
THÈSE

Pour l'obtention du grade de

Docteur en Sciences de l'Université Paris-Sud

ÉCOLE DOCTORALE ONDES & MATIÈRE

Spécialité : Physique des Plasmas

Présentée par

Romain MEYRAND

TURBULENCE À HAUTES FRÉQUENCES DANS LE VENT SOLAIRE:

**Modèle Magnétohydrodynamique Hall et expériences
numériques**

Directeur de thèse : M. Galtier

Soutenue le 20 mars 2013

Devant la Commission d'Examen

JURY

M. Pineau des Forêts	Professeur des Universités	Examineur & Président
M. Grappin	Astronome	Rapporteur
M. Sulem	Directeur de Recherche au CNRS	Rapporteur
M. Galtier	Professeur des Universités	Directeur de thèse
M. Maksimovic	Chargé de Recherche au CNRS	Examineur
M. Carbone	Professeur des Universités	Examineur
M. Gürçan	Chargé de Recherche au CNRS	Invité

Remerciements

JE TIENS À REMERCIER celles et ceux qui d'une manière ou d'une autre ont contribué à l'aboutissement de cette thèse de doctorat. La liste est trop longue pour être complète, elle me paraît également impossible à ordonner.

Dans le désordre et sans exhaustivité donc, merci à...

... mes rapporteurs Rolland Grappin et Pierre Louis Sullem qui ont pris le temps de commenter avec soin mon manuscrit ; mes examinateurs Milan Maksimovic, Vincenzo Carbone et Özgür Gürcan qui se sont prêtés avec bienveillance au jeu de l'examen ; Guillaume Pineau des Forêts pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

.... mon directeur de thèse Sébastien Galtier qui a su me faire confiance en me proposant ce sujet ; j'ai grandement apprécié ses conseils, ses enseignements, sa disponibilité et ses encouragements pendant ces trois années. Aussi incroyable que cela puisse paraître sa seule présence à quelques bureaux du mien a souvent suffi à me rendre serein. Se savoir épaulé par un roc solide et tranquille cela sécurise énormément. Je mesure chaque jour un peu plus le privilège que j'ai eu à travailler avec toi.

... la team TURBO de l'équipe *Fluid and Plasma Dynamics* de l'Université libre de Bruxelles, pour avoir mis à disposition de tous, un formidable outil numérique pour l'étude de la turbulence MHD.

.... tous ceux qui m'ont aidé dans la tâche abrupte et austère du développement et du débogage du code numérique, je pense en particulier à Aurélien Canou, Dimitri Laveder, Éric Buchlin, Élie Soubrie et Claude Mercier.

.... tous les anonymes qui sur la toile participent activement à des forums du type : "MPI send/recv bug - msg # 00029".

... mes ami(e)s et condisciple, Supratik Banerjee, Claudia Ruiz de Galarreta, Chloé Guen-

Remerciements

nou et Vincent Joulin.

.... la bande des Bleausards, Wietze Herreman, Remi Dangla, Jon Soundar, Kim Ta Phuoc, et tant d'autres.

.... mon ami et compagnon de cordée Jérôme Sullivan avec qui j'ai fait l'école buissonnière de physique des Houches et qui m'a emmené à cette occasion au sommet de la face nord des Drus en plein hiver.

.... ma famille au sens le plus large, pour son soutien et sa confiance.

.... ceux que j'oublie et qui je l'espère, me le pardonneront.

.... Corinne qui a rendu ces années de thèses bien douces.

Table des matières

Table des figures	1
Liste des tableaux	9
Introduction générale	11
I Physique des plasmas	17
1 Couplages champs/particules	18
1.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?	18
1.2 Équations de Maxwell	19
1.3 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et stationnaire	20
1.4 Phénomènes collectifs	22
2 De l'équation cinétique aux équations fluides	23
2.1 Évolution de la fonction de distribution : équation de Vlasov	24
2.2 Moments de la fonction de distribution	27
2.3 Approximation des équations fluides	28
3 Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible	30
3.1 Hypothèse des variations lentes	30
3.2 Loi d'Ohm et champ gelé	32
3.3 Ondes dans les plasmas	33
3.3.1 Ondes dans l'approximation MHD	33
3.3.2 Découplage ions/électrons et effet Hall	35

3.3.3	Ondes dans l'approximation MHD Hall incompressible . .	36
3.3.4	Ondes en description bi-fluides	40
3.4	Discussions sur les effets cinétiques, la compressibilité et le domaine de validité de la MHD Hall	43
II Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma		47
1	Quelques concepts de turbulence issus des fluides neutres	49
1.1	L'ubiquité de la turbulence	49
1.2	Des non-linéarités au chaos	49
1.3	Nécessité d'une description statistique : le problème de fermeture .	51
1.4	Cascade de Kolmogorov-Richardson	52
1.5	Le rôle des simulations numériques	56
2	Le vent solaire	57
2.1	Le modèle de Parker	57
2.2	Le champ magnétique interplanétaire	59
2.3	Quelques propriétés du vent solaire	60
3	Turbulence dans le vent solaire	63
3.1	Structures aux grandes échelles : les origines de la turbulence	63
3.2	Évidences expérimentales	63
3.3	Turbulence Alfvénique	65
3.4	Turbulence anisotrope	68
4	Turbulence non-équilibrée et alignement dynamique	71
4.1	Alignement dynamique et hélicité croisée	72
4.2	Phénoménologie de Boldyrev	73
5	Au-delà de l'échelle ionique : dissipation ou dispersion ?	75
5.1	Brisure spectrale aux échelles ioniques	77
5.2	Phénoménologie et controverses	78
5.2.1	Turbulence wistler (forte)	78
5.2.2	Turbulence d'Alfvén cinétique (forte)	79
5.3	Mesures à hautes fréquences	81
III Modélisation simplifiée de la turbulence MHD Hall		85
1	Modèle « Shell »	86
1.1	Interactions triadiques	86

1.2	Cascade multiplicative : Réduction du nombre de degrés de liberté .	87
1.3	Conservation des invariants	90
2	Modèle shell MHD Hall	93
2.1	Expression analytique	93
2.2	Prédictions théoriques	94
3	Résultats numériques	97
3.1	Régime Navier-Stokes, électron MHD et MHD	97
3.2	Régime Hall MHD	97
3.3	Interprétations physiques	99
IV Présentation et validation du code numérique		103
1	Méthode pseudo-spectrale	104
1.1	Comment éliminer la pression dans l'espace de Fourier ?	105
1.2	Discrétisation spatiale périodique	106
1.3	Réduction spectrale	107
1.4	Théorème de Parseval	108
1.5	Itérations dans le temps	108
1.6	Calcul des termes non-linéaires	110
2	Méthode de dealiasing	111
2.1	Méthode des deux tiers	111
2.2	Méthode de phase-shift dealiasing	112
3	Forçage	113
3.1	Forçage statique	113
3.2	Forçage dynamique	114
4	Conditions initiales aléatoires	117
5	Validation du code	119
5.1	Solutions exactes non-linéaires de Mahajan	119
5.2	Comparaison entre solutions analytique et numérique.	122
V Brisure Spontanée de symétrie chirale en turbulence Hall MHD		125
1	Brisure spontanée de symétrie et chiralité	126
1.1	Brisure spontanée de symétrie	126
1.2	La symétrie chirale	127
2	Levée de dégénérescence des ondes d'Alfvén et brisure de symétrie chirale induite par effet Hall	129

2.1	Décomposition hélicitaire complexe	129
2.2	Comment quantifier la chiralité?	132
3	Évidences numériques de brisure spontanée de symétrie chirale en turbulence MHD Hall	135
3.1	Paramètres de l'expérience numérique	135
3.2	Résultats numériques	137
4	Modèle heuristique de la turbulence chirale MHD Hall : IMHD versus EMHD	139
4.1	Le concept de vortex généralisé	139
4.2	Prédictions théoriques	141
4.2.1	EMHD	142
4.2.2	IMHD	142
4.2.3	Hall MHD	143
5	Flux d'énergies et structures cohérentes	147
5.1	Flux d'énergie	147
5.2	Structures cohérentes et beltramisation	151
6	Turbulence MHD Hall anisotrope	157
6.1	Théorie synthétique de Goldreich-Sridhar et Iroshnikov-Kraichnan	158
VI Au-delà de la MHD Hall		163
1	EMHD inertielle	164
1.1	Loi d'Ohm généralisée	164
1.2	Ondes dans l'approximation EMHD inertielle	165
1.3	Invariants idéaux	166
2	Loi universelle de la turbulence EMHD inertielle isotrope	168
2.1	Outils statistiques et symétries	168
2.2	Théorie de Kármán-Howarth appliquée à l'EMHD inertielle	171
2.2.1	Régime $r \ll d_e$	171
2.2.2	Régime $r \gg d_e$	173
2.3	Loi universelle pour les fonctions de structure d'ordre trois	175
3	Comparaisons avec les observations <i>in situ</i>	178
Conclusion générale et perspectives		181

PUBLICATIONS	187
1 Revues à comité de lecture	187
1.1 A universal Law for Solar-Wind Turbulence at Electron Scales . . .	187
1.2 Three-dimensional Hall Magnetohydrodynamics Turbulence	192
1.3 Spontaneous Chiral Symmetry Breaking of Hall Magnetohydrody- namic Turbulence	199
2 Acte de colloque	205
2.1 A New Turbulent Regime in the Solar-wind at Electron Scales . . .	205
Références bibliographiques	209

Table des matières

Table des figures

1	Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence dans les plasmas. Crédit NASA.	11
I.1	Giration d'une particule chargée autour d'une ligne de champ magnétique.	21
I.2	Quand la fréquence ω de l'onde est faible devant les fréquences gyro-magnétiques des électrons et des ions, on peut considérer que le champ de l'onde $\mathbf{E}_x$ garde une valeur constante pendant que les charges effectuent de nombreuses girations dans le champ magnétique. Sous l'effet des champs $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{B}_0$ les charges sont alors animées le long de $0y$ d'une même vitesse de dérive. Quand la fréquence ω de l'onde devient comparable à la fréquence gyromagnétique des ions il faut prendre en compte la composante de courant selon $0y$ qui représente l'effet Hall.	37
I.3	Relation de dispersion en MHD Hall incompressible. La pulsation est normalisée par rapport à la fréquence cyclotronique des ions.	37
I.4	Diagramme temps-fréquence représentant une signature whistler. On peut facilement imaginer le sifflement associé à l'arrivée progressive d'ondes de fréquences de plus en plus faibles.	39
II.1	Image des côtes islandaises acquise le 21 juin 2004 par le satellite Envisat. La turbulence de l'océan est ici matérialisée par des tourbillons bleus-verts dont la couleur est causée par une concentration élevée en phytoplancton. On devine également la nature turbulente de l'atmosphère grâce à la présence de nuages. Source : ESA.	50

Table des figures

II.2	Gauche : Mosaïque d'images de la tache rouge de Jupiter prise par la sonde voyager I le 3 mars 1979. On aperçoit Europa, une des six lunes de Jupiter qui est à peine plus petites que notre Lune. Source : NASA/JPL and Michael Benson, Kinetikon Pictures. Droite : Image en vraie couleur prise par la sonde Cassini le 29 Decembre 2000. Source : NASA/JPL/SSI/	51
II.3	Représentation schématique de la cascade turbulente selon Richardson. Tiré de Nazarenko 2011 [1].	53
II.4	Iso-surfaces de vorticité pour des structures appartenant aux échelles inertielles obtenues à partir d'une simulation numérique directe forcée des équations de Navier-Stokes correspondant à $Re = 433$. Bürger et al. 2012 [2].	54
II.5	Spectres d'énergie mesurés dans de nombreuses situations différentes (océan, atmosphère, souffleries, etc.). Ces mesures confirment la prédiction de Kolmogorov (1941). Image tirée de Saddoughi et al. 1994 [3]. . .	56
II.6	Solutions des équations hydrodynamiques de Parker. La solution qui correspond aux propriétés observées du vent solaire est noté "Solar Wind" . Figure tirée de Baumjohann et Treumann 1997 [4].	58
II.7	Solutions des équations magnétohydrodynamiques de Weber et Davis. La solution qui correspond aux propriétés observées du vent solaire est noté $u_{\alpha 1}$. Graphique tiré de Weber et Davis (1967 [5]).	59
II.8	Modèle du champ magnétique près de la surface du Soleil. Près de la surface le champ est dipolaire, puis devient quasiment radial à quelques rayons solaires à cause du vent solaire. Graphique tiré de Pneuman et Kopp (1971 [6]).	60
II.9	Profil de température protonique mesuré grâce à la sonde Voyager. Figure tirée de Wang et Richardson 2001 [7].	62
II.10	Des vents solaires rapide et lent originaires d'une même latitude provoquent des zones de compression et de raréfaction à cause de la rotation du Soleil. Schéma tiré de Pizzo 1978 [8].	64
II.11	Les corrélations entre vitesse et champ magnétique dans le vent solaire suggèrent que les fluctuations sont Alfvéniques. Les trois paires de courbes du haut sont les composantes de la vitesse et du champ magnétique, la paire du bas représente la densité et l'intensité du champ magnétique. Image tirée de Belcher et Davis 1971 [9].	65

II.12	Mesures de l'anisotropie de l'indice spectral dans le vent solaire. θ représente l'angle entre $\mathbf{B}_0$ et la direction du vent. Image tirée de Podesta (2009 [10]).	69
II.13	Iso-contour des corrélations de champ magnétique dans le vent solaire en fonction des échelles parallèle et perpendiculaire au champ magnétique. Une unité sur les axes correspond à 10^5 km. Graphique tiré de Matthaeus et al. (1990 [11]).	70
II.14	(a) : Structure turbulente selon la phénoménologie de Goldreich-Sridhar. Les dimensions λ des structures sont identiques dans toutes les directions perpendiculaires. La dimension dans la direction parallèle vérifie $l \propto \lambda^{2/3}$. Au fur et à mesure que l'énergie cascade vers les petites échelles, $\lambda \rightarrow 0$, les structures prennent la forme d'un filament. (b) : Structure turbulente selon la phénoménologie de Boldyrev. Les dimensions des structures dans les directions perpendiculaires sont λ et $\xi \propto \lambda^{3/4}$, dans la direction parallèle $l \propto \lambda^{1/2}$. Au fur et à mesure que l'énergie cascade vers les petites échelles, $\lambda \rightarrow 0$, les structures prennent la forme d'une nappe de courant. Figures tirées de Boldyrev 2006 [12].	73
II.15	Schéma tridimensionnel de l'alignement entre les fluctuations de vitesse et de champ magnétique. Figure tirée de Boldyrev 2006 [12].	74
II.16	Spectres d'énergie magnétique perpendiculaire (rouge/bleu) et parallèle (noir/vert). Deux brisures sont observées aux échelles ionique (~ 0.5 Hz) et électronique (~ 30 Hz). L'incurvation des courbes rouge et noir entre 1Hz et 30Hz est due au bruit. Graphique tiré de Sahraoui et al. (2009 [13]).	75
II.17	Relation de dispersion observée dans le vent solaire pour des fluctuations quasiment perpendiculaires au champ magnétique moyen comparé aux modes propres linéaires solutions des équations de Vlasov-Maxwell Fast et KAW (les courbes en tirets correspondent aux taux d'amortissement linéaire des modes propres.). Les courbes noires ($L_{p,e}$) correspondent aux résonances Landau électronique et protonique $\omega = k_{\parallel} V_{th_{i,e}}$. Les courbes C_p correspondent aux résonances cyclotroniques $\omega = \omega_{ci} - k_{\parallel} V_{th_{i,e}}$. Ces mesures suggèrent que la zone de transition est constituée de modes KAWs fortement amortis par effet Landau. Graphique tiré de Sahraoui et al. (2010 [14]).	82

Table des figures

III.1	Interactions triadiques dans le modèle GOY (Gledzer 1973 [15] Ohkitani et Yamada 1989 [16]). À gauche, l'espace de Fourier à deux dimensions est divisé en couches concentriques. Les interactions non-linéaires se font par triades de modes appartenant à des couches successives. La couche n est donc concernée par les triades indiquées à droite. Schéma tiré de Buchlin 2004 [17]	88
III.2	Spectres compensés de l'énergie magnétique (triangles) et cinétique (astérisques) pour les limites électron MHD et Navier-Stokes. Les spectres prédits théoriquement sont représentés en tirets.	97
III.3	Spectres compensés de l'énergie magnétique (triangles) et cinétique (astérisques). Pour la clarté de la figure le spectre cinétique a été translaté à des valeurs plus faibles. La ligne verticale représente la valeur critique $kd_i = 1$	98
III.4	Rapport entre l'énergie spectrale cinétique et magnétique. La ligne en tirets représente l'équipartition d'énergie. La ligne verticale représente la valeur critique $kd_i = 1$	98
III.5	Spectres compensés de l'énergie magnétique (triangles) et cinétique (astérisques). Pour la clarté de la figure le spectre cinétique a été translaté à des valeurs plus élevées. La ligne verticale représente la valeur critique $kd_i = 1$	99
IV.1	Comparaison entre la solution analytique en un point (courbe noir) et des solutions numériques obtenues avec des pas de temps adaptatifs imposant des coefficients CFL variant par pas réguliers entre 0.98 et 1.02. Les losanges représentent la solution numérique obtenue avec un coefficient CFL de 0.8. La parfaite adéquation avec la solution analytique prouve la bonne implémentation du terme Hall dans le code.	123
IV.2	Norme du champ de vitesse à trois temps consécutifs montrant la propagation d'une solution exacte non-linéaire de Mahajan (Mahajan et al. 2005 [18]). Les paramètres de l'onde non-linéaire sont donnés au tableau IV.1.	123

V.1	Propagation d'ondes d'Alfvén généralisées le long d'un champ magnétique quasi-uniforme. Dans la limite $kd_i \ll 1$, on retrouve les paquets d'ondes d'Alfvén décrit par les variables d'Elsässer $\mathbf{z}^\pm = \mathbf{u} \mp \mathbf{b}$. Dans la limite $kd_i \gg 1$, deux types d'ondes coexistent qui s'apparentent respectivement aux ondes whistler (bleu) et ion cyclotron (rouge).	134
V.2	Énergies en fonction du temps. En médaillon : hélicité croisée (rouge), hélicité magnétique (bleu) et polarisation magnétique (noir) en fonction du temps.	136
V.3	Énergie magnétique en fonction de la polarisation magnétique P_m et du nombre d'onde k en coordonnée logarithmique relative à la simulation MHD Hall. Les iso-contours d'énergie sont représentés pour séparer les régions de hautes énergies (rouge) des régions de basses énergies (bleu). Figure tirée de Meyrand et al. 2012 [19].	137
V.4	Énergie magnétique en fonction de la polarisation magnétique P_m et du nombre d'onde k en coordonnée logarithmique relative à la simulation MHD. Les iso-contours d'énergie sont représentés pour séparer les régions de haute énergies (rouge) des régions de basse énergies (bleu).	138
V.5	Rapport d'énergie E^D/E^{Total} (bleu) et $E^G(k)/E^{Total}$ (rouge) en fonction du nombre d'ondes en MHD Hall.	139
V.6	Rapport d'énergie E^D/E^{Total} (bleu) et $E^G(k)/E^{Total}$ (rouge) en fonction du nombre d'ondes en MHD.	139
V.7	Spectre de l'énergie magnétique en coordonnées logarithmiques pour des fluctuations D ($P_m \leq -0.3$) en bleu et G ($P_m \geq 0.3$) en rouge en fonction du nombre d'onde k . Les droites en tiret-point correspondent aux lois de puissance $-11/3$ et $-7/3$ prédite respectivement par les modèles heuristiques de turbulence IMHD et EMHD.	143
V.8	Schéma récapitulatif du modèle heuristique de turbulence MHD Hall chirale. Le trait plein noir représente le spectre de l'énergie magnétique en coordonnées log-log. Les couleurs cyan, rouge et bleu représentent respectivement les spectres d'énergie magnétique en régime de turbulence Alfvénique, Cyclotron Ionique (G) et Whistler (D).	145

Table des figures

- V.9 Spectres d'énergie des fluctuations magnétiques parallèle (noir) et perpendiculaire (rouge) au champ moyen mesuré dans le vent solaire à l'aide des magnétomètres embarqués sur les sondes Cluster. Les flèches verticales représentent la fréquence cyclotronique ionique et les rayons de Larmor ionique et électronique "Doppler-shifted" ($f_\rho = V_f/2\pi\rho$ avec V_f la vitesse du vent solaire). Figure tirée de Sahraoui et al. 2010 [14]. . . . 145
- V.10 (a) Norme du champ de vitesse $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$. (b) Norme du champ magnétique $\mathbf{b}$. (c) Norme du champ de vitesse électronique $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - d_i \nabla \times \mathbf{b}$. La différence entre le nombre de Reynolds magnétique et cinétique apparaît clairement sur ces figures. Les structures du champ magnétique (b) sont en effet plus fines que celles du champ de vitesse (a). Le découplage entre les fluides ionique (a) et électronique (c) apparaît aussi nettement. . . . 146
- V.11 Flux d'énergie correspondant à chacun des termes non-linéaires des équations de la MHD Hall V.16 et V.17, en fonction du nombre d'ondes. . . . 148
- V.12 Diagramme récapitulatif des différents flux d'énergie à travers les échelles $k_n = k_0 \times n$ en MHD Hall. Les flèches gondolées aux extrémités gauche et droite correspondent respectivement à l'injection et la dissipation d'énergie cinétique (en rouge) et magnétique (en bleu). Il est important de noter que pour un nombre de Prandtl magnétique égal à un, l'échelle de dissipation cinétique k_{diss}^u n'est pas égale à l'échelle de dissipation magnétique k_{diss}^b . Les flèches rouges correspondent aux flux d'énergie cinétique portés par les termes non-linéaires $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$. Les flèches bleues correspondent aux flux d'énergie magnétique portés par les termes non-linéaires $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b}$, et les flèches vertes à celui porté par le terme de Hall $\nabla \times \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Les flèches noires correspondent quand à elles, à des flux d'énergie entre les champ magnétique et cinétique à une même échelle. 149
- V.13 Flux d'énergies magnétique et cinétique en fonction du nombre d'ondes k . 150
- V.14 Énergies magnétique en fonction du temps pour une simulation EMHD en déclin. En médaillon : taux de dissipation de l'énergie magnétique en fonction du temps. 151

V.15	(a) Histogramme du cosinus de l'angle entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$ au temps initial pour une simulation EMHD en décroissance libre. (b) Histogramme du cosinus de l'angle entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$ au temps correspondant au maximum de dissipation de l'énergie magnétique (voir Fig.V.14). Les structures turbulentes non-alignées sont détruites plus rapidement que celles qui sont alignées car le transport de l'énergie par les termes non-linéaires vers les petites échelles où ont lieu les phénomènes dissipatifs est d'autant plus efficient que l'alignement est faible.	153
V.16	V.16(a) Norme du champ de vecteur courant électrique pour une simulation EMHD en décroissance libre au temps correspondant au maximum de dissipation de l'énergie magnétique (voir Fig.V.14. V.16(b) Cosinus de l'angle entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$. Cette figure illustre de façon spectaculaire le phénomène de beltramisation en turbulence EMHD.	154
V.17	Iso-surfaces de la norme du courant électrique pour une simulation EMHD en décroissance libre au temps correspondant au maximum de dissipation de l'énergie magnétique (voir Fig.V.14). Le phénomène de beltramisation conduit à la formation de structures de courant électrique de forme hélicoïdale.	154
V.18	V.18(a) : Iso-surfaces de vorticité. V.18(b) : Iso-surfaces de vorticité et lignes de champ de vitesse. La présence de filaments de vorticité en turbulence MHD Hall similaires à ceux rencontrés en turbulence hydrodynamique, corrobore fortement le modèle de turbulence chirale. Les paramètres de l'expérience numérique sont donnés aux tableaux V.1 et V.2	155
V.19	Iso-surface de courant électrique en turbulence MHD Hall forcée. Les paramètres de l'expérience numérique sont donnés aux tableaux V.1 et V.2 . Les structures dominantes sont hélicitaires et traduisent le phénomène de beltramisation dans les écoulements turbulents MHD Hall.	156

Table des figures

VI.1	Profile de vitesse typique d'un écoulement turbulent. Les spirales représentent schématiquement les structures cohérentes de taille différente qui contribuent au signal turbulent. Intuitivement on voit que seules les structures de taille l avec $l \sim r$ apportent une contribution significative à $\langle [\Delta v(r)]^2 \rangle$, de l'ordre de leur énergie cinétique. Les fonctions de structure d'ordres deux agissent donc comme un filtre spatial statistique permettant d'extraire l'information sur la répartition de l'énergie en fonction des échelles.	170
VI.2	Propriétés géométrique des fonctions de corrélation d'ordre trois : $\langle u_x u'_y u'_z \rangle(\mathbf{r}) = \langle u'_x u_y u_z \rangle(-\mathbf{r}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_z} \langle u_x u'_y u'_z \rangle = -\frac{\partial}{\partial r_z} \langle u'_x u_y u_z \rangle$	172
VI.3	Gravure sur bois par un artiste inconnu. Tiré de Flammarion 1888 [20] .	185

Liste des tableaux

II.1	Paramètres typiques du vent solaire mesurés par Helios 2 à une unité astronomique. Données tirées de Bruno et Carbone 2005 [21].	61
IV.1	Paramètres numériques utilisés pour la validation du code par les solutions exactes non-linéaires de Mahajan (Mahajan et al. 2005 [18]). . . .	122
IV.2	Différence entre la solution analytique et la solution numérique en fonction du pas de temps. L'erreur numérique est proportionnelle à dt^3 conformément à l'erreur théorique relative au schéma de Runge-Kutta 3. . . .	122
V.1	Paramètres de l'expérience numérique.	136
V.2	Paramètres de forçage	136

Introduction générale

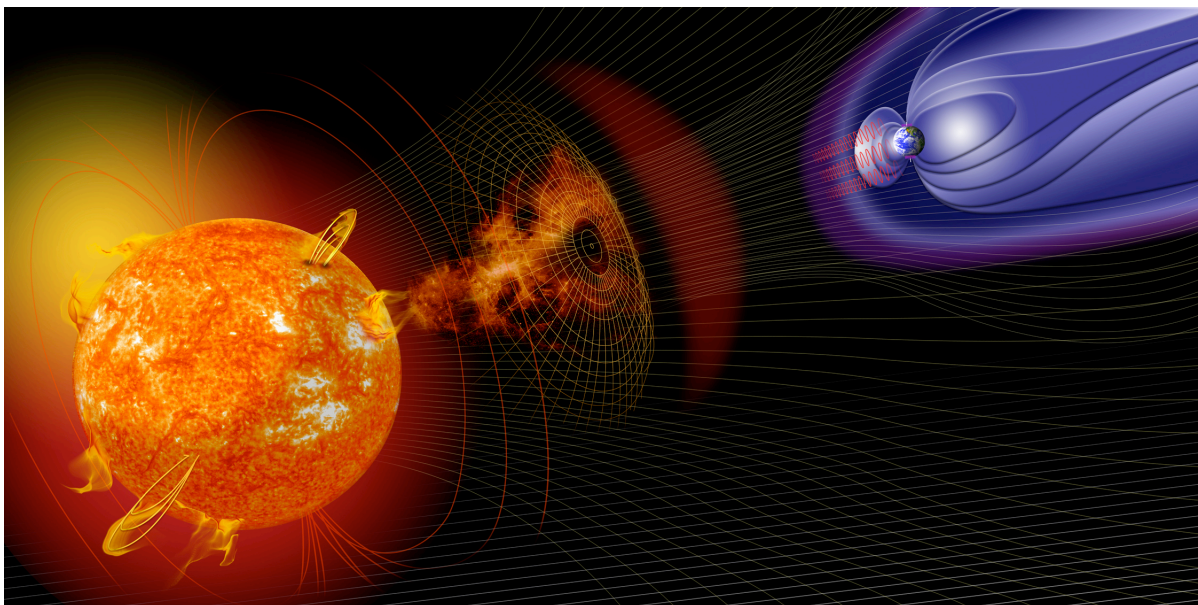


Figure 1 – Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l’étude de la turbulence dans les plasmas.
Crédit NASA.

LE PLASMA est un état de la matière omniprésent dans l’univers. Dans la plupart des situations, les plasmas sont turbulents et magnétisés. Il paraît donc primordial de bien comprendre ces deux caractéristiques afin d’interpréter un grand nombre d’observations astronomiques (formation d’étoiles, disques d’accrétion, cluster de galaxies, couronne solaire, etc.). Comprendre la turbulence plasma est également un enjeu fondamental pour pouvoir confiner les plasmas de fusion et dimensionner un tokamak comme

ITER¹.

Une des difficultés majeures auxquelles sont confrontés les astrophysiciens est l'extrême éloignement de leurs objets d'étude. Cette distance implique des mesures indirectes nécessitant un travail considérable pour extraire l'information qui, hélas, est bien souvent lacunaire et largement dégradée. Bien que la turbulence plasma se développe dans des milieux extrêmement différents, certaines de ses caractéristiques sont universelles et elle partage avec son équivalent neutre les principales propriétés qui font son importance (accélération des phénomènes de transport, introduction d'irréversibilité, etc.). Son caractère universel explique pourquoi le vent solaire s'est progressivement imposé comme étant le laboratoire naturel et privilégié pour étudier le problème général de la turbulence dans les plasmas spatiaux. Sa relative proximité avec la Terre permet en effet des mesures *in situ* qui font défaut à l'astrophysique lointaine. L'échelle des phénomènes est telle que les satellites y constituent des sondes infiniment petites et peu perturbatrices qui n'ont pas d'équivalent dans les laboratoires terrestres. De plus, la turbulence du vent solaire se développe dans l'espace interplanétaire libre de toutes contraintes liées aux conditions aux limites. Le vent solaire peut donc être considéré comme un des archétypes de la turbulence plasma.

Il existe des questions liées à la turbulence qui sont propres au vent solaire. Des mesures *in situ* ont par exemple montré que l'expansion du vent solaire n'est pas adiabatique (Richardson et al. 1995 [22]). Il existe donc une source de chauffage interne probablement d'origine turbulente. Grâce aux données à très haute résolution des magnétomètres embarqués sur Cluster, il a récemment été possible de "suivre" pour la première fois le transfert de l'énergie des grandes échelles (~ 100 km) jusqu'aux petites échelles (~ 10 km) (Sahraoui et al. 2009 [13]). Ceci a permis de remettre en cause une idée reçue selon laquelle une très grande partie de l'énergie de la turbulence se dissipe à l'échelle des protons (~ 100 km). Cette étude a en effet montré que l'énergie continue sa cascade au-delà des échelles ioniques jusqu'aux échelles électroniques et que les protons n'en acquièrent en réalité qu'une fraction.

Cette découverte a soulevé plusieurs questions sur la nature de la cascade turbulente en deçà des échelles ioniques et fait actuellement l'objet de nombreux travaux de recherches et de controverses. En absence de collisions, comprendre comment l'énergie turbulente est transformée en chaleur constitue une question ouverte et un défi fascinant. Une des diffi-

1. International Thermonuclear Experimental Reactor.

cultés du problème provient du fait qu'un plasma possède plusieurs niveaux de description en fonction de l'échelle considérée et que la turbulence les couple fortement entre elles. Se cantonner à une gamme d'échelles donnée n'est donc pas *a priori* pertinent, mais considérer le problème dans sa globalité est si compliqué qu'il devient inintelligible. Il paraît donc nécessaire de découper le problème général en problèmes plus simples, de réduire sa nature complexe en une somme de principes fondamentaux.

En suivant cette démarche, il est par exemple possible d'abaisser le nombre de degrés de liberté du problème en moyennant le mouvement rapide de giration des ions autour du champ magnétique moyen. Les équations résultantes de cette approximation décrivent donc les mouvements d'"anneaux" chargés se mouvant aux travers du champ électromagnétique giro-moyenné. Ce modèle appelé gyrocinétique est issu de l'étude de la turbulence dans les plasmas de fusion et a récemment été utilisé avec succès pour décrire la cascade turbulente du vent solaire en deçà des échelles ioniques (Schekochihin et al. 2009 [23]). L'intérêt majeur de cette approximation est qu'elle décrit correctement les effets cinétiques de dissipation non-collisionnelle. Son défaut principal est qu'elle exclut *de facto* tout les phénomènes dont l'échelle temporelle est de l'ordre (ou supérieur) à la gyrofréquence ionique, ce qui présuppose une dynamique turbulente quasiment bidimensionnelle. De plus, la prise en compte des effets cinétiques rend les expériences numériques extrêmement lourdes ce qui les cantonne à l'étude de dynamiques peu turbulentes (Matthaeus et al. 2008 [24]).

Une démarche alternative consiste à modéliser le plasma du vent solaire par un fluide conducteur et magnétisé. Les équations fluides se déduisent rigoureusement des équations cinétiques et ne supposent aucune approximation. Le problème est que le système d'équations obtenu est infini. Pour disposer d'un système contenant un nombre fini d'équations, il faut le tronquer et donc faire des approximations. Dans le cas où les collisions sont suffisamment nombreuses, le plasma apparaît quasiment homogène sur les échelles collisionnelles et l'on peut développer la fonction de distribution des particules au voisinage d'une Maxwellienne. Il est alors possible d'exprimer le troisième moment (flux de chaleur) en fonction du deuxième moment (température). Dans les plasmas collisionnels, le système infini des équations fluides est donc ainsi limité aux seules trois premières, pour la densité, la vitesse et la pression. Dans le cas d'un plasma faiblement collisionnel comme le vent solaire, il n'est plus possible de développer la fonction de distribution au voisinage d'une Maxwellienne. La pression n'est plus scalaire et les notions de viscosité, de diffusivité magnétique ou de thermoconduction sont caduques.

L'approche fluide n'est donc pas *a priori* possible en absence de collisions, mais elle

présente tellement d'avantages qui pèsent en sa faveur, que bien souvent elle est utilisée au-delà de ses domaines de validité. La description fluide est en effet beaucoup plus intuitive qu'une description cinétique. Tout physicien fait quotidiennement l'expérience sensible des grandeurs fluides (température, densité, pression...) ce qui lui permet de développer une intuition physique des phénomènes. En outre, les variables fluides sont relativement faciles à mesurer ce qui n'est pas le cas des fonctions de distribution, et en passant d'une approche cinétique à une approche fluide on réduit d'un facteur deux le nombre de dimensions à traiter. Cet avantage est particulièrement important pour les simulations numériques.

L'approche fluide a été appliquée avec succès au vent solaire dans le cadre du modèle magnétohydrodynamique (MHD) et a permis de réaliser des progrès considérables dans la compréhension de la turbulence du vent solaire. Certains des concepts issus de ces études ont par la suite essaimé vers d'autres domaines de la physique. C'est le cas par exemple de la conjecture d'équilibre critique de Goldreich-Sridhar (Goldreich et al. 1995 [25]) qui est aujourd'hui appliquée à la turbulence en rotation, stratifiée (Nazarenko et al. 2011 [1]) ou encore la turbulence des plasmas de fusion (Barnes et al. 2011 [26]). Cependant, le modèle MHD ne permet pas de rendre compte des processus à l'œuvre en deçà des échelles ioniques. Une première étape vers la création d'un modèle fluide plus sophistiqué permettant de capturer à la fois la dynamique MHD et certains des effets cinétiques est de tenir compte de l'effet du découplage entre les fluides ionique et électronique en conservant dans la loi d'Ohm généralisée le champ électrique de Hall. On obtient alors ce que l'on appelle la MHD Hall. Contrairement au modèle gyrocinétique, le modèle MHD Hall prend en compte des dynamiques dont l'échelle temporelle est de l'ordre (ou supérieur) à la fréquence de giration ionique. En revanche, par construction il exclut tous les effets cinétiques. Les modèles gyro-cinétique et MHD Hall sont donc complémentaires et permettent l'étude de deux aspects différents de la turbulence.

L'objectif de ma thèse est d'explorer d'un point de vue théorique et numérique le modèle MHD Hall incompressible dans un régime de turbulence forte et d'examiner en détail dans quelle mesure il permet de rendre compte des observations *in situ* du vent solaire. De manière indirecte, cette étude permet également d'évaluer l'importance des effets cinétiques en régime turbulent en comparant les résultats obtenus avec les mesures.

Bien évidemment, on ne saurait se lancer dans cette étude sans avoir essayé de com-

prendre au préalable la nature des phénomènes observés ainsi que les outils théoriques utilisés pour les étudier et les modéliser. C'est la raison pour laquelle je présente dans le **chapitre I** comment on peut à partir du mouvement individuel des particules chargées qui composent un plasma, obtenir par un processus de sommations successives relevant de la physique statistique, les équations de Vlasov-Maxwell, puis celles de la MHD et enfin celles de la MHD Hall. Je discuterai à la fin de ce chapitre des limites du modèle mais également sa pertinence dans le cadre de l'étude de la turbulence.

Au **chapitre II**, je présente une description non exhaustive, mais je l'espère suffisamment détaillée, de l'état actuel des connaissances observationnelles sur la turbulence du vent solaire, suivie par une étude détaillée des efforts de modélisation réalisés au cours de ces 50 dernières années. Les principes de base issus de l'étude de la turbulence dans les fluides neutres seront également rappelés. Cette synthèse permettra de mieux comprendre la nature précise des problèmes rencontrés à l'heure actuelle dans l'étude de la turbulence du vent solaire et fournira des éléments de justification aux différentes approches utilisées dans le cadre de ma thèse pour tenter de les résoudre.

Au **chapitre III**, je présente les résultats numériques obtenus à partir d'un modèle simplifié de turbulence MHD Hall, appelé modèle shell, qui ont initialement motivé ma thèse et l'ont fortement influencée. Nous verrons par la suite comment ces résultats peuvent être retrouvés à l'aide de simulations numériques directes. Je montrerai en particulier comment la prise en compte de la nature géométrique tridimensionnelle de la turbulence MHD Hall permet de construire un modèle théorique plus général pour expliquer les résultats obtenus à partir du modèle shell.

Au **chapitre IV**, je résume les aspects les plus importants du code numérique utilisé pour réaliser les expériences numériques ainsi que les modifications qui ont été faites. Je présente également les tests que j'ai effectués pour valider l'implémentation de l'effet Hall. Le chapitre **chapitre V** constitue le cœur de ma thèse. Grâce à des simulations numériques directes 3D, je mets en évidence l'existence en turbulence MHD Hall d'une brisure spontanée de symétrie chirale. Cette brisure de symétrie révèle un nouveau régime de turbulence que nous avons appelé ion MHD (IMHD). Un modèle heuristique est présenté pour expliquer les résultats obtenus. De telles simulations permettent de décrire la dynamique d'une vaste gamme d'échelles et apporte un éclairage nouveau sur les mécanismes turbulents à l'œuvre dans les plasmas. Il faut cependant toujours garder à l'esprit que les expériences numériques sont loin de permettre d'atteindre les régimes d'écoulement du vent solaire, et que les résultats de telles études doivent de ce fait être analysés avec précaution et les conclusions rester fort prudentes. Je tenterai donc d'identifier les ressem-

blances entre mes simulations idéalisées et les observations, et d'en tirer des conclusions au sujet de la nature de la turbulence à hautes fréquences² du vent solaire, mais aussi, et c'est un point important, d'en comprendre les limites.

Au **chapitre VI**, j'étudie d'un point de vue théorique la prise en compte de l'inertie des électrons dans la dynamique turbulente en gardant toutefois une approche fluide. Une loi exacte pour les fonctions de structure d'ordre trois du courant électronique est dérivée. Cette étude permet de prédire une loi de puissance pour le spectre d'énergie magnétique en deça des échelles électroniques qui correspond qualitativement à certaines observations récentes.

Je conclus le manuscrit par une discussion générale sur le travail effectué au cours de cette thèse et sur les conséquences des résultats obtenus pour la compréhension de la turbulence dans les plasmas non-collisionels.

2. Parler des hautes fréquences de la turbulence du vent solaire est équivalent à parler des petites échelles. En effet, l'hypothèse de Taylor qui est utilisée pour analyser les mesures *in situ* consiste à dire que la vitesse du flot est très supérieure aux vitesses caractéristiques des fluctuations turbulentes. Tout se passe comme si la turbulence était "gelée" et on peut alors facilement passer du spectre temporel qui est mesuré par les instruments, au spectre spatial grâce à la relation $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Cela explique le titre de cette thèse. Il est important de noter que cette hypothèse est sujette à caution aux grands $\mathbf{k}$. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point.

Chapitre I

Physique des plasmas

Sommaire

1	Couplages champs/particules	18
1.1	Qu'est-ce qu'un plasma ?	18
1.2	Équations de Maxwell	19
1.3	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uni- forme et stationnaire	20
1.4	Phénomènes collectifs	22
2	De l'équation cinétique aux équations fluides	23
2.1	Évolution de la fonction de distribution : équation de Vlasov .	24
2.2	Moments de la fonction de distribution	27
2.3	Approximation des équations fluides	28
3	Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible	30
3.1	Hypothèse des variations lentes	30
3.2	Loi d'Ohm et champ gelé	32
3.3	Ondes dans les plasmas	33
3.4	Discussions sur les effets cinétiques, la compressibilité et le do- maine de validité de la MHD Hall	43

DANS UN PLASMA, les variations du champ électromagnétique et les mouvements des particules chargées sont couplés. Les champs électrique et magnétique ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) engendrent des mouvements ioniques et électroniques qui génèrent à leur tour

des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ et ainsi de suite. C'est ce comportement auto-cohérent qui est à l'origine de la richesse des phénomènes physiques impliquant les plasmas. Le couplage entre mouvements particuliers et champ électromagnétique est régi par les équations de Maxwell. Une des difficultés de l'étude des plasmas provient du fait que les termes sources des équations de Maxwell, la densité de charge ρ et le courant $\mathbf{j}$, sont des grandeurs macroscopiques. L'étude des plasmas implique donc que l'on soit capable de passer des informations sur les trajectoires individuelles aux informations macroscopiques ρ et $\mathbf{j}$. La physique des plasma se situe donc à l'intersection de la physique statistique et de l'électromagnétisme.

Dans ce chapitre, nous présenterons comment on peut à partir du mouvement individuel des particules chargées qui composent un plasma, obtenir par un processus de sommations successives relevant de la physique statistique, les équations de Vlasov-Maxwell puis celles de la Magnétohydrodynamique (MHD) et enfin celles de la MHD Hall. Nous discuterons à la fin de ce chapitre des limites du modèle mais également de sa pertinence dans le cadre de l'étude de la turbulence.

1 Couplages champs/particules

1.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?

Un plasma est un gaz « ionisé », les atomes qui le constituent sont dépouillés partiellement ou totalement de leur nuage d'électrons. Il en résulte une « soupe » d'électrons de charge électrique négative où baignent des ions (les noyaux) de charge électrique positive. Cette ionisation peut se produire sous l'effet de températures élevées, comme dans une flamme ou dans une étoile, mais aussi sous l'effet des bombardements incessants par d'autres particules, comme dans les couches élevées de notre atmosphère (l'ionosphère) responsables des aurores polaires. Elle se produit aussi sous l'effet de grandes tensions électriques, par exemple dans les éclairs lors des orages.

Les plasmas composent l'immense majorité de la matière observée dans l'univers, aussi bien les étoiles que les nébuleuses et la matière interstellaire. On ne les trouve pas fréquemment à l'état naturel sur notre Terre, mais ils ont investi l'industrie, des tubes fluorescents aux téléviseurs, en passant par les disjoncteurs à haute tension, les propulseurs spatiaux ou encore les tokamaks où les physiciens cherchent à produire la fusion nucléaire.

Paradoxalement, la physique des plasmas est relativement récente. Un plasma a été créé expérimentalement pour la première fois en 1879 par un chimiste anglais, William Crookes

et les première théories physiques qui décrivent cet état de la matière sont nées dans les années 30. Le nom « plasma » fût donné par le physicien américain Irving Langmuir en 1928 car il trouvait certaines ressemblances avec le plasma sanguin.

C'est aujourd'hui un domaine à part entière de la physique et on parle volontiers d'un quatrième état de la matière. Les plasmas possèdent en effet des propriétés très particulières comme nous allons le voir par la suite.

1.2 Équations de Maxwell

Durant le XVIII^e siècle de nombreux physiciens (Ampère, Gauss, Faraday, etc...), ont établis une série de lois empiriques portant sur des phénomènes comme l'électrostatique, le magnétisme, l'induction, etc... À l'époque le lien entre ces différents phénomènes n'était pas établi. C'est Maxwell qui a réalisé pour la première fois la synthèse de ces lois empiriques en introduisant dans une des équations le courant de déplacement. Cet ajout majeur rend les équations de Maxwell compatibles avec l'équation de conservation de la charge. Sa présence assure ainsi la cohérence de l'édifice théorique unifié. Le courant de déplacement apporte une certaine symétrie dans les équations qui permet à Maxwell d'établir une équation de d'Alembert, montrant que les champs électrique et magnétique se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière. Maxwell a donc réussi le tour de force d'unifier dans une même théorie les phénomènes électrique, magnétique et optique.

La théorie de Maxwell se résume à ces quatre équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I.1)} \\ \text{(I.2)} \\ \text{(I.3)} \\ \text{(I.4)} \end{array}$$

L'équation (I.1) est appelée équation de Maxwell-Gauss, elle indique que la densité de charge électrique ρ_c est une source du champ électrique.

L'équation (I.2) traduit le fait qu'il n'existe pas de sources ponctuelles de champ magnétique analogue à la charge électrique.

L'équation (I.3) est appelée équation de Maxwell-Ampère. Sous sa forme intégrale, elle permet de déterminer la valeur du champ magnétique grâce à la donnée des courants élec-

triques. Le terme $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est le fameux courant de déplacement dont nous avons parlé précédemment.

L'équation (I.4) est appelée équation de Maxwell-Faraday. Elle traduit le phénomène fondamental d'induction électromagnétique, à savoir, la production d'un courant électrique au travers d'un conducteur se déplaçant dans un champ magnétique. L'origine de cet effet est la force : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$.

1.3 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et stationnaire

Avant d'aborder la question complexe des phénomènes collectifs il convient d'étudier la trajectoire d'une particule dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Pour ce faire il suffit de résoudre l'équation du mouvement :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

a) Sans champ électrique ($E = 0$)

Le mouvement est une hélice enroulée autour d'une ligne de force $\mathbf{B}$:

- *mouvement parallèle* : rectiligne uniforme.
- *mouvement perpendiculaire* : circulaire uniforme.

Le mouvement de giration dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$ est appelé mouvement cyclotron. Il est caractérisé par :

- sa fréquence de rotation (gyrofréquence) :

$$\boxed{\omega_c = qB/m,}$$

- son rayon (rayon de Larmor) :

$$\boxed{\rho_L = v_{\perp}/\omega_c.}$$

Un ion positif tourne dans le sens "gauche" autour du champ magnétique, un ion négatif dans le sens "droit". Si l'on considère le mouvement moyen d'une particule sur une échelle de temps longue par rapport à la gyropériode, ce mouvement se confond avec celui du centre de rotation qu'on appelle "centre guide". En absence de champ électrique la

particule reste donc "attachée" à une même ligne de champ autour de laquelle elle tourne.

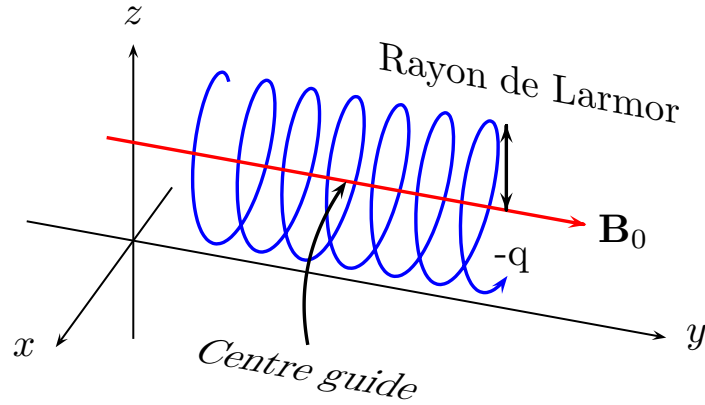


Figure I.1 – Giration d'une particule chargée autour d'une ligne de champ magnétique.

b) Avec un champ électrique stationnaire et uniforme ($E \neq 0$)

Mouvement parallèle :

Si la composante parallèle du champ électrique existe, alors la particule n'est soumise qu'à la force électrique dans cette direction. En effet la force de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ n'a pas de composante perpendiculaire. La particule subit alors une accélération constante inversement proportionnelle à sa masse. Dans un plasma ce phénomène ne peut exister car l'accélération différentielle des ions et des électrons mènerait à une séparation engendrant instantanément un nouveau champ électrique venant s'opposer au champ extérieur. Ce phénomène empêche l'existence d'un champ électrique parallèle constant dans un plasma et peut conduire à des oscillations électroniques à la fréquence plasma électronique ω_{pe} (I.5).

Mouvement perpendiculaire :

Afin de déterminer le mouvement perpendiculaire généré par un champ électrique stationnaire et uniforme, on va simplifier le problème en tirant bénéfice des propriétés de la transformation de Lorentz. On sait en effet que la valeur du champ électrique dépend directement du repère considéré, le champ magnétique lui n'est pas affecté par un changement de repère. Connaissant le mouvement perpendiculaire en absence de champ électrique, il suffit de trouver le repère pour lequel le champ électrique est nul. Le mouvement de la

particule dans le repère immobile, sera alors la combinaison du mouvement cyclotron et du mouvement du repère mobile. En notant $\mathbf{V}_m$ la vitesse d'un repère R' dans lequel E' est nul, on a :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V}_m \times \mathbf{B} = 0,$$

soit,

$$\boxed{\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{E}}{B^2} \times \mathbf{B}.}$$

Le mouvement dans le repère initial est donc la combinaison d'un mouvement circulaire uniforme et du mouvement de translation à la vitesse constante $\mathbf{V}_m$ du repère R' . Cette vitesse de dérive est indépendante de la charge, de la masse ou de l'énergie des particules qui constituent un plasma. C'est elle qui est responsable du comportement fluide d'un plasma dans la direction perpendiculaire en absence de collision. En effet, les particules n'ont pas besoin d'échanger l'information sur leur vitesse moyenne perpendiculaire par collisions. Il leur suffit de "lire" les champs magnétique et électrique locaux.

1.4 Phénomènes collectifs

Un plasma peut être défini comme étant une assemblée de particules chargées en interactions coulombiennes mutuelles. Contrairement à ce que l'on pourrait penser naïvement, la dynamique d'un tel système n'est pas forcément un simple collapse coulombien entre charge de signes opposées donnant un fluide neutre. C'est le compromis entre une tendance au désordre due à l'agitation thermique et une tendance à l'organisation due à l'aspect collectif de l'interaction coulombienne, qui permet aux plasmas de rester sous forme ionisée tout en restant globalement neutre. Cette tendance à la quasi-neutralité est fondamentale en physique des plasmas. Elle est conforme au fait que très souvent, un système dynamique évolue de manière à minimiser l'amplitude des forces auxquelles il est soumis (bien sûr ce n'est pas le cas pour les instabilités...). Les plasmas ont donc un comportement de type diélectrique et diamagnétique : les charges s'organisent collectivement de manière à écranter les champs électrique et magnétique appliqués. Bien sûr, si la densité volumique de charges était nulle sur toutes les échelles de longueur et de temps, toutes les interactions électriques disparaîtraient et la physique des plasmas serait sans objet ! Cette tendance à la quasi-neutralité n'est donc pas vraie à toutes les échelles. Des processus rapides pourront briser la quasi-neutralité et induire une séparation de charges importante. Au contraire, des processus lents laisseront au plasma le temps de se réorganiser afin de quasi-neutraliser toutes perturbations. L'échelle de temps qui caracté-

I.2 De l'équation cinétique aux équations fluides

rise la transition entre ces deux régimes s'appelle la pulsation de Langmuir ou pulsation plasma électronique¹ ω_{pe} :

$$\omega_{pe} \equiv \sqrt{\frac{n_e q^2}{m_e \varepsilon_0}}. \quad (\text{I.5})$$

On peut également définir une échelle spatiale caractérisant la quasi-neutralité et le phénomène d'écrantage électrique quand les effets de température sont importants. Il s'agit de la longueur de Debye λ_D définie par :

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T}{n_0 q^2}}$$

Cette échelle caractéristique est liée au mouvement désordonné des électrons dû à l'agitation thermique qui les empêche de jouer leur rôle de particules quasi-neutralisantes sur des échelles inférieures à la longueur de Debye.

2 De l'équation cinétique aux équations fluides

L'expérience montre que l'on peut entièrement décrire un verre d'eau à l'équilibre à l'aide de quatre grandeurs physiques (volume, pression, température, nombre de particules). Et encore, une de ces grandeurs est redondante puisque la thermodynamique nous donne une fonction d'état qui nous permet de calculer l'une d'elle en fonction des trois autres. Et pourtant ce verre est constitué de 10^{24} particules qui tournent, vibrent et s'agitent dans tous les sens en faisant des collisions incessantes ! Comme le disait joliment Jean Perrin, *" C'est là un caractère profond de ce que l'on appelle un fluide en équilibre. Son repos apparent n'est qu'une illusion due à l'imperfection de nos sens et correspond à un certain régime permanent d'agitation intime, violente est désordonnée. "*

Face à l'énormité du nombre de particules, il est clair que le passage du microscopique au macroscopique ne peut se faire de façon directe, c'est-à-dire en calculant par la force brute le comportement du système à partir de chacun de ses constituants microscopiques. Mais le fait même d'avoir affaire à de grands nombres suggère l'utilisation de méthodes probabilistes. L'énormité des nombres qui interviennent dans une description statistique

1. Il existe également une pulsation plasma ionique que l'on définit de la même manière que la pulsation plasma électronique. Elle est environ 40 fois plus petite (racine du rapport des masses) et joue donc un rôle moins important que son équivalent électronique. Ce sont en effet les électrons qui grâce à leur faible masse se précipitent en premier pour compenser tout excès local de charge électrique.

aboutit à des prédictions pratiquement certaines du niveau macroscopique. L'introduction des probabilités n'est donc pas dans ce cas synonyme d'approximatif ou d'incomplet.

Dans le cas particulier des plasmas non collisionnels le passage du microscopique au macroscopique ne se fait pas de manière unique. Il existe des situations dans lesquelles une certaine catégorie de particules en nombre relativement petit, à une action plus importante que l'ensemble des autres particules. C'est le cas par exemple quand la vitesse de phase v_Φ des ondes considérées est assez faible pour qu'une fraction non négligeable des particules du plasma ait une vitesse très voisine de v_Φ . Il est donc crucial de bien appréhender comment se fait le passage du microscopique au macroscopique afin de comprendre le domaine de validité des différents modèles utilisés en physique des plasmas.

2.1 Évolution de la fonction de distribution : équation de Vlasov

On peut caractériser une assemblée de N particules chargées, par une densité numérique φ_N dans un espace des phases à $6N$ dimensions. Cette fonction est nulle partout sauf si les N points $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$ correspondent simultanément aux positions exactes des N particules. Elle est donc égale au produit des densités numériques φ_0 dans l'espace des phases de dimension 6 de chacune des particules, $\varphi = \prod_{i=1}^N \varphi_i$. Par construction, l'intégration de cette densité sur tout le volume des phases est égale à 1 et par conséquent sa dérivée est nulle. On a donc :

$$d_t(\varphi_N) = 0 \Leftrightarrow \left[\partial_t + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} \right] (\varphi_N) = 0, \quad (\text{I.6})$$

avec,

$$\mathbf{a}_i = \frac{e_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}). \quad (\text{I.7})$$

Il s'agit de l'équation de Liouville. Elle s'interprète facilement si on considère une densité numérique à une particule φ_0 , la généralisation à N particules est alors triviale. Contrairement aux apparences, l'équation de Liouville est en fait un truisme. Si à l'instant t_0 on se place à l'endroit où se trouve une particule et qu'on suit scrupuleusement sa trajectoire, on reste tout le temps à l'endroit même où elle se trouve ! Par conséquent φ_1 est constante le long de la trajectoire $(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{v}_0(t))$.

Cette équation est extrêmement simple à dériver parce qu'elle est exacte. Mais sa simplicité apparente est trompeuse puisque cette équation revient formellement à résoudre le problème à N -corps. Essayer de la résoudre est une tâche tout à fait désespérée. Heureusement cette opération est en fait inutile puisque l'équation (I.6) comporte infiniment

I.2 De l'équation cinétique aux équations fluides

plus d'informations qu'il n'est possible d'en obtenir par des mesures. De plus comme nous l'avons déjà mentionné, les termes sources des équations de Maxwell nécessaires à la résolution du système champs-plasma, sont des grandeurs macroscopiques. À ce stade on pourrait donc légitimement se demander pourquoi avoir fait appel à la notion quelque peu abstraite de densité numérique dans un espace à 6N dimensions. Comme nous allons le voir, cette notion permet de passer à celle, extrêmement importante en physique des plasmas, de densité de probabilité.

On peut extraire de l'équation (I.6) une nouvelle équation beaucoup plus facile à résoudre et proche de l'expérience en la moyennant sur un ensemble de systèmes "macroscopiquement identiques". Cette moyenne d'ensemble est équivalente (hypothèse ergodique) à une moyenne spatiale.

On définit la fonction de distribution $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ comme étant la densité de probabilité correspondant à un nombre "moyen" de particules dans l'intervalle $(\mathbf{x} \pm \delta\mathbf{x}/2, \mathbf{v} \pm \delta\mathbf{v}/2)$. La densité de probabilité est égale à la moyenne spatiale (dans l'espace des phases) de la densité numérique φ sur un petit volume $\delta\tau$ entourant $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ² :

$$f = \langle \varphi \rangle \Leftrightarrow f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\delta\tau} \int \varphi(t, \mathbf{x}', \mathbf{v}') \Pi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') d^3\mathbf{x}' d^3\mathbf{v}'.$$

La fonction Π est une fonction "porte" égale à un dans un petit volume $\delta\tau$ autour de zéro et nulle ailleurs. Cette moyenne "glissante", lisse la fonction $\varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ pour n'en garder que les variations les moins "brusques". Cela revient donc à dégrader la résolution en position et vitesse de la fonction $\varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Par cette opération de moyenne, on acquiert donc une certaine myopie dans l'espace des phases. Mais paradoxalement, cela va nous permettre d'y voir plus clair !

On peut décomposer toutes les grandeurs du problème en une valeur moyenne plus un terme de fluctuations :

$$\begin{cases} \varphi = f + \delta\varphi, \\ \mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle + \delta\mathbf{E}. \end{cases}$$

En reportant ces grandeurs dans l'équation (I.6) et en prenant la valeur moyenne du résultat, on obtient une équation d'évolution de f commune à toutes les équations

2. Il s'agit d'une densité numérique en un point $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ de l'espace des phases. C'est donc la somme des densités numériques à une particule, $\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$.

cinétiques,

$$\partial_t(f) + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})f + \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \rangle \varphi = 0. \quad (\text{I.8})$$

Le problème est que les champs électromagnétiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ contenus dans le terme $\mathbf{a}$, dépendent de la trajectoire de chacune des particules qui constituent le plasma. Autrement dit, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ne sont pas statistiquement indépendants de φ_N . Ainsi, le terme non-linéaire d'accélération,

$$\langle \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \rangle \varphi \neq \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \rangle \langle \varphi \rangle, \quad (\text{I.9})$$

implique de calculer explicitement les corrélations statistiques. L'objectif des théories cinétiques est d'évaluer ces corrélations en utilisant des approximations adaptées aux différents régimes de paramètres.

On peut développer le terme non-linéaire (I.9) en faisant apparaître les fluctuations de $\mathbf{a}$ et φ_N . Compte tenu de $\langle \delta\varphi_N \rangle = \langle \delta\mathbf{E} \rangle = \dots = 0$, on peut mettre l'équation (I.8) sous la forme :

$$\partial_t(f) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f) + \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f) = -C(f), \quad (\text{I.10})$$

avec,

$$C = \langle \delta\mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(\delta\varphi_N) \rangle,$$

et,

$$\langle \mathbf{a} \rangle = q/m(\langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle).$$

Le premier membre de l'équation (I.10) ne fait intervenir que les champs moyens qui sont généralement dominants. Le second membre $-C$ est appelé opérateur de collisions³. Les composantes fluctuantes des champs sont importantes pour une particule seulement si elle passe très près d'une autre, d'où le nom donné à C .

Dans le cas particulier où les collisions sont négligeables, on obtient l'équation de Vlasov :

$$\boxed{\partial_t(f) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f) + \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f) = 0.} \quad (\text{I.11})$$

Le cas où les collisions jouent un rôle important est à la fois plus compliqué et plus

3. Dans un plasma, les interactions entre particules chargées se font à distance. Il n'y a pas de collisions au sens propre du terme.

simple, tout dépend de l'échelle de temps que l'on considère.

Sur des échelles de temps de l'ordre de grandeur du temps entre deux "collisions" d'une même particule, le cas est plus compliqué car il implique d'évaluer explicitement l'opérateur C .

Sur des échelles de temps plus longue, le cas est plus simple car les collisions tendent à relaxer toutes fonctions de distribution vers des quasi-maxwelliennes ce qui permet une description fluide du système.

2.2 Moments de la fonction de distribution

Les équations cinétiques contiennent l'ensemble des phénomènes physiques que l'on peut rencontrer dans des plasmas. Mais dans la plupart des situations, elles sont trop difficiles à résoudre pour être envisagées. On tente alors de réduire encore le problème en remplaçant les équations cinétiques portant sur les fonctions de distribution par un système d'équations portant sur un petit nombre de grandeurs macroscopiques (densité, vitesse, pression...). Ces quantités scalaires sont les premiers moments de la fonction de distribution, on les appelle grandeurs fluides. Les équations qui relient ces grandeurs entre elles sont appelées équations fluides. Cette approche n'est pas toujours possible en absence de collisions comme nous allons le voir par la suite, mais elle présente tellement d'avantages qui pèsent en sa faveur, que bien souvent elle est utilisée au-delà de ses domaines de validité.

La description fluide est en effet beaucoup plus intuitive qu'une description cinétique. Tout physicien fait quotidiennement l'expérience sensible des grandeurs fluides (température, densité, pression...) ce qui lui permet de développer une intuition physique des phénomènes. En outre, les variables fluides sont relativement faciles à mesurer ce qui n'est pas le cas des fonctions de distribution. De plus, en passant d'une approche cinétique à une approche fluide, on réduit d'un facteur deux le nombre de dimensions à traiter. Cet avantage est particulièrement important pour les simulations numériques.

Pour obtenir l'équation de transport de la densité (ou équation de continuité), il suffit d'intégrer l'équation (I.10) par rapport à $\mathbf{v}$. en notant,

$$\begin{cases} n = \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}, \\ \mathbf{u} = \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}, \end{cases}$$

on obtient ⁴ :

$$\partial_t(n) + \nabla(n\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{I.12})$$

Pour obtenir l'équation de transport de l'impulsion, il faut multiplier l'équation cinétique (I.10) par $m\mathbf{v}$ avant d'intégrer. Pour obtenir celle de pression, il faut multiplier par $m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2$ avant d'intégrer. Le flux de chaleur est obtenu en multipliant par $m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^3$, etc...

L'équation de transport de l'impulsion donne :

$$\partial_t(nm\mathbf{u}) + \nabla(nm\mathbf{u}\mathbf{u} + \bar{p}) - nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F}_c. \quad (\text{I.13})$$

Le second membre de l'équation (I.13) est l'intégrale du terme de l'équation cinétique. $\mathbf{F}_c$ représente la force de friction avec les autres populations ⁵, c'est lui qui est responsable de la résistivité.

Les équations d'évolution des différents moments deviennent rapidement de plus en plus compliquées quand l'ordre augmente. On passe d'une équation scalaire, à une équation vectorielle, puis tensorielle d'ordre 2, puis d'ordre 3, 4, etc... De plus l'équation de transport du moment d'ordre 0 fait intervenir le moment d'ordre 1 dont l'équation de transport fait intervenir l'ordre 2 et ainsi de suite. Le système d'équations fluides est donc infini. Il est donc nécessaire de le tronquer en ayant recours à diverses approximations.

2.3 Approximation des équations fluides

Les approximations adoptées pour fermer le système infini d'équations fluides sont très différentes selon que le plasma est collisionnel ou pas.

– Plasma collisionnel

Un plasma est dit collisionnel lorsque les échelles spatiale et temporelle caractérisant les phénomènes étudiés sont très grandes par rapport au temps de collision ⁶ et au libre parcours moyen. On appelle nombre de Knudsen K , le paramètre sans dimension qui permet de quantifier le degré de "collisionnalité" d'un plasma. Il est égal au rapport entre les termes d'advection de l'équation (I.10) et le terme collisionnel.

4. L'intégration des termes $\langle \mathbf{a} \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f)$ et $C(f)$ est nulle car les champs électromagnétiques et les collisions ne changent pas le nombre de particules sauf s'il y a des réactions chimiques.

5. Une population regroupe des particules ayant le même rapport q/m de sorte qu'elles subissent toutes la même accélération quand elles sont soumises aux mêmes champs.

6. Distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions.

I.2 De l'équation cinétique aux équations fluides

Pour $K \gg 1$ le milieu apparaît comme étant quasiment homogène. Dans ce cas les fonctions de distribution sont des quasi-Maxwelliennes. L'idée est alors de développer f au voisinage d'une maxwellienne. À l'ordre zéro, on en déduit que la pression est scalaire et que le flux de chaleur est nul. À l'ordre 1, la pression est corrigée par un terme tensoriel dépendant des gradients de vitesse. Le flux de chaleur quant à lui est un vecteur, on peut l'exprimer en fonction de la température,

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla(T),$$

en notant κ la conductivité thermique. Cette équation constitue une fermeture naturelle puisque le troisième moment est exprimé en fonction du deuxième. Dans les plasmas collisionnels le système infini d'équations fluides est donc limité aux seules trois premières.

– Plasma non collisionnel

Dans un plasma non collisionnel il n'y a évidemment plus aucun problème pour estimer les corrections de la pression et du flux de chaleur induites par collisions puisque elles sont évidemment nulles ou négligeables. En revanche, il n'y a plus de raison de développer f autour d'une Maxwellienne et il n'est a priori plus possible de fermer le système infini d'équations fluides. Dans le cas non collisionnel, il faut chercher des approximations pour chaque situation rencontrée et se résigner à affronter l'équation cinétique quand cela n'est pas possible.

Dans un plasma sans collision mais magnétisé⁷, il est possible de définir un petit paramètre sans dimension différent de K , sur lequel fonder une fermeture asymptotique. Il s'agit du rapport entre le rayon de Larmor et l'échelle spatiale macroscopique. On obtient alors un système d'équation compliqué que l'on appelle équations de Braginskii [47]. Heureusement, il n'est pas nécessaire de retenir tous les termes et les différentes hypothèses simplificatrices conduisent à autant de modèles.

7. Un plasma est magnétisé quand le champ magnétique moyen est suffisamment fort pour influencer significativement le mouvement des particules.

3 Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible

Sous certaines hypothèses, nous avons vu que les particules d'un plasma peuvent être décomposées en plusieurs "populations", obéissant chacune à son propre système d'équations fluides et couplées entre elles par les équations de Maxwell. Il est possible de simplifier encore le problème en considérant la dynamique d'un fluide unique dont l'inertie est due aux ions et la mobilité aux électrons, c'est ce que l'on appelle la Magnéto-Hydro-Dynamique (MHD). Nous montrerons dans cette section que ce modèle théorique apparaît comme la limite "variations lentes" de la théorie bi-fluide. Nous montrerons également comment on obtient le modèle MHD-Hall et discuterons de ses propriétés physiques.

3.1 Hypothèse des variations lentes

Un plasma soumis à une perturbation a tendance à se réarranger pour annuler la densité volumique des forces de Coulomb ou/et la densité volumique des forces de Laplace ainsi crée ("les effets s'opposent aux causes qui leur donnent naissance"). Cette tendance de retour à la quasi-neutralité couple fortement les fluides ionique et électronique via le champ électrique ambipolaire et on peut facilement intuiter que l'évolution d'un plasma sur des échelles spatiale et temporelle grandes par rapport à celles de retour à la quasi-neutralité peut être décrite par la dynamique d'un fluide unique. Pour étudier quantitativement les conséquences de l'hypothèse de variations lentes⁸, il convient de faire tendre vers l'infini les échelles caractéristiques⁹, ω_{pe} , ω_{cj} , $1/\rho_j$ et $1/\lambda_{De}$, dans les équations (I.13,I.1,I.3). Cela revient à dire que les dérivées ∂_t et ∂_x tendent vers zéro.

Dans la limite des variation lentes, l'équation de mouvement I.13 se simplifie pour donner,

$$\mathbf{E} \approx -\mathbf{u}_j \times \mathbf{B}, \quad (\text{I.14})$$

Les conséquences de cette relation sont extrêmement importantes, nous y reviendrons à la section suivante.

Dans la limite des variations lentes, l'équation de Maxwell-Gauss I.1 se réduit à la quasi-neutralité. La charge d'espace est alors très inférieure aux densités de charge $n_j q_j$ dues à

8. Le terme "*hypothèse des variations lentes*" et en fait un abus de langage puisque en réalité cette expression recouvre également des hypothèses sur les échelles spatiales.

9. Pour simplifier l'exposé nous considérons un fluide "idéal" *i.e* sans résistivité. L'indice j correspond aux différentes populations

I.3 Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible

chaque population prise individuellement. Si on considère un plasma constitué d'électrons et d'une seule espèce d'ions positifs (système bi-fluide) on a donc $n_i q_i + n_e q_e \approx 0$ d'où :

$$n_i \approx n_e \approx n.$$

Dans la limite des variations lentes, la relation de Maxwell-Ampère I.3 montre que la densité de courant est, comme la densité de charge une grandeur relativement petite, c'est-à-dire très inférieure aux courants $n_j q_j \mathbf{u}_j$ portés par chaque population. Cela implique que $n_i q_i \mathbf{u}_i + n_e q_e \mathbf{u}_e \approx 0$ et donc,

$$\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}.$$

Il est important de garder à l'esprit que cela n'empêche pas le courant électrique de jouer un rôle extrêmement important dans la dynamique MHD.

Un système bi-fluide, dans le cas des variations lentes n'est donc caractérisé que par une seule vitesse fluide et une seule densité. Les équations des deux populations ne diffèrent alors que par les masses et les termes de pression, et il suffit d'en faire la somme pour obtenir les équations de la MHD après les avoir multipliées par le facteur $1/(n_i m_i + n_e m_e)$. La somme des termes de forces électriques donne zéro et ce faisant intervenir le champ magnétique font apparaître la force de Laplace $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Avec :

$$\boxed{\mathbf{j} \equiv n_i q_i \mathbf{u}_i + n_e q_e \mathbf{u}_e.}$$

Au final, les équations de la MHD incompressible se réduisent donc à :

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$	(I.15)
$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{b},$	(I.16)
$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}),$	(I.17)
$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0.$	(I.18)

avec :

$$\boxed{\mathbf{u} \equiv \frac{n_i m_i \mathbf{u}_i + n_e m_e \mathbf{u}_e}{n_i m_i + n_e m_e}, \approx \mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}_e,}$$

$$\boxed{P = P_e + P_i,}$$

où $\mathbf{b}$ a été normalisé à une vitesse,

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}.$$

3.2 Loi d'Ohm et champ gelé

La relation I.14 est extrêmement importante, il s'agit de la loi d'Ohm idéale. Physiquement, elle s'interprète en remarquant que par transformation de Lorentz, $\mathbf{E} + \mathbf{u}_j \times \mathbf{B}$ est égal au champ électrique dans le repère en mouvement avec le fluide. Autrement dit, les charges se réarrangent de manière à écranter la force électrique dans le repère au repos du fluide. La loi d'Ohm implique que les différentes populations ont quasiment toutes la même vitesse fluide perpendiculairement au champ magnétique :

$$\boxed{\mathbf{E} = -\mathbf{u}_j \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{u}_{j\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad \forall j.}$$

Si une particule veut "savoir" quelle est la vitesse fluide à l'endroit où elle se trouve, elle n'a pas besoin de subir de collisions. Tout ce dont elle a besoin, c'est de connaître les champs magnétique et électrique locaux. Cette vitesse commune est la cause du comportement "fluide" des particules en ce qui concerne les vitesses perpendiculaires et ce, y compris en absence de collisions.

La loi d'Ohm implique également que les lignes du champ magnétique sont gelées dans le fluide. Considérons en effet une surface matérielle S_m qui suit le mouvement du fluide et étudions la variation du flux du champ magnétique à travers elle. D'après le théorème de Kelvin on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{S_m} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_m} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}.$$

En utilisant la loi d'Ohm I.14 et l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{S_m} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_m} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right] \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{I.19})$$

Considérons à présent un tube de flux de champ magnétique. Puisque que $\mathbf{B}$ est un champ solénoïdal son flux Φ est constant le long du tube. Imaginons une ligne matérielle L_m qui enlace le tube de flux à un temps $t = 0$. Le flux à travers la surface formée par L_m est égale à Φ à $t = 0$, mais aussi à tous les temps ultérieurs d'après l'équation I.19. Ainsi, alors que la ligne matérielle L_m est advectée, étirée, entortillée par le fluide, elle encercle

toujours le même flux de champ magnétique. Bien sûr ceci est vrai pour n'importe quelle ligne matérielle qui encercle le tube à $t = 0$. Le seul moyen pour que cela se réalise est que, comme les lignes matérielles L_m , le champ magnétique soit gelé dans le fluide et réciproquement.

3.3 Ondes dans les plasmas

3.3.1 Ondes dans l'approximation MHD

Il est possible de décomposer la force de Laplace en une force de tension et une force de pression magnétique. Cette décomposition permet de considérer les lignes de champ comme des objets matériels pourvus d'élasticité. Cette interprétation mécaniste laisse penser qu'il existe des ondes se propageant parallèlement et perpendiculairement aux lignes de champ. Ces ondes existent effectivement. Il s'agit des ondes d'Alfvén et des ondes magnétosonores.

La force de Laplace peut-être ré-exprimée comme suit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \cdot \nabla) [\mathbf{B}/\mu_0] + \nabla (B^2/2\mu_0).$$

Le deuxième terme du membre de droite représente la force de pression magnétique, il peut être absorbé dans le terme de pression de l'équation (I.16). Le couplage entre cette pression d'origine magnétique et la pression cinétique est à l'origine de la propagation d'ondes magnétosonores.

Il est intéressant d'exprimer le premier terme en coordonnées curvilignes :

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) [\mathbf{B}/\mu_0] = \frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial s} \mathbf{e}_t - \frac{B^2}{\mu_0 R} \mathbf{e}_n.$$

Avec $B = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{e}_t$ et $\mathbf{e}_n$ les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal aux lignes de champ magnétique. R est le rayon de courbure des lignes de champ et s est l'abscisse curviligne le long des lignes de champ. L'analogie avec une corde vibrante est maintenant évidente. Si une ligne de champ est courbée, la force de Laplace va exercer une force dirigée vers le centre de courbure et d'amplitude $B^2/\mu_0 R$.

Nous avons montré précédemment que dans le cadre de la MHD idéale, les lignes de champ magnétique sont gelées dans le fluide. Nous savons maintenant qu'elles possèdent ce que l'on peut appeler une tension. C'est la conjugaison de ces deux caractéristiques fondamentales qui donne naissance aux ondes d'Alfvén.

Considérons ce qu'il arrive si on applique une force mécanique impulsive sur un fluide conducteur plongé dans un champ magnétique uniforme. Si le fluide est extrêmement conducteur, le champ est gelé dans le fluide et les lignes de champ vont donc se courber. Cette courbure crée une contre-réaction proportionnelle à $B^2/\mu_0 R$ sur le fluide, ce qui a tendance à le ramener à sa position initiale. Le rayon de courbure devient alors infini et la force de tension s'annule. Mais l'histoire ne s'arrête pas là, car l'inertie du fluide entraîne alors les lignes de champ au-delà du point de repos et tout le processus recommence. Des oscillations en résultent, c'est ce que l'on appelle les ondes d'Alfvén.

Pour mettre en évidence les ondes d'Alfvén, il convient d'introduire un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_\parallel$ dans les équations [I.16](#) et [I.18](#). Une linéarisation des équations dans le cas particulier incompressible donne, après application d'une transformée de Fourier et en cherchant des solutions de la forme $\exp[-i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$:

$$\begin{cases} -\omega \mathbf{u} = B_0 (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}_\parallel, \\ -\omega \mathbf{b} = B_0 (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{e}_\parallel, \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

qui conduit, en utilisant les relations [I.15](#), [I.18](#) et $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{B}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ à,

$$\begin{cases} -\omega \mathbf{u} = B_0 k_\parallel \mathbf{b}, \\ -\omega \mathbf{b} = B_0 k_\parallel \mathbf{u}. \end{cases}$$

On obtient donc au final la relation de dispersion des ondes d'Alfvén :

$$\boxed{\omega^2 = (B_0 k_\parallel)^2.}$$

Conformément à l'intuition physique que l'on s'est forgée, ces ondes transportent de l'énergie dans la direction $\pm \mathbf{B}_0$ à la vitesse de groupe :

$$\boxed{\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}}$$

Le champ magnétique se comporte donc comme une corde de harpe pincée, guidant les mouvements de l'onde. Il est important de noter que le mode d'Alfvén est purement transverse à cause de la condition d'incompressibilité et de la nature solénoïdale du champ magnétique.

Hannes Alfvén a suggéré l'existence de ces ondes en 1942 [\[30\]](#). Les premières tentatives expérimentales pour les détecter ont été réalisées dans un bain de mercure magnétisé

I.3 Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible

(Lundquist et al. 1949 [122]), puis dans un gaz d'hélium ionisé (Bostick et al. 1952 [46]). La première preuve irréfutable de leur existence a été apportée par Lehnert en 1954 [120] dans du sodium liquide. Les ondes d'Alfvén ont par la suite été observées dans l'espace interplanétaire par les sondes Pioneer et Explorer (Coleman et al. 1960 [58]). Hannes Alfvén a reçu le prix Nobel en 1970 pour sa découverte.

Si on considère le cas compressible, en utilisant une fermeture polytropique de la forme :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\gamma P}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}),$$

on obtient la relation de dispersion,

$$(\omega^2 - k_{\parallel}^2 B_0^2) [\omega^4 - (c_S^2 + B_0) k^2 \omega^2 + k^2 c_S^2 k_{\parallel}^2 B_0^2] = 0,$$

avec $c_S = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$ la vitesse du son. Il est intéressant de noter que l'on retrouve le mode d'Alfvén qui n'est donc pas affecté par la compressibilité. Cela n'est pas une surprise puisque les forces sous-jacentes à la propagation de ce mode sont la tension magnétique et l'inertie des ions. Cette relation de dispersion fait apparaître deux nouvelles solutions appelées modes magnéto-acoustiques rapide,

$$\omega_+^2 = \frac{k^2}{2} \left[c_S^2 + B_0^2 + \sqrt{(c_S^2 + B_0^2)^2 - 4c_S^2 B_0^2 k_{\parallel}^2 / k^2} \right],$$

et lent,

$$\omega_-^2 = \frac{k^2}{2} \left[c_S^2 + B_0^2 - \sqrt{(c_S^2 + B_0^2)^2 - 4c_S^2 B_0^2 k_{\parallel}^2 / k^2} \right].$$

3.3.2 Découplage ions/électrons et effet Hall

Nous avons vu que sous l'hypothèse des variations lentes, fluide ionique, fluide électronique et champ magnétique sont attachés dans une évolution commune. Pourtant, l'ion H^+ qui est le plus léger de tous est déjà 1836 fois plus lourd qu'un électron. Cela correspond à plus de 5 fois le rapport entre la masse d'une boule de pétanque et celle d'une balle de ping-pong ! On se doute donc que pour des dynamiques rapides, l'inertie des ions va se faire sentir en tendant à différencier localement leur mouvement de celui des électrons. Le courant ainsi généré crée un champ magnétique et les électrons se réarrangent instantanément (en première approximation on peut considérer que leur masse est nulle) de manière à écranter la force électrique ainsi créée. La MHD-Hall modélise ce phénomène

en tenant compte de ce champ électrique dans la loi d'Ohm. Une échelle caractéristique apparaît dans l'équation d'induction du champ magnétique appelée longueur inertielle ionique. Contrairement à celles de la MHD, les équations de la MHD-Hall ne sont donc pas auto-similaires.

Formellement, le terme Hall apparaît lorsque que l'on ne suppose plus que les variations temporelles sont lentes par rapport à ω_{ci} , mais seulement par rapport à ω_{pe} . En conservant par contre toutes les limitations pour les échelles spatiales, on obtient un système très proche de la MHD, avec seulement un terme proportionnel à $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ supplémentaire dans la loi d'Ohm. L'équation d'induction devient alors :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times [(\mathbf{u} - d_i \mathbf{j}) \times \mathbf{b}]}, \quad (\text{I.21})$$

avec,

$$\boxed{d_i \equiv \frac{c}{\omega_{pi}}}.$$

Une des conséquences fondamentales de l'effet Hall, est que champ de vitesse et champ magnétique ne sont plus gelés, les ions ($\mathbf{u} \simeq \mathbf{u}_i$) à cause de leur grande inertie se découplent donc du champ magnétique. En revanche, les électrons restent gelés dans le champ magnétique. L'équation I.21 est en effet équivalente à,

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u}_e \times \mathbf{b}].$$

et on peut donc appliquer le théorème du gel présenté précédemment aux électrons.

3.3.3 Ondes dans l'approximation MHD Hall incompressible

Dans le modèle MHD, la fréquence des ondes est faible devant les fréquences gyro-magnétiques des électrons et des ions. Par suite, on peut considérer que le champ de l'onde E_x (en considérant un champ magnétique moyen suivant O_z) garde une valeur constante pendant que les charges effectuent de nombreuses girations autour du champ magnétique. Comme nous l'avons vu cela implique que sous l'effet conjugué de E_x et B_z , les charges sont animées le long de O_y de la même vitesse de dérive. Il n'existe donc aucun courant électrique dans cette direction. Si au contraire, on étudie des mouvements sur des échelles temporelles comparables à $1/\omega_{ci}$, on va voir apparaître un courant dans la direction O_y puisque le mouvement de giration des particules dépend de leur masse et de leur charge. C'est ce courant qui induit le champ électrique que l'on appelle champ de Hall (voir

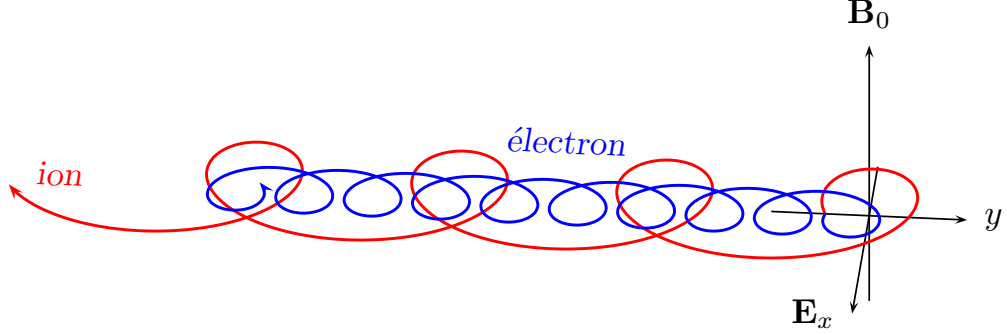


Figure I.2 – Quand la fréquence ω de l'onde est faible devant les fréquences gyromagnétiques des électrons et des ions, on peut considérer que le champ de l'onde $\mathbf{E}_x$ garde une valeur constante pendant que les charges effectuent de nombreuses girations dans le champ magnétique. Sous l'effet des champs $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{B}_0$ les charges sont alors animées le long de $0y$ d'une même vitesse de dérive. Quand la fréquence ω de l'onde devient comparable à la fréquence gyromagnétique des ions il faut prendre en compte la composante de courant selon $0y$ qui représente l'effet Hall.

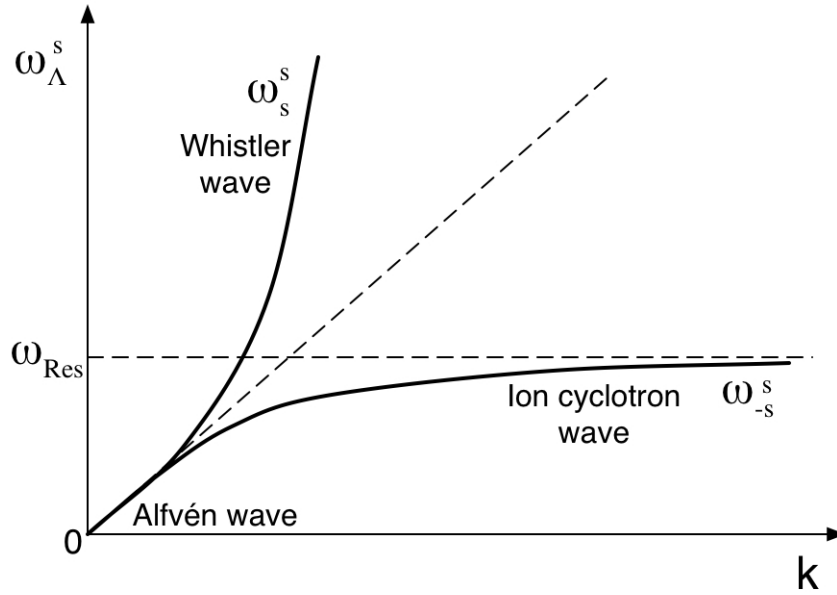


Figure I.3 – Relation de dispersion en MHD Hall incompressible. La pulsation est normalisée par rapport à la fréquence cyclotronique des ions.

Fig.I.2).

Contrairement au champ électrique en $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, le champ Hall différencie les charges des particules qui constituent le fluide et a tendance à les faire tourner dans des sens opposés. La symétrie du modèle MHD par rapport au plan $y0z$ est donc brisée et les ondes d'Alfvén

se scindent en deux modes polarisés circulairement en sens inverse. Il y a ce que l'on peut appeler une levée de dégénérescence.

Les modes propres de la MHD Hall incompressible ont été obtenus pour la première fois par Krishan et al. en 2005 [147]. La démonstration que nous présentons ici révèle des caractéristiques physiques supplémentaires importantes qui seront utilisées au chapitre V. Elle correspond à celle proposée par Sahraoui et al. [176].

En utilisant les mêmes hypothèses qui conduisent au système d'équations I.20, on a d'après I.21 :

$$\begin{cases} -\omega \mathbf{u} = B_0 k_{\parallel} \mathbf{b}, \\ -\omega \mathbf{b} = B_0 k_{\parallel} (\mathbf{u} - id_i \mathbf{k} \times \mathbf{b}), \end{cases}$$

d'où,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_k \times \mathbf{u} = -i\Lambda \mathbf{u}, \\ \mathbf{e}_k \times \mathbf{b} = -i\Lambda \mathbf{b}, \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

avec $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$ et,

$$\Lambda = \frac{\omega^2 - k_{\parallel}^2 B_0^2}{\omega d_i B_0 k_{\parallel} k}. \quad (\text{I.23})$$

En projetant I.22 sur $\mathbf{e}_k$ on obtient trivialement :

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{b} = 0.$$

En appliquant l'opérateur $[\mathbf{e}_k \times]$, on a :

$$\mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{b}) = \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} = -i\Lambda (\mathbf{e}_k \times \mathbf{b}) = -\Lambda^2 \mathbf{b}. \quad (\text{I.24})$$

Ainsi,

$$\Lambda = \pm 1. \quad (\text{I.25})$$

En combinant I.23 et I.25 on obtient :

$$\omega^2 - k_{\parallel}^2 B_0^2 = \Lambda \omega d_i B_0 k_{\parallel} k, \quad (\text{I.26})$$

d'où :

$$\boxed{\omega_{\Lambda}^s = \frac{s k_{\parallel} k d_i B_0}{2} \left(s\Lambda + \sqrt{1 + \frac{4}{d_i^2 k^2}} \right), \quad s = \pm 1.} \quad (\text{I.27})$$

Les relations I.22 et I.27 nous informent respectivement que les ondes obtenues sont polarisées circulairement et qu'elles sont dispersives.

I.3 Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible

Aux petites échelles ($kd_i \gg 1$) :

$$\omega_\Lambda^s \sim sk_\parallel B_0 kd_i \left(\frac{\Lambda s + 1}{2} + \frac{1}{k^2 d_i^2} \right).$$

On obtient donc deux valeurs en fonction du signe de Λ et s :

$$\begin{aligned} \bullet \Lambda s > 0 &\Rightarrow \omega_\Lambda^s \sim sk_\parallel B_0 kd_i, \\ \bullet \Lambda s < 0 &\Rightarrow \omega_\Lambda^s \sim sk_\parallel B_0 / kd_i = s\omega_{ci} \cos\theta, \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

où θ est l'angle entre $\mathbf{B}_0$ et $\mathbf{k}$. La première relation correspond à une onde polarisée

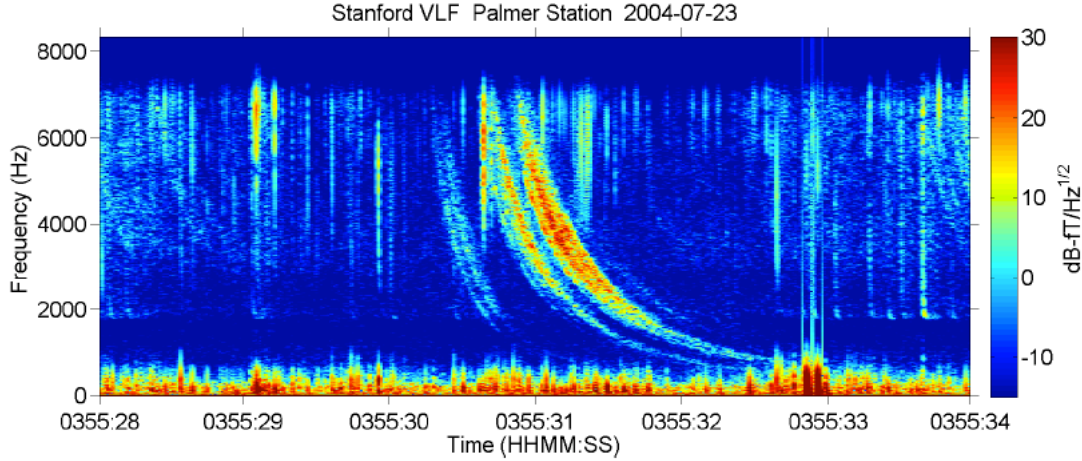


Figure I.4 – Diagramme temps-fréquence représentant une signature whistler. On peut facilement imaginer le sifflement associé à l'arrivée progressive d'ondes de fréquences de plus en plus faibles.

circulairement à droite et s'apparente au mode whistler aussi appelé mode siffleur. Son nom lui vient de sa nature dispersive. En effet, si l'on convertit le signal radio d'une perturbation whistler en signal sonore, il devient parfaitement audible. La propagation dispersive engendre l'arrivée différée des fréquences hautes et basses, créant un sifflement typique (voir Fig. I.4). L'hypothèse $\omega \gg \omega_{ci} \neq 0$ est formellement semblable à $u_i = 0$. A ces hautes fréquences, les ions du fait de leur grande inertie ne peuvent pas suivre la dynamique des électrons. Ils constituent un fond chargé neutralisant immobile. L'onde est alors entièrement portée par le courant électronique et peut être décrite par les équations de l'électron MHD (EMHD).

La deuxième relation de dispersion correspond à un mode polarisé circulairement à gauche et s'apparente au mode ion cyclotron. Il existe pour le mode gauche une résonance (au

sens asymptote) qui dépend de l'orientation du vecteur d'onde. Dans le cas particulier où $k = k_{\parallel}$, la résonance se fait exactement à la fréquence ω_{ci} .

A la résonance cyclotron ionique, le champ électrique transverse associé à l'onde tourne à la même vitesse et dans la même sens que les ions. Les ions subissent une accélération constante ce qui augmente considérablement leur énergie. On s'attend donc à ce que cette onde soit fortement absorbée par les ions. Bien sûr ce phénomène est d'origine cinétique et n'est pas décrit par le modèle MHD Hall, c'est une des limitations du modèles.

3.3.4 Ondes en description bi-fluides

Il est intéressant de comparer les relations de dispersion obtenues à partir des équations mono-fluides de la MHD Hall avec celles issues de l'approximation bi-fluides. Cela permet de quantifier précisément l'approximation faite en considérant la dynamique d'un fluide unique et le domaine de validité d'une telle approche. On se limitera au cas d'un plasma froid et aux modes transverses en propagation parallèle. La prise en compte des effets liés à l'agitation thermique sera discutée par la suite.

En négligeant les termes dissipatifs, l'équation de transport de la quantité de mouvement linéarisée s'écrit dans l'espace de Fourier pour les électrons ($j = e$) et les ions ($j = i$)

$$\begin{cases} i\omega n_j m_j u_{jx} = n_j q_j (E_x + u_{jy} B_0), \\ i\omega n_j m_j u_{jy} = n_j q_j (E_y - u_{jx} B_0). \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

On a donc quatre équations pour six inconnues. Les deux équations manquantes pour résoudre le système sont obtenues en combinant les équations de Maxwell-Ampère [I.3](#) et de Maxwell-Faraday [I.4](#). On peut en effet grâce à ces deux équations exprimer $\mathbf{j}$ en fonction de $\mathbf{E}$ de la manière suivante :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0.$$

En utilisant les relations, $TF(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})) = k^2 (\mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y)$ et $\mathbf{j} = n_e q_e \mathbf{u}_e + n_i q_i \mathbf{u}_i$ on obtient ¹⁰,

$$\begin{cases} \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 \right) E_x = \frac{\mu_0 c^2}{i\omega} (n_e q_e u_{ex} + n_i q_i u_{ix}), \\ \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 \right) E_y = \frac{\mu_0 c^2}{i\omega} (n_e q_e u_{ey} + n_i q_i u_{iy}). \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

10. On a en effet $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, or $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ d'après l'hypothèse de quasi-neutralité et $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}_z = \mathbf{0}$ puisque l'on considère des modes transverses.

I.3 Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible

En combinant les équations [I.29](#) et [I.30](#) on a,

$$\begin{cases} u_{jx} (\omega_{cj}^2 - \omega^2) = \frac{q_j}{m_j} (i\omega E_x - \omega_{cj} E_y), \\ u_{jy} (\omega_{cj}^2 - \omega^2) = \frac{q_j}{m_j} (i\omega E_y + \omega_{cj} E_x). \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

En éliminant les composantes de vitesse électronique et ionique dans les quatre équations [I.31](#), on obtient deux expressions pour le rapport E_y/E_x :

$$\frac{E_y}{E_x} = - \frac{\frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}}{i\omega \left[\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right]} \quad (\text{I.32})$$

$$= \frac{i\omega \left[\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right]}{\frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}} \quad (\text{I.33})$$

Au final, la relation de dispersion pour les ondes transverses en propagation parallèle s'exprime donc de la manière suivante :

$$\omega \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right) = \pm \left(\frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right). \quad (\text{I.34})$$

Les solutions de cette équation sont de la forme,

$$\omega_{\pm}^2 = k^2 c^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \mp \omega_{ci})} \right)^{-1}. \quad (\text{I.35})$$

avec $\omega_p^2 \equiv \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2$.

En remplaçant dans [I.33](#) la valeur tirée de [I.34](#) on trouve trivialement,

$$\begin{aligned} E_y/E_x &= +i \quad \text{pour la solution } \omega_+, \\ E_y/E_x &= -i \quad \text{pour la solution } \omega_-. \end{aligned}$$

Les deux ondes obtenues sont donc polarisées circulairement en sens inverse. Le vecteur électrique de l'onde ω_- tourne dans le sens direct, c'est-à-dire dans le même sens que les électrons tandis que le vecteur électrique de l'onde ω_+ tourne dans le sens des ions.

– **Limite basse fréquence** : $\omega \ll \omega_{ce}$

Dans la limite où $\omega \ll \omega_{ce}$,

$$\lim_{\omega_{ce}/\omega \rightarrow \infty} 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \mp \omega_{ci})} = 1 \pm \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}(\omega \mp \omega_{ci})}.$$

On peut simplifier cette expression en utilisant l'approximation de quasi-neutralité pour l'état non perturbé, ce qui permet d'écrire $\omega_{ce}\omega_{pi}^2 \simeq \omega_{ci}\omega_{pe}^2$. On peut également faire l'approximation suivante $\omega_p^2 \equiv \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2 \simeq \omega_{pe}^2$ puisque les électrons sont beaucoup plus légers que les ions. On obtient ainsi,

$$1 \pm \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}(\omega \mp \omega_{ci})} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \left(\frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega_{ci}}{\omega - \omega_{ci}} \right).$$

Si $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$ l'expression [I.35](#) devient,

$$\omega_{\pm} \simeq \pm k^2 d_i^2 \omega_{ci} (\omega \mp \omega_{ci}), \quad (\text{I.36})$$

et on retrouve la relation de dispersion [I.26](#) obtenue à partir des équations de la MHD Hall. Il est important de noter que la relation $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$ est très bien vérifiée dans un plasma comme le vent solaire (voir tableau [II.1](#)). Les ondes MHD Hall sont donc la limite basse fréquence ($\omega \ll \omega_{ce}$) des ondes bi-fluides.

Dans la limite où $\omega = \omega_{ci}$, il est intéressant de constater que l'on retrouve la relation [I.36](#) en annulant la vitesse électronique dans les équations [I.29](#). Cela implique donc que le mode gauche est principalement porté par les ions. Ce constat est à la base du modèle heuristique de turbulence MHD Hall proposé au chapitre [V](#).

– **Fréquence intermédiaire** : $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$

Si on considère des fréquences intermédiaires $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$,

$$\lim_{\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}} 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \mp \omega_{ci})} = 1 \mp \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}\omega} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \left(\frac{\omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2} \mp \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right),$$

et si de plus $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$, l'expression [I.35](#) devient,

$$\omega_{\pm} \simeq \mp k^2 d_e^2 \omega_{ce}. \quad (\text{I.37})$$

Cela montre que pour des fréquences $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$ seul le mode de polarisation droit peut se propager. C'est cette onde que l'on appelle whistler. Le mode gauche quant à lui est appelé mode ion cyclotron.

On retrouve la relation I.37 en annulant la vitesse ionique dans les équations I.29. Les ondes whistler sont donc portées par les électrons et il n'est pas surprenant qu'elles apparaissent dans le modèle EMHD.

3.4 Discussions sur les effets cinétiques, la compressibilité et le domaine de validité de la MHD Hall

Les propriétés des ondes discutées dans les sections précédentes ont été établies dans le cadre d'une approche fluide. Cette description est suffisante pour l'étude de la plupart des phénomènes. Les seuls effets qui doivent être étudiés plus finement à partir de la partie thermique du tenseur diélectrique sont ceux pour lesquels une certaine catégorie de particules de vitesse déterminée et en nombre relativement petit, a une action plus importante que l'ensemble des autres particules. C'est le cas par exemple quand la vitesse de phase v_ϕ des ondes considérées est assez faible pour qu'une fraction non négligeable des particules du plasma ait une vitesse très voisine de v_ϕ ; la densité et la vitesse moyenne de l'ensemble des particules sont alors moins importantes pour décrire les phénomènes que la densité du groupe de particules qui "accompagnent" l'onde. Dans ce type de situations l'interaction entre l'onde et les particules résonantes peut conduire à un amortissement important des ondes. On appelle ce phénomène, l'effet Landau.

De manière générale, les modes transverses basse fréquence ($\omega \ll \omega_{ce}$) en propagation parallèle sont peu affectés par les effets cinétiques, sauf près de la résonance cyclotron ionique et pour une polarisation gauche (sens de rotation des ions). On peut montrer en particulier que les modes Alfvén et whistler sont très peu amortis, tandis que les ondes cyclotrons ioniques le sont beaucoup plus. Le faible amortissement des modes transverses est dû au mouvement de giration des particules autour du champ moyen qui "empêche" les particules d'accompagner l'onde. Les modes qui ont une composante longitudinale importante seront au contraire fortement amortis.

– Effet Landau et compressibilité

Comme nous l'avons vu précédemment, en présence d'un champ magnétique, les trajectoires des particules chargées sont des hélices autour du champ (voir figure

L.1). Si l'on se place dans le référentiel où le mouvement d'une particule le long du champ est éliminé, sa trajectoire sera un cercle dans un plan orthogonal au champ. Si un courant électrique est présent dans ce plan, un mouvement de dérive se combine à celui de la giration et la trajectoire résultante est une cycloïde dans le plan considéré. Avec ce type de trajectoire on comprend intuitivement que l'isotropie de la fonction de distribution des particules est brisée.

Il est possible de montrer à partir de calculs cinétiques que dans les plasmas faiblement collisionnels, des effets de rayon de Larmor fini (FLR) apportent une contribution non nulle au flux de chaleur qui brise la gyrotropie du tenseur de pression quand $k\rho_i$ est de l'ordre ou supérieur à l'unité (Passot et al. 2005 [216]). Quand les fréquences typiques du système étudié approchent la gyrofréquence des particules, nous avons vu que des phénomènes de résonance onde-particules doivent être également pris en compte. Pour ces échelles spatiales et temporelles, trouver un modèle de fermeture valide devient difficile et problématique.

Des travaux récents ont permis d'incorporer dans les équations de la MHD Hall compressible des effets cinétiques en modélisant l'amortissement Landau (Passot et al. 2004 [162]). Dans sa formulation la plus simple, le système est fermé au niveau du flux de chaleur de manière à correspondre à la théorie cinétique linéaire dans la limite basse fréquence. Le système ainsi obtenu est appelé FLR-Landau fluide et comprend 11 équations à 11 inconnues. Il est donc beaucoup plus lourd à simuler que la MHD Hall compressible, mais reste significativement plus léger qu'un traitement purement cinétique basé sur les équations de Maxwell-Vlasov.

Des expériences numériques tri-dimensionnelles de turbulence FLR-Landau (Hunana et al. 2011 [106]) ont montré récemment que l'effet Landau linéaire réduit significativement les modes magnéto-soniques. La compressibilité d'un plasma dans un régime turbulent est donc fortement réduite par des processus cinétiques. Ce résultat apporte un élément de réponse important à la question soulevée par l'observation de la faible compressibilité du vent solaire (Matthaeus et al 1991 [128]) et légitime en partie l'approche MHD Hall incompressible que nous avons adopté dans cette thèse.

– Commentaires sur le domaine de validité de la Hall MHD

Dans un article intitulé "Remarks on the discrete Alfvén wave spectrum induced by

I.3 Description mono-fluide : l'approximation MHD et MHD Hall incompressible

the Hall current", Atsushi Ito et al. [108] ont montré que dans la limite où :

$$\omega \ll \omega_{ci}, \quad (\text{I.38})$$

$$\omega \gg k_{\parallel} v_{thi}, \quad (\text{I.39})$$

$$\omega \ll k_{\parallel} v_{the}, \quad (\text{I.40})$$

$$T_i \ll T_e, \quad (\text{I.41})$$

la relation de dispersion obtenue à partir du modèle MHD Hall compressible est une limite rigoureuse de la théorie cinétique de Vlasov- Maxwell.

La relation I.38 implique que l'on se situe loin de la résonance cyclotronique ionique. Les relations I.39 et I.40 impliquent respectivement que les ions et les électrons sont respectivement trop froids et trop chauds pour être sujet à une absorption Landau. La relation I.41 permet d'avoir une longueur inertielle ionique (c/ω_{pi}) finie avec néanmoins un rayon de Larmor ionique V_{thi}/ω_{ci} très petit. Ceci permet de garder les effets de fréquences finies associés à l'effet Hall, tout en négligeant les effets de rayon de Larmor fini.

Les conditions I.38, I.39, I.40 et I.41 reviennent donc à se placer dans un régime où même s'ils sont explicitement contenus dans les équations, les effets cinétiques sont négligeables. Dans ce cas, il n'est donc pas surprenant que l'on retrouve à partir des équations cinétiques les modes propres de la Hall MHD.

La condition I.38 est très souvent utilisé dans la littérature pour disqualifier le modèle MHD Hall appliqué au vent solaire (Schekochihin et al. [23] ; Howes et al. [104] ; TenBarge et al. [186]). Il faut cependant garder à l'esprit que ces arguments sont basés sur une théorie linéaire et que le rôle des effets cinétiques en régime turbulent n'est pas à l'heure actuelle bien compris. Il est intéressant de noter par exemple que des simulations numériques gyrocinétiques récentes (Howes et al. 2008b [103]) incluant tous les effets cinétiques ont mis en évidence l'existence d'une cascade turbulente sur une large gamme d'échelles en contradiction avec les prédictions basées sur un modèle pour lequel le taux de dissipation est estimé à partir des équations de Vlasov-Maxwell linéaires (Howes et al. 2008a [102]).

Exclure la MHD Hall du débat sur la nature de la turbulence au-delà des échelles ioniques en arguant que $T_i \ll T_e$ ne correspond pas aux conditions physiques du vent solaire paraît donc un peu excessif.

Chapitre II

Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

Sommaire

1	Quelques concepts de turbulence issus des fluides neutres	49
1.1	L'ubiquité de la turbulence	49
1.2	Des non-linéarités au chaos	49
1.3	Nécessité d'une description statistique : le problème de fermeture	51
1.4	Cascade de Kolmogorov-Richardson	52
1.5	Le rôle des simulations numériques	56
2	Le vent solaire	57
2.1	Le modèle de Parker	57
2.2	Le champ magnétique interplanétaire	59
2.3	Quelques propriétés du vent solaire	60
3	Turbulence dans le vent solaire	63
3.1	Structures aux grandes échelles : les origines de la turbulence	63
3.2	Évidences expérimentales	63
3.3	Turbulence Alfvénique	65
3.4	Turbulence anisotrope	68
4	Turbulence non-équilibrée et alignement dynamique	71
4.1	Alignement dynamique et hélicité croisée	72
4.2	Phénoménologie de Boldyrev	73
5	Au-delà de l'échelle ionique : dissipation ou dispersion ?	75
5.1	Brisure spectrale aux échelles ioniques	77
5.2	Phénoménologie et controverses	78

LE VENT SOLAIRE EST UN FLOT DE PLASMA provenant du Soleil et se propageant à travers l'espace interplanétaire. Ce vent est causé par une différence de pression entre l'atmosphère externe du Soleil et le milieu qui l'entoure. La gravité du Soleil n'est pas suffisante pour contrecarrer complètement cette force de gradient de pression et laisse la possibilité au plasma qui le constitue de s'échapper sous la forme d'un vent extrêmement turbulent de matière ionisée.

Bien avant que le premier vaisseau spatial soit lancé dans l'espace, les astrophysiciens avaient compris son existence en observant deux phénomènes distincts. Dès le XIX^e des scientifiques ont remarqué que les éruptions solaires étaient corrélées avec des perturbations géomagnétiques de l'atmosphère terrestre avec un retard de quelques jours (Carrington 1859 [52] ; Hodgson 1859 [97]). Plus récemment, l'observation systématique d'une double queue cométaire dont l'une toujours orientée à l'opposé du Soleil conduit Ludwig Biermann (1951 [40]) à suggérer l'existence d'un flot continu de plasma éjecté par le Soleil.

En 1959, les satellites Luna 1, 2 et 3 réalisent les premières mesures *in situ* du vent solaire (Gringauz et al. 1960 [89]). De nombreux satellites suivront, permettant par des mesures directes de quantifier précisément de nombreux aspects du vent solaire. Notre compréhension des différents mécanismes d'accélération et de chauffage du vent solaire reste cependant encore aujourd'hui très mal compris. Dans ce chapitre, nous présenterons l'état actuel de nos connaissances, mais aussi certaines des questions qui restent à résoudre et qui font l'objet de cette thèse.

Avant d'aborder le problème complexe de la turbulence plasma dans le vent solaire, nous présenterons également dans un premier temps quelques notions de turbulence issues de l'étude des fluides neutres.

1 Quelques concepts de turbulence issus des fluides neutres

1.1 L'ubiquité de la turbulence

Bien que la turbulence ne soit pas particulièrement aisée à définir, il est facile de trouver des exemples (voir Fig. II.1 ; II.2). De fait elle est partout autour de nous. C'est elle qui contrôle la force de traînée exercée par l'air sur les avions, les voitures ou par l'eau sur les piles des ponts. C'est elle qui dicte la météo, elle encore qui génère le champ magnétique terrestre. La turbulence joue également un rôle important en astrophysique et en cosmologie. Elle provoque par exemple les éruptions solaires et a généré les fluctuations de densité de l'univers primitifs donnant naissance ultérieurement aux grandes structures de l'univers actuel. Aussi, est-il difficile de ne pas être intrigué par un sujet qui concerne autant d'aspects de nos vies.

Au vu de la complexité des phénomènes impliquant la turbulence, on pourrait penser que la difficulté du problème est liée à une difficulté de formulations fondamentales. Mais le problème est ailleurs puisque l'on connaît les équations qui gouvernent le mouvement des fluides depuis les travaux de Navier (1822 [214]) et Stokes (1757 [215]). Ce sont des équations de la physique classique ne faisant intervenir ni phénomène quantique, ni mécanique relativiste. Nul besoin d'un microscope ou d'un télescope pour observer les gracieuses arabesques de la crème versée dans le café. Et pourtant, force est de constater que l'on comprend aujourd'hui beaucoup mieux la structure intime de la matière ou du cosmos, que les mouvements d'air dans la pièce dans laquelle vous êtes assis !

1.2 Des non-linéarités au chaos

Une des caractéristiques les plus importantes des écoulements turbulents est leur nature chaotique. Ils sont sensibles aux conditions initiales ce qui les rend non prédictibles à long terme bien que régis par des équations parfaitement déterministes. L'histoire d'un écoulement turbulent est en effet entièrement déterminée par la connaissance des positions et vitesses initiales, mais si deux états du système ne diffèrent à cet instant que par des différences infinitésimales, ces différences vont sous l'effet d'interactions complexes s'amplifier de façon importante au cours du temps. C'est ce phénomène de chaos déterministe qui a conduit Lorenz à poser la célèbre question : " Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ? ».

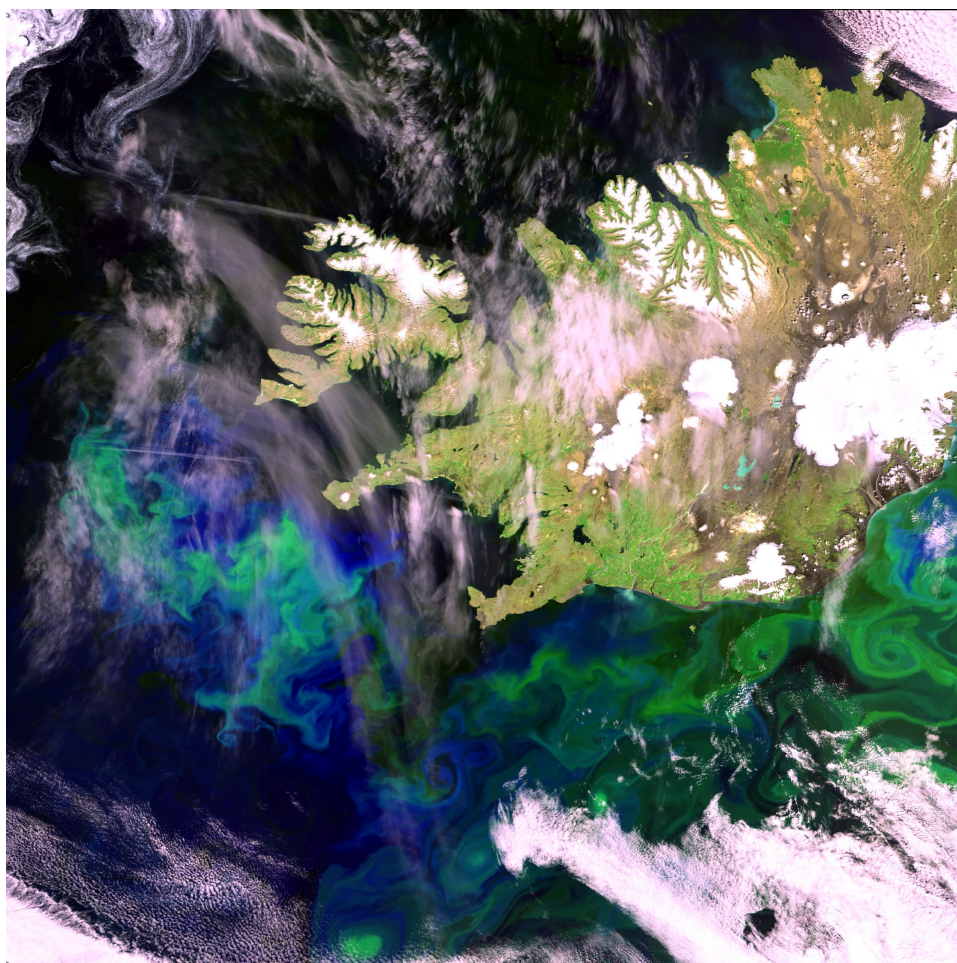


Figure II.1 – Image des côtes islandaises acquise le 21 juin 2004 par le satellite Envisat. La turbulence de l’océan est ici matérialisée par des tourbillons bleus-verts dont la couleur est causée par une concentration élevée en phytoplancton. On devine également la nature turbulente de l’atmosphère grâce à la présence de nuages. Source : ESA.

L’origine du chaos dans les équations de Navier-Stokes provient du terme non-linéaire d’advection de la vitesse par elle-même $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Les phénomènes non-linéaires sont extrêmement difficile à comprendre car ils ne peuvent pas être analysés par parties. Ils donnent naissance à des phénomènes collectifs pour lesquels les méthodes réductionnistes qui fondent la science moderne semblent impuissantes. Pourtant, les phénomènes non-linéaire ne sont pas l’exception mais bien souvent la règle dans la nature et nul besoin d’un système complexe pour voir apparaître des comportements chaotiques. Par exemple, une boussole soumise à l’action simultanée de deux champs magnétiques, l’un fixe, l’autre tournant, semble prise de folie car son mouvement devient complètement erratique.

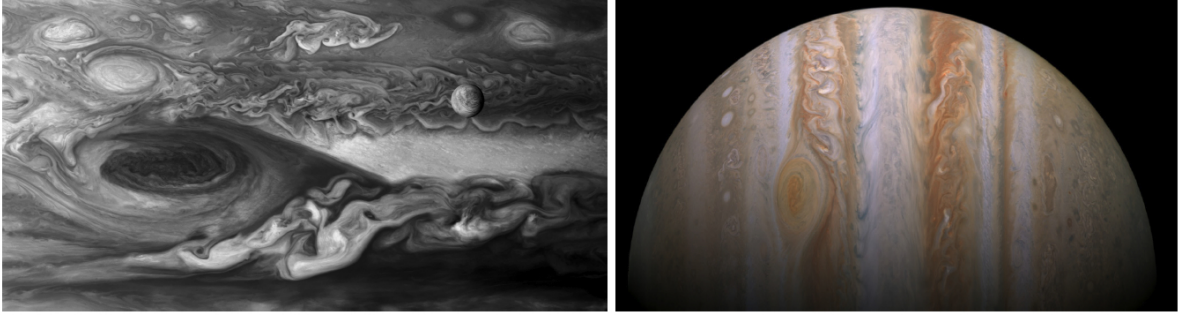


Figure II.2 – Gauche : Mosaïque d'images de la tache rouge de Jupiter prise par la sonde voyager I le 3 mars 1979. On aperçoit Europa, une des six lunes de Jupiter qui est à peine plus petites que notre Lune. Source : NASA/JPL and Michael Benson, Kinetikon Pictures. **Droite :** Image en vraie couleur prise par la sonde Cassini le 29 Decembre 2000. Source : NASA/JPL/SSI/

1.3 Nécessité d'une description statistique : le problème de fermeture

Dans la mesure où l'on ne peut pas dans le cas d'un écoulement turbulent isoler le comportement d'une partie de celui de l'ensemble, il est nécessaire d'adopter une vision globale et donc statistique. La plupart des "théories de turbulence" ne concerne donc pas la détermination du champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ mais plutôt de ses propriétés statistiques. Il est donc naturel de chercher à séparer la partie fluctuante des champs de leur partie moyenne :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \\ P(\mathbf{x}, t) = \bar{P}(\mathbf{x}, t) + P'(\mathbf{x}, t), \end{cases}$$

où la barre horizontale au-dessus de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{P}$ représente le champ moyen et l'apostrophe l'écart par rapport à cette moyenne. En substituant cette relation dans les équations de Navier-Stokes et en moyennant terme à terme, on obtient une équation pour le champ de vitesse moyen :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}. \quad (\text{II.1})$$

L'équation pour le flot moyen ne diffère de celles de Navier Stokes que par le terme $\overline{u'_i u'_j} / \partial x_j$ qui représente le transport de quantité de mouvement causé par les fluctuations turbulentes. On appelle tenseur de Reynolds le terme $\overline{u'_i u'_j}$. Il est nécessaire de l'évaluer pour résoudre l'équation II.1 et il est donc naturel d'écrire une équation d'évolution pour ce terme. Cette nouvelle équation fait intervenir un terme $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ qui pour être évalué nécessite la connaissance du terme $\overline{u'_i u'_j u'_k u'_l}$ qui lui-même nécessite la connaissance de

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

$\overline{u'_i u'_j u'_k u'_l u'_m}$ et ainsi de suite. Ce problème est tout à fait analogue à celui auquel nous avons dû faire face au chapitre I avec le problème de fermeture des équations fluides. Bien sûr, ce sont les non-linéarités qui en sont l'origine.

En adoptant une description statistique nous avons donc payé un lourd tribut. On est passé d'une équation complètement déterministe à un système infini d'équations. Il y a une forme d'ironie dans cette situation. D'un côté nous avons une quantité physique, $\mathbf{u}$, qui se comporte de façon aléatoire bien que régie par une équation parfaitement déterministe. De l'autre côté, les propriétés statistiques de $\mathbf{u}$ paraissent robustes et prédictibles, mais nous ne connaissons pas de système fini d'équations qui les décrivent ! Il est donc impossible de dériver à partir des équations du mouvement un modèle statistique de turbulence. Pour fermer le système, il est nécessaire d'introduire une information supplémentaire *ad hoc* par nature. Cette situation embarrassante fait que les théories de la turbulence apparaissent comme un amalgame de lois semi-empiriques et de modèles heuristiques simplifiés, renforcés par de très rares résultats théoriques rigoureux.

1.4 Cascade de Kolmogorov-Richardson

Ce qui différencie significativement la turbulence des autres processus non-linéaires à l'œuvre dans la nature c'est le grand nombre de degrés de liberté impliqués. L'observation d'un écoulement turbulent nous enseigne en effet que la turbulence est constituée d'une très grande gamme d'échelles spatiales et temporelles et on peut se demander qu'est-ce qui en est l'origine. Pour simplifier, on peut dire que c'est l'injection d'énergie aux grandes échelles qui génère la turbulence. Ce forçage peut être de nature très différente en fonction de la situation étudiée. Il peut s'agir d'une force mécanique (cuillère dans la tasse de thé, supernovae dans le milieu interstellaire), de conditions aux limites (aile d'avion, piles des ponts), ou instabilités diverses (micro-turbulence dans les tokamaks, convection solaire, instabilité magnéto-rotationnelle dans les disques d'accrétion). L'énergie injectée dans le système est toujours dissipée sous forme de chaleur et donc implique des processus à des échelles microscopiques. Pour dissiper l'énergie injectée à grande échelle, le système a donc besoin de relier l'intervalle. Il le fait par un processus de cascade d'énergie impliquant une hiérarchie de vortex de différentes tailles (voir Fig. II.3 ; II.4).

On peut intuitiver l'existence d'une cascade turbulente directement à partir des équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{II.2})$$

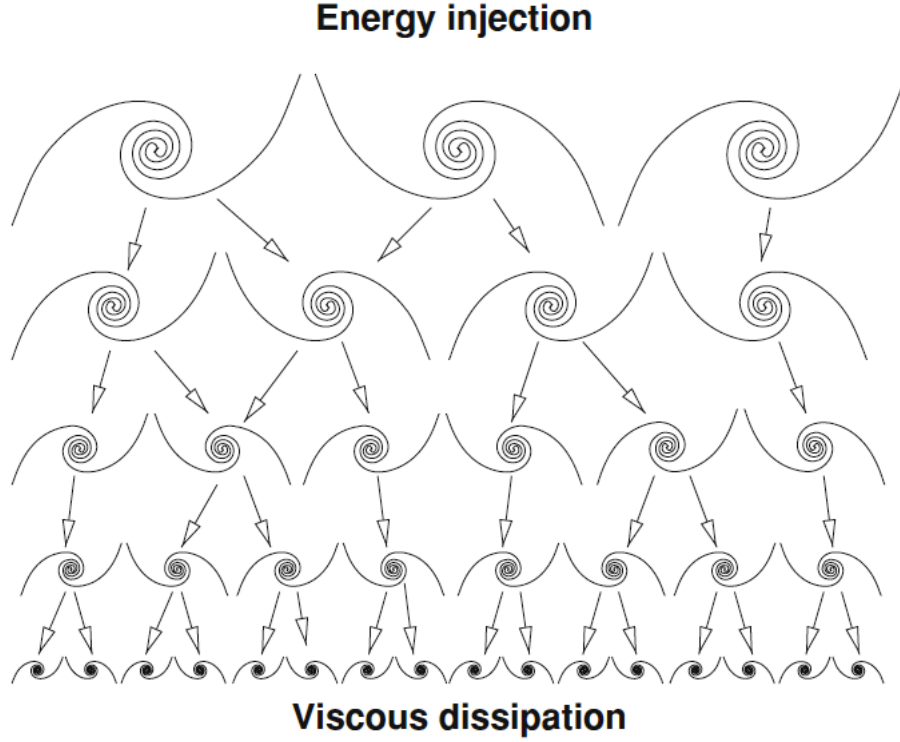


Figure II.3 – Représentation schématique de la cascade turbulente selon Richardson. Tiré de Nazarenko 2011 [1].

où p est la pression, ν la viscosité moléculaire du fluide, est $\mathbf{f}$ la force d'injection d'énergie aux grandes échelles. L'évolution temporelle de l'énergie cinétique du fluide vérifie :

$$\frac{d}{dt} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{V} \frac{u^2}{2} = \varepsilon - \nu \int \frac{d^3\mathbf{r}}{V} |\nabla \mathbf{u}|^2,$$

avec V le volume du système et $\varepsilon = (1/V) \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d^3\mathbf{r}$ l'énergie injectée par unité de temps et de volume. Dans le régime stationnaire, les termes d'injection et de dissipation du second membre doivent nécessairement s'équilibrer et cela même si la viscosité est infiniment petite ou pour être plus précis, si elle est négligeable à l'échelle d'injection. On voit donc que nécessairement l'équilibre s'établit en transférant de l'énergie aux petites échelles où les gradients de vitesse sont suffisamment importants pour compenser la faible viscosité. On peut facilement évaluer l'échelle l_D à laquelle a lieu la dissipation (cette échelle est

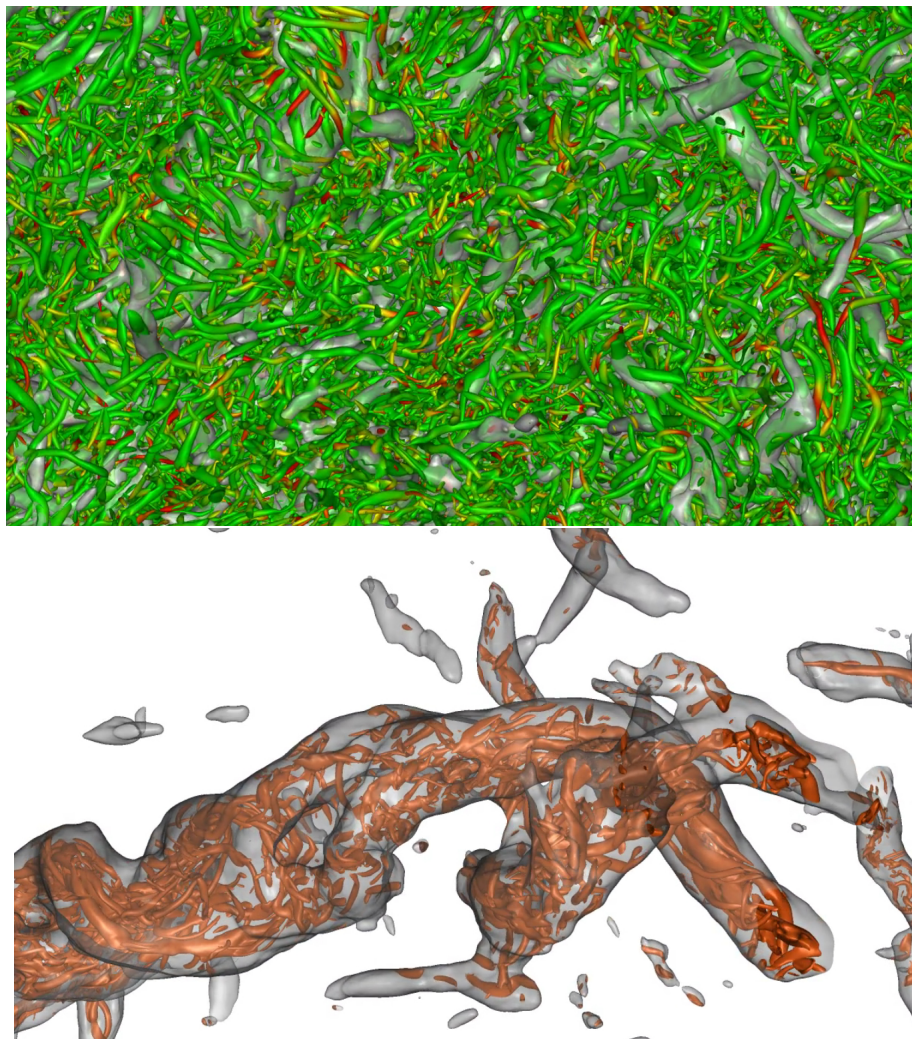


Figure II.4 – Iso-surfaces de vorticité pour des structures appartenant aux échelles inertielles obtenues à partir d’une simulation numérique directe forcée des équations de Navier-Stokes correspondant à $Re = 433$. Bürger et al. 2012 [2].

traditionnellement appelée échelle de Kolmogorov),¹

$$l_D \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \sim LRe^{-3/4}, \quad (\text{II.3})$$

où L est l’échelle d’injection d’énergie (échelle intégrale) et $Re = \delta u L / \nu$ est le nombre de Reynolds (rapport du terme non- linéaire sur le terme visqueux). Le système devient turbulent quand les non-linéarités dominent, donc pour $Re \gg 1$, c’est à dire quand $l_D \ll L$.

1. Puisque en régime stationnaire le taux de dissipation d’énergie ε doit être égale au taux d’injection, on a d’après (II.2), $u_L^3/L \sim \nu(u_{l_D}^2/l_D^2)$, or au niveau de l’échelle de dissipation les termes non-linéaires et visqueux sont du même ordre donc $u_{l_D} l_D / \nu \sim 1$, d’où $l_D \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \sim LRe^{-3/4}$.

II.1 Quelques concepts de turbulence issus des fluides neutres

Les fluctuations sont alors présentes sur une très grande gamme d'échelles spatiales. Ce qui est remarquable dans ce processus de cascade d'énergie c'est qu'il est universel. Chacune des structures de la zone inertielle² d'un écoulement turbulent possède un héritage complexe. Ce sont en quelque sorte les arrières-arrières-arrières petites filles de structures qui sont elles-mêmes issues d'une longue génération de structures. De ce fait, elles finissent par oublier complètement leurs origines. De plus, ces structures ne ressentent pas l'effet des structures plus grandes puisque ces dernières ont un champ de vitesse quasiment uniforme à leur échelle. Les petites structures sont passivement advectées par les grandes, l'énergie est ainsi transférée par une succession d'étapes impliquant des structures de tailles comparables (voir Fig. II.3; II.4).

En 1941 ces idées ont conduit Kolmogorov [144], [145] et Obukhov [157] à introduire l'hypothèse d'universalité de la zone inertielle. L'idée est que les symétries des équations de Navier-Stokes sont retrouvées statistiquement aux petites échelles où la turbulence devient alors homogène, isotrope et autosimilaire (c'est-à-dire présente une invariance d'échelle dans la limite des nombres de Reynolds infinis). Ainsi, loin de la source et de la dissipation, les propriétés statistiques dépendent uniquement du taux de transfert d'énergie et pas du détail du forçage ou de la dissipation. Puisque la cascade est supposée autosimilaire, le taux de transfert est indépendant de l'échelle considérée et comme les interactions sont supposées locales, le temps caractéristique de transfert de l'énergie τ_Λ doit nécessairement s'exprimer en fonction de quantité physique associée à l'échelle Λ .

Cette hypothèse simplificatrice conduit, par une simple analyse dimensionnelle, à un spectre d'énergie variant comme la puissance $-5/3$ du nombre d'onde,

$$\begin{cases} [\varepsilon] = \left[\frac{\mathbf{u}^2}{t} \right] = \frac{l^2}{t^3} \\ [E^{(1D)}] = \left[\frac{\mathbf{u}^2}{k} \right] = \frac{l^3}{t^2} \end{cases}$$

d'où,

$$E^{(1D)} = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}. \quad (\text{II.4})$$

En dépit de l'extrême simplicité de la dérivation, cette loi phénoménologique constitue un des résultats les plus robustes en turbulence. Elle a été confirmée par de très nombreuses expériences (voir Fig. II.5).

2. La zone inertielle est la gamme d'échelles pour laquelle le terme non-linéaire domine la dynamique.

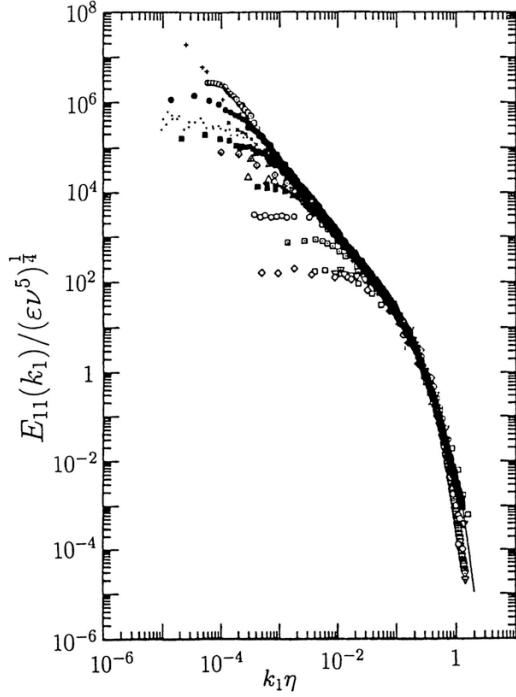


Figure II.5 – Spectres d'énergie mesurés dans de nombreuses situations différentes (océan, atmosphère, souffleries, etc.). Ces mesures confirment la prédiction de Kolmogorov (1941). Image tirée de Saddoughi et al. 1994 [3].

1.5 Le rôle des simulations numériques

L'étude des écoulements turbulents à un statut particulier en physique dans la mesure où les équations qui les gouvernent ont toujours été unanimement admises et seule leur intégration pose problème. La non-linéarité des équations de Navier-Stokes interdit en effet une connaissance analytique de ses solutions et le théoricien est ramené à proposer des conjectures basées pour la plupart sur des considérations phénoménologiques. Comme l'a souligné Von Neumann [212], en mécanique des fluides le but de l'expérience est de remplacer les calculs analytiques par des mesures directes. Les souffleries utilisées pour l'étude de la turbulence peuvent être ainsi considérées comme des instruments de calcul analogique permettant d'intégrer les équations de Navier-Stokes. Il n'est donc pas surprenant qu'un nouveau chapitre de la théorie de la turbulence se soit ouvert quand Orszag [159] a démontré qu'il était possible d'effectuer une simulation numérique directe³ d'un écoulement turbulent pleinement développé. Compte tenu de la puissance, la précision et la souplesse qu'offre le calcul numérique, l'expérience numérique a progressivement remplacé l'expérience physique.

Il est cependant encore de nos jours très difficile d'atteindre des nombres de Reynolds élevés à l'aide de calculateurs. En effet, plus Re est grand, plus les structures générées

3. Sans approximations.

par la cascade turbulente vont être petites et plus le maillage numérique de l'espace doit être fin. On peut facilement estimer le nombre de points N_x nécessaires à une simulation en fonction de Re . Compte tenu de la relation II.3, on a :

$$N_x \sim \left(\frac{L_{BOX}}{\Delta x} \right)^3 \sim \left(\frac{L_{BOX}}{L} \right)^3 Re^{9/4} \Rightarrow Re \sim \left(\frac{L}{L_{BOX}} \right)^{4/3} N_x^{4/9}, \quad (\text{II.5})$$

où L_{BOX} est la taille typique du domaine de calcul et Δx la distance minimale entre deux points de la maille. Le facteur $Re^{9/4}$ est appelé nombre de degrés de liberté de la turbulence [209].

La discrétisation temporelle dépend aussi fortement de Re . Puisque l'on ne peut pas laisser une particule fluide se déplacer sur une longueur supérieure à Δx pendant un pas de temps⁴, si T est la durée de la simulation, le nombre minimal de pas de temps N_t est,

$$N_t \sim \frac{T}{\Delta t} \sim \frac{T}{l_D/u} \sim \frac{T}{L/u} Re^{3/4}.$$

Le nombre d'opérations nécessaire à une simulation numérique directe de la turbulence étant proportionnel à $N_x N_t$, on a donc :

$$\text{Temps de calcul} \propto N_x N_t \sim \left(\frac{T}{L/u} \right) \left(\frac{L_{BOX}}{L} \right)^3 Re^3.$$

Cette relation montre le prix colossal à payer si on veut réaliser une simulation numérique à nombre de Reynolds élevé. Malgré l'existence de calculateurs d'une puissance phénoménale, la force brute du calcul numérique n'est aujourd'hui toujours pas suffisante. Au début du XXI^e siècle, il est donc encore d'actualité d'utiliser des modèles simplifiés. Je présenterai au chapitre III l'un d'entre eux.

2 Le vent solaire

2.1 Le modèle de Parker

De nos jours, on ne comprend toujours pas dans les détails comment le vent solaire est accéléré aux vitesses observées (Cranmer et al. 2010 [60]). On peut cependant se faire une idée approximative des mécanismes d'accélération à partir des travaux de Parker (1958 [161]) qui dérivait une solution d'équilibre à partir des équations hydrodynamiques.

4. Condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy).

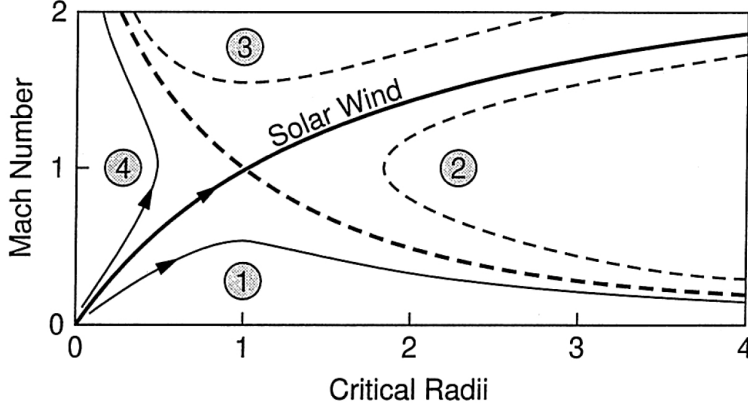


Figure II.6 – Solutions des équations hydrodynamiques de Parker. La solution qui correspond aux propriétés observées du vent solaire est noté "Solar Wind". Figure tirée de Baumjohann et Treumann 1997 [4].

Pour ce faire, Parker utilisa des hypothèses simplificatrices. En supposant une symétrie radiale, une absence de champ magnétique et une température T constante, il obtient une équation de la forme :

$$\left(u^2 - \frac{2k_B T}{m}\right) \frac{1}{u} \frac{du}{dr} = \frac{4k_B T}{mr} - \frac{GM_s}{r^2}$$

avec M_s la masse du Soleil, G la constante gravitationnelle et r la distance radiale. Les classes de solutions de cette équation sont montrées à la figure II.6. L'axe des ordonnées représente le nombre de Mach u_s/c_s et l'axe des abscisses la distance normalisée par le rayon critique⁵ $R_c = GM_s m / 4k_B T$. Les régions 2 et 4 ne sont pas physiques puisque à une même distance, correspond deux vitesses différentes. Dans la région 1 le vent solaire est initialement accéléré jusqu'au rayon critique puis décélère au-delà. Cela induit une accumulation de matière loin du Soleil qui n'est pas observée. La solution 3 pour laquelle la vitesse est supersonique au niveau du Soleil n'est pas non plus observée. La seule solution qui correspond effectivement au vent solaire est noté "Solar Wind" sur la figure II.6. Elle commence à faible vitesse près du Soleil, devient supersonique au niveau du point critique puis atteint une vitesse constante correspondant à un état d'équilibre. Dans ce modèle, la vitesse à une distance donnée dépend de la température. Plus la température est élevée, plus le gradient de pression est important et donc plus le vent est rapide.

En dépit de l'extrême simplicité du modèle de Parker, l'ajout d'ingrédients physiques supplémentaires aux équations ne donne pas de solutions qualitativement différentes. Par exemple, Weber et Davis (1967 [5]) ont étudié l'effet du champ magnétique sur l'accélération du vent solaire et ont obtenu des solutions très proches de celles de Parker (voir

5. Distance correspondant à un équilibre parfait entre les forces de pression et de gravité.

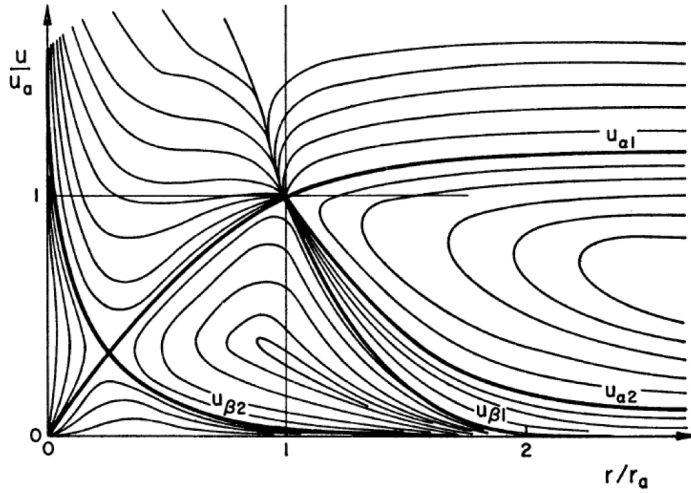


Figure II.7 – Solutions des équations magnétohydrodynamiques de Weber et Davis. La solution qui correspond aux propriétés observées du vent solaire est noté $u_{\alpha 1}$. Graphique tiré de Weber et Davis (1967 [5]).

Fig. II.7). L'axe des ordonnées est maintenant normalisé à la vitesse d'Alfvén et on observe de nouveaux points critiques correspondant aux équilibres induits par la force magnétique. La solution notée $u_{\alpha 1}$ est qualitativement similaire à celle de Parker.

2.2 Le champ magnétique interplanétaire

Le vent solaire est un plasma très peu résistif et entraîne donc avec lui (voir chapitre I) le champ magnétique généré par les mouvements convectifs turbulents (Tobias 2002 [195]) au sein du Soleil. C'est ce champ magnétique d'origine solaire qui domine celui du milieu interplanétaire. Ce champ varie sur un cycle d'approximativement 11 ans pendant lequel il passe d'une configuration bipolaire à une structure complexe et multipolaire appelée maximum solaire. C'est à ce moment du cycle que l'on observe le plus de taches solaires. La phase dipolaire est appelée minimum solaire à cause de l'absence de tache solaire. L'axe du dipôle s'inverse à chaque minimum solaire de sorte que le temps pris par le champ magnétique pour retrouver une configuration magnétique donnée est d'approximativement 22 ans.

Durant le minimum solaire, les lignes de champ magnétique proches de l'équateur ne s'étendent pas au-delà de quelques rayons solaires et forment des boucles fermées sur la "surface" du Soleil. Au niveau des pôles, les lignes de champs magnétiques sont ouvertes vers l'espace interplanétaire. Puisque les particules suivent les lignes de champs, elles s'échappent au niveau des pôles et reste piégées à l'équateur. Le vent solaire au fur et à mesure qu'il s'éloigne du Soleil, incurve sa trajectoire vers la zone équatoriale de manière à équilibrer le déficit de pression de cette région. Il emporte avec lui le champ magnétique qui après quelques rayons solaires devient quasiment radial (voir Fig. II.8). Le vent solaire

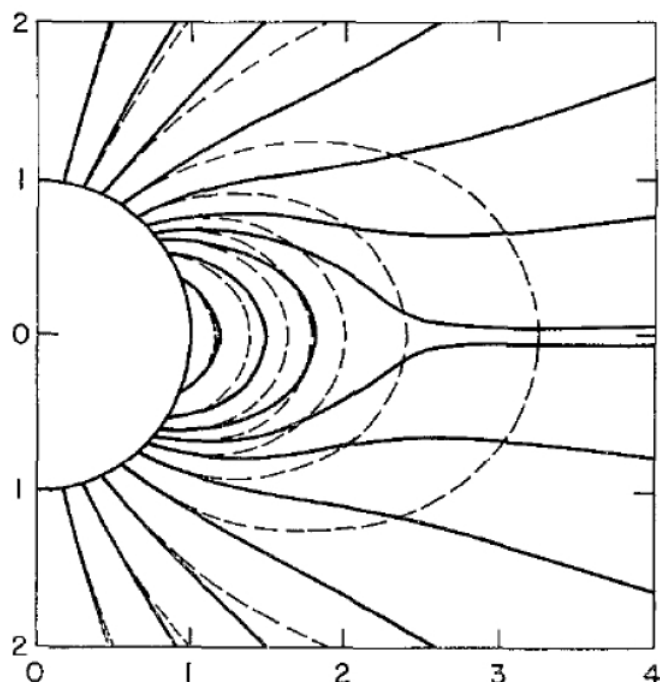


Figure II.8 – Modèle du champ magnétique près de la surface du Soleil. Près de la surface le champ est dipolaire, puis devient quasiment radial à quelques rayons solaires à cause du vent solaire. Graphique tiré de Pneuman et Kopp (1971 [6]).

devient alors super-Alfvénique.

Au maximum solaire, le champ n'est pas dipolaire mais un effet similaire a lieu. On observe des lignes de champs ouvertes et fermées à toutes les latitudes, mais le vent solaire finit toujours au bout de quelques rayons solaires à vaincre la force magnétique et à entraîner les lignes de champs avec lui. La combinaison de ce mouvement radial des particules et de la rotation du Soleil crée une spirale d'Archimède conformément aux prédictions de Parker (1958 [161]).

2.3 Quelques propriétés du vent solaire

Le vent solaire est un plasma ténu constitué principalement d'hydrogène ($\approx 96\%$), d'hélium ($\approx 4\%$) et d'une petite fraction d'éléments plus lourds comme l'oxygène, la silice ou le fer (Bame et al. 1975 [33]). Il est généralement classé en deux catégories : le vent solaire rapide avec une vitesse moyenne entre 600 et $800 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et le vent lent qui souffle entre 300 et $400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. La source exacte des deux types de vent solaire n'est pas clairement identifiée, mais le vent solaire rapide semble émaner des trous coronaux (régions d'où proviennent les lignes ouvertes du champ magnétique) tandis que le vent lent provient des frontières entre les régions ouvertes et fermées (McComas et al. 2000 [130]). Les paramètres typiques du vent solaire mesurés par le satellite Helios 2 à une

unité astronomique sont donnés dans le tableau II.1.

Les deux types de vent sont à la fois super-sonique et super-Alfvénique conformément au modèle de Parker. La longueur de Debye et de quelques mètres, la fréquence plasma est de quelques centaines de kHz et le nombre de particules dans la sphère de Debye est suffisamment grand pour que le vent solaire soit considéré comme un plasma.

Paramètres	Vent lent	Vent rapide
Densité particulaire	$\sim 15 \text{ cm}^{-3}$	$\sim 4 \text{ cm}^{-3}$
Vitesse moyenne	$\sim 350 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$\sim 600 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Température des protons	$\sim 5 \cdot 10^4 \text{ K}$	$\sim 2 \cdot 10^5 \text{ K}$
Température des électrons	$\sim 2 \cdot 10^5 \text{ K}$	$\sim 1 \cdot 10^5 \text{ K}$
Champ magnétique	$\sim 6 \text{ nT}$	$\sim 6 \text{ nT}$
Vitesse d'Alfvén	$\sim 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$\sim 60 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse du son ionique	$\sim 60 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$\sim 60 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse thermique des protons	$\sim 35 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$\sim 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse thermique des électrons	$\sim 3000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	$2000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Fréquence cyclotron ionique	$\sim 0.1 \text{ Hz}$	$\sim 0.1 \text{ Hz}$
Fréquence cyclotron électronique	$\sim 2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$	$\sim 2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$
Fréquence plasma	$\sim 2 \cdot 10^5 \text{ Hz}$	$\sim 1 \cdot 10^5 \text{ Hz}$
Fréquence de collision protons-protons	$\sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}$	$\sim 1 \cdot 10^{-7} \text{ Hz}$
Longueur de Debye	$\sim 4 \text{ m}$	$\sim 15 \text{ m}$
Rayon de Larmor ionique	$\sim 130 \text{ km}$	$\sim 260 \text{ km}$
Rayon de Larmor électronique	$\sim 2 \text{ km}$	$\sim 1.3 \text{ km}$
Libre parcours moyens des protons	$\sim 1.2 R_{\odot}$	$\sim 40 R_{\odot}$

Tableau II.1 – Paramètres typiques du vent solaire mesurés par Helios 2 à une unité astronomique. Données tirées de Bruno et Carbone 2005 [21].

Comme on peut le voir dans le tableau II.1, la moyenne de la fréquence de collision proton-proton est faible. Le libre parcours moyen est de l'ordre de la distance du Soleil à la Terre. Cela implique que les fonctions de distribution peuvent être non Maxwelliennes et rend la description de ce plasma pour le moins délicate (voir chapitre I). Mais cela n'est pas toujours vrai et il a été observé que les particules de certaines régions du vent solaire lent subissent suffisamment de collisions pour isotropiser les fonctions de distributions (Kasper et al. 2008 [110]).

La vitesse du son est comparable à la vitesse d'Alfvén ce qui implique que β (rapport entre la pression cinétique et magnétique) est de l'ordre de l'unité. La température des ions et des électrons est comparable ce qui rend leur vitesse thermique très différente. On s'attend donc à ce que les effets cinétiques agissant sur les deux populations de particules

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

aient lieu à des échelles spatiales et temporelles très différentes.

Après avoir quitté le Soleil, le vent solaire ne rencontre pas dans sa course de source évidente d'énergie ni de dissipation. Naïvement nous pourrions donc penser que sa température décroît de manière adiabatique. Dans ce cas, on peut facilement évaluer la dépendance de la température avec la distance au Soleil. Considérons pour ce faire une coquille sphérique de plasma de vent solaire qui s'expand à travers l'espace interplanétaire sans source ni dissipation d'énergie. Les lois de la thermodynamique nous enseignent que :

$$\begin{aligned} T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_2^{\gamma-1}, \\ T_1 (4\pi r_1^2 dr)^{\gamma-1} &= T_2 (4\pi r_2^2 dr)^{\gamma-1}, \\ T_2 &= T_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

avec T et V , respectivement, la température et le volume de la coquille de plasma à la position 1 et 2. En considérant une constante adiabatique $\gamma = -5/3$, on s'attend donc à ce que la température chute comme $T \propto r^{-4/3}$. Or les données obtenues grâce à la sonde Voyager prouvent que c'est loin d'être le cas (voir Fig. II.9). Il existe donc un processus de chauffage interne au sein du vent solaire. La turbulence est une des causes les plus probables pour expliquer ce chauffage.

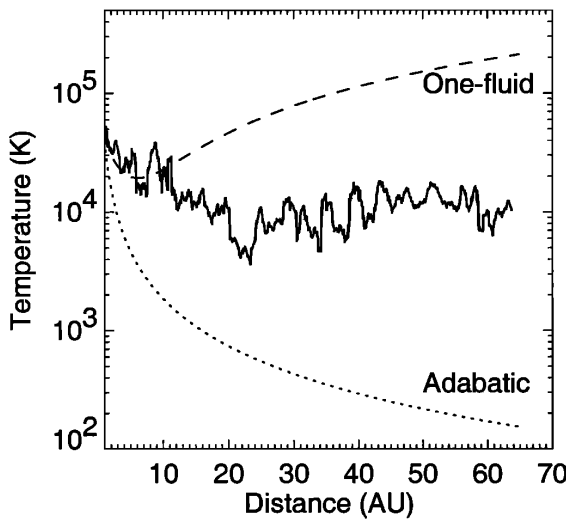


Figure II.9 – Profil de température protonique mesuré grâce à la sonde Voyager. Figure tirée de Wang et Richardson 2001 [7].

3 Turbulence dans le vent solaire

Le vent solaire constitue un laboratoire naturel et unique pour étudier la turbulence dans les plasmas. Sa relative proximité avec la Terre permet des mesures *in situ* qui font défaut à l'astrophysique lointaine et les échelles des phénomènes sont telles que les satellites constituent des sondes extrêmement petites et peu perturbatrices qui n'ont pas d'équivalent dans les plasmas de laboratoire. Grâce à la grande diversité des conditions physiques rencontrées et aux succès de missions spatiales comme CLUSTER, le vent solaire est devenu une sorte de soufflerie géante permettant aux physiciens de confronter leurs théories à l'expérience.

3.1 Structures aux grandes échelles : les origines de la turbulence

S'il existe des jets de plasmas rapides et lents à une même latitude mais à des longitudes différentes, il se forme ce que l'on appelle une *co-rotating interaction regions (CIRs)*. Cela a lieu quand un courant rapide rattrape ou s'éloigne d'un courant lent à cause de la rotation du Soleil. Cet effet est illustré sur la figure II.10. Dans le premier cas, cela engendre une zone de compression et donc une augmentation de la densité, de la température et de la pression magnétique. À l'inverse, dans le second cas se forme une zone de raréfaction. Bien sûr le nom CIRs qui leur ait donné provient du fait que ces zones qui sont générées à la surface du Soleil tournent avec celui-ci. Ces régions sont stables sur plusieurs rotations solaires et induisent donc des signatures typiques d'une période d'approximativement 27 jours dans les données *in situ* (Neugebauer et Snyder 1966 [156]).

Quand le vent rapide rattrape le vent lent le gradient de densité devient important et des chocs se forment. Les chocs ne sont pas les seuls responsables des nombreuses discontinuités observées (Tsurutani et Ho 1999 [196]) dans le vent solaire. De nombreux scénarios ont été proposés pour expliquer la formation des discontinuités parmi lesquels : la formation de nappes de courant instable, de structures filamentaires ou le raidissement brutale de front d'ondes d'Alfvén. Ces discontinuités contribuent fortement au développement de la turbulence dans le vent solaire (Greco et al. 2009 [88]).

3.2 Évidences expérimentales

Les premières mesures du spectre d'énergie magnétique du vent solaire ont été réalisées par les sondes Mariner et Pioneer à la fin des années soixante (Siscoe et al. 1968 [180] ;

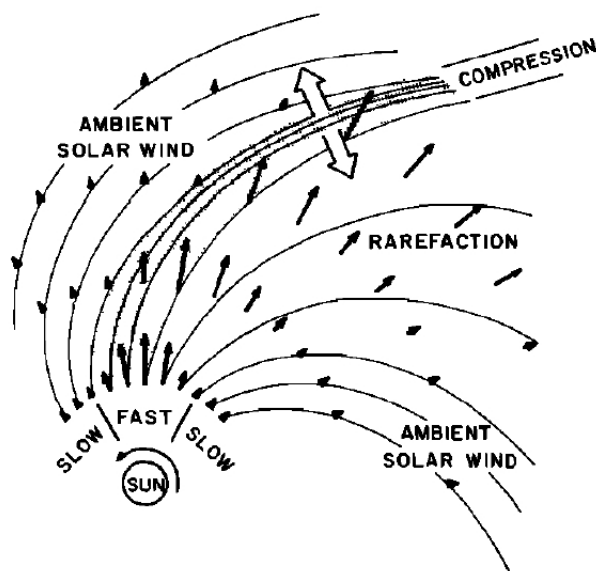


Figure II.10 – Des vents solaires rapide et lent originaires d'une même latitude provoquent des zones de compression et de raréfaction à cause de la rotation du Soleil. Schéma tiré de Pizzo 1978 [8].

Coleman 1968 [59] ; Sari et Ness 1969 [175]). En observant une loi de puissance sur une très grande gamme d'échelles, les chercheurs en ont tout de suite déduit que le vent solaire était extrêmement turbulent. Les premières mesures de l'indice spectral variaient entre -1 et -2 et comprenaient donc la valeur $-5/3$ prédite par Kolmogorov (1941 [144],[145]) pour les fluides neutres. Pourtant, la présence d'un spectre en loi de puissance n'implique pas nécessairement la présence d'une cascade turbulente au sein du vent solaire. Les spectres alors observés, pouvaient aussi bien être la signature d'une turbulence générée au niveau du Soleil, puis passivement advectée jusqu'aux satellites. Il a fallu attendre les travaux de Bavassano et al. 1982 [36] pour lever le doute à ce sujet. Bavassano montra en effet que la brisure spectrale observée aux grandes échelles de la zone inertielle se déplaçait avec la distance héliocentrique. Cela implique donc que les spectres observés ne sont pas une simple rémanence de la dynamique au niveau du Soleil mais bien la conséquence d'une cascade turbulente active.

Un autre indice de la présence d'une cascade active provient de mesures de températures. Les données de la sonde Voyager 2 ont permis de montrer que la température des protons variait avec la distance radiale comme une loi de puissance d'exposant compris entre -0.5 et -0.7 (Gazis et Lazarus 1982 [82] ; Richardson et al. 1995 [22]), beaucoup plus petit que celui obtenu à l'aide d'une hypothèse d'extension sphérique et adiabatique (voir section 2.3). Cela implique donc qu'il existe au sein du vent solaire un chauffage interne dont l'origine est vraisemblablement turbulente (Carbone et al. 2009 [50]).

3.3 Turbulence Alfvénique

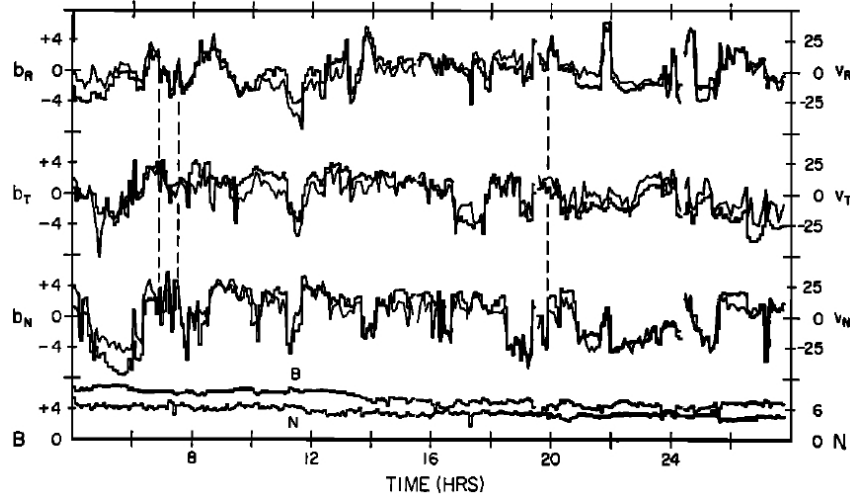


Figure II.11 – Les corrélations entre vitesse et champ magnétique dans le vent solaire suggèrent que les fluctuations sont Alfvéniques. Les trois paires de courbes du haut sont les composantes de la vitesse et du champ magnétique, la paire du bas représente la densité et l’intensité du champ magnétique. Image tirée de Belcher et Davis 1971 [9].

En 1971, Belcher et Davis observent que le champ magnétique et le champ de vitesse sont fortement corrélés comme c’est le cas pour les ondes d’Alfvén (Figure II.11). Ils remarquent également que la composante des fluctuations parallèle au champ magnétique a beaucoup moins d’énergie que les autres composantes. C’est aussi ce que l’on attend des ondes d’Alfvén de cisaillement qui sont incompressibles et qui n’ont pas de composante parallèle au champ magnétique. Ces observations ont par la suite été confirmées par de nombreux travaux (Bavassano et al. [35] ; Klein et al. 1993 [114] ; Horbury et al. 1995 [99] ; Neugebauer 2004 [136] ; Smith et al 2006b [183]). La vitesse de phase des fluctuations a aussi été mesurée en utilisant le rapport entre le spectre d’énergie électrique et magnétique. Les résultats obtenus sont proches de la vitesse d’Alfvén (Bale et al. 2005 [32] ; Sahraoui et al. 2009 [13]). Une explication probable de la dominance des fluctuations Alfvéniques est que les modes lents et rapides sont fortement amortis par absorption Landau (Barnes 1966 [34]).

Une théorie de la turbulence Alfvénique a été proposée pour la première fois, indépendamment par Iroshnikov (1964 [107]) et Kraichnan (1965 [116]). La théorie décrit une cascade turbulente générée par l’interaction de paquets d’ondes d’Alfvén contra-propageant portés par les lignes de champ magnétique. Cette idée se comprend aisément en ré-écrivant les équations de la MHD en termes de variables d’Elsässer $\mathbf{z}^+$ et $\mathbf{z}^-$ (Elsässer 1950 [69]),

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

définies par $\mathbf{z}^\pm = \mathbf{u} \pm \mathbf{b}$, où $\mathbf{b} = \mathbf{B}/\sqrt{\mu_0\rho}$ est le champ magnétique exprimé en unité d'Alfvén. Les équations deviennent alors,

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\pm}{\partial t} + \mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm = -\nabla P_*, \quad (\text{II.6})$$

avec $P_* = P + B^2/(2\mu_0)$ la pression totale et avec la densité fixée à $\rho = 1$. En séparant les variables en une valeur moyenne et fluctuante,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= V_A \mathbf{z} + \delta \mathbf{b}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{U}_0 + \delta \mathbf{u}, \\ \delta \mathbf{z}^\pm &= \delta \mathbf{u} \pm \delta \mathbf{b}, \end{aligned}$$

on obtient en se plaçant dans un repère où la vitesse moyenne est nulle $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$,

$$\frac{\partial \delta \mathbf{z}^\pm}{\partial t} \mp V_A \frac{\partial \delta \mathbf{z}^\pm}{\partial z} + \delta \mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \delta \mathbf{z}^\pm = -\nabla P_*. \quad (\text{II.7})$$

On voit immédiatement grâce à cette reformulation des équations de la MHD que les interactions non-linéaires ont lieu entre $\delta \mathbf{z}^+$ et $\delta \mathbf{z}^-$, c'est-à-dire entre paquets d'ondes qui se propagent en sens opposés le long du champ magnétique. Si $\delta \mathbf{z}^+$ ou $\delta \mathbf{z}^- = 0$, les termes non-linéaires s'annulent et la solution décrit une fluctuation quelconque se propageant à la vitesse d'Alfvén le long du champ magnétique.

La phénoménologie d'Iroshnikov-Kraichnan est semblable à celle de Kolmogorov à ceci près que l'on a maintenant deux temps caractéristiques qui décrivent le système : le temps d'Alfvén $\tau_A = l/V_A$ et le temps non-linéaire d'interaction $\tau_{nl} = l/\delta u_l$. Une analyse dimensionnelle ne permet donc pas de déterminer de manière univoque le taux de transferts de l'énergie et de nouvelles hypothèses physiques doivent être introduites.

L'hypothèse de Iroshnikov-Kraichnan consiste à dire que les interactions non-linéaires entre paquets d'ondes contra-propageants sont faibles et qu'il en faut donc beaucoup pour altérer significativement les fluctuations. Cela implique que $\tau_A \ll \tau_{nl}$. Chacune de ces interactions augmente ou diminue l'amplitude de ces fluctuations suivant un processus de type markovien de sorte qu'elles se combinent à la manière d'une marche aléatoire. Cela signifie qu'après N interactions, les amplitudes ont changé de $\sqrt{N}$ fois le changement induit par chacune des interactions. Puisqu'elles ne peuvent avoir lieu que pendant la durée d'une collision, la modification induite par une interaction non-linéaire est proportionnelle à $(\delta u_l^2/l) \tau_A = \delta u_l \tau_A / \tau_{nl}$. Le nombre d'interactions en un temps t étant $N = t/\tau_A$,

le changement total en amplitude est donc de $\delta u_l \frac{\tau_A}{\tau_{nl}} \sqrt{\frac{t}{\tau_A}}$. En toute généralité, on peut définir le taux de transfert d'énergie τ_l comme étant le temps nécessaire à un changement d'amplitude relatif de 1, et on a donc $\frac{\tau_A}{\tau_{nl}} \sqrt{\frac{\tau_l}{\tau_A}} = 1$ de sorte que le taux de transfert d'énergie devient,

$$\tau_l = \frac{\tau_{nl}^2}{\tau_A} = \frac{(l/\delta u_l)^2}{l/v_A} = \frac{lv_A}{\delta u_l^2}.$$

On a donc,

$$\frac{\delta u_l^2}{\tau_l} = \frac{\delta u_l^4}{lv_A} \sim \epsilon \Rightarrow E(k) \sim (\epsilon v_A)^{1/2} k^{-3/2}.$$

Puisque les ondes d'Alfvén ont des champs de vitesse et magnétique corrélés ou anti-corrélés, la théorie prédit une équi-répartition de l'énergie entre les deux ainsi qu'une même loi d'échelle.

Cette élégante théorie n'est cependant que partiellement validée par l'expérience⁶. Le rapport d'Alfvén défini comme $r_A = E^u(k)/E^b(k)$ varie dans le vent solaire rapide entre des valeurs proches de l'unité à $0.3R_\odot$ et des valeurs autour de 0.5 à $1R_\odot$, et reste à une valeur à peu près constante de 0.5 dans le vent lent (Tu et al. 1989 [197]; Marsch et Tu 1990 [150]; Goldstein et al. 1995 [84]; Bruno et al. 2007 [48]).

De plus, les champs de vitesse et magnétique à $1R_\odot$ ne semblent pas avoir le même indice spectral. Les mesures du champ magnétique tendent en faveur d'un spectre Kolmogorovien en $-5/3$ (Bavassano et al. 1982b [36]; Matthaeus et Goldstein 1982 [127]; Ruzmaikin et al. 1993 [171]; Leamon et al. 1998b [119]; Smith et al. 2006a [182]; Podesta et al. 2007 [164]; Tessein et al. 2009 [194]) alors que les spectres d'énergie cinétique sont proches de la valeur prédite par Iroshnikov et Kraichnan (Podesta et al. 2007 [164]; Tessein et al. 2009 [194]; Salem et al. 2009 [174]).

Enfin, les mesures du champ électrique perpendiculaire donnent un indice spectral à $1R_\odot$ proche de $-5/3$ (Bale et al. 2005 [32]; Sahraoui et al. 2009 [13]) et donc proche de celui du champ magnétique. Or, en MHD idéale la vitesse perpendiculaire est celle de dérive croisée $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$, et on s'attend donc à ce que le champ de vitesse et le champ électrique suivent la même loi spectrale.

Cette différence au niveau des indices spectraux magnétique et cinétique reste encore aujourd'hui l'un des problèmes majeurs non résolus dans le domaine de la turbulence du vent solaire.

6. " The tragedy of science... the slaying of a beautiful hypothesis by an ugly fact." (T.H Huxley)

3.4 Turbulence anisotrope

La phénoménologie d'Iroshnikov-Kraichnan introduit un champ magnétique moyen le long duquel se propage des perturbations Alfvéniques, mais contrairement à ce que l'on pourrait penser cela n'implique pas que la turbulence soit anisotrope à toutes les échelles. En fait, une fluctuation quelconque de champ magnétique dans la zone inertielle joue le rôle d'un champ moyen pour une fluctuation à une échelle spatiale et temporelle beaucoup plus petite qui est elle-même considérée comme un champ moyen par une fluctuation encore plus petite et ainsi de suite. La phénoménologie d'Iroshnikov-Kraichnan s'applique donc à un système turbulent statistiquement isotrope.

En 1981, Montgomery et Turner ont suggéré que la présence d'un champ magnétique moyen à grande échelle induit une anisotropie fondamentale dans les propriétés de la turbulence. Shebalin et al. (1983 [178]) ont par la suite proposé un argument théorique basé sur les interactions résonantes triadiques pour rendre compte de ce phénomène.

Si deux ondes de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$ interagissent entre elles pour former une troisième onde $\mathbf{k}_3$, on a ⁷ :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

où ω_i est la fréquence de l'onde i . Puisque k_1 et k_2 sont des ondes d'Alfvén contre-propageantes, on a $\omega_1 = V_A k_{\parallel 1}$ et $\omega_2 = -V_A k_{\parallel 2}$. En substituant ces relations dans l'équation II.8 et en tenant compte du fait que k_3 peut se propager dans n'importe laquelle des deux directions, on obtient en projetant sur la direction parallèle,

$$\begin{cases} k_{\parallel 1} + k_{\parallel 2} = k_{\parallel 3}, \\ k_{\parallel 1} - k_{\parallel 2} = \pm k_{\parallel 3}. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Ces équations sont satisfaites si et seulement si l'une des deux ondes qui entre en collision vérifie $k_{\parallel} = 0$, de sorte que l'autre a un $k_{\parallel}$ inchangé après l'interaction. Cela suggère donc qu'une turbulence d'ondes d'Alfvén ne peut avoir lieu qu'en $k_{\perp}$ et qu'elle génère donc une anisotropie telle que $k_{\perp} > k_{\parallel}$.

Il faut garder à l'esprit que ces arguments sont basés sur une turbulence dites faibles c'est-à-dire que le couplage non-linéaire est peu important ⁸ ce qui n'est probablement pas le cas du vent solaire. Il est cependant possible de s'inspirer de ce résultat pour modifier la

7. Ces relations proviennent de la nature quadratiques des termes non-linéaires qui se traduit dans l'espace spectral par une convolution impliquant des triades de vecteurs d'onde.

8. Si le couplage non-linéaire était important alors bien sûr il n'y aurait pas lieu de parler d'ondes puisque par construction, une onde est un objet physique linéaire.

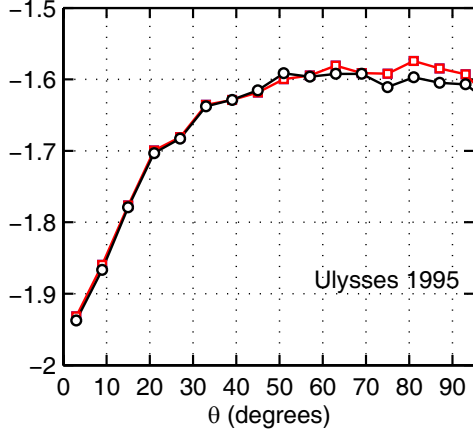


Figure II.12 – Mesures de l'anisotropie de l'indice spectral dans le vent solaire. θ représente l'angle entre $\mathbf{B}_0$ et la direction du vent. Image tirée de Podesta (2009 [10]).

phénoménologie de Iroshnikov et Kraichnan.

Les arguments que nous venons de développer suggèrent d'utiliser deux échelles spatiales différentes dans la direction parallèle $l_{\parallel}$ et perpendiculaire $l_{\perp}$. Les fluctuations d'Alfvén se déplaçant le long du champ magnétique, on a $\tau_A = l_{\parallel}/V_A$. Le temps caractéristique non-linéaire dans les équations de la MHD provient du gradient spatial dans la direction de la fluctuation qui, puisqu'elle est Alfvénique, est perpendiculaire. On a ainsi $\tau_{nl} = l_{\perp}/\delta u_l$. Puisqu'il n'y a pas de cascade dans la direction parallèle, l'échelle parallèle peut être fixée $l_{\parallel} = l_{\parallel 0}$ et obtient en suivant les arguments d'Iroshnikov Kraichnan la relation $\delta u_l \sim (\epsilon V_A)^{1/4} l_{\parallel 0}^{-1/4} l_{\perp}^{1/2}$. Ainsi, le spectre d'énergie vérifie⁹,

$$E(k_{\perp}) \sim (\epsilon k_{\parallel 0} V_A)^{1/2} k_{\perp}^{-2}.$$

Au fur et à mesure que l'énergie cascade vers les petites échelles, l'hypothèse d'interactions faibles ($\tau_A \ll \tau_{nl}$) commence à ne plus être valide. En effet, le rapport entre les deux temps caractéristiques est,

$$\chi = \frac{\tau_A}{\tau_{nl}} = \frac{l_{\parallel 0}/V_A}{l_{\perp}/\delta u_l} \sim \frac{\epsilon^{1/4} k_{\perp}^{1/2}}{(k_{\parallel 0} V_A)^{3/4}},$$

et augmente donc avec $k_{\perp}$.

En 1995, Goldreich et Shridhar [83] proposent une théorie de turbulence forte basée sur des travaux antérieurs de Higdon (1984 [94]). L'idée de base est que les temps caractéristiques,

9. Ce spectre en $k_{\perp}^{-2}$ peut également être obtenu de manière rigoureuse (Galtier et al. 2000 [73]).

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

τ_A et τ_{nl} deviennent égaux et le restent, maintenant la cascade dans un régime appelé *balance critique*. Puisque la turbulence n'est plus faible, $l_{\parallel}$ n'est plus fixé, mais comme l'on a à notre disposition une équation supplémentaire pour décrire le système, on peut facilement exprimer $l_{\parallel}$ en fonction des autres paramètres. On obtient,

$$l_{\parallel} \sim V_A \epsilon^{-1/3} l_{\perp}^{2/3}. \quad (\text{II.10})$$

L'anisotropie de la turbulence est donc de plus en plus marquée à mesure que l'échelle

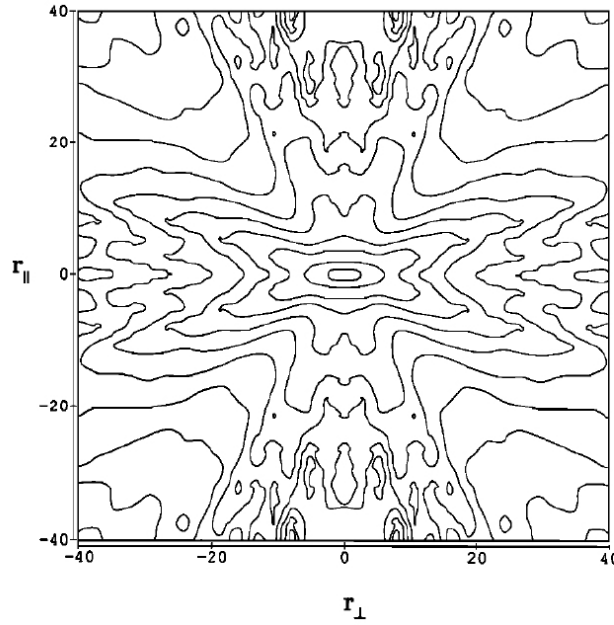


Figure II.13 – Iso-contour des corrélations de champ magnétique dans le vent solaire en fonction des échelles parallèle et perpendiculaire au champ magnétique. Une unité sur les axes correspond à 10^5 km. Graphique tiré de Matthaeus et al. (1990 [11]).

spatiale diminue. Physiquement cela se conçoit bien car les petites structures de la turbulence ont un contenu énergétique plus faible que les grandes et subissent donc plus fortement l'effet du champ magnétique présent aux grandes échelles. Les structures turbulentes sont donc d'autant plus allongées le long du champ magnétique qu'elles sont petites. C'est là une différence fondamentale avec la turbulence des fluides neutres pour laquelle n'importe quelle vitesse constante aux grandes échelles peut être rendue nulle par une simple transformation galiléenne.

Puisque la cascade est anisotrope le spectre d'énergie est fonction de $k_{\parallel}$ et $k_{\perp}$. Goldreich et Sridhar ont montré que le spectre d'énergie d'une turbulence critique s'exprime comme,

$$E(k_{\perp}, k_{\parallel}) \sim \frac{v_A^2}{k_{\perp}^{10/3} L^{1/3}} g\left(\frac{k_{\parallel} L^{1/3}}{k_{\perp}^{2/3}}\right), \quad (\text{II.11})$$

où L est l'échelle (isotrope) d'injection de l'énergie. La fonction g vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \sim 1$ et relie l'énergie parallèle à l'énergie perpendiculaire. Sa forme exacte n'est pas spécifiée par la théorie.

L'équation II.11 peut être intégrée afin de déterminer les spectres 1D dans les directions parallèle et perpendiculaire. On obtient $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-5/3}$ et $E(k_{\parallel}) \sim k_{\parallel}^{-2}$.

L'anisotropie de la turbulence dans le vent solaire a été évaluée pour la première fois par Crooker et al. [61] en 1982 à partir des sondes ISEE¹⁰ 1 et 3. Grâce à ces deux satellites Crooker et al. ont pu mesurer des corrélations en deux points et mettre en évidence la présence de structures allongées dans le vent solaire. Matthaeus et al. (1990 [11]) ont étendu ces travaux en mesurant la fonction de corrélation¹¹ en fonction des échelles parallèle et perpendiculaire. Ces mesures d'anisotropie ont par la suite été confirmés par de nombreuses études (Dasso et al. 2005 [63] ; Weygang et al. 2009 [201] ; Osman et Horbury 2007 [160] ; Podesta 2009 [10]).

Le fait que le vent solaire soit anisotrope avec $k_{\perp} > k_{\parallel}$ implique que la théorie d'Iroshnikov (1964 [107]) et Kraichnan (1965[116]) n'est pas appropriée, mais pour tester celle de Goldreich et Sridhar (1995 [83]) il faut pouvoir mesurer l'anisotropie de l'indice spectral ce qui est loin d'être trivial (Cho et Vishniac 2000 [53]). Cela a été fait pour la première fois par Horbury et al en 2008 [100] à l'aide d'une analyse en ondelette.

Les résultats obtenus sont en accord avec la prédiction de balance critique de Goldreich et Sridhar et ont été confirmés par d'autres travaux¹² (Podesta 2009 [10] ; Luo et Wu 2010 [149] ; Wicks et al. 2010 [202]). La figure II.12 montre les résultats obtenus par Podesta 2009 [10] à l'aide du magnétomètre de la sonde Ulysses.

4 Turbulence non-équilibrée et alignement dynamique

Les théories de turbulence MHD que nous avons présenté jusqu'à présent présupposent que la cascade turbulente est " équilibrée ", c'est-à-dire, que les flux de fluctuations Alfvéniques se déplaçant dans les deux directions du champ magnétique moyen ($\delta \mathbf{z}^+$ et

10. International Sun-Earth Explorer.

11. $\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle$.

12. Il existe de légères différences au niveau de l'indice spectral perpendiculaire qui, en fonction des études varie entre $-5/3$ et $-3/2$. Nous reviendrons par la suite sur cette question.

$\delta \mathbf{z}^-$) sont égaux. Or ce n'est pas nécessairement le cas dans le vent solaire. Belcher et Davis (1971 [9]) ont montré que le vent solaire rapide est constitué principalement de perturbations Alfvéniques qui se propagent en s'éloignant du Soleil.

4.1 Alignement dynamique et hélicité croisée

Afin de quantifier le degré de déséquilibre de la turbulence, il est utile de construire une grandeur physique appelée hélicité croisée normalisée $\sigma_C = 2H^C/E$, où $H^C = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \rangle$ est l'hélicité croisée et $E = 1/2 \langle \mathbf{u}^2 + \mathbf{b}^2 \rangle$ l'énergie totale. Le choix de cette grandeur physique se comprend facilement si on l'exprime en terme d'énergie d'Elsässer,

$$\sigma_C = \frac{E^+ - E^-}{E^+ + E^-}.$$

La valeur maximale 1 correspond à une propagation Alfvénique dans la direction anti-parallèle et la valeur minimale -1 correspond à une propagation parallèle.

Il a été prédit que dans le cas de la turbulence MHD en déclin (i.e. sans forçage), $|\sigma_C|$ doit tendre vers 1 avec le temps (Dobrowolny et al. 1980 [66]). Cela s'explique par le fait que contrairement à l'énergie, l'hélicité croisée est une grandeur pouvant prendre des valeurs positives et négatives. On peut montrer qu'elle vérifie,

$$\frac{\partial \langle H^c \rangle}{\partial t} = -(\nu + \eta)\mu_0 \langle \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (\text{II.12})$$

avec $\mathbf{j}$ le courant électrique et $\boldsymbol{\omega}$ la vorticité. Comme $\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\omega}$ est une grandeur signée l'expression II.12 montre que les termes dissipatifs peuvent être à l'origine d'une production d'hélicité croisée, il suffit pour cela que $\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\omega}$ soit négatif. Par conséquent on peut s'attendre à ce que l'hélicité croisée décroisse moins vite que l'énergie ce qui implique que $|\sigma_C|$ tende vers 1. Cet effet est appelé alignement dynamique car la situation $\sigma_C = \pm 1$ correspond à un alignement parfait entre les fluctuations de champ magnétique et de vitesse. Une des variables d'Elsässer est alors nulle et il n'y a plus d'interaction non-linéaire (voir équation II.7), la cascade turbulente est alors complètement supprimée.

L'alignement dynamique a été observé dans plusieurs simulations numériques de turbulence MHD en déclin (Grappin et al 1982 [87]; Matthaeus et al. 1983 [126]; Pouquet et al. 1986 [139]).

De manière générale, le vent solaire tend à avoir une valeur importante de σ_C dans la zone inertielle (entre ~ 0.5 et ~ 0.9), alors que le vent lent est équilibré en moyenne mais

aussi plus variable (Tu et al. 1989, [197], 1990 [198]; Marsch et Tu 1990 [150]; Goldstein et al. 1995 [84]; Bruno et al. 2007 [48]; Wicks et al. 2010 [202]). Dans les deux types de vent, $|\sigma_C|$ décroît avec la distance héliocentrique, ce qui est en contradiction avec les prédictions d'alignement dynamique. Matthaeus et al. (2004 [152]) ont proposé que cette décroissance était due à la présence dans le vent solaire d'ions provenant de l'extérieure de l'héliosphère (pick-up ions) et à des phénomènes de cisaillements à grande échelle durant l'expansion du vent solaire. Bruno et al. (2007 [48]) ont quant à eux suggéré que la décroissance de l'hélicité croisée normalisée était due à des "nuages" magnétiques advectés par le vent solaire et dont le nombre augmente avec la distance héliocentrique.

4.2 Phénoménologie de Boldyrev

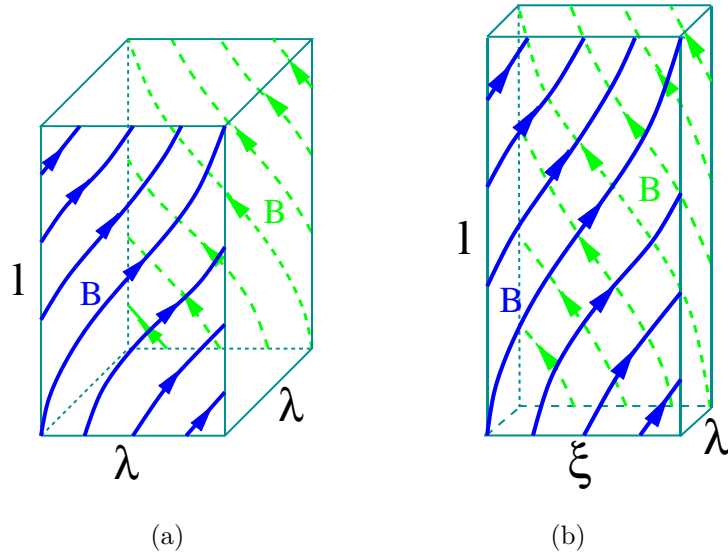


Figure II.14 – (a) : Structure turbulente selon la phénoménologie de Goldreich-Sridhar. Les dimensions λ des structures sont identiques dans toutes les directions perpendiculaires. La dimension dans la direction parallèle vérifie $l \propto \lambda^{2/3}$. Au fur et à mesure que l'énergie cascade vers les petites échelles, $\lambda \rightarrow 0$, les structures prennent la forme d'un filament.

(b) : Structure turbulente selon la phénoménologie de Boldyrev. Les dimensions des structures dans les directions perpendiculaires sont λ et $\xi \propto \lambda^{3/4}$, dans la direction parallèle $l \propto \lambda^{1/2}$. Au fur et à mesure que l'énergie cascade vers les petites échelles, $\lambda \rightarrow 0$, les structures prennent la forme d'une nappe de courant. Figures tirées de Boldyrev 2006 [12].

Plus récemment, Boldyrev (2006 [12]) a proposé une théorie phénoménologique de turbulence MHD forcée en équilibre critique, pour laquelle le degré d'alignement dépend de l'échelle considérée et altère donc l'indice spectral. L'hypothèse de base est que dans le cas d'une cascade turbulente forcée, la tendance à l'alignement dynamique est préservée.

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

L'alignement parfait annule les termes non-linéaires responsables du flux d'énergie et ne peut donc pas être atteint dans le cas où de l'énergie est injectée dans le système. L'hypothèse de Boldyrev consiste à dire qu'à chaque échelle l'alignement des fluctuations atteint le niveau maximal compatible avec un flux d'énergie constant.

En prenant en compte la réduction des non-linéarités due à l'angle θ_λ entre les fluctuations $\delta\mathbf{v}_\lambda$ et $\pm\delta\mathbf{b}_\lambda$ dans le plan perpendiculaire au champ magnétique moyen local, le temps non-linéaire devient, $l \sim \lambda/(\delta v_\lambda \theta_\lambda)$. En suivant la phénoménologie de Kolmogorov on obtient alors,

$$\delta v_\lambda \propto (\lambda/\theta_\lambda)^{1/3}.$$

Le déplacement du champ magnétique dans la direction perpendiculaire dû à l'interaction entre les fluctuations contra-propagantes est donné par $\xi \sim \delta v_\lambda l / V_A$ ce qui, en faisant l'hypothèse d'une cascade en équilibre critique, conduit à des structures vérifiant $\lambda/\xi \sim \theta_\lambda$. Contrairement aux structures turbulentes de Goldreich-Sridhar, celles de Boldyrev sont tri-dimensionnellement anisotrope puisque l'on a $l \gg \xi \gg \lambda$ (voir Fig. II.14(b)).

En faisant l'hypothèse que les fluctuations sont auto-similaires, θ_λ doit suivre une loi de puissance de la forme $\theta_\lambda \propto \lambda^\Xi$. Pour déterminer Ξ , Boldyrev (2006) a fait remarquer que les fluctuations doivent tendre à s'aligner également dans la direction parallèle avec l'angle $\tilde{\theta}_\lambda \sim \xi/l \sim \delta v_\lambda / V_A \propto \lambda^{(1-\Xi)/3}$. L'angle d'alignement total $\phi_\lambda \sim \sqrt{\theta_\lambda + \tilde{\theta}_\lambda}$ (voir Fig. II.15) est minimal quand $\theta_\lambda \sim \tilde{\theta}_\lambda$ ce qui détermine la valeur $\Xi = 1/4$.

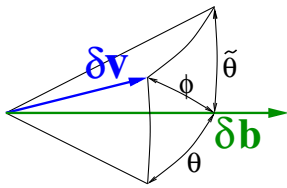


Figure II.15 – Schéma tri-dimensionnel de l'alignement entre les fluctuations de vitesse et de champ magnétique. Figure tirée de Boldyrev 2006 [12].

La théorie de Boldyrev prédit donc que l'angle d'alignement dépend de l'échelle en suivant une loi de puissance,

$$\theta_\lambda \sim \lambda^{1/4},$$

ce qui implique que le spectre d'énergie perpendiculaire vérifie,

$$E(k_\perp) \sim k_\perp^{-3/2}.$$

Les résultats obtenus permettent d'expliquer simultanément les structures anisotrope en forme de nappe de courant (Biskamp et Muller 2000 [43]; Cho et Vishniac 2000 [53]; Milano et al. 2001 [131]; Maron et al. 2001 [124]) et le spectre en $k_\perp^{-3/2}$ observé dans de nombreuses simulations à haute résolution de turbulence MHD (Muller et al. 2003 [133], Muller et Grappin 2005 [134]; Haugen et al. 2004 [92]).

II.5 Au-delà de l'échelle ionique : dissipation ou dispersion ?

Un alignement dépendant de l'échelle a été observé dans des simulations numériques et dans le vent solaire. Mason et al. (2006 [125]) ont mesuré l'indice Ξ dans des simulations numériques forcées de MHD incompressible et ont trouvé un résultat proche de 1/4 quand le champ magnétique était suffisamment fort $B_0 \gtrsim 5$. Podesta et al. (2009 [10]) ont mesuré l'indice Ξ dans le vent solaire en utilisant les données du satellite Wind à 1 UA sur 4 intervalles temporels différents. Les résultats obtenus confirment que θ_λ varie suivant une loi de puissance avec un indice spectral variant entre 0.27 et 0.36.

Au chapitre V nous verrons dans quelles mesures ce phénomène d'alignement entre les champs de vitesse et magnétique peut être étendu quand l'effet Hall est pris en considération et quelles sont les structures qui sont ainsi générées.

5 Au-delà de l'échelle ionique : dissipation ou dispersion ?

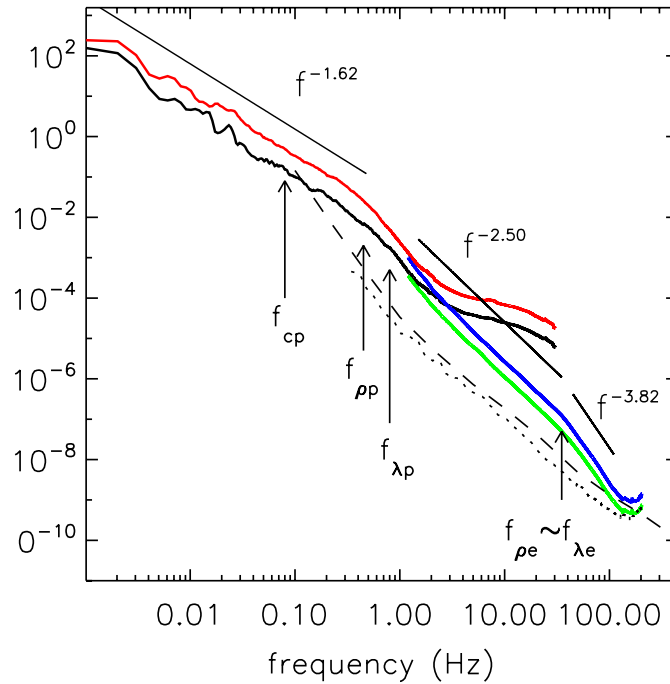


Figure II.16 – Spectres d'énergie magnétique perpendiculaire (rouge/bleu) et parallèle (noir/vert). Deux brisures sont observées aux échelles ionique (~ 0.5 Hz) et électronique (~ 30 Hz). L'incurvation des courbes rouge et noir entre 1 Hz et 30 Hz est due au bruit. Graphique tiré de Sahraoui et al. (2009 [13]).

Un consensus semble donc aujourd'hui se dégager à propos de la nature de la turbu-

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

lence aux échelles MHD du vent solaire. Il s'agirait principalement d'une cascade turbulente Alfvénique dans un régime d'équilibre critique. Au-delà de ces échelles, en revanche, le mystère reste entier.

La grande difficulté provient du fait qu'un plasma possède plusieurs niveaux de description en fonction de l'échelle considérée. Or la turbulence a la propriété fondamentale de les coupler toutes entre elles. Ainsi, au fur et à mesure que la turbulence cascade vers les petites échelles, de nouveaux effets apparaissent car les hypothèses à la base de la MHD tombent une à une.

Nous avons vu au chapitre I que dans un plasma sans collisions la description fluide n'est pas complète. Les moments de tout ordre de la fonction de distribution sont couplés entre eux par un système infini d'équations fluides et il n'existe pas d'équation d'état permettant de tronquer le système. En toute rigueur, il faut donc suivre analytiquement l'évolution complète de la fonction de distribution à l'aide de l'équation de Vlasov ou l'intégrer numériquement à l'aide de simulations de type *Particle in Cell*. Ces méthodes quelles soient analytiques ou numériques, sont extrêmement lourdes et absolument inenvisageables dans un régime turbulent. Étudier la turbulence des petites échelles dans un plasma non collisionnel implique donc de se confronter à un double problème de fermeture. Celui des équations fluides et celui des équations moyennées décrivant les propriétés statistiques à un niveau macroscopique (voir la section 1.3).

Il existe en plus de ces problèmes d'ordre théorique et numérique des difficultés inhérentes aux mesures. Aux petites échelles de la turbulence les instruments sont poussés très proche de leur limite et l'hypothèse de Taylor devient contestable. En effet, les mesures sont faites pour la plupart en un point. Or, les différentes propriétés varient dans le temps et dans l'espace à cause de la vitesse du flot qui emporte le plasma solaire mais également en conséquence d'une dynamique " interne " turbulente. Il existe donc une ambiguïté spatio-temporelle.

L'hypothèse de Taylor consiste à dire que la vitesse du flot est très supérieure aux vitesses caractéristiques des fluctuations turbulentes. Tout ce passe comme si la turbulence était " gelée " et on peut alors facilement passer du spectre temporel au spectre spatial grâce à la relation $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Si les fluctuations turbulentes possèdent une vitesse caractéristique non négligeable devant la vitesse du vent solaire, l'hypothèse de Taylor n'est plus valide. Cette situation critique résultant de la conjugaison de difficultés théoriques et expérimentales tend à encourager au sein de la communauté scientifique la formation de camps distincts.

5.1 Brisure spectrale aux échelles ioniques

À des fréquences autour de 0.5 Hz à 1 UA, le spectre d'énergie magnétique du vent solaire se raidit (Goldstein et al. 1994 [85]; Leamon et al. 1998 [118]) pour former ce qui est traditionnellement appelé la zone de dissipation¹³. De récentes mesures utilisant les données Cluster ont montré que l'indice spectral se situait entre -2.3 et -2.8 à ces échelles (Alexandrova et al. 2008 [29]; Sahraoui et al. 2009 [13]; Kiyani et al. 2009 [143]; Alexandrova et al. 2009 [28]). Des mesures plus anciennes issues de la sonde ACE¹⁴ ont donné des résultats plus dispersés avec un indice de -2.61 ± 0.96 (Smith et al. 2006a [182])¹⁵. À la même échelle, le spectre d'énergie électrique devient moins raide avec un indice de ~ -0.3 (Bale et al. 2005 [32]; Sahraoui et al. 2009 [13]).

L'échelle à laquelle la zone de dissipation commence est proche de l'échelle inertielle ionique qui est égale au rayon de Larmor ionique quand $\beta_i = 1$. Smith et al. (2001 [181]) ont analysé une période pendant laquelle le paramètre β_i était faible, permettant ainsi de séparer significativement ces deux échelles. Ils conclurent que c'était plutôt l'échelle inertielle que le rayon de Larmor qui marquait le début de la zone dissipative.

Une étude plus approfondie a par la suite été menée par Markovskii et al. (2008 [151]) qui examinèrent la corrélation de la brisure avec d'autres paramètres physiques (résonances ions cyclotrons, présence de nappes de courant, vitesse du vent solaire, absorption Landau, etc.). Ils ont trouvé que la corrélation la plus importante avait lieu pour une combinaison d'échelles et pas à une échelle particulière, ce qui suggère que le phénomène à l'œuvre est de nature non-linéaire. Ils ont également déduit de cette étude que l'amortissement Landau linéaire était le mécanisme le moins probable.

Plus récemment, en prenant en compte la nature bi-dimensionnelle des fluctuations, Bourouaine et al. (2012 [45]) ont conclu que la brisure spectrale se situait plutôt à l'échelle inertielle des protons.

Toutes ces études sont d'une importance cruciale car la connaissance précise de l'échelle caractéristique associée au raidissement spectral permet de discriminer parmi les différentes théories proposées, celle qui est la plus proche de la réalité physique.

Au-delà des échelles électroniques le spectre se raidit à nouveau. Sahraoui et al. (2009 [13]) ont trouvé un indice spectral ~ -4 et ont argué qu'il s'agissait là de l'échelle dissipative ultime dans le vent solaire (voir figure II.16). Alexandrova et al. (2009 [28]) ont eux

13. Cette appellation " historique " comme nous allons le voir par la suite, ne porte pas forcément bien son nom.

14. Advanced Composition Explorer.

15. Dans la zone inertielle la même étude donne -1.63 ± 0.14 .

aussi observé un changement dans le spectre proche de l'échelle de giration des électrons, mais d'après leur étude il s'agirait d'une décroissance exponentielle et pas d'une loi de puissance.

Au chapitre VI nous présenterons un modèle théorique qui permet d'expliquer l'existence d'une brisure spectrale au niveau de l'échelle inertielle électronique.

5.2 Phénoménologie et controverses

5.2.1 Turbulence wistler (forte)

En utilisant un modèle de transferts d'énergie par diffusion turbulente dans l'espace spectral combiné avec des prédictions théoriques de dissipation issue de la théorie de Vlasov linéaire, Li et al. (2001 [121]) ont déduit que le raidissement spectral observé ne pouvait pas être expliqué par des processus cinétiques d'interaction ondes-particules. D'après leur étude, le taux d'amortissement induit par ces processus augmente si rapidement avec k qu'il devrait générer une coupure abrupte du spectre.

Suite à ces travaux, Stawicki et al. (2001 [188]) ont suggéré que la cascade était constituée d'ondes dispersives faiblement amorties de type whistler et proposèrent que l'on renomme la zone dissipative, zone dispersive.

Des arguments dimensionnels similaires à ceux de la turbulence MHD peuvent être appliqués à l'EMHD (électron MHD) pour des échelles supérieures à l'échelle inertielle des électrons $kd_e < 1$ (Biskamp et al. 1996 [41], 1999 [42]). Dans le modèle EMHD, les ions sont supposés être statiques par rapport aux électrons rapides et légers qui portent donc la totalité du courant électrique. Cela implique que $\mathbf{u}_e = -\mathbf{j}/ne \sim \nabla \times \mathbf{B}$.

Ainsi, le temps caractéristique de transferts de l'énergie peut s'écrire,

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta u_l} \sim \frac{l^2}{\delta B_l}. \quad (\text{II.13})$$

En faisant l'hypothèse d'un taux de transfert d'énergie constant,

$$\epsilon \sim \frac{\delta B_l^2}{\tau_l} \sim \frac{\delta B_l^3}{l^2} \quad (\text{II.14})$$

la loi d'échelle du spectre d'énergie magnétique devient $E(k) \sim k^{-7/3}$.

Cette loi d'échelle a été observée dans des simulations de turbulence EMHD (Biskamp et al. 1996 [41], 1999 [42] ; Cho et Lazarian 2004 [54], 2009 [55] ; Shaikh 2009 [173]).

De manière similaire à la turbulence Alfvénique, l'hypothèse d'équilibre critique peut s'ap-

II.5 Au-delà de l'échelle ionique : dissipation ou dispersion ?

plier à la turbulence whistler (Cho et Lazarian 2004 [54]). On obtient une loi d'échelle quantifiant l'anisotropie en $k_{\parallel} \sim k_{\perp}^{1/3}$ qui est donc plus prononcée qu'aux échelles MHD. Les spectres 1D correspondant sont $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-7/3}$ et $E(k_{\parallel}) \sim k_{\parallel}^{-5}$.

Des simulations numériques 2D EMHD ont mis en évidence une anisotropie de la forme $k_{\perp} > k_{\parallel}$ (Dastgeer et al. 2000 [62]; Ng et al. 2003 [135]) tandis que des simulations 3D EMHD ont montrés une loi d'échelle conforme à l'hypothèse de balance critique $k_{\parallel} \sim k_{\perp}^{1/3}$ (Cho et Lazarian 2004 [54], 2009 [55]).

Nous reviendrons en détail sur la turbulence EMHD anisotrope au chapitre V.

5.2.2 Turbulence d'Alfvén cinétique (forte)

Un modèle alternatif pour décrire les fluctuations entre les échelles ionique et électronique provient de l'approche gyrocinétique. Ces modèles exploitent la séparation d'échelle temporelle ($\omega \ll \Omega_{ci}$) afin d'éliminer un degré de liberté dans la description cinétique réduisant ainsi le problème de six à cinq dimensions (trois spatiales plus deux dans l'espace des vitesses). Cette réduction du nombre de degrés de liberté se fait en moyennant le mouvement rapide de giration des particules autour du champ magnétique moyen. Les équations résultantes décrivent donc les mouvements d'"anneaux" chargés se mouvant aux travers du champ électromagnétique gyro-moyenné. L'intérêt majeur de l'approximation gyrocinétique c'est qu'elle permet de prendre en compte les effets de rayon de Larmor finis¹⁶, l'amortissement Landau non collisionnel ainsi que les collisions (Howes et al. 2006 [101]).

Il est possible de réduire encore le problème en utilisant le fait que les électrons du fait de leur très faible inertie, peuvent être considérés comme un fluide magnétisé isotherme. Seuls les ions restent complètement gyrocinétiques. Aux échelles telles que $k_{\perp} \rho_i \gg 1$ ont obtient alors un système d'équation appelé *electron reduced* MHD (ERMHD) (Schekochihin et al. 2009 [23]).

Les modes linéaires supportés par l'ERMHD sont appelés ondes d'Alfvén cinétiques (KAW *Kinetic Alfvén Waves*) et vérifient la relation de dispersion,

$$\omega_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\frac{1 + Z/\tau}{2 + \beta_i(1 + Z/\tau)}} k_{\perp} \rho_i k_{\parallel} V_A, \quad (\text{II.15})$$

16. Lorsqu'en MHD on simplifie la loi d'Ohm par $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{b}$, on "oublie" de tenir compte du fait que le rayon de Larmor des particules n'est pas nul. Les champs que rencontre la particule sur son orbite cyclotronique peuvent présenter des inhomogénéités qui induisent des dérives de nature géométrique (différente de celle en $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$). Ces inhomogénéités combinées au fait que le rayon de Larmor est non nul sont responsables de ce que l'on appelle les effets de rayon de Larmor fini.

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

avec Z la charge des ions et $\tau = T_i/T_e$.

L'expression de la relation de dispersion montre que la transition entre un régime Alfvénique et un régime dispersif KAW a lieu à $k_\perp \rho_i \sim 1$ et pas à $kd_i \sim 1$ comme c'est le cas pour les phénomènes liés à l'effet Hall.

Les ondes KAW sont polarisées elliptiquement avec le vecteur champ électrique tournant dans le même sens que les électrons dans un plan perpendiculaire au champ moyen $\mathbf{B}_0$ (Hollweg 1999 [98]).

Dans la limite incompressible $\beta_i \gg 1$ les équations ERMHD sont équivalentes à celles de la EMHD et les KAW sont alors identiques aux ondes whistlers.

Quand β_i est de l'ordre de l'unité, les fluctuations de densité ne peuvent pas être négligées devant les fluctuations du champ magnétique ce qui donne lieu à l'apparition d'une vitesse ionique dans la direction perpendiculaire avec $\nabla \cdot \mathbf{u}_i \neq 0$.

On peut dériver des lois d'échelles pour la turbulence KAW (Howes et al. 2008a [102]; Schekochihin et al. 2009 [23]) qui sont exactement les mêmes que celles obtenues avec les ondes whistlers. Cela n'a rien d'étonnant puisque la dépendance en k des KAWs est quadratique comme les whistlers.

Il est important de noter que l'hypothèse de forte anisotropie $k_\perp \gg k_\parallel$ est nécessaire à la condition $\omega \ll \Omega_i$.

En effet, si les fluctuations sont de type KAW alors,

$$\frac{\omega}{\Omega_i} \sim \frac{k_\perp \rho_i k_\parallel V_A}{\Omega_i} \sim \frac{(k_\perp \rho_i)^2}{\sqrt{\beta_i}} \epsilon, \quad (\text{II.16})$$

avec $\epsilon = \frac{k_\parallel}{k_\perp}$ et où on a utilisé les relations $\rho_i = v_{thi}/\Omega_i$ et $\beta_i = v_{thi}^2/v_A^2$. Ainsi, si les modes KAWs sont très anisotropes $k_\perp \gg k_\parallel$, ϵ tend vers 0 et les ondes sont donc également basses fréquences $\omega \ll \Omega_i$. La fréquence cyclotron ionique peut toute fois être atteinte entre l'échelle ionique et électronique si la cascade atteint des échelles suffisamment petites ($k_\perp \rho_i \gg 1$) et dans ce cas l'approche gyrocinétique n'est plus formellement valable. Dans cette situation, d'après Howes et al. 2008a [102], en raison de l'étroitesse de la bande de fréquences autour de laquelle peut avoir lieu un phénomène de résonance cyclotronique ionique, il est probable que la plupart de l'énergie turbulente continue de cascader sous la forme de KAW jusqu'à être finalement convertie en chaleur par effet Landau électronique aux échelles $k_\perp \rho_e \sim 1$ ¹⁷. Nous verrons au chapitre V pourquoi cette explication nous

17. Dans l'article [102] il est mentionné que : "it appears more likely that most of the turbulent energy would leapfrog the resonance". Les auteurs suggèrent donc qu'un mécanisme impliquant un saut de grenouille permet d'expliquer le rôle des KAWs dans le vent solaire.

paraît erronée et proposerons une théorie alternative.

L'avantage majeur du modèle gyrocinétique par rapport au modèle EMHD, c'est qu'il décrit correctement les mécanismes de dissipation non collisionnel. En fonction de la valeur des paramètres β_i et T_i/T_e , l'effet Landau est plus ou moins fort et on obtient dans les deux cas extrêmes (pas d'effet/effet maximal) un indice spectral respectivement de $-7/3$ et -4 (Howes et al. 2008a [102]) en accord avec les observations¹⁸ (Leamon et al. 1998a [118] ; Smith et al. 2006a [182]).

Podesta et al. (2010 [165]) ont cependant montré que si l'effet Landau était pris en compte à chaque étape de la cascade turbulente comprise entre $k_\perp \rho_i \sim 1$ jusqu'à $k_\perp \rho_i \gg 1$, une cascade de KAWs ne pouvait pas atteindre les échelles électroniques.

Schekochihin et al. (2009 [23]) ont souligné que soumises à un amortissement, les fluctuations dans un régime faiblement collisionnel ne pouvaient pas être immédiatement dissipées. Ils ont proposé que la cascade turbulente se transforme alors en une cascade de fluctuation d'entropie ionique. La cascade d'entropie conduit à un spectre en $k_\perp^{-16/3}$, et Schekochihin et al. (2009 [23]) ont donc proposé que la gamme d'indice spectral observée dans le vent solaire (Smith et al. 2006a [182]) était due à une superposition de cascade KAW et entropique ionique. Des simulations gyrocinétiques ont montré l'existence de ces deux cascades (Howes et al 2008b [103] ; Tatsuno et al. 2009 [185]).

Boldyrev et Perez [44] ont proposé que le raidissement du spectre de l'énergie en turbulence KAW pouvait être dû à une bidimensionalisation des structures turbulentes dans ce régime. Ils ont proposé un modèle de cascade turbulente inspiré des β -modèles introduits à la fin des années 70 par Uriel Frish et al. [72] pour décrire des phénomènes d'intermittence dans les fluides neutres. Les résultats de leurs simulations numériques semblent confirmer leur approche et questionne donc l'existence de dissipation Landau en régime turbulent.

5.3 Mesures à hautes fréquences

De très nombreuses mesures ont été réalisées pour déterminer la nature exacte des fluctuations dans la zone " dissipative ". Chacune de ces études prises individuellement tend à privilégier un scénario par rapport à un autre, mais si on les considère dans leur globalité, force est de constater qu'il n'est aujourd'hui pas possible de trancher.

Il est très probable que la réalité correspondent à une combinaison de tous les phénomènes qui ont été proposés.

¹⁸. Il est très important de noter que dans cette étude, le taux d'amortissement est calculé à partir des équations de Vlasov-Maxwell linéaires et qu'il n'y a à ce jour aucune étude qui montre qu'une telle approche est valable en présence de fortes non-linéarités.

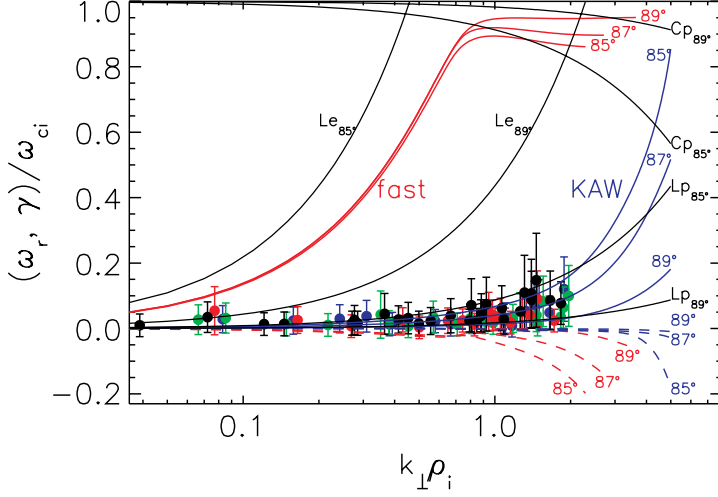


Figure II.17 – Relation de dispersion observée dans le vent solaire pour des fluctuations quasiment perpendiculaires au champ magnétique moyen comparé aux modes propres linéaires solutions des équations de Vlasov-Maxwell Fast et KAW (les courbes en tirets correspondent aux taux d'amortissement linéaire des modes propres). Les courbes noires ($L_{p,e}$) correspondent aux résonances Landau électronique et protonique $\omega = k_{\parallel} V_{th_{i,e}}$. Les courbes C_p correspondent aux résonances cyclotroniques $\omega = \omega_{ci} - k_{\parallel} V_{th_{i,e}}$. Ces mesures suggèrent que la zone de transition est constituée de modes KAWs fortement amortis par effet Landau. Graphique tiré de Sahraoui et al. (2010 [14]).

Dans ce qui suit, nous résumerons les observations et les explications proposées qui nous semblent être les plus importantes.

La mesure de l'hélicité normalisée indique que les fluctuations droites dominent (Goldstein et al. 1994 [85]; Leamon et al. 1998b,a [119], [118]; Hamilton et al. 2008 [90]). Cela a été interprété comme la preuve que la résonance cyclotron ionique qui tend à supprimer les fluctuations gauches, joue un rôle essentiel dans la zone de transition. Howes et Quataert (2010 [105]) ont cependant montré que cette signature était tout à fait conforme avec la transition d'une turbulence Alfvénique à une turbulence KAW où par construction la résonance cyclotron ne peut pas avoir lieu.

Plus récemment, Carbone et al. (2010 [51]) ont montré que la polarisation des fluctuations ne changeait pas dans la zone de dissipation indiquant que le processus à l'œuvre est donc insensible à la polarité des fluctuations ce qui exclu *de facto* une absorption résonnante cyclotronique. Ces observations ont par la suite été confirmées par d'autres mesures (Perri et al. 2011 [140]).

L'observation d'un spectre d'énergie électrique moins abrupt que dans la zone inertielle (Bale et al. 2005 [32]), est cohérent avec les modèles MHD Hall (Dmitruk et Matthaeus 2006 [68]; Matthaeus et al. 2008 [24]; 2010 [129]; Cho et Lazarian 2009 [55]) mais aussi ERMHD (Howes et al. 2008b [103]; Schekochihin et al. 2009 [23]).

Afin de discriminer les deux théories Bale et al. (2005 [32]) et Sahraoui et al. (2009 [13]) ont mesuré la vitesse de phase en fonction de l'échelle. Dans les deux études les résultats obtenus tendent à montrer que la turbulence est plutôt de nature KAW.

Sahraoui et al. (2010 [14]) ont directement mesuré la relation de dispersion en utilisant

II.5 Au-delà de l'échelle ionique : dissipation ou dispersion ?

une technique appelée filtrage en k tirant bénéfice des mesures simultanées en 4 points offertes par les satellites CLUSTER. Cette étude montre que dans la zone de transition les fluctuations du champ magnétique ne sont pas compatibles avec la présence de mode rapide (voire Fig. II.17) mais semble suivre la relation de dispersion des modes KAW.

Il est important de garder à l'esprit que les résultats obtenus correspondent à une situation particulière¹⁹ où les fluctuations sont quasiment perpendiculaires au champ magnétique ($\geq 85^\circ$). De plus, aucune théorie ne permet actuellement d'expliquer pourquoi des fluctuations non-linéaires suivent la relation de dispersion des modes linéaires.

La branche aplatie correspondant au mode lent transverse n'a pas été tracée mais ne paraît pas être exclue par cette étude. Dans le cadre de la MHD Hall incompressible ce mode s'identifie au mode gauche que nous avons appelé Ion cyclotron (voir Chap. I). Nous reviendrons en détail sur la turbulence associée à ce type de mode propre au chapitre V et proposerons un modèle heuristique de turbulence permettant d'expliquer certaines des observations que nous venons de présenter.

19. La méthode de filtrage en k nécessite une configuration particulière des satellites CLUSTER rarement atteintes dans le vent solaire. Les mesures ont été réalisées sur un intervalle de temps de 50 minutes et ne reflètent donc pas nécessairement une situation " standard ".

Chapitre II. Le vent solaire, un formidable laboratoire pour l'étude de la turbulence plasma

Chapitre III

Modélisation simplifiée de la turbulence MHD Hall

Sommaire

1	Modèle « Shell »	86
1.1	Interactions triadiques	86
1.2	Cascade multiplicative : Réduction du nombre de degrés de liberté	87
1.3	Conservation des invariants	90
2	Modèle shell MHD Hall	93
2.1	Expression analytique	93
2.2	Prédictions théoriques	94
3	Résultats numériques	97
3.1	Régime Navier-Stokes, électron MHD et MHD	97
3.2	Régime Hall MHD	97
3.3	Interprétations physiques	99

COMME NOUS L'AVONS SOULIGNÉ AU CHAPITRE II, l'énormité du nombre de degrés de liberté de la turbulence interdit la simulation numérique directe pour des nombres de Reynolds élevés. Il paraît donc nécessaire de mettre au point une approche permettant d'obtenir une solution des équations de Navier-Stokes sans calculer explicitement tous ses degrés de liberté.

Ainsi posé, le défi ressemble beaucoup à celui rencontré à la fin du XIX^e siècle par les fondateurs de la mécanique statistique. Pourtant, aucune des méthodes traditionnelles de

physique statistique ne s'applique à la turbulence. En effet, dans un fluide non forcé, les phénomènes de dissipation impliquent que le seul état d'équilibre thermodynamique soit celui de vitesse nulle. Pour obtenir un écoulement à vitesse non nulle, il faut contrebalancer ces effets dissipatifs par un flux d'énergie entrant dans le système. On peut alors obtenir un système stationnaire, mais qui sera en permanence en état hors équilibre.

Le besoin d'obtenir des statistiques de la turbulence sans utiliser les outils traditionnels de la physique statistique, combiné à nos moyens de calcul limités, nous incite donc à réaliser des simulations numériques de modèles simplifiés.

Une des possibilités est de déterminer un nombre relativement faible de modes qui concentre la majeure partie de la dynamique (Hopf 1948 [95]; Obukhov 1971 [158]; Lorenz 1972 [148]; Gledzer 1973 [15]; Desnjansky 1974 [65]; Siggia 1977 [179]) et de modéliser la turbulence par des interactions entre ces modes.

Dans ce chapitre, nous présenterons l'un de ces modèles appliqué au problème de la turbulence MHD Hall incompressible. Les modes choisis se situent dans des coquilles sphériques concentriques dont l'épaisseur est constante sur une échelle logarithmique. Il n'est donc pas surprenant que ces modèles soient appelés "shell-models". Les interactions non-linéaires sont déterminées par l'hypothèse de localité des interactions dans l'espace de Fourier et par l'existence de quantités conservées.

Il est important de noter que les résultats numériques qui sont présentés dans ce chapitre sont antérieurs à cette thèse et ne constituent donc pas des résultats originaux de celle-ci. Les résultats obtenus avec ce modèle simplifié de turbulence ont cependant fortement influencé les idées que nous développerons au chapitre V et c'est la raison pour laquelle il nous est apparu important de les rappeler dans ce manuscrit ¹.

1 Modèle « Shell »

1.1 Interactions triadiques

Quand la turbulence est homogène, c'est-à-dire statistiquement invariante par translation, il est extrêmement utile de travailler dans l'espace de Fourier. Dans cet espace les

1. Les shell-models MHD Hall ont fait l'objet de mon stage de Master 2 durant lequel j'ai écrit un algorithme permettant d'intégrer numériquement les équations. J'ai également consacré une bonne partie de ma première année de thèse à essayer de développer un shell-model MHD Hall anisotrope. Malheureusement cette étude n'a pas abouti.

équations de Navier-Stokes deviennent,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right)\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = -ik_m \mathcal{P}_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_j(\mathbf{p}, t) \hat{u}_m(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad (\text{III.1})$$

avec,

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

et,

$$\mathcal{P}_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Le terme de pression disparaît car la condition d'incompressibilité $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$, implique que $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ soit dans un plan Π perpendiculaire à $\mathbf{k}$ et donc perpendiculaire au gradient de pression $i\hat{p}\mathbf{k}$.

Ainsi la transformée de Fourier de,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (1/\rho_0) \nabla P$$

est la projection sur Π de la transformée de Fourier de $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.

Le terme de pression est donc implicitement contenu dans le tenseur $\mathcal{P}_{ij}(\mathbf{k})$ qui est l'opérateur de projection sur un plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$.

Le produit de convolution du terme non-linéaire met en évidence une propriété fondamentale de la turbulence : dans l'espace de Fourier, les interactions non-linéaires se font par triades de vecteur d'ondes vérifiant, $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$.

1.2 Cascade multiplicative : Réduction du nombre de degrés de liberté

Si on accepte la phénoménologie de Richardson, l'énergie est transférée dans l'espace spectral suivant une succession d'étapes impliquant des modes dont la norme k_n croît suivant une progression géométrique de raison $\lambda = 2$,

$$k_n = k_0 \lambda^n.$$

Le volume des " objets " élémentaires de la turbulence spectrale suit donc une série géométrique de raison huit, d'où le nom octave qui leur ait donné.

Le concept de cascade de Richardson appliqué à l'espace de Fourier conduit donc à la notion de cascade multiplicative. Cette idée a été introduite dans de nombreux modèles de

turbulence (Desnjansky 1974 [65] ; Kraichnan 1974 [146] ; Frisch 1975 [71] ; Bell 1978 [39]) dans lesquelles l'octave est supposé être l' " objet " élémentaire nécessaire à la description de la turbulence dans l'espace de Fourier. Dans ces modèles, les interactions non-linéaires consistent à échanger de l'énergie entre octaves voisines.

Si on considère un problème de turbulence isotrope, il paraît donc naturel de diviser l'espace de Fourier en n coquilles sphériques concentriques S_n , dont la largeur sur une échelle logarithmique est égale à 2. On peut modéliser les équations de Navier-Stokes projetées sur cette décomposition de l'espace spectral, par un système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires de la forme :

$$(d/dt + \nu k_n^2)u_n = k_n G_n [u, u] + f_n,$$

où le scalaire complexe u_n représente la fluctuation de vitesse typique aux échelles l telle que $2\pi/l \in S_n$, c'est-à-dire aux échelles correspondant aux vecteurs d'ondes contenus dans la coquille S_n . La géométrie du problème est donc perdue.

Le couplage non-linéaire $G_n [u, u]$ est choisi de manière à ce que l'énergie et l'hélicité

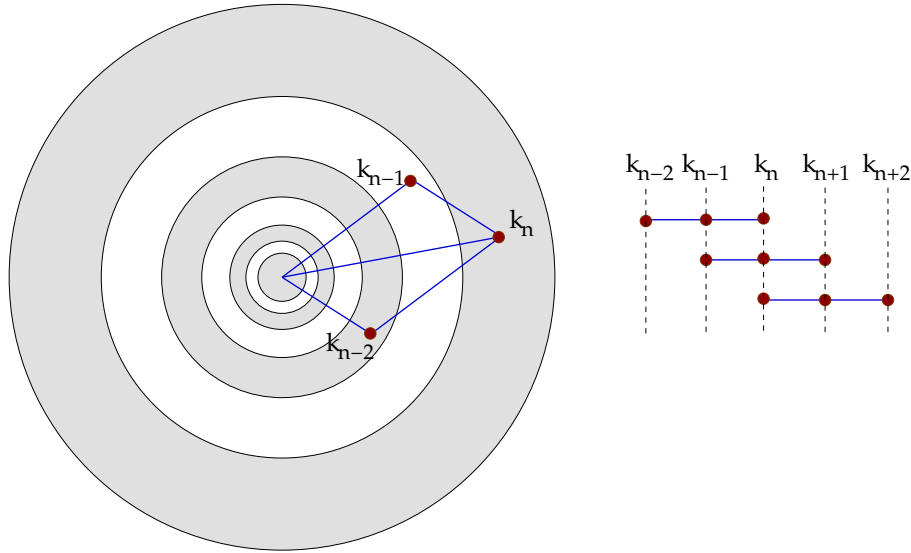


Figure III.1 – Interactions triadiques dans le modèle GOY (Gledzer 1973 [15] Ohkitani et Yamada 1989 [16]). À gauche, l'espace de Fourier à deux dimensions est divisé en couches concentriques. Les interactions non-linéaires se font par triades de modes appartenant à des couches successives. La couche n est donc concernée par les triades indiquées à droite. Schéma tiré de Buchlin 2004 [17]

cinétique soient des invariants des équations.

Les conditions aux limites aux grandes échelles sont imposées de sorte qu'aucune fluctua-

tion n'existe sur des échelles supérieures à une échelle intégrale typique $L_1 = 1/k_1$, i.e, $u_n = 0$ pour $n < 1$.

En imposant que la fonction non-linéaire $G_n[u, u]$ couple uniquement des " octaves " proches voisines (la plus proche et celle d'après), on a :

$$G_n[u, u] = \sum_{m=-2}^2 \sum_{l=-2}^2 A_{nml} u_{n+m} u_{n+l}$$

avec, $|k_{n+m} \pm k_{n+l}| = k_n$. Certains des termes A_{nml} disparaissent à cause de cette condition. Par exemple, on ne peut pas construire une triade avec les modes k_{n+2} , k_{n-2} et k_n puisque les intervalles $[4k, 8k] \pm [k/4, k/2]$ n'ont pas d'intersection avec l'intervalle k_n . $A_{n,+2,-2}$ est donc nul². De même, $A_{n,+2,-1} = A_{n,-2,+1} = 0$.

Les triades $(n, 1, -2)$ et $(n, -2, 1)$ quant à elles, sont nulles car elles ne satisfont pas l'hypothèse de localité.

On peut encore diminuer le nombre de termes non-linéaires en utilisant la propriété fondamentale de la conservation détaillée de l'énergie au sein de chaque triade (Rose et Sulem, 1978 [170]). Cette propriété implique que le flux énergie $\Pi(m, l)$ provenant de la coquille S_m vers la coquille S_l est égale à l'opposé du flux d'énergie $\Pi(l, m)$ provenant de S_l vers S_m :

$$\Pi(m, l) = -\Pi(l, m).$$

Cette relation implique en particulier que,

$$\Pi(m, m) = -\Pi(m, m) = 0.$$

Ainsi, aucune des triades tels que les triplés (n, l, m) possédant deux termes égaux ne sont susceptibles de transférer de l'énergie. On peut donc les éliminer de $G_n[u, u]$.

Les triades restantes conduisent à la relation :

$$(d/dt + \nu k_n^2) u_n = i k_n (\alpha u_{n+2} u_{n+1} + \beta u_{n-1} u_{n+1} + \gamma u_{n-2} u_{n-1})^* + f_n. \quad (\text{III.2})$$

L'astérisque * représente le complexe conjugué³. Cette forme particulière de modèles " shell " est appelée GOY en référence aux personnes qui les ont développées (Gledzer 1973

2. $A_{n,-2,+2} = 0$ également puisque toutes les triades (n, m, l) sont symétriques par rapport à la diagonale dans le plan (m,l).

3. Le fait que tous les termes non-linéaires impliquent le complexe conjugué de u_n conduit à des oscillations de période spatiale 2 dans la dynamique des différents spectres. Ce problème peut être résolu en considérant une variante du modèle III.2 proposé par L'vov et al. 1998 [123].

([15]), Ohkitani et Yamada 1989 ([16])).

Les nombres réels α , β et γ sont fixés de manière à ce que le terme non-linéaire $G_n[u, u]$ conserve les invariants du problème considéré : l'énergie et l'hélicité en 3D, ou l'énergie et l'enstrophie en 2D.

1.3 Conservation des invariants

On définit l'énergie e_n et l'hélicité h_n dans une coquille S_n par :

$$e_n = \frac{1}{2}|u_n|^2, \quad (h_i)_n = ((-1)^n k_n)^i |u_n|^2 \quad (\text{III.3})$$

où $i = 1, 2$ correspond respectivement à l'hélicité cinétique et l'enstrophie. Les quantités globales sont obtenues en sommant la contribution de chacune des coquilles S_n ,

$$E = \sum_{n=1}^N e_n, \quad H_i = \sum_{n=1}^N (h_i)_n. \quad (\text{III.4})$$

La définition III.4 de H_i permet de définir l'énergie par $E = 1/2 H_0$. On peut donc traiter les trois lois de conservation (correspondant au cas 3D et 2D) en une fois.

Ainsi la conservation de H_a ($a = 0, 1, 2$) par le terme non-linéaire $(d_t H_a)_{NL} = 0$, $((\sim)_{NL})$ désigne les termes non-linéaires de l'expression $(\sim)$ implique que⁴ :

$$\begin{aligned} (d_t H_a)_{NL} &= i \sum_{n=1}^N (-1)^{an} k_n^a k_n (\alpha u_n u_{n+1} u_{n+2} + \beta u_{n-1} u_n u_{n+1} + \gamma u_{n-2} u_{n-1} u_n)^* + c.c. \\ &= i\alpha \sum_{n=1}^N (-1)^{an} k_n^{a+1} (u_n u_{n+1} u_{n+2})^* \\ &\quad + i\beta \sum_{n'=0}^{N-1} (-1)^{a(n'+1)} k_{n'+1}^{a+1} (u_{n'} u_{n'+1} u_{n'+2})^* \\ &\quad + i\gamma \sum_{n''=-1}^{N-2} (-1)^{a(n''+2)} k_{n''+2}^{a+1} (u_{n''} u_{n''+1} u_{n''+2})^* + c.c. \\ &= i \sum_{n=1}^{N-2} (-1)^{an} k_n^{a+1} [\alpha + (-1)^a \lambda^{a+1} \beta + \lambda^{2a+2} \gamma] (u_n u_{n+1} u_{n+2})^* + c.c. \\ &= 0 \quad \forall u_i \ (i = 1, \dots, n) \Rightarrow \alpha + (-1)^a \lambda^{a+1} \beta + \lambda^{2a+2} \gamma = 0. \end{aligned}$$

4. On ajoute au modèle quatre variables artificielles $u_{-1} = u_0 = u_{N+1} = u_{N+2} = 0$ de manière à ce que l'expression III.2 soit valable $\forall n \in 1, \dots, N$.

Ainsi, pour un modèle shell 3D, comme H_0 et H_1 doivent être conservés, les coefficients α , β et γ doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} \alpha + \lambda\beta + \lambda^2\gamma = 0 \\ \alpha - \lambda^2\beta + \lambda^4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \alpha \frac{1 - \lambda}{\lambda^2}, \quad \gamma = -\alpha \frac{1}{\lambda^3}.$$

Les constantes de couplage sont donc définies à une constante multiplicative près qui n'a pas d'impact sur la dynamique du modèle. Cette constante indéterminée peut en effet être considérée comme un changement d'échelle temporelle en divisant chaque membre de l'équation III.2 par cette constante. En prenant $\alpha = 1$ et $\lambda = 2$ on obtient :

$$(d/dt + \nu k_n^2)u_n = ik_n(u_{n+2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_{n-1}u_{n+1} - \frac{1}{8}u_{n-2}u_{n-1})^* + f_n. \quad (\text{III.5})$$

Ce modèle a reçu un grand intérêt de la part de la communauté scientifique qui s'intéresse à la turbulence pour deux raisons :

- *Ce système dynamique développe des spectres d'énergie semblables à ceux obtenus directement à partir de l'équation de Navier-Stokes.*

En effet, si l'on suppose que u_n vérifie une loi de puissance $|u_n| = Ak_n^{-p}$, on a dans la zone inertielle :

$$\begin{aligned} d_t|u_n| &= ik_n A^2 \left[\alpha(k_{n+1})^{-p}(k_{n+2})^{-p} + \beta(k_{n-1})^{-p}(k_{n+1})^{-p} + \gamma(k_{n-2})^{-p}(k_{n-1})^{-p} \right], \\ &= i(k_n)^{1-2p} A^2 \alpha \left[\lambda^{-3p} + \frac{1 - \lambda}{\lambda^2} - \frac{\lambda^{3p}}{\lambda^3} \right], \\ &= 0 \Leftrightarrow p = 1/3 \end{aligned}$$

Les modèles shell ont donc le spectre de Kolmogorov comme point fixe en régime stationnaire.

- *Ce système dynamique comme les écoulements turbulents est intermittent.*

En effet, les moments de u_n dépendent de k_n comme une loi de puissance :

$$\langle |u_n|^q \rangle \sim k_n^{\zeta_q}$$

Chapitre III. Modélisation simplifiée de la turbulence MHD Hall

avec des exposants ζ_q présentant une dépendance non-linéaire avec q . En particulier, on peut montrer que $\zeta_3 = 1$ en dérivant une relation exacte analogue à la loi des 4/5 de Kolmogorov (L'vov et al. 1998 [123]).

En effet, en notant ($\Im$ désigne la partie imaginaire),

$$\begin{aligned} S_2(k_n) &= \langle |u_n|^2 \rangle, \\ S_3(k_n) &= \Im \langle u_{n-1} u_n u_{n+1} \rangle, \end{aligned}$$

et $\Pi_{H_a}(k_M)$ le flux d'énergie ($a = 0$) et d'hélicité cinétique ($a = 1$) sortant à travers la coquille M , on a dans la zone inertielle,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{H_a}(k_M) \rangle &= \left\langle - \left(d_t \sum_{n=1}^M (h_a)_n \right)_{NL} \right\rangle \\ &= (-1)^{a(M+1)} k_{M+1}^a \left(\langle d_t |u_{M+1}|^2 \rangle \right)_{\Delta(M-1, M, M+1)} \\ &\quad - (-1)^{aM} k_M^a \left(\langle d_t |u_M|^2 \rangle \right)_{\Delta(M, M+1, M+2)} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

où $\Delta(M, M+1, M+2)$ signifie : "dû à l'interaction triadique des coquilles $M, M+1$, et $M+2$ ".

En effet, les coefficients α, β et γ , on été définis de manière à ce que les h_i ($i = 0, 1$) soient conservés au sein de chaque triade et le calcul du flux au travers d'une coquille se réduit donc au flux résultant des interactions triadiques qui la traverse⁵.

Dans le régime stationnaire, ces flux doivent être égaux respectivement à la moyenne du flux d'injection d'énergie $\langle \varepsilon \rangle$ et d'hélicité $\langle \delta \rangle$ dû au forçage et on a donc,

$$\begin{cases} \langle \varepsilon \rangle = 2k_M(\lambda\gamma S_3(k_M) - \alpha S_3(k_{M+1})) \\ \langle \delta \rangle = -2k_M^2(-1)^M [\lambda^2\gamma S_3(k_M) + \alpha S_3(k_{M+1})] \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir l'équivalent de la loi des 4/5 pour le modèle GOY :

$$S_3(k_n) = \frac{k_n^{-1}}{2\lambda\gamma(1+\lambda)} \left(\langle \varepsilon \rangle + (-1)^{n+1} k_n^{-1} \langle \delta \rangle \right) \quad (\text{III.7})$$

$$S_3(k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k_n^{-1}.$$

Le terme $(-1)^{n+1} k_n^{-1} \langle \delta \rangle$ dans l'équation III.7 conduit à des oscillations de période 2 dans le spectre d'énergie dont l'amplitude diminue proportionnellement à n . Pour sup-

5. Cette propriété se traduit analytiquement par un télescopage additif dans l'équation III.6.

primer cet effet indésirable, il suffit donc de ne pas injecter d'hélicité cinétique dans le système (L'vov et al. 1998 [123]).

2 Modèle shell MHD Hall

2.1 Expression analytique

Connaissant les "ingrédients" nécessaires à la construction d'un modèle shell pour la turbulence hydrodynamique, on peut aisément généraliser au cas MHD Hall (Hori et al. 2005 [96]). On obtient alors le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{du_n}{dt} + \nu_2 k_n^4 u_n &= ik_n (u_{n+1} u_{n+2} - b_{n+1} b_{n+2})^* \\
 &\quad - \frac{ik_n}{4} (u_{n-1} u_{n+1} - b_{n-1} b_{n+1})^* \\
 &\quad - \frac{ik_n}{8} (u_{n-2} u_{n-1} - b_{n-2} b_{n-1})^* \\
 \frac{db_n}{dt} + \eta_2 k_n^4 b_n &= \frac{ik_n}{6} (u_{n+1} b_{n+2} - b_{n+1} u_{n+2})^* \\
 &\quad + \frac{ik_n}{6} (u_{n-1} b_{n+1} - b_{n-1} u_{n+1})^* \\
 &\quad + \frac{ik_n}{6} (u_{n-2} b_{n-1} - b_{n-2} u_{n-1})^* \\
 &\quad + (-1)^n i d_i k_n^2 \left(b_{n+1} b_{n+2} - \frac{b_{n-1} b_{n+1}}{4} - \frac{b_{n-2} b_{n-1}}{8} \right)^*.
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

Dans la limite des grandes échelles, c'est-à-dire quand $k_n d_i \rightarrow 0$ ce modèle tend vers celui de la MHD (Frick et Sokoloff 1998 [70], Giuliani et Carbone 1998 [86]). En prenant $b_n = 0, \forall n = (1, \dots, N)$, on retrouve bien sûr le modèle GOY III.5.

On utilise l'hyperviscosité (ν_2, η_2) de manière à ce que le nombre de Reynolds de Hall, c'est-à-dire le rapport entre le terme non-linéaire de Hall et le terme de diffusivité magnétique ait une dépendance en k linéaire. En effet, en prenant une diffusivité en Laplacien $(\Delta \xrightarrow{T,F} k_n^2)$, il n'y a pas de zone dissipative ce qui conduit à des instabilités numériques.

Les coefficients de couplage sont définis de manière à conserver les trois invariants de la

MHD Hall (Galtier 2006 [76], Hori et al. 2005 [96]),

$$\begin{aligned} E &= \int E(k) dk = \frac{1}{2} \sum_n (|u_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_n e(k_n), \\ H_m &= \int H_m(k) dk = \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n \frac{|b_n|^2}{k_n} = \sum_n h_m(k_n), \\ H_h &= \int H_h(k) dk = \frac{1}{2} \sum_n \left[(-1)^n d_i^2 k_n |u_n|^2 + d_i (u_n^* b_n + u_n b_n^*) \right] = \sum_n h_h(k_n), \end{aligned}$$

qui sont l'énergie totale E , l'hélicité magnétique H_m et l'hélicité hybride H_h .

2.2 Prédiction théoriques

Afin de prédire les lois de puissance des différents spectres d'énergie de manière rigoureuse, il convient de déterminer les solutions à flux d'énergie total constant des équations III.8.

Pour la clarté de la démonstration, posons :

$$S_3^{(X,Y,Z)}(k_n) = \Im \langle X_{n-1} Y_n Z_{n+1} \rangle.$$

En utilisant les mêmes arguments que pour le modèle GOY III.6, on a :

$$\begin{aligned} 2 \langle \Pi_E(k_M) \rangle &= - \left\langle \left(d_t \sum_{n=1}^M (|u_n|^2 + |b_n|^2) \right)_{NL} \right\rangle \\ &= \left(\left\langle d_t (|u_{M+1}|^2 + |b_{M+1}|^2) \right\rangle \right)_{\Delta(M-1,M,M+1)} \\ &\quad - \left(\left\langle d_t (|u_M|^2 + |b_M|^2) \right\rangle \right)_{\Delta(M,M+1,M+2)} \\ &= -\frac{1}{8} k_{M+1} \left(S_3^{(u,u,u)}(k_M) - S_3^{(b,b,u)}(k_M) \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} k_{M+1} \left(S_3^{(u,b,b)}(k_M) - S_3^{(b,u,b)}(k_M) \right) - \frac{1}{8} (-1)^{M+1} d_i k_{M+1}^2 S_3^{(b,b,b)}(k_M) \\ &\quad - k_M \left(S_3^{(u,u,u)}(k_{M+1}) - S_3^{(u,b,b)}(k_{M+1}) \right) \\ &\quad - \frac{k_M}{6} \left(S_3^{(b,u,b)}(k_{M+1}) - S_3^{(b,b,u)}(k_{M+1}) \right) - (-1)^M d_i k_M^2 S_3^{(b,b,b)}(k_{M+1}) \\ &= 2 \langle \epsilon^{Total} \rangle. \end{aligned} \tag{III.9}$$

Chacun des termes $k_n S_3^{(X,Y,Z)}(k_n) = k_n \Im \langle X_{n-1} Y_n Z_{n+1} \rangle$ représente le flux d'énergie transitant par les différents termes non-linéaires des équations de la MHD Hall. Par exemple $S_3^{(u,u,u)}(k_n)$ correspond au flux d'énergie cinétique de u_n vers u_{n+1} induit par le terme

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, $S_3^{(u,b,b)}(k_n)$ représente le flux d'énergie cinétique de u_n vers b_{n+1} généré par le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ et ainsi de suite.

– **Régime MHD** $kd_i \ll 1$

Pour des échelles grandes devant l'échelle inertielle des ions, c'est-à-dire pour des échelles purement MHD ($kd_i \ll 1$), on a d'après III.9 :

$$\begin{aligned} \lim_{kd_i \ll 1} 2 \langle \epsilon^{Total} \rangle &= -\frac{1}{8}k_{M+1} \left(S_3^{(u,u,u)}(k_M) - S_3^{(b,b,u)}(k_M) \right) \\ &\quad + \frac{1}{6}k_{M+1} \left(S_3^{(u,b,b)}(k_M) - S_3^{(b,u,b)}(k_M) \right) \\ &\quad - k_M \left(S_3^{(u,u,u)}(k_{M+1}) - S_3^{(u,b,b)}(k_{M+1}) \right) \\ &\quad - \frac{k_M}{6} \left(S_3^{(b,u,b)}(k_{M+1}) - S_3^{(b,b,u)}(k_{M+1}) \right). \end{aligned}$$

En supposant que u_n et b_n dépendent de k_n selon des lois de puissance,

$$u_n = A_0 k_n^\alpha = A \lambda^{\alpha n}, \quad b_n = B_0 k_n^\beta = B \lambda^{\beta n},$$

on a,

$$\begin{aligned} \lim_{kd_i \ll 1} 2 \langle \epsilon^{Total} \rangle &\sim -\frac{1}{4} \left(A^3 \lambda^{(1+3\alpha)M} - AB^2 \lambda^{(2\beta+\alpha+1)n} \lambda^{(\alpha-\beta)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(AB^2 \lambda^{(-\alpha+\beta)} \lambda^{(\alpha+2\beta+1)M} - AB^2 \lambda^{(1+\alpha+2\beta)M} \right) \\ &\quad - \left(A^3 \lambda^{(3\alpha)} \lambda^{(3\alpha+1)M} - AB^2 \lambda^{(1+\alpha+2\beta)M} \lambda^{3\beta} \right) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(AB^2 \lambda^{(\alpha+2\beta)} \lambda^{(2\beta+\alpha+1)M} - AB^2 \lambda^{(2\alpha+\beta)} \lambda^{(2\beta+\alpha+1)M} \right). \end{aligned}$$

Pour obtenir des solutions à flux constant, il suffit d'annuler toutes les puissances dépendant de M . On obtient alors le système :

$$\begin{cases} 1 + \alpha + 2\beta &= 0 \\ 3\alpha + 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi à grande échelle, on obtient une loi de puissance unique commune à u_n et b_n en $k_n^{-5/3}$. Il est intéressant de noter que ce spectre Kolmogorovien est imposé par le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes $(-\frac{1}{8}k_{M+1}S_3^{(u,u,u)}(k_M) -$

$k_M S_3^{(u,u,u)}(k_{M+1})$). Cette loi de puissance commune à u_n et b_n en $k^{-5/3}$ est une reminiscence d'une propriété fondamentale de la MHD (voir chapitre I), le gèle du champ magnétique, et a été observée à de très nombreuses reprises dans le vent solaires (Matthaeus et Goldstein (1982) ([127]); Ruzmaikin et al. (1993) ([171]); Bale et al. (2005) ([32]); Smith et al. (2006b) ([183]); Podesta et al. (2007) ([164]); Tessein et al. (2009) ([194])).

– Régime électron MHD $kd_i \gg 1$

Pour des échelles spatiales en deçà de l'échelle inertielle des ions, le flux d'énergie est entièrement induit par le terme Hall et l'équation III.9 se réduit à :

$$\lim_{kd_i \gg 1} 2 \langle \epsilon^{Total} \rangle \sim -\frac{1}{8}(-1)^{M+1} d_i k_{M+1}^2 S_3^{(b,b,b)}(k_M) - (-1)^M d_i k_M^2 S_3^{(b,b,b)}(k_{M+1}).$$

En supposant que u_n et b_n dépendent de k_n selon des lois de puissance, on a donc :

$$\lim_{kd_i \gg 1} 2 \langle \epsilon^{Total} \rangle \sim -\frac{1}{8}(-1)^{M+1} d_i B^3 \lambda^{(3\beta+2)M} \lambda^2 - (-1)^M d_i B^3 \lambda^{(3\beta+2)M} \lambda^4.$$

La solution en loi de puissance à flux constant vérifie donc,

$$3\beta + 2 = 0, \tag{III.10}$$

ce qui implique un spectre en $k_n^{(-7/3)}$. Cette loi de puissance est précisément celle attendue dans le régime de turbulence électron MHD (Biskamp et al. 1996 [41]).

Aux échelles $kd_i \gg 1$, la dynamique est si rapide que les ions du fait de leur grande inertie peuvent être considérés comme immobiles ($\mathbf{u}_i \simeq \mathbf{u} \simeq 0$). Il est important de garder à l'esprit que cette immobilité est relative à l'échelle considérée. Elle n'est pas vraie aux échelles MHD où les ions ont un comportement Kolmogorovien. Cette immobilité des ions se traduit naturellement dans le modèle shell par le fait que le flux d'énergie est entièrement porté par le champ magnétique et donc par les électrons ($\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0(n_i q_i \mathbf{u}_i + n_e q_e \mathbf{u}_e) \simeq \mu_0 n_e q_e \mathbf{u}_e$).

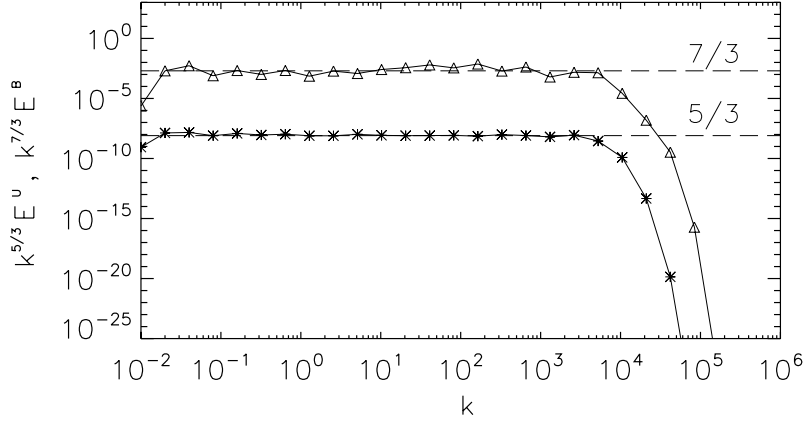


Figure III.2 – Spectres compensés de l'énergie magnétique (triangles) et cinétique (astérisques) pour les limites électron MHD et Navier-Stokes. Les spectres prédits théoriquement sont représentés en tirets.

3 Résultats numériques

3.1 Régime Navier-Stokes, électron MHD et MHD

Les simulations numériques du système III.8 ont été réalisées avec $N = 25$, $k_0 = 10^{-2}$ et sans forçage externe. Dans toutes les simulations présentées dans ce qui suit, les spectres initiaux d'énergie magnétique et cinétique sont localisés aux grandes échelles avec un maximum autour de $k = 0.04$ et une décroissance exponentielle aux plus grandes échelles.

Dans le cas électron MHD ($u_n = 0$, $\forall t$, $d_i = 0.3$ et $\eta_2 = 10^{-13}$), on observe un spectre en $k^{-7/3}$ (voir fig. (III.2)) conformément à la prédiction théorique basée sur les flux d'énergie (voir 2.2) et en accord avec les résultats obtenus à l'aide de simulations numériques directes (Biskamp et al. 1996 [41]).

Dans le cas hydrodynamique pure ($u_n = 0$, $\forall t$ et $\eta_2 = 10^{-13}$), on observe sans surprise un spectre en $k^{-5/3}$ (voir figure III.2). Le cas MHD ($d_i = 0$) reproduit correctement un spectre en $k^{-5/3}$ pour l'énergie magnétique et cinétique.

Ces résultats préliminaires portant sur les régimes asymptotiques, peuvent laisser naïvement penser que dans le cas MHD Hall le spectre d'énergie est compris entre ces deux extrêmes ($k^{-7/3}$, $k^{-5/3}$).

On va voir dans la suite que dans le cas général, il n'en est rien.

3.2 Régime Hall MHD

Régime Hall MHD avec $d_i = 0.3$

Dans le régime Hall MHD avec $d_i = 0.3$, on observe numériquement l'existence d'une

double lois de puissance pour le spectre d'énergie magnétique (voir Fig. III.3). Aux grandes échelles, on a un spectre Kolmogorovien en $k^{-5/3}$ suivi aux plus petites échelles par une loi de puissance en $k^{-11/3}$ sur près de 2 décades. Cette seconde zone inertielle apparaît uniquement quand $kd_i > 20$, autrement dit le terme Hall devient dominant à des échelles d'un ordre de grandeur inférieur à l'échelle inertielle des ions d_i . Dans ce régime particulier le terme Hall ne semble pas affecter la dynamique du "champ" de vitesse qui suit une loi de puissance en $k^{-5/3}$. Comme le montre la figure III.4 ce comportement est lié au rapport entre l'énergie magnétique et cinétique (à $t = 0$, il y a équipartition entre les énergies magnétique et cinétique.).

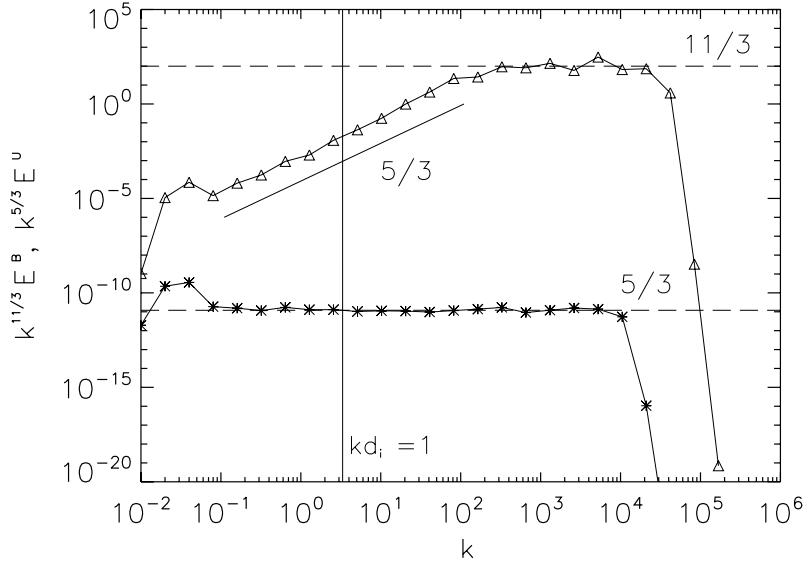


Figure III.3 – Spectres compensés de l'énergie magnétique (triangles) et cinétique (astérisques). Pour la clarté de la figure le spectre cinétique a été translaté à des valeurs plus faibles. La ligne verticale représente la valeur critique $kd_i = 1$.

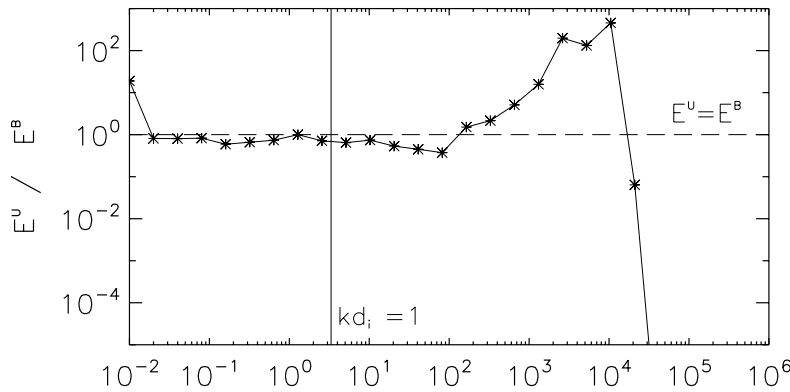


Figure III.4 – Rapport entre l'énergie spectrale cinétique et magnétique. La ligne en tirets représente l'équipartition d'énergie. La ligne verticale représente la valeur critique $kd_i = 1$.

Régime Hall MHD avec $d_i = 30$

En prenant une valeur de d_i suffisamment grande pour que le terme Hall domine l'intégralité de la zone inertielle, on peut voir sur la figure III.5 que l'énergie magnétique est dans un régime électron MHD en $k^{-7/3}$ tandis que l'énergie cinétique suit une loi de puissance plus pentue en $k^{-13/3}$.

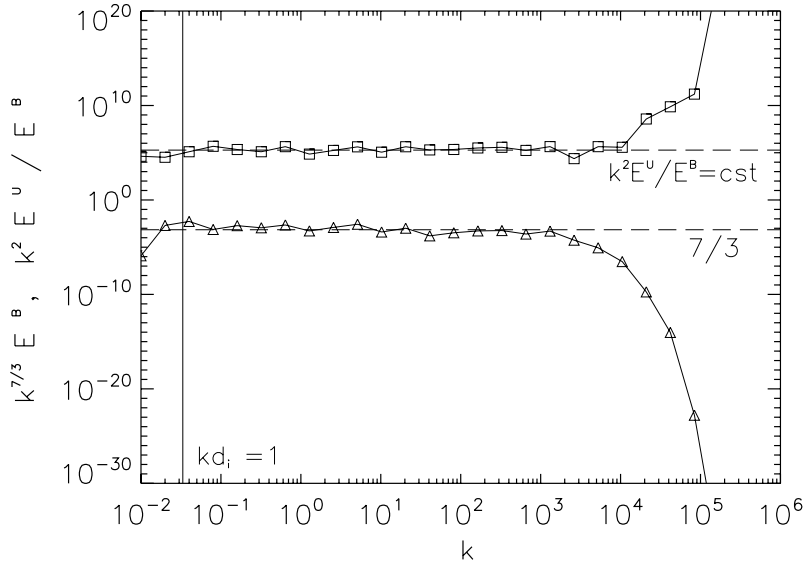


Figure III.5 – Spectres compensés de l'énergie magnétique (triangles) et cinétique (astérisques). Pour la clarté de la figure le spectre cinétique a été translaté à des valeurs plus élevées. La ligne verticale représente la valeur critique $kd_i = 1$.

3.3 Interprétations physiques

Hall MHD avec $d_i = 0.3$

Le régime turbulent observé dans la simulation numérique avec $d_i = 0.3$ ne peut être expliqué avec des arguments basés sur la constance du flux d'énergie dans la zone inertielle (voir section 2.2). Aux échelles MHD ($kd_i < 1$) les champs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{b}$ sont attachés dans une évolution commune en vertu du théorème du gèle. L'énergie cinétique et magnétique sont à peu près égales à toutes les échelles⁶ conformément aux observations qui ont été faites dans des simulations numériques directes (Politano et al. (1989) ([166])) et dans le vent solaire (Bavassano et al. (2000) [37]). Ce comportement s'étend au-delà de la zone critique $kd_i = 1$ sur presque deux décades, puis brusquement l'énergie cinétique domine (voir figure III.4). Dans cette zone c'est l'inertie des ions qui domine la dynamique et

6. L'énergie cinétique est légèrement inférieure car le champ magnétique a la propriété remarquable de pouvoir "stoker" de l'énergie sous forme de tension magnétique.

Chapitre III. Modélisation simplifiée de la turbulence MHD Hall

l'énergie cinétique est donc transférée vers les petites échelles avec un temps caractéristique unique, $\tau = l/u_l$. On obtient ainsi un spectre en $k^{-5/3}$ pour l'énergie cinétique. À des échelles $kd_i \gg 1$ l'énergie magnétique ne possède qu'un seul canal pour cascader vers les petites échelles. Il s'agit du terme Hall qui transfère l'énergie magnétique sur un temps caractéristique $\tau_{Hall} = l^2/(d_i b_l)$. En égalisant ces deux temps caractéristiques,

$$d_i b_l = l u_l$$

on obtient,

$$E^b(k) = (d_i k)^{-2} E^u(k) \sim k^{-11/3}.$$

Hall MHD avec $d_i = 30$

La description heuristique qui conduit au spectre en $k^{-11/3}$ est totalement modifiée dans le régime $d_i = 30$ pour lequel le terme Hall est dominant à toutes les échelles. Dans ce régime, l'inertie des ions est trop importante pour suivre le mouvement rapide des électrons et la dynamique est entièrement dictée par le champ magnétique. L'énergie magnétique est transférée sur des temps caractéristiques $\tau_{Hall} = l^2/(d_i b_l)$ et on obtient sans surprise un spectre en $k^{-7/3}$ (voir figure III.5).

Le spectre d'énergie cinétique vérifie quant à lui $k^2 E^U = E^B$ ce qui implique donc un spectre en $k^{-13/3}$.

Autrement dit, dans ce régime l'énergie magnétique domine toutes les échelles. Les temps caractéristiques de transfert de l'énergie pertinent sont donc maintenant le temps Hall $\tau_{Hall} = l^2/(d_i b_l)$ et le temps caractéristique associé à la force de Laplace $\tau_l = l u_l / b_l^2$. En égalisant ces deux temps caractéristiques, on obtient la relation,

$$d_i v_l = l b_l$$

qui donne,

$$E^u(k) = (d_i k)^{-2} E^b(k) \sim k^{-13/3}.$$

Nous montrerons au chapitre V que les résultats obtenus à partir du modèle simplifié shell MHD Hall peuvent être retrouvés à l'aide de simulations numériques directes (DNS). Les DNS apportent cependant une richesse supplémentaire qui permet d'aller beaucoup plus

loin dans l'analyse. Nous montrerons en particulier comment la prise en compte de la nature géométrique tridimensionnelle de la turbulence MHD Hall permet de construire un modèle théorique plus général pour expliquer les résultats obtenus avec le modèle shell.

Chapitre IV

Présentation et validation du code numérique

Sommaire

1	Méthode pseudo-spectrale	104
1.1	Comment éliminer la pression dans l'espace de Fourier ?	105
1.2	Discretisation spatiale périodique	106
1.3	Réduction spectrale	107
1.4	Théorème de Parseval	108
1.5	Itérations dans le temps	108
1.6	Calcul des termes non-linéaires	110
2	Méthode de dealiasing	111
2.1	Méthode des deux tiers	111
2.2	Méthode de phase-shift dealiasing	112
3	Forçage	113
3.1	Forçage statique	113
3.2	Forçage dynamique	114
4	Conditions initiales aléatoires	117
5	Validation du code	119
5.1	Solutions exactes non-linéaires de Mahajan	119
5.2	Comparaison entre solutions analytique et numérique.	122

LES EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES qui seront présentées au chapitre V ont été réalisées à partir d'un code open source développé au laboratoire *Statistical and Plasma Physics*

de l'Université libre de Bruxelles, appelé TURBO¹. J'ai modifié ce code pour les besoins de cette thèse de manière à ce qu'il puisse intégrer numériquement les équations de la MHD Hall incompressible.

À l'origine, le code TURBO a été conçu pour résoudre les équations de Navier-Stokes et MHD incompressible dans une géométrie à trois dimensions avec des conditions aux limites périodiques dans les trois directions.

Dans ce chapitre, nous résumons les aspects les plus importants du code que l'on peut trouver avec plus de détails dans le manuel d'utilisation téléchargeable sur le site

<http://aqua.ulb.ac.be/turbo>, ainsi que dans l'article Teaca et al. 2011 [193] pour tout ce qui concerne les forçage mécanique et électromoteur.

Nous présenterons également les tests qui ont été réalisés pour valider l'implémentation de l'effet Hall.

1 Méthode pseudo-spectrale

Les équations qui peuvent être résolues par le code TURBO sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t u_i &= -\partial_j(u_i u_j - b_i b_j) - \partial_i p + \nu \nabla^2 u_i + f_i + f_i^{Lorentz}, \\ \partial_t b_i &= -\partial_j(b_i u_j - u_i b_j) + \eta \nabla^2 b_i, \\ \partial_t c_\alpha &= -\partial_j(c_\alpha u_j) + \kappa_\alpha \nabla^2 c_\alpha + \sigma_\alpha(\{c_\beta\}),\end{aligned}$$

où u est le champ de vitesse, b le champ magnétique et c_β des scalaires passifs dont chacun est caractérisé par un coefficient de diffusion κ . La convention de sommation d'Einstein s'applique aux indices latin, mais pas aux indices grec qui correspondent aux scalaires passifs.

ν et η représentent respectivement la viscosité cinématique et la diffusivité magnétique. Le code offre la possibilité d'inclure des termes sources et des termes de réaction chimique par le biais de la fonction $\sigma(c)$.

Le code utilise une représentation de Fourier des champs magnétique et de vitesse. L'avantage principal de l'espace de Fourier réside dans la précision numérique et la simplicité algorithmique de l'opérateur différentiel ∇ , qui se réduit à une multiplication dans l'espace spectral, $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow ik \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$. Le point faible de cette méthode est l'utilisation de conditions aux limites périodiques qui introduisent une corrélation artificielle aux échelles du cube

1. Solver for TURbulent flows with periodic BOundary conditions.

et interdit l'étude de la turbulence dans des géométries complexes.

1.1 Comment éliminer la pression dans l'espace de Fourier ?

Comme nous l'avons souligné au chapitre I, l'hypothèse d'incompressibilité autorise de résoudre les équations de la MHD Hall sans se donner d'équation d'état pour exprimer la pression. Nous avons indiqué brièvement au chapitre III les idées qui permettent d'éliminer la pression des équations de Navier-Stokes dans l'espace de Fourier. Nous donnerons ici une démonstration complète de la méthode utilisée dans le code TURBO.

Pour ce faire, il convient d'exprimer l'équation,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (\text{IV.1})$$

dans l'espace de spectral.

En supposant que la dérivée partielle temporelle commute avec l'opération de sommation dans l'espace réel, on a,

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}).$$

Les termes non-linéaires se transforment en,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} &= \int \left[\int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{q} \right] \cdot \left[\int i\mathbf{p} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{p} \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= i \int \int \int (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{x} \\ &= i \int \int (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{k}) d\mathbf{q} d\mathbf{p} \\ &= i \int (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ &= i \int (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

En utilisant la convention d'Einstein les termes non-linéaires peuvent donc s'écrire,

$$ik_\beta N_{\alpha\beta}^{Y,Z}(\mathbf{k}) = \int ik_\beta \hat{Y}_\beta(\mathbf{q}) \hat{Z}_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

La représentation spectrale de l'équation du mouvement de la MHD Hall peut donc s'exprimer de la manière suivante,

$$\frac{\partial \hat{u}_\alpha(\mathbf{k})}{\partial t} = -ik_\beta [N_{\alpha\beta}^{u,u} - N_{\alpha\beta}^{b,b}] - \nu k^2 \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}) - ik_\alpha \hat{p}_*(\mathbf{k}). \quad (\text{IV.2})$$

En prenant la divergence de cette équation et en utilisant la condition d'incompressibilité, on obtient une équation de Poisson pour la pression,

$$k^2 \hat{p}_*(\mathbf{k}) = -k_\alpha k_\beta [N_{\alpha\beta}^{u,u} - N_{\alpha\beta}^{b,b}].$$

En insérant cette expression dans l'équation IV.2, on obtient en renommant l'indice $\alpha \rightarrow \gamma$,

$$\frac{\partial \hat{u}_\alpha(\mathbf{k})}{\partial t} = - \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2} \right) ik_\beta [N_{\alpha\beta}^{u,u} - N_{\alpha\beta}^{b,b}] - \nu k^2 \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}).$$

Le mode $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ correspond à une vitesse moyenne qui peut être éliminé par transformation Galiléenne.

Cette expression montre que le rôle de l'opérateur projection $\mathcal{P}_{\alpha\gamma}$,

$$\mathcal{P}_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\gamma} - \frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2},$$

est d'imposer la condition $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$, en projetant le terme non-linéaire sur un plan orthogonale à $\mathbf{k}^2$.

1.2 Discrétisation spatiale périodique

L'espace spectral discrétisé est défini par,

$$k_i \equiv \frac{2\pi}{\mathcal{L}}, \text{ pour } n_i \in \left[-\frac{N_i}{2} + 1, \frac{N_i}{2} \right].$$

En sélectionnant la taille du cube $\mathcal{L}$, on choisit le plus petit mode accessible k_0 , tandis que pour un cube donné le nombre de mode utilisé limitera le plus grand mode présent, k_{max} . Bien sûr en faisant tendre $\mathcal{L}$ et N_i vers l'infini on retrouve l'espace spectral continu. Par commodité, nous avons choisi $\mathcal{L} = 2\pi$ de manière à ce que les nombres d'ondes soient des entiers compris entre $\left[-\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} \right]$.

Dans l'espace réel, la discrétisation est représentée par une grille tridimensionnelle de

2. En effet, l'opérateur $\mathcal{P}_{\alpha\gamma}$ vérifie trivialement $k_\alpha \mathcal{P}_{\alpha\gamma} = 0$.

taille $\mathcal{L} = 2\pi$ dans les trois dimensions avec une distance minimale entre deux points $\Delta x = \mathcal{L}/N = \pi/k_{max}$.

Le passage d'une quantité q entre ces deux espaces se fait en utilisant la transformation de Fourier discrète,

$$\begin{cases} q(\mathbf{x}, t) = C_r \sum_{\mathbf{k}} \hat{q}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \\ \hat{q}(\mathbf{k}, t) = C_k \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \end{cases}$$

où C_r et C_k sont des coefficients de normalisation. Numériquement, cette transformée de Fourier est implémentée de manière optimale en utilisant un algorithme de transformation de Fourier rapide³. Cet algorithme permet de faire passer une fonction scalaire à trois dimensions d'un espace à l'autre en utilisant $3N^3 \log(N)$ au lieu de N^4 opérations si on implémente directement les équations. Cette réduction du nombre d'équations à résoudre permet d'atteindre numériquement des nombres de Reynolds relativement importants et a révolutionné la discipline.

1.3 Réduction spectrale

La représentation de Fourier des champs de vitesse et magnétique est définie sur une grille $\mathbb{C}$ de $(2N)^3$ points alors que leur équivalent réel est définie sur une grille $\mathbb{R}$ de N^3 points. À cause de la condition de réalité des champs $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})^* = \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k})$ et $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})^* = \hat{\mathbf{b}}(-\mathbf{k})$, où $*$ désigne le complexe conjugué, la grille $\mathbb{C}$ contient deux fois trop d'informations. Pour alléger les calculs sans modifier les résultats, on peut donc réduire le nombre de points de la grille $\mathbb{C}$ par un facteur deux dans les trois dimensions de l'espace.

On peut encore réduire le nombre de points de grille en tirant bénéfice de la condition de divergence nulle des champs qui, dans l'espace spectral a la forme $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0$ et $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}) = 0$. Cela implique que les trois composantes spatiales des champs ne sont pas des quantités indépendantes. On peut par exemple exprimer $u_y(\mathbf{k})$ et $b_y(\mathbf{k})$ par,

$$\begin{cases} \hat{u}_y(\mathbf{k}) = \frac{-k_x \hat{u}_x(\mathbf{k}) - k_z \hat{u}_z(\mathbf{k})}{k_y}, \\ \hat{b}_y(\mathbf{k}) = \frac{-k_x \hat{b}_x(\mathbf{k}) - k_z \hat{b}_z(\mathbf{k})}{k_y}, \end{cases}$$

et réduire ainsi de 1/3 l'information à mettre en mémoire.

3. Il s'agit de la *Fastest Fourier Transform in the West* (FFTW) développée au pays des Cow-boys bien après la guerre froide.

1.4 Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval nous assure que la transformation de Fourier est un opérateur unitaire c'est-à-dire qu'il conserve le produit scalaire de l'espace sur lequel il agit. Ainsi,

$$\sum_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N^6} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{k})^*. \quad (\text{IV.3})$$

On peut donc calculer des quantités globales quadratiques dans n'importe quels des deux espaces, ce qui est d'une grande utilité dans l'implémentation de nombreux diagnostics.

1.5 Itérations dans le temps

Connaissant la solution des équations de la MHD Hall $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ et $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t)$ au temps t , on veut estimer les solutions $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t + \Delta t)$ et $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t + \Delta t)$ au temps $t + \Delta t$. On doit donc déterminer un pas de temps Δt , puis avancer temporellement les champs de manière la plus précise possible.

Discrétisation temporelle

Pour résoudre numériquement un problème physique, il faut faire très attention à ce que pendant un pas de temps, la plus rapide des perturbations du système étudié ne puisse pas se propager sur une distance supérieure à une maille spatiale élémentaire. Cela impliquerait des problèmes de causalité évidente d'un point de vue physique. Au niveau numérique cela conduit à une instabilité de calcul qui engendre une erreur qui envahit rapidement la solution physique. Cette condition est appelée condition Courant-Friedrichs-Levy (CFL) et s'exprime en notant c la vitesse de la perturbation,

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c}.$$

On voit bien grâce à cette condition, la cruauté du terme Hall vis-à-vis du numéricien. Les modes dispersifs induits par l'effet Hall ont en effet une vitesse de propagation qui dépend de la longueur d'onde. Ainsi, plus on affine la résolution spatiale, plus on autorise des ondes à se propager rapidement et donc plus on doit diminuer le pas de temps.

Pour éviter tout problème de stabilité induit par le caractère intermittent de la turbulence, nous avons utilisé dans les simulations un pas de temps adaptatif évalué tous les deux pas

de temps par,

$$\Delta t = \min \left\{ \frac{\Delta x}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\Delta x}{\|\mathbf{b}\|} \right\} C_{CFL},$$

avec $C_{CFL} = 0.8$.

Avancement temporel

L'évolution temporelle est assurée par un schéma numérique de type Runge-Kutta du troisième ordre (Williamson 1980 [203]). Ce schéma numérique ne retient que des termes proportionnels à $(\Delta t)^\alpha$, avec $\alpha \leq 4$ dans le développement en série de Taylor de la solution. L'erreur totale accumulée est donc de l'ordre de $(\Delta t)^3$.

On peut schématiquement réécrire les équations de la MHD Hall dans l'espace spectral,

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{N}^u(u, b) - \nu k^4 \hat{u}, \\ \frac{d\hat{b}}{dt} = \hat{N}^b(u, b) - \nu k^4 \hat{b}. \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Les termes $\hat{N}^u(u, b)$ et $\hat{N}^b(u, b)$ contiennent toutes les informations relatives aux termes non-linéaires qui apparaissent dans les équations de la Hall MHD y compris la contribution de la pression.

L'utilisation de l'hyperviscosité se justifie de la même manière que pour les modèles shell décrits au chapitre III.

En faisant le changement de variables,

$$\begin{cases} \hat{u} = e^{-\nu k^4 t} \hat{v}, \\ \hat{b} = e^{-\mu k^4 t} \hat{m}. \end{cases}$$

Les équations IV.4 se réécrivent en fonction des nouvelles variables de vitesse $\hat{v}$ et magnétique $\hat{m}$,

$$\begin{cases} \frac{d\hat{v}}{dt} = e^{\nu k^4 t} \hat{N}^u(u, b) = e^{\nu k^4 t} \hat{N}^u(e^{-\nu k^4 t} v, e^{-\nu k^4 t} m), \\ \frac{d\hat{m}}{dt} = e^{\mu k^4 t} \hat{N}^b(u, b) = e^{\mu k^4 t} \hat{N}^b(e^{-\nu k^4 t} v, e^{-\nu k^4 t} m). \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Résoudre les équations pour $\hat{v}$ et $\hat{m}$ est analytiquement équivalent à résoudre les équations pour $\hat{u}$ et $\hat{b}$. En revanche, d'un point de vue numérique, cela n'est pas équivalent car l'algorithme de Runge-Kutta utilisé dans le code (Williamson 1980 [203]) a l'avantage de produire une solution exacte pour la solution linéaire ($\hat{N}^u = \hat{N}^b = 0$) du système

d'équations IV.5, ce qui n'est pas le cas pour les équations IV.4.

L'algorithme utilisé dans le code est multi-pas ($n = 1, 2, \dots, p$) et a la forme,

$$\begin{aligned} g_n^u &= e^{-\nu k^4 \chi_n \Delta t} \left[g_{n-1}^u + \gamma_n N^u(u_{n-1}, b_{n-1}) \right], \\ g_n^b &= e^{-\mu k^4 \chi_n \Delta t} \left[g_{n-1}^b + \gamma_n N^b(u_{n-1}, b_{n-1}) \right], \\ \hat{u}_n &= e^{-\nu k^4 \chi_n \Delta t} \left[\hat{u}_{n-1} + \alpha_n \Delta t N^u(u_{n-1}, b_{n-1}) \right] + \beta_n \Delta t g_n^u, \\ \hat{b}_n &= e^{-\mu k^4 \chi_n \Delta t} \left[\hat{b}_{n-1} + \alpha_n \Delta t N^b(u_{n-1}, b_{n-1}) \right] + \beta_n \Delta t g_n^b, \end{aligned}$$

avec g^u et g^b des variables intermédiaires. Dans ce schéma numérique, g_0^u et g_0^b sont nulles. Les autres paramètres $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et χ_n ne sont pas uniques, ils doivent être choisis de manière à ce que les solutions $\hat{u}(t+h)$ et $\hat{b}(t+h)$ soient d'ordre h^{p+1} . Le code propose deux types de schéma Runge-Kutta d'ordre 3 avec $p = 3$ ou $p = 4$ sous-pas, en fonction de la méthode de dealiasing utilisée⁴ (voir section 2 et 1.6).

1.6 Calcul des termes non-linéaires

Déterminer directement les termes non-linéaires dans l'espace spectral est prohibitif du point de vue du coût numérique à cause de la convolution qui apparaît dans cet espace. Au lieu de résoudre chaque convolution individuellement, les termes non-linéaires sont traités de la manière suivante dans le code,

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \hat{u}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \right|_{nl} = -i\mathbf{k} \cdot [\widehat{\mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{b}\mathbf{b}}](\mathbf{k}), \\ \left. \frac{\partial \hat{b}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \right|_{nl} = -i\mathbf{k} \cdot [\widehat{\mathbf{u}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{u}}](\mathbf{k}) - d_i \mathbf{k} \times \{ \mathbf{k} \cdot [\widehat{\mathbf{b}\mathbf{b}}] \}(\mathbf{k}), \end{cases}$$

où $\mathbf{u}\mathbf{u}$, $\mathbf{b}\mathbf{b}$, $\mathbf{u}\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}\mathbf{u}$ représentent le produit dans l'espace réel⁵ et $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{b}\mathbf{b}}$, $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{u}}$ et $\widehat{\mathbf{b}\mathbf{b}}$ les transformées de Fourier des termes sous le chapeau. Les termes non-linéaires qui apparaissent dans l'équation d'évolution de la vitesse et dans le terme Hall correspondent respectivement à la divergence et au rotationnel de la divergence d'un tenseur symétrique, tandis que le terme non-linéaire $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{u}}$ correspond à la divergence d'un tenseur antisymétrique. On peut tirer bénéfice de ces symétries pour réduire le nombre

4. La troncation de la transformée de Fourier discrète à l'ordre N , et le calcul des termes d'advection dans l'espace réel ont pour conséquence l'apparition de modes "artificielles" (Canuto et al. 1988 [208]). En pratique seulement deux tiers des modes de Fourier sont utilisables. On parle de "aliasing".

5. C'est la raison pour laquelle on appelle ce type de méthode numérique *pseudo-spectrale*.

de transformées de Fourier que l'on doit effectuer : 6 pour les tenseurs symétrique et 3 pour le tenseur antisymétrique, au lieu des 9 transformations requises pour un tenseur quelconque.

2 Méthode de dealiasing

Bien que cette approche pour le calcul des termes non-linéaires soit beaucoup plus rapide que le calcul direct de la convolution, elle introduit un problème supplémentaire appelé aliasing. L'erreur d'aliasing provient du fait qu'une onde plane avec un nombre d'onde k prend exactement la même valeur sur la grille de calcul qu'une onde plane de vecteur d'onde $k + Nk_0$. Quand les non-linéarités sont calculées, l'erreur d'aliasing devient un problème sérieux.

Considérons une quantité scalaire s quelconque représentée par des modes $k \in k_0 \times [(-N/2 + 1), N/2]$. Le carré s^2 est alors représenté par des modes $k \in k_0 \times [(-N + 2), N]$. Ainsi à cause de la périodicité de la grille de calcul, le mode $k = k_0(-N + 2)$ de s^2 est indiscernable du mode $k = 2k_0$ de s . Deux méthodes sont proposées dans le code TURBO pour contourner la difficulté (Patterson 1971 [163]).

2.1 Méthode des deux tiers

Une méthode possible pour résoudre le problème de l'aliasing et de garder uniquement les modes $k \in k_0 \times [(-M/2 + 1), M/2]$ avec $M < N$ dans le calcul des non-linéarités, les autres modes étant maintenus égal à zéro.

Considérons en effet un mode $k = qk_0$ de s avec $0 \leq q < M/2$. Si $2q > N/2$, alors ce mode va créer un aliasing dans le mode $2q - N$ qui est compris entre $-N/2$ et $M - N$. Toutefois, si $M - N < -M/2 + 1$ le mode contaminé appartient aux modes qui sont maintenus à zéro et le problème d'aliasing est éliminé. La plus grande valeur de M compatible avec cette inégalité est $M = 2/3N$ ($M - N < -M/2 + 1 \Rightarrow 3M/2 < N + 1$). La méthode des deux tiers consiste donc simplement à garder les modes nuls en dehors de l'intervalle $[(-N/3 + 1), N/3]$. Pour cette méthode, le code TURBO utilise trois sous-pas temporels dans la méthode de Runge-Kutta.

2.2 Méthode de phase-shift dealiasing

La seconde méthode est basée sur la propriété suivante. Si la grille est translatée sur une distance d , tous les modes sont multipliés par e^{idqk_0} . L'erreur d'aliasing peut être supprimée en trois temps : i) on translate la grille sur une distance d ; ii) on calcule les non-linéarités sur la grille translatée, iii) on re-translate la grille à sa position initiale.

Considérons un mode $k = qk_0$ avec $2q > N/2$ qui est donc contaminé. La contribution provenant de l'erreur d'aliasing de ce mode est multiplié par e^{idqk_0} dans la première étape, par $e^{id(2q-N)k_0}$ dans la seconde et par $e^{-id(2q-N)k_0}$ dans la troisième. Au final, les trois étapes peuvent donc se résumer par la multiplication de l'erreur d'aliasing par un facteur e^{idNk_0} . Bien sûr si $2q \leq N/2$ les trois étapes n'engendrent aucun changement. Les modes non contaminés ne sont donc pas affectés par la procédure.

Si $d = \pi/(nk_0) \equiv \Delta$, l'erreur d'aliasing est multiplié par $e^{i\pi} = -1$. L'astuce consiste à calculer les termes non-linéaires sur deux grilles translatées respectivement de $d = +\Delta/2$ et $d = -\Delta/2$ de sorte que les erreurs d'aliasing soient exactement l'opposée l'une de l'autre sur chacun des grilles. En sommant les résultats des calculs sur les deux grilles on annule donc l'erreur d'aliasing.

L'avantage de cette méthode par rapport à celle des deux tiers, c'est que l'on conserve tous les modes et que l'on augmente ainsi considérablement la résolution numérique. Le défaut c'est qu'en 3 dimensions, il faut calculer 8 fois les termes non-linéaires ce qui est absolument prohibitif. Pour résoudre ce dilemme, il faut faire un compromis. L'idée c'est de calculer les termes non-linéaires F_i translatés sur des grilles différentes à chacun des sous pas de la méthode de Runge-Kutta :

$$y_{n+1} = y + (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)/4 * dt + \dots \quad (\text{IV.6})$$

Cette méthode permet donc de calculer les 8 termes non-linéaires en 2 itérations. Bien sûr les F_i ne sont pas évalués exactement aux mêmes temps, de sorte que l'erreur d'aliasing est supprimée qu'à l'ordre dt . En effectuant une translation aléatoire tous les deux pas temps, l'erreur d'aliasing restante est multipliée par un nombre aléatoire ce qui diminue l'impact de l'approximation sur la précision du calcul.

3 Forçage

Pour atteindre un régime stationnaire (au sens statistique), il faut en permanence injecter de l'énergie dans le système pour compenser celle qui est dissipée. Une manière de faire est d'imposer des contraintes physiques à l'un, ou aux deux champs. Numériquement il suffit de fixer la valeur des modes de Fourier correspondant aux échelles auxquelles on veut injecter l'énergie. On peut également appliquer une force externe. Le code TURBO permet par exemple la prise en compte des forces inertielles induites par une rotation solide.

Les équations de la MHD Hall incompressible sous l'influence d'une force externe quelconque s'exprime par,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} + \nu \nabla^4 \mathbf{u} + \mathbf{f}^u - \nabla p, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} - d_i \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}] + \eta \nabla^4 \mathbf{b} + \mathbf{f}^b.\end{aligned}$$

Les forces cinétique $f^u(\mathbf{x}, t)$ et magnétique $f^b(\mathbf{x}, t)$ sont à divergence nulle puisque les champs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{b}$ le sont aussi.

3.1 Forçage statique

Il est possible d'imposer une force statique identique pour tout temps qui mime par exemple, une instabilité de type Taylor Green,

$$\begin{aligned}f_x(\mathbf{x}) &= A \sin(k_x^f x) \cos(k_y^f y) \cos(k_z^f z), \\ f_y(\mathbf{x}) &= A \cos(k_x^f x) \sin(k_y^f y) \cos(k_z^f z), \\ f_z(\mathbf{x}) &= 0,\end{aligned}$$

où A représente l'amplitude de la force et $\mathbf{k}^f$ les modes choisis pour le forçage.

Un autre type de force statique et la force de Kolmogorov,

$$\begin{aligned}f_x(\mathbf{x}) &= A \sin(k^f y), \\ f_y(\mathbf{x}) &= 0, \\ f_z(\mathbf{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Cette force permet de construire numériquement une couche de cisaillement qui génère la turbulence via une instabilité de Green.

3.2 Forçage dynamique

Forçage cinétique :

Dans les simulations numériques que nous avons réalisées, nous avons utilisé des forces qui changent dynamiquement dans le temps avec les champs. Dans le cas d'un forçage cinétique dynamique, les forces sont proportionnelles aux champs de vitesse et de vortacité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$,

$$\hat{\mathbf{f}}^u(\mathbf{k}) = \alpha_k \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + \beta_k \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}),$$

où α_k et β_k sont des paramètres réels qu'il faut déterminer. La force agit sur tous les modes N_f compris dans la coquille $s_f = [k_{inf}, k_{sup}]$.

Les paramètres α_k et β_k sont déterminés de manière à imposer un taux d'injection d'énergie cinétique ϵ_e et d'hélicité ϵ_h cinétique constant.

$$\left. \frac{\partial E^u}{\partial t} \right|_f = \epsilon_e, \quad (IV.7)$$

$$\left. \frac{\partial H^k}{\partial t} \right|_f = \epsilon_h. \quad (IV.8)$$

Le forçage injecte dans chacun des modes appartenant à s_f un taux d'énergie et d'hélicité cinétique constant égal à, respectivement, ϵ_e/N_f et ϵ_h/N_f où N_f est le nombre de modes contenus de s_f .

Le taux d'injection d'énergie cinétique nodal est défini par :

$$\epsilon_e(\mathbf{k}) = \left. \frac{\partial E^u(\mathbf{k})}{\partial t} \right|_f = \Re(\mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{f}^u(\mathbf{k})^*) = 2\alpha_k E^u(\mathbf{k}) + \beta_k H^k(\mathbf{k}).$$

Le taux d'injection d'hélicité cinétique nodal est défini par ⁶ :

$$\epsilon_h(\mathbf{k}) = \left. \frac{\partial H^k(\mathbf{k})}{\partial t} \right|_f = \Re(\mathbf{f}^u(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})^* + \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot [-i\mathbf{k} \times \mathbf{f}^u(\mathbf{k})]^*) = 2\alpha_k H^k(\mathbf{k}) + 4\beta_k k^2 E^u(\mathbf{k}).$$

6. À cause de la condition d'incompressibilité on a, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})^* = 2k^2 E^u(\mathbf{k})$.

Si les taux d'injection d'énergie ϵ_e et le taux d'injection d'hélicité ϵ_h sont les paramètres de contrôle, les paramètres de forçage α et β sont donc définis par :

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{2N_f} \frac{4k^2 E^u(\mathbf{k})\epsilon_e - H^k(\mathbf{k})\epsilon_h}{4k^2 E^u(\mathbf{k})^2 - H^k(\mathbf{k})^2}, \\ \beta_k &= \frac{1}{N_f} \frac{E^u(\mathbf{k})\epsilon_h - H^k(\mathbf{k})\epsilon_e}{4k^2 E^u(\mathbf{k})^2 - H^k(\mathbf{k})^2}.\end{aligned}$$

Une singularité apparaît pour α_k et β_k si le niveau d'hélicité est tel que $H^k(\mathbf{k}) = 2kE^k(\mathbf{k})$. Dans ce cas particulier, les modes de Fourier de la vitesse et de la vorticité sont parfaitement alignés $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = \pm k\mathbf{u}(\mathbf{k})$ et le forçage devient infini. Pour éviter ce problème, ϵ_e et ϵ_h sont définis par $\epsilon_h = 2k\epsilon_e\phi$ avec $\phi \in [-1, 1]$. Avec ce changement de variables et en notant $H^k(\mathbf{k})/2kE^u(\mathbf{k}) = s(\mathbf{k})$, les expressions des paramètres α et β de forçage deviennent :

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{\epsilon_e}{2N_f E^u(\mathbf{k})} \frac{1 - s(\mathbf{k})\phi}{1 - s(\mathbf{k})^2}, \\ \beta_k &= \frac{\epsilon_e}{2N_f k E^u(\mathbf{k})} \frac{\phi - s(\mathbf{k})}{1 - s(\mathbf{k})^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour un taux d'injection d'hélicité maximal $\phi = 1$, les coefficients de forçage se simplifient en,

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{\epsilon_e}{2N_f E^u(\mathbf{k})} \frac{1}{1 + s(\mathbf{k})^2}, \\ \beta_k &= \frac{\epsilon_e}{2N_f k E^u(\mathbf{k})} \frac{1}{1 + s(\mathbf{k})^2}.\end{aligned}$$

Puisque dans ce cas $s(\mathbf{k})$ doit être proche de 1, les paramètres de forçage ne divergent pas. De la même manière, le cas où $\phi = -1$ n'induit pas de divergence des coefficients.

Forçage cinétique et magnétique :

En forçant dynamiquement les champs de vitesse et magnétique le code TURBO permet d'imposer le taux d'injection de l'énergie magnétique et cinétique, tout en contrôlant le niveau de l'hélicité croisée normalisée et d'hélicité magnétique normalisée (Teaca et al. 2011 [193]).

Les taux d'injection d'énergie totale et d'hélicité croisée $H^c = \langle \Re \{ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}(-\mathbf{k}) \} \rangle$ sont

donnés par :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_f &= \left\langle \hat{\mathbf{f}}^u(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{f}}^b(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}(-\mathbf{k}) \right\rangle = \varepsilon^u + \varepsilon^b = \varepsilon, \\ \left.\frac{\partial H^c}{\partial t}\right|_f &= \left\langle \hat{\mathbf{f}}^u(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}(-\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{f}}^b(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}) \right\rangle = \sigma^u + \sigma^b = \varepsilon\sigma,\end{aligned}$$

où, d'après le théorème de Parseval, la moyenne sur le volume $\langle \dots \rangle$ est équivalente à la moyenne sur tous les modes. Les paramètres ε^u et ε^b représentent les puissances injectées respectivement par $\hat{\mathbf{f}}^u$ et $\hat{\mathbf{f}}^b$. Puisque l'hélicité croisée est limitée par l'énergie totale, la somme $\sigma^u + \sigma^b$ doit vérifier la condition : $-\varepsilon < \sigma^u + \sigma^b < +\varepsilon$. Ainsi le paramètre σ appartient à $[-1, 1]$.

Comme les champs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{b}$ sont solénoïdaux, $\mathbf{f}^u$ et $\mathbf{f}^b$ le sont aussi et il est commode d'utiliser une décomposition hélicitaire pour définir les forces (Waleffe 1998 [199]). La décomposition hélicitaire projette un vecteur $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})$ sur une base complexe $\mathbf{h}_\pm$ définie par,

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) = \hat{a}_+(\mathbf{k})\mathbf{h}_+ + \hat{a}_-(\mathbf{k})\mathbf{h}_-,$$

avec $\mathbf{h}_\pm = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \pm i\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_1 = (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{e}_2) / \|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{e}_2\|$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{k}/k$. Le vecteur d'onde $\boldsymbol{\lambda}$ est défini arbitrairement à condition de ne pas être parallèle à $\mathbf{k}$. Cette décomposition est très pratique pour assurer la condition de divergence nulle et pour calculer l'opérateur rotationnel car les vecteurs $\mathbf{h}_\pm$ sont les vecteurs propres de cet opérateur, $i\mathbf{k} \times \mathbf{h}_\pm = \pm k\mathbf{h}_\pm$. Dans cette base, la vorticité est définie par $\hat{\boldsymbol{\omega}}_\pm(\mathbf{k}) = \pm k\hat{u}_\pm(\mathbf{k})$ et le courant prend la forme $\hat{j}_\pm(\mathbf{k}) = \pm k\hat{b}_\pm(\mathbf{k})$.

Les forces dynamiques projetées sur cette base sont définies par :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_\pm^u(\mathbf{k}) &= \alpha_\pm^u(\mathbf{k})\hat{\mathbf{u}}_\pm(\mathbf{k}) + \beta_\pm^u(\mathbf{k})\hat{\mathbf{b}}_\pm(\mathbf{k}), \\ \hat{\mathbf{f}}_\pm^b(\mathbf{k}) &= \alpha_\pm^b(\mathbf{k})\hat{\mathbf{u}}_\pm(\mathbf{k}) + \beta_\pm^b(\mathbf{k})\hat{\mathbf{b}}_\pm(\mathbf{k}),\end{aligned}$$

si $|\mathbf{k}| \in s_f$ et sont nulles dans le cas contraire.

Pour un mode $\mathbf{k}$, l'énergie cinétique $E^u(\mathbf{k})$, magnétique $E^b(\mathbf{k})$, l'hélicité croisée $H^c(\mathbf{k})$, l'hélicité magnétique $H^m(\mathbf{k})$ et l'hélicité cinétique $H^k(\mathbf{k})$ peuvent facilement s'exprimer

dans la base hélicitaire par :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial t}\right|_f &= \frac{1}{N_f} \left[(\varepsilon_+^u + \varepsilon_-^u) + (\varepsilon_+^b + \varepsilon_-^b) \right] = \frac{1}{N_f} \varepsilon, \\ \left.\frac{\partial H^c(\mathbf{k})}{\partial t}\right|_f &= \frac{1}{N_f} \left[(\sigma_+^u + \sigma_-^u) + (\sigma_+^b + \sigma_-^b) \right] = \frac{1}{N_f} \sigma \varepsilon, \\ \left.\frac{\partial H^m(\mathbf{k})}{\partial t}\right|_f &= \frac{1}{N_f} \frac{1}{k} (\varepsilon_+^b - \varepsilon_-^b), \\ \left.\frac{\partial H^k(\mathbf{k})}{\partial t}\right|_f &= \frac{1}{N_f} k (\varepsilon_+^u - \varepsilon_-^u).\end{aligned}$$

Pour simplifier l'implémentation numérique, la force est définie de manière à ce que $\sigma_\pm^u = \sigma \varepsilon_\pm^u$ et $\sigma_\pm^b = \sigma \varepsilon_\pm^b$. Physiquement cela signifie que les forçages cinétique $\hat{f}^u$ et magnétique $\hat{f}^b$ injectent la même quantité d'hélicité croisée dans le système. On peut grâce à cette simplification, fixer les 8 paramètres réels $\alpha_\pm^u(\mathbf{k})$, $\beta_\pm^u(\mathbf{k})$, $\alpha_\pm^b(\mathbf{k})$, $\beta_\pm^b(\mathbf{k})$ à l'aide de seulement cinq paramètres de contrôle à savoir, les taux d'énergie cinétique et magnétique injectés $\varepsilon_\pm^u$, $\varepsilon_\pm^b$ et le niveau d'hélicité croisée σ ,

$$\begin{aligned}\alpha_\pm^u(\mathbf{k}) &= \frac{\varepsilon_\pm^u}{N_f} \frac{\sigma H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 2E_\pm^b(\mathbf{k})^2}{H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 4E_\pm^u(\mathbf{k})E_\pm^b(\mathbf{k})}, \\ \beta_\pm^u(\mathbf{k}) &= \frac{\varepsilon_\pm^u}{N_f} \frac{\sigma H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 2E_\pm^u(\mathbf{k})^2}{H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 4E_\pm^u(\mathbf{k})E_\pm^b(\mathbf{k})}, \\ \alpha_\pm^b(\mathbf{k}) &= \frac{\varepsilon_\pm^b}{N_f} \frac{\sigma H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 2E_\pm^b(\mathbf{k})^2}{H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 4E_\pm^u(\mathbf{k})E_\pm^b(\mathbf{k})}, \\ \beta_\pm^b(\mathbf{k}) &= \frac{\varepsilon_\pm^b}{N_f} \frac{\sigma H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 2E_\pm^u(\mathbf{k})^2}{H_\pm^c(\mathbf{k})^2 - 4E_\pm^u(\mathbf{k})E_\pm^b(\mathbf{k})}.\end{aligned}$$

Comme pour le cas du forçage dynamique purement cinétique, on voit apparaître un pôle dans les coefficients de forçage si $H_\pm^c(\mathbf{k})^2 = 4E_\pm^u(\mathbf{k})E_\pm^b(\mathbf{k})$. On impose donc la condition $\sigma \varepsilon_\pm \leq \sqrt{4\varepsilon_\pm^u \varepsilon_\pm^b}$ sur les paramètres de contrôle où $\varepsilon_\pm = \varepsilon_\pm^u + \varepsilon_\pm^b$.

4 Conditions initiales aléatoires

Isotrope :

L'amplitude A des modes initiaux dans le cas isotrope est calculée à partir de la for-

mule :

$$A(k, P_a, P_b) = \left(P_a \frac{k^4 \exp(-2(k/P_b)^2)}{2\pi (k C_k N)^2} \right)^{1/2}.$$

Les champs initiaux $\mathbf{u}$ et $\mathbf{b}$ sont définis dans l'espace de Fourier à partir des relations :

$$\begin{cases} u_x = \alpha k k_y + \beta \frac{k_x k_z}{k k_{xy}}, \\ u_y = \alpha k k_x + \beta \frac{k_y k_z}{k k_{xy}}, \\ u_z = -\beta \frac{k_y k_{xy}}{k}. \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

avec α et β des fonctions de nombre aléatoires θ_1 , θ_2 et ϕ :

$$\begin{cases} \alpha = A \cos(2\pi\phi) [\cos(2\pi\theta_1) + i \sin(2\pi\theta_1)], \\ \beta = A \sin(2\pi\phi) [\cos(2\pi\theta_2) + i \sin(2\pi\theta_2)], \end{cases}$$

et,

$$k_{xy} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}.$$

Il est aisé de démontrer que les formules IV.9 assurent la condition d'incompressibilité $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0$ indépendamment de α et β . Les expressions IV.9 ne sont pas définies pour $k_x = 0$, $k_y = 0$ et $k_{xy} = 0$. Dans ce cas, les modes sont calculés à partir des relations :

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta), \\ u_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha + \beta), \\ u_z = 0. \end{cases}$$

Anisotrope :

Pour une condition initiale anisotrope, nous avons utilisé l'expression :

$$A(k, P_a, P_b) = \left(P_a \frac{k_{\perp}^4 \exp(-2(k_{\perp}/P_b)^2) * k_{\parallel}^5 \exp(-2(k_{\parallel}/P_b)^2)}{2\pi (C_k N)^2} \right)^{1/2}.$$

5 Validation du code

Le calcul numérique induit trois sources d'erreurs intrinsèques liées au passage du continu au discret. Les deux premières sont liées aux modes de représentation, de stockage et de calcul des ordinateurs.

Par exemple une machine fonctionnant avec 4 chiffres significatifs donnera 0.0001 pour le calcul de $\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$.

De manière plus pernicieuse, il peut y avoir une perte pure et simple d'information lorsque l'on soustrait deux nombres très proches. Par exemple $\frac{71}{500} - \frac{1}{7}$ donnera $0.1420 - 0.1429 = -0.0009$ alors que $-\frac{3}{3500} \simeq -8.5714 \cdot 10^{-4}$. On passe donc de 4 chiffres significatifs à 1 chiffre significatif par une simple soustraction. Cela peut avoir des conséquences importantes pour le calcul de dérivées dans l'espace réel, qui impliquent des soustractions de nombres réels proches. Heureusement, et c'est là un énorme avantage des méthodes spectrales, ce problème ne se pose pas si on dérive dans l'espace de Fourier.

La troisième erreur est liée au schéma numérique qui remplace systématiquement une relation "exacte" par une autre plus simple et numériquement manipulable. C'est le cas d'une série de Taylor tronquée (erreur de troncature), de l'approximation d'une dérivée par une différence finie ou encore de l'estimation d'une quadrature ($\int_a^b f(x)dx \approx f(a)(b-a)$). L'erreur de schéma est généralement l'erreur dominante.

Il existe également une erreur extrêmement courante et dévastatrice (je l'ai apprise à mes dépens durant ma thèse) liée au calcul numérique. Il s'agit de l'erreur de programmation humaine. C'est afin de déterminer si je n'avais pas commis ce type d'erreur en implémentant l'effet Hall sur le code TURBO que j'ai testé des solutions exactes particulières et non-linéaires de la MHD Hall (Mahajan 2005 [18]).

5.1 Solutions exactes non-linéaires de Mahajan

Sous la forme de vorticité généralisée, les équations de la MHD Hall s'écrivent,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [(\mathbf{V} - d_i \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (\text{IV.10})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B} + d_i \nabla \times \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{V} \times (\mathbf{B} + d_i \nabla \times \mathbf{V})]. \quad (\text{IV.11})$$

Chapitre IV. Présentation et validation du code numérique

Afin de trouver les solutions de type ondes, on scinde le champ magnétique et le champ de vitesse en une partie moyenne $\mathbf{B}_0$ et $\mathbf{V}_0$ et une partie fluctuante $\mathbf{b}$ et $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}; \quad \mathbf{V} = \mathbf{v},$$

et l'on substitue ces expressions dans les équations IV.10 et IV.11,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \nabla [(\mathbf{v} - d_i \nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0 + (\mathbf{v} - d_i \nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}], \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{b} + d_i \nabla \times \mathbf{b}) &= \nabla \times [\mathbf{v} \times (d_i \nabla \times \mathbf{v} + \mathbf{b}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]. \end{aligned}$$

Plutôt que de linéariser ces équations, on considère les solutions particulières qui vérifient,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - d_i \nabla \times \mathbf{b} &= \alpha_k \mathbf{b}, \\ \mathbf{b} + d_i \nabla \times \mathbf{v} &= \beta_k \mathbf{v}, \end{aligned}$$

ce qui réduit le problème à résoudre le système,

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \alpha_k \nabla \times [\mathbf{b} \times \mathbf{B}_0], \quad (\text{IV.12})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (1/\beta_k) \nabla \times [\mathbf{b} \times \mathbf{B}_0]. \quad (\text{IV.13})$$

On est donc passé d'un système de 6 équations non-linéaires à six inconnues, à un système linéaire de 12 équations à 8 inconnues. Le système est sur-déterminé et il existe donc des relations entre certaines inconnues.

Afin de les déterminer, on peut noter que les équations IV.13 et IV.13 admettent des solutions de la forme,

$$\mathbf{b} = b_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\alpha_k(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})t), \quad (\text{IV.14})$$

$$\mathbf{v} = v_k \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\frac{1}{\beta_k}(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})t\right). \quad (\text{IV.15})$$

Ainsi, si IV.14 et IV.15 vérifient IV.12 et IV.12, alors nécessairement on a $\beta_k = 1/\alpha_k$. De plus, en substituant IV.14 et IV.15 dans IV.12 et IV.12 on a,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_k - id_i \mathbf{k} \times \mathbf{b}_k = \alpha_k \mathbf{b}_k \\ \mathbf{b}_k + id_i \mathbf{k} \times \mathbf{v}_k = \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{v}_k \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_k - \alpha_k \mathbf{b}_k = id_i \alpha_k \mathbf{k} \times \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k - \alpha_k \mathbf{b}_k = id_i (\mathbf{k} \times \mathbf{b}_k) \end{array} \right. \quad (\text{IV.16})$$

Par conséquent,

$$\mathbf{b}_k = \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

ce qui est l'analogie MHD Hall de la condition d'Alfvén $\mathbf{u} = \pm \mathbf{b}$ obtenue en MHD. On en déduit que,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{v}_k = -i \frac{1 - \alpha_k^2}{d_i \alpha_k} \mathbf{v}_k. \quad (\text{IV.17})$$

Le produit scalaire de cette dernière relation avec $\mathbf{v}_k$ étant nul, on a $\mathbf{v}_k^i = \pm \mathbf{v}_k^r$ (les indices i et r représentent respectivement la partie complexe et imaginaire). De même, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k^i = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k^r = 0$. On peut donc construire une base orthonormée directe à partir de $\mathbf{v}_k^r / \|\mathbf{v}_k^r\|$, $\mathbf{v}_k^i / \|\mathbf{v}_k^i\|$ et $\mathbf{k} / \|\mathbf{k}\|$ que l'on peut en toute généralité identifier respectivement à $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ et $\hat{\mathbf{e}}_z$. Ainsi, $\mathbf{v}_k$ peut s'écrire sous la forme,

$$\mathbf{v}_k = A_0 [\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y] \exp [ikz + i\alpha_k k (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{B}_0)t],$$

où A_0 est un nombre réel représentant l'amplitude de l'onde. Il ne reste plus qu'à déterminer α_k . En appliquant l'opérateur $[\mathbf{k} \times]$ à l'équation IV.17 on obtient par identification,

$$k = \pm \frac{1 - \alpha_k^2}{d_i \alpha_k} \implies \alpha_{k\pm} = \left[-\frac{d_i k}{2} \pm \left(\frac{(d_i k)^2}{4} + 1 \right)^{1/2} \right].$$

Au final, on obtient donc la relation de dispersion,

$$\omega_{\pm} = -k \left[-\frac{d_i k}{2} \pm \left(\frac{(d_i k)^2}{4} + 1 \right)^{1/2} \right] (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{B}_0).$$

Dans la limite $k \ll 1$,

$$\alpha_{\pm} \longrightarrow \pm 1, \quad \omega_{\pm} \longrightarrow \mp k (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{B}_0),$$

Chapitre IV. Présentation et validation du code numérique

on retrouve les relations de dispersion des ondes contra-propageantes d'Alfvén.

Dans la limite $k \gg 1$ on obtient deux ondes vérifiant,

$$\begin{cases} \alpha_+ \longrightarrow 1/k, & \omega_{N+} \longrightarrow -(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{B}_0) \\ \alpha_- \longrightarrow -k, & \omega_{N-} \longrightarrow (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{B}_0)k^2 \end{cases}$$

qui s'apparentent aux ondes whistlers pour le mode $-$ et cyclotron ionique pour le mode $+$.

Finalement, la solution générale s'exprime par (Mahajan et al. 2005 [18]),

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & B(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y)\exp[ikz + i\alpha_{k\pm}k(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{B}_0)t] \\ & + C(\hat{\mathbf{e}}_y + i\hat{\mathbf{e}}_z)\exp[ikx + i\alpha_{k\pm}k(\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{B}_0)t] \\ & + A(\hat{\mathbf{e}}_z + i\hat{\mathbf{e}}_x)\exp[iky + i\alpha_{k\pm}k(\hat{\mathbf{e}}_y \cdot \mathbf{B}_0)t]. \end{aligned}$$

5.2 Comparaison entre solutions analytique et numérique.

mode	d_i	B_0	A	B	C	$n_x \times n_y \times n_z$	k	ω
+	1.0	30	0.3	0.2	0.1	$32 \times 32 \times 32$	2π	0.8284271247

Tableau IV.1 – Paramètres numériques utilisés pour la validation du code par les solutions exactes non-linéaires de Mahajan (Mahajan et al. 2005 [18]).

n	dt	$ U - U_{analytique} $
1	0.01	$1.17613863 \cdot 10^{-9}$
2	0.001	$1.176170 \cdot 10^{-12}$
3	0.0001	$2.665 \cdot 10^{-15}$

Tableau IV.2 – Différence entre la solution analytique et la solution numérique en fonction du pas de temps. L'erreur numérique est proportionnelle à dt^3 conformément à l'erreur théorique relative au schéma de Runge-Kutta 3.

Pour différentes valeurs de dt fixées et pour un temps correspondant à une période T , nous avons calculé la différence maximale sur tout le maillage numérique et $\forall t \in [0, T]$, entre la solution analytique $U_{analytique}$ et la solution numérique U .

Pour les paramètres donnés au tableau IV.1 et pour un calcul en double précision, nous avons obtenu les résultats indiqués dans le tableau IV.2.

Les résultats obtenus montrent que l'erreur numérique est proportionnelle à dt^3 conformément à l'erreur théorique relative au schéma numérique de Runge-Kutta 3 utilisé dans

le code. Cela prouve que l'effet Hall est bien implémenté dans le code.

Nous avons également étudié la sensibilité de la solution numérique par rapport au coefficient CFL. Avec un coefficient de 0.8 les modes non-linéaires de Mahajan se propagent dans la grille numérique sans déformation et sur des temps très longs (voir Fig. 5.2), l'erreur de troncature est donc parfaitement maîtrisable. Les expériences numériques présentées au chapitre V ont toutes été réalisées avec des coefficients CFL $\lesssim 0.8$.

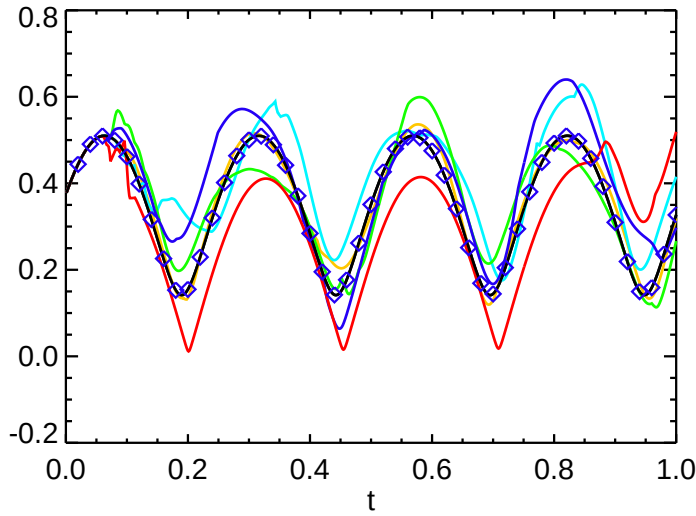


Figure IV.1 — Comparaison entre la solution analytique en un point (courbe noire) et des solutions numériques obtenues avec des pas de temps adaptatifs imposant des coefficients CFL variant par pas réguliers entre 0.98 et 1.02. Les losanges représentent la solution numérique obtenue avec un coefficient CFL de 0.8. La parfaite adéquation avec la solution analytique prouve la bonne implémentation du terme Hall dans le code.

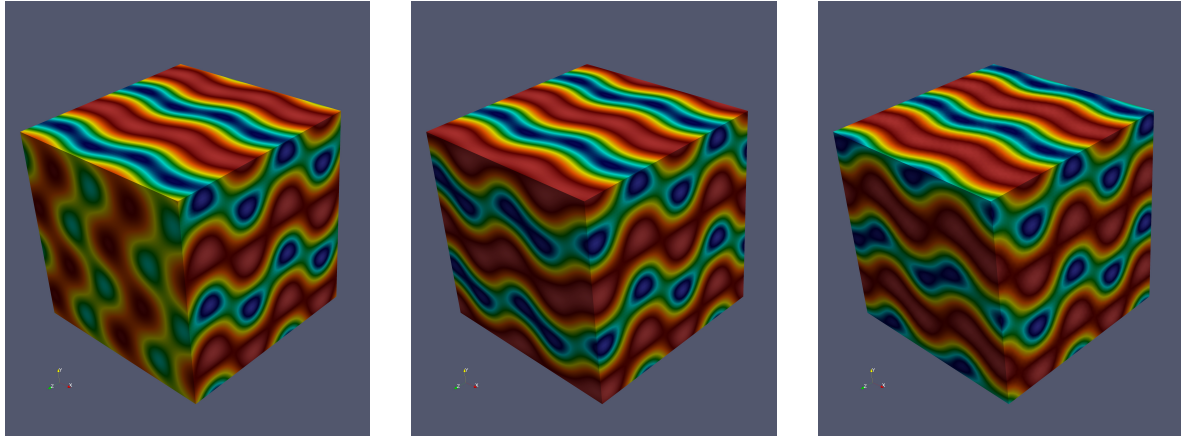


Figure IV.2 — Norme du champ de vitesse à trois temps consécutifs montrant la propagation d'une solution exacte non-linéaire de Mahajan (Mahajan et al. 2005 [18]). Les paramètres de l'onde non-linéaire sont donnés au tableau IV.1.

Chapitre V

Brisure Spontanée de symétrie chirale en turbulence Hall MHD

Sommaire

1	Brisure spontanée de symétrie et chiralité	126
1.1	Brisure spontanée de symétrie	126
1.2	La symétrie chirale	127
2	Levée de dégénérescence des ondes d'Alfvén et brisure de symétrie chirale induite par effet Hall	129
2.1	Décomposition hélicitaire complexe	129
2.2	Comment quantifier la chiralité?	132
3	Évidences numériques de brisure spontanée de symétrie chi- rale en turbulence MHD Hall	135
3.1	Paramètres de l'expérience numérique	135
3.2	Résultats numériques	137
4	Modèle heuristique de la turbulence chirale MHD Hall : IMHD versus EMHD	139
4.1	Le concept de vortex généralisé	139
4.2	Prédictions théoriques	141
5	Flux d'énergies et structures cohérentes	147
5.1	Flux d'énergie	147
5.2	Structures cohérentes et beltramisation	151
6	Turbulence MHD Hall anisotrope	157
6.1	Théorie synthétique de Goldreich-Sridhar et Iroshnikov-Kraichnan	158

DANS CE CHAPITRE, nous présentons des évidences numériques de l'existence d'une brisure spontanée de symétrie chirale induite par effet Hall en régime turbulent isotrope. Une grandeur physique appelée polarisation magnétique normalisée est introduite pour discriminer les fluctuations polarisées à droite et à gauche. Un spectre en $k^{-7/3}$ est trouvé aux petites échelles pour les fluctuations droites correspondant au régime électron MHD (EMHD). La chiralité révèle un nouveau régime aux grandes échelles pour les fluctuations gauches qui suivent une loi en $k^{-11/3}$. Ce nouveau régime est appelé ion MHD (IMHD). Ces résultats sont expliqués heuristiquement en réécrivant les équations de la MHD Hall sous la forme d'un système d'équations de vortex généralisés. Les prédictions théoriques déduites du modèle chiral sont comparées avec les mesures *in situ* de la turbulence du vent solaire.

Nous présentons également les structures dominantes générées par la turbulence MHD Hall et discutons des processus dissipatifs associés.

L'effet d'un champ moyen sur la dynamique turbulente EMHD est également étudié d'un point de vue théorique et numérique.

1 Brisure spontanée de symétrie et chiralité

1.1 Brisure spontanée de symétrie

Dans leurs efforts permanent pour décrire la nature, les scientifiques se sont toujours attachés à la représenter d'une façon suffisamment simple pour être accessible à la raison. Ainsi, la théorie cosmologique proposée par Platon consistait à associer à chaque "élément" (l'eau, l'air, la terre, le feu) un polyèdre régulier¹. Ces objets ont la propriété d'être invariants par des transformations formant un groupe de symétrie. La symétrie était donc chez les grecs au cœur de l'explication du monde. Il est tout à fait remarquable de constater que plus de deux millénaires plus tard, avec l'essor de la théorie de la relativité et de la mécanique quantique, la symétrie, de simple conséquence des lois de la physique est devenue principe. On pose désormais *a priori* des équations conformes aux lois d'invariance par un groupe de symétrie avant de les confronter à l'expérience.

En mécanique rationnelle classique, le théorème de Noether stipule que derrière chaque symétrie des lois de la nature se cache la conservation d'une quantité physique et réci-

1. Il existe neuf polyèdres réguliers dont cinq sont convexes et que l'on appelle aussi solides de Platon.

proquement. Autrement dit, les lois de symétrie ne peuvent régner que sur des systèmes physiques dans lesquels les lois de conservation sont déjà instaurées. La symétrie parfaite ne gouverne donc que des systèmes physiques immobiles, sans passé et sans avenir, où en quelque sorte le temps ne s'écoule pas.

Toutefois, bien que les équations conservent leurs symétries, certaines de leurs solutions peuvent ne pas l'être, on parle alors de *brisure spontanée de symétrie*. Le caractère "spontané" de cette rupture de symétrie signifie que ce n'est pas une action extérieure à la dynamique qui produit ce changement brutal.

Par exemple, dans un matériau ferromagnétique porté à haute température, les atomes peuvent s'assimiler à de petits aimants orientés dans n'importe quelle direction par l'agitation thermique. En moyenne l'ensemble n'est pas orienté dans une direction donnée et il y a donc invariance par rotation. Mais à plus basse température, les aimants finissent par s'orienter spontanément dans une seule direction et l'assemblée d'atome devient alors aimanté. La symétrie par rotation a été brisée spontanément, il y a eu ce que l'on appelle un changement de phase.

Les brisures spontanées de symétrie jouent également un rôle majeur dans la genèse de l'univers. Aux températures très élevées qui régnaient juste après le Big Bang, les différences entre particules disparaissent dans une "soupe" primordiale possédant un haut degré de symétrie. Au fur et à mesure qu'elle refroidit, la matière qui constitue l'univers brise une symétrie après l'autre et autorise ainsi l'apparition de structures de plus en plus différenciées. "C'est la dissymétrie qui crée le phénomène", disait Pierre Curie.

1.2 La symétrie chirale

Par définition un objet est symétrique si, après avoir été soumis à une certaine action, son apparence n'est pas modifiée. On peut ainsi, sans en modifier l'apparence, déplacer un cube ou une sphère. L'objet et l'image coïncident par une simple translation. Par contre, on ne peut pas faire coïncider la main droite et la main gauche par un simple déplacement dans l'espace². C'est une autre symétrie qui intervient : la chiralité³ ou symétrie par réflexion dans un miroir plan. L'image virtuelle d'une main droite est une main gauche. Les deux mains sont symétriques par rapport au miroir plan.

Les formes chirales nous entourent sans que nous n'en soyons toujours conscients. Par exemple, la rotation des anticyclones se fait dans le sens des aiguilles d'une montre dans

2. Pour vous en convaincre essayer d'enfiler un gant droit sur votre main gauche.

3. Ce mot vient du grec *Κηεlρ* (Kheir) qui signifie main.

l'hémisphère nord et dans le sens contraire dans l'hémisphère sud. Une paire de chaussures, des ciseaux ou un tire-bouchon sont également des objets chiraux.

La chiralité intervient aussi dans notre langage courant. Ainsi, si quelqu'un est habile, on dit qu'il est adroit ou qu'il a de la dextérité⁴ ; s'il est malhabile, on dit qu'il est maladroit (mal à droite) ou qu'il est gauche. On va même jusqu'à donner un sens maléfique à ce qui est gauche. C'est le cas du mot sinistre qui vient du latin "sinister" (gauche) alors que le mot droit représente le Droit, la Justice. En anglais, avoir raison c'est être "right".

On retrouve la chiralité dans la nature profonde du vivant puisque la molécule d'ADN enroulée de façon hélicoïdale, est chirale. Certains végétaux sont chiraux. La glycine par exemple s'enroule systématiquement en hélice droite tandis que le houblon s'enroule en hélice gauche. Plus remarquable encore est le fait que tous les acides aminés naturels constituant les protéines ont sans exception la même configuration gauche. Il semblerait même que la vie ne puisse pas émerger d'un mélange racémique⁵ de molécules. Une brisure spontanée de symétrie chirale serait donc à l'origine du vivant (Cline 1995 [57]) !

Souvent, deux formes énantiomorphe⁶ d'une même molécule ne se distinguent pas uniquement par leur structure géométrique, mais aussi par leur effet sur le corps humain. Par exemple la molécule thalidomide existe sous la forme de deux énantiomères dont l'un (lévogyre) protège contre les nausées alors que l'autre (dextrogyre) entraîne des malformations congénitales⁷.

La chiralité est fondamentale en physique des particules du fait que l'univers est asymétrique pour les spins. Tous les neutrinos détectés ont une hélicité⁸ gauche et les antineutrinos une hélicité droite. La différence entre neutrinos et antineutrinos est une brisure de la symétrie chirale explicite car la symétrie miroir n'est pas une invariance de l'interaction faible qui régit le comportement de ces particules. L'interaction faible est d'ailleurs la seule loi fondamentale en physique qui ne possède pas la symétrie chirale.

Il existe cependant en physique des particules une brisure spontanée de symétrie chirale : la violation de symétrie CP⁹. Cette brisure de symétrie est l'une des trois conditions nécessaires pour expliquer l'asymétrie matière-antimatière observée dans l'univers (Sakharov 1967 [172]). En recherchant des particules qui autorisent naturellement cette brisure de

4. Du latin *dextera*, la « main droite ».

5. Un racémique est un mélange en proportions égales des énantiomères lévogyre (gauche) et dextrogyre (droit) d'un composé chiral.

6. Images miroirs l'une de l'autre mais non superposables.

7. Ces effets tératogènes furent au cœur d'un scandale sanitaire qui aboutit au retrait de la molécule du marché mondial.

8. Projection du spin sur la direction du moment.

9. C pour conjugaison de charge, P pour parité, autrement appelée symétrie miroir ou chirale.

symétrie dans le cadre théorique du modèle standard, Kobayashi et Maskawa (1973 [115]) ont prédit l'existence d'une nouvelle famille de quarks¹⁰. Cette prédiction a été expérimentalement confirmée quatre ans plus tard par la découverte du quark bottom (Herb et al. 1977 [93]).

2 Levée de dégénérescence des ondes d'Alfvén et brisure de symétrie chirale induite par effet Hall

L'effet Hall lève la dégénérescence des ondes d'Alfvén en générant deux ondes polarisées circulairement dans des sens opposées et aux propriétés physiques très différentes (voir chapitre I). Comme l'image miroir d'une onde polarisée à droite est une onde polarisée à gauche et que les équations de la MHD Hall possèdent la symétrie miroir, on peut qualifier l'effet Hall sur les modes propres de brisure spontanée de la symétrie chirale. La question qui vient naturellement à l'esprit est de savoir si une telle asymétrie existe statistiquement si on considère le régime turbulent. Pour répondre à cette question, il convient de quantifier la chiralité. Dans les sections qui suivent nous présentons comment on peut procéder pour ce faire.

2.1 Décomposition hélicitaire complexe

En linéarisant les équations de la Hall MHD autour d'un fort champ magnétique uniforme B_0 ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B_0 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \epsilon \mathbf{b}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \epsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

où ϵ représente un petit paramètre ($0 < \epsilon \ll 1$) et $(\hat{\mathbf{e}}_{\parallel})$ un vecteur unitaire, on obtient dans l'espace de Fourier les équations suivantes :

$$\partial_t \mathbf{u}_k - ik_{\parallel} B_0 \mathbf{b}_k = \epsilon \{ -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{b} \}_k, \quad (\text{V.1})$$

$$\partial_t \mathbf{b}_k - ik_{\parallel} B_0 \mathbf{u}_k - d_i B_0 k_{\parallel} \mathbf{k} \times \mathbf{b}_k = \epsilon \{ \nabla \times [(\mathbf{u} - d_i \mathbf{j}) \times \mathbf{b}] \}_k. \quad (\text{V.2})$$

10. Kobayashi et Maskawa ont obtenu le prix Nobel de physique pour cette découverte en 2008.

L'indice $\mathbf{k}$ représente la transformée de Fourier définie par la relation,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \int \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k},$$

avec $\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t}$.

A l'ordre 0, les équations de la MHD Hall deviennent donc,

$$\begin{cases} -\omega \hat{\mathbf{u}} = B_0 k_{\parallel} \hat{\mathbf{b}}, \\ -\omega \hat{\mathbf{b}} = B_0 k_{\parallel} (\hat{\mathbf{u}} - id_i \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{b}}), \end{cases}$$

puis après substitution :

$$\begin{cases} (\omega^2 - B_0^2 k_{\parallel}^2) \hat{\mathbf{u}} = id_i B_0 k_{\parallel} \omega (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}), \\ (\omega^2 - B_0^2 k_{\parallel}^2) \hat{\mathbf{b}} = id_i B_0 k_{\parallel} \omega (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{b}}). \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Les produits vectoriels qui apparaissent dans ce système d'équations rend l'écriture sous forme matricielle peu commode et suggère d'introduire des vecteurs hélicitaires complexes :

$$\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\Lambda}(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{e}_{\theta} + i\Lambda \mathbf{e}_{\phi},$$

avec,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\theta} = \mathbf{e}_{\phi} \times \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{e}_{\phi} = \frac{\mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{e}_k}{|\mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{e}_k|}, \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

où $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$ et $\Lambda = \pm 1$.

Les vecteurs $(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^+, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^-, \mathbf{e}_k)$ forment une base. L'intérêt majeur de cette base est que $\mathbf{h}_{\Lambda}$ est le vecteur propre de l'opérateur¹¹ $[\mathbf{e}_k \times]$. On a en effet,

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\Lambda} = -i\Lambda \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\Lambda}.$$

Ainsi, en projetant $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ sur cette base,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}} = \sum_{\Lambda} \mathcal{U}_{\Lambda}(\mathbf{k}) \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\Lambda}, \\ \hat{\mathbf{b}} = \sum_{\Lambda} \mathcal{B}_{\Lambda}(\mathbf{k}) \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\Lambda}, \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

11. De plus, comme $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_{\Lambda} = 0$, la condition d'incompressible de $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ est automatiquement vérifiée.

V.2 Levée de dégénérescence des ondes d'Alfvén et brisure de symétrie chirale induite par effet Hall

on diagonalise le système :

$$\begin{cases} (\omega^2 - B_0^2 k_{\parallel}^2)(\mathcal{U}_+(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^+ + \mathcal{U}_-(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^-) = d_i B_0 k_{\parallel} k \omega (\mathcal{U}_+(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^+ - \mathcal{U}_-(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^-), \\ (\omega^2 - B_0^2 k_{\parallel}^2)(\mathcal{B}_+(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^+ + \mathcal{B}_-(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^-) = d_i B_0 k_{\parallel} k \omega (\mathcal{B}_+(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^+ - \mathcal{B}_-(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^-). \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - d_i B_0 k_{\parallel} k \omega - B_0 k_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 + d_i B_0 k_{\parallel} k \omega - B_0 k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_+(\mathbf{k}) \\ \mathcal{U}_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - d_i B_0 k_{\parallel} k \omega - B_0 k_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 + d_i B_0 k_{\parallel} k \omega - B_0 k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_+(\mathbf{k}) \\ \mathcal{B}_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous mène trivialement à la relation de dispersion,

$$\omega^2 - \Lambda d_i B_0 k_{\parallel} k \omega - B_0 k_{\parallel}^2 = 0, \quad (\text{V.7})$$

dont les solutions sont :

$$\omega_{\Lambda}^s = \frac{s k_{\parallel} k d_i B_0}{2} \left(s \Lambda + \sqrt{1 + \frac{4}{d_i^2 k^2}} \right), \quad s = \pm 1. \quad (\text{V.8})$$

La décomposition hélicitaire permet également de généraliser les variables d'Elsässer à la MHD Hall (Galtier 2006 [76]). En effet, en introduisant les expressions :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\Lambda}^s(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{U}_{\Lambda}(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\Lambda} + \xi_{\Lambda}^s \mathcal{B}_{\Lambda}(\mathbf{k})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\Lambda}, \\ \xi_{\Lambda}^s(k) = \xi_{\Lambda}^s = -\frac{s d_i k}{2} \left(s \Lambda + \sqrt{1 + \frac{4}{d_i^2 k^2}} \right), \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

dans les équations linéarisées V.3 on obtient,

$$\partial_t \mathbf{Z}_{\Lambda}^s(\mathbf{k}) = -i \omega_{\Lambda}^s \mathbf{Z}_{\Lambda}^s(\mathbf{k}). \quad (\text{V.10})$$

Dans la limite des grandes échelles, $k d_i \rightarrow 0$, ce qui implique que $\xi_{\Lambda}^s(k) \rightarrow -s$. On retrouve ainsi à partir de l'expression V.9 les variables d'Elsässer de MHD.¹²

La décomposition des équations non-linéaires de la MHD Hall sur la base hélicitaire V.4 mène à des équations d'une grande complexité, mais qui permettent de dériver des lois

12. Dans les variables d'Elsässer, le paramètre Λ n'apparaît pas mais on pourrait l'introduire artificiellement car une onde polarisée rectilignement peut s'interpréter comme la superposition d'une onde circulaire droite et d'une onde circulaire gauche se déplaçant à la même vitesse. Vu sous cet angle, l'effet Hall peut s'interpréter comme un effet dû à la biréfringence du plasma.

exactes pour la turbulence d'ondes (Galtier 2006 [76]). Elles nous apprennent également que la contrainte de paquets d'ondes contra-propageants propre à la MHD n'est pas nécessaire aux interactions non-linéaires en MHD Hall. Ce résultat s'interprète aisément en remarquant que contrairement aux ondes d'Alfvén, les ondes whistler et ion cyclotron ont des vitesses de groupe qui dépendent du nombre d'onde. Ainsi deux paquets d'ondes généralisés peuvent interagir ensemble bien qu'ils se déplacent dans le même sens par rapport au champ magnétique moyen. Il suffit pour cela que leurs échelles caractéristiques respectives soient différentes. L'un rattrape l'autre et il y a alors collision.

Il est important de noter également que contrairement à la MHD, un paquet d'ondes d'Alfvén généralisé n'est pas solution exacte des équations non-linéaires. Un paquet d'ondes seul, à cause de sa nature dispersive, va se déformer et générer des petites échelles induisant un couplage non-linéaire important qui peut engendrer de la turbulence (Cho 2011 [56]). Seules des ondes strictement monochromatiques peuvent se déplacer sans déformation.

Dans le cas de la turbulence forte, la complexité des équations non-linéaires obtenues dans la base hélicitaire est rédhibitoire. Nous verrons dans la section 4 comment on peut construire un modèle heuristique simple de turbulence forte à partir des équations exprimées dans l'espace réel.

2.2 Comment quantifier la chiralité ?

La projection des vecteurs $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ sur une base hélicitaire complexe permet de résoudre de manière simple et élégante le problème de la recherche des modes propres de la MHD Hall. Mais ce qui est plus intéressant encore, c'est que cette décomposition hélicitaire fait apparaître naturellement deux paramètres Λ et s , dont le produit $s\Lambda$ permet de discriminer la chiralité des modes propres.

En effet, en raison de la forme symétrique des équations V.10, quatre classes de solutions exactes existent :

$$\mathcal{Z}_{\Lambda}^s(\mathbf{k}) = \mathcal{A}_{\Lambda}^s(\mathbf{x} - \mathbf{V}_{\Lambda}^- t), \quad (\text{V.11})$$

avec,

$$\mathbf{V}_{\Lambda}^s = \frac{s|k|d_i}{2} \left(s\Lambda + \sqrt{1 + \frac{4}{d_i^2 k^2}} \right) \mathbf{B}_0,$$

V.2 Levée de dégénérescence des ondes d'Alfvén et brisure de symétrie chirale induite par effet Hall

et $\mathcal{A}$ une fonction arbitraire complexe.

Ainsi, s détermine le sens de propagation des paquets d'ondes d'Alfvén généralisés¹³. Si $s > 0$ les paquets d'ondes se propagent le long de B_0 à la vitesse V_Λ^s , et en sens opposé dans le cas contraire (voir Fig.V.1).

De plus d'après V.3 et V.7 on a,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \Lambda i \hat{\mathbf{e}}_k \times \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix},$$

donc $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ s'enroulent en hélice autour du champ magnétique B_0 à droite si $\Lambda = +1$ et $s = +1$, ou $\Lambda = -1$ et $s = -1$, et à gauche si $\Lambda = +1$ et $s = -1$, ou $\Lambda = -1$ et $s = +1$. Ainsi l'onde est polarisée à droite si $s\Lambda = 1$, et à gauche si $s\Lambda = -1$.

Il est primordial pour définir la chiralité de l'onde de connaître dans quel sens elle tourne et dans quelle direction elle se propage par rapport à $\mathbf{B}_0$. De la même manière, pour définir si une main est gauche il ne suffit pas de dire que le pousse se trouve à gauche, encore faut-il s'assurer que l'on regarde la paume et pas le revers.

Il est possible de donner une interprétation géométrique simple à ces deux paramètres en remarquant que $-s$ est égal au cosinus de l'angle entre $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ et que Λ est égale au cosinus de l'angle entre $\hat{\mathbf{b}}$ et $\hat{\mathbf{a}}$, où $\hat{\mathbf{a}}$ représente le potentiel vecteur magnétique¹⁴.

Hélicité magnétique normalisée :

En effet puisque¹⁵,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_k \times \hat{\mathbf{b}} = -i\Lambda \hat{\mathbf{b}}, \\ -ik\hat{\mathbf{e}}_k \times \hat{\mathbf{b}} = -k^2 \hat{\mathbf{a}}, \\ k|\hat{\mathbf{a}}| = |\hat{\mathbf{b}}|, \end{cases}$$

on a :

$$\Lambda = \sigma_m = \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^* + \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{a}}^*}{2|\hat{\mathbf{a}}||\hat{\mathbf{b}}|}.$$

Le cosinus de l'angle entre $\hat{\mathbf{b}}$ et $\hat{\mathbf{a}}$ est également appelé hélicité magnétique normalisée.

13. Car $\forall (s, \Lambda), \quad \frac{|k|d_i}{2} \left(s\Lambda + \sqrt{1 + \frac{4}{d_i^2 k^2}} \right) > 0$.

14. De manière équivalente, Λ est égale au cosinus de l'angle entre $\hat{\mathbf{b}}$ et $\hat{\mathbf{j}}$.

15. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{b} = -\nabla^2 \mathbf{a}$ soit, après application d'une transformée de Fourier : $-ik\hat{\mathbf{e}}_k \times \hat{\mathbf{b}} = +k^2 \hat{\mathbf{a}}$.

Hélicité croisée normalisée :

D'après V.3,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^* = -\frac{B_0 k_{\parallel}}{\omega} \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^*, \\ |\hat{\mathbf{u}}| = \frac{s B_0 k_{\parallel}}{\omega} |\hat{\mathbf{b}}|. \end{cases}$$

En effet, pour que la pulsation ω_{Λ}^s (voir équation V.8) soit positive, il faut que $s k_{\parallel}$ soit défini positif.

Ainsi,

$$-s = \sigma_c = \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^* + \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{u}}^*}{2|\hat{\mathbf{u}}||\hat{\mathbf{b}}|}.$$

Le cosinus de l'angle entre $\hat{\mathbf{b}}$ et $\hat{\mathbf{u}}$ est également appelé hélicité croisée normalisée.

Polarisation magnétique spectrale :

Au final, on a donc :

$$P_m = \sigma_m \sigma_c = \begin{cases} +1 & \Rightarrow \text{Ion cyclotron} \\ -1 & \Rightarrow \text{Whistler} \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

De manière remarquable, on peut donc construire une grandeur physique P_m appelée

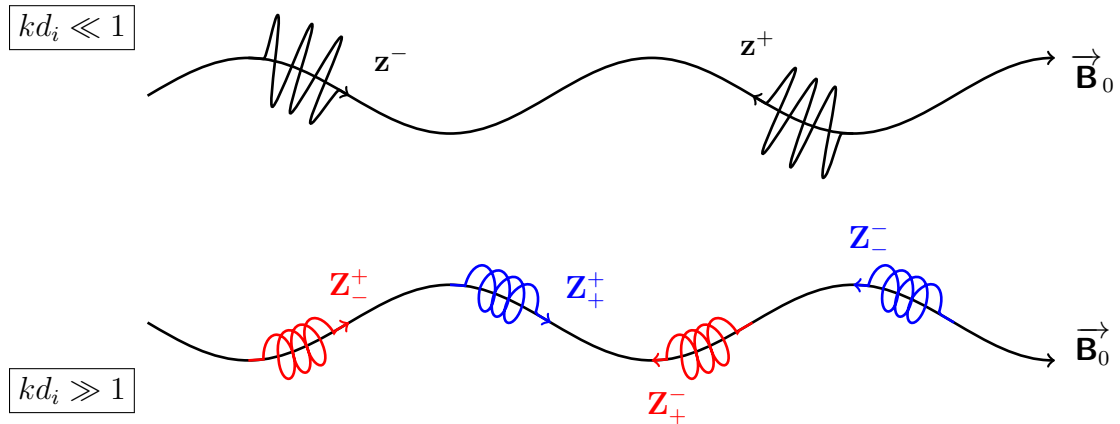


Figure V.1 – Propagation d'ondes d'Alfvén généralisées le long d'un champ magnétique quasi-uniforme. Dans la limite $kd_i \ll 1$, on retrouve les paquets d'ondes d'Alfvén décrit par les variables d'Elsässer $\mathbf{z}^{\pm} = \mathbf{u} \mp \mathbf{b}$. Dans la limite $kd_i \gg 1$, deux types d'ondes coexistent qui s'apparentent respectivement aux ondes whistler (bleu) et ion cyclotron (rouge).

V.3 Évidences numériques de brisure spontanée de symétrie chirale en turbulence MHD Hall

polarisation magnétique spectrale qui permet de distinguer la polarisation des ondes sans qu'il soit nécessaire de projeter les champs $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ sur une base hélicitaire.

Dans le régime linéaire les ondes de la Hall MHD vérifient donc,

$$\begin{cases} (\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{b}}) = 0 & \text{ou } \pi, \\ (\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = (\widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{b}}) = 0 & \text{ou } \pi. \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

Dans le cas non-linéaire, on a en toute généralité, $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{b}}) \in [0, \pi]$ et $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) \in [0, \pi]$. On peut distinguer les fluctuations droite et gauche des champs en suivant la même convention que pour les modes linéaires :

$$P_m = \sigma_m \sigma_c \in \begin{cases} [0, 1] & \Rightarrow \text{Fluctuations gauches} \\ [-1, 0] & \Rightarrow \text{Fluctuations droites} \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

3 Évidences numériques de brisure spontanée de symétrie chirale en turbulence MHD Hall

3.1 Paramètres de l'expérience numérique

Pour étudier la chiralité de la turbulence, j'ai réalisé des simulations numériques directes sur les clusters SGI Altix ICE 8200 du supercalculateur JADE, au Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur (CINES). Ce supercalculateur possède une puissance crête de 265 Tflop/s (10^{12} additions ou multiplications de réels par seconde). Il comprend 23040 cœurs répartis sur 2880 nœuds disposant chacun de 2 processeurs Intel Quad-Core E5472 ou X5560.

Malgré la puissance colossale du supercalculateur JADE, il n'est pas raisonnable pour des raisons de temps de calcul d'effectuer une simulation numérique directe complète de turbulence Hall MHD dans un cube de 512^3 et avec un $d_i = 0.5$. Cela tient au fait que les modes induits par l'effet Hall ont une vitesse de propagation qui dépend de la longueur d'onde. Ainsi, plus on affine la résolution spatiale, plus on autorise des perturbations à se propager rapidement et donc, plus on doit diminuer le pas de temps pour vérifier la condition CFL. De plus, le code TURBO n'est parallélisé que suivant une direction de l'espace. Ainsi, il n'est pas possible d'utiliser plus de 512 processeur pour un cube de 512^3 . Pour circonvier à ce problème j'ai effectué les calculs en trois temps.

Chapitre V. Brisure Spontanée de symétrie chirale en turbulence Hall MHD

Dans une première phase, nous avons effectué les simulations dans des cubes de 128^3 en partant de conditions initiales aléatoires (voir IV4) avec des forçages dynamiques sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{b}$. Le forçage se fait sans injection d'hélicité magnétique, cinétique et croisée (voir IV3.2). Une fois un régime stationnaire atteint (voir figure V.2), j'ai arrêté le calcul puis extrapolé les champs obtenus sur une grille de 256^3 . J'ai ensuite attendu qu'un nouveau régime stationnaire s'établisse, puis recommencé l'opération d'extrapolation sur une grille de 512^3 . Ces deux dernières phases sont beaucoup plus courtes¹⁶ que la première puisque les nouveaux modes excités ont une dynamique de plus en plus rapide. Afin de nous assurer qu'il n'y ait pas de biais induit par la condition initiale ou le forçage, j'ai également réalisé une expérience témoin avec exactement les mêmes paramètres hormis d_i que j'ai pris égale à 0. L'expérience témoin correspond donc à une simulation MHD.

$nx \times ny \times nz$	Hyperviscosité	C_{CFL}	d_i	B_0	ν	η
$512 \times 512 \times 512$	∇^4	0.8	0.5	0.0	15.10^{-7}	15.10^{-7}

Tableau V.1 – Paramètres de l'expérience numérique.

k_{inf}	k_{sup}	ϵ_+^u	ϵ_-^u	ϵ_+^b	ϵ_-^b	σ
1.5	2.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.0

Tableau V.2 – Paramètres de forçage

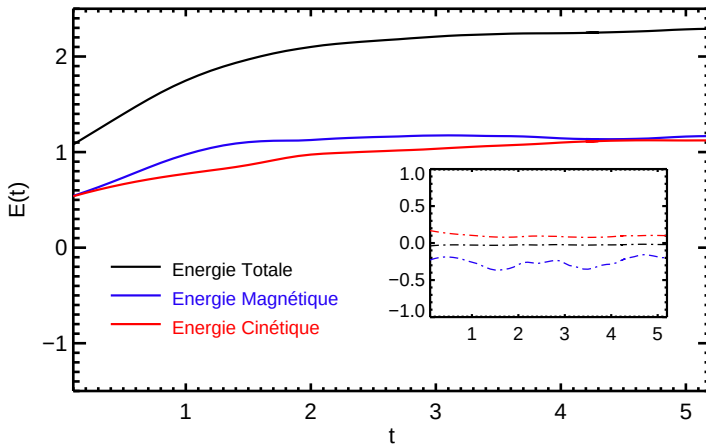


Figure V.2 – Énergies en fonction du temps. En médaillon : hélicité croisée (rouge), hélicité magnétique (bleu) et polarisation magnétique (noir) en fonction du temps.

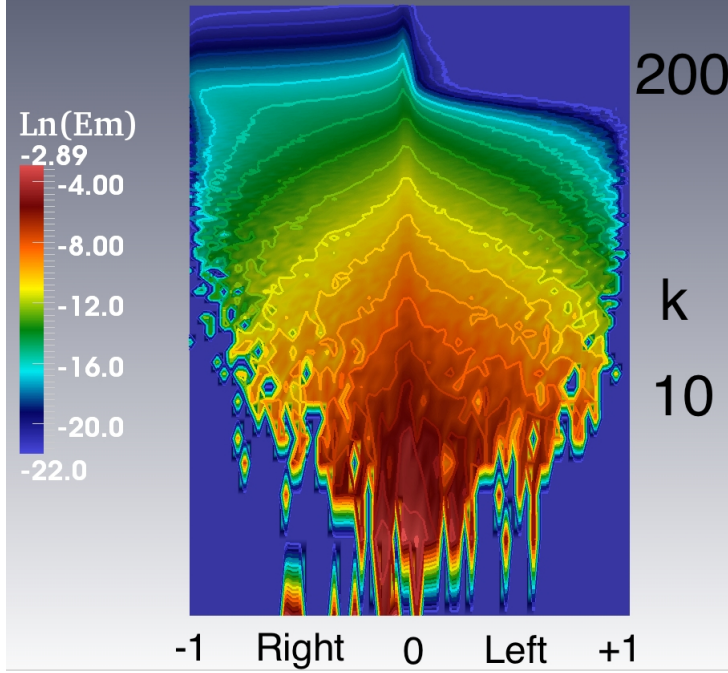


Figure V.3 – Énergie magnétique en fonction de la polarisation magnétique P_m et du nombre d'onde k en coordonnée logarithmique relative à la simulation MHD Hall. Les iso-contours d'énergie sont représentés pour séparer les régions de hautes énergies (rouge) des régions de basses énergies (bleu). Figure tirée de Meyrand et al. 2012 [19].

3.2 Résultats numériques

Le figure V.3 représente l'énergie magnétique en fonction de la polarisation magnétique P_m et du nombre d'onde k en coordonnées log-lin obtenue en régime stationnaire. Les iso-contours d'énergie sont représentés pour séparer les régions de hautes énergies (rouge) des régions de basses énergies (bleu). Ce graphe révèle clairement l'existence d'une asymétrie entre les fluctuations gauches (G) et droites (D). Cette asymétrie est intrinsèque à l'effet Hall puisque pour les mêmes conditions initiales et le même forçage, aucune asymétrie n'apparaît dans le régime MHD (voir Fig. V.4).

Pour des nombres d'ondes modérés, l'énergie magnétique des fluctuations gauches dominant alors que l'énergie magnétique des fluctuations droites dominant les grands nombres d'ondes. Une seconde asymétrie apparaît au niveau de la zone dissipative. Les fluctuations gauches sont dissipées à des échelles plus grandes que les fluctuations droites. Noter que cette seconde asymétrie est en quelque sorte visuellement atténuée par l'utilisation d'une échelle logarithmique, mais correspond en réalité à un nombre significatif de modes.

Afin de quantifier de manière plus précise la distribution d'énergie en fonction des échelles, j'ai décomposé l'espace de Fourier en coquilles sphériques concentriques S_n contenant tous les modes définis par $k_{n-1} < |\mathbf{k}| \leq k_n$ avec $k_n = n \times k_0$. Les champs de vitesse et magné-

16. Plus courte en terme de temps physique mais pas en terme de temps de calcul car à chaque étape on multiplie par 2^3 le nombre de modes et on divise par $\simeq 2^2$ le pas de temps

tique ont également été décomposés en deux composantes droite et gauche définies de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_n^D & \text{si } k_{n-1} < |\mathbf{k}| \leq k_n \text{ et } P_m(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})) < 0, \\ \hat{\mathbf{u}}_n^G & \text{si } k_{n-1} < |\mathbf{k}| \leq k_n \text{ et } P_m(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})) > 0, \\ \frac{1}{2}\hat{\mathbf{u}}_n^D = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{u}}_n^G & \text{si } k_{n-1} < |\mathbf{k}| \leq k_n \text{ et } P_m(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})) = 0. \end{cases}$$

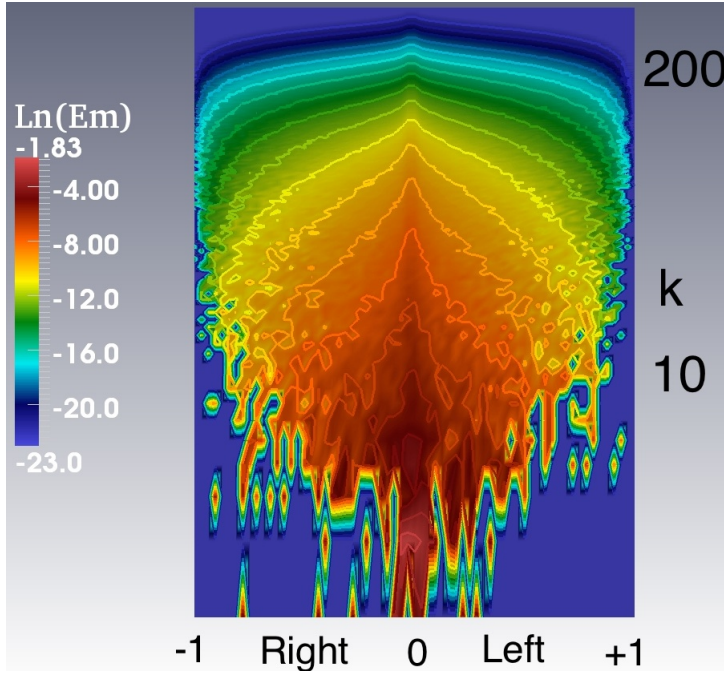


Figure V.4 – Énergie magnétique en fonction de la polarisation magnétique P_m et du nombre d'onde k en coordonnée logarithmique relative à la simulation MHD. Les iso-contours d'énergie sont représentés pour séparer les régions de haute énergies (rouge) des régions de basse énergies (bleu).

Les figures V.5 et V.6 représentent respectivement le rapport entre E^D (ou E^G) et E^{Total} définis par,

$$\begin{aligned} E^D(k_n) &= \frac{1}{2} \sum_k \left(\hat{\mathbf{u}}_n^D \hat{\mathbf{u}}_n^{*D} + \hat{\mathbf{b}}_n^D \hat{\mathbf{b}}_n^{*D} \right) \\ E^G(k_n) &= \frac{1}{2} \sum_k \left(\hat{\mathbf{u}}_n^G \hat{\mathbf{u}}_n^{*G} + \hat{\mathbf{b}}_n^G \hat{\mathbf{b}}_n^{*G} \right) \\ E^{Total}(k_n) &= E^D(k_n) + E^G(k_n) \end{aligned}$$

en fonction du nombre d'onde pour la Hall MHD et la MHD.

Dans le cas Hall MHD, on voit clairement que l'énergie totale se concentre dans les fluctuations G aux grandes échelles tandis que les fluctuations D dominent les petites échelles. Les plateaux observés à partir de $k \sim 140$ sont localisés au niveau de la zone de

V.4 Modèle heuristique de la turbulence chirale MHD Hall : IMHD versus EMHD

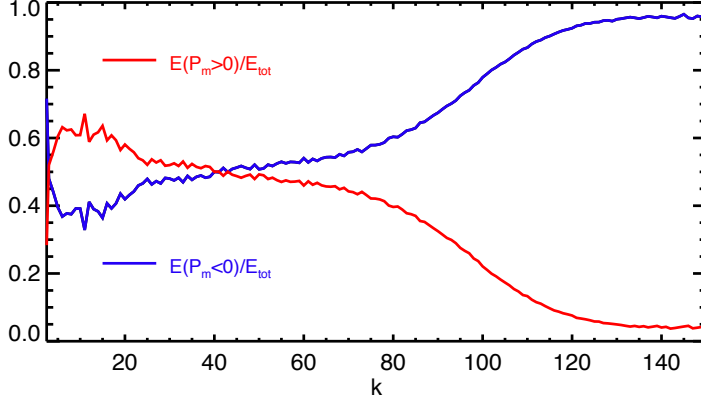


Figure V.5 – Rapport d'énergie E^D/E^{Total} (bleu) et $E^G(k)/E^{Total}$ (rouge) en fonction du nombre d'ondes en MHD Hall.

dissipation.

Dans le cas MHD, on voit clairement qu'il y a équi-répartition des énergies D et G à toutes les échelles.

On peut donc conclure que la symétrie chirale des équations se retrouve dans les solutions non-linéaires MHD, mais pas MHD Hall. Ces résultats montrent donc qu'il existe une brisure spontanée de la symétrie chirale dans la dynamique turbulente MHD Hall.

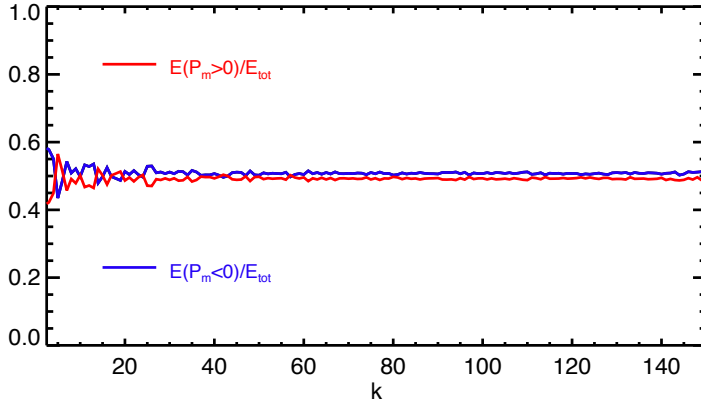


Figure V.6 – Rapport d'énergie E^D/E^{Total} (bleu) et $E^G(k)/E^{Total}$ (rouge) en fonction du nombre d'ondes en MHD.

4 Modèle heuristique de la turbulence chirale MHD Hall : IMHD versus EMHD

4.1 Le concept de vortex généralisé

Afin d'expliquer les résultats obtenus et de faire de nouvelles prédictions théoriques, il est intéressant de construire un modèle heuristique de turbulence chirale.

Chapitre V. Brisure Spontanée de symétrie chirale en turbulence Hall MHD

Pour ce faire, il convient de reformuler les équations de la Hall MHD sous la forme d'un système d'équations de vortex généralisés (Yoshida et Mahajan 2002 [205]) :

$$\frac{\partial \Omega_j}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_j \times \Omega_j) \quad (j = D, G) \quad (\text{V.15})$$

avec,

$$\begin{cases} \Omega_D = \mathbf{b}, \\ \mathbf{u}_D = \mathbf{u} - d_i \nabla \times \mathbf{b}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega_G = \mathbf{b} + d_i \nabla \times \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_G = \mathbf{u}. \end{cases}$$

La forme de ces équations suggère l'existence en turbulence Hall MHD de deux types de vortex Ω_G et Ω_D qui sont respectivement gelés dans leur champ de vitesse généralisé respectif $\mathbf{u}_G$ et $\mathbf{u}_D$ ¹⁷. Comme $\mathbf{u}_G = \mathbf{u} \simeq \mathbf{u}_i$ et $\mathbf{u}_D = \mathbf{u} - d_i \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{u}_e$, les vortex généralisés Ω_G et Ω_D peuvent être considérés respectivement comme des vortex ionique et électronique. Le choix du nom D et G que nous avons donné aux deux couples (vortex, vitesse) s'explique par le fait que soumis à un champ magnétique, les électrons et les ions tournent respectivement dans le sens horaire et anti-horaire.

Imaginons un écoulement où un seul des deux couples (vortex, vitesse) est présent, disons le couple D . Dans ce cas, on doit avoir $\mathbf{u}_G = 0$ et on retrouve le modèle bien connu EMHD qui supporte les ondes whistlers (Kinsep 1990 [111]).

Considérons le cas alternatif où seul le couple G existe. Dans ce cas on doit avoir,

$$\mathbf{u}_D = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = d_i \nabla \times \mathbf{b} = d_i \mathbf{j}.$$

Cette situation particulière implique donc que le courant électrique est essentiellement porté par les ions ($\mathbf{u} = d_i \mathbf{j} \sim \mathbf{u}_i = d_i q n (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \Rightarrow \mathbf{j} \sim \mathbf{u}_i$). Dans ces conditions, l'équation V.15 devient :

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= d_i \nabla \times \mathbf{b} \\ \frac{\partial \Omega_G}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \Omega_G) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial (1 - d_i^2 \nabla^2) \mathbf{b}}{\partial t} = d_i \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{b}) \times (1 - d_i^2 \nabla^2) \mathbf{b}].$$

Une linéarisation de cette équation donne après application d'une transformée de Fourier :

$$\omega(1 + d_i^2 k^2) \hat{\mathbf{b}} = d_i k_{\parallel} B_0 i \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{b}}.$$

17. La démonstration de ces propriétés est similaire à celle du théorème du gel en MHD (voir Chap. I).

V.4 Modèle heuristique de la turbulence chirale MHD Hall : IMHD versus EMHD

De manière remarquable, on retrouve dans la limite $kd_i \gg 1$ la relation de dispersion des ondes Ion Cyclotron $\omega_G = B_0 k_{\parallel} / (kd_i)$.

L'écriture des équations de la MHD Hall sous forme compacte et symétrique permet donc de scinder le problème en deux sous problèmes. Celui bien connu de l'EMHD et celui correspondant à un nouveau régime que nous avons appelé Ion MHD (IMHD).

Le régime EMHD corrélatif à la suppression du couple $(\mathbf{\Omega}_L, \mathbf{u}_L)$, s'interprète aisément en remarquant que les ions du fait de leur inertie, ne peuvent pas suivre la dynamique des électrons sur des échelles de temps plus rapide que la fréquence ion cyclotron. Les ions constituent alors un fond immobile et neutralisant, et la dynamique est entièrement régie par le mouvement rapide des électrons.

Le régime IMHD correspondant à la suppression du couple $(\mathbf{\Omega}_R, \mathbf{u}_R)$, implique quant à lui que la vitesse du fluide électronique est nulle. Comment peut-on interpréter ce résultat contre-intuitif ?

Dans le régime IMHD, l'immobilité apparente des électrons résulte d'un effet statistique. Les électrons du fait de leur faible inertie sont si mobiles qu'ils sont vus par les ions en moyenne (c'est-à-dire sur leurs échelles de temps caractéristiques) comme un fond neutralisant, homogène et immobile. Cette situation est similaire à celle que l'on a rencontré dans le cadre de l'approximation bi-fluide au Chapitre I, où pour $\omega = \omega_{ci}$ la relation de dispersion des modes Ion Cyclotron peut s'obtenir en annulant la vitesse électronique. Les ondes Ion Cyclotron sont donc principalement portées par les ions qui "voient" les électrons comme un fond neutralisant immobile et homogène.

Les forces dominantes dans la cas IMHD sont l'inertie des ions et la force de Laplace, tandis que dans le cas EMHD les forces qui dominent sont le champ électrique induit par le mouvement du fluide électronique et la force de Laplace.

4.2 Prédictions théoriques

Il est possible de dériver une loi exacte pour les fonctions de structure du troisième ordre pour chacun des régimes de turbulence EMHD et IMHD. Nous verrons au chapitre VI les hypothèses et le détail des calculs qui permettent de les obtenir. Les prédictions sur les spectres d'énergie magnétique qui découlent de ces lois exactes peuvent être également obtenues à partir d'un raisonnement phénoménologique à la *Kolmogorov* comme nous allons le voir dans ce qui suit.

4.2.1 EMHD

En EMHD, puisque $\delta u_e \sim \delta j = \nabla \times \delta b$, le temps de retournement d'un tourbillon de taille l est donné par :

$$\tau_l = l / \delta u_e \sim l^2 / \delta b.$$

Puisque dans ce régime c'est l'énergie magnétique qui est invariante on a,

$$\varepsilon \sim E_l / \tau_l \sim \delta b^3 / l^2,$$

ce qui implique que :

$$\boxed{E_k^{BD} \sim \varepsilon^{2/3} k^{-7/3}.$$

4.2.2 IMHD

Les équations de l'IMHD possèdent deux invariants (voir la démonstrations au Chap. VI) l'énergie ionique E^I ,

$$E^I = \frac{1}{2} \int (\mathbf{b}^2 + d_i^2 \mathbf{j}^2) d\mathbf{x},$$

et l'hélicité ionique H^I ,

$$H^I = \int (\mathbf{a} + d_i^2 \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{b} + d_i^2 \nabla^2 \mathbf{b}) d\mathbf{x}.$$

Puisque le modèle IMHD est construit à partir de la relation $\mathbf{u} = d_i \mathbf{j}$, dans la limite $kd_i \gg 1$ l'énergie ionique se réduit à l'énergie cinétique des ions.

$$E^I \xrightarrow{kd_i \gg 1} \frac{1}{2} \int d_i^2 \mathbf{j}^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^2 d\mathbf{x}.$$

Il convient donc de raisonner sur l'énergie cinétique si on veut prédire une loi de puissance pour le spectre d'énergie magnétique dans le régime $kd_i \gg 1$. Or, dans cette limite les équations de l'IMHD se réduisent aux équations de Naviers-Stokes,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{b} + d_i \nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{b} + d_i \nabla \times \mathbf{u})] \xrightarrow{kd_i \gg 1} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})],$$

le champ de vitesse doit donc être Kolmogorovien et suivre une loi en $E^{UG}(k) \sim k^{-5/3}$.

Puisque l'énergie magnétique n'est pas une solution à flux constant dans la limite $kd_i \gg 1$, le champ magnétique est passivement advecté par le champ de vitesse de manière à vérifier

$\mathbf{u} = d_i \mathbf{j}$. Une simple analyse dimensionnelle conduit donc à :

$$E_k^{B_G} \sim k^{-11/3}$$

On retrouve le même genre de situation pour la turbulence hydrodynamique 2D qui possède deux invariants, l'enstrophie et l'énergie cinétique. Ces deux invariants inviscides cascaded respectivement vers les petites et les grandes échelles. Ainsi, pour des échelles inférieures à l'échelle d'injection d'énergie, l'invariant pertinent est l'enstrophie alors que le champ de vitesse est passivement advecté par ce dernier. On obtient dimensionnellement une loi en $E^U \sim k^{-3}$. À l'inverse, pour les échelles supérieures à l'échelle d'injection d'énergie, c'est l'énergie cinétique qui cascade et l'enstrophie qui est passivement advecté. On obtient alors une loi en $E^U \sim k^{-5/3}$.

4.2.3 Hall MHD

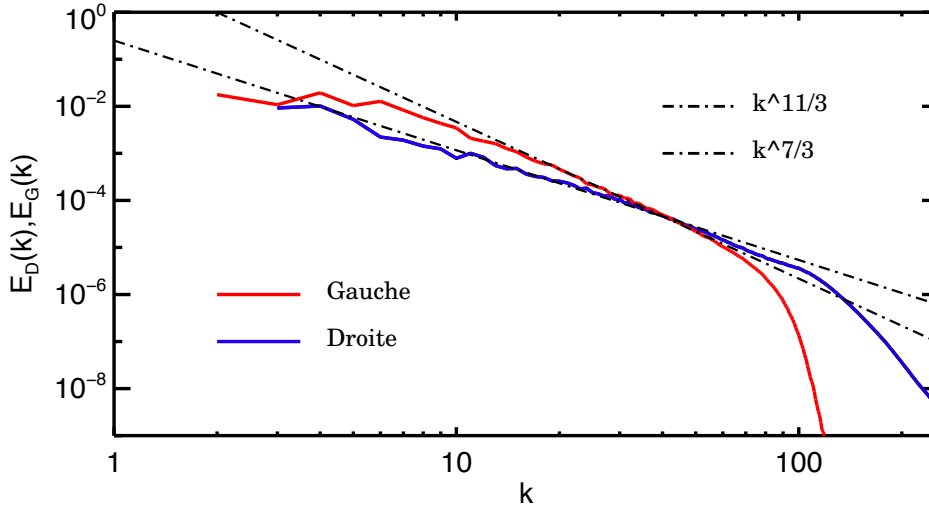


Figure V.7 – Spectre de l'énergie magnétique en coordonnées logarithmiques pour des fluctuations D ($P_m \leq -0.3$) en bleu et G ($P_m \geq 0.3$) en rouge en fonction du nombre d'onde k . Les droites en tiret-point correspondent aux lois de puissance $-11/3$ et $-7/3$ prédites respectivement par les modèles heuristiques de turbulence IMHD et EMHD.

A priori, la turbulence Hall MHD est une combinaison de turbulence EMHD et IMHD avec potentiellement un fort couplage entre les deux et il paraît donc naïf que les deux régimes puissent coexister. Pourtant, la figure V.7 montre que les prédictions obtenues en raisonnant séparément sur les deux types d'équations sont bien vérifiées. De plus, les figures V.3 et V.5 révèlent que les deux régimes de turbulence ne concernent pas les mêmes

échelles. Les résultats obtenus suggèrent donc que le couplage entre les fluctuations D et G est faible. Cela peut s'expliquer par le fait que les temps caractéristiques de retournement des structures turbulentes G ($\tau_G \sim l/u$) et D ($\tau_D \sim l^2/d_i b$) sont de nature différente. En comparant la masse d'un ion et celle d'un électron, on comprend facilement pourquoi l'énergie G ne peut pas dominer aux petites échelles. En revanche, il paraît moins trivial d'expliquer pourquoi elle domine les grandes échelles.

Dans le régime MHD ($kd_i \ll 1$), pour un paramètre $\beta \sim 1$ les fluides ionique et électronique sont gelés dans le champ magnétique et réciproquement. Au-delà de l'échelle inertielle des ions, le fluide ionique se découple du champ magnétique tandis que les électrons restent gelés dans celui-ci. Le découplage entre fluide ionique et électronique est brutal car les électrons sont extrêmement mobiles. À l'inverse, le découplage entre le fluide ionique et le champ magnétique est progressif. Il est d'ailleurs intéressant de noter que le terme en $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ est commun à la MHD et à l'IMHD alors que les non-linéarités de l'EMHD sont de nature radicalement différente.

Pour des échelles $kd_i \gtrsim 1$, les ions ont donc un contenu énergétique d'origine magnétique et cinétique alors que les électrons ne sont asservis qu'à l'énergie magnétique. L'énergie ionique est donc supérieure à l'énergie électronique. Si l'on considère des échelles plus petites, les ions sont progressivement figés par leur inertie et c'est l'énergie électronique qui domine. On peut résumer le modèle heuristique de turbulence MHD Hall chirale de la manière suivante :

La turbulence MHD Hall, au-delà de l'échelle inertielle ionique, peut être considérée comme un enchevêtrement complexe de vortex généralisés Ω_G et Ω_D , advectés par leur vitesse généralisée respectives $\mathbf{u}_G$ et $\mathbf{u}_D$ de manière chaotique. L'interaction entre ces deux populations de tourbillons est faible car leur temps caractéristique de retournement est de nature très différente à toutes les échelles. Aux grandes échelles, la dynamique est dominée par les vortex gauches alors que les petites échelles sont dominées par les vortex droits.

Le schéma V.8 récapitule les résultats obtenus à partir du modèle phénoménologique et des simulations numériques. Il est intéressant de noter que ces résultats sont qualitativement en accord avec des mesures *in situ* du vent solaire (voir Fig. V.9). On constate toutefois que les spectres mesurés sont plus raides que ceux prédits par le modèle simplifié de turbulence MHD Hall. On verra à la section 6 que ce raidissement peut être expliqué dans le cadre d'un modèle théorique de turbulence anisotrope.

V.4 Modèle heuristique de la turbulence chirale MHD Hall : IMHD versus EMHD

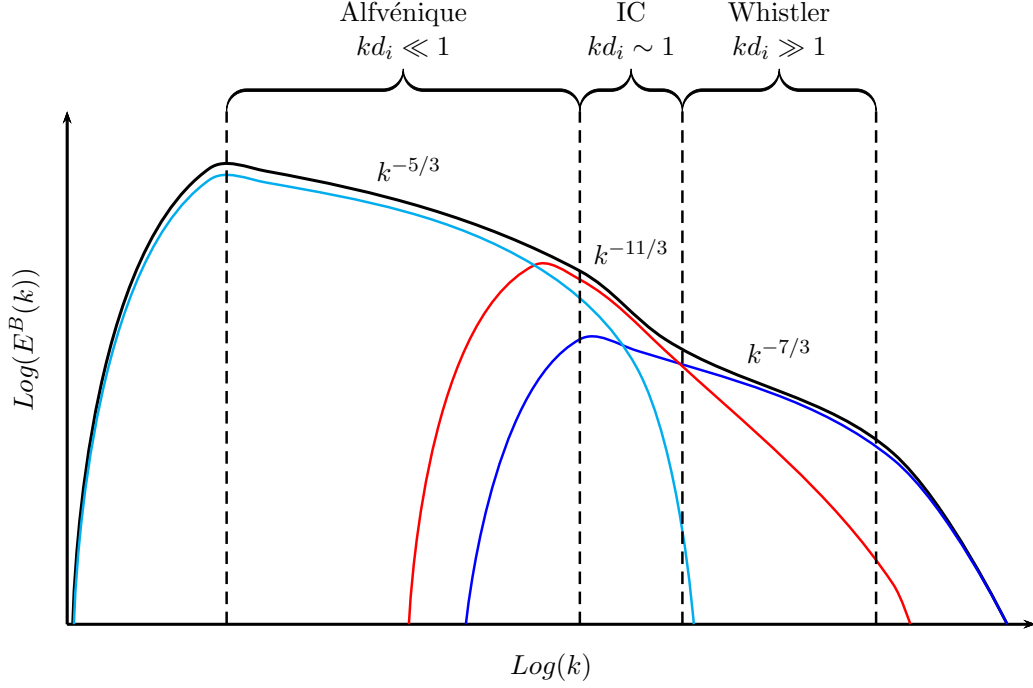


Figure V.8 – Schéma récapitulatif du modèle heuristique de turbulence MHD Hall chirale. Le trait plein noir représente le spectre de l'énergie magnétique en coordonnées log-log. Les couleurs cyan, rouge et bleu représentent respectivement les spectres d'énergie magnétique en régime de turbulence Alfvénique, Cyclotron Ionique (G) et Whistler (D).

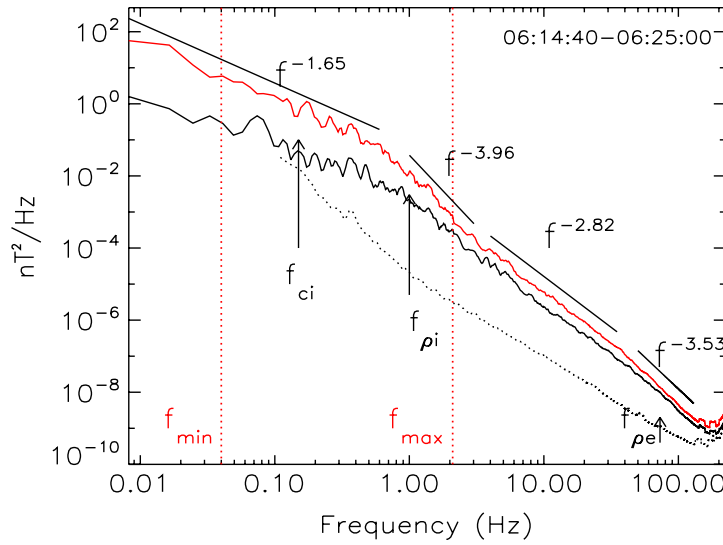


Figure V.9 – Spectres d'énergie des fluctuations magnétiques parallèle (noir) et perpendiculaire (rouge) au champ moyen mesuré dans le vent solaire à l'aide des magnétomètres embarqués sur les sondes Cluster. Les flèches verticales représentent la fréquence cyclotronique ionique et les rayons de Larmor ionique et électronique "Doppler-shifted" ($f_{\rho} = V_f/2\pi\rho$ avec V_f la vitesse du vent solaire). Figure tirée de Sahraoui et al. 2010 [14].

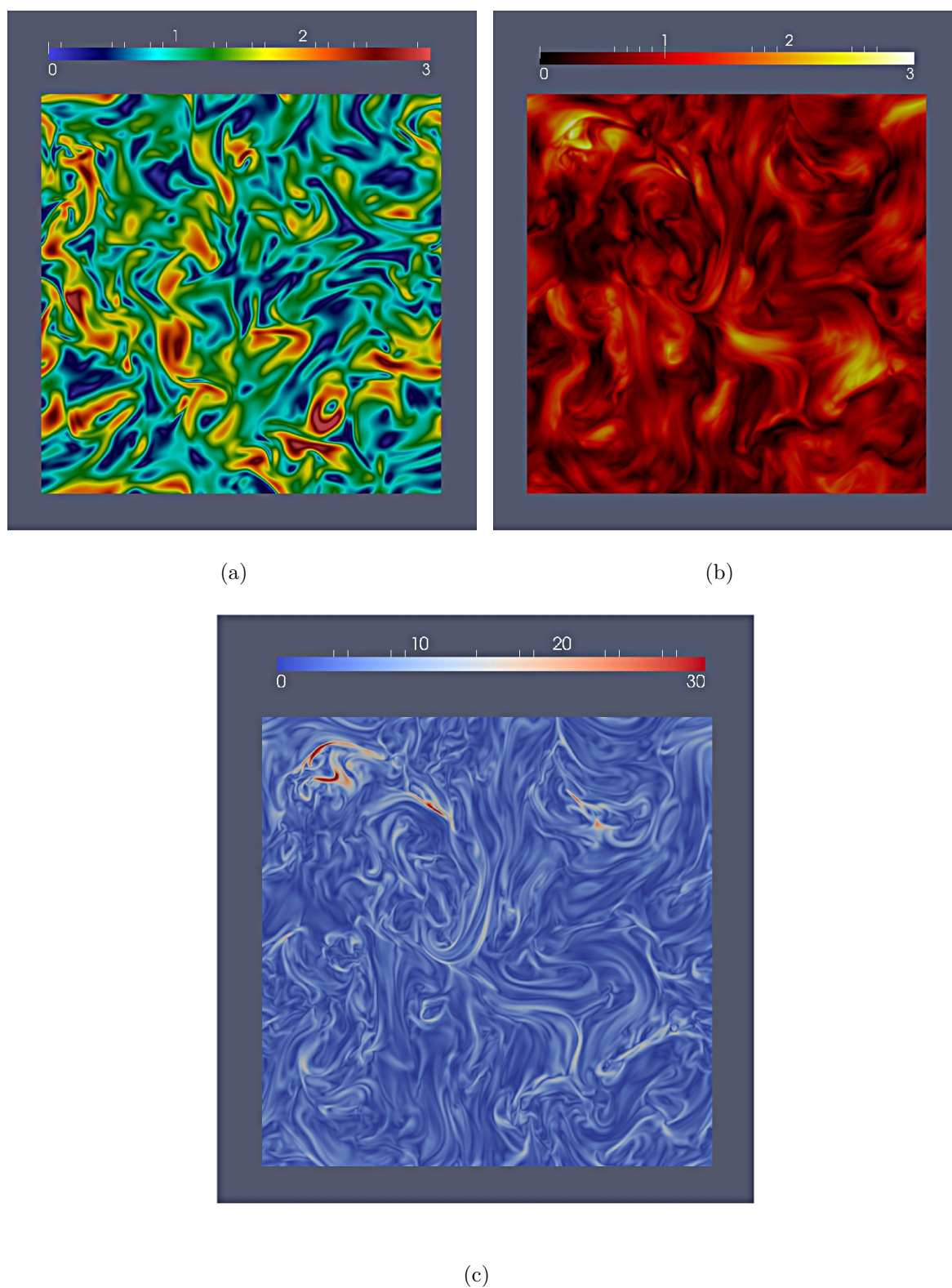


Figure V.10 – (a) Norme du champ de vitesse $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$. (b) Norme du champ magnétique $\mathbf{b}$. (c) Norme du champ de vitesse électronique $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - d_i \nabla \times \mathbf{b}$. La différence entre le nombre de Reynolds magnétique et cinétique apparaît clairement sur ces figures. Les structures du champ magnétique (b) sont en effet plus fines que celles du champ de vitesse (a). Le découplage entre les fluides ionique (a) et électronique (c) apparaît aussi nettement.

5 Flux d'énergies et structures cohérentes

5.1 Flux d'énergie

Chacun des termes non-linéaires des équations de la MHD Hall peut être considéré comme un canal par lequel l'énergie transite vers les petites échelles. Le flux d'énergie à travers tous ces canaux est conservé, mais individuellement chacun des canaux n'est pas "étanche". Il peut transférer l'énergie à un autre canal et inversement.

Afin d'aller plus loin dans l'étude de la turbulence MHD Hall, il est intéressant d'évaluer quantitativement l'importance relative de chacun des termes non linéaires dans le transfert de l'énergie. Il est possible de calculer ce transfert dans l'espace réel grâce aux fonctions de structure comme nous le verrons au chapitre VI. Cette approche est bien adaptée d'un point de vue théorique, mais est extrêmement lourde à traduire d'un point de vue numérique. Il est possible d'adopter une approche alternative en raisonnant dans l'espace de Fourier.

Considérons un filtre $\mathbf{F}_K$ dans l'espace de Fourier qui ne garde que les composantes du champ $\mathbf{F}$ avec des nombres d'ondes compris entre K et $K + 1$,

$$\mathbf{F}_K(\mathbf{k}) = \sum_{k=K}^{K+1} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

À partir des équations de la MHD Hall adimensionnées idéales et inviscides,

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P_* + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}, \quad (\text{V.16})$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{U} - d_i \nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}), \quad (\text{V.17})$$

on peut écrire un bilan détaillé dans l'espace de Fourier pour l'énergie cinétique contenue dans la coquille sphérique K ,

$$\partial_t E_U(K) = \int \left\{ \sum_Q [-\mathbf{U}_K \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{U}_Q + \mathbf{U}_K \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{B}_Q] \right\} d\mathbf{x}^3,$$

ainsi que pour l'énergie magnétique,

$$\partial_t E_B(K) = \int \left\{ \sum_Q [-\mathbf{B}_K \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{B}_Q + \mathbf{B}_K \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{U}_Q + d_i \mathbf{J}_K \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{J}_Q)] \right\} d\mathbf{x}^3.$$

On peut réécrire ces équations d'une manière plus compacte,

$$\partial_t E_U(K) = \sum_Q [T_{UU}(K, Q) + T_{UB}(K, Q)],$$

$$\partial_t E_B(K) = \sum_Q [T_{BU}(K, Q) + T_{BB}^{MHD}(K, Q) + T_{BB}^{Hall}(K, Q)],$$

où les fonctions $T_{UU}(K, Q)$, $T_{UB}(K, Q)$, $T_{BU}(K, Q)$, $T_{BB}^{MHD}(K, Q)$ et $T_{BB}^{Hall}(K, Q)$ représentent le transfert d'énergie entre les différents champs aux travers de coquilles sphériques concentriques,

$$\begin{aligned} T_{UU}(K, Q) &\equiv - \int \mathbf{U}_K (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}_Q d\mathbf{x}^3, \\ T_{UB}(K, Q) &\equiv \int \mathbf{U}_K (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_Q d\mathbf{x}^3, \\ T_{BU}(K, Q) &\equiv \int \mathbf{B}_K (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{U}_Q d\mathbf{x}^3, \\ T_{BB}^{MHD}(K, Q) &\equiv - \int \mathbf{B}_K (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{B}_Q d\mathbf{x}^3, \\ T_{BB}^{Hall}(K, Q) &\equiv d_i \int \mathbf{J}_K (\mathbf{B} \times \mathbf{J}_Q) d\mathbf{x}^3. \end{aligned}$$

Avec cette notation, pour un transfert direct de l'énergie, c'est-à-dire d'une échelle donnée

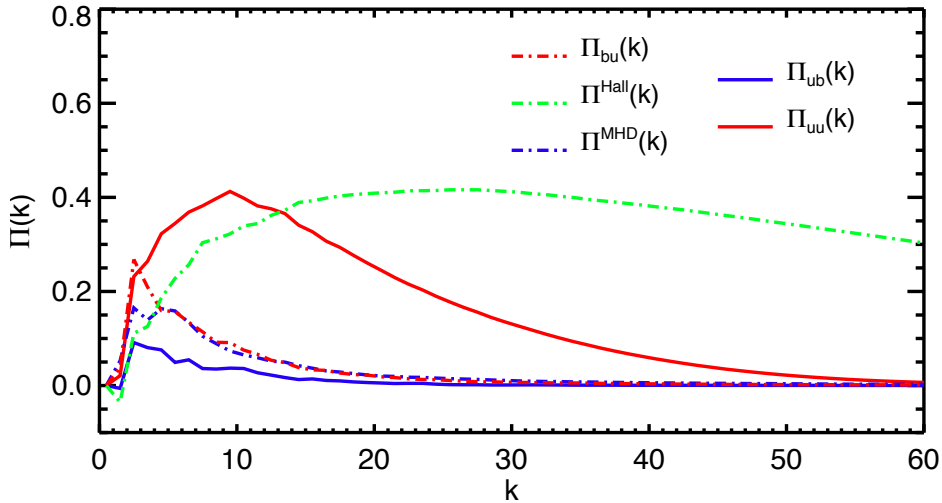


Figure V.11
— Flux d'énergie correspondant à chacun des termes non-linéaires des équations de la MHD Hall [V.16](#) et [V.17](#), en fonction du nombre d'ondes.

vers une échelle plus petite, le premier sous-indice représente le champ qui reçoit l'énergie tandis que le second sous-indice représente le champ qui cède de l'énergie. De la même manière, le premier nombre d'ondes en argument des fonctions de transfert correspond à

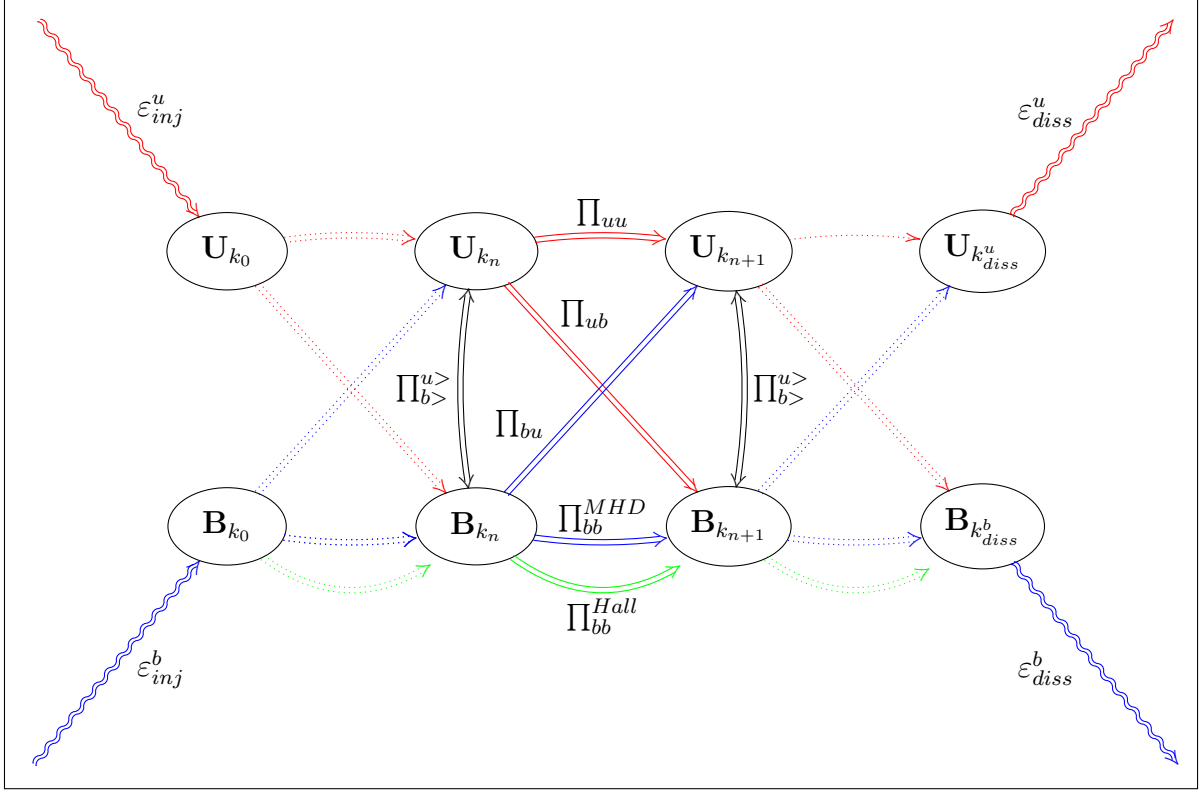


Figure V.12 – Diagramme récapitulatif des différents flux d'énergie à travers les échelles $k_n = k_0 \times n$ en MHD Hall. Les flèches gondolées aux extrémités gauche et droite correspondent respectivement à l'injection et la dissipation d'énergie cinétique (en rouge) et magnétique (en bleu). Il est important de noter que pour un nombre de Prandtl magnétique égal à un, l'échelle de dissipation cinétique k_{diss}^u n'est pas égale à l'échelle de dissipation magnétique k_{diss}^b . Les flèches rouges correspondent aux flux d'énergie cinétique portés par les termes non-linéaires $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$. Les flèches bleues correspondent aux flux d'énergie magnétique portés par les termes non-linéaires $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b}$, et les flèches vertes à celui porté par le terme de Hall $\nabla \times \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Les flèches noires correspondent quand à elles, à des flux d'énergie entre les champ magnétique et cinétique à une même échelle.

la coquille qui reçoit de l'énergie et le second à la coquille qui cède de l'énergie.

Le flux d'énergie à travers l'échelle k du champ Y au champ X se définit par,

$$\Pi_{XY}(k) \sum_{K=0}^k \sum_Q T_{XY}(K, Q).$$

Le diagramme de la figure V.12 résume les différentes contributions aux flux d'énergie totale et donne une idée de la complexité potentielle des transferts d'énergie en Hall MHD. Il est intéressant et rassurant de constater qu'en réalité, chacun des canaux d'énergie ne contribue pas de la même manière au transfert de l'énergie.

Les figures V.11 et V.13 représentent les flux d'énergie calculés en régime stationnaire et correspondant à la simulation décrite à la section 3.1. On voit très clairement que les flux dominants sont les flux Π_{UU} et Π_{BB}^{Hall} . Le terme Π_{UU} domine les grandes échelles mais décroît bien avant le terme Π_{BB}^{Hall} . Cela est dû au fait que les termes Hall et d'advection de la vitesse n'ont pas la même dépendance en k . Le terme Hall implique une double dérivation spatiale alors que le terme d'advection de la vitesse n'engage qu'une simple dérivation. Ainsi en MHD Hall, le nombre de Prandlt magnétique Pr_m^{Hall} définit comme le rapport entre le nombre de Reynolds magnétique de Hall Re_m^{Hall} ,

$$Re_m^{Hall} = \left[\frac{d_i \nabla \times \{(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}\}}{\eta \nabla^4 \mathbf{b}} \right] = \frac{d_i b}{\eta k^2},$$

et le nombre de Reynolds cinétique Re ,

$$Re = \left[\frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}{\nu \nabla^4 \mathbf{u}} \right] = \frac{u}{\nu k^3},$$

n'est pas égal au rapport entre la diffusivité cinétique et magnétique comme c'est le cas en MHD,

$$Pr_m^{MHD} \equiv \frac{\eta}{\nu} \neq Pr_m^{Hall} \equiv d_i \frac{\nu}{\eta} k.$$

Cette propriété remarquable se traduit dans l'espace réel par la présence de structures

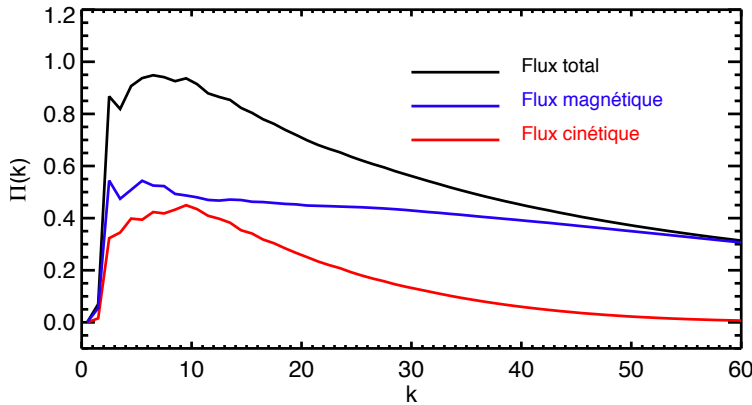


Figure V.13 – Flux d'énergies magnétique et cinétique en fonction du nombre d'ondes k .

magnétiques de tailles beaucoup plus petites que les structures cinétiques et ce, pour un nombre de Prandlt magnétique Pr_m^{MHD} égale à un. Les figures V.10(a) et V.10(b) montrent bien cette spécificité.

Les autres flux jouent un rôle marginal aux échelles proches de l'échelle d'injection et sont proches de zéro dans la zone inertielle.

Le résultat important obtenu à partir de cette étude est que les flux d'énergie croisés Π_{UB} et Π_{BU} sont quasiment nuls. Cela implique donc que le champ de vitesse et le champ magnétique sont transparents l'un pour l'autre et légitime donc le modèle heuristique présenté précédemment.

5.2 Structures cohérentes et beltramisation

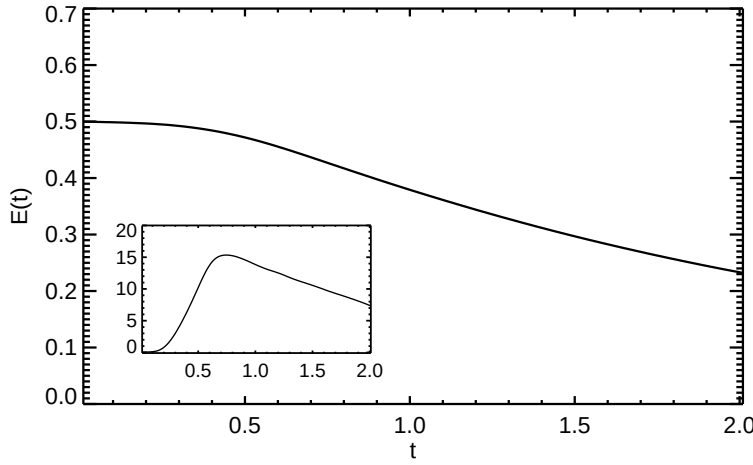


Figure V.14 – Énergies magnétique en fonction du temps pour une simulation EMHD en déclin. En médaillon : taux de dissipation de l'énergie magnétique en fonction du temps.

À la section 4.2 du chapitre II nous avons vu comment on peut prédire la forme des structures turbulentes MHD en raisonnant sur les invariants des équations. L'idée de base pour la turbulence en déclin est que l'énergie qui est une grandeur définie positive décroît plus vite que l'hélicité croisée qui elle peut prendre une valeur positive ou négative. Cette situation conduit asymptotiquement à un parfait alignement entre le champ de vitesse et le champ magnétique.

Boldyrev a généralisé cette idée au cas de la turbulence forcée en supposant qu'un mécanisme du même type abouti à un alignement d'autant plus grand que l'échelle considérée est petite. Le résultat de cette alignement dynamique est la formation de nappe de courant dont la topologie favorise les phénomènes de reconnections magnétique.

Dans le cas de la Hall MHD la situation est beaucoup plus compliquée car l'invariant correspondant à l'hélicité croisée est composite. Il s'agit de l'hélicité généralisée,

$$H_G = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} + d_i \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{B} + d_i \nabla \times \mathbf{V}) d\mathcal{V}$$

avec $\mathbf{A}$ le vecteur potentiel ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). Comme nous l'avons vu précédemment, on peut scinder le problème de la Hall MHD en deux sous problèmes, l'EMHD et l'IMDH. Il paraît

donc intéressant d'étudier la formation structures cohérentes dans ces deux situations particulières avant de considérer le cas général.

La forme des équations de la MHD Hall sous la forme d'une paire de vortex généralisés,

$$\frac{\partial \Omega_j}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_j \times \Omega_j) \quad (j = D, G) \quad (\text{V.18})$$

avec,

$$\begin{cases} \Omega_D = \mathbf{b}, \\ \mathbf{u}_D = \mathbf{u} - d_i \nabla \times \mathbf{b}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega_G = \mathbf{b} + d_i \nabla \times \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_G = \mathbf{u}, \end{cases}$$

suggèrent que les structures cohérentes "sélectionnées" par les termes non-linéaires sont celles pour lequel l'alignement entre Ω_j et $\mathbf{u}_j$ est maximal. En effet le terme non-linéaire des équations V.18 est d'autant plus faible que l'alignement est important, ce qui offre une durée de vie à ces structures plus important que celle qui ne sont pas alignés. Pour les structures de taille $l \gg d_i$, on retrouve pour les vortex D et G un alignement entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{b}$ qui conduit à la formation de nappe de courant (Boldyrev 2006 [12]). Pour des échelles $l \ll d_i$ on peut subodorer un alignement entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$ pour les vortex D et un alignement entre $\mathbf{v}$ et $\nabla \times \mathbf{v}$ pour les vortex G. Dans les deux cas on s'attend donc à ce que les structures turbulentes du courant électrique soient hélicoïdales.

L'alignement entre la vorticité et sa vitesse est appelé condition de Beltrami. Dans ce qui suit, nous appellerons la tendance d'alignement entre champ de vitesse généralisé et champ de vorticité généralisé, beltramisation.

EMHD :

Afin de tester ces prédiction j'ai réalisé une expérience numérique de turbulence EMHD en décroissance libre dans une boite périodique de 512^3 . La figure V.15(a) montre l'histogramme du cosinus de l'angle entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$ correspondant à la condition initiale que j'ai défini de manière aléatoire. La figure V.15(b) montre le même histogramme à un temps ultérieur correspondant au maximum de la dissipation d'énergie magnétique (voir Fig.V.14). On voit très clairement sur cet histogramme que la cascade turbulente a "sélectionné" les structures alignées. La figure V.16(b) illustre de façon spectaculaire le phénomène de beltramisation. Dans l'espace réel cela ce traduit par la formation de structure hélicoïdale (voir Fig.V.17).

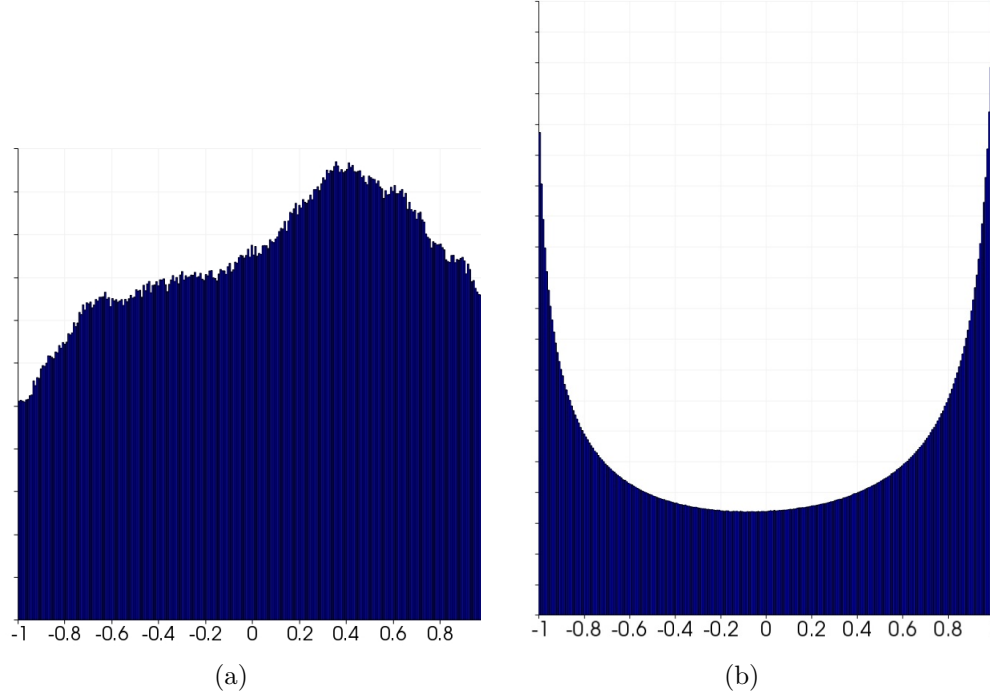


Figure V.15 – (a) Histogramme du cosinus de l'angle entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$ au temps initial pour une simulation EMHD en décroissance libre. (b) Histogramme du cosinus de l'angle entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$ au temps correspondant au maximum de dissipation de l'énergie magnétique (voir Fig.V.14). Les structures turbulentes non-alignées sont détruites plus rapidement que celles qui sont alignées car le transport de l'énergie par les termes non-linéaires vers les petites échelles où ont lieu les phénomènes dissipatifs est d'autant plus efficace que l'alignement est faible.

IMHD :

Pour des échelles $l \ll d_i$ l'équation de l'évolution temporelle des vortex G se réduit aux équations de Navier-Stokes et il paraît donc intéressant d'étudier les résultats obtenus en turbulence hydrodynamique.

Les structures cohérentes de la turbulence des fluides neutres incompressibles ont fait l'objet d'une littérature extrêmement abondante dont la synthèse ne permet pas réellement de dégager autre chose qu'un inventaire à la *Prévert*. De fait, il n'existe pas en turbulence de structure élémentaire analogue à la molécule pour le chimiste ou à la cellule pour le biologiste.

Un mécanisme semble cependant jouer un rôle dominant dans le cas particulier de la turbulence, incompressible, homogène et isotrope. Il s'agit du transfert d'énergie par étirement de vortex décrit par Taylor et Green en 1937 [190] et de la structure associée, le filament de vortécité (voir Fig.II.4). L'allongement du vortex implique une contraction

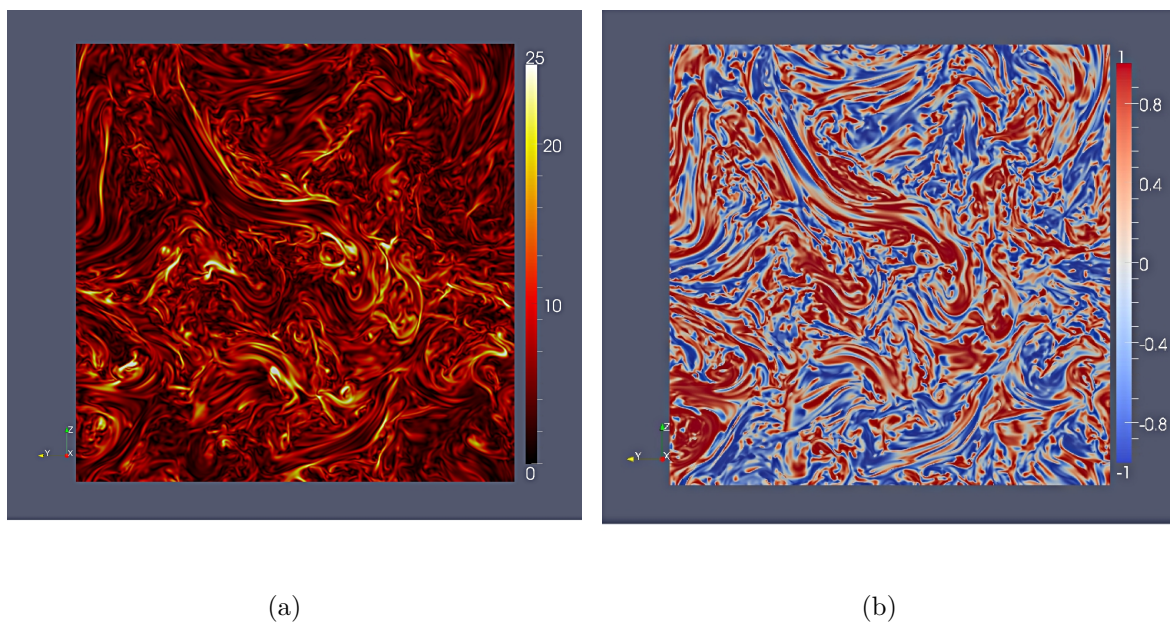


Figure V.16 – **V.16(a)** Norme du champ de vecteur courant électrique pour une simulation EMHD en décroissance libre au temps correspondant au maximum de dissipation de l'énergie magnétique (voir Fig.V.14. **V.16(b)** Cosinus de l'angle entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{b}$. Cette figure illustre de façon spectaculaire le phénomène de beltramisation en turbulence EMHD.

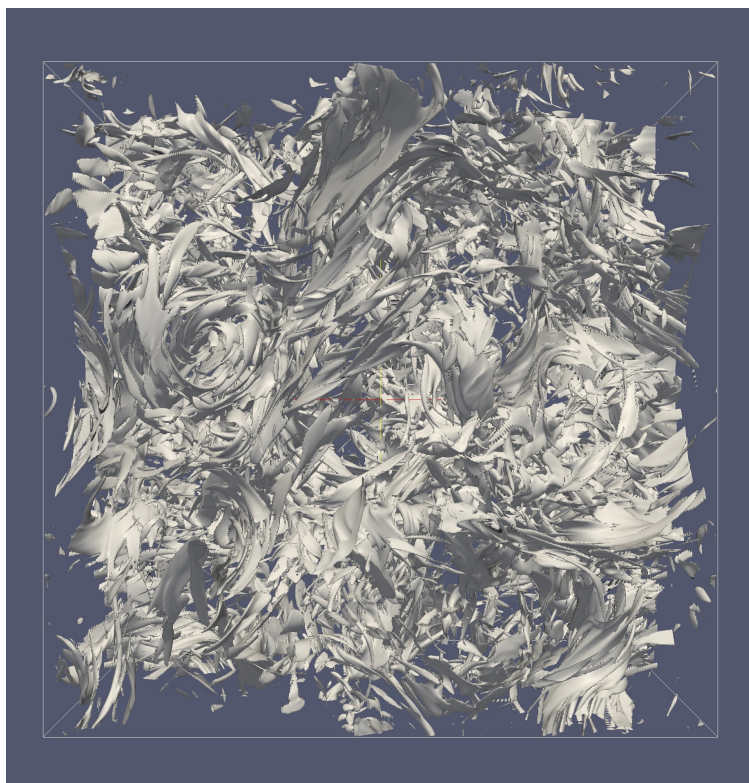


Figure V.17 – Iso-surfaces de la norme du courant électrique pour une simulation EMHD en décroissance libre au temps correspondant au maximum de dissipation de l'énergie magnétique (voir Fig.V.14). Le phénomène de beltramisation conduit à la formation de structures de courant électrique de forme hélicoïdale.

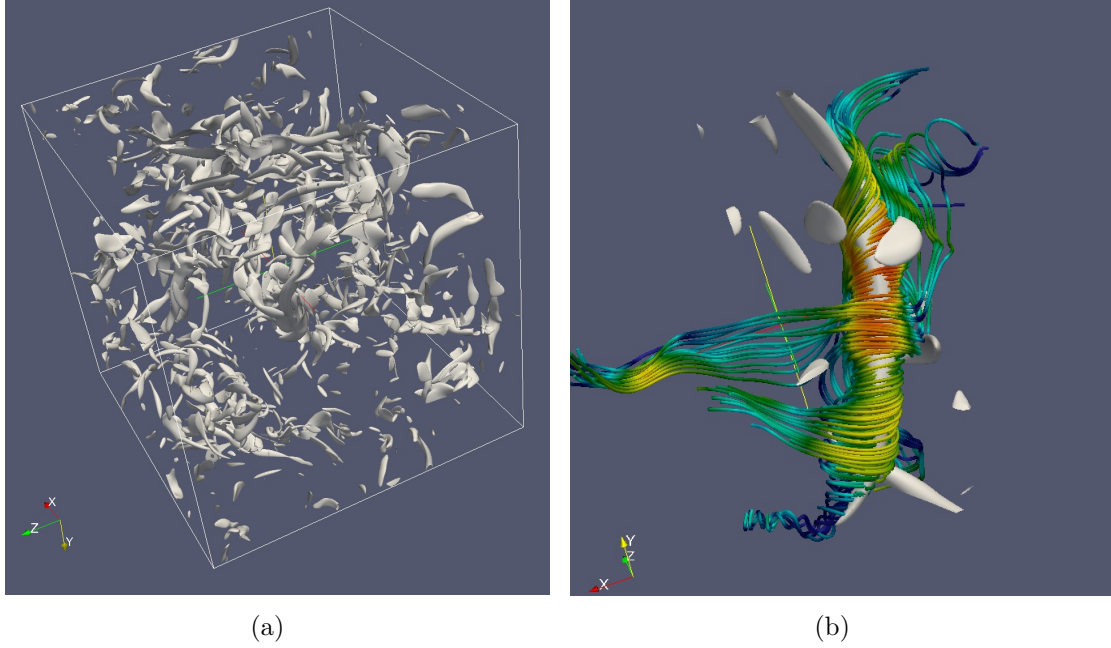


Figure V.18 – [V.18\(a\)](#) : Iso-surfaces de vorticité. [V.18\(b\)](#) : Iso-surfaces de vorticité et lignes de champ de vitesse.

La présence de filaments de vorticité en turbulence MHD Hall similaires à ceux rencontrés en turbulence hydrodynamique, corrobore fortement le modèle de turbulence chiral. Les paramètres de l'expérience numérique sont donnés aux tableaux [V.1](#) et [V.2](#)

dans la direction perpendiculaire à la direction d'étirement à cause de la conservation du volume des parcelles fluides qui le constitue. La combinaison de la contraction et de l'étirement conduit en vertu de la conservation du moment angulaire à une augmentation de la vitesse de rotation du vortex¹⁸.

Les filaments de vorticité ont été observés dans de nombreuses simulations numériques directes (She et al. 1990 [[177](#)] ; Jiménez et al. 1993 [[109](#)]) ainsi que dans des expériences (Douady et al. 1991 [[67](#)] ; Dérnoncourt et al. 1998 [[64](#)]) mais leur importance dans les processus dissipatifs ne fait pas l'objet d'un consensus (Tsinoeder et Moffat 1998 [[187](#)]). Moffat et al. (1994 [[154](#)]) ont par exemple montré que les zones de forte dissipation n'étaient que faiblement corrélées aux zones de forte vorticité.

MHD Hall :

Les figures [V.18\(a\)](#) et [V.18\(b\)](#) montrent clairement la formation en turbulence MHD

¹⁸. Ce phénomène est analogue à celui qu'utilisent les patineurs pour accélérer ou ralentir leur rotation sur la glace en ramenant ou écartant leurs bras du corps.

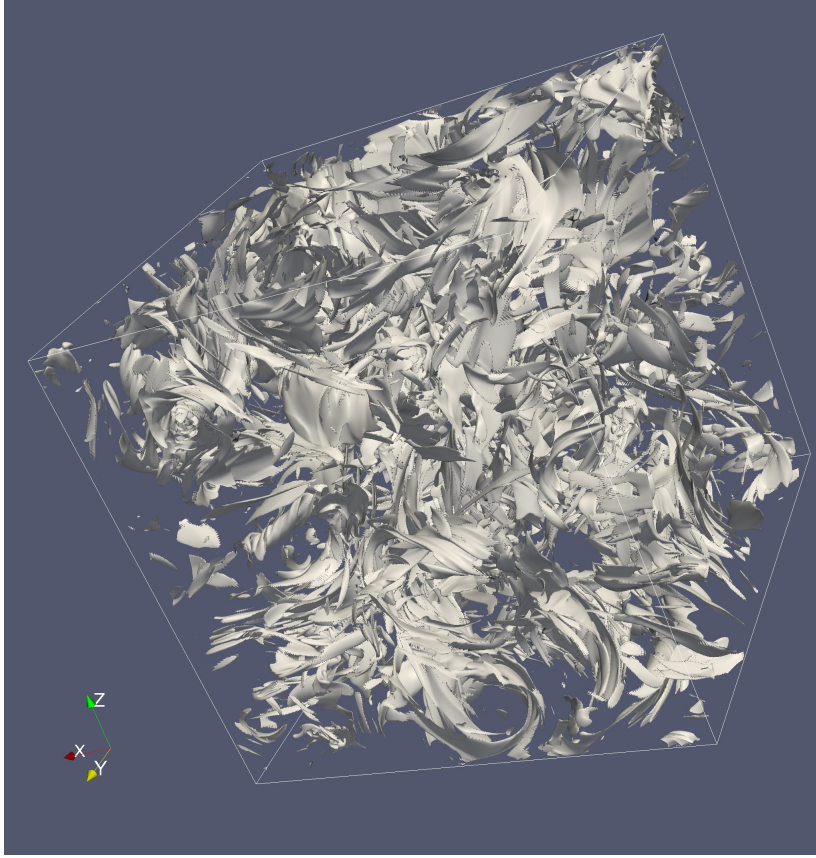


Figure V.19 – Iso-surface de courant électrique en turbulence MHD Hall forcée. Les paramètres de l'expérience numérique sont donnés aux tableaux V.1 et V.2. Les structures dominantes sont hélicitaire et traduisent le phénomène de beltramisation dans les écoulement turbulent MHD Hall.

Hall de filaments de vorticité similaires à ceux rencontrés en turbulence hydrodynamique (voir Fig. II.4). L'existence de telles structures corrobore fortement le modèle heuristique de turbulence chirale proposé dans cette thèse.

La figure V.19 montre la présence de structures de courant électrique de forme hélicoïdale. Ces structures sont la signature du phénomène de beltramisation du champ magnétique à l'œuvre en turbulence EMHD. En effet, en MHD Hall le courant électrique est largement dominé par le fluide électronique en raison de la grande mobilité des électrons par rapport à celle des ions. La dynamique du courant électrique en MHD Hall est donc principalement régie par les équations de l'EMHD conformément au modèle de turbulence chirale décrit précédemment.

L'auto-organisation du courant électrique en structures hélicoïdales joue certainement un rôle important dans les processus de dissipation. Il est probable que les phénomènes de reconnexion magnétique se produisant dans des nappes de courant faisant l'interface entre deux connectivités magnétiques cisailées ne jouent pas un rôle aussi important qu'en turbulence MHD (Lazarian et al. [117]).

La topologie des structures turbulentes observées suggère l'existence en turbulence MHD

Hall de phénomènes de striction magnétique pouvant contribuer de façon significative à la dissipation d'énergie en provoquant le collapse violent et intermittent des tubes hélicitaires de courant électrique.

Il est intéressant de noter qu'actuellement, le moyen connu le plus efficace pour chauffer un plasma est précisément un phénomène de pincement magnétique (Haines et al. 2006 [91])¹⁹.

6 Turbulence MHD Hall anisotrope

Comme nous l'avons souligné au chapitre II, la présence d'un champ magnétique moyen $\mathbf{B}_0$ modifie fondamentalement la dynamique turbulente d'un plasma. En mécanique classique les lois doivent être covariantes par transformation galiléenne. Or, la force électromagnétique $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ fait intervenir la vitesse $\mathbf{v}$ qui par définition n'est pas invariante par une telle transformation. Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ne peuvent donc pas être covariants. C'est là une différence fondamentale avec les fluides neutres pour lesquels n'importe quelle vitesse constante aux grandes échelles peut être rendue nulle par une simple transformation galiléenne.

En présence d'un champ magnétique moyen, la tension magnétique induite s'oppose au développement de la turbulence dans la direction parallèle. En effet, les fluctuations de vecteur d'onde parallèle sont propagées rapidement et ont donc plus de mal à interagir. Si on applique la conjecture de Goldreich-Sridhar on obtient alors des spectres d'énergie perpendiculaire similaires au cas isotrope. Si le champ magnétique est suffisamment fort, le transfert d'énergie parallèle est complètement inhibé et on peut modéliser la turbulence par un ensemble d'ondes en interaction non-linéaire faible. Il est alors défini un petit paramètre (rapport entre $\delta \mathbf{b}$ et $\mathbf{B}_0$) et effectuer un développement asymptotique. De manière remarquable cette technique permet la dérivation de relations exactes pour les invariants de la MHD Hall incompressible [76]. On appelle ce régime de turbulence, turbulence d'ondes.

Il est possible de construire un modèle heuristique de turbulence anisotrope valide à la fois pour un champ $\mathbf{B}_0$ modéré et fort, capable de décrire à la fois le régime de turbulence forte et le régime de turbulence d'ondes (Galtier et al. 2005 [75]). Comme c'est le cas pour la conjecture de Goldreich-Sridhar le rapport entre le temps non-linéaire et le temps d'Alfvén est considéré comme constant. La différence provient du fait que le

19. Haines et ses collaborateurs ont obtenu la température incroyable de 2 milliard de Kelvin à partir d'une configuration Z-pinches aux Sandia National Laboratories dans le nouveau Mexique.

modèle proposé ne considère pas nécessairement que cette constante est égale à l'unité. Cela autorise l'utilisation de la phénoménologie d'Iroshnikov-Kraichnan et permet d'obtenir une loi pour le spectre d'énergie totale $E(k_\perp, k_\parallel) \sim k_\perp^{-\alpha} k_\parallel^{-\beta}$ reliant α et β . Ce modèle heuristique réalise donc élégamment la synthèse des théories de Goldreich-Sridhar et Iroshnikov-Kraichnan. Dans ce qui suit nous présentons les différentes étapes de calcul et les hypothèses sous-jacentes qui permettent d'établir l'équation reliant α et β dans le cas EMHD et IMHD.

6.1 Théorie synthétique de Goldreich-Sridhar et Iroshnikov-Kraichnan

Comme nous l'avons vu au chapitre II, dans le modèle phénoménologique de Kolmogorov les fluctuations sont distribuées de façon isotrope et il existe un seul temps caractéristique $\tau_{NL} \sim (vk)^{-1}$ qui est donc nécessairement égale au temps de transfert de l'énergie vers les petites échelles, i.e., $\tau_{tr} = \tau_{NL}$. En présence d'un champ magnétique dans le cas de la turbulence MHD Hall incompressible deux nouveaux temps caractéristiques supplémentaires apparaissent qui correspondent respectivement aux temps caractéristiques associés aux ondes ion cyclotron $\tau_{IC} \sim d_i k_\perp / k_\parallel B_0$ et whistler $\tau_W \sim [d_i k_\perp k_\parallel B_0]^{-1}$. Le temps caractéristique non-linéaire associé au terme d'advection de la vitesse par elle-même devient $\tau_{NL} \sim (v_\perp k_\perp)^{-1}$ puisque la turbulence se développe préférentiellement dans les directions perpendiculaires.

EMHD anisotrope :

En suivant la démarche de Iroshnikov-Kraichnan, on a en considérant le cas EMHD :

$$\epsilon_{IKW} \sim \frac{E}{\tau_{tr}} \sim \frac{b_\perp^2}{\tau_{tr}}, \quad (\text{V.19})$$

avec,

$$\tau_{tr} = \tau_{NL} \frac{\tau_{NL}}{\tau_W} \sim \left(\frac{1}{u_{e\perp} k_\perp} \right)^2 d_i k_\perp k_\parallel B_0 \sim \frac{k_\parallel B_0}{k_\perp^3 d_i b_\perp^2}, \quad (\text{V.20})$$

et où on a utilisé le fait que les ions étant considérés immobiles, on a $\mathbf{v}_e \propto d_i \nabla \times \mathbf{b}$. En combinant les équations V.19 et V.20 on obtient,

$$\epsilon_{IKW} \sim \frac{d_i k_\perp^3 b_\perp^4}{k_\parallel B_0}. \quad (\text{V.21})$$

V.6 Turbulence MHD Hall anisotrope

En faisant l'hypothèse d'une auto-similarité dans les deux directions ($\perp, \parallel$), on définit le spectre d'énergie anisotrope de la manière suivante :

$$E(k_\perp, k_\parallel) \sim k_\perp^{-\alpha} k_\parallel^{-\beta}, \quad (\text{V.22})$$

avec α et β des inconnues à déterminer. Il s'agit d'un spectre bidimensionnel et on retrouve donc l'énergie totale du système en intégrant par rapport aux variables $k_\perp$ et $k_\parallel$, i.e, $E^{Sys} = \iint E(k_\perp, k_\parallel) dk_\perp dk_\parallel$. En injectant la relation V.22 dans V.21 et en notant que $b_\perp^2 \sim E(k_\perp, k_\parallel) k_\perp k_\parallel$ on obtient,

$$\epsilon_{IKW} \sim \frac{k_\perp^{2(-\alpha+1)} k_\parallel^{2(-\beta+1)} k_\perp^3 d_i}{k_\parallel B_0} = \frac{k_\perp^{-2\alpha+5} k_\parallel^{-2\beta+1} d_i}{B_0},$$

qui peut être récrit de manière à obtenir une relation entre $k_\parallel$ et $k_\perp$,

$$k_\parallel \sim \left(\frac{d_i}{\epsilon_{IKW} B_0} \right)^{1/2\beta-1} k_\perp^{-2\alpha+5/2\beta-1}. \quad (\text{V.23})$$

Pour relier β et α on a besoin d'une nouvelle relation. L'idée est de généraliser la conjecture de Goldreich-Sridhar en postulant que le rapport entre τ_{NL} et τ_W est indépendant des échelles spatiales dans la zone inertielle sans être pour autant égale à 1. Autrement dit,

$$\chi = \frac{\tau_{NL}}{\tau_W} \sim \frac{d_i k_\perp k_\parallel B_0}{k_\perp^2 d_i b_\perp} = \frac{k_\parallel B_0}{k_\perp b_\perp}, \quad (\text{V.24})$$

avec χ un réel quelconque. En incluant V.24 dans V.21 on obtient,

$$k_\parallel \sim \left(\frac{\chi}{B_0} \right)^{4/3} \frac{\epsilon_{IKW}^{1/3}}{d_i} k_\perp^{1/3}. \quad (\text{V.25})$$

On retrouve donc la même relation entre $k_\perp$ et $k_\parallel$ que celle obtenue à partir de la phénoménologie de Goldreich-Sridhar appliquée à l'EMHD. Cette loi a été confirmée par des simulations numériques directes (Cho et al. [54]). En faisant l'hypothèse que le taux de transfert de l'énergie par unité de masse ne dépend pas de l'échelle on obtient donc finalement la relation :

$$\frac{-2\alpha + 5}{2\beta - 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{3\alpha + \beta = 8}. \quad (\text{V.26})$$

La relation V.26 est compatible avec le spectre résultant de la conjecture de Goldreich-Sridhar appliquée à l'EMHD (avec $\alpha = 7/3$ et $\beta = 1$) (Cho et al. [54]), mais également

avec le spectre obtenu comme solution exacte de la turbulence d'ondes (avec $\alpha = 5/2$ et $\beta = 1/2$) (Galtier 2006 [76]). Il paraît donc probable que la loi V.26 décrive également le régime transitoire entre la turbulence d'ondes et la turbulence forte.

Si le transfert d'énergie parallèle est complètement inhibé, $k_{\parallel}$ peut être considéré comme une constante et on a alors d'après V.22, $\beta = 0$. Cette situation est intéressante car elle correspond à un spectre en $k_{\perp}^{-8/3}$ qui est très proche de celui observé dans le vent solaire (voir Fig.V.9). Des simulations numériques sont en cours pour tester cette prédiction.

IMHD anisotrope :

Si on considère le cas IMHD, on a pour $kd_i \gg 1$:

$$\epsilon_{IK_{IC}} \sim \frac{E}{\tau_{tr}} \sim \frac{u_{\perp}^2}{\tau_{tr}}, \quad (\text{V.27})$$

avec,

$$\tau_{tr} = \tau_{NL} \frac{\tau_{NL}}{\tau_{IC}} \sim \left(\frac{1}{u_{\perp} k_{\perp}} \right)^2 \frac{k_{\parallel} B_0}{d_i k_{\perp}} = \frac{k_{\parallel} B_0}{u_{\perp}^2 k_{\perp}^3 d_i}. \quad (\text{V.28})$$

En combinant les équations V.27 et V.28 on obtient,

$$\epsilon_{IK_{IC}} \sim \frac{u_{\perp}^4 k_{\perp}^3 d_i}{k_{\parallel} B_0}. \quad (\text{V.29})$$

En utilisant l'hypothèse d'auto-similarité V.22, on a :

$$\epsilon_{IK_{IC}} \sim \frac{k_{\perp}^{2(-\alpha+1)} k_{\parallel}^{2(-\beta+1)} k_{\perp}^3 d_i}{k_{\parallel} B_0} = \frac{k_{\perp}^{-2\alpha+5} k_{\parallel}^{-2\beta+1} d_i}{B_0}, \quad (\text{V.30})$$

qui peut être récrit de manière à obtenir une relation entre $k_{\parallel}$ et $k_{\perp}$,

$$k_{\parallel} \sim \left(\frac{d_i}{\epsilon_{IK_{IC}} B_0} \right)^{1/2\beta-1} k_{\perp}^{-2\alpha+5/2\beta-1}. \quad (\text{V.31})$$

En généralisant la conjecture de Goldreich-Sridhar,

$$\chi = \frac{\tau_{NL}}{\tau_{IC}} = \frac{k_{\parallel} B_0}{u_{\perp} d_i k_{\perp}^2}, \quad (\text{V.32})$$

on obtient en incluant V.32 dans V.28,

$$k_{\parallel} \sim \chi^{4/3} \epsilon_{IKIC}^{1/3} \frac{d_i}{B_0} k_{\perp}^{5/3}. \quad (\text{V.33})$$

Cette relation est radicalement différente du cas EMHD (voir V.25) puisqu'elle implique que les fluctuations sont d'autant moins anisotropes que $k_{\perp}$ augmente. La transition du régime MHD anisotrope $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ au régime IMHD anisotrope implique donc que les fluctuations du champ de vitesse se re-isotropisent. En faisant l'hypothèse que le taux de transfert de l'énergie par unité de masse ne dépend pas de l'échelle on obtient donc finalement la relation :

$$\frac{-2\alpha + 5}{2\beta - 1} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{3\alpha + 5\beta = 10}. \quad (\text{V.34})$$

La relation V.33 est similaire à celle obtenue dans le cadre de la turbulence en rotation pour les fluides neutres. Cela n'a rien d'étonnant puisque la relation de dispersion pour les ondes inertielles $\omega = 2\Omega k_{\parallel}/k$ a la même dépendance en k que les ondes ions cyclotrons. Le champ magnétique en IMHD joue donc exactement le même rôle que la vitesse angulaire Ω en turbulence en rotation.

La relation V.34 est compatible, avec le spectre résultant de la conjecture de Goldreich-Sridhar appliquée à la turbulence en rotation (avec $\alpha = 5/3$ et $\beta = 1$) (Nazarenko et al. [155]) mais également avec les spectres obtenus à partir des lois exactes de turbulence d'ondes inertielles (avec $\alpha = 5/2$ et $\beta = 1/2$) (Galtier 2003 [74]). Il paraît donc probable que la loi V.34 décrive également le régime transitoire entre la turbulence d'ondes et la turbulence forte.

En fonction de l'intensité du champ magnétique moyen on s'attend donc à ce que l'indice α du spectre d'énergie du champ magnétique soit compris entre $[11/3, 16/3]$ ²⁰ avec un indice d'autant plus grand que le champ magnétique est fort. Ce résultat pourrait donc expliquer la variabilité de l'indice spectral observée dans le vent solaire au niveau de la zone de transition entre les échelles MHD et dispersives [182].

20. En IMHD on a en effet $\mathbf{u} \propto d_i \nabla \times \mathbf{b}$.

Chapitre VI

Au-delà de la MHD Hall

Sommaire

1	EMHD inertielle	164
1.1	Loi d'Ohm généralisée	164
1.2	Ondes dans l'approximation EMHD inertielle	165
1.3	Invariants idéaux	166
2	Loi universelle de la turbulence EMHD inertielle isotrope . .	168
2.1	Outils statistiques et symétries	168
2.2	Théorie de Kármán-Howarth appliquée à l'EMHD inertielle . .	171
2.3	Loi universelle pour les fonctions de structure d'ordre trois . .	175
3	Comparaisons avec les observations <i>in situ</i>	178

DE RÉCENTES OBSERVATIONS obtenues à l'aide des magnétomètres hautes résolutions embarqués à bord des satellites Cluster, ont révélé une zone située au-delà des échelles électroniques caractérisée par un raidissement du spectre des fluctuations magnétiques. Ce raidissement a été interprété comme une loi de puissance (Sahraoui et al. 2009 [13]) avec un indice spectral autour de -3.8 , ou une décroissance exponentielle (Alexandrova et al. 2009 [28], Alexandrova et al. 2012 [27]).

Ce nouveau régime fait donc l'objet d'une controverse similaire à celle du raidissement spectral découverte 20 ans auparavant aux échelles ioniques. La question qui vient naturellement à l'esprit est de savoir si l'on a découvert la zone de dissipation ultime du vent solaire ou si un nouveau régime de turbulence apparaît à ces échelles.

Pour apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons étudié d'un point de

vue théorique, l'effet de la prise en compte de l'inertie des électrons dans un modèle fluide (Kingsep et al. 1990 [141]) en régime de turbulence homogène et isotrope. Bien que les hypothèses de travail soient extrêmement simplificatrices, il est intéressant de remarquer que les résultats sont compatibles avec certaines observations.

Dans ce chapitre, nous présenterons le modèle théorique que nous avons utilisé et le détail des calculs qui permettent d'obtenir une loi exacte pour les fonctions de structure d'ordre trois du courant électrique. Nous montrerons également que la prise en compte de l'inertie des électrons dans la loi d'Ohm généralisée conduit à des équations dont la structure est identique à celle de l'IMHD. La loi exacte obtenue est donc valable également pour le régime de turbulence IMHD présenté au chapitre V.

1 EMHD inertielle

Comme nous l'avons indiqué dans les chapitres précédents, l'idée physique qui sous-tend l'EMHD est de considérer des échelles bien plus petites que l'échelle inertielle ionique c/ω_{pi} pour lesquelles les ions peuvent être considérés comme immobiles. Ils constituent alors un fond neutralisant sur lequel les électrons se déplacent. Dans ce régime, la dynamique est gouvernée par le courant électronique et le champ magnétique induit de manière auto-consistante. En EMHD, les électrons sont considérés comme étant infiniment léger. L'idée de l'EMHD inertielle est de leur conférer une masse. Ce modèle a suscité beaucoup d'intérêt pour sa capacité à décrire des phénomènes de physique des plasmas aussi variés que les Z-pinchs (Kingsep 1996 [142]) ou la reconnexion magnétique (Chacon et al. [49]).

1.1 Loi d'Ohm généralisée

En supposant que les collisions sont suffisamment fréquentes pour rendre le tenseur de pression isotrope et la divergence du tenseur de contrainte égale à un coefficient scalaire de diffusion, on obtient à partir de la loi de conservation de la quantité de mouvement du fluide électronique la loi d'Ohm généralisée suivante :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla p_e - \frac{m_e}{en} (\partial_t n \mathbf{v}_e + \nabla \cdot \mathbf{v}_e \mathbf{v}_e n) + \eta \mu_0 \mathbf{J} - \nu_e \frac{m_e}{e} \nabla^2 \mathbf{v}_e. \quad (\text{VI.1})$$

L'hypothèse sur la divergence du tenseur de contrainte est extrêmement grossière car dans un plasma les viscosités parallèle et perpendiculaire au champ magnétique sont très différentes. Ici ν_e correspondrait plutôt à une viscosité perpendiculaire. Il faut cependant

garder à l'esprit que pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés, les échelles d'injection d'énergie et de dissipation sont assez séparées pour qu'une large gamme d'échelles inviscides existe. Dans ce cas, le détail des processus de dissipation n'a pas d'importance. En insérant la loi d'Ohm généralisée VI.1 dans l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient une équation non linéaire auto-cohérente pour le champ magnétique :

$$\partial_t (1 - d_e^2 \nabla^2) \mathbf{B} - \nabla \times [\mathbf{v}_e \times (1 - d_e^2 \nabla^2) \mathbf{B}] = \eta \nabla^2 \mathbf{B} - \nu_e \frac{m_e}{e} d_i \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (\text{VI.2})$$

avec,

$$\mathbf{v}_e = -d_i \mathbf{J} = -d_i \nabla \times \mathbf{B}, \quad (\text{VI.3})$$

où $\mathbf{B}$ est le champ magnétique normalisé ($\mathbf{B} \rightarrow \sqrt{\mu_0 \rho} \mathbf{B}$) et $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ le courant normalisé. Il est intéressant de noter que la pression ne joue aucun rôle à cause de l'hypothèse d'une pression scalaire et du terme en $\nabla \times \mathbf{E}$ dans la relation de Maxwell-Faraday. Aucune équation de fermeture n'est donc nécessaire dans ce cas particulier.

Le terme inertiel de la loi d'Ohm ($\partial_t n \mathbf{v}_e + \nabla \cdot \mathbf{v}_e \mathbf{v}_e n$) fait apparaître une nouvelle échelle caractéristique $d_e^2 = c/\omega_{pe}$ appelée échelle inertielle électronique. De manière remarquable, on retrouve au signe et au coefficient d_e près les équations de l'IMHD. Tous les résultats obtenus dans le cadre de l'EMHD inertielle se généralise donc à l'IMHD.

1.2 Ondes dans l'approximation EMHD inertielle

Une linéarisation de l'équation VI.2 autour d'un fort champ magnétique uniforme B_0 ,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= B_0 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \epsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}), \\ \mathbf{v}_e(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}_{e1} = -d_i \mathbf{J}_1 = -d_i \nabla \times \mathbf{B}_1, \end{aligned}$$

donne après application d'une transformée de Fourier,

$$\omega (1 + k^2 d_e^2) \mathbf{B}_1 + d_i B_0 k_{\parallel} i \mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Comme dans le cas des ondes Hall MHD, il est judicieux de projeter l'équation VI.4 sur une base hélicitaire complexe (voir chapitre V). Cela permet de diagonaliser le système. On obtient alors,

$$\begin{pmatrix} \omega (1 + k^2 d_e^2) - d_i B_0 k k_{\parallel} & 0 \\ 0 & \omega (1 + k^2 d_e^2) + d_i B_0 k k_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_+(\mathbf{k}) \\ \mathcal{B}_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit trivialement à la relation de dispersion,

$$\omega^2 = d_i^2 B_0^2 \frac{k_{\parallel}^2 k^2}{(1 + k^2 d_e^2)^2}, \quad (\text{VI.5})$$

La relation de dispersion VI.5 implique que la relation VI.4 se réduise simplement à,

$$\mathbf{B}_1 = \pm i(\mathbf{k}/k) \times \mathbf{B}_1$$

Les ondes whistlers de l'EMHD inertielle sont donc des ondes transverses, polarisées circulairement dans le même sens que le mouvement cyclotron électronique. Cette propriété se traduit dans la limite $r \ll d_e$ par l'apparition d'une résonance qui dépend de l'orientation du vecteur d'onde : dans le cas particulier où $k = k_{\parallel}$, la résonance se fait exactement à la pulsation ω_{ce} .

1.3 Invariants idéaux

L'étape préliminaire à la construction de toute théorie de turbulence est de déterminer quelles sont les quantités conservées dans la zone inertielle. Puisque en EMHD inertielle les électrons ont une masse, l'énergie est de nature magnétique mais également cinétique. On peut donc l'exprimer de la manière suivante :

$$E^T = \frac{1}{2} \int (B^2 + d_e^2 J^2) d^3x \quad (\text{VI.6})$$

On a, en effet, en utilisant la relation de Maxwell-Faraday,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} &= \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Or, puisque $\nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{J}$, en négligeant les termes dissipatifs, l'équation VI.2 peut s'exprimer de la manière suivant :

$$\partial_t (\mathbf{A} + d_e^2 \mathbf{J}) = -d_i \mathbf{J} \times [\mathbf{B} + d_e^2 (\nabla \times \mathbf{J})] - \nabla \Phi, \quad (\text{VI.7})$$

avec $\mathbf{A}$ le potentiel vecteur du champ magnétique et Φ une fonction a priori inconnue. Le terme en $\nabla \Phi$ peut être considéré comme une jauge, mais d'après la loi d'Ohm généralisée

VI.1, on peut l'identifier au gradient de pression électronique divisé par une longueur caractéristique. On a donc,

$$\begin{aligned} \frac{d_e^2}{2} \frac{\partial J^2}{\partial t} &= d_e^2 \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -d_i \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - d_e^2 d_i \mathbf{J} \cdot [\mathbf{J} \times (\nabla \times \mathbf{J})] - \mathbf{J} \cdot \nabla \Phi - \mathbf{J} \cdot \partial_t \mathbf{A} \\ &= -\nabla \cdot \left[\left(\Phi + V + \frac{1}{2} d_e^2 J^2 \right) \mathbf{J} \right] + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned}$$

avec V le potentiel électrique¹, $\mathbf{E}$ le champ électrique normalisé.

En sommant la variation temporelle de l'énergie magnétique et de l'énergie cinétique, le terme en $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ disparaît. Ce terme joue cependant un rôle extrêmement important dans la dynamique puisque c'est lui qui assure l'échange entre l'énergie cinétique et magnétique. Il correspond à une densité de puissance électromagnétique.

La forme intégrale de l'équation de conservation de l'énergie dans le cas inviscide donne d'après le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \mathbf{E}^T d\mathcal{V} = - \oiint \left[\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} + \left(\Phi + V + \frac{1}{2} d_e^2 J^2 \right) \frac{\mathbf{J}}{\mu_0} \right] \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}.$$

Si on considère le cas particulier d'un volume infiniment grand, les flux s'annulent sur la surface et l'énergie est conservée. L'énergie totale est donc un invariant des équations de l'EMHD inertielle idéal et inviscide ainsi que de l'IMHD.

On peut également montrer que l'hélicité généralisée,

$$H^G = \int (\mathbf{A} - d_e^2 \mathbf{J}) \cdot (1 - d_e^2 \nabla^2) \mathbf{B} d^3x,$$

est aussi invariante (Biskamp et al. 1999 [42]). Dans la limite où $r \gg d_e$, F se réduit à l'hélicité magnétique $H = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3\mathbf{x}$ et pour $r \ll d_e$ à l'hélicité cinétique $H^V = \int \mathbf{v}_e \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_e) d^3\mathbf{x}$. Il est intéressant de noter que H^G contient également un terme $\propto \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} d^3\mathbf{x}$, réminiscence de l'hélicité croisée $H^c = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} d^3\mathbf{x}$ de la MHD.

1. $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A}$.

2 Loi universelle de la turbulence EMHD inertielle isotrope

2.1 Outils statistiques et symétries

Avant d'étudier en détail la dynamique de la turbulence isotrope, il convient d'introduire les différentes grandeurs statistiques utilisées pour caractériser un champ de vitesse turbulent.

Trois grandeurs statistiques inter-dépendantes sont traditionnellement utilisées :

- Le tenseur de corrélation de vitesse.
- La fonction de structure d'ordre deux.
- Le spectre d'énergie.

Le tenseur de corrélation de vitesse,

$$R_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

a été introduit pour la première fois par Taylor en 1921 [189]. Il est en quelque sorte à la turbulence ce que la vitesse est aux écoulements laminaires. C'est la grandeur de base à partir de laquelle on construit toutes théories statistiques de turbulence. Si R_{ij} ne dépend pas du temps, on dit que la turbulence est dans un régime stationnaire, si R_{ij} ne dépend pas de $\mathbf{x}$ mais uniquement de $\mathbf{r}$ la turbulence est dite statistiquement homogène. Enfin, si R_{ij} est indépendant de la direction et donc ne dépend pas de $|\mathbf{r}|$, c'est-à-dire si les moyennes d'ensemble possèdent la symétrie miroir et sont invariantes par rotation du repère de référence, la turbulence est dite isotrope. Il est important de noter que dans la définition de R_{ij} , $\mathbf{u}$ correspond implicitement à la composante turbulente du champ de vitesse.

$\langle(\sim)\rangle$ représente une moyenne d'ensemble équivalente à une moyenne temporelle en régime stationnaire et est égale à une moyenne sur un volume dans le cas d'une turbulence homogène.

Le tenseur de corrélation mesure le degré et la manière dont les composantes des fluctuations de vitesse en deux points distincts sont corrélées. Si les fluctuations de vitesse en deux points A et B sont statistiquement indépendantes, alors $R = 0$. Intuitivement, on comprend que c'est le cas si la distance r entre A et B est beaucoup plus grande que la taille type d'un tourbillon. Au contraire, quand $r \rightarrow 0$, $R_{xx} \rightarrow \langle (u_x)^2 \rangle$.

VI.2 Loi universelle de la turbulence EMHD inertielle isotrope

Dans le cas d'un écoulement homogène et isotrope on a :

$$u^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle.$$

Il est commode d'introduire la fonction $u^2 f(r) = R_{xx}(r\mathbf{e}_x)$ appelée fonction longitudinale de corrélation.

Le tenseur de corrélation des vitesses à lui seul ne permet pas d'extraire d'informations sur la répartition de l'énergie en fonction de la taille des structures turbulentes. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire le spectre d'énergie et la fonction de structure longitudinale d'ordre deux. Cette dernière est définie en terme d'incrément de vitesse longitudinale, $\Delta v = u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x) - u_x(\mathbf{x})$ de la manière suivante :

$$\langle [\Delta v]^2 \rangle = \langle [u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x) - u_x(\mathbf{x})]^2 \rangle.$$

Intuitivement, il paraît raisonnable que seules des structures turbulentes de taille $\sim r$ contribuent de manière significative à cette grandeur physique, puisqu'elles tendent à créer une différence de vitesse significative entre les points situés en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} + \mathbf{r}$. En effet, des tourbillons beaucoup plus grands que r tendent à avoir une vitesse similaire en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} + \mathbf{r}$. À l'inverse, des tourbillons beaucoup plus petit que r ont des vitesses *a priori* différentes en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ mais statistiquement ces différences de vitesse s'annulent (voir Fig. VI.1). $\langle [\Delta]^2 \rangle$ agit donc comme une sorte de filtre statistique spatial mesurant l'énergie par unité de masse contenue dans les tourbillons de taille $\sim r$.

Dans le cas d'un écoulement homogène, cette grandeur est reliée au tenseur de corrélation par (Batchelor 1953 [206]) :

$$\langle [\Delta v(r)]^2 \rangle = 2u(1 - f),$$

on voit donc que pour des r suffisamment grands, $\langle [\Delta v(r)]^2 \rangle \rightarrow \frac{4}{3} \langle \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \rangle$, on peut donc anticiper que $\langle [\Delta v(r)]^2 \rangle \sim \frac{4}{3}$ [de l'énergie contenue dans les structures de taille $\sim r$].

Une manière alternative pour quantifier l'énergie contenue dans les structures de différentes tailles est, comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, de raisonner sur les nombres d'ondes. Pour ce faire, on peut introduire le spectre d'énergie à partir du tenseur de corrélation via les transformées de Fourier suivantes :

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \sin(kr) dr,$$

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = 2 \int_0^\infty E(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk.$$

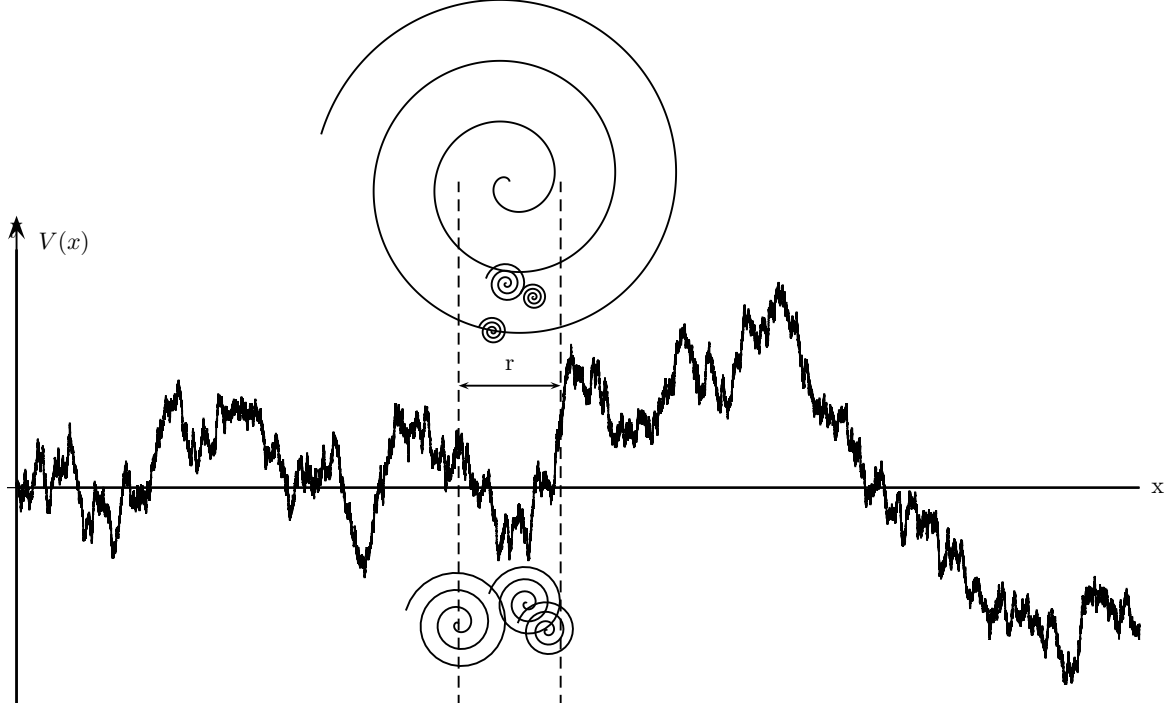


Figure VI.1 – Profile de vitesse typique d’un écoulement turbulent. Les spirales représentent schématiquement les structures cohérentes de taille différente qui contribuent au signal turbulent. Intuitivement on voit que seules les structures de taille l avec $l \sim r$ apportent une contribution significative à $\langle [\Delta v(r)]^2 \rangle$, de l’ordre de leur énergie cinétique. Les fonctions de structure d’ordres deux agissent donc comme un filtre spatial statistique permettant d’extraire l’information sur la répartition de l’énergie en fonction des échelles.

Il est possible de montrer que la fonction $E(k)$ est positive et que pour une assemblée de structures de taille r' , elle atteint son maximum autour de $k \sim \pi/r'$. Le spectre d’énergie vérifie également :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \int_0^\infty E(k) dk.$$

Au vue de ces propriétés, $E(k)dk$ est souvent considéré comme étant la contribution des structures turbulentes de nombres d’ondes compris entre $k \rightarrow k + dk$, ce qui n’est pas tout à fait vrai puisque des structures de taille r contribue à $E(k)$ pour toutes les valeurs de k . De plus, il est clair que la turbulence même dans un plasma n’est pas composée d’ondes planes. L’approche spectrale, malgré ses faiblesses reste cependant extrêmement utilisée en théorie de la turbulence car la plupart des modèles de fermeture ont été construits dans l’espace spectral.

2.2 Théorie de Kármán-Howarth appliquée à l'EMHD inertielle

L'équation de Kármán-Howarth obtenue en 1938 [168], est l'un des rares résultats exacts en théorie statistique de la turbulence. Elle sert de point de départ à la plupart des théories de turbulence isotrope qui ont été développées par la suite (Monin et al. 1975 [211]). C'est ce résultat, qui a permis à Kolmogorov de dériver la célèbre loi des 4/5 qui porte son nom (Kolmogorov 1941 [144]).

Dans cette section, nous présentons comment on obtient l'équivalent de la loi de Kármán-Howarth pour l'EMHD inertielle dans les deux régimes asymptotiques $r \ll d_e$ et $r \gg d_e$.

2.2.1 Régime $r \ll d_e$

Dans la limite $r \ll d_e$ l'équation VI.7 se réduit à ,

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -d_i \mathbf{J} \times (\nabla \times \mathbf{J}) - \frac{1}{d_e^2} \nabla \Phi, \quad (\text{VI.8})$$

et peut se réécrire de manière équivalente en utilisant la notation d'Einstein,

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} = -d_i J_l \partial_l J_i - \partial_i \left(\frac{\Phi}{d_e^2} + \frac{J^2}{2} \right).$$

La structure de l'équation obtenue est similaire à celle de Navier-Stokes ce qui rend la dérivation de la loi de Kármán-Howarth appliquée à l'EMHD inertielle pour le moins aisée !

Puisque dans cette limite d'après l'équation VI.6, c'est l'énergie cinétique qui est conservée, il convient de construire le tenseur de corrélation du courant électrique.

Considérons l'équation VI.8 en deux points de l'espace $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ pour les composantes i et j respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_i}{\partial t} + d_i J_k \frac{\partial J_i}{\partial x_k} &= -\frac{\partial P_*}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial J'_j}{\partial t} + d_i J'_k \frac{\partial J'_j}{\partial x'_k} &= -\frac{\partial P'_*}{\partial x'_j}, \end{aligned}$$

où $P_* \equiv \frac{\Phi}{d_e^2} + \frac{J^2}{2}$. En multipliant la première équation par J'_j (avec $\mathbf{J}(\mathbf{x}') = \mathbf{J}'$) et la seconde par J_i , en sommant les expressions ainsi obtenues et en prenant la moyenne, on obtient une équation dynamique pour le tenseur de corrélation d'ordre deux du courant

électrique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle J_i J'_j \rangle + d_i \left\langle J_k \frac{\partial J_i J'_j}{\partial x_k} + J'_k \frac{\partial J'_j J_i}{\partial x'_k} \right\rangle = - \left\langle J'_j \frac{\partial P_*}{\partial x_i} + J_i \frac{\partial P'_*}{\partial x'_j} \right\rangle.$$

En utilisant l'hypothèse d'incompressibilité, les propriétés de symétrie due à l'homogénéité ainsi que la propriété de commutation entre l'opérateur de moyenne et de différenciation, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle J_i J'_j \rangle = -d_i \frac{\partial}{\partial r_k} \langle J'_k J'_j J_i - J_k J_i J'_j \rangle + \frac{\partial \langle P_* J'_j \rangle}{\partial r_i} - \frac{\partial \langle P'_* J_i \rangle}{\partial r_i}.$$

Si on se restreint à la trace du tenseur de corrélation, d'après l'hypothèse d'incompressibilité la contribution de la pression disparaît. De plus le tenseur de corrélation d'ordre trois vérifie la propriété géométrique, $\langle J'_k J'_i J_i \rangle(\mathbf{r}) = \langle J_k J_i J'_i \rangle(-\mathbf{r})$ (voir Fig.VI.2), on arrive donc à l'écriture :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle J_i J'_i \rangle = -2d_i \frac{\partial}{\partial r_k} \langle J'_k J'_i J_i \rangle = -2\nabla_r \cdot \langle J_i J'_i \mathbf{J}' \rangle. \quad (\text{VI.9})$$

L'introduction de la fonction de structure d'ordre trois,

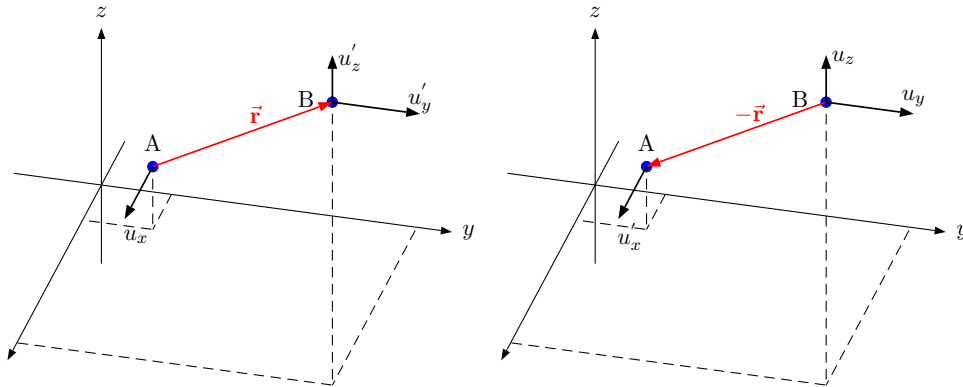


Figure VI.2 – Propriétés géométrique des fonctions de corrélation d'ordre trois : $\langle u_x u'_y u'_z \rangle(\mathbf{r}) = \langle u'_x u_y u_z \rangle(-\mathbf{r}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_z} \langle u_x u'_y u'_z \rangle = -\frac{\partial}{\partial r_z} \langle u'_x u_y u_z \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle (\delta J_i)^2 \delta \mathbf{J} \rangle &\equiv \langle (J'_i - J_i)^2 (\mathbf{J}' - \mathbf{J}) \rangle \\ &= -2 \langle J_i J'_i \mathbf{J}' \rangle + 2 \langle J_i J'_i \mathbf{J} \rangle + \langle J_i^2 \mathbf{J}' \rangle - \langle J_i'^2 \mathbf{J} \rangle, \end{aligned}$$

VI.2 Loi universelle de la turbulence EMHD inertielle isotrope

donne pour les mêmes raisons géométriques que précédemment et par incompressibilité la relation :

$$d_i \nabla_r \cdot \langle (\delta J_i)^2 \delta \mathbf{J} \rangle = -4 \nabla_r \cdot \langle J_i J'_i \mathbf{J}' \rangle.$$

Finalement, on obtient l'équation dynamique,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{J_i J'_i}{2} \right\rangle = \frac{d_i}{4} \nabla_r \cdot \langle (\delta J_i)^2 \delta \mathbf{J} \rangle} \quad (\text{VI.10})$$

qui est l'analogue de l'équation de von Kármán-Howarth inviscide appliquée à l'EMHD inertielle dans la limite $r \ll d_e$.

2.2.2 Régime $r \gg d_e$

La limite $r \gg d_e$ de l'équation VI.2 a été traitée dans le passé (Galtier 2008 [78]) à l'aide d'une analyse tensorielle développée pour les fluides neutres par Robertson dès 1940 [169]. La méthode est élégante, mais un peu lourde et laborieuse. Il est possible d'obtenir une loi exacte de manière plus directe en suivant une méthode alternative introduite plus d'un demi siècle plus tard par Antonia et al. [31]. C'est celle que nous suivrons ici. Une version de cette méthode appliquée à l'EMHD a été proposée par Galtier et étendue au cas anisotrope (Galtier 2009 [80]). L'effet d'un champ magnétique moyen induit un feuilletage de l'espace des corrélations et l'existence d'une relation algébrique entre les composantes radiales et longitudinales du vecteur de séparation $\mathbf{r}$. Il est possible de dériver une loi pour les corrélations d'ordre trois paramétrisée par l'intensité de l'anisotropie. L'utilisation de l'hypothèse de balance critique permet de fixer ce paramètre et de trouver ainsi une loi unique est universelle.

Dans ce qui suit, nous présenterons les principales étapes de calculs qui permettent d'obtenir une expression dans le cas isotrope.

D'après l'équation VI.6, dans la limite $r \gg d_e$ c'est l'énergie magnétique qui est conservée. Il convient donc de construire le tenseur de corrélation du champ magnétique.

Si on considère le cas idéal et inviscide, l'équation VI.2 se réduit à ,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -d_i \nabla \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}],$$

et peut se réécrire de manière équivalente en utilisant la notation d'Einstein,

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = d_i (J_l \partial_l B_i - B_l \partial_l J_i).$$

Considérons, cette équation en deux points de l'espace $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ pour les composantes i et j respectivement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_i}{\partial t} &= d_i \left(J_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - B_k \frac{\partial J_i}{\partial x_k} \right), \\ \frac{\partial B'_i}{\partial t} &= d_i \left(J'_k \frac{\partial B'_i}{\partial x'_k} - B'_k \frac{\partial J'_i}{\partial x'_k} \right).\end{aligned}$$

En multipliant la première équation par B'_j , avec $\mathbf{B}(\mathbf{x}') \equiv \mathbf{B}'$, et la seconde par B_i , en sommant les expressions ainsi obtenues et en prenant la moyenne, on obtient une équation dynamique pour le tenseur de corrélation d'ordre deux du champ magnétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle B_i B'_j \rangle = d_i \left(\left\langle J'_k \frac{\partial B'_j B_i}{\partial r'_k} \right\rangle - \left\langle B'_k \frac{\partial J'_j B_i}{\partial r'_k} \right\rangle + \left\langle J_k \frac{\partial B_i B'_j}{\partial r_k} \right\rangle - \left\langle B_k \frac{\partial J_i B'_j}{\partial r_k} \right\rangle \right).$$

Les opérateurs $\partial/\partial x_i$ et $\partial/\partial x'_j$ agissant en moyenne sont d'après l'hypothèse d'homogénéité indépendants des positions absolues $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$, on peut donc les remplacer respectivement par $-\partial/\partial r_i$ ² et $\partial/\partial r_j$. De plus l'opération de moyenne $\langle \sim \rangle$ et de différenciation commute. En utilisant l'hypothèse d'incompressibilité on obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle B_i B'_j \rangle = d_i \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\langle B_i J'_k B'_j \rangle - \langle B_i B'_k J'_j \rangle - \langle B'_j J_k B_i \rangle + \langle B'_j B_k J_i \rangle \right).$$

On peut encore simplifier l'expression en remarquant que le tenseur de corrélation d'ordre trois vérifie les relations géométriques $\langle B'_j J_k B_i \rangle(\mathbf{r}) = \langle B_j J'_k B'_i \rangle(-\mathbf{r})$ et $\langle B'_j B_k J_i \rangle(\mathbf{r}) = \langle B_j B'_k J'_i \rangle(-\mathbf{r})$ (voir Fig. VI.2). On arrive donc, si on se restreint à la trace du tenseur de corrélation, à l'écriture :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle B_i B'_i \rangle = 2d_i \frac{\partial}{\partial r_k} \left(\langle B_i J'_k B'_i \rangle - \langle B_i B'_k J'_i \rangle \right) = 2d_i \nabla_r \cdot \left(\langle B_i B'_i \mathbf{J}' \rangle - \langle B_i J'_i \mathbf{B}' \rangle \right).$$

Malheureusement, l'expression obtenue ne peut pas s'exprimer en fonction des fonctions de structure hybrides d'ordre trois, $\langle (\delta B_i)^2 \delta \mathbf{J} \rangle$ et $\langle \delta B_i \delta J_i \delta \mathbf{B} \rangle$ rendant l'interprétation physique du résultat obtenu délicate. Cette difficulté provient de la nature hélicitaire du terme Hall et apparait également dans la relation de Kármán-Howarth pour l'hélicité magnétique (Politano et al. 2003 [167]) et pour le problème de la turbulence en rotation (Galtier 2009b [81]). On peut cependant réécrire l'expression en introduisant la moyenne

2. Le signe $-$ provient du changement de repère $\mathbf{x} + \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$

VI.2 Loi universelle de la turbulence EMHD inertielle isotrope

en deux points $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')/2$, en notant que,

$$\begin{aligned} \langle (\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) \times \delta \mathbf{B} \rangle &= \langle (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}' \rangle - \langle (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle + \langle (\mathbf{J}' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}' \rangle \\ &\quad - \langle (\mathbf{J}' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B} \rangle \\ &= 2 \langle (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}' \rangle, \end{aligned}$$

par homogénéité et d'après la propriété géométrique décrite à la figure VI.2. On obtient donc au final une relation de la forme :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle B_i B'_i \rangle}{2} = d_i \nabla_r \cdot \langle (\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) \times \delta \mathbf{B} \rangle.} \quad (\text{VI.11})$$

L'équation de Kármán-Howarth dans le cas où les ions possèdent une vitesse non nulle a été obtenue par Galtier en 2008 [79],

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle U_i U'_i + B_i B'_i \rangle = \frac{1}{4} \nabla_r \cdot \langle \delta U_i^2 \delta \mathbf{U} + \delta B_i^2 \delta \mathbf{U} - 2 \delta B_i \delta U_i \delta \mathbf{B} \rangle + d_i \nabla_r \cdot \langle (\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) \times \delta \mathbf{B} \rangle.$$

2.3 Loi universelle pour les fonctions de structure d'ordre trois

Le problème fondamental avec les expressions obtenues c'est que, par exemple, d'après l'équation VI.9, on ne peut pas prévoir l'évolution temporelle de $\frac{\partial}{\partial t} \langle J_i J'_j \rangle$ sans connaître l'expression de $\langle J'_k J'_j J_i \rangle$. Bien sûr, l'évolution temporelle de $\langle J'_k J'_j J_i \rangle$ dépend du tenseur de corrélation d'ordre 4 qui dépend du tenseur de corrélation d'ordre 5 et ainsi de suite. On est donc confronté au problème de fermeture discuté au chapitre II.

Pour aller plus loin dans l'analyse, il est nécessaire d'introduire des propriétés supplémentaires de la turbulence. L'étape suivante a été franchie en 1941 par Andreï Kolmogorov [144],[145] et l'a conduit à dériver la célèbre loi des 4/5 pour les fluides neutres incompressibles.

Dans cette section, nous présentons les résultats que l'on obtient en suivant la démarche de Kolmogorov dans le cadre de l'EMHD inertielle et les limites d'une telle approche appliquée à la turbulence des plasmas.

Considérons l'influence du terme dissipatif $\propto \nabla^2 \mathbf{J}$ sur l'évolution temporelle de l'énergie. Ce terme fait apparaître,

$$\mathbf{J} \cdot \nabla^2 \mathbf{J} = \mathbf{J} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega}_e) = \nabla \cdot ((\nabla \cdot \mathbf{J}) \mathbf{J}) - (\nabla \cdot \mathbf{J})^2 + \nabla \cdot (\mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega}_e) - \boldsymbol{\omega}_e^2,$$

avec $\boldsymbol{\omega}_e \equiv \nabla \times \mathbf{J}$ la vorticité électronique à un coefficient près. Comme nous l'avons démontré dans la section 1.3, les termes de flux ne contribuent pas à l'évolution temporelle de l'énergie. On a donc :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\nu_e \frac{m_e}{e} d_i d_e^2 \langle \omega_e^2 \rangle.$$

Cette expression apporte à la théorie de la turbulence pleinement développée un des résultats expérimentaux les plus importants à savoir que dans la limite d'un nombre de Reynolds infiniment grand, c'est-à-dire pour $\nu_e \rightarrow 0$, le taux moyen de dissipation d'énergie par unité de masse atteint une limite finie notée traditionnellement ϵ qui est indépendante de la viscosité (Sreenivasan 1984 [184]). Formellement, cela signifie :

$$\lim_{\nu_e \rightarrow 0} \frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\epsilon \neq \left. \frac{d\langle E \rangle}{dt} \right|_{\nu_e=0}.$$

Cette propriété que l'on appelle anomalie dissipative a été intuité par Taylor dès 1938 [191] et est à la base de la célèbre loi de Kolmogorov [144]. À première vue, il paraît paradoxal que le taux de dissipation de l'énergie soit indépendant de la viscosité. Physiquement, cela s'explique par le fait que plus la viscosité est faible, plus de structures de petites tailles sont générées par les termes non-linéaires augmentant ainsi le module de la vorticité et compensant la limite $\nu_e \rightarrow 0$. Ces fines structures ont une taille qui s'ajuste automatiquement de manière à ce que le taux de dissipation visqueuse reste fini et égale $\sim J^3/l$. Expérimentalement on observe que la distribution de vorticité devient de plus en plus intermittente et est constituée de tubes de vorticité extrêmement fins.

Bien sûr cette vision de la turbulence issue d'idées développées dans le cadre de la mécanique des fluides est naïve si on l'applique sans précaution à la physique des plasmas. Les effets cinétiques comme l'absorption Landau ou les résonances cyclotron interdisent a priori toute zone inertielle au-delà des échelles ioniques, et sans collisions la notion de viscosité n'a pas réellement de sens. De plus, contrairement au fluide neutre, les structures turbulentes ne peuvent pas devenir aussi fines qu'elles veulent puisque si elles atteignent l'échelle de Debye la quasi-neutralité n'est plus assurée et les équations de l'EMHD inertielle n'ont plus de sens.

Il est cependant important de noter qu'à l'heure actuelle, il n'existe pas de modèles qui permette de prédire de manière qualitative quel est l'effet des résonances dans un milieu turbulent. Il est donc intéressant de considérer le problème extrêmement simplifié de l'EMHD inertielle puisque l'écart entre les prédictions obtenues et les observations *in situ* permet de quantifier indirectement les effets cinétiques.

VI.2 Loi universelle de la turbulence EMHD inertielle isotrope

Pour obtenir l'analogue de la loi des 4/5, nous devons supposer qu'il existe des structures turbulentes dont les échelles sont suffisamment grandes pour être "immunisée" contre les forces visqueuses, mais assez petites pour être indépendantes des termes de forçage. Nous devons également supposer que cette gamme d'échelles se trouve dans un régime stationnaire. Dans ce cas, le taux d'injection d'énergie ϵ est égale au taux de transfert par les termes non-linéaires qui lui-même est égale au taux de dissipation.

Dans la limite $r \ll d_e$ on a donc la relation :

$$\frac{d_i d_e^2}{4} \nabla_r \cdot \langle (\delta J_i)^2 \delta \mathbf{J} \rangle = -\epsilon^J,$$

avec ϵ^J le taux moyen d'injection d'énergie cinétique des électrons par unité de masse. En supposant de plus que la turbulence est isotrope, on peut facilement intégrer cette équation sur une boule de rayon r et on obtient par application du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\boxed{-d_i d_e^2 \langle (\delta J_i)^2 \delta J_r \rangle = -\frac{4}{3} \epsilon^J r,} \quad (\text{VI.12})$$

où δu_r est la composante longitudinale de la vitesse, c'est-à-dire le long de la direction de séparation $\mathbf{r}$.

Dans la limite $r \gg d_e$ on obtient :

$$\boxed{d_i \langle [(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) \times \delta \mathbf{B}]_r \rangle = -\frac{1}{3} \epsilon^B r} \quad (\text{VI.13})$$

avec ϵ^B le taux moyen d'injection d'énergie magnétique par unité de masse.

Les deux lois obtenues VI.12 et VI.13 dans les régimes asymptotiques peuvent être réunies en une seule si on considère un régime stationnaire pour lequel le forçage se situe à des échelles bien supérieures à d_e . On obtient alors une loi générale pour l'EMHD inertielle homogène et isotrope (Meyrand et al. 2010 [153]) :

$$\boxed{4d_i \langle [(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) \times \delta \mathbf{B}]_r \rangle - d_i d_e^2 \langle (\delta J_i)^2 \delta J_r \rangle = -\frac{4}{3} \epsilon^T r} \quad (\text{VI.14})$$

avec ϵ^T le taux moyen d'injection d'énergie totale par unité de masse.

3 Comparaisons avec les observations *in situ*

La loi exacte VI.12 donne une description précise de la turbulence EMHD inertielle aux échelles inférieures à d_e . Elle indique que le flux d'énergie cinétique qui transite par des structures turbulentes est proportionnelle à leur taille. Cela permet de prédire la forme du spectre des fluctuations magnétiques et autorise une comparaison directe avec les observations.

Dimensionnellement, la relation VI.12 correspond à ,

$$d_i d_e^2 J^3 \sim \epsilon^J r,$$

ce qui implique un spectre en,

$$E^J(k) \sim \left(\frac{1}{d_i d_e^2} \right)^{2/3} k^{-5/3},$$

compatible avec des simulations numériques directes (Biskamp et al. 1996 [41]). Puisque le courant électrique et le champ magnétique satisfont la relation $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$, on obtient,

$$d_i d_e^2 \frac{B^3}{r^3} \sim \epsilon^J r.$$

Le spectre de puissance des fluctuations magnétiques vérifie donc,

$$\boxed{B^2(k) \sim \left(\frac{\epsilon^J}{d_i d_e^2} \right)^{2/3} k^{-11/3}.} \quad (\text{VI.15})$$

Cette prédiction en loi de puissance est valable également pour la turbulence IMHD.

La dépendance linéaire dans la relation VI.14 permet de prédire une double loi de puissance pour le champ magnétique en $k^{-7/3}$ et $k^{-11/3}$ pour des échelles respectivement supérieure et inférieure à d_e . Dans le premier cas l'invariant, qui cascade de manière directe est l'énergie magnétique. Le champ de vitesse électronique est alors passivement advecté par le champ magnétique. Dans le second cas, c'est l'inertie du fluide électronique qui domine et le champ magnétique est asservi à ce dernier. Il est important de noter que pour des échelles inférieures à d_e le spectre du champ magnétique n'est pas obtenu à partir d'une solution à flux constant. La grandeur physique qui cascade de manière directe est l'énergie cinétique. Le champ magnétique est quant à lui passivement advecté par le champ de vitesse électronique.

VI.3 Comparaisons avec les observations *in situ*

Dans le cas anisotrope et dans la limite $kd_e \gg 1$, la théorie synthétique de Goldreich-Sridhar et Iroshnikov-Kraichnan présentée au chapitre V donne le même résultat que celui obtenu dans le cadre de l'IMHD. On s'attend donc à ce que l'indice du spectre d'énergie du champ magnétique soit compris entre $[-16/3, -11/3]$ avec un indice d'autant plus grand (en valeur absolue) que le champ magnétique est fort. Ce résultat semble être confirmé par des observations récentes³.

3. Fouad Sahraoui, communication privée.

Conclusion générale et perspectives

LA thématique centrale de ce travail était la compréhension de la nature de la cascade turbulence à hautes fréquences dans le vent solaire. Le but étant d'explorer d'un point de vue théorique et numérique dans quelle mesure le modèle mono-fluide magnétohydrodynamique (MHD) Hall incompressible pouvait rendre compte des phénomènes observés dans le vent solaire aux échelles sub-ioniques. Le modèle MHD Hall ne permettant pas de décrire la totalité de la dynamique extrêmement complexe d'un plasma magnétisé non-collisionnel, l'idée était de tirer profit de la simplicité (relative) du modèle pour mettre l'accent sur le caractère turbulent du vent solaire. D'un point de vue théorique il a été ainsi possible d'utiliser des outils mathématiques développés dans le cadre de la turbulence hydrodynamique et de construire un modèle heuristique. D'un point de vue numérique la nature fluide du modèle a permis de bénéficier de la puissance algorithmique des méthodes pseudo-spectrales et de réaliser des simulations numériques directes tridimensionnelles massivement parallèles à grands nombres de Reynolds.

Pour commencer, j'ai décrit en détail comment en partant du mouvement individuel des particules chargées qui composent un plasma, on peut obtenir par un processus de sommations successives relevant de la physique statistique, les équations de Vlasov-Maxwell puis celles de la MHD et enfin celles de la MHD Hall. Cela nous a permis de circonscrire précisément le domaine de validité du modèle théorique adopté dans ma thèse (Chap.[I](#)). Dans une seconde partie, une description et une synthèse détaillée des différentes observations et modélisations théoriques de la turbulence du vent solaire de ces 50 dernières années a été réalisée (Chap.[II](#)). Cette synthèse a permis de mieux comprendre la nature précise des problèmes rencontrés à l'heure actuelle et a fourni des éléments de justification aux différentes approches utilisées dans le cadre de cette thèse pour tenter de les résoudre. J'ai en particulier mis en évidence les difficultés d'interprétation liées aux observations de

la turbulence à hautes fréquences et la controverse qui en résulte. Une question essentielle posée au terme de cette analyse a été de savoir si les phénomènes observés au niveau des échelles ioniques étaient dominés par des effets cinétiques et pouvaient être décrits à partir des équations de Vlasov-Maxwell linéarisées ou si, au contraire, ils étaient d'origine non-linéaire et turbulent. J'ai également présenté succinctement le modèle gyro-cinétique qui permet de rendre compte à la fois de certains aspects cinétiques et turbulents. Cela m'a permis d'expliquer dans quelle mesure la MHD Hall loin d'être un modèle rival comme cela est souvent présenté dans la littérature, permettait en réalité d'explorer une autre facette du problème.

Au chapitre III, j'ai présenté les résultats numériques obtenus à partir d'un modèle simplifié de turbulence MHD Hall, appelé modèle shell, qui ont initialement motivé cette thèse et l'ont fortement influencée.

Au chapitre IV, j'ai résumé les aspects les plus importants du code numérique utilisé pour réaliser les expériences numériques en mettant l'accent sur l'implémentation des termes de forçage et la physique sous-jacente. J'ai également montré que le code numérique intègre correctement des solutions exactes non-linéaires de la MHD Hall incompressible à l'erreur de troncature près. Ces résultats valident l'implémentation de l'effet Hall qui a été réalisé par mes soins pour les besoins de cette thèse et garantissent l'exactitude des résultats numériques présentés par la suite.

Grâce à des simulations numériques directes 3D, j'ai mis en évidence l'existence en turbulence MHD Hall d'une brisure spontanée de symétrie chirale (Chap.V). Cette brisure de symétrie a révélé un nouveau régime de turbulence que j'ai appelé ion MHD (IMHD). Un modèle heuristique a été présenté pour interpréter les résultats obtenus et a permis de nouvelles prédictions qui ont été confirmées par les simulations. Le calcul du bilan détaillé des flux d'énergie à travers les échelles spectrales a fortement corroboré le modèle proposé. J'ai également montré que les structures de courant électrique (tubes torsadés) générées par la dynamique turbulente étaient très différentes de celles rencontrées en MHD (nappes de courant). J'ai discuté du rôle que cela pouvait avoir sur les phénomènes de reconnexion magnétique et proposé un nouveau processus de dissipation intermittent basé sur un collapse par pincement magnétique de tubes torsadés de courant électrique. L'influence d'un champ magnétique moyen sur la dynamique turbulente a été étudiée d'un point de vue théorique à partir d'un modèle existant développé pour la turbulence MHD et EMHD anisotrope, et a été généralisé au régime IMHD. Les résultats théoriques permettent de rendre compte du raidissement transitoire du spectre des fluctuations du champ magnétique au niveau des échelles ioniques, ainsi que des lois de puissance obser-

vées à des échelles plus petites. De manière remarquable la théorie permet également de prédire la variabilité des spectres observés. Des simulations numériques EMHD sont en cours pour tester ces prédictions.

Au chapitre VI, j'ai étudié d'un point de vue théorique la prise en compte de l'inertie des électrons sur la dynamique turbulente en gardant toutefois une approche fluide. À partir des équations de l'EMHD inertielle, une loi exacte pour les fonctions de structure d'ordre trois du courant électronique a été dérivée. Cette étude a permis de prédire une loi de puissance pour les spectres d'énergie magnétique en deçà des échelles électroniques qui correspond qualitativement à certaines observations récentes. Une analogie entre le modèle EMHD inertielle et le modèle heuristique présenté au chapitre V a permis de généraliser les résultats obtenus à l'IMHD.

Au cours de ma thèse, l'étude théorique et numérique de configurations d'écoulement plasma inédit a abouti à des propositions d'idées nouvelles concernant la question de la nature de la turbulence à hautes fréquences du vent solaire. Le travail réalisé m'a également permis de confirmer, de généraliser et de préciser des résultats obtenus à partir d'un modèle simplifié de type shell. Les résultats présentés dans cette thèse ébranlent considérablement le paradigme suivant lequel les raidissements successifs du spectre des fluctuations magnétiques observé dans le vent solaire sont provoqués par des phénomènes d'origine cinétiques. De manière plus générale, ce travail soulève donc des questions fondamentales sur les processus de dissipation non-collisionnel dans les plasmas turbulents.

Quand on est confronté à une question dont chacun affirme qu'elle est si complexe qu'elle passe pour pratiquement insoluble⁴, il est toujours salutaire de la poser en termes simplifiés pour pouvoir commencer à l'analyser. Il est néanmoins impératif de ne pas laisser les choses en l'état, mais de revenir sur cette simplification pour examiner ensuite le phénomène étudié dans toute sa complexité. Dans cette perspective, il serait très intéressant de confronter le modèle heuristique de turbulence chirale à des expériences numériques de type Landau fluide compressible. Cela permettrait de tester dans quelles mesures les fluctuations turbulentes gauches survivent à l'effet Landau et à la résonance ion cyclotron et de mesurer précisément l'effet de la compressibilité sur la dynamique. Il serait également

4. Le problème de la turbulence dans les fluides neutres fait partie des 7 défis mathématiques réputés insurmontables posés par le Clay Mathematical Institute (<http://www.claymath.org/millennium/>). La résolution de chacun des problèmes est dotée d'un prix d'un million de dollars américains. À ce jour, six des sept problèmes demeurent non résolus.

très instructif de tirer bénéfice de l'analogie qui existe entre les ondes ions (ou électrons) cyclotrons et les ondes inertielles en testant la conjecture synthétique de Goldreich-Sridhar et Iroshnikov-Kraichnan dans les écoulements neutres en rotation.

Bien sûr les observations doivent servir de guide permettant de trouver la démarche à suivre afin de progresser dans l'étude théorique. Malheureusement, les missions spatiales en vol à l'heure actuelle ne peuvent que partiellement répondre aux questions soulevées par cette thèse. La sensibilité des magnétomètres de l'expérience Cluster/STAFF s'avère souvent insuffisante pour étudier des fréquences supérieures à ~ 20 Hz ($k\rho_i \sim 30$). Une autre limitation est l'absence de mesures propres des fluctuations du champ électrique qui interdit l'étude de la composante électrostatique de la turbulence et ne permet pas d'estimer les vitesses de phase (via le rapport $\mathbf{E}/\mathbf{B}$) et donc de déterminer précisément la nature du ou des modes plasmas dominants. Au niveau des mesures de particules, les résolutions temporelles disponibles actuellement ne permettent pas d'explorer les échelles sub-ioniques ou électroniques rendant l'étude de la dissipation de l'énergie magnétique au voisinage de d_i pour le moins spéculative.

Cependant, il est important de noter que dans un futur proche (2017) les instruments LFR (Low Frequency Receiver) et RPW (Radio and Plasma Waves) dédié à l'étude des champs électromagnétiques dans la gamme de fréquences entre quelques Hertz et 500 kHz embarqués sur Solar Orbiter devraient permettre des avancées significatives. Une mission entièrement dédiée aux mesures fines de la turbulence aux échelles cinétiques (TOR) a récemment été proposée dans le cadre des appels à idées du Centre National d'Études Spatiales (CNES) ainsi qu'à l'agence spatiale européenne (ESA). Cette mission, si elle devait voir le jour, serait de nature à répondre à certaines des questions soulevées dans ma thèse et aiderait considérablement à résoudre le défi fascinant que constitue la compréhension des processus de dissipation non-collisionnel dans un plasma turbulent.

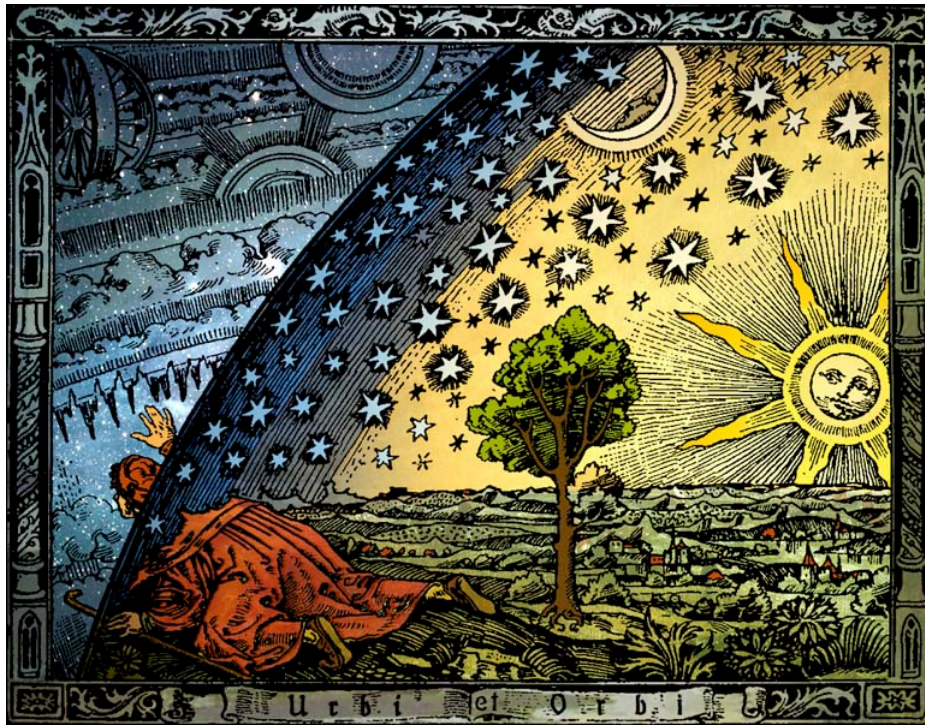


Figure VI.3 – Gravure sur bois par un artiste inconnu. Tiré de Flammarion 1888 [20]

Conclusion générale et perspectives

PUBLICATIONS

Sommaire

1	Revues à comité de lecture	187
1.1	A universal Law for Solar-Wind Turbulence at Electron Scales	187
1.2	Three-dimensional Hall Magnetohydrodynamics Turbulence . .	192
1.3	Spontaneous Chiral Symmetry Breaking of Hall Magnetohydrodynamic Turbulence	199
2	Acte de colloque	205
2.1	A New Turbulent Regime in the Solar-wind at Electron Scales	205

1 Revues à comité de lecture

1.1 A universal Law for Solar-Wind Turbulence at Electron Scales

A UNIVERSAL LAW FOR SOLAR-WIND TURBULENCE AT ELECTRON SCALES

R. MEYRAND¹ AND S. GALTIER^{1,2}

¹ Univ Paris-Sud, Institut d’Astrophysique Spatiale, bâtiment 121, F-91405 Orsay, France; romain.meyrand@ias.u-psud.fr, sebastien.galtier@ias.u-psud.fr
 Received 2010 May 4; accepted 2010 June 21; published 2010 September 10

ABSTRACT

The interplanetary magnetic fluctuation spectrum obeys a Kolmogorovian power law at scales above the proton inertial length and gyroradius which is well regarded as an inertial range. Below these scales, a power-law index around -2.5 is often measured and associated with nonlinear dispersive processes. Recent observations reveal a third region at scales below the electron inertial length. This region is characterized by a steeper spectrum that some refer to as the dissipation range. We investigate this range of scales in the electron magnetohydrodynamic approximation and derive an exact and universal law for a third-order structure function. This law can predict a magnetic fluctuation spectrum with an index of $-11/3$ which is in agreement with the observed spectrum at the smallest scales. We conclude on the possible existence of a third turbulence regime in the solar wind instead of a dissipation range as recently postulated.

Key words: magnetic fields – magnetohydrodynamics (MHD) – solar wind – turbulence

1. INTRODUCTION

Turbulence plays a central role in a wide range of astrophysical plasmas. Examples are given by the solar wind (Matthaeus et al. 1999), the interstellar (Scalo & Elmegreen 2004), galactic, and even intergalactic media (Govoni et al. 2006). In the solar wind, turbulence evolves freely and is not perturbed by in situ diagnostics; therefore, it provides an ideal laboratory for studying high Reynolds number plasma turbulence. This unique situation allows us to investigate, for example, the origin of anisotropy (see, e.g., Klein et al. 1993; Galtier et al. 2000; Alexakis et al. 2007; Bigot et al. 2008), to evaluate the mean energy dissipation rate (MacBride et al. 2008; Carbone et al. 2009), to detect multiscale intermittency (Kiyani et al. 2009), or to analyze different regimes of turbulence characterized by a steepening of the magnetic field fluctuations spectrum with a power-law index going from $-5/3$, at frequencies lower than 1 Hz, to indices lying around -2.5 at higher frequencies (see, e.g., Smith et al. 2006).

The spectral break near 1 Hz has been a subject of intensive studies and controversies in the last decades. It was first interpreted as the onset of dissipation caused, for example, by kinetic Alfvén wave damping (Leamon et al. 1998). Then, it was demonstrated that the wave damping rate usually increases very strongly with wavenumbers and should lead to a strong cutoff in the power spectra rather than a steepened power law (Li et al. 2001). In the meantime, there are some indications that the fluctuations are accompanied by a bias of the polarization suggesting the presence of right-hand polarized, outward propagating waves (Goldstein et al. 1994). Also it was proposed (Stawicki et al. 2001) that Alfvén fluctuations—left circularly polarized—are suppressed by proton cyclotron damping and that the high-frequency power-law spectra are likely to consist of whistler fluctuations (Matthaeus et al. 2008). It is currently believed that the steepening of the spectra at 1 Hz is mainly due to nonlinear dispersive processes that range from kinetic Alfvén waves (Hasegawa & Chen 1976; Howes et al. 2008), electromagnetic ion-cyclotron Alfvén waves (Gary et al. 2008), and/or electron whistler waves (Ghosh et al. 1996; Galtier 2006; Galtier & Buchlin 2007; Narita & Gary 2010) in the framework of Hall magnetohydrodynamics (MHD) or simply electron MHD.

The most recent solar-wind observations made with the high-resolution magnetic field data of the *Cluster* spacecraft (Sahraoui et al. 2009; Alexandrova et al. 2009) reveal the presence of a third region—called dissipation range—at scales smaller than d_e and characterized by even steeper magnetic fluctuation spectra with a power-law index around -3.8 . These spectra, which have been observed for only half a decade, are interpreted as either a power law (Sahraoui et al. 2009) or an exponential law (Alexandrova et al. 2009). Although the theoretical interpretation of such a regime is still open (Matthaeus et al. 2008), a recent theoretical analysis shows that a kinetic Alfvén wave cascade subject to collisionless damping cannot reach electron scales in the solar wind at 1 AU (Podesta et al. 2010). The direct consequence is that the spectra observed must be supported by another type of wave mode. It is noteworthy that this new regime at electron scales gives rise to the same controversy as the steepening found two decades ago around 1 Hz which naturally brings up the following question: have we really found the dissipation scale of the solar-wind plasma or is it the onset of a new turbulence regime?

In this paper, we investigate the turbulence regime at scales smaller than the electron inertial length d_e through the electron MHD approximation. The assumption of homogeneity and isotropy will be made to derive an exact and universal law for third-order structure functions. We show that this law corresponds to a magnetic fluctuation isotropic spectrum in $k^{-11/3}$ compatible with the solar-wind measurements. Although the assumption of isotropy is in apparent contradiction with the observations, it is claimed that the method used is a powerful way to obtain a first estimate of the anisotropic spectrum. Indeed, the main source of anisotropy is the presence of a large-scale magnetic field which reduces the nonlinear transfer along its direction. Then, the most relevant spectral scaling is the transverse one for which the spectral index corresponds to the isotropic case if arguments based on the critical balance condition are used. It is only in the asymptotic limit of wave turbulence—for which anisotropy is strong—that the spectral index for transverse fluctuations is (slightly) modified (see the review by Galtier 2009a). Finally, we conclude the paper on the possible existence of a third inertial range for solar-wind turbulence instead of a dissipation range as recently postulated.

² Also at Institut universitaire de France.

2. ELECTRON MAGNETOHYDRODYNAMICS

Electron MHD provides a fluid description of the plasma behavior on length scales smaller than the ion inertial length d_i and on timescales of the order of, or shorter than, the ion cyclotron period (Kinsep et al. 1990). In this case, ions do not have time to respond because of their heavy mass and merely provide a neutralizing background. Then, the plasma dynamics is governed by electron flows and their self-consistent magnetic field. This model has attracted a lot of interest because of its potential applications in fast switches, Z-pinches, impulsive magnetospheric/solar corona reconnection, and ionospheric phenomena (see, e.g., Bhattacharjee 2004; Chacon et al. 2007).

The inviscid three-dimensional electron MHD equations can be written in SI units as (Biskamp et al. 1996)

$$\partial_t(1 - d_e^2 \Delta) \mathbf{B} = -d_i \nabla \times [\mathbf{J} \times (1 - d_e^2 \Delta) \mathbf{B}], \quad (1)$$

where $\mathbf{B}$ is the magnetic field normalized to a velocity ($\mathbf{B} \rightarrow \sqrt{\mu_0 \rho} \mathbf{B}$) and $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ is the normalized current density. Under the limit of electron MHD, we remind that the current density is proportional to the electron velocity. This equation has two invariants (Biskamp et al. 1999) which are the total energy

$$E = \frac{1}{2} \int (B^2 + d_e^2 J^2) d\mathbf{x}, \quad (2)$$

and the generalized helicity

$$H = \int (\mathbf{A} - d_e^2 \mathbf{J}) \cdot (\mathbf{B} - d_e^2 \Delta \mathbf{B}) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

with $\mathbf{A}$ being the normalized magnetic potential.

Equation (1) is often used when $d_e \rightarrow 0$, namely for scales between d_i and d_e , for which a $k^{-7/3}$ -isotropic magnetic energy spectrum is found numerically and heuristically (Biskamp et al. 1996, 1999; Dastgeer et al. 2000b). This result is compatible with a rigorous derivation of a universal law for third-order correlation tensors (Galtier 2008a, 2008b). A steeper magnetic spectrum in $k^{-11/3}$ may also be found when the kinetic energy overtakes the magnetic energy (Galtier & Buchlin 2007). Such a situation—generally not discussed in the literature—can only be observed when the full Hall MHD system is considered. Note that this $-11/3$ power-law index, valid for length scales larger than d_e , has a different origin from the one derived in the present paper which is applicable for scales shorter than d_e .

The behavior at scales shorter than d_e has attracted much less attention (Biskamp et al. 1996; Dastgeer et al. 2000a). This regime corresponds to the limit $d_e \rightarrow +\infty$ for which we have $\partial_t \Delta \mathbf{B} = -d_i \nabla \times [\mathbf{J} \times \Delta \mathbf{B}]$, or equivalently with the relation $\Delta \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{J}$,

$$\frac{1}{d_i} \partial_t \mathbf{J} = -\mathbf{J} \times (\nabla \times \mathbf{J}) - \nabla \Phi, \quad (4)$$

where Φ is an unknown function. The second term in the right-hand side may be seen as a gauge; actually, an analysis performed directly on the generalized Ohm's law shows that it corresponds to an electron pressure. Note that the form of Equation (4) is well adapted to the problem under consideration since we are going to assume isotropy which means we will not consider any background (large-scale) magnetic field $\mathbf{B}_0$.

3. UNIVERSAL LAW FOR $R < D_E$

In the following, we shall derive an exact and universal law for third-order structure functions for homogeneous

three-dimensional isotropic electron MHD turbulence at scales smaller than d_e and discuss the implications in terms of the magnetic fluctuation spectrum. After simple manipulations in Equation (4) we obtain for the i th component

$$\frac{1}{d_i} \partial_t J_i = J_\ell \partial_\ell J_i - \partial_i (\Phi + J^2/2), \quad (5)$$

where the Einstein notation is used. Note that we also have $\partial_\ell J_\ell = 0$. The second term in the right-hand side is similar to pressure whereas the first term exhibits a difference with the usual advection term encountered in Navier–Stokes equations. Actually, the Navier–Stokes equations may be recovered when the electron velocity is used instead of the current density or when the generalized Ohm's law is directly used. We made the choice to use the well-known electron MHD Equations (1) and (5) mainly because we shall compare eventually the new prediction with the previous one for scales larger than d_e (Galtier 2008a).

It is straightforward to derive a universal law for a homogeneous and isotropic electron MHD turbulence. First we introduce the second-order correlation tensor:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{x}') \rangle = \langle J_i J'_j \rangle, \quad (6)$$

where $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$. We obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_i} \partial_t R_{ij}(\mathbf{r}) &= \langle J_i J'_\ell J'_j \rangle - \langle J_i \partial'_j (\Phi' + J'^2/2) \rangle \\ &\quad + \langle J'_j J_\ell \partial_\ell J_i \rangle - \langle J'_j \partial_i (\Phi + J^2/2) \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

After simple manipulations where we use the homogeneity and the divergence-free condition we obtain

$$\frac{1}{d_i} \partial_t R_{ij} = \partial_{r_\ell} (\langle J_i J'_\ell J'_j \rangle - \langle J'_j J_\ell J_i \rangle). \quad (8)$$

Note that the pressure-type contributions are removed as usual for isotropic turbulence (Batchelor 1953). When only the diagonal part of the energy tensor is retained we have

$$\frac{1}{d_i} \partial_t R_{ii} = -2 \partial_{r_\ell} \langle J'_\ell J_\ell J_i \rangle \quad (9)$$

$$= -2 \nabla \cdot \langle \mathbf{J} (J_i J'_i) \rangle. \quad (10)$$

At this level of analysis, it is necessary to say a word about the small-scale dissipation and large-scale forcing terms which have been neglected so far. The dissipation is a linear term which is seen as a sink for the energy. Since we are interested in a universal behavior of turbulence we are in a situation where the scales considered are supposed to be much larger than the dissipation scales: in other words, we are deep inside the inertial range where the dissipation has no effect. The forcing term is assumed to be at the largest scales and acts as a constant source of energy for the system. Formally, the introduction of a small-scale dissipation $\mathcal{D}$ and a large-scale force $\mathcal{F}$ leads to the expression

$$\frac{1}{2} d_e^2 \partial_t R_{ii} = -d_i d_e^2 \nabla \cdot \langle \mathbf{J} (J_i J'_i) \rangle + \mathcal{F} + \mathcal{D}. \quad (11)$$

An exact relation may be derived for third-order structure functions by assuming the following assumptions specific to fully developed turbulence (Kolmogorov 1941; Frisch 1995; Politano & Pouquet 1998). First, we take the long time limit for

which a stationary state is reached with a finite mean energy dissipation rate per unit mass. Second, we consider the infinite magnetic Reynolds number limit for which the mean energy dissipation rate per unit mass tends to a finite positive limit, ε^J (see, e.g., Biskamp et al. 1996). By noting that

$$R_{ii} = \langle J^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta J_i \delta J_i \rangle, \quad (12)$$

where $\delta \mathbf{J} \equiv \mathbf{J}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{x})$, we obtain

$$\frac{1}{2} d_e^2 \partial_t R_{ii} = \partial_t \left(\frac{1}{2} d_e^2 J^2 \right) - \frac{1}{4} d_e \partial_t \langle \delta J_i \delta J_i \rangle, \quad (13)$$

where the first term in the right-hand side is the time variation of energy. Therefore, in the stationary state both terms in the right-hand side are equal to zero. Since dissipation effects are negligible, we only have to include the mean energy injection rate per unit mass ε^J . It is important to remind that the energy (an inviscid invariant) is built directly from the current density, hence the name ε^J . As it will be shown below, this remark turns out to be fundamental for the prediction of the magnetic fluctuation spectrum. The insertion of the previous statements into Equation (11) leads to

$$d_i d_e^2 \nabla \cdot \langle \mathbf{J} (J_i J'_i) \rangle = \varepsilon^J. \quad (14)$$

The introduction of structure functions for the current density eventually gives³

$$d_i d_e^2 \nabla \cdot \langle \delta \mathbf{J} (\delta \mathbf{J})^2 \rangle = 4 \varepsilon^J. \quad (15)$$

An integration of Equation (15) over a full sphere of radius r (since isotropy is assumed) and the application of the divergence theorem finally give the universal and exact law for three-dimensional homogeneous isotropic electron MHD turbulence for scales smaller than d_e ; it gives

$$d_i d_e^2 \langle \delta J_L (\delta \mathbf{J})^2 \rangle = \frac{4}{3} \varepsilon^J r, \quad (16)$$

where L means the longitudinal component of the vector, i.e., the one along the direction $\mathbf{r}$. Note the positive sign in the right-hand side which is compatible with the negative sign in front of the nonlinear term of Equation (4). The most remarkable aspect of this law is that it not only provides a linear scaling for third-order structure functions within the inertial range of length scales, but it also fixes the value of the numerical factor appearing in front of the scaling relation.

4. EXTENSION TO $R > D_E$

For scales larger than d_e (but still smaller than d_i) the universal law for three-dimensional isotropic electron MHD turbulence takes the form (Galtier 2008a)

$$d_i \langle [(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}']_L \rangle = -\frac{1}{3} \varepsilon^M r, \quad (17)$$

where L still means the longitudinal component. This law may also be written as (Galtier 2009b)

$$d_i \langle [(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) \times \delta \mathbf{B}]_L \rangle = -\frac{1}{3} \varepsilon^M r, \quad (18)$$

³ It is also possible to consider a system without external forcing (Landau & Lifchitz 1989). In this case, we have to deal with the decay problem for which the time derivative of the energy is equal (up to a sign) to the mean energy dissipation rate per unit mass ε^J . It is still possible to assume the time independence of the second term in the right-hand side of Equation (13) and to finally recover the same relation as in Equation (15).

where $\overline{\mathbf{X}} \equiv (\mathbf{X} + \mathbf{X}')/2$. Both universal laws (16) and (18) may be gathered by noting that in this case the forcing scale is pushed at scales much larger than d_e . One needs to consider the following expression in the stationary state and in the inertial range

$$\frac{1}{2} (d_e^2 \partial_t R_{ii} + \partial_t \tilde{R}_{ii}) = \mathcal{NL} + \mathcal{F} + \mathcal{D} = \mathcal{NL} + \varepsilon^T, \quad (19)$$

where $\tilde{R}_{ij} = \langle B_i B'_j \rangle$, $\mathcal{NL}$ is the nonlinear contribution, and ε^T is the mean total energy injection rate per unit mass. Then, one obtains the general law for three-dimensional isotropic electron MHD turbulence (with $r < d_i$)

$$4 d_i \langle [(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) \times \delta \mathbf{B}]_L \rangle - d_i d_e^2 \langle (\delta \mathbf{J})^2 \delta J_L \rangle = -\frac{4}{3} \varepsilon^T r. \quad (20)$$

This universal law conserves the linearity in r but emphasizes the role of each term according to the scale considered. The importance of each term is given by the current density which involves a derivative: at small scales (scales smaller than d_e) the contribution of the current density will be more pronounced than at large scales (scales greater than d_e).

5. MAGNETIC FLUCTUATIONS SPECTRUM

The universal law (Equation (16)) gives a precise description of electron MHD turbulence at scales smaller than d_e . It also provides the possibility of predicting the form of the magnetic fluctuation spectrum and then a comparison with observations. Dimensionally, relation (16) corresponds to

$$d_i d_e^2 J^3 \sim \varepsilon^J r, \quad (21)$$

which means an energy spectrum in

$$E^J(k) \sim \left(\frac{\varepsilon^J}{d_i d_e^2} \right)^{2/3} k^{-5/3}, \quad (22)$$

compatible with the dynamical Equation (5) and direct numerical simulations (Biskamp et al. 1996). Since the current density and the magnetic field satisfy the equation $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$, we obtain the scaling relation

$$d_i d_e^2 \frac{B^3}{r^3} \sim \varepsilon^J r. \quad (23)$$

Then, the corresponding magnetic fluctuation power spectrum scales as

$$B^2(k) \sim \left(\frac{\varepsilon^J}{d_i d_e^2} \right)^{2/3} k^{-11/3}. \quad (24)$$

This magnetic spectrum is significantly steeper than the energy spectrum. It is compatible with solar-wind measurements where the magnetic field fluctuations are generally used to investigate turbulence at small scales, i.e., for frequencies f higher than 1 Hz. A power law around $f^{-3.8}$ has been reported (Sahraoui et al. 2009) which is significantly steeper than what is found at smaller frequencies where we have a spectrum around $f^{-2.5}$. Note that the linear law in r (Equation (20)) corresponds in fact to a double-scaling law for the magnetic fluctuation spectrum in $k^{-7/3}$ and $k^{-11/3}$ for, respectively, length scales larger and shorter than d_e . If we follow the Taylor frozen-in-flow hypothesis—which is questionable at these length scales—then we arrive at the conclusion that the general law (20), although relatively simple with its assumptions of isotropy and incompressibility, is in good agreement with the observations.

6. CONCLUSION

The turbulence regime at scales smaller than the electron inertial length d_e has been investigated through the approximation of electron MHD. A new universal and exact law has been established in terms of structure functions for the current density. This law leads to the prediction of a $k^{-11/3}$ power-law spectrum for the magnetic field fluctuations compatible with the most recent observations made with Cluster. It is proposed that electron MHD turbulence provides a valuable first-order approximation for the solar-wind dynamics in particular below the length scale d_e . It also provides the first prediction for the magnetic fluctuation spectrum at these length scales. The possibility of getting a turbulence regime at electron scales questions the origin of dissipation in the solar wind and more generally in space plasmas. In previous analyses (Sahraoui et al. 2009; Alexandrova et al. 2009), it was suggested that the range of scales where the heating occurs was discovered but it was also confessed that the characteristics of turbulence in the vicinity of the kinetic plasma scales are not well known either experimentally or theoretically and are a matter of debate (see also Podesta et al. 2010). It is believed that the present theoretical prediction will help significantly in such a debate.

Financial support from Institut universitaire de France is gratefully acknowledged.

APPENDIX

EXTENSION TO TWO-DIMENSIONAL OR SLAB TURBULENCE

We now discuss the extension of the exact prediction (16) to the non-isotropic case. The simplest situation is when a background magnetic field $\mathbf{B}_0$ is applied to the plasma flow for which the dynamics becomes statistically axisymmetric. We will adopt the view point of MacBride et al. (2008) and assume by simplicity that electron MHD turbulence is either two dimensional or a slab. If we define the energy flux vector $\mathbf{F}$ as (see relation (15))

$$\mathbf{F} \equiv d_e d_e^2 \nabla \cdot \langle \delta \mathbf{J} (\delta \mathbf{J})^2 \rangle, \quad (\text{A1})$$

then we obtain the general formulation for isotropic electron MHD turbulence

$$F(r) = \frac{4}{D} \varepsilon^J r, \quad (\text{A2})$$

where D is the space dimension. Two-dimensional turbulence means that $\mathbf{F}$ and $\mathbf{B}_0$ are perpendicular whereas they are parallel for slab (or one-dimensional) turbulence. Under these simplifications, it is straightforward to derive the following predictions:

$$F^{2D}(r) = 2\varepsilon^J V_{SW} \tau \sin \theta, \quad (\text{A3})$$

and

$$F^{\text{slab}}(r) = 4\varepsilon^J V_{SW} \tau \cos \theta, \quad (\text{A4})$$

where τ is the time, and θ is the angle between the mean magnetic field and the solar-wind velocity V_{SW} directions. Note

that to obtain these predictions, the Taylor hypothesis has been used (MacBride et al. 2008). It is believed that such relations could be useful for analyzing solar-wind turbulence and to evaluate the perpendicular and parallel mean energy dissipation rates per unit mass. Note that a more sophisticated approach has been recently used to describe axisymmetric electron MHD turbulence for length scales larger than d_e (Galtier 2009b). Under the assumption of critical balance, it leads to a vectorial relation for the energy flux with a dependence on both r and θ .

REFERENCES

- Alexakis, A., Bigot, B., Politano, H., & Galtier, S. 2007, *Phys. Rev. E*, **76**, 056313
- Alexandrova, O., et al. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 165003
- Batchelor, G. K. 1953, *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Bhattacharjee, A. 2004, *ARA&A*, **42**, 365
- Bigot, B., Galtier, S., & Politano, H. 2008, *Phys. Rev. E*, **78**, 066301
- Biskamp, D., Schwarz, E., & Drake, J. F. 1996, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 1264
- Biskamp, D., et al. 1999, *Phys. Plasmas*, **6**, 751
- Carbone, V., et al. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 061102
- Chacon, L., Simakov, A. N., & Zocco, A. 2007, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 235001
- Dastgeer, S., Das, A., & Kaw, P. 2000a, *Phys. Plasmas*, **7**, 1366
- Dastgeer, S., Das, A., Kaw, P., & Diamond, P. H. 2000b, *Phys. Plasmas*, **7**, 571
- Frisch, U. 1995, *Turbulence* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Galtier, S. 2006, *J. Plasma Phys.*, **72**, 721
- Galtier, S. 2008a, *Phys. Rev. E*, **77**, 015302
- Galtier, S. 2008b, *J. Geophys. Res.*, **113**, A01102
- Galtier, S. 2009a, *Nonlinear Process. Geophys.*, **16**, 83
- Galtier, S. 2009b, *Phys. Plasmas*, **16**, 112310
- Galtier, S., & Buchlin, E. 2007, *ApJ*, **656**, 560
- Galtier, S., Nazarenko, S. V., Newell, A. C., & Pouquet, A. 2000, *J. Plasma Phys.*, **63**, 447
- Gary, S. P., Saito, S., & Li, H. 2008, *Geophys. Res. Lett.*, **35**, L02104
- Ghosh, S., Siregar, E., Roberts, D. A., & Goldstein, M. L. 1996, *J. Geophys. Res.*, **101**, 2493
- Goldstein, M. L., Roberts, D. A., & Fitch, C. A. 1994, *J. Geophys. Res.*, **99**, 11519
- Govoni, F., et al. 2006, *A&A*, **460**, 425
- Hasegawa, A., & Chen, L. 1976, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 1362
- Howes, G. G., et al. 2008, *J. Geophys. Res.*, **113**, A05103
- Kinsep, A. S., Chukbar, K. V., & Yan'kov, V. V. 1990, *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 16 (New York: Consultants Bureau)
- Kiyani, K. H., et al. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 075006
- Klein, L., Bruno, R., Bavassano, B., & Rosenbauer, H. 1993, *J. Geophys. Res.*, **98**, 17461
- Kolmogorov, A. N. 1941, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **32**, 16
- Landau, L., & Lifchitz, E. 1989, *Mécanique des Fluides* (2nd ed.; Moscow: Editions MIR)
- Leamon, R. J., Smith, C. W., Ness, N. F., Matthaeus, W. H., & Wong, H. K. 1998, *J. Geophys. Res.*, **103**, 4775
- Li, H., Gary, S. P., & Stawicki, P. 2001, *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 1347
- MacBride, B. T., Smith, C. W., & Forman, M. A. 2008, *ApJ*, **679**, 1644
- Matthaeus, W. H., Servidio, S., & Dmitruk, P. 2008, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 149501
- Matthaeus, W. H., Zank, G. P., Smith, C. W., & Oughton, S. 1999, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3444
- Narita, Y., & Gary, S. P. 2010, *Ann. Geophys.*, **28**, 597
- Podesta, J. J., Borovsky, J. E., & Gary, S. P. 2010, *ApJ*, **712**, 685
- Politano, H., & Pouquet, A. 1998, *Phys. Rev. E*, **57**, R21
- Sahraoui, F., Goldstein, M. L., Robert, P., & Khotyaintsev, Yu. V. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 231102
- Scalo, J., & Elmegreen, B. G. 2004, *ARA&A*, **42**, 275
- Smith, C. W., Hamilton, K., Vasquez, B. J., & Leamon, R. J. 2006, *ApJ*, **645**, L85
- Stawicki, O., Gary, S. P., & Li, H. 2001, *J. Geophys. Res.*, **106**, 8273

1.2 Three-dimensional Hall Magnetohydrodynamics Turbulence

Three-dimensional Hall Magnetohydrodynamics Turbulence

Romain Meyrand¹ and Sébastien Galtier^{1,2}

¹*Université Paris-Sud, Institut d'Astrophysique Spatiale, UMR 8617, bât. 121,
 F-91405 Orsay, France*

²*Institut Universitaire de France, 103 boulevard Saint-Michel, F-75005 Paris,
 France*

Abstract. Direct numerical simulations of three-dimensional incompressible Hall magnetohydrodynamics are performed in a triple periodic box at moderate resolution. To investigate the transition from a large scale MHD turbulence regime to a small scale dispersive one we introduce a variable ion inertial length scale $d_I(t)$ which characterizes the strength of the Hall effect. By slowly increasing d_I we are able to move our window of resolution from the pure MHD scales to the full Hall MHD one. We estimate the value of d_I from which the Hall MHD regime appears. The present analysis is relevant in the context of solar wind turbulence where the power law spectrum for the magnetic field fluctuations steepens significantly at frequencies higher than a fraction of Hertz. This change of turbulence regime raises fundamental questions in plasma physics about the transition from a fluid model to a pure kinetic one.

1. Introduction

Nowadays turbulence is one of the most studied phenomena in astrophysical plasmas. Indeed, there are many challenging questions in relation with, for example, the dynamo problem, the dynamics of interstellar clouds where compressible effects are fundamental, the heating of the solar corona at temperature higher than a million degrees, the anisotropy or the multi-scale behavior of the solar wind (Elmegreen & Scalo 2004; Brandenburg & Subramanian 2005; Galtier 2006a; Kritsuk et al. 2007; Alexakis et al. 2007; Bigot et al. 2008a,b; Galtier 2009; Meyrand & Galtier 2010; Galtier & Banerjee 2011). In the latter case, in situ measurements made by several probes reveal a change of behavior of the heliospheric magnetic field fluctuations at frequency close to the ion cyclotron frequency (Coroniti et al. 1982; Smith et al. 2006; Alexandrova et al. 2009; Sahraoui et al. 2009; Kiyani et al. 2009). This finding raises, in particular, the question of the transition from a large scale mono-fluid description – the magnetohydrodynamic (MHD) equations – to a pure small scale kinetic description (Galtier 2006b; Howes 2011; Smith et al. 2012). In the case of a gentle laminar plasma the answer is easy and can be found in textbooks, however when the plasma is in the regime of fully developed turbulence the answer becomes subtle since scales are correlated and correlations at large scales tend to propagate towards smaller scales. In that context, several theoretical and numerical works have been developed in the Hall MHD approximation (Ghosh et al. 1996; Ghosh & Goldstein 1997; Krishan & Mahajan 2004; Galtier & Buchlin

2007; Mininni et al. 2007; Galtier 2008; Gómez et al. 2008; Shaikh & Shukla 2009; Laveder et al. 2011).

The present paper belongs to this family of works devoted to three-dimensional direct numerical simulations of incompressible Hall MHD. Moderate numerical resolutions are used in order to investigate the transition from the MHD turbulence regime to the fully dispersive one. We present below preliminary results of a set of three simulations where we have played with the intensity of the Hall term; our conclusion about Hall MHD turbulence is then given in the conclusion.

2. Direct numerical simulations

We compute numerical solutions of the three-dimensional Hall MHD equations

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P_* + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} - \nu_2 \nabla^4 \mathbf{u} + \mathbf{f}^u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} - d_I \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}] - \eta_2 \nabla^4 \mathbf{b} + \mathbf{f}^b, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

with $\mathbf{b}$ the magnetic field normalized to a velocity ($\mathbf{b} \equiv \mathbf{B} / \sqrt{\mu_0 n m_i}$, with m_i the ion mass), $\mathbf{u}$ the velocity, P_* the total (kinetic + magnetic) pressure, ν_2 the hyper-viscosity, η_2 the hyper-magnetic diffusivity, $\mathbf{f}^u$ and $\mathbf{f}^b$ the forcing terms. The use of hyper-diffusivities is justified in Hall MHD since we aim at analyzing the fluctuations in the inertial range which can be clearly defined only if the dissipative terms imply derivatives of higher degrees than the one present in the nonlinear terms. The Hall effect appears in the induction equation as an additional nonlinear term proportional to the ion inertial length $d_I \equiv c/\omega_{pi}$ (with c the speed of light and ω_{pi} the ion plasma frequency); it is effective when the scales are small enough and, in particular, when $kd_I > 1$ with k the wavenumber. Note that an incompressible fluid does not require the introduction of an (eg. isothermal) equation of state since the pressure term can be written directly in terms of the velocity and the magnetic fields by taking the divergence of Eq. (2).

In order to (obtain and) follow the evolution of the dynamics from a pure MHD regime to a dispersive one with a limited range of scales, due in part to our moderate numerical grid resolution ($N^3 = 64^3$), we have decided to parametrize the ion inertial length such that for times $0 \leq t \leq t_*$, $d_I = 0$, and for $t > t_*$:

$$d_I(t) = A(t - t_*), \quad (5)$$

where A is a parameter fixed initially ($A = 1/800$). We take $t_* = 10$ in order to generate initially a pure MHD turbulence regime. After t_* , the Hall term may grow linearly with time, following relation (5), and the dispersive nonlinear dynamics emerges relatively slowly. We believe that this situation may mimic a zoom – which increases with time – into the turbulence dynamics going from the MHD scales to the Hall MHD scales.

We present below three direct numerical simulations made in a triple periodic cubic box. We run the TURBO code ¹ where the Hall term has been implemented by

¹ See the site: "http://aqua.ulb.ac.be/home/?page_id=50" (Teaca et al. 2009).

one of us. It is a pseudo-spectral code in which the 2/3 de-aliasing rule is applied. The code is parallelized through the use of MPI. Initial conditions are such that the kinetic E^u and magnetic E^b energies are equal to 1/2 and localized at the largest scales of the system (only wavenumbers $k \in [1, 5]$ are initially excited). An external force is included in the Hall MHD system (at scales $k \in [2, 3]$) for both the velocity and the magnetic field such that we have a constant energy level (Teaca et al. 2011). MHD and Hall MHD do not have the same inviscid invariants. Thanks to the forcing, we shall maintain the magnetic helicity ($H^m \equiv \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle$) and the generalized helicity ($H^g \equiv \langle (\mathbf{a} + d_I \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{b} + d_I \nabla \times \mathbf{u}) \rangle$) close to zero and analyze three cases: a normalized cross-helicity $H^c \equiv 2\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \rangle / \langle \mathbf{u}^2 + \mathbf{b}^2 \rangle$ initially taken close to 0 (Run I), close to +0.6, a value frequently observed in the solar wind (Run II), and the extreme case with an initial value close to -0.9 (Run III).

3. Results

Fig. 1 displays the temporal evolutions of E^u , E^b , $E^{tot} = E^u + E^b$ and d_I , for a different initial cross-helicity. We see that a stationary state in which on average the dissipation balances the forcing is quickly reached for the two first cases whereas it takes a longer time when $|H^c|$ is initially large. The smallness of A insures that the system evolves relatively slowly towards the dispersive regime: in practice, we see that the dynamical time scale which can be estimated by the thickness of the peaks in the total energy profile, remains significantly smaller than the time to get d_I of order one. The consequence is of course the obligation to perform a long time integration to reach the state $d_I = 1$; this is only possible at moderate resolution. In all runs we see that the final regime is magnetically dominated whereas the kinetic energy dominates during the initial regime which belongs to MHD turbulence. The emergence of the new regime appears at different times in the three simulations. For Run I it corresponds approximately to $t = 600$ ($d_I = 0.75$) with a narrow transition phase. For Run II the situation is not clear and a long transition seems necessary between the first phase ($t < 250$) and the new regime which is clearly reached for times $t > 900$ ($d_I > 9/8$). Finally for Run III the transition happens much faster at a time around $t = 150$ ($d_I = 3/16$). The new regime belongs to pure Hall MHD turbulence in which a magnetic spectrum in $-7/3$ is expected but not clearly seen at this moderate resolution. The steepening of the magnetic spectrum means an increase of the energy flux and finally a state in which the magnetic energy is smaller. A comparison with a pure MHD simulation (not shown) proves that it is not due to some forcing cumulative effect since we always have $E^b/E^u > 1$ in the MHD turbulence regime.

Figure 2 displays the temporal evolution of the normalized cross-helicity H^c for the same runs. In Run I, H^c does not evolve very much and remains roughly around 0. However, we can see that in the magnetic dominated regime a value almost constant is reached. In Run II, H^c evolves initially significantly to reach the asymptotic value +0.35 at time around 500: at this moment we are in the transition regime where inversions happen between states dominated by the magnetic or the kinetic energy. In Run III, we also find an asymptotic state in which the cross-helicity remains around -0.5. It is worth noting that in the pure MHD case (not shown) the cross-helicity is on average always maintained constant. Since H^c is an inviscid invariant only for pure MHD, it is only in the turbulence MHD regime that it is naturally maintained. The comparison with the solar wind is interesting because a non-zero cross-helicity is generally

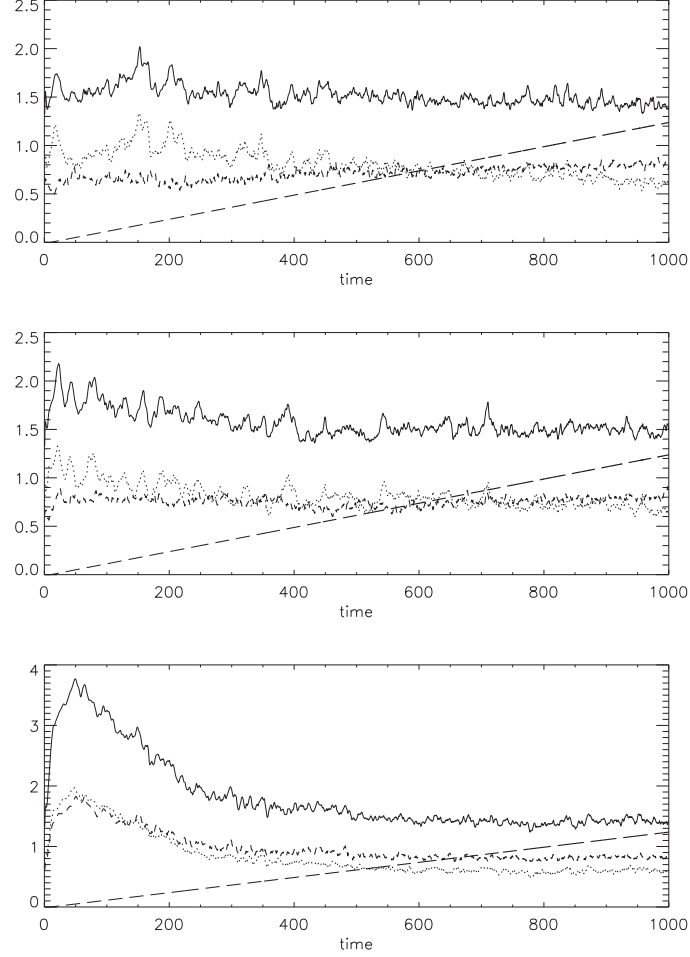


Figure 1. Temporal evolutions of E^u (dash), E^b (dot), E^{tot} (solid), and d_I (long dash) for Run I (top), Run II (middle) and Run III (bottom).

observed. Observations also show the existence of a transition – with steep magnetic fluctuation spectrum – between the low frequency (MHD) turbulence regime and the high frequency dispersive one.

4. Conclusion

In this paper, we have presented a new numerical study at moderate resolution of three-dimensional Hall MHD turbulence. This preliminary analysis was focused on the transition from a pure MHD turbulence regime to a dispersive one. By using a variable ion inertial length $d_I(t)$ we have been able – at the price of a long time integration – to follow the transition from the MHD turbulence regime to a new regime where the kinetic energy becomes dominant. As far as we know it is the first time that direct numerical

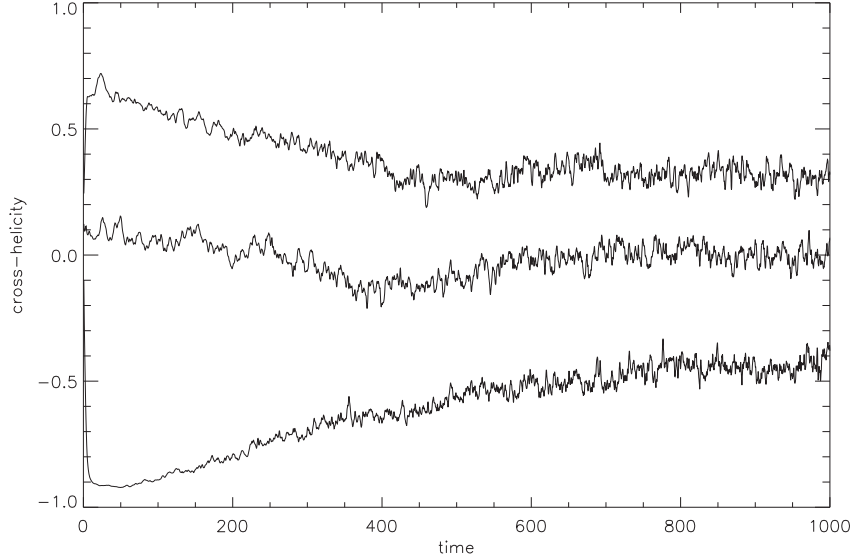


Figure 2. Temporal evolution of the normalized cross-helicity H^c for Run I (middle), Run II (top) and Run III (bottom).

simulations of Hall MHD are made for values of $d_I > 0.125$ (the only one exception is for studying the dynamo problem for which the magnetic field is initially infinitesimal (Mininni et al. 2003)). We find the presence of a relatively long transition regime at moderate reduced cross-helicity and we observe that the appearance of the pure Hall MHD regime depends on the value of the initial cross-helicity. We are currently investigating further this question with higher numerical resolutions and with several other tools.

The existence of a range of scales where an intermediate regime of turbulence exists is particularly relevant in the context of solar wind turbulence. Indeed, a transient regime between the MHD scales and the pure dispersive one is also observed in the heliospheric magnetic field fluctuations which are characterized by steep spectra. We believe that this type of fluid analysis is very helpful to better understand the difficult and fundamental problem of the transition from a fluid model to a pure kinetic one.

Acknowledgments. The authors acknowledge the Mesocentre SIGAMM machine hosted by the Observatoire de la Côte d’Azur, T. Passot and D. Laveder for their initial input, as well as É. Buchlin for helpful discussions.

References

- Alexakis, A., Bigot, B., Politano, H., & Galtier, S. 2007, *Phys. Rev. E*, 76, 056313
- Alexandrova, O., Saur, J., Lacombe, C., Mangeney, A., Mitchell, J., Schwartz, S. J., & Robert, P. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, 103, 165003
- Bigot, B., Galtier, S., & Politano, H. 2008a, *Phys. Rev. Lett.*, 100, 074502
- 2008b, *Phys. Rev. E*, 78, 066301
- Brandenburg, A., & Subramanian 2005, *Phys. Reports*, 417, 1

- Coroniti, F., Kennel, C., & Scarf, F. 1982, *J. Geophys. Res.*, 87, 6029
- Elmegreen, B., & Scalo, J. 2004, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 42, 211
- Galtier, S. 2006a, *J. Low Temp. Phys.*, 145, 59
- 2006b, *J. Plasma Physics*, 72, 721
- 2008, *Phys. Rev. E*, 77, 015302
- 2009, *Nonlin. Proc. Geophys.*, 16, 83
- Galtier, S., & Banerjee, S. 2011, *Phys. Rev. Lett.*, 107, 134501
- Galtier, S., & Buchlin, E. 2007, *ApJ*, 656, 560
- Ghosh, S., & Goldstein, M. 1997, *J. Plasma Physics*, 57, 129
- Ghosh, S., Siregar, E., Roberts, D., & Goldstein, M. 1996, *J. Geophys. Res.*, 101, 2493
- Gómez, D. O., Mahajan, S. M., & Dmitruk, P. 2008, *Physics of Plasmas*, 15, 102303
- Howes, G. 2011, *ApJ*, 738, 40
- Kiyani, K., Chapman, S., Khotyaintsev, Y., Dunlop, M., & Saharoui, F. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, 103, 075006
- Krishan, V., & Mahajan, S. 2004, *J. Geophys. Res.*, 109, 111051
- Kritsuk, A., Norman, M., Padoan, P., & Wagner, R. 2007, *ApJ*, 665, 416
- Laveder, D., Marradi, L., Passot, T., & Sulem, P. L. 2011, *Planet. Space Sci.*, 59, 556
- Meyrand, R., & Galtier, S. 2010, *ApJ*, 721, 1421
- Mininni, P. D., Alexakis, A., & Pouquet, A. 2007, *J. Plasma Physics*, 73, 377
- Mininni, P. D., Gómez, D. O., & Mahajan, S. M. 2003, *ApJ*, 587, 472
- Sahraoui, F., Goldstein, M., Robert, P., & Khotyaintsev, Y. V. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, 102, 231102
- Shaikh, D., & Shukla, P. K. 2009, *Phys. Rev. Lett.*, 102, 045004
- Smith, C., Hamilton, K., Vasquez, B., & Leamon, R. 2006, *ApJ*, 645, 85
- Smith, C., Vasquez, B., & Hollweg, J. 2012, *ApJ*, 745, 8
- Teaca, B., Lalescu, C. C., Knaepen, B., & Carati, D. 2011, *ArXiv e-prints*, 1108.2640
- Teaca, B., Verma, M., Knaepen, B., & Carati, D. 2009, *Phys. Rev. E*, 79, 046312

1.3 Spontaneous Chiral Symmetry Breaking of Hall Magneto-hydrodynamic Turbulence

Spontaneous Chiral Symmetry Breaking of Hall Magnetohydrodynamic Turbulence

Romain Meyrand and Sébastien Galtier

Université Paris-Sud, Institut d'Astrophysique Spatiale, UMR 8617, Bâtiment 121, F-91405 Orsay, France
(Received 11 May 2012; published 7 November 2012)

Hall magnetohydrodynamics (MHD) is investigated through three-dimensional direct numerical simulations. We show that the Hall effect induces a spontaneous chiral symmetry breaking of the turbulent dynamics. The normalized magnetic polarization is introduced to separate the right- (R) and left-handed (L) fluctuations. A classical $k^{-7/3}$ spectrum is found at small scales for R magnetic fluctuations which corresponds to the electron MHD prediction. A spectrum compatible with $k^{-11/3}$ is obtained at large-scales for the L magnetic fluctuations; we call this regime the ion MHD. These results are explained heuristically by rewriting the Hall MHD equations in a succinct vortex dynamical form. Applications to solar wind turbulence are discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.194501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.194501)

PACS numbers: 47.27.ek, 47.27.Jv, 47.65.-d, 52.30.Cv

Introduction.—The understanding of small-scale turbulence in collisionless plasmas is nowadays a central problem in space physics and laboratory plasmas. In the absence of collisional processes, how energy converted into heat still represents a puzzling question and a fascinating challenge. While plasma turbulence occurs in very different conditions its physical characterization is based on a number of universal features. Generally, fluid and kinetic regimes are treated separately due to the extreme difficulty in describing at the same time a vast range of length scales and frequencies. Since turbulence couples all scales together it is of crucial importance to face the cross-scale problem. A first step towards creating a more appropriate theory capturing both the magnetohydrodynamics (MHD) behavior and some kinetic effects without bringing the full complexity of the Vlasov-Maxwell equations is to include the effect of the decoupling between the electron and ion flows. This can be done by keeping the Hall current term in Ohm's law to obtain the generalized Ohm's law (in SI unit), $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{b} = (\mathbf{j} \times \mathbf{b})/(ne)$, where $\mathbf{E}$ is the electric field, $\mathbf{u}$ the velocity, $\mathbf{j}$ the electric current, $\mathbf{b}$ the magnetic field, n the electron density, and e the magnitude of the electron charge. The Hall term becomes dominant at length scales smaller than the ion inertial length d_I ($d_I \equiv c/\omega_{pi}$ with c the speed of light and ω_{pi} the ion plasma frequency) and time scales of the order, or shorter than, the ion cyclotron period ω_{ci}^{-1} . It provides a useful model for understanding, e.g., impulsive magnetic reconnection or the magnetic field evolution in neutron star crusts [1–3].

In the turbulence regime, the role of the Hall term has been investigated first in the small-scale limit for which the system tends to the so-called electron MHD (EMHD) equation. Direct numerical simulations (DNS) clearly show that the magnetic spectrum follows a power law in $k^{-7/3}$ which may be explained by a heuristic model in the manner of Kolmogorov [4]. The full Hall MHD system is more difficult to handle both numerically and analytically. Nevertheless, it has been investigated in the incompressible

limit through DNS [5] and rigorous analytical developments for both strong and weak turbulence [6,7]. Nowadays it is thought that Hall MHD [8–12] provides a relevant model for solar wind turbulence for which a change of power law is detected in the magnetic fluctuations spectrum at frequencies higher than a fraction of one Hertz with power law indices steeper than -2 [13–16].

In this Letter, we investigate Hall MHD turbulence through 3D DNS. We show that the Hall effect induces a spontaneous symmetry breaking of the turbulent dynamics which may be studied by introducing the normalized magnetic polarization to separate the left- (L) and right-handed (R) fluctuations. Unlike MHD, L and R fluctuations are found to behave very differently at scales smaller than d_I and the power spectrum predicted by EMHD is not the unique solution for the magnetic fluctuations. A new regime called ion MHD (IMHD) is found whose properties are qualitatively in agreement with *in situ* solar wind observations. Chirality is therefore a fundamental aspect of Hall MHD turbulence.

Incompressible Hall magnetohydrodynamics.—Our numerical simulations are based on 3D incompressible Hall MHD:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P_* + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{b} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} - d_I \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}], \quad (2)$$

where P_* is the total pressure and $\mathbf{b}$ is normalized to a velocity ($\mathbf{b} \rightarrow \sqrt{\mu_0 n m_i} \mathbf{b}$, with m_i the ion mass; we also have $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$). Equation (2) is nothing else than the Maxwell-Faraday's equation in which the generalized Ohm's law is introduced. An inertial range can be clearly defined only if the dissipative terms imply derivatives of higher degrees than those present in the nonlinear terms. From a numerical point of view it is also a condition to avoid the emergence of numerical instabilities. For that reason we have introduced hyperdissipative terms into Eqs. (1) and (2) ($\nu_2 \nabla^4 \mathbf{u}$ and $\eta_2 \nabla^4 \mathbf{b}$). The ion inertial

length is fixed to $d_I = 0.5$ which is higher than most of the previous DNS (where $d_I \sim 0.1$).

We run the TURBO code [17] in which we have implemented the Hall term. The simulations are made in a triple periodic cubic box with $N = 512^3$ collocation points. Note that 3D Hall MHD DNS require much more numerical resources than for pure MHD (where standard turbulence simulations reach spatial resolution up to 1024^3) because the Hall term involves a double nabla operator which leads to a severe decrease of the time step compared to MHD. We fix $\nu_2 = \eta_2 = 1.5 \times 10^{-6}$. Initial conditions are such that the kinetic E^k and magnetic E^m energies are equal to 1/2 and localized at the largest scales of the system (only wave numbers $k \in [1, 5]$ are initially excited). External forces are included in Eqs. (1) and (2) such that we have a constant energy level; their effects are localized at scales $k \in [1.5, 2.5]$. In addition to the (large-scale) kinetic ($R_e = U_L L^3 / \nu_2$) and magnetic ($R_m = B_L L^3 / \eta_2$) Reynolds numbers, in Hall MHD we may define the Hall Reynolds number ($R_m^H = d_I B_L L^2 / \nu_2$). For our simulations the Reynolds numbers are approximately the same ($\sim 10^6$). A local evaluation of these numbers ($L \rightarrow \ell \sim 1/k$) leads to a slower decrease with the scale of R_m^H than for R_e and R_m which means that the Hall term is the dominant non-linear term at small-scales. The Kolmogorov scale k_d in terms of the grid size Δx can be evaluated numerically: one finds approximately $k_d = 5\Delta x$.

Chirality and polarization.—We define the normalized magnetic helicity and cross correlation as, respectively:

$$\sigma_m = \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^* + \hat{\mathbf{a}}^* \cdot \hat{\mathbf{b}}}{2|\hat{\mathbf{a}}||\hat{\mathbf{b}}|}, \quad \sigma_c = \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^* + \hat{\mathbf{u}}^* \cdot \hat{\mathbf{b}}}{2|\hat{\mathbf{u}}||\hat{\mathbf{b}}|}, \quad (3)$$

where $\hat{\cdot}$ means the Fourier transform, $*$ the complex conjugate, and $\mathbf{a}$ the magnetic vector potential. From these quantities, we may define the magnetic polarization, $P_m = \sigma_m \sigma_c$, which varies by definition between -1 and $+1$. Hall MHD supports R and L circularly polarized waves for which we have respectively $P_m = -1$ and $+1$ [6]; the first case corresponds to incompressible whistler waves (also called kinetic Alfvén waves [18]) and the second to ion-cyclotron waves. By extension, in our numerical study we define the R and L fluctuations for which we have, respectively, $P_m < 0$ and $P_m > 0$. Note that the forcing terms in Eqs. (1) and (2) are chosen such as injection rates of cross helicity and magnetic helicity are null.

A plot of the magnetic energy as a function of P_m and k is shown in Fig. 1 for a statistically steady state. The sharp discontinuities in the distribution (mainly visible at low k) are the consequence of our algorithm to build a 1D spectrum from 3D data: the Fourier space is divided into spherical shells of constant thickness which means that the number of modes included in a shell increases with its radius. Then, small shells (at low k) contain only a few modes. Since in Fig. 1 the magnetic energy spectrum is

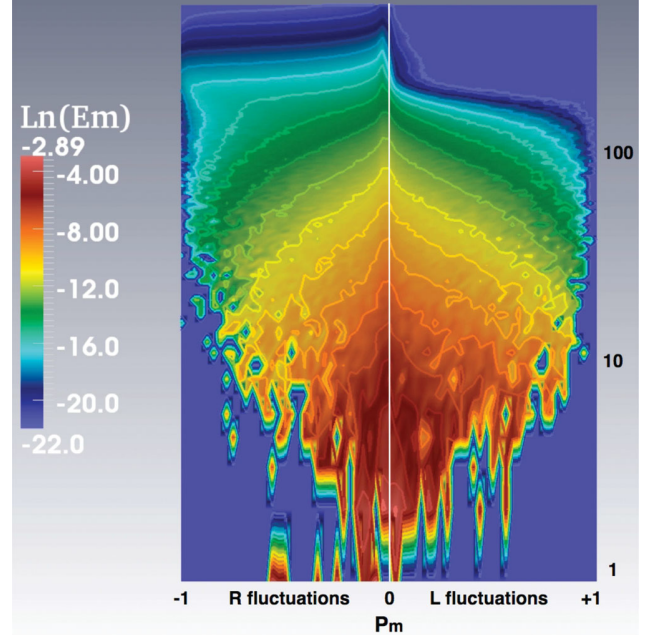


FIG. 1 (color). Magnetic energy as a function of P_m and k (in logarithmic coordinate). Isocontours of energy (in logarithmic scale) are displayed in order to separate the regions of high energy (red) from those of low energy (blue).

shown as a function of the magnetic polarity, we may find at a given (low) k a non uniform repartition with sharp discontinuities. As expected the energy is mainly localized at large scales since a direct cascade happens. The plot reveals a first asymmetry in the distribution with an energy dominated by L fluctuations at moderate wave numbers and then by R fluctuations at high wave numbers. (Note that the same conclusion is reached for the kinetic energy.) For the largest k we see that the L fluctuations are damped before the R fluctuations. The origin of this second asymmetry is the difference between the magnetic and kinetic Reynolds numbers (although $\nu_2 = \eta_2$): indeed, the degrees of nonlinearity in Eqs. (1) and (2) are not the same. As will be explained below, the dynamics for the L fluctuations is mainly driven by the velocity, whereas the magnetic field is passively advected. Therefore, it is expected for that polarization that the inertial ranges of the kinetic and magnetic energies end up at the same scale. It is what we find when we compare Fig. 1 with the kinetic energy spectrum (not shown). Finally, note the systematic presence of peaks around $|P_m| \sim 0$ in the isocontours of energy which means that at a given scale the energy is always dominated by fluctuations at weak (negative) polarization. This feature is interpreted as the residual imprint of the large-scale forcing where energy is injected mainly at weak polarization.

In order to quantify more precisely the distribution through the scales of the different types of fluctuations we have computed the total energy (in Fourier space) for the R and L fluctuations, respectively:

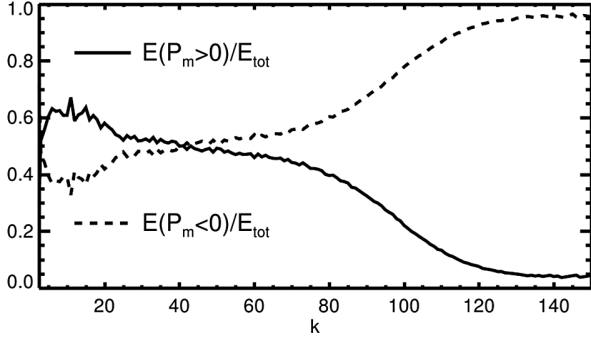


FIG. 2. Energy ratios E^L/E^T (solid line) and E^R/E^T (dashed line).

$$E^{R,L}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \langle |\hat{\mathbf{u}}|^2 + |\hat{\mathbf{b}}|^2 \rangle_{R,L}. \quad (4)$$

In our study, turbulence is mainly isotropic (there is no external magnetic field); therefore, we have performed an integration over spherical shells in order to get the 1D spectrum of these quantities. In Fig. 2, we show the ratio between the R (or L) energy over the total energy, i.e., $E^T(k) = E^R(k) + E^L(k)$. We clearly see that the L fluctuations are dominant at large scales whereas the R fluctuations becomes dominant only for $k > 45$. (Note that the plateaus at $k > 130$ are localized exclusively into the dissipative zones.) This behavior is very different from the pure MHD case ($d_I = 0$; not shown) for which two approximately flat curves with $E^R(k) = E^L(k)$ are found.

Figure 3 displays the magnetic spectra for some R and L fluctuations in the sense that only fluctuations for which $|P_m| \geq 0.3$ have been taken into account. We exclude the fluctuations at weak polarization in particular to avoid a contamination of the large-scale forcing. Interestingly, we see that the R spectrum is in a good agreement with the well-known $k^{-7/3}$ scaling predicted for EMHD turbulence whereas the L spectrum exhibits a scaling compatible with a $k^{-11/3}$. Note that the cutoff at large scales is due to the filtering (based on P_m) process applied to the data (see also the comments on spherical shells made in the context of Fig. 1). Very often Hall MHD turbulence is analyzed in the EMHD limit in which only the dynamics of the magnetic field is described: due to their high inertia, ions are supposed to provide a static homogeneous background ($\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$) on which fast electrons move. In this regime, only R fluctuations exist for which a $-7/3$ magnetic fluctuations spectrum is obtained both by phenomenology and DNS [4]. The full Hall MHD system is much richer since it describes the dynamics not only for the magnetic field but also for the velocity. In a previous study [10], it was possible to show numerically with a (simple) shell model that Hall MHD turbulence does not tend necessarily towards the EMHD prediction since a strong dependence in terms of the ratio between the kinetic and the magnetic energies was observed. The study presented here with DNS

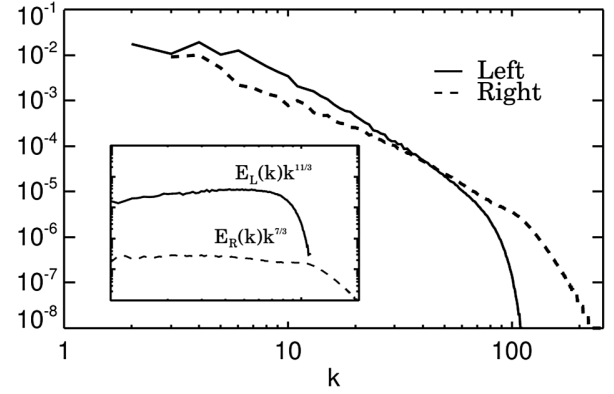


FIG. 3. Magnetic spectra (in logarithmic coordinates) for fluctuations $P_m \geq +0.3$ (solid line) and $P_m \leq -0.3$ (dashed line). Inset: compensated spectra with power laws $k^{-7/3}$ and $k^{-11/3}$.

enables us to go much deeper in the analysis by using the three dimensionality of the problem. We have seen that the polarization is a key ingredient for revealing subtle features of the turbulence regime.

Theoretical interpretation.—A simple theoretical interpretation of our numerical simulations may be given by rewriting the Hall MHD equations as follows [19]:

$$\partial_t \Omega_j = \nabla \times (\mathbf{u}_j \times \Omega_j), \quad (j = R, L), \quad (5)$$

with the pair of generalized vortices and velocities ($\Omega_R = \mathbf{b}$, $\mathbf{u}_R = \mathbf{u} - d_I \nabla \times \mathbf{b}$) and ($\Omega_L = \mathbf{b} + d_I \nabla \times \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_L = \mathbf{u}$). We first note that the generalized vorticities $\Omega_{R,L}$ are frozen in the flow $\mathbf{u}_{R,L}$. Let us imagine a turbulent flow in which just one type of generalized vortex evolves, say vortices Ω_R . In this particular regime $\mathbf{u}_L$ must be equal to zero; then we recover the well known EMHD regime described above. Now let us imagine that only Ω_L vortices evolve: in this case, we must have $\mathbf{u}_R = 0$ which implies the condition $\mathbf{u} = d_I \nabla \times \mathbf{b}$. Under these conditions, Eq. (5) becomes:

$$\partial_t (1 - d_I^2 \Delta) \mathbf{b} = d_I \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{b}) \times (1 - d_I^2 \Delta) \mathbf{b}]. \quad (6)$$

Linearising Eq. (6) about a static homogeneous magnetic field $\mathbf{B}_0$ gives $\omega_L (1 + d_I^2 k^2) \hat{\mathbf{b}} = d_I k_{\parallel} B_0 i \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{b}}$, which yields in the limit $kd_I \gg 1$ nothing else than the dispersion relation of the left-handed circularly polarized cyclotron waves, i.e., $\omega_L = B_0 k_{\parallel} / (kd_I)$ [20]. How can we interpret this result? The alignment condition, $\mathbf{u} = d_I \nabla \times \mathbf{b}$, implies that the electron velocity $\mathbf{v}_e = 0$. In this regime, the apparent immobility of the electrons results, in fact, from a statistical effect: from the point of view of ions the electrons are so fast that they are seen on average (i.e., on their time scale) as a uniform neutralizing background. In this regime—that we call IMHD—the magnetic field is passively advected by the ion Kolmogorovian flow $[\partial_t (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]$. Thanks to the alignment condition, we have $u^2/k = d_I^2 k^2 b^2/k \sim k^{-5/3}$ which leads to the magnetic spectrum, $b^2/k \sim k^{-11/3}$.

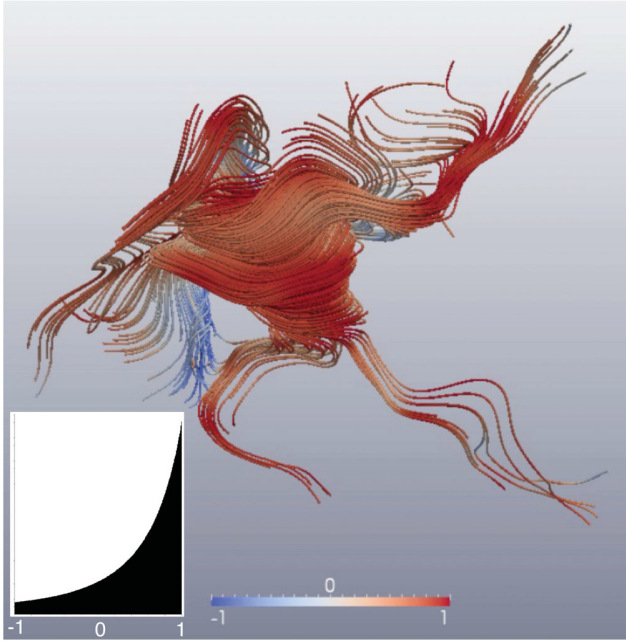


FIG. 4 (color). Electric current field lines of a typical structure of IMHD turbulence. Colors represent $\cos\theta$ with $\theta \equiv (\mathbf{u}, \widehat{\nabla \times \mathbf{b}})$. Insert: histogram of $\cos\theta$ for fluctuations with $P_m \in [0.4, 1]$. (Same simulations as before at resolution $N = 256^3$).

In general, Hall MHD turbulence may be seen as complex spatial superposition of tangled generalized vortices Ω_R and Ω_L , stretched and twisted, respectively, by their own generalized velocities $\mathbf{u}_R$ and $\mathbf{u}_L$ in a chaotic manner. The question that naturally comes to mind is whether these two populations of vortices interact with each other. Since it is possible to explain the spectra obtained in our numerical simulations with the simple heuristic model presented above we have good reasons to believe that the coupling is weak. This can be understood by noting that the transfer times of Eq. (5) for $j = R$ and L are very different in the $kd_I \gg 1$ limit, namely $1/\tau_R \sim d_I b/\ell^2$ and $1/\tau_L \sim u/\ell$. Figure 4 displays a typical electric current vortex in IMHD turbulence. We see that $\mathbf{u}$ and $\nabla \times \mathbf{b}$ are remarkably well aligned in agreement with the heuristic model given above. The histogram of the cosine of the angle between $\mathbf{u}$ and $\nabla \times \mathbf{b}$ is also shown for a magnetic polarization $P_m \geq 0.4$: it demonstrates that the alignment relation is statistically well satisfied.

Discussion.—Solar wind observations clearly show that the magnetic fluctuations spectrum experiences a change of power law going from approximately $f^{-5/3}$ (f being the frequency) for $f < 0.5$ Hz, to $\sim f^{-4}$ which has been interpreted as the signature of Landau damping of magnetic energy into ion heating [21]. Then, a spectrum around $\sim f^{-2.8}$ is found. It is well known that the solar wind is collisionless and we may expect that kinetic effects play an important role at high frequency. Despite this limitation, it is believed that Hall MHD is a relevant theoretical model

which captures some of the “kinetic” effects that become important at small scales. In that spirit, the present study reveals important information about the role of the magnetic polarization and provides a new interpretation of the data. By extrapolating our findings we might conclude that the total $(L + R)$ magnetic fluctuations spectrum should scale in $k^{-11/3}$ at large dispersive scales and in $k^{-7/3}$ at small dispersive scales. This scenario cannot be confirmed by our simulations because (i) when we do not apply a filter to separate the polarities, the difference between the L and R fluctuations is not pronounced enough, (ii) fluctuations at weak P_m are always present and blur this vision, and (iii) the inertial ranges are too narrow. We expect that the range of scales where a steep spectrum is found increases with the Reynolds numbers (and so with the space resolution) but this point remains to be checked numerically. Thus, the -4 power law exponent measured in the solar wind could be the result of nonlinear effects due to the decoupling between the electron and ion flows in which the L -handed magnetic fluctuations dominates (IMHD), whereas the -2.8 scaling may be interpreted as the signature of EMHD turbulence strongly dominated by R -handed fluctuations possibly in a strongly anisotropic regime since an agreement is found with the theory when the parallel cascade is weak [22]. Further analyses about for example the (cross) energy fluxes or in a more realistic situation with a nonzero cross-correlation forcing (or also with $\nu_2 \neq \eta_2$) are currently under investigation and will be presented elsewhere.

The authors acknowledge S. Banerjee, É. Buchlin, W. Herreman, D. Laveder, and T. Passot for helpful discussions. This work was granted access to the HPC resources of [CCRT/CINES/IDRIS] under the allocation 2012 [x2012046736] made by GENCI. Computer time was also provided by the Mesocentre SIGAMM machine, hosted by the Observatoire de la Côte d’Azur.

-
- [1] A. Bhattacharjee, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **42**, 365 (2004).
 - [2] P. Goldreich and A. Reisenegger, *Astrophys. J.* **395**, 250 (1992).
 - [3] M. Faganello, F. Pegoraro, F. Califano, and L. Marradi, *Phys. Plasmas* **17**, 062102 (2010).
 - [4] D. Biskamp, E. Schwarz, and J. F. Drake, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1264 (1996).
 - [5] P. D. Mininni, A. Alexakis, and A. Pouquet, *J. Plasma Phys.* **73**, 377 (2007).
 - [6] S. Galtier, *J. Plasma Phys.* **72**, 721 (2006).
 - [7] S. Galtier, *Phys. Rev. E* **77**, R015302 (2008).
 - [8] S. Ghosh, E. Siregar, D. A. Roberts, and M. L. Goldstein, *J. Geophys. Res.* **101**, 2493 (1996).
 - [9] S. Ghosh and M. L. Goldstein, *J. Plasma Phys.* **57**, 129 (1997).
 - [10] S. Galtier and É. Buchlin, *Astrophys. J.* **656**, 560 (2007).
 - [11] S. Galtier, *Nonlinear Proc. Geophys.* **16**, 83 (2009).
 - [12] V. Carbone, *Space Sci. Rev.* (to be published).

-
- [13] C. W. Smith, K. Hamilton, B. Vasquez, and R. J. Leamon, *Astrophys. J.* **645**, L85 (2006).
- [14] O. Alexandrova, J. Saur, C. Lacombe, A. Mangeney, J. Mitchell, S. Schwartz, and P. Robert, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 165003 (2009).
- [15] F. Sahraoui, M. L. Goldstein, G. Belmont, P. Canu, and L. Rezeau, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 131101 (2010).
- [16] S. Bourouaine, O. Alexandrova, E. Marsch, and M. Maksimovic, *Astrophys. J.* **749**, 102 (2012).
- [17] B. Teaca, M. K. Verma, B. Knaepen, and D. Carati, *Phys. Rev. E* **79**, 046312 (2009).
- [18] B. N. Rogers, R. E. Denton, J. F. Drake, and M. A. Shay, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 195004 (2001).
- [19] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 095001 (2002).
- [20] F. Sahraoui, S. Galtier, and G. Belmont, *J. Plasma Phys.* **73**, 723 (2007).
- [21] G. G. Howes, S. C. Cowley, W. Dorland, G. W. Hammett, E. Quataert, and A. A. Schekochihin, *J. Geophys. Res.* **113**, A05103 (2008).
- [22] S. Galtier, A. Pouquet, and A. Mangeney, *Phys. Plasmas* **12**, 092310 (2005).

2 Acte de colloque

2.1 A New Turbulent Regime in the Solar-wind at Electron Scales

A NEW TURBULENCE REGIME IN THE SOLAR-WIND AT ELECTRON SCALES

R. Meyrand¹ and S. Galtier¹

Abstract. Solar wind turbulence is characterized by a Kolmogorovian magnetic fluctuations spectrum at large scales followed by a second inertial range with steeper spectra associated with nonlinear dispersive processes. Recent observations reveal the presence of a third region – called dissipation range – at scales smaller than the electron inertial length and characterized by steeper spectra. We investigate this regime in the electron magnetohydrodynamics approximation and discuss the possibility to derive an exact and universal law for third-order structure functions. This law corresponds to a magnetic fluctuations isotropic spectrum in $k^{-11/3}$ compatible with the observations. We conclude on the possible existence of a third turbulence regime in the solar wind instead of a dissipation range as recently postulated.

Keywords: electron magnetohydrodynamics, solar wind, turbulence

1 Solar wind turbulence

Solar wind turbulence provides an ideal laboratory for studying high Reynolds number plasma turbulence. This unique situation allows us to investigate for example the origin of anisotropy, to evaluate the mean energy dissipation rate, to detect multiscale intermittency, or to analyze different regimes of turbulence characterized by a steepening of the magnetic field fluctuations spectrum with a power law index going from $-5/3$, at frequencies lower than 1Hz, to indices lying around -2.5 at higher frequencies (see *e.g.* Klein et al. 1993; Smith et al. 2006; Alexakis et al. 2007; Bigot et al. 2008; MacBride et al. 2008; Kiyani et al. 2009).

The spectral break near 1Hz has been a subject for intensive studies and controversies in the last decades. It was first interpreted as the onset of dissipation caused for example by kinetic Alfvén wave damping (Leamon et al. 1998). Then, it was demonstrated that the wave damping rate usually increases very strongly with wavenumbers and should lead to a strong cutoff in the power spectra rather than a steepened power law (Li et al. 2001). In the meantime, there are some indications that the fluctuations are accompanied by a bias of the polarization suggesting the presence of right-hand polarized, outward propagating waves (Goldstein et al. 1994). Also it was proposed (Stawicki et al. 2001) that Alfvén – left circularly polarized – fluctuations are suppressed by proton cyclotron damping and that the high frequency power law spectra are likely to consist of whistler fluctuations (Matthaeus et al. 2008). It is currently believed that the steepening of the spectra at 1Hz is mainly due to non-linear dispersive processes that range from kinetic Alfvén waves (Howes et al. 2008), electromagnetic ion-cyclotron Alfvén waves (Gary et al 2008), or/and electron whistler waves (Ghosh et al. 1996; Galtier 2006; Galtier & Buchlin 2007) in the framework of Hall magnetohydrodynamics (MHD) or simply electron MHD.

The most recent solar wind observations made with the high resolution magnetic field data of the Cluster spacecraft (Alexandrova et al. 2009; Sahraoui et al. 2009) reveal the presence of a third region – called dissipation range – at scales smaller than d_e and characterized by even steeper magnetic fluctuations spectra with a power law index around -3.8 . These spectra observed only on half a decade are interpreted as either a power law (Sahraoui et al. 2009) or an exponential law (Alexandrova et al. 2009). Although the theoretical interpretation of such a regime is still open (Matthaeus et al. 2008), a recent theoretical analysis shows that a kinetic Alfvén wave cascade subject to collisionless damping cannot reach electron scales in the solar wind at 1 AU (Podesta et al. 2010). The direct consequence is that the spectra observed must be supported by another type of wave modes. It is noteworthy that this new regime at electron scales gives rise to the same controversy as the steepening found two decades ago around 1Hz which brings up naturally the following question: Have we really found the dissipation scale of the solar wind plasma or is it the onset of a new turbulence regime?

¹ Univ Paris-Sud, Institut d’Astrophysique Spatiale, UMR8617, CNRS, F-91405 Orsay, France

2 Universal laws at electron scales $\ell < d_e$

The turbulence regime at scales smaller than the electron inertial length d_e has been recently investigated through the electron MHD approximation (Meyrand & Galtier 2010). The assumptions of homogeneity and isotropy are made to derive an exact and universal law for third-order structure functions. This law takes the form

$$d_i d_e^2 \langle \delta J_L (\delta \mathbf{J})^2 \rangle = \frac{4}{3} \varepsilon^J r, \quad (2.1)$$

with d_i the ion inertial length, $\mathbf{J}$ the current density, $\delta \mathbf{J} \equiv \mathbf{J}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{x})$ and ε^J the mean energy dissipation rate per unit mass. By definition L means the longitudinal component of the vector, *i.e.* the one along the direction $\mathbf{r}$. The derivation of this universal law is not straightforward but then one can predict easily the form of the associated magnetic spectrum since one has the relation $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$; it reads

$$B^2(k) \sim \left(\frac{\varepsilon^J}{d_i d_e^2} \right)^{2/3} k^{-11/3}. \quad (2.2)$$

We see that the power law is compatible with the most recent solar wind measurements (-3.8). Although the assumption of isotropy is in apparent contradiction with the observations, it is claimed that the method used is a powerful way to have a first estimate of the anisotropic spectrum. Indeed, the main source of anisotropy is the presence of a large scale magnetic field which reduces the nonlinear transfer along its direction. Then, the most relevant spectral scaling is the transverse one for which the spectral index corresponds to the isotropic case if arguments based on the critical balance condition are used.

3 Conclusion

The turbulence regime at scales smaller than the electron inertial length d_e is discussed through the approximation of electron MHD. A new universal and exact law in terms of structure functions for the current density may be derived (Meyrand & Galtier 2010). This law leads to the prediction of a $k^{-11/3}$ power law spectrum for the magnetic field fluctuations compatible with the most recent observations made with Cluster. This result is the first prediction for the magnetic fluctuations spectrum at these length scales. The possibility to get a turbulence regime at electron scales questions the origin of dissipation in the solar wind and more generally in space plasmas.

References

- Alexakis, A., Bigot, B., Politano, H., & Galtier, S. 2007, Phys. Rev. E, 76, 056313
- Alexandrova, O., Saur, J., Lacombe, C. et al. 2009, Phys. Rev. Lett., 103, 165003
- Bigot, B., Galtier, S., & Politano, H. 2008, Phys. Rev. E, 78, 066301
- Galtier, S. 2006, J. Plasma Phys., 72, 721
- Galtier, S., & Buchlin, E. 2007, ApJ, 656, 560
- Gary, S.P., Saito, S., & Li, H. 2008, Geophys. Res. Lett., 35, L02104
- Ghosh, S., Siregar, E., Roberts, D.A., & Goldstein, M.L. 1996, J. Geophys. Res., 101, 2493
- Goldstein, M.L., Roberts, D.A., & Fitch, C.A. 1994, J. Geophys. Res., 99, 11519
- Howes, G.G. et al. 2008, J. Geophys. Res., 113, A05103
- Kiyani, K.H. et al. 2009, Phys. Rev. Lett., 103, 075006
- Klein, L., Bruno, R., Bavassano, B., & Rosenbauer, H. 1993, J. Geophys. Res., 98, 17461
- Leamon, R.J., Smith, C.W., Ness, N.F., Matthaeus, W.H., & Wong, H.K. 1998, J. Geophys. Res., 103, 4775
- Li, H., Gary, S.P., & Stawicki, P. 2001, Geophys. Res. Lett., 28, 1347
- MacBride, B.T., Smith, C.W., & Forman, M.A. 2008, ApJ, 679, 1644
- Matthaeus, W.H., Servidio, S., & Dmitruk, P. 2008, Phys. Rev. Lett., 101, 149501
- Meyrand, R., & Galtier, S. 2010, ApJ, 721, 1421
- Podesta, J.J., Borovsky, J.E., & Gary, S.P. 2010, ApJ, 712, 685
- Sahraoui, F., Goldstein, M.L., Robert, P., & Khotyaintsev, Yu V. 2009, Phys. Rev. Lett., 102, 231102
- Smith, C.W., Hamilton, K., Vasquez, B.J., & Leamon, R.J. 2006, ApJ, 645, L85
- Stawicki, O., Gary, P.S., & Li, H. 2001, J. Geoph. Res., 106, 8273

PUBLICATIONS

Références bibliographiques

- [1] S. NAZARENKO. *Wave turbulence*. Springer (2011). [2](#), [14](#), [53](#)
- [2] K. BÜRGER, M. TREIB, R. WESTERMANN, S. WERNER, C. C LALESCU, A. SZALAY, C. MENEVEAU, AND G. L EYINK. *Vortices within vortices : hierarchical nature of vortex tubes in turbulence*. ArXiv e-prints October (2012). [2](#), [54](#)
- [3] S.G. SADDOUGH AND S.V. VEERAVALLI. *Local isotropy in turbulent boundary layers at high reynolds number*. The Journal of Fluids Mechanics **268**, 333 (1994). [2](#), [56](#)
- [4] W. BAUMJOHANN AND R. A. TREUMANN. *Basic Space Plasma Physics*. Imperial College Press (1997). [2](#), [58](#)
- [5] E. J. WEBER AND L. DAVIS. *The angular momentum of the solar wind*. The Astrophysical Journal **148**, 217 (1967). [2](#), [58](#), [59](#)
- [6] G. W. PNEUMAN AND R. A. KOPP. *Gas-magnetic field interactions in the solar corona*. Solar Physics **18**, 258 (1971). [2](#), [60](#)
- [7] C. WANG AND J.D RICHARDSON. *Energy partition between solar wind protons and pickup ions in the distant heliosphere : A three-fluid approach*. Journal of Geophysical Research **106**, 29401 (2001). [2](#), [62](#)
- [8] V. PIZZO. *A three-dimensional model of corotating streams in the solar wind. i - theoretical foundations*. Journal of Geophysical Research **83**, 5563 (1978). [2](#), [64](#)
- [9] J.W. BELCHER AND L. DAVIS. *Large amplitude Alfvén waves in the interplanetary medium*. Journal of Geophysical Research **76**, 2534 (1971). [2](#), [65](#), [72](#)
- [10] J. J. PODESTA. *Dependence of solar-wind power spectra on the direction of the local mean magnetic field*. The Astrophysical Journal **698**, 986 (2009). [3](#), [69](#), [71](#), [75](#)

Références bibliographiques

- [11] W. H. MATTHAEUS, M. L. GOLDSTEIN, AND D. A. ROBERTS. *Evidence for the presence of quasi-two-dimensional nearly incompressible fluctuations in the solar wind*. Journal of Geophysical Research **95**, 20673 (1990). [3](#), [70](#), [71](#)
- [12] S. BOLDYREV. *Spectrum of magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **96**, 115002 (2006). [3](#), [73](#), [74](#), [152](#)
- [13] F. SAHRAOUI, M. L. GOLDSTEIN, P. ROBERT, AND Y. V. KHOTYAINTEV. *Evidence of a cascade and dissipation of solar-wind turbulence at the electron gyroscale*. Physical Review Letters **102**, 231102 (2009). [3](#), [12](#), [65](#), [67](#), [75](#), [77](#), [82](#), [163](#)
- [14] F. SAHRAOUI, M. L. GOLDSTEIN, G. BELMONT, P. CANU, AND L. REZEAU. *Three dimensional anisotropic k spectra of turbulence at subproton scales in the solar wind*. Physical Review Letters **105**, 131101 (2010). [3](#), [6](#), [82](#), [145](#)
- [15] E.B. GLEDZER. *System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **209**, 1046 (1973). [4](#), [86](#), [88](#), [90](#)
- [16] K. OHKITANI AND M. YAMADA. *Temporal intermittency in the energy cascade process and local lyapunov analysis in fully-developed model of turbulence*. Progress of Theoretical Physics **89**, 329 (1989). [4](#), [88](#), [90](#)
- [17] E. BUCHLIN. *Signatures et modélisations du chauffage coronal turbulent à micro-échelles*. Thèse de Doctorat, École Doctorale Astronomie et Astrophysique d'Îles-de-France (2004). [4](#), [88](#)
- [18] J.M. MAHAJAN AND V. KRISHAN. *Exact solution of the incompressible Hall magnetohydrodynamics*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **359**, 27 (2005). [4](#), [9](#), [119](#), [122](#), [123](#)
- [19] R. MEYRAND AND S. GALTIER. *Spontaneous chiral symmetry breaking of Hall magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **109**, 194501 (2012). [5](#), [137](#)
- [20] C. FLAMMARION. *L'atmosphère : météorologie populaire*. Hachette (1888). [8](#), [185](#)
- [21] R. BRUNO AND V. CARBONE. *The solar wind as a turbulence laboratory*. Living Reviews in Solar Physics **2**, 4 (2005). [9](#), [61](#)
- [22] J. D. RICHARDSON, K. I. PAULARENA, A. J. LAZARUS, AND J. W. BELCHER. *Radial evolution of the solar wind from imp 8 to voyager 2*. Geophysical Research Letters **22**, 325 (1995). [12](#), [64](#)
- [23] A. A. SCHEKOCHIHIN, S. C. COWLEY, W. DORLAND, G. W. HAMMETT, G. G. HOWES, E. QUATAERT, AND T. TATSUNO. *Astrophysical gyrokinetics : Kinetic and fluid turbulent cascades in magnetized weakly collisional plasmas*. The Astrophysical Journal Supplement **182**, 320 (2009). [13](#), [45](#), [79](#), [80](#), [81](#), [82](#)

- [24] W. H. MATTHAEUS, S. SERVIDIO, AND P. DMITRUK. *Comment on "kinetic simulations of magnetized turbulence in astrophysical plasmas"*. Physical Review Letters **101**, 149501 (2008). [13](#), [82](#)
- [25] P. GOLDREICH AND S. SRIDHAR. *Magnetohydrodynamic turbulence revisited*. The Astrophysical Journal **485**, 680 (1997). [14](#)
- [26] M. BARNES, F. I. PARRA, AND A. A. SCHEKOCHIHIN. *Critically balanced ion temperature gradient turbulence in fusion plasmas*. Physical Review Letters **107**, 115003 (2011). [14](#)
- [27] O. ALEXandrova, C. LACOMBE, A. MANGENEY, R. GRAPPIN, AND M. MAK-SIMOVIC. *Solar wind turbulent spectrum at plasma kinetic scales*. The Astrophysical Journal **720**, 121 (2012). [163](#)
- [28] O. ALEXandrova, J. SAUR, C. LACOMBE, A. MANGENEY, J. MITCHELL, S. J. SCHWARTZ, AND P. ROBERT. *Universality of solar-wind turbulent spectrum from mhd to electron scales*. Physical Review Letters **103**, 165003 (2009). [77](#), [163](#)
- [29] O. ALEXandrova, V. CARBONE, P. VELTRI, AND L. SORRISO-VALVO. *Small-scale energy cascade of the solar wind turbulence*. The Astrophysical Journal **674**, 1153 (2008). [77](#)
- [30] H. ALFVÉN. *Existence of electromagnetic-hydromagnetic waves*. Nature **150**, 405 (1942). [34](#)
- [31] R.A. ANTONIA, M. OULD ROUIS, F. ANSELMET, AND Y. ZHU. *Analogy between predictions of kolmogorov and yaglom*. The Journal of Fluids Mechanics **332**, 395 (1997). [173](#)
- [32] S.D. BALE, P.J. KELLOG, F.S. MOZER, T.S. HORBURY, AND H. REME. *Measurement of the electric fluctuation spectrum of magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **94**, 215002 (2005). [65](#), [67](#), [77](#), [82](#), [96](#)
- [33] S. J. BAME, J. R. ASBRIDGE, W. C. FELDMAN, M. D. MONTGOMERY, AND P. D. KEARNEY. *Solar wind heavy ion abundances*. Solar Physics **43**, 463 (1975). [60](#)
- [34] A. BARNES. *Collisionless damping of hydromagnetic waves*. Physics of plasma **9**, 1483 (1966). [65](#)
- [35] B. BAVASSANO, M. DOBROWOLNY, G. FANFONI, F. MARIANI, AND N. F. NESS. *Statistical properties of mhd fluctuations associated with high speed streams from helios 2 observations*. Solar Physics **78**, 373 (1982a). [65](#)
- [36] B. BAVASSANO, M. DOBROWOLNY, F. MARIANI, AND N. F. NESS. *Radial evolution of power spectra of interplanetary alfvénic turbulence*. Journal of Geophysical Research **87**, 3617 (1982b). [64](#), [67](#)

Références bibliographiques

- [37] B. BAVASSANO, E. PIETROPAOLO, AND R. BRUNO. *Alfvenic turbulence in the polar wind : A statistical study on cross helicity and residual energy variations*. Journal of Geophysical Research **105**, 15959 (2000). [99](#)
- [38] J. W. BELCHER, A. J. LAZARUS, JR. MCNUTT, R. L., AND G. S. GORDON, JR. *Solar wind conditions in the outer heliosphere and the distance to the termination shock*. Journal of Geophysical Research **98**, 15177 (1993).
- [39] T. BELL AND M. NELKIN. *Time dependent scaling relations and a cascade modele of turbulence*. The Journal of Fluids Mechanics **88**, 369 (1978). [88](#)
- [40] L. BIERMANN. *Kometenschweife und solare korpuskularstrahlung*. Zeitschrift für Astrophysik **29**, 274 (1951). [48](#)
- [41] D. BISKAMP, E. SCHWARZ, AND J. F. DRAKE. *Two-dimensional electron magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **76**, 1264 (1996). [78](#), [96](#), [97](#), [178](#)
- [42] D. BISKAMP, A. SCHWARZ, E. AD ZEILER, A. CELANI, AND J. F. DRAKE. *Electron magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **6**, 751 (1999). [78](#), [167](#)
- [43] D. BISKAMP AND W.C. MULLER. *Scaling properties of three-dimensional isotropic magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **7**, 4889 (2000). [74](#)
- [44] S. BOLDYREV AND J.C. PEREZ. *Spectrum of kinetic-Alfvén turbulence*. The Astrophysical Journal Letters **758**, 44 (2012). [81](#)
- [45] S. BOUROUAINE, O ALEXANDROVA, E. MARSCH, AND M. MAKSIMOVIC. *On spectral breaks in the power spectra of magnetic fluctuations in fast solar wind between 0.3 and 0.9 au*. The Astrophysical Journal **749**, 102 (2012). [77](#)
- [46] W. BOSTICK AND M. LEVINE. *Experimental demonstration in the laboratory of the existence of magneto-hydrodynamic waves in ionized helium*. Physical Review **94**, 815 (1952). [35](#)
- [47] S.I. BRAGINSKII. *Transport processes in a palsma*. Reviews of Plasma Physics **1**, 205 (1964). [29](#)
- [48] R. BRUNO, R. DAMICIS, B. BAVASSANO, V. CARBONE, AND L. SORRISO-VALVO. *Magnetically dominated structures as an important component of the solar wind turbulence*. Annales Geophysicae **25**, 1913 (2007). [67](#), [73](#)
- [49] L. CHACON, A.N. SIMAKOV, AND A. ZOCCO. *Steady-state properties of driven magnetic reconnection in 2d electron magnetohydrodynamics*. Physical Review Letters **99**, 235001 (2007). [164](#)

- [50] V. CARBONE, R. MARINO, L. SORRISO-VALVO, A. NOULLEZ, AND R. BRUNO. *Scaling laws of turbulence and heating of fast solar wind : The role of density fluctuations*. Physical Review Letters **103**, 061102 (2009). [64](#)
- [51] V. CARBONE, S. PERRI, E. YORDANOVA, P. VELTRI, R. BRUNO, Y. KHOTYAINSTEV, AND M. ANDRE. *Sign singularity of the reduced magnetic helicity in the solar wind plasma*. Physical Review Letters **104**, 181101 (2010). [82](#)
- [52] R.C. CARRINGTON. *Description of a singular appearance seen in the sun on september 1, 1859*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **20**, 13 (1859). [48](#)
- [53] J. CHO AND E.T. VISHNIAC. *The anisotropy of magnetohydrodynamic Alfvénic turbulence*. The Astrophysical Journal **539**, 273 (2000). [71](#), [74](#)
- [54] J. CHO AND A. LAZARIAN. *The anisotropy of electron magnetohydrodynamic turbulence*. The Astrophysical Journal **615**, 41 (2004). [78](#), [79](#), [159](#)
- [55] J. CHO AND A. LAZARIAN. *Simulations of electron magnetohydrodynamic turbulence*. The Astrophysical Journal **701**, 236 (2009). [78](#), [79](#), [82](#)
- [56] J. CHO. *Magnetic helicity conservation and inverse energy cascade in electron magnetohydrodynamic wave packets*. Physical Review Letters **106**, 191104 (2011). [132](#)
- [57] D.B. CLINE. *Proceeding of the first symposium on the physical origins of homochirality of life*. AIP Conference Proceedings **379** (1995). [128](#)
- [58] P.J. COLEMAN, C.P. SONETT, D.L. JUDGE, AND E.J. SMITH. *Some preliminary results of the pioneer v magnetometer experiment*. Journal of Geophysical Research **65**, 1856 (1960). [35](#)
- [59] P.J. COLEMAN. *Turbulence, viscosity, and dissipation in the solar-wind plasma*. The Astrophysical Journal **20**, 371 (1968). [64](#)
- [60] S. R. CRANMER, J. L. KOHL, M. P. MIRALLES, AND A. A. VAN BALLEGOOIJEN. *Extended coronal heating and solar wind acceleration over the solar cycle*. arXiv :1002.0297v1 (2010). [57](#)
- [61] N. U. CROOKER, G. L. SISCOE, C. T. RUSSELL, AND E. J. SMITH. *Factors controlling degree of correlation between isce 1 and isce 3 interplanetary magnetic field measurements*. Journal of Geophysical Research **87**, 2224 (1982). [71](#)
- [62] S. DASTGEER, A. DAS, P. KAW, AND P. H. DIAMOND. *Whistlerization and anisotropy in two-dimensional electron magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **7**, 571 (2000). [79](#)

Références bibliographiques

- [63] S. DASSO, L. J. MILANO, W. H. MATTHAEUS, AND C. W. SMITH. *Anisotropy in fast and slow solar wind fluctuations*. The Astrophysical Journal **635**, 181 (2005). [71](#)
- [64] B. DERNONCOURT, J.F. PINTON, AND S. FAUVE. *Experimental study of vorticity filaments in a turbulent swirling flow*. Physica D : Nonlinear Phenomena **117**, 181 (1998). [155](#)
- [65] V.N. DESNYANSKY AND E.A. NOVIKOV. *The evolution of turbulence spectra to the similarity regime*. Izv. Akad. Nauk. SSSR Fiz. Atmos. Okeana **10**, 127 (1974). [86](#), [88](#)
- [66] M. DOBROWOLNY, A. MANGENEY, AND P. VELTRI. *Fully developed anisotropic hydromagnetic turbulence in interplanetary space*. PRL **45**, 144 (1980). [72](#)
- [67] S. DOUADY, Y. COUDER, AND M. E. BRACHET. *Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence*. Physical Review Letters **67**, 983 (1991). [155](#)
- [68] P. DMITRUK AND W. H. MATTHAEUS. *Structure of the electromagnetic field in three dimensional Hall magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **13**, 042307 (2006). [82](#)
- [69] W.M ELSASSER. *The hydromagnetic equations*. Physical Review **79**, 183 (1950). [65](#)
- [70] P. FRICK AND D. SOKOLOFF. *Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review E **57**, 4155 (1998). [93](#)
- [71] U. FRISCH AND P.L. SULEM. *Remarque sur la multiplication dans les espaces de sobolev et application aux équations d'euler d'un fluide illimité*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) **280**, 1117 (1975). [88](#)
- [72] U. FRISCH, P.L. SULEM, AND M.A NELKIN. *A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence*. Journal of Fluid Mechanics **208**, 173 (1978). [81](#)
- [73] S. GALTIER, S.V. NAZARENKO, A.C. NEWELL, AND A. POUQUET. *A weak turbulence theory for incompressible mhd*. Journal of Plasma Physics **63**, 447 (2000). [69](#)
- [74] S. GALTIER. *Weak inertial-wave turbulence theory*. Physical Review E **68**, 015301 (2003). [161](#)
- [75] S. GALTIER, A. POUQUET, AND A. MANGENEY. *On spectral scaling laws for incompressible anisotropic magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **12**, 092310 (2005). [157](#)

- [76] S. GALTIER. *Wave turbulence in incompressible Hall magnetohydrodynamics*. Journal of Plasma Physics **72**, 721 (2006). [94](#), [131](#), [132](#), [157](#), [160](#)
- [77] S. GALTIER AND E. BUCHLIN. *Multiscale Hall-magnetohydrodynamique turbulence in solar wind*. The Astrophysical Journal **656**, 560 (2007).
- [78] S. GALTIER. *Exact scaling laws for 3d electron mhd turbulence*. Journal of Geophysical Research **113**, A01102 (2008). [173](#)
- [79] S. GALTIER. *Von Kármán-Howarth equations for Hall magnetohydrodynamic flows*. Physical Review E **77**, 015302 (2008). [175](#)
- [80] S. GALTIER. *Consequence of space correlation foliation for electron magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **16**, 112310 (2009). [173](#)
- [81] S. GALTIER. *Exact vectorial law for homogeneous rotating turbulence*. Physical Review E **80**, 046301 (2009). [174](#)
- [82] P. R. GAZIS AND A. J. LAZARUS. *Voyager observations of solar wind proton temperature at 1-10 au*. Geophysical Research Letters **9**, 431 (1982). [64](#)
- [83] P. GOLDREICH AND S. SRIDHAR. *Toward a theory of the interstellar turbulence. II. strong Alfvénic turbulence*. The Astrophysical Journal **438**, 763 (1995). [69](#), [71](#)
- [84] B. E. GOLDSTEIN, E. J. SMITH, A. BALOGH, T. S. HORBURY, M. L. GOLDSTEIN, AND D. A. ROBERTS. *Properties of magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind as observed by ulysses at high heliographic latitudes*. Geophysical Research Letters **22**, 3393 (1995). [67](#), [73](#)
- [85] M. L. GOLDSTEIN, D. A. ROBERTS, AND C. A. FITCH. *Properties of the fluctuating magnetic helicity in the inertial and dissipation ranges of solar wind turbulence*. Geophysical Research Letters **99**, 11519 (1994). [77](#), [82](#)
- [86] P. GIULIANI AND V. CARBONE. *A note on shell models for mhd turbulence*. Europhysics Letters **209**, 1046 (1998). [93](#)
- [87] R. GRAPPIN, U. FRISH, A. POUQUET, AND J. LEORAT. *Alfvénic fluctuations as asymptotic states of mhd turbulence*. Astronomy and Astrophysics **105**, 6 (1982). [72](#)
- [88] A. GRECO, W. H. MATTHAEUS, S. SERVIDIO, P. CHUYCHAI, AND P. DMITRUK. *Statistical analysis of discontinuities in solar wind ace data and comparison with intermittent mhd turbulence*. The Astrophysical Journal Letters **691**(2), L111 (2009). [63](#)

Références bibliographiques

- [89] K. I. GRINGAUZ, V. V. BEZROKIKH, V. D. OZEROV, AND R. E. RYBCHINSKII. *A study of the interplanetary ionized gas, high-energy electrons and corpuscular radiation from the sun by means of the three-electrode trap for charged particles on the second soviet cosmic rocket*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de l'URSS **5**, 361 (1960). [48](#)
- [90] K. HAMILTON, C. W. SMITH, B. J. VASQUEZ, AND R. J. LEAMON. *Anisotropies and helicities in the solar wind inertial and dissipation ranges at 1 au*. Journal of Geophysical Research **113**, 1106 (2008). [82](#)
- [91] M. G. HAINES, P. D. LEPELL, C. A. COVERDALE, B. JONES, C. DEENEY, AND J. P. APRUZESE. *Ion viscous heating in a magnetohydrodynamically unstable z pinch at over 2×10^9 kelvin*. Physical Review Letters **96**, 075003 (2006). [157](#)
- [92] N.E.L. HAUGEN, A. BRANDENBURG, AND W. DOBLER. *Simulations of nonhelical hydromagnetic turbulence*. Physical Review E **70**, 016308 (2004). [74](#)
- [93] S.W. HERB, D.C. HOM, L.M. LEDERMAN, J.C. SENS, H.D. SNYDER, J.H. YOH, J.A APPEL, B.C. BROWN, C.N. BROWN, W.R. INNES, K. UENO, T. YAMANOUCHI, A.S. ITO, H. JOSTLEIN, D.M. KAPLAN, AND R.D. KEPHART. *Observation of a dimuon resonance at 9.5 gev in a 400-gev proton nucleous collisions*. Physical Review Letters **39**, 252 (1977). [129](#)
- [94] J.C. HIGDON. *Density fluctuations in the interstellar medium : Evidence for anisotropic magnetogasdynamic turbulence. i. model and astrophysical sites*. The Astrophysical Journal **285**, 109 (1984). [69](#)
- [95] E. HOPF. *A mathematical example displaying the features of turbulence*. Communications on Pure and Applied Mathematics **1**, 303 (1948). [86](#)
- [96] D. HORI, M. FURUKAWA, S. OHSAKI, AND Z. YOSHIDA. *A shell model for the Hall mhd system*. Journal of Plasma and Fusion Research **81**, 141 (2005). [93](#), [94](#)
- [97] R. HODGSON. *On a curious appearance seen in the sun*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **20**, 15 (1859). [48](#)
- [98] J.V. HOLLWEG. *Kinetic Alfvén wave revisited*. Journal of Geophysical Research **104**, 14811 (1999). [80](#)
- [99] T. S. HORBURY, A. BALOGH, R. J. FORSYTH, AND E. J. SMITH. *Anisotropy of inertial range turbulence in the polar heliosphere*. Geophysical Research Letters **22**, 3405 (1995). [65](#)
- [100] T. S. HORBURY, M. FORMAN, AND S. OUGHTON. *Anisotropic scaling of magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **101**, 175005 (2008). [71](#)

- [101] G. G. HOWES, S. C. COWLEY, W. DORLAND, G. W. HAMMETT, E. QUATAERT, AND A.A SCHEKOCHIHIN. *Astrophysical gyrokinetics : Basics equations and linear theory*. The Astrophysical Journal **651**, 590 (2006). [79](#)
- [102] G. G. HOWES, S. C. COWLEY, W. DORLAND, G. W. HAMMETT, E. QUATAERT, AND A.A SCHEKOCHIHIN. *A model of turbulence in magnetized plasmas : Implications for the dissipation range in the solar wind*. Journal of Geophysical Research **113**, 5103 (2008a). [45](#), [80](#), [81](#)
- [103] G. G. HOWES, W. DORLAND, S. C. COWLEY, G. W. HAMMETT, E. QUATAERT, A. A. SCHEKOCHIHIN, AND T. TATSUNO. *Kinetic simulations of magnetized turbulence in astrophysical*. Physical Review Letters **100**, 065004 (2008b). [45](#), [81](#), [82](#)
- [104] G. G. HOWES. *Limitations of Hall mhd as a model for turbulence in weakly collisional plasmas*. Nonlinear Processes in Geophysics **16**, 219 (2009). [45](#)
- [105] G. G. HOWES AND E. QUATAERT. *On the interpretation of magnetic helicity signatures in the dissipation range of solar wind turbulence*. The Astrophysical Journal **709**, 49 (2010). [82](#)
- [106] P. HUNANA, D. LAVEDER, T. PASSOT, P.L SULEM, AND D. BORGOGNO. *Reduction of compressibility and parallel transfer by Landau damping in turbulent magnetized plasma*. The Astrophysical Journal **743**, 128 (2011). [44](#)
- [107] IROSHNIKOV64. *Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field*. Soviet Astronomy **7**, 566 (1964). [65](#), [71](#)
- [108] A. ITO AND A. HIROSE. *Remarks on the discrete Alfvén wave spectrum induced by the Hall current*. Physics of plasma **11**, 5643 (2004). [45](#)
- [109] J. JIMÉNEZ, A.A. WRAY, P.G. SAFFMAN, AND R.S. ROGALLO. *The structures of intense vorticity in isotropic turbulence*. The Journal of Fluids Mechanics **225**, 65 (1993). [155](#)
- [110] J.C. KASPER, A.J. LAZARUS, AND S.P. GARY. *Direct evidence for local heating by Alfvén cyclotron dissipation*. Physical Review Letters **101**, 261103 (2008). [61](#)
- [111] A.S. KINSEP, K.V CHUKBAR, AND V.V YAN’KOV. *Electron magnetohydrodynamics*. Review of Plasmas Physics **6** (1990). [140](#)
- [112] K. H. KIYANI, S. C. CHAPMAN, Y. V. KHOTYAINTEV, A. TURNER, B. HNAT, AND F. SAHRAOUI. *Isotropic scale-invariant dissipation of solar wind turbulence*. arXiv :1008.0525v1 (2010).

Références bibliographiques

- [113] K. H. KIYANI, S. C. CHAPMAN, F. SAHRAOUI, B. HNAT, O. FAUVARQUE, AND Y. V. KHOTYAINTEV. *Enhanced magnetic compressibility and isotropic scale invariance at sub ion larmor scales in solar wind turbulence*. arXiv :1008.0525v2 (2012).
- [114] L. KLEIN, R. BRUNO, B. BAVASSANO, AND H. ROSENBAUER. *Anisotropy anisotropy and minimum variance of magnetohydrodynamic fluctuations in the inner heliosphere*. Journal of Geophysical Research **98**, 17461 (1993). [65](#)
- [115] M. KOBAYASHI AND T. MASKAWA. *Cp violation in the renormalizable theory of weak interaction*. Progress of Theoretical Physics **49**, 652 (1973). [129](#)
- [116] R. H. KRAICHNAN. *Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence*. Physics of plasma **8**, 1385 (1965). [65](#), [71](#)
- [117] A. LAZARIAN AND E.T VISHNIAC. *Reconnection in a weakly stochastic field*. The Astrophysical Journal **517**, 700 (1999). [156](#)
- [118] R. J. LEAMON, W. H. MATTHAEUS, C. W. SMITH, AND H. K. WONG. *Contribution of cyclotron-resonant damping to kinetic dissipation of interplanetary turbulence*. The Astrophysical Journal **507**, 181 (1998a). [77](#), [81](#), [82](#)
- [119] R. J. LEAMON, C. W. SMITH, N. F. NESS, W. H. MATTHAEUS, AND H. K. WONG. *Observational constraints on the dynamics of the interplanetary magnetic field dissipation range*. Journal of Geophysical Research **103**, 4775 (1998b). [67](#), [82](#)
- [120] B. LEHNERT. *Magneto-hydrodynamic waves in liquid sodium*. Physical Review **99**, 677 (1954). [35](#)
- [121] H. LI, S. P. GARY, AND O. STAWICKI. *On the dissipation of magnetic fluctuations in the solar wind*. Geophysical Research Letters **28**, 1347 (2001). [78](#)
- [122] S. LUNDQUIST. *Experimental investigations of magneto-hydrodynamics waves*. Physical Review **76**, 1805 (1949). [35](#)
- [123] V.S. L'VOV, A. PODIVILOV, I POMYALOV, AND D. VANDEMBROUCQ. *Improved shell model of turbulence*. Physical Review E **58**, 1811 (1998). [89](#), [92](#), [93](#)
- [124] J. MARON AND P. GOLDREICH. *Simulation of incompressible magnetohydrodynamic turbulence*. The Astrophysical Journal **554**, 1175 (2001). [74](#)
- [125] J. MASON, F. CATTANEO, AND S. BOLDYREV. *Dynamic alignment in driven magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **97**, 255002 (2006). [75](#)
- [126] W.H. MATTHAEUS, D.C MONTGOMERY, AND M.L GOLDSTEIN. *Turbulent generation of outward traveling interplanetary alfvénic fluctuations*. Physical Review Letters **51**, 1484 (1983). [72](#)

- [127] W.H MATTHAEUS AND M.L. GOLDSTEIN. *Measurement of the rugged invariants of magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind*. Journal of Geophysical Research **87**, 6011 (1982). [67](#), [96](#)
- [128] W.H MATTHAEUS, L.W. KLEIN, S. GHOSH, AND M.R. BROWN. *Nearly incompressible magnetohydrodynamic, pseudosound, and solar wind fluctuations*. Journal of Geophysical Research **87**, 6011 (1982). [44](#)
- [129] W. H. MATTHAEUS, S. SERVIDIO, AND P. DMITRUK. *Dispersive effects of Hall electric field in turbulence*. AIP conference proceedings **184**, 1216 (2010). [82](#)
- [130] D. J. MCCOMAS, B. L. BARRACLOUGH, H. O. FUNSTEN, J. T. GOSLING, E. SANTIAGO-MUÑOZ, R. M. SKOUG, B. E. GOLDSTEIN, M. NEUGEBAUER, P. RILEY, AND A. BALOGH. *Solar wind observations over ulysses first full polar orbit*. Journal of Geophysical Research **105**, 10419 (2000). [60](#)
- [131] L.J. MILANO, W.H. MATTHAEUS, P. DMITRUK, AND D.C MONTGOMERY. *Local anisotropy in incompressible magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **8**, 2673 (2001). [74](#)
- [132] D. MONTGOMERY AND L. TURNER. *Anisotropic magnetohydrodynamic turbulence in a strong external magnetic field*. Physics of fluids **24**, 825 (1981).
- [133] W.C. MULLER, D. BISKAMP, AND R. GRAPPIN. *Statistical anisotropy of magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review E **67**, 066302 (2003). [74](#)
- [134] W.C. MULLER AND R. GRAPPIN. *Spectral energy dynamics in magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **95**, 114502 (2005). [74](#)
- [135] C. S. NG, A. BHATTACHARJEE, K. GERMASCHEWSKI, AND S. GALTIER. *Anisotropic fluid turbulence in the interstellar medium and solar wind*. Physics of plasma **10**, 1954 (2003). [79](#)
- [136] M. NEUGEBAUER. *Anisotropy and alfvénicity of hourly fluctuations in the fast polar solar wind*. Journal of Geophysical Research **109**, 2101 (2004). [65](#)
- [137] J.J. PODESTA. *Dependence of solar wind power spectra on the direction of the local mean magnetic field*. The Astrophysical Journal **698**, 986 (2009).
- [138] J.J. PODESTA, B. D. G. CHANDRAN, A. BHATTACHARJEE, D. A. ROBERTS, AND M. L. GOLDSTEIN. *Scale-dependent angle of alignment between velocity and magnetic field fluctuations in solar wind turbulence*. Journal of Geophysical Research **114**, 1107 (2009).
- [139] A. POUQUET, U. FRISCH, MENEGUZZI, AND M. *Growth of correlations in magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters **33**, 4266 (1986). [72](#)

Références bibliographiques

- [140] S. PERRI, V. CARBONE, E. YORDANOVA, R. BRUNO, AND BALOGH. *Scaling law of the reduced magnetic helicity in fast streams*. Planetary and Space Science **59**, 575 (2011). [82](#)
- [141] A. KINGSEP, K. CHUKBAR, AND V. YANKOV. *Electron magnetohydrodynamics*. Review of Plasma Physics **16** (1990). [164](#)
- [142] A. KINGSEP. *On the necessary modifications of z-pinch mhd-models*. High-Power Particle Beams, 1996 11th International Conference page 729 (1996). [164](#)
- [143] K. H. KIYANI, S. C. CHAPMAN, Y. V. KHOTYAINTEV, M. W. DUNLOP, AND F. SAHRAOUI. *Global scale-invariant dissipation in collisionless plasma turbulence*. Physical Review Letters **103**, 075006 (2009). [77](#)
- [144] A.N. KOLMOGOROV. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30**, 9 (1941). [55](#), [64](#), [171](#), [175](#), [176](#)
- [145] A.N. KOLMOGOROV. *Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30**, 141 (1941). [55](#), [64](#), [175](#)
- [146] R.H. KRAICHNAN. *On kolmogorov's inertial-range theories*. The Journal of Fluids Mechanics **62**, 305 (1974). [88](#)
- [147] V. KRISHAN AND S.M. MAHAJAN. *Modeling of short scale turbulence in the solar wind*. Nonlinear Processes in Geophysics **12**, 75 (2005). [38](#)
- [148] E. LORENZ. *Low order models representing realizations of turbulence*. The Journal of Fluids Mechanics **55**, 545 (1972). [86](#)
- [149] Q. Y. LUO AND D. J. WU. *Observations of anisotropic scaling of solar wind turbulence*. The Astrophysical Journal **714**, 138 (2010). [71](#)
- [150] E. MARSCH AND C.Y. TU. *On the radial evolution of mhd turbulence in the inner heliosphere*. Journal of Geophysical Research **95**, 8211 (1990). [67](#), [73](#)
- [151] S. A. MARKOVSKII, B. J. VASQUEZ, AND C. W. SMITH. *Statistical analysis of the high-frequency spectral break of the solar wind turbulence at 1 a.u.* The Astrophysical Journal **675**, 1576 (2008). [77](#)
- [152] W. H. MATTHAEUS, J. MINNIE, B. BREECH, S. PARHI, J. W. BIEBER, AND S. OUGHTON. *Transport of cross helicity and radial evolution of alfvénicity in the solar wind*. Geophysical Research Letters **31**, 12803 (2004). [73](#)
- [153] R. MEYRAND AND S. GALTIER. *A universal law for solar-wind turbulence at electron scales*. The Astrophysical Journal **721**, 1424 (2010). [177](#)

- [154] H.K. MOFFAT, S. KIDA, AND K. OHKITANI. *Stretched vortices- the sinews of turbulence ; large-reynolds-number asymptotics*. The Journal of Fluids Mechanics **259**, 241 (1994). [155](#)
- [155] S. NAZARENKO AND A. SCHEKOCHIHIN. *Critical balance in magnetohydrodynamic, rotating and stratified turbulence : towards a universal scaling conjecture*. The Journal of Fluids Mechanics **677**, 134 (2011). [161](#)
- [156] M. NEUGEBAUER AND C. W. SNYDER. *Mariner 2 observations of the solar wind. 1. average properties*. Journal of Geophysical Research **71**, 4469 (1966). [63](#)
- [157] M.A. OBUKHOV. *Concerning the distribution of energy in the spectrum of a turbulent stream*. Izvestiia Akademii Nauk, SSSR, Ser. Geogr. i Geofiz **4** (1941). [55](#)
- [158] M.A. OBUKHOV. *Turbulence in an atmosphere with a non-uniform temperature*. Boundary-layer meteorology **2**, 7 (1971). [86](#)
- [159] S.A. ORSZAG. *Analytical theories of turbulence*. The Journal of Fluids Mechanics **41**, 363 (1970). [56](#)
- [160] K. T. OSMAN AND T. S. HORBURY. *Multispacecraft measurement of anisotropic correlation functions in solar wind turbulence*. The Astrophysical Journal **654**, 103 (2007). [71](#)
- [161] E.N. PARKER. *Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields*. The Astrophysical Journal **128**, 664 (1958). [57](#), [60](#)
- [162] T. PASSOT AND P.L. SULEM. *A landau fluid model for dispersive magnetohydrodynamics*. Physics of plasma **11**, 5173 (2004). [44](#)
- [163] G.S. PATTERSON AND S. A. ORSZAG. *Spectral calculations of isotropic turbulence : Efficient removal of aliasing interactions*. Physics of plasma **14**, 2538 (1971). [111](#)
- [164] J. J. PODESTA, D. A. ROBERTS, AND M. L. GOLDSTEIN. *Spectral exponents of kinetic and magnetic energy spectra in solar wind turbulence*. The Astrophysical Journal **664**, 543 (2007). [67](#), [96](#)
- [165] J. J. PODESTA, J. E. BOROVSKY, AND S. P. GARY. *A kinetic Alfvén wave cascade subject to collisionless damping cannot reach electron scales in the solar wind at 1 au*. The Astrophysical Journal **685**, 712 (2010). [81](#)
- [166] H. POLITANO, A. POUQUET, AND P. L. SULEM. *Inertial ranges and resistive instabilities in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of plasma **1**, 2330 (1989). [99](#)
- [167] H. POLITANO, T. GOMEZ, AND A. POUQUET. *An exact relationship for magnetic helicity in mhd flows*. Physical Review E **68**, 026315 (2003). [174](#)

Références bibliographiques

- [168] T. VON KÁRMÁN AND L. HOWARTH. *On the statistical theory of isotropic turbulence*. Proceeding of the Royal Society, A **164**, 192 (1938). [171](#)
- [169] H.P. ROBERTSON. *The invariant theory of isotropic turbulence*. Proceeding of the Cambridge Philosophical Society **36**, 209 (1940). [173](#)
- [170] H. ROSE AND P.L. SULEM. *Fully developed turbulence and statistical mechanics*. Journal de Physique (Paris) **39**, 441 (1978). [89](#)
- [171] A. RUZMAIKIN, I.P. LYANNAYA, V.A. STYASHKIN, AND E. EROSHENKO. *The spectrum of the interplanetary magnetic field near 1.3 a.u.* Journal of Geophysical Research **98**, 13303 (1993). [67](#), [96](#)
- [172] A.D. SAKHAROV. *Violation of cp invariance, c asymmetry and baryon asymmetry of the universe*. Journal of Experimental and Theoretical Physics **5**, 24 (1967). [128](#)
- [173] D. SHAIK. *Whistler wave cascades in solar wind plasma*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **395**, 2292 (2009). [78](#)
- [174] C. SALEM, A. MANGENEY, S. D. BALE, AND P. VELTRI. *Solar wind magnetohydrodynamics turbulence : Anomalous scaling and role of intermittency*. The Astrophysical Journal **702**, 537 (2009). [67](#)
- [175] J. W. SARI AND N. F. NESS. *Power spectra of the interplanetary magnetic field*. Solar Physics **8**, 155 (1969). [64](#)
- [176] F. SAHRAOUI, S. GALTIER, AND G. BELMONT. *On waves in incompressible Hall magnetohydrodynamics*. Journal of Plasma Physics **73**, 723 (2007). [38](#)
- [177] Z.E. SHE, E. JACKSON, AND S.E. ORSZAG. *Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence*. Nature **344**, 226 (1990). [155](#)
- [178] J. V. SHEBALIN, W. H. MATTHAEUS, AND D. MONTGOMERY. *Anisotropy in mhd turbulence due to a mean magnetic field*. Journal of Plasma Physics **29**, 525 (1983). [68](#)
- [179] E.D. SIGGIA. *Origine of intermittency in fully developed turbulence*. Physical Review A **15**, 1730 (1977). [86](#)
- [180] G. L. SISCOE, JR. L. DAVIS, JR.P. J. COLEMAN, E. J. SMITH, AND D. E. JONES. *Power spectra and discontinuities of the interplanetary magnetic field : Mariner 4*. Journal of Geophysical Research **71**, 61 (1968). [63](#)
- [181] C. W. SMITH, D. J. MULLAN, N. F. NESS, R. M. SKOUG, AND J. STEINBERG. *Day the solar wind almost disappeared : Magnetic field fluctuations, wave refraction and dissipation*. Journal of Geophysical Research **106**, 18625 (2001). [77](#)

- [182] C. W. SMITH, K. HAMILTON, B. J. VASQUEZ, AND R. J. LEAMON. *Dependence of the dissipation range spectrum of interplanetary magnetic fluctuations on the rate of energy cascade*. The Astrophysical Journal **645**, 85 (2006a). [67](#), [77](#), [81](#), [161](#)
- [183] C. W. SMITH, B. J. VASQUEZ, AND K. HAMILTON. *Interplanetary magnetic fluctuation anisotropy in the inertial range*. Journal of Geophysical Research **111**, 9111 (2006b). [65](#), [96](#)
- [184] K.R. SREENIVASAN. *On the scaling of turbulence energy dissipation rate*. Physics of plasma **27**, 1048 (1984). [176](#)
- [185] T. TATSUNO, W. DORLAND, A. A. SCHEKOCHIHIN, G. G. PLUNK, M. BARNES, S. C. COWLEY, AND G. G. HOWES. *Nonlinear phase mixing and phase-space cascade of entropy in gyrokinetic plasma turbulence*. Physical Review Letters **103**, 015003 (2009). [81](#)
- [186] J.M. TENBARGE, J.J. PODESTA, K.G. KLEIN, AND G.G. HOWES. *Interpreting magnetic variance anisotropy measurement in the solar wind*. The Astrophysical Journal **753**, 107 (2012). [45](#)
- [187] A. TSINOBER AND K. MOFFAT. *Is concentrated vorticity that important ?* European Journal of Mechanics. B/Fluids **17**, 421 (1998). [155](#)
- [188] O. STAWICKI, S. P. GARY, AND H. LI. *Solar fluctuation spectra : Dispersion versus damping*. Journal of Geophysical Research **106**, 8273 (2001). [78](#)
- [189] G.I. TAYLOR. *Diffusion by continuous movements*. Proceedings of the London Mathematical Society **20**, 196 (1921). [168](#)
- [190] G.I. TAYLOR AND A.E. GREEN. *Mechanism of the production of small eddies from large ones*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **158**, 499 (1937). [153](#)
- [191] G.I. TAYLOR. *Production and dissipation of vorticity in a turbulent fluid*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **164**, 15 (1938). [176](#)
- [192] B. TEACA, M.K. VERMA, B. KNAEPEN, AND D. CARATI. *Energy transfer in anisotropic magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review E **79**, 46312 (2009).
- [193] B. TEACA, C.C. LALESCU, B. KNAEPEN, AND D. CARATI. *Controlling the level of the ideal fluxes for mhd turbulence using turbo spectral solver*. arXiv :1108.2640v1 (2011). [104](#), [115](#)
- [194] J.A. TESSEIN, C.W. SMITH, B.T. MACBRIDE, W.H. MATTHAEUS, M.A. FORMAN, AND J.E. BOROVSKY. *Spectral indices for multi-dimensional interplanetary turbulence at 1 au*. The Astrophysical Journal **692**, 684 (2006). [67](#), [96](#)

Références bibliographiques

- [195] S.M. TOBIAS. *The solar dynamo*. Philosophical Transactions of the Royal Society A **360**, 2741 (2002). [59](#)
- [196] B. T. TSURUTANI AND C. M. HO. *A review of discontinuities and Alfvén waves in the interplanetary space : Ulysses results*. Reviews of Geophysics **37**, 517 (1999). [63](#)
- [197] C. TU, E. MARSCH, AND K. M. THIEME. *Basic properties of solar wind mhd turbulence near 0.3 au analyzed by means of elsasser variables*. Journal of Geophysical Research **94**, 11739 (1989). [67](#), [73](#)
- [198] C. TU, E. MARSCH, AND H. ROSENBAUER. *The dependence of mhd turbulence spectra on the inner solar wind stream structure near solar minimum*. Geophysical Research Letters **17**, 283 (1990). [73](#)
- [199] F. WALEFFE. *Three-dimensional coherent states in plane shear flows*. Physical Review Letters **81**, 4140 (1998). [116](#)
- [200] Z. WARHAFT. *Turbulence in nature and in the laboratory*. Proceedings of the National Academy of Sciences **99**, 2481 (2002).
- [201] J. M. WEYGAND, W. H. MATTHAEUS, S. DASSO, M. G. KIVELSON, L. M. KISTLER, AND C. MOUKIS. *Anisotropy of the taylor scale and the correlation scale in plasma sheet and solar wind magnetic field fluctuations*. Journal of Geophysical Research **114**, 7213 (2009). [71](#)
- [202] R. T. WICKS, T. S. HORBURY, C. H. K. CHEN, AND A. A. SCHEKOCHIHIN. *Power and spectral index anisotropy of the entire inertial range of turbulence in the fast solar wind*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **407**, 31 (2010). [71](#), [73](#)
- [203] J.H. WILLIAMSON. *Low-storage runge-kutta schemes*. Journal of Computational Physics **109**, 48 (1980). [109](#)
- [204] Z. YOSHIDA AND S.M. MAHAJAN. *Simultaneous beltrami conditions in coupled vortex dynamics*. Journal of Mathematical Physics **40**, 5080 (1999).
- [205] Z. YOSHIDA AND S.M. MAHAJAN. *Variational principles and self-organization in two-fluid plasmas*. Physical Review Letters **88**, 095001 (2002). [140](#)
- [206] G.K. BATCHELOR. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press (1953). [169](#)
- [207] P.A. DAVIDSON. *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press (2004).
- [208] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, AND T. A. QUARTERONI, A. ET ZANG. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag (1988). [110](#)

-
- [209] L.D. LANDAU AND L.M. LIFSHITZ. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press (1959). [57](#)
- [210] L.D. LANDAU AND L.M. LIFSHITZ. *Fluid Mechanics (2nd edition)*. Pergamon Press (1987).
- [211] A.S. MONIN AND A.M. YAGLOM. *Statistical Fluid Mechanics : Mechanics of Turbulence*. MIT Press (1975). [171](#)
- [212] A.H. TAUB. *John von Neumann, Collected Works, 1903-1957*. Pergamon Press (1961). [56](#)
- [213] D. A. GURNETT AND A. BHATTACHARJEE. *Introduction to Plasma Physics*. Cambridge University Press (2005).
- [214] H. NAVIER. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. Lu à l'Académie Royale des Sciences ; le 18 mars 1822 (1822). [49](#)
- [215] G.G. STOKES. *Principes généraux du mouvement des fluides*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (1757). [49](#)
- [216] T. PASSOT, C. SULEM, AND P.L. SULEM. From kinetic to fluid descriptions of plasmas. In *Topics in Kinetic Theory*, American Mathematical Society (2005). [44](#)

Résumé : La turbulence tridimensionnelle se caractérise par sa capacité à transférer de l'énergie des grandes vers les petites échelles où elle est finalement dissipée. Lorsqu'elle se produit dans un plasma non-collisionnel comme le vent solaire, une modélisation cinétique semble a priori nécessaire. Toutefois, la complexité d'une telle approche limite les développements théoriques et condamne les expériences numériques à se restreindre à des nombres de Reynolds peu élevés. Dans quelles mesures un modèle mono-fluide comme la MHD Hall permet-il de rendre compte des phénomènes observés dans le vent solaire aux échelles sub-ioniques ? C'est la problématique à laquelle s'est attaquée cette thèse.

L'idée directrice de ce travail est de tirer profit de la relative simplicité des modèles fluides et de la puissance algorithmique des méthodes pseudo-spectrales pour aborder la turbulence du vent solaire par des simulations numériques directes tridimensionnelles massivement parallèles à grands nombres de Reynolds. Ces simulations numériques ont permis de mettre en évidence l'existence d'une brisure spontanée de symétrie chirale en turbulence MHD Hall incompressible, ainsi que l'existence d'un nouveau régime appelé ion MHD (IMHD). Un modèle phénoménologique a été proposé pour rendre compte de ces résultats et de nouvelles prédictions ont été faites, puis confirmées numériquement. Enfin, l'étude de l'effet d'un fort champ magnétique uniforme sur la dynamique turbulente a permis de confirmer pour la première fois une ancienne conjecture. L'inertie des électrons a ensuite été prise en compte toujours dans un modèle fluide. Par une approche hydrodynamique classique, une loi universelle a été obtenue pour les fonctions de structure d'ordre trois.

L'ensemble de ces résultats est qualitativement en accord avec les mesures in situ du vent solaire et remet en cause le paradigme selon lequel les raidissements successifs du spectre des fluctuations magnétiques sont provoqués nécessairement par des phénomènes d'origine cinétique. De manière plus générale, cette thèse soulève des questions fondamentales sur les processus non-collisionnels de dissipation dans les plasmas turbulents.

Mots clés : MHD Hall, plasma, simulation numérique directe, théorie, turbulence, vent solaire.

Abstract : Three-dimensional turbulence is characterized by its capacity to transfer energy from large to small scales where it is finally dissipated. When it occurs in a non-collisional plasma like the solar wind, a kinetic modelisation is necessary a priori. The complexity of such an approach however limits the theoretical developments and forces numerical experiments to be restricted to low Reynolds numbers. To what extent does a single-fluid model such as MHD Hall account for the phenomena observed in the solar wind at ion sub-scales? It is to this question that this thesis tries to answer.

The main idea of this work is to take advantage of the relative simplicity of fluid models and of the high precision of pseudo spectral methods to tackle the problem of turbulence in solar wind by direct numerical simulations massively parallelized at high Reynolds numbers. These simulations have helped to highlight the existence of a spontaneous breaking of chiral symmetry in incompressible Hall MHD turbulence, as well as the existence of a new regime called ion MHD (HDMI). A phenomenological model has been proposed to account for these results and new predictions were made and confirmed numerically. The study of the effect of a strong uniform magnetic field on the turbulent dynamics confirmed an ancient conjecture for the first time. The inertia of the electrons was then taken into account in a still fluid model. By a classical hydrodynamic approach, a universal law has been obtained for the third order structure functions.

All these results are in qualitative agreement with in situ measurements of the solar wind and challenge the paradigm according to which the successive steepening of the magnetic fluctuations spectrum is necessarily caused by phenomenon of kinetic origin. More generally, this thesis raises fundamental questions about the non-collisional dissipation process in turbulent plasmas.

Keywords : Hall MHD, plasma, direct numerical simulation, theory, turbulence, solar wind.

