Analyse complexe et problèmes de Dirichlet dans le plan : équation de Weinstein et autres conductivités non-bornées

Slah Chaabi

AIX-MARSEILLE UNIVERSITE

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de Aix-Marseille Université

Spécialité : **Mathématiques**

préparée au **Centre de Mathématiques et Informatique** et à l'**INRIA Sophia-Antipolis**

dans le cadre de l'École Doctorale **numéro 184 : Mathématiques et Informatique de Marseille**

présentée et soutenue publiquement
par

Slah CHAABI

le 2 décembre 2013

Titre:

Analyse complexe et problèmes de Dirichlet dans le plan : équation de Weinstein et autres conductivités non-bornées.

Directeur de thèse : **Laurent Baratchart**
Directeur de thèse : **Alexander Borichev**
Après avis des rapporteurs : M. Roman Novikov et M. Jonathan R. Partington

Jury

M. Laurent Baratchart,	Directeur de recherche, INRIA,	Directeur
M. Alexander Borichev,	Professeur, Aix-Marseille université,	Directeur
Mme. Sandrine Grellier,	Professeur, Université d'Orléans,	Présidente
M. Stanislav Kupin,	Professeur, Université de Bordeaux,	Examinateur
M. Roman Novikov,	Directeur de recherche, École Polytechnique,	Rapporteur
M. Stéphane Rigat,	Maître de conférences, Aix-Marseille université,	Co-encadrant
M. Emmanuel Russ,	Professeur, UJF (Grenoble),	Examinateur
M. Franck Wielonsky,	Maître de conférences, Aix-Marseille université,	Examinateur

Résumé

L'équation de Weinstein à coefficients complexes est une équation régissant les Potentiels à Symétrie Axiale (PSA) qui s'écrit $L_m[u] = \Delta u + (m/x)\,\partial_x u = 0$, où $m \in \mathbb{C}$. Cette équation intervient notamment pour la modélisation du bord du plasma dans un Tokamak pour $m = -1$, ou encore elle est, lorsque $m = 1$, appelée équation de Ernst linéarisée (équation permettant de donner explicitement des solutions aux équations d'Einstein). Ici, on généralise des résultats connus pour $m \in \mathbb{R}$ au cas $m \in \mathbb{C}$ (on donne des expressions explicites de solutions fondamentales aux opérateurs de Weinstein et leurs estimations au voisinage des singularités, puis on démontre une formule de Green pour les PSA dans le demi-plan droit $\mathbb{H}^+$ pour Re $m < 1$). On prouve un nouveau théorème de décomposition des PSA dans des domaines annulaires quelconques pour $m \in \mathbb{C}$ et dans une géométrie annulaire particulière faisant intervenir les coordonnées bipolaires, on prouve toujours pour $m \in \mathbb{C}$ qu'une famille de solutions des PSA en termes de fonctions de Legendre Associées de première et seconde espèce forme une famille complète (par une méthode de quasi-séparabilité des variables et par une analyse de Fourier) permettant d'exprimer les PSA sous forme de série et lorsque $m \in \mathbb{R}$, on montre que cette famille est même une base de Riesz dans certains anneaux à bord circulaire non concentrique.
Dans une deuxième partie, par une méthode qui est due à A. S. Fokas, on donne, sous forme intégrale explicite, des formules des PSA dans un domaine circulaire du demi-plan droit $\mathbb{H}^+$, dans le cas où le paramètre m est un entier relatif. Ces représentations sont obtenues par la résolution d'un problème de Riemann-Hilbert sur le plan complexe ou sur une surface de Riemann à deux feuillets selon la parité du coefficient m. Ces formules font intervenir de façon explicites les données Dirichlet et Neumann des PSA. On montre aussi que cette méthode s'applique à tous les domaines simlement connexe de $\mathbb{H}^+$ à bord régulier.
Dans la dernière partie, on étudie une classe de fonctions qui englobe les PSA, ce sont les fonctions pseudo-holomorphes, *i. e.* les solutions de l'équation $\bar{\partial} w = \alpha \overline{w}$. avec $\alpha \in L^r$, $2 \leq r < \infty$. Un résultat qui semble être le tout premier de son genre a été obtenu, c'est une extension de la régularité du principe de similarité (décomposition des fonction pseudo-holomorphe sous la forme $e^s F$ sous certaines hypothèses de régularités et où F est une fonction holomorphe) et une réciproque de ce principe qui conduit à un paramétrage analytique de cette classe de fonctions dans le cas critique $r = 2$. Puis en utilisant la connexion entre les fonctions pseudo-holomorphes et les solutions de l'équation de Beltrami conjuguée, on résoud un problème de Dirichlet à données L^p pondérées sur des domaines lisses pour des équations du type conductivité à coefficient dont le log appartient à l'espace de Sobolev $W^{1,2}$.

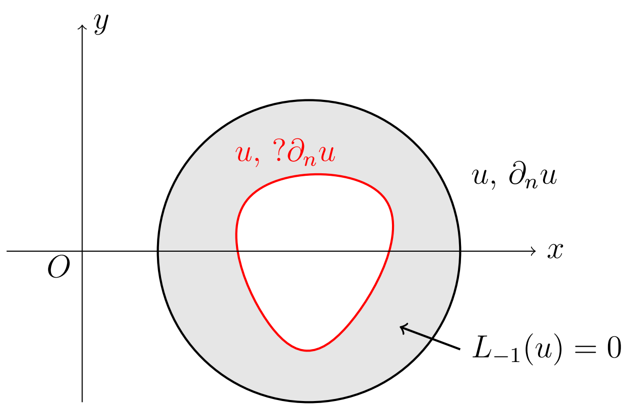
Abstract

The Weinstein equation with complex coefficients is the equation governing axisymmetric potentials (PSA) which can be written as $L_m[u] = \Delta u + (m/x)\,\partial_x u = 0$, where $m \in \mathbb{C}$. This equation is used in particular for modeling the plasma shape in a Tokamak (toroidal chamber with axial magnetic field) for $m = -1$, or it is, when $m = 1$, the well-known linearized Ernst equation (which is used to give explicit solutions of the Einstein equations). Here, we generalize results known for $m \in \mathbb{R}$ to $m \in \mathbb{C}$. We give explicit expressions of fundamental solutions for Weinstein operators and their estimates near singularities, then we prove a Green's formula for PSA in the right half-plane $\mathbb{H}^+$ for Re $m < 1$. We establish a new decomposition theorem for the PSA in any annular domains for $m \in \mathbb{C}$. In particular, using bipolar coordinates, we prove for annuli (always for $m \in \mathbb{C}$) that a family of solutions for PSA equation in terms of associated Legendre functions of first and second kind is complete (the method rests on quasi-separability of variables and some Fourier analysis). For $m \in \mathbb{R}$, we show that this family is even a Riesz basis in some non-concentric circular annulus. In the second part, basing on a method due to A. S. Fokas, we give, in explicit integral form, formulas for PSA in a circular domain of the right-half plane $\mathbb{H}^+$ when m is an integer. These representations are obtained by solving a Riemann-Hilbert problem on the complex plane or on a Riemann surface with two sheets according to the parity of m. These formulas involve in an explicit form the Dirichlet and the Neumann data of the PSA in question.
In the last part, we study a class of functions which includes the PSA, namely the pseudo-holomorphic functions, i.e. solutions of the complex equation $\overline{\partial} w = \alpha \overline{w}$, with $\alpha \in L^r$, $2 \le r < \infty$. We extend the Bers similarity principle (decomposition of pseudo-holomorphic functions in the form $e^s F$ under some regularity assumptions with holomorphic F) and a converse of this principle to the critical regularity case $r = 2$. Using the connection between pseudo-holomorphic functions and solutions to the conjugate Beltrami equations, we deduce well-posedness of Dirichlet problem in smooth domains with weighted L^p boundary data for 2-D isotropic conductivity equations whose coefficients have logarithm in the Sobolev space $W^{1,2}$.

Table des matières

Introduction

L'étude des opérateurs de Weinstein $L_m := \Delta + (m/x)\partial_x$ (voir chapitre 1) est importante en physique car plusieurs phénomènes sont modélisés par des Potentiels à Symétrie Axiale (PSA) qui satisfont l'équation de Weinstein.
Pour en citer une première, les PSA de paramètre $m = 1$ correspondent aux solutions de l'équation de Ernst linéarisée (équation qui est utilisée pour résoudre les équations d'Einstein).
Les PSA de paramètre $m = -1$ sont reliés au confinement du plasma (gaz ionisé) pour la fusion thermonucléaire dans un Tokamak (chambre de forme toroïdale). Plus précisément, à partir de l'extrapolation des données magnétiques sur la frontière de la chambre, on caractérise la frontière du plasma comme une courbe de niveau du flux poloïdal u solution de l'équation $\mathrm{div}(1/x\,\nabla u) = 0$ après une hypothèse d'axisymétrie.
La raison principale est que le flux poloïdal est harmonique dans le tore constituant le Tokamak en dehors du plasma (dans le plasma, il ne l'est pas, il est solution de l'équation de Grad-Shafranov qui est une équation non linéaire plus compliquée). Regardant le Laplacien en dimension 3 et les sections dans les plans verticaux des fonctions harmoniques dans le tore en dimension 3, nous obtenons que ces sections sont des PSA avec $m = -1$. Ce fait géométrique simple est la base de la proposition 1.3 et un des arguments clés du chapitre 1, combiné avec le principe de Weinstein (proposition 1.2).
La figure ci-dessous schématise ce problème (direct) : étant données les mesures de u, $\partial_n u$ sur le bord extérieur, et u constante sur le bord intérieur (la valeur de la constante étant inconnue en toute généralité), reconstruire le PSA u dans tout le domaine annulaire.



Ce type de problème peut être attaqué de manière nouvelle et semi-explicite avec la méthode de Fokas. C'est ce qui va nous occuper dans le chapitre 2. En effet, la résolution d'un problème de Dirichlet/Neumann pour une équation aux dérivées partielles

intégrable revient à la formulation et à la résolution via une certaine forme différentielle fermée (ou une paire de Lax) d'un certain problème de Riemann-Hilbert. Une étude approfondie d'une relation dite "relation globale" peut parfois nous donner la solution du problème de Dirichlet/Neuman bien-posé. La méthode de Fokas faisant appel à un problème de Riemann-Hilbert, c'est donc une paramétrage par des fonctions sectionnellement holomorphes des PSA.
Ce qui fait la transition avec le dernier chapitre de cette thèse où l'on étudie les classes de Hardy sur le disque unité de l'équation régissant les fonctions pseudo-analytiques $\overline{\partial}w = \alpha\overline{w}$ avec $\alpha \in L^r$, $2 \leq r < \infty$. Cette famille de fonctions est bien plus générale et englobe les PSA, mais modélise aussi des grandeurs physiques en hydrodynamique, en théorie de l'élasticité, etc. Dans ce chapitre, on montre que ces fonctions admettent des traces sur le cercle unité $\mathbb{T}$, et d'autre part que le problème de Dirichlet pour l'équation $\overline{\partial}w = \alpha\overline{w}$ où l'on impose la partie réelle de w dans $L^p(\mathbb{T})$ a une solution unique dans G^p_α. Ces résultats généralisent ceux obtenus pour $L^r(\mathbb{D})$ $(r > 2)$ récemment par J. Leblond, S. Rigat, E. Russ et L. Baratchart et dans les travaux de Klimentov [69]..
C'est la première fois apparemment que le cas $r = 2$ est considéré. Pour l'équation de la conductivité avec $\sigma \in \exp W^{1,2}$ (c'est-à-dire que σ s'écrit $\sigma = e^h$ avec h dans l'espace de Sobolev des fonctions L^2 dont les dérivées d'ordre 1 au sens des distributions sont encore des fonctions L^2), via la correspondance $w \mapsto f \mapsto \operatorname{Re} f$ où w vérifie l'équation $\bar{\partial}w = \alpha\overline{w}$ avec $\alpha = \bar{\partial}\log\sigma^{1/2}$, f vérifie l'équation de Beltrami conjuguée $\bar{\partial}f = \nu\overline{\partial f}$ avec $\nu = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$ et où $u = \operatorname{Re} f$ vérifie l'équation $\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0$, cela donne des solutions du problème de Dirichlet à coefficients non bornés. En particulier, l'équation de la conductivité considérée n'est pas strictement elliptique car $\sigma = e^h$ avec $h \in W^{1,2}$ n'est pas minorée par une constante strictement positive. Par ailleurs, cet aspect d'ellipticité non stricte est aussi rencontré dans le chapitre 1 puisque les PSA étudiés sont solutions dans $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$ de $\operatorname{div}(x^m\nabla u) = 0$ et que la fonction $z = x + iy \in \mathbb{H}^+ \mapsto x^m$ n'est ni majorée uniformément, ni minorée uniformément par une constante strictement positive.

Chapitre 1

Solutions fondamentales des Opérateurs de Weinstein à paramètre complexe. Décomposition des potentiels à symétrie axiale.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la classe d'opérateurs différentiels

$$L_m = \Delta + \frac{m}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

avec $m \in \mathbb{C}$, définis sur le demi-plan droit $\mathbb{H}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$.
Cette classe d'opérateurs, appelés Opérateurs régissant les Potentiels à Symétrie Axiale ou encore Opérateurs de Weinstein, a été étudiée de manière assez intensive dans les cas $m \in \mathbb{N}$ ou $m \in \mathbb{R}$ dans [104, 103, 101, 105, 106, 107, 110, 109, 108, 112, 111, 113, 114, 115, 116, 98, 99, 100, 61, 25, 26, 27, 65, 66, 67, 38, 40, 39, 16, 17, 18, 15, 54, 55, 56, 57, 77].
Nous nous intéresserons dans ce chapitre exclusivement au cas où $m \in \mathbb{C}$ (hormis quelques passages où les valeurs de m seront restreintes à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$).
Les solutions de l'équation dans $\mathbb{H}^+$, que nous appellerons (EPSA) pour Equation régissant les Potentiels à Symétrie Axiale

$$L_m u = 0 \tag{EPSA}$$

seront appelées Potentiels à Symétrie Axiale (en abrégé PSA). On s'intéressera aussi aux solutions de l'équation

$$L_m u = \delta_{(x,y)}$$

où $\delta_{(x,y)}$ désigne la masse de Dirac en $(x, y) \in \mathbb{H}^+$, et aussi aux solutions de l'équation

$$L_m u = g$$

où g désignera une fonction régulière définie dans un ouvert de $\mathbb{H}^+$.
Dans ce chapitre, on se restreindra volontairement au cas de la dimension 2. Mais bon nombre de résultats s'étendent directement au cas de la dimension supérieure, c'est-à-dire aux opérateurs

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i^2} + \frac{m}{x_n}\partial_{x_n}$$

dans le demi-espace $\mathbb{H}_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$.
Le premier à avoir introduit cette classe d'opérateurs en 1948 a été Weinstein dans [101], où il étudie le cas $m \in \mathbb{N}^*$. Il obtient en particulier la formule de la pseudo-moyenne pour les Potentiels à Symétrie Axiale qui se prolongent de manière continue à $\overline{\mathbb{H}}_+$ suivante

$$u(0,0)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(re^{i\theta})\sin^m\theta d\theta \qquad (PM)$$

et donne une expression d'une solution fondamentale en termes de fonctions de Bessel tout d'abord, et en terme d'intégrales elliptiques pour un point de l'axe des ordonnées. Il établit par ailleurs le lien entre les PSA pour $m \in \mathbb{N}^*$ et les fonctions harmoniques de $\mathbb{R}^{m+2}$, que nous rappellerons dans la proposition 1.3.
Dans [106, 107, 33], Weinstein et Diaz-Weinstein établissent le principe de correspondance que nous rappellerons entre les PSA correspondants à m et ceux correspondants à $2-m$ (proposition 1.2). Ils en déduisent l'expression d'une solution fondamentale en un point de l'axe des ordonnées pour des valeurs réelles de m et font un lien entre l'EPSA et les équations de Tricomi et leurs solutions fondamentales.
Dans [66], Huber obtient une formule de type Poisson généralisant (PM). Il s'intéresse aussi aux prolongements des PSA au reste du plan. Il s'intéresse aussi aux propriétés d'élimination des singularités des PSA dans [67], et donne une formule de représentation abstraite des PSA positifs ou nuls, formule qui est généralisée par Brelot dans [16, 15].
Par ailleurs, Vekua a donné un moyen d'exprimer les solutions fondamentales des équations elliptiques à coefficients analytiques à l'aide des fonctions de Riemann, introduites dans le passé (voir par exemple [52]) dans le cadre hyperbolique réel, qu'il a généralisé au cadre elliptique grâce aux opérateurs complexes ∂_z et $\partial_{\overline{z}}$ dans [95]. En termes heuristiques, de la même manière que l'on peut dire qu'une fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe, ou encore la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction anti-holomorphe, Vekua exprime le fait que les solutions d'équations elliptiques, et donc en particulier les PSA, s'écrivent comme somme de deux fonctionnelles, l'une appliquée à une fonction holomorphe quelconque et l'autre appliquée à une fonction anti-holomorphe elle aussi quelconque. Les fonctionnelles s'écrivent explicitement en terme de fonctions de Riemann, qui s'obtiennent à l'aide des fonctions hypergéométriques ([95]) ou encore à l'aide de dérivations fractionnaires ([25]). Dans [63], Henrici donne une introduction très intéressante aux travaux de Vekua.
Plus récemment, à l'aide de ces travaux de Vekua, dans [85], Savina donne sous forme d'une série une solution fondamentale de l'opérateur $\hat{L}u = \Delta u + a\partial_x u + b\partial_y u + cu$ et elle étudie la convergence de cette série. Elle donne aussi une application à l'équation de Helmholtz.
Dans [56], Gilbert considère les EPSA non homogènes pour $m \geq 0$, il donne une représentation sous forme intégrale des solutions de ces équations et en particulier une solution explicite lorsque le second membre ne dépend que d'une seule variable.
En ce qui concerne l'aspect problème au bord qui consiste à reconstruire un PSA dans un domaine de $\mathbb{H}^+$ à partir de la seule connaissance de ses valeurs et de celles de sa dérivée sur le bord (ou une partie du bord) du domaine, c'est un aspect qui va nous occuper dans une grande partie de cette thèse. Il est étudié dans le cas où le PSA est donné sur l'axe des x dans [77]. Il est aussi étudié dans le cas où le domaine

est $\mathbb{H}^+ \setminus [0,a] \times \{0\}$ avec $a > 0$ dans [48].
En introduction au paragraphe 1 de ce chapitre, nous indiquons au lecteur que nous faisons une présentation de résultats qui, même s'ils ne sont pas fondamentalement nouveaux pour m réel, est une présentation totalement "self-contained" avec des techniques différentes de celles utilisées dans les travaux précédemment cités. Les résultats pour les valeurs complexes de m sont par contre, à notre connaissance, des résultats nouveaux. Il en est de même des résultats des paragraphes 2 et 3. Le résultat principal est le théorème de décomposition qui affirme que tout PSA dans un domaine annulaire de $\mathbb{H}^+$ (c'est-à-dire un domaine de la forme $\Omega \setminus K$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{H}^+$ et K est un compact de Ω) va être la somme de deux PSA, l'un dans Ω, l'autre dans $\mathbb{H}^+ \setminus K$ et tendant vers 0 au bord de $\mathbb{H}^+$. Nous obtenons au passage un théorème de type Liouville qui affirme que si un PSA sur $\mathbb{H}^+$ tend vers 0 à l'infini et sur l'axe des ordonnées, alors il est identiquement nul. Remarquons que ce résultat n'est pas immédiat car l'EPSA est une équation elliptique dégénérée, puisque la constante d'ellipticité tend vers 0 au voisinage de l'axe des ordonnées.
Les résultats du paragraphe 4 étaient partiellement connus pour des valeurs particulières de m ($m = \pm 1$). A notre connaissance, ceux du paragraphe 5 sont nouveaux.

1 Préliminaires : solutions fondamentales explicites et estimations.

1.1 Rappels sur la théorie des distributions.

Toutes les fonctions numériques seront à valeurs complexes.
Dans toute la suite, on notera $\mathbb{H}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ le demi-plan droit de $\mathbb{R}^2$.
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}(\Omega)$ désignera l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur Ω.
Le support d'une fonction f définie sur Ω sera noté $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}}$.
Pour K compact inclus dans Ω, on notera $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$.
Lorsque u est une fonction définie et différentiable dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, les dérivées partielles de u seront tour à tour notées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ou bien $\partial_{x_i} u$, ou encore u_{x_i} avec $i \in [\![1, n]\!]$.
Lorsque $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, on notera

$$\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
On rappelle qu'une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, continue dans le sens suivant :

pour tout compact K de Ω, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et il existe $C > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \qquad |T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

On notera parfois $T(\varphi) =: \langle T, \varphi \rangle$. On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω.

Si $a \in \Omega$, on définit la distribution δ_a de Dirac en a par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable (*i. e.* intégrable sur tout compact de Ω) par rapport à la mesure de Lebesgue dm_n, on définit la distribution T_f associée à f par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi \, dm_n.$$

On rappelle que, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et si T est une distribution sur Ω, la dérivée $\partial^\alpha T$ est par définition la distribution sur Ω définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle .$$

Des intégrations par parties montrent que, si T_f est une distribution associée à une fonction de classe C^N et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est tel que $|\alpha| \leq N$, alors

$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}.$$

Si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la distribution fT par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle .$$

Soit L un opérateur différentiel sur Ω de la forme

$$L = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$$

où $N \in \mathbb{N}$, la sommation précédente est effectuée sur les multi-indices α de longueur $|\alpha|$ plus petite que N, et les fonctions a_α sont des fonctions dans $C^\infty(\Omega)$.
Par définition, si T est une distribution, LT sera la distribution $LT = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha T$.
On appelle opérateur adjoint $L^\star$ de L au sens des distributions l'opérateur qui à une distribution T associe la distribution

$$L^\star T = \sum_{|\alpha| \leq N} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha T).$$

On remarque que, si f, g sont deux fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, alors, en identifiant T_f avec f et T_g avec g, on a

$$\langle Lf, g \rangle := \langle LT_f, g \rangle = \langle T_f, L^\star g \rangle = \langle f, L^\star g \rangle .$$

Soit maintenant $a \in \Omega$ et L un opérateur différentiel sur Ω. On appelle *solution fondamentale de L sur Ω en $a \in \Omega$* toute distribution (en général non unique !) T_a telle que

$$LT_a = \delta_a$$

où l'égalité précédente est une égalité au sens des distributions sur Ω.
Cette égalité se réécrit aussi

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \varphi(a) = \langle LT_a, \varphi \rangle = \langle T_a, L^\star \varphi \rangle .$$

Nous insistons sur le fait que dans cette définition des solutions fondamentales, l'ouvert Ω joue un rôle crucial. En effet, si par exemple $L = \Delta$ dans $\mathbb{R}^2$, il est bien connu que, si $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{H}^+$,

$$T_a = \frac{1}{4\pi} \ln\left((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2\right)$$

est une solution fondamentale de Δ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ en a. La distribution U_a définie par

$$U_a = T_a - T_{(-a_1,a_2)} = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}{(x + a_1)^2 + (y - a_2)^2}\right)$$

sera alors une solution fondamentale en a de Δ dans $\mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$, mais pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ car si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\langle U_a, \varphi\rangle = \varphi(a) - \varphi(-a_1, a_2)$$

tandis que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$, on a

$$\langle U_a, \varphi\rangle = \varphi(a) - \varphi(-a_1, a_2) = \varphi(a).$$

En particulier, si pour $a \in \Omega$, T_a est une solution fondamentale de $L^\star$ en a dans Ω et si $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ est telle que $g = L(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\forall a \in \Omega, \qquad \varphi(a) = \langle T_a, g\rangle .$$

En effet, nous avons

$$\forall a \in \Omega, \qquad \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle = \langle L^\star T_a, \varphi\rangle = \langle T_a, L\varphi\rangle = \langle T_a, g\rangle .$$

Ces solutions fondamentales permettent donc de résoudre l'équation $L\varphi = g$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si $g \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.2 Notations et définitions.

Si $m \in \mathbb{N}^*$, le laplacien dans $\mathbb{R}^m$ sera noté Δ_m, ou plus simplement Δ quand $m = 2$. Pour $m \in \mathbb{C}$, L_m est l'opérateur défini comme suit : pour toute fonction $u \in C^2(\mathbb{H}^+)$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{H}^+$,

$$L_m u(x, y) = \Delta u(x, y) + \frac{m}{x}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y).$$

On utilisera parfois la notation suivante : si $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ est une fonction vectorielle de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^2$, alors

$$\operatorname{div}(f) := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

De même, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est une fonction scalaire de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Avec ces notations, l'opérateur L_m est l'opérateur qui à une fonction $u \in C^2(\mathbb{H}^+)$ associe la fonction définie sur $\mathbb{H}^+$ par

$$L_m u(x,y) = x^{-m}\mathrm{div}(x^m \nabla u)(x,y).$$

Il résulte de la règle de Schwarz que si u est une fonction définie dans un ouvert simplement connexe de $\mathbb{H}^+$ telle que $\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = 0$ où $\sigma : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{R}_*^+$ est de classe C^1, alors il existe une fonction v solution du système d'équations de Cauchy-Riemann généralisé

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\sigma \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \sigma \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

et v vérifie l'équation conjuguée $\mathrm{div}(\frac{1}{\sigma}\nabla v) = 0$. Cette remarque justifie le fait que nous appellerons L_{-m} pour $m \in \mathbb{C}$ l'opérateur conjugué de L_m.
On note $L_m^\star$ l'opérateur défini par : pour toute fonction $u \in C^2(\mathbb{H}^+)$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{H}^+$,

$$L_m^\star u(x,y) = \Delta u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,u(x,y)}{x}\right) = \Delta u(x,y) - \frac{m}{x}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{m}{x^2}u(x,y)$$

En fait, puisque

$$\int_{\mathbb{H}^+} L_m u(x,y) v(x,y)\; dxdy = \int_{\mathbb{H}^+} u(x,y) L_m^\star v(x,y)\; dxdy \quad \forall u,\; v \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+),$$

$L_m^\star$ est l'opérateur adjoint de L_m au sens des distributions sur $\mathbb{H}^+$.
Cette définition, donnée dans $\mathbb{H}^+$, se transpose aisément au cas d'un ouvert Ω de $\mathbb{H}^+$.
Dans le cas où les fonctions impliquées dépendent d'autres variables que x et y, on écrira $L_{m,x,y}$ au lieu de L_m, ce qui signifie que les dérivées partielles sont liées aux variables x et y, et que les autres variables sont considérées comme étant fixées.
Nous allons définir les opérateurs R_m, S_m et D de la façon suivante :
Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$, on définit $S_m u$ la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$ par

$$(S_m u)(x,y) = x^{-m} u(x,y).$$

Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$, on définit Du la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$ par

$$(Du)(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y).$$

Les opérateurs ainsi définis vérifient la proposition suivante :

Proposition 1.1 *S_m conjugue $L_m^\star$ et L_m, D conjugue $L_{-m}^\star$ et L_m, ce qui veut dire que*

$$S_m L_m^\star = L_m S_m, \quad L_{-m}^\star D = D L_m.$$

Preuve. Calcul de la première relation de conjugaison :
On a

$$(S_m u)_x = -m x^{-m-1} u + x^{-m} u_x,$$

donc

$$(S_m u)_{xx} = m(m+1) x^{-m-2} u - 2m x^{-m-1} u_x + x^{-m} u_{xx},$$

et

$$(S_m u)_{yy} = x^{-m} u_{yy}.$$

On obtient alors

$$L_m S_m u = (S_m u)_{xx} + (S_m u)_{yy} + \frac{m}{x}(S_m u)_x = x^{-m}\left(\Delta_2 u - \frac{m}{x} u_x + \frac{m}{x^2} u\right).$$

Donc $L_m S_m u = S_m L_m^\star u$.
Calcul de la deuxième relation de conjugaison :
On a

$$L_{-m}^\star D u = \Delta \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

et comme les opérateurs Δ et $\frac{\partial}{\partial x}$ commutent, on obtient

$$L_{-m}^\star D u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u + \frac{m}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = D L_m u,$$

on a donc prouvé les relations de conjugaison. □

Remarques.

1. *Si $m \in \mathbb{C}$, S_m et $L_m S_m$ sont des opérateurs auto-adjoints, ie. $S_m = S_m^\star$ et $L_m S_m = (L_m S_m)^\star$.*
2. *Nous avons un résultat plus général sur la conjugaison des opérateurs L_m et $L_m^\star$.*
   Considérons, pour $\sigma : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 qui ne s'annule pas, l'opérateur sur $C^2(\Omega)$ défini par : pour $u \in C^2(\Omega)$,

   $$P_\sigma u(x,y) = \frac{1}{\sigma(x,y)} \operatorname{div}\left(\sigma(x,y) \nabla u(x,y)\right),$$

   où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   Alors

   $$P_\sigma^\star = \operatorname{div}\left(\sigma \nabla\left(\frac{\cdot}{\sigma}\right)\right).$$

   En effet, si $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous avons, en utilisant la dérivation au sens des distributions

   $$\begin{aligned}\langle P_\sigma u, v\rangle &= \int_\Omega \frac{1}{\sigma(x,y)} \operatorname{div}\left(\sigma(x,y)\nabla u(x,y)\right) v(x,y)\, dxdy \\ &= -\int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla\left(\frac{v}{\sigma}\right) dxdy \\ &= \int_\Omega u \operatorname{div}\left(\sigma \nabla\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \langle u, P_\sigma^\star v\rangle$$

On définit S_σ l'opérateur qui à $u \in C^2(\Omega)$ associe

$$(S_\sigma u)(x,y) = \frac{1}{\sigma(x,y)} u(x,y).$$

Alors S_σ conjugue P_σ et $P_\sigma^\star$, où $P_\sigma^\star = \operatorname{div}\left(\sigma\nabla\left(\frac{\cdot}{\sigma}\right)\right)$ puisque de manière évidente, nous avons $S_\sigma P_\sigma^\star = P_\sigma S_\sigma$. Dans les égalités précédentes, les termes frontières n'apparaissent pas car les fonctions u, v ainsi que leur dérivées sont à support compact dans l'ouvert Ω.

Nous avons de plus les propositions suivantes que l'on trouve dans les travaux de Weinstein ([107]).

Proposition 1.2 (Principe de Weinstein [107]) *Si Ω est un ouvert relativement compact de $\mathbb{H}^+$ et si $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est de classe C^2 alors, pour tout $m \in \mathbb{C}$*

$$L_m u = x^{1-m} L_{2-m}[x^{m-1} u].$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et posons $u(x,y) = x^\alpha v(x,y)$. On a

$$u_x = \alpha x^{\alpha-1} v + x^\alpha v_x\,, \quad u_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}v + 2\alpha x^{\alpha-1} v_x + x^\alpha v_{xx}$$

et

$$u_{yy} = x^\alpha v_{yy}.$$

Donc

$$L_m u = x^\alpha\left(\Delta v + \frac{m+2\alpha}{x} v_x + \frac{\alpha(m+\alpha-1)}{x^2} v\right)$$

et en choisissant $\alpha := 1-m$, on obtient l'égalité voulue. □

Dans le cas où maintenant m est un entier positif ou nul, on introduit l'opérateur T_m qui à une fonction u définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{H}^+$ associe la fonction v définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^{m+2},\ (\sqrt{x_1^2 \cdots + x_{m+1}^2}, x_{m+2}) \in \Omega\}$ par

$$v(x_1, \ldots, x_{m+2}) = u(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2}, x_{m+2}).$$

Comme précédemment, un calcul immédiat nous donne le résultat suivant :

Proposition 1.3 ([101]) *Pour u de classe C^2 dans un ouvert relativement compact de $\mathbb{H}^+$ et $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_{m+2}(T_m u) = T_m(L_m u)$.*

Preuve. Posons $v = T_m u$. Pour tout $i \in [\![1, m+1]\!]$, on a

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{1+m}^2}} \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_{m+2}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{1+m}^2}} - \frac{x_i^2}{\left(x_1^2 + \ldots + x_{1+m}^2\right)^{3/2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x_i^2}{x_1^2 + \ldots + x_{1+m}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Donc

$$\Delta_{m+2}v = \Delta u + \frac{m}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_{1+m}^2}} \frac{\partial u}{\partial x},$$

d'où le résultat. □

Ces deux propositions vont nous permettre de calculer des solutions fondamentales pour L_m et $L_m^\star$ pour $m \in \mathbb{N}$ tout d'abord, puis pour $m \in \mathbb{Z}$ par la suite. Enfin, des estimations de ces expressions permettront de montrer que les expressions obtenues fournissent en fait des solutions fondamentales de L_m et $L_m^\star$ pour $m \in \mathbb{C}$.

1.3 Solutions fondamentales sous forme intégrale pour m entier relatif.

On rappelle que, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta_{(x,y)}$ est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \qquad \langle \delta_{(x,y)}, \varphi \rangle = \varphi(x, y).$$

Soit m un entier positif.

Proposition 1.4 (partiellement dans [33, 100, 101]) *Soit* $m \in \mathbb{N}^\star$. *Pour* $(x, y) \in \mathbb{H}^+$ *et* $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$,

$$E_m(x, y, \xi, \eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta \, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{m/2}}$$

est une solution fondamentale dans $\mathbb{H}^+$ *pour l'opérateur* $L^\star_{m,\xi,\eta}$ *au point fixé* $(x, y) \in \mathbb{H}^+$, *ce qui signifie au sens des distributions dans* $\mathbb{H}^+$:

$$L^\star_{m,\xi,\eta} E_m(x, y, \xi, \eta) = \delta_{(x,y)}(\xi, \eta).$$

De plus, si $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$ *est fixé, alors au sens des distributions dans* $\mathbb{H}^+$

$$L_{m,x,y} E_m(x, y, \xi, \eta) = \delta_{(\xi,\eta)}(x, y),$$

ce qui signifie que E_m *est une solution fondamentale dans* $\mathbb{H}^+$ *de l'opérateur* $L_{m,x,y}$ *au point* $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$ *fixé.*

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une solution fondamentale du laplacien dans $\mathbb{R}^{m+2}$ est

$$E(x) = -\frac{1}{m\, \omega_{m+2} \|x\|^m}, \quad x \in \mathbb{R}^{m+2},$$

i. e. au sens des distributions, $\Delta_{m+2} E = \delta_0$, ω_{m+2} étant la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^{m+2}$. On a donc pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+2})$,

$$v(t_1, ..., t_{m+2}) = -\frac{1}{m\, \omega_{m+2}} \int_{\tau \in \mathbb{R}^{m+2}} \Delta_{m+2} v(\tau) \frac{d\tau_1 d\tau_2 ... d\tau_{m+2}}{\left((\tau_1 - t_1)^2 + \cdots + (\tau_{m+2} - t_{m+2})^2\right)^{m/2}}$$

où $\tau = (\tau_1, ..., \tau_{m+2})$.

Appliquant cette relation à $v = T_m u$ où $u \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$, nous obtenons, grâce à la proposition 1.3, pour tout $(x,y) \in \mathbb{H}^+$,

$$u(x,y) = -\frac{1}{m\,\omega_{m+2}} \int_{\mathbb{R}^{m+2}} \frac{(L_m u)(\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + xi_{m+1}^2}, \xi_{m+2})\, d\xi_1 \cdots d\xi_{m+2}}{\big((\xi_1 - x)^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{m+1}^2 + (\xi_{m+2} - y)^2\big)^{m/2}}$$

Pour simplifier cette expression intégrale, on considère les coordonnées (hyper-)sphériques suivantes :

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi \cos\theta_1 \\
\xi_2 &= \xi \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\
\vdots &= \quad \vdots \\
\xi_{m-1} &= \xi \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{m-2} \cos\theta_{m-1} \\
\xi_m &= \xi \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{m-1} \cos\theta_m \\
\xi_{m+1} &= \xi \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_m
\end{aligned}$$

où $\xi^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_{m+1}^2$, $\theta_m \in]-\pi, \pi[$ et $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1} \in]0, \pi[$. La valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne définie par ce sytème de coordonnées est

$$\xi^m \sin\theta_{m-1} \sin^2\theta_{m-2} \cdots \sin^{m-1}\theta_1$$

On obtient alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{H}^+$,

$$u(x,y) = \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\xi=0}^{\infty} L_m(u)(\xi,\eta) E_m(x,y,\xi,\eta) d\xi d\eta$$

avec

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi^m}{m\,\omega_{m+2}} \int_{\theta_m=-\pi}^{\pi} \int_{\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}=0}^{\pi} \frac{\sin\theta_{m-1} \sin^2\theta_{m-2} \cdots \sin^{m-1}\theta_1\, d\theta_1 \ldots d\theta_m}{(\xi^2 - 2x\xi\cos\theta_1 + x^2 + (y-\eta)^2)^{m/2}}$$

Or, on sait que $I := \int_{\theta_m=-\pi}^{\pi} \int_{\theta_2,\ldots,\theta_{m-1}=0}^{\pi} \sin\theta_{m-1} \sin^2\theta_{m-2} \cdots \sin^{m-2}\theta_2\, d\theta_2 \ldots d\theta_{m-1} d\theta_m$ est la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^m$ puisque

$$\omega_m = \int_{\mathbb{S}_m} 1\, d\sigma = \int_{\theta_{m-1}=-\pi}^{\pi} \int_{\theta_1,\ldots,\theta_{m-2}=0}^{\pi} \sin\theta_{m-2} \sin^2\theta_{m-3} \cdots \sin^{m-2}\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{m-1}.$$

Donc la fonction E_m s'écrit :

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\omega_m \xi^m}{m\,\omega_{m+2}} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta\, d\theta}{(\xi^2 - 2x\xi\cos\theta + x^2 + (y-\eta)^2)^{m/2}}$$

ou encore en utilisant le fait que $\omega_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$,

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta\, d\theta}{\big((x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\big)^{m/2}}$$

et on obtient l'expression voulue.

De plus, comme pour tout $(x,y) \in \mathbb{H}^+$ et pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$, on a

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-m} E_m(\xi,\eta,x,y)$$

et comme par la proposition 1.1, S_m conjugue $L_m^\star$ et L_m, on a alors au sens des distributions

$$L_{m,x,y}E_m(x,y,\xi,\eta) = L_{m,x,y}\left(\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-m} E_m(\xi,\eta,x,y)\right) = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-m} L^\star_{m,x,y}E_m(\xi,\eta,x,y),$$

donc

$$L_{m,x,y}E_m(x,y,\xi,\eta) = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-m} \delta_{(\xi,\eta)}(x,y) = \delta_{(\xi,\eta)},$$

et ceci termine la preuve.

□

Pour m entier négatif, la proposition précédente combinée avec le principe de Weinstein nous donne directement la proposition suivante :

Proposition 1.5 (partiellement dans [33, 100, 101]) *Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$. Pour $(x,y) \in \mathbb{H}^+$ et $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$,*

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = \left(\frac{\xi}{x}\right)^{m-1} E_{2-m}(x,y,\xi,\eta)$$

$$= -\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{1-m}\theta\, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{1-\frac{m}{2}}}$$

est une solution fondamentale dans $\mathbb{H}^+$ pour l'opérateur $L^\star_{m,\xi,\eta}$ au point fixé $(x,y) \in \mathbb{H}^+$ et est une solution fondamentale dans $\mathbb{H}^+$ de l'opérateur $L_{m,x,y}$ au point $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$ fixé.

Preuve.
On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$ et $(x,y) \in \mathbb{H}^+$,

$$u(x,y) = \int_{(\xi,\eta)\in\mathbb{H}^+} (L_m u)E_m(x,y,\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$

et par le principe de Weinstein (proposition 1.2), on a

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{H}^+} \xi^{1-m} L_{2-m}(\xi^{m-1}u)E_m(x,y,\xi,\eta)\, d\xi d\eta.$$

En notant $v(x,y) = x^{m-1}u(x,y)$, on obtient

$$x^{1-m}v(x,y) = \int_{\mathbb{H}^+} \xi^{1-m}(L_{2-m}v)E_m(x,y,\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$

ainsi pour tout $m' \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}^*$, $v \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$ et $(x,y) \in \mathbb{H}^+$, en posant $m = 2-m'$, on a

$$v(x,y) = \int_{\mathbb{H}^+} (L_{m'}v)\left(\frac{\xi}{x}\right)^{m'-1} E_{2-m'}(x,y,\xi,\eta)\, d\xi d\eta.$$

La preuve du second point est analogue. □

1.4 Solutions fondamentales pour $m \in \mathbb{C}$.

On se propose dans ce paragraphe de montrer que les expressions précédentes définissent en fait des solutions fondamentales des opérateurs L_m pour m non plus entier relatif, mais pour $m \in \mathbb{C}$.
Plus précisément, si Re $m \geq 1$, alors

$$E_m = -\frac{\xi^m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta \, d\theta}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2]^{m/2}}$$

convient, tandis que si Re $m < 1$, alors

$$E_m = -\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{1-m}\theta \, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{1-\frac{m}{2}}}$$

convient.

Dans tout ce qui suit, E_m désignera toujours la formule correspondante (suivant que Re $m \geq 1$ ou Re $m < 1$).

Proposition 1.6 *Pour $m \in \mathbb{C}$ et $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$ fixés, on a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{H}^+ \setminus \{(\xi,\eta)\} \qquad L_{m,x,y} E_m(x,y,\xi,\eta) = 0.$$

et pour $(x,y) \in \mathbb{H}^+$ fixé, on a

$$\forall (\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+ \setminus \{(x,y)\} \qquad L^{\star}_{m,\xi,\eta} E_m(x,y,\xi,\eta) = 0.$$

Preuve. Par commodité pour les calculs, notons

$$f_m(x,y,\xi,\eta,\theta) = \frac{1}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}}}.$$

Pour montrer la première égalité de la proposition, il suffit de montrer que

$$\int_{\theta=0}^{\pi} L_{m,x,y} f_m(x,y,\xi,\eta,\theta) \sin^{m-1}\theta \, d\theta = 0.$$

Calculons les dérivées de la fonction f_m :

$$\partial_x f_m = \frac{-m}{2} \frac{2(x-\xi) + 4\xi \sin^2 \frac{\theta}{2}}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}} \qquad (= -m(x - \xi\cos\theta) f_{m+2})$$

et

$$\partial_{xx} f_m = \frac{-m}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}} + \\ + \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right) \frac{(2(x-\xi) + 4\xi \sin^2 \frac{\theta}{2})^2}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+2}}$$

puis

$$\partial_{yy} f_m = \frac{-m}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}} +$$

$$+\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{(2(y-\eta))^2}{[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+2}}$$

On obtient donc

$$\Delta f_m = \frac{-2m}{[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}}+$$

$$+\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{(2(x-\xi)+4\xi\sin^2\frac{\theta}{2})^2+(2(y-\eta))^2}{[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+2}}.$$

Or

$$\left(2(x-\xi)+4\xi\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2+(2(y-\eta))^2 = 4\left[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\eta)^2\right]-4\xi^2\sin^2\theta$$

donc

$$\Delta f_m = \frac{m^2}{[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}}$$

$$-\frac{m(m+2)\xi^2\sin^2\theta}{[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+2}}.$$

En remarquant que

$$\frac{\partial f_{m+2}}{\partial\theta} = -(m+2)\frac{x\xi\sin\theta}{[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+2}},$$

on a

$$\Delta f_m = m^2 f_{m+2} + m\frac{\xi}{x}\sin\theta\frac{\partial f_{m+2}}{\partial\theta}$$

et par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\theta=0}^{\pi}\Delta f_m\sin^{m-1}\theta\,d\theta &= m^2\int_{\theta=0}^{\pi} f_{m+2}\sin^{m-1}\theta\,d\theta + m\frac{\xi}{x}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\partial f_{m+2}}{\partial\theta}\sin^m\theta\,d\theta\\ &= \frac{m}{x}\int_{\theta=0}^{\pi} m\,(x-\xi\cos\theta)\,f_{m+2}\sin^{m-1}\theta\,d\theta\\ &= -\frac{m}{x}\int_{\theta=0}^{\pi}\partial_x f_m\sin^{m-1}\theta\,d\theta,\end{aligned}$$

d'où le résultat si Re $m \geq 1$. La preuve est totalement similaire si Re $m < 1$. La deuxième égalité de la proposition découle immédiatement du fait que S_m conjugue $L_m^\star$ et L_m (proposition 1.1).

□

La proposition suivante donne le comportement de ces fonctions près de leur singularité. Et cela sera utile pour montrer que ce sont effectivement des solutions fondamentales pour toutes les valeurs de $m \in \mathbb{C}$, et pas seulement les valeurs entières. En particulier, nous montrons que le comportement de ces solutions fondamentales est proche du comportement des solutions fondamentales du Laplacien. Ce fait est bien connu pour les opérateurs elliptiques. Mais nous insistons sur le fait qu'ici, dans la preuve de cette proposition, les estimations que nous faisons d'intégrales elliptiques

sont des estimations totalement élémentaires (utilisant le théorème de convergence dominée) et différentes des estimations classiques qui découlent d'estimations de fonctions hypergéométriques.
Soient f et g deux fonctions définies sur une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs complexes et soit (x, y) un point adhérent à Ω. On dit que f est équivalente à g en (x, y) et on écrit $f \sim_{(x,y)} g$ ou $f(\xi, \eta) \sim_{(\xi,\eta)\to(x,y)} g(\xi, \eta)$ si la différence $f - g$ est négligeable devant g en (x, y), c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(\eta, \xi) \in \Omega$, si $\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \leq \alpha$, alors $|f(\xi, \eta) - g(\xi, \eta)| \leq \varepsilon |g(\xi, \eta)|$.

Proposition 1.7 *Soit $m \in \mathbb{C}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{H}^+$ fixé,*

$$E_m(x, y, \xi, \eta) \underset{(\xi,\eta)\to(x,y)}{\sim} \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Preuve.
On commence par traiter le cas où Re m est un réel supérieur ou égal à 1.
Dans ce cas, on utilise l'expression suivante pour une solution fondamentale :

$$E_m(x, y, \xi, \eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta \, d\theta}{\left[(x - \xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y - \eta)^2\right]^{m/2}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\xi}{d}\right)^m \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta \, d\theta}{(1 + k\sin^2\frac{\theta}{2})^{m/2}} \qquad \text{avec } d^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \text{ et } k = \frac{4x\xi}{d^2}.$$

Remarquons que, quand $d \to 0$, $k \to +\infty$.
Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.8 *Lorsque $k \to +\infty$ et $m \in \mathbb{C}$*

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta \, d\theta}{(1 + k\sin^2\frac{\theta}{2})^{m/2}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^{m-1}}{k^{m/2}} \ln k.$$

Preuve.
Posant $u = \sin\frac{\theta}{2}$, cette intégrale vaut

$$2^m \int_0^1 \frac{u^{m-1}(1 - u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(1 + ku^2)^{m/2}} = \frac{2^m}{k^{m/2}} \int_0^1 \frac{u^{m-1}(1 - u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(\frac{1}{k} + u^2)^{m/2}}.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}(1 - u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(\frac{1}{k} + u^2)^{m/2}} - \int_0^1 \frac{u^{m-1} du}{(\frac{1}{k} + u^2)^{m/2}} = -\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\left(\frac{1}{k} + u^2\right)^{m/2}} (1 - (1 - u^2)^{\frac{m-2}{2}}) du$$

et par convergence monotone, on a

$$\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{(u^2)^{m/2}} (1 - (1 - u^2)^{\frac{m-2}{2}}) du = -\int_0^1 \frac{1 - (1 - u^2)^{\frac{m-2}{2}}}{u} du$$

Le changement de variable $u = \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{sh}\, t$ nous donne

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1} du}{(\frac{1}{k} + u^2)^{m/2}} = \int_0^{\mathrm{arg\,sh}\,\sqrt{k}} \mathrm{th}^{\,m-1} t \, dt$$

Comme $\text{th}^{m-1}t$ tend vers 1 quand $t \to +\infty$ et que $\int_0^\infty dt$ diverge, on en déduit que quand $k \to +\infty$

$$\int_0^{\text{arg sh}\sqrt{k}} \text{th}^{m-1} dt \underset{k\to+\infty}{\sim} \int_0^{\text{arg sh}\sqrt{k}} dt = \text{arg sh}\sqrt{k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln k.$$

La proposition en résulte. □

Grâce à la proposition 1.8, nous avons

$$E_m(x,y,\xi,\eta) \underset{d\to 0+}{\sim} -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{d}\right)^m \frac{2^{m-1}}{k^{m/2}}\ln k \underset{d\to 0+}{\sim} \frac{1}{2\pi}\ln d.$$

Le cas Re $m < 1$ est similaire.

□

Théorème 1.9 *Soit $m \in \mathbb{C}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{H}^+$ et $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$,*

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta\, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{m/2}} \qquad \text{si } Re\ m \geq 1$$

$$\text{et } E_m(x,y,\xi,\eta) = \left(\frac{\xi}{x}\right)^{m-1} E_{2-m}(x,y,\xi,\eta)$$

$$= -\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{1-m}\theta\, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{1-\frac{m}{2}}} \qquad \text{si } Re\ m < 1$$

est une solution fondamentale dans $\mathbb{H}^+$ pour l'opérateur $L^\star_{m,\xi,\eta}$ au point fixé $(x,y) \in \mathbb{H}^+$, ce qui signifie au sens des distributions dans $\mathbb{H}^+$:

$$L^\star_{m,\xi,\eta} E_m(x,y,\xi,\eta) = \delta_{(x,y)}(\xi,\eta).$$

De plus, si $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$ est fixé, alors au sens des distributions dans $\mathbb{H}^+$:

$$L_{m,x,y} E_m(x,y,\xi,\eta) = \delta_{(\xi,\eta)}(x,y),$$

ce qui signifie que E_m est une solution fondamentale dans $\mathbb{H}^+$ de l'opérateur $L_{m,x,y}$ au point $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$ fixé.

Preuve.

Soit $m \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{H}^+$ et $\varepsilon > 0$ tel que $D((x,y),\varepsilon) \subset \mathbb{H}^+$ où $D((x,y),\varepsilon)$ est le disque de centre (x,y) et de rayon ε.

Posons

$$I_\varepsilon := \int_{\mathbb{H}^+ \setminus D((x,y),\varepsilon)} L_m(u)(\xi,\eta) E_m(x,y,\xi,\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\mathbb{H}^+ \setminus D((x,y),\varepsilon)} \left(L_m(u)(\xi,\eta)E_m(x,y,\xi,\eta) - u(\xi,\eta)L^\star_m(E_m)(x,y,\xi,\eta)\right) d\xi d\eta$$

car $L^\star_m(E_m) = 0$ dans $\mathbb{H}^+ \setminus D((x,y),\varepsilon)$. Un calcul élémentaire nous donne

$$L_m(u)E_m - uL^\star_m(E) = \partial_\xi\left((\partial_\xi u)E_m - u(\partial_\xi E_m) + \frac{m}{\xi}uE_m\right) + \partial_\eta\left((\partial_\eta u)E_m - u(\partial_\eta E_m)\right).$$

Rappelons la formule de Green dans le cadre qui va nous être utile ici.

Rappel. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est de classe C^1 par morceaux. Notant $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal sortant à $\partial\Omega$ et ds l'élément de longueur sur $\partial\Omega$ (orienté en laissant l'intérieur de Ω sur la gauche), si $X = (X_1, X_2) : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}^2$ est un champ de vecteurs C^1 alors*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X(x,y) dxdy = \int_{\partial\Omega} X(x,y) \cdot \vec{n}(x,y) ds$$

Grâce à ce rappel, appliqué à l'ouvert $\Omega = U \backslash D((x,y),\varepsilon)$ où U est un ouvert régulier de $\mathbb{H}^+$ contenant le support de u, nous obtenons

$$I_\varepsilon = -\int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} \Bigg(\bigg((\partial_\xi u)E_m - u(\partial_\xi E_m) + \frac{m}{\xi} u E_m\bigg)\cos t + \\ + \left((\partial_\eta u)E_m - u(\partial_\eta E_m)\right)\sin t\Bigg)\varepsilon dt$$

La proposition 1.7 montre que

$$\int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} \left[[(\partial_\xi u) + \frac{m}{\xi} u]\cos t + (\partial_\eta u)\sin t\right] E_m\, \varepsilon dt \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} 0$$

car $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln\varepsilon = 0$. Donc, si on veut prouver que $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$ existe, il faut montrer l'existence

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u\left((\partial_\xi E_m)\cos t + (\partial_\eta E_m)\sin t\right)\varepsilon\, dt,$$

et cette limite sera égale à la limite de I_ε.
Supposons à partir de maintenant que Re $m \geq 1$.
Notons J_ε l'intégrale de droite dans l'égalité précédente. Un calcul nous donne

$$J_\varepsilon = \underbrace{-\frac{m}{2\pi}\int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u\frac{\xi^{m-1}}{\varepsilon^m}\int_0^\pi \frac{\sin^{m-1}\theta\, d\theta}{\left(1+k\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{m/2}}\varepsilon\cos t\, dt}_{J_{\varepsilon,1}} +$$

$$\underbrace{+\frac{m}{2\pi}\int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u\frac{\xi^{m}}{\varepsilon^{m+2}}\int_0^\pi \frac{\sin^{m-1}\theta\, d\theta}{\left(1+k\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{m/2+1}}\varepsilon^2\, dt}_{J_{\varepsilon,2}} +$$

$$\underbrace{+\frac{m}{2\pi}\int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u\frac{\xi^{m}}{\varepsilon^{m+2}}\int_0^\pi \frac{2x\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^{m-1}\theta\, d\theta}{\left(1+k\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{m/2+1}}\varepsilon\cos t\, dt}_{J_{\varepsilon,3}}$$

et où on rappelle que $k = \frac{4x\xi}{\varepsilon^2}$.
Nous avons les propositions suivantes :

Proposition 1.10 *Lorsque $k \to +\infty$ et $m \in \mathbb{C}$*

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^{m-1} \theta \, d\theta}{(1 + k \sin^2 \frac{\theta}{2})^{m/2+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^{m-1}}{k^{\frac{m}{2}+1}} \ln k.$$

Preuve.
Posant $u = \sin \frac{\theta}{2}$, cette intégrale vaut

$$2^m \int_0^1 \frac{u^{m+1}(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(1+ku^2)^{m/2+1}} = \frac{2^m}{k^{m/2+1}} \int_0^1 \frac{u^{m+1}(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}}.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{u^{m+1}(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} - \int_0^1 \frac{u^{m+1} du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} = -\int_0^1 \frac{u^{m+1}}{\left(\frac{1}{k}+u^2\right)^{m/2+1}}(1-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}) du$$

$$\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_0^1 \frac{u^{m+1}}{(u^2)^{m/2+1}}(1-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}) du = -\int_0^1 \frac{1-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}}{u} du.$$

Le changement de variable $u = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} t$ nous donne

$$\int_0^1 \frac{u^{m+1} du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} = \int_0^{\operatorname{arg\,sh} \sqrt{k}} \operatorname{th}^{m+1} t \, dt$$

Comme $\operatorname{th}^{m+1} t$ tend vers 1 quand $t \to +\infty$ et que $\int_0^\infty dt$ diverge, on en déduit que quand $k \to +\infty$

$$\int_0^{\operatorname{arg\,sh} \sqrt{k}} \operatorname{th}^{m+1} dt \underset{k\to+\infty}{\sim} \int_0^{\operatorname{arg\,sh} \sqrt{k}} dt = \operatorname{arg\,sh} \sqrt{k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln k.$$

La proposition en résulte.

□

Proposition 1.11 *Lorsque $k \to +\infty$ et $m \in \mathbb{C}$*

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1} \theta \, d\theta}{(1 + k \sin^2 \frac{\theta}{2})^{m/2+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^m}{m k^{\frac{m}{2}}}$$

Preuve. Posant comme précédemment $u = \sin \frac{\theta}{2}$, cette intégrale vaut

$$2^m \int_0^1 \frac{u^{m-1}(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(1+ku^2)^{m/2+1}} = \frac{2^m}{k^{m/2+1}} \int_0^1 \frac{u^{m-1}(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}}.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}} du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} - \int_0^1 \frac{u^{m-1} du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} = -\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\left(\frac{1}{k}+u^2\right)^{m/2+1}}(1-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}) du$$

Nous allons estimer d'abord le membre de droite de cette égalité :

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\left(\frac{1}{k}+u^2\right)^{m/2+1}}(1-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}})du - \int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\left(\frac{1}{k}+u^2\right)^{m/2+1}}\left(\frac{m-2}{2}u^2\right)du$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\left(\frac{1}{k}+u^2\right)^{m/2+1}}\left(1-\frac{m-2}{2}u^2-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}\right)du$$

$$\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{u^{m-1}}{(u^2)^{m/2+1}}\left(1-\frac{m-2}{2}u^2-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}\right)du$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\frac{m-2}{2}u^2-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}}{u^3}du. \tag{$*$}$$

Comme vu dans la preuve de la proposition 1.10, on a

$$\frac{m-2}{2}\int_0^1 \frac{u^{m+1}}{(\frac{1}{k}+u^2)^{\frac{m}{2}+1}}du \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{m-2}{4}\ln k. \tag{$**$}$$

On obtient alors grâce à (*) et (**) :

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\left(\frac{1}{k}+u^2\right)^{m/2+1}}(1-(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}})du \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{m-2}{4}\ln k.$$

Le changement de variable $u = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sh} t$ nous donne

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} = k\int_0^{\arg\operatorname{sh}\sqrt{k}} \frac{\operatorname{th}^{m-1}t}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt = \frac{k}{m}\operatorname{th}^m\left(\arg\operatorname{sh}\sqrt{k}\right).$$

On en déduit que quand $k\to+\infty$,

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k}{m}.$$

On obtient donc

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}(1-u^2)^{\frac{m-2}{2}}du}{(\frac{1}{k}+u^2)^{m/2+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k}{m}.$$

Et

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta\,d\theta}{(1+k\sin^2\frac{\theta}{2})^{m/2+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^m}{mk^{\frac{m}{2}}}$$

et la proposition en résulte. $\square$

Revenons à la preuve du théorème 1.9.

La proposition 1.8 montre que

$$J_{\varepsilon,1} \underset{\varepsilon\to0+}{\sim} -\frac{m}{2\pi}\int_{\substack{t\in[0,2\pi]\\(\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u\frac{x^{m-1}}{\varepsilon^m}\frac{2^{m-1}}{k^{m/2}}(\ln k)\,\varepsilon\cos t\,dt$$

$$\underset{\varepsilon\to0+}{\sim} +\frac{m}{2\pi x}\varepsilon\ln\varepsilon\left(\int_{\substack{t\in[0,2\pi]\\(\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u(x+\varepsilon\cos t, y+\varepsilon\sin t)\cos t\,dt\right)$$

qui tend vers 0.
La proposition 1.10 montre que

$$J_{\varepsilon,3} \underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} \frac{m}{2\pi} \int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u\frac{x^m}{\varepsilon^{m+2}}(2x)\frac{2^{m-1}}{k^{m/2+1}}(\ln k)\,\varepsilon\cos t\,dt$$

$$\underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} -\frac{m}{4\pi x}\varepsilon\ln\varepsilon\left(\int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u(x+\varepsilon\cos t, y+\varepsilon\sin t)\cos t\,dt\right)$$

qui tend aussi vers 0.
Enfin, la proposition 1.11 montre que

$$J_{\varepsilon,2} \underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} \frac{m}{2\pi} \int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u\frac{x^m}{\varepsilon^{m+2}}\frac{2^m}{mk^{m/2}}\varepsilon^2\,dt$$

$$\underset{\varepsilon\to 0+}{\sim} \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t,\sin t)}} u(x+\varepsilon\cos t, y+\varepsilon\sin t)dt \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} u(x,y).$$

On a donc prouvé que, pour tout $m \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est strictement positive,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{H}^+\setminus D((x,y),\varepsilon)} L_m(u)(\xi,\eta)E_m(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\mathbb{H}^+} L_m(u)(\xi,\eta)E_m(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta = u(x,y)$$

donc que E_m est effectivement une solution fondamentale de $L_m^\star$ quel que soit $m \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est strictement positive.
La preuve pour $m \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est strictement inférieure à 1 est totalement analogue.
On a aussi les assertions duales pour les solutions fondamentales de L_m quel que soit $m \in \mathbb{C}$.

□

La proposition suivante est plus ou moins une conséquence du théorème précédent.

Proposition 1.12 *Soit $m \in \mathbb{C}$ et Ω un ouvert relativement compact dans $\mathbb{H}^+$ dont le bord est de classe C^1 par morceaux.*
Alors, pour $(x,y) \in \Omega$ et u de classe C^2 dans $\overline{\Omega}$, en notant $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal sortant à $\partial\Omega$ et ds l'élément de longueur sur $\partial\Omega$ (orienté en laissant l'intérieur de Ω sur la gauche), nous avons

$$u(x,y) = \int_\Omega L_m(u)E_m\,d\xi d\eta$$

$$-\int_{\partial\Omega}\left[(\partial_\xi u)E_m - u(\partial_\xi E_m) + \frac{m}{\xi}uE_m\,,\,(\partial_\eta u)E_m - u(\partial_\eta E_m)\right]\cdot\vec{n}\,ds$$

et où on a noté dans les intégrales $u := u(\xi,\eta)$ et $E_m := E_m(x,y,\xi,\eta)$.

Preuve. En effet, si u est dans $C^2(\overline{\Omega})$, nous avons, pour $(x,y) \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D((x,y),\varepsilon)} \subset \Omega$:

$$\int_{\Omega \setminus D((x,y),\varepsilon)} L_m(u) E_m d\xi\, d\eta = \int_{\Omega \setminus D((x,y),\varepsilon)} (L_m(u)E_m - L_m^\star(E_m)u) d\xi\, d\eta.$$

D'après la formule de Green précédemment citée, cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\partial\Omega} \left[(\partial_\xi u)E_m - u(\partial_\xi E_m) + \frac{m}{\xi} u E_m \,,\, (\partial_\eta u)E_m - u(\partial_\eta E_m) \right] \cdot \vec{n}\, ds$$
$$- \int_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ (\xi,\eta)=(x,y)+\varepsilon(\cos t, \sin t)}} \Bigg(\left((\partial_\xi u)E_m - u(\partial_\xi E_m) + \frac{m}{\xi} u E_m \right) \cos t +$$
$$+ \left((\partial_\eta u)E_m - u(\partial_\eta E_m) \right) \sin t \Bigg) \varepsilon dt,$$

et d'après ce que nous avons vu dans la preuve précédente, cette dernière expression tend, quand $\varepsilon \to 0$ vers

$$\int_{\partial\Omega} \left[(\partial_\xi u)E_m - u(\partial_\xi E_m) + \frac{m}{\xi} u E_m \,,\, (\partial_\eta u)E_m - u(\partial_\eta E_m) \right] \cdot \vec{n}\, ds + u(x,y).$$

Le caractère intégrable de E_m au voisinage de (x,y) montre que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus D((x,y),\varepsilon)} L_m(u) E_m d\xi\, d\eta = \int_\Omega L_m(u) E_m d\xi\, d\eta,$$

et la proposition est prouvée.

□

2 Théorème de décomposition des PSA.

On se propose dans ce paragraphe de montrer que tout PSA dans un domaine annulaire de $\mathbb{H}^+$ (c'est-à-dire un domaine de la forme $\Omega \setminus K$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{H}^+$ et K est un compact de Ω) va être la somme de deux PSA, l'un dans Ω, l'autre dans $\mathbb{H}^+ \setminus K$ et tendant vers 0 au bord de $\mathbb{H}^+$. L'expression explicite de solutions fondamentales va nous être utile pour obtenir un tel théorème de décomposition.
Nous venons de voir que nous avons deux expressions différentes des solutions fondamentales suivant les valeurs de m. Pour la suite, chacune des expressions aura des comportements différents suivant la valeur de m choisie. Nous allons donc regarder séparément les deux cas Re $m < 1$ et Re $m \geq 1$.
Plus précisément, nous allons avoir besoin de solutions fondamentales qui soient nulles sur le bord de $\mathbb{H}^+$, c'est-à-dire nulles sur l'axe des ordonnées et nulles à l'infini.
Pour Re $m < 1$, l'expression

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{1-m}\theta\, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2 \right]^{1-\frac{m}{2}}}$$

montre que E_m vérifie bien cette propriété ($E_m(x,y,\cdot,\cdot)$ tend vers 0 quand $x \to 0+$ et $\|(x,y)\| \to +\infty$).

Pour Re $m \geq 1$,

$$E_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{m-1}\theta\, d\theta}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2]^{m/2}}$$

ne vérifie plus cette propriété. Par contre

$$E_m(x,y,\xi,\eta) - E_m(-x,y,\xi,\eta)$$

est toujours une solution fondamentale dans $\mathbb{H}^+$, et qui vérifie cette propriété.
Nous poserons donc :
- Pour Re $m < 1$:

$$F_m(x,y,\xi,\eta) = E_m(x,y,\xi,\eta)$$

- Pour Re $m \geq 1$:

$$F_m(x,y,\xi,\eta) = E_m(x,y,\xi,\eta) - E_m(-x,y,\xi,\eta).$$

2.1 Résultats préliminaires

Lemme 2.1 *Si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$ et si pour $(x,y) \in \mathbb{H}^+$, on définit*

$$U(x,y) = \int_{\mathbb{H}^+} u(\xi,\eta) F_m(x,y,\xi,\eta) d\xi\, d\eta,$$

alors $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} U = 0$, *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(0,y)} U = 0$.
De plus, U est de classe C^∞ sur $\mathbb{H}^+ \setminus$ supp u et pour tout $(x,y) \notin$ supp u, on a $L_{m,x,y}U(x,y) = 0$.

Preuve. On remarque que, quand (ξ,η) est fixé, comme

$$F_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{1-m}\theta\, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{1-\frac{m}{2}}}$$

pour Re $m < 1$, alors $F_m(x,y,\xi,\eta) \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et le premier résultat du lemme en découle.
De même, si Re $m \geq 1$,

$$F_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{m-1}\theta \left[\frac{1}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{\frac{m}{2}}} - \frac{1}{\left[(x+\xi)^2 - 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{\frac{m}{2}}}\right] d\theta$$

donc $F_m(x,y,\xi,\eta) \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et le premier résultat du lemme en découle.

Pour le second point, il suffit de remarquer que, pour Re $m < 1$

$$F_m(x,y,\xi,\eta) \underset{(x,y)\to(0,y')}{\sim} -\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi[\xi^2+(y'-\eta)^2]^{1-m/2}} \int_0^\pi \sin^{1-m}\theta\, d\theta$$

ce qui implique le résultat désiré.
Supposons maintenant Re $m \geq 1$. On fixe (ξ,η) dans le support de u, qui est un compact dans $\mathbb{H}^+$. En particulier, il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ ne dépendant que de u tels que $\|(\xi,\eta)\| \leq M$ et $\xi \geq 2\alpha$. Soit y dans $\mathbb{R}$.
Posons, pour $x \in [-\alpha,\alpha]$

$$f_m(x) = \frac{1}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{\frac{m}{2}}}.$$

L'inégalité des accroissements finis montre que, pour $x > 0$ assez proche de 0 :

$$|f_m(x) - f_m(0)| \leq x \sup_{[0,\alpha]} |f'_m|$$

et

$$|f_m(-x) - f_m(0)| \leq x \sup_{[-\alpha,0]} |f'_m|.$$

donc

$$|f_m(x) - f_m(-x)| \leq 2x \sup_{[-\alpha,\alpha]} |f'_m| \leq 2x|m|\frac{3M+\alpha}{\alpha^{\mathrm{Re}\, m+2}}.$$

En particulier,

$$\sup_{\substack{(\xi,\eta)\in\mathrm{supp}\, u\\ y\in\mathbb{R}}} |F_m(x,y)| = \mathcal{O}(x)$$

quand $x \to 0+$. Le deuxième point en découle alors.
Le dernier point résulte du fait que, si les couples $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ sont tous les deux dans $\mathbb{H}^+$, alors

$$L_{m,x,y}F_m(x,y,\xi,\eta) = 0.$$

□

Remarque 2.2 Remarquons que, si U est dans $\mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$, alors $L_{m,x,y}U = u$, mais que cette identité n'est pas nécessairement vraie si $U \notin \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$. En particulier, on ne peut pas conclure dans le lemme 2.1 que $L_mU = u$.

Nous aurons également besoin d'une définition et de la proposition qui suit.

Définition. Soit $u : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction sur $\mathbb{H}^+$. On écrit

$$\lim_{\partial\mathbb{H}^+} u = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad \forall(x,y) \in \mathbb{H}^+,$$

$$x \leq \frac{1}{n} \text{ ou } \|(x,y)\| \geq n \quad \Longrightarrow \quad |u(x,y)| \leq \varepsilon.$$

En d'autres termes, cela revient à considérer que le bord $\partial\mathbb{H}^+$ de $\mathbb{H}^+$ est constitué des points de l'axe des ordonnées et des points à l'infini et à dire que la notion de convergence vers 0 sur le bord de $\mathbb{H}^+$ est en un certain sens une notion de convergence uniforme vers 0.
En fait, nous allons montrer que cette notion de convergence uniforme n'est pas plus forte que la notion de convergence ponctuelle vers 0 en tout point de $\partial\mathbb{H}^+$. Plus précisément, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3 *Soit* $u : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{C}$. *On a*

$$\lim_{\partial\mathbb{H}^+} u = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} u(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{(0,y)} u = 0.$$

Preuve. Le sens direct est évident. Supposons maintenant que l'on ait

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} u(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{(0,y)} u = 0$$

et montrons que $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} u = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$,

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \geq A \qquad \Rightarrow \qquad |u(\xi, \eta)| \leq \varepsilon.$$

De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha_y \in]0, 1[$ tel que, pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$

$$\sqrt{\xi^2 + (\eta - y)^2} < \alpha_y \qquad \Rightarrow |u(\xi, \eta)| \leq \varepsilon.$$

Le segment $[-A, A]$ est compact.
Grâce au lemme de recouvrement de Lebesgue, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y' \in [-A, A]$, la boule $B(y', \alpha)$ soit incluse dans l'une des boules $B(y, \alpha_y)$ avec $y \in [-A, A]$.
En particulier, si $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$ est tel que $0 < \xi < \alpha$, alors alors $|u(\xi, \eta)| \leq \varepsilon$ (que η soit dans $[-A, A]$ ou non).
Ceci termine la preuve de la proposition. □

Nous commençons par montrer que si une solution u de $L_m(u) = 0$ s'annule sur $\partial\mathbb{H}^+$, alors elle est identiquement nulle.

Tout d'abord remarquons que ce résultat est élémentaire si m est un entier naturel strictement positif. En effet, si on introduit la fonction v définie sur $(\mathbb{R}^{m+1})_* \times \mathbb{R}$ par

$$v(x_1, \ldots, x_{m+2}) = u(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2}, x_{m+2}),$$

alors la proposition 1.3 montre que v est harmonique dans $(\mathbb{R}^{m+1})_* \times \mathbb{R}$. Comme $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} u = 0$, on a $\lim_{\{(0,\ldots,0)\}\times\mathbb{R}} v = 0$. La proposition 18 de [30], page 310 montre que v se prolonge en une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^{m+2}$ tout entier. Le fait que $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} u = 0$ nous montre de plus que $\lim_{\|x\|\to+\infty} v(x) = 0$. Il en résulte que v est identiquement nulle, et que u aussi.

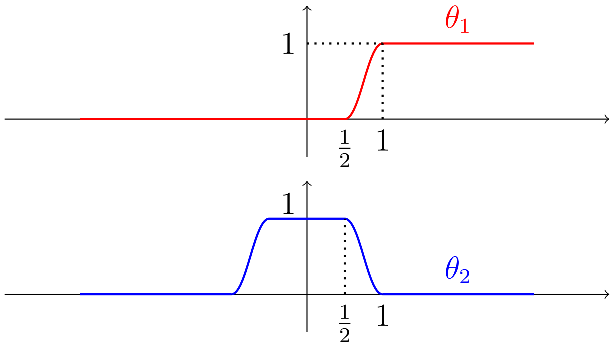
Nous généralisons ce phénomène au cas où m prend des valeurs complexes quelconques.

Proposition 2.4 *Soit $u \in C^2(\mathbb{H}^+)$ telle que $L_m u = 0$ et $\lim\limits_{\partial \mathbb{H}^+} u = 0$. Alors $u \equiv 0$ sur $\mathbb{H}^+$.*

Preuve.
Pour $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$, on pose pour $N \in \mathbb{N}^*$

$$\phi_N(\xi, \eta) = \theta_1(N\xi)\theta_2\left(\frac{\xi}{N}\right)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right)$$

où θ_1 et θ_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$ et telles que $\theta_1(t) = 1$ pour $t \geq 1$, $\theta_1(t) = 0$ pour $t \leq \frac{1}{2}$, $\theta_2(t) = 1$ pour $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $\theta_2(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$. On suppose de plus que toutes les dérivées des fonctions θ_1 et θ_2 aux points $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ sont nulles.



Si u est une fonction C^2 sur le demi-plan droit $\mathbb{H}^+$ solution de $L_m u = 0$, alors $u\phi_N$ est une fonction de classe C^2 et à support compact sur $\mathbb{H}^+$. Soit $(x, y) \in \mathbb{H}^+$ qui sera fixé dans toute la suite de la preuve. Pour N assez grand, on a, grâce à la proposition 1.12 (valable si E_m est remplacée par F_m)

$$u(x, y) = u(x, y)\phi_N(x, y) = \int_{\mathbb{H}^+} L_m(u\phi_N)F_m \, d\xi d\eta$$

(car la fonction $L_m(u\phi_N)$ est identiquement nulle au voisinage de la singularité de F_m), donc

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{\mathbb{H}^+} [L_m(u)\phi_N + uL_m(\phi_N) + 2\nabla u \cdot \nabla\phi_N]F_m \, d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{H}^+} u[L_m(\phi_N)F_m - 2 \operatorname{div}\,(F_m \nabla\phi_N)]d\xi d\eta \\ &= \int_{D_1 \cup \cdots \cup D_8} u[L_m(\phi_N)F_m - 2 \operatorname{div}\,(F_m \nabla\phi_N)]d\xi d\eta \\ &= -\int_{D_1 \cup \cdots \cup D_8} u[L_{-m}(\phi_N)F_m + 2\nabla F_m \cdot \nabla\phi_N]d\xi d\eta \end{aligned}$$

où $D_1, \ldots, D_8$ sont les domaines (dépendants de N) suivants :

$$D_1 = \left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right] \times \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right], \quad D_2 = \left[\frac{1}{N}, \frac{N}{2}\right] \times \left[\frac{N}{2}, N\right],$$

$$D_3 = \left[\frac{N}{2}, N\right] \times \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right], \quad D_4 = \left[\frac{1}{N}, \frac{N}{2}\right] \times \left[-N, -\frac{N}{2}, \right],$$
$$D_5 = \left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right] \times \left[\frac{N}{2}, N\right], \quad D_6 = \left[\frac{N}{2}, N\right] \times \left[\frac{N}{2}, N\right],$$
$$D_7 = \left[\frac{N}{2}, N\right] \times \left[-N, -\frac{N}{2}\right] \quad \text{et} \quad D_8 = \left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right] \times \left[-N, -\frac{N}{2}\right].$$

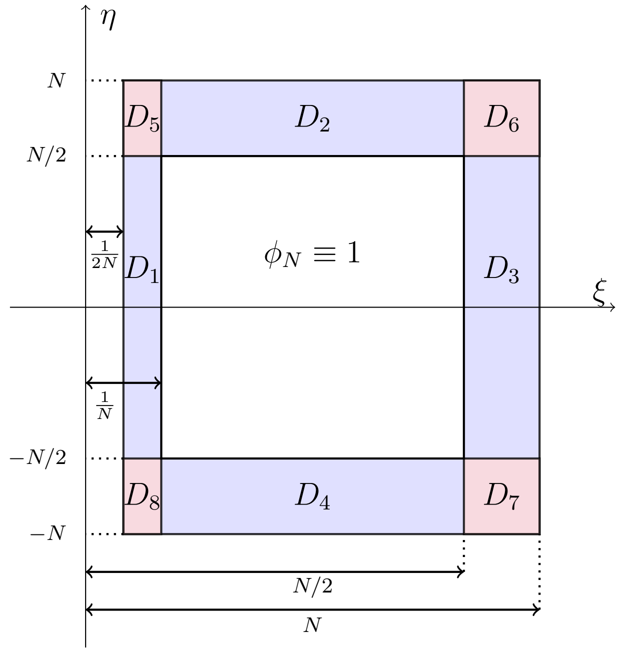


Figure : Domaines D_i

Comme $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} u$ vaut 0, alors

$$u_N := \sup_{(\xi,\eta)\in D_1\cup\cdots\cup D_8} |u(\xi,\eta)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous allons majorer chacune des intégrales portant sur $D_1, \ldots, D_8$. Pour cela, nous allons avoir besoin des lemmes suivants qui vont nous donner des estimations de chacun des termes en fonction de N.

Lemme 2.5 *Sur D_1, nous avons*

$$\sup\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}\right| = \mathcal{O}(N) \qquad \textit{et} \qquad \sup\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}\right| = 0.$$

Sur $D_2 \cup D_4$, nous avons

$$\sup\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}\right| = 0 \qquad \textit{et} \qquad \sup\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Sur D_3, nous avons

$$\sup\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \qquad \textit{et} \qquad \sup\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}\right| = 0.$$

Sur $D_5 \cup D_8$, nous avons

$$\sup\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}\right| = \mathcal{O}(N) \qquad et \qquad \sup\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Sur $D_6 \cup D_7$, nous avons

$$\sup\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \qquad et \qquad \sup\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Sur $D_1 \cup D_5 \cup D_8$, nous avons

$$\sup|L_{-m}(\phi_N)| = \mathcal{O}(N^2).$$

Sur $D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_6 \cup D_7$, nous avons

$$\sup|L_{-m}(\phi_N)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Preuve.
* Pour $(\xi,\eta) \in D_1$, $\phi_N(\xi,\eta) = \theta_1(N\xi)$ et donc

$$\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}(\xi,\eta) = N\theta_1'(N\xi) \qquad , \qquad \frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}(\xi,\eta) = 0,$$

$$L_{-m}\phi_N(\xi,\eta) = N^2\theta_1''(N\xi) - \frac{m\,N}{\xi}\theta_1'(N\xi),$$

ce qui nous donne

$$\sup_{D_1}\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}\right| = \mathcal{O}(N), \qquad \sup_{D_1}\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}\right| = 0, \qquad \sup_{D_1}|L_{-m}(\phi_N)| = \mathcal{O}(N^2)$$

puisque les dérivées de θ_1 sont bornées et que pour $(\xi,\eta) \in D_1$, on a $\xi \geq \frac{1}{2N}$.

*Pour $(\xi,\eta) \in D_2$, $\phi_N(\xi,\eta) = \theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right)$ et donc

$$\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}(\xi,\eta) = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{N}\theta_2'\left(\frac{\eta}{N}\right),$$

$$L_{-m}\phi_N(\xi,\eta) = \frac{1}{N^2}\theta_2''\left(\frac{\eta}{N}\right),$$

ce qui nous donne

$$\sup_{D_2}\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}\right| = 0, \qquad \sup_{D_2}\left|\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \qquad \sup_{D_2}|L_{-m}(\phi_N)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

* Il en est de même sur D_4.

* Pour $(\xi,\eta) \in D_3$, $\phi_N(\xi,\eta) = \theta_2\left(\frac{\xi}{N}\right)$ et donc

$$\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{1}{N}\theta_2'\left(\frac{\xi}{N}\right) \qquad , \qquad \frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}(\xi,\eta) = 0,$$

$$L_{-m}\phi_N(\xi,\eta) = \frac{1}{N^2}\theta_2''\left(\frac{\xi}{N}\right) - \frac{1}{N}\frac{m}{\xi}\theta_2'\left(\frac{\xi}{N}\right),$$

ce qui nous donne

$$\sup_{D_3}\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \qquad \sup_{D_3}\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}\right| = 0, \qquad \sup_{D_3}|L_{-m}(\phi_N)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

* Pour $(\xi,\eta)\in D_5$, $\phi_N(\xi,\eta) = \theta_1(N\xi)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right)$ et donc

$$\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}(\xi,\eta) = N\theta_1'(N\xi)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right) \quad , \quad \frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{N}\theta_1(N\xi)\theta_2'\left(\frac{\eta}{N}\right),$$

$$L_{-m}\phi_N(\xi,\eta) = N^2\theta_1''(N\xi)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right) + \frac{1}{N^2}\theta_1(N\xi)\theta_2''\left(\frac{\eta}{N}\right) - \frac{m}{\xi}N\theta_1'(N\xi)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right)$$

ce qui nous donne

$$\sup_{D_5}\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}\right| = \mathcal{O}(N), \qquad \sup_{D_5}\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \qquad \sup_{D_5}|L_{-m}(\phi_N)| = \mathcal{O}(N^2).$$

* Il en est de même sur D_8.

*Pour $(\xi,\eta)\in D_6$, $\phi_N(\xi,\eta) = \theta_2\left(\frac{\xi}{N}\right)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right)$ et donc

$$\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}(\xi,\eta) = \frac{1}{N}\theta_2'\left(\frac{\xi}{N}\right)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right) \quad , \quad \frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{N}\theta_2\left(\frac{\xi}{N}\right)\theta_2'\left(\frac{\eta}{N}\right),$$

$$L_{-m}\phi_N(\xi,\eta) = \frac{1}{N^2}\theta_2''\left(\frac{\xi}{N}\right)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right) + \frac{1}{N^2}\theta_2\left(\frac{\xi}{N}\right)\theta_2''\left(\frac{\eta}{N}\right) - \frac{m}{N\xi}\theta_2'\left(\frac{\xi}{N}\right)\theta_2\left(\frac{\eta}{N}\right)$$

ce qui nous donne

$$\sup_{D_6}\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\xi}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \qquad \sup_{D_6}\left|\frac{\partial\phi_N}{\partial\eta}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \qquad \sup_{D_6}|L_{-m}(\phi_N)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

* Il en est de même sur D_7. D'où le lemme.

□

Nous allons maintenant estimer les quantités suivantes pour $i\in\{1,\ldots,8\}$:

$$\int_{D_i}|F_m|\,d\xi d\eta, \quad \int_{D_i}|\partial_\xi F_m|\,d\xi d\eta \quad \text{et} \quad \int_{D_i}|\partial_\eta F_m|\,d\xi d\eta.$$

Lemme 2.6 *Pour* $\operatorname{Re} m < 1$, *nous avons :*
- pour $i = 1$:

$$\int_{D_i}|F_m|d\xi\,d\eta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \qquad \int_{D_i}\left|\frac{\partial F_m}{\partial\xi}\right|d\xi d\eta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

- pour $i = 2,4$:

$$\int_{D_i}|F_m|d\xi\,d\eta = \mathcal{O}\left(N^2\right), \qquad \int_{D_i}\left|\frac{\partial F_m}{\partial\eta}\right|d\xi d\eta = \mathcal{O}\left(N\right).$$

- *pour* $i = 3$:

$$\int_{D_i} |F_m| d\xi\, d\eta = \mathcal{O}\left(N^2\right), \qquad \int_{D_i} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}\left(N\right).$$

- *pour* $i = 5, 8$:

$$\int_{D_i} |F_m| d\xi\, d\eta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \qquad \int_{D_i} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\int_{D_i} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \eta}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

- *pour* $i = 6, 7$:

$$\int_{D_i} |F_m| d\xi\, d\eta = \mathcal{O}\left(N^2\right), \qquad \int_{D_i} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}\left(N\right),$$

$$\int_{D_i} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \eta}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}\left(N\right).$$

Preuve.
Pour Re $m < 1$, nous avons

$$F_m(\xi, \eta) = -\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{1-m}\theta\, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{1-\frac{m}{2}}}.$$

donc il existe une constante C_1 telle que, pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$, on ait

$$|F_m(\xi, \eta)| \leq \frac{C_1 \xi}{\left[(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}. \tag{2.1}$$

De même, nous avons

$$\frac{\partial F_m}{\partial \xi} = \frac{F_m}{\xi} - \frac{\xi x^{1-m}}{2\pi}(m-2) \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{[(\xi - x) + 2x \sin^2 \frac{\theta}{2}] \sin^{1-m}\theta\, d\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{2-\frac{m}{2}}},$$

et comme auparavant, comme

$$\forall \theta \in [0, \pi], \qquad \left|\frac{[(\xi - x) + 2x \sin^2 \frac{\theta}{2}] \sin^{1-m}\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{2-\frac{m}{2}}}\right| \leq \frac{|(\xi - x) + 2x \sin^2 \frac{\theta}{2}|}{\left((x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right)^{2-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \frac{|\xi - x\cos\theta|}{\left((x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right)^{2-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} \leq \frac{\xi + x}{\left((x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right)^{2-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}},$$

il existe une constante C_2 telle que, pour tout N assez grand et pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$, on ait

$$\left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| \leq C_2 \left[\frac{1}{\left[(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} + \frac{\xi(x+\xi)}{\left((x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right)^{2-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}\right]. \tag{2.2}$$

Enfin, comme

$$\frac{\partial F_m}{\partial \eta} = (2-m)(\eta - y)\frac{\xi x^{1-m}}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^{1-m}\theta}{\left[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y-\eta)^2\right]^{2-\frac{m}{2}}},$$

il existe une constante C_3 telle que, pour tout N assez grand et pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$, on ait

$$\left|\frac{\partial F_m}{\partial \eta}\right| \leq \frac{C_3 \xi}{|\eta - y|^{3-\mathrm{Re}\, m}}. \tag{2.3}$$

Grâce à ces inégalités, nous allons estimer les intégrales de ces différentes fonctions sur les domaines D_i.

Sur D_1 : L'inégalité (2.1) donne

$$\int_{D_1} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1)\int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}}\int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\eta=\frac{N}{2}} \frac{\xi\, d\xi\, d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(1/N^2)\int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\eta=\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{\left[(x-\frac{1}{N})^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} = \mathcal{O}(1/N^2).$$

Puis l'estimation (2.2) donne

$$\int_{D_1}\left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1)\int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}}\int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\eta=\frac{N}{2}}\left[\frac{1}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} + \frac{\xi(x+\xi)}{\left((x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right)^{2-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}\right] d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(1/N)\int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\eta=\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{\left[(x-\frac{1}{N})^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} + \mathcal{O}(1/N^2) = \mathcal{O}(1/N).$$

Sur D_2 : l'inégalité (2.1) donne

$$\int_{D_2} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1)\int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}}\int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi\, d\xi d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(1)\int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}}\int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi}{|\eta-y|^{2-\mathrm{Re}\, m}} d\xi d\eta = \mathcal{O}(N^2)\int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N}\frac{d\eta}{|\eta-y|^{2-\mathrm{Re}\, m}}$$

$$= \mathcal{O}(N^2)\left[\frac{1}{(N-y)^{1-\mathrm{Re}\, m}} - \frac{1}{(\frac{N}{2}-y)^{1-\mathrm{Re}\, m}}\right] = \mathcal{O}(N^{Re\, m+1}).$$

Puis l'inégalité (2.3) donne

$$\int_{D_2}\left|\frac{\partial F_m}{\partial \eta}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1)\int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}}\int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N}\frac{\xi}{|\eta-y|^{3-\mathrm{Re}\, m}} d\xi\, d\eta$$

$$= \mathcal{O}(N^2) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{d\eta}{|\eta - y|^{3-\mathrm{Re}\, m}} = \mathcal{O}(N^{\mathrm{Re}\, m})$$

Sur D_3 : l'inégalité (2.1) donne

$$\int_{D_3} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\xi\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\xi\, d\xi d\eta}{\left[(x-\frac{N}{2})^2 + (\eta - y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(N^2) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{\left[(x-\frac{N}{2})^2 + (\eta - y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(N^2) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{[1 + (\eta - y)^2]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} = \mathcal{O}(N^2).$$

Puis l'inégalité (2.2) donne

$$\int_{D_3} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left[\frac{1}{\left[(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} + \frac{\xi(x+\xi)}{\left((x-\xi)^2 + (\eta - y)^2\right)^{2-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} \right] d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(N) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{\left[(x-\frac{N}{2})^2 + (\eta - y)^2\right]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} + \mathcal{O}(N^3) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{\left[(x-\frac{N}{2})^2 + (\eta - y)^2\right]^{2-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N^3) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{(x-\frac{N}{2})^{4-\mathrm{Re}\, m}}$$

$$= \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N^{\mathrm{Re}\, m}) = \mathcal{O}(N).$$

Sur D_4 : ce cas est analogue au cas du domaine D_2.

Sur D_5 : l'inégalité (2.1) donne

$$\int_{D_5} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2]^{1-\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(1/N^2) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{d\eta}{(\eta - y)^{2-\mathrm{Re}\, m}}$$

$$= \mathcal{O}(1/N^2) \left[\frac{1}{(N-y)^{1-\mathrm{Re}\, m}} - \frac{1}{(\frac{N}{2}-y)^{1-\mathrm{Re}\, m}} \right] = \mathcal{O}(1/N^{3-\mathrm{Re}\, m}).$$

Puis l'inégalité (2.2) donne

$$\int_{D_5} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left[\frac{1}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} + \frac{\xi(x+\xi)}{\left((x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right)^{2-\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} \right] d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left[\frac{1}{\left[\left(x-\frac{1}{N}\right)^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} + \frac{\xi(x+\xi)}{\left(\left(x-\frac{1}{N}\right)^2+(\eta-y)^2\right)^{2-\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} \right] d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Enfin l'inégalité (2.3) donne

$$\int_{D_5} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \eta}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{\xi\, d\xi\, d\eta}{|\eta-y|^{3-\operatorname{Re} m}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

<u>Sur D_6</u> : l'inégalité (2.1) donne

$$\int_{D_6} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi\, d\xi d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\operatorname{Re} m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(N^2) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{d\eta}{(\eta-y)^{2-\operatorname{Re} m}}$$

$$= \mathcal{O}(N^2) \left[\frac{1}{(N-y)^{1-\operatorname{Re} m}} - \frac{1}{(\frac{N}{2}-y)^{1-\operatorname{Re} m}} \right] = \mathcal{O}(N^{1+\operatorname{Re} m}).$$

Puis l'inégalité (2.2) donne

$$\int_{D_6} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{\xi=N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left[\frac{1}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} + \frac{\xi(x+\xi)}{\left((x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right)^{2-\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} \right] d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{\xi=N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left[\frac{1}{(\eta-y)^{2-\operatorname{Re} m}} + \frac{\xi(x+\xi)}{(\eta-y)^{4-\operatorname{Re} m}} \right] d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N^3) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{d\eta}{(\eta - y)^{4-\mathrm{Re}\, m}} = \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N^{\mathrm{Re}\, m}) = \mathcal{O}(N).$$

Enfin l'inégalité (2.3) donne

$$\int_{D_6} \left| \frac{\partial F_m}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{\xi=N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{\xi \, d\xi \, d\eta}{|\eta - y|^{3-\mathrm{Re}\, m}} = O(N^2) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{d\eta}{|\eta - y|^{3-\mathrm{Re}\, m}}$$
$$= \mathcal{O}(N^{\mathrm{Re}\, m}).$$

Sur D_7 : ce cas est analogue au cas du domaine D_6.

Sur D_8 : ce cas est analogue au cas du domaine D_5. □

Lemme 2.7 *Pour Re $m \geq 1$, toutes les estimations obtenues dans le lemme 2.6 sont valables.*

Preuve. Pour Re $m \geq 1$, nous avons

$$F_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{m-1}\theta \left(\frac{1}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2 \frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{m/2}} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{[(x+\xi)^2 - 4x\xi \sin^2 \frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{m/2}} \right) d\theta.$$

Comme pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$, on a

$$\left| \left[(x+\xi)^2 - 4x\xi \sin^2 \frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2 \right]^{m/2} \right| = \left| \left[x^2 + \xi^2 + 2x\xi \cos\theta + (y-\eta)^2 \right]^{m/2} \right|,$$

alors pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$,

$$\left| \left[(x+\xi)^2 - 4x\xi \sin^2 \frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2 \right]^{m/2} \right| \geq \left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right)^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}} \tag{2.4}$$

et il existe une constante C_1' telle que, pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^+$, on ait

$$|F_m| \leq \frac{C_1' \xi^{\mathrm{Re}\, m}}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}. \tag{2.5}$$

Cette estimation est malheureusement insuffisante pour majorer les termes portants sur D_1. Nous pouvons affiner l'inégalité (2.5) comme suit :
On réécrit F_m comme

$$F_m(x,y,\xi,\eta) = -\frac{\xi^m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{m-1}\theta K_m(x,y,\xi,\eta,\theta) d\theta$$

où

$$K_m(x,y,\xi,\eta,\theta) = \frac{1}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi \sin^2 \frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{m/2}}$$

$$-\frac{1}{[(x+\xi)^2 - 4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{m/2}}.$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{H}^+$ fixé, $\theta \in [0, \pi]$ fixé et $\eta \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la fonction g_m sur $[-1/N, 1/N]$ avec $1/N < x$ par

$$g_m(\xi) = \frac{1}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{m/2}}.$$

Cette fonction est bien définie puisque d'une part

$$(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2 = x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\theta + (y-\eta)^2 \geq (x-|\xi|)^2 + (y-\eta)^2$$

et que ce dernier terme est aussi minoré par $(x - 1/N)^2 > 0$.
Nous avons

$$K_m(x, y, \xi, \eta, \theta) = g_m(\xi) - g_m(-\xi)$$

donc

$$|K_m(x, y, \xi, \eta, \theta)| \leq 2\xi \sup_{[-\xi,\xi]} |g'_m| \leq 2|m|\xi \frac{|\xi - x| + 2x}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\, m}},$$

ce qui implique qu'il existe une constante c'_1 telle que

$$\forall (\xi, \eta) \in D_1, \qquad |F_m| \leq c'_1 \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m+1}}{\left[(x-\xi)^2 + (\eta-y)^2\right]^{1+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\, m}}. \tag{2.6}$$

De même, nous avons

$$\frac{\partial F_m}{\partial \xi} = \frac{m\, F_m}{\xi} + \frac{m\xi^m}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{m-1}\theta \left(\frac{(\xi - x) + 2x\sin^2\frac{\theta}{2}}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}}\right.$$
$$\left. - \frac{(\xi + x) - 2x\sin^2\frac{\theta}{2}}{[(x+\xi)^2 - 4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}}\right) d\theta. \tag{2.7}$$

et comme auparavant,

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \left|\frac{[(\xi - x) + 2x\sin^2\frac{\theta}{2}]\sin^{m-1}\theta}{[(x-\xi)^2 + 4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}}\right| \leq \frac{\left|(\xi - x) + 2x\sin^2\frac{\theta}{2}\right|}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}}$$
$$= \frac{|\xi - x\cos\theta|}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}} \leq \frac{\xi + x}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}}$$

et, grâce à (2.4) :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \left|\frac{[(\xi + x) - 2x\sin^2\frac{\theta}{2}]\sin^{m-1}\theta}{[(x+\xi)^2 - 4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2} + (y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}}\right| \leq \frac{\left|(\xi + x) - 2x\sin^2\frac{\theta}{2}\right|}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}}$$
$$= \frac{|\xi + x\cos\theta|}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}} \leq \frac{\xi + x}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}}.$$

Ces deux estimations, combinées avec la formule (2.7) et l'inégalité (2.5) montrent qu'il existe une constante C_2' telle que, pour tout N assez grand et pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$, on ait

$$\left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| \le C_2' \left(\frac{\xi^{\operatorname{Re} m-1}}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} + \frac{\xi^{\operatorname{Re} m}(\xi+x)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}+1}} \right). \tag{2.8}$$

Nous pouvons améliorer cette inégalité sur D_1 en utilisant l'inégalité (2.6) au lieu de (2.5) et nous obtenons qu'il existe des constantes C_2'' et C_2''' (indépendantes de N) telles que, pour tout $(\xi,\eta) \in D_1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| &\le C_2'' \left(\frac{\xi^{\operatorname{Re} m}}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1+\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} + \frac{\xi^{\operatorname{Re} m}(\xi+x)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}+1}} \right) \\ &\le C_2''' \frac{\xi^{\operatorname{Re} m}}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1+\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_m}{\partial \eta} = \frac{m(\eta-y)\xi^m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{m-1}\theta \Bigg(&\frac{1}{[(x-\xi)^2+4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2}+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}} \\ &- \frac{1}{[(x+\xi)^2-4x\xi\sin^2\frac{\theta}{2}+(y-\eta)^2]^{\frac{m}{2}+1}} \Bigg) d\theta.\end{aligned}$$

De même, il existe une constante C_3' telle que, pour tout N assez grand et pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{H}^+$, on ait

$$\left|\frac{\partial F_m}{\partial \eta}\right| \le C_3' \frac{|\eta-y|\xi^{\operatorname{Re} m}}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}+1}}. \tag{2.10}$$

Grâce à ces inégalités, nous allons estimer les intégrales de ces différentes fonctions sur les domaines D_i.

<u>Sur D_1</u> : l'inégalité (2.6) donne

$$\begin{aligned}\int_{D_1} |F_m| d\xi d\eta &= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\eta=\frac{N}{2}} \frac{\xi^{\operatorname{Re} m+1} d\xi d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1+\frac{1}{2}\operatorname{Re} m}} \\ &= \mathcal{O}(N) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \xi^{\operatorname{Re} m+1} d\xi = \mathcal{O}(N) \left[\left(\frac{1}{N}\right)^{\operatorname{Re} m+2} - \left(\frac{1}{2N}\right)^{\operatorname{Re} m+2} \right] \\ &= \mathcal{O}(1/N^{\operatorname{Re} m+1}).\end{aligned}$$

Puis l'estimation (2.9) donne

$$\int_{D_1} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\eta=\frac{N}{2}} \frac{\xi^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(\eta-y)^2\right]^{1+\frac{1}{2}\operatorname{Re} m}}.$$

$$= \mathcal{O}(N) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \xi^{\operatorname{Re} m} d\xi = \mathcal{O}(1/N^{\operatorname{Re} m}).$$

Sur D_2 : l'inégalité (2.5) donne

$$\int_{D_2} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{|y-\frac{N}{2}|^{\operatorname{Re} m}} = \mathcal{O}(N^2),$$

car la quantité intégrée est minorée et majorée indépendamment de N dans un domaine dont la mesure est $\mathcal{O}(N^2)$.
Puis l'inégalité (2.10) donne

$$\int_{D_2} \left| \frac{\partial F_m}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{|\eta - y| \xi^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}+1}}$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{|y-\eta|^{\operatorname{Re} m+1}} = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{N}}^{\frac{N}{2}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{N^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{|\frac{N}{2}-y|^{\operatorname{Re} m+1}} = \mathcal{O}(N).$$

Sur D_3 : l'inégalité (2.5) donne

$$\int_{D_3} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\xi^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\xi^{\operatorname{Re} m} d\xi d\eta}{\left((x-\frac{N}{2})^2+(y-\eta)^2\right)^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(N^{\operatorname{Re} m+1}) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{\left((x-\frac{N}{2})^2+(y-\eta)^2\right)^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} = \mathcal{O}(N^2).$$

Puis l'inégalité (2.8) donne

$$\int_{D_3} \left| \frac{\partial F_m}{\partial \xi} \right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left(\frac{\xi^{\operatorname{Re} m-1}}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}}} \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^{\operatorname{Re} m}(\xi+x)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}+1}} \right) d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(N^{\operatorname{Re} m}) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{[(x-\frac{N}{2})^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}}}$$

$$+ \mathcal{O}(N^{\operatorname{Re} m+2}) \int_{\eta=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{d\eta}{[(x-\frac{N}{2})^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\operatorname{Re} m}{2}+1}}$$

$$= \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N) = \mathcal{O}(N).$$

Sur D_4 : ce cas est analogue au cas du domaine D_2.

Sur D_5 : l'inégalité (2.5) donne

$$\int_{D_5} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m} d\xi d\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(1/N^{\mathrm{Re}\, m+1}) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{d\eta}{|y-\frac{N}{2}|^{\mathrm{Re}\, m}} = \mathcal{O}(1/N^{2\mathrm{Re}\, m}).$$

Puis l'inégalité (2.8) donne

$$\int_{D_5} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left(\frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m-1}}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} + \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m}(\xi+x)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}} \right) d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left(\frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m-1}}{|y-\eta|^{\mathrm{Re}\, m}} + \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m}(\xi+x)}{|y-\eta|^{\mathrm{Re}\, m+2}} \right) d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(1/N^{2\mathrm{Re}\, m-1}).$$

Enfin l'inégalité (2.10) donne

$$\int_{D_5} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \eta}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{|\eta-y|\xi^{\mathrm{Re}\, m} d\xi d\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}}$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{1}{2N}}^{\xi=\frac{1}{N}} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m} d\xi d\eta}{|y-\eta|^{\mathrm{Re}\, m+1}} = \mathcal{O}(1/N^{2\mathrm{Re}\, m+1})$$

Sur D_6 : l'inégalité (2.5) donne

$$\int_{D_6} |F_m| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m} d\xi d\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}}$$

$$= \mathcal{O}(N^{\mathrm{Re}\, m+1}) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{N} \frac{d\eta}{(\frac{N}{2}-y)^{\mathrm{Re}\, m}} = \mathcal{O}(N^2).$$

Puis l'inégalité (2.8) donne

$$\int_{D_6} \left|\frac{\partial F_m}{\partial \xi}\right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{\xi=N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left(\frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m-1}}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}}} + \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m}(\xi+x)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}} \right) d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{\xi=N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \left(\frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m-1}}{|y-\eta|^{\mathrm{Re}\, m}} + \frac{\xi^{\mathrm{Re}\, m}(\xi+x)}{|y-\eta|^{\mathrm{Re}\, m+2}} \right) d\xi d\eta$$

$$= \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N^{\mathrm{Re}\, m+2}) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{d\eta}{|y-\eta|^{\mathrm{Re}\, m+2}} = \mathcal{O}(N).$$

Enfin l'inégalité (2.10) donne

$$\int_{D_6} \left| \frac{\partial F_m}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = \mathcal{O}(1) \int_{\xi=\frac{N}{2}}^{\xi=N} \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{|\eta - y| \xi^{\mathrm{Re}\, m} d\xi d\eta}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{\frac{\mathrm{Re}\, m}{2}+1}}$$

$$= \mathcal{O}(N^{\mathrm{Re}\, m+1}) \int_{\eta=\frac{N}{2}}^{\eta=N} \frac{d\eta}{|y-\eta|^{\mathrm{Re}\, m+1}} = \mathcal{O}(N).$$

Sur D_7 : ce cas est analogue au cas du domaine D_6.

Sur D_8 : ce cas est analogue au cas du domaine D_5.

$\square$

Dans le tableau suivant, on récapitule les résultats obtenus dans les lemmes précédents :

i	$\sup_{D_i} \|L_{-m}\phi_N\|$	$\int_{D_i} \|F_m\| d\xi d\eta$	$(\|\partial_\xi \phi_N\|, \|\partial_\eta \phi_N\|)$	$\int_{D_i} \|\partial_\xi F_m\|$	$\int_{D_i} \|\partial_\eta F_m\|$
1	$\mathcal{O}(N^2)$	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$(\mathcal{O}(N), 0)$	$\mathcal{O}(\frac{1}{N})$	$\times$
2	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$\mathcal{O}(N^2)$	$(0, \mathcal{O}(\frac{1}{N}))$	$\times$	$\mathcal{O}(N)$
3	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$\mathcal{O}(N^2)$	$(\mathcal{O}(\frac{1}{N}), 0)$	$\mathcal{O}(N)$	$\times$
4	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$\mathcal{O}(N^2)$	$(0, \mathcal{O}(\frac{1}{N}))$	$\times$	$\mathcal{O}(N)$
5	$\mathcal{O}(N^2)$	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$(\mathcal{O}(N), \mathcal{O}(\frac{1}{N}))$	$\mathcal{O}(\frac{1}{N})$	$\mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$
6	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$\mathcal{O}(N^2)$	$(\mathcal{O}(\frac{1}{N}), \mathcal{O}(\frac{1}{N}))$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
7	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$\mathcal{O}(N^2)$	$(\mathcal{O}(\frac{1}{N}), \mathcal{O}(\frac{1}{N}))$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
8	$\mathcal{O}(N^2)$	$\mathcal{O}(1/N^2)$	$(\mathcal{O}(N), \mathcal{O}(\frac{1}{N}))$	$\mathcal{O}(\frac{1}{N})$	$\mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$

On peut aisément vérifier que pour chaque $i \in \{1, \ldots, 8\}$, les quantités

$$\sup_{D_i} |L_{-m}\phi_N| \int_{D_i} |F_m|, \quad \sup_{D_i} |\partial_\xi \phi_N| \int_{D_i} |\partial_\xi F_m| \quad \text{et} \quad \sup_{D_i} |\partial_\eta \phi_N| \int_{D_i} |\partial_\eta F_m|$$

restent bornées. Il en résulte, que

$$u(x, y) = o(1)$$

quand $N \to +\infty$. Ceci nous donne

$$u \equiv 0$$

et prouve la proposition 2.4. $\square$

2.2 Théorème de décomposition des PSA pour $m \in \mathbb{C}$.

Nous prouvons ici un théorème de décomposition des PSA, un peu dans l'esprit de celui prouvé dans [8, Théorème 2 de la section 4] (mais dans un cadre notablement différent puisque dans ce travail, la conductivité est réfléchie à travers le bord du domaine $\partial\Omega$).

Théorème de décomposition. *Soient Ω un domaine ouvert de $\mathbb{H}^+$ et K un sous-ensemble compact de Ω. Si une fonction $u \in C^2(\Omega \setminus K)$ est solution de $L_m u = 0$ dans $\Omega \setminus K$, alors u a une unique décomposition de la forme*

$$u = v + w$$

où $v \in C^2(\Omega)$ est solution de $L_m v = 0$ dans Ω et $w \in C^2(\mathbb{H}^+ \setminus K)$ est solution de $L_m w = 0$ dans $\mathbb{H}^+ \setminus K$ avec $\lim\limits_{\partial\mathbb{H}^+} w = 0$.

Preuve. Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ et $\rho > 0$, on définit $E_\rho = \{x \in \mathbb{C},\ d(x, E) < \rho\}$ (E_ρ est un voisinage de E).
Tout d'abord, on suppose que Ω est un ouvert relativement compact de $\mathbb{H}^+$. On choisit ρ assez petit de telle sorte que K_ρ et $(\partial\Omega)_\rho$ soient disjoints. Il existe une fonction $\varphi_\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^+)$ à support dans $\Omega \setminus K$ telle que $\varphi_\rho \equiv 1$ dans un voisinage de $\Omega \setminus (K_\rho \cup (\partial\Omega)_\rho)$.

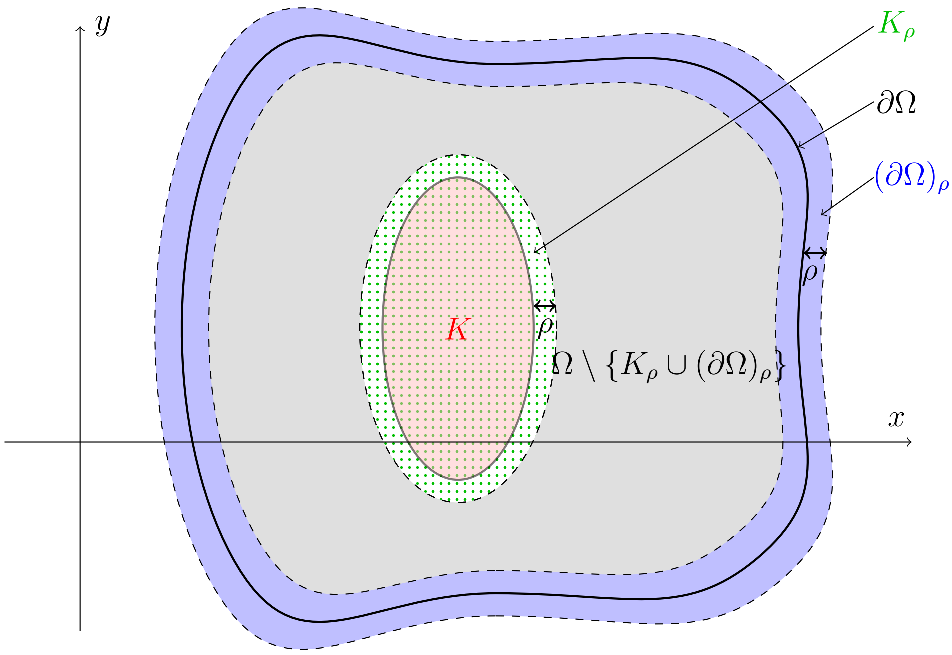


Figure : $\varphi_\rho \equiv 1$ dans la partie grise intermédiaire

Pour $z = x + iy \in \Omega \setminus (K_\rho \cup (\partial\Omega)_\rho)$, en notant

$$F_z(\zeta) := F_m(x, y, \xi, \eta) \quad \text{et} \quad L_\zeta := L_{m,\xi,\eta} \qquad \text{pour } \zeta = \xi + i\eta,$$

on a, grâce à la proposition 1.12

$$u(z) = u\varphi_\rho(z) = \int_{\Omega_\rho} F_z(\zeta) L_\zeta(u\varphi_\rho)(\zeta) d\xi d\eta$$

$$= \int_{(\partial\Omega)_\rho} F_z(\zeta) L_\zeta(u\varphi_\rho)(\zeta) d\xi d\eta + \int_{K_\rho} F_z(\zeta) L_\zeta(u\varphi_\rho)(\zeta) d\xi d\eta$$
$$= v_\rho(z) + w_\rho(z).$$

Le dernier point du lemme 2.1 montre alors que v_ρ est solution de $L_m v_\rho = 0$ sur $\Omega \setminus (\partial\Omega)_\rho$ et que w_ρ est solution de $L_m w_\rho = 0$ sur $\mathbb{H}^+ \setminus K_\rho$. On a aussi $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} w_\rho = 0$. Supposons maintenant que $\sigma < \rho$. Alors comme précédement, on obtient la décomposition $u = v_\sigma + w_\sigma$ sur $\Omega \setminus (K_\sigma \cup (\partial\Omega)_\sigma)$. Nous affirmons que $v_\rho = v_\sigma$ sur $\Omega \setminus (\partial\Omega)_\rho$ et $w_\rho = w_\sigma$ sur $\mathbb{H}^+ \setminus K_\rho$. Pour voir cela, remarquons que si $z \in \Omega \setminus (K_\rho \cup (\partial\Omega)_\rho)$, alors $v_\rho(z) + w_\rho(z) = v_\sigma(z) + w_\sigma(z)$.
On notera (1) l'équation $L_m u = 0$. Ainsi $w_\rho - w_\sigma$ est une solution de (1) dans $\mathbb{H}^+ \setminus K_\rho$, qui est égale à $v_\sigma - v_\rho$ dans $\Omega \setminus (K_\rho \cup (\partial\Omega)_\rho)$, et $v_\sigma - v_\rho$ se prolonge en une solution de (1) sur $\Omega \setminus (\partial\Omega)_\rho$.
En conclusion, $w_\rho - w_\sigma$ se prolonge en une solution de (1) dans $\mathbb{H}^+$, et $\lim\limits_{\partial\mathbb{H}^+} w_\rho - w_\sigma = 0$. La proposition 2.4 nous donne alors

$$w_\rho = w_\sigma,$$

et par suite $v_\rho = v_\sigma$.
Pour $z \in \Omega$, on peut donc définir $v(z) = v_\rho(z)$ pour tout ρ assez petit de tel sorte que $z \in \Omega \setminus (\partial\Omega)_\rho$. De la même manière, pour $z \in \mathbb{H}^+ \setminus K$, on pose $w(z) = w_\rho(z)$ pour ρ petit. Nous sommes arrivés à la décomposition souhaitée $u = v + w$.
Supposons maintenant que Ω soit un domaine de $\mathbb{H}^+$ quelconque et que u est solution de $L_m u = 0$ sur $\Omega \setminus K$. On choisit $a \in \mathbb{H}^+$ et R assez grand pour que $K \subset D(a, R)$ et que $D(a, R)$ soit relativement compact dans $\mathbb{H}^+$. Soit $\omega = \Omega \cap D(a, R)$. On remarque que K est un sous-espace compact de l'ouvert ω relativement compact dans $\mathbb{H}^+$ et que u est solution de (1) dans $\omega \setminus K$. En appliquant le résultat démontré pour les ensembles ouverts relativement compacts, nous avons

$$u(z) = \tilde{v}(z) + \tilde{w}(z)$$

pour $z \in \omega \setminus K$, où $\tilde{v}$ est une solution de (1) dans ω et $\tilde{w}$ est une solution de (1) dans $\mathbb{H}^+ \setminus K$ satisfaisant $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} \tilde{w} = 0$. Notons que la différence $V = u - \tilde{w}$ est solution de (1) dans $\Omega \setminus K$ et qui se prolonge en une solution de (1) au voisinage de K car elle est égale à $\tilde{v}$ dans ω. La somme $u = V + \tilde{w}$ fournit une décomposition souhaitée de u.
Comme précédemment, si on a une autre décomposition $u = v + w$ avec $v \in C^2(\Omega)$ avec $L_m v = 0$ et $w \in C^2(\mathbb{H}^+ \setminus K)$ avec $L_m w = 0$ et $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} w = 0$, alors on a $V - v = w - \tilde{w}$ dans $\Omega \setminus K$. La fonction $w - \tilde{w}$ se prolonge à $\mathbb{H}^+$, est solution de $L_m(w - \tilde{w}) = 0$ dans $\mathbb{H}^+$ et vérifie $\lim_{\partial\mathbb{H}^+}(w - \tilde{w}) = 0$. Grâce à la proposition 2.4, on obtient $w = \tilde{w}$, puis $V = v$, ce qui achève de prouver le théorème de décomposition. □

3 Formule de Poisson pour $\mathbb{H}^+$ quand $\mathrm{Re}\, m < 1$.

Pour $\mathrm{Re}\, m < 1$, une application formelle de la proposition 1.12 à l'ouvert $\Omega = \mathbb{H}^+$ permet de deviner une formule de représentation intégrale donnant l'expression de u solution de $L_m(u) = 0$ dans $\mathbb{H}^+$ connaissant les valeurs de u sur l'axe des ordonnées.

Des résultats de ce type ont notamment été obtenus, y compris dans des domaines légèrement différents ($\mathbb{H}^+ \setminus (0, a] \times \{0\}$) avec $a > 0$ par Lenells et Fokas dans le cas où $m = \pm 1$, avec les techniques que nous reprendrons dans le chapitre 2. Plus précisément, nous avons la

Proposition 3.1 *Soient* $m \in \mathbb{C}$ *tel que* Re $m < 1$ *et* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et bornée.*
Alors il existe un unique PSA U *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{H}^+$ *tel que* $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} U(x, y) = 0$ *et tel que, pour tout* $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(0,y)} U = u(y).$$

De plus, nous avons pour tout $(x, y) \in \mathbb{H}^+$,

$$U(x, y) = C_m x^{1-m} \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)\, d\eta}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{1-\frac{m}{2}}}$$

où $C_m = \frac{1-m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{1-m} \theta \, d\theta = \frac{1}{2^m \pi} \frac{\Gamma^2\left(1-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(1-m)}$.

Preuve. Notons $f(x, y) = \frac{x^{1-m}}{(x^2+(y-\eta)^2)^{1-\frac{m}{2}}}$. Pour montrer le premier point de la proposition, il suffit de montrer que $L_m f = 0$ par dérivation sous le signe intégrale. On a

$$\partial_x f = \frac{(1 - m)x^{-m}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{1-\frac{m}{2}}} - \frac{(2 - m)x^{2-m}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{2-\frac{m}{2}}}$$

et

$$\partial_{xx} f = -\frac{m(1 - m)x^{-m-1}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{1-\frac{m}{2}}} - \frac{(2 - m)(3 - 2m)x^{1-m}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{2-\frac{m}{2}}} + \frac{(2 - m)(4 - m)x^{3-m}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{3-\frac{m}{2}}}$$

puis

$$\partial_{yy} f = -\frac{(2 - m)x^{1-m}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{2-\frac{m}{2}}} + \frac{(2 - m)(4 - m)(y - \eta)^2 x^{1-m}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{3-\frac{m}{2}}}.$$

On a donc

$$\Delta f = \frac{m(2 - m)x^{1-m}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{2-\frac{m}{2}}} - \frac{m(1 - m)x^{-m-1}}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{1-\frac{m}{2}}}$$

et on en déduit que $L_m f(x, y) = 0$.
On a

$$U(x, y) = C_m x^{1-m} \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)\, d\eta}{(x^2 + (y - \eta)^2)^{1-\frac{m}{2}}} = \frac{C_m}{x} \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \frac{u(\eta)\, d\eta}{(1 + (\frac{y-\eta}{x})^2)^{1-\frac{m}{2}}}$$

Par le changement de variable $t = \frac{y-\eta}{x}$, on obtient

$$U(x, y) = C_m \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{u(y - tx)\, dt}{(1 + t^2)^{1-\frac{m}{2}}}$$

Par le théorème de convergence dominée, il suffit de montrer que

$$C_m \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{1-\frac{m}{2}}} = \frac{1 - m}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{1-m} \theta \, d\theta \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{1-\frac{m}{2}}} = 1.$$

Pour voir cela, remarquons d'après [1] (page 258) que

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{1-\frac{m}{2}}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1-m}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)}$$

où B est la fonction bêta d'Euler et que

$$\frac{1-m}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{1-m}\theta\, d\theta = \frac{1-m}{2\pi}2^{1-m}B\left(1-\frac{m}{2}, 1-\frac{m}{2}\right) = \frac{1-m}{2\pi}2^{1-m}\frac{\Gamma^2\left(1-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(2-m\right)}.$$

Puis en utilisant la formule de duplication pour la fonction Γ

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

et la formule de récurrence $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on obtient le résultat voulu, c'est-à-dire que

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)}\frac{1-m}{2\pi}2^{1-m}\frac{\Gamma^2\left(1-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(2-m\right)} = 1.$$

L'unicité découle de la proposition 2.4. On a donc prouvé la proposition. □

Remarque 3.2 On pourrait se poser la question de l'existence d'une telle formule reproduisante si $\mathrm{Re}\, m \geq 1$. En fait, si m est un entier naturel non nul et si $u \in C^2(\overline{\mathbb{H}^+})$ solution de $L_m(u) = 0$ dans $\mathbb{H}^+$, alors la fonction v définie sur $\mathbb{R}^{m+2}$ par $v(x_1, \ldots, x_{m+2}) = u(0, x_{m+2})$ et $v(x_1, \ldots, x_{m+2}) = u\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2}, x_{m+2}\right)$ est une fonction harmonique sur $(\mathbb{R}^{m+1})_* \times \mathbb{R}$. En particulier, si $m \geq 2$, la proposition 18 de [30], page 310 montre que v se prolonge en une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^{m+2}$, qui tend vers 0 à l'infini. On en déduit que v est la fonction identiquement nulle, donc que $u \equiv 0$, ce qui prouve que le problème de la détermination d'une solution de $L_m(u) = 0$ sachant que u tend vers 0 à l'infini et que les valeurs de u sont connues sur l'axe des ordonnées est un problème qui n'a pas de sens. Dans ce cas, l'absence de solution au problème de Dirichlet est la conséquence de la perte de l'ellipticité de l'équation $L_m u = 0$ au bord de $\mathbb{H}^+$. Nous ne traiterons donc pas le cas $\mathrm{Re}\, m \geq 1$ dans ce cadre pour cette raison.

4 Application au cas d'un domaine annulaire.

Toutes les notions qui suivent sont couramment utilisées en physique, mais à notre connaissance, nous n'avons pas trouvé de fondements rigoureux sur le plan mathématique de celles-ci. Nous reprenons donc toutes les définitions et propositions de base.

4.1 Les coordonnées bipolaires dans le plan xOy.

Nous introduisons un système de coordonnées utilisé par les physiciens (voir [75]) et particulièrement adapté à l'étude de L_1 et L_{-1} dans le cas où le domaine étudié est un disque excentré de $\mathbb{H}^+$.

Des applications numériques sur des problèmes extrémaux bornés utilisant de manière complète ces coordonnées bipolaires ont été réalisées dans la récente thèse de Yannick Fischer ([42, 43, 44]).
Soit $\alpha > 0$. Considérons une charge positive placée en $A = (-\alpha, 0)$ et une charge négative placée en $B = (\alpha, 0)$ (la valeur absolue des deux charges étant identiques). Le potentiel engendré par ce système de charges en un point M du plan est, à une constante multiplicative près, $\ln\left(\frac{MA}{MB}\right)$.
Par définition, la première coordonnée bipolaire est

$$\tau := \ln \frac{MA}{MB}.$$

La seconde coordonnée bipolaire est

$$\theta = \widehat{AMB}.$$

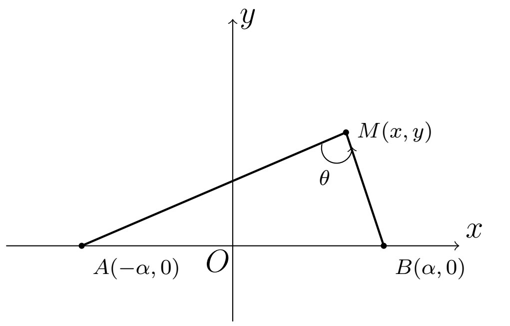


Figure : Coordonnées bipolaires

Les coordonnées bipolaires sont alors reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y) du plan xOy par le fait que

$$\frac{(\alpha - x) - iy}{(-\alpha - x) - iy} = e^{-\tau + i\theta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x - \alpha) + iy = e^{-\tau + i\theta}[(x + \alpha) + iy]$$

ce qui nous donne, après identification des parties réelles et imaginaires

$$\begin{cases} x - \alpha = e^{-\tau}[(\alpha + x)\cos\theta - y\sin\theta] \\ \\ y = e^{-\tau}[(\alpha + x)\sin\theta + y\cos\theta] \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x\,[1 - e^{-\tau}\cos\theta] + y\sin\theta = \alpha\,[e^{-\tau}\cos\theta + 1] \\ \\ -xe^{-\tau}\sin\theta + y\,[1 - e^{-\tau}\cos\theta] = \alpha e^{-\tau}\sin\theta. \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations nous permet d'obtenir immédiatement

$$x = \frac{\alpha \operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\theta}, \qquad y = \frac{\alpha\sin\theta}{\operatorname{ch}\tau - \cos\theta}.$$

Si on prend $R > 0$ et si on pose $a = \sqrt{R^2 + \alpha^2}$, le disque de centre $(a, 0)$ et de rayon R correspond à

$$\tau \geq \tau_0 = \ln\left(\frac{a}{R} + \sqrt{\frac{a^2}{R^2} - 1}\right) = \arg\operatorname{ch}\frac{a}{R}.$$

De plus, le demi-plan droit est

$$\mathbb{H}^+ = \{(\tau,\theta)\ :\ \tau \in]0+\infty],\ \ \theta\in[0,2\pi[\}.$$

Les lignes de niveaux $\tau=\tau_0$ sont les cercles de centre $(\alpha\coth\tau_0,0)$ et de rayon $\alpha/\mathrm{sh}\,\tau_0$. Cela implique que pour tout τ_0,τ_1 tels que $0<\tau_0<\tau_1$, l'ensemble $\{\tau\geq\tau_0\}$ est un disque fermé et l'ensemble $0<\tau<\tau_1$ est le complémentaire dans $\mathbb{H}^+$ du disque fermé $\{\tau\geq\tau_1\}$.

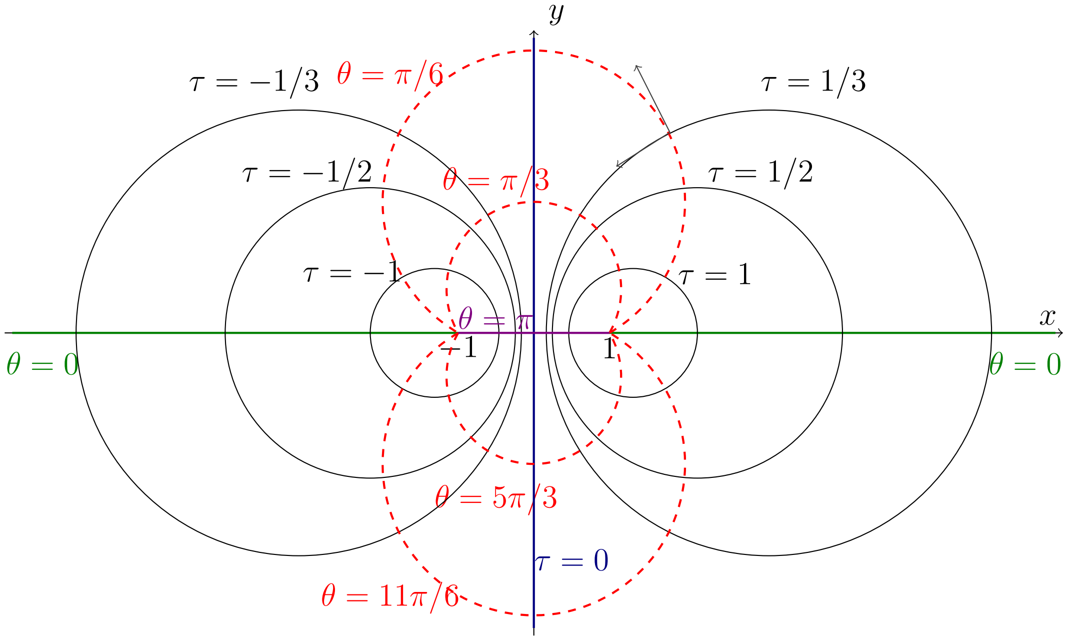


Figure 1 : Lignes de niveaux (avec $\alpha=1$)

4.2 Etude des PSA en coordonnées bipolaires.

Dans ce qui suit, nous identifierons les fonctions en coordonnées cartésiennes avec les fonctions en coordonnées bipolaires.
Le théorème suivant est bien connu pour $m=-1$ par les physiciens ([4, 93, 87, 88, 64, 78]. Nous l'étendons aux valeurs de m complexes quelconques :

Théorème 4.1 *Si u vérifie $L_m u=0$ dans un ouvert de $\mathbb{H}^+$ et si nous posons*

$$v_m(\tau,\theta)=\mathrm{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\theta)^{-m/2}u(\tau,\theta)$$

où par définition

$$\mathrm{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\theta)^{-m/2}=\exp\left(\frac{m-1}{2}\ln\mathrm{sh}\,\tau-\frac{m}{2}\ln(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\theta)\right)$$

alors

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2 v_m}{\partial\theta^2}+\coth\tau\frac{\partial v_m}{\partial\tau}+\left(\frac{1}{4}-\frac{(m-1)^2}{4\,\mathrm{sh}^2\tau}\right)v_m=0.$$

Preuve. Nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\alpha\left[\frac{1-\mathrm{ch}\,\tau\cos\theta}{(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\theta)^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\mathrm{sh}\,\tau\sin\theta}{(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\theta)^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \alpha \left[\frac{-\mathrm{sh}\,\tau \sin\theta}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{ch}\,\tau\cos\theta - 1}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} \left((1 - \mathrm{ch}\,\tau\cos\theta) \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mathrm{sh}\,\tau \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\alpha^2}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^4} \Bigg[&(1 - \mathrm{ch}\,\tau\cos\theta)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{sh}\,^2\tau \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &-2(1 - \mathrm{ch}\,\tau\cos\theta)\mathrm{sh}\,\tau\sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Bigg] \\ +\frac{\alpha}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^3} &\left[\mathrm{sh}\,\tau(\cos^2\theta + \mathrm{ch}\,\tau\cos\theta - 2) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \left(\mathrm{ch}\,^2\tau - 2 + \cos\theta \mathrm{ch}\,\tau \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\alpha^2}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^4} \Bigg[&\mathrm{sh}\,^2\tau \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mathrm{ch}\,\tau\cos\theta - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+2(1 - \mathrm{ch}\,\tau\cos\theta)\mathrm{sh}\,\tau\sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Bigg] \\ +\frac{\alpha}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^3} &\left[\mathrm{sh}\,\tau(2 - \cos^2\theta - \cos\theta \mathrm{ch}\,\tau) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta(2 - \mathrm{ch}\,^2\tau - \mathrm{ch}\,\tau\cos\theta) \frac{\partial u}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

Et en particulier, nous avons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\alpha^2}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right].$$

On obtient donc que

$$L_{m,x,y}u = \left(\frac{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{m(1 - \mathrm{ch}\,\tau\cos\theta)}{\mathrm{sh}\,\tau(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{m\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).$$

Posons maintenant

$$u(\tau, \theta) = \frac{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^{m/2}}{\mathrm{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau} v_m(\tau, \theta)$$

et calculons $L_{m,x,y}u$ en fonction de $F(\tau, \theta)$. En notant

$$r_m(\tau, \theta) = \frac{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^{m/2}}{\mathrm{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau},$$

on a

$$\frac{\partial r_m}{\partial \theta} = \frac{m}{2} \frac{\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta} r_m$$

et

$$\frac{\partial^2 r_m}{\partial \theta^2} = \frac{m}{4(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^2} \left(2\cos\theta \mathrm{ch}\,\tau + m\sin^2\theta - 2 \right) r_m$$

puis
$$\frac{\partial r_m}{\partial \tau} = \frac{1}{(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)\operatorname{sh}\tau}\left(\operatorname{ch}^2\tau + (m-1)\operatorname{ch}\tau\cos\theta - m\right) r_m$$
et
$$\frac{\partial^2 r_m}{\partial \tau^2} = \frac{1}{4(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^2\operatorname{sh}^2\tau}\Big[\operatorname{ch}^4\tau - 2\operatorname{ch}^3\tau\cos\theta + (m-1)^2\operatorname{ch}^2\tau\cos^2\theta +$$
$$+2(m-1)\operatorname{ch}^2\tau + (4-2m^2)\operatorname{ch}\tau\cos\theta + 2(m-1)\cos^2\theta + m(m-2)\Big] r_m.$$
L'équation
$$L_{m,x,y}u = 0$$
se réécrit
$$r_m\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 v_m}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial v_m}{\partial\tau}\left(2\frac{\partial r_m}{\partial\tau} + \frac{m}{\operatorname{sh}\tau}\frac{1-\operatorname{ch}\tau\cos\theta}{\operatorname{ch}\tau-\cos\theta}r_m\right) +$$
$$+\frac{\partial v_m}{\partial\theta}\left(2\frac{\partial r_m}{\partial\theta} - \frac{m\sin\theta}{\operatorname{ch}\tau-\cos\theta}r_m\right)$$
$$+v_m\left(\frac{\partial^2 r_m}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 r_m}{\partial\theta^2} + \frac{m(1-\operatorname{ch}\tau\cos\theta)}{\operatorname{sh}\tau(\operatorname{ch}\tau-\cos\theta)}\frac{\partial r_m}{\partial\tau} - \frac{m\sin\theta}{\operatorname{ch}\tau-\cos\theta}\frac{\partial r_m}{\partial\theta}\right) = 0$$
avec
$$2\frac{\partial r_m}{\partial\tau} + \frac{m}{\operatorname{sh}\tau}\frac{1-\operatorname{ch}\tau\cos\theta}{\operatorname{ch}\tau-\cos\theta}r_m = r_m\coth\tau,$$
$$2\frac{\partial r_m}{\partial\theta} - \frac{m\sin\theta}{\operatorname{ch}\tau-\cos\theta}r_m = 0$$
et
$$\frac{\partial^2 r_m}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 r_m}{\partial\theta^2} + \frac{m(1-\operatorname{ch}\tau\cos\theta)}{\operatorname{sh}\tau(\operatorname{ch}\tau-\cos\theta)}\frac{\partial r_m}{\partial\tau} - \frac{m\sin\theta}{\operatorname{ch}\tau-\cos\theta}\frac{\partial r_m}{\partial\theta} = \left(\frac{1}{4} - \frac{(m-1)^2}{4\operatorname{sh}^2\tau}\right) r_m.$$
Ceci achève la preuve de notre théorème. □

Maintenant, on cherche v_m sous la forme $v_m(\tau,\theta) = A_m(\tau)B_m(\theta)$ comme solution à variables séparées. À partir de l'équation satisfaite par v_m, on obtient
$$\frac{A_m''}{A_m} + \coth\tau\frac{A_m'}{A_m} + \frac{1}{4} - \frac{(m-1)^2}{4\operatorname{sh}^2\tau} = -\frac{B_m''}{B_m}.$$
Le terme de droite étant une fonction de θ et celui de gauche une fonction de τ, on en déduit que ces deux termes sont constants. Soit donc $n \in \mathbb{C}$ tel que cette constante soit égale à n^2. On a alors
$$\begin{cases} A_m'' + \coth\tau A_m' + \left(\frac{1}{4} - \frac{(m-1)^2}{4\operatorname{sh}^2\tau} - n^2\right) A_m = 0, \\ B_m'' + n^2 B_m = 0. \end{cases}$$
La fonction B_m étant naturellement $2\pi-$périodique (car θ est géométriquement un angle), la constante n doit nécessairement être un nombre entier.

Pour étudier l'équation satisfaite par A_m, nous effectuons le changement de fonction

$$A_m(\tau) = C_m(\operatorname{ch}\tau).$$

La fonction C_m vérifie alors l'équation

$$\operatorname{sh}^2\tau C_m''(\operatorname{ch}\tau) + 2\operatorname{ch}\tau\, C_m'(\operatorname{ch}\tau) + \left(\frac{1}{4} - n^2 - \frac{(m-1)^2}{4\operatorname{sh}^2\tau}\right) C_m(\operatorname{ch}\tau) = 0$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$(1-\operatorname{ch}^2\tau)C_m''(\operatorname{ch}\tau) - 2\operatorname{ch}\tau\, C_m'(\operatorname{ch}\tau) + \left(n^2 - \frac{1}{4} - \frac{((m-1)/2)^2}{1-\operatorname{ch}^2\tau}\right) C_m(\operatorname{ch}\tau) = 0. \tag{LAH}$$

Cette équation est appelée *équation de Legendre Associée Hyperbolique*. Remarquons que, si nous posons $z = \operatorname{ch}\tau$ et $u(z) = C_m(\operatorname{ch}\tau)$, alors

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right] u = 0 \tag{LA}$$

où

$$\nu = n - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{m-1}{2}.$$

Cette équation est appelée équation de *Legendre Associée*. Elle se réduit pour $\mu = 0$ à l'équation de Legendre

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + \nu(\nu+1)u = 0. \tag{L}$$

Nous allons définir deux classes de solutions indépendantes de cette équation, qui sont les *fonctions de Legendre Associées de première et deuxième espèce.*

4.3 Les fonctions de Legendre Associées de première et deuxième espèce.

Nous donnons les principales formules de représentation intégrale des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce pour $z = \operatorname{ch}\tau > 1$:

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = \frac{2^{-\nu}\operatorname{sh}^{-\mu}\tau}{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty (\operatorname{ch}\tau + \operatorname{ch}\theta)^{\mu-\nu-1} \operatorname{sh}^{2\nu+1}\theta\, d\theta$$

avec $\operatorname{Re}\nu > -1$ et $\operatorname{Re}(\mu+\nu) < 0$.

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = \frac{2^\mu \operatorname{sh}^{-\mu}\tau}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \int_0^\pi \frac{(\operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau\cos\theta)^{\mu+\nu}}{\sin^{2\mu}\theta} d\theta \tag{4.1}$$

avec $\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}$.

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh}^\mu\tau}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \int_0^\tau \frac{\operatorname{ch}\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{(\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch}\theta)^{\mu+1/2}} d\theta$$

avec $\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}$.

$$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = \frac{e^{i\pi\mu}\sqrt{\pi}}{2^\mu}\frac{\operatorname{sh}^\mu\tau\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu+1/2)}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\mu}\theta}{(\operatorname{ch}\tau+\operatorname{sh}\tau\operatorname{ch}\theta)^{\nu+\mu+1}}d\theta$$

avec Re $\mu > -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}(\mu-\nu-1) < 0$ et $\mu+\nu+1 \notin \mathbb{Z}^-$.

$$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{i\pi\mu}\frac{\operatorname{sh}^\mu\tau}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\tau^\infty \frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta}}{(\operatorname{ch}\theta-\operatorname{ch}\tau)^{\mu+1/2}}d\theta$$

avec Re $\mu < \frac{1}{2}$ et $\mathrm{Re}(\mu+\nu+1) > 0$.

$$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = e^{i\pi\mu}2^{-\nu-1}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\operatorname{sh}^{-\mu}\tau\int_0^\pi (\operatorname{ch}\tau+\cos\theta)^{\mu-\nu-1}\sin^{2\nu+1}\theta\,d\theta$$

avec Re $\nu > -1$ et $\mu+\nu+1 \notin \mathbb{Z}^-$ (voir [96] pages 4, 5 et 6).
Nous avons de plus les relations suivantes vérifiées par les fonctions de Legendre (voir [96] page 6 et [2], formule 8.2.2)

$$P_\nu^\mu = P_{-\nu-1}^\mu.$$

$$Q_{-\nu-1}^\mu(z) = \frac{-\pi e^{i\pi\mu}\cos(\pi\nu)P_\nu^\mu + \sin[\pi(\nu+\mu)]Q_\nu^\mu}{\sin[\pi(\nu-\mu)]}$$

pour $\nu-\mu \notin \mathbb{Z}$. (en particulier, pour $\nu = n-\frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$Q_{-\nu-1}^\mu = Q_\nu^\mu$$

quelque soit $\mu \in \mathbb{C}$),

$$e^{i\pi\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)Q_\nu^{-\mu} = e^{-i\pi\mu}\Gamma(\nu-\mu+1)Q_\nu^\mu,$$

$$P_\nu^{-\mu} = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[P_\nu^\mu - \frac{2}{\pi}e^{-i\pi\mu}\sin(\pi\mu)Q_\nu^\mu\right],$$

Nous avons de plus les formules de Whipple reliant les fonctions de Legendre associées de première et deuxième espèce (voir [96] page 6)

$$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = e^{i\pi\mu}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\sqrt{\operatorname{sh}\tau}}P_{-\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}(\coth\tau),$$

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = \frac{ie^{i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu-\mu)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}\tau}}Q_{-\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}(\coth\tau).$$

Nous avons aussi les formules de récurrence (voir [96] pages 6 et 7)

$$P_\nu^{\mu+1}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{(\nu-\mu)\operatorname{ch}\tau\,P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(\operatorname{ch}\tau)}{\operatorname{sh}\tau}$$

$$(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(\operatorname{ch}\tau) = (2\nu+1)\operatorname{ch}\tau\,P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(\operatorname{ch}\tau).$$

$$(z^2-1)\frac{dP_\nu^\mu(z)}{dz} = (\nu+\mu)(\nu-\mu+1)(z^2-1)^{1/2}P_\nu^{\mu-1}(z) - \mu z P_\nu^\mu(z).$$

$$(z^2-1)\frac{dP_\nu^\mu(z)}{dz} = \nu z P_\nu^\mu(z) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z).$$

Toutes ces formules permettent de calculer explicitement les valeurs de $P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau)$ et $Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau)$ pour tout $\tau > 0$ et tous $(\mu,\nu) \in \mathbb{C}^2$.
La proposition suivante rassemble, à μ et τ fixés, le comportement des fonctions de Legendre Associées de première et deuxième espèce lorsque ν est de la forme $\nu = n - \frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et que $|n| \to +\infty$.

Proposition 4.2 *Soit $\tau > 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$, fixés tous les deux. Alors, si ν est de la forme $\nu = n - \frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, nous avons :*

$$\text{quand } \nu \to +\infty, \qquad P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) \sim \frac{e^{\tau/2}}{\sqrt{2\pi \operatorname{sh}\tau}} \nu^{\mu-1/2} e^{\tau\nu}$$

$$\text{quand } \nu \to -\infty, \qquad P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) \sim \frac{e^{-\tau/2}}{\sqrt{2\pi \operatorname{sh}\tau}} (-\nu)^{\mu-1/2} e^{-\tau\nu}$$

$$\text{quand } \nu \to +\infty, \qquad Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) \sim e^{i\pi\mu} e^{-\tau/2} \sqrt{\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\tau}} \nu^{\mu-1/2} e^{-\tau\nu}$$

$$\text{quand } \nu \to -\infty, \qquad Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) \sim e^{i\pi\mu} e^{\tau/2} \sqrt{\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\tau}} (-\nu)^{\mu-1/2} e^{\tau\nu}.$$

Ces équivalences sont de plus localement uniformes par rapport à τ, c'est-à-dire uniformes dans tout intervalle $[\tau_0, \tau_1]$ avec $0 < \tau_0 < \tau_1$.

Preuve. Nous avons, pour tout ν qui est de la forme $n - \frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$ (voir [96] page 48)

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\nu+1)\operatorname{sh}\tau}} \left[e^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\tau} + e^{-\pi i\left(\mu-\frac{1}{2}\right)-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\tau} \right] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) \right].$$

Une application de la formule de Stirling montre que, quand $\nu \to +\infty$

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \sim \frac{\sqrt{2\pi}\nu^{\nu+1/2}e^{-\nu}}{\sqrt{2\pi}(\nu-\mu)^{\nu-\mu+1/2}e^{-\nu+\mu}} = \left(\frac{\nu}{\nu-\mu}\right)^{\nu+1/2} (\nu-\mu)^\mu e^{-\mu}$$

$$= (\nu-\mu)^\mu e^{-\mu} \exp\left(-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)\right) \sim \nu^\mu$$

donc

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) \sim \nu^\mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu\operatorname{sh}\tau}} e^{\frac{\tau}{2}} e^{\tau\nu} = \frac{e^{\tau/2}}{\sqrt{2\pi\operatorname{sh}\tau}} \nu^{\mu-1/2} e^{\tau\nu},$$

ce qui nous donne la première estimation.
La seconde s'obtient directement à partir de la relation $P_\nu^\mu = P_{-\nu-1}^\mu$.
Enfin, la troisième estimation découle directement de la formule (8.3) de [96] :

$$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\tau) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\tau}} \nu^{\mu-1/2} e^{i\pi\mu} e^{-\tau(\nu+1/2)}$$

et la dernière découle du fait que, pour $\nu = n - \frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$Q_{-\nu-1}^\mu = Q_\nu^\mu.$$

Le caractère uniforme local de ces équivalents découle des (nombreuses !) expressions explicites des P_ν^μ et Q_ν^μ à l'aide des fonctions hypergéométriques ([37], tableaux pages 124-138) et des estimations de ces fonctions hypergéométriques localement uniformes par rapport à leurs paramètres ([96], pages 178-182). □

Nous allons prouver maintenant qu'une moitié de la famille

$$\left(\frac{(\operatorname{ch}\tau-\cos\theta)^{m/2}}{\operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau}\left\{\begin{array}{c}\cos(n\theta)\\ \sin(n\theta)\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac12}(\operatorname{ch}\tau)\\ Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac12}(\operatorname{ch}\tau)\end{array}\right\}\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

est une base de l'ensemble des solutions à l'intérieur du disque $\tau\geq\tau_1$ et l'autre moitié est une base de l'ensemble des solutions dans $\tau\leq\tau_0$ qui est le complémentaire dans $\mathbb{H}^+$ d'un disque, et où $0<\tau_0<\tau_1$. Ce fait est connu pour $m=-1$, c'est-à-dire pour $\mu=1$. Nous l'étendons au cas où m est un complexe quelconque.

Théorème 4.3 *Soit $m\in\mathbb{C}$. Soit $0<\tau_0$. Soit u une solution lisse de $L_m u=0$ dans le disque $\tau\geq\tau_0$ et soit v une solution lisse de $L_m v=0$ dans $\mathbb{H}^+\setminus\{\tau>\tau_0\}$ qui est le complémentaire dans $\mathbb{H}^+$ du disque $\{\tau>\tau_0\}$ qui s'annule sur le bord de $\mathbb{H}^+$, ie $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} v=0$. Alors, il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ (qui sont même à décroissance rapide) telles que :*

$$u=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac12}(\operatorname{ch}\tau)\operatorname{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau(\operatorname{ch}\tau-\cos\theta)^{\frac m2}e^{in\theta}$$

et

$$v=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac12}(\operatorname{ch}\tau)\operatorname{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau(\operatorname{ch}\tau-\cos\theta)^{\frac m2}e^{in\theta}.$$

La suite (a_n) est unique. De plus, la convergence de la première série est uniforme dans tout compact $[\tau_1,\tau_2]$ avec $\tau_0\leq\tau_1<\tau_2$ du disque $\tau>\tau_0$. Et la convergence de la seconde série est uniforme dans tout compact $[\tau_3,\tau_4]$ avec $0<\tau_3<\tau_4\leq\tau_0$ du complémentaire du disque $\tau>\tau_0$ dans $\mathbb{H}^+$.
Si, de plus, m est réel et $m<1$, alors la suite (b_n) est unique.

Preuve. En effet, on décompose la fonction

$$\theta\mapsto u(\tau_0,\theta)(\operatorname{ch}\tau_0-\cos\theta)^{-m/2}\operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau_0$$

en série de Fourier par rapport à θ, cela donne le développement de Fourier pour $u(\tau_0,\cdot)$

$$u(\tau_0,\theta)=\operatorname{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau_0(\operatorname{ch}\tau_0-\cos\theta)^{\frac m2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{in\theta},$$

où a_n est une suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui satisfait

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\operatorname{ch}\tau_0-\cos\theta)^{-m/2}\operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau_0\,u(\tau_0,s)e^{-ins}\,ds.$$

Cette fonction étant lisse par rapport à θ, on en déduit que la suite $(a_n)_n$ est à décroissance rapide quand $|n| \to +\infty$. La fonction

$$\tilde{u}(\tau,\theta) = \mathrm{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\mathrm{ch}\,\tau)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\mathrm{ch}\,\tau_0)} e^{in\theta}$$

coïncide avec u sur le cercle $\tau = \tau_0$.
De plus, grâce à la proposition 4.2, nous avons, quand $|n| \to +\infty$

$$\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\mathrm{ch}\,\tau)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\mathrm{ch}\,\tau_0)} \sim \sqrt{\frac{\mathrm{sh}\,\tau_0}{\mathrm{sh}\,\tau}} e^{|n|(\tau_0-\tau)}$$

et cet équivalent est uniforme sur tout compact $[\tau_1, \tau_2]$ avec $0 < \tau_0 \leq \tau_1 < \tau_2$.
Il en résulte que la série de fonctions définissant $\tilde{u}$ converge normalement sur tous les compacts $[\tau_1, \tau_2]$ du disque $\tau \geq \tau_0$. Il en est de même des dérivées par rapport à τ et θ (qui s'expriment elles aussi à l'aide des fonctions de Legendre Associées comme rappelé précédemment).
En particulier, la fonction $\tilde{u}$ est une fonction définie sur le disque $\tau \geq \tau_0$ et qui coïncide avec u sur le cercle $\tau = \tau_0$.
Grâce au fait que la solution d'une équation elliptique est déterminée de manière unique par ses valeurs au bord (cela découle du principe du maximum), on en déduit que $\tilde{u}$ est l'unique PSA dans le disque $\tau \geq \tau_0$ qui coïncide avec u sur le cercle $\tau = \tau_0$.
Pour la fonction v, la preuve est totalement analogue.
En effet, on décompose la fonction

$$\theta \mapsto v(\tau_0, \theta)(\mathrm{ch}\,\tau_0 - \cos\theta)^{-m/2}\mathrm{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau_0$$

en série de Fourier par rapport à θ, cela donne le développement de Fourier pour $v(\tau_0, \cdot)$

$$v(\tau_0,\theta) = \mathrm{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau_0(\mathrm{ch}\,\tau_0 - \cos\theta)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\theta},$$

où b_n est une suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui satisfait

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{ch}\,\tau_0 - \cos\theta)^{-m/2}\mathrm{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau_0 \; v(\tau_0, s)e^{-ins}\,ds.$$

Cette fonction étant lisse par rapport à θ, on en déduit que la suite $(b_n)_n$ est à décroissance rapide quand $|n| \to +\infty$. La fonction

$$\tilde{v}(\tau,\theta) = \mathrm{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\theta)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\mathrm{ch}\,\tau)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\mathrm{ch}\,\tau_0)} e^{in\theta}$$

coïncide avec v sur le cercle $\tau = \tau_0$.

De plus, grâce à la proposition 4.2, nous avons, quand $|n| \to +\infty$

$$\frac{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} \sim \sqrt{\frac{\operatorname{sh}\tau_0}{\operatorname{sh}\tau}} e^{|n|(\tau-\tau_0)}$$

et cet équivalent est uniforme sur tout compact $[\tau_1, \tau_2]$ avec $0 < \tau_1 < \tau_2 \leq \tau_0$.
Il en résulte que la série de fonctions définissant $\tilde{v}$ converge normalement sur tous les compacts $[\tau_1, \tau_2]$ du complémentaire du disque $\tau > \tau_0$. Il en est de même des dérivées par rapport à τ et θ (qui s'expriment elles aussi à l'aide des fonctions de Legendre Associées comme rappelé précédemment).
En particulier, la fonction $\tilde{v}$ est une fonction définie sur le complémentaire du disque $\tau > \tau_0$ et qui coïncide avec v sur le cercle $\tau = \tau_0$.
Nous allons prouver que

$$\lim_{\tau\to 0+} \tilde{v} = 0.$$

Si Re $m < 1$, nous avons, quand $n \in \mathbb{N}$ et grâce à 4.1

$$P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)} \operatorname{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau \int_0^\pi (\operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau\,\cos\theta)^{n+\frac{m}{2}-1} \sin^{1-m}\theta\, d\theta$$

donc

$$\lim_{\tau\to 0+} P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau) = 0$$

et de plus, pour $n > 1 - \frac{\operatorname{Re} m}{2}$, nous avons

$$\left|P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)\right| \leq \frac{2^{\frac{\operatorname{Re} m-1}{2}} \operatorname{sh}^{\frac{1-\operatorname{Re} m}{2}}\tau}{\sqrt{\pi}\left|\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)\right|} \int_0^\pi (\operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau\cos\theta))^{n+\frac{\operatorname{Re} m}{2}-1} \sin^{1-\operatorname{Re} m}\theta\, d\theta$$

$$\leq \frac{2^{\frac{\operatorname{Re} m-1}{2}} \operatorname{sh}^{\frac{1-\operatorname{Re} m}{2}}\tau}{\sqrt{\pi}\left|\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)\right|} \int_0^\pi (\operatorname{ch}\tau + \operatorname{sh}\tau))^{n+\frac{\operatorname{Re} m}{2}-1} \sin^{1-\operatorname{Re} m}\theta\, d\theta \leq C_m \operatorname{sh}^{\frac{1-\operatorname{Re} m}{2}}\tau e^{\left(n+\frac{\operatorname{Re} m}{2}\right)\tau}$$

donc

$$\sum_{n>1-\frac{\operatorname{Re} m}{2}} \sup_{\tau\in\left[0,\frac{\tau_0}{2}\right]} \left| b_n \frac{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} e^{in\theta}\right| < +\infty$$

grâce au fait que la proposition 4.2 nous donne

$$P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{m}{2}-1}}{\sqrt{2\pi\operatorname{sh}\tau_0}} e^{n\tau_0}.$$

Nous pouvons donc déduire de cela que $\lim_{\tau\to 0+} \tilde{v} = 0$.
Il reste à prouver l'unicité de la décomposition précédente dans le cas où $m \in \mathbb{R}$ avec $m < 1$. Cela découlera du paragraphe suivant qui établira le fait que la famille

$$\mathcal{A} := \left(\frac{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} \frac{(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^{m/2}}{\operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau} e^{in\theta} \right)_{n\in\mathbb{Z}} := (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\mathcal{B} := \left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} \frac{(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^{m/2}}{\operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau} e^{in\theta} \right)_{n\in\mathbb{Z}} := (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

forme une base de Riesz

□

Corollaire 4.4 *La solution du problème de Dirichlet $L_m u = 0$ dans $D((a,0),R)$ où $u = \varphi$ sur $\partial D((a,0),R)$ est donnée par*

$$u(\tau,\theta) = \operatorname{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} e^{in\theta}$$

où $\{\tau = \tau_0\}$ correspond au cercle de centre $(a,0)$ et de rayon R et où

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\operatorname{ch}\tau_0 - \cos\theta)^{-m/2} \operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau_0 \ \varphi(a + R\cos s, R\sin s) e^{-ins}\, ds.$$

De même,

$$v(\tau,\theta) = \operatorname{sh}^{\frac{1-m}{2}}\tau(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} e^{in\theta}$$

est une solution de $L_m v = 0$ dans $\mathbb{H}^+ \setminus D((a,0),R)$, égale à φ sur $\partial D((a,0),R)$ où

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\operatorname{ch}\tau_0 - \cos\theta)^{-m/2} \operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau_0 \ \varphi(a + R\cos s, R\sin s) e^{-ins}\, ds.$$

Si de plus m est réel et vérifie $m < 1$, alors v vérifie $\lim_{\partial\mathbb{H}^+} v = 0$, et la fonction v précédemment construite est la seule solution du problème de Dirichlet $L_m v = 0$ dans $\mathbb{H}^+ \setminus D((a,0),R)$ qui s'annule sur $\partial\mathbb{H}^+$.

5 Bases de Riesz de PSA pour m réel.

Dans la section précédente, on a vu que les solutions du type Fourier-Legendre de $L_m u = 0$ forment une famille complète, dans cette section, on va montrer que, pour m réel, cette famille est même une base de Riesz d'un certain espace de Hilbert.

5.1 Définition et propriété

Nous rappelons une définition générale et une propriété des bases de Riesz (voir [82, page 157] ou [24])

Définition. *Soit X un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X.*

On dit qu'elle est une suite quasi-orthogonale ou une suite de Riesz si il existe deux constantes c, $C > 0$ *telles que, pour toute suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ayant un nombre fini de termes non nuls, on a*

$$c^2 \sum_n |a_n|^2 \leq \left\| \sum_n a_n x_n \right\|^2 \leq C^2 \sum_n |a_n|^2.$$

Dans le cas où la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est complète, on parle de base de Riesz.*
La matrice des produit scalaire $\{\langle x_i, x_j\rangle\}_{i,j}$ *est appelée la matrice de Gram associée à* $\{x_i\}_i$.

Les conditions pour que la suite $\{x_i\}_i$ soit une base de Riesz peut commodément être exprimée en fonction de la matrice de Gram :

Propriété ([82, p. 170]). *Une famille* $\{x_i\}_i$ *est une base de Riesz pour un espace de Hilbert si* $\{x_i\}_i$ *est complète dans cet espace de Hilbert et que sa matrice de Gram définit un opérateur inversible et borné sur* $\ell^2(\mathbb{N})$.

5.2 Base de Riesz des solutions du type Fourier-Legendre

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les deux familles de solutions de l'équation $L_m[u] = 0$, respectivement à l'intérieur du disque $\tau > \tau_0$ et à l'extérieur de l'autre disque $\tau > \tau_1$, avec $0 < \tau_0 < \tau_1$

$$\mathcal{A} := \left(\frac{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} \frac{(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^{m/2}}{\operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau} e^{in\theta} \right)_{n\in\mathbb{Z}} := (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\mathcal{B} := \left(\frac{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)}{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} \frac{(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^{m/2}}{\operatorname{sh}^{\frac{m-1}{2}}\tau} e^{in\theta} \right)_{n\in\mathbb{Z}} := (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Soit $\mathcal{C}$ la réunion des deux familles précédentes :

$$\mathcal{C} := (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (c_{2n} = a_n \text{ et } c_{2n+1} = b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

L'anneau défini en fonction des coordonnées bipolaires par $\{0 < \tau_0 < \tau < \tau_1\}$ sera noté $\mathbb{A}$. On munit la famille $\mathcal{C}$ du produit scalaire suivant : pour $f, g \in L^2(\partial\mathbb{A})$,

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau_0,\theta)\overline{g(\tau_0,\theta)} \frac{\operatorname{sh}^{m-1}\tau_0}{(\operatorname{ch}\tau_0 - \cos\theta)^m} \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau_1,\theta)\overline{g(\tau_1,\theta)} \frac{\operatorname{sh}^{m-1}\tau_1}{(\operatorname{ch}\tau_1 - \cos\theta)^m} \mathrm{d}\theta.$$

On a la proposition suivante :

Proposition 5.1 *La famille* $\mathcal{C}$ *forme une base de Riesz pour l'espace de Hilbert* $L^2(\partial\mathbb{A})$.

Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser une caractérisation des bases de Riesz par la matrice de Gram [82, page 170] (que nous avons rappelé dans le paragraphe précédent) qui est par définition la matrice des produits scalaires

$$\left(\langle c_p, c_q \rangle\right)_{|p|,\,|q|\geq 0}\,.$$

De plus, nous aurons besoin d'un résultat sur les zéros d'une solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre à coefficients réels :

Lemme 5.2 (Lemme de Sturm)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

où p et q sont deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Soient y_1 et y_2 deux solutions de cette équation qui forment une base, soient t_1 et t_2 deux zéros de y_1 (on suppose que $t_1 < t_2$). Alors il existe $t_0 \in \,]t_1, t_2[$ tel que $y_2(t_0) = 0$.

Preuve. Dans cette preuve, on se ramène au cas où t_1 et t_2 sont deux zéros consécutifs de y_1 car si t_1 et t_2 ne sont pas deux zéros consécutifs de y_1, il existe un autre zéros de y_1 qui peut être noté t_3 et tel que t_1 et t_3 sont deux zéros consécutifs de y_1 ; nous pouvons alors appliquer le cas des zéros consécutifs à l'intervalle $[t_1, t_3] \subset [t_1, t_2]$.
Quitte à changer la fonction y_1 par la fonction $-y_1$, nous pouvons supposer que $y_1 \geq 0$ sur l'intervalle $]t_1, t_2[$. De plus, $y_1 > 0$ dans l'intervalle $]t_1, t_2[$ autrement la fonction y_1 serait identiquement nulle (par le théorème de Cauchy-Lipschitz).
On a

$$y_1'(t_1) = \lim_{t \to t_1,\ t > t_1} \frac{y_1(t)}{t - t_1} > 0$$

et

$$y_1'(t_2) = \lim_{t \to t_2,\ t < t_2} \frac{y_1(t)}{t - t_2} < 0$$

Comme (y_1, y_2) est une base de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, le Wronskien de y_1 et y_2 ne s'annule pas sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. On a

$$\forall t \in [t_1, t_2]\,,\ W(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$$

Quitte à changer la fonction y_2 par la fonction $-y_2$, nous pouvons supposer que $W(y_1, y_2)(t) > 0$.
En particulier, on a

$$W(y_1, y_2)(t_1) = -y_1'(t_1)y_2(t_1) > 0 \;\Rightarrow\; y_2(t_1) < 0$$

et

$$W(y_1, y_2)(t_2) = -y_1'(t_2)y_2(t_2) > 0 \;\Rightarrow\; y_2(t_2) > 0.$$

La fonction y_2 est continue, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction y_2 s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]t_1, t_2[$. □

Preuve. (Preuve de la proposition.) En effet, nous allons d'abord calculer tous les produits scalaires des éléments de la famille $\mathcal{C}$ dans le but de construire sa matrice de Gram. On obtient pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\langle c_{2n}, c_{2n} \rangle = 1 + \left(\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} \right)^2$$

$$\langle c_{2n+1}, c_{2n+1} \rangle = 1 + \left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} \right)^2$$

$$\langle c_{2n}, c_{2n+1} \rangle = \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} + \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}$$

Dans tous les autres cas, les produits scalaires sont nuls, la matrice de Gram est diagonale par blocs et chaque bloc est de la forme suivante :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} \right)^2 & \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} + \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} \\ \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} + \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} & 1 + \left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} \right)^2 \end{pmatrix}$$

Nous définissons notre matrice de Gram comme suit

$$G = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & M_{-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & M_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & 0 & M_{-2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & M_{-n} & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & M_n & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Grâce à la proposition 4.2, lorsque $|n| \to \infty$, M_n converge vers la matrice identité I.
Le déterminant de la matrice M_n est

$$\det(M_n) = \left(1 - \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1) P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0) P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} \right)^2$$

Nous allons montrer que la matrice M_n est inversible. Supposons le contraire, on a alors $\det(M_n) = 0$, ce qui est équivalent à

$$Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0) = Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1).$$

L'égalité précédente peut être écrite comme l'annulation d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0) & P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0) \\ Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1) & P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1) \end{vmatrix} = 0, \text{ avec } P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0),\, Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1) \neq 0.$$

$$\text{Donc il existe } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ tel que} \begin{cases} Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0) = \lambda P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0) \\ Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1) = \lambda P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1) \end{cases}$$

Nous allons appliquer le lemme de Sturm à l'équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de Legendre en choisissant $y_1 = Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}} - \lambda P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}$ et $y_2 = Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}$. Il est clair que y_1 et y_2 forment une base pour cette équation différentielle ($\lambda \neq 0$), de plus y_1 s'annule aux points $\operatorname{ch}\tau_0$ et $\operatorname{ch}\tau_1$. D'après le lemme de Sturm, il existe $t_0 \in]\operatorname{ch}\tau_0, \operatorname{ch}\tau_1[$ tel que $y_2(t_0) = 0$. Ce n'est pas possible car la fonction de Legendre $Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}$ ne s'annule pas sur $]1,\infty[$. En effet, rappelons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\tau > 0$, on a

$$Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau) = Q^{\frac{m-1}{2}}_{-n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau)$$

et que d'après [96, page 6], on a pour $n \geq 0$, $\frac{m}{2} + n \neq \mathbb{Z}^-$ et $\tau > 0$,

$$Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{e^{i\pi\frac{m-1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(n+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}\theta}{(\operatorname{ch}\tau - \cos\theta)^{n+1-\frac{m}{2}}} d\theta.$$

Donc la fonction $Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]1,\infty[$.
On a alors

$$\det(M_n) \neq 0.$$

La matrice M_n est inversible et son inverse est

$$M_n^{-1} = \frac{1}{\det(M)}(com(M))^t$$

où $(com(M))^t$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \left(\dfrac{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}\right)^2 & -\dfrac{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} - \dfrac{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} \\ -\dfrac{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}{P^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)} - \dfrac{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)} & 1 + \left(\dfrac{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_1)}{Q^{\frac{m-1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\tau_0)}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc prouvé que la famille $\mathcal{C}$ forme une base de Riesz pour $L^2(\partial\mathbb{A})$. $\square$

6 Conclusion

Les études menées dans ce chapitre ont mis en évidence une barrière assez franche entre les PSA associés à des valeurs complexes m dont la partie réelle est strictement plus petite que 1 et les PSA associés à des valeurs m dont la partie réelle est plus grande ou égale à 1.
Plusieurs questions restent en suspens à la suite de notre étude.
Nous avons prouvé que, quand m est réel, la famille $\mathcal{C}$ construite à partir des fonctions de Legendre Associées est une base de Riesz de solutions. Est-ce toujours le cas si m est un nombre complexe non réel ?
Enfin, ce paragraphe sur les bases de Riesz est une réalisation effective d'une décomposition topologique des PSA. Il est probable que l'on puisse généraliser ce caractère topologique de la décomposition à des domaines annulaires de la forme $\Omega \setminus K$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{H}^+$ et K un ensemble compact de Ω. Ce point pourrait faire l'objet d'études ultérieures.
Dans le théorème 4.3, l'unicité de la suite (b_n) n'est prouvée que quand m est réel strictement plus petit que 1. Est-elle toujours vraie si m est complexe ? et si Re $m \geq 1$? Cette question reste un peu en suspens pour deux raisons. La première, c'est que les fonctions de Legendre Associées de première espèce ont des comportements différents si Re $m < 1$ et Re $m \geq 1$ au voisinage de 1. La seconde est un peu analogue à la raison soulevée dans la remarque de la fin du paragraphe 3.
Un autre aspect, qui n'a pas du tout été envisagé dans notre étude, serait de voir si les PSA que nous avons étudiés dans les domaines de $\mathbb{H}^+$ peuvent se prolonger à des domaines de $\mathbb{C}$ tout entier.
De même, comme évoqué dans l'introduction, bon nombre de résultats obtenus dans les paragraphes 1, 2 et 3 peuvent se généraliser à la dimension supérieure à 2. Nous ne le ferons pas, car d'un point de vue pratique, le problème auquel nous nous sommes attachés est un problème typiquement bidimensionnel.
Les techniques qui interviendront dans les deux chapitres suivants sont des techniques particulièrement rattachées à l'analyse complexe.

Chapitre 2

Résolution d'un problème de Dirichlet par la méthode de Fokas

1 Introduction

Une nouvelle méthode due à A. S. Fokas est apparue en 1997 pour la résolution de problèmes de Dirichlet/Neumann. Cette méthode est basée sur deux nouvelles idées, la première est l'analyse spectrale de deux équations différentielles ordinaires définissant une paire de Lax liée à une équation aux dérivées partielles données, la seconde est une équation intégrale appelée relation globale qui couple les données connues et inconnues au bord du domaine d'étude de l'équation aux dérivées partielles. Cette méthode est dans une certaine mesure assez différente de la méthode classique de séparation des variables puisqu'elle donne des représentations des solutions fondamentalement différentes.

La paire de Lax a une dépendance analytique via un paramètre spectral $k \in \mathbb{C}$, ce qui implique une utilisation judicieuse des techniques issus de l'analyse complexe. En effet, l'analyse de la paire de Lax aboutit à la résolution d'un problème de Riemann-Hilbert spécifique au problème de Dirichlet/Neumann que l'on veut résoudre. Il faut aussi noter que le système d'équations définissant la paire de Lax est fortement associé à une certaine forme différentielle car une condition nécessaire et suffisante pour que le système d'équations soit compatible est le fait que cette forme différentielle soit fermée.

La relation globale est une équation intégrale qui a aussi une dépendance analytique via le paramètre spectral k. Cette équation provient du fait que la forme différentielle liée à la paire de Lax est fermée et exacte. La résolution de cette équation intégrale se fait aussi par des méthodes qui émanent de l'analyse complexe : on procède par la résolution d'un problème de Riemann-Hilbert ou par inversion d'une transformation intégrale usuelle.

Ce chapitre est tout d'abord didactique sur la méthode de Fokas, et pas vraiment complet sur son application aux équations de Weinstein parce que l'usage de la relation globale pour éliminer la dépendence entre les données normales et tangentielles au bord s'est révélé plus difficile, de sorte qu'on s'arrête à une formulation redondante Dirichlet-Neumann qui est toutefois déjà intéressante pour elle-même puisqu'elle est issue de la construction et de la résolution de problèmes de Riemann-Hilbert singuliers. L'élimination de la dépendence entre les données normales et tangentielles

au bord de domaines qui ne sont pas à variables séparées pour les EPSA reste un problème ouvert et intéressant pour le futur.
Présentons cette nouvelle méthode par un exemple simple traité par A. Fokas dans l'article [46] où il détermine une expression intégrale pour des problèmes de Dirichlet/Neumann appliqués à l'équation de Schrödinger linéaire dans le premier quadrant du plan.

2 Exemple 1 : L'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur

$$q_t - q_{xx} = 0 \qquad\qquad x,\ t \geq 0 \tag{E}$$

où q est une fonction de x et t. On cherche des solutions lisses et qui tendent vers 0 à l'infini très rapidement. Cette équation admet une formulation en *paire de Lax* :

$$\begin{cases} \mu_x + ik\mu = q & (1) \\ \\ \mu_t + k^2\mu = q_x - ikq & (2) \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{C}$ est un paramètre *spectral* et $\mu(x,t,k)$ est une fonction scalaire. Ainsi q est solution de l'équation (E) si et seulement si les équations (1) et (2) sont compatibles.
À partir de cette paire de Lax, on va construire une forme différentielle qui sera fermée si et seulement si q est solution de (E).
Les équations (1) et (2) sont équivalentes à

$$\begin{cases} \left(\mu\, e^{ikx+k^2t}\right)_x = q\, e^{ikx+k^2t} \\ \left(\mu\, e^{ikx+k^2t}\right)_t = (q_x - ikq)e^{ikx+k^2t} \end{cases}$$

Remarque : La famille de fonctions $\left\{e^{ikx+k^2t},\ k \in \mathbb{C}\right\}$ est une famille de solutions de l'équation adjointe de (E), ie $q_{xx} + q_t = 0$.

La condition de compatibilité du sytème d'équations précédent s'écrit de la façon suivante :

$$\left(q\, e^{ikx+k^2t}\right)_t - \left((q_x - ikq)e^{ikx+k^2t}\right)_x = 0$$

Ainsi la fonction $q(x,t)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si la forme différentielle

$$e^{ikx+k^2t}\left(q(x,t)\mathrm{d}x + (q_x(x,t) - ikq(x,t))\mathrm{d}t\right)$$

est fermée, de plus, on a

$$\mathrm{d}\left(e^{ikx+k^2t}\mu\right) = e^{ikx+k^2t}\left(q\mathrm{d}x + (q_x - ikq)\mathrm{d}t\right).$$

Nous allons intégrer cette forme différentielle des points $(0,0)$, $(0,\infty)$ et (∞,t) au point (x,t) respectivement par les chemins $\gamma_{(46)}$, $\gamma_{(5)}$ et $\gamma_{(123)}$. On notera $\mu_{(46)}(x,t,k)$, $\mu_{(5)}(x,t,k)$ et $\mu_{(123)}(x,t,k)$ la fonction $\mu(x,t,k)$ définie par intégration de la forme différentielle sur les chemins $\gamma_{(123)}$, $\gamma_{(5)}$ et $\gamma_{(46)}$. On a donc pour $(a,b) \in \{(0,0),(\infty,t),(0,\infty)\}$,

$$\mu(x,t,k) = \int_{(a,b)}^{(x,t)} e^{ik(x'-x)+k^2(t'-t)} \left(q(x',t')\mathrm{d}x' + (q_x(x',t') - ikq(x',t'))\mathrm{d}t'\right)$$

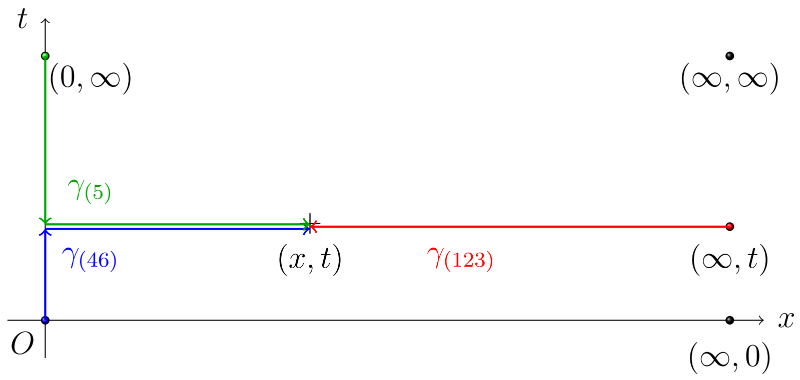


Figure 1

Si $(a,b) = (\infty,t)$, alors pour tout $k \in \mathbb{C}$ tel que $\arg k \in [0,\pi]$,

$$\mu^{(123)}(x,t,k) = -\int_{x'=x}^{\infty} e^{-ik(x-x')} q(x',t)\mathrm{d}x'$$

Si $(a,b) = (0,\infty)$, alors pour tout $k \in \mathbb{C}$ tel que $\arg k \in [5\pi/4, 7\pi/4]$,

$$\mu^{(5)}(x,t,k) = -\int_{t'=t}^{\infty} (q_x(0,t') - ikq(0,t'))e^{-k^2(t-t')-ikx}\mathrm{d}t' + \int_{x'=0}^{x} e^{-ik(x-x')} q(x',t)\mathrm{d}x'$$

Si $(a,b) = (0,0)$, alors pour tout $k \in \mathbb{C}$ tel que $\arg k \in [-\pi, -3\pi/4] \cup [-\pi/4, 0]$,

$$\mu^{(46)}(x,t,k) = \int_{t'=0}^{t} (q_x(0,t') - ikq(0,t'))e^{-k^2(t-t')-ikx}\mathrm{d}t' + \int_{x'=0}^{x} e^{-ik(x-x')} q(x',t)\mathrm{d}x'$$

Ainsi $k \mapsto \mu^{(123)}(x,t,k)$ est une fonction analytique bornée sur le demi-plan supérieur, $k \mapsto \mu^{(5)}(x,t,k)$ est analytique bornée sur le domaine (V) et $k \mapsto \mu^{(46)}(x,t,k)$ est analytique bornée sur les domaines (IV) et (VI) (la bornitude de ces trois fonctions dans les différents domaines du plan provient de la bornitude des fonctions $k \mapsto e^{ikX}$ et $k \mapsto e^{k^2X}$ pour $X \in \mathbb{R}^+$). Les trois fonctions $\mu^{(i)}$ définissent une fonction sectionnellement analytique et bornée sur tout le plan complexe.

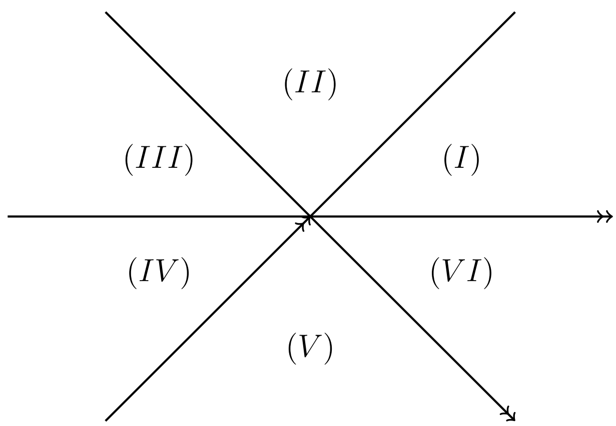


Figure 2

À l'intersection de ces différentes parties, on peut calculer les sauts entre les fonctions $\mu^{(123)}$, $\mu^{(5)}$ et $\mu^{(46)}$. Pour une simplification des calculs des sauts, on peut déformer le chemin d'intégration $\gamma_{(123)}$ en $\gamma'_{(123)}$ car la forme différentielle est fermée :

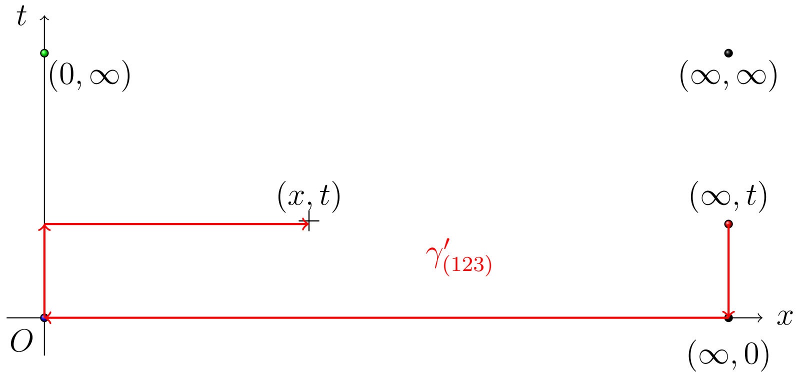


Figure 3

En intégrant sur le chemin $\gamma'_{(123)}$, on obtient

$$\mu^{(123)}(x,t,k) = -\int_{x'=0}^{\infty} e^{-ik(x-x')-k^2t} q(x',0)\mathrm{d}x' + \mu^{(46)}$$

Cette expression de $\mu^{(123)}$ est analytique bornée en k pour $\arg k \in \{0,\pi\}$.
On obtient alors pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\mu^{(123)} - \mu^{(46)} = -e^{-ikx-k^2t} \int_{x'=0}^{\infty} q(x',0)e^{ikx'}\mathrm{d}x'$$

et pour $\arg k \in \{5\pi/4, 7\pi/4\}$,

$$\mu^{(5)} - \mu^{(46)} = -e^{-ikx-k^2t} \int_{t'=0}^{\infty} (q_x(0,t') - ikq(0,t'))e^{k^2t'}\mathrm{d}t'$$

On notera

$$\hat{q}_1(k) = \int_{x'=0}^{\infty} q(x',0)e^{ikx'}\mathrm{d}x'$$

et

$$\nu(k) = \int_{t'=0}^{\infty} (q_x(0,t') - ikq(0,t'))e^{k^2t'}\mathrm{d}t'$$

La fonction $\mu(x,t,k)$ définie par

$$\mu(x,t,k) = \begin{cases} \mu^{(123)}(x,t,k) & k \in (I)\cup(II)\cup(III) \\ \mu^{(46)}(x,t,k) & k \in (IV)\cup(VI) \\ \mu^{(5)}(x,t,k) & k \in (V) \end{cases}$$

est sectionnellement holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, par la formule de Plemelj, on a

$$\mu(x,t,k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k'\in\mathbb{R}} \frac{-e^{-ik'x-k'^2t}\hat{q}_1(k')}{k'-k}dk' + \frac{1}{2\pi i}\int_{k'\in L} \frac{e^{-ik'x-k'^2t}\nu(k')}{k'-k}dk'$$

où $L := \{k \in \mathbb{C} \,:\, \arg k \in \{5\pi/4, 7\pi/4\}\}$ orientée comme sur la figure 2..

On veut résoudre l'équation (E) avec la condition initiale suivantes :

$$q(x,0) = q_1(x),$$

et l'une des quatre conditions au bord suivantes :

$$\begin{cases} (a) & q(0,t) = q_2(t) \\ (b) & q_x(0,t) = q_2(t) \\ (c) & q_x(0,t) + i\alpha q(0,t) = q_2(t) \\ (d) & q(0,t) = q_3(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{et} \quad q_x(0,t) = q_2(t) \quad t \geq T. \end{cases}$$

où α est une constante telle que $\arg \alpha \notin [5\pi/4, 7\pi/4]$, $q_1(x)$, $q_2(t)$ et $q_3(t)$ sont des fonctions données continues à décroissance rapide. (Le cas (a) est un problème de Dirichlet). La résolution des différents problèmes à la frontière se résume à la détermination de la fonction $\nu(k)$. La forme différentielle étant fermée sur tout le quart de plan, on a alors la relation globale suivante, pour tout $k \in (V)$,

$$\int_{t'=0}^{\infty} e^{k^2 t'} (q_x(0,t') - ikq(0,t'))dt' = \int_{x'=0}^{\infty} e^{ikx'} q(x',0)dx'$$

qui peut aussi s'écrire aussi pour tout $k \in (V)$,

$$\nu(k) = \hat{q}_1(k).$$

La relation globale s'obtient en intégrant la forme différentielle sur tout le bord de notre domaine d'étude de l'équation, c'est-à-dire le premier quadrant dans notre cas.

3 Exemple 2 : L'équation de Laplace sur le disque unité.

Etape 1 : Recherche d'une paire de Lax ou/et d'une forme différentielle fermée

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité et $\mathbb{T}$ le cercle unité. Une fonction u définie sur $\mathbb{D}$ et deux fois continûment dérivables est dite harmonique si

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

où $\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ est appelé Laplacien et l'équation (1) est l'équation de Laplace. On notera $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$. En utilisant les dérivations complexes classiques $u_z = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$ et $u_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iu_y)$, l'équation (1) est équivalente à

$$u_{\bar{z}z} = 0 \tag{2}$$

L'équation (2) admet une infinité de paires de Lax, ie un système de deux équations différentielles ordinaires qui sont compatibles si, et seulement si, l'équation (2) est vérifiée. Un exemple de paire de Lax pour l'équation (2) est

$$\begin{cases} \mu_z = \dfrac{u_z}{z-k} \\ \\ \mu_{\bar{z}} = 0. \end{cases}$$

où la fonction $\mu(z,k)$ est l'inconnue du système et k est appelé le paramètre spectral. Autrement dit, la forme différentielle $\dfrac{u_z dz}{z-k}$ est fermée sur $\mathbb{D}\setminus\{k\}$ si, et seulement si, u est harmonique sur $\mathbb{D}$.

Etape 2 : Résolution d'un problème de Riemann-Hilbert

Soient $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ et γ_1, γ_2 les chemins reliant respectivement z_1 à z et z_2 à z comme sur la figure ci-dessous.

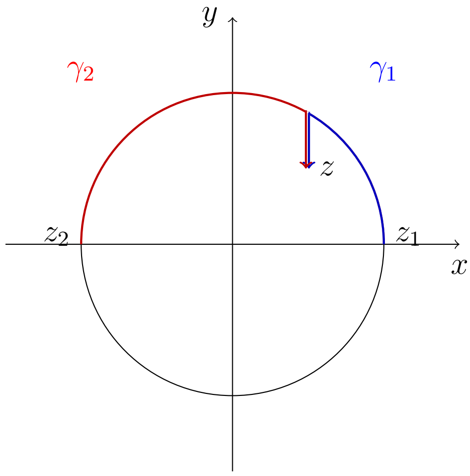


Figure 1 : Chemins d'intégration

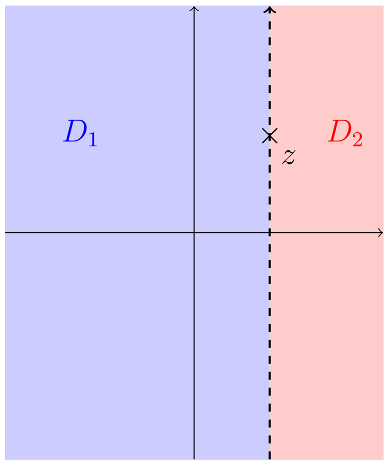


Figure 2 : Domaines D_1 et D_2

On définit deux fonctions μ_1 sur D_1 et μ_2 sur D_2 par

$$\mu_i(z,k) = \int_{\zeta\in\gamma_i} \frac{u_z(\zeta)d\zeta}{\zeta - k}, \quad i = 1,\ 2.$$

avec

$$\begin{cases} D_1 := \{k \in \mathbb{C} \ :\ \operatorname{Re} k < \operatorname{Re} z\} \\ \\ D_2 := \{k \in \mathbb{C} \ :\ \operatorname{Re} k > \operatorname{Re} z\} \end{cases}$$

Il est clair que les fonctions μ_i sont solutions de la paire de Lax dans leur domaine de définition respectif. $\mu_1(z,k)$ et $\mu_2(z,k)$ sont des fonctions holomorphes et bornées respectivement sur D_1 et D_2 par rapport à la variable k. De plus, on a l'estimation suivante

$$\mu_i(z,k) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{lorsque } |k| \to \infty$$

On construit μ comme solution du problème de Riemann-Hilbert

$$\mu(z,k) = \begin{cases} \mu_1(z,k) & \text{si } k \in D_1 \\ \\ \mu_2(z,k) & \text{si } k \in D_2 \end{cases}$$

On note $\delta\mu(k)$ le saut de μ sur la doite verticale $\overline{D_1}\cap\overline{D_2}$ orientée vers le haut comme sur la figure 2 et on note Γ^+ (respectivement Γ^-) le chemin reliant z_1 à z_2 contenu dans $\mathbb{T}\cap\{\zeta\in\mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ (respectivement contenu dans $\mathbb{T}\cap\{\zeta\in\mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im}\zeta < 0\}$).

On a pour tout $k \in \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$,

$$\delta\mu(k) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{u_\zeta d\zeta}{\zeta - k} & \text{si } \operatorname{Im} k < \operatorname{Im} z \\ \displaystyle\int_{\Gamma^-} \frac{u_\zeta d\zeta}{\zeta - k} & \text{si } \operatorname{Im} k > \operatorname{Im} z \end{cases}$$

La formule de Plemelj appliquée à notre problème donne

$$\mu(z,k) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\operatorname{Re} z - i\infty}^{z} \frac{\delta\mu(\kappa)d\kappa}{\kappa - k} + \int_{z}^{\operatorname{Re} z + i\infty} \frac{\delta\mu(\kappa)d\kappa}{\kappa - k}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\operatorname{Re} z - i\infty}^{z} \int_{\zeta\in\Gamma^+} \frac{u_\zeta d\zeta d\kappa}{(\zeta-\kappa)(\kappa - k)} + \int_{z}^{\operatorname{Re} z + i\infty} \int_{\zeta\in\Gamma^-} \frac{u_\zeta d\zeta d\kappa}{(\zeta-\kappa)(\kappa - k)}\right)$$

Puis en dérivant cette dernière expression par rapport à z, on obtient,

$$\mu_z(z,k) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\zeta\in\Gamma^+} \frac{u_\zeta d\zeta}{(\zeta - z)(z-k)} - \int_{\zeta\in\Gamma^-} \frac{u_\zeta d\zeta}{(\zeta - z)(z-k)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{u_\zeta d\zeta}{(\zeta - z)(z-k)}$$

Et en utilisant le fait que $u_z = z\mu_z(z,0)$, il vient

$$u_z(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{u_\zeta d\zeta}{\zeta - z} \tag{3}$$

Remarque : on retrouve la formule de Cauchy.

Etape 3 : condition d'intégrabilité globale.
La forme différentielle

$$\frac{u_\zeta(\zeta)d\zeta}{\zeta - k}$$

est fermée au voisinage du disque unité $\mathbb{D}$ pour tout $k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. On obtient donc

$$\forall k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \qquad \int_{\mathbb{T}} \frac{u_\zeta d\zeta}{\zeta - k} = 0.$$

Notons u_t et u_n les dérivées tangentielles et normales de u le long du cercle unité $\mathbb{T}$, nous avons $u_\zeta d\zeta = \frac{1}{2}(u_t + iu_n)ds$ où ds désigne l'élement d'arc sur $\mathbb{T}$. Nous obtenons alors

$$\forall k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \qquad \int_{\mathbb{T}} \frac{u_t + iu_n}{\zeta - k} ds = 0.$$

Supposons u régulière dans un voisinage de $\mathbb{D}$. Notons $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de l'application $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto u_t(e^{i\theta})$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de l'application $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto u_n(e^{i\theta})$.
Alors

$$\forall k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \qquad \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + ib_n)e^{in\theta}\right) \frac{d\theta}{e^{i\theta} - k} = 0.$$

Avec les hypothèses de régularité que nous avons faites sur u, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont à décroissance rapide. De plus

$$\forall k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \qquad \frac{1}{e^{i\theta} - k} = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{im\theta}}{k^{m+1}}.$$

La convergence absolue de toutes les séries nous permet d'intervertir les sommations et intégrations diverses pour obtenir

$$\forall k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k^{m+1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + ib_n) \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(n+m)\theta} = 0.$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(n+m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n+m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n+m = 0 \end{cases}$$

on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k^{m+1}} (a_{-m} + ib_{-m}) = 0.$$

La fonction qui à $k \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ associe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{-m} + ib_{-m}}{k^{m+1}}$$

est une fonction identiquement nulle dont les coefficients du développement à l'infini sont les $a_{-m} + ib_{-m}$, qui sont donc nuls. En particulier

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad a_{-m} = -ib_{-m}.$$

La connaissance de u sur $\mathbb{T}$ nous permet de connaitre u_t. Nous en déduisons les coefficients (a_n). La relation précédente nous permet d'obtenir la moitié des coefficients de la dérivée normale. Le caractère réel de u_n nous donne l'autre moitié des coefficients de u_n.
Nous avons $a_0 = 0$ et pour tout $m > 0$, $b_{-m} = ia_{-m}$. Et pour tout $m > 0$, nous avons $b_m = \overline{b_{-m}} = -i\overline{a_{-m}} = -ia_m$.
Tout ceci nous permet bien de retrouver les conditions de compatibilité bien connues entre la dérivée normale et la dérivée tangentielle d'une fonction harmonique réelle définie dans un voisinage du disque unité.
Réutilisant la formule (3), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_z(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{1}{2}(u_t + iu_s)ds}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n + ib_n)e^{in\theta}}{e^{i\theta} - z} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta}}{e^{i\theta} - z} d\theta \end{aligned}$$

La formule

$$u(z) = \int_0^z u_z dz + \overline{u}_z d\bar{z}$$

permet de recontruire u en fonction de la dérivée tangentielle de u sur le bord du disque. Enfin, une intégration par parties nous redonne la formule de Poisson. Nous ne le refaisons pas en détail, mais nous espérons que le lecteur est convaincu par le fait que, la méthode de Fokas nous permet de reconstruire une fonction harmonique à partir des dérivées de cette fonction sur le bord du disque et que la condition de fermeture de la forme construite à partir de la paire de Lax nous permet d'obtenir des conditions que les dérivées doivent vérifier sur le bord, et qu'à l'aide de ces conditions, nous sommes capables de reconstruire la fonction harmonique à partir de la seule connaissance de celle-ci sur le bord.
Nous allons appliquer maintenant les principes précédent au cas des PSA, ce travail est commun avec Stéphane Rigat et Franck Wielonsky.

4 Problème de Dirichlet/Neumann pour les PSA

4.1 Introduction et principaux résultats

Nous cherchons des expressions intégrales explicites des solutions (à valeurs réelles) du problème de Dirichlet/Neumann pour les équations régissant les Potentiels à Symétrie Axiale (PSA) dans un domaine simplement connexe et borné du demi-plan droit $\mathbb{H}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$

$$\Delta u + \frac{m}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{4.1}$$

où $m \in \mathbb{Z}$.
Dans le chapitre 1, nous avons donné des expressions intégrales de solutions fondamentales de cette équation, démontré un théorème de décomposition des PSA sans des domaines annulaires, déterminé le noyau de Green pour $\mathbb{H}^+$ lorsque Re $m < 1$ et exhibé une famille de solutions en termes de fonctions de Legendre Associées pour cette équation. Dans ce chapitre, c'est l'aspect problème à la frontière qui nous intéresse, déterminer une solution de l'équation (4.1) dans un domaine simplement connexe Ω en fonction de ses valeurs au bord, noté $\partial\Omega$.
On note $\mathcal{D}$ le disque de centre $(a,0)$ et de rayon R, avec $0 < R < a$. $\mathcal{C}$ désignera le bord de $\mathcal{D}$. Si $z \in \mathcal{D}$, on note z_r le point de $\mathcal{C}$ tel que $\operatorname{Im} z_r = \operatorname{Im} z$ et $\operatorname{Re} z_r \geq \operatorname{Re} z$ (voir figure 1 du paragraphe 4.3).
Les principaux résultats de notre étude sont les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.1 *Soit u une solution de l'équation $\Delta u + mx^{-1}\partial_x u = 0$, $m = -2\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}$, dans le disque $\mathcal{D}$ avec des dérivées tangentielle et normale (extérieure) u_t et u_n lisses sur le bord $\mathcal{C}$. Alors u peut être représentée sous la forme intégrale suivante*

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int_{(z,z_r)} \big((k-z)(k+\bar{z})\big)^{\mathfrak{m}} J(z,k)dk + 2\operatorname{Re}(a_r) + u(z_r), \qquad z \in \mathcal{D}, \tag{4.2}$$

où l'intégration se porte sur le segment (z,z_r), et la quantité a_r peut être explicitement calculée en fonction des dérivées tangentielles sur $\mathcal{C}$ de u_t et u_n jusqu'à l'ordre $\mathfrak{m}-1$ en z_r. La fonction $J(z,k)$ est donnée par

$$J(z,k) = -\int_{z' \in \mathcal{C}} W(z',k),$$

où $W(z,k)$ est la forme différentielle

$$W(z,k) = \big((k-z)(k+\bar z)\big)^{-\mathfrak{m}-1}\left((k+\bar z)u_z(z)dz + (k-z)u_{\bar z}(z)d\bar z\right) \tag{4.3}$$
$$= \big((k-z)(k+\bar z)\big)^{-\mathfrak{m}-1}\left((k-iy)u_t(z) + ixu_n(z)\right)ds, \tag{4.4}$$

avec $z = x+iy$ et ds l'élément de longueur sur $\mathcal{C}$. La fonction u dans (4.2) n'est définie qu'à une constante près.

Remarque 4.2 Lorsque $m = \mathfrak{m} = 0$, l'équation (4.1) est l'équation de Laplace et les solutions u sont simplement les fonctions harmoniques dans $\mathcal{D}$. Dans ce cas, l'expression dans le membre de droite de (4.2) se simplifie en

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_{(z,z_r)}\int_{\mathcal{C}} W(z',k)dk + u(z_r) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_{(z,z_r)}\int_{\mathcal{C}}\left(\frac{u_z(z)}{k-z}dz + \frac{u_{\bar z}(z)}{k+\bar z}d\bar z\right)dk + u(z_r)$$
$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_{(z,z_r)} -2i\pi u_z(k)dk + u(z_r) = -\int_{(z,z_r)} u_x(k)dk + u(z_r)$$

qui est en effet $u(z)$. Notez que dans la seconde égalité, nous avons appliqué la formule de Cauchy à la fonction analytique $u_z(z)$.

Théorème 4.3 *Soit u une solution de l'équation $\Delta u + mx^{-1}\partial_x u = 0$, $m = -2\mathfrak{m}+1$, $\mathfrak{m}\in\mathbb{N}$, dans le disque $\mathcal{D}$ avec des dérivées tangentielle et normale (extérieure) u_t et u_n lisses sur le bord $\mathcal{C}$. Alors u peut être représentée sous la forme intégrale suivante*

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\int_{\mathcal{C}}\frac{\big((k-z_r)(k+\bar z_r)\big)^{\mathfrak{m}}J(z,k)}{\sqrt{(k-z)(k+\bar z)}}dk + u(z_r), \qquad z\in\mathcal{D}, \tag{4.5}$$

où l'intégration est sur le cercle $\mathcal{C}$ orienté dans le sens trigonométrique. La racine carrée dans le dénominateur a une coupure le long du segment $(-\bar z, z)$. L'intégration commence au point z_r où la racine carrée est prise pour être positive, et sa détermination est choisie afin qu'elle reste continue le long du chemin d'intégration. La fonction $J(z,k)$ est explicitement donnée en fonction de la dérivée tangentielle et de la dérivée normale u_t et u_n ainsi que de leurs dérivées d'ordre jusqu'à $\mathfrak{m}-1$ le long du bord $\mathcal{C}$. La fonction $J(z,k)$ peut être réécrite comme une somme,

$$J(z,k) = J^0(z_r,k) + \int \tilde W(z',k), \qquad k\in\mathcal{C}, \tag{4.6}$$

voir (4.29)–(4.36) pour une définition précise de $J(z,k)$. Le chemin d'intégration dans l'intégrale est le sous-arc qui joint z_r et k sur $\mathcal{C}$. Il se trouve dans $\{\mathrm{Im}\, z \geq \mathrm{Im}\, z_r\}$ lorsque $\mathrm{Im}\, k \geq \mathrm{Im}\, z_r$ et dans $\{\mathrm{Im}\, z \leq \mathrm{Im}\, z_r\}$ lorsque $\mathrm{Im}\, k \leq \mathrm{Im}\, z_r$. La définition de J^0 et $\tilde W$ fait intervenir la racine carrée

$$\lambda(z',k) = \sqrt{(k-z')(k+\bar z')},$$

avec une coupure le long du segment $(-\bar z', z')$. Nous choisissons la détermination de la racine carrée $\lambda(z_r,k)$ qui se comporte comme k (respectivement comme $-k$) à l'infini lorsque $\mathrm{Im}\, k \geq \mathrm{Im}\, z_r$ (respectivement lorsque $\mathrm{Im}\, k \leq \mathrm{Im}\, z_r$) et ensuite on garde une détermination continue de $\lambda(z',k)$ lorsque z' parcourt le chemin d'intégration. La fonction u dans (4.5) n'est définie qu'à une constante près.

Remarque 4.4 En faisant usage du principe de symétrie de Weinstein énoncé dans le chapitre 1 via la proposition (1.2), on en déduit facilement des théorèmes 4.1 et 4.3 des représentations intégrales similaires des solutions de (4.1) dans le cas où m est un entier positif.

Les preuves des Théorèmes 4.1 et 4.3 sont données dans la section 4.3.
Dans la preuve du théorème (4.3), le problème de Riemann-Hilbert fera appel à la notion de surface de Riemann de la racine carrée. Une réference qui donne une approche élémentaire de surface de Riemann est l'ouvrage de B. Chabat, [23, 177–179].

4.2 Paires de Lax et formes différentielles fermées

Les EPSA (équations des potentiels à symétrie axiale) (4.1) admettent une paire de Lax, c'est un système de deux équations différentielles linéaires d'une seule fonction inconnue ϕ, cette paire de Lax est dite compatible si et seulement si, u satisfait (4.1). Il semble qu'c'est dans [45] qu'une paire de Lax pour les EPSA apparait pour la première fois. Ici, nous allons donner un moyen de déterminer une telle paire. En effet, en réécrivant l'équation (4.1) sous forme complexifiée,

$$u_{z\bar{z}} + \frac{m}{2(z+\overline{z})}\,(u_z + u_{\overline{z}}) = 0, \tag{4.7}$$

où $z = x + iy$, une manière (non unique) de trouver une paire de Lax est de réécrire l'équation (4.7) sous la forme

$$\left(f(z,\overline{z})u_{\overline{z}}\right)_z + \left(g(z,\overline{z}), u_z\right)_{\overline{z}} = 0 \tag{4.8}$$

où les fonctions f et g sont à déterminer. Pour cela, développons l'équation (4.8) et identifions la avec l'équation (4.7), on obtient

$$f_z = \frac{m}{2(z+\overline{z})}(f+g), \quad g_{\overline{z}} = \frac{m}{2(z+\overline{z})}(f+g). \tag{4.9}$$

En dérivant la première équation par rapport à $\overline{z}$ et la seconde par rapport à z et en les additionnant, on obtient

$$(f+g)_{z\overline{z}} = \frac{m}{2(z+\overline{z})}\left((f+g)_z + (f+g)_{\overline{z}}\right) - \frac{m}{(z+\overline{z})^2}(f+g),$$

donc la fonction $f+g$ vérifie l'équation adjointe de (4.7) au sens défini au chapitre 1. Recherchons des solutions de cette équation sous la forme

$$(f+g)(z,\overline{z}) = (z+\overline{z})A(z)B(\overline{z}).$$

En insérant cette expression dans l'équation précédente, on a

$$(z+\overline{z})A_zB_{\overline{z}} = \left(\frac{m}{2}-1\right)\left(AB_{\overline{z}} + A_zB\right),$$

et donc

$$-\left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{A}{A_z} + z = \left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{B}{B_{\overline{z}}} - \overline{z}.$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable z et le membre de droite ne dépend que de la variable $\overline{z}$, ils doivent être constants, notons $k \in \mathbb{C}$ cette constante.

$$\begin{cases} A_z = -\dfrac{\frac{m}{2}-1}{k-z}A, \\ \\ B_{\overline{z}} = \dfrac{\frac{m}{2}-1}{k+\overline{z}}B. \end{cases}$$

Cette constante sera le paramètre spectral dans notre problème. Des solutions de ces deux équations sont

$$A(z) = (k-z)^{\frac{m}{2}-1}, \quad B(\overline{z}) = -\,(k+\overline{z})^{\frac{m}{2}-1}$$

Compte tenu de l'équation (4.9), on peut donc choisir pour f et g,

$$f(z,\bar{z}) = (k-z)^{m/2}(k+\bar{z})^{m/2-1}, \qquad g(z,\bar{z}) = -(k-z)^{m/2-1}(k+\bar{z})^{m/2}.$$

Donc l'équation (4.7) est équivalente à

$$\big((k+\bar{z})^{m/2-1}(k-z)^{m/2}u_{\bar{z}}\big)_z - \big((k+\bar{z})^{m/2}(k-z)^{m/2-1}u_z\big)_{\bar{z}} = 0.$$

Cette dernière équation est équivalente à la compatibilité des deux équations différentielles ordinaires

$$\phi_z(z,k) = (k+\bar{z})^{m/2}(k-z)^{m/2-1}u_z(z), \qquad \phi_{\bar{z}}(z,k) = (k+\bar{z})^{m/2-1}(k-z)^{m/2}u_{\bar{z}}(z), \tag{4.10}$$

ce qui donne une paire de Lax pour l'équation (4.7).
De façon équivalente, on peut exprimer la propriété de la paire de Lax par le fait qu'une certaine forme différentielle soit fermée.

Proposition 4.5 *La fonction u satisfait (4.7) dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{H}^+$ si et seulement si, la forme différentielle de la variable z,*

$$W(z,k) = \big[(k-z)(k+\bar{z})\big]^{m/2-1}\big[(k+\bar{z})u_z(z)dz + (k-z)u_{\bar{z}}(z)d\bar{z}\big] \tag{4.11}$$

est fermée dans Ω. On remarque que si $m \in 2\mathbb{N}^*$, la forme différentielle n'a pas de singularité dans Ω et k peut être n'importe quel nombre complexe. Sinon pour $m \in \mathbb{R} \setminus 2\mathbb{N}^*$, la forme différentielle $W(z,k)$ a un pôle ou un point de branchement en k ou $-\bar{k}$ si l'un de ces points appartient à Ω.

4.3 Caractérisation par un problème de Riemann–Hilbert

L'objectif de cette section est de démontrer les théorèmes 4.1 et 4.3 par la construction et la résolution de problèmes de Riemann-Hilbert.

Cas des PSA où $m \in 2\mathbb{Z}^-$ (preuve du Théorème 4.1)

Notons $m = -2\mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}$. La forme différentielle $W(z,k)$ se réécrit

$$W(z,k) = \big((k-z)(k+\bar{z})\big)^{-\mathfrak{m}-1}\big((k+\bar{z})u_z(z)dz + (k-z)u_{\bar{z}}(z)d\bar{z}\big). \tag{4.12}$$

Nous réécrivons la paire de Lax (4.10) sous la forme différentielle suivante $d\phi = W$ et nous construisons une fonction ϕ de la forme

$$\phi(z,k) = \int W(z',k), \tag{4.13}$$

où le chemin d'intégration est à définir. Pour k tel que Im $k \geq$ Im z, on intégre du point z_r au point z en parcourant la partie inférieure du cercle $\mathcal{C}_{low}$ et ensuite le segment rejoignant z_l à z. Pour k tel que Im $k \leq$ Im z, on intégre du point z_r au point z en parcourant la partie supérieure du cercle $\mathcal{C}_{up}$ et à nouveau le segment rejoignant z_l à z, voir Figure 1 ci-dessous.

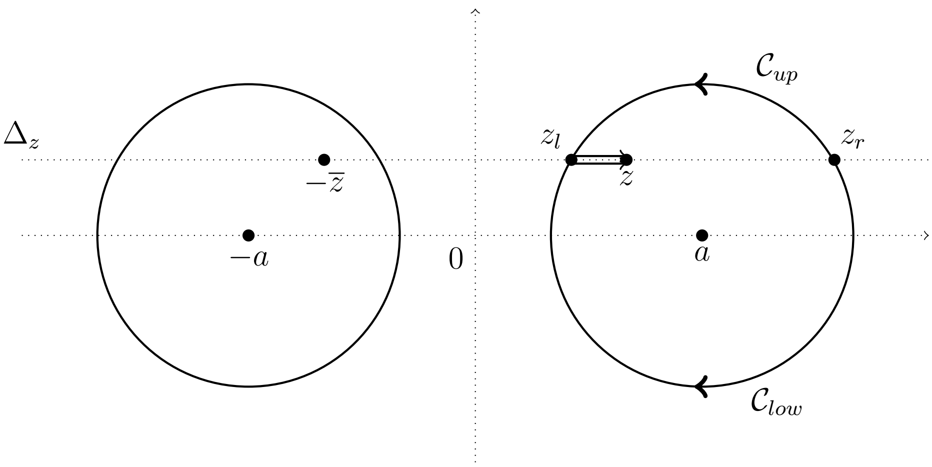


Figure 1 : Chemins d'intégration de z_r à z le long de $\mathcal{C}_{up}$ et $\mathcal{C}_{low}$ dans (4.13).

Ceci définit une fonction analytique de la variable k en dehors de la droite Δ_z passant par z et $-\bar{z}$ où il peut éventuellement y avoir un saut de la fonction $k \mapsto \phi(z,k)$. A partir de (4.12) et (4.13), on remarque que la fonction $\phi(z,k)$ possède des pôles d'ordre $\mathfrak{m}$ en $k \in \{-\bar{z}_r, -\bar{z}, z, z_r\}$ si $\mathfrak{m} > 0$ et des singularités logarithmique si $\mathfrak{m} = 0$. La fonction $\phi(z,k)$ satisfait la relation de symétrie

$$\phi(z,-\bar{k}) = -\overline{\phi(z,k)}. \tag{4.14}$$

Dans la suite, nous utiliserons les notations $\phi^+(z,k)$ et $\phi^-(z,k)$ pour les valeurs limites de $\phi(z,k)$ lorsque k s'approche à gauche ou à droite d'un arc orienté donné. Le saut en k de la fonction $\phi(z,k)$ sera noté

$$J(z,k) := \phi^+(z,k) - \phi^-(z,k).$$

Le fait que la forme différentielle $W(z',k)$ est fermée dans le disque $D((a,0),R)$ lorsque k est en dehors de ce disque implique qu'il n'y a pas de saut de $\phi(z,k)$ sur la partie de Δ_z à l'extérieur de $D((a,0),R)$ et $D((-a,0),R)$. A l'intérieur des disques, nous avons

$$\begin{aligned} J(z,k) &= -\int_{\mathcal{C}} W(z',k), \qquad && k \in (z,z_r) \cup (-\bar{z}_r, -\bar{z}), \\ J(z,k) &= 0, && k \in (z_l, z) \cup (-\bar{z}, -\bar{z}_l). \end{aligned}$$

Pour le calcul du saut sur $(-\bar{z}_r, -\bar{z})$, nous avons juste utilisé la symétrie (4.14). Pour le saut sur (z_l, z), nous avons déformé les deux chemins d'intégration en le segment

(z_r, z), ce qui est possible par le fait que la forme différentielle $W(z', k)$ est fermée. On remarque que $J(z, k)$ n'a pas de singularités en z et z_r. En z, c'est clair, tandis qu'en z_r, cela peut être vu en effectuant $\mathfrak{m}$ intégrations par parties de $W(z', k)$ sur le contour fermé $\mathcal{C}$, voir aussi [51, Section 4.4]. En ce qui concerne la fonction $\phi(z, k)$, comme dit précédemment, elle a, comme fonction de la variable k, des pôles d'ordre $\mathfrak{m}$ en $\{z, z_r, -\bar{z}, -\bar{z}_r\}$ si $\mathfrak{m} > 0$ et des singularités logarithmiques si $\mathfrak{m} = 0$. De plus, à l'infini, $k \mapsto \phi(z, k)$ se comporte de la manière suivante

$$\phi(z, k) \to k^{-2\mathfrak{m}-1}(u(z) - u(z_r)), \quad \text{lorsque } k \to \infty.$$

Nous normalisons le problème à l'infini en définissant

$$\tilde{\phi}(z, k) = ((k - z)(k + \bar{z}))^{\mathfrak{m}} \phi(z, k), \tag{4.15}$$

$$\tilde{J}(z, k) = ((k - z)(k + \bar{z}))^{\mathfrak{m}} J(z, k). \tag{4.16}$$

Ainsi, la fonction $k \to \tilde{\phi}(z, k)$ se comporte comme $k^{-1}(u(z) - u(z_r))$ lorsque $k \to \infty$. Cette fonction est désormais régulière aux points z et $-\bar{z}$, sauf pour les singularités logarithmiques si $m = 0$. Elle a encore des singularités polaires en z_r et $-\bar{z}_r$. Notons $\tilde{\phi}_{z_r, -\bar{z}_r}(z, k)$ sa partie polaire en ces points, c'est-à-dire la somme des termes de degré négatif dans le développement en série de Laurent de $\tilde{\phi}(z, k)$ en z_r et $-\bar{z}_r$. La fonction $\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_{z_r, -\bar{z}_r}$ est analytique en dehors des segments (z, z_r) et $(-\bar{z}_r, -\bar{z})$ où la fonction possède un saut $\tilde{J}(z, k)$. Elle a au plus des singularités logarithmiques en $\{z, z_r, -\bar{z}, -\bar{z}_r\}$ et elle s'annule à l'infini .
Ces propriétés déterminent entièrement la fonction $\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_{z_r, -\bar{z}_r}$. En effet, si il y avait une autre fonction qui satisfait ces propriétés, leur différence serait une fonction holomorphe qui s'annulerait à l'infini, donc ce serait la fonction nulle. Par la formule de Plemelj, nous avons une expression intégrale pour $\tilde{\phi}(z, k) - \tilde{\phi}_{z_r, -\bar{z}_r}(z, k)$, *i. e.*

$$\tilde{\phi}(z, k) - \tilde{\phi}_{z_r, -\bar{z}_r}(z, k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(-\bar{z}_r, -\bar{z}) \cup (z, z_r)} \frac{\tilde{J}(z, k')}{k' - k} dk'. \tag{4.17}$$

En notant a_r et a_{-r} le résidu de $\tilde{\phi}(z, k)$ en $k = z_r$ et $-\bar{z}_r$ respectivement, et en identifiant les coefficients de k^{-1} dans le développement de (4.17) à l'infini, nous avons

$$\begin{aligned} u(z) - u(z_r) &= a_r + a_{-r} - \frac{1}{2i\pi} \int_{(-\bar{z}_r, -\bar{z}) \cup (z, z_r)} \tilde{J}(z, k') dk' \\ &= 2\mathrm{Re}\,(a_r) - \frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \int_{(z, z_r)} \tilde{J}(z, k') dk', \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation de symétrie $\tilde{\phi}(z, -\bar{k}) = -\overline{\tilde{\phi}(z, k)}$. Il reste à montrer que a_r peut être explicitement calculé à partir de la connaissance des dérivées u_t et u_n sur $\mathcal{C}$. A partir de (4.15), il suffit de connaître la partie polaire de $\phi(z, k)$ en z_r. Pour calculer cette partie polaire, nous réécrivons d'abord $W(z, k)$, défini dans (4.12), en exprimant les dérivées complexes en fonction des dérivées normales et tangentielles (extérieure) sur le cercle $\mathcal{C}$,

$$u_z dz = \frac{1}{2}(u_t + iu_n) ds, \qquad u_{\bar{z}} d\bar{z} = \frac{1}{2}(u_t - iu_n) ds,$$

où ds est l'élément de longueur sur $\mathcal{C}$. Nous avons en posant $z = x + iy \in \mathcal{C}$,

$$W(z,k) = \big((k-z)(k+\bar{z})\big)^{-\mathfrak{m}-1}\left((k-iy)u_t(z) + ixu_n(z)\right) ds, \tag{4.18}$$
$$= (k-z)^{-\mathfrak{m}-1} w(z,k) dz \tag{4.19}$$

où

$$w(z,k) := (k+\bar{z})^{-\mathfrak{m}-1}\left((k-iy)u_t(z) + ixu_n(z)\right)\tau^{-1}(z)$$

et $\tau(z)$ représente le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}$ au point z. Posons

$$\tilde{\partial}_t f = \tau^{-1}(z)\partial_t f \tag{4.20}$$

pour une fonction f défini sur $\mathcal{C}$. En raison d'analyticité,

$$\partial_z(k-z)^{-j-1}dz = \partial_t(k-z)^{-j-1}ds = \tilde{\partial}_t(k-z)^{-j-1}dz, \quad j = \mathfrak{m}-1,\ldots,0.$$

Par conséquent, en effectuant $\mathfrak{m}$ intégrations par parties de l'intégrale dans (4.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}\phi(z,k) = c_0\left[(k-z')^{-\mathfrak{m}}w(z',k)\right]_{z_r}^{z} + \cdots \\ + c_{\mathfrak{m}-1}\left[(k-z')^{-1}\tilde{\partial}_t^{(\mathfrak{m}-1)}w(z',k)\right]_{z_r}^{z} - c_{\mathfrak{m}-1}\int_{z_r}^{z}(k-z')^{-1}\tilde{\partial}_t^{(\mathfrak{m})}w(z',k)dz',\end{aligned} \tag{4.21}$$

où

$$c_j = (-1)^j\Gamma(\mathfrak{m}-j)/\Gamma(\mathfrak{m}+1), \qquad j = 0,\ldots,\mathfrak{m}-1.$$

La partie polaire de $\phi(z,k)$ en z_r peut être lue dans les termes entres parenthèses (4.21) comme suit

$$-c_0\sum_{j=0}^{\mathfrak{m}-1}\frac{\partial_k^{(j)}w(z_r,z_r)}{j!(k-z_r)^{\mathfrak{m}-j}} - \cdots - c_{m-1}\frac{\tilde{\partial}_t^{(\mathfrak{m}-1)}w(z_r,z_r)}{k-z_r},$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation par rapport à la variable k. Ceci termine la preuve du Théorème 4.1.

Cas des PSA où $m \in 2\mathbb{Z}^- + 1$ (preuve du Théorème 4.3)

Notons $m = -2\mathfrak{m} + 1$ avec $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}$. La forme différentielle $W(z,k)$ se réécrit

$$W(z,k) = \big((k-z)(k+\bar{z})\big)^{-\mathfrak{m}-1/2}\big((k+\bar{z})u_z(z)dz + (k-z)u_{\bar{z}}(z)d\bar{z}\big). \tag{4.22}$$

La nouveauté par rapport au cas pair est que la forme différentielle $W(z,k)$ fait intervenir la racine carrée

$$\lambda(z,k) = \sqrt{(k-z)(k+\bar{z})}$$

qui, comme fonction de k, est définie sur une surface de Riemann $\mathcal{S}_z$ de genre 0 qui est constituée de deux copies de $\mathbb{C}$, notée $\mathcal{S}_{z,1}$ pour la feuille supérieure et $\mathcal{S}_{z,2}$ pour la feuille inférieure. Cette surface de Riemann dépend de z. Les deux feuilles sont collées entre elles le long d'une coupure reliant z et $-\bar{z}$, que nous choisissons d'être le segment horizontal $(-\bar{z}, z)$. Nous noterons λ_1 et λ_2 la détermination de la racine carrée λ, en tant que fonction de la variable k, sur la feuille supérieure et inférieure de $\mathcal{S}_z$ où nous avons supposé que

$$\lambda_1(z,k) = k(1+\mathcal{O}(1/k)), \qquad \text{si } k \to \infty_1 \text{ sur la feuille supérieure } \mathcal{S}_{z,1}, \tag{4.23}$$
$$\lambda_2(z,k) = -k(1+\mathcal{O}(1/k)), \quad \text{si } k \to \infty_2 \text{ sur la feuille inférieure } \mathcal{S}_{z,2}. \tag{4.24}$$

On notera aussi par W_1 et W_2 les valeurs de la forme différentielle W correspondant aux déterminations λ_1 et λ_2 de la racine carrée. Pour une utilisation future, on remarque que la fonction $\lambda(z,k)$ et la forme différentielle $W(z,k)$ satisfont les relations de symétries :

$$\lambda(z,-\overline{k}) = -\overline{\lambda(z,k)}, \qquad W(z,-\overline{k}) = \overline{W(z,k)}. \tag{4.25}$$

Comme dans la section précédente, nous construisons une fonction ϕ de la forme

$$\phi(z,k) = \int W(z',k), \tag{4.26}$$

où le chemin d'intégration doit être défini. Comme dans [48], nous définissons, pour chaque z, la fonction $k \to \phi(z,k)$ comme application de la surface de Riemann $\mathcal{S}_z$ dans $\mathbb{C}$. Le chemin d'intégration dans (4.26) est choisie pour être γ_1 lorsque $k \in \mathcal{S}_{z,1}$ et γ_2 lorsque $k \in \mathcal{S}_{z,2}$, voir figures 2 et 3 suivantes.

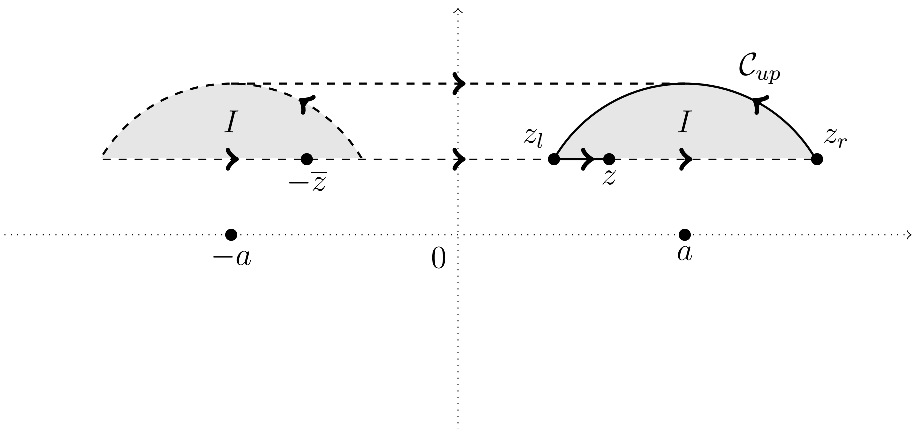


Figure 2 : Orientations des contours et chemins d'intégration γ_1 (ligne continue) pour la définition (4.26) de $\phi(z,k)$ sur la feuille supérieure $\mathcal{S}_{z,1}$. Le chemin débute à z_r puis se prolonge sur la partie supérieure $\mathcal{C}_{up}$ de $\mathcal{C}$ jusqu'à z_l et se termine en suivant le segment horizontal jusqu'au point z. Pour k dans les différentes régions montrées dans la figure, le choix de la détermination de la racine carrée au point initial z_r est différent.

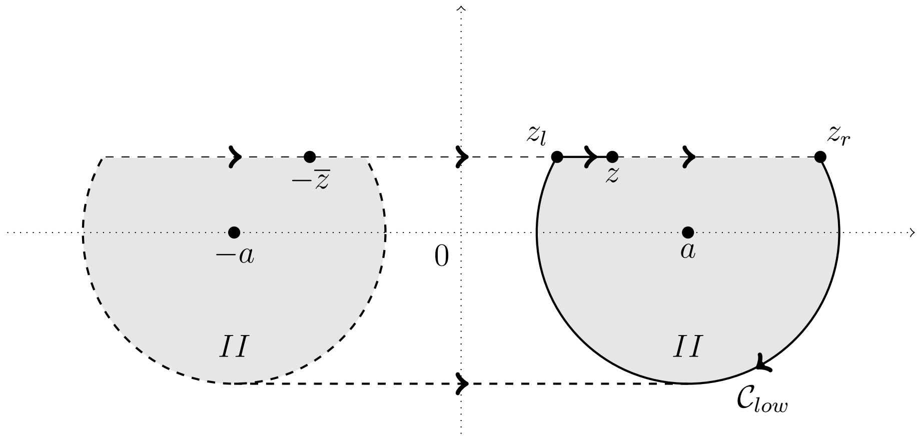


Figure 3 : Orientations des contours et chemins d'intégration γ_2 (ligne continue) pour la définition (4.26) de $\phi(z,k)$ sur la feuille inférieure $\mathcal{S}_{z,2}$. Le chemin débute à z_r puis se prolonge sur la partie inférieure $\mathcal{C}_{low}$ de $\mathcal{C}$ jusqu'à z_l (on décrit $\mathcal{C}_{low}$ dans le sens horaire) et se termine en suivant le segment horizontal jusqu'au point z. Pour k dans les différentes régions montrées dans la figure, le choix de la détermination de la racine carrée au point initial z_r est différent.

Il faut aussi remarquer que lorsque k n'appartient pas à l'enveloppe convexe des deux cercles symétriques, la coupure reliant z' et $-\overline{z}'$ ne coupe pas k lorsque z' parcourt les chemins γ_1 et γ_2. Pour un tel k, on peut donc utiliser la même détermination de la racine carrée $\lambda(z',k)$ pour le calcul de l'intégrale (4.26). Lorsque k est à l'intérieur de l'un des cercles (i.e. régions I et II dans les figures 2 et 3), la coupure intersecte le point k une seule fois. Ainsi, pour $k \in \mathcal{S}_{z,1}$ se trouvant dans la partie supérieure de l'un des deux cercles, nous utilisons la détermination de la racine carrée $\lambda_2(z',k)$ sur la première partie de l'intégration, avant le croisement de la coupure avec k, et la détermination $\lambda_1(z',k)$ après le croisement de la coupure avec k, et inversement pour $k \in \mathcal{S}_{z,2}$ se trouvant dans la partie inférieure de l'un des deux cercles. Enfin, lorsque k est compris entre les deux cercles, la coupure intersecte k deux fois, dans ce cas, nous commençons l'intégration avec la détermination de la racine carrée $\lambda(z',k)$ correspondant à k, puis on change pour l'autre détermination après la première intersection de la coupure avec k, et on revient à la première détermination après la deuxième intersection.

Ceci définit $\phi(z,k)$ comme fonction analytique de la variable $k \in \mathcal{S}_z$ en dehors d'arcs sur lesquels $\phi(z,k)$ possède des sauts. Comme dans la section précédente, nous utiliserons les notations $\phi^+(z,k)$ et $\phi^-(z,k)$ pour les valeurs limites de $\phi(z,k)$ lorsque k tend à gauche et à droite d'un arc orienté donné. Calculons maintenant les sauts,

$$J(z,k) := \phi^+(z,k) - \phi^-(z,k),$$

de la fonction $\phi(z,k)$ sur les arcs orientés, comme dans les figures 2 et 3 précédentes. Comme précédemment, on désigne par $\mathcal{C}_{up}$ la partie du cercle $\mathcal{C} = C(A,R)$ qui est au-dessus du segment (z_l, z_r) et $\mathcal{C}_{low}$ la partie du cercle $\mathcal{C}$ au-dessous du segment. Pour k sur l'un des deux cercles, on note $\widetilde{k}$ l'autre point du cercle qui a la même partie imaginaire, i.e.

$$\begin{aligned} \widetilde{k} - a &= -\overline{(k-a)}, \qquad k \in \mathcal{C} \\ \widetilde{k} + a &= -\overline{(k+a)}, \qquad k \in -\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Pour calculer les sauts $J(z,k)$, nous réécrivons $W(z,k)$, défini dans (4.22), en fonction de ds, l'élément de longueur sur $\mathcal{C}$. Par le même calcul que celui de la section précédente, nous obtenons maintenant, avec $z = x + iy \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} W(z,k) &= \big((k-z)(k+\bar{z})\big)^{-\mathfrak{m}-1/2} \left((k-iy)u_t(z) + ixu_n(z)\right) ds, && (4.27) \\ &= (k-z)^{-\mathfrak{m}-1/2} w(z,k) dz && (4.28) \end{aligned}$$

où

$$w(z,k) := (k+\bar{z})^{-\mathfrak{m}-1/2} \left((k-iy)u_t(z) + ixu_n(z)\right) \tau^{-1}(z)$$

et $\tau(z)$ désigne toujours le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}$ au point z. En effectuant $\mathfrak{m}$ intégrations par parties sur l'intégrale (4.26), nous obtenons de la même manière que dans la section précédente,

$$\begin{aligned} \phi(z,k) = c_0 &\left[(k-z')^{-\mathfrak{m}+1/2} w(z',k)\right]_{z_r}^{z} + \cdots \\ &+ c_{\mathfrak{m}-1} \left[(k-z')^{-1/2} \tilde{\partial}_t^{(\mathfrak{m}-1)} w(z',k)\right]_{z_r}^{z} - c_{\mathfrak{m}-1} \int_{z_r}^{z} (k-z')^{-1/2} \tilde{\partial}_t^{(\mathfrak{m})} w(z',k) dz', \end{aligned}$$

où

$$c_j = (-1)^j \Gamma(\mathfrak{m} - 1/2 - j)/\Gamma(\mathfrak{m} + 1/2), \qquad j = 0, \ldots, \mathfrak{m} - 1,$$

et l'opérateur $\tilde{\partial}_t f$ est encore défini par (4.20). Les termes entre crochets contiennent les parties polaires de $\phi(z,k)$, de degré $\mathfrak{m}$, en z et z_r. Notez que la dernière intégrale converge lorsque $k \in \mathcal{C}$. Supposons que $k \in \mathcal{S}_{z,1}$ et appartient à la partie droite de $\mathcal{C}_{up}$. Donc d'après la définition donnée un peu plus haut de ϕ, nous obtenons que

$$J(z,k) = J_1^0(z_r,k) + \int_{z_r}^{k} \tilde{W}_1(z',k),$$

avec

$$\begin{aligned} J_1^0(z_r,k) &= 2 \sum_{j=0}^{\mathfrak{m}-1} c_j (k-z_r)^{j-\mathfrak{m}+1/2} \tilde{\partial}_t^{(j)} w_1(z_r,k), && (4.29) \\ \tilde{W}_1(z',k) &= 2c_{\mathfrak{m}-1}(k-z')^{-1/2} \tilde{\partial}_t^{(\mathfrak{m})} w_1(z',k) dz', && (4.30) \end{aligned}$$

où l'indice 1 dans les expressions ci-dessus signifie que nous utilisons la détermination λ_1 de la racine carrée à évaluer. Les sauts sur la moitié gauche de $\mathcal{C}_{up}$ sur $\mathcal{S}_{z,1}$ et de $\mathcal{C}_{low}$ sur $\mathcal{S}_{z,2}$ peuvent être calculés de la même manière. Les sauts sur $-\overline{\mathcal{C}}_{up}$ et $-\overline{\mathcal{C}}_{low}$ peuvent être obtenus à partir de la relation de symétrie satisfaite par $\phi(z,k)$,

$$\phi(z, -\bar{k}) = \overline{\phi(z,k)}.$$

Le résultat est le suivant. Pour $k \in \mathcal{S}_{z,1}$,

$$J(z,k) = J_1^0(z_r,k) + \int_{(z_r,k)} \tilde{W}_1(z',k), \qquad k \text{ sur la moitié droite de } \mathcal{C}_{up}, \qquad (4.31)$$

$$J(z,k) = J_1^0(z_r,k) + \int_{(z_r,\widetilde{k})} \tilde{W}_1(z',k) - \int_{(\widetilde{k},k)} \tilde{W}_1(z',k), k \text{ sur la moitié gauche } \mathcal{C}_{up}, \tag{4.32}$$

$$J(z,k) = \overline{J(z,-\bar{k})}, \qquad k \text{ sur } -\overline{\mathcal{C}}_{up}, \tag{4.33}$$

où le chemin d'intégration (a,b) dans chacune des intégrales ci-dessus est le sous-arc de $\mathcal{C}_{up}$ joignant les points a et b dans le sens trigonométrique. Pour $k \in \mathcal{S}_{z,2}$, nous avons

$$J(z,k) = J_2^0(z_r,k) + \int_{(z_r,k)} \tilde{W}_2(z',k), \qquad k \text{ sur la moitié droite de } \mathcal{C}_{low}, \tag{4.34}$$

$$J(z,k) = J_2^0(z_r,k) + \int_{(z_r,\widetilde{k})} \tilde{W}_2(z',k) - \int_{(\widetilde{k},k)} \tilde{W}_2(z',k), k \text{ sur la moitié gauche de } \mathcal{C}_{low}, \tag{4.35}$$

$$J(z,k) = \overline{J(z,-\bar{k})}, \qquad k \text{ sur } -\overline{\mathcal{C}}_{low}, \tag{4.36}$$

où (a,b) dans chacune des intégrales désigne le sous-arc de $\mathcal{C}_{low}$ joignant les point a et b dans le sens horaire.
Remarquons que les sauts ci-dessus ont lieu sur deux contours de la surface de Riemann $\mathcal{S}_z$. Le premier contour débute en $z_{r,1}$ sur la première feuille, puis suit le cercle $\mathcal{C}$ et traverse la coupure en z_l et termine en $z_{r,2}$ sur la seconde feuille. Le deuxième contour débute en $-\bar{z}_{r,1}$ sur la première feuille, puis suit le cercle $-\mathcal{C}$ et traverse la coupure en $-\bar{z}_l$ et termine en $-\bar{z}_{r,2}$ sur la deuxième feuille. Remarquons aussi que le saut sur le premier contour est continu en z_l (comparer à (4.32) et (4.35) en $k = z_l$), et par symétrie, la même remarque est valable pour le saut sur le second contour en $-\bar{z}_l$.
Nous laissons le lecteur vérifier que sur chaque feuille, il n'y a pas d'autres sauts pour $\phi(z,k)$, et aussi qu'il n'y a pas de sauts de $\phi(z,k)$ sur la coupure $(-\bar{z},z)$ de la surface de Riemann $\mathcal{S}_z$. Par soucis d'exhaustivité, remarquons que, si on considérerait $\phi(z,k)$ comme fonction définie seulement sur une seule feuille, e.g. $\mathcal{S}_{z,1}$, alors $\phi(z,k)$ aurait un saut sur le segment $(-\bar{z}_l, z_l)$ donné par

$$\int_{\mathcal{C}_{up}} \tilde{W}_1(z',k), \quad k \in (-\bar{z}_l, z_l).$$

Sur la seconde feuille $\mathcal{S}_{z,2}$, il y aurait également un saut,

$$-\int_{\mathcal{C}_{low}} \tilde{W}_2(z',k), \quad k \in (-\bar{z}_l, z_l),$$

qui est exactement l'opposé du saut précédent.
Le terme $J^0(z_r,k)$ a une singularité polaire d'ordre $\mathfrak{m}$ en $k = z_r$ donc les sauts (4.31)–(4.36) ont des singularités polaires d'ordre $\mathfrak{m}$ en soit z_r ou $-\bar{z}_r$. Ainsi, au lieu de prendre $\phi(z,k)$, nous considérons

$$\tilde{\phi}(z,k) = \big((k-z_r)(k+\bar{z}_r)\big)^{\mathfrak{m}} \phi(z,k),$$

dont les sauts

$$\tilde{J}(z,k) = \big((k-z_r)(k+\bar{z}_r)\big)^{\mathfrak{m}} J(z,k) \tag{4.37}$$

sont réguliers (et se trouvent sur les mêmes contours que ceux de $\phi(z,k)$). Puis d'après les définitions de W et ϕ ((4.27) et (4.26)), et compte tenu de (4.23)–(4.24), on a

$$\lim_{k\to\infty_1} \tilde{\phi}(z,k) = \int_{z_r}^{z} du = u(z) - u(z_r), \tag{4.38}$$

$$\lim_{k\to\infty_2} \tilde{\phi}(z,k) = -\int_{z_r}^{z} du = u(z_r) - u(z), \tag{4.39}$$

donc en particulier,

$$\tilde{\phi}(z,\infty_1) = -\tilde{\phi}(z,\infty_2). \tag{4.40}$$

Enfin, la fonction $k \to \tilde{\phi}(z,k)$ reste bornée au voisinage des quatre extrémités $z_{r,1}$, $z_{r,2}$, $-\bar{z}_{r,1}$, $-\bar{z}_{r,2}$ des deux contours où les sauts (4.31)–(4.36) ont lieu. En effet, au voisinage de $z_{r,1}$, $W(z,k)$ est d'ordre $(k-z_{r,1})^{-\mathfrak{m}-1/2}$ et par conséquence, $\tilde{\phi}(z,k)$ est d'ordre $(k-z_{r,1})^{1/2}$. Le même fait est vrai au voisinage des trois autres points. Comme une dernière remarque, mentionnons que $\tilde{\phi}(z,k)$ possède des pôles d'ordre $\mathfrak{m}$ en z et $-\bar{z}$ puisque cela est vrai pour $\phi(z,k)$. Notons $\tilde{\phi}_{z,-\bar{z}}(z,k)$ la somme de ses parties polaires en z et en $-\bar{z}$.
Les sauts (4.37), la relation (4.40) entre les valeurs aux infinis et la bornitude au voisinage des extrémités caractérisent complètement la fonction $\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_{z,-\bar{z}}$ sur $\mathcal{S}_z$. En effet, si il existe deux telles fonctions, alors leur différence serait une fonction analytique sur la surface de Riemann compacte $\overline{\mathcal{S}}_z$, donc constante. Comme elle satisfait aussi la relation (4.40), cette fonction ne peut être que la fonction nulle. Une expression explicite peut être donnée de la solution unique du problème de Riemann-Hilbert définit par les conditions précédentes (sauts, relation entre les valeurs en ∞_1 et ∞_2, et la bornitude au voisinage des points d'extrémités), à savoir

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(z,k) - \tilde{\phi}_{z,-\bar{z}}(z,k) = \frac{1}{4i\pi}\int_{\mathcal{C}_{up}\cup-\overline{\mathcal{C}}_{up}} \tilde{J}(z,k')\left(\frac{\lambda(z,k)}{\lambda_1(z,k')}+1\right)\frac{dk'}{k'-k} \\ + \frac{1}{4i\pi}\int_{\mathcal{C}_{low}\cup-\overline{\mathcal{C}}_{low}} \tilde{J}(z,k')\left(\frac{\lambda(z,k)}{\lambda_2(z,k')}+1\right)\frac{dk'}{k'-k},\end{aligned} \tag{4.41}$$

où les contours d'intégration sont orientés comme dans les figures 2 et 3. Dans la première intégrale, $k' \in \mathcal{S}_{z,1}$ et dans la seconde, $k' \in \mathcal{S}_{z,2}$. Vérifions que l'expression dans (4.41) satisfait les propriétés caractérisant $\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_{z,-\bar{z}}$. En effet, cette expression définit une fonction analytique de la variable k sur $\mathcal{S}_z$ en dehors des deux contours $\mathcal{C}_{up} \cup \mathcal{C}_{low}$ et $-\overline{\mathcal{C}}_{up} \cup -\overline{\mathcal{C}}_{low}$. Par la formule de Plemelj, on observe que cette fonction a les bon sauts sur ces contours. En raison de (4.23)–(4.24), cette fonction satisfait aussi la relation (4.40). A partir des formules (4.31), (4.33), (4.34), (4.36), nous obtenons que $\tilde{J}(z,k')$ s'annule aux extrémités des deux contours. Par conséquent, l'expression dans (4.41) reste bornée à proximité de ces extrémités, voir [1, Lemma 7.2.2] pour plus de détails.
En faisant usage de (4.38), on en déduit par la formule (4.41), où on renomme k' par k, que

$$u(z) - u(z_r) = -\frac{1}{4i\pi}\int_{\mathcal{C}_{up}\cup-\overline{\mathcal{C}}_{up}} \frac{\tilde{J}(z,k)}{\lambda_1(z,k)}dk - \frac{1}{4i\pi}\int_{\mathcal{C}_{low}\cup-\overline{\mathcal{C}}_{low}} \frac{\tilde{J}(z,k)}{\lambda_2(z,k)}dk$$

et comme u est à valeurs réelles,

$$\begin{aligned} u(z) - u(z_r) &= -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\int_{\mathcal{C}_{up}} \frac{\tilde{J}(z,k)}{\lambda_1(z,k)}dk - \frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\int_{\mathcal{C}_{low}} \frac{\tilde{J}(z,k)}{\lambda_2(z,k)}dk \\ &= -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\int_{\mathcal{C}} \frac{\tilde{J}(z,k)}{\sqrt{(k-z)(k+\bar{z})}}dk. \end{aligned}$$

Notez que la partie polaire $\tilde{\phi}_{z,-\bar{z}}$ ne donne aucune contribution dans le calcul ci-dessus lorsque k tend vers l'infini. Dans la seconde égalité, nous avons utilisé la première identité de (4.25) et le fait que

$$\tilde{J}(z,-\bar{k}) = \overline{\tilde{J}(z,k)}.$$

Dans la dernière expression, nous intégrons le long du cercle $\mathcal{C}$ orienté dans le sens trigonométrique, en commencant par z_r avec la détermination de la racine carrée qui se comporte comme k à l'infini. En $k = z_l$, la détermination change de sorte que la racine carrée reste constante le long du chemin d'intégration. Ceci termine la preuve du Théorème 4.3.

Chapitre 3

Paramétrage analytique des fonctions pseudo-holomorphes à l'exposant critique.

Ce chapitre donne une présentation succincte des résultats obtenus dans [10]. Le premier paragraphe est essentiellement constitué de l'introduction de [10], le deuxième paragraphe introduit les définitions et les notations nécessaires pour la troisième partie qui donne l'ensemble des principaux théorèmes démontrés dans [10].

1 Introduction

Les fonctions pseudo-holomorphes d'une variable complexe sont les solutions d'une équation en $\overline{\partial}$ de la forme

$$\overline{\partial}\Phi = a(z)\overline{\Phi(z)} + b(z)\Phi(z), \qquad z \in \Omega \subset \mathbb{C}.$$

Leur étude a débuté il y a relativement longtemps dans [91, 22] et cette étude a été approfondie dans [12, 94] dans le cas où les coefficients sont à régularité L^r, $r > 2$. Tandis que dans [12], l'auteur les étudie sous un angle fonctionnel, [94] insiste sur les équations intégrales et se penche sur les applications à la géométrie, l'élasticité et l'hydrodynamique. De récents développements et des applications à divers problèmes aux bords peuvent être trouvés dans [73, 117, 36]. Le cas où les coefficients ont une régularité Besov est considéré dans [13]. Les classes Hardy pour ces fonctions ont été introduites dans [81] et par la suite considérées dans [69, 70, 71, 9] pour des exposants $1 < p < \infty$. On peut aussi trouver dans [35, 72, 41, 8] des généralisations à des domaines multi-connexes. Grâce au lien entre les fonctions pseudo-holomorphes et les équations de Beltrami conjuguées, les classes de Hardy des fonctions pseudo-holomorphes deviennent alors un espace fonctionnel adéquat pour résoudre les problèmes de Dirichlet avec des données à régularité L^p au bord pour les équations de la divergence à conductivité isotrope [9, 35, 8]. Celles-ci jouent également un rôle dans [42, 43, 44, 41] pour aborder certains problèmes inverses.
Comme souligné dans [13], I. N. Vekua a manifesté à plusieurs reprises un certain intérêt de développer une théorie des fonctions pseudo-holomorphes dans le cas où les coefficients sont à régularité L^r avec $1 < r \leq 2$. Mais les solutions n'étant alors plus continues, ceci a apparemment été un obstacle à ces extensions. On pourra par

exemple se référer à [13, 83] pour voir des classes de coefficients qui assurent cette continuité.
Il semble que notre travail soit le premier où l'exposant critique $r = 2$ est considéré. Nous développons une théorie des espaces de Hardy des fonctions pseudo-holomorphes sur le disque unité pour $p \in (1, \infty)$, on prouve l'existence de valeurs limites L^p au bord et nous montrons un analogue du théorème de M. Riesz dans ce contexte. Comme corollaire, on obtient un théorème de type Liouville.
Nous développons également une paramétrisation topologique par des fonctions holomorphes de classe Hardy qui est nouvelle même pour $r > 2$. Nous appliquons notre résultat au problème de Dirichlet bien-posé avec des données au bord de classe L^p-pondérées pour des équations de type conductivité dans le plan dont les coefficients ont une régularité du type $\log W^{1,2}$ (*i. e.* les coefficients s'écrivent e^h avec $h \in W^{1,2}$). En particulier, les coefficients ne sont pas bornés et l'équation n'est pas strictement elliptique. En conséquence, les solutions peuvent être localement non bornées.
Comme dans des travaux antérieurs sur les fonctions pseudo-holomorphes, nous faisons un usage intensif du principe de similitude, mais dans notre cas, une analyse approfondie des propriétés de régularité et bornitude exponentielle des fonctions $W^{1,2}$ est nécessaire. Nous prouvons un théorème, l'un des principaux résultats techniques qui affirme que l'exponentielle d'une fonction $W_0^{1,2}$ dans le disque est un multiplicateur de l'espace des fonctions dotées d'une fonction maximale L^p sur $\mathbb{T}$ dans l'espace des fonctions vérifiant une condition Hardy d'ordre p.

2 Notations et définitions

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notations et les définitions nécessaires pour énoncer les résultats obtenus dans [10].

Espaces de Lebesgue et Sobolev classiques

Pour $E \subset \mathbb{C}$ et f une fonction définie sur un ensemble contenant E, on note $f_{|E}$ la restriction de f à E. On notera $|E|$ la mesure planaire de Lebesgue de E lorsque tout risque de confusion avec le module complexe est écarté. La différentielle de cette mesure est notée de façon interchangeable par

$$dm(z) = dx\, dy = (i/2)\, dz \wedge d\overline{z}, \qquad z = x + iy.$$

Pour $p \in [1, \infty]$, on note $L^p(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ les espaces de Lebesgue et Sobolev par rapport à la mesure dm ; nous considérons aussi leurs sous-espaces de fonctions réelles $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$ and $W^{1,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)$. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ se compose des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les premières dérivées distributionnelles appartiennent à $L^p(\Omega)$; $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial f\|_{L^p(\Omega)} + \|\overline{\partial} f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Nous introduisons également les espaces $L^p_{loc}(\Omega)$ et $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ des distributions dont la restriction à tout ouvert relativement compact $\Omega_0 \subset \Omega$ appartient à $L^p(\Omega_0)$ et $W^{1,p}(\Omega_0)$ respectivement. La topologie sur ces espaces est construite à partir de la famille de semi-normes $\|f_{\Omega_n}\|_{L^p(\Omega_n)}$ et $\|f_{\Omega_n}\|_{W^{1,p}(\Omega_n)}$, où $\{\Omega_n\}$ est une suite exhaustive de sous-ensembles ouverts relativement compacts de Ω.

On notera $W^{1,p}_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Trace et espace de Sobolev fractionnaire

Chaque fonction $f \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$ a une trace sur $\partial\Omega$ (notée encore f ou parfois $\mathrm{tr}_{\partial\Omega} f$), cette fonction trace se trouve dans l'espace de Sobolev $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ d'ordre non entier. Cet espace de Sobolev fractionnaire est un espace d'interpolation entre $L^p(\partial\Omega)$ et $W^{1,p}(\partial\Omega)$, muni de la norme donnée dans [3, Theorem 7.47] :

$$\|g\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} = \|g\|_{L^p(\partial\Omega)} + \Big(\int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|g(t)-g(t')|^p}{\big(\Lambda(t,t')\big)^p}\, d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Big)^{1/p}, \tag{2.1}$$

où $\Lambda(t,t')$ est la longueur de l'arc (t,t') sur $\partial\Omega$. Notons que $|t-t'| \sim \Lambda(t,t')$ lorsque $\partial\Omega$ est Lipschitz.

Espaces de Hardy sur le disque unité

Pour $p \in [1,\infty)$, on note $H^p = H^p(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy des fonctions f qui sont holomorphes sur $\mathbb{D}$ et telles que

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{i\theta})\right|^p\, d\theta\right)^{1/p} < +\infty. \tag{2.2}$$

L'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ se compose des fonctions holomorphes et bornées muni de la norme *sup*. Nous nous référons à [34, 53] pour les propriétés classiques des espaces de Hardy. Pour $\rho > 0$, $\mathbb{T}_\rho$ et $\mathbb{D}_\rho$ désigneront respectivement le cercle et le disque ouvert de rayon ρ et de centre O.
Toute fonction $f \in H^p(\mathbb{D})$ admet une limite non tangentielle pour presque tout $\xi \in \mathbb{T}$, qui est aussi la limite dans $L^p(\mathbb{T})$ de $f_\rho(\xi) := f(\rho\xi)$ lorsque $\rho \to 1^-$ et le supremum est atteint dans (2.2). En fait, $\|f_\rho\|_{L^p(\mathbb{T})}$ est une fonction croissante de la variable ρ, donc au lieu de (2.2), nous pourrions tout aussi bien écrire

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<\rho<1} \Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} |f(\xi)|^p\, |d\xi|\Big)^{1/p} < +\infty \tag{2.3}$$

où l'intégrale est maintenant par rapport à la longueur d'arc. Nous avons l'habitude de garder la même notation pour f et sa limite non-tangentielle lorsque aucune confusion n'en résulte, ou d'écrire parfois $f_{|\mathbb{T}}$ afin de préciser que les limites non tangentielles existent sur $\mathbb{T}$. Il faut noter que $f_{|\mathbb{T}}$ coïncide avec $\mathrm{tr} f$ lorsque $f \in W^{1,p}(\mathbb{D})$ [9]. Toute fonction de classe $H^p(\mathbb{D})$ est à la fois l'intégrale de Cauchy et de Poisson de sa limite non-tangentielle.

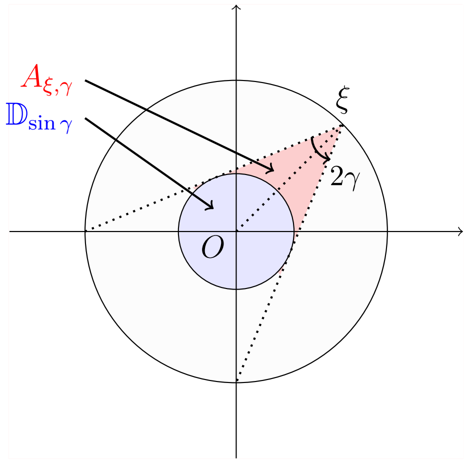
Espaces de Hardy des fonctions pseudo-holomorphes

Etant donné $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ pour un certain $r \in [2,\infty)$ et $p \in (1,\infty)$, nous définissons l'espace de Hardy $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ des fonctions $w \in L^\gamma_{loc}(\mathbb{D})$ avec $\gamma > r/(r-1)$ qui satisfont (3.1) telles que

$$\|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} := \sup_{0<\rho<1} \Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} |w(\xi)|^p\, |d\xi|\Big)^{1/p} < +\infty. \tag{2.4}$$

Notons $\mathcal{H}^p$ l'espace de Banach des fonctions mesurables à valeurs complexes f sur $\mathbb{D}$ telles que $\sup\ \mathrm{ess}_{0<\rho<1}\ \rho\|f_\rho\|_{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$. Alors $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ est identifié à un sous-espace réel de $\mathcal{H}^p$.

Etant donnés $\xi \in \mathbb{T}$ et $\gamma \in (0, \pi/2)$, on désigne par $\tilde{\Gamma}_{\xi,\gamma}$ le cône ouvert de sommet ξ et d'angle d'ouverture 2γ, symétrique par rapport à la droite $(0, \xi)$. Nous définissons $\Gamma_{\xi,\gamma} = A_{\xi,\gamma} \cup \overline{\mathbb{D}_{\sin\gamma}}$, où $A_{\xi,\gamma}$ est la composante bornée de $\tilde{\Gamma}_{\xi,\gamma} \setminus \overline{\mathbb{D}_{\sin\gamma}}$ et où $\mathbb{D}_{\sin\gamma}$ désigne le disque de centre O et de rayon $\sin\gamma$.



Une fonction à valeurs complexes f sur $\mathbb{D}$ a une limite non-tangentielle ℓ en ξ si $f(z)$ tend vers ℓ lorsque $z \to \xi$ dans $\Gamma_{\xi,\gamma}$ pour tout γ. La fonction maximale non-tangentielle de f (d'angle d'ouverture 2γ) est la fonction à valeurs réelles $\mathcal{M}_\gamma f$ sur $\mathbb{T}$ donnée par

$$\mathcal{M}_\gamma f(\xi) := \sup_{z \in \mathbb{D} \cap \Gamma_{\xi,\gamma}} |f(z)|, \qquad \xi \in \mathbb{T}. \tag{2.5}$$

3 Principaux résultats

L'étude des fonctions pseudo-holomorphes d'une variable complexe qui appartiennent à $L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, *i.e.* les solutions d'une équation en $\overline{\partial}$ de la forme

$$\bar{\partial}\Phi = a(z)\overline{\Phi(z)} + b(z)\Phi(z), \qquad z \in \Omega \subset \mathbb{C}.$$

où Ω est un domaine borné et a, $b \in L^r(\Omega)$ pour un certain $r \in [2, \infty)$ avec $\gamma > r/(r-1)$ peut se réduire à l'étude des fonctions $w := e^{-B}\Phi \in L^{\gamma'}_{loc}(\Omega)$ pour un certain $\gamma' > 2$ qui satisfont l'équation

$$\bar{\partial} w = \alpha \overline{w}, \tag{3.1}$$

où $\alpha = a e^{-2i\mathrm{Im}\, B}$ et $\bar{\partial} B = b$, $B \in W^{1,r}(\Omega)$.
Le premier résultat est un principe de factorisation de cette famille de fonctions.

Lemme 3.1 (Principe de similarité) *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine borné, $\alpha \in L^r(\Omega)$ pour un certain $r \in [2, \infty)$ et $w \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$ une solution de* (3.1) *avec $\gamma > r/(r-1)$. Alors*
(i) La fonction w admet une factorisation de la forme

$$w = e^s F, \qquad z \in \Omega, \tag{3.2}$$

où F est une fonction holomorphe dans Ω, $s \in W^{1,r}(\Omega)$ avec

$$\|s\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C \|\alpha\|_{L^r(\Omega)}, \tag{3.3}$$

et C dépend seulement de r et Ω.

(ii) Supposons en outre que Ω soit C^1. Si $w \not\equiv 0$ et si nous fixons $\psi \in W^{1-1/r,r}_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, alors la fonction s dans (3.2) peut être uniquement choisie de telle sorte que $tr_{\partial\Omega}\mathrm{Re}(e^{i\theta_0}s) = \psi$ et que $\int_{\partial\Omega} \mathrm{Im}\,(e^{i\theta_0}s) = \lambda$. Dans ce cas, il existe une constante C dépendant seulement de r et Ω telle que

$$\|s\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C\big(\|\alpha\|_{L^r(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{1-1/r,r}(\partial\Omega)} + |\lambda|\big). \tag{3.4}$$

(iii) Soit $w \equiv 0$ ou bien $w \neq 0$ presque partout sur Ω. De plus, $w \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$ si $r > 2$ et $w \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ pour tout $q \in [1,2)$ si $r = 2$.

Les notations $F^{\mathfrak{r}}$ et $F^{\mathfrak{i}}$ signifient que l'on considère la factorisation avec respectivement s à valeurs réelles et imaginaires pures sur $\mathbb{T}$.

Remarque 3.2 *Une version faible d'une réciproque du principe de similarité est la suivante : si $s \in W^{1,r}(\Omega)$ et si F est une fonction holomorphe sur Ω, alors $w = e^s F$ satisfait (3.1) avec $\alpha := \bar\partial s\, e^s F/(e^{\bar s}\bar F) \in L^r(\Omega)$. Cette remarque montre que, en général, on ne peut pas s'attendre à des solutions de (3.1) qui appartiennent à $L^\infty_{loc}(\Omega)$ lorsque $r = 2$.*

Théorème 3.3 *Soit $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ avec $r \in [2,\infty)$ et soit $F \not\equiv 0$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Choisissons $\psi \in W^{1-1/r,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction $s \in W^{1,r}(\mathbb{D})$ telle que $w = e^s F$ satisfait (3.1) avec $tr_{\mathbb{T}}\mathrm{Im}\, s = \psi$ et $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\, s = \lambda$. De plus, l'estimation (3.4) est conservée avec une certaine constante C qui dépend que de r.*

Notre méthode nous permet aussi d'établir un résultat de type Liouville :

Théorème 3.4 *Soit $s \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$, $g \in L^2(\mathbb{C})$ telles que*

$$\bar\partial s(z) \leq |\mathrm{Im}\, s(z)| \cdot |g(z)|.$$

Si

$$\int_{\mathbb{C}\setminus\mathcal{D}} \frac{|s(z)|^\ell\, dz \wedge d\bar z}{|z|^4} < \infty,$$

pour un $\ell > 48\pi$, alors $\mathrm{Im}\, s$ est de signe constant presque partout sur $\mathbb{C}$.

De la preuve du théorème 3.3, on obtient également la variante suivante de celui-ci.

Corollaire 3.5 *Le Théorème 3.3 reste valable si, au lieu de $tr_{\mathbb{T}}\mathrm{Im}\, s = \psi$ et $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\, s = \lambda$, nous prescrivons $tr_{\mathbb{T}}\mathrm{Re}\, s = \psi$ et $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, s = \lambda$.*

Le résultat suivant précise le comportement au bord des fonctions pseudo-holomorphes étudiées.

Théorème 3.6 *Soit $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ avec $2 \leq r < \infty$ et fixons $p \in (1,\infty)$.*
(i) Toute fonction $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ a une trace $w_{\mathbb{T}}$ sur $\mathbb{T}$ donnée par

$$w_{\mathbb{T}} := \lim_{\rho \to 1^-} tr_{\mathbb{T}} w_\rho \quad \text{dans } L^p(\mathbb{T}). \tag{3.5}$$

Lorsque $r > 2$, la fonction $w_{\mathbb{T}}$ est aussi la limite non-tangentielle de w presque partout sur $\mathbb{T}$.

(ii) Pour une certaine constante $C > 0$ ne dépendant que de $|\alpha|$ et p, on a

$$\|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C\|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \tag{3.6}$$

et $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ est un espace de Banach réel sur lequel $\|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ est une norme équivalente à (2.4).

(iii) L'application $w \mapsto F^{\mathfrak{i}}$ est un homéomorphisme de $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ dans H^p. Lorsque $r > 2$, l'application $w \mapsto F^{\mathfrak{r}}$ est aussi un tel homéomorphisme.

(iv) Si $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $w_{\mathbb{T}} \in L^q(\mathbb{T})$ pour un certain $q \in (1, \infty)$, alors $w \in G^q_\alpha(\mathbb{D})$. Une fonction $h \in L^p(\mathbb{T})$ strictement positive est telle que $h = |w_{\mathbb{T}}|$ pour une certaine fonction non nulle $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ si, et seulement si $\log h \in L^1(\mathbb{T})$.

Remarque 3.7 *Lorsque $r = 2$, la trace $w_{\mathbb{T}}$ dans le Théorème 3.6 n'est pas nécessairement la limite non-tangentielle de w. En effet, si $(z_n) \subset \mathbb{D}$ est non-tangentiellement dense sur $\mathbb{T}$, alors $s(z) := \sum_n 2^{-n} \log\log 2/|z - z_n|$ appartient à $W^{1,2}(\mathbb{D})$, donc $e^s \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $p \in (1, \infty)$ avec $\alpha := \bar{\partial} s$. Pourtant e^s n'est même pas non-tangentiellement bornée en un point $\xi \in \mathbb{T}$.*

Le théorème suivant généralise le théorème de M. Riesz : pour tout $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ et $c \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $\psi^\sharp_c \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ (une fonction conjuguée généralisée de ψ) telle que $\int_{\mathbb{T}} \psi^\sharp_c = c$ et $\psi + i\psi^\sharp_c = w_{\mathbb{T}}$ pour un certain $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$. De plus, $\|\psi^\sharp\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|)$.

Théorème 3.8 ([69],[9],[8]) *Soit $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ avec $2 < r \leq \infty$ et $1 < p < \infty$. Pour tout $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ et $c \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ telle que $Re\, w_{\mathbb{T}} = \psi$ et $\int_{\mathbb{T}} Im\, w_{\mathbb{T}} = c$. De plus, $\|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|)$, où C dépend seulement de p et r.*

Le théorème ci-dessous étend ce résultat au cas $r = 2$ où les solutions de (3.1) peuvent être localement non-bornées.

Théorème 3.9 *Soit $\alpha \in L^2(\mathbb{D})$ et $1 < p < \infty$. Pour tout $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ et $c \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ telle que $Re\, w_{\mathbb{T}} = \psi$ et $\int_{\mathbb{T}} Im\, w_{\mathbb{T}} = c$. De plus,*

$$\|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|), \tag{3.7}$$

où C dépend uniquement de p et $|\alpha|$.

Le rapprochement suivant entre les fonctions pseudo-holomorphes et les équations de la conductivité joue un rôle dans [6] et a été étudié dans le cadre des espaces de Hardy des fonctions pseudo-holomorphes dans [9, 8] lorsque $r > 2$. Nous commençons par une équation de la conductivité isotrope bi-dimensionnelle avec des coefficients dont le logarithme est à régularité Sobolev :

$$\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \sigma \geq 0, \quad \log\sigma \in W^{1,r}(\Omega), \quad r \in [2, \infty). \tag{3.8}$$

Lorsque $r > 2$, l'hypothèse $\log\sigma \in W^{1,r}(\Omega)$ signifie simplement que $\sigma \in W^{1,r}(\Omega)$ et que $0 < c < \sigma$ (ellipticité stricte). Si $r = 2$, alors σ appartient à $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q \in [1, 2)$, mais σ n'est pas nécessairement bornée, ce qui rend ce cas particulièrement intéressant car (3.8) peut ne plus être strictement elliptique.

On pose $\nu := (1-\sigma)/(1+\sigma)$ et on considère l'équation de Beltrami conjuguée :

$$\overline{\partial} f = \nu \overline{\partial f} \quad \text{dans } \Omega, \quad -1 \leq \nu \leq 1, \quad \operatorname{arctanh} \nu \in W^{1,r}(\Omega), \;\; r \in [2,\infty), \tag{3.9}$$

où les hypothèses sur ν correspondent aux hypothèses sur σ données dans (3.8). Vu que $\sigma \in W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q \in [1,2)$, cela implique facilement la même propriété pour ν. Si nous nous limitons à des solutions $f \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$ pour $\gamma > r/(r-1)$ et si on pose $f = u + iv$ (u, v réelles), nous constatons que (3.9) est équivalent au système de Cauchy-Riemann généralisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x v = -\sigma \partial_y u, \\ \partial_y v = \sigma \partial_x u, \end{array} \right. \tag{3.10}$$

dont la condition de compatibilité est l'équation de la conductivité (3.8). Par conséquent, (3.9) est un moyen de réécrire (3.8) comme une équation complexe du premier ordre. Maintenant, si nous posons

$$w := \frac{f - \nu \overline{f}}{\sqrt{1-\nu^2}} = \sigma^{1/2} u + i\sigma^{-1/2} v, \qquad \alpha = \bar{\partial} \log \sigma^{1/2} \in L^r,$$

un calcul simple utilisant (3.10) montre que (3.1) est satisfaite. Notons que n'importe quelle constante c résout (3.9), la solution correspondant à (3.1) étant alors $\sigma^{1/2}\mathrm{Re}\, c + i\sigma^{-1/2}\mathrm{Im}\, c$.
La discussion qui précède montre que l'étude de (3.9) est sensiblement équivalente à celle de (3.1) et (3.8). En particulier, le théorème 3.9 traduit le résultat suivant qui semble être le premier à décrire une classe d'équations non strictement elliptiques à coefficients non bornés pour lesquelles le problème de Dirichlet est bien posé avec des données au bord de classe L^p (pondérées).

Théorème 3.10 *Soit $\sigma \geq 0$ telle que $\log \sigma \in W^{1,2}(\mathbb{D})$, et fixons $p \in (1,\infty)$. Pour tout ψ telle que $\psi\, tr_{\mathbb{T}}\sigma^{1/2} \in L^p(\mathbb{T})$, il existe une unique solution u à (3.8) telle que*

$$\sup_{0<\rho<1} \Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} |u(\xi)|^p \, \sigma^{p/2}(\xi) |d\xi| \Big)^{1/p} < +\infty \tag{3.11}$$

et $\lim_{\rho\to 1} tr_{\mathbb{T}}(u_\rho \sigma_\rho^{1/2}) = \psi\, tr_{\mathbb{T}}\sigma^{1/2}$ dans $L^p(\mathbb{T})$. De plus, le supremum dans (3.11) est inférieur à $C\|\psi\sigma^{1/2}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ pour un certain $C = C(p,\sigma)$.

Le théorème suivant est fondamental dans notre étude de G^p_α lorsque $\alpha \in L^2(\mathbb{D})$ mais il est aussi intéressant en lui-même. Sa meilleure formulation est en termes de multiplicateurs. Nous utilisons la définition (2.5) de la fonction maximale non-tangentielle $\mathcal{M}_\gamma f$. Notons $\mathfrak{M}^{\gamma,p}$ l'espace de Banach des fonctions à valeurs complexes sur $\mathbb{D}$ telles que $\|\mathcal{M}_\gamma f\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty$. En outre, nous utilisons l'espace de Banach $\mathcal{H}^p$ des fonctions satisfaisant une condition de Hardy introduit dans la section précédente.

Théorème 3.11 *Soient $\gamma \in (0,\pi/2)$ et $p \in [1,\infty)$. Etant donnée $f \in W^{1,2}_{0,\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, la multiplication par e^f est une opération continue de $\mathfrak{M}^{\gamma,p}$ dans $\mathcal{H}^p$. Plus précisément, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{D}$, on a*

$$\sup_{0<\rho<1} \Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)} \, |g(\xi)|^p \, |d\xi| \Big)^{1/p} < C \, \|\mathcal{M}_\gamma g\|_{L^p(\mathbb{T})}, \tag{3.12}$$

où C dépend de p, γ et de $\varepsilon > 0$ si petit que $\|\partial f\|_{L^2(Q_\varepsilon \cap \mathbb{D})} < C'/p$ chaque fois que Q_ε est un carré de côté ε, avec C' dépendant seulement de γ.

Chapitre 4

Annexe : Pseudo-holomorphic functions at the critical exponent [10]

Cette annexe est constituée de l'article [10].

PSEUDO-HOLOMORPHIC FUNCTIONS AT THE CRITICAL EXPONENT

LAURENT BARATCHART, ALEXANDER BORICHEV, SLAH CHAABI

ABSTRACT. We study Hardy classes on the disk associated to the equation $\bar{\partial} w = \alpha \bar{w}$ for $\alpha \in L^r$ with $2 \leq r < \infty$. The paper seems to be the first to deal with the case $r = 2$. We prove an analog of the M. Riesz theorem and a topological converse to the Bers similarity principle. Using the connection between pseudo-holomorphic functions and conjugate Beltrami equations, we deduce well-posedness on smooth domains of the Dirichlet problem with weighted L^p boundary data for 2-D isotropic conductivity equations whose coefficients have logarithm in $W^{1,2}$. In particular these are not strictly elliptic. Our results depend on a new multiplier theorem for $W_0^{1,2}$-functions.

1. INTRODUCTION

Pseudo-holomorphic functions of one complex variable, *i.e.* solutions to a $\bar{\partial}$ equation whose right-hand side is a real linear function of the unknown variable, are perhaps the simplest generalization of holomorphic functions. They received early attention in [41, 11] and extensive treatment in [6, 42] when the coefficients are L^r-summable, $r > 2$ While [6] takes on a function-theoretic viewpoint, [42] dwells on integral equations and leans on applications to geometry, elasticity and hydrodynamics. Recent developments and applications to various boundary value problems can be found in [31, 43, 15]. Hardy classes for such functions were introduced in [35] and subsequently considered in [27, 28, 29, 5] in the range of exponents $1 < p < \infty$, see [14, 30, 16, 4] for further generalizations to multiply connected domains. The connection between pseudo-holomorphic functions and conjugate Beltrami equations makes pseudo-holomorphic Hardy classes a convenient framework to solve Dirichlet problems with L^p boundary data for isotropic conductivity equations [5, 14, 4]. These are also instrumental in [17, 18, 19, 16] to approach certain inverse boundary problems.

As reported in [7], I. N. Vekua stressed on several occasions an interest in developing the theory for L^r coefficients when $1 < r \leq 2$. However, solutions then need no longer be continuous which has apparently been an obstacle to such extensions, see [7, 36] for classes of coefficients that ensure such continuity. The present paper seems to be the first to deal with the critical exponent $r = 2$. We develop a theory of pseudo-holomorphic Hardy spaces on the disk in the range $1 < p < \infty$, prove existence of L^p boundary

Date: September 26, 2013.

values, and give an analog of the M. Riesz theorem in this context. As a byproduct, we obtain a Liouville-type theorem.We also develop a topological parametrization by holomorphic Hardy functions which is new even for $r > 2$. We apply our result to well-posedness of the Dirichlet problem with weighted L^p boundary data for 2-D conductivity equations whose coefficients have logarithm in $W^{1,2}$. In particular these are not bounded away from zero nor infinity and no strict ellipticity prevails, which makes for results of a novel type. Accordingly, solutions may be locally unbounded.

As in previous work on pseudo-holomorphic functions, we make extensive use of the Bers similarity principle, but in our case it requires a thorough analysis of smoothness and boundedness properties of exponentials of $W^{1,2}$ functions which is carried out in a separate appendix. There we prove a theorem, one of the main technical results of the paper, asserting that the exponential of a $W_0^{1,2}$ function in the disk is a multiplier from the space of functions with L^p maximal function on the unit circle to the space of functions satisfying a Hardy condition of order p on the unit disk. This would have higher dimensional analogs, but we make no attempt at developing them and stick to dimension 2 throughout the paper.

In Section 2 we introduce main notations and discuss numerous facts on Sobolev spaces we use later on. In Section 3 we formulate the classical similarity principle (factorization) for pseudo-holomorphic functions. A converse statement is given in Section 4. Section 5 is devoted to pseudo-holomorphic Hardy spaces; we give there a topological converse to the similarity principle. In Section 6 we obtain a generalization of the M. Riesz theorem on the conjugate operator. Section 7 contains an application of our results to the conductivity equation with exp-Sobolev coefficients. Finally, several technical results and a multiplier theorem are contained in the appendix, Section 8.

2. Notations and preliminaries

Let $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ be the complex plane and $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. We designate by $\mathbb{T}_{\xi,\rho}$ and $\mathbb{D}_{\xi,\rho}$ respectively the circle and the open disk centered at ξ of radius ρ. We simply write $\mathbb{T}_\rho$, $\mathbb{D}_\rho$ when $\xi = 0$, and if $\rho = 1$ we omit the subscript. If f is a function on $\mathbb{D}_\rho$, we often denote by f_ρ the function on $\mathbb{D}$ defined by $f_\rho(\xi) := f(\rho\xi)$. Given $\xi \in \mathbb{T}$ and $\gamma \in (0, \pi/2)$, we let $\tilde{\Gamma}_{\xi,\gamma}$ indicate the open cone with vertex ξ and opening 2γ, symmetric with respect to the line $(0, \xi)$. We define $\Gamma_{\xi,\gamma} = A_{\xi,\gamma} \cup \bar{\mathbb{D}}_{\sin\gamma}$, where $A_{\xi,\gamma}$ is the bounded component of $\tilde{\Gamma}_{\xi,\gamma} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\sin\gamma}$.

A complex-valued function f on $\mathbb{D}$ has non-tangential limit ℓ at ξ if $f(z)$ tends to ℓ as $z \to \xi$ inside $\Gamma_{\xi,\gamma}$ for every γ. The non-tangential maximal function of f (with opening 2γ) is the real-valued map $\mathcal{M}_\gamma f$ on $\mathbb{T}$ given by

$$\mathcal{M}_\gamma f(\xi) := \sup_{z \in \mathbb{D} \cap \Gamma_{\xi,\gamma}} |f(z)|, \qquad \xi \in \mathbb{T}. \tag{2.1}$$

For $E \subset \mathbb{C}$ and f a function on a set containing E, we let $f_{|E}$ indicate the restriction of f to E. We put $|E|$ for the planar Lebesgue measure of E, as no confusion can arise with complex modulus. The differential of that measure is denoted interchangeably by

$$dm(z) = dx\,dy = (i/2)\ dz \wedge d\bar{z}, \qquad z = x + iy.$$

When $\Omega \subset \mathbb{C}$ is an open set, we denote by $\mathcal{D}(\Omega)$ the space of C^∞-smooth complex-valued functions with compact support in Ω, equipped with the usual topology[1]. Its dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ is the space of distributions on Ω. For $p \in [1, \infty]$, we let $L^p(\Omega)$ and $W^{1,p}(\Omega)$ be the usual Lebesgue and Sobolev spaces with respect to dm; we sometimes consider their subspaces of real-valued functions $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$ and $W^{1,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)$. The space $W^{1,p}(\Omega)$ consists of functions in $L^p(\Omega)$ whose first distributional derivatives lie in $L^p(\Omega)$, with the norm:

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial f\|_{L^p(\Omega)} + \|\overline{\partial} f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Here ∂ and $\overline{\partial}$ stand for the usual complex derivatives:

$$\partial f := \partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f \text{ and } \overline{\partial} f := \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)f, \qquad z = x + iy.$$

Setting $\nabla f := (\partial_x f, \partial_y f)$ to mean the ($\mathbb{C}^2$-valued) gradient of f, observe that the pointwise relation $\|\nabla f\|^2_{\mathbb{C}^2} = 2|\partial f|^2_2 + 2|\bar{\partial} f|^2_2$ holds. Note also the identities $\overline{\partial f} = \overline{\partial}\ \overline{f}$ and $\Delta = 4\partial\overline{\partial}$, where Δ is the Euclidean Laplacian. By Weyl's lemma [20, Theorem 24.9], the distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ such that $\Delta u = 0$ are exactly the harmonic functions on Ω. Subsequently, the distributions $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ such that $\bar{\partial}\psi = 0$ are exactly the holomorphic functions on Ω. The space $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ is dense in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ for $p \in [1, \infty)$, and in general we let $W^{1,p}_0(\Omega)$ indicate the closure of $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. The space $W^{1,\infty}(\Omega)$ identifies with Lipschitz-continuous functions on Ω [40, Section V.6.2].

We also introduce the spaces $L^p_{loc}(\Omega)$ and $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ of distributions whose restriction to any relatively compact open subset $\Omega_0 \subset \Omega$ lies in $L^p(\Omega_0)$ and $W^{1,p}(\Omega_0)$ respectively. They are topologized by the family of semi-norms $\|f_{\Omega_n}\|_{L^p(\Omega_n)}$ and $\|f_{\Omega_n}\|_{W^{1,p}(\Omega_n)}$, where $\{\Omega_n\}$ is a sequence of relatively compact open subsets exhausting Ω.

Below we indicate some properties of Sobolev functions, most of them standard. They are valid on bounded Lipschitz domains (*i.e.* domains Ω whose boundary $\partial\Omega$ is locally isometric to the graph of a Lipschitz function).

- For $1 \le p \le \infty$, every $f \in W^{1,p}(\Omega)$ is the restriction to Ω of some $\tilde{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. In fact, there is a continuous linear map

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \text{ such that } (Ef)_{|\Omega} = f \qquad (2.2)$$

[1] *i.e.* the inductive topology of subspaces $\mathcal{D}_K$ consisting of functions supported by the compact set K, each $\mathcal{D}_K$ being topologized by uniform convergence of all derivatives [38, Section I.2].

(the extension theorem [12, Proposition 2.70]). When $\Omega = \mathbb{D}_\rho$, we may simply put $(Ef)_{|\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_\rho}(z) = \varphi(z)f(\rho^2/\bar{z})$, where $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ and $\varphi_{|\mathbb{D}_\rho} \equiv 1$. The extension theorem entails that smooth functions on $\overline{\Omega}$ are dense in $W^{1,p}(\Omega)$ when $1 \leq p < \infty$.

- For $p > 2$, $W^{1,p}(\Omega)$ embeds continuously in the space of Hölder-smooth functions with exponent $1-2/p$ on Ω, in particular functions in $W^{1,p}(\Omega)$ extend continuously to $\overline{\Omega}$, and $W^{1,p}(\Omega)$ is an algebra where multiplication is continuous and derivatives can be computed by the chain rule. For $1 \leq p < 2$ the embedding is in $L^{p^*}(\Omega)$ with $p^* = 2p/(2-p)$, while $W^{1,2}(\Omega)$ is embedded in all $L^\ell(\Omega)$, $\ell \in [1, \infty)$ (the Sobolev embedding theorem [1, Theorems 4.12,4.39]).
- For $p \leq 2$ the embedding $W^{1,p}(\Omega) \to L^\ell(\Omega)$ is compact when $\ell \in [1, p^*)$ (the Rellich–Kondrachov theorem [1, Theorem 6.3]); $p^* = \infty$ for $p = 2$.
- If $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ has derivatives in $L^p(\Omega)$ for some $p \in [1, \infty)$, then $g \in W^{1,p}(\Omega)$ [12, Theorem 6.74][2]. Moreover, there exists $C = C(\Omega, p)$ such that

$$\|g - g_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\big(\|\partial g\|_{L^p(\Omega)} + \|\bar{\partial} g\|_{L^p(\Omega)}\big), \quad \text{with } g_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g\, dm \quad (2.3)$$

(the Poincaré inequality [44, Theorem 4.2.1]). Let $C_1 = C_1(p)$ be a number for which (2.3) holds for $\Omega = \mathbb{D}$; it is easily seen by homogeneity that if $\xi \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, and $g \in W^{1,p}(\mathbb{D}_{\xi,\rho})$, then

$$\Big(\frac{1}{|\mathbb{D}_{\xi,\rho}|}\int_{\mathbb{D}_{\xi,\rho}} |g - g_{\mathbb{D}_{\xi,\rho}}|^p\, dm\Big)^{1/p} \leq C_1 \rho^{1-2/p}\big(\|\partial g\|_{L^p(\mathbb{D}_{\xi,\rho})} + |\bar{\partial} g\|_{L^p(\mathbb{D}_{\xi,\rho})}\big). \quad (2.4)$$

In particular, if $p = 2$ and $\partial g, \bar{\partial} g \in L^2(\Omega)$, then the right hand side of (2.4) is bounded and arbitrarily small as $\rho \to 0$, thereby asserting that g lies in $VMO(\Omega)$, the space of functions with vanishing mean oscillation on Ω [10].
- $W^{1,p}(\Omega)$-functions need not be continuous nor even locally bounded when $p \leq 2$; however, if $p > 1$, their non-Lebesgue points form a set of Bessel $B_{1,p}$-capacity zero [44, Theorem 3.10.2]. Such sets are very thin: not only do they have measure zero but also their Hausdorff $H^{2-p+\varepsilon}$-dimension is zero for each $\varepsilon > 0$ [44, Theorem 2.6.16]. When speaking of pointwise values of $f \in W^{1,p}(\Omega)$, we pick a representative such that $f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_{\mathbb{D}_{z,\varepsilon}}$ outside a set of $B_{1,p}$-capacity zero. At such a z, f is said to be *strictly defined*.
- If $L^\lambda(\partial\Omega)$ is understood with respect to arclength, then $W^{1,\lambda}(\partial\Omega)$ is naturally defined using local coordinates since any Lipschitz-continuous change of variable preserves Sobolev classes [44, Theorem 2.2.2]. Each $f \in W^{1,p}(\Omega)$ with $1 < p \leq \infty$ has a trace on $\partial\Omega$

[2] The proof given there for bounded C^1-smooth Ω carries over to the Lipschitz case.

(denoted again by f or sometimes by $\mathrm{tr}_{\partial\Omega} f$ for emphasis), which lies in the Sobolev space $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ of non-integral order[3]. The latter is a real interpolation space between $L^p(\partial\Omega)$ and $W^{1,p}(\partial\Omega)$, with the norm given by [1, Theorem 7.47]:

$$\|g\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} = \|g\|_{L^p(\partial\Omega)} + \Big(\int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|g(t)-g(t')|^p}{\big(\Lambda(t,t')\big)^p}\, d\Lambda(t) d\Lambda(t')\Big)^{1/p}, \quad (2.5)$$

where $\Lambda(t,t')$ indicates the length of the arc (t,t') on $\partial\Omega$. Note that $|t-t'| \sim \Lambda(t,t')$ since $\partial\Omega$ is Lipschitz. The trace operator defines a continuous surjection from $W^{1,p}(\Omega)$ onto $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ [24, Theorem 1.5.1.3]. The pointwise definition of $\mathrm{tr}_{\partial\Omega} f$ Λ-*a.e.* is based on the extension theorem and the fact that non-Lebesgue points of Ef (see (2.2)) have Hausdorff H^1-measure zero [44, Remark 4.4.5]. Of course $\mathrm{tr}_{\partial\Omega} f$ coincides with the restriction $f_{|\partial\Omega}$ whenever f is smooth on $\overline{\Omega}$. The subspace of functions with zero trace is none but $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Since the integral in the right hand side of (2.5) does not change if we add a constant to g, it follows from (2.3) by the continuity of the trace operator that

$$\Big(\int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|g(t)-g(t')|^p}{\big(\Lambda(t,t')\big)^p}\, d\Lambda(t) d\Lambda(t')\Big)^{1/p} \le C\Big(\|\partial g\|_{L^p(\Omega)} + \|\bar\partial g\|_{L^p(\Omega)}\Big), \quad (2.6)$$

where the constant C depends on Ω and p.

A variant of the Poincaré inequality involving the trace is as follows: whenever $E \subset \partial\Omega$ has arclength $\Lambda(E) > 0$, there is $C > 0$ depending only on p, Ω and E such that

$$\Big\|g - \int_E \mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, g\Big\|_{L^p(\Omega)} \le C\big(\|\partial g\|_{L^p(\Omega)} + \|\bar\partial g\|_{L^p(\Omega)}\big). \quad (2.7)$$

This follows immediately from the continuity of the trace operator, the Rellich–Kondrachov theorem, and [44, Lemma 4.1.3].

- For $p \in (1,\infty)$ the trace operator has a continuous section [24, Theorem 1.5.1.3], that is, for each $\psi \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, there is $g \in W^{1,p}(\Omega)$ such that

$$\|g\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\|\psi\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}, \qquad \mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, g = \psi, \quad (2.8)$$

with $C = C(\Omega, p)$. If we assume that Ω is C^1-smooth and not just Lipschitz, then the function g in (2.8) can be chosen to be harmonic in Ω (elliptic regularity theory [26, p.165 & Theorem 1.3])[4].

[3] We leave out the case $p = 1$ where the trace is merely defined in $L^1(\partial\Omega)$. The space $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ coincides with the Besov space $B_p^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, but we need not introduce Besov spaces here.

[4] In fact, elliptic regularity holds for $1 < p < \infty$ as soon as $\partial\Omega$ is locally the graph of a function with VMO derivative [33, Theorem 1.1]. If $\partial\Omega$ is only Lipschitz-smooth, then the range of p has to be restricted in a manner that depends on the Lipschitz constant, see [26, 33].

- The non-integral version of the Sobolev embedding theorem [1, Theorem 7.34] asserts that $W^{1-1/\beta,\beta}(\partial\Omega)$ embeds continuously in $L^{\beta/(2-\beta)}(\partial\Omega)$ if $1 < \beta < 2$, while $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ embeds in $L^{\ell}(\partial\Omega)$ for all $\ell \in [1,\infty)$. The corresponding generalization of the Rellich–Kondrachov theorem [12, Theorem 4.54] is as follows: if $1 < \beta \leq 2$, then $W^{1-1/\beta,\beta}(\partial\Omega)$ embeds compactly in $L^{\ell}(\partial\Omega)$ for $\ell < \beta/(2-\beta)$.
- When $p \in (2,\infty)$, the nonlinear map $f \mapsto e^f$ is bounded and continuous from $W^{1,p}(\Omega)$ into itself: this follows from the Taylor expansion of exp because $W^{1,p}(\Omega)$ is an algebra. When $p = 2$ this property no longer holds, but still $f \mapsto e^f$ is continuous and bounded from $W^{1,2}(\Omega)$ into $W^{1,q}(\Omega)$ for each $q \in [1,2)$; in particular $\mathrm{tr}_{\partial\Omega} e^f = e^{\mathrm{tr}_{\partial\Omega} f}$ exists in $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ for $1 < q < 2$. This is the content of Proposition 8.4 that we could not locate in the literature.
- We use at some point the Sobolev space $W^{2,p}(\Omega)$ of functions in $L^p(\Omega)$ whose first distributional derivatives lie in $W^{1,p}(\Omega)$, equipped with the norm:

$$\|f\|_{W^{2,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial f\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\bar{\partial} f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

  When $p \leq 2$, the Rellich–Kondrachov theorem implies that $W^{2,p}(\Omega)$ is compactly embedded in $W^{1,\ell}(\Omega)$ for $\ell \in [1,p^*)$.

Given a bounded domain Ω and $h \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, let $\tilde{h}$ denote the extension of h by 0 off Ω. The Cauchy integral operator applied to $\tilde{h}$ defines a function $\mathcal{C}(h) \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ given by

$$\mathcal{C}(h)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{h(t)}{z-t}dm(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega \frac{h(\xi)}{\xi - z}d\xi \wedge d\xi, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.9}$$

Indeed, $\mathcal{C}(h)$ lies in $L^1_{loc}(\mathbb{C})$ by Fubini's theorem. Furthermore, $z \mapsto 1/(\pi z)$ is a fundamental solution of the $\bar{\partial}$ operator and it follows that $\bar{\partial}\mathcal{C}(h) = \tilde{h}$ in the sense of distributions. In another connection (see [2, Theorem 4.3.10] and the remark thereafter), the complex derivative $\partial\mathcal{C}(h)$ is given by the singular integral

$$\mathcal{B}(h)(z) := \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega\setminus D(z,\varepsilon)} \frac{h(\xi)}{(z-\xi)^2}dm(\xi), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2.10}$$

which is the so-called Beurling transform of $\tilde{h}$. By a result of Calderòn and Zygmund (see [2, Theorem 4.5.3]) this transform maps $L^p(\mathbb{C})$ continuously into itself, and altogether we conclude that $\mathcal{C}(h) \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$, as announced. The discussion above shows in particular that $\varphi := \mathcal{C}(h)_{|\Omega}$ lies in $W^{1,p}(\Omega)$, and that

$$\|\partial\varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|\bar{\partial}\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \|\mathcal{B}(h)_{|\Omega}\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|h\|_{L^p(\Omega)},$$

where c depends only on p. In addition, it is a consequence of Fubini's theorem that $\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq 6\,\mathrm{diam}\,\Omega\,\|h\|_{L^p(\Omega)}$ [2, Theorem 4.3.12]. Therefore, we have

$$\|\mathcal{C}(h)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\|h\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.11}$$

where C depends only on p and Ω. Moreover, if $\Omega \subset \mathbb{D}_R$, then $\mathcal{C}(h)$ coincides on Ω with the convolution of $\tilde{h}$ with $z \mapsto \chi_{\mathbb{D}_{2R}}(z)/z$, where χ_E denotes the characteristic function of a set E. Therefore $\partial\mathcal{C}(\varphi)_{|\Omega} = \mathcal{C}(\partial\varphi)_{|\Omega}$ whenever $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, and by density argument it follows that

$$\|\mathcal{C}(h)\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C\|h\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \qquad h \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.12}$$

for $p \in (1,\infty)$ and some $C = C(p,\Omega)$.
Properties of the Cauchy transform make it a basic tool to integrate $\bar\partial$-equations in Sobolev classes. In this connection, we record the following facts.

- Given a bounded open set $\Omega \subset \mathbb{C}$ and $a \in L^p(\Omega)$ with $p \in (1,\infty)$, a distribution $A \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfies $\bar\partial A = a$ if and only if $A = \mathcal{C}(a) + \Phi$ where Φ is holomorphic in Ω. This follows from the relation $\bar\partial\mathcal{C}(a) = a$ and Weyl's lemma. By (2.11), A belongs to $W^{1,p}(\Omega)$ if and only if Φ does. By localization, it follows that if $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfies $\bar\partial f \in L^p_{loc}(\Omega)$, then $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$.
- Given a bounded C^1-smooth simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ and $a \in L^p(\Omega)$ with $p \in (1,\infty)$, for every $\psi \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$, there exists a unique $A \in W^{1,p}(\Omega)$ such that $\bar\partial A = a$ with $\mathrm{tr}_{\partial\Omega}\,\mathrm{Re}\,(e^{i\theta_0}A) = \psi$, and $\int_{\partial\Omega}\mathrm{Im}\,(e^{i\theta_0}A) = \lambda$. Moreover, there exists C depending only on p and Ω such that

$$\|A\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\big(\|a\|_{L^p(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} + |\lambda|\big). \tag{2.13}$$

  To see this, it suffices, in view of (2.11) and the previous remark, to consider the case $a = 0$. Clearly, we may also assume that $\theta_0 = 0$. By elliptic regularity, there is a unique $u \in W^{1,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)$, harmonic in Ω and such that $\mathrm{tr}_{\partial\Omega}u = \psi$. Moreover, u satisfies $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\|\psi\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}$. As Ω is simply connected, integrating the conjugate differential yields a so-called harmonic conjugate to u, that is a real-valued harmonic function v, such that $A := u+iv$ is holomorphic in Ω. Since u and v are real, the Cauchy–Riemann equations give $|\partial v| = |\bar\partial v| = |\partial u|$. Hence, we have $v \in W^{1,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Clearly v is unique up to an additive constant, and if $\int_{\partial\Omega} v = \lambda$ we deduce from (2.7) that $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + c_1|\lambda|$ so that (2.13) holds (with $a = 0$), as desired.

When $h \in L^2(\mathbb{C})$ has unbounded support, definition (2.9) of the Cauchy transform is no longer suitable. Instead, one renormalizes the kernel and defines

$$\mathcal{C}_2(h)(z) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{z-t} + \frac{\chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}(t)}{t}\Big)h(t)\,dm(t), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.14}$$

Since $h \in L^2(\mathbb{C})$, the integral in (2.14) converges for a.e. $z \in \mathbb{C}$ by Fubini's theorem and the Schwarz inequality. In fact, the function $\mathcal{C}_2(h)$ belongs to the space $VMO(\mathbb{C})$ [2, Theorem 4.3.9]. Furthermore, $\bar{\partial}\mathcal{C}_2(h) = h$ and $\partial\mathcal{C}_2(h) = \mathcal{B}(h)$ [2, Theorem 4.3.10]. In particular, $\mathcal{C}_2(h)$ lies in $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ and the map $h \mapsto \mathcal{C}_2(h)$ maps $L^2(\mathbb{C})$ continuously into $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$.
In Section 8.1 we prove the following estimate, valid for some absolute constant C:

$$\frac{\|\mathcal{C}_2(h)\|_{L^2(\mathbb{D}_R)}}{R} \leq C\big(1 + (\log R)^{1/2}\big)\|h\|_{L^2(\mathbb{D}_R)}, \qquad R \geq 1. \tag{2.15}$$

Hereafter, all classes of functions we consider are embedded in $L^p_{loc}(\Omega)$ for some $p \in (1, +\infty)$, and solutions to differential equations are understood in the distributional sense.
On the disk, we often use the elementary fact that if $f \in W^{1,p}(\mathbb{D})$, then f_ρ converges to f in $W^{1,p}(\mathbb{D})$ as $\rho \to 1^-$.

Here and later on we use the same symbols (like C) to denote different constants.

3. Pseudo-holomorphic functions

Pseudo-holomorphic functions on an open set $\Omega \subset \mathbb{C}$ are those functions Φ that satisfy an equation of the form

$$\bar{\partial}\Phi(z) = a(z)\overline{\Phi(z)} + b(z)\Phi(z), \qquad z \in \Omega. \tag{3.1}$$

We restrict ourselves to the case where Ω is bounded and $a, b \in L^r(\Omega)$ for some $r \in [2, \infty)$. Accordingly, we only consider solutions Φ which belong to $L^\gamma_{loc}(\Omega)$ for some $\gamma > r/(r-1)$, so that, by Hölder's inequality, the right hand side of (3.1) defines a function in $L^\lambda_{loc}(\Omega)$ for some $\lambda > 1$. As a consequence, Φ belongs to $W^{1,\lambda}_{loc}(\Omega)$.
Let $B \in W^{1,r}(\Omega)$ be such that $\bar{\partial}B = b$. A simple computation (using Proposition 8.4 if $r = 2$) shows that Φ satisfies (3.1) if and only if $w := e^{-B}\Phi$ satisfies

$$\bar{\partial}w = \alpha\overline{w}, \tag{3.2}$$

where $\alpha := ae^{-2i\mathrm{Im}B}$ has the same modulus as a. Note (again from Proposition 8.4 for $r = 2$) that $w \in W^{1,\lambda'}_{loc}(\Omega)$ for some $\lambda' > 1$. Therefore, by the Sobolev embedding theorem, w lies in $L^{\gamma'}_{loc}(\Omega)$ for some $\gamma' > 2$, and so equation (3.2) is a simpler but equivalent form of (3.1) which is the one we shall really work with.
We need a factorization principle which goes back to [41], and was called by Bers the similarity principle (similarity to holomorphic functions, that is). It was extensively used in all works mentioned above. We provide a proof because we include the case $r = 2$ and discuss normalization issues when Ω is smooth.

Lemma 3.1 (Bers Similarity principle). *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a bounded domain, $\alpha \in L^r(\Omega)$ for some $r \in [2, \infty)$, and $w \in L^\gamma_{loc}(\Omega)$ be a solution to (3.2) with $\gamma > r/(r-1)$. Then*

(i) *The function w admits a factorization of the form*

$$w = e^s F, \qquad z \in \Omega, \tag{3.3}$$

where F is holomorphic in Ω, $s \in W^{1,r}(\Omega)$ with

$$\|s\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C \|\alpha\|_{L^r(\Omega)}, \tag{3.4}$$

and C depends only on r and Ω.

(ii) *Assume in addition that Ω is C^1-smooth. If $w \not\equiv 0$ and we fix some $\psi \in W^{1-1/r,r}_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, and $\theta_0 \in \mathbb{R}$, then s can be uniquely chosen in (3.3) so that $tr_{\partial\Omega}\mathrm{Re}(e^{i\theta_0}s) = \psi$ and $\int_{\partial\Omega} \mathrm{Im}\,(e^{i\theta_0}s) = \lambda$. In this case, there is a constant C depending only on r and Ω such that*

$$\|s\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C\big(\|\alpha\|_{L^r(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{1-1/r,r}(\partial\Omega)} + |\lambda|\big). \tag{3.5}$$

(iii) *Either $w \equiv 0$ or $w \neq 0$ a. e. on Ω*[5]*. Moreover, $w \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$ if $r > 2$ and $w \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ for all $q \in [1, 2)$ if $r = 2$.*

Proof. We pointed out already that $w \in W^{1,\ell}_{loc}(\Omega)$ for some $\ell > 1$. Set by convention $\overline{w(\xi)}/w(\xi) = 0$ if $w(\xi) = 0$, and let $s := \mathcal{C}(\alpha\bar{w}/w)_{|\Omega}$. Then $s \in W^{1,r}(\Omega)$ with $\bar\partial s = \alpha\overline{w}/w$, and (2.11) yields (3.4). To show that $F = e^{-s}w$ is in fact holomorphic, we compute

$$\bar\partial(e^{-s}w) = e^{-s}\left(-\bar\partial s\, w + \bar\partial w\right) = e^{-s}\left(-\frac{\alpha\bar w}{w} w + \alpha\bar w\right) = 0,$$

where the use of the Leibniz and the chain rules is justified by Proposition 8.4 if $r = 2$. This proves (i).

Since s is finite a.e. on Ω (actually outside of a set of $B_{1,2}$-capacity zero), e^s is a.e. nonzero and so is w unless the holomorphic function F is identically zero. If $r > 2$, then $e^s \in W^{1,r}(\mathbb{D})$, and since F is locally smooth we get that $w \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$; if $r = 2$, it follows from Proposition 8.4 that $e^s \in W^{1,q}(\Omega)$ for all $q \in [1, 2)$, and thus $w = e^s F$ lies in $W^{1,q}_{loc}(\Omega)$. This proves (iii).

Finally, if Ω is C^1-smooth and $w \not\equiv 0$ (hence $w \neq 0$ a.e. by the above argument), there exists a unique $s \in W^{1,r}(\Omega)$ satisfying the equations $\bar\partial s = \alpha\overline{w}/w$, $\mathrm{tr}_{\partial\Omega}\mathrm{Re}(e^{i\theta_0}s) = \psi$, $\int_{\partial\Omega} \mathrm{Im}\,(e^{i\theta_0}s) = \lambda$, and (2.13) yields (3.5). Moreover, if (3.3) holds for some $s \in W^{1,r}(\Omega)$ and some holomorphic F, we find upon differentiating that $\bar\partial s = \alpha\overline{w}/w$, therefore factorization (3.3) is unique with the aforementioned conditions. This proves (ii). ☐

A weak converse to the similarity principle is as follows: if $s \in W^{1,r}(\Omega)$ and F is holomorphic on Ω, then $w = e^s F$ satisfies (3.2) with $\alpha := \bar\partial s\, e^s F/(e^{\bar s}\bar F) \in$

[5] In fact, more is true: if $r > 2$, then e^s never vanishes and w has at most countably many zeros, namely those of F. If $r = 2$, w is strictly defined and nonzero outside a set of Bessel $B_{1,2}$-capacity zero (containing the zeros of F and the non Lebesgue points of s).

$L^r(\Omega)$. This remark shows that, in general, we cannot expect solutions of (3.2) to lie in $L^\infty_{loc}(\Omega)$ when $r = 2$.

4. Holomorphic parametrization

When $r > 2$, it follows from [42, Theorem 3.13] that for each holomorphic function F on Ω and each $\alpha \in L^r(\Omega)$, there is $\Phi \in W^{1,r}(\Omega)$ such that $w := \Phi F$ satisfies (3.2). In this section we improve this assertion to a strong converse of the similarity principle, valid for $2 \le r < \infty$, which leads to a parametrization of pseudo-holomorphic functions by holomorphic functions. We state the result for the disk, which is our focus in the present paper, but we mention that it carries over at once to Dini-smooth[6] simply connected domains, granted the conformal invariance of equation (3.2) pointed out in [4, Section 3.2].

Theorem 4.1. *Let $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ for some $r \in [2, \infty)$, and let $F \not\equiv 0$ be holomorphic on $\mathbb{D}$. Choose $\psi \in W^{1-1/r,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, and $\lambda \in \mathbb{R}$. Then there exists a unique $s \in W^{1,r}(\mathbb{D})$ such that $w = e^s F$ is a solution of* (3.2) *with $tr_{\mathbb{T}}\mathrm{Im}\, s = \psi$ and $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\, s = \lambda$. Moreover,* (3.5) *holds with some C depending only on r.*

From the proof of the theorem, we obtain also the following variant thereof.

Corollary 4.2. *Theorem 4.1 remains valid if, instead of $tr_{\mathbb{T}}\mathrm{Im}\, s = \psi$ and $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\, s = \lambda$, we prescribe $tr_{\mathbb{T}}\mathrm{Re}\, s = \psi$ and $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, s = \lambda$.*

Before establishing Theorem 4.1, we need to take a closer look at pairs s, F for which (3.3) and (3.2) hold. We do this in the following subsection.

4.1. Arguments of pseudo-holomorphic functions.

Let $w \in L^\gamma_{loc}(\mathbb{D})$ satisfy (3.2), $\gamma > r/(r-1)$, and consider factorization (3.3) provided by Lemma 3.1. Locally around points where F does not vanish, w has a Sobolev-smooth argument, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, which is given by $\arg w = \arg F + \mathrm{Im}\, s$. Since $\log F$ is harmonic and $\bar\partial s = \alpha \bar w / w$, we deduce that around such points $\Delta \log w = 4\partial(\alpha e^{-2i \arg w})$. In particular, $\arg w$ satisfies the nonlinear (yet quasilinear) equation $\Delta \arg w = 4\,\mathrm{Im}(\partial(\alpha e^{-2i\arg w}))$, and then $\log|w|$ is determined by $\arg w$ up to a harmonic function that turns out to be completely determined by (3.2). The lemma below dwells on this observation but avoids speaking of $\arg F$ (which may not be globally defined if F has zeros).

Lemma 4.3. *Let $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ for some $r \in [2, \infty)$ and let F be a non identically zero holomorphic function in $\mathbb{D}$. If we set $\beta := \alpha \overline{F}/F$, then a function $s \in W^{1,r}(\mathbb{D})$ is such that $w := e^s F$ satisfies* (3.2) *if and only*

[6] A domain is Dini-smooth if its boundary has a parametrization with Dini-continuous derivative. Conformal maps between such domains have derivatives that extend continuously up to the boundary.

if $\bar\partial s = \beta e^{-2i\mathrm{Im}\, s}$. *This is equivalent to saying that* $s = \varphi_1 + i\varphi_2$ *where* $\varphi_1, \varphi_2 \in W^{1,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ *satisfy the relations*

$$\Delta\varphi_2 = 4\,\mathrm{Im}\Big(\partial\left(\beta e^{-2i\varphi_2}\right)\Big), \tag{4.1}$$

$$\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\mathcal{C}\left(\beta e^{-2i\varphi_2}\right) + v, \tag{4.2}$$

where v *is a harmonic conjugate to the harmonic function* $u \in W^{1,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ *such that* $tr_{\mathbb{T}} u = tr_{\mathbb{T}}\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{C}(\beta e^{-2i\varphi_2})\right) - tr_{\mathbb{T}}\varphi_2$.

Proof. Using Proposition 8.4 to justify the computation in case $r = 2$, we find that $s \in W^{1,r}(\mathbb{D})$ with $w = e^s F$ satisfies (3.2) if and only if $\bar\partial s - \beta e^{\bar s - s} = 0$. With the notation $\varphi_1 := \mathrm{Re}\, s$ and $\varphi_2 := \mathrm{Im}\, s$ this is equivalent to

$$\bar\partial\varphi_1 = \beta\exp\left(-2i\varphi_2\right) - i\bar\partial\varphi_2, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in W^{1,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D}). \tag{4.3}$$

Solving this $\bar\partial$-equation for φ_1 using the Cauchy operator, we can rewrite (4.3) as

$$\varphi_1 = \mathcal{C}\left(\beta e^{-2i\varphi_2}\right) - i\varphi_2 + A, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in W^{1,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D}), \tag{4.4}$$

where A is holomorphic in $\mathbb{D}$. Since $\beta e^{-2i\varphi_2} \in L^r(\mathbb{D})$ we obtain that $\mathcal{C}(\beta e^{-2i\varphi_2}) \in W^{1,r}(\mathbb{D})$, hence φ_1, φ_2 belong to $W^{1,r}(\mathbb{D})$ if and only if A does. Therefore, given $\varphi_2 \in W^{1,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, equation (4.4) gives rise to a real-valued φ_1 in $W^{1,r}(\mathbb{D})$ if and only if the holomorphic function A lies in $W^{1,r}(\mathbb{D})$ and satisfies the relation

$$-\mathrm{Im}\,\mathcal{C}\left(\beta e^{-2i\varphi_2}\right) + \varphi_2 = \mathrm{Im}\, A. \tag{4.5}$$

By the discussion after (2.13) such an A exists if and only if the left hand side of (4.5) is harmonic; since Δ commutes with taking the imaginary part, this condition amounts to

$$\Delta\varphi_2 - 4\mathrm{Im}\Big(\partial\bar\partial\mathcal{C}(\beta e^{-2i\varphi_2})\Big) = \Delta\varphi_2 - 4\mathrm{Im}\Big(\partial(\beta e^{-2i\varphi_2})\Big) = 0$$

which is (4.1). Then, by (4.5), $\mathrm{Im}\, A$ is the harmonic function $h \in W^{1,r}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ having trace $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\varphi_2 - \mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\mathrm{Im}\,\mathcal{C}(\beta e^{-2i\varphi_2}) \in W^{1-1/r,r}(\mathbb{T})$. Subsequently $\mathrm{Re}\, A = \mathrm{Im}\,(iA)$ must be a harmonic conjugate to $-h = u$, and taking real parts in (4.4) yields (4.2). $\square$

4.2. **Proof of Theorem 4.1.**

4.2.1. *Existence part.* In this subsection, we prove existence of s in the conditions of Theorem 4.1. Note that (3.5) will automatically hold by Lemma 3.1 (ii) applied with $\theta_0 = -\pi/2$. Let $A \in W^{1,r}(\mathbb{D})$ be holomorphic in $\mathbb{D}$ with $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\mathrm{Re}\, A = \psi$ and $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, A = -\lambda$. Writing $e^s F = e^{s-iA}(e^{iA}F)$, we see that we may assume $\psi = 0$ and $\lambda = 0$ upon replacing F by $e^{iA}F$. In addition, upon changing α by $\alpha\overline{F}/F$, we can further suppose that $F \equiv 1$ thanks to (4.1) and (4.2).

We first deal with the case $r = 2$ and begin with fairly smooth α, say $\alpha \in W^{1,2}(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$. Consider the following (non-linear) operator G_α acting on $\varphi \in W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$:

$$G_\alpha(\varphi)(z) := -\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1-\bar{z}t}{z-t}\right| \mathrm{Im}\Big(\partial\big(\alpha(t)e^{-2i\varphi(t)}\big)\Big)\, dm(t), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.6)$$

Since $|e^{-2i\varphi}| = 1$ and $\alpha \in W^{1,2}(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$, we get from Proposition 8.4 that $\partial(\alpha e^{-2i\varphi}) \in L^2(\mathbb{D})$, therefore the above integral exists for every $z \in \mathbb{C}$ by the Schwarz inequality. In fact, $G_\alpha(\varphi)$ is the Green potential of $4\mathrm{Im}\big(\partial\big(\alpha e^{-2i\varphi}\big)\big)$ in $\mathbb{D}$, that is, its distributional Laplacian is $4\mathrm{Im}\big(\partial\big(\alpha e^{-2i\varphi}\big)\big)$ and its value on $\mathbb{T}$ is zero, compare to [2, Section 4.8.3]. To prove existence of s subject to the conditions $\psi = 0$, $\lambda = 0$, and $F \equiv 1$, it suffices by Lemma 4.3 to verify that G_α has a fixed point in $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$. First, we check that G_α is compact from $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into itself, meaning that it is continuous and maps bounded sets to relatively compact ones.

Lemma 4.4. *If $\alpha \in W^{1,2}(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$, then the operator G_α is bounded and continuous from $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into $W^{2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ and it is compact from $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into itself.*

Proof. To prove the boundedness and continuity of G_α from $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into $W^{2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, observe from (8.17) and the dominated convergence theorem that the map $\varphi \mapsto \mathrm{Im}\left(\partial\left(\alpha e^{-2i\varphi}\right)\right)$ is bounded and continuous from $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$. Therefore it suffices to prove the boundedness from $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into $W^{2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ of the linear potential operator:

$$P(\psi) := -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1-\bar{z}t}{z-t}\right| \psi(t)\, dm(t).$$

The latter is a consequence of properties of the Cauchy and Beurling transforms listed in Section 2 [2, Section 4.8.3]. Compactness of G_α from $L^2(\mathbb{D})$ into $W^{1,2}(\mathbb{D})$ now follows from compactness of the embedding of $W^{2,2}(\mathbb{D})$ into $W^{1,2}(\mathbb{D})$ asserted by the Rellich–Kondrachov theorem. □

Since G_α is compact on $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, a sufficient condition for it to have a fixed point is given by the Leray–Schauder theorem [23, Theorem 11.3]: there is a number M for which the *a priori* estimate $\|\varphi\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \leq M$ holds whenever $\varphi \in W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ and $\varepsilon \in [0,1]$ satisfy

$$\varphi = \varepsilon G_\alpha(\varphi). \quad (4.7)$$

Now, if (4.7) is true, then (4.1) is satisfied with $\beta = \varepsilon\alpha$ and φ instead of φ_2. Therefore by Lemma 4.3, there exist $\varphi_{1,\varepsilon} \in W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ and $s_\varepsilon := \varphi_{1,\varepsilon} + i\varphi$ such that

$$\bar\partial e^{s_\varepsilon} = \varepsilon\alpha\,\overline{e^{s_\varepsilon}}.$$

Applying Lemma 3.1 (ii) with $\Omega = \mathbb{D}$, $F \equiv 1$, $s = s_\varepsilon$, $\psi \equiv 0$, $\theta_0 = -\pi/2$ and $\lambda = 0$, we get from (3.5) that for some absolute constant C

$$\|\varphi\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \leq \|s_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \leq \varepsilon C\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq C\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{D})} =: M.$$

Thus, G_α indeed has a fixed point, which settles the case $r = 2$ and $\alpha \in W^{1,2}(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$.
Next, we relax our restriction on α and assume only that it belongs to $L^2(\mathbb{D})$. Let (α_n) be a sequence in $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ that converges to α in $L^2(\mathbb{D})$. By the first part of the proof, there is a sequence $(s_n) \subset W^{1,2}(\mathbb{D})$ such that $\operatorname{Im}\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} s_n = 0$ and $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} s_n = 0$, satisfying $\overline{\partial} e^{s_n} = \alpha_n \overline{e^{s_n}}$ as well as (*cf.* (3.5))

$$\|s_n\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \leq C\|\alpha_n\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq C'. \tag{4.8}$$

By the Rellich–Kondrachov theorem we can find a subsequence, again denoted by (s_n), converging pointwise and in all $L^q(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$ to some function s. By dominated convergence, the functions $\bar\partial s_n = \alpha_n e^{-2i\operatorname{Im} s_n}$ converge to $\alpha e^{-2i\operatorname{Im} s}$ in $L^2(\mathbb{D})$. Thus, applying (2.13) with $A = s_n - s_m$, $a = \bar\partial s_n - \bar\partial s_m$, $\theta_0 = -\pi/2$, $\psi \equiv 0$, and $\lambda = 0$, we conclude that (s_n) is a Cauchy sequence in $W^{1,2}(\mathbb{D})$ which must therefore converge to s. Hence $s \in W^{1,2}(\mathbb{D})$, $\operatorname{Im}\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} s = 0$, $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} s = 0$, and $\bar\partial s = \alpha e^{-2i\operatorname{Im} s}$. By Lemma 4.3, this establishes existence of s when $r = 2$. Suppose finally that $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ for some $r > 2$. *A fortiori* $\alpha \in L^2(\mathbb{D})$, so by what precedes there is $s \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ such that $\operatorname{Im}\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} s = 0$, $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} s = 0$, and $\overline{\partial} e^s = \alpha \overline{e^s}$. To see that in fact $s \in W^{1,r}(\mathbb{D})$, we apply Proposition 8.4 to get $\bar\partial s = \alpha e^{-2i\operatorname{Im} s} =: a \in L^r(\mathbb{D})$. Then, equation (2.13) implies that s is the unique function $A \in W^{1,r}(\mathbb{D})$ satisfying $\operatorname{Im}\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} A = 0$, $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} A = 0$, and $\overline{\partial} A = a$. ☐

4.2.2. *Uniqueness part.* In this subsection we establish uniqueness of s in the conditions of Theorem 4.1. Clearly, it is enough to consider $r = 2$. Consider two functions $w_1 = e^{s_1}F$ and $w_2 = e^{s_2}F$ meeting (3.2) on $\mathbb{D}$ with $s_j \in W^{1,2}(\mathbb{D})$, $\operatorname{tr}_{\mathbb{T}}\operatorname{Im} s_j = \psi$, and $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} s_j = \lambda$ for $j = 1, 2$. We define

$$s(z) := s_1(z) - s_2(z) \in W^{1,2}(\mathbb{D})$$

and we must prove that $s \equiv 0$. First we estimate the $\bar\partial$-derivative of s:

Lemma 4.5. *There is a constant $C > 0$ such that, for a.e. $z \in \mathbb{D}$, we have*

$$|\bar\partial s(z)| \leq C|\operatorname{Im}\, s(z)|\,|\alpha(z)|. \tag{4.9}$$

Proof. Setting $\beta := \alpha\bar F/F$ and using again Lemma 4.3, we find that $\bar\partial s_j = \beta e^{-2i\operatorname{Im} s_j}$. Hence, $\bar\partial s = \beta e^{-2i\operatorname{Im} s_1}\big(1 - e^{2i\operatorname{Im} s}\big)$, and (4.9) follows at once. ☐

Next, we extend the function s outside of $\overline{\mathbb{D}}$ by reflection:

$$s(z) := \overline{s\,(1/\bar z)}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \tag{4.10}$$

Observe that since s is real-valued on $\mathbb{T}$, this extension makes $s \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$, see, for example [12, Theorem 2.54].

Lemma 4.6. *There is a constant $C > 0$ such that, for a.e. $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,*

$$|\bar\partial s(z)| \leq C\frac{|\operatorname{Im} s(z)|}{|z|^2}\,|\alpha(1/\bar z)|. \tag{4.11}$$

Proof. Putting $\zeta = 1/\bar{z} =: U(z)$ and applying the chain rule, we get (since $\partial f = 0$) that

$$\partial\left(s\left(1/\bar{z}\right)\right) = \left(\left(\partial_{\bar{\zeta}}\, s\right) \circ U\right) \partial \bar{U} = -\frac{1}{z^2} \bar{\partial} s\left(1/\bar{z}\right).$$

Thus,

$$\bar{\partial} s(z) = \overline{\partial\left(s\left(1/\bar{z}\right)\right)} = -\overline{\left(\frac{\bar{\partial} s(1/\bar{z})}{z^2}\right)}, \qquad |z| > 1,$$

and applying Lemma 4.5 gives (4.11) in view of (4.10). □

From the two previous lemmas we derive the inequality:

$$|\bar{\partial} s(z)| \leq C \frac{|\operatorname{Im} s(z)|}{1+|z|^2} |\alpha(Q(z))|, \qquad a.e.\ z \in \mathbb{C}, \tag{4.12}$$

where $Q(z)$ is equal to z if $|z| \leq 1$ and to $1/\bar{z}$ otherwise. Since $\alpha \in L^2(\mathbb{D})$, it follows from (4.12) and the change of variable formula that $\bar{\partial} s/s \in L^2(\mathbb{C})$. Recall now definition (2.14). We introduce two auxiliary functions ψ, ϕ on $\mathbb{C}$:

$$\psi := \mathcal{C}_2\left(\bar{\partial} s/s\right), \qquad \phi := \exp(-\psi). \tag{4.13}$$

Since $\bar{\partial} s/s \in L^2(\mathbb{C})$, we know that $\psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ with $\bar{\partial}\psi = \bar{\partial} s/s$. Consider the function $s\phi$ on $\mathbb{C}$. By Proposition 8.4, we compute from (4.13) using the Leibniz rule that $\bar{\partial}(s\phi) = 0$, hence $s\phi$ is an entire function. We claim that

$$\liminf_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\int_{\mathbb{T}_R} \log^+ |s\phi(\xi)|\,|d\xi| - \frac{1}{2}\log R\right) < 0. \tag{4.14}$$

Indeed, taking into account (4.10) and the fact that $s_{|\mathbb{D}} \in L^\ell(\mathbb{D})$ for all $1 \leq \ell < \infty$ by the Sobolev embedding theorem, we get from Jensen's inequality upon choosing $\ell > 48\pi$ that

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R^2}\int_{R<\rho<2R}\int_{0<\theta<2\pi} \log^+ |s(\rho e^{i\theta})|\,\rho\, d\rho\, d\theta \\
&\qquad \leq \frac{12\pi}{\ell}\frac{4R^2}{3\pi}\int_{1/(2R)<\rho<1/R}\int_{0<\theta<2\pi} \log^+\left(|s(\rho e^{i\theta})|^\ell\right)\rho\, d\rho\, d\theta \\
&\qquad \leq \frac{12\pi}{\ell}\log\Big[\frac{4R^2}{3\pi}\int_{1/(2R)<\rho<1/R}\int_{0<\theta<2\pi} \max\{1, |s(\rho e^{i\theta})|^\ell\}\,\rho\, d\rho\, d\theta\Big] \\
&\qquad \leq \frac{1}{\delta}\log R + C
\end{aligned} \tag{4.15}$$

for some $\delta > 2$ and some $C > 0$, whenever $R \geq 1$.
In another connection, it follows from (2.15) and the Schwarz inequality that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi R^2}\int_{R<\rho<2R}\int_{0<\theta<2\pi} |\psi(\rho e^{i\theta})|\,\rho\, d\rho\, d\theta &\leq \frac{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{D}_{2R})}}{\sqrt{\pi}R} \\
&= O\left((\log R)^{1/2}\right), \quad R \to +\infty.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Since $\log^+ |s\phi| \le \log^+ |s| + |\psi|$, claim (4.14) easily follows from (4.15) and (4.16).
Since $\log |s\phi|$ is subharmonic on $\mathbb{C}$, for $|z| < R$ we have

$$2\pi \log |s\phi(z)| \le \frac{R+|z|}{R-|z|} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| s\phi(Re^{i\theta}) \right| d\theta \\ \le \frac{R+|z|}{R-|z|} \frac{1}{R} \int_{\mathbb{T}_R} \log^+ |s\phi(\xi)| \, |d\xi|$$

(see [37, Theorem 2.4.1]), so by (4.14) there is a sequence $\rho_n \to +\infty$ for which $\sup_{\mathbb{T}_{\rho_n}} |s\phi| = O(\rho_n^{1/2})$. Therefore, by an easy modification of Liouville's theorem, $s\phi$ must be a constant.
More generally, (4.12) remains valid if we replace s by $s - a$ for $a \in \mathbb{R}$, entailing that

$$\left| \frac{\bar\partial s(z)}{s(z) - a} \right| \le C \left| \frac{\alpha(Q(z))}{1+|z|^2} \right| \in L^2(\mathbb{C}), \qquad a.e.\ z \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Thus, reasoning as before, we deduce that there is a complex-valued function b such that

$$(s(z) - a)\phi_a(z) \equiv b(a), \qquad a \in \mathbb{R}, \tag{4.18}$$

with

$$\psi_a := \mathcal{C}_2\left(\bar\partial s/(s-a)\right), \quad \phi_a := \exp(-\psi_a).$$

Fix $R > 1$. By (4.17), Corollary 8.6, and Proposition 8.4, the sets $\{\phi_a|_{\mathbb{D}_R}\}_{a\in\mathbb{R}}$ and $\{\phi_a^{-1}|_{\mathbb{D}_R}\}_{a\in\mathbb{R}}$ are bounded in $W^{1,q}(\mathbb{D}_R)$ for $q \in [1,2)$, hence also in $L^2(\mathbb{T})$ by the trace and the Sobolev embedding theorems. Fix $A > 0$ such that $\Lambda(\{\xi \in \mathbb{T} : |s(\xi)| \le A\}) = \lambda > 0$. For each $\delta > 0$ we can cover the interval $[-A, A]$ by $N \le A/\delta + 1$ open intervals of length 2δ, hence there exists $a = a(\delta) \in [-A, A]$ with $\Lambda(E_a) \ge \lambda\delta/(A+\delta)$, where $E_a = \{\xi \in \mathbb{T} : |s(\xi) - a| \le \delta\}$. (We use here that s is real-valued on $\mathbb{T}$.) Moreover, we observe from (4.18) and the Schwarz inequality that

$$|b(a)|\Lambda(E_a) = \int_{E_a} |s(\xi) - a||\phi_a(\xi)| \, d\Lambda(\xi) \le \delta \|\phi_a\|_{L^2(\mathbb{T})} \Lambda(E_a)^{1/2}.$$

This lower bound on $\Lambda(E_a)$ now gives us that

$$|b(a)| \le \delta^{1/2} \sqrt{(A+\delta)/\lambda} \sup_{|a|\le A} \|\phi_a\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

implying that $b(a(\delta)) \to 0$ as $\delta \to 0$. By compactness, we can pick a sequence $\delta_n \to 0$ such that $a_n := a(\delta_n) \to c \in [-A, A]$. Considering the equalities $s - a_n = b(a_n)\phi_{a_n}^{-1}$ and taking into account the boundedness of $\{\phi_{a_n}^{-1}\}$ in $L^2(\mathbb{D}_R)$, we find that $s \equiv c$ on $\mathbb{D}_R$. Since R is arbitrary, s is constant on $\mathbb{C}$, and actually $s \equiv 0$ because $\int_{\mathbb{T}} s = 0$. $\square$
A similar argument gives the following result which seems to be of independent interest.

Theorem 4.7. *If $s \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ satisfies*
$$|\bar\partial s(z)| \leq |\operatorname{Im} s(z)|\, g(z)$$
for some non-negative function $g \in L^2(\mathbb{C})$, and if
$$\int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}} \frac{|s(\xi)|^\ell \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar\xi}{|\xi|^4} < \infty,$$
for some $\ell > 48\pi$, then $\operatorname{Im} s$ *is of constant sign a.e. in* $\mathbb{C}$.

The example $s(z) = i+(1+|z|)^{-\beta}$, $\beta > 0$ shows that, under these conditions, s is not necessarily a constant. On the other hand, the value 48π is not necessarily sharp.
It is interesting to compare this result to known Liouville-type theorems like [3, Proposition 3.3] and [2, Theorem 8.5.1].

Sketch of proof. For any real d, (4.18) gives us for small $\delta > 0$ that $m\{\xi \in \mathbb{D} : |\operatorname{Im} s(\xi)| < \delta,\ |\operatorname{Re} s(\xi) - d| < \delta\} \leq c\delta^5/\inf_{a\in\mathbb{R}} |b(a)|^5$ with c independent of d; therefore, $m\{\xi \in \mathbb{D} : |\operatorname{Im} s(\xi)| < \delta,\ |\operatorname{Re} s(\xi)| < 1/\delta\} \leq c\delta^3/\inf_{a\in\mathbb{R}} |b(a)|^5$. Since $s \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$, by the John–Nirenberg theorem we have $m\{\xi \in \mathbb{D} : |s(\xi)| > 1/\delta\} \leq c\delta^3$. Finally, if $\operatorname{Im} s$ changes sign in $\mathbb{D}$, then by the Hölder inequality we obtain $m\{\xi \in \mathbb{D} : |\operatorname{Im} s(\xi)| < \delta\} \geq c\delta^2$. As a result, passing to the limit $\delta \to 0$, we obtain that $\inf_{a\in\mathbb{R}} |b(a)| = 0$. □

4.3. **Proof of Corollary 4.2.** Uniqueness of s is established as in Theorem 4.1, except that the right hand side of (4.10) now has a minus sign because s is pure imaginary on $\mathbb{T}$. Note also that (3.5) holds by Lemma 3.1 (ii) applied with $\theta_0 = 0$.
Passing to existence of s, the argument given early in subsection 4.2.1 applies with obvious modifications to show that we may assume $\psi = 0$, $\lambda = 0$ and $F \equiv 1$. Moreover, it is enough to prove the result when $r = 2$ and $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$, for then the passage to $\alpha \in L^2(\mathbb{D})$ and, subsequently, to $r > 2$ is like in the theorem.
So, let us put $r = 2$, fix $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$, and write $s(\psi, \lambda, F)$ to emphasize the dependance on ψ, λ and F of the function $s \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ whose existence and uniqueness is asserted by Theorem 4.1. For $u \in W^{1/2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, we denote by $E(u) \in W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ the harmonic extension of u, *i.e.* $E(u)$ is harmonic and $\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} E(u) = u$. We put $H(u) \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ for the holomorphic function such that $\operatorname{Im} H(u) = E(u)$ and $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} H(u) = 0$. Observe that $\alpha \exp(-2iE(u))$ lies in $W^{1,2}(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$; therefore, the operator $G_{\alpha e^{-2iE(u)}}$ defined by (4.6) is compact from $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into itself by Lemma 4.4. In the course of the proof of Theorem 4.1, we showed that it has a unique fixed point which is none but $\operatorname{Im} s(0, 0, e^{H(u)}) =: \mathcal{F}(u)$. Furthermore, by (3.5), we have $\|\mathcal{F}(u)\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \leq C\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{D})}$ for some absolute constant C.

Lemma 4.8. *The (nonlinear) operator $u \mapsto \mathcal{F}(u)$ is compact from $W^{1/2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ into $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$.*

Proof. Pick a sequence (u_n) converging to u in $W^{1/2,2}(\mathbb{T})$. By elliptic regularity, $H(u_n)$ converges to $H(u)$ in $W^{1,2}(\mathbb{D})$, and in particular $\|H(u_n)+\mathcal{F}(u_n)\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})}$ is bounded independently of n. Besides, by (4.6) and the definition of $\mathcal{F}$, we see that

$$\mathcal{F}(u_n) = G_{\alpha e^{-2iE(u_n)}}(\mathcal{F}(u_n)) = G_\alpha(E(u_n)+\mathcal{F}(u_n)); \tag{4.19}$$

hence, Lemma 4.4 implies that $(\mathcal{F}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is relatively compact in $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$. Let some subsequence, again denoted by $(\mathcal{F}(u_n))$, converges to φ in $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$. Then $(E(u_n)+\mathcal{F}(u_n))$ converges to $E(u)+\varphi$ in $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, therefore by (4.19) and the continuity of G_α we obtain that $\varphi = G_{\alpha e^{-2iE(u)}}(\varphi)$. This means that $\varphi = \mathcal{F}(u)$, hence the latter is the only limit point of $(\mathcal{F}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, which proves the continuity of $\mathcal{F}$.
If we assume only that $\|u_n\|_{W^{1/2,2}(\mathbb{T})}$ is bounded independently of n, then elliptic regularity still gives us that $\|E(u_n)\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})}$ is bounded, hence $(E(u_n)+\mathcal{F}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is again bounded in $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$. As before it follows that $(\mathcal{F}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is relatively compact in $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, as desired. $\square$

Given $u \in W^{1/2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, let $\tilde{u} := -\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\mathrm{Re}\, H(u)$ denote the so called conjugate function of u. That is, $\tilde{u}$ is the trace of the harmonic conjugate of $E(u)$ that has zero mean on $\mathbb{T}$. Put $\mathcal{M} \subset W^{1/2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ for the subspace of functions with zero mean. By (2.13), the map $u \mapsto \tilde{u}$ is continuous from $W^{1/2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ into $\mathcal{M}$, and since $\tilde{\tilde{u}} = -u + \fint_{\mathbb{T}} u$, it is a homeomorphism of $\mathcal{M}$. Pick $u \in \mathcal{M}$ and let $\varphi := \mathrm{Im}\, s(u,0,1)$. Since $s(u,0,1) - H(u) = s(0,0,e^{H(u)})$ we have $\varphi = E(u)+\mathcal{F}(u)$. Set for simplicity $R(u) := \mathcal{C}\big(\alpha \exp\{-2i(E(u)+\mathcal{F}(u))\}\big)$. Applying the trace and conjugate operators to (4.2), we see that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\mathrm{Re}\, s(u,0,1) = 0$ if and only if

$$u = tr_{\mathbb{T}}\,\mathrm{Im}\Big(R(u) - \fint_{\mathbb{T}} R(u)\Big) \;-\; \overbrace{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\,\mathrm{Re}\Big(R(u) - \fint_{\mathbb{T}} R(u)\Big)}^{\sim}. \tag{4.20}$$

Let $B(u)$ denote the right hand side of (4.20). To complete the proof, it remains to show that the (nonlinear) operator B has a fixed point u_0 in $\mathcal{M}$. Then the function $s(u_0,0,1)$ would satisfy the conditions of the corollary.
To prove existence of a fixed point, we claim first that B is compact from $\mathcal{M}$ into itself. Indeed, by elliptic regularity, E is linear and bounded from $W^{1/2,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ into $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ while $\mathcal{F}$ is compact by Lemma 4.8. A fortiori, $E+\mathcal{F}$ is bounded and continuous from $\mathcal{M}$ into $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$. Moreover, as $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$, it follows from (8.17) and the dominated convergence theorem that $h \mapsto \alpha\exp(-2ih)$ is bounded and continuous from $W^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ into $W^{1,2}_0(\mathbb{D})$. In addition, we get from (2.12) that $\mathcal{C}$ is bounded and linear from $W^{1,2}_0(\mathbb{D})$ into $W^{2,2}(\mathbb{D})$, hence compact into $W^{1,2}(\mathbb{D})$ by the Rellich–Kondrachov theorem. Finally, by the trace theorem, $g \mapsto \mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\mathrm{Im}\,(g - \fint_{\mathbb{T}} g)$ is linear and bounded from $W^{1,2}(\mathbb{D})$ into $\mathcal{M}$. Since the conjugate operator is linear and bounded on $\mathcal{M}$ and composition with bounded continuous maps preserves compactness,

the claim follows. Appealing now to the Leray–Schauder theorem, we know that B has a fixed point if we can find a constant M such that $\|u\|_{W^{1/2,2}(\mathbb{T})} \leq M$ holds whenever $u = \varepsilon B(u)$ for some $\varepsilon \in [0,1]$. However, such a u must be equal to $\operatorname{Im} \operatorname{tr}_{\mathbb{T}} s_\varepsilon$, where $s_\varepsilon \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ has pure imaginary trace with zero mean on $\mathbb{T}$ and e^{s_ε} satisfies (3.2) with α replaced by $\varepsilon\alpha$. Thus, from Lemma 3.1 (ii) applied with $\theta_0 = 0$, we conclude that $M = C\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{D})}$ will do for some absolute constant C.

5. Hardy spaces on the disk

5.1. **Holomorphic Hardy spaces.** For $p \in [1, \infty)$, let $H^p = H^p(\mathbb{D})$ be the Hardy space of holomorphic functions f on $\mathbb{D}$ with

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p} < +\infty. \tag{5.1}$$

The space H^∞ consists of bounded holomorphic functions endowed with the *sup* norm. We refer to [13, 21] for the following standard facts on holomorphic Hardy spaces.

Each $f \in H^p$ has a non-tangential limit at a.e. $\xi \in \mathbb{T}$, which is also the $L^p(\mathbb{T})$ limit of $f_\rho(\xi) := f(\rho\xi)$ as $\rho \to 1^-$ and whose norm matches the supremum in (5.1). Actually $\|f_\rho\|_{L^p(\mathbb{T})}$ is non-decreasing with ρ, hence instead of (5.1) we could as well have set[7]

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<\rho<1} \left(\int_{\mathbb{T}_\rho} |f(\xi)|^p \, |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty \tag{5.2}$$

where the integral is now with respect to the arclength. As usual, we keep the same notation for f and its non-tangential limit when no confusion can arise, or write sometimes $f_{|\mathbb{T}}$ to emphasize that the non-tangential limit lives on $\mathbb{T}$. Note that $f_{|\mathbb{T}}$ coincides with $\operatorname{tr} f$ when $f \in W^{1,p}(\mathbb{D})$ [5]. Each function in H^p is both the Cauchy and the Poisson integral of its non-tangential limit. As regards the non-tangential maximal function, for $1 \leq p < \infty$ and $f \in H^p$ we have

$$\|\mathcal{M}_\gamma f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \tag{5.3}$$

where the constant C depends only on γ and p [21, Chapter II, Theorem 3.1].

Traces of H^p-functions on $\mathbb{T}$ are exactly those functions in $L^p(\mathbb{T})$ whose Fourier coefficients of negative index do vanish. In particular, if $f \in H^p$ and $f_{|\mathbb{T}} \in L^q(\mathbb{T})$, then $f \in H^q$. It is obvious from Fubini's theorem that $H^p \subset L^p(\mathbb{D})$, but actually one can affirm more:

$$\|f\|_{L^\lambda(\mathbb{D})} \leq C\|f\|_{H^p}, \qquad p \leq \lambda < 2p, \tag{5.4}$$

[7] In fact (5.1) expresses that $|f|^p$ has a harmonic majorant whereas (5.2) bounds the L^p-norm of f on curves tending to the boundary; the first condition defines the Hardy space and the second the so-called Smirnov space. These coincide when harmonic measure and arclength are comparable on the boundary, [13, Chapter 10], [25], which is the case for smooth domains. The name "Hardy space" is then more common.

where $C = C(p,\lambda)$; for a proof see [13, Theorem 5.9]. A sequence $(z_l) \subset \mathbb{D}$ is the zero set of a nonzero H^p function, taking into account the multiplicities, if and only if it satisfies the *Blaschke condition*:

$$\sum_l (1 - |z_l|) < \infty. \tag{5.5}$$

A non-negative function $h \in L^p(\mathbb{T})$ is such that $h = |f_{\mathbb{T}}|$ for some nonzero $f \in H^p$ if and only if $\log h \in L^1(\mathbb{T})$. This entails that a nonzero H^p function cannot vanish on a subset of strictly positive Lebesgue measure on $\mathbb{T}$.
For $1 < p < \infty$ and for every $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ there exists $g \in H^p$ such that $\operatorname{Re} g = \psi$ on $\mathbb{T}$ [21, Chapter III]. Such a g is unique up to an additive pure imaginary constant, and if we normalize it so that $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Im} g = 0$, then $\|g\|_{H^p} \le C\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})}$ with $C = C(p)$. In fact $g = u + iv$ on $\mathbb{D}$, where u is the Poisson integral of ψ and v is the Poisson integral of

$$\widetilde{\psi}(e^{i\theta}) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\,\pi} \int_{\varepsilon<|\theta-t|<\pi} \frac{\psi(e^{it})}{\tan(\frac{\theta-t}{2})}\, dt \tag{5.6}$$

which is the so-called *conjugate function* of ψ. This definition carries over to $L^p(\mathbb{T})$ the conjugation operator $\psi \mapsto \widetilde{\psi}$ already introduced on $W^{1/2,2}(\mathbb{T})$ after the proof of Lemma 4.8. It is a theorem of M. Riesz that the conjugation operator maps $L^p(\mathbb{T})$ continuously into itself. By elliptic regularity, it is also continuous from $W^{1-1/p,p}(\mathbb{T})$ into itself.
When $\psi \in L^1(\mathbb{T})$, the conjugate function $\widetilde{\psi}$ is still defined pointwise almost everywhere *via* (5.6) but it does not necessarily belong to $L^1(\mathbb{T})$.
For $p \in (1,\infty)$, a non-negative function $\mathfrak{w} \in L^1(\mathbb{T})$ is said to satisfy the Muckenhoupt condition A_p if

$$\{\mathfrak{w}\}_{A_p} := \sup_I \Big(\frac{1}{\Lambda(I)} \int_I \mathfrak{w}\, d\Lambda\Big)\Big(\frac{1}{\Lambda(I)} \int_I \mathfrak{w}^{-1/(p-1)} d\Lambda\Big)^{p-1} < +\infty, \tag{5.7}$$

where the supremum is taken over all arcs $I \subset \mathbb{T}$. A theorem of Hunt, Muckenhoupt and Wheeden [21, Chapter VI, Theorem 6.2] asserts that $\mathfrak{w}$ satisfies condition A_p if and only if

$$\int_{\mathbb{T}} |\widetilde{\phi}|^p\, \mathfrak{w}\, d\Lambda \le C \int_{\mathbb{T}} |\phi|^p\, \mathfrak{w}\, d\Lambda, \qquad \phi \in L^1(\mathbb{T}), \tag{5.8}$$

where C depends only on $\{\mathfrak{w}\}_{A_p}$. In (5.8), the assumption $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ is just a means to ensure that $\widetilde{\phi}$ is well defined.

5.2. **Pseudo-holomorphic Hardy spaces.** Given $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ for some $r \in [2,\infty)$ and $p \in (1,\infty)$, we define the Hardy space $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ of those $w \in L^\gamma_{loc}(\mathbb{D})$ with $\gamma > r/(r-1)$ that satisfy (3.2), such that

$$\|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} := \sup_{0<\rho<1} \Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} |w(\xi)|^p\, |d\xi|\Big)^{1/p} < +\infty. \tag{5.9}$$

Denote by $\mathcal{H}^p$ the Banach space of complex measurable functions f on $\mathbb{D}$ such that $\operatorname{ess.sup}_{0<\rho<1} \rho\|f_\rho\|_{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$. Then $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ is identified with a real subspace of $\mathcal{H}^p$. The fact that this subspace is closed (hence a Banach space in its own right) is a part of Theorem 5.1 below. Note that if $w \in L^\gamma_{loc}(\mathbb{D})$ satisfies (3.2), then $w \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{D})$ for $q \in [1,2)$ by Lemma 3.1; hence the integral in (5.9) is indeed finite for *each* ρ by the trace theorem. Clearly $G^p_0(\mathbb{D}) = H^p$, but $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ is not a complex vector space when $\alpha \not\equiv 0$. Spaces $G^1_\alpha(\mathbb{D})$ and $G^\infty_\alpha(\mathbb{D})$ could be defined similarly, but we shall not consider them.

For $r > 2$, such classes of functions were apparently introduced in [35] and subsequently considered in [27, 28, 29, 5, 14, 16, 4]. In contrast to these studies, our definition is modeled after (5.2) rather than (5.1), that is, integral means in (5.9) are with respect to arclength[8] and *not* normalized arclength. This is not important when $r > 2$, but becomes essential[9] if $r = 2$.

Below, we do consider the case $r = 2$ and stress topological connections with holomorphic Hardy spaces which are new even when $r > 2$, see Theorem 5.1 (iii).

By Lemma 3.1, each solution to (3.2) in $L^\gamma_{loc}(\mathbb{D})$, $\gamma > r/(r-1)$, factors as $w = e^s F$ where

$$\|s\|_{W^{1,r}(\mathbb{D})} \leq C(r)\|\alpha\|_{L^r(\mathbb{D})} \tag{5.10}$$

and F is holomorphic in $\mathbb{D}$. Moreover, if $w \not\equiv 0$, one can impose $\operatorname{Im}\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} s = 0$ and $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} s = 0$ or $\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} s = 0$ and $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Im} s = 0$ to get unique factorization. To distinguish between these two factorizations, we write $w = e^{s^{\mathfrak{r}}} F^{\mathfrak{r}}$ in the first case, and $w = e^{s^{\mathfrak{i}}} F^{\mathfrak{i}}$ in the second one; that is, $s^{\mathfrak{r}}$ is real on $\mathbb{T}$ and $s^{\mathfrak{i}}$ is pure imaginary there. If $w \equiv 0$, we put $F^{\mathfrak{r}} = F^{\mathfrak{i}} = 0$ and do not define $s^{\mathfrak{r}}$ and $s^{\mathfrak{i}}$. When $w \not\equiv 0$ (hence w is a.e. nonzero), it follows from the proof of Lemma 3.1 that if we let

$$\mathcal{R}(\beta)(z) := -\overline{\mathcal{C}(\beta)(1/\bar{z})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}} \frac{z\bar{\beta}(\xi)}{1-\bar{\xi}z}\, d\xi \wedge \overline{d\xi}, \quad \beta \in L^r(\mathbb{D}),\ z \in \mathbb{D}, \tag{5.11}$$

then $s^{\mathfrak{r}}$ is given by

$$s^{\mathfrak{r}} = \mathcal{C}(\alpha\bar{w}/w) - \mathcal{R}(\alpha\bar{w}/w) \tag{5.12}$$

while $s^{\mathfrak{i}}$ is given by

$$s^{\mathfrak{i}} = \mathcal{C}(\alpha\bar{w}/w) + \mathcal{R}(\alpha\bar{w}/w). \tag{5.13}$$

Indeed, it is easy to check that $\mathcal{R}(\alpha\bar{w}/w)$ is a holomorphic function in $W^{1,r}(\mathbb{D})$ having zero mean on $\mathbb{T}$ and assuming conjugate values to $-\mathcal{C}(\alpha\bar{w}/w)$ there.

From (5.10) which is valid both for $s^{\mathfrak{r}}$ and $s^{\mathfrak{i}}$ we get that if $r > 2$ then

$$\|e^{\pm s^{\mathfrak{r}}}\|_{W^{1,r}(\mathbb{D})} \leq C(r, \|\alpha\|_{L^r(\mathbb{D})}) \text{ and } \|e^{\pm s^{\mathfrak{i}}}\|_{W^{1,r}(\mathbb{D})} \leq C(r, \|\alpha\|_{L^r(\mathbb{D})}). \tag{5.14}$$

[8]Thus, it would be more appropriate to call $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ a pseudo-holomorphic Smirnov space.

[9]When $r = 2$, w may fail to satisfy condition (5.1) even though it meets (3.2) and (5.9). The problem lies with *small* values of r, as w needs not be locally bounded on $\mathbb{D}$.

For $r = 2$ and for $1 < q < 2$, we only deduce from (5.10) and Proposition 8.4 that

$$\|e^{\pm s^{\mathfrak{r}}}\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})} \leq C(q, \|\alpha\|_{L^2(\Omega)}) \text{ and } \|e^{\pm s^{\mathfrak{i}}}\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})} \leq C(q, \|\alpha\|_{L^2(\Omega)}). \quad (5.15)$$

- When $r > 2$, we conclude from (5.14) and the Sobolev embedding theorem that $e^{\pm s^{\mathfrak{r}}}$ and $e^{\pm s^{\mathfrak{i}}}$ are continuous and bounded independently of w on $\overline{\mathbb{D}}$. Hence, w belongs to $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ if and only if $F^{\mathfrak{r}}$ or $F^{\mathfrak{i}}$ lies in H^p (in which case both do). This way $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ inherits many properties of H^p. In particular, each $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ has a nontangential limit a.e. on $\mathbb{T}$, denoted again by w or $w_{\mathbb{T}}$ for emphasis, which is also the limit of w_ρ as $\rho \to 1^-$ in $L^p(\mathbb{T})$. Moreover, $\|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ is a norm equivalent to (5.2) on $G^p_\alpha(\mathbb{D})$, and we might as well have used (5.1) to define the latter. Also, from Theorem 4.1, we infer that condition (5.5) characterizes the zeros of non identically vanishing functions in $G^p_\alpha(\mathbb{D})$[10].
- If $r = 2$, all we conclude *a priori* from (5.15), Lemma 8.7, and Hölder's inequality is that $F^{\mathfrak{r}}$ and $F^{\mathfrak{i}}$ belong to $\cap_{1 \leq \ell < p} H^\ell$ if $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$. In the other direction, $w \in \cap_{1 \leq \ell < p} G^p_\alpha(\mathbb{D})$ if $F^{\mathfrak{r}}$ or $F^{\mathfrak{i}}$ lies in H^p. To clarify the matter, one should realize that factorizations $w = e^{s^{\mathfrak{r}}} F^{\mathfrak{r}}$ and $w = e^{s^{\mathfrak{i}}} F^{\mathfrak{i}}$ no longer play equivalent roles. For it may happen that $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ and $F^{\mathfrak{r}} \notin H^p$. In fact, if we let

$$w(z) := \frac{1}{\log(3/|z-1|)\,(z-1)^{1/p}}, \qquad z \in \mathbb{D}, \qquad (5.16)$$

we get that

$$\left|\frac{\bar\partial w(z)}{\overline{w(z)}}\right| = \big(2|z-1|\log(3/|z-1|)\big)^{-1};$$

hence, $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ with $\alpha := \bar\partial w/\bar w \in L^2(\mathbb{D})$, but the factorization

$$w(z) = e^{\log\log(3/|z-1|)-a}\ e^a (z-1)^{-1/p}, \qquad a := \int_{\mathbb{T}} \log\log(3/|z-1|)\, d\Lambda(z),$$

is such that $F^{\mathfrak{r}} = e^a (z-1)^{-1/p} \notin H^p$.

On the other hand, $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ if and only if $F^{\mathfrak{i}} \in H^p$. Assume indeed that $0 \not\equiv w \in G^p_\alpha$. Since $F^{\mathfrak{i}} \in H^\ell$ for $1 \leq \ell < p$ and $e^{s^{\mathfrak{i}}_\rho}$ converges to $e^{s^{\mathfrak{i}}}$ in $W^{1,q}(\mathbb{D})$ for all $q \in [1, 2)$ by Proposition 8.4, it follows from Lemma 8.7 and Hölder's inequality that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} w_\rho$ converges as $\rho \to 1^-$ to $e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s^{\mathfrak{i}}} F^{\mathfrak{i}}_{|\mathbb{T}}$ in $L^\lambda(\mathbb{T})$, for every $\lambda \in [1, p)$. Moreover, as $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} w_\rho$ remains bounded in $L^p(\mathbb{T})$ by (5.9), it converges weakly there to $e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s^{\mathfrak{i}}} F^{\mathfrak{i}}_{|\mathbb{T}}$ when $\rho \to 1^-$, since this is the only weak limit possible granted the convergence of $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} w_\rho$ in $L^\lambda(\mathbb{T})$. In particular, $e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s^{\mathfrak{i}}} F^{\mathfrak{i}}_{|\mathbb{T}} \in$

[10] When $r = 2$, this property has no simple analog since w is only defined $B_{1,2}$-quasi-everywhere.

$L^p(\mathbb{T})$, and since $|e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s^{\mathfrak{i}}}| \equiv 1$ we conclude that $F^{\mathfrak{i}}_{|\mathbb{T}} \in L^p(\mathbb{T})$, and hence $F^{\mathfrak{i}} \in H^p$. Conversely, if $F^{\mathfrak{i}} \in H^p$, then w satisfies (5.9) by Corollary 8.11.

The fact that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} w_\rho$ converges strongly in $L^p(\mathbb{T})$ as $\rho \to 1^-$, and not just weakly as we showed above, is a part of the next theorem, whose assertion *(iii)* is new even for $r > 2$.

Theorem 5.1. *Let $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ with $2 \le r < \infty$ and fix $p \in (1, \infty)$.*

(i) *Each $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ has a trace $w_{\mathbb{T}}$ on $\mathbb{T}$ given by*

$$w_{\mathbb{T}} := \lim_{\rho \to 1^-} tr_{\mathbb{T}} w_\rho \quad \text{in } L^p(\mathbb{T}). \tag{5.17}$$

When $r > 2$, the function $w_{\mathbb{T}}$ is also the non-tangential limit of w a.e. on $\mathbb{T}$.

(ii) *For some $C > 0$ depending only on $|\alpha|$ and p we have*

$$\|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} \le C \|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})}, \tag{5.18}$$

and $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ is a real Banach space on which $\|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ is a norm equivalent to (5.9).

(iii) *The map $w \mapsto F^{\mathfrak{i}}$ is a homeomorphism from $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ onto H^p. When $r > 2$, the map $w \mapsto F^{\mathfrak{r}}$ is also such a homeomorphism.*

(iv) *If $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ and $w_{\mathbb{T}} \in L^q(\mathbb{T})$ for some $q \in (1, \infty)$, then $w \in G^q_\alpha(\mathbb{D})$. A non-negative function $h \in L^p(\mathbb{T})$ is such that $h = |w_{\mathbb{T}}|$ for some nonzero $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ if and only if $\log h \in L^1(\mathbb{T})$.*

Proof. If $r > 2$, all the properties except *(iii)* follow from their H^p-analogs *via* the continuity and uniform boundedness of $e^{\pm s^{\mathfrak{r}}}$ or $e^{\pm s^{\mathfrak{i}}}$ discussed earlier in this section, see also [35, 27, 5, 4].

We postpone the proof of *(iii)* and assume for now that $r = 2$. Take $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ and put $s = s^{\mathfrak{i}}$, $F = F^{\mathfrak{i}}$ to simplify notation. To prove (5.17) we need to verify that given a sequence $(\rho_n) \subset (0, 1)$ tending to 1, one can extract a subsequence (ρ_{n_k}) such that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\, w_{\rho_{n_k}}$ converges to $e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\, s} F_{|\mathbb{T}}$ in $L^p(\mathbb{T})$.

Since s_ρ converges to s in $W^{1,2}(\mathbb{D})$, we get from Lemma 8.7 that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_\rho$ converges to $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s$ in $L^\ell(T)$, as $\rho \to 1^-$, for all $\ell \in [1, \infty)$. Moreover, as we pointed out before the theorem, $F \in H^p$, and hence $(F_\rho)_{|\mathbb{T}}$ converges to $F_{|\mathbb{T}}$ in $L^p(\mathbb{T})$. Extracting if necessary a subsequence from (ρ_n) (still denoted by (ρ_n)), we can assume that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_{\rho_n}$ (resp. $(F_{\rho_n})_{|\mathbb{T}}$) also converges pointwise a.e. on $\mathbb{T}$ to $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s$ (resp. $F_{|\mathbb{T}}$). Now, Corollary 8.11, applied with ps instead of s, implies that $\|e^{ps_\rho} F_\rho\|_{L^p(\mathbb{T})}$ is uniformly bounded as $\rho \to 1^-$. Therefore, as the weak limit coincides with the pointwise limit when both exist by Egoroff's theorem, there is a subsequence (ρ_{n_k}) such that $\left(e^{p \mathrm{Re}\, s_{\rho_{n_k}}} |F_{\rho_{n_k}}|\right)$ converges weakly to $|F|$ in $L^p(\mathbb{T})$. Letting $1/p + 1/p' = 1$, this means that for each test function $\Theta \in L^{p'}(\mathbb{T})$ we have:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{T}} e^{p\mathrm{Re}\, s_{\rho_{n_k}}(z)}\left|F_{\rho_{n_k}}(z)\right|\Theta(z)\,|dz| - \int_{\mathbb{T}}|F(z)|\Theta(z)\,|dz|\right| = 0. \tag{5.19}$$

Set $\Theta_k = \left|F_{\rho_{n_k}}\right|^{p-1} \in L^{p'}(\mathbb{T})$. Convergence of $(F_\rho)_{|\mathbb{T}}$ to $F_{|\mathbb{T}}$ in $L^p(\mathbb{T})$ implies easily that Θ_k converges to $|F|^{p-1}$ in $L^{p'}(\mathbb{T})$. In view of (5.19), this yields

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{T}} e^{p\mathrm{Re}\, s_{\rho_{n_k}}(z)}\left|F_{\rho_{n_k}}(z)\right|^p|dz| - \int_{\mathbb{T}}|F(z)|^p\,|dz|\right| = 0.$$

Therefore, $\left\|\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} w_{\rho_{n_k}}\right\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\|e^{\mathrm{Re}\, s_{\rho_{n_k}}}F_{\rho_{n_k}}\right\|_{L^p(\mathbb{T})}$ tends to $\|e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s}F_{|\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\|F_{|\mathbb{T}}\right\|_{L^p(\mathbb{T})}$ when $k\to\infty$. However, from the discussion before the theorem, we know that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} w_{\rho_{n_k}}$ converges weakly to $e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s}F_{|\mathbb{T}}$ in $L^p(\mathbb{T})$, so by uniform convexity of $L^p(\mathbb{T})$ the convergence must in fact be strong because, as we just showed, the norm of the weak limit is the limit of the norms [9, Theorem 3.32]. This proves (i).

Next, we observe by the absolute continuity of $|\alpha|^2dm$ that for every $\varepsilon > 0$ there is $\omega(\varepsilon) > 0$ for which $\|\alpha\|_{L^2(Q_{\omega(\varepsilon)}\cap\mathbb{D})} < \varepsilon$ as soon as $Q_{\omega(\varepsilon)}$ is a cube of sidelength $\omega(\varepsilon)$. Thus, in view of (5.13), we can apply Proposition 8.5 to $\beta := \alpha\bar{w}/w$ and obtain a strictly positive function $\widetilde{\omega}$ on $\mathbb{R}^+$, *depending only on* $|\alpha|$, such that

$$\|\partial s\|_{L^2(Q_{\widetilde{\omega}(\eta)}\cap\mathbb{D})} + \|\bar{\partial} s\|_{L^2(Q_{\widetilde{\omega}(\eta)}\cap\mathbb{D})} < \eta \tag{5.20}$$

as soon as $Q_{\widetilde{\omega}(\eta)}$ is a cube of sidelength $\widetilde{\omega}(\eta)$. A fortiori, (5.20) holds with $\mathrm{Re}\, s$ instead of s. Now, picking any $\gamma \in (0,\pi/2)$ and recalling that $|w_{\mathbb{T}}| = |F_{|\mathbb{T}}|$ because $\mathrm{Re}\, s \in W^{1,2}_{0,\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, we deduce from (5.3) and Theorem 8.10 applied to $f = \mathrm{Re}\, s$ and $g = e^{i\mathrm{Im}\, s}F$ that the right inequality in (5.18) holds. In another connection, the left inequality is obvious from (5.17). To show that $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ is a Banach space, consider a sequence $(w_n) \subset G^p_\alpha(\mathbb{D})$ converging in $\mathcal{H}^p$ to some function w. We must prove that $w \in G^p_\alpha$. We can assume $w \not\equiv 0$, therefore $w_n \not\equiv 0$ for n large enough. Convergence in $\mathcal{H}^p$ being stronger than in $L^p(\mathbb{D})$, *a fortiori* w_n converges to w in $\mathcal{D}'(\mathbb{D})$ and, moreover, some subsequence, again denoted by w_n, converges pointwise a.e. to w. Besides, if we write $w_n = e^{s_n}F_n$ where we mean as before that $s_n = s^{\mathrm{i}}_n$ and $F_n = F^{\mathrm{i}}_n$, we get from (5.15) that the sequence (e^{s_n}) is bounded in $W^{1,q}(\mathbb{D})$ for each $q \in (1,2)$. Therefore, by the Sobolev embedding theorem, (e^{s_n}) is bounded in $L^\ell(\mathbb{D})$ for each $\ell \in [1,\infty)$. In addition, since $|e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_n}| \equiv 1$, it follows from (5.18) that (F_n) is bounded in H^p, hence also in $L^\ell(\mathbb{D})$ for each $\ell \in (1,2p)$ by (5.4). Altogether, by Hölder's inequality, (w_n) is bounded in $L^\gamma(\mathbb{D})$ for some $\gamma > 2$. Consequently, some subsequence converges weakly in $L^\gamma(\mathbb{D})$, and since the weak limit coincides with the pointwise limit, if it exists, we conclude that the weak limit is w. In particular, $w \in L^\gamma(\mathbb{D})$. Moreover, by Hölder's inequality, $(\alpha\bar{w}_n)$ is bounded in $L^t(\mathbb{D})$ for some $t > 1$, and arguing as before we get that some subsequence (again denoted by $(\alpha\bar{w}_n)$) converges weakly to $\alpha\bar{w}$ there. Thus, passing to

the distributional limit in the relation $\bar\partial w_n = \alpha \bar w_n$, we obtain (3.2) so that $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$. This proves (ii).
We already know from Theorem 4.1 and the discussion before Theorem 5.1 that the map $w \mapsto F^{\mathfrak{i}}$ is bijective from $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ to H^p. Since $|w_{\mathbb{T}}| = |F^{\mathfrak{i}}{}_{|\mathbb{T}}|$, it is clear from (5.18) that this map and its inverse are continuous at 0. Let now w_n converge to $w \not\equiv 0$ in $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ and write $w_n = e^{s^{\mathfrak{i}}_n} F^{\mathfrak{i}}_n$, $w = e^{s^{\mathfrak{i}}} F^{\mathfrak{i}}$. We claim that some subsequence of $F^{\mathfrak{i}}_n$ converges to $F^{\mathfrak{i}}$ in H^p and this establishes continuity of the map at every point. As $F^{\mathfrak{i}}_{n|\mathbb{T}}$ is bounded in $L^p(\mathbb{T})$ by (5.18), some subsequence converges weakly there to $\Phi_{|\mathbb{T}}$ for some $\Phi \in H^p$. Thus, replacing w_n by a subsequence (again denoted by w_n), we may assume by the Cauchy formula that $F^{\mathfrak{i}}_n$ converges locally uniformly to Φ on $\mathbb{D}$. Note that $\Phi \not\equiv 0$ for otherwise, in view of (5.15), we would have that w_n converges to the zero distribution, contradicting that $w \not\equiv 0$. In particular, $\alpha \bar F^{\mathfrak{i}}_n / F^{\mathfrak{i}}_n$ converges in $L^2(\mathbb{D})$ to $\alpha \bar\Phi/\Phi$ by the dominated convergence theorem. Since $\bar\partial s^{\mathfrak{i}}_n = \alpha \bar F^{\mathfrak{i}}_n / F^{\mathfrak{i}}_n \exp(-2i \mathrm{Im}\, s^{\mathfrak{i}}_n)$ by Lemma 4.3 and $\|s^{\mathfrak{i}}_n\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})}$ is uniformly bounded by (5.10), we can argue as we did after (4.8) (put $\alpha_n \equiv \alpha \bar F^{\mathfrak{i}}_n / F^{\mathfrak{i}}_n$ and $\theta_0 = 0$ in the discussion there) to the effect that a subsequence, again denoted by $s^{\mathfrak{i}}_n$, converges to some $\sigma \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ such that $\mathrm{Re}\, \mathrm{tr}_{\mathbb{T}} \sigma = 0$ and $\int_{\mathbb{T}} \sigma = 0$, both a.e. and in $W^{1,2}(\mathbb{D})$. Refining the sequence if necessary, we can further assume that w_n converges a.e. to w. Taking pointwise limits we get $w = e^\sigma \Phi$, hence $\sigma = s^{\mathfrak{i}}$ and $\Phi = F^{\mathfrak{i}}$ by the uniqueness part of Corollary 4.2. Thus, $F^{\mathfrak{i}}_{|\mathbb{T}}$ is the weak limit of $F^{\mathfrak{i}}_{n|\mathbb{T}}$, and since $\|F^{\mathfrak{i}}\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|w\|_{L^p(\mathbb{T})}$ is the limit of $\|F^{\mathfrak{i}}_n\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|w_n\|_{L^p(\mathbb{T})}$, the convergence in fact takes place in $L^p(\mathbb{T})$, thereby proving the claim. Conversely, let $w_n = e^{s^{\mathfrak{i}}_n} F^{\mathfrak{i}}_n$ be a sequence in $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ such that $F^{\mathfrak{i}}_n$ converges to $\Phi \not\equiv 0$ in H^p. By Corollary 4.2, $\|s^{\mathfrak{i}}_n\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})}$ is bounded uniformly in n, and, as before, a subsequence, again denoted by $s^{\mathfrak{i}}_n$, converges in $W^{1,2}(\mathbb{D})$ to some σ such that $\mathrm{Re}\, \mathrm{tr}_{\mathbb{T}} \sigma = 0$ and $\int_{\mathbb{T}} \sigma = 0$. Refining the sequence if necessary, we can assume in view of the trace theorem that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s^{\mathfrak{i}}_n$ converges pointwise a.e. on $\mathbb{T}$ to $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} \sigma$. By the dominated convergence, $(w_n)_{\mathbb{T}}$ tends to $e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} \sigma} \Phi_{|\mathbb{T}}$ in $L^p(\mathbb{T})$. Using (5.18) we obtain that w_n converges in $G^p_\alpha(\mathbb{D})$ to some $w = e^{s^{\mathfrak{i}}} F^{\mathfrak{i}}$, and by the continuity proven before we conclude that $\Phi = F^{\mathfrak{i}}$. This proves (iii) when $r = 2$. That both $w \mapsto F^{\mathfrak{i}}$ and $w \mapsto F^{\mathfrak{r}}$ are homeomorphisms when $r > 2$ is similar but easier because then $s \to e^s$ is bounded and continuous from $W^{1,r}(\mathbb{D})$ into $W^{1,r}(\mathbb{D}) \subset L^\infty(\mathbb{D})$.
Finally, (iv) follows from the corresponding properties of H^p functions, the fact that $w \in G^p_\alpha$ if and only it $F^{\mathfrak{i}} \in H^p$, and the equality $|w_{\mathbb{T}}| = |F^{\mathfrak{i}}_{|\mathbb{T}}|$. $\square$

Remark 5.2. *When $r = 2$, $w_{\mathbb{T}}$ in Theorem 5.1 is not necessarily the nontangential limit of w. Indeed, if $(z_n) \subset \mathbb{D}$ is nontangentially dense on $\mathbb{T}$, then $s(z) := \sum_n 2^{-n} \log\log 2/|z - z_n|$ lies in $W^{1,2}(\mathbb{D})$ so that $e^s \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ for all $p \in (1, \infty)$ with $\alpha := \bar\partial s$ by Lemma 8.7. Yet, e^s is not even nontangentially bounded at a single $\xi \in \mathbb{T}$.*

6. The generalized conjugation operator

The M. Riesz theorem may be rephrased as follows. Given $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ with $p \in (1,\infty)$, the problem of finding a holomorphic function f in $\mathbb{D}$ such that $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} f_\rho$ tends to ψ in $L^p(\mathbb{T})$ has a solution in H^p which is unique up to an additive imaginary constant. In fact, if we normalize it to have mean $\int_{\mathbb{T}} \psi/2\pi + ic$ on $\mathbb{T}$, then $f_{|\mathbb{T}} = \psi + i\tilde{\psi} + ic$ and we have $\|f\|_{H^p} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|)$ for some C depending only on p.
The corresponding problem for pseudo-holomorphic functions, *i.e.* for solutions to (3.2) when $\alpha \not\equiv 0$, turns out to have a similar answer in G^p_α as long as $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ for some $r \geq 2$. When $r > 2$ this was essentially proven in [27], see also [5] and [4]. More precisely:

Theorem 6.1 ([27],[5],[4]). *Let $\alpha \in L^r(\mathbb{D})$ with $2 < r \leq \infty$ and $1 < p < \infty$. For every $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ and $c \in \mathbb{R}$ there is a unique $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ such that $Re\, w_{\mathbb{T}} = \psi$ and $\int_{\mathbb{T}} Im\, w_{\mathbb{T}} = c$. Moreover, $\|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|)$, where C depends only on p and r.*

Theorem 6.1 generalizes the M. Riesz theorem: for every $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ and $c \in \mathbb{R}$ there is a unique $\psi^\sharp_c \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ (a generalized conjugate of ψ) such that $\int_{\mathbb{T}} \psi^\sharp_c = c$ and $\psi + i\psi^\sharp_c = w_{\mathbb{T}}$ for some $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$. Moreover, $\|\psi^\sharp\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|)$. The theorem below extends this result to the case $r = 2$ where solutions to (3.2) may be locally unbounded.

Theorem 6.2. *Let $\alpha \in L^2(\mathbb{D})$ and $1 < p < \infty$. For every $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ and $c \in \mathbb{R}$ there is a unique $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ such that $Re\, w_{\mathbb{T}} = \psi$ and $\int_{\mathbb{T}} Im\, w_{\mathbb{T}} = c$. Moreover,*

$$\|w\|_{G^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|), \tag{6.1}$$

where C depends only on p and $|\alpha|$.

Proof. We first show existence. Assume that ψ and c are not both zero; otherwise $w \equiv 0$ will do.
Let (α_n) be a sequence of functions in $L^\infty(\mathbb{D})$ converging to α in $L^2(\mathbb{D})$. By Theorem 6.1, for every n there exists $w_n \in G^p_{\alpha_n}(\mathbb{D})$ such that $\mathrm{Re}\, w_{n|\mathbb{T}} = \psi$ and $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, w_n = c$. Notations being as in Section 5.2, let us write $w_n = e^{s^{\mathfrak{r}}_n} F^{\mathfrak{r}}_n$ where $s^{\mathfrak{r}}_n \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ is real with zero mean on $\mathbb{T}$ while $F^{\mathfrak{r}}_n \in H^p$. Below, we drop the superscript $\mathfrak{r}$ for simplicity.
It follows from (5.10) that $\|s_n\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \leq C_0 \|\alpha_n\|_{L^2(\mathbb{D})}$ for some absolute constant C_0, hence $\|s_n\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})}$ is bounded uniformly in n. In view of the Rellich–Kondrachov theorem, we can find a subsequence, again denoted by (s_n), converging to some function s both pointwise on $\mathbb{D}$ and in $L^\ell(\mathbb{D})$ for all $\ell \in [1,\infty)$. By the trace theorem and the non integral version of the Rellich–Kondrachov theorem, we may further assume that $\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_n$ converges to some function h both pointwise a.e. on $\mathbb{T}$ and in $L^\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$. Moreover, convergence of α_n to α in $L^2(\mathbb{D})$ entails, because of (5.15), that $e^{\pm s_n}$ are bounded in $W^{1,q}(\mathbb{D})$, independently of n and ψ, for each $q \in [1,2)$. So,

invoking again the trace and the Rellich–Kondrachov theorems, we may assume upon refining s_n further that $e^{\pm \mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_n}$ converges to their pointwise limits $e^{\pm h}$ in $L^\ell(\mathbb{T})$, for all $\ell \in [1, \infty)$.
Thus, by Hölder's inequality, $\mathrm{Re}\,(F_n)_{|\mathbb{T}} = e^{-\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_n}\psi$ converges to $e^{-h}\psi$ in $L^\lambda(\mathbb{T})$ for any $\lambda \in [1, p)$. Continuity of the conjugate operator now implies that $\widetilde{\mathrm{Re}\,(F_n)}_{|\mathbb{T}}$ in turn converges to $\widetilde{e^{-h}\psi}$ in $L^\lambda(\mathbb{T})$. Since $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, w_n = c$, we see by inspection that $\mathrm{Im}\,(F_n)_{|\mathbb{T}} = \widetilde{\mathrm{Re}\,(F_n)}_{|\mathbb{T}} + c_n$ where the constant c_n is such that

$$c_n \int_{\mathbb{T}} e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_n} + \int_{\mathbb{T}} e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s_n} \widetilde{\mathrm{Re}\,(F_n)}_{|\mathbb{T}} = c. \tag{6.2}$$

The first integral in (6.2) converges to $\int_{\mathbb{T}} e^h > 0$, and the second integral converges to $\int_{\mathbb{T}} e^h \, \widetilde{e^{-h}\psi}$ by Hölder's inequality. Therefore, (c_n) converges to

$$c_0 := \left(c - \int_{\mathbb{T}} e^h \, \widetilde{e^{-h}\psi} \right) \Big/ \int_{\mathbb{T}} e^h, \tag{6.3}$$

and subsequently $(F_n)_{|\mathbb{T}}$ converges to

$$F_{\mathbb{T}} := e^{-h}\psi + i\, \widetilde{e^{-h}\psi} + ic_0 \tag{6.4}$$

in $L^\lambda(\mathbb{T})$, for all $\lambda \in [1, p)$. Thus, F_n converges in H^λ to F, the Poisson integral of $F_{\mathbb{T}}$. Note that F is not identically zero; otherwise, $\psi \equiv 0$ and $c = 0$, contrary to our initial assumption.
The above argument and the dominated convergence theorem give us that $\alpha_n e^{-2i\mathrm{Im}\, s_n} \bar{F}_n / F_n$ converges to $\alpha e^{-2i\mathrm{Im}\, s} \bar{F}/F$ in $L^2(\mathbb{D})$. Next, $\bar{\partial} s_n = \alpha_n \times$ $\times e^{-2i\mathrm{Im}\, s_n} \bar{F}_n / F_n$. By Lemma 4.3, applying (2.13) with $A = s_n - s_m$, $a = \bar{\partial} s_n - \bar{\partial} s_m$, $\theta_0 = -\pi/2$, $\psi \equiv 0$, and $\lambda = 0$, we conclude that (s_n) is a Cauchy sequence in $W^{1,2}(\mathbb{D})$ which must therefore converge to s. Hence, $s \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ and $h = \mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s$. Since we get in the limit that $\bar{\partial} s = (\alpha \bar{F}/F) e^{-2i\mathrm{Im}\, s}$, we see from Lemma 4.3 that $w := e^s F$ satisfies (3.2). Moreover, if we write $w = e^{s^{\mathfrak{r}}} F^{\mathfrak{r}}$ in the notation of Section 5.2, we find that $s^{\mathfrak{r}} = s$ and $F^{\mathfrak{r}} = F$ because s inherits from s_n the properties $\mathrm{Im}\, \mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s = 0$ and $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\, s = 0$. As $F \in H^\lambda$ for all $\lambda \in [1, p)$, we further deduce from the discussion before (5.16) that $w \in G_\alpha^\lambda$ for all such λ. By inspection of (6.4) we get

$$\begin{aligned} w_{\mathbb{T}} = e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s} F_{|\mathbb{T}} = e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s} (e^{-\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s}\psi + i\, \widetilde{e^{-\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s}\psi} + ic_0) \\ = \psi + i\big(e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s}\, \widetilde{e^{-\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s}\psi} + e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s} c_0\big), \end{aligned} \tag{6.5}$$

where we use the fact that $h = \mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s$ is real-valued. In particular, (6.5) entails that $\mathrm{Re}\, w_{\mathbb{T}} = \psi$.
To show that $w \in G_\alpha^p(\mathbb{D})$, we must prove in view of Theorem 5.1 that $w_{\mathbb{T}} \in L^p(\mathbb{T})$. To do this, note that $\psi \in L^p(\mathbb{T})$ by assumption and that $e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s} c_0 \in L^p(\mathbb{T})$ by the trace and Sobolev embedding theorems. Furthermore, $p\, \mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s \in W^{1/2,2}(\mathbb{T}) \subset VMO(\mathbb{T})$ by (8.13). By Lemma 8.2, $e^{p\mathrm{tr}_{\mathbb{T}} s}$ satisfies condition

A_p. Thus, using (5.8), we obtain

$$\|e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}\,\widetilde{e^{-\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}\psi}\|_p^p \leq C''\,\|\psi\|_p^p, \qquad C'' = C''(\{e^{p\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}\}_{A_p}); \tag{6.6}$$

in view of (6.5) we have $w_{\mathbb{T}} \in L^p(\mathbb{T})$. This gives the existence part of Theorem 6.2.

As for uniqueness, let $w_1, w_2 \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$ be two solutions. Set $v := w_1 - w_2 \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$, so that $\mathrm{Re}\, v_{\mathbb{T}} = 0$, $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, v_{\mathbb{T}} = 0$. If we write $v = e^{\sigma^{\mathfrak{r}}}\Phi^{\mathfrak{r}}$, we observe that $\mathrm{Re}\,(\Phi^{\mathfrak{r}})_{|\mathbb{T}} \equiv 0$, and hence the H^λ function $\Phi^{\mathfrak{r}}$, $1 \leq \lambda < p$, is a pure imaginary constant, say ζ. Thus, $v = \zeta e^s$ and the relations $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, v_{\mathbb{T}} = 0$, $\int_{\mathbb{T}} e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}\sigma} > 0$ give us $\zeta = 0$ so that $v = 0$, as desired.

Finally, we verify (6.1). By (5.18), it suffices to prove that

$$\|w_{\mathbb{T}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C(\|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})} + |c|),$$

where C depends only on p. By (6.6), (6.5), (6.3) and Hölder's inequality, we need only establish that $\|e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}\|_{L^p(\mathbb{T})}$, $\{e^{p\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}\}_{A_p}$, and $1/\int_{\mathbb{T}} e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}$ are bounded from above independently of ψ. We pointed out earlier in the proof that e^{s_n} are bounded in $W^{1,q}(\mathbb{D})$, independently of n and ψ, for each $q \in [1, 2)$. Since s_n tends to s in $W^{1,2}(\mathbb{D})$, boundedness of $\|e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ follows from Proposition 8.4 and the (non-integral version of) the Sobolev embedding theorem. Next, (5.10) yields that $\|s\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \leq C_0\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{D})}$ for some absolute constant C_0. Thus, using concavity of log, the Schwarz inequality, and the trace theorem, we get for some absolute constant C_1 that

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{s(\xi)}\,|d\xi|\right) &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s(\xi)\,|d\xi| \\ &\geq -\|s\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq -C_1\|s\|_{W^{1,2}(\mathbb{D})} \geq -C_0C_1\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{D})},\end{aligned}$$

showing that $\int_{\mathbb{T}} e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s} \geq \exp\{-C_0C_1\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{D})}\}$.

Finally, to majorize $\{e^{p\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}\}_{A_p}$ independently of ψ, it suffices by Lemma 8.2 to prove that $M_{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}(J)$ (see definition (8.8)) can be made arbitrarily small as $\Lambda(J) \to 0$, uniformly with respect to ψ, as J ranges over open arcs on $\mathbb{T}$. Let ω be be a strictly positive function on $(0, +\infty)$ such that $\|\alpha\|_{L^2(Q_{\omega(\varepsilon)}\cap\mathbb{D})} < \varepsilon$ as soon as $Q_{\omega(\varepsilon)}$ is a square of sidelength $\omega(\varepsilon)$. By (5.12) and Proposition 8.5, there is a strictly positive function $\widetilde{\omega}$ on $(0, +\infty)$, depending only on ω, such that (5.20) holds. Now, if $\Lambda(J) < 1$, it is elementary to check that $R(J, \Lambda(J))$ (*cf.* definition (8.29)) is contained in a square of sidelength $\Lambda(J)$. Therefore, if we pick $\Lambda(J) < \min\{1/2, \widetilde{\omega}(\eta)\}$, we deduce from (8.13) and Lemma 8.9 that $M_{\mathrm{tr}_{\mathbb{T}}s}(J) \leq C_1\eta$, where C_1 is an absolute constant. This completes the proof of Theorem 6.2. $\square$

7. Dirichlet problem for $\exp -W^{1,2}$ conductivity

The following connection between pseudo-holomorphic functions and conductivity equations is instrumental in [3] and was investigated in the context of pseudo-holomorphic Hardy spaces in [5, 4] when $r > 2$. We start by a 2-d isotropic conductivity equation with exp-Sobolev smooth coefficient:

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \sigma \geq 0, \quad \log\sigma \in W^{1,r}(\Omega), \quad r \in [2,\infty). \tag{7.1}$$

When $r > 2$, the assumption that $\log\sigma \in W^{1,r}(\Omega)$ simply means that $\sigma \in W^{1,r}(\Omega)$ and that $0 < c < \sigma$ (strict ellipticity). If $r = 2$, then σ lies in $W^{1,q}(\Omega)$ for all $q \in [1,2)$ by Proposition 8.4, but it is not necessarily bounded away from zero nor infinity which makes this case particularly interesting because (7.1) may no longer be strictly elliptic.
Put $\nu := (1-\sigma)/(1+\sigma)$ and consider the conjugate Beltrami equation:

$$\overline{\partial} f = \nu\,\overline{\partial f} \quad \text{in } \Omega, \quad -1 \leq \nu \leq 1, \quad \operatorname{arctanh}\nu \in W^{1,r}(\Omega), \;\; r \in [2,\infty), \tag{7.2}$$

where the assumptions on ν correspond to those on σ given in (7.1). The fact that $\sigma \in W^{1,q}(\Omega)$ for all $q \in [1,2)$ implies easily that the same holds for ν. If we restrict ourselves to solutions $f \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$ for some $\gamma > r/(r-1)$ and write $f = u + iv$ to separate the real and the imaginary parts, we find that (7.2) is equivalent to the generalized Cauchy–Riemann system:

$$\begin{cases} \partial_x v = -\sigma\partial_y u, \\ \partial_y v = \sigma\partial_x u, \end{cases} \tag{7.3}$$

whose compatibility condition is the conductivity equation (7.1). Hence, (7.2) is a means to rewrite (7.1) as a complex equation of the first order. Now, if we set

$$w := \frac{f - \nu\overline{f}}{\sqrt{1-\nu^2}} = \sigma^{1/2}u + i\sigma^{-1/2}v, \qquad \alpha = \bar\partial\log\sigma^{1/2} \in L^r,$$

then a straightforward computation using (7.3) shows that (3.2) holds. Note that any constant c solves (7.2), the corresponding solution in (3.2) being $\sigma^{1/2}\mathrm{Re}\,c + i\sigma^{-1/2}\mathrm{Im}\,c$.
The preceding discussion makes the study of (7.2) essentially equivalent to that of (3.2), (7.1). In particular, Theorem 6.2 translates into the following result that seems to be the first to describe a class of non strictly elliptic equations with unbounded coefficients for which the Dirichlet problem is well-posed with (weighted) L^p-boundary data.

Theorem 7.1. *Let $\sigma \geq 0$ be such that $\log\sigma \in W^{1,2}(\mathbb{D})$, and fix $p \in (1,\infty)$. For every ψ such that $\psi\, tr_{\mathbb{T}}\sigma^{1/2} \in L^p(\mathbb{T})$, there exists a unique solution u to (7.1) such that*

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\int_{\mathbb{T}_\rho} |u(\xi)|^p\,\sigma^{p/2}(\xi)|d\xi|\right)^{1/p} < +\infty \tag{7.4}$$

and $\lim_{\rho\to1} tr_{\mathbb{T}}(u_\rho\sigma_\rho^{1/2}) = \psi\, tr_{\mathbb{T}}\sigma^{1/2}$ in $L^p(\mathbb{T})$. Moreover, the supremum in (7.4) is less than $C\|\psi\sigma^{1/2}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ for some $C = C(p,\sigma)$.

8. Appendix

8.1. **Mean growth of Cauchy transforms.** In this subsection we prove estimate (2.15). First, we evaluate $\mathcal{C}_2(h)_{\mathbb{D}_R}$, the mean of $\mathcal{C}_2(h)$ over $\mathbb{D}_R$, when $h \in L^2(\mathbb{C})$ and $R \geq 1$. To this end, we use the following identity (see [2, Section 4.3.2]):

$$\mathcal{C}(\chi_{\mathbb{D}_R})(t) = \begin{cases} \bar{t} & \text{if } \ |t| \leq R, \\ R^2/t & \text{if } \ |t| > R. \end{cases} \tag{8.1}$$

If h has compact support, we deduce from (2.14), (8.1) and Fubini's theorem that

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(h)_{\mathbb{D}_R} &= \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{h(t)}{z-t}\,dm(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}\frac{h(t)}{t}\,dm(t)\right)dm(z) \\ &= -\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} h(t)\bar{t}\,dm(t) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_R}\frac{h(t)}{t}\,dm(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}\frac{h(t)}{t}\,dm(t) \\ &= -\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{D}_R} h(t)\bar{t}\,dm(t) + \frac{1}{\pi}\int_{1\leq|t|\leq R}\frac{h(t)}{t}\,dm(t). \end{aligned} \tag{8.2}$$

By density argument, (8.2) holds for every $h \in L^2(\mathbb{C})$. Next, by (8.2) and the Schwarz inequality, we have

$$|\mathcal{C}_2(h)_{\mathbb{D}_R}| \leq \frac{\|h\|_{L^2(\mathbb{C})}}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|h\|_{L^2(\mathbb{C})}\,(\log R)^{1/2}, \qquad R \geq 1. \tag{8.3}$$

In another connection, by the Poincaré inequality, we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}_2(h) - \mathcal{C}_2(h)_{\mathbb{D}_R}\|_{L^2(\mathbb{D}_R)} &\leq C_R\big(\|h\|_{L^2(\mathbb{D}_R)} + \|\mathcal{B}(h)\|_{L^2(\mathbb{D}_R)}\big) \\ &\leq 2C_R\|h\|_{L^2(\mathbb{C})}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

where C_R is the best constant in (2.3) for $p = 2$ and $\Omega = \mathbb{D}_R$. Finally, since

$$\frac{\|\mathcal{C}_2(h)\|_{L^2(\mathbb{D}_R)}}{\sqrt{\pi}R} \leq \frac{\|\mathcal{C}_2(h) - \mathcal{C}_2(h)_{\mathbb{D}_R}\|_{L^2(\mathbb{D}_R)}}{\sqrt{\pi}R} + |\mathcal{C}_2(h)_{\mathbb{D}_R}|\,,$$

(2.15) follows from (8.3), (8.4) and the fact that $C_R = RC_1$ by homogeneity.

8.2. **Functions of vanishing mean oscillation.** The space $BMO(\mathbb{T})$ of functions with bounded mean oscillation on the unit circle consists of the functions $h \in L^1(\mathbb{T})$ such that

$$\|h\|_{BMO(\mathbb{T})} := \sup_I \frac{1}{\Lambda(I)}\int_I |h(t) - h_I|\,d\Lambda(t) < \infty, \qquad h_I := \frac{1}{\Lambda(I)}\int_I h(t)\,d\Lambda(t), \tag{8.5}$$

where Λ indicates arclength and I ranges over all subarcs of $\mathbb{T}$. Note that $\|\cdot\|_{BMO(\mathbb{T})}$ is a genuine norm modulo additive constants only. The space

$VMO(\mathbb{T})$ of functions with vanishing mean oscillation is the subspace of $BMO(\mathbb{T})$ consisting of those h for which

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\Lambda(I)<\varepsilon}\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I |h(t)-h_I|\,d\Lambda(t)=0. \tag{8.6}$$

Actually, $VMO(\mathbb{T})$ is the closure in $BMO(\mathbb{T})$ of continuous functions [21, Chapter VI, Corollary 1.3 & Theorem 5.1]. The John–Nirenberg theorem asserts that there exist absolute constants C, c such that, for every $h\in BMO(\mathbb{T})$, every arc $I\subset\mathbb{T}$, and any $\lambda>0$,

$$\frac{\Lambda(\{\xi\in I\ :\ |h(\xi)-h_I|>\lambda\})}{\Lambda(I)}\le C\exp\left(\frac{-c\lambda}{\|h\|_{BMO(\mathbb{T})}}\right); \tag{8.7}$$

in fact one can take $C=e$ and $c=1/2e$, see [22, Theorem 7.1.6][11]. We also need a quantitative version of the so-called integral form of the John–Nirenberg inequality[12]. Given $h\in L^1(\mathbb{T}))$ and an arc $I\subset\mathbb{T}$, let us define

$$M_h(I):=\sup_{I'\subset I}\frac{1}{\Lambda(I')}\int_{I'}|h-h_{I'}|\,d\Lambda, \tag{8.8}$$

where the supremum is taken over all subarcs $I'\subset I$.

Lemma 8.1. *If $h\in BMO(\mathbb{T})\setminus\{0\}$ and $I\subset\mathbb{T}$ is an arc, then*

$$\int_I e^{|h|/(4eM_h(I))}d\Lambda\le(1+e)\Lambda(I)\ e^{|h_I|/(4eM_h(I))}. \tag{8.9}$$

Proof. Inspecting the standard proof of the John–Nirenberg inequality that uses recursively the Calderòn–Zygmund decomposition on dyadic subdivisions of I [21, Chapter VI, Theorem 2.1], one checks that (8.7) remains valid if we replace $\|h\|_{BMO(\mathbb{T})}$ by $M_h(I)$:

$$\frac{\Lambda\big(\{\xi\in I\ :\ |h(\xi)-h_I|>\lambda\}\big)}{\Lambda(I)}\le C\exp\left(\frac{-c\lambda}{M_h(I)}\right). \tag{8.10}$$

Pick $c'\in(0,c)$ with c as in (8.10), and set $g:=c'|h-h_I|/M_h(I)$. We compute as in [22, Corollary 7.1.7]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^g\,d\Lambda&=1+\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I(e^g-1)\,d\Lambda\\&=1+\frac{1}{\Lambda(I)}\int_0^\infty e^\lambda\Lambda(\{\xi\in I\ :\ g(\xi)>\lambda\})\,d\lambda\end{aligned}$$

[11] The argument there is given on the line but it applies mutatis mutandis to the circle.

[12] When $M_h(I)$ gets replaced by $\sup_{I'\subset I}\left(\frac{1}{\Lambda(I')}\int_{I'}|h-h_{I'}|^2\,d\Lambda\right)^{1/2}$ (a different but in fact equivalent quantity), the sharp constants in (8.9) were obtained in [39].

where the second equality follows from Fubini's theorem. Using (8.10) to estimate the distribution function of g, we find that

$$\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{c'|h-h_I|/M_h(I)}d\Lambda = \frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^g\,d\Lambda$$
$$\leq 1 + C\int_0^\infty e^\lambda e^{-c\lambda/c'}d\lambda = 1 + \frac{C}{c/c'-1}.$$

Choosing $C = e$, $c = 1/(2e)$, and $c' = 1/4e$, we obtain

$$\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{|h-h_I|/(4eM_h(I))}d\Lambda \leq 1 + e \tag{8.11}$$

from which (8.9) follows at once. □

By definition, $M_h(I)$ tends to zero uniformly with $\Lambda(I)$ if $h \in VMO(\mathbb{T})$, and Lemma 8.1 makes it clear that in this case $e^h \in L^p(\mathbb{T})$ for every $p \in [1, \infty)$. When $h \in VMO_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, where subscript "$\mathbb{R}$" means "real-valued" as usual, it is well known that e^h satisfies condition A_p given in (5.7) for all $p \in (1, \infty)$. This follows for instance from (8.11) and [21, Chapter VI, Corollary 6.5]. Below, we record for later use a specific estimate for the A_p norm in terms of (8.8).

Lemma 8.2. *Let $h \in VMO_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ and $p \in (1, \infty)$. Let $\eta = \eta(h, p) > 0$ be so small that $4eM_h(I)\max(1, 1/(p-1)) \leq 1$ for every arc $I \subset \mathbb{T}$ satisfying $\Lambda(I) < \eta$. Then*

$$\{e^h\}_{A_p} := \sup_I \left(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^h\,d\Lambda\right)\left(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{-h/(p-1)}d\Lambda\right)^{p-1} \leq C \tag{8.12}$$

where C depends only on η, p, and $\|e^h\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

Proof. If we put $p' = p/(p-1)$, then $1/(p-1) = p'-1$ and it follows easily from the definition that $\{e^h\}_{A_p} = \{e^{-h/(p-1)}\}_{A_{p'}}^{(p-1)}$. Therefore we may assume that $p \geq 2$.
Now, the left hand side of (8.12) can be rewritten as

$$\sup_I\Big(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{h-h_I}\,d\Lambda\Big)\Big(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{-(h-h_I)/(p-1)}d\Lambda\Big)^{p-1}.$$

If $\Lambda(I) < \eta$, then $4eM_h(I)$ and $4eM_h(I)/(p-1) < 1$, thus by (8.11) and Hölder's inequality we have

$$\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{h-h_I}\,d\Lambda \leq \Big(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{|h-h_I|/(4eM_h(I))}\,d\Lambda\Big)^{4eM_h(I)}$$
$$\leq (1+e)^{4eM_h(I)} \leq (1+e)$$

and

$$\Big(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{-(h-h_I)/(p-1)}\,d\Lambda\Big)^{p-1} \leq \Big(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{|h-h_I|/(4eM_h(I))}\,d\Lambda\Big)^{4eM_h(I)}$$
$$\leq (1+e).$$

This shows that (8.12) holds with $C=(1+e)^2$ when the supremum is restricted to those I of length less than η. In another connection, if $\Lambda(I)\geq\eta$, then obviously

$$\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^h\,d\Lambda \leq \eta^{-1}\|e^{|h|}\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

and likewise, taking into account that $p\geq 2$ and using Hölder's inequality, we obtain

$$\Big(\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{-h/(p-1)}\,d\Lambda\Big)^{p-1} \leq \frac{1}{\Lambda(I)}\int_I e^{|h|}\,d\Lambda \leq \eta^{-1}\|e^{|h|}\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Thus, (8.12) holds with $C=\big(\|e^{|h|}\|_{L^1(\mathbb{T})}/\eta\big)^2$ in this case. $\square$

When Γ is a Jordan curve locally isometric to a Lipschitz graph, the definitions of $BMO(\Gamma)$, $VMO(\Gamma)$, and condition A_p on Γ which are modeled after (8.5), (8.6), and (5.7) do coincide with the standard ones [8, Section 2.5][13]. Lemma 8.1 and Lemma 8.2 carry over mechanically to this more general setting, but the significance of condition A_p with respect to the weighted L^p continuity of the conjugate operator is no longer the same if Γ is non-smooth[14]. Such considerations are not needed in this paper, but we make use at some point of the following estimate showing that $W^{1/2,2}(\Gamma)$ embeds contractively in $VMO(\Gamma)$ [10]:

$$\begin{array}{rcl}\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I|h-h_I|\,d\Lambda &\leq& \frac{1}{(\Lambda(I))^2}\int_{I\times I}|h(t)-h(t')|\,d\Lambda(t)d\Lambda(t')\\ &\leq& \frac{1}{\Lambda(I)}\int_{I\times I}\frac{|h(t)-h(t')|}{\Lambda(t,t')}d\Lambda(t)d\Lambda(t')\\ &\leq& \Big(\int_{I\times I}\frac{|h(t)-h(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2}d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Big)^{1/2}\\ &\leq& \|h\|_{W^{1/2,2}(\Gamma)},\end{array} \tag{8.13}$$

where the next to last step uses the Schwarz inequality. Note that if $h\in W^{1/2,2}(\Gamma)$, then

$$\|h\|_{W^{1/2,2}(I)} := \Big(\int_{I\times I}\frac{|h(t)-h(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2}d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Big)^{1/2}$$

tends to 0 as $\Lambda(I)\to 0$ by the absolute continuity of $\frac{|h(t)-h(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2}d\Lambda(t)d\Lambda(t')$.

[13] In the standard definition, arcs $I\subset\Gamma$ are replaced by sets of type $\mathbb{D}(\xi,\rho)\cap\Gamma$ with $\xi\in\Gamma$. It is in this form that condition A_p is necessary and sufficient for weighted L^p boundedness of the singular Cauchy integral operator on Γ, see [8, Chapter 5].

[14] Even if we restrict ourselves to *constant* weights (which certainly satisfy A_p for all $p\in(1,\infty)$), the conjugate operator is generally L^p-continuous for restricted range of p only. This follows from [32, Theorem 2.1] and the fact that the Szegő projection has the same weighted L^p type as the conjugate operator on $\mathbb{T}$.

8.3. **Exp-summability of Sobolev functions at the critical exponent.** Given a bounded open set $\Omega \subset \mathbb{C}$, the Trudinger-Moser inequality [34] asserts that

$$\sup_{\substack{h \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|\partial h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\bar\partial h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 1/2}} \int_\Omega e^{4\pi|h|^2} dm \leq C_{\mathrm{TM}} |\Omega| \tag{8.14}$$

for some absolute constant C_{TM}. Now, given a nonzero $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$, put for the sake of simplicity $N_1(f) := (2\|\partial f\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\bar\partial f\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$ and let further $f_1 = f/N_1(f)$. For each $\xi \in \Omega$ such that $f(\xi)$ is defined, we have either $|f(\xi)| \leq N_1^2(f)/4\pi$ or $\exp(|f(\xi)|) < \exp(4\pi|f_1(\xi)|^2)$. Thus, applying (8.14) with $h = f_1$, we obtain for $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *a fortiori* that

$$\int_\Omega e^{|f|} dm \leq |\Omega| \Big(C_{\mathrm{TM}} + \exp\Big(\frac{\|\partial f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\bar\partial f\|^2_{L^2(\Omega)}}{2\pi} \Big) \Big). \tag{8.15}$$

Lemma 8.3. *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a bounded and Lipschitz open set. Then there exist $C_1 = C_1(\Omega)$, $C_2 = C_2(\Omega)$ such that, for every $\ell \in [1, \infty)$ and $f \in W^{1,2}(\Omega)$,*

$$\|e^{|f|}\|_{L^\ell(\Omega)} \leq C_1 \exp(C_2 \ell \|f\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}). \tag{8.16}$$

Proof. Let $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$ be open and, say $|\Omega_1| \leq 2|\Omega|$. Pick $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ to have support in Ω_1, values in $[0,1]$, and to be identically 1 on Ω. By the extension theorem, there exists $\tilde f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ such that $\tilde f_{|\Omega} = f$ and $\|\tilde f\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}$, where $C = C(\Omega)$. Then $h := \ell\varphi\tilde f$ lies in $W_0^{1,2}(\Omega_1)$ and satisfies

$$\|\partial h\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \|\bar\partial h\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq \ell^2 C' \|f\|^2_{W^{1,2}(\Omega)},$$

where C' depends on C and φ. Applying (8.15) to h, we find on putting $C_2 = C'/(2\pi)$ that

$$\int_\Omega e^{\ell|f|} dm \leq \int_{\Omega_1} e^{|h|} dm \leq \Big(e^{\ell^2 C_2 \|f\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}} + C_{\mathrm{TM}} \Big) |\Omega_1|,$$

that yields (8.16) upon setting $C_1 := 2(1 + C_{\mathrm{TM}})|\Omega|$. □

With the help of Lemma 8.3, we now prove that e^f is fairly smooth when $f \in W^{1,2}(\Omega)$. Recall that a (possibly nonlinear) operator between Banach spaces is said to be bounded if it maps bounded sets into bounded sets.

Proposition 8.4. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded Lipschitz smooth open set. Fix $p \in (1, \infty)$ and $\ell \in [1, \min(p, 2))$. Then, the map $(g, f) \mapsto ge^f$ is continuous and bounded from $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ into $W^{1,\ell}(\Omega)$, and derivatives are computed using the Leibniz and the chain rules:*

$$\partial(ge^f) = e^f \partial g + ge^f \partial f, \qquad \bar\partial(ge^f) = e^f \bar\partial g + ge^f \bar\partial f. \tag{8.17}$$

In particular, for every $q \in [1, 2)$, the map $f \mapsto e^f$ is continuous and bounded from $W^{1,2}(\Omega)$ into $W^{1,q}(\Omega)$ and so is the map $f \mapsto e^{tr_{\partial\Omega} f}$ from $W^{1,2}(\Omega)$ into $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$.

Proof. Let $g \in W^{1,p}(\Omega)$, $f \in W^{1,2}(\Omega)$, and let (f_n), (g_n) be two sequences of smooth functions on Ω converging respectively to f and g in $W^{1,2}(\Omega)$ and $W^{1,p}(\Omega)$. *We claim* that e^{f_n} converges to e^f in $L^\ell(\Omega)$ for all $\ell \in [1, \infty)$. To see this, consider first the case of real-valued functions. By the mean-value theorem and convexity of $t \mapsto e^t$, we have that

$$\int_\Omega \left|e^f - e^{f_n}\right|^\ell dm \leq \int_\Omega |f - f_n|^\ell \left|e^f + e^{f_n}\right|^\ell dm$$
$$\leq \|f - f_n\|^\ell_{L^{2\ell}(\Omega)} \|e^f + e^{f_n}\|^\ell_{L^{2\ell}(\Omega)}, \quad (8.18)$$

where we use the Schwarz inequality. By the Sobolev embedding theorem, $\|f - f_n\|_{L^{2\ell}(\Omega)}$ tends to 0 as $n \to \infty$. Moreover, $\|f_n\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ tends to $\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}$, hence $\|e^f + e^{f_n}\|_{L^{2\ell}(\Omega)}$ is uniformly bounded by Lemma 8.3, and the right hand side of (8.18) indeed goes to zero as $n \to \infty$. Next, if f, f_n are complex-valued, say $f = u + iv$ and $f_n = u_n + iv_n$, we write

$$\|e^f - e^{f_n}\|_{L^\ell(\Omega)} \leq \|e^u(e^{iv} - e^{iv_n})\|_{L^\ell(\Omega)} + \|e^{iv_n}(e^u - e^{u_n})\|_{L^\ell(\Omega)}.$$

By what precedes, the last term in the right hand side tends to 0 when $n \to \infty$, and so does the first since we can extract pointwise convergent subsequences from any subsequence of v_n and apply the dominated convergence theorem. This proves the claim.
Next, we observe that $g_n e^{f_n}$ is smooth on Ω and that

$$\partial(g_n e^{f_n}) = e^{f_n} \partial g_n + g_n e^{f_n} \partial f_n. \quad (8.19)$$

Assume first that $p < 2$. Then, by the Sobolev embedding theorem, (g_n) converges to g in $L^{p^*}(\Omega)$ where $p^* = 2p/(2-p) > 2$. From this and the previous claim, we deduce by Hölder's inequality that $(g_n e^{f_n})$ converges to ge^f in $L^\ell(\Omega)$ for $\ell \in [1, p^*)$, hence also in the sense of distributions. By the same token, the right hand side of (8.19) converges to $e^f \partial g + ge^f \partial f$ in $L^\ell(\Omega)$ for each $\ell \in [1, p)$. The case $p = 2$ is similar except that p^* can be taken arbitrarily large, hence the convergence in the right hand-side of (8.19) takes place in $L^\ell(\Omega)$ for all $\ell < 2$. If $p > 2$, then g is even bounded, but this does not improve the estimate. Repeating the argument for $\bar\partial(ge^f)$ proves that $(g_n e^{f_n})$ converges to ge^f in $W^{1,\ell}$ for $\ell \in [1, \min(p, 2))$ and that (8.17) holds. Hence, the map $(g, f) \mapsto ge^f$ is defined from $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ into $W^{1,\ell}(\Omega)$ and (8.17) is valid. Moreover, by Lemma 8.3 and Hölder's inequality, this map is bounded. Relaxing the smoothness assumption on f_n, g_n and arguing as before shows that it is also continuous. This proves the first assertion on the Proposition. Setting $g \equiv 1$, the second assertion follows by the Sobolev embedding and the trace theorems. □

8.4. **Equicontinuity properties of Cauchy transforms.**

Proposition 8.5. *Let $\beta \in L^2(\mathbb{D})$ and let ω be a strictly positive function on $(0, +\infty)$ such that $\|\beta\|_{L^2(Q_{\omega(\varepsilon)} \cap \mathbb{D})} < \varepsilon$ as soon as $Q_{\omega(\varepsilon)}$ is a square of sidelength $\omega(\varepsilon)$.*

(i) *If we set* (*cf.* (2.9))

$$\mathcal{C}(\beta)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}} \frac{\beta(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \wedge \overline{d\xi}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

then there exists a strictly positive function ω_1 *on* $(0, +\infty)$*, depending only on* ω*, such that*

$$\|\partial\mathcal{C}(\beta)\|_{L^2(Q_{\omega_1(\eta)})} + \|\bar\partial\mathcal{C}(\beta)\|_{L^2(Q_{\omega_1(\eta)})} < \eta \tag{8.20}$$

as soon as $Q_{\omega_1(\eta)}$ *is a square of sidelength* $\omega_1(\eta)$*.*

(ii) *If we set* (*cf.* (5.11))

$$\mathcal{R}(\beta)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}} \frac{z\bar\beta(\xi)}{1 - \bar\xi z}\, d\xi \wedge \overline{d\xi}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

then $\mathcal{R}(\beta) \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ *is holomorphic in* $\mathbb{D}$ *and there exists a strictly positive function* ω_2 *on* $(0, +\infty)$*, depending only on* ω*, such that*

$$\|\partial\mathcal{R}(\beta)\|_{L^2(Q_{\omega_2(\eta)}\cap\mathbb{D})} < \eta$$

as soon as $Q_{\omega_2(\eta)}$ *is a square of sidelength* $\omega_2(\eta)$*.*

Proof. Since $\beta \in L^2(\mathbb{D})$, we know that $\mathcal{C}(\beta) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$. Fix $\eta > 0$ and set $\delta = \min(1/3, \omega(\eta/3), \eta/(6\|\beta\|))$. For any square Q_δ, we have a nested concentric square with parallel sides $Q_{\delta^2} \subset Q_\delta$. Let $\widetilde\beta$ be the extension of β by 0 off $\mathbb{D}$. Since $\bar\partial\mathcal{C}(\beta) = \widetilde\beta$, we obtain

$$\|\bar\partial\mathcal{C}(\beta)\|_{L^2(Q_{\delta^2})} < \eta/3. \tag{8.21}$$

Next, we write

$$\partial\mathcal{C}(\beta) = \mathcal{B}(\widetilde\beta) = \mathcal{B}(\chi_{Q_\delta}\widetilde\beta) + \mathcal{B}(\chi_{\mathbb{C}\setminus Q_\delta}\widetilde\beta) \tag{8.22}$$

where $\mathcal{B}$ indicates the Beurling transform, *cf.* (2.10). As $\mathcal{B}$ is an isometry on $L^2(\mathbb{C})$, we get

$$\|\mathcal{B}(\chi_{Q_\delta}\widetilde\beta)\|_{L^2(\mathbb{C})} = \|\beta\|_{L^2(Q_\delta\cap\mathbb{D})} < \eta/3. \tag{8.23}$$

Moreover, formula (2.10) and the Cauchy-Schwarz inequality give us the pointwise estimate:

$$\mathcal{B}(\chi_{\mathbb{C}\setminus Q_\delta}\widetilde\beta)(z) \le \frac{2}{\delta}\|\beta\|_{L^2(\mathbb{D})}, \qquad z \in Q_{\delta^2}.$$

Integrating over Q_{δ^2} yields

$$\|\mathcal{B}(\chi_{\mathbb{C}\setminus Q_\delta}\widetilde\beta)\|_{L^2(Q_{\delta^2})} \le 2\delta\|\beta\|_{L^2(\mathbb{D})} < \eta/3. \tag{8.24}$$

Inequality (8.20) with $\omega_1(\eta) = \delta$ follows now from (8.21), (8.22), (8.23) and (8.24), thereby proving (i).

Consider next $\mathcal{R}(\beta)$. Clearly it is holomorphic in $\mathbb{D}$ and vanishes at 0. Furthermore, $\overline{\mathcal{R}(\beta)(z)} = -\mathcal{C}(\beta)(1/\bar z)$ and since $\mathcal{C}(\beta) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ we get that $\mathcal{R}(\beta) \in W^{1,2}(\mathbb{D})$.

Once again, fix $\eta > 0$ and set $\delta = \min(\omega_1(\eta)/4, \eta/(16\|\beta\|))$. First, every square Q_δ has diameter at most 1/4, hence is disjoint from $\mathbb{D}_{1/2}$ if it meets

$\mathcal{A}_{3/4} := \{z : 1 \geq |z| \geq 3/4\}$. In this case the reflection ($z \mapsto 1/\bar{z}$) of $Q_\delta \cap \mathbb{D}$ is contained in a square of sidelength $4\delta \leq \omega_1(\eta)$, and since

$$\partial\mathcal{R}(\beta)(z) = \frac{\overline{(\partial(\mathcal{C}\beta))(1/\bar{z})}}{z^2}, \qquad z \neq 0,$$

we deduce from (8.20) and the change of variable formula that $\|\partial\mathcal{R}(\beta)\|_{L^2(Q_\delta)} \leq \eta$.

Assume now that $Q_\delta \subset \mathbb{D}_{3/4}$. Differentiating under the integral sign we obtain

$$\partial\mathcal{R}(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}} \frac{\bar{\beta}(\xi)}{1-\bar{\xi}z}\, d\xi \wedge \overline{d\xi} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}} \frac{z\bar{\xi}\bar{\beta}(\xi)}{(1-\bar{\xi}z)^2}\, d\xi \wedge \overline{d\xi},$$

so that if $z \in \mathbb{D}_{3/4}$, we get by the Schwarz inequality that $|\partial\mathcal{R}(\beta)(z)| \leq 16\|\beta\|_{L^2(\mathbb{D})}$. Integrating over Q_δ yields

$$\|\partial\mathcal{R}(\beta)\|_{L^2(Q_\delta)} \leq 16\delta\|\beta\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq \eta,$$

as desired. It remains to set $\omega_2(\eta) = \delta$. $\square$

Corollary 8.6. *Let $\beta \in L^2(\mathbb{C})$ and let ω be a strictly positive function on $(0, +\infty)$ such that $\|\beta\|_{L^2(Q_{\omega(\varepsilon)})} < \varepsilon$ as soon as $Q_{\omega(\varepsilon)}$ is a square of sidelength $\omega(\varepsilon)$. If we let (cf. (2.14))*

$$\mathcal{C}_2(\beta)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{z-t} + \frac{\chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}(t)}{t}\Big)\beta(t)\, dm(t), \qquad z \in \mathbb{C},$$

then there exists a strictly positive function ω_1 on $(0, +\infty)$, depending only on ω, such that

$$\|\partial\mathcal{C}_2(\beta)\|_{L^2(Q_{\omega_1(\eta)})} + \|\bar{\partial}\mathcal{C}_2(\beta)\|_{L^2(Q_{\omega_1(\eta)})} < \eta$$

as soon as $Q_{\omega_1(\eta)}$ is a square of sidelength $\omega_1(\eta)$.

Proof. This is proved in the same way as (8.20), replacing $\tilde{\beta}$ by β. $\square$

8.5. **Integral estimates on circular arcs.**

Lemma 8.7. *If $f \in W^{1,q}(\mathbb{D})$ for some $q \in (1, 2)$ and $\ell := q/(2-q)$, then*

$$\sup_{\rho\in(0,1]}\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} |f(\xi)|^\ell |d\xi|\Big)^{1/\ell} \leq C\|f\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})},$$

where $C = C(q)$.

Proof. Set $f_\rho(\xi) := f(\rho\xi)$ so that

$$\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} |f(\xi)|^\ell |d\xi|\Big)^{1/\ell} = \rho^{1/\ell}\Big(\int_{\mathbb{T}} |f_\rho(\xi)|^\ell |d\xi|\Big)^{1/\ell}. \tag{8.25}$$

By the trace theorem and (the non-integral version of) the Sobolev embedding theorem we have

$$\Big(\int_{\mathbb{T}} |f_\rho(\xi)|^\ell |d\xi|\Big)^{1/\ell} \leq C\|f_\rho\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})} \tag{8.26}$$

with $C = C(q)$, and from the change of variable formula we get for $\rho > 0$ that

$$\|f_\rho\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})} = \rho^{-2/q}\|f\|_{L^q(\mathbb{D}_\rho)} + \rho^{1-2/q}\left(\|\partial f\|_{L^q(\mathbb{D}_\rho)} + \|\bar\partial f\|_{L^q(\mathbb{D}_\rho)}\right). \quad (8.27)$$

Since $1/\ell - 2/q = -1$, and in view of (8.25), (8.26), and (8.27) it remains to majorize $\rho^{-1}\|f\|_{L^q(\mathbb{D}_\rho)}$ by $C\|f\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})}$ for some $C = C(q)$. From (2.4) we see that this is equivalent to checking the estimate:

$$\rho^{2/q-1}\left|f_{\mathbb{D}_\rho}\right| = \left|\frac{1}{\pi\rho^{3-2/q}}\int_{\mathbb{D}_\rho} f\,dm\right| \leq C_1\|f\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})}, \qquad 0 < \rho \leq 1, \quad (8.28)$$

with $C_1 = C_1(q)$. Now, the Sobolev embedding theorem implies that for some $C_2 = C_2(q)$ we have $\|f\|_{L^{2q/(2-q)}(\mathbb{D})} \leq C_2\|f\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})}$, and so by Hölder's inequality,

$$\left|\int_{\mathbb{D}_\rho} f\,dm\right| \leq C_2\pi^{3/2-1/q}\rho^{3-2/q}\|f\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})}$$

which is exactly (8.28) with $C_1 = C_2\pi^{1/2-1/q}$. □

For $J \subset \mathbb{T}$ an open arc and $\delta \in (0,1)$, we denote by $R(J,\delta)$ the open curvilinear rectangle in $\mathbb{D}$ (an annulus if $J = \mathbb{T}$) defined by

$$R(J,\delta) = \{z : \ z = \rho\xi, \ \xi \in J, \ 1-\delta < \rho < 1\}. \quad (8.29)$$

Lemma 8.8. *If $f \in W_0^{1,2}(\mathbb{D})$ and $\rho \in (0,1]$, then for every arc $I \subset \mathbb{T}_\rho$ we have*

$$\left|\frac{1}{\Lambda(I)}\int_I f(\zeta)\,|d\zeta|\right| \leq \frac{(1-\rho)^{1/2}}{(\Lambda(I))^{1/2}}\left(\|\partial f\|_{L^2(R(J,1-\rho)} + \|\bar\partial f\|_{L^2(R(J,1-\rho)}\right), \quad (8.30)$$

where $J \subset \mathbb{T}$ is the arc such that $\rho J = I$.

Proof. By density it suffices to prove (8.30) when $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$. If we write $\zeta \in I$ as $\zeta = \rho\xi$ with $\xi \in J$, we get

$$f(\zeta) = -\int_\rho^1 \left(\partial f(t\xi)\xi + \bar\partial f(t\xi)\bar\xi\right)\,dt$$

and integrating with respect to $|d\zeta| = \rho|d\xi|$ yields

$$\left|\int_I f(\zeta)\,|d\zeta|\right| = \left|\rho\int_J\int_\rho^1 \left(\partial f(t\xi)\xi + \bar\partial f(t\xi)\right)\,dt|d\xi|\right|$$
$$\leq \int_{R(J,1-\rho)}\left(|\partial f(t\xi)| + \left|\bar\partial f(t\xi)\right|\right)tdt|d\xi|.$$

Since $m(R(J,1-\rho)) = \Lambda(I)(1-\rho^2)/2$, estimate (8.30) follows from the Schwarz inequality. □

Lemma 8.9. *Let J be a proper open subarc of $\mathbb{T}$ and let $\delta_0 \in (0,1)$. For every $\delta \in (0,\delta_0]$ there exists $C > 0$ depending only on δ_0 and $\Lambda(J)/\delta$ such that, for all $f \in W^{1,2}(R(J,\delta))$ (cf. definition (8.29)) we have*

$$\Big(\int_{\partial R(J,\delta)\times\partial R(J,\delta)} \frac{|f(t)-f(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2} d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Big)^{1/2} \leq C\big(\|\partial f\|_{L^2(R(J,\delta))} + \|\bar\partial f\|_{L^2(R(J,\delta))}\big). \quad (8.31)$$

Proof. Pick $\delta \in (0,\delta_0]$, and write e^{ia}, e^{ib} for the endpoints of J with $a < b$ and $|a-b| < 2\pi$. The map $\varphi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ is a diffeomorphism from $R := (1-\delta,1)\times(a,b)$ onto $R(J,\delta)$ satisfying $|||D\varphi||| \leq 1$ and $|||(D\varphi)^{-1}||| \leq c/(1-\delta_0)$, where $D\varphi$ indicates the derivative and $|||\cdot|||$ is the operator norm. In particular, φ^{-1} extends to a Lipschitz homeomorphism from $\partial R(J,\delta)$ onto ∂R with Lipschitz constant depending only on δ_0, and by the change of variable formula it is enough to show that if $h := f\circ\varphi$, then

$$\Big(\int_{\partial R\times\partial R} \frac{|h(t)-h(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2} d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Big)^{1/2} \leq C\big(\|\partial h\|_{L^2(R)} + \|\bar\partial h\|_{L^2(R)}\big),$$

where the constant C depends only on $\Lambda(J)/\delta = 2\pi(b-a)/\delta$. The result now follows from the fact that if $p = 2$ and Ω is a rectangle, then the constant in (2.6) depends only on the ratio of sidelengths, a fact which is obvious by homogeneity. □

8.6. **A multiplier theorem.** The next theorem is fundamental to our study of G^p_α when $\alpha \in L^2(\mathbb{D})$ but is also of independent interest. It is best stated in terms of multipliers. We use the definition (2.1) of the non-tangential maximal function $\mathcal{M}_\gamma f$. Denote by $\mathfrak{M}^{\gamma,p}$ the Banach space of complex-valued functions on $\mathbb{D}$ such that $\|\mathcal{M}_\gamma f\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty$. Furthermore, we use the Banach space $\mathcal{H}^p$ of functions satisfying a Hardy condition, introduced in Section 5.2.

Theorem 8.10. *Let $\gamma \in (0,\pi/2)$ and $p \in [1,\infty)$. Given $f \in W^{1,2}_{0,\mathbb{R}}(\mathbb{D})$, the multiplication by e^f is continuous from $\mathfrak{M}^{\gamma,p}$ into $\mathcal{H}^p$. More precisely, for any function g on $\mathbb{D}$, we have*

$$\sup_{0<\rho<1}\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}\,|g(\xi)|^p\,|d\xi|\Big)^{1/p} < C\,\|\mathcal{M}_\gamma g\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad (8.32)$$

where C depends on p, γ, and on $\varepsilon > 0$ so small that $\|\partial f\|_{L^2(Q_\varepsilon\cap\mathbb{D})} < C'/p$ whenever Q_ε is a square of sidelength ε, with C' depending only on γ.

Proof. First, let $\rho \in (0,\sin\gamma)$. For $\zeta \in \mathbb{T}$, $\Gamma(\zeta,\gamma)$ contains $\mathbb{T}_\rho$ and we have

$$\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}\,|g(\xi)|^p\,|d\xi| \leq \mathcal{M}^p_\gamma g(\zeta)\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}|d\xi|.$$

Averaging over $\zeta \in \mathbb{T}$ yields

$$\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}\,|g(\xi)|^p\,|d\xi| \le \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{\mathbb{T}} \mathcal{M}_\gamma^p g(\zeta)\,|d\zeta|\Big)\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big). \tag{8.33}$$

By Lemma 8.7 applied to e^f in the place of f with $\ell = p$ and $q := 2p/(p+1)$, we get

$$\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big)^{1/p} \le c_0\|e^f\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})} \tag{8.34}$$

for some $c_0 = c_0(p)$. Moreover, Lemma 8.3, Proposition 8.4, Hölder's inequality, and the fact that f is real-valued imply together that for some absolute constants C_1, C_2 we have

$$\begin{aligned}\|e^f\|_{W^{1,q}(\mathbb{D})} &= \|e^f\|_{L^q(\mathbb{D})} + 2\|\partial f e^f\|_{L^q(\mathbb{D})} \le \|e^{|f|}\|_{L^{2p}(\mathbb{D})}\big(1 + 2\|\partial f\|_{L^2(\mathbb{D})}\big)\\ &\le C_1\big(1+\exp\big(C_2 p\|\partial f\|^2_{L^2(\mathbb{D})}\big)\big)\big(1+\|\partial f\|_{L^2(\mathbb{D})}\big).\end{aligned} \tag{8.35}$$

By (8.33), (8.34), and (8.35) we conclude that

$$\sup_{0<\rho<\sin\gamma}\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}\,|g(\xi)|^p\,|d\xi|\Big)^{1/p} \le C_0\|\mathcal{M}_\gamma g\|_{L^p(\mathbb{T})} \tag{8.36}$$

for some $C_0 = C_0(p, \|\partial f\|_{L^2(\mathbb{D})})$.
Assume next that $\rho \ge \sin\gamma$. Now $\Gamma(\zeta,\gamma)$ cuts out two disjoint open arcs on $\mathbb{T}_\rho$ one of which is centered at $\xi = \rho\zeta$. Denote this arc by A_ξ. Its length $\Lambda(A_\xi)$ is independent of ζ and it is easy to check that $K_1(1-\rho) \le \Lambda(A_\xi) \le K_2(1-\rho)$ for strictly positive numbers K_1, K_2 depending only on γ. Take an integer N_ρ in the interval $[4\pi\rho/\Lambda(A_\xi), 4\pi\rho/\Lambda(A_\xi)+1)$, and divide $\mathbb{T}_\rho$ into N_ρ semi open arcs of equal length, say $I_{\xi_1},\dots,I_{\xi_{N_\rho}}$, centered at equidistant points $\xi_1,\dots,\xi_{N_\rho} \in \mathbb{T}_\rho$. Put $\zeta_j = \xi_j/\rho \in \mathbb{T}$, and consider the partition of $\mathbb{T}$ into N_ρ semi open arcs $J_{\zeta_j} := I_{\xi_j}/\rho$ centered at ζ_j. By construction, if $\zeta \in J_{\zeta_j}$, then $I_{\xi_j} \subset \Gamma_{\zeta,\gamma}$. Consequently,

$$\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}\,|g(\xi)|^p\,|d\xi| \le \mathcal{M}_\gamma^p g(\zeta)\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}|d\xi|,$$

and averaging over $\zeta \in J_{\zeta_j}$ gives us

$$\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}\big|g(\xi)\big|^p|d\xi| \le \frac{1}{\Lambda(J_{\zeta_j})}\Big(\int_{J_{\zeta_j}} \mathcal{M}_\gamma^p g(\zeta)\,|d\zeta|\Big)\Big(\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big).$$

Since $\Lambda(J_{\zeta_j}) = \Lambda(I_{\xi_j})/\rho$ we deduce upon summing over j that

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}\,|g(\xi)|^p\,|d\xi|\\ &\qquad\le \rho\Big(\int_{\mathbb{T}} \mathcal{M}_\gamma^p g(\zeta)\,|d\zeta|\Big)\sup_{1\le j\le N_\rho}\Big(\frac{1}{\Lambda(I_{\xi_j})}\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big).\end{aligned} \tag{8.37}$$

Let $R(J,\delta)$ be defined as in (8.29), and let C be the constant in Lemma 8.9 associated to $\delta_0 = 1-\sin\gamma$ and $\Lambda(J)/\delta = K_2/(2\sin\gamma)$; note that C depends only on γ. Since $\Lambda(J_{\zeta_j})/(1-\rho) \le K_2/(2\sin\gamma)$, the arc $J'_{\zeta_j} \subset \mathbb{T}$ of length $(1-\rho)K_2/(2\sin\gamma)$ centered at ζ_j does contain J_{ζ_j}. Therefore, $R(J_{\zeta_j}, 1-\rho)$ is contained in $R(J'_{\zeta_j}, 1-\rho)$ and I_{ξ_j} is contained in $I'_{\xi_j} := J'_{\zeta_j}/\rho$. Hence, (8.31) *a fortiori* implies for some K depending only on γ that

$$\Big(\int_{I_{\xi_j}\times I_{\xi_j}} \frac{|f(t)-f(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2} d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Big)^{1/2} \\ \le K\big(\|\partial f\|_{L^2(R(J'_{\zeta_j},1-\rho))} + \|\bar\partial f\|_{L^2(R(J'_{\zeta_j},1-\rho))}\big). \quad (8.38)$$

Now, it is elementary to check that $R(J'_{\zeta_j}, 1-\rho)$ is contained in a square of sidelength $K_3(1-\rho)$ (where K_3 depends only on γ), one side of which is tangent to $\mathbb{T}$ at ζ_j. So, if we let ε_1 be so small that $\|\partial\tilde f\|_{L^2(Q_{\varepsilon_1})} < 1/(8Kep)$ whenever Q_{ε_1} is a square of sidelength ε_1, we get (since f is real-valued) that

$$\|\partial f\|_{L^2(R(J'_{\zeta_j},1-\rho))} + \|\bar\partial f\|_{L^2(R(J'_{\zeta_j},1-\rho))} \le \frac{1}{4Kep}, \\ \max(\sin\gamma, 1-\varepsilon_1/K_3) = \rho_0 \le \rho < 1. \quad (8.39)$$

Then, from (8.13), (8.38), and (8.39), we see that for all subarcs $I \subset I_{\xi_j}$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\Lambda(I)}\textstyle\int_I |f-f_I|\, d\Lambda \ &\le\ \Big(\textstyle\int_{I\times I} \tfrac{|f(t)-f(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2} d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Big)^{1/2} \\ &\le\ \Bigg(\textstyle\int_{I_{\xi_j}\times I_{\xi_j}} \tfrac{|f(t)-f(t')|^2}{(\Lambda(t,t'))^2} d\Lambda(t)d\Lambda(t')\Bigg)^{1/2} \\ &\le\ 1/4ep, \qquad \rho_0 \le \rho < 1. \end{aligned} \quad (8.40)$$

If we let $h := \mathrm{tr}_{\mathbb{T}_\rho} f$, inequality (8.40) asserts that

$$M_h(I_{\xi_j}) \le 1/4ep, \qquad \rho_0 \le \rho < 1, \quad (8.41)$$

with $M_h(I_{\xi_j})$ defined by (8.8) where we set Γ to be $\mathbb{T}_\rho$. By Lemma 8.1, (8.41), and Hölder's inequality, for $\rho \in [\rho_0, 1)$ we have

$$\Big(\frac{1}{\Lambda(I_{\xi_j})}\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big)^{1/p} \le (1+e)^{1/p}\exp\Big(\Big|\frac{1}{\Lambda(I_{\xi_j})}\int_{I_{\xi_j}} f(\zeta)\,|d\zeta|\Big|\Big). \quad (8.42)$$

In another connection, keeping in mind (8.39) and the inclusion $R(J_{\zeta_j}, 1-\rho) \subset R(J'_{\zeta_j}, 1-\rho)$, an application of (8.30) yields

$$\Big|\frac{1}{\Lambda(I_{\xi_j})}\int_{I_{\xi_j}} f(\zeta)\,|d\zeta|\Big| \le \frac{(1-\rho)^{1/2}}{(\Lambda(I_{\xi_j}))^{1/2}}\,\frac{1}{4Kep}. \quad (8.43)$$

Put $\rho_1 := \max(\rho_0, K_1/(K_1+\pi))$, and assume for a while that $\rho \ge \rho_1$; in particular, $\pi\rho/(K_1(1-\rho)) > 1$, and therefore

$$\Lambda(I_{\xi_j}) \ge \frac{2\pi\rho}{1+4\pi\rho/|A_\xi|} \ge \frac{2\pi\rho}{1+4\pi\rho/(K_1(1-\rho))} \ge \frac{K_1(1-\rho)}{3}. \quad (8.44)$$

Using together (8.43) and (8.44), we obtain

$$\Big|\frac{1}{\Lambda(I_{\xi_j})}\int_{I_{\xi_j}} f(\zeta)\,|d\zeta|\Big| \le \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{K_1}Kep}, \qquad \rho_1 \le \rho < 1. \tag{8.45}$$

Plugging (8.45) in the right hand side of (8.42) and using (8.37) now gives us

$$\sup_{\rho_1\le\rho<1}\Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}\,|g(\xi)|^p\,|d\xi|\Big)^{1/p} \le (1+e)^{1/p}\exp\Big(\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{K_1}Kep}\Big)\|\mathcal{M}_\gamma g\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

To obtain (8.32), it remains to treat the case $\rho \in [\sin\gamma, \rho_1)$ when the latter interval is nonempty. First, in this range of ρ, the first two inequalities in (8.44) imply that

$$\Lambda(I_{\xi_j}) \ge c(\gamma,\rho_1). \tag{8.46}$$

On the other hand, (8.34) and (8.35) give us that

$$\Big(\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big)^{1/p} \le \Big(\int_{\mathbb{T}_\rho} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big)^{1/p} \le C_0 \tag{8.47}$$

with C_0 as in (8.36). Therefore by (8.46) and (8.47) we have that

$$\Big(\frac{1}{\Lambda(I_{\xi_j})}\int_{I_{\xi_j}} e^{pf(\xi)}|d\xi|\Big)^{1/p} \le [c(\gamma,\rho_1)]^{-1/p}C_0, \qquad \sin\gamma \le \rho < \rho_1,$$

and using this in (8.37) completes the proof. □

Corollary 8.11. *If $w = e^s F$, where $s \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ with $\mathrm{Re}\, tr_{\mathbb{T}} s \equiv 0$ and $F \in H^p$, then*

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_\rho} |w(\xi)|^p\,|d\xi|\right)^{1/p} < +\infty.$$

Proof. This follows from (5.3) and Theorem 8.10 applied with $f = \mathrm{Re}\, s$ and $g = e^{i\mathrm{Im}\, s}F$. □

References

[1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, 2003.

[2] K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal mappings in the plane*, Princeton Univ. Press, 2009.

[3] K. Astala, L. Päivärinta, *Calderón's inverse conductivity problem in the plane*, Ann. of Math. (2) **163** (2006) 265–299.

[4] L. Baratchart, Y. Fischer, J. Leblond, *Dirichlet/Neumann problems and Hardy classes for the planar conductivity equation*, to appear in Complex variables and elliptic equations.

[5] L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat, E. Russ, *Hardy spaces for the conjugate Beltrami equation in smooth domains of the complex plane*, J. Funct. Anal. **259** (2010) 384–427.

[6] L. Bers, *Theory of pseudo-analytic functions*, New York University, 1953.

[7] N. Bliev, *Generalized analytic functions in fractional spaces*, Pitman, 1997.

[8] A. Böttcher and Y. Karlovitch, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*, Progress in Math. 154, Birkhäuser, 1997.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[10] H. Brezis and L. Nirenberg, *Degree theory and BMO; part I: compact manifolds without boundary*, Selecta Mathematica, New Series **1** (1995) 197–263.

[11] T. Carleman, *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables*, C.R. Acad. Sc. Paris, **197** (1933) 471–474.

[12] F. Demengel, G. Demengel, *Espaces fonctionnels. Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*, EDP Sciences, 2007.

[13] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Mathematics 38, Academic Press, New York–London, 1970.

[14] M. Efendiev, E. Russ, *Hardy spaces for the conjugated Beltrami equation in a doubly connected domain*, J. Math. Anal. Appl. **383** (2011) 439–450.

[15] M. Efendiev, W. Wendland, *Nonlinear Riemann–Hilbert problems for generalized analytic functions*, Funct. Approx. Comment. Math. **40** (2009) 185–208.

[16] Y. Fischer, *Approximation dans des classes de fonctions analytiques généralisées et résolution de problèmes inverses pour les tokamaks*, PhD Thesis, Univ. Nice–Sophia Antipolis, 2011.

[17] Y. Fischer, J. Leblond, *Solutions to conjugate Beltrami equations and approximation in generalized Hardy spaces*, Adv. Pure Applied Math. **2** (2010) 47–63.

[18] Y. Fischer, J. Leblond, J. R. Partington, E. Sincich, *Bounded extremal problems in Hardy spaces for the conjugate Beltrami equation in simply connected domains*, Appl. Comp. Harmonic Anal. **31** (2011) 264–285.

[19] Y. Fischer, B. Marteau, Y. Privat, *Some inverse problems around the tokamak Tore Supra*, Comm. Pure and Applied Analysis **11** (2012) 2327–2349.

[20] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Maths. 81, Springer, 1981.

[21] J. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure and Applied Math. 96, Academic Press, 1981.

[22] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Grad. Texts in Maths. 250, Springer, 2009.

[23] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1983.

[24] P. Grisvard, *Elliptic problems in non-smooth domains*, Pitman, London, 1985.

[25] S. Havinson, G. Tumarkin, *Classes of analytic functions in multiply connected domains*, Researches on contemporary problems of the theory of functions of a complex variable, 45–77, Moscow, 1960 (in Russian); French transl. in Fonctions d'une variable complexe. Problemes contemporains, 37–71, Gauthiers–Villars, Paris, 1962.

[26] D. Jerison, C. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **130** (1995) 161–219.

[27] S. B. Klimentov, *Hardy classes of generalized analytic functions*, Izvestia Vuzov Sev.-Kav. Reg., Natural Science **3** (2003) 6–10 (in Russian).

[28] S. B. Klimentov, *Riemann–Hilbert boundary value problem in the Hardy classes of generalized analytic functions*, Izvestia Vuzov Sev.-Kav. Reg., Natural Science, **4** (2004) 3–5 (in Russian).

[29] S. B. Klimentov, *Duality theorem for the Hardy classes of generalized analytic functions*, Complex Anal., Op. Theory., Math. Sim., Vladikavkaz Sc. Center of Russian Acad. Sc., 63–73, 2006 (in Russian).

[30] S. B. Klimentov, *Riemann–Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions in Smirnov classes*, Global and Stoch. Anal. **1** (2011) 217–240.

[31] V. V. Kravchenko, *Applied Pseudoanalytic Function Theory*, Frontiers in Math., Birkhäuser, 2009.

[32] L. Lanzani, E. M. Stein. *Szegő and Bergman projections on non-smooth planar domains*, J. Geom. Anal. **14** (2004) 63–86.

[33] V. Maz'ya, M. Mitrea, T. Shaposhnikova, *The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficient*, J. d'Analyse Math. **110** (2010) 167–239.

[34] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970) 1077–1092.

[35] K. M. Musaev, *On some extreme properties of generalized analytic functions*, DAN SSSR **203** (1972), 289–292; English transl. in Sov. Math. Dokl. **13** (1972) 387–391.

[36] M.O. Otelbaev, *A contribution to the theory of Vekua's generalized analytic functions*, Transl. Amer. Maths. Soc. **122**(2), 1984.

[37] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex plane*, London Math. Soc. Student Texts 28, Cambridge Univ. Press, 1995.

[38] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1978.

[39] L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp results in the integral-form John–Nirenberg inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011) 4135–4169.

[40] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, 1970.

[41] N. Theodorescu, Thèse, Paris, 1931.

[42] I. N. Vekua, *Generalized Analytic Functions*, Addison–Wesley, 1962.

[43] G. Wen, *Recent progress in theory and applications of modern complex analysis*, Science Press, Beijing, 2010.

[44] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Grad. Texts in Math. 120, Springer, 1989.

L. Baratchart, INRIA Sophia-Antipolis, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France
E-mail address: Laurent.Baratchart@inria.fr

A. Borichev, LATP, Aix-Marseille Université, 39, rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille, France
E-mail address: borichev@cmi.univ-mrs.fr

S. Chaabi, INRIA Sophia-Antipolis, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France
E-mail address: Slah.Chaabi@inria.fr

Bibliographie

[1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas. *Complex Variables : Introduction and Applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[2] M. Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover, 1972.

[3] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[4] F. Alladio and F. Crisanti. Analysis of mhd equilibria by toroidal multipolar expansions,. *Nuclear Fusion*, 26 :1143–1164, 1986.

[5] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Gaven Martin. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, volume 48 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[6] Kari Astala and Lassi Päivärinta. Calderón's inverse conductivity problem in the plane. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :265–299, 2006.

[7] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic function theory*. Springer, 2001.

[8] L. Baratchart, Y. Fischer, and J. Leblond. Dirichlet/Neumann problems and Hardy classes for the planar conductivity equation. *to appear in Complex variables and elliptic equations*.

[9] L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat, and E. Russ. Hardy spaces of the conjugated Beltrami equation. *Journal of Functional Analysis*, 259 :384–427, 2010.

[10] Laurent Baratchart, Alexander Borichev, and Slah Chaabi. Pseudo-holomorphic functions at the critical exponent.

[11] N. A. Belova and Ia. S. Ufliand. Torsion of a truncated hyperboloid. *J. Appl. Math. Mech.*, 34 :329–335, 1970.

[12] Lipman Bers. *Theory of pseudo-analytic functions*. Institute for Mathematics and Mechanics, New York University, New York, 1953.

[13] N. Bliev. *Generalized analytic functions in fractional spaces*, volume 86 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Longman, Harlow, 1997. Translated from the 1985 Russian original by H. Begehr and R. Radok [Jens Rainer Maria Radok].

[14] Albrecht Böttcher and Yuri I. Karlovich. *Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators*, volume 154 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[15] M. Brelot. Équation de Weinstein et potentiels de Marcel Riesz. *Lecture Notes in Math, Springer*, 681 :18–38, 1978.

[16] B. Brelot-Collin and M. Brelot. Représentation intégrale des solutions positives de l'équation

$$L_k(u) = \sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{k}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

(k constante réelle) dans le demi-espace $E(x_n > 0)$, de $\mathbb{R}^n$. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, 58 :317–326., 1972.

[17] B. Brelot-Collin and M. Brelot. Allure à la frontière des solutions positives de l'équation de weinstein

$$L_k(u) = \Delta u + kx_n^{-1}\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

dans le demi-espace $E(x_n > 0)$ de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, 59 :1100–1117, 1973.

[18] B. Brelot-Collin and M. Brelot. Étude à la frontière des solutions locales positives de l'équation

$$(1) \quad L_k(u) = \Delta u + kx_n^{-1}\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

dans le demi-espace $E(x_n > 0)$ de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, 62 :322–340, 1976.

[19] H. Brezis and L. Nirenberg. Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries. *Selecta Math. (N.S.)*, 1(2) :197–263, 1995.

[20] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[21] J. Barros-Neto & F. Cardoso. Gellerstedt and laplace-beltrami operators relative to a mixed signature metric. *Annali di Matematica*, pages 497–515, 2009.

[22] T. Carleman. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 197 :471–474, 1933.

[23] Boris V. Chabat. *Introduction à l'analyse complexe, tome 1.* 1990.

[24] O. Christensen. *Frames and Bases, an Introductory Course, Applied an Numerical Harmonic Analysis.* Birkhäuser, 2008.

[25] E. T. Copson. On sound waves of finite amplitude. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 216 :539–547, 1953.

[26] E. T. Copson. On hadamard's elementary solution. (1970/71), 19–27. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 69 :19–27, 1970/71.

[27] E. T. Copson. *Partial differential equations.* Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1975.

[28] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics, Volume 2.* Interscience Publishers, 1966.

[29] N. Trudinger D. Gilbarg. *Elliptic partial differential equations of second order.* 1983.

[30] R. Dautray and J.-L Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques, L'opérateur de Laplace, Tome 2.* Masson, 1987.

[31] G. David. *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaces.* Springer Verlag, 1991.

[32] Françoise Demengel and Gilbert Demengel. *Espaces fonctionnels.* Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis, 2007. Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles. [Application to the solution of partial differential equations].

[33] J. B. Diaz and A. Weinstein. On the fundamental solutions of a singular beltrami operator. *Studies in mathematics and mechanics presented to Richard von Mises, Academic Press Inc*, pages 97–102, 1954.

[34] Peter L. Duren. *Theory of H^p spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Academic Press, New York, 1970.

[35] Messoud Efendiev and Emmanuel Russ. Hardy spaces for the conjugated Beltrami equation in a doubly connected domain. *J. Math. Anal. Appl.*, 383(2) :439–450, 2011.

[36] Messoud A. Efendiev and Wolfgang L. Wendland. Nonlinear Riemann-Hilbert problems for generalized analytic functions. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 40(part 2) :185–208, 2009.

[37] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions, 1.* McGraw-Hill, Newyork, Toronto, London, 1953.

[38] A. Erdélyi. Singularities of generalized axially symmetric potentials. *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 :403–414, 1956.

[39] A. Erdélyi. An application of fractional integrals. *J. Analyse Math. 14*, 14 :113–126, 1965.

[40] A. Erdélyi. Symmetric potentials and fractional integration. *J. of the Soc. for Ind. and Applied Math*, Vol. 13, no 1 :216–228, 1965.

[41] Y. Fischer. *Approximation dans des classes de fonctions analytiques généralisées et résolution de problèmes inverses pour les tokamaks.* PhD thesis, Univ. Nice–Sophia Antipolis, 2011.

[42] Y. Fischer and J. Leblond. Solutions to conjugate Beltrami equations and approximation in generalized Hardy spaces. *Adv. Pure Appl. Math.*, 2(1) :47–63, 2011.

[43] Yannick Fischer, Juliette Leblond, Jonathan R. Partington, and Eva Sincich. Bounded extremal problems in Hardy spaces for the conjugate Beltrami equation in simply-connected domains. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 31(2) :264–285, 2011.

[44] Yannick Fischer, Benjamin Marteau, and Yannick Privat. Some inverse problems around the Tokamak *tore supra.* *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11(6) :2327–2349, 2012.

[45] A. S. Fokas. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear pdes. *Proceedings of the Royal Society of London*, 453 :1411–1443, 1997.

[46] A. S. Fokas. Lax pairs and a new spectral method for linear and integrable nonlinear PDEs. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(1) :31–68, 1998.

[47] A. S. Fokas. *A unified aproach to boundary value problem.* SIAM, 2008.

[48] A. S. Fokas and J. Lenells. Boundary-value problems for the stationary axi-symmetric einstein equations : a rotating disc. *Nonlinearity*, 24 :177–206, 2011.

[49] A. S. Fokas, L. Y. Sung, and D. Tsoubelis. The inverse spectral method for colliding gravitational waves. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry, Kluwer Academic Publishers*, 1 :331–330, 1999.

[50] O. Forster. *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer-Verlag, New-York, 1981.

[51] Fedor Dmitrievich Gakhov. *Boundary Value Problems.* 1990.

[52] P. R. Garabedian. *Partial Differential Equations.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, Reprint of the 1964 original, 1998.

[53] John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 96 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1981.

[54] R. P. Gilbert. Some properties of generalized axiallly symmetric potentials. *Amer. J. Math.*, 84 :475–484, 1962.

[55] R. P. Gilbert. On generalized axiallly symmetric potentials. *J. Reine Angew. Math.*, 212 :158–168, 1963.

[56] R. P. Gilbert. Poisson's equation and generalized axiallly potential theory. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 61 :337–348, 1963.

[57] R. P. Gilbert. Bergman's integral operator method in generalized axiallly symmetric potential theory. *J. Math. Physics*, 5 :983–997, 1964.

[58] R. P. Gilbert. *Constructive methods for elliptic equations.* Springer-Verlag, 1974.

[59] Loukas Grafakos. *Modern Fourier analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, second edition, 2009.

[60] P. Grisvard. *Elliptic problems in non-smooth domains.* 1985.

[61] D. W.Weinacht R. J. Hall, N. S. Quinn. Poisson integral formulas in generalized bi-axially symmetric potential theory. *SIAM J. Math. Anal.*, 5 :111–118, 1974.

[62] S. Ja. Havinson and G. C. Tumarkin. Classes of analytic functions on multiply connected domains. In *Issledovaniya po sovremennym problemam teorii funkciĭ kompleksnogo peremennogo*, pages 45–77. Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1960.

[63] P. Henrici. On the domain of regularity of generalized axiallly symmetric potentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 :29–31, 1957.

[64] A.R.P. Rau1 H.M. Srivastava2 H.S. Cohl1, J.E. Tohline1. Developments in determining the gravitational potential using toroidal functions. *Astron. Nachr.*, 321 :363–372, 2000.

[65] A. Huber. A theorem of phragmén-lindelöf type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 :852–857, 1953.

[66] A. Huber. On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials. *Annals of Mathematics*, Vol. 60, no 2 :351–358, 1954.

[67] A. Huber. Some results on generalized axially symmetric potentials. *Proceedings of the conference on differential equations (dedicated to A. Weinstein)*, pages 147–155, 1956.

[68] D. Jerison and C. Kenig. The inhomogeneous dirichlet problem in lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 130 :161–219, 1995.

[69] S. B. Klimentov. Hardy classes of generalized analytic functions. *Izvestia Vuzov Sev.-Kav. Reg., Natural Science*, 3 :6–10 (in Russian), 2003.

[70] S. B. Klimentov. Riemann–hilbert boundary value problem in the hardy classes of generalized analytic functions. *Izvestia Vuzov Sev.-Kav. Reg., Natural Science*, 4 :3–5 (in Russian), 2004.

[71] S. B. Klimentov. Duality theorem for the hardy classes of generalized analytic functions. *Complex Anal., Op. Theory., Math. Sim., Vladikavkaz Sc. Center of Russian Acad. Sc.*, pages 63–73 (in Russian), 2006.

[72] S. B. Klimentov. Riemann–hilbert boundary value problem for generalized analytic functions in smirnov classes. *Global and Stoch. Anal.*, 1 :217–240, 2011.

[73] Vladislav V. Kravchenko. *Applied pseudoanalytic function theory.* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. With a foreword by Wolfgang Sproessig.

[74] Loredana Lanzani and Elias M. Stein. Szegö and Bergman projections on non-smooth planar domains. *J. Geom. Anal.*, 14(1) :63–86, 2004.

[75] N.N. Lebedev. *Special functions and their applications.* Prentice-Hall, 1965.

[76] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1.* Dunod, 1968.

[77] Hong Liu. The cauchy problem for an axially symmetric equation and the schwarz potential conjecture for the torus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 250 :387–405, 2000.

[78] J. D. Love. The dielectric ring in a uniform, axial, electrostatic field. *J. Mathematical Phys.*, 13 :1297–1304, 1972.

[79] V. Maz'ya, M. Mitrea, and T. Shaposhnikova. The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients. *J. Anal. Math.*, 110 :167–239, 2010.

[80] J. Moser. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. *Indiana Univ. Math. J.*, 20 :1077–1092, 1970/71.

[81] K. M. Musaev. On some extreme properties of generalized analytic functions. *DAN SSSR*, 203 :289–292 ; English transl. in Sov. Math. Dokl. **13** (1972) 387–391., 1972.

[82] N. K. Nikolski. *Operators, Functions, and Systems : An Easing Reading, Volume 2.* AMS, 2002.

[83] Mukhtarbaj Otelbaevich Otelbaev. A contribution to the theory of Vekua's generalized analytic func- tions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 122 (2), 1984.

[84] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[85] T. V. Savina. On splitting up singularities of fundamental solutions to elliptic equations in $\mathbb{C}^2$. *Central European Journal of Mathematics*, 5 :733–740, 2007.

[86] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. 1978.

[87] J. Segura and A. Gil. Evaluation of toroidal harmonics. *Computer Physics Communications*, 124 :104–122, 2000.

[88] G. Ch. Shushkevich. Electrostatic problem for a torus and a disk. *Zh. Tekh. Fiz.*, 67 :123–125, 1997.

[89] L. Slavin and V. Vasyunin. Sharp results in the integral-form John-Nirenberg inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(8) :4135–4169, 2011.

[90] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[91] N. Theodorescu. *Thèse*. PhD thesis, Paris, 1931.

[92] T.Whittaker and G.N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge university press, 1963.

[93] B. Ph. van Milligen and A. Lopez Fraguas. Expansion of vacuum magnetic fields in toiroidal harmonics. *Computer Physics Communications*, 81 :74–90, 1994.

[94] I. N. Vekua. *Generalized analytic functions*. Pergamon Press, London, 1962.

[95] I.N. Vekua. *New methods for solving elliptic equations*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

[96] Nina Virchenko and Iryna Fedotova. *Generalized associated Legendre functions and their applications*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001. With a foreword by Semyon Yakubovich.

[97] G.N. Watson. *Theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 1922.

[98] R. J. Weinacht. Fundamental solutions for a class of singular equations. *Contributions to Differential equations*, 3 :43–55, 1964.

[99] R. J. Weinacht. A mean value theorem in generalized axially symmetric potential theory. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)*, 38 :610–613, 1965.

[100] R. J. Weinacht. Fundamental solutions for a class of equations with several singular coefficients. *J. Austral. Math. Soc.*, 8 :574–583, 1968.

[101] A. Weinstein. Discontinuous integrals and generalized potential theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 :342–354, 1948.

[102] A. Weinstein. On axiallly symmetric flow. *Quart. Appl. Math.*, 5 :429–444, 1948.

[103] A. Weinstein. On generalized potential theory and on the torsion of shafts. *Studies and essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday*, pages 451–460, 1948.

[104] A. Weinstein. On the torsion of shafts of revolution. *Proc. Seventh Internat. Congress Appl. Mech.*, 1 :108–119, 1948.

[105] A. Weinstein. Transonic flow and generalized axially symmetric potential theory. *Symposium on theoretical compressible flow*, 28 :73–82, 1949.

[106] A. Weinstein. On tricomi's equation and generalized axiallly symmetric potential theory. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, 37 :348–358, 1951.

[107] A. Weinstein. Generalized axially symmetric potential theory. *Bull. Amer. Math. Soc*, 59 :20–38, 1953.

[108] A. Weinstein. Elliptic and hyperbolic axially symmetric problems. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, III :264–269, 1954.

[109] A. Weinstein. The method of axial symmetry in partial differential equations. *Convegno Internazionale sulle Equationi Lineari alle Derivate Parziali, Trieste*, pages 86–96, 1954.

[110] A. Weinstein. The singular solutions and the cauchy problem for generalized tricomi equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 :105–116, 1954.

[111] A. Weinstein. The generalized radiation problem and the euler-poisson-darboux equation. *Summa. Brasil. Math*, 3 :125–147, 1955.

[112] A. Weinstein. On a class of partial differential equations of even order. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 39 :245–254, 1955.

[113] A. Weinstein. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles singulières. *La théorie des équations aux dérivées partielles, colloques Internationaux du CNRS*, LXXI :179–186, 1956.

[114] A. Weinstein. On a singular differential operator. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 49 :359–365., 1960.

[115] A. Weinstein. Singular partial differential equations and their applications. *Fluid Dynamics and Applied Mathematics (Proc. Sympos., Univ. of Maryland, 1961)*, pages 29–49, 1962.

[116] A. Weinstein. Some applications of theory of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics. *Appl. Theory of Functions in Continuum Mechanics (Proc. Internat. Sympos., Tbilisi, 1963), Fluid and Gas Mechanics, Math. Methods (Russian)*, Vol. II :440–453, 1965.

[117] G. Wen. *Recent progress in theory and applications of modern complex analysis.* 2010.

[118] William P. Ziemer. *Weakly differentiable functions*, volume 120 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation.