Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens

Igor Francisco Arias Lopez

▶ **To cite this version:**

Igor Francisco Arias Lopez. Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens. Autre [cs.OH]. Institut National des Télécommunications, 2013. Français. NNT : 2013TELE0019 . tel-00879791

HAL Id: tel-00879791

https://theses.hal.science/tel-00879791

Submitted on 4 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT CONJOINT
de TELECOM SUDPARIS et de l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité

Informatique et Télécommunications

École doctorale Informatique, Télécommunications et Électronique (Paris)

Présentée par

Igor Francisco ARIAS LÓPEZ

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de TELECOM SUDPARIS

Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens

soutenue le 26/06/2013

devant le jury composé de :

Rapporteurs	Raphaël Gillard	Professeur, INSA / IETR
Examinateurs	Gilles Beauquet	Ingénieur-expert, THALES Air Systems
Examinateurs	Alexandre Chabory	M/C, ENAC / TELECOM-EMA
Examinateurs	Marc Helier	Professeur, L2E / UPMC
Directeur de thèse	Christine Letrou	Professeur, Télécom SudParis

Thèse n° :2013TELE0019

Table des matières

1 Introduction **7**

1.1 Etat de l'art 7

1.2 Objet de la thèse 9

2 Théorie générale des frames **11**

2.1 Définitions et propriétés 11

2.2 Frame de Gabor 14

2.3 Frame de Gabor à fenêtre gaussienne 16

2.4 Décomposition sur un frame de Gabor 17

2.5 Faisceaux gaussiens 18

2.6 Propagation d'un faisceau élémentaire : approximation paraxiale 22

3 Calcul des coefficients **25**

3.1 Bornes des sommations 26

3.2 Analyse d'une fonction initiale à une variable dans le domaine spatial 29

3.3 Analyse d'une fonction initiale à une variable dans le domaine spectral 32

3.4 Analyse d'une fonction initiale à deux variables dans le domaine spatial 34

3.5 Analyse d'une fonction initiale à deux variables dans le domaine spectral 35

3.6 Cas particulier : Distribution initiale à variables séparables 36

3.7 Validation de la méthode 37

3.7.1 Fonction d'une variable 37

a Domaine spatial 37

b Domaine spectral 39

3.7.2 Influence des paramètres sur la précision de la décomposition de Gabor 42

3.7.3 Fonction de deux variables 46

a Domaine spatial 47

b Domaine spectral 50

3.8 Optimisation de la méthode : 52

3.8.1 Variation du seuil relatif (ϵ_3) et taux de compression (TC) 53

3.9 Conclusion 55

4 Partition dans le domaine spectral **57**
4.1 Généralités sur la partition de l'unité . . . 58
4.2 Formulation théorique du partitionnement spectral . . . 60
4.3 Définition des fonctions caractéristiques . . . 64
4.4 Influence des fonctions caractéristiques sur le calcul des coefficients . . . 70
4.5 Lancer de faisceaux gaussiens à partir des spectres partiels . . . 74
4.6 Illustration de la méthode . . . 79
4.7 Conclusion . . . 81

5 Application de la partition dans le domaine spectral au calcul des champs rayonnés **83**
5.1 Réseau de dipôles demi-onde théoriques . . . 83
5.2 Dipôle demi-onde théorique . . . 87
5.3 Influence des différents paramètres dans la méthode de lancer de faisceaux gaussiens à partir des spectres partiels . . . 90
5.3.1 Variation du paramètres ϵ_1 et ϵ_2 . . . 90
5.3.2 Variation des paramètres L_x et L_y . . . 90
5.3.3 Variation de la distance d'observation r' . . . 92
5.3.4 Variation du seuil relatif (ϵ_3) et taux de compression (TC) . . . 93
5.4 Antenne réelle . . . 94
5.4.1 Analyse classique (sans partitionnement) . . . 100
5.4.2 Analyse avec partitionnement spectral . . . 103
5.5 Conclusion . . . 107

6 Conclusion et perspectives **115**
Références . . . 119

A Relation entre spectres d'onde plane définis dans deux plans différents **121**

B La méthode d'interpolation **123**
B.1 Interpolation cubique Lagrangienne . . . 124
B.2 Interpolation spline cubique . . . 125

Table des figures

2.1 Représentation des axes de différents faisceaux élémentaires B_{mn} 22

3.1 Synthèse de $E(x)$ et $\tilde{E}(k_x)$. 27
3.2 Diagramme d'influence (pour l'analyse spatiale d'une distribution). 31
3.3 Diagramme d'influence (pour l'analyse spectrale d'une distribution). 33
3.4 Algorithme de calcul des coefficients (domaine spatial). 38
3.5 Coefficients de frame calculés dans le domaine spatial (fonction porte) avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$. 39
3.6 Reconstruction spatiale d'une fonction porte, analysée dans le domaine spatial avec $L_x = \frac{\lambda}{10}$, $\nu = 0.1$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$. 39
3.7 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial. 40
3.8 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial. 40
3.9 Reconstruction spectrale de la transformée de Fourier de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial. 41
3.10 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale présentée en figure 3.9. . . 41
3.11 Reconstruction spectrale autour de la région de troncation de la transformée de Fourier de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial. 42
3.12 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale présentée en figure 3.9. . . 42
3.13 Algorithme de calcul des coefficients (domaine spectral). 43
3.14 Coefficients de frame calculés dans le domaine spectral (fonction porte) avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$. 43
3.15 Reconstruction spectrale d'une fonction porte, analysée dans le domaine spectral avec $L_x = 10\lambda$, $\nu = 0.1$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$. 44
3.16 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale de la fonction porte présentée en figure 3.15, analysée dans le domaine spectral. 44
3.17 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale de la fonction porte présentée en figure 3.15, analysée dans le domaine spectral. 45
3.18 Reconstruction spatiale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, analysée dans le domaine spectral. 45

3.19 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, analysée dans le domaine spectral. 46
3.20 Reconstruction d'une fonction porte dans le domaine spatial avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\nu = 0.1$. 46
3.21 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale d'une fonction porte avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$. 47
3.22 Reconstruction spectrale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\nu = 0.1$. 47
3.23 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$. 48
3.24 Reconstruction d'une fonction porte spatiale avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$ et $\nu = 0.25$. 48
3.25 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction d'une fonction porte spatiale avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, et $\nu = 0.25$. 49
3.26 Algorithme de calcul des coefficients (domaine spatial). 49
3.27 Coefficients du frame (domaine spatial). 50
3.28 Reconstruction spatiale d'une distribution source gaussienne. 50
3.29 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale d'une distribution source gaussienne ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$). 51
3.30 Algorithme de calcul des coefficients (domaine spectral). 51
3.31 Coefficients du frame (domaine spectral). 52
3.32 Reconstruction spectrale d'un spectre d'ondes planes gaussien. 52
3.33 Erreur absolue normalisée dans la reconstruction d'un spectre d'ondes planes gaussien (sans troncation dans la DFT, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$). 53
3.34 Variation de l'erreur absolue normalisée ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$). 53
3.35 Variation de l'erreur relative ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$). 54
3.36 Variation de l'erreur absolue normalisée ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$). 54
3.37 Variation de l'erreur relative ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$). 55
3.38 Erreur relative et erreur absolue normalisée, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$ et $\epsilon_3 = 10^{-3}$. 56

4.1 Fenêtre de Hann. 59
4.2 Fonction de partition χ. 60
4.3 Fonctions χ_0 et χ_1. 60
4.4 Vue éclatée des plans $\mathcal{P}_j$, et des repères associés. 61
4.5 Relation entre les repères. 62
4.6 Fonctions $\chi_{1x}(k_{x_1}, 0)$ et $\chi_{2x}(k_{x_2}, 0)$. 68
4.7 Fonctions χ_1 et χ_2. 68
4.8 Fonction $\chi_5(k_{x_5}, k_{y_5})$. 69
4.9 Fonctions χ_1 χ_2 et χ_5. 70
4.10 Fonctions selon l'axe k_{x_1} ou k_{x_2}. 70
4.11 $\mathcal{F}^{-1}[\chi_{1x}]$ (amplitude normalisée (dB)). 71

4.12 $\mathcal{F}^{-1}[\chi_{2x}]$ (amplitude normalisée (dB)). 71
4.13 $\mathcal{F}^{-1}[\chi_1]$ (dB). 72
4.14 $\mathcal{F}^{-1}[\chi_2]$ (dB). 72
4.15 $\mathcal{F}^{-1}[\chi_5]$ (dB). 73
4.16 Fenêtres de partition dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$. 74
4.17 Fenêtres de partition dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$. 75
4.18 Fenêtre de partition χ_5 dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$. 76
4.19 Somme des fenêtres de partition dans le demi-espace supérieur $(k_{z'} > 0)$. 77
4.20 $|\vec{E}|$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4}, calcul par LFG à partir du plan $\mathcal{P}_1$, TeC=1193sec. (sans partitionnement). 79
4.21 Erreur absolue normalisée, champ $|\vec{E}|$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4} (sans partitionnement). 80
4.22 $|\vec{E}|$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4},calculée par LFG à partir des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6$, TeC=3224sec. (avec partitionnement). 81
4.23 Erreur absolue normalisée, $|\vec{E}|$ pour $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4} (avec partitionnement). 81

5.1 Facteur de réseau normalisé, $N = 14$. 85
5.2 Coefficients du frame de Gabor dans le plan $\mathcal{P}_1$ et le plan $\mathcal{P}_2$, avec troncation et sans compression. 86
5.3 Coefficients du frame de Gabor dans le plan $\mathcal{P}_5$ et le plan $\mathcal{P}_6$. 87
5.4 $|\vec{E}|$, réseau de 14 dipôles, $r' = 720\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$, ϵ_3=10^{-3}. 88
5.5 Erreur absolue normalisée, $|\vec{E}|$, réseau de 14 dipôles, $r' = 720\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$. 89
5.6 $|\vec{E}|$, réseau de 14 dipôles, $r' = 720\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$, ϵ_3=10^{-3}. 89
5.7 Coefficients du frame de Gabor dans le plan $\mathcal{P}_1$ et le plan $\mathcal{P}_2$ (dipôle demi-onde). . . . 90
5.8 $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{E}^{\chi(j)}_{\alpha_j}]$ dans les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_5$ (dipôle demi-onde). 91
5.9 Spectres d'ondes planes partiels $\tilde{E}^{\chi(1)}_{\alpha_1}$ avec $\alpha = x, y, z$ (dipôle demi-onde). 92
5.10 Composante $E_{x'}(\theta', \phi')$, dipôle demi-onde, $r' = 50\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\epsilon_3 = 10^{-4}$. . . . 93
5.11 Composante $E_{y'}(\theta', \phi')$, dipôle demi-onde, $r' = 50\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\epsilon_3 = 10^{-4}$. . . . 93
5.12 Composante $E_{z'}(\theta', \phi')$, dipôle demi-onde, $r' = 50\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\epsilon_3 = 10^{-4}$. . . . 94
5.13 Amplitude du champ. $L_\alpha = 10\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 5.10^{-1}$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=791.5sec. (temps de calcul du champ rayonné). 94
5.14 Amplitude du champ. $L_\alpha = 10\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-3}$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=1458.12sec. (temps de calcul du champ rayonné). 95
5.15 Amplitude du champ. $L_\alpha = 5\lambda$, $\epsilon_1 = epsilon_2 = 10^{-1}$, $r' = 12.5\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=778sec. (temps de calcul du champ rayonné). 95
5.16 Amplitude du champ. $L_\alpha = 15\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$, $r' = 112.5\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=3132.53sec. (temps de calcul du champ rayonné). 96

5.17 Amplitude du champ. $L_\alpha = 20\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$, $r' = 200\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, $\epsilon_3 = 10^{-3}$, et TeC=5555sec. (temps de calcul du champ rayonné). 96
5.18 Erreur absolue normalisée du champ rayonné (dipôle demi-onde). 97
5.19 Composantes du champ lointain de l'antenne dans le repère initial. 98
5.20 Composantes du champ dans le nouveau repère, en fonction de $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. 99
5.21 Composantes du spectre d'ondes planes dans le plan $\mathcal{P}(O, \hat{x}, \hat{y})$. 101
5.22 Composante $\tilde{E}_x(k_x, k_y)$ du spectre dans le plan $\mathcal{P}(O, \hat{x}, \hat{y})$. 102
5.23 Synthèse de la composante $\tilde{E}_x(k_x, k_y)$ du spectre dans le plan $\mathcal{P}(O, \hat{x}, \hat{y})$. 102
5.24 Erreur absolue normalisée globale (interpolation + synthèse). 103
5.25 Erreur absolue normalisée (synthèse uniquement). 103
5.26 Composantes du champ lointain dans le repère associé au HS_3. 104
5.27 Régions d'analyse et de synthèse représentées dans le plan $\mathcal{P}$ en fonction de (k_x, k_y). . 105
5.28 Coefficients de la décomposition dans les plans $\mathcal{P}_2$ $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$. 109
5.29 Spectre d'ondes planes source dans le plan $\mathcal{P}_3$. 110
5.30 Spectre d'ondes planes partiel *partitionné* dans le plan $\mathcal{P}_3$. 111
5.31 Composante $E_{x_3}(r', \theta', \phi')$ calculée par la méthode LFG sans partitionnement. 112
5.32 Composante $E_{x_3}(r', \theta', \phi')$ calculée par la méthode LFG avec partitionnement. 113
5.33 Erreur relative (zoom) autour du plan $\mathcal{P}_4$. 114
5.34 Erreur relative (zoom) autour du plan $\mathcal{P}_2$. 114

B.1 Interpolation cubique en une dimension 123
B.2 Interpolation cubique en deux dimensions 124

Chapitre 1

Introduction

1.1 Etat de l'art

Dans certains contextes, les méthodes classiques utilisées pour le calcul de champs rayonnés ou diffractés en présence d'obstacles de grande taille par rapport à la longueur d'onde, comme l'Optique Physique ou les méthodes de rayons, ne sont pas valides ou deviennent très lourdes en temps de calcul. La présence de réflexions-diffractions multiples, par exemple, rend ces méthodes coûteuses en temps de calcul et leur validité est remise en cause quand les obstacles ne sont pas en champ lointain les uns des autres. En présence de surfaces réfléchissantes concaves, les méthodes de rayons posent également des problèmes de caustiques.

Depuis les années 80, des méthodes dites *phase-space* ont été proposées comme alternative pour résoudre ces problèmes. [1] Ces méthodes représentent les champs sur la base de superpositions de faisceaux gaussiens élémentaires. Les faisceaux gaussiens présentent l'avantage :

- de ne pas présenter de problème de caustiques en présence de surfaces courbes ;
- de pouvoir être considérés comme *localisés* à la fois dans l'espace et dans le domaine spectral, ce qui permet de sélectionner uniquement les faisceaux qui rayonnent dans les zones d'observation choisies [2] ;
- de pouvoir être suivis facilement dans un environnement complexe, grâce à l'approximation paraxiale ;
- de permettre le calcul de champs en zone *non lointaine* des sources ou obstacles.

Cependant, la discrétisation des champs sources pour aboutir à une superposition de faisceaux gaussiens est plus complexe que l'échantillonnage dans le domaine spatial ou spectral utilisé dans les méthodes classiques. Les méthodes qui ont donné lieu aux développements les plus importants, théoriques ou pratiques, sont les suivantes :

1. la décomposition en série de Gabor d'une distribution source dans un plan,
2. la décomposition sur un frame de Gabor d'une distribution source dans un plan,
3. la décomposition sur un ensemble de faisceaux à symétrie cylindrique, selon une procédure de

discrétisation plus *empirique*,

4. une décomposition multi-faisceaux $3D$ à partir d'une distribution sur une surface courbe, sur un maillage régulier,
5. un échantillonnage sur une sphère par un ensemble de *sources complexes* (*complex point source beam expansions*).

Une série de Gabor est un ensemble de fonctions gaussiennes translatées dans les domaines spatial et spectral. Pour discrétiser une distribution de sources dans un plan, on utilise des fonctions gaussiennes de deux variables dans ce plan . Il a malheureusement été démontré par la théorie mathématique des représentations temps-fréquence [3, 4], et en particulier des frames, que la décomposition en série de Gabor (méthode 1) est numériquement instable : la sommation obtenue en augmentant le nombre de fenêtres gaussiennes ne converge pas vers la distribution source. Cette instabilité ne permet pas de représenter correctement des distributions sources en électromagnétisme, comme il a été montré sur des exemples numériques [5, 6].

La théorie mathématique des frames, et des frames de Gabor en particulier, fournit un cadre rigoureux permettant de décomposer une distribution de sources électromagnétiques, définie dans une ouverture équivalente plane, en une somme plus ou moins redondante de fenêtres gaussiennes de largeur quelconque (méthode 2). Comme dans le cas précédent, les fonctions gaussiennes sont translatées dans le domaine spatial et dans le domaine spectral associé (vecteurs d'ondes). Les pas de translation dans ces deux domaines doivent vérifier une contrainte de redondance ou *suréchantillonnage*, pour que l'ensemble des fonctions gaussiennes soit complet dans l'espace $L_2(\mathbb{R})$. Il constitue alors un frame. L'utilisation de cette théorie en électromagnétisme a été initiée par la thèse de D. Lugara [5, 6].

La méthode 3 a été utilisée par Pathak [7], pour analyser de grandes antennes à réflecteurs. Le domaine des sources équivalentes est divisé en sous-domaines, et le champ lointain rayonné par chacun de ces sous-domaines est exprimé sous la forme d'une somme pondérée de faisceaux gaussiens à symétrie cylindrique. Les coefficients de pondération de ces faisceaux sont obtenus par résolution de systèmes linéaires. Le défaut de cette méthode est son *empirisme* : aucune théorie mathématique rigoureuse ne justifie le choix des paramètres utilisés, notamment les directions des faisceaux, et leur largeur. La convergence n'est donc pas assurée en fonction du nombre de faisceaux lancés, et il faut pour chaque source, et à chaque fréquence, valider la discrétisation ainsi réalisée.

La méthode 4 a été formulée et validée par la thèse d'A. Chabory [3], dans le but pragmatique de représenter les champs transmis (ou réfléchis) par une surface ou une interface courbe avec un nombre limité de faisceaux (nettement plus faible que sur un frame). Les positions des origines des faisceaux sont choisies selon un maillage régulier ; un seul faisceau est lancé de chaque point origine ; sa direction est dérivée du vecteur de Poyinting du champ source en ce point. Cette méthode est bien adaptée par exemple à l'utilisation du lancer de faisceaux gaussiens en présence d'un radôme.

La méthode 5 a été proposée plus récemment [4], pour permettre de lancer des faisceaux dans toutes les directions de l'espace 3D. Une source complexe rayonne sous la forme d'un faisceau gaussien à symétrie cylindrique. La formule du champ rayonné par une source de ce type est exacte, contrairement à celle d'un faisceau gaussien paraxial, qui utilise l'approximation paraxiale. L'échantillonnage peut être appliqué directement à une distribution de sources équivalentes sur une sphère entourant les sources, ou bien aux champs des modes sphériques sur lesquels peut être décomposé le champ rayonné. Dans ce second cas, l'ensemble des coefficients de décomposition de chaque mode sphérique peut être pré-calculé. La méthode d'échantillonnage par les sources complexes (d'une distribution équivalente quelconque ou d'un mode sphérique) n'est pas *rigoureuse* au sens où le choix des positions et des paramètres des sources ne fait pas l'objet d'une théorie rigoureuse, mais répond à des critères validés numériquement.

1.2 Objet de la thèse

La théorie des frames de Gabor est la seule parmi les méthodes de discrétisatisation utilisées en électromagnétisme, qui assure une base mathématiquement rigoureuse à la décomposition d'une distribution source. L'objet de cette thèse est d'utiliser cette théorie pour décomposer des champs rayonnés ou diffractés dans toutes les directions de l'espace, alors qu'elle est limitée jusqu'à présent à des décompositions dans un plan (rayonnement dans un demi-espace), et que les faisceaux se propageant dans des directions éloignées de la normale à ce plan sont mal représentés par l'approximation paraxiale.

Le chapitre 2 présente un rappel de la formulation utilisée pour la décomposition dans un plan sur un frame de Gabor à fenêtres gaussiennes et un résumé des formules de faisceaux gaussiens rayonnés par des fenêtres de frame. Le chapitre 3 présente la mise en œuvre numérique du calcul des coefficients de décomposition sur un frame de Gabor à fenêtres gaussiennes. Par rapport aux travaux existants, cette mise en œuvre est appliquée à des distributions sources qui ne sont pas à variables séparables, le choix des paramètres de calcul est discuté, ainsi que l'influence des paramètres et approximations utilisées.

Le chapitre 4 constitue le cœur de cette thèse : il présente une méthode originale de partitionnement spectral sur la base de la partition de l'unité et des fenêtres de *Hann*, qui permet d'utiliser le lancer de faisceaux gaussiens à partir de frames, pour une rayonnement dans tout l'espace tridimensionnel.

La méthode de partitionnement spectral proposée calcule le champ électrique rayonné en tout point de l'espace par sommation de champs électriques partiels rayonnés par des spectres d'onde plane *partiels* définis dans six plans spectraux. Grâce à une partition de l'unité adaptée à cette application, la somme

de ces champs *partiels* permet d'obtenir le champ total rayonné par la source.

Le chapitre 5 présente enfin l'application de la méthode de partitionnement proposée dans le chapitre 4 aux cas d'étude des diagrammes de rayonnement d'antennes théoriques (dipôle demi-onde et réseau des dipôle demi-onde). Une antenne *réaliste* sert de cas test pour la mise en œuvre de la décomposition à partir de données expérimentales discrètes.

Chapitre 2

Théorie générale des frames

Nous allons d'abord présenter la définition des frames, la notion de *frame* étant une généralisation de la notion de *base*, et leurs principales propriétés. Nous nous intéresserons ensuite aux propriétés particulières des frames de Gabor.

2.1 Définitions et propriétés

Les définitions et les propriétés des frames que nous allons présenter sont générales et valables quel que soit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ considéré. Nous emploierons cependant le terme de fonctions pour désigner les éléments de cet espace puisque nous nous placerons dans la suite de ce travail dans le cas d'un espace de Hilbert fonctionnel, généralement $L^2(\mathbb{R})$.

Notations : [6] $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire associé à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $\| \|$ la norme associée, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Le produit scalaire est défini par $\langle f, g \rangle = \int f(x) g^*(x) dx$. Dans le présent rapport la transformée de Fourier d'une fonction f sera notée $\tilde{f}$.

Définition 2.1. *Une famille de fonctions $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ forme un* ***frame*** *s'il existe deux constantes positives A et B, $0 < A \leq B < \infty$, telles que, pour toute fonction f dans $\mathcal{H}$,*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \tag{2.1}$$

A et B sont appelées les limites du frame.

Lorsque $A = B$, le frame est appelé en anglais *tight frame*. Si $A = B = 1$ alors la famille $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ constitue une base orthonormée. Lorsque $A \simeq B$, le frame est appelé en anglais *snug frame*.

Tout frame forme une famille complète mais il existe des familles complètes qui ne sont pas des frames. Les frames ont donc des propriétés *plus fortes* que les familles complètes mais néanmoins *moins fortes*

que les bases. Il est en effet important de remarquer qu'en général les frames, même les *tight frames*, ne sont pas des bases car les fonctions φ_j ne sont pas forcément linéairement indépendantes.

Nous allons introduire la notion importante **d'opérateur de frame** [6] :

Définition 2.2. *Si $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ forme un frame dans $\mathcal{H}$, alors l'opérateur de frame F est l'opérateur linéaire de $\mathcal{H}$ vers $l^2(\mathbb{Z}) = \{c = (c_j)_{j\in\mathbb{Z}};\quad \|c\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 < \infty\}$ défini par :*

$$(Ff)_j = \langle f, \varphi_j \rangle \tag{2.2}$$

On déduit de (2.1) que F est un opérateur borné et en notant F^* son adjoint ($F^*c = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi_j$), on peut réécrire la définition d'un frame de la façon suivante [6] :

$$A\, Id \leq F^*F \leq B\, Id \tag{2.3}$$

où Id est l'opérateur identité. Si nous définissons l'opérateur $S = F^*F$ on a [6] :

$$Sf = F^*F\, f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_j\rangle \varphi_j \tag{2.4}$$

L'inégalité (2.3) implique en particulier que l'opérateur S est inversible. En appliquant l'opérateur S^{-1} aux fonctions φ_j, on obtient une nouvelle famille de fonctions $\hat{\varphi}_j$,

$$\hat{\varphi}_j = S^{-1}\varphi_j \tag{2.5}$$

La fonction $\hat{\varphi}_j$ est appelée **la fonction duale** de la fonction φ_j. Les fonctions $(\hat{\varphi}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ forment elles aussi un frame défini dans la proposition suivante [6] :

Proposition 2.1. *Les fonctions $(\hat{\varphi}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ constituent un frame de limites B^{-1} et A^{-1},*

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \hat{\varphi}_j\rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2 \tag{2.6}$$

L'opérateur associé $\hat{F} : \mathcal{H} \to l^2(J)$, $(\hat{F}f)_j = \langle f, \hat{\varphi}_j\rangle$ satisfait $\hat{F} = F(F^*f)^{-1}$, $\hat{F}^*\hat{F} = (F^*F)^{-1}$ et $\hat{F}^*F = Id = F^*\hat{F}$.

Nous appelons $(\hat{\varphi}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ le **frame dual** de $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. De $\hat{F}^*F = Id = F^*\hat{F}$, on peut déduire que toute fonction $f \in \mathcal{H}$ peut être représentée à l'aide du frame et du frame dual de la façon suivante [6] :

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \hat{\varphi}_j\rangle \varphi_j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_j\rangle \hat{\varphi}_j \tag{2.7}$$

Ces égalités montrent que l'on peut donc reconstruire f à partir des coefficients $\langle f, \varphi_j\rangle$ du moment que l'on connaît les fonctions duales. De plus, on sait aussi décomposer f sur les fonctions φ_j. Ces décompositions ont d'excellentes propriétés de convergence et de stabilité numérique. La stabilité numérique d'une décomposition est définie de la façon suivante [6] : si deux séries de coefficients $(\langle f_1, \hat{\varphi}_j\rangle)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(\langle f_2, \hat{\varphi}_j\rangle)_{j\in\mathbb{Z}}$ sont *proches*, alors nécessairement les fonctions f_1 et f_2 sont *proches*

également. Cela signifie encore que si $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \hat{\varphi_j}\rangle|^2$ est petite alors $\|f\|^2$ aussi, ce qui implique que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \hat{\varphi_j}\rangle|^2$ possède des bornes inférieure et supérieure et correspond donc exactement à la définition du frame (2.1) ou (2.6) [6].

Nous avons déjà dit que les frames ne sont pas en général des bases parce que les φ_j ne sont pas linéairement indépendantes. Ce qui signifie que la décomposition d'une fonction f donnée sur les fonctions φ_j n'est pas unique. Le choix du frame dual $\hat{\varphi_j}$ pour calculer les coefficients de la décomposition donne des coefficients *d'énergie minimale* au sens de la proposition ci-dessous [6] :

Proposition 2.2. *Si* $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi_j$ *pour* $c = (c_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2(J)$ *et si tous les coefficients* c_j *ne sont pas égaux à* $\langle f, \hat{\varphi_j}\rangle$, *alors* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 > \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, \hat{\varphi_j}\rangle|^2$.

De même, il existe d'autres familles de fonctions $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ telles que $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_j\rangle u_j$. Là encore, les fonctions u_j sont *moins économiques* que les fonctions $\hat{\varphi_j}$ [6] : en effet, si $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_j\rangle u_j$, alors $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle u_j, g\rangle|^2 \geq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle \hat{\varphi_j}, g\rangle|^2$ pour toute fonction $g \in \mathcal{H}$.

Pour que la représentation (2.7) de f soit entièrement déterminée, il reste à calculer le frame dual, à partir de $\hat{\varphi_j} = S^{-1}\varphi_j$.

On peut remarquer que si A et B sont *proches*, i.e. $r = \frac{B}{A} - 1 \ll 1$, alors l'équation (2.3) dit que S est *proche* de $\frac{A+B}{2}Id$, implique que S^{-1} est *proche* de $\frac{2}{A+B}Id$, et $\hat{\varphi_j}$ *proche* de $\frac{2}{A+B}\varphi_j$. Plus précisément,

$$f = \frac{2}{A+B}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_j\rangle\varphi_j + Rf \tag{2.8}$$

où $R = Id - \frac{2}{A+B}S$. Il s'ensuit que $\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{2+r}$ [6, 8]. Si r est suffisamment petit, on peut négliger le reste Rf dans (2.8) et on obtient donc une formule de reconstruction pour f, avec une erreur de $\frac{r}{2+r}\|f\|$. Dans le cas où r est quelconque, on peut obtenir un algorithme de reconstruction de f avec une convergence exponentielle [8]. Avec la même définition pour R, on a [6] :

$$S = \frac{A+B}{2}(Id - R)$$

soit

$$S^{-1} = \frac{2}{A+B}(Id - R)^{-1}$$

Comme $\|R\| \leq \dfrac{B-A}{B+A} = \dfrac{r}{2+r} < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} R^k$ converge en norme, et tend vers $(Id-R)^{-1}$, ce qui permet d'aboutir à :

$$\hat{\varphi}_j = S^{-1}\varphi_j = \frac{2}{A+B}\sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_j \tag{2.9}$$

Si on tronque la sommation, on obtient les approximations dites *d'ordre N* de la fonction duale :

$$\hat{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B}\sum_{k=0}^{N} R^k \varphi_j \tag{2.10}$$

Plus N est grand meilleure est l'approximation. D'autre part nous pouvons estimer l'erreur de reconstruction de la façon suivante [6] :

$$\|f - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \hat{\varphi}_j^N\rangle \varphi_j\| \leq \|R\|^{N+1}\|f\| \leq \big(\frac{r}{2+r}\big)^{N+1}\|f\| \tag{2.11}$$

Le majorant de cette erreur relative, $Err = \big(\frac{r}{2+r}\big)^{N+1}$, devient exponentiellement petit quand N augmente puisque $\dfrac{r}{2+r} < 1$, et ce d'autant plus rapidement que r est petit, c'est-à-dire B proche de A.

On peut ainsi construire un algorithme itératif pour calculer les fonctions $\hat{\varphi}_j^N$ [6] :

$$\hat{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B}\varphi_j + R\hat{\varphi}_j^{N-1} \tag{2.12}$$

ou encore

$$\hat{\varphi}_j^N = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{jl}^N \varphi_l \tag{2.13}$$

avec

$$\alpha_{jl}^N = \frac{2}{A+B}\delta_{jl} + \alpha_{jl}^{N-1} - \frac{2}{A+B}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{jm}^{N-1}\langle\varphi_m, \varphi_l\rangle \tag{2.14}$$

où δ_{jl} est la notation de Kronecker définie par $\delta_{jl} = 1$ si $j = l$ et $\delta_{jl} = 0$ sinon.

2.2 Frame de Gabor

Soit la famille de fonctions $\{w_{mn} \in L^2(\mathbb{R}),\ \ (m,n) \in \mathbb{Z}\}$, définie par :

$$w_{mn}(x) = w(x - ml_x)e^{in\kappa_x x} \tag{2.15}$$

On appelle **frame de Gabor** toute famille ainsi définie qui constitue un frame dans $L^2(\mathbb{R})$. Les fonctions w_{mn} sont construites à partir de w par translations spatiale et spectrale. D'après les résultats précédents, nous savons que si la famille de fonctions w_{mn} forme un frame de Gabor, alors on a les égalités suivantes [6] :

$$f(x) = \sum_{m,n}\langle f, w_{mn}\rangle \widehat{w_{mn}}(x) = \sum_{m,n}\langle f, \widehat{w_{mn}}\rangle w_{mn}(x) \tag{2.16}$$

où $\{\widehat{w_{mn}}\}$ est le frame dual de $\{w_{mn}\}$.

Il reste maintenant à déterminer les hypothèses sous lesquelles une famille de fonctions w_{mn} construite selon (2.15) peut former un frame. On verra que cela impose en particulier que les paramètres de translation spatiale (l_x) et spectrale (κ_x) soient liés par une contrainte dite de suréchantillonnage.

Si la famille $\{w_{mn}\}$ forme un frame de Gabor de limites A et B, alors :

$$A \leq \frac{2\pi}{l_x \kappa_x} \|w\|^2 \leq B \tag{2.17}$$

avec nécessairement $l_x \kappa_x \leq 2\pi$ [6,9]. En concordance avec le théorème de Balian-Low [8] :

Théorème 2.1. *Si les fonctions $w_{mn}(x) = w(x - ml_x)e^{in\kappa_x x}$ constituent un frame dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $l_x\kappa_x = 2\pi$, alors $\int dx\, x^2 |w(x)|^2 = \infty$ ou $\int dk_x\, k_x^2 |\tilde{w}(k_x)|^2 = \infty$; si w est localisée dans les deux domaines (spatial et spectral), l'ensemble des fonctions w_{mn} est un frame si et seulement si $l_x\kappa_x < 2\pi$.*

En posant $l_x\kappa_x = 2\pi\nu_x$, où ν_x représente le degré d'échantillonnage, les résultats précédents peuvent alors être récapitulés de la façon suivante :

- *sous-échantillonnage* — $\nu_x > 1$: il n'existe pas de frames. Toute famille $\{w_{mn}\}$ est incomplète.
- *échantillonnage critique* — $\nu_x = 1$: il existe des frames et des bases orthonormales mais avec une mauvaise localisation temps-fréquence.
- *sur-échantillonnage* — $\nu_x < 1$: il existe des frames (même des *tight frames*) avec une excellente localisation temps-fréquence.

Une autre caractéristique propre aux frames de Gabor concerne le frame dual. Il est bien sûr défini par :

$$\widehat{w_{mn}} = S^{-1} w_{mn} \tag{2.18}$$

mais on peut facilement vérifier [6,9] que l'opérateur S, et donc S^{-1}, commute avec les translations spatiale et spectrale, ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{w_{mn}}(x) = \hat{w}(x - ml_x)e^{in\kappa_x x} = \hat{w}_{mn}(x) \tag{2.19}$$

avec

$$\hat{w} = S^{-1} w \tag{2.20}$$

Ainsi, les éléments $\hat{w}_{mn}$ du frame dual sont générés à partir d'une seule fonction $\hat{w}$, par translation dans les domaines spatial et spectral, de la même façon que le sont les éléments du frame w_{mn}. Dans le cas d'un frame de Gabor, pour obtenir le frame dual, il suffit de calculer la fonction duale $\hat{w}$ grâce à l'algorithme itératif décrit au paragraphe précédent. Les formules de reconstruction de f (ou de décomposition) en fonction du frame de Gabor se réécrivent ainsi [6] :

$$f(x) = \sum_{m,n} \langle f, w_{mn} \rangle \hat{w}_{mn}(x) = \sum_{m,n} \langle f, \hat{w}_{mn} \rangle w_{mn}(x) \tag{2.21}$$

2.3 Frame de Gabor à fenêtre gaussienne

Nous allons nous intéresser dans cette section à la famille de fonctions w_{mn}, construite selon (2.15) à partir d'une **fonction gaussienne** w définie par :

$$w(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}}\, e^{-\pi \frac{x^2}{L_x^2}} \tag{2.22}$$

Sa transformée de Fourier, définie par :

$$\tilde{w}(k_x) = TF[w(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{-ik_x x} dx$$

a pour expression :

$$\tilde{w}(k_x) = \sqrt{\sqrt{2} L_x}\, e^{-L_x^2 \frac{k_x^2}{4\pi}} \tag{2.23}$$

Nous appellerons L_x la largeur spatiale de la gaussienne w. Nous avons choisi de prendre une gaussienne normalisée, de sorte que :

$$\int |w(x)|^2 dx = 1 \qquad \text{et} \qquad \int |\tilde{w}(k_x)|^2 dk_x = 2\pi \tag{2.24}$$

Nous allons établir dans quelles conditions et avec quels coefficients on peut décomposer une fonction f sur la famille (2.15) de gaussiennes translatées dans les domaines spatial et spectral :

$$f(x) = \sum_{m,n} A_{mn} w_{mn}(x) \tag{2.25}$$

En effet, la famille de fonctions w_{mn} forme un frame si et seulement si $l_x \kappa_x < 2\pi$ (i.e. $\nu_x < 1$).

En imposant cette contrainte pour les paramètres de translation, on est alors assuré de la stabilité des décompositions, en particulier de :

$$f(x) = \sum_{m,n} \langle f, \hat{w}_{mn} \rangle w_{mn}(x) \tag{2.26}$$

Les coefficients de cette décomposition s'obtiennent à l'aide de la fonction duale $\hat{w}$ [10] :

$$A_{mn} = \langle f, \hat{w}_{mn} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{w}_{mn}^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{w}^*(x - m l_x) e^{-in\kappa_x x} dx \tag{2.27}$$

La fonction duale $\hat{w}$ est approchée *à l'ordre* N par :

$$\hat{w}^N(x) = \sum_{s_1, s_2} \alpha_{s_1 s_2}^N w_{s_1 s_2}(x) \tag{2.28}$$

avec

$$\alpha_{s_1 s_2}^N = \frac{2}{A+B} \delta_{0 s_1} \delta_{0 s_2} + \alpha_{s_1 s_2}^{N-1} - \frac{2}{A+B} \sum_{m,n} \alpha_{mn}^{N-1} \langle w_{mn}, w_{s_1 s_2} \rangle \tag{2.29}$$

où

$$\langle w_{mn}, w_{s_1 s_2} \rangle = e^{-\left[\frac{2\pi}{L_x^2}\left(\frac{(s_1-m)l_x}{2}\right)^2 + \frac{L_x^2}{2\pi}\left(\frac{(s_2-n)\kappa_x}{2}\right)^2 + i\frac{(s_1+m)(s_2-n)l_x\kappa_x}{2}\right]}$$

$$\alpha^0_{s_1 s_2} = \frac{2}{A+B}\delta_{0s_1}\delta_{0s_2}$$

Le nombre d'itérations N, pour une erreur relative fixée, va dépendre des choix de ν_x et l_x, qui conditionnent en fait la valeur du rapport $\frac{B}{A}$, (on sait (2.11) que $Err < \left(\frac{r}{2+r}\right)^{N+1}$ avec $r = \frac{B}{A} - 1$). Il est important de connaître les limites A et B du frame pour déterminer la convergence de l'algorithme et obtenir la fonction duale.

Considérer seulement le premier terme dans l'expression de la fonction duale, soit $\hat{\varphi_j} = \frac{2}{A+B}\varphi_j$, revient à reconstruire la fonction f à partir de (2.8) en négligeant le terme Rf.

Si le frame est *snug*, nous pouvons utiliser l'approximation suivante [2] :

$$\hat{w}^0(x) = \left[\frac{\nu}{\|w\|^2}\right] w(x) \tag{2.30}$$

En concordance avec [6] nous utiliserons :

$$l_x = \sqrt{\nu_x} L_x \qquad \text{et} \qquad \kappa_x = \sqrt{\nu_x}\Omega_x \tag{2.31}$$

Cette condition (frame équilibré) associée à une valeur de ν suffisamment faible, garantit que le frame est *snug*. La fonction duale est alors proche d'une gaussienne.

Grâce à la bonne localisation spatiale et spectrale de la fonction duale, les coefficients A_{mn} de la décomposition seront bien localisés eux aussi, ce qui permettra de tronquer les sommations, en théorie infinies, avec une erreur négligeable et de définir des règles de troncation.

2.4 Décomposition sur un frame de Gabor

Nous présentons dans cette section le principe de décomposition d'un champ électromagnétique sur un frame de Gabor à fenêtre gaussienne dans le cas d'une configuration à deux dimensions (x, z) (le champ étant supposé invariant selon y) , pour une *ouverture* située le long de l'axe $z = 0$, et pour une polarisation selon $\hat{y}$.

Comme on le verra par la suite, cette méthode se généralise facilement au cas d'une polarisation quelconque et pour une configuration à trois dimensions. Le point de départ de la méthode est la décomposition du champ dans l'ouverture, $E_y(x)$, sur la famille de gaussiennes translatées $w_{mn}(x)$:

$$E_y(x) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} A_{mn} w_{mn}(x) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} A_{mn} w(x - ml_x) e^{in\kappa_x x} \tag{2.32}$$

Les coefficients $A_{mn} = \langle E_y, \hat{w}_{mn} \rangle$ sont obtenus grâce à (2.33) si la famille des w_{mn} forme un frame de Gabor :

$$A_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x) \hat{w}^*(x - ml_x) e^{-in\kappa_x x} dx \tag{2.33}$$

Une fois calculés les coefficients, on peut non seulement vérifier que (2.32) nous redonne le champ dans l'ouverture avec une bonne précision, mais aussi calculer le champ lointain rayonné par cette ouverture.

Le spectre d'ondes planes $\tilde{E}_y(k_x)$ du champ dans l'ouverture, i.e. la transformée de Fourier de la distribution dans l'ouverture, s'obtient simplement grâce à :

$$\tilde{E}_y(k_x) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} A_{mn} \tilde{w}_{mn}(k_x) e^{imnl_x\kappa_x} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} A_{mn} e^{imnl_x\kappa_x} \tilde{w}(k_x - n\kappa_x) e^{-iml_x k_x} \tag{2.34}$$

où le tilde désigne la transformée de Fourier. On peut vérifier que l'ensemble $\{\tilde{w}_{mn}, \tilde{w}_{mn}(k_x) = \tilde{w}(k_x - n\kappa_x)e^{-iml_x k_x}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un frame de Gabor à fenêtre gaussienne.

Les coefficients $A_{mn} = \langle \tilde{E}_y, \hat{\tilde{w}}_{mn} \rangle$ de (2.34) peuvent donc également s'obtenir grâce à :

$$A_{mn} = \frac{e^{-imnl_x\kappa_x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y(k_x) \hat{\tilde{w}}^*(k_x - n\kappa_x) e^{iml_x k_x} dk_x \tag{2.35}$$

où on a : [10]

$$\hat{\tilde{w}}(k_x) = 2\pi \tilde{\tilde{w}}(k_x) \tag{2.36}$$

2.5 Faisceaux gaussiens

La décomposition sur un frame de Gabor peut être appliquée à la modélisation de champs électromagnétiques en espace libre comme en présence d'obstacles, d'interfaces par exemple [6, 11, 12].

La théorie des frames se généralise au cas des fonctions de plusieurs variables. Nous nous intéresserons ici au cas des fonctions $f(x,y)$ de deux variables et à la décomposition suivante dans le domaine spatial :

$$f(x,y) = \sum_{m,n,p,q \in \mathbb{Z}} A_{mnpq} w_{mnpq}(x,y) = \sum_{m,n,p,q \in \mathbb{Z}} A_{mnpq} w(x - ml_x, y - pl_y) e^{i(n\kappa_x x + q\kappa_y y)} \tag{2.37}$$

et au cas des fonctions $\tilde{f}(k_x, k_y)$ de deux variables et à la décomposition suivante dans le domaine spectral :

$$\tilde{f}(k_x, k_y) = \sum_{m,n,p,q \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2} A_{mnpq} \tilde{w}_{mnpq}(k_x, k_y)$$

$$= \sum_{m,n,p,q\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x+pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2} A_{mnpq}\tilde{w}(k_x - n\kappa_x, k_y - q\kappa_y)e^{i(ml_xk_x+pl_yk_y)} \tag{2.38}$$

D'après les résultats précédents, on sait que pour qu'une telle décomposition soit valide et numériquement stable il faut que la famille de fonctions $w_{mnpq}(x, y)$ forme un frame. Une façon simple de construire un frame de deux variables est de le construire par produit de frames à une variable :

$$w(x, y) = w^x(x)w^y(y) \tag{2.39}$$

D'où

$$w_{mnpq}(x, y) = w^x_{mn}(x)w^y_{pq}(y) = w^x(x - ml_x)e^{in\kappa_x x}w^y(y - ml_y)e^{iq\kappa_y y} \tag{2.40}$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où les fonctions $w^x(x)$, $w^y(y)$ sont des gaussiennes définies par :

$$w^x(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}}\, e^{-\pi\frac{x^2}{L_x^2}} \qquad \text{et} \qquad w^y(y) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_y}}\, e^{-\pi\frac{y^2}{L_y^2}} \tag{2.41}$$

Les propriétés du frame produit $\{w_{mnpq}\}$ dépendent de celles des frames $\{w^x_{mn}\}$ et $\{w^y_{pq}\}$. On a le théorème suivant [6] :

Théorème 2.2. *Soient deux familles $\{\phi_{mn}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\psi_{pq}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ qui constituent deux frames dans $L^2(\mathbb{R})$, de frame dual respectif $\{\hat{\phi}_{mn}\}$ et $\{\hat{\psi}_{pq}\}$. Alors, la famille $\{\Phi_{mnpq}, \Phi_{mnpq}(x, y) = \phi_{mn}(x)\psi_{pq}(y)\}$ constitue un frame dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et son frame dual est $\{\hat{\Phi}_{mnpq}, \hat{\Phi}_{mnpq}(x, y) = \hat{\phi}_{mn}(x)\hat{\psi}_{pq}(y)\}$. De plus, si A_ϕ et B_ϕ sont les limites du frame ϕ_{mn}, A_ψ et B_ψ celles du frame ψ_{pq}, alors $A_\phi A_\psi$ et $B_\phi B_\psi$ sont les limites du frame Φ_{mnpq}.*

On déduit aussi de ce théorème que le frame dual $\hat{w}_{mnpq}$ est généré par translations spatiale et spectrale d'une seule fonction $\hat{w}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\hat{w}(x, y) = \hat{w}^x(x)\hat{w}^y(y)$ où $\hat{w}^x$ et $\hat{w}^y$ sont les fonctions duales respectives de w^x et w^y. On obtient donc les relations suivantes :

$$\hat{w}_{mnpq}(x, y) = \hat{w}^x_{mn}(x)\hat{w}^y_{pq}(y) = \hat{w}^x(x - ml_x)e^{in\kappa_x x}\hat{w}^y(y - pl_y)e^{iq\kappa_y y} \tag{2.42}$$

où $\{\hat{w}^x_{mn}\}$ et $\{\hat{w}^y_{pq}\}$ sont les frames duaux de $\{w^x_{mn}\}$ et $\{w^y_{pq}\}$. Les fonctions duales $\hat{w}^x$ et $\hat{w}^y$ s'obtiennent chacune grâce à l'algorithme itératif décrit aux équations (2.28) et (2.29).

Enfin les coefficients A_{mnpq} de (2.37) s'expriment par l'intégrale double suivante dans le domaine spatial :

$$A_{mnpq} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\hat{w}^{x^*}_{mn}(x)\hat{w}^{y^*}_{pq}(y)dxdy \tag{2.43}$$

et les coefficients A_{mnpq} de (2.38) par l'intégrale double suivante dans le domaine spectral :

$$A_{mnpq} = \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x+pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x, k_y)\hat{\tilde{w}}^*_{mn}(k_x)\hat{\tilde{w}}^*_{pq}(k_y)dk_xdk_y \tag{2.44}$$

Ces coefficients peuvent être calculés efficacement grâce à la transformée de Fourier discrète à deux dimensions et l'algorithme de transformée Fourier discrète (TFD) correspondant. Si la fonction $f(x,y)$ est elle-même à variables séparables, $f(x,y) = g(x)h(y)$, les coefficients A_{mnpq} peuvent alors s'exprimer comme le produit de deux coefficients A_{mn} et A_{pq}, correspondant respectivement à la décomposition de la fonction $g(x)$ sur le frame $w^x_{mn}(x)$ et de la fonction $h(y)$ sur le frame $w^y_{pq}(y)$, et donnés par des intégrales simples de type (2.27). La même propriété s'applique à une fonction $\tilde{f}(k_x,k_y)$ dans le domaine spectral.

Supposant qu'on a une distribution quelconque de champ $\overrightarrow{E}(x,y)$ définie dans un plan source (xOy), on note $E_x(x,y)$ et $E_y(x,y)$ les composantes selon x et y de ce champ. D'après le principe de la décomposition sur un frame de Gabor, chaque composante du champ peut être exprimée de la façon suivante :

$$E_\alpha(x,y) = \sum_{m,n,p,q\in\mathbb{Z}} A^\alpha_{mnpq} w_{mnpq}(x,y), \qquad \alpha = x,y \tag{2.45}$$

avec :

$$A^\alpha_{mnpq} = \iint_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(x,y)\hat{w}^*_{mnpq}(x,y)dxdy = \iint_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(x,y)\hat{w}^{x^*}_{mn}(x)\hat{w}^{y^*}_{pq}(y)dxdy \tag{2.46}$$

On aboutit à des expressions analogues à l'équation (2.45) pour les spectres d'ondes planes de ces composantes :

$$\tilde{E}_\alpha(k_x,k_y) = TF[E_\alpha(x,y)] = \sum_{m,n,p,q\in\mathbb{Z}} A^\alpha_{mnpq}\tilde{w}_{mnpq}(x,y) = \sum_{m,n,p,q\in\mathbb{Z}} A^\alpha_{mnpq}\tilde{w}^x_{mn}(x,y)\tilde{w}^y_{pq}(x,y) \tag{2.47}$$

avec :

$$A^\alpha_{mnpq} = \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x+pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}_\alpha(k_x,k_y)\hat{\tilde{w}}^*_{mnpq}(k_x,k_y)dk_xdk_y, \qquad \alpha = x,y \tag{2.48}$$

Les composantes selon x et y du spectre d'ondes planes $\overrightarrow{\tilde{E}}(k_x,k_y)$ sont respectivement les transformées de Fourier des composantes du champ source $E_x(x,y)$ et $E_y(x,y)$. La composante selon z de ce spectre $\tilde{E}_z(k_x,k_y)$ s'obtient en fonction des deux autres puisque $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\tilde{E}}(k_x,k_y) = 0$, où $\overrightarrow{k}$ est le vecteur d'onde de composantes (k_x,k_y,k_z) soit :

$$\tilde{E}_z(k_x,k_y) = -\left(\frac{k_x}{k_z}\tilde{E}_x(k_x,k_y) + \frac{k_y}{k_z}\tilde{E}_y(k_x,k_y)\right) \tag{2.49}$$

Si on prend en compte (2.49), le champ $\overrightarrow{E}(x,y,z)$ s'exprime sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[(\hat{x}-\frac{k_x}{k_z}\hat{z})\tilde{E}_x(k_x,k_y) + (\hat{y}-\frac{k_y}{k_z}\hat{z})\tilde{E}_y(k_x,k_y)\right]e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}dk_xdk_y \tag{2.50}$$

En permutant l'intégrale (2.50) et la somme (2.47) et en regroupant les termes, on peut réécrire le champ $\overrightarrow{E}(x,y,z)$ comme suit [11] :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}(x,y,z) = {} & \frac{1}{4\pi^2}\sum_{m,n,p,q} A^x_{mnpq}\int\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{x}-\frac{k_x}{k_z}\hat{z})\tilde{w}^x_{mn}(k_x)\tilde{w}^y_{pq}(k_y)e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)dk_xdk_y} \\ & +\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m,n,p,q} A^y_{mnpq}\int\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{y}-\frac{k_y}{k_z}\hat{z})\tilde{w}^x_{mn}(k_x)\tilde{w}^y_{pq}(k_y)e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)dk_xdk_y}\end{aligned} \tag{2.51}$$

Soit

$$\overrightarrow{E}(x,y,z) = \sum_{m,n,p,q} A^x_{mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)} \overrightarrow{B}^x_{mnpq}(x,y,z) + \sum_{m,n,p,q} A^y_{mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)} \overrightarrow{B}^y_{mnpq}(x,y,z) \tag{2.52}$$

Le champ $\overrightarrow{E}(x,y,z)$ s'exprime donc par une superposition discrète de faisceaux élémentaires $\overrightarrow{B}^x_{mnpq}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{B}^y_{mnpq}(x,y,z)$ qui s'écrivent :

$$\overrightarrow{B}^\alpha_{mnpq}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{f}^\alpha(k_x,k_y) \tilde{w}^x_{mn}(k_x) \tilde{w}^y_{pq}(k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \tag{2.53}$$

$\overrightarrow{f}^\alpha(k_x,k_y)$ est une fonction vectorielle égale à : $\hat{x} - \frac{k_x}{k_z}\hat{z}$ si $\alpha = x$, ou $\hat{y} - \frac{k_y}{k_z}\hat{z}$ si $\alpha = y$.

On peut aussi écrire chaque composante du champ comme une somme de faisceaux élémentaires (scalaires), ce qui conduit à :

$$E_x(x,y,z) = \sum_{m,n,p,q} A^x_{mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)} B^x_{mnpq}(x,y,z) \tag{2.54}$$

$$E_y(x,y,z) = \sum_{m,n,p,q} A^y_{mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)} B^y_{mnpq}(x,y,z) \tag{2.55}$$

$$E_z(x,y,z) = \sum_{m,n,p,q} A^x_{mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)} B^{z_x}_{mnpq}(x,y,z) + \sum_{m,n,p,q} A^y_{mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)} B^{z_y}_{mnpq}(x,y,z) \tag{2.56}$$

avec :

$$B^{x,y}_{mnpq}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}^x_{mn}(k_x) \tilde{w}^y_{pq}(k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \tag{2.57}$$

$$B^{z_x}_{mnpq}(x,y,z) = \frac{-1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x}{k_z} \tilde{w}^x_{mn}(k_x) \tilde{w}^y_{pq}(k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \tag{2.58}$$

$$B^{z_y}_{mnpq}(x,y,z) = \frac{-1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_y}{k_z} \tilde{w}^x_{mn}(k_x) \tilde{w}^y_{pq}(k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \tag{2.59}$$

Ces équations peuvent être synthétisées en une seule :

$$B^\alpha_{mnpq}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} f^\alpha(k_x,k_y) \tilde{w}^x_{mn}(k_x) \tilde{w}^y_{pq}(k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \tag{2.60}$$

où $f^\alpha(k_x,k_y)$ vaut :

– 1 si on considère $\alpha = x$ ou $\alpha = y$

– $\frac{-k_x}{k_z}$ si on considère $\alpha = z_x$

– $\frac{-k_y}{k_z}$ si on considère $\alpha = z_y$

2.6 Propagation d'un faisceau élémentaire : approximation paraxiale

Dans cette thèse, on va utiliser une approximation de l'équation (2.53) appelée *approximation paraxiale*. Les références [11] et [6] démontrent comment cette approximation permet d'obtenir l'expression suivante pour les composantes du champ électrique rayonné par une fenêtre de frame :

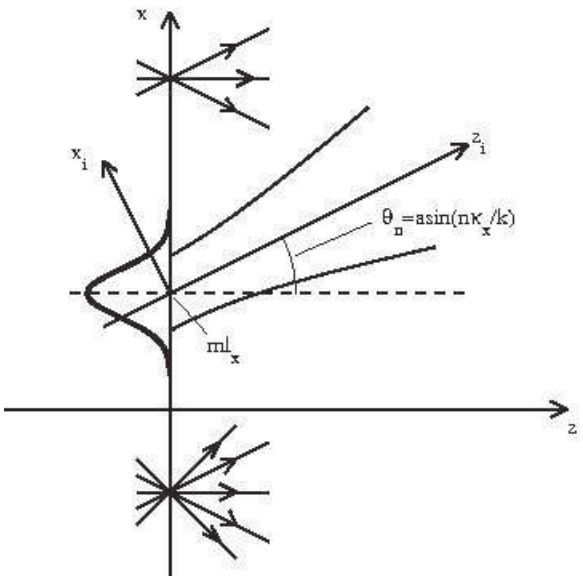


FIGURE 2.1 – Représentation des axes de différents faisceaux élémentaires B_{mn}

$$B^{\alpha}_{mnpq}(x,y,z) \approx f^{\alpha}(n\kappa_x, q\kappa_y) B_0 \left(\frac{detZ_i(0)}{detZ_i(z_i)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{ikz_i} e^{i\frac{k}{2}\overrightarrow{\xi}_i^T Z_i^{-1}(z_i)\overrightarrow{\xi}_i} \tag{2.61}$$

où :

$$B_0 = \left(\frac{2}{L_x L_y}\right)^2$$

et :

$$Z_i(z_i) = Z_i(0) + z_i I \tag{2.62}$$

où I représente la matrice identité, et

$$Z_i(0) = \begin{bmatrix} -ib_{11} & ib_{12} \\ ib_{12} & -ib_{22} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

avec les paramètres b_{ij} définis avec les conventions de [11] par :

$$b_{11} = \frac{L_x^2}{\lambda}(\hat{x}_i^{\circ T}\hat{x})^2 + \frac{L_y^2}{\lambda}(\hat{x}_i^{\circ T}\hat{y})^2 \tag{2.64}$$

$$b_{22} = \frac{L_x^2}{\lambda}(\hat{y}_i^{\circ T}\hat{x})^2 + \frac{L_y^2}{\lambda}(\hat{y}_i^{\circ T}\hat{y})^2 \tag{2.65}$$

$$b_{12} = b_{21} = -\frac{L_x^2}{\lambda}(\hat{x}_i^{\circ T}\hat{x})(\hat{y}_i^{\circ T}\hat{x}) - \frac{L_y^2}{\lambda}(\hat{x}_i^{\circ T}\hat{y})(\hat{y}_i^{\circ T}\hat{y}) \tag{2.66}$$

où $\hat{x}_i^{\circ}, \hat{y}_i^{\circ}, \hat{z}_i^{\circ}$ est la base du repère associé au faisceau.

De l'équation (2.61) il reste à définir $\overrightarrow{\xi}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ et (x_i, y_i, z_i) qui sont les coordonnées du point d'observation dans le repère $(O_{mp}, \hat{x}_i^{\circ}, \hat{y}_i^{\circ}, \hat{z}_i^{\circ})$ associé au faisceau [6].

Chapitre 3

Calcul des coefficients

Dans cette section, nous nous intéressons à la mise en œuvre numérique du calcul des coefficients A_{mn} (pour les fonctions d'une variable) et A_{mnpq} (pour les fonctions de deux variables). Ces coefficients sont donnés par les intégrales (2.33) :

$$A_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x)\hat{w}^*_{mn}(x)dx$$

et (2.46)

$$A_{mnpq} = \iint_{-\infty}^{\infty} E_y(x,y)\hat{w}^*_{mnpq}(x,y)dxdy$$

dans le domaine spatial, et par les intégrales (2.35) :

$$A_{mn} = \frac{e^{-imnl_x\kappa_x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y(k_x)\hat{\tilde{w}}^*_{mn}(k_x)dk_x$$

et (2.48)

$$A_{mnpq} = \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x+pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y(k_x,k_y)\hat{\tilde{w}}^*_{mnpq}(k_x,k_y)dk_xdk_y$$

dans le domaine spectral. Les fonctions $\hat{w}$ et $\hat{\tilde{w}}$ sont les fonctions duales des fenêtres gaussiennes élémentaires w et $\tilde{w}$ respectivement.

Ces intégrales peuvent être vues comme des transformées de Fourier (TF) :

- (2.33) de la fonction f définie par $f(x) = E_y(x)\hat{w}(x - ml_x)$ au point $(n\kappa_x)$
- (2.46) de la fonction f définie par $f(x,y) = E_y(x,y)\hat{w}(x - ml_x, y - pl_y)$ au point $(n\kappa_x, q\kappa_y)$
- (2.35) de la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(k_x) = \tilde{E}_y(k_x)\hat{\tilde{w}}(k_x - n\kappa_x)$ au point (ml_x)
- (2.48) de la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(k_x,k_y) = \tilde{E}_y(k_x,k_y)\hat{\tilde{w}}(k_x - n\kappa_x, k_y - q\kappa_y)$ au point (ml_x, pl_y)

Pour cette raison on les calculera grâce à l'algorithme de transformée de Fourier discrète (TFD).

3.1 Bornes des sommations

Pour la synthèse d'une fonction à une variable, les sommations dans (2.25) dans le domaine spatial :

$$f(x) = \sum_{m,n} A_{mn} w_{mn}(x)$$

ou dans le domaine spectral :

$$\tilde{f}(k_x) = \sum_{m,n} \frac{e^{-imnl_x\kappa_x}}{2\pi} A_{mn} \tilde{w}_{mn}(k_x) \tag{3.1}$$

doivent être finies. On introduit des limites pour les indices de sommation selon m et n :

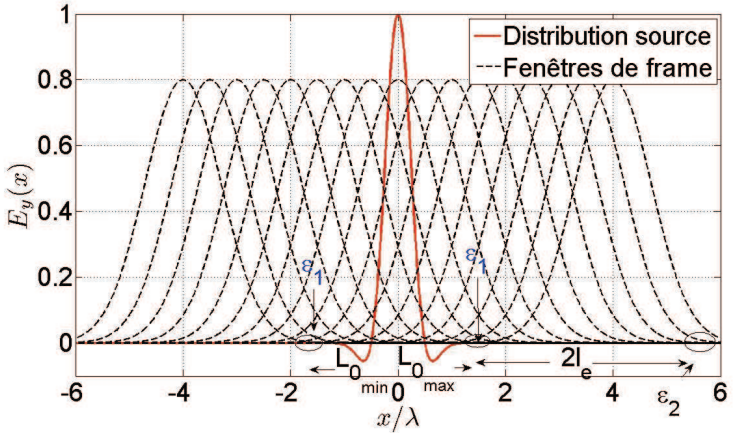
$$M_{min} \leq m \leq M_{max} \quad N_{min} \leq n \leq N_{max}$$

De façon générale, comme illustré sur la figure 3.1, on calculera donc les coefficients A_{mn} des fenêtres w_{mn} qui sont centrées à l'intérieur de la bande spatiale ou qui ont dans cette bande une valeur *non négligeable* c'est-à-dire supérieure à une valeur ϵ_2 donnée. On utilisera en pratique des frames du type *snug* [6]. La fonction duale est alors approximativement de même largeur que la fenêtre gaussienne.
Les limites des indices de sommation sont donc de la forme :

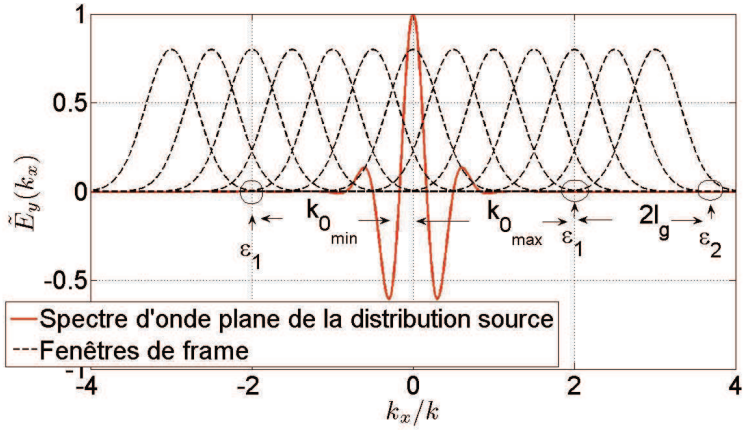
$$M_{min} = \lfloor \frac{L_{0_{min}} - l_e}{l_x} \rfloor \qquad M_{max} = \lceil \frac{L_{0_{max}} + l_e}{l_x} \rceil \quad N_{min} = \lfloor \frac{k_{0_{min}} - l_g}{\kappa_x} \rfloor \qquad N_{max} = \lceil \frac{k_{0_{max}} + l_g}{\kappa_x} \rceil \tag{3.2}$$

avec les notations illustrées par la figure 3.1 :

M_{min}	Borne inférieure de l'index m.
M_{max}	Borne supérieure de l'index m.
N_{min}	Borne inférieure de l'index n.
N_{max}	Borne supérieure de l'index n.
$E(x)$	Distribution source.
$\tilde{E}(k_x)$	Spectre d'ondes planes de la distribution source.
$L_{0_{min}}$	Borne inférieure de la distribution source.
$L_{0_{max}}$	Borne supérieure de la distribution source.
$k_{0_{min}}$	Borne inférieure du spectre d'ondes planes.
$k_{0_{max}}$	Borne supérieure du spectre d'ondes planes.
L_x	Paramètre de largeur spatiale de la fenêtre gaussienne.
ϵ_1	Valeur seuil de $E(x)$ ou $\tilde{E}(k_x)$.
ϵ_2	Valeur seuil de la fonction duale.
l_e	Demi-largeur spatiale de la fenêtre gaussienne : $L_x\sqrt{-\frac{Log(\epsilon_2)}{\pi}}$.
l_g	Demi-largeur spectrale de la fenêtre gaussienne : $\frac{2}{L_x}\sqrt{-\pi Log(\epsilon_2)}$.



(a) L'analyse spatiale



(b) L'analyse spectrale

FIGURE 3.1 – Synthèse de $E(x)$ et $\tilde{E}(k_x)$.

Pour la synthèse d'une fonction à deux variables, on introduit les limites suivantes pour les sommations (2.37) dans le domaine spatial :

$$f(x,y) = \sum_{m,n,p,q\in\mathbb{Z}} A_{mnpq} w_{mnpq}(x,y)$$

ou (2.38) dans le domaine spectral :

$$\tilde{f}(k_x,k_y) = \sum_{m,n,p,q\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x+pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2} A_{mnpq}\tilde{w}_{mnpq}(k_x,k_y)$$

$$M_{min} \leq m \leq M_{max} \quad N_{min} \leq n \leq N_{max}$$
$$P_{min} \leq p \leq P_{max} \quad Q_{min} \leq q \leq Q_{max}$$

Avec des notations analogues à celles utilisées pour une variable, les limites des indices de sommation sont donc de la forme :

$$\begin{array}{ll} M_{min} = \lfloor \frac{L_{0x_{min}} - l_{e_x}}{l_x} \rfloor & M_{max} = \lceil \frac{L_{0x_{max}} + l_{e_x}}{l_y} \rceil \\ P_{min} = \lfloor \frac{L_{0y_{min}} - l_{e_y}}{l_y} \rfloor & P_{max} = \lceil \frac{L_{0y_{max}} + l_{e_y}}{l_y} \rceil \\ N_{min} = \lfloor \frac{k_{0x_{min}} - l_{g_x}}{\kappa_x} \rfloor & N_{max} = \lceil \frac{k_{0x_{max}} + l_{g_x}}{\kappa_x} \rceil \\ Q_{min} = \lfloor \frac{k_{0y_{min}} - l_{g_y}}{\kappa_y} \rfloor & Q_{max} = \lceil \frac{k_{0y_{max}} + l_{g_y}}{\kappa_y} \rceil \end{array} \tag{3.3}$$

où

M_{min}	Borne inférieure de l'index m.
M_{max}	Borne supérieure de l'index m.
P_{min}	Borne inférieure de l'index p.
P_{max}	Borne supérieure de l'index p.
N_{min}	Borne inférieure de l'index n.
N_{max}	Borne supérieure de l'index n.
Q_{min}	Borne inférieure de l'index q.
Q_{max}	Borne supérieure de l'index q.
$L_{0x_{min}}$	Borne inférieure selon x de la distribution source.
$L_{0x_{max}}$	Borne supérieure selon x de la distribution source.
$L_{0y_{min}}$	Borne inférieure selon y de la distribution source.
$L_{0y_{max}}$	Borne supérieure selon y de la distribution source.
$k_{0x_{min}}$	Borne inférieure selon k_x du spectre d'ondes planes.
$k_{0x_{max}}$	Borne supérieure selon k_x du spectre d'ondes planes.
$k_{0y_{min}}$	Borne inférieure selon k_y du spectre d'ondes planes.
$k_{0y_{max}}$	Borne supérieure selon k_y du spectre d'ondes planes.
L_x	Paramètre de largeur spatiale de la fenêtre gaussienne selon x.
L_y	Paramètre de largeur spatiale de la fenêtre gaussienne selon y.
l_{e_x}	Demi-largeur spatiale de la fenêtre gaussienne selon x : $L_x\sqrt{-\frac{Log(\epsilon_2)}{\pi}}$.
l_{e_y}	Demi-largeur spatiale de la fenêtre gaussienne selon y : $L_y\sqrt{-\frac{Log(\epsilon_2)}{\pi}}$.
l_{g_x}	Demi-largeur spectrale de la fenêtre gaussienne selon k_x : $\frac{2}{L_x}\sqrt{-\pi Log(\epsilon_2)}$.
l_{g_y}	Demi-largeur spectrale de la fenêtre gaussienne selon k_y : $\frac{2}{L_y}\sqrt{-\pi Log(\epsilon_2)}$.

Avec les notations précédentes, le nombre de coefficients de frame à calculer est de :

$$S_x = M_{max} - M_{min} + 1 \tag{3.4}$$

selon x pour chaque $n \in \{N_{min}, N_{max}\}$ et de :

$$S_y = P_{max} - P_{min} + 1 \tag{3.5}$$

selon y pour chaque $q \in \{Q_{min}, Q_{max}\}$, quand le calcul est effectué à partir d'une distribution définie dans le domaine spectral.

De façon similaire le nombre de coefficients de frame à calculer à partir d'une distribution définie dans le domaine spatial est de :

$$S_x = N_{max} - N_{min} + 1 \tag{3.6}$$

selon k_x pour chaque $m \in \{M_{min}, M_{max}\}$ et de :

$$S_y = Q_{max} - Q_{min} + 1 \tag{3.7}$$

selon k_y pour chaque $p \in \{P_{min}, P_{max}\}$

3.2 Analyse d'une fonction initiale à une variable dans le domaine spatial

Dans cette section, nous allons analyser le cas du calcul des coefficients A_{mn} dans le domaine spatial pour m fixé, donné par l'intégrale (2.33)

$$A_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x)\hat{w}^*(x - ml_x)e^{-in\kappa_x x}dx$$

avec l'algorithme de TFD. On se place dans le contexte de la partie 2.4 (distribution E_y) pour construire une fonction périodique et discrète, et on introduit les paramètres de troncation ϵ_1 pour tronquer le champ $E_y(x)$ et ϵ_2 pour tronquer la fonction duale (figure 3.1a). On *tronque* ainsi le signal $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= E_y(x)\hat{w}(x - ml_x) && \text{si} \quad x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ f(x) &= 0 && \text{si} \quad x < x_{min} \text{ ou } x > x_{max} \end{aligned}$$

La périodisation de la fonction $f(x)$ est réalisée classiquement de la façon suivante :

$$\bar{f}(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(x + sT) \tag{3.8}$$

où T, qui est pris supérieur ou égal à $x_{max} - x_{min}$, est la période de cette fonction *périodisée*. On discrétise cette fonction selon le critère de Nyquist en prenant ses valeurs en $x = jT_1$, $j = 0, ..., S' - 1$ où $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{T}{S'}$, avec ω_1 la largeur spectrale de f et $\omega_1 = k_{0_{max}} - k_{0_{min}}$ avec les notations de la section 3.1. On utilise ensuite la formule de Poisson donnée dans le cas général par [13] : $\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{\infty} y(x + sT) = \frac{1}{T}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{y}(s\omega_0)e^{is\omega_0 x}$ où $\tilde{y}$ est la TF de y et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (est le pas d'échantillonnage spectral). D'où :

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{\bar{f}}(s\omega_0)e^{is\omega_0 x} \tag{3.9}$$

soit

$$\bar{f}(jT_1) = \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \bar{\tilde{f}}(s\omega_0) e^{is\omega_0 jT_1} \tag{3.10}$$

et aussi

$$\bar{\tilde{f}}(s\omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{f}(jT_1) e^{-is\omega_0 jT_1} \tag{3.11}$$

ou $\bar{\tilde{f}}$ est la TF de $\bar{f}$. En remplaçant T_1 par sa valeur $\frac{T}{S'}$ on obtient :

$$\bar{\tilde{f}}(s\omega_0) = \frac{T}{S'} \sum_{j=-S'}^{S'} \bar{f}\left(j\frac{T}{S'}\right) e^{-ij\frac{T}{S'}s\omega_0} \tag{3.12}$$

qui utilise la fonction *discrétisée* de $\bar{f}(x)$ donnée par :

$$\bar{f}\left(j\frac{T}{S'}\right) = \sum_{s=-S'}^{S'} E_y(j\frac{T}{S'} + sT)\hat{w}(j\frac{T}{S'} + sT - ml_x) \tag{3.13}$$

Dans l'algorithme de TFD, pour calculer les coefficients A_{mn}, on prend initialement la valeur de $T = 2l_e$ pour le cas de translation spatiale nulle ($m = 0$) avec l_e la demi-largeur spatiale de la fenêtre gaussienne tronquée à ϵ_2. Le pas d'échantillonnage maximal *autorisé* est : $\bar{\omega}_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

Pour que les coefficients de la décomposition sur un frame soient un sous-ensemble des coefficients de Fourier calculés par TFD, il faut que le pas d'échantillonnage ω_0 soit un sous-multiple du pas de translation κ_x de la décomposition sur le frame. Pour cela, on introduit le coefficient entier $n_0 = \lceil \frac{\kappa_x}{\bar{\omega}_0} \rceil$ de façon à définir un pas d'échantillonnage $\omega_0 = \dfrac{\kappa_x}{n_0} \leq \bar{\omega}_0$ pour la TFD qui soit un sous-multiple du pas de translation du frame.

De cette valeur ω_0 on déduit la valeur de T, $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, et finalement le nombre d'échantillons S' nécessaires.

$$S' = \lceil \frac{\omega_1}{\omega_0} \rceil = n_0 \lceil \frac{\omega_1}{\kappa_x} \rceil = n_0 S \tag{3.14}$$

où ω_1 représente la largeur spectrale de la fonction $f(x)$:

Si l'on prend en considération tout ce qui précède, on calcule les coefficients de la décomposition sur un frame dans le domaine spatial de la façon suivante, pour chaque valeur de $m, m \in \{M_{min}, M_{max}\}$:

$$\bar{A}_{mn} = \frac{T}{S'} \sum_{j=0}^{S'-1} \bar{f}_{m,j} e^{-\frac{2\pi ijn}{S'}} \qquad , \qquad n = 0, ..., S' - 1 \tag{3.15}$$

où $\bar{f}_{m,j} = \bar{f}(j\frac{T}{S'})$ donné par (3.13), et $T\omega_0 = 2\pi$ [13]

Les coefficients $\bar{A}_{mn}$ dans le domaine spatial sont calculés pour $n = 0, ..., S' - 1$. Grâce aux propriétés de périodicité de la transformée de Fourier discrète, les coefficients A_{mn} sont obtenus à partir de $\bar{A}_{mn}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_{m,n+\frac{S}{2}} &= \bar{A}_{m,nn_0} \quad \text{si} \quad 0 \leq n \leq \frac{S}{2} \\ A_{m,n-\frac{S}{2}} &= \bar{A}_{m,nn_0} \quad \text{si} \quad \frac{S}{2} \leq n \leq S \end{aligned}$$

Le calcul des coefficients A_{mn} de la décomposition implique la détermination d'un certain nombre de paramètres qui influent sur la précision de l'analyse. Sur la figure 3.2 nous avons représenté la relation entre ces paramètres dans le domaine spatial. Les notations utilisées sont celles utilisées dans les équations des chapitres 2, 3 et 4 :

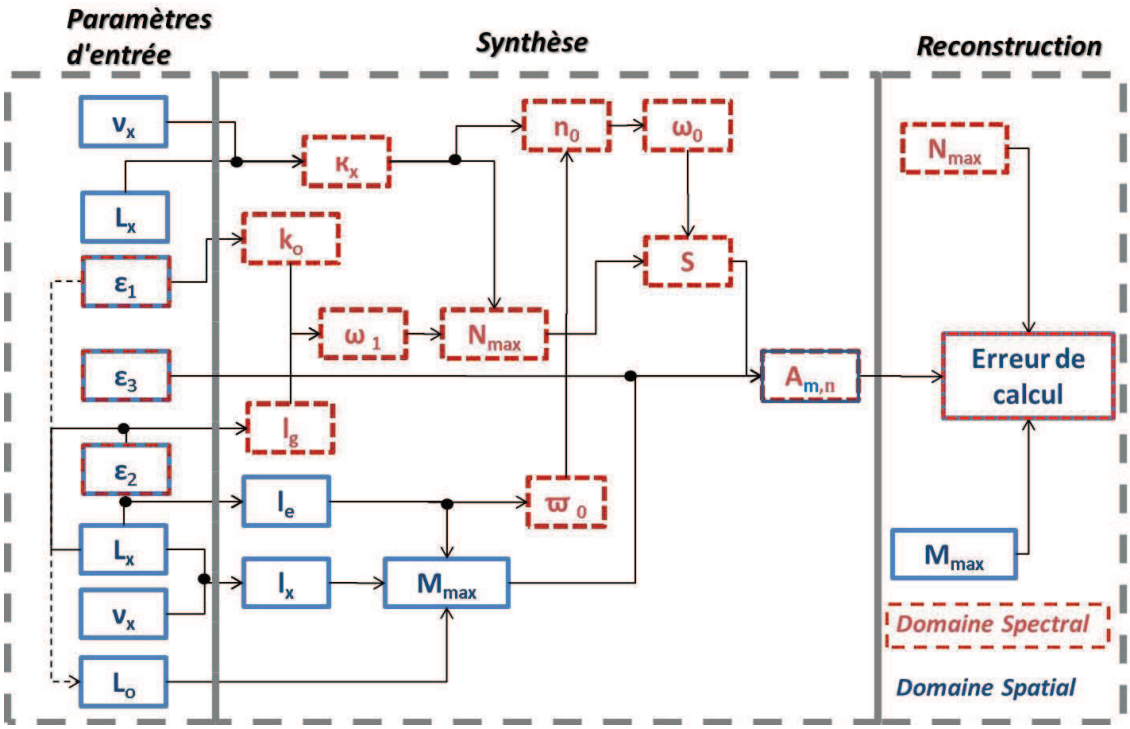


FIGURE 3.2 – Diagramme d'influence (pour l'analyse spatiale d'une distribution).

ν_x	Coefficient de sur-échantillonnage.
ω_1	Largeur spectrale de la fonction $\bar{f}$.
$\bar{\omega}_0$	Pas d'échantillonnage maximal dans le domaine fréquentiel.
ω_0	Pas d'échantillonnage dans le domaine fréquentiel.
L_0	Demi-largeur de la distribution source *symétrique*.
n_0	Rapport entre le nombre d'échantillons pour la TFD et le nombre de translations spectrales pour le frame.
l_x	Paramètre de translation spatiale.
S	Nombre d'échantillons de décomposition sur le frame.
κ_x	Paramètre de translation spectrale.
k_0	Demi-largeur du spectre de la distribution source *symétrique*.
A_{mn}	Coefficient de décomposition sur le frame.

3.3 Analyse d'une fonction initiale à une variable dans le domaine spectral

On peut aussi calculer les coefficients de la décomposition sur un frame dans le domaine spectral en utilisant l'intégrale (2.35) :

$$A_{mn} = \frac{e^{-imnl_x\kappa_x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y(k_x)\hat{\tilde{w}}^*(k_x - n\kappa_x)e^{iml_xk_x}dk_x$$

Pour chaque valeur de $n, n \in \{N_{min}, N_{max}\}$, on calcule :

$$\bar{A}_{mn} = \frac{e^{-imnl_x\kappa_x}}{2\pi}\frac{T}{S'}\sum_{j=0}^{S'-1} \bar{\tilde{f}}_{j,n}e^{2\pi i\frac{jm}{S'}} \qquad , \qquad m = 0, ..., S'-1 \tag{3.16}$$

où

$$\bar{\tilde{f}}_{j,n} = \bar{\tilde{f}}(j\frac{T}{S'}) = \sum_{s=-S'}^{S'} \tilde{E}_y(j\frac{T}{S'} + sT)\hat{\tilde{w}}(j\frac{T}{S'} + sT - n\kappa_x) \tag{3.17}$$

et $T\omega_0 = 2\pi$.

Dans ce cas doivent être pris en considération le fait que le domaine de l'analyse est le domaine spectral et l'espace transformé est le domaine spatial. Pour cette raison, la période T de la fonction spectrale est d'abord prise égale à $T = 2l_g$ pour le cas de translation spectrale zéro ($n = 0$), où l_g c'est la largeur spectrale de la fenêtre gaussienne tronquée à ϵ_2. De cette valeur on déduit : $\bar{\omega}_0 = \frac{2\pi}{T}$, $n_0 = \lceil \frac{l_x}{\bar{\omega}_0} \rceil$ de façon à définir un pas d'échantillonnage *final* $\omega_0 = \frac{l_x}{n_0} \leq \bar{\omega}_0$.

Sur la figure 3.3 nous avons représenté la relation entre ces paramètres dans le domaine spectral. Encore une fois, les notations utilisées sont celles utilisées dans les équations des chapitres 2, 3 et 4.

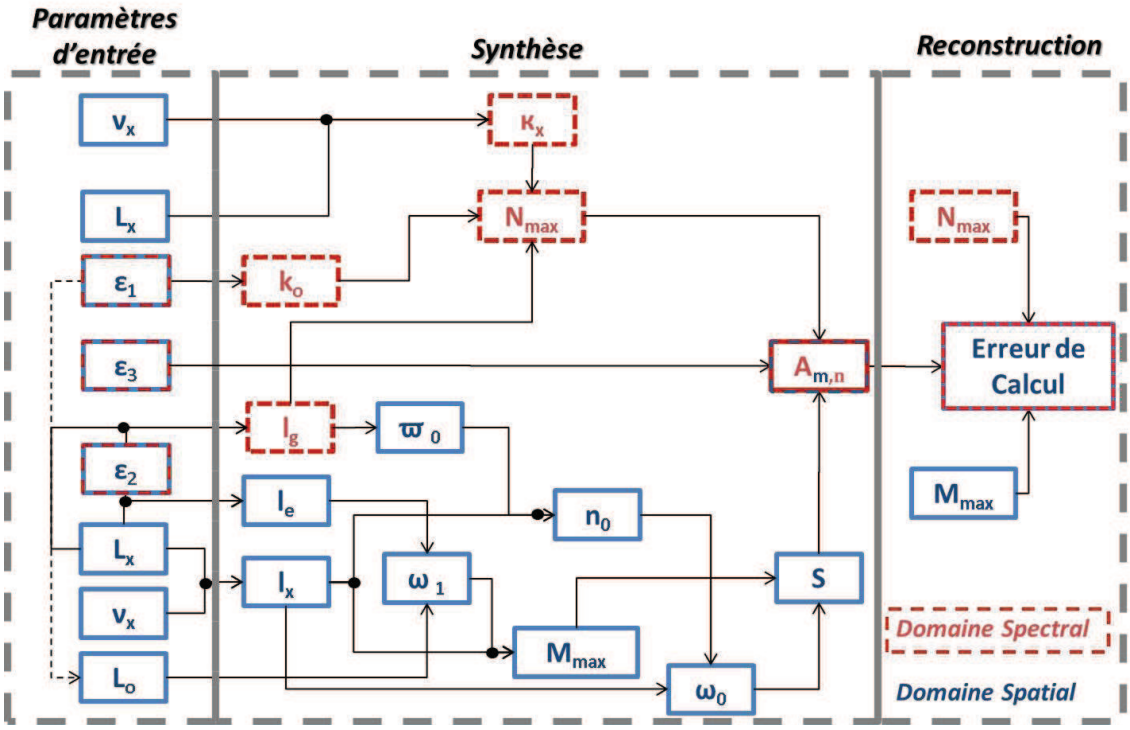


FIGURE 3.3 – Diagramme d'influence (pour l'analyse spectrale d'une distribution).

ν_x	Coefficient de sur-échantillonnage.
ω_1	Largeur spatiale de la fonction $\bar{f}$.
$\bar{\omega}_0$	Pas d'échantillonnage maximal dans le domaine spatial.
ω_0	Pas d'échantillonnage dans le domaine spatial.
L_0	Demi-largeur de la distribution source *symétrique*.
n_0	Rapport entre le nombre d'échantillons pour la TFD et le nombre de translations spatiales pour le frame.
l_x	Paramètre de translation spatiale.
S	Nombre d'échantillons de décomposition sur le frame.
κ_x	Paramètre de translation spectrale.
k_0	Demi-largeur du spectre de la distribution source *symétrique*.
A_{mn}	Coefficient de décomposition sur le frame.

Les coefficients $\bar{A}_{mn}$ dans le domaine spectral sont calculés pour $m = 0, ..., S' - 1$. Grâce aux propriétés de périodicité de la transformée de Fourier discrète, les coefficients A_{mn} sont obtenus à partir de $\bar{A}_{mn}$ de la façon suivante :

$$A_{m+\frac{S}{2},n} = \bar{A}_{mn0,n} \qquad \text{si} \quad 0 \leq m \leq \frac{S}{2}$$
$$A_{m-\frac{S}{2},n} = \bar{A}_{mn0,n} \quad \text{si} \quad \frac{S}{2} \leq m \leq S$$

3.4 Analyse d'une fonction initiale à deux variables dans le domaine spatial

Si on considère l'analyse du champ $E_y(x, y)$ en fonction de deux variables, les coefficients sont calculés sur la base de l'équation (2.46) :

$$A_{mnpq} = \iint_{-\infty}^{\infty} E_y(x, y)\hat{w}^*(x - ml_x, y - pl_y)e^{-i(n\kappa_x x + q\kappa_y y)}d_x d_y \tag{3.18}$$

De la même façon que dans la section précédente, on peut calculer les coefficients de (3.18), selon les étapes suivantes :

$$\bar{A}_{mnpq} = \frac{T_x T_y}{S'_x, S'_y} \sum_{j_x=0}^{S'_x-1} \sum_{j_y=0}^{S'_y-1} \bar{f}_{j_x,j_y} e^{-2\pi i\left(\frac{j_x n}{S'_x} + \frac{j_y q}{S'_y}\right)} \tag{3.19}$$

$$n = 0, ..., S'_x - 1 \qquad \text{et} \qquad q = 0, ..., S'_y - 1$$

où $\bar{f}_{j_x,j_y} = \bar{f}\left(j_x \frac{T_x}{S'_x}, j_y \frac{T_y}{S'_y}\right)$ est donné par :

$$\bar{f}\left(j_x \frac{T_x}{S'_x}, j_y \frac{T_y}{S'_y}\right) =$$

$$= \sum_{s_x=-S'_x}^{S'_x} \sum_{s_y=-S'_y}^{S'_y} E_y\left(j_x \frac{T_x}{S'_x} + s_x T_x, j_y \frac{T_y}{S'_y} + s_y T_y\right) \hat{w}\left(j_x \frac{T_x}{S'_x} + s_x T_x - ml_x, j_y \frac{T_y}{S'_y} + s_y T_y - pl_y\right) \tag{3.20}$$

Les coefficients $\bar{A}_{mnpq}$ sont calculés dans le domaine spatial pour $n = 0, ..., S'_x - 1$ et $q = 0, ..., S'_y - 1$. Grâce aux propriétés de périodicité de la transformée de Fourier discrète, les coefficients A_{mnpq} sont obtenus à partir de $\bar{A}_{mnpq}$ de la façon suivante :

le long de l'axe x

$$A_{m,n+\frac{S_x}{2},p,q} = \bar{A}_{m,nn0_x,p,q} \qquad \text{si} \quad 0 \leq n \leq \frac{S_x}{2}$$
$$A_{m,n-\frac{S_x}{2},p,q} = \bar{A}_{m,nn0_x,p,q} \quad \text{si} \quad \frac{S_x}{2} \leq n \leq S_x$$

le long de l'axe y

$$A_{m,n,p,q+\frac{S_y}{2}} = \bar{A}_{m,n,p,qn0_y} \qquad \text{si} \quad 0 \leq q \leq \frac{S_y}{2}$$
$$A_{m,n,p,q-\frac{S_y}{2}} = \bar{A}_{m,n,p,qn0_y} \quad \text{si} \quad \frac{S_y}{2} \leq q \leq S_y$$

S'_x et S'_y, S_x, S_y, n_{0_x}, n_{0_y}, T_x, T_y, s_x, s_y sont les équivalents de S', S, n_0, T, s, le long des axes x et y respectivement.

3.5 Analyse d'une fonction initiale à deux variables dans le domaine spectral

Si on considère l'analyse de fonctions de deux variables dans le domaine spectral, les coefficients du spectre $\tilde{E}_y(k_x, k_y)$ sont calculés sur la base de l'équation (2.48) :

$$A_{mnpq} = \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y(k_x, k_y)\hat{\tilde{w}}^*(k_x - n\kappa_x, k_y - q\kappa_y)e^{i(ml_xk_x + pl_yk_y)}dk_xdk_y \tag{3.21}$$

De la même façon que dans la section précédente, on peut calculer les coefficients de (3.21), selon les étapes suivantes :

$$\bar{A}_{mnpq} = \frac{e^{-i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)}}{4\pi^2} \frac{T_xT_y}{S'_xS'_y} \sum_{j_x=0}^{S'_x-1} \sum_{j_y=0}^{S'_y-1} \tilde{\tilde{f}}_{j_x,j_y} e^{2\pi i\left(\frac{j_xm + j_yp}{S'_xS'_y}\right)} \tag{3.22}$$

$$m = 0, ..., S'_x - 1 \qquad \text{et} \qquad p = 0, ..., S'_y - 1$$

où $\tilde{\tilde{f}}_{j_x,j_y} = \tilde{\tilde{f}}\left(j_x\frac{T_x}{S'_x}, j_y\frac{T_y}{S'_y}\right)$ est donné par :

$$\tilde{\tilde{f}}\left(j_x\frac{T_x}{S'_x}, j_y\frac{T_y}{S'_y}\right) =$$

$$= \sum_{s_x=-S'_x}^{S'_x} \sum_{s_y=-S'_y}^{S'_y} \tilde{E}_y\left(j_x\frac{T_x}{S'_x} + s_xT_x, j_y\frac{T_y}{S'_y} + s_yT_y\right) \hat{\tilde{w}}\left(j_x\frac{T_x}{S'_x} + s_xT_x - n\kappa_x, j_y\frac{T_y}{S'_y} + s_yT_y - q\kappa_y\right) \tag{3.23}$$

Les coefficients $\bar{A}_{mnpq}$ sont calculés dans le domaine spectral pour $m = 0, ..., S'_x - 1$ et $p = 0, ..., S'_y - 1$. Grâce aux propriétés de périodicité de la transformée de Fourier discrète, les coefficients A_{mnpq} sont obtenus à partir de $\bar{A}_{mnpq}$ de la façon suivante :

le long de l'axe x

$$\begin{aligned} A_{m+\frac{S_x}{2},n,p,q} &= \bar{A}_{mn_{0_x},n,p,q} \qquad \text{si} \quad 0 \le m \le \tfrac{S_x}{2} \\ A_{m-\frac{S}{2},n,p,q} &= \bar{A}_{mn_{0_x},n,p,q} \qquad \text{si} \quad \tfrac{S_x}{2} \le m \le S_x \end{aligned}$$

le long de l'axe y

$$\begin{aligned} A_{m,n,p+\frac{S_y}{2},q} &= \bar{A}_{m,n,pn_{0_y},q} \qquad \text{si} \quad 0 \le p \le \tfrac{S_y}{2} \\ A_{m,n,p-\frac{S_y}{2},q} &= \bar{A}_{m,n,pn_{0_y},q} \qquad \text{si} \quad \tfrac{S_y}{2} \le p \le S_y \end{aligned}$$

S'_x et S'_y, S_x, S_y, n_{0_x}, n_{0_y}, T_x, T_y, s_x, s_y sont les équivalents de S', S, n_0, T, s, le long des axes k_x et k_y respectivement.

3.6 Cas particulier : Distribution initiale à variables séparables

Le champ $E_y(x, y)$ de (3.18), ou le spectre d'ondes planes $\tilde{E}_y(k_x, k_y)$ de (3.21), peuvent parfois être exprimés comme le produit de fonctions indépendantes le long des axes x et y :

$$E_y(x, y) = E_y^x(x)E_y^y(y) \tag{3.24}$$

ou

$$\tilde{E}_y(x, y) = \tilde{E}_y^x(k_x)\tilde{E}_y^y(k_y) \tag{3.25}$$

Dans le domaine spatial on peut calculer les coefficients de (3.24) le long des axes x et y sur la base de l'équation (3.15) de façon suivante :

le long de l'axe x :

$$\bar{A}_{mn} = \frac{T_x}{S'_x} \sum_{j_x=0}^{S'_x-1} \bar{f}_{m,j_x} e^{-2\pi i \frac{j_x n}{S'_x}} \qquad , \qquad n = 0, ..., S'_x - 1 \tag{3.26}$$

le long de l'axe y :

$$\bar{A}_{pq} = \frac{T_y}{S'_y} \sum_{j_y=0}^{S'_y-1} \bar{f}_{p,j_y} e^{-2\pi i \frac{j_y q}{S'_y}} \qquad , \qquad q = 0, ..., S'_y - 1 \tag{3.27}$$

aussi, on calcule les coefficients de la décomposition sur un frame dans le domaine spectral de (3.25) de la même façon et sur la base de l'équation (3.16) :

le long de l'axe k_x :

$$\bar{A}_{mn} = \frac{e^{-imnl_x\kappa_x}}{2\pi} \frac{T_x}{S'_x} \sum_{j_x=0}^{S'_x-1} \bar{\tilde{f}}_{j_x,n} e^{2\pi i \frac{j_x m}{S'_x}} \qquad , \qquad m = 0, ..., S'_x - 1 \tag{3.28}$$

le long de l'axe k_y :

$$\bar{A}_{pq} = \frac{e^{-ipql_y\kappa_y}}{2\pi} \frac{T_y}{S'_y} \sum_{j_y=0}^{S'_y-1} \bar{\tilde{f}}_{j_y,q} e^{2\pi i \frac{j_y p}{S'_y}} \qquad , \qquad p = 0, ..., S'_y - 1 \tag{3.29}$$

et finalement

$$A_{mnpq} = A_{mn} A_{pq} \tag{3.30}$$

3.7 Validation de la méthode

Nous allons nous intéresser à la décomposition d'un champ électromagnétique sur des frames de Gabor. Dans la suite du travail, le terme *méthode de frame de Gabor* sous-entendra l'utilisation d'une fenêtre gaussienne, sauf mention contraire.

Pour valider la méthode dans ce contexte, nous considérons pour le moment le cas du rayonnement dans le demi-espace $z > 0$ d'une distribution donnée sous forme analytique, située dans le plan $z = 0$, pour laquelle on dispose facilement d'une solution de référence.

3.7.1 Fonction d'une variable

Dans cette partie, nous présentons le principe de décomposition d'un champ électromagnétique sur un frame à fenêtres gaussiennes dans le cas d'une fonction à une variable (le champ étant supposé invariant selon y), pour une *distribution* située dans le plan $z = 0$, et pour une polarisation selon $\hat{y}$.

La première étape consiste à calculer les coefficients de décomposition. Ensuite, on peut vérifier la précision de la méthode en comparant la distribution initiale avec la *reconstruction* dans le domaine spectral grâce à :

$$\tilde{E}_y(k_x) = \sum_{m=M_{min}}^{M_{max}} \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} A_{mn} e^{imnl_x \kappa_x} \tilde{w}_{mn}(k_x) \tag{3.31}$$

ou dans le domaine spatial grâce à :

$$E_y(x) = \sum_{m=M_{min}}^{M_{max}} \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} A_{mn} w_{mn}(x) \tag{3.32}$$

a Domaine spatial

Si l'analyse est réalisée dans le domaine spatial, le point de départ de la méthode est la décomposition de la distribution source, $E_y(x)$ sur la famille de gaussiennes translatées $\{w_{mn},\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$.

La formule 3.15 permet de calculer les coefficients de cette décomposition. La figure 3.4 présente un schéma de l'algorithme de calcul des coefficients (partie de gauche) et de l'algorithme de *reconstruction* (ou synthèse) qui permet de reconstruire la fonction source par sommation des fenêtres de

frame pondérées par les coefficients (équations (3.31) ou (3.32)). Pour une fonction source donnée analytiquement, la précision de cette reconstruction pourra être évaluée.

Elle dépend du degré d'approximation de la fonction duale (2.13) et de la valeur de troncation aussi bien des fenêtres gaussiennes (ϵ_2) que du signal initial, dans l'espace initial ou transformé (ϵ_1).

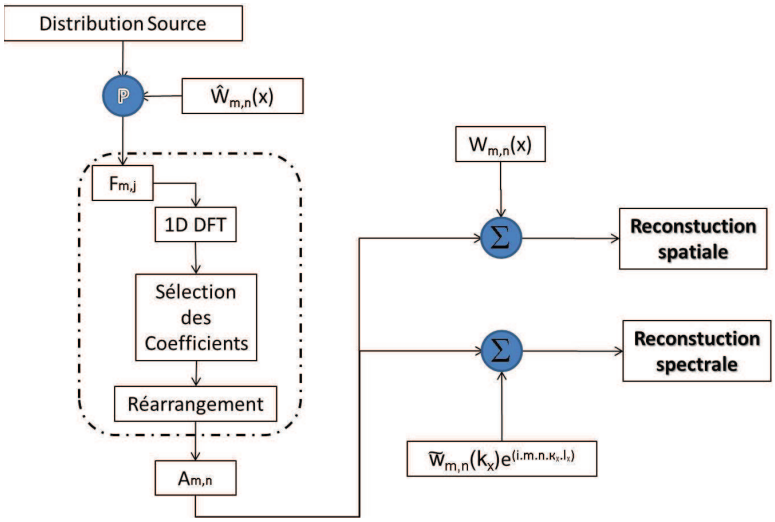


FIGURE 3.4 – Algorithme de calcul des coefficients (domaine spatial).

L'exemple choisi pour évaluer cette précision est celui d'une fonction *fonction porte* notée Π définie dans le domaine spatial, de largeur $L_0 = \lambda$. La figure 3.5 représente les coefficients de frame calculés avec un frame défini par : $L_x = \frac{\lambda}{10}$, et $\nu = 0.1$. Les paramètres de troncation sont : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$. On en déduit sur la base du diagramme 3.2 : $M_{min} = -22$, $M_{max} = 22$, $N_{min} = -509$, $N_{max} = 509$, $S' = 2038$, $n_0 = 2$ et $S = 1019$.

Le nombre très élevé de coefficients dans le domaine spectral est lié à la largeur spectrale du *sinus cardinal* pour une valeur de seuil $\epsilon_1 = 10^{-4}$: $k_{0_{max}} = 1597.4k$.

La figure 3.6 représente la reconstruction de la distribution source, avec les coefficients calculés dans le domaine spatial avec les paramètres ci-dessus.

La figure 3.7 présente l'erreur absolue normalisée obtenue dans ce cas.

Excepté dans la zone de discontinuité, le niveau d'erreur est $\approx (-120dB)$ (figure 3.8).

À partir de l'analyse spatiale, on peut aussi reconstruire la transformée de Fourier de la fonction source grâce à l'équation (3.31). La figure 3.9 représente la reconstruction dans le domaine transformé

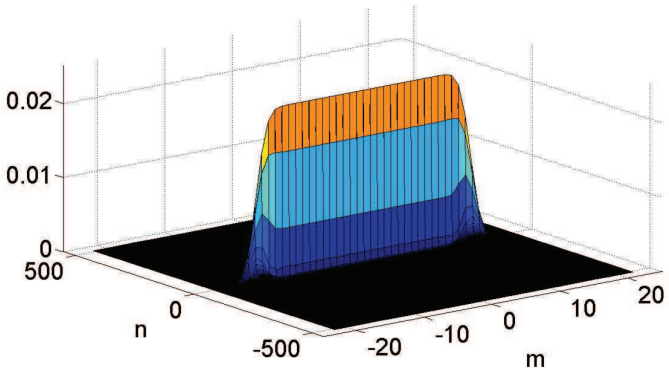


FIGURE 3.5 – Coefficients de frame calculés dans le domaine spatial (fonction porte) avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$.

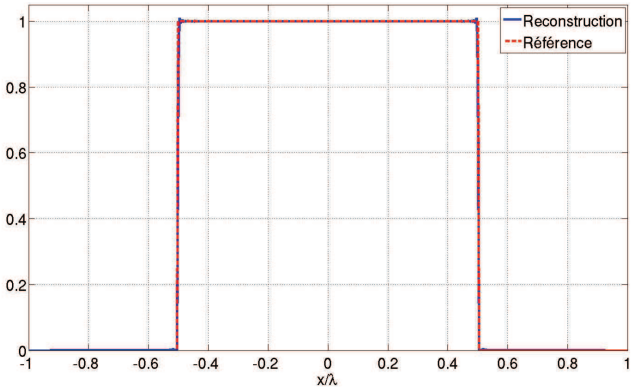


FIGURE 3.6 – Reconstruction spatiale d'une fonction porte, analysée dans le domaine spatial avec $L_x = \frac{\lambda}{10}$, $\nu = 0.1$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$.

de $\mathcal{F}[\Pi]$, c'est-à-dire d'un sinus cardinal, avec les coefficients calculés avec les paramètres ci-dessus.

Les figures 3.10 et 3.12 présentent l'erreur absolue normalisée obtenue dans ce cas. La fonction *sinus cardinal* ne présentant pas de discontinuité, elle est reconstruite avec un niveau d'erreur de l'ordre de grandeur de ϵ_1 et ϵ_2.

b Domaine spectral

Si la source est connue par son spectre d'ondes planes, le spectre $\tilde{E}_y(k_x)$ est décomposé sur la famille de gaussiennes translatées $\tilde{w}(k_x)$ (équation (3.16)). La figure 3.13 présente le schéma de calcul des coefficients à partir du spectre d'ondes planes d'une distribution source, et sa reconstruction

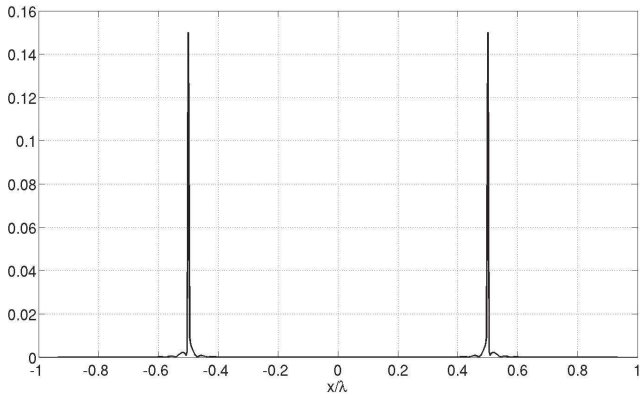


FIGURE 3.7 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial.

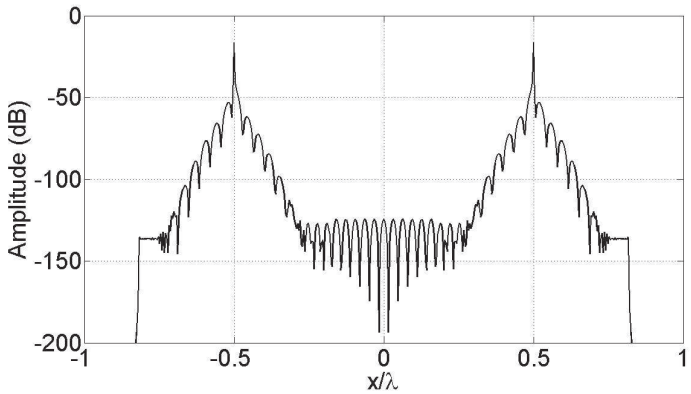


FIGURE 3.8 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial.

(analogue à la figure 3.4 dans le domaine spatial).

La fonction source est une *fonction porte* dans le domaine spectral, de valeur 1 sur l'intervalle $[-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}]$; elle est définie sur le domaine *visible* : $[-k, k]$.

La figure 3.14 représente les coefficients calculés pour un frame défini par : $L_x = 10\lambda$, et $\nu = 0.1$. Les paramètres de troncation sont : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$. On en déduit sur la base du diagramme 3.3 : $M_{min} = -682$, $M_{max} = 682$, $N_{min} = -43$, $N_{max} = 43$, $n_0 = 2$, $S' = 2730$ et $S = 1365$.

Le nombre très élevé de coefficients dans le domaine spectral est lié à la largeur spectrale du sinus cardinal pour une valeur de seuil $\epsilon_1 = 10^{-4}$.

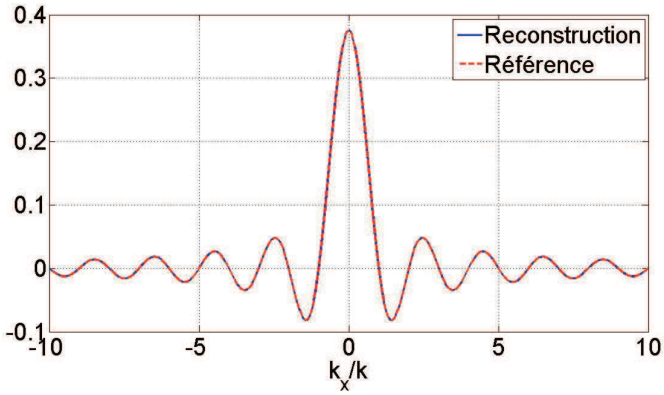


FIGURE 3.9 – Reconstruction spectrale de la transformée de Fourier de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial.

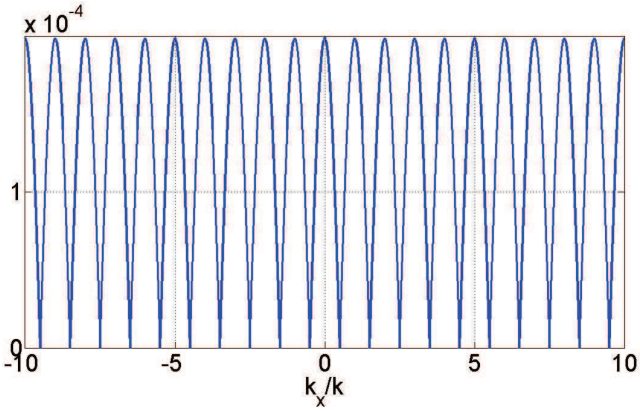


FIGURE 3.10 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale présentée en figure 3.9.

La figure 3.16 représente l'erreur absolue normalisée de la reconstruction représenté sur la figure 3.15.

À partir de l'analyse spectrale, on peut reconstruire la fonction transformée $\mathcal{F}^{-1}$ de la fonction source grâce à l'équation (3.32). La figure 3.18 représente la reconstruction dans le domaine transformé (spatial) de $\mathcal{F}^{-1}[\Pi]$, avec les coefficients calculés dans le domaine spectral avec les paramètres ci-dessus. La figure 3.16 présente l'erreur absolue normalisée obtenue dans ce cas.

Ces exemples démontrent que le niveau d'erreur dans la reconstruction d'une fonction ne dépend pas du domaine d'analyse de la fonction. L'erreur est d'autant plus faible que la fonction varie lentement.

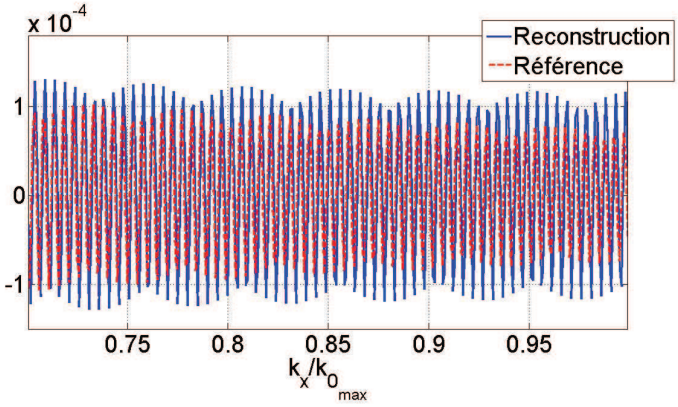


FIGURE 3.11 – Reconstruction spectrale autour de la région de troncation de la transformée de Fourier de la fonction porte présentée en figure 3.6, analysée dans le domaine spatial.

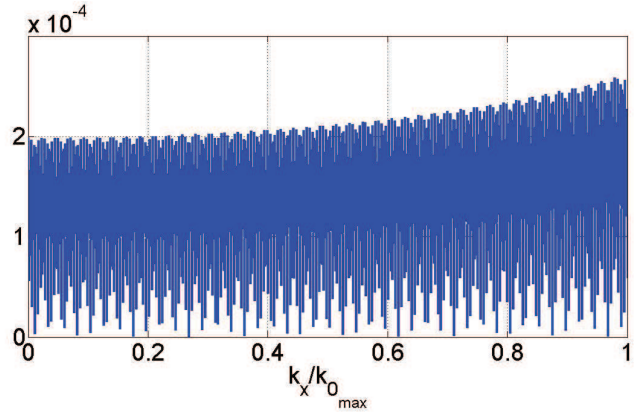


FIGURE 3.12 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale présentée en figure 3.9.

3.7.2 Influence des paramètres sur la précision de la décomposition de Gabor

Nous allons montrer l'influence des paramètres qui ont un impact important sur le degré de précision du calcul des coefficients de la décomposition de Gabor : ϵ_1, ϵ_2 et ν.

– *Influence des paramètres* ϵ_1 *et* ϵ_2. Ces paramètres ont une incidence directe et fondamentale sur le degré de précision du calcul de coefficients de la décomposition. Ils sont directement responsables du niveau de troncation des fenêtres gaussiennes (ϵ_2) et de la fonction en cours d'analyse (et son équivalent dans le plan transformé)(ϵ_1), ils sont aussi directement responsables de la valeur du paramètre d'échantillonnage S' dans l'espace transformé et du nombre de coefficients du frame.

La figure 3.20 représente la reconstruction de la distribution source (fonction porte $L_0 = \lambda$), avec des coefficients calculés cette fois pour le même frame $L_x = \frac{\lambda}{10}$, et $\nu = 0.1$, mais avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$. On obtient alors : $M_{min} = -19$, $M_{max} = 19$, $N_{min} = -4$, $N_{max} = 4$, $S' = 9$,

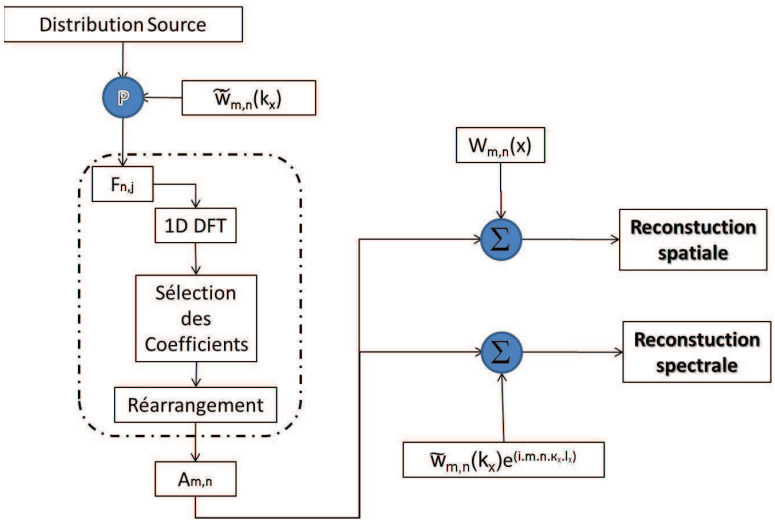


FIGURE 3.13 – Algorithme de calcul des coefficients (domaine spectral).

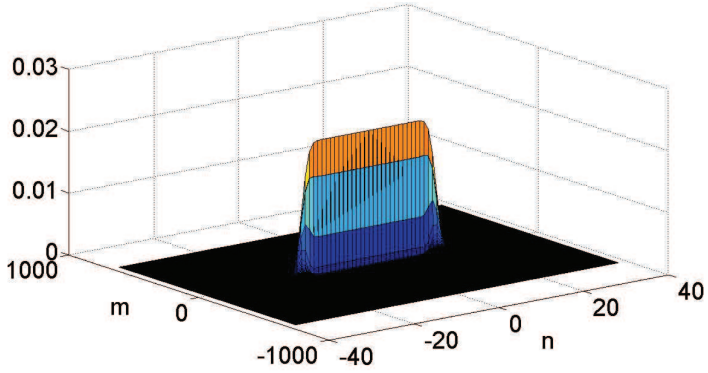


FIGURE 3.14 – Coefficients de frame calculés dans le domaine spectral (fonction porte) avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$.

$S = 9$ et $n_0 = 1$. La figure 3.21 présente l'erreur dans ce cas.

La figure 3.22 représente la reconstruction dans le domaine transformé $\mathcal{F}[\Pi]$, avec les coefficients calculés avec les paramètres ci-dessus.

La figure 3.23 présente l'erreur dans ce cas.

Le faible degré de précision dans la reconstruction présentée figure 3.20 est dû à la valeur élevée de ϵ_1. La fonction transformée étant tronquée à un niveau élevé, sa largeur spectrale n'est pas suffisante, ce qui produit des oscillations lors de la reconstruction dans le domaine de l'analyse.

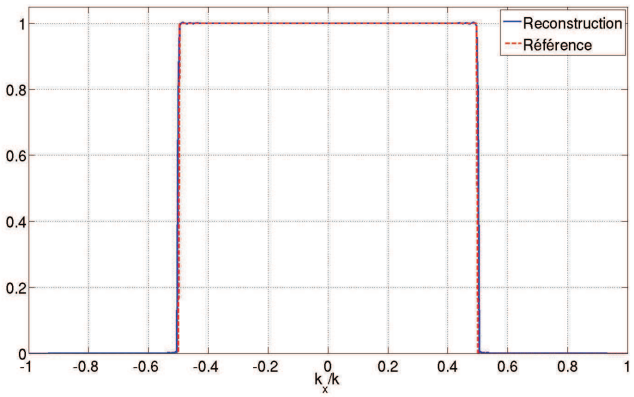


FIGURE 3.15 – Reconstruction spectrale d'une fonction porte, analysée dans le domaine spectral avec $L_x = 10\lambda$, $\nu = 0.1$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$.

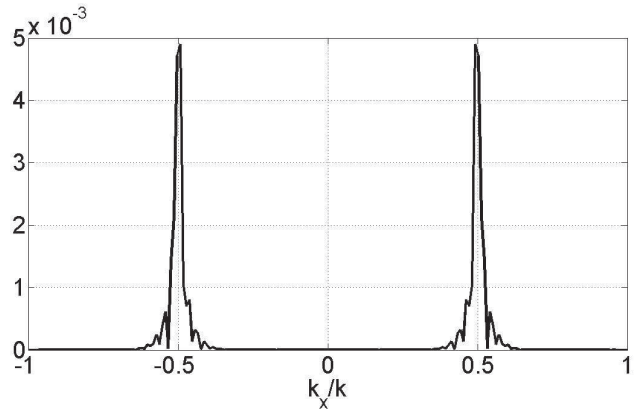


FIGURE 3.16 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale de la fonction porte présentée en figure 3.15, analysée dans le domaine spectral.

Ce phénomène est connu sous le nom *d'effet de Gibbs*.

On peut observer sur la figure 3.22 les valeurs k_{min} et k_{max} représentant les bornes d'analyse de la fonction dans le domaine transformé. L'analyse sur ce petit intervalle $[k_{min}, k_{max}]$ néglige une part importante de l'information contenue dans le spectre de la fonction.

Cela se traduit par un faible nombre de coefficients de frame dans le domaine spectral ($N_{min} = -4$, $N_{max} = 4$). Au contraire avec le même frame mais $\epsilon_1 = 10^{-4}$ on obtient $N_{min} = -509$, $N_{max} = 509$ et une reconstruction précise, présentée en figure 3.6.

À la lumière des résultats obtenus, on en déduit que le choix des paramètres de troncation ϵ_1 et ϵ_2 peut faire l'objet d'un compromis précision/temps de calcul.

– *Influence du facteur de suréchantillonnage* ν. Si on décide d'utiliser l'approximation d'ordre

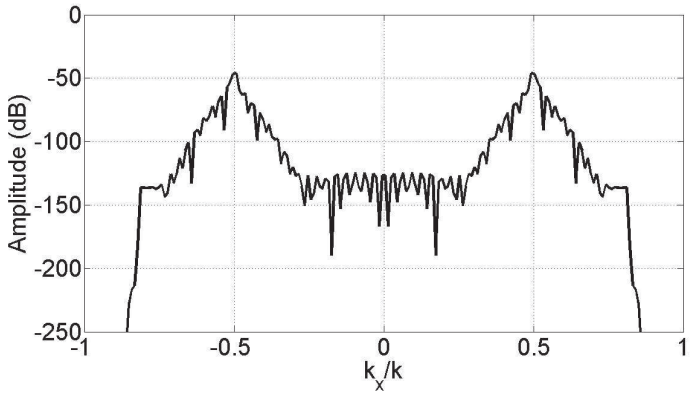


FIGURE 3.17 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale de la fonction porte présentée en figure 3.15, analysée dans le domaine spectral.

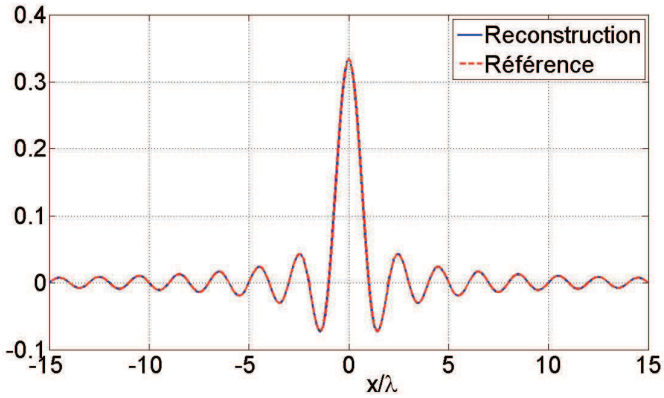


FIGURE 3.18 – Reconstruction spatiale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, analysée dans le domaine spectral.

0 pour la fonction duale (équation (2.30)), la précision du calcul des coefficients est d'autant plus faible que ν est grand. On observe ainsi un phénomène d'oscillation ou *ripple*, sur la figure 3.24 qui n'était pas visible sur la figure 3.6. Les paramètres utilisés dans ce cas sont : pour le frame, $L_x = \frac{\lambda}{10}$, et $\nu = 0.25$. Pour la troncation : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, d'où : $M_{max} = 14, M_{min} = -14, N_{max} = 322, N_{min} = -322$, $S' = 1290$, $n_0 = 2$ et $S = 645$.

Parce que le paramètre ν influe directement sur le pas d'échantillonnage l_x ou κ_x (2.31), le principal avantage d'utiliser une valeur élevée de ν, est de réduire le nombre de fenêtres gaussiennes, et donc le temps de calcul, aux dépens cependant de la précision de l'approximation d'ordre 0 de la fonction duale. Une solution alternative pourrait consister à utiliser une approximation d'ordre supérieur pour la fonction duale, ce qui augmenterait le temps de calcul de coefficients, mais pas celui du LFG.

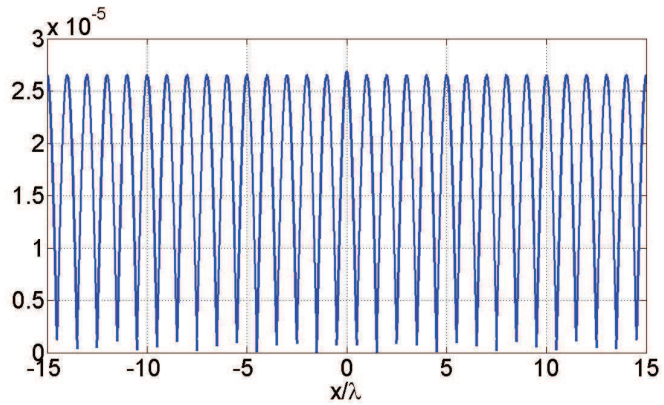


FIGURE 3.19 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, analysée dans le domaine spectral.

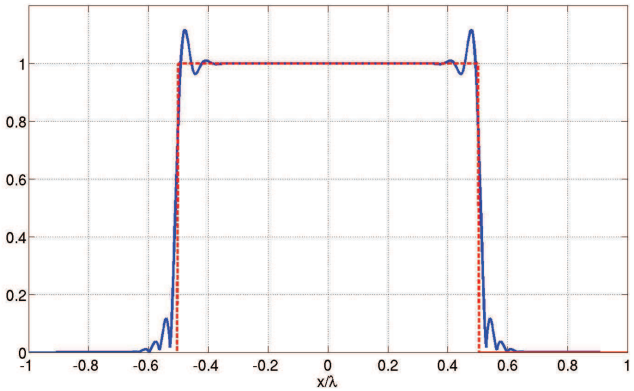


FIGURE 3.20 – Reconstruction d'une fonction porte dans le domaine spatial avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\nu = 0.1$.

3.7.3 Fonction de deux variables

Dans cette partie, nous présentons le principe de décomposition d'un champ électromagnétique ou d'un spectre d'ondes planes sur un frame de Gabor dans le cas d'une fonction à deux variables, pour une *distribution source gaussienne* dans le plan $z = 0$.

Comme dans le cas précédent la première étape consiste à calculer les coefficients.

Ensuite, on peut vérifier la précision de la méthode en comparant la distribution initiale avec sa reconstruction dans le domaine spectral grâce à :

$$\tilde{E}_y(k_x, k_y) = \sum_{m=M_{min}}^{M_{max}} \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} \sum_{p=P_{min}}^{P_{max}} \sum_{q=Q_{min}}^{Q_{max}} A_{mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_y\kappa_y)} \tilde{w}_{mnpq}(k_x, k_y) \tag{3.33}$$

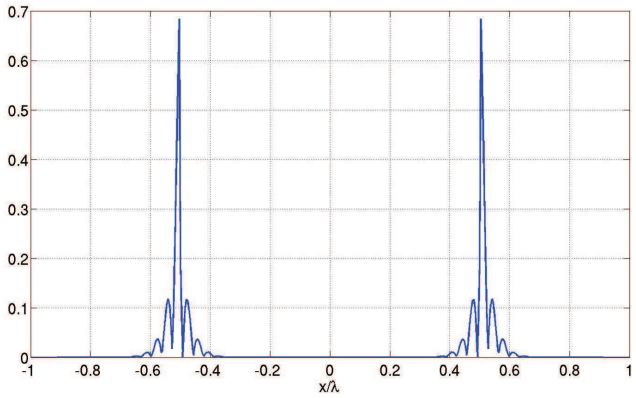


FIGURE 3.21 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale d'une fonction porte avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$.

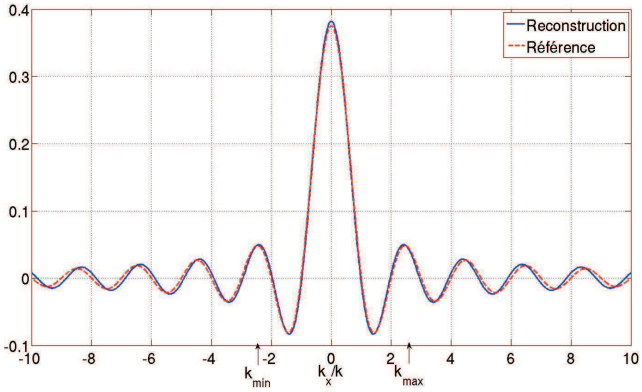


FIGURE 3.22 – Reconstruction spectrale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\nu = 0.1$.

ou dans le domaine spatial grâce à :

$$E_y(x,y) = \sum_{m=M_{min}}^{M_{max}} \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} \sum_{p=P_{min}}^{P_{max}} \sum_{q=Q_{min}}^{Q_{max}} A_{mnpq} w_{mnpq}(x,y) \tag{3.34}$$

a Domaine spatial

Si la décomposition est réalisée dans le domaine spatial, le point de départ de la méthode est la décomposition de la distribution source, $E_y(x,y)$ sur la famille de gaussiennes translatées $\{w_{mnpq},\ (m,n,p,q) \in \mathbb{Z}^4\}$.

La formule (3.19) permet de calculer les coefficients de cette décomposition.

La figure 3.26 présente un schéma de l'algorithme de calcul des coefficients (partie de gauche) et de l'algorithme de *reconstruction* (ou synthèse) qui permet de reconstruire la fonction source par sommation des fenêtres de frame pondérées par les coefficients (équations (3.33) ou (3.34)). Pour une fonction source donnée analytiquement, la précision de cette reconstruction pourra être évaluée.

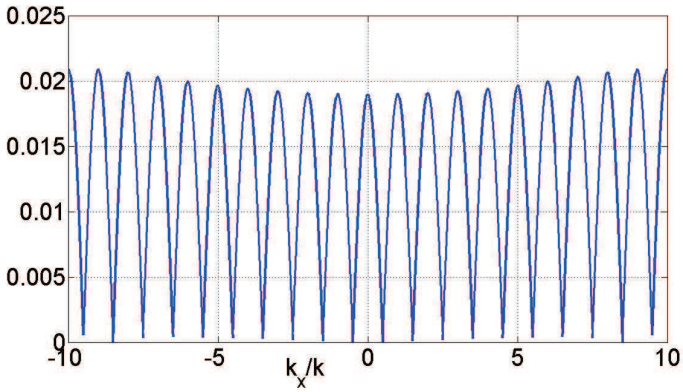


FIGURE 3.23 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spectrale d'une fonction *sinc* avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$.

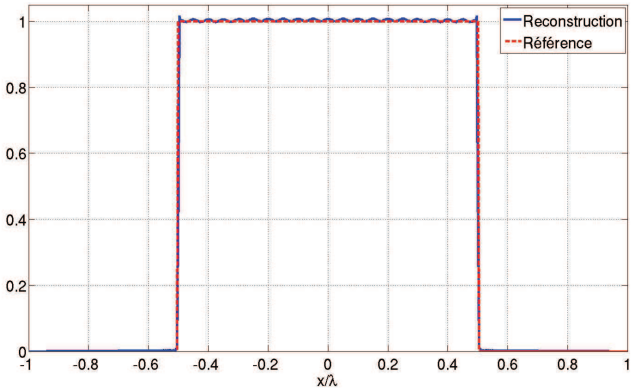


FIGURE 3.24 – Reconstruction d'une fonction porte spatiale avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$ et $\nu = 0.25$.

Elle dépend aussi du degré d'approximation de la fonction duale (2.13) et de la valeur de troncation aussi bien des fenêtres gaussiennes (ϵ_2) que du signal initial, dans l'espace initial ou transformé (ϵ_1).

La figure 3.26 représente un schéma de calcul des coefficients à partir de la distribution source.

L'exemple choisi pour évaluer la précision de ce calcul est celui d'une fonction *gaussienne* dans le domaine spatial mathématiquement définie comme :

$$E_y(x,y) = e^{-\pi\left(\frac{x^2}{L_{u_x}^2}+\frac{y^2}{L_{u_y}^2}\right)} \tag{3.35}$$

de largeur $L_{u_\alpha} = \lambda$ avec $\alpha = x, y$.

La figure 3.27 représente les coefficients du frame et la figure 3.28 représente la reconstruction d'une distribution source par l'équation (3.34) avec les paramètres suivants :

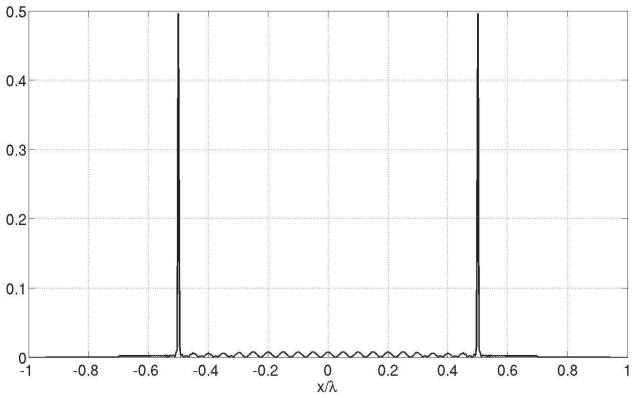


FIGURE 3.25 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction d'une fonction porte spatiale avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, et $\nu = 0.25$.

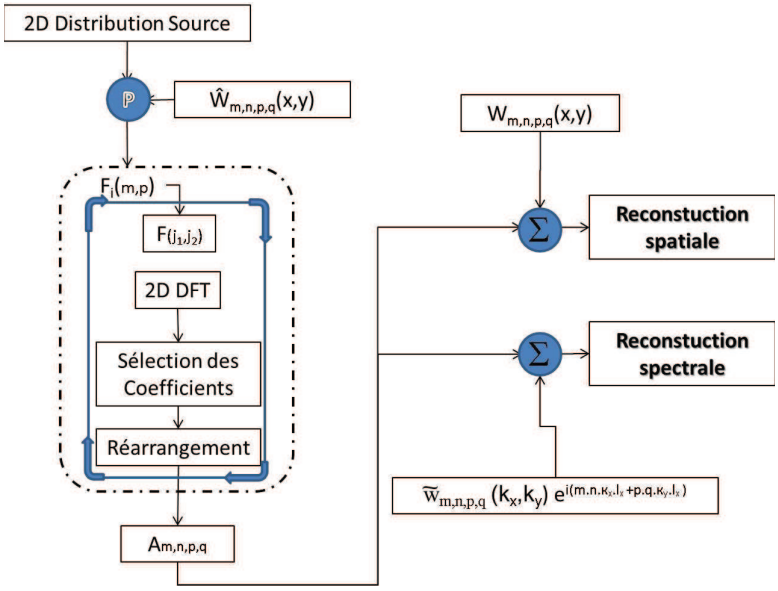


FIGURE 3.26 – Algorithme de calcul des coefficients (domaine spatial).

Le frame utilisé est défini par : $L_\alpha = \lambda$, et $\nu_\alpha = 0.16$ avec $\alpha = x, y$.
Les paramètres de troncation sont : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$.
D'où : $M_{min} = -7$, $P_{min} = -7$, $N_{min} = -7$, $Q_{min} = -7$, $M_{max} = 7$, $P_{max} = 7$, $N_{max} = 7$, $Q_{max} = 7$, $S_\alpha = 15$, $n_{0_\alpha} = 1$, avec $\alpha = x, y$.

Pour le cas de la figure 3.28, la reconstruction est faite avec $\dfrac{\Delta x}{\lambda} = 0.055$ et $\dfrac{\Delta y}{\lambda} = 0.055$.
La figure 3.29 présente l'erreur dans ce cas.

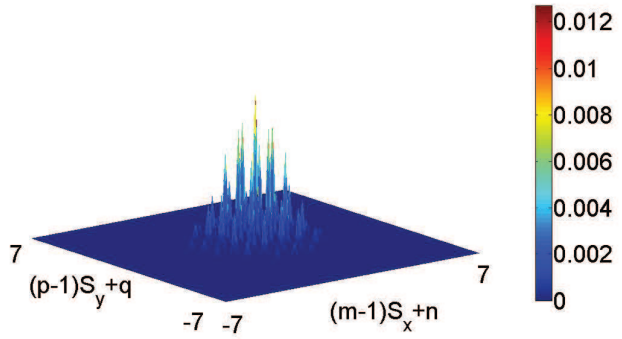


FIGURE 3.27 – Coefficients du frame (domaine spatial).

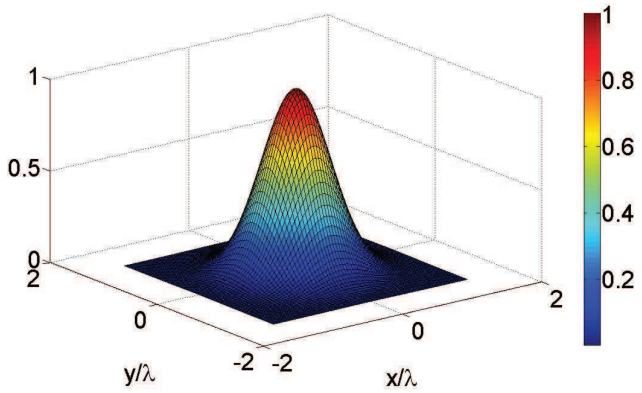


FIGURE 3.28 – Reconstruction spatiale d'une distribution source gaussienne.

b Domaine spectral

Si la source est connue par son spectre d'ondes planes, $\tilde{E}_y(k_x, k_y)$ est décomposé sur la famille de gaussiennes translatées $\tilde{w}_{mnpq}(k_x, k_y)$ (équation (3.33)). La figure 3.30 présente le schéma de calcul des coefficients à partir du spectre d'ondes planes d'une distribution source, et sa reconstruction (analogue à la figure 3.26 dans le domaine spatial).

La figure 3.31 représente les coefficients du frame et la figure 3.32 présente la reconstruction d'un spectre d'ondes planes mathématiquement défini par :

$$\tilde{E}_y(k_x, k_y) = \sqrt{2L_{u_x}L_{u_y}}\, e^{-\frac{1}{4\pi}\left((L_{u_x}k_x)^2+(L_{u_y}k_y)^2\right)} \tag{3.36}$$

associé à une distribution source gaussienne avec $L_{u_\alpha} = 1\lambda$, par l'équation (3.33) avec les paramètres suivants :

le frame utilisé est défini par : $\nu_\alpha = 0.16$, $L_\alpha = 1\lambda$ avec $\alpha = x, y$.
les paramètres de troncation sont : $\epsilon_2 = 10^{-2}$ et $\epsilon_1 = 10^{-2}$.

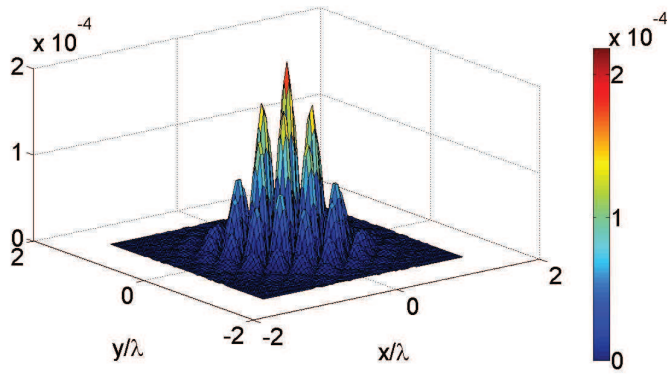


FIGURE 3.29 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction spatiale d'une distribution source gaussienne ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$).

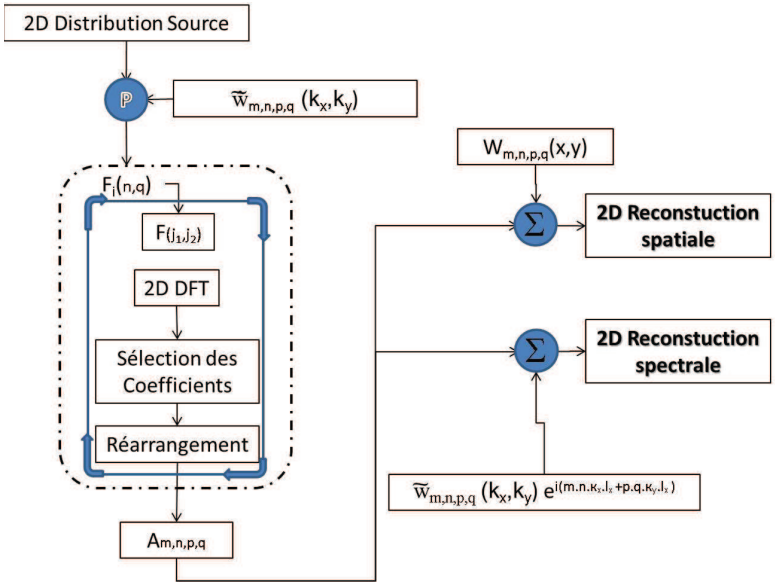


FIGURE 3.30 – Algorithme de calcul des coefficients (domaine spectral).

d'où : $M_{min} = -7$, $P_{min} = -7$, $N_{min} = -7$, $Q_{min} = -7$, $M_{max} = 7$, $P_{max} = 7$, $N_{max} = 7$, $Q_{max} = 7$, $S_\alpha = 15$, $n_{0_\alpha} = 1$, avec $\alpha = x, y$.

Pour le cas de la figure 3.32, la reconstruction est faite avec $\frac{\Delta k_x}{k} = 0.03$ et $\frac{\Delta k_y}{k} = 0.03$.

La figure 3.33 présente l'erreur dans ce cas.

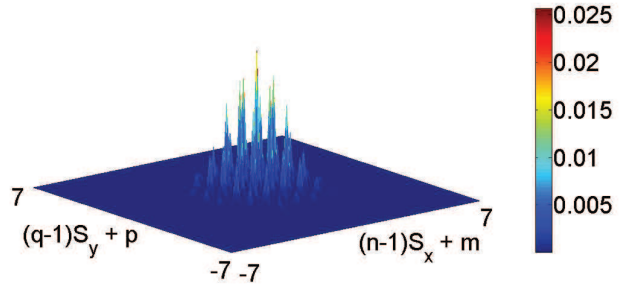


FIGURE 3.31 – Coefficients du frame (domaine spectral).

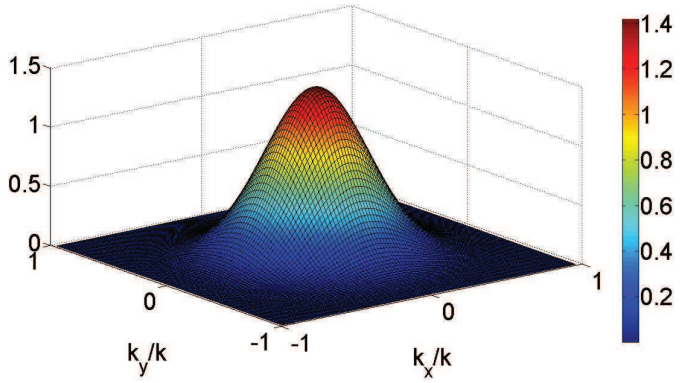


FIGURE 3.32 – Reconstruction spectrale d'un spectre d'ondes planes gaussien.

3.8 Optimisation de la méthode :

Les équations (3.13) et (3.17) à une variable ou (3.20) et (3.23) à deux variables, suggèrent d'évaluer la fenêtre gaussienne à tous les points de discrétisation $T_x\left(\frac{j_x}{S'_x}+s_x\right)$ pour x ou k_x, et $T_y\left(\frac{j_y}{S'_y}+s_y\right)$ pour y ou k_y.

Pour accélérer le calcul des coefficients, on décide de tronquer à la valeur minimale ϵ_2 les sommations dans les équations de la DFT (3.13), (3.17),(3.20) ou (3.23) .

La figure 3.34 illustre la variation de l'erreur absolue normalisée si on tronque à $\epsilon_2 = 10^{-1}$.

La figure 3.35 représente la variation de l'erreur relative pour la même troncation à $\epsilon_2 = 10^{-1}$.

La figure 3.36 représente la variation de l'erreur absolue normalisée si on tronque à $\epsilon_2 = 10^{-2}$.

La figure 3.37 représente la variation de l'erreur relative pour la même troncation à $\epsilon_2 = 10^{-2}$.

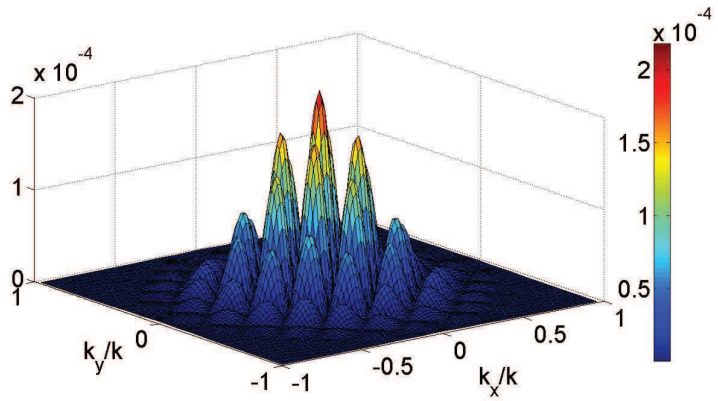
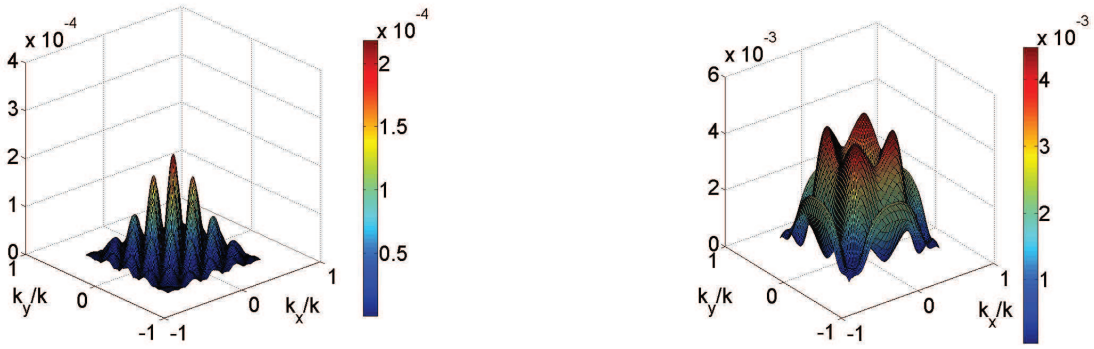


FIGURE 3.33 – Erreur absolue normalisée dans la reconstruction d'un spectre d'ondes planes gaussien (sans troncation dans la DFT, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$).



(a) Sans troncation dans la DFT

(b) Avec troncation dans la DFT

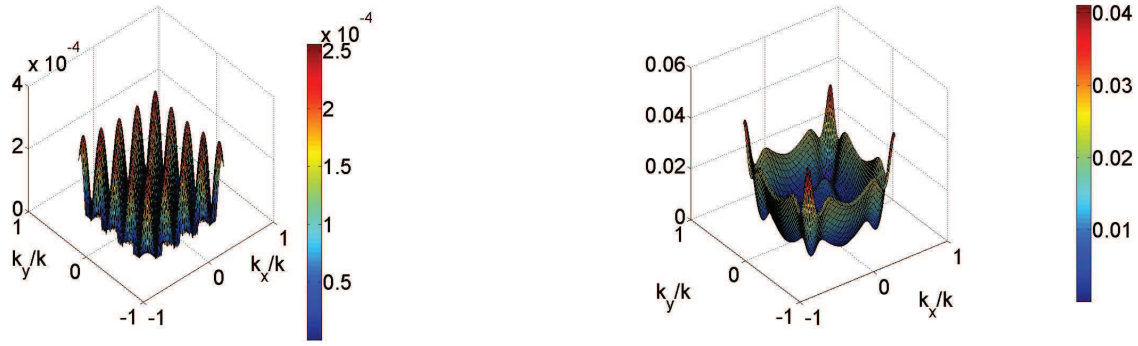
FIGURE 3.34 – Variation de l'erreur absolue normalisée ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$).

Pour cette analyse (avec $\epsilon_2 = 10^{-2}$), le temps de calcul des coefficients sans troncation est de 13.78sec., alors que le temps avec troncation est de 0.78sec., ce qui représente une réduction du 94% du temps de calcul, pour des erreurs absolue et relative qui restent d'un ordre de grandeur très faible.

3.8.1 Variation du seuil relatif (ϵ_3) et taux de compression (TC)

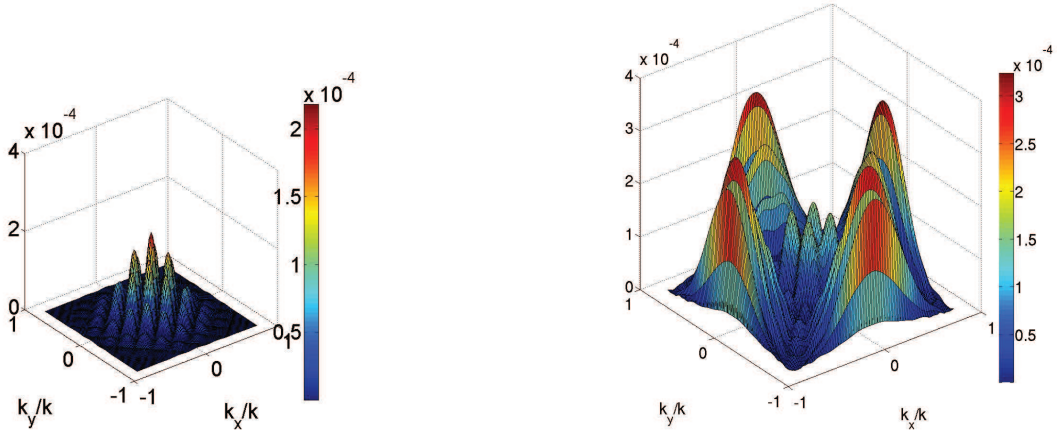
Une nouvelle étape dans l'optimisation du temps de calcul lors de la reconstruction (et plus tard du *lancer de faisceaux*) consiste à supprimer dans les sommation de faisceaux ou de fenêtres gaussiennes (2.54) à (2.56) et (3.31) à (3.34), les coefficients dont la valeur est inférieure à une valeur seuil donnée. Dans ce travail, la valeur seuil est calculée comme suit à partir d'un niveau de seuil relatif :

$$\text{Seuil=Seuil relatif x Valeur absolue maximale des coefficients} \tag{3.37}$$



(a) Sans troncation dans la *DFT* (b) Avec troncation dans la *DFT*

FIGURE 3.35 – Variation de l'erreur relative ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$).



(a) Sans troncation dans la *DFT* (b) Avec troncation dans la *DFT*

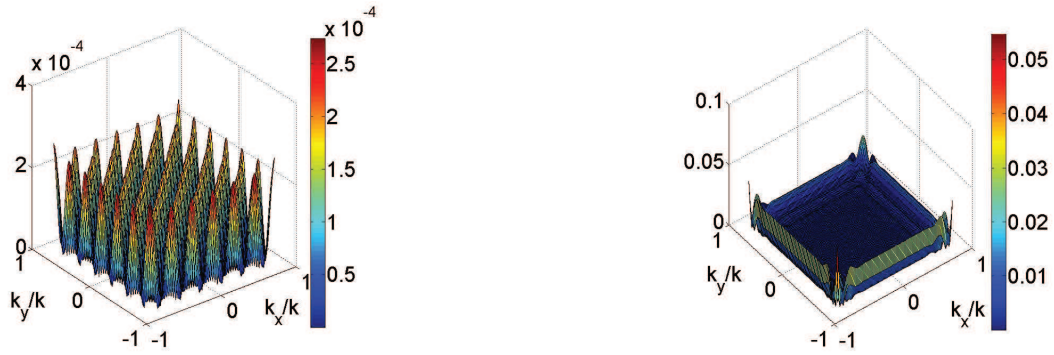
FIGURE 3.36 – Variation de l'erreur absolue normalisée ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$).

Pour quantifier la réduction du nombre de coefficients, nous introduisons le paramètre de *taux de compression* (TC) défini comme suit :

$$\mathrm{TC} = 100\left(1 - \frac{\text{Nombre de coefficients de module } \textit{supérieur} \text{ au seuil}}{\text{Nombre total des coefficients}}\right) \tag{3.38}$$

Pour l'exemple de la source gaussienne, et les paramètres choisis pour la figure 3.32 ($\nu = 0.16$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$), si on fait varier le niveau de *seuil relatif* (ϵ_3) dans (3.37), on constate des variations du taux de compression (TC), du temps de calcul lors de la reconstruction de la fonction source (TeC) et de l'erreur absolue normalisée maximale (EANM). Le tableau 3.1 présente ces variations.

La figure 3.38 représente l'erreur absolue normalisée et l'erreur relative si on tronque à $\epsilon_2 = 10^{-2}$ les fenêtres de frame et si on adopte un niveau de **Seuil relatif** de 10^{-3}. Ces résultats prouvent qu'il est possible, en jouant sur le seuil relatif de compression, de réduire, de 90% le temps de calcul de



(a) Sans troncation dans la *DFT*

(b) Avec troncation dans la *DFT*

FIGURE 3.37 – Variation de l'erreur relative ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$).

ϵ_3	**TC**	**TeC***	**Réduction du TeC**	**EANM**
Sans compression, sans troncation	0%	93.63sec	0%	$2.17.10^{-4}$
Sans compression, avec troncation	0%	87.23sec	6.8%	3.10^{-4}
10^{-6}, avec troncation	55.3%	43.5sec	53.5%	3.10^{-4}
10^{-3}, avec troncation	92.22%	9.75sec	89.6%	$5.95.10^{-4}$
10^{-1}, avec troncation	99.2%	3.27sec	96.5%	0.0598

TABLE 3.1 – Influence du seuil relatif (ϵ_3) de compression ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$).

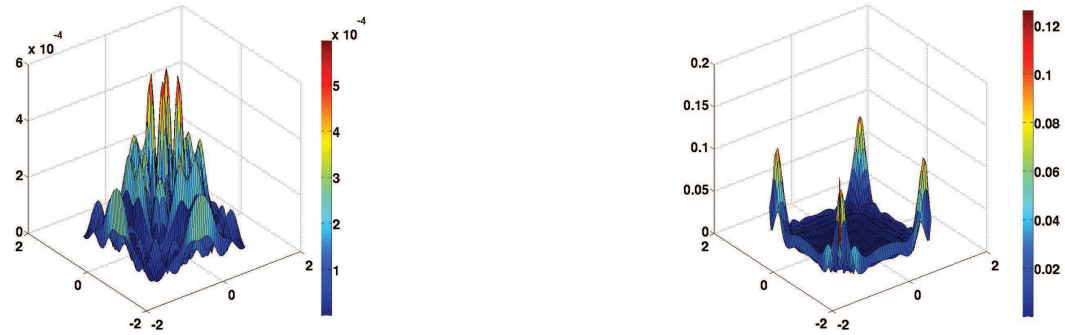
*Temps de reconstruction du spectre source gaussien

la reconstruction, tout en préservant un niveau d'erreur très faible. Lors du calcul du champ rayonné par LFG, le temps de calcul sera réduit dans les mêmes proportions, puisque le nombre de faisceaux à lancer est égal au nombre de coefficients *non négligeables* (de module supérieur au seuil).

La troncation et la compression sont particulièrement importantes pour réduire à la fois le temps de calcul de coefficients et le temps de calcul du LFG. On verra dans la suite que cette réduction est spécialement importante dans le cadre d'une application *sur une antenne réelle*, où on a besoin d'incorporer des modules d'interpolation cubique, qui consomment du temps d'analyse, pour le calcul du champ de chaque faisceau.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi une relation rigoureuse, via le paramètre n_0, entre les pas de translation d'un frame et la densité d'échantillonnage de la TFD utilisée pour calculer les coefficients de décomposition d'une fonction sur ce frame. Nous avons également systématisé l'usage de paramètres



(a) Erreur absolue normalisée

(b) Erreur relative

FIGURE 3.38 – Erreur relative et erreur absolue normalisée, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$ et $\epsilon_3 = 10^{-3}$.

de troncation ϵ_1 (resp. ϵ_2) permettant de limiter la largeur de bande spectrale et spatiale de la fonction à analyser (resp. des fenêtres de frame), et de négliger certains termes dans les sommations de TFD. Ces paramètres permettent d'optimiser le temps de calcul des coefficients de frame, pour une précision donnée, et rendent les algorithmes de calcul de ces coefficients très flexibles.

Nous avons également introduit dans ce chapitre un seuil relatif au-dessous duquel les coefficients de frame sont considérés comme négligeables. Nous avons pu démontrer numériquement qu'il est possible dans certains cas de négliger un grand nombre de coefficients (presque 90% dans l'exemple choisi) sans remettre en cause la précision des résultats. Le taux de compression des fichiers de coefficients ainsi que la variation du temps de calcul et du niveau d'erreur ont été présentés sur un exemple.

Ces développements nouveaux vont être intégrés au calcul des coefficients de frame lors de la mise en œuvre de l'algorithme de partitionnement spectral dans les chapitres suivants.

Chapitre 4

Partition dans le domaine spectral

Dans ce chapitre, on suppose connu le champ lointain d'une antenne. Le champ lointain rayonné dans un demi-espace donné s'exprime en fonction du spectre d'ondes planes dans le plan situé à la frontière de ce demi-espace. Si l'on définit le repère $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ de façon à s'intéresser au rayonnement dans le demi-espace $z > 0$, on a la relation suivante entre le champ lointain et le spectre d'ondes planes dans le plan $(O, \hat{x}, \hat{y})$:

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) \approx \frac{-i}{\lambda r} e^{ikr} \left((\hat{x} - \frac{k_x}{k_z}\hat{z}) cos\theta_j \tilde{E}_x(k_x,k_y) + (\hat{y} - \frac{k_y}{k_z}\hat{z}) cos\theta_j \tilde{E}_y(k_x,k_y) \right) \tag{4.1}$$

avec (r, θ, ϕ) les coordonnées sphériques du point d'observation, $k_x = k \sin\theta \cos\phi$ et $k_y = k \sin\theta \sin\phi$.

Connaissant le champ lointain, il est facile grâce à cette relation d'en déduire les composantes $\left(\tilde{E}_x, \tilde{E}_y\right)$ du spectre d'ondes planes de la source dans le plan $z = 0$ (choisi arbitrairement).

La méthode de LFG classique à partir d'un frame consiste à décomposer le spectre de chaque polarisation $\left(\tilde{E}_x \text{ et } \tilde{E}_y\right)$ sur un frame de Gabor. Les champs des faisceaux gaussiens rayonnés par les fenêtres de frame, pondérés par les coefficients de décomposition sur l'un ou l'autre frame, peuvent alors être superposés pour calculer le champ rayonné en tout point du demi-espace $z > 0$.

Cette méthode *classique* présente deux inconvénients :

- le champ n'est calculé que dans un demi-espace, la représentation de champs *omnidirectionnels* n'est pas possible.
- le champ proche du plan de décomposition est mal représenté car les faisceaux rayonnés par les fenêtres les plus translatées dans le domaine spectral sont peu paraxiaux (formule paraxial peu précise).

Pour pouvoir lancer les faisceaux dans tout l'espace, ce chapitre propose d'exprimer le champ lointain comme la somme de six *champs lointains partiels*, présents chacun dans un demi-espace. Le spectre d'ondes planes de chaque *champ lointain partiel* (spectre *partiel*) est défini dans un plan différant.

Chaque spectre partiel est obtenu en multipliant le spectre du champ source par une fonction de partition de l'unité. C'est pourquoi nous appelons cette méthode *partitionnement spectral*.

Tout d'abord, pour faciliter la compréhension de la formulation théorique du partitionnement spectral, il convient d'introduire des généralités sur les fenêtres de partition.

4.1 Généralités sur la partition de l'unité

Une partition de l'unité est une famille de fonctions positives $(\chi_j)_{j\in J}$ telles que, en chaque point, la somme sur toutes les fonctions des valeurs prises par chacune d'elle vaut 1 : $\sum_{j\in J} \chi_j(x) = 1$.

Dans ce travail, on cherche à utiliser des fonctions χ_j dont la largeur de bande après la transformée de Fourier est minimale. Dans les cas de partition selon une variable, les fonctions χ_j peuvent être obtenues par translation d'une fonction χ centrée à l'origine. On impose à χ les contraintes suivantes :

- $\chi(-x) = \chi(x)$ (symétrie)
- $\chi(x) = 1$ $0 \leq x \leq k_L$
- $\chi(x) = f(x - k_L)$ $k_L \leq x \leq k_L + \delta$
- $\chi(x) = 0$ $x \geq k_L + \delta$

où δ et k_L sont des valeurs qui définissent la région de transition de χ. $f(x)$ est appelée *fonction de transition*. Elle doit assurer une transition suffisamment *douce* pour minimiser la largeur de bande de $TF[\chi]$.

La fenêtre de Hann est utilisée en traitement de signal car elle satisfait cette contrainte. Elle est définie sur un intervalle $[-\delta, \delta]$ (figure 4.1) par :

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(1 + cos\frac{\pi}{\delta}x\right) \qquad \text{pour } x \geq 0 \tag{4.2}$$

Par symétrie, on en déduit :

$$h(x) = h(-x) = \frac{1}{2}\left(1 + cos\frac{\pi}{\delta}x\right) \qquad \text{pour } x \leq 0. \tag{4.3}$$

du

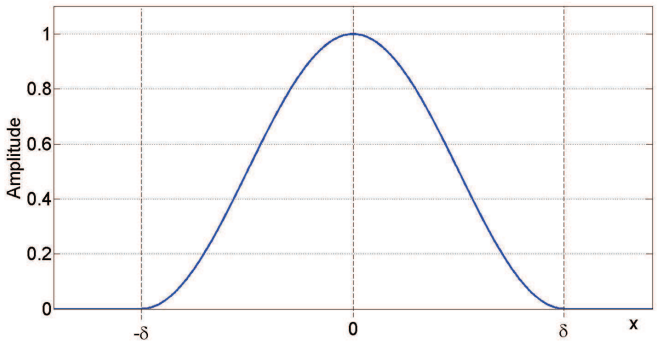


FIGURE 4.1 – Fenêtre de Hann.

La figure 4.2 représente une fonction de partition χ pour laquelle la fonction de transition est définie à partir d'une fenêtre de Hann comme suit :

$$\begin{aligned}
\chi(x) =& 0 && x \leq -k_L - \delta \\
\chi(x) =& h(x + k_L) = \frac{1}{2}\left(1 + cos\frac{\pi}{\delta}(x + k_L)\right) && -k_L - \delta \leq x \leq -k_L \\
\chi(x) =& 1 && -k_L \leq x \leq k_L \\
\chi(x) =& h(x - k_L) = \frac{1}{2}\left(1 + cos\frac{\pi}{\delta}(x - k_L)\right) && k_L \leq x \leq k_L + \delta \\
\chi(x) =& 0 && x \geq k_L + \delta
\end{aligned} \tag{4.4}$$

La figure 4.3 représente la superposition de deux fonctions de partition χ_0 et χ_1. $\chi_0 = \chi$ et χ_1 est obtenue par translation de χ de $2k_L + \delta$: $\chi_1(x) = \chi(x - (2k_L + \delta))$ où χ est définie comme ci-dessus avec une fonction de transition déduite de la fenêtre de Hann. Sur l'intervalle *de transition* $[k_L, k_L + \delta]$ on vérifie que :

$$\begin{aligned}
\chi_0(x) + \chi_1(x) &= \chi(x) + \chi(x - 2k_L - \delta) \\
&= f(x - k_L) + f(-x + 2k_L + \delta - k_L) \\
&= h(x - k_L) + h(k_L + \delta - x) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + cos\frac{\pi}{\delta}(x - k_L)\right) + \frac{1}{2}\left(1 + cos\frac{\pi}{\delta}(k_L + \delta - x)\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

avec h la fonction de Hann définie par les équations (4.2) et (4.3).

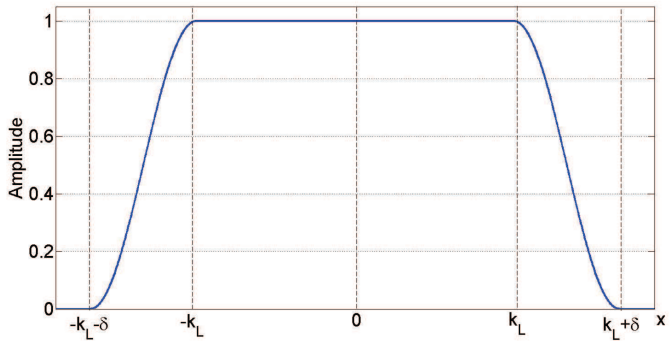


FIGURE 4.2 – Fonction de partition χ.

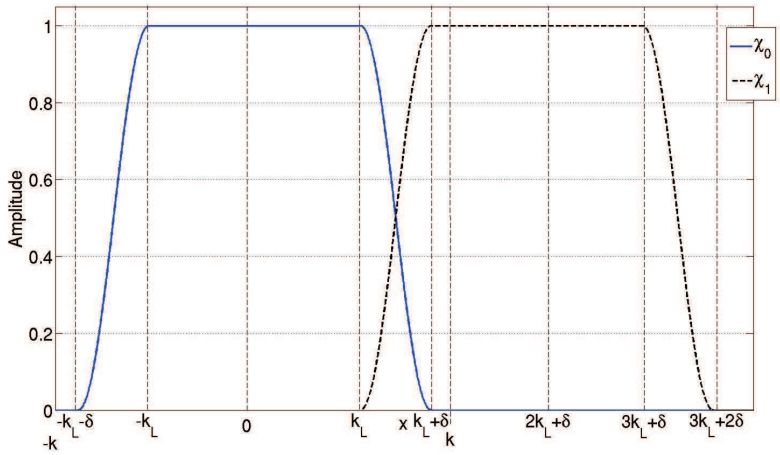


FIGURE 4.3 – Fonctions χ_0 et χ_1.

On observe sur la figure 4.3 que les paramètres k_L et δ déterminent la largeur des intervalles où χ_0 et χ_1 sont égales à 0 et 1.

Dans la suite, nous utiliserons des fonctions de partitionnement de ce type pour définir six fonctions de partitionnement spectral χ_j à deux variables (k_{x_j}, k_{y_j}) dans six plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, .., 6$.

4.2 Formulation théorique du partitionnement spectral

Dans l'espace tridimensionnel et dans le repère global $(O', \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ nous allons définir six repères $(O', \hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{z}_j)$ associés aux six plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, .., 6$ (figure 4.5) définis par $\mathcal{P}_j = (O', \hat{x}_j, \hat{y}_j)$.

Les bases de ces différents repères sont définies dans le tableau 4.1 et une vue éclatée des différents plans $\mathcal{P}_j$, et de leurs variables associées (k_{x_j}, k_{y_j}) est présentée en figure 4.4.

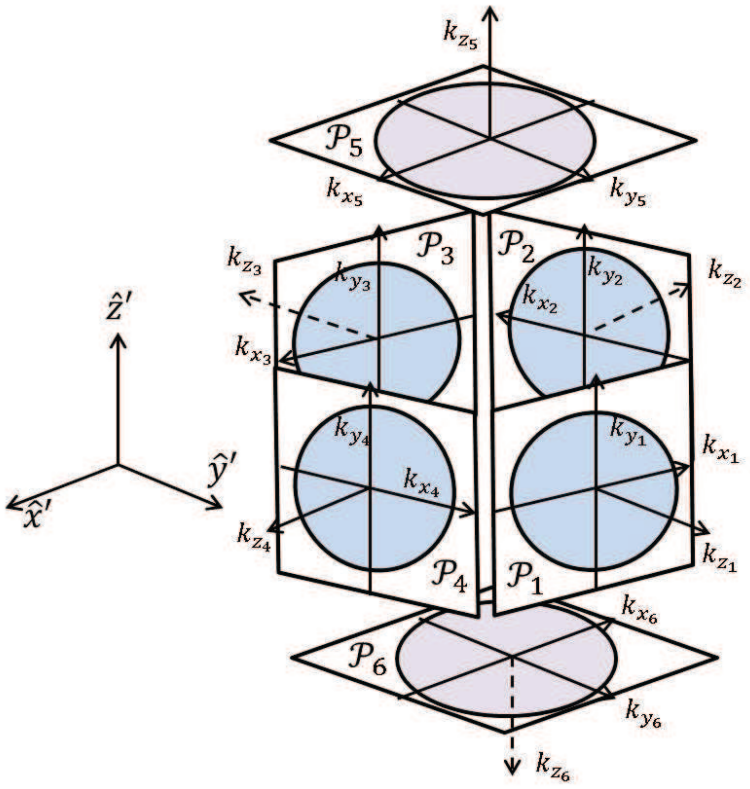


FIGURE 4.4 – Vue éclatée des plans $\mathcal{P}_j$, et des repères associés.

$--$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$\hat{x}_j$	$-\hat{x}'$	$-\hat{y}'$	$\hat{x}'$	$\hat{y}'$	$\hat{x}'$	$-\hat{x}'$
$\hat{y}_j$	$\hat{z}'$	$\hat{z}'$	$\hat{z}'$	$\hat{z}'$	$\hat{y}'$	$\hat{y}'$
$\hat{z}_j$	$\hat{y}'$	$-\hat{x}'$	$-\hat{y}'$	$\hat{x}'$	$\hat{z}'$	$-\hat{z}'$

TABLE 4.1 – Relation entre les repères.

Un spectre d'ondes planes défini dans un plan $\mathcal{P}_j$ rayonne dans le demi-espace $z_j \geq 0$, appelé HS_j.

Les composantes du champ électrique rayonné dans le demi-espace HS_j, que nous noterons $\vec{E}^{(j)}$, s'expriment en fonction du spectre d'ondes planes $\vec{\tilde{E}}^{(j)}$ défini dans le plan correspondant $\mathcal{P}_j$, comme suit :

$$E^{(j)}_{\alpha_j}(r_j, \theta_j, \phi_j) \approx \frac{-i}{\lambda r_j} e^{ikr_j} cos\theta_j \tilde{E}^{(j)}_{\alpha_j}(k_{x_j}, k_{y_j}) \qquad \alpha_j = x_j, y_j, z_j \tag{4.5}$$

avec (r_j, θ_j, ϕ_j) les coordonnées sphériques du point d'observation dans le repère $(O', \hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{z}_j)$, $k_{x_j} = ksin\theta_j cos\phi_j$, et $k_{y_j} = ksin\theta_j sin\phi_j$.

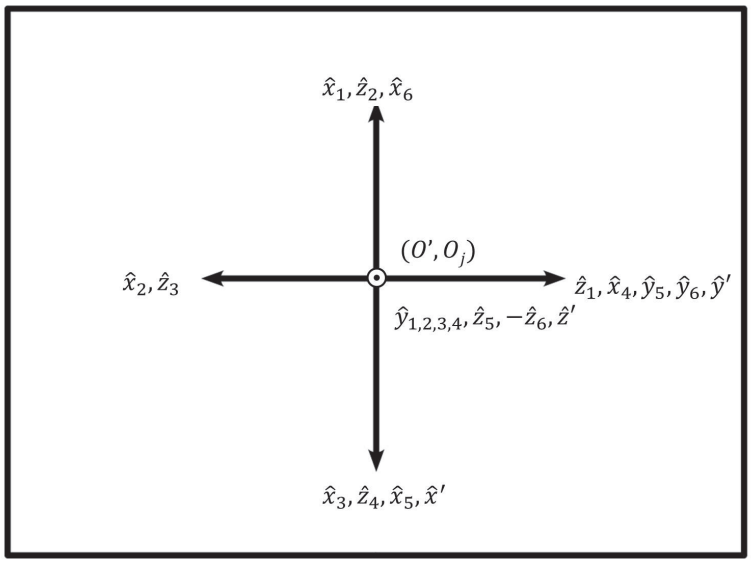


FIGURE 4.5 – Relation entre les repères.

Les fonctions de partitionnement spectral χ_j définies dans chaque plan $\mathcal{P}_j$ seront appelées *fonctions caractéristiques* dans la suite. Ces fonctions caractéristiques χ_j sont prises nulles hors du domaine visible, c'est-à-dire :

$$\chi_j(k_{x_j}, k_{y_j}) = 0 \qquad \text{si} \qquad k_{x_j}^2 + k_{y_j}^2 > k^2 \tag{4.6}$$

et permettent de définir des spectres partiels par :

$$\tilde{E}_{\alpha_j}^{\chi(j)}(k_{x_j}, k_{y_j}) = \tilde{E}_{\alpha_j}^{(j)}(k_{x_j}, k_{y_j})\chi_j(k_{x_j}, k_{y_j}) \qquad \alpha_j = x_j, y_j, z_j \tag{4.7}$$

On peut alors exprimer les composantes du champ électrique partiel $E_{\alpha_j}^{\chi(j)}$ rayonné en champ lointain par le spectre d'ondes planes partiel au point M de coordonnées sphériques (r_j, θ_j, ϕ_j) dans le repère j, et (r', θ', ϕ') dans le repère global, comme suit :

$$E_{\alpha_j}^{\chi(j)}(M) \approx \frac{-i}{\lambda r_j} e^{ikr_j} cos\theta_j \tilde{E}_{\alpha_j}^{\chi(j)}(k_{x_j}, k_{y_j}) \qquad \alpha_j = x_j, y_j, z_j \tag{4.8}$$

avec $cos\theta_j = \frac{k_{z_j}}{k}$, et $r_j = r'$ quel que soit j $(O_j = O')$.

Tout point M dans l'espace appartient à trois HS_j. On notera J l'ensemble des indices j tels que $M \in HS_j$. On peut donc obtenir la valeur du champ électrique rayonné en champ lointain en un point M de quatre manières différentes : trois en utilisant directement l'équation (4.5), dans l'un des demi-espaces HS_j, $j \in J$; la quatrième par addition des champs partiels définis par l'équation (4.8). On peut donc écrire :

$$\vec{E}^{(j')}(M) = \sum_{j \in J} \vec{E}^{\chi(j)}(M) \qquad \text{pour} \qquad j' \in J \tag{4.9}$$

Nous allons utiliser cette relation, avec $j' = 1$, pour déterminer les relations entre les différentes fonctions caractéristiques. Compte tenu de la définition des repères (figure 4.5 et table 4.1), on peut exprimer le champ $\vec{E}^{(1)}$ dans la région $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \phi' < \pi$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x_1}^{(1)} \\ E_{y_1}^{(1)} \\ E_{z_1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x_1}^{\chi(1)} + E_{z_2}^{\chi(2)} - E_{x_5}^{\chi(5)} \\ E_{y_1}^{\chi(1)} + E_{y_2}^{\chi(2)} + E_{z_5}^{\chi(5)} \\ E_{z_1}^{\chi(1)} - E_{x_2}^{\chi(2)} + E_{y_5}^{\chi(5)} \end{bmatrix}$$

Grâce à l'équation (4.8) on en déduit :

$$k_{z_1} \begin{bmatrix} +\tilde{E}_{x_1}^{(1)} \\ +\tilde{E}_{y_1}^{(1)} \\ +\tilde{E}_{z_1}^{(1)} \end{bmatrix} (k_{x_1}, k_{y_1}) = k_{z_1} \begin{bmatrix} +\tilde{E}_{x_1}^{\chi(1)} \\ +\tilde{E}_{y_1}^{\chi(1)} \\ +\tilde{E}_{z_1}^{\chi(1)} \end{bmatrix} (k_{x_1}, k_{y_1}) + k_{z_2} \begin{bmatrix} +\tilde{E}_{z_2}^{\chi(2)} \\ +\tilde{E}_{y_2}^{\chi(2)} \\ -\tilde{E}_{x_2}^{\chi(2)} \end{bmatrix} (k_{x_2}, k_{y_2}) + k_{z_5} \begin{bmatrix} -\tilde{E}_{x_5}^{\chi(5)} \\ +\tilde{E}_{z_5}^{\chi(5)} \\ +\tilde{E}_{y_5}^{\chi(5)} \end{bmatrix} (k_{x_5}, k_{y_5})$$

où (k_{x_j}, k_{y_j}), $j \in J$, sont les projections du vecteur d'onde $\vec{k} = k(sin\theta' cos\phi', sin\theta' sin\phi', cos\phi')$ dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j \in J$. Pour $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \phi' < \pi$, on en déduit, à l'aide du tableau 4.1 : $k_{x_1} < 0$, $k_{y_1} > 0$; $k_{x_2} < 0$, $k_{y_2} > 0$; $k_{x_5} > 0$, $k_{y_5} > 0$; par ailleurs, par définition des $HS_j (j \in J)$, $k_{z_j} > 0 (j \in J)$.

On en déduit :

$$\vec{\tilde{E}}^{(1)}(k_{x_1}, k_{y_1}) = \vec{\tilde{E}}^{(1)}(k_{x_1}, k_{y_1}) \chi_1(k_{x_1}, k_{y_1}) + \frac{k_{z_2}}{k_{z_1}} \vec{\tilde{E}}^{(2)}(k_{x_2}, k_{y_2}) \chi_2(k_{x_2}, k_{y_2}) + \frac{k_{z_5}}{k_{z_1}} \vec{\tilde{E}}^{(5)}(k_{x_5}, k_{y_5}) \chi_5(k_{x_5}, k_{y_5})$$

En utilisant (4.8) et la relation (A.6) entre spectres définis dans deux plans, on aboutit à :

$$\vec{\tilde{E}}^{(1)}(k_{x_1}, k_{y_1}) = \vec{\tilde{E}}^{(1)}(k_{x_1}, k_{y_1}) \left[\chi_1(k_{x_1}, k_{y_1}) + \chi_2(k_{x_2}, k_{y_2}) + \chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) \right]$$

D'où :

$$\chi_1(k_{x_1}, k_{y_1}) + \chi_2(k_{x_2}, k_{y_2}) + \chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) = 1 \tag{4.10}$$

On a ainsi démontré que pour une direction de rayonnement définie par $0 < \theta' < \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \phi' < \pi$, donc appartenant aux demi-espaces $z_1 > 0$ (HS_1), $z_2 > 0$ (HS_2) et $z_5 > 0$ (HS_5), les fonctions de partitionnement χ_1, χ_2 et χ_5 vérifient la relation classique :

$$\sum_{j \in J} \chi_j = 1 \qquad \text{avec } J = \{1, 2, 5\}$$

Ce résultat peut être généralisé aux autres régions de l'espace, avec les ensembles J et les domaines de variation des k_{α_j} $(\alpha_j = x, y, z)$ correspondants.

4.3 Définition des fonctions caractéristiques

Outre la relation (4.10) nous choisissons d'imposer aux fonctions caractéristiques dans les six plans les contraintes suivantes :

1) Les fonctions caractéristiques dans le plan supérieur $\mathcal{P}_5$ et inférieur $\mathcal{P}_6$, possèdent une symétrie cylindrique autour de l'axe z_j ($j = 5$ ou 6).

2) Les fonctions caractéristiques dans les plans latéraux ($\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ ou $\mathcal{P}_4$) sont de la forme suivante :

$$\chi_j(k_{x_j}, k_{y_j}) = \chi_{jx}(k_{x_j}, k_{y_j})\chi_{jy}(k_{y_j}) \qquad \text{avec} \qquad j = 1, .., 4 \tag{4.11}$$

La fonction $\chi_{jy}(k_{y_j})$ réalise le partitionnement avec les fonctions caractéristiques dans le plan supérieur ou inférieur.

Tout d'abord pour faciliter la compréhension de la définition des fonctions caractéristiques nous nous limiterons dans cette présentation au demi-espace *supérieur* HS_5 où $0 \leq \theta' \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Le tableau 4.2 indique quelles fonctions caractéristiques se combinent pour réaliser la partition de l'unité suivant les sous-régions de ce demi-espace. Un tableau analogue est obtenu dans le demi-espace *inférieur* $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi$ où χ_6 joue le rôle de χ_5.

$0 \leq \phi' \leq \frac{\pi}{2}$	$\chi_1 + \chi_4 + \chi_5 = 1$
$\frac{\pi}{2} \leq \phi' \leq \pi$	$\chi_1 + \chi_2 + \chi_5 = 1$
$\pi \leq \phi' \leq \frac{3\pi}{2}$	$\chi_3 + \chi_2 + \chi_5 = 1$
$\frac{3\pi}{2} \leq \phi' \leq 2\pi$	$\chi_3 + \chi_4 + \chi_5 = 1$

TABLE 4.2 – Combinaison des fonctions caractéristiques dans la région $0 \leq \theta' \leq \dfrac{\pi}{2}$.

D'après l'hypothèse 1), χ_5 est une fonction de $k_{r_5} = \sqrt{k_{x_5}^2 + k_{y_5}^2}$. Par analogie avec les fonctions de partition introduites dans la section 4.1, $\chi_5(k_{x_5}, k_{y_5})$ sera définie dans trois intervalles, dont un intervalle *de transition* limité par k_{L_v} et $k_{L_v} + \delta_v$.

On utilisera dans la suite le fait que dans le demi-espace HS_5 : $k_{y_j} = k_{z_5} = \sqrt{k^2 - k_{r_5}^2}$ ($j = 1, ..., 4$).

Si $0 \leq k_{r_5} \leq k_{L_v}$ $\left(0 \leq \theta' \leq \theta_{L_v}\right)$**, avec** $\cos\theta_{L_v} = \dfrac{k_{L_v}}{k}$**, alors** $\chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) = 1$.

Quels que soient les demi-espaces ($j = 1, .., 4$) dans lesquels se trouve un point donné, les χ_j correspondant sont alors nuls pour les $k_{y_j} \in \left[\sqrt{k^2 - k_{L_v}^2}, k\right]$.

Si $k_{L_v} \leq k_{r_5} \leq (k_{L_v} + \delta_v)$ $(\theta_{L_v} \leq \theta' \leq \theta_{(L_v+\delta_v)})$**, avec** $\cos\theta_{(L_v+\delta_v)} = \dfrac{k_{L_v} + \delta_v}{k}$**,** k_{z_5} **appartient à l'intervalle de transition de** χ_5 **:**

- $\chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) = h_v(k_{r_5})$ où h_v se déduit de la fonction de *Hann* h :

$$h_v(k_{r_5}) = h(k_{r_5} - k_{L_v}) = \frac{1}{2}\left(1 + cos(\frac{\pi}{\delta_v}(k_{r_5} - k_{L_v})\right) \tag{4.12}$$

- d'après l'hypothèse 2) (et tableau (4.2)) : $\chi_{jy}(k_{y_j}) = \chi_{iy}(k_{y_i}) = 1 - h_v(k_{r_5})$ et $k_{y_j} = k_{y_i} = \sqrt{k^2 - k_{r_5}}$.

- $\chi_{jx}(k_{x_j}, k_{y_j}) + \chi_{ix}(k_{x_j}, k_{y_j}) = 1 \qquad$ avec $j = 1$ ou 3, $i = 2$ ou 4.

Sur la base du tableau (4.1) on obtient alors :

- Pour $0 \leq \phi' \leq \dfrac{\pi}{2}$ $(HS_1 \cap HS_4)$:

$$\begin{aligned}\chi_{4y}(k_{y_4}) = \chi_{1y}(k_{y_1}) &= 1 - \chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) = 1 - h_v(k_{r_5}) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - cos(\frac{\pi}{\delta_v}(\sqrt{k^2 - k_{y_j}^2} - k_{Lv})\right) \qquad , j = 4, 1,\end{aligned}$$

- Pour $\dfrac{\pi}{2} \leq \phi' \leq \pi$ $(HS_1 \cap HS_2)$:

$$\begin{aligned}\chi_{1y}(k_{y_1}) = \chi_{2y}(k_{y_2}) &= 1 - \chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - cos(\frac{\pi}{\delta_v}(\sqrt{k^2 - k_{y_j}^2} - k_{Lv})\right) \qquad , j = 1, 2,\end{aligned}$$

- Pour $\pi \leq \phi' \leq \dfrac{3\pi}{2}$ $(HS_2 \cap HS_3)$:

$$\begin{aligned}\chi_{2y}(k_{y_2}) = \chi_{3y}(k_{y_3}) &= 1 - \chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - cos(\frac{\pi}{\delta_v}(\sqrt{k^2 - k_{y_j}^2} - k_{Lv})\right) \qquad , j = 2, 3,\end{aligned}$$

– Pour $\frac{3\pi}{2} \leq \phi' \leq 2\pi$, $(HS_3 \cap HS_4)$

$$\begin{aligned}\chi_{3y}(k_{y_3}) = \chi_{4y}(k_{y_4}) &= 1 - \chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - cos(\frac{\pi}{\delta_v}(\sqrt{k^2 - k_{y_j}^2} - k_{Lv})\right) \qquad , j = 3, 4,\end{aligned}$$

Si $(k_{L_v} + \delta_v) \leq k_{r_5} \leq k$ $\left(\theta_{(L_v+\delta_v)} \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}\right)$**, avec** $\cos\theta_{(L_v+\delta_v)} = \frac{k_{L_v} + \delta_v}{k}$**, alors** $\chi_5(k_{x_5}, k_{y_5}) = 0$.

Dans cet intervalle on déduit du tableau 4.3 les combinaisons entre fonctions caractéristiques des plans latéraux, dans les différentes régions en fonction de ϕ', pour $\theta' \in \left[\theta_{(L_v+\delta_v)}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$0 \leq \phi' \leq \frac{\pi}{2}$	$\chi_1 + \chi_4 = 1$
$\frac{\pi}{2} \leq \phi' \leq \pi$	$\chi_1 + \chi_2 = 1$
$\pi \leq \phi' \leq \frac{3\pi}{2}$	$\chi_3 + \chi_2 = 1$
$\frac{3\pi}{2} \leq \phi' \leq 2\pi$	$\chi_3 + \chi_4 = 1$

TABLE 4.3 – Combinaison des fonctions caractéristiques dans la région $\theta_{(L_v+\delta_v)} \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$.

Dans cet intervalle l'hypothèse 2) entraîne que :

– $\chi_{jy} = 1 \qquad$ pour $\qquad j = 1, .., 4.$

– Le partitionnement selon k_{x_j} est réalisé par les fonctions caractéristiques χ_j des plans latéraux, et plus précisément par les fonctions χ_{jx} $(j = 1, .., 4)$

Pour simplifier, nous étudions d'abord le cas où $\frac{\pi}{2} \leq \phi' \leq \pi$. On a alors :
$\chi_{1x}(k_{x_1}, k_{y_1}) + \chi_{2x}(k_{x_2}, k_{y_2}) = 1$ avec k_{x_1} positif, k_{x_2} négatif et $k_{y_1} = k_{y_2} = k_{z_5}$.

On peut définir χ_{1x} de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\chi_{1x}(k_{x_1}, k_{y_1}) &= 1 && 0 \leqslant k_{x_1} \leqslant k_{L_h} \\ \chi_{1x}(k_{x_1}, k_{y_1}) &= h_x(k_{x_1}) && k_{L_h} \leqslant k_{x_1} \leqslant k_{L_h} + \delta_h \\ \chi_{1x}(k_{x_1}, k_{y_1}) &= 0 && k_{L_h} + \delta_h \leqslant k_{x_1} \leqslant k_h\end{aligned}$$

$$\text{avec} \qquad k_h(k_{y_1}) = \sqrt{k^2 - k_{y_1}^2} = k_{r_5} \tag{4.13}$$

en utilisant une fonction de transition h_x déduite de la fonction de Hann :

$$h_x(k_{x_1}) = \frac{1}{2}\left(1 + cos\left(\frac{\pi}{\delta_h}(k_{x_1} - k_{L_h})\right)\right) \tag{4.14}$$

δ_h et k_{L_h} sont les paramètres définissant le domaine de transition le long de l'axe k_{x_1}. Ils dépendent de k_{y_1} car ils doivent vérifier :

$$k_{L_h}(k_{y_1}) + \delta_h(k_{y_1}) < k_h(k_{y_1})$$

Sachant que $k_{x_2} = -k_{z_1} = -\sqrt{k^2 - k_{x_1}^2 - k_{y_1}^2} = -\sqrt{k_h^2 - k_{x_1}^2}$, on peut déduire χ_{2x} de χ_{1x} de la façon suivante :

$k_{L_h} + \delta_h \leq k_{x_1} \leq k_h$	$-\sqrt{k_h^2 - (k_{L_h} + \delta_h)^2} \leq k_{x_2} \leqslant 0$
$\chi_{1x}(k_{x_1}, k_{y_1}) = 0$	$\chi_{2x}(k_{x_2}, k_{y_2}) = 1$
$k_{L_h} \leq k_{x_1} \leq k_{L_h} + \delta_h$	$-\sqrt{k_h^2 - k_{L_h}^2} \leq k_{x_2} \leq -\sqrt{k_h^2 - (k_{L_h} + \delta_h)^2}$
$\chi_{1x}(k_{x_1}, k_{y_1}) = h_x(k_{x_1})$	$\chi_{2x}(k_{x_2}, k_{y_2}) = g_x(k_{x_2}) = 1 - h_x(k_{x_1})$
$0 \leq k_{x_1} \leq k_{L_h}$	$-k_h \leq k_{x_2} \leq -\sqrt{k_h^2 - k_{L_h}^2}$
$\chi_{1x}(k_{x_1}, k_{y_1}) = 1$	$\chi_{2x}(k_{x_2}, k_{y_2}) = 0$

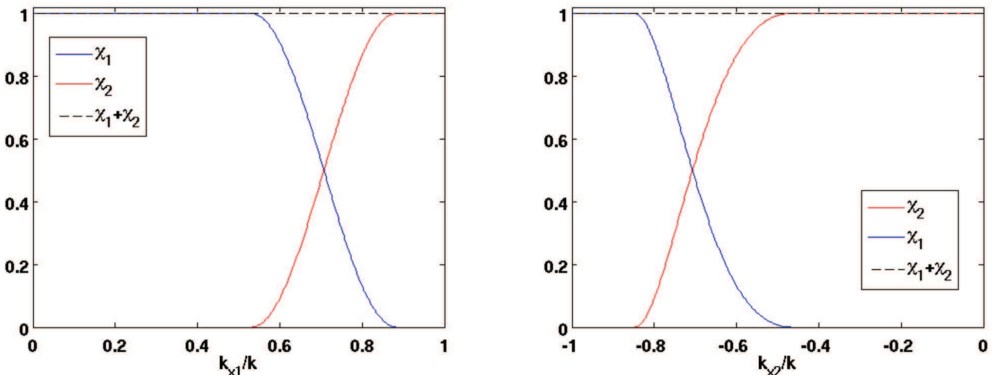
TABLE 4.4 – Définition mathématique de χ_{2x}.

avec $k_h = k_h(k_{y_2}) = \sqrt{k^2 - k_{y_2}^2} = k_h(k_{y_1})$ et k_{L_h}, δ_h fonctions de k_{y_j} $(j = 1, 2)$. L'expression de g_x se déduit de l'équation (4.14) :

$$g_x(k_{x_2}) = 1 - h_x(k_{x_1}) = \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{\delta_h}(k_{x_1} - k_{L_h})\right)\right) \tag{4.15}$$

avec $k_{x_1} = \sqrt{k_h^2 - k_{x_2}^2}$.

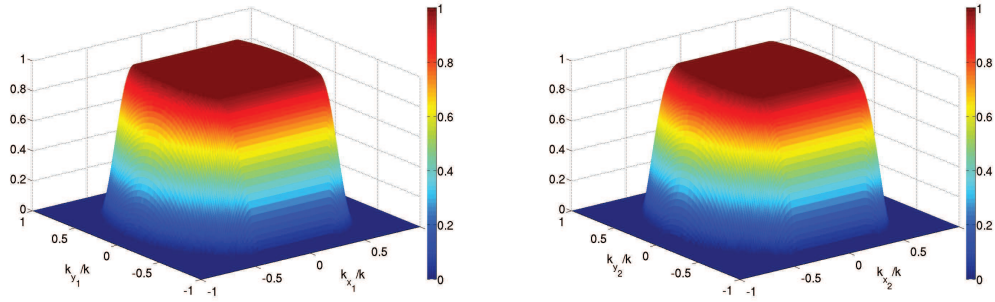
Sur la figure 4.6 deux fonctions $\chi_1(k_{x_1}, k_{y_1}), \chi_2(k_{x_2}, k_{y_2})$ sont représentées en $k_{y_1} = k_{y_2} = 0$ en fonction des variables spectrales k_{x_1} (figure 4.6a) et k_{x_2} (figure 4.6b) pour un choix des paramètres k_{L_h}, δ_h défini par (4.16) et (4.17). D'après la définition de χ_j $(j = 1, 4)$: $\chi_j(k_{x_j}, k_{y_j}) = \chi_{jy}(k_{y_j})\chi_{jx}(k_{x_j}, k_{y_j})$ et $\chi_{jy}(0) = 1$, $j = 1, .., 4$. Donc $\chi_j(k_{x_j}, 0) = \chi_{jx}(k_{x_j}, 0)$. On utilise le fait que $k_{x_1} = \sqrt{k^2 - k_{x_2}^2}$ et $k_{x_2} = -\sqrt{k^2 - k_{x_1}^2}$ pour $k_{y_1} = k_{y_2} = 0$ (figure 4.5).



(a) Selon k_{x_1} (b) Selon k_{x_2}

FIGURE 4.6 – Fonctions $\chi_{1x}(k_{x_1}, 0)$ et $\chi_{2x}(k_{x_2}, 0)$.

Les fonctions χ_1 et χ_2 étant ainsi définies respectivement pour $k_{x_1} \geq 0$, $k_{y_1} \geq 0$ et pour $k_{x_2} \leq 0$, $k_{y_2} \geq 0$, elles sont entièrement définies par symétrie pour toutes les valeurs de k_{x_j}, k_{y_j} $(j = 1, 2)$. Il est alors facile de vérifier qu'avec $\chi_3 = \chi_1$, $\chi_4 = \chi_2$ et $\chi_6 = \chi_5$ (en tant que fonctions de deux variables réelles k_x, k_y) toutes les relations $\sum_{j \in J} \chi_j = 1$ sont vérifiées dans tout l'espace. La figure 4.7 représente les fonctions caractéristiques χ_1 et χ_2 dans les plans latéraux $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. La figure 4.8 représente dans le plan $\mathcal{P}_5$ la fonction caractéristique χ_5 , qui possède la symétrie cylindrique autour de l'axe z_5.



(a) $\chi_1(k_{x_1}, k_{y_1})$ (b) $\chi_2(k_{x_2}, k_{y_2})$

FIGURE 4.7 – Fonctions χ_1 et χ_2.

La figure 4.9 représente les fonctions caractéristiques χ_1, χ_2 et χ_5 par rapport au domaine visible.

Le choix des paramètres k_L et δ influe sur la largeur de la fonction à analyser dans l'espace transformé. Si l'on souhaite que les fonctions de partitionnement soient de largeurs similaires dans les différents plans, la valeur de $k_{L_\beta} + \frac{\delta_\beta}{2}$ doit être de $\frac{k_\beta}{\sqrt{2}}$ $(\beta = v, h)$. Le choix du paramètre δ_β obéit à un com-

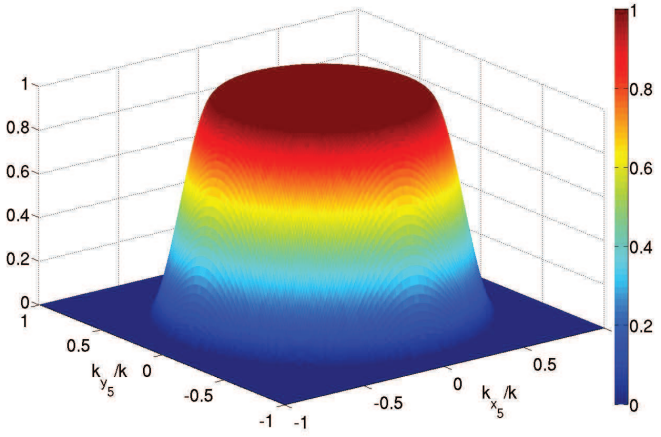


FIGURE 4.8 – Fonction $\chi_5(k_{x_5}, k_{y_5})$.

promis entre largeur spectrale-largeur spatiale : plus δ_β est faible plus la troncation est abrupte dans le domaine spectral, ce qui élargit la bande dans le domaine spatial. Pour une évaluation numérique, nous proposons les valeurs particulières des variables de transition pour $j = 1, .., 4$ comme suit :

$$\delta_h(k_{y_j}) = \frac{\sqrt{k^2 - k_{y_j}^2}}{2\sqrt{2}} \tag{4.16}$$

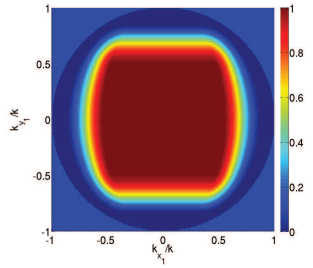
$$k_{L_h}(k_{y_j}) = \frac{\sqrt{k^2 - k_{y_j}^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\delta_h(k_{y_j})}{2} \tag{4.17}$$

$$\delta_v = \frac{k}{2\sqrt{2}} \tag{4.18}$$

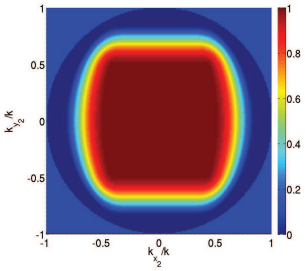
$$k_{Lv} = \frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{\delta_v}{2} \tag{4.19}$$

L'équation (4.10) de partition de l'unité ($\chi_1 + \chi_2 + \chi_5 = 1$) est valide sur le domaine $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \phi' < \pi$. Tout l'espace tridimensionnel peut être subdivisé en 8 domaines correspondant à des intervalles de largeur $\frac{\pi}{2}$ selon θ' et ϕ'.

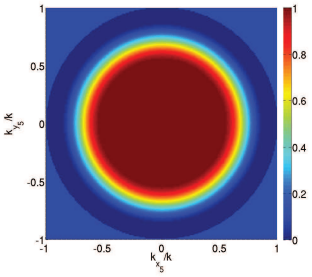
On doit remarquer que chacun de ces domaines est égal à d'intersection de trois HS_j, l'un supérieur ou inférieur (HS_5 ou HS_6) et les deux autres *latéraux*. L'équation de partition de l'unité dans chaque domaine est donc de la forme : $\chi_{j_1} + \chi_{j_2} + \chi_{j_3} = 1$, avec $j_1 \in \{5, 6\}$ et $\{j_2, j_3\} \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j_2 \neq j_3$. Les valeurs exactes de j_1, j_2, j_3 se déduisent de la définition des plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, .., 6$.



(a) $\chi_1(k_{x_1}, k_{y_1})$



(b) $\chi_2(k_{x_2}, k_{y_2})$

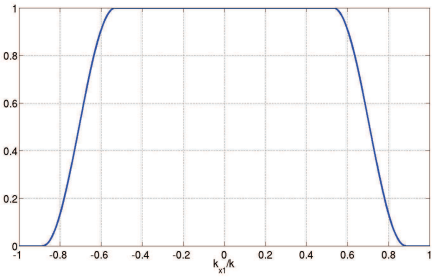


(c) $\chi_5(k_{x_5}, k_{y_5})$

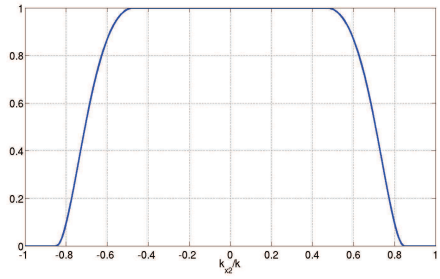
FIGURE 4.9 – Fonctions χ_1 χ_2 et χ_5.

4.4 Influence des fonctions caractéristiques sur le calcul des coefficients

La figure 4.10 représente la variation de χ_{1x} et χ_{2x} le long de l'axe k_{x_j}, $j = 1, 2$. La fonction χ_{1x} définie précédemment a pour transformée de Fourier inverse :



(a) χ_{1x}



(b) χ_{2x}

FIGURE 4.10 – Fonctions selon l'axe k_{x_1} ou k_{x_2}.

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{1x}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-k_{L_h}-\delta_h}^{-k_{L_h}} \frac{1}{2}\left(1-\cos(\frac{\pi}{\delta_h}k_{x_1}+k_{L_h}+\delta_h)\right)e^{ik_{x_1}x}dk_{x_1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-k_{L_h}}^{k_{L_h}} e^{ik_{x_1}x}dk_{x_1}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{k_{L_h}}^{k_{L_h}+\delta_h}\frac{1}{2}\left(1-\cos(\frac{\pi}{\delta_h}k_{x_1}-k_{L_h}+\delta_h)\right)e^{ik_{x_1}x}dk_{x_1} \tag{4.20}$$

En développant et en simplifiant l'expression, nous obtenons :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{1x}\right]=-\frac{\pi}{\delta_h^2}\frac{sin\left(\left(k_{L_h}+\frac{\delta_h}{2}\right)x\right)cos\left(\frac{\delta_h}{2}x\right)}{x\left(x^2-\left(\frac{\pi}{\delta_h}\right)^2\right)} \tag{4.21}$$

La figure 4.11 représente $\mathcal{F}^{-1}[\chi_{1x}]$, et permet donc de visualiser la largeur de bande spatiale de χ_{1x}.

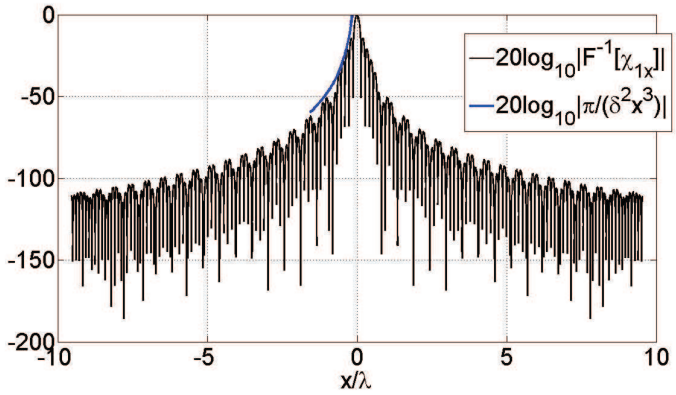


FIGURE 4.11 – $\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{1x}\right]$ (amplitude normalisée (dB)).

De même, la figure 4.12 présente $\mathcal{F}^{-}1[\chi_{2x}]$, de largeur légèrement supérieure à la largeur spatiale de χ_{1x}.

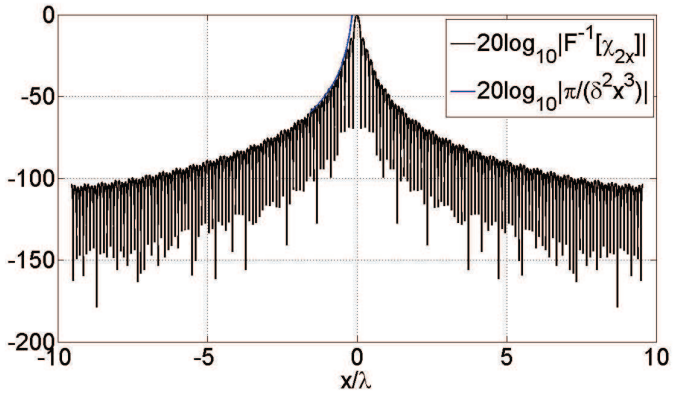
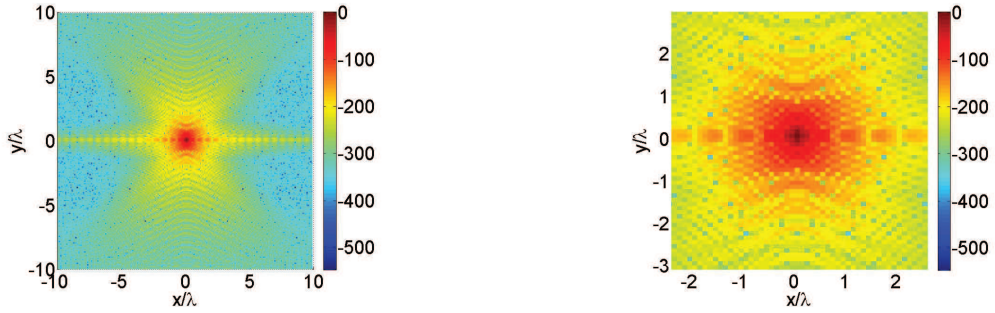
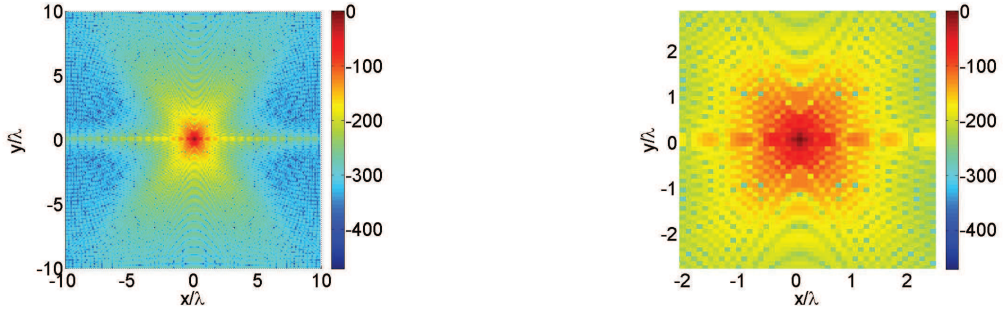


FIGURE 4.12 – $\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{2x}\right]$ (amplitude normalisée (dB)).



(a) $\mathcal{F}^{-1}$. (b) Zoom de $\mathcal{F}^{-1}$.

FIGURE 4.13 – $\mathcal{F}^{-1}[\chi_1]$ (dB).



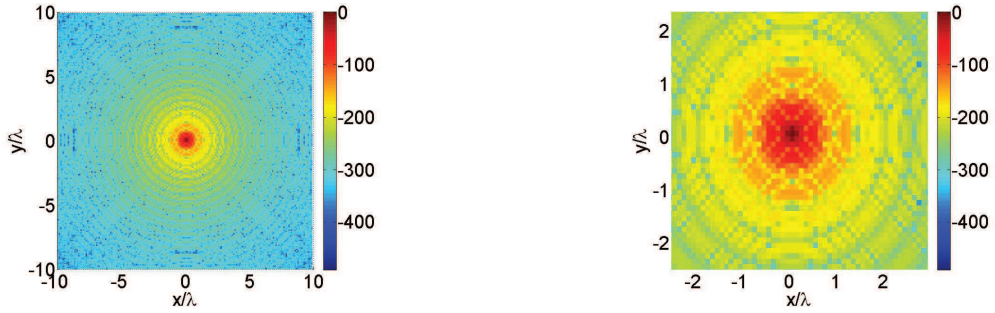
(a) $\mathcal{F}^{-1}$. (b) Zoom de $\mathcal{F}^{-1}$.

FIGURE 4.14 – $\mathcal{F}^{-1}[\chi_2]$ (dB).

D'après l'équation (4.21) et les figures 4.11 et 4.12, le comportement asymptotique quand $|\frac{x}{\lambda}| \to \infty$ de la fonction $\mathcal{F}^{-1}[\chi_{1x}]$, dans le domaine spatial peut être approché par la fonction $\frac{1}{|x|^3}$. Ceci nous permet d'évaluer la largeur demi-spatiale de cette fonction, en fonction du seuil de troncation ϵ_1 :

$$B_{\chi_{1x}^{(j)}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{\epsilon_1 \delta_h^2}} \tag{4.22}$$

D'après la figure 4.12 (transformée de Fourier inverse calculée numériquement), la variation asymptotique de χ_{2x} est similaire à celle de χ_{1x}, par conséquent celle de χ_{3x} et χ_{4x} également. On peut faire



(a) $\mathcal{F}^{-1}$. (b) Zoom de $\mathcal{F}^{-1}$.

FIGURE 4.15 – $\mathcal{F}^{-1}[\chi_5]$ (dB).

le même raisonnement pour χ_5 et χ_6, et par conséquent pour χ_{jy}, $j = 1, .., 4$, en remplaçant dans (4.22) δ_h par δ_v. La largeur de bande spatiale de la fonction source influe sur le nombre M de fenêtres gaussiennes spatiales le long de l'axe x. D'après l'équation (3.2), les limites spatiales M_{min} et M_{max} sont données par :

$$M_{min} = \lfloor \frac{L_{0_{min}} - l_e}{l_x} \rfloor \qquad M_{max} = \lceil \frac{L_{0_{max}} + l_e}{l_x} \rceil$$

où $[L_{0_{min}}, L_{0_{max}}]$ est la bande de la fonction source.

Si le spectre d'une fonction source le long de l'axe k_{α_j} ($\alpha = x, y, j = 1, .., 6$) est multiplié par une fonction caractéristique $\chi_{j\alpha}$, alors sa largeur de bande spatiale devient $[L_{0\alpha_{min}} - B_{\chi_{j\alpha}}, L_{0\alpha_{max}} + B_{\chi_{j\alpha}}]$.

Les limites des indices spatiaux de frame pour décomposer ce signal deviennent alors :

$$M_{max}^{(j)} = \lceil \frac{L_{0x_{max}} + B_{\chi_{jx}} + l_{e_x}}{l_x} \rceil \tag{4.23}$$

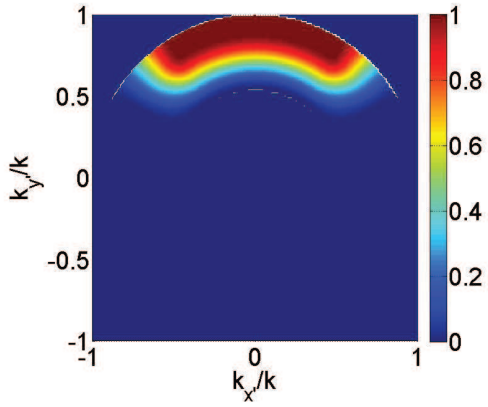
$$M_{min}^{(j)} = \lfloor \frac{L_{0x_{min}} - B_{\chi_{jx}} - l_{e_x}}{l_x} \rfloor \tag{4.24}$$

$$P_{max}^{(j)} = \lceil \frac{L_{0y_{max}} + B_{\chi_{jy}} + l_{e_y}}{l_y} \rceil \tag{4.25}$$

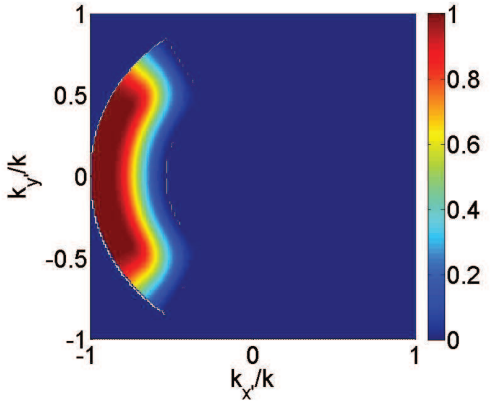
$$P_{min}^{(j)} = \lfloor \frac{L_{0y_{min}} - B_{\chi_{jy}} - l_{e_y}}{l_y} \rfloor \tag{4.26}$$

où :
$[L_{0x_{min}}, L_{0x_{max}}]$ et $[L_{0y_{min}}, L_{0y_{max}}]$ représentent les largeurs spatiales de la distribution source associée au spectre d'ondes planes source dans le plan $\mathcal{P}_j$, $B_{\chi_{jx}}$ et $B_{\chi_{jy}}$ représentent les largeurs spatiales des fonctions de partition selon les axes x_j et y_j, l_{e_x} représente la largeur spatiale de la fenêtre gaussienne selon l'axe x_j et l_{e_y} représente la largeur spatiale de la fenêtre gaussienne selon l'axe y_j (section 3.1).

Les figures 4.16 à 4.19 montrent comment les quatre fonctions caractéristiques définies dans les plans



(a) χ_1



(b) χ_2

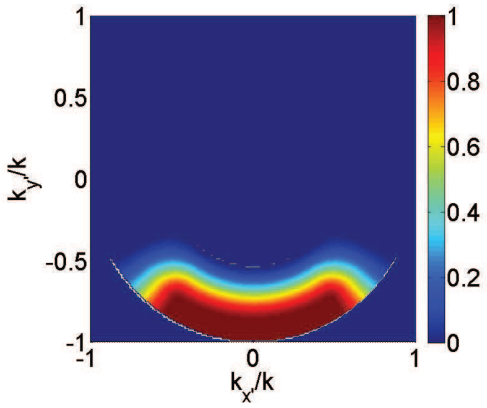
FIGURE 4.16 – Fenêtres de partition dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$.

verticaux, χ_j $(j = 1, .., 4)$ partitionnent le domaine spectral dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$.

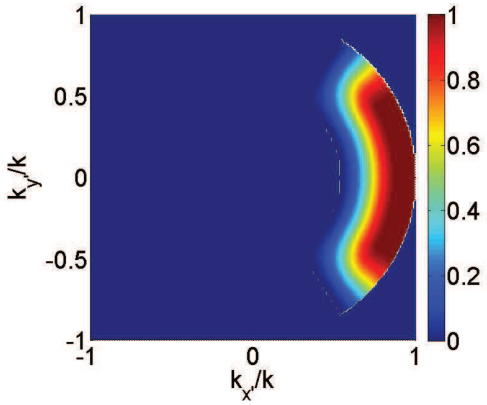
La figure 4.19 représente à la fois la combinaison de χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 et la combinaison de χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5.

4.5 Lancer de faisceaux gaussiens à partir des spectres partiels

Nous nous servirons de la méthode de lancer de faisceaux gaussiens pour calculer les composantes du champ électrique $\vec{E}(x', y', z') = E_{x'}\hat{x}' + E_{y'}\hat{y}' + E_{z'}\hat{z}'$ en un point M de coordonnées sphériques (r', θ', ϕ') dans le repère $(O', \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$.



(a) χ_3



(b) χ_4

FIGURE 4.17 – Fenêtres de partition dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$.

Comme indiqué précédemment, un point M appartient à trois demi-espaces HS_j, $j \in J$. Dans chacun de ces demi-espaces les composantes du champ électrique rayonné par le spectre partiel $\vec{\tilde{E}}^{\chi(j)}$ sont calculées par sommation de faisceaux gaussiens après décomposition du spectre sur un frame de Gabor dans le plan $\mathcal{P}_j$. Les coefficients calculés lors de cette décomposition sont notés $A^{\chi(j)}_{x_j|mnpq}$ (resp. $A^{\chi(j)}_{y_j|mnpq}$) pour la polarisation du champ source selon $\hat{x}_j$ (resp. $\hat{y}_j$).

Les formules (2.54), (2.55), (2.56) sont utilisées pour obtenir les composantes du champ électrique de la façon suivante :

$$E^{\chi(j)}_{x_j}(x_j, y_j, z_j) = \sum_{m,n,p,q} A^{\chi(j)}_{x_j|mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_x\kappa_x)} B_{mnpq}(x_j, y_j, z_j) \tag{4.27}$$

$$E^{\chi(j)}_{y_j}(x_j, y_j, z_j) = \sum_{m,n,p,q} A^{\chi(j)}_{y_j|mnpq} e^{i(mnl_y\kappa_y + pql_y\kappa_y)} B_{mnpq}(x_j, y_j, z_j) \tag{4.28}$$

$$E^{\chi(j)}_{z_j}(x_j, y_j, z_j) = \sum_{m,n,p,q} A^{\chi(j)}_{x_j|mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_x\kappa_x)} \left(\frac{-k_{x_jn}}{k_{z_jnq}}\right) B_{mnpq}(x_j, y_j, z_j)$$

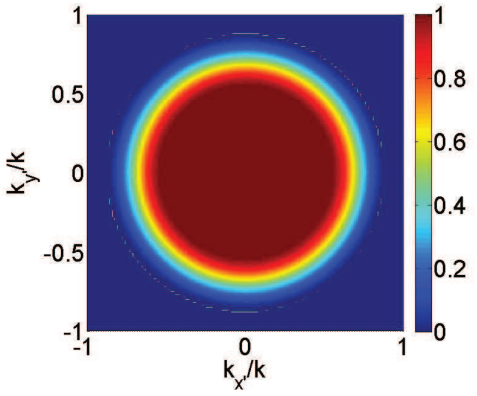


FIGURE 4.18 – Fenêtre de partition χ_5 dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$.

$$+ \sum_{m,n,p,q} A^{\chi(j)}_{y_j|mnpq} e^{i(mnl_y\kappa_y + pql_y\kappa_y)} \left(\frac{-k_{y_jq}}{k_{z_jnq}} \right) B_{mnpq}(x_j, y_j, z_j) \tag{4.29}$$

avec $k_{x_jn} = n\kappa_x$, $k_{y_jq} = q\kappa_y$, $k_{z_jnq} = \sqrt{k^2 - k^2_{x_jn} - k^2_{z_jq}}$, et $(m, n, p, q) \in \mathbb{Z}^4$.

Les champs calculés dans les trois demi-espaces HS_j, $j \in J$, sont ensuite superposés de la façon suivante, compte tenu des relations entre les bases des différents repères $(O', \hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{z}_j)$, $j \in J$ (tableau 4.1) :

Domaine un : $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \leq \phi' \leq \pi$

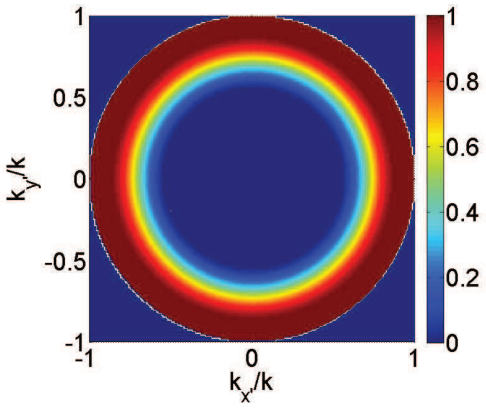
Ce domaine est l'intersection de : $HS_1 \cap HS_2 \cap HS_5$ et les composantes du champ électrique s'expriment comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E^{\chi(1)}_{x_1} - E^{\chi(2)}_{z_2} + E^{\chi(5)}_{x_5} \\ E^{\chi(1)}_{z_1} - E^{\chi(2)}_{x_2} + E^{\chi(5)}_{y_5} \\ E^{\chi(1)}_{y_1} + E^{\chi(2)}_{y_2} + E^{\chi(5)}_{z_5} \end{bmatrix}$$

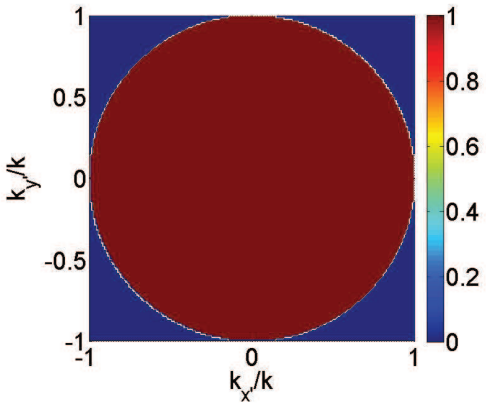
Domaine deux : $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ et $\pi \leq \phi' \leq \frac{3\pi}{2}$
Ce domaine est l'intersection de : $HS_3 \cap HS_2 \cap HS_5$ et les composantes du champ électrique s'expriment comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{\chi(3)}_{x_3} - E^{\chi(2)}_{z_2} + E^{\chi(5)}_{x_5} \\ -E^{\chi(3)}_{z_3} - E^{\chi(2)}_{x_2} + E^{\chi(5)}_{y_5} \\ E^{\chi(3)}_{y_3} + E^{\chi(2)}_{y_2} + E^{\chi(5)}_{z_5} \end{bmatrix}$$

Domaine trois : $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2} \leq \phi' < 2\pi$



(a) $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$ dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$



(b) $\sum_{j=1}^{5} \chi_j$ dans le plan $(k_{x'}, k_{y'})$

FIGURE 4.19 – Somme des fenêtres de partition dans le demi-espace supérieur ($k_{z'} > 0$).

Ce domaine est l'intersection de : $HS_3 \cap HS_4 \cap HS_5$ et les composantes du champ électrique s'expriment comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x_3}^{\chi(3)} + E_{z_4}^{\chi(4)} + E_{x_5}^{\chi(5)} \\ -E_{z_3}^{\chi(3)} + E_{x_4}^{\chi(4)} + E_{y_5}^{\chi(5)} \\ E_{y_3}^{\chi(3)} + E_{y_4}^{\chi(4)} + E_{z_5}^{\chi(5)} \end{bmatrix}$$

Domaine quatre : $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \phi' \leq \frac{\pi}{2}$
Ce domaine est l'intersection de : $HS_1 \cap HS_4 \cap HS_5$ et les composantes du champ électrique s'expriment comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{x_1}^{\chi(1)} + E_{z_4}^{\chi(4)} + E_{x_5}^{\chi(5)} \\ E_{z_1}^{\chi(1)} + E_{x_4}^{\chi(4)} + E_{y_5}^{\chi(5)} \\ E_{y_1}^{\chi(1)} + E_{y_4}^{\chi(4)} + E_{z_5}^{\chi(5)} \end{bmatrix}$$

Domaine cinq : $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi$ et $\frac{\pi}{2} \leq \phi' \leq \pi$

Ce domaine est l'intersection de : $HS_1 \cap HS_2 \cap HS_6$ et les composantes du champ électrique s'-expriment comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{x_1}^{\chi(1)} - E_{z_2}^{\chi(2)} - E_{x_6}^{\chi(6)} \\ E_{z_1}^{\chi(1)} - E_{x_2}^{\chi(2)} + E_{y_6}^{\chi(6)} \\ E_{y_1}^{\chi(1)} + E_{y_2}^{\chi(2)} - E_{z_6}^{\chi(6)} \end{bmatrix}$$

Domaine six : $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi$ et $\pi \leq \phi' \leq \frac{3\pi}{2}$
Ce domaine est l'intersection de : $HS_3 \cap HS_2 \cap HS_6$ et les composantes du champ électrique s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x_3}^{\chi(3)} - E_{z_2}^{\chi(2)} - E_{x_6}^{\chi(6)} \\ -E_{z_3}^{\chi(3)} - E_{x_2}^{\chi(2)} + E_{y_6}^{\chi(6)} \\ E_{y_3}^{\chi(3)} + E_{y_2}^{\chi(2)} - E_{z_6}^{\chi(6)} \end{bmatrix}$$

Domaine sept : $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi$ et $\frac{3\pi}{2} \leq \phi' < 2\pi$
Ce domaine est l'intersection de : $HS_3 \cap HS_4 \cap HS_6$ et les composantes du champ électrique s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x_3}^{\chi(3)} + E_{z_4}^{\chi(4)} - E_{x_6}^{\chi(6)} \\ -E_{z_3}^{\chi(3)} + E_{x_4}^{\chi(4)} + E_{y_6}^{\chi(6)} \\ E_{y_3}^{\chi(3)} + E_{y_4}^{\chi(4)} - E_{z_6}^{\chi(6)} \end{bmatrix}$$

Domaine huit : $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi$ et $0 \leq \phi' \leq \frac{\pi}{2}$
Ce domaine est l'intersection de : $HS_1 \cap HS_4 \cap HS_6$ et les composantes du champ électrique s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{x_1}^{\chi(1)} + E_{z_4}^{\chi(4)} - E_{x_6}^{\chi(6)} \\ E_{z_1}^{\chi(1)} + E_{x_4}^{\chi(4)} + E_{y_6}^{\chi(6)} \\ E_{y_1}^{\chi(1)} + E_{y_4}^{\chi(4)} - E_{z_6}^{\chi(6)} \end{bmatrix}$$

4.6 Illustration de la méthode

Dans cette partie, nous présentons une comparaison entre les champs reconstruits dans un demi-espace :

- par LFG sans partitionnement.
- par LFG avec partitionnement.

Nous utilisons comme antenne un dipôles demi-onde le long de l'axe $O'z'$, le frame utilisé est défini par : $\nu_\alpha = 0.16$, $L_\alpha = 10\lambda$, et les paramètres de troncation sont : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$.

Les détails de la mise en œuvre numérique seront exposés dans le chapitre suivant.

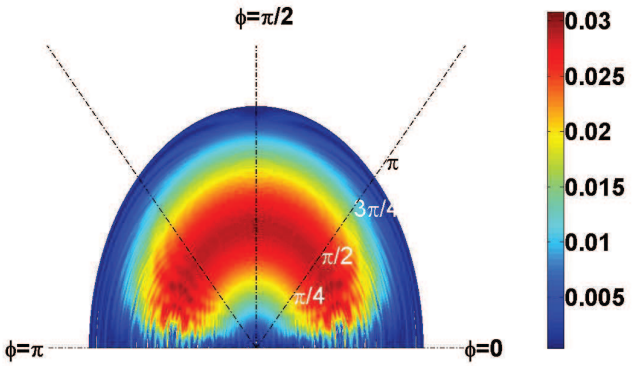


FIGURE 4.20 – $|\vec{E}|$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4}, calcul par LFG à partir du plan $\mathcal{P}_1$, TeC=1193sec. (sans partitionnement).

La figure 4.20 présente le champ rayonné sur la demi-sphère de rayon $r' = 50\lambda$, contenue dans le demi-espace HS_1 ($0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$). Ce champ est calculé par LFG à partir du spectre partiel $\vec{\tilde{E}}^{(1)}$, avec $\Delta\phi' = 1°$et $\Delta\theta' = 1°$, sans partitionnement. Compte tenu des relations entre repères, le plan $\mathcal{P}_1$ correspond à $x'O'z'$ ($\phi' = 0; \phi' = \pi$).

Avec les paramètres de frame choisis, on on aboutit à : $N_{min} = Q_{min} = -25$, $N_{max} = Q_{max} = 25$,

$M_{min} = P_{min} = -3$, $M_{max} = P_{max} = 3$, $S_x = S_y = 7$, $n_{o\alpha} = 1$ avec $\alpha = x, y$. Après compression, le nombre de faisceaux à lancer est de : 220098. Le temps de calcul (TeC) du LFG est de 1193sec.

On observe sur la figure 4.21 une erreur importante près du plan $\mathcal{P}_1$ $(\phi' = 0, \pi)$ ou $(\theta' = 0, \pi)$. Cette erreur est due à l'imprécision de l'approximation paraxiale [6, 11] pour les faisceaux *très tournés*, qui contribuent de façon importante dans cette région.

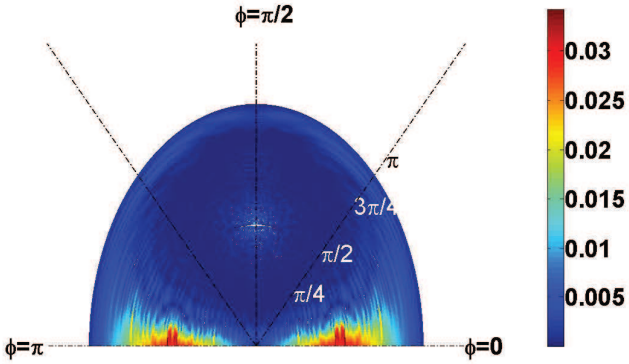


FIGURE 4.21 – Erreur absolue normalisée, champ $|\vec{E}|$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4} (sans partitionnement).

Ce problème est résolu par le partitionnement car dans la région où $cos\theta_j \rightsquigarrow 0$ la fonction de partition χ_j est égale à zéro. Ce sont des faisceaux gaussiens moins *tournés*, lancés depuis d'autres plans $\mathcal{P}_j$, $j \in J$ qui contribuent de façon significative au champ dans cette région.

La figure 4.22 représente le même champ rayonné que la figure 4.20, obtenu cette fois en appliquant le partitionnement spectral. Après compression, le nombre de faisceaux à lancer est de : 680168 et le temps de calcul (TeC) du LFG est de 3224sec.

Sur la figure on observe que les problèmes d'imprécision sont résolus. Les spectres *partitionnés* définis dans les plans $1, 2, 4, 5$ et 6 participent au calcul du champ électrique.

Dans cette partie, nous avons présenté de premiers résultats qui démontrent que l'utilisation du partitionnement permet de réduire l'erreur associée aux faisceaux dont l'axe est très incliné ($k_{z_{j'nq}} \rightsquigarrow 0, j \in J$). Le LFG après partitionnement spectral permet de reconstruire le champ rayonné en 3D par une antenne non directive.

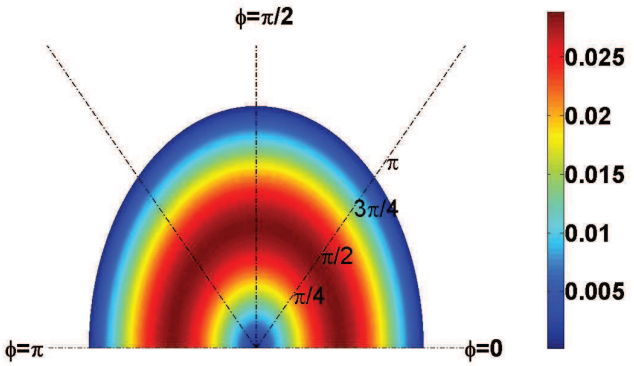


FIGURE 4.22 – $|\vec{E}|$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4},calculée par LFG à partir des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6$, TeC=3224sec. (avec partitionnement).

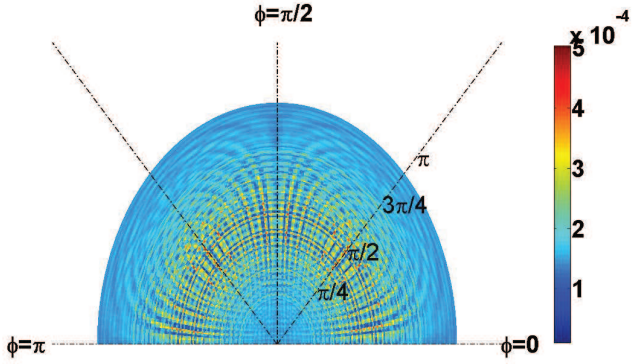


FIGURE 4.23 – Erreur absolue normalisée, $|\vec{E}|$ pour $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$ et $0 \leq \phi' \leq 180$, SR= 10^{-4} (avec partitionnement).

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une formulation de partition spectrale, sur la base de la partition de l'unité appliquée au champ lointain, a été introduite pour représenter le champ rayonné dans l'espace 3D par une somme de faisceaux gaussiens rayonnés par des fenêtres de frame. La décomposition sur des frames à fenêtres gaussiennes est réalisée dans six plans, d'où sont lancés les faisceaux gaussiens.

Un premier résultat numérique nous a permis de vérifier que cette méthode de partitionnement spectral résout le problème de l'imprécision liée à des faisceaux très tournés.

Chapitre 5

Application de la partition dans le domaine spectral au calcul des champs rayonnés

Cette section de notre étude se consacre à la mise en œuvre et la validation de la méthode de partitionnement spectral pour le calcul de champs rayonnés par LFG.

5.1 Réseau de dipôles demi-onde théoriques

Si une antenne est suffisamment directive *en élévation*, il est possible de représenter son champ rayonné en utilisant uniquement les spectres partiels $\vec{\tilde{E}}^{\chi(j)}$ dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, .., 4$. Il suffit que les spectres $\vec{\tilde{E}}^{\chi(j)}$, $j = 1, .., 4$, soient entièrement contenus dans la région $|k_{y_j}| \leq k_{y_{max}}$, où $k_{y_{max}} = k_{L_v} - l_{g_y}$ avec l_{g_y} la demi-largeur des fenêtres de frame dans le domaine spectral (figure 4.19).

Dans cette section nous nous placerons dans ce cas de figure pour tester la technique de partitionnement spectral dans le cas simplifié où les fonctions de partitionnement ne dépendent que d'une seule variable k_{x_j} $(j = 1, ..4)$.

Nous utilisons comme antenne un réseau de N dipôles demi-onde le long de l'axe $O'z'$, régulièrement espacés de la distance d, à excitation équiphase non uniforme en amplitude (synthèse par la méthode de *Dolph-Tchebycheff*). Le champ électrique lointain de ce réseau est de la forme [14] :

$$\vec{E}(r', \theta', \phi') = \vec{E}^0(r', \theta', \phi') FA(\psi) \tag{5.1}$$

où $\vec{E}^0(r', \theta', \phi')$ est le champ lointain d'un dipôle demi-onde isolé, centré à l'origine, alimenté par le courant I :

$$\vec{E}^0(r',\theta',\phi') = -i60I\frac{e^{ikr'}}{r'}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta')}{\sin\theta'}\hat{\theta}'$$

et FA est le facteur de réseau normalisé, donné par la méthode de *Dolph-Tchebycheff* :

$$FA(\psi) = T_{N-1}(x) \tag{5.2}$$

où $x = x_0 cos\frac{\psi}{2}$,

$$x_0 = \cosh\frac{\cosh^{-1}(S)}{N-1}$$

avec S, le rapport entre le niveau du lobe principal et celui des lobes secondaires, et T_{N-1} le polynôme de *Tchebycheff* d'ordre $N-1$ défini par :

$$T_{N-1}(x) = \left[\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{N-1} + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{N-1}}{2}\right] \tag{5.3}$$

Dans la suite on prendra $d = \frac{\lambda}{2}$, d'où $\psi = \pi\cos\theta'$. Si l'on choisit un frame tel que L_α, il en résulte une demi-largeur spectrale des fenêtres gaussienne pour l'analyse de (section 3.1) :

$$l_{g_\alpha} = \frac{2}{L_\alpha}\sqrt{-\pi Log(\epsilon_2)}$$

d'où :

$$k_{y_{max}} = k_{L_v} - l_{g_y} \tag{5.4}$$

Pour $j = 1,..,4$, $k_{y_j} = k_{z'} = k\cos\theta'$. Si on note θ'_{min} la valeur de θ' définie par : $k\cos\theta'_{min} = k_{y_{max}}$, alors l'intervalle $k_y \in [-k_{y_{max}}, k_{y_{max}}]$ correspond à $\theta'_{min} \leq \theta' \leq \pi - \theta'_{min}$.

Les maxima des lobes secondaires de FA sont obtenus pour $\psi_n = (2n-1)\frac{\pi}{N}$, $1 < n < \frac{N}{2}$. On notera θ'_n les angles θ' correspondants. Si on normalise le champ en choisissant $I = \frac{1}{60}$, alors la valeur maximale de $|\vec{E}^0(r',\theta',\phi')|$ à r' fixé est $\frac{1}{r'}$. On devra vérifier que pour la valeur de N choisie :

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta'_n\right)}{\sin\theta'_n}FA(\psi_n) \leq \epsilon_1 \tag{5.5}$$

pour $n = \lfloor\frac{k_{y_{max}}}{k}\frac{N}{2} + 1\rfloor$. Cette valeur de n est la plus élevée pour laquelle $k\cos\theta'_n \leq k_{y_{max}}$.

Avec $N = 14$ et $\epsilon_2 = 10^{-2}$, on obtient le FA présenté sur la figure 5.1.

Après avoir obtenu le nombre de dipôles, et vérifié (5.5) avec $\epsilon_1 = 10^{-2}$, il suffit d'utiliser la formulation présentée au chapitre précédent (section 4.2) pour en déduire les différents spectres partiels dans

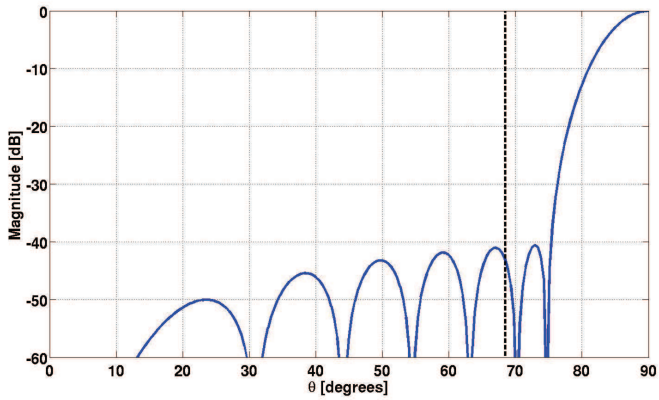


FIGURE 5.1 – Facteur de réseau normalisé, $N = 14$.

les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, .., 4$.

Les figures 5.2 et 5.3 présentent les coefficients de la décomposition sur un frame de Gabor obtenus à partir de l'analyse de la composante $\tilde{E}_{x_j}(k_{x_j}, k_{y_j})$ des spectres d'ondes planes dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, 2, 5, 6$, pour le réseau défini précédemment.

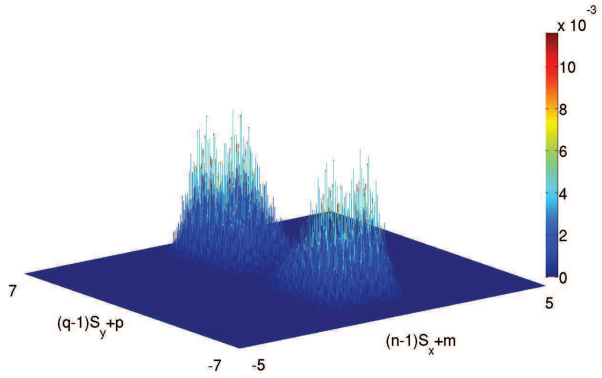
Le frame utilisé est défini par : $\nu_\alpha = 0.16$, $L_\alpha = 12\lambda$.
Les paramètres de troncation sont : $\epsilon_1 = 10^{-2}$ et $\epsilon_2 = 10^{-2}$.
Il en résulte : $M_{max} = 4$, $P_{max} = 6$, $M_{min} = -4$, $P_{min} = -6$, $N_{max} = Q_{max} = 30$, $N_{min} = Q_{min} = -30$, $n_{0_x} = n_{0_y} = 1$, $S'_x = 9$, $S'_y = 13$.

On peut constater sur la figure 5.3 que la valeur absolue maximale des coefficients dans les plans $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_6$ est 10^{-5} fois inférieure à la valeur absolue maximale des coefficients dans les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

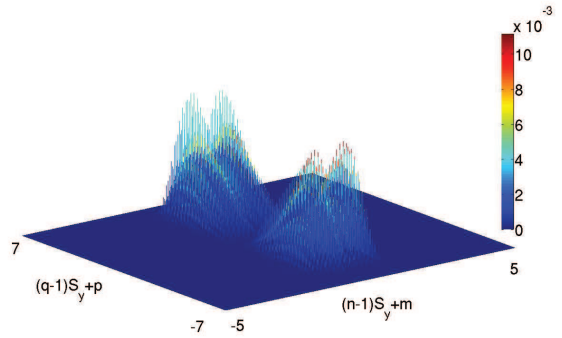
Si on applique la compression avec $\epsilon_3 = 10^{-3}$ (section 3.8.1), la valeur absolue maximale des coefficients dans les plans $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_6$ peut être considérée comme négligeable. Le champ rayonné par ce réseau peut être calculé avec les coefficients de décomposition des spectres partiels sur les plans latéraux uniquement. Ceci confirme notre hypothèse de départ.

Les figures 5.4 et 5.6 présentent le module du vecteur champ électrique $|\vec{E}|$ rayonné par ce réseau de 14 dipôles théoriques à la distance $r' = 720\lambda$. Cette distance est égale à $5b_x$ où b_x est la distance de collimation des faisceaux d'axe perpendiculaire à leur plan source ($n = q = 0$) [11].

$$b_x = \frac{L_x^2}{\lambda} \tag{5.6}$$



(a) $\mathcal{P}_1$



(b) $\mathcal{P}_2$

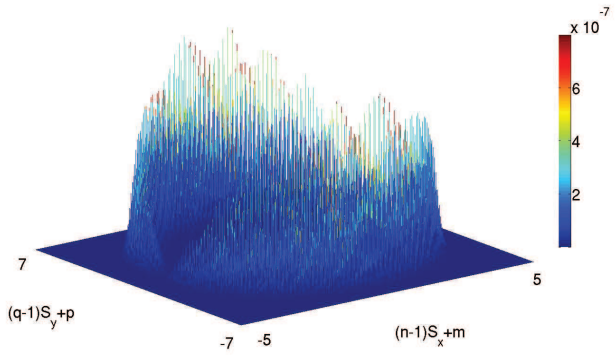
FIGURE 5.2 – Coefficients du frame de Gabor dans le plan $\mathcal{P}_1$ et le plan $\mathcal{P}_2$, avec troncation et sans compression.

Cette contrainte permet de garantir la validité de l'approximation paraxiale pour les faisceaux lancés.

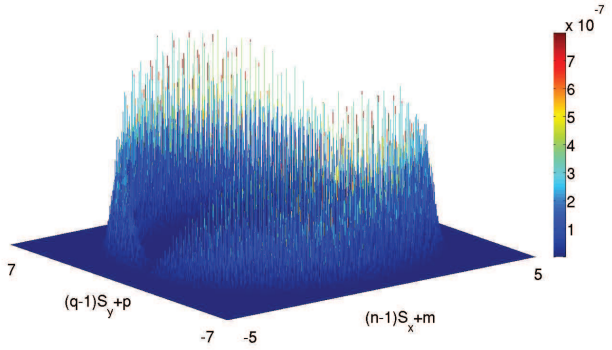
De plus, on vérifie que $r' > 2\dfrac{D^2}{\lambda}$.

où $D = \dfrac{14}{2}\lambda$ est la plus grande dimension spatiale du réseau $\left(2\dfrac{D^2}{\lambda} = 98\lambda\right)$. Cette dernière condition permet d'utiliser les formules *champ lointain* du réseau comme champ de référence pour évaluer la précision de la reconstruction par LFG.

La figure 5.5 présente l'erreur que l'on obtient en comparant la reconstruction faite par la méthode de *lancer de faisceaux gaussiens* et le champ lointain du réseau. Cette erreur est au maximum d'environ 10^{-2}, valeur qui est cohérente avec les paramètres de troncation ϵ_1 et ϵ_2, égaux à 10^{-2}.



(a) $\mathcal{P}_5$



(b) $\mathcal{P}_6$

FIGURE 5.3 – Coefficients du frame de Gabor dans le plan $\mathcal{P}_5$ et le plan $\mathcal{P}_6$.

La reconstruction présentée en figure 5.6, et le faible niveau d'erreur associé, démontrent la validité de la méthode de partitionnement. Dans le plan $\phi' = \frac{\pi}{4}$, des faisceaux issus de deux plans $\mathcal{P}_j$ contribuent de façon significative au champ calculé.

5.2 Dipôle demi-onde théorique

Dans cette partie, nous allons utiliser le dipôle demi-onde pour tester le partitionnement dans les six plans spectraux décrits précédemment.

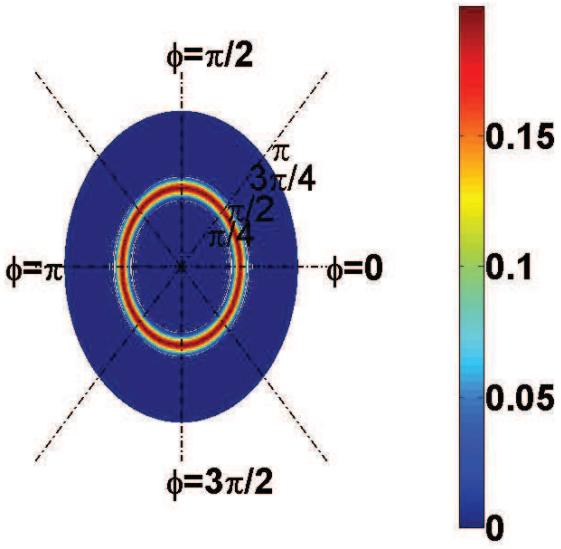


FIGURE 5.4 – $|\vec{E}|$, réseau de 14 dipôles, $r' = 720\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$, ϵ_3=10^{-3}.

Les composantes du champ électrique lointain d'un tel dipôle centré à l'origine, aligné selon Oz', sont données par :

$$E_{\theta'}(r', \theta', \phi') = -i60I \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta')}{\sin\theta'} \tag{5.7}$$

$$E_{\phi'}(r', \theta', \phi') = 0 \tag{5.8}$$

On normalise le champ en prenant $I = \dfrac{1}{60}$. On déduit les composantes des spectres d'ondes planes dans les plans $\mathcal{P}_j$, à partir des composantes cartésiennes du champ électrique, selon la formulation décrite en section 4.1.
La figure 5.7 présente les coefficients de la décomposition sur un frame de Gabor obtenus à partir de l'analyse de la composante $\tilde{E}_{x_j}(k_{x_j}, k_{y_j})$ des spectres d'ondes planes dans tout le domaine visible et dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, 2$, pour le dipôle défini précédemment.

Le frame utilisé est défini par : $\nu_\alpha = 0.16$, $L_\alpha = 10\lambda$.
Les paramètres de troncation sont : $\epsilon_2 = 10^{-1}$, $\epsilon_2 = 10^{-1}$.
Il en résulte : $M_{min} = P_{min} = -3$, $N_{min} = Q_{min} = -25$, $M_{max} = P_{max} = 3$, $N_{max} = Q_{max} = 25$, $n_{0_\alpha} = 1$, $S'_y = S'_x = 7$, avec $\alpha = x, y$.

Pour valider les limites choisies pour les indices spatiaux m et p, on peut synthétiser dans le domaine spatial dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 1, .., 6$ les sources spatiales correspondant aux spectres $\tilde{E}^{\chi(j)}_{\alpha_j}(k_{x_j}, k_{y_j})$, $\alpha_j = x_j, y_j$, que l'on notera $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{E}^{\chi(j)}_{\alpha_j}]$. Cette synthèse est réalisé selon (3.34), par sommation des

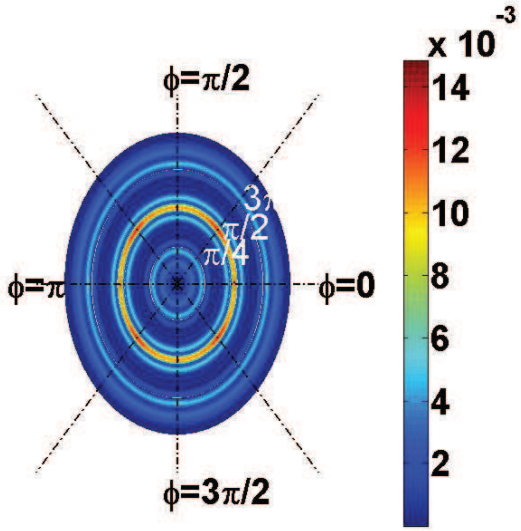


FIGURE 5.5 – Erreur absolue normalisée, $|\vec{E}|$, réseau de 14 dipôles, $r' = 720\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$.

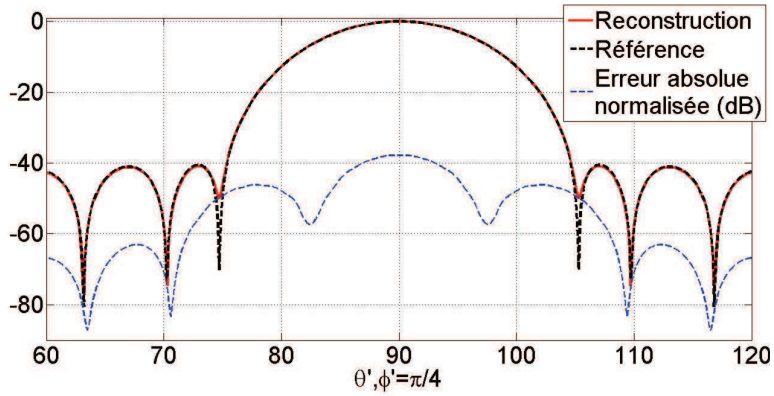


FIGURE 5.6 – $|\vec{E}|$, réseau de 14 dipôles, $r' = 720\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$, ϵ_3=10^{-3}.

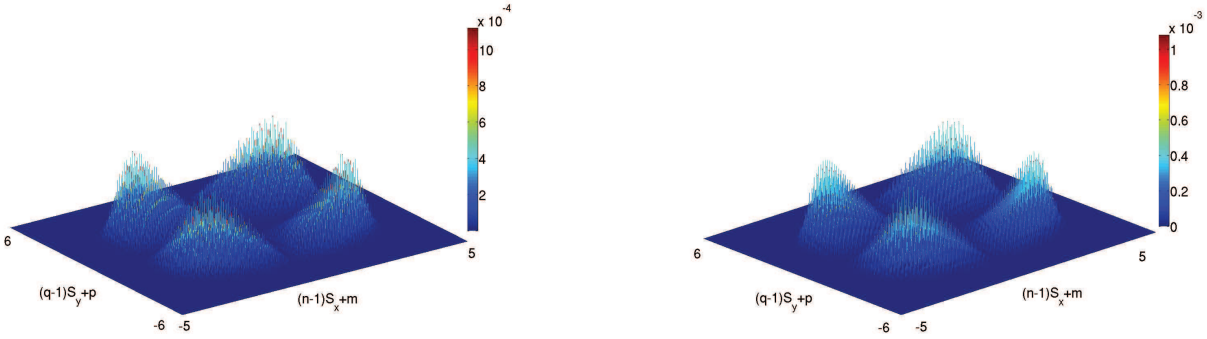
fenêtres de frame dans le domaine spatial, pondérées par les coefficients précédemment calculés.

La figure 5.8 présente cette synthèse dans les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_5$. On observe, l'influence du partitionnement spectral, qui se traduit par un *élargissement* spatial par rapport à la source physique. Ce résultat nous permet de vérifier le calcul de (4.22).

La figure 5.9 présente la reconstruction par la formule (3.33) des spectres d'ondes planes partiels $\tilde{E}^{\chi(1)}_{\alpha_1}$ avec $\alpha = x, y, z$ (équation (4.7)).

Les figures suivantes représentent les reconstructions de la composante $\tilde{E}_{x'}(k_{x'}, k_{y'})$ du spectre d'ondes planes dans les différents plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6$.

Les figures 5.10, 5.11 et 5.12 présentent les composantes cartésiennes du champ électrique rayonné



(a) $\mathcal{P}_1$, $\tilde{E}_{x_1}$ (b) $\mathcal{P}_2$, $\tilde{E}_{x_2}$

FIGURE 5.7 – Coefficients du frame de Gabor dans le plan $\mathcal{P}_1$ et le plan $\mathcal{P}_2$ (dipôle demi-onde).

par le dipôle demi-onde, calculé par la méthode de LFG à partir de frames dans 6 plans, avec partitionnement. Les frames dans les 6 plans sont identiques à celui utilisé pour le calcul des coefficients présentés en figure 5.7. De même $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$. Le seuil de troncation, pour les coefficients (ϵ_3) est pris égal à 10^{-4}. La distance $r' = 50\lambda$ est choisie car elle correspond à des points situés en champ lointain du dipôle, et elle est égale à $\frac{b_x}{2}$ pour les valeurs de L_x et L_y choisies, ce qui assure une bonne précision des formules paraxiales des faisceaux gaussiens.

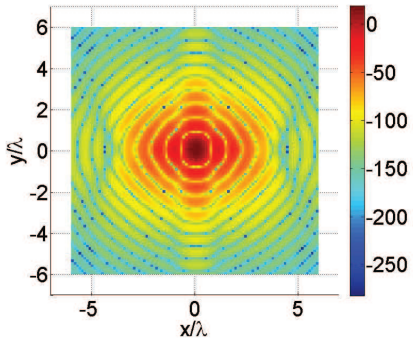
5.3 Influence des différents paramètres dans la méthode de lancer de faisceaux gaussiens à partir des spectres partiels

5.3.1 Variation du paramètres ϵ_1 et ϵ_2

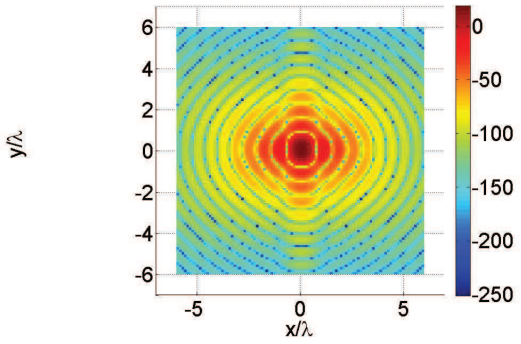
Pour le même dipôle et les mêmes frames, les figures 5.13 et 5.14 présentent la reconstruction de la norme du champ, $|\vec{E}|$, et l'erreur absolue normalisée de cette reconstruction obtenues pour des valeurs des seuils de troncation ϵ_1 et ϵ_2 égaux à 10^{-3} et 10^{-1}. On peut constater encore une fois la variation du degré de précision du champ électrique obtenu par la méthode de lancer de faisceaux gaussiens, variation provoquée par la variation de ces paramètres.

5.3.2 Variation des paramètres L_x et L_y

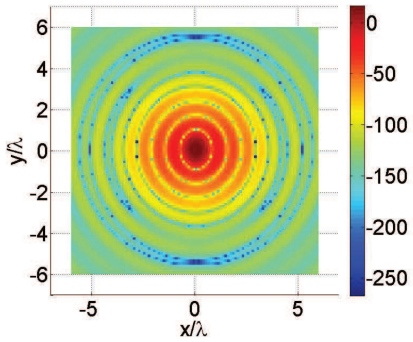
L_x et L_y déterminent la largeur de la fenêtre gaussienne, donc le nombre de coefficients selon x et y, la distance de collimation des faisceaux. Si l'on change ces paramètres, les conditions de calcul vont changer, mais on peut constater sur les figures 5.16 et 5.17 que les résultats de reconstruction ne sont pas modifiés. La figure 5.15, avec une erreur importante, illustre le fait que $\frac{L_\alpha}{\lambda}$, $\alpha = x, y$, doit être suffisamment grand pour que la largeur spectrale des fenêtres soit inférieure à une limite liée à la



(a) $\mathcal{F}^{-1}$ dans le plan $\mathcal{P}_1$



(b) $\mathcal{F}^{-1}$ dans le plan $\mathcal{P}_4$



(c) $\mathcal{F}^{-1}$ dans le plan $\mathcal{P}_5$

FIGURE 5.8 – $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{E}^{\chi(j)}_{\alpha_j}]$ dans les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_5$ (dipôle demi-onde).

bande du spectre à analyser.

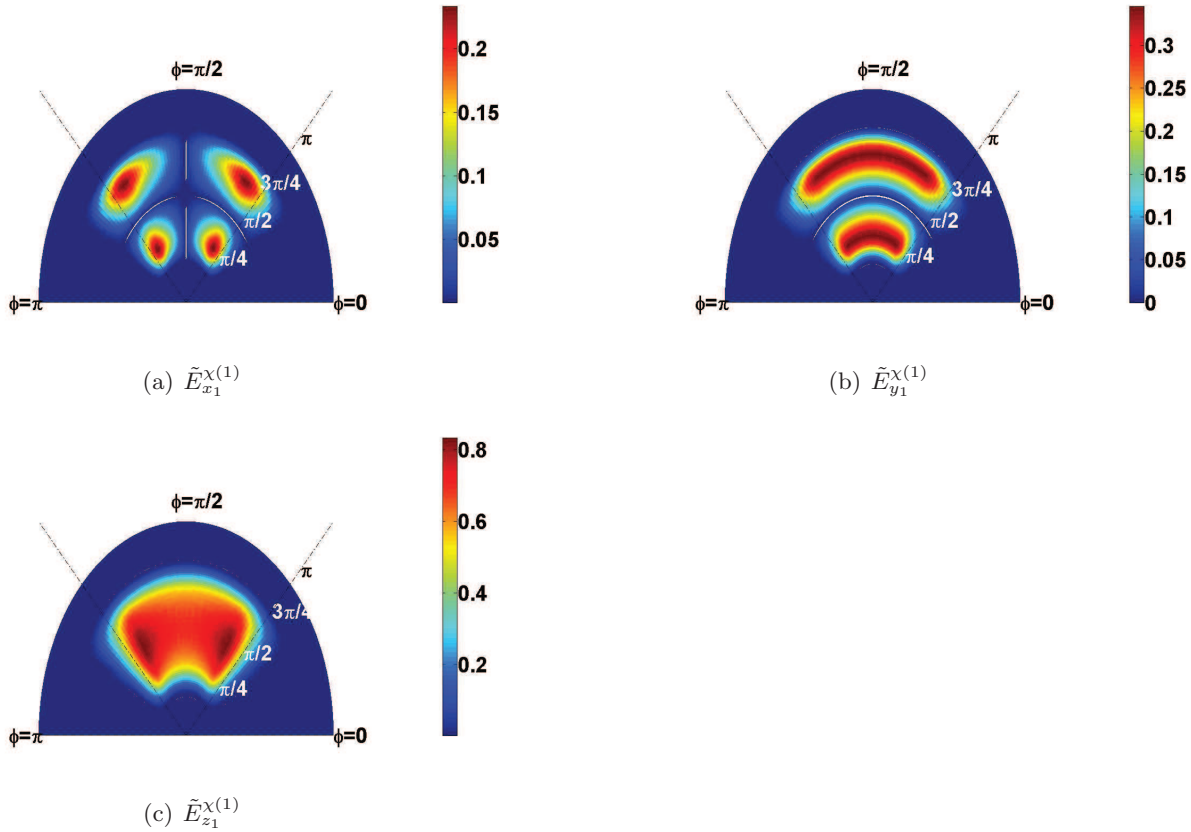
Si cette bande est celle de la fonction de partitionnement, alors il faut que :

$$\delta_\alpha + k_{L_\alpha} + l_{g_\alpha} \leq k \qquad (\alpha = x, y) \tag{5.9}$$

pour que les fenêtres gaussiennes utiles à la représentation du signal soient toutes centrées dans le domaine visible. De cette relation on peut déduire une valeur minimale de L_α :

$$L_\alpha \geq \frac{2\sqrt{-\pi Log(\epsilon_2)}}{k - (\delta_\alpha + k_{L_\alpha})} \tag{5.10}$$

Pour la valeur de $\epsilon_2 = 10^{-1}$ choisie, on trouve une valeur minimale de $L_\alpha = 7.3\lambda$. Pour $L_\alpha = 5\lambda$, certaines fenêtres ne peuvent être prise en compte dans l'analyse, d'où l'erreur importante observée sur la figure 5.11



(a) $\tilde{E}^{\chi(1)}_{x_1}$

(b) $\tilde{E}^{\chi(1)}_{y_1}$

(c) $\tilde{E}^{\chi(1)}_{z_1}$

FIGURE 5.9 – Spectres d'ondes planes partiels $\tilde{E}^{\chi(1)}_{\alpha_1}$ avec $\alpha = x, y, z$ (dipôle demi-onde).

5.3.3 Variation de la distance d'observation r'

Nous allons considérer l'étude d'un dipôle demi-onde théorique, analysé avec $L_\alpha = 10\lambda$, $\nu = 0.16$, $I = \frac{20}{6}$ et $\epsilon_2 = 10^{-1}$. Lorsque $L_\alpha = 10\lambda$, en concordance avec (5.6), la distance de collimation est $b = \frac{L_x^2}{2} = 100\lambda$ [11]. Si l'on fait varier la distance du point d'observation r', on constate sur la figure 5.18 une augmentation de l'imprécision du calcul de la norme du champ électrique $|\vec{E}|$ par LFG.

Cette imprécision est liée au fait qu'à grande distance, les champs éloignés de l'axe des faisceaux ne se superposent pas à des champs proches de l'axe d'autres faisceaux, en raison d'une plus grande séparation entre faisceaux adjacents. Les résultats de la figure 5.18 nous permettent de conclure qu'en fonction de la précision souhaitée de la méthode LFG avec partitionnement spectral peut être utilisée jusqu'à $r' = 5b$, $20b$ ou même $50b$.

(a) Composante $E_{x'}(\theta', \phi')$ du champ électrique

(b) Erreur absolue normalisée

FIGURE 5.10 – Composante $E_{x'}(\theta', \phi')$, dipôle demi-onde, $r' = 50\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\epsilon_3 = 10^{-4}$.

(a) Composante $E_{y'}(\theta', \phi')$ du champ électrique

(b) Erreur absolue normalisée

FIGURE 5.11 – Composante $E_{y'}(\theta', \phi')$, dipôle demi-onde, $r' = 50\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\epsilon_3 = 10^{-4}$.

5.3.4 Variation du seuil relatif (ϵ_3) et taux de compression (TC)

Pour le même cas d'étude d'un dipôle demi-onde théorique, analysé avec $L_\alpha = 10\lambda$, $\nu = 0.16$, $I = \frac{1}{60}$ et $\epsilon_2 = 10^{-1}$ dans la région $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \phi' \leq \frac{\pi}{2}$ avec $\Delta\theta' = 2°$et $\Delta\phi' = 2°$, si on fait varier le seuil relatif (ϵ_3) (section 3.8), on peut constater dans le tableau 5.1 une variation du degré de précision (EANM) et du temps du calcul (TeC).

Cette variation est principalement due à ce que plus la compression est importante plus l'analyse basée sur les équations (4.27), (4.28) (4.29) est réalisée avec un petit nombre de coefficients de frame. Les résultats des tableaux 5.1 et 3.1 sont particulièrement intéressants : lorsque le seuil relatif passe de 10^{-3} à 10^{-6}, la précision de l'analyse n'est quasiment pas modifiée, mais il y a une réduction importante du temps de calcul et du nombre de coefficients. Cela nous permet de recommander 10^{-3} ou 10^{-4} comme valeur de ϵ_3 pour la compression, en amont du LFG.

(a) Composante $E_{z'}(\theta', \phi')$ du champ électrique

(b) Erreur absolue normalisée

FIGURE 5.12 – Composante $E_{z'}(\theta', \phi')$, dipôle demi-onde, $r' = 50\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$ et $\epsilon_3 = 10^{-4}$.

(a) $|\vec{E}(\theta', \phi')|$

(b) Erreur absolue normalisée

FIGURE 5.13 – Amplitude du champ. $L_\alpha = 10\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 5.10^{-1}$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=791.5sec. (temps de calcul du champ rayonné).

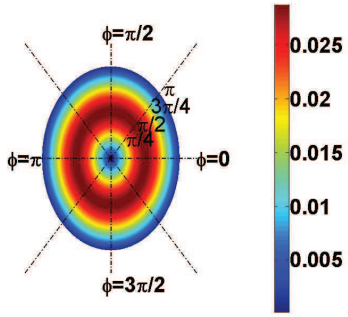
ϵ_3	**TC**	**TeC***	**Réduction du TeC**	**EANM**
Sans compression et sans troncation	0%	360.5sec	0%	0.0051
Sans compression et avec troncation	0%	360.4sec	0.0277%	0.0117
10^{-20}	27.14%	357.4sec	0.9%	0.0117
10^{-6}	27.3%	336.4sec	6.7%	0.0117
10^{-3}	48.9%	231.13sec	35.9%	0.0118
10^{-1}	86.7%	44.4sec	87.7%	0.0717

TABLE 5.1 – Influence du seuil relatif (ϵ_3).

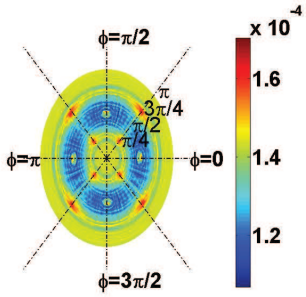
*Temps de calcul du champ rayonné.

5.4 Antenne réelle

Nous allons nous intéresser dans cette section à la représentation des champs rayonnés par sommation de faisceaux gaussiens, dans le cas d'une antenne *réelle*, dont le diagramme de rayonnement

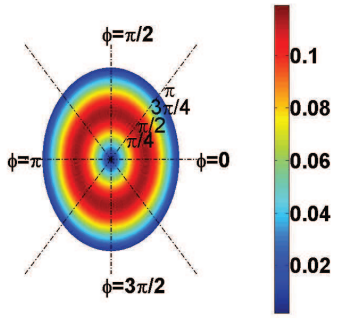


(a) $|\vec{E}(\theta', \phi')|$

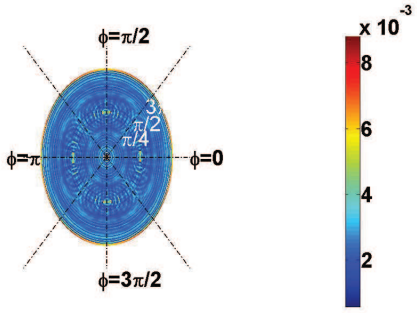


(b) Erreur absolue normalisée

FIGURE 5.14 – Amplitude du champ. $L_\alpha = 10\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-3}$, $r' = 50\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=1458.12sec. (temps de calcul du champ rayonné).



(a) $|\vec{E}(\theta', \phi')|$



(b) Erreur absolue normalisée

FIGURE 5.15 – Amplitude du champ. $L_\alpha = 5\lambda$, $\epsilon_1 = epsilon_2 = 10^{-1}$, $r' = 12.5\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=778sec. (temps de calcul du champ rayonné).

est connu à travers un ensemble de valeurs obtenues par la mesure ou la simulation.

Les données concernant cette antenne nous ont été fournies par *Thales*, dans le cadre de la collaboration initiée par la thèse d'I. Ghannoum [11]. Nous utiliserons deux méthodes différentes pour aborder ce problème :

- *Première méthode* : Une rotation du repère dans lequel est décrit le diagramme de rayonnement permet de faire rayonner l'antenne dans le seul demi-espace $z' > 0$. La décomposition sur un frame est alors effectuée dans un plan, sans partitionnement.

- *Deuxième méthode* : On utilise la méthode de décomposition, sur des frames définis dans plusieurs plans, de spectres *partiels* obtenus par la méthode de partitionnement.

(a) $|\vec{E}(\theta', \phi')|$ (b) Erreur absolue normalisée

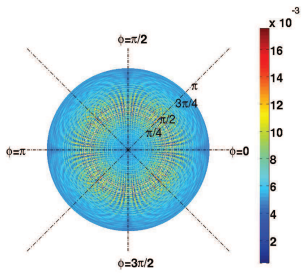
FIGURE 5.16 – Amplitude du champ. $L_\alpha = 15\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$, $r' = 112.5\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, ϵ_3=10^{-3}, et TeC=3132.53sec. (temps de calcul du champ rayonné).

(a) $|\vec{E}(\theta', \phi')|$ (b) Erreur absolue normalisée

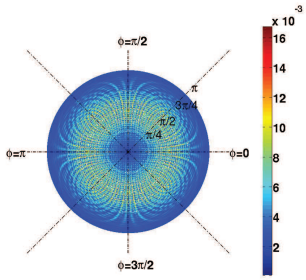
FIGURE 5.17 – Amplitude du champ. $L_\alpha = 20\lambda$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$, $r' = 200\lambda$, $0 \leq \theta' \leq 180$, $0 \leq \phi' \leq 360$, $\epsilon_3 = 10^{-3}$, et TeC=5555sec. (temps de calcul du champ rayonné).

–	$\hat{x}'$	$\hat{y}'$	$\hat{z}'$
$\hat{x}$	0	0	1
$\hat{y}$	−1	0	0
$\hat{z}$	0	−1	0

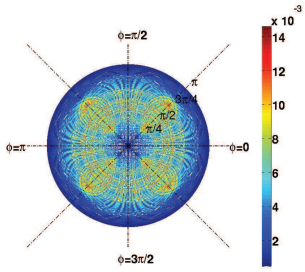
TABLE 5.2 – Matrice de rotation, analyse classique (sans partitionnement).



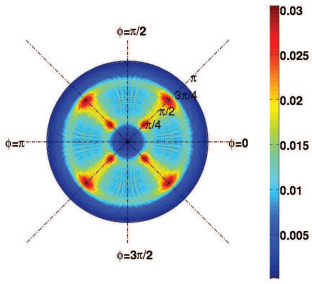
(a) $r' = \frac{b}{2} = 50\lambda$



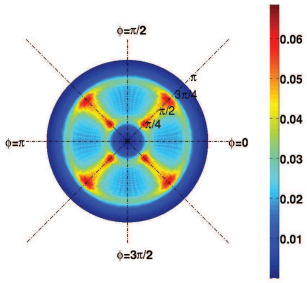
(b) $r' = b = 100\lambda$



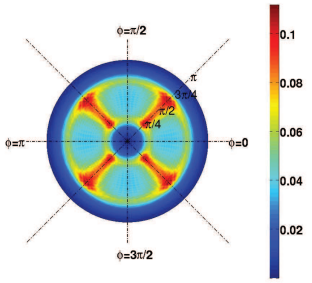
(c) $r' = 5b = 500\lambda$



(d) $r' = 20b = 2000\lambda$

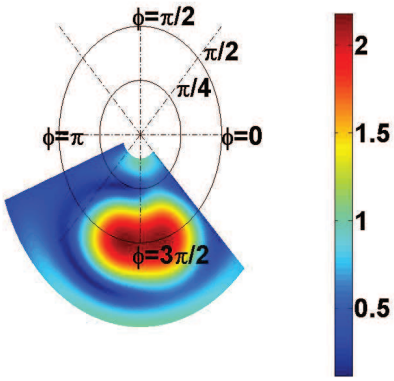


(e) $r' = 50b = 5000\lambda$

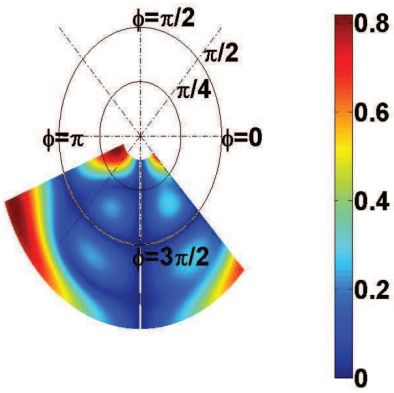


(f) $r' = 100b = 10000\lambda$

FIGURE 5.18 – Erreur absolue normalisée du champ rayonné (dipôle demi-onde).

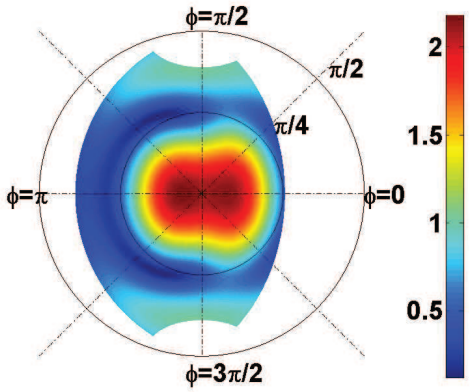


(a) E_ϕ

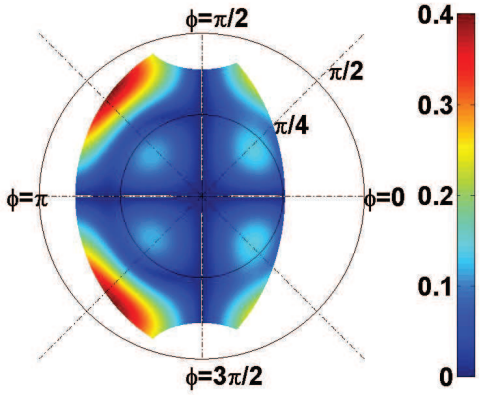


(b) E_θ

FIGURE 5.19 – Composantes du champ lointain de l'antenne dans le repère initial.



(a) E_ϕ



(b) E_θ

FIGURE 5.20 – Composantes du champ dans le nouveau repère, en fonction de $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$.

5.4.1 Analyse classique (sans partitionnement)

La figure 5.19 représente les composantes du champ lointain de l'antenne à $430Mhz$. Ces composantes ne sont pas données dans un *repère* adapté à la définition d'un spectre d'ondes planes source, dans un plan unique. Pour cette raison, on effectue un changement de *repère* de la façon à ce que le champ soit rayonné dans le demi-espace $z \geq 0$ selon la représentation de la figure 5.20.
Ce changement de *repère* se fait selon la matrice de rotation 5.2, du repère initial $\mathcal{R}'(O, \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ au repère final $\mathcal{R}(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

On déduit des composantes E_θ, E_ϕ dans le nouveau repère, les composantes E_x et E_y du champ lointain, dans ce repère. On calcule alors les composantes du spectre d'ondes planes, $\tilde{E}_x(k_x, k_y)$ et $\tilde{E}_y(k_x, k_y)$, pour les composantes du champ polarisées suivant x et y respectivement. [6]

$$\tilde{E}_x(k_x, k_y) = -\frac{\lambda}{i \cos\theta} E_x \qquad \text{et} \qquad \tilde{E}_y(k_x, k_y) = -\frac{\lambda}{i \cos\theta} E_y$$

La figure 5.21 présente ces composantes en fonction de θ, ϕ définis par : $k_x = k \sin\theta \cos\phi$, $k_y = k \sin\theta \sin\phi$.

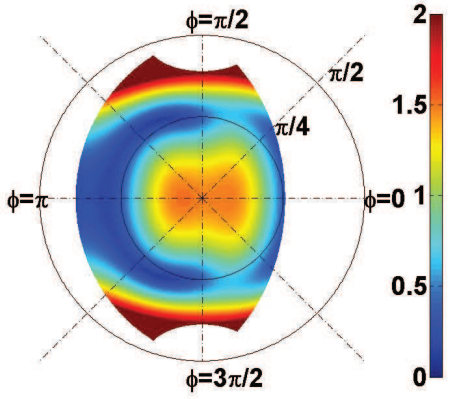
Afin de calculer les coefficients selon (2.48) grâce à l'algorithme de TFD, on a besoin des valeurs du spectre d'ondes planes aux coordonnées d'échantillonnage requises $(n\kappa_x, q\kappa_y)$ $(n, q) \in \mathbb{Z}^2$ si $n_0 = 1$. Pour les obtenir, on interpole les valeurs du spectre d'ondes planes calculées précédemment. Dans ce travail on utilisera des algorithmes d'interpolation cubique (annexe B).

La figure 5.22 représente la composante $\tilde{E}_x(k_x, k_y)$ du spectre d'ondes planes source. Sur cette figure sont représentés deux *rectangles*, le plus petit représente la région où le spectre sera synthétisé, et le plus grand la région *d'analyse* contenant toutes les gaussiennes dont la valeur est non négligeable à l'intérieur de la région de synthèse, et qui par conséquent contribuent de façon non négligeable au spectre à synthétiser.

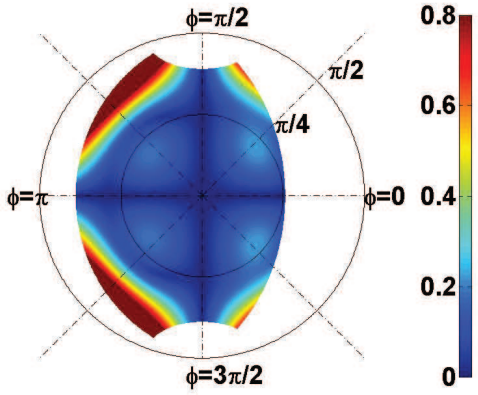
L'écart entre le grand *rectangle* et le petit est égale à $2l_{g_\alpha}$ selon k_α $(\alpha = x, y)$. l_{g_α} $(\alpha = x, y)$ est la largeur des fenêtres de frame dans le domaine spectral, qui se déduit de L_α et du paramètre de troncation ϵ_2.

Pour la région de synthèse présentée en figure 5.22, on obtient la reconstruction présentée figure 5.23. Les paramètres utilisés sont :

pour le frame : $\nu_\alpha = 0.09$, $L_\alpha = 10\lambda$,
pour la troncation : $\epsilon_2 = 10^{-4}$,
d'où : $M_{max} = P_{max} = 3$, $N_{max} = Q_{max} = 20$, $M_{min} = P_{min} = -3$, $N_{min} = Q_{min} = -20$, $n_{0_\alpha} = 2$,



(a) $\tilde{E}_x$



(b) $\tilde{E}_y$

FIGURE 5.21 – Composantes du spectre d'ondes planes dans le plan $\mathcal{P}(O, \hat{x}, \hat{y})$.

$S_\alpha = 16$. On choisit pour la région de synthèse : $k_\alpha \in [-0.3k, 0.3k]$ avec $\alpha = x, y$.

La figure 5.24 présente l'erreur absolue normalisée obtenue lors de la synthèse de la composante de spectre $\tilde{E}_x$. Cette erreur est constituée par l'erreur introduite par l'interpolation et par la méthode de frame de Gabor. Elle est calculée dans la région de synthèse aux points de la grille initiale obtenus dans le domaine spectral après changement de repère.

$$Err(k_x, k_y) = \frac{|\tilde{E}_{xinit}(k_x, k_y) - \tilde{E}_{xsynth}(k_x, k_y)|}{max_{(k_x,k_y)}|\tilde{E}_{xinit}(k_x, k_y)|} \tag{5.11}$$

avec

$\tilde{E}_{xinit}(k_x, k_y)$	Composante selon x du spectre initial.
$\tilde{E}_{xsynth}(k_x, k_y)$	Composante selon x du spectre synthétisé.

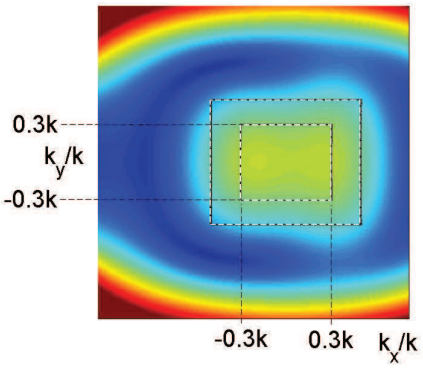


FIGURE 5.22 – Composante $\tilde{E}_x(k_x, k_y)$ du spectre dans le plan $\mathcal{P}(O, \hat{x}, \hat{y})$.

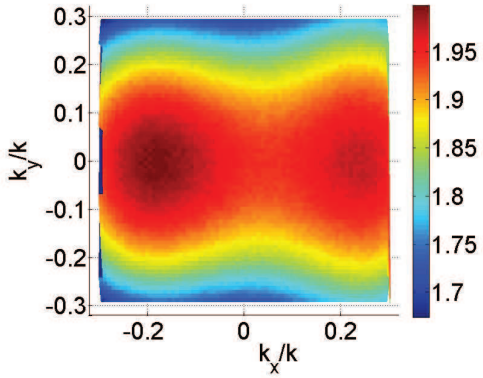


FIGURE 5.23 – Synthèse de la composante $\tilde{E}_x(k_x, k_y)$ du spectre dans le plan $\mathcal{P}(O, \hat{x}, \hat{y})$.

La figure 5.25 représente l'erreur introduite par l'utilisation de la méthode de frame de Gabor uniquement. Elle est calculée aux points d'échantillonnage utilisés pour l'analyse en prenant les valeurs de spectre interpolées comme valeurs de référence.

La différence dans la précision des résultats de la figure 5.24 et 5.25 nous permet d'estimer l'erreur introduite par la méthode d'interpolation. L'intégration d'un module d'interpolation est obligatoire quand les données initiales ne sont pas fournies sur une grille d'échantillonnage directement utilisable pour le calcul de la TDF, ce qui est rarement le cas quand ces données sont issues de mesures en champ lointain, effectuées sur une grille régulière en (θ, ϕ). Les principaux inconvénients de l'intégration de ce module sont : l'augmentation du temps de calcul et la diminution de la précision.

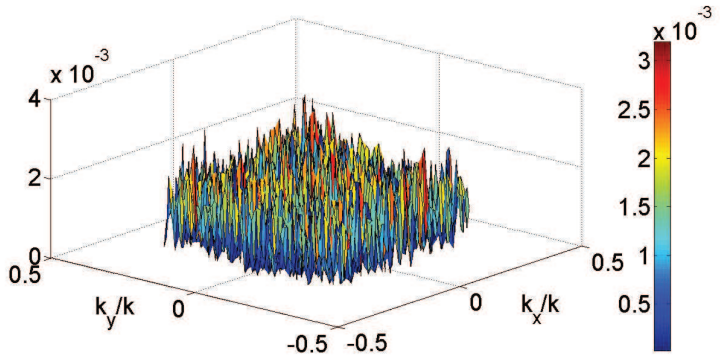


FIGURE 5.24 – Erreur absolue normalisée globale (interpolation + synthèse).

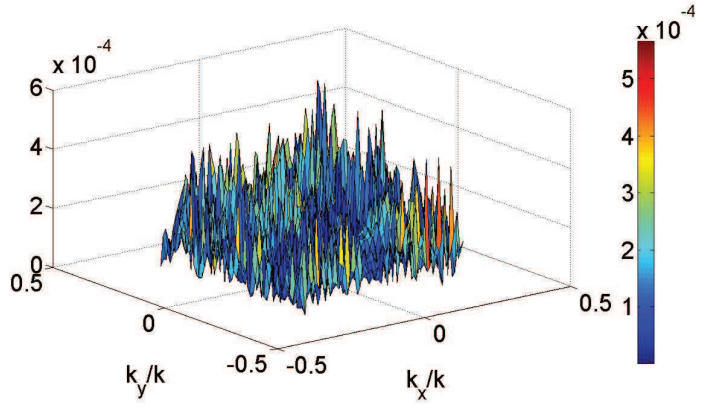


FIGURE 5.25 – Erreur absolue normalisée (synthèse uniquement).

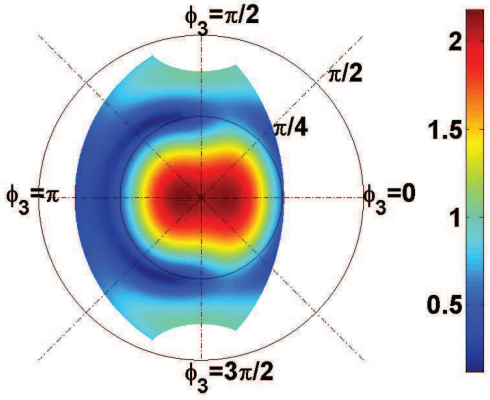
5.4.2 Analyse avec partitionnement spectral

Dans cette partie de notre étude nous abordons l'étude de la même antenne selon la *deuxième méthode*, en appliquant le concept de partitionnement spectral.

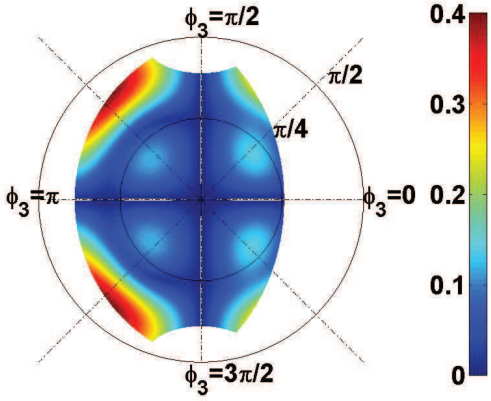
Pour faciliter les comparaisons, nous partirons du spectre dans le plan $z = 0$ dans le repère *après rotation*, et nous prenons en compte uniquement la partie de ce spectre polarisée suivant $\hat{x}$.

Nous assimilons le plan $\mathcal{P}(z = 0)$ de ce repère au plan $\mathcal{P}_3$, et le demi-espace $z \geq 0$ à HS_3. Le repère associé à HS_3 est donc $\mathcal{R}(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Les bases associées aux autres plans $\mathcal{P}_j$ et demi-espaces sont présentées dans le tableau 5.3. On en déduit que l'antenne ne rayonne pas dans le demi-espace HS_1 et qu'il n'y a donc pas de spectre partiel à prendre en compte dans le plan $\mathcal{P}_1$.
La figure 5.27 représente le module du spectre $\tilde{E}_x$ dans le plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}_3$. Les directions des normales $\hat{z}_j$ aux plans $\mathcal{P}_j$, $(j = 2, 4, 5, 6)$ sont représentées sur la figure 5.27. Les limites des régions d'analyse et de synthèse utilisées dans la suite sont représentées dans le plan $\mathcal{P}$. Elle correspondant aux valeurs numériques suivantes :

$$k_{y_{max}} = 0.22k$$
$$k_{y_{min}} = -0.22k$$
$$k_{x_{max}} = 0.65k$$
$$k_{x_{min}} = -0.7k$$



(a) E_{x_3}



(b) E_{y_3}

FIGURE 5.26 – Composantes du champ lointain dans le repère associé au HS_3.

La figure 5.26 représente les composantes (E_x, E_y) du champ électrique rayonné dans le repère $\mathcal{R}$. On en déduit les spectres partiels *partitionnés* dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 2, .., 6$.

Grâce aux relations entre bases présentées dans le tableau 5.3, la composante $E_x(r', \theta', \phi')$ est obtenue de la façon suivante :

$$E_x = -E_{z_2}^{\chi(2)} + E_{x_3}^{\chi(3)} + E_{z_4}^{\chi(4)}$$

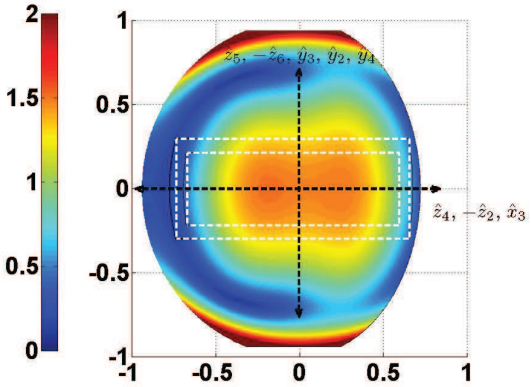


FIGURE 5.27 – Régions d'analyse et de synthèse représentées dans le plan $\mathcal{P}$ en fonction de (k_x, k_y).

HS_3	HS_1	HS_2	HS_4	HS_5	HS_6
$\hat{x}_3 = \hat{x}$	$-\hat{x}_1$	$-\hat{z}_2$	$+\hat{z}_4$	$+\hat{x}_5$	$-\hat{x}_6$
$\hat{y}_3 = \hat{y}$	$+\hat{y}_1$	$+\hat{y}_2$	$+\hat{y}_4$	$+\hat{z}_5$	$-\hat{z}_6$
$\hat{z}_3 = \hat{z}$	$-\hat{z}_1$	$+\hat{x}_2$	$-\hat{x}_4$	$-\hat{y}_5$	$-\hat{y}_6$

TABLE 5.3 – Relation entre les repères.

$$
\begin{aligned}
E_x = &\sum_{m,n,p,q} A^{\chi(2)}_{z_{x_2}|mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_x\kappa_x)} \left(\frac{k_{x_2 n}}{k_{z_2 nq}}\right) B_{mnpq}(x_2, y_2, z_2) \\
&+ \sum_{m,n,p,q} A^{\chi(3)}_{x_3|mnpq} e^{i(mnl_y\kappa_y + pql_y\kappa_y)} B_{mnpq}(x_3, y_3, z_3) \\
&+ \sum_{m,n,p,q} A^{\chi(4)}_{z_{x_4}|mnpq} e^{i(mnl_x\kappa_x + pql_x\kappa_x)} \left(\frac{-k_{x_4 n}}{k_{z_4 nq}}\right) B_{mnpq}(x_4, y_4, z_4)
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Pour définir les limites des spectres partiels à synthétiser dans les différents (sans multiplier par les fonctions de partitionnement) on utilise les relations suivantes : :

plan $\mathcal{P}_3$:

$$
\begin{aligned}
k_{y_{3_{min}}} &= k_{y_{min}} & \qquad k_{z_{3_{min}}} &= k_{z_{min}} \\
k_{y_{3_{max}}} &= k_{y_{max}} & \qquad k_{z_{3_{max}}} &= k_{z_{max}}
\end{aligned}
$$

plan $\mathcal{P}_2$:

$$
\begin{aligned}
k_{y_{2_{min}}} &= k_{y_{min}} & \qquad k_{z_{min}} &= 0 \\
k_{y_{2_{max}}} &= k_{y_{max}} & \qquad k_{z_{2_{max}}} &= -k_{x_{min}}
\end{aligned}
$$

plan $\mathcal{P}_4$:

$$k_{y_{4_{min}}} = k_{y_{min}} \qquad k_{z_{4_{min}}} = 0$$
$$k_{y_{4_{max}}} = k_{y_{max}} \qquad k_{z_{4_{max}}} = k_{x_{max}}$$

plan $\mathcal{P}_5$:

$$k_{x_{5_{min}}} = k_{y_{min}} \qquad k_{z_{5_{min}}} = 0$$
$$k_{x_{5_{max}}} = k_{y_{max}} \qquad k_{z_{5_{max}}} = k_{y_{max}}$$

plan $\mathcal{P}_6$:

$$k_{x_{6_{min}}} = -k_{y_{max}} \qquad k_{z_{6_{min}}} = 0$$
$$k_{x_{6_{max}}} = -k_{y_{min}} \qquad k_{z_{6_{max}}} = -k_{y_{min}}$$

Plan $\mathcal{P}_2$	Plan $\mathcal{P}_4$
$k_{x_{min_2}} = \sqrt{k^2 - \lvert k_{x_{min_3}}\rvert^2 - \lvert k_{y_{max_3}}\rvert^2}$	$k_{x_{max_4}} = -\sqrt{k^2 - \lvert k_{x_{max_3}}\rvert^2 - \lvert k_{y_{max_3}}\rvert^2}$
$k_{x_{max_2}} = (k_{L_h} + \delta_h)\lvert_{k_{y_2=0}} = k_{L_v} + \delta_v$	$k_{x_{min_4}} = -(k_{L_h} + \delta_h)\lvert_{k_{y_4=0}} = -(k_{L_v} + \delta_v)$
$k_{y_{min_2}} = k_{y_{min_3}}$	$k_{y_{min_4}} = k_{y_{min_3}}$
$k_{y_{max_2}} = k_{y_{max_3}}$	$k_{y_{max_4}} = k_{y_{max_3}}$

TABLE 5.4 – Valeurs minimales et maximales des variables spectrales dans les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_4$.

Plan $\mathcal{P}_5$	Plan $\mathcal{P}_6$
$k_{x_{min_5}} = k_{x_{min_3}}$	$k_{x_{min6}} = -k_{x_{max3}}$
$k_{x_{max_5}} = k_{x_{max_3}}$	$k_{x_{max_6}} = -k_{x_{min_3}}$
$k_{y_{min_5}} = -(k_{L_h} - \delta_h)\lvert_{k_{y_5=0}} = -(k_{L_v} + \delta_v)$	$k_{y_{min_6}} = -(k_{L_h} + \delta_h)\lvert_{k_{y_6=0}} = -(k_{L_v} + \delta_v)$
$k_{y_{max_5}} = -\sqrt{k^2 - \lvert k_{x_{max_3}}\rvert^2 - \lvert k_{y_{max_3}}\rvert^2}$	$k_{y_{max_6}} = -(\sqrt{k^2 - \lvert k_{x_{min_3}}\rvert^2 - \lvert k_{y_{min_3}}\rvert^2}$

TABLE 5.5 – Valeurs minimales et maximales des variables spectrales dans les plans $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_6$.

Quand on multiplie les spectres partiels par les fonctions de partitionnement, en prenant les mêmes valeurs pour k_{L_h} et δ_h que dans la section 4.3, on obtient, dans le cas étudié ici les valeurs limites des variables spectrales dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 2, 4, 5, 6$, données dans les tableaux 5.4 et 5.5.

La figure 5.28 présente les coefficients de la décomposition sur un frame de Gabor obtenus à partir de l'analyse de la composante $\tilde{E}_{x_j}(k_{x_j}, k_{y_j})$ des spectres d'ondes planes dans les plans $\mathcal{P}_j$, $j = 2, 3, 4$, pour la région définie précédemment. On vérifie avec les équations (4.18) et (4.19) que selon k_{y_j} ($j = 2, 3, 4$), la région de synthèse est comprise dans l'intervalle où $\chi_j = 1$. La contribution des plans $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_6$ est donc nulle.

Le frame utilisé est défini par : $\nu_\alpha = 0.16$, $L_\alpha = 15\lambda$.
Les paramètres de troncation sont : $\epsilon_1 = 10^{-2}$, $\epsilon_2 = 10^{-2}$.
Il en résulte : $M_{min} = P_{min} = -8$, $M_{max} = P_{max} = 8$, $Q_{min_{(2,3,4)}} = -12$, $Q_{max_{(2,3,4)}} = 12$, $n_{0_\alpha} = 1$, $S_\alpha = 17$ avec $\alpha = x, y$.
$N_{min_2} = 22$, $N_{max_2} = 41$.
$N_{min_3} = -30$, $N_{max_3} = 28$.
$N_{min_4} = -37$, $N_{max_4} = -24$.
$\epsilon_3 = 10^{-4}$.

La figure 5.29 présente la reconstruction du spectre d'ondes planes source sans partitionnement $\tilde{\vec{E}}^{(3)}_{x_3}$, la figure 5.30 présente la reconstruction du spectre d'ondes planes partiel *partitionné* $\tilde{\vec{E}}^{\chi(3)}_{x_3}$, tous les deux dans la région de synthèse délimitée sur la figure 5.27 dans le plan $\mathcal{P}_3$. On peut déduire du niveau d'erreur de reconstruction des spectres, la précision de calcul des coefficients de frame. Si on compare le niveau de précision de la reconstruction des figures 5.29 et 5.30 avec la reconstruction de la figure 5.24, on peut constater encore une fois, la variation de la précision en rapport avec la variation des paramètres ϵ_1 et ϵ_2 (égaux à 10^{-4} pour la figure 5.24, à 10^{-2} pour la figure 5.30).

Les figures 5.31 et 5.32 présentent le champ électrique rayonné calculé par la méthode de LFG dans la région de synthèse du champ lointain correspondant à la région spectrale délimitée sur la figure 5.27 à la distance $r' = 225\lambda = b$. On peut constater une légère amélioration de la précision de la reconstruction dans les régions proches de $\phi' = \frac{5\pi}{4}$ et $\phi' = \frac{7\pi}{4}$, où les faisceaux lancés depuis les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_4$ contribuent. L'erreur RMS du calcul avec partitionnement est de $1.046.10^{-4}$, sans partitionnement elle est de $1.048.10^{-4}$. L'amélioration de cette erreur RMS par le partitionnement est très faible car le partitionnement ne modifie les champs qu'aux limites de la zone d'observation (régions proches de $\phi' = \frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$). Les figures 5.33 et 5.34 permettent d'observer une légère diminution de l'erreur dans ces régions.

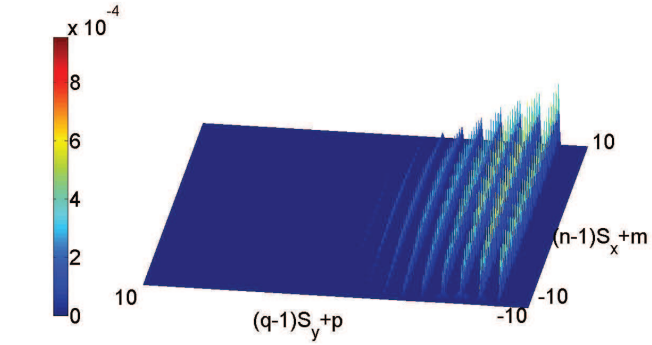
5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la validité de la méthode de partitionnement spectral a été numériquement prouvée, ainsi que sa précision, en comparant le champ lointain théorique d'antennes omnidirectionnelles au champ synthétisé par LFG à partir de frames après partitionnement spectral.

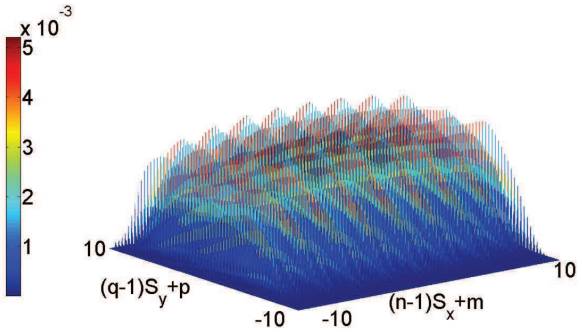
Les temps de calcul, liés au nombre de faisceaux lancés, sont importants comparés au calcul direct du champ lointain. Mais l'intérêt de cette méthode devra être testé dans des configurations où il

sera possible de lancer les faisceaux dans des régions angulaires limitées, pour prendre en compte les réflexions multiples par des obstacles, en 3D. Bien que sa validité et sa précision aient été testées en champ lointain, cette méthode présente l'intérêt de permettre le calcul des champs proches des sources rayonnantes (hors de la zone des champs réactifs), à partir de la connaissance initiale du champ lointain de ces sources. Elle sera donc utile pour simuler les champs rayonnés par une antenne en présence d'obstacles proches.

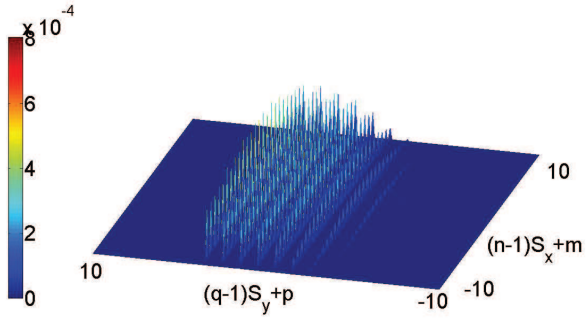
Dans ce dernier chapitre, nous avons également proposé une mise en œuvre de la méthode de partitionnement spectral suivie d'un lancer de faisceaux gaussiens à partir de frames, pour des antennes *réelles*, dont le champ lointain n'est pas connu sous forme analytique, mais donné par un ensemble de valeurs mesurées ou calculées numériquement. L'algorithme intègre alors une phase d'interpolation des champs initiaux. On observe une erreur de l'ordre de 10^{-3} lors de la synthèse du spectre source, intégrant la phase d'interpolation, ce qui valide le choix que nous avons fait d'un algorithme d'interpolation cubique.



(a) $\mathcal{P}_2$

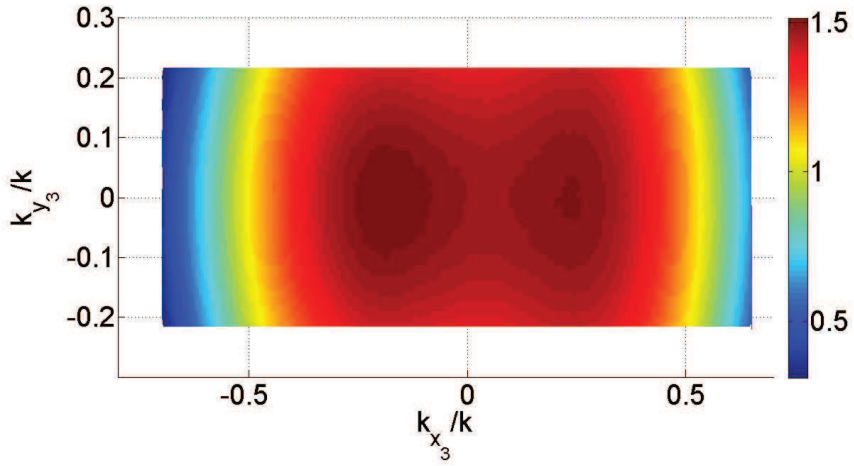


(b) $\mathcal{P}_3$

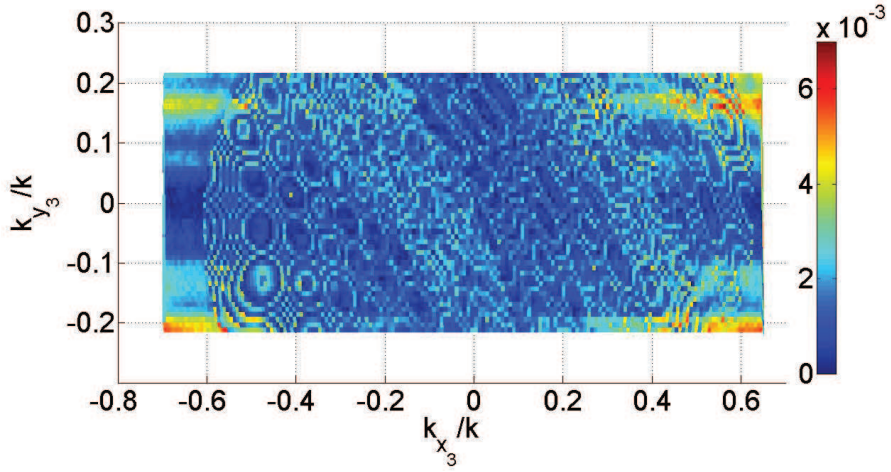


(c) $\mathcal{P}_4$

FIGURE 5.28 – Coefficients de la décomposition dans les plans $\mathcal{P}_2$ $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$.

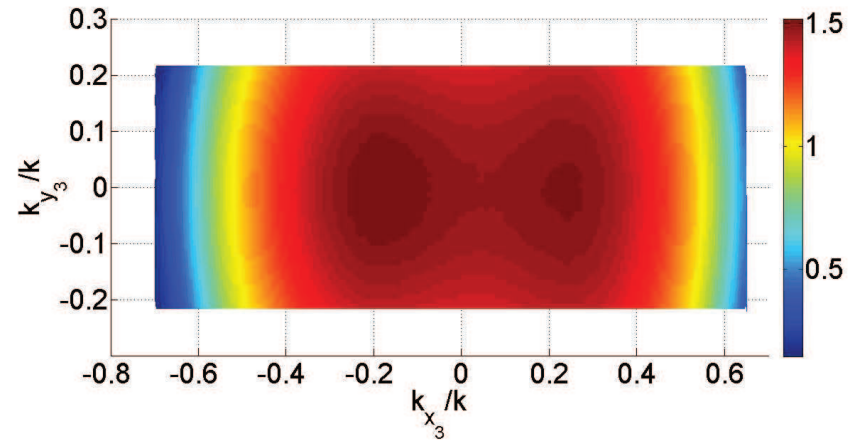


(a) $\tilde{E}^{(3)}_{x_3}$

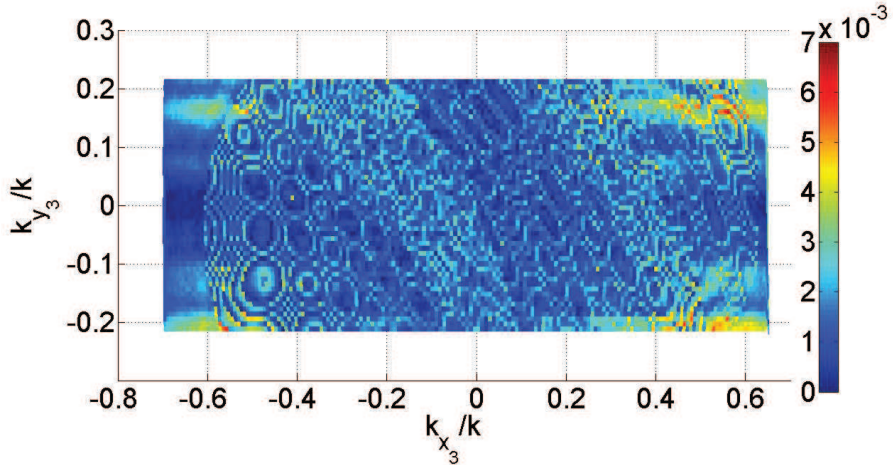


(b) Erreur absolue normalisée

FIGURE 5.29 – Spectre d'ondes planes source dans le plan $\mathcal{P}_3$.

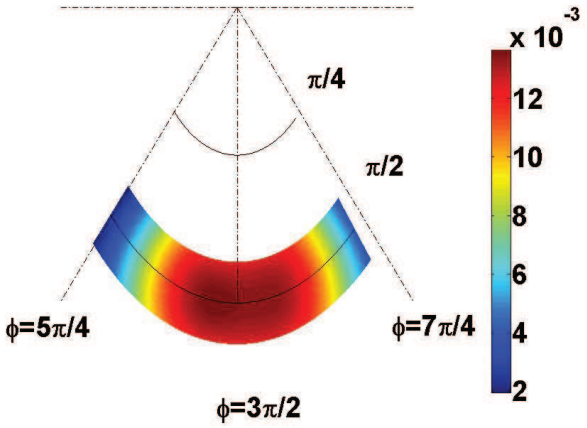


(a) $\tilde{E}_{x_3}^{\chi^{(3)}}$

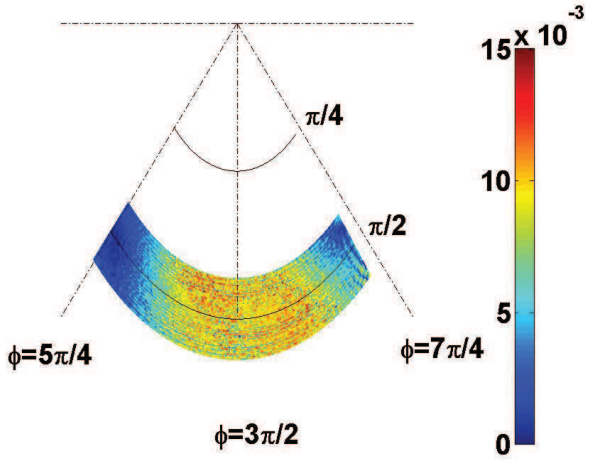


(b) Erreur absolue normalisée

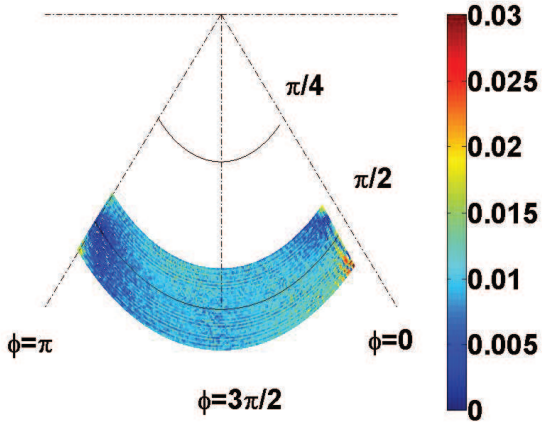
FIGURE 5.30 – Spectre d'ondes planes partiel *partitionné* dans le plan $\mathcal{P}_3$.



(a) $E_{x_3}(r', \theta', \phi')$

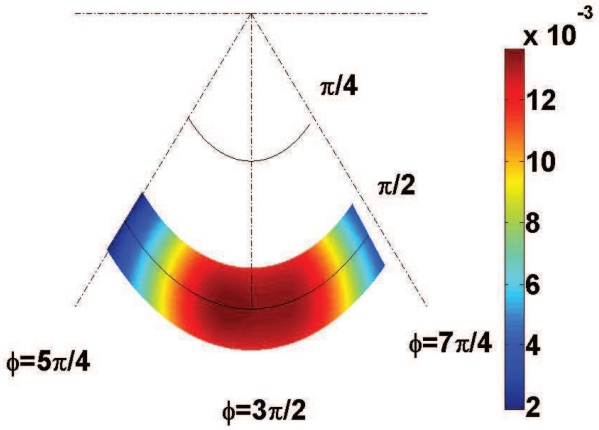


(b) Erreur absolue normalisée

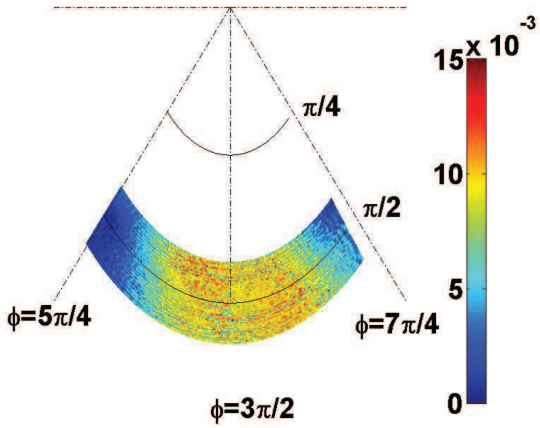


(c) Erreur relative

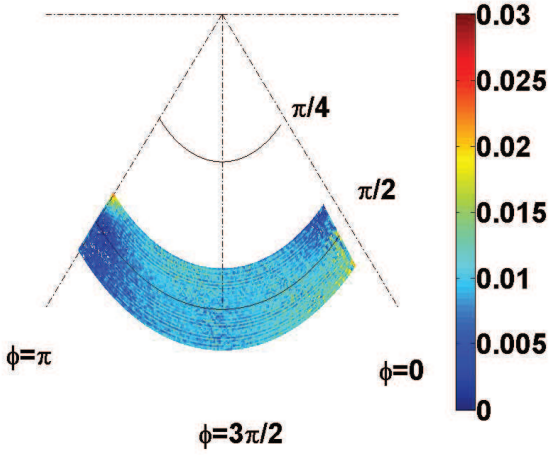
FIGURE 5.31 – Composante $E_{x_3}(r', \theta', \phi')$ calculée par la méthode LFG sans partitionnement.



(a) $E_{x'}(r', \theta', \phi')$



(b) Erreur absolue normalisée



(c) Erreur relative

FIGURE 5.32 – Composante $E_{x_3}(r', \theta', \phi')$ calculée par la méthode LFG avec partitionnement.

(a) Sans partitionnement. (b) Avec partitionnement.

FIGURE 5.33 – Erreur relative (zoom) autour du plan $\mathcal{P}_4$.

(a) Sans partitionnement. (b) Avec partitionnement.

FIGURE 5.34 – Erreur relative (zoom) autour du plan $\mathcal{P}_2$.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse a été consacré à la décomposition de distributions sources sur des frames de Gabor à fenêtres gaussiennes, dans le but de calculer les champs rayonnés par superposition de faisceaux gaussiens.

Dans le chapitre deux de ce travail nous avons résumé la formulation de la méthode de décomposition sur un frame de Gabor à fenêtres gaussiennes, et les formules des faisceaux gaussiens rayonnés par ces fenêtres.

Le chapitre trois est consacré au calcul des coefficients de frame. Il généralise les travaux antérieurs en envisageant une distribution source définie dans le domaine spatial ou spectral, qu'il s'agisse d'une fonction à une ou à deux variables, et dans ce dernier cas, à variables séparables ou non séparables. Ce chapitre présente également de la façon la plus générale le lien entre l'échantillonnage utilisé pour calculer les coefficients de frame par transformée de Fourier discrète, et les contraintes liées au signal source et au frame choisi. Il introduit des paramètres dits *de troncation* ou seuils ϵ_1 et ϵ_2 permettant de considérer comme négligeable le signal source, ou une fenêtre gaussienne, en dehors d'une certaine bande. Ces paramètres ont une influence sur le nombre de coefficients à calculer, mais ce chapitre étudie aussi leur influence sur les résultats et le temps de calcul si on *tronque* les fonctions elle-mêmes. Les relations entre les différents paramètres intervenant dans le calcul des coefficients sont explicitées et des mises en œuvre numériques pour des sources définies analytiquement (fonction gaussienne et impulsion rectangulaire) permettent de valider les choix de paramètres visant à optimiser le calcul.

La fin du chapitre introduit un seuil ϵ_3 permettant de *compresser* l'ensemble des coefficients, en vue d'optimiser le LFG ultérieur. Les résultats obtenus sur des cas tests, pour la reconstruction de la source, sont très encourageants.

Ce chapitre permet donc à partir d'une étude approfondie des paramètres de calcul des coefficients, d'envisager des compromis *optimaux* précision/temps de calcul selon le besoin de l'utilisateur à la fois

lors du calcul des coefficients *(troncation)* et lors du lancer de faisceaux *(compression)*.

Le chapitre quatre introduit une méthode originale de *partitionnement spectral* qui permet, connaissant le champ lointain d'une source, de représenter son rayonnement dans tout l'espace par une superposition de faisceaux gaussiens lancés à partir de frames de Gabor. Ces frames sont définis dans six plans, et servent à décomposer des spectres *partiels*, multipliés par des fonctions de partition dans le domaine spectral. Le champ rayonné en un point est obtenu par superposition des champs rayonnés par trois spectres d'onde plane partiels définis dans trois plans spectraux. Outre la généralisation à tout l'espace du calcul de champs par LFG à partir de frames, cette méthode permet de réduire les imprécisions de calcul associées aux champs des *faisceaux très inclinés* (peu paraxiaux), grâce aux fonctions de partition, qui limitent la bande de chaque spectre partiel.

Les caractéristiques spectrales des fonctions de partition influent sur la distribution associée dans le domaine spatial. Cette influence est étudiée à la fois analytiquement et numériquement, pour des fonctions de partition dérivées de la fenêtre de Hann.

Le chapitre cinq valide numériquement la méthode de partition spectrale en l'appliquant au cas d'antennes théoriques (réseau de dipôles demi-onde, dipôle demi-onde) et au cas d'une antenne réelle. Pour les antennes *théoriques*, les niveaux d'erreurs obtenus sont en cohérence avec les valeurs des paramètres de troncation ϵ_1 et ϵ_2, ce qui valide la méthode de partitionnement proposée.

Dans le cas d'une antenne réelle, le champ lointain est généralement donné sous la forme d'un ensemble discret de valeurs issues soit de mesures soit de simulations. Dans l'algorithme de calcul des coefficients sont alors introduits des modules d'interpolation. L'erreur associée à l'interpolation est calculée pour le cas étudié, et reste à un niveau tout à fait acceptable.

En conclusion de cette thèse, il faut rappeler que la méthode de LFG n'est pas conçue pour calculer le champ rayonné en espace libre. Son intérêt n'est sensible qu'en présence d'obstacles multiples, lorsque seul un nombre limité de faisceaux réfléchis par ces obstacles contribuent au champ dans la zone d'intérêt finale.

Dans de tels contextes, la *lourdeur* de la méthode de frames de Gabor, due à la redondance qu'elle introduit, est compensée par la réduction du nombre de faisceaux *utiles* à propager.

L'efficacité de la méthode (compromis temps de calcul/précision) comparée à d'autres, reste à évaluer dans ces contextes.

Conventions et notations

$e^{-i\omega t}$	Convention en régime harmonique.
$\tilde{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx$	Transformée de Fourier (notée aussi $\mathcal{F}[f]$).
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x) e^{ik_x x} dk_x$	Transformée de Fourier inverse (notée aussi $\mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{f}\right]$).
h^*	Complexe conjugué de h.
A^* (A matrice)	Matrice adjointe (transposée conjuguée).
$\vec{u}$	Vecteur (colonne) quelconque.
$\hat{u}$	Vecteur unitaire.
$\vec{u}^T$, A^T	Transposée d'un vecteur, d'une matrice.
$\vec{u}^T \vec{v}$	Produit scalaire de deux vecteurs.
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	Produit vectoriel de deux vecteurs.
$\lfloor r \rfloor$	Partie entière de r.
$\lceil r \rceil$	Partie entière de $r+1$.
E_x avec $\alpha = x, y, z$	Composantes de $\vec{E}$

Bibliographie

[1] B. Z. Steinberg, E. Heyman, and L. B. Felsen, "Phase-space beam summation for time-harmonic radiation from large apertures," *Opt. Soc. Am. A.*, vol. 8, no. 1, pp. 41–59, 1991.

[2] A. Shlivinski, E. Heyman, A. Boag, and C. Letrou, "A phase-space beam summation formulation for ultrawide-band radiation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, no. 8, pp. 2042–2056, 2004.

[3] A. Chabory, "Modélisation électromagnétique des radômes par des techniques basées sur les faisceaux gaussiens," Ph.D. dissertation, Université Toulouse III, 2004.

[4] K. Tap, "Complex Source Point Beam expansions for some electromagnetic radiation and scattering problems," Ph.D. dissertation, The Ohio State University, Colombus, USA, 2007.

[5] D. Lugara and C. Letrou, "Alternative to Gabor's representation of plane aperture radiation," *Electron. Lett*, vol. 34, no. 24, pp. 2286–2287, 1998.

[6] D. Lugara, "Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens," Ph.D. dissertation, Université de Marne la Vallée, 2000.

[7] H. T. Chou and P. Pathak, "Use of gaussian ray basis functions in ray tracing methods for applications to high frequency wave propagation problems," *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings*, vol. 147, no. 2, pp. 77–81, 2000.

[8] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, ser. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Philadelphia : SIAM Press, 1992, vol. 61.

[9] ——, "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, no. 5, pp. 961–1005, Sept. 1990.

[10] D. Lugara and C. Letrou, "Printed antennas analysis by a Gabor frame-based method of moments," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 50, no. 11, pp. 1588–1597, 2002.

[11] I. Ghannoum, "Etudes d'outils de calcul de propagation radar en milieu complexe (milieu urbain, présence de milti-trajets...) par des techniques de lancer de faisceaux gaussiens," Ph.D. dissertation, Université Pierre et Marie Curie, 2010.

[12] A. Fluerasu, "Modélisation de champs dans le domaine spatio-temporel par une méthode de frame de Gabor. application à la caractérisation du canal indor millimétrique," Ph.D. dissertation, Université de Marne la Vallée, 2003.

[13] A. Papoulis, *Signal Analysis*. New York : McGraw-Hill, international ed., 1984.

[14] R. Johnson, *Antenna Engineering Handbook*, ser. Electronics Electrical Engineering. New York, U.S.A : McGraw-Hill, Inc., 1992, vol. 1.

[15] M. A. Kowalski, K. A. Sikorski, and F.Stenger, *Selected Topics in Approximation and Computation*. 198 Madison Avenue, New York, NY 10016, USA : Oxford University Press, 1995.

[16] Josefsson and Persson, *Conformal Array Antenna Theory and Design*. 1000 AE Amsterdam, The netherlands : Elsevier Science B.V., 2002, vol. 1.

[17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *The Art of Scientific Computing*, ser. Numerical Recipes. 32 Avenue of the Americas, New York, NY 10013-2473, USA : Cambridge University Press, 2007, vol. 1.

Annexe A

Relation entre spectres d'onde plane définis dans deux plans différents

À partir du spectre d'onde plane d'un champ électromagnétique défini dans un plan $\mathcal{P}$, on peut calculer le spectre d'onde plane de ce même champ défini dans un autre plan $\mathcal{P}'$ [11].

On notera :

- $(O', \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ et $(O', \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ les repères cartésiens liés respectivement aux plans $\mathcal{P}(O', \hat{x}, \hat{y})$ et $\mathcal{P}'(O', \hat{x}', \hat{y}')$, les axes $\hat{z}$ et $\hat{z}'$ définissent les vecteurs normaux aux plans correspondants.

- $\vec{\tilde{E}}(k_x, k_y)$ et $\vec{\tilde{E}}'(k'_x, k'_y)$ les spectres d'onde plane vectoriels du même champ $\vec{E}$ respectivement dans le plan P et P' (avec k_z et $k_{z'}$ positifs).

- $\vec{k}$ le vecteur d'onde défini par :

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} = k_{x'}\hat{x}' + k_{y'}\hat{y}' + k_{z'}\hat{z}'$$

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque dans l'espace, le champ en ce point M peut être exprimé en fonction de $\vec{\tilde{E}}(k_x, k_y)$ par :

$$\vec{E}(M) = \iint_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{E}}(k_x, k_y) e^{j\vec{k}.\vec{O'M}} dk_x dk_y \tag{A.1}$$

et en fonction de $\vec{\tilde{E}}'(k_{x'}, k_{y'})$ par :

$$\vec{E}(M) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}'(k_{x'}, k_{y'}) e^{j\vec{k}.\vec{O'M}} dk_{x'} dk_{y'} \tag{A.2}$$

L'équation (A.1) s'écrit alors :

$$\vec{E}(M) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(k_x, k_y) e^{j\vec{k}\vec{O'M}} J(\vec{k}, \vec{k'}) dk_{x'} dk_{y'} \tag{A.3}$$

avec $J(\vec{k}, \vec{k'})$ le déterminant de la matrice jacobienne du changement de variable $(k_x, k_y) \longrightarrow (k_{x'}, k_{y'})$:

$$J(\vec{k}, \vec{k'}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial k_{x'}} & \frac{\partial k_x}{\partial k_{y'}} \\ \frac{\partial k_y}{\partial k_{x'}} & \frac{\partial k_y}{\partial k_{y'}} \end{pmatrix} = \frac{\vec{k}.\hat{z}}{\vec{k}.\hat{z'}} = \frac{k_z}{k_{z'}}$$

En comparant les équations (A.2) et (A.3), on obtient :

$$\vec{\tilde{E}}'(k_{x'}, k_{y'}) = \vec{\tilde{E}}(k_x, k_y) J(\vec{k}, \vec{k'}) \tag{A.4}$$

Dans le contexte du partitionnement spectral, on peut généraliser l'équation (A.4) pour les six $\mathcal{P}_j$ comme suit :

$$\vec{\tilde{E}}^{(j_2)}(k_{x_{j2}}, k_{y_{j2}}) = \vec{\tilde{E}}^{(j_1)}(k_{x_{j1}}, k_{y_{j1}}) J_{12}(\vec{k_1}, \vec{k_2}) \tag{A.5}$$

avec la matrice jacobienne du changement de variable $(k_{x_{j2}}, k_{y_{j2}}) \longrightarrow (k_{x_{j1}}, k_{y_{j1}})$ définie comme suit :

$$J_{12}(\vec{k_1}, \vec{k_2}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_{x_1}}{\partial k_{x_2}} & \frac{\partial k_{x_1}}{\partial k_{y_2}} \\ \frac{\partial k_{y_1}}{\partial k_{x_2}} & \frac{\partial k_{y_1}}{\partial k_{y_2}} \end{pmatrix} = \frac{\vec{k_1}.\hat{z_1}}{\vec{k_2}.\hat{z_2}} = \frac{k_{z_1}}{k_{z_2}}$$

finalement on peut réécrire l'équation (A.5) pour le changement du plan $\mathcal{P}_j$ comme :

$$\vec{\tilde{E}}^{(j_2)}(k_{x_{j2}}, k_{y_{j2}}) = \frac{k_{z_1}}{k_{z_2}} \vec{\tilde{E}}^{(j_1)}(k_{x_{j1}}, k_{y_{j1}}) \tag{A.6}$$

Annexe B

La méthode d'interpolation

Dans de nombreux cas de figure, les coordonnées des points d'échantillonnage nécessaires à l'analyse de Gabor à fenêtres gaussiennes, ne correspondent avec aucune des coordonnées des points générés lors les mesures de l'antenne. Pour cette raison, il est alors indispensable d'interpoler les coordonnées et les valeurs du champ, avec pour finalité d'obtenir la valeur du spectre d'onde plane aux points nécessaires pour l'analyse de Gabor à fenêtres gaussiennes.

Lorsqu'on augmente le degré d'interpolation, la complexité du calcul et le temps de programmation augmentent eux aussi. C'est pourquoi, dans ce travail, nous avons choisi des méthodes d'interpolation de troisième degré ou cubique.

La figure B.1 démontre le principe d'interpolation cubique en une dimension, avec les quatre points utilisés et la zone d'interpolation associée.

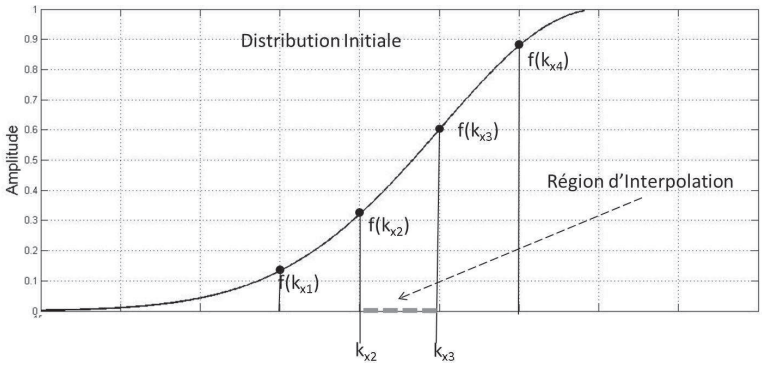


FIGURE B.1 – Interpolation cubique en une dimension

La figure B.2 démontre le principe d'interpolation cubique en deux dimensions, et avec les sept points utilisés et la zone d'interpolation associée.

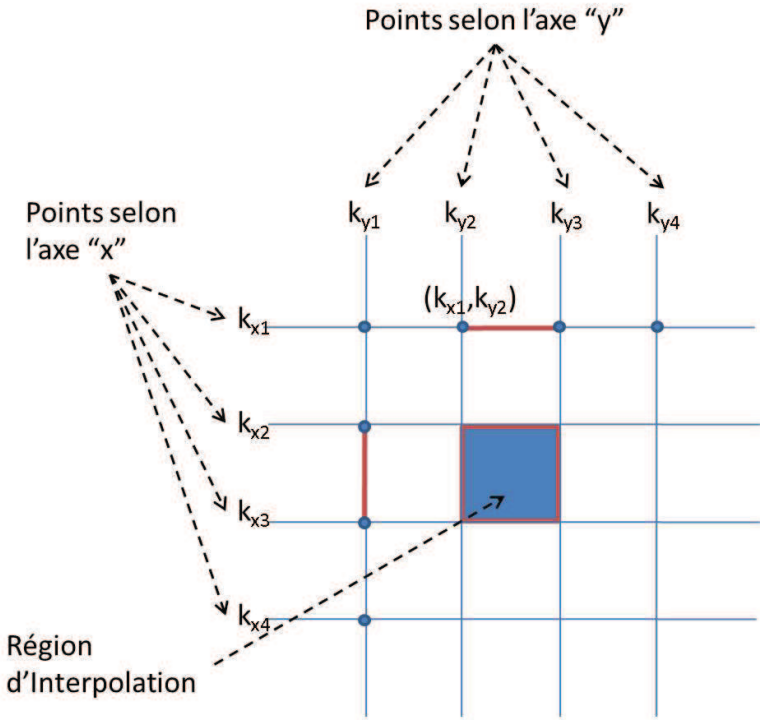


FIGURE B.2 – Interpolation cubique en deux dimensions

Dans cette thèse, nous utiliserons de façon autonome deux méthodes d'interpolation cubique en deux dimensions. Ces deux méthodes d'interpolation génèrent approximativement le même résultat.

B.1 Interpolation cubique Lagrangienne

On se donne $n+1$ points $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ (avec les x_j distincts deux à deux). On se propose de construire un polynôme de degré minimal qui aux abscisses x_j prend les valeurs y_j, de la façon suivante :

$$L(X) = \sum_{j=0}^{n} y_i l_i(X) \tag{B.1}$$

où $l_i(X)$ est le polynôme de Lagrange associé à ces points, défini par :

$$l_i(X) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} ... \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} ... \frac{X - x_n}{x_i - x_n} \tag{B.2}$$

On a en particulier deux propriétés :

– l_i est de degré n pour tout i

– $l_i(x_j) = \delta_{i,j}, 0 \leq i, j \leq n$ c'est-à-dire $l_i(x_i) = 1$ et $l_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$

Le polynôme défini par (B.1) est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $L(x_i) = y_i$ pour tout i [15, 16].

En effet :

– d'une part $L(X) = \sum_{j=0}^{n} y_i l_i(X) = y_i$,
– d'autre part, étant combinaison linéaire de polynômes de degré n, L est de degré au plus n ; si un autre polynôme Q vérifie ces propriétés, alors $L - Q$ est de degré au plus n et il s'annule en $n + 1$ points distincts (les x_k) : $L - Q$ est donc nul, ce qui prouve l'unicité.

B.2 Interpolation spline cubique

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, une fonction spline est une fonction définie par morceaux par des polynômes.

Dans les problèmes d'interpolation, la méthode des splines est souvent préférée à l'interpolation polynomiale, car on obtient des résultats similaires en se servant de polynômes ayant des degrés inférieurs [17], tout en évitant *le phénomène de Runge* (configurations où l'écart maximal entre la fonction et son interpolation augmente indéfiniment avec n) [15, 17].

Une courbe spline est une fonction polynomiale par morceaux définie sur un intervalle $[a, b]$ divisé en sous intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ tels que :

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$$

on la note donc $\mathcal{S} : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sur chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ on définit un polynôme

$$P_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$$

Cela nous donne, pour une spline à k intervalles :

$$\begin{aligned} S(t) = P_1(t) \ , \ t_0 \leq t < t_1, \\ S(t) = P_2(t) \ , \ t_1 \leq t < t_2, \\ \vdots \\ S(t) = P_k(t) \ , \ t_{k-1} \leq t \leq t_k. \end{aligned}$$

Le cas le plus courant des splines est la spline cubique. Elle est uniforme et définie par des polynômes de degré 3. Un polynôme de degré 3 s'écrivant :

$$P(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$$

il nécessite 4 contraintes (a, b, c, d) pour être défini. Ces 4 contraintes par intervalle vont nous permettre d'interpoler des courbes splines passant par un ensemble de points donnés, dans différents cas :

Soit un ensemble de points Q_i que nous souhaitons interpoler par une spline cubique. Nous définissons un paramètre t_i associé à chaque point Q_i, qui seront les valeurs pour lesquelles $S(t_i) = Q_i$. De là, nous avons de multiples manières d'interpoler.

Résumé *— Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens.*

Dans certains contextes, les méthodes classiques utilisées pour le calcul de champs rayonnés ou diffractés en présence d'obstacles de grande taille par rapport à la longueur d'onde, comme l'Optique Physique ou les méthodes de rayons, ne sont pas valides ou deviennent très lourdes en temps de calcul.

La théorie des frames de Gabor fournit un cadre rigoureux permettant de décomposer une distribution de sources électromagnétiques, définie dans une ouverture équivalente plane, en une somme plus ou moins redondante de fenêtres gaussiennes. Cette décomposition peut servir de base à des algorithme de lancer de faisceaux gaussiens.

Jusqu'à présent cette théorie était limitée à des décompositions dans un plan (rayonnement dans un demi-espace).

L'objet de cette thèse est d'utiliser cette théorie pour décomposer des champs rayonnés ou diffractés dans toutes les directions de l'espace.

Ce travail de thèse commence par une étude approfondie de l'influence des paramètres utilisés pour le calcul des coefficients de frame. La mise en œuvre numérique permet de tester l'efficacité de techniques de troncation et de compression en termes de compromis précision/temps de calcul.

Le cœur de la thèse consiste en une méthode originale de partitionnement spectral, utilisant des fonctions de partition de l'unité, qui permet d'utiliser le lancer de faisceaux gaussiens à partir de frames définis dans six plans, pour un rayonnement dans tout l'espace tridimensionnel. La formulation de la méthode est présentée. Elle est appliquée à la décomposition en faisceaux gaussiens du champ rayonné par des antennes *théoriques* omnidirectionnelles (réseau de dipôles et dipôle demi-onde). Une antenne réaliste sert enfin de cas test pour la mise en œuvre de la décomposition à partir de données expérimentales discrètes.

Mots clés : *frame de Gabor, lancer de faisceaux gaussiens (LFG), partitionnement spectral, partition de l'unité, champ rayonné.*

Abstract *— Gaussian window frame analysis applied to antennas.*

In some contexts, conventional methods used for large problems involving radiated or diffracted field computations in the presence of obstacles, such as Physical Optics and ray based methods, become really inaccurate or prohibitively time-consuming.

Gabor frame theory provides a rigorous framework for the initial decomposition of equivalent source distributions into a redundant set of Gaussian windows. Frame decomposition has been introduced as a first discretization step into Gaussian Beam Shooting (GBS) algorithms.

Until now, frame decomposition has essentially been restricted to planar source distributions, radiating into one half space.

The main goal of this thesis is to extend the application range of this theory to radiated or diffracted field decomposition into Gaussian beams propagating into the whole space.

The thesis begins with a thorough study of influence of the parameters used for frame coefficient calculation. Numerical implementation is used to test the efficiency of truncation and compression techniques in terms of accuracy / computation time balance optimization.

The core of the thesis consists of an original spectral domain partitioning method involving partition of unity functions, which allows to use Gaussian beam shooting from frames defined in six planes, for radiation into the whole three-dimensional space. The formulation of the method is presented and applied to the decomposition of fields radiated by theoretical omnidirectional antennas (dipole array and half-wave dipole) into Gaussian beams. A realistic antenna is used as a test case for the implementation of decompositions based on experimental discrete initial data.

Keywords : *Gabor frame, Gaussian beam shooting (GBS), spectral partitioning, partition of unity, radiated field.*