



HAL
open science

Conception optimale en mécanique des fluides numérique : approches hiérarchiques, robustes et isogéométriques

Régis Duvigneau

► **To cite this version:**

Régis Duvigneau. Conception optimale en mécanique des fluides numérique : approches hiérarchiques, robustes et isogéométriques. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Nice Sophia Antipolis, 2013. tel-00904328

HAL Id: tel-00904328

<https://theses.hal.science/tel-00904328>

Submitted on 14 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
École Doctorale SFA - Sciences Fondamentales et Appliquées

Conception Optimale en Mécanique des Fluides
Numérique : Approches Hiérarchiques,
Robustes et Isogéométriques

Mémoire pour l'obtention de l'

Habilitation à Diriger des
Recherches

Spécialité : Mathématiques appliquées

Présentée par

Régis DUVIGNEAU

à l'INRIA Sophia Antipolis, Equipe-Projet OPALE

le 3 Octobre 2013

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Rémi Abgrall	- Prof. Université de Bordeaux 1
	Christophe Corre	- Prof. Institut Nat. Polytechnique de Grenoble
	Olivier Pironneau	- Prof. Université Pierre et Marie Curie
<i>Examineurs :</i>	Jean-Antoine Désidéri	- DR INRIA Sophia Antipolis
	Mohammed Masmoudi	- Prof. Université Paul Sabatier
	Michel Visonneau	- DR CNRS Ecole Centrale de Nantes

Table des matières

1	Conception hiérarchique et adaptative	5
1.1	Stratégies pour la paramétrisation	5
1.1.1	Analyse de la convergence	5
1.1.2	Optimisation hiérarchique	7
1.1.3	Adaptation de la paramétrisation	14
1.2	Stratégies pour la modélisation	20
1.2.1	Pré-évaluations inexactes	20
1.2.2	Optimisation par processus Gaussiens	22
1.2.3	Application à l'optimisation de forme d'une voilure	25
1.2.4	Application à la réduction de choc en régime turbulent	27
1.3	Synthèse	32
2	Conception et analyse isogéométrique	33
2.1	Enjeux	33
2.2	Principes	34
2.3	Problèmes elliptiques	37
2.4	Problèmes hyperboliques	43
2.5	Application à l'optimisation et stratégies hiérarchiques	50
2.6	Synthèse	55
3	Conception robuste et estimation d'incertitude	57
3.1	Examen des concepts d'erreur et incertitude	57
3.2	Estimation d'incertitude	58
3.2.1	Estimation d'incertitude pour une fonctionnelle	59
3.2.2	Estimation d'incertitude pour l'écoulement	67
3.3	Optimisation robuste	73
3.3.1	Optimisation de critères statistiques	73
3.3.2	Optimisation de critères bruités	76
3.4	Synthèse	88
	Bibliographie	93

Introduction

La mécanique des fluides numérique a connu un développement significatif depuis trente ans et occupe actuellement une position incontournable dans de nombreux secteurs d'activité, comme les transports (aéronautique, automobile, naval). Les méthodes de simulation numérique sont utilisées à des fins d'analyse et de compréhension des phénomènes physiques, en complément des expériences, et de plus en plus dans un but de prédiction, en étant intégrés dans une approche de conception optimale.

Dans ce contexte, ce mémoire constitue une synthèse de mes activités de recherche dans le domaine de la conception optimale en mécanique des fluides numérique. Ces travaux ont débuté à l'École Centrale de Nantes, au sein du Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique CNRS UMR-6598, où j'ai développé des méthodes adaptées au contexte de l'hydrodynamique navale. Durant ma thèse de doctorat, encadrée par M. Visonneau, j'ai considéré des problèmes d'optimisation de carènes de navires en conditions réelles, ce qui a nécessité de construire des algorithmes spécifiques et robustes pour surmonter les obstacles liés aux géométries et modélisations complexes.

J'ai poursuivi mes travaux à l'École Polytechnique de Montréal, au sein de la Chaire de Recherche du Canada en Analyse, Caractérisation et Optimisation d'Écoulements Complexes, où j'ai plus particulièrement étudié le calcul des sensibilités de forme. J'ai apporté une contribution méthodologique à la précision des conditions aux limites pour l'équation des sensibilités continues, dans le cas de paramètres géométriques. Ces développements ont été appliqués à l'optimisation, à l'estimation rapide de solutions voisines et à la quantification d'incertitude géométrique, dans le contexte des équations de Navier-Stokes incompressible.

Enfin, mes activités de recherche récentes se sont déroulées au sein de l'Équipe-Projet Opale du Centre INRIA Sophia-Antipolis Méditerranée. J'y ai mené des travaux concernant les méthodes hiérarchiques, pour la paramétrisation des formes et l'évaluation des fonctions coûts, l'analyse isogéométrique et l'estimation d'incertitude pour l'optimisation robuste, appliqués principalement à l'aérodynamique compressible.

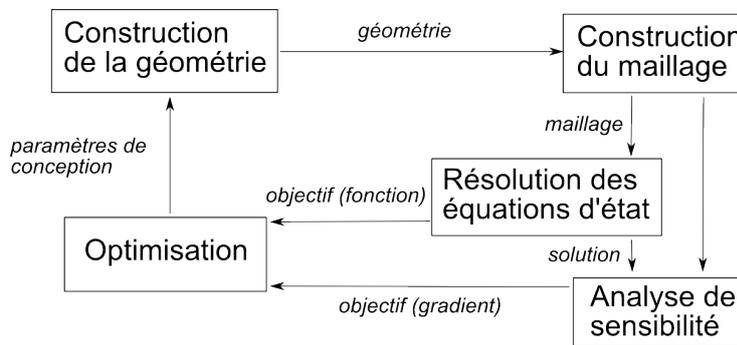
De manière générale, ces différents développements méthodologiques ont été motivés par deux objectifs majeurs :

- Résoudre des problèmes avec une *complexité* croissante, tant du point de vue de la géométrie que des phénomènes physiques impliqués ;
- Résoudre des problèmes avec une *efficacité* croissante, tant du point de vue du temps de calcul que de la qualité du résultat obtenu.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour objet la résolution de problèmes d'optimisation de forme paramétrique pour des systèmes régis par les équations de la mécanique des fluides :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} j(\mathbf{x}, W(\mathbf{x})),$$

où \mathbf{x} désigne le vecteur des paramètres définissant la forme à optimiser et $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ le domaine de conception, j représente la fonctionnelle coût et W les variables d'état, dépendant de \mathbf{x} par la résolution des équations aux dérivées partielles régissant l'écoulement. D'un point de vue algorithmique, ces problèmes sont résolus par une approche itérative, dont les principales étapes sont illustrées par la figure suivante :



Cette présentation générale met en évidence la complexité de la résolution et souligne deux caractéristiques fondamentales des problèmes d'optimisation abordés : *les paramètres d'optimisation définissent une forme et la fonction de coût dépend de la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles*. Ces deux spécificités sont à l'origine de nombreuses difficultés. Par conséquent, mes travaux de recherche ont concerné principalement deux thèmes :

Les verrous liés à la résolution des équations aux dérivées partielles Chaque évaluation de la fonction coût nécessite la résolution numérique des équations d'état. Lorsqu'il s'agit de simuler des écoulements turbulents pour des configurations tridimensionnelles, le temps de calcul devient un facteur limitant (typiquement plusieurs heures de calcul sur cluster pour chaque évaluation). Dans le contexte de la conception optimale, cela m'a conduit à développer des stratégies d'optimisation basées sur une *modélisation hiérarchique*, à l'aide de *techniques d'apprentissage statistique*, dans le but de réduire l'utilisation des modèles coûteux. Ces travaux, partiellement menés en collaboration avec P. Chandrashekar du Tata Institute for Fundamental Research de Bangalore, sont décrits dans le premier chapitre de ce mémoire.

Une seconde caractéristique de la simulation réside dans le fait que la résolution est inexacte, fournissant une solution incluant des erreurs (de modélisation, de discrétisation, itérative). Cette constatation m'a poussé à développer des *méthodes d'optimisation robustes vis à vis des erreurs issues des simulations*. De plus, malgré la précision croissante des simulations, un écart par rapport à la réalité est inévitable, dû à un manque de connaissance du problème (conditions d'entrée / sortie, détails géométriques, etc). Je me suis donc intéressé à la construction de *méthodes d'optimisation robustes vis à vis des incertitudes*. Ces travaux sont présentés dans le troisième chapitre de ce mémoire. Certains résultats, reposant sur

les techniques de différentiation automatique, sont issus d'une collaboration avec M. Martinelli de l'Equipe-Projet INRIA Tropics, tandis que les résultats concernant les calculs de sensibilités ont été obtenus en collaboration avec D. Pelletier de l'Ecole Polytechnique de Montréal.

Les verrous liés au traitement de la géométrie Les problèmes d'optimisation de forme sont caractérisés par une forte anisotropie de la fonction coût, qui peut réduire fortement l'efficacité des algorithmes d'optimisation. Pour tenter de surmonter cette difficulté, j'ai participé au développement de stratégies d'optimisation incluant une *paramétrisation des formes hiérarchique et adaptative*, en forte interaction avec J.-A. Désidéri et ses doctorants au sein de l'Equipe-Projet INRIA Opale. Ces aspects sont détaillés dans le premier chapitre de ce mémoire.

De plus, la géométrie est présente à plusieurs titres dans la boucle de conception optimale, généralement avec des représentations différentes : la forme paramétrique à optimiser et le maillage décrivant le domaine de calcul. Cette dualité de la représentation est la source de nombreuses difficultés et approximations, qui nuisent à l'efficacité. Ce constat m'a amené à développer des méthodes isogéométriques, s'appuyant sur *une base unique pour la modélisation géométrique et la résolution des équations d'état*, de manière à obtenir une meilleure intégration de la géométrie et la simulation. Ces travaux ont donné lieu à une collaboration avec B. Mourrain de l'Equipe-Projet INRIA Galaad. Ces développements sont décrits dans le second chapitre de ce mémoire.

Ces différents travaux montrent que la conception optimale en mécanique des fluides numérique ne se limite pas à une mise en oeuvre de méthodes numériques existantes, mais nécessite de développer de nouvelles méthodes, pour aboutir à une conception optimale efficace.

Les chapitres suivants proposent quelques pistes pour tenter de surmonter les difficultés évoquées ci-dessus. Le premier chapitre est consacré au développement des méthodes hiérarchiques pour la paramétrisation et la modélisation, visant à améliorer la convergence de l'optimisation. Ces travaux sont principalement d'ordre algorithmique. Le second chapitre aborde la problématique de l'interaction entre la géométrie et la simulation et examine les méthodes d'analyse isogéométrique, dans la perspective de la résolution des équations aux dérivées partielles et de l'optimisation de forme. Le troisième chapitre concerne enfin l'estimation d'incertitude et le développement de méthodes d'optimisation robustes vis à vis des incertitudes et des erreurs issues de la simulation.

Conception hiérarchique et adaptative

Sommaire

1.1 Stratégies pour la paramétrisation	5
1.1.1 Analyse de la convergence	5
1.1.2 Optimisation hiérarchique	7
1.1.3 Adaptation de la paramétrisation	14
1.2 Stratégies pour la modélisation	20
1.2.1 Pré-évaluations inexactes	20
1.2.2 Optimisation par processus Gaussiens	22
1.2.3 Application à l'optimisation de forme d'une voilure	25
1.2.4 Application à la réduction de choc en régime turbulent	27
1.3 Synthèse	32

Améliorer l'efficacité des algorithmes de conception optimale est un enjeu important pour favoriser l'émergence de ces méthodes dans l'industrie. Deux obstacles sont principalement rencontrés : le coût de chaque évaluation et la convergence souvent médiocre des algorithmes d'optimisation, liée au caractère anisotrope de la fonction coût. Pour surmonter ces difficultés, on examine deux approches : la première basée sur une modification de l'espace des paramètres et la seconde s'appuyant sur une modification du modèle utilisé pour estimer la fonction coût. On cherche par cette démarche à accélérer la convergence et améliorer la précision de la solution.

1.1 Stratégies pour la paramétrisation

Le résultat obtenu par une approche de conception optimale de forme, en terme de précision et de convergence, dépend grandement du choix de la paramétrisation utilisée. Dans une première partie, on va donc s'attacher à améliorer l'efficacité des algorithmes en s'intéressant à la définition de l'espace des paramètres. Cette thématique est un axe de recherche majeur de l'Equipe-Projet INRIA Opale. Ma contribution, présentée dans les paragraphes suivants, a concerné l'extension de ces approches aux algorithmes semi-stochastiques et hybrides, et aux géométries complexes tridimensionnelles.

1.1.1 Analyse de la convergence

L'analyse de la convergence des algorithmes pour différents problèmes d'optimisation de forme fournit plusieurs pistes intéressantes pour la construction de stratégies d'accélération.

A des fins d'illustration, on considère dans un premier temps un simple problème de minimisation d'une fonction quadratique et on observe l'évolution de l'erreur, décomposée sur la base des vecteurs propres de la matrice Hessienne ordonnés selon les valeurs propres croissantes. La figure (1.1) correspond à un problème de dimension $n = 12$, la matrice Hessienne ayant un conditionnement de valeur $c = 1.8 \cdot 10^4$. Les détails de cette expérience numérique pourront être trouvés dans [Benzaoui 2009]. L'optimisation est réalisée à l'aide de la méthode déterministe sans gradient "*Multi-directional Search Algorithm*" (MSA) de Torczon [Dennis 1991]. On constate que les modes associés aux fortes valeurs propres sont réduits plus rapidement que ceux associés aux faibles valeurs propres. En effet, l'algorithme progresse selon une direction qui permet une réduction maximale de la fonction coût, correspondant aux grandes valeurs propres.

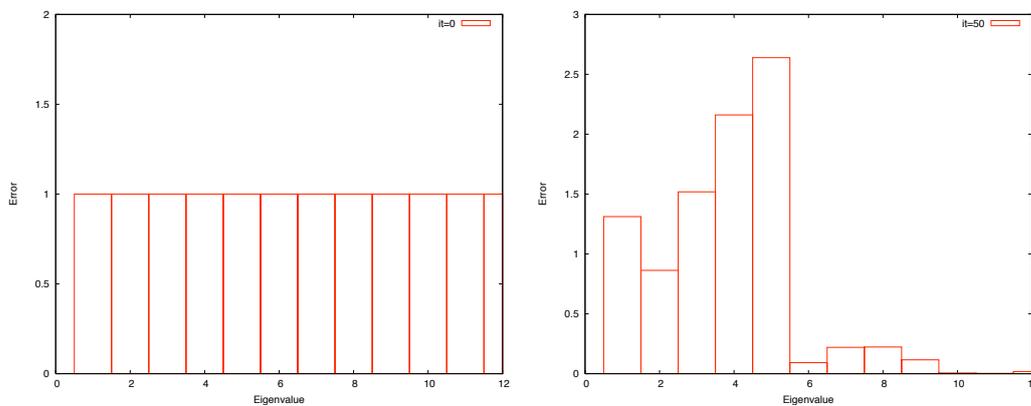


FIGURE 1.1 – Erreur décomposée sur la base des vecteurs propres de la matrice Hessienne ordonnés selon les valeurs propres croissantes : initialement (gauche) et après 50 itérations (droite).

On considère maintenant un problème d'optimisation de forme : l'analyse des modes propres et des valeurs propres de la matrice Hessienne de la fonction coût, pour un problème d'optimisation de forme paramétrique typique, montre que :

1. les modes propres correspondent à des formes de différentes fréquences (type "Fourier") ;
2. les fortes valeurs propres sont associées aux modes de basse fréquence et les faibles valeurs propres aux modes de haute fréquence ;
3. le conditionnement de la matrice Hessienne augmente très rapidement avec le degré de la paramétrisation.

Ce phénomène a notamment été mis en évidence par J.-A. Désidéri et ses co-auteurs pour des problèmes de reconstruction géométrique [Désidéri 2006] et des problèmes inverses en électromagnétisme [Chaigne 2009, Chaigne 2011]. L'appariement des modes de hautes fréquences aux faibles valeurs propres se traduit par une convergence plus difficile pour ceux-ci, lors de l'emploi d'une méthode de descente. En pratique, cela signifie que quelques itérations d'une méthode de descente permettent d'obtenir une bonne approximation globale de la forme optimale, mais que l'obtention des caractéristiques locales nécessite un nombre d'itérations beaucoup plus important.

1.1.2 Optimisation hiérarchique

1.1.2.1 Méthodes

L'analyse de convergence des problèmes d'optimisation de forme paramétrique, réalisée ci-dessus, pousse à construire des approches hiérarchiques inspirées de la *methodologie multigrille* utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

En effet, les méthodes itératives mises en oeuvre pour la résolution des systèmes linéaires issus de la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles (Jacobi, Gauss-Seidel, etc) sont des *lisseurs*, dans la mesure où quelques itérations conduisent à une élimination des modes haute-fréquence de l'erreur, pour un maillage donné. Les stratégies multigrilles consistent alors à accélérer la résolution en réduisant les différentes fréquences d'erreur successivement, sur des maillages de différente finesse. Pour chaque maillage, les hautes fréquences de l'erreur sont éliminées en quelques itérations; une correction basse fréquence est alors cherchée en résolvant un problème de correction sur un maillage plus grossier, et ainsi de suite. Les passages de la solution et des corrections d'un maillage à l'autre sont assurés par un opérateur de *restriction* et un opérateur de *prolongement* [Wesseling 1992, Hackbusch 1985].

Avant d'appliquer une stratégie similaire dans le cadre de l'optimisation de forme, il faut noter une différence fondamentale : l'appariement entre les modes propres et les valeurs propres est opposé : contrairement au cas de la résolution des équations aux dérivées partielles, un algorithme d'optimisation de type descente réduit efficacement les modes basse fréquence de l'erreur, agissant ainsi comme un *anti-lisseur*.

A partir de ces observations, un algorithme d'optimisation hiérarchique s'appuyant sur une paramétrisation de la forme par une courbe de Bézier a été développé par J.-A. Désidéri et ses co-auteurs [Désidéri 2007b] et appliqué à un problème modèle de reconstruction géométrique, puis à une optimisation aérodynamique sur la base d'un volume de Bézier par B. Abou El Majd [Majd 2007, Majd 2008] et à des problèmes inverses en électromagnétique par B. Chaigne [Chaigne 2011, Chaigne 2009]. Les principaux ingrédients méthodologiques sont les suivants :

1. **Un opérateur de transfert** permettant le passage de la solution et des corrections d'un niveau à l'autre. Dans le contexte de l'optimisation de forme paramétrique, la propriété d'élévation du degré ou d'insertion de noeuds [Sabin 1993, Farin 1989] est utilisée pour exprimer identiquement une forme à n points de contrôle par une forme à $n + 1$ points de contrôles. Cela définit l'opérateur de prolongation. L'emploi d'un opérateur de restriction est évité en appliquant l'opérateur de prolongation à chaque correction basse fréquence. Ainsi, toutes les évaluations sont réalisées sur le niveau le plus fin et on résout le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Minimiser } j(\mathbf{x}_g) = J(\mathbf{x}_f^0 + E_g^f \mathbf{x}_g), \quad (1.1)$$

où \mathbf{x}_g est le vecteur des paramètres de conception pour le niveau grossier, \mathbf{x}_f^0 le vecteur des paramètres de référence pour le niveau fin, E_g^f l'opérateur de prolongation du niveau grossier au niveau fin et J la fonctionnelle définie pour le niveau fin ;

2. **Un schéma de résolution hiérarchique**, qui définit la séquence des niveaux utilisés. Les travaux mentionnés ci-dessus se sont basés sur des schémas identiques à ceux utilisés pour les méthodes multigrilles : enrichissement progressif, V-cycle et

"Full Multi-Grid" (FMG). Ces schémas sont illustrés par les tables (1.1,1.2,1.3), où \nearrow représente l'opérateur d'élévation du degré, $\oplus\delta$ la procédure de correction et \square l'application d'un algorithme d'optimisation sur un niveau donné ;

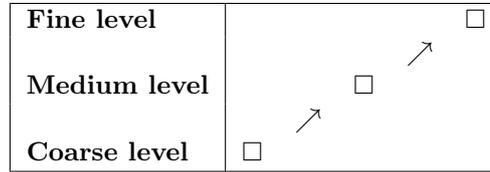


TABLE 1.1 – Schéma d'enrichissement progressif

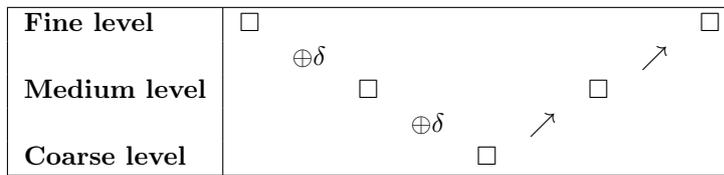


TABLE 1.2 – Schéma V-cycle

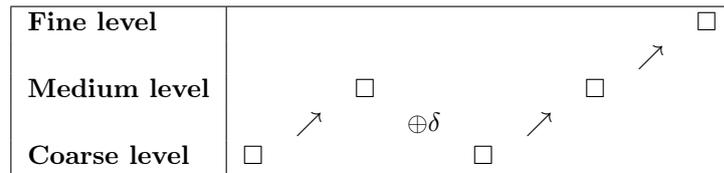


TABLE 1.3 – Schéma FMG

3. **Une méthode d'optimisation** permettant de réduire efficacement les hautes fréquences de l'erreur pour une paramétrisation donnée. Comme expliqué précédemment, les méthodes de descente se comportent comme des anti-lisseurs ; J.-A. Désidéri a donc proposé [Désidéri 2006] de composer l'opérateur de prolongement avec un opérateur de permutation agissant dans la base propre de la matrice Hessienne qui inverse l'appariement des fréquences et des valeurs propres. Une solution alternative, proposée dans [Chaigne 2009], consiste à utiliser une base de fonctions orthogonales.

Une étude très proche, basée également sur une définition paramétrique des formes a été réalisée par M. Martinelli [Martinelli 2007]. Enfin, il convient de mentionner des travaux similaires menés sur la base d'une approche *CAD-free* à l'aide de méthodes de type multi-grille, parfois associées à une approche "*one-shot*" [Ta'asan 1994, Beux 1993, Courty 2006, Catalano 2005].

1.1.2.2 Extension aux approches semi-stochastique et hybrides

Sur la base de ces travaux, j'ai étendu l'approche hiérarchique aux algorithmes d'optimisation semi-stochastiques, tels les algorithmes génétiques [Goldberg 1989] ou l'optimisation par essaim de particules [Kennedy 1995], puis aux algorithmes hybrides, combinant ces derniers à des méthodes de descente. Ces développements se justifient par la constatation que les méthodes semi-stochastiques sont utiles pour la résolution de certains problèmes, par exemple lorsqu'aucun point de départ ne s'impose *a priori* ou lorsque le problème est fortement multimodal. De plus, la construction d'algorithmes hiérarchiques

semble particulièrement indiquée dans ce contexte, étant donné le coût prohibitif de ces méthodes, qui croît fortement avec la dimension du problème.

La différence fondamentale avec les approches précédentes vient du fait qu'il n'est pas possible d'analyser la convergence de ces algorithmes en terme de réduction des différentes fréquences d'erreur. La construction des stratégies hiérarchiques doit donc s'appuyer sur d'autres considérations. L'algorithme proposé se base sur les observations suivantes :

1. Pour la plupart des algorithmes semi-stochastiques, converger vers la solution globale nécessite *une taille de population croissant linéairement avec la dimension du problème*, et *un nombre de générations croissant de manière quadratique* (au mieux de manière linéaire pour les méthodes les plus performantes [Hansen 2003]) ;
2. Les algorithmes semi-stochastiques possèdent généralement *un taux de convergence asymptotique linéaire, dont la valeur est inversement proportionnelle à la dimension du problème*, pour une taille de population fixée [Auger 2005].

Dans le contexte qui nous intéresse, la recherche globale est donc efficace seulement lorsque la dimension du problème est modérée. La précision obtenue (convergence locale) est d'autant plus mauvaise que la dimension est importante.

On cherche à construire un algorithme hiérarchique permettant de palier ces défauts. La stratégie proposée consiste à réaliser une séquence de recherches sur des niveaux de dimension croissante, de manière à conduire la recherche globale dans les espaces de faible dimension, et faciliter la convergence locale dans les espaces de dimension plus élevée. On va donc s'appuyer sur un schéma d'enrichissement progressif : à chaque niveau, un algorithme d'optimisation semi-stochastique est mis en oeuvre en tirant parti du meilleur point trouvé sur le niveau précédent, combiné à une mise à l'échelle des variables permettant de restreindre progressivement le domaine de recherche. Cette stratégie se base sur l'intuition qu'*une recherche globale dans les espaces correspondant à une paramétrisation grossière conduit à un point proche de l'optimum pour une paramétrisation fine*. Cette hypothèse sera vérifiée pour les problèmes qui nous intéressent ici.

Cette stratégie est mise en oeuvre sur la base d'un algorithme d'optimisation par essaim de particules "*Particle Swarm Optimization*" (PSO)[Shi 1998, Venter 2003, Kennedy 1995, Clerc 2002, Fourie 2002], mais elle est *a priori* compatible avec de nombreux autres algorithmes, comme les stratégies d'évolution. L'algorithme PSO, inspirée de l'intelligence collective des essaims, consiste à ensemençer l'espace de recherche avec un ensemble de particules, puis à suivre le mouvement de celles-ci, influencé par la meilleure position trouvée par chaque particule (mémoire locale) et la meilleure position trouvée par l'essaim (mémoire globale). Ces deux tendances définissent un équilibre entre recherche locale et globale.

Sur la base d'un algorithme PSO standard, la méthode d'optimisation hiérarchique proposée se décrit comme suit :

1. Début de recherche sur le niveau l ;
2. Initialisation aléatoire de la position de p particules $(\mathbf{x}_i^0)_{1 \leq i \leq p}$ dans l'intervalle $[\mathbf{x}^{MIN}|_l, \mathbf{x}^{MAX}|_l]$ et de leur vitesse $(v_i^0)_{1 \leq i \leq p}$;
Initialisation du paramètre d'inertie ω^0 ;
 $k \leftarrow 0$;
3. Début de l'itération k ;
4. Calcul de la performance pour chaque particule $i, j(\mathbf{x}_i^k)_{1 \leq i \leq p}$;

5. Mise à jour de la mémoire individuelle pour chaque particule i :

$$(\mathbf{x}_i^*)_{1 \leq i \leq p} = \arg \min(j(\mathbf{x}_i^*), j(\mathbf{x}_i^k))$$

et de la mémoire collective de l'essaim :

$$\mathbf{x}^*|_l = \arg \min_i(j(\mathbf{x}_i^*)) \quad (1.2)$$

6. Test de mise à jour du paramètre d'inertie :

$$\text{Si } j(\mathbf{x}^*|_l)|_k = j(\mathbf{x}^*|_l)|_{k-h} \text{ alors } \omega^k = \alpha \omega^{k-1};$$

7. Calcul de la vitesse pour chaque particule i :

$$v_i^k = \omega^k v_i^{k-1} + c_1 r_1 (\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i^k) + c_2 r_2 (\mathbf{x}^*|_l - \mathbf{x}_i^k) \quad 1 \leq i \leq p;$$

8. Application d'un opérateur de perturbation de la direction de la vitesse avec une probabilité p_c ;

9. Mise à jour de la position des particules :

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k + v_i^k;$$

10. Si la condition de convergence est atteinte, aller à (11);

sinon $k \leftarrow k + 1$ et retour à (3);

11. Fin de la recherche sur le niveau l ;

12. Application de la procédure d'élévation du degré pour $\mathbf{x}^*|_l$ pour déterminer la mémoire initiale collective $\mathbf{x}^*|_{l+1}$ pour le niveau suivant $l + 1$;

13. Détermination de l'intervalle de recherche pour le niveau suivant : $[\mathbf{x}^{MIN}|_{l+1}, \mathbf{x}^{MAX}|_{l+1}]$ tel que

$$\mathbf{x}^*|_{l+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{MIN}|_{l+1} + \mathbf{x}^{MAX}|_{l+1}),$$

et

$$\mathbf{x}^{MAX}|_{l+1} - \mathbf{x}^{MIN}|_{l+1} = \beta(\mathbf{x}^{MAX}|_l - \mathbf{x}^{MIN}|_l);$$

Si le niveau fin est atteint, alors arrêter;

Sinon $l \leftarrow l + 1$ et retour à (1).

Les étapes (2) à (10) correspondent à l'application d'un algorithme PSO standard pour un niveau de paramétrisation donné. Il faut souligner que *l'influence d'un niveau sur le niveau suivant se fait par l'intermédiaire de la mémoire collective de l'essaim* qui agit comme un attracteur pour les particules, tandis que la *ré-initialisation aléatoire des particules assure une exploration du nouvel espace de conception*. Les expériences ont montré que cet équilibre entre utilisation de la recherche précédente et nouvelle exploration est la clé du succès de l'algorithme [Duvigneau 2006a].

De manière à améliorer la convergence locale de l'algorithme, une stratégie d'hybridation avec une méthode déterministe est proposée, dans un contexte d'optimisation hiérarchique : la convergence locale pour un algorithme semi-stochastique étant particulièrement dégradée lorsque la dimension est élevée, on propose d'hybrider le schéma en introduisant *une recherche déterministe uniquement sur le niveau le plus fin*. Différents essais ont montré que l'algorithme est plus robuste lorsque ces phases de descente ont lieu après chaque recherche semi-stochastique [Duvigneau 2006a]. Cela peut s'expliquer par le fait que la mémoire globale initiale sur le niveau suivant est ainsi mieux positionnée. Par suite, le schéma obtenu (cycle en F) est décrit dans la table suivante (le symbole Δ représentant la méthode de descente) :

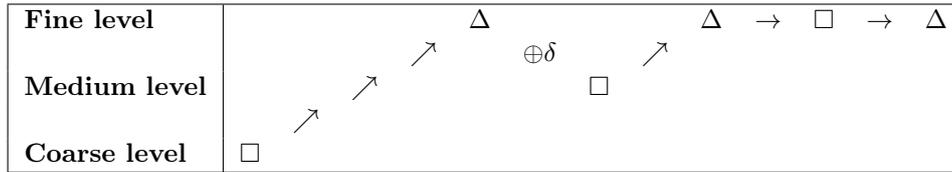


TABLE 1.4 – Schéma hiérarchique hybride

1.1.2.3 Application à l'optimisation de forme d'une voilure pour un jet supersonique

Pour illustrer ces méthodologies, on considère un problème d'optimisation de forme d'une voilure d'un jet d'affaire supersonique. L'écoulement autour de cette géométrie est simulé par résolution des équations d'Euler compressible en régime stationnaire (Mach 1.7, incidence 1°) par une méthode de type volumes-finis [Dervieux 1992, Kloczko 2008a] reposant sur un maillage tétraédrique. La géométrie initiale de l'avion est représentée sur la figure (1.2). Le maillage compte 173526 noeuds et est représenté dans le plan de symétrie par la figure (1.3). L'écoulement est caractérisé par un ensemble d'ondes de choc de forme conique, illustré par la figure (1.3).



FIGURE 1.2 – Géométrie du modèle d'avion supersonique (gauche) et positionnement de la contrainte d'encombrement (droite).

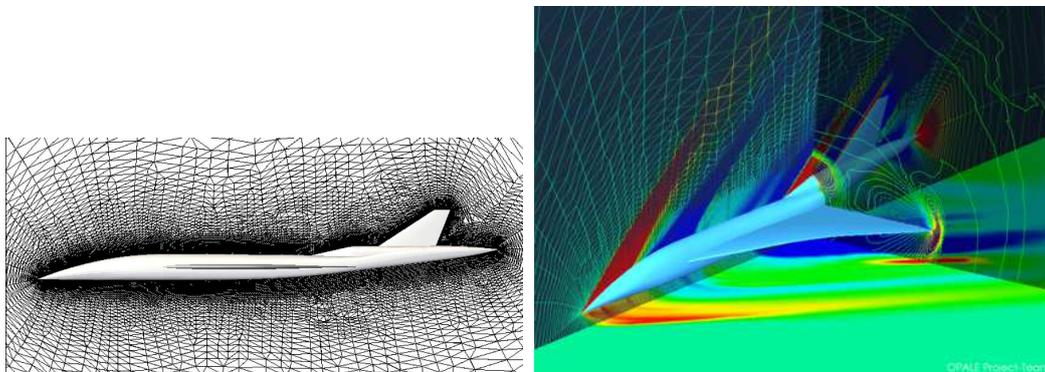


FIGURE 1.3 – Maillage dans le plan de symétrie (gauche) et champ de pression (droite).

Le problème d'optimisation consiste à réduire la traînée sous contraintes de maintien de la portance (tolérance 0.1%), de non pénétration dans un espace intérieur à l'aile représenté sur la figure (1.2) et de conservation du volume de la voilure. Les contraintes sont prises en compte par pénalisation [Duvigneau 2008b].

La déformation de la voilure est réalisée par une méthode "Free-Form Deformation" (FFD) [Sederberg 1986, Samareh 2001], qui s'appuie sur un volume tensoriel de Bézier. En considérant différents degrés de paramétrisation dans la direction longitudinale, on définit une paramétrisation hiérarchique à trois niveaux. Ceux-ci comptent respectivement 8, 24 et 40 variables et sont représentés par la figure (1.4).

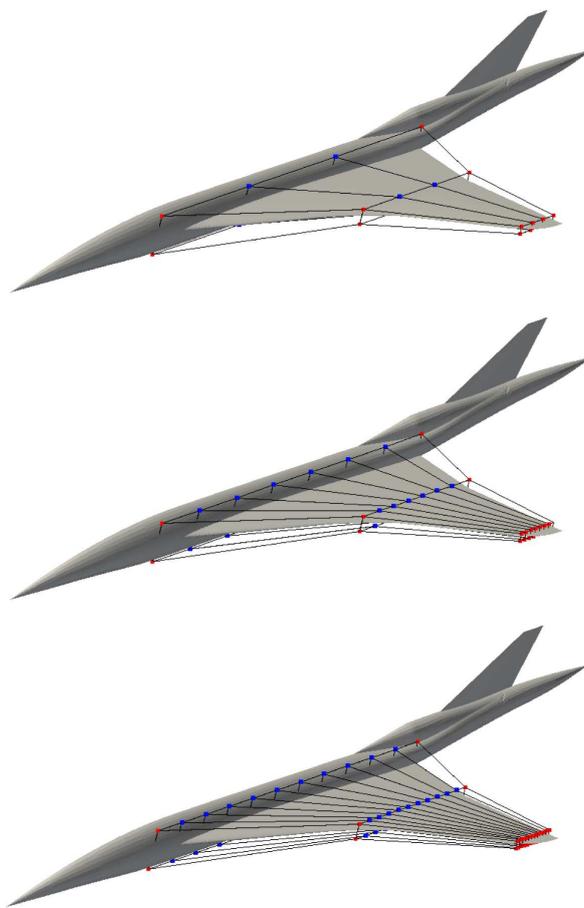


FIGURE 1.4 – Paramétrisation grossière (haut), moyenne (milieu) et fine (bas) par l'approche FFD. Les points de contrôle bleus sont mobiles verticalement.

Les expériences numériques sont réalisées à l'aide de l'algorithme PSO hiérarchique décrit précédemment et l'algorithme "Multi-directional Search Algorithm" (MSA) [Dennis 1991] comme méthode déterministe. La figure (1.5) montre le résultat obtenu avec l'algorithme PSO hiérarchique proposé, comparé à l'utilisation d'une méthode PSO sur le niveau fin uniquement. L'emploi d'une stratégie hiérarchique permet de réduire de façon significative la population utilisée et d'accélérer la convergence, tout en réalisant une recherche globale efficace. L'intuition selon laquelle une recherche globale avec une paramétrisation grossière conduit à un point proche de l'optimum pour une paramétrisation

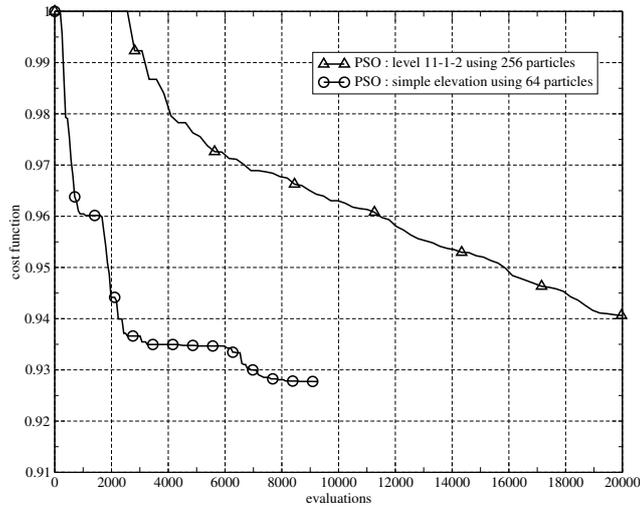


FIGURE 1.5 – Convergence de l’algorithme PSO pour un schéma d’élévation progressive.

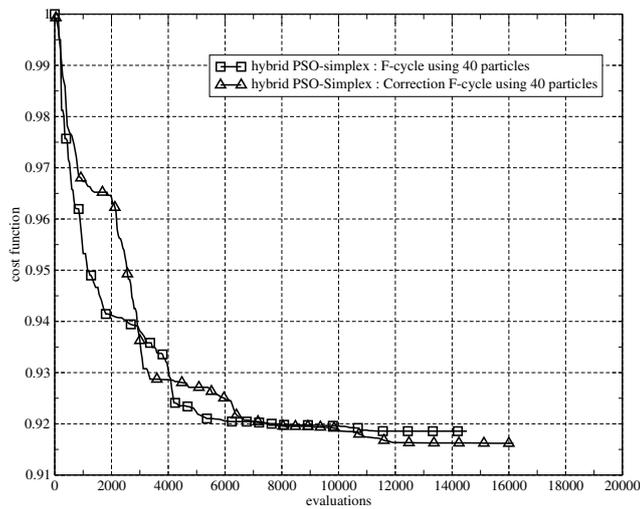


FIGURE 1.6 – Convergence de l’algorithme hybride pour deux variantes.

fine semble bien vérifiée pour ce problème.

Les résultats obtenus avec l’algorithme hiérarchique hybride présenté précédemment, ainsi qu’avec une variante consistant à débiter par quelques itérations sur le niveau fin, sont exposés sur la figure (1.6). L’hybridation permet d’accélérer encore l’optimisation et améliorer la précision obtenue. L’emploi de cette stratégie, comparée à l’utilisation naïve de la méthode MSA pour la paramétrisation fine seule, aboutit à une réduction de traînée accrue de 55%, pour un coût de calcul similaire. L’amélioration modeste obtenue par la méthode MSA montre que le problème est multi-modal sur le niveau fin. La comparaison avec l’utilisation naïve de la méthode PSO pour la paramétrisation fine seule n’est pas vraiment possible, car la convergence de celle-ci n’a pu être atteinte dans la limite de 20 000 simulations.

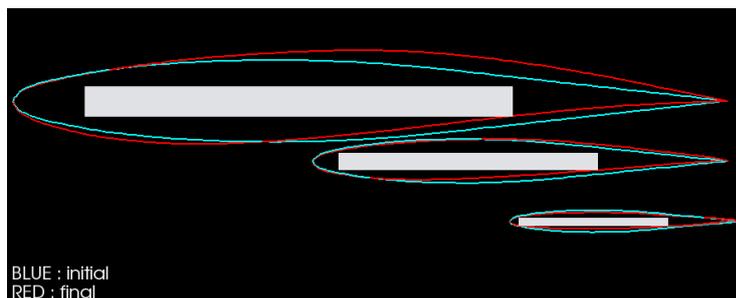


FIGURE 1.7 – Forme initiale (bleu) et optimale (rouge) obtenues par l’algorithme hiérarchique hybride, contrainte d’encombrement (gris).

La forme optimale trouvée par l’algorithme hiérarchique hybride, illustrée par la figure (1.7), montre que la contrainte d’encombrement est saturée en certains points de la voilure.

Ces expériences montrent finalement qu’une approche hiérarchique hybride permet de *réaliser en dimension élevée une recherche de l’optimum global*, pour un coût de calcul réduit. Dans le paragraphe suivant, on va s’intéresser à améliorer les propriétés de convergence sur un niveau donné.

1.1.3 Adaptation de la paramétrisation

En optimisation de forme paramétrique, les formes sont projetées sur un espace de conception de très faible dimension. Par conséquent, la forme optimale obtenue à l’issue d’une optimisation de forme paramétrique *dépend du choix de la paramétrisation*. Ainsi, un choix de paramétrisation fait *a priori*, parfois de manière naïve, peut conduire à une forme optimale de qualité médiocre. Cet aspect est très souvent ignoré dans les études industrielles. Pour surmonter cette difficulté, J.-A. Désidéri a proposé d’introduire une phase d’adaptation de la paramétrisation, sur la base d’une première approximation de la forme optimale, qui a été testée et validée sur un problème de reconstruction géométrique [Désidéri 2007b]. Ma contribution a consisté à étendre cette approche au contexte de l’optimisation aérodynamique basée sur une paramétrisation de type FFD reposant sur un produit tensoriel de Bézier.

1.1.3.1 Méthode

La méthode proposée consiste à réaliser une première phase d’optimisation, sur la base d’une paramétrisation initiale, permettant d’estimer la *qualité de la paramétrisation* à partir de la forme optimale obtenue. Dans une seconde phase, on adapte la paramétrisation en modifiant certaines de ses caractéristiques, à forme constante au sens des moindres carrés, de façon à maximiser l’estimation de la qualité. Enfin, une nouvelle phase d’optimisation peut être menée sur la base de la paramétrisation adaptée. Ce processus peut être poursuivi de manière itérative jusqu’à convergence.

Les points clés pour construire une méthode efficace sont :

1. La définition du critère de qualité pour la paramétrisation, étant donné une forme optimale trouvée ;
2. La définition des caractéristiques de la paramétrisation à modifier pendant la phase d’adaptation.

Pour le problème de reconstruction géométrique étudié par J.-A. Désidéri et ses co-auteurs [Désidéri 2007b], la paramétrisation repose sur une courbe de Bézier, dont la position verticale des points de contrôle représente les paramètres d'optimisation. Dans ce contexte, le critère de qualité introduit est la variation totale des paramètres d'optimisation. Ce critère se justifie par l'observation que la procédure d'optimisation tend à produire à convergence un polygone de contrôle très irrégulier. Au contraire, lorsque le nombre de points de contrôle tend vers l'infini, le polygone de contrôle doit tendre vers la courbe [Sabin 1993, Farin 1989], qui est régulière. Ainsi, un polygone de contrôle irrégulier semble être une caractéristique d'une paramétrisation mal adaptée. Les variables d'adaptation choisies correspondent aux coordonnées horizontales des points de contrôle. Durant l'adaptation celles-ci sont donc modifiées de manière à minimiser le critère d'adaptation, tout en maintenant la forme constante au sens des moindres carrés.

Pour une déformation de type FFD, basée sur un volume de Bézier, le déplacement est défini à l'aide d'un système de paramètres $(s, t, u) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. La position d'un point q intérieur au volume de contrôle s'écrit donc [Sederberg 1986] :

$$q = \sum_{i=0}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} \sum_{k=0}^{n_k} B_i^{n_i}(s_q) B_j^{n_j}(t_q) B_k^{n_k}(u_q) P_{ijk}, \quad (1.3)$$

où B_i^n correspond au polynôme de Bernstein de degré n d'indice i , tandis que (s_q, t_q, u_q) est issu d'une transformation homéomorphe des coordonnées (ξ_q, η_q, ζ_q) , attachées au volume de contrôle. Cette transformation est généralement l'identité ou une transformation linéaire. Les coefficients P_{ijk} (position des points de contrôle du volume de Bézier) sont considérés comme variables d'optimisation. La figure (1.8) illustre le processus de déformation FFD pour une voileure.

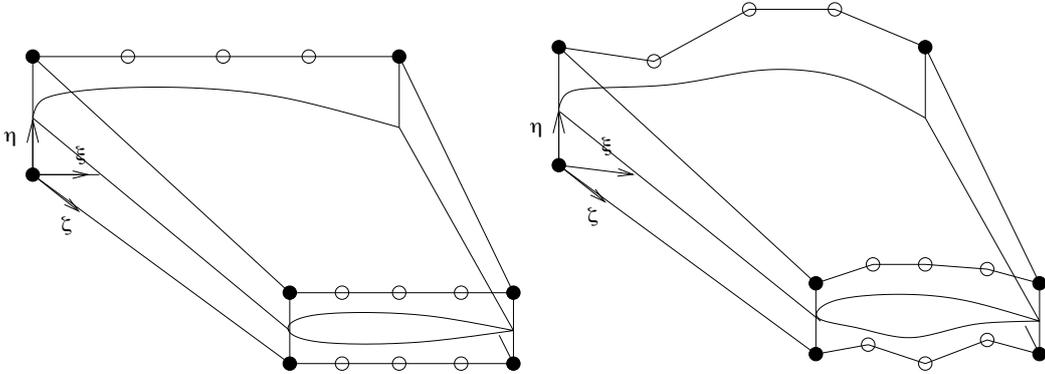


FIGURE 1.8 – Illustration de la déformation FFD pour une voileure initiale (gauche) et déformée (droite).

Dans ce contexte, le critère d'adaptation que je propose est une extension de celui utilisé dans [Désidéri 2007b] et mesure l'irrégularité du réseau des points de contrôle du volume de Bézier :

$$j_{AD} = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} \left\| \overline{\nabla} P_{ijk} \right\| V_{ijk} \approx \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \int_{\zeta_{min}}^{\zeta_{max}} \left\| \overline{\nabla} P(\xi, \eta, \zeta) \right\| d\xi d\eta d\zeta, \quad (1.4)$$

où $P(\xi, \eta, \zeta)$ est un interpolant des points de contrôle, $\|\overline{\nabla} P\|$ correspond à la norme de

Froebenius du tenseur gradient et $\left\| \overline{\nabla} P_{ijk} \right\|$ une estimation sur un volume élémentaire d'indice ijk [Duvigneau 2006e, Duvigneau 2007b].

Pour réduire ce critère, on propose de modifier les paramètres (s_q, t_q, u_q) . Pour cela, la transformation de (ξ_q, η_q, ζ_q) en (s_q, t_q, u_q) est définie à l'aide de polynômes de Bernstein :

$$s = \phi\left(\frac{\xi - \xi_{min}}{\xi_{max} - \xi_{min}}\right) \quad t = \psi\left(\frac{\eta - \eta_{min}}{\eta_{max} - \eta_{min}}\right) \quad u = \theta\left(\frac{\zeta - \zeta_{min}}{\zeta_{max} - \zeta_{min}}\right), \quad (1.5)$$

dont les coefficients associés $(\phi_i)_{i=0,\dots,n'_i}$, $(\psi_j)_{j=0,\dots,n'_j}$ et $(\theta_k)_{k=0,\dots,n'_k}$ sont considérés comme variables d'adaptation. Des contraintes sont appliquées pour assurer que la transformation reste homéomorphique [Duvigneau 2006e, Duvigneau 2007b].

La minimisation du critère 1.4 est réalisée pour une forme constante, au sens des moindres carrés. Pour chaque ensemble des variables d'adaptation, on calcule la position des nouveaux points de contrôle pour la transformation FFD en minimisant :

$$j_{LS} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [q_{new}^n - q_{old}^n]^2 S^n, \quad (1.6)$$

où q_{new}^n et q_{old}^n représentent les déplacements du point q^n du maillage surfacique pour les variables d'adaptation anciennes et actuelles. S^n est une pondération issue de la discrétisation de la surface.

Finalement, la procédure d'adaptation de la paramétrisation est décrite par l'algorithme suivant :

1. Estimation de la qualité j_{AD} de la paramétrisation actuelle par l'équation (1.4) ;
2. Début de la boucle itérative d'adaptation ;
3. Mise à jour des variables d'adaptation $(\phi_i)_{i=0,\dots,n'_i}$, $(\psi_j)_{j=0,\dots,n'_j}$ and $(\theta_k)_{k=0,\dots,n'_k}$ par une méthode de descente ;
4. Calcul de la nouvelle déformation FFD pour les points de la surface par les équations (1.5) et (1.3) ;
5. Résolution du problème aux moindres carrés (1.6) fournissant les nouvelles positions des points de contrôle P ;
6. Estimation de la qualité de la nouvelle paramétrisation par (1.4) ;
7. Fin de la boucle itérative ;
Si le critère d'arrêt est atteint alors STOP ;
Sinon retour à l'étape 3.

Cet algorithme est mis en oeuvre après une première étape d'optimisation de la forme, puis peut être employé dans une stratégie itérative d'adaptation jusqu'à convergence.

1.1.3.2 Application à l'optimisation de forme d'une voilure pour un jet d'affaire

La méthode d'adaptation de la paramétrisation est appliquée à l'optimisation de la voilure d'un avion d'affaire, dont la configuration a été décrite dans [Andreoli 2003]. On considère un régime transsonique (Mach 0.83, incidence 2°). L'écoulement est simulé par résolution des équations d'Euler compressible en régime stationnaire, par une méthode de type volumes-finis [Dervieux 1992, Kloczko 2008a]. Un maillage tétraédrique comprenant 31124 noeuds et raffiné dans la zone du choc est utilisé.

L'objectif de l'exercice d'optimisation est la réduction de la traînée, sous contrainte de portance (tolérance 0.1%), par pénalisation. L'optimisation est réalisée à l'aide de la méthode "Multi-directional Search Algorithm" [Dennis 1991]. Trois niveaux de paramétrisation FFD sont testés : une paramétrisation grossière à $2 \times 2 \times 2 = 8$ variables, une moyenne à $5 \times 2 \times 2 = 20$ variables et une fine à $8 \times 2 \times 2 = 32$ variables, comme illustré à la figure (1.8). Durant l'optimisation, les points de contrôle sont déplacés uniquement dans la direction verticale.

Différents tests [Duvigneau 2006e, Duvigneau 2007b] ont montré qu'il était plus efficace de mettre en oeuvre la procédure d'adaptation régulièrement au cours de l'optimisation, par exemple toutes les dix itérations, ce qui conduit à une adaptation progressive de la paramétrisation. La figure (1.9) illustre la convergence obtenue pour une paramétrisation grossière, avec et sans adaptation, comparée à celle correspondant à une paramétrisation moyenne. On constate que la procédure d'adaptation *améliore significativement la performance obtenue et la vitesse de convergence*. Ainsi, la performance obtenue avec une paramétrisation grossière adaptée (8 variables) est meilleure que celle obtenue avec une paramétrisation moyenne (20 variables). De façon similaire, comme illustré par la figure (1.10), l'adaptation pour une paramétrisation moyenne (20 variables) conduit à la même valeur de performance que la paramétrisation fine (32 variables), pour un coût bien moindre.

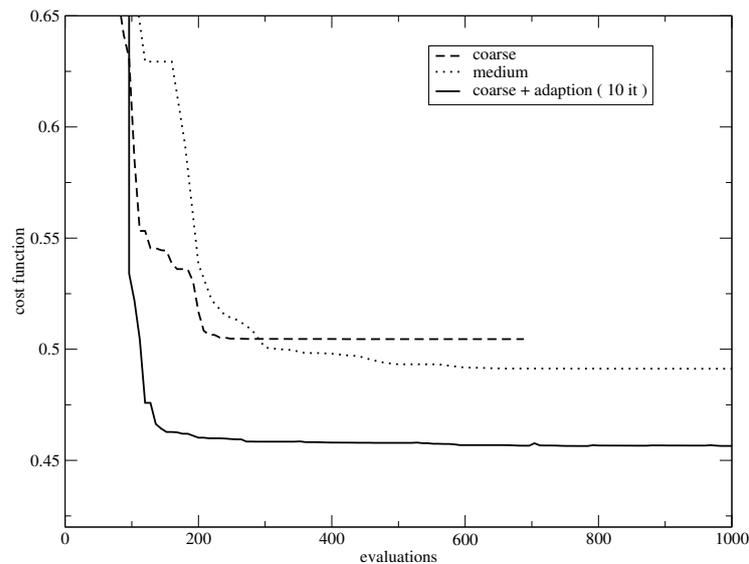


FIGURE 1.9 – Convergence avec adaptation pour une paramétrisation grossière.

Pour mieux comprendre comment agit l'adaptation, on représente à la figure (1.11) la transformation ϕ qui définit l'adaptation dans la direction longitudinale, ainsi que les polynômes de Bernstein utilisés dans la déformation FFD en fonction de la coordonnée ξ . On constate que l'adaptation a pour effet de décentrer les fonctions de base vers le bord d'attaque de la voilure. Les figures (1.12) et (1.13) comparent les formes finales et champs de Mach obtenus pour une paramétrisation moyenne avec et sans adaptation. On remarque que l'amélioration obtenue par adaptation correspond à une modification très légère de la forme et une réduction plus significative du choc.

Cette étude montre combien la paramétrisation est critique pour l'optimisation de forme, notamment pour les problèmes de réduction de choc, et que le choix d'un nombre réduit de

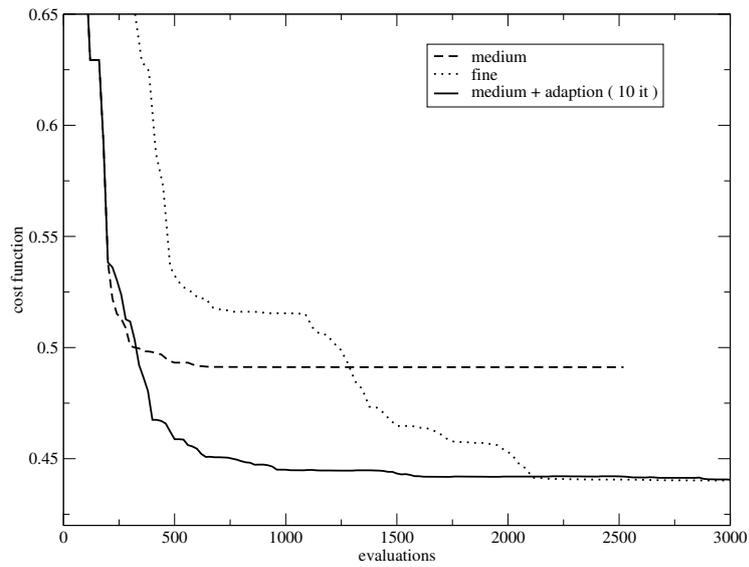


FIGURE 1.10 – Convergence avec adaptation pour une paramétrisation moyenne.

paramètres adaptés est plus judicieux que le choix naïf d'un grand nombre de paramètres. La principale limitation de l'approche proposée réside dans l'utilisation de la méthode FFD. Cependant, une extension naturelle aux courbes et surfaces B-Splines pourrait être mise en oeuvre en considérant comme paramètres d'adaptation le vecteur des noeuds.

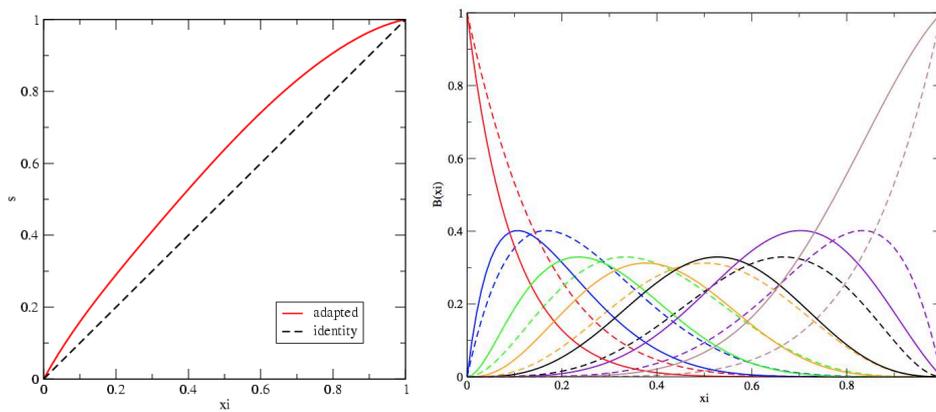


FIGURE 1.11 – Modification de la paramétrisation dans la direction longitudinale : fonction ϕ (gauche) et polynômes de Bernstein (droite) originaux (tirets) et adaptés (lignes).

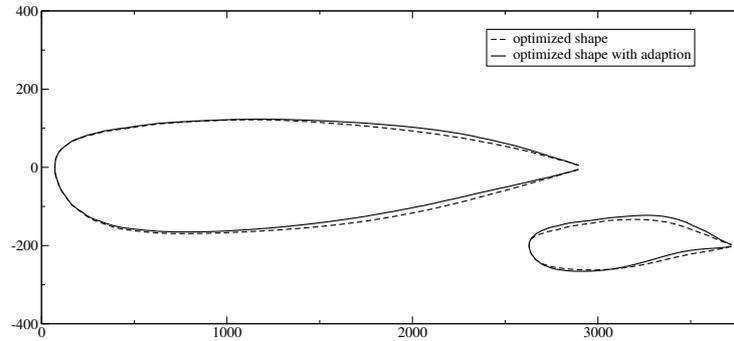


FIGURE 1.12 – Comparaison de la forme obtenue (sections d'emplanture et saumon) avec et sans adaptation.

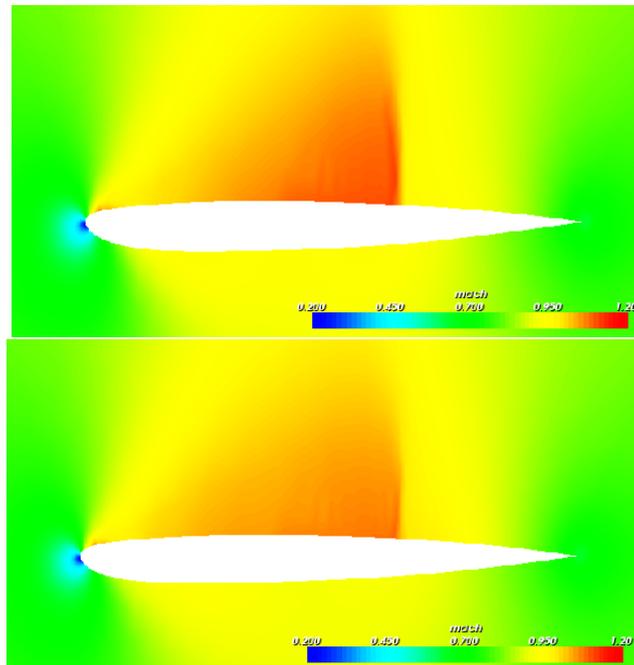


FIGURE 1.13 – Champ de Mach à l'emplanture : optimisée sans adaptation (haut) et avec adaptation (bas).

1.2 Stratégies pour la modélisation

Pour réduire le coût de la procédure de conception, une première approche consiste à améliorer les propriétés de convergence de l'algorithme d'optimisation, comme on l'a vu dans les paragraphes précédents. Une approche alternative consiste à réduire le coût des simulations, qui est lié principalement à deux facteurs :

- L'utilisation de modèles physiques complexes pour lesquels le taux de convergence itératif est limité ;
- L'utilisation de maillages fins, nécessaires pour représenter des géométries et des phénomènes physiques complexes.

Une première approche, consistant à améliorer la précision et la convergence des simulations, sera examinée dans le chapitre suivant. Alternativement, deux approches apparaissent de manière évidente pour réduire le coût de calcul : *dégrader le modèle physique*, par exemple en supposant l'écoulement non visqueux ou à potentiel de vitesse, et *dégrader l'approximation numérique*, en réduisant la taille du maillage ou en réalisant une convergence partielle. Plusieurs travaux ont été menés en ce sens, s'appuyant sur une utilisation de plusieurs niveaux de modèles physiques et numériques avec des dispositifs de correction d'erreur pour des algorithmes déterministes [Alexandrov 1999, Alexandrov 2000], ou génétique [Sefrioui 2000]. Il existe également une approche similaire, basée sur l'utilisation de maillages emboîtés pour construire un algorithme hiérarchique à la fois pour l'approximation et l'optimisation [Ta'asan 1994]. On reviendra dans le troisième chapitre sur une approche statistique pour prendre en compte une convergence partielle [Picheny 2010].

Une alternative, plus radicale encore, consiste à *remplacer la simulation du phénomène physique par une technique d'interpolation ou approximation de la fonction objectif et des contraintes*, à partir de calculs déjà réalisés. On parle alors de *métamodèle*, ou modèle de modèle. De nombreux métamodèles existent, comme les fonctions à bases radiales [Powell 2001], le Krigage [Sacks 1989], ou les réseaux de neurones [Giotis 2000] : étant donné un ensemble d'évaluations connues $F_N = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ aux points $X_N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, un modèle de substitution $\hat{j}(\mathbf{x}; X_N, F_N)$ est construit, généralement interpolant.

Cette approche doit nécessairement s'appuyer sur des algorithmes d'optimisation qui tirent parti du fait que certaines évaluations sont approchées. Deux de ces stratégies sont examinées en détail dans la suite. Ces travaux ont donné lieu à une collaboration avec P. Chandrashekar du Tata Institute for Fundamental Research (Bangalore).

1.2.1 Pré-évaluations inexactes

Dans un premier temps, on cherche à construire un algorithme dont la progression s'appuie principalement, voire uniquement, sur des simulations. Dans ce cas, le métamodèle sert à estimer s'il est pertinent de réaliser une simulation, pour un ensemble de paramètres de contrôle donné. On cherche par cette stratégie à éviter de réaliser certaines simulations coûteuses qui ne sont pas nécessaires à la progression de l'optimisation.

Les algorithmes d'optimisation semi-stochastiques (algorithmes génétiques, stratégies d'évolution, optimisation par essaim de particules, etc) se prêtent particulièrement à ce type de stratégie :

- De nombreuses évaluations ne sont pas employées par l'algorithme d'optimisation pour progresser (par exemple certains individus ne franchissent pas l'étape de sélection des algorithmes génétiques) ;

- Ces méthodes à base de population s'appuient sur des évaluations réalisées dans l'ensemble de l'espace de conception, ce qui est favorable à la construction de métamodèles, contrairement aux algorithmes de descente qui suivent un chemin d'optimisation en laissant de nombreuses zones non-explorées ;
- Ces algorithmes s'appuient souvent sur des comparaisons des évaluations et non sur les valeurs de la fonction coût, ce qui les rend robustes vis-à-vis des erreurs d'évaluation.

La stratégie de *pré-évaluation inexacte* a été proposée par K. Giannakoglou, qui l'a mise en oeuvre pour des algorithmes génétiques, avec de nombreuses variantes algorithmiques destinées à accroître l'efficacité [Giotis 1999, Giotis 2000]. L'idée générale est la suivante : à chaque itération de l'algorithme, la population est tout d'abord pré-évaluée par métamodèles, puis seulement un sous-ensemble prometteur est évalué par simulations. Dans les travaux de Giannakoglou, la proportion de la population évaluée par simulations est généralement fixée par l'utilisateur, qui contrôle ainsi l'effort de calcul. Typiquement, à chaque génération, seulement 10% à 20% de la population sont évalués par simulation. Ma contribution a consisté à étendre ces stratégies à la méthode d'optimisation par essaim de particules ("Particle-Swarm Optimization" PSO), tout en introduisant un nouveau critère auto-adaptatif pour décider si une simulation doit être réalisée.

L'algorithme d'optimisation par essaim de particule, dont une extension hiérarchique a déjà été présentée, se modifie aisément pour inclure une technique de pré-évaluation inexacte. Les premières itérations se déroulent selon l'algorithme original, ce qui permet de stocker un ensemble de valeurs de performance dans une base de données, correspondant à des points situés dans l'ensemble de l'espace de conception. Ensuite, toutes les particules sont d'abord pré-évaluées en utilisant un métamodèle construit grâce à la base de données. Il faut souligner que cette stratégie n'impose aucune hypothèse concernant le choix du métamodèle. Un critère s'appuyant sur ces pré-évaluations, sur lequel on reviendra par la suite, permet alors de sélectionner un sous-ensemble de particules pour lequel on réalise des évaluations précises par simulations. Ces nouvelles valeurs alimentent alors la base de données. finalement, l'algorithme PSO se poursuit comme pour la méthode originale, à la différence près que la mise à jour des mémoires locales et globale repose uniquement sur des valeurs issues des simulations. Cet algorithme peut finalement être décrit par :

1. $k \leftarrow 0$
2. Initialiser aléatoirement les positions et vitesses des particules $(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{v}_i^0)_{1 \leq i \leq p}$;
3. Début de l'itération k ;
4. Si $k \leq K$ calculer les performances $j(\mathbf{x}_i^k)_{1 \leq i \leq p}$ par simulations ;
5. Si $k > K$ pré-évaluation des performances $\hat{j}(\mathbf{x}_i^k)_{1 \leq i \leq p}$ et sélection d'un sous-ensemble de particules qui sont évaluées par simulations ;
6. Stockage des valeurs obtenues par simulations dans la base de donnée ;
7. Mise à jour des mémoires locales et globale en considérant seulement les valeurs issues des simulations ;
8. Mise à jour des vitesses et positions des particules comme pour l'algorithme original ;
9. Si la condition de convergence est atteinte, alors arrêt ;
Sinon aller à (3).

On constate que cet algorithme est fort peu différent de l'algorithme PSO original, seules les procédures d'évaluation des performances des particules et de mise à jour des

mémoires locales et globale ont été modifiées.

La réduction du nombre de simulations et le succès de la procédure dépendent bien entendu du critère de sélection des particules pour lesquelles les simulations sont réalisées. Il semble raisonnable de favoriser la sélection des particules pour lesquelles la pré-évaluation prédit une bonne performance. Ainsi, on enrichit la base de données dans des zones intéressantes, ce qui améliore la précision du métamodèle pour les itérations suivantes. Un choix possible est donc de sélectionner un pourcentage des meilleures particules selon la pré-évaluation, comme proposé par Giannakoglou [Giotis 1999, Giotis 2000]. Cependant, ce critère simple a deux inconvénients : il requiert un paramètre choisi par l'utilisateur et fixe un nombre de simulations à réaliser égal pour toutes les itérations, ce qui ne se justifie pas.

Un critère alternatif a donc été proposé, spécifique à l'algorithme PSO [Chandrashekar 2009a]. Puisque la progression de celui-ci s'appuie uniquement sur les mémoires locales et globale, on considère *comme critère de sélection la modification des mémoires, c'est à dire l'amélioration de la meilleure performance observée pour chaque particule*. Ainsi, on utilise la prédiction du métamodèle pour déterminer si la position actuelle de la particule améliore sa meilleure performance observée. Si c'est le cas, cette particule est sélectionnée pour réaliser une simulation, qui permet de mettre à jours les mémoires sur la base de valeurs issues des simulations. Ce critère est défini sans paramètres donné par l'utilisateur et est auto-adaptatif : le nombre de simulations à réaliser varie d'une itération à l'autre, selon les besoins de l'optimiseur.

Cette stratégie est particulièrement prudente, puisque l'évolution de l'optimisation repose uniquement sur des valeurs issues des simulations. Le métamodèle est alors seulement utilisé pour tenter d'éviter des simulations inutiles. On examine dans la section suivante une stratégie plus audacieuse, pour laquelle l'optimisation est entièrement conduite par le métamodèle.

1.2.2 Optimisation par processus Gaussiens

Dans une approche alternative, on va considérer maintenant le cas où les métamodèles servent réellement à conduire l'optimisation. Dans un premier temps, on pourrait envisager qu'un métamodèle remplace complètement les simulations, après une première phase de construction du modèle reposant sur ces dernières. Cette stratégie pourrait être efficace si le métamodèle était suffisamment précis. Malheureusement, la construction d'un métamodèle précis *sur l'ensemble du domaine* de conception, dans un espace de dimension n grand, nécessite une base de donnée de taille tellement importante que cette approche est impossible en pratique. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer une base de données constituée de trois points par direction, ce qui est très grossier, en dimension 10, ce qui est modeste. La base ainsi constituée compte déjà $3^{10} = 59049$ simulations à réaliser !

Cette stratégie doit donc être menée de manière itérative, de façon à enrichir la base de données dans les régions les plus prometteuses et réduire au minimum le nombre de simulations à réaliser pour construire des *modèles précis seulement au voisinage de l'optimum*. Avec une telle stratégie, *l'optimisation devient une construction progressive de métamodèles*. Cette approche, issue du domaine de l'*apprentissage statistique*, a été principalement développée par Jones [Jones 2001], en s'appuyant sur un métamodèle particulier : le Krigeage,

encore appelé processus Gaussien (GP) [Sacks 1989]. Cette approche consiste à adopter une modélisation stochastique de la fonction coût, qui se justifie par le fait que le modèle est construit sur la base d'un nombre limité d'observations et est donc incertain pour tout point non évalué précédemment.

Supposons qu'un ensemble de N observations $F_N = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$, dont on a retranché la valeur moyenne, ait été réalisé aux points $X_N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$. On fait l'hypothèse que F_N correspond à la réalisation d'un processus Gaussien multi-varié à moyenne nulle (Krigage simple), dont la densité de probabilité s'écrit :

$$p(F_N|X_N) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}F_N^\top C_N^{-1}F_N\right)}{\sqrt{(2\pi)^N \det(C_N)}}, \quad (1.7)$$

où C_N représente la matrice de covariance. Ses coefficients C_{mn} , qui décrivent la covariance des valeurs f_m et f_n correspondant aux points \mathbf{x}_m et \mathbf{x}_n , est exprimée sous la forme d'une fonction de corrélation $C_{mn} = c(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n; \Theta)$ où les paramètres Θ servent à calibrer le modèle. Sous ces hypothèses, la densité de probabilité d'obtenir une valeur additionnelle f_{N+1} en un point \mathbf{x}_{N+1} s'écrit de même :

$$p(F_{N+1}|X_{N+1}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}F_{N+1}^\top C_{N+1}^{-1}F_{N+1}\right)}{\sqrt{(2\pi)^{N+1} \det(C_{N+1})}}. \quad (1.8)$$

En introduisant la règle des probabilités conditionnelles :

$$p(f_{N+1}|F_N, X_{N+1}) = \frac{p(F_{N+1}|X_{N+1})}{p(F_N|X_N)}, \quad (1.9)$$

on obtient en combinant (1.7) et (1.8) le résultat suivant : la densité de probabilité de la valeur f_{N+1} , connaissant les valeurs F_N , est Gaussienne de moyenne \hat{f}_{N+1} et variance $\hat{\sigma}_{f_{N+1}}^2$:

$$p(f_{N+1}|F_N, X_{N+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_{f_{N+1}}^2}} \exp\left[-\frac{(f_{N+1} - \hat{f}_{N+1})^2}{2\hat{\sigma}_{f_{N+1}}^2}\right]$$

avec

$$\hat{f}_{N+1} = k^\top C_N^{-1}F_N \quad \hat{\sigma}_{f_{N+1}}^2 = \kappa - k^\top C_N^{-1}k, \quad (1.10)$$

$$k = [c(x_1, x_{N+1}), c(x_2, x_{N+1}), \dots, c(x_N, x_{N+1})]^\top \quad \text{et} \quad \kappa = c(x_{N+1}, x_{N+1}).$$

Ainsi, le processus Gaussien prédit en tout point \mathbf{x} une valeur moyenne $\hat{f}(\mathbf{x})$, et une variance $\hat{\sigma}^2(\mathbf{x})$. La moyenne correspond à la valeur la plus probable de la fonction coût et interpole les points connus, tandis que la variance mesure l'incertitude associée à cette valeur, étant donné les observations déjà réalisées. Une illustration est donnée à la figure (1.14).

La fonction de corrélation définit la manière dont les valeurs observées sont corrélées. On utilise pour cela une fonction dépendant de l'écart entre les points, couramment utilisée :

$$c(x, y; \Theta) = \theta_1 \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - y_i)^2}{r_i^2}\right] + \theta_2. \quad (1.11)$$

Les paramètres $\Theta = (\theta_1, \theta_2, r_1, r_2, \dots, r_d)$ déterminent une corrélation anisotrope et sont choisis de manière à maximiser la densité de probabilité des points observés $p(F_N|X_N)$. Ce problème d'optimisation interne est résolu par une méthode évolutionnaire, de façon à éviter les possibles minima locaux. De nombreux détails techniques assurent la stabilité de la méthode [Chandrashekar 2007].

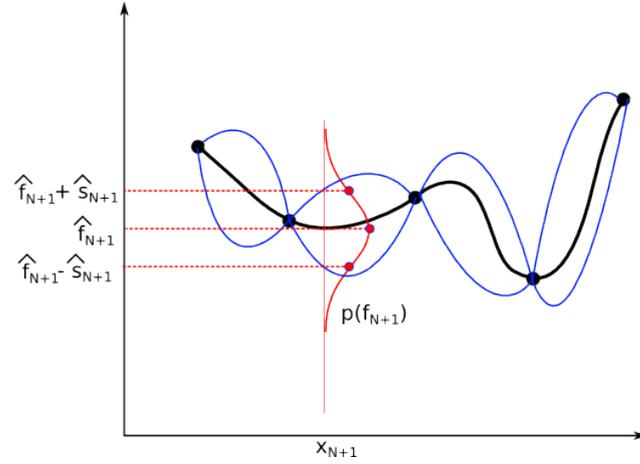


FIGURE 1.14 – Illustration d'un métamodèle de type processus Gaussien : à partir des observations (points noirs), la densité de probabilité (rouge) fournit en tout point une valeur moyenne (noir) et une variance (bleu).

Un tel modèle est intéressant, dans la mesure où il contient des informations sur son incertitude propre. Il va donc être utilisé dans une approche itérative pour déterminer les points les plus intéressants à évaluer d'un point de vue statistique. Ainsi, il a été proposé [Dennis 1997, Kushner 1964, Jones 2001] d'introduire différentes *fonctions de mérite*, dont les extrema déterminent les points à ajouter dans la base de données à chaque itération. Ces fonctions de mérite sont :

- **La borne inférieure** ("Lower Bound" LB) :

On minimise la fonction :

$$j_{LB}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}) - \rho \hat{\sigma}(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

où ρ est un paramètre donné par l'utilisateur permettant de favoriser l'exploration des zones à forte variance ;

- **La probabilité d'amélioration** ("Probability of Improvement" PI) :

Étant donné j_{min} la meilleure valeur trouvée et $T \leq j_{min}$ une valeur cible choisie par l'utilisateur, la probabilité d'obtenir en \mathbf{x} une valeur inférieure à T est :

$$j_{PI}(\mathbf{x}) = \phi \left(\frac{T - \hat{f}(\mathbf{x})}{\hat{\sigma}(\mathbf{x})} \right), \quad (1.13)$$

où ϕ est la fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite. On détermine alors le point qui maximise la probabilité d'obtenir une valeur inférieure à la valeur T ;

- **L'amélioration probable** ("Expected Improvement" EI) :

Une amélioration de valeur I est obtenue au point \mathbf{x} si $f(\mathbf{x}) = j_{min} - I$. Par suite, la valeur moyenne de l'amélioration au point \mathbf{x} est :

$$\begin{aligned} j_{EI}(\mathbf{x}) &= \int_{I=0}^{I=\infty} I \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}(\mathbf{x})} \exp \left(-\frac{(j_{min} - I - \hat{f}(\mathbf{x}))^2}{2\hat{\sigma}^2(\mathbf{x})} \right) \right) dI, \\ &= \hat{\sigma}(\mathbf{x}) (u\phi(u) + \varphi(u)) \end{aligned} \quad (1.14)$$

où φ correspond à la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite et $u = \frac{j_{min}-\hat{f}(\mathbf{x})}{\hat{\sigma}(\mathbf{x})}$. On détermine alors le point pour lequel l'amélioration moyenne est maximale.

La détermination des extrema des fonctions de mérite est réalisée à l'aide d'un algorithme évolutionnaire, dans la mesure où il s'agit de problèmes multi-modaux. L'optimisation des deux premières fonctions de mérite conduit à un ensemble de points, selon les paramètres ρ et T choisis, tandis que la dernière conduit à un point unique. L'introduction de ces fonctions de mérite dans un algorithme de construction itérative du métamodèle, donne finalement la stratégie d'optimisation suivante :

1. Construction d'une base de données initiale *a priori* ;
2. Construction du métamodèle associé à la base de données ;
3. Détermination des points $(\mathbf{x}_i^*)_{1 \leq i \leq p}$ correspondant aux extrema de la fonction de mérite ;
4. Réalisation des p simulations correspondant à $(\mathbf{x}_i^*)_{1 \leq i \leq p}$ et insertion dans la base de données ;
5. Retour à l'étape 2 jusqu'à convergence.

Cet algorithme est notoirement plus complexe que la plupart des méthodes d'optimisation : il nécessite à chaque itération la résolution d'un ensemble de sous-problèmes pour la calibration du modèle (maximisation de la vraisemblance) et la détermination des nouveaux points à évaluer (maximisation ou minimisation de la fonction de mérite). Il a été montré que, dans le cas des fonctions PI et EI, des preuves de convergence globale existent, sous certaines hypothèses [Jones 2001].

Contrairement à la stratégie de pré-évaluations inexactes, qui se basait le moins possible sur le métamodèle pour progresser, cette méthode s'appuie entièrement sur le processus Gaussien pour déterminer les prochains points à évaluer. Il est à noter que cette approche est rarement utilisée dans le domaine de l'optimisation aérodynamique et seuls quelques articles sont disponibles dans la littérature, comme [Laurenceau 2008]. Ma contribution n'est ici pas d'ordre méthodologique, mais applicative : j'ai confronté cette approche à plusieurs algorithmes d'optimisation globale pour différents problèmes typiques en conception aérodynamique. De plus, on verra dans le chapitre 3 que cette méthode sera étendue pour prendre en compte des erreurs issues des simulations. Dans le paragraphe suivant, les deux stratégies présentées sont comparées pour un problème de conception aérodynamique.

1.2.3 Application à l'optimisation de forme d'une voilure

On compare ces deux stratégies pour un problème d'optimisation de forme de voilure, pour un jet d'affaire en régime transsonique. Ce cas-test est équivalent à celui utilisé pour l'adaptation de la paramétrisation. On vise à réduire la traînée sous une contrainte de portance. Sachant que la dimension du problème joue un rôle critique pour la construction des métamodèles, on considère trois paramétrisations pour la forme, une grossière comprenant 8 variables, une moyenne incluant 20 variables et une fine basée sur 32 variables. Les détails de ces calculs sont donnés dans [Chandrashekar 2009b, Duvigneau 2012].

On considère dans un premier temps la stratégie de pré-évaluations inexactes et on teste l'influence du critère de sélection des évaluations. Ces calculs sont réalisés pour la paramétrisation moyenne, en utilisant le critère auto-adaptatif spécifique à PSO ou le critère basé sur 10% des meilleures particules. Enfin, on réalise pour référence un calcul s'appuyant uniquement sur des simulations. La figure (1.15) montre l'évolution de la fonction de coût dans les trois cas, tandis que la figure (1.16) illustre l'évolution du nombre de simulations réalisées au cours de l'optimisation.

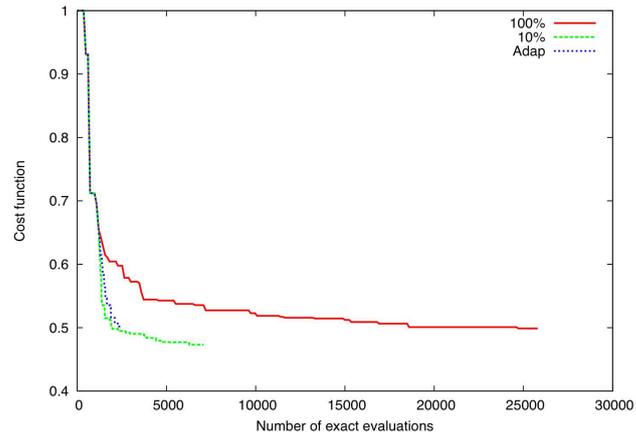


FIGURE 1.15 – Evolution de la fonction coût pour la stratégie de pré-évaluations inexactes : simulations seulement (rouge), pré-évaluations avec un critère fixe de 10% (vert) et un critère adaptatif (bleu).

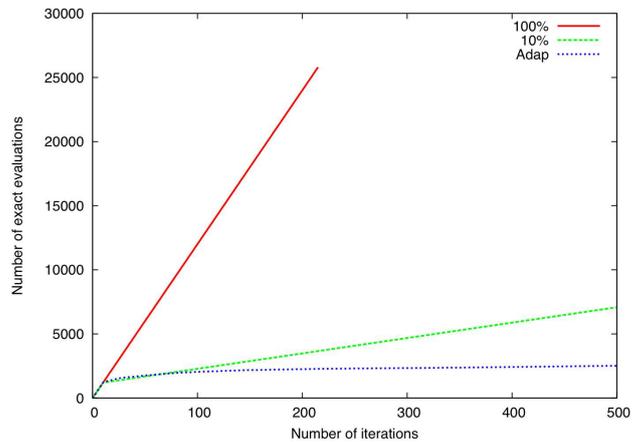


FIGURE 1.16 – Evolution du nombre de simulations réalisées pour la stratégie de pré-évaluations inexactes : simulations seulement (rouge), pré-évaluations avec un critère fixe de 10% (vert) et un critère adaptatif (bleu).

On constate tout d'abord que l'utilisation de cette stratégie aboutit à une performance aussi bonne qu'une optimisation classique, voire meilleure, pour un coût en terme de temps de calcul considérablement plus faible. On peut remarquer que le critère adaptatif conduit à

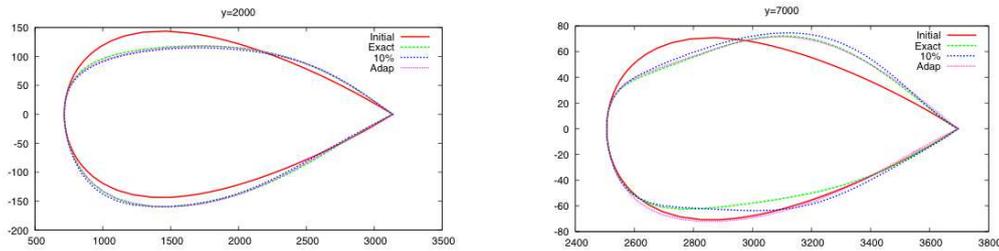


FIGURE 1.17 – Comparaison des formes obtenues à l’emplanture et à l’extrémité de la voilure, avec et sans stratégie de pré-évaluation inexacte : simulations seulement (vert), pré-évaluations avec un critère fixe de 10% (bleu) et un critère adaptatif (rose).

réaliser un plus grand nombre de simulations en début d’optimisation et s’appuie surtout sur le métamodèle ensuite. Il aboutit à une performance légèrement inférieure à l’approche basée sur la simulation d’une proportion de 10% de la population. Cependant, la comparaison des formes obtenues, illustrée par la figure (1.17) montre que les formes finales sont proches.

Dans un second temps, on considère la stratégie d’optimisation par processus Gaussiens et on teste plus particulièrement l’influence de la dimension du problème sur l’efficacité de l’algorithme. On reprend ainsi le problème précédent pour 8 et 32 variables. Une étude est menée dans [Chandrashekar 2009b] pour tester l’influence de la taille de la base de donnée initiale. Les figures (1.18) et (1.19) illustrent l’évolution de la fonction de coût pour les différentes fonctions de mérite, en dimension 8 et 32. Dans le premier cas, toutes les fonctions de mérite conduisent à des performances similaires, avec une légère supériorité pour la fonction basée sur la borne inférieure. Dans le second cas, l’essai avec la fonction de mérite basée sur l’amélioration probable converge prématurément : à partir d’un certain stade, l’unique simulation réalisée à chaque itération se fixe en un point. Ce défaut est attribué à l’utilisation d’une pénalisation pour la contrainte de portance, dont la variance a été négligée dans la fonction de mérite. Comme pour le cas précédent, la fonction basée sur la borne inférieure permet d’aboutir à la meilleure performance.

Finalement, on compare les deux stratégies en dimension 8 et 32. Les figures (1.20) et (1.21) montrent l’évolution de la fonction de coût, avec comme référence une méthode PSO basée seulement sur des simulations. On observe que les deux approches parviennent avec succès à réduire le nombre de simulations à effectuer. Mais on note surtout que la stratégie d’optimisation par processus Gaussiens est beaucoup plus efficace.

1.2.4 Application à la réduction de choc en régime turbulent

La stratégie d’optimisation par processus Gaussien est maintenant appliquée à un problème de réduction de choc pour un profil en régime turbulent, au moyen d’une modification locale de forme. On considère l’écoulement autour du profil RAE5243, pour un nombre de Reynolds $Re = 19 \cdot 10^6$, Mach 0.68 et une incidence 0.77° . La simulation est réalisée à l’aide d’un maillage structuré de 353×97 noeuds, la modélisation de la turbulence étant réalisée par un modèle $k-\omega$. Une comparaison avec les calculs de Qin et al. [Qin 2008] est donnée à la table 1.5, pour la configuration initiale. Ce cas-test est issu du workshop en conception optimale proposé par l’Université de Jyväskylä (<http://jucri.jyu.fi>).

On cherche à réduire le choc en modifiant localement la forme du profil. Le changement

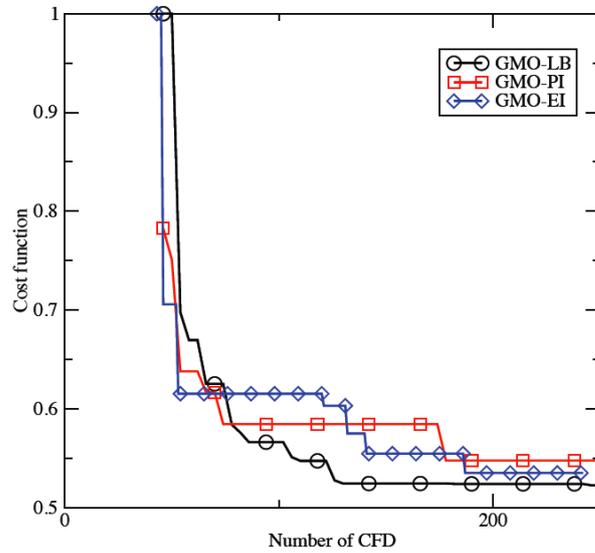


FIGURE 1.18 – Evolution de la fonction de coût pour l’optimisation par processus Gaussien en dimension 8 : critère LB (noir), PI (rouge) et EI (bleu).

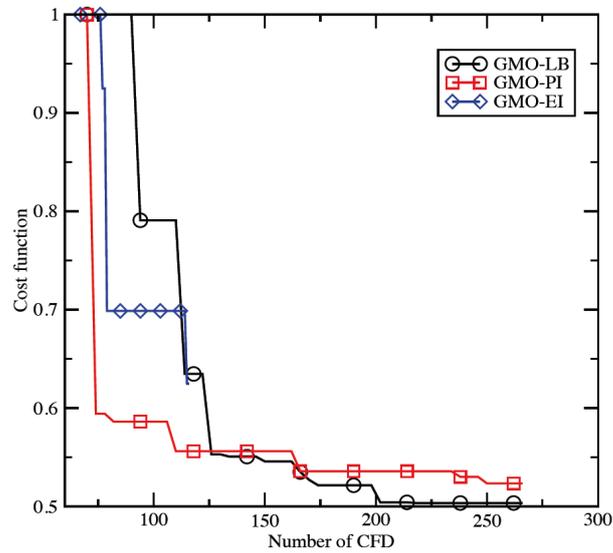


FIGURE 1.19 – Evolution de la fonction de coût pour l’optimisation par processus Gaussien en dimension 32 : critère LB (noir), PI (rouge) et EI (bleu).

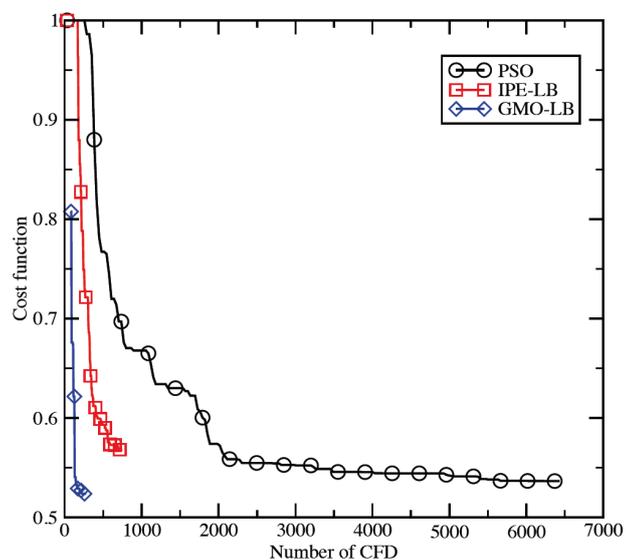


FIGURE 1.20 – Comparaison des deux stratégies en dimension 8 : simulations seulement (noir), pré-évaluations avec critère adaptatif (rouge) et par processus Gaussien avec critère LB (bleu).

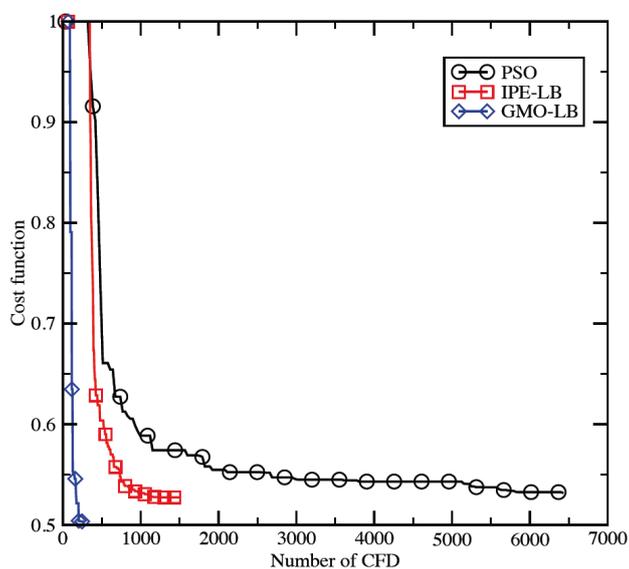


FIGURE 1.21 – Comparaison des deux stratégies en dimension 32 : simulations seulement (noir), pré-évaluations avec critère adaptatif (rouge) et par processus Gaussien avec critère LB (bleu).

Result	C_l	C_d	C_{d_p}	C_{d_v}
Present	0.8244	0.01627	0.01052	0.005757
Qin et al.	0.82	0.01622	0.01063	0.005586

TABLE 1.5 – Comparaison des efforts pour la forme initiale.

de forme est défini par deux courbes cubiques, permettant d'assurer la régularité C^1 de la forme, paramétrées par quatre variables, comme illustré par la figure (1.22). On ajoute comme variable de conception l'angle d'attaque permettant de facilement contrôler la valeur de portance. En effet, on considère comme problème d'optimisation la minimisation de la traînée sous contrainte de portance. Pour ces essais, la contrainte est traitée par une pénalisation. Ce problème est étudié par Qin et al. dans [Qin 2008] à l'aide d'un algorithme d'optimisation de type gradient, calculé par une méthode adjointe. On souhaite comparer ces résultats à ceux obtenus en utilisant une stratégie d'optimisation par processus Gaussien.

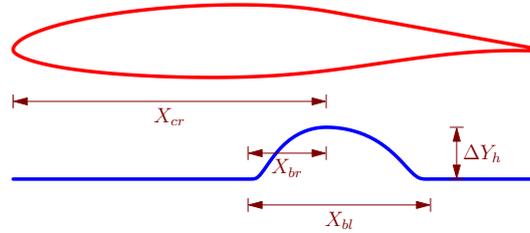


FIGURE 1.22 – Paramétrisation du changement de forme.

On emploie une base de données initiale composée de 48 points construite par une distribution de type hypercube latin [Keane 2005]. On met ensuite en oeuvre la stratégie décrite ci-dessus, avec la fonction de mérite basée sur la borne inférieure (LB). A chaque itération, on réalise quatre simulations correspondant aux points trouvés avec les paramètres $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 2$, $\rho_4 = 3$. Une convergence est obtenue en 25 itérations, au terme desquelles la méthode ne propose plus de nouveaux points. L'évolution de la fonction coût est illustrée par la figure (1.23). La figure (1.24) montre que la modification de forme donne naissance à deux chocs plus faibles. Les efforts aérodynamiques obtenus sont comparés à ceux de Qin et al. par la table 1.6. On constate que la traînée est réduite de 22% avec l'optimisation par processus Gaussien, tandis que la méthode de descente permet une réduction de 18%. La comparaison des meilleurs points obtenus (table 1.7) montre que deux formes différentes ont été trouvées. L'optimisation par processus Gaussien s'est donc montrée supérieure en terme de performance obtenue car elle a permis de réaliser une optimisation globale, tandis que la méthode de descente a convergé vers un optimum local.

Case	C_d	ΔC_d	C_{d_p}	C_{d_v}	C_l
Present	0.01266	-22.2%	0.00680	0.00586	0.8204
Qin et al.	0.01326	-18.2%	0.00756	0.00570	0.82

TABLE 1.6 – Efforts pour la forme optimale.

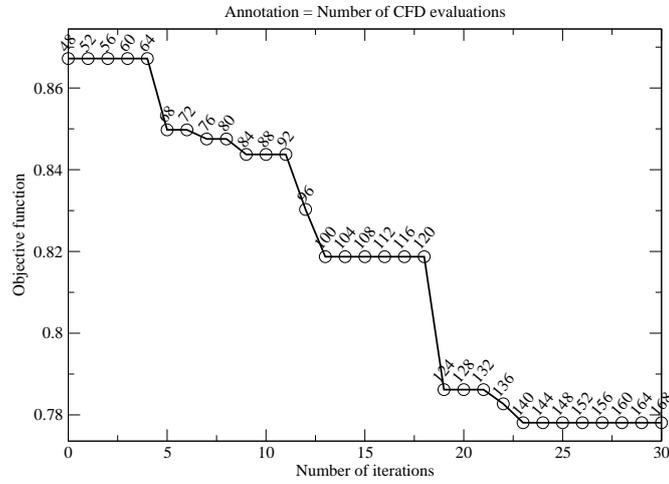


FIGURE 1.23 – Evolution de la fonction coût, le nombre total de simulations est indiqué sur la courbe.

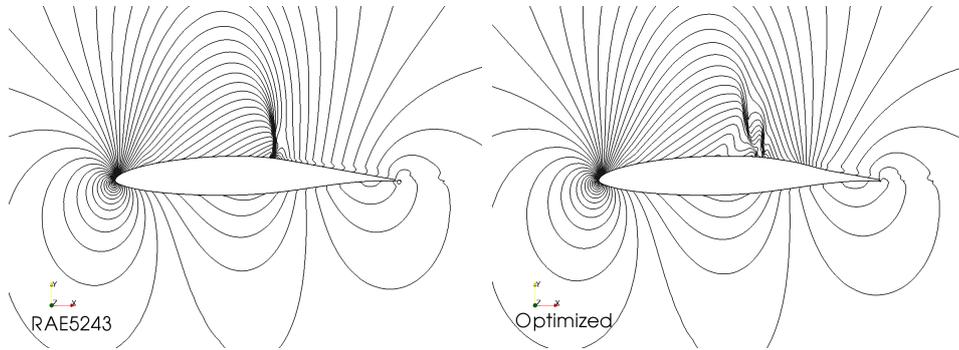


FIGURE 1.24 – Courbes iso-pression pour le profil initial et final.

Case	X_{cr}	X_{bl}	X_{br}	$\Delta Y_h \times 10^{-3}$
Present	0.688	0.399	0.257	8.578
Qin et al.	0.597	0.313	0.206	5.900

TABLE 1.7 – Comparaison des paramètres optimaux.

1.3 Synthèse

Les études menées dans ce chapitre montrent clairement que *le couplage naïf d'une méthode de simulation avec un algorithme d'optimisation conduit à une procédure de conception d'efficacité médiocre*, en terme de temps de calcul et de qualité du résultat.

La convergence peut être significativement améliorée lorsqu'on met en oeuvre une approche hiérarchique et une stratégie d'adaptation de la paramétrisation. Cette conclusion milite pour *l'utilisation de bases hiérarchiques pour la représentation géométrique*, plutôt qu'une paramétrisation *ad-hoc* souvent employée dans l'industrie. Cette thématique peut encore être approfondie, notamment en déterminant des critères objectifs pour définir les niveaux utilisés et le nombre d'itérations à réaliser sur chaque niveau.

Dans un contexte d'optimisation globale, le nombre de simulations nécessaires, et par conséquence le coût en terme de temps de calcul, peut être également significativement réduit, si *le recours aux modèles précis et coûteux s'inscrit dans une stratégie d'apprentissage*, pour laquelle l'ensemble des simulations réalisées sont prises en compte pour progresser vers l'optimum. Les résultats obtenus avec l'optimisation par processus Gaussiens sont remarquables. Néanmoins, on verra dans le chapitre 3 que cet algorithme peut être très sensible à la présence d'erreurs numériques. De plus, le traitement des contraintes reste délicat.

Conception et analyse isogéométrique

Sommaire

2.1	Enjeux	33
2.2	Principes	34
2.3	Problèmes elliptiques	37
2.4	Problèmes hyperboliques	43
2.5	Application à l'optimisation et stratégies hiérarchiques	50
2.6	Synthèse	55

Le chapitre précédent a mis en évidence le rôle fondamental joué par la représentation géométrique dans la convergence de l'optimisation. Cependant, plusieurs représentations coexistent généralement au sein de la boucle de conception, ce qui complexifie significativement la mise en oeuvre et nuit à l'efficacité des algorithmes. On propose dans ce chapitre d'examiner l'approche isogéométrique, pour laquelle une unique représentation est employée. On s'intéressera plus spécifiquement à l'utilisation d'une telle approche pour la conception optimale.

2.1 Enjeux

Les méthodes de conception optimale ne s'appuient pas, en général, sur une seule représentation géométrique, mais sur plusieurs représentations. Ainsi, coexistent au sein de la boucle de conception à la fois des représentations d'ordre élevé utilisées en CAD ("Computer-Aided Design") pour définir la géométrie du système étudié, des représentations par maillage utilisées pour la résolution des EDP et souvent des représentations *ad-hoc* définies pour la conception et utilisées comme variables d'optimisation.

La présence de ces différentes représentations géométriques au sein de la boucle d'optimisation a des conséquences importantes :

- La construction du maillage initial, pour la géométrie de référence, est extrêmement coûteuse en terme de temps humain. Ensuite, dans la phase d'optimisation, la génération automatique des maillages correspondant aux différentes formes testées est délicate pour les problèmes complexes, notamment en présence de couches limites ;
- Pour chaque évaluation de la fonction coût, des approximations sont réalisées entre les différentes représentations, qui induisent *une perte de précision* lors de la conception. Celle-ci peut être dommageable pour les problèmes où une forte précision de la géométrie est nécessaire, comme les problèmes de réduction de choc ;

- La résolution des équations d'état étant réalisée sur la base d'un maillage, avec une représentation géométrique linéaire par morceaux, *une erreur est introduite lors de la résolution des EDP, bien que la géométrie soit connue exactement*, ce qui peut réduire la précision de la solution obtenue [Hughes 2005].
- Le maillage est une structure intermédiaire entre le calcul de l'état et la forme à optimiser. Une analyse de sensibilité avec une formulation discrète pour le calcul du gradient de la fonction coût nécessite donc d'évaluer la sensibilité du maillage. Cette étape peut être fastidieuse, selon l'approche employée pour générer un maillage correspondant à une géométrie donnée [Nielsen 2005];
- Dans le cas d'une simulation incluant deux disciplines, par exemple fluide-structure, *la frontière servant d'interface doit être décrite par deux maillages*, chacun adapté à une discipline, par exemple un maillage fin pour la frontière fluide et un maillage plus grossier pour la frontière structure. Une telle définition complexifie considérablement le calcul des termes de couplage [Heinrich 2010, Heinrich 2011];
- Dans le cas de maillages mobiles, par exemple lorsqu'un domaine est en rotation dans un second domaine fixe, *une interface maillée ne permet pas une correspondance exacte de l'interface pour toutes les positions*, ce qui introduit des problèmes de conservativité [Bazilevs 2011];
- Lorsqu'une étape d'adaptation de maillage est mise en oeuvre, le respect de la géométrie des frontières nécessite un échange d'information avec l'outil CAD, souvent délicat à réaliser en pratique [Hay 2007].

Pour surmonter ces difficultés, une nouvelle approche a été proposée par T. Hughes [Bazilevs 2006, Cottrell 2007, Cottrell 2009, Hughes 2005], s'appuyant sur l'utilisation d'une unique base NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) pour la géométrie et l'analyse. On examine cette approche dans les sections suivantes, pour des problèmes elliptiques puis hyperboliques. Enfin, on s'intéresse à l'application de l'approche isogéométrique à la conception optimale. Ma contribution concerne principalement l'application de l'approche isogéométrique à la simulation d'écoulements compressibles et la construction de stratégies hiérarchiques, pour la résolution des EDP et l'optimisation.

2.2 Principes

L'analyse isogéométrique propose d'utiliser une unique base de représentation pour l'ensemble des méthodes employées dans la boucle de conception. Dans ce chapitre, on simplifiera la présentation en considérant des fonctions B-Splines. Ce sont des fonctions polynomiales par morceaux à supports compacts, considérées comme standard dans le domaine CAD [De Boor 1978, Sabin 1993, Farin 1989]. Elles sont définies dans l'espace paramétrique à partir du *vecteur des noeuds* (ξ_1, \dots, ξ_k) où $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_k$. Le nombre de noeuds vérifie $k = n + p + 1$, où n est le nombre de fonctions et p le degré des fonctions. L'intervalle $[\xi_1, \xi_k]$ est appelé *patch*. Les fonctions B-Splines sont définies récursivement à partir du vecteur des noeuds, suivant la procédure suivante [De Boor 1978, Sabin 1993, Farin 1989] :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } p = 0 : \hat{N}_i^0(\xi) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
 \text{pour } p \geq 1 : \hat{N}_i^p(\xi) &= \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} \hat{N}_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad i = 1, \dots, n + p + 1.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les fonctions B-Splines ainsi définies ont les propriétés suivantes [De Boor 1978, Sabin 1993, Farin 1989] :

- Les fonctions $\hat{N}_i^p(\xi)$ sont polynomiales de degré p ;
- Elles ont pour support compact $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$;
- Les fonctions $\hat{N}_i^p(\xi)$ sont de régularité C^{p-m} à chaque noeud de multiplicité m ;
- Sur l'intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, il y a $p + 1$ fonctions non nulles.

Les courbes B-splines se définissent naturellement par :

$$\mathbf{P}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi)) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i^p(\xi) \mathbf{P}_i, \quad (2.2)$$

où $\mathbf{P}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ sont les coordonnées des points de contrôle, agissant comme poids associés aux fonctions. L'extension aux surfaces et volumes est triviale, en utilisant un produit tensoriel de fonctions. Par exemple, une surface B-spline est définie par :

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \hat{N}_i^{p_i}(\xi) \hat{N}_j^{p_j}(\eta) \mathbf{P}_{ij}. \quad (2.3)$$

En analyse isogéométrique, le domaine de calcul est représenté par un ensemble de volumes B-splines en 3D et un ensemble de surfaces B-splines planes en 2D. *Cette représentation est qualifiée d'exacte dans la mesure où les frontières sont définies par B-splines conformément aux données issues de l'outil CAD.* Cette propriété de construction est illustrée par la figure 2.1. Ainsi, contrairement à l'approche classique reposant sur la construction d'un maillage, aucune erreur n'est introduite dans la description du domaine de calcul.

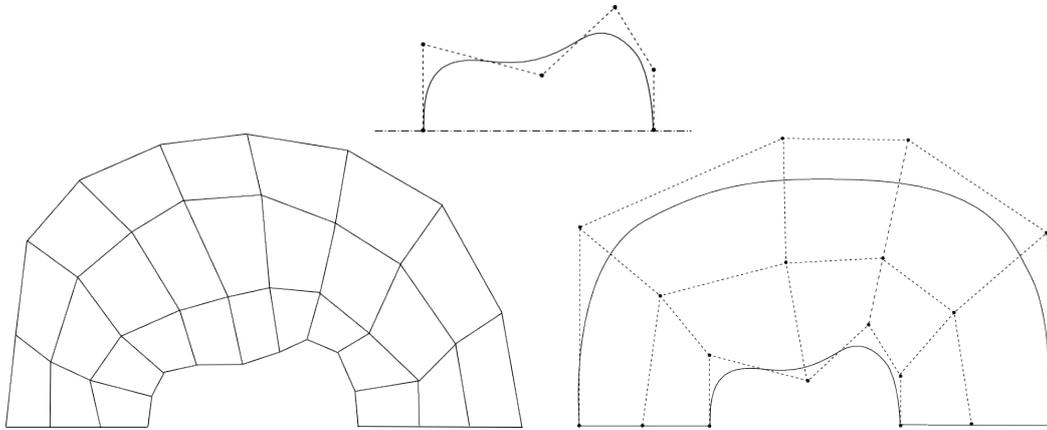


FIGURE 2.1 – Construction du domaine de calcul à partir d'une frontière définie par CAD (en haut) : le cas d'un maillage classique introduisant une approximation (à gauche) et le cas d'un domaine isogéométrique (à droite).

Une première difficulté réside donc dans la création de ce domaine de calcul, qui s'apparente à un maillage d'ordre élevé. Les frontières sont généralement définies au préalable par l'outil CAD. Le positionnement des points de contrôle intérieurs, qui définit la paramétrisation du domaine de calcul, a donné lieu à une étude en collaboration avec l'Equipe-Projet Galaad de l'INRIA Sophia-Antipolis. Dans les exemples qui suivent, la position des points de contrôle intérieurs est déduite des frontières à l'aide d'une méthode

de Coons discrète [Farin 1999]. Cependant, dans le cas de géométries distordues, on a montré que l'erreur d'approximation de la solution pouvait être réduite par l'emploi de constructions non-triviales, pour des problèmes 2D [Xu 2011, Xu 2012] et 3D multi-patches [Xu 2013].

L'analyse isogéométrique définit tout champ Θ par une représentation B-Spline :

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \hat{N}_i^{p_i}(\xi) \hat{N}_j^{p_j}(\eta) \Theta_{ij}. \quad (2.4)$$

On peut remarquer que pour des B-Splines linéaires, on retrouve une représentation par éléments-finis Q1 classiques. En revanche, pour des degrés supérieurs, la représentation est fort différente des éléments de Lagrange, notamment les degrés de libertés Θ_{ij} ne sont pas interpolés et ne représentent pas la valeur du champ en un point donné.

Pour appliquer une formulation variationnelle, on introduit la transformation (non-linéaire) \mathbf{F} qui permet de passer du domaine paramétrique Ω_0 au domaine physique Ω , illustrée par la figure (2.2) :

$$\mathbf{F} : \begin{array}{ccc} \Omega_0 & \rightarrow & \Omega \\ \boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta) & \mapsto & \mathbf{x} = (x, y). \end{array} \quad (2.5)$$

Cette transformation est entièrement définie par la construction du domaine de calcul, sur la base de l'équation (2.3). Des critères simples, basés sur l'injectivité locale de \mathbf{F} , ont été proposés dans [Xu 2011], en collaboration avec l'Equipe-Projet Galaad, pour assurer que la construction du domaine de calcul est viable pour la résolution des EDP.

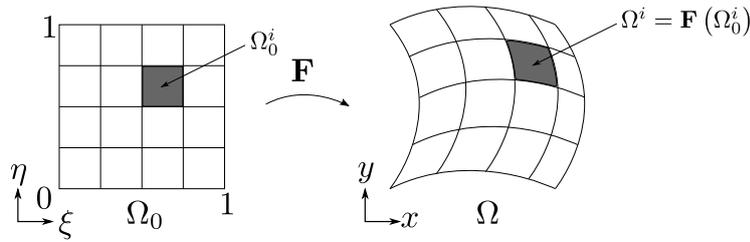


FIGURE 2.2 – Illustration de la transformation du domaine paramétrique Ω_0 dans le domaine physique Ω .

On peut alors définir les fonctions de base dans le domaine physique par :

$$N_{ij}(\mathbf{x}) = N_{ij}(x, y) = N_{ij}(\mathbf{F}(\xi, \eta)) = \hat{N}_{ij}(\xi, \eta) = \hat{N}_i^{p_i}(\xi) \hat{N}_j^{p_j}(\eta). \quad (2.6)$$

Les fonctions de base servant à représenter les champs physiques étant définies, une formulation variationnelle est utilisée pour résoudre les équations d'état. Dans les sections suivantes, on examine l'application de cette méthodologie à un problème elliptique, puis hyperbolique.

2.3 Problèmes elliptiques

On considère le problème modèle (conduction thermique) suivant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\kappa(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x})) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ T(\mathbf{x}) &= T_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \partial\Omega_D \\ \kappa(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= \Phi_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \partial\Omega_N, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où \mathbf{x} sont les coordonnées Cartésiennes, T représente le champ de température inconnu et κ le coefficient de conductivité. Des conditions aux limites de Dirichlet et Neumann sont appliquées sur $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$, T_0 et Φ_0 étant la température et le flux imposés (\mathbf{n} vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur).

On adopte une formulation variationnelle et on cherche la solution $T \in \mathcal{V}(\Omega)$, telle que $T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x})$ sur $\partial\Omega_D$ et :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_{\partial\Omega_D}(\Omega), \quad (2.8)$$

où $\psi(\mathbf{x})$ est une fonction test. On invite le lecteur à consulter [Bazilevs 2006, Cottrell 2009] pour un examen précis des espaces fonctionnels considérés et des propriétés d'approximation dans ce contexte. Par intégration par partie, on obtient classiquement :

$$- \int_{\Omega} \kappa(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \kappa(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_{\partial\Omega_D}(\Omega). \quad (2.9)$$

En introduisant la condition aux limites de type Neumann, on obtient finalement la formulation suivante :

$$- \int_{\Omega} \kappa(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \Phi_0(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_{\partial\Omega_D}(\Omega). \quad (2.10)$$

Conformément au paradigme isogéométrique, le champ de température est décrit par une représentation B-Spline :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \hat{N}_i^{p_i}(\xi) \hat{N}_j^{p_j}(\eta) T_{ij} = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} N_{ij}(\mathbf{x}) T_{ij}. \quad (2.11)$$

On introduit cette représentation dans la formulation variationnelle, en utilisant les fonctions B-Splines comme fonctions tests :

$$\sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} T_{kl} \int_{\Omega} \kappa(\mathbf{x}) \nabla N_{kl}(\mathbf{x}) \cdot \nabla N_{ij}(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_N} \Phi_0(\mathbf{x}) N_{ij}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad i = 1, \dots, n_i \quad j = 1, \dots, n_j. \quad (2.12)$$

On aboutit finalement au système linéaire $MT = S$ défini par :

$$\begin{aligned} M_{ij,kl} &= \int_{\Omega} \kappa(\mathbf{x}) \nabla N_{kl}(\mathbf{x}) \cdot \nabla N_{ij}(\mathbf{x}) d\Omega \\ S_{ij} &= \int_{\partial\Omega_N} \Phi_0(\mathbf{x}) N_{ij}(\mathbf{x}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le processus d'évaluation des fonctions B-Splines étant défini dans le domaine paramétrique, ces intégrales sont calculées après un changement de variables :

$$\begin{aligned} M_{ij,kl} &= \int_{\Omega_0} \kappa(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{N}_{kl}(\boldsymbol{\xi}) B(\boldsymbol{\xi})^\top B(\boldsymbol{\xi}) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{N}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) d\hat{\Omega} \\ S_{ij} &= \int_{\partial\Omega_{0,N}} \Phi_0(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})) \hat{N}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) d\hat{\Gamma}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

où J est le Jacobien de la transformation \mathbf{F} et B est la transposée de l'inverse de la matrice Jacobienne. Les fonctions B-Splines sont définies sur chaque intervalle du vecteur des noeuds, on considère donc habituellement les intervalles du vecteur des noeuds comme *éléments*. L'intégration est alors réalisée élément par élément, en utilisant une quadrature de Gauss-Legendre appropriée.

Les conditions aux limites de type Dirichlet sont directement imposées en fixant les degrés de liberté (points de contrôle) associés à la frontière. Dans le cas où la valeur de la solution à la frontière n'appartient pas à l'espace B-Spline, une projection devra être effectuée.

On constate donc que l'analyse isogéométrique est formellement très proche des éléments-finis classiques, seules les fonctions de base utilisées sont différentes.

On applique dans un premier temps cette approche à un problème dont la géométrie est cartésienne. Cette étude permet d'évaluer la précision du schéma numérique avec une description exacte de la géométrie, quel que soit le degré de la base choisie.

Le problème est décrit à la figure (2.3). Deux conditions aux limites de type Dirichlet, uniformes, sont imposées sur les frontières gauche et droite, avec $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$. Une condition de type Neumann nulle est fixée à frontière supérieure (adiabaticité), tandis qu'un flux sinusoïdal est choisi pour la frontière inférieure. On suppose que le coefficient de conductivité est uniforme.

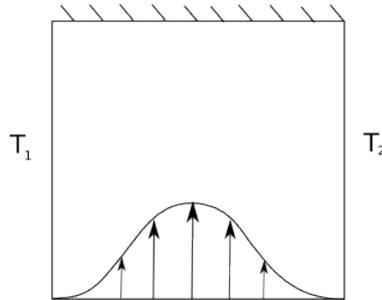
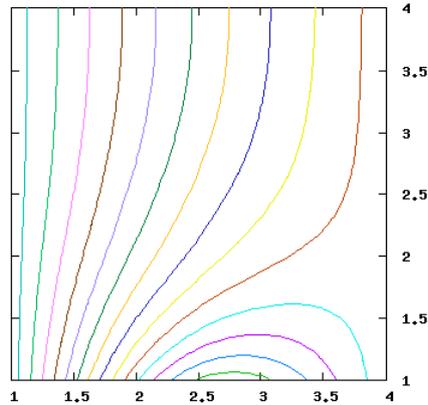
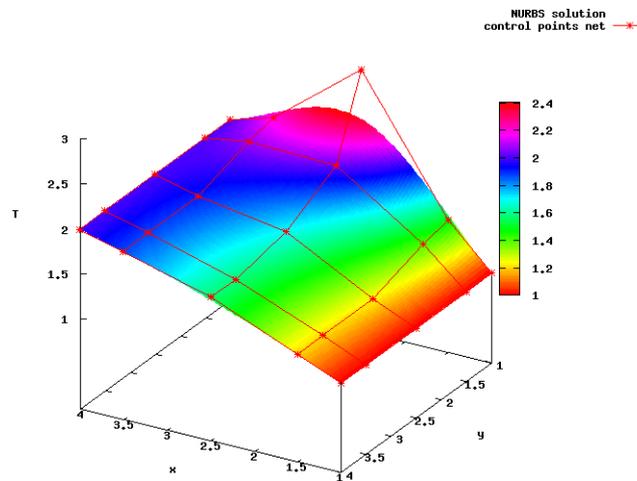


FIGURE 2.3 – Cas-test avec une géométrie simple.

Le domaine de calcul est paramétré en utilisant un vecteur des noeuds avec une distribution uniforme, comprenant 5×5 points de contrôle et seulement quatre éléments, pour une base cubique. Après discrétisation du problème et résolution du système linéaire associé, la solution est reconstruite selon l'équation (2.11). Le champ de température est illustré par la figure (2.4). On souligne la régularité de la solution obtenue avec seulement 5×5 degrés de liberté. On note également que la solution n'interpole pas ces derniers, comme illustré par la figure (2.5).

On réalise une étude de précision, en utilisant une base linéaire, quadratique et cubique, pour un raffinement systématique du domaine de calcul par insertion de

FIGURE 2.4 – lignes Iso- T (5×5 degrés de liberté).FIGURE 2.5 – Température décrite par une surface B-Spline comprenant 5×5 points de contrôle.

noeuds [De Boor 1978, Sabin 1993, Farin 1989]. On calcule la norme L2 de l'erreur, sur la base d'une solution de référence obtenue pour un domaine de calcul très fin. L'évolution de l'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté est représentée à la figure (2.6). On obtient une réduction de l'erreur optimale.

Il est intéressant d'étudier également l'évolution du temps de calcul, dans la mesure où le coût de résolution croît avec le degré de la base utilisée. Le tableau (2.1) montre l'évolution de temps de calcul avec l'erreur. Ces calculs ont été réalisés avec un processeur Intel Core2 Duo 2.8 GHz. Pour une erreur de niveau 10^{-3} , le temps de calcul nécessaire pour une base linéaire est environ 12s, et seulement 0.25s pour une base quadratique et 0.08s pour une base cubique. Cet exemple illustre pleinement l'intérêt des schémas d'ordre élevé.

On considère dans un second temps un problème similaire, mais comprenant une géométrie définie par B-Splines cubiques (voir figures (2.7) et (2.8)).

On résout ce problème à l'aide d'une base cubique, ce qui permet de *représenter exactement la géométrie, quelle que soit la finesse du domaine de calcul*. A partir d'une para-

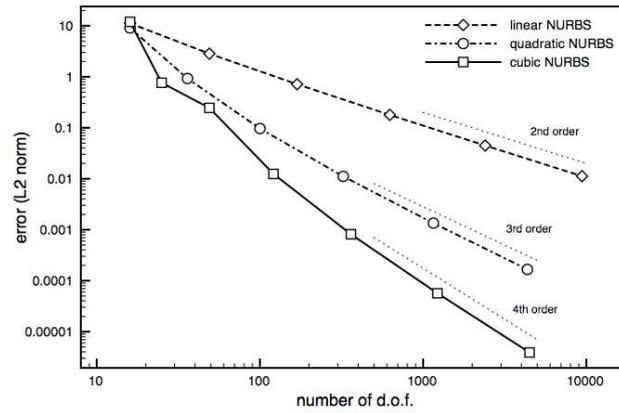


FIGURE 2.6 – Etude de précision pour une géométrie simple.

Degree	d.o.f.	Error	CPU (s)
linear	49	$0.28 \cdot 10^1$	0.004
linear	625	$0.17 \cdot 10^0$	0.072
linear	2401	$0.45 \cdot 10^{-2}$	0.911
linear	9409	$0.11 \cdot 10^{-2}$	12.150
quadratic	36	$0.91 \cdot 10^0$	0.004
quadratic	324	$0.11 \cdot 10^{-1}$	0.030
quadratic	1156	$0.13 \cdot 10^{-2}$	0.252
quadratic	4356	$0.16 \cdot 10^{-3}$	2.832
cubic	49	$0.24 \cdot 10^0$	0.007
cubic	361	$0.81 \cdot 10^{-3}$	0.078
cubic	1225	$0.56 \cdot 10^{-4}$	0.461
cubic	4489	$0.38 \cdot 10^{-5}$	4.509

TABLE 2.1 – Etude du temps de calcul

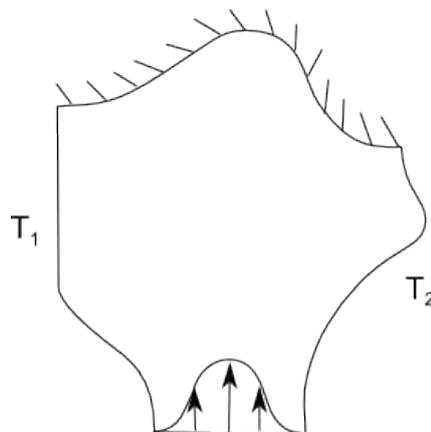


FIGURE 2.7 – Cas-test avec une géométrie plus complexe.

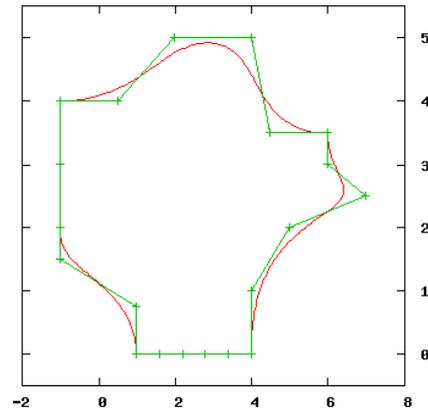


FIGURE 2.8 – Description des frontières par B-Splines cubiques.

métrisation de 9×9 points de contrôle, des domaines plus fins sont obtenus par insertion de noeuds, sans modifier la géométrie, comme illustré par la figure (2.10). Une étude de précision, similaire au cas précédent, montre qu'une précision optimale est obtenue dans le cas de frontières courbes, comme le montre la figure (2.9).

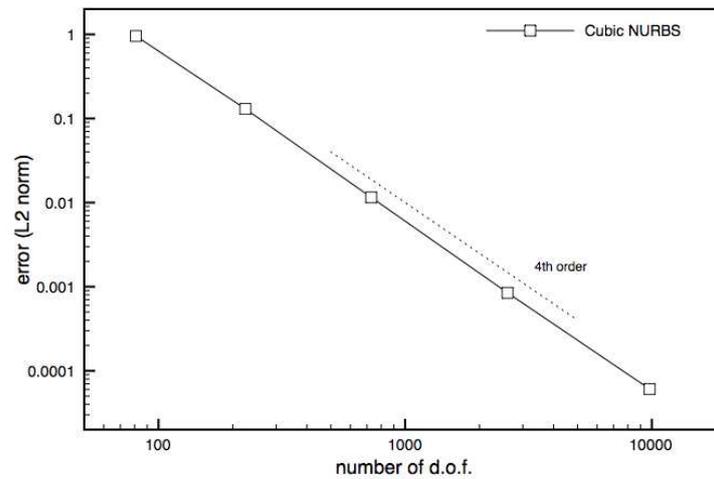
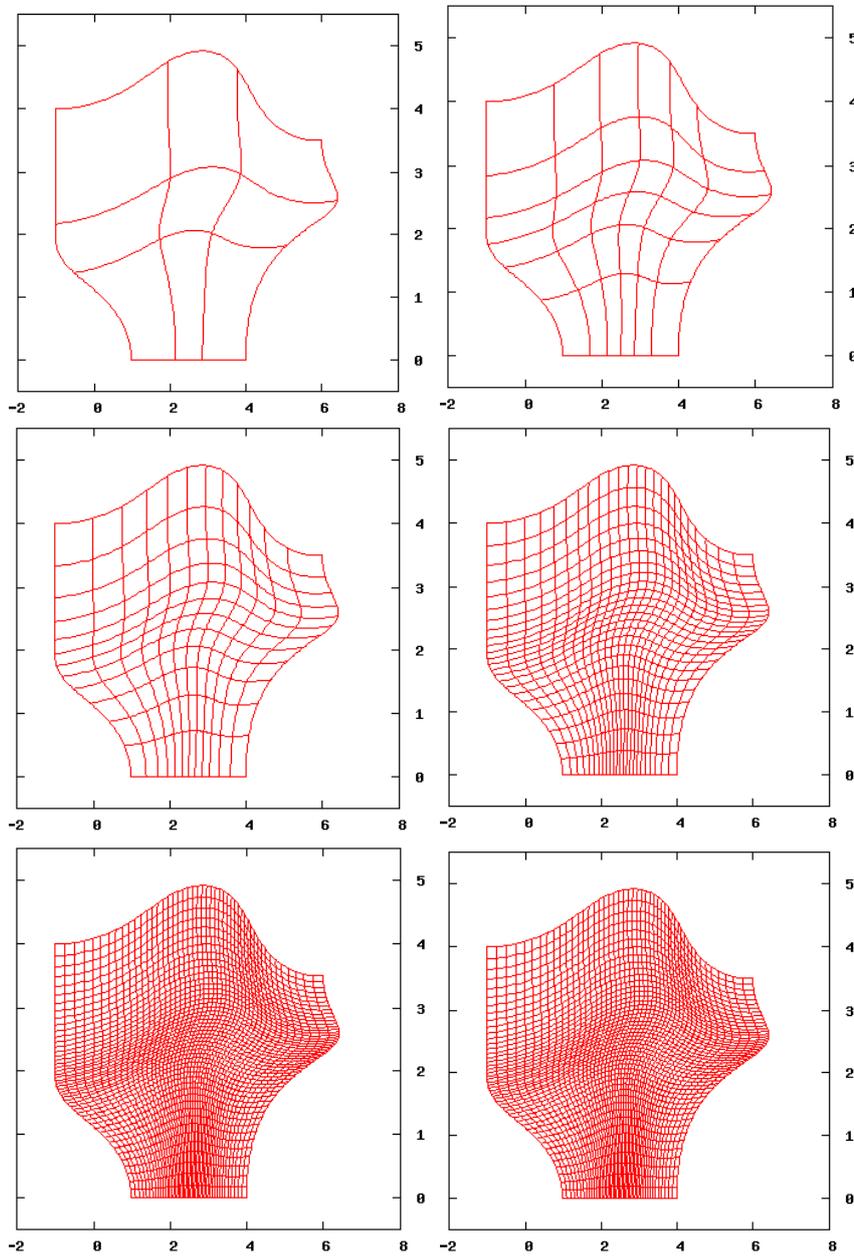


FIGURE 2.9 – Etude de précision

FIGURE 2.10 – Illustration de la procédure d'insertion de noeuds (lignes iso- ξ et iso- η).

2.4 Problèmes hyperboliques

La résolution de problèmes hyperboliques par approche isogéométrique est moins aisée. Quelques travaux concernant des problèmes d'advection [Hughes 2005] ou des écoulements régis par les équations de Navier-Stokes incompressible [Bazilevs 2011] ont été publiés, mais sont beaucoup plus rares que les applications aux problèmes elliptiques. Ce paragraphe constitue donc une première tentative d'extension, encore préliminaire, de la méthode éléments-finis isogéométrique à la simulation d'écoulements compressibles. Il convient de signaler des approches similaires, basées sur des méthodes de Galerkin discontinu [Sevilla 2008], ou de résidus distribués [Froehly 2012].

On considère comme problème hyperbolique typique la résolution des équations d'Euler pour un écoulement compressible bi-dimensionnel :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0 \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e) \quad (2.15)$$

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix} \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

où ρ représente la masse volumique, (u, v) les composantes du vecteur vitesse, e l'énergie spécifique et p la pression. F et G correspondent aux composantes horizontale et verticale du flux.

La résolution par une formulation variationnelle d'un tel problème nécessite l'emploi d'une méthode de stabilisation. Il s'agit là de la principale différence avec les problèmes elliptiques présentés auparavant. On introduit donc un terme de dissipation correspondant à la méthode SUPG (*Streamwise-Upwind Petrov-Galerkin*) [Hughes 2010]. On cherche alors la solution $W \in \mathcal{V}(\Omega)$ telle que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \dot{W}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} \right) \, d\Omega \\ & + \sum_{k=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^k} \left(\psi_{,x}(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial W} + \psi_{,y}(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial W} \right) \tau \left(\frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} \right) \, d\Omega = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'intégration par partie donne alors la formulation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \dot{W}(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{,x}(\mathbf{x}) F(W(\mathbf{x})) + \psi_{,y}(\mathbf{x}) G(W(\mathbf{x})) \, d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x}) (F(W(\mathbf{x})) n_x + G(W(\mathbf{x})) n_y) \, d\Gamma \\ & + \sum_{k=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^k} \left(\psi_{,x}(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial W} + \psi_{,y}(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial W} \right) \tau \left(\frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} \right) \, d\Omega = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dans le contexte de l'analyse isogéométrique, les variables conservatives W sont définies par des représentations B-Splines :

$$W(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{n_k} \sum_{l=0}^{n_l} \hat{N}_k(\xi) \hat{N}_l(\eta) W_{kl} = \sum_{k,l} \hat{N}_{kl}(\boldsymbol{\xi}) W_{kl}. \quad (2.19)$$

L'intégration spatiale des termes de l'équation (2.18) est réalisée dans l'espace paramétrique. Ainsi, l'intégration du terme instationnaire fait apparaître une matrice masse calculée selon :

$$M_{ij,kl} = \int_{\Omega_0} \hat{N}_{kl}(\boldsymbol{\xi}) \hat{N}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) d\hat{\Omega}.$$

Ce terme ne dépendant pas des inconnues, il peut être calculé une seule fois pour l'ensemble de la simulation. Le second terme, faisant intervenir l'intégrale de volume du flux, est calculé par :

$$\int_{\Omega_0} \left[(\hat{N}_{ij,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \hat{N}_{ij,\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}) F(W(\boldsymbol{\xi})) + (\hat{N}_{ij,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \hat{N}_{ij,\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}) G(W(\boldsymbol{\xi})) \right] J(\boldsymbol{\xi}) d\hat{\Omega}. \quad (2.20)$$

On notera la présence de nombreux termes géométriques correspondant au Jacobien de l'inverse de la transformation définie par l'équation (2.5). Le terme de stabilisation est calculé de manière similaire par :

$$\int_{\Omega_0^k} \left[(\hat{N}_{ij,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \hat{N}_{ij,\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial F}{\partial W}(\boldsymbol{\xi}) + (\hat{N}_{ij,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \hat{N}_{ij,\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}) \frac{\partial G}{\partial W}(\boldsymbol{\xi}) \right] \tau \left[\frac{\partial F}{\partial W}(\boldsymbol{\xi}) (W_{,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + W_{,\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}) + \frac{\partial G}{\partial W}(\boldsymbol{\xi}) (W_{,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + W_{,\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}) \right] J(\boldsymbol{\xi}) d\hat{\Omega}. \quad (2.21)$$

Ce terme fait intervenir la matrice Jacobienne des flux. En ce qui concerne le paramètre τ , qui contrôle l'intensité de la dissipation, de nombreuses formulations peuvent être trouvées dans la littérature [Tezduyar 2006, Hughes 2010]. On a choisit d'adopter pour cette première tentative une formulation simple, sans doute naïve, basée sur le pas de temps local. Ce dernier est défini en chaque point d'intégration G par :

$$\Delta t_G = \frac{vol^{1/d}}{\max_p |\lambda_p|}, \quad (2.22)$$

où vol représente le volume d'un intervalle du vecteur des noeuds, d la dimension du problème et λ_p les valeurs propres de la matrice Jacobienne des flux. Le paramètre de dissipation est choisi de manière proportionnelle :

$$\tau = \alpha \Delta t_G, \quad (2.23)$$

où α est un paramètre numérique, fixé ici à la valeur 1/2. De manière à évaluer l'intégrale sur l'élément, ces quantités sont calculées aux points d'intégration. Comme pour les problèmes elliptiques, l'intégration est réalisée au moyen des quadratures de Gauss-Legendre, à la différence près que les intégrales sont ici calculées de manière approchée.

Le terme faisant apparaître une intégrale de bord dans l'équation (2.18) permet d'imposer les conditions aux limites de manière faible. Les flux aux frontières sont calculés d'une manière similaire aux méthodes volumes-finis, au moyen d'un flux numérique de Lax-Friedrich $\vec{\mathcal{F}}$:

$$\int_{\partial\Omega_0} \hat{N}_{ij}(s) \left(\vec{\mathcal{F}}(s) \cdot \vec{n}(s) \right) d\Gamma.$$

Pour cela, on introduit pour chaque point d'intégration un état extérieur fictif, calculé par symétrie de l'état intérieur dans le cas de parois ou par introduction d'invariants de Riemann et d'un état au loin dans le cas de frontières d'entrée ou sortie.

Deux approches sont testées pour l'intégration temporelle. Puisqu'on se restreint à des problèmes stationnaires, une première approche simple est d'utiliser une démarche explicite,

basée sur une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux, associée à un pas de temps local. Dans ce cas, l'inverse de la matrice masse est calculée un fois au début de la simulation. A noter que le pas de temps local associé aux degrés de liberté d'indice ij est évalué différemment de l'équation (2.22). En effet, dans le contexte isogéométrique, les degrés de liberté d'indice ij n'ont pas de localisation précise dans le domaine de calcul. On choisit donc comme pas de temps associé aux degrés de liberté d'indice ij , le pas minimal calculé sur l'ensemble \mathcal{G}_{ij} des points d'intégration des éléments pour lesquels la fonction N_{ij} est non nulle :

$$\Delta t_{ij} = \min_{G \in \mathcal{G}_{ij}} \Delta t_G. \quad (2.24)$$

Une seconde approche est également testée, reposant sur une formulation implicite. Dans ce cas, on choisit une approche entièrement stationnaire, sans terme temporel. On adopte pour la résolution un algorithme de Levenberg-Marquardt [Gill 1981], qui cherche à minimiser le carré de la norme des résidus :

$$\min_W \frac{1}{2} \|R(W)\|^2, \quad (2.25)$$

où $R(W)$ est le vecteur des résidus. La condition d'optimalité et l'ajout d'un terme d'amortissement conduisent au schéma itératif suivant :

$$(\|R(W)\|^2 I_n + J(W)^\top J(W)) \delta W = -J(W)^\top R(W) \quad (2.26)$$

où δW représente la variation de la solution et $J(W)$ sa matrice Jacobienne, calculée ici par une méthode de perturbation. Il s'agit là d'une méthode de Gauss-Newton modifiée pour être plus stable grâce à l'ajout d'un terme diagonal. L'inversion du système linéaire est réalisée par une méthode de gradient conjugué. Cette approche a été adoptée car l'utilisation d'une méthode classique de Newton conduisait à un schéma instable, même en y ajoutant un terme instationnaire.

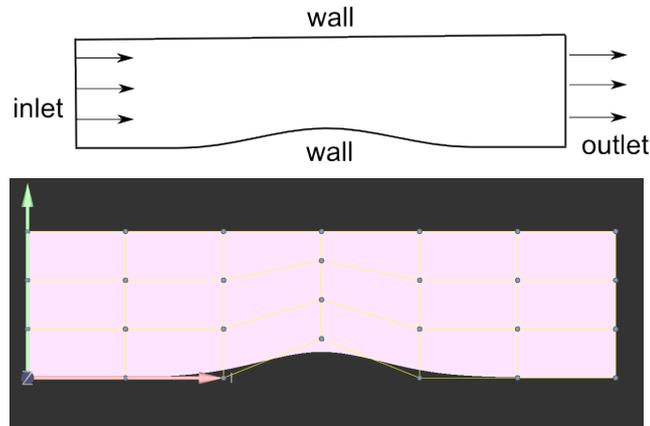


FIGURE 2.11 – Problème d'écoulement subsonique dans un canal à bosse et paramétrisation du domaine de calcul.

On applique cette approche à la simulation d'un écoulement subsonique ($M_\infty = 0.4$) dans un canal doté d'une bosse cubique d'amplitude correspondant à 13% de la longueur, comme illustré par la figure (2.11). Le domaine de calcul est défini initialement par un produit tensoriel de 7×4 fonctions B-Splines cubiques. La bosse est simplement créée

par déplacement d'un point de contrôle, comme le montre la figure (2.11). Deux étapes de raffinement uniforme sont utilisées pour générer des domaine de calculs comprenant un plus grand nombre de degrés de liberté, respectivement 55 et 133. On a représenté à la figure (2.12) les éléments B-Splines correspondant à ces trois paramétrisations (i.e. les intervalles des noeuds), ainsi que le maillage triangulaire qui sera utilisé pour un calcul de référence par une méthode volumes-finis (1593 degrés de liberté).

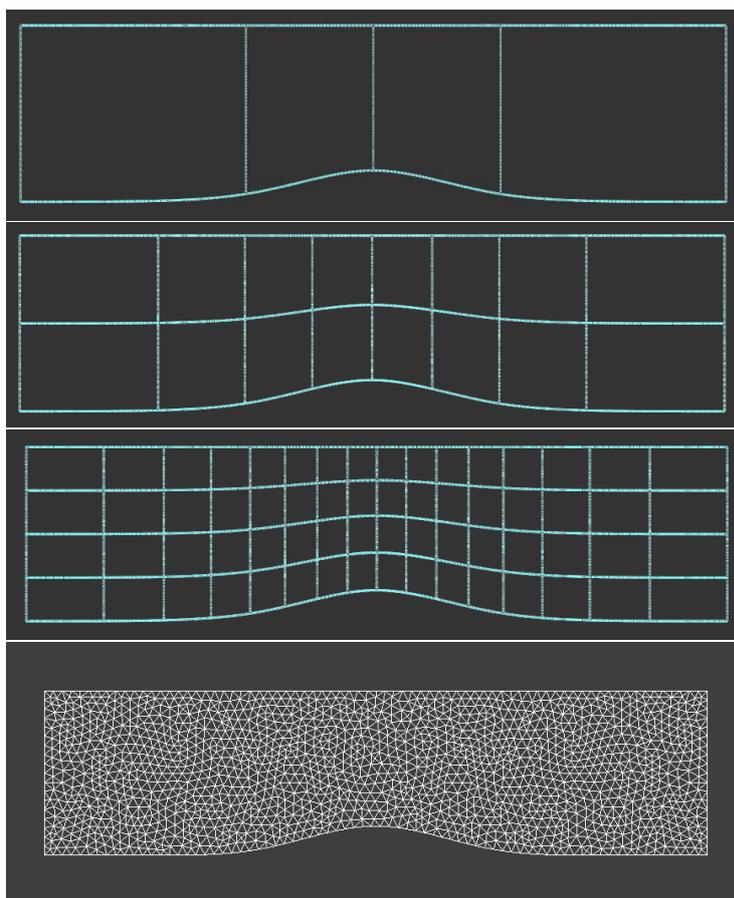


FIGURE 2.12 – Eléments B-Splines (initial, un et deux niveaux de raffinement) et maillage triangulaire grossier.

Les champs de densité et de quantité de mouvement obtenus sont représentés sur les figures (2.13) et (2.14) et comparés à une méthode volumes-finis. Pour tous les calculs isogéométriques, une base cubique a été employée. On constate que l'approche isogéométrique fournit une assez bonne approximation de la solution pour un nombre de degrés de liberté très faible. Pour avoir une estimation plus quantitative, on observe la pression à la paroi inférieure et on la compare à celle obtenue par une méthode volumes-finis sur le maillage grossier présenté précédemment et sur un maillage fin comprenant 6307 degrés de liberté. On constate sur la figure (2.15) que la méthode isogéométrique avec le second niveau de raffinement, incluant 133 degrés de libertés, fournit un meilleur résultat que la méthode volumes-finis avec le grossier comprenant 1593 degrés de liberté, en terme d'intensité et de symétrie de la dépression.

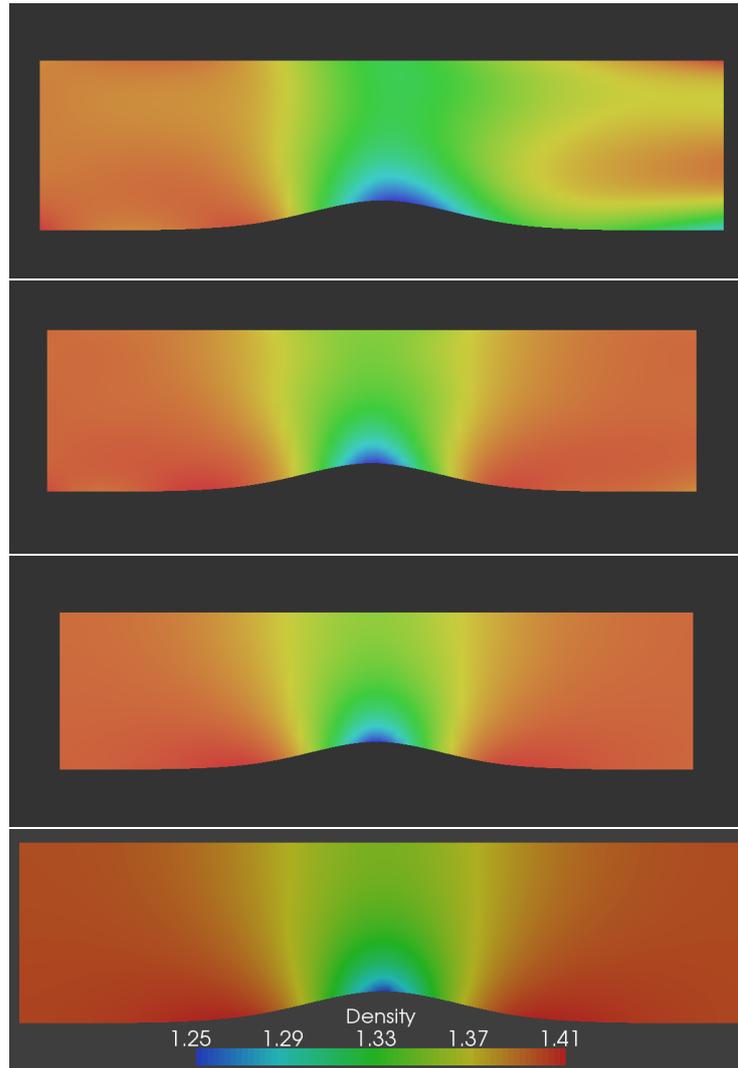


FIGURE 2.13 – Champ de densité obtenu par méthode isogéométrique (initial, un et deux niveaux de raffinement) et par une méthode volumes-finis (maillage grossier).

Il est intéressant de comparer le temps de calcul de la méthode isogéométrique et d'une méthode volumes-finis traditionnelle, comme illustré par la table (2.2). Ces temps ont été obtenus pour une réduction des résidus de huit ordres, sur un processeur Intel Core2 Duo 2.8 GHz. Dans le cas de la méthode isogéométrique, l'approche explicite est employée. Dans le cas de la méthode volumes-finis, une approche implicite avec matrice Jacobienne approchée est utilisée [Dervieux 1992, Kloczko 2008b]. Bien que ces deux calculs ne soient pas rigoureusement comparables, car la méthode volumes-finis bénéficie d'une méthodologie plus mature, on constate que le temps de calcul est plus faible pour la méthode isogéométrique. Manifestement, cette réduction est beaucoup plus modeste que ne le laissait présager la réduction du nombre de degrés de liberté. Cela s'explique par le coût beaucoup plus important d'évaluation des intégrales pour la méthode isogéométrique.

Finalement, on compare l'efficacité de l'approche explicite, par une méthode de Runge-

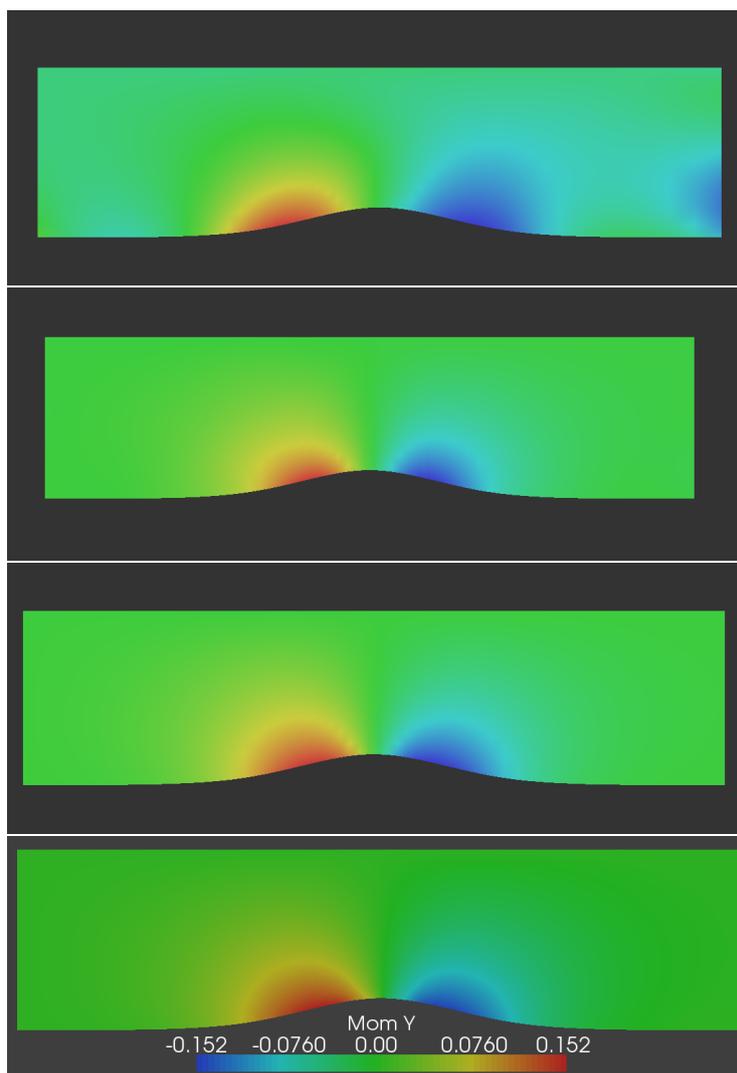


FIGURE 2.14 – Champ de la seconde composante de quantité de mouvement obtenu par méthode isogéométrique (initial, un et deux niveaux de raffinement) et par une méthode volumes-finis (maillage grossier).

Kutta d'ordre deux et utilisation d'un pas de temps local, à l'approche implicite, par une formulation stationnaire et résolution par l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Les résultats sont montrés par les figures (2.16) et (2.17), pour le calcul à un niveau de raffinement, en terme de réduction de la norme deux des résidus, selon le nombre d'itérations et le temps de calcul. On constate bien entendu que la méthode implicite converge en un nombre d'itérations bien plus faible que la méthode explicite. Néanmoins, le temps de calcul et d'inversion de la matrice Jacobienne est important et le résultat en terme de temps de calcul est moins concluant.

Ces résultats prometteurs doivent être nuancés. En effet, lorsqu'on a souhaité affiner significativement le domaine de calcul, pour quantifier précisément l'ordre de convergence de la méthode, on a rencontré des difficultés notables à faire converger les calculs. On

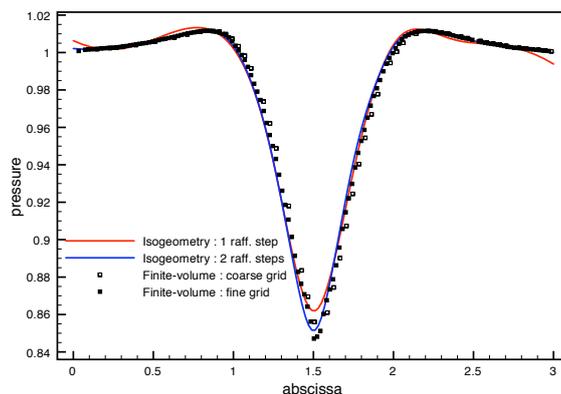


FIGURE 2.15 – Comparaison de la pression pariétale.

	d.d.l.	CPU time
Isogeometry : Initial	28	0.8 min.
Isogeometry : 1 raff. step	55	1.3 min.
Isogeometry : 2 raff. step	133	3.1 min
Finite-volume : coarse	1593	4.4 min.
Finite-volume : fine	6307	20.2 min

TABLE 2.2 – Comparaison des temps de calcul.

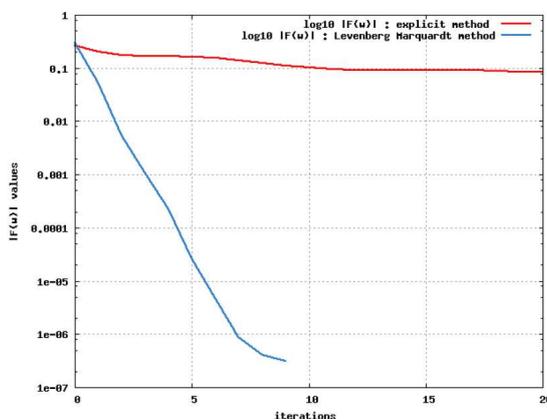


FIGURE 2.16 – Convergence des résidus en norme deux selon le nombre d'itérations.

attribue ces difficultés au choix d'un paramètre de dissipation τ trop simple. De plus, lorsque des essais ont été menés avec un nombre de Mach croissant jusqu'à obtenir un écoulement transsonique, la méthode est devenue oscillante jusqu'à diverger. Ce résultat n'est pas surprenant, dans la mesure où les méthodes éléments finis nécessitent l'usage d'un terme additionnel pour la capture des chocs [Tezduyar 2006].

Cette première tentative d'application des méthodes isogéométriques aux écoulements

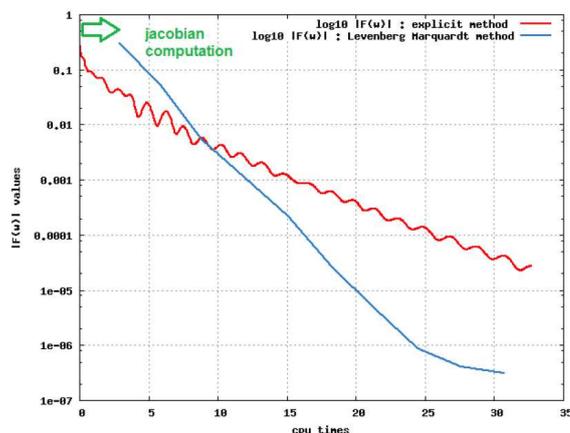


FIGURE 2.17 – Convergence des résidus en norme deux selon le temps de calcul.

compressibles montre donc que des développements additionnels significatifs sont nécessaires avant d’obtenir une méthode aussi robuste et efficace que les approches classiques. Ces approfondissements sont en cours à l’heure actuelle.

2.5 Application à l’optimisation et stratégies hiérarchiques

La construction d’une procédure d’optimisation de forme dans le contexte isogéométrique est grandement facilitée par rapport à une méthode classique, pour laquelle les équations d’état sont résolues sur la base d’un maillage. Pour une approche isogéométrique, l’algorithme d’optimisation détermine directement la position des points de contrôle sur la frontière du domaine de calcul. Pour résoudre les équations d’état, il suffit de mettre à jour les points de contrôle intérieurs, de manière à obtenir un domaine de calcul viable pour la résolution des EDP, comme expliqué dans un paragraphe précédent. La procédure d’optimisation de forme tire parti de l’intégration géométrie - analyse, ainsi que de l’ordre élevé des schémas et de la définition des frontières.

Un autre intérêt des méthodes isogéométriques réside dans le fait qu’elles reposent sur des *bases hiérarchiques*, utilisées pour la géométrie comme pour la solution. Cette caractéristique permet d’enrichir la représentation, selon deux modes : le raffinement de type h se fonde sur l’insertion d’un nouveau noeud dans le vecteur des noeuds, tandis que le raffinement de type p s’appuie sur une procédure d’élévation du degré des fonctions de base [De Boor 1978, Sabin 1993, Farin 1989]. Dans les deux cas, la *représentation obtenue par raffinement est identiquement égale à la représentation initiale*, pour un nombre de degrés de liberté augmenté. Les deux modes peuvent être combinés, sans commutation [Cottrell 2007].

Cette caractéristique permet de mettre en oeuvre les stratégies d’optimisation de forme hiérarchiques présentées dans le chapitre précédent. A noter que dans le cadre isogéométrique, de telles stratégies hiérarchiques peuvent être mises en oeuvre très simplement, non seulement pour la géométrie mais aussi pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

L'application d'une stratégie de raffinement simple pour un problème d'optimisation de forme, présentée dans le chapitre précédent, est illustrée dans le contexte isogéométrique par la figure (2.18). Cette approche consiste à conduire l'optimisation avec une représentation géométrique de plus en plus fine, comprenant un nombre de paramètres d'optimisation croissant. La résolution des équations aux dérivées partielles, en revanche, est réalisée avec un nombre de degré de liberté fixe, généralement supérieur au nombre de paramètres d'optimisation. Pour obtenir le domaine de calcul avec la finesse souhaitée, on applique des raffinements successifs de la base initiale.

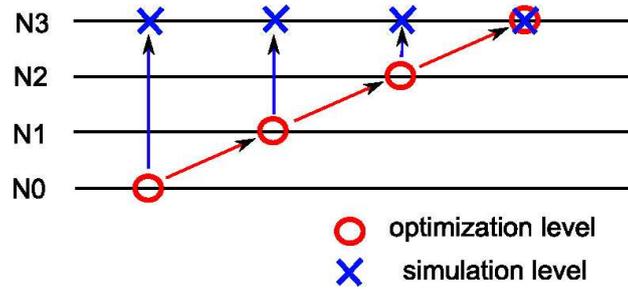


FIGURE 2.18 – Algorithme d'enrichissement pour l'optimisation

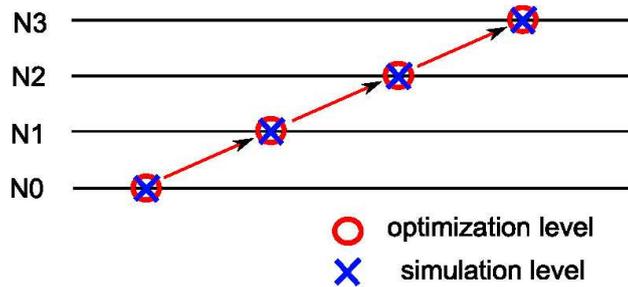


FIGURE 2.19 – Algorithme d'enrichissement pour l'optimisation et l'analyse.

Une seconde approche consiste à utiliser de surcroît le caractère hiérarchique de la base de représentation de la solution. Cette stratégie est illustrée par la figure (2.19) : à chaque étape, la même base de représentation est utilisée pour la géométrie et la simulation. Ainsi, on affine progressivement la qualité de l'approximation pour la résolution des EDP et pour le problème d'optimisation. Cette stratégie est à rapprocher des travaux de Ta'asan, qui a proposé une méthode similaire pour les simulations classiques basées sur des maillages [Ta'asan 1994]. Par une telle stratégie, on cherche évidemment à réduire le temps de calcul, en accélérant la résolution sur les niveaux grossiers.

On se propose d'appliquer ces stratégies à un problème inverse d'optimisation de forme en conduction thermique. Les détails de cette expérience sont décrits dans [Blanchard 2010]. On considère un domaine de calcul initial de forme rectangulaire, pour lequel on impose des conditions de Dirichlet aux frontières gauche et droite, tandis que des conditions d'adiabaticité sont utilisées pour les frontières inférieure et supérieure, comme illustré par la figure (2.20). Pour la forme initiale, la solution est linéaire. Le problème d'optimisation consiste à chercher la forme de la paroi inférieure de manière à atteindre une cible de

température $T_c(x)$. On cherche donc à minimiser la fonctionnelle :

$$j(\Gamma_{N_b}) = \int_{\Gamma_{N_b}} |T(x) - T_c(x)|^2 d\Gamma. \quad (2.27)$$

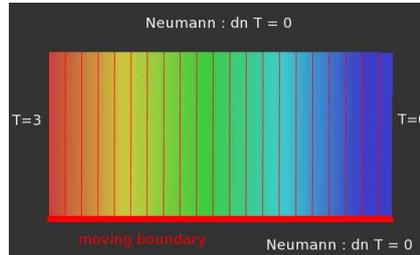


FIGURE 2.20 – Problème inverse d’optimisation en conduction thermique.

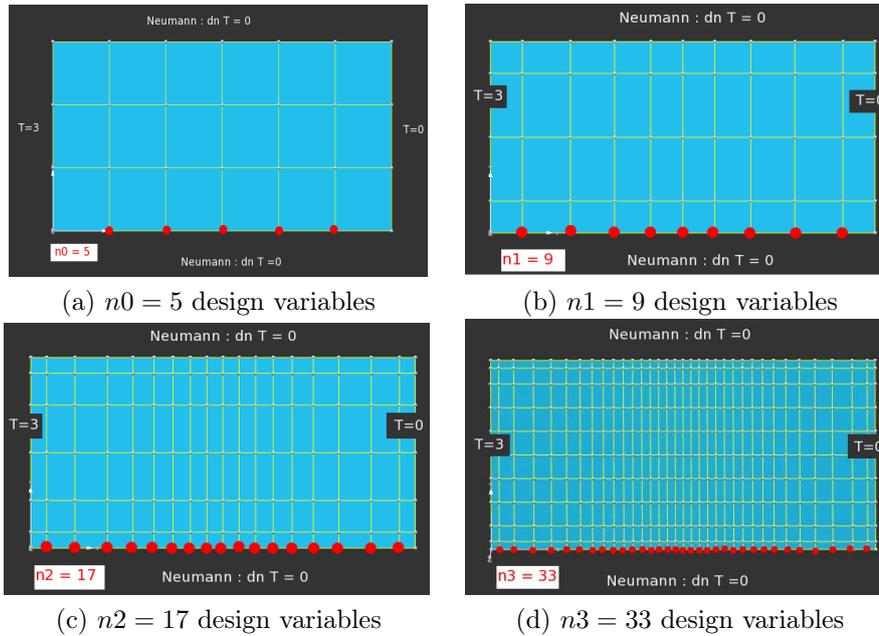


FIGURE 2.21 – Représentation des différents niveaux de paramétrisation.

La figure (2.21) montre les quatre niveaux de paramétrisation considérés, qui comptent respectivement 5, 9, 17 et 33 variables d’optimisation (coordonnées verticales des points de contrôle de la paroi inférieure) et 28, 55, 133 et 385 degrés de liberté pour la simulation (ensemble des points de contrôle).

On résout ce problème en utilisant une méthode de plus grande descente, tout d’abord sur chacun des quatre niveaux indépendamment, puis en utilisant les deux stratégies hiérarchiques définies ci-dessus. La figure (2.22) montre les formes et les distributions de température obtenues pour deux optimisations simples réalisées sur le niveau grossier et le niveau fin. On constate que la résolution sur le niveau grossier fournit une approximation de la cible correcte, sauf dans les zones de changement de pente. La résolution du problème sur le niveau fin aboutit à une solution oscillante, de qualité moindre.

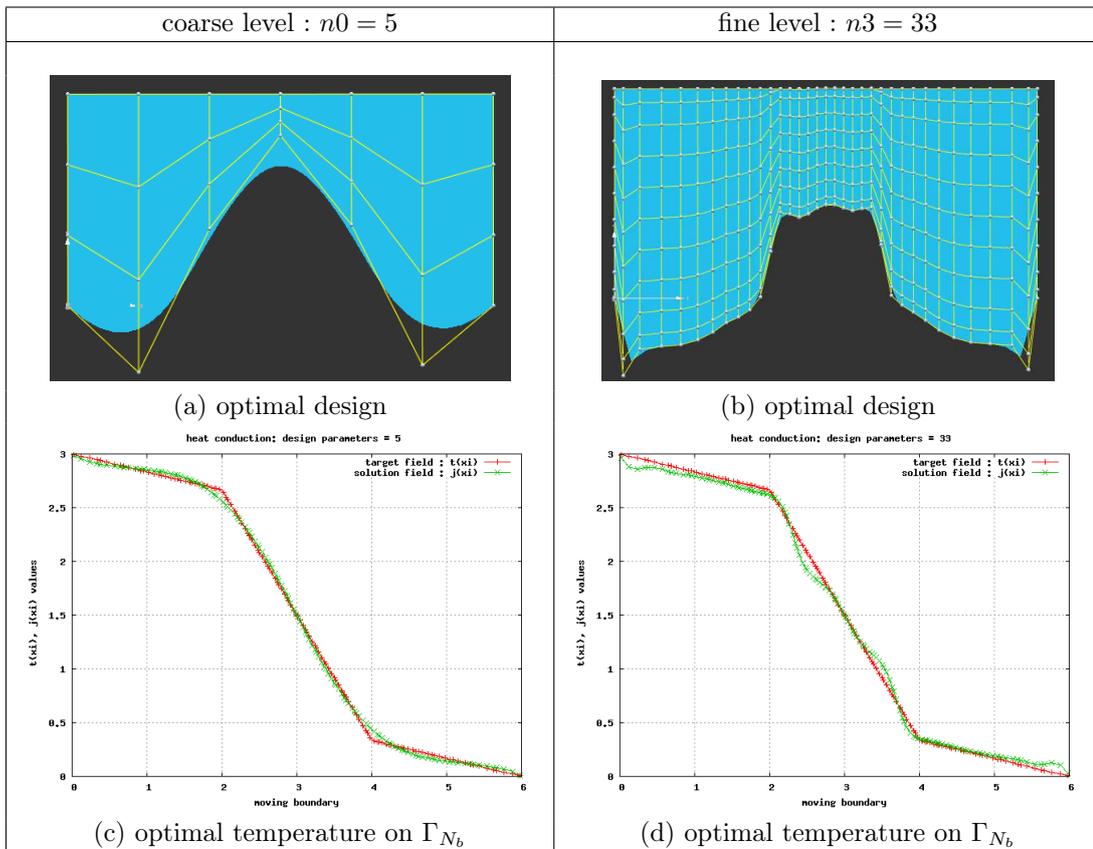


FIGURE 2.22 – Résultats obtenus sur les niveaux grossiers et fins (optimisation simple niveau).

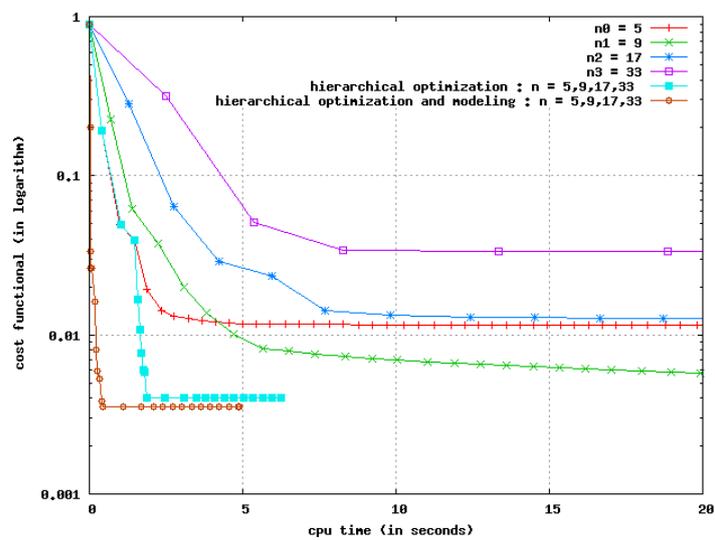


FIGURE 2.23 – Comparaison des vitesses de convergence.

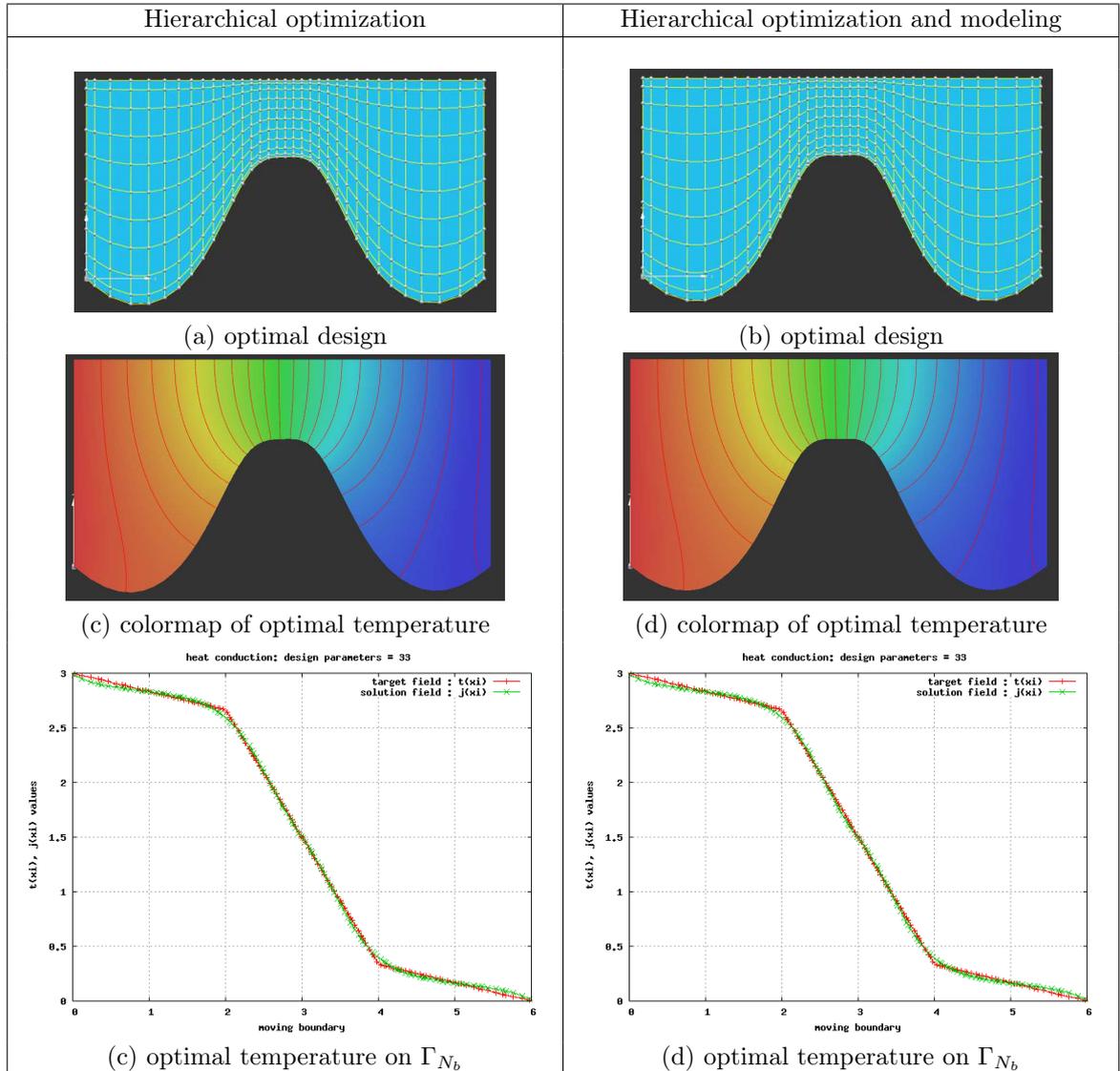


FIGURE 2.24 – Résultats obtenus par les approches hiérarchiques.

Une comparaison des convergences est réalisée à la figure (2.23). On note que plus la paramétrisation est fine et plus la convergence est difficile. Comme expliqué dans le chapitre premier, on constate donc que la raideur du problème d'optimisation, liée à l'anisotropie de la fonction coût, croît très rapidement avec le nombre de variables d'optimisation. On remarque également que les modes correspondant à une erreur haute-fréquence sont prépondérants.

En revanche, la stratégie d'optimisation hiérarchique, pour laquelle on réalise un faible nombre d'itérations sur les premiers niveaux, aboutit à une réduction rapide de la fonction coût. Si on emploie une stratégie hiérarchique pour la simulation et l'optimisation, on obtient une réduction similaire pour un temps de calcul encore plus faible.

La figure (2.24) propose une comparaison des résultats obtenus par les deux approches hiérarchiques. On remarque la régularité des solutions obtenues. Au contraire d'une

optimisation simple sur le niveau fin, l'approche hiérarchique a permis une réduction efficace de l'erreur haute fréquence.

Cet exemple illustre l'intérêt de tirer parti du caractère intrinsèquement hiérarchique de l'analyse isogéométrique. Ces développements pourraient encore être étendus en considérant une véritable méthodologie multigrille pour la résolution des EDP.

2.6 Synthèse

Ces différents travaux mettent en évidence le potentiel important de l'analyse isogéométrique pour la conception optimale : *l'absence d'erreur de modélisation géométrique*, la simplification algorithmique et conceptuelle permise par *l'unification des représentations de la géométrie, de la solution physique et de la déformation*, le caractère *hiérarchique* des représentations. Tous ces arguments soulignent l'intérêt d'une telle approche pour la conception optimale, notamment dans un contexte multidisciplinaire.

Cependant, de nombreux obstacles limitent encore son utilisation pour des problèmes complexes, comme les difficultés liées à la résolution des problèmes hyperboliques et la complexité sous-jacente à l'utilisation de ces bases. De plus, la version présentée ici souffre d'une représentation tensorielle qui limite son efficacité. Des variantes permettant le raffinement local existent, comme les T-Splines [Dorfel 2010, Hughes 2005], mais leur utilisation est encore plus complexe.

Conception robuste et estimation d'incertitude

Sommaire

3.1 Examen des concepts d'erreur et incertitude	57
3.2 Estimation d'incertitude	58
3.2.1 Estimation d'incertitude pour une fonctionnelle	59
3.2.2 Estimation d'incertitude pour l'écoulement	67
3.3 Optimisation robuste	73
3.3.1 Optimisation de critères statistiques	73
3.3.2 Optimisation de critères bruités	76
3.4 Synthèse	88

Dans les chapitres précédents, on s'est attaché à construire une méthode de conception optimale plus efficace, notamment en améliorant la prise en compte de la géométrie et en introduisant un niveau de modélisation intermédiaire durant l'optimisation. Cependant, un aspect fondamental a été négligé : *la simulation ne représente pas exactement la réalité*, mais est entachée d'erreurs et incertitudes. Ce chapitre est donc consacré à la prise en compte des erreurs et incertitudes durant la conception optimale. Dans un premier temps, on précise ces concepts dans le contexte de la mécanique des fluides numérique. Quelques approches permettant de quantifier les incertitudes sont ensuite présentées et comparées. Finalement, plusieurs stratégies de *conception robuste* sont décrites et testées dans différents contextes.

3.1 Examen des concepts d'erreur et incertitude

Il est nécessaire de débiter ce chapitre par un examen précis du concept *d'incertitude*, et du concept voisin *d'erreur*, dans le contexte de la mécanique des fluides numérique. Les phénomènes étudiés ici sont *intrinsèquement de nature déterministe* et il est donc important de préciser et justifier l'introduction du concept d'incertitude qui est lui *intrinsèquement de nature stochastique*.

Dans ce chapitre, on adopte le point de vue proposé par l'AIAA ("American Institute for Aeronautics and Astronautics") énoncé dans [Aia 1998] : le terme d'incertitude désigne "a potential deficiency in any phase or activity of the modeling process that is due to a lack of knowledge". Par opposition, le terme d'erreur désigne lui "a recognizable deficiency in any phase or activity of the modeling process that is not due to a lack of knowledge". Ainsi, l'incertitude désigne un possible écart par rapport à la réalité, issu d'un *manque de connaissance du problème*. L'erreur désigne un écart dû à une *simplification volontaire pour la résolution du problème*.

Ainsi, en mécanique des fluides numérique, on peut identifier plusieurs sources d'incertitudes liées au fait qu'on ne connaît le problème que de manière imparfaite : la valeur des conditions aux limites et condition initiale (état de l'écoulement au moment initial, à l'infini, en entrée, en sortie, etc), la géométrie des frontières (détails géométriques non connus, déformation structurale, usure, etc), les équations d'état (coefficients thermodynamiques, modèles de gaz, etc).

De manière similaire, de nombreuses sources d'erreurs peuvent être identifiées : l'erreur de troncature (schémas spatiaux et temporels), l'erreur itérative (convergence incomplète), l'erreur d'arrondi (calculs en précision finie), l'erreur de modélisation (introduction d'une fermeture turbulente) et les erreurs d'implémentation.

Cette liste n'est pas exhaustive, il est certain néanmoins que tout calcul présente un écart entre la solution trouvée et la réalité d'un écoulement. De nombreux travaux de recherche (estimation d'erreur, adaptation de maillage, quantification d'incertitude) et de nombreux "workshops" de validation ont été menés sur ce thème. Cependant, dans le contexte plus large de la conception optimale, il est étonnant de constater que le résultat de la simulation est la plupart du temps utilisé en l'état par l'algorithme d'optimisation, comme si le calcul était exact. Par conséquent, *la solution trouvée correspond à un cas idéal (sans incertitude) et n'est pas un optimum exactement (sans erreur)*. Cela a pu être observé lors d'exercices de conception optimale incluant une étude de validation croisée [Benini 2012].

L'objectif de ce chapitre est donc d'étudier dans quelle mesure il est possible de mener un processus de conception prenant en compte les incertitudes et les erreurs de simulation.

3.2 Estimation d'incertitude

Dans un premier temps, on examine quelques approches possibles pour quantifier l'effet de paramètres incertains sur le résultat d'un calcul d'écoulement. Il s'agit là d'un sujet de recherche particulièrement actif ces dernières années et, dans la majorité des cas, un point de vue statistique est adopté. On considère les paramètres incertains du calcul comme variables aléatoires, caractérisées par une densité de probabilité connue. L'objectif est alors de déterminer les moments statistiques (moyenne, variance, etc) du résultat du calcul. Le lecteur pourra trouver dans [Walter 2002] un examen des différentes approches couramment utilisées en aérodynamique. On retiendra principalement les méthodes suivantes :

- **Les méthodes de Monte-Carlo**, consistant à calculer la moyenne et la variance par des estimateurs basés sur un échantillonnage aléatoire de taille M de l'espace des événements. Cette approche est directe mais coûteuse, puisque la méthode est d'ordre $1/\sqrt{M}$, indépendamment du nombre de variables aléatoires. Dans le contexte qui nous intéresse ici, son utilisation est quasiment impossible, du fait du nombre de simulations à réaliser pour obtenir une estimation précise. Cependant, elle peut être utilisée sur la base d'un modèle réduit, dont l'évaluation a un coût négligeable.
- **L'utilisation des dérivées par rapport aux paramètres incertains**, de manière à approcher la valeur d'une fonctionnelle ou de la solution par développement de Taylor au voisinage de la moyenne des variables incertaines. Une intégration analytique permet alors de déduire une estimation de la moyenne et de la variance pour la fonctionnelle ou la solution [Putko 2001, Huyse 2001a, Martinelli 2010, Turgeon 2001b]. La principale difficulté de cette approche réside dans le calcul des dérivées.

- **Les méthodes de Chaos Polynomial**, consistant à décomposer la partie stochastique de la solution selon une base de polynômes orthogonaux. L'application d'une méthode de Galerkin conduit alors à un nouveau système d'équations, dont la résolution fournit les coefficients associés aux différents modes, permettant d'exprimer la moyenne, la variance, etc, de la solution [Lin 2006, Mathelin 2005, Walters 2003, Knio 2006]. Cette approche nécessite cependant le développement de nouvelles méthodes numériques pour la résolution. Plusieurs variantes non-intrusives mais coûteuses ont été développées, reposant soit sur une identification des coefficients après calcul de plusieurs configurations particulières, soit sur des intégrations discrètes dans des espaces de dimension élevée.
- **La partition de l'espace des événements**, associée à la résolution des équations d'état sous condition d'appartenance à un élément de la partition. Cette approche aboutit à un méthode de résolution similaire au cas déterministe, mais étendue à la prise en compte des densités de probabilité des paramètres [Abgrall 2012]. Cette approche nécessite des développements additionnels, mais limités et respectant la structure des méthodes numériques existantes pour les problèmes déterministes.

On remarque que toutes *ces méthodes diffèrent par la manière d'explorer ou décrire l'espace des événements* : par échantillonnage aléatoire, par série de Taylor, par décomposition polynomiale et par partition. Ma contribution, décrite dans la suite de ce chapitre, concerne plus précisément l'approche reposant sur l'analyse de sensibilité, comparée aux estimateurs de Monte-Carlo appliqués à des métamodèles, dans la mesure où les méthodes utilisées sont similaires celles couramment employées pour la conception optimale.

3.2.1 Estimation d'incertitude pour une fonctionnelle

3.2.1.1 Principe

Cette méthode consiste à substituer au modèle physique un développement de Taylor autour des valeurs moyennes des variables incertaines, généralement à l'ordre un ou deux, puis à intégrer analytiquement cette approximation polynomiale pour calculer les moments statistiques (espérance, variance) des grandeurs d'intérêt. On examine dans cette section l'application à une fonctionnelle, puis dans le paragraphe suivant l'application à la solution des équations d'état.

On considère donc une fonctionnelle j , qui s'exprime :

$$j: a \mapsto j(a) = J(a, W) \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ représente un ensemble de variables aléatoires et $W = W(a) \in \mathbb{R}^N$ sont les variables d'écoulement. On propose d'adopter ici un point de vue discret, pour lequel la discrétisation intervient avant la dérivation. On suppose donc dans la suite que toutes les grandeurs considérées ont été auparavant discrétisées. On décrit les fluctuations de j dues aux variations de a par un développement de Taylor à l'ordre un autour des valeurs moyennes μ_a des paramètres incertains :

$$j(a) \approx j(\mu_a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial j}{\partial a_i} (a_i - \mu_{a_i}), \quad (3.2)$$

ou par un développement à l'ordre deux :

$$j(a) \approx j(\mu_a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial j}{\partial a_i} (a_i - \mu_{a_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 j}{\partial a_i \partial a_k} (a_i - \mu_{a_i})(a_k - \mu_{a_k}). \quad (3.3)$$

L'espérance de j est par définition :

$$\mu_j = \int_{\Omega_a} j(a)\rho(a)da, \quad (3.4)$$

où Ω_a et ρ sont respectivement l'espace des événements et la densité de probabilité du vecteur des variables aléatoires a . Si on suppose que les variables aléatoires a_i sont Gaussiennes et non corrélées, et si on utilise un développement de Taylor au premier ordre pour calculer cette intégrale, on obtient facilement pour expression de l'espérance :

$$\mu_j \approx j(\mu_a). \quad (3.5)$$

Dans ce cas, l'espérance μ_j est simplement approchée par la valeur de la fonctionnelle j calculée à la valeur moyenne μ_a . Si on utilise un développement à l'ordre deux, on a alors l'expression suivante :

$$\mu_j \approx j(\mu_a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 j}{\partial a_i \partial a_i} \sigma_{a_i}^2, \quad (3.6)$$

où $\sigma_{a_i}^2$ est la variance de la variable aléatoire a_i . On souligne que, dans ce cas, l'espérance de j n'est pas approchée par la valeur de j pour la moyenne des paramètres incertains, celle-ci est corrigée par un terme où apparaît *la dérivée seconde* de j .

La variance de j est par définition :

$$\sigma_j^2 = \int_{\Omega_a} (j(a) - \mu_j)^2 \rho(a) da. \quad (3.7)$$

Si on utilise un développement à l'ordre un, le calcul de cette intégrale donne le résultat suivant :

$$\sigma_j^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial j}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2. \quad (3.8)$$

Dans le cas d'un développement à l'ordre deux, on a finalement l'expression :

$$\sigma_j^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial j}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 j}{\partial a_i \partial a_k} \right)^2 \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_k}^2. \quad (3.9)$$

On peut trouver une formulation plus générale, dans le cas de variables non Gaussiennes ou corrélées, dans [Beyer 2007].

Il est intéressant d'examiner la précision de ces approximations, selon l'ordre des dérivées utilisées. Si on considère une unique variable aléatoire de densité Gaussienne, l'utilisation d'un développement de Taylor à l'ordre trois conduit à l'approximation suivante :

$$\sigma_j^2 = j'(\mu_a)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{j''(\mu_a)^2}{2} + j'(\mu_a)j'''(\mu_a) \right) \sigma_a^4 + O(\sigma_a^6). \quad (3.10)$$

Par conséquent, l'utilisation des dérivées premières conduit à une erreur $O(\sigma_a^4)$. Cependant, l'utilisation des dérivées secondes ne conduit pas à une erreur $O(\sigma_a^6)$, mais encore $O(\sigma_a^4)$. Ainsi, une meilleure approximation de la variance peut être obtenue en utilisant un développement d'ordre un plutôt que d'ordre deux, si on se trouve dans le cas où $j'(\mu_a)j'''(\mu_a) \approx -\frac{j''(\mu_a)^2}{2}$.

Dans le cadre d'un problème de mécanique des fluides, la difficulté de cette approche réside dans le calcul des dérivées de j , car il s'agit d'une fonctionnelle, qui est évaluée par

l'intermédiaire de la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles. En effet, les variables d'état sont obtenues par résolution d'un système d'équations d'état :

$$\Psi(a, W) = 0. \quad (3.11)$$

Par suite, le gradient de $j(a) = J(a, W)$ s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial j}{\partial a_i} = \frac{\partial J}{\partial a_i} + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial a_i}. \quad (3.12)$$

Il est alors nécessaire de faire intervenir la dérivée de l'équation d'état :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial a_i} = 0. \quad (3.13)$$

Cette équation permet de calculer la sensibilité des variables d'écoulement $\theta_i = \frac{\partial W}{\partial a_i}$ en résolvant le système linéaire suivant :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial W} \theta_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial a_i}. \quad (3.14)$$

Le gradient de j par rapport aux paramètres incertains peut donc être évalué en résolvant dans un premier temps le système (3.14) pour obtenir les sensibilités, puis en utilisant l'expression (3.12). Cependant, cette stratégie est relativement coûteuse, puisqu'il faut résoudre un système linéaire pour chaque paramètre a_i .

Il est beaucoup efficace de mettre en oeuvre une approche adjointe. En combinant les équations (3.12) et (3.13) on obtient :

$$\left(\frac{\partial j}{\partial a}\right)^\top = \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)^\top - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)^\top \left(\frac{\partial \Psi}{\partial W}\right)^{-\top} \left(\frac{\partial J}{\partial W}\right)^\top. \quad (3.15)$$

On constate donc que le gradient de j peut être obtenu en résolvant dans un premier temps le système adjoint :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial W}\right)^\top \Pi = \left(\frac{\partial J}{\partial W}\right)^\top, \quad (3.16)$$

où Π sont les variables adjointes, puis en utilisant l'expression suivante :

$$\left(\frac{\partial j}{\partial a}\right)^\top = \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)^\top - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)^\top \Pi. \quad (3.17)$$

On note que le système adjoint ne fait pas intervenir a . Par suite, cette stratégie nécessite la résolution d'un seul système linéaire, quel que soit le nombre de paramètres incertains. L'application de la méthode adjointe à l'aérodynamique a été étudiée par de nombreux auteurs, auxquels on pourra se référer pour avoir plus de détails [Pironneau 1974, Nielsen 1999, Jameson 1988, Mohammadi 2001, Mohammadi 1999, Ta'asan 1994, Courty 2003, Elliott 1997, Martinelli 2007, Baysal 1996].

Pour les calculs de la dérivée seconde, on suit la démarche proposée dans [Ghate 2007, Sherman 1996]. A partir de la dérivée première (3.12), on peut réaliser une seconde dérivation par rapport à la k -ième composante de a . On obtient alors :

$$\frac{\partial^2 j}{\partial a_i \partial a_k} = D_{i,k}^2 J + \frac{\partial J}{\partial W} \frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial a_k}, \quad (3.18)$$

avec :

$$D_{i,k}^2 J = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial J}{\partial a} e_i \right) e_k + \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\partial J}{\partial a} e_i \right) \frac{\partial W}{\partial a_k} \\ + \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\partial J}{\partial a} e_k \right) \frac{\partial W}{\partial a_i} + \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\partial J}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial a_i} \right) \frac{\partial W}{\partial a_k}.$$

La dérivée de l'équation (3.13), fournit de manière analogue l'expression suivante :

$$D_{i,k}^2 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial W} \frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial a_k} = 0, \quad (3.19)$$

avec :

$$D_{i,k}^2 \Psi = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} e_i \right) e_k + \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} e_i \right) \frac{\partial W}{\partial a_k} \\ + \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} e_k \right) \frac{\partial W}{\partial a_i} + \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial a_i} \right) \frac{\partial W}{\partial a_k}.$$

Si on substitue la dérivée seconde des variables d'état $\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial a_k}$ dans l'équation (3.18) à partir de l'équation (3.19), on obtient :

$$\frac{\partial^2 j}{\partial a_i \partial a_k} = D_{i,k}^2 J - \frac{\partial J}{\partial W} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial W} \right)^{-1} D_{i,k}^2 \Psi \quad (3.20)$$

$$= D_{i,k}^2 J - \Pi^\top D_{i,k}^2 \Psi, \quad (3.21)$$

où Π est la solution du problème adjoint.

Finalement, l'algorithme permettant de calculer les dérivées premières et secondes, peut se résumer à :

1. Résoudre les variables adjointes Π dans : $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial W} \right)^\top \Pi = \left(\frac{\partial J}{\partial W} \right)^\top$
2. Calculer le gradient de j : $\left(\frac{\partial j}{\partial a} \right)^\top = \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)^\top - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)^\top \Pi$
3. Pour $i \in \{1 \dots n\}$: Résolution des sensibilités θ_i dans : $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial W} \right) \theta_i = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a_i} \right)$
4. Pour $i \in \{1 \dots n\}$ et $k \in 1 \dots i$, calculer : $\frac{\partial^2 j}{\partial a_i \partial a_k} = D_{i,k}^2 J - \Pi^\top (D_{i,k}^2 \Psi)$

Le calcul des sensibilités est nécessaire pour l'évaluation des termes $D_{i,k}^2 J$ et $D_{i,k}^2 \Psi$.

On observe dans cet algorithme de nombreux termes qui sont des dérivées partielles et dont l'évaluation n'est pas triviale. Dans ce contexte, ces termes ont été évaluée en utilisant le logiciel de différentiation automatique TAPENADE, développé par l'Equipe-Projet Tropics. Le calcul des dérivées secondes a été réalisé par M. Martinelli durant sa thèse de doctorat. L'application à l'estimation d'incertitude, décrite ci-dessous, a été réalisée en collaboration. Les détails pourront être trouvés dans [Martinelli 2008, Martinelli 2010, Martinelli 2007].

3.2.1.2 Application au cas de conditions aux limites incertaines

On considère l'écoulement autour de l'aile d'un jet d'affaire, en régime subsonique. Les conditions de vol nominales sont un nombre de Mach $M_\infty = 0.65$ et une incidence $\alpha = 2^\circ$. Les caractéristiques de l'écoulement sont calculées par résolution des équations d'Euler compressible en régime stationnaire, par une méthode de type volumes-finis [Dervieux 1992, Kloczko 2008a]. Le maillage compte 31124 noeuds et 173 445 éléments tétraédriques.

On suppose que le nombre de Mach et l'incidence sont soumis à incertitude. Plus précisément, on considère ces grandeurs comme des variables Gaussiennes non-corrélées, caractérisées par :

	Mach	Incidence (deg.)
Moyenne	0.65	2
Ecart-type	0.01666	0.1666

On propose d'appliquer l'approche présentée précédemment à l'estimation des statistiques relatives au coefficient de traînée aérodynamique. Les détails de ces expériences pourront être trouvés dans [Martinelli 2008, Martinelli 2010]. De manière à avoir un résultat de référence, on réalise au préalable 21×21 simulations, pour un nombre de Mach et une incidence variable. La figure (3.1) illustre le résultat obtenu. Cette base de donnée très fine est utilisée pour construire un métamodèle de référence, sur lequel on réalise une analyse de Monte-Carlo. Pour obtenir une précision importante, plusieurs échantillons très larges sont utilisés, avec un générateur de nombres pseudo-aléatoires de type "Mersenne twister" [Matsumoto 1998], caractérisé par une périodicité de $2^{19937} - 1$. On considère dans la suite les résultats obtenus comme résultats de référence :

Moyenne de référence	$6.857 \cdot 10^{-3}$
Variance de référence	$1.553 \cdot 10^{-7}$

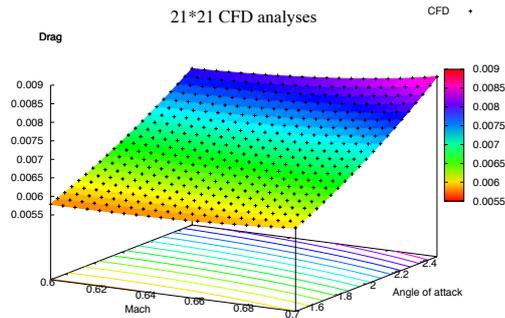


FIGURE 3.1 – Traînée pour 21×21 analyses CFD.

A titre de comparaison, on considère ensuite l'estimation d'incertitude à partir de métamodèles reposant sur une base de dimension réduite. On construit ainsi des métamodèles de types RBF et Krigeage pour des bases de données de taille croissante, correspondant à des distributions de type hypercube latin [Sacks 1989], auxquelles les coins du domaine ont été ajoutés. On obtient finalement les valeurs suivantes :

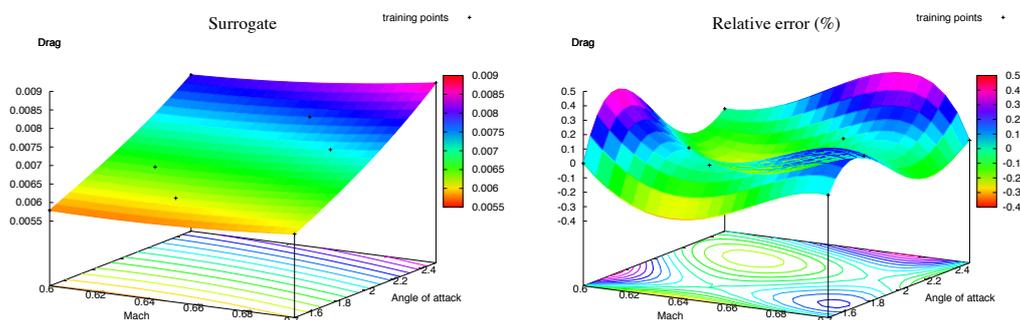


FIGURE 3.2 – Valeurs de traînée et erreur relative avec un métamodèle RBF à 8 points.

Métamodèle	Points	Moyenne	Erreur
RBF	8	$6.85507 \cdot 10^{-3}$	$2.43491 \cdot 10^{-6}$
RBF	23	$6.85762 \cdot 10^{-3}$	$1.05410 \cdot 10^{-7}$
KRG	8	$6.85257 \cdot 10^{-3}$	$4.94454 \cdot 10^{-6}$
KRG	23	$6.85762 \cdot 10^{-3}$	$1.14150 \cdot 10^{-7}$

Métamodèle	Points	Variance	Erreur
RBF	8	$1.56176 \cdot 10^{-7}$	$8.41631 \cdot 10^{-10}$
RBF	23	$1.56595 \cdot 10^{-7}$	$1.26098 \cdot 10^{-9}$
KRG	8	$1.55076 \cdot 10^{-7}$	$2.57555 \cdot 10^{-10}$
KRG	23	$1.56575 \cdot 10^{-7}$	$1.24084 \cdot 10^{-9}$

La figure (3.2) montre la traînée prédite par un métamodèle RBF avec 8 points d'entraînement, ainsi que l'erreur évaluée sur la grille de référence de 21×21 points. On peut noter que l'erreur pour la variance est légèrement plus forte dans le cas d'une base de donnée large. Ce phénomène est dû au fait que le métamodèle basé sur 23 points présente de légères oscillations dégradant l'estimation de la variance.

On considère maintenant les résultats obtenus par analyse de sensibilité. On calcule alors la traînée et ses dérivées pour les conditions nominales seulement. La méthode fournit alors les résultats suivants, pour une approximation au premier ordre et second ordre :

	Moyenne	Erreur
Premier ordre	$6.83049 \cdot 10^{-3}$	$2.70266 \cdot 10^{-5}$
Second ordre	$6.86056 \cdot 10^{-3}$	$3.04649 \cdot 10^{-6}$

	Variance	Erreur
Premier ordre	$1.54665 \cdot 10^{-7}$	$6.69276 \cdot 10^{-10}$
Second ordre	$1.55758 \cdot 10^{-7}$	$4.23060 \cdot 10^{-10}$

Les figures (3.3) et (3.4) montrent l'évolution de la traînée prédite par les développements de Taylor à l'ordre un et deux, ainsi que l'erreur sur la grille de 21×21 points. Comme on pouvait le prévoir, l'erreur croît lorsqu'on s'éloigne des conditions nominales.

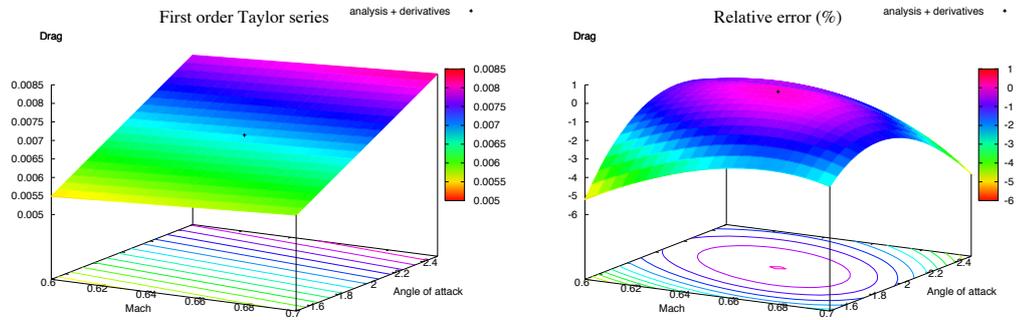


FIGURE 3.3 – Valeurs de traînée et erreur relative avec analyse de sensibilité (premier ordre).

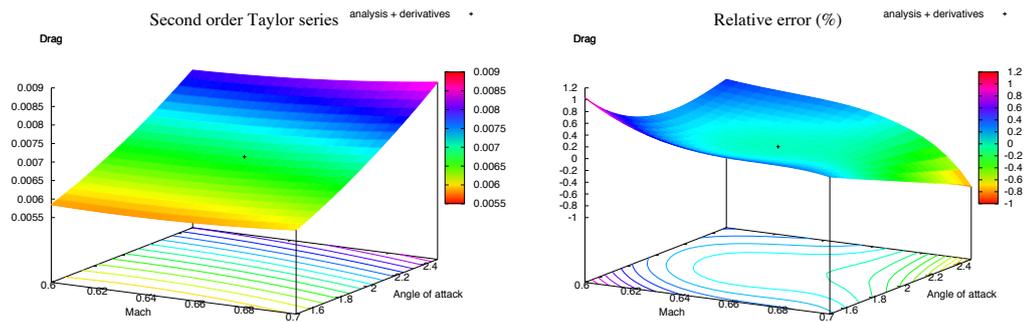


FIGURE 3.4 – Valeurs de traînée et erreur relative avec analyse de sensibilité (second ordre).

Les deux approches mises en oeuvre sont de natures profondément différentes. Il est donc intéressant de comparer leur performance en terme de de coût CPU et de mémoire nécessaire. Dans le cas de l'analyse de sensibilité, la mémoire et le temps de calcul nécessaires au calcul des dérivées sont donnés dans les tableaux suivants (Intel Xeon 2.66 GHz) :

	Mémoire en Mb
Simulation	130
Dérivées premières	250
Dérivées secondes	120
Solveur GMRES	250
Préconditionneur	340
Total	1090

	Temps CPU en secondes
Simulation	403
Gradient	255
Hessien	278
Total	936

On constate que la différentiation automatique est particulièrement exigeante en mémoire, puisqu'il faut presque 10 fois plus de mémoire pour calculer les dérivées que pour le code de simulation seul. En revanche, le coût de calcul est relativement faible car il est seulement doublé par rapport à une simple simulation. On a montré que le coût de cette stratégie *croît de manière quadratique avec le nombre de paramètres incertains* considérés [Martinelli 2007].

En ce qui concerne l'approche par métamodèles, le coût de calcul est essentiellement lié à la construction de la base de données. Si celle-ci est réalisée séquentiellement, le coût croît quasi-linéairement. En revanche, si on peut faire appel au calcul parallèle, avec un nombre de processeurs égal au nombre de points d'entraînement, le coût de calcul reste presque identique à celui d'une seule simulation :

	Temps CPU en secondes
Construction séquentielle (8 pts)	3250
Construction parallèle (8 pts)	440

On retiendra que l'approche par analyse de sensibilité est beaucoup plus complexe à mettre en oeuvre, car intrusive, malgré l'utilisation de la différentiation automatique. Les résultats obtenus pour ce cas relativement simple sont précis et la performance en terme de temps CPU est satisfaisante. Cependant, le coût en terme de mémoire reste important. De plus, certaines difficultés sont apparues lors du calcul des dérivées secondes pour un régime transsonique, dues à la différentiation des limiteurs de pente utilisés pour la capture de choc [Martinelli 2008]. Ces limitations militent pour l'utilisation d'une approche continue, présentée dans le paragraphe suivant.

3.2.2 Estimation d'incertitude pour l'écoulement

3.2.2.1 Principe

On s'intéresse maintenant à estimer les moments statistiques, non plus pour une fonctionnelle, mais pour un champ solution des équations d'état. L'approche reste sensiblement la même, l'approximation de la variance d'un champ u étant, pour un développement de Taylor à l'ordre un :

$$\sigma_u^2 \approx \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2. \quad (3.22)$$

La difficulté réside encore dans le calcul de la dérivée partielle du champ solution par rapport au paramètre incertain (*champ de sensibilité*). Contrairement au cas précédent, on propose d'adopter ici une approche continue, pour laquelle la dérivation survient avant la discrétisation. Ces travaux ont été menés en collaboration avec D. Pelletier de l'Ecole Polytechnique de Montréal.

On considère les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible laminaire en régime stationnaire :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau(\mathbf{u}) + \mathbf{f}, \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.24)$$

où ρ est la densité, \mathbf{u} la vitesse et p la pression. \mathbf{f} représente une force volumique. Le tenseur des contraintes visqueuses est donné par :

$$\tau(\mathbf{u}) = \mu \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\}.$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide.

On impose de plus des conditions de Dirichlet et Neumann aux frontières Γ_D et Γ_N respectivement :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\Gamma_D), \quad (3.25)$$

$$\left[-p\mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \quad (\Gamma_N), \quad (3.26)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est la normale unitaire sortante et \mathbf{I} le tenseur identité d'ordre deux.

Les équations des sensibilités continues sont obtenues en dérivant formellement les équations d'état par rapport au paramètre a . Les champs \mathbf{u} et p sont considérés comme des fonctions de l'espace et du paramètre a : $\mathbf{u}(\mathbf{x}; a)$ et $p(\mathbf{x}; a)$. Les champs de sensibilité correspondants sont définis par :

$$\mathbf{s}_u = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad s_p = \frac{\partial p}{\partial a}. \quad (3.27)$$

La dérivation des équations 3.23 et 3.24 donne finalement :

$$\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho (\mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) = -\nabla s_p + \nabla \cdot \tau(\mathbf{s}_u) + \nabla \cdot S_\tau(\mathbf{u}) + \mathbf{f}', \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{s}_u = 0, \quad (3.29)$$

avec :

$$S_\tau(\mathbf{u}) = \mu' \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\}.$$

Les dérivées des propriétés du fluide sont notées par ($'$). Les conditions aux limites sont obtenues par dérivation des conditions aux limites pour les équations d'état. Cependant,

si a représente un paramètre géométrique, la position de la frontière dépend de a , ce qui introduit un terme additionnel. Ainsi, la dérivation de la condition de Dirichlet $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ donne :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} + \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a} = \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{da}, \quad (3.30)$$

où d/da représente la dérivée totale par rapport à a . La condition aux limites pour la sensibilité de \mathbf{u} est finalement :

$$\mathbf{s}_{\mathbf{u}} = \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{da} - \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a} \quad (\Gamma_D). \quad (3.31)$$

Les conditions aux limites de type Neumann sont traitées de manière similaire, pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} & \left[-s_p \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}} + (\nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}})^T \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & + \left[\mu' \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\bar{\mathbf{t}}}{da} - \left\{ \nabla \left[-p \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a} \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & - \left[-p \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \quad (\Gamma_N). \quad (3.32) \end{aligned}$$

Une fois les équations des sensibilités établies, celles-ci sont discrétisées et résolues par une méthode éléments-finis avec maillage adaptatif, sur la base d'un estimateur d'erreur de type Zhu-Zienkiewicz [Zienkiewicz 1992a, Zienkiewicz 1992b].

On remarque que les conditions aux limites de type Dirichlet font intervenir la dérivée première de la solution des équations d'état, tandis que les conditions de type Neumann font intervenir la dérivée seconde. Les conditions aux limites pour les sensibilités ne sont donc pas connues exactement. Cette spécificité conduit à une difficulté supplémentaire et, en l'absence d'un traitement spécifique, met en échec la méthode d'estimation d'erreur. J'ai montré que cette difficulté pouvait être surmontée en réalisant une reconstruction d'ordre élevé des dérivées aux frontières [Duvigneau 2006d, Duvigneau 2006b]. Plus précisément, si les valeurs des conditions aux limites sont reconstruites avec un ordre de précision au moins égal à celui du schéma numérique employé, alors l'estimateur d'erreur pour les champs de sensibilités converge vers l'erreur exacte.

A titre d'illustration, la figure (3.5) montre l'évolution de l'estimateur d'erreur pour les sensibilités, pour un problème avec une solution manufacturée où l'erreur exacte est connue, dans le cas de différentes reconstructions des dérivées aux frontières [Duvigneau 2006b].

3.2.2.2 Application au cas d'une géométrie incertaine

On considère l'écoulement incompressible de fluide visqueux autour d'un profil d'aile NACA-0012. Le nombre de Reynolds est 2000 et l'angle d'attaque 5° . Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées par une méthode éléments-finis basée sur l'élément de Crouzeix-Raviart. Le système d'équations non-linéaires est résolu par une méthode de Newton. Six cycles de raffinement automatique du maillage sont réalisés, sur la base d'une estimation de l'erreur pour les variables d'état et les variables de sensibilité, comme illustré sur la figure (3.6). Les détails de ces calculs sont donnés dans [Duvigneau 2006c].

Les profils de type NACA-XXXX sont entièrement définis à partir d'un paramètre d'épaisseur et deux paramètres de cambrure : le premier définit la position longitudinale de cambrure maximale et le second l'amplitude de la cambrure, relativement à la corde du profil l . Pour cet exercice d'estimation d'incertitude, on suppose que plusieurs paramètres

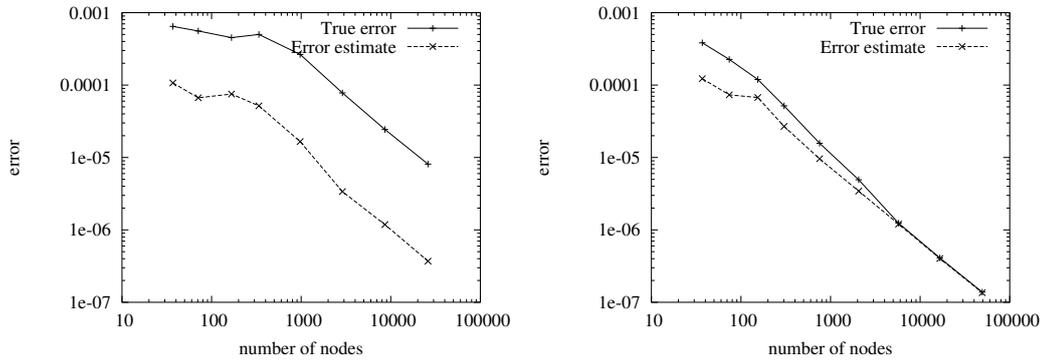


FIGURE 3.5 – Estimation d'erreur dans le cas d'une évaluation d'ordre 1 des conditions aux limites (gauche) et d'ordre 3 (droite).

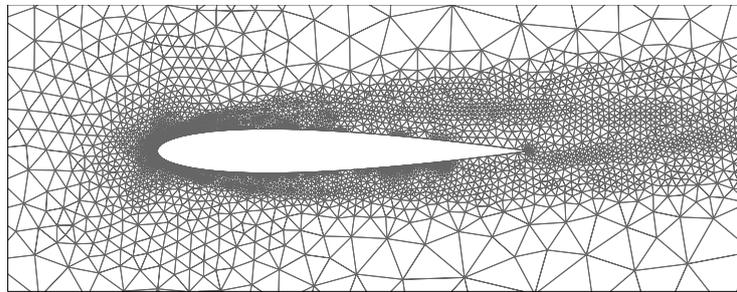


FIGURE 3.6 – Maillage adapté pour l'écoulement et les sensibilités.

géométriques du problème sont des variables aléatoires Gaussiennes non corrélées : l'angle d'attaque (variance 0.5°), l'épaisseur du profil (variance $1\%l$) et l'amplitude de la cambrure (variance $1\%l$).

Les équations des sensibilités par rapport à ces trois variables sont résolues par une méthode de type éléments-finis similaire à celle utilisée pour les équations d'état. Le calcul des sensibilités peut être facilement validé en comparant la solution issue d'une simulation pour des valeurs voisines des paramètres, à une extrapolation linéaire de la solution obtenue à partir des valeurs nominales des paramètres et des sensibilités. A titre d'exemple, on simule l'écoulement autour du profil NACA-2212 et on compare la solution à une extrapolation linéaire obtenue à partir de l'écoulement et des sensibilités pour un profil NACA-0012. La figure (3.7) propose une comparaison du coefficient de pression sur le profil, tandis que les figures (3.8) et (3.9) illustrent la comparaison du champ de pression entier. On constate que l'approximation linéaire du comportement est valide pour une variation de la cambrure assez importante.

Sur la base des équations (3.22), la variance des champs de vitesse et pression peut aisément être calculée à partir des champs de sensibilité et des variances des variables aléatoires considérées. La figure (3.10) montre le champ de variance de la première composante de vitesse.

La caractérisation de l'incertitude pour l'ensemble de l'écoulement est intéressante, dans la mesure où elle permet ensuite de se focaliser sur des points particuliers et de décomposer la variance selon son origine. Ainsi, les figures (3.11 - 3.12) présentent la variance du coefficient de pression et la décomposition selon les variables aléatoires. De même, les figures (3.13)

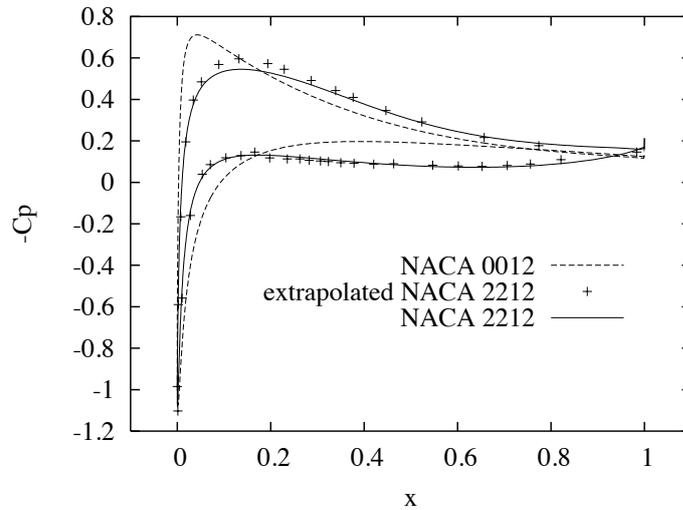


FIGURE 3.7 – Comparaison du coefficient de pression exact et extrapolé.

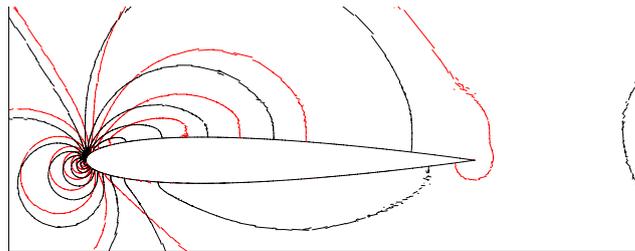


FIGURE 3.8 – Champ de pression pour le profil NACA-0012 (noir) et l'extrapolation pour le profil NACA-2212 (rouge).

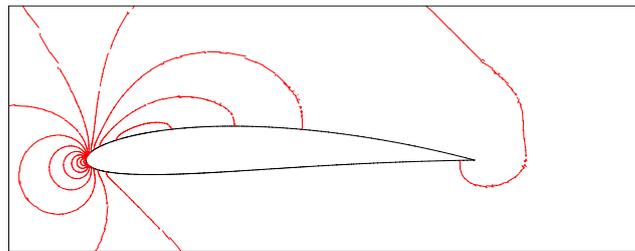


FIGURE 3.9 – Champ de pression pour le profil NACA-2212.

et (3.14) montrent la variance de la vitesse dans le sillage et sa décomposition.

Des études similaires, portant sur la même méthodologie, ont été réalisées pour quantifier l'incertitude liée aux coefficients des modèles de turbulence [Turgeon 2001a, Godfrey 2001] ou aux coefficients thermodynamiques du gaz [Turgeon 2001b].

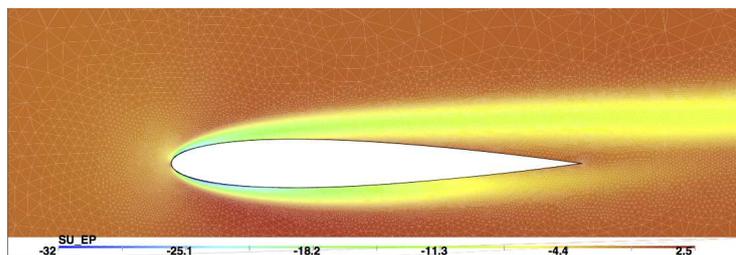


FIGURE 3.10 – Champ de variance pour la première composante de vitesse pour une incertitude d'épaisseur du profil.

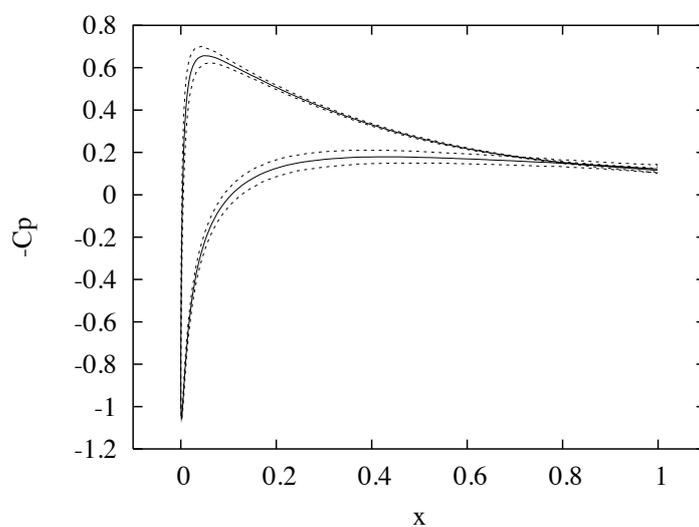


FIGURE 3.11 – Intervalle $\mu \pm 3\sigma$ pour le coefficient de pression.

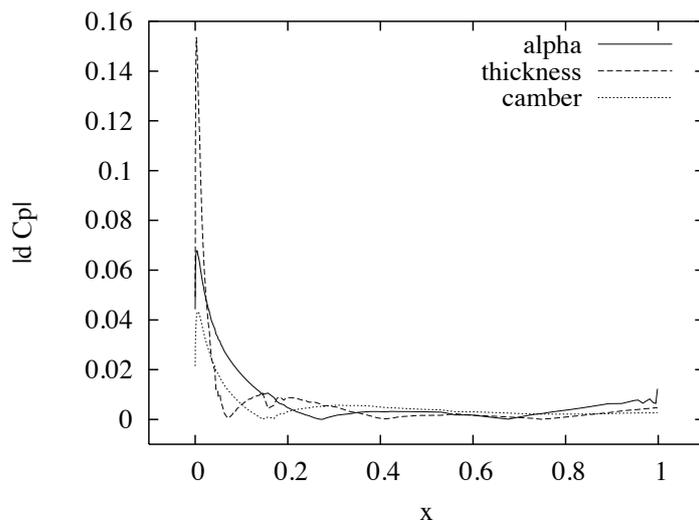


FIGURE 3.12 – Ecart-type du coefficient de pression selon les variables (extrados).

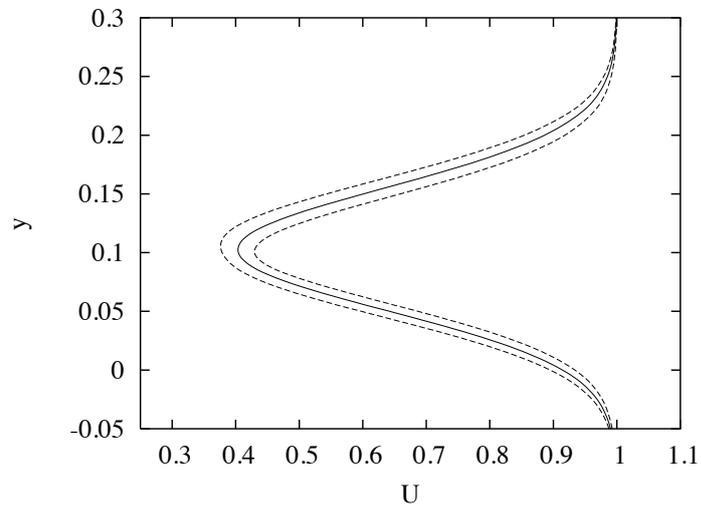
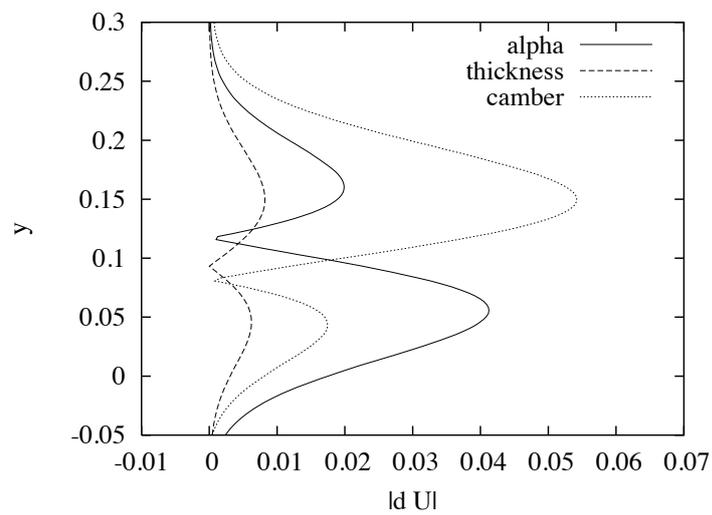
FIGURE 3.13 – Intervalle $\mu \pm 3\sigma$ pour la vitesse dans le sillage.

FIGURE 3.14 – Ecart-type de la vitesse dans le sillage selon les variables.

3.3 Optimisation robuste

Comme évoqué précédemment, les incertitudes et les erreurs se manifestent par un écart entre la solution issue de la simulation et la réalité. Le terme *optimisation robuste* désigne une méthode d'optimisation qui vise à prendre en compte ces erreurs et incertitudes durant la phase de conception.

On peut distinguer deux approches bien distinctes : la première, qu'on désignera sous le terme d'*optimisation de critères statistiques*, consiste à prendre en compte les moments statistiques de la performance comme critères d'optimisation, sachant que certains paramètres du problème sont des variables aléatoires. L'application typique concerne une optimisation avec une incertitude concernant les conditions de fonctionnement. La seconde approche, qu'on désignera sous le terme d'*optimisation de critères bruités*, vise à réaliser une optimisation sachant que le résultat de la simulation est entâchée d'erreur. L'application typique concerne ici une optimisation reposant sur des simulations avec discrétisation grossière ou convergence partielle.

Ces approches sont encore peu employées dans le domaine de la mécanique des fluides numérique. Ma contribution a consisté à résoudre précocement des problèmes de conception aérodynamique avec incertitude et de proposer une approche pour prendre en compte les erreurs numériques au cours de l'optimisation. On présente dans les sections suivantes ces approches.

3.3.1 Optimisation de critères statistiques

3.3.1.1 Méthode

Dans ce paragraphe, on cherche à formuler un problème de conception optimale sachant que des paramètres sont incertains.

Pour cela, on adopte une formulation statistique : selon la théorie de la décision [Bandemer 2006], le meilleur choix en présence d'incertitude est celui qui *maximise l'espérance de la performance*, ou *minimise la moyenne du risque* :

$$\text{Minimiser } \mu_j = \int_{\Omega_a} J(\mathbf{x}, W(\mathbf{x}, a)) \rho(a) da. \quad (3.33)$$

Cependant, dans un contexte industriel, on cherche généralement à éviter les variations de la fonction coût. Pour cela, la prise en compte d'un critère reposant sur l'espérance n'est pas suffisante et on y adjoint alors un critère reposant sur la variance :

$$\text{Minimiser } \begin{cases} \mu_j = \int_{\Omega_a} J(\mathbf{x}, W(\mathbf{x}, a)) \rho(a) da, \\ \sigma_j^2 = \int_{\Omega_a} (J(\mathbf{x}, W(\mathbf{x}, a)) - \mu_j)^2 \rho(a) da. \end{cases} \quad (3.34)$$

Cette approche revient donc à résoudre un problème d'optimisation, en adoptant comme critère(s) la valeur moyenne de la fonctionnelle coût et éventuellement sa variance. Un examen des approches alternatives pourra être trouvé dans [Huyse 2001a, Huyse 2001b, Li 2001]. Pour calculer les moments statistiques, on s'appuie bien entendu sur les différentes méthodes d'estimation décrites précédemment.

3.3.1.2 Application à la conception aérodynamique

On propose d'illustrer cette méthode pour un problème de conception optimale de forme aérodynamique. On considère comme cas-test l'optimisation de la forme d'une voilure en

régime transsonique, présentée dans le chapitre premier. On suppose que le nombre de Mach n'est plus fixé à $M_\infty = 0.83$, mais est une variable aléatoire de densité Gaussienne, de moyenne $\mu_{M_\infty} = 0.83$ et d'écart type $\sigma_{M_\infty} = 0.0166$.

Dans un premier temps, on montre qu'il est nécessaire de prendre en compte les incertitudes au cours de la conception. Pour cela, on considère la forme de voilure optimisée (réduction de traînée à portance constante) pour un nombre de Mach nominal $M_\infty = 0.83$ et on simule l'écoulement pour un nombre de Mach voisin. Les résultats en terme de coefficients aérodynamiques sont :

Mach number	Drag coef.	Lift coef.
0.81	0.01029	0.2929
0.83 (nominal)	0.01139	0.3188
0.85	0.01811	0.3512

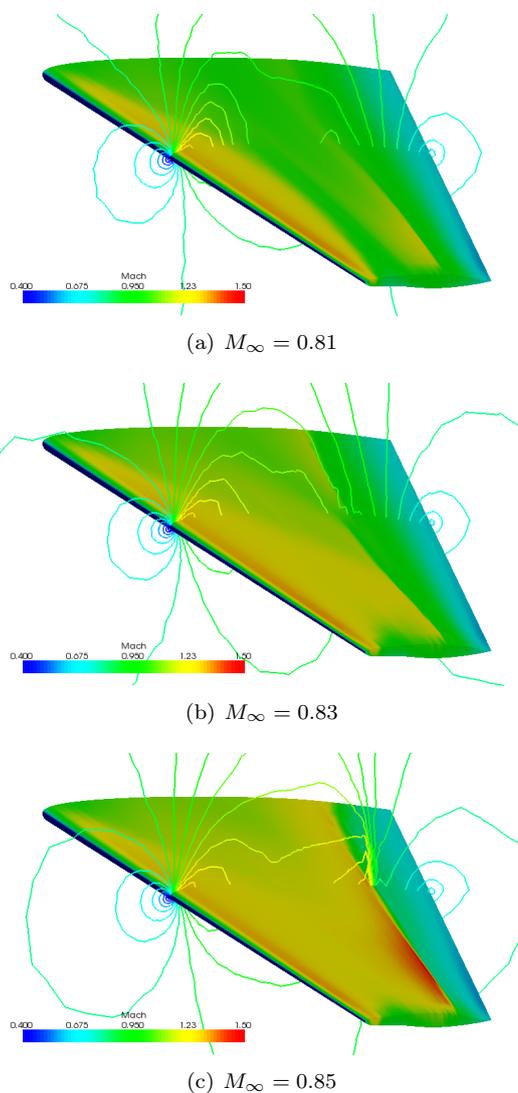


FIGURE 3.15 – Contours iso-Mach pour une voilure optimisée au nombre de Mach nominal $M_\infty = 0.83$; haut : $M = 0.81$; milieu : $M = 0.83$ (nominal); bas : $M = 0.85$.

On constate que la traînée augmente fortement pour une faible augmentation du nombre de Mach. L'analyse de l'écoulement montre qu'un choc apparaît lors de l'augmentation du nombre de Mach, alors que l'optimisation à $M_\infty = 0.83$ avait permis de supprimer le choc à ce régime, comme illustré par la figure (3.15)). Ces observations justifient l'usage d'une méthode optimisant des critères statistiques.

Dans un second temps, on résout le problème d'optimisation statistique bi-critère représenté par l'équation (3.34). Pour cela, la moyenne et la variance du coefficient de traînée sont calculées par construction d'un métamodèle, puis utilisation d'un estimateur non-biaisé de Monte-Carlo sur la base du métamodèle. Une étude systématique de l'erreur pour l'estimation des moments est réalisée dans [Duvigneau 2007a], qui montre qu'une base de donnée constituée de $K = 7$ points est nécessaire pour obtenir un modèle précis pour l'estimation des moments du coefficient de traînée. Différentes distributions des points de la base de données ont été testées (uniforme, selon la fonction de répartition, points de Tchebychev), sans impact significatif sur la précision du résultat. L'algorithme d'évaluation des critères d'optimisation peut donc se résumer par :

1. Réalisation de K simulations correspondant aux valeurs a_1, \dots, a_K de la variable incertaine a ;
2. Construction d'un métamodèle $\tilde{j}(a)$ à partir des données $j(a_1), \dots, j(a_K)$;
3. Estimation des moments de j par Monte-Carlo à partir du métamodèle $\tilde{j}(a)$.

Cette approche relativement simple présente un intérêt car elle est facilement parallélisable. Ainsi, la résolution du problème d'optimisation robuste s'appuie sur trois niveaux de parallélisme emboîtés [Duvigneau 2008a] : parallélisation de l'algorithme d'optimisation PSO, parallélisation de la construction des bases de données et parallélisation des simulations par partitionnement du domaine de calcul, comme illustré par la figure (3.16). Les calculs présentés ci-dessous ont ainsi été réalisés à l'aide de $20 \times 7 \times 4$ coeurs.

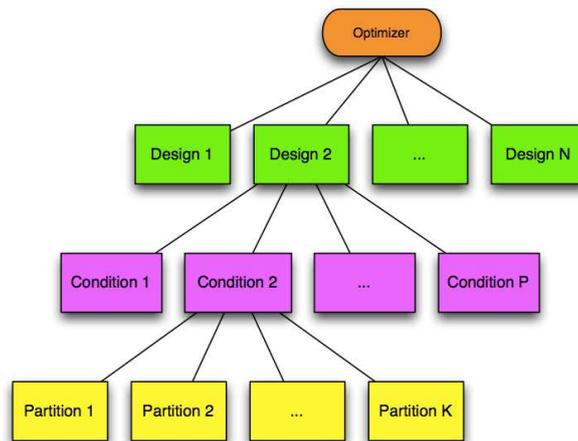


FIGURE 3.16 – Optimisation robuste à trois niveaux de parallélisme.

On résout trois problèmes d'optimisation, faisant intervenir différentes pondérations des deux critères : on minimise dans un premier temps la moyenne de la traînée, puis la somme de la moyenne et de la variance et enfin seulement la variance. Dans tous les cas, on considère une contrainte de portance formulée de manière probabiliste : on impose que la probabilité

d'avoir une portance supérieure à la portance initiale C_L^0 soit au moins 95% :

$$P(C_L > C_L^0) \geq 0.95. \quad (3.35)$$

Ces problèmes sont résolus à l'aide d'un algorithme PSO, la voilure étant définie par 32 paramètres de forme. Les résultats obtenus sont illustrés par les figures (3.17) et (3.18), montrant l'évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Mach et la densité de probabilité de la traînée, pour les trois solutions trouvées. Ces figures ont été obtenues par un calcul *a posteriori* faisant intervenir 21 simulations sur l'intervalle de nombre de Mach considéré et une analyse de Monte-Carlo avec un métamodèle basé sur ces 21 points. On constate que la minimisation de la traînée moyenne fournit une voilure caractérisée par la traînée la plus faible en moyenne mais présentant une variation de valeur encore importante. Au contraire, la minimisation de la variance seule aboutit à une voilure dont la traînée est quasiment insensible à la variation du nombre de Mach, mais dont la valeur est élevée. Finalement, la minimisation des deux critères fournit un compromis entre une performance moyenne et une variance de la performance, ce qui souligne que l'optimisation statistique est nécessairement un problème multicritère, pour lequel un compromis est recherché.

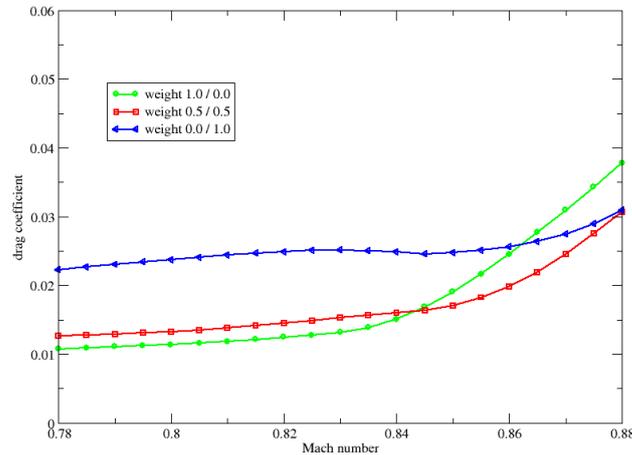


FIGURE 3.17 – Variation de la traînée pour trois solutions de l'optimisation statistique : minimisation de la variance seule (bleu), la moyenne seule (vert) et des deux critères (rouge). Chaque point correspond à une simulation.

Ces essais montrent qu'une estimation d'incertitude basée sur des métamodèles, alliée à une optimisation des moments statistiques, permet d'obtenir des résultats intéressants. Mais cette approche n'est envisageable que pour un nombre de variables incertaines faible, pour des raisons de coût de calcul des bases de données. Une première alternative consisterait à utiliser une autre approche pour l'estimation d'incertitude, comme celles présentées précédemment ; une seconde alternative serait de construire un échantillonnage couvrant à la fois l'espace de conception et l'espace des événements, dans le contexte d'une optimisation par processus Gaussiens. Cette dernière approche est en cours d'étude.

3.3.2 Optimisation de critères bruités

3.3.2.1 Méthodes

La méthode décrite ci-dessus permet de tenir compte d'une mauvaise connaissance du problème. On s'intéresse maintenant à prendre en compte l'écart dû au fait que les équations

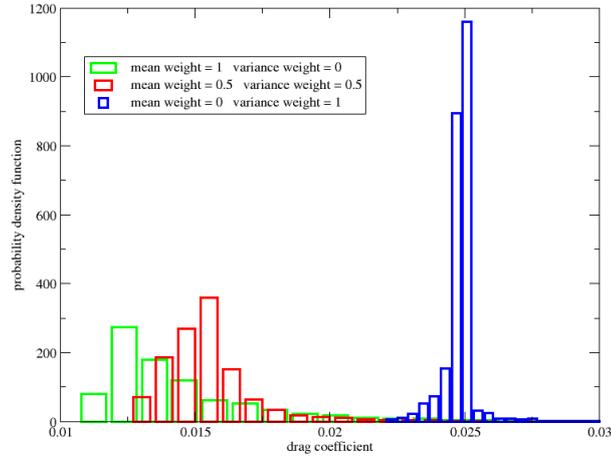


FIGURE 3.18 – Histogrammes pour trois solutions de l’optimisation statistique : minimisation de la variance seule (bleu), la moyenne seule (vert) et des deux critères (rouge).

résolues sont simplifiées (*erreur de modélisation*) et que la résolution n’est pas exacte (*erreur de discrétisation et itérative*). Ces erreurs liées à la simulation ont pour conséquence que chaque évaluation de la fonctionnelle coût est inexacte, conduisant à fournir à l’algorithme d’optimisation *une évaluation erronée*. Une quantification précise des erreurs et leur effet sur une optimisation aérodynamique a été étudiée dans [Madsen 2000].

Dans le contexte qui nous intéresse ici, l’erreur de modélisation est liée à l’utilisation, par exemple, d’une fermeture turbulente plutôt que de résoudre les équations de Navier-Stokes directement. Le choix d’un modèle particulier influence la solution du système d’EDP et, par conséquent, la forme optimale trouvée. L’erreur commise sera d’amplitude variable selon le choix de la fonction coût. A titre d’illustration, la figure (3.19) montre les formes optimales trouvées pour deux modèles de turbulence différents, dans le contexte de l’optimisation de la forme arrière d’une carène de vraquier à échelle réelle ($Re = 10^9$). On constate que les formes trouvées ont des caractéristiques similaires, bien que les écoulements correspondants soient différents, comme illustré par la figure (3.20). Cette expérience montre que l’impact de l’erreur de modélisation est difficilement prévisible [Duvigneau 2003].

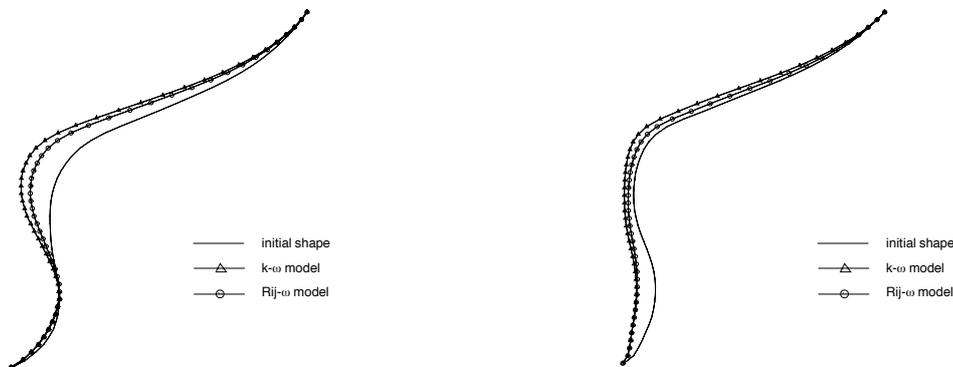


FIGURE 3.19 – Comparaison des formes optimales de carène pour deux sections différentes, trouvées avec un modèle de turbulence $k - \Omega$ et $R_{ij} - \Omega$.

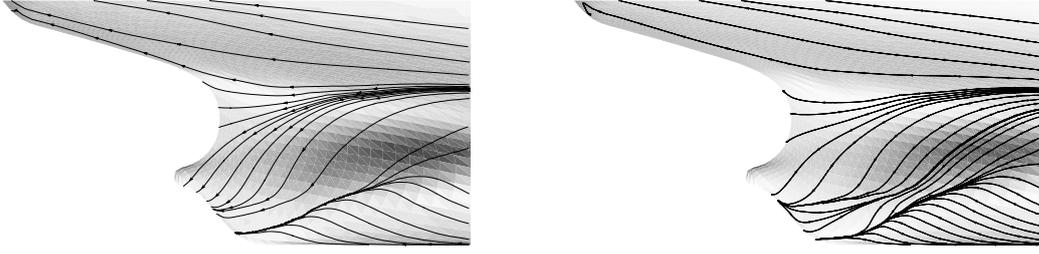


FIGURE 3.20 – Comparaison des lignes de frottement pour les deux carènes trouvées avec un modèle de turbulence $k - \Omega$ (gauche) et $R_{ij} - \Omega$ (droite).

Une approche classique, pour les erreurs de discrétisation et itérative, consiste à utiliser un maillage "suffisamment" fin, si possible adapté, et une solution "suffisamment" convergée pour estimer la valeur de la fonction coût, sur la base d'une étude pour la forme initiale. Cependant, cette approche est coûteuse et pas nécessairement facile à mettre en oeuvre en pratique. En effet, il est courant que le changement de forme modifie les caractéristiques de convergence de la fonction de coût.

Dans la perspective d'avoir une gestion plus rigoureuse des erreurs, on propose une approche alternative reposant sur la stratégie d'optimisation basée sur des processus Gaussiens, décrite dans le chapitre premier. En s'inspirant de l'approche proposée par Ginsbourger [Ginsbourger 2009], on propose de *modéliser les erreurs comme un bruit d'observation* aux points $X_N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$. Ce bruit est défini par une distribution Gaussienne multi-variée $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Delta)$, de moyenne nulle et matrice de covariance diagonale $\Delta = \text{diag}(\tau_i^2), i \in [1, N]$. τ_i représente l'écart-type du bruit associé à l'évaluation au point \mathbf{x}_i . On peut alors montrer que le modèle Gaussien est modifié et a pour nouvelles expressions de la moyenne et la variance [Ginsbourger 2009] :

$$\hat{f}_{N+1} = k_{N+1}^\top (C_N^{-1} + \Delta) F_N, \quad \sigma_{f_{N+1}}^2 = \kappa - k_{N+1}^\top (C_N^{-1} + \Delta) k_{N+1}. \quad (3.36)$$

Pour illustrer cette approche, on considère la fonction analytique suivante :

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(20x)}{1+x} + 3x^3 \cos(5x) + 10(x-0.5)^2 - 0.6 \right). \quad (3.37)$$

On considère cinq observations, correspondant à la fonction analytique "exacte" plus une perturbation Gaussienne d'écart-type $\tau = 0.1$ uniforme. La figure (3.21) montre le modèle initial et après 15 itérations d'optimisation, si une approche classique est employée. On constate que le modèle interpole des points avec erreur et ne converge pas vers une représentation satisfaisante de la fonction. L'optimisation est un échec. Comme on le verra par la suite, ce phénomène se produit également dans le contexte de la simulation.

Si on utilise un modèle prenant en compte les erreurs d'observation, comme illustré par la figure (3.22), le modèle converge vers une représentation approchant la fonction. Notamment, les évaluations convergent vers le minimum de la fonction analytique, même si le modèle se base sur des observations bruitées. Comme proposé dans [Picheny 2012], on a modifié la fonction de mérite de type EI, définie par l'équation (1.14), pour prendre en compte le fait que la future évaluation sera en fait une observation bruitée. Le nouveau critère ("Augmented Expected Improvement") devient :

$$j_{AEI}(\mathbf{x}) = j_{EI,T}(\mathbf{x}) \left(1 - \frac{\tau}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) + \tau^2}} \right), \quad (3.38)$$

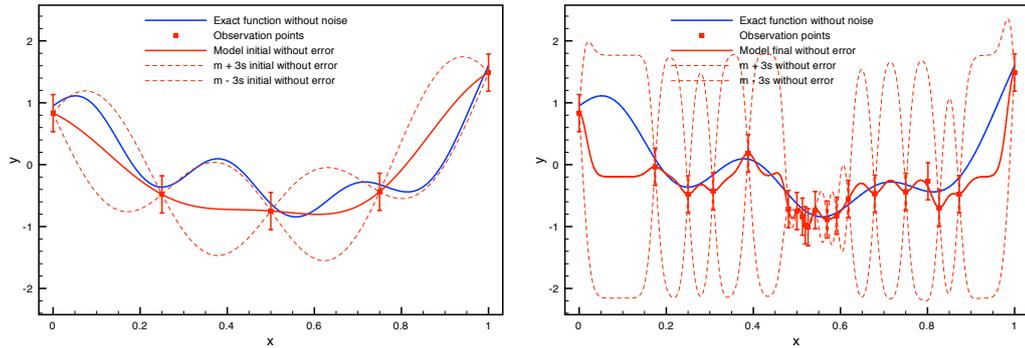


FIGURE 3.21 – Illustration sans prise en compte du bruit : modèle initial (gauche) et après 15 itérations d’optimisation.

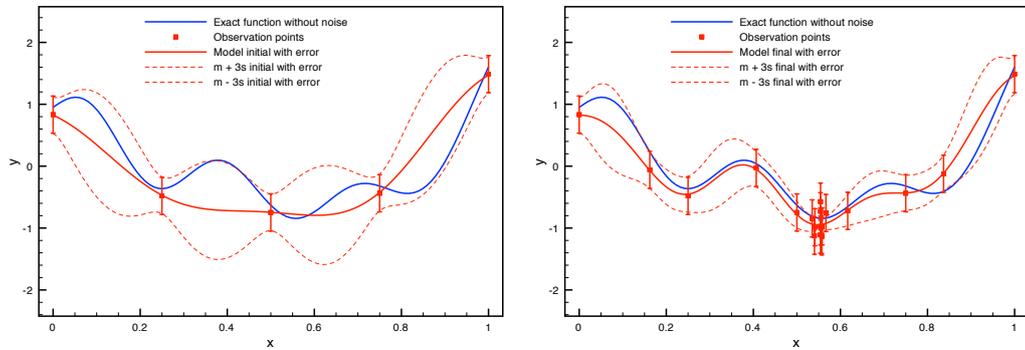


FIGURE 3.22 – Illustration avec prise en compte du bruit : modèle initial (gauche) et après 15 itérations d’optimisation.

où τ désigne une estimation du bruit à la future évaluation et $j_{EI,T}$ est le critère classique, où $\hat{j}(\mathbf{x}_{\min}) + \hat{\sigma}(\mathbf{x}_{\min})$ remplace j_{\min} . Cette modification favorise l’exploration dans les zones de variance forte devant le bruit.

Cette approche a été utilisée dans [Picheny 2010], pour mener une optimisation en prenant en compte l’erreur itérative, dans le contexte d’estimations de Monte-Carlo. Pour appliquer cette approche à la conception optimale aérodynamique, il faut que la modélisation de l’erreur par un bruit soit justifiée. La difficulté réside alors dans l’estimation de la variance du bruit associée à chaque point d’observation. On examine dans les sections suivantes quelques tentatives d’application.

3.3.2.2 Application au traitement de l’erreur itérative

On considère comme cas d’application l’optimisation d’un profil en régime transsonique ($M_{\infty} = 0.8$), l’écoulement étant simulé par résolution des équations d’Euler compressible en régime stationnaire, par une méthode de type volumes-finis. Un maillage assez fin (10 770 noeuds) est employé, de manière à réduire l’influence de l’erreur d’approximation. Le maillage et la solution pour le profil initial sont visibles sur les figures (3.23) et (3.24).

La forme de l’extrados du profil est représentée par une courbe B-Spline cubique comprenant 7 points de contrôle. On se propose de minimiser le ratio traînée / portance en déplaçant verticalement les points de contrôle 4 et 5, qui ont une influence maximale à la

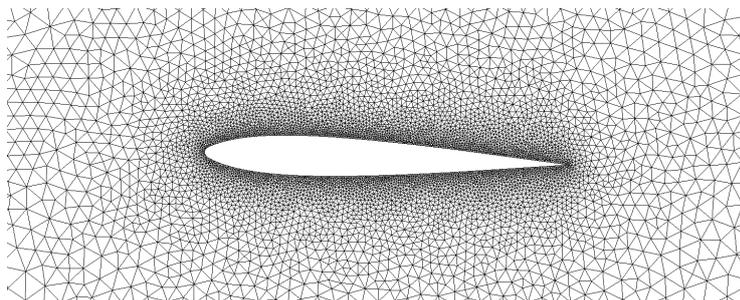


FIGURE 3.23 – Maillage pour le profil initial.

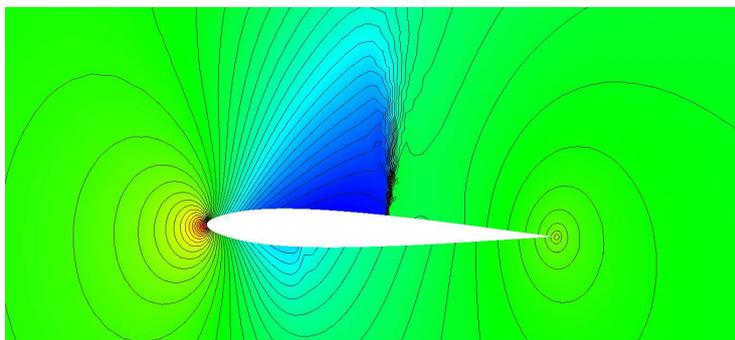


FIGURE 3.24 – Champ de pression pour le profil initial.

position du choc. On choisit un problème avec seulement deux variables d'optimisation, de manière à pouvoir représenter graphiquement la fonction de coût et les modèles Gaussiens générés.

A titre de référence, un ensemble de 20×20 simulations, avec un critère d'arrêt correspondant à une réduction de la norme L2 des résidus de 6 ordres, est réalisé. La fonction de coût correspondante est représentée à la figure (3.25), et apparaît convexe. La convergence, en terme de réduction de la norme L2 des résidus et en terme de valeur de la fonction coût, est illustrée par la figure (3.26). Comme le montre cette figure, on constate qu'il n'est pas nécessaire d'imposer un tel critère de convergence pour la résolution des EDP, pour obtenir une estimation précise de la fonction coût. On va donc chercher par la suite à minimiser la fonction coût avec un critère de convergence bien moindre, de manière à réduire le coût de calcul.

On considère désormais un critère d'arrêt pour la résolution des EDP correspondant à une réduction de seulement un ordre de la norme des résidus. Dans un premier temps, on réalise une optimisation par processus Gaussien classique, sans prise en compte de l'erreur, associé à une fonction de mérite de type EI. La base donnée initiale compte 8 points. La figure (3.27) montre le modèle obtenu après 40 itérations et les points évalués. On constate que le modèle, qui interpole des points correspondant à une faible convergence, est loin de représenter le comportement de la fonction coût. Par conséquent, les évaluations sont dispersées dans le domaine. La figure (3.28) illustre l'évolution de la fonction de coût au cours de l'optimisation. L'algorithme ne parvient à réaliser que trois étapes de recherche avec succès, une recherche quasiment aléatoire remplaçant la phase d'optimisation, même si la zone où se situe le minimum a été détectée. Ce comportement est donc très proche de celui observé précédemment pour la fonction analytique bruitée.

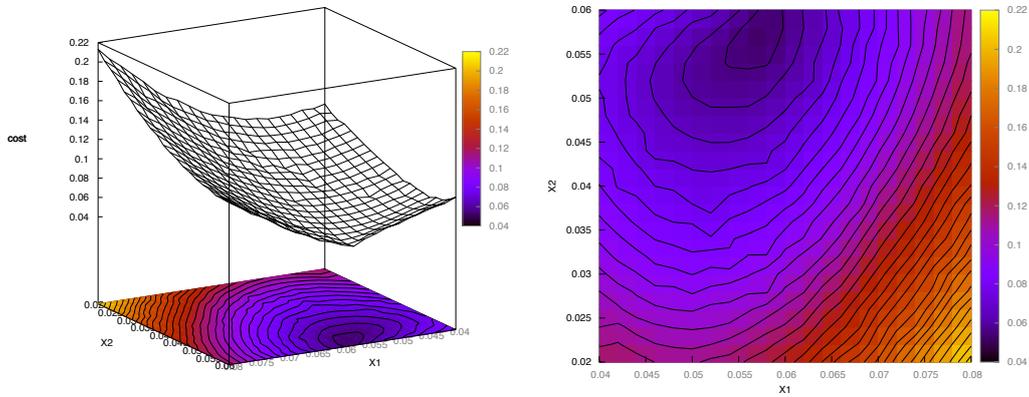
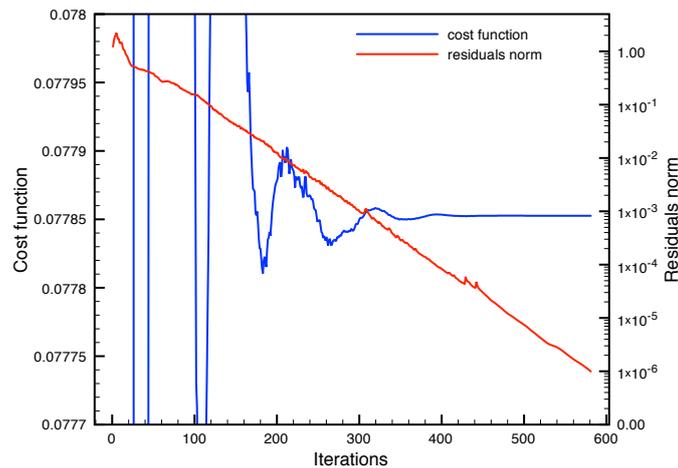
FIGURE 3.25 – Fonction de coût obtenue par 20×20 simulations pleinement convergées.

FIGURE 3.26 – Convergence en terme de réduction de la norme L2 des résidus et de valeur de la fonction coût.

On teste maintenant l'optimisation par processus Gaussien, avec prise en compte de l'erreur et fonction de mérite de type AEI. On constate sur la figure (3.26) que la valeur de la fonction coût évolue en oscillant autour d'une valeur limite. On s'appuie sur cette observation pour justifier une modélisation de l'erreur itérative par un bruit. L'étude de la convergence pour la configuration initiale conduit à fixer l'écart-type de l'erreur à une valeur uniforme de $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$. Le modèle généré au bout de 40 itérations est illustré par la figure (3.29). Contrairement au cas précédent, le modèle non-interpolant reproduit le comportement de la fonction coût et les évaluations se focalisent rapidement vers la zone du minimum, permettant une représentation plus précise de celle-ci. L'examen de la convergence à la figure (3.28), montre que cette fois un réel processus d'optimisation locale est en oeuvre. Le tableau (3.1) montre le meilleur point trouvé, en comparaison avec l'étude systématique réalisée initialement, pour différents niveaux de convergence *a posteriori*.

Finalement, on représente à la figure (3.30) le champ de pression pour le profil optimisé,

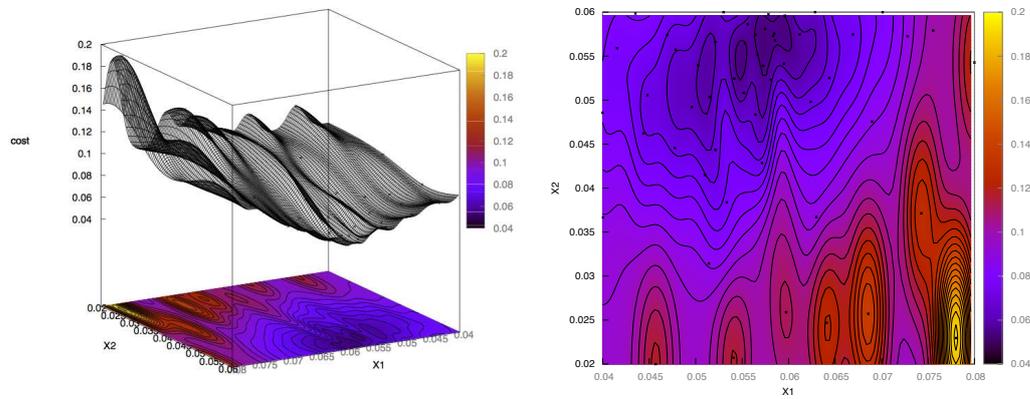


FIGURE 3.27 – Modèle obtenu par la méthode EI après 40 itérations faiblement convergées (les points correspondent aux configurations simulées).

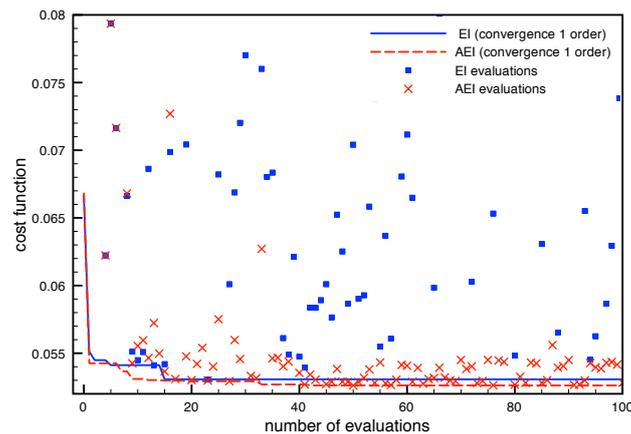


FIGURE 3.28 – Convergence de la fonction coût pour les méthodes EI et AEI.

pour une réduction de la norme des résidus de 6 ordres et 1 ordre. Le choc a bien entendu été significativement réduit, en comparaison avec la figure (3.24). On peut noter qu'avec une convergence faible, l'écoulement n'est pas vraiment représentatif. Pourtant, ce niveau de convergence a été suffisant pour déterminer une configuration proche de l'optimum, avec une modélisation de l'erreur sous forme de bruit.

Ces résultats, encore préliminaires, illustrent l'impact de l'erreur itérative sur l'optimisation et l'intérêt de prendre éventuellement en compte cette erreur dans la stratégie d'optimisation. Mener une optimisation avec un critère de convergence faible n'est pas réellement un but en soi. On vise à terme le développement d'une *stratégie adaptative pour laquelle le critère de convergence serait fixé par l'algorithme* au cours de l'optimisation, le niveau d'erreur en chaque point étant pris en compte pour progresser.

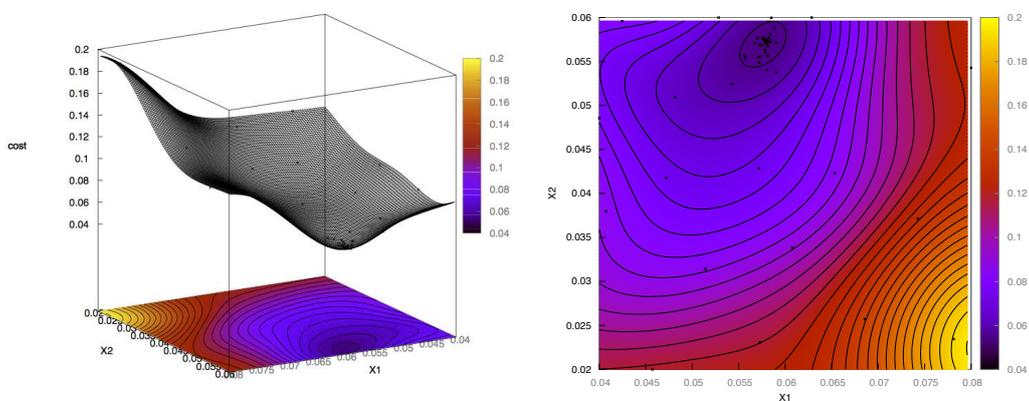


FIGURE 3.29 – Modèle obtenu par la méthode AEI après 40 itérations faiblement convergées (les points correspondent aux configurations simulées).

	Y_4^*	Y_5^*	$j(Y_4^*, Y_5^*)$ (1 ordre)	$j(Y_4^*, Y_5^*)$ (6 ordres)
Reference	0.0580	0.0580	-	$5.126 \cdot 10^{-2}$
AEI	0.0575	0.0569	$5.262 \cdot 10^{-2}$	$5.109 \cdot 10^{-2}$

TABLE 3.1 – Comparaison des meilleurs points trouvés par la méthode AEI et l'étude systématique.

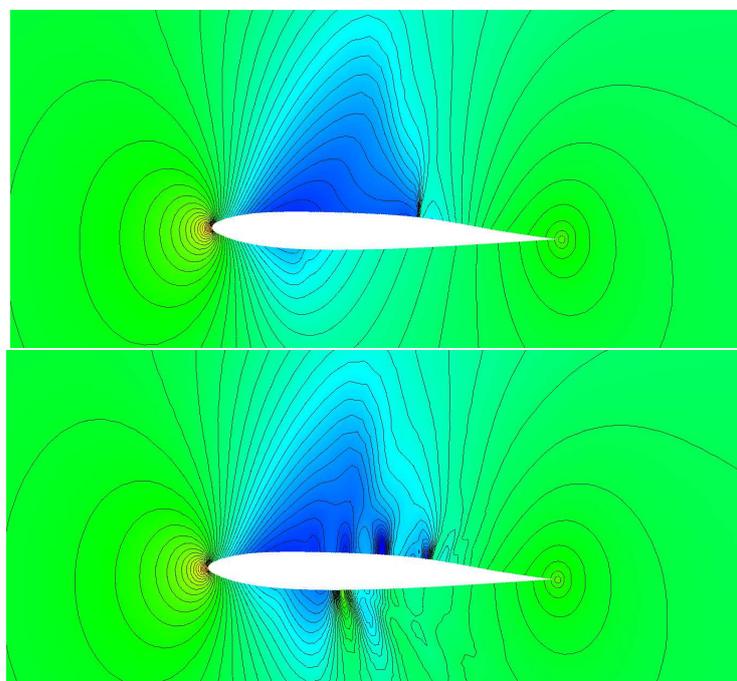


FIGURE 3.30 – Champ de pression pour le profil final, avec une réduction des résidus de 6 ordres (haut) et 1 ordre (bas).

3.3.2.3 Application au traitement de l'erreur de discrétisation

On s'intéresse dans cette section à l'optimisation des caractéristiques d'un jet synthétique pour le contrôle d'écoulements décollés. On considère l'écoulement turbulent au dessus d'une marche descendante de hauteur h , correspondant au cas-test défini dans [Driver 1985], pour lequel de nombreux résultats expérimentaux et numériques existent. On introduit en amont de la marche un jet synthétique produisant une vitesse sinusoïdale :

$$\vec{U} = U_j \sin(2\pi Nt) \vec{d}_j$$

dont on cherche à optimiser la fréquence N et l'amplitude U_j , comme illustré par la figure (3.31). Les détails concernant la modélisation et l'implémentation numérique du jet sont données dans [Labroquère 2012].

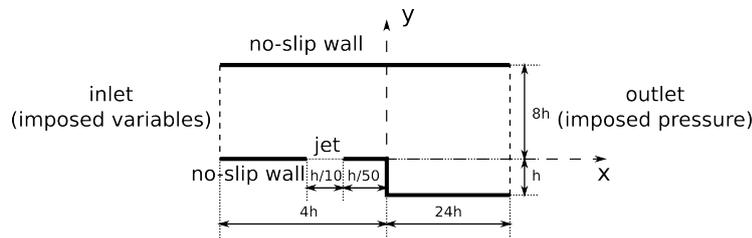


FIGURE 3.31 – Configuration de la marche descendante avec jet synthétique ;

L'écoulement instationnaire compressible ($M_\infty = 0.128$) est simulé par une méthode mixte volumes-finis / éléments-finis [Labroquère 2012], avec une modélisation de la turbulence de type Spalart-Allmaras. Une procédure de pas de temps dual est mise en oeuvre pour obtenir une discrétisation en espace et en temps du second ordre. En l'absence de jet, l'écoulement est stationnaire et est caractérisé par une zone de recirculation de longueur $L = 7h$, comme le montre la figure (3.32).

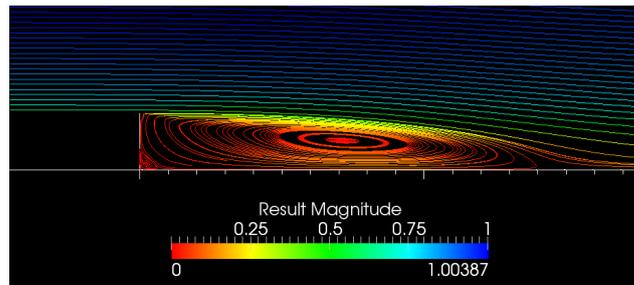


FIGURE 3.32 – Ecoulement sans actuateur

L'objectif du contrôle est de réduire l'étendue de la zone de recirculation moyenne, en générant une excitation sinusoïdale en amont de la marche. On considère donc comme fonctionnelle coût la position du recollement pour l'écoulement moyen. Celle-ci est calculée en recherchant l'abscisse pour laquelle le cisaillement pariétal s'annule. L'écoulement moyen est évalué en réalisant une moyenne sur six périodes, une fois l'écoulement transitoire disparu.

Dans un premier temps, l'optimisation est réalisée à l'aide de l'algorithme basé sur des processus Gaussiens classiques, avec la fonction de mérite de type LB, décrite dans le chapitre premier. Une base de donnée initiale de 16 points est utilisée, pour différentes valeurs de fréquence et amplitude. Il faut souligner que cette méthode est particulièrement

bien adaptée à ce type de problèmes, dans la mesure où le temps de calcul est important (environ cinq heures), on ne dispose pas du gradient de la fonction de coût et le nombre de paramètres de contrôle est faible.

La figure (3.33) montre le modèle construit grâce à la base de donnée initiale. Après six itérations, l'algorithme a proposé 18 nouvelles évaluations correspondant à des configurations intéressantes selon la fonction de mérite. La figure (3.34) montre le modèle obtenu à partir de la base de données étendue. On constate que celui-ci est fortement oscillant et a changé globalement, bien que les nouveaux points soient localisés dans certaines zones. Ce phénomène s'explique par le fait que des points proches dans l'espace des paramètres ont été inclus dans la base de données, ces points comprenant une erreur due à la simulation. Comme pour l'étude précédente, le modèle interpolant présente des oscillations. Ce phénomène empêche toute convergence de l'algorithme, disperse les évaluations et conduit à l'échec de la procédure d'optimisation.

On propose de corriger cet effet avec l'approche proposée précédemment. La nature particulière de la fonction coût (position de recollement pour l'écoulement moyen) conduit à penser que la précision de l'évaluation est fortement dépendante de la longueur de maille à cette position. Pour tenter de prendre en compte l'erreur d'évaluation, on propose donc de faire l'hypothèse que l'écart-type de l'erreur a une valeur τ vérifiant $3\tau = l_r$, où l_r désigne la longueur de maille dans la zone du recollement. La procédure d'optimisation est alors suivie comme précédemment, à partir de la même base de donnée. La figure (3.35) montre le modèle obtenu à la sixième itération. On constate que le modèle ne présente pas de changement dans les zones sans nouvelles évaluations et que ces dernières ont convergé vers un minimum. Finalement, un contrôle efficace est trouvé pour lequel la zone de recirculation est significativement réduite, comme illustré par la figure (3.36) et (3.37).

La prise en compte de l'erreur de discrétisation sous forme de bruit a donc permis de réaliser l'optimisation avec succès, même si cette modélisation stochastique peut être sujette à caution.

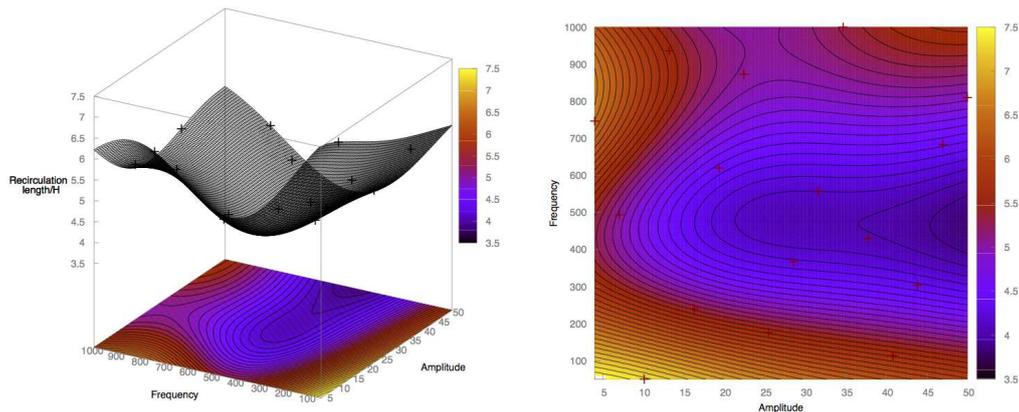


FIGURE 3.33 – Modèle pour la base de données initiale (les points correspondent aux configurations simulées).

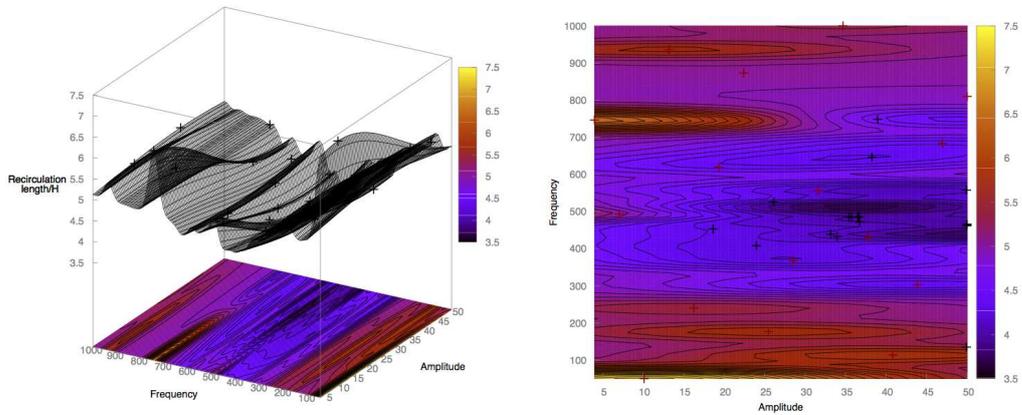


FIGURE 3.34 – Modèle après 6 itérations (les points correspondent aux configurations simulées).

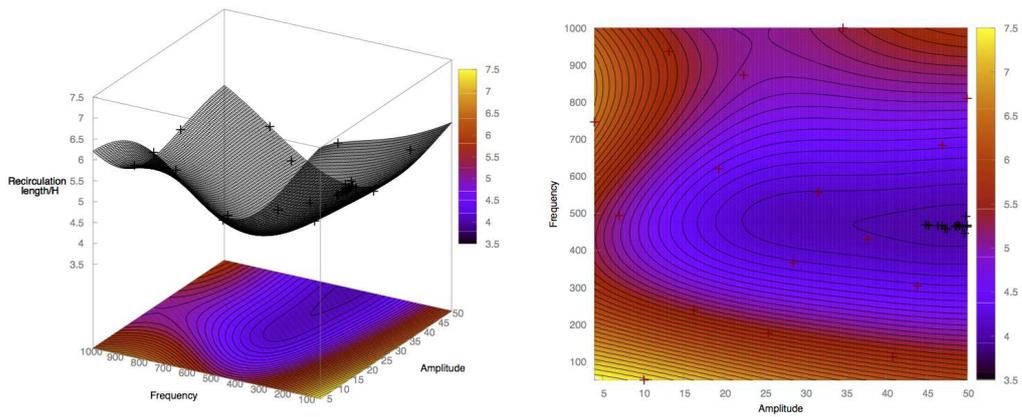


FIGURE 3.35 – Modèle avec observations bruitées après 6 itérations (les points correspondent aux configurations simulées).

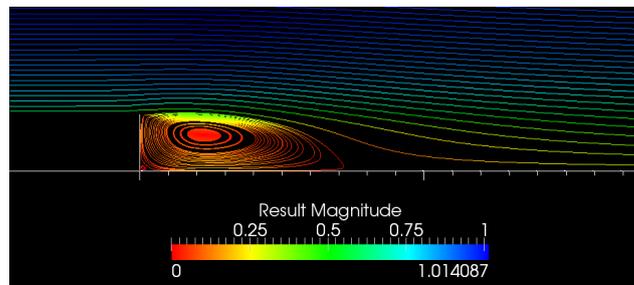
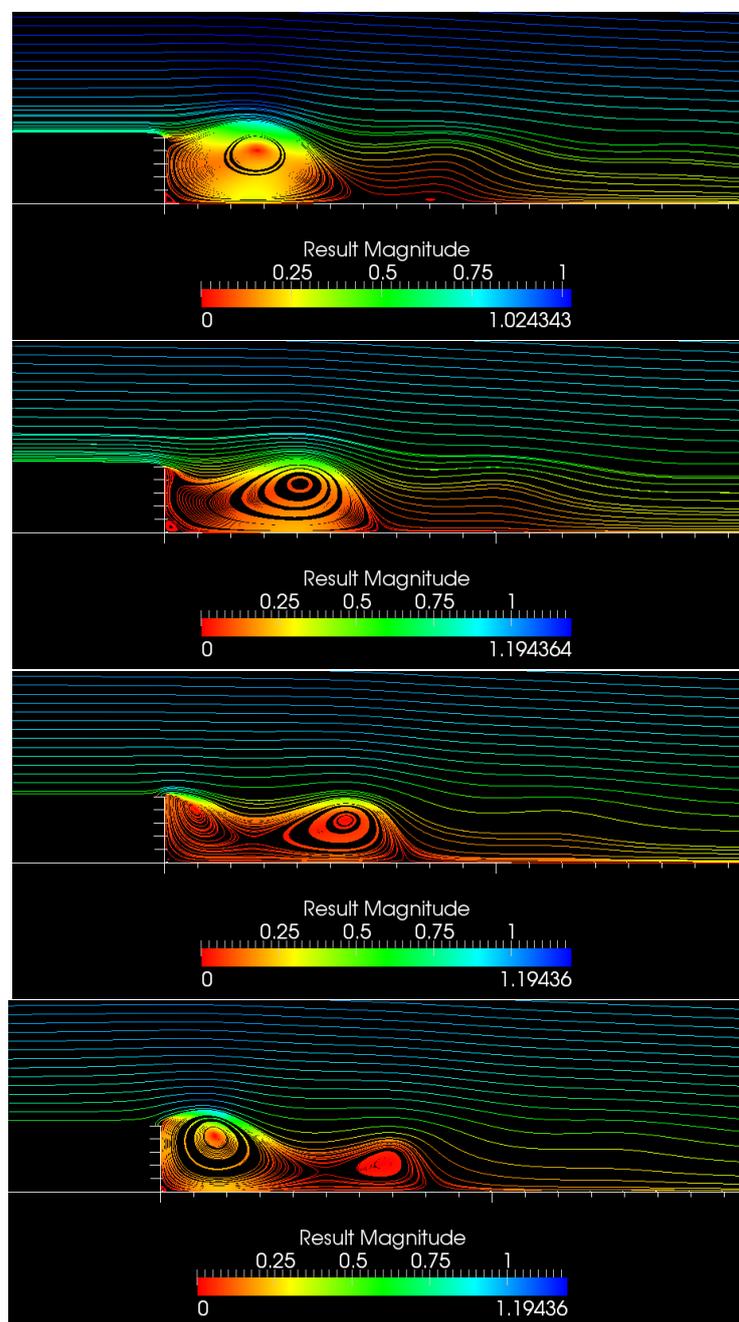


FIGURE 3.36 – Ecoulement moyen avec actuateur optimisé.

FIGURE 3.37 – Ecoulement avec actuateur optimisé, phases $\Phi = 0, \Pi/4, \Pi/2$ et $3\Pi/4$.

3.4 Synthèse

La simulation ne représente pas la réalité *exactement*, à cause d'un manque de connaissance (incertitude) ou de simplifications durant la résolution (erreur). L'ignorance de ces écarts peut conduire à l'*échec de la procédure de conception optimale*, comme on l'a montré lors de l'optimisation du dispositif de contrôle, ou à *une solution dont la performance se dégrade pour toute modification des paramètres de fonctionnement*, comme on l'a illustré par l'optimisation de la voilure en régime transsonique.

Il semble donc fondamental d'associer à la simulation des méthodes d'estimation d'incertitude et d'erreur, et d'utiliser ces informations additionnelles durant la procédure de conception. A ce titre, les estimations d'incertitude reposant sur des analyses de sensibilités sont intéressantes car les méthodes sous jacentes sont performantes. En revanche, l'utilisation de métamodèles, plus faciles à mettre en oeuvre, est fortement limitée par le nombre de variables incertaines mises en jeu.

La prise en compte de certaines erreurs par un modèle stochastique, en considérant la simulation comme une observation bruitée, semble prometteuse et permettrait d'envisager *une procédure adaptative contrôlant l'effort de calcul pour une précision donnée, tout en disposant d'une gestion rigoureuse de l'erreur au cours de l'optimisation*. Cette voie nécessite cependant des approfondissements. D'autres approches ne doivent pas être négligées, comme les méthodes reposant sur les correcteurs d'erreur [Pierce 2004] et l'adaptation de maillage "goal-oriented" [Loseille 2010] pour contrôler efficacement l'erreur d'approximation.

Synthèse et perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit montrent qu'une procédure de conception optimale efficace ne s'obtient pas en utilisant des méthodes numériques indépendantes en géométrie, simulation et optimisation. Au contraire, l'efficacité en terme de vitesse de convergence et de précision s'obtient par *des stratégies cohérentes incluant ces trois disciplines*.

L'approche isogéométrique, présentée dans le chapitre 2, est conceptuellement la plus aboutie : elle offre un cadre pour l'*analyse sans approximation géométrique*, facilitant les couplages multidisciplinaires, les interfaces mobiles, l'analyse de sensibilité et l'optimisation. Les représentations sont *intrinsèquement hiérarchiques*, permettant la construction d'algorithmes multiniveaux pour l'optimisation géométrique décrits dans le chapitre 1, mais également pour la résolution des équations aux dérivées partielles décrits dans le chapitre 2.

L'introduction d'un niveau de modélisation supplémentaire, basé sur des techniques d'apprentissage statistique, constitue un second élément méthodologique qui permet de réaliser la conception avec une connaissance plus globale du problème. Le métamodèle peut être exploité en alternance avec la simulation dans une stratégie d'*optimisation globale efficace*, comme montré au chapitre 1. Il permet également de palier une connaissance imparfaite du problème, en explorant l'espace des événements et en *évaluant la performance d'un point de vue statistique* pour une conception robuste. Enfin, il peut permettre dans certains cas *une prise en compte des erreurs issues de la simulation*, en considérant les évaluations bruitées dans un contexte d'amélioration statistique, comme montré dans le chapitre 3.

Ces différentes avancées ont permis des améliorations significatives, tant sur le plan de l'efficacité que de la complexité des problèmes abordés. Néanmoins, des approfondissements sont encore nécessaires. Le traitement de la géométrie, bien qu'amélioré par une stratégie hiérarchique, est encore perfectible. Notamment, les paramétrisations classiques, de type B-Splines ou NURBS, sont fortement limitées par leur construction tensorielle. Les approches paramétriques alternatives, reposant sur des bases permettant le raffinement local, telles les T-Splines [Dorfel 2010, Vuong 2011] ou LR-Splines [Dokken 2010], sont des pistes à explorer, bien qu'elles souffrent d'une complexité algorithmique pénalisante. Si cette difficulté est surmontée, l'enjeu sera alors de construire des algorithmes de conception incluant *un raffinement local et adaptatif*, de manière à ajouter des paramètres de conception à des positions guidées par l'optimisation.

L'utilisation des métamodèles permet de réduire significativement le nombre d'évaluations de la fonction coût par résolution des équations d'état. Cependant, le coût de ces dernières reste prohibitif pour des problèmes complexes, alors qu'une estimation grossière de la fonction peut dans certaines conditions être suffisante pour l'optimisation, comme on l'a vu dans le chapitre 3. Il conviendrait donc de développer *un algorithme qui fixe de manière automatique et adaptative la finesse du maillage et le niveau de convergence*, tout en prenant en compte l'erreur résultante.

Le développement de méthodes pleinement adaptatives reste donc à réaliser. En outre, plusieurs axes restent à explorer.

Les *problèmes instationnaires* représentent aujourd'hui un enjeu majeur, pour lequel de nouvelles méthodes doivent être développées. En effet, le coût de calcul des simulations est considérablement plus important, particulièrement lorsque la modélisation de la turbulence repose sur des modèles hybrides ou une modélisation des grandes échelles. De

plus, le calcul des gradients par méthode adjointe est délicat dans ce contexte puisqu'il requiert une intégration temporelle à rebours nécessitant le stockage ou le re-calcule de la solution [Belme 2011]. Enfin, les erreurs et incertitudes sont encore plus importantes dans un contexte instationnaire.

Le seconde thématique importante concerne l'*optimisation multidisciplinaire*. Bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler d'un sujet nouveau, les approches qui traitent de manière rigoureuse des hiérarchies de critères [Desideri 2009] ou de paramètres [Désidéri 2007a, Parte 2010] sont encore rares. Si de nombreux travaux traitent ces problèmes à l'aide de métamodèles, l'utilisation de modèles fins reposant sur la résolution d'équations aux dérivées partielles est moins courante. Dans ce contexte, l'analyse de sensibilité pour des simulations avec des couplages multidisciplinaires est également un sujet critique [Etienne 2004, Carrier 2006].

Finalement, il convient de souligner une difficulté majeure de la conception optimale : *la validation*. Contrairement à la simulation, pour laquelle de nombreux cas-test existent et permettent de comparer les différentes méthodes numériques développées à l'expérience, contrairement à l'optimisation numérique pour laquelle des "benchmarks" ont été établis pour chaque type de problème, la conception optimale manque de données pour comparer et valider les approches. Les rares tentatives de comparaison [Benini 2012] mettent en évidence la difficulté à établir rigoureusement qu'une approche est supérieure à une autre, dès lors que les méthodes de simulation ou la paramétrisation sont différentes. Etablir une base de données de cas-tests, associés à des résultats de référence, comme proposé récemment par l'Université de Jyväskylä (<http://jucri.jyu.fi>), constitue une étape importante pour l'amélioration des méthodes.

Publications de l'auteur

Revue internationale avec comité de lecture

- 1 Optimal analysis-aware parameterization of computational domain in 3D isogeometric analysis, G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau & A. Galligo, *Computer-Aided Design*, Vol 45, No 4, 2013
- 2 Analysis-suitable volume parameterization of multi-block computational domain in isogeometric applications, G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau & A. Galligo, *Computer-Aided Design*, Vol 45, No 2, 2013
- 3 A New Error Assessment Method in Isogeometric Analysis of 2D Heat Conduction Problems, G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau & A. Galligo, *Advanced Science Letters*, Vol 10, No 1, 2012
- 4 Kriging-based optimization applied to flow control, R. Duvigneau & P. Chandrashekar, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol 69, No 11, 2012
- 5 Parametrization of computational domain in isogeometric analysis : methods and comparison, G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau & A. Galligo, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 200, No 23-24, 2011
- 6 On the use of second-order derivative and metamodel-based Monte-Carlo for uncertainty estimation in aerodynamics, M. Martinelli & R. Duvigneau, *Computers and Fluids*, Vol 37, No 6, 2010
- 7 Low cost PSO using metamodels and inexact pre-evaluation : Application to aerodynamic shape design, Praveen C. & R. Duvigneau, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No 9-12, 2009
- 8 Multilevel strategies for parametric shape optimization in aerodynamics, B. Abou El Majd, J.-A. Desideri & R. Duvigneau, *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 17, No 1-2, 2008
- 9 Towards a self-adaptive parameterization for aerodynamic shape optimization , R. Duvigneau, B. Abou El Majd & J.-A. Desideri, *European Series in Applied and Industrial Mathematics (Proc.)*, Vol. 22, 2007
- 10 Optimal location of a synthetic jet on an airfoil for stall control , R. Duvigneau, A. Hay & M. Visonneau, *Journal of Fluid Engineering*, Vol. 129, No 7, 2007
- 11 A sensitivity equation method for fast evaluation of nearby flows and uncertainty analysis for shape parameters , R. Duvigneau & D. Pelletier, *Int. J. of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 20, No 7, 2006
- 12 An improved continuous sensitivity equation method for optimal shape design in mixed convection , R. Duvigneau, D. Pelletier & J. Borggaard, *Numerical Heat Transfer part B : Fundamentals*, Vol. 50, No 1, 2006
- 13 Optimization of a synthetic jet actuator for aerodynamic stall control , R. Duvigneau & M. Visonneau, *Computers & Fluids*, Vol. 35, No 6, 2006
- 14 Simulation and optimization of stall control for an airfoil with a synthetic jet , R. Duvigneau & M. Visonneau, *Aerospace Science & technology*, Vol. 10, No 4, 2006
- 15 On accurate boundary conditions for a shape sensitivity equation method , R. Duvigneau & D. Pelletier, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 50, No 2, 2006
- 16 Hydrodynamic design using a derivative-free method , R. Duvigneau & M. Visonneau, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 28, No 2, 2004
- 17 Hybrid genetic algorithms and artificial neural networks for complex design optimization in CFD , R. Duvigneau & M. Visonneau, *Int. J. for Numerical Methods in*

- Fluids*, Vol. 44, No 11, 2004
- 18 Hybrid optimization strategy for complex CFD-based design , R. Duvigneau & M. Visonneau, *Ship Technology Research*, Vol. 50, No 4, 2003
 - 19 On the role played by turbulence closures in hull shape optimization at model and full scale , R. Duvigneau, M. Visonneau & G.B. Deng, *Journal of Marine Science & Technology*, Vol. 8, No 1, 2003

Chapitres d'ouvrages

- 1 Uncertainty quantification for robust design, R. Duvigneau, M. Martinelli & P. Chandrashekar, *Multidisciplinary Design Optimization in Computational Mechanics*, ISTE - Wiley, 2010
- 2 Multiparameter Shape Optimization, A. Benzaoui & R. Duvigneau, *Multidisciplinary Design Optimization in Computational Mechanics*, ISTE - Wiley, 2010
- 3 Multilevel Modeling, P.-A. Boucard, S. Buytet, B. Soulier, P. Chandrashekar, R. Duvigneau , *Multidisciplinary Design Optimization in Computational Mechanics*, ISTE - Wiley, 2010
- 4 Multi-niveaux de modèles, P.-A. Boucard, S. Buytet, Praveen C. & R. Duvigneau, *Optimisation Multidisciplinaire en Mécanique*, Hermes Science Publications-Lavoisier, 2008
- 5 Optimisation de forme paramétrique multiniveau, J.-A. Désidéri, R. Duvigneau, B. Abou El Majd & J. Zhao, *Optimisation Multidisciplinaire en Mécanique*, Hermes Science Publications-Lavoisier, 2008
- 6 Estimation d'incertitude en aérodynamique, R. Duvigneau, M. Martinelli & Praveen C., *Optimisation Multidisciplinaire en Mécanique*, Hermes Science Publications-Lavoisier, 2008
- 7 Aerodynamic design using hierarchical shape parameterizations for descent and Particle Swarm Optimization Methods, R. Duvigneau, B. Abou El Majd & J.-A. Désidéri, *Numerical Analysis and Scientific Computing for Partial Differential Equations and Their Challenging Applications*, CIMNE, 2008
- 8 Amélioration des performances du contrôle du décrochage pour un profil par simulation et optimisation , R. Duvigneau, A. Hay & M. Visonneau, *Contrôle des Decollements : Optimisation des performances et Nouveaux Actionneurs*, Cepadues Editions, 2005
- 9 Le corps d'Ahmed : de la simulation vers les premières tentatives de contrôle , E. Guilmineau & R. Duvigneau, *Contrôle des Decollements : Optimisation des performances et Nouveaux Actionneurs*, Cepadues Editions, 2005

Bibliographie

- [Abgrall 2012] R. Abgrall et P. M. Congedo. *A semi-intrusive deterministic approach to uncertainty quantification in non-linear fluid flow problems*. J. Comput. Physics, 2012. (Cité en page 59.)
- [Aia 1998] *Guide for the verification and validation of Computational Fluid Dynamics simulation*. AIAA guide G-077-1998, 1998. (Cité en page 57.)
- [Alexandrov 1999] N. M. Alexandrov, R. M. Lewis, C. R. Gumbert, L. L. Green et P. A. Newman. *Optimization with Variable-fidelity Models Applied to Wing Design*. Rapport technique, ICASE, December 1999. (Cité en page 20.)
- [Alexandrov 2000] N. M. Alexandrov, E. J. Nielsen, R. M. Lewis et W. K. Anderson. *First-Order Model Management with Variable-Fidelity Physics Applied to Multi-Element Airfoil Optimization*. In 8th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, CA, 2000. (Cité en page 20.)
- [Andreoli 2003] M. Andreoli, A. Janka et J.-A. Désidéri. *Free-Form Deformation parameterization for multilevel 3D shape optimization in aerodynamics*. INRIA Research Report 5019, November 2003. (Cité en page 16.)
- [Auger 2005] A. Auger. *Convergence results for the $(1, \lambda)$ -SA-ES using the theory of φ -irreducible Markov chains*. Theoretical Computer Science, vol. 334, no. 1-3, 2005. (Cité en page 9.)
- [Bandemer 2006] H. Bandemer. *Mathematics of uncertainty*. Springer-Verlag, 2006. (Cité en page 73.)
- [Baysal 1996] O. Baysal et G. W. Burgreen. *Three-Dimensional Aerodynamic Shape Optimization using Discrete Sensitivity Analysis*. AIAA Journal, vol. 34, no. 9, pages 1761–1770, 1996. (Cité en page 61.)
- [Bazilevs 2006] Y. Bazilevs, L. Beirão de Veiga, J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes et G. Sangalli. *Isogeometric analysis : approximation, stability and error estimates for refined meshes*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, no. 6, pages 1031–1090, 2006. (Cité en pages 34 et 37.)
- [Bazilevs 2011] Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, I. Akkerman, S. Wright, K. Takizawa, B. Henicke, T. Spielman et T. E. Tezduyar. *3D simulation of wind turbine rotors at full scale. Part I : Geometry modeling and aerodynamics*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 65, no. 1-3, 2011. (Cité en pages 34 et 43.)
- [Belme 2011] A. Belme. *Unsteady Aerodynamics and Adjoint method*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2011. (Cité en page 90.)
- [Benini 2012] E. Benini, R. Ponza, P. Lannelli, H. Struber, Z. Hrnčir, F. Moens et T. Kuehn. *Multi-point shape and setting optimization of high-lift airfoils in both take-off and landing conditions*. In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Vienna, Austria, 2012. (Cité en pages 58 et 90.)
- [Benzaoui 2009] A. Benzaoui et R. Duval. *Efficient Hierarchical Optimization using an Algebraic Multilevel Approach*. Rapport technique, INRIA Research Report No 6974, June 2009. (Cité en page 6.)
- [Beux 1993] F. Beux et A. Dervieux. *A hierarchical approach for shape optimization*. Rapport technique 1868, Rapport de Recherche INRIA, 1993. (Cité en page 8.)

- [Beyer 2007] H.G. Beyer et B. BSendhoff. *Robust optimization : a comprehensive survey*. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, March 2007. (Cité en page 60.)
- [Blanchard 2010] L. Blanchard, R. Duvigneau, G. Xu et B. Mourrain. *Hierarchical Optimization in Isogeometric Analysis : Application to Thermal Conduction*. Rapport technique, INRIA Research Report No 7470, 2010. (Cité en page 51.)
- [Carrier 2006] G. Carrier, M. Marcelet et J. Peter. *Sensitivity analysis of a coupled aero-structural system using direct differentiation and adjoint equations*. In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS, 2006. (Cité en page 90.)
- [Catalano 2005] L. Catalano, A. Dadone et V. Dalosio. *Progressive optimization on unstructured grid using multigrid-aided finite-difference sensitivities*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 47, no. 10-11, 2005. (Cité en page 8.)
- [Chaigne 2009] B. Chaigne. *Méthodes hiérarchiques pour l'optimisation géométrique de structures rayonnantes*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2009. (Cité en pages 6, 7 et 8.)
- [Chaigne 2011] B. Chaigne et J.-A. D sidi ri. *Convergence of a two-level ideal algorithm for a parametric shape inverse model problem*. Inverse Problems in Science and Engineering, vol. 19, no. 3, pages 363–393, 2011. (Cité en pages 6 et 7.)
- [Chandrashekar 2007] P. Chandrashekar et R. Duvigneau. *Radial Basis Functions and Kriging Metamodels for Aerodynamic Optimization*. Research Report 6151, INRIA, 03 2007. (Cité en page 23.)
- [Chandrashekar 2009a] P. Chandrashekar et R. Duvigneau. *Low cost PSO using metamodels and inexact pre-evaluation : Application to aerodynamic shape design*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, no. 9-12, February 2009. (Cité en page 22.)
- [Chandrashekar 2009b] P. Chandrashekar et R. Duvigneau. *Study of some strategies for global optimization using Gaussian process models with application to aerodynamic design*. Rapport technique RR-6964, INRIA, June 2009. (Cité en pages 25 et 27.)
- [Clerc 2002] M. Clerc et J. Kennedy. *The particle swarm - explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6, no. 1, pages 58–73, February 2002. (Cité en page 9.)
- [Cottrell 2007] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes et A. Reali. *Studies of refinement and continuity in isogeometric analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, no. 196, pages 4160–4183, 2007. (Cité en pages 34 et 50.)
- [Cottrell 2009] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes et Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : towards integration of cad and fea*. John Wiley & sons, 2009. (Cité en pages 34 et 37.)
- [Courty 2003] F. Courty. *Optimisation diff rentiable en mécanique des fluides numérique*. PhD thesis, Université d'Orsay, 2003. (Cité en page 61.)
- [Courty 2006] F. Courty et A. Dervieux. *Multilevel functional preconditioning for shape optimization*. Int. J. of Computational Fluid Dynamics, vol. 20, no. 7, 2006. (Cité en page 8.)
- [De Boor 1978] C. De Boor. *A practical guide to splines*. Springer Verlag, 1978. (Cité en pages 34, 35, 39 et 50.)
- [Dennis 1991] J.E. Dennis et V. Torczon. *Direct Search Methods on Parallel Machines*. SIAM Journal of Optimization, vol. 1, no. 4, pages 448–474, 1991. (Cité en pages 6, 12 et 17.)

- [Dennis 1997] J. E. Dennis et V. Torczon. Multidisciplinary design optimization : State-of-the art, chapitre Managing approximation models in optimization. SIAM, 1997. (Cité en page 24.)
- [Dervieux 1992] A. Dervieux et J.-A. Désidéri. *Compressible flow solvers using unstructured grids*. INRIA Research Report 1732, June 1992. (Cité en pages 11, 16, 47 et 63.)
- [Désidéri 2006] J.-A. Désidéri. *Two-level ideal algorithm for parametric shape optimization*. Journal of Numerical Mathematics, vol. 14, 2006. (Cité en pages 6 et 8.)
- [Désidéri 2007a] J.-A. Désidéri. *Split of Territories in Concurrent Optimization*. Rapport technique RR-6108, INRIA, 2007. (Cité en page 90.)
- [Désidéri 2007b] J.-A. Désidéri, B. Abou El Majd et A. Janka. *Nested and self-adaptive Bézier parameterization for shape optimization*. J. Comput. Physics, vol. 224, pages 117–131, 2007. (Cité en pages 7, 14 et 15.)
- [Desideri 2009] J.-A. Desideri. *Multiple-Gradient Descent Algorithm (MGDA)*. Rapport technique, INRIA Research Report No 6953, 2009. (Cité en page 90.)
- [Dokken 2010] T. Dokken. *Locally refined splines*. In Non-Standard Numerical Methods for PDEs, Pavia, 2010. (Cité en page 89.)
- [Dorfel 2010] M. Dorfel, B. Juttler et B. Simeon. *Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, no. 5-8, 2010. (Cité en pages 55 et 89.)
- [Driver 1985] D.M. Driver et H.L. Seegmiller. *Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow*. AIAA journal, vol. 23, no. 2, pages 163–171, 1985. (Cité en page 84.)
- [Duvigneau 2003] R. Duvigneau, M. Visonneau et G.B. Deng. *On the Role played by Turbulence Closures for Hull Shape Optimization at Model and Full Scale*. Journal of Marine Science and Technology, vol. 8, no. 1, June 2003. (Cité en page 77.)
- [Duvigneau 2006a] R. Duvigneau, B. Chaigne et J.-A. Désidéri. *Multi-Level Parameterization for Shape Optimization in Aerodynamics and Electromagnetics using a Particle Swarm Optimization Algorithm*. Research Report 6003, INRIA, 10 2006. (Cité en page 10.)
- [Duvigneau 2006b] R. Duvigneau et D. Pelletier. *On accurate boundary conditions for a shape sensitivity equation method*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 50, no. 2, 2006. (Cité en page 68.)
- [Duvigneau 2006c] R. Duvigneau et D. Pelletier. *A sensitivity equation method for fast evaluation of nearby flows and uncertainty analysis for shape parameters*. Int. J. of Computational Fluid Dynamics, vol. 20, no. 7, pages 497–512, August 2006. (Cité en page 68.)
- [Duvigneau 2006d] R. Duvigneau, D. Pelletier et J. Borggaard. *An improved continuous sensitivity equation method for optimal shape design in mixed convection*. Numerical Heat Transfer part B : Fundamentals, vol. 50, no. 1, pages 1–24, July 2006. (Cité en page 68.)
- [Duvigneau 2006e] Régis Duvigneau. *Adaptive Parameterization using Free-Form Deformation for Aerodynamic Shape Optimization*. Research Report 5949, INRIA, 07 2006. (Cité en pages 16 et 17.)
- [Duvigneau 2007a] R. Duvigneau. *Aerodynamic Shape Optimization with Uncertain Operating Conditions using Metamodels*. Research Report 6143, INRIA, 03 2007. (Cité en page 75.)

- [Duvigneau 2007b] R. Duvigneau, B. Abou El Majd et J.-A. Desideri. *Towards a self-adaptive parameterization for aerodynamic shape optimization*. European Series in Applied and Industrial Mathematics (Proc.), vol. 22, December 2007. (Cité en pages 16 et 17.)
- [Duvigneau 2008a] R. Duvigneau, T. Kloczko et P. Chandrashekar. *A three-level parallelization strategy for robust design in aerodynamics*. In 20th International Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics, May 2008. (Cité en page 75.)
- [Duvigneau 2008b] R. Duvigneau, B. Abou El Majd et J.-A. Désidéri. Numerical analysis and scientific computing for partial differential equations and their challenging applications, chapitre Aerodynamic design using hierarchical shape parameterizations for descent and Particle Swarm Optimization Methods. CIMNE, 2008. (Cité en page 12.)
- [Duvigneau 2012] R. Duvigneau et P. Chandrashekar. *Kriging-based optimization applied to flow control*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 69, no. 11, 2012. (Cité en page 25.)
- [Elliott 1997] J. Elliott et J. Peraire. *Practical 3D Aerodynamic Design and Optimization using Unstructured Grids*. AIAA Journal, vol. 35, no. 9, pages 1479–1485, 1997. (Cité en page 61.)
- [Etienne 2004] S. Etienne, D. Pelletier et A. Garon. *Monolithic sensitivity analysis of steady-state fluid-structure interaction*. In 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, 2004. (Cité en page 90.)
- [Farin 1989] G. Farin. Curves and surfaces for computer-aided geometric design. Academic Press, 1989. (Cité en pages 7, 15, 34, 35, 39 et 50.)
- [Farin 1999] G. Farin et D. Hansford. *Discrete Coons Patches*. Computer Aided Design, vol. 16, no. 7, 1999. (Cité en page 36.)
- [Fourie 2002] P.C. Fourie et A.A. Groenwold. *The particle swarm optimization algorithm in size and shape optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 23, no. 4, pages 259–267, May 2002. (Cité en page 9.)
- [Froehly 2012] Algiane Froehly. *Couplage d'un schéma aux résidus distribués à l'analyse isogéométrique : méthode numérique et outils de génération et adaptation de maillage*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 2012. (Cité en page 43.)
- [Ghate 2007] D. Ghate et M. B. Giles. *Efficient Hessian Calculation Using Automatic Differentiation*. In Efficient Hessian Calculation Using Automatic Differentiation, 2007. (Cité en page 61.)
- [Gill 1981] P. E. Gill, W. Murray et M. H. Wright. Practical optimization. Academic Press, 1981. (Cité en page 45.)
- [Ginsbourger 2009] David Ginsbourger. *Multiplés métamodèles pour l'approximation et l'optimisation de fonctions numériques multivariées*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2009. (Cité en page 78.)
- [Giotis 1999] A.P. Giotis et K.C. Giannakoglou. Eurogen 99, evolutionary algorithms in engineering and computer science, chapitre Single- and multi-objective airfoil design using genetic algorithms and artificial intelligence. John Wiley & sons, 1999. (Cité en pages 21 et 22.)
- [Giotis 2000] A.P. Giotis et K.C. Giannakoglou. Genetic algorithms for optimization in aeronautics and turbomachinery, chapitre Acceleration of genetic algorithms using artificial neural networks. VKI Lecture Series, 2000. (Cité en pages 20, 21 et 22.)

- [Godfrey 2001] A. G. Godfrey et E. M. Cliff. *Sensitivity Equations for Turbulent Flows*. In 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Jan. 2001. AIAA Paper 2001-1060. (Cité en page 70.)
- [Goldberg 1989] D.E. Goldberg. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Addison Wesley Company Inc., 1989. (Cité en page 8.)
- [Hackbusch 1985] W. Hackbusch. Multi-grid methods and applications. Springer, 1985. (Cité en page 7.)
- [Hansen 2003] N. Hansen, S.D. Muller et P. Koumoutsakos. *Reducing the Time Complexity of the Derandomized Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation (CMA-ES)*. Evolutionary Computation, vol. 11, no. 1, pages 1–18, 2003. (Cité en page 9.)
- [Hay 2007] A. Hay et M. Visonneau. *Adaptive finite volume solution of complex turbulent flows*. Computers and Fluids, vol. 36, no. 8, 2007. (Cité en page 34.)
- [Heinrich 2010] C. Heinrich, A.-V. Vuong et B. Simeon. *Finite-volume method on NURBS geometry and its application to fluid flow and FSI*. In Workshop on Non-Standard Numerical Methods for PDEs, Pavia, Italy, 2010. (Cité en page 34.)
- [Heinrich 2011] C. Heinrich, L. Blanchard et R. Duvigneau. *Isogeometric shape optimization in fluid-structure interaction*. Rapport technique, INRIA Research Report No 7639, 2011. (Cité en page 34.)
- [Hughes 2005] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell et Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, no. 194, pages 4135–4195, 2005. (Cité en pages 34, 43 et 55.)
- [Hughes 2010] T. J.R. Hughes, G. Scovazzi et T. E. Tezduyar. *Stabilized Methods for Compressible Flows*. Journal of Scientific Computing, no. 43, 2010. (Cité en pages 43 et 44.)
- [Huyse 2001a] L. Huyse. *Free-form airfoil shape optimization under uncertainty using maximum expected value and second order second moment strategies*. Rapport technique 2001–18, ICASE, June 2001. (Cité en pages 58 et 73.)
- [Huyse 2001b] L. Huyse et R.M. Lewis. *Aerodynamic shape optimization of two-dimensional airfoils under uncertain conditions*. Rapport technique 2001–1, ICASE, January 2001. (Cité en page 73.)
- [Jameson 1988] A. Jameson. *Aerodynamic Design via Control Theory*. Journal of Scientific Computing, vol. 3, no. 97-0101, pages 233–260, 1988. (Cité en page 61.)
- [Jones 2001] D.R. Jones. *A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces*. Journal of Global Optimization, vol. 21, pages 345–383, 2001. (Cité en pages 22, 24 et 25.)
- [Keane 2005] A.J. Keane et P.B. Nair. Computational approaches for aerospace design : The pursuit of excellence. John-Wiley and Sons, 2005. (Cité en page 30.)
- [Kennedy 1995] J. Kennedy et R.C. Eberhart. *Particle swarm optimization*. In 1995 IEEE International Conference on neural networks, Perth, Australia, 1995. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Kloczko 2008a] T. Kloczko. *Concept, architecture and performance study for a parallel code in CFD*. In Parallel CFD Conference, May 19-22, Lyon, France, 2008. (Cité en pages 11, 16 et 63.)
- [Kloczko 2008b] T. Kloczko, C. Corre et A. Beccantini. *Low-cost implicit schemes for all-speed flows on unstructured meshes*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 58, no. 5, pages 493–526, October 2008. (Cité en page 47.)

- [Knio 2006] O.M. Knio et O.P. Le Maitre. *Uncertainty propagation in CFD using polynomial chaos decomposition*. Fluid Dynamics Research, vol. 38, no. 9, pages 616–640, September 2006. (Cité en page 59.)
- [Kushner 1964] H. Kushner. *A new method of locating the maximum point of an arbitrary multipeak curve in the presence of noise*. Journal of Basic Engineering, vol. 86, pages 97–106, 1964. (Cité en page 24.)
- [Labroquère 2012] J. Labroquère et R. Duvigneau. *Optimization methods applied to aerodynamic flow control*. In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Vienna, Austria, September 2012. (Cité en page 84.)
- [Laurenceau 2008] J. Laurenceau et P. Sagaut. *Efficient response surfaces of aerodynamic functions with Kriging and Cokriging*. AIAA Journal, vol. 46, no. 2, 2008. (Cité en page 25.)
- [Li 2001] W. Li, L. Huyse et S. Padula. *Robust airfoil optimization to achieve consistent drag reduction over a Mach range*. Rapport technique 2001-22, ICASE, August 2001. (Cité en page 73.)
- [Lin 2006] G. Lin, C.-H. Su et G.E. Karniadakis. *Predicting shock dynamics in the presence of uncertainties*. Journal of Computational Physics, no. 217, pages 260–276, 2006. (Cité en page 59.)
- [Loseille 2010] A. Loseille, A. Dervieux et F. Alauzet. *Fully anisotropic goal-oriented mesh adaptation for 3D steady Euler equations*. Journal of computational physics, vol. 229, no. 8, pages 2866–2887, 2010. (Cité en page 88.)
- [Madsen 2000] J. Madsen, W. Shyy et T. Haftka. *Response surface techniques for difuser shape optimization*. AIAA Journal, vol. 38, no. 9, 2000. (Cité en page 77.)
- [Majd 2007] B. Abou El Majd. *Algorithmes hiérarchiques et stratégies de jeux pour l'optimisation multidisciplinaire*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2007. (Cité en page 7.)
- [Majd 2008] B. Abou El Majd, J.-A. Desideri et R. Duvigneau. *Multilevel strategies for parametric shape optimization in aerodynamics*. European Journal of Numerical Mechanics, vol. 17, no. 1-2, pages 149–168, 2008. (Cité en page 7.)
- [Martinelli 2007] M. Martinelli. *Sensitivity Evaluation in Aerodynamic Optimal Design*. PhD thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, 2007. (Cité en pages 8, 61, 62 et 66.)
- [Martinelli 2008] M. Martinelli et R. Duvigneau. *Comparison of second-order derivatives and metamodel-based Monte-Carlo approaches to estimate statistics for robust design of a transonic wing*. In 10th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference, numéro AIAA 2008-2071, April 2008. (Cité en pages 62, 63 et 66.)
- [Martinelli 2010] M. Martinelli et R. Duvigneau. *On the use of second-order derivative and metamodel-based Monte-Carlo for uncertainty estimation in aerodynamics*. Computers and Fluids, vol. 37, no. 6, 2010. (Cité en pages 58, 62 et 63.)
- [Mathelin 2005] L. Mathelin et M.Y. Hussaini. *Stochastic Approaches to Uncertainty Quantification in CFD Simulations*. Numerical Algorithms, vol. 38, no. 1, 2005. (Cité en page 59.)
- [Matsumoto 1998] M. Matsumoto et T. Nishimura. *Mersenne twister : a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator*. CM Trans. Model. Comput. Simul., vol. 8, no. 1, 1998. (Cité en page 63.)
- [Mohammadi 1999] B. Mohammadi et O. Pironneau. *Mesh Adaptation and Automatic Differentiation in a CAD-Free Framework for Optimal Shape*. International Journal

- for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, no. 2, pages 127–136, May 1999. (Cité en page 61.)
- [Mohammadi 2001] B. Mohammadi et O. Pironneau. Applied optimal shape design for fluids. Oxford University Press, 2001. (Cité en page 61.)
- [Nielsen 1999] E. J. Nielsen et W. K. Anderson. *Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Meshes using the Navier-Stokes Equations*. AIAA Journal, vol. 37, no. 11, pages 1411–1419, 1999. (Cité en page 61.)
- [Nielsen 2005] E. Nielsen et M. Park. *Using an Adjoint Approach to Eliminate Mesh Sensitivities in Computational Design*. In 43th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2005. (Cité en page 34.)
- [Parte 2010] Y. Parte et M. Masmoudi. *Disciplinary Interaction Variable Elimination (DIVE) approach for multidisciplinary optimization*. In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2010 Lisbon, 2010. (Cité en page 90.)
- [Picheny 2010] Victor Picheny, David Ginsbourger et Yves Richet. *Noisy expected improvement and on-line computation time allocation for the optimization of simulators with tunable fidelity*. In 2nd Int. Conf. on Engineering Optimization, Lisbon, Portugal, 2010. (Cité en pages 20 et 79.)
- [Picheny 2012] Victor Picheny, Tobias Wagner et David Ginsbourger. *A benchmark of kriging-based infill criteria for noisy optimization*. Rapport technique, Centre Européen de Recherche et de Formation Avanc ee en Calcul Scientifique - CERFACS , TU Dortmund University , Institute of Mathematical Statistics and Actuarial Science [Bern] - IMSV, 2012. (Cité en page 78.)
- [Pierce 2004] N. A. Pierce et M. B. Giles. *Adjoint and Defect Error Bounding and Correction for Functional Estimates*. J. Comput. Physics, no. 200, 2004. (Cité en page 88.)
- [Pironneau 1974] O. Pironneau. *On optimum design in fluid mechanics*. J. Fluid Mechanics, no. 64, 1974. (Cité en page 61.)
- [Powell 2001] M.J.D. Powell. *Radial basis function methods for interpolation to functions of many variables*. In Fifth hellenic-European conference on Computer Mathematics and its applications, 2001. (Cité en page 20.)
- [Putko 2001] M.M. Putko, P.A. Newman, A.C. Taylor et L.L. Green. *Approach for uncertainty propagation and robust design in CFD using sensitivity derivatives*. In 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, June 2001. AIAA Paper 2001-2528. (Cité en page 58.)
- [Qin 2008] N. Qin, W. S. Wong et A. Le Moigne. *Three-dimensional contour bumps for transonic wing drag reduction*. J. Aerospace Engineering, vol. 222, 2008. (Cité en pages 27 et 30.)
- [Sabin 1993] M. Sabin. *CAD system components*. Computer Aided Design, vol. 25, no. 3, pages 119–140, 1993. (Cité en pages 7, 15, 34, 35, 39 et 50.)
- [Sacks 1989] J. Sacks, W.J. Welch, T.J. Mitchell et H.P. Wynn. *Design and analysis of computer experiments*. Statistical Science, vol. 4, no. 4, pages 409–435, 1989. (Cité en pages 20, 23 et 63.)
- [Samareh 2001] J.A. Samareh. *A survey of shape parameterization techniques for high-fidelity multidisciplinary shape optimization*. AIAA Journal, vol. 39, no. 5, pages 877–884, 2001. (Cité en page 12.)

- [Sederberg 1986] T.W. Sederberg et S.R. Parry. *Free-From Deformation of Solid Geometric Models*. Computer Graphics, vol. 20, no. 4, pages 151–160, 1986. (Cité en pages 12 et 15.)
- [Sefrioui 2000] M. Sefrioui, K. Srinivas et J. Periaux. *Aerodynamic Shape Optimization using a Hierarchical Genetic Algorithm*. In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000 Barcelona, 2000. (Cité en page 20.)
- [Sevilla 2008] R. Sevilla, S. Fernandez-Mendez et A. Huerta. *NURBS-Enhanced Finite Element Method for Euler equations*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 57, no. 9, 2008. (Cité en page 43.)
- [Sherman 1996] L. L. Sherman, A. C. Taylor III, L. L. Green et P. A. Newman. *First and second-order aerodynamic sensitivity derivatives via automatic differentiation with incremental iterative methods*. J. Comput. Physics, vol. 129, 1996. (Cité en page 61.)
- [Shi 1998] Y.H. Shi et R.C. Eberhart. *A modified particle swarm optimizer*. In International Conference on Evolutionary Computation, pages 69–73, 1998. (Cité en page 9.)
- [Ta’asan 1994] S. Ta’asan. *Multigrid One-Shot Methods for Optimal Control Problems*. Rapport technique 52, ICASE, 1994. (Cité en pages 8, 20, 51 et 61.)
- [Tezduyar 2006] T. E. Tezduyar et M. Senga. *Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows*. Computers and Fluids, no. 195, 2006. (Cité en pages 44 et 49.)
- [Turgeon 2001a]  . Turgeon, D. Pelletier et J. Borggaard. *Application of a Sensitivity Equation Method to the $k - \varepsilon$ Model of Turbulence*. In 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, Jun. 2001. AIAA Paper 2001-2534. (Cité en page 70.)
- [Turgeon 2001b]  . Turgeon, D. Pelletier et J. Borggaard. *Sensitivity and Uncertainty Analysis for Variable Property Flows*. In 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Jan. 2001. AIAA Paper 2001-0139. (Cité en pages 58 et 70.)
- [Venter 2003] G. Venter et J. Sobieszczanski-Sobieski. *Particle swarm optimization*. AIAA Journal, vol. 41, no. 8, pages 1583–1589, August 2003. (Cité en page 9.)
- [Vuong 2011] A.V. Vuong, C. Giannelli, B. Juttler et B. Simeon. *A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis*. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, no. 49-52, 2011. (Cité en page 89.)
- [Walter 2002] R.W. Walter et L. Huyse. *Uncertainty analysis for fluid mechanics with applications*. Rapport technique 2002–1, ICASE, February 2002. (Cité en page 58.)
- [Walters 2003] R. Walters. *Towards stochastic fluid mechanics via Polynomial Chaos*. In 41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, USA, 2003. (Cité en page 59.)
- [Wesseling 1992] P. Wesseling. *An introduction to multigrid methods*. Wiley and sons, 1992. (Cité en page 7.)
- [Xu 2011] G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau et A. Galligo. *Parametrization of computational domain in isogeometric analysis : methods and comparison*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, no. 23-24, 2011. (Cité en page 36.)
- [Xu 2012] G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau et A. Galligo. *A new error assessment method in isogeometric analysis of 2D heat conduction problem*. Advanced Science Letters, vol. 10, no. 1, 2012. (Cité en page 36.)

-
- [Xu 2013] G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau et A. Galligo. *Analysis-suitable volume parameterization of multi-block computational domain in isogeometric analysis*. Computer Aided Design, vol. 45, no. 2, 2013. (Cité en page 36.)
- [Zienkiewicz 1992a] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu. *The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1 : The Recovery Technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pages 1331–1364, 1992. (Cité en page 68.)
- [Zienkiewicz 1992b] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu. *The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 2 : Error Estimates and Adaptivity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pages 1365–1382, 1992. (Cité en page 68.)