS220+ π , qui elle-même prévoit un ϵ plus grand que l'EoS LS220+ Λ . On voit également un changement de pente vers $n_b = 0.4 \text{ fm}^{-3}$ pour l'EoS LS220+ Λ , caractéristique de la transition de phase.

La figure 6.2 représente la fraction de Λ , Y_{Λ} , en fonction de la densité baryonique n_b , pour l'équation d'état LS220+ Λ . T et Y_e sont fixés aux mêmes valeurs que précédemment. On voit que les Λ apparaissent soudainement, c'est à dire que Y_{Λ} devient brusquement non-négligeable vers $n_b = 0.39$, ce qui est caractéristique d'une transition de phase. Les deux changements de pente vers $n_b = 0.39$ et $n_b = 0.42$ marquent l'entrée et la sortie de la région de coexistence, respectivement.

Troisième partie

Formation de trous noirs

*The relevant equation is : Knowledge = power = energy = matter = mass ;
a good bookshop is just a genteel black hole that knows how to read.*

Terry Pratchett

Cette partie aborde les simulations numériques de formation de trous noirs. Le processus, évoqué en section 3.5.2, est la formation d'un choc, puis l'effondrement de la proto-étoile à neutrons sur elle-même une fois atteinte sa masse maximale (dont on se rapproche d'une part par l'accrétion de matière et d'autre part par refroidissement). Pour cette étude, j'ai implémenté dans COCONUT un schéma de fuite pour le traitement des neutrinos.

Le transport complet des neutrinos est un domaine particulièrement exigeant, en méthodes numériques et en temps de calcul. En effet, le choc s'arrête dans le régime semi-transparent pour les neutrinos, alors qu'au centre de la proto-étoile à neutrons dense et chaude, la matière est complètement opaque et que les couches extérieures de l'étoile sont complètement transparentes. Il faut donc, en principe, résoudre l'équation de Boltzmann complète pour traiter correctement les neutrinos, ce qui malheureusement est trop exigeant en temps de calcul pour le moment (voir également la partie V de cette thèse).

Une solution possible est de beaucoup simplifier le traitement des neutrinos, et donc d'abandonner la précision des détails liée à la simulation d'un transport complet. C'est le cas avec le schéma de fuite. L'idée principale est de simuler les neutrinos comme un fluide sous la neutrinosphère, et de considérer qu'ils n'interagissent plus une fois celle-ci franchie. La neutrinosphère est donc la frontière, dépendante de l'épaisseur optique (voir l'Eq. (7.6)), séparant le régime piégé du régime libre³. Numériquement, on résout donc des équations fluides supplémentaires, et on ajoute des sources dans les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion (voir Eq. (7.14)). Le calcul de ces sources est détaillé dans l'appendice A et l'appendice B. Ce schéma de fuite est un schéma gris qui fonctionne avec une énergie moyenne. Puisqu'il y a une frontière nette entre le régime piégé et le régime libre, il n'y a pas de possibilité de régime semi-transparent. Par construction, le schéma de fuite n'est donc pas la solution pour faire repartir le choc de manière complètement cohérente. C'est un schéma simplifié, basé sur des arguments physiques et microphysiques, qui nous permet de simuler un effondrement en trou noir d'une supernova pour un temps de calcul raisonnable.⁴

L'objectif de ce travail (Peres *et al.* (2013a)) est donc de tester l'influence de l'implémentation de particules supplémentaires dans l'équation d'état sur la formation de trous noirs. Après avoir détaillé l'implémentation du schéma de fuite pour le refroidissement de la PNS par les neutrinos, un point est fait sur les équations d'état utilisées, avant de présenter les résultats des simulations de trous noirs.

3. On ne dit pas "épaisseur neutrinique", mais on parle d'opacité et d'épaisseur optique, par analogie avec le transfert radiatif de photons.

4. Par exemple, le modèle de référence lsu40 présenté en section 8.1 tourne sur un monoprocesseur en 152 minutes. Le temps total simulé dans le code est 871 ms.

Chapitre 7

Refroidissement de la PNS : implémentation du schéma de fuite

Sommaire

7.1	Neutrinosphère	84
7.2	Potentiel chimique effectif	85
7.3	Création et advection des neutrinos	85
7.3.1	Processus impliqués	85
7.3.2	Approximations liées au schéma de fuite	86
7.4	Calcul du nombre de neutrinos et déviation à l'équilibre thermique	88
7.5	Pertes d'énergie et d'impulsion	89
7.5.1	Régime libre	91
7.5.2	Régime piégé	91
7.6	Advection	92
7.6.1	Quantités advectées	92
7.6.2	Termes sources	93
7.7	Paramètres du schéma de fuite	93

7.1 Neutrinosphère

La neutrinosphère est la limite séparant le milieu optiquement épais, où les neutrinos sont piégés, du milieu optiquement mince, où les neutrinos sont libres. L'épaisseur optique (définie plus bas par l'équation (7.6)) à la neutrinosphère doit donc être de l'ordre de 1. Conformément à la littérature (voir par exemple [Bruenn \(1985\)](#), [O'Connor & Ott \(2010\)](#)), la neutrinosphère est définie comme étant la région où l'épaisseur optique vaut $\tau = 2/3$. Pendant une simulation, pour trouver la position exacte de la neutrinosphère, on calcule à chaque pas de temps l'opacité.

M'inspirant de [Ruffert *et al.* \(1996\)](#); [Rosswog & Liebendörfer \(2003\)](#); [O'Connor & Ott \(2010\)](#); [Burrows *et al.* \(2006\)](#), j'ai implémenté les réactions suivantes pour le calcul des opacités (voir annexe (B) pour le détail des implémentations).

1. Diffusion élastique sur un nucléon,

$$\nu_i + N \rightarrow \nu_i + N, \quad (7.1)$$

où $N = n, p$, et ν_i représente une des trois espèces de neutrinos implémentées : le neutrino électronique ν_e , l'antineutrino électronique $\bar{\nu}_e$ ou les autres, regroupés en une dénomination commune ν_x .

2. Diffusion élastique sur un noyau,

$$\nu_i + (A, Z) \rightarrow \nu_i + (A, Z), \quad (7.2)$$

où (A, Z) est le noyau moyen.

3. Absorption d'un ν_e par un neutron

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-, \quad (7.3)$$

et absorption d'un $\bar{\nu}_e$ par un proton

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \quad (7.4)$$

sont prises en compte hors équilibre β .

4. Diffusion élastique sur un Λ

$$\nu_i + \Lambda \rightarrow \nu_i + \Lambda. \quad (7.5)$$

J'ai implémenté la diffusion élastique sur un hypéron Λ et l'ai prise en compte dans le calcul de l'opacité car la fraction hypéronique peut devenir grande à la fin d'une simulation (voir figure 8.5). L'étude de l'impact de cette implémentation sur mes simulations est faite en section 8.3.3.

L'épaisseur optique est obtenue à partir de l'opacité totale, κ , en intégrant suivant la coordonnée radiale r ,

$$\tau = \int_r^\infty \kappa \, dr . \quad (7.6)$$

Cette formule implique donc de manière implicite que les neutrinos se déplacent seulement radialement. Dans mes simulations numériques, la borne supérieure de l'intégrale est la dernière cellule, où on commence l'intégration, qui se fait donc de l'extérieur vers le centre. La première cellule où $\tau \geq 2/3$ est la neutrinosphère.

7.2 Potentiel chimique effectif

Pour aller plus loin, j'ai également implémenté le calcul d'un potentiel chimique effectif $\mu_{\nu,eff}$ dans le calcul de l'opacité. Suivant [Ruffert et al. \(1996\)](#),

$$\mu_{\nu,eff} = \mu_{\nu,eq}(1 - \exp(-\tau)) , \quad (7.7)$$

$\mu_{\nu,eq}$ étant le potentiel chimique des neutrinos à l'équilibre β , donné par l'EoS comme étant $\mu_{\nu,eq} = \mu_e + \mu_p - \mu_n$. On voit que pour la matière complètement transparente aux neutrinos, l'opacité tend vers 0 et $\mu_{\nu,eff}$ également, ce qui est cohérent avec le fait que les neutrinos peuvent s'en aller librement. Dans l'autre limite où la matière est complètement opaque, $\mu_{\nu,eff}$ tend vers sa valeur à l'équilibre. C'est donc une manière de rendre compte partiellement de la déviation à l'équilibre en régime semi-transparent, même si on garde une description par une fonction de distribution de Fermi-Dirac.

Le premier calcul de l'opacité τ donne une valeur de $\mu_{\nu,eff}$ par l'équation 7.7. Puisque τ dépend de $\mu_{\nu,eff}$, on recommence le calcul jusqu'à convergence. Il faut la plupart du temps peu d'itérations (pas plus de trois) pour arriver à une erreur relative de 10^{-2} . La valeur initiale de $\mu_{\nu,eff}$ est celle trouvée au même point de grille au pas de temps précédent. Au début de la simulation, $\mu_{\nu,eff}$ est mis à zéro partout.

7.3 Création et advection des neutrinos

7.3.1 Processus impliqués

Les processus de création de neutrinos sont

1. La capture électronique sur les protons libres



2. La capture électronique sur les noyaux



3. La capture positronique sur les neutrons libres

$$n + e^+ \rightarrow \bar{\nu}_e + p, \quad (7.10)$$

4. L'annihilation électron positron

$$e^- + e^+ \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i, \quad (7.11)$$

5. La désintégration d'un plasmon¹

$$\tilde{\gamma} \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i. \quad (7.12)$$

Chaque processus a un taux de réaction associé (respectivement, Σ_{ec} , Σ_{pc} , Σ_{ee} , Σ_{pl} , dont le détail des calculs est fait en annexe B). Enfin, il serait possible de considérer une création de neutrinos par des réactions de courant chargé impliquant des pions ou hyperons Λ , quand l'EoS correspondante est employée. Mais ces particules n'apparaissent que dans les régions très denses et proches du centre où l'équilibre β est bien établi, et les réactions de création de neutrinos sont fortement inhibées. Je les ai donc négligées.

7.3.2 Approximations liées au schéma de fuite

Le choix du schéma de fuite implique plusieurs approximations dans le traitement des neutrinos. Ces approximations sont justifiées dans le cadre d'un schéma assez qualitatif comme le schéma de fuite, et des expressions plus lourdes numériquement et plus détaillées ne seraient pas forcément pertinentes.

Suivant les taux de capture de Bruenn (1985), la capture électronique sur un noyau lourd est coupée, à cause de l'approximation de fermeture de couche, pour un nombre de neutrons $N \geq 40$. Langanke *et al.* (2003) ont démontré que les effets de température finie modifient la structure en couches des noyaux et rendent possibles les captures pour $N \geq 40$. Les taux pour les noyaux correspondant sont donc non nuls.

Les captures électroniques et positroniques ne sont pertinentes qu'hors équilibre β , puisqu'à l'équilibre, la création est exactement compensée par l'annihilation. Avec un schéma de fuite, il n'est pas possible de décrire correctement cet équilibre. En effet, il faudrait résoudre l'équation de Boltzmann et connaître la fonction de distribution pour avoir une description correcte de la mise à l'équilibre. Pour le schéma de fuite, j'ai choisi de ne prendre que le terme de création et d'établir l'équilibre β à une densité donnée (voir la section 7.7). Pour être en accord avec la littérature, cette densité doit être de l'ordre de $\rho \sim 10^{12} \text{g/cm}^3$, voir également la section 7.4.

1. La désintégration d'un plasmon est un processus très peu efficace dans une supernova. Étant également rapide à calculer, je n'ai pas trouvé pertinent de le négliger. On note qu'il peut y avoir une légère incohérence à considérer cette réaction et pas, par exemple, le Bremsstrahlung, qui est également un processus de création de paires, mais plus efficace que la désintégration d'un plasmon.

La région derrière le choc, où celui-ci s'est propagé, est très riche en neutrons et a donc un Y_e très faible. Cet effet est en général surestimé par un schéma de fuite (voir figure 7.2, ou par exemple [O'Connor & Ott \(2010\)](#)). Ceci est dû, entre autres, au fait que le terme d'absorption est absent, terme qui freine la capture électronique dans les régions proches de l'équilibre β , quand il est présent. C'est une des erreurs les plus importantes du schéma de fuite. Pour éviter que le schéma de fuite donne une valeur trop basse et non réaliste de Y_e en dessous de la valeur la plus basse de l'EoS, les captures électroniques sont bloquées en dessous de $Y_e = 0.045$, une valeur proche de la valeur la plus basse disponible dans l'EoS. On peut alors suivre une simulation pendant et après la propagation du choc. Notons, de plus, que les valeurs thermodynamiques sont peu dépendantes de Y_e quand celui-ci est aussi bas. Par exemple, dans la phase de neutronisation, le modèle lsu402D (voir la section 8.5) atteint un point à $n_b = 5.47 \text{ fm}^{-3}$, $T = 7.60 \text{ MeV}$ et $Y_e = 0.045$. Autour de ce point, à n_b et T fixé, une variation de Y_e entre 0.04 et 0.06 (variation de 33%) entraîne une variation de pression qui est seulement de 1.6%. Par contre, à n_b et Y_e fixés, une variation de température entre 7.24 et 8.32 MeV (variation de 13%) entraîne une variation de pression de 15%.

Les taux de réaction pour la création de neutrinos entrent dans les termes source de nouvelles équations d'advection, Eq.(5.6), les termes microphysiques étant détaillés dans B. Le temps d'échappement des neutrinos, t_{esc} , est défini comme dans [Ruffert et al. \(1996\)](#)

$$t_{esc} = a_1(R_\nu - r)\tau, \quad (7.13)$$

R_ν étant le rayon de la neutrinosphère. [Ruffert et al. \(1996\)](#) ont donné la valeur $a_1 = 3$ au paramètre libre de cette formule, basé sur des calculs de transport complet. J'ai gardé cette valeur dans mon implémentation (voir la section 7.7).

Puisqu'on détermine la position de la neutrinosphère à chaque pas de temps, des neutrinos piégés au pas de temps précédent peuvent ne plus être piégés, si la neutrinosphère se contracte. Ces neutrinos libérés sont pris en compte séparément dans le bilan énergétique, Eq. (7.16).

Enfin, on remarque que les équations (7.13) et (7.6) n'ont pas de corrections relativistes, dues à une métrique non plate. Les neutrinos suivent une ligne droite sur la grille, alors qu'ils devraient en principe suivre des géodésiques. C'est une approximation, qui est petite par rapport aux autres approximations du schéma de fuite. En particulier, le terme *ad hoc* $a_1 = 3$ dans l'équation (7.13) est déjà plus grand que les corrections dues à la RG dans les équations (7.13) et (7.6) pendant les simulations. La plus grande sous estimation des opacités intervient pendant la formation d'un trou noir, puisque la neutrinosphère est de plus en plus proche du centre (ou de l'horizon apparent), même si la formation de trou noir, qui s'apparente à une chute libre, est bien reproduite.

7.4 Calcul du nombre de neutrinos et déviation à l'équilibre thermique

Dans toutes les phases d'une supernova gravitationnelle, les neutrinos peuvent être hors équilibre thermique², ce qui implique qu'ils sont décrits par une fonction de distribution qui n'est pas une Fermi-Dirac, si on résout l'équation de transport (Ils n'ont donc ni la température du fluide T ni leur potentiel chimique à l'équilibre $\beta, \mu_{\nu,eq}$). Avec le schéma de fuite, le calcul de la fonction de distribution n'est pas possible. Deux possibilités sont alors envisageables pour le calcul du nombre de neutrinos : soit intégrer la fonction de distribution en faisant l'approximation que c'est une Fermi-Dirac partout, soit calculer les fractions de neutrinos avec les termes de création (voir annexe B) et résoudre des équations d'advection. C'est cette dernière possibilité que j'ai choisie, qui constitue par ailleurs une approximation moins brutale que l'intégration d'une Fermi-Dirac. La fraction de neutrinos, et donc leur densité n'est pas forcément la même que leur valeur à équilibre thermique, qui ne constitue dans mon schéma qu'une valeur maximale, de la même manière que [Sekiguchi \(2010\)](#).

De plus, ce choix permet de suivre une simulation dans les phases d'effondrement et de rebond, sinon le nombre de neutrinos serait fortement surestimé. La phase de rebond est décrite sur la figure 7.1, où on montre le profil de Y_e au rebond, quelques millisecondes avant la création du choc. Le résultat obtenu avec le schéma de fuite est comparé avec ce qu'on appelle la déleptonisation de Liebendörfer (décrite dans [Liebendörfer \(2005\)](#)). Cette dernière est une paramétrisation de simulations 1D avec résolution de l'équation de Boltzmann complète et reproduit donc bien un profil qui vient d'un calcul détaillé. On voit que le schéma de fuite est en bon accord avec la déleptonisation prédite. La déviation est au plus de 5%, sauf au centre où les captures électroniques dans le schéma de Liebendörfer sont freinées puis stoppées grâce à la mise progressive à l'équilibre β . Y_e devient alors constant et prend une valeur proche de 0.28. Le schéma de fuite, qui néglige le terme d'absorption pour la capture électronique ne peut pas reproduire cet effet. Y_e décroît continûment jusqu'à ce que la valeur critique en densité, où on définit l'équilibre β , soit atteinte. Cette densité critique est ajustée pour bien reproduire les profils de Y_e au rebond, après le rebond (voir Fig. 7.2 et la discussion associée), ainsi qu'une densité centrale correcte après rebond. La valeur de Y_e au centre donné par le schéma de fuite est alors différent de celui donné par le schéma de Liebendörfer (ici, $Y_e \approx 0.22$), mais cette différence ne devrait pas avoir d'impact significatif sur l'ensemble de la dynamique (voir également [O'Connor & Ott \(2012\)](#)).

La figure 7.2 montre une comparaison du profil de Y_e avec le schéma de fuite avec celui du code AGILE/BOLTZTRAN (simulation décrite dans [Liebendörfer et al. \(2005\)](#)) avec résolution de l'équation de Boltzmann en 1D, 10ms après le rebond. Ce temps correspond au moment où le choc est en train de se propager. La matière derrière le choc est alors extrêmement riche en neutrons, grâce à la photodissociation du fer et

2. L'équilibre thermique n'est atteint que dans les régions les plus internes, à l'intérieur de la proto-étoile à neutrons.

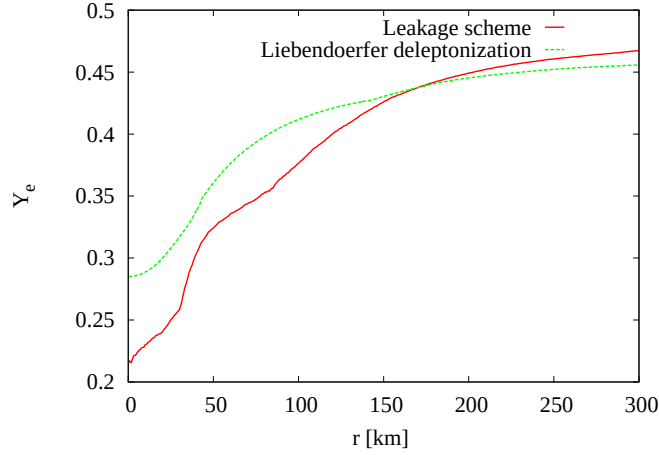


FIGURE 7.1 – Fraction électronique Y_e en fonction du rayon au rebond, avec le schéma de fuite (trait plein, rouge) comparé à la prescription de Liebendörfer pour la déleptonisation (trait pointillé, vert)

aux captures électroniques. Ici, pour une meilleure comparaison, j'ai repris les mêmes paramètres que Liebendörfer *et al.* (2005), à savoir une simulation en symétrie sphérique avec un progéniteur de $15 M_\odot$ provenant de Woosley & Weaver (1995) (avec métallicité solaire). De plus, contrairement à toutes mes autres simulations, j'ai ici employé l'EoS LS avec l'incompressibilité $K = 180$ MeV, car c'est celle employée dans Liebendörfer *et al.* (2005).

On peut voir que l'un des inconvénients majeurs du schéma de fuite est de surestimer la neutronisation de la matière. En effet, dans les zones internes où le choc se propage, les neutrinos occupent partiellement leur espace des phases, et donc bloquent certaines captures électroniques, un effet non reproductible avec le schéma de fuite. Outre ce phénomène, le schéma de fuite est en accord, au moins qualitativement, avec AGILE/BOLTZTRAN. Les différentes irrégularités en Y_e sont dues aux simplifications inhérentes au schéma de fuite. Notons qu'en 2D, ces petites irrégularités sont gommées par la convection, voir la section 8.5.

7.5 Pertes d'énergie et d'impulsion

Les pertes d'énergie et d'impulsion sont prises en compte en modifiant les équations hydrodynamiques. Je n'ai pas implémenté de chauffage par les neutrinos, qui est négligeable dans le cas d'un effondrement en trou noir d'une étoile massive avec un très fort taux d'accrétion. De plus, dans le cadre du schéma de fuite un traitement complètement cohérent du chauffage n'est pas possible. Cependant, j'ai calculé une luminosité (le calcul est détaillé en section 8.3.4), qui peut servir pour un traitement approximatif du chauffage (voir O'Connor & Ott (2010)).

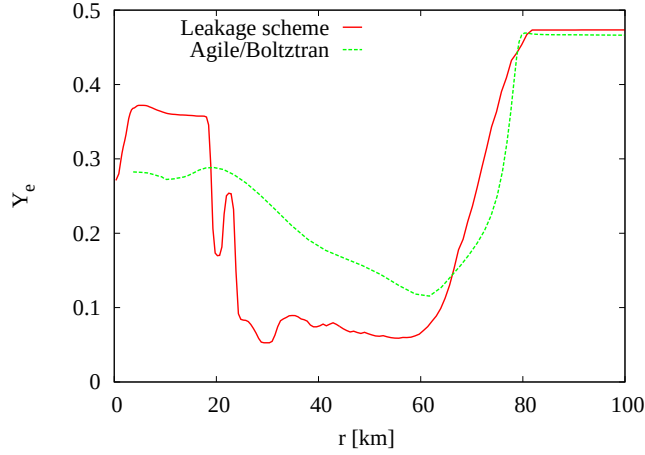


FIGURE 7.2 – Profils de Y_e pendant la neutronisation, à $t = 10$ ms après le rebond, avec le schéma de fuite (trait plein, rouge), comparé à AGILE/BOLTZTRAN (trait pointillé, vert).

Les neutrinos sont pris en compte comme un terme source dans l'équation $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$,

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = q^\alpha, \quad (7.14)$$

où on définit le quadrivecteur source q^α comme

$$q_{LF}^\alpha = \begin{pmatrix} Q_E \\ Q_{(M)}^r \\ Q_{(M)}^\theta \\ Q_{(M)}^\varphi \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Si la fonction de distribution des neutrinos était connue (comme solution de l'équation de Boltzmann, voir la partie IV de cette thèse), on pourrait s'en servir pour construire un tenseur énergie-impulsion des neutrinos qui engendrerait à son tour le terme source q^α , avec la condition que le tenseur énergie-impulsion total soit à divergence nulle. Cette dérivation a été faite par plusieurs auteurs (par exemple [Liebendörfer et al. \(2004\)](#); [Shibata et al. \(2011\)](#); [Müller et al. \(2010\)](#)), dans ce cas le traitement des pertes d'énergie est complètement cohérent. Ce n'est malheureusement pas possible avec le schéma de fuite, où les pertes d'énergie ne peuvent être implémentées que d'une façon approximative. Le choix fait ici correspond à celui de [O'Connor & Ott \(2010\)](#) pour le vecteur q^α , détaillé ci-après. De plus, les quantités dans l'équation (7.15) sont définies dans le référentiel lagrangien (LF, voir le chapitre 4), on doit donc les transformer en quantités eulériennes, puisque l'hydrodynamique (Eq. (5.5)) est faite dans le référentiel eulérien. Cette transformation est détaillée en annexe A.

7.5.1 Régime libre

Dans le régime libre, tous les neutrinos créés s'échappent, et par conséquent le fluide perd de l'énergie. Connaissant les taux de création des neutrinos, Σ_i , pour chaque réaction considérée et l'énergie moyenne des neutrinos pour chaque réaction (voir l'annexe B pour le détail des calculs), on peut écrire le taux de perte d'énergie total dans le régime libre comme

$$Q_E = \Sigma_{ec}\langle\epsilon_{ec}\rangle + \Sigma_{pc}\langle\epsilon_{pc}\rangle + \Sigma_{ee}\langle\epsilon_{ee}\rangle + \Sigma_{pl}\langle\epsilon_{pl}\rangle + Q_{\text{freed}}. \quad (7.16)$$

Dans cette équation, outre le taux d'énergie perdue par la capture électronique, la capture positronique, l'annihilation électron positron et la désintégration d'un plasmon, on a également écrit le taux de perte d'énergie Q_{freed} correspondant aux neutrinos libérés (quand il y en a) quand la neutrinosphère se déplace vers le centre. L'utilisation d'équations d'advection pour les neutrinos rend ce terme nécessaire dans l'implémentation du schéma de fuite. Enfin, il n'y a pas d'impulsion enlevée au fluide dans le régime libre.

7.5.2 Régime piégé

Dans le régime piégé, ce sont les neutrinos qui arrivent jusqu'à la neutrinosphère qui contribuent à la perte d'énergie et de moment du fluide. Le taux de perte d'énergie total en régime piégé s'écrit

$$Q_E = -a_2\langle\epsilon_\nu\rangle\frac{Y_\nu}{t_{\text{esc}}}, \quad (7.17)$$

avec l'énergie moyenne par particule des neutrinos $\langle\epsilon_\nu\rangle$, et Y_ν/t_{esc} le terme de fuite, c'est à dire la fraction moyenne de neutrinos capable d'atteindre la neutrinosphère, et donc de s'échapper. Dans ce schéma gris, où la dépendance en énergie n'est pas considérée, cette énergie moyenne est définie par

$$\langle\epsilon_\nu\rangle = \frac{\int_0^\infty E f_{FD}(\eta_\nu) d^3p}{\int_0^\infty f_{FD}(\eta_\nu) d^3p} = T \frac{F_3(\eta_\nu)}{F_2(\eta_\nu)}, \quad (7.18)$$

où f_{FD} est la fonction de distribution des neutrinos, qu'on suppose être une Fermi-Dirac, et F_k l'intégrale de Fermi d'ordre k ,

$$F_k(\eta) = \int_0^\infty dx \frac{x^k}{1 + \exp(x - \eta)}. \quad (7.19)$$

T est la température et η le paramètre de dégénérescence, $\eta = \mu/T$. On remarque que puisque $\langle\epsilon_\nu\rangle$ dépend de η_ν , sa valeur dépend du potentiel chimique effectif dans l'équation (7.7).

Le taux de perte d'énergie, Eq. (7.17), est calculé séparément pour chaque saveur de neutrino considérée ($\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_x$), chacune ayant sa propre énergie moyenne et sa propre fraction.

Pour partiellement corriger les approximations du traitement des pertes d'énergie dans le schéma de fuite, on introduit également le paramètre libre a_2 dans l'équation (7.17), qui peut varier mais reste proche de l'unité. Ce paramètre est ajusté pour avoir une masse de PNS au moment de la formation de BH comparable avec la littérature, voir Fischer *et al.* (2009); O'Connor & Ott (2011). Voir aussi Sec. 7.7.

Dans la partie piégée, l'impulsion retirée au fluide est approximée par le gradient de la pression des neutrinos, P_ν (Müller *et al.* (2010); O'Connor & Ott (2010)). Pour la calculer, on suppose que les neutrinos forment un gaz parfait de Fermi jusqu'à la neutrinosphère. On suppose également qu'ils n'ont pas de masse. La pression s'écrit alors

$$P_\nu = \frac{T^4}{6\pi^3} (F_3(\eta_\nu) + F_3(-\eta_\nu)), \quad (7.20)$$

Le terme proportionnel à $F_3(\eta_\nu)$ rend compte de la pression des ν_e , tandis que le terme proportionnel à $F_3(-\eta_\nu)$ rend compte de la pression des $\bar{\nu}_e$. Le terme dominant est celui où l'argument de F_3 est positif. La pression due aux ν_x , dont le potentiel chimique est toujours considéré comme nul, est donc négligeable et non prise en compte.

L'impulsion perdue par le fluide est alors le gradient de P_ν (Dimmelmeier *et al.* (2008); O'Connor & Ott (2010))

$$Q_{(M)i} = -\frac{\partial P_\nu}{\partial x^i}. \quad (7.21)$$

Ce terme source est encore à exprimer dans le référentiel eulérien, la transformation correspondante étant décrite dans l'annexe A. Notons que ce traitement de la pression des neutrinos est celui d'un schéma de fuite, et donc différent de celui proposé par Dimmelmeier *et al.* (2005).

7.6 Advection

7.6.1 Quantités advectées

En plus des pertes d'énergie et d'impulsion, le schéma de fuite implémenté résout des équations d'advections pour les quantités Y_e , Y_{ν_e} et $Y_{\bar{\nu}_e}$, Eqs. (5.5) et (5.6). Ce choix permet, comme dit précédemment, de suivre l'effondrement et le rebond avec le schéma de fuite. Le traitement des autres neutrinos, ν_x , est différent : ils sont considérés en équilibre avec le fluide, leur fonction de distribution est alors une Fermi-Dirac avec la température du fluide et un potentiel chimique nul. En effet les ν_x sont créés thermiquement (pour le détail des réactions, voir l'annexe B) et leur potentiel chimique reste donc nul (il y a autant de $\nu_{\mu,\tau}$ créés que de $\bar{\nu}_{\mu,\tau}$). Enfin, pour éviter une surestimation de leur nombre, les ν_x sont négligés avant le rebond, ce qui est une approximation raisonnable (voir Liebendörfer *et al.* (2009), qui reproduit bien des simulations complètes avec un modèle sans ν_x).

7.6.2 Termes sources

Les termes sources pour les trois équations nouvellement implémentées, pour les quantités Y_e , Y_{ν_e} et $Y_{\bar{\nu}_e}$, sont respectivement

$$\Sigma_e = -\Sigma_{ec} + \Sigma_{pc}, \quad (7.22)$$

$$\Sigma_{\nu_e} = \Sigma_{ec} + \Sigma_{ee} + \Sigma_{pl} - \frac{Y_{\nu_e}}{t_{esc}}, \quad (7.23)$$

$$\Sigma_{\bar{\nu}_e} = \Sigma_{pc} + \Sigma_{ee} + \Sigma_{pl} - \frac{Y_{\bar{\nu}_e}}{t_{esc}}. \quad (7.24)$$

où les taux de réaction Σ sont détaillés en section 7.3.1 et en annexe B ; et t_{esc} est défini par l'équation (7.13).

7.7 Paramètres du schéma de fuite

Le schéma de fuite a trois paramètres différents.

- La densité d'équilibre β : différents auteurs s'accordent sur l'établissement de l'équilibre β entre 6×10^{11} and 2×10^{12} g.cm⁻³ (Liebendörfer (2005); Janka *et al.* (2007)). J'ai donc pris une valeur dans cet intervalle, en l'occurrence 1.17×10^{12} g.cm⁻³.
- a_1 , défini par l'équation (7.13), prend pour valeur $a_1 = 3$. Cette valeur est celle donnée dans Ruffert *et al.* (1996) et reste fixée.
- a_2 , défini par l'équation (7.17), corrige des défauts inhérents au schéma de fuite, et doit être proche de l'unité. Ce paramètre est ajusté pour que la masse de la PNS au moment de la formation du trou noir soit cohérente avec la littérature (Fischer *et al.* (2009); O'Connor & Ott (2011)). Les résultats 1D du chapitre 8 viennent de simulations avec $a_2 = 1.1$. Les résultats 2D de la section 8.5 viennent de simulations avec $a_2 = 1.21$. Cette différence ne devrait pas changer les résultats qualitatifs.

D'un point de vue quantitatif, les résultats trouvés dans nos simulations sont assez sensibles à ces paramètres. Explicitement, une différence de $\pm 10\%$ dans le paramètre a_2 induit une différence dans la masse maximale de la PNS de $\sim 2\%$, ce qui se traduit par un temps passé dans la phase d'accrétion plus grand. Une différence de $\pm 10\%$ dans la densité d'équilibre β ne change pas le moment de détection de l'horizon apparent, mais la densité maximale au rebond change d'environ $\pm 10\%$. Ces tests ont été effectués avec le modèle lsu40 (voir la table 8.1 pour la signification des noms des modèles).

Malgré ces différences, le comportement qualitatif décrit dans les résultats (chapitre 8) est robuste. On garde cependant en tête que le traitement des neutrinos présenté ici est simplifié et qu'un traitement par la résolution de l'équation de Boltzmann complète pourrait donner des résultats quantitatifs différents.

Chapitre 8

Formation de trous noirs : résultats

Sommaire

8.1	Modèle de référence	96
8.2	Modèle avec pions et le progéniteur u40	97
8.3	Modèle avec hypéron Λ et le progéniteur u40	99
8.3.1	Contraction de la PNS	99
8.3.2	Transition de phase	101
8.3.3	Influence de la diffusion ν - Λ	102
8.3.4	Luminosité des neutrinos	103
8.4	Résultats avec le progéniteur WWs40	104
8.5	Résultats en symétrie axiale	107
8.5.1	Convection	107
8.5.2	Adoucissement de la transition de phase	107
8.5.3	Extraction d'ondes gravitationnelles	108

Les simulations suivantes ont été réalisées avec le code CoCoNuT décrit en partie II et le schéma de fuite. La grille de CoCoNuT est eulérienne et a une géométrie sphérique. En symétrie sphérique (1D), j’ai utilisé 805 points (r) et les points sont espacés de manière logarithmique. En axisymétrie, j’ai utilisé $660 (r) \times 32 (\theta)$ points, les points dans la direction radiale étant toujours espacés de manière logarithmique, et j’ai supposé la symétrie équatoriale.

J’ai utilisé deux progéniteurs différents, tous deux de $40 M_{\odot}$ (à un âge zéro sur la séquence principale). Le premier (appelé ci-après u40) est pauvre en métaux (10^{-4} métallicité solaire) et vient de [Woosley et al. \(2002\)](#). La basse métallicité implique un très fort taux d’accrétion après le rebond. Par conséquent, cette étoile est un bon candidat à formation de trou noir¹, et d’autre part le temps passé dans la phase d’accrétion est réduit, par rapport aux autres étoiles, ce qui permet des simulations assez rapides.

Le deuxième, de [Woosley & Weaver \(1995\)](#) (appelé ci-après WW40), a la métallicité solaire. Ce progéniteur a été très utilisé dans les études d’effondrements en trous noirs (par exemple [O’Connor & Ott \(2011\)](#); [Fischer et al. \(2009\)](#); [Sumiyoshi et al. \(2007\)](#); [Hempel et al. \(2012\)](#)), et il est utilisé ici pour comparaison. Il semble également un bon candidat à la formation de trou noir, car le taux d’accrétion est trop grand et le cœur de fer est trop massif pour que l’étoile explose. Notons cependant que [Ugliano et al. \(2012\)](#) trouvent dans leur étude que le progéniteur de $40 M_{\odot}$ avec métallicité solaire de [Woosley et al. \(2002\)](#) explose et laisse une étoile à neutrons plutôt qu’un trou noir. La raison est probablement que ce dernier a une plus petite accrétion après le rebond que le progéniteur de $40 M_{\odot}$ de [Woosley & Weaver \(1995\)](#), ce qui s’explique sans doute par la différence de traitement de la perte de masse.

Les simulations décrites ci-après utilisent soit l’équation d’état de Lattimer et Swesty avec $K = 220$ MeV sans particule supplémentaire (LS220 EoS, voir chapitre 6), soit son extension avec pions (LS220+ π EoS), soit son extension avec des hypérons Λ (LS220+ Λ EoS). Chaque simulation est désignée par le nom de l’EoS (ls, π , Λ), suivi de celui du progéniteur (u40 or WW40). Le suffixe 2D est ajouté pour les simulations axisymétriques. Les noms et les résultats des simulations en symétrie sphérique sont résumés en table 8.1. Toutes les simulations sont arrêtées une fois que l’horizon apparent est trouvé.

8.1 Modèle de référence

Le modèle de référence est le modèle ls40, qui utilise l’EoS LS220 sans particule supplémentaire, et le progéniteur u40 de [Woosley et al. \(2002\)](#). Cette simulation sert de référence pour la comparaison avec nos autres simulations avec d’autres EoS ou d’autres progéniteurs, et la comparaison avec d’autres travaux.

L’effondrement et le rebond sont simulés à l’aide du schéma de fuite, ce qui est possible grâce aux équations d’advection résolues pour Y_{ν_e} et $Y_{\bar{\nu}_e}$, comme décrit dans la

1. Dans le sens où, quel que soit le mécanisme d’explosion, cette étoile donne probablement un trou noir. Dans mes simulations simplifiées sans chauffage, à moins que la masse disponible dans la simulation soit trop faible, la formation d’un trou noir est inévitable.

section 7.4. Le rebond est détecté au moment de la formation du choc, mais puisqu'il n'y a pas de changement de schéma dans la simulation avant et après le rebond, le moment exact de la détection du rebond n'a que peu d'influence sur la dynamique (voir Scheidegger *et al.* (2010) pour un exemple d'une implémentation d'un changement de schéma au rebond).

Après le rebond, le choc se propage et atteint une distance au centre d'environ 98 km avant de s'arrêter. Ensuite, le refroidissement le fait reculer lentement. À la fin de la simulation, juste avant que la PNS (proto-étoile à neutrons) devienne instable et déclenche la formation du BH (trou noir), le choc est à environ 57 km du centre et sa vitesse est montée à 0.35c. Le rayon de la PNS, défini arbitrairement (voir aussi la section 2.3.2) à une densité de $10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$ (suivant Müller *et al.* (2012b)), recule également : au rebond, il est d'environ 75 km, et la contraction aboutit à une PNS d'un rayon d'environ 45 km au début de l'effondrement en BH.

Comme on peut le voir sur la figure 8.1, la PNS s'effondre à 415 ms après rebond. L'effondrement lui-même prend moins de 2 ms. La densité centrale augmente de $4.6 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ à $1.5 \times 10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$ et la température augmente de $4.3 \times 10^{11} \text{ K}$ à $1.3 \times 10^{12} \text{ K}$. À 416.8 ms après rebond, l'AH est détecté et le trou noir est formé.

La masse baryonique contenue à l'intérieur du choc (toutes les masses données dans ce chapitre sont des masses baryoniques) est $2.55 M_{\odot}$. C'est une mesure de la masse maximale de la PNS, car au moment de l'effondrement en trou noir, le choc est très près de la surface de la PNS. On entend par masse maximale de la PNS la masse de la PNS au moment du déclenchement de l'effondrement en trou noir, dans une simulation. C'est donc une quantité dynamique car elle dépend du taux d'accrétion (et donc du progéniteur), qui entraîne une augmentation de la masse de la PNS avec le temps, mais aussi du taux de refroidissement (et donc de l'implémentation des neutrinos) et de la réaction de la matière (par exemple, la contraction de la PNS, différente selon l'EoS). Ce résultat est en accord avec O'Connor & Ott (2011), la différence étant de 3% (la masse maximale de leur PNS pour le même progéniteur est de $2.469 M_{\odot}$).

8.2 Modèle avec pions et le progéniteur u40

Ajouter des pions à l'EoS rend la matière légèrement moins dure, on s'attend donc à ce que la masse maximale et le rayon de la PNS soient légèrement plus petits.

L'EoS contient des π^+ , π^0 et des π^- . Pendant toute la simulation, les π^- sont les plus abondants, un résultat attendu car les particules chargées négativement sont favorisées dans la matière dense et chaude, riche en neutrons des supernovas. Au moment du rebond, le maximum de Y_{π^-} est $Y_{\pi^-} = 0.0032$. L'influence des pions à cet instant devient non négligeable.

Sur la figure 8.1, on voit une conséquence de la présence de pions sur la phase d'effondrement : la densité centrale au rebond est légèrement inférieure dans le modèle $\pi u40$ par rapport au modèle $lsu40$. En effet, l'effondrement et la déleptonisation sont légèrement différents, et par conséquent le cœur homologue et la PNS au moment de sa

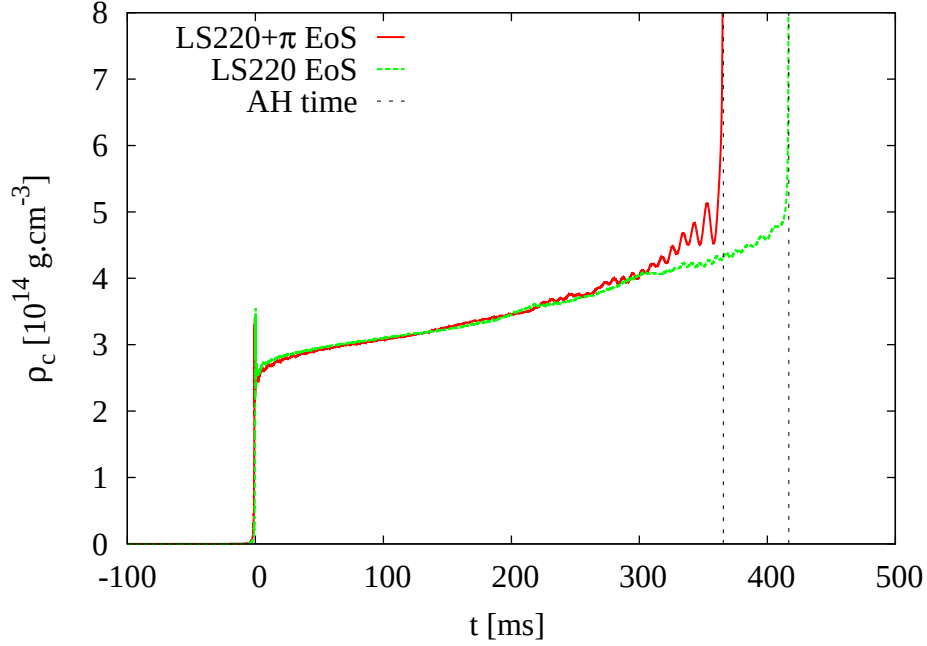


FIGURE 8.1 – Densité centrale en fonction du temps après rebond, pour les modèles lsu40 et π u40. Le moment de première détection de l’AH est marqué par une ligne verticale.

formation sont plus grands dans le modèle π u40. Précisément, la température centrale est $\sim 2\%$ plus grande au rebond et cette différence est relativement constante durant les premières dizaines de millisecondes après rebond. C’est cet effet de température qui donne une densité centrale $\sim 3\%$ plus petite pour le modèle π u40. Notons également que cet effet est très petit, comparable avec la précision attendue du code (quelques pourcents).

Comme on le voit sur la figure 8.1, la PNS pour le modèle π u40 est légèrement plus compressible et la densité centrale augmente plus rapidement. À ~ 200 ms après rebond, on voit un croisement entre les deux modèles π u40 et lsu40 où les densités centrales sont les mêmes, et ensuite le modèle avec pions a une densité plus grande jusqu’à l’effondrement en trou noir. On constate également que l’addition de pions ne change que légèrement le comportement pendant une simulation.

La densité centrale sur la figure 8.1 montre des oscillations à l’approche de l’effondrement en trou noir. Notons que ces oscillations sont plus prononcées sur le modèle π u40 que sur le modèle lsu40. Ce comportement pourrait être lié à la plus grande compressibilité de l’EoS. Ces oscillations ne changent pas le comportement qualitatif de nos simulations, et ne sont donc pas très importantes pour cette étude.

La figure 8.2 montre la fraction des pions juste avant l’effondrement en trou noir, à $t = 356$ ms après rebond. Comme dit plus haut, les plus abondants sont les π^- , suivis des π^0 et des π^+ .

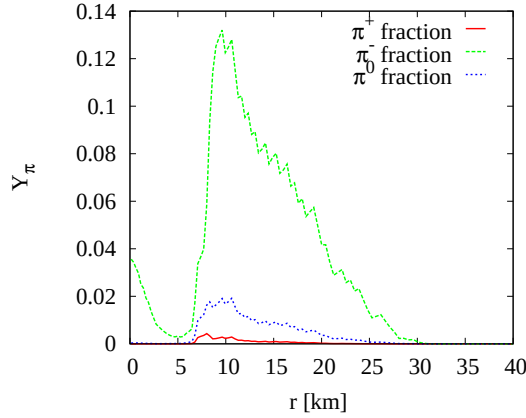


FIGURE 8.2 – Fractions des pions en fonction du rayon au moment du déclenchement de l’effondrement en trou noir ($t = 356$ ms après rebond, modèle $\pi u40$). La forme du profil, en particulier le creux dans la région centrale, est directement corrélée au profil de température.

Notons que les π^- sont les seuls à avoir une fraction plus grande que 2%, et que tous les pions sont présents seulement au centre de la PNS, jusqu’à environ 30 km. Le creux, vers le centre, dans les profils des fractions de pions s’explique par le profil de température. En effet, les pions sont créés de façon thermique, et leur fraction suit de très près le profil de température. Les fractions de pions sont du même ordre que celles de Nakazato *et al.* (2012), qui utilise une extension de la HShen EoS. Enfin, le maximum de la fraction de l’espèce la plus abondante est $Y_{\pi^-} \simeq 0.13$, au moment de l’effondrement en BH. Pendant une simulation, toutes les fractions de pion augmentent, de 0 à leur maximum au moment de l’effondrement en BH, en suivant l’augmentation de la température et de la densité à l’intérieur de la PNS.

L’horizon apparent est détecté pour la première fois à 366.3 ms après rebond pour une masse maximale de PNS de $2.49 M_\odot$ et un rayon de PNS de 43 km. Notons que même si les fractions de pions sont petites (Y_{π^-} est la seule au dessus de 0.10 et seulement dans les dernières dizaines de millisecondes avant l’effondrement en BH), ce léger changement dans l’EoS a des conséquences non négligeables sur la dynamique, en particulier le temps de formation de trou noir.

8.3 Modèle avec hypéron Λ et le progéniteur u40

8.3.1 Contraction de la PNS

L’ajout d’hypérons Λ à l’EoS induit une PNS plus compacte, et l’effet est plus prononcé qu’avec l’ajout de pions.

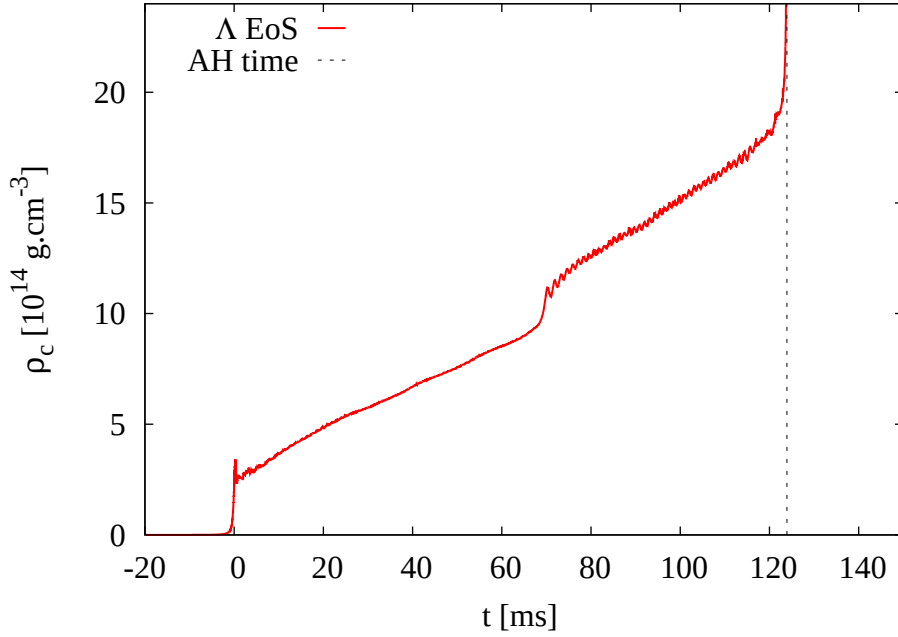


FIGURE 8.3 – Densité centrale en fonction du temps après rebond, pour le modèle $\Lambda u40$. Le moment de première détection de l’AH est marqué par une ligne verticale.

En effet, le modèle $\Lambda u40$ montre un début d’effondrement en trou noir à 122.8 ms après rebond et l’AH est détecté à 123.9 ms après rebond. La masse maximale avant effondrement de la PNS est seulement de $2.00 M_{\odot}$. On remarque que cette valeur est significativement plus petite que la masse maximale d’une étoile à neutrons froide avec la même EoS (L’EoS LS220+ Λ , pour une étoile à neutrons froide, prévoit une masse maximale baryonique de $2.22 M_{\odot}$). Cette différence pourrait s’expliquer par des effets dynamiques, ou par le fait qu’à haute température les hyperons Λ sont plus abondants. De plus, la PNS n’est pas entièrement à l’équilibre β , et le profil de Y_e varie dynamiquement. Il serait possible que la plus petite masse supportée par la PNS par rapport à l’étoile à neutrons froide soit liée au fait que l’EoS dépend fortement de Y_e .

Sur la figure 8.3, on voit que la densité centrale augmente beaucoup plus rapidement que pour le modèle de référence $lsu40$. Le choc se propage seulement jusqu’à 36 km du centre avant de reculer. La PNS, au moment de sa formation, s’étend jusqu’à 31 km et se contracte jusqu’à atteindre un rayon de 17 km très rapidement. La contraction continue plus lentement pendant tout le reste de la simulation jusqu’à la transition de phase (détaillée ci-dessous), où la PNS se contracte brusquement : son rayon passe de 15 km à 13 km. Ensuite, la PNS revient dans une phase de contraction plus lente jusqu’au moment de l’effondrement en trou noir, où elle fait environ 10 km. Ce rayon est très petit pour une PNS (par exemple, Müller *et al.* (2012d) montrent des rayons de PNS, mais avec un autre progéniteur, et l’EoS LS180. Les rayons font typiquement entre 20 et 70 km).

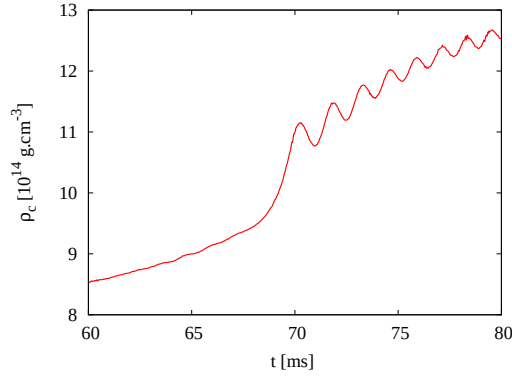


FIGURE 8.4 – Densité centrale en fonction du temps après rebond, pour le modèle Λ u40, zoomé sur la transition de phase.

8.3.2 Transition de phase

L'équation d'état LS220+ Λ est construite avec une transition de phase de premier ordre vers la matière hypéronique, comme décrit en section 6.3. On s'attend donc à la retrouver dans une simulation d'effondrement en trou noir. La figure 8.3 montre que c'est bien le cas, et la figure 8.4, qui est une vue détaillée de la figure 8.3 au moment de la transition de phase, montre les conséquences de celle-ci sur la densité au centre. On passe de $9.4 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ à $11.2 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ en moins de 2 ms (autour de 68-70 ms après rebond).

Cette transition de phase induit une contraction soudaine de la PNS, comme décrit en section 8.3.1. Cette contraction est très similaire à la chute libre du cœur de fer sur lui-même au moment de l'effondrement initial.

La figure 8.5 montre la fraction des hyperons Λ , Y_Λ , en fonction du rayon pendant la transition de phase. À température finie, les hyperons Λ apparaissent avant la transition de phase (ici au rebond). Y_Λ augmente jusqu'à atteindre ~ 0.17 au centre à 68 ms après rebond. Ensuite, c'est la transition de phase, et on peut voir sur la figure 8.5 que Y_Λ augmente de ~ 0.17 à ~ 0.22 au centre, en moins de 2 ms. Après la transition de phase, Y_Λ oscille de la même manière que la densité et augmente jusqu'à l'effondrement en trou noir.

La figure 8.5 montre Y_Λ au déclenchement de l'effondrement en trou noir. On voit que Y_Λ est significativement grand et va jusqu'à 0.41 au centre de la PNS. Enfin, la transition de phase est une conséquence du taux d'accrétion très grand du progéniteur u40, et un autre progéniteur peut donner une PNS qui s'effondre en trou noir avant le déclenchement de la transition de phase (c'est le cas décrit en section 8.4).

De plus, la figure 8.4 montre des oscillations de la PNS excitées par l'effondrement durant la transition de phase. Elles pourraient correspondre à un mode radial fondamental d'oscillations de PNS (voir Kokkotas & Ruoff (2001) pour une étude des modes d'oscillations des étoiles à neutrons). Il n'est pas possible de comparer la fréquence des oscillations dans notre simulation, estimée à $\sim 800 \text{ Hz}$, aux données de Kokkotas & Ruoff

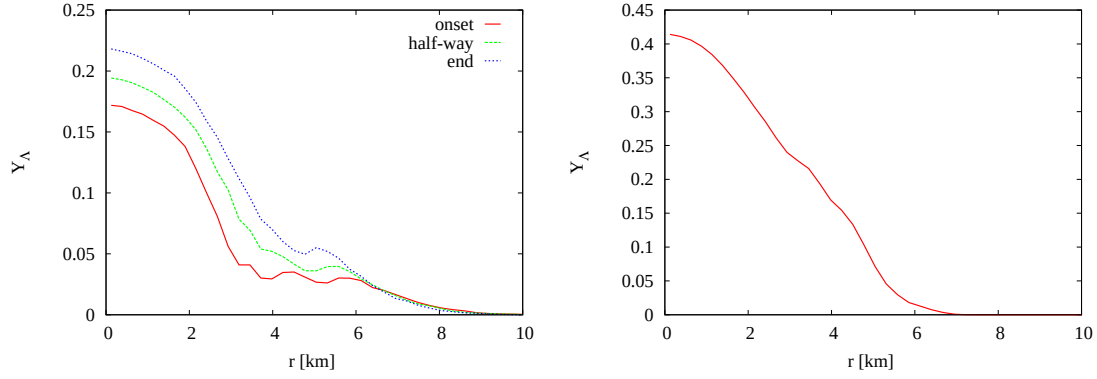


FIGURE 8.5 – Gauche : évolution de Y_Λ pendant la transition de phase (modèle $\Lambda u40$). Les différents graphes représentent le début ($t = 68.7$ ms après rebond), le milieu ($t = 69.5$ ms après rebond) et la fin de la transition de phase ($t = 70.2$ ms après rebond). Droite : profil de Y_Λ (modèle $\Lambda u40$) au moment du déclenchement de l’effondrement en trou noir ($t = 121$ ms après rebond).

TABLE 8.1 – Propriétés au moment de l’effondrement en BH.

Nom	lsu40	$\pi u40$	$\Lambda u40$	lsWW40	$\pi WW40$	$\Lambda WW40$
Modèle initial	u40	u40	u40	WWs40	WWs40	WWs40
EoS	LS220	LS220+ π	LS220+ Λ	LS220	LS220+ π	LS220+ Λ
AH (ms après rebond)	416.8	366.3	123.9	1025.8	607.2	274.5
masse de la PNS ($M_\odot$)	2.55	2.49	2.00	2.73	2.40	2.00
rayon de la PNS (km)	45	43	10	51	38	18

(2001), car les auteurs ne présentent que des étoiles à neutrons froides, notre PNS n’est pas isolée mais accrète de la matière continuellement, et enfin nous utilisons une EoS différente de celles présentées par Kokkotas & Ruoff (2001). Cependant, l’ordre de grandeur de la fréquence des oscillations trouvées ici est compatible avec l’interprétation d’un mode radial fondamental, au regard des incertitudes sur les estimations des masses et rayons de notre PNS. Enfin, nous avons également répété cette simulation en variant la résolution pour éliminer le risque d’un artéfact numérique, et nous trouvons que ces oscillations sont une caractéristique robuste de nos simulations.

8.3.3 Influence de la diffusion ν - Λ

Pour tester l’influence de notre implémentation de la diffusion isoénergétique des neutrinos sur les Λ (voir section 7.1 et annexe B), nous avons simulé l’effondrement en

trou noir avec le modèle Λ u40, en ne variant aucun paramètre, mais en débranchant la diffusion sur un Λ , pour comparaison.

Les différences sont négligeables jusqu'à la transition de phase. Ensuite, sans diffusion sur Λ , la transition de phase est déclenchée 6 ms plus tard, et la masse maximale de la PNS devient $1.96 M_\odot$. C'est donc une réduction de $0.04 M_\odot$ comparé au cas avec diffusion. Cette réduction suggère que le refroidissement est plus important quand on réduit l'opacité en négligeant la diffusion sur un Λ , comme attendu. Cependant, cette réduction est dans les barres d'erreur du code, et donc cette conclusion est sujette à caution. On remarque que, même si les hypérons Λ sont abondants, ils apparaissent dans une matière qui est déjà opaque aux neutrinos, ce qui expliquerait pourquoi prendre en compte la diffusion sur un Λ ne change rien de manière significative.

8.3.4 Luminosité des neutrinos

Dans ces simulations, j'ai calculé la luminosité totale L_ν . En symétrie sphérique, on peut l'approximer par

$$L_\nu = 4\pi \int_0^\infty W \left(1 + \frac{v_r}{\Psi^2} \right) \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^r}{\alpha} \right] Q_E \sqrt{-g} dr. \quad (8.1)$$

Q_E , défini dans le LF, doit être transformé dans le EF par une transformation spéciale de Lorentz (avec la vitesse eulérienne v_r/Ψ^2 , voir annexe A), puis transformé dans le CF, ce qui est fait par la multiplication par le terme entre crochets (multiplication par la matrice M^{-1} définie par l'expression 10.37). La généralisation à trois dimensions impliquerait ces mêmes calculs avec un v_θ et un v_ϕ non nuls.

La luminosité des neutrinos est calculée par l'intégration du taux de perte d'énergie sur un élément de volume invariant (d'où le terme $\sqrt{-g}$) à temps coordonnée constant. Cette formule est en accord avec O'Connor & Ott (2010); Kuroda *et al.* (2012). Notons que l'intégration à temps coordonnée constant est une approximation, puisqu'un retard temporel entre les différentes régions émettrices devrait en principe être pris en compte. Mais cette approximation se justifie par le fait que la région émettrice est petite (~ 100 km au plus), et donc le retard également.

Comme d'autres auteurs l'ont déjà montré (par exemple Kuroda *et al.* (2012); Nakazato *et al.* (2012)), la luminosité neutrinique totale est maximale au pic de flux neutrinique, quelques millisecondes après le rebond, et diminue très rapidement ensuite. On observe le même comportement dans nos simulations (voir la figure 8.7, calculée pour le progéniteur Wws40 en section 8.4), et la luminosité pour les modèles lsu40 et π u40 sont très semblables. Seul Λ u40 est différent.

Dans le modèle Λ u40, le maximum de luminosité au pic est plus élevé, et puisque la PNS se contracte très rapidement, la luminosité reste forte plus longtemps après le pic.

De plus, après la transition de phase, la luminosité suit le comportement de la PNS et oscille, comme on peut le voir sur la figure 8.3, ce qui fait perdre beaucoup d'énergie à la PNS. À cause des approximations faites ici, les différences de luminosité entre l'EoS LS220 et LS220+ Λ devraient être vérifiées avec un meilleur traitement des neutrinos.

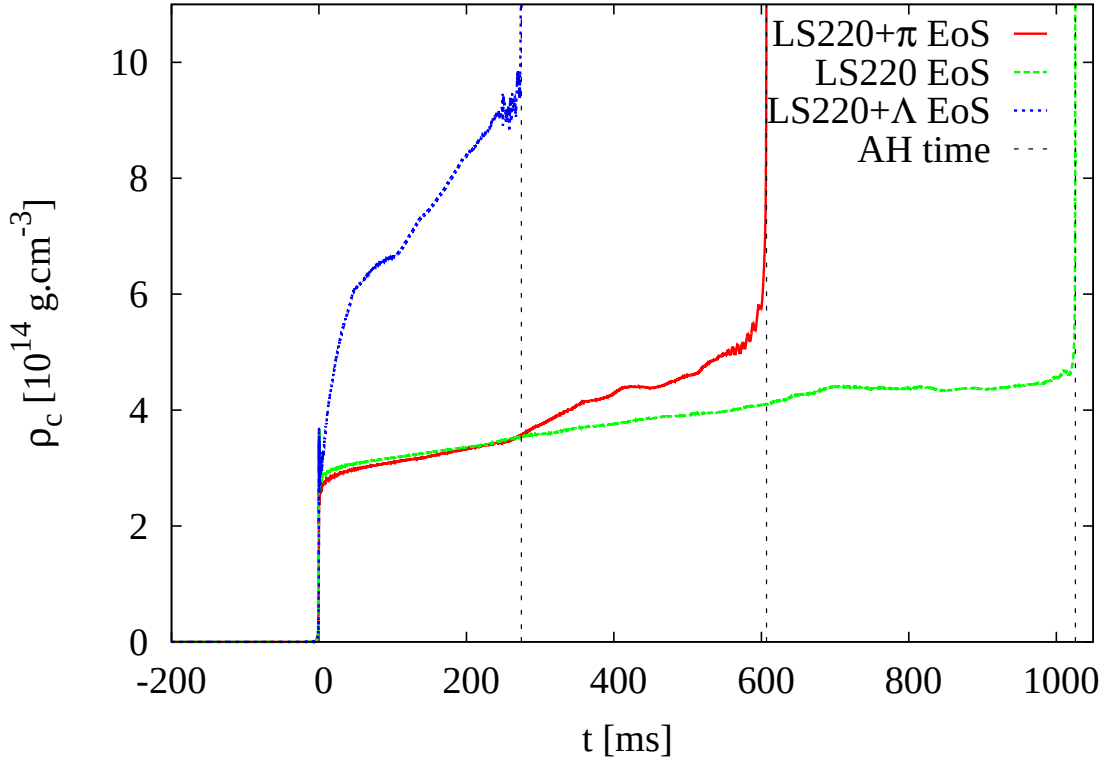


FIGURE 8.6 – Densité centrale en fonction du temps pour les modèles lsWW40 (pointillés, vert), π WW40 (trait plein, rouge) et Λ WW40 (points, bleu).

Finalement, au moment de la formation du trou noir, la région émettrice entre dans l'horizon et la luminosité tombe à zéro.

8.4 Résultats avec le progéniteur WWs40

Dans cette section, je montre les simulations faites avec le progéniteur de $40 M_{\odot}$ avec métallicité solaire de [Woosley & Weaver \(1995\)](#) (appelé par la suite WWs40), en variant, comme précédemment, entre les EoS LS220, LS220+ π et LS220+ Λ . Ce progéniteur a souvent été utilisé dans les études d'effondrement en trou noir (par exemple [O'Connor & Ott \(2011\)](#); [Fischer *et al.* \(2009\)](#); [Sumiyoshi *et al.* \(2007\)](#); [Hempel *et al.* \(2012\)](#)), en particulier car il a un grand cœur de fer. La principale différence avec le progéniteur u40 de [Woosley *et al.* \(2002\)](#) utilisé dans les simulations présentées précédemment est que le taux d'accrétion est plus petit dans WWs40.

Sur la figure 8.6, on voit le même comportement général que pour le progéniteur u40. Dans le modèle π WW40, la densité au rebond est plus petite que dans le modèle lsWW40, et après 275 ms, les courbes de densité se croisent, car la PNS se contracte plus vite avec l'EoS LS220+ π . Dans le modèle lsWW40 la masse maximale de la PNS est

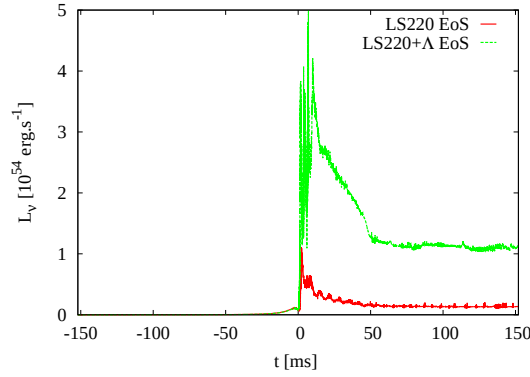


FIGURE 8.7 – Luminosité des neutrinos en fonction du temps après rebond pour les modèles Λ WW40 (pointillés, vert) et lsWW40 (trait plein, rouge). Le modèle Λ WW40 montre une luminosité maximale très grande et le pic de flux neutrinique est plus long.

$2.73 M_{\odot}$. Cette valeur est en accord avec le travail de [O'Connor & Ott \(2011\)](#) à 12% près. Les autres travaux ([Sumiyoshi et al. \(2007\)](#); [Fischer et al. \(2009\)](#)) utilisent généralement une plus petite valeur du coefficient d'incompressibilité, en l'occurrence $K = 180$ MeV, alors que dans cette simulation nous avons utilisé $K = 220$ MeV. C'est un changement significatif qui rend les comparaisons difficiles.

Le modèle lsWW40 forme un AH à 1025.8 ms après rebond, alors que le modèle π WW40 s'effondre plus tôt, et l'AH est pour la première fois détecté à 607.2 ms, ce qui correspond à une masse maximale de PNS de $2.40 M_{\odot}$. On remarque que l'addition de pions engendre des différences plus grandes entre lsWW40 et π WW40 qu'entre lsu40 et π u40 (voir la table 8.1). Dans ces simulations, la différence entre l'EoS LS220 et l'EoS LS220+ π est que la PNS se contracte plus et plus vite avec cette dernière. La neutrinosphère est donc plus interne et le refroidissement est plus efficace. Le progéniteur WWS40 ayant un taux d'accrétion plus faible que u40, il faut plus de temps pour atteindre la masse maximale de la PNS. On passe donc plus de temps dans la phase de refroidissement et les différences entre les deux EoS ont plus de temps pour s'exprimer.

La figure 8.6 est ajustée pour que le temps $t = 0$ corresponde aux rebonds respectifs des trois modèles. Le rebond, pour le modèle Λ WW40, est détecté ~ 12 ms plus tôt que dans les deux autres modèles, car une petite fraction de Λ commence à apparaître ($Y_{\Lambda} \sim 0.0005$ au centre, au rebond). Dans ce modèle, l'effondrement en BH se déclenche avant d'atteindre la densité requise pour la transition de phase. En effet, dans le modèle Λ u40 on atteint une densité centrale de $10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$ et une température centrale de ~ 43 MeV à ~ 69 ms après rebond, ce qui déclenche la transition de phase. Dans le modèle Λ WW40, comme on peut le voir sur la figure 8.6, l'effondrement en trou noir a déjà commencé quand on atteint la densité de $10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$. De plus, les températures atteintes avant l'effondrement sont plus faibles. Cette différence vient du taux d'accrétion plus élevé du progéniteur u40, qui implique des densités centrales plus élevées. On peut donc conclure que l'EoS LS220+ Λ n'induit pas de transition de phase pour chaque

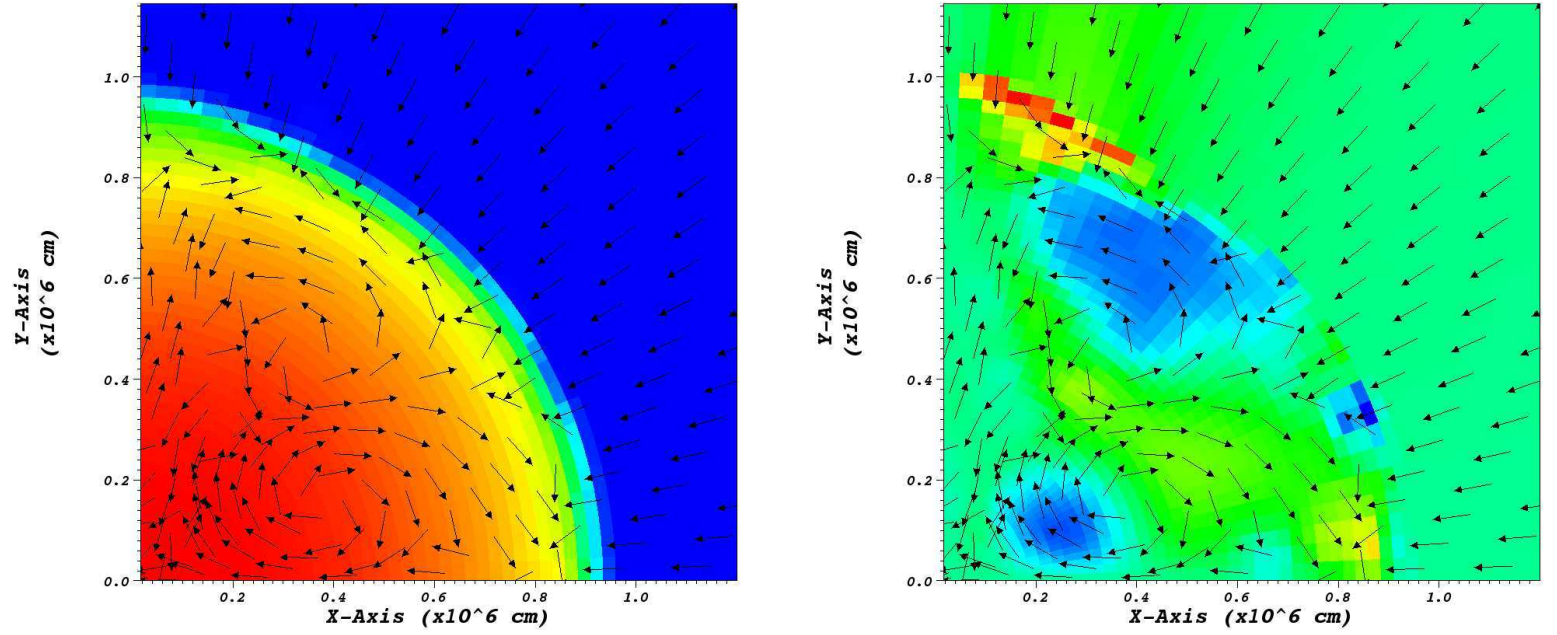


FIGURE 8.8 – Vecteur vitesse (flèches noires) avec en code couleur la densité (à gauche, le rouge représente de fortes densités ($\sim 2 \times 10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$) et le vert de faibles densités ($\sim 10^9 \text{ g.cm}^{-3}$)) et la vitesse v_θ (à droite, le rouge représente $v_\theta \sim 0.2$, le bleu $v_\theta \sim -0.2$ et le vert $v_\theta \sim 0$), pour le modèle $\Lambda u402D$. Les axes X et Y sont les axes correspondant à $\theta = \pi/2$ et $\theta = 0$, respectivement. Les distances sont en unité de 10^6 cm .

progéniteur qui s'effondrerait en BH. Remarquons que, même sans transition de phase, on trouve une fraction d'hypérons Λ non négligeable ($Y_\Lambda \sim 0.15$ au centre au déclenchement de l'effondrement en BH, à $t = 271 \text{ ms}$ après rebond. Voir aussi la figure 8.5, où on voit que dans le modèle $\Lambda u40$, juste avant la transition de phase, dans des conditions de densité, température et Y_e assez similaires on a $Y_\Lambda \sim 0.17$ au centre). Comme noté en section 8.3.2, les hypérons Λ commencent à apparaître avant la transition de phase à température finie, et leur fraction augmente avec la température.

Enfin, la figure 8.7 montre la luminosité totale des neutrinos L_ν (total des luminosités de ν_e , $\bar{\nu}_e$ et ν_x) autour du moment du pic de flux neutrinique. Le modèle $\Lambda WW40$ montre une luminosité maximum de $5.10^{54} \text{ erg.s}^{-1}$, et en comparaison le modèle $lsWW40$ a un maximum de $1.10^{54} \text{ erg.s}^{-1}$. Notons aussi que dans le modèle $\Lambda WW40$, le pic de flux neutrinique est plus long, à cause de la contraction rapide de la PNS. Après le pic, la luminosité de $\Lambda WW40$ reste plus grande que celle de $lsWW40$ jusqu'à la formation du trou noir.

8.5 Résultats en symétrie axiale

Ces résultats sont issus de simulations avec le progéniteur u40 et avec 660 (r) $\times$ 32 (θ) points. Deux EoS ont été utilisées, LS220 (modèle lsu402D) et LS220+ Λ (modèle Λ u402D). Ces résultats sont dans l'article en préparation [Peres et al. \(2013b\)](#).

Un profil de rotation différentiel a été ajouté aux données initiales. Suivant la prescription de [Dimmelmeyer et al. \(2008\)](#), on définit le moment cinétique spécifique comme

$$j = A^2(\Omega_{c,i} - \Omega) , \quad (8.2)$$

où le premier paramètre A détermine le degré de rotation différentielle (plus A est petit plus la rotation est différentielle) et le deuxième paramètre $\Omega_{c,i}$ est la vitesse angulaire initiale, au centre. Dans mes simulations, j'ai utilisé $A = 10^7$ cm avec une vitesse angulaire correspondant à un rapport entre énergie de rotation et énergie gravitationnelle du progéniteur de 0.04%. Cette configuration correspond à une petite énergie de rotation, mais fortement différentielle.

8.5.1 Convection

En axisymétrie, la phase d'effondrement est peu changée, car c'est essentiellement une chute libre. Après le rebond, la convection dans la PNS survient naturellement du fait de la présence d'un gradient d'entropie (et d'abondance leptonique) négatif (voir l'équation (3.1)). Le chauffage étant absent dans mes simulations, il n'y a pas de zone de gain et à fortiori pas de convection dans la zone de gain (dans la zone entre la PNS et le choc, le gradient d'entropie est positif). L'absence de chauffage, ainsi que la symétrie équatoriale font qu'il n'y a pas non plus de SASI (voir la section 3.1).

La figure 8.8 montre la convection dans la PNS peu avant l'effondrement en trou noir, pour le modèle Λ u402D. Les cellules de convection sont matérialisées par la vitesse v_θ (à droite) et par la direction du vecteur vitesse (flèches). On voit également la limite de la PNS en jaune/orange. La séparation abrupte entre le rouge et le vert marque le très fort gradient de densité qui existe entre la PNS et le reste du fluide dans les modèles avec Λ .

8.5.2 Adoucissement de la transition de phase

La figure 8.9 compare la densité centrale en fonction du temps pour les modèles Λ u40 et Λ u402D. Le seul changement est donc le passage à l'axisymétrie. On constate, d'une part que le modèle 2D met plus de temps à s'effondrer et d'autre part que la transition de phase est adoucie. En effet la pente de la courbe de densité en fonction du temps est significativement plus petite en 2D qu'en 1D.

Une explication possible à ces deux phénomènes serait la convection, présente en 2D mais absente des simulations en symétrie sphérique. La convection crée des inhomogénéités et des surdensités, par endroits. On peut donc imaginer que la transition de phase s'enclenche au niveau d'une surdensité, proche du centre. Le reste de la PNS

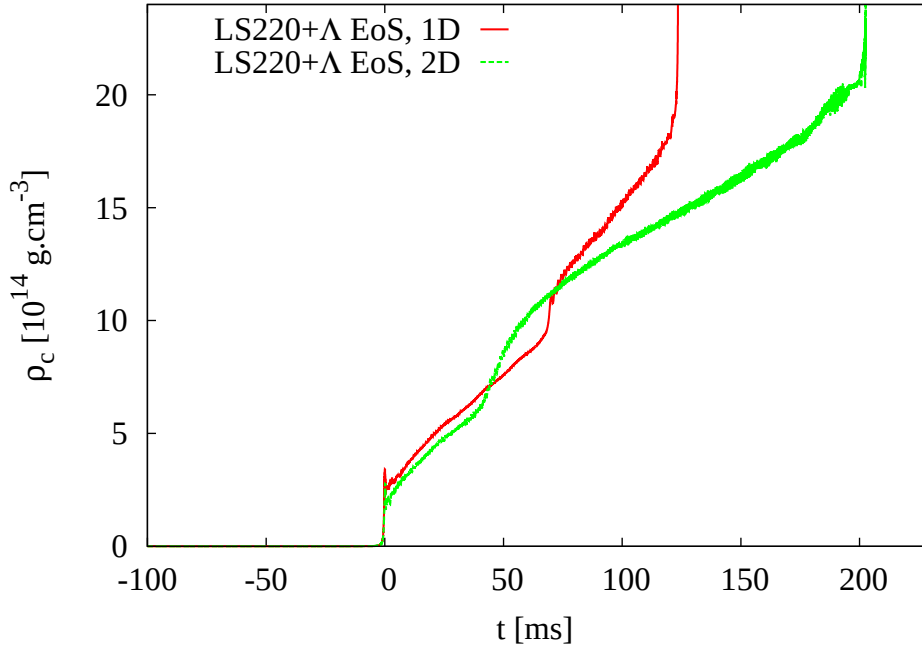


FIGURE 8.9 – Densité centrale en fonction du temps, pour les modèles Λ u40 et Λ u402D. On voit que la pente de cette courbe au moment de la transition de phase est plus petite pour le modèle 2D.

met alors du temps à atteindre à son tour les conditions pour enclencher la transition de phase. Dans ce cas, il est envisageable que la réponse de la PNS à la transition de phase ressemble moins à une chute libre, puisque les zones où celle-ci a eu lieu vont perdre de la pression, se contracter mais finalement se heurter aux zones où celle-ci ne s’est pas encore déclenchée.

Il serait intéressant, dans un travail à venir, d’étudier si cet adoucissement de la transition de phase est systématique, en variant les progéniteurs, les profils de rotation et également les transitions de phases (par exemple, transition vers la matière étrange comme ici ou transition vers la matière de quarks). Une conséquence possible, si cet effet est systématique, serait que le choc lancé par la transition de phase vers la matière de quarks de [Sagert *et al.* \(2009\)](#), proposé comme mécanisme d’explosion (voir section 3.4.1) pourrait être moins fort dans une simulation à 2D que dans leurs simulations à 1D. Ce choc moins fort pourrait donc plus difficilement engendrer l’explosion.

8.5.3 Extraction d’ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont présentées en figure 8.10. On voit d’une part le signal en fonction du temps et d’autre part la distribution spectrale d’énergie en fonction de la fréquence, pour les modèles Λ u402D comparé à la référence lsu402D.

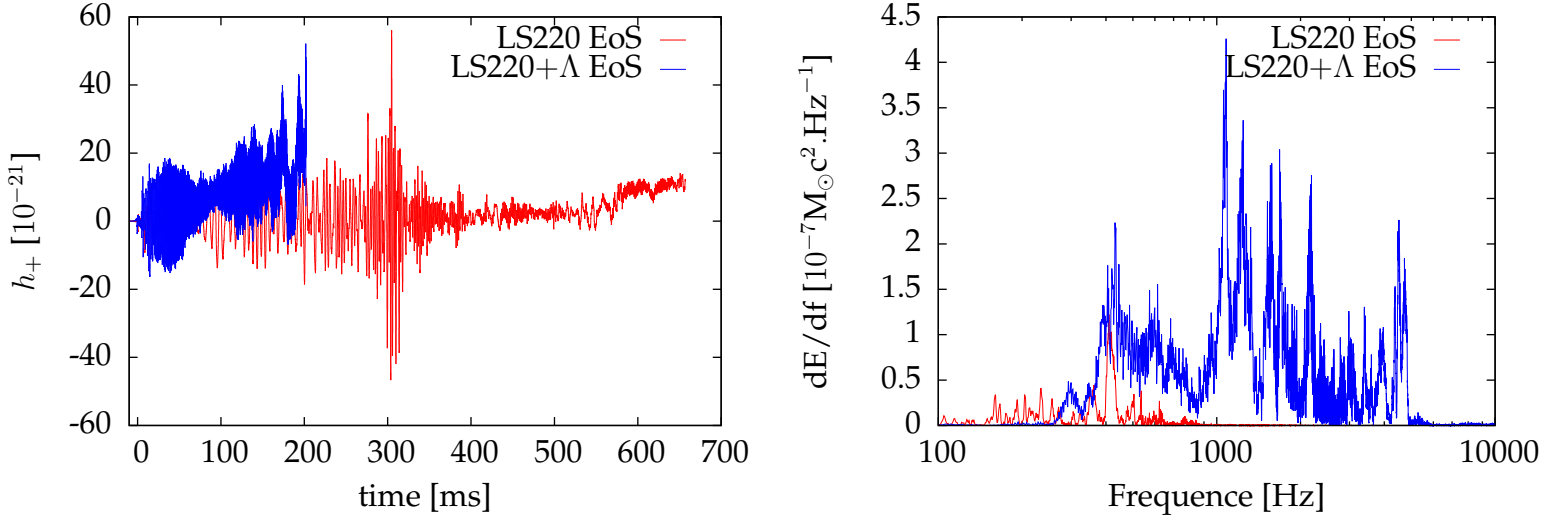


FIGURE 8.10 – Signal d’onde gravitationnelles, à gauche, et énergie par unité de fréquence, à droite.

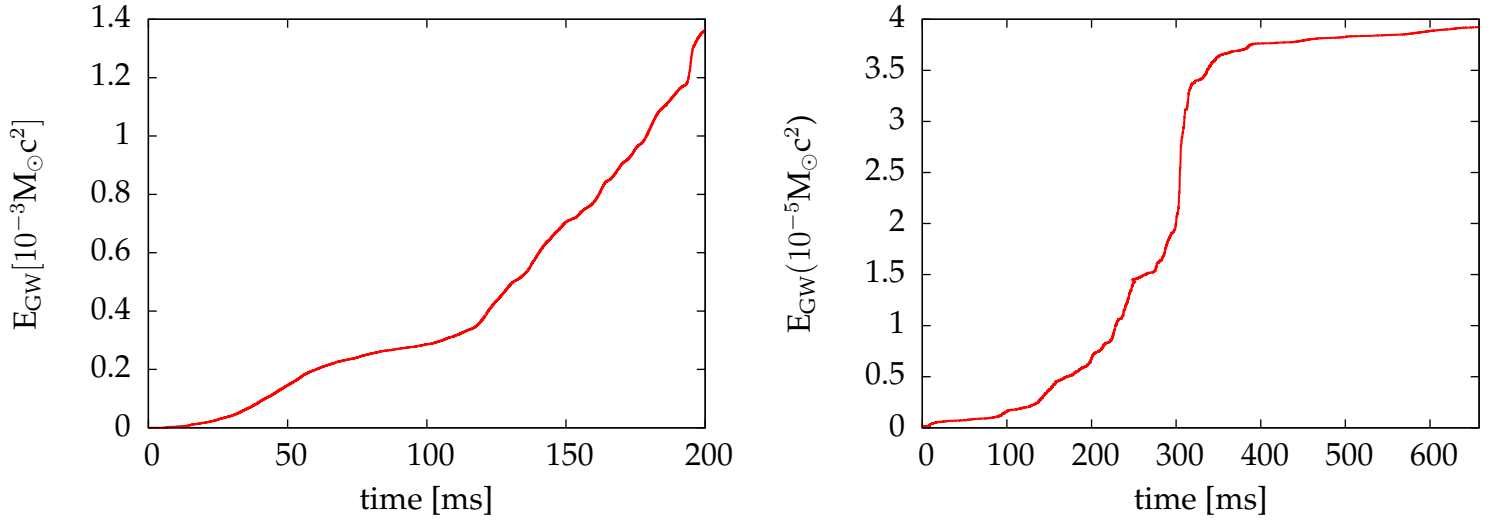


FIGURE 8.11 – Énergie totale cumulée émise en ondes gravitationnelles, pour les modèles lsu402D à gauche, et Λ u402D, à droite.

Le signal en fonction du temps est calculé par la formule

$$h(t) = 8.8524 \times 10^{-21} \frac{A_{20}^{E2}(t)}{10^3 \text{ cm}} \frac{10 \text{ kpc}}{r}, \quad (8.3)$$

voir par exemple [Dimmelmeier et al. \(2008\)](#). Pour la figure 8.10, on place l'observateur à 10 kpc dans le plan équatorial. Le signal $A_{20}^{E2}(t)$ est calculé par COCONUT par la formule du quadrupôle exposée en section 4.5. Étant donné la symétrie axiale, seule la polarisation + des ondes gravitationnelles est présente.

La distribution spectrale d'énergie est calculée par la formule

$$\frac{dE}{df} = \frac{c}{16\pi G M_\odot} (2\pi f)^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i f t} A_{20}^{E2}(t) dt \right|^2 \quad (8.4)$$

(voir par exemple [Müller et al. \(2012c\)](#)). f est la fréquence.

On constate que le modèle Λ u402D émet considérablement plus d'ondes gravitationnelles que le modèle lsu402D, et qu'il excite des fréquences nettement plus élevées que le modèle lsu402D.

On peut interpréter ce résultat comme suit : la PNS formée dans le modèle Λ u402D est nettement plus petite. Les fréquences excitées sont fonction du rayon de la PNS (le rayon détermine la longueur d'onde), et donc une PNS plus petite rayonne à des fréquences plus élevées.

D'autre part, l'énergie totale cumulée émise en ondes gravitationnelles ² peut se calculer comme

$$E_{GW} = \frac{c}{32\pi G M_\odot} \int \left(\frac{dA_{20}^{E2}(t)}{dt} \right)^2 dt, \quad (8.5)$$

(par exemple [Müller et al. \(2012c\)](#)). La figure 8.11 montre l'énergie totale cumulée émise en ondes gravitationnelles en fonction du temps, calculée par COCONUT (la formation du trou noir a été enlevée). On note une différence de presque deux ordres de grandeurs entre les modèles lsu402D et Λ u402D. On note également que beaucoup d'énergie ($\sim 3 \times 10^{-4} M_\odot c^2$) est émise aux environs de 50 ms, ce qui correspond à la transition de phase. Ce résultat plaide en faveur de la détectabilité de la transition de phase dans un signal en ondes gravitationnelles, résultat qui sera à confirmer par une simulation plus élaborée.

Enfin, remarquons que les simulations en axisymétrie présentées ici ont un nombre de points en θ peu important (toutes ont 32 points en θ). Les résultats de cette section sont donc à confirmer avec un plus grand nombre de points en θ . En effet, la convection (source d'ondes gravitationnelles) est très fortement dépendante de la grille hydrodynamique utilisée, surtout quand la grille n'est pas fine. Rappelons également que la méthode de flux utilisée (HLLC) est très diffusive, et donc pas la plus appropriée pour rendre compte de la convection. Notons aussi qu'une extraction complète des ondes

2. Rappelons que cette énergie est calculée à postériori, et n'est pas perdue pendant une simulation comme elle devrait, puisque mes simulations sont faites dans l'approximation conformément plate.

gravitationnelles a été implémentée dans COCONUT selon le travail de [Cordero-Carrión *et al.* \(2012\)](#). Cette méthode (plus coûteuse en temps de calcul que la formule du quadrapôle) pourra être utilisée pour vérifier les résultats, même si on ne s'attend pas à beaucoup d'écart quantitatif entre l'extraction complète et la formule du quadrapôle. En effet, un écart important est plutôt attendu à partir de la formation du trou noir.

Quatrième partie

Transport des neutrinos : équation de Boltzmann

Chapitre 9

Formulation de l'équation de Boltzmann

Sommaire

9.1 L'équation de Boltzmann non relativiste	116
9.1.1 Utilité de l'équation de Boltzmann	116
9.1.2 Physique, astrophysique et équation de Boltzmann	117
9.1.3 Limites de l'équation de Boltzmann	117
9.2 Théorie cinétique relativiste : cadre mathématique	117
9.2.1 Fibré tangent	117
9.2.2 Coquille de masse	118
9.2.3 Espace des phases	118
9.3 La fonction de distribution	119
9.3.1 Définition avec une moyenne d'ensemble	119
9.3.2 Définition avec le nombre de particules	119
9.3.3 Caractère scalaire de la fonction de distribution	119
9.4 Éléments de volume invariants	120
9.4.1 Tenseur de Levi-Civita	120
9.4.2 Éléments de volume	120
9.5 Formulation de l'équation de Boltzmann	122
9.5.1 Opérateur de Liouville	122
9.5.2 Équation de Boltzmann	123

It is more important to have beauty in one's equation than to have them fit experiment.

Paul Dirac

Ce chapitre présente une brève introduction à l'immense richesse de l'équation de Boltzmann sous toutes ses formes, puis une dérivation de l'équation de Boltzmann en relativité générale, partant de la définition de la fonction de distribution et d'éléments de volumes invariants.

9.1 L'équation de Boltzmann non relativiste

Ludwig Boltzmann établit en 1872 l'équation qui porte son nom dans le cadre d'un problème bien précis : des sphères dures (indéformables) en mouvement dans une boîte de volume fini. Ce travail pionnier engendra la physique statistique moderne (appelée aussi, indifféremment, théorie cinétique).

9.1.1 Utilité de l'équation de Boltzmann

Du point de vue de la représentation physique (par exemple, dans une simulation numérique), l'équation de Boltzmann est un intermédiaire entre le fluide et le N-corps.

Dans la représentation à N-corps, on a un petit nombre de particules, et on calcule, en principe, les interactions entre chacune d'elles. Si le nombre de particules est très grand, un traitement statistique devient possible (et du point de vue du temps de calcul dans une simulation, nécessaire). On résout alors une équation telle que l'équation de Boltzmann. Par exemple, les étoiles dans un amas globulaire sont assez nombreuses pour un traitement statistique, et il existe donc des simulations de la dynamique d'amas globulaires par la résolution d'une équation de Boltzmann.

Dans la représentation fluide, on ne tient pas compte des collisions entre les différents éléments du fluide. On suppose simplement qu'elles existent et qu'elles sont assez nombreuses pour amener les constituants à l'équilibre thermodynamique. Il est alors possible de définir des quantités telles que température, pression, etc. Les équations de dynamique sont les équations d'Euler (ou de Naviers–Stokes) et sont considérablement moins exigeantes en temps de calcul que l'équation de Boltzmann.

Les neutrinos dans les supernovas sont bien en équilibre avec le fluide dans les régions les plus internes de la proto-étoile à neutrons. En principe, un traitement fluide est possible dans ces régions. Mais plus loin, à mesure que la densité et la température diminuent, l'opacité des neutrinos chute et ils ne sont plus en équilibre avec le fluide. Leur devenir dépend du détail de leurs interactions avec le reste de la matière, qu'il faut donc calculer. Pour cette raison un traitement détaillé est nécessaire, et il faut donc résoudre une équation de Boltzmann.

9.1.2 Physique, astrophysique et équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann est utilisée dans le transfert radiatif de photons, par exemple pour la modélisation de la couronne solaire, de la formation de raies d'absorption dans les étoiles, des jets d'étoiles jeunes, du milieu interstellaire, de la formation de raies d'émission et d'absorption dans les supernovas, ...

Dans certains cas, plus rares, la particule transportée n'est pas un photon : c'est le cas des simulation des neutrons dans les tokamaks, des collisions d'ions lourds ou des neutrinos dans les disques d'accrétion autour d'un trou noir ou dans les supernovas.

Pour un aperçu de la versatilité et de l'immense richesse de l'équation de Boltzmann, voir Villani (2002).

9.1.3 Limites de l'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann non relativiste peut s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{dp^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p^i} = \mathcal{C}[f] . \quad (9.1)$$

Parmi les limites de cette équation, utiles dans le cadre de l'étude des neutrinos dans les supernovas et toujours valables en relativité générale, on peut citer

- Les forces que l'on peut considérer sont soit à portée infinie soit à portée nulle. Le terme dp^i/dt englobe les forces à portée infinie (principalement la gravitation et les forces électromagnétiques) tandis que le terme de collision englobe les forces à portée nulle (qui entrent donc en considération uniquement lors de collisions).
- Le terme de collisions ne prend en compte que des collisions à deux corps (collisions entre un neutrino et une autre particule). Ces deux limites viennent du fait que f est une fonction de distribution à une particule (le neutrino). Dans les supernovas, si les interactions à trois corps deviennent non négligeables, il est fort probable que le régime fluide soit déjà atteint.
- L'équation de Boltzmann transporte des particules, et ne peut pas rendre compte de phénomènes ondulatoires comme des interférences. Par exemple, les oscillations collectives des neutrinos constituent un phénomène ondulatoire, qu'il faut simuler en plus de l'équation de Boltzmann si on veut les prendre en compte.

9.2 Théorie cinétique relativiste : cadre mathématique

9.2.1 Fibré tangent

L'espace-temps, noté X , est une variété riemannienne de dimension 4, à laquelle on associe la métrique $g_{\mu\nu}$. Un point $x \in X$ a pour coordonnées locales sur cet espace x^μ .

On considère une particule de masse nulle soumise à un champ de gravitation. Introduisons également le paramètre affine¹ λ , avec lequel on peut formuler les équations des géodésiques suivantes

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu, \quad (9.2)$$

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\rho\nu} p^\rho p^\nu, \quad (9.3)$$

où les $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ sont les symboles de Christoffel, et on identifie p^μ à la 4-impulsion (Stewart (1971)). On définit ensuite T_X comme l'espace tangent à X au point $x \in X$. Le quadri-vecteur p , de composantes p^μ , appartient à T_X . Il vient alors la définition de T , le fibré tangent à l'espace-temps,

$$T = \{(x, p) : x \in X, p \in T_X\}. \quad (9.4)$$

9.2.2 Coquille de masse

La quadri-impulsion p^μ définit un quadrivecteur. Mais physiquement, ses quatre composantes ne sont pas indépendantes, elles sont liées par la condition de coquille de masse

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2, \quad (9.5)$$

dans un cas général. Dans le cas des neutrinos, la masse de la particule radiative est négligeable : on est dans le cas ultrarelativiste où $\epsilon \gg m$, avec ϵ l'énergie du neutrino.

9.2.3 Espace des phases

L'espace des phases correspond à un sous-ensemble de T . On impose que p soit dirigé vers le futur (Stewart (1971)) pour que la théorie cinétique prenne un sens physique en termes de propagation de particules. Certains auteurs (Lindquist (1966)), s'arrêtent là et considèrent donc un espace des phases à 8 dimensions, avec une fonction de distribution $F(x^\mu, p^\mu)$. Physiquement, la fonction de distribution n'a un sens que sur la coquille de masse. On peut donc se restreindre à celle-ci directement dans la définition de l'espace des phases : avec la contrainte supplémentaire que p est de genre lumière, ce vecteur n'a plus que 3 dimensions indépendantes. L'espace des phases a donc 7 dimensions et on peut écrire une fonction de distribution comme $f(t, x^i, p^i)$. Les deux représentations étant équivalentes, on a forcément $F = f$ sur la coquille de masse.

1. Pour une particule massive, λ est relié à τ , le temps propre, par $\lambda = \tau/m$.

9.3 La fonction de distribution

9.3.1 Définition avec une moyenne d'ensemble

Pour définir la fonction de distribution dans le contexte d'un problème relativiste, il est possible, comme [Cardall & Mezzacappa \(2003\)](#), [Debbasch & van Leeuwen \(2009\)](#) ou encore [Ehlers \(1971\)](#), de faire appel à une moyenne d'ensemble, par analogie avec la physique statistique non relativiste.

Définissons tout d'abord la probabilité qu'une particule soit dans un élément de volume invariant d'espace des phases $d^3V d^3\Pi$ (d^3V représentant un élément de volume invariant sur l'espace-temps et $d^3\Pi$ représentant un élément de volume invariant sur l'espace des impulsions)² comme étant $D d^3V d^3\Pi$. La construction de ces éléments de volume est faite en section 9.4. Le système est dans un état microscopique quelconque, et une égalité est définie seulement sur les états macrophysiques. Deux systèmes sont donc équivalents si leurs états macrophysiques sont les mêmes, leur états microphysiques pouvant être différents. Cette définition de l'égalité entre dans la formulation de la fonction de distribution sous la forme d'une moyenne d'ensemble,

$$f(t, x^i, p^i) d^3V d^3\Pi = \langle D \rangle d^3V d^3\Pi, \quad (9.6)$$

de sorte que $f(t, x^i, p^i) = \langle D \rangle$.

9.3.2 Définition avec le nombre de particules

Considérons un élément de volume d'espace-temps d^3V autour de x , à temps coordonnée constant³. Considérons également toutes les particules qui ont une impulsion p à $d^3\Pi$ près. Le nombre de particules dN est alors proportionnel à l'élément d'espace des phases $d^3V d^3\Pi$. Le coefficient de proportionnalité est la fonction de distribution.

$$dN = f(t, x^i, p^i) d^3V d^3\Pi, \quad (9.7)$$

([Stewart \(1971\)](#); [Lindquist \(1966\)](#)). Puisque dN est un scalaire, on veut construire un élément de volume d'espace des phases $d^3V d^3\Pi$ qui soit également scalaire. C'est ce qui est fait dans la section 9.4. Il en découle naturellement, vu l'équation (9.7), que f est un scalaire.

9.3.3 Caractère scalaire de la fonction de distribution

En relativité, la fonction de distribution est un invariant de Lorentz, ou scalaire. Comme dit en section 9.3.2, le caractère scalaire de f peut se déduire directement de la définition du nombre de particules ([Stewart \(1971\)](#); [Lindquist \(1966\)](#)).

2. qui se réduisent à d^3x et d^3p , respectivement, dans le cas non relativiste.

3. Le choix du temps coordonnée constant est justifié en section 9.4. Un autre choix serait possible et ne changerait pas la discussion.

On peut également montrer que la moyenne d'ensemble préserve le caractère scalaire de la fonction de distribution (Debbasch *et al.* (2001)), ce qui valide l'expression (9.6) dans un cadre relativiste.

9.4 Éléments de volume invariants

9.4.1 Tenseur de Levi-Civita

On définit le symbole complètement antisymétrique $[\alpha, \beta, \mu, \nu]$ comme (voir Gourgoulhon (2010))

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta, \mu, \nu] &= 0 \quad \text{si au moins deux indices sont égaux} \\ &= +1 \quad \text{pour un nombre pair de permutations partant de } [0, 1, 2, 3] \\ &= -1 \quad \text{pour un nombre impair de permutations partant de } [0, 1, 2, 3] \end{aligned} \quad (9.8)$$

Le symbole antisymétrique ne définit pas un tenseur ; par contre, on peut définir

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}[\alpha, \beta, \mu, \nu], \quad (9.9)$$

où $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$, le tenseur de Levi-Civita, a bien les propriétés d'un tenseur quatre fois covariant (voir Debbasch & van Leeuwen (2009), Gourgoulhon (2010)).

9.4.2 Éléments de volume

9.4.2.1 Sur l'espace temps

Les éléments de volume invariants peuvent se construire à l'aide du tenseur de Levi-Civita, à l'aide du produit extérieur.

Un élément de volume invariant à quatre dimensions est (voir Gourgoulhon (2010), Debbasch & van Leeuwen (2009))

$$d^4V = \frac{1}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (9.10)$$

ou encore,

$$d^4x = \frac{1}{4!} [\alpha, \beta, \mu, \nu] dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (9.11)$$

ce qui implique $d^4V = \sqrt{-g}d^4x$.

De la même façon, on peut construire un élément d'hypersurface de dimension trois comme

$$d^3\Sigma_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (9.12)$$

Considérons une hypersurface de genre espace Σ , correspondant à un temps coordonnée constant. En effet, on veut dans l'équation finale de ce chapitre séparer le temps des autres variables. De plus, les équations manipulées dans le chapitre suivant (chapitre 10) le sont dans le cadre du formalisme $3 + 1$. Les hypersurfaces Σ sont donc aussi celles décrites en section 4.2. En particulier, la normale à Σ est $\vec{n} = \vec{e}_0$. Notons que cette dérivation, formellement, serait donc à adapter si on voulait travailler dans un autre formalisme que le $3 + 1$. De plus, étant donné qu'on travaille dans l'espace des phase, le formalisme est en quelque sorte " $6 + 1$ ".

Si le temps est constant, alors $dx^0 = 0$, et donc

$$d^3\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \quad (9.13)$$

où on a besoin du tenseur de Levi-Civita tridimensionnel. Celui-ci est lié à la normale à $d^3\Sigma_\mu$ sur laquelle on veut calculer un élément d'hypersurface.

$$\epsilon_{ijk} = n^\mu \epsilon_{\mu ijk}. \quad (9.14)$$

(Gourgoulhon (2010)). Un élément de volume non orienté peut s'écrire

$$d^3V = \frac{1}{3!}n^\mu \epsilon_{\mu ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \sqrt{-g}d^3x, \quad (9.15)$$

et avec l'élément de volume d^3x que l'on peut expliciter comme

$$d^3x = \frac{1}{3!}[i, j, k]dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (9.16)$$

Pour retrouver un élément d'hypersurface orienté sur l'espace-temps (à temps coordonnée constant), il faut orienter par la normale à l'hypersurface, n_μ

$$d^3\Sigma_\mu = -n_\mu \sqrt{-g}d^3x, \quad (9.17)$$

où on choisit le signe $-$ pour garder un volume positif.

9.4.2.2 Sur l'espace des impulsions

Construisons une hypersurface tridimensionnelle sur l'espace des impulsions,

$$d^3S_\mu = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dp^\nu \wedge dp^\rho \wedge dp^\sigma. \quad (9.18)$$

On peut ici s'affranchir de dp^0 , connaissant la condition de coquille de masse $p^\mu p_\mu = 0$, ou de manière équivalente

$$p_\mu dp^\mu = 0, \quad (9.19)$$

$$p_0 dp^0 + p_i dp^i = 0, \quad (9.20)$$

et en insérant $dp^0 = -\frac{p_i}{p_0}dp^i$ dans 9.18, on obtient

$$d^3S_\mu = \frac{p_\mu}{-p_0}\sqrt{-g}d^3p, \quad (9.21)$$

avec

$$d^3p = \frac{1}{3!}[i, j, k]dp^i \wedge dp^j \wedge dp^k = dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3. \quad (9.22)$$

et, de manière équivalente,

$$d^3S^\mu = \frac{p^\mu}{-p_0}\sqrt{-g}d^3p. \quad (9.23)$$

Par analogie avec l'équation (9.15), un élément de volume d'espace des phases non orienté est

$$d^3\Pi = \frac{1}{-p_0}\sqrt{-g}d^3p. \quad (9.24)$$

9.4.2.3 Élément de volume invariant à six dimensions

On peut construire un élément de volume à six dimensions par le produit extérieur des volumes non orientés

$$d^6\omega = d^3V \wedge d^3\Pi, \quad (9.25)$$

et on voit sur les définitions des éléments de volume orientés, équations (9.17) et (9.23), qu'un élément de volume invariant de l'espace des phases à six dimensions a en plus un terme $(-n_\mu p^\mu)$

$$d^6\Omega = (-n_\mu p^\mu)d^3V d^3\Pi, \quad (9.26)$$

où $d^6\Omega$ est bien un élément de volume invariant d'espace des phases à six dimensions (Stewart (1971); Lindquist (1966); Debbasch & van Leeuwen (2009)).

9.5 Formulation de l'équation de Boltzmann

9.5.1 Opérateur de Liouville

Le nombre de particules est défini comme l'intégration de la fonction de distribution sur un élément de volume invariant de l'espace des phases,

$$N(t) = \int f(t, x^i, p^i)d^6\Omega, \quad (9.27)$$

ou, en termes de différentielles,

$$dN = f(t, x^i, p^i)d^6\Omega. \quad (9.28)$$

Calculons alors la variation du nombre de particules le long d'une ligne d'univers paramétrée par λ ,

$$\frac{d(dN)}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda} d^6\Omega, \quad (9.29)$$

$$\frac{d(dN)}{d\lambda} = \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^i} \right) d^6\Omega, \quad (9.30)$$

(Stewart (1971); Lindquist (1966)). Le terme entre parenthèses est l'opérateur de Liouville $L[f]$. Explicitement, on peut donc écrire

$$L[f] = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^i}. \quad (9.31)$$

ou encore, à l'aide des équations des géodésiques (Eqs. (9.2) et (9.3))

$$L[f] = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\rho\nu} p^\rho p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i}. \quad (9.32)$$

9.5.2 Équation de Boltzmann

L'évolution au cours du temps du nombre de particules est par définition l'intégrale de l'opérateur de collision sur un volume invariant de l'espace des phases

$$\frac{dN}{d\lambda} = \int C[f] d^6\Omega, \quad (9.33)$$

ou encore

$$\frac{d(dN)}{d\lambda} = C[f] d^6\Omega. \quad (9.34)$$

En comparant les équations (9.30) et (9.34), on trouve l'égalité entre l'opérateur de Liouville et l'opérateur de collision, $L[f] = C[f]$, ce qui est la définition même de l'équation de Boltzmann. De manière explicite, en divisant par $p^0 = \epsilon$, en séparant la dérivée temporelle et en notant $\mathcal{C}[f] = C[f]/\epsilon$, l'équation de Boltzmann $L[f] = C[f]$ prend sa forme finale

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \Gamma^i_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial p^i} = \mathcal{C}[f]. \quad (9.35)$$

Chapitre 10

Adaptation aux neutrinos dans les supernovas

Sommaire

10.1 Formalisme des tétrades	126
10.1.1 Matrice de transformation de tétrade	126
10.1.2 Dérivées et connexion	127
10.1.3 Lien entre les différents coefficients de connexion	128
10.2 Calcul des coefficients de rotation de Ricci en $3 + 1$	128
10.2.1 Propriétés des coefficients de rotation de Ricci	129
10.2.2 La transformation de tétrade en $3 + 1$	130
10.2.3 Coefficients de rotation de Ricci sans dérivée temporelle	131
10.2.4 Approximation conformément plate	132
10.3 Forme finale de l'équation de Boltzmann	133
10.3.1 Dérivées spatiales et temporelles	133
10.3.2 Connexions	134
10.3.3 4-impulsion	134
10.3.4 Jacobien de changement de coordonnées	134
10.3.5 Équation de Boltzmann	135

Dans ce chapitre, je montre comment dériver une équation de Boltzmann adaptée à la résolution du problème des neutrinos dans les supernovas. La principale difficulté par rapport au chapitre précédent vient des différents référentiels naturellement rencontrés. En effet, le terme de collision se calcule dans le référentiel où le fluide est au repos, ce qui conduit à considérer les composantes de la 4-impulsion dans ce référentiel, alors que les dérivées spatiales sont plus naturellement liées aux coordonnées, et donc au référentiel des coordonnées.

Ces référentiels sont présentés en section 4.2, la manière de passer de l'un à l'autre est présentée dans ce chapitre par le formalisme des tétrades, avec un accent particulier sur le calcul des connexions. Enfin, une équation de Boltzmann en formalisme 3 + 1, puis en CFC, est dérivée.

Dans ce chapitre et les suivants, les variables liées au référentiel où le fluide (LF) est au repos sont notées avec un chapeau ($\hat{\mu}$), celles liées au référentiel des coordonnées (CF) sont notées avec un tilde ($\tilde{\mu}$), et celles liées au référentiel eulérien (EF) sont notées sans signe particulier (μ).

10.1 Formalisme des tétrades

10.1.1 Matrice de transformation de tétrade

La transformation de tétrade (par exemple [Hamilton \(2010\)](#); [Cardall *et al.* \(2005\)](#); [Endeve *et al.* \(2012\)](#)) est le lien entre le CF et le EF. On définit la matrice de transformation de tétrade M avec laquelle se fait le changement de référentiel. Par exemple, pour les vecteurs de base,

$$\vec{\partial}_{\tilde{\mu}} = M^{\nu}_{\tilde{\mu}} \vec{e}_{\nu} , \quad (10.1)$$

et

$$\vec{e}_{\nu} = M^{-1}_{\nu}{}^{\tilde{\mu}} \vec{\partial}_{\tilde{\mu}} . \quad (10.2)$$

M^{-1} s'obtient en inversant la matrice

$$M^{\rho}_{\tilde{\mu}} M^{-1}_{\rho}{}^{\tilde{\nu}} = \delta_{\tilde{\mu}}{}^{\tilde{\nu}} , \quad (10.3)$$

avec $\delta_{\tilde{\mu}}{}^{\tilde{\nu}}$ le delta de Kronecker. M et M^{-1} sont des matrices 4×4 non symétriques, contrairement à la métrique. Une conséquence des équations (10.1) et (10.2) est que la matrice $g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ est reliée à la matrice $\eta_{\mu\nu}$ par la matrice M

$$g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \mathbf{g}(\vec{\partial}_{\tilde{\mu}}, \vec{\partial}_{\tilde{\nu}}) = \mathbf{g}(M^{\rho}_{\tilde{\mu}} \vec{e}_{\rho}, M^{\gamma}_{\tilde{\nu}} \vec{e}_{\gamma}) = M^{\rho}_{\tilde{\mu}} M^{\gamma}_{\tilde{\nu}} \mathbf{g}(\vec{e}_{\rho}, \vec{e}_{\gamma}) = M^{\rho}_{\tilde{\mu}} M^{\gamma}_{\tilde{\nu}} \eta_{\rho\gamma} , \quad (10.4)$$

où la dernière égalité vient du fait que dans le EF, la matrice représentant la métrique est une matrice de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, la base étant orthonormée. Une autre définition usuelle de M , équivalente à la définition par l'équation (10.1), est alors

$$ds^2 = g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} dx^{\tilde{\mu}} dx^{\tilde{\nu}} = \eta_{\rho\gamma} M^{\rho}_{\tilde{\mu}} M^{\gamma}_{\tilde{\nu}} dx^{\tilde{\mu}} dx^{\tilde{\nu}} . \quad (10.5)$$

On dissocie deux transformations, du CF vers le EF et du EF vers le LF. Une matrice M incluant la 3-vitesse du fluide mesurée par l'observateur eulérien (incluant la transformation spéciale de Lorentz), qui transformerait directement du CF au LF et inversement, est également possible. En l'occurrence, avec deux transformations distinctes, toute l'information nécessaire à la construction des matrices M et M^{-1} est contenue dans la métrique.

10.1.2 Dérivées et connexion

On associe à la connexion de Levi-Civita ∇ des coefficients de connexion¹, différents dans le CF et dans le EF.

On peut associer à la base naturelle les vecteurs de base $\vec{\partial}_{\tilde{\mu}}$ et les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{\mu}}} = \partial_{\tilde{\mu}}$. D'autre part, on a la définition usuelle des symboles de Christoffel

$$\nabla_{\vec{\partial}_{\tilde{\nu}}} \vec{\partial}_{\tilde{\mu}} = \Gamma^{\tilde{\rho}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \vec{\partial}_{\tilde{\rho}}. \quad (10.6)$$

La dérivée covariante le long du vecteur de base $\nabla_{\vec{\partial}_{\tilde{\nu}}}$ s'écrit aussi $\nabla_{\tilde{\nu}}$. C'est donc le tilde qui indique que c'est un vecteur de base de la base naturelle. On peut écrire

$$\nabla_{\tilde{\nu}} \vec{\partial}_{\tilde{\mu}} = \Gamma^{\tilde{\rho}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \vec{\partial}_{\tilde{\rho}}. \quad (10.7)$$

La transformation de tétrade de la dérivée partielle définit l'équivalent sur le EF de la dérivée partielle, parfois appelée dérivée dirigée (Hamilton (2010))

$$D_{\mu} = M^{-1}_{\mu}{}^{\tilde{\nu}} \partial_{\tilde{\nu}}, \quad (10.8)$$

et par analogie avec l'équation (10.6), on peut définir sur le EF de nouveaux coefficients de connexion

$$\nabla_{\nu} \vec{e}_{\mu} = \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \vec{e}_{\rho}. \quad (10.9)$$

Les $\bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ sont les coefficients de rotation de Ricci. Avec ceux-ci, la dérivée covariante peut se réécrire

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} = D_{\mu} A^{\nu} + \bar{\Gamma}^{\nu}_{\mu\rho} A^{\rho}, \quad (10.10)$$

où A^{ν} est un vecteur.

1. Dans tout ce chapitre, ∇ est associée à la 4-métrique g . Bien que sa représentation change, la métrique reste la même sur le CF et sur le EF, comme expliqué en section 4.2

10.1.3 Lien entre les différents coefficients de connexion

En combinant les équations (10.2), (10.8) et (10.9),

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{e}_\mu} \vec{e}_\nu &= \nabla_{[M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} \vec{\partial}_{\tilde{\zeta}}]} \left(M^{-1}_\nu \tilde{\kappa} \vec{\partial}_{\tilde{\kappa}} \right), \\
&= M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} \nabla_{\vec{\partial}_{\tilde{\zeta}}} \left(M^{-1}_\nu \tilde{\kappa} \vec{\partial}_{\tilde{\kappa}} \right), \\
&= M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} \left(\frac{\partial M^{-1}_\nu \tilde{\kappa}}{\partial x^{\tilde{\zeta}}} \vec{\partial}_{\tilde{\kappa}} + M^{-1}_\nu \tilde{\kappa} \nabla_{\vec{\partial}_{\tilde{\zeta}}} \vec{\partial}_{\tilde{\kappa}} \right), \\
&= M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} \frac{\partial M^{-1}_\nu \tilde{\kappa}}{\partial x^{\tilde{\zeta}}} \vec{\partial}_{\tilde{\kappa}} + M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} M^{-1}_\nu \tilde{\kappa} \Gamma^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{\kappa} \tilde{\zeta}} \vec{\partial}_{\tilde{\lambda}}, \\
\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \vec{e}_\rho &= M^\rho_{\tilde{\kappa}} M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} \frac{\partial M^{-1}_\nu \tilde{\kappa}}{\partial x^{\tilde{\zeta}}} \vec{e}_\rho + M^\rho_{\tilde{\lambda}} M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} M^{-1}_\nu \tilde{\kappa} \Gamma^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{\kappa} \tilde{\zeta}} \vec{e}_\rho, \tag{10.11}
\end{aligned}$$

et finalement

$$\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = d^\rho_{\mu\nu} + M^\rho_{\tilde{\lambda}} M^{-1}_\mu \tilde{\zeta} M^{-1}_\nu \tilde{\kappa} \Gamma^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{\kappa} \tilde{\zeta}}, \tag{10.12}$$

où l'on a introduit la dérivée de tétrade

$$d^\rho_{\mu\nu} = M^\rho_{\tilde{\kappa}} M^{-1}_\mu \tilde{\lambda} \frac{\partial M^{-1}_\nu \tilde{\kappa}}{\partial x^{\tilde{\lambda}}}, \tag{10.13}$$

ou, de manière équivalente (M et M^{-1} étant inverse l'un de l'autre)

$$d^\rho_{\mu\nu} = -M^{-1}_\mu \tilde{\lambda} M^{-1}_\nu \tilde{\kappa} \frac{\partial M^\rho_{\tilde{\lambda}}}{\partial x^{\tilde{\kappa}}}. \tag{10.14}$$

De la même manière que les symboles de Christoffel ne définissent pas un tenseur, les coefficients de rotation de Ricci ne définissent pas un tenseur et la dérivée de tétrade $d^\rho_{\mu\nu}$ ne définit pas non plus un tenseur. Notons qu'on peut toujours définir

$$d_{\lambda\mu\nu} = \eta_{\lambda\rho} d^\rho_{\mu\nu}, \tag{10.15}$$

et

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \eta_{\lambda\rho} \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}. \tag{10.16}$$

10.2 Calcul des coefficients de rotation de Ricci en $3 + 1$

La formule (10.12) n'est malheureusement pas pratique à utiliser. Le but de cette section est de parvenir à des formules plus facilement utilisables en relativité numérique, dans le cadre du formalisme $3 + 1$. Enfin, la spécification à l'approximation conformément plate (voir la section 4.3) est faite en fin de section.

10.2.1 Propriétés des coefficients de rotation de Ricci

10.2.1.1 Antisymétrie

On calcule la dérivée covariante de la métrique sur le EF

$$\begin{aligned}\nabla_\rho \eta_{\mu\nu} &= \nabla_\rho (\vec{e}_\mu \vec{e}_\nu), \\ &= \vec{e}_\mu \nabla_\rho \vec{e}_\nu + \vec{e}_\nu \nabla_\rho \vec{e}_\mu,\end{aligned}$$

et à l'aide de l'équation (10.9), on obtient

$$\nabla_\rho \eta_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} + \bar{\Gamma}_{\nu\mu\rho}. \quad (10.17)$$

Puisque, sur le EF, la métrique est représentée par une matrice de Minkowski, elle est constante et sa dérivée est nulle². On obtient

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} = -\bar{\Gamma}_{\nu\mu\rho}. \quad (10.18)$$

Les coefficients de rotation de Ricci sont donc antisymétriques par rapport aux deux premiers indices.

10.2.1.2 Condition d'absence de torsion

Avec l'équation (10.12), on peut écrire

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} - d_{\mu\nu\rho} = M^{-1}_\mu{}^{\tilde{\zeta}} M^{-1}_\nu{}^{\tilde{\kappa}} M^{-1}_\rho{}^{\tilde{\lambda}} \Gamma_{\tilde{\zeta}\tilde{\kappa}\tilde{\lambda}}, \quad (10.19)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\rho\nu} = M^{-1}_\mu{}^{\tilde{\zeta}} M^{-1}_\rho{}^{\tilde{\lambda}} M^{-1}_\nu{}^{\tilde{\kappa}} \Gamma_{\tilde{\zeta}\tilde{\kappa}\tilde{\lambda}}. \quad (10.20)$$

Sachant que les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux deux derniers indices, l'équation (10.19) est équivalente à l'équation (10.20). On a donc

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} - d_{\mu\nu\rho} = \bar{\Gamma}_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\rho\nu}. \quad (10.21)$$

C'est une expression de la condition d'absence de torsion de la relativité générale.

10.2.1.3 Formule adaptée aux calculs

Grâce aux équations (10.18) et (10.21), on peut obtenir une formule générale pour le calcul des coefficients de rotation de Ricci,

$$\bar{\Gamma}_{\mu\rho\nu} = d_{\mu\rho\nu} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} - d_{\mu\nu\rho},$$

2. On pourrait formaliser une transformation de tétrade vers une autre base non-constante, mais on se restreint ici au cas où la transformation est vers la base orthonormée.

$$\begin{aligned}
&= d_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\nu\rho} - \bar{\Gamma}_{\nu\mu\rho}, \\
&= d_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\nu\rho} - d_{\nu\mu\rho} - \bar{\Gamma}_{\nu\rho\mu} + d_{\nu\rho\mu}, \\
&= d_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\nu\rho} - d_{\nu\mu\rho} + d_{\nu\rho\mu} + \bar{\Gamma}_{\rho\nu\mu}, \\
&= d_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\nu\rho} - d_{\nu\mu\rho} + d_{\nu\rho\mu} + d_{\rho\nu\mu} - d_{\rho\mu\nu} + \bar{\Gamma}_{\rho\mu\nu}, \\
&= d_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\nu\rho} - d_{\nu\mu\rho} + d_{\nu\rho\mu} + d_{\rho\nu\mu} - d_{\rho\mu\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\rho\nu},
\end{aligned}$$

et finalement,

$$\bar{\Gamma}_{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2} [d_{\mu\rho\nu} - d_{\mu\nu\rho} + d_{\nu\rho\mu} - d_{\nu\mu\rho} + d_{\rho\nu\mu} - d_{\rho\mu\nu}]. \quad (10.22)$$

10.2.2 La transformation de tétrade en 3 + 1

En formalisme 3 + 1, l'espace-temps est découpé en hypersurfaces de genre espace (voir section 4.3). La normale à ces hypersurfaces est le vecteur $\vec{n}$, de genre temps (voir Gourgoulhon (2012)). De plus, la base sur le EF n'a qu'un seul vecteur de base de genre temps, $\vec{e}_0$. D'où le fait que $\vec{n}$ coïncide avec $\vec{e}_0$ (puisque $\vec{n}$ est unitaire et dirigé vers le futur).

D'autre part, $\vec{\partial}_0$ se décompose en 3 + 1 comme

$$\vec{\partial}_0 = \alpha \vec{n} + \vec{\beta}, \quad (10.23)$$

voir également Gourgoulhon (2012). On a donc

$$\vec{\partial}_0 = \alpha \vec{e}_0 + \beta^{\tilde{i}} \vec{\partial}_{\tilde{i}}, \quad (10.24)$$

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{\alpha} \left(\vec{\partial}_0 - \beta^{\tilde{i}} \vec{\partial}_{\tilde{i}} \right). \quad (10.25)$$

Par identification avec

$$\vec{e}_0 = M^{-1}_0{}^{\tilde{\mu}} \vec{\partial}_{\tilde{\mu}}, \quad (10.26)$$

on trouve

$$M^{-1}_0{}^{\tilde{0}} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad M^{-1}_0{}^{\tilde{i}} = -\frac{\beta^{\tilde{i}}}{\alpha}. \quad (10.27)$$

De plus, la formule (10.1) pour les vecteurs de base du CF d'incide i est $\vec{\partial}_{\tilde{i}} = M^{\nu}_{\tilde{i}} \vec{e}_{\nu}$. On voit que les vecteurs $\vec{\partial}_{\tilde{i}}$ sont fonction des $\vec{e}_i$ et de $\vec{e}_0$. Les vecteurs $\vec{\partial}_{\tilde{i}}$ et $\vec{e}_i$ étant tangents aux hypersurfaces Σ , les $\vec{\partial}_{\tilde{i}}$ sont simplement fonctions des $\vec{e}_i$ et sont indépendants de $\vec{e}_0$, ce qui implique que

$$M^0_{\tilde{i}} = 0. \quad (10.28)$$

Sachant que M et M^{-1} sont inverses l'une de l'autre, on peut déduire la forme générale de la matrice de transformation de tétrade en 3 + 1

$$M^{-1}_{\mu}{}^{\tilde{\nu}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}, & 0, & 0, & 0, \\ -\frac{\beta^r}{\alpha}, & & & \\ -\frac{\beta^\theta}{\alpha}, & & M^{-1}_{i\tilde{j}} & \\ -\frac{\beta^\phi}{\alpha}, & & & \end{pmatrix}, \quad (10.29)$$

(voir aussi [Endeve et al. \(2012\)](#)). Ici, μ est l'indice de colonne et $\tilde{\nu}$ est l'indice de ligne.

10.2.3 Coefficients de rotation de Ricci sans dérivée temporelle

Un des avantages d'une formulation 3 + 1 comme celle-ci est d'éviter de calculer des dérivées temporelles, ce qui est particulièrement adapté à la résolution des équations par des méthodes spectrales, faite dans la partie [V](#).

Les coefficients de rotation de Ricci que l'on doit exprimer en 3 + 1 sont ceux qui seront utiles dans l'équation de Boltzmann (voir la section [10.3](#)), c'est à dire $\bar{\Gamma}_{ijk}$, $\bar{\Gamma}_{i00}$, $\bar{\Gamma}_{i0j}$ et $\bar{\Gamma}_{ij0}$ (le calcul de ces termes avec le premier indice en haut étant fait grâce à l'équation [\(10.16\)](#)).

10.2.3.1 $\bar{\Gamma}_{ijk}$

$\bar{\Gamma}_{ijk}$ est calculé par l'application de la formule [\(10.22\)](#). Une conséquence de l'équation [\(10.28\)](#) est que si les coefficients de rotation de Ricci n'ont que des indices spatiaux, alors les dérivées de tétrade d (calculées par la formule [\(10.14\)](#)) n'ont pas de dérivée temporelle.

$$\bar{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2} [d_{ijk} - d_{ikj} + d_{jki} - d_{jik} + d_{kji} - d_{kij}]. \quad (10.30)$$

10.2.3.2 $\bar{\Gamma}_{i00}$

$\bar{\Gamma}_{i00}$ est calculé par l'application de la formule [\(10.22\)](#), qui se réduit à

$$\bar{\Gamma}_{i00} = d_{00i}, \quad (10.31)$$

avec

$$d_{00i} = -\eta_{00} M^{-1}_0{}^{\tilde{\mu}} M^{-1}_{\tilde{i}}{}^{\tilde{\nu}} \frac{\partial M^0_{\tilde{\mu}}}{\partial x^{\tilde{\nu}}}, \quad (10.32)$$

$$d_{00i} = \frac{1}{\alpha} M^{-1}_{\tilde{i}}{}^{\tilde{j}} \frac{\partial \alpha}{\partial x^{\tilde{j}}}. \quad (10.33)$$

10.2.3.3 $\bar{\Gamma}_{i0j}$

$\bar{\Gamma}_{i0j}$ est calculé à l'aide de l'équation (10.9)

$$\bar{\Gamma}_{i0j} = \vec{e}_i \nabla_j \vec{e}_0. \quad (10.34)$$

Cette quantité est, par définition, l'opposé de la courbure extrinsèque (voir Gourgoulhon (2012)), le signe étant conventionnel (cette convention est celle de Gourgoulhon (2012), Cordero-Carrión *et al.* (2009), et l'opposé de Hamilton (2010)).

$$\bar{\Gamma}_{i0j} = -K_{ij}. \quad (10.35)$$

10.2.3.4 $\bar{\Gamma}_{ij0}$

$\bar{\Gamma}_{ij0}$ est calculé par l'application de l'équation (10.21),

$$\bar{\Gamma}_{ij0} = \bar{\Gamma}_{i0j} - d_{i0j} + d_{ij0}. \quad (10.36)$$

Le calcul de d_{i0j} et d_{ij0} requiert une quantité non négligeable d'algèbre supplémentaire, présenté en annexe D, avec également le passage de la convention LORENE au EF et l'expression complète terme par terme en CFC.

Ces termes finissent de montrer que les coefficients de rotation de Ricci peuvent s'obtenir sans avoir besoin de calculer une dérivée temporelle.

10.2.4 Approximation conformément plate

Il reste à exprimer la partie purement spatiale de M et M^{-1} . Le choix de l'orientation des vecteurs de base $\vec{e}_i$ le plus simple, en CFC (voir la section 4.3), est que chaque vecteur de base $\vec{e}_i$ soit aligné avec un vecteur de base $\vec{\partial}_i$ ³. La partie spatiale de la matrice M est alors diagonale. En coordonnées sphériques, on obtient

$$M^{-1}_{\mu}{}^{\tilde{\nu}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}, & 0, & 0, & 0, \\ -\frac{\beta^r}{\alpha}, & \frac{1}{\Psi^2}, & 0, & 0, \\ -\frac{\beta^\theta}{\alpha}, & 0, & \frac{1}{\Psi^2 r}, & 0, \\ -\frac{\beta^\phi}{\alpha}, & 0, & 0, & \frac{1}{\Psi^2 r \sin \theta} \end{pmatrix}, \quad (10.37)$$

3. D'autres choix sont possibles. Un autre choix d'orientation pour $\vec{e}_i$ pourrait, par exemple, être mieux adapté à un autre choix de jauge.

et

$$M^\mu_{\tilde{\nu}} = \begin{pmatrix} \alpha, & \Psi^2 \beta^r, & \Psi^2 r \beta^\theta, & \Psi^2 r \sin \theta \beta^\phi, \\ 0, & \Psi^2, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & \Psi^2 r, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & \Psi^2 r \sin \theta, \end{pmatrix}. \quad (10.38)$$

L'approximation conformément plate simplifie légèrement les calculs puisque chaque dérivée dirigée spatiale correspond à une seule dérivée partielle. Hors CFC, il faudrait faire une multiplication matricielle, notamment pour la transformation des dérivées partielles, Eq. (10.42) et pour le calcul des différents $d^\rho_{\mu\nu}$, Eq. (10.14).

10.3 Forme finale de l'équation de Boltzmann

Dans l'équation (9.35), toutes les quantités appartiennent au CF. Le but est ici de reformuler cette équation avec une impulsion $p^{\hat{\mu}}$ appartenant au LF et une position $x^{\tilde{i}}$ appartenant au CF. Mon choix a été de tout exprimer dans le EF.

10.3.1 Dérivées spatiales et temporelles

Les dérivées partielles sont à remplacer par leurs équivalents eulériens, les dérivées dirigées, en appliquant la formule (10.8),

$$D_t = M^{-1}_0{}^{\tilde{\mu}} \partial_{\tilde{\mu}}. \quad (10.39)$$

En $3 + 1$, grâce à l'équation (10.27), le remplacement à faire est

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta^{\tilde{i}}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{i}}}. \quad (10.40)$$

Pour les dérivées spatiales,

$$D_i = M^{-1}_i{}^{\tilde{\mu}} \partial_{\tilde{\mu}}, \quad (10.41)$$

avec $M^{-1}_i{}^0 = 0$ en $3 + 1$,

$$D_i = M^{-1}_i{}^{\tilde{j}} \partial_{\tilde{j}}. \quad (10.42)$$

Si on spécialise cette expression à l'approximation conformément plate, la seule opération à effectuer est une division par Ψ^2 ,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{i}}} \rightarrow \frac{1}{\Psi^2} \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{i}}}. \quad (10.43)$$

10.3.2 Connexions

L'équation de Boltzmann sur le CF implique des symboles de Christoffel. Les connexions à utiliser sur le EF sont les coefficients de rotation de Ricci, détaillés en section 10.1. On rappelle ici qu'aucune de ces connexions ne définit un tenseur, le passage d'un référentiel à l'autre pour les connexions est donc non trivial (voir Eq. (10.12)).

$$\Gamma^{\tilde{i}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \rightarrow \bar{\Gamma}^i_{\mu\nu} . \quad (10.44)$$

10.3.3 4-impulsion

On considère naturellement la 4-impulsion par ses composantes dans le LF et la transformation du LF au EF est une transformation spéciale de Lorentz (voir section 4.2.3)

$$p^\nu = \Lambda^\nu_{\hat{\mu}}(v^i)p^{\hat{\mu}} . \quad (10.45)$$

Les dérivées partielles dans l'espace des impulsions doivent aussi être transformées par Λ^{-1} . Dans la partie V, je n'ai considéré que des configurations statiques où $v^i = 0$, je laisse donc dans l'équation de Boltzmann finale les transformations spéciales de Lorentz sous-entendues.

10.3.4 Jacobien de changement de coordonnées

Dans l'espace-temps, la matrice à utiliser pour le changement de coordonnées est la matrice Q (voir l'annexe D). Dans le cas où on utilise des coordonnées cartésiennes, Q est l'identité. Dans le cas où on utilise des coordonnées sphériques, Q est la matrice usuelle de changement de coordonnées de cartésiennes vers sphériques, et est donnée par l'équation (D.3).

Dans l'espace des impulsions, le Jacobien de changement de coordonnées entre la base cartésienne $\epsilon(\cos \Theta, \sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi)$ et la base sphérique (ϵ, Θ, Φ) est

$$J^i_j = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} \epsilon \cos \Theta, & \epsilon \sin \Theta \cos \Phi, & \epsilon \sin \Theta \sin \Phi, \\ -\sin \Theta, & \cos \Theta \cos \Phi, & \cos \Theta \sin \Phi, \\ 0, & -\frac{\sin \Phi}{\sin \Theta}, & \frac{\cos \Phi}{\sin \Theta}, \end{pmatrix} , \quad (10.46)$$

(voir par exemple Endeve *et al.* (2012)). Ici, j est l'indice de colonne et i est l'indice de ligne.

10.3.5 Équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann pour un observateur eulérien est donc

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{p^i}{\Psi^2 \epsilon} - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) Q^k{}_i \frac{\partial f}{\partial x^k} - \bar{\Gamma}^j{}_{\mu\nu} p^\mu p^\nu J^i{}_j \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial p^i} = \mathcal{C}[f], \quad (10.47)$$

équation cohérente avec, par exemple, [Cardall *et al.* \(2005\)](#).

Cinquième partie

Résolution de l'équation de Boltzmann par des méthodes spectrales

Tout se passe comme prévu. Ca n'est pas normal.

Terry Pratchett

Les simulations du transport des neutrinos dans les supernovas sont compliquées car l'équation de Boltzmann est très exigeante en temps de calcul. En effet, elle demande une représentation précise et dynamique de l'espace des phases complet (6D + le temps), ce qui, couplé à l'hydrodynamique et à la relativité générale, demande un temps de calcul pour l'instant prohibitif.

Parmi les schémas existant en différences finies, [Liebendörfer et al. \(2004\)](#) ont implémenté une représentation précise de l'équation de Boltzmann en symétrie sphérique et en relativité générale. Pour une hydrodynamique multi-dimensionnelle, plusieurs approximations ont été proposées. IDSA (pour *isotropic diffusion source approximation*), proposé par [Liebendörfer et al. \(2009\)](#), traite les neutrinos séparément en régime opaque et en régime transparent. Une interpolation élégante entre les deux permet un bon traitement du régime semi-transparent. Malheureusement, IDSA ne semble pas être un bon candidat pour une adaptation en relativité générale.

L'approximation diffusive est également utilisée pour résoudre l'équation de Boltzmann (par exemple [Bruenn et al. \(2012\)](#)). Il est connu que l'approximation diffusive peut engendrer des vitesses de propagation supérieures à c ⁴. Dans [Shibata et al. \(2011\)](#), les auteurs mettent en garde sur le fait que l'approximation diffusive peut violer les contraintes dans les équations d'Einstein (voir le chapitre 4).

[Müller et al. \(2010\)](#) implémentent une équation de Boltzmann par une méthode "ray-by-ray plus" (rayon par rayon) et une relation de fermeture pour les moments. Ces approximations sont compatibles avec la relativité générale, mais il n'est pas évident de savoir à quel point ces approximations sont comparables avec une équation de Boltzmann sans approximation au niveau des angles. L'approximation ray-by-ray traite une série d'équations de Boltzmann à symétrie sphérique, pour différents angles (différents angles polaires (θ) en axisymétrie, voir [Müller et al. \(2010\)](#), mais également différents angles polaires et différents angles azimuthaux (ϕ) dans le cas 3D de [Hanke et al. \(2013\)](#)). Le couplage latéral des neutrinos est approximé par des équations d'advection à l'intérieur de l'hydrodynamique. La relation de fermeture pour les moments utilise le formalisme des facteurs variables d'Eddington (voir aussi [Shibata et al. \(2011\)](#)). Ces formalismes sont proches de, par exemple, [González et al. \(2007\)](#) qui utilise des moments et une relation de fermeture dans le cas de transport radiatif de photons. La comparaison avec une équation sans approximation semble, dans ce contexte, très appropriée, car sans elle il est difficile de quantifier l'approximation faite.

Une équation de Boltzmann non relativiste sans approximation angulaire a été présentée par [Livne et al. \(2004\)](#) et utilisée par [Ott et al. \(2008\)](#). Leur équation néglige les termes de couplage en vitesse (qui viennent de la transformation de Lorentz, Eq.(10.45), ou de reformulation de certaines parties de l'équation par exemple avec l'équation de

4. Il est proposé, dans [Bonazzola et al. \(2011\)](#), de contourner cette difficulté par la résolution d'une équation des télégraphistes.

continuité). Toutes les autres méthodes approximent les termes dépendant de la vitesse à $O(v)$, sauf le code BOLTZTRAN de [Liebendörfer et al. \(2004\)](#) qui est capable de traiter tous les termes dépendant de la vitesse. D'après [Lentz et al. \(2012b\)](#), négliger complètement les vitesses revient à une approximation trop sévère, qui par exemple ne conserve pas bien le nombre leptonique.

En 3D, outre le traitement ray-by-ray de [Hanke et al. \(2013\)](#), une version ray-by-ray d'IDSA a été implémentée par [Takiwaki et al. \(2012\)](#). D'autre part, des codes de transfert radiatifs, pas encore couplés à l'hydrodynamique, ont été proposés par [Sumiyoshi & Yamada \(2012\)](#) et par [Radice et al. \(2012\)](#). Ces codes ont la capacité de simuler une équation de Boltzmann 6D sans approximation angulaire, mais ils n'incluent pour l'instant pas de relativité générale. On note également l'utilisation d'harmoniques sphériques par [Radice et al. \(2012\)](#) pour le traitement de l'espace des impulsions. Enfin, [Shibata et al. \(2011\)](#) et [Cardall et al. \(2012\)](#) ont montré, avec beaucoup de détails, des formalismes adaptés à la résolution de l'équation de Boltzmann en relativité générale. [Kuroda et al. \(2012\)](#), dans leurs simulations 3D, emploient le formalisme développé par [Shibata et al. \(2011\)](#) avec un traitement approximé des neutrinos.

Chapitre 11

Méthodes spectrales

Sommaire

11.1 Bases de décomposition	142
11.1.1 Choix des bases	142
11.1.2 La dépendance en Θ	143
11.1.3 La dépendance en θ	144
11.1.4 La dépendance en Φ	145
11.2 Points de collocation et singularités	146
11.2.1 Points de collocation	146
11.2.2 Éviter les singularités	146
11.3 Opérateur de collision	147
11.4 Classe de régularité attendue de la fonction de distribution	148

Les méthodes spectrales (par exemple, [Grandclément & Novak \(2009\)](#); [Gottlieb & Orszag \(1977\)](#)) décomposent une fonction sur une certaine base globale, par exemple une base de Tchebychev ou de Fourier, en contraste avec les différences finies qui traitent les fonctions directement. Pour les applications présentées ici, le principal intérêt des méthodes spectrales est la convergence rapide (en général exponentielle). On peut donc avoir une meilleure précision qu'avec des différences finies pour le même nombre de points, ou avoir la même précision avec un nombre de points plus petit, ce qui fait gagner du temps de calcul, précieux dans le problème des neutrinos dans les supernovas. En général, le gain attendu est un facteur 5 par rapport aux différences finies : si on représente une dimension par n points en différences finies, on peut en principe la représenter par $n/5$ points par des méthodes spectrales ([Bonazzola et al. \(2011\)](#); [Gottlieb & Orszag \(1977\)](#)).

Un inconvénient connu des méthodes spectrales est le phénomène de Gibbs. Si on tente de représenter une fonction discontinue par des méthodes spectrales, il vient des oscillations indésirables. Ces oscillations restent même avec un grand nombre de points dans la représentation spectrale, et la représentation spectrale ne converge pas vers la fonction à représenter (l'erreur reste constante). C'est ce qu'on appelle le phénomène de Gibbs ([Grandclément & Novak \(2009\)](#)). D'autre part, si on représente une fonction de classe C^p avec p assez petit ($p = 0, 1, 2, 3, \dots$), on perd l'avantage de la convergence rapide. En principe, seule une fonction de classe C^∞ converge de manière exponentielle (voir la section [12.1](#)). En pratique, si p n'est pas trop petit les méthodes spectrales restent efficaces.

Si la fonction à représenter est C^∞ par morceaux, une possibilité est de la représenter par des méthodes spectrales sur chaque intervalle où elle est C^∞ , et de raccorder morceau par morceau. C'est ce qui est proposé pour la dépendance en Θ (voir la section [11.1.2](#)).

Ce travail, présenté dans l'article en cours de finition [Peres et al. \(2013c\)](#), consiste à représenter numériquement l'équation de Boltzmann par des méthodes spectrales, par un code numérique baptisé LORENE'S GHOST (pour *gravitational handling of spectral transport*). Ce code est fortement inspiré de la librairie [LORENE](#).

La figure [11.1](#) illustre la définition des différentes coordonnées : r est la direction radiale, θ et ϕ sont les angles polaires et azimuthaux usuels d'une base sphérique. ϵ est l'énergie, et également la norme du vecteur $\vec{p}$ dans l'espace des impulsions. Θ est l'angle polaire dans l'espace des impulsions, défini par rapport à $\vec{e}_r$, et Φ est l'angle azimuthal dans l'espace des impulsions, défini par rapport à $\vec{e}_\theta$.

11.1 Bases de décomposition

11.1.1 Choix des bases

On utilise une décomposition en polynômes de Tchebychev pour r , ϵ , et Θ (voir la figure [11.1](#)). Dans LORENE, la direction radiale est représentée sur une base de Tchebychev : c'est un des choix possibles pour une direction non périodique, qui a l'avantage

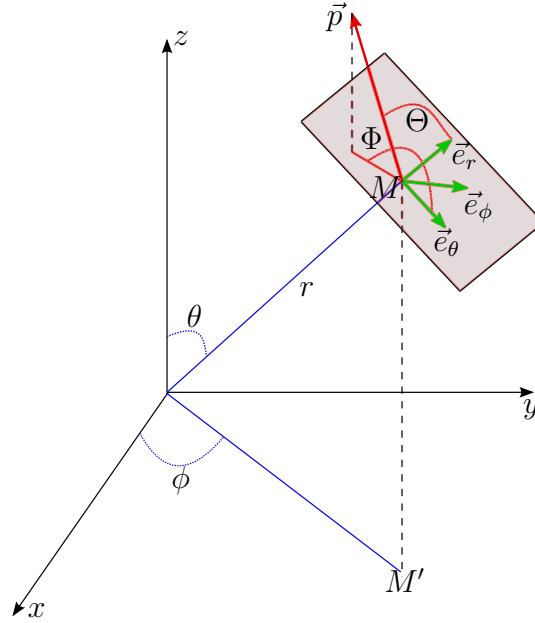


FIGURE 11.1 – Base des coordonnées doublement sphériques

d'utiliser des algorithmes basés sur des transformées de Fourier, très rapides numériquement. La dépendance en Θ est découpée en deux domaines, comme expliqué dans la section suivante, et devient de ce fait non périodique.

On utilise une décomposition en séries de Fourier pour ϕ et Φ . C'est le choix le plus naturel pour les directions périodiques (et également le choix de LORENE). L'angle polaire dans l'espace-temps, θ , est traité par une méthode spéciale reposant sur un prolongement analytique et une décomposition en séries de Fourier. Cette méthode était déjà présente dans LORENE et est brièvement décrite en section 11.1.3.

11.1.2 La dépendance en Θ

L'angle Θ représente physiquement la direction des neutrinos, c'est à dire s'ils vont vers les r croissants ($0 \leq \Theta \leq \pi/2$) ou s'ils vont vers les r décroissants ($\pi/2 \leq \Theta \leq \pi$). Ce fait entraîne la possibilité d'une discontinuité dans la dérivée première de la fonction de distribution f . La fonction serait alors seulement de classe C^0 et la convergence des méthodes spectrales serait moins rapide. Par exemple, la surface d'une proto-étoile à neutrons isolée émet un flux de neutrinos (flux sortant), mais n'a pas de flux entrant. Dans ce cas, on s'attend à ce que f soit de classe C^0 en $\Theta = \pi/2$. Dans un contexte physique, une proto-étoile à neutrons n'est pas isolée, mais elle peut tendre vers le cas décrit plus haut, ce qui justifie un traitement spécifique du point $\Theta = \pi/2$.

Notre choix (voir [Bonazzola et al. \(2011\)](#)) a donc été de décomposer la fonction de distribution sur les deux intervalles $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$ et de relier les deux solutions par la méthode Tau¹.

11.1.3 La dépendance en θ

La dépendance en θ est plus difficile à décomposer que ϕ ou Φ car θ n'est défini que sur $[0, \pi]$ et n'est donc pas rigoureusement périodique. Dans LORENE, on utilise un prolongement analytique pour se ramener à une fonction périodique et pouvoir la décomposer sur une base de séries de Fourier.

La base de décomposition de θ dans LORENE dépend de la base de décomposition de ϕ . ϕ étant décomposé sur une base de séries de Fourier, on peut écrire

$$F(\phi) = a_0 + \sum_{k=1} a_k \cos(k\phi) + \sum_{k=1} b_k \sin(k\phi). \quad (11.1)$$

La base de décomposition pour θ dépend de la base de Fourier pour ϕ de la manière suivante. Pour une fonction 3D $f(r, \theta, \phi)$, la dépendance angulaire $f(\theta, \phi)$ peut être écrite comme une somme de termes proportionnels à

$$\left. \begin{array}{l} \sin(j\theta) \sin(k\phi) \\ \cos(j\theta) \sin(k\phi) \\ \sin(j\theta) \cos(k\phi) \\ \cos(j\theta) \cos(k\phi) \end{array} \right\} \quad (11.2)$$

et on définit m tel que $m = (k/2) \bmod 2$. La base `COSSIN_C` correspond à un développement en $\cos \theta$ pour chaque m pair et un développement en $\sin \theta$ pour chaque m impair. La base `COSSIN_S` correspond à un développement en $\sin \theta$ pour chaque m pair et un développement en $\cos \theta$ pour chaque m impair. Le nom `COSSIN` correspond donc à un développement en sinus et en cosinus (dans LORENE, d'autres bases sont implémentées pour des symétries particulières), et `_C` (pour cosinus) ou `_S` (pour sinus) fait référence au terme en θ correspondant à l'expansion de $\cos(0\phi)$. Par exemple, un champ scalaire régulier, en coordonnées cartésiennes, peut être développé au voisinage de l'origine comme

$$F(x, y, z) = \sum_{n,p,q} a_{npq} x^n y^p z^q, \quad (11.3)$$

(voir [Grandclément & Novak \(2009\)](#)). On peut montrer qu'un tel champ scalaire régulier serait représenté par une base `COSSIN_C` en géométrie sphérique. Les champs vectoriels ou tensoriels sont plus compliqués. Il est aussi visible que certains opérateurs, comme par exemple la dérivation par rapport à θ , change la base de représentation en θ .

1. La méthode Tau relie les solutions dans l'espace des coefficients, une fois la fonction décomposée. La méthode de collocation, qui relie directement les valeurs des fonctions, a également été testée. Les deux méthodes donnent des résultats très similaires, on peut donc utiliser l'une ou l'autre des méthodes indifféremment.

Dans le cas à 6D, il faut étendre cette définition et considérer la base de Fourier de Φ . La partie dépendant uniquement des trois angles θ, ϕ, Φ , $f(\theta, \phi, \Phi)$ d'un champ scalaire à six dimensions f peut être

$$\left. \begin{array}{l} \sin(j\theta) \sin(k\phi) \sin(n\Phi) \\ \sin(j\theta) \sin(k\phi) \cos(n\Phi) \\ \cos(j\theta) \sin(k\phi) \sin(n\Phi) \\ \cos(j\theta) \sin(k\phi) \cos(n\Phi) \\ \sin(j\theta) \cos(k\phi) \sin(n\Phi) \\ \sin(j\theta) \cos(k\phi) \cos(n\Phi) \\ \cos(j\theta) \cos(k\phi) \sin(n\Phi) \\ \cos(j\theta) \cos(k\phi) \cos(n\Phi) \end{array} \right\} \quad (11.4)$$

et on définit M par analogie avec m , $M = (n/2) \bmod 2$. La règle de décomposition pour la base en θ peut être déduite de la règle à 3D en remplaçant m par $m + M$: la base **COSSIN_C** correspond à $\cos \theta$ pour chaque $m + M$ pair et à $\sin \theta$ pour chaque $m + M$ impair ; la base **COSSIN_S** correspond à $\sin \theta$ pour chaque $m + M$ pair et à $\cos \theta$ pour chaque $m + M$ impair. Cette règle permet de manipuler de manière cohérente un champ scalaire ou vectoriel régulier à six dimensions.

11.1.4 La dépendance en Φ

Même avec des méthodes spectrales, une simulation 6D demande beaucoup de temps de calcul. Cependant, l'angle azimuthal dans l'espace des impulsions, Φ , requiert peu de ressources supplémentaires par rapport aux autres dimensions.

En effet, utiliser 4 points en Φ (points de collocation, dans le cadre de méthodes spectrales, voir 11.2.1), correspond approximativement à 20 points en différences finies (Gottlieb & Orszag (1977)), pour une simulation 6D.

En 5D (2D axisymétrique + 3D dans l'espace des impulsions), la dépendance en Φ présente un plan de symétrie. Avec des méthodes spectrales, on peut décomposer uniquement les parties non symétriques des fonctions, ce qui revient à utiliser 2 fois moins de points que dans le cas non symétrique. En pratique, par rapport à une décomposition en différences finies, utiliser le plan de symétrie revient à doubler la résolution. Utiliser 40 points en Φ est déjà une bien meilleure résolution que n'importe quel code utilisé pour le transport des neutrinos dans la littérature (Sumiyoshi & Yamada (2012)). De plus, le fait de décomposer la dépendance en Φ en séries de Fourier offre un avantage lors du calcul de l'opérateur de collision. Ce calcul fait appel à des intégrations sur une période (voir l'équation (11.7)), ce qui est particulièrement simple : le premier coefficient (correspondant à l'expansion en $\cos(0\Phi)$) ne dépend pas de Φ , son intégration sur une période est donc simplement une multiplication par 2π . Tous les autres coefficients correspondent à des fonctions périodiques (sinus et cosinus) qui s'annulent quand on les intègre sur une période.

11.2 Points de collocation et singularités

11.2.1 Points de collocation

Dans une simulation avec des différences finies, on choisit les points pour qu'aucun ne soit exactement en $r = 0$ ou en $\theta = 0$, puisque dans les opérateurs (gradient, laplacien, ...), on rencontre inévitablement des termes en r^{-1} ou en $\sin^{-1}(\theta)$.

Dans une simulation avec des méthodes spectrales, les points où la fonction est représentée sont appelés les points de collocation. On utilise une quadrature de Gauss-Lobatto, où les points représentés peuvent poser un problème de singularité dans certains opérateurs. Par exemple, il existe un point de collocation en $\theta = 0$, en $\Theta = 0$ ou encore en $\phi = 0$ (même si celui-ci ne pose pas de problème puisqu'il n'y a pas de $\sin^{-1} \phi$ dans les opérateurs). Il faut donc un travail préliminaire supplémentaire pour éviter les singularités.

11.2.2 Éviter les singularités

La singularité à l'origine des coordonnées ($r = 0$) n'est pas traitée dans ce travail. À long terme, il est possible de coupler l'équation de Boltzmann complète à une équation simplifiée, qui pourrait être soit une équation de diffusion soit une équation des télégraphistes (voir [Bonazzola et al. \(2011\)](#) pour une discussion détaillée du raccordement des deux équations). Ce traitement simplifié est suffisant dans la partie centrale d'une supernova : avant le rebond, l'écart à la symétrie sphérique est peu important, et après le rebond, le milieu est opaque. Dans les deux cas, l'approximation de diffusion est justifiée. Ce traitement a l'avantage de permettre un traitement de la singularité en $r = 0$ similaire au traitement pour un champ scalaire 3D (et déjà implémenté dans LORENE). Dans ce travail, on ne considère que des coquilles dans la direction radiale, entre un R_{min} donné et strictement positif, et un R_{max} donné.

Les singularités axiales (termes en $\sin^{-1}(\theta)$ et en $\sin^{-1}(\Theta)$) sont traitées par une manière similaire à LORENE en 3D. Les opérateurs dans LORENE sont écrits en géométrie sphérique et viennent de géométrie cartésienne. Sachant que l'opérateur entier est régulier en cartésien, il doit être régulier en sphérique. En pratique, puisqu'elles doivent s'annuler analytiquement, les parties singulières ne sont pas calculées.

Par exemple, lors du calcul du laplacien d'une fonction 3D,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (11.5)$$

on voit qu'il faut calculer une division par $\sin^2(\theta)$. Celle-ci a une partie singulière (par exemple, la partie de la fonction représentée par $\cos(j\theta)$, pour $j = 0$ et $j = 1$, correspond à $1/\sin^2(\theta)$ et $\cos(\theta)/\sin^2(\theta)$, singuliers en $\theta = 0$). De même pour la division par $\tan(\theta)$ et la division par r . Mais l'opérateur entier est régulier et ces parties singulières, non

calculées, s'annulent analytiquement ([Grandclément & Novak \(2009\)](#)). En 3D, un opérateur comme celui-ci peut aussi se calculer sur une base d'harmoniques sphériques, où le problème des singularités n'apparaît pas.

En pratique, dans l'opérateur de Liouville en relativité générale, on calcule la quantité $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^i \frac{\partial f}{\partial p^i}$. On calcule d'abord la dérivée partielle par rapport à p^i , puis on multiplie par chaque terme composant le coefficient de rotation de Ricci correspondant. La multiplication par les termes qui peuvent contenir des $\sin^{-1}(\theta)$ est l'opération faite en dernier.

11.3 Opérateur de collision

L'opérateur de collision implémenté pour l'instant correspond à une diffusion élastique sur un nucléon

$$\nu + N \rightarrow \nu + N, \quad (11.6)$$

avec N un neutron ou un proton. Le terme de collision correspondant est

$$B_{IS}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{IS} \sin(\Theta') [f(r, \theta, \phi, \epsilon, \Theta', \Phi') - f(r, \theta, \phi, \epsilon, \Theta, \Phi)] d\Theta' d\Phi', \quad (11.7)$$

avec

$$R_{IS} = 2\pi G_F^2 n_N \{ (h_V^N)^2 + 3(h_A^N)^2 + [(h_V^N)^2 - (h_A^N)^2] \times [\cos(\Theta) \cos(\Theta') + \sin(\Theta) \sin(\Theta') \cos(\Phi - \Phi')] \}, \quad (11.8)$$

où les quantités primées correspondent au neutrino incident et les quantités non primées au neutrino émergent. Par hypothèse, le transfert d'énergie entre le nucléon et le neutrino est négligé (hypothèse de diffusion élastique ou isoénergétique), et donc $\epsilon = \epsilon'$. G_F est la constante de Fermi, h_V^N et h_A^N représentent les facteurs de forme du courant neutre nucléonique, et on les approxime par des constantes (différentes pour le proton et le neutron). n_N est la densité (de neutrons ou de protons). En l'absence de couplage à un fluide pour lequel on aurait une équation d'état, il n'y a pas de limite dégénérée d'implémentée, et d'autre part la valeur numérique de n_N est mise à la main suivant le régime (opaque, transparent, semi-transparent) voulu. Pour cette implémentation (et les valeurs numériques des constantes), on suit donc [Bruenn \(1985\)](#). Enfin, puisque la diffusion élastique est le seul terme implémenté, on a $\mathcal{C}[f] = B_{IS}$.

Notons que l'opérateur de collision est souvent calculé, dans la littérature, par une décomposition sur des polynômes de Legendre, en gardant seulement les deux premiers termes (par exemple, [Bruenn \(1985\)](#); [Rampp & Janka \(2002\)](#)). Il serait intéressant de comparer la précision de cette implémentation en polynômes de Legendre avec la nôtre.

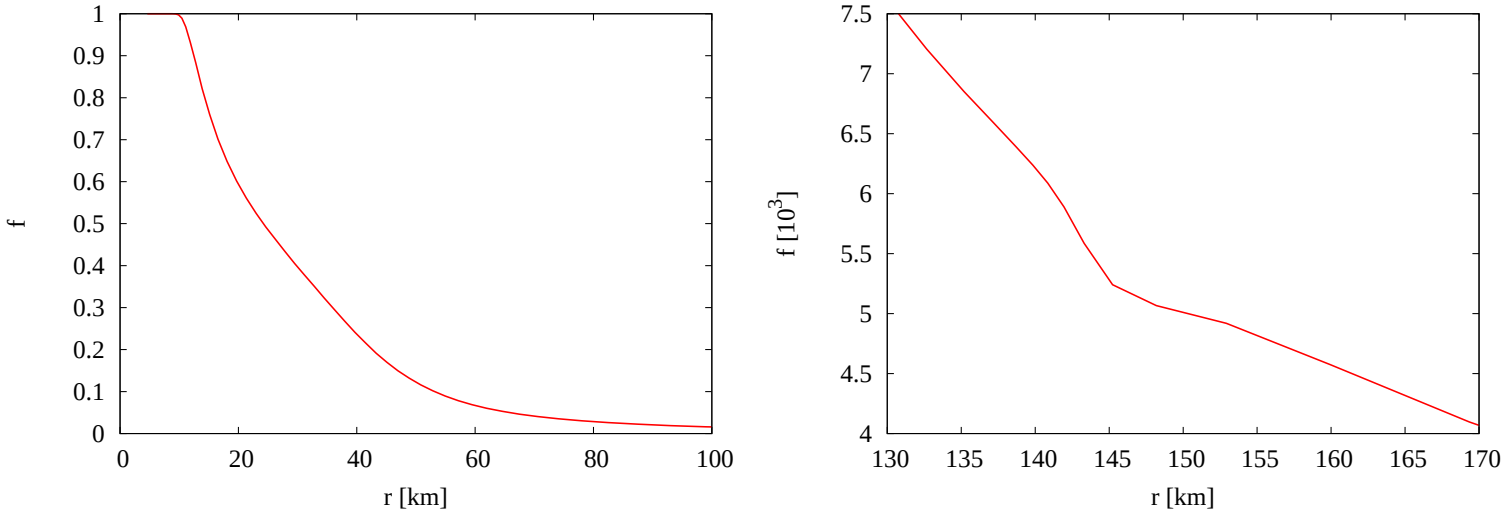


FIGURE 11.2 – Fonction de distribution des ν_e simulée avec le code BOLTZTRAN en fonction du rayon, à 100 ms après rebond. À gauche, la région représentée est proche de la surface de la PNS, et à droite, proche du choc. La fonction de distribution est prise arbitrairement à $\epsilon = 10$ MeV et moyennée sur Θ .

11.4 Classe de régularité attendue de la fonction de distribution

Les méthodes spectrales perdent leur intérêt principal, la convergence rapide, si la fonction à représenter n'est pas $\mathcal{C}^\infty$, ou, en pratique, $\mathcal{C}^p$ avec p assez grand, comme discuté dans l'introduction de ce chapitre. Si la fonction à représenter est discontinue, il vient un phénomène de Gibbs (expliqué en introduction de ce chapitre) et la convergence n'est pas garantie, un cas à éviter absolument dans les simulations.

Dans le traitement du problème des neutrinos dans les supernovas par des méthodes spectrales, il est donc légitime de se demander quelle est la classe de régularité de la fonction de distribution. Plusieurs points peuvent être problématiques :

1. Au niveau du choc, toutes les quantités hydrodynamiques sont discontinues, par définition d'un choc.
2. La transition entre la PNS et le reste du fluide devient de plus en plus abrupte avec le temps après rebond. La densité, en particulier, présente un gradient de plus en plus fort.
3. La dépendance en énergie de la fonction de distribution est en général une fonction très fortement décroissante. Par exemple, une fonction de distribution de Fermi-Dirac à température petite mais non nulle décroît très fortement (exponentiellement) avec l'énergie.

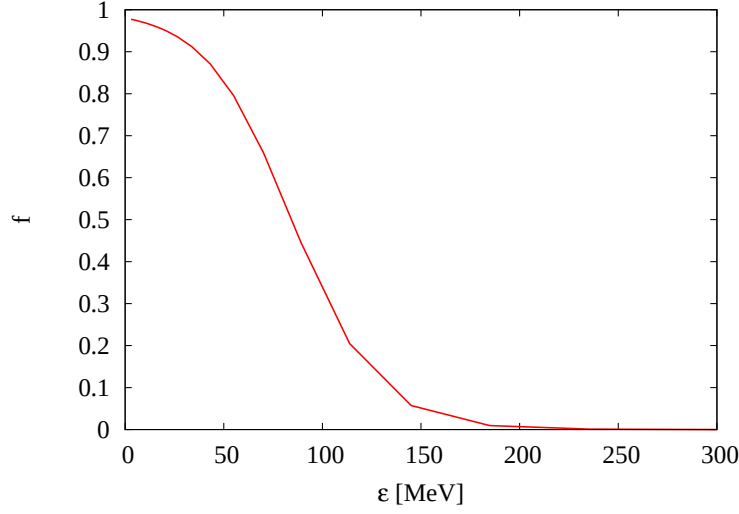


FIGURE 11.3 – Fonction de distribution des ν_e simulée avec le code BOLTZTRAN en fonction de l'énergie, à 100 ms après rebond. La fonction de distribution est prise arbitrairement à $r = 10$ km du centre et moyennée sur Θ .

4. En régime libre, le flux de neutrinos est très proche d'un flux purement radial. Dans notre choix de coordonnées doublement sphériques (voir la figure 11.1), un flux de neutrinos purement radial se traduirait par un vecteur impulsion aligné avec le vecteur de base $\vec{e}_r$, et donc la fonction de distribution serait non nulle uniquement pour $\Theta = 0$.

Pour illustrer le comportement de la fonction de distribution dans ces différents cas et étudier la présence ou non de discontinuités, les figures 11.2 et 11.3 ont été réalisées avec des données provenant du code BOLTZTRAN de Liebendörfer *et al.* (2004) (les simulations sont présentées dans Liebendörfer *et al.* (2005)). Les figures viennent d'une simulation faite en symétrie sphérique avec résolution de l'équation de Boltzmann (la fonction de distribution a donc une dépendance $f = f(t, r, \epsilon, \Theta)$). Le progéniteur est une étoile de $15 M_\odot$ de Woosley & Weaver (1995). BOLTZTRAN est couplé au code AGILE (Liebendörfer *et al.* (2002)) pour la résolution des équations hydrodynamiques et le calcul du potentiel gravitationnel en RG.

On représente sur les figures 11.2 et 11.3 la fonction de distribution des neutrinos électroniques 100 ms après rebond. La PNS est donc formée et le choc s'est arrêté. Les données sont moyennées en Θ .

La figure 11.2 illustre les points 1. et 2. et montre la fonction de distribution en fonction du rayon. À droite, on voit f au niveau du choc (le choc se trouve à environ 150 km du centre). À gauche est montrée f proche de la surface de la PNS (à environ 50 km du centre; définie par la densité $\rho = 10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$ comme en chapitre 8). Dans ces deux cas, où la densité et la température décroissent très abruptement avec le rayon, on voit que

la réponse au niveau de la fonction de distribution est plutôt une décroissance exponentielle, et pas une discontinuité.

La figure 11.3 illustre le point 3. et montre que la décroissance en énergie est bien exponentielle. Il semblerait donc que la fonction de distribution montre des décroissances exponentielles et non des discontinuités. Une exponentielle est possible à représenter par des méthodes spectrales (voir la section 12.1), à condition d'avoir une résolution suffisante, car c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Il est plus difficile de discuter du point 4. car la fonction de distribution du code BOLTZTRAN a été discrétisée (en $\cos \Theta$) avec seulement six points, ce qui ne permet pas d'affirmer si f est continue ou pas, $\mathcal{C}^\infty$ ou pas. De plus, Liebendörfer *et al.* (2004) affirment que les méthodes de différences finies qu'ils emploient lissent artificiellement $f(\Theta)$ dans le régime transparent, quand f devient très piquée autour de $\Theta = 0$.

Deux pistes sont proposées si la représentation de la fonction de distribution en régime transparent est problématique : d'une part, il est possible d'appliquer un filtre, comme fait dans Bonazzola *et al.* (2011). On lisserait alors f , ce qui permettrait une représentation sur des bases spectrales et introduirait dans le même temps une légère erreur numérique. La quantification de cette erreur et sa comparaison avec une représentation en différences finies sera à faire. Il est possible que l'erreur reste plus petite que celle faite avec une représentation en différences finies, les simulations en différences finies utilisant souvent un nombre très restreint de points en Θ ou en $\cos \Theta$ (par exemple 6 pour Liebendörfer *et al.* (2005)).

La deuxième piste, si augmenter le nombre de points en Θ ne suffit pas, est de faire un changement de coordonnée $\Theta \rightarrow \log \Theta$ avant la représentation sur la base de Tchebychev. On pourrait alors accumuler plus de points de collocation autour de $\Theta = 0$, mais on n'aurait plus de point exactement à $\Theta = 0$. Dans un deuxième temps, on pourra aussi envisager les changements de coordonnées $r \rightarrow \log r$ et $\epsilon \rightarrow \log \epsilon$, qui pourraient également donner une meilleure représentation de ces coordonnées.

Chapitre 12

Résultats

Sommaire

12.1 Tests de convergence	152
12.2 Conservation du nombre de particules en relativité générale	153
12.3 Test de l'effet Einstein	155

Dans ce chapitre, des tests numériques sont montrés. Ils permettent de valider le code LORENE'S GHOST et de montrer qu'il fonctionne comme attendu. En particulier, la convergence exponentielle est bien présente dans toutes les dimensions. Un test de validation du code en relativité générale est également montré.

12.1 Tests de convergence

Tester la convergence peut se faire en représentant une fonction donnée et en vérifiant que la représentation numérique s'approche de plus en plus de la fonction que l'on veut représenter à mesure que l'on augmente le nombre de points (dans le cas des méthodes spectrales, le nombre de points de collocation).

Pour tester la convergence dans chacune des dimensions, j'ai représenté des exponentielles. En effet, une exponentielle est C^∞ , et assez difficile à représenter sur les bases de Fourier et Tchebychev pour que la convergence ne soit pas immédiate. Dans une dimension donnée, correspondant à une coordonnée x , le test effectué est le suivant

- On représente une fonction $g = \exp(0.1x)$ pour $x = r, \epsilon, \Theta$ ou $g = \exp(\cos(x))$ pour $x = \theta, \phi, \Phi$.
- On applique l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$.
- On compare la valeur de la dérivée évaluée numériquement à un point quelconque $\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_c (r_0, \theta_0, \phi_0, \epsilon_0, \Theta_0, \Phi_0)$ à la valeur de la dérivée analytique, notée $\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_a$.

L'évaluation au point x_0 de $\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_a$ est faite numériquement.

La résolution utilisée est $n_r = 9, n_\theta = 9, n_\phi = 4, n_\epsilon = 9, n_\Theta = 9, n_\Phi = 4$ et on ne fait varier que le nombre de points dans la dimension testée.

Une coquille radiale est simulée, de $R_{\min} = 1$ km à $R_{\max} = 4$ km, et également une coquille en énergie, de $\epsilon = 10$ MeV à $\epsilon = 30$ MeV. Θ est divisé en deux domaines, $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ et $\pi/2 \leq \Theta \leq \pi$, comme décrit en section 11.1.2. Le nombre de points n_Θ est le nombre de points dans un des domaines, et les deux domaines ont toujours le même nombre de points.

On évalue les deux fonctions au point $(r_0, \theta_0, \phi_0, \epsilon_0, \Theta_0, \Phi_0) = (1.2, 0.3, 0.3, 10.3, 1.45, 0.3)$. C'est un point quelconque et arbitraire et non pas un point de collocation. $\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_a$ est évaluée avec le nombre de points correspondant à la plus haute résolution.

L'erreur relative R.E. est définie comme

$$\text{R.E.} = \frac{\left| \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_c - \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_a \right|}{\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_a}, \quad (12.1)$$

Sur la figure 12.1, l'erreur relative est représentée pour les six dimensions testées. Comme attendu, on obtient une convergence exponentielle dans chaque dimension. On peut voir sur la figure 12.1 que les dimensions décomposées sur une base de Tchebychev (r, ϵ, Θ , où on teste $\exp(0.1x)$) convergent plus rapidement que les dimensions décomposées sur une base de Fourier (θ, ϕ, Φ , où on teste $\exp(10 \cos(x))$). Notons également qu'une fois la précision maximale atteinte (autour de R.E. = 10^{-14} dans toutes les dimensions), l'erreur peut croître légèrement. C'est un phénomène attendu dû à l'accumulation d'erreurs numériques.

12.2 Conservation du nombre de particules en relativité générale

Le nombre de particules au temps t est calculé comme

$$N(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(r, \theta, \phi, \epsilon, \Theta, \Phi) d^3x d^3p, \quad (12.2)$$

et la conservation relative du nombre de particules est

$$\delta = \frac{N^n - N^0}{N^0}, \quad (12.3)$$

où N^n est le nombre de particules au pas de temps courant (noté n), et N^0 est le nombre de particules initial. Pour une condition initiale donnée, on fait évoluer dans le temps l'équation de Boltzmann $L[f] = \mathcal{C}[f]$ par un schéma d'Adams–Bashforth du troisième ordre.

Une coquille radiale est simulée, de $R_{\min} = 1$ km à $R_{\max} = 2.5$ km. Les conditions aux bords sont les suivantes : $f(R_{\min}, \theta, \phi, \epsilon, \Theta < \pi/2, \Phi)$ est maintenu constant dans le temps (égal à la condition initiale), et $f(R_{\max}, \theta, \phi, \epsilon, \Theta > \pi/2, \Phi)$ est égal à 0 et maintenu constant dans le temps.

Le pas de temps est $\Delta t = 0.5(R_{\max} - R_{\min})/n_r^2$. Pour la condition initiale, on choisit

$$f(r, \theta, \phi, \epsilon, \Theta, \Phi) = \left(\frac{p_Z}{\epsilon}\right)^2 \times H\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (12.4)$$

où $H(\Theta - \pi/2)$ est la fonction de Heaviside. p_Z est la projection de l'impulsion sur l'axe Z

$$\frac{p_Z}{\epsilon} = \cos \Theta \cos \theta - \sin \Theta \cos \Phi \sin \theta. \quad (12.5)$$

(voir Bonazzola *et al.* (2011)). Le test effectué consiste à suivre l'évolution temporelle de l'équation de Boltzmann en relativité générale, où l'opérateur de collision considéré inclue la diffusion élastique sur un nucléon (voir section 11.3), où la densité des nucléons est choisie pour correspondre à un régime opaque.

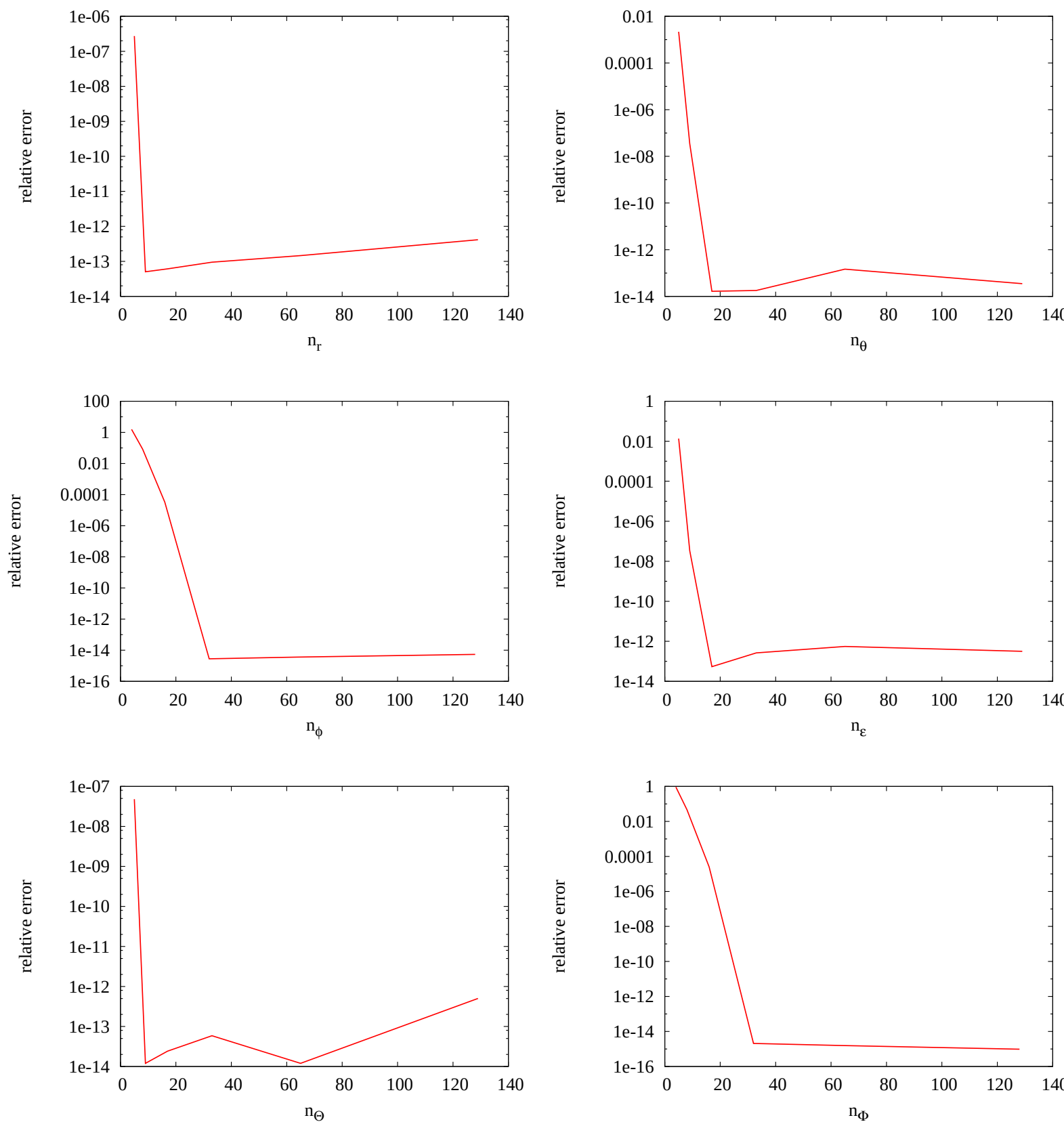


FIGURE 12.1 – Erreur relative en fonction du nombre de points dans la dimension testée, pour chaque dimension (r , θ , ϕ , ϵ , Θ , Φ). On voit une convergence spectrale (c'est-à-dire exponentielle) dans chaque cas.

Aucune hypothèse n'est faite sur les symétries du système. On utilise $33 \times 5 \times 4 \times 5 \times 33 \times 4$ points en $r \times \theta \times \phi \times \epsilon \times \Theta \times \Phi$.

Pour ce test, on choisit une évolution sur une métrique de Schwarzschild constante. L'équation de Boltzmann étant adaptée pour l'approximation CFC, on écrit la métrique de Schwarzschild en jauge isotrope

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - \frac{R_s}{4r}}{1 + \frac{R_s}{4r}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{R_s}{4r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (12.6)$$

avec $R_s = 2M$ le rayon de Schwarzschild. Cette expression correspond exactement à l'expression de ds^2 en CFC (équations (4.3) et (4.4)) en prenant

$$\alpha = \frac{1 - \frac{R_s}{4r}}{1 + \frac{R_s}{4r}}, \quad \beta^i = 0 \quad \text{and} \quad \Psi = 1 + \frac{R_s}{4r}. \quad (12.7)$$

Dans ces simulations, on impose $R_s = 0.4$ km pour que l'horizon ne soit pas dans le domaine de simulation.

Au bout de 50 pas de temps, la conservation relative du nombre de particules δ est $\delta = 2 \times 10^{-3}$. Ce résultat montre que le code d'évolution temporelle fonctionne donc bien et conserve le nombre de particules. Notons que δ pourrait être plus petit, mais la résolution utilisée pour ce test est plutôt basse.

12.3 Test de l'effet Einstein

Pour ce test, on utilise la métrique de Schwarzschild, comme précédemment. Ce test permet de mettre en évidence le décalage vers le rouge gravitationnel, ou effet Einstein.

Un observateur statique en $r = R_{min}$ voit un spectre en énergie de neutrinos. Après le transport de ce flux de neutrinos en $r = R_{max}$, un autre observateur statique en R_{max} voit un spectre en énergie. Le but est de comparer ces deux spectres.

L'observateur statique est, par définition, l'observateur eulérien. Mais pour comparer les spectres, il faut faire la transformation des quantités dans le CF, qui est le seul référentiel global (La normalisation de la tétrade est différent en chaque point, et le EF en R_{min} est donc différent de celui en R_{max}). Dans le EF, la quadrivitesse de l'observateur est toujours $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ et donc un spectre, vu dans le EF, serait inchangé (pas de décalage vers le rouge).

Dans le CF, la formulation usuelle est

$$\frac{\epsilon_2^{CF}}{\epsilon_1^{CF}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad (12.8)$$

où 1 est le point d'émission et 2 le point de réception. Cette expression peut se retrouver en appliquant M^{-1} à n^μ .

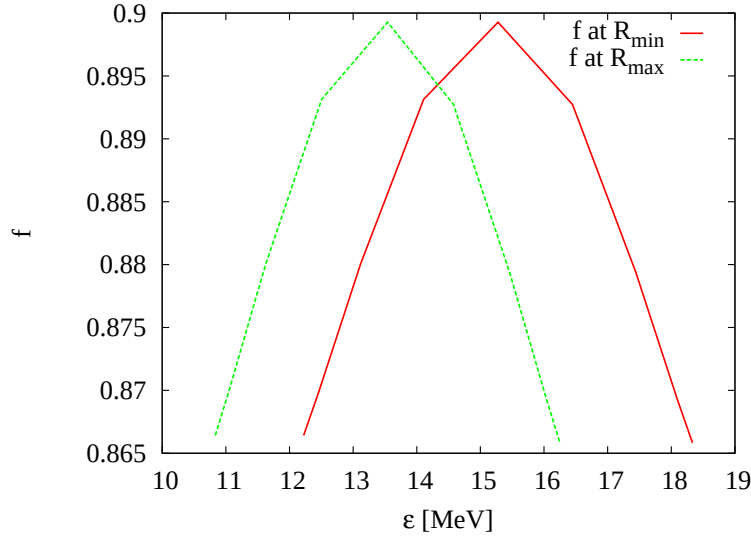


FIGURE 12.2 – Une gaussienne en ϵ est lancée en R_{min} (en rouge, trait plein) et reçue en R_{max} (en vert, en pointillés). La quadrivitesse de l’observateur a été transformée dans le CF, par souci de clarté. On voit alors que la gaussienne en R_{max} est décalée vers le rouge.

Le test numérique consiste à simuler une coquille radiale avec $R_{min} = 1$ km et $R_{max} = 2.5$ km. La résolution est de $n_r = 9$, $n_\theta = 5$, $n_\phi = 4$, $n_\epsilon = 9$, $n_\Theta = 5$, $n_\Phi = 4$. La condition initiale est $f = 0$ partout. Ensuite, on injecte un flux de neutrinos en $r = R_{min}$, dont la dépendance en ϵ est gaussienne. On résout l’équation de Boltzmann (sans collision, et sans hypothèse sur les symétries), pour transporter la gaussienne en $r = R_{max}$ (voir la figure 12.2). Enfin, on transforme le spectre dans le CF pour pouvoir les comparer et mettre en évidence l’effet Einstein.

Comme on peut le voir sur la figure 12.2, dans le CF, le spectre est bien décalé vers le rouge par le transport entre R_{min} et R_{max} .

Enfin, dans cette configuration (RG, sans collision), un pas de temps prend environ 2 secondes. En augmentant la résolution à $n_r = 17$, $n_\theta = 9$, $n_\phi = 4$, $n_\epsilon = 17$, $n_\Theta = 17$, $n_\Phi = 4$, un pas de temps prend environ 31 secondes.

Par la suite, d’autres tests seront effectués. Un test avec un shift non nul est à faire. Un test avec un opérateur de collision plus complet, par exemple avec une diffusion inélastique, permettrait de valider le traitement de la dépendance en énergie plus en avant. Enfin, l’étape suivante sera le couplage à l’hydrodynamique, en l’occurrence au code COCONUT.

Conclusion et perspectives

Conclusions

Le sujet des neutrinos dans les supernovas est en plein développement. On a vu que la simulation d'une supernova telle que l'exigeraient nos connaissances actuelles dans la physique des différents phénomènes n'est pour l'instant pas possible : une telle simulation devrait coupler une hydrodynamique relativiste (3D + temps) à un transport complet relativiste des neutrinos (6D + temps). À l'heure actuelle, une telle simulation demanderait bien trop de temps de calcul.

Si on ne veut pas étudier les détails du mécanisme d'explosion mais, par exemple, la formation de trous noirs, un traitement simplifié des neutrinos est envisageable. C'est dans cette optique que j'ai implémenté le schéma de fuite, un schéma avec une énergie moyenne, pour le code COCONUT. De nouvelles équations d'état ont alors pu être testées dans le cadre de la formation de trous noirs. D'une part, on a ajouté des pions à l'équation d'état de [Lattimer & Swesty \(1991\)](#), et d'autre part des hypérons, qui apparaissent via une transition de phase.

Dans mes résultats, je montre que l'addition de pions réduit le temps passé dans la phase après le rebond. Le trou noir est donc formé plus vite, même si la différence n'est pas très grande. L'addition de pions change peu le comportement lors d'une simulation. Par contre, l'addition d'hypérons Λ réduit beaucoup le temps entre le rebond et la formation de trou noir. De plus, la PNS est beaucoup plus petite que dans le modèle de référence sans Λ , et la masse maximale qu'elle peut supporter avant de s'effondrer est réduite considérablement. Notons également que ces deux équations d'état, d'une part avec des pions et d'autre part avec des hypérons Λ , satisfont (marginale) la contrainte de masse, d'une étoile à neutrons observée de $\sim 2 M_{\odot}$.

Dans le cas du progéniteur avec le plus grand taux d'accrétion, la transition de phase vers la matière hypéronique est observée. On peut donc noter que cette transition de phase n'a pas lieu dans tous les progéniteurs mais seulement dans ceux qui induisent un très fort taux d'accrétion. La matière devenant brusquement moins dure, on assiste à un bref effondrement durant la transition de phase, comparable à l'effondrement du cœur de fer. La proto-étoile à neutrons atteint ensuite un nouvel équilibre et continue à accréter de la matière jusqu'à la formation du trou noir. On note qu'après la transition de phase, des oscillations apparaissent.

Ces comparaisons d'équations d'état ont été refaites avec non plus une symétrie sphérique mais une symétrie axiale. Apparaît alors la convection dans la proto-étoile à neutrons après le rebond, due à un gradient d'entropie (et d'abondance leptonique) négatif. Puisqu'un profil de rotation a été ajouté au progéniteur, la force centrifuge aide à l'équilibre de la proto-étoile à neutrons. La formation du trou noir est donc retardée par rapport au cas 1D.

La force centrifuge est aussi, semble-t-il, responsable de l'adoucissement de la transition de phase. En effet, en 2D, la pente de la courbe de densité en fonction du temps est beaucoup plus petite qu'en 1D. Ce résultat à confirmer pourrait avoir des conséquences, par exemple sur le mécanisme proposé d'explosion par une transition de phase vers la matière de quarks.

Enfin, une extraction d'ondes gravitationnelles par la formule du quadrupôle est proposée. Un résultat attendu est que la simulation avec hypérons Λ , dans laquelle la proto-étoile à neutrons est plus petite, émet des ondes gravitationnelles à des fréquences plus élevées. Un autre résultat est qu'une énergie considérable ($\sim 3 \times 10^{-4} M_{\odot} c^2$) est émise en ondes gravitationnelles au moment de la transition de phase.

L'équation de Boltzmann présentée dans cette thèse est adaptée au formalisme $3+1$ souvent utilisé en relativité numérique. Une spécification supplémentaire est faite à la fin de la dérivation : l'adaptation au choix de jauge de COCONUT, c'est à dire le CFC en feuilletage maximal. Pour un autre choix de jauge (ou pour s'affranchir de l'approximation conformément plate), une autre adaptation serait à faire.

Dans la dernière partie de cette thèse, les résultats concernant le nouveau code de résolution de l'équation de Boltzmann en relativité générale LORENE'S GHOST sont présentés. En l'absence d'un couplage à un code hydrodynamique, une simulation de supernova n'est pas envisageable. Pour le moment, les résultats montrés sont des tests du bon fonctionnement du code, et des tests de convergence exponentielle, spécifique aux méthodes spectrales. Les méthodes spectrales sont un outil très prometteur pour le traitement du problème des neutrinos dans les supernovas.

Perspectives

Dans le contexte de la formation de trous noirs, l'étude du signal en ondes gravitationnelles est en cours. Il sera particulièrement intéressant de savoir si la transition de phase pourrait être détectable, peut être par une observation conjointe de neutrinos et d'ondes gravitationnelles.

D'autre part, d'autres équations d'état à température finie sont en préparation. On pourra par exemple considérer un ensemble plus complet d'hypérons (Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^+ , Ξ^0 , Ξ^-) et pas seulement les Λ . Les muons pourront également faire l'objet d'un traitement à part dans une future équation d'état. Il serait intéressant de les traiter de la même manière que les électrons (voir les chapitres 5 et 7), c'est à dire avec une équation d'advection à part (et également une pour les neutrinos muoniques). Ce traitement permettrait de prendre en compte de manière rigoureuse les réactions de création de muons et de neutrinos muoniques (précisément, les réactions de courant chargé avec les muons). Il sera alors intéressant d'étudier l'impact de ce traitement. Par exemple, contrairement à toutes les simulations actuelles, les neutrinos muoniques auront un potentiel chimique non nul. Même si on ne s'attend pas à une grande déviation par rapport à une simulation qui ne prend pas en compte les muons, il se pourrait que les conséquences soient non-négligeables.

Pour la résolution de l'équation de Boltzmann en relativité générale par des méthodes spectrales, il reste plusieurs étapes à franchir avant de pouvoir simuler une supernova. L'opérateur de collision est à étoffer pour prendre en compte la création, l'annihilation des neutrinos par les différents processus, ainsi que toutes les autres diffusions.

Le traitement du centre, à la manière de [Bonazzola et al. \(2011\)](#) est à implémenter. Si coder une équation de diffusion ne représente pas une difficulté majeure, le raccordement sera sans doute délicat : l'idéal serait de raccorder à une épaisseur optique donnée (en régime opaque), mais celle-ci dépend de l'énergie. Il serait possible de raccorder énergie par énergie, mais un traitement moins coûteux sera sans doute envisagé.

Une amélioration à envisager est de reformuler l'équation à la manière d'une équation de conservation, comme [Cardall et al. \(2012\)](#); [Endeve et al. \(2012\)](#). Les auteurs de ces papiers ont montré l'efficacité d'une telle formulation, en particulier au niveau de la précision (une conséquence serait par exemple une meilleure conservation du nombre de particules).

Enfin, le projet à long terme est le couplage au code CoCoNuT. Pour ce faire, l'implémentation des termes de vitesse (équation (10.45)) est obligatoire, au moins à $\mathcal{O}(v)$. Une fois les difficultés techniques surmontées, il ne fait aucun doute qu'une version parallélisée du code de résolution de l'équation de Boltzmann sera exigée. Ensuite, les simulations de supernovas 2D ou 3D en relativité générale avec transport complet de neutrinos seront envisageables, et il ne fait aucun doute qu'elles apporteront beaucoup de nouvelles informations et beaucoup de surprises.

Annexes

Annexe A

Changement de référentiel pour les sources hydrodynamiques

Les termes de perte d'énergie et d'impulsion des neutrinos entrent dans les équations hydrodynamiques en tant que terme source, $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = q^\alpha$ (voir équation (7.14)). Les quantités q^α (équation (7.15)) étant définies dans le référentiel lagrangien (LF), il faut effectuer un changement de référentiel pour les obtenir du point de vue Eulérien (EF), puisque c'est dans le EF que sont résolues les équations hydrodynamiques, équations (5.5) (voir également la section 4.2 pour les définitions des référentiels).

Aller du LF au EF implique une transformation spéciale de Lorentz, que l'on doit écrire avec une vitesse eulérienne $v_{i,EF}$. Pour obtenir celle-ci on applique la matrice de transformation de tétrade en CFC (donnée par la formule (10.37)) au quadrivecteur $v^\mu = (0, v^i)$ défini sur le CF. Dans ce cas, cette transformation revient à multiplier v_i par $\text{diag}(1/\Phi^2, 1/(\Phi^2 r), 1/(\Phi^2 r \sin \theta))$.

On peut alors écrire la transformation spéciale de Lorentz pour une vitesse eulérienne arbitraire $v_{i,EF} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$

$$q_{EF}^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta (v^{i,EF}) q_{LF}^\beta, \quad (\text{A.1})$$

et les composantes covariantes $q_{\alpha,EF}$ sont

$$q_{0,EF} = W(Q_E + v^{i,EF} Q_{(M)i}), \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} q_{1,EF} = v_r W Q_E &+ \left[1 + (W - 1) \frac{v_r v^r}{v_i v^i} \right] Q_{(M)1} \\ &+ \left[(W - 1) \frac{v_r v^\theta}{v_i v^i} \right] Q_{(M)2} \\ &+ \left[(W - 1) \frac{v_r v^\phi}{v_i v^i} \right] Q_{(M)3}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} q_{2,EF} = v_\theta W Q_E &+ \left[(W - 1) \frac{v_\theta v^r}{v_i v^i} \right] Q_{(M)1} \\ &+ \left[1 + (W - 1) \frac{v_\theta v^\theta}{v_i v^i} \right] Q_{(M)2} \\ &+ \left[(W - 1) \frac{v_\theta v^\phi}{v_i v^i} \right] Q_{(M)3}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} q_{3,EF} = v_\phi W Q_E &+ \left[(W - 1) \frac{v_\phi v^r}{v_i v^i} \right] Q_{(M)1} \\ &+ \left[(W - 1) \frac{v_\phi v^\theta}{v_i v^i} \right] Q_{(M)2} \\ &+ \left[1 + (W - 1) \frac{v_\phi v^\phi}{v_i v^i} \right] Q_{(M)3}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

On peut voir que les équations (A.2), (A.3), (A.4) et (A.5) se réduisent à la transformation de Lorentz en symétrie sphérique en imposant $v_\theta = v_\phi = 0$. Les termes supplémentaires hors symétrie sphérique, souvent assez petits, peuvent devenir non négligeables, par exemple dans le cas d'un cœur en rotation rapide (voir Müller *et al.* (2010)).

Enfin, dans l'Eq. (5.6), $q_{0,EF}$ entre tel quel dans le terme source pour la quantité conservée $\mathcal{E}$ qui correspond à la conservation de l'énergie, et $q_{j,EF}$ entre tel quel dans le terme source pour la quantité conservée S_j qui correspond à la conservation de l'impulsion. On remarque ici qu'à cause de la définition de l'Eq. (5.5), on a en plus un terme métrique multiplicatif, $\sqrt{-g}$.

Annexe B

Taux de réactions des neutrinos pour le schéma de fuite

Dans cette annexe, par souci de clarté on n'utilise ni $c = 1$, ni $\hbar = 1$. La température T est en unité d'énergie.

B.1 Opacités

B.1.1 Diffusion élastique sur un proton

L'opacité $\tau_s(\nu p)$ est définie en suivant [Ruffert et al. \(1996\)](#). La section efficace correspond à la section efficace de transport de [Burrows et al. \(2006\)](#),

$$\tau_s(\nu p) = C_{sp} n_p \sigma_0 \left(\frac{\langle \epsilon_\nu \rangle}{m_e c^2} \right)^2 Y_{pp} \frac{F_5(\eta_\nu)}{F_3(\eta_\nu)}, \quad (\text{B.1})$$

où n_p est la densité de protons (en nombre par unité de volume), T est la température, η_ν est le paramètre de dégénérescence, $\langle \epsilon_\nu \rangle$ est l'énergie moyenne du neutrino, définie par Eq. (7.18), et σ_0 est la section efficace de l'interaction faible, définie par

$$\sigma_0 = \frac{4(m_e c^2 G_F)^2}{\pi(\hbar c)^4}, \quad (\text{B.2})$$

avec G_F la constante de couplage de Fermi, m_e la masse de l'électron, et F_p l'intégrale de Fermi d'ordre p , définie par Eq. (7.19). Le terme F_5/F_3 vient de l'intégration de la fonction de distribution des neutrinos (qu'on suppose être une Fermi-Dirac) sur l'espace des impulsions et correspond à l'opacité pour les énergies de [Ruffert et al. \(1996\)](#).

On définit le paramètre de dégénérescence à deux particules η_{xy} comme l'intégration sur l'espace des impulsions des fonctions de distributions pertinentes,

$$\eta_{xy} = \frac{1}{(\hbar c)^3} \int 2 \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_x(E)(1 - f_y(E)), \quad (\text{B.3})$$

avec f_x et f_y les fonctions de distribution des espèces x et y , respectivement, supposées être des Fermi-Dirac. Dans cet annexe, x et y correspondent aux particules incidentes et émergentes impliquées dans la réaction considérée avec un neutrino.

Pour la diffusion sur un proton, $x = p$ et $y = p$, et on définit $Y_{pp} = \eta_{pp}/n_b$. En pratique, les calculs sont faits par interpolation entre la limite non dégénérée (où on se réduit à $Y_{pp} = Y_p$ avec Y_p la fraction de protons) et la limite dégénérée (où on se réduit à $Y_{pp} = \frac{3Y_p}{2\mu_p/T}$ avec μ_p le potentiel chimique des protons). On a donc

$$Y_{pp} = \frac{Y_p}{1 + \frac{2}{3} \max(\frac{\mu_p}{T}, 0)}. \quad (\text{B.4})$$

Enfin, la constante C_{sp} vaut

$$C_{sp} = \frac{1}{24} \left[4(C_V - 1)^2 + 5 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right], \quad (\text{B.5})$$

avec g_V et g_A les constantes de couplage vectoriel et axial de l'interaction faible, respectivement, et $C_V = \frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$ où C_V est une constante de couplage de courant neutre de l'interaction faible et θ_W l'angle de Weinberg (voir [Amsler et al. \(2008\)](#) pour une revue complète de la théorie de l'interaction faible).

Notons que dans le terme de l'équation (B.1), par rapport à [Ruffert et al. \(1996\)](#), on a remplacé la dépendance en température par une dépendance en $\langle \epsilon_\nu \rangle$, l'énergie moyenne. Des comparaisons ont été faites avec un code utilisant une équation de diffusion dépendante de l'énergie, [Blottiau \(1989\)](#). Les opacités du schéma de fuite présentées ici sont en bon accord celles calculées avec l'équation de diffusion. Ces comparaisons ont mené au choix des formules des opacités pour les énergies (avec le terme F_5/F_3) avec une dépendance en $\langle \epsilon_\nu \rangle$. L'énergie moyenne a également été substituée à la température dans les équations (B.6), (B.8), (B.12), (B.13) et (B.15).

B.1.2 Diffusion élastique sur un neutron

En suivant [Ruffert et al. \(1996\)](#), et par analogie avec B.1 l'opacité $\tau_s(\nu n)$ pour la diffusion élastique sur un neutron s'écrit

$$\tau_s(\nu n) = C_{sn} n_n \sigma_0 \left(\frac{\langle \epsilon_\nu \rangle}{m_e c^2} \right)^2 Y_{nn} \frac{F_5(\eta_\nu)}{F_3(\eta_\nu)}, \quad (\text{B.6})$$

où n_n est la densité de neutrons. Le paramètre de dégénérescence réduit Y_{nn} est défini par l'équation B.3 avec $x = n$ et $y = n$, et on applique la même approximation que pour Y_{pp} , ce qui revient en pratique à appliquer l'équation (B.4) en changeant p en n . La constante C_{sn} prend pour valeur

$$C_{sn} = \frac{1}{24} \left[1 + 5 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.7})$$

B.1.3 Diffusion élastique sur un noyau lourd

Pour la diffusion élastique sur un noyau lourd, j'ai suivi [Rampp & Janka \(2002\)](#), et défini l'opacité $\tau_s(\nu A)$ comme

$$\begin{aligned} \tau_s(\nu A) &= \frac{\sigma_0 A^2 \langle \epsilon_\nu \rangle^2}{16 (m_e c^2)^2} n_A \frac{F_5(\eta_\nu)}{F_3(\eta_\nu)} \\ &\times \left((C_A - C_V) + (2 - C_A - C_V) \frac{2Z - A}{A} \right)^2 \\ &\times \frac{y_b - 1 + (1 + y_b) e^{-2y_b}}{y_b^3} \langle S(\epsilon_\nu) \rangle_{ion}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

avec n_A la densité de noyaux lourds. $C_A = \frac{1}{2}$ et C_V (définie précédemment) sont les deux constantes de couplage de courant neutre de l'interaction faible. y_b est défini comme dans [Bruenn & Mezzacappa \(1997\)](#) et [Rampp & Janka \(2002\)](#), explicitement

$$y_b = \frac{2}{5(\hbar c)^2} (1.07A)^{2/3} \langle \epsilon_\nu \rangle^2, \quad (\text{B.9})$$

où A est le nombre de masse du noyau lourd moyen. Le terme d'écrantage $\langle S(\epsilon) \rangle_{ion}$ est pris en compte en suivant [Horowitz \(1997\)](#); [Bruenn & Mezzacappa \(1997\)](#), explicitement

$$\langle S(\epsilon) \rangle_{ion} = [1 + \exp(-\beta(\xi))]^{-1}, \quad (\text{B.10})$$

où β est une expansion de ξ (en puissances entières ou semi-entières) avec des préfacteurs numériques ajustés par [Horowitz \(1997\)](#). ξ est le rapport de la séparation moyenne entre les ions $a = (4\pi n_A/3)^{-1/3}$ et la longueur d'onde de Compton moyenne des neutrinos $\lambda_c = \hbar c / \langle \epsilon_\nu \rangle$,

$$\xi = \frac{a}{\lambda_c}. \quad (\text{B.11})$$

La quantité y est un facteur de forme et $\langle S(\epsilon) \rangle_{ion}$ prend en compte la corrélation ion-ion. Ces deux corrections sont indispensables, en particulier pour A grand (au début d'une simulation), sans correction la diffusion deviendrait arbitrairement grande, ce qui n'est pas physique.

B.1.4 Absorption d'un ν_e par un neutron

L'opacité $\tau_a(\nu_e n)$ pour cette réaction, de [Ruffert et al. \(1996\)](#), est

$$\begin{aligned} \tau_a(\nu_e n) &= \frac{n_n}{4} \left[1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right] \sigma_0 |V_{ud}|^2 \left(\frac{\langle \epsilon_\nu \rangle}{m_e c^2} \right)^2 \\ &\times \frac{F_5(\eta_{\nu_e})}{F_3(\eta_{\nu_e})} \left[1 + \exp \left(\eta_e - \frac{F_5(\eta_{\nu_e})}{F_4(\eta_{\nu_e})} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

avec η_e le paramètre de dégénérescence des électrons et $|V_{ud}|$ l'élément de matrice CKM (qui décrit le mélange entre les états propres des quarks, voir [Amsler et al. \(2008\)](#)). Prendre ce terme en compte ici est une correction mineure).

B.1.5 Absorption d'un $\bar{\nu}_e$ par un proton

L'opacité $\tau_a(\bar{\nu}_e p)$ pour cette réaction, de [Ruffert et al. \(1996\)](#), est

$$\begin{aligned} \tau_a(\bar{\nu}_e p) &= \frac{n_p}{4} \left[1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right] \sigma_0 |V_{ud}|^2 \left(\frac{\langle \epsilon_\nu \rangle}{m_e c^2} \right)^2 \\ &\times \frac{F_5(\eta_{\bar{\nu}_e})}{F_3(\eta_{\bar{\nu}_e})} \left[1 + \exp \left(-\eta_e - \frac{F_5(\eta_{\bar{\nu}_e})}{F_4(\eta_{\bar{\nu}_e})} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

B.1.6 Diffusion élastique sur un hypéron Λ

En prenant les mêmes approximations que pour la section efficace de diffusion élastique sur les neutrons dans [Bruenn \(1985\)](#); [Ruffert et al. \(1996\)](#); [Burrows et al. \(2006\)](#), on obtient pour la diffusion élastique sur un hypéron Λ

$$\sigma_{\Lambda} = \frac{\sigma_0}{4} \left(\frac{1 + 5c_{A\Lambda}^2}{6} \right). \quad (\text{B.14})$$

La constante $c_{A\Lambda}$ est la constante de couplage axial du Λ au courant neutre. On suppose qu'elle prend la valeur donnée par la symétrie $SU(3)$ de saveur, $c_{A\Lambda} = -0.73$ (voir [Savage & Walden \(1997\)](#); [Reddy et al. \(1998\)](#))¹.

On dérive alors explicitement l'opacité $\tau_s(\nu\Lambda)$ pour cette réaction

$$\tau_s(\nu\Lambda) = n_{\Lambda} \sigma_{\Lambda} \left(\frac{\langle \epsilon_{\nu} \rangle}{m_e c^2} \right)^2 \frac{F_5(\eta_{\nu})}{F_3(\eta_{\nu})}, \quad (\text{B.15})$$

où n_{Λ} est la densité d'hypérons Λ . Je n'ai pas pris en compte de facteur de dégénérescence dans ce cas; cette opacité peut donc être vue comme une borne supérieure à la contribution de la diffusion sur les Λ .

B.2 Taux de création de neutrinos

B.2.1 Capture électronique et positronique

Pour prendre en compte les captures électronique et positronique, j'ai intégré les expressions suivantes, de [Bruenn \(1985\)](#),

$$\Sigma = \frac{c}{n_b} \frac{4\pi}{(hc)^3} \int_0^{\infty} E^2 j(1-f) dE, \quad (\text{B.16})$$

avec $\Sigma = \Sigma_{ec}, \Sigma_{pe}$; f est la fonction de distribution des neutrinos, que l'on suppose être une Fermi-Dirac, car la déviation à celle-ci en terme de fonction de distribution n'est pas calculée dans le schéma de fuite. On voit dans l'équation (B.16) qu'on ne prend pas en compte le terme d'absorption, l'équilibre β étant établi à une densité donnée.

Ces taux intégrés étant coûteux en temps de calcul et ne nécessitant que des données provenant de l'EoS, il peuvent être calculés avant une simulation et tabulés comme fonctions de ρ, T, Y_e (à chaque point de l'EoS) et du potentiel chimique effectif $\mu_{\nu, eff}$. L'accès aux tables est fait par une interpolation quadrilinéaire.

Le terme de création j est également pris de [Bruenn \(1985\)](#).

1. On remarque que l'étrangeté Δ_s du nucléon est négligée dans le calcul de cette valeur. Prendre en compte l'étrangeté, $\Delta_s \sim -0.1$, ne modifierait que très légèrement les résultats, et d'autre part l'incertitude quant à sa valeur exacte est grande.

B.2.1.1 Capture électronique sur les protons libres

Le taux de capture électronique total est la somme du taux de capture électronique sur les protons libres et sur les noyaux lourds. Le terme de création pour les protons libres, $j_{ec,p}$, s'écrit

$$j_{ec,p} = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} |V_{ud}|^2 \eta_{pn} (g_V^2 + 3g_A^2) f_e(E + Q) \times (E + Q)^2 \left[1 - \left(\frac{m_e c^2}{E + Q} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{B.17})$$

où Q est la différence de masse entre neutron et proton, η_{pn} est défini par l'équation (B.3) avec $x = p$ et $y = n$, calculé cette fois sans approximation, et f_e est la fonction de distribution des électrons, supposée être une Fermi–Dirac.

B.2.1.2 Capture électronique sur les noyaux

Le terme de création pour la capture électronique sur les noyaux, $j_{ec,n}$, est

$$j_{ec,n} = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} n_A |V_{ud}|^2 g_A^2 \frac{2}{7} N_p(Z) N_h(N) f_e(E + Q') \times (E + Q')^2 \left[1 - \left(\frac{m_e c^2}{E + Q'} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{B.18})$$

où on fait l'approximation $Q' = \mu_n - \mu_p + \Delta$, μ_n étant le potentiel chimique des neutrons, μ_p celui des protons, et Δ une constante donc la valeur est $\Delta = 3$ MeV.

$N_p(Z)$ et $N_h(N)$ sont aussi pris de [Bruenn \(1985\)](#),

$$N_p(Z) = \begin{cases} 0, & Z < 20 \\ Z - 20, & 20 < Z < 28 \\ 8, & Z > 28 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

$$N_h(N) = \begin{cases} 6, & N < 34 \\ 40 - N, & 34 < N < 40 \\ 0, & N > 40 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

On commence l'intégration Eq. (B.16) à la borne inférieure $E_{min} = m_e c^2 - Q'$ si E_{min} est positif.

B.2.1.3 Capture positronique sur les neutrons libres

Le terme de création pour la capture positronique sur les neutrons libres, j_{pc} , est

$$j_{pc} = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} |V_{ud}|^2 \eta_{np} (g_V^2 + 3g_A^2) f_{e^+}(E - Q) \times (E - Q)^2 \left[1 - \left(\frac{m_e c^2}{E - Q} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{B.21})$$

où f_{e^+} est également une distribution de Fermi–Dirac. η_{np} est défini par Eq. (B.3) avec $x = n$ et $y = p$. On commence ici l'intégration, Eq. (B.16), à la borne inférieure $E_{min} = Q + m_e c^2$.

B.2.2 Annihilation électron-positron

Pour ce terme, on suit [Ruffert et al. \(1996\)](#),

$$\Sigma_{ee} = C_{ee} \frac{\sigma_0 c}{(m_e c^2)^2} \epsilon_{e^-} \epsilon_{e^+} \langle 1 - f_{\nu_i} \rangle_{ee} \langle 1 - f_{\bar{\nu}_i} \rangle_{ee}, \quad (\text{B.22})$$

avec la définition suivante,

$$\epsilon_{e^\mp} = \frac{8\pi}{(hc)^3} T^4 F_3(\pm \eta_e), \quad (\text{B.23})$$

et les distributions de Fermi–Dirac moyennées

$$\langle 1 - f_{\nu_i} \rangle_{ee} = \left(1 + \exp \left[- \left(\frac{F_4(\eta_e)}{2F_3(\eta_e)} + \frac{F_4(-\eta_e)}{2F_3(-\eta_e)} - \eta_{\nu_i} \right) \right] \right)^{-1}. \quad (\text{B.24})$$

La constante C_{ee} prend pour valeur $C_{ee} = ((C_V - C_A)^2 + (C_V + C_A)^2)/36$ pour ν_e et $\bar{\nu}_e$, et $C_{ee} = ((C_V - C_A)^2 + (C_V + C_A - 2)^2)/9$ pour ν_x .

B.2.3 Désintégration de plasmon

Pour ce terme, on suit également [Ruffert et al. \(1996\)](#),

$$\Sigma_{pl} = \frac{\pi^2}{3\alpha_{em}} C_{pl}^2 \frac{\sigma_0 c}{(m_e c^2)^2} \frac{T^8}{(hc)^6} \times \gamma^6 e^{-\gamma} (1 + \gamma) \langle 1 - f_{\nu_i} \rangle_\gamma \langle 1 - f_{\bar{\nu}_i} \rangle_\gamma, \quad (\text{B.25})$$

où α_{em} est la constante de structure fine ; γ est défini par

$$\gamma = 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha_{em}}{3\pi}} \right)^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}(\pi^2 + 3\eta_e^2)}, \quad (\text{B.26})$$

et les distributions de Fermi–Dirac moyennées donnent ici

$$\langle 1 - f_{\nu_i} \rangle_\gamma = \left(1 + \exp \left[- \left(1 + \frac{\gamma^2}{2(1 + \gamma)} - \eta_{\nu_i} \right) \right] \right)^{-1}. \quad (\text{B.27})$$

On prend en compte les ν_x avec un facteur 4 de dégénérescence et un potentiel chimique nul. La constante C_{pl} prend pour valeur $C_{pl} = C_V$ pour les ν_e et les $\bar{\nu}_e$, et $C_{pl} = C_V - 1$ pour les ν_x .

B.3 Énergies moyennes

Les énergies moyennes par réaction sont nécessaires dans le régime libre, où l'énergie emportée par les neutrinos est celle de la réaction, puisqu'ils n'ont pas le temps de se thermaliser (équation 7.16).

B.3.1 Capture électronique

L'énergie moyenne de la réaction est calculée à partir de l'énergie moyenne de l'électron incident (à partir de [Ruffert et al. \(1996\)](#))

$$\langle \epsilon_{ec} \rangle = T \frac{F_5(\eta_e)}{F_4(\eta_e)}. \quad (\text{B.28})$$

B.3.2 Capture positronique

Par analogie avec l'équation (B.28), et suivant également [Ruffert et al. \(1996\)](#), l'énergie moyenne perdue lors de la capture positronique est

$$\langle \epsilon_{pc} \rangle = T \frac{F_5(-\eta_e)}{F_4(-\eta_e)}. \quad (\text{B.29})$$

B.3.3 Annihilation électron-positron

Suivant [Ruffert et al. \(1996\)](#), l'énergie moyenne perdue lors de l'annihilation électron-positron est

$$\langle \epsilon_{ee} \rangle = \frac{T}{2} \left[\frac{F_4(\eta_e)}{F_3(\eta_e)} + \frac{F_4(-\eta_e)}{F_3(-\eta_e)} \right]. \quad (\text{B.30})$$

B.3.4 Désintégration de plasmon

Enfin, l'énergie moyenne perdue lors de la désintégration de plasmon, toujours suivant [Ruffert *et al.* \(1996\)](#), est

$$\langle \epsilon_{pl} \rangle = \frac{T}{2} \left[2 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \right], \quad (\text{B.31})$$

où γ est défini par l'équation [\(B.26\)](#).

Annexe C

Opérateur de Liouville non relativiste en coordonnées doublement sphériques

Dans cette annexe, les termes supplémentaires dans l'opérateur de Liouville non relativiste en coordonnées doublement sphériques sont présentés. On note que cette dérivation, bien que non relativiste, reste entièrement valide en relativité générale (cette dérivation venant uniquement du choix des coordonnées doublement sphériques). L'équation de Boltzmann non relativiste s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{dp^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p^i} = \mathcal{C}[f]. \quad (\text{C.1})$$

Le terme de gauche est l'opérateur de Liouville, noté $L[f]$. En physique classique, on reconnaît dans le terme dp^i/dt les forces extérieures¹, par l'application de la troisième loi de Newton. Une difficulté supplémentaire vient en coordonnées doublement sphériques $(r, \theta, \phi, \epsilon, \Theta, \Phi)$ du fait que les deux angles de l'espace des impulsions Θ, Φ dépendent des deux angles de l'espace réel θ, ϕ (voir [Pomraning \(1973\)](#); [Bonazzola et al. \(2011\)](#)).

C.1 Coordonnées doublement sphériques

Le vecteur p^i peut s'exprimer dans une base sphérique dans l'espace des impulsions comme

$$\begin{pmatrix} p^\epsilon \\ p^\Theta \\ p^\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

ou, dans une base cartésienne de l'espace des impulsions,

$$\begin{pmatrix} p^X \\ p^Y \\ p^Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \sin \Theta \cos \Phi \\ \epsilon \sin \Theta \sin \Phi \\ \epsilon \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

où l'on reconnaît la transformation usuelle d'une base sphérique vers une base cartésienne. Sur la figure 11.1 on voit qu'on définit également les angles dans l'espace des impulsions par rapport à la base sphérique de l'espace réel. Ainsi Θ est défini par rapport au vecteur de base $\vec{e}_r$ et Φ est défini par rapport au vecteur de base $\vec{e}_\theta$. En prenant pour convention que l'axe $\vec{e}_r$ coïncide avec l'axe portant p^Z , on obtient

$$\begin{pmatrix} p^r \\ p^\theta \\ p^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^Z \\ p^X \\ p^Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \cos \Theta \\ \epsilon \sin \Theta \cos \Phi \\ \epsilon \sin \Theta \sin \Phi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Exprimer p^i dans la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ demanderait une deuxième transformation d'une base sphérique vers une base cartésienne, d'où le nom de coordonnées doublement

1. Précisément, dans le cadre de l'équation de Boltzmann, les forces à portée infinie, comme la gravitation ou les forces électromagnétiques.

sphériques. Notons également que même si la base de l'espace des impulsions est définie par rapport à celle de l'espace réel, l'impulsion constitue toujours trois dimensions additionnelles.

C.2 Opérateur de Liouville sans forces extérieures

C.2.1 Partie spatiale de l'opérateur de Liouville

À partir des définitions de p^i et x^i , on trouve

$$\frac{p^i}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \cos \Theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin \Theta \cos \Phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin \Theta \sin \Phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}. \quad (\text{C.5})$$

Il manque à cette équation des termes provenant de la partie impulsion de l'opérateur, qui viennent du fait que p^i dépend de θ et ϕ .

C.2.2 Opérateur de Liouville complet

Écrivons d'abord la dérivée totale de l'impulsion par rapport au temps, en explicitant le fait que p dépend des angles de l'espace réel θ, ϕ

$$\frac{dp^i}{dt} = \left. \frac{dp^i}{dt} \right|_{\theta, \phi} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial p^i}{\partial \theta} + \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial p^i}{\partial \phi}. \quad (\text{C.6})$$

Le terme $\frac{dp^i}{dt}$ dans l'équation (C.1), qui s'interprète comme les forces extérieures, correspond physiquement au terme $\left. \frac{dp^i}{dt} \right|_{\theta, \phi}$ dans l'équation (C.6), les autres termes émanant uniquement du choix de géométrie. On peut alors réécrire l'équation (C.1) en tenant compte de ce fait,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{\epsilon} \left(\left. \frac{dp^i}{dt} \right|_{\theta, \phi} - \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial p^i}{\partial \theta} - \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial p^i}{\partial \phi} \right) \frac{\partial f}{\partial p^i} = \mathcal{C}[f]. \quad (\text{C.7})$$

Supposons alors que les forces extérieures soient nulles. On a alors $\left. \frac{dp^i}{dt} \right|_{\theta, \phi} = 0$ mais les termes supplémentaires impliquant l'impulsion restent. On remarque tout d'abord que

$$\frac{d\theta}{dt} = p^\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{dt} = p^\phi, \quad (\text{C.8})$$

si bien qu'il reste à calculer les termes

$$p^\theta \frac{\partial p^i}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial p^i} \quad \text{et} \quad p^\phi \frac{\partial p^i}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p^i}. \quad (\text{C.9})$$

C.2.3 Termes additionnels

Pour calculer les termes additionnels, on se sert du Jacobien

$$J = \frac{\partial \epsilon, \Theta, \Phi}{\partial r, \theta, \phi} \quad (\text{C.10})$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon}{\partial r}, & \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta}, & \frac{\partial \epsilon}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial r}, & \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, & \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r}, & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, & \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

$$J = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, \\ 0, & \cos \Phi, & \sin \Phi \sin \theta, \\ 0, & -\frac{\sin \Phi \cos \Theta}{\sin \Theta}, & \cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \Phi \cos \Theta}{\sin \Theta}, \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

En déroulant l'équation (C.9), on trouve pour le terme dépendant de θ

$$p^\theta \frac{\partial p^i}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial p^i} = p^\theta \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \Phi} \right], \quad (\text{C.13})$$

soit en appliquant le Jacobien

$$p^\theta \frac{\partial p^i}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial p^i} = p^\theta \left[\cos \Phi \frac{\partial f}{\partial \Theta} - \frac{\sin \Phi \cos \Theta}{\sin \Theta} \frac{\partial f}{\partial \Phi} \right]. \quad (\text{C.14})$$

Pour le terme en ϕ , on trouve

$$p^\phi \frac{\partial p^i}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p^i} = p^\phi \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial \Phi} \right], \quad (\text{C.15})$$

et en appliquant le Jacobien

$$p^\phi \frac{\partial p^i}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p^i} = p^\phi \left[\sin \phi \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \Phi \cos \Theta}{\sin \Theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \Phi} \right]. \quad (\text{C.16})$$

C.2.4 Forme finale de l'opérateur de Liouville

En combinant les équations (C.5), (C.7), (C.14) et (C.16), on obtient l'opérateur de Liouville non relativiste en coordonnées doublement sphériques sans forces extérieures. L'opérateur de Liouville s'écrit alors

$$L[f] = \cos \Theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin \Theta \cos \Phi}{r} \left[\frac{\partial f}{\partial \theta} - \cos \Phi \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\sin \Phi \cos \Theta}{\sin \Theta} \frac{\partial f}{\partial \Phi} \right] \\ + \frac{\sin \Theta \sin \Phi}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial f}{\partial \phi} - \sin \Phi \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \Theta} - \left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \Phi \cos \Theta}{\sin \Theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \Phi} \right], \quad (\text{C.17})$$

et après quelques simplifications et réarrangements de termes, on arrive à la formule cherchée,

$$\begin{aligned}
 L[f] = & \cos \Theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin \Theta \cos \Phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin \Theta \sin \Phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\
 & - \frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \Theta} - \frac{\sin \Theta}{r} \sin \Phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \Phi},
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

qui est la formule donnée dans [Pomraning \(1973\)](#) et [Bonazzola *et al.* \(2011\)](#), et utilisée dans le chapitre [12](#).

Annexe D

Coefficients de rotation de Ricci : termes additionnels

D.1 Géométrie sphérique et convention LORENE

On a

$$\bar{\Gamma}_{ij0} = -K_{ij}, \quad (\text{D.1})$$

(voir équation (10.35)) et donc

$$\bar{\Gamma}^i_{j0} = -K^i_j. \quad (\text{D.2})$$

Ici, l'indice i de K_{ij} doit être monté avec la 3-métrique γ_{ij} . LORENE définit les objets ni sur le CF, ni sur le EF mais sur la base spatiale $\vec{\partial}_r, \frac{1}{r}\vec{\partial}_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}\vec{\partial}_\phi$. J'appelle plus loin la définition d'un objet sur cette base la convention LORENE. Changer de base se fait de la même manière qu'en section 10.1 : on applique une matrice de transformation de tétrade. Cette matrice est

$$Q = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{r}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

avec laquelle K^i_j passe de la convention LORENE au CF (Q pour l'indice contravariant et Q^{-1} pour l'indice covariant). Il faut ensuite appliquer la matrice M (équation (10.38)) pour faire passer K^i_j du CF au EF (voir chapitre 10). Pour K^i_j ,

$$K^i_{j,(EF)} = K^i_{j,(Lorene)} Q Q^{-1} M M^{-1}, \quad (\text{D.4})$$

on a donc $K^i_{j,(EF)} = K^i_{j,(Lorene)}$. Remarquons également que la matrice Q correspond à un changement de coordonnées, des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques.

D.2 Terme $\bar{\Gamma}^i_{0j}$

Que l'on calcule grâce à la relation (10.21)

$$\bar{\Gamma}^i_{j0} - d^i_{j0} = \bar{\Gamma}^i_{0j} - d^i_{0j}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^i_{0j} &= \bar{\Gamma}^i_{j0} - d^i_{j0} + d^i_{0j}, \\ \bar{\Gamma}^i_{0j} &= -K^i_j - d^i_{j0} + d^i_{0j}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

D.2.1 Terme d^i_{j0}

Par la formule (10.14),

$$d^i_{j0} = -M^{-1}_{j\tilde{\mu}} M^{-1}_0{}^{\tilde{\nu}} \frac{\partial M^i_{\tilde{\mu}}}{\partial x^{\tilde{\nu}}}. \quad (\text{D.6})$$

On voit que d_{j0}^i s'annule pour $\tilde{\mu} = 0$ car $M^{-1}_j{}^0 = 0$. On peut donc remplacer $\tilde{\mu}$ par un indice spatial.

$$d_{j0}^i = -M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} M^{-1}_0{}^{\tilde{\nu}} \frac{\partial M^i_{\tilde{k}}}{\partial x^{\tilde{\nu}}}. \quad (\text{D.7})$$

On sépare ensuite en deux termes : le premier terme correspond à $\tilde{\nu} = 0$ avec $M^{-1}_0{}^0 = 1/\alpha$ et le second terme correspond à $\tilde{\nu} = \tilde{l} = 1, 2, 3$ avec $M^{-1}_0{}^{\tilde{l}} = -\beta^{\tilde{l}}/\alpha$,

$$d_{j0}^i = -\frac{1}{\alpha} M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\partial M^i_{\tilde{k}}}{\partial t} + M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\beta^{\tilde{l}}}{\alpha} \frac{\partial M^i_{\tilde{k}}}{\partial x^{\tilde{l}}}. \quad (\text{D.8})$$

D.2.1.1 Premier terme de l'équation (D.8)

En CFC,

$$-\frac{1}{\alpha} M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\partial M^i_{\tilde{k}}}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\Psi^2} \frac{\partial \Psi^2}{\partial t} \delta_j^i, \quad (\text{D.9})$$

où δ_j^i est le delta de Kronecker. Avec la formule de dérivation des compositions de fonctions

$$\frac{\partial \Psi^2}{\partial t} = 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (\text{D.10})$$

Dans le choix de jauge de notre code, c'est à dire en CFC et avec le feuilletage maximal (ou *maximal slicing*, $K = K^i_i = 0$), on peut montrer (Cordero-Carrión *et al.* (2009)) que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi}{6} \nabla_k \beta^k, \quad (\text{D.11})$$

où ∇_k est la dérivée covariante par rapport à la 3-métrique γ_{ij} . On trouve finalement

$$-\frac{1}{\alpha} M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\partial M^i_{\tilde{k}}}{\partial t} = -\frac{1}{3\alpha} \nabla_k \beta^k \delta_j^i. \quad (\text{D.12})$$

Notons qu'avec un autre choix de jauge, ou généralement un autre choix de 3-métrique, cette dernière étape est à adapter, mais il reste possible de formuler ce terme sans dérivée temporelle. Remarquons également que cette formule est la seule qui serait à adapter, toutes les autres formules seraient directement utilisables en 3 + 1 avec un autre choix de jauge.

D.2.1.2 Deuxième terme de l'équation (D.8)

On remarque que, puisque les parties purement spatiales de M et M^{-1} sont diagonales, on doit avoir $j = \tilde{k}$ et $i = \tilde{k}$ pour que les termes soient non nuls. On a donc finalement des termes non nuls uniquement si $i = j$.

Appliquons la matrice Q à β pour le définir sur le CF. Après simplification, en CFC, on trouve pour le terme $i = j = 1$

$$\frac{1}{\alpha \Psi^2} \left[\beta^r \frac{\partial \Psi^2}{\partial r} + \frac{\beta^\theta}{r} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta} + \frac{\beta^\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \phi} \right], \quad (\text{D.13})$$

terme $i = j = 2$

$$\frac{1}{\alpha \Psi^2 r} \left[\beta^r \frac{\partial \Psi^2 r}{\partial r} + \beta^\theta \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta} + \frac{\beta^\phi}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \phi} \right], \quad (\text{D.14})$$

terme $i = j = 3$

$$\frac{1}{\alpha \Psi^2 r} \left[\beta^r \frac{\partial \Psi^2 r}{\partial r} + \frac{\beta^\theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi^2 \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\beta^\phi}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \phi} \right]. \quad (\text{D.15})$$

Numériquement, on évite les singularités sur l'axe $\theta = 0$ en calculant $d^i_{j0} \frac{\partial f}{\partial p^i}$. Chaque terme contenant des singularités (c'est à dire une division par $\sin \theta$) est calculé indépendamment et la division par $\sin \theta$ est faite en dernier, par un opérateur spectral analogue à celui de LORENE. La régularité de l'opérateur est assurée par le terme $\frac{\partial f}{\partial p^i}$. La singularité venant de la division par r n'est pas prise en compte puisque les domaines simulés ne vont pas jusqu'à $r = 0$.

D.2.2 Terme d^i_{0j}

Par la formule (10.14),

$$d^i_{0j} = -M^{-1}_0{}^{\tilde{\mu}} M^{-1}_j{}^{\tilde{\nu}} \frac{\partial M^i_{\tilde{\mu}}}{\partial x^{\tilde{\nu}}}, \quad (\text{D.16})$$

où on voit que d^i_{0j} s'annule pour $\tilde{\nu} = 0$ car $M^{-1}_j{}^0 = 0$. On peut donc remplacer $\tilde{\nu}$ par un indice spatial, ce qui fait que d^i_{0j} ne contient aucune dérivée temporelle. Décomposons également $\tilde{\mu}$ en un indice 0 et un indice spatial.

$$d^i_{0j} = -M^{-1}_0{}^0 M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\partial M^i_0}{\partial x^{\tilde{k}}} - M^{-1}_0{}^{\tilde{l}} M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\partial M^i_{\tilde{l}}}{\partial x^{\tilde{k}}}. \quad (\text{D.17})$$

Avec $M^{-1}_0{}^0 = 1/\alpha$ et $M^{-1}_0{}^{\tilde{l}} = -\beta^{\tilde{l}}/\alpha$, on trouve finalement

$$d^i_{0j} = -\frac{1}{\alpha} M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\partial M^i_0}{\partial x^{\tilde{k}}} + \frac{\beta^{\tilde{l}}}{\alpha} M^{-1}_j{}^{\tilde{k}} \frac{\partial M^i_{\tilde{l}}}{\partial x^{\tilde{k}}}. \quad (\text{D.18})$$

D.2.2.1 Premier terme de l'équation (D.18)

En CFC, en appliquant la matrice Q à β , il vient le terme final après simplifications

$$-\frac{1}{\alpha} M^{-1}_{\tilde{j}} \frac{\partial M^i_0}{\partial x^{\tilde{k}}} = -\frac{1}{\alpha \Psi^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^2 \beta^r}{\partial r}, & \frac{\partial \Psi^2 \beta^\theta}{\partial r}, & \frac{\partial \Psi^2 \beta^\phi}{\partial r}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^2 \beta^r}{\partial \theta}, & \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^2 \beta^\theta}{\partial \theta}, & \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^2 \beta^\phi}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi^2 \beta^r}{\partial \phi}, & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi^2 \beta^\theta}{\partial \phi}, & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi^2 \beta^\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.19})$$

Ici comme dans le reste de cette annexe, j est l'indice de ligne et i l'indice de colonne.

D.2.2.2 Deuxième terme de l'équation (D.18)

En CFC, en appliquant la matrice Q à β , après simplifications ce terme s'écrit

$$\frac{\beta^{\tilde{i}}}{\alpha} M^{-1}_{\tilde{j}} \frac{\partial M^i_{\tilde{l}}}{\partial x^{\tilde{k}}} = \frac{1}{\alpha \Psi^2} \begin{pmatrix} \beta^r \frac{\partial \Psi^2}{\partial r}, & \frac{\beta^\theta}{r} \frac{\partial \Psi^2 r}{\partial r}, & \frac{\beta^\phi}{r} \frac{\partial \Psi^2 r}{\partial r}, \\ \beta^r \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta}, & \frac{\beta^\theta}{\beta^\theta} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta}, & \frac{\beta^\phi}{\beta^\phi} \frac{\partial \Psi^2 \sin \theta}{\partial \theta}, \\ \frac{r}{\beta^r} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta}, & \frac{r}{\beta^\theta} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta}, & \frac{r \sin \theta}{\beta^\phi} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta}, \\ \frac{r \sin \theta}{\beta^r} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \phi}, & \frac{r \sin \theta}{\beta^\theta} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \phi}, & \frac{r \sin \theta}{\beta^\phi} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \phi} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.20})$$

Les singularités pouvant provenir de ces termes sont prises en compte comme décrit en section [D.2.1.2](#).

Annexe E

Bibliographie personnelle

PERES, B., OERTEL, M. & NOVAK, J. Influence of pions and hyperons on stellar black hole formation. *Phys. Rev. D*, **87**, 043006.

Cet article inclue les résultats 1D sur la formation de trous noirs et la transition de phase. L'implémentation du schéma de fuite y est présentée.

PERES, B., OERTEL, M. & NOVAK, J. Phase transition and gravitational waves in an axisymmetric core collapse with hyperons. *Arxiv*, in preparation.

Cet article présente les résultats 2D, en particulier l'extraction d'ondes gravitationnelles et l'adoucissement de la transition de phase. La soumission est prévue dans le courant de l'été 2013.

PERES, B., PENNER, A.J., NOVAK, J. & BONAZZOLA, S. General relativistic neutrino transport using spectral methods. *Arxiv*, in preparation.

Dans cet article, l'opérateur de Liouville en relativité générale est dérivé. Le code GHOST de résolution numérique est présenté et on finit par les tests numériques. La soumission est prévue en mai 2013.

BONAZZOLA, S., VASSET, N. & PERES, B. (2011). Solving the transport equation by the use of 6D spectral methods in spherical geometry. *ArXiv e-prints*, arXiv :1104.5330.

Cet article soumis est le premier à résoudre l'équation de Boltzmann en la traitant entièrement sur des bases spectrales. L'équation est non-relativiste. La méthode de raccordement entre l'équation de diffusion, au centre, et l'équation sans approximation est présentée, ainsi que l'équation des télégraphistes, une alternative à l'équation de diffusion.

Bibliographie

- ADAM, D. (1986). Models of magnetic white dwarfs. *Astron. Astrophys.*, **160**, 95–106.
- ALEXEYEV, E.N., ALEXEYEVA, L.N., KRIVOSHEINA, I.V. & VOLCHENKO, V.I. (1988). Detection of the neutrino signal from SN 1987A in the LMC using the INR Baksan underground scintillation telescope. *Physics Letters B*, **205**, 209–214.
- AMSLER ET AL., C. (2008). Review of particle phys. *Phys. Lett. B*, **667,1**, and the Particle Physics Booklet.
- ARCONES, A. & THIELEMANN, F.K. (2013). Neutrino-driven wind simulations and nucleosynthesis of heavy elements. *Journal of Physics G Nuclear Physics*, **40**, 013201.
- ARZOUMANIAN, Z., CHERNOFF, D.F. & CORDES, J.M. (2002). The Velocity Distribution of Isolated Radio Pulsars. *Astrophys. J.*, **568**, 289–301.
- BAADE, W. & ZWICKY, F. (1934). On Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, **20**, 254–259.
- BALBERG, S. & GAL, A. (1997). An effective equation of state for dense matter with strangeness. *Nucl. Phys.*, **A625**, 435–472.
- BALBUS, S.A. & HAWLEY, J.F. (1992). A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. IV. Nonaxisymmetric Perturbations. *Astrophys. J.*, **400**, 610–621.
- BANYULS, F., FONT, J.A., IBÁÑEZ, J.M., MARTÍ, J.M. & MIRALLES, J.A. (1997). Numerical { 3+1 } general relativistic hydrodynamics : a local characteristic approach. *Astrophys. J.*, **476**, 221–231.
- BEDNAREK, I., HAENSEL, P., ZDUNIK, J.L., BEJGER, M. & MAŃKA, R. (2012). Hyperons in neutron-star cores and a 2 M_⊙ pulsar. *Astron. Astrophys.*, **543**, A157.
- BIONTA, R.M., BLEWITT, G., BRATTON, C.B., CASPER, D. & CIOCIO, A. (1987). Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud. *Physical Review Letters*, **58**, 1494–1496.
- BLONDIN, J.M. & MEZZACAPPA, A. (2003). Stability of standing accretion shocks, with an eye toward core-collapse supernovae. *Astrophys. J.*, **584**, 971–980.

- BLOTTIAU, P. (1989). *Simulation des Supernovae de type 2*. Ph.D. thesis, Doctorat Thesis, University Paris 7, France, (1989).
- BONAZZOLA, S., VASSET, N. & PERES, B. (2011). Solving the transport equation by the use of 6D spectral methods in spherical geometry. *ArXiv e-prints*, arXiv :1104.5330.
- BRUENN, S.W. (1985). Stellar core collapse : numerical model and infall epoch. *Astrophys. J. Suppl.*, **58**, 771–841.
- BRUENN, S.W. & MEZZACAPPA, A. (1997). Ion screening effects and stellar collapse. *Phys. Rev. D*, **56**, 7529–7547.
- BRUENN, S.W., MEZZACAPPA, A., HIX, W.R., LENTZ, E.J., BRONSON MESSER, O.E., LINGERFELT, E.J., BLONDIN, J.M., ENDEVE, E., MARRONETTI, P. & YAKUNIN, K.N. (2012). Axisymmetric Ab Initio Core-Collapse Supernova Simulations of 12-25 $M_{\odot}$ Stars. *ArXiv e-prints*, arXiv :1212.1747.
- BURAS, R., JANKA, H.T., KEIL, M.T., RAFFELT, G.G. & RAMPP, M. (2003). Electron Neutrino Pair Annihilation : A New Source for Muon and Tau Neutrinos in Supernovae. *Astrophys. J.*, **587**, 320–326.
- BURAS, R., RAMPP, M., JANKA, H.T. & KIFONIDIS, K. (2006). Two-dimensional hydrodynamic core-collapse supernova simulations with spectral neutrino transport. I. Numerical method and results for a 15 $M_{\odot}$ star. *Astron. Astrophys.*, **447**, 1049–1092.
- BURROWS, A. (2012). Perspectives on Core-Collapse Supernova Theory. *ArXiv e-prints*, arXiv :1210.4921.
- BURROWS, A., LIVNE, E., DESSART, L., OTT, C.D. & MURPHY, J. (2006). An acoustic mechanism for core-collapse supernova explosions. *New Astron. Rev.*, **50**, 487–491.
- BURROWS, A., DESSART, L., LIVNE, E., OTT, C.D. & MURPHY, J. (2007). Simulations of Magnetically Driven Supernova and Hypernova Explosions in the Context of Rapid Rotation. *Astrophys. J.*, **664**, 416–434.
- CANAL, R., GARCIA, D., ISERN, J. & LABAY, J. (1990). Can C + O white dwarfs form neutron stars ? *Astrophys. J. Lett.*, **356**, L51–L53.
- CARDALL, C. & MEZZACAPPA, A. (2003). Conservative formulations of general relativistic kinetic theory. *Phys. Rev. D*, **68**, 023006.
- CARDALL, C.Y., LENTZ, E.J. & MEZZACAPPA, A. (2005). Conservative special relativistic radiative transfer for multidimensional astrophysical simulations : Motivation and elaboration. *Phys. Rev. D*, **72**, 043007.
- CARDALL, C.Y., ENDEVE, E. & MEZZACAPPA, A. (2012). Conservative 3+1 General Relativistic Variable Eddington Tensor Radiation Transport Equations. *ArXiv e-prints*.

- CERDÁ-DURÁN, P., FAYE, G., DIMMELMEIER, H., FONT, J.A., IBÁÑEZ, J.M., MÜLLER, E. & SCHÄFER, G. (2005). Cfc+ : improved dynamics and gravitational waveforms from relativistic core collapse simulations. *Astron. Astrophys.*, **439**, 1033–1055.
- CERDÁ-DURÁN, P., FONT, J.A. & DIMMELMEIER, H. (2007). General relativistic simulations of passive-magneto-rotational core collapse with microphysics. *Astron. Astrophys.*, **474**, 169–191.
- COLELLA, P. & WOODWARD, P.R. (1984). The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *Journal of Computational Physics*, **54**, 174–201.
- COLGATE, S.A. & MCKEE, C. (1969). Early Supernova Luminosity. *Astrophys. J.*, **157**, 623.
- COLGATE, S.A. & WHITE, R.H. (1966). The Hydrodynamic Behavior of Supernovae Explosions. *Astrophys. J.*, **143**, 626.
- CORDERO-CARRIÓN, I., CERDÁ-DURÁN, P., DIMMELMEIER, H., JARAMILLO, J.L., NOVAK, J. & GOURGOULHON, E. (2009). Improved constrained scheme for the einstein equations : An approach to the uniqueness issue. *Phys. Rev. D*, **79**, 024017.
- CORDERO-CARRIÓN, I., CERDÁ-DURÁN, P. & IBÁÑEZ, J.M. (2012). Gravitational waves in dynamical spacetimes with matter content in the fully constrained formulation. *Phys. Rev. D*, **85**, 044023.
- DADYKIN, V.L., ZATSEPIN, G.T., KORCHAGIN, V.B., KORCHAGIN, P.V., MAL'GIN, A.S., RYAZHSKAYA, O.G., RYASNYĬ, V.G., TALOCHKIN, V.P., KHAL'CHUKOV, F.F., YAKUSHEV, V.F., AGLIETTA, M., BADINO, G., BOLOGNA, G., CASTAGNOLI, C., CASTELLINA, A., FULGIONE, W., GALEOTTI, P., SAAVEDRA, O., TRINCERO, J. & VERNETTO, S. (1987). Detection of a rare event on 23 February 1987 by the neutrino radiation detector under Mont Blanc. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, **45**, 593.
- DASGUPTA, B., O'CONNOR, E.P. & OTT, C.D. (2012). Role of collective neutrino flavor oscillations in core-collapse supernova shock revival. *Phys. Rev. D*, **85**, 065008.
- DEBBASCH, F. & VAN LEEUWEN, W.A. (2009). General relativistic Boltzmann equation, I : Covariant treatment. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, **388**, 1079–1104.
- DEBBASCH, F., RIVET, J.P. & VAN LEEUWEN, W.A. (2001). Invariance of the relativistic one-particle distribution function. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, **301**, 181–195.
- DEMOREST, P., PENNUCCI, T., RANSOM, S., ROBERTS, M. & HESSELS, J. (2010). Shapiro delay measurement of a two solar mass neutron star. *Nature*, **467**, 1081–1083.

- DESSART, L., BURROWS, A., LIVNE, E. & OTT, C.D. (2008). The Proto-Neutron Star Phase of the Collapsar Model and the Route to Long-Soft Gamma-Ray Bursts and Hypernovae. *Astrophys. J. Lett.*, **673**, L43–L46.
- DIMMELMEIER, H., FONT, J.A. & MÜLLER, E. (2002). Relativistic simulations of rotational core collapse II. Collapse dynamics and gravitational radiation. *Astron. Astrophys.*, **393**, 523–542.
- DIMMELMEIER, H., NOVAK, J., FONT, J.A., IBÁÑEZ, J.M. & MÜLLER, E. (2005). Combining spectral and shock-capturing methods : A new numerical approach for 3d relativistic core collapse simulations. *Phys. Rev. D*, **71**, 064023.
- DIMMELMEIER, H., OTT, C.D., MAREK, A. & JANKA, H.T. (2008). Gravitational wave burst signal from core collapse of rotating stars. *Phys. Rev. D*, **78**, 064056.
- DOLENCE, J.C., BURROWS, A., MURPHY, J.W. & NORDHAUS, J. (2012). Dimensional Dependence of the Hydrodynamics of Core-Collapse Supernovae. *ArXiv e-prints*.
- DUAN, H. & KNELLER, J.P. (2009). TOPICAL REVIEW : Neutrino flavour transformation in supernovae. *Journal of Physics G Nuclear Physics*, **36**, 113201.
- EHLERS, J. (1971). General relativity and kinetic theory. In R.K. Sachs, ed., *General Relativity and Cosmology*, 1–70.
- ENDEVE, E., CARDALL, C.Y. & MEZZACAPPA, A. (2012). Conservative Moment Equations for Neutrino Radiation Transport with Limited Relativity. *ArXiv e-prints*, arXiv :1212.4064.
- FANTINA, A.F., KHAN, E., COLÒ, G., PAAR, N. & VRETENAR, D. (2012). Stellar electron-capture rates on nuclei based on a microscopic Skyrme functional. *Phys. Rev. C*, **86**, 035805.
- FATTOYEV, F.J., CARVAJAL, J., NEWTON, W.G. & LI, B.A. (2013). Constraining the high-density behavior of the nuclear symmetry energy with the tidal polarizability of neutron stars. *Phys. Rev. C*, **87**, 015806.
- FILIPPENKO, A.V. (2005). An Observational Review of Core-Collapse Supernovae. In M. Turatto, S. Benetti, L. Zampieri & W. Shea, eds., *1604-2004 : Supernovae as Cosmological Lighthouses*, vol. 342 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 87.
- FISCHER, T., WHITEHOUSE, S.C., MEZZACAPPA, A., THIELEMANN, F.K. & LIEBENDÖRFER, M. (2009). The neutrino signal from protoneutron star accretion and black hole formation. *Astron. Astrophys.*, **499**, 1–15.
- FISCHER, T., WHITEHOUSE, S.C., MEZZACAPPA, A., THIELEMANN, F.K. & LIEBENDÖRFER, M. (2010). Protoneutron star evolution and the neutrino-driven wind in general relativistic neutrino radiation hydrodynamics simulations. *Astron. Astrophys.*, **517**, A80.

- FISCHER, T., SAGERT, I., PAGLIARA, G., HEMPEL, M., SCHAFFNER-BIELICH, J., RAUSCHER, T., THIELEMANN, F.K., KÄPPELI, R., MARTÍNEZ-PINEDO, G. & LIEBENDÖRFER, M. (2011). Core-collapse Supernova Explosions Triggered by a Quark-Hadron Phase Transition During the Early Post-bounce Phase. *Astrophys. J. Suppl.*, **194**, 39.
- FOGLIZZO, T. (2009). A Simple Toy Model of the Advective-Acoustic Instability. I. Perturbative Approach. *Astrophys. J.*, **694**, 820–832.
- FOGLIZZO, T., GALLETTI, P., SCHECK, L. & JANKA, H.T. (2007a). Instability of a Stalled Accretion Shock : Evidence for the Advective-Acoustic Cycle. *Astrophys. J.*, **654**, 1006–1021.
- FOGLIZZO, T., GALLETTI, P., SCHECK, L. & JANKA, H.T. (2007b). Instability of a Stalled Accretion Shock : Evidence for the Advective-Acoustic Cycle. *Astrophys. J.*, **654**, 1006–1021.
- FONT, J.A. (2008). Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity. *Living Rev. Relat.*, **11**, 7.
- GAL-YAM, A., MAZZALI, P., OFEK, E.O., NUGENT, P.E., KULKARNI, S.R., KASLIWAL, M.M., QUIMBY, R.M., FILIPPENKO, A.V., CENKO, S.B., CHORNOCK, R., WALDMAN, R., KASEN, D., SULLIVAN, M., BESHORE, E.C., DRAKE, A.J., THOMAS, R.C., BLOOM, J.S., POZNANSKI, D., MILLER, A.A., FOLEY, R.J., SILVERMAN, J.M., ARCAVI, I., ELLIS, R.S. & DENG, J. (2009). Supernova 2007bi as a pair-instability explosion. *Nature*, **462**, 624–627.
- GONZÁLEZ, M., AUDIT, E. & HUYNH, P. (2007). HERACLES : a three-dimensional radiation hydrodynamics code. *Astron. Astrophys.*, **464**, 429–435.
- GOTTLIEB, D. & ORSZAG, S. (1977). *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- GOURGOULHON, E. (2005). Objets compacts.
<http://luth.obspm.fr/luthier/gourgoulhon/fr/master/index.html>.
- GOURGOULHON, E. (2010). *Relativité restreinte : Des particules à l'astrophysique*. EDP Sciences / CNRS Éditions.
- GOURGOULHON, E. (2012). *3+1 Formalism in General Relativity : Bases of Numerical Relativity*, vol. 846 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin ; New York.
- GOURGOULHON, E., GRANDCLÉMENT, P., MARCK, J.A. & NOVAK, J. (1997–2012). LORENE : Langage Objet pour la Relativité Numérique. <http://www.lorene.obspm.fr>.
- GRANDCLÉMENT, P. & NOVAK, J. (2009). Spectral methods for numerical relativity. *Living Rev. Relat.*, **12**, 1.

- GUILLET, J., SATO, J. & FOGLIZZO, T. (2010). The Saturation of SASI by Parasitic Instabilities. *Astrophys. J.*, **713**, 1350–1362.
- GULMINELLI, F., RADUTA, A. & OERTEL, M. (2012). Phase transition towards strange matter. *Phys. Rev. C*, **86**, 025805.
- GULMINELLI, F., RADUTA, A.R., OERTEL, M. & MARGUERON, J. (2013). Strangeness-driven phase transition in star matter. *ArXiv e-prints*, arXiv : 1301.0390.
- HAMILTON, A. (2010). General Relativity, Black Holes, and Cosmology. http://casa.colorado.edu/~ajsh/phys5770_10/grbook.pdf, Unpublished book and lecture notes.
- HANKE, F., MAREK, A., MÜLLER, B. & JANKA, H.T. (2011). Is Strong SASI Activity the Key to Successful Neutrino-Driven Supernova Explosions? *ArXiv e-prints*, arXiv :1108.4355.
- HANKE, F., MUELLER, B., WONGWATHANARAT, A., MAREK, A. & JANKA, H.T. (2013). SASI Activity in Three-Dimensional Neutrino-Hydrodynamics Simulations of Supernova Cores. *ArXiv e-prints*, arXiv : 1303.6269.
- HARTEN, A., LAX, P.D. & VAN LEER, B. (1983). On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, **25**, 35–61.
- HEGER, A. (2012). The Final Stages of Massive Star Evolution and Their Supernovae. In K. Davidson & R.M. Humphreys, eds., *Astrophysics and Space Science Library*, vol. 384 of *Astrophysics and Space Science Library*, 299.
- HEGER, A., FRYER, C.L., WOOSLEY, S.E., LANGER, N. & HARTMANN, D.H. (2003). How Massive Single Stars End Their Life. *Astrophys. J.*, **591**, 288–300.
- HEMPEL, M., FISCHER, T., SCHAFFNER-BIELICH, J. & LIEBENDÖRFER, M. (2012). New Equations of State in Simulations of Core-collapse Supernovae. *Astrophys. J.*, **748**, 70.
- HIRATA, K., KAJITA, T., KOSHIBA, M., NAKAHATA, M. & OYAMA, Y. (1987). Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A. *Physical Review Letters*, **58**, 1490–1493.
- HOROWITZ, C.J. (1997). Neutrino trapping in a supernova and the screening of weak neutral currents. *Phys. Rev. D*, **55**, 4577–4581.
- IBANEZ CABANEL, J.M. (1984). Explosive collapse of accreting white dwarfs. *Astron. Astrophys.*, **135**, 382–392.
- IBELING, D. & HEGER, A. (2013). The Metallicity Dependence of the Minimum Mass for Core-Collapse Supernovae. *ArXiv e-prints*, arXiv :1301.5783.

- ISENBERG, J.A. (2008). Waveless Approximation Theories of Gravity. *International Journal of Modern Physics D*, **17**, 265–273.
- ISHIZUKA, C., OHNISHI, A., TSUBAKIHARA, K., SUMIYOSHI, K. & YAMADA, S. (2008). Tables of Hyperonic Matter Equation of State for Core- Collapse Supernovae. *J. Phys. G*, **35**, 085201.
- JANKA, H.T. (2012). Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, accepted for publication, arXiv :1206.2503.
- JANKA, H.T., LANGANKE, K., MAREK, A., MARTÍNEZ-PINEDO, G. & MÜLLER, B. (2007). Theory of core-collapse supernovae. *Phys. Rep.*, **442**, 38.
- JANKA, H.T., MÜLLER, B., KITAURA, F.S. & BURAS, R. (2008). Dynamics of shock propagation and nucleosynthesis conditions in O-Ne-Mg core supernovae. *Astron. Astrophys.*, **485**, 199–208.
- JANKA, H.T., HANKE, F., HUEDEPOHL, L., MAREK, A., MÜLLER, B. & OBERGAULINGER, M. (2012). Core-Collapse Supernovae : Reflections and Directions. *ArXiv e-prints*, arXiv :1211.1378.
- KHAN, E. (2009). Role of superfluidity in nuclear incompressibilities. *Phys. Rev. C*, **80**, 011307.
- KHAN, E., MARGUERON, J., COLÒ, G., HAGINO, K. & SAGAWA, H. (2010). Effect of pairing correlations on incompressibility and symmetry energy in nuclear matter and finite nuclei. *Phys. Rev. C*, **82**, 024322.
- KITAURA, F.S., JANKA, H.T. & HILLEBRANDT, W. (2006). Explosions of O-Ne-Mg cores, the Crab supernova, and subluminescent type II-P supernovae. *Astron. Astrophys.*, **450**, 345–350.
- KOKKOTAS, K.D. & RUOFF, J. (2001). Radial oscillations of relativistic stars. *Astron. Astrophys.*, **366**, 565–572.
- KOTAKE, K. (2011). Multiple physical elements to determine the gravitational-wave signatures of core-collapse supernovae. *ArXiv e-prints*, arXiv :1110.5107.
- KOTAKE, K., SUMIYOSHI, K., YAMADA, S., TAKIWAKI, T., KURODA, T., SUWA, Y. & NAGAKURA, H. (2012a). Core-Collapse Supernovae as Supercomputing Science : a status report toward 6D simulations with exact Boltzmann neutrino transport in full general relativity. *Prog. Theor. Phys.*, accepted for publication, arXiv :1205.6284.
- KOTAKE, K., TAKIWAKI, T., SUWA, Y., IWAKAMI NAKANO, W., KAWAGOE, S., MASADA, Y. & FUJIMOTO, S.I. (2012b). Multimessengers from core-collapse supernovae : multidimensionality as a key to bridge theory and observation. *Adv. Astron.*, accepted for publication, arXiv :12042330.

- KURODA, T., KOTAKE, K. & TAKIWAKI, T. (2012). Fully General Relativistic Simulations of Core-collapse Supernovae with an Approximate Neutrino Transport. *Astrophys. J.*, **755**, 11.
- LANGANKE, K., MARTÍNEZ-PINEDO, G., SAMPAIO, J.M., DEAN, D.J., HIX, W.R., MESSER, O.E., MEZZACAPPA, A., LIEBENDÖRFER, M., JANKA, H.T. & RAMPP, M. (2003). Electron capture rates on nuclei and implications for stellar core collapse. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 241102.
- LATTIMER, J.M. (2011). Neutron stars and the dense matter equation of state. *Astrophysics and Space Science*, **336**, 67–74.
- LATTIMER, J.M. & LIM, Y. (2012). Constraining the Symmetry Parameters of the Nuclear Interaction. *ArXiv e-prints*, arXiv : 1203.4286.
- LATTIMER, J.M. & PRAKASH, M. (2007). Neutron star observations : Prognosis for equation of state constraints. *Phys. Rep.*, **442**, 109.
- LATTIMER, J.M. & SWESTY, F.D. (1991). A generalized equation of state for hot, dense matter. *Nucl. Phys. A*, **535**, 331–376.
- LEAMAN, J., LI, W., CHORNOCK, R. & FILIPPENKO, A.V. (2011). Nearby supernova rates from the Lick Observatory Supernova Search - I. The methods and data base. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **412**, 1419–1440.
- LENTZ, E.J., MEZZACAPPA, A., BRONSON MESSER, O.E., HIX, W.R. & BRUENN, S.W. (2012a). Interplay of Neutrino Opacities in Core-collapse Supernova Simulations. *Astrophys. J.*, **760**, 94.
- LENTZ, E.J., MEZZACAPPA, A., BRONSON MESSER, O.E., LIEBENDÖRFER, M., HIX, W.R. & BRUENN, S.W. (2012b). On the Requirements for Realistic Modeling of Neutrino Transport in Simulations of Core-collapse Supernovae. *Astrophys. J.*, **747**, 73.
- LEONARD, D.C., FILIPPENKO, A.V., GANESHALINGAM, M., SERDUKE, F.J.D., LI, W., SWIFT, B.J., GAL-YAM, A., FOLEY, R.J., FOX, D.B., PARK, S., HOFFMAN, J.L. & WONG, D.S. (2006). A non-spherical core in the explosion of supernova SN 2004dj. *Nature*, **440**, 505–507.
- LIEBENDÖRFER, M. (2005). A Simple Parameterization of the Consequences of Deleptonization for Simulations of Stellar Core Collapse. *Astrophys. J.*, **633**, 1042–1051.
- LIEBENDÖRFER, M., ROSSWOG, S. & THIELEMANN, F.K. (2002). An Adaptive Grid, Implicit Code for Spherically Symmetric, General Relativistic Hydrodynamics in Co-moving Coordinates. *Astrophys. J. Suppl.*, **141**, 229–246.

- LIEBENDÖRFER, M., MESSER, O.E.B., MEZZACAPPA, A., BRUENN, S.W., CARDALL, C.Y. & THIELEMANN, F.K. (2004). A Finite Difference Representation of Neutrino Radiation Hydrodynamics in Spherically Symmetric General Relativistic Spacetime. *Astrophys. J. Suppl.*, **150**, 263–316.
- LIEBENDÖRFER, M., RAMPP, M., JANKA, H.T. & MEZZACAPPA, A. (2005). Supernova Simulations with Boltzmann Neutrino Transport : A Comparison of Methods. *Astrophys. J.*, **620**, 840–860.
- LIEBENDÖRFER, M., WHITEHOUSE, S.C. & FISCHER, T. (2009). The Isotropic Diffusion Source Approximation for Supernova Neutrino Transport. *Astrophys. J.*, **698**, 1174–1190.
- LIN, L.M. & NOVAK, J. (2007). A new spectral apparent horizon finder for 3D numerical relativity. *Class. Quantum Grav.*, **24**, 2665–2676.
- LINDQUIST, R.W. (1966). Relativistic transport theory. *Annals of Physics*, **37**, 487–518.
- LIVNE, E., BURROWS, A., WALDER, R., LICHTENSTADT, I. & THOMPSON, T.A. (2004). Two-dimensional, Time-dependent, Multigroup, Multiangle Radiation Hydrodynamics Test Simulation in the Core-Collapse Supernova Context. *Astrophys. J.*, **609**, 277–287.
- MANCHESTER, R.N. (2007). Searching for a Pulsar in SN1987A. In S. Immler, K. Weiler & R. McCray, eds., *Supernova 1987A : 20 Years After : Supernovae and Gamma-Ray Bursters*, vol. 937 of *American Institute of Physics Conference Series*, 134–143.
- MAREK, A. & JANKA, H.T. (2009). Delayed Neutrino-Driven Supernova Explosions Aided by the Standing Accretion-Shock Instability. *Astrophys. J.*, **694**, 664–696.
- MAREK, A., DIMMELMEIER, H., JANKA, H.T., MÜLLER, E. & BURAS, R. (2006). Exploring the relativistic regime with Newtonian hydrodynamics : an improved effective gravitational potential for supernova simulations. *Astron. Astrophys.*, **445**, 273–289.
- MARTÍ, J. (1996). Extension of the Piecewise Parabolic Method to One-Dimensional Relativistic Hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, **123**, 1–14.
- MARTÍNEZ-PINEDO, G., FISCHER, T., LOHS, A. & HUTHER, L. (2012). Charged-Current Weak Interaction Processes in Hot and Dense Matter and its Impact on the Spectra of Neutrinos Emitted from Protoneutron Star Cooling. *Physical Review Letters*, **109**, 251104.
- MÜLLER, B., JANKA, H.T. & DIMMELMEIER, H. (2010). A New Multi-dimensional General Relativistic Neutrino Hydrodynamic Code for Core-collapse Supernovae. I. Method and Code Tests in Spherical Symmetry. *Astrophys. J. Suppl.*, **189**, 104–133.

- MÜLLER, B., JANKA, H.T. & HEGER, A. (2012a). New Two-dimensional Models of Supernova Explosions by the Neutrino-heating Mechanism : Evidence for Different Instability Regimes in Collapsing Stellar Cores. *Astrophys. J.*, **761**, 72.
- MÜLLER, B., JANKA, H.T. & MAREK, A. (2012b). A New Multi-dimensional General Relativistic Neutrino Hydrodynamics Code for Core-collapse Supernovae. II. Relativistic Explosion Models of Core-collapse Supernovae. *Astrophys. J.*, **756**, 84.
- MÜLLER, B., JANKA, H.T. & MAREK, A. (2012c). A New Multi-Dimensional General Relativistic Neutrino Hydrodynamics Code of Core-Collapse Supernovae III. Gravitational Wave Signals from Supernova Explosion Models. *ArXiv e-prints*, arXiv :1210.6984.
- MÜLLER, E., JANKA, H.T. & WONGWATHANARAT, A. (2012d). Parametrized 3D models of neutrino-driven supernova explosions. Neutrino emission asymmetries and gravitational-wave signals. *Astron. Astrophys.*, **537**, A63.
- NAKAZATO, K., FURUSAWA, S., SUMIYOSHI, K., OHNISHI, A., YAMADA, S. & SUZUKI, H. (2012). Hyperon Matter and Black Hole Formation in Failed Supernovae. *Astrophys. J.*, **745**, 197.
- NORDHAUS, J., BURROWS, A., ALMGREN, A. & BELL, J. (2010). Dimension as a Key to the Neutrino Mechanism of Core-collapse Supernova Explosions. *Astrophys. J.*, **720**, 694–703.
- NORDHAUS, J., BRANDT, T.D., BURROWS, A. & ALMGREN, A. (2012). The hydrodynamic origin of neutron star kicks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **423**, 1805–1812.
- OBERGAULINGER, M., CERDÁ-DURÁN, P., MÜLLER, E. & ALOY, M.A. (2009). Semi-global simulations of the magneto-rotational instability in core collapse supernovae. *Astron. Astrophys.*, **498**, 241–271.
- O’CONNOR, E. & OTT, C.D. (2010). A new open-source code for spherically-symmetric stellar collapse to neutron stars and black holes. *Class. Quantum Grav.*, **27**.
- O’CONNOR, E. & OTT, C.D. (2011). Black Hole Formation in Failing Core-Collapse Supernovae. *Astrophys. J.*, **730**, 70.
- O’CONNOR, E. & OTT, C.D. (2012). The Progenitor Dependence of the Preexplosion Neutrino Emission in Core-Collapse Supernovae, submitted to *Astrophys. J.*, arXiv :1207.1100.
- OERTEL, M., FANTINA, A.F. & NOVAK, J. (2012). Extended equation of state for core-collapse simulations. *Phys. Rev. C*, **85**, 055806.
- OTT, C.D. (2009a). Probing the core-collapse supernova mechanism with gravitational waves. *Class. Quantum Grav.*, **26**, 204015.

- OTT, C.D. (2009b). TOPICAL REVIEW : The gravitational-wave signature of core-collapse supernovae. *Class. Quantum Grav.*, **26**, 063001.
- OTT, C.D., BURROWS, A., DESSART, L. & LIVINE, E. (2008). Two-dimensional multi-angle, multigroup neutrino radiation-hydrodynamic simulations of postbounce supernova cores. *Astrophys. J.*, **685**, 1069–1088.
- OTT, C.D., ABDIKAMALOV, E., MOESTA, P., HAAS, R., DRASCO, S., O’CONNOR, E., REISSWIG, C., MEAKIN, C. & SCHNETTER, E. (2012a). General-Relativistic Simulations of Three-Dimensional Core-Collapse Supernovae. *ArXiv e-prints*.
- OTT, C.D., O’CONNOR, E.P., GOSSAN, S., ABDIKAMALOV, E., GAMMA, U.C.T. & DRASCO, S. (2012b). Core-Collapse Supernovae, Neutrinos, and Gravitational Waves. *ArXiv e-prints*, arXiv : 1212.4250.
- PEJCHA, O., DASGUPTA, B. & THOMPSON, T.A. (2012). Effect of collective neutrino oscillations on the neutrino mechanism of core-collapse supernovae. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **425**, 1083–1090.
- PERES, B., OERTEL, M. & NOVAK, J. (2013a). Influence of pions and hyperons on stellar black hole formation. *Phys. Rev. D*, **87**, 043006.
- PERES, B., OERTEL, M. & NOVAK, J. (2013b). Phase transition and gravitational waves in an axisymmetric core collapse with hyperons. *Arxiv*, in preparation.
- PERES, B., PENNER, A.J., NOVAK, J. & BONAZZOLA, S. (2013c). General relativistic neutrino transport using spectral methods. *Arxiv*, in preparation.
- PLOTKIN, R.M. & CLAYTON, G.C. (2004). Photometry of SK-69°202, the Progenitor of SN 1987A from 1896 to 1954. *Journal of the American Association of Variable Star Observers (JAAVSO)*, **32**, 89–94.
- POMRANING, G.C. (1973). *The equations of radiation hydrodynamics*. Dover.
- RADICE, D., ABDIKAMALOV, E., REZZOLLA, L. & OTT, C.D. (2012). A New Spherical Harmonics Scheme for Multi-Dimensional Radiation Transport I : Static Matter Configurations. *ArXiv e-prints*.
- RAMPP, M. & JANKA, H.T. (2000). Spherically Symmetric Simulation with Boltzmann Neutrino Transport of Core Collapse and Postbounce Evolution of a 15 M_{Solar} Star. *Astrophys. J. Lett.*, **539**, L33–L36.
- RAMPP, M. & JANKA, H.T. (2002). Radiation hydrodynamics with neutrinos. Variable Eddington factor method for core-collapse supernova simulations. *Astron. Astrophys.*, **396**, 361–392.

- REDDY, S., PRAKASH, M. & LATTIMER, J.M. (1998). Neutrino interactions in hot and dense matter. *Phys. Rev. D*, **58**, 013009.
- ROBERTS, L.F., REDDY, S. & SHEN, G. (2012). Medium modification of the charged-current neutrino opacity and its implications. *Phys. Rev. C*, **86**, 065803.
- ROSSWOG, S. & LIEBENDÖRFER, M. (2003). High-resolution calculation of merging neutron stars - ii. neutrino emission. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **342**, 673–689.
- RUFFERT, M., JANKA, H.T. & SCHÄFER, G. (1996). Coalescing neutron stars - a step towards physical models. *Astron. Astrophys.*, **311**, 532–566.
- SAGERT, I., FISCHER, T., HEMPEL, M., PAGLIARA, G., SCHAFFNER-BIELICH, J., MEZZACAPPA, A., THIELEMANN, F.K. & LIEBENDÖRFER, M. (2009). Signals of the QCD Phase Transition in Core-Collapse Supernovae. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 081101.
- SATO, J., FOGLIZZO, T. & FROMANG, S. (2009). A Simple Toy Model of the Advective-Acoustic Instability. II. Numerical Simulations. *Astrophys. J.*, **694**, 833–841.
- SAVAGE, M.J. & WALDEN, J. (1997). SU(3) breaking in neutral current axial matrix elements and the spin content of the nucleon. *Phys. Rev. D*, **55**, 5376–5384.
- SHECK, L., JANKA, H.T., FOGLIZZO, T. & KIFONIDIS, K. (2008). Multidimensional supernova simulations with approximative neutrino transport. II. Convection and the advective-acoustic cycle in the supernova core. *Astron. Astrophys.*, **477**, 931–952.
- SCHEIDEGGER, S., KÄPPELI, R., WHITEHOUSE, S.C., FISCHER, T. & LIEBENDÖRFER, M. (2010). The influence of model parameters on the prediction of gravitational wave signals from stellar core collapse. *Astron. Astrophys.*, **514**, A51.
- SCHOLBERG, K. (2012). Supernova Neutrino Detection. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **62**, 81–103.
- SEKIGUCHI, Y. (2010). An implementation of the microphysics in full general relativity : a general relativistic neutrino leakage scheme. *Class. Quantum Grav.*, **27**, 114107.
- SHAPIRO, S.L. & TEUKOLSKY, S.A. (1983). *Black holes, white dwarfs, and neutron stars : The physics of compact objects*. Wiley.
- SHEN, G., HOROWITZ, C.J. & TEIGE, S. (2011). New equation of state for astrophysical simulations. *Phys. Rev. C*, **83**, 035802.
- SHEN, H., TOKI, H., OYAMATSU, K. & SUMIYOSHI, K. (1998). Relativistic equation of state of nuclear matter for supernova and neutron star. *Nucl. Phys. A*, **637**, 435–450.
- SHEN, H., TOKI, H., OYAMATSU, K. & SUMIYOSHI, K. (2011). Relativistic Equation of State for Core-Collapse Supernova Simulations. *Astrophys. J. Suppl.*, **197**, 20.

- SHIBATA, M. & SEKIGUCHI, Y. (2003). Gravitational waves from axisymmetrically oscillating neutron stars in general relativistic simulations. *Phys. Rev. D*, **68**, 104020.
- SHIBATA, M. & SEKIGUCHI, Y. (2004). Gravitational waves from axisymmetric rotating stellar core collapse to a neutron star in full general relativity. *Phys. Rev. D*, **69**, 084024.
- SHIBATA, M., KIUCHI, K., SEKIGUCHI, Y. & SUWA, Y. (2011). Truncated Moment Formalism for Radiation Hydrodynamics in Numerical Relativity. *Prog. Theor. Phys.*, **125**, 1255–1287.
- SHLOMO, S., KOLOMIETZ, V.M. & COLÒ, G. (2006). Deducing the nuclear-matter incompressibility coefficient from data on isoscalar compression modes. *Eur. Phys. J. A*, **30**, 23–30.
- STEPHENSON, F.R. & GREEN, D.A. (2002). *Historical supernovae and their remnants*. Oxford University Press.
- STEWART, J.M. (1971). Non-equilibrium relativistic kinetic theory. In J.M. Stewart, ed., *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*, vol. 10 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 1–113.
- SUMIYOSHI, K. & YAMADA, S. (2012). Neutrino Transfer in Three Dimensions for Core-collapse Supernovae. I. Static Configurations. *Astrophys. J. Suppl.*, **199**, 17.
- SUMIYOSHI, K., YAMADA, S., SUZUKI, H., SHEN, H., CHIBA, S. & TOKI, H. (2005). Postbounce Evolution of Core-Collapse Supernovae : Long-Term Effects of the Equation of State. *Astrophys. J.*, **629**, 922–932.
- SUMIYOSHI, K., YAMADA, S. & SUZUKI, H. (2007). Dynamics and Neutrino Signal of Black Hole Formation in Nonrotating Failed Supernovae. I. Equation of State Dependence. *Astrophys. J.*, **667**, 382–394.
- SUMIYOSHI, K., ISHIZUKA, C., OHNISHI, A., YAMADA, S. & SUZUKI, H. (2009). Emergence of hyperons in failed supernovae : trigger of the black hole formation. *Astrophys. J. Lett.*, **690**, L43–L46.
- SUWA, Y., KOTAKE, K., TAKIWAKI, T., WHITEHOUSE, S.C., LIEBENDÖRFER, M. & SATO, K. (2010). Explosion Geometry of a Rotating $13M_{\odot}$ Star Driven by the SASI-Aided Neutrino-Heating Supernova Mechanism. *Proc. Astron. Soc. Jap.*, **62**, L49.
- SUWA, Y., KOTAKE, K., TAKIWAKI, T., LIEBENDÖRFER, M. & SATO, K. (2011). Impacts of Collective Neutrino Oscillations on Core-collapse Supernova Explosions. *Astrophys. J.*, **738**, 165.
- SUWA, Y., TAKIWAKI, T., KOTAKE, K., FISCHER, T., LIEBENDÖRFER, M. & SATO, K. (2012). On the Importance of the Equation of State for the Neutrino-Driven Supernova Explosion Mechanism, arXiv :1206.6101.

- TAKIWAKI, T., KOTAKE, K. & SATO, K. (2009). Special Relativistic Simulations of Magnetically Dominated Jets in Collapsing Massive Stars. *Astrophys. J.*, **691**, 1360–1379.
- TAKIWAKI, T., KOTAKE, K. & SUWA, Y. (2012). Three-dimensional Hydrodynamic Core-collapse Supernova Simulations for an 11.2 $M_{\odot}$ Star with Spectral Neutrino Transport. *Astrophys. J.*, **749**, 98.
- THOMPSON, T.A., BURROWS, A. & PINTO, P.A. (2003). Shock Breakout in Core-Collapse Supernovae and Its Neutrino Signature. *Astrophys. J.*, **592**, 434.
- TIAN, W.W. & LEAHY, D.A. (2011). Tycho SN 1572 : A Naked Ia Supernova Remnant Without an Associated Ambient Molecular Cloud. *Astrophys. J. Lett.*, **729**, L15.
- UGLIANO, M., JANKA, H.T., MAREK, A. & ARCONES, A. (2012). Progenitor-Explosion Connection and Remnant Birth Masses for Neutrino-Driven Supernovae of Iron-Core Progenitors. *Astrophys. J.*, accepted for publication, arXiv :1205.3657.
- UTROBIN, V.P. & CHUGAI, N.N. (2011). Supernova 2000cb : high-energy version of SN 1987A. *Astron. Astrophys.*, **532**, A100.
- VILLANI, C. (2002). A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In S. Friedlander & D. Serre, eds., *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, vol. 1.
- VINK, J.S., HEGER, A., KRUMHOLZ, M.R. & PULS, J. (2013). Very Massive Stars (VMS) in the Local Universe. *ArXiv e-prints*, arXiv :1302.2021.
- VOLPE, C. (2013). Neutrino astrophysics. *ArXiv e-prints*, arXiv : 1303.1681.
- WALTHAM, C. (2004). Teaching neutrino oscillations. *American Journal of Physics*, **72**, 742–752.
- WEISSENBORN, S., CHATTERJEE, D. & SCHAFFNER-BIELICH, J. (2012). Hyperons and massive neutron stars : The role of hyperon potentials. *Nuclear Physics A*, **881**, 62–77.
- WILLIAMS, B.J., BLAIR, W.P., BLONDIN, J.M., BORKOWSKI, K.J., GHAVAMIAN, P., LONG, K.S., RAYMOND, J.C., REYNOLDS, S.P., RHO, J. & WINKLER, P.F. (2011). RCW 86 : A Type Ia Supernova in a Wind-blown Bubble. *Astrophys. J.*, **741**, 96.
- WILSON, J.R., MATHEWS, G.J. & MARRONETTI, P. (1996). Relativistic numerical model for close neutron-star binaries. *Phys. Rev. D*, **54**, 1317–1331.
- WINTELER, C., KÄPPELI, R., PEREGO, A., ARCONES, A., VASSET, N., NISHIMURA, N., LIEBENDÖRFER, M. & THIELEMANN, F.K. (2012). Magnetorotationally Driven Supernovae as the Origin of Early Galaxy r-process Elements? *Astrophys. J. Lett.*, **750**, L22.

- WONGWATHANARAT, A., JANKA, H.T. & MUELLER, E. (2012). Three-dimensional neutrino-driven supernovae : Neutron star kicks, spins, and asymmetric ejection of nucleosynthesis products. *ArXiv e-prints*, arXiv :1210.8148.
- WOOSLEY, S.E. & BLOOM, J.S. (2006). The Supernova Gamma-Ray Burst Connection. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **44**, 507–556.
- WOOSLEY, S.E. & WEAVER, T.A. (1995). The Evolution and Explosion of Massive Stars. II. Explosive Hydrodynamics and Nucleosynthesis. *Astrophys. J. Suppl.*, **101**, 181.
- WOOSLEY, S.E., PINTO, P.A., MARTIN, P.G. & WEAVER, T.A. (1987). Supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud - The explosion of an approximately 20 solar mass star which has experienced mass loss ? *Astrophys. J.*, **318**, 664–673.
- WOOSLEY, S.E., HEGER, A. & WEAVER, T.A. (2002). The evolution and explosion of massive stars. *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1015–1071.
- YAMAMOTO, Y., FUJIMOTO, S.I., NAGAKURA, H. & YAMADA, S. (2012). Post-shock-revival evolutions in the neutrino-heating mechanism of core-collapse supernovae. *ArXiv e-prints*, arXiv :1209.4824.