

Contributions à l'étude de l'effet Hawking pour des modèles en interaction

Patrick Bouvier

► **To cite this version:**

Patrick Bouvier. Contributions à l'étude de l'effet Hawking pour des modèles en interaction. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112356 . tel-00937087

HAL Id: tel-00937087

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00937087>

Submitted on 27 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD**

Spécialité

Mathématiques

École doctorale de Mathématiques de la Région Paris-Sud, ED142

Présentée par

Patrick BOUVIER

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Sujet de la thèse :

**Contributions à l'étude de l'effet Hawking pour
des modèles en interaction**

soutenue le 11 décembre 2013,

devant le jury composé de :

M. Christian GÉRARD	Directeur de thèse
M. Alain BACHELOT	Rapporteur
M. Claude-Alain PILLET	Rapporteur
M. Jean-Philippe NICOLAS	Examineur
M. Vladimir GEORGESCU	Examineur

Résumé

L'effet Hawking prédit, dans un espace-temps décrivant l'effondrement d'une étoile à symétrie sphérique vers un trou noir de Schwarzschild, qu'un observateur statique, situé à l'infini, observera un flux thermal de particules quantiques à la température de Hawking $T = \frac{\kappa}{2\pi}$.

La première démonstration mathématique de l'effet Hawking *pour des champs quantiques libres* est due à Bachelot, dont le travail sur les champs de Klein-Gordon a été ensuite étendu aux champs de Dirac, d'abord par Bachelot lui-même, puis par Melnyk. Ces travaux, placés dans le cadre d'une symétrie sphérique, ont été complétés par Häfner, qui donna une démonstration rigoureuse de l'effet Hawking pour des champs de Dirac, autour d'une étoile s'effondrant vers un trou noir de Kerr.

Le but de cette thèse est d'étudier l'effet Hawking non plus dans un modèle de *champs quantiques libres*, où les problèmes posés se ramènent à l'étude d'équations aux dérivées partielles linéaires, mais dans un modèle de *champs de Dirac en interaction*. L'interaction est supposée à support compact, statique, et localisée à l'extérieur de l'étoile. Nous choisissons de traiter le cas d'un modèle jouet, dans un espace-temps de dimension $1 + 1$, situation à laquelle on peut se ramener, au moins dans le cas libre, en utilisant la symétrie sphérique du problème.

Nous étudions le comportement de champs de fermions de Dirac dans différentes situations : d'abord, pour une observable suivant l'effondrement de l'étoile ; puis pour une observable stationnaire ; enfin, pour une interaction dépendante du temps, localisée près de la surface de l'étoile. Dans chacun de ces cas, nous montrons l'existence de l'effet Hawking et donnons l'état limite correspondant.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont avant tout à Christian Gérard. Tout au long de ma thèse, Christian a su m'accompagner avec beaucoup de patience, de compétence et de pédagogie. Nos entrevues ont toujours été très productives, et je ne suis jamais sorti de son bureau sans avoir appris quelque chose. En outre de ses compétences scientifiques, c'est aussi en grande partie pour ses qualités humaines que je le remercie de tout mon cœur d'avoir encadré mon travail.

J'adresse également mes plus sincères remerciements aux membres du jury d'avoir accepté de lire et, j'espère, apprécier mon travail.

Je tiens aussi à remercier les différentes personnes que j'ai eu l'honneur de rencontrer dans le cadre des conférences et séminaires auxquels j'ai pu participer, tout autant pour leurs questions, remarques et commentaires que pour leur gentillesse et leur bonne humeur.

Il ne m'est pas possible de parler de bonne humeur sans remercier les étudiants de mon bureau (et de celui des ingénieurs!), pour leur soutien, les discussions que nous avons eues et les gateaux que nous avons mangés. Un grand merci donc à Maud, Rémi, Vincent, Raphaël, Elodie, Célia, et tous les autres. Même si nous nous voyions moins souvent, je tiens à saluer l'ensemble des doctorants du département de mathématiques d'Orsay.

Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour remercier chaleureusement mes nouveaux collègues enseignants, qui m'ont accompagné et aidé dans mon nouveau métier. Laurent, Émilie, Félix, Marjorie, Jean-Luc, merci pour votre accueil et vos conseils.

Enfin, merci à mes ami-e-s et relecteurs, pour tout ce que des amis apportent, et pour avoir pris le temps de relire mon travail. Daniel, Pascal, Rémi, Vincent, Lorraine, c'est à charge de revanche. Lorraine, en tant que compagne, je te remercie aussi d'avoir su me pousser quand j'allais moins fort. Je te promets de faire de même.

Un dernier petit mot : Clément et Sabrina, si vous me lisez, je vous souhaite tout le courage possible.

Table des matières

Introduction	7
1 L'émergence de la relativité	7
2 La révolution quantique	15
3 De la mécanique quantique relativiste à la théorie quantique des champs	20
4 L'effet Hawking	23
5 Description de la thèse	28
1 Champs de Dirac libres	31
1.1 Notations et définitions	31
1.2 Champs classiques libres	33
1.2.1 Solution de l'équation de Dirac	33
1.2.2 Propriétés des solutions	35
1.2.3 Effet Hawking libre	36
1.3 Champs quantiques libres	39
1.4 Discussion sur le modèle jouet	40
2 Effet Hawking I : cas d'une observable tombant dans le trou noir	41
2.1 Dynamique en interaction	41
2.1.1 Construction de la dynamique en interaction	41
2.1.2 Discussion sur le modèle d'interaction	44
2.1.3 Propriétés	45
2.2 Effet Hawking en interaction, I	46
2.2.1 Propagation à gauche	46
2.2.2 Propagation à droite	49
2.2.3 Effet Hawking I	51
2.3 Etat de vide en interaction	56
2.3.1 Opérateur de Dirac : étude spectrale	57
2.3.2 Seconde quantification à énergie positive	64

3	Effet Hawking II : cas d'une observable stationnaire	73
3.1	Scattering pour l'équation de Dirac	74
3.1.1	Vitesses asymptotiques pour l'équation de Dirac	74
3.1.2	Morphismes d'onde	76
3.2	Estimations de propagation	77
3.2.1	Propagation à gauche	78
3.2.2	Propagation à droite	79
3.3	Effet Hawking en interaction II	83
3.3.1	L'état limite	83
3.3.2	Résultat principal II	84
3.3.3	Changement d'état initial	86
4	Effet Hawking III : interaction localisée sur le bord de l'étoile	89
4.1	Définitions et dynamique	90
4.2	Étude de l'évolution libre	91
4.3	Effet Hawking en interaction III	93
A	C^*-algèbres	97
A.1	Définitions et propriétés générales	97
A.2	Algèbres CAR	99
A.3	État sur une C^* -algèbre	101
A.4	Loi exponentielle fermionique	102
A.4.1	Produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué	102
A.4.2	Produits tensoriel d'états et de morphismes	103
A.5	Dynamique sur une C^* -algèbre	104
B	Représentations et espaces de Fock	107
B.1	Représentation	107
B.2	Espace de Fock fermionique	108
B.2.1	Définitions	108
B.2.2	Représentation de Fock associée à une structure de Kähler	109
B.2.3	Spectre et seconde quantification	110
C	Analyse des opérateurs	113
C.1	Opérateurs compacts	113
C.2	Extensions presque analytiques	114

Introduction

1 L'émergence de la relativité

La lumière est un phénomène complexe dont nous faisons chaque jour l'expérience. Son comportement présente facilement des facettes différentes : réflexion, diffusion, diffraction. . . La compréhension de ces phénomènes a longtemps été la source de recherches, de controverses et de découvertes. Outre la célèbre dualité entre comportement oscillatoire et corpusculaire, la vitesse de propagation de la lumière est une propriété physique qui recèle de nombreuses implications. Les théories relativistes - et l'existence des trous noirs, objets au centre du contexte physique de cette thèse - sont bâties sur ce postulat : la vitesse de la lumière dans le vide est finie, absolue, et est une limite supérieure à toute vitesse pouvant être mesurée¹.

Dans l'étude de la nature, qui allait évoluer vers notre physique moderne, la lumière était bien sûr un phénomène important. Il semblerait qu'Empedocles², penseur grec du 5ème siècle avant JC, formula le premier l'hypothèse selon laquelle la lumière serait quelque chose en déplacement, et aurait donc une vitesse, certes très grande, mais finie. La controverse dura plusieurs siècles, et de nombreux penseurs et scientifiques y participèrent : Aristote, Euclide, Al-hazen (11ème siècle), Roger Bacon (13ème siècle), etc. Il fallut attendre 1638 pour que Galilée tente, à l'aide d'assistants découvrant des lanternes, de mettre au point un processus expérimental, malheureusement sans grand succès³. Enfin, en 1676, l'astronome danois Ole Rømer utilisa de nombreuses ob-

1. La définition même de ce qu'est la vitesse de la lumière demande réflexion et précision. Il faut distinguer vitesse de front, de groupe, de phase. . . Au moins 8 concepts existent, et certaines vitesses peuvent dépasser celle de la lumière - sans pour autant que de l'information soit transmise plus vite que c .

2. On peut se référer à [Sar93] pour des informations historiques supplémentaires sur cette période.

3. L'écart de temps dans cette expérience était de 11 microsecondes, largement impossible à mesurer pour l'époque. Galilée conclut, avec beaucoup d'honnêteté : "Je n'ai pas été capable de déterminer avec certitude si l'apparition de la lumière opposée était instantanée ou pas ; si elle ne l'est pas, elle est extraordinairement rapide.", voir [Gal38].

servations d'éclipses d'Io pour donner un premier calcul de la vitesse de la lumière. Il observa que les éclipses de ce satellite de Jupiter se produisaient avec un décalage par rapport aux prédictions faites par les lois de Kepler, et en déduisit que la lumière mettait 22 minutes⁴ pour parcourir le diamètre de l'orbite terrestre (il ne donnait donc pas, à proprement parler, un calcul de la vitesse de la lumière). Ces résultats furent publiés dans [Rœm76].

James Bradley, en 1727, découvre le phénomène de l'aberration de la lumière : la direction apparente d'une source lumineuse dépend de la vitesse de celui qui l'observe. Il en déduit que la vitesse de la lumière vaut 10 188 fois celle du déplacement de la Terre⁵ (voir [Bra29]), mais aussi qu'elle est identique quelle que soit la source lumineuse (et ne dépend donc pas de l'étoile, ni de sa luminosité).

Après ces premiers calculs (qui dépendaient tout deux d'autres mesures non connues avec précision), de nombreux dispositifs expérimentaux furent élaborés pour obtenir une meilleure précision : Hippolyte Fizeau, en 1849, utilise un système de roue dentée pour obtenir une mesure exacte à 5% ; Foucault, en 1862, avec un dispositif à miroir tournant, obtient une marge d'erreur de 0.6% .

Un des tournants dans cette série d'expériences et de mesures proviendra de Michelson et de son célèbre interféromètre. Ce dispositif expérimental avait pour but de démontrer l'existence de l'éther. En effet, à cette époque, la lumière était seulement considérée comme une onde, et, à l'instar des ondes matérielles, il devait exister un milieu dans lequel cette onde se transmettait, milieu nommé *éther*, dont il fallait étudier les propriétés. L'éther pouvait soit être immobile (dans un référentiel absolu), soit complètement entraîné par la Terre, et donc posséder exactement la même vitesse. La première hypothèse, faite par Fresnel en 1818, était plus cohérente avec le phénomène d'aberration de la lumière, et semblait être confirmée par l'expérience de Fizeau, en 1851. Cette hypothèse implique ainsi un mouvement relatif entre la Terre et l'éther, nommé *vent d'éther*. Le but de l'expérience de Michelson–Morley ([MM87]) était donc de mesurer ce mouvement relatif, en mettant en évidence la différence de vitesse de la lumière entre deux directions perpendiculaires et à deux périodes espacées de 6 mois. Le résultat de l'expérience fut contraire à celui attendu : si éther il y avait, il devait être immobile par rapport à la Terre, en tout point et à tout instant. Ce concept fut finalement rejeté au cours des années suivantes, la relativité apportant des prédictions et explications bien plus satis-

4. La mesure actuelle est de 16 minutes.

5. Par comparaison avec le résultat précédent, on obtient un temps nécessaire à la lumière pour parcourir le diamètre de l'orbite terrestre de 16min25s.

faisantes.

D'autres méthodes (la cavité résonnante, le radar, le radio-interféromètre, la spectrométrie de bande, et surtout le laser) seront utilisées au 20ème siècle pour obtenir une précision toujours plus grande (jusqu'à ce que, en 1983, la 17e Conférence générale des poids et mesures définisse le mètre à partir de la vitesse de la lumière, conférant à sa valeur exprimée en $m.s^{-1}$ une exactitude définitive.).

Toutes ces mesures confirment - et ce dès 1676 - le caractère fini de la vitesse de la lumière. Or, la mécanique newtonienne permet de calculer, de manière assez simple, la vitesse de libération d'un astre - autrement dit, la vitesse nécessaire pour échapper à l'attraction gravitationnelle de cet astre. On trouve ainsi :

$$v_L = \sqrt{\frac{2GM}{D}}$$

D étant la distance du corps à l'astre, G la constante gravitationnelle, et M la masse de cet astre.

Combinant ce calcul avec les mesures faites de la vitesse de la lumière, en 1783, le révérend John Michell, géologue et astronome amateur anglais, expose dans une lettre à Henry Cavendish ([Mic84]) le concept d'un corps si massif que même la lumière ne pourrait s'en échapper. Il écrit alors :

« Si le demi-diamètre d'une sphère de la même densité que le Soleil excédait celui du soleil d'une proportion de 500 à 1, un corps tombant depuis une hauteur infinie vers elle aurait acquis à sa surface une vitesse plus grande que celle de la lumière. En conséquence, supposant que la lumière est attirée par la même force en proportion de sa « vis inertiae » (masse d'inertie), comme les autres corps, toute lumière émise depuis ce corps reviendrait sur elle-même par sa propre gravité.»

Ce calcul très théorique n'attire pas vraiment l'attention de la communauté scientifique jusqu'à ce qu'en 1796 Laplace ne redécouvre cette idée et n'écrive dans son livre Exposition du Système du Monde ([dL96]) :

« Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que celui du Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles.»

Le concept de trou noir est né.

Mais deux points mettent en doute la validité et l'intérêt des démonstrations de Laplace et Michell. D'abord, la lumière doit être corpusculaire (et massive), afin d'être soumise aux lois de la gravitation newtonienne ; or, les expériences de Young et Fresnel ([FdSVF66]) conduisent, à l'époque, à une vision ondulatoire et non corpusculaire de la lumière. Ensuite, la densité de matière nécessaire pour former un tel astre semble bien trop supérieure à celle des astres observés pour avoir la possibilité d'exister dans l'univers. Ce concept va donc rester dans l'oubli, jusqu'à ce que la théorie de la relativité vienne bouleverser la conception de la gravitation - entre autres.

La vitesse de la lumière semblait, expérimentalement, être une limite supérieure à toute autre vitesse mesurée. Les expériences menées par Michelson et Morley en 1887 ([Mor87]) tendaient également à démontrer que la vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels inertiels. C'est cette constatation, érigée en postulat, qui est à la base de toute théorie relativiste. En 1905, dans son célèbre article intitulé "*De l'électrodynamique des corps en mouvement*" ([ES25]), Einstein pose les premières bases de ces théories et présente ainsi la relativité dite restreinte. Les contributions de nombreux physiciens et mathématiciens (Lorentz, Minkowski, Poincaré, Grossmann, Hilbert, pour ne citer que les plus connus) permirent à cette théorie d'être complétée en 1915 en ce que l'on appelle aujourd'hui la relativité générale. Les notions d'espace et de temps deviennent alors liées en une entité nommée *espace-temps*. Cet espace-temps est ainsi un espace à 4 dimensions, dans lequel la façon de mesurer la distance entre deux "points" ou "événements" n'est plus celle à laquelle nous étions habitués depuis Euclide, utilisée par la mécanique Newtonienne. La traditionnelle géométrie euclidienne est ainsi remplacée par une géométrie appelée Lorentzienne, décrivant un espace-temps relativiste.

L'exemple le plus simple d'un tel espace-temps est l'espace-temps plat, appelé espace-temps de Minkowski. Il est modélisé mathématiquement par une variété \mathcal{M} de dimension 4 égale à :

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z,$$

et la géométrie, i.e. la façon de mesurer la distance entre deux points de \mathcal{M} , est caractérisée par la métrique Lorentzienne

$$\eta = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Cette métrique (et notamment sa signature) permet de catégoriser, pour tout point $a \in \mathcal{M}$, les vecteurs $V \in T_a\mathcal{M}$ de l'espace tangent, selon le signe de $\eta(V, V)$, et ainsi de définir quelles sont les trajectoires physiquement acceptables. On dira ainsi que V est de genre :

- temps si $\eta(V, V) > 0$,
- lumière si $\eta(V, V) = 0$,
- espace si $\eta(V, V) < 0$.

L'ensemble des vecteurs de type lumière (ou *isotropes*) en un point est appelé *cône de lumière*. On peut représenter ces différents type de vecteurs de la manière suivante :

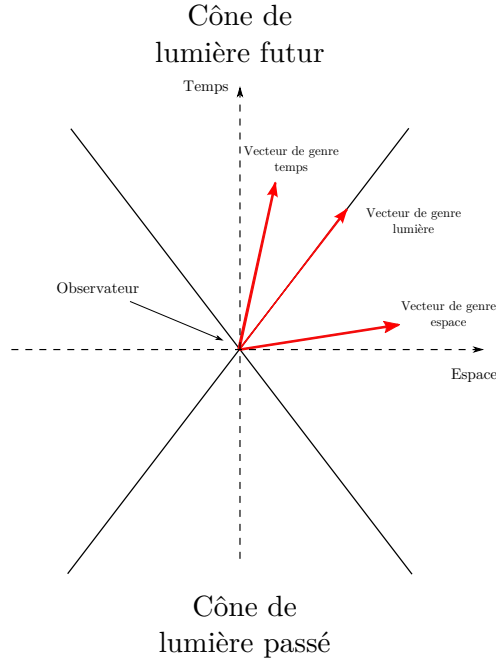


FIGURE 1 – Représentation du cône de lumière pour une dimension spatiale

Ainsi, pour qu'une particule puisse suivre une trajectoire $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, le vecteur tangent en tout point s , $\dot{\gamma}(s)$, doit être de genre temps ou lumière. Autrement dit, les vitesses doivent être contenues dans le cône de lumière. C'est l'exacte formulation mathématique du postulat d'Einstein selon lequel les vitesses observées sont toujours inférieures à celle de la lumière.

L'idée centrale développée par la relativité générale est la façon dont la matière - ou, de manière équivalente, l'énergie - interagit avec cette géométrie. Dans ce contexte relativiste, la gravitation n'agit plus comme une force, mais en courbant l'espace-temps : en présence d'objets massifs, la métrique η est remplacée par une métrique Lorentzienne (i.e. une forme bilinéaire symétrique réelle de signature $(+ - - -)$) qui doit vérifier les équations d'Einstein :

$$(I.1) \quad G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Dans ces équations, $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein, qui fait intervenir la métrique (et ses dérivées premières et secondes), et $T_{\mu\nu}$ est appelé tenseur énergie-impulsion, et décrit la répartition de l'énergie dans l'univers. Ces équations couplent ainsi de manière complexe et non-linéaire la courbure de l'espace-temps et la répartition d'énergie dans celui-ci.

Contrairement à ce que la complexité (en grande partie due à leur non-linéarité) de ces équations pouvait laisser croire, il ne fut pas nécessaire d'attendre bien longtemps pour qu'une première solution soit découverte. En 1916, K. Schwarzschild communique à Einstein (dans une lettre lui étant adressée) une solution à l'équation (I.1), dans un univers sans énergie, i.e. $T_{\mu\nu} = 0$. Cette solution décrit le modèle le plus simple de trou noir et sera l'objet physique central de cette thèse.

La solution de Schwarzschild modélise un univers vide de toute énergie et à symétrie sphérique. Elle permet de décrire par exemple le champ gravitationnel à l'extérieur d'une étoile, d'une planète ou d'un trou noir n'ayant pas de mouvement de rotation. La variété représentant l'espace-temps est maintenant, dans les coordonnées de Schwarzschild (t, r, θ, φ) :

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r^+ \times S_{\theta, \varphi}^2,$$

et la métrique (Lorentzienne) est donnée par :

$$(I.2) \quad g = F(r)dt^2 - \frac{1}{F(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi),$$

Dans cette équation, $F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, et M est une constante représentant la masse du trou noir. L'équation (I.2) décrit la courbure de l'espace-temps engendrée par la masse M .

On peut remarquer plusieurs points concernant la métrique de Schwarzschild. Tout d'abord, l'espace-temps qu'elle décrit est asymptotiquement plat, i.e. que, lorsque $r \rightarrow +\infty$, la métrique de Schwarzschild tend vers celle de Minkowski. L'influence de la masse est donc nulle à l'infini. De plus, compte tenu de la définition de $F(r)$, deux ensembles apparaissent comme des singularités : $\{r = 0\}$ et $\{r = 2M\}$. La première est appelée aujourd'hui une *singularité gravitationnelle*. Elle représente une divergence intrinsèque de la métrique. L'existence (et même l'inévitabilité) de ce type de singularité a été étudiée par Hawking, Penrose et Ellis entre 1960 et 1975 (on peut consulter [HE75] sur ce sujet).

La seconde singularité est due au choix de coordonnées. La sphère de rayon $\{r = 2M\}$ est appelée *horizon des événements*. Elle sépare ce qu'on considère comme étant l'intérieur du trou noir de son extérieur. Tout objet situé à l'intérieur sera attiré par la singularité. Mais cette

divergence dans la métrique de Schwarzschild n'est pas intrinsèque : elle peut être retirée par un choix astucieux de coordonnées. Ce fut l'objet des travaux menés indépendamment par Paul Painlevé (en 1921, voir [Pai21]) et par Allvar Gullstrand (en 1922, voir [Gul22]). Mais ces travaux furent rejetés par Einstein le 5 avril 1922, lors d'un débat au Collège de France, et ainsi oubliés pour longtemps.

Le sujet est à nouveau traité en 1924 par Eddington⁶ (voir [Edd24]), et surtout par D. Finkelstein, en 1958. Dans [Fin58], ce dernier présente un système de coordonnées permettant d'interpréter correctement l'horizon des événements. Ces travaux influenceront Penrose et Wheeler dans leur acceptation de l'existence des trous noirs en tant qu'objets physiques. Ce système de coordonnées est bâti sur les coordonnées *tortue*⁷ de Regge-Wheeler. Ce changement de coordonnées consiste à poser :

$$r^* = r + 2M \ln\left(\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right),$$

qui vérifie :

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = \frac{1}{F(r)}.$$

Les coordonnées entrantes (resp. sortantes) de Eddington-Finkelstein sont alors données par (u, r, θ, φ) (resp. (v, r, θ, φ)), où $u = t + r^*$ (resp. $v = t - r^*$). Un trou noir de Schwarzschild est alors représenté, dans ces coordonnées, par la variété :

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_v \times \mathbb{R}_r^+ \times S_{\theta, \varphi}^2,$$

et la métrique (Lorentzienne) est donnée par :

$$g = F(r)dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi).$$

Cette métrique est indépendante du "temps" (i.e. de v) et ne présente plus de singularité sur la sphère $\{r = 2M\}$. Ce système de coordonnées peut encore être étendu en des coordonnées recouvrant l'ensemble de l'espace-temps, développé par M. Kruskal et G. Szekeres en 1960.

On peut se demander dans quelle mesure la solution de Schwarzschild propose une description correcte d'une situation réelle. Le théorème de Birkhoff (consulter [BL23]) nous permet d'affirmer que toute solution dans le vide et à symétrie sphérique des équations d'Einstein est localement décrite par la métrique de Schwarzschild. Cela implique

6. Connue également pour le Théorème des singes dactylographes.

7. Ces coordonnées furent nommées ainsi en référence à la course entre Achille et une tortue, imaginée par Zenon d'Élée dans son célèbre paradoxe. En effet, ce système de coordonnées rejette la singularité à l'infini ; elle ne sera donc pas plus atteinte par un observateur chutant dans le trou noir que la tortue ne sera rattrapée par Achille.

qu’une étoile qu’on suppose isolée et à symétrie sphérique verra son extérieur être correctement décrit par la métrique de Schwarzschild. Si le rayon de l’étoile ou de la planète en question est supérieur au *rayon de Schwarzschild* r_s , l’horizon des événements sera contenu dans l’astre, et son existence n’aura donc pas d’influence physique. Ce rayon est donné par :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2},$$

G désignant la constante gravitationnelle et M la masse de l’astre. Le rayon de Schwarzschild du soleil est d’approximativement 3 km, à comparer avec son rayon de 700000 km. Cela signifie que pour qu’un astre de la masse du soleil forme un trou noir, il faudrait que son rayon soit inférieur à 3 km.

Comme nous l’avons vu, les trous noirs de Schwarzschild correspondent à des solutions à symétrie sphérique dans un espace vide de toute énergie. D’autres solutions furent trouvées par la suite. Dans la mesure où cette thèse centre son étude sur des espace-temps de type Schwarzschild, nous ne présenterons pas de manière détaillée les métriques associées à ces solutions, mais nous contenterons d’en dresser un rapide historique.

En 1963, R.P. Kerr obtint une solution exacte aux équations d’Einstein, décrivant des astres en rotation. Le trou noir est ainsi caractérisé non plus seulement par sa masse, mais également par son moment angulaire. En l’absence de ce dernier, on retrouve un trou noir de Schwarzschild. Les trous noirs de Kerr peuvent éventuellement posséder deux horizons distincts, selon leur vitesse de rotation (rapportée à leur masse).

Peu de temps après la découverte de cette solution, Newman généralise la métrique de Kerr en couplant les équations d’Einstein aux équations de Maxwell, et donc en prenant en compte la possibilité d’un trou noir *chargé*. Ce type de trou noir, appelé trou noir de Kerr-Newman, est considéré comme étant le plus général possible. Ce postulat physique est connu sous le nom de Théorème de Calvitie, et suppose qu’un trou noir est entièrement décrit par sa masse, sa charge et son moment angulaire⁸.

Dans le cas d’un trou noir de Kerr-Newman sans moment angulaire, on parle de trou noir de Reissner-Nordström.

La théorie de la relativité a ainsi été la source de nombreuses révolutions, scientifiques, technologiques, mais aussi philosophiques. Le début du 20ème siècle vit ainsi les conceptions de temps, d’espace et de gravita-

8. Le physicien américain John Archibald Wheeler a résumé dans [MTW73] le phénomène par la formule restée célèbre : “Black holes have no hair”.

tion être bouleversées. Mais, en parallèle au développement de la relativité, une autre grande théorie physique révolutionnaire émergea : la mécanique quantique, qui modifia en profondeur l'étude de la matière comme de l'énergie, mais aussi la vision d'un monde que l'on avait longtemps pensé déterministe.

2 La révolution quantique

L'histoire de la mécanique quantique est intimement liée à celle de la physique en général, mais également à celle de la chimie. Ce domaine s'est en effet développé au fur et à mesure de l'amélioration de nos procédés d'observation et d'analyse de la matière. Nous allons donner, dans cette introduction, un historique succinct de la mécanique quantique. Nous n'entrerons pas dans le détail des considérations physiques et mathématiques, et invitons le lecteur intéressé par ces problématiques à consulter un des multiples ouvrages de référence dans ce domaine, parmi lesquels nous pouvons citer [CTDL05], [Mes55] ou encore [SN10].

Le 19^{ème} siècle fut celui de l'électricité : il débute par l'élaboration, en 1800, de la première pile électrique par A. Volta, invention dont les nombreuses conséquences ne seront pas seulement industrielles. En 1838, M. Faraday découvre les rayons cathodiques, qui permettront à J.J. Thomson de prouver, en 1897, l'existence de l'électron ([Tho97]). En 1865, J.C. Maxwell publie un système de 20 équations à 20 inconnues, qu'il simplifiera en 1873, décrivant le comportement des champs électriques et magnétiques. Cette théorie rencontre un accueil enthousiaste et symbolise les avancées d'une physique que l'on pensait universelle et entièrement déterministe.

Auparavant, en 1859, G. Kirchhoff avait posé un problème qui se révélera fondamental : le problème du corps noir. Un corps noir est un corps idéal totalement absorbant à toute radiation électromagnétique. Un exemple classique de corps noir consiste en une enceinte isotherme munie d'une toute petite ouverture. De manière assez surprenante, les étoiles constituent également un très bon exemple de corps noir : elles absorbent toute radiation, sans en transmettre ni en réfléchir la moindre part. Elles ne font que rayonner. C'est ce *rayonnement du corps noir* qui sera au centre des études de la fin du 19^{ème} siècle, et du début du 20^{ème}.

En 1897, Kirchhoff démontra que la densité d'énergie du rayonnement, notée u , dépendait que de la température T du corps noir et de la fréquence ν du rayonnement enclos dans celui-ci. Les physiciens anglais Rayleigh et Jeans travaillèrent alors à établir une formule permettant de calculer $u(\nu, T)$, et obtinrent, de manière tout à fait

classique, une loi de la forme :

$$u(\nu, T) \sim \frac{\nu^2 k_B T}{c^3},$$

c désignant la vitesse de la lumière et k_B la constante de Boltzmann. L'utilisation de cette loi dans des calculs déboucha sur ce qui fut appelé (par le physicien autrichien Paul Ehrenfest tout d'abord) la *catastrophe ultraviolette* : l'énergie volumique totale rayonnée par le corps noir est donnée par :

$$E = \int_{\mathbb{R}^+} u(\nu, T) d\nu,$$

et, pour de hautes fréquences (et donc, dans l'ultraviolet) cette intégrale diverge. Une autre loi, proposée par Wien, établissait que :

$$u(\nu, T) \sim \exp(-\alpha\nu/T).$$

Or, on disposait de mesures très précises de $u(\nu, T)$, mesures qui étaient en accord avec la loi de Rayleigh-Jeans pour des basses fréquences, et en accord avec celle de Wien pour des hautes fréquences. Le problème était donc de réunir ces deux approches en une formule valable sur tous les domaines de fréquence.

Depuis 1894, Max Planck travaillait sur le problème du corps noir⁹. Après une première tentative en 1899 (invalidée par les mesures expérimentales), Planck proposa, dans un article publié en 1901 ([Pla01]), la loi suivante, appelée aujourd'hui loi de Planck :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1},$$

cette fois confirmée par l'expérience (on retrouve les lois précédentes pour les domaines de grande ou petite fréquence, et les mesures intermédiaires sont également cohérentes). Afin de justifier cette formule, Planck dût abandonner l'hypothèse classique d'une variation continue de l'énergie d'un système physique. Il supposa donc cette énergie E être multiple d'une énergie minimale $h\nu$, nommé *quantum d'énergie*. Planck venait de découvrir la physique quantique mais, comme de nombreux physiciens de son époque, ne l'accepta pas. Il avait posé cette hypothèse de quantification de l'énergie en dernier recours, et tenta de la supprimer, sans succès, par la suite.

Le concept de *quanta* va permettre, en 1905, à Albert Einstein d'expliquer l'effet photoélectrique dans un article fondateur ([Ein05]).

9. Il avait été chargé, par des compagnies d'électricité, de travailler à l'optimisation de la lumière produite par les ampoules. Contrairement à ce qui est souvent affirmé, le but de ses travaux n'était pas de résoudre le problème de la catastrophe ultra-violette.

Cet effet consiste en l'émission d'électrons par des corps éclairés. Ce phénomène avait été découvert par Heinrich Hertz en 1887, lorsqu'il remarqua que des électrodes créaient des arcs électriques plus facilement lorsqu'elles étaient éclairées par une lumière ultra-violette. Dans un article de 1902, Philipp Lenard, physicien expérimentateur allemand¹⁰, expose l'impossibilité de traiter des phénomènes photoélectriques par la conception usuelle de l'énergie de la lumière (selon laquelle elle est distribuée de façon continue dans l'espace où elle est rayonnée).

L'hypothèse faite par Einstein dans son article de 1905 est la suivante :

“Lors de la propagation d'un rayon lumineux émis par une source ponctuelle, l'énergie n'est pas distribuée de façon continue sur des espaces de plus en plus grands, mais est constituée d'un nombre fini de quanta d'énergie localisés en des points de l'espace, chacun se déplaçant sans se diviser et ne pouvant être absorbé ou produit que tout d'un bloc.”

Cette quantification de l'énergie va permettre à Einstein d'expliquer de manière très précise l'effet photoélectrique (ce qui lui vaudra le prix Nobel de 1921).

Plusieurs travaux vont ensuite permettre d'améliorer la connaissance de la matière : Ernest Rutherford, en 1907, découvre la structure du noyau atomique (en observant que, lancées sur une feuille d'or, certaines particules alpha repartent en arrière) ; en 1913, Niels Bohr utilise l'idée de la quantification, appliquée aux orbites électroniques, pour comprendre la structure du spectre d'émission de l'hydrogène ; en 1914, les expériences de James Franck et Gustav Hertz (consistant en la circulation d'un faisceau d'électrons dans un tube à vide contenant du mercure gazeux, voir [FH14] pour plus de détails) confirment le modèle atomique de Bohr.

Mais la structure fine du spectre de l'atome d'hydrogène n'est pas parfaitement expliquée par le modèle de Bohr (certaines raies se dédoublent en présence d'un champ magnétique, par exemple ; c'est l'effet Zeeman, découvert en 1896). Beaucoup de travaux seront accomplis afin de mieux comprendre la structure de la matière, jusqu'à ce qu'en 1925 Pauli apporte la solution à ce problème dans un célèbre article exposant son *principe d'exclusion* ([Pau25]). Il y énonce ainsi :

“Il ne peut jamais exister dans l'atome deux ou plus de deux électrons équivalents, pour lesquels dans des champs

10. Il fut estimé par A. Einstein pour ses travaux, mais ces relations de respect mutuel souffrirent de l'adhésion de Lenard au régime nazi et de sa tentative d'attribuer à Friedrich Hasenörl la formule $E = mc^2$.

intenses les valeurs de tous les nombres quantiques coïncident. Si un électron est présent dans l'atome pour lequel ces nombres quantiques ont des valeurs définies, cet état est alors occupé.”

Un des nombres quantiques évoqués, introduit afin d'obtenir un nombre d'états possibles correspondant à l'expérience, fut interprété quelques mois plus tard par G. Uhlenbeck et S. Goudsmit ([UG25]) comme étant le *spin* de l'électron, i.e. son moment angulaire propre. Cette idée fut d'abord repoussée par Pauli, qui l'accepta ensuite pour en donner, en 1927, une formulation mathématique précise, introduisant ainsi les matrices qui portent aujourd'hui son nom.

Le principe de Pauli est une loi fondamentale de la structure de la matière. Les particules y obéissant (électrons, quarks, neutrinos et autres particules à spin demi-entier) sont appelées *fermions*. Ils obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, établie en 1926 par Fermi ([Fer26]), et seront les objets étudiés dans cette thèse. Une des conséquences du principe d'exclusion de Pauli joue un rôle important dans l'astrophysique, et tout particulièrement dans les mécanismes d'effondrement stellaires : la *pression de Fermi*¹¹.

En 1926, suite aux travaux de De Broglie reliant la quantité de mouvement de l'électron à sa longueur d'onde ([dB23]), Erwin Schrödinger découvrit l'équation différentielle (non relativiste) d'onde qui porte son nom :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Ces travaux permirent de développer une description de la mécanique quantique par la mécanique ondulatoire, dont les bases sont posées dans [Sch21].

Une autre approche fut découverte par Heisenberg, également en 1925. Ce dernier observa que l'étude du modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène demandait la connaissance des vitesses et orbites d'électrons autour du noyau. Or, la position de l'électron ne peut être déterminée sans observation, observation qui perturbe le système observé, à cause de l'interaction entre photon et électron. Afin de ne pas faire intervenir de grandeur non-observable, Heisenberg propose, dans un mémoire de 1925 ([Hei25]), un formalisme utilisant des matrices de taille infinie, représentant des grandeurs physiques mesurables. Des travaux effectués conjointement avec M. Born et P. Jordan permirent ensuite d'établir

11. Lorsqu'une étoile a brûlé tout ses éléments combustibles, si sa masse n'est pas trop grande, la pression de Fermi arrête l'effondrement et l'étoile devient une naine blanche. Sinon, au-delà d'une masse limite appelée limite de Chandrasekhar, elle devient une étoile à neutrons. L'effondrement d'étoiles encore plus massives donne un trou noir.

les *relations d'incertitude d'Heisenberg*. Fondées sur les relations de commutation entre observables, elles permettent d'obtenir, pour les coordonnées x_i et l'impulsion p_i d'un électron :

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ces relations expriment le fait que, pour des variables que Bohr appellera *complémentaires*, tout gain de précision sur la mesure d'une des deux variables se fait au détriment de celle de la seconde variable.

À ce niveau de développement de la théorie quantique, deux choses faisaient défauts aux physiciens : d'une part, les mathématiques nécessaires à l'utilisation d'un nouveau formalisme, impliquant des notions d'une technicité bien supérieure à celles utilisées auparavant ; d'autre part, l'interprétation physique de ce formalisme¹².

Les besoins en mathématiques de ces nouvelles théories physiques étaient importants, et de nombreux travaux commencèrent dans le but de fournir un cadre et des outils mathématiques efficaces. Dès le début du 20ème siècle, D. Hilbert avait produit de nombreux apports en analyse fonctionnelle. En 1918, son étudiant H. Weyl introduit la notion de *jauge*. Il fournira de nombreux travaux sur la représentation matricielle de la mécanique quantique, et plus généralement sur les structures algébriques : groupes symétriques, linéaires, symplectiques... En 1926, l'ancien assistant de Hilbert, J. von Neumann, travaille à l'axiomatisation de la mécanique quantique, et publie, en 1932, un mémoire qui unifie les approches d'Heisenberg et de Schrödinger ([vN33]).

Ce travail axiomatique convient bien aux mathématiciens, mais n'est pas apprécié des physiciens, qui lui préfèrent l'ouvrage [DPU31], paru en 1931 et utilisant la célèbre *fonction δ de Dirac*. Ce sont les travaux de L. Schwartz sur la théorie des distributions qui permettront de formaliser rigoureusement l'approche de Dirac, ouvrant par là-même la porte à un vaste champ de recherches mathématiques, et notamment le développement des transformations de Fourier. L. Schwartz recevra en 1950 la médaille Fields pour ces travaux¹³.

L'interprétation physique de la mécanique matricielle proposée par Heisenberg fut donnée en juin 1926 par Max Born ([Bor26]) : il propose alors d'interpréter la fonction d'onde représentant un système physique comme une amplitude de probabilité. Cette interprétation, fondamentalement non-déterministe, rencontra une farouche résistance

12. Sur ce sujet, Bohr lui-même avait déclaré : "Quiconque n'est pas choqué par la physique quantique ne la comprend pas."

13. Ce fut le premier mathématicien français à recevoir la médaille Fields et, en raison de son activisme trotskyste, L. Schwartz eu beaucoup de mal à se rendre aux États Unis pour y recevoir cette distinction.

de la part de Einstein, Schrödinger, de Broglie et d'autres physiciens philosophiquement attachés à une physique entièrement déterministe. D'autres physiciens, notamment convaincus par la publication par Heisenberg des relations d'incertitude, soutinrent l'interprétation de Born : Heisenberg lui-même, mais également Niels Bohr, entre autres¹⁴ .

Ce dernier généralisa alors (dans [Boh28]) le principe dit d'incertitude d'Heisenberg en un *principe de complémentarité* reliant les relations de commutation entre deux opérateurs et l'indétermination conséquente sur les mesures des variables associées. Le principe physique sous-jacent provient du fait que l'observation de ces grandeurs perturbe le système observé, empêchant une détermination exacte de ces grandeurs.

Le formalisme moderne de la mécanique quantique rencontra beaucoup de succès, malgré les difficultés rencontrées par les physiciens dans le maniement des outils mathématiques complexes et nouveaux qu'il impliquait. En revanche, il était toujours impossible d'utiliser cette théorie pour expliquer la structure hyperfine de l'atome d'hydrogène, ou la valeur du moment magnétique associé au spin de l'électron. Cette difficulté fut surmontée en utilisant conjointement les deux plus grandes théories physiques modernes, la mécanique quantique et la relativité. Ce fut les débuts de la mécanique quantique relativiste, qui devait déboucher sur la théorie quantique des champs.

3 De la mécanique quantique relativiste à la théorie quantique des champs

E. Schrödinger avait obtenu sa célèbre équation en quantifiant (i.e. en remplaçant les grandeurs classiques par des opérateurs différentiels linéaires) l'équation classique de l'énergie cinétique newtonienne :

$$\frac{p^2}{2m} = E,$$

p désignant l'impulsion, remplacée par l'opérateur $-i\hbar\nabla$, et E l'énergie, remplacée par l'opérateur $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$. Cette équation est non-relativiste. Si on suit le même procédé en cherchant à quantifier la relation (relativiste) d'Einstein, reliant énergie et impulsion :

$$E^2 = c^2(p^2 + m^2c^2),$$

14. Cette controverse entre Einstein et Bohr a été rendue célèbre lorsqu'Einstein, dans une lettre à Max Born (1926), affirma "Il[Dieu] ne joue pas aux dés". On attribue à Bohr la réponse : "Qui êtes-vous, Einstein, pour dire à Dieu ce qu'il doit faire?", mais aucune source ne semble corroborer ce fait.

on obtient l'équation suivante :

$$(\square + \mu^2)\psi(x, t) = 0.$$

Ici, \square est le *d'Alembertien*, défini par $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, et $\mu = \frac{mc}{\hbar}$. Cette équation fut découverte par de Broglie, puis par Schrödinger, mais ce dernier ne la publia pas en raison d'une divergence avec les résultats expérimentaux¹⁵. Oskar Klein ([Kle26]) et Walter Gordon ([Gor26]) découvrent et publient ensuite indépendamment cette équation, désormais connue sous le nom d'équation de Klein-Gordon.

En 1928, le jeune Paul Dirac, convaincu que l'équation quantique relativiste de l'électron doit être du premier ordre, cherche à obtenir une "racine" de l'équation de Klein-Gordon. Utilisant les travaux de Pauli, et notamment les matrices homonymes, Dirac publie ([Dir28]) une équation du premier ordre, décrivant le comportement relativiste de l'électron, et portant sur des fonctions d'onde à 4 composantes :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = (mc^2 \alpha_0 - i\hbar c \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \psi(x, t),$$

où c désigne la vitesse de la lumière, m la masse de la particule (ici, l'électron), \hbar la constante de Planck réduite, et les α_j sont les matrices de Dirac :

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix},$$

avec les matrices de Pauli σ_j :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette équation possède des solutions d'énergie négative, qui ne peuvent être simplement ignorées. Dirac interpréta ces solutions en postulant

15. À ce sujet, Dirac écrivit, en 1973 dans "The physicist's conception of nature" : *Je pourrais vous raconter l'histoire que j'ai entendue de Schrödinger : comment, lorsqu'il eu l'idée de son équation, il l'appliqua immédiatement au comportement de l'électron dans l'atome d'hydrogène, et comment il obtint des résultats qui n'étaient pas en accord avec l'expérience. Le désaccord provenait du fait qu'à l'époque, on ne savait pas que l'électron possédait un spin. Cela causa naturellement une grande déception à Schrödinger et lui fit abandonner ses travaux pendant quelques mois. Il nota ensuite que, si il appliquait la théorie d'une façon approximative, sans prendre en compte les raffinements exigés par la théorie de la relativité, ses calculs, à l'approximation utilisée, tombaient en accord avec l'observation. Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important de trouver de la beauté dans les équations que d'y trouver un accord avec l'expérience. Si Schrödinger avait eu plus confiance en son travail, il l'aurait probablement publié quelques mois plus tôt, et aurait ainsi produit une équation plus exacte. Un point de vue non nécessairement partagé par tous les physiciens...*

que les électrons d'énergie négative occupent tous les états correspondants, en accord avec le principe d'exclusion de Pauli, et en définissant le vide comme l'état où tous les états d'énergie négative sont occupés, sans qu'aucun état d'énergie positive ne le soit. Ce concept est appelé *mer de Dirac*. Dans ce contexte, l'absence d'un électron dans un état d'énergie négative est équivalente à l'apparition d'une particule observable d'énergie positive, mais de charge opposée. Ceci amena Dirac à prédire l'existence d'une particule nommée *positon* (bien distincte du proton, contrairement à la première idée de Dirac) dont la découverte fut annoncée en 1932 par C. Anderson et S. Neddermayer ([And33]), et confirmée en par P. Blackett et G. Occhialini en 1933.

De manière plus générale, cette découverte permit de prédire l'existence d'antimatière : l'équation de Dirac décrit toute particule de spin $1/2$, et les conclusions sur les paires électrons/positrons sont donc généralisables. Le vide pouvait ainsi être conçu comme un système dynamique, siège de création de paires de particules/antiparticules donnant lieu à l'émission d'énergie. Ce phénomène fut mis en avant par la découverte de l'effet Casimir¹⁶. Une nouvelle confirmation de la théorie de Dirac se fit lorsqu'elle permit d'obtenir correctement la structure hyperfine de l'atome d'hydrogène ; puis lorsque les mesures du moment magnétique associé au spin de l'électron se retrouvèrent être en accord avec ses prédictions.

Mais la théorie de l'électron n'était toujours pas satisfaisante : en raison des interactions de l'électron avec les fluctuations du vide ainsi qu'avec les électrons occupant les états d'énergie négative du vide, un électron dans le vide possède une énergie propre, dite énergie d'auto-interaction. Or, les valeurs obtenues en sommant toutes les contributions à cette énergie se retrouvent être infinies¹⁷.

En 1948, de nombreux travaux menés par J. Schwinger et S. Tomonaga (ce dernier n'ayant pu faire paraître ses travaux dès leur production à cause de la guerre) ainsi que, d'une manière très différente, par R. Feynman¹⁸, permirent de construire une théorie éliminant les quantités

16. Le physicien H. Casimir conjectura en 1948 que deux plaques réfléchissantes non chargées, placées dans le vide et proches l'une de l'autres, devraient s'attirer en raison des fluctuations du vide. Ce phénomène fut confirmé expérimentalement en 1978 par Van Blockland et Overbeek.

17. Dirac, perturbé par le manque de sens physique à donner à ces travaux, avait conclu l'un de ses livres par "*Il semble que nous ayons besoin de quelques idées physiques radicalement nouvelles*", phrase qui inspirera R. Feynman, comme il le déclara lors de la conférence Nobel 1965.

18. Une littérature fournie existe sur la vie, les travaux et la philosophie de R. Feynman, personnalité haute en couleur. Parmi ceux-ci, on peut citer "Vous voulez rire, Monsieur Feynman !" ou "The beat of a different drum", ainsi que le roman graphique "Feynman", paru aux éditions Vuibert.

infinies, dans un processus nommé *renormalisation*. Nous n'entrerons pas ici plus en détail sur la théorie de la renormalisation, pas plus que sur les outils mathématiques utilisés, comme les intégrales de chemin et de champs. Nous invitons le lecteur intéressé à se référer à l'un des nombreux ouvrages de référence sur le sujet. Parmi cette vaste littérature, on peut citer [ZJ03], [CT66] ou encore [FHS65].

4 L'effet Hawking

Comme nous l'avons vu précédemment, les trous noirs émergent en tant que solutions exactes des équations d'Einstein dans le vide. Pour cette raison, ainsi que pour leur intérêt en astrophysique, ils ont été l'objet de nombreux travaux dès leur mise en évidence par Schwarzschild. Dans les années 1920, le physicien indien Subrahmanyan Chandrasekhar et Arthur Eddington s'opposent sur la possibilité d'effondrement sur elle-même d'une naine blanche, lors d'une controverse restée célèbre. On sait aujourd'hui que le résultat d'un tel effondrement est une supernova de type Ia, mais que le raisonnement tenu par Chandrasekhar est valable pour une étoile à neutrons, dont l'existence était à l'époque inconnue.

En 1963, le mathématicien néo-zélandais Roy Kerr découvre la solution aux équations d'Einstein qui porte aujourd'hui son nom ([Ker63]). C'est le début d'importants travaux sur la théorie des trous noirs alors que, parallèlement, les observations permettent de démontrer l'existence des *pulsars* et d'accumuler les preuves de l'existence de trous noirs (notamment par l'observation de systèmes binaires). De nombreux chercheurs travaillent à comprendre les propriétés physiques de ces objets : J.A. Wheeler, R. Penrose, S. Hawking, J. Bekenstein, D. Christodoulou. . .

Parmi ces travaux, ceux de J. Bekenstein visent à construire une thermodynamique des trous noirs. Pour comprendre cette construction, développée dans deux articles ([Bek73] et [Bek74]), rappelons quelques notions de thermodynamique, et notamment celle d'*entropie*.

L'entropie d'un système thermodynamique désigne le désordre à l'intérieur de ce système. Autrement dit, l'entropie d'un système est d'autant plus élevée que la quantité d'information disponible sur sa configuration interne est faible. Il est ainsi possible de relier thermodynamique et théorie de l'information (telle qu'elle a été construite par Claude Shannon en 1948). Un exemple simple de cette relation est celui d'un gaz parfait, comprimé de manière isotherme. Il est bien connu que l'entropie de ce système décroît, ce qui est exprimé par la relation :

$$dE = TdS - PdV,$$

E désignant l'énergie du système, T sa température, S son entropie, P la pression et V le volume. Dans le même temps, après la compression, les molécules de gaz sont mieux localisées, et la quantité d'information sur la configuration interne du système a augmenté. De manière générale, l'entropie d'un système thermodynamique qui n'est pas en équilibre augmente, car les informations sur la configuration interne de ce système sont perdues lors de l'évolution en raison de l'amortissement des effets des conditions initiales. C'est un des principes fondamentaux de la thermodynamique classique, connu sous le nom de *second principe de la thermodynamique*, qui s'énonce de la façon suivante :

Toute transformation d'un système thermodynamique s'effectue avec augmentation de l'entropie globale incluant l'entropie du système et du milieu extérieur.

Or, en 1971, S. Hawking énonce dans [Haw71] le théorème suivant :

L'aire de la surface d'un trou noir ne peut jamais décroître.

Pour un système de plusieurs trous noirs, ce théorème implique que l'aire de chacun des trous noirs ne peut pas diminuer et, que, de plus, si deux trous noirs fusionnent, l'aire du trou noir résultant ne peut pas être inférieure à la somme des aires initiales. La similitude entre ces deux lois a incité J. Bekenstein à construire une thermodynamique des trous noirs, et donc à définir précisément l'entropie d'un trou noir ([Bek73]) puis à donner une version généralisée du second principe de la thermodynamique ([Bek74]).

Il convient tout d'abord de remarquer que le second principe ne peut s'appliquer à l'extérieur du trou noir. En effet, ce dernier agit comme un siphon à entropie : si une particule y entre, l'entropie qu'elle transporte se soustrait à celle de l'univers extérieur. Le système "univers privé du trou noir" n'est donc pas thermodynamiquement fermé. Il est donc nécessaire de définir une notion d'entropie du trou noir avant de construire un second principe généralisé. Il est en effet inutile de se contenter de la définition usuelle de l'entropie : en vertu du "*no hair theorem*", deux trous noirs stationnaires, possédant les mêmes masses, charges et moments angulaires sont identiques du point de vue d'un observateur extérieur (et ce, même si ils résultent de l'effondrement d'étoiles très différentes, et qu'ils possèdent donc des configurations internes a priori distinctes). Toute information sur la configuration interne du trou noir étant inaccessible, la notion commune d'entropie n'a aucun intérêt physique.

Remarquant la similitude de comportement entre aire d'un trou noir¹⁹ et entropie d'un système physique fermé, Bekenstein considère

19. Notons que l'aire d'un trou noir est reliée directement à sa masse, son moment

cette aire comme une mesure de l'entropie du trou noir - entropie au sens d'inaccessibilité à toute information sur sa configuration interne. En supposant que l'entropie est proportionnelle à l'aire de l'horizon, et en procédant par analyse dimensionnelle, Bekenstein définit l'entropie d'un trou noir d'aire A par :

$$S_{bh} := \frac{\ln 2}{8\pi} \frac{k_B c^3}{G \hbar} A,$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann, c la vitesse de la lumière dans le vide, G la constante gravitationnelle et \hbar la constante de Planck. Bien qu'ayant fait appel à la physique quantique "par désespoir", Bekenstein précise qu'il n'est pas surprenant que la constante de Planck intervienne dans la définition de l'entropie. En effet, l'entropie d'un système reflète le nombre d'états que ce système peut adopter. Or, ce nombre d'états est déterminé - entre autres - par les propriétés quantiques du système.

En revanche, comme le remarque Bekenstein dans son second article, la seconde loi (classique) de la thermodynamique n'est pas satisfaisante dans ce cadre : elle ne peut être appliquée uniquement à l'extérieur du trou noir, car ce dernier absorbe de l'entropie ; appliquée à la fois au trou noir et à son extérieur, elle n'a aucun intérêt, étant donné qu'il est impossible de mesurer l'entropie classique du trou noir. Il est donc nécessaire de généraliser cette loi sous la forme suivante :

La somme de l'entropie propre au trou noir S_{bh} et de l'entropie ordinaire extérieure ne diminue jamais.

L'apparition de la constante de Planck \hbar dans la température dérivant de l'entropie d'un trou noir calculée par Bekenstein fait soupçonner à S. Hawking l'intervention de phénomènes quantiques aux abords de l'horizon du trou noir. Dans son célèbre article "*Particle Creation by Black Holes*" ([Haw75]), il conjecture le fait qu'un trou noir crée et émet des particules, comme si il était un corps chaud de température $\frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B}$, κ désignant la gravité de surface du trou noir. Cette gravité de surface s'exprime à partir de la fonction F apparaissant dans la métrique de Schwarzschild²⁰ (I.2) :

$$\kappa := \frac{1}{2} F'(2M).$$

angulaire et sa charge, en accord avec le "*no hair theorem*", comme cela a été démontré par Bardeen, Carter et Hawking dans [JH73].

20. La gravité de surface est définie plus généralement pour un trou noir de type *Reissner-Nordström*. Dans ce cas, la variété considérée est :

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times]r_0, r_+[\times S_{\theta, \varphi}^2, \quad 0 < r_0 < r_+ \leq \infty,$$

Selon Hawking, ce résultat est conforté par les analogies thermodynamiques : la gravité de surface tient le même rôle que la température ; de plus, elle est constante le long de l'horizon des événements en situation d'équilibre. Les calculs menés ensuite par Hawking ont pour cadre non plus un trou noir statique, mais un corps en effondrement vers un trou noir de Schwarzschild. Le *No Hair Theorem* permet d'assurer le fait que le taux d'émission de particules ne dépendra pas des détails du processus d'effondrement, mais seulement de la masse, de la charge et du moment angulaire. Cette géométrie d'une étoile en effondrement vers un trou noir est fondamentale, et sera également le cadre de cette thèse. De plus, Hawking fait le choix de traiter l'espace-temps de manière classique, et les champs de manière quantique. Cela correspond à ignorer les effets quantiques de la gravitation et constitue une approximation de type semi-classique. Les motivations de ce choix sont triples : la première est qu'il n'existait pas (et n'existe toujours pas, à notre connaissance) de théorie quantique de la gravitation satisfaisante²¹ ; la seconde est qu'on peut raisonnablement penser que les effets quantiques de la gravitation sont très faibles ; enfin, la dernière est que ce type d'approximation devrait donner a minima une bonne indication du type de phénomène qui aurait lieu dans le cas d'un traitement quantique complet.

Les travaux de Hawking suscitèrent beaucoup d'intérêt. Ils établissaient en quelque sorte un paradoxe : dans la théorie classique, les trous noirs ne font qu'absorber des particules, et ne peuvent en ré-émettre. De plus, ils fournissaient un exemple de phénomène quantique établissant des propriétés importantes d'objets issus de la relativité.

Quelques mois après le premier article de Hawking, R. Wald compléta ses travaux (voir [Wal75]) : en plus de donner la température d'émission

munie de la métrique :

$$g = F(r)dt^2 - \frac{1}{F(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi),$$

où F est définie par :

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}.$$

Le rayon de l'horizon du trou noir, r_0 , est alors donné par :

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - Q^2},$$

et la gravité de surface vaut :

$$\kappa = \frac{1}{2}F'(r_0) = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}.$$

21. Principe connu sous le nom de *théorème de la clé sous le réverbère* : si j'ai perdu mes clés, autant les chercher au seul endroit où j'ai une chance de les trouver.

et le nombre moyen de particules émises dans chaque mode, Wald démontra que la matrice de densité correspondant à l'état thermal du trou noir était identique à celle d'un corps noir de température $\frac{\kappa}{2\pi}$, renforçant le parallèle entre émission de particules par un trou noir et rayonnement d'un corps noir. Dans cet article, Wald détaille et confirme les calculs de Hawking, en utilisant des outils issus de la théorie de la diffusion.

L'année suivante, Unruh publie quelques *Notes sur l'évaporation des trous noirs* ([Unr76]), dans lesquelles il examine quelques aspects des travaux précédents. Il y propose un ensemble de conditions initiales permettant de remplacer le modèle de corps stellaire en effondrement vers un trou noir par celui d'un trou noir préexistant. Il y démontre également et notamment *l'effet Unruh* : un détecteur de particules uniformément accéléré observera, même dans un espace-temps plat, des particules dans l'état de vide. Il y soulève ainsi un problème mathématique important : la définition de la notion d'état de vide. Il apparaît que les constructions algébriques ne sont pas assez bien définies à ce moment, et qu'un travail plus rigoureux semble nécessaire.

Ces travaux seront effectués une dizaine d'année plus tard, notamment par J. Dimock et B.S. Kay. Dans [DK86], ils étudient des *opérateurs d'onde* pour l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square_g + m^2)\phi = 0,$$

dans l'extérieur d'un espace-temps de type Schwarzschild. Ils utilisent ces opérateurs afin de donner une construction rigoureuse des états limites : l'état de Unruh et celui dit de Hartle-Hawking. Il est démontré dans cet article que l'état de Unruh extérieur correspond à l'état thermal du à la présence, dans un espace-temps plat, d'un corps noir à température de Hawking, dont ils précisent les opérateurs d'absorption et de réflexion (en fonction de ceux de scattering).

En 1990, K. Fredenhagen et R. Haag poursuivent les travaux visant à donner une démonstration rigoureuse de l'effet Hawking dans le cas de champs vérifiant l'équation des ondes (voir [FH90]).

À partir de la fin des années 90, et notamment sous l'impulsion d'A. Bachelot, de nombreux résultats mathématiques sont obtenus, dans le cadre de champs de Klein-Gordon ([Bac97],[Bac98]). Il reste - entre autres - à étendre ces travaux à des champs de Dirac, ce qui sera fait par A. Bachelot dans un article fondateur du travail présenté dans cette thèse ([Bac00]). La preuve de ce résultats se fait tout d'abord en ramenant le problème à celui portant sur un modèle "jouet", de dimension $1+1$, en utilisant la symétrie sphérique d'un trou noir de Schwarzschild. La théorie spectrale - et notamment les résultats de Kato, voir [Kat] -

permettent alors de construire un *opérateur d'évolution*, ou *propagateur* implémentant l'évolution du système. Par des techniques de scattering et des estimations fines, on obtient la limite de l'état de vide quand $t \rightarrow +\infty$ sous la forme d'un état thermal à température de Hawking. Cette température est indépendante de l'historique de l'effondrement, comme des conditions aux limites (du moins dans la classe de conditions aux limites étudiée).

Le résultat démontré par A. Bachelot porte sur un champ de Dirac chargé, en chute dans un trou noir à symétrie sphérique. Ce résultat est étendu par F. Melnyk en 2004 ([Mel03]) pour un champ fixe (en coordonnées de Schwarzschild). Le cas d'un trou noir chargé en rotation (trou noir de Kerr-Newman) est traité en 2006 par D. Häfner ([Häf06]) et constitue, à ce jour et à notre connaissance, le seul résultat rigoureux obtenu dans un cadre qui ne soit pas à symétrie sphérique.

5 Description de la thèse

Dans tous les travaux mentionnés plus haut, on étudie des champs quantiques libres : l'évolution temporelle des observables est implémentée par un groupe de transformations linéaires symplectiques ou unitaires sur l'espace des phases, et tous les états considérés sont quasi-libres. Cela signifie que l'étude du problème se ramène à celle d'équations aux dérivées partielles linéaires, avec des conditions aux limites sur la frontière de l'étoile en effondrement. L'effet Hawking provient alors du fait que, pour des temps très grands, la surface de l'étoile est asymptotiquement caractéristique. Cela entraîne une concentration exponentiellement rapide des paquets d'onde de Klein-Gordon ou de Dirac réfléchis par l'étoile, qui finalement mène à l'effet Hawking.

Dans cette thèse, nous allons étudier l'effet Hawking pour un modèle jouet de fermions de Dirac en interaction, dans un espace-temps de dimension $1+1$. Une discussion mathématique de champs quantiques en interaction est bien entendu difficile, en raison du peu de constructions rigoureuses de tels champs, même dans l'espace de Minkowski.

Dans le cas des champs de Klein-Gordon, il existe les constructions des modèles $P(\phi)_2$ et ϕ_3^4 dues à Glimm et Jaffe ([Gli85]). Il n'existe pas à notre connaissance, de telle construction pour un espace-temps décrivant l'extérieur d'une étoile en effondrement, même pour des interactions contenant des troncatures en espace et en ultra-violet.

La situation semble plus abordable pour des champs de Dirac, dans la mesure où les champs fermioniques sont bornés, ce qui, dans certaines situations, nous permet de construire une dynamique en interaction dans un cadre purement algébrique, indépendamment du choix d'une

représentation. Cela est particulièrement intéressant dans la situation que l'on considère dans cette thèse, étant donné que, même pour des champs de Dirac libres, deux représentations de Fock à l'extérieur de l'étoile pour des temps différents ne sont pas équivalentes.

Ce document est organisé comme suit : dans le Chapitre 1, nous présentons le modèle jouet étudié, les notations utilisées et rappelons les résultats importants nécessaires dans les chapitres suivants. Dans le Chapitre 2, nous construisons notre modèle d'interaction et démontrons l'existence de l'effet Hawking dans le cas d'une observable tombant dans le trou noir. La situation étudiée dans le Chapitre 3 est celle d'une observable stationnaire. Enfin, dans le Chapitre 4, on traite du cas d'une interaction localisée non plus dans une région fixée et compacte de l'espace, mais au bord de l'étoile en effondrement. Dans toutes ces situations, nous construisons les dynamiques quantiques adaptées, montrons que l'effet Hawking est présent, et donnons les états limites correspondants. Les annexes A, B et C regroupent résultats et définitions fréquemment utilisés.

Chapitre 1

Champs de Dirac libres

Établie par P. Dirac en 1928, l'équation de Dirac a donné lieu à une littérature conséquente. Elle occupe une place centrale en théorie quantique des champs, puisqu'elle permet de décrire les champs de particules élémentaires de spin $1/2$, comme les électrons. Dans notre travail, nous nous intéressons particulièrement à l'équation de Dirac dans un espace-temps de type trou noir. De nombreux articles et ouvrages abordent la question des champs de Dirac ; on peut notamment citer [BM98], [Cha98], [Nic95], [Nic02].

Dans ce chapitre, nous allons rassembler et définir, dans le contexte de nos travaux, quelques résultats obtenus sur les champs de Dirac, classiques et quantiques, et leurs implications sur l'effet Hawking dans un espace-temps contenant un trou noir de type Schwarzschild.

1.1 Notations et définitions

Comme cela a été expliqué et motivé dans l'Introduction, les symétries du problème permettent de concentrer notre étude sur un modèle jouet. Dans ce modèle jouet et sans tenir compte de la présence de l'étoile (donc sans condition aux bords), l'équation de Dirac s'écrit :

$$(1.1.1) \quad \partial_s \psi(s, x) = (-L\partial_x - iV(x))\psi(s, x),$$

où L est une matrice 2×2 donnée par :

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le potentiel V représente l'influence de la métrique. Il vérifie les propriétés suivantes :

$$V(x) = \begin{pmatrix} V_{11}(x) & V_{12}(x) \\ V_{21}(x) & V_{22}(x) \end{pmatrix}, \text{ avec } V(x) = V^*(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où V est de classe C^1 , avec :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = V_\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} V'(x) = 0, \end{cases}$$

tel que :

$$(1.1.2) \quad \begin{cases} |V(x) - V_\infty| + \langle x \rangle |V'(x)| \in O(\langle x \rangle^{-1-\epsilon}), \quad x \rightarrow +\infty, \\ |V(x)| + \langle x \rangle |V'(x)| \in O(\langle x \rangle^{-2-\epsilon}), \quad x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

pour un certain $\epsilon > 0$. Nous supposons également que :

$$V_\infty = m\Gamma, \quad \Gamma \in M_2(\mathbb{C}),$$

où $m > 0$ est la masse du champ et :

$$\Gamma^* = \Gamma, \quad \Gamma^2 = \mathbf{1}, \quad \Gamma L + L\Gamma = 0.$$

Rappelons que $z(t)$ désigne la surface de l'étoile, et vérifie les propriétés suivantes, démontrées dans [Bac00] :

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} z &\in C^2(\mathbb{R}), \\ z(t) &= z(0), \quad t \leq 0, \\ z(t) &= -t - Ae^{-2\kappa t} + \zeta(t), \quad t \geq 0, \\ -1 &\leq \dot{z}(t) \leq 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

pour $A, \kappa > 0$ et

$$(1.1.4) \quad |\zeta(t)| + |\dot{\zeta}(t)| \leq Ce^{-4\kappa t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C > 0.$$

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$\mathfrak{h}_t := L^2(]z(t), +\infty[, \mathbb{C}^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathfrak{h}_\infty := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2),$$

$$\mathfrak{h}_J := L^2(J, \mathbb{C}^2), \quad J \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1.1. Notons que si $s \leq t$, alors $\mathfrak{h}_s \subset \mathfrak{h}_t$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{h}_t \subset \mathfrak{h}_\infty$.

Afin de décrire le champ de fermions en présence de l'étoile, il convient d'ajouter la condition de réflexion au bord de l'étoile, donnée par λ , qui vérifie :

$$\lambda(t) = \left(\frac{1 + \dot{z}(t)}{1 - \dot{z}(t)} \right)^{1/2}.$$

Définition 1.1.2. *On pose :*

$$b_t^V := iL\partial_x - V(x)$$

sur \mathfrak{h}_t , de domaine :

$$\text{Dom } b_t^V := \{u \in H^1(\cdot]z(t), +\infty[, \mathbb{C}^2) : u_1(z(t)) = \lambda(t)u_2(z(t))\},$$

et :

$$b_\infty^V := iL\partial_x - V(x)$$

sur \mathfrak{h}_∞ , de domaine :

$$\text{Dom } b_\infty^V = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2).$$

Bien évidemment, nous noterons $b_t^{V_\infty}$ (resp. b_t^0) les opérateurs correspondants pour $V \equiv V_\infty$ (resp. $V \equiv 0$).

Avec ces notations, l'équation de Dirac en présence de l'étoile s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_s \psi(s, x) = ib_s^V \psi(s, x), & x \geq z(s), \\ \psi(x, t) = \psi(x), & x \geq z(t). \end{cases}$$

Nous allons maintenant étudier les solutions de cette équation.

1.2 Champs classiques libres

Dans une théorie *libre*, l'étude des champs quantiques se ramène, grâce au caractère libre de la dynamique (voir Annexe A), à l'étude des champs classiques : plutôt qu'étudier des observables dans une algèbre de type CAR (ou dans une représentation), on peut se contenter d'une étude hilbertienne. Les propriétés obtenues peuvent alors facilement être transposées aux champs quantiques par le biais d'une dynamique libre, donnée par un propagateur sur l'espace de Hilbert. Dans cette section, nous allons donner des propriétés importantes des solutions de l'équation de Dirac, concernant notamment existence, unicité et propagation du support.

1.2.1 Solution de l'équation de Dirac

Nous nous intéressons donc à l'équation suivante :

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} \partial_s \psi(s, x) = ib_s^V \psi(s, x), & x \geq z(s), \\ \psi_1(s, z(s)) = \lambda(s)\psi_2(s, z(s)), \\ \psi(x, t) = \psi(x), & x \geq z(t). \end{cases}$$

La résolution de cette équation est explicitée dans [Bac00]. La solution est formellement donnée par un *propagateur* (voir Annexe A pour plus de précisions) :

$$\psi(s, x) = u^V(s, t)\psi(x).$$

Plus précisément :

Théorème 1.2.1. *Il existe un unique propagateur unitaire $u^V(s, t) \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}_t, \mathfrak{h}_s)$ tel que :*

$$u^V(s, t) : \text{Dom } b_t^V \mapsto \text{Dom } b_s^V$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial u^V}{\partial t}(s, t) = -iu^V(s, t)b_t^V \text{ sur } \text{Dom } b_t^V, \\ \frac{\partial u^V}{\partial s}(s, t) = ib_s^V u^V(s, t) \text{ sur } \text{Dom } b_s^V. \end{cases}$$

La solution de (1.2.1) est donnée par :

$$\psi(s, x) = u^V(s, t)\psi(x).$$

Nous dénoterons le propagateur correspondant au problème sans condition au bord par :

$$u_\infty^V(s, t) : \mathfrak{h}_\infty \mapsto \mathfrak{h}_\infty.$$

De manière évidente, on a :

$$u_\infty^V(s, t) = e^{i(s-t)b_\infty^V}.$$

Démonstration. La preuve complète peut être trouvée dans [Bac00]. Elle est architecturée comme suit : l'unicité des solutions provient simplement de la conservation de l'énergie. Ensuite, par l'utilisation de rotations et translations adaptées, on ramène le problème à un problème connu, dont l'existence des solutions est assurée par un théorème de Kato (voir [Kat]). \square

Il nous sera utile de disposer d'une expression explicite du propagateur libre $u^0(s, t)$:

Proposition 1.2.2. *Pour $s \leq t$ et $f \in \mathfrak{h}_t$, $\psi(s, \cdot) := u^0(s, t)f(\cdot)$ est donné par :*

$$\psi_2(s, x) = \begin{cases} \forall x > z(s), \psi_1(s, x) = f_1(x - s + t) \\ \frac{1}{\tau(x + s)} f_1(x + t + s - 2\tau(x + s)) \text{ si } z(s) < x < z(t) + t - s, \\ f_2(x - t + s) \text{ si } x > z(t) + t - s \end{cases}$$

Démonstration. La preuve de ce résultat, basée sur l'étude des caractéristiques, peut également être trouvée dans [Bac00, Lemme VI.3]. \square

1.2.2 Propriétés des solutions

Parmi les propriétés centrales des solutions de l'équation de Dirac se trouve la *propagation à vitesse finie*. Connue sous le nom de *principe de Huygens*, elle s'exprime sur le propagateur $u_\infty^V(s, t)$ de la façon suivante :

Proposition 1.2.3.

$$\text{Supp}(f) \subset [a, b] \Rightarrow \text{Supp} u_\infty^V(s, t)f \subset [a - |t - s|, b + |t - s|]$$

Démonstration. Pour ce résultat classique, on peut se référer à [CP82, Ch.VII,§8]. \square

Cette propriété s'exprime sur le propagateur de la solution avec condition au bord de manière équivalente :

Proposition 1.2.4.

$$\text{Supp}(f) \subset]R, +\infty[\Rightarrow \text{Supp}(u^V(s, t)f) \subset]R + |t - s|, +\infty[$$

Démonstration. La démonstration est donnée dans [Bac00, Proof of Theorem VI.5]. \square

Enfin, il est important de pouvoir relier l'évolution libre et l'évolution avec condition de réflexion au bord de l'étoile. En effet, loin de l'étoile, il est clair que l'évolution n'est pas affectée. C'est ce qu'explique la proposition suivante :

Proposition 1.2.5. *Soit J un intervalle compact. Alors :*

$$\exists c \geq 0, \forall s \in \left[\frac{t}{2} + c, t\right],$$

$$f \in \mathfrak{h}_J \Rightarrow u^V(s, t)f = u_\infty^V(s, t)f.$$

Démonstration. Une simple application de l'unicité des solutions de (1.2.1) permet d'obtenir ce résultat : pour $s > t/2 + c$, $u^V(s, t)f$ est nul près de $x = z(s)$, donc vérifie la condition au bord. \square

Nous donnons un résultat supplémentaire, directement issu du principe de propagation à vitesse finie :

Lemme 1.2.6. *Si f est supportée dans $[-t, R - t]$, alors $u^V(s, t)f$ est supportée dans $[z(s), R - s]$.*

Démonstration. Cette propriété est donnée dans [Bac00, Preuve du théorème VI.5, p. 1079]. \square

1.2.3 Effet Hawking libre

Nous donnons ici les résultats démontrés par A. Bachelot dans [Bac00] concernant la propagation d'un champ classique vers l'étoile, et sa réflexion, qui joue un rôle important dans la preuve de l'existence de l'effet Hawking.

Afin d'isoler l'effet Hawking, nous allons étudier dans un premier temps des observables translatées au bord de l'étoile. Il est donc utile d'introduire :

Définition 1.2.7 (Translation à gauche). *Si $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, on notera f^t la fonction : $f^t(x) := f(x + t)$.*

L'étude de la propagation se fait en séparant les propagations à droite et à gauche. On va pour cela décomposer l'espace \mathfrak{h} en deux parties, de la manière suivante :

$$\mathfrak{h}_t := \mathfrak{h}_t^g \oplus \mathfrak{h}_t^d,$$

avec :

$$\mathfrak{h}_t^d := \left\{ f \in \mathfrak{h}_t \mid f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\mathfrak{h}_t^g := \left\{ f \in \mathfrak{h}_t \mid f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour $f \in \mathfrak{h}_t$, on notera $f^{g/d}$ les projections orthogonales de f sur $\mathfrak{h}_t^{g/d}$. Dans un premier temps, on va traiter le cas d'un champ se propageant purement vers la gauche (resp. vers la droite). On utilisera ensuite ces résultats pour traiter le cas général. La situation étudiée est résumée par la Figure 1.1 ci-dessous.

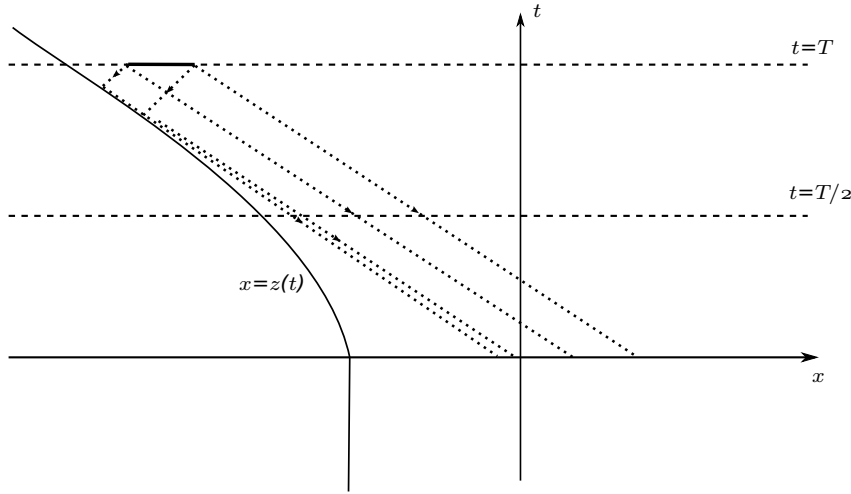


FIGURE 1.1 – Effet Hawking libre

La courbe $x = z(t)$ représente la surface de l'étoile. Les lignes en pointillé représentent les caractéristiques pour l'équation de Dirac, partant du support d'une observable au temps T : les caractéristiques se déplaçant vers la gauche sont réfléchies par la surface de l'étoile et asymptotiquement concentrées quand $T \rightarrow +\infty$.

Remarque 1.2.8. Si $V \equiv 0$, on remarque facilement que :

$$(1.2.2) \quad \forall f \in \mathfrak{h}_\infty^g, u_\infty^0(0, t)f = f^t, \forall f \in \mathfrak{h}_\infty^d, u_\infty^0(t, 0)f = f^t.$$

Résultats de scattering

L'évolution à droite, non affectée par la condition au bord, est donnée par un résultat de scattering :

Proposition 1.2.9. *La limite forte :*

$$w_0^d := s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} u^V(0, t)u_\infty^0(t, 0)$$

existe sur \mathfrak{h}_∞^d et définit une isométrie de \mathfrak{h}_∞^d dans \mathfrak{h}_0^d .

Démonstration. Ce résultat est démontré dans [Bac00, Proposition VI.4]. \square

Nous avons également un résultat de limite faible pour la propagation à gauche :

Proposition 1.2.10.

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} u^V(0, t)f^t = 0, \forall f \in \mathfrak{h}_0^g.$$

Démonstration. Nous utilisons des arguments développés dans [Bac00]. Par densité, on peut supposer que $f \in \mathfrak{h}_0^g$ est à support compact. Pour $0 \leq T \leq t$, on a :

$$\begin{aligned} \|u^V(T, t)f^t - u^0(T, t)f^t\| &= \|u^0(t, T)u^V(T, t)f^t - f^t\| \\ &= \left\| \int_T^t u^0(t, s)Vu^V(s, t)f^t ds \right\| \leq \int_T^t \|Vu^V(s, t)f^t\| ds. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.2.6, on sait que $\text{Supp } u^V(s, t)f^t \subset [z(s), R - s]$ pour $R \geq 0$. D'après l'hypothèse (1.1.2) portant sur le potentiel, on a donc $\|Vu^V(s, t)f^t\| \in O(\langle s \rangle^{-2-\epsilon})$. Par conséquence,

$$(1.2.3) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \sup_{T \leq t} \|u^V(T, t)f^t - u^0(T, t)f^t\| = 0.$$

Maintenant, écrivons :

$$\begin{aligned} u^V(0, t)f^t &= u^V(0, T)u^0(T, t)f^t + u^V(0, T)(u^V(T, t)f^t - u^0(T, t)f^t) \\ &= u^V(0, T)u^0(T, 0)u^0(0, t)f^t + u^V(0, T)(u^V(T, t)f^t - u^0(T, t)f^t). \end{aligned}$$

On sait, d'après [Bac00, Lemme VI.8], que $\text{w-lim}_{t \rightarrow +\infty} u^0(0, t)f^t = 0$. D'après (1.2.3), un argument de type $\epsilon/2$ nous permet de conclure. \square

Limites des états quasi-libres

La proposition suivante explicite la limite de l'évolution de l'état de vide (pour un champ initial purement à gauche) vers un état thermal. C'est le résultat central de [Bac00].

Théorème 1.2.11. *Pour $f \in \mathfrak{h}_0^g$, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u^V(0, t)f^t | \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(b_0^V)u^V(0, t)f^t) = (f | \frac{e^{\frac{2\pi}{\kappa}b_\infty^0}}{1 + e^{\frac{2\pi}{\kappa}b_\infty^0}} f).$$

Démonstration. La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [Bac00]. \square

Le résultat analogue, pour $f \in \mathfrak{h}_0^d$, découle directement de la proposition 1.2.9 et de la remarque 1.2.8 :

Proposition 1.2.12. *Pour $f \in \mathfrak{h}_t^d$, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u^V(0, t)f^t | \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(b_0^V)u^V(0, t)f^t) = (\text{w}_0^d f | \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(b_0^V)\text{w}_0^d f).$$

Rappelons que $(f | \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(b_0^V)f)$ est la covariance de l'état de vide quasi-libre pour le champ de Dirac à l'extérieur de l'étoile, à $t = 0$; $(f | \frac{e^{\frac{2\pi}{\kappa}b_\infty^0}}{1 + e^{\frac{2\pi}{\kappa}b_\infty^0}} f)$ est la covariance de l'état thermal à la température de Hawking $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ près de l'horizon du trou noir.

1.3 Champs quantiques libres

Dans cette section, nous allons définir la dynamique quantique libre correspondant à la dynamique classique construite en Section 1.2. La notion de *dynamique quantique* est introduite en Annexe A.

Commençons par introduire quelques notations : pour $t \geq 0$, on pose $\mathfrak{A}_t := \text{CAR}(\mathfrak{h}_t)$ la C^* -algèbre CAR sur \mathfrak{h}_t . Pour plus de précisions sur les algèbres CAR et leur construction, voir annexe A. On notera $\mathfrak{A}(I) := \text{CAR}(\mathfrak{h}_I)$ et $\mathfrak{A}_\infty := \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$. Remarquons que $\mathfrak{A}_t \subset \mathfrak{A}_\infty$ et que cette injection est isométrique.

Définition 1.3.1. *On notera $\tau^V(s, t)$ la dynamique quantique libre définie par :*

$$\tau^V(s, t)\psi(f) := \psi(u^V(s, t)f), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathfrak{h}_t.$$

$\tau^V(s, t)$ s'étend de manière unique en une dynamique de \mathfrak{A}_t dans \mathfrak{A}_s .

Nous définissons de la même manière $\tau^0(s, t)$ (respectivement $\tau_\infty^V(s, t)$) les dynamiques quantiques libres engendrées par $u^0(s, t)$ (respectivement $u_\infty^V(s, t)$).

Remarque 1.3.2. $\tau_\infty^V(s, t)$ est une dynamique stationnaire : pour tout $s, t, t' \in \mathbb{R}$, on a : $\tau_\infty^V(s + t', t + t') = \tau_\infty^V(s, t)$.

Afin d'opérer la translation vers la gauche, on définit la dynamique à un paramètre α agissant sur \mathfrak{A}_∞ :

Définition 1.3.3.

$$\alpha^t(\psi^{(*)}(f)) := \psi^{(*)}(f^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

qui s'étend de manière unique en une dynamique sur \mathfrak{A}_∞ .

Les propriétés données en Section 1.2 se transmettent immédiatement à la dynamique quantique ; nous avons notamment le lemme suivant :

Lemme 1.3.4. *Soit J intervalle compact. Alors :*

$$\exists c \geq 0, \quad \forall s \in \left[\frac{t}{2} + c, t\right], \quad \forall A \in \mathfrak{A}(J),$$

$$\tau^V(s, t)(A) = \tau_\infty^V(s, t)(A).$$

Démonstration. Cela découle directement de la Proposition 1.2.5. \square

Nous allons donner la version du Théorème 1.2.11 pour des champs quantiques libres.

Nous noterons $\omega_{0,\text{vac}}^V$ l'état de vide agissant sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$, et $\omega_{\infty,\beta}^0$ l'état thermal à la température $T = 1/\beta = \kappa/2\pi$ agissant sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$. Ces états sont définis à l'annexe A.

Théorème 1.3.5. *Soit $f \in \mathfrak{h}_\infty$ à support compact. Alors*

$$\omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^V(0,t) \circ \alpha^t(\psi^*(f)\psi(f))) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \omega_{\text{lim}}^0(\psi^*(f)\psi(f))$$

Où ω_{lim}^0 est l'état quasi-libre invariant de jauge défini par la fonction à deux points :

$$\omega_{\text{lim}}^0(\psi^*(f)\psi(g)) = \omega_{\infty,\beta}^0(\psi^*(f^g)\psi(g^g)) + \omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(w_0^d f^d)\psi(w_0^d g^d)).$$

Rappelons que w_0^d est défini par la Proposition 1.2.9, et qu'on peut consulter l'Annexe A pour plus de détails sur la notion d'état quasi-libre invariant de jauge.

1.4 Discussion sur le modèle jouet

Nous avons choisi de restreindre notre étude à un modèle jouet de fermions de Dirac, en dimensions d'espace-temps $1 + 1$. Cela nous permet de nous concentrer sur les nouveaux problèmes que la présence de l'interaction non-linéaire pose, tout en conservant un formalisme lisible et relativement simple.

Si l'on ne tient pas compte de l'interaction non-linéaire, notre modèle est identique à celui étudié par A. Bachelot dans [Bac00]. Rappelons brièvement que, pour passer du problème réel portant sur des spineurs à quatre composantes à celui, plus simple, du modèle jouet, il suffit de se placer en coordonnées polaires et d'introduire les harmoniques sphériques adaptées.

Chapitre 2

Effet Hawking I : cas d'une observable tombant dans le trou noir

Le but de notre travail est d'étendre les résultats obtenus précédemment (et rappelés dans le chapitre précédent) à des champs en interaction. Les hypothèses choisies sur l'interaction ont été discutées et justifiées dans l'Introduction. L'hypothèse essentielle est que l'interaction est localisée dans une région compacte de l'espace.

Dans ce chapitre, nous allons, dans la Section 2.1, nous attacher à définir la dynamique en interaction. Cette dynamique quantique ne sera plus libre, contrairement au cas évoqué dans le chapitre précédent. Elle se construit en perturbant la dynamique libre, et n'est pas engendrée par un propagateur.

Dans la Section 2.2, nous allons démontrer l'existence de l'effet Hawking et donner son expression.

Enfin, la Section 2.3 est dévolue à une discussion sur l'état de vide initial utilisé : compte tenu de l'ajout de l'interaction, l'état de vide initial n'est plus le vide libre. Nous montrerons l'existence d'un état de vide en interaction, défini par l'état fondamental d'un hamiltonien d'interaction, et la conservation de notre résultat une fois le changement d'état de vide effectué.

2.1 Dynamique en interaction

2.1.1 Construction de la dynamique en interaction

Nous définissons l'interaction de la façon suivante :

Définition 2.1.1. Soit $J \in \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $M = M^*$. Pour $g \in L^2(J)$, on pose :

$$\psi^*(g)M\psi(g) := \sum_{i=1}^2 \psi^*(g \otimes e_i)\lambda_i\psi(g \otimes e_i) \in \mathfrak{A}_\infty$$

où

$$M = \sum_{i=1}^2 \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \quad (\text{i.e. } (e_1, e_2) \text{ base de vecteurs propres de } M).$$

On fixe $g \in L^2(J)$ pour $J \in]z(0), +\infty[$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, et on pose :

$$I := (\psi^*(g)M\psi(g))^n.$$

I est ainsi un élément de $\text{CAR}_0(\mathfrak{h}_J)$, et, pour t assez grand, $\text{CAR}_0(\mathfrak{h}_J) \subset \text{CAR}_0(\mathfrak{h}_t)$. Ce terme représente une interaction paire, localisée, du champ de Dirac avec lui-même.

Remarque 2.1.2. Tous les résultats de notre travail s'étendent immédiatement au cas où :

$$I = \sum_{i=1}^p \alpha_i (\psi^*(g_i)M_i\psi(g_i))^{n_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad n_i \geq 2.$$

Pour ne pas surcharger la rédaction, nous allons étudier le cas $p = 1$. Les seules propriétés importantes de I sont la localisation et la parité.

Compte tenu du modèle d'interaction choisi, la nouvelle situation est résumée par la Figure 2.1 ci-dessous. La région grisée représente le support de l'interaction.

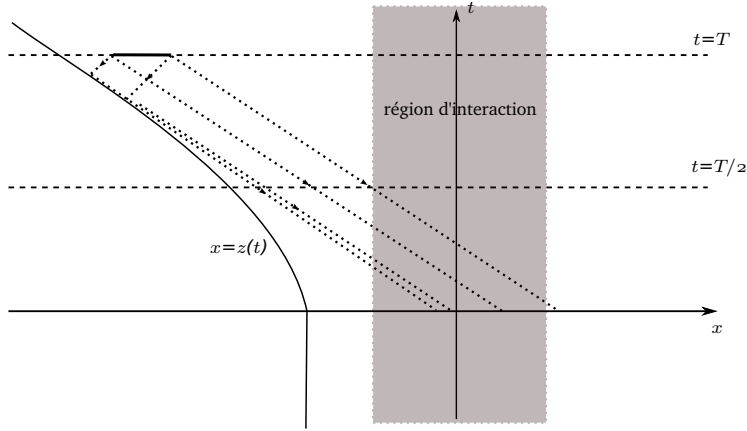


FIGURE 2.1 – Effet Hawking I

Remarquons et énonçons la propriété suivante de l'interaction, qui nous sera utile par la suite :

Lemme 2.1.3. Soit $B = \prod_1^n \psi^{(*)}(f_i)$. Alors il existe C_n tel que :

$$\| [I, B] \| \leq C_n \prod_1^n \| f_i \| \sum_1^n |g|f_i|, \quad \forall f_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Démonstration. Cela découle directement des CAR et de la parité de I . \square

En utilisant les résultats présentés en Annexe A, nous pouvons maintenant construire la *dynamique en interaction* :

Définition 2.1.4. Soit I comme dans la Définition 2.1.1, $I(s, t) := \tau^V(s, t)(I)$ et $R(s, t) := R_s(s, t) \in U(\mathfrak{A}_s)$ obtenu par la construction décrite dans le Lemme A.5.5. On pose :

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} & \tau^{V, \text{int}}(s, t) : \mathfrak{A}_t \rightarrow \mathfrak{A}_s \\ & \tau^{V, \text{int}}(s, t)(A) := R_s(s, t) \tau^V(s, t)(A) R_s^*(s, t), \end{aligned}$$

Alors, d'après le Lemme A.5.5, $\{\tau^{V, \text{int}}(s, t)\}_{s, t \in \mathbb{R}}$ est une dynamique, appelée dynamique en interaction.

Rappelons que $\sigma \mapsto R(s, \sigma)$ vérifie :

$$\begin{cases} \partial_\sigma R(s, \sigma) = -iR(s, \sigma)I(s, \sigma), \\ R(s, s) = \mathbb{1}. \end{cases}$$

Définition 2.1.5. Nous définissons de la même manière la dynamique sans condition au bord, issue de $\tau_\infty^V(s, t)$ et de $I_\infty(s, t) := \tau_\infty^V(s, t)(I)$:

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} & \tau_\infty^{V, \text{int}}(s, t) : \mathfrak{A}_\infty \rightarrow \mathfrak{A}_\infty \\ & \tau_\infty^{V, \text{int}}(s, t)(A) := R_\infty(s, t)\tau_\infty^V(s, t)(A)R_{s, \infty}^*(s, t), \end{aligned}$$

où $R_\infty(s, t)$ est défini comme dans le Lemme A.5.5.

À nouveau, $\tau_\infty^{V, \text{int}}(s, t)$ est stationnaire.

Remarque 2.1.6. Représentons fidèlement $\mathfrak{A}_\infty = \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$ dans l'espace de Fock fermionique $\Gamma_a(\mathfrak{h}_\infty)$ (voir Annexe B) par la représentation de Fock π_F . Alors, dans la représentation de Fock, $\tau_\infty^V(s, t)$ est implémentée par le groupe unitaire $e^{i(s-t)H_\infty^V}$, où $H_\infty^V := d\Gamma(b_\infty^V)$ est la seconde quantification de b_∞^V . La dynamique $\tau_\infty^{V, \text{int}}(s, t)$ implémentée par le groupe unitaire $e^{i(s-t)H_\infty^{V, \text{int}}}$, où $H_\infty^{V, \text{int}} := H_\infty^V + \pi_F(I)$.

2.1.2 Discussion sur le modèle d'interaction

Comme nous l'avons vu dans la Sous-section 2.1.1, nous avons fait le choix d'une interaction *compacte, paire* et n'interagissant pas avec la métrique. Dans cette Sous-section, nous allons donner quelques explications sur ces hypothèses.

Tout d'abord, rappelons que I s'écrit :

$$I := (\psi^*(g)M\psi(g))^n,$$

avec g à support compact. La construction de la dynamique en interaction $\tau^{V, \text{int}}(s, t)$ définie en Définition 2.1.4 correspond formellement à la quantification de l'équation de Dirac non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_s \psi(s, x) + L\partial_x \psi(s, x) + iV(x)\psi(s, x) \\ -in(\overline{\psi(s, g)}|M\psi(s, g))_{\mathbb{C}^2}^{n-1} M\psi(s, g)g(x) = 0, \\ \psi_1(s, z(s)) = \lambda(s)\psi_2(s, z(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \\ \psi(t, x) = \psi(x), \quad \text{pour } x > z(t), \end{cases}$$

où $\psi(s, g) := \int \psi(s, x)\bar{g}(x)dx \in \mathbb{C}^2$, $M \in M_2(\mathbb{C})$ est une matrice auto-adjointe et $g \in L^2(J)$ pour un certain $J \Subset \mathbb{R}$ est une fonction à support compact. La compacité du support de g correspond à la *localisation* de l'interaction. Elle est présente afin d'assurer que l'hypothèse physique de *localité* soit respectée.

La parité est une hypothèse centrale pour une grande partie des résultats obtenus sur la dynamique en interaction (notamment ceux faisant intervenir des relations de commutation). Or, si les éléments de

CAR(\mathfrak{h}) sont bien tous des *observables*, seuls ceux de la sous-algèbre des éléments pairs (voir Annexe A) CAR₀(\mathfrak{h}) correspondent à des observables physiques, au sens qu'elles représentent des grandeurs physiquement mesurables.

Enfin, nous avons décidé de placer nos travaux dans le même contexte d'approximation semi-classique que les travaux originels de S. Hawking : la gravitation reste traitée de manière classique et non quantique, contrairement aux champs. En conséquence, le champ de fermions peut interagir avec lui-même, mais pas avec la métrique. À notre connaissance, il n'existe pas de construction théorique permettant de résoudre les problèmes non-linéaires qui seraient posés dans un cadre intégralement quantique, même dans le cas d'une dynamique libre (sans interaction du champ avec lui-même). Toutefois, on peut supposer que les effets quantiques de la gravitation sont mineurs et que, quoi qu'il en soit, l'approximation choisie donne des résultats proches, du moins dans la conception que l'on peut se faire de l'effet Hawking, de ceux que l'on pourrait obtenir par une théorie complète d'une gravitation quantique.

2.1.3 Propriétés

Les propriétés suivantes permettent d'approcher la dynamique en interaction par la dynamique libre :

Lemme 2.1.7. *Soit $J \in \mathbb{R}$ un intervalle. Alors :*

$$\exists c \geq 0, \forall s \in [\frac{t}{2} + c, t],$$

$$R_{s,\infty}(s, t) = R_s(s, t).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme 1.3.4 à la série définissant $R_{s,\infty}(s, t)$ (voir Lemme A.5.5). \square

Lemme 2.1.8. *Soit $J \in \mathbb{R}$ un intervalle. Alors :*

$$\exists c \geq 0, \forall s \in [\frac{t}{2} + c, t], \forall A \in \mathfrak{A}(J),$$

$$\tau^{V,\text{int}}(s, t)(A) = \tau_\infty^{V,\text{int}}(s, t)(A).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les lemmes 2.1.7 et 1.3.4 à la définition de $\tau_\infty^{V,\text{int}}$. \square

2.2 Effet Hawking en interaction, I

Dans cette section, nous allons étudier l'effet Hawking dans la situation décrite précédemment. Rappelons la décomposition de l'espace \mathfrak{h}_t en deux sous-espaces :

$$\mathfrak{h}_t := \mathfrak{h}_t^g \oplus \mathfrak{h}_t^d,$$

avec :

$$\mathfrak{h}_t^d := \left\{ f \in \mathfrak{h}_t \mid f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\},$$

et

$$\mathfrak{h}_t^g := \left\{ f \in \mathfrak{h}_t \mid f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'algèbre \mathfrak{A}_0 se sépare en un produit tensoriel croisé (voir Annexe A) des algèbres CAR des observables se déplaçant à gauche et à droite :

$$\mathfrak{A}_0^{g/d} := \text{CAR}(\mathfrak{h}_0^{g/d}), \text{ et :}$$

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0^g \widehat{\otimes} \mathfrak{A}_0^d.$$

La première étape est d'étudier l'évolution $\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t$ sur des observables se déplaçant à gauche, puis sur des observables se déplaçant à droite.

2.2.1 Propagation à gauche

Dans cette sous-section, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Soit $B \in \mathfrak{A}_0^g$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(B) - \tau^V(0, t) \circ \alpha^t(B)\| = 0.$$

Commençons par montrer le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 2.2.2. $\forall \varepsilon > 0, \forall B \in \mathfrak{A}_0^g, \exists T_\varepsilon$ tel que :

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(T_\varepsilon, t) \circ \alpha^t(B) - \tau^V(T_\varepsilon, t) \circ \alpha^t(B)\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Pour alléger les notations lors de cette démonstration, nous noterons $B(s, t) := \tau^V(s, t) \circ \alpha^t(B)$ et $B^{\text{int}}(s, t) := \tau^{V,\text{int}}(s, t) \circ \alpha^t(B)$. Rappelons que l'on a :

$$\tau^{V,\text{int}}(s, t) \circ \alpha^t(B) = R(s, t)B(s, t)R^*(s, t)$$

et que, comme R est unitaire :

$$\begin{aligned} R(s, t)B(s, t)R^*(s, t) - B(s, t) &= R(s, t)B(s, t)R^*(s, t) - B(s, t)R(s, t)R^*(s, t) \\ &= [R(s, t), B(s, t)]R^*(s, t). \end{aligned}$$

Nous allons donc poser :

$$F_{s,t}(\sigma) := [R(s, \sigma), B(s, t)],$$

et chercher à évaluer la norme de $F_{s,t}(t)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} F_{s,t}(\sigma) &= [iR(s, \sigma)I(s, \sigma), B(s, t)] \\ &= i[R(s, \sigma), B(s, t)]I(s, \sigma) + iR(s, \sigma)[I(s, \sigma), B(s, t)] \end{aligned}$$

On pose $G_{s,t}(\sigma) := [I(s, \sigma), B(s, t)]$, et on obtient le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\sigma R(s, \sigma) = iR(s, \sigma)I(s, \sigma), \\ R(s, s) = \mathbf{1}, \\ \partial_\sigma F_{s,t}(\sigma) = iF_{s,t}(\sigma)I(s, \sigma) + iR(s, \sigma)G_{s,t}(\sigma), \\ F_{s,t}(s) = 0. \end{cases}$$

On peut donc appliquer la méthode de la variation de la constante, et chercher $F_{s,t}$ sous la forme : $F_{s,t}(\sigma) = H_{s,t}(\sigma)R(s, \sigma)$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \partial_\sigma H_{s,t}(\sigma) = iR(s, \sigma)G_{s,t}(\sigma)R^*(s, \sigma), \\ H_{s,t}(s) = 0. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} G_{s,t}(\sigma) &= [I(s, \sigma), B(s, t)] = [\tau^V(s, \sigma)(I), \tau^V(s, t) \circ \alpha^t(B)] \\ &= \tau^V(s, \sigma)([I, \tau^V(\sigma, t) \circ \alpha^t(B)]). \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à estimer $\|G_{s,t}(\sigma)\|$, ce qui nous permettra d'évaluer la norme de $F_{s,t}(t)$ et de conclure. Comme τ^V conserve la norme, il nous reste à étudier $\|[I, \tau^V(\sigma, t) \circ \alpha^t(B)]\|$.

Supposons d'abord que $B \in \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_I)$, $I \in \mathbb{R}$. Plus précisément :

$$B = \prod_{i=1}^n \psi^{(*)}(f_i),$$

avec f_i à support compact. On sait d'après le Lemme 1.2.6 que $u^V(\sigma, t)f^t$ est supportée dans $[z(\sigma), -\sigma + R]$ si f est supportée dans $[0, R]$.

Pour $\sigma \geq \sigma_0$ assez grand, on a donc $\tau^V(\sigma, t) \circ \alpha^t(B) \in \mathfrak{A}(J_1)$ et

$I \in \mathfrak{A}(J_2)$ avec $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. I étant paire, on peut appliquer le Lemme A.2.5, et obtenir :

$$\forall t \geq \sigma \geq \sigma_0, [I, \tau^V(\sigma, t) \circ \alpha^t(B)] = 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \|\tau^{V,\text{int}}(s, t) \circ \alpha^t(B) - \tau^V(s, t) \circ \alpha^t(B)\| = \|F_{s,t}(t)\| = \|H_{s,t}(t)\| \\ & \leq \int_s^t \|[I, \tau^V(\sigma, t) \circ \alpha^t(B)]\| d\sigma. \end{aligned}$$

Il existe donc $T(B)$ tel que :

$$(2.2.1) \quad t \geq s \geq T(B) \Rightarrow \tau^{V,\text{int}}(s, t) \circ \alpha^t(B) - \tau^V(s, t) \circ \alpha^t(B) = 0.$$

Soit maintenant $B \in \text{CAR}(\mathfrak{h})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $B_\varepsilon \in \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_{I_\varepsilon})$, $I_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\|B - B_\varepsilon\| \leq \varepsilon/2$. On a alors :

$$\sup_{s,t} \|B^{\text{int}}(s, t) - B(s, t) - (B_\varepsilon^{\text{int}}(s, t) - B_\varepsilon(s, t))\| \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant $T_\varepsilon := T(B_\varepsilon)$. Alors, d'après (2.2.1) :

$$t \geq s \geq T_\varepsilon \Rightarrow \|B^{\text{int}}(s, t) - B(s, t)\| \leq \varepsilon,$$

et donc :

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(T_\varepsilon, t) \circ \alpha^t(B) - \tau^V(T_\varepsilon, t) \circ \alpha^t(B)\| \leq \varepsilon.$$

□

Démonstration de la Proposition 2.2.1 :

Soit $B \in \mathfrak{A}_0^g$, $\varepsilon > 0$, T_ε donné par le Lemme 2.2.2. On a :

$$\begin{aligned} \tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(B) &= \tau^{V,\text{int}}(0, T_\varepsilon) \circ \tau^{V,\text{int}}(T_\varepsilon, t) \circ \alpha^t(B) \\ &= R(0, T_\varepsilon) \tau^V(0, T_\varepsilon) (\tau^V(T_\varepsilon, t) \circ \alpha^t(B)) R^*(0, T_\varepsilon) \\ &= R(0, T_\varepsilon) \tau^V(0, t) \circ \alpha^t(B) R^*(0, T_\varepsilon) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.2.2.

À nouveau, pour alléger les notations, nous noterons :

$$B(s, t) := \tau^V(s, t) \circ \alpha^t(B).$$

Remarquons que l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} R(0, s) A R^*(0, s) = i R(0, s) [I(0, s), A] R^*(0, s),$$

et que donc :

$$R(0, T_\varepsilon)B(0, t)R^*(0, T_\varepsilon) = B(0, t) + i \int_0^{T_\varepsilon} R(0, s)[I(0, s), B(0, t)]R^*(0, s)ds.$$

Nous allons donc montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|[I(0, s), B(0, t)]\| = 0,$$

ce qui entrainera la Proposition 2.2.1.

On a $I(0, s) = \tau^V(0, s)(I)$, $B(0, t) = \tau^V(0, s)B(s, t)$, donc $\|[I(0, s), B(0, t)]\| = \|[I, B(s, t)]\|$. Il suffit donc de montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|[I, B(s, t)]\| = 0, \quad \forall s \geq 0.$$

Comme $\|B(s, t)\| = \|B\|$, il suffit, par linéarité et densité, de le démontrer pour $B = \prod_{i=1}^n \psi^{(*)}(f_i)$, $f_i \in \mathfrak{h}_0^g$ à support compact. Cela permet, grâce au Lemme 2.1.3, de ramener la démonstration à la preuve du résultat suivant :

$$(2.2.2) \quad \forall s \geq 0, \quad \forall f \in \mathfrak{h}_0^g, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (g|u^V(s, t)f^t) = 0.$$

D'après la Proposition 1.2.10, on a :

$$\text{w-lim}_{t \rightarrow \infty} u^V(0, t)f_i^t = 0,$$

Cela entraine 2.2.2 et termine la démonstration de la Proposition 2.2.1. \square

2.2.2 Propagation à droite

Proposition 2.2.3. *La limite forte :*

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ \alpha^t =: \gamma^{d, \text{int}}$$

existe sur \mathfrak{A}_0^d . De plus, $\gamma^{d, \text{int}} : \mathfrak{A}_0^d \rightarrow \mathfrak{A}_0$ est un $*$ -homomorphisme.

Démonstration. Soit $B^d \in \mathfrak{A}_0^d$. Commençons par rappeler que, d'après la Remarque 1.2.8 :

$$\alpha^t(B^d) = \tau_\infty^0(t, 0)(B^d).$$

Nous allons procéder en deux étapes, en montrant d'abord que

$$(2.2.3) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau^V(0, t) \circ \tau_\infty^0(t, 0) =: \gamma_0^d$$

existe sur \mathfrak{A}_0^d , puis que

$$(2.2.4) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ \tau^V(t, 0)$$

existe sur $\gamma_0^d(\mathfrak{A}_0^d)$. Commençons par montrer (2.2.3). Comme $\tau^V(0, t)$ et $\tau_\infty^0(t, 0)$ sont des dynamiques libres, cela découle directement de la Proposition 1.2.9 qui établit l'existence de la limite forte :

$$(2.2.5) \quad \mathfrak{w}_0^d := \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} u^V(0, t)u_\infty^0(t, 0)$$

sur \mathfrak{h}_0^d . On en déduit l'existence de γ_0^d , et :

$$\gamma_0^d(\psi^{(*)}(f)) = \psi^{(*)}(\mathfrak{w}_0^d f), \quad f \in \mathfrak{h}_0^d.$$

Il nous reste maintenant à montrer (2.2.4). Pour cela, nous allons avoir besoin d'estimer la vitesse de convergence dans (2.2.5), pour une donnée initiale bien choisie.

Soit donc $f \in \mathfrak{h}_0^d C^\infty$ à support compact. Alors $u_\infty^0(t, 0)f = f^t \equiv 0$ près de $x = z(t)$. Par conséquence, $u_\infty^0(t, 0)f \in \text{Dom } b_t^V$. Il suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u^V(0, t)u_\infty^0(t, 0)f &= iu^V(0, t)(b_\infty^0 - b_t^V)u_\infty^0(t, 0)f \\ &= iu^V(0, t)Vf^t, \end{aligned}$$

et donc, d'après (1.1.2) :

$$\frac{\partial}{\partial t} u^V(0, t)u_\infty^0(t, 0)f = O(t^{-2-\varepsilon}).$$

On obtient ainsi :

$$(2.2.6) \quad u^V(0, t)u_\infty^0(t, 0)f - \mathfrak{w}_0^d f = O(t^{-1-\varepsilon}).$$

Prouvons maintenant (2.2.4). Par linéarité et densité, on peut supposer que $B^d \in \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_0^d)$. Comme $\tau^V(0, t)$ et α^t sont des automorphismes, on peut supposer que $B^d = \psi^{(*)}(\mathfrak{w}_0^d f)$ pour $f \in \mathfrak{h}_0^d C^\infty$ à support compact. On a :

$$\begin{aligned} \tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ \tau^V(t, 0)(\gamma_0^d(B^d)) &= R(0, t)\tau^V(0, t)(\tau^V(t, 0)(\gamma_0^d(B^d)))R^*(0, t) \\ &= R(0, t)\gamma_0^d(B^d)R^*(0, t). \end{aligned}$$

On utilise à nouveau la méthode de Cook :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ \tau^V(t, 0)(\gamma_0^d(B^d)) = iR(0, t)[I(0, t), \gamma_0^d(B^d)]R^*(0, t).$$

Remarquons à nouveau que :

$$\begin{aligned} \|[I(0, t), \gamma_0^d(B^d)]\| &= \|[I, \tau^V(t, 0)(\gamma_0^d(B^d))]\| = \|[I, \psi^{(*)}(u^V(t, 0)w_0^d f)]\| \\ &= \|[I, \psi^{(*)}(u_\infty^0(t, 0)w_0^d f)]\| + O(t^{-1-\varepsilon}), \end{aligned}$$

d'après (2.2.6). Comme f est à support compact, et que $u_\infty^0(t, 0)f = \alpha^t(f)$, le commutateur $[I(0, t), \gamma_0^d(B^d)]$ est donc nul pour t assez grand, ce qui entraîne que $\|\frac{\partial}{\partial t}\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \tau^V(t, 0)(\gamma_0^d(B^d))\| \in L^1(dt)$ et démontre (2.2.4) par l'argument de Cook. \square

Remarquons que $\gamma^{d,\text{int}}$ conserve la parité. Pour plus de détails sur la définition de l'automorphisme de parité P , se référer à l'annexe A.

Proposition 2.2.4. *Soit P l'automorphisme de parité sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_0^d)$, et \tilde{P} celui sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$. Alors :*

$$\gamma^{d,\text{int}} \circ P = \tilde{P} \circ \gamma^{d,\text{int}}$$

Démonstration. Rappelons que :

$$\gamma^{d,\text{int}} := \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t.$$

Or, α^t conserve la parité de manière évidente, et :

$$\tau^{V,\text{int}}(0, t) = R(0, t)\tau^V(0, t)R(0, t)^*.$$

$\tau^V(0, t)$ conserve la parité, et, I , étant paire, on vérifie aisément que $PR(s, t)$ et $R(s, t)$ vérifient la même équation différentielle. Par unicité, on en déduit que $PR(s, t) = R(s, t)$ et donc que : $P\tau^{V,\text{int}}(0, t) = \tau^{V,\text{int}}(0, t)P$. \square

2.2.3 Effet Hawking I

L'état limite

Définissons les covariances suivantes :

$$\chi_{0,\text{vac}}^V := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(b_0^V), \quad \chi_{\infty,\beta}^0 := \frac{e^{\beta b_\infty^0}}{1 + e^{\beta b_\infty^0}}.$$

Ces covariances définissent les états quasi-libres invariants de jauge :

$$\omega_{0,\text{vac}}^V \text{ agissant sur } \mathfrak{A}_0, \text{ et } \omega_{\infty,\beta}^0 \text{ agissant sur } \mathfrak{A}_\infty.$$

Comme $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^g \oplus \mathfrak{h}_0^d$, on peut définir (voir Définition A.4.6) l'état suivant sur \mathfrak{A}_0 :

Définition 2.2.5. *On pose :*

$$\omega_{\text{lim}}^I := \omega_{\infty,\beta}^0 \widehat{\otimes} (\omega_{0,\text{vac}}^V \circ \gamma^{d,\text{int}}),$$

qui est un état sur \mathfrak{A}_0 .

Résultat principal I

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 2.2.6. *Soit $A \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(A)) = \omega_{\text{lim}}^I(A).$$

Afin de démontrer ce théorème, nous allons tout d'abord établir le résultat suivant :

Lemme 2.2.7. *Soit $A_1^g \in \mathfrak{A}_0^g$, $A_2 \in \mathfrak{A}_0$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(A_1^g)A_2) = \omega_{\infty,\beta}^0 \widehat{\otimes} \omega_{0,\text{vac}}^V(A_1^g A_2)$$

Démonstration. Afin de simplifier les notations, nous allons noter :

$$\gamma_{\text{int}}^t := \tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t, \quad \gamma^t := \tau^V(0, t) \circ \alpha^t.$$

Ainsi, la Proposition 2.2.1 nous donne :

$$\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g) = \gamma^t(A_1^g) + o(t^0).$$

Par linéarité et densité, on peut supposer que :

$$A_1^g = \prod_{i=1}^{n_1} \psi^*(f_i) \prod_{i=1}^{p_1} \psi(g_i), \quad A_2 = \prod_{i=1}^{n_2} \psi^*(f_{n_1+i}) \prod_{i=1}^{p_2} \psi(g_{p_1+i})$$

avec :

$$f_i, g_j \in h_0^g \text{ à support compact, pour } 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq p_1,$$

$$f_i, g_i \in h_\infty \text{ à support compact, pour } 1 \leq i \leq n_2, 1 \leq j \leq p_2.$$

Nous en déduisons que :

$$\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g) = \prod_{i=1}^{n_1} \psi^*(u^V(0, t)f_i^t) \prod_{i=1}^{p_1} \psi(u^V(0, t)g_i^t) + o(t^0).$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g)A_2) &= \omega_{0,\text{vac}}^V \left(\prod_{i=1}^{n_1} \psi^*(u^V(0, t)f_i^t) \prod_{i=1}^{p_1} \psi(u^V(0, t)g_i^t) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{i=1}^{n_2} \psi^*(f_{n_1+i}) \prod_{i=1}^{p_2} \psi(g_{p_1+i}) \right) + o(t^0). \end{aligned}$$

On a alors pour t assez grand, en utilisant les relations d'anti-commutation et la Proposition 1.2.10 :

$$\begin{aligned} \omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g)A_2) &= (-1)^{p_1 n_2} \omega_{0,\text{vac}}^V \left(\prod_{i=1}^{n_1} \psi^*(u^V(0,t)f_i^t) \prod_{i=1}^{n_2} \psi^*(f_{n_1+i}) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{i=1}^{p_1} \psi(u^V(0,t)g_i^t) \prod_{i=1}^{p_2} \psi(g_{p_1+i}) \right) + o(t^0). \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que $\omega_{0,\text{vac}}^V$ est quasi libre et invariant de jauge (voir Annexe A). On voit ainsi que $\omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g)A_2) = o(t^0)$ si $n_1 + n_2 \neq p_1 + p_2$, et, si $n_1 + n_2 = p_1 + p_2 = N$:

$$\omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g)A_2) = (-1)^{p_1 n_2} \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^N \omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(F_k)\psi(G_{\sigma(k)})) + o(t^0).$$

où :

$$F_k = \begin{cases} u^V(0,t)f_k^t & \text{si } 1 \leq k \leq n_1 \\ f_k & \text{si } n_1 + 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

et

$$G_k = \begin{cases} u^V(0,t)g_k^t & \text{si } 1 \leq k \leq p_1 \\ g_k & \text{si } p_1 + 1 \leq k \leq N. \end{cases}$$

Soit maintenant $\sigma \in S_N$ telle qu'il existe $1 \leq k \leq n_1$ tel que $p_1 + 1 \leq \sigma(k) \leq p_2$. On a alors :

$$\omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(F_k)\psi(G_{\sigma(k)})) = (g_{\sigma(k)} | \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} (b_0^V) u^V(0,t)f_k^t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Le même raisonnement s'applique pour $\sigma \in S_N$ telle qu'il existe $n_1 + 1 \leq k \leq n_2$ tel que $1 \leq \sigma(k) \leq p_1$. On en déduit, en notant $S_1 := S_{n_1}$ et $S_2 := S_{\{n_1+1 \dots n_2\}}$:

$$\begin{aligned} &\omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g)A_2) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n_1 \neq p_1 \text{ (équivalent à } n_2 \neq p_2, \text{)} \\ (-1)^{p_1 n_2} \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_1 \\ \sigma_2 \in S_2}} \varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) \prod_{k=1}^N \omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(F_k)\psi(G_{\sigma_1 \sigma_2(k)})) + o(t^0) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où, si $n_1 = p_1$:

$$\begin{aligned}
\omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g)A_2) &= (-1)^{p_1 n_2} \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_1 \\ \sigma_2 \in S_2}} \varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) \prod_{k=1}^{n_1} \omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(F_k)\psi(G_{\sigma_1(k)})) \\
&\times \prod_{k=n_1+1}^{n_2} \omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(F_k)\psi(G_{\sigma_2(k)})) + o(t^0) \\
&= (-1)^{p_1 n_2} \sum_{\sigma_1 \in S_1} \varepsilon(\sigma_1) \prod_{k=1}^{n_1} \omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(F_k)\psi(G_{\sigma_1(k)})) \\
&\times \sum_{\sigma_2 \in S_2} \varepsilon(\sigma_2) \prod_{k=n_1+1}^{n_2} \omega_{0,\text{vac}}^V(\psi^*(F_k)\psi(G_{\sigma_2(k)})) + o(t^0) \\
&= (-1)^{p_1 n_2} \omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma^t(A_1^g)) \omega_{0,\text{vac}}^V(A_2) + o(t^0)
\end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de Bachelot [Bac00] rappelé par le Théorème 1.3.5 :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma^t(A_1^g)) = \omega_{\infty,\beta}^0(A_1^g).$$

En utilisant la définition du produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué de deux états (voir Définition A.4.6), on voit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_{\text{int}}^t(A_1^g)A_2) = \omega_{\infty,\beta}^0 \widehat{\otimes} \omega_{0,\text{vac}}^V(A_1^g A_2)$$

ce qui complète la démonstration du lemme. \square

Démonstration du théorème 2.2.6 : Par linéarité et densité, on peut supposer que $A = A_1^g \times A_2^d$, $A_1^g \in \mathfrak{A}_0^g$, $A_2^d \in \mathfrak{A}_0^d$. D'après la Proposition 2.2.3, on a :

$$\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(A_2^d) = \gamma^{d,\text{int}}(A_2^d) + o(t^0).$$

En appliquant le Lemme 2.2.7, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(A_1^g \times A_2^d)) = \omega_{\infty,\beta}^0 \widehat{\otimes} (\omega_{0,\text{vac}}^V \circ \gamma^{d,\text{int}})(A_1^g \times A_2^d),$$

ce qui complète la démonstration du théorème. \square

Changement d'état initial

Nous avons supposé, comme expliqué en Introduction, que l'étoile était stationnaire pour $t \leq 0$. Il est donc naturel de prendre pour dynamique dans le passé la dynamique *stationnaire* en interaction

$\tau_0^{V,\text{int}}(s, t)$ définie comme suit : nous définissons tout d'abord la dynamique stationnaire $\tau_0^V(s, t)$ analogue à $\tau^V(s, t)$, agissant sur \mathfrak{A}_0 par :

$$\tau_0^V(s, t)(\psi^{(*)}(f)) := \psi^{(*)}(e^{itb_0^V} f), \quad f \in \mathfrak{h}_0.$$

On peut ensuite, comme précédemment, construire grâce au lemme A.5.5 la dynamique stationnaire en interaction $\tau_0^{V,\text{int}}(s, t)$, associée à l'interaction définie par la Définition 2.1.1.

Un choix adapté d'état initial dans le Théorème 2.2.6 serait donc un état pair $\tilde{\omega}$ sur \mathfrak{A}_0 , *invariant* sous l'action de $\tau_0^{V,\text{int}}(s, t)$. Le résultat suivant montre que le Théorème 2.2.6 s'étend à $\tilde{\omega}$, sous l'hypothèse que $\tilde{\omega}$ soit *quasi-équivalent* à $\omega_{0,\text{vac}}^V$, i.e. représenté par une matrice de densité dans la représentation GNS de $\omega_{0,\text{vac}}^V$. Pour plus de détails sur ces propriétés des états et sur la notion de représentation, on peut consulter les Annexes A et B.

Corollaire 2.2.8. *Soit $\tilde{\omega}$ un état sur \mathfrak{A}_0 , pair et quasi-équivalent à $\omega_{0,\text{vac}}^V$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(A)) = \tilde{\omega}_{\text{lim}}^I(A), \quad A \in \mathfrak{A}_0,$$

où :

$$\tilde{\omega}_{\text{lim}}^I := \omega_{\infty,\beta}^0 \widehat{\otimes} (\tilde{\omega} \circ \gamma^{d,\text{int}}).$$

Démonstration. Comme $\tilde{\omega}$ est supposé quasi-équivalent à $\omega_{0,\text{vac}}^V$, par linéarité et densité, on est ramené à calculer la limite :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(P^*(\psi, \psi^*)\gamma^t(A_1^g)A_2P(\psi, \psi^*)),$$

avec $A_1^g \in \mathfrak{A}_0^g$, $A_2 \in \mathfrak{A}_0$, $P(\psi, \psi^*)$ un polynôme dans $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_0)$, et γ^t définie comme dans la démonstration du Lemme 2.2.7. Comme de plus $\tilde{\omega}$ est pair, on voit que $P(\psi, \psi^*) \in \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_0) \cap \text{CAR}_0(\mathfrak{h}_0)$. Le même argument que celui utilisé dans la preuve du Lemme 2.2.7 donne :

$$P^*(\psi, \psi^*)\gamma^t(A_1^g)A_2P(\psi, \psi^*) = \gamma^t(A_1^g)P^*(\psi, \psi^*)A_2P(\psi, \psi^*) + o(t^0).$$

Nous allons distinguer deux cas, selon la parité de A_1^g .

Si A_1^g est impair, il existera un accouplement entre un champ issu de A_1^g et un champ issu de A_2 , P , ou P^* . La limite sera donc nulle, ainsi que $\omega_{\infty,\beta}^0(A_1^g)$, ce qui entraîne le Corollaire 2.2.8.

Si $A_1^g \in \text{CAR}_0(\mathfrak{h}_0)$, on a, comme dans le Lemme 2.2.7 :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(P^*(\psi, \psi^*)\gamma^t(A_1^g)A_2P(\psi, \psi^*)) \\ &= \omega_{\infty,\beta}^0(A_1^g)\omega_{0,\text{vac}}^V(P^*(\psi, \psi^*)A_2P(\psi, \psi^*)) \\ &= \omega_{\infty,\beta}^0(A_1^g)\tilde{\omega}(A_2). \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite conclure, comme dans la démonstration du Théorème 2.2.6. \square

2.3 Etat de vide en interaction

Dans la section précédente, nous avons démontré que l'effet Hawking persiste lorsque que, comme état initial, nous choisissons un état $\tilde{\omega}$ pair, quasi-équivalent à l'état de vide sans interaction, et invariant sous l'action de $\tau_0^{V,\text{int}}(s, t)$, plutôt que le vide libre $\omega_{0,\text{vac}}^V$.

Il nous reste à construire un tel état $\tilde{\omega}$. C'est le but de cette section. Résumons d'abord le raisonnement permettant de démontrer l'existence d'un état de vide ayant les propriétés voulues.

Pour cela, il est pratique de travailler dans la représentation GNS de l'état de vide $\omega_{0,\text{vac}}^V$. Pour plus de détails sur cette représentation, nous renvoyons le lecteur à l'Annexe B. Rappelons que b_0^V est défini dans la Section 1.1. Nous allons tout d'abord montrer que

$$\sigma_{\text{ess}}(b_0^V) =] - \infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

Supposons ensuite que $\text{Ker } b_0^V = \{0\}$, et équipons \mathfrak{h}_0 de la structure complexe $j := i \text{sgn } b_0^V$. Nous noterons \mathcal{Z} l'espace à une particule associé. Si π_F est la représentation de Fock correspondante, nous avons :

$$\omega_{0,\text{vac}}^V(A) = (\Omega | \pi_F(A) \Omega),$$

où $\Omega \in \Gamma_{\text{a}}(\mathcal{Z})$ est le *vecteur de vide*. Autrement dit, $(\Gamma_{\text{a}}(\mathcal{Z}), \pi_F, \Omega)$ est le triplet associé par le théorème GNS à $\omega_{0,\text{vac}}^V$. D'après l'Annexe B, on sait que :

$$\pi_F(\tau_0^V(s, t)(A)) = e^{i(s-t)H_0} \pi_F(A) e^{i(t-s)H_0}, \quad A \in \mathfrak{A}_0,$$

avec $H_0 = d\Gamma(|b_0^V|)$. De plus, si $Q = d\Gamma(\text{sgn } b_0^V)$, alors :

$$\psi_F^{(*)}(e^{i\theta} f) = e^{i\theta Q} \psi_F^{(*)}(f) e^{-i\theta Q}, \quad f \in \mathfrak{h}_0, \theta \in \mathbb{R}.$$

Il est également bien connu que si

$$H := H_0 + \pi_F(I),$$

alors

$$\pi_F(\tau_0^{V,\text{int}}(s, t)(A)) = e^{i(s-t)H} \pi_F(A) e^{i(t-s)H}, \quad A \in \mathfrak{A}_0.$$

Comme $\tau_0^{V,\text{int}}(s, t)$ est implémentée par $e^{i(s-t)H}$ dans la représentation de Fock, les vecteurs propres de H seront invariants par $\tau_0^{V,\text{int}}(s, t)$, et définiront évidemment un état quasi-équivalent à $\omega_{0,\text{vac}}^V$.

Il reste donc à montrer l'existence de tels vecteurs propres. Elle est assurée par le théorème de type HVZ suivant, dont la démonstration est l'objet principal de cette section :

Théorème 2.3.1.

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\inf \sigma(H) + m, +\infty[.$$

Par conséquent, $\inf \sigma(H)$ est une valeur propre discrète.

Afin de pouvoir appliquer le Corollaire 2.2.8, nous devons montrer l'existence d'un état *pair*, i.e. d'un vecteur propre de H tel que $Q\psi = 2n\psi$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Remarquons que comme I est pair, on a $[Q, H] = 0$, ce qui n'implique pas l'existence d'état propre pair de H . En revanche, cela est clairement vrai pour de petites interactions. Plus précisément, en posant $H(\lambda) := H_0 + \lambda I$ et $E(\lambda) := \inf \sigma(H(\lambda))$, on a :

Lemme 2.3.2. *Supposons que $|\lambda|$ est suffisamment petit. Alors $\mathbf{1}_{\{E(\lambda)\}}(H(\lambda))$ est de rang 1 et $Q\mathbf{1}_{\{E(\lambda)\}}(H(\lambda)) = 0$.*

Par conséquent, pour $|\lambda|$ suffisamment petit, $H(\lambda)$ admet un unique état fondamental $\Omega(\lambda)$, de charge nulle, et l'état associé satisfait les hypothèses du Corollaire 2.2.8.

2.3.1 Opérateur de Dirac : étude spectrale

Dans un premier, notre but sera d'étudier le spectre essentiel de l'opérateur de Dirac avec condition au bord b_0^V . Il est clair que :

$$\sigma_{\text{ess}}(b_0^{V_\infty}) = \sigma_{\text{ess}}(b_0^V),$$

car $(V - V_\infty)(b_0^{V_\infty} + i)^{-1}$ est compact. Nous allons montrer que le spectre essentiel reste inchangé par la condition au bord :

$$\sigma_{\text{ess}}(b_0^{V_\infty}) =] - \infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

Nous allons pour cela écrire la résolvante de $b_0^{V_\infty}$, puis utiliser les extensions presque analytiques pour montrer que $\chi(b_\infty^{V_\infty}) - \chi(b_0^{V_\infty})$ est compact, pour une certaine fonction χ . On rappelle que $b_\infty^{V_\infty}$ désigne l'opérateur de Dirac sans condition au bord.

Spectre de l'opérateur de Dirac sur \mathbb{R}

Démontrons la proposition suivante :

Proposition 2.3.3.

$$\sigma(b_\infty^{V_\infty}) =] - \infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

Démonstration. On cherche à résoudre :

$$(b_\infty^{V_\infty} - z)f = g, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

avec $f \in \text{Dom}(b_\infty^{V_\infty})$ et $g \in \mathfrak{h}_\infty$.

Ce système se réécrit sous la forme :

$$\partial_x f + iAf = -iLg$$

où $A = L(m\Gamma + z\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} z & me^{i\theta} \\ -me^{-i\theta} & -z \end{pmatrix}$. Le système admet une solution dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ si les valeurs propres de A sont réelles. Or $\text{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = m^2 - z^2$. Les valeurs propres sont donc $\pm\lambda$, et on doit avoir : $\lambda^2 = z^2 - m^2 > 0$ pour que $A - z$ soit inversible. D'où :

$$\sigma(b_\infty^{V_\infty}) =] - \infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

□

Égalité des spectres essentiels

Nous allons montrer dans cette partie le résultat suivant :

Théorème 2.3.4.

$$\sigma_{\text{ess}}(b_0^V) = \sigma_{\text{ess}}(b_\infty^{V_\infty}) =] - \infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

Remarque 2.3.5. *L'inclusion $\sigma_{\text{ess}}(b_\infty^{V_\infty}) \subset \sigma_{\text{ess}}(b_0^V)$ se démontre simplement par construction d'une suite de Weyl. Nous allons donc nous attacher à l'autre inclusion.*

Avant de poursuivre la démonstration, introduisons l'isométrie :

$$P_0 : L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$$

$$P_0 u(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et son adjoint :

$$P_0^* : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$$

$$u \mapsto u|_{\mathbb{R}^+}.$$

P_0 désigne donc le prolongement d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$ par 0, et son adjoint correspond à la restriction d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ à \mathbb{R}^+ . Rappelons que ρ_0 désigne la trace en 0. Nous allons noter :

$$\tilde{P} := iL\partial_x - V_\infty,$$

défini au sens des distributions.

Lemme 2.3.6. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $f = (\tilde{P} - z)u \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$. Alors :

$$(2.3.1) \quad \rho_0 u = \rho_0 (b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} P_0 f + C(z) \rho_0 u,$$

où on a posé :

$$C(z) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ v \mapsto i \rho_0 (b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} L \rho_0^* v.$$

$C(z)$ est appelé projecteur de Calderon.

Démonstration. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $f = (\tilde{P} - z)u \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$. Grâce à la formule des sauts, nous pouvons écrire :

$$(2.3.2) \quad iL\partial_x P_0 = iP_0 L\partial_x + iL\rho_0^* \rho_0.$$

On a donc :

$$\tilde{P}P_0 = P_0\tilde{P} + iL\rho_0^* \rho_0.$$

D'où :

$$(\tilde{P} - z)P_0 u = P_0 f + iL\rho_0^* \rho_0 u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$$

et donc :

$$P_0 u = (b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} P_0 f + i(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} L\rho_0^* \rho_0 u.$$

Or, on sait que $(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}$ envoie $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ dans $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ et $H^s(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ dans $H^{s+1}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. De plus, pour tout $s > 1/2$, $\rho_0^* \rho_0 u \in H^{-s}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, et donc $(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} L\rho_0^* \rho_0 u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. De plus $\rho_0 P_0^* = \rho_0$, d'où :

$$(2.3.3) \quad \rho_0 u = \rho_0 (b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} P_0 f + i \rho_0 (b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} L \rho_0^* \rho_0 u,$$

c'est à dire :

$$\rho_0 u = \rho_0 (b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} P_0 f + C(z) \rho_0 u.$$

□

Le lemme suivant donne les propriétés du projecteur de Calderon :

Lemme 2.3.7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(b_\infty^{V_\infty})$ et

$$F_z := \{u \in H^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2) : (\tilde{P} - z)u = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\}.$$

Alors :

- 1) $\{\rho_0 u : u \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)\} = \mathbb{C}^2$,
- 2) $C(z)$ est un projecteur de rang 1 de \mathbb{C}^2 sur $\rho_0 F_z$,
- 3) $\text{Ran}(\mathbf{1} - C(z)) = \{\rho_0 (b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} P_0 f, f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)\}$.

Démonstration. La première propriété est triviale.

Pour démontrer la seconde, montrons tout d'abord que $\rho_0 F_z \subset \text{Ker}(1 - C(z))$. Soit donc $v = \rho_0 u$, avec $u \in F_z$. Alors $(\tilde{P} - z)u = 0$ sur $]0, +\infty[$ et donc :

$$\rho_0 u = C(z)\rho_0 u,$$

d'après le Lemme 2.3.6, d'où $(1 - C(z))v = 0$.

Montrons maintenant que $\text{Ran}(C(z)) \subset \rho_0 F_z$. Soit donc $v \in \mathbb{C}^2$ et $u = C(z)v$. On a :

$$u = C(z)v = i\rho_0(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}L\rho_0^*v = \rho_0 w, \quad w = i(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}L\rho_0^*v.$$

On a : $(\tilde{P} - z)w = iL\rho_0^*v = 0$ sur $]0, +\infty[$, donc $w|_{\mathbb{R}_+^*} \in H^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}^2)$. Or $u = \rho_0 P_0^* w$, et $P_0^* w$ est bien dans F_z .

$C(z)$ est donc bien un projecteur. Il reste à démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(b_\infty^{V_\infty})$, son rang est 1. Il suffit pour celà de montrer que $\rho_0 F_z$ est de dimension 1. Or, la résolution du système différentiel :

$$\begin{cases} (\tilde{P} - z)u = 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

donne un couple de solutions fondamentales, l'une croissante, l'autre décroissante. L'intersection de cet ensemble de solutions avec $H^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}^2)$ est donc de dimension 1 (engendré par la solution décroissante), et $\rho_0 F_z$ l'est aussi.

Reste à démontrer la dernière propriété. Elle découle de l'application de la première à (2.3.1) et de l'inversibilité de $b_\infty^{V_\infty} - z$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. \square

Nous allons définir, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M_t : \mathbb{C}^2 &\mapsto \mathbb{C} \\ v &\rightarrow v_1 - \lambda(t)v_2, \end{aligned}$$

et définissons, pour $z \in \mathbb{C}$, $M_t(z)$ comme la restriction de M_t à $\text{Ran}(C(z))$. On a alors la propriété suivante :

Lemme 2.3.8. *Si $z \notin \mathbb{R}$, $M_0(z) : \text{Ran}(C(z)) \mapsto \mathbb{C}$ est bijective.*

Démonstration. $b_0^{V_\infty}$ étant auto-adjoint, on a par la théorie spectrale la propriété suivante :

$$(2.3.4) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}^2), \exists! u \in H^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}^2), \begin{cases} (\tilde{P} - z)u = f \\ M_0 \rho_0 u = 0 \end{cases}$$

u est alors donné par :

$$u = P_0^*(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f + C(z)\rho_0 u.$$

(2.3.4) est équivalent à :

$$(2.3.5) \quad \forall w \in \text{Ran}(\mathbf{1} - C(z)), \exists! v \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} (\mathbf{1} - C(z))v = w, \\ M_0 v = 0. \end{cases}$$

En effet, si $w \in \text{Ran}(\mathbf{1} - C(z))$, alors il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$, $w = \rho_0(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f$. Soit alors u l'unique solution de (2.3.4), et $v = \rho_0 u$. v est alors l'unique solution de (2.3.5).

On déduit de l'unicité des solutions de (2.3.5) que $M_0(z)$ est injective : en effet, si $M_0(z)C(z)u = 0$, alors $v + C(z)u$ est également solution de (2.3.5), et donc $C(z)u = 0$. \square

Posons maintenant :

$$R(z) := M_0^{-1}(z) \text{ et } T(z) := \rho_0(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0.$$

Le lemme suivant donne alors la résolvante de $b_\infty^{V_\infty}$ en fonction de celle de $b_\infty^{V_\infty}$:

Lemme 2.3.9. *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a :*

$$(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1} = P_0^*(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 + iT^*(\bar{z})LR(z)M_0(C(z) - \mathbf{1})T(z).$$

Démonstration. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $f = (b_\infty^{V_\infty} - z)u$. Rappelons que l'on a :

$$u = P_0^*(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f + iP_0^*(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}L\rho_0^*\rho_0 u.$$

Soit $v = \rho_0 u$ la solution de (2.3.5). Elle est donnée par :

$$M_0 w = -M_0 C(z)v$$

où $w = \rho_0(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f$. On en tire :

$$C(z)v = -R(z)M_0 w$$

et, comme $v = w + C(z)v$:

$$v = (\mathbf{1} - R(z)M_0)\rho_0(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f,$$

ou encore, comme $\mathbf{1} - R(z)M_0 = R(z)M_0(C(z) - \mathbf{1})$:

$$v = R(z)M_0(C(z) - \mathbf{1})\rho_0(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f.$$

On obtient finalement :

$$u = P_0^*(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f + iP_0^*(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}L\rho_0^*R(z)M_0(C(z) - \mathbf{1})\rho_0(b_\infty^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 f,$$

c'est à dire :

$$u = P_0^*(b_0^{V_\infty} - z)^{-1}P_0f + iT^*(\bar{z})LR(z)M_0(C(z) - \mathbb{1})T(z)f$$

Et donc (car $u = (b_0^{V_\infty} - z)^{-1}f$) :

$$(2.3.6) \quad (b_0^{V_\infty} - z)^{-1} = P_0^*(b_0^{V_\infty} - z)^{-1}P_0 + iT^*(\bar{z})LR(z)M_0(C(z) - \mathbb{1})T(z).$$

□

On va maintenant utiliser les extensions presque-analytiques pour étudier le spectre de $b_0^{V_\infty}$. Pour cela, nous allons d'abord donner deux résultats de majoration de $R(z)$ et de $T(z)$. Le premier est le suivant :

Lemme 2.3.10. *Soit χ une fonction C^∞ supportée dans $[a, b] \subset]-m, m[$, et soit $\tilde{\chi}$ l'extension presque analytique définie dans la Proposition C.2.1. On a alors :*

$$\exists A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall z \in \text{Supp}(\tilde{\chi}), |R(z)| \leq A |\text{Im}(z)|^{-N}.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in [a, b]$ et $u_0 \in \text{Ran}(C(x_0))$ tel que $\|u_0\| = 1$. Un tel u_0 existe bien car $C(x_0)$ n'est pas nul (car $x_0 \notin \sigma(b)$). Comme $z \rightarrow C(z)$ est holomorphe sur $\rho(b_0^{V_\infty})$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que :

$$z \in B(x_0, \varepsilon) \Rightarrow \|(C(z) - C(x_0))u_0\| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $z \in B(x_0, \varepsilon)$, on a alors : $C(z)u_0 = C(x_0)u_0 + (C(z) - C(x_0))u_0 \neq 0$. Donc $\text{Ran}(C(z)) = \text{Vect}(C(z)u_0)$. On va maintenant inverser $M_0(z)$, i.e. résoudre :

$$M_0(z)u = v,$$

avec $u \in \text{Ran}(C(z))$, i.e. $u = \alpha C(z)u_0$. On obtient donc $v = M_0(z)u = \alpha M_0(z)C(z)u_0$ et donc

$$u = \frac{v}{M_0(z)C(z)u_0}C(z)u_0.$$

On a donc une expression de $R(z)$ sur $B(x_0, \varepsilon)$:

$$R(z) : v \mapsto \frac{v}{M_0(z)C(z)u_0}C(z)u_0.$$

$M_0(z)$ étant bijective pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $z \rightarrow M_0(z)C(z)u_0$ est une fonction holomorphe dont les zéros sont isolés et réels. Par conséquent, $R(z)$ est méromorphe à pôles réels, et donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in B(x_0, \varepsilon), |R(z)| \leq C |\text{Im}(z)|^{-n_0}.$$

Nous obtenons le résultat du lemme par compacité : nous pouvons recouvrir $[a, b]$ par des boules ouvertes sur lesquelles R est majoré. Par compacité, on en déduit :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall z \in [a, b] + i[-\varepsilon, \varepsilon], |R(z)| \leq C |\operatorname{Im}(z)|^{-N}.$$

Il nous reste maintenant à étudier R sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < |\operatorname{Im}(z)| \leq \delta\}$. Mais, sur cet ensemble, R n'a aucun pôle, et est donc borné, ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Il nous reste maintenant à obtenir le même type de majoration pour T . Cela est fait dans le lemme suivant :

Lemme 2.3.11.

$$\exists B > 0, \forall z \in \operatorname{Supp}(\tilde{\chi}), \|T(z)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2), \mathbb{C}^2)} \leq B \langle z \rangle |\operatorname{Im}(z)|^{-1}.$$

Démonstration. Écrivons : $T(z) = \rho_0(b_\infty^V + i)^{-1}(b_\infty^V + i)(b_\infty^V - z)^{-1}P_0$. On sait que $P_0 \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2), L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2))$. De plus, $\rho_0 \in \mathcal{B}(H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \mathbb{C}^2)$, donc $\rho_0(b_\infty^V + i)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \mathbb{C}^2)$. On a également :

$$\|(b_\infty^V + i)(b_\infty^V - z)^{-1}\| \leq C \langle z \rangle |\operatorname{Im}(z)|^{-1},$$

car $(b_\infty^V + i)(b_\infty^V - z)^{-1} = \mathbf{1} + (i + z)(b_\infty^V - z)^{-1}$, d'où

$$\|(b_\infty^V + i)(b_\infty^V - z)^{-1}\| \leq 1 + |i + z| |\operatorname{Im}(z)|^{-1} \leq C \langle z \rangle |\operatorname{Im}(z)|^{-1}.$$

\square

Nous pouvons maintenant donner la proposition suivante :

Proposition 2.3.12. *Soit $\chi \in C_0^\infty([a, b])$, avec $[a, b] \subset]-m, m[$. Alors :*

$$\chi(b_0^{V_\infty}) = P_0^* \chi(b_\infty^{V_\infty}) P_0 + R_\chi$$

avec :

$$R_\chi := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{\chi}(z) T^*(\bar{z}) L R(z) M_0(C(z) - \mathbf{1}) T(z) dz \wedge d\bar{z}$$

opérateur compact.

Démonstration. On obtient, en utilisant le Lemme 2.3.9 :

$$\chi(b_0^{V_\infty}) = P_0^* \chi(b_\infty^{V_\infty}) P_0 + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{\chi}(z) T^*(\bar{z}) L R(z) M_0(C(z) - \mathbf{1}) T(z) dz \wedge d\bar{z},$$

et donc :

$$R_\chi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{\chi}(z) T^*(\bar{z}) L R(z) M_0(C(z) - \mathbf{1}) T(z) dz \wedge d\bar{z}.$$

Soit $z \in \text{Supp}(\tilde{\chi})$. D'après les deux lemmes précédents, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\bar{z}}\tilde{\chi}(z)T^*(\bar{z})LR(z)M_0(C(z) - \mathbf{1})T(z)\| &\leq C_N|\partial_{\bar{z}}\tilde{\chi}(z)|\|T(z)\|^2|R(z)| \\ &\leq C_N|\text{Im}(z)|^N \langle z \rangle^2 |\text{Im}(z)|^{-2-n_0}, \end{aligned}$$

et ce pour tout $N \in \mathbb{N}$. Pour N assez grand, l'intégrale converge, et on peut donc l'écrire comme limite d'une somme de Riemann. $T(z)$ est un opérateur de rang fini et donc compact (pour tout $z \in \mathbb{C}$). L'ensemble des opérateurs compacts étant un idéal fermé, on en déduit que R_χ est compact. \square

Nous concluons cette sous-section par la résultat suivant :

Proposition 2.3.13. $\sigma_{\text{ess}}(b_0^{V_\infty}) \subset \sigma_{\text{ess}}(b_\infty^{V_\infty})$.

Démonstration. Soit $\lambda_0 \notin \sigma_{\text{ess}}(b_\infty^{V_\infty})$ et χ supportée près de $\lambda_0 \in]-m, m[$. On a $\chi(b_0^{V_\infty}) = P_0^*\chi(b_\infty^{V_\infty})P_0 + R_\chi$. Or $\chi(b_\infty^{V_\infty})$ est compact (car $\lambda_0 \notin \sigma_{\text{ess}}(b_\infty^{V_\infty})$), et, comme P_0 est une isométrie, $P_0^*\chi(b_\infty^{V_\infty})P_0$ est également compact. De plus, d'après la Proposition 2.3.12, R_χ est compact.

Donc $\chi(b_0^{V_\infty})$ est compact, et donc $\lambda_0 \notin \sigma_{\text{ess}}(b_0^{V_\infty})$, ce qui démontre la proposition, et par là même le Théorème 2.3.4. \square

2.3.2 Seconde quantification à énergie positive

L'hamiltonien H_0 doit être construit comme second quantifié d'un opérateur positif. Pour plus de détails sur cette construction, on peut se référer à [DG]. Or b_0^V ne l'est pas. Dans cette sous-section, nous allons définir l'hamiltonien positif servant à la quantification et étudier les conséquences de ce choix.

Structure complexe

Pour un espace de Hilbert \mathfrak{h} , nous définissons $\bar{\mathfrak{h}}$ comme \mathfrak{h} muni de la structure complexe $-i$, et du produit scalaire : $(\bar{f}|\bar{g})_{\bar{\mathfrak{h}}} := (g|f)_{\mathfrak{h}}$ où \bar{f} est égal à f , mais considéré comme élément de $\bar{\mathfrak{h}}$.

Nous allons supposer que 0 n'est pas valeur propre de b_0^V . Soit :

$$\varepsilon := |b_0^V| \geq 0,$$

agissant sur $\mathfrak{h}_0 := L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$. Nous allons noter

$$\mathfrak{h}_0^\pm := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}(b_0^V)\mathfrak{h}_0.$$

On définit la structure complexe :

$$j := i \frac{b_0^V}{|b_0^V|},$$

i.e. $j = \pm i$ sur \mathfrak{h}_0^\pm , ou encore $j = \text{sgn}(b_0^V)i$.
On a alors :

$$(\mathfrak{h}_0, j) = (\mathfrak{h}_0^+, i) \oplus (\mathfrak{h}_0^-, -i) = (\mathfrak{h}_0^+, i) \oplus \overline{(\mathfrak{h}_0^-, i)}.$$

Nous notons $\mathcal{Z} := (\mathfrak{h}_0, j)$, i.e. \mathfrak{h}_0 muni de la structure complexe j et du produit scalaire :

$$(f|g)_{\mathcal{Z}} := (f^+|g^+)_{\mathfrak{h}_0} + (g^-|f^-)_{\mathfrak{h}_0}.$$

Localisation et partition de l'unité

La démonstration, présentée dans la section suivante, du Théorème 2.3.1, utilise une méthode similaire à celles développées dans [Amm04]. Nous allons donc séparer l'espace à une particule en deux composantes : l'une localisée près de l'origine, et l'autre près de l'infini. Pour cela, on définit une *partition de l'unité*.

Cependant, le choix classique de prendre des opérateurs de type $\mathbb{1}_{[-R,R]}(\langle x \rangle)$ ne fonctionne pas : en effet, $\langle x \rangle$ est i -linéaire, mais n'est pas j -linéaire. Nous allons donc devoir construire des opérateurs adaptés.

On rappelle que $\langle x \rangle := (1 + x^2)^{1/2}$ agit sur (\mathfrak{h}, i) . Nous cherchons à construire un équivalent de $\langle x \rangle$ qui soit j -linéaire. On définit donc :

Définition 2.3.14.

$$\langle \tilde{x} \rangle := \frac{1}{2}(\langle x \rangle - j\langle x \rangle j).$$

Proposition 2.3.15. *On a les propriétés suivantes :*

- 1) $[b_0^V, \langle x \rangle] = iL \frac{x}{\langle x \rangle}$.
- 2) $\langle \tilde{x} \rangle - \langle x \rangle$ est borné.
- 3) $\langle \tilde{x} \rangle$ est j -linéaire et auto-adjoint pour le produit scalaire sur \mathcal{Z} sur $\text{Dom}(\langle \tilde{x} \rangle) = \text{Dom}(\langle x_{++} \rangle) \oplus \text{Dom}(\langle x_{--} \rangle)$

où :

$$\langle x \rangle =: \begin{pmatrix} x_{++} & x_{+-} \\ x_{-+} & x_{--} \end{pmatrix}$$

sur $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^+ \oplus \mathfrak{h}_0^-$.

Démonstration. Pour démontrer la propriété 1, on remarque que $e^{it\langle x \rangle}$ préserve la condition au bord, et donc que $e^{it\langle x \rangle}$ préserve $\text{Dom } b_0^V$. On calcule donc :

$$e^{it\langle x \rangle} b_0^V e^{it\langle x \rangle} = L e^{it\langle x \rangle} D_x e^{it\langle x \rangle} + V_\infty(x),$$

or :

$$e^{it\langle x \rangle} D_x e^{it\langle x \rangle} = D_x + t \frac{x}{\langle x \rangle}.$$

Donc :

$$e^{it\langle x \rangle} b_0^V e^{it\langle x \rangle} = b_0^V + tL \frac{x}{\langle x \rangle},$$

et donc :

$$\frac{e^{it\langle x \rangle} - 1}{t} b_0^V = b_0^V \frac{e^{it\langle x \rangle} - 1}{t} + L \frac{x}{\langle x \rangle} e^{it\langle x \rangle}.$$

D'où en faisant $t \rightarrow 0$:

$$\langle x \rangle b_0^V = b_0^V \langle x \rangle + iL \frac{x}{\langle x \rangle}.$$

Et donc :

$$[b_0^V, \langle x \rangle] = iL \frac{x}{\langle x \rangle}.$$

Démontrons maintenant la propriété (2). On peut réécrire la Définition 2.3.14 de la façon suivante :

$$\langle \tilde{x} \rangle = \langle x \rangle - \frac{1}{2} [\langle x \rangle, j].$$

Montrons que $[\langle x \rangle, j]$ est borné. On a $j = \text{sgn}(b_0^V)i$ et $\text{sgn}(b_0^V) = f(b_0^V)$, avec $f \in S^0$ (S^0 est défini en annexe C, Définition C.2.2). On peut donc appliquer le Lemme C.2.4, et on obtient :

$$\begin{aligned} [\langle x \rangle, j] &= i[\langle x \rangle, f(b_0^V)] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) (z - b_0^V)^{-1} [\langle x \rangle, b_0^V] (z - b_0^V)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Or $[\langle x \rangle, b_0^V] = -iL \frac{x}{\langle x \rangle}$ est borné, et :

$$|\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)| \|(z - b_0^V)^{-1}\|^2 \leq C \langle \text{Re } z \rangle^{-1-N} |\text{Im } z|^{N-2}.$$

Or \tilde{f} est à support dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| \leq C \langle \text{Re } z \rangle\}$. En appliquant la majoration précédente avec $N = 3$, on obtient donc :

$$\|\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) (z - b_0^V)^{-1} (z - b_0^V)^{-1}\| \leq C \langle \text{Re } z \rangle^{-3}.$$

L'intégrale converge donc en norme, et $[\langle x \rangle, j]$ est borné.

Passons à la démonstration de la deuxième propriété. L'espace de Hilbert \mathfrak{h} s'écrit : $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^+ \oplus \mathfrak{h}_0^-$. Matriciellement, on écrit $\langle x \rangle$ sous la forme :

$$\langle x \rangle = \begin{pmatrix} x_{++} & x_{+-} \\ x_{-+} & x_{--} \end{pmatrix},$$

or

$$j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

d'où par définition de $\langle \tilde{x} \rangle$:

$$\langle \tilde{x} \rangle = \begin{pmatrix} x_{++} & 0 \\ 0 & x_{--} \end{pmatrix}.$$

$\langle \tilde{x} \rangle$ est donc symétrique. La première propriété nous permet de déduire que $\langle \tilde{x} \rangle$ est auto-adjoint sur $\text{Dom}(\langle x \rangle)$. \square

On démontre maintenant le lemme suivant :

Lemme 2.3.16. $[\varepsilon, \langle \tilde{x} \rangle]$ est borné.

Démonstration. Il suffit de montrer que $[\varepsilon, \langle x \rangle]$ est borné. En effet :

$$\begin{aligned} [\varepsilon, \langle \tilde{x} \rangle] &= [\varepsilon, \frac{1}{2}(\langle x \rangle - j\langle x \rangle j)] \\ &= \frac{1}{2}([\varepsilon, \langle x \rangle] - [\varepsilon, j\langle x \rangle j]) \\ &= \frac{1}{2}([\varepsilon, \langle x \rangle] - j[\varepsilon, \langle x \rangle]j) \text{ car } [\varepsilon, j] = 0. \end{aligned}$$

On a $\varepsilon = |b_0^V| = f(b_0^V)$ avec $f \in S^1(\mathbb{R})$ car $0 \notin \sigma(b_0^V)$. Par les extensions presque analytiques, on écrit à nouveau :

$$[\varepsilon, \langle x \rangle] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) (z - b_0^V)^{-1} [b_0^V, \langle x \rangle] (z - b_0^V)^{-1} dz,$$

et on va donc évaluer le commutateur $[b_0^V, \langle x \rangle]$.

On a vu que $[b_0^V, \langle x \rangle] = iL \frac{x}{\langle x \rangle}$. Rappelons que $\text{ad}_A(B) := [A, B]$. Par un calcul semblable à celui mené précédemment, on montre que :

$$\text{ad}_{b_0^V}^2(\langle x \rangle) := [b_0^V, [b_0^V, \langle x \rangle]] = -\nabla \frac{x}{\langle x \rangle},$$

et donc que $\text{ad}_{b_0^V}^2(\langle x \rangle)$ est borné.

On utilise maintenant le développement en commutateurs d'ordre 2 de $[\varepsilon, \langle x \rangle]$ pour montrer que ce dernier est borné :

$$[\varepsilon, \langle x \rangle] = f'(b_0^V)[b_0^V, \langle x \rangle] + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}(z) (z - b_0^V)^{-2} \text{ad}_{b_0^V}^2(\langle x \rangle) (z - b_0^V)^{-1} dz \wedge d\bar{z}.$$

Or, d'après la Proposition C.2.3, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}(z) \right| \leq C \langle \text{Re}(z) \rangle^{-N} |\text{Im}(z)|^N,$$

On utilise cette majoration pour $N = 3$, on obtient ainsi :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}(z) (z - b_0^V)^{-2} \text{ad}_{b_0^V}^2(\langle x \rangle) (z - b_0^V)^{-2} \right\| \leq C \langle z \rangle^{-3}.$$

On en déduit que $[\varepsilon, \langle x \rangle]$ est borné, donc que $[\varepsilon, \langle \tilde{x} \rangle]$ l'est aussi. Le lemme est donc démontré. \square

Maintenant que ces propriétés sont démontrées, nous pouvons définir notre partition de l'unité. Soit ρ_0 et ρ_∞ des fonctions vérifiant $\rho_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_\infty \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \notin \text{Supp } \rho_\infty$, et :

$$\rho_0^2 + \rho_\infty^2 = \mathbb{1}.$$

Comme $\langle \tilde{x} \rangle$ est auto-adjoint sur $\text{Dom}(\langle \tilde{x} \rangle) = \text{Dom}(\langle x_{++} \rangle) \oplus \text{Dom}(\langle x_{--} \rangle)$, on peut définir par le calcul fonctionnel :

$$\rho_\varepsilon^R := \rho_\varepsilon \left(\frac{\langle \tilde{x} \rangle}{R} \right), \quad \varepsilon = 0, +\infty.$$

On pose maintenant :

$$\begin{aligned} \rho^R : \mathcal{Z} &\rightarrow \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z} \\ u &\mapsto \rho_0^R u \oplus \rho_\infty^R u, \end{aligned}$$

et son adjoint :

$$\begin{aligned} \rho^{R,*} : \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z} &\rightarrow \mathcal{Z} \\ u_0 + u_\infty &\mapsto \rho_0^R u_0 \oplus \rho_\infty^R u_\infty. \end{aligned}$$

ρ^R est isométrique :

$$(2.3.7) \quad \rho^{R,*} \rho^R = \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}.$$

Construction de l'hamiltonien en interaction

Posons, comme expliqué en début de section :

$$\mathcal{H} := \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{Z}).$$

Pour plus de détails sur la définition et la construction de l'espace de Fock fermionique sur un espace de Hilbert, on peut se référer à la section B. Nous définissons l'hamiltonien libre par :

$$H_0 := d\Gamma(\varepsilon).$$

Dans un premier temps, nous allons nous attacher à connaître le spectre de H_0 . Pour cela, appliquons le Lemme B.2.9. On a alors :

$$\sigma(H_0) = d\Gamma(\sigma(\varepsilon)).$$

Soit π_F la représentation de Fock de $\text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$ associée à j (voir Annexe B). On pose alors :

$$H := H_0 + \pi_F(I).$$

Nous noterons $\psi_F(f) := \pi_F(\psi(f))$. On va maintenant démontrer le Théorème 2.3.1. Rappelons que ce théorème stipule que :

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\inf \sigma(H) + m, +\infty[,$$

et que par conséquent, $\inf \sigma(H)$ est une valeur propre discrète. Nous allons suivre la méthode présentée dans [Amm04], et donc poser :

$$\begin{aligned} U : \Gamma_a(\mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z}) &\rightarrow \Gamma_a(\mathcal{Z}) \otimes \Gamma_a(\mathcal{Z}) \\ \Omega &\mapsto \Omega \otimes \Omega, \\ (2.3.8) \quad Ua^{(*)}(u_1 + u_2) &:= [a^{(*)}(u_1) \otimes \mathbf{1} + (-\mathbf{1})^N \otimes a^{(*)}(u_2)]U. \end{aligned}$$

U s'étend par linéarité et densité en un opérateur unitaire, et on pose maintenant, comme dans [Amm04] :

$$\check{\Gamma}(\rho) := U\Gamma(\rho) : \Gamma_a(\mathcal{Z}) \rightarrow \Gamma_a(\mathcal{Z}_0) \otimes \Gamma_a(\mathcal{Z}_\infty),$$

qui vérifie :

$$\check{\Gamma}^*(\rho)\check{\Gamma}(\rho) = \mathbf{1}_{\Gamma_a(\mathcal{Z})}.$$

Posons $\Sigma := \inf \sigma(H)$. On veut montrer dans un premier temps que

$$\sigma_{\text{ess}}(H) \subset [\Sigma + m, +\infty[.$$

Pour cela, nous allons montrer que $\chi(H)$ est compact pour χ supportée dans $] -\infty, \Sigma + m[$.

On va pour cela donner quelques estimations qui nous seront utiles plus tard. Pour un opérateur $A(R)$ et $\alpha > 0$, nous noterons $A(R) \in O(f(R))N^\alpha$ si :

$$\|(N+1)^{-\alpha_1}A(R)(N+1)^{-\alpha_2}\| \in O(f(R)), \alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

Proposition 2.3.17.

$$\check{\Gamma}(\rho^R)d\Gamma(\varepsilon) = (d\Gamma(\varepsilon) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma(\varepsilon))\check{\Gamma}(\rho^R) + O(\|\varepsilon, \rho^R\|)N.$$

Démonstration. La démonstration est donnée dans [Amm04]. □

Proposition 2.3.18. *Soit $f \in \mathcal{Z}$. Rappelons que $\psi_F(f) := a(f^+) + a^*(f^-)$. Alors :*

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}(\rho^R)\psi_F(f) &= (\psi_F(f) \otimes \mathbf{1})\check{\Gamma}(\rho^R) \\ &+ O(\|\rho_\infty^R f^+\|_{\mathcal{Z}} + \|(1 - \rho_0^R)f^+\|_{\mathcal{Z}} + \|\rho_\infty^R f^-\|_{\mathcal{Z}} + \|(1 - \rho_0^R)f^-\|_{\mathcal{Z}}). \end{aligned}$$

Démonstration. On a $\psi_F(f) := a(f^+) + a^*(f^-)$, ainsi, d'après les résultats concernant $a^{(*)}$ démontrés dans [Amm04] :

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}(\rho^R)a^{(*)}(f) &= U\Gamma(\rho^R)a^{(*)}(f) \\ &= Ua^{(*)}(f)\Gamma(\rho^R) + U[\Gamma(\rho^R), a^{(*)}(f)] \\ &= (a^{(*)}(f) \otimes \mathbf{1} + (-\mathbf{1})^{N_0} \otimes 0)U\Gamma(\rho^R) + U[\Gamma(\rho^R), a^{(*)}(f)] \\ &= (a^{(*)}(f) \otimes \mathbf{1})\check{\Gamma}(\rho^R) + O(\|\rho_\infty^R f\|_{\mathcal{Z}} + \|(1 - \rho_0^R)f\|_{\mathcal{Z}}). \end{aligned}$$

Par linéarité, on a bien le résultat recherché. \square

Définition 2.3.19. *On définit l'hamiltonien étendu agissant sur $\Gamma_a(\mathcal{Z}) \otimes \Gamma_a(\mathcal{Z})$ par :*

$$H^{\text{ext}} := H \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma(\varepsilon).$$

En utilisant les Propositions 2.3.17 et 2.3.18, on va maintenant démontrer :

Proposition 2.3.20.

$$\begin{aligned} \chi(H) &= \check{\Gamma}^*(\rho^R)\chi(H^{\text{ext}})\check{\Gamma}(\rho^R) + o(R^0), \\ \check{\Gamma}(\rho^R)H &= H^{\text{ext}}\check{\Gamma}(\rho^R) + o(R^0)N. \end{aligned}$$

Démonstration. La première propriété est démontrée dans [Amm04]. Pour démontrer la seconde, d'après les Propositions 2.3.17 et 2.3.18, il reste à remarquer que :

$$\|[\varepsilon, \rho^R]\| = O(R^{-1}),$$

qui se démontre en utilisant les extensions presque analytiques, et

$$\forall g \in \mathcal{Z}, \|\rho_\infty^R g\| + \|(1 - \rho_0^R)g\| = o(R^0),$$

pour conclure la preuve. \square

Il nous reste à montrer la compacité de $\chi(H)$ pour $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} - \infty, \Sigma + m]$. Commençons par donner le résultat suivant :

Lemme 2.3.21. Si $\chi \in C_0^\infty(]-\infty, \Sigma + m[)$, alors :

$$\chi(H^{\text{ext}}) = (\mathbf{1} \otimes |\Omega\rangle\langle\Omega|)\chi(H^{\text{ext}}),$$

ce qui est équivalent à :

$$\chi(H^{\text{ext}}) = \chi(H^{\text{ext}})\mathbf{1}_{\{0\}}(N_\infty).$$

Démonstration. Notons tout d'abord que $\mathbf{1} \otimes d\Gamma(\varepsilon)\mathbf{1}_n(N_\infty) \geq nm\mathbf{1}_n(N_\infty)$ et que donc :

$$\mathbf{1}_{[nm, +\infty[}(\mathbf{1} \otimes d\Gamma(\varepsilon))\mathbf{1}_n(N_\infty) = \mathbf{1}_n(N_\infty).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\chi(H^{\text{ext}})\mathbf{1}_{\{n\}}(N_\infty) = \mathbf{1}_{[\Sigma, +\infty[}(H \otimes \mathbf{1})\chi(H^{\text{ext}})\mathbf{1}_{[nm, +\infty[}(\mathbf{1} \otimes d\Gamma(\varepsilon))\mathbf{1}_{\{n\}}(N_\infty)$$

Soit $f(x, y) = \mathbf{1}_{[\Sigma, +\infty[}(x)\chi(x + y)\mathbf{1}_{[nm, +\infty[}(y)$. Alors $f(x, y) \neq 0$ si $x \geq \Sigma$, $y \geq nm$ et $x + y < \Sigma + m$. D'où $f = 0$, sauf si $n = 0$. On en déduit :

$$\forall n \neq 0, \chi(H^{\text{ext}})\mathbf{1}_{\{n\}}(N_\infty) = 0.$$

□

Lemme 2.3.22.

$$\check{\Gamma}^*(\rho^R)(\mathbf{1}_{\{0\}}(N_\infty))\check{\Gamma}(\rho^R) = \Gamma((\rho_0^R)^2).$$

Démonstration. Ce lemme est démontré dans [Amm04].

□

On peut désormais démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.3.23. Soit $\chi \in C_0^\infty(]-\infty, \Sigma + m[)$. Alors :

$$\chi(H) = \Gamma((\rho_0^R)^2)\chi(H) + o(R^0).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \chi(H) &= \check{\Gamma}^*(\rho^R)\chi(H^{\text{ext}})\check{\Gamma}(\rho^R) + o(R^0) \\ &= \check{\Gamma}^*(\rho^R)(\mathbf{1}_{\{0\}}(N_\infty))\chi(H^{\text{ext}})\check{\Gamma}(\rho^R) + o(R^0) \\ &= \check{\Gamma}^*(\rho^R)(\mathbf{1}_{\{0\}}(N_\infty))\check{\Gamma}(\rho^R)\chi(H) + o(R^0) \\ &= \Gamma((\rho_0^R)^2)\chi(H) + o(R^0). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.24. Soit $\chi \in C_0^\infty(]-\infty, \Sigma + m[)$. Alors $\Gamma((\rho_0^R)^2)\chi(H)$ est un opérateur compact.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\Gamma((\rho_0^R)^2)\chi(H) &= \Gamma((\rho_0^R)^2)(H_0 + i)^{-1}(H_0 + i)\chi(H) \\ &= \Gamma((\rho_0^R)^2)(H_0 + i)^{-1}(\mathbf{1}_{[0,n]}(N) + \mathbf{1}_{[n+1,+\infty]}(N))(H_0 + i)\chi(H).\end{aligned}$$

Or $\prod_{i=1}^n \rho_0^2(\frac{x_i}{R}) \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i + 1)^{-1}$ est un opérateur compact sur $\otimes^n \mathcal{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $(H_0 + i)^{-1} \mathbf{1}_{[n+1,+\infty]}(N) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ en norme. Comme $(H_0 + i)\chi(H)$ est borné, il vient que $\Gamma((\rho_0^R)^2)\chi(H)$ est compact. \square

Démonstration du théorème 2.3.1 :

Les propositions 2.3.23 et 2.3.24 entraînent la compacité de $\chi(H)$ en tant que limite d'opérateurs compacts, pour $\chi \in C_0^\infty(]-\infty, \Sigma + m[)$.

\square

Chapitre 3

Effet Hawking II : cas d'une observable stationnaire

Le cas étudié dans le chapitre précédent était celui d'une observable suivant l'effondrement de l'étoile. Les observables étaient donc translatées à gauche via α^t . Notamment, comme nous l'avons vu, l'interaction n'agissait qu'après réflexion à la surface de l'étoile, et donc après que la concentration du support à l'origine de l'effet Hawking n'ait été effective. Dans ce chapitre, nous allons traiter le cas d'une observable non translatée. Cette situation est résumée par la Figure 3.1 ci-dessous.

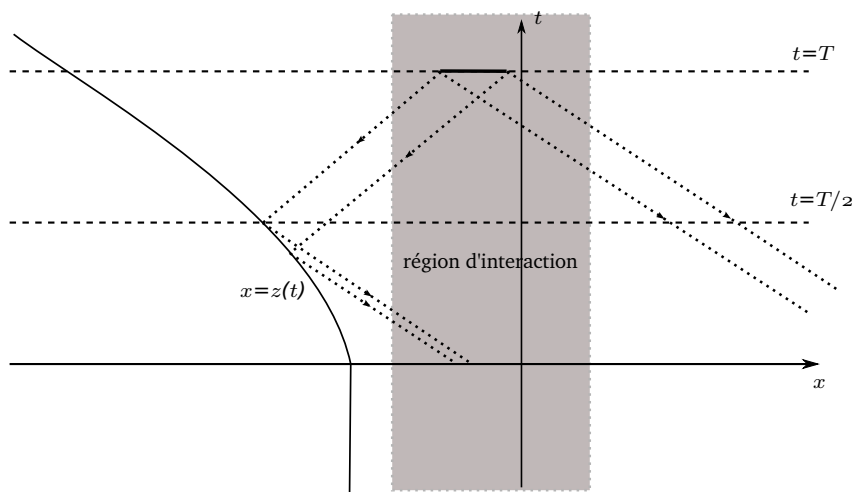


FIGURE 3.1 – Effet Hawking II

L'influence du potentiel comme de l'interaction doivent donc être pris en compte. Pour cela, nous allons utiliser des outils issus de la

théorie du scattering. Cette théorie a été abondamment abordée dans la littérature. Parmi les ouvrages importants reliés à notre travail, on peut citer [Dau04],[DG97],[DG98],[RS79] ou encore [Amm04]. Le but de ce chapitre est donc d'étudier la limite :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^{V,\text{int}}(0,t)(A)), \quad A \in \mathfrak{A}_0.$$

3.1 Scattering pour l'équation de Dirac

Dans cette section, nous allons rassembler des résultats de scattering (l'existence d'opérateurs d'onde) pour l'équation de Dirac, et montrer l'existence de vitesses asymptotiques, qui fourniront une méthode efficace permettant de séparer les observables se propageant à gauche de celles se propageant à droite. La plupart des résultats présentés issus sont issus de [Dau04]. Plus de détails peuvent y être trouvés.

3.1.1 Vitesses asymptotiques pour l'équation de Dirac

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats de [Dau04] :

Théorème 3.1.1. *Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. Alors la limite :*

$$\chi^\pm := \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itb_\infty^V} \chi\left(\frac{x}{t}\right) e^{itb_\infty^V}$$

existe, et on définit P^\pm par : $\chi(P^\pm) := \chi^\pm$. Les opérateurs ainsi définis, appelés "vitesses asymptotiques", sont auto-adjoints, à domaine dense, et vérifient :

- $[P^\pm, b_\infty^V] = 0$,
- $\mathbf{1}_{\{0\}}(P^\pm) = \mathbf{1}^{\text{pp}}(b_\infty^V) = 0$,
- $\sigma(P^\pm) \subset [-1, 1]$.

Remarque 3.1.2. $\mathbf{1}_{\{0\}}(P^\pm) = 0$ s'interprète comme le fait que tout état initial a une vitesse asymptotique non nulle.

Nous pouvons maintenant définir les espaces de propagation à droite et à gauche en fonction du signe de la vitesse asymptotique des états. Comme nous allons uniquement utiliser la vitesse asymptotique future P^+ , nous allons simplement noter $P := P^+$, et poser :

$$P^g := \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(P),$$

$$P^d := \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(P),$$

de sorte que, d'après le Théorème 3.1.1 :

$$P^g + P^d = \mathbf{1}.$$

Définissons :

$$V^{g/d} := \lim_{x \rightarrow \mp\infty} V(x).$$

On peut remarquer que, d'après nos hypothèses sur le potentiel et nos notations précédentes (voir Section 1.1), on a $V^g = 0$ et $V^d = V_\infty$. Afin d'alléger les notations, nous allons également noter :

$$b_\infty^{g/d} := b_\infty^{V^{g/d}} = LD_x + V^{g/d}, \text{ de domaine } H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \text{ agissant sur } \mathfrak{h}_\infty.$$

Du Théorème 3.1.1 et de la courte portée du potentiel V (voir (1.1.2)), on obtient, par des arguments classiques, la proposition suivante :

Proposition 3.1.3. *Les opérateurs d'onde*

$$w_\infty^{g/d} := \text{s-lim}_{t \rightarrow -\infty} e^{-itb_\infty^{V^{g/d}}} e^{itb_\infty^V}$$

existent sur $P^{g/d}\mathfrak{h}_\infty$.

1. $(w_\infty^{g/d})^* w_\infty^{g/d} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\mp}(P)$,
2. $w_\infty^{g/d} (w_\infty^{g/d})^* = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\mp}(P^{V^{g/d}})$,
3. $w_\infty^{g/d} P = P^{V^{g/d}} w_\infty^{g/d}$,
4. $w_\infty^{g/d} b_\infty^V = b_\infty^{V^{g/d}} w_\infty^{g/d}$,

où $P^{V^{g/d}}$ est défini de même manière que P^V avec $V = V^{g/d}$.

Ce résultat se transmet immédiatement aux dynamiques libres sous la forme de la proposition suivante :

Proposition 3.1.4. *La limite :*

$$\gamma_\infty^g := \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau_\infty^{V^g}(t, 0) \circ \tau_\infty^V(0, t)$$

existe sur $\text{CAR}(P^g\mathfrak{h}_\infty)$. De plus, $\gamma_\infty^g : \text{CAR}(P^g\mathfrak{h}_\infty) \rightarrow \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty) = \mathfrak{A}_\infty$ est un $*$ -morphisme vérifiant :

$$\gamma_\infty^g(\psi^{(*)}(f)) = \psi^{(*)}(w_\infty^g f).$$

La limite analogue, γ_∞^d , obtenue en remplaçant V^g par V^d et P^g par P^d , existe également, sur $\text{CAR}(P^d\mathfrak{h}_\infty)$, mais ne jouera pas de rôle dans notre étude. Nous utiliserons un analogue à γ_∞^g plus loin, qui sera noté γ_0^d .

3.1.2 Morphismes d'onde

Nous allons montrer un analogue de la Proposition 3.1.4 pour la dynamique en interaction.

Théorème 3.1.5. *La limite*

$$\gamma_\infty^{\text{int}} := \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau_\infty^{V, \text{int}}(t, 0) \circ \tau_\infty^V(0, t)$$

existe sur \mathfrak{A}_∞ et est un $*$ -morphisme de \mathfrak{A}_∞ .

Le morphisme $\gamma_\infty^{\text{int}}$ est un exemple de *morphisme d'onde*.

Remarque 3.1.6. *Ce résultat est évidemment valable dans la limite $t \rightarrow -\infty$, mais nous n'utiliserons que celui énoncé dans la proposition ci-dessus.*

Démonstration. La preuve de cette proposition repose à nouveau sur la méthode de Cook, combinée à des résultats d'estimation de vitesse minimale pour l'équation de Dirac. Plus de détails sur les résultats rappelés ici peuvent être trouvés dans [Dau04].

Rappelons tout d'abord que le spectre purement ponctuel de b_∞^V est vide ([Bac00, lemme III-1]). Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} := \{ & u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : \langle x \rangle^n u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \\ & u = \chi(b_\infty^V)u, \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus [-m, m]), n \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

est un sous ensemble dense de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$.

Les estimations de vitesse minimale fortes (voir [Dau04]) nous donnent ensuite :

$$(3.1.1) \quad \exists c_0 \in]0, 1[, \forall u \in \mathcal{D}, \|\mathbb{1}_{[0, c_0]}(\frac{|x|}{t})e^{itb_\infty^V}u\|_{L^2} = O(t^{-N}), N \in \mathbb{N}.$$

On est ensuite ramené, comme dans la démonstration de la Proposition 2.2.3, à montrer que $t \mapsto (g|e^{itb_\infty^V}u)$ est intégrable. Il suffit d'appliquer (3.1.1) et de conclure par densité. \square

Nous noterons $E_t : \mathfrak{A}_\infty \rightarrow \mathfrak{A}_t$ le $*$ -homomorphisme défini en Définition A.2.4, associé à l'inclusion $\mathfrak{h}_t \subset \mathfrak{h}_\infty$. Comme $\cup_{t \geq 0} \mathfrak{h}_t$ est dense dans \mathfrak{h}_∞ , on a :

$$(3.1.2) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} E_t = \mathbb{1}, \text{ dans } \mathfrak{A}_\infty.$$

Nous allons maintenant combiner le Théorème 3.1.5 et le Lemme 2.1.8 pour obtenir le résultat suivant :

Proposition 3.1.7. *Soit $A = \gamma_\infty^{\text{int}}(B) \in \mathfrak{A}_\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon, T_\varepsilon > 0$ tels que :*

$$\sup_{t/2+C_\varepsilon \leq s \leq t/2+2C_\varepsilon, t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(s,t) \circ E_t(A) - \tau_\infty^V(s,t)(B)\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 3.1.8. *On ne sait pas si $A \in \gamma_\infty^{\text{int}}\mathfrak{A}_\infty$ appartient à \mathfrak{A}_t pour tout t suffisamment grand, donc a priori $\tau^{V,\text{int}}(s,t)(A)$ n'a pas de sens. Remplacer A par $E_t(A) \in \mathfrak{A}_t$ règle ce problème, au prix d'une erreur $\|A - E_t(A)\|$ de taille $o(t^0)$.*

Démonstration. Comme $A = \gamma_\infty^{\text{int}}(B)$, par définition du morphisme d'ondes $\gamma_\infty^{\text{int}}$, on a :

$$\tau_\infty^V(0,t)(B) = \tau_\infty^{V,\text{int}}(0,t)(A) + o(t^0), \quad t \rightarrow +\infty.$$

De plus, τ_∞^V et $\tau_\infty^{V,\text{int}}$ sont stationnaires. On en déduit, pour tout $c > 0$:

$$(3.1.3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq s \leq t/2+c} \|\tau_\infty^{V,\text{int}}(s,t)(A) - \tau_\infty^V(s,t)(B)\| = 0.$$

Comme $\bigcup_{J \in \mathbb{R}} \mathfrak{A}(J)$ est dense dans \mathfrak{A}_∞ , pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $J_\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}(J_\varepsilon)$ tel que $\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon/8$, et donc :

$$(3.1.4) \quad \sup_{s,t} \|\tau_\infty^{V,\text{int}}(s,t)(A) - \tau_\infty^{V,\text{int}}(s,t)(A_\varepsilon)\| \leq \varepsilon/8.$$

D'après le Lemme 2.1.8, il existe $C_\varepsilon = C(J_\varepsilon)$ tel que :

$$(3.1.5) \quad \tau^{V,\text{int}}(s,t)(A_\varepsilon) = \tau_\infty^{V,\text{int}}(s,t)(A_\varepsilon), \quad \forall t/2 + C_\varepsilon \leq s \leq t.$$

Ensuite, d'après (3.1.2), on peut trouver T_ε tel que $\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|A - E_t(A)\| \leq \varepsilon/8$, et donc :

$$(3.1.6) \quad \sup_{s \leq t, t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(s,t)(A_\varepsilon) - \tau^{V,\text{int}}(s,t) \circ E_t(A)\| \leq \varepsilon/4.$$

En combinant (3.1.4), (3.1.5) et (3.1.6) on obtient :

$$\sup_{t/2+C_\varepsilon \leq s \leq t, t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(s,t) \circ E_t(A) - \tau_\infty^{V,\text{int}}(s,t)(A)\| \leq \varepsilon/2.$$

Enfin, en utilisant (3.1.3), on obtient la Proposition. \square

3.2 Estimations de propagation

Les résultats établis nous permettent d'étudier les propagation à gauche et à droite, au sens des vitesses asymptotiques. C'est l'objet des deux sous-sections suivantes. Nous utiliserons ensuite le formalisme du produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué pour conclure.

3.2.1 Propagation à gauche

Pour commencer l'étude de la propagation à gauche, nous allons montrer le lemme suivant, qui établit que γ_∞^g envoie $\text{CAR}(P^g \mathfrak{h}_\infty)$ dans $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty^g)$:

Lemme 3.2.1. *Ran $w^g = \mathfrak{h}_\infty^g$. Par conséquent, $\gamma_\infty^g : \text{CAR}(P^g \mathfrak{h}_\infty) \rightarrow \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty^g)$ est un $*$ -isomorphisme.*

Démonstration. Comme $V^g = 0$, on a $b_\infty^g = -LD_x$. Posons $x(t) = e^{-itb_\infty^g} x e^{itb_\infty^g}$. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = e^{-itLD_x} [-LD_x, ix] e^{itLD_x} = -L.$$

D'où

$$e^{-itLD_x} \frac{x}{t} e^{itLD_x} = -L + \frac{x}{t}.$$

Rappelant que P^{V^g} désigne la vitesse asymptotique pour b_∞^g , on en déduit $P^{V^g} = -L$. D'après la Proposition 3.1.3, w_∞^g entrelace P et P^{V^g} . On en déduit :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(P^{V^g}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(L) = \mathbf{1}_{\mathfrak{h}_\infty^g},$$

et donc :

$$\text{Ran } w_\infty^g = \text{Ran } \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(L) = \mathfrak{h}_\infty^g.$$

Le résultat pour γ_∞^g s'en déduit immédiatement. \square

Proposition 3.2.2. *Soit $A = \gamma_\infty^{\text{int}}(B^g)$, $B^g \in \text{CAR}(P^g \mathfrak{h}_\infty)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon, T_\varepsilon > 0$ tels que :*

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V, \text{int}}(t/2 + C_\varepsilon, t) \circ E_t(A) - \alpha^{t/2 - C_\varepsilon} \circ \gamma_\infty^g(B^g)\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Par la Proposition 3.1.7, il existe $C_\varepsilon, \tilde{T}_\varepsilon > 0$ tels que :

$$(3.2.1) \quad \sup_{t \geq \tilde{T}_\varepsilon} \|\tau^{V, \text{int}}(t/2 + C_\varepsilon, t) \circ E_t(A) - \tau_\infty^V(t/2 + C_\varepsilon, t)(B^g)\| \leq \varepsilon.$$

D'après la Proposition 3.1.4, on a :

$$\tau_\infty^V(0, s)(B^g) = \tau_\infty^0(0, s)(\gamma_\infty^g(B^g)) + o(s^0).$$

Remarquons maintenant que $\tau_\infty^V, \tau_\infty^0$ sont stationnaires, que $\gamma_\infty^g(B^g) \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty^g)$, et que $\tau_\infty^0(0, s) = \alpha^s$ sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty^g)$, étant donné que $u_\infty^0(0, s)f = f^s$ pour $f \in \mathfrak{h}_\infty^g$, d'après (1.2.2). Il en résulte qu'on peut trouver $T_\varepsilon \geq \tilde{T}_\varepsilon$ tel que :

$$\|\tau^{V, \text{int}}(t/2 + C_\varepsilon, t) \circ E_t(A) - \alpha^{t/2 - C_\varepsilon} \circ \gamma_\infty^g(B^g)\| \leq \varepsilon,$$

pour $t \geq T_\varepsilon$. Cela complète la démonstration. \square

3.2.2 Propagation à droite

Dans cette sous-section, nous allons montrer l'existence d'un opérateur d'ondes entre la dynamique en interaction et la dynamique libre. Pour cela, commençons par donner le résultat suivant :

Lemme 3.2.3. *Pour tout $c > 0$, pour tout $B^d \in \text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$, on a :*

$$\tau^V(0, t/2 + c) \circ \tau_\infty^V(t/2 + c, t)(B^d) = \tau_\infty^V(0, t)(B^d) + o(t^0), t \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. On se ramène par les arguments usuels de densité et de linéarité à montrer que :

$$(3.2.2) \quad u^V(0, t/2 + c) \circ u_\infty^V(t/2 + c, t)f = u_\infty^V(0, t)f + o(t^0), f \in P^d \mathfrak{h}_\infty, t \rightarrow +\infty.$$

En utilisant (3.1.1) et le fait que $u_\infty^V(s, t) = e^{i(s-t)b_\infty^V}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$u_\infty^V(0, t)f = \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right)u_\infty^V(0, t)f + o(t^0),$$

et

$$u_\infty^V(t/2 + c, t)f = \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right)u_\infty^V(t/2 + c, t)f + o(t^0).$$

Pour alléger la preuve, nous allons noter :

$$f_{s,t} := \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right)u_\infty^V(s, t)f.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \|u^V(0, t/2 + c) \circ u_\infty^V(t/2 + c, t)f - u_\infty^V(0, t)f\| \\ &= \|u^V(0, t/2 + c)f_{t/2+c,t} - f_{0,t}\| + o(t^0) \\ &= \|f_{t/2+c,t} - u^V(t/2 + c, 0)f_{0,t}\| + o(t^0) \\ &\leq \left\| \int_0^{t/2+c} \frac{\partial}{\partial s} u^V(t/2 + c, s)f_{s,t} ds \right\| + o(t^0). \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial s} u^V(t/2 + c, s)f_{s,t} = -iu^V(t/2 + c, s) \left(b_s^V \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right) - \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right)b_\infty^V \right) u_\infty^V(s, t)f.$$

Comme $f_{s,t} \equiv 0$ dans $\{\frac{x}{t} \leq \varepsilon\}$ et que $f_{s,t} \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, on a $f_{s,t} \in \text{Dom } b_s^V$ pour $0 \leq s \leq t/2 + c$, et donc :

$$\left(b_s^V \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right) - \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right)b_\infty^V \right) u_\infty^V(s, t)f = [b_\infty^V, \chi\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right)] = \frac{1}{t} L \chi'\left(\frac{x}{t} \geq \varepsilon\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t/2+c} \frac{\partial}{\partial s} u^V(t/2+c, s) f_{s,t} ds \right\| &\leq \int_0^{t/2+c} \frac{1}{t} \|\tilde{\chi}\left(\frac{x}{t} \simeq \varepsilon\right) u_\infty^V(s, t) f\|_{L^2} ds \\ &\leq \int_{t/2-c}^t \frac{1}{t} \|\tilde{\chi}\left(\frac{x}{t} \simeq \varepsilon\right) e^{-i\tau b_\infty^V} f\|_{L^2} d\tau, \end{aligned}$$

en posant $\tau = t - s$. Posons maintenant :

$$R_t(f) := \frac{1}{t} \int_{t/2-c}^t \|\tilde{\chi}\left(\frac{x}{t} \simeq \varepsilon\right) e^{-i\tau b_\infty^V} f\|_{L^2} d\tau, \quad f \in \mathfrak{h}_\infty.$$

On a :

$$(3.2.3) \quad |R_t(f)| \leq C \|f\|, \quad f \in \mathfrak{h}_\infty, \quad \text{uniformément pour } t \geq 1.$$

De plus, pour $f \in \mathcal{D}$, on déduit de (3.1.1) que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_t(f) = 0.$$

Par densité (en utilisant (3.2.3)), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_t(f) = 0, \quad \forall f \in \mathfrak{h}_\infty.$$

On a donc bien démontré (3.2.2). \square

Proposition 3.2.4. *Soit $A = \gamma_\infty^{\text{int}}(B^d)$, $B^d \in \text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ E_t(A) - \tau_\infty^V(0, t)(B^d)\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 3.1.7, il existe $C_\varepsilon, \tilde{T}_\varepsilon$ tels que :

$$(3.2.4) \quad \begin{aligned} \tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ E_t(A) &= \tau^{V, \text{int}}(0, t/2 + C_\varepsilon) \circ \tau^{V, \text{int}}(t/2 + C_\varepsilon, t) \circ E_t(A) \\ &= \tau^{V, \text{int}}(0, t/2 + C_\varepsilon) \circ \tau_\infty^V(t/2 + C_\varepsilon, t)(B^d) + R_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

où $\|R_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon/4$ pour $t \geq \tilde{T}_\varepsilon$. Rappelons que le sous-espace :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \{u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : \langle x \rangle^n u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \\ &u = \chi(b_\infty^V)u, \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus [-m, m]), n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

est un sous ensemble dense de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. Comme $B^d \in \text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$, on peut, par densité, trouver $\tilde{B}^d \in \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathcal{D} \cap P^d \mathfrak{h}_\infty)$ tel que $\|B^d - \tilde{B}^d\| \leq \varepsilon/4$. De (3.2.4), il suit donc :

$$(3.2.5) \quad \sup_{t \geq \tilde{T}_\varepsilon} \|\tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ E_t(A) - \tau^{V, \text{int}}(0, t/2 + C_\varepsilon) \circ \tau_\infty^V(t/2 + C_\varepsilon, t)(\tilde{B}^d)\| \leq \varepsilon/2.$$

La définition de la dynamique en interaction (Def. 2.1.4) et le Lemme 3.2.3 nous donnent alors :

$$\begin{aligned} & \tau^{V,\text{int}}(0, t/2 + C_\varepsilon) \circ \tau_\infty^V(t/2 + C_\varepsilon, t)(\tilde{B}^d) = \\ & R(0, t/2 + C_\varepsilon) \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d) R^*(0, t/2 + C_\varepsilon) + o(t^0). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \tau^{V,\text{int}}(0, t/2 + C_\varepsilon) \circ \tau_\infty^V(t/2 + C_\varepsilon, t)(\tilde{B}^d) = \\ & \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d) - \int_0^{t/2+C_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial s} \left(R(s, t/2 + C_\varepsilon) \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d) R^*(s, t/2 + C_\varepsilon) \right) ds + o(t^0). \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} R(s, t/2 + C_\varepsilon) \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d) R^*(s, t/2 + C_\varepsilon) \\ & = R(s, t/2 + C_\varepsilon) [I(s, t/2 + C_\varepsilon), \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d)] R^*(s, t/2 + C_\varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $R(\cdot, \cdot)$ est unitaire, il reste donc à évaluer le commutateur :

$$[I(s, t/2 + C_\varepsilon), \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d)].$$

À nouveau, cela revient à évaluer un produit scalaire de la forme $(u^V(s, t/2 + C_\varepsilon)g | u_\infty^V(0, t)f)$, pour g à support compact et $f \in \mathcal{D} \cap P^d(\mathfrak{h}_\infty)$.

On sait que $u^V(s, t/2 + C_\varepsilon)g$ est supportée dans $\{|x| \leq t/2 + C_\varepsilon + C_0\}$ pour $0 < s < t/2 + C_\varepsilon$ et $C_0 > 0$, car g est à support compact. De plus, comme $f \in \mathcal{D} \cap P^d(\mathfrak{h}_\infty)$, on a d'après les estimations de vitesse minimale (3.1.1) :

$$\|\mathbf{1}_{\{[0, c_0]\}} \left(\frac{x}{t}\right) u_\infty^V(0, t)f\| \in O(t^{-N}), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que :

$$[I(s, t/2 + C_\varepsilon), \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d)] \in O(\langle t \rangle^{-N}), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Il suit :

$$\|\tau^{V,\text{int}}(0, t/2 + C_\varepsilon) \circ \tau_\infty^V(t/2 + C_\varepsilon, t)(\tilde{B}^d) - \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d)\| \leq D_\varepsilon |t/2 + C_\varepsilon| \langle t \rangle^{-N}.$$

Par conséquent, d'après (3.2.5), il existe $T_\varepsilon > \tilde{T}_\varepsilon$ tel que :

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ E_t(A) - \tau_\infty^V(0, t)(\tilde{B}^d)\| \leq 3\varepsilon/4.$$

Comme $\|B^d - \tilde{B}^d\| \leq \varepsilon/4$, cela complète la démonstration. \square

Avant de conclure cette sous-section par son résultat principal, nous donnons deux résultats élémentaires de scattering pour la dynamique libre sans condition au bord.

Lemme 3.2.5. $s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itb_0^V} P_0 e^{-itb_\infty^V}$ existe sur $P^d \mathfrak{h}_\infty$, et définit un opérateur d'onde unitaire de $P^d \mathfrak{h}_\infty$ dans \mathfrak{h}_0 .

Démonstration. La preuve se base sur des arguments classiques, en remarquant que $e^{-itb_\infty^V} f$ se propage vers la droite lorsque $f \in P^d \mathfrak{h}_\infty$, et que la condition au limite en $x = z(0)$ n'intervient donc pas.

On va appliquer le théorème de Pearson (voir [RS79]). Utilisons tout d'abord les estimations de vitesse minimale pour se ramener à la recherche d'opérateur d'onde entre $e^{-itb_\infty^{V_d}}$ et $e^{-itb_0^{V_d}}$. En effet, on peut remarquer que $e^{-itb_0^{V_d}} e^{itb_0^V}$ converge, et que $e^{-itb_\infty^{V_d}} e^{itb_\infty^V}$ converge d'après le Théorème 3.1.3.

On est ainsi ramené à étudier la limite de $e^{itb_0^{V_d}} e^{-itb_\infty^{V_d}}$. Or, on a montré précédemment (P_0 désignant l'opérateur de prolongement par 0, voir (2.3.2)) que :

$$iL\partial_x P_0 = iP_0 L\partial_x + iL\gamma_0^* \gamma_0$$

et donc :

$$b_\infty^{V_d} P_0 = P_0 b_0^{V_d} + A,$$

avec A de rang fini, donc à trace. On peut ainsi appliquer le théorème de Pearson et conclure à l'existence de l'opérateur d'onde recherché. \square

Le Lemme 3.2.5 implique directement la Proposition suivante :

Proposition 3.2.6. *La limite :*

$$\gamma_0^d := s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau_0^V(t, 0) \circ \tau_\infty^V(0, t)$$

existe sur $\text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$ et est un $$ -isomorphisme de $\text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$ dans $\text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$.*

Remarque 3.2.7. *Nous avons utilisé la notation γ_0^d lors de la démonstration de la dite Proposition 2.2.3. Cet opérateur d'onde n'étant pas utilisé en dehors de ladite démonstration, nous nous permettons d'utiliser à nouveau cette notation afin de ne pas surcharger inutilement la rédaction.*

On peut maintenant combiner les Propositions 3.2.4 et 3.2.6 pour donner le résultat principal de cette sous-section :

Proposition 3.2.8. *Soit $A = \gamma_\infty^{\text{int}}(B^d)$, $B^d \in \text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V, \text{int}}(0, t) \circ E_t(A) - \tau_0^V(0, t) \circ \gamma_0^d(B^d)\| \leq \varepsilon.$$

En conclusion de cette sous-section, on remarque que l'évolution à droite avec interaction est donnée par l'évolution libre, modifiée par un morphisme d'onde. En conséquence, il sera facile d'appliquer nos résultats précédents.

3.3 Effet Hawking en interaction II

Nous allons, dans cette section, utiliser les résultats des deux sections précédentes pour définir l'état limite et montrer l'effet Hawking dans la situation considérée.

3.3.1 L'état limite

Afin d'énoncer le résultat principal de ce chapitre, nous allons introduire quelques notations. Rappelons que :

$$\gamma_\infty^g := \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau_\infty^{V^g}(t, 0) \circ \tau_\infty^V(0, t), \text{ définie en Déf. 3.1.4}$$

est un $*$ -isomorphisme de $\text{CAR}(P^g \mathfrak{h}_\infty)$ dans $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty^g)$, et que :

$$\gamma_0^d := \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau_0^V(t, 0) \circ \tau_\infty^V(0, t), \text{ définie en Déf. 3.2.6,}$$

est un $*$ -isomorphisme de $\text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$ dans $\text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$. Le lemme suivant va nous permettre de définir l'état limite :

Lemme 3.3.1. *Notons $\omega_{\infty, \beta}^g$ l'état sur $\text{CAR}(P^g \mathfrak{h}_\infty)$ égal à :*

$$\omega_{\infty, \beta}^g := \omega_{\infty, \beta}^0 \circ \gamma_\infty^g,$$

et $\omega_{\infty, \text{vac}}^d$ l'état sur $\text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$ égal à :

$$\omega_{\infty, \text{vac}}^d := \omega_{0, \text{vac}}^V \circ \gamma_0^d.$$

Alors :

1. $\omega_{\infty, \beta}^g$ est la restriction à $\text{CAR}(P^g \mathfrak{h}_\infty)$ de l'état thermal quasi-libre sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$ de covariance :

$$(f | \frac{e^{\frac{2\pi}{\kappa} b_\infty^V}}{1 + e^{\frac{2\pi}{\kappa} b_\infty^V}} f), f \in \mathfrak{h}_\infty.$$

2. $\omega_{\infty, \text{vac}}^d$ est la restriction à $\text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$ de l'état de vide quasi-libre sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$ de covariance :

$$(f | \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(b_\infty^V) f), f \in \mathfrak{h}_\infty.$$

Démonstration. Rappelons que γ_∞^g est implémenté par w_∞^g . (1) découle alors directement des propriétés d'entrelacement de b_∞^V et b_∞^0 par w_∞^g énoncées par la Proposition 3.1.3.

De la même manière, (2) découle des propriétés d'entrelacement de l'opérateur d'onde construit dans le Lemme 3.2.5. \square

Remarquons que $\omega_{\infty,\beta}^g$ et $\omega_{\infty,\text{vac}}^d$ sont des états pairs. Comme nous avons la décomposition $\mathfrak{h}_\infty = P^g \mathfrak{h}_\infty \oplus P^d \mathfrak{h}_\infty$, on peut définir, comme expliqué en Annexe A, l'état suivant, agissant sur $\gamma_\infty^{\text{int}} \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$:

Définition 3.3.2. *On pose*

$$\omega_{\text{lim}}^{\text{II}} := (\omega_{\infty,\beta}^g \widehat{\otimes} \omega_{\infty,\text{vac}}^d) \circ (\gamma_\infty^{\text{int}})^{-1},$$

qui est un état sur $\gamma_\infty^{\text{int}} \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$.

Remarque 3.3.3. *Notons que l'état limite $\omega_{\text{lim}}^{\text{II}}$ n'est a priori défini que sur la C^* -algèbre $\gamma_\infty^{\text{int}} \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$, et non sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$ entier. On peut bien sûr supposer la complétude asymptotique du morphisme d'onde $\gamma_\infty^{\text{int}}$:*

$$\gamma_\infty^{\text{int}} \mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}_\infty,$$

qui, à notre connaissance, est une question ouverte dans le contexte algébrique. Par exemple, nous n'avons pas connaissance d'un argument permettant d'assurer que le générateur de la dynamique en interaction $\tau_\infty^{V,\text{int}}(s,t)$ n'a aucune valeur propre.

Si l'on fixe un état sur \mathfrak{A}_∞ , comme, par exemple, l'état de vide pour τ_∞^V , et si on travaille dans la représentation GNS, en remplaçant les C^* -algèbres par leur fermeture faible, alors, par les mêmes arguments que ceux utilisés en Sous-section 2.3.2, les dynamiques τ_∞^V et $\tau_\infty^{V,\text{int}}$ sont implémentées par des groupes unitaires avec, comme générateurs auto-adjoints H_0 et $H = H_0 + \pi_F(I)$. La théorie (Hilbertienne) du scattering pour H_0 , H est parfaitement connue (voir par exemple [Amm04]). En revanche, ces résultats hilbertiens ne sont d'aucune utilité dans le contexte algébrique.

3.3.2 Résultat principal II

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.4. *On a les propriétés suivantes :*

(1) *Soit $A \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_\infty)$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^{V,\text{int}}(0,t) \circ E_t(A)) = \omega_{\text{lim}}^{\text{II}}(A).$$

(2) Supposons de plus que $\gamma_\infty^{\text{int}}\mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}_\infty$. Alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^{V,\text{int}}(0,t)(A)) = \omega_{\text{lim}}^\Pi(A), \quad A \in \mathfrak{A}_J, \quad \forall J \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Commençons par démontrer (1). Par linéarité et densité, il suffit de prouver ce théorème pour :

$$A = A^g \times A^d, \quad A^{g/d} = \gamma_\infty^{\text{int}}(B^{g/d}), \quad B^{g/d} \in \text{CAR}(P^{g/d}\mathfrak{h}_\infty).$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après les Propositions 3.2.8 et 3.2.2, il existe $C_\varepsilon, T_\varepsilon > 0$ tels que :

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(0,t) \circ E_t(A^g) - \tau^{V,\text{int}}(0,t/2+C_\varepsilon) \circ \alpha^{t/2+C_\varepsilon} \circ \alpha^{-2C_\varepsilon} \circ \gamma_\infty^g(B^g)\| \leq \varepsilon,$$

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(0,t) \circ E_t(A^d) - \tau_0^V(0,t) \circ \gamma_0^d(B^d)\| \leq \varepsilon.$$

Posons $\tilde{B}_\varepsilon^g := \alpha^{-2C_\varepsilon} \circ \gamma_\infty^g(B^g)$ et $\tilde{B}^d := \gamma_0^d(B^d)$. D'après la Proposition 2.2.1, on peut augmenter T_ε de sorte que :

$$\sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(0,t/2+C_\varepsilon) \circ \alpha^{t/2+C_\varepsilon}(\tilde{B}_\varepsilon^g) - \tau^V(0,t/2+C_\varepsilon) \circ \alpha^{t/2+C_\varepsilon}(\tilde{B}_\varepsilon^g)\| \leq \varepsilon.$$

En résumé, on a :

$$(3.3.1) \quad \sup_{t \geq T_\varepsilon} \|\tau^{V,\text{int}}(0,t) \circ E_t(A) - \tau^V(0,t/2+C_\varepsilon) \circ \alpha^{t/2+C_\varepsilon}(\tilde{B}_\varepsilon^g) \times \tau_0^V(0,t)(\tilde{B}^d)\| \leq C\varepsilon.$$

Nous démontrons ensuite, de la même manière que dans le Lemme 2.2.7 :

$$(3.3.2) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^V(0,s) \circ \alpha^s(\tilde{B}_\varepsilon^g) \times \tau_0^V(0,s)(\tilde{B}^d)) = \omega_{\infty,\beta}^0 \hat{\otimes} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tilde{B}_\varepsilon^g \times \tilde{B}^d).$$

Pour prouver (3.3.2), nous utilisons le fait que $\omega_{0,\text{vac}}^V$ est quasi-libre, et que la dynamique intervenant dans (3.3.2) est libre. Les termes croisés de la forme :

$$(u^V(0,s)f_1^s | \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(b_0^V)u_0^V(0,s)f_2), \quad f_1 \in \mathfrak{h}_0^g, \quad f_2 \in \mathfrak{h}_0^d,$$

tendent vers 0 quand $s \rightarrow +\infty$. Cela se déduit de simples arguments de support : modulo des erreurs de taille $o(s^0)$ en norme, $u^V(0,s)f_1^s$ est supporté dans $\{|x| \leq c_0\}$ pour s assez grand, alors que $u_0^V(0,s)f_2$ est supporté dans $\{x \geq c_1s\}$.

Le reste de la preuve est identique à celle du Lemme 2.2.7, en utilisant le fait que $\omega_{0,\text{vac}}^V$ est invariant sous l'action de τ_0^V . On peut également

remarquer que l'état $\omega_{\infty,\beta}^0$ est invariant sous l'action des translations en espace. Comme $\tilde{B}_\varepsilon^g := \alpha^{-2C\varepsilon} \circ \gamma_\infty^g(B^g)$, cela implique que :

$$\begin{aligned}\omega_{\infty,\beta}^0 \widehat{\otimes} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tilde{B}_\varepsilon^g \times \tilde{B}^d) &= \omega_{\infty,\beta}^0 \widehat{\otimes} \omega_{0,\text{vac}}^V(\gamma_\infty^g(B^g) \times \tilde{B}^d) \\ &= \omega_{\infty,\beta}^g \widehat{\otimes} \omega_{\infty,\text{vac}}^d(B^g \times B^d).\end{aligned}$$

On peut ainsi réécrire (3.3.2) sous la forme :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tau^V(0,s) \circ \alpha^s(\tilde{B}_\varepsilon^g) \times \tau_0^V(0,s)(\tilde{B}^d)) = \omega_{\infty,\beta}^g \widehat{\otimes} \omega_{\infty,\text{vac}}^d(B^g \times B^d).$$

En combinant ce résultat avec (3.3.1), on termine la preuve de (1). L'affirmation (2) découle de (1), étant donné que si $A \in \mathfrak{A}_J$ pour un $J \Subset \mathbb{R}$, alors $A = E_t(A)$ pour t assez grand. \square

3.3.3 Changement d'état initial

Comme dans la Sous-section 2.2.3, nous allons remplacer l'état initial $\omega_{0,\text{vac}}^V$ par un état (pair) quasi-équivalent $\tilde{\omega}$, et ce pour les mêmes raisons.

Il existe cependant une différence importante avec la situation étudiée dans le Chapitre 2 : dans ce chapitre, l'évolution d'une observable $A^d \in \mathfrak{A}_0^d$ est donnée par $\tau^{V,\text{int}}(0,t) \circ \alpha^t(A^d)$, qui converge quand $t \rightarrow +\infty$ vers l'observable limite $\gamma^{d,\text{int}}(A^d)$. Cela implique que le Théorème 2.2.3 se généralise à tout état (pair) $\tilde{\omega}$, quasi-équivalent à $\omega_{0,\text{vac}}^V$, comme énoncé dans le Corollaire 2.2.8.

La situation présentée ici est différente : nous devons étudier l'évolution d'une observable $B^d \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$ sous l'action de $\tau_0^V(0,t)$. Ceci, de manière évidente, n'a pas de limite dans $\text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$. Nous devons donc nous restreindre à des états initiaux $\tilde{\omega}$ *invariants* sous la dynamique stationnaire $\tau_0^{V,\text{int}}(0,t)$ considérée dans la Sous-section 2.2.3.

Il est facile de montrer l'existence de la limite :

$$\gamma_0^{\text{int}} := \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau_0^{V,\text{int}}(t,0) \circ \tau_0^V(0,t)$$

sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_0)$. En utilisant la Proposition 3.2.6 et la règle des chaînes pour les homomorphismes d'ondes, nous obtenons l'existence de la limite :

$$\gamma_0^{d,\text{int}} := \gamma_0^{\text{int}} \circ \gamma_0^d = \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \tau_0^{V,\text{int}}(t,0) \circ \tau_\infty^V(0,t)$$

sur $\text{CAR}(P^d \mathfrak{h}_\infty)$. Nous obtenons ainsi l'analogie du Corollaire 2.2.8 :

Corollaire 3.3.5. *Soit $\tilde{\omega}$ un état sur \mathfrak{A}_0 , pair, quasi-équivalent à $\omega_{0,\text{vac}}^V$ et invariant par $\tau_0^{V,\text{int}}$. Posons :*

$$\tilde{\omega}_{\text{lim}}^\Pi := (\omega_{\infty,\beta}^g \widehat{\otimes} (\tilde{\omega} \circ \gamma_0^{d,\text{int}})) \circ (\gamma_\infty^{\text{int}})^{-1}.$$

Alors :

(1)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t \circ E_t(A)) = \tilde{\omega}_{\text{lim}}^{\text{II}}(A), \quad A \in \gamma_{\infty}^{\text{int}} \mathfrak{A}_{\infty}.$$

(2) *Supposons de plus que $\gamma_{\infty}^{\text{int}} \mathfrak{A}_{\infty} = \mathfrak{A}_{\infty}$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(\tau^{V,\text{int}}(0, t) \circ \alpha^t(A)) = \tilde{\omega}_{\text{lim}}^{\text{II}}(A), \quad A \in \mathfrak{A}_J, \quad \forall J \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que nous avons montré en Section 2.3 l'existence d'un tel état $\tilde{\omega}$, au moins pour de faibles interactions.

Démonstration. Cette démonstration est une simple combinaison du Théorème 3.3.4 et du Corollaire 2.2.8. Nous reprenons donc les notations utilisées dans la preuve du Théorème 3.3.4. D'après (3.3.1), nous pouvons voir que, modulo une erreur de taille ε , uniformément pour $t \geq T_{\varepsilon}$, nous devons calculer :

$$\text{s-lim}_{s \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(\tau^V(0, s) \circ \alpha^s(\tilde{B}_{\varepsilon}^g) \times \tau_0^V(0, s) \tilde{B}^d).$$

Posons $\tilde{B}_{\varepsilon}^g(s) := \tau^V(0, s) \circ \alpha^s(\tilde{B}_{\varepsilon}^g)$ et $\tilde{B}^d(s) := \tau_0^V(0, s) \tilde{B}^d$ pour simplifier les notations. Comme $\tilde{\omega}$ est quasi-équivalent à $\omega_{0,\text{vac}}^V$, on peut trouver $P = P(\psi^*, \psi) \in \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_0)$ pair tel que :

$$|\tilde{\omega}(B) - \omega_{0,\text{vac}}^V(P^*BP)| \leq \|B\|\varepsilon, \quad B \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_0).$$

Par le même argument que celui utilisé dans la preuve du Corollaire 2.2.8, on a :

$$\omega_{0,\text{vac}}^V(P^* \tilde{B}_{\varepsilon}^g(s) \tilde{B}^d(s) P) = \omega_{0,\text{vac}}^V(\tilde{B}_{\varepsilon}^g(s) P^* \tilde{B}^d(s) P) + o(s^0).$$

À nouveau, quand $s \rightarrow +\infty$, les termes croisés s'annulent ; ceux provenant de $\tilde{B}_{\varepsilon}^g(s)$ donnent la contribution $\omega_{\infty,\beta}^0(\tilde{B}_{\varepsilon}^g) = \omega_{\infty,\beta}^g(B^g)$ (voir Lemme 3.3.1).

Les termes provenant de $\tilde{B}^d(s)$ donnent, modulo une erreur de taille ε , la contribution $\tilde{\omega}(\tau_0^V(0, s)(\tilde{B}^d))$. Utilisons l'hypothèse d'invariance par $\tau_0^{V,\text{int}}$ faite sur $\tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\tau_0^V(0, s)(\tilde{B}^d)) &= \tilde{\omega}(\tau_0^{V,\text{int}}(s, 0) \circ \tau_0^V(0, s)(\tilde{B}^d)) \\ &= \tilde{\omega}(\gamma_0^{\text{int}}(\tilde{B}^d)) + o(s^0) \\ &= \tilde{\omega}(\gamma_0^{d,\text{int}}(B^d)) + o(s^0). \end{aligned}$$

Nous concluons maintenant comme dans la preuve du Théorème 3.3.4. \square

Chapitre 4

Effet Hawking III : interaction localisée sur le bord de l'étoile

Les résultats démontrés dans les chapitres 2 et 3 se placent dans un contexte où l'interaction est localisée loin de l'étoile. On peut donc penser que, dans ces modèles, l'action de l'interaction est décorrélée de la réflexion à la surface de l'étoile qui induit l'effet Hawking. C'est particulièrement le cas dans le premier modèle : l'effet de l'interaction se manifeste après réflexion, et donc après la forte concentration du support. Dans ce chapitre, nous souhaitons fortement coupler l'action de l'interaction avec la réflexion à la surface. Pour cela, l'interaction devra être localisée dans une région de la forme :

$$\{(x, t) : z(t) < x < z(t) + c, T - 1 \leq t \leq T\},$$

et nous allons appliquer l'évolution en interaction à une observable $\alpha^{-z(T)}(A)$, pour $A \in \mathfrak{A}_0$, avec, au final, $T \rightarrow +\infty$. Définissons maintenant précisément l'interaction :

Définition 4.0.6. *Fixons $I \in \text{CAR}_0(\mathfrak{h}_0)$ comme en 2.1.1, et posons :*

$$I(t) := \alpha^t(I), \quad I_T(t) := I(t)\mathbf{1}_{[T-1, T]}(t),$$

où α^s est le groupe de translations en espace défini en 1.3.3, et $T \gg 1$ est un paramètre que l'on fera tendre, au final, vers $+\infty$. Afin d'assurer que $I(t) \in \mathfrak{A}_t$ nous supposons que $z(t) \leq -t$ pour tout $t \geq 0$, ce qui n'est pas une restriction.

La situation étudiée est maintenant résumée sur la figure 4.1.

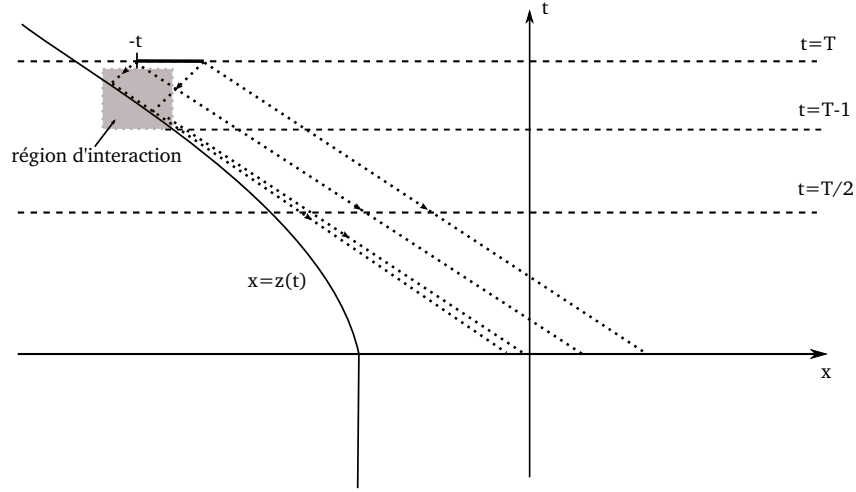


FIGURE 4.1 – Effet Hawking III

4.1 Définitions et dynamique

Définition 4.1.1. Nous noterons $\tilde{\tau}_T^{V,\text{int}}(s, t)$ la dynamique en interaction construite en utilisant le Lemme A.5.5, avec comme dynamique libre $\tau^V(s, t)$ et comme interaction dépendant du temps $I_T(t)$.

Nous souhaitons, dans ce chapitre, étudier la limite :

$$(4.1.1) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V(\tilde{\tau}_T^{V,\text{int}}(0, T) \circ \alpha^T(A)), \quad A \in \mathfrak{A}_0.$$

Comme $I_T(t)$ s'annule pour $0 \leq t \leq T - 1$, nous avons de manière évidente :

$$\tilde{\tau}_T^{V,\text{int}}(0, T - 1) = \tau^V(0, T - 1).$$

D'où :

$$\tilde{\tau}_T^{V,\text{int}}(0, T) \circ \alpha^T = \tau^V(0, T - 1) \circ \alpha^{T-1} \circ \alpha^{-(T-1)} \circ \tilde{\tau}_T^{V,\text{int}}(T - 1, T) \circ \alpha^T.$$

D'après les résultats du Chapitre 2, l'existence de la limite (4.1.1) suit de l'existence de :

$$(4.1.2) \quad \text{s-lim}_{T \rightarrow +\infty} \alpha^{-(T-1)} \circ \tilde{\tau}_T^{V,\text{int}}(T - 1, T) \circ \alpha^T \text{ sur } \mathfrak{A}_0.$$

Afin d'étudier cette limite, nous posons :

$$\gamma^t f(x) := f(x + t), \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathfrak{h},$$

et les opérateurs d'évolution et dynamiques suivants :

$$\hat{u}_T^V(s, t) := \gamma^{-(T+s)} u^V(T + s, T + t) \gamma^{T+t} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0),$$

$$\hat{\tau}_T^V(s, t) := \alpha^{-(T+s)} \circ \tau^V(T+s, T+t) \circ \alpha^{T+t}, \mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathfrak{A}_0,$$

$$\hat{\tau}_T^{V, \text{int}}(s, t) := \alpha^{-(T+s)} \circ \tilde{\tau}_T^{V, \text{int}}(T+s, T+t) \circ \alpha^{T+t}, \mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathfrak{A}_0,$$

de manière à ce que l'automorphisme apparaissant dans (4.1.2) soit égal à $\hat{\tau}_T^{V, \text{int}}(-1, 0)$.

Remarquons également que :

$$\hat{\tau}_T^V(s, t)(\psi^{(*)})(f) = \psi^{(*)}(\hat{u}_T^V(s, t)f),$$

et que $\{\hat{u}_T^V(s, t)\}_{s, t \in \mathbb{R}}$ est un propagateur à deux paramètres, tandis que $\{\hat{\tau}_T^V(s, t)\}_{s, t \in \mathbb{R}}$ et $\{\hat{\tau}_T^{V, \text{int}}(s, t)\}_{s, t \in \mathbb{R}}$ sont des dynamiques quantiques à deux paramètres.

4.2 Étude de l'évolution libre

Nous allons tout d'abord, dans cette section, établir quelques propriétés des opérateurs libres, et étudier la limite (4.1.2) pour $I = 0$.

Lemme 4.2.1. *La limite forte*

$$\hat{u}_\infty^0(s, t) := \text{s-lim}_{T \rightarrow +\infty} \hat{u}_T^0(s, t)$$

existe, et la convergence est uniforme pour $a \leq s \leq t \leq b$, pour tout $a \leq b$. De plus, $\{\hat{u}_\infty^0(s, t)\}_{s, t \in \mathbb{R}}$ est un propagateur à deux paramètres donné par :

$$\hat{u}_\infty^0(s, t)f = \begin{pmatrix} \gamma^{2(t-s)} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, f \in \mathfrak{h}_0.$$

Remarque 4.2.2. *La convergence ci-dessus n'est vérifiée a priori que pour $s \leq t$. Malgré cela, la limite $\hat{u}_\infty^0(s, t)$ est définie pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On peut obtenir facilement une expression explicite de $\hat{u}_T^0(s, t)$ grâce à la formule donnée par la Proposition 1.2.2, donnée dans [Bac00, Lemme VI.3]. Nous savons donc que, si $\psi(s, \cdot) := u^0(s, t)f(\cdot)$, pour $f \in \mathfrak{h}_t$, alors : On a :

$$\psi_1(s, x) = f_1(x - s + t),$$

$$\psi_2(s, x) = \begin{cases} (\lambda \circ \tau(x + s))^{-1} f_1(x + t + s - 2\tau(x + s)) & \text{si } z(s) < x < z(t) + t - s, \\ f_2(x - t + s) & \text{si } x > z(t) + t - s \end{cases},$$

où λ est le coefficient de réflexion introduit en Section 1.1, et la fonction $y \mapsto \tau(y)$ est l'inverse de la fonction $s \mapsto s + z(s)$ (voir [Bac00, Equ. VI.40]). Un calcul direct donne ensuite :

$$(u_T^0(s, t)f)_1(x) = f_1(x + 2(t - s)),$$

$$(u_T^0(s, t)f)_2(x) = \begin{cases} \lambda \circ \tau(x)^{-1} f_1(x + 2(T + t) - 2\tau(x + s)), \\ \text{si } \tilde{z}(T + s) < x < \tilde{z}(T + t); \\ f_2(x) \text{ si } x > \tilde{z}(T + t), \end{cases}$$

où $\tilde{z}(\sigma) := \sigma + z(\sigma) \in o(\sigma^0)$ d'après (1.1.3). En utilisant cette propriété et la compacité de f , on voit que :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \hat{u}_T^0(s, t)f = \begin{pmatrix} \gamma^{2(t-s)} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

uniformément pour $a \leq s \leq t \leq b$. □

Nous allons maintenant établir ce résultat pour un V arbitraire :

Lemme 4.2.3. *La limite forte*

$$\text{s-lim}_{T \rightarrow +\infty} \hat{u}_T^V(s, t) = \hat{u}_\infty^0(s, t)$$

existe, et la convergence est uniforme pour $a \leq s \leq t \leq b$, pour tout $a \leq b$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que :

$$\partial_s u^V(s, t)f - i b_s^V u^V(s, t)f = 0,$$

et que :

$$\partial_s u^0(s, t)f - i b_s^V u^0(s, t)f = -i V u^0(s, t)f.$$

On en tire (par la méthode de variation de la constante) :

$$u^0(s, t)f - u^V(s, t)f = -i \int_t^s u^V(s, \sigma) V u^0(\sigma, t)f d\sigma.$$

D'où :

$$\|u^0(T + s, T + t)f - u^V(T + s, T + t)f\| \leq \int_{T+t}^{T+s} \|V u^0(\sigma, T + t)f\| d\sigma,$$

et donc :

$$\begin{aligned} & \|u^0(T + s, T + t)\gamma^{-z(T+t)}f - u^V(T + s, T + t)\gamma^{-z(T+t)}f\| \\ & \leq \int_{T+t}^{T+s} \|V u^0(\sigma, T + t)\gamma^{-z(T+t)}f\| d\sigma. \end{aligned}$$

Supposons que $\text{Supp } f \subset [a, b]$. Alors :

$$\text{Supp } \gamma^{-z(T+t)}f \subset [a + z(T + t), b + z(T + t)],$$

donc :

$$\text{Supp } u^0(\sigma, T+t)\gamma^{-z(T+t)}f \subset [a+z(T+t)+t+T-\sigma, b+z(T+t)-T-t+\sigma],$$

et donc, pour T assez grand, $-1 \leq s \leq 0$ et $0 \leq t \leq 1$:

$$\text{Supp } u^0(\sigma, T+t)\gamma^{-z(T+t)}f \subset [a-T-1, b-T+1].$$

Compte tenu de la décroissance de V , on en déduit que :

$$\|\hat{u}_T^V(s, t) - \hat{u}_T^0(s, t)\| \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

uniformément en s et t . □

Comme $\tau^V(s, t)$ est une dynamique libre, on en déduit immédiatement :

Lemme 4.2.4.

$$\hat{\tau}_\infty^0(s, t) := \text{s-lim}_{T \rightarrow +\infty} \hat{\tau}_T^V(s, t)$$

existe sur \mathfrak{A}_0 et la convergence est uniforme en s et t pour $-1 \leq s \leq t \leq 0$.

4.3 Effet Hawking en interaction III

Nous traitons, dans cette section, du problème en interaction. On ajoute donc un terme d'interaction non-linéaire, dépendant du temps, dont le support est localisé à la surface de l'étoile. Nous nous plaçons donc dans le cadre décrit plus haut (Section 4.1) :

Proposition 4.3.1. *Soit $\hat{\tau}_\infty^{0,\text{int}}(s, t)$ la dynamique en interaction obtenue par le procédé décrit en A.5.5 à partir de la dynamique libre $\hat{\tau}_\infty^0(s, t)$ et de l'interaction I . Alors :*

$$\text{s-lim}_{T \rightarrow +\infty} \hat{\tau}_T^{V,\text{int}}(s, t) = \hat{\tau}_\infty^{0,\text{int}}(s, t)$$

existe, et la convergence est uniforme pour $a \leq s \leq t \leq b$, pour tout $a \leq b$.

Démonstration. Soit $R_T(s, t)$ l'opérateur unitaire obtenu dans le Lemme A.5.5 de l'interaction dépendante du temps $I_T(\cdot)$.

Alors on a :

$$\tau^{V,\text{int}}(s, t)(A) = \alpha^{-(T+s)} R_{T+s}(T+s, T+t) \times \hat{\tau}_T^V(s, t)(A) \times \alpha^{-(T+s)} R_{T+s}(T+s, T+t)^*, \quad A \in \mathfrak{A}_0.$$

D'après la Proposition 4.3.1, il suffit donc de montrer que :

$$R_\infty(s, t) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \alpha^{-(T+s)} R_{T+s}(T+s, T+t) \text{ existe.}$$

Or, d'après le Lemme A.5.4, on a :

$$\begin{aligned}
(4.3.1) \quad & \alpha^{-(T+s)} R_{T+s}(T+s, T+t) \\
&= \sum_{n \geq 0} (-i)^n \int_{T+s \leq t_n \dots \leq t_1 \leq T+t} \alpha^{-(T+s)} I_T(T+s, t_n) \dots \alpha^{-(T+s)} I_T(T+s, t_1) dt_n \dots dt_1 \\
&= \sum_{n \geq 0} (-i)^n \int_{s \leq t_n \dots \leq t_1 \leq t} \alpha^{-(T+s)} I_T(T+s, T+t_n) \dots \alpha^{-(T+s)} I_T(T+s, T+t_1) dt_n \dots dt_1
\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\alpha^{-(T+s)} I_T(T+s, T+\sigma) = \mathbf{1}_{[-1,0]}(s) \hat{\tau}_T^V(s, \sigma)(I).$$

On sait de plus, d'après le Lemme 4.2.4, que :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \hat{\tau}_T^V(s, \sigma)(I) = \hat{\tau}_\infty^0(s, \sigma)(I),$$

uniformément pour $-1 \leq s \leq \sigma \leq 0$. Par conséquent, en utilisant le fait que la convergence des séries en 4.3.1 est uniforme en T , nous passons à la limite dans les sommes et les intégrales, qui portent sur des régions compactes. La limite :

$$\hat{R}_\infty(s, t) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \alpha^{-(T+s)} R_T(T+s, T+t)$$

est égale à l'opérateur unitaire obtenue dans le Lemme A.5.5 à partir de la dynamique libre $\hat{\tau}_\infty^0(s, t)$ et de l'interaction I . On a donc :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \hat{\tau}_T^{V, \text{int}}(T+s, T+t)(A) = \hat{R}_\infty(s, t) \times \hat{\tau}_\infty^0(s, t)(A) \times \hat{R}_\infty(s, t)^* = \hat{\tau}_\infty^{0, \text{int}}(s, t)(A).$$

Ceci termine la démonstration. \square

Nous pouvons désormais énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 4.3.2.

$$\omega_{0, \text{vac}}^V(\hat{\tau}_T^{V, \text{int}}(0, T) \circ \alpha^T(A)) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \omega_{\text{lim}}^{\text{III}}(A),$$

où :

$$\omega_{\text{lim}}^{\text{III}}(A) := \omega_{\text{lim}}^0(\hat{\tau}_\infty^{0, \text{int}}(-1, 0)(A)).$$

Rappelons que ω_{lim}^0 est défini dans le Théorème 1.3.5.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 1.3.5 à la convergence démontrée précédemment. On a alors :

$$\begin{aligned}
& \omega_{0,\text{vac}}^V \left(\tau_T^{V,\text{int}}(0, T) \circ \alpha^{-z(T)}(A) \right) \\
&= \omega_{0,\text{vac}}^V \left(\tau_T^{V,\text{int}}(0, T-1) \circ \alpha^{-z(T-1)}(\hat{\tau}_\infty^{V,\text{int}}(-1, 0)A) \right) + o(T^0) \\
&= \omega_{0,\text{vac}}^V \left(\tau^V(0, T-1) \circ \alpha^{-z(T-1)}(\hat{\tau}_\infty^{V,\text{int}}(-1, 0)A) \right) + o(T^0),
\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \omega_{0,\text{vac}}^V \left(\tau_T^{V,\text{int}}(0, T) \circ \alpha^{-z(T)}(A) \right) = \omega_{\text{lim}}^0 \left(\hat{\tau}_\infty^{V,\text{int}}(-1, 0)(A) \right).$$

□

Annexe A

C^* -algèbres

La structure de C^* -algèbre est très souvent utilisée pour décrire les observables d'un système quantique. Elle est tout particulièrement utile pour exprimer les propriétés de causalité d'Einstein d'un champ quantique relativiste. Tout au long de cette thèse, nous travaillons sur une structure de C^* -algèbre, souvent indépendante de toute représentation. Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions et propriétés des C^* -algèbres, puis nous concentrer sur les algèbres CAR. Ensuite, nous expliciterons la construction, plusieurs fois utilisée, de la loi exponentielle fermionique, puis celle d'une dynamique sur une C^* -algèbre. De nombreux ouvrages traitent de ce sujet. Parmi ceux-ci, on peut inviter le lecteur souhaitant plus de détails à consulter [BR79].

A.1 Définitions et propriétés générales

Définition A.1.1. *On dit que \mathfrak{A} est une algèbre normée si \mathfrak{A} est un algèbre équipée d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant :*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad A, B \in \mathfrak{A}.$$

C'est une algèbre de Banach si elle est complète pour cette norme.

Définition A.1.2. *On dit que \mathfrak{A} est une C^* -algèbre si c'est une algèbre de Banach sur \mathbb{C} munie d'une involution anti-linéaire $*$ telle que :*

$$(AB)^* = B^*A^*, \quad \forall A, B \in \mathfrak{A},$$

et vérifiant :

$$\|A^*\| = \|A\|, \quad \|A^*A\| = \|A\|^2, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Par exemple, si \mathcal{H} est un espace de Hilbert, alors $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, muni de la conjugaison hermitienne et de la norme d'opérateur est une C^* -algèbre.

Définition A.1.3. L'ensemble des éléments positifs de \mathfrak{A} , noté \mathfrak{A}_+ , est l'ensemble des éléments de la forme A^*A . De manière équivalente, ce sont les éléments auto-adjoints dont le spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ .

Définition A.1.4. Une forme linéaire sur \mathfrak{A} est dite positive si elle envoie les éléments positifs de \mathfrak{A} sur les nombres positifs.

Nous pouvons ainsi définir l'importante notion d'état sur une C^* -algèbre. Cette notion sera abordée plus en détail dans la Section A.3.

Définition A.1.5. Une forme linéaire positive ω est appelée un état si elle est de norme 1. Dans le cas d'une C^* -algèbre unitaire, c'est équivalent à ce qu'elle vérifie $\omega(\mathbf{1}) = 1$.

Certaines algèbres sont construites à partir d'éléments et de relations entre ces éléments. C'est notamment le cas des algèbres CAR étudiées dans la Section A.2.

Définition A.1.6. Soit E un ensemble. On notera $\mathbb{K}_{\text{fin}}^E$ l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires finies de la forme $\sum_{e \in E} \lambda_e e$.

On définit alors le produit tensoriel algébrique :

Définition A.1.7. Soit \mathcal{Y}, \mathcal{W} deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Soit $\mathcal{Z} := \mathbb{K}_{\text{fin}}^{(\mathcal{Y}, \mathcal{W})}$. On notera \mathcal{Z}_0 le sous-espace vectoriel de \mathcal{Z} engendré par les éléments de la forme :

$$(y, w_1 + w_2) - (y, w_1) - (y, w_2),$$

$$(y_1 + y_2, w) - (y_1, w) - (y_2, w),$$

$$(\lambda y, w) - \lambda(y, w),$$

$$(y, \lambda w) - \lambda(y, w),$$

pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $y_i \in \mathcal{Y}$, $w_i \in \mathcal{W}$. Le produit tensoriel algébrique de \mathcal{Y} et \mathcal{W} est alors défini par :

$$\mathcal{Y} \otimes^{\text{alg}} \mathcal{W} := \mathcal{Z} / \mathcal{Z}_0.$$

La formule $y \otimes w := (y, w) + \mathcal{Z}_0$ définit l'application bilinéaire :

$$\mathcal{Y} \times \mathcal{W} \ni (y, w) \mapsto y \otimes w \in \mathcal{Y} \otimes^{\text{alg}} \mathcal{W},$$

appelée multiplication tensorielle.

Notons que si \mathcal{Y}, \mathcal{W} sont deux espaces de Hilbert, alors $\mathcal{Y} \otimes^{\text{alg}} \mathcal{W}$ est muni d'un unique produit scalaire tel que :

$$(y_1 \otimes w_1 | y_2 \otimes w_2) := (y_1 | y_2)(w_1 | w_2), y_i \in \mathcal{Y}, w_i \in \mathcal{W}.$$

Définition A.1.8. On définit le produit tensoriel de \mathcal{Y} et \mathcal{W} , noté $\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W}$ comme étant le complété de $\mathcal{Y} \otimes^{\text{alg}} \mathcal{W}$ pour la norme issue de ce produit scalaire.

Nous pouvons maintenant définir une algèbre engendrée par des générateurs et relations :

Définition A.1.9. Soit E un ensemble.

1. L'algèbre unitaire universelle sur \mathbb{K} avec générateurs E est définie par :

$$\mathfrak{A}(E, \mathbb{1}) := \otimes^{\text{alg}} \mathbb{K}^E,$$

en notant $e_1 \dots e_n$ au lieu de $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$.

2. La $*$ -algèbre unitaire universelle sur \mathbb{K} avec générateurs E est définie par $\mathfrak{A}(E \sqcup E^*, \mathbb{1})$, équipée de l'involution $*$ telle que : $(e_1 \dots e_n)^* = e_n^* \dots e_1^*$ et $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$.

Définition A.1.10. Soit $\mathcal{R} \subset \mathfrak{A}(E, \mathbb{1})$. On notera $\mathcal{I}(\mathcal{R})$ le plus petit idéal contenant \mathcal{R} , appelé idéal engendré par \mathcal{R} .

1. L'algèbre unitaire universelle sur \mathbb{K} avec générateurs E et relations $R = 0, R \in \mathcal{R}$, est définie par $\mathfrak{A}(E, \mathbb{1})/\mathcal{I}(\mathcal{R})$.
2. Supposons que \mathcal{R} soit $*$ -invariant. La $*$ -algèbre unitaire universelle sur \mathbb{K} avec générateurs E et relations $R = 0$ est définie par $\mathfrak{A}(E \sqcup E^*, \mathbb{1})/\mathcal{I}(\mathcal{R})$.

A.2 Algèbres CAR

Nous allons nous intéresser dans cette section à la définition et aux propriétés d'un type particulier de C^* -algèbre, les algèbres CAR. Elles forment la structure de base de l'étude des champs fermioniques. Pour le reste de cette section, nous allons noter \mathfrak{h} un espace de hilbert complexe, muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

Définition A.2.1. L'algèbre CAR algébrique sur \mathfrak{h} , notée $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h})$, est la C^* -algèbre unitaire engendrée par $\mathbb{1}$ et $\psi(h), h \in \mathfrak{h}$ et les relations :

$$\psi(h_1 + h_2) = \psi(h_1) + \psi(h_2), h_i \in \mathfrak{h},$$

$$\psi(\lambda h) = \bar{\lambda}\psi(h), \quad h \in \mathfrak{h}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$[\psi(h_1), \psi(h_2)]_+ = 0, \quad h_i \in \mathfrak{h},$$

$$[\psi(h_1), \psi^*(h_2)]_+ = (h_1|h_2)\mathbb{1}, \quad h_i \in \mathfrak{h},$$

où $[\cdot, \cdot]_+$ désigne l'anti-commutateur : $[A, B]_+ = AB + BA$, $A, B \in \mathfrak{A}$.

Il est connu que $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h})$ est simple, et possède donc une unique norme C^* . On peut obtenir une expression concrète de cette norme en prenant la représentation :

$$\begin{aligned} \pi &: \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{B}(\Gamma_a(\mathfrak{h})) \\ \psi^{(*)}(h) &\mapsto a^{(*)}(h). \end{aligned}$$

Pour plus de détails, se référer à la section B plus loin.

Définition A.2.2. *L'algèbre CAR sur \mathfrak{h} , notée $\text{CAR}(\mathfrak{h})$ est le complété de $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h})$ pour son unique norme C^* .*

Les produits de $\psi(h_i)$, $\psi^*(g_i)$ sont appelés *monômes*. Un monôme A possède un degré noté $\text{deg } A$. Nous utiliserons parfois le *bi-degré* (n, p) , où n désigne le nombre d'occurrences de ψ^* et p celui de ψ .

Définition A.2.3. *Soit P l'automorphisme de parité défini par :*

$$P\psi^{(*)}(f) = -\psi^{(*)}(f).$$

On notera $\text{CAR}_0(\mathfrak{h})$, respectivement $\text{CAR}_1(\mathfrak{h})$ la sous- $*$ -algèbre de $\text{CAR}(\mathfrak{h})$ des éléments pairs, respectivement impairs. $\text{CAR}_0(\mathfrak{h})$ est également engendrée par les éléments de la forme $\prod_1^n \psi^*(f_i) \prod_1^p \psi(g_i)$, $n + p$ pair.

On notera $\mathfrak{A}_{0/1}(\mathfrak{h}) := \text{CAR}_{0/1}(\mathfrak{h})$.

Si \mathfrak{h}_1 est un sous-espace fermé de \mathfrak{h} , alors $\text{CAR}(\mathfrak{h}_1)$ est une sous- C^* -algèbre de $\text{CAR}(\mathfrak{h})$. La construction inverse est la suivante :

Définition A.2.4 (Espérance conditionnelle). *Soit $E_{\mathfrak{h}_1} : \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}) \rightarrow \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_1)$ définie par :*

$$E_{\mathfrak{h}_1}\psi^{(*)}(f) := \psi^{(*)}(\pi f), \quad f \in \mathfrak{h},$$

où $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1$ est la projection orthogonale. Alors $E_{\mathfrak{h}_1}$ s'étend en un $*$ -homomorphisme de $\text{CAR}(\mathfrak{h})$ dans $\text{CAR}(\mathfrak{h}_1)$.

On peut facilement vérifier cette propriété en utilisant les représentations de Fock de $\text{CAR}(\mathfrak{h})$ (resp. $\text{CAR}(\mathfrak{h}_1)$) sur $\Gamma_a(\mathfrak{h})$ (resp. $\Gamma_a(\mathfrak{h}_1)$) et le second quantifié $\Gamma(\pi)$. De plus, si $\{\mathfrak{h}_i\}_{i \in I}$ est un ensemble filtrant¹ de sous espaces fermés de \mathfrak{h} avec $\cup_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ dense dans \mathfrak{h} alors

$$\text{s-lim}_{i \rightarrow +\infty} E_{\mathfrak{h}_i} = \mathbb{1}, \text{ dans } \text{CAR}(\mathfrak{h}).$$

De nombreux résultats, notamment de scattering, se démontrent par la méthode de Cook. Cette méthode ramène souvent les démonstrations à des études de commutateurs. Nous avons utilisé fréquemment le résultat suivant :

Lemme A.2.5. *Posons $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ et, pour $J \Subset \mathbb{R}$, posons $\mathfrak{A}(J) := \text{CAR}(L^2(J, \mathbb{C}^2))$. Soit $A \in \mathfrak{A}(J)$ et $B \in \mathfrak{A}_0(I)$, avec I et J intervalles compacts disjoints. Alors $[A, B] = 0$.*

Démonstration. Cela découle simplement des CAR et de la nullité du produit scalaire de deux fonctions à supports disjoints, en utilisant la parité de B . \square

A.3 État sur une C^* -algèbre

Nous avons défini plus haut la notion d'état sur une C^* -algèbre. Parmi ces formes linéaires, on peut distinguer celles données par leur fonction à deux points, très utilisées en physique et dans nos travaux.

Définition A.3.1. *Un état ω sur $\text{CAR}(\mathfrak{h})$ est un état quasi-libre (invariant de jauge) si :*

$$\omega\left(\prod_{i=1}^n \psi^*(f_i) \prod_{i=1}^p \psi(g_i)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \omega(\psi^*(f_i) \psi(g_{\sigma(i)})) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur c borné auto-adjoint sur \mathfrak{h} défini par :

$$\omega(\psi^*(f) \psi(g)) =: (g|cf)_{\mathfrak{h}}, \quad f, g \in \mathfrak{h}$$

est appelé covariance de ω .

Proposition A.3.2. *Une condition nécessaire et suffisante, pour un opérateur c autoadjoint, pour être la covariance d'un état quasi-libre est que :*

$$0 \leq c \leq \mathbb{1}.$$

1. Un ensemble ordonné (I, \leq) est dit *filtrant* si : $\forall (i, j) \in I^2, \exists f \in I, i \leq k \text{ et } j \leq k$.

A.4 Loi exponentielle fermionique

Dans cette section, nous allons expliciter la construction de la structure de produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué utilisée pour décomposer une algèbre CAR définie sur une somme directe de deux espaces de Hilbert. Il est évident que nous n'avons pas, si $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, $\text{CAR}(\mathfrak{h}) = \text{CAR}(\mathfrak{h}_1) \oplus \text{CAR}(\mathfrak{h}_2)$. Nous devons donc procéder différemment, afin de tenir compte de la structure fermionique associée à $\text{CAR}(\mathfrak{h})$.

A.4.1 Produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué

Définition A.4.1. Soit \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 deux espaces de Hilbert. Nous équipons l'espace vectoriel $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_1) \otimes \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_2)$ de la structure de $*$ -algèbre définie par :

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) := (-1)^{\deg(a_2)\deg(b_1)} a_1 b_1 \otimes a_2 b_2, \quad a_i, b_i \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_i),$$

$$(a_1 \otimes a_2)^* := a_1^* \otimes a_2^*, \quad a_i \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_i),$$

pour a_i, b_i monômes de $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_i)$, et étendons ces opérations à $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_1) \otimes \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_2)$ par linéarité. Nous noterons $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_2)$ la $*$ -algèbre ainsi obtenue.

Proposition A.4.2. L'application Φ définie par :

$$\Phi : (\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2), \times) \rightarrow (\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_2), \cdot)$$

$$\psi^{(*)}(f_1 \oplus f_2) \mapsto \psi^{(*)}(f_1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \psi^{(*)}(f_2)$$

s'étend en un $*$ -isomorphisme d'algèbres.

Démonstration. On vérifie facilement que Φ préserve les relations d'anticommutation, i.e. que :

$$[\Phi\psi(f), \Phi\psi(g)]_+ = [\Phi\psi^*(f), \Phi\psi^*(g)]_+ = 0$$

et

$$[\Phi\psi(f), \Phi\psi^*(g)]_+ = (g|f)\mathbf{1}_{\mathfrak{h}}.$$

□

Remarque A.4.3. Si $u : \mathfrak{h} \rightarrow \tilde{\mathfrak{h}}$ est une isométrie, alors l'application $\psi^{(*)}(h) \mapsto \psi^{(*)}(uh)$ s'étend en un $*$ -homomorphisme de $\text{CAR}(\mathfrak{h})$ dans $\text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}})$. Cela nous permet de voir $\text{CAR}(\mathfrak{h}_i)$, $i = 1, 2$ comme une $*$ -sous-algèbre de $\text{CAR}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$. Si $A_i \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_i)$, nous continuerons à noter A_i son image dans $\text{CAR}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$. Ainsi, nous avons clairement :

$$\Phi(A_1 A_2) = A_1 \otimes A_2, \quad A_i \in \text{CAR}(\mathfrak{h}_i).$$

Définition A.4.4. Nous appellerons *produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué* de $\text{CAR}(\mathfrak{h}_1)$ et $\text{CAR}(\mathfrak{h}_2)$, noté $\widehat{\text{CAR}}(\mathfrak{h}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}(\mathfrak{h}_2)$ la fermeture de $\text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}_{\text{alg}}(\mathfrak{h}_2)$ pour la norme $\|\Phi^{-1} \cdot\|$.

A.4.2 Produits tensoriel d'états et de morphismes

Nous allons maintenant introduire le *produit tensoriel d'états*. On rappelle que la notion d'état sur une C^* -algèbre est abordée en Section A.3.

Lemme A.4.5. Soient ω_i des états sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_i)$, $i = 1, 2$. Si ω_1 est pair, alors $\omega_1 \otimes \omega_2$ est un état sur $\widehat{\text{CAR}}(\mathfrak{h}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}(\mathfrak{h}_2)$.

Démonstration. Il nous suffit de démontrer la positivité. Si $A = \sum_1^n \lambda_i a_{1,i} \otimes a_{2,i}$, avec $a_{k,i}$ monômes et $\lambda_i \in \mathbb{C}$, alors, d'après la définition A.4.1, on a :

$$A^*A = \sum_{i,j} \bar{\lambda}_i \lambda_j (-1)^{d_{2,i}(d_{1,i}+d_{1,j})} a_{1,i}^* a_{1,j} \otimes a_{2,i}^* a_{2,j},$$

avec $d_{k,i} = \deg a_{k,i}$. Comme ω_1 est pair, on obtient :

$$\omega(A^*A) = \sum_{i,j} \bar{\lambda}_i \lambda_j \omega_1(a_{1,i}^* a_{1,j}) \omega_2(a_{2,i}^* a_{2,j}).$$

La positivité découle alors du fait que le produit point par point de deux matrices auto-adjointes positives est auto-adjoint positif (théorème du produit de Schur). \square

Définition A.4.6. Soient ω_i des états sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_i)$, $i = 1, 2$, avec ω_1 pair. Le produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué $\omega_1 \widehat{\otimes} \omega_2$ est l'état sur $\widehat{\text{CAR}}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ égal à $\omega_1 \otimes \omega_2 \circ \Phi$.

On construit le produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué de deux $*$ -morphisms de manière analogue.

Soit donc, pour $i = 1, 2$, \mathfrak{h}_i un espace de Hilbert canoniquement inclus dans $\tilde{\mathfrak{h}}_i$, et γ_i un $*$ -morphisme de $\text{CAR}(\mathfrak{h}_i)$ dans $\text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_i)$. Enfin, notons P_i (respectivement \tilde{P}_i) l'automorphisme de parité sur $\text{CAR}(\mathfrak{h}_i)$ (respectivement $\text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_i)$).

Proposition A.4.7. Si γ_2 préserve la parité, i.e. si $\gamma_2 \circ P_2 = \tilde{P}_2 \circ \gamma_2$, alors

$$\gamma_1 \otimes \gamma_2 : \text{CAR}(\mathfrak{h}_1) \otimes \text{CAR}(\mathfrak{h}_2) \rightarrow \text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_1) \otimes \text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_2)$$

préserve \cdot et définit donc un $*$ -morphisme de $\widehat{\text{CAR}}(\mathfrak{h}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}(\mathfrak{h}_2)$ dans $\widehat{\text{CAR}}(\tilde{\mathfrak{h}}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_2)$.

Comme nous avons défini Φ précédemment, nous définissons $\tilde{\Phi}$, isomorphisme entre $\text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_2)$ et $\text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_1) \widehat{\otimes} \text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_2)$.

Définition A.4.8. *Le produit tensoriel \mathbb{Z}_2 -gradué des deux $*$ -morphisme γ_1 et γ_2 est donné par :*

$$\gamma_1 \widehat{\otimes} \gamma_2 := \tilde{\Phi}^{-1} \circ \gamma_1 \otimes \gamma_2 \circ \Phi$$

et définit un $*$ -morphisme de $\text{CAR}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ dans $\text{CAR}(\tilde{\mathfrak{h}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_2)$.

A.5 Dynamique sur une C^* -algèbre

Nous allons supposer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, \mathfrak{A}_t est une C^* -algèbre telle que $\mathfrak{A}_t \subset \mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_\infty$ lorsque $s \leq t$, pour une certaine C^* -algèbre \mathfrak{A}_∞ . De plus, nous pouvons supposer que pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une $*$ -sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{A}}_{t_0}$ dense dans \mathfrak{A}_{t_0} telle qu'un $A \in \tilde{\mathfrak{A}}_{t_0}$ appartient à \mathfrak{A}_t pour t proche de t_0 . Dans ce cadre, l'évolution d'une observable est donnée par une *dynamique*, définie comme suit :

Définition A.5.1. *Une famille $\{\tau(s, t)\}_{s, t \in \mathbb{R}}$ est une dynamique quantique (à 2 paramètres) si :*

1. $\tau(s, t) : \mathfrak{A}_t \rightarrow \mathfrak{A}_s$,
2. $\tau(t, t) = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}_t}$, $t \in \mathbb{R}$,
3. $\tau(s, t')\tau(t', t) = \tau(s, t)$, $s, t, t' \in \mathbb{R}$,
4. $\forall (s_0, t_0)$, $\forall A \in \tilde{\mathfrak{A}}_{t_0}$, l'application $(s, t) \rightarrow \tau(s, t)A$ est continue au point (s_0, t_0) .

Rappelons également la définition d'un *propagateur*. Pour que cette définition ait un sens, comme précédemment, nous nous plaçons dans le cadre suivant : nous allons supposer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, \mathfrak{h}_t est un espace de Hilbert tel que $\mathfrak{h}_t \subset \mathfrak{h}_s \subset \mathfrak{h}_\infty$ lorsque $s \leq t$, pour un certain espace de Hilbert \mathfrak{h}_∞ . De plus, nous pouvons supposer que pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un espace de Hilbert $\tilde{\mathfrak{h}}_{t_0}$ dense dans \mathfrak{h}_{t_0} telle qu'un $f \in \tilde{\mathfrak{h}}_{t_0}$ appartient à \mathfrak{h}_t pour t proche de t_0 . Ainsi, $\tilde{\mathfrak{h}}_{t_0}$ est l'analogue de $\tilde{\mathfrak{A}}_{t_0}$ pour un Hilbert \mathfrak{h}_{t_0}). Dans ce cadre, on peut définir un propagateur de la façon suivante :

Définition A.5.2. *On appelle propagateur une famille d'opérateurs $\{u(s, t)\}_{t, s \in \mathbb{R}} \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}_t, \mathfrak{h}_s)$ telle que :*

- i) $\{u(s, t)\} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}_t, \mathfrak{h}_s)$,
- ii) $u(t, t) = \mathbb{1}_{\mathfrak{h}_t}$, $t \in \mathbb{R}$,
- iii) $u(s, t')u(t', t) = u(s, t)$, $s, t, t' \in \mathbb{R}$,

iv) $\forall (s_0, t_0), \forall \psi \in \tilde{\mathfrak{h}}_{t_0}$, l'application $(s, t) \rightarrow u(s, t)\psi \in \mathfrak{h}_\infty$ est continue au point (s_0, t_0) .

Remarque A.5.3. La donnée d'un propagateur permet ainsi de définir une dynamique quantique (libre) τ , par :

$$\tau(s, t)(\psi^{(*)}(f)) := \psi^{(*)}(u(s, t)f).$$

Les résultats suivants permettent de perturber une dynamique et de construire la nouvelle dynamique associée.

Lemme A.5.4. Soit \mathfrak{A} une C^* -algèbre et $\mathbb{R} \ni t \mapsto I(t) \in \mathfrak{A}$ une application continue vérifiant $I^*(t) = I(t)$. Alors il existe une unique application C^1

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \mapsto U_{I(\cdot)}(s, t) \in \mathfrak{A},$$

telle que :

- i) $\partial_t U_{I(\cdot)}(s, t) = -iU_{I(\cdot)}(s, t)I(t)$, $s, t \in \mathbb{R}$,
- ii) $\partial_s U_{I(\cdot)}(s, t) = -iI(s)U_{I(\cdot)}(s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$,
- iii) $U_{I(\cdot)}(t, t) = \mathbb{1}$.

De plus, on a :

- iv) $U_{I(\cdot)}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{s \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq t} I(t_n) \dots I(t_1) dt_n \dots dt_1$,
- v) $U_{I(\cdot)}(s, t')U_{I(\cdot)}(t', t) = U_{I(\cdot)}(s, t)$, $s, t, t' \in \mathbb{R}$,
- vi) $U_{I(\cdot)}(s, t)$ est unitaire dans \mathfrak{A} .

Nous allons maintenant nous pencher sur le cas de $U_{I(\cdot)}(s, t)$ quand $t \mapsto I(t)$ est obtenu à partir d'une dynamique quantique. Introduisons la notation suivante : si $\mathfrak{A}_t, \mathfrak{A}_s$ sont deux C^* -algèbres, nous noterons $T : \mathfrak{A}_t \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_s$ pour signifier que T est un $*$ -isomorphisme de \mathfrak{A}_t dans \mathfrak{A}_s .

Lemme A.5.5. Soit \mathfrak{A}_t pour $t \in \mathbb{R}$ une famille de C^* -algèbre vérifiant les conditions ci-dessus, et $\tau^0(s, t) : \mathfrak{A}_t \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_s$ une dynamique quantique. Soit $I \in \cap_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{A}_t$ vérifiant $I^* = I$. Posons :

$$I(s, t) := \tau^0(s, t)(I) \in \mathfrak{A}_s, \quad R_s(t', t) := U_{I(s, \cdot)}(t', t) \in U(\mathfrak{A}_s).$$

Alors :

(1)

$$\tau^0(s, t')R_{t'}(t', t) = R_s(t', t), \quad s, t, t' \in \mathbb{R};$$

(2) Soit :

$$\tau(s, t)(A) := R_s(s, t)\tau^0(s, t)(A)R_s(s, t)^*, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Alors $\tau(s, t) : \mathfrak{A}_t \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_s$ est une dynamique quantique.

Démonstration. Différencier les deux membres par rapport à t dans (1) permet, en utilisant l'unicité du résultat du Lemme A.5.4, de démontrer la propriété. (2) découle directement de (1). \square

Remarque A.5.6. Supposons que $\mathfrak{A}_t \equiv \mathfrak{A}$ et que $\tau^0(s, t)(A) = e^{i(s-t)H_0} A e^{-i(s-t)H_0}$ pour un certain $H_0^* = H_0 \in \mathfrak{A}$. Alors $\tau(s, t)(A) = e^{i(s-t)H} A e^{-i(s-t)H}$ pour $H = H_0 + I$.

Annexe B

Représentations et espaces de Fock

B.1 Représentation

Nous avons présenté dans l'Annexe A les définitions et propriétés des C^* -algèbres abstraites. Il est possible de *représenter* des algèbres, i.e. de construire un homomorphisme d'une C^* -algèbre vers l'ensemble des opérateurs bornés sur un certain espace de Hilbert. Plus précisément :

Définition B.1.1. (\mathcal{H}, π) est une représentation d'une C^* -algèbre \mathfrak{A} si \mathcal{H} est un espace de Hilbert et π un $*$ -homomorphisme de \mathfrak{A} dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. π est dite fidèle si $\ker \pi = \{0\}$.

Soit \mathfrak{A} une C^* -algèbre, (\mathcal{H}, π) une représentation de \mathfrak{A} , Ω un vecteur normé de \mathcal{H} . Alors il est aisé de vérifier que :

$$(B.1.1) \quad \omega(A) := (\Omega | \pi(A) \Omega)$$

est un état sur \mathfrak{A} .

Définition B.1.2. Si (B.1.1) est vérifiée, on dit que Ω est un vecteur représentatif pour ω .

Définition B.1.3. $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ est une représentation cyclique de \mathfrak{A} si (\mathcal{H}, π) est une représentation de \mathfrak{A} et Ω est cyclique pour π (i.e. que $\{\pi(A)\Omega, A \in \mathfrak{A}\}$ est dense dans \mathcal{H}).

Le théorème suivant permet, pour un état ω donné sur une algèbre \mathfrak{A} , de construire une représentation cyclique de \mathfrak{A} pour ω .

Théorème B.1.4. [Gelfand-Najmark-Segal] Soit ω un état sur \mathfrak{A} . Alors il existe une représentation cyclique $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ telle que Ω_ω est un vecteur représentatif pour ω . Une telle représentation est unique à équivalence unitaire près, et appelée représentation GNS.

B.2 Espace de Fock fermionique

B.2.1 Définitions

Dans cette section, nous allons noter, pour un espace de Hilbert \mathfrak{h} :

$$\otimes^n \mathfrak{h} := \underbrace{\mathfrak{h} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{h}}_{n \text{ fois}}.$$

Définition B.2.1. Soit $\sigma \in S_n$, S_n désignant l'ensemble des permutations de n éléments. On définit l'opérateur d'antisymétrisation, agissant sur $\otimes^n \mathfrak{h}$:

$$\Theta_\sigma(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) := f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Définition B.2.2. On définit l'opérateur suivant, agissant sur $\otimes^n \mathfrak{h}$:

$$\Theta_a^n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \Theta_\sigma.$$

Définition B.2.3. On définit l'espace fermionique à n particules par :

$$\Gamma_a^n(\mathfrak{h}) := \Theta_a^n \otimes^n \mathfrak{h}.$$

et l'espace de Fock fermionique par :

$$\Gamma_a(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \Gamma_a^n(\mathfrak{h}).$$

Nous pouvons définir sur \mathfrak{h} les *opérateurs de création et d'annihilation* $a^*(u)$, $a(u)$ (voir par exemple [RS80]), qui satisfont les relations d'anti-commutation :

$$[a^*(u), a^*(v)]_+ = [a(u), a(v)]_+ = 0, [a(u), a^*(v)]_+ = (u|v)_\mathfrak{h} \mathbf{1}.$$

Nous décrivons ensuite le procédé souvent appelé *seconde quantification* permettant de décrire d'action sur $\Gamma_a(\mathfrak{h})$ d'un opérateur agissant sur \mathfrak{h} :

Définition B.2.4. Soit $p \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ une contraction. On pose :

$$\Gamma^n(p) := p^{\otimes n} \in \mathcal{B}(\otimes^n \mathfrak{h}),$$

$$\Gamma(p) := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \Gamma^n(p) \in \mathcal{B}(\Gamma_a(\mathfrak{h})).$$

De même, si $b \in Cl(\mathfrak{h})$, on pose :

$$d\Gamma^n(b) := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_h^{\otimes k-1} \otimes b \otimes \mathbb{1}_h^{\otimes n-k} \in Cl(\otimes^n \mathfrak{h}),$$

$$d\Gamma(b) := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} d\Gamma^n(b) \in Cl(\Gamma_a(\mathfrak{h})).$$

L'opérateur de nombre N est défini par :

$$N := d\Gamma(\mathbb{1}).$$

L'opérateur de parité I est défini par :

$$I := (-1)^N = \Gamma(-\mathbb{1}).$$

On a les propriétés bien connues suivantes :

Proposition B.2.5. *Soit $b, b_1, b_2 \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$, $p_1, p_2 \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ des contractions. Alors :*

$$\begin{aligned} \Gamma(e^b) &= e^{d\Gamma(b)}, \\ \Gamma(p_1 p_2) &= \Gamma(p_1) \Gamma(p_2), \\ [d\Gamma(b_1), d\Gamma(b_2)] &= d\Gamma([b_1, b_2]). \end{aligned}$$

B.2.2 Représentation de Fock associée à une structure de Kähler

Notons i la structure complexe sur \mathfrak{h} et $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire. Nous noterons $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ l'espace \mathfrak{h} considéré comme espace vectoriel réel.

Définition B.2.6. *Une structure de Kähler sur \mathfrak{h} est une anti-involution unitaire j agissant sur \mathfrak{h} .*

Remarquons que $\kappa := -ij$ est une involution auto-adjointe. En conséquence, \mathfrak{h} se décompose en la somme $\mathfrak{h}^+ \oplus \mathfrak{h}^-$, où $\mathfrak{h}^{\pm} := \mathbb{1}_{\{\pm 1\}}(\kappa)\mathfrak{h}$. On pose également $f^{\pm} := \mathbb{1}_{\{\pm 1\}}(\kappa)f$, $\forall f \in \mathfrak{h}$. Notons \mathcal{Z} l'espace vectoriel réel $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ équipé de la structure complexe j . Nous pouvons transformer \mathcal{Z} en espace de Hilbert en l'équipant du produit scalaire :

$$(u|v)_{\mathcal{Z}} := (u^+|v^+) + (v^-|u^-).$$

L'espace de Hilbert \mathcal{Z} est appelé *espace à une particule* (associé à la structure de Kähler j).

On peut désormais définir la *représentation de Fock* de $\text{CAR}(\mathfrak{h})$ dans $\Gamma_a(\mathcal{Z})$ en posant :

$$\psi_F(f) = \pi_F(\psi(f)) := \frac{1}{2}a^*(f^+) + \frac{1}{2}a(f^-), \quad f \in \mathfrak{h}.$$

L'opérateur $Q := d\Gamma(\kappa)$ agissant sur $\Gamma_a(\mathcal{Z})$ est usuellement appelé *opérateur de charge*. On a :

$$(B.2.1) \quad e^{i\theta Q} \psi_F^{(*)}(f) e^{-i\theta Q} = \psi_F(e^{i\theta} f), \quad f \in \mathfrak{h}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Si b est un opérateur auto-adjoint sur \mathfrak{h} qui commute avec j , alors $c := \kappa b$ est auto-adjoint sur \mathcal{Z} . L'opérateur $H = d\Gamma(c)$ agissant sur $\Gamma_a(\mathcal{Z})$ est usuellement appelé *l'hamiltonien* (quantique). On a :

$$(B.2.2) \quad e^{i t H} \psi_F^{(*)}(f) e^{-i t H} = \psi_F(e^{i t b} f), \quad f \in \mathfrak{h}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, le groupe unitaire $e^{i t H}$ implémente la dynamique générée par $e^{i t b}$ dans la représentation de Fock. Remarquons qu'afin de se conformer à l'usage, nous avons noté la structure complexe de $\Gamma_a(\mathcal{Z})$ dans (B.2.1) et (B.2.2).

B.2.3 Spectre et seconde quantification

Nous allons définir le second quantifié d'une partie de \mathbb{R} :

Définition B.2.7. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. On pose :*

$$d\Gamma(E) := \bigcup_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n E = \{0\} \cup E \cup (E + E) \cup \dots$$

On va maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition B.2.8. *Soit \mathfrak{h} un espace de Hilbert, et $\mathcal{H} = \Gamma_a(\mathfrak{h})$. Alors, pour tout b autoadjoint sur \mathfrak{h} :*

$$\sigma(d\Gamma(b)) = d\Gamma(\sigma(b)).$$

Cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme B.2.9. *Soient A_1 , resp. A_2 deux opérateurs auto-adjoints sur \mathfrak{h}_1 , resp. \mathfrak{h}_2 , et soit $A_+ = A_1 \oplus A_2$ sur $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, de domaine $\text{Dom}(A_+) = \text{Dom}(A_1) \oplus \text{Dom}(A_2)$ et $A_\times = A_1 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes A_2$ sur $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$, de domaine $\text{Dom}(A_\times) = \text{Dom}(A_1) \otimes \text{Dom}(A_2)$. Alors A_+ est essentiellement autoadjoint et*

$$(B.2.3) \quad \sigma(A_+) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2),$$

et A_\times est essentiellement autoadjoint et

$$(B.2.4) \quad \sigma(A_\times) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2).$$

Démonstration. (B.2.3) découle simplement de l'écriture matricielle de la résolvante de A :

$$(A - z)^{-1} = (A_1 - z)^{-1} \oplus (A_2 - z)^{-1} = \begin{pmatrix} (A_1 - z)^{-1} & 0 \\ 0 & (A_2 - z)^{-1} \end{pmatrix}$$

qui montre bien que le spectre de A est l'union des spectres de A_1 et A_2 .

(B.2.4) repose sur une formule de calcul fonctionnel. Posons d'abord : $\vec{A} = (A_1 \otimes \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_1 \otimes A_2)$. On a :

$$e^{i\vec{X} \cdot \vec{A}} = e^{i(X_1(A_1 \otimes \mathbb{1}_2) + X_2(\mathbb{1}_1 \otimes A_2))} = e^{iX_1 A_1} \otimes e^{iX_2 A_2}$$

d'une part. Et d'autre part :

$$e^{i\vec{X} \cdot \vec{A}} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\vec{X} \cdot \vec{\lambda}} d\mu(\vec{\lambda})$$

avec $d\mu(\vec{\lambda}) = d\mu_1(\lambda_1) \otimes d\mu_2(\lambda_2)$.

On en déduit : $\sigma(\vec{A}) = \sigma(A_1 \otimes \mathbb{1}_2) \times \sigma(\mathbb{1}_1 \otimes A_2)$. Et donc :

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2).$$

□

Nous introduisons maintenant l'opération connue sous le nom de *loi exponentielle fermionique* :

Définition B.2.10. Soit h_1, h_2 , et $b_i \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}_i)$ pour $i = 1, 2$. On pose :

$$U : \Gamma_a(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) \rightarrow \Gamma_a(\mathfrak{h}_1) \otimes \Gamma_a(\mathfrak{h}_2)$$

$$\Omega \rightarrow \Omega \otimes \Omega,$$

$$Ua^{(*)}(b_1 + b_2) := [a^{(*)}(b_1) \otimes \mathbb{1}_2 + (-\mathbb{1}_1)^{N_1} \otimes a^{(*)}(b_2)]U,$$

et U s'étend par linéarité et densité en un opérateur unitaire.

On a alors :

Proposition B.2.11.

$$(B.2.5) \quad Ud\Gamma(b_1 \oplus b_2) = (d\Gamma(b_1) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(b_2))U,$$

et

$$(B.2.6) \quad [d\Gamma(b), \Gamma(q)] = d\Gamma(q, [b, q]),$$

où :

$$d\Gamma(a, b)|_{\otimes^n \mathfrak{h}} := \sum_{i=1}^n a^{\otimes(j-1)} \otimes b \otimes a^{\otimes(n-j)}.$$

Démonstration. La démonstration est donnée dans [Amm04].

□

Annexe C

Analyse des opérateurs

Nous rappelons dans cette partie quelques résultats bien connus et utiles concernant l'analyse des opérateurs. La littérature est bien sûr très vaste sur le sujet, mais, parmi les références utilisées, on peut citer [RS75],[RS78],[RS79],[RS80], [CFKS08] ou encore [DG97].

C.1 Opérateurs compacts

Nous n'allons bien entendu pas donner une liste exhaustive des résultats de théorie spectrale utilisés. En revanche, la notion d'opérateur compact, et les propriétés spectrales qui s'ensuivent, ont été particulièrement utiles, notamment en Sous-section 2.3.2.

Définition C.1.1. *Soient X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit compact si l'image par T de tout ensemble borné de X est un ensemble pré-compact de Y . De manière équivalente, T est compact ssi pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente.*

Définition C.1.2. *On dit que $\lambda \in \sigma(A)$ est discrète, et on notera $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$, si λ est isolée et que le projecteur spectral P_λ donné, pour r assez petit par :*

$$P_\lambda := \frac{-1}{2i\pi} \int_{|\mu-\lambda|=r} (A - \mu)^{-1} d\mu,$$

est de rang fini.

Le spectre essentiel est le complémentaire du spectre discret dans $\sigma(A)$.

Le théorème suivant est très utile pour étudier le spectre essentiel :

Théorème C.1.3 (Critère de Weyl). *Soit A un opérateur borné autoadjoint. Alors $\lambda \in \sigma(A)$ ssi il existe $\{\psi_n\}_n \in \mathbb{N}$, avec $\|\psi_n\| = 1$ telle*

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(A - \lambda)\psi_n\| = 0$. $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ ssi on peut choisir les $\{\psi_n\}_n$ orthogonaux.

Le spectre essentiel ne peut être enlevé par des perturbations compactes : de nombreux résultats rendent compte de ce fait. Par exemple, si deux opérateurs auto-adjoints ont leurs résolvantes à différence compacte en i , alors leurs spectres essentiels sont égaux.

La proposition suivante est celle qui nous a permis de montrer un théorème de type HVZ en Section 2.3.

Proposition C.1.4. *Soit A un opérateur autoadjoint. Alors $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(A)$ ssi il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\chi(\lambda) \neq 0$ et $\chi(A)$ est compact.*

Le critère suivant est également très utile pour déterminer la compacité d'opérateurs dans $L^2(\mathbb{R})$:

Proposition C.1.5. *Soit $f, g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tels que :*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} g(\xi) = 0.$$

Alors l'opérateur $f(x)g(D)$ est compact.

C.2 Extensions presque analytiques

La proposition suivante permet de construire l'extension presque-analytique d'une fonction à support compact :

Proposition C.2.1. *Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors il existe $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\chi}|_{\mathbb{R}} = \chi, \\ \text{Supp}(\tilde{\chi}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}(z)| \leq C < \text{Re}(z) \} \text{ et } \text{Re}(z) \in \text{Supp}(\chi)\}, \\ \forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |\partial_{\bar{z}} \tilde{\chi}(z)| \leq C_N |\text{Im}(z)|^N. \end{array} \right.$$

De plus, :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \chi(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{\chi}(z) (z - x)^{-1} dz \wedge d\bar{z}.$$

Démonstration. On peut, par exemple, consulter [DG97]. □

Nous pouvons également construire ce type d'extensions pour les fonctions appartenant à l'ensemble $S^p(\mathbb{R})$ suivant :

Définition C.2.2. Notons $S^p(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall k \geq 0, \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x) \right| \leq C_k \langle x \rangle^{p-k}.$$

Nous avons alors la proposition analogue à C.2.1, pour une fonction de $S^p(\mathbb{R})$:

Proposition C.2.3. Soit $f \in S^p(\mathbb{R})$. Alors il existe $\tilde{f} \in S^p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \tilde{f}|_{\mathbb{R}} = f, \\ \text{Supp}(\tilde{f}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}(z)| \leq C < \text{Re}(z) >\}, \\ \forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)| \leq C_N < \text{Re}(z) >^{p-1-N} |\text{Im}(z)|^N. \end{cases}$$

De plus, :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) (z - x)^{-1} dz \wedge d\bar{z}.$$

Démonstration. On peut, à nouveau, consulter [DG97]. □

On rappelle que si A, B sont deux opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , on dit que B est de classe $C^1(A)$ si l'application $\mathbb{R}t \mapsto e^{itA}(B - z)^{-1}e^{-itA}$ est C^1 pour la topologie forte, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(B)$. On utilisera parfois le lemme suivant, dont la preuve élémentaire est laissée au lecteur.

Lemme C.2.4. Soient A, B deux opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} tels que B est de classe $C^1(A)$ et soit $f \in S^0(\mathbb{R})$. Alors :

$$[A, f(B)] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) (z - B)^{-1} [A, B] (z - B)^{-1} dz \wedge d\bar{z},$$

où le membre de gauche est considéré comme forme quadratique sur $D(A) \cap D(B)$, et l'intégrale du membre de droite converge comme forme quadratique sur $D(B)$.

Si de plus $[A, B]$ est borné, alors l'intégrale du membre de droite converge en norme dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Bibliographie

- [Amm04] Z. Ammari. Scattering theory for a class of fermionic Pauli-Fierz models. *Journal of Functional Analysis*, 208 no. 2 :302–359, 2004.
- [And33] C. Anderson. The positive electron. *Phys. Rev*, 43 :491, 1933.
- [Bac97] A. Bachelot. Quantum vacuum polarization at the black-hole horizon. *Annales de l'institut Henri Poincaré*, 67(2) :181–222, 1997.
- [Bac98] A. Bachelot. L'effet hawking. *Séminaire Équations aux dérivées partielles*, pages 1–9, 1997-1998.
- [Bac00] A. Bachelot. Creation of fermions at the charged black-hole horizon. *Annales Henri Poincaré*, 1 :1043–1095, 2000. 10.1007/PL00001022.
- [Bek73] J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7 :2333–2346, Apr 1973.
- [Bek74] J. D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Phys. Rev. D*, 9 :3292–3300, Jun 1974.
- [BL23] G.D. Birkhoff and R.E. Langer. *Relativity and modern physics*. Harvard University Press, 1923.
- [BM98] A. Bachelot-Motet. Nonlinear dirac fields on the schwarzschild metric. *Classical and Quantum Gravity*, 15(7) :1815, 1998.
- [Boh28] N. Bohr. Le postulat quantique et le dernier développement de la théorie atomique. *Nature*, 121 :580–591, 1928.
- [Bor26] M. Born. Sur la mécanique quantique des collisions. *Zeitschrift für Physik*, 37 :863–867, 1926.
- [BR79] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics*. Springer-Verlag, New York :, 1979.

- [Bra29] J. Bradley. Account of a new discovered Motion of the Fix'd Stars. *Philosophical Transactions*, 35 :637–660, 1729.
- [CFKS08] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger Operators : With Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer, 2008.
- [Cha98] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford classical text in the physical sciences. Clarendon Press, 1998.
- [CP82] J. Chazarain and A. Piriou. *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*. Studies in Mathematics and Its Applications. Elsevier Science, 1982.
- [CT66] C. Cohen-Tannoudji. *Compléments de mécanique quantique : 3e cycle de physique atomique et statistique, cours de 2ème année. Première partie*. Université de Paris, Laboratoire de physique de l'École normale supérieure, 1966.
- [CTDL05] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique Quantique*. Textbook physics. Wiley-VCH, 2005.
- [Dau04] T. Daudé. *Sur la théorie de la diffusion pour des champs de Dirac dans divers espaces-temps de la relativité générale*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2004.
- [dB23] L. de Broglie. Ondes et quanta. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 177 :507–510, 1923.
- [DG] J. Dereziński and C. Gérard. Positive energy quantization of linear dynamics.
- [DG97] J. Dereziński and C. Gérard. *Scattering Theory of Classical and Quantum N-Particle Systems*. Texts and Monographs in Physics. Springer, 1997.
- [DG98] J. Dereziński and C. Gérard. *Spectral and Scattering Theory of Spatially Cut-off $P([\phi])^2$ Hamiltonians*. Center for Mathematical Physics and Stochastics, 1998.
- [Dir28] P. Dirac. La théorie quantique de l'électron. *Proceeding of the royal society A*, 117 :610–624, 1928.
- [DK86] J. Dimock and B.S. Kay. Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the schwarzschild metric. ii. *Journal of Mathematical Physics*, 27(10) :2520–2525, 1986.
- [dL96] P.-S. de Laplace. *Exposition du système du monde*. 1796.

- [DPU31] P.A.M. Dirac, A. Proca, and J. Ullmo. *Les Principes de la mécanique quantique*. Recueil des conférences-rapports de documentation sur la physique. [v. 21]. Les Presses Universitaires de France, 1931.
- [Edd24] A.S. Eddington. A Comparison of Whitehead's and Einstein's Formulæ. *Nature*, 113 :192, 1924.
- [Ein05] A. Einstein. Über einen die erzeugung und verwandlung des liches betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6) :132–148, 1905.
- [ES25] A. Einstein and M. Solovine. *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*. Les Maitres de la pensée scientifique. Gauthier-Villars, 1925.
- [FdSVF66] A.J. Fresnel, H.H. de Sénarmont, É. Verdet, and L.F. Fresnel. *Œuvres complètes d'Augustin Fresnel : Théorie de la lumière*. Œuvres complètes d'Augustin Fresnel. Imprimerie impériale, 1866.
- [Fer26] E. Fermi. Sur la quantification du gaz parfait monoatomique. *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 3 :145–149, 1926.
- [FH14] J. Franck and G. Hertz. Über zusammenstöße zwischen elektronen und den molekülen des quecksilberdampfes und die ionisierungsspannung desselben. *Physik Journal*, 23(7) :294–301, 1914.
- [FH90] K. Fredenhagen and R. Haag. On the Derivation of Hawking Radiation Associated with the Formation of a Black Hole. *Commun.Math.Phys.*, 127 :273–284, 1990.
- [FHS65] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, and D.F. Styer. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover books on physics. Dover Publications, Incorporated, 1965.
- [Fin58] D. Finkelstein. Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle. *Phys. Rev*, 110 :115–117, 1958.
- [Gal38] G. Galilei. Dialogues concerning two new sciences by galileo galilei. 1638.
- [Gli85] J. Glimm. *Constructive quantum field theory selected papers*. Contemporary physicists. Boston, 1985. Reprint of articles originally published 1968-1980.
- [Gor26] W. Gordon. Der comptone ekt nach der schrödingerschen theorie. *Zeitschrift für Physik*, 40 :117–133, 1926.

- [Gul22] A. Gullstrand. *Allgemeine Lösung des statischen Einkörperproblems in der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Arkiv för matematik, astronomi och fysik. Almqvist & Wiksell, 1922.
- [Häf06] D. Häfner. Creation of fermions by rotating charged black holes. *ArXiv Mathematics e-prints*, December 2006.
- [Haw71] S.W. Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys.Rev.Lett.*, 26 :1344–1346, 1971.
- [Haw75] S.W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun.Math.Phys.*, 43 :199–220, 1975.
- [HE75] S.W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 1975.
- [Hei25] W. Heisenberg. Réinterprétation en théorie quantique de relations cinématiques et mécaniques. *Zeitschrift für Physik*, 33 :879–893, 1925.
- [JH73] B. Carter J. M. Bardeen and S. W. Hawking. The Four Laws of Black Hole Mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 31 :161–170, 1973.
- [Kat] T. Kato. *Linear and Quasi-Linear Equations of Evolution of Hyperbolic Type*, volume 72 of *C.I.M.E. Summer Schools*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Ker63] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys.Rev.Lett.*, 11 :237–238, 1963.
- [Kle26] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A*, 37 :895–906, 1926.
- [Mel03] F. Melnyk. The hawking effect for spin 1/2 fields. *Math. Phys. Vol 244, n°3, p. 483-525*, 2003.
- [Mes55] A. Messiah. *Cours de mécanique quantique : 1954-1955*. Centre d'Études nucléaires de Saclay, 1955.
- [Mic84] J. Michell. On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars. . . . *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 74 :35–57, 1784.
- [MM87] A. Michelson and E.W. Morley. On the relative motion of the Earth and the luminous Ether. *American Journal of Science*, 34 :332–345, 1887.
- [Mor87] A. Michelson & E. Morley. On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science*, 34 :333–345, 1887.

- [MTW73] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
- [Nic95] J.P. Nicolas. Scattering of linear Dirac fields by a spherically symmetric black hole. *Annales Poincaré Phys.Theor.*, 62 :145–179, 1995.
- [Nic02] J.P. Nicolas. Dirac fields on asymptotically flat spacetimes. *Dissertationes Mathematicae*, 408 :85, 2002.
- [Pai21] P. Painlevé. La mécanique classique et la théorie de la relativité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 173 :677–680, 1921.
- [Pau25] W. Pauli. Sur la connexion entre la saturation des groupes d'électrons dans l'atome et la structure complexe des spectres. *Zeitschrift für Physik*, 31 :765–783, 1925.
- [Pla01] M. Planck. Ueber das gesetz der energieverteilung im normalspectrum. *Annalen der Physik*, 309(3) :553–563, 1901.
- [Rœm76] O. Rømer. Démonstration touchant le mouvement de la lumière. *Journal des Sçavans*, pages 233–236, 1676.
- [RS75] M. Reed and B. Simon. *Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 1975.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Analysis of operators*. Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 1978.
- [RS79] M. Reed and B. Simon. *Scattering theory*. Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 1979.
- [RS80] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis*. Methods of modern mathematical physics / Michael Reed ; Barry Simon. Acad. Press, 1980.
- [Sar93] G. Sarton. *Ancient science through the golden age of Greece*. Courier Dover, 1993.
- [Sch21] E. Schrödinger. Quantification et valeurs propres. *Annalen der Physik*, 79 :361–376, 1921.
- [SN10] J. Jun John Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. ADDISON WESLEY Publishing Company Incorporated, 2010.
- [Tho97] J.J. Thompson. Cathode rays. *Philosophical Magazine*, 44 :293, 1897.
- [UG25] G.E. Uhlenbeck and S. Goudsmit. Remplacement de l'hypothèse d'une contrainte non mécanique par une présomption relative au comportement interne de l'électron individuel. *Naturwissenschaft*, 13 :953–954, 1925.

- [Unr76] W.G. Unruh. Notes On Black Holes Evaporation. *Phys. Review D*, 14 :870–892, 1976.
- [vN33] J. von Neumann. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 40(1) :A31–A32, 1933.
- [Wal75] R.M. Wald. On Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 45 :9–34, 1975.
- [ZJ03] J. Zinn-Justin. *Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction*. Savoirs actuels. Série Physique. Savoirs Actuels (EDP Sciences/CNRS Éditions), 2003.