Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable

Baptiste Bergeot

▶ **To cite this version:**

Baptiste Bergeot. Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2013. Français. NNT : . tel-00877550v3

HAL Id: tel-00877550

https://theses.hal.science/tel-00877550v3

Submitted on 25 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable

Baptiste BERGEOT

*Sous la direction d'*André Almeida, Christophe Vergez *et* Bruno Gazengel

Thèse de Doctorat en Acoustique
Université du Maine, Le Mans, France, 2013

Thèse de Doctorat

Baptiste BERGEOT

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université du Maine
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans

École doctorale : SPIGA

Discipline : 60
Spécialité : Acoustique
Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine — UMR CNRS 6613

Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable

---

Soutenue le **10 octobre 2013**

Devant le jury composé de :

Rapporteurs :	**Jean KERGOMARD**, Directeur de Recherche (DRCE - CNRS), LMA
	Cyril TOUZÉ, Professeur de l'ENSTA - ParisTech, ENSTA - ParisTech
Examinateurs :	**Benoît FABRE**, Professeur, LAM - UPMC
	Thomas HÉLIE, Chargé de Recherche (CR1 - CNRS), IRCAM
	Jean-Pierre DALMONT, Professeur, LAUM - Université du Maine
Directeur de thèse :	**Bruno GAZENGEL**, Professeur, LAUM - Université du Maine
Co-directeur de thèse :	**Christophe VERGEZ**, Chargé de Recherche (CR1 - CNRS), LMA
Co-encadrant de thèse :	**André ALMEIDA**, Maître de Conférence, LAUM - Université du Maine

À Anna-Laure

À me

Remerciements

Mes remerciements sont tout naturellement adressés en premier lieu à mes directeurs de thèse André Almeida, Christophe Vergez et Bruno Gazengel. Ce trio d'encadrants complémentaires a su rendre ces trois années riches sur le plan scientifique mais aussi humain. Je remercie André sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Merci en particulier pour les discussions à 16h à la terrasse du 4^{ième} souvent fructueuses scientifiquement. Je remercie Christophe pour son constant enthousiasme, sa constante disponibilité malgré la distance et ses commentaires envoyés (par photos) souvent tard le soir et parfois le week-end. Je remercie Bruno pour ses remarques pertinentes et constructives sur mon travail et pour avoir toujours été présent quand il le fallait. Merci à tous les trois, je pense vraiment avoir appris beaucoup de choses pendant ces trois années. Nous ne pouvons jamais savoir où le vent nous mène mais si un jour j'ai la chance de retravailler avec vous ce sera avec grand plaisir.

J'adresse mes remerciements à Jean Kergomard et Cyril Touzé pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'en être les rapporteurs. Je remercie également Benoît Fabre, Thomas Hélie et Jean-Pierre Dalmont d'avoir accepté de faire partie du jury. Merci à tous de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je remercie le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille d'avoir mis à ma disposition sa bouche artificielle asservie qui a permis de réaliser l'ensemble des expériences de cette thèse. Merci en particulier à Didier Ferrand de l'avoir rendue opérationnelle avant ma venue en janvier 2012.

J'en arrive maintenant au LAUM, où j'ai découvert mon gout pour la recherche, et qui m'a fourni un environnement de travail très agréable durant ces trois années de thèse mais aussi pendant le Master. Je tiens donc à remercier toute l'équipe enseignante du Master "Acoustique et Mécanique" et particulièrement Claude Depollier pour m'avoir fait découvrir les dérivées fractionnaires, mais aussi Jean-Philippe Groby et Olivier Dazel qui ont encadré mon stage de fin d'étude de Master. Merci également à Matthieu Rupin et Xavier Vuylsteke pour les longues et studieuses séances de révisions à la BU mais aussi pour les soirées pizz-pinard du mardi soir. Concernant les trois

années de thèse je remercie tous les membres de l'OR PIM et tous les gens qui ont contribué de près ou de loin à ce travail. Merci à Pierrick Lotton, notre très sympathique lien avec l'école doctorale.

Je remercie mes collègues doctorant(e)s pour les moments de détentes dans et hors du laboratoire : Damien Lecoq, Clément Lagarrigue, Jérémy Cabaret, Matthieu Guédra, Miguel Moleron, Jean-Baptiste Doc, Hélène Pichard, Laurianne Barguet, Balbine Maillou, ... et j'en oublie.

Merci à me femme Anna-Laure pour m'avoir soutenu pendant ces trois années. Merci aussi à mes parents et à ma soeur pour ... il y aurait trop de choses à dire.

Le LAUM fédère beaucoup de musiciens et mes années passées au Mans ne seraient rien sans les expériences musicales que j'ai pu y faire. Je remercie donc Jean-Marc Dormeau ainsi que tous les musiciens du Big Band de l'Université de Maine. Merci à Antoine, Louis, Arnaud, Guillaume et Pierre membres des "24 hours on the rillettes" et Bertrand, Chenyin, Julien, Rémi er Anna des "Remote controllers".

Je remercie enfin l'Agence Nationale de la Recherche qui a financé cette thèse dans le cadre du projet SDNS-AIMV *"Système Dynamique Non Stationnaires - Application aux Instruments de Musique à Vent".*

Table des matières

I Introduction générale et état de l'art 1

Introduction Générale 3

1 État de l'art et résultats préliminaires 9
1.1 Introduction . . . 9
1.2 Modèle élémentaire global de la clarinette . . . 12
1.2.1 L'excitateur . . . 13
1.2.2 Le résonateur . . . 15
1.2.3 Modèles adimensionnés d'un instrument à anche simple . . . 16
1.2.4 Modèle de "Raman" et carte itérée . . . 18
1.3 Étude analytique *statique* du modèle de "Raman" . . . 19
1.3.1 Diagramme de bifurcation *statique* . . . 20
1.3.2 Courbe des points fixes et seuil d'oscillation *statique* . . . 21
1.3.3 Transitoire . . . 25
1.4 Outils d'analyse de la théorie de la bifurcation dynamique . . . 28
1.4.1 Théories de la bifurcation *statique* et de la bifurcation *dynamique*. . . . 28
1.4.2 Le retard à la bifurcation . . . 30
1.4.3 Courbe invariante . . . 32
1.4.4 Point de bifurcation *dynamique* . . . 33

II Étude analytique d'un modèle de clarinette dont l'un des paramètres de contrôle varie dans le temps 41

2 Seuil dynamique d'oscillation : *Cas déterministe* 43
2.1 Avant-propos . . . 43
2.2 Article *Nonlinear Dynamics 1* . . . 44
2.2.1 Introduction . . . 44
2.2.2 State of the art . . . 45
2.2.3 Time-varying blowing pressure . . . 50
2.2.4 Limit of the model : influence of the precision . . . 57
2.2.5 Conclusion . . . 59
2.2.6 Annexes . . . 60

3 Seuil dynamique d'oscillation : *Prise en compte du bruit* 63
3.1 Avant-propos . . . 63
3.2 Article *Nonlinear Dynamics 2* . . . 64
3.2.1 Introduction . . . 64
3.2.2 Dynamic oscillation threshold of the clarinet model without noise and problem statement . . . 66
3.2.3 Finite precision versus additive white noise . . . 69

3.2.4 Analytical study of the noisy dynamic case . . . 71
3.2.5 Conclusion . . . 79
3.2.6 Annexes . . . 80
3.3 Influence des autres paramètres du modèle . . . 82
3.3.1 Influence du second paramètre de contrôle ζ . . . 82
3.3.2 Influence du paramètre de pertes λ . . . 83

4 Reconstruction d'enveloppe 87
4.1 Avant-propos . . . 87
4.2 Article en fin d'écriture . . . 88
4.2.1 Introduction . . . 88
4.2.2 Elements of clarinet theory . . . 89
4.2.3 Problem statement . . . 94
4.2.4 Sound envelope with variable parameters . . . 95
4.2.5 Interrupted variation of the parameter . . . 103
4.2.6 Examples . . . 106
4.2.7 Discussion on the *dynamic oscillation threshold* . . . 109
4.2.8 Conclusion . . . 110
4.2.9 Annexes . . . 110

III Résultats expérimentaux : mesures *in vitro* 115

5 Réponse d'une clarinette à différents profils de pression dans la bouche 117
5.1 Avant-propos . . . 117
5.2 Article *JASA* . . . 120
5.2.1 Introduction . . . 120
5.2.2 Experimental setup and configurations . . . 122
5.2.3 Clarinet model . . . 124
5.2.4 Results for the "CIMP" profile . . . 127
5.2.5 Results for the "IIMPP" profile . . . 134
5.2.6 Conclusion . . . 138
5.2.7 Appendices . . . 138

Conclusion et perspectives 141

A Fonction d'itération 145
A.1 Anche battante . . . 145
A.2 Anche non battante . . . 146
A.2.1 Débit positif . . . 146
A.2.2 Débit négatif . . . 146

B Régime statique non oscillant et seuil statique d'oscillation pour $\lambda < 1$ 149
B.1 Régime statique non-oscillant du modèle "Raman" . . . 149
B.1.1 Solution exacte . . . 149
B.1.2 Solution approchée : méthode des perturbations . . . 150
B.2 Seuil d'oscillation statique du modèle de "Raman" . . . 152

C Passage à proximité d'un point superstable 155
C.1 Position du problème . . . 155
C.2 Prise en compte du phénomène dans la prédiction du seuil dynamique . . . 158

Bibliographie 163

Première partie

Introduction générale et état de l'art

Introduction Générale

La facture instrumentale et l'apprentissage d'un instrument de musique utilisent une approche empirique, par essais-erreurs, pour concevoir et jouer un instrument de musique. Le facteur fabrique l'instrument de musique et le musicien en joue, le résultat peut être magnifique sans que les deux protagonistes n'aient conscience et ne comprennent tous les phénomènes physiques mis en jeu. Ce constat fascine le scientifique qui, depuis plusieurs siècles, s'intéresse à la physique des instruments de musique et plus récemment à leur interaction avec l'instrumentiste. Ainsi, l'objectif de la physique des instruments de musique est de comprendre les liens qui peuvent exister entre la géométrie de l'instrument (fixée par le facteur), les paramètres de contrôle (imposés et modifiés en temps réel par le musicien) et les caractéristiques du son produit. Au niveau de la facture instrumentale le lien entre scientifiques et facteurs s'est resserré ces dernières années, notamment à l'initiative du projet ANR Pafi (Plateforme d'Aide à la Facture Instrumentale).

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre du projet ANR Sdns-Aimv (Systèmes Dynamiques Non-Stationnaires – Application aux Instruments à Vent) qui a pour objectif l'étude des stratégies suivies par les musiciens lors des transitoires en général : attaques de notes, transitions entre deux notes, transitoires d'extinction... En particulier, il vise à corréler les gestes (ou évolutions temporelles de paramètres de contrôle) aux résultats sonores. Le travail proposé ici est à appréhender comme une contribution à la compréhension du comportement de l'instrument lors d'un transitoire d'attaque. Il étudie en particulier le comportement oscillatoire d'un instrument de type clarinette lorsque la pression dans la bouche du musicien varie dans le temps en suivant des profils temporels académiques.

Contexte. D'un point de vue mathématique la clarinette peut être décrite comme un système auto-oscillant. Un jeu d'équations non linéaires permet de relier des paramètres de contrôle, comme la pression dans la bouche du musicien ou la force exercée par la lèvre sur l'anche, à des variables de sortie, comme la pression dans le bec ou le débit d'air entrant dans l'instrument. Dans le contexte de la synthèse sonore dite par "modèle physique", plusieurs améliorations peuvent être apportées à ce modèle selon le degré de raffinement requis pour décrire le comportement mécanique et acoustique de l'instrument et obtenir des sons réalistes. Dans ce cas, la complexité du système rend obligatoire l'utilisation d'outils numériques pour résoudre le système. À l'inverse, et c'est la stratégie employée dans cette thèse, de fortes simplifications du modèle permettent de réduire le système en rendant possible une étude analytique du comportement de l'instrument. Par exemple, en considérant un résonateur avec pertes indépendantes de la fréquence et en ignorant le rayonnement, le modèle de clarinette peut se réduire à une simple équation aux différences qui peut être résolue par un processus itératif appelé "carte itérée". Ce modèle ne peut bien sûr pas prédire avec raffinement le comportement d'une clarinette réelle mais permet de comprendre des mécanismes essentiels à la production du son.

La clarinette modélisée par une carte itérée est communément étudiée dans le cadre de la théorie de la bifurcation dite *statique*, qui fait l'hypothèse que les paramètres de contrôle sont

constants. Dans ce contexte une étude de stabilité linéaire permet de trouver la pression nécessaire que le musicien doit faire régner dans sa bouche pour que son instrument se mette à osciller. Cette valeur particulière de la pression dans la bouche est appelée *seuil statique d'oscillation*. Par le passé, des études expérimentales ont montré qu'il est difficile de mesurer le seuil statique d'oscillation en augmentant la pression de souffle, même très lentement à l'aide d'une bouche artificielle. Le seuil ainsi mesuré, que nous appellerons *seuil dynamique d'oscillation*, est souvent plus élevé que celui attendu. En revanche faire décroitre la pression de souffle permet de se rapprocher du résultat théorique. Ces observations se retrouvent sur des simulations numériques, quelle que soit la complexité du modèle utilisé.

Ce phénomène de retard au déclenchement des oscillations qui a lieu lorsque l'on augmente le paramètre de contrôle d'un système auto-oscillant a déjà été observé expérimentalement à la fin des années 80 dans des lasers ou des circuits électriques, il est connu sous le nom de *retard à la bifurcation*. Il est décrit analytiquement dans le cadre de la *théorie de la bifurcation dynamique* qui étudie les systèmes dynamiques dont l'un des paramètres de contrôle varie lentement dans le temps.

La théorie de la bifurcation dynamique semble fournir les outils pertinents pour étudier, d'un point du vue théorique, la réponse du modèle de clarinette à une variation de la pression dans la bouche en fonction du temps. Nous nous sommes donc engagés dans cette voie qui constitue l'un - et le principal - des deux axes de recherche de ce doctorat. Cet axe consiste donc en l'analyse "dynamique" du modèle de clarinette en s'appuyant sur la comparaison entre les résultats théoriques produits et des simulations du modèle. Cet axe est présenté dans la partie II de ce mémoire. Le second axe de recherche est l'approche expérimentale et est présenté dans la partie III. L'objectif principal de ce travail est de mettre en évidence expérimentalement l'existence de retard à la bifurcation sur un instrument réel et de corréler ses caractéristiques avec celles déduites des études théoriques.

Approche analytique et numérique (partie II). L'enjeu de ce doctorat a notamment été de comprendre les fondements de la théorie de la bifurcation dynamique et de s'inspirer de la méthodologie proposée par Baesens [10, 9] pour étudier les bifurcations dynamiques du modèle de clarinette prenant en compte une pression dans la bouche du musicien qui varie linéairement dans le temps. Le premier objectif a été de prédire analytiquement le seuil d'oscillation dynamique du modèle et par conséquent le retard à la bifurcation défini comme la différence entre les seuils statique et dynamique. L'une des caractéristiques notoires du retard à la bifurcation est sa grande dépendance au bruit, même si ce dernier provient des erreurs d'arrondi de l'ordinateur. L'étude visant à la détermination du seuil dynamique est donc divisée en deux parties. Le chapitre 2 présente l'étude du cas déterministe où le bruit n'est pas pris en compte analytiquement. Son influence y est cependant montrée à l'aide de simulations numériques, mettant ainsi en évidence des contradictions entre les résultats théoriques et numériques. Dans le chapitre 3, l'influence d'un bruit blanc additif sur le seuil d'oscillation dynamique du modèle est étudié théoriquement, permettant ainsi de lever les contradictions observées au chapitre 2. La section 3.3 présente des études complémentaires aux chapitres 2 et à la section 3.2 en étudiant l'influence du second paramètre de contrôle du modèle et de pertes indépendantes de la fréquence. La partie II se termine par le chapitre 4 qui propose une méthode systématique pour reconstruire analytiquement l'enveloppe du modèle en réponse à un profil académique de pression dans la bouche : la pression dans la bouche augmente linéairement puis s'arrête et reste constante.

Approche expérimentale (partie III). Les discussions avec les chercheurs qui ont tenté de mesurer le seuil d'oscillation statique, parfois avec succès [28], nous permettent de soupçonner l'existence

du retard à la bifurcation dans une clarinette réelle. En effet, comme évoqué précédemment, ces discussions relatent le fait que le seuil d'oscillation mesuré en augmentant linéairement la pression dans la bouche est souvent plus grand que le seuil statique théorique. Dans le but de mettre en évidence expérimentalement le retard à la bifurcation dans un instrument réel, une campagne de mesures a été réalisée à l'aide de la bouche artificielle du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) à Marseille. La particularité de la bouche artificielle du LMA est l'asservissement en pression d'alimentation, qui permet notamment de reproduire des profils d'évolutions temporelles académiques.

Les parties II et III sont précédées par un état de l'art et par des résultats préliminaires rassemblés dans le chapitre 1. Le modèle élémentaire global d'un instrument de type clarinette y est présenté ainsi que les hypothèses et simplifications menant au modèle simplifié dit "de Raman". Nous exposons aussi des résultats de la théorie de la bifurcation dynamique que nous illustrons sur un cas simple de carte itérée, la suite logistique. Cette section présente également les outils d'analyse dont la familiarisation est nécessaire à la bonne compréhension de la suite du mémoire.

Les chapitres 2 et 3 contiennent respectivement les reproductions des articles [19] et [20] publiés dans *Nonlinear Dynamics*. Le chapitre 4 est la reproduction de [4], soumis à *Acta Acustica united with Acustica*. Enfin, le chapitre 5 est la retranscription de [21], publié dans *Journal of the Acoustical Society of America*. Pour chaque article, rédigé en anglais, une section "Avant-propos", en français, est ajoutée. Cette section est en français et décrit le travail de l'article qui la succède.

Nous proposons enfin en figure 1 un schéma présentant la position de ce travail dans le contexte général de l'étude des transitoires d'attaque de la clarinette.

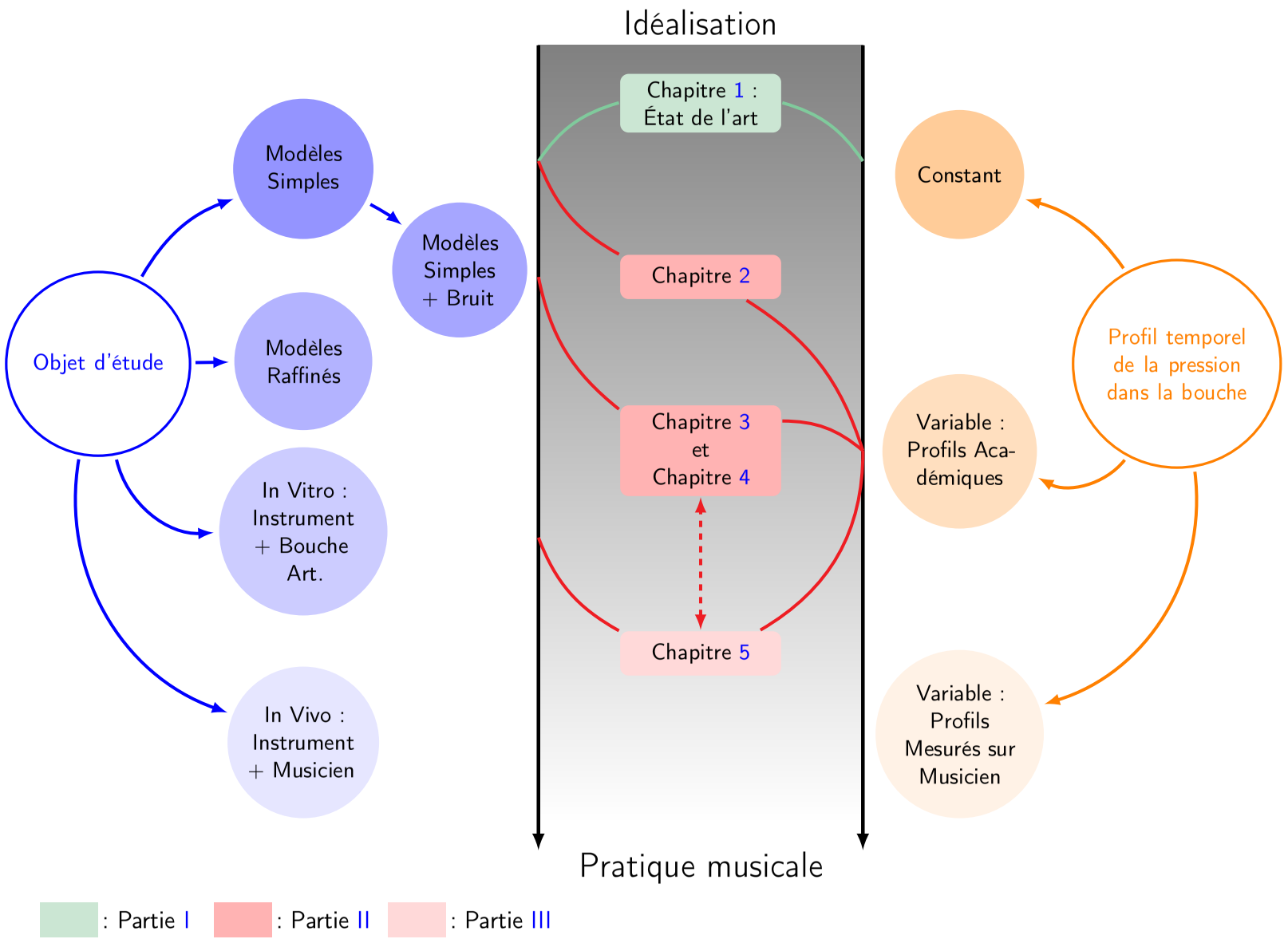


FIGURE 1 – Schéma présentant la position du travail présenté dans ce mémoire dans le contexte général de l'étude des transitoires d'attaque de la clarinette. Nous limitons l'espace d'étude à deux dimensions : l'objet d'étude - allant du modèle simple à une expérience in vitro - et le profil temporel de la pression dans la bouche - allant d'un profil constant à un profil réaliste mesuré sur musicien pendant l'attaque d'une note -.

Chapitre 1

État de l'art et résultats préliminaires

Sommaire

1.1 Introduction . . . 9
1.2 Modèle élémentaire global de la clarinette . . . 12
1.2.1 L'excitateur . . . 13
1.2.2 Le résonateur . . . 15
1.2.3 Modèles adimensionnés d'un instrument à anche simple . . . 16
1.2.4 Modèle de "Raman" et carte itérée . . . 18
1.3 Étude analytique *statique* du modèle de "Raman" . . . 19
1.3.1 Diagramme de bifurcation *statique* . . . 20
1.3.2 Courbe des points fixes et seuil d'oscillation *statique* . . . 21
1.3.3 Transitoire . . . 25
1.4 Outils d'analyse de la théorie de la bifurcation dynamique . . . 28
1.4.1 Théories de la bifurcation *statique* et de la bifurcation *dynamique*. . . . 28
1.4.2 Le retard à la bifurcation . . . 30
1.4.3 Courbe invariante . . . 32
1.4.4 Point de bifurcation *dynamique* . . . 33

1.1 Introduction

Par opposition aux instruments à cordes pincées, frappées et aux percussions dont la production du son repose sur la réponse libre d'un système oscillant linéaire, celle des instruments entretenus, tels que les instruments à anche (incluant les cuivres), les flûtes et les instruments à cordes frottées, est la conséquence d'un couplage parfois complexe entre un excitateur non linéaire actif et un résonateur linéaire passif. Il en résulte la capacité de ces instruments à auto-osciller "spontanément" à partir d'une source d'énergie continue ou lentement variable. Le schéma général du fonctionnement d'un instrument auto-oscillant est présenté en figure 1.1.

Le modèle élémentaire global présenté dans la suite (cf. paragraphe 1.2) suppose que la non-linéarité, nécessaire à la création des auto-oscillations, est localisée dans le bec de l'instrument. Souvent appelée *caractéristique non linéaire de l'instrument*, la non-linéarité est, dans le modèle, représentée par une fonction qui relie le débit entrant dans le canal d'anche à la différence de pression entre la bouche du musicien et l'intérieur du bec et à l'ouverture du canal d'anche. En 1974, Wilson et Beavers [90], font l'hypothèse d'un écoulement incompressible et stationnaire dans le canal d'anche et proposent une expression de la caractéristique non linéaire en utilisant l'équation

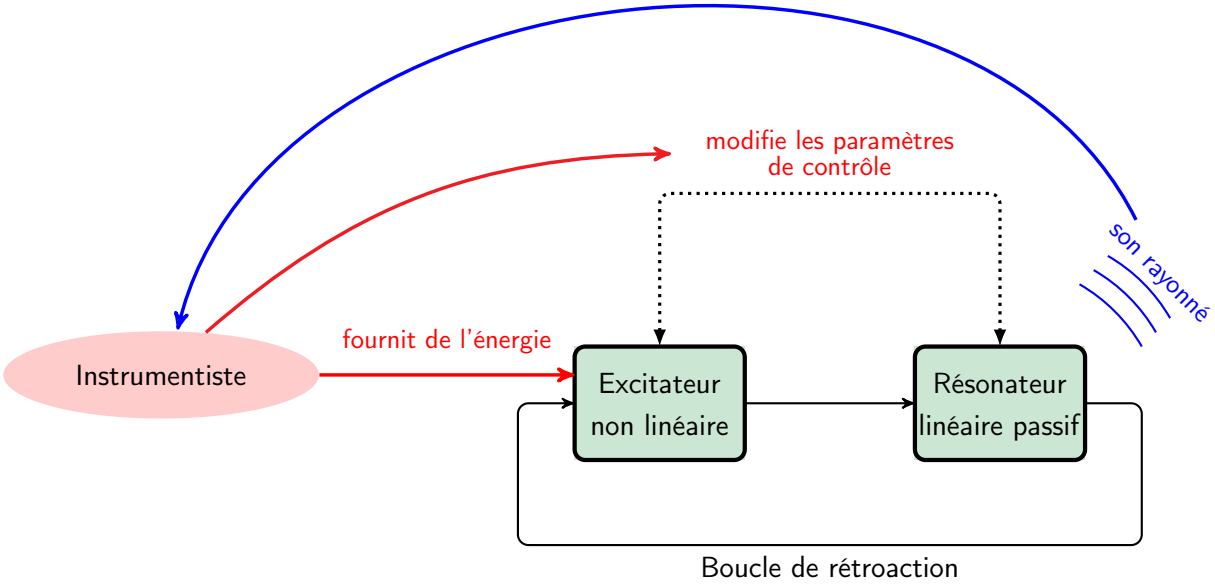


FIGURE 1.1 – Schéma général d'instrument de musique auto-oscillant, modélisé par un élément non linéaire actif couplé avec un élément linéaire passif. L'instrumentiste fournit l'énergie au système puis modifie les paramètres de contrôle (pression dans la bouche et embouchure) en fonction de son jugement sur le son rayonné.

de Bernoulli. Cette expression est ensuite discutée plus en détail en 1990 par Hirschberg *et al.* [52] et comparée avec succès à l'expérience par Dalmont *et al.* [30] en 2003. La caractéristique non linéaire fournit une équation du modèle de la clarinette (cf. section 1.2.1).

Pour compléter la description de l'instrument il faut ajouter deux équations linéaires : une décrivant la dynamique de l'anche (cf. section 1.2.1) et l'autre pour décrire la propagation des ondes dans le corps de l'instrument (cf. section 1.2.2). L'instrument est alors vu comme un système dynamique non linéaire régissant l'évolution dans le temps des variables physiques du système : le débit dû au souffle de l'instrumentiste et à la réponse acoustique de l'instrument, la pression dans le bec de l'instrument et la position de l'extrémité du canal de l'anche. Les paramètres de contrôle qui modélisent les quantités physiques que peut contrôler le musicien sont : la pression dans la bouche (qui est le paramètre qui va principalement nous intéresser dans ce travail) et la force d'appui de la lèvre sur l'anche.

En 1983, McIntyre *et al.* [69] proposent une représentation générale des instruments auto-oscillants. Cette représentation a pour avantage d'être facilement implémentable grâce au choix des variables onde aller et onde retour à la place des variables habituelles pression et débit. Ceci mène à l'utilisation de la fonction de réflexion plutôt que la réponse impulsionnelle du résonateur. Au plus haut niveau de simplification (modèle dit "de Raman" cf. section 1.2.4), les équations du modèle se réduisent à une simple équation aux différences non linéaire qui peut être résolue simplement par un processus itératif appelé "carte itérée" [a] [64] : l'état du système à un instant t

a. Le terme "carte itérée" est utilisé dans le domaine de la physique des instruments de musique, notamment dans l'ouvrage de référence [26]. En théorie des systèmes dynamiques les termes "application itérée", "système dynamique à temps discret" ou "itération" sont plus souvent utilisés.

est l'image de l'état à l'instant $t - \tau$ [b] par une fonction non linéaire, en supposant a priori que les quantités physiques du système sont constantes entre les instants $t - \tau$ et t. L'exemple le plus connu de carte itérée est la suite logistique dont la non-linéarité est de type quadratique. Elle est publiée par May [68] en 1976. Dans le cas de la clarinette, la fonction non linéaire n'est autre que la caractéristique non linéaire écrite en variable onde aller/onde retour dont l'expression analytique est donnée par Taillard *et al.* [86] en 2010.

Pour des paramètres de contrôle constants et bien choisis, la carte itérée a pour régime établi un signal carré, cas particulier de mouvement dit "de Helmholtz" qui tient son nom du physicien allemand H. von Helmholtz qui découvre expérimentalement ce type de mouvement dans le cas des instruments à corde frottée [89]. Cette vision simplifiée de la clarinette ne peut bien sûr pas décrire avec raffinement son comportement car le contenu spectral est imposé par le fait de supposer a priori l'existence de signaux carrés. Elle ne prend pas en compte non plus l'influence d'éléments importants comme la géométrie et la nature de l'anche ou le conduit vocal de l'instrumentiste. Par contre, si le but principal est d'étudier les régimes d'oscillations et non le timbre, la carte itérée permet de comprendre le principe de fonctionnement de l'instrument.

L'une des caractéristiques des cartes itérées est la route vers le chaos par bifurcations successives de type doublements de période [34, 35]. Dans le cas de la clarinette ce phénomène est déjà l'objet de beaucoup d'études théoriques [64, 58, 29, 86], numériques [59] et expérimentales [53, 46, 64]. Les études font en général l'hypothèse d'une pression dans la bouche constante et étudient les différences qualitatives de comportement de l'instrument en fonction de sa valeur. Dans la suite, ce type d'étude est appelée *étude statique* pour souligner le fait que la pression dans la bouche (i.e. le paramètre de contrôle) est indépendant. Les résultats majeurs des études analytiques statiques de la clarinette sont rappelés et parfois étendus dans la section 1.3 de ce mémoire. Le terme *statique* est également ajouté aux grandeurs issues de ces études : *diagramme de bifurcation statique* (cf. section 1.3.1) et *seuil d'oscillation statique* (cf. section 1.3.2) par exemple.

Le seuil d'oscillation statique, qui peut être défini comme la valeur de la pression dans la bouche en-dessous de laquelle l'instrument ne peut pas avoir de solution oscillante persistante, est difficile à mesurer aussi bien dans des simulations numériques que sur un instrument réel. En effet, près du seuil, le temps nécessaire à l'obtention d'une oscillation stable est long voir infini (cf. Chaigne et Kergomard [26]). Par ailleurs, en faisant varier la pression dans la bouche, on observe généralement l'apparition du son à une valeur de pression dans la bouche plus élevée que celle prédite théoriquement par Kergomard *et. al* [60], comme le montrent Silva *et. al* [84] sur des simulations numériques. Ce phénomène est également observé expérimentalement sur une clarinette excitée par une bouche artificielle [27]. La valeur particulière de pression dans la bouche pour laquelle on observe l'apparition du son (une définition plus rigoureuse est fournie dans la suite du mémoire) est appelée : *seuil d'oscillation dynamique* pour la clarinette ou plus généralement *point de bifurcation dynamique*. Un exemple de ce phénomène est présenté en figure 1.2 qui montre le résultat de la simulation du modèle de "Raman" lorsque la pression dans la bouche varie linéairement.

Pour pouvoir expliquer ces observations nous sortons du contexte de la physique des instruments de musique pour présenter, en section 1.4, les outils d'analyse de *théorie de la bifurcation dynamique*. En théorie de la bifurcation, il faut distinguer la *théorie de la bifurcation statique* et la *théorie de la bifurcation dynamique*. La théorie de la bifurcation statique fait l'hypothèse de paramètres de contrôle constants, elle est utilisée par exemple dans les études rappelées à la section 1.3 et permet d'obtenir le seuil d'oscillation statique de la clarinette. La théorie de la bifurcation dynamique [14, 43] étudie les phénomènes qui se produisent dans les systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre de contrôle, lorsque ce dernier évolue lentement dans le temps (dans la

b. Dans le cas de la clarinette le pas temporel τ correspond à un aller-retour de l'onde dans le résonateur.

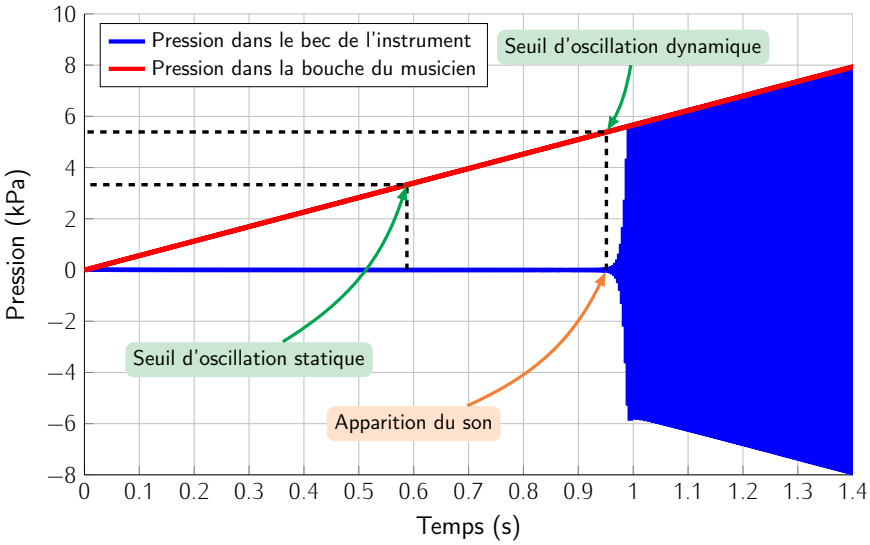


FIGURE 1.2 – Simulation du modèle de clarinette dit "de Raman" (cf. section 1.2.4) où la pression dans la bouche du musicien augmente linéairement dans le temps. L'apparition du son apparaît à une valeur de pression dans la bouche, *seuil d'oscillation dynamique*, supérieur au *seuil d'oscillation statique* théorique [60].

littérature on parle aussi dans ce cas de systèmes non autonomes). La section 1.4.1, expose plus en détail les différences entre les deux théories. La section 1.4.2 présente le phénomène de *retard à la bifurcation* [43], qui permet d'expliquer les observations faites à la figure 1.2 et qui ne peut être traité analytiquement que dans le cadre de la théorie dynamique. Les outils mathématiques présentés dans les sections 1.4.3 et 1.4.4 sont appliqués à un système simple (la suite logistique), l'application à la clarinette restant bien sur l'objectif des chapitres suivants.

1.2 Modèle élémentaire global de la clarinette

La figure 1.3 présente un schéma simplifié d'un bec de type clarinette ou saxophone indiquant les variables et les orientations d'axes choisies utilisées par la suite.

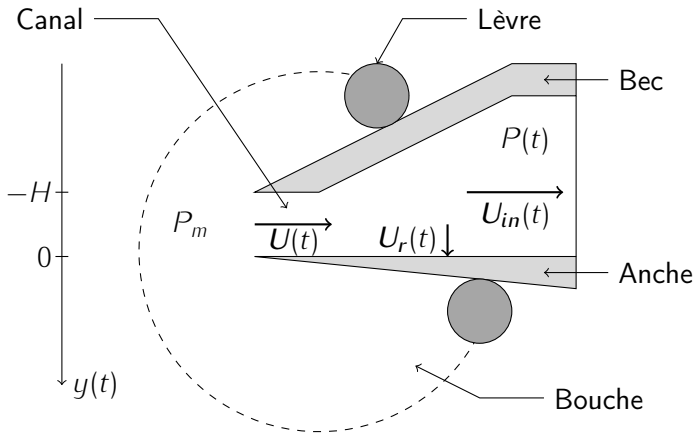


FIGURE 1.3 – Schéma de principe d'un bec à anche simple de type bec de clarinette ou de saxophone. Notations et orientations choisies.

1.2.1 L'excitateur

La dynamique de l'anche. Dans la littérature il est commun d'assimiler l'anche d'une clarinette (ou d'un saxophone) à un oscillateur harmonique amorti à un degré de liberté [8, 90] ou bien à un simple ressort sans masse ni amortissement [58].

Le premier cas, souvent appelé "modèle à une masse", considère donc que l'anche est un système masse-ressort dont les paramètres sont obtenus à partir de ceux de l'anche lorsque l'on se limite à son premier mode de flexion : la raideur statique (par unité de surface) de l'anche, K_s, plus ou moins élevée selon la "force" de l'anche. Ensuite, la première fréquence de résonance de f_r de l'anche. Enfin la masse modale du premier mode $m_s = K_s/\omega_r^2$, elle aussi par unité de surface. La dynamique simplifiée de l'anche peut donc être décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + q_r\omega_r\frac{dy}{dt} + \omega_r^2 y = -\frac{\Delta P}{m_s}, \tag{1.1}$$

où $y(t)$ est le déplacement vertical du bout de l'anche, $\omega_r = 2\pi f_r$ la première pulsation de résonance de l'anche et $q_r\omega_r$ le coefficient d'amortissement. Le terme ΔP représente la différence de pression s'exerçant sur les deux faces de l'anche :

$$\Delta P = P_m - P. \tag{1.2}$$

Enfin le signe "-" apparaissant dans le membre de droite de l'équation (1.1) signifie que l'anche de clarinette est une anche en-dedans [39], c'est-à-dire, qu'une différence ΔP positive entre les deux faces de l'anche tend à refermer le canal d'anche.

À part dans le registre suraigu, la fréquence de jeu est en général beaucoup plus basse que la fréquence de résonance f_r de l'anche. Ceci motive l'utilisation du second modèle usuel d'anche qui ignore la dynamique de l'anche et conduit à :

$$K_s y = -\Delta P. \tag{1.3}$$

Hydrodynamique de l'écoulement à l'entrée du bec. Le comportement de l'air entrant dans le bec de l'instrument est ce qui détermine la non-linéarité du système bouclé (cf. figure 1.1) essentielle à la création d'auto-oscillations. La modélisation de cet élément consiste à trouver une relation entre le débit U entrant dans l'instrument et la différence de pression ΔP. Cette relation, non linéaire, est appelée caractéristique non linéaire de l'instrument. C'est Backus [8] qui, en 1963, fait les premières mesures de la caractéristique non linéaire. Suite à ses mesures, il propose une expression empirique de la caractéristique dans laquelle le débit est proportionnel à $(\Delta p)^{4/3}$ et à $(y + H)^{2/3}$, où $(y + H)$ représente l'évolution au cours du temps de la hauteur du canal d'anche. Cette expression est ensuite réfutée par Hirschberg *et al.* [52, 51], qui propose l'expression de la caractéristique aujourd'hui la plus couramment utilisée. Elle repose sur l'équation de Bernoulli pour l'écoulement dans le canal entre anche et bec, et la création d'un jet à sa sortie avec dissipation de son énergie cinétique par turbulence sans récupération de la pression. La vitesse v_j du jet à la sortie du canal d'anche s'écrit dans ce cas :

$$v_j = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}, \tag{1.4}$$

où ρ est masse volumique de l'air.

Pour déterminer le débit U entrant dans l'instrument à partir de l'expression (1.4) il nous faut

connaître la section du jet S_j à la sortie du canal d'anche. Si la séparation de l'écoulement est supposée localisée à la sortie du canal d'anche (en réalité la position du point de séparation dépend de la géométrie de la sortie du canal d'anche [51]), la section du jet est proportionnelle à la hauteur $(y + H)$ du canal. Le plus simple est de considérer que la section du jet est directement égale à la section transverse du canal d'anche, dans ce cas S_j s'écrit :

$$S_j = (y + H)w, \tag{1.5}$$

où w est la largeur du canal d'anche. Cette proportionnalité entre la section du jet S_j et l'ouverture du canal d'anche $(y + H)$ est mesurée par Dalmont et coll. [30]. Cependant, dans le cas d'un canal court ou pour de grandes ouvertures, un phénomène de *vena-cantracta* peut apparaître (voir [3] section 5.10 et annexes C.3 et C.5). Dans ce cas, la section S_j du jet est inférieure à la section transverse du canal (cf. [44], figure I-5). Ceci a été observé sur la clarinette par mesure Doppler de vitesse et visualisation de l'écoulement [88]. Si nous considérons un bec suffisamment fermé et disposant d'un canal d'anche long, le débit à la sortie du canal peut finalement s'écrire :

$$U = (y + H)w\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) donne l'expression du débit lorsqu'il entre dans le bec. Pour la compléter il faut considérer le cas inverse d'un débit entrant dans la bouche de l'instrumentiste. Ce phénomène est rare numériquement et n'a encore jamais été observé expérimentalement. Il convient cependant de le prendre en compte de façon à avoir une expression la plus générale possible (dans le cadre des hypothèses énoncées précédemment). En admettant que les hypothèses restent valables dans le cas où la différence de pression est inversée, c'est-à-dire que le décollement du fluide est localisé à l'entrée du canal d'anche, l'expression du débit U en fonction de la différence de pression ΔP s'écrit :

$$U = U_a \left(1 + \frac{y}{H}\right)\sqrt{\frac{|\Delta p|}{P_M}}\,\mathrm{sgn}(\Delta P), \tag{1.7}$$

où la grandeur U_a est proportionnelle à un débit et vaut :

$$U_a = wH\sqrt{\frac{2}{\rho}P_M}, \tag{1.8}$$

et où $P_M = K_s/H$ est la valeur de la pression dans la bouche pour laquelle l'anche plaque ; P_M est donc appelée pression de plaquage. Au delà de cette valeur le canal d'anche est fermé (ceci n'a en fait jamais été observé dans [30]) et le débit U devient par conséquent égal à zéro, il vient donc l'expression finale du débit, fonction de la différence de pression ΔP et du déplacement du bout de l'anche y :

$$U = \begin{cases} U_A \left(1 + \dfrac{y}{H}\right)\sqrt{\dfrac{|\Delta P|}{P_M}}\,\mathrm{sgn}(\Delta P) \quad \text{si} \quad y > -H, & \text{(1.9a)} \\ 0 \quad \text{si} \quad y < -H. & \text{(1.9b)} \end{cases}$$

Un exemple de caractéristique non linéaire calculé d'après (1.9) est montré à la figure 1.4.

Dans la suite nous devons connaître le débit total U_{in} entrant dans le résonateur. Le débit

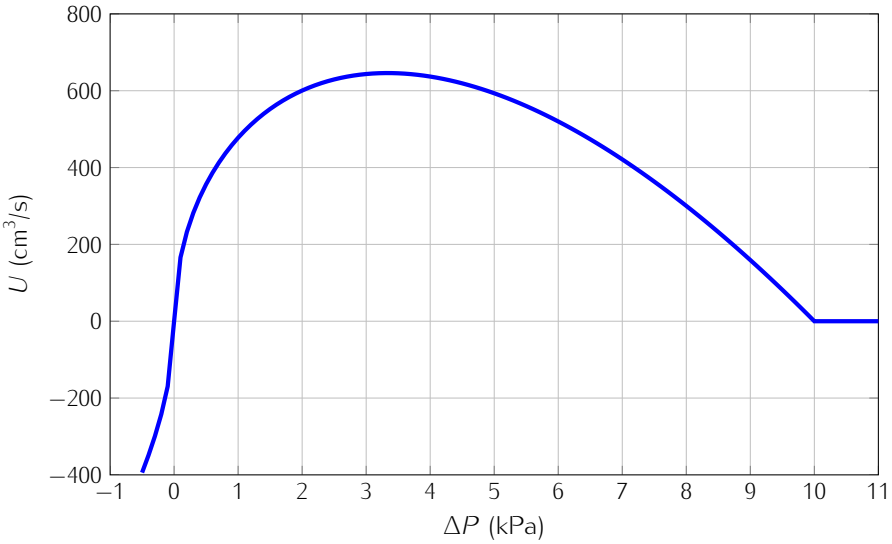


FIGURE 1.4 – Caractéristique non linéaire calculé d'après (1.9). $H = 1$mm, $w = 1.3$cm, $\rho = 1.2$kg/m^3 et $P_M = 10$kPa.

total n'est pas directement le débit U calculé précédemment, il faut lui ajouter le débit U_r créé par l'anche qui agit comme un piston aspirant et repoussant de l'air à sa vitesse. En prenant en compte l'orientation choisie (indiquée en figure 2.1), le débit U_r s'écrit alors :

$$U_r = -S_r \frac{dy}{dt}, \tag{1.10}$$

où S_r est la surface effective de l'anche. Finalement le débit total entrant dans le résonateur de l'instrument a pour expression :

$$U_{in} = U - S_r \frac{dy}{dt}. \tag{1.11}$$

1.2.2 Le résonateur

Le corps d'un instrument à vent est un résonateur acoustique. Dans l'hypothèse d'une propagation linéaire et en ondes planes, son comportement en régime forcé peut être décrit dans le domaine fréquentiel par son impédance d'entrée Z :

$$Z(\omega) = \frac{\hat{P}(\omega)}{\hat{U}_{in}(\omega)}, \tag{1.12}$$

où $\hat{P}(\omega)$ et $\hat{U}_{in}(\omega)$ sont respectivement les transformées de Fourier de $P(t)$ et $U_{in}(t)$. Dans le domaine temporel l'expression (1.12) s'écrit :

$$U_{in}(t) = [h * P](t), \tag{1.13}$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du résonateur, transformée de Fourier inverse de l'admittance d'entrée $Y(\omega)$ (inverse de l'impédance d'entrée). Il est souvent plus commode de travailler avec la variable U qui, à partir des équations (1.11) et(1.13), s'écrit :

$$U(t) = [h * P](t) + S_r \frac{dy}{dt}. \tag{1.14}$$

1.2.3 Modèles adimensionnés d'un instrument à anche simple

Modèle à trois équations. Les équations (1.1), (1.9) et (1.14) forment un système de trois équations à trois inconnues (y, P et U) modélisant le comportement d'un instrument de musique à anche simple. Les paramètres de contrôle du modèle étant la pression dans la bouche P_m et la force d'appui de la lèvre du musicien sur l'anche, reliée au débit U_a. Pour étudier ce modèle il est judicieux de le réécrire en variables adimensionnées [58, 26]. Les déplacements sont adimensionnés par l'ouverture au repos du bec H, les pressions par la pression de plaquage de l'anche P_M et les débits par P_M/Z_c, où $Z_c = \rho c/S$ est l'impédance caractéristique du résonateur :

$$\begin{array}{lcl} \Delta p = \Delta P/P_M & ; & p = P/P_M \\ u = Z_c\, U/P_M & ; & \gamma = P_m/P_M \\ z = y/H + \gamma & ; & \zeta = Z_c\, U_A/P_M. \end{array} \tag{1.15}$$

En utilisant les variables adimensionnées définies par (1.15), le système formé des équations (1.1), (1.9) et (1.14) s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} u = [h * p] + \dfrac{Z_c H S_r}{p_M} \dfrac{dz}{dt} & \text{(1.16a)} \\ \dfrac{1}{\omega_r^2} \dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{q_r}{\omega_r} \dfrac{dz}{dt} + z = p & \text{(1.16b)} \\ u = \zeta(1 + z - \gamma)\sqrt{|\gamma - p|}\, \mathrm{sgn}(\gamma - p) \text{ si } 1 + z - \gamma \geqslant 0 & \text{(1.16c)} \\ u = 0 \text{ si } 1 + z - \gamma \leqslant 0 \end{cases}$$

Le modèle précédent est appelé communément "modèle à 3 équations". Les variables de sortie sont p, u et z et les paramètres de contrôle sont γ et ζ.

Modèle à deux équations. Comme il a déjà été mentionné au paragraphe 1.2.1, la fréquence du registre fondamental des notes jouées par un instrument à anche simple comme la clarinette ou le saxophone est toujours inférieure à la fréquence de résonance f_r de l'anche. Ceci permet de s'affranchir de la dynamique de l'anche. Dans ce cas, en notant que $p_M = K_s H$, les équations (1.3) et (1.9) s'écrivent respectivement :

$$y = -H \frac{\Delta p}{P_M}, \tag{1.17}$$

et

$$u = \begin{cases} U_A \left(1 + \dfrac{\Delta P}{P_M}\right) \sqrt{\dfrac{|\Delta P|}{P_M}}\, \mathrm{sgn}(\Delta p) \text{ si } |\Delta P| < P_M & \text{(1.18a)} \\ 0 \text{ si } \Delta P > P_M. & \text{(1.18b)} \end{cases}$$

Arrêtons-nous un moment sur l'équation (1.18). Elle indique que la caractéristique non linéaire est à dérivée discontinue en $\Delta P = P_M$ ce qui d'un point de vue physique n'est pas tout à fait

satisfaisant. Cependant, les résultats expérimentaux [30, 28] confirment la partie de la courbe correspondant à l'anche non battante ($\Delta P < P_M$).

Pour le cas d'un tuyau cylindrique, le débit U_r créé par l'anche est supposé avoir pour effet une simple correction de longueur du résonateur qui est ajoutée à la longueur totale [26]. L'équation (1.16a) du résonateur s'écrit dans ce cas :

$$U(t) = [h * P](t). \tag{1.19}$$

Les équations (1.18) et (1.19) constituent le "modèle à 2 équations". En variables adimensionnées il s'écrit :

$$\begin{cases} u = [h * p] & \text{(1.20a)} \\ u = F(p) = \zeta(1 + p - \gamma)\sqrt{|\gamma - p|}\,\mathrm{sgn}(\gamma - p) \text{ si } |\gamma - p| \leqslant 1 & \text{(1.20b)} \\ u = 0 \text{ si } \gamma - p \geqslant 1. & \text{(1.20c)} \end{cases}$$

La figure 2.2(a) représente la fonction F pour les paramètres de contrôle $\gamma = 0.42$ et $\zeta = 0.6$.

Représentation en onde aller et onde retour. La solution générale de l'équation d'onde (ou de d'Alembert), qui régit la propagation des ondes acoustiques (pression et débit) dans le résonateur de la clarinette, s'exprime (en supposant une propagation à une dimension) sous la forme d'une onde se propageant vers la droite, l'onde aller, et d'une onde se propageant vers la gauche, l'onde retour.

Le support temporel de la réponse impulsionnelle $h(t)$ est long, ce qui peut poser des problèmes si l'on veut résoudre numériquement le système. Pour remédier à ce problème il est judicieux de passer à la représentation en onde de pression aller p^+ et onde de pression retour p^- [81, 69] plutôt que celle en pression p et débit u. Comme nous travaillons avec des variables adimensionnées, les ondes aller et retour sont définies ainsi :

$$p = p^+ + p^- \quad ; \quad u = p^+ - p^-, \tag{1.21}$$

soit,

$$p^+ = \frac{1}{2}(p + u) \quad ; \quad p^- = \frac{1}{2}(p - u). \tag{1.22}$$

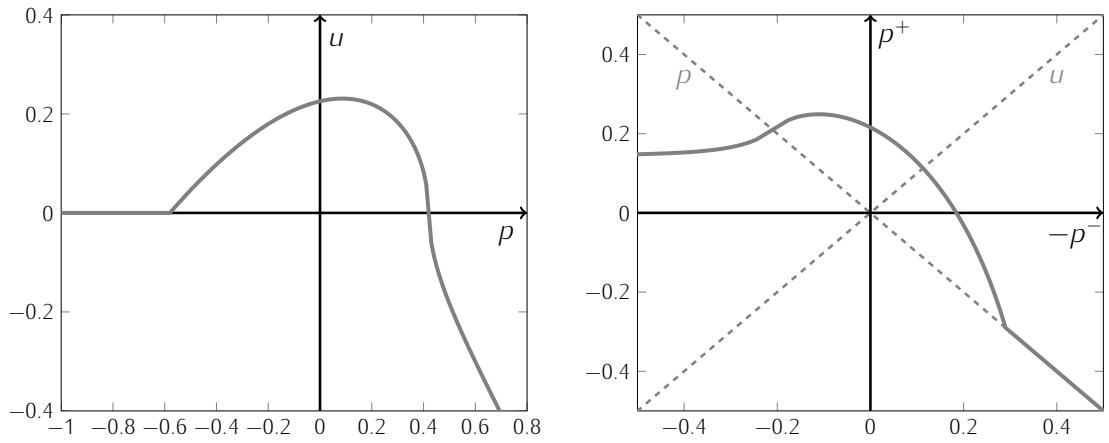
Dans cette représentation l'équation du résonateur (1.20a) devient :

$$p^-(t) = \left[r * p^+\right](t), \tag{1.23}$$

où $r(t)$ est la fonction de réflexion du résonateur qui n'est autre que la transformée de Fourier inverse du coefficient de réflexion $R(\omega)$, défini par :

$$\hat{P}^-(\omega) = R(\omega)\hat{P}^+(\omega). \tag{1.24}$$

Quant à la relation non linéaire (A.3b), elle devient :



(a) Fonction F (b) Fonction G

FIGURE 1.5 – Représentation de la caractéristique non linéaire en variables $[p, u]$ (a) et $[p^+, p^-]$ (b) avec comme paramètres de contrôle $\gamma = 0.42$ et $\zeta = 0.6$.

$$p^+ = G(-p^-). \tag{1.25}$$

La fonction G est obtenue par rotation de 45° de la caractéristique non linéaire F [64]. Il est aussi possible d'obtenir une expression analytique de la fonction G. L'obtention de cette expression analytique repose sur le changement de variable $X = \gamma - p^+ - p^-$ et $Y = \gamma - 2p^-$, et sur la résolution d'une équation du troisième degré (cf. Annexe A de [86]). En utilisant les variables p^+ et p^- le modèle à deux équations devient :

$$\begin{cases} p^- = [r * p^+] & \text{(1.26a)} \\ p^+ = G(-p^-) & \text{(1.26b)} \end{cases}$$

La figure 2.2(b) représente la fonction G pour les paramètres de contrôle $\gamma = 0.42$ et $\zeta = 0.6$.

1.2.4 Modèle de "Raman" et carte itérée

Le modèle dit "de Raman" (pour la clarinette [29]) est l'un des modèles les plus simples d'instrument à anche. Il tient son nom de l'analogie avec le modèle de corde frottée proposé par le physicien indien C. V. Raman [77].

Dans un instrument de type clarinette, deux types de pertes sont à considérer : les pertes visco-thermiques à l'intérieur du résonateur et les pertes par rayonnement à l'extrémité de ce dernier. Aux basses fréquences les pertes visco-thermiques sont prépondérantes et elles sont, dans le modèle, prises en compte dans la fonction de réflexion ; dans [76] Polack *et al.* proposent une expression réaliste de la fonction de réflexion d'un tube cylindrique.

Le modèle de "Raman" fait l'hypothèse d'un résonateur cylindrique dont l'impédance est nulle à l'extrémité (réflexion totale avec changement de signe pour la pression, ce qui est à peu près valable aux basses fréquences) et considère que les pertes visco-thermiques à l'intérieur du résonateur sont indépendantes de la fréquence. Dans ce cas la fonction de réflexion $r(t)$ correspond à un retard τ, dû à un aller-retour dans le résonateur, multiplié par un coefficient réel positif λ qui traduit la diminution d'amplitude due aux pertes :

$$r(t) = -\lambda\delta(t-\tau), \tag{1.27}$$

où δ est la distribution de Dirac et $\tau = 2l/c$ est le temps que met une onde de célérité c à faire un aller-retour dans le cylindre de longueur l. Le paramètre de perte λ, dont une valeur typique est 0.9, a pour expression :

$$\lambda = e^{-2\alpha l}, \tag{1.28}$$

où α est le coefficient d'amortissement [57] :

$$\alpha \approx 3 \cdot 10^{-5}\sqrt{f}/R. \qquad \text{(unité MKS)} \tag{1.29}$$

R est le rayon du résonateur et f est la fréquence. Dans le cas du modèle de Raman le coefficient d'amortissement α est constant et communément calculé à la fréquence de jeu [28].

Dans ce cas l'équation (1.23) s'écrit simplement :

$$p^-(t) = -\lambda p^+(t-\tau), \tag{1.30}$$

En remplaçant dans (1.25), on obtient :

$$p^+(t) = G\left(\lambda p^+(t-\tau)\right) = f\left(p^+(t-\tau)\right), \tag{1.31}$$

qui, en discrétisant à tous les intervalles τ et en notant $p^+(n\tau) = p_n^+$, s'écrit :

$$p_n^+ = f\left(p_{n-1}^+\right). \tag{1.32}$$

L'expression de la fonction f, obtenue dans [86], est rappelée dans l'annexe A de ce manuscrit.

Le modèle de clarinette de "Raman" se simplifie donc en la simple équation aux différences (1.32) qui décrit l'évolution au cours du temps de la variable p^+ et qui peut être résolue par un processus itératif appelé "carte itérée". Connaissant p^+, il est ensuite possible d'obtenir p^- par (1.30) puis p et u par (1.21). Dans la suite, pour alléger la notation, la variable p^+ est notée x :

$$x_n = f\left(x_{n-1}\right). \tag{1.33}$$

Nous appellerons *orbite* de x, la courbe représentant les valeurs successives prises par la variable x lors de son évolution régie par l'équation (1.33).

Remarque. Le modèle communément appelé "modèle sans pertes" peut être obtenu simplement en posant $\lambda = 1$ ce qui signifie que les pertes dans le résonateur sont elles aussi ignorées. Poser $\lambda = 1$ permet d'alléger grandement les calculs. Dans la suite, les rappels sur l'étude analytique du comportement statique du modèle sont valables quelle que soit la valeur de λ. Cependant, dans un souci de simplicité, certaines grandeurs ne seront explicitées que pour le modèle sans pertes.

1.3 Étude analytique *statique* du modèle de "Raman"

La dénomination *statique* est utilisée dans ce mémoire pour les études (analytiques ou expérimentales) qui considèrent des paramètres de contrôle constants. Elle sera opposée dans la

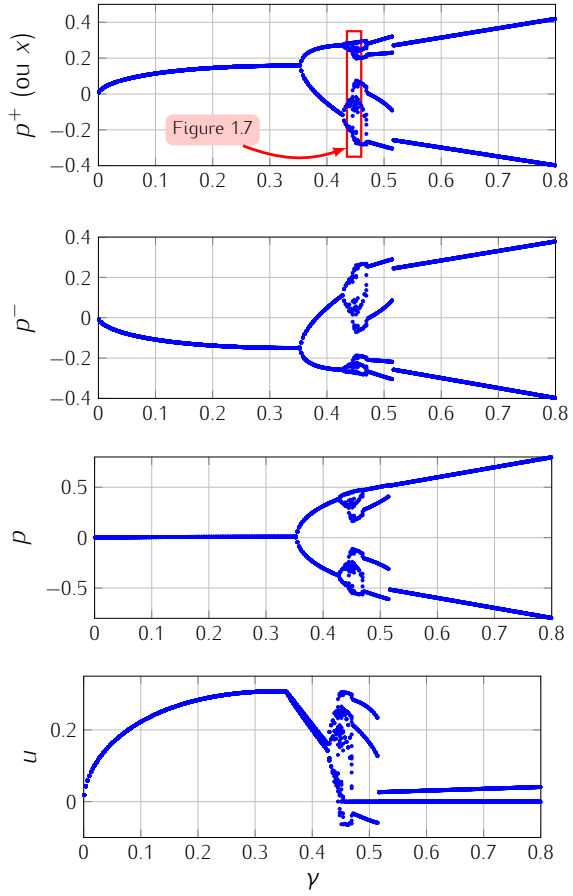


FIGURE 1.6 – Diagrammes de bifurcation *statiques* du modèle du clarinette de Raman (équation (1.33)) pour $\lambda = 0.95$ et $\zeta = 0.8$. De haut en bas : diagramme en p^+ (ou x), p^-, p et u. Ces diagrammes sont obtenus en simulant 400 itérations de l'équation (1.33) puis en prenant les 20 dernières valeurs des orbites obtenues. Cette méthode est tirée de [86] où elle est aussi vérifiée.

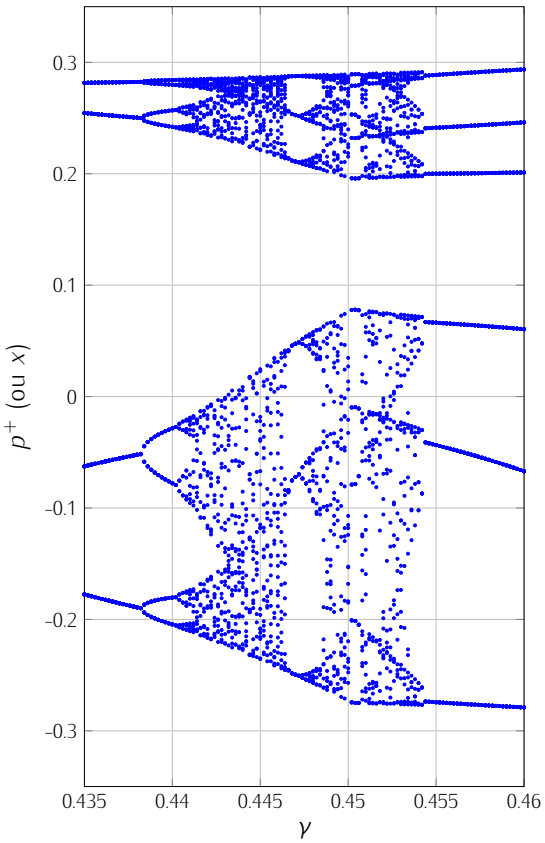


FIGURE 1.7 – Diagramme de bifurcation *statique* de modèle du clarinette de Raman (équation (1.33)) pour $\lambda = 0.95$ et $\zeta = 0.8$. Diagramme correspondant à la variable p^+ (ou x) tracé entre $\gamma = 0.435$ et $\gamma = 0.46$. Le diagramme est obtenu en simulant 1000 itérations de l'équation (1.33) puis en prenant les 40 dernières valeurs des orbites obtenues.

suite aux études *dynamiques* qui prennent en compte des paramètres de contrôle évoluant dans le temps. Nous rappelons et parfois étendons les résultats de l'étude statique du modèle de Raman [58, 29, 60] (en nous intéressant à l'influence du paramètre γ), qui permettent d'appréhender plus facilement l'étude dynamique. Nous illustrons ces résultats grâce à des simulations numériques issues de programmes réalisés pendant la thèse.

1.3.1 Diagramme de bifurcation *statique*

Le diagramme de bifurcation statique représente, en fonction de la valeur de γ, l'amplitude du régime établi de la variable considérée. Il est d'ailleurs important d'insister sur le caractère statique du diagramme de bifurcation statique obtenu en choisissant un paramètre de contrôle constant puis en laissant le système atteindre son régime établi et en répétant l'opération pour d'autres valeurs constantes du paramètre de contrôle.

Un exemple de diagramme de bifurcation statique du modèle de Raman, avec $\lambda = 0.95$ et $\zeta = 0.8$, est présenté en figure 1.6. Le diagramme est tracé pour les variables p^+ (ou x), p^-, p et u.

Une description détaillée de ce diagramme de bifurcation statique est fournie par Taillard *et al.* [86]. Nous en rappelons ici les principales conclusions. Entre $\gamma = 0$ et $\gamma \approx 0.44$ on observe le chemin classique de doublements de période successifs menant finalement au chaos : la suite est d'abord convergente puis tend vers un 2-cycle (c-à-d que la suite finit par osciller entre 2 valeurs). Ensuite des doublements de période font tendre la suite vers des 4-cycle, 8-cycle ... etc jusqu'au chaos. On parle de cascade "sous-harmanique" [59].

L'existence de régimes chaotiques est favorisée par les hautes valeurs de λ et ζ, comme c'est le cas dans la figure 1.6. Dans l'intervalle chaotique un phénomène de "cascade inverse" [17, 18] apparaît : intermittence entre des intervalles où le comportement du système est chaotique et des "fenêtres de périodicité" [17, 18] dans lesquelles des régimes périodiques sont observés. La figure 1.7 représente le diagramme de bifurcation statique pour la variable p^+ (ou x) avec un zoom effectué au niveau de la région chaotique. Des "fenêtres de périodicité" correspondant à des régimes de période 6 apparaissent aux alentours de $\gamma = 0.447$, suivi par un 12-cycle. Vers $\gamma = 0.4505$ un régime dont la période semble être 10 est visible sur la figure 1.7, il n'est pas mentionné dans [86]. Ensuite, lorsque γ augmente le chaos disparait et une cascade de doublements de fréquence apparaît. Ce phénomène de doublement de fréquence est une spécificité du modèle de clarinette et ne doit pas être confondu avec le phénomène de "cascade inverse" évoqué précédemment. Dans [86], les auteurs appellent ce phonème "backward cascade" pour le différencier de "inverse cascade". Nous pouvons également observer sur la figure 1.6(d) l'apparition du régime d'anche battante [74, 29, 26] correspondant à l'annulation d'une des branches du diagramme en débit u vers $\gamma = 0.45$.

Nous n'irons pas plus loin dans la description du diagramme de bifurcation statique qui est, nous le répétons, détaillé dans [86]. Dans le cadre du travail présenté dans ce mémoire, c'est le diagramme correspondant à la variable x qui va surtout nous intéresser. De plus, puisque nous nous focalisons sur le passage d'un régime non oscillant à un régime oscillant, seule une partie très restreinte de ce diagramme demande à être étudiée de façon précise : la courbe des points fixes de la fonction d'itération f, qui sera notée $x^*(\gamma)$, et le seuil d'oscillation statique γ_{st} ("st" pour *static threshold*, traduction anglaise de *seuil statique*).

1.3.2 Courbe des points fixes et seuil d'oscillation *statique*

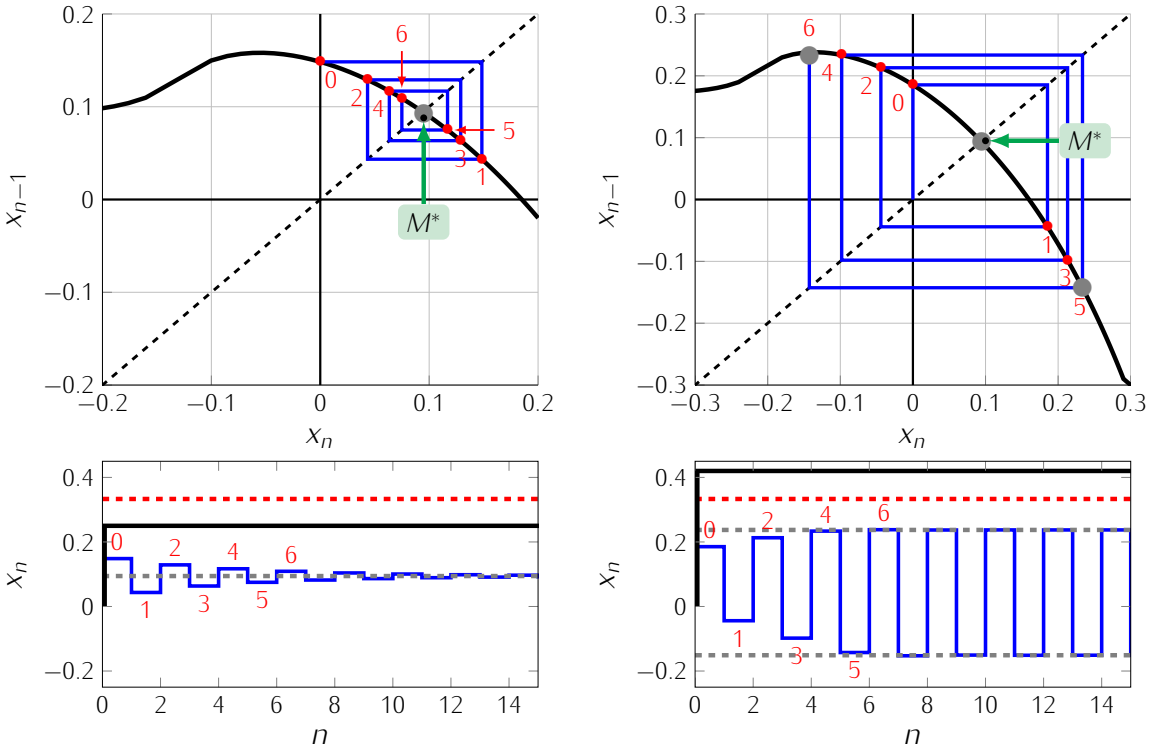
Courbe des points fixes de la fonction d'itération. Sur le diagramme de bifurcation statique correspondant à la variable x (cf. figure 1.6), entre $\gamma = 0$ et $\gamma = 0.353$, on remarque que l'orbite de la suite x_n est convergente. Il faut avoir à l'esprit que la borne supérieure de cet intervalle (ici $\gamma = 0.353$) dépend de la valeur du paramètre de perte λ ($\lambda = 0.95$ dans l'exemple de la figure 1.6). Dans ce cas le régime établi correspond à $x_{n+1} = x_n$; la limite de la suite correspond donc aux points fixes $x^*(\gamma)$ de la fonction d'itération f solution de :

$$x^* = f(x^*)\,. \tag{1.34}$$

Ce régime est souvent appelé "régime statique" dans la littérature où le terme "statique" signifie que le régime est non-oscillant. Dans ce mémoire nous l'appellerons *régime statique non-oscillant*, où le terme "statique" se réfère maintenant au fait que le paramètre de contrôle γ est constant.

L'équation (1.34) donne la définition des points fixes de la fonction f. Dans les faits, étant donnée l'expression complexe de la fonction f, l'expression de $x^*(\gamma)$ est déduite de celle de $p^*(\gamma)$ qui représente le régime statique non-oscillant de la variable p. En utilisant les équations (A.3b) et (1.22), il vient :

$$x^*(\gamma) = \frac{1}{2}\left[p^*(\gamma) + F\left(p^*(\gamma)\right)\right]. \tag{1.35}$$



(a) $\gamma = 0.26$, $\zeta = 0.5$ (b) $\gamma = 0.42$, $\zeta = 0.5$

FIGURE 1.8 – En haut : fonction f (——), fonction identité (- - -) et principe de résolution graphique de (1.33). En bas : (——) profil temporel de x_n, (——) profil temporel de γ de type Heaviside, (- - -) seuil statique d'oscillation γ_{st}, (- - -) amplitude du régime établi. $\zeta = 0.5$ et $\lambda = 1$. (a) $\gamma = 0.26 < \gamma_{st}$, le régime établi est non oscillant et (b) $\gamma = 0.42 > \gamma_{st}$, le régime établi oscillant à deux états.

Écrite en variable p et u, l'équation (1.30) devient :

$$p_n - F(p_n) = -\lambda\,(p_{n-1} + F(p_{n-1}))\,. \tag{1.36}$$

Le régime statique non-oscillant $p^*(\gamma)$ est donc solution de :

$$p^* - F(p^*) = -\lambda\,(p^* + F(p^*))\,. \tag{1.37}$$

L'équation (1.37) se résout facilement dans le cas sans pertes où $\lambda = 1$. Dans ce cas, $p^* = 0$ et $x^*(\gamma) = \frac{\zeta}{2}(1-\gamma)\sqrt{\gamma}$. Dans le cas général, si $\gamma \neq 1$, il faut résoudre l'équation de troisième degré suivante :

$$p^{*3} + ap^{*2} + bp + c = 0, \tag{1.38}$$

où,

$$a = \left(\frac{\Lambda}{\zeta}\right)^2 - 3\gamma + 2 \quad ; \quad b = (1-\gamma)(1-3\gamma) \quad ; \quad c = -\gamma(1-\gamma)^2 \quad ; \quad \Lambda = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}, \tag{1.39}$$

L'expression de la caractéristique non linéaire F est donnée par l'équation (1.20) pour un débit positif une anche non battante :

$$F(p) = \zeta(1 + p - \gamma)\sqrt{\gamma - p}. \tag{1.40}$$

Les coefficients a, b, c et Λ proviennent du développement de l'équation(1.37) avec l'expression de la fonction F en anche non battante et en débit positif. L'équation (1.38) est résolue par la méthode de Cardan [1]. Parmi les trois solutions possibles pour un discriminant positif, la seule qui reste comprise entre 0 et 1 est :

$$p^*(\gamma) = 2\sqrt{\frac{-\Sigma}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-\Pi}{2}\sqrt{\frac{-27}{\Sigma^3}}\right)\right) - \frac{b}{3}, \tag{1.41}$$

avec,

$$\Sigma = -\frac{a^2}{3} + b \qquad ; \qquad \Pi = \frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} + c. \tag{1.42}$$

Connaissant p^* par (1.41) il est possible d'obtenir l'expression de x^* en utilisant les équations (1.35), (1.20b) et (1.20c).

Seuil d'oscillation statique. Rappelons que dans une situation statique la pression dans la bouche γ est supposée constante. Toujours sur le diagramme de bifurcation statique représenté aux figures 1.6 et 1.7, lorsque γ dépasse 0.353, la première bifurcation à doublement de période a lieu (ou bifurcation *flip* [61], voir les définitions 1.3.1 et 1.3.2 ci-dessous). Elle correspond à l'instabilité du *régime statique non-oscillant*. Après la bifurcation, le régime permanent devient périodique à deux états (un 2-cycle de période 2 ou 2τ si l'on redimensionne le temps). Dans les exemples de la figure 1.6 la valeur 0.353 correspond donc au *seuil statique d'oscillation* γ_{st}. La solution sous forme de signal carré (ou mouvement dit "de Helmholtz" [89]) est appelée *régime statique oscillant*.

Avant de continuer, arrêtons-nous sur les définitions suivantes, tirées de [61].

Soit le système :

$$x_n = f\left(x_{n-1}\right), \tag{1.43}$$

Si x^* et f' sont respectivement le point fixe et la dérivée de la fonction d'itération f, alors :

Définition 1.3.1. La bifurcation associée à $f'(x^*) = 1$, est appelée bifurcation *nœud-col*. En anglais, on parle de bifurcation, *saddle-node*, *tangent* ou *fold*.

Définition 1.3.2. La bifurcation associée à $f'(x^*) = -1$, est appelée bifurcation à *doublement de période*. En anglais, on parle de bifurcation *flip*.

La figure 1.8 montre deux exemples de résolution graphique de l'équation (1.33). Dans ces exemples le profil temporel de γ est de type Heaviside, *c.-à-d.* à $n = 0^-$ la pression dans la bouche est nulle et à $n = 0^+$ elle est non nulle. Le fait que γ passe brutalement de 0 à une valeur non nulle implique que l'onde retour p^- est nécessairement nulle pendant la première itération. Ceci impose la valeur initiale de x : $x_0 = f(0)$. Connaissant x_0, on déduit $x_1 = f(x_0)$ et ainsi de suite. La figure 1.8(a) montre un exemple où le système tend vers un régime statique non oscillant (*i.e.* $\gamma < \gamma_{st}$). Dans ce cas les itérations successives se rapprochent du point $M^* = (x^*, x^*)$ situé à l'intersection de la droite identité et de la courbe représentant la fonction f. La figure 1.8(b) montre quant à elle un exemple où le système tend vers un régime statique oscillant (*i.e.* $\gamma > \gamma_{st}$). Dans

cette situation, on voit les itérations s'écarter du point fixe de f puis saturer vers un cycle limite à deux valeurs correspondant aux points fixes de $f \circ f(x)$.

Lorsque $\gamma < \gamma_{st}$, le coefficient directeur de la tangente à f au point M^* est supérieur à -1 tandis que lorsque $\gamma > \gamma_{st}$ le coefficient directeur, toujours au point M^*, est inférieur à -1. Ceci illustre la condition de stabilité du point fixe x^* pour une bifurcation *à doublement de période* [61] :

$$f'(x^*) > -1, \tag{1.44}$$

où f' est la dérivée première de f. La condition de stabilité du point fixe de f permet d'obtenir l'expression du seuil d'oscillation statique. Comme pour l'obtention de l'expression de la courbe des points fixes, la complexité de la fonction f rend l'équation (1.44) difficile à manipuler directement. Nous utilisons donc la relation qui lie les dérivées premières de f et F [59] :

$$f' = \lambda \frac{F' + 1}{F' - 1}. \tag{1.45}$$

En utilisant la relation (1.45), la condition de stabilité (1.44) s'écrit maintenant :

$$\lambda \frac{F'(p^*) + 1}{F'(p^*) - 1} > -1. \tag{1.46}$$

La développement de la condition de stabilité (1.44) ne permet pas d'obtenir explicitement l'expression du seuil statique d'oscillation. Il est cependant possible d'obtenir l'expression de la différence $\Delta p_{st} = \gamma_{st} - p^*(\gamma_{st})$:

$$\Delta p_{st} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\zeta\Lambda} + \sqrt{3 + \frac{1}{(\zeta\Lambda)^2}}\right)^2. \tag{1.47}$$

Pour le modèle sans pertes, comme $p^* = 0$ et $1/\Lambda = 0$, on obtient facilement :

$$\gamma_{st} = \frac{1}{3}. \tag{1.48}$$

Si $\lambda \neq 1$, en admettant que la prise en compte des pertes n'affecte que très peu la valeur de p^* (*i.e.* $p^* \approx 0$) on obtient l'expression approchée du seuil statique d'oscillation, obtenue en 2000 par Kergomard *et al.* [60] :

$$\gamma_{st} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\zeta\Lambda} + \sqrt{3 + \frac{1}{(\zeta\Lambda)^2}}\right)^2. \tag{1.49}$$

L'expression (1.49) est comparée à l'expérience par Dalmont *et al.* en 2007 [28]. De plus, l'écart entre cette expression et un seuil statique calculé numériquement est relativement faible, cependant, nous avons besoin dans la suite (voir section 3.3.2) d'une expression plus précise. Cette expression est obtenue à l'aide d'une méthode perturbative détaillée dans l'annexe B (cf. équation B.18) de ce manuscrit.

1.3.3 Transitoire

1.3.3.1 Début du transitoire

Dans la section précédente nous avons vu que pour un profil de pression dans la bouche de type Heaviside la valeur initiale de la variable x était fixée à $x_0 = f(0)$. Dans ce cas (si $\gamma > \gamma_{st}$, cf. figure 1.8(b)), un certain nombre d'itérations (6 dans le cas particulier de la figure 1.9(a)) est nécessaire pour que le système s'approche du régime statique oscillant. Ce nombre d'itérations correspond à la durée du transitoire, défini ici de manière qualitative.

Nous repérons l'écart au point fixe x^* par la variable w :

$$w_n = x_n - x^*. \tag{1.50}$$

Si $x_0 = f(0)$ (comme dans l'exemple des figures 1.8(b) et 1.9(a)) alors $w_0 = f(0) - x^*(\gamma = 0.42) \approx 0.09$, repéré en orange sur la figure 1.9(a). Si l'écart initial au point fixe est arbitrairement réduit alors le nombre d'itérations pour arriver au régime statique oscillant augmente ; environ 22 si $w_0 = 10^{-2}$ (cf. figure 1.9(a)).

L'évolution de l'orbite x, partant à proximité du point fixe, peut être décrite analytiquement en effectuant un développement limité de la fonction f autour de x^*. L'équation (1.33) ainsi linéarisée devient donc :

$$x_n \approx f(x^*) + (x_{n-1} - x^*) f'(x^*). \tag{1.51}$$

En utilisant les équations (1.34) et (1.50), l'équation (1.51) s'écrit finalement :

$$w_n \approx w_{n-1} f'(x^*), \tag{1.52}$$

dont la solution est une fonction exponentielle :

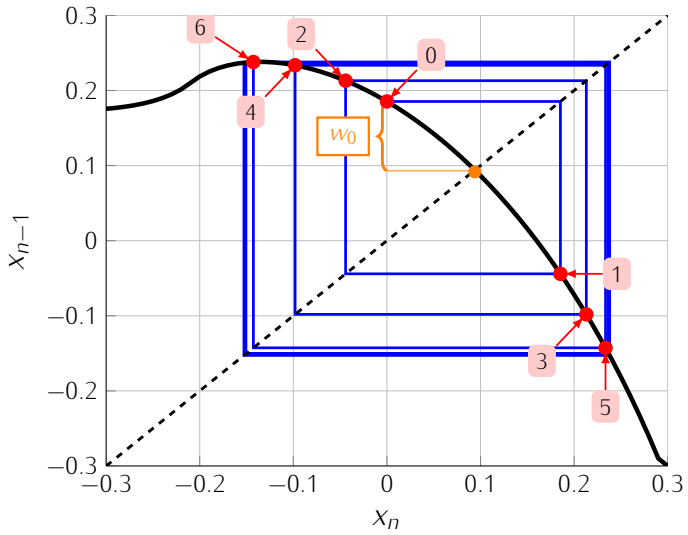
$$w_n \approx w_0 \left[f'(x^*)\right]^n. \tag{1.53}$$

L'amplitude des oscillations de x (toujours lorsque γ est supérieur au seuil d'oscillation statique) augmente donc exponentiellement, ce qui est un résultat bien connu [26]. Ce que nous voulons montrer dans cette section, et qui nous servira à mieux appréhender certains résultats à venir (notamment au chapitre 4), c'est que plus la condition initiale x_0 est proche du point fixe, plus le temps nécessaire pour que l'amplitude des oscillations ne sorte du voisinage du point fixe est important, rendant ainsi valable l'équation (1.53) sur une grande partie du transitoire. Ceci est illustré aux figures 1.10 et 1.11.

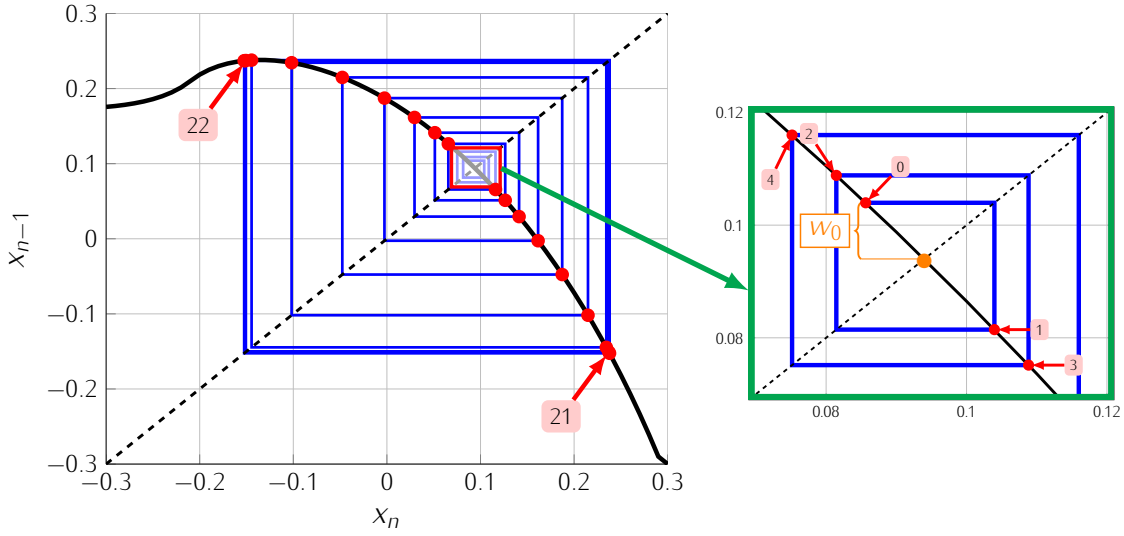
La figure 1.10 montre l'évolution de la variable x, solution de (1.51), pour différentes valeurs de w_0 de haut en bas : $w_0 \approx 0.09$, $w_0 = 10^{-2}$, $w_0 = 10^{-5}$ et $w_0 = 10^{-10}$, à laquelle est superposée l'enveloppe théorique déduite de l'équation (1.53). L'enveloppe, en ligne pointillée rouge sur la figure, est obtenue à partir des équations (1.50) et (1.53) par $x^* \pm \left|w_0 \left[f'(x^*)\right]^n\right|$. Nous pouvons donc observer d'une part l'allongement du transitoire lorsque w_0 diminue. D'autre part, plus w_0 est petit et plus l'enveloppe théorique est valable sur une large partie du transitoire, lorsque ce dernier est défini à partir de $n = 0$. Ce résultat est confirmé à la figure 1.11 qui montre l'enveloppe de w_n (i.e. $|w_n|$), simulée (ligne bleue) et théorique (ligne pointillée rouge) en utilisant une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées.

1.3.3.2 Durée du transitoire

Il est clair, en observant les figures 1.10 et 1.11, que la durée du transitoire est d'autant plus grande que la variable x est initialisée proche du point fixe x^*. Cependant, si l'on veut se rapprocher d'un contexte musical, nous constatons que lorsque w_0 est très petit (cf. figure 1.10(c) et 1.10(d)), bien que l'amplitude augmente exponentiellement (cf. figure 1.11), il faut attendre un certain temps pour qu'elle atteigne une valeur "audible" ou "macroscopique". Défini à partir de $n = 0$, le transitoire peut donc commencer longtemps avant qu'il ne soit visible. Prenons maintenant le début du transitoire non plus à $n = 0$, mais à partir du moment où l'amplitude de la pression p dans le bec (que nous pouvons reconstruire à partir de x en utilisant les équations (1.21) et (1.30)) atteint une valeur appréciable, par exemple 10% de l'amplitude du régime établi p_∞, définissant ainsi un temps $n_{0.1}$. De plus, en choisissant un critère pour la fin du transitoire, soit 90% de l'amplitude du régime établi, en définissant donc le temps $n_{0.9}$, la durée du transitoire (ou temps de montée)



(a) $w_0 \approx 0.09$



(b) $w_0 = 10^{-2}$

FIGURE 1.9 – Résolution graphique de l'équation (1.33) pour $\gamma = 0.42$, $\zeta = 0.5$ et $\lambda = 1$. (——) Fonction d'itération G et (- - -) fonction identité d'équation $y = x$. (a) $w_0 = f(0) - x^* \approx 0.09$ et (b) $w_0 = 0.01$.

$N_{0.1/0.9}$ est :

$$N_{0.1/0.9} = n_{0.9} - n_{0.1}. \tag{1.54}$$

Si l'amplitude initiale $p_0 = x_0 + p_0^-$ est inférieure à $0.1p_\infty$, ce qui est le cas dans les exemples précédents lorsque $w_0 = 10^{-2}$, $w_0 = 10^{-5}$ et $w_0 = 10^{-10}$, alors la durée du transitoire, définie par l'équation (1.54), est indépendante de la valeur initiale w_0.

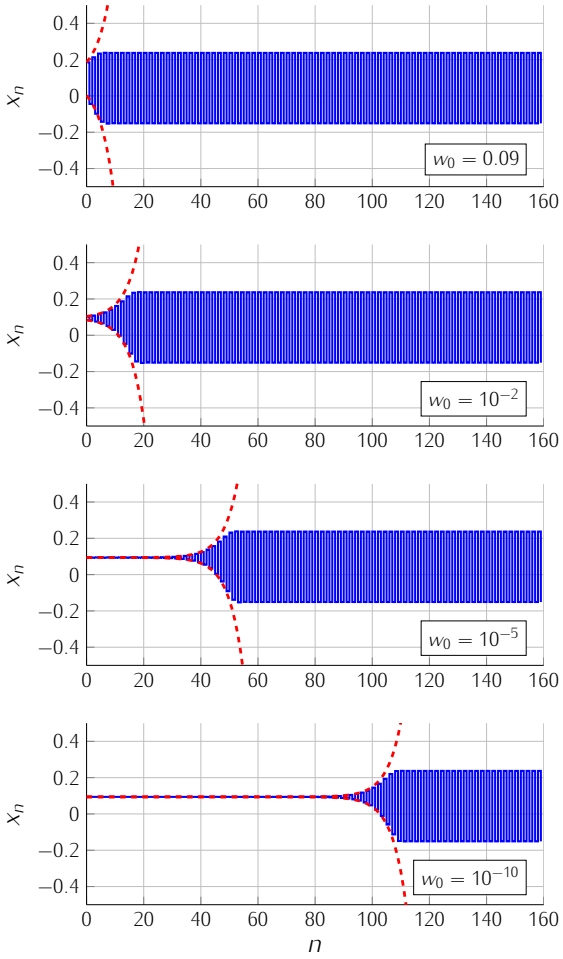


FIGURE 1.10 – (——) Évolution temporelle de la variable x, solution de (1.33), pour différentes valeurs de w_0. De haut en bas : $w_0 \approx 0.09$, $w_0 = 10^{-2}$, $w_0 = 10^{-5}$ and $w_0 = 10^{-10}$. (- - -) Enveloppe théorique déduite de la fonction (1.53). $\gamma = 0.42$, $\zeta = 0.5$ et $\lambda = 1$.

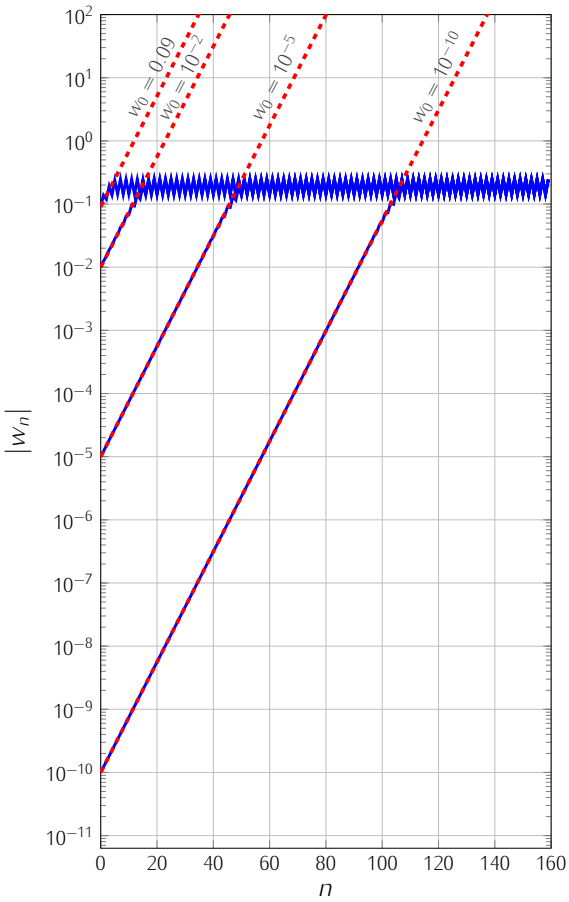


FIGURE 1.11 – Enveloppe de w définie par (1.50). (——) Enveloppe calculée à partir de la solution numérique de (1.33) et (- - -) enveloppe théorique déduite de la fonction (1.53). Une échelle logarithmique est utilisée pour l'axe des ordonnées. $\gamma = 0.42$, $\zeta = 0.5$ et $\lambda = 1$.

La figure 1.12 représente l'enveloppe de la pression p dans le bec (i.e $|p|$, puisque dans un cas sans pertes le régime statique non oscillant de p est nul [26]) reconstruite à partir de la variable x, en utilisant les équations (1.21) et (1.30). La variable x est calculée avec les mêmes paramètres que ceux utilisés dans les exemples des figures 1.10 et 1.11 pour $w_0 = 10^{-2}$, $w_0 = 10^{-5}$ et $w_0 = 10^{-10}$. Pour chacun des trois exemples, $N_{0.1/0.9}$ vaut environ 13 itérations.

Dans la section suivante, les outils mathématiques provenant de la *théorie de la bifurcation dynamique*, qui vont nous permettre d'étudier le comportement du modèle de "Raman" lorsque la pression dans la bouche (i.e. le paramètre γ) varie dans le temps, sont présentés et illustrés sur un

exemple simple de carte itérée : la suite logistique. L'application à la clarinette restant bien sûr l'objectif des chapitres suivants.

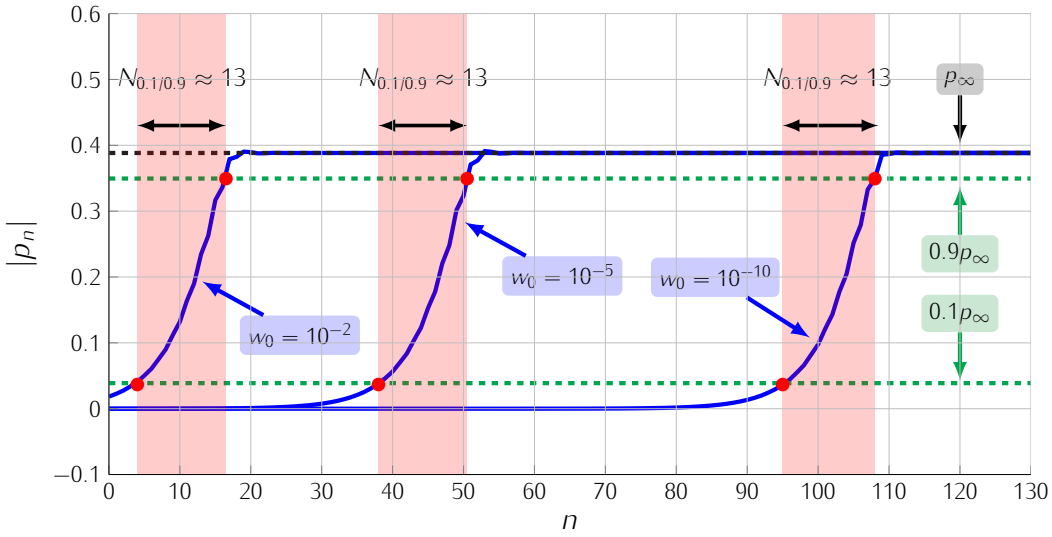


FIGURE 1.12 – Enveloppe temporelle de la pression p dans le bec reconstruite à partir de la variable x (solution de (1.33),) en utilisant les équations (1.21) et (1.30). Le profil de l'onde aller x est obtenu pour $w_0 = 10^{-2}$, $w_0 = 10^{-5}$ et $w_0 = 10^{-10}$. La longueur du transitoire $N_{0.1/0.9}$ définie par l'équation (1.54) est indiquée pour chacune des trois enveloppes. $\gamma = 0.42$, $\zeta = 0.5$ et $\lambda = 1$.

1.4 Outils d'analyse de la théorie de la bifurcation dynamique

1.4.1 Théories de la bifurcation *statique* et de la bifurcation *dynamique*.

En théorie de la bifurcation, les auteurs distinguent la *théorie de la bifurcation statique* et la *théorie de la bifurcation dynamique*.

La théorie de la bifurcation statique est la plus répandue et utilisée dans les études théoriques présentées à la section 1.3 de ce mémoire. Dans une situation statique la définition de la bifurcation est la suivante : à chaque fois que, pour une valeur donnée du paramètre de contrôle - dite *valeur critique* - la solution du système étudié change qualitativement, on dira qu'il y a *bifurcation*. Un point de l'espace des paramètres où survient un tel événement est, par définition, un *point de bifurcation*. Cette définition est tirée de [17]. Seydel [82] (chap. 2 p. 57) fournit une définition plus technique et un peu plus récente du point de bifurcation *statique*, c'est point où le nombre de solutions du système étudié change. Dans le cas de la clarinette, le seuil d'oscillation statique est un point de bifurcation correspondant à la première bifurcation *à doublement de période* du système (1.33). Dans la suite de cette section nous préférons le terme *point de bifurcation*, qui a un caractère plus général.

La théorie de la bifurcation dynamique consiste quant à elle à étudier un système modélisé par les mêmes équations du mouvement, mais où le paramètre de contrôle évolue lentement dans le temps. Dans ce cas, tracer l'évolution du système en fonction du paramètre de contrôle peut être interprété comme un *diagramme de bifurcation dynamique*. La comparaison entre un diagramme *statique* et un diagramme *dynamique* obtenus par simulation, par exemple dans l'introduction de [10] pour la suite logistique ou dans [7] pour le modèle de clarinette, montre que le diagramme de

bifurcation dynamique peut être une bonne approximation du diagramme statique, du moins en ce qui concerne l'amplitude des différents régimes. En revanche, à proximité d'un point de bifurcation, dans le cas dynamique, la bifurcation se voit décalée du *point de bifurcation statique* vers une valeur plus grande appelée *point de bifurcation dynamique* (dans le cas de la clarinette nous parlerons aussi de *seuil dynamique d'oscillation*). La dénomination *point de bifurcation dynamique* est choisie par similarité avec le cas statique, bien qu'il ne corresponde pas un changement qualitatif de la solution du système. Nous présentons plus en détail la définition *point de bifurcation dynamique* à la section 1.4.4.

Cet écart entre les seuils statique et dynamique est connu sous le nom de *retard à la bifurcation*, décrit à la section 1.4.2. Le phénomène de retard à la bifurcation a intéressé beaucoup de physiciens et de mathématiciens dans les années 1985 à 1995. Les actes [14] du colloque organisé en Mars 1990 à Luminy résument bien les découvertes faites sur le sujet pendant cette décennie. Nous souhaitons citer tout particulièrement Fruchard [40, 41] et Baesens [10, 9], références pour le travail théorique présenté dans ce mémoire.

Dans toutes les études présentées dans ce mémoire, la variation du paramètre de contrôle est linéaire et lente dans le temps. Si nous partons d'un système autonome (*i.e.* situation *statique* où le paramètre de contrôle μ est constant) dont l'évolution dans le temps est décrite par l'équation (1.55), le système non autonome (*i.e.* situation *dynamique* où le même système voit son paramètre de contrôle μ évoluer dans le temps) associé est quant à lui représenté par les équations (1.56a) et (1.56b).

Statique

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu)\,. \tag{1.55}$$

Dynamique

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \mu_n) & \text{(1.56a)} \\ \mu_{n+1} = \mu_n + \epsilon. & \text{(1.56b)} \end{cases}$$

Le paramètre ϵ, qui représente le coefficient directeur de la droite μ_n, peut être positif ou négatif. Pour avoir une variation lente du paramètre de contrôle on doit respecter $|\epsilon| \ll 1$. Dans le cas dynamique, l'évolution de la variable x_n tracée en fonction du paramètre de contrôle μ_n constitue un *diagramme de bifurcation dynamique*. Dans le cadre de ce mémoire, seul le cas où ϵ est positif sera étudié en détail. La situation où ϵ est négatif est juste évoquée dans ce chapitre à titre informatif.

La théorie de la bifurcation dynamique fournit des outils d'analyse qui permettent d'étudier un système de type (1.56). Il sont ici appliqués à la suite logistique dont la fonction d'itération est $f(x, \mu) = \mu x(1 - x)$, le système étudié est donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mu_n x_n (1 - x_n) & \text{(1.57a)} \\ \mu_{n+1} = \mu_n + \epsilon. & \text{(1.57b)} \end{cases}$$

Un exemple de diagramme de bifurcation statique (voir la définition au début de la section 1.3.1) et dynamique (avec $\epsilon > 0$ et $\epsilon < 0$) de la suite logistique est montré en figure 1.13.

Le comportement statique de la suite logistique est bien connu [68] : lorsque $0 < \mu < 3$ la suite logistique est convergente, la limite étant donnée par les points fixes de la fonction f. La fonction f étant quadratique les points fixes sont au nombre de deux :

$$x_1^* = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2^* = \frac{\mu - 1}{\mu}. \tag{1.58}$$

La résolution de la condition de stabilité $|f'(x^*)| < 1$ permet de déterminer le domaine d'attraction de chaque point fixe. Si $0 < \mu < 1$ le point fixe $x_1^* = 0$ est attractif et si $1 < \mu < 3$ c'est le point fixe $x_2^* = (\mu - 1)/\mu$ qui est attractif. La valeur $\mu = 1$ est donc le premier point de bifurcation *statique* correspondant à l'échange de stabilité des points fixes de f et à une bifurcation de type *nœud-col* [c]. Ensuite quand μ dépasse 3, les points fixes de f deviennent tous les deux répulsifs. Une seconde bifurcation a donc lieu pour $\mu = 3$, c'est une bifurcation *à doublement de période* (c'est cette bifurcation qui est étudiée dans la suite) où apparaît le premier régime oscillant. Dans ce cas, la suite tend vers un 2-cycle correspondant aux points fixes de $f \circ f(x)$. Ceci est illustré dans le diagramme de bifurcation statique de la suite logistique donné en figure 1.13(a).

1.4.2 Le retard à la bifurcation

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction de ce chapitre, à proximité des points de bifurcation, le diagramme de bifurcation *statique* qui résume l'amplitude des régimes établis en fonction d'un paramètre de contrôle constant, diffère du diagramme *dynamique* obtenu en traçant l'évolution du système en fonction d'un paramètre de contrôle variable.

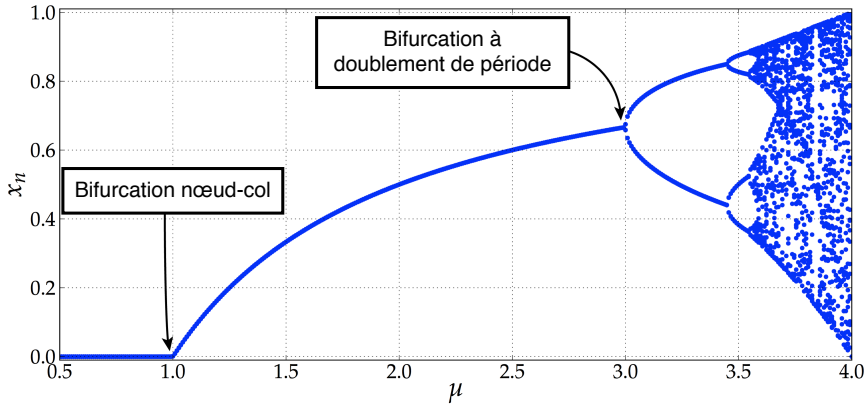
La comparaison entre la figure 1.13(a) (diagramme statique) et la figure 1.13(b) (diagramme dynamique avec $\epsilon > 0$) met en évidence, dans le cas dynamique, le phénomène de *retard à la bifurcation* : l'orbite du système commence par rejoindre la courbe des points fixes de la fonction f. Ceci n'est pas surprenant puisque les points fixes sont attractifs. Cependant, lorsque le point de bifurcation *statique* est atteint et que la courbe des points fixes devient répulsive, l'orbite continue de longer la courbe des points fixes sur un intervalle relativement long avant de rejoindre brusquement la branche attractive. À cet instant l'orbite a atteint le point de bifurcation *dynamique*. Nous notons maintenant μ_s les points de bifurcation statique et μ_d les points de bifurcation dynamique.

Sur la figure 1.13(b) on peut observer clairement le phénomène de retard à la bifurcation sur les deux premières bifurcations de la suite logistique, correspondant à $\mu_s = 1$ (nœud-col) et $\mu_s = 3$ (à doublement de période). Lorsque le paramètre de contrôle μ décroît, le retard à la bifurcation est beaucoup moins prononcé, il n'est d'ailleurs pas visible sur la figure 1.13(c). Un zoom sur la première bifurcation à doublement de période (cf. figure 1.14(b)) permet d'observer ce retard. La figure 1.14(a) montre le même zoom mais pour μ croissant.

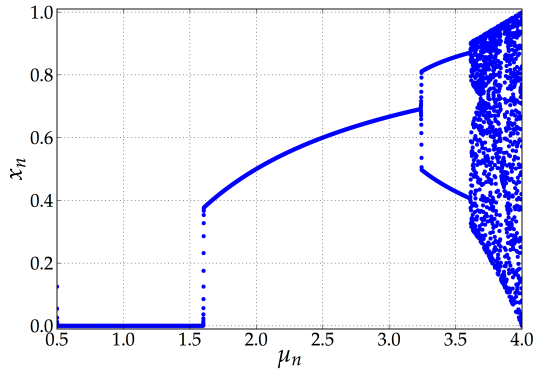
L'étude bibliographique qui suit sert à donner un aperçu chronologique de ce qui a été fait dans le domaine du *retard à la bifurcation* et de la *bifurcation dynamique*. Seuls certains des articles cités ont été étudiés en détail. Cette étude bibliographique est tirée de [10, 43, 63].

Le terme retard à la bifurcation apparaît à la fin des années 70 [50, 80]. Ces travaux, comme la majorité des travaux sur le sujet, traitent de système à temps continu. Ensuite, pendant les années 80 les mathématiciens commencent à fournir des démonstrations rigoureuses du retard à la bifurcation et de ses caractéristiques. L'école russe fournit les premiers résultats [72, 73].

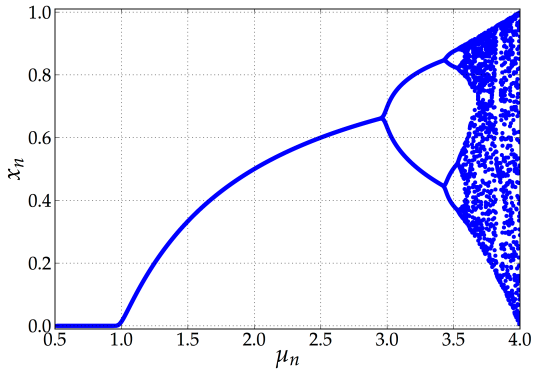
c. La bifurcation *nœud-col* n'est pas ici une bifurcation au sens de Seydel puisque que le nombre de solutions ne change pas. Cette bifurcation correspond seulement à un échange de stabilité entre les points fixes de la fonction d'itération. Ce constat révèle la difficulté de faire une classification non équivoque des phénomènes se produisant dans les systèmes non linéaires. À notre sens, cette discussion est hors de propos dans le cadre de ce travail. Le lecteur désireux d'en savoir plus peut se référer à [82] (note en bas de la page 74).



(a) **Statique** : $\epsilon = 0$.

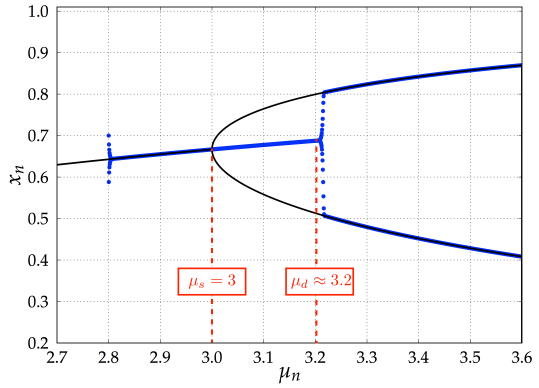


(b) **Dynamique** : $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$.

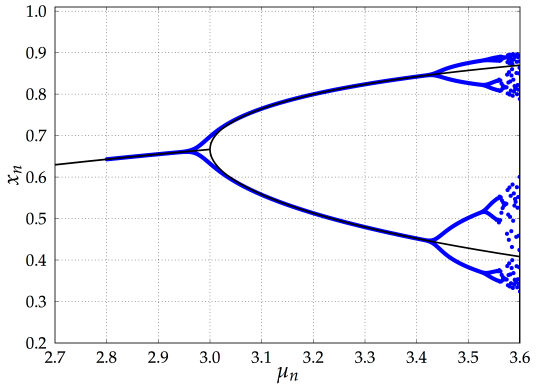


(c) **Dynamique** : $\epsilon = -3 \cdot 10^{-4}$.

FIGURE 1.13 – Diagramme de bifurcation de la suite logistique. (a) Diagramme statique : μ est constant. (b) Diagramme dynamique avec croissance positive de μ_n, $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ et $\mu_n \in [\mu_0 = 0, \mu_N = 4]$. (c) Diagramme dynamique avec croissance négative de μ_n, $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ et $\mu_n \in [\mu_0 = 0.5, \mu_N = 4]$.



(a) **Dynamique** : $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$.



(b) **Dynamique** : $\epsilon = -3 \cdot 10^{-4}$.

FIGURE 1.14 – Diagramme de bifurcation de la suite logistique zoomé au niveau de la première bifurcation *à doublement de période*. Le diagramme statique est représenté par des lignes noires : (——) et diagramme dynamique par des points bleus : (●●●). (a) Le paramètre μ est croissant avec $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ et $\mu_n \in [\mu_0 = 2.8, \mu_N = 3.6]$. (b) Le paramètre μ est décroissant avec $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ et $\mu_n \in [\mu_0 = 2.8, \mu_N = 3.6]$.

À la même époque l'école non standardiste[d] française développe des méthodes pour l'étude de problèmes de perturbation singulière. En étudiant l'équation de Van der Pol forcée [16] (en statique, sans variation du paramètre de contrôle), ils découvrent des solutions étonnantes qu'ils baptisent "canards" en raison de la forme que peut prendre la trajectoire du système dans le *plan de Liénard* [62] (cf. Fruchard [43], section 2 qui explique le phénomène sans technicité mathématique). Plus tard, le lien entre les notions de "canard" et de retard à la bifurcation est établi, permettant à l'école non standardiste d'utiliser ses outils pour étudier la bifurcation dynamique. Pour l'étude de retard à la bifurcation et de la bifurcation dynamique par l'analyse non standard on peut citer l'ouvrage collectif [14] et plus récemment [43] qui propose une revue assez complète de ce qui a été fait dans le domaine.

Les physiciens étudient le phénomène avec notamment les travaux de Mandel et Erneux [33, 65, 66] et Mandel et Kapral [55], ces derniers traitant un cas de système discret, celui de la suite logistique déjà évoquée précédemment. D'un point de vue expérimental, le phénomène de retard à la bifurcation a aussi été observé à la fin des années 80 dans des lasers [6], des circuits électriques [67, 70] et sur une balle rebondissante [75].

Les travaux sur l'étude du retard à la bifurcation dans les systèmes à temps discret proposent des méthodes générales qui sont applicables au modèle de clarinette de "Raman". Dans le cadre de l'analyse non standard on peut citer les travaux de Fruchard *et al.* [40, 41, 42] et ceux de Baesens [10, 11] utilisant un formalisme mathématique plus habituel.

Toutes ces études, qu'elles traitent de systèmes à temps continu ou discret, peuvent être regroupées sous le nom de *théorie de la bifurcation dynamique*.

Dans les paragraphes qui suivent, nous rappelons une méthode générale permettant d'estimer analytiquement les points de bifurcation dynamique de systèmes à temps discret. Cette méthode est celle proposée par Baesens [10]. Nous nous limitons à la première bifurcation de type *à doublement de période* de la suite logistique, dont le point de bifurcation statique est $\mu_s = 3$; et nous ne traitons que de situations dynamiques où le paramètre de contrôle croît. Le principe général de la méthode est de trouver une solution analytique du système dynamique (1.56) linéarisé, dont est ensuite déduite l'expression du point de bifurcation dynamique.

1.4.3 Courbe invariante

La première étape consiste à calculer la *courbe invariante*, notée $\phi(\mu, \epsilon)$, du système (1.56), *i.e.* satisfaisant :

$$\phi(\mu + \epsilon, \epsilon) = f\left(\phi(\mu, \epsilon), \mu\right). \tag{1.59}$$

La courbe invariante est la solution non oscillante du système d'équation (1.56), elle permet de décrire l'évolution de l'orbite de la suite x_n avant que celle-ci ne bifurque vers la branche du diagramme de bifurcation statique correspondant au régime 2-périodique. Avant la bifurcation, la courbe invariante joue le rôle d'attracteur pour le système (1.56), de façon similaire au point fixe dans un cas statique.

L'équation (1.59) peut être résolue de manière approchée en utilisant la théorie des perturbations [13]. Le principe général de la méthode est tout d'abord d'identifier un petit paramètre dont dépend le système à résoudre tel que, pour $\epsilon = 0$, le système est soluble. Dans notre cas le paramètre sera la pente ϵ et quand $\epsilon = 0$ la solution de l'équation de (1.56) est connue, ce sont

d. L'analyse non standard à été créée en 1960 par A. Robinson [78]. C'est une méthode d'analyse permettant de traiter de façon rigoureuse l'infiniment petit et l'infiniment grand.

les points fixes $x^*(\mu)$ de la fonction f. Ensuite, une solution approchée en cherchée sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ϵ :

$$\phi(\mu,\epsilon) = x^*(\mu) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\mu)\epsilon^i + o\left(\epsilon^{n+1}\right). \tag{1.60}$$

Les termes $\phi(\mu+\epsilon,\epsilon)$ et $f\left(\phi(\mu,\epsilon),\mu\right)$ apparaissant dans l'équation (1.59) sont quant à eux développés en série de Taylor en μ et en $x^*(\mu)$ respectivement :

$$\phi(\mu+\epsilon,\epsilon) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \phi(\mu,\epsilon)}{\partial \mu^k}\,\epsilon^k + o\left(\epsilon^{n+1}\right), \tag{1.61}$$

et,

$$\begin{aligned} f(x,\mu) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x^*)^k}{k!}\partial_x^k f\left(x^*(\mu),\mu\right) + o\left((x-x^*)^{n+1}\right) &(1.62)\\ &= x^*(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-x^*)^k}{k!}\partial_x^k f\left(x^*(\mu),\mu\right) + o\left((x-x^*)^{n+1}\right). &(1.63)\end{aligned}$$

Finalement, en substituant (1.60), (1.61) et (1.63) dans (1.59) et en identifiant les termes de même puissance de ϵ, il est possible de trouver successivement les expressions de coefficients $\phi_n(\mu)$ de la série (1.60) (cf. Annexe A.1 de [10]) :

$$\phi_1(\mu) = \frac{dx^*(\mu)}{d\mu}\frac{1}{\partial_x f(x^*(\mu),\mu) - 1}, \tag{1.64}$$

et,

$$\phi_n(\mu) = \frac{1}{\partial_x f(x^*(\mu),\mu) - 1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k\phi_{N-k}(\mu)}{d\mu^k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\partial_x^k f(x^*,\mu) \times \sum_{\sum_i k_i = n}\prod_{i=1}^{k}\phi_{k_1}(\mu)\right]. \tag{1.65}$$

1.4.4 Point de bifurcation *dynamique*

1.4.4.1 Cas déterministe

Défintion du point de bifurcation dynamique. En effectuant un développement limité au premier ordre de l'équation (1.56a) autour de $\phi(\mu,\epsilon)$, il est possible de calculer une expression analytique approchée du système (1.56). De cette solution est déduite l'expression du point de bifurcation dynamique μ_d correspondant à la première bifurcation *à doublement de période*.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f\left(x_n,\mu_n\right) \\ &\approx \underbrace{f\left(\phi(\mu_n,\epsilon),\mu_n\right)}_{\triangleq\ \phi(\mu_{n+1},\epsilon)\ \text{(cf. Éq.(1.59))}} + \left[x_n - \phi(\mu_n,\epsilon)\right]\partial_x f\left(\phi(\mu_n,\epsilon),\mu_n\right) + o\left(\left(x_n-\phi(\mu_n,\epsilon)\right)^2\right). \end{aligned} \tag{1.66}$$

En étendant la définition (1.50) de la variable w à une situation dynamique [e] :

$$w_n = x_n - \phi(\mu_n, \epsilon), \tag{1.67}$$

qui correspond maintenant à la distance entre l'orbite de la suite x_n et la courbe invariante $\phi(\mu_n, \epsilon)$, on aboutit au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n \partial_x f\left(\phi(\mu_n, \epsilon), \mu_n\right) & \text{(1.68a)} \\ \mu_{n+1} = \mu_n + \epsilon, & \text{(1.68b)} \end{cases}$$

La solution de (1.68) est [13] :

$$w_n = w_0 \prod_{i=0}^{n-1} \partial_x f\left(\phi(\mu_i, \epsilon), \mu_i\right), \tag{1.69}$$

dont l'amplitude (i.e. la valeur absolue) peut également s'écrire sous la forme :

$$|w_n| = \left| w_0 \prod_{i=0}^{n-1} \partial_x f\left(\phi(\mu_i, \epsilon), \mu_i\right) \right| = |w_0| \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \partial_x f\left(\phi(\mu_i, \epsilon), \mu_i\right) \right| \right), \tag{1.70}$$

En utilisant une approximation d'Euler, la somme de l'équation (1.70) est remplacée par une intégrale. Finalement l'expression de l'amplitude de w_n est :

$$|w_n| = |w_0| \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \Theta_{\mu_0}(\mu_n) \right), \tag{1.71}$$

où l'argument $\Theta_{\mu_0}(\mu_n)$ de l'exponentielle est :

$$\Theta_{\mu_0}(\mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} \ln \left| \partial_x f\left(\phi(\mu', \epsilon), \mu'\right) \right| d\mu'. \tag{1.72}$$

Si $\partial_x f\left(\phi(\mu, \epsilon), \mu\right)$ s'annule (ceci arrive pour des valeurs du paramètre $\mu = \hat{\mu}$ proches du point superstable qui correspond à $\partial_x f\left(x^*(\mu), \mu\right) = 0$) l'intégrande de l'intégrale (1.72) possède une singularité. Dans ce cas, pour pouvoir conclure que l'intégrale est bien une approximation de la somme, il est nécessaire de supposer que le terme $\epsilon \ln \left| \partial_x f\left(\phi(\mu', \epsilon), \mu'\right) \right|$ reste petit même lorsque la singularité est traversée. Dans le cas contraire, l'intégrale est une sous-estimation de la somme. Cette situation sera évoquée plus en détail dans l'annexe C (voir notamment la figure C.3). Pour le moment faisons l'hypothèse que $\mu_0 > \hat{\mu}$ et donc que la variable $|w_n|$ est décrite par l'équation (1.71).

La fonction $\Theta_{\mu_0}(\mu_n)$ est tracée en figure 1.15(a) associée à la figure 1.15(b) sur laquelle est tracée la variable w_n obtenue par la simulation du système (1.57) et de façon analytique par l'équation (1.71). On peut déjà noter que l'expression théorique permet de prédire la simulation.

Lorsque que $\mu = \mu_0$ et $w_n = w_0$ la fonction $\Theta_{\mu_0}(\mu)$ passe du positif au négatif. Le paramètre ϵ étant très inférieur à 1 ($\epsilon = 0.001$ dans la figure 1.15) l'exponentielle de l'équation (1.71) passe abruptement d'une valeur très grande à une valeur proche de zéro. On observe donc sur la figure 1.15(b) qu'à partir de la condition initiale, la variable w_n tend rapidement vers zéro, c.à.d que l'orbite de x rentre rapidement dans le voisinage de la courbe invariante. Ensuite, lorsque la

e. Il n'y a pas de désaccord entre les équations (1.50) et (1.67), puisque que $\phi(\gamma, \epsilon = 0) = x^*(\gamma)$.

fonction $\Theta_{\mu_0}(\mu)$ repasse du négatif au positif, l'inverse se produit et l'orbite de x sort abruptement du voisinage de la courbe invariante. Dans la figure 1.16 où $\epsilon = 0.01$, la décroissance puis la croissance de w_n est moins rapide. De plus, la comparaison avec la figure 1.15 montre que la valeur de ϵ n'a que peu d'influence sur le profil de $\Theta_{\mu_0}(\mu)$. Le point de bifurcation dynamique μ_d peut donc être défini par $\Theta_{\mu_0}(\mu_d) = 0$ [10], soit :

$$\int_{\mu_0}^{\mu_d} \ln \left| \partial_x f \left(\phi(\mu', \epsilon), \mu' \right) \right| d\mu' = 0. \tag{1.73}$$

À noter que lorsque $\mu = \mu_d$, la variable w_n retrouve une valeur identique à sa valeur initiale. L'équation (1.73) peut aussi être obtenue dans le cadre de l'analyse non standard [40] où elle est appelée relation "entrée-sortie".

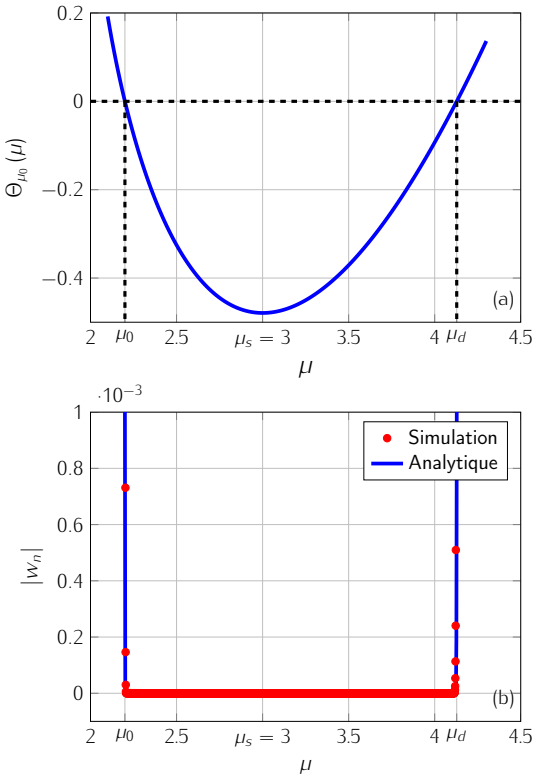


FIGURE 1.15 – (a) Fonction $\Theta_{\mu_0}(\mu)$ pour $\mu_0 = 2.2$. μ_d est le point de bifurcation dynamique défini par (1.73). (b) Évolution de w_n obtenue par simulation de (1.57) et théoriquement par (1.70). $\epsilon = 10^{-3}$ et $x_0 = 0.1$

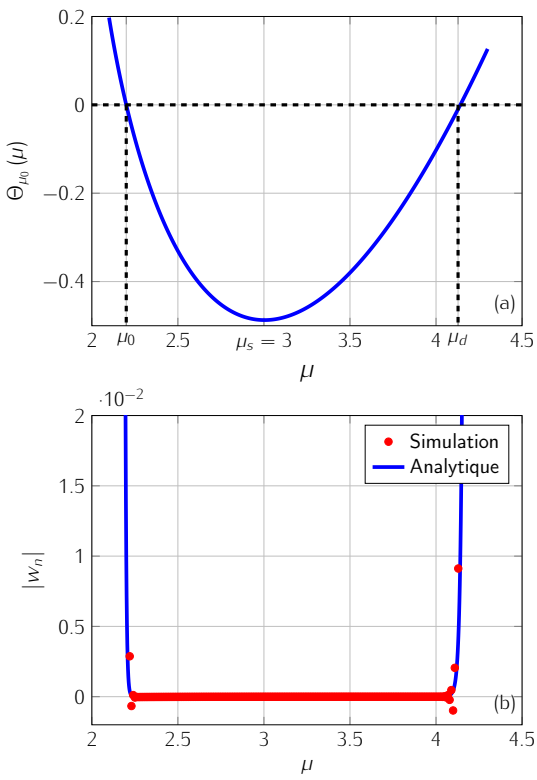


FIGURE 1.16 – Représentation des mêmes variables que dans la figure 1.15 mais obtenues avec $\epsilon = 0.01$.

La fonction $\Theta_{\mu_0}(\mu_n)$ possède un minimum aux alentours de $\mu_s = 3$. En effet :

$$\frac{d}{d\mu}\Theta_{\mu_0}(\mu) = \frac{d}{d\mu}\int_{\mu_0}^{\mu} \ln \left| \partial_x f \left(\phi(\mu', \epsilon), \mu' \right) \right| d\mu' \tag{1.74}$$

$$= \ln \left| \partial_x f \left(\phi(\mu, \epsilon), \mu \right) \right|. \tag{1.75}$$

Comme $\epsilon \ll 1$, nous pouvons approximer la courbe invariante ϕ et la courbe de points fixes x^* dans l'équation (1.75) :

$$\ln \left| \partial_x f \left(\phi(\mu, \epsilon), \mu \right) \right| \approx \ln \left| \partial_x f \left(x^*(\mu), \mu \right) \right| = \tilde{\Theta}_{\mu_0}(\mu), \tag{1.76}$$

Comme par définition $\partial_x f\,(x^*(\mu_s), \mu_s) = -1$ (bifurcation *à doublement de période*), la fonction $\tilde{\Theta}_{\mu_0}(\mu)$ possède bien un minimum en $\mu = \mu_s$. La figure 1.17 qui montre un exemple de comparaison entre les fonctions $\Theta_{\mu_0}(\mu)$ et $\tilde{\Theta}_{\mu_0}(\mu)$ permet de se faire une idée sur l'erreur engendrée par l'approximation (1.76). Même si nous pouvons observer une différence d'amplitude entre les fonctions $\Theta_{\mu_0}(\mu)$ et $\tilde{\Theta}_{\mu_0}(\mu)$, la position du minimum apparaît très peu sensible au fait de confondre les fonctions ϕ et x^* dans l'expression de $\Theta_{\mu_0}(\mu)$.

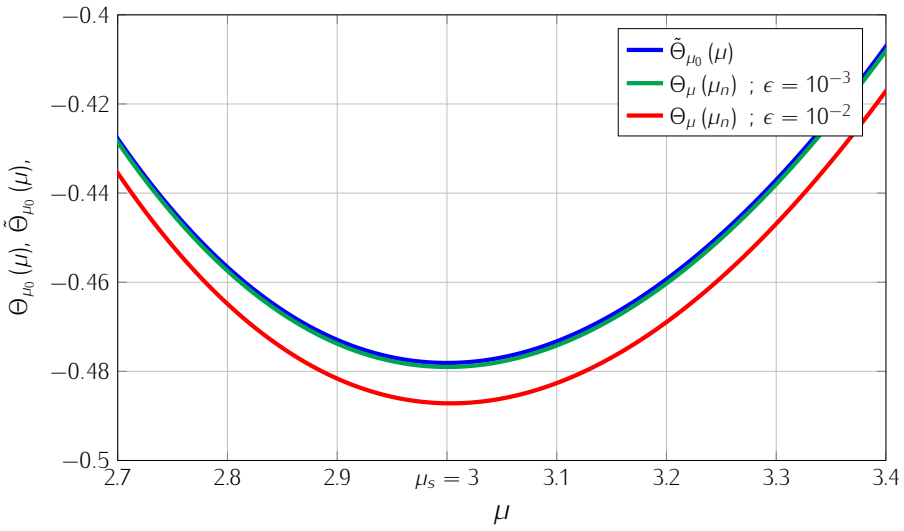


FIGURE 1.17 – Comparaison entre la fonction $\Theta_{\mu_0}(\mu)$ (ligne verte : $\epsilon = 10^{-3}$ et ligne rouge : $\epsilon = 10^{-2}$) et la fonction $\tilde{\Theta}_{\mu_0}(\mu)$. $\mu_0 = 2.2$.

Sans aller plus loin dans la démonstration, on observe sur la figure 1.17 qu'avant son minimum (pris égal à μ_s) la fonction $\Theta_{\mu_0}(\mu)$ est décroissante puis croissante après. En d'autres termes, selon l'équation (1.71), l'orbite de x commence à s'écarter de la courbe invariante à partir du seuil statique μ_s. Ainsi, comme nous l'avons déjà évoqué à la section 1.4.1 le point de bifurcation dynamique ne correspond pas un changement qualitatif de la solution du système. Ce changement apparait approximativement en $\mu = \mu_s$ comme pour le cas statique. Cependant, au niveau du point de bifurcation statique, l'écart entre la courbe invariante et l'orbite de x est exponentiellement petit ou "microscopique". Le point de bifurcation dynamique μ_d, donné par l'équation (1.73), correspond à la valeur du paramètre μ pour laquelle l'écart à la courbe invariante atteint une valeur appréciable ou "macroscopique". Il y a dans la définition de μ_d un caractère arbitraire (contrairement à celle du point de bifurcation statique μ_s) puisqu'il faut se fixer un seuil en amplitude de w marquant la séparation entre les amplitudes "microscopiques" et "macroscopiques" ; ici le seuil est atteint quand la variable w retrouve sa valeur initiale w_0. Cependant, comme l'orbite de x sort abruptement du voisinage de la courbe invariante (voir figures 1.15(b) et 1.16(b)) une modification du critère n'aura que peu d'importance sur la valeur du point de bifurcation dynamique.

Désaccords entre théorie déterministe et expériences/simulations numériques. Deux des propriétés du retard à la bifurcation, défini comme la différence entre le seuil statique μ_s et le seuil dynamique μ_d décrit par l'équation (1.73), sont les suivantes : le retard à la bifurcation est indépendant de la pente ϵ du paramètre de contrôle μ à condition que ϵ soit suffisamment petit. De plus, il dépend fortement de la valeur initiale μ_0 du paramètre de contrôle.

Ces propriétés peuvent être retrouvées sur des simulations numériques, dans [10, 42] pour la suite logistique et dans [19] pour le modèle de clarinette, reporté au chapitre 2. Cependant, ces résultats sont en désaccord avec les études numériques de Kapral et Mandel [55] et expérimentales

de Morris et Moss [70] ou Manella *et al.* [67], qui montrent qu'au contraire le retard à la bifurcation dépend fortement de la pente ϵ et est indépendant de la valeur initiale du paramètre de contrôle. Ce désaccord s'explique par le fait que, lorsque l'on se rapproche du point de bifurcation statique, les valeurs de w_n deviennent extrêmement petites. Par exemple, pour la suite logistique lorsque $\mu_0 = 2.2$ et $\epsilon = 0.001$, on a alors $w_n(\mu_s = 3) \approx 10^{-210}$, ce qui est bien en dessous de la précision usuelle d'un ordinateur (typiquement la précision des ordinateurs modernes utilisant des processeurs 64 bits est de 16 chiffres significatifs) et plus encore du niveau de bruit présent dans une expérience réelle. Dans certains cas, la présence d'un bruit, même numérique de très faible amplitude, a donc pour conséquence d'empêcher l'orbite de rentrer dans un voisinage de la courbe invariante aussi petit que ne le prédit l'équation (1.71). La valeur du paramètre de contrôle à atteindre pour sortir de ce voisinage est donc plus faible et le retard à la bifurcation est par conséquent diminué part rapport à celui prédit par la formule (1.73).

1.4.4.2 Prise en compte du bruit

En utilisant le module *mpmath* de Python permettant des calculs numériques en précision arbitraire, les figures 1.15 et 1.16 ont été obtenues avec une précision de calcul nécessaire (i.e. 300 chiffres significatifs) pour que le point de bifurcation dynamique μ_d puisse être prédit par l'équation (1.73). En réduisant la précision de calcul, le retard à la bifurcation diminue, comme le montre la figure 1.18 où le système (1.57) est simulé avec trois précisions différentes : 15, 45 et 300 chiffres significatifs.

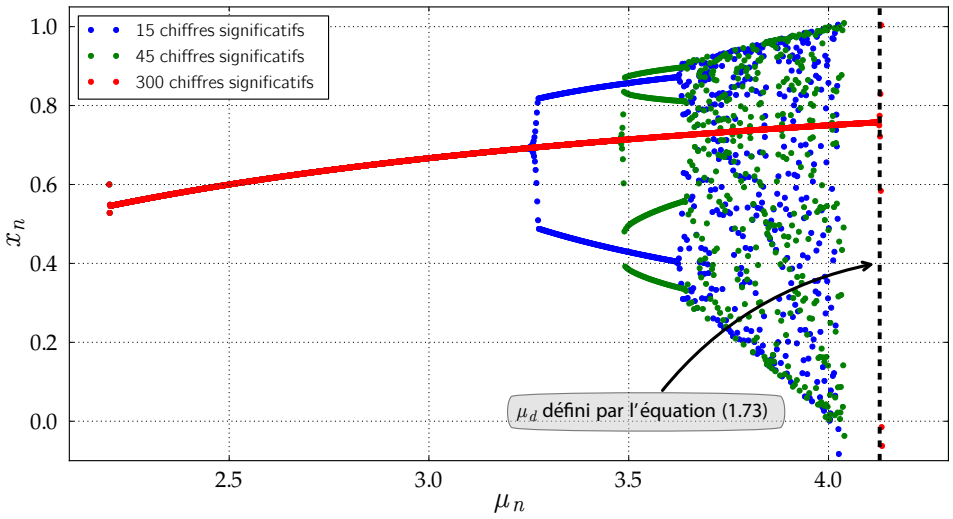


Figure 1.18 – x_n obtenu par simulation du système (1.57) pour différentes précisions de calculs : 15 (● ● ●), 45 (● ● ●) et 300 (● ● ●). $\epsilon = 0.001$, $x_0 = 0.6$ et μ_d est le point de bifurcation dynamique déterminé par l'équation (1.73).

Afin de prendre en compte les erreurs d'arrondi dues à la précision finie des ordinateurs ou bien le bruit présent dans une expérience réelle, une façon de procéder est d'ajouter au système un bruit blanc additif. Dans ce domaine on peut citer Benoît [15] et plus récemment Berglund et Gentz [23, 24], traitant de systèmes à temps continu. En ce qui concerne les systèmes à temps discret, Baesens [9, 10] fournit une méthode générale qui sera applicable au modèle de clarinette. Le principe est de remplacer le système déterministe (1.57) par le système stochastique suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \mu_n) + \xi_n & \text{(1.77a)} \\ \mu_{n+1} = \mu_n + \epsilon. & \text{(1.77b)} \end{cases}$$

La variable aléatoire ξ_n est à moyenne nulle (i.e. $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$, $\mathbb{E}$ est l'espérance mathématique définie par exemple dans [79]) et dont l'amplitude est définie par :

$$\mathbb{E}[\xi_m \xi_n] = \sigma^2 \delta_{mn}, \tag{1.78}$$

où δ_{mn} est le symbole de Kronecker. Dans le cas d'un bruit numérique dû aux erreurs d'arrondi, Baesens [9, 10] fait l'hypothèse que le niveau de bruit σ et la précision de calcul pr sont reliés par la relation suivante :

$$\sigma \approx 10^{-pr}. \tag{1.79}$$

Cette hypothèse sera vérifiée au paragraphe 3.2.3 dans le cas du modèle de clarinette. L'étude du système (1.77) nécessite plusieurs étapes de calcul qui ne sont pas détaillées ici. Un étude complète est présentée au chapitre 3. Sans perte de généralité, cette étude est appliquée au modèle de clarinette. Nous rappelons tout de même les principales étapes et conclusions de l'étude.

Comme précédemment, la première étape consiste à linéariser le système autour de la courbe invariante $\phi(\mu, \epsilon)$ du système déterministe. Ensuite la valeur moyenne $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ de l'écart à la courbe invariante élevé au carré est calculée. $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ prend alors la forme suivante :

$$\mathbb{E}\left[w_n^2\right] = A_n + B_n. \tag{1.80}$$

Sans en donner les expressions, les termes A_n et B_n correspondent respectivement au cas déterministe, étudié précédemment, et à la contribution due au bruit. Selon les valeurs des paramètres ϵ et σ et des conditions initiales μ_0 et w_0, Baesens distingue trois comportements différents (sont indiqués en italique les noms anglais donnés par Baesens [9, 10] à ces trois régimes) :

- $A_n \gg B_n$, *"Deterministic regime"*
  Le bruit peut être ignoré car il n'influe pas sur le retard à la bifurcation. Le point de bifurcation peut encore être déterminé par l'équation (1.73). Les caractéristiques du retard restent alors :
  (i) Le retard à la bifurcation est indépendant de la pente ϵ du paramètre de contrôle μ à condition que ϵ soit suffisamment petit ;
  (ii) Le retard à la bifurcation dépend fortement de la valeur initiale μ_0 du paramètre de contrôle.
- $A_n \ll B_n$ et $\sigma \ll \sqrt{\epsilon}$, *"Sweep-dominant regime"*
  Dans ce cas, on peut montrer que le point de bifurcation dynamique, noté $\hat{\mu}_d$, peut être prédit analytiquement par l'expression suivante :

$$\hat{\mu}_d = \mu_s + \sqrt{-\frac{2\epsilon}{K} \ln\left[\left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/4} \frac{\sigma}{\epsilon^{5/4}}\right]}, \tag{1.81}$$

  où,

$$K = -\partial_\mu \left(\partial_x f\left(x^*(\mu), \mu\right)\right)_{\mu=\mu_s}. \tag{1.82}$$

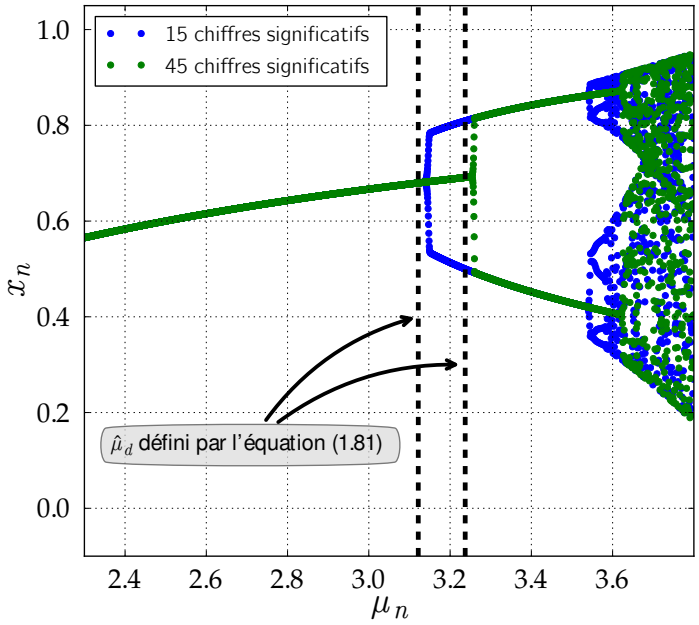
  Le retard à la bifurcation, ainsi défini par $\hat{\mu}_d - \mu_s$, a les propriétés suivantes, "inversées" par rapport à celles du cas déterministe :

(i) Le retard à la bifurcation dépend de la pente ϵ du paramètre de contrôle μ ;

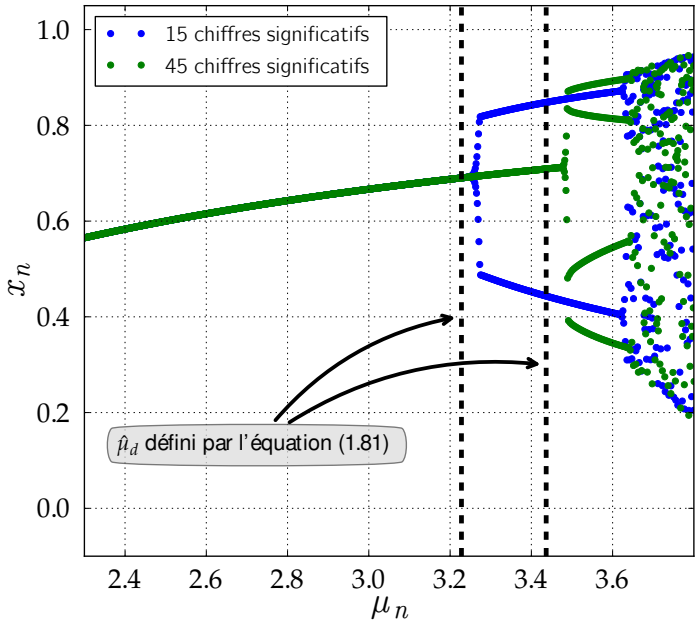
(ii) Le retard à la bifurcation est indépendant de la valeur initiale μ_0.

La figure 1.19 montre un nouvel exemple de simulation du système (1.57) où nous nous plaçons délibérément dans un cas de *"Sweep-dominant regime"*. Deux valeurs du paramètre ϵ sont choisies : $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ (figure 1.19(a)) et $\epsilon = 10^{-3}$ (figure 1.19(b)) avec à chaque fois deux précisions de calcul $pr = 15$ et $pr = 45$, correspondant donc à $\sigma = 10^{-15}$ et $\sigma = 10^{-45}$. Parmi les approximations faites pour obtenir l'expression (1.81), il y a l'hypothèse d'un faible retard en présence de bruit. Le système est donc linéarisé autour du point de bifurcation statique μ_s, ceci explique la sous estimation du point de bifurcation dynamique lorsqu'il s'écarte trop de μ_s.

- $\sigma \gtrsim \sqrt{\epsilon}$, *"Noise-dominant regime"*
  Le fort niveau de bruit délocalise complètement l'orbite par rapport à la courbe invariante qui, même en moyenne, s'en écarte sensiblement avant même que le point de bifurcation statique ne soit atteint. De ce fait, l'approximation linéaire n'est plus valide et le système nécessite d'être traité différemment. Ce régime n'est pas étudié dans ce mémoire.



(a) $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$.



(b) $\epsilon = 10^{-3}$.

FIGURE 1.19 – x_n obtenu par simulation du système (1.57) pour différentes précisions de calculs : 15 (●●●) et 45 (●●●). $x_0 = 0.6$ et $\hat{\mu}_d$ est le point de bifurcation dynamique déterminé par l'équation (1.81).(a) $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ et (b) $\epsilon = 10^{-3}$.

Deuxième partie

Étude analytique d'un modèle de clarinette dont l'un des paramètres de contrôle varie dans le temps

Chapitre 2

Seuil dynamique d'oscillation : *Cas déterministe*

Sommaire

2.1 Avant-propos . . . 43
2.2 Article *Nonlinear Dynamics 1* . . . 44
2.2.1 Introduction . . . 44
2.2.2 State of the art . . . 45
2.2.3 Time-varying blowing pressure . . . 50
2.2.4 Limit of the model : influence of the precision . . . 57
2.2.5 Conclusion . . . 59
2.2.6 Annexes . . . 60

2.1 Avant-propos

En se plaçant dans le cadre de la théorie de la bifurcation dynamique, ce chapitre présente une étude permettant d'étudier l'influence d'une variation linéaire de la pression dans la bouche sur le seuil d'oscillation du modèle de clarinette dit "de Raman" (cf. section 1.2.4). En particulier nous utiliserons la méthode générale proposée par Baesens [10] pour trouver l'expression de la courbe invariante (cf. section 1.4.3) du système et prédire le point de bifurcation dynamique du modèle (cf section 1.4.4), appelé *seuil dynamique d'oscillation*. Ce chapitre se limite à la prédiction théorique du seuil dynamique d'oscillation dans un cas déterministe (cf. paragraphe 1.4.4.1), c-à-d en l'absence de bruit (cf. section 1.4.4.1).

Le section 2.2 est la reproduction d'un article publié dans *Nonlinear Dynamics* en juillet 2013 [19] et qui s'intitule : *"Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure"*. Cet article a été écrit en collaboration avec André Almeida, Christophe Vergez et Bruno Gazengel. Après un rappel du modèle au paragraphe 2.2.2 (aussi présenté de façon plus détaillée dans le chapitre 1), le paragraphe 2.2.3 expose l'étude dynamique théorique du modèle (i.e. où la pression dans la bouche γ varie linéairement et lentement dans le temps) en se limitant à un cas déterministe et sans pertes ($\lambda = 1$). Le paragraphe 2.2.3.1 situe le problème en abordant la notion de retard à la bifurcation, nouvelle dans le domaine de l'acoustique musicale. La courbe invariante $\phi(\gamma, \epsilon)$ du système est définie au paragraphe 2.2.3.2, le détail des calculs pour obtenir l'expression de $\phi(\gamma, \epsilon)$ est reporté en annexe de l'article (cf. paragraphe 2.2.6.2). Toujours au paragraphe 2.2.3.2, nous détaillons la méthode pour connaitre l'expression du seuil

dynamique d'oscillation noté γ_{dt}^{th}. La comparaison entre la prédiction théorique du seuil dynamique et un seuil γ_{dt}^{num} estimé grâce à des simulations numériques du modèle montre un bon accord. De plus, comme énoncé au paragraphe 1.4.4.1, les propriétés du seuil dynamique (i.e. du retard à la bifurcation), dans un système où le bruit est négligeable, sont les suivantes : il est indépendant de la pente du paramètre de contrôle à condition qu'elle soit suffisamment faible. Le retard à la bifurcation dépend également fortement de la valeur initiale du paramètre de contrôle. Enfin, le paragraphe 2.2.4 montre la limite de la prédiction théorique du seuil dynamique, restreinte à un cas déterministe. En effet, les simulations numériques effectuées avec des précisions de calcul même supérieures à la précision usuelle d'un ordinateur ($\approx$ 16 chiffres significatifs) ne permettent pas de retrouver le résultat théorique. Il faut utiliser des précisions gigantesques - de la centaine au millier de chiffres significatifs en fonction de la valeur de la vitesse de variation de la pression dans la bouche - pour que les seuils γ_{dt}^{th} et γ_{dt}^{num} coïncident. Dans le cas contraire le seuil dynamique γ_{dt}^{num} est d'autant plus grand que la précision est importante mais toujours inférieur à la prédiction théorique γ_{dt}^{th}. De plus il est dépendant de la pente de la pression dans la bouche : plus la pente est élevée, plus le retard à la bifurcation est important. Au moment de l'écriture de l'article nous n'avions pas les connaissances suffisantes pour traiter analytiquement ce phénomène et proposer une estimation théorique du seuil dynamique prenant en compte la précision de calcul. Ceci est fait dans [20], reporté au chapitre 3 de ce mémoire.

2.2 Article paru dans *Nonlinear Dynamics* :

B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel. ***"Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure"***

Début de l'article

2.2.1 Introduction

One of the interests of mathematical models of musical instruments is to be able to predict certain characteristics of the produced sound given the gesture performed by the musician. In the case of a clarinet for instance, the amplitude, frequency or spectral content (the sound parameters) can be to a certain extent, determined as a function of the blowing pressure and lip force applied to the reed (the control parameters). A basic model, such as the one introduced by Wilson and Beavers [90], allows to compute the amplitude of the oscillating resonator pressure from the knowledge of these two control parameters, giving results that follow the major tendencies observed in experiments. Several degrees of refinement can be added to this model, usually aiming at realistic sound and mechanical behavior. Well known simplifications of this model allow to study analytically the behavior of the clarinet. Simplified models, of course, are unable to describe or predict with refinement the exact harmonic content of the sound, or the influences of such important details as the reed geometry and composition or the vocal tract of the player. However, they can provide an understanding of the factors essential for the production of sound.

The highest degree of simplification of the model (introduced in Section 2.2.2) considers a straight, lossless (or losses independent of frequency) resonator and the reed as an ideal spring [64, 58, 26]. With these assumptions, the system can be simply described by an iterated map [69]. Iterated maps often describe a succession of different regimes with variable periodicity. By analyzing the asymptotic values of these regimes it is possible to estimate : thresholds of oscillation, extinction, beating regimes, etc. [29], amplitudes and stability of the steady state regime [74] and phenomena of period doubling [59, 86].

These characteristics arise from the so-called *static* bifurcation theory assuming that control parameters are constant. For example, these studies allow to find a *static* oscillation threshold γ_{st} [29] such that a constant regime is stable if the blowing pressure is below γ_{st} and a periodic regime is stable if it is above γ_{st}. More precisely, the oscillation emerges through a flip bifurcation [61]. This behavior is static, obtained by choosing a constant blowing pressure, letting the system reach its final state, and repeating the procedure for other constant blowing pressures. Therefore, most studies using iterated map approach are restricted to a steady state analysis of the oscillation, even if transients are studied. They focus on the asymptotic amplitude regardless of the history of the system.

During a note attack transient the musician varies the pressure in her/his mouth before reaching a quasi-constant value. During this transient the blowing pressure cannot be regarded as constant. In a mathematical point of view increasing the control parameter (here the blowing pressure) makes the system non-autonomous and results from *static* bifurcation theory are not sufficient to describe its evolution. Indeed, it is known that, when the control parameter varies, the bifurcation point – i.e. the value of the blowing pressure where the system begins to oscillate – can be considerably delayed [55, 10, 43]. Indeed, the bifurcation point is shifted from γ_{st} to a larger value γ_{dt} called *dynamic* oscillation threshold. This phenomenon called *bifurcation delay* is not predicted by the *static* theory. Therefore, when the control parameter varies, results from the so-called *dynamic* bifurcation theory are required to properly analyze the system.

The purpose of this paper is to use results from *dynamic* bifurcation theory to describe analytically a simplified clarinet model taking into account a blowing pressure that varies linearly with time. In particular we propose a theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold.

Section 2.2.2 introduces the simplified mathematical model of a clarinet and the iterated map method used to estimate the existence of the oscillations inside the bore of the clarinet. Some results related to the steady state are presented in this section. Section 2.2.3 is devoted to the study of the dynamic system that takes into account a linearly increasing blowing pressure. The phenomenon of bifurcation delay is demonstrated using numerical simulations. A theoretical estimation of the *dynamic oscillation threshold* is also presented and compared with numerical simulations. In Section 2.2.4 the limits of this approach are discussed. It is shown, when the model is simulated, that the precision (the number of decimal digits used by the computer) has a dramatic influence on the bifurcation delay. The influence of the speed at which the blowing pressure is swept is also discussed.

2.2.2 State of the art

2.2.2.1 Elementary model

The model of the clarinet system used in this article follows an extreme simplification of the instrument, which can be found in other theoretical works [64, 26].

This basic model separates the instrument into two functional elements. One of these is the bore, or resonator, a linear element where the pressure waves propagate without losses. The other is the reed-mouthpiece system, which is considered as a valve controlled by the pressure difference between the mouth and the mouthpiece. It is often called the generator and is the only nonlinear part of the instrument. A table of notation is provided in 2.2.6.1.

The reed-mouthpiece system. The reed-mouthpiece system is depicted in Fig. 2.1. The reed is assumed to behave as an ideal spring characterized by its static stiffness per unit area K_s. So, its response y to the pressure difference $\Delta P = P_m - P$ is linear and is given by :

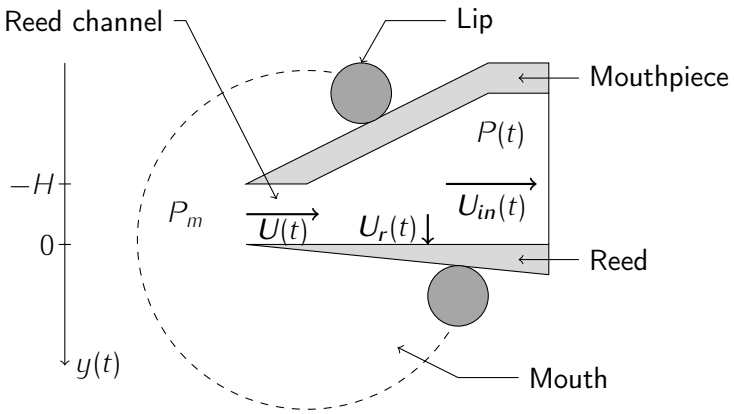


FIGURE 2.1 – Schematic diagram of a single-reed mouthpiece. Presentation of variables, control parameters and choice of axis orientation. U is the flow created by the pressure imbalance $P_m - P$ between the mouth and the bore, U_r is the flow created by the motion of the reed, U_{in} is the flow entering the instrument, y represents the position of the tip of the reed and H is the opening of the reed channel at rest.

$$y = -\frac{\Delta P}{K_s}. \tag{2.1}$$

From (4.1) we can define the *static closing pressure* P_M which corresponds to the lowest pressure that completely closes the reed channel ($y = -H$) :

$$P_M = K_s H. \tag{2.2}$$

The reed model also considers that the flow created by the motion of the reed U_r is equal to zero, so that the only flow entering the instrument is created by the pressure imbalance between the mouth and the bore :

$$U_{in} = U. \tag{2.3}$$

The non-linearity of the reed-mouthpiece system is introduced by the Bernoulli equation which relates the flow U to the acoustic pressure P [52, 51]. This relation is the nonlinear characteristics of the exciter, given by :

$$U = \begin{cases} U_A \left(1 - \dfrac{\Delta P}{P_M}\right) \sqrt{\dfrac{|\Delta P|}{P_M}} \operatorname{sgn}(\Delta P) \\ \qquad \text{if } \Delta P < P_M \ ; & \text{(2.4a)} \\ 0 \\ \qquad \text{if } \Delta P > P_M. & \text{(2.4b)} \end{cases}$$

The flow U_A is calculated using the Bernoulli theorem :

$$U_A = S\sqrt{\frac{2P_M}{\rho}}, \tag{2.5}$$

where S is the opening cross section of the reed channel at rest and ρ the density of the air.

Introducing the dimensionless variables and control parameters [26] :

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta P / P_M \\ p &= P / P_M \\ u &= Z_c\, U / P_M \\ \gamma &= P_m / P_M \\ \zeta &= Z_c\, U_A / P_M. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$Z_c = \rho c / S_{res}$ is the characteristic impedance of the cylindrical resonator of cross-section S_{res} (c is the sound velocity). Equation (4.3) becomes :

$$F(p) = \begin{cases} \zeta\,(1-\gamma+p)\sqrt{|\gamma-p|}\,\mathrm{sgn}(\gamma-p) \\ \qquad\qquad \text{if } \gamma - p < 1\ ; & \text{(2.7a)} \\ 0 \\ \qquad\qquad \text{if } \gamma - p > 1. & \text{(2.7b)} \end{cases}$$

The parameters γ and ζ are the control parameters of the system. An example of the function F is shown in Fig. 2.2(a).

The resonator. Assuming that only plane waves exist in the resonator and propagate linearly, the resonator can be characterized by its reflection function $r(t)$. The general expression relating $p(t)$ to $u(t)$ through $r(t)$ is :

$$p(t) - u(t) = [r * (p+u)](t). \tag{2.8}$$

The resonator is modeled as a straight cylinder. Reflections at the open end of the resonator are considered perfect (no radiation losses) and viscous and thermal losses are ignored. In this case the reflection function becomes a simple delay with sign inversion :

$$r(t) = -\delta(t-\tau), \tag{2.9}$$

where δ is the Dirac generalized function and $\tau = 2l/c$ is the round trip time of the sound wave with velocity c along the resonator of length l.

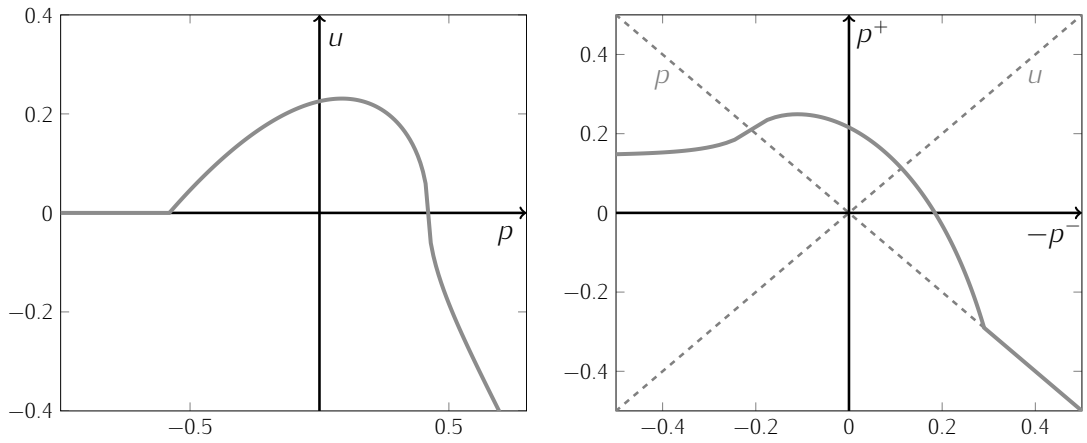
With the reflection function (2.9), equation (2.8) becomes :

$$p(t) - u(t) = -\left[p(t-\tau) + u(t-\tau)\right]. \tag{2.10}$$

Assuming that the blowing pressure γ skips instantaneously from 0 to a finite value and remains constant, p and u remain constant during the first half-period and hence during each forthcoming half-period. Therefore, p and u are square waves.

Using a discrete time formulation (the discretization is done at regular intervals τ) and noting $p(n\tau) = p_n$ and $u(n\tau) = u_n$, we obtain the following difference equation :

$$p_n - u_n = -\left(p_{n-1} + u_{n-1}\right). \tag{2.11}$$



(a) F function (b) G function

FIGURE 2.2 – Nonlinear characteristics in $u = F(p)$ representation (a) and $p^+ = G(-p^-)$ representation (b) for $\gamma = 0.42$ and $\zeta = 0.6$.

2.2.2.2 Iterated map : outgoing and incoming wave representation

In linear acoustics any planar wave can be expanded into an outgoing wave p^+ and an incoming wave p^-. Using the dimensionless variables defined in equation (4.5), the acoustic pressure p and flow u are given by :

$$p = p^+ + p^- \quad ; \quad u = p^+ - p^-, \tag{2.12}$$

Replacing in equation (2.11),

$$p^+ = \frac{1}{2}(p + u) \quad ; \quad p^- = \frac{1}{2}(p - u). \tag{2.13}$$

By combining equations (4.6) and (2.12) a nonlinear relation G between p^+ and p^- can be obtained :

$$p^+ = G\left(-p^-\right). \tag{2.14}$$

An explicit expression of the function G was determined, for $\zeta < 1$, by Taillard et al. [86]. Fig. 2.2(b) shows an example of the function G. Using equations (2.12), the relation (2.11) becomes :

$$p_n^- = -p_{n-1}^+. \tag{2.15}$$

Finally, equations (2.14) and (2.15) define the iterated map [64, 69] :

$$p_n^+ = G\left(-p_n^-\right) = G\left(p_{n-1}^+\right). \tag{2.16}$$

In the following, the variable p^+ will be used preferentially. The variable p can easily be calculated using equations (2.15) and (2.12).

2.2.2.3 Results from static bifurcation theory

The difference equation (2.16) can be analyzed using the *static* bifurcation theory, which assumes that the control parameters are constant. This will be hereafter referred to as the *static case*. The parameter γ will be specifically introduced as a subscript in the definition of the nonlinear characteristics (2.16), stressing that this will be the parameter of interest in the current study (ζ will always consider to be constant) :

$$p_n^+ = G_\gamma\left(p_{n-1}^+\right). \tag{2.17}$$

Some of the predictions of the *static* bifurcation theory that are important to this work are recalled in the following sections while applying them to the map of equation (4.9) [58, 26, 86].

Expression of the static regime and static oscillation threshold. For all values of the control parameter γ below a particular value of the parameter γ called *static oscillation threshold* and noted γ_{st} the series p_n^+ converges to a single value (the static regime), also referred to as the fixed point of G_γ. It can be found by solving the following equation :

$$p^{+*} = G_\gamma\left(p^{+*}\right). \tag{2.18}$$

After solving the equation we obtain :

$$p^{+*}(\gamma) = \frac{\zeta}{2}(1-\gamma)\sqrt{\gamma}. \tag{2.19}$$

When the static regime is reached $p_n^+ = p_{n-1}^+ = -p_n^-$. Therefore, for the variable $p = p^+ + p^-$, the static regime is equal to zero.

The static regime exists for all values of the parameter γ but it is stable when $\gamma < \gamma_{st}$ and unstable when $\gamma > \gamma_{st}$. The condition of stability of the static regime [58] allowing to obtain the value of the static oscillation threshold is :

$$\left|G'_\gamma\left(p^{+*}\right)\right| < 1, \tag{2.20}$$

where G'_γ is the first derivative of the function G_γ. The value of the static oscillation threshold is finally :

$$\gamma_{st} = \frac{1}{3}. \tag{2.21}$$

Beyond the oscillation threshold, other bifurcations occur, the 2-valued oscillating regime becoming unstable and giving rise to a 4-valued oscillating state. This cascade is the classical scenario of successive period doublings, leading eventually to chaos [35, 86]. The values of the parameter γ for which appear the different 2n-valued oscillating regimes depend on the value of the parameter ζ : the smaller is ζ, the earlier the 2n-valued oscillating regimes appear. When $\gamma = 1/2$, whatever the value of ζ, a 2-valued oscillating regime reappears, the beating-reed regime . This is a particularity of model of the clarinet, it is due to the fact that when $\gamma - p > 1$ (equation (4.6b)) the reed presses against the mouthpiece lay. It can be shown [26] that in this permanent regime $p = \pm\gamma$ (c.f. Fig. 2.3).

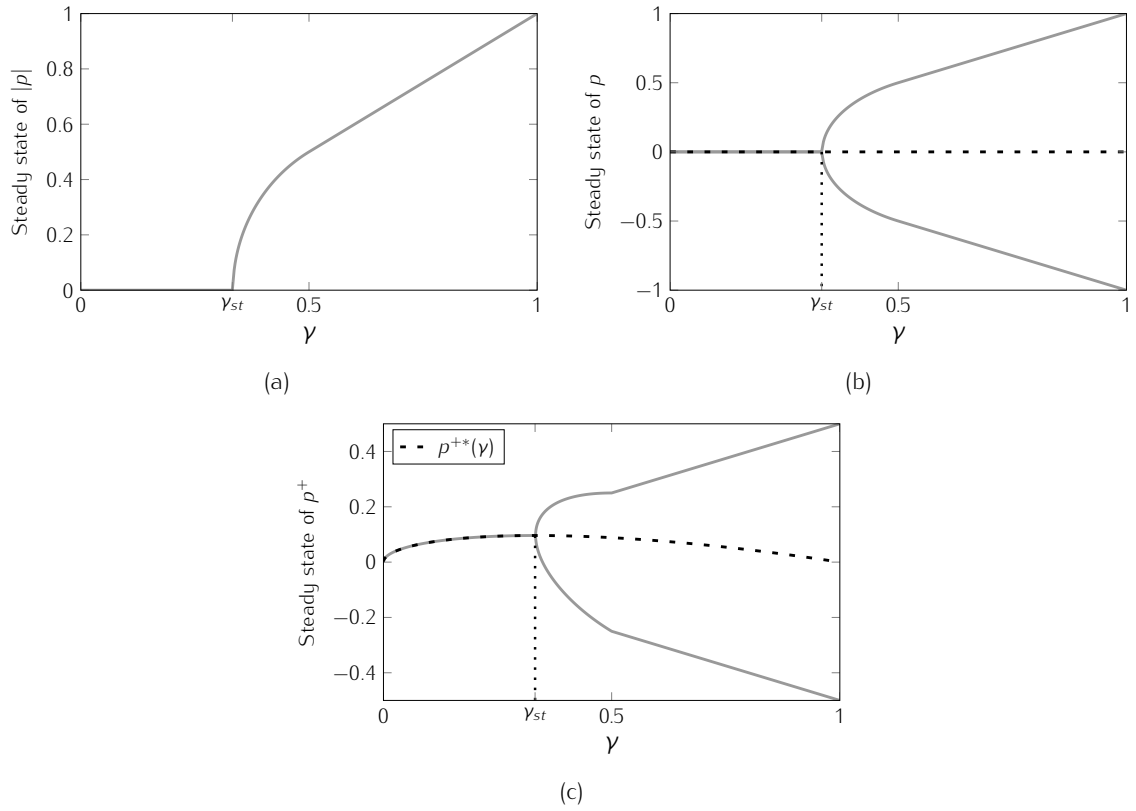


FIGURE 2.3 – Graphical representation of the static bifurcation diagrams for $\zeta = 0.5$. Diagrams based on variables (a) $|p|$, (b) p and (c) p^+. The dashed line represents the curve of the static regime, corresponding to the fixed point $p^{+*}(\gamma)$ of the function G_γ when the diagram is base on variable p^+.

***Static* bifurcation diagrams.** Common representations of the *static* bifurcation diagram for clarinets usually show the steady state of the pressure inside the mouthpiece p or that of its amplitude (corresponding in the lossless model to the absolute value of p) with respect to the control parameter γ [29]. In this paper, calculations are based on p^+, so that most bifurcation diagrams will represent the steady state of the outgoing wave [86].

Fig. 2.3 shows an example of these three representations of the *static* bifurcation diagram for $\zeta = 0.5$. Fig. 2.3 represents only the two first branches of the diagrams. The first branch corresponds to the fixed points of the function G_γ and the second branch represents the fixed points of the function $(G_\gamma \circ G_\gamma)$. On Fig. 2.3(b) and Fig. 2.3(c) the dashed line represents the curve of the static regime. For the variable p, the static regime is equal to zero and for the variable p^+ it is a function of the parameter γ, noted $p^{+*}(\gamma)$. Oscillating regimes with higher periodicities which may appear between $\gamma = 1/3$ and $\gamma = 1/2$ are not represented.

2.2.3 Time-varying blowing pressure

2.2.3.1 Problem statement

Definitions. Before presenting the problem, some definitions are introduced in order to avoid ambiguity in the vocabulary used hereafter. In the remainder of this paper, all simulations and calculations will be performed considering that the parameter ζ is a constant and equal to 0.5. The definitions presented below, used commonly in works dealing with bifurcation theory, can present some conflicts with that of musical acoustics. The terms that will be used in the remaining

discussions are clarified in the following paragraphs :

Static case. The control parameter γ is constant and the system is described by :

$$p_n^+ = G_\gamma\left(p_{n-1}^+\right). \tag{2.22}$$

The steady state of the series p_n^+ depends on the value of the control parameter γ. If γ is smaller than γ_{st}, the series tends to a static regime. To avoid confusion, the static regime will now be called *non-oscillating static regime*. If γ is larger than γ_{st} the steady state of p_n^+ is an oscillating regime. This regime is called *oscillating static regime*. This behavior is still static, obtained by choosing a value of γ, letting the system reach its steady state, and repeating the procedure for each value of γ. Note that, even if the system tends to a steady state, the initial condition p_0^+ often induces a transient regime.

Dynamic case. As pointed in the introduction, in a musical context, the blowing pressure cannot always be considered constant. The dynamic case take this into account considering that the control parameter γ is variable and now written as γ_n. When γ is a linear function of time, the system is described by the following difference equations :

$$\begin{cases} p_n^+ = G\left(p_{n-1}^+, \gamma_n\right) & \text{(2.23a)} \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon. & \text{(2.23b)} \end{cases}$$

Since γ is changed only at each multiple of τ, the solution of equation (2.23) is still a square signal, i.e. two-state oscillating regime.

Remarque. Nous attirons votre attention sur le fait que l'équation (2.23a) est de la forme (en reprenant la notation du chapitre 1) $x_{n+1} = f\left(x_n, \mu_{n+1}\right)$ et non $x_{n+1} = f\left(x_n, \mu_n\right)$ comme indiqué dans l'équation (1.56a) de l'état de l'art. Ainsi, la valeur de p^+ à l'instant n dépend ce celle de γ au même instant et non à l'instant précédent. Ceci à pour conséquence quelques différences entre les résultats que suivent dans l'article et ceux rencontrés dans la littérature et rappelés au paragraphe 1.4.

A slowly varying parameter implies that ϵ is arbitrarily small ($\epsilon \ll 1$). The hypothesis of an arbitrarily small ϵ could be questioned in the context of the playing of a musical instrument. However, this hypothesis is required in order to use the framework of dynamic bifurcation theory (see forthcoming sections).

An example of a numerical simulation performed on the system (2.23) is shown in Fig. 2.4 for $\zeta = 0.5$, $\epsilon = 10^{-3}$ and an initial condition $\gamma_0 = 0.2$. The initial value of the outgoing wave is $p_0^+ = G(-p_0^- = 0, \gamma_0)$. Indeed, for $n = 0$ the incoming wave p^- is clearly zero, otherwise sound would have traveled back and forth with an infinite velocity.

The series p_n^+ first shows a short oscillating transient, which will be called *transient oscillating dynamic regime*. This oscillation decays into a *non-oscillating dynamic regime*. Beyond a certain threshold, a new oscillation grows, giving rise to the *final oscillating dynamic regime*.

This paper will focus on the transition (i.e. the bifurcation) from the *non-oscillating dynamic regime* to the *final oscillating dynamic regime*. The value of the parameter γ for which the bifurcation occurs is called *dynamic oscillation threshold*, noted γ_{dt}.

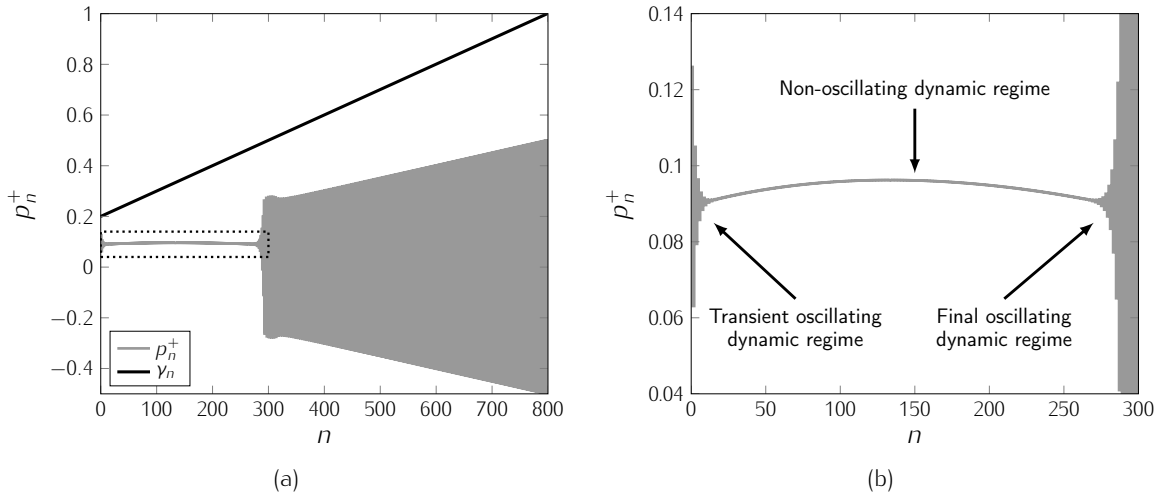


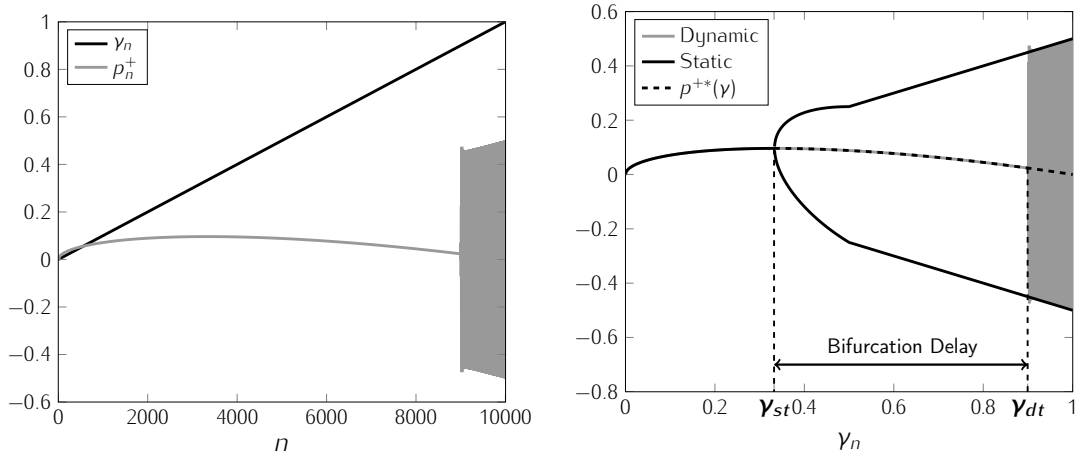
FIGURE 2.4 – Numerical simulation performed on the system (2.23). (a) complete orbit of the series and (b) zoom near the non-oscillation dynamic regime. $\zeta = 0.5$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\gamma_0 = 0.2$ and $p_0^+ = G(0, \gamma_0)$.

Bifurcation delay. *Bifurcation delay* occurs in nonlinear-systems with time varying control parameters. Fruchard and Schäfke [43] published an overview of the problem of bifurcation delay.

In fig. 2.5, the system (2.23) was simulated numerically, showing the time evolution of the series p_n^+ and of the control parameter γ_n (cf. Fig. 2.5(a)). To better understand the consequence of a time-varying parameter, the orbit of the series p_n^+ is plotted as a function of the parameter γ_n – in this case the evolution of the system can be interpreted as a *dynamic bifurcation diagram*. This is compared to the static bifurcation diagram in Fig. 2.5(b). We can observe that the static and the dynamic bifurcation diagrams coincide far from the static oscillation threshold γ_{st}. However, in the dynamic case, we can see that the orbit continues to follow closely the branch of the fixed point of function G throughout a remarkable extent of its unstable range, i.e. after γ_{st} : the bifurcation point is shifted from the static oscillation threshold γ_{st} to the dynamic oscillation threshold γ_{dt}. The term *bifurcation delay* is used to state the fact that the static oscillation threshold γ_{st} is smaller than the dynamic oscillation threshold γ_{dt}.

Non-standard analysis has been used in the past to study the phenomenon of bifurcation delay [41, 42], explaing that one of the causes of the bifurcation delay is the exponential proximity between the orbit of the series p_n^+ and the curve of the the fixed point of G. Other studies of bifurcation delay using standard mathematical tools – mathematics [10, 11] or physics publications [55, 87] – explain bifurcation delay as an accumulation of stability during the range of γ for which the fixed point of G is stable (i.e. $0 < \gamma_n < \gamma_{st}$). The dynamic oscillation threshold therefore appears as the value of the parameter γ at which the stability previously accumulated is compensated.

In musical acoustics literature some papers present results showing the phenomenon of bifurcation delay without never making a connection to the concept of *dynamic bifurcation*. For example this phenomenon is observed in simulations of clarinet-like systems using a slightly more sophisticated clarinet model (Raman's model) [7]. Raman's model takes losses into account although they are assumed to be independent of frequency (see [29] for further explanation). Bifurcation delay can also explain the difficulty in estimating the static oscillation threshold by using a slowly variable blowing pressure [38]. In a preliminary work [22], bifurcation delays were experimentally observed in a clarinet-like instrument.



(a) (b)

FIGURE 2.5 – (a) Time evolution of the series p_n^+ and of the control parameter γ_n.(b) Comparison between the series p_n^+ and the *static* bifurcation diagram as a function of γ_n. $\zeta = 0.5$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\gamma_0 = 0$ and $p_0^+ = G(0, \gamma_0)$.

2.2.3.2 Analytical study of the dynamic case

This section presents an analytical description of a clarinet-like system in a dynamic case. The notion of *invariant curve* ($\phi(\gamma, \epsilon)$), invariant under the mapping (2.23), will be needed for this study. The study of the stability of the invariant curve allows to define an analytical estimation of the dynamic oscillation threshold. A generic method to calculate the invariant curve is given by Baesens [10][a], based on a perturbation method [13].

Invariant curve. The invariant curve $\phi(\gamma, \epsilon)$ is invariant under the mapping (2.23), satisfying the following equation :

$$\phi(\gamma, \epsilon) = G\left(\phi(\gamma - \epsilon, \epsilon), \gamma\right). \tag{2.24}$$

This curve plays a similar role for the dynamic system as fixed points for the static system, attracting or repelling the orbits. It is independent of the initial condition.

First of all, the invariant curve is expanded into a power series of ϵ, here truncated to the first order :

$$\phi(\gamma, \epsilon) \approx \phi_0(\gamma) + \epsilon\phi_1(\gamma). \tag{2.25}$$

Fig. 2.5 shows that, during the dynamic phase, the orbit of the series p_n^+ closely follows the curve of the fixed points of G. This allows to linearize function G around the curve of the fixed points $p^{+*}(\gamma)$:

$$G(x, \gamma) \approx G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right) + \left[x - p^{+*}(\gamma)\right] \partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right), \tag{2.26}$$

using the notation

$$\partial_x G\left(x, y\right) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial x}, \tag{2.27}$$

a. In [10], the invariant curve is called *adiabatic invariant manifold*.

and knowing that $G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right)=p^{+*}(\gamma)$ (cf. equation (4.10)). Finally, using a Taylor expansion of $\phi(\gamma-\epsilon,\epsilon)$ equation (3.9) is successively solved for the functions $\phi_0(\gamma)$ and $\phi_1(\gamma)$, yielding :

$$\phi(\gamma,\epsilon)\approx p^{+*}(\gamma)\;+\epsilon\;\frac{dp^{+*}(\gamma)}{d\gamma}\;\frac{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right)}{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right)-1}. \tag{2.28}$$

Using the explicit expressions of p^{+*} and $dp^{+*}/d\gamma$ we have :

$$\phi(\gamma,\epsilon)\approx\frac{\zeta}{2}(1-\gamma)\sqrt{\gamma}\;-\epsilon\;\frac{\zeta\left(3\,\gamma-1\right)}{4\sqrt{\gamma}}\;\frac{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right)}{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right)-1}. \tag{2.29}$$

More details about the calculation of the invariant curve are given in Appendix 2.2.6.2.

To simplify the notation, in the rest of the document the invariant curve will be noted $\phi(\gamma)$. Its dependency on parameter ϵ is not explicitly stated.

Stability of the invariant curve and theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold. A theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold is done by identifying the value of γ for which the invariant curve looses its stability. The invariant curve is said to be unstable when the orbit of of the series p_n^+ escapes from the neighborhood of the invariant curve $\phi(\gamma,\epsilon)$.

To investigate the stability of the invariant curve $\phi(\gamma,\epsilon)$, the function G in equation (2.23a) is expanded in a first-order Taylor series around the invariant curve [10] :

$$p_n^+=G(p_{n-1}^+,\gamma_n)\approx G\left(\phi(\gamma_n-\epsilon),\gamma_n\right)+\left[p_{n-1}^+-\phi(\gamma_n-\epsilon)\right]\partial_x G\left(\phi(\gamma_n-\epsilon),\gamma_n\right). \tag{2.30}$$

A new variable is defined that describes the distance between the actual orbit and the invariant curve :

$$w_n=p_n^+-\phi(\gamma_n), \tag{2.31}$$

and using equation (3.9), equation (4.22) becomes :

$$w_n=w_{n-1}\partial_x G\left(\phi(\gamma_n-\epsilon),\gamma_n\right). \tag{2.32}$$

The solution of equation (2.32) is formally :

$$w_n=w_0\prod_{i=1}^{n}\partial_x G\left(\phi(\gamma_i-\epsilon),\gamma_i\right), \tag{2.33}$$

for $n\geq 1$ and where w_0 is the initial value of w_n. The absolute value of w_n can be written as follow :

$$|w_n|=|w_0|\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma_i-\epsilon),\gamma_i\right)\right|\right). \tag{2.34}$$

Finally, using Euler's approximation the sum is replaced by an integral :

$$|w_n|\approx|w_0|\exp\left(\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma'-\epsilon),\gamma'\right)\right|\frac{d\gamma'}{\epsilon}\right). \tag{2.35}$$

Equation (2.35) shows that the variable p^+ starts to diverge from the invariant curve $\phi(\gamma, \epsilon)$ when the argument of the exponential function changes from negative to positive. Therefore, the analytical estimation of the dynamic oscillation threshold γ_{dt}^{th} is defined by :

$$\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_{dt}^{th}+\epsilon} \ln \left| \partial_x G \left(\phi(\gamma' - \epsilon), \gamma' \right) \right| d\gamma' = 0, \tag{2.36}$$

where γ_0 is the initial value of γ. This result can be deduced from [10] (equation (2.18)), it may also be obtained in the framework of non-standard analysis [40].

The theoretical estimation γ_{dt}^{th} of the dynamic oscillation threshold depends on the initial condition γ_0 and on the increase rate ϵ, it is therefore written $\gamma_{dt}^{th}(\gamma_0, \epsilon)$.

A numerical solution $\gamma_{dt}^{th}(\gamma_0, \epsilon)$ of the implicit equation (2.36) is plotted in Fig. 2.6 as a function of the initial condition γ_0 and for $\epsilon = 10^{-2}$, 10^{-3} and 10^{-4}. γ_{dt}^{th} can be much larger than static oscillation threshold $\gamma_{st} = 1/3$ for small initial conditions γ_0. When the initial condition value γ_0 increases, γ_{dt}^{th} approaches the static threshold. Fig. B.3 shows that the bifurcation delay seems to be independent of the increase rate ϵ if this value is sufficiently small (typically $\leq 10^{-3}$).

Equation (2.36) states that when $\gamma = \gamma_{dt}^{th}$ we have $|w_n| \approx |w_0|$, providing a good estimation of the dynamic oscillation threshold γ_{dt} if $|w_0|$ is sufficiently small, i.e. if p_0^+ is sufficiently close to $\phi(\gamma_0)$. $\gamma_0 = 0$ can be problematic since $\phi(0, \epsilon) = -\infty$, but a single iteration is sufficient to bring the orbit to a neighborhood of the invariant curve. Therefore, we make the assumption that

$$\gamma_{dt}^{th}(0, \epsilon) \approx \gamma_{dt}^{th}(\epsilon, \epsilon). \tag{2.37}$$

A non-exhaustive study done by running a few simulations shows that for $\epsilon = 10^{-4}$ the error in γ_{dt} due to this approximation is under 10^{-8}, rising to 10^{-7} when $\epsilon = 10^{-3}$ and 2×10^{-5} when $\epsilon = 10^{-2}$.

2.2.3.3 Benchmark of theoretical estimators for the dynamic threshold

Multiple criteria can be associated to the beginning of the oscillating regime. For instance, the oscillations can start before the series departs from the vicinity of the invariant curve as described in equation (2.36). Moreover, because of the approximation used between equations (2.35) and (2.36), the value of $\gamma = \gamma_{dt}^{th}$ may not be an accurate estimation of the value at which the orbit departs from this vicinity.

For comparison, a dynamic oscillation threshold (noted γ_{dt}^{num}) is calculated by simulating system (2.23) and compared with γ_{dt}^{th}. When the orbit of the series p_n^+ is periodic, the sign of the second order difference of p_n^+ changes sign at each iteration (i.e. the curve of p_n^+ changes from upward to downward concave). In discrete time formulation the second order difference is given by :

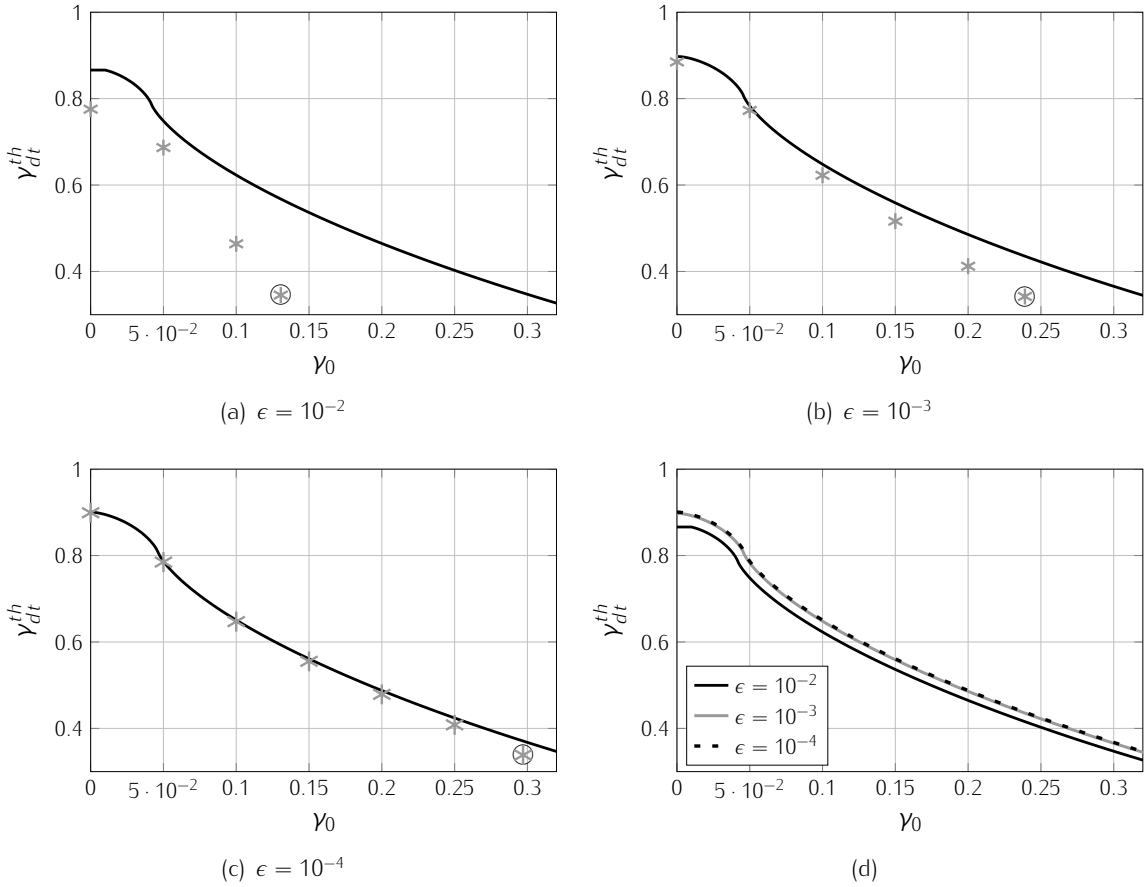
$$\left(\delta^2 p^+ \right)_i = \left(p_i^+ - p_{i-1}^+ \right) - \left(p_{i-1}^+ - p_{i-2}^+ \right). \tag{2.38}$$

Therefore, γ_{dt}^{num}, the oscillation threshold measured in numerical simulations, is reached when

$$\left(\delta^2 p^+ \right)_{i-1} \left(\delta^2 p^+ \right)_i < 0, \tag{2.39}$$

is satisfied.

Then, in Fig. 2.6, γ_{dt}^{num} is compared with γ_{dt}^{th} (gray " $*$ " markers). In some cases the series p_n^+ never reaches the non-oscillating dynamic regime. An example of such situations is shown in Fig.



(a) $\epsilon = 10^{-2}$ (b) $\epsilon = 10^{-3}$

(c) $\epsilon = 10^{-4}$ (d)

FIGURE 2.6 – Plot of γ_{dt} as a function of the initial condition γ_0, for different values of the slope ϵ. (a), (b) and (c) : solid lines are the theoretical prediction γ_{dt}^{th} calculated from equation (2.36). Gray " $*$ " markers represent the value γ_{dt}^{num} for which the system begins to oscillate. (d) : combination of the previous theoretical predictions. " $\circledast$ " represent the highest γ_0 for which the system has enough time to reach a non-oscillating dynamic regime.

2.7. The values of γ_{dt}^{num} corresponding to the last initial values γ_0 for which the system has enough time to reach the non-oscillating dynamic regime are circled.

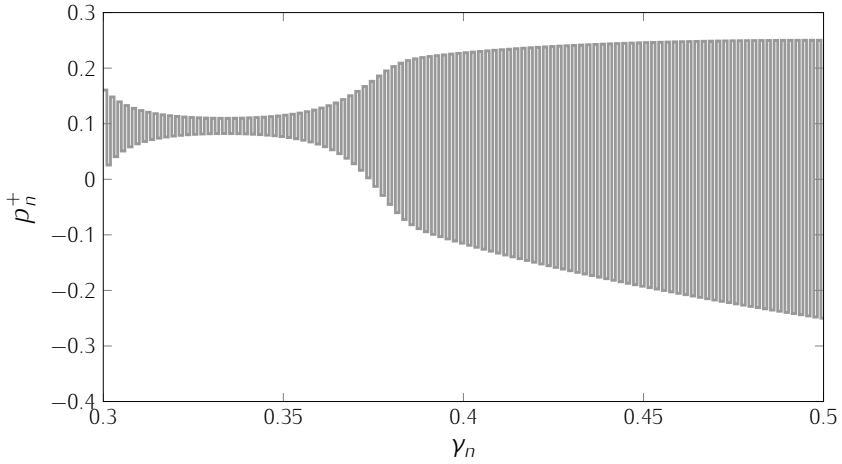


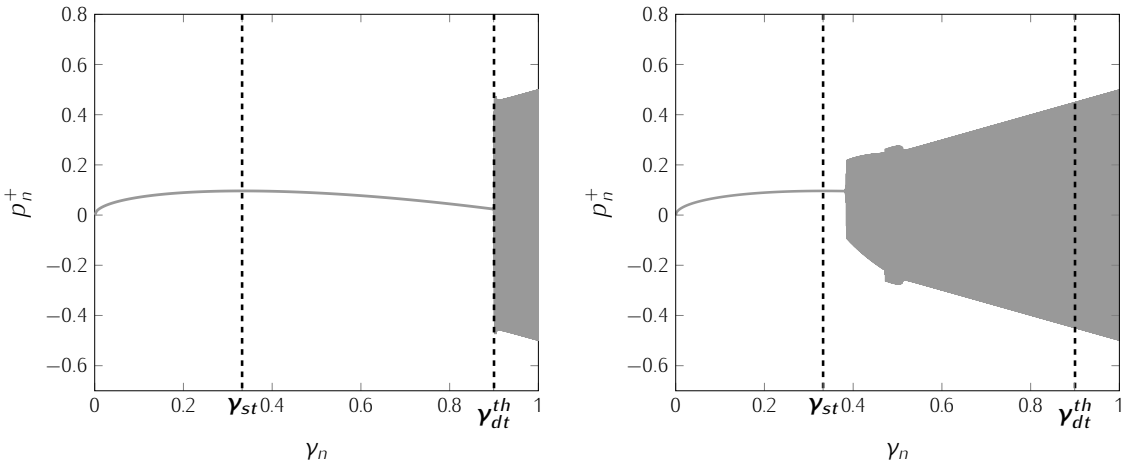
FIGURE 2.7 – Representation of the series p_n^+ as a function of γ_n for $\zeta = 0.5$,$\epsilon = 10^{-3}$, $\gamma_0 = 0.3$ and $p_0^+ = G(0, \gamma_0)$.

Fig. 2.6 shows that for $\epsilon = 10^{-4}$ the theoretical result γ_{dt}^{th} provides a good estimation of the observed dynamic oscillation threshold. For $\epsilon = 10^{-3}$, the theoretical estimation is also good if the the initial condition is sufficiently small but as γ_0 gets closer to the static threshold γ_{st} the system begins to oscillate before $\gamma = \gamma_{dt}^{th}$. Finally, for $\epsilon = 10^{-2}$, γ_{dt}^{num} is always smaller than γ_{dt}^{th}.

2.2.4 Limit of the model : influence of the precision

The phenomenon of bifurcation delay is very sensitive to noise : either numerical noise (round-off errors of the computer) or experimental noise (due to turbulence for instance). Indeed, when the static threshold is exceeded the system is very unstable. As a result, to observe bifurcation delay with numerical simulations and compare to theoretical results, it is necessary to perform calculations using a very high precision, as was done previously in this paper. For lower precisions the bifurcation delay can be considerably reduced (see [42] for an example in the logistic map).

Fig. 2.8 shows an example of numerical simulation performed on system (2.23). Fig. 2.8(a) and Fig. 2.8(b) differ only in the numerical precision (i.e. the number of decimal digits) used to calculate the orbit. The choice of the precision is possible using *mpmath*, the arbitrary precision library of *Python*. Fig. 2.8(a) was obtained using a precision of 5000 decimal digits, in this case γ_{dt}^{th} gives a good estimation of the bifurcation point, as it has already been shown in Fig. 2.6. On the other hand, using a precision of 15 decimal digits (Fig. 2.8(b)), the bifurcation delay is considerably reduced and the theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold is not valid.



(a) precision = 5000

(b) precision = 15

FIGURE 2.8 – Representation of the series p_n^+ for $\zeta = 0.5$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\gamma_0 = 0$, $p_0^+ = G(0, \gamma_0)$ and for two different values of the precision.

To highlight the influence of the precision γ_{dt}^{num} is calculated for different precisions. Results are plotted in Fig. 2.9 and compared to the analytical values γ_{st} and γ_{dt}^{th}.

The first thing to observe in Fig. 2.9 is the very high sensitivity of γ_{dt}^{num} to precision, yet all the values of γ_{dt}^{num} appear between γ_{st} and γ_{dt}^{th}. For the lowest precision (7 decimal digits) the bifurcation delay disappears and $\gamma_{dt}^{num} = \gamma_{st}$. If the precision is very high (typically ≥ 5000 decimals) $\gamma_{dt}^{num} = \gamma_{dt}^{th}$. Therefore, γ_{dt}^{th} can be interpreted as the limit of the bifurcation delay when precision tends to infinity. In cases with intermediate precisions (prec. = 15, 100 and 500) the bifurcation delay increases with the precision.

The sensitivity to the precision depends on the value of the increase rate ϵ : Fig. 2.10 plots γ_{dt}^{num} with respect to ϵ for different values of the numerical precision. Results are also compared

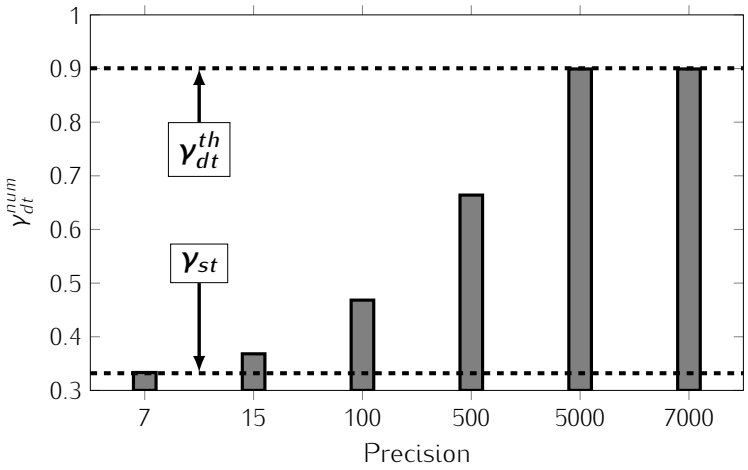


FIGURE 2.9 – Graphical representation of γ_{dt}^{num} for different precisions (prec. = 7, 15, 100, 500 and 5000) and for $\epsilon = 10^{-4}$. Results are also compared to analytical *static* and *dynamic* thresholds : γ_{st} and γ_{dt}^{th}. $\zeta = 0.5$ and $\gamma_0 = 0$.

with γ_{st} and γ_{dt}^{th}.

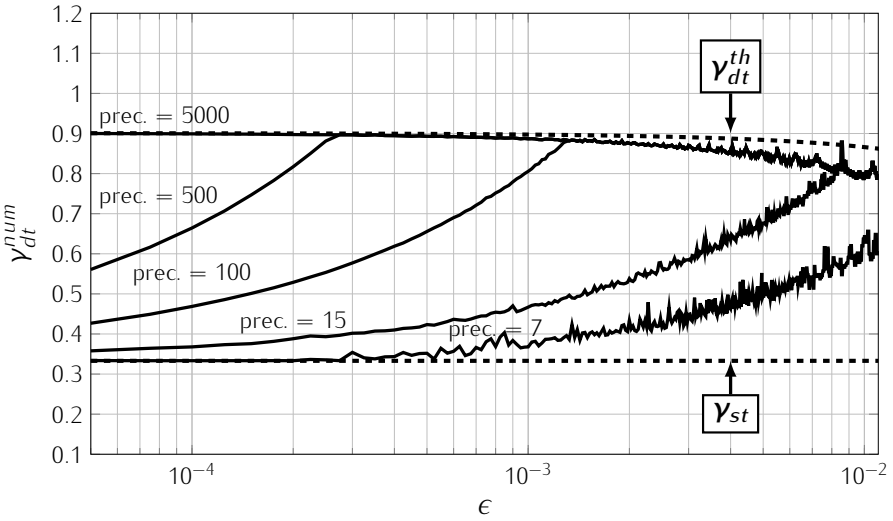


FIGURE 2.10 – Graphical representation of γ_{dt}^{num} as a function of ϵ for $\zeta = 0.5$, $\gamma_0 = 0$ and using five different precisions. A logarithmic scale is used in abscissa.

As above, for the lowest precision (7 decimals) the bifurcation delay disappears when ϵ is sufficiently small. Indeed, γ_{dt}^{num} is constant and equal to γ_{st}. Then bifurcation delay occurs and increases with ϵ. The case of the highest precision (5000 decimals) is identical to an analytical case which would correspond to infinite precision. When ϵ is sufficiently small, the curves of γ_{dt}^{num} and γ_{dt}^{th} overlap. In this case when ϵ is small γ_{dt}^{num} is almost constant suggesting that the bifurcation delay does not depend on the increase rate, as previously shown in Fig. B.3. Then, still in the case of a precision of 5000 decimals, γ_{dt}^{num} decreases for increasing ϵ, and γ_{dt}^{th} also decreases but to a lesser extent. For intermediate precisions (15, 100 and 500 decimals) the curve of γ_{dt}^{num} first increases before stabilizing close to the curve of γ_{dt}^{th}.

For a given value of the precision, the larger the ϵ, the smaller is the accumulation of round-off errors created by the computer to reach a certain value of γ. This explains why the bifurcation delay first increases if the precision is not sufficiently high to simulate an analytic case. Beyond a

certain value, all curves coincide with the one corresponding to the highest precision. That means that the system has reached the pair of parameters [precison ; ϵ] needed to simulate an analytic case.

2.2.5 Conclusion

When considering mathematical models of musical instruments, oscillation threshold obtained through a static bifurcation analysis may be possibly very different from the threshold detected on a numerical simulation of this model.

For the first time for musical instruments, the differences between these two thresholds have been interpreted as the appearance of the phenomenon of *bifurcation delay* in connection with the concept of *dynamic bifurcation*.

Theoretical estimations of the dynamic bifurcation provided in this paper have to be compared with care to numerical simulations since the numerical precision used in computations plays a key role : for numerical precisions close to standard machine precision, the bifurcation towards the oscillating regime can occur at significantly lower mouth pressure values (while different most of the time from the threshold obtained through static bifurcation theory). Moreover, in that case, the threshold at which the oscillations start becomes more dependent on the increase rate of the mouth pressure.

The dependency on precision can be linked to the influence of noise generated by turbulence as the musician blows into the instrument. This would explain why the delays observed in artificially blown instruments are shorter than the predicted theoretical ones [22]. This will be the subject of further work on this subject, as well as the validity of these results for smoother curves of variation of the mouth pressure.

Moreover, in the light of results presented here for a basic model of wind instruments, varying the blowing pressure (even slowly) does not appear as the best way to experimentally determine Hopf bifurcations (static). In a musical context, since the blowing pressure varies through time, the dynamic threshold is likely to give more relevant informations than the static threshold, even if, in a real situation the influence of noise must be considered.

As a final remark, the simplistic model used in this work only describes one point per half-period of the sound played by the instrument. It is thus not suitable to describe different regimes (whose frequencies are harmonics of the fundamental one) that can be obtained by the instrument. However a simple extension of this model calculating the orbits of different instants within the half-period may be able to provide some insight on this subject.

Acknowledgements

We wish to thank Mr. Jean Kergomard for his valuable comments on the manuscript.

This work was done within the framework of the project SDNS-AIMV "Systèmes Dynamiques Non-Stationnaires - Application aux Instruments à Vent" financed by *Agence Nationale de la Recherche* (ANR).

2.2.6 Annexes

2.2.6.1 Table of notation

Physical variables

Symbol	Explanation	Unit
Z_c	characteristic impedance	$Pa{\cdot}s{\cdot}m^{-3}$
K_s	static stiffness of the reed per unit area	$Pa{\cdot}m^{-1}$
P_M	static closing pressure of the reed	Pa
H	opening height of the reed channel at rest	m
U	flow created by the pressure imbalance between the mouth and the mouthpiece	$m^3{\cdot}s^{-1}$
U_r	flow created by the motion of the reed	$m^3{\cdot}s^{-1}$
U_{in}	flow at the entrance of the resonator	$m^3{\cdot}s^{-1}$
U_A	flow amplitude parameter	$m^3{\cdot}s^{-1}$
P_m	musician mouth pressure	Pa
P	pressure inside the mouthpiece	Pa
ΔP	pressure difference $P_m - P$	Pa
y	displacement of the tip of the reed	m
τ	round trip travel time of a wave along the resonator	s

Dimensionless variables

Symbol	Associated physical variable
γ	musician mouth pressure
ζ	flow amplitude parameter
u	flow at the entrance of the resonator
p	pressure inside the mouthpiece
r	reflexion function of the resonator
p^+	outgoing wave
p^-	incoming wave
p^{+*}	non-oscillating static regime of p^+ (fixed points of the function G)
ϕ	invariant curve
w	difference between p^+ and ϕ
ϵ	increase rate of the parameter γ
γ_{st}	static oscillation threshold
γ_{dt}	dynamic oscillation threshold
γ_{dt}^{th}	theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold
γ_{dt}^{num}	value of γ when the system begins to oscillate (calculated numerically)

Nonlinear characteristic of the embouchure

Function	Associated representation	Definition
F	$\{u\,;\,p\}$	$u = F(p)$
G	$\{p^+\,;\,p^-\}$	$p^+ = G(-p^-)$

2.2.6.2 Invariant curve

The invariant curve $\phi(\gamma, \epsilon)$ is invariant under the mapping (2.23), it therefore satisfies the following equation :

$$\phi(\gamma, \epsilon) = G\left(\phi(\gamma - \epsilon, \epsilon), \gamma\right). \tag{2.40}$$

First of all, the invariant curve is expanded into a power series of ϵ and only he first-order is retained :

$$\phi(\gamma, \epsilon) \approx \phi_0(\gamma) + \epsilon\phi_1(\gamma). \tag{2.41}$$

Secondly, the function G is linearized around the curve $p^{+*}(\gamma)$ of the fixed points :

$$\begin{aligned} G(x, \gamma) &\approx G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right) + \\ &\quad \left[x - p^{+*}(\gamma)\right] \partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right) && (2.42) \\ &= p^{+*}(\gamma) + \left[x - p^{+*}(\gamma)\right] \partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right), && (2.43) \end{aligned}$$

where

$$\partial_x G\left(x, y\right) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial x}. \tag{2.44}$$

Then, we make a Taylor expansion of $\phi(\gamma - \epsilon, \epsilon)$:

$$\begin{aligned} \phi(\gamma - \epsilon, \epsilon) &\approx \phi(\gamma, \epsilon) - \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial \gamma}(\gamma, \epsilon) + O(\epsilon^2); && (2.45) \\ &= \phi_0(\gamma) + \epsilon\phi_1(\gamma) - \epsilon \frac{\partial \phi_0(\gamma)}{\partial \gamma} + O(\epsilon^2). && (2.46) \end{aligned}$$

Finally, neglecting the second-order terms in ϵ, equation (2.40) becomes :

$$\phi_0(\gamma) + \epsilon\phi_1(\gamma) = p^{+*}(\gamma) + \left[\phi_0(\gamma) + \epsilon\phi_1(\gamma) - \epsilon \frac{\partial \phi_0(\gamma)}{\partial \gamma} - p^{+*}(\gamma)\right] \partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right). \tag{2.47}$$

To obtain the approximate analytical expression of the invariant cure ϕ, equation (2.47) is successively solved for the functions $\phi_0(\gamma)$ and $\phi_1(\gamma)$.

As expected, to order 0 we find :

$$\phi_0(\gamma) = p^{+*}(\gamma). \tag{2.48}$$

To order 1, we have to solve :

$$\begin{aligned} \phi_1(\gamma) &= \left[\phi_1(\gamma) - \frac{\partial \phi_0(\gamma)}{\partial \gamma}\right] \partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right); && (2.49) \\ &= \left[\phi_1(\gamma) - \frac{\partial p^{+*}(\gamma)}{\partial \gamma}\right] \partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right), && (2.50) \end{aligned}$$

and therefore :

$$\phi_1(\gamma) = \frac{\partial p^{+*}(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right)}{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right) - 1}. \tag{2.51}$$

Finally the expression of the invariant curve is :

$$\phi(\gamma, \epsilon) \approx p^{+*}(\gamma) \; + \; \epsilon \, \frac{\partial p^{+*}(\gamma)}{\partial \gamma} \; \frac{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right)}{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right) - 1}. \tag{2.52}$$

Fin de l'article [Début page 44]

Chapitre 3

Seuil dynamique d'oscillation : *Prise en compte du bruit*

Sommaire

3.1 Avant-propos . . . 63
3.2 Article *Nonlinear Dynamics 2* . . . 64
3.2.1 Introduction . . . 64
3.2.2 Dynamic oscillation threshold of the clarinet model without noise and problem statement . . . 66
3.2.3 Finite precision versus additive white noise . . . 69
3.2.4 Analytical study of the noisy dynamic case . . . 71
3.2.5 Conclusion . . . 79
3.2.6 Annexes . . . 80
3.3 Influence des autres paramètres du modèle . . . 82
3.3.1 Influence du second paramètre de contrôle ζ . . . 82
3.3.2 Influence du paramètre de pertes λ . . . 83

3.1 Avant-propos

La section 3.2 de ce chapitre est la reproduction d'un article publié dans *Nonlinear Dynamics* en juin 2013 [20] et intitulé : *"Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure : Influence of noise"*, écrit en collaboration avec André Almeida, Christophe Vergez et Bruno Gazengel. L'article s'inscrit dans la continuité du travail présenté dans [19], reporté à la section 2.2 de ce mémoire. Il propose une nouvelle expression théorique du seuil d'oscillation dynamique du modèle de "Raman" (rappelé au paragraphe 3.2.2) prenant en compte l'influence du bruit sur le retard à la bifurcation. L'expression du seuil dynamique permet *in fine* de prédire correctement le seuil dynamique observé dans des simulations réalisées avec des précisions de calcul habituelles, levant ainsi les contradictions mises en évidence au paragraphe 2.2.4. Le paragraphe 3.2.3 propose une étude permettant de confirmer que les erreurs d'arrondi d'un ordinateur peuvent être modélisées par un bruit blanc additif. Le paragraphe 3.2.4 décrit en détail la méthode générale, proposée par Baesens [9, 10], qui fournit une solution analytique au système (2.23) auquel est ajouté une variable aléatoire. Cette étude met en évidence l'existence de deux régimes de fonctionnement du modèle [a] : le *"deterministic regime"*, dans ce cas

a. Nous utilisons la terminologie en anglais, définie par Baesens [9, 10].

le seuil est prédit par γ_{dt}^{th} défini dans [19] (cf. équation (2.36)) et le *"sweep-dominant régime"* où le bruit doit être pris en compte, donnant ainsi naissance à une nouvelle expression théorique du seuil dynamique $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$. La limite entre ces deux régimes dépend des valeurs relatives de la pente de la pression dans la bouche et du niveau de bruit.

La section 3.3 propose des résultats complémentaires à ceux obtenus précédemment et présentés dans [19, 20]. Cette section présente l'étude de l'influence du second paramètre de contrôle du modèle ζ (section 3.3.1) et du paramètre de pertes λ (section 3.3.2) sur la valeur du seuil dynamique d'oscillation.

3.2 Article *Nonlinear Dynamics 2* :

B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel. ***"Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure : Influence of noise"***

Début de l'article

3.2.1 Introduction

In classical (or *static*) bifurcation theory, all the parameters are constant, including the bifurcation parameter. The *dynamic* bifurcation theory focuses on systems where the bifurcation parameter is varying slowly over time. For a given system, the location of the bifurcation can be significantly different in the latter case.

A simple illustration is the flip bifurcation undergone by many one-dimensional discrete time nonlinear systems (among which the well known logistic map [61] or a clarinet model [64, 86]). When the bifurcation parameter is constant, the *static* bifurcation diagram summarizes the behavior of the system around the bifurcation : below the critical value of the parameter, the fixed point is stable (thus attractive), and above the critical value of the parameter the fixed point is unstable (thus repulsive) whereas a 2-valued cycle, born at the bifurcation, is stable (thus attractive). When the bifurcation parameter is varied over time, a *bifurcation delay* may appear : when the *static* bifurcation point is passed, the orbit remains in the neighborhood of the branch of the fixed points. After a certain time, the *dynamic* bifurcation point is reached : the system escapes from the branch of the fixed points and moves abruptly to the 2-valued cycle. This behavior may be depicted in a *dynamic bifurcation diagram*. Fruchard and Schäfke [43] published an overview of the problem of bifurcation delay.

A previous article by the authors [19] analyzed the behavior of a simplified model of a clarinet when one of its control parameters (the blowing pressure) increases slowly linearly with time. Oscillations corresponding to the production of sound start at a much higher threshold than the one obtained in a static parameter case (i.e. higher than *static* bifurcation point of the system). The dynamic threshold (i.e. the *dynamic* bifurcation point) was described by an analytical expression, predicting that it does not depend on the increase rate of the blowing pressure (within the limits of the theory, i.e. slow enough increases), but that it is very sensitive to the starting value of the linear increase. This is a known behavior of such kind of system which time-varying parameter, shown by Baesens [10] and, in the framework of nonstandard analysis, by Fruchard [40].

These results are reproduced by simulations of the model, but only when very high precisions are used in the simulations. Running the simulation with the normal double-precision of a CPU results in much lower thresholds, although higher than the static ones.

Tableau 3.1 – Table of notation. All quantities are dimensionless.

Table of Notation	
G	iterative function
γ	musician mouth pressure (control parameter)
ζ	control parameter related to the opening of the embouchure at rest
p^+	outgoing wave
p^-	incoming wave
p^{+*}	non-oscillating static regime of p^+ (fixed points of the function G)
ϕ	invariant curve
w	difference between p^+ and ϕ
ϵ	increase rate of the parameter γ
σ	level of the white noise
γ_{st}	static oscillation threshold
γ_{dt}	dynamic oscillation threshold
γ_{dt}^{th}	theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold of the clarinet model without noise or in "deterministic" situation
$\hat{\gamma}_{dt}^{th}$	theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold of the noisy clarinet model in "sweep-dominant" situation
Γ_{dt}^{th}	general theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold of the noisy clarinet model, both for a "sweep-dominant regime" or a "deterministic regime"
γ_{dt}^{num}	dynamic oscillation threshold calculated on numerical simulations

The problem of the precision had already been mentioned in the seminal article [16] *Chasse au canard* (*Duck Hunting* in english).The *canard* phenomenon have similarities with the bifurcation delay. However, it can also appear in static situations : if the control parameter is higher than the static bifurcation point a stable limit cycle appears but, in particular cases, a delay can be observed in the limit cycle itself (see [16, 43] for *canards* of forced Van der Pol equation). The shape of the resulting *canard* cycle in the phase space resembles that of a duck . This phenomenon can only exist in a very narrow interval of the parameter. Consequently, numerical simulations have to be performed with high precision and it was impossible in the beginning of the 80ies.

For the dynamic bifurcation, in contrast with the theory and simulations using high precision, when numerical simulations are running with finite precision, the dynamic threshold depends on the parameter increase rate, but doesn't depend on the starting value of the parameter. These properties have been observed on numerical simulations of the logistic map by Kapral and Mandel [55] and in [19] in the case of a clarinet model.

To explain this discrepancy, round-off errors of the computer must be taken into account. In general this is done by introducing an ad hoc additive white noise in the model. For continuous-time systems we can cite Benoît [15] and more recently Berglund and Gentz [23, 24]. For discrete-time systems Baesens [10, 9] propose a general method which is followed in the present paper.

Therefore, the aim of the present article is to formulate analytically an estimation of the dynamic bifurcation threshold in simulations performed with finite precision. The effect of finite numerical precision in simulations is modeled as an ad hoc additive white noise with uniform distribution. This hypothesis is tested in section 3.2.3. In section 3.2.4, a mathematical relation is derived for the behavior of the model affected with noise. The resulting theoretical expression of the dynamic oscillation threshold is compared to numerical simulations and its range of validity is discussed. The clarinet model and major results from [19] are first briefly recalled in section 3.2.2.

A table of notation is provided in table 3.1

3.2.2 Dynamic oscillation threshold of the clarinet model without noise and problem statement

3.2.2.1 Clarinet model

The instrument is divided into two functional elements : the exciter and the resonator. The exciter of the clarinet is the reed-mouthpiece system described by a nonlinear characteristics relating, by the Bernoulli equation, the instantaneous values of the flow $u(t)$ across the reed entrance to the pressure difference $\Delta p(t) = p_m(t) - p(t)$ between the mouth of the musician and the clarinet mouthpiece [52, 51]. The reed is simplified into an ideal spring without damping or inertia. The resonator is approximated by a straight cylinder, described by its reflection function $r(t)$. Considering that the resonator is a perfect cylinder in which the dispersion is ignored and the losses are assumed to be frequency independent [64, 58]. The reflection function $r(t)$ becomes a simple delay with sign inversion (multiplied by an loss parameter λ) and is written :

$$r(t) = -\lambda\delta(t-\tau), \tag{3.1}$$

where $\tau = 2L/c$ is the travel time for waves to propagate to the end of the resonator of length L at speed c and to return to the input.

The loss parameter λ takes into account the visco-thermal losses along the resonator, which at low frequencies are dominant over the radiation losses. It can be approximated by the expression :

$$\lambda = e^{-2\alpha L}, \tag{3.2}$$

where α is the damping factor [57] :

$$\alpha \approx 3 \cdot 10^{-5}\sqrt{f}/R. \tag{3.3}$$

R is the resonator radius and f is chosen to be the fundamental playing frequency. A realistic value of the loss parameter is $\lambda = 0.95$.

The solutions $p(t)$ and $u(t)$ of the model depend on two control parameters : γ representing the blowing pressure and ζ related to the opening of the embouchure at rest. In this work, the control parameter ζ is always constant and equal to 0.5. Using the variables $p^+ = \frac{1}{2}(p+u)$ and $p^- = \frac{1}{2}(p-u)$ (outgoing and incoming pressure waves respectively) instead of the variables p and u, the nonlinear characteristic of the exciter is written :

$$p^+ = f\left(-p^-, \gamma\right). \tag{3.4}$$

Outgoing and incoming pressure waves are also related through the reflection function $r(t)$:

$$p^-(t) = \left(r * p^+\right)(t) = -\lambda p^+(t-\tau). \tag{3.5}$$

Finally, by combining equations (3.4) and (5.4) and using a discrete time formulation (the discretization is done at regular intervals τ) and noting $p^+(n\tau) = p_n^+$ and $p^-(n\tau) = p_n^-$, we obtain the following iterated map [64, 69, 58] :

$$p_n^+ = f\left(\lambda p_{n-1}^+, \gamma\right) = G\left(p_{n-1}^+, \gamma\right), \tag{3.6}$$

with, by definition : $G(x) \equiv f(\lambda x)$. The function G can be written explicitly for $\zeta < 1$ (see Taillard *et al.* [86]).

When the control parameter γ is constant, for low values of γ the solution of eq. (3.6) stabilizes at an equilibrium point which corresponds to the fixed point $p^{+*}(\gamma)$ of the iterated function G. For a critical value γ_{st}, namely the static bifurcation point (also called the static oscillation threshold) a flip bifurcation [61] occurs, i.e.

$$G'\left(p^{+*}(\gamma_{st})\right) = -1, \tag{3.7}$$

leading to a 2-valued periodic regime that corresponds to sound production.

For the lossless model (i.e. $\lambda = 1$) the static oscillation threshold is equal to $\gamma_{st} = 1/3$. If $\lambda < 1$, γ_{st} is larger than 1/3, an expression of γ_{st} is given by Kergomard *et al.* [60].

3.2.2.2 Dynamic bifurcation

For a linearly increasing control parameter γ, eq. (3.6) is replaced by eq. (3.8a) and (3.8b) :

$$\begin{cases} p_n^+ = G\left(p_{n-1}^+, \gamma_n\right) & \text{(3.8a)} \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon. & \text{(3.8b)} \end{cases}$$

The theory derived in section 3.2.4 requires that the parameter γ increases slowly, hence ϵ is considered arbitrarily small ($\epsilon \ll 1$).

Because of the time variation of the control parameter γ, the system (3.8) undergoes a bifurcation delay : the bifurcation point corresponding to the birth of the oscillations is shifted from the *static oscillation threshold* γ_{st} [29] to the *dynamic oscillation threshold* γ_{dt} [19]. The previous article by the authors [19] provides an analytical study of the dynamic flip bifurcation of the clarinet model (i.e. system (3.8)) in the case where $\lambda = 1$. The method is based on applications of dynamic bifurcation theory proposed by Baesens [10]. The main focus of this work is on the properties of the dynamic oscillation threshold, recalled hereafter.

The trajectory of the system in the phase space (here constituted of a single variable p^+) through time is called the *orbit*. The dynamic oscillation threshold is defined as the value of γ for which the orbit escapes from the neighborhood of the *invariant curve* $\phi(\gamma, \epsilon)$. This definition is different from the one used in [19] where the dynamic threshold was defined as the value of γ for which the orbit starts to oscillate.

The invariant curve is the nonoscillating solution of the system (3.8). It plays the role of an attractor for variable parameters similarly to the role of the fixed point in a static case. The invariant curve is written as a function of the parameter, invariant under the mapping (3.8) and thus satisfying the following equation :

$$\phi(\gamma, \epsilon) = G\left(\phi(\gamma - \epsilon, \epsilon), \gamma\right). \tag{3.9}$$

The procedure to obtain the theoretical estimation γ_{dt}^{th} of the dynamic oscillation threshold is as follows : a theoretical expression of the invariant curve is found for a particular (small) value of the increase rate ϵ (i.e. $\epsilon \ll 1$). The system (3.8) is then expanded into a first-order Taylor series around the invariant curve and the resulting linear system is solved analytically. Finally, γ_{dt}^{th} is derived from the analytic expression of the orbit.

The dynamic oscillation threshold γ_{dt}^{th} is defined by [19] :

$$\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_{dt}^{th}+\epsilon} \ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma'-\epsilon),\gamma'\right)\right| d\gamma' = 0, \tag{3.10}$$

where γ_0 is the initial value of γ (i.e. the starting value of the linear ramp). Two important remarks can be made on this expression (Fig. 6 of [19]) :

— γ_{dt}^{th} does not depend on the slope of the ramp ϵ, provided that ϵ is small enough,

— γ_{dt}^{th} depends on the initial value γ_0 of the ramp.

These properties are also observed in numerical simulations with very high precision.

3.2.2.3 Problem statement

The above theoretical predictions converge towards the observed simulation results for very high numerical precision (typically when thousands of digits are considered in the simulation). Figure [b] 3.1(a) shows that for the usual double-precision of CPUs (around 15 decimals), theoretical predictions of the dynamic bifurcation point γ_{dt}^{th} are far from thresholds estimated on the numerical simulation results γ_{dt}^{num}. In particular, the numerical bifurcation point γ_{dt}^{num} depends on the slope ϵ, in contrast with the theoretical predictions γ_{dt}^{th}.

Moreover, figure 3.2 reveals that for a low numerical precision (though even significantly higher than typical precisions used in numerical simulations), the dependence of the bifurcation point on the initial value γ_0 is lost over a wide range of γ_0.

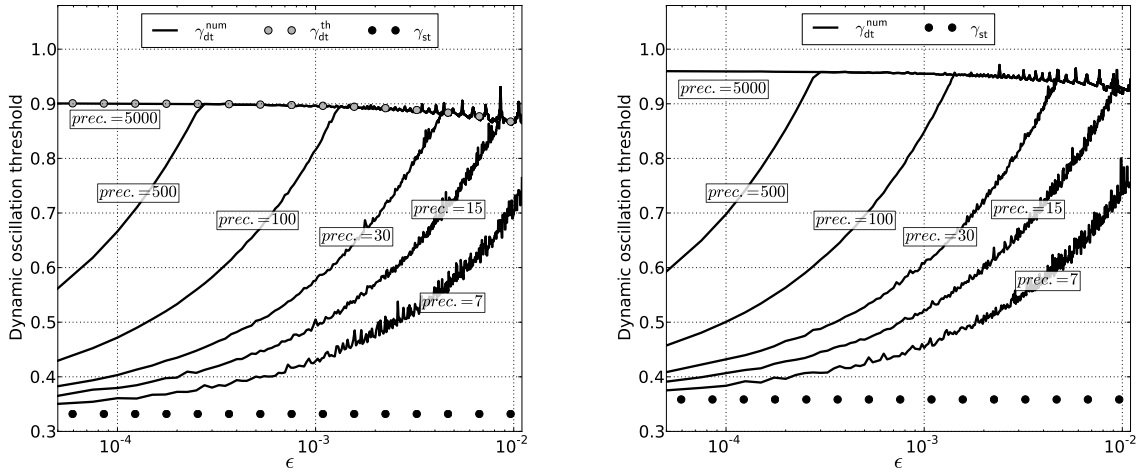
The minimum precision for which round-off errors do not affect the behavior of the system depends on the precision itself and on the relative magnitude of the slope ϵ and the initial condition γ_0. Indeed, figure 3.1 shows that, beyond a certain value of ϵ all curves join the one with highest precision. Curves for even higher precisions would overlap, allowing to conclude that they are representative of an infinitely precise case. As shown in figure 3.2, for given values of ϵ and of the numerical precision beyond a certain value of γ_0, the theoretical result γ_{dt}^{th} allows to obtain a good prediction of the bifurcation delay.

As a conclusion, the theoretical results obtained in [19] are not able to predict the behavior of numerical simulations carried out at usual numerical precision. The aim of this paper is to show how the numerical precision can be included in a theoretical model that correctly describes numerical simulations. Firstly, it is shown that the model computed with a finite precision behaves similarly to the model with an ad-hoc additive white noise. This is done in the next section. Then, using theoretical results given by Baesens [10], a modified expression describing the behavior of the model affected by noise (section 3.2.4) is proposed.

In figure 3.1(b), system (3.8) is simulated with $\lambda = 0.95$, a typical value to take into account losses in the cylindrical clarinet considered in this paper. The effect of the losses is to increase the dynamic threshold, as for the static one. However, the behavior of the lossless model and that of system with losses are qualitatively the same. Therefore, for sake of simplicity and without loss of generality, following analytical calculation and numerical simulations are performed using $\lambda = 1$.

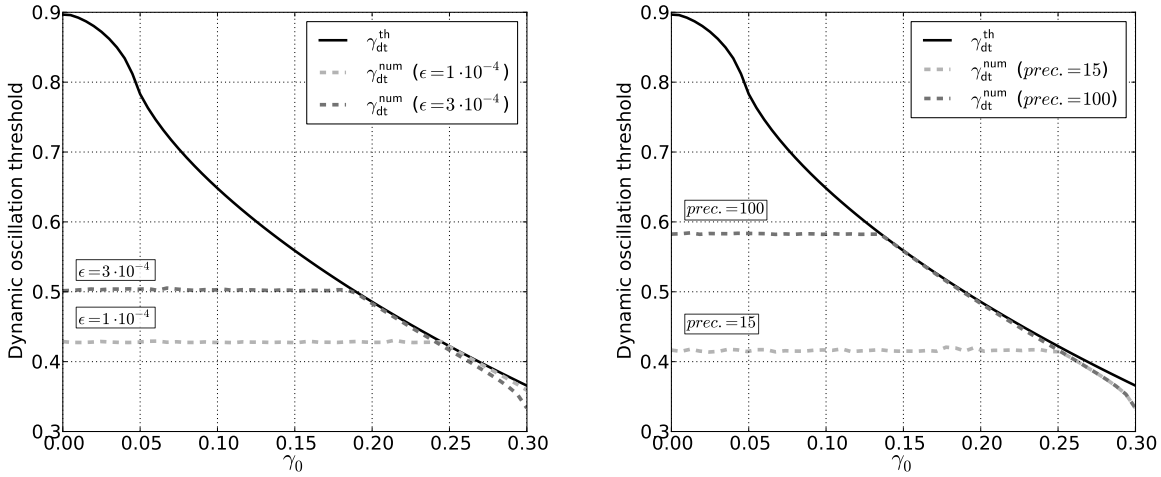
Remarque. Le seuil statique γ_{st} représenté sur la figure 3.1(b) est calculé en utilisant l'expression (B.18) obtenue par méthode perturbative (cf. annexe B.2).

b. Figure 3.1(a) is a plot similar to figure 10 of [19]. The only difference is that the bifurcation point γ_{dt}^{num} estimated on the simulation results is here defined by the point where the orbit leaves the neighborhood of the invariant curve. The motivation for this choice will appear clearly in section 3.2.3 where random variables are considered.



(a) lossless : $\lambda = 1$ (b) $\lambda = 0.95$

FIGURE 3.1 – Graphical representation of γ_{dt}^{num} for different precisions (prec. = 7, 15, 30, 100, 500 and 5000) with respect to the slope ϵ and for $\gamma_0 = 0$. Results are also compared to analytical *static* and *dynamic* thresholds : γ_{st} and γ_{dt}^{th}. (a) lossless model : $\lambda = 1$ and (b) typical losses in a cylindrical clarinet, $\lambda = 0.95$.



(a) Numerical precision is fixed (prec. = 50). γ_{dt}^{num} is computed for $\epsilon = 10^{-4}$ and $3 \cdot 10^{-4}$.

(b) The increase rate of γ is fixed ($\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$). γ_{dt}^{num} is computed for numerical precisions equal to 15 and 100.

FIGURE 3.2 – Plot of γ_{dt} as a function of the initial condition γ_0. Solid lines are the theoretical prediction γ_{dt}^{th} calculated from equation (3.10). Dashed line represent the values γ_{dt}^{num}.

3.2.3 Finite precision versus additive white noise

Differences between theoretical predictions and numerical simulations highlighted in the previous section are due to round-off errors that accumulate for finite precisions. The aim of this section is to test whether round-off errors of the computer can be modeled as an additive independent and identically distributed random variable (referred to as an additive white noise). This result is used in section 3.2.4 to derive theoretical predictions of the dynamic bifurcation point γ_{dt}.

3.2.3.1 Results

Two numerical results are compared. The first is the simulation of the system (3.8) using a numerical precision pr_1 (hereafter referred as a *finite precision case*). The second one (hereafter referred as a *noisy case*) is the simulation of the following stochastic system of difference equations :

$$\begin{cases} p_n^+ = G\left(p_{n-1}^+, \gamma_n\right) + \xi_n & \text{(3.11a)} \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, & \text{(3.11b)} \end{cases}$$

where ξ_n is a uniformly distributed stochastic variable with an expected value equal to zero (i.e. $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$) and a level σ defined by :

$$\mathbb{E}[\xi_m \xi_n] = \sigma^2 \delta_{mn}, \tag{3.12}$$

where δ_{mn} is the Kronecker delta. The definition of the expected value $\mathbb{E}$ is provided in [79]. For comparison with the finite precision case the noise level σ is equal to 10^{-pr_1}.

The bifurcation point γ_{dt}^{num} estimated on the simulations is defined as the value of γ for which the orbit leaves the neighborhood of the invariant curve. Since the mean value of the white noise ξ_n is zero, the relevant quantity to study is the mean square deviation of the orbit from the invariant curve. Therefore, γ_{dt}^{num} is reached when :

$$\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]} = \epsilon, \tag{3.13}$$

where $w_n = p_n^+ - \phi(\gamma_n, \epsilon)$ describes the distance between the actual orbit and the invariant curve. Among other possible criteria, the condition (3.13) is chosen because it is also used in the analytical calculation made in section 3.2.4.

To simplify the notation, in the rest of the document the invariant curve will be noted $\phi(\gamma)$. Its dependency on parameter ϵ is no longer explicitly stated.

In figures 3.3 and 3.4, γ_{dt}^{num} is estimated in the finite precision case and in the noisy case. In both cases an average is made on w_n^2 obtained in 20 different simulations. Then, γ_{dt}^{num} is calculated on the mean signal using equation (3.13).

In figure 3.3, γ_{dt}^{num} is plotted with respect to the numerical precision for which both systems (3.8) and (3.11) are simulated. The noise level σ of the noisy case modeled by the system (3.11) is equal to 10^{-30}. For numerical precision below $-\log_{10}(\sigma) = 30$, the noise level is smaller than round-off errors of the computer. In these situations, the effect of the additive noise in system (3.11) is hidden by the effect of the round-off errors of the computer. The consequence is that the thresholds computed in finite precision case and in noisy case are equals. For numerical precisions higher than 30, γ_{dt}^{num} computed on system (3.11) is constant because the influence of the round-off errors is now hidden by the additive noise which have a fixed level. Figure 3.3 shows that the transition between the regime for which the round-off error effect prevails over the additive noise affect and the regime for which the opposite occurs is abrupt. Therefore, the region where mixed effects of both round-off errors and additive noise play a role is very narrow. However, to avoid any influence of the numerical precision, the system (3.11) is simulated using a precision $pr_2 = 2pr_1$.

Figure 3.4 confirms that the kind of noise introduced in the stochastic system can correctly describe the influence of a finite precision. Indeed, with the exception of the smallest precision ($pr_1 = 7$), the curves are nearly superimposed. Hence, in the next section, the stochastic system (3.11) is studied theoretically in order to predict results of numerical simulations of system (3.8) with finite precision.

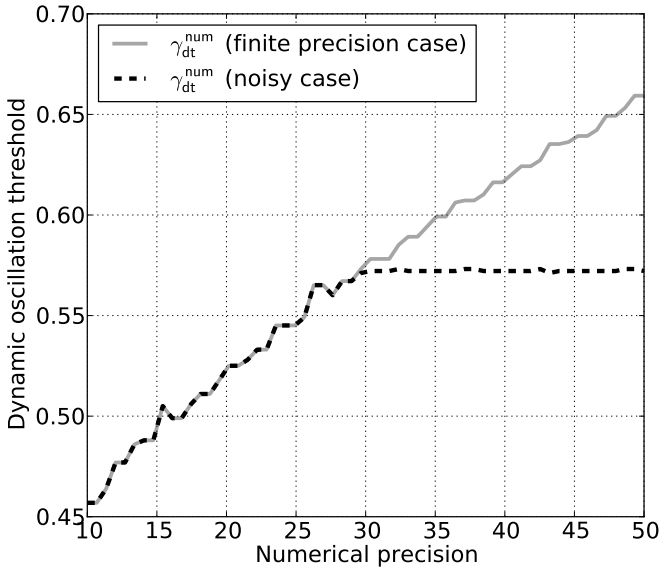


FIGURE 3.3 – Comparison of the dynamic threshold γ_{dt}^{num} obtained in numerical simulations of a clarinet model in finite precision case (3.8) and noisy case (3.11) with a noise of level $\sigma = 10^{-30}$. The dynamic threshold of oscillation obtained over an average of 20 runs is plotted against the precision used in the simulations, showing that beyond a precision of about σ, the system affected with noise is insensitive to the precision.

3.2.3.2 Relevance of numerical results

To investigate the relevance of the numerical results, several indicators are calculated. First, the standard deviation STD $\left[w_n^2\right]$ of the signal w_n^2 is calculated at the dynamic threshold γ_{dt}^{num} and compared to $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$, also calculated at γ_{dt}^{num}. Secondly, the dynamic threshold is calculated on each run. We obtain 20 values, noted $\gamma_{dt}^{num,i}$ ($i \in [1, 20]$). The mean value $\mathbb{E}\left[\gamma_{dt}^{num,i}\right]$ is compared to the value γ_{dt}^{num}, estimated on the mean signal $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]}$ (see section 3.2.3.1 where this numerical estimation method of γ_{dt}^{num} is used because it also used in analytical calculations in section 3.2.4.). The standard deviation STD $\left[\gamma_{dt}^{num,i}\right]$ is calculated too.

Results are presented in table 3.2. The mean value $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ and the standard deviation STD $\left[w_n^2\right]$ at the dynamic threshold have the same order of magnitude. This suggests a bad repeatability of the numerical simulations. However, at the dynamic threshold, w_n diverges sharply and a large deviation of it does not necessarily imply a large deviation of the dynamic threshold. The standard deviation STD $\left[\gamma_{dt}^{num,i}\right]$, in table 3.2, shows precisely a good repeatability of $\gamma_{dt}^{num,i}$.

3.2.4 Analytical study of the noisy dynamic case

3.2.4.1 General solution of the stochastic clarinet model

This section introduces a formal solution of the stochastic model that is valid when the orbit is close to the invariant curve. Function G in equation (3.11a) is expanded into a first-order Taylor series around the invariant curve. Using the variable $w_n = p_n^+ - \phi(\gamma_n)$, the system (3.11) becomes :

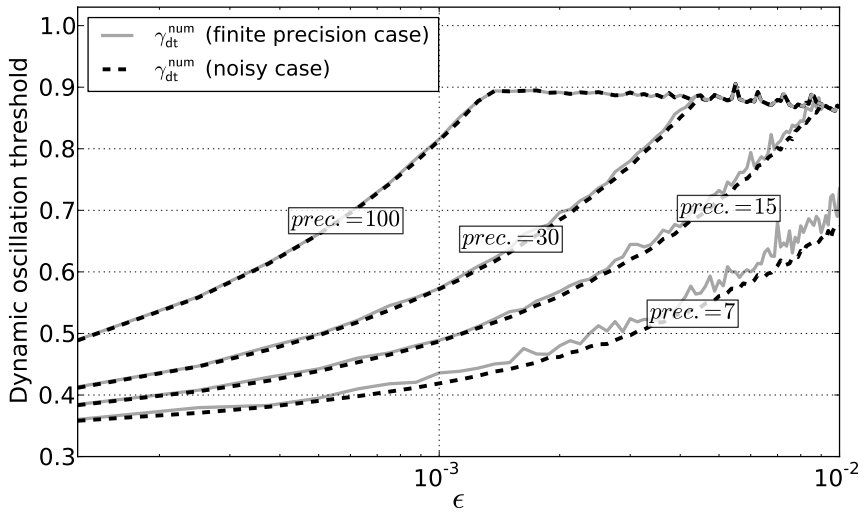


FIGURE 3.4 – Comparison between γ_{dt}^{num} computed for *finite precision cases* and for *noisy cases*. For both cases and for each value of ϵ we compute the average of the signals $w_n = p_n^+ - \phi(\gamma_n)$ obtained over 20 runs. Then, γ_{dt}^{num} is calculated on the resulting signal. The numerical precisions used to simulate the finite precision cases are 7, 15, 30 and 100 decimal digits. $\gamma_0 = 0$.

TABLEAU 3.2 – Mean value $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ and standard deviation STD $\left[w_n^2\right]$ of the signal w_n^2, calculated at the dynamic threshold γ_{dt}^{num}. Mean values $\sqrt{\mathbb{E}\left[w_n^2\right]}$ and standard deviation STD $\left[\gamma_{dt}^{num,i}\right]$ of dynamic thresholds $\gamma_{dt}^{num,i}$ ($i \in [1, 20]$) calculated on each run. All results are calculated for $\sigma = 10^{-7}$ and 10^{-15} and for $\epsilon = 10^{-4}$, 10^{-3} and 10^{-3}.

	$\sigma = 10^{-7}$			$\sigma = 10^{-15}$		
ϵ	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ at γ_{dt}^{num}	$1.01 \cdot 10^{-8}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$2.83 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-8}$	$1.46 \cdot 10^{-6}$	$5.46 \cdot 10^{-4}$
STD$[w_n^2]$ at γ_{dt}^{num}	$1.24 \cdot 10^{-8}$	$1.56 \cdot 10^{-6}$	$3.02 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-8}$	$1.86 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$
γ_{dt}^{num} estimated on $\sqrt{\mathbb{E}\left[w_n^2\right]}$	0.354	0.418	0.673	0.377	0.488	0.857
$\mathbb{E}\left[\gamma_{dt}^{num,i}\right]$	0.355	0.421	0.677	0.378	0.490	0.856
STD $\left[\gamma_{dt}^{num,i}\right]$	0.002	0.005	0.014	0.001	0.003	0.005

$$\begin{cases} w_n = w_{n-1}\partial_x G\left(\phi(\gamma_n - \epsilon), \gamma_n\right) + \xi_n & \text{(3.14a)} \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon. & \text{(3.14b)} \end{cases}$$

The solution of equation (3.14a) is [12] :

$$w_n = w_0 \prod_{k=1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_k - \epsilon), \gamma_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \prod_{m=k+1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_m - \epsilon), \gamma_m\right), \tag{3.15}$$

where w_0 is the initial value of w_n.

Because the additive white noise ξ_n has a zero-value mean, as in section 3.2.3, the relevant indicator is the mean square deviation of the orbit from the invariant curve : $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]}$. Equation (3.15) squared becomes :

$$w_n^2 = \left(w_0 \prod_{k=1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_k - \epsilon), \gamma_k\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \prod_{m=k+1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_m - \epsilon), \gamma_m\right) \right)^2 + 2w_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_j - \epsilon), \gamma_j\right) \right) \xi_k \times \prod_{m=k+1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_m - \epsilon), \gamma_m\right). \quad (3.16)$$

Averaging has no effect on the first term of the right-hand side of equation (3.16) because the stochastic variable ξ_n is not present. Using eq. (3.12), the average of the second term is simplified to :

$$\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{m=k+1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_m - \epsilon), \gamma_m\right) \right)^2. \quad (3.17)$$

Because $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$, the average of the third term of the right-hand side of equation (3.16) is also equal to zero. Using the fact that a product can be expressed as an exponential of a sum of logarithms, the final expression of $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ is given by :

$$\mathbb{E}\left[w_n^2\right] = \underbrace{w_0^2 \left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma_k - \epsilon), \gamma_k\right)\right| \right) \right)^2}_{A_n} + \underbrace{\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\exp\left[\sum_{m=k+1}^{n} \ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma_m - \epsilon), \gamma_m\right)\right| \right] \right)^2}_{B_n}. \quad (3.18)$$

The two terms of the right-hand side of equation (3.18) are denoted A_n and B_n.

Finally, using Euler's approximation, sums are replaced by integrals and the expressions of A_n and B_n become :

$$A_n \approx w_0^2 \exp\left(\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} 2 \ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma' - \epsilon), \gamma'\right)\right| \frac{d\gamma'}{\epsilon} \right), \quad (3.19)$$

$$B_n \approx \frac{\sigma^2}{\epsilon} \int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \left\{ \exp\left(\int_{\gamma+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} 2 \ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma' - \epsilon), \gamma'\right)\right| \frac{d\gamma'}{\epsilon} \right) \right\} d\gamma. \quad (3.20)$$

A_n corresponds to the precise case studied in [19] which leads to the theoretical estimation γ_{dt}^{th} of the dynamic oscillation threshold for the system without noise (cf. equation (3.10)). B_n is the contribution due to the noise.

The transform from discrete sums to integral can be questioned. Indeed, to transform the term

A_n in equation (3.18) to its integral form (3.19), we assume that :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \left|\partial_x G\left(\phi(\gamma_k - \epsilon), \gamma_k\right)\right| \approx \int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln \left|\partial_x G\left(\phi(\gamma' - \epsilon), \gamma'\right)\right| \frac{d\gamma'}{\epsilon}, \tag{3.21}$$

but if $\partial_x G\left(\phi(\gamma_i - \epsilon), \gamma_i\right)$ crosses over zero, one term in the sum comes close to $\ln(0) = -\infty$ and the equality (3.21) is respected only for small enough values of ϵ. Otherwise, in equation (3.18), we have : $A_n \to 0$ and $B_n \to \sigma^2$, and consequently $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]} \to \sigma$. In this case, for small noise levels, the difference between the orbit and the invariant curve comes close to zero, and as a result, the orbit needs more time to escape from the invariant curve neighborhood, i.e. the bifurcation delay is lengthened. This phenomenon is mentioned by Baesens [10, 11] and Fruchard [43]. It can be observed for example in figure 3.1 where peaks (i.e. larger bifurcation delay) are there on curves in the above right part of the figure. In the rest of the paper, we use integral form, because it allows analytical integrations of noise contribution B_n which will be considered in the remaining of this section.

A first glance on equations (3.19) and (3.20) allows to explain observation made in Section 3.2.2.3. Indeed, comparing the expressions of A_n and B_n, it possible to distinguish [10, 9] two operating regimes, which, for a given value of w_0, depends on ϵ, σ and γ_0 :

— $A_n \gg B_n$ **(deterministic regime)**
In this case the noise does not affect the bifurcation delay and the dynamic oscillation threshold can be determined by eq. (3.10).

— $A_n \ll B_n$ **(sweep-dominant regime)**
In this case, the bifurcation delay is affected by the noise. This regime is studied in the following section.

In Section 3.2.2.3, figures 3.1 and 3.2 represent two different cases distinguished by the parameter values : in certain areas of the figures, the dynamic bifurcation threshold does not depend on ϵ but depends on γ_0, while in other areas the dynamic bifurcation threshold depends on ϵ but is not dependent on γ_0. This observation may be interpreted as the existence of the two regimes detailed above : a **sweep-dominant regime** and a **deterministic regime**. The transition between the two regimes occurs abruptly as observed in figures 3.1 and 3.2.

3.2.4.2 Theoretical expression of the dynamic oscillation threshold of the stochastic model

The next step is to find an approximate expression of the standard deviation $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]}$ for the sweep-dominant regime. In this regime, the term A_n is negligible with respect to the contribution B_n due to the noise, i.e. $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]} \approx \sqrt{B_n}$. The purpose is to obtain a statistical prediction of the dynamic oscillation threshold for the stochastic system, hereafter referred as $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$.

It is assumed that $\epsilon \ll 1$, which implies that the invariant curve $\phi(\gamma)$ and the curve $p^{+*}(\gamma)$ of the fixed points in eq. (3.6) are close [19], and allows the approximation :

$$\partial_x G\left(\phi(\gamma - \epsilon), \gamma\right) \approx \partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right). \tag{3.22}$$

Moreover, because of the noise, the bifurcation delay is expected to occur earlier, so that the dynamic oscillation threshold γ_{dt} is assumed to be close [c] to the static oscillation threshold γ_{st}. The term $\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right)$ is then expanded in a first-order Taylor series around the static oscillation threshold γ_{st} :

c. This hypothesis could be questioned because according to figures 3.1 and 3.2, even in the presence of noise, the bifurcation delay can be large. However, this hypothesis is required to carry out following calculations.

$$\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right) \approx \underbrace{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma_{st}),\gamma_{st}\right)}_{\triangleq -1 \text{ : flip bifurcation}} + (\gamma-\gamma_{st})\underbrace{\partial_{xy} G\left(p^{+*}(\gamma_{st}),\gamma_{st}\right)}_{\text{noted} -K}, \tag{3.23}$$

finally we have :

$$\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right) \approx -1 - K(\gamma-\gamma_{st}), \tag{3.24}$$

which is used in equation (3.20). Figure 3.5 shows the comparison between $\partial_x G(p^{+*}(\gamma),\gamma)$ and its tangent function $-1-K(\gamma-\gamma_{st})$ around the static oscillation threshold for $\zeta = 0.2$, 0.5 and 0.8. The linearisation appears as a good approximation of the function in a wide domain of γ around the static oscillation threshold γ_{st}. For large values of the control parameter ζ (cf. fig. 3.5(c)) the linear approximation is valid over a narrower range of γ.

Using expression (3.24) the integral

$$I_1 = \int_{\gamma+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} 2\ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma'-\epsilon),\gamma'\right)\right| \frac{d\gamma'}{\epsilon}, \tag{3.25}$$

contained in the expression (3.20) of B_n becomes :

$$I_1 = \frac{2K}{\epsilon}\int_{\gamma+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\left(\gamma'-\gamma_{st}\right)d\gamma' = \frac{K}{\epsilon}\left[\left(\gamma'-\gamma_{st}\right)^2\right]_{\gamma+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}. \tag{3.26}$$

The small correction ϵ in the domain of integration can be neglected since $\epsilon \ll 1$. Therefore, we obtain :

$$I_1 = \frac{K}{\epsilon}\left[\left(\gamma'-\gamma_{st}\right)^2\right]_{\gamma}^{\gamma_n} = \frac{K}{\epsilon}\left[(\gamma_n-\gamma_{st})^2-(\gamma-\gamma_{st})^2\right]. \tag{3.27}$$

By combining equations (3.20) and (3.27), B_n is now written as :

$$\begin{aligned} B_n &\approx \frac{\sigma^2}{\epsilon}\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\exp\left(\frac{K}{\epsilon}\left[(\gamma_n-\gamma_{st})^2-\left(\gamma'-\gamma_{st}\right)^2\right]\right)d\gamma' \\ &= \frac{\sigma^2}{\epsilon}\exp\left(\frac{K}{\epsilon}(\gamma_n-\gamma_{st})^2\right)\times\underbrace{\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\exp\left(-\frac{K}{\epsilon}\left(\gamma'-\gamma_{st}\right)^2\right)d\gamma'}_{I_2}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

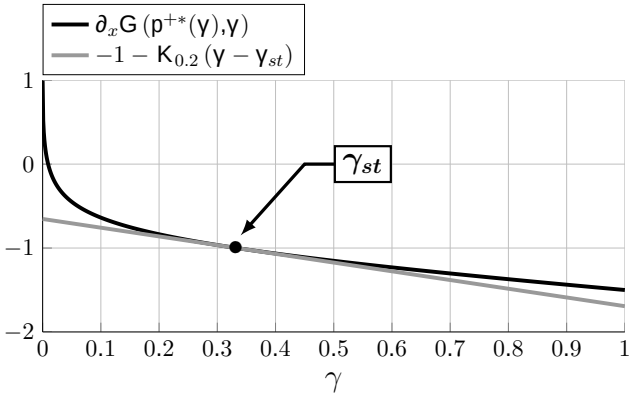
The function which appears in the integral I_2 is a Gaussian function with standard deviation

$$\nu = \sqrt{\frac{\epsilon}{2K}}. \tag{3.29}$$

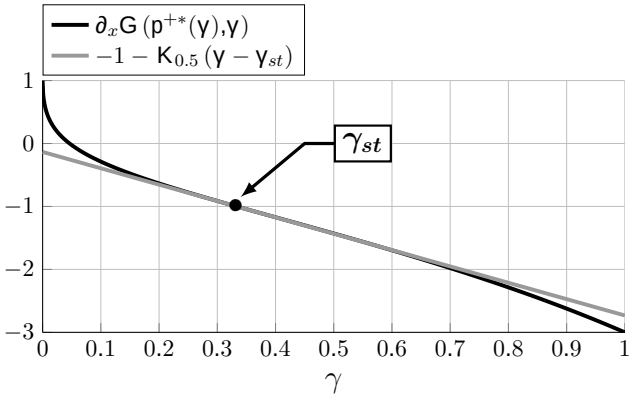
Integral I_2 is then [47] :

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{K}}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{K}{\epsilon}}\left(\gamma'-\gamma_{st}\right)\right)\right]_{\gamma_0}^{\gamma_n}, \tag{3.30}$$

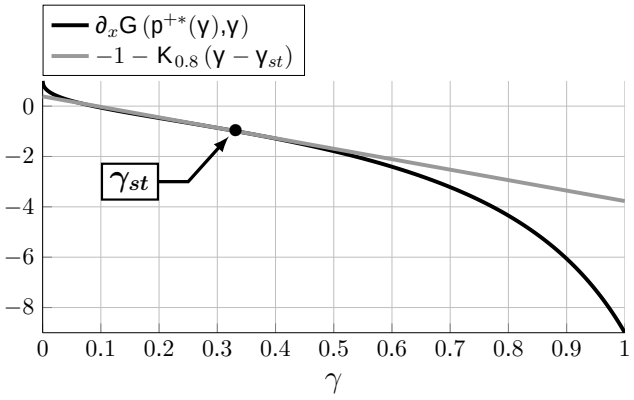
where $\mathrm{erf}(x)$ is the error function. The initial condition γ_0 is supposed to be much lower than the



(a) $\zeta = 0.2$



(b) $\zeta = 0.5$



(c) $\zeta = 0.8$

FIGURE 3.5 – Graphical representation of $\partial_x G\,(p^{+*}(\gamma),\gamma)$ and its tangent function $-1 - K\,(\gamma - \gamma_{st})$ around the static oscillation threshold for $\zeta = 0.2$, 0.5 and 0.8.

static threshold γ_{st}, so that equation (3.30) can be written :

$$I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{K}}\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{K}{\epsilon}}\,(\gamma_n - \gamma_{st})\right) + 1\right]. \tag{3.31}$$

The dependence on the initial condition γ_0 is now lost.

Since $\epsilon \ll 1$, for $\gamma_n > \gamma_{st}$ the error function quickly becomes equal to 1 and the integral I_2 is simplified to $I_2 = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{K}}$. Finally the expression of B_n is :

$$B_n \approx \frac{\sigma^2}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{\frac{\pi}{K}}\exp\left(\frac{K}{\epsilon}(\gamma_n-\gamma_{st})^2\right). \tag{3.32}$$

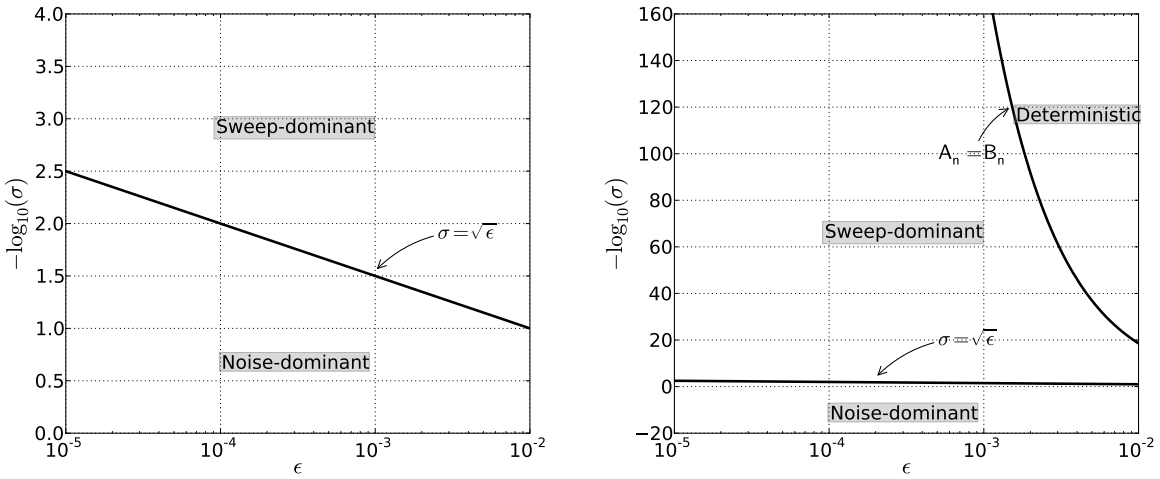
From equation (3.32) it is possible to obtain the expression of $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]} \approx \sqrt{B_n}$:

$$\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]} \approx \sigma\,\epsilon^{-1/4}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/4}\exp\left(\frac{K}{2\epsilon}(\gamma_n-\gamma_{st})^2\right). \tag{3.33}$$

The dynamic oscillation threshold $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ is defined [10, 9] as the value of γ_n for which the standard deviation $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]}$ leaves the neighborhood of the invariant curve. More precisely, the bifurcation occurs when $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]}$ becomes equal to the increase rate ϵ, as defined in eq. (3.13). Finally, using equation (3.33), we have :

$$\hat{\gamma}_{dt}^{th} = \gamma_{st} + \sqrt{-\frac{2\epsilon}{K}\ln\left[\left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/4}\frac{\sigma}{\epsilon^{5/4}}\right]}, \tag{3.34}$$

which is the theoretical estimation of the dynamic oscillation threshold of the stochastic systems (3.11) (or of the system (3.8) computed using a finite precision) when it evolves in a sweep-dominant regime. The bifurcation delay is a by-product of eq. (3.34) since it is simply $\hat{\gamma}_{dt}^{th} - \gamma_{st}$.



(a) (b)

FIGURE 3.6 – Domain of existence of the deterministic, sweep-dominant and noise-dominant regimes in a plane $(\epsilon, -\log_{10}(\sigma))$. For finite precision cases, $-\log_{10}(\sigma)$ corresponds to the value of the precision.

The method presented in this section is based on a first-order Taylor expansion of the system (3.11) around the invariant curve $\phi(\gamma_n)$, leading to the linear system (3.14). Using an asymptotic expansion of the error function it is possible to investigate the behavior of $\sqrt{B_n}$ before γ_n enters the neighborhood of the static oscillation threshold γ_{st}. This study allows to define the domain of validity of this linear approximation, as done by Baesens [10, 9]. This is $\sigma \lesssim \sqrt{\epsilon}$ (more details on obtaining the domain of validity are given in Appendix 3.2.6.1). Otherwise, if $\sigma \gtrsim \sqrt{\epsilon}$, the orbit of the series p_n^+ leaves the neighborhood of invariant curve $\phi(\gamma)$ before the static oscillation threshold is reached. In this case, the linear approximation is no longer valid. This situation is called by Baesens [10, 9] **noise-dominant regime** and it is not investigated in the present paper. However, figure 3.6 shows the domain of existence of the different regimes in a plan $[\epsilon\,;\,-\log_{10}(\sigma)]$.

The frontier between deterministic and sweep-dominant regime corresponding to $A_n = B_n$ is determined numerically using the equality $\gamma_{dt}^{th} = \hat{\gamma}_{dt}^{th}$.

The condition $\sigma \lesssim \sqrt{\epsilon}$ is respected in this work since $\sigma = 10^{-pr}$ with $7 \leq pr \leq 5000$ and $8.10^{-5} \leq \epsilon \leq 10^{-2}$.

3.2.4.3 Discussion

In figure 3.7, $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ defined by equation (3.34) is plotted against the increase rate ϵ. It is compared with γ_{dt}^{num} for different values of the precision and for $\gamma_0 = 0$. In figure 3.7(a), γ_{dt}^{num} is represented for finite precision cases. The differences between finite precision cases and stochastic cases observed for prec. = 7 and 15 are shown in figure 3.7(b). The theoretical result $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ provides a good estimation of the dynamic oscillation threshold as long as the system remains in the sweep-dominant regime (with a better estimation when the bifurcation delay is small [d]). Otherwise, γ_{dt}^{th} is a better approximation of γ_{dt}^{num}, as expected in the deterministic regime.

Figure 3.8 shows the comparison between $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ and γ_{dt}^{num} (only for finite precision cases) plotted against the initial condition γ_0. In figure 3.8(a), variables are plotted for several values of ϵ and for a fixed numerical precision. The opposite is done in figure 3.8(b). As in figure 3.7, $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ provides a good estimation of the dynamic oscillation threshold in the sweep-dominant regime, as well as γ_{dt}^{th} in the deterministic regime.

Finally, to predict theoretically the dynamic bifurcation threshold Γ_{dt}^{th} of the stochastic system (3.11) (as well as of the system (3.8) when it is computed with a finite precision) the following procedure is proposed :

- compute the theoretical estimation $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ of the stochastic system through eq. (3.34)
- compute the theoretical estimation γ_{dt}^{th} of the system without noise through eq. (3.10)
- if $\hat{\gamma}_{dt}^{th} < \gamma_{dt}^{th}$ the system remains in the "sweep-dominant regime" and the dynamic threshold Γ_{dt}^{th} is equal to $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$, otherwise the "deterministic regime" is attained and the dynamic threshold Γ_{dt}^{th} is equal to γ_{dt}^{th}.

Figure 3.9 compares the relative error RE of the three theoretical predictions of the oscillation threshold (γ_{st}, γ_{dt}^{th} and Γ_{dt}^{th}) with respect to γ_{dt}^{num}, as a percent value :

$$RE[X] = 100 \times \left(\frac{|\gamma_{dt}^{num} - X|}{\gamma_{dt}^{num}} \right), \tag{3.35}$$

where X takes successively the values of γ_{st}, γ_{dt}^{th} and Γ_{dt}^{th}.

For standard double-precision (fig. 3.9(a), prec.=15), the sweep-dominant regime is prevalent throughout most of the range of increase-rates studied in this article. Higher precisions (for instance prec.=100) imply the appearence of the deterministic-regime for lower increase-rates. In this case, Γ_{dt}^{th} provides a better estimation of the oscillation threshold of the clarinet with a linearly increasing blowing pressure. Indeed, in situations represented in figure 3.9, $RE\left[\Gamma_{dt}^{th}\right]$ never exceeds 15% while $RE\left[\gamma_{st}\right]$ and $RE\left[\gamma_{dt}^{th}\right]$ can reach 60% and 145% respectively. At slightly lower values of ϵ than the limit between the two regimes, γ_{dt}^{th} still provides a better estimation of γ_{dt}^{num} than Γ_{dt}^{th}, a situation that occurs for all values of the precision, according to figure 3.7.

d. This is an expected result because of the initial assumption of a small bifurcation delay in the presence of noise, leading to first-order Taylor expansions γ_{st} in previous calculation (see equation (3.23)).

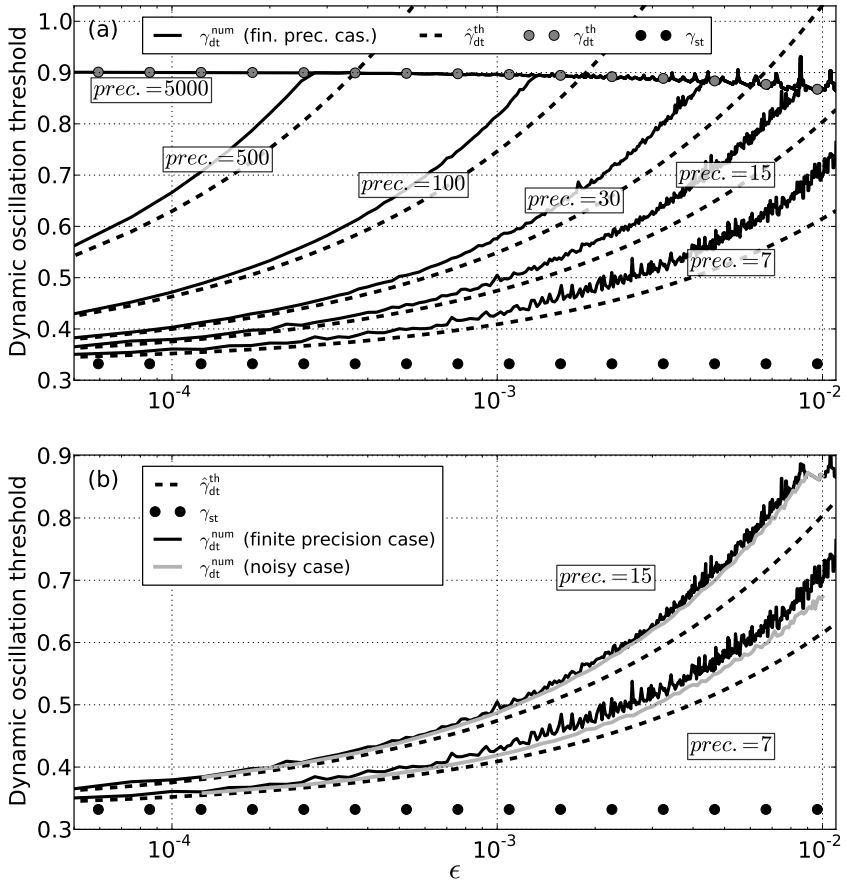


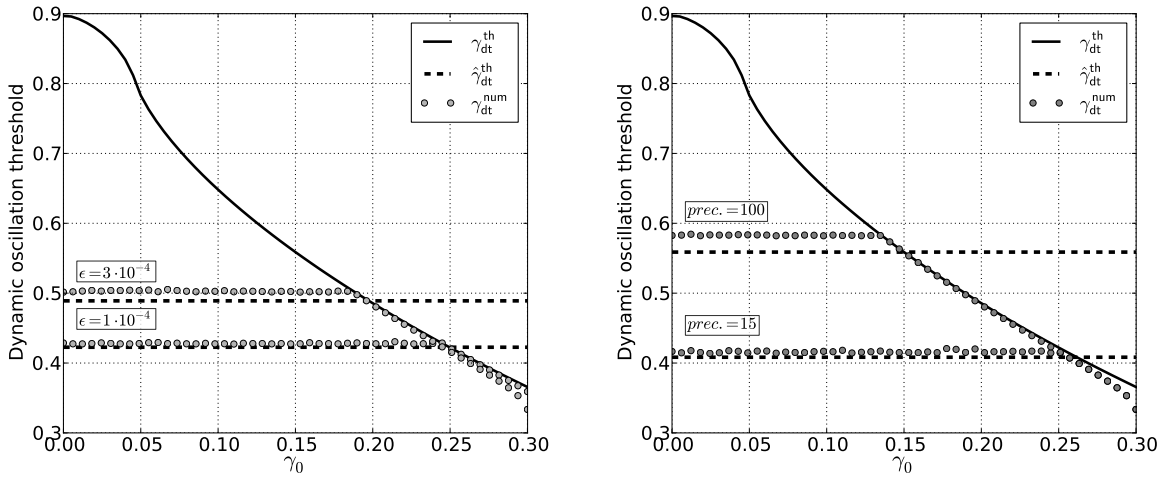
FIGURE 3.7 – Graphical representation of γ_{dt}^{num} for different precisions (prec. = 7, 15, 30, 100, 500 and 5000) with respect to the slope ϵ and for $\gamma_0 = 0$. Results are also compared to analytical *static* and *dynamic* thresholds : γ_{st}, γ_{dt}^{th} and $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$. (a) γ_{dt}^{num} and only *finite precision cases* are represented. (b) Both *finite precision cases* and *noisy cases* are represented for prec. = 7 and 15.

3.2.5 Conclusion

In many situations, the finite precision used in numerical simulations of the clarinet system does not produce major errors in the final results that are sought. Such is the case, for instance, when estimating the amplitudes for a given regime.

However, when slowly increasing one of the control parameters, the distances between the state of the system and the invariant curve can become smaller than the round-off errors of the calculation, with dramatic effects on the time required to trigger an oscillation. In these cases, the inclusion of a stochastic variable in the theory allows to correctly estimate the threshold observed in simulations, which lies between the static and dynamic thresholds found for precise cases.

As a final remark, the present theoretical study is probably not restricted to describe numerical simulations. Indeed, the noise level σ measured in an artificially blown instrument is typically of the order of magnitude of 10^{-3}. The domain of validity of the results : $\sigma \lesssim \sqrt{\epsilon}$ suggests that the comparison with experiment using blowing pressure with increase rates $\epsilon > 10^{-6}$ (typically for usual clarinets that corresponds to $\approx$ 5Pa/s), seems to be possible although the noise level usually



(a) Numerical precision is fixed (prec. = 50). $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ and γ_{dt}^{num2} are computed for $\epsilon = 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}$.

(b) The increase rate of γ is fixed ($\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$). $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ and γ_{dt}^{num2} are computed for numerical precisions equal to 15 and 100.

FIGURE 3.8 – Comparison between theoretical prediction of dynamic oscillation threshold (without noise : γ_{dt}^{th} and with noise : $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$) and the dynamic threshold γ_{dt}^{num} computed on numerical simulations for finite precision case. Variable are plotted with respect to the initial condition γ_0.

increases with the pressure applied to the instrument.

It is known that the static oscillation of the clarinet is difficult to measure by increasing, even slowly, the mouth pressure. The phenomenon of dynamic bifurcation is a possible reason. If that were proven experimentally, we could imagine to inverse the equation (3.34) to deduce the static threshold from the measurement of the noise level, the increase rate of the blowing pressure and the dynamic threshold.

Acknowledgements

This work was done within the framework of the project SDNS-AIMV "Systèmes Dynamiques Non-Stationnaires - Application aux Instruments à Vent" financed by *Agence Nationale de la Recherche* (ANR).

3.2.6 Annexes

3.2.6.1 Limit of the linear calculation

The method presented in Section 3.2.4 is based on a first-order Taylor expansion of the system (3.11) around the invariant curve $\phi(\gamma_n)$ leading to define the linear system (3.14). Following Baesens [10, 9], we give here the upper bound of the domain of validity of this linear approximation.

Using equations (3.20) and (3.31), the expression B_n is given by :

$$B_n = \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon\, K}} \exp\left(\frac{K}{\epsilon}(\gamma_n - \gamma_{st})^2\right) \times \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{K}{\epsilon}}(\gamma_n - \gamma_{st})\right) + 1\right]. \tag{3.36}$$

We investigate the behavior of $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ before γ_n enters in the neighborhood of the static

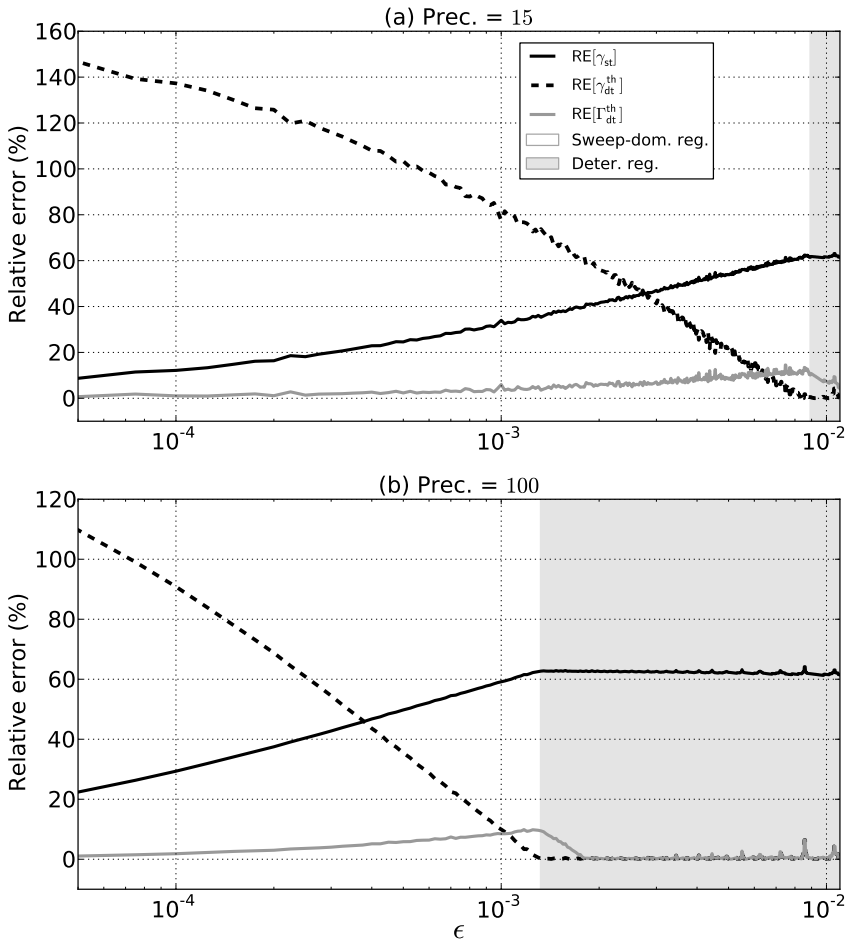


FIGURE 3.9 – Relative errors : $RE[\gamma_{st}]$, $RE\left[\gamma_{dt}^{th}\right]$ and $RE\left[\Gamma_{dt}^{th}\right]$ for numerical precisions equal to 15 (a) and 100 (b).

oscillation threshold γ_{st}. More precisely, we compute an approximate expression of $\mathbb{E}\left[w_n^2\right]$ when $\gamma_n < \gamma_{st} - \nu$, where ν is defined by equation (3.29). To do this, the error function in equation (3.36) is expanded in a first-order asymptotic series [2] (the asymptotic expansion of the error function erf(x) for large negative x is recalled in Appendix 3.2.6.2) :

$$B_n = \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon\, K}}\exp\left(\frac{K}{\epsilon}\left(\gamma_n-\gamma_{st}\right)^2\right)\times\left[-1-\frac{\exp\left(-\frac{K}{\epsilon}\left(\gamma_n-\gamma_{st}\right)^2\right)}{\sqrt{\frac{K\pi}{\epsilon}}\left(\gamma_n-\gamma_{st}\right)}+1\right], \tag{3.37}$$

which is simplified in :

$$B_n = -\frac{\sigma^2}{2K\left(\gamma_n-\gamma_{st}\right)}. \tag{3.38}$$

Using the explicit form of γ_n, solution of equation (3.8b) :

$$\gamma_n = \epsilon\, n + \gamma_0, \tag{3.39}$$

and (3.38), we have :

$$\sqrt{B_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{2K\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{n_{st} - n}}, \tag{3.40}$$

where n_{st} is the iteration for which γ_{st} is reached.

Equation (3.40) means that when $\gamma_n < \gamma_{st} - \nu$, the standard deviation $\sqrt{\mathbb{E}[w_n^2]} \approx \sqrt{B_n}$ increases with the time (i.e. with n) like $1/\sqrt{n_{st} - n}$ to order $\sigma/\sqrt{\epsilon}$, and therefore remains small if $\sigma \ll \sqrt{\epsilon}$. Otherwise, if $\sigma \gtrsim \sqrt{\epsilon}$, the orbit of the series p_n^+ leaves the neighborhood of invariant curve $\phi(\gamma)$ before the static oscillation threshold is reached. In this case, linear calculation made in Section 3.2.4 is no longer valid.

3.2.6.2 Asymptotic expansion of error function

The asymptotic expansion of the error function erf(x) for large negative x ($x \to -\infty$) is [2] :

$$\text{erf}(x) \approx -1 - \frac{\exp\left(-x^2\right)}{\sqrt{\pi}x} \times \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1)}{\left(2x^2\right)^m}\right) \tag{3.41}$$

Fin de l'article [Début page 64]

3.3 Influence des autres paramètres du modèle

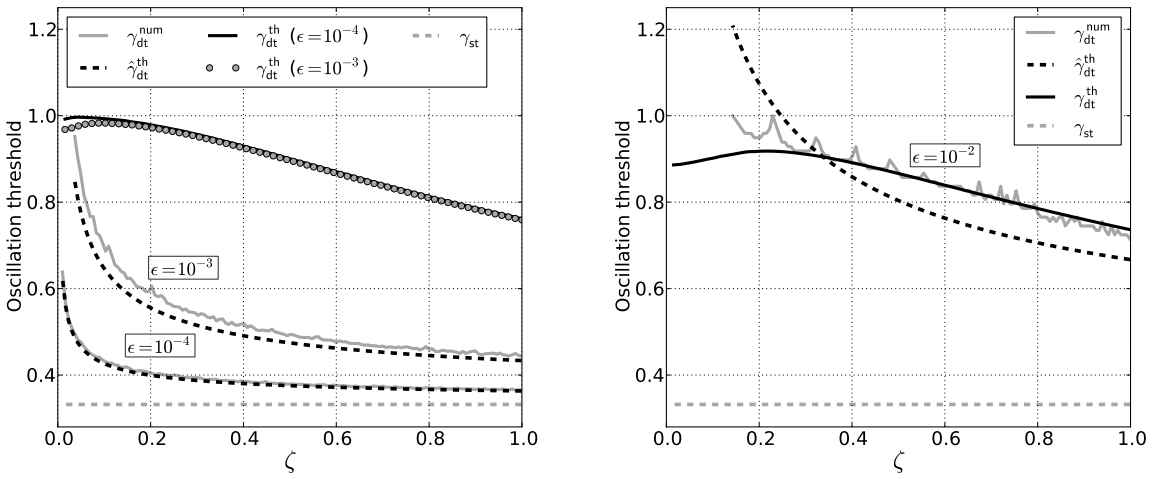
Cette section présente des résultats complémentaires à ceux obtenus précédemment et présentés dans [19, 20]. Est étudiée l'influence du second paramètre de contrôle du modèle ζ et du paramètre de pertes λ.

3.3.1 Influence du second paramètre de contrôle ζ

Cette section étudie l'influence du second paramètre de contrôle du modèle ζ jusqu'ici toujours égal à 0.5. Ce n'est pas une étude dynamique en ζ puisque nous n'allons pas faire varier le paramètre d'embouchure mais étudier comment évolue le seuil dynamique d'oscillation, lors d'une rampe en γ, en fonction de la valeur de ζ.

Sur la figure 3.10, les seuils numérique γ_{dt}^{num} et théoriques sans bruit γ_{dt}^{th} (cf. équation (2.36)) et avec bruit $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ (cf. équation (3.34)), sont tracés en fonction de ζ pour trois valeurs de la pente ϵ de γ : $\epsilon = 10^{-4}$ et $\epsilon = 10^{-3}$ en figure 3.10(a) et $\epsilon = 10^{-2}$ en figure 3.10(b). Enfin la précision de calcul est fixée à une valeur usuelle de 15 chiffres significatifs. De manière générale, les seuils dynamiques (numérique et théorique) diminuent quand ζ augmente. Il est tout de même à noter que le seuil théorique γ_{dt}^{th} peut posséder une phase d'augmentation aux faibles valeurs de ζ (voir les courbes γ_{dt}^{th} pour $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-3}$. Cette phase d'augmentation s'étale sur un domaine de ζ qui est d'autant plus grand que ϵ est petit.

Pour les plus faibles valeurs de ϵ (cf. figure 3.10(a)), le système évolue dans un *"sweep-dominant regime"* (cf. paragraphe 3.2.4.1) et le seuil théorique $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ prédit bien le seuil γ_{dt}^{num} déduit des simulations. Comme attendu la prédiction est d'autant meilleure que ϵ est petit.



(a) $\epsilon = 10^{-4}$ and 10^{-3} (b) $\epsilon = 10^{-2}$

FIGURE 3.10 – Comparaison entre les seuils d'oscillations théoriques sans bruit γ_{dt}^{th} et avec bruit $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ et le seuil γ_{dt}^{num} calculé numériquement. Les différents seuils sont tracés en fonctions du paramètre d'embouchure ζ. Le seuil statique d'oscillation γ_{st} est également représenté. $\gamma_0 = 0$ et (a) $\epsilon = 10^{-4}$ et 10^{-3} et (b) $\epsilon = 10^{-2}$. La précision numérique utilisée est égale à 15 chiffres significatifs.

Nous avons déjà remarqué, aux figures 3.6 et 3.7 par exemple, que pour une précision donnée, les grandes valeurs de ϵ favorisent le *"deterministic regime"*. Cette observation se retrouve sur la figure 3.10(b) où, après l'intersection entre γ_{dt}^{th} et $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ ($\zeta > 0.32$ environ), la comparaison entre γ_{dt}^{num} et γ_{dt}^{th} montre un bon accord indiquant que le système évolue de façon déterministe. Nous ne pouvons pas conclure sur la présence du *"sweep-dominant regime"* avant l'intersection entre γ_{dt}^{th} et $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$. En effet, pour une raison que nous ne connaissons pas à ce jour, aucun des deux seuils théoriques ne permet de prédire γ_{dt}^{num}. Enfin, la présence d'allongements du retard à la bifurcation pour certaines valeurs de ζ est à signaler (voir annexe C).

3.3.2 Influence du paramètre de pertes λ

3.3.2.1 Différences avec le cas sans pertes

Jusqu'à présent nous n'avons traité que le modèle sans pertes en fixant le paramètre λ à 1, ceci pour présenter les méthodes générales d'obtention de l'expression analytique du seuil dynamique en s'affranchissant des difficultés techniques du traitement du cas où $\lambda < 1$. Cependant, si l'on veut dans le futur, pouvoir comparer les résultats théoriques avec l'expérience, la prise en compte des pertes est indispensable.

Traiter des situations où le paramètre de pertes est différent de 1 ne modifie pas les méthodes exposées au chapitre 2 et aux sections 3.2 et 3.3.1 qui ont un caractère général (elle sont en particulier indépendantes de la fonction d'itération). Les figures 3.1(b) et 3.11, qui comparent le cas sans pertes à un cas où $\lambda = 0.95$, montre d'ailleurs que les caractéristiques du seuil d'oscillation dynamique dans ces deux situations sont qualitativement les mêmes. Le présence des pertes a juste tendance à augmenter le retard à la bifurcation.

La différence entre les cas sans et avec pertes se trouve au niveau de la courbe de points fixes $p^{+*}(\gamma)$ de la fonction G et de la valeur du seuil d'oscillation statique γ_{st}. Listons les grandeurs qu'il faut modifier pour traiter le cas $\lambda < 1$:

- *La courbe invariante* :

$$\phi(\gamma,\epsilon) \approx p^{+*}(\gamma) \;+\; \epsilon\,\frac{\partial p^{+*}(\gamma)}{\partial\gamma}\;\frac{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right)}{\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma),\gamma\right)-1}, \tag{3.42}$$

dont la modification va notamment influer sur la valeur du seuil d'oscillation théorique γ_{dt}^{th} du cas déterministe, défini par :

$$\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_{dt}^{th}+\epsilon} \ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma'-\epsilon),\gamma'\right)\right| d\gamma' = 0. \tag{3.43}$$

- *Le seuil dynamique théorique prenant en compte l'influence du bruit* :

$$\hat{\gamma}_{dt}^{th} = \gamma_{st} + \sqrt{-\frac{2\epsilon}{K}\ln\left[\left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/4}\frac{\sigma}{\epsilon^{5/4}}\right]}, \tag{3.44}$$

où il faut modifier :

— Le seuil d'oscillation statique γ_{st} ;
— La constante $K = \partial_{xy} G\left(p^{+*}(\gamma_{st}),\gamma_{st}\right)$ (cf. equation (3.23)).

3.3.2.2 Courbes des points fixes et seuil statique d'oscillation obtenu par méthode perturbative

La courbe des points fixes. La courbe des points fixes $p^{+*}(\gamma)$ (ou $x^*(\gamma)$ dans le chapitre 1, nous gardons ici les notations utilisées dans [19, 20]) de la fonction d'itération G (ou f dans le chapitre 1) s'obtient à partir de l'expression du régime statique non oscillant $p^*(\gamma)$ de la pression dans le bec, donnée par l'équation (1.41). Cette expression n'est pas facilement utilisable (notamment dérivable, par exemple quand $p^{+*}(\gamma)$ est développé en série de Taylor, cf. équation (B.14)). De plus, lorsque λ se rapproche de 1, en particulier pour les faibles ζ, l'argument de la fonction arc cosinus peut devenir très proche de -1 en rendant fausse l'estimation de la fonction par un ordinateur utilisant une précision usuelle. Nous proposons une méthode perturbative permettant d'obtenir une expression théorique de $p^*(\gamma)$, certes approchée mais plus simple à utiliser. Le principe de la méthode est de développer $p^*(\gamma)$ en série de puissances du paramètre de perturbation $\beta = 1-\lambda$. Dans la suite nous allons traiter le cas où $\lambda = 0.95$, ce qui donne à β une valeur relativement importante de 0.05. Le développement de $p^*(\gamma)$ jusqu'à l'ordre 2 est donc nécessaire. L'expression obtenue est :

$$p^*(\gamma) = \underbrace{(1-\lambda)\frac{F(0,\gamma)}{2}}_{\text{Ordre 1}} + \underbrace{(1-\lambda)^2\frac{F(0,\gamma)}{4}\left(\frac{\partial F(0,\gamma)}{\partial p}+1\right)}_{\text{Ordre 2}} + O\left((1-\lambda)^3\right). \tag{3.45}$$

où F est la caractéristique non linéaire de l'instrument, donnée par l'équation (A.3b). Le terme d'ordre 0 est nul puisque dans un cas sans pertes $p^* = 0$. Les détails de la méthode pour obtenir l'équation (3.45) sont présentés en annexe B.1, en particulier la figure B.1 montre la comparaison entre les expressions (1.41) et (3.45).

Une fois obtenue l'expression de $p^*(\gamma)$, celle de $p^{+*}(\gamma)$ s'obtient facilement en utilisant les équations (1.35) et (3.45) :

$$p^{+*}(\gamma) = \frac{1}{2}\left[p^*(\gamma) + F\left(p^*(\gamma)\right)\right]. \tag{3.46}$$

Le seuil d'oscillation statique. En supposant que $p^*(\gamma)$ reste égal à zéro en présence de pertes, l'expression du seuil statique d'oscillation est donnée par l'équation (1.49) tirée de [60]. Même si l'écart entre cette expression théorique et un seuil statique calculé numériquement est relativement faible (typiquement de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$ pour $\lambda = 0.95$, voir figure B.2(b)), nous avons besoin ici d'une expression plus précise. Toujours en utilisant une méthode perturbative, détaillée à l'annexe B.2, l'expression suivante est obtenue :

$$\gamma_{st} \approx \underbrace{\psi(\zeta,\lambda)}_{\text{Ordre 0}} + \underbrace{(1-\lambda)\frac{F\left(0,\psi(\zeta,\lambda)\right)}{2}}_{\text{Ordre 1}}, \tag{3.47}$$

où le terme d'ordre 0, $\psi(\zeta,\lambda)$, est égal au seuil donné par l'équation (1.49) :

$$\psi(\zeta,\lambda) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\zeta\Lambda} + \sqrt{3+\frac{1}{(\zeta\Lambda)^2}}\right)^2. \tag{3.48}$$

L'ordre 1 est suffisant pour retrouver précisément le seuil statique obtenu par simulation numérique (voir figure B.2).

3.3.2.3 Étude d'un cas typique : $\lambda = 0.95$

Dans ce paragraphe nous allons utiliser les résultats précédents pour étudier un cas où $\lambda = 0.95$, valeur typique du paramètre de pertes pour une clarinette. La figure 3.1(b) montre déjà le profil de γ_{dt}^{num} en fonction de ϵ et pour plusieurs précisions de calcul. La figure 3.11 la reproduit en ajoutant les seuils théoriques γ_{dt}^{th} et $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$. La prédiction est aussi bonne que dans le cas sans pertes. On observe toujours une sous-estimation du seuil du *"sweep-dominant regime"* lorsque le retard à la bifurcation devient trop important. Ceci pour les raisons précédemment évoquées au paragraphe 3.2.4.3.

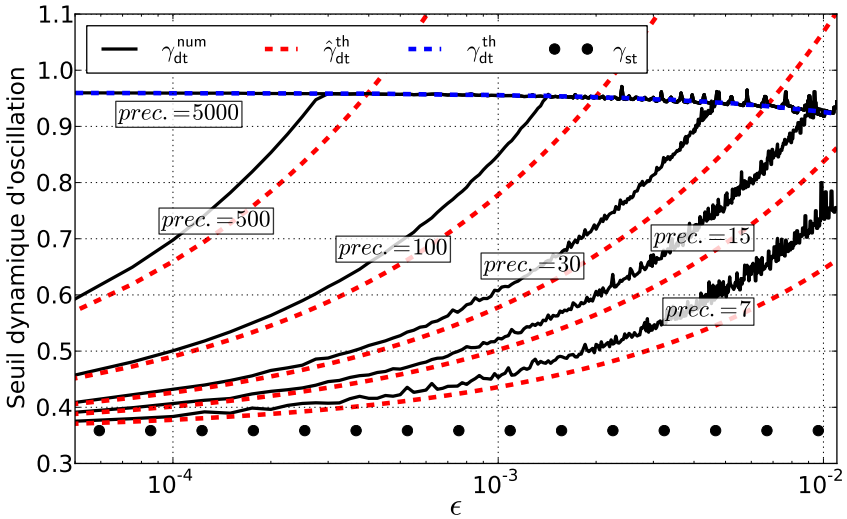


FIGURE 3.11 – Représentation de γ_{dt}^{num} (ligne noire) en fonction de ϵ pour différentes précisions (prec. = 7, 15, 30, 100, 500 and 5000). Comparaison avec les seuils théoriques statique γ_{st} (points noirs) et dynamiques γ_{dt}^{th} (pointillés bleus) et $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ (pointillé rouge). $\gamma_0 = 0$, $\zeta = 0.5$ et $\lambda = 0.95$.

Il est particulièrement intéressant de tracer les seuils dynamiques γ_{dt}^{num}, γ_{dt}^{th}, $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$, en leur retranchant le seuil statique γ_{st} (i.e. en traçant le retard à la bifurcation). La figure 3.12(a)

montre $\gamma_{dt}^{num} - \gamma_{st}$ en fonction de ϵ pour les cas sans pertes et avec pertes pour $\lambda = 0.95$ (noté "Raman" sur la figure). Nous pouvons remarquer que l'influence des pertes n'est visible que lorsque le système évolue de façon déterministe (i.e. lorsque c'est γ_{dt}^{th} qui permet de prédire le seuil dynamique). En revanche, lorsque le système évolue en *"sweep-dominant regime"* l'influence des pertes sur $\gamma_{dt}^{num} - \gamma_{st}$ est infime indiquant que les différences observées à la figure 3.11 sont principalement dues au changement de seuil statique en présence de pertes, la contribution dynamique étant pratiquement inchangée. Ces observations se retrouvent sur les seuils théoriques du cas déterministe γ_{dt}^{th} (voir figure 3.12(b)) et du *"sweep-dominant regime"* $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ (voir figure 3.12(c)).

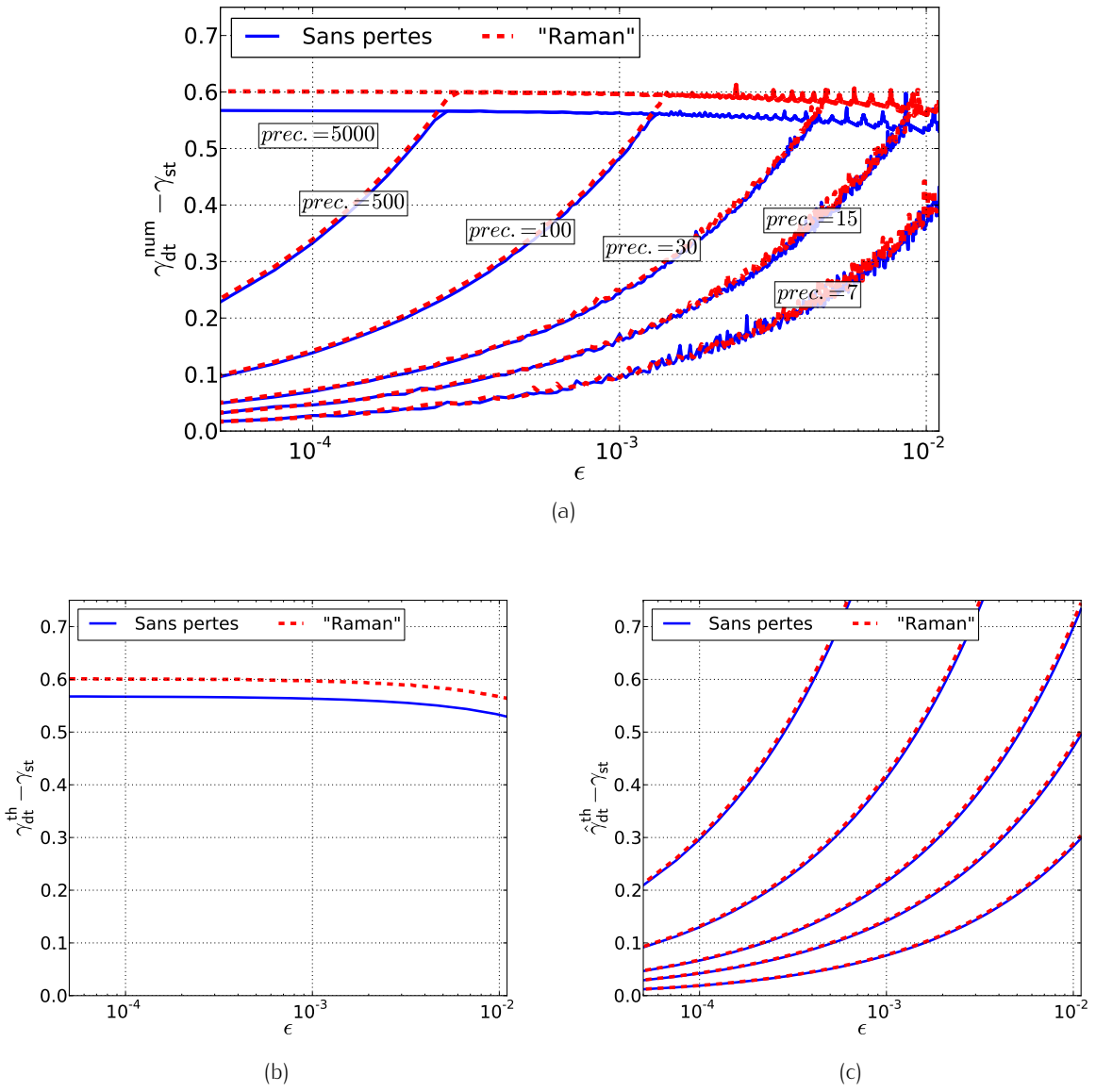


FIGURE 3.12 – Seuil d'oscillation dynamique moins le seuil d'oscillation statique en fonction de ϵ pour différentes précisions (prec. = 7, 15, 30, 100, 500 and 5000) : (ligne bleue) $\lambda = 1$ et (pointillés rouges) $\lambda = 0.95$. (a) $\gamma_{dt}^{num} - \gamma_{st}$, (b) $\gamma_{dt}^{th} - \gamma_{st}$ et (c) $\hat{\gamma}_{dt}^{th} - \gamma_{st}$. $\gamma_0 = 0$ et $\zeta = 0.5$.

Chapitre 4

Reconstruction d'enveloppe

Sommaire

4.1 Avant-propos . . . 87
4.2 Article en fin d'écriture . . . 88
4.2.1 Introduction . . . 88
4.2.2 Elements of clarinet theory . . . 89
4.2.3 Problem statement . . . 94
4.2.4 Sound envelope with variable parameters . . . 95
4.2.5 Interrupted variation of the parameter . . . 103
4.2.6 Examples . . . 106
4.2.7 Discussion on the *dynamic oscillation threshold* . . . 109
4.2.8 Conclusion . . . 110
4.2.9 Annexes . . . 110

4.1 Avant-propos

La section 4.2 de ce chapitre est la reproduction d'un article soumis à *Acta Acustica united with Acustica* [4]. Il est intitulé : *"Estimation of the attack transient in a clarinet with time-varying blowing pressure"* et est écrit en collaboration avec André Almeida (premier auteur), Christophe Vergez et Bruno Gazengel.

Dans des situations réelles l'alimentation en pression par le système respiratoire humain ne peut pas augmenter indéfiniment. En général, elle finit par se stabiliser avant que les oscillations ne croissent jusqu'à un niveau audible. Cet article présente une méthode de reconstruction d'enveloppe de la variable p^+ pour un profil de γ prenant en compte cette observation. Nous utilisons un profil académique possédant une phase d'augmentation linéaire et une phase de stabilisation où γ est constant (voir figure 4.1). La discontinuité de dérivée d'un tel profil fait que la phase d'augmentation et la phase de stabilisation peuvent être étudiées séparément.

Le traitement de la phase de stabilisation ne pose pas de problème (voir paragraphe 4.2.5). Comme γ est constant, le transitoire en p^+ est décrit par une fonction exponentielle dont la seule inconnue est la condition initiale (valeur de p^+ en $n = N$, voir figure 4.1). Cette condition initiale est donnée par le traitement de la phase d'augmentation linéaire de γ, fait au paragraphe 4.2.4. Pour ce faire nous utilisons les expressions analytiques de l'écart entre p^+ et la courbe invariante ϕ (i.e. la variable w) : cas déterministe (cf. équation (2.35)) et cas bruité (cf. équation (3.20)).

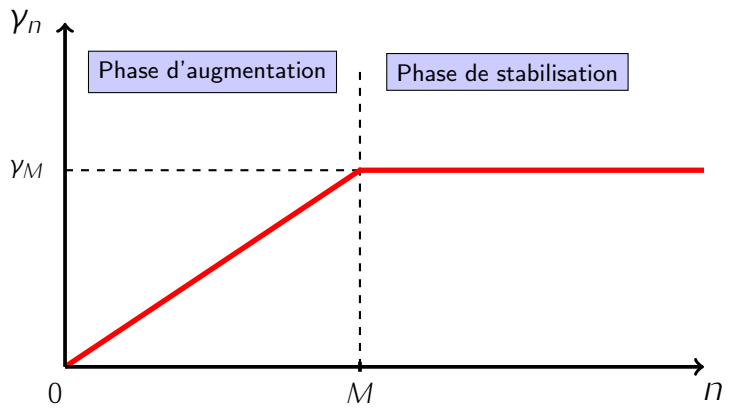


FIGURE 4.1 – Profil temporel de la pression dans la bouche (paramètre de contrôle γ utilisé dans [4].

L'apport principal de l'article se situe au niveau de l'étude du cas bruité (ou à précision de calcul finie) présentée au paragraphe 4.2.4.3. La méthode proposée par Baesens [10, 9] est modifiée pour obtenir des reconstructions analytiques d'enveloppe plus proches de celles obtenues par la simulation du modèle.

4.2 Article en fin d'écriture :

A. Almeida, B. Bergeot, C. Vergez et B. Gazengel. *"Estimation of the attack transient in a clarinet with time-varying blowing pressure"*

Début de l'article

4.2.1 Introduction

The clarinet can be seen as a dynamic system in which two main parameters are used by the musician to control its oscillatory behavior : the blowing pressure and the lip force upon the reed. Mathematical models exist to explain and simulate the behavior of the instrument [90, 81]. McIntyre *et. al* [69] proposed a general method to compute the oscillations of self-sustained musical instruments based on a coupling of a linear resonator and a nonlinear exciter. By considering severe simplifications for the resonator and the exciter, he could describe the system as a nonlinear "iterated map". This simplistic model is certainly unable to describe or predict with refinement the exact harmonic content of the sound, or the influences of such important details as the reed geometry and composition or the vocal tract of the player. However, the iterated map approach can explain the role of essential factors for the production of sound. For example, it can be used to estimate the thresholds of oscillation, extinction, beating regimes, etc. [60, 29], amplitudes and stability of the steady state regime [74] and phenomena of period doubling [59, 86].

The thresholds of oscillation are often difficult to measure, either in real or simulated instruments. In fact, near the oscillation threshold the time needed to obtain a steady periodic regime is long (see Chaigne and Kergomard [26], sect. 9.3.2), and likewise, a sweep on the blowing pressure shows that the oscillations start at much higher values than the one predicted by Kergomard *et. al* [60], as shown in [83]. This shift of threshold for varying parameters is also observed in real instruments [22], although the threshold values are not consistent between simulations and artificially blown instruments.

A previous study focused on steady linear increases of the blowing pressure using iterated map

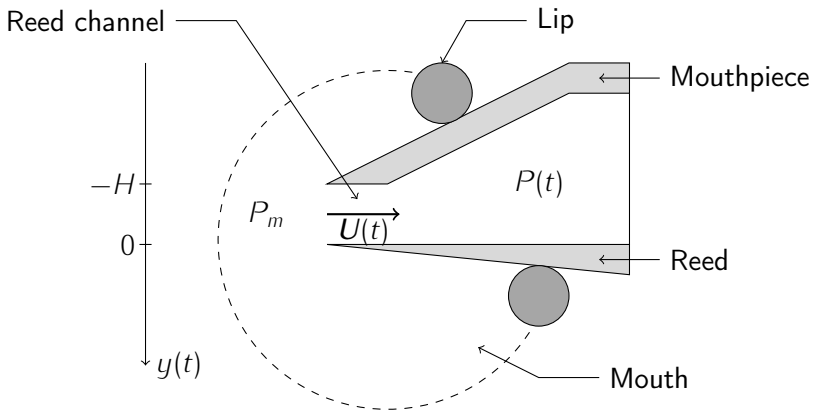


FIGURE 4.2 – Schematic diagram of a single-reed mouthpiece used in Schumacher's model. U is the flow created by the pressure imbalance $\Delta P = P_m - P$ between the mouth and the bore, y represents the displacement of the tip of the reed relative to its equilibrium position and H is the displacement when the reed is closed.

approach [19], showing that the delay on the oscillations can be correctly predicted using results from dynamic bifurcation theory [10, 42] when unlimited precision is used in numerical simulations. An extension of this theory using stochastic perturbations [10], and [20] for clarinet-like instruments, allows to predict the delays seen in numerical simulations performed with machine-precision.

The aim of the present article is to propose a method to calculate the amplitude envelope for archetypal time profiles of the mouth pressure. In a first time, a prediction is given for a case with a simple linear growth and then when the linear growth is suddenly interrupted, implying a discontinuity of the derivative of the mouth pressure through time.

Section 4.2.2 starts with a summarized introduction to the model used as a metaphor for a clarinet-like instrument. Some important results for stationary regimes are then recalled : thresholds of oscillation and amplitudes of oscillation are given as a function of the playing parameters (mouth pressure and force applied to the reed). Section 4.2.4 recalls and extends some important results from the dynamic bifurcation theory from previous works [19, 20] that can be applied for continuously increasing parameters, introducing a prediction of the amplitude envelope during the entire attack. An extension of these results for a sudden stop in the parameter is given in section 4.2.5. Finally, some examples of applications of the method are presented in section 4.2.6.

4.2.2 Elements of clarinet theory

4.2.2.1 The elementary model

The model proposed by Schumacher [69] and used in other studies [64, 26] divides the clarinet into two basic elements, a resonator and an exciter coupled by the two acoustic variables, pressure $P(t)$ and flow $U(t)$ measured at the input of the straight bore.

The exciter is the reed-mouthpiece system, as depicted in Fig. 4.2. The reed is assumed to behave as an ideal spring characterized by its static stiffness per unit area K_s. The response of the reed position y to the pressure difference $\Delta P = P_m - P$ is considered as linear, given by :

$$y = -\frac{\Delta P}{K_s}. \tag{4.1}$$

From (4.1) we can define the *static closing pressure* P_M which corresponds to the lowest

pressure that completely closes the reed channel ($y = -H$) :

$$P_M = K_s H. \tag{4.2}$$

The non-linearity of the exciter is introduced by the Bernoulli equation which relates the flow U to the acoustic pressure P [52, 51]. This relation is the nonlinear characteristics of the exciter, given by :

$$U = \begin{cases} U_A \left(1 - \dfrac{\Delta P}{P_M}\right) \sqrt{\dfrac{|\Delta P|}{P_M}} \operatorname{sgn}(\Delta P) & \text{if } \Delta P < P_M \text{ ;} \quad (4.3a) \\ 0 & \text{if } \Delta P > P_M. \quad (4.3b) \end{cases}$$

The flow U_A is calculated using the Bernoulli theorem :

$$U_A = S\sqrt{\frac{2P_M}{\rho}}, \tag{4.4}$$

where S is the opening cross section of the reed channel at rest and ρ the density of the air. The motion of the reed can create an additional flow, which is ignored in this model.

The following dimensionless variables and control parameters are introduced [26] :

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta P / P_M \\ p &= P / P_M \\ u &= Z_c\, U / P_M \\ \gamma &= P_m / P_M \\ \zeta &= Z_c\, U_A / P_M. \end{aligned} \tag{4.5}$$

$Z_c = \rho c / S_{res}$ is the characteristic impedance of the cylindrical resonator of cross-section S_{res} (c is the sound velocity). Using dimensionless variables defined by equation (4.5), equation (4.3) becomes :

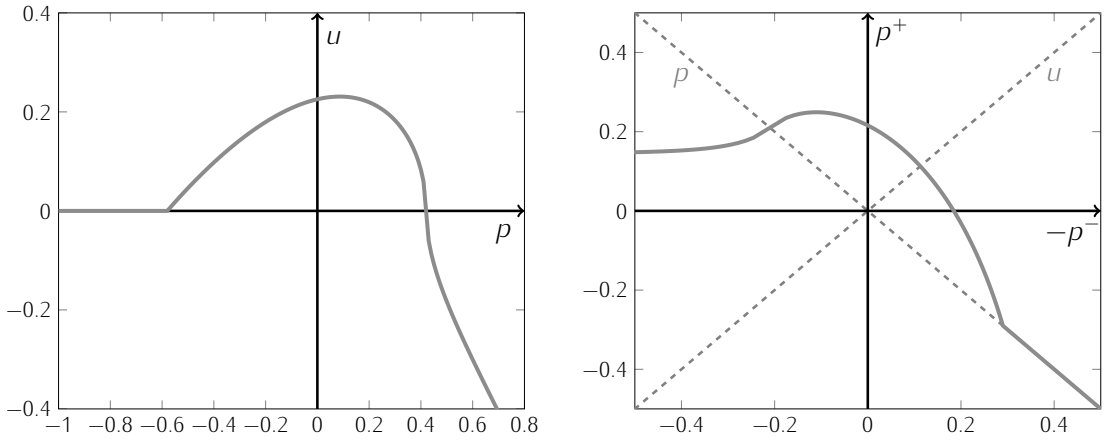
$$F(p) = \begin{cases} \zeta\,(1 - \gamma + p)\sqrt{|\gamma - p|}\operatorname{sgn}(\gamma - p) & \text{if } \gamma - p < 1 \text{ ;} \quad (4.6a) \\ 0 & \text{if } \gamma - p > 1. \quad (4.6b) \end{cases}$$

The parameters γ and ζ are the control parameters of the system. An example of the function F is shown in Fig. 4.3(a).

The resonator is simply modeled as a straight, lossless cylindrical air column. The acoustic variables can be decomposed in terms of traveling waves, allowing to write :

$$p(t) = p^+(t) + p^-(t), \tag{4.7}$$
$$u(t) = p^+(t) - p^-(t). \tag{4.8}$$

The incoming wave $p^-(t)$ at the bore input can be calculated from a previous value of the outgoing wave $p^+(t - \tau)$, since no losses in the propagation or reflection are considered. In practice, only one value of $p^+(t)$ is calculated in each round-trip of the wave, with a duration of $\tau = 2l/c$, where l is resonator length and c is the sound velocity. All the variables can thus be discretised, y_n meaning the value of a variable y at time $n\tau$.



(a) F function (b) G function

FIGURE 4.3 – Non-linear characteristics in $u = F(p)$ representation (a) and $p^+ = G(p^-)$ representation (b) for $\gamma = 0.42$ and $\zeta = 0.6$.

The complete system can then be resumed in a single iterative equation obtained by combining equations (4.6) and (4.7). Moreover, in order to simplify the notation, the variable p^+ will be hereafter written as x :

$$x_n = p_n^+ = G\left(x_{n-1}\right). \tag{4.9}$$

Function G can be obtained by replacing (4.7) in function F. An explicit formulation for G is given by Taillard *et al.* [86], for $\zeta < 1$. Figure 4.3(b) shows that the change from coordinates (p, u) to (p^+, p^-) can be performed graphically as a mirror about the axis $p = 0$ and a 45° rotation about the origin.

4.2.2.2 Stationary regime with constant parameters : *static* bifurcation diagram

Stationary regimes can be identified by choosing an arbitrary initial value for x, performing a large number of iterations and checking whether the system stabilizes in a fixed point or a limit-cycle. This allows tracing a static [a] bifurcation diagram that shows the limit values of any variable as a function of the parameters, see figure 4.4.

Whenever this curve has N values for a single abscissa, the stationary solution has period N, corresponding to the fixed points of the successive iterates of function G. We write G^n the n-th iterate of G and x^{n*} its fixed points, except for the first iterate for which we use simply G and x^*. Fixed points can be obtained analytically by solving equation :

$$x^{N*} = G^N\left(x^{N*}\right) = \underbrace{\left(G_\gamma \circ G_\gamma \circ \ldots \circ G_\gamma\right)}_{N \text{ times}}\left(x^{N*}\right). \tag{4.10}$$

Solutions of period $N = 1$ (non-oscillating), corresponding to the fixed point x^*, have a simple expression

$$x^*(\gamma) = \frac{\zeta}{2}(1-\gamma)\sqrt{\gamma}, \tag{4.11}$$

defined for all values of $\gamma > 0$ and represented as a dashed line in figure 4.4. The reason why the

a. The word "static" is used to emphasize that the diagram is obtained with constant control parameters.

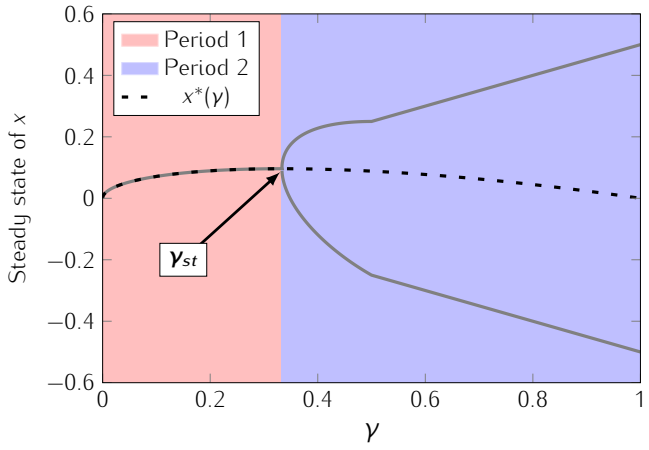


FIGURE 4.4 – Static bifurcation diagram based on variable x for $\zeta = 0.5$.

gray curve stops following the dashed line after a certain value in figure 4.4 is that the fixed point becomes unstable after a certain threshold of γ. This corresponds to the appearance of solutions of period 2. Stability of a fixed point x^* can be found by observing the derivative of the function G [35, 61] :

$$x^* \text{ is stable} \iff \left|G'(x^*)\right| < 1. \tag{4.12}$$

This criterion is used to calculate the *static oscillation threshold* γ_{st}, at which the clarinet system transits from static (period 1 solutions) to oscillating [58] :

$$\gamma_{st} = \frac{1}{3}. \tag{4.13}$$

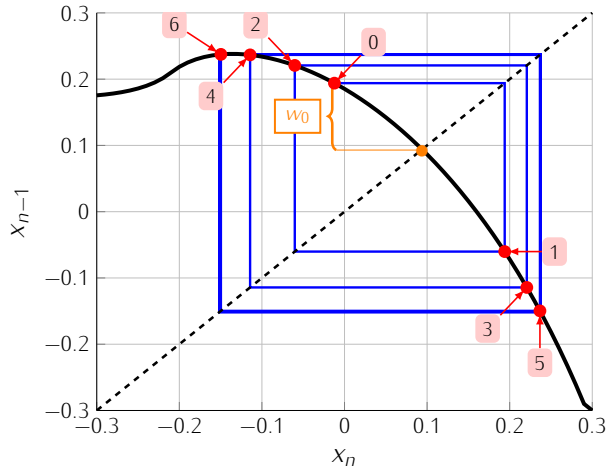
4.2.2.3 Beginning of the transient with constant parameter

Before looking into the evolution of the system for variable parameters, this section analyses its evolution until it stabilizes in a stationary (constant or oscillating) solution. The reason why there is a transient in this case is that at time $n = 0$ the mouth pressure γ can be seen as jumping from 0 to a static value. The observations made in this section will be proven to be helpful in understanding the behavior in the more complex situations arising from varying parameters.

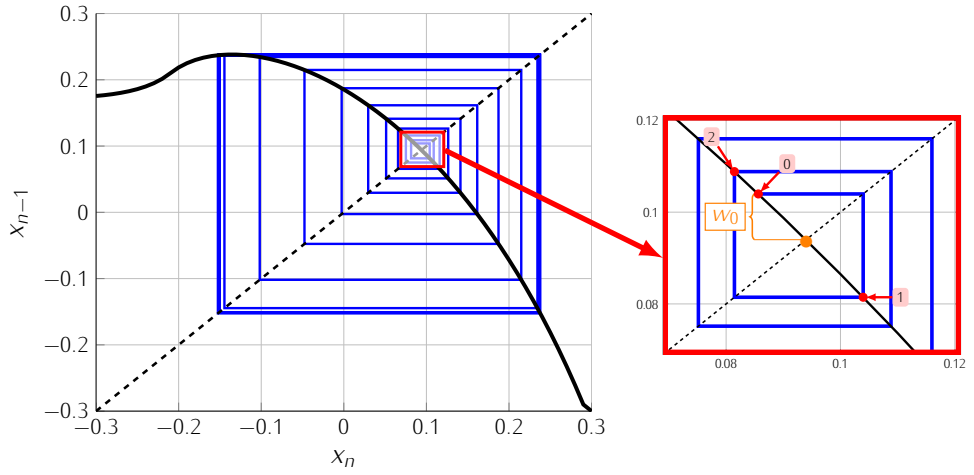
The evolution of the iterative system resulting from successive computations of equation (4.9) can be constructed graphically from the graph of the iterative function G and the identity line. An example is shown in figure 4.5(a) : the initial iterate x_0 is transformed into its next iterate $x_1 = G(x_1)$, etc., then the new iterate is transferred back to the x-axis so that the new iterate can be calculated $x_2 = G(x_1)$, nd so on. A possible evolution of the system (orbit), for $\gamma > \gamma_{st}$, is shown in figure 4.5(a). In this case, the fixed point (of period 1, by definition located at the intersection between the iterative function graph and the identity line) is unstable, and a limit-cycle of period 2 is stable. The orbits (or iterations) of this system are said to be repelled by the unstable point and attracted by the stable limit cycle. They move away from the fixed point x^* of the function G and reach a stationary 2-valued regime. The nature of the stationary regime depends on the value of the mouth pressure parameter γ (see section 4.2.2.2).

We denote

$$w_n = x_n - x^*, \tag{4.14}$$



(a) $w_0 = 0.1$



(b) $w_0 = 0.01$

FIGURE 4.5 – Graphical solution of equation (4.9) for $\gamma = 0.42$ and $\zeta = 0.5$. (——) Path of the successive iterates 0, 1, 2, etc ; (——) iterative function G and (- - -) identity $y = x$. (a) $w_0 = 0.1$ and (b) $w_0 = 0.01$.

the distance from the n-th iteration to the fixed point, its initial value w_0 is indicated in figure 4.5(a). The duration of the transient, i.e. the number of iterations needed to reach a vicinity of the stationary regime, depends on w_0. The closer the initial iterate x_0 to the fixed point, the longer the transient. Indeed, in figure 4.5(a), $w_0 = 0.1$ and about 6 iterations are needed to reach the stationary regime while 22 iterations are required if $w_0 = 0.01$ (see figure 4.5(b)).

An orbit starting close to the fixed point can be followed by linearizing function G around $x^*(\gamma)$:

$$x_n \approx G(x^*) + [x_{n-1} - x^*] G'(x^*) . \tag{4.15}$$

Using equation (4.14), equation (4.15) can be simplified to :

$$w_n = w_{n-1} G'(x^*) , \tag{4.16}$$

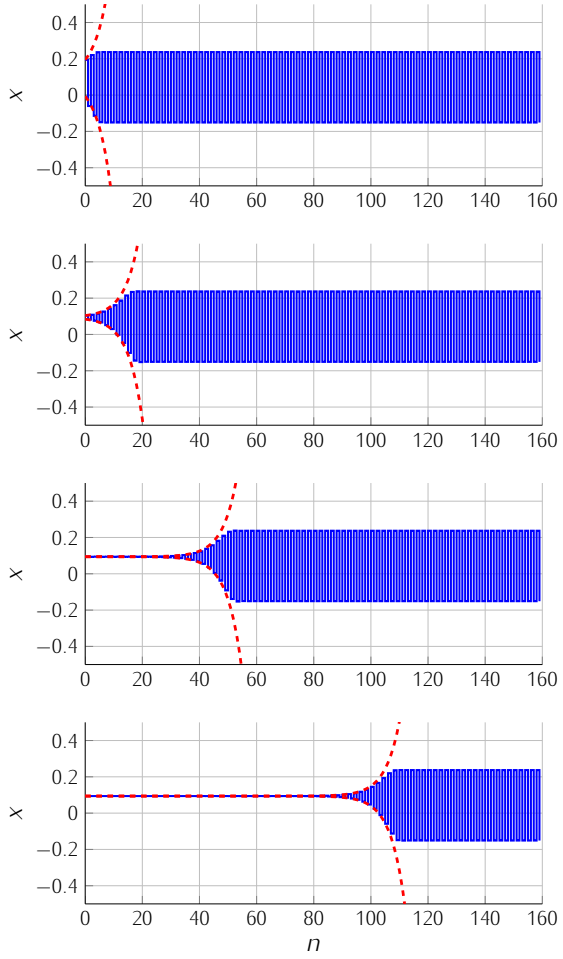


FIGURE 4.6 – (——) Time evolution of the outgoing pressure x, solution of equation (4.9) for different values of its initial value $x_0 = x^* + w_0$, from top to bottom : $w_0 = 0.1$, $w_0 = 0.01$, $w_0 = 10^{-5}$ and $w_0 = 10^{-10}$. (- - -) Exponential envelope deduced from the function (4.17).

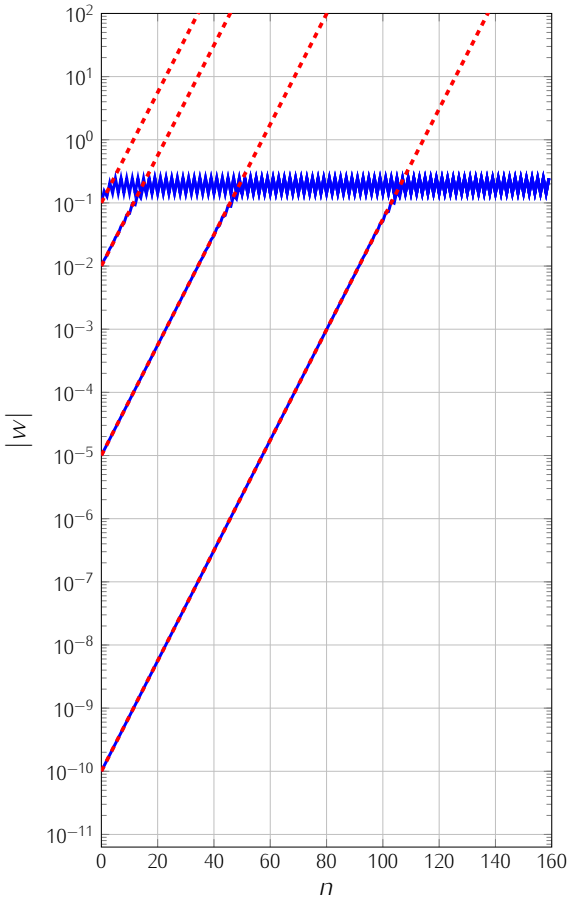


FIGURE 4.7 – Graphical representation of the time envelopes of the variable w using a logarithmic scale for the ordinate axis. (——) envelope obtained from the numerical solution of equation (4.9) and (- - -) envelopes deduced from the function (4.17).

Equation (4.16) is a common geometrical series whose general solution is :

$$w_n = w_0 \left[G'(x^*)\right]^n . \tag{4.17}$$

Figure 4.6 shows the time evolution of variable x, solution of equation (4.9), for different values of w_0, from top to bottom : $w_0 = 0.1$, $w_0 = 0.01$, $w_0 = 10^{-5}$ and $w_0 = 10^{-10}$. In the same figure, the exponential envelope deduced from equation (4.17) is also plotted in red. Time envelopes of w, are also represented in figure 4.7 where a logarithmic scale is used for the ordinate axis. As above, the smaller w_0, the longer the transient. Moreover, as expected, for small values of w_0, the exponential function (4.17) predicts the orbit over a longer part of the transient.

4.2.3 Problem statement

This section formally introduces the particular problem that will be studied on the model presented above, that is, the evolution of the system (in particular its oscillation amplitude) when one of its parameters varies regularly through time. When the control parameter increases at a

constant slow rate ϵ at each new iteration, the system is modeled by the following system of equations :

$$\begin{cases} x_n = G(x_{n-1}, \gamma_n) & \text{(4.18a)} \\ \gamma_n = \epsilon n + \gamma_0. & \text{(4.18b)} \end{cases}$$

In this case, the evolution of the variable x_n, as a function of the mouth pressure parameter γ, can be interpreted as a *dynamic bifurcation diagram*. One might suppose that the system remains close to the limit cycles represented in figure 4.4 and the dynamic diagram can be a good approximation of the static diagram. However, dynamic diagrams plotted by performing a sweep in parameter γ produce very different figures, even if the sweep is performed slowly. In the region of figure 4.8 highlighted by a red rectangle, the two bifurcation diagrams do not coincide. A "macroscopic oscillation" (significant amplitude of oscillation), is reached at a much higher value γ_{dt} (*dynamic oscillation threshold*) than the *static oscillation threshold* γ_{st} obtained in equation (4.13). This effect is known as bifurcation delay [42, 10]. In the case of the clarinet model, the *dynamic oscillation threshold* (and therefore the bifurcation delay), is analytically predicted by Bergeot *et al.* [19, 20]. Beyond the dynamic threshold, the dynamic diagram converges to the static diagram.

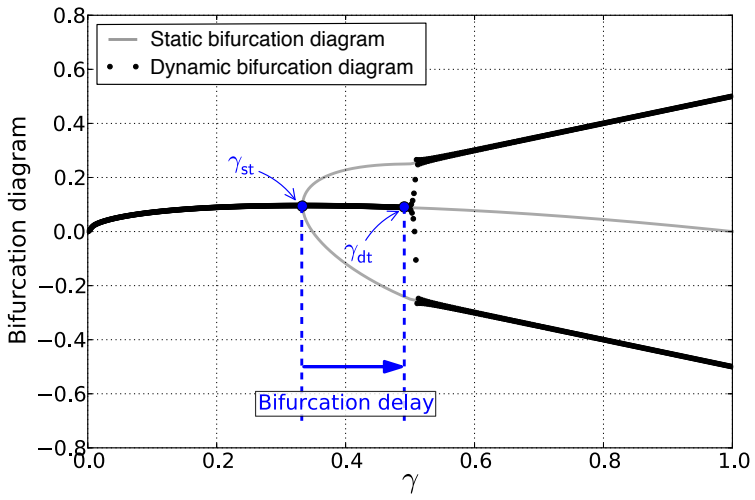


FIGURE 4.8 – Static and dynamic bifurcation for $\zeta = 0.5$. Dynamic diagram is obtained with $\epsilon = 10^{-3}$ and $\gamma_0 = 0$.

4.2.4 Sound envelope with variable parameters

The new results beginning in section 4.2.4.2 describe analytically the envelope of the oscillations when the mouth pressure γ varies linearly through time ; in particular, in the region where the two bifurcation diagrams (static and dynamic) are not coincident. The method is described in this section by recalling the concept of invariant curve, introduced in previous works [19, 20]. In real situations, the mouth pressure cannot grow indefinitely and is usually be stabilized before the oscillations grow to an audible level. An archetypal profile corresponding to this situation is studied in section 4.2.5.

4.2.4.1 Invariant curve

For variable parameters and in the range of parameters corresponding to a period 1 solution, it can be shown that the system does not tend exactly to the curve given by the static fixed points at the current value of the parameter $(\gamma, x^*(\gamma))$. Although this is not apparent in figure 4.8, zooming closer to the orbit (fig. 4.9) shows that the dynamic system follows closely a slightly different curve known as *invariant curve* and denoted ϕ_ϵ.

The system remains close to the invariant curve even after the variable parameter has grown beyond the value of the static bifurcation point γ_{st} (see fig. 4.9). In figure 4.10, a simulation is run using a higher increase rate ϵ, emphasizing that the invariant curve is followed by the system until the oscillations become apparent.

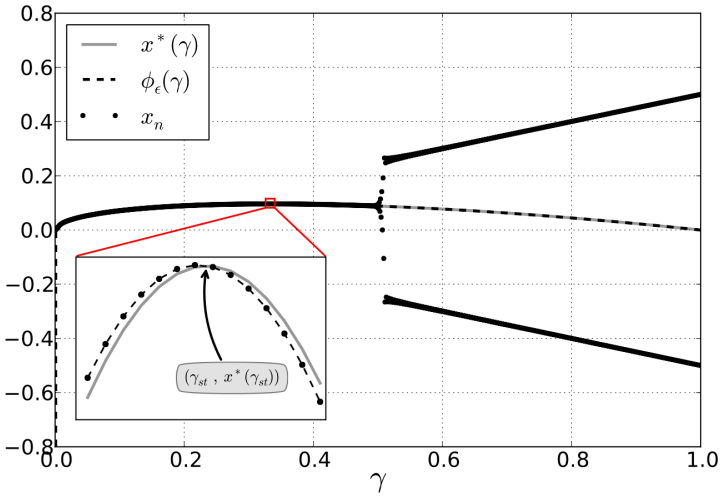


FIGURE 4.9 – (black points) Numerical simulation of the system (4.18). (dashed black line) Invariant curve $\phi_\epsilon(\gamma)$. (gray line) Curve of fixed points $x^*(\gamma)$. $\zeta = 0.5$, $\epsilon = 10^{-3}$ and $\gamma_0 = 0$.

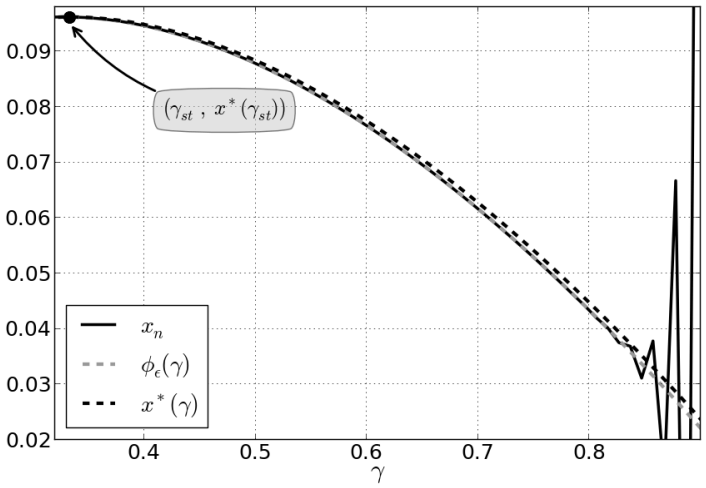


FIGURE 4.10 – (dashed line) Numerical simulation of the system (4.18). (gray line) Invariant curve $\phi_\epsilon(\gamma)$. (black line) Curve of fixed points $x^*(\gamma)$. $\zeta = 0.5$, $\epsilon = 10^{-2}$ and $\gamma_0 = 0$.

The *invariant curve* is followed exactly by a system initialized with parameter γ and variable

x on this curve, similarly to a (stable or unstable) fixed point in a static parameter case. For a parameter growing at a constant rate, the following difference equation can be used to calculate the invariant curve :

$$\phi_\epsilon(\gamma) = G\left(\phi_\epsilon(\gamma - \epsilon), \gamma\right). \tag{4.19}$$

Although eq. 4.19 usually leads to expressions that cannot be calculated analytically, the invariant curve can be determined approximately with a perturbation method given by Baesens [10], leading to the following general form :

$$\phi_\epsilon(\gamma) = x^*(\gamma) + \sum_{i=1}^{n} \epsilon^i \phi_i(\gamma) + o(\epsilon^{n+1}). \tag{4.20}$$

The first order is usually a good approximation for most applications shown below. This is calculated for the present clarinet model in the appendix of Bergeot *et al.* [19]. The perturbation method and the explicit expressions of the first order terms of the invariant curve are recalled in simpler form in 4.2.9.1. The parameter ϵ shown as index to the invariant curve indicates that this curve depends on the rate of growth ϵ (this will eventually be dropped in further mathematical expressions).

The invariant curve will be used later in two contexts : first to compare the trajectories of the system, secondly for the calculation of the oscillation amplitudes (envelope). The first context is only for verification purposes. A precise following of the envelopes requires an extreme precision in the invariant curve, but this is not crucial for the estimation of the envelopes as it will be seen. In the second context, a lower precision in the invariant curve does not have dramatic consequences.

4.2.4.2 Actual trajectories of the system

x_n is the state variable of the system described in section 4.2.2 at iteration (or half-period) n. With the knowledge of x_n and its previous value x_{n-1} all remaining variables of the system can be calculated. In [19] it is shown that during an important part of a slow transient, the evolution of x_n is close to the invariant curve $\phi_\epsilon(\gamma)$ described above.

The theoretical study presented in section 4.2.2.3 for constant parameters is based on a Taylor expansion of the iterated function G. The linearization provides an analytical expression of the distance w from the fixed point curve $x^*(\gamma)$ (see equation (4.17)). This expression is valid as long as the orbit remains close to the fixed point (see figures 4.7 and 4.7) and predicts the growth of the oscillations as an exponential function.

As suggested in figs. 4.9 and 4.10, if the parameter γ varies through time, it is more appropriate to study the distance of the orbit from the invariant curve instead of the distance from the fixed points as the invariant curve is now playing the role of the fixed point. Therefore the definition of the variable w is modified :

$$w_n = x_n - \phi(\gamma_n). \tag{4.21}$$

The definition of w_n given in (4.14) for static parameter cases is a particular case of eq. (4.21). Indeed, if the parameter γ is constant ($\epsilon = 0$), all perturbation terms in (4.20) are multiplied by zero and the invariant curve $\phi_\epsilon(\gamma)$ is simply $x^*(\gamma)$.

For small amplitudes w_n the function G in equation (4.18a) is expanded as a first-order Taylor

series around the invariant curve :

$$x_n \approx \underbrace{G\left(\phi(\gamma_n - \epsilon), \gamma_n\right)}_{\triangleq \phi_\epsilon(\gamma) \text{ ; see eq.(4.19)}} + \left[x_{n-1} - \phi(\gamma_n - \epsilon)\right] G'\left(\phi(\gamma_n - \epsilon), \gamma_n\right), \tag{4.22}$$

or, using equations (4.19) and (4.21) :

$$w_n = w_{n-1} \partial_x G\left(\phi(\gamma_n - \epsilon), \gamma_n\right). \tag{4.23}$$

The advantage of switching to this description is that future values of the oscillation amplitude $|w_n|$ can be approximated using a simple formula relating to an initial iteration w_0 (see [19] for details) :

$$|w_n| \approx |w_0| \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \underbrace{\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln\left|G'\left(\phi(\gamma' - \epsilon), \gamma'\right)\right| d\gamma'}_{I(\gamma_n+\epsilon) - I(\gamma_0+\epsilon)} \right), \tag{4.24}$$

where G' is the derivative of G with respect to x and

$$I(\gamma) = \int_{\gamma_{st}}^{\gamma} \ln\left|G'\left(\phi(\gamma' - \epsilon), \gamma'\right)\right| d\gamma'. \tag{4.25}$$

For the applications shown in this article, only differences of I taken at different abscissas will be used. The lower bound in the integral of eq. (4.25) is thus arbitrary. γ_{st} is used in this article as a reference point close to the minimum amplitude, although for $\epsilon \neq 0$ the minimum is attained at a slightly lower pressure.

Equation (4.24) shows that x_n approaches the invariant curve as long as the derivative G' is smaller than 1 (dimensionless unit) in modulus, which happens before the static threshold γ_{st} is reached. Beyond this threshold, x_n moves away from the invariant curve, but initially at a very slow pace, because the logarithm is close to 0.

Although this curve is not easy to calculate analytically, for small values of the increase rate ϵ, the derivative $G'\left(\phi(\gamma' - \epsilon), \gamma'\right)$ can be approximated by its value at the fixed point $G'\left(x^*(\gamma'), \gamma'\right)$, and the integral $I(\gamma)$ written in the form :

$$\tilde{I}(\gamma) = \int_{\gamma_{st}}^{\gamma} \ln\left|G'\left(x^*(\gamma), \gamma'\right)\right| d\gamma'. \tag{4.26}$$

The expressions involved in the calculation of the derivative G' are too complex if G is used in its explicit form. However, they can be obtained in a simple form (see 4.2.9.1) from the definition of F (in coordinate (p, u)), and a numerical calculation of the integral is easily obtained. The error in $I(\gamma)$ committed in this approximation is inferior to ϵ, see fig. 4.11. In the rest of this paper we use the approximation form (4.26).

The actual amplitude of the system (distance to the invariant curve) corresponds to

$$w(\gamma) = |w_0| \exp\left(\frac{\tilde{I}(\gamma + \epsilon) - \tilde{I}(\gamma_0 + \epsilon)}{\epsilon} \right). \tag{4.27}$$

The function $w(\gamma)$ is the predicted amplitude of the system when the parameter goes through value γ, so that the amplitude at iteration n, $|w_n| = w(\gamma_n)$. The graphic 4.11 provides some insight

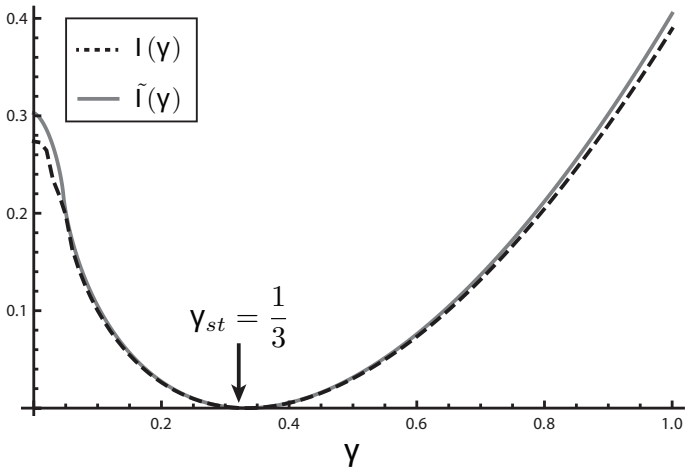


FIGURE 4.11 – Integral $I(\gamma)$ calculated using equation (4.25) (dashed line) and approximately using equation (4.26) (solid line). $\zeta = 1/2$, $\epsilon = 1/20$.

on the behavior of the system : starting at a value γ_0, the distance to the invariant curve is a monotonic function of $\tilde{I}(\gamma + \epsilon)$. Whenever $\tilde{I}(\gamma + \epsilon) < \tilde{I}(\gamma_0 + \epsilon)$, the amplitude is smaller than the starting distance. Conversely, when $\tilde{I}(\gamma + \epsilon) > \tilde{I}(\gamma_0 + \epsilon)$ the amplitude is higher. $\tilde{I}(\gamma + \epsilon) = \tilde{I}(\gamma_0 + \epsilon)$ corresponds to the *dynamic oscillation threshold*, as defined in [19].

The curve described by equation (4.27) is often a good approximation of the envelope for most of the range of the growing parameter, except for large values of w_n, which typically arise in 2 situations :

- In the beginning of the transient, where the iterate x_0 can be far from the invariant curve, depending on the initial conditions. Note that the invariant curve usually diverges (i.e. tends infinity) for low values of γ.
- At the end of the transient, where x_n finally diverges from the invariant curve.

In practice these two situations can be avoided by correctly choosing the time interval of interest. For example, a few initial iterations can be calculated exactly using the recursive relation, until they move close enough to the invariant curve.

4.2.4.3 Influence of limited precision or noise

Bifurcation delay is known to be very sensitive to noise [9, 10, 20]. Indeed, the trajectories calculated using the previous formulæ (4.27) lead to a delay in the start of oscillations that is often not observed in real conditions nor in simulations. This happens because x_n can approach the invariant curve so closely that the infinitesimal distances are disturbed as soon as turbulence noise or approximation errors exist.

To illustrate this behavior an example is depicted in figure 4.12. It shows the comparison between the static bifurcation diagram and numerical simulations of the system (4.18) (i.e. dynamic bifurcation diagram). The dynamic diagrams are obtained with $\epsilon = 10^{-3}$. An ad hoc additive white noise is introduced in system (4.18) with a level σ, 3 values of σ are used corresponding to 3 different dynamic diagrams. The dynamic bifurcation point arrives later for lower noise levels.

When performing the simulations with arbitrarily high precision (using *mpmath*, the arbitrary precision library of *Python*), results are affected for noise levels well below the normal double-precision of a CPU, which is equivalent to an additive noise with level $\sigma \approx 10^{-16}$. This implies that in numerical simulations, the noise due to round-off errors must be taken into account in the model.

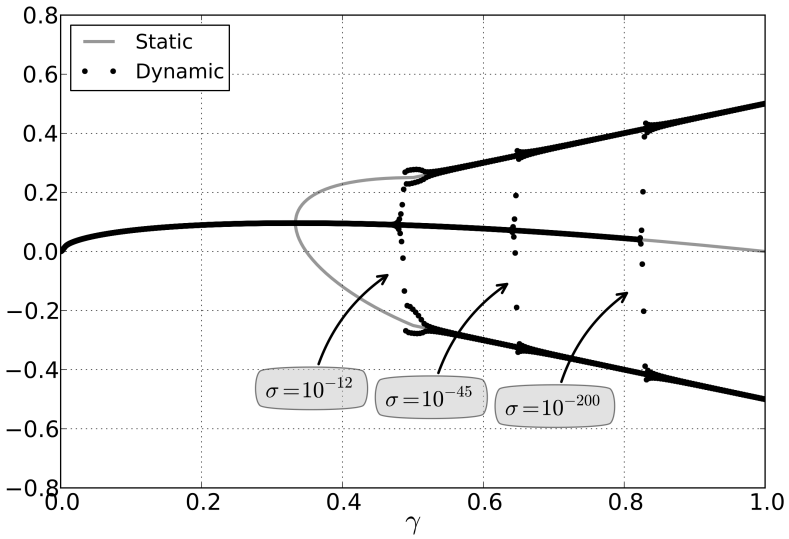


FIGURE 4.12 – Static and dynamic bifurcation for $\zeta = 0.5$. Dynamic diagram is obtained with $\epsilon = 10^{-3}$ and $\gamma_0 = 0$. Moreover, an ad hoc additive white noise is introduced in system (4.18) with three different levels : $\sigma = 10^{-12}$, $\sigma = 10^{-45}$ and $\sigma = 10^{-200}$.

The minimum distance to the invariant curve gives an indication on the precision required to correctly simulate the system. The minimum value of $w(\gamma)$ (see equation (4.27)) corresponds to the minimum of $\tilde{I}(\gamma + \epsilon)$, located in $\gamma + \epsilon = \gamma_{st}$ (see figure 4.11). It is more practical to calculate the decimal logarithm of the minimum amplitude, which will be associated to the required precision :

$$\text{Prec} = -\log_{10}\left(|w_0| \exp\left(\frac{\tilde{I}(\gamma_{st}) - \tilde{I}(\gamma_0 + \epsilon)}{\epsilon}\right)\right) \tag{4.28}$$

and the minimum amplitude is $10^{-\text{Prec}}$.

As an example, for $\zeta = 1/2$, starting with an amplitude of $w_0 = 1$, a precision of 10^{-13} is required for an increase rate of the parameter $\epsilon = 10^{-2}$, whereas for $\epsilon = 10^{-3}$ a precision of 10^{-130} is required. As a consequence, a correct measurement of the actual amplitude envelope in a simulation can only be obtained with a sufficiently accurate invariant curve.

We can also get, from the value of Prec, an idea of the number of perturbation terms (i.e. the value of n in equation (4.20)) required for the invariant. Indeed, the last term of the series (4.20), proportional to ϵ^n, must have the the same order of magnitude of the minimum amplitude $10^{-\text{Prec}}$. Therefore, the approximated value of n is calculating using the following equation :

$$\epsilon^n \approx 10^{-\text{Prec}} \quad \Longleftrightarrow \quad n \approx -\frac{\text{Prec}}{\log_{10}(\epsilon)}. \tag{4.29}$$

In the previous examples, $\epsilon = 10^{-2}$ would require 7 perturbation terms, whereas $\epsilon = 10^{-3}$ would require 65 of them ! Luckily, the last part ("macroscopic") of the envelope can be estimated without a precise estimation of the whole envelope or of the invariant curve throughout the whole simulation.

Trajectory of the system affected by noise. If numerical simulations are run with a precision smaller than Prec calculated through (4.28) , the previous formulæ must be extended. Performing

simulations with limited precision (i.e. < Prec) is equivalent to adding a stochastic variable (with a standard deviation of $\sigma = 10^{-\text{Prec}}$) in the system [20]. This case is studied in [20]. A "squared average" trajectory $< w_n^2 >$ is described by the formula :

$$< w_n^2 > \approx \underbrace{w_0^2 \exp\left(\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} 2\ln\left|G'\left(\phi(\gamma'-\epsilon),\gamma'\right)\right|\frac{d\gamma'}{\epsilon}\right)}_{A_n} + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\epsilon}\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\left\{\exp\left(\int_{\gamma+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} 2\ln\left|G'\left(\phi(\gamma'-\epsilon),\gamma'\right)\right|\frac{d\gamma'}{\epsilon}\right)\right\}d\gamma'}_{B_n}. \quad (4.30)$$

The two terms of the right-hand side of equation (4.30) are denoted A_n and B_n. The term A_n corresponds to the approximation of the trajectory in the absence of noise (it is the same equation as (4.24)), and the term B_n is an expected additional distance to the invariant curve due to the presence of noise. In practice, when the noise level is sufficiently high or the precision low (relative to the estimation of equation (4.28)), only the term B_n becomes relevant, i.e. the trajectory of the system is described by :

$$\sqrt{< w_n^2 >} \approx \sqrt{B_n}. \quad (4.31)$$

It is interesting to notice that the inner integral in B_n in equation (4.30) is equivalent to the definition of $\tilde{I}(\gamma)$ (4.26). This allows to rewrite B_n, using equation (4.27), as :

$$B_n = \frac{\sigma^2}{\epsilon}\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\left(\frac{w(\gamma_n)}{w(\gamma')}\right)^2 d\gamma'. \quad (4.32)$$

For ϵ sufficiently small, since $\tilde{I} > 0$ and considering equation (4.27), it can be deduced that $w(\gamma_n) \gg w(\gamma)$ for γ close to γ_{st}. This allows us simplifying the expression of B_n using a method described in the remaining of this section.

We consider that $\tilde{I}(\gamma)$ is approximately parabolic close to γ_{st} (see figure 4.11). The second-ordrer Taylor expansion of $\tilde{I}(\gamma)$ around the static oscillation threshold γ_{st} is :

$$\tilde{I}(\gamma) \approx \tilde{I}(\gamma_{st}) + (\gamma-\gamma_{st})\tilde{I}'(\gamma_{st}) + \frac{(\gamma-\gamma_{st})^2}{2}\tilde{I}''(\gamma_{st}). \quad (4.33)$$

Through equation (4.26), by definition, we have $\tilde{I}(\gamma_{st}) = 0$. At the static threshold, the expression of the first and the second derivatives of $\tilde{I}(\gamma)$ are :

$$\tilde{I}'(\gamma_{st}) = \ln\left|G'(x^*(\gamma_{st}),\gamma_{st})\right| = 0, \quad (4.34)$$

and, since $\tilde{I}(\gamma)$ is the integral of a known function, the parabolic coefficient can be calculated from the derivative of $\ln|G'(x^*(\gamma),\gamma)|$ at $\gamma = \gamma_{st}$:

$$\tilde{I}''(\gamma_{st}) = \left(\frac{d}{d\gamma}\ln\left|G'(x^*(\gamma),\gamma)\right|\right)_{\gamma=\gamma_{st}}. \quad (4.35)$$

Equation (4.35) can be calculated explicitly from the expression of $G'(x^*(\gamma),\gamma)$, given by equation (4.68), and estimated the resulting expression in $\gamma = \gamma_{st}$. After calculation we obtain :

$$\tilde{I}''(\gamma_{st}) = 3\sqrt{3}\zeta. \tag{4.36}$$

Finally, close to γ_{st} we approximate :

$$\tilde{I}(\gamma) \approx 3\sqrt{3}\frac{\zeta}{2}(\gamma - \gamma_{st})^2. \tag{4.37}$$

Using equation (4.27), equation (4.32) is developed,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{\sigma^2}{\epsilon}\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\left(\frac{w(\gamma_n)}{w(\gamma')}\right)^2 d\gamma' \\ &= \frac{\sigma^2}{\epsilon}\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\exp\left[2\left(\frac{\tilde{I}(\gamma_n+\epsilon)-\tilde{I}(\gamma_0+\epsilon)-\tilde{I}(\gamma'+\epsilon)+\tilde{I}(\gamma_0+\epsilon)}{\epsilon}\right)\right]d\gamma' \\ &= \frac{\sigma^2}{\epsilon}\exp\left(2\frac{\tilde{I}(\gamma_n+\epsilon)}{\epsilon}\right)\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\exp\left[2\left(\frac{-\tilde{I}(\gamma'+\epsilon)}{\epsilon}\right)\right]d\gamma', \end{aligned} \tag{4.38}$$

and replacing $\tilde{I}(\gamma)$ by its expression given by equation (4.37), the term B_n is approximated by :

$$B_n = \frac{\sigma^2}{\epsilon}\exp\left(2\frac{\tilde{I}(\gamma_n+\epsilon)}{\epsilon}\right)\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}\exp\left(-\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}\left(\gamma'+\epsilon-\gamma_{st}\right)^2\right)d\gamma', \tag{4.39}$$

Equation (4.39) can be formally integrated using the error function erf(x) [47] :

$$B_n = \frac{\sigma^2}{\epsilon}\exp\left(2\frac{\tilde{I}(\gamma_n+\epsilon)}{\epsilon}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{3\sqrt{3}\zeta}}\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}}\left(\gamma'+\epsilon-\gamma_{st}\right)\right)\right]_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon}. \tag{4.40}$$

The term in square brackets in equation (4.40) is now developed :

$$\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}}\left(\gamma'+\epsilon-\gamma_{st}\right)\right)\right]_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} =$$

$$\left[\underbrace{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}}\left(\gamma_n+2\epsilon-\gamma_{st}\right)\right)}_{\approx 1 \text{ : see figure 4.13}} - \underbrace{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}}\left(\gamma_0+2\epsilon-\gamma_{st}\right)\right)}_{\approx -1 \text{ : see figure 4.13}}\right], \tag{4.41}$$

Figure 4.13 shows the plot of the function

$$h(\gamma) = \text{erf}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}}\left(\gamma + 2\epsilon - \gamma_{st}\right)\right). \tag{4.42}$$

In most situations, both γ_0 and γ_n are outside the range of variation of the error function. In figure 4.13, we can notice that on the left side of the static oscillation threshold γ_{st}, if γ_0 is much lower than it, the function h is equal to -1. On the right side of γ_{st}, if γ_n is much larger than the static threshold, the function h is equal to 1. This allows us greatly simplifying equation (4.41) :

$$\left[\text{erf}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}}\left(\gamma' + \epsilon - \gamma_{st}\right)\right)\right]_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \approx 2. \tag{4.43}$$

Finally, using equation (4.43), the expression of B_n becomes :

$$B_n = \sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{3\sqrt{3}\zeta\epsilon}}\exp\left(2\frac{\tilde{I}(\gamma_n+\epsilon)}{\epsilon}\right) \tag{4.44}$$

$$= \sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{3\sqrt{3}\zeta\epsilon}}\exp\left(2\frac{\tilde{I}(\gamma_0+\epsilon)}{\epsilon}\right)\left(\frac{w(\gamma_n)}{w_0}\right)^2. \tag{4.45}$$

Equation (4.45) shows that in presence of noise and far beyond the static threshold, the envelope followed by the system has the same shape as without noise, but with a different amplitude, i.e in this case we have :

$$\sqrt{< w_n^2 >} \approx \sqrt{B_n} \approx K\ w(\gamma_n), \tag{4.46}$$

where K is a constant deduced from equation (4.45).

Moreover, this amplitude does not depend on the starting amplitude w_0, and is thus independent of the starting value of γ, see equation (4.44).

As a remark, a similar calculation is made in a previous article [20] to determine the dynamic thresholds in presence of noise. The approximations involved are different in that article, as the derivative of G at the fixed point is approximated as a linear function in the calculation of the inner integral in equation (4.32).

4.2.5 Interrupted variation of the parameter

As stated in section 4.2.3, in real situations the mouth pressure cannot grow indefinitely. It will usually be stabilized before the oscillations grow to an audible level. An archetypal profile approximating this situation is a linear growth of the parameter at a constant rate ϵ (the "growing phase") followed by an arbitrary period where it is kept constant at a value γ_M (the "stationary phase"). The instant at which this transition happens is given by the iteration number M. The parameter is therefore formally defined as :

$$\gamma_n = \begin{cases} \epsilon n + \gamma_0 \text{ if } n \leq M & \text{(4.47a)} \\ \gamma_M \text{ if } n > M. & \text{(4.47b)} \end{cases}$$

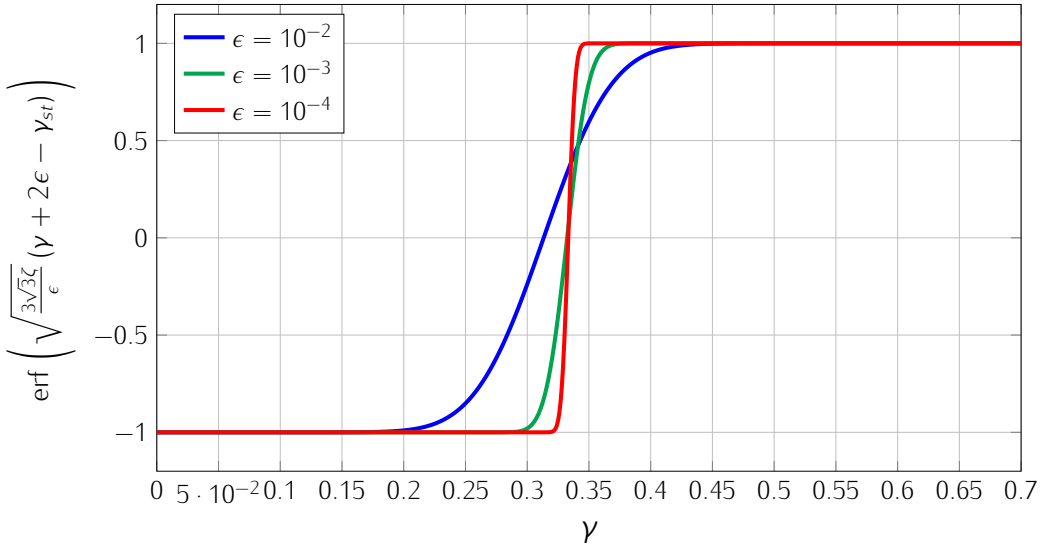


FIGURE 4.13 – Graphical representation of the function $\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\zeta}{\epsilon}}(\gamma + 2\epsilon - \gamma_{st})\right)$ as a function of γ as for $\zeta = 0.5$ and for three different values of the slope ϵ.

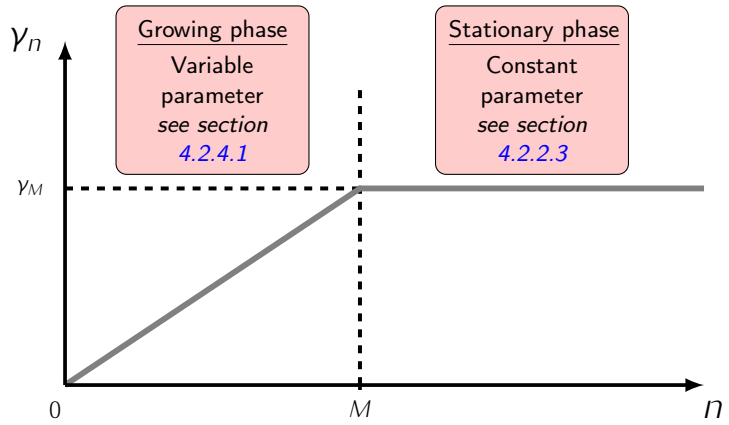


FIGURE 4.14 – Schematic representation of the time profile of the control parameter γ : linear growth at a constant rate ϵ (the "growing phase") followed by an arbitrary period where it is kept constant at a value γ_M. The instant at which this transition happens is given by the iteration number M (the "stationary phase").

see figure 4.14.

Due to the discontinuity in derivative at $n = M$ the "growing phase" and the "stationary phase" can be studied independently. An amplitude envelope w_n^- is computed for the "growing phase" and another w_n^+ for the "stationary phase". The two envelopes are connected at $n = M$ since the initial value w_M^+ is deduced from w_M^-. The method is described in the next sections and summarized in figure 4.15.

4.2.5.1 Amplitude envelope of the growing phase : w^-

As explained in section 4.2.4.2, the first few iterations must usually be performed manually. These correspond to an "approach phase" that brings the system close enough to the linearized regime that is used in the remaining sections. The number of iterations required for this approach is denoted N_{lin}.

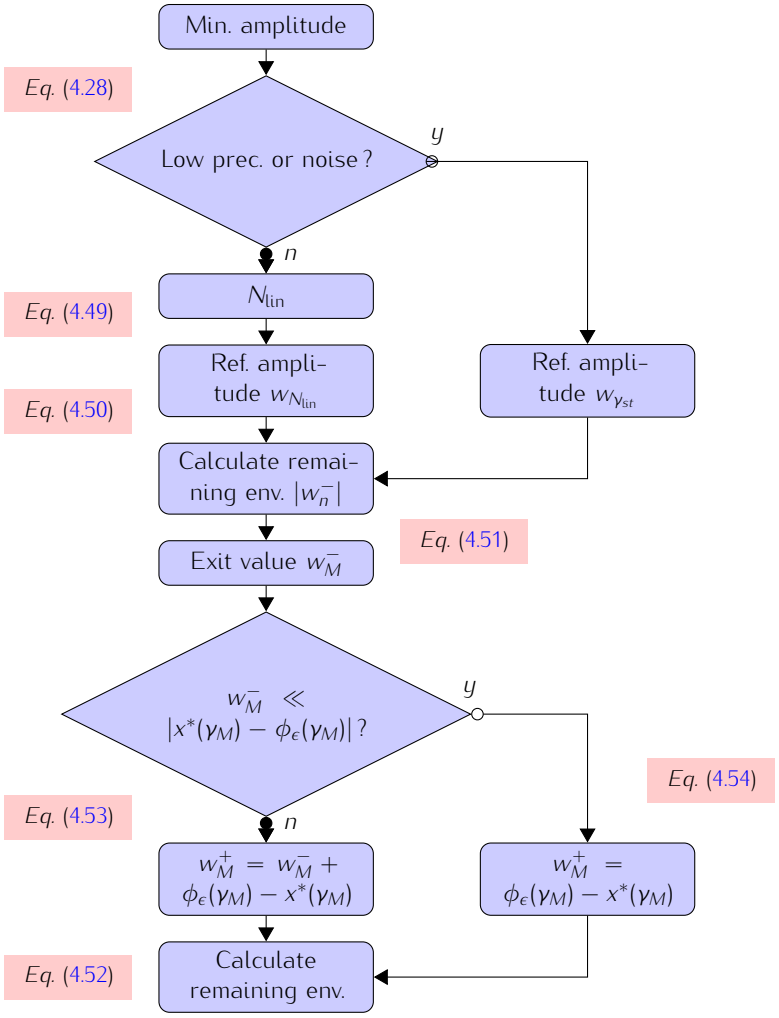


FIGURE 4.15 – Algorithm for determination of envelope

At iteration N_{lin} the state of the system is given by :

$$\begin{aligned} n &= N_{lin} \\ x_{N_{lin}} &= G^{N_{lin}}(x_0) = \underbrace{G \circ G \circ \ldots \circ G}_{N_{lin}\text{times}} \\ \gamma_{N_{lin}} &= \gamma_0 + N_{lin}\epsilon \\ w^+_{N_{lin}} &= x_{N_{lin}} - \phi_\epsilon(\gamma_{N_{lin}}) \end{aligned} \tag{4.48}$$

The number of iterations required for the approach phase depends on the starting value of γ and the increase rate ϵ. In practice N_{lin} is calculated using the condition $w^-_{N_{lin}} < \epsilon$.

Remark. Even in a regime where the linearized approach is valid, the system can pass through a superstable point γ_{ss} defined by $G'(x^*(\gamma_{ss}), \gamma_{ss}) = 0$. At this point it is cumbersome to give an analytical description, as the system can get arbitrarily close to the invariant curve.

Remarque. Dans cet article nous ne détaillons pas plus ce passage à proximité du point super stable. Pour plus d'information le lecteur peut de référer à l'annexe C de ce manuscrit.

The amplitude value in $\gamma_{N_{lin}}$ is given by :

$$\left|w^-_{N_{\text{lin}}}\right| = \left|w^-_0\right| \exp\left(\frac{\tilde{I}(\gamma_{N_{\text{lin}}} + \epsilon) - \tilde{I}(\gamma_0 + \epsilon)}{\epsilon}\right), \tag{4.49}$$

$\left|w^-_{N_{\text{lin}}}\right|$ is used as a new initial value of the envelope now given by :

$$\left|w^-_n\right| = \left|w^-_{N_{\text{lin}}}\right| \exp\left(\frac{\tilde{I}(\gamma_n + \epsilon) - \tilde{I}(\gamma_{N_{\text{lin}}} + \epsilon)}{\epsilon}\right). \tag{4.50}$$

When the precision is lower than required for simulating the exact system (see equation (4.28)), the initial value of γ (i.e. γ_0) does not affect the growth of oscillations. In this case, an average squared amplitude is given by equation (4.44) starting from γ_{st}. Therefore, the envelope is given by :

$$w^-_n = \sigma \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}\zeta\epsilon}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{\tilde{I}(\gamma_n + \epsilon)}{\epsilon}\right). \tag{4.51}$$

4.2.5.2 Amplitude envelope of the stationary phase : w^+

After the stop in the growth in the parameter at $n = M$[b], γ becomes constant and the behavior of the system has been already studied in section 4.2.2.3. The amplitude envelope corresponds to an exponential growth (for $\gamma_M > \gamma_{st}$), given by equation (4.17) where the initial value w_0 is replaced by w^+_M deduced from the previous study of the growing phase :

$$\left|w^+_n\right| = \left|w^+_M \left[G'(x^*(\gamma_M), \gamma_M)\right]^{(n-M)}\right|. \tag{4.52}$$

The starting amplitude w^+_M for the stationary phase is given by the formula :

$$w^+_M = w^-_M + \phi_\epsilon(\gamma_M) - x^*(\gamma_M). \tag{4.53}$$

If the amplitude w^-_M is sufficiently small (i. e. $w^-_M \ll |x^*(\gamma_M) - \phi_\epsilon(\gamma_M)|$), the starting amplitude can be given simply by the difference between the invariant curve and the curve of fixed points :

$$w^+_M = \phi_\epsilon(\gamma_M) - x^*(\gamma_M). \tag{4.54}$$

The oscillation can start very close to the fixed point $x^*(\gamma_M)$. This ensures that the linear approximation is valid on a large part of the transient (see figures 4.6 and 4.7).

4.2.6 Examples

A few examples of simulations are presented in this section, showing how to apply the method described above, and the limits of the predictions. In examples presented in sections 4.2.6.1 and 4.2.6.2 the numerical precision is higher than that required by equation (4.28). The effect of introducing a stochastic variable in the system, which plays a similar role as performing simulations with low precision [20], is shown in the example of section 4.2.6.3.

b. At this point, the invariant curve switches from $\phi(\gamma)$ to $x^*(\gamma_M)$ (the fixed points).

4.2.6.1 Case of small γ_M

In the first example, depicted in figure 4.16, the increase in mouth pressure γ is stopped at a relatively small value of the parameter. In consequence, the amplitude of the oscillations is considerably small when the increase is interrupted. Due to the change of definition of w at $\gamma = \gamma_M$ (distance to the invariant curve before γ_M and to the fixed point after), we therefore observe a jump in the relative amplitude at this instant, when it is plot using a logarithm scale (see figure 4.16(b)).

In this example, 6 iterations (N_{lin}) are required to reach the linear approximation. Moreover $w_M^- \ll |x^*(\gamma_M) - \phi_\epsilon(\gamma_M)|$, therefore the starting amplitude for the constant parameter phase (w_M^+) is deduced from equation (4.54). Then, the envelope is computed following the method described above (see figure 4.15).

In figure 4.16(b), we can see a large difference between the prediction and the "actual envelope" (labelled "Iteration" in figure 4.16) for n between 10 and 110. It is due to the fact that the "actual envelope" is calculated with respect to an invariant curve ϕ_ϵ where too few perturbation terms were included (i.e. condition (4.29) is not respected), so that the envelope is incorrect for very small amplitudes. However, the prediction for largest amplitudes, after $n \approx 110$, does not suffer from this poor approximation, as it follows fairly the envelope "actual envelope".

Figure 4.16(b) shows also a slight discrepancy, from $n \approx 110$ to $n = 150$, between the actual envelope and the prediction. This is due to the fact that $\tilde{l}(\gamma)$ is calculated using a severe approximation $\phi_\epsilon(\gamma - \epsilon) \approx x^*(\gamma)$ (see equation (4.26)). For small values of ϵ the approximation is satisfactory. The advantage of using this approximation is that a single curve $\tilde{l}(\gamma)$ can be used for any value of the growth rate.

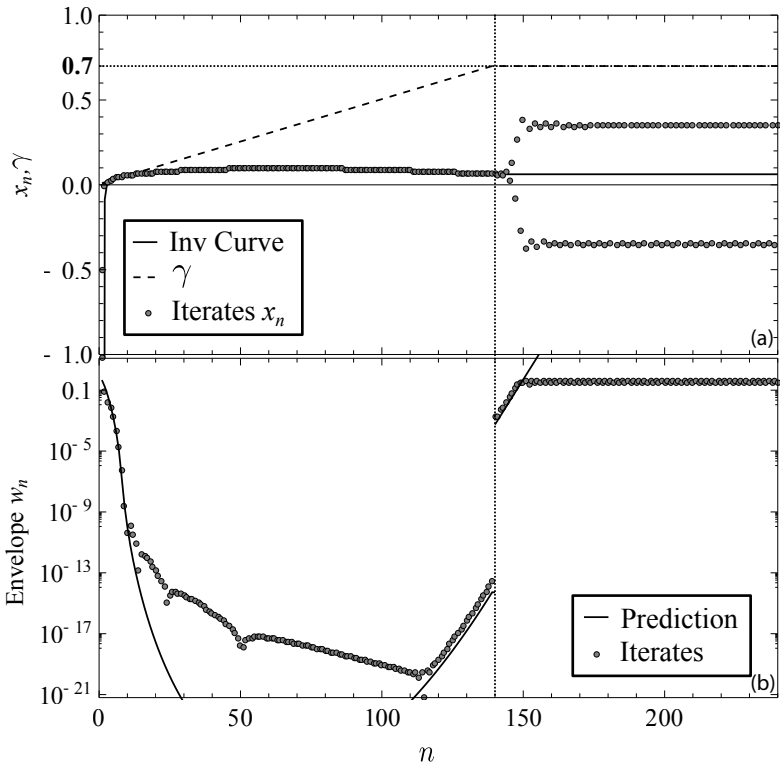


Figure 4.16 – Simulation and invariant curve and envelope predictions. Unlimitted precision, $\epsilon = 0.005$, $\zeta = 1/2$, $\gamma_M = 0.7$, $\gamma_0 = 1/100$, $x_0 = 0.5$. (a) x_n and γ with a linear ordinate scale. (b) w_n (predicted and simulated) with a logarithm ordinate scale.

4.2.6.2 Case of large γ_M

In figure 4.17, the parameters remain the same as the previous example, but γ reaches a higher value. This results in higher values of amplitude w_n when the parameter stops increasing.

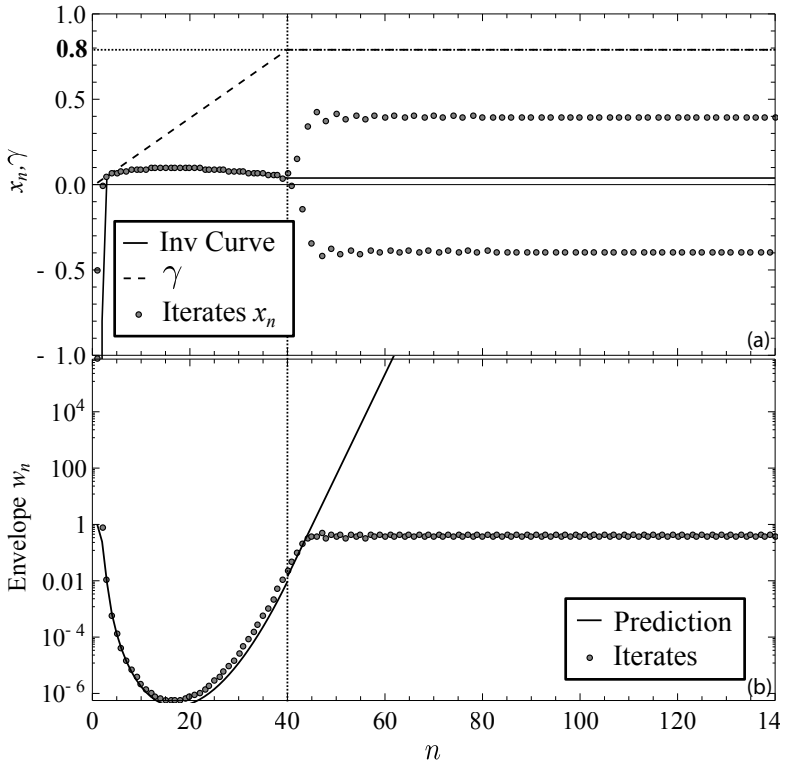


FIGURE 4.17 – Simulation and invariant curve and envelope predictions. Unlimitted precision, $\epsilon = .02$, $\zeta = 1/2$, $\gamma_M = 0.8$, $x_0 = 0.5$, $\gamma_0 = 1/100$. (a) x_n and γ with a linear ordinate scale. (b) w_n (predicted and simulated) with a logarithm ordinate scale.

The envelopes during the growing phase are estimated using the same method as above. At iteration M, since the system is estimated to have an amplitude that is higher than the difference $|\phi(\gamma) - x^*(\gamma_M)|$, the new amplitude w_M^+ is the same as the distance to the invariant curve of the growing phase w_M^-, the remaining envelope being the exponential $w_M^+ \exp|G'(x^*(\gamma_M), \gamma_M)|$, as in the example above.

The biggest difficulty in estimating the amplitude of the final (constant-γ) phase arises when the amplitude w_M^- is similar to $|\phi(\gamma) - x^*(\gamma_M)|$. In this case, the iterate at n=M can be either very close to the fixed point curve or at twice the distance between the two reference curves, which will imply very different amplitudes for the stationary phase. This phenomenon is very unusual and never observed it in our simulations.

Finally, in Figure 4.17(b), the jump in the relative amplitude at the beginning of the stationary phase exists but it is not visible because the amplitude of the oscillation at $\gamma = \gamma_n$ is relatively large compare to the case shown in previous example (see figure 4.16(b)).

4.2.6.3 Simulations with noise

In this example the simulation is performed adding a stochastic variable (with a standard deviation of σ) in the system.

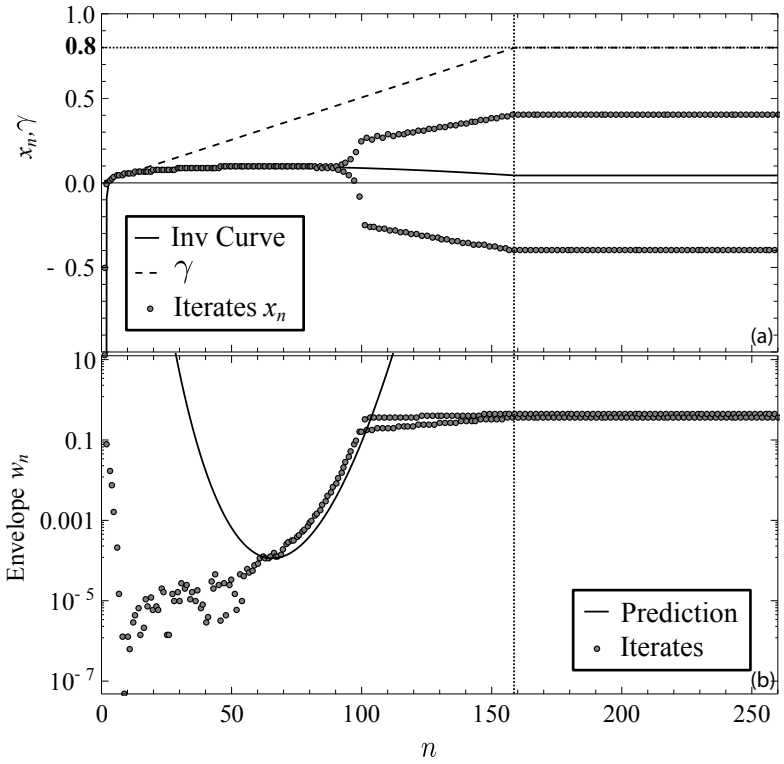


FIGURE 4.18 – Simulation and invariant curve and envelope predictions. Unlimitted precision, $\epsilon = .01$, $\zeta = 1/2$, $x_0 = 0.5$, $\gamma_0 = 1/10$, $\sigma = 10^{-4}$. (a) x_n and γ with a linear ordinate scale. (b) w_n (predicted and simulated) with a logarithm ordinate scale.

In figure 4.18, the system is simulated with an addition of a random variable to the sequence γ_n, having a uniform probability distribution whose variance is $\sigma = 10^{-4}$ (equivalent to a simulation without noise but with a numerical precision fixed to 4 significant digits [20]). The sequence B_n (eq. (4.44)) is calculated with this value of σ, and its square-root plotted as the envelope prediction. The prediction is valid from $\gamma = \gamma_{st} = 1/3$, where B_n reaches its minimum value. This gives rise to a reduced delay in the departure of the oscillations compare to a case without noise.

In general, because of the reduction in the bifurcation delay, the oscillations are seen to depart much earlier than the stop in increase of the parameter γ, so that the envelope shown in this case is valid until the amplitude corresponding to γ_n is reached. However, for very early stops (values of γ_M), the remaining envelope of the recipe given in section 4.2.5.2 can be applied, giving rise to a similar discontinuity in the envelope as seen in figure 4.16.

Due to the random nature of the parameter γ_n, the prediction should not be interpreted as an approximation to the exact envelope, but rather as the envelope followed in average by a series of runs of the simulation. In fact, in this case, for a series of runs, the actual envelope can be shifted towards the right or the left by about 4 iterations.

4.2.7 Discussion on the *dynamic oscillation threshold*

For a constantly increasing parameter, the dynamic oscillation threshold γ_{dt} [19, 20] gives the approximate value of the mouth pressure parameter for which an audible sound appears (the distance from the invariant w curve becomes "macroscopic"). When the linear growth of the mouth pressure is suddenly stopped at $n = M$ and then kept constant at a value γ_M, two situations must

be distinguished :

- $\gamma_M < \gamma_{dt}$: the audible ("macroscopic") sound begins at $\gamma = \gamma_M$ (see section 4.2.6.1) ;
- $\gamma_M > \gamma_{dt}$: the audible ("macroscopic") sound begins at $\gamma = \gamma_{dt}$ (see sections 4.2.6.2 and 4.2.6.3).

4.2.8 Conclusion

In a few examples, it is shown that an analytic reconstruction of the oscillation envelope can predict reasonably well the simulations of a simplified clarinet system performed with arbitrarily high precision. These reconstructions are applied to a simple profile of the blowing pressure that includes a discontinuity in derivative. For low values of the blowing pressure, the oscillations are seen to appear at a macroscopic scale after the discontinuity in derivative.

Most of the results shown in this article can be applied to simulations of clarinet models that do not include reed dynamics. The method can in principle be extended to include frequency independent losses [29]. The mathematical expressions however are more complicated, making it harder to calculate the invariant curves, for instance (the methods presented in appendix 4.2.9.1 cannot be applied directly). More complicated models of clarinets are known to exhibit similar phenomena [83].

In real cases, bifurcation delay has also been observed in this instrument, and the oscillations seen to be triggered close to the inflexion point of the blowing profile [21]. This would be the expected case for low values of γ as shown in the example in section 4.2.6.1.

As a final perspective, It is also possible to extend the method presented here to other time profiles of parameter by an appropriate redefinition of the control parameter and the iterative function.

4.2.9 Annexes

4.2.9.1 Perturbation methods for the invariant curve

This section presents an alternative perturbation method to calculate the invariant curve, using only expressions of function $u = F(p)$ (see equation (4.6)). This has the advantage of producing much simpler expressions than using function $p^+ = G(-p^-)$. Higher order terms are needed only when determining w_n from a simulation. For all other purposes used in this article, the first order term is usually sufficient.

Generic forms of the invariant curve. The invariant curve satisfies the following equation :

$$\phi_\epsilon(\gamma) = G\left(\phi_\epsilon(\gamma - \epsilon), \gamma\right). \tag{4.55}$$

The perturbation to order n consists in expressing ϕ as a series of terms depending on powers of ϵ (the perturbation) :

$$\phi(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \phi^i(\gamma) + o(\epsilon^{n+1}) \tag{4.56}$$

Both ϕ and G are developed in a power series, ϕ around γ :

$$\phi(\gamma-\epsilon)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\epsilon^i}{i!}\frac{\partial^i\phi}{\partial\gamma^i}+o(\epsilon^{n+1}), \tag{4.57}$$

and G around the first term ϕ_0 :

$$G(x,\gamma)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-\phi_0)^i}{i!}\frac{\partial^i G(\phi_0)}{\partial\gamma}+o\left((x-\phi_0)^{n+1}\right). \tag{4.58}$$

The right-hand side of equation (4.55) is then, to 2nd order :

$$\begin{aligned}G\left(\phi_\epsilon(\gamma-\epsilon),\gamma\right)=G\left(\phi_0(\gamma),\gamma\right)+\\ G'\left(\phi_0(\gamma,\gamma)\left(\phi_1(\gamma)-\phi_0'(\gamma)\right)\right)\epsilon+\\ \left(\frac{1}{2}\left(\phi_1(\gamma)-\phi_0'(\gamma)\right)\right)G''\left(\phi_0(\gamma,\gamma)+G'\left(\phi_0(\gamma,\gamma)\left(\phi_2(\gamma)-\phi_1'(\gamma)-\frac{1}{2}\phi_0''(\gamma)\right)\right)+\\ O(\epsilon^3).\end{aligned} \tag{4.59}$$

By equating expression (4.57) on the left-hand side and (4.59), it is possible to isolate terms on each power of ϵ, and extract expressions for each of the functions ϕ_i.The first term is nothing but the definition of the fixed point :

$$\phi_0(\gamma)=G\left(\phi_0(\gamma)\right). \tag{4.60}$$

Each of the higher order terms is obtained from lower-order ones :

$$\phi_1 = \frac{G'\left(\phi_0\right)\phi_0'}{G'\left(\phi_0\right)-1} \tag{4.61}$$

$$\phi_2 = \frac{G'\left(\phi_0\right)\left(2\phi_1\phi_0'-\phi_1^2-\phi_0'^2\right)+G''\left(\phi_0\right)\left(2\phi_1-\phi_0''\right)}{2\left(G'\left(\phi_0\right)-1\right)} \tag{4.62}$$

...

All functions and derivatives of the functions ϕ_i are taken at γ. As expected, all the derivatives of G are taken at the fixed point ϕ_0, and this remains true for higher-order terms too.

Derivatives of G at the fixed point. Derivatives of function G, as given by Taillard [86] are hard to calculate, as the expressions are complicated. However, the derivatives of G are related to those of function F. $y=G(x)$ can be defined as a parametric curve (with parameter p) as the locus of points :

$$x(p) = -p^- = -\frac{1}{2}\left(p-F(p)\right), \tag{4.63}$$

$$y(p) = p^+ = \frac{1}{2}\left(p+F(p)\right). \tag{4.64}$$

The derivative of the curve $y=G(x)$ is :

$$G'=\frac{\frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p}}=\frac{F'+1}{F'-1}=\frac{-2\sqrt{\gamma-p}+\zeta\left(3(p-\gamma)+1\right)}{2\sqrt{\gamma-p}+\zeta\left(3(p-\gamma)+1\right)}. \tag{4.65}$$

All higher order derivatives can be calculated iterativelly :

$$G^{(n)} = \frac{\frac{\partial G^{(n-1)}}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p}}. \tag{4.66}$$

For instance the second derivative is :

$$G'' = -\frac{4F''}{(F'-1)^3} = -\frac{8\zeta(-3\gamma+3p-1)}{\left(2\sqrt{\gamma-p}+\zeta\left(3(p-\gamma)+1\right)\right)^3}. \tag{4.67}$$

In general these formulas are not of much use because they are functions of p instead of x. However, it is easy to verify that the fixed point of G corresponds to $p = 0$ (the line $y = x$ corresponds to the axis u), so that :

$$G'(\phi_0(\gamma)) = \frac{-2\sqrt{\gamma}+(1-3\gamma)\zeta}{2\sqrt{\gamma}+(1-3\gamma)\zeta}, \tag{4.68}$$

and

$$G''(\phi_0(\gamma)) = -\frac{8\zeta(3\gamma+1)}{\left(2\sqrt{\gamma}+(1-3\gamma)\zeta\right)^3}. \tag{4.69}$$

Perturbation terms. From equations (4.61) and (4.62), the first perturbation terms can be written :

$$\phi_0(\gamma) = \frac{\zeta}{2}(1-\gamma)\sqrt{\gamma}, \tag{4.70}$$

$$\phi_1(\gamma) = \frac{(1-3\gamma)\zeta\left((3\gamma-1)\zeta+2\sqrt{\gamma}\right)}{16\gamma}, \tag{4.71}$$

and,

$$\phi_2(\gamma) = -\frac{\left(9\gamma^2-1\right)\zeta^2\left(5\zeta(3\gamma-1)+8\sqrt{\gamma}\right)}{256\gamma^{5/2}}. \tag{4.72}$$

Fin de l'article [Début page 88]

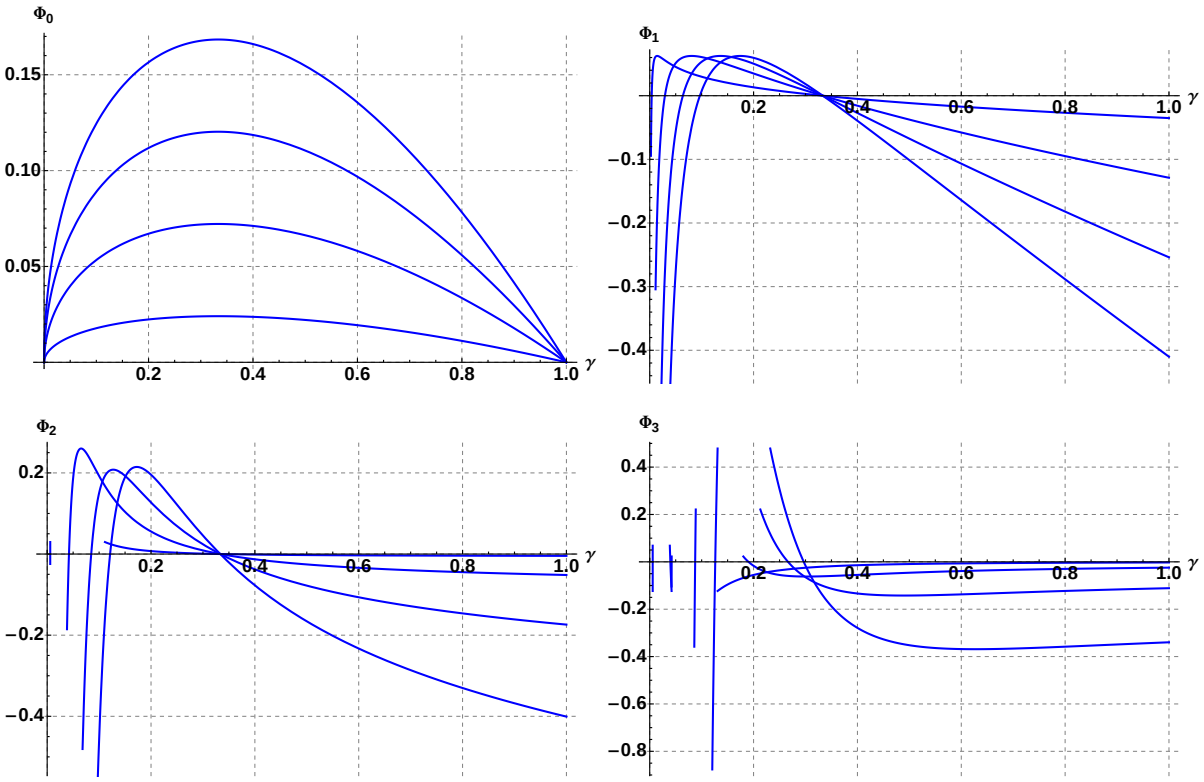


FIGURE 4.19 – First four terms of the perturabtion approximation to the invariant curve, each plotted as a function of γ for four different values of ζ (1/8, 3/8, 5/8 and 7/8).

Troisième partie

Résultats expérimentaux : mesures *in vitro*

Chapitre 5

Réponse d'une clarinette à différents profils de pression dans la bouche : *Utilisation d'une bouche artificielle*

Sommaire

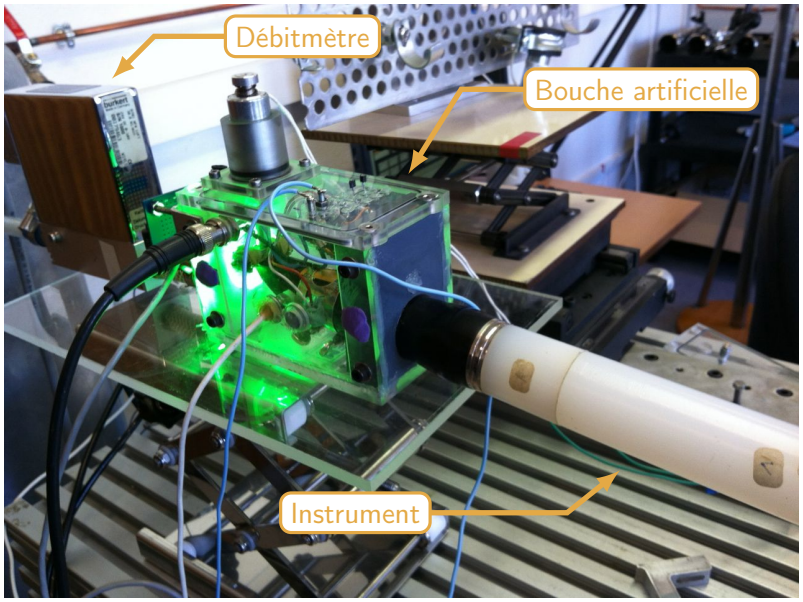
5.1 Avant-propos . . . 117
5.2 Article *JASA* . . . 120
5.2.1 Introduction . . . 120
5.2.2 Experimental setup and configurations . . . 122
5.2.3 Clarinet model . . . 124
5.2.4 Results for the "CIMP" profile . . . 127
5.2.5 Results for the "IIMPP" profile . . . 134
5.2.6 Conclusion . . . 138
5.2.7 Appendices . . . 138

5.1 Avant-propos

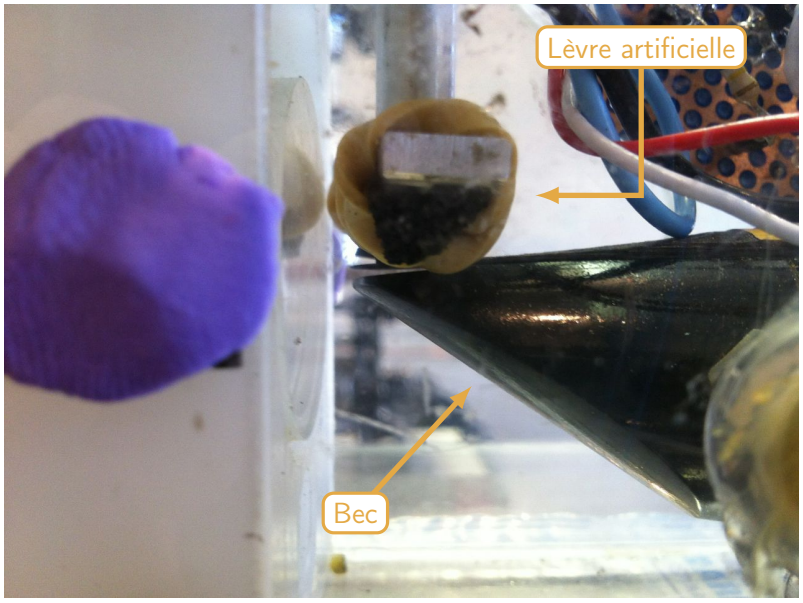
L'objectif de ce chapitre est de chercher à vérifier si les phénomènes mis en évidence sur le modèle dit de "Raman" dans la partie II du mémoire (tel que le retard à la bifurcation et ses propriétés) sont purement numériques ou s'ils correspondent également à une réalité expérimentale.

La section 5.2 de ce chapitre est la reproduction d'un article soumis au *Journal of the Acoustical Society of America* en décembre 2012 [21]. L'article, écrit en collaboration avec André Almeida, Christophe Vergez, Bruno Gazengel et Didier Ferrand, s'intitule *"Response of an artificially blown clarinet to different blowing pressure profiles"*. Pour s'affranchir des contraintes liées à la présence d'un instrumentiste, les expériences sont réalisées *in vitro* : l'instrument joue, inséré dans une bouche artificielle, dispositif expérimental permettant de mettre l'instrument en auto-oscillation sans avoir recours au musicien. La bouche artificielle utilisée est celle développée au LMA dans le cadre du projet ANR Consonnes. Sa particularité est l'asservissement en pression d'alimentation de la bouche artificielle, qui permet notamment de reproduire des profils d'évolutions temporelles académiques. Une brève description de son fonctionnement est effectuée au paragraphe 5.2.2.1, en particulier la figure 5.3 en montre le schéma de principe. Pour plus de détails, se référer à Ferrand *et al.* [36, 37]. L'article se divise en deux grandes parties étudiant le comportement d'une clarinette de laboratoire : en réalité c'est un cylindre en plastique fixé sur le barillet et le bec

d'une vraie clarinette (cf. figure 5.1(a), la figure 5.1(b) montre la lèvre artificielle utilisée). Deux profils temporels de pression dans la bouche sont utilisés.



(a)

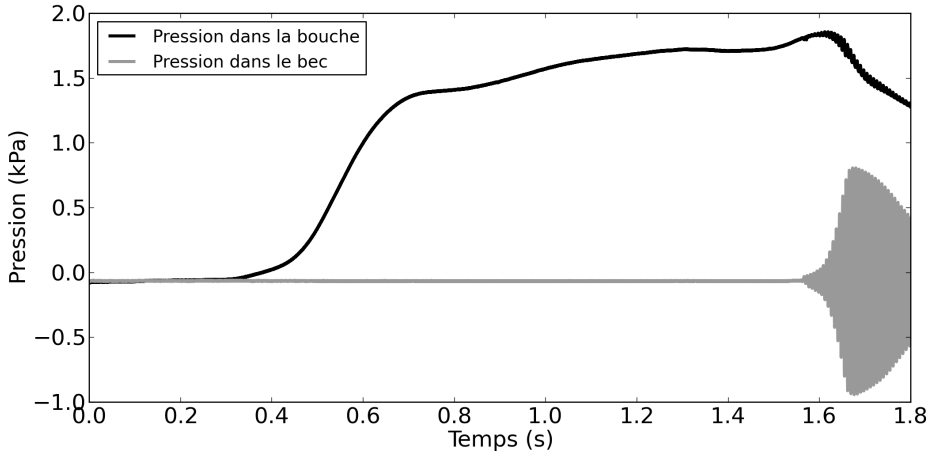


(b)

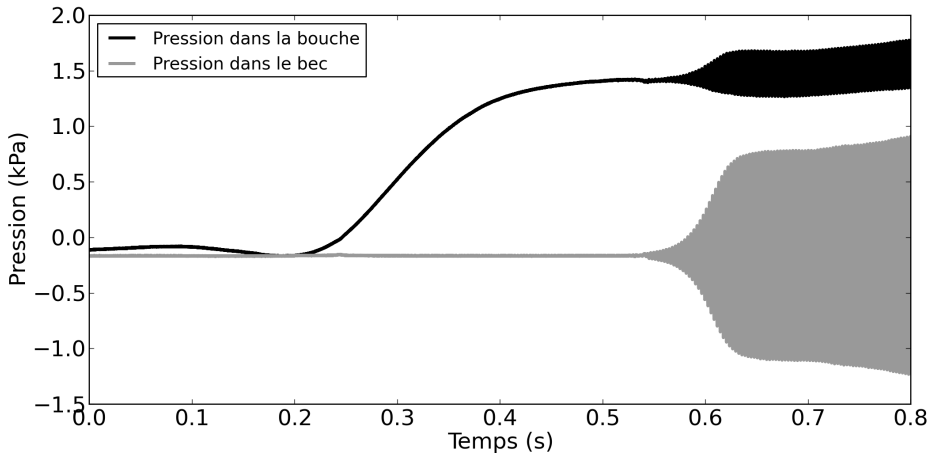
FIGURE 5.1 – (a) Vue générale du dispositif expérimental utilisé dans [21]. (b) Vue latérale du bec placé dans la bouche artificielle. La lèvre artificielle est placée dans la position utilisée dans l'expérience.

Dans la première partie, la naissance des oscillations dans le bec de l'instrument est étudiée lorsque la pression dans la bouche augmente linéairement. Les profils temporels de la pression dans la bouche utilisés dans ce cas sont appelés *"ramp" profiles* dans l'article. Les paramètres du modèle de "Raman" (rappelé au paragraphe 5.2.3) sont déduits de la mesure de la caractéristique non linéaire de l'instrument, permettant d'obtenir la valeur théorique du seuil d'oscillation statique. Un seuil d'oscillation dynamique expérimental est estimé à l'aide des signaux de pression dans le bec. Sa valeur est étudiée en fonction de la pente de la pression dans la bouche. Premièrement, le seuil dynamique expérimental est toujours supérieur au seuil statique, ceci mettant en évidence

la présence d'un retard à la bifurcation. Deuxièmement, nous observons que le seuil dynamique expérimental augmente avec la pente de la pression dans la bouche, comme le prédit l'expression théorique prenant en compte le bruit (cf. chapitre 3 équation (3.34), page 77). Enfin, la comparaison entre les signaux mesurés et ceux issus des simulations numériques du modèle montre de fortes similitudes de comportement (§ 5.2.4.3) mettant en évidence la capacité du modèle de "Raman" (si basique !) à prévoir des comportements observés expérimentalement.



(a)



(b)

FIGURE 5.2 – Mesure *in vivo* de l'attaque d'une note de clarinette. Pression dans la bouche de l'instrumentiste (en noir) et pression dans le bec de l'instrument (en gris). (a) Première attaque d'une gamme détachée effectuée en *pianissimo*. (b) Attaque lors d'un exercice d'échauffement spontané, sans consigne précise.

Dans la seconde partie, nous utilisons un profil temporel de pression dans la bouche se voulant plus proche de celui que l'on peut rencontrer lors de l'attaque d'une note par un musicien : une phase où la pression augmente suivie d'une phase de stabilisation. À titre informatif, la figure 5.2 montre la mesure *in vivo* (l'instrument est joué par un instrumentiste et les grandeurs physiques sont mesurées au cours du jeu) de l'attaque d'une note de clarinette. Nous pouvons observer la pression dans la bouche de l'instrumentiste (composantes statique et acoustique) et la pression acoustique dans le bec de l'instrument. Les signaux ont été générés par Pierre-André Taillard (instrumentiste expert et expérimentateur) en utilisant un bec instrumenté développé dans le cadre du projet ANR SDNS-AIMV. La figure 5.2(a) montre la première attaque d'une gamme détachée effectuée avec une

nuance *pianissimo* et la figure 5.2(b) une attaque lors d'un exercice d'échauffement spontané, sans consigne précise. Dans ces deux exemples, la naissance des auto-oscillations semble avoir lieu après que le musicien ait stabilisé la pression dans sa bouche. C'est d'autant plus visible sur la figure 5.2(b), où l'on observe bien la composante acoustique de la pression dans la bouche. Dans l'article, nous avons utilisé un profil temporel de pression dans la bouche simplifié par rapport à ceux que l'on peut observer à la figure 5.2 mais possédant tout de même une phase d'augmentation (linéaire) et une phase de stabilisation où la pression est constante. Ce profil est appelé *"plateau" profile*. Les deux résultats principaux de l'étude sont :

- La constante de temps de la croissance exponentielle des oscillations est indépendante de la durée de la phase d'augmentation de la pression dans la bouche. Ce résultat se retrouve dans des simulations numériques du modèle de "Raman" (cf. chapitre 4) et de modèles plus raffinés (cf. Silva *et al.* [84] (figure 1)) mais aussi analytiquement (cf. chapitre 4).
- Le début de la croissance des oscillations se trouve localisé au voisinage de la fin de la phase d'augmentation de la pression dans la bouche. Ce résultat peut être mis en parallèle avec les résultats théoriques au chapitre 4 où il est montré que le passage d'une phase dynamique à une phase statique (c'est ce qui se passe quand la pression dans la bouche devient constante après la phase d'augmentation) rompt le retard à la bifurcation en provoquant la mise en oscillation instantanée du système.

5.2 Article *JASA* :

B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez, B. Gazengel et D. Ferrand. ***"Response of an artificially blown clarinet to different blowing pressure profiles"***

Début de l'article

5.2.1 Introduction

The clarinet is one of the most well-described instrument in terms of scientific theories for its behavior. The relative simplicity of its elements and their couplings has allowed to explain several features of the sustained sound of the clarinet, such as the playing frequency, the harmonic content, or the amplitude of the sound, and their variation with the action of the musician on its instrument. An important part of the timbre of this musical instrument can thus be understood with currently existing models. However, the timbre does not only depend on the characteristics of the sustained sound but to a great extent, on the quick variations that happen at the onset of the sound, i. e., the attack transient.

The first studies [32, 29, 86, 60, 28, 26] concerning the clarinet assume that the mouth pressure is constant and does not depend on time. We call this approach the "static case". These studies use simple resonator models (single mode [32], iterated map [29, 86] or continuation methods of the Hopf bifurcation [56]) and a linear approximation of the non-linear characteristic function of the exciter to predict the threshold pressure, the bifurcation diagram and the temporal shape of the pressure inside the mouthpiece. Results show that the oscillation threshold pressure, which will be called in this article the "static oscillation threshold" is related to reed stiffness, the mouthpiece opening and the losses inside the resonator [60, 29]. The calculated and the measured thresholds show qualitative agreement if the threshold pressure is measured while the mouth pressure is slowly decreasing [28]. Prediction of the transient using a linearization of the exciter characteristic agrees well with numerical simulations [32] and shows that the acoustic pressure starts with an

exponential envelope before reaching saturation [26]. For a given resonator and a fixed embouchure, the γ coefficient of the exponential growth ($p_0 e^{\gamma t}$) depends only on the value of the constant mouth pressure.

In a real situation, the attack of a note is produced with a complex combined action of several gestures. In special occasions, a musician will perform a "breath attack" without using his tongue. These transients show that the mouth pressure increases quickly, typically in 40ms [45] and that players overshoot a desired blowing pressure and then "decay" back to a "sustain" level.

More recent articles have studied the behavior of the instrument for time-varying pressures. Typically, these have used "Continuous Increasing Mouth Pressure" (CIMP), in which the blowing pressure increases with time at a constant rate, and "Interrupted Increasing Mouth Pressure followed by a Plateau" (IIMPP), in which the constant increase is stopped at the "interrupting time", being followed by a constant pressure. Using a CIMP, Atig *et al* [7] notices that oscillation threshold pressure calculated using numerical simulation is higher than the static oscillation threshold. Bergeot *et al* [19] provide an analytical/numerical study of a simple clarinet model (also used in this paper and presented in section 5.2.3) in CIMP situations and propose the term "dynamic oscillation threshold" to define the beginning of mouthpiece pressure oscillation in dynamic cases. An analytical expression is proposed for the dynamic threshold, predicting that it is always higher than the "static threshold". This phenomenon is known in mathematical literature as *bifurcation delay* [43]. We wish to emphasize that the term "delay" in *bifurcation delay* does not necessarily refer to a time difference but to a shift in the oscillation threshold. In this work, the word "delay" often refers to that shift.

The comparison between theoretical results and numerical simulations reveals an important sensitivity to the precision (i.e. the number of digits) used in numerical simulations. Indeed, numerical results only converge to the theory when the simplified model (the same as used for analytical investigation) is computed with hundreds or thousands of digits [19]. Otherwise, theoretical results become useless in predicting the behavior of the simulated model. In this case, the dynamic threshold increases with the increase rate of the mouth pressure. Silva [84] performs numerical simulations of an IIMPP, showing that the beginning of the envelope of the mouthpiece pressure is an exponential $p_0 e^{\gamma t}$ arising once the mouth pressure stops increasing, and in which the growth constant γ does not depend on the duration of the mouth pressure increase.

In this paper, the operation of a simplified clarinet under simplified conditions (CIMP and IIMPP mouth pressure profiles) is studied experimentally. The "clarinet" is a simple cylindrical tube attached to a clarinet mouthpiece – it has no bore variations, no flare, no bell and no tone or register holes.

To characterise the onset, three main parameters will be used : the time (or value of mouth pressure) at the start of the oscillations, their initial amplitude, and the growth constant (which as will be seen, can be vary through time in some cases). These parameters can be equivalently expressed as a function of time or as a function of mouth pressure, since the latter is an affine function of time.

In the case of the CIMP profile, these parameters, measured using the artificial mouth, are compared to the parameters estimated using simulations of a simplified clarinet model for different values of the increase rate of the CIMP.

In the case of the IIMPP, the starting time of the oscillations and the growth constant are related to the characteristics of the mouth pressure profile, in particular the "interrupting time" of the IIMPP, and the value of constant pressure reached at the end of the IIMPP.

The paper is organized as follows : section 5.2.2 presents the experimental system (artificial mouth). Section 5.2.3 presents the physical model used for simulating the clarinet system. The

experimental results are presented and discussed in section 5.2.4 for CIMP profiles and in section 5.2.5 for IIMPP profiles of mouth pressure. In section 5.2.4 experimental results obtained for CIMP profiles are compared to numerical simulations.

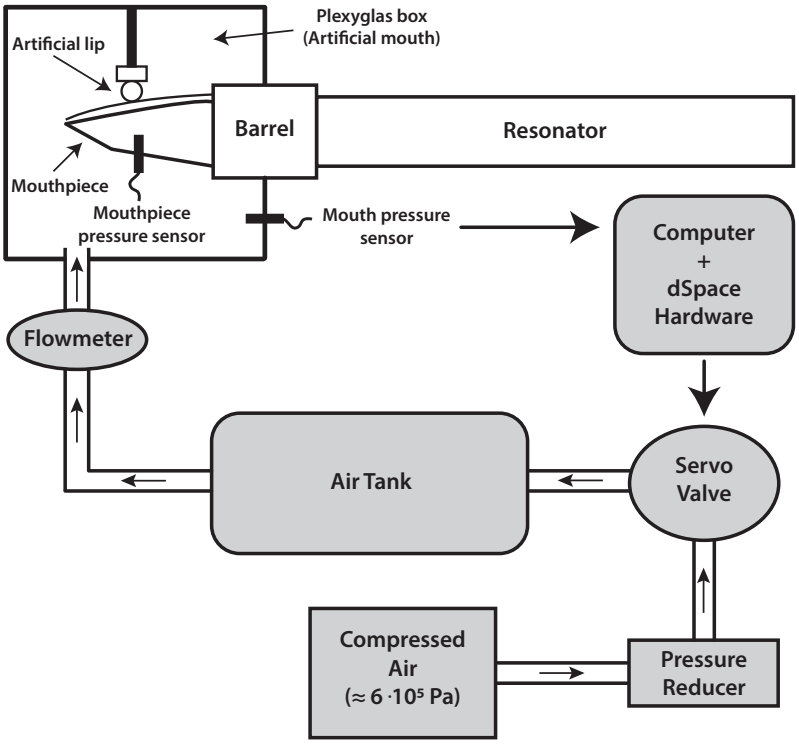


Figure 5.3 – Principle of the Pressure Controlled Artificial Mouth (PCAM).

5.2.2 Experimental setup and configurations

We describe here the experimental setup and the two experimental protocols used in the work. An outline schematic of the experimental setup is presented in fig. 5.3.

5.2.2.1 Materials

A simplified clarinet is inserted by its mouthpiece into Pressure Controlled Artificial Mouth (PCAM). The PCAM is responsible for controlling the mouth pressure and provides a suitable support for the sensors used in measuring the physical quantities of interest [36, 37].

The simplified clarinet is made of a plastic cylinder connected to the barrel of a real clarinet. The total length of cylinder and barrel is $l = 0.52$m (this is also the effective length of the instrument, calculated from $L = c/4f$, where c is the sound velocity and f the playing frequency) and the internal diameter is 15mm.

The artificial mouth is made of a Plexiglas box which supports rigidly both the mouthpiece and the barrel. It is a chamber with an internal volume of 30cm^3 where the air pressure P_m is to be controlled. The artificial lip is made of a foam pad sitting on the reed.

Both the internal mouth pressure and the pressure inside the mouthpiece are measured using differential pressure sensors (*Endevco 8510B* and *8507C* respectively). Finally, a flowmeter (*Bürkert 8701*) is placed at the entrance of the artificial mouth to measure the input volume flow entering

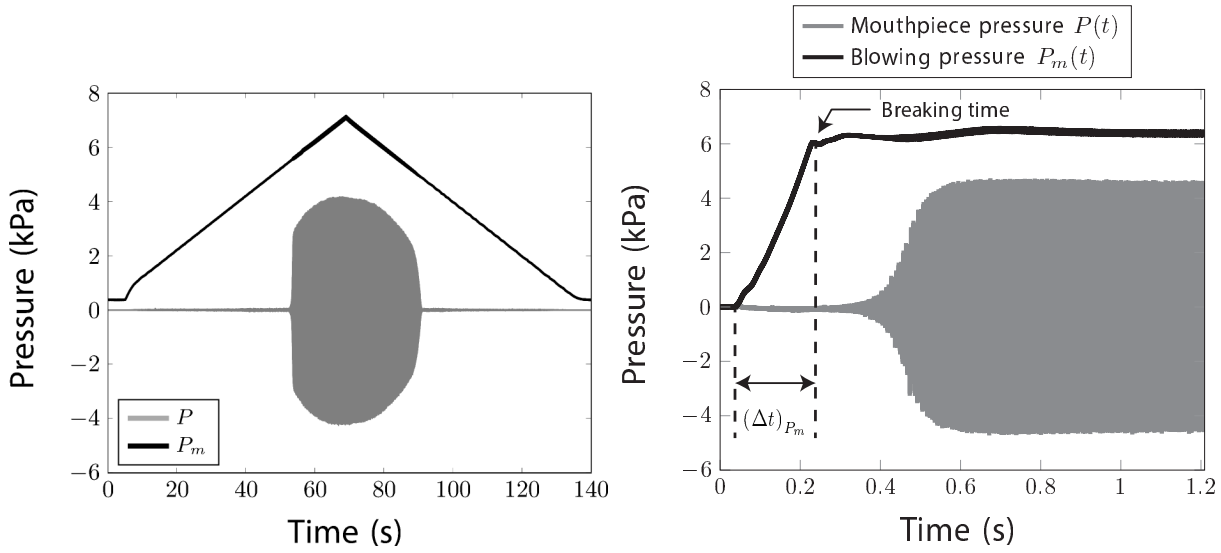


FIGURE 5.4 – (a) Time evolution of the mouth pressure $P_m(t)$ (CIMP profile) and of the pressure inside the mouthpiece $P(t)$. The slope k of the mouth pressure is equal to 0.1 kPa/s. (b) Measured signals in an IIMPP case : blowing pressure $P_m(t)$ (solid black line) and pressure inside the mouthpiece $P(t)$ (solid gray line).

into the reed channel.

Control of the mouth pressure is based on high-precision regulation of the air pressure inside the Plexiglas box. This regulation enables the control of blowing pressure around a target which can either be a fixed value or follow a function varying slowly over time. A servo-valve (*Bürkert 2832*) is connected to a compressed air source through a pressure reducing valve. The servo valve is a proportional valve in which the opening is proportional to the electric current. The maximum pressure available is approximately $6 \cdot 10^5$Pa. A pressure reducer is used to adjust the pressure upstream the servo-valve which is connected to the entrance of the artificial mouth itself. An air tank (120 litres) is inserted between of the servo-valve and the artificial mouth in order to stabilize the feedback loop during slowly varying onsets. This large tank is used for experiments performed with the CIMP profile, and is replaced by a much smaller tank (approx. 2 litres) when faster varying targets are tested (IIMPP profile). The control algorithm is implemented on a DSP card (*dSpace DS1104*), modifying the volume flow through the servo-valve every 40μs in order to minimize the difference between the measured and the target mouth pressure. Moreover, because of the long response time of the flowmeter, the volume flow is measured but is not used in the control loop.

5.2.2.2 Experimental protocol

"CIMP" profile. Starting from a low value (0.2 kPa in our experiment) the mouth pressure $P_m(t)$ is increased at a constant rate k (the slope) until a few seconds after the clarinet starts to sound. The mouth pressure is then decreased with a symmetric slope ($k' = -k$). During the experiment, the mouth pressure $P_m(t)$, the pressure in the mouthpiece $P(t)$ and the incoming flow $U(t)$ are recorded. Fig. 5.4(a) shows an example of the time profile of P_m and P with $k = 0.1$ kPa/s.

The experiment is repeated three times for each of the target slope values k given as a command to the PCAM. The actual values of the slope obtained during the experiment are estimated using a linear fit and shown in table 5.1. We can see that the use of the PCAM provides a very good repeatability on the increase/decrease rate of the blowing pressure.

Tableau 5.1 – Estimation of the slope for each repetition in experiment plus averages.

Experiment	1	2	3	4	5	6
Values of k (kPa/s) (incr. blowing pressure)						
1st time	0.100	0.140	0.233	0.751	1.557	2.681
2nd time	0.100	0.140	0.233	0.752	1.557	2.712
3rd time	0.100	0.140	0.233	0.753	1.559	2.711
Average	0.100	0.140	0.233	0.752	1.558	2.702

Tableau 5.2 – Averages and standard deviations of the measured $(\Delta t)_{P_m}$ and k obtained for each PCAM command for $(\Delta t)_{P_m}$.

Experiment	1	2	3	4
Command for $(\Delta t)_{P_m}$ (s)	**0.05**	**0.2**	**0.5**	**1**
Average of measured $(\Delta t)_{P_m}$: $\overline{(\Delta t)}_{P_m}$ (s)	0.0747	0.2047	0.4590	0.9168
Standard deviation of measured $(\Delta t)_{P_m}$ (s)	**0.0100**	**0.0108**	**0.0029**	**0.0060**
Average of measured k : $\overline{k}$ (kPa/s)	80.7354	29.9284	13.4157	7.4133
Standard deviation of measured k (kPa/s)	**7.6354**	**1.0262**	**0.2061**	**0.0378**

"IIMPP" profile. For the IIMPP profile, the blowing pressure has two phases, first increasing at a faster rate than that used for the CIMP profile, then kept at an almost constant value. For example, in fig. 5.4(b), the blowing pressure P_m starts at a low value (approx. 0.1 kPa), increases for a certain time (hereafter referred as $(\Delta t)_{P_m}$), reaches a target value (approx. 7 kPa) and is then kept constant. The experiment is repeated for different values of $(\Delta t)_{P_m}$ (target values are 0.05s, 0.2s, 0.5s and 1s corresponding respectively to experiments numbered 1, 2, 3 and 4, cf. table 5.2) and repeated fifteen times for each value of $(\Delta t)_{P_m}$. Table 5.2 shows a good agreement between the command and the measurement of $(\Delta t)_{P_m}$. This indicates that the control of the PCAM works even for rapid variations in blowing pressure. However, for the fastest (experiment 1), the difference between the command and measurement is about 50% of the command. Table 5.2 also shows good repeatability of the blowing pressure slope during the increasing part.

In this experiment, only the blowing pressure P_m and the internal mouthpiece pressure P are recorded (see fig. 5.4(b)).

5.2.3 Clarinet model

This section presents the physical model of the clarinet used in this work. The numerical simulations of the model will be compared to experimental results in section 5.2.4 for the CIMP profile.

5.2.3.1 Equations

The model divides the instrument into two elements, the exciter and the resonator.

Exciter. The exciter of a clarinet is the reed-mouthpiece system, characterized by four physical quantities, the flow U across the reed channel, the pressure difference $\Delta P = P_m - P$, the reed position y and the reed volume velocity U_r (fig. 5.5). For lower frequencies than the resonance

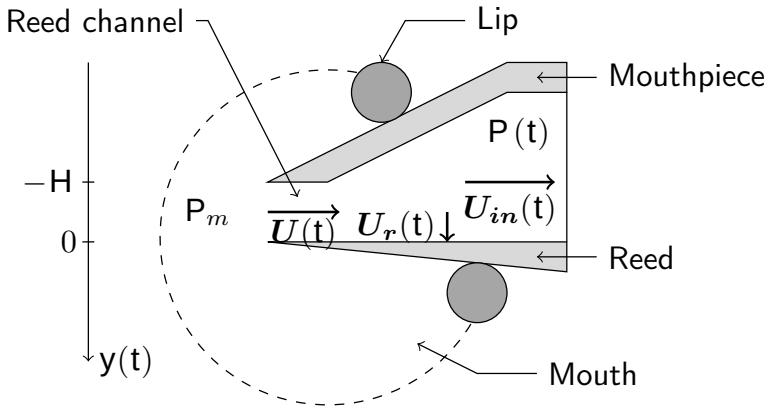


FIGURE 5.5 – View of the physical quantities used in the model.

frequency of the reed, and in a non-beating regime (this is the case in this work because we study the beginning of the oscillations), U_r can be considered as a length correction [71]. We thus assume that $U_r = 0$ so that $U = U_{in}$, and take the length correction into account in the effective length of the resonator. Ignoring reed damping and inertia, the pressure difference and reed position are proportional.

With these assumptions, the model can be described by two physical quantities ΔP and U linked through the nonlinear characteristics of the exciter :

$$\begin{cases} U = \dfrac{\zeta}{Z_c}\,(P_M - \Delta P)\sqrt{\dfrac{|\Delta P|}{P_M}}\,\mathrm{sgn}(\Delta P), & \text{(5.1a)} \\ \qquad\qquad \text{if } \Delta P < P_M\ ; & \\ 0, \qquad \text{if } \Delta P > P_M, & \text{(5.1b)} \end{cases}$$

where P_M is the static closing pressure of the reed. Parameter ζ is a non dimensional parameter written as

$$\zeta = Z_c\, S\sqrt{\frac{2}{\rho P_M}}, \tag{5.2}$$

where S is the cross-section of the reed channel at rest, ρ the air density and $Z_c = \rho c/S_{\text{cyl}}$ the characteristic impedance of the cylindrical resonator of cross-section S_{cyl}.

Resonator. The resonator is assumed to be a perfect cylinder in which only plane waves propagate. In linear acoustics, any unidimensional single-frequency pressure distribution can be expanded into two waves propagating in opposite directions. Using this property, the acoustic pressure P is the sum of an outgoing wave P^+ and an incoming wave P^- :

$$P^+ = \frac{1}{2}\,(P + Z_c U) \qquad ; \qquad P^- = \frac{1}{2}\,(P - Z_c U)\,. \tag{5.3}$$

Using the variables P^+ and P^- instead of the variables P and U, the resonator can be described by its reflection function $r(t)$, satisfying

$$P^-(t) = \left(r * P^+\right)(t). \tag{5.4}$$

A monochromatic planar wave of frequency f propagates in the resonator with a damping factor α taking into account the visco-thermal losses, which at low frequencies are dominant over the radiation losses. The approximate expression of α is [57] :

$$\alpha \approx 3 \cdot 10^{-5}\sqrt{f}/R, \tag{5.5}$$

where R is the bore radius.

Even if the acoustic signals P^+ and P^- are not monochromatic, the damping factor α is assumed to be constant, calculated at the playing frequency [64, 58, 59, 74, 29] and ignoring dispersion. Using this restrictive assumption Dalmont and Frappe [28] obtain a good agreement between theoretical an experimental results for threshold, in particular the oscillation threshold, provided that embouchure parameters P_m and ζ are well estimated. Because the damping factor α is assumed to be constant, the reflection function $r(t)$ becomes a simple delay with sign inversion (multiplied by an attenuation coefficient λ) and is written

$$r(t) = -\lambda\delta(t-\tau), \tag{5.6}$$

where,

$$\lambda = e^{-2\alpha L}, \tag{5.7}$$

is the attenuation coefficient, $\tau = 2L/c$ is the travel time of the wave over the resonator length L at speed c.

5.2.3.2 Solutions

From equation (5.6), equation (5.4) can be simplified as follows :

$$P^-(t) = -\lambda P^+(t-\tau). \tag{5.8}$$

Moreover, by substituting the variables P and U with variables P^+ and P^- in equation (5.1) we have :

$$P^+ = G\left(-P^-\right). \tag{5.9}$$

An explicit expression for function G can be found in Taillard *et al* [86], recalled in appendix 5.2.7.1 and plotted in fig. 5.6.

Using equations (5.8) and (5.9), the complete system can be described by the following equation :

$$P^+(t) = G\left(\lambda P^+(t-\tau)\right). \tag{5.10}$$

Finally, knowing variables P^+ and P^-, it is possible to calculate P using

$$P(t) = P^+(t) + P^-(t) = P^+(t) - \lambda P^+(t-\tau), \tag{5.11}$$

and U using

$$Z_c U(t) = P^+(t) - P^-(t) = P^+(t) + \lambda P^+(t-\tau). \tag{5.12}$$

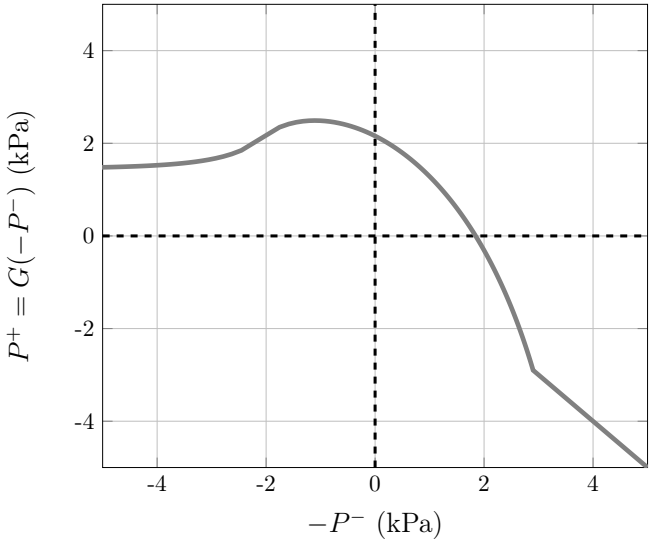


FIGURE 5.6 – Function G for $\zeta = 0.6$, $P_M = 10$kPa and $Z_c = 3.6 \cdot 10^4$ kPa $\cdot$ s $\cdot$ m^{-3}.

5.2.3.3 Static oscillation threshold

A study of the stability of the fixed points of function G based on the usual static bifurcation theory (i.e. assuming that the mouth pressure is constant over time) gives an analytical expression P_{mst} of the static oscillation threshold [60] :

$$P_{mst} = \frac{1}{9}\left(\frac{\tanh(\alpha l)}{\zeta} + \sqrt{3 + \left(\frac{\tanh(\alpha l)}{\zeta}\right)^2}\right)^2 P_M. \tag{5.13}$$

In practice P_{mst} is the minimum value of a static blowing pressure above which an instability can emerge.

Using a linearization of the characteristic curve of the exciter, it can be shown [26] that if the mouth pressure P_m is constant and lower than P_{mst}, the mouthpiece pressure $P(t)$ converges exponentially to a non oscillating regime (called *static regime* in the literature). If P_m is higher than P_{mst}, the pressure $P(t)$ increases exponentially from the *static regime* reaching asymptotically a signal of constant amplitude. For a given resonator and a fixed embouchure (i.e. a given ζ in the model), the time growth constant γ of the exponential depends only on the value of the constant mouth pressure.

5.2.4 Results for the "CIMP" profile

The aim of this section is to compare the parameters of the transient deduced from experimental signals and numerical signals. The parameters of interest are :

— The *bifurcation delay BD* defined as the difference between the *dynamic oscillation threshold* P_{mdt} and the analytical *static oscillation threshold* P_{mst} defined through equation (5.13).

— The time growth constant τ of the onset transient of the RMS envelope of $P(t)$.

— The pressure growth constant η of the onset transient of the RMS envelope of $P(P_m)$.

Firstly, the input parameters of the theoretical model (ζ and P_M) are estimated from the experimental data in order to calculate the value of P_{mst} and to calculate the values of P deduced from equations (5.10) and (5.11). Secondly, the method used for calculating the parameters BD, τ and η is presented, as shown in fig. 5.8.

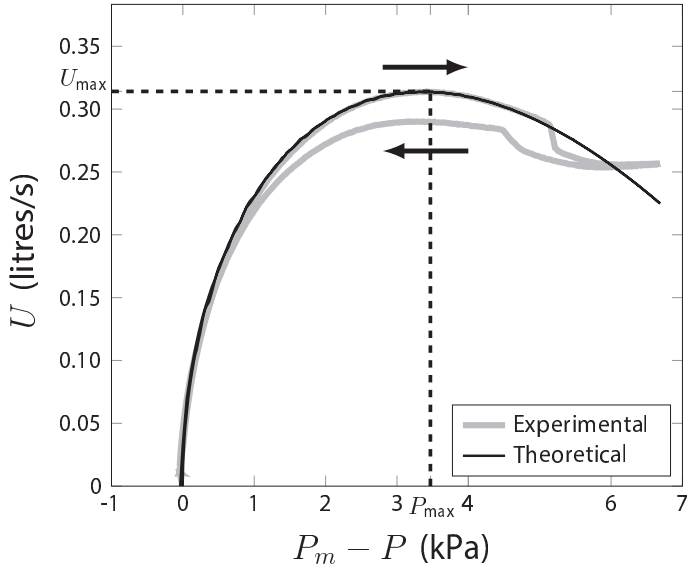


FIGURE 5.7 – Experimental nonlinear characteristics of the exciter (gray line) for increasing and decreasing blowing pressure and comparison with fitted model (black line) for increasing blowing pressure. ($\zeta = 0.19$ and $P_M = 10.12$ kPa) In this example the increase rate k of the blowing pressure is equal to 0.1kPa/s.

TABLEAU 5.3 – Averages of the slope k, of the parameters P_M, ζ and of the static oscillation threshold P_{mst} obtained for increasing and decreasing blowing pressure.

Experiment	1	2	3	4	5	6
Increasing blowing pressure						
k (kPa/s)	0.100	0.140	0.233	0.752	1.558	2.702
P_M (kPa)	10.1249	10.1018	10.3133	10.6686	11.3559	11.7668
ζ (Ad.)	0.1858	0.1858	0.1829	0.1755	0.1619	0.1614
P_{mst} (kPa)	3.9811	3.9723	4.0658	4.2358	4.5760	4.7448
Decreasing blowing pressure						
k' (kPa/s)	-0.100	-0.140	-0.235	-0.707	-0.679	-0.631
P_M (kPa)	10.0302	9.8651	9.9945	10.2835	10.4859	10.4577
ζ (Ad.)	0.1734	0.1763	0.1750	0.1685	0.1616	0.1646
P_{mst} (kPa)	3.9806	3.9040	3.9602	4.1018	4.2155	4.1903

Then, the method is applied to experimental and numerical signals leading to experimental parameters BD^{exp}, τ^{exp} and η^{exp} and to numerical parameters BD^{num}, τ^{num} and η^{num}. Finally, we compare transient parameters deduced from experimental and simulated signals.

5.2.4.1 Estimation of the parameters used in the model

The damping factor α is calculated at the playing frequency, which is around 160Hz, using equation (5.5). Parameters P_M and ζ are deduced from the experimental non linear characteristics of the exciter, prior to the oscillation, by estimating the coordinates of the maximum of the characteristic curve (P_{max}, U_{max}), through equations (5.14) and (5.15) :

$$P_{max} = \frac{P_M}{3}, \tag{5.14}$$

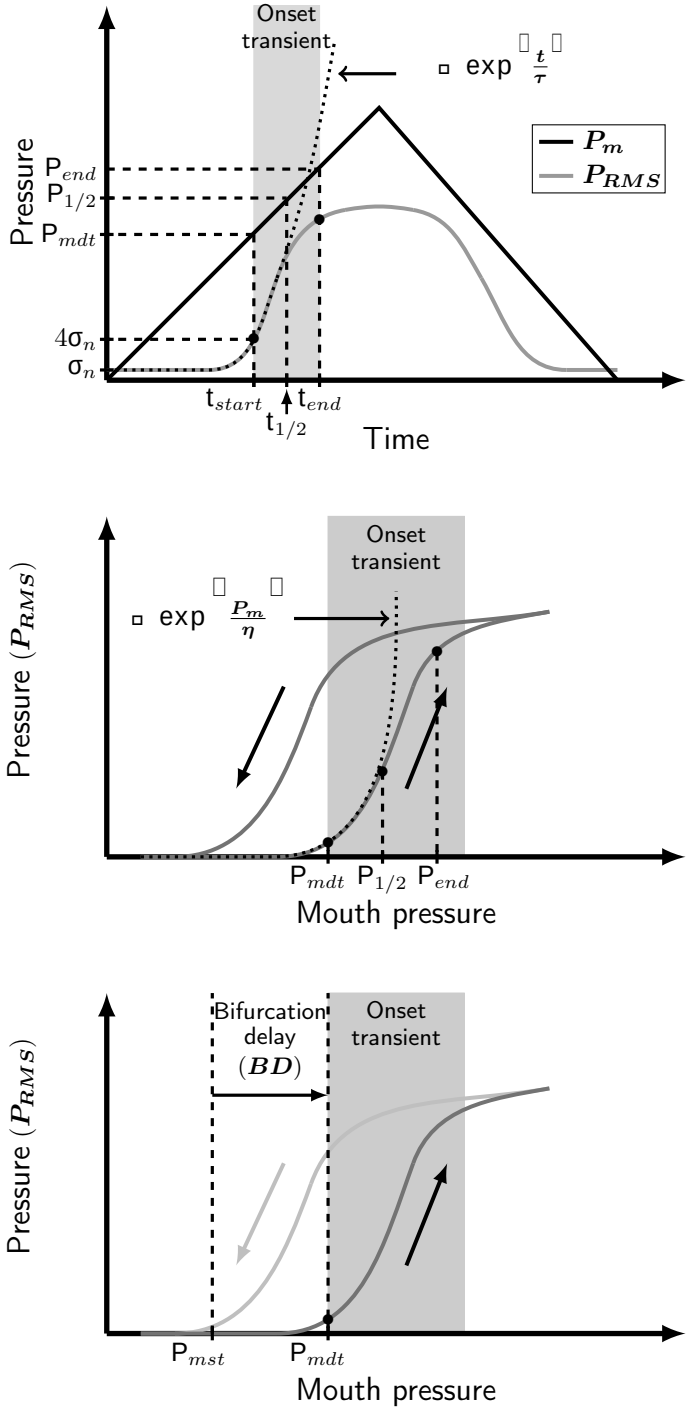


FIGURE 5.8 – Outline schematic showing the definition of the different indicators of the transient. At the top : blowing pressure P_m and of the RMS envelope P_{RMS} of the pressure inside the mouthpiece as functions of time. Illustrations of t_{start}, t_{end}, P_{mdt}, P_{end} and τ. In the middle : P_{RMS} as a function of P_m. Illustration of η. At the bottom : illustration of the bifurcation delay (BD), corresponding to the pressure difference between the dynamic oscillation threshold P_{mdt} and the static oscillation threshold P_{mst} (see equation (5.16)).

and

$$U_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{P_M}{Z_c} \zeta. \tag{5.15}$$

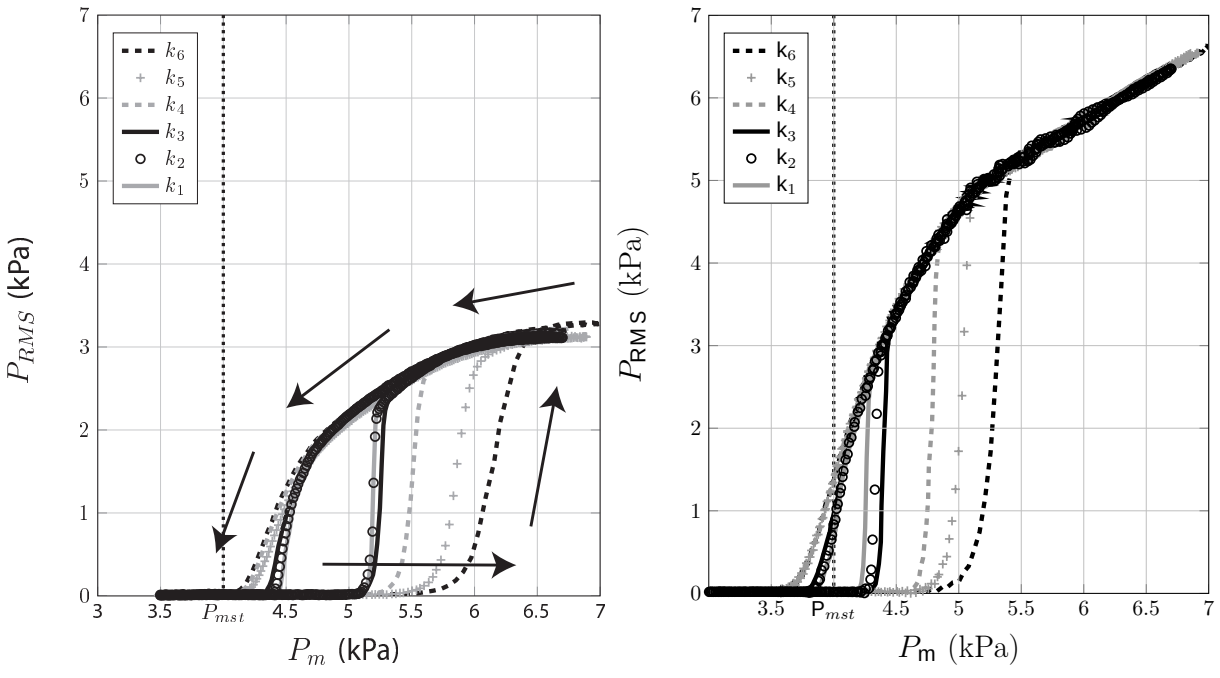
Figure 5.7 shows an example of an experimental nonlinear characteristic (gray line). As stated previously [30, 5, 28], due to the visco-elasticity of the reed, there is a difference between the characteristics measured for increasing and decreasing blowing pressures.

The values of the parameters ζ and P_M estimated for the 6 values of the slope k (table 5.1) are given in table 5.3 for the increasing and decreasing blowing pressures. The difference between the parameters estimated in both cases is low (less than 2 %). For this reason, we used the values of ζ and P_M deduced for increasing blowing pressure. In this case, the value of the static oscillation threshold pressure is calculated using the first three values of k and leads to $P_{mst} = 4.01$ kPa. Due to the response time of the flowmeter (≈ 0.3s), in experiments 4, 5 and 6 (with faster varying pressures) the closing pressure P_M and static oscillation threshold P_{mst} are overestimated.

5.2.4.2 Estimation method of bifurcation delay and growth constants

As a reminder, due to the affine relation between pressure and time, the difference in time, between the time at which the mouth pressure crosses the static threshold and the moment the oscillations actually start can be mapped to a pressure difference. The bifurcation delay BD is formally defined as the difference in threshold values of the mouthpieces pressure :

$$BD = P_{mdt} - P_{mst}, \tag{5.16}$$



(a) Experiment (b) Simulation

FIGURE 5.9 – P_{RMS} plotted against P_m for each value of the slope k. (a) Experimental signals, (b) signals generated by the numerical simulation of the model with parameters ζ and P_M estimated experimentally (cf. section 5.2.4.1), plotted against the measured blowing pressure $P_m(t)$. Arrows represent the evolution through time and highlight an hysteretis cycle.

with P_{mdt} the dynamic oscillation threshold and P_{mst} the static oscillation threshold estimated in the previous section (see fig. 5.8, at the bottom). P_{mdt} is estimated as follows : considering that the acoustic pressure P is a zero mean signal with variance σ_n^2 before the threshold, the beginning of the oscillation, at time t_{start}, is empirically estimated when $P_{RMS}(t_{start}) \geq 4\sigma_n$. Then the dynamic oscillation threshold is defined as $P_{mdt} = P_m(t_{start})$ (cf. fig. 5.8).

The part of the signal used for the determination of σ_n is manually delimited. The mean value of the standard deviation of the noise σ_n over all the measurements is 0.01kPa ($\approx$ 0.35% of the P_{RMS} value during the stationary regime).

For the estimation of the growth constants τ and η, firstly the end time of the transient t_{end} is estimated as the time corresponding to a local minimum of the second derivative of the RMS envelope [54]. Then, assuming that the transient is exponential for a time-varying mouth pressure as it is for linear looped systems in static case, the time growth constant τ is calculated between t_{start} and $t_{1/2} = t_{start} + (t_{end} - t_{start})/2$, as follows :

$$\tau = \frac{t_{1/2} - t_{start}}{\ln(P_{RMS}(t_{1/2})) - \ln(P_{RMS}(t_{start}))}. \tag{5.17}$$

Given that the blowing pressure is an affine function of time, P_{RMS} can be described using similar functions of either time or blowing pressure. The growth constant η is therefore calculated on $P_{RMS}(P_m)$ between $P_{mdt} = P_m(t_{start})$ and $P_{1/2} = P_m(t_{1/2})$:

$$\eta = \frac{P_{1/2} - P_{mdt}}{\ln(P_{RMS}(t_{1/2})) - \ln(P_{RMS}(t_{start}))}. \tag{5.18}$$

5.2.4.3 Comparison between experiment and simulation

Experimental signals are first compared to numerical solutions of equations (5.10) and (5.11). The simulation uses the experimental blowing pressure $P_m(t)$ and reed parameters ζ and P_M estimated in section 5.2.4.1. Then, experimental parameters BD^{exp}, τ^{exp} and η^{exp} are compared to numerical parameters BD^{num}, τ^{num} and η^{num}.

Comparison between experimental and numerical pressure signals. In fig. 5.9, the RMS envelope P_{RMS} is plotted as a function of the mouth pressure P_m for different slopes of the blowing pressure (fig. 5.9(a) : experimental signals and fig. 5.9(b) : simulated signals). First of all, in fig. 5.9(a), it is worth noting that for all values of the slope k, the state reached at the end of the transient belongs to the same periodic branch (slight repeatability errors aside).

Secondly, we can observe a substantial difference between the experimental and numerical signal amplitudes. Two reasons can explain this difference. The first is the fact that the damping factor is estimated at the playing frequency. A second reason could be the error made on the estimation of the reed parameters. Note also that the model used for these simulations is a very rough approximation to the instrument under study.

Figure 5.9 highlights a hysteresis cycle : the dynamic threshold estimated during the increasing phase is higher than the value of P_m at which oscillation stops during the decreasing phase. Figure 5.7 shows a change of embouchure parameters between the ascending and descending phases of the blowing pressure. Although this could explain the hysteresis cycle observed in fig. 5.9(a) (experimental results), the hypothesis is not confirmed by numerical results shown in fig. 5.9(b). Indeed, numerical simulations are run with constant embouchure parameters during the ascending and descending phases of the blowing pressure, also showing a hysteresis cycle. This

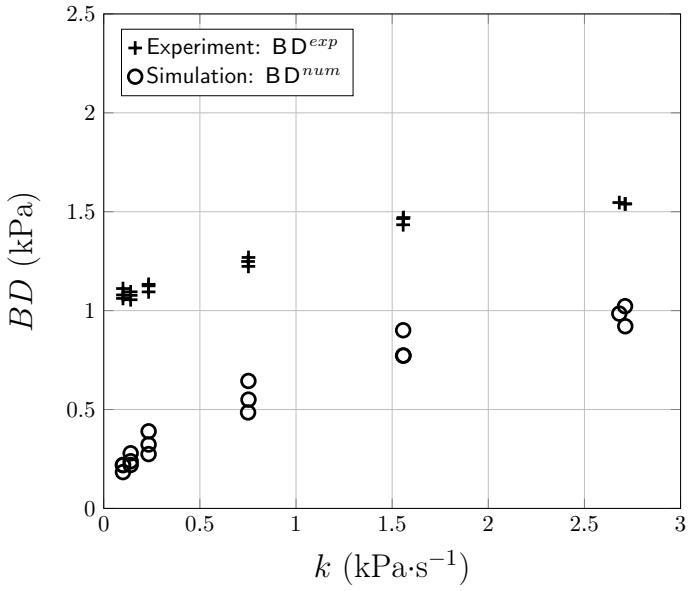


FIGURE 5.10 – Bifurcation delay estimated on experimental signals (BD^{exp} (+)) and on simulated signals (BD^{num} (○)) as functions of the slope k.

provides a strong indication that the hysteresis in the envelope of P in the experiment cannot be due uniquely to the viscoelastic change in reed properties.

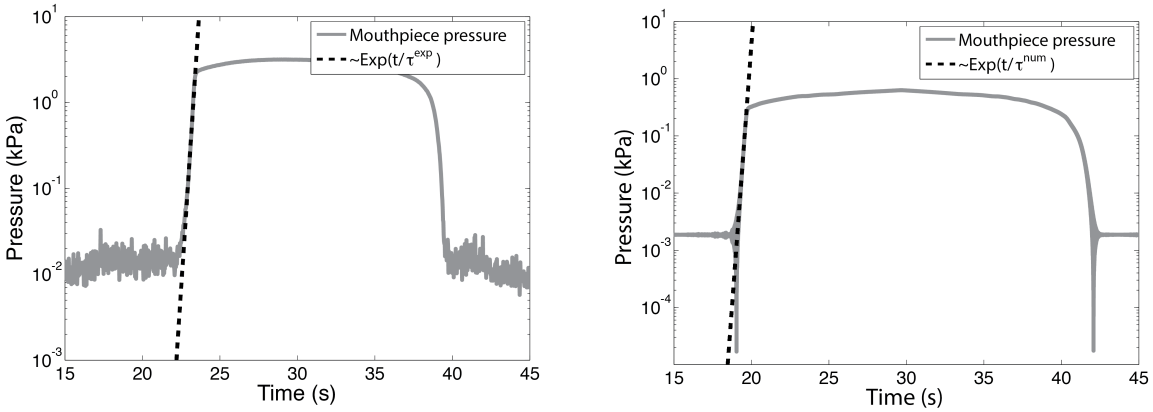
Finally, fig. 5.9(a) also shows that a direct Hopf bifurcation takes place, since the RMS envelope approaches zero continuously as the blowing pressure decreases.

Dynamic oscillation threshold. The indicators BD^{exp} and BD^{num} are plotted as functions of the slope k in fig. 5.10, where all recordings and all simulations are represented. The measurements are repeatable, showing little difference between the three tests of each slope k.

As suggested by fig. 5.9, the gaps BD^{exp} and BD^{num} are always positive and increase with the slope k. This is as predicted by recent theoretical predictions on a discrete time system affected with noise[?]. Figure 5.10 shows that the indicator BD^{num} estimated on numerical simulations is always smaller than the experimental BD^{exp}. A possible reason for this is that the static oscillation threshold is underestimated in the fit to the model (see sect. 5.2.4.1). Indeed, in fig. 5.9(b), the decreasing slope of simulations k_1, k_2 and k_3 shows an extinction of the sound close to the static oscillation threshold $P_{mst} = 4.01$kPa. On the other hand, for experimental signals (cf. fig. 5.9(a)), the extinction is close to 4.5 kPa, which can indicate that the static threshold is close to this value. The consistently lower value of the estimated static oscillation threshold P_{mst} could in principle be due to an underestimation of the acoustic losses α. However, as pointed in section 5.2.3.1, using assumption (5.5), Dalmont and Frappe [28] obtain a good agreement between theoretical an experimental results. Therefore, we believe that the error in the static oscillation threshold probably comes from the estimation of the parameters P_M and ζ. Indeed, underestimation is common when using a fit of non-linear characteristics [38].

Despite this underestimation, the delay in the start of the oscillations still occurs even if the static threshold is close to 4.5 kPa. Moreover, its dependence on the variation of the parameter k is unchanged.

Growth constants of the onset transient. This section is devoted to comparing the indicators τ^{exp}, η^{exp}, τ^{num} and η^{num}.



(a) Experiment (b) Simulation

FIGURE 5.11 – Time profile of the RMS envelope $P_{RMS}(t)$ (solid gray line) compared to its exponential fit during the onset transient (dashed black line). (a) Experimental signal and (b) simulated signal. $k = 0.23$kPa/s.

First of all, fig. 5.11 shows an example of the mouthpiece pressure profile on a logarithmic scale (experimental signal in fig. 5.11(a) and simulated signal in fig. 5.11(b)) compared to the exponential fit of the onset transient (dashed line on fig. 5.11). Even if the mouth pressure depends on time (CIMP with $k = 0.23$kPa/s), the pressure P inside the mouthpiece (for both experimental and simulated signal) increases exponentially during the onset transient.

Figure 5.12 shows that τ^{exp}, η^{exp}, τ^{num} and η^{num} are close to each other. Figure 5.12(a) shows that τ^{exp} and τ^{num} decrease with the increase rate k of mouth pressure. Conversely, in fig. 5.12(b) η^{exp} and η^{num} appear to increase with k.

5.2.4.4 Discussion

The similarity between experimental and simulated envelope profiles (as functions of blowing pressure) provides a good indication that the simplistic model is able to provide good predictions of dynamic instrument behaviors, as it has already provided for static values of the parameters [28]. In different numerical simulations [19] of the same simple model the dynamic thresholds were found to be much higher than the ones found in experimental results, mostly because the time-profile of the pressure is not affected by noise whereas the experimental one is. A better prediction of the dynamic threshold can be performed by introducing stochastic variables in the modeling[?]

Secondly, the fact that the values P_{mdt}^{exp} (and also P_{mdt}^{num}) are always larger than the static oscillation threshold P_{mst} can be explained by the intrinsic difference between the system described by the static theory where the blowing pressure P_m is assumed to be constant (a *static* case) and the system used in experiments where the blowing pressure is increasing (a *dynamic* case). Recent theoretical and experimental works [43, 42, 87] on dynamic nonlinear systems show that, in dynamic cases (as in our experiments), the oscillations start significantly after the *static* theoretical threshold has been exceeded. This phenomenon is known as *bifurcation delay*.

Finally, the time growth constant τ decreases with the slope k of the blowing pressure. Conversely, the pressure growth constant η increases with k. This means that even if the speed (as a function of time) of the onset transient of the acoustic pressure inside the mouthpiece increases with k, the blowing pressure sees a smaller variation during the onset transient.

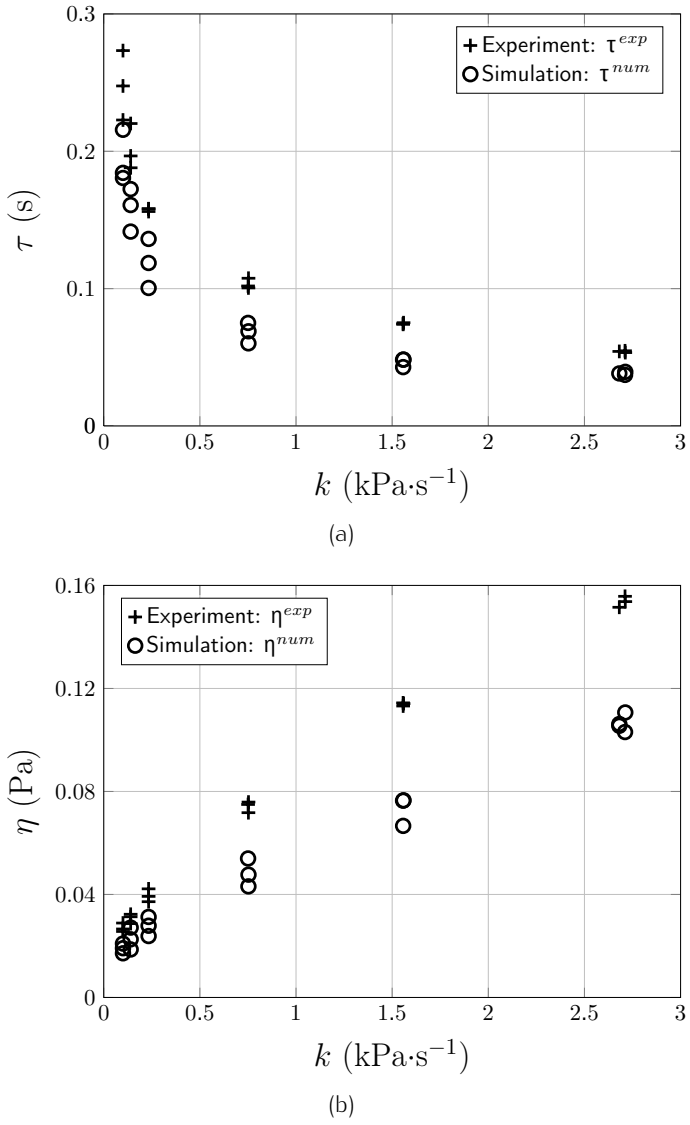


FIGURE 5.12 – Parameters τ (a) and η (b) as a function of the increase rate k of blowing pressure. (+) Experiment and (○) simulation.

5.2.5 Results for the "IIMPP" profile

The aim of this section is to study the evolution of two indicators deduced from the mouthpiece pressure as a function of the increasing duration of the mouth pressure. The first indicator is the oscillation start time, compared to the "interrupting time" of the IIMPP. The second indicator is the time growing constant.

5.2.5.1 Indicator estimation

As in the previous section, a few indicators are extracted from the measured signals, although with a few differences. An illustration of the indicators is depicted in fig. 5.13.

The increasing phase of P_m is detected from a threshold on the derivative of the measured P_m. Two reference points, the start time $(t_{\text{start}})_{P_m}$ and the "interrupting time" $(t_{\text{end}})_{P_m}$, result from this detection, and allow to estimate the duration of the transient of the blowing pressure :

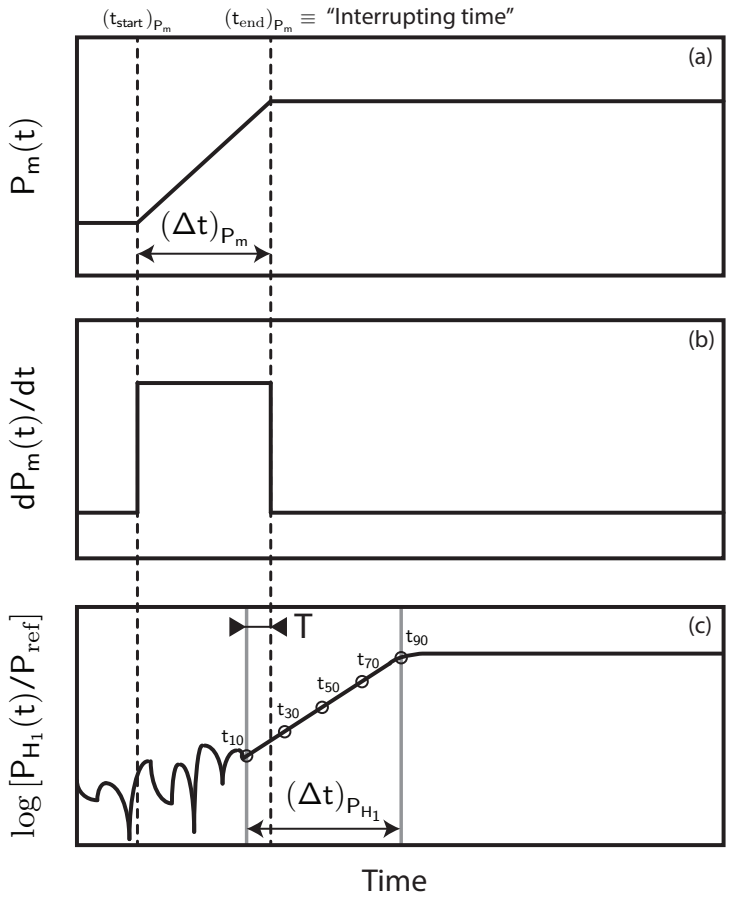


FIGURE 5.13 – Schematic representation of (a) the blowing pressure P_m and (b) its first time derivative. (c) Schematic representation of $\log[P_{H_1}(t)]$. Gray lines depict the duration $(\Delta t)_{P_{H_1}}$ of the onset transient of the pressure P inside the mouthpiece. Vertical dashed lines demarcate the duration $(\Delta t)_{P_m}$ of the transient of P_m. The delay T, defined by equation (5.21), is also represented.

$$(\Delta t)_{P_m} = (t_{\text{end}})_{P_m} - (t_{\text{start}})_{P_m} \,. \tag{5.19}$$

Assuming that the growth of P_m is linear, its slope k is estimated between the times $(t_{\text{start}})_{P_m}$ and $(t_{\text{end}})_{P_m}$.

In this section, during the increasing part of the mouth pressure IIMPP profiles, the increase rates k are higher than the ones used in section 5.2.4. In this case, we have noted that the use of the amplitude of the first harmonic $P_{H_1}(t)$ instead of the RMS envelope $P_{RMS}(t)$ allows the detection of sound emergence at lower amplitudes.

Amplitude of individual harmonics is extracted using heterodyne detection. Detection of a component at frequency f is performed by constructing a new complex vector resulting from the product of signal x_n by $\exp(j2\pi ft)$. This vector is then multiplied by a 4-period-long window of type "Blackman-Harris", and the absolute value of the result is summed over the window and normalized.

This algorithm was tested in 2 different signals : one with a jump in amplitude and one with a jump in frequency (from f to $2f$) with accurate results, and a precision (smoothing) of about 2 periods in both cases.

In fact, the noise background is lower if calculated at a narrower range of frequencies than for

the RMS envelope which is wideband. Therefore, in this section transient parameters are estimated on $P_{H_1}(t)$.

Two reference values of $P_{H_1}(t)$ are first determined, a low one corresponding to the noise background close to the note end, and high value, the absolute maximum of the logarithm envelope. Then, the first value of $\log[P_{H_1}/P_{\text{ref}}]$ crossing the midpoint between these two previous values is used as a reference time t_{50}. Four other points are detected with abscissa $\log[P_{H_1}/P_{\text{ref}}]$: t_{10}, t_{30}, t_{70} and t_{90}. Using these reference points the duration of the onset transient of the pressure P is defined as :

$$(\Delta t)_{P_{H_1}} = t_{90} - t_{10}. \tag{5.20}$$

Next, the delay T defines the difference in time between the beginning of the onset transient of P and the end of the blowing pressure increase :

$$T = t_{10} - (t_{\text{end}})_{P_m} \tag{5.21}$$

This indicator provides some information on the causality link between the discontinuity in the blowing pressure profile and the onset of oscillations, a positive value indicating that the oscillations may not be a consequence of the stop of the pressure growth.

Finally, assuming that the onset transient consists of an exponential growth where $P_{H_1}(t) \sim e^{t/\tau_{H_1}}$, the time growth constant τ_{H_1} is estimated as the slope of $\log[P_{H_1}(t)/P_{\text{ref}}]$ between t_{30} and t_{70}.

5.2.5.2 Experimental results

The indicators defined above are calculated for each trial. Some of the original trials were removed from the analysis when the fundamental frequency $f_0(t)$ was higher than expected ($\geq$200Hz, whereas the expected playing frequency is around 160Hz) for a long period of time during the onset phase. These correspond to squeaks or higher regimes which afterwards decay to the fundamental. The trials where the onset phase lasts longer than 400ms were also removed. After this treatment, four signal are removed from the fifteen originals trials.

In the remainder of this paper, the figures show the averages of the indicators over 4 trials of a particular configuration (written with an overline) and the standard deviations as a function of the average of the measured $(\Delta t)_{P_m}$ noted $\overline{(\Delta t)}_{P_m}$ (cf. table 5.2). Moreover, all time quantities are made dimensionless using $T_p = 1/f_p$, where $f_p \approx 160$Hz is the playing frequency.

The example depicted in fig. 5.14 shows that the amplitude of the sound grows exponentially at the beginning of the onset. Moreover, we can see that the time growth constant τ_{H_1} looks constant regardless of the value of $(\Delta t)_{P_m}$.

Figure 5.15 shows the time growth constants τ_{H_1} obtained for each value of $(\Delta t)_{P_m}$. Figure 5.15 confirms the observations made in fig. 5.14 : time growth constant τ_{H_1} does not depend on the value of $(\Delta t)_{P_m}$. The repeatability of the measurement is good for τ_{H_1} : the standard deviation is between 7% and 14% of the average.

Indicator T is plotted on fig. 5.16. We can notice that the beginning of the onset transient of the mouthpiece pressure is close to the "interrupting time" of the blowing pressure.

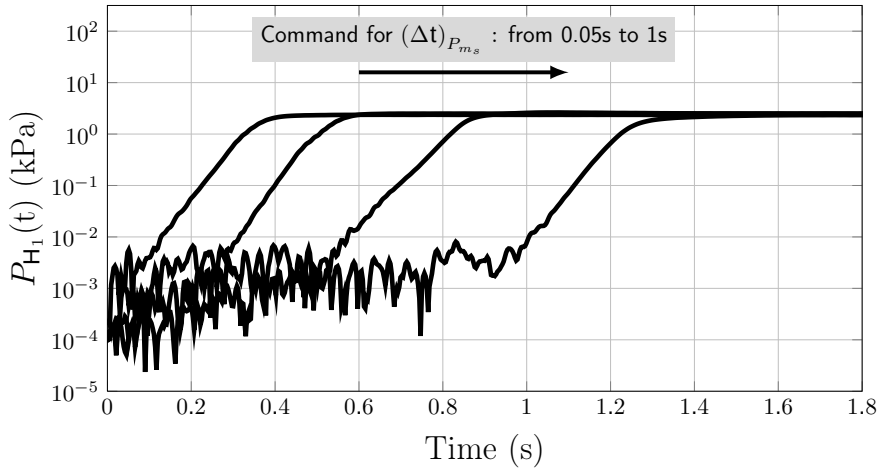


FIGURE 5.14 – Example of the time evolution $P_{H_1}(t)$ for each value of $(\Delta t)_{P_m}$. A logarithmic scale is used for the ordinate axis.

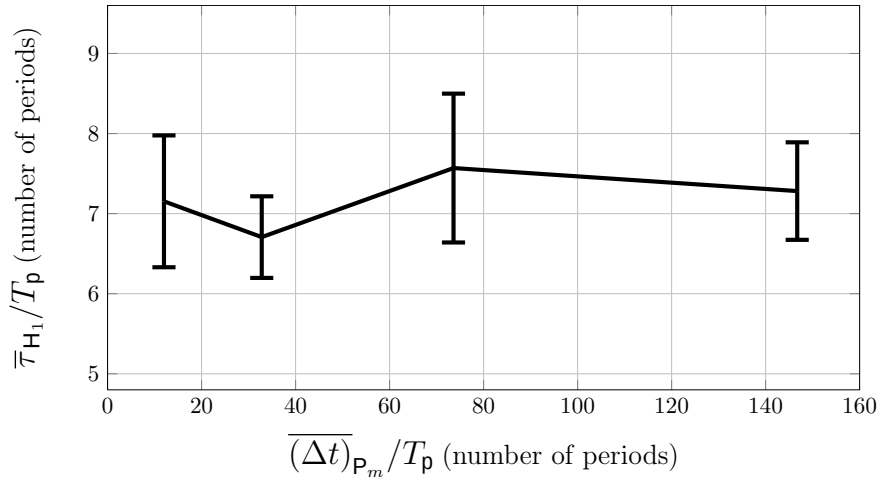


FIGURE 5.15 – Average and standard deviation (error bars) of the time growth constant τ_{H_1} obtained for each value of $\overline{(\Delta t)}_{P_m}$.

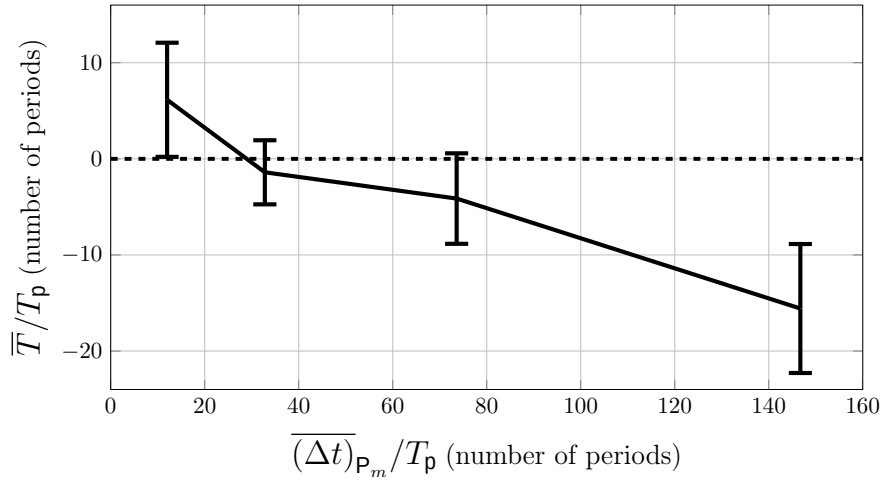


FIGURE 5.16 – Average plus or minus the standard deviation of the duration T obtained for each value of $\overline{(\Delta t)}_{P_m}$.

5.2.5.3 Discussion

In a fast linear increase in the blowing pressure followed by a stationary phase (i.e. IIMPP case), the results highlight that there is no "soft or fast" onset when the tongue is not used. The speed (i.e. τ_{H_1}) of the onset transient of sound is roughly the same regardless of the duration of the blowing pressure transient. The only impact of increasing $(\Delta t)_{P_m}$ is an increased delay in the curve of P_{H_1} (cf. fig. 5.14). Silva *et al.* [84] obtained similar conclusions on numerical simulations.

A possible reason for this is the fact that the beginning of the onset transient of the mouthpiece pressure is close to the end of the blowing pressure growth. This is shown in fig. 5.16 where the variable T is plotted. Therefore, for most of the mouthpiece pressure onset transient, the mouth pressure is constant and equal for each experiment, i.e. oscillations increase in "static" situation. In this case, as recalled in section 5.2.3.3, simple linear loop models predict that the time growth constant depends only on the value of the constant mouth pressure. However, to conclude that for IIMPP profiles the time growth constant of the mouthpiece pressure in the onset transient depends only on the target value of the mouth pressure, further measurements with different target values of the mouth pressure are required.

Th influence of the increase rate k on the time growth constant τ^{exp} seen in section 5.2.4 could be explained by the fact that blowing pressure still increases during the onset transient.

5.2.6 Conclusion

When a clarinet is blown using a linearly increasing mouth pressure, oscillations appear at a much higher value than those predicted by static bifurcation theory. This explains why increasing sweeps of the blowing pressure do not provide accurate information on the oscillation close to the static oscillation threshold. Decreasing the rate of pressure variation shows a limited improvement.

For interrupted fast attacks in mouth pressure, the oscillations start at the moment the blowing pressure is stabilized. the oscillations then follow an exponential envelope with a time growth constant that only depends on the target values of the parameters. An extension to musical contexts would require a validation with in vivo measurements taking into account more complex mouth pressure profiles and the influence of the tongue.

Finally, the similarity observed between experimental and simulated envelope profiles suggests that the complex behaviors observed experimentally with a time-varying blowing pressure can be described analytically by applying the same blowing pressure time profile to a simple classical model of the clarinet.

Acknowledgments

The authors thank Mrs Marilyn Twell for proofreading.

This work is financed by the research project SDNS-AIMV "Systèmes Dynamiques Non-Stationnaires - Application aux Instruments à Vent" financed by *Agence Nationale de la Recherche*.

5.2.7 Appendices

5.2.7.1 Explicit expression of the function G

The analytical expression for function G, defined by equation (5.9), is obtained by Taillard *et al* [86]. Its expression is recalled in this appendix where the following notations are used :

$$P = P^+ + P^- = G(x) - x\,; \tag{5.22}$$

$$U = P^+ - P^- = \frac{1}{Z_c}\left(G(x) + x\right). \tag{5.23}$$

These notations are slightly different from those used by Taillard *et al* [86].

From the expression of the nonlinear characteristic, given by equations (5.1), the non-beating regimes with positive flow and negative flow can be explicitly written :

$$\begin{cases} U(\Delta P) = \dfrac{\zeta}{Z_c}\left(P_M - \Delta P\right)\sqrt{\dfrac{\Delta P}{P_M}} & \text{(5.24a)} \\ \text{if} \quad 0 < \Delta P < P_M \text{ (Non-beating reed, positive flow) ;} \\ U(\Delta P) = -\dfrac{\zeta}{Z_c}\left(P_M - \Delta P\right)\sqrt{\dfrac{-\Delta P}{P_M}} & \text{(5.24b)} \\ \text{if} \quad -P_M < \Delta P < 0 \text{ (Non-beating reed, negative flow) ;} \\ U(\Delta P) = 0 & \text{(5.24c)} \\ \text{if} \quad \Delta P > P_M \text{ (Beating reed).} \end{cases}$$

In the following sections, we recall the analytical expression for function G for each of the three operating regimes (beating regime, non-beating regime with positive flow and negative flow) of the instrument.

Beating reed regime. For the beating case, the flow U is equal to zero. Therefore, from equation (A.2), the expression of G is simply :

$$G(x) = -x. \tag{5.25}$$

Non-beating reed regimes. From equation (A.1) and recalling that $\Delta P = P_m - P$, function G can be written as follow :

$$G(x) = P_m + \Delta P\left(U\right) + x. \tag{5.26}$$

Therefore, inverting equations (5.24b) and (5.24c) leads to a direct analytical expression of function G for the positive and negative flow cases respectively. In practice, inverting (5.24b) and (5.24c) consists in solving a third order polynomial equation, as explained by Taillard *et al* [86].

Positive flow. For the non-beating reed regime with positive flow, the analytical expression for function G is :

$$G(x) = P_m - P_M\left(-\frac{2}{3}\eta\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\psi - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{P_M}(P_m + 2x) - 1\right)}{\zeta\eta^3}\right)\right) + \frac{1}{3\zeta}\right)^2 + x, \tag{5.27}$$

with,

$$\psi = \frac{1}{\zeta^2} \quad ; \quad \eta = \sqrt{3+\psi}. \tag{5.28}$$

Negative flow. As stated above, inverting equation (5.24c) consists in solving a third order polynomial equation. For the non-beating reed regime with negative flow, the analytical expression of function G depends on the sign of the discriminant of the polynomial :

$$\text{Discr} = q^3 + r^2, \tag{5.29}$$

with

$$q = \frac{1}{9}(3-\psi) \quad ; \quad r = -\frac{\psi + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{P_M}(P_m+2x)-1\right)}{27\zeta}. \tag{5.30}$$

Positive discriminant. In this case, the expression of G is :

$$G(x) = P_m + P_M\left(s_1 - \frac{q}{s_1} - \frac{1}{3\zeta}\right)^2 + x, \tag{5.31}$$

where,

$$s_1 = \left[r + \sqrt{\text{Discr}}\right]^{1/3}. \tag{5.32}$$

Negative discriminant. G is :

$$G(x) = P_m + P_M\left(\frac{2}{3}\eta' \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-\psi - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{P_M}(P_m+2x)-1\right)}{\zeta\eta'^3}\right)\right) - \frac{1}{3\zeta}\right)^2 + x, \tag{5.33}$$

with,

$$\eta' = \sqrt{-3+\psi}. \tag{5.34}$$

Fin de l'article [Début page 120]

Conclusion et perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit est une contribution à l'étude des transitoires d'attaque dans les instruments auto-oscillants de type clarinette. En situation réelle, l'instrumentiste contrôle d'une part l'ouverture du canal anche-table par sa langue, d'autre part la force de sa lèvre sur l'anche et enfin la pression dans la cavité buccale, afin de contrôler le transitoire. La variation temporelle de ces trois paramètres détermine le signal de pression acoustique généré par l'instrument. Dans ce travail, nous nous sommes focalisés sur son enveloppe d'amplitude, et en particulier sur trois indicateurs extraits de l'évolution temporelle de cette enveloppe : la pression de seuil, définie comme la pression pour laquelle les auto-oscillations apparaissent, le paramètre caractérisant le taux de croissance de l'enveloppe et la durée du transitoire.

Tout au long l'étude théorique présentée dans la seconde partie de ce mémoire, seule la variation temporelle de la pression dans la cavité buccale est considérée, la force de la lèvre sur l'anche étant constante. De plus, le résonateur est ici un cylindre dont les pertes sont indépendantes de la fréquence et l'anche est assimilée à un ressort pur (modèle dit "de Raman").

L'analyse "dite *statique*" (i.e. en supposant la pression dans la bouche constante) du modèle de "Raman" conduit à une valeur théorique du seuil d'oscillation qu'il est souvent impossible de corréler avec l'apparition des oscillations dans des signaux issus de simulations numériques ou d'expériences *in vitro* dans lesquelles la pression dans la bouche varie linéairement. Dans ce cas, en effet, on observe en général l'apparition du son quand la pression dans la bouche atteint une valeur supérieure à la prédiction théorique. L'apport majeur de cette recherche est d'interpréter ce phénomène par la présence d'un retard à la bifurcation.

L'objectif principal a été d'étudier analytiquement le comportement "dit *dynamique*" du modèle de "Raman", dans le but de prévoir le retard à la bifurcation mais aussi être en mesure de reconstruire l'enveloppe du signal. Le second objectif a consisté à valider ces résultats théoriques par des comparaisons avec des simulations numériques du modèle de "Raman" et à des expériences *in vitro*.

L'étude théorique présentée dans la partie II est basée sur le concept de "courbe invariante" : l'état du système mesuré comme une distance à cette courbe, permet d'observer les oscillations les plus infimes dans une simulation qui serait effectuée avec une précision infinie. Prenant le risque de donner au lecteur une impression de redite, il nous semble important de refaire ici une description du comportement "dynamique" du modèle afin de prendre du recul sur la notion de retard à la bifurcation. Lorsque la pression dans la bouche varie, le système se rapproche de sa courbe invariante jusqu'à arriver à des écarts exponentiellement petits (ou microscopiques). L'écart minimum est atteint au moment où le paramètre arrive au niveau du seuil d'oscillation statique. Dès lors, le système commence à changer de régime en s'écartant de la courbe invariante. Ainsi, si on utilise la définition *statique* du point de bifurcation, c-à-d la valeur du paramètre où un changement qualitatif de l'état du système apparait, alors le retard à la bifurcation n'existe pas ! Cependant, comme l'orbite est exponentiellement proche de la courbe invariante, il faut un certain temps avant que l'écart ne devienne tangible ou macroscopique, temps pendant lequel le paramètre a eu le temps de passer à une valeur significativement différente. Cette valeur définit le point de

bifurcation dynamique (ou seuil dynamique d'oscillation pour la clarinette) dont la définition est donc bien différente de celle du point de bifurcation statique.

Résultats théoriques. De par l'obtention d'expressions théoriques, les propriétés du seuil dynamique d'oscillation ont pu ainsi être reliées aux caractéristiques de la variation temporelle de la pression dans la bouche, que sont sa valeur initiale et sa pente. Quand la pression dans la bouche atteint le seuil statique d'oscillation, le système commence à s'écarter de la courbe invariante. Le temps nécessaire pour arriver au seuil dynamique va donc être d'autant plus long que l'écart à la courbe invariante au niveau du seuil statique est petit. Cet écart, exponentiellement petit, va être limité par la présence de bruit, même si ce dernier provient des erreurs d'arrondi de l'ordinateur. Le bruit va donc avoir tendance à raccourcir le retard à la bifurcation, mais pas seulement. En effet, selon que le bruit puisse être ignoré ou non, les propriétés du retard à la bifurcation changent. Si le bruit peut être ignoré, le retard est indépendant de la pente de la pression dans la bouche mais très dépendant de sa valeur initiale. En revanche, si le bruit n'est plus négligeable, au contraire, le retard devient indépendant de la valeur initiale de la pression de souffle mais augmente avec sa pente. Ces résultats sont en accord avec ceux trouvés dans la littérature pour d'autres systèmes discrets.

Dans des situations réelles, pendant l'attaque d'une note, la pression dans la bouche ne peut pas augmenter indéfiniment. En général, elle finit par se stabiliser avant que les oscillations ne croissent jusqu'à un niveau audible. Nous avons étudié la réponse du modèle à un profil de pression dans la bouche académic prenant en compte cette observation. Ainsi une méthode systématique, permettant la reconstruction analytique de l'enveloppe du son lorsque la pression dans la bouche augmente linéairement puis s'arrête et reste constante a été proposée. En général, du fait du retard à la bifurcation, nous observons que les oscillations ne commencent qu'à partir du moment où la pression dans la bouche devient constante.

Ces résultats théoriques sont validés par la comparaison avec des seuils dynamiques et des enveloppes issus de la simulation numérique du modèle de "Raman".

Résultats expérimentaux. Le retard à la bifurcation peut sembler être une notion abstraite et il est légitime de s'interroger sur son existence en dehors des situations idéales étudiées dans la partie II (simulations numériques d'un modèle très simple en utilisant des profils de pression dans la bouche académiques). La campagne de mesures réalisée dans cette thèse (dont les résultats sont présentés en partie III) met en évidence expérimentalement le retard à la bifurcation sur une clarinette de laboratoire et d'étudier les conséquences que ce retard peut avoir lorsque l'instrument est excité avec une pression d'alimentation possédant un profil temporel plus réaliste. La réalisation de mesures *in vitro*, à l'aide d'une bouche artificielle asservie en pression d'alimentation, nous a permis de nous affranchir des contraintes liées à l'instrumentiste et d'étudier le comportement de l'instrument en réponse à des profils de pression dans la bouche académiques ; ceci constituant un pas de plus dans l'analyse d'une situation musicale (cf. figure 1 page 7).

La première expérience a consisté à exciter l'instrument avec une pression d'alimentation augmentant lentement et linéairement. Dans ce cas, les seuils d'oscillation dynamiques extraits des signaux expérimentaux se trouvent toujours supérieurs au seuil d'oscillation statique théorique calculé à partir des paramètres du modèle déduits de la mesure de la caractéristique non linéaire de l'instrument. Le retard à la bifurcation ainsi mesuré est d'autant plus important que la pente de la pression de souffle est élevée, comme le prédit le modèle lorsque le bruit est pris en compte. Un autre résultat marquant, est la faculté du modèle de "Raman", pourtant très simple, à reproduire des comportements observés expérimentalement. Ceci peut nous rendre confiant quant à la capacité des expressions théoriques obtenues dans la partie II (cf. section 3.3.2) à prévoir les seuils dynamiques

expérimentaux.

La seconde expérience a consisté à stopper la croissance de la pression dans la bouche une fois une valeur cible atteinte, la pression de souffle étant ensuite maintenue constante. Dans ce cas, en gardant pour chaque expérience la même valeur cible, nous observons une croissance exponentielle des oscillations dont la constante de temps est indépendante de la durée nécessaire pour atteindre la valeur cible. Ce phénomène est aussi observé sur des simulations numériques où il peut même être prédit analytiquement (cf. chapitre 4). L'autre constat de cette seconde expérience est que le début de la croissance des oscillations se trouve localisé au voisinage de la fin de la phase d'augmentation de la pression dans la bouche. Ce phénomène, également observé sur des signaux mesurés *in vivo* (cf. figure 5.2), est la conséquence probable du retard à la bifurcation qui maintient l'amplitude de la pression acoustique à des niveaux imperceptibles pendant la phase d'augmentation ; et ce même si le seuil statique d'oscillation est dépassé. Il est intéressant de se demander si le musicien a conscience de ce décalage entre le moment où il commence à augmenter la pression dans sa bouche et le démarrage de l'oscillation ; et si l'anticipation de ce décalage fait partie des réflexes à acquérir pour la bonne maitrise de l'instrument.

Ce travail ne constitue qu'une mince partie d'un vaste et complexe champ d'investigation, mais permet de mettre en évidence et de comprendre des phénomènes jusqu'à présent inconnus dans le domaine de la physique des instruments de musique.

Perspectives. La comparaison quantitative entre les seuils dynamiques d'oscillations théoriques et les seuils obtenus expérimentalement apparait être la première suite à donner à ce travail. Les résultats théoriques proposés ont pu être étendus à des modèles qui prennent à la fois en compte l'influence des pertes et du bruit, ce qui laisse présager que cette comparaison est possible. Cependant, dans le modèle dit "de Raman" les pertes sont indépendantes de la fréquence et l'expression du seuil dynamique suppose la présence d'un bruit additif. Il est tout à fait possible que la dispersion influe sur le retard à la bifurcation ou qu'il soit plus pertinent d'envisager un bruit multiplicatif plutôt qu'additif. Une étape intermédiaire serait de comparer les seuils dynamiques obtenus sur un modèle très simple à des seuils calculés sur des signaux provenant de la simulation de modèles plus raffinés.

Une autre suite à donner à ce travail serait d'étudier analytiquement d'autres profils temporels de pression dans la bouche. En effet, lorsque la variation du paramètre n'est pas linéaire, il est souvent possible, par une redéfinition appropriée du paramètre de contrôle et de la fonction d'itération de revenir à un cas de variation linéaire qui peut être traité par la méthode présentée dans ce mémoire. Ceci permettrait de considérer des profils où la pression dans la bouche s'arrête de croître et reste constante sans qu'il y ait une discontinuité de dérivée imposée par la variation linéaire.

Nous sommes conscients que l'écart entre les résultats présentés ici et la prédiction de situations musicales est important. Par exemple nous n'abordons pas la question de l'évolution de la fréquence instantanée qui pourtant a une importance probable dans la perception que l'on a des sons instrumentaux. L'étude de la variation de la fréquence instantanée dans des systèmes dont la pression dans la bouche varie apparait donc également indispensable. Pour cela, on peut envisager d'utiliser les outils de la bifurcation dynamique pour étudier analytiquement le modèle de clarinette à temps continu dit "modèle à un mode" (modèle qui décrit l'instrument comme un oscillateur de type Van der Pol [31, 32]). Cependant, le travail présenté dans ce mémoire étudie des systèmes à temps discret et le passage au continu n'est pas forcément évident, entre autres parce que les communautés scientifiques ne sont pas les mêmes. Néanmoins, nous abordons l'analyse des systèmes à temps continu depuis peu avec un mathématicien spécialiste. On peut également

songer à effectuer des études purement numériques, ce qui laisse plus de libertés sur les situations étudiées mais aussi la possibilité d'analyser des modèles plus raffinés, par exemple en utilisant les méthodes de synthèse de Guillemain *et al.* [48] et/ou Silva *et al.* [85]. Une étude préliminaire, sur des signaux de synthèse, de l'évolution de la fréquence instantanée pour des profils de pression dans la bouche de type "plateau" (voir section 5.2) est proposée dans [84]. Enfin, ces études analytiques et numériques pourraient être complétées par l'étude de la fréquence instantanée sur des signaux mesurés *in vitro* et *in vivo* lors du transitoire d'attaque.

Lors de l'attaque d'une note, la mise en oscillation de l'instrument n'est pas le seul mécanisme important. Le musicien doit également pouvoir maitriser la nature du régime établi de l'instrument. Il est en général souhaité de jouer sur le régime fondamental même si dans certains contextes musicaux, jouer sur les régimes supérieurs est un effet voulu. Sur la flûte à bec par exemple, l'étude statique de bifurcations permet de connaitre l'existence d'un régime en fonction de la valeur de la pression dans la bouche. En faisant varier la pression, un retard au changement de régime est observé, qui peut avoir pour conséquence que certains régimes sont "manqués" [25]. Il serait intéressant de voir s'il est possible d'observer le même genre de comportement sur la clarinette ou le saxophone.

Dans ce travail, seule l'influence de la pression dans la bouche du musicien est étudiée et les perspectives qui viennent d'être énoncées (dans une liste non exhaustive bien sûr) montrent qu'il reste beaucoup de choses à entreprendre. Cependant, pendant un transitoire d'attaque, l'évolution de la force d'appui de la lèvre du musicien sur l'anche doit également avoir des répercussions sur la mise en oscillation de l'instrument [49]. Il est aussi fort possible que l'influence de ces deux paramètres ne soient pas décorrélée. Par conséquent, la mesure simultanée en situation de jeu, de la pression dans la bouche et de la force d'appui de la lèvre sur l'anche, à l'aide d'un bec instrumenté, permettrait d'observer quelles sont réellement les stratégies employées par le musicien pendant l'attaque d'une note. De nombreuses mesures de ce types ont déjà été effectuées dans le cadre du projet SDNS-AIMV, il reste à les analyser.

Annexe A

Fonction d'itération

Sommaire

A.1 Anche battante . . . 145
A.2 Anche non battante . . . 146
A.2.1 Débit positif . . . 146
A.2.2 Débit négatif . . . 146

L'expression analytique de la fonction d'itération f définie à l'équation (1.31) est obtenue par Taillard *et al.* (Annexe A de [86]). Son expression est donnée dans cette annexe où les notations suivantes sont utilisées :

$$p = p^+ + p^- = f(x) - \lambda x \tag{A.1}$$
$$u = p^+ - p^- = f(x) + \lambda x. \tag{A.2}$$

L'expression de la caractéristique non linéaire, donnée par les équations (1.20b) et (1.20b), est rappelée ici, où les régimes d'anche non battante avec débit positif et d'anche non battante avec débit négatif sont écrits explicitement :

$$\begin{cases} u = \zeta(1+p-\gamma)\sqrt{\gamma-p} \quad \text{si} \quad 0 < \gamma - p < 1 & \text{(A.3a)} \\ \text{(Anche non battante et débit positif) ;} \\ u = -\zeta(1+p-\gamma)\sqrt{p-\gamma} \quad \text{si} \quad -1 < \gamma - p < 0 & \text{(A.3b)} \\ \text{(Anche non battante et débit négatif) ;} \\ u = 0 \quad \text{si} \quad \gamma - p > 1 & \text{(A.3c)} \\ \text{(Anche battante).} \end{cases}$$

A.1 Anche battante

La condition d'anche battante est $\gamma - p > 1$ soit $\gamma - f(x) + \lambda x > 1$, dans ce cas le débit u est nul et donc, en utilisant les équations (A.2) et (A.3c), l'expression de f est :

$$f(x) = -\lambda x. \tag{A.4}$$

A.2 Anche non battante

L'expression de f est différente suivant que le débit u soit positif ou négatif.

A.2.1 Débit positif

La condition d'anche battante avec un débit positif est $0 < \gamma - p < 1$, soit $0 < \gamma - f(x) + \lambda x < 1$. La fonction f est calculée en trouvant les racines d'un polynôme du troisième degré. Ce polynôme est obtenu en remplaçant les variable p et u dans (A.3a) par leurs expressions (A.1) et (A.2). Après calcul, l'expression de f est :

$$f(x) = \gamma - \left(-\frac{2}{3}\eta \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{\psi - \frac{9}{2}(3(\gamma + 2\lambda x) - 1)}{\zeta \eta^3} \right) \right) + \frac{1}{3\zeta} \right)^2 + \lambda x, \tag{A.5}$$

avec,

$$\psi = \frac{1}{\zeta^2} \quad ; \quad \eta = \sqrt{3 + \psi}. \tag{A.6}$$

A.2.2 Débit négatif

La condition d'anche battante avec un débit négatif est $-1 < \gamma - p < 0$, soit $-1 < \gamma - f(x) + \lambda x < 0$. La fonction f est également calculée en recherchant des racines d'un polynôme du troisième degré, qui cette fois est obtenu à partir de l'équation (A.3b). Dans le cas d'un débit négatif, l'expression de f dépend aussi du signe du discriminant Δ du polynôme :

$$\Delta = q^3 + r^2, \tag{A.7}$$

avec,

$$q = \frac{1}{9}(3 - \psi) \quad ; \quad r = -\frac{\psi + \frac{9}{2}(3(\gamma + 2\lambda x) - 1)}{27\zeta}. \tag{A.8}$$

Discriminant positif. Dans ce cas l'expression de f est :

$$f(x, \lambda) = \gamma + \left(s_1 - \frac{q}{s_1} - \frac{1}{3\zeta} \right)^2 + \lambda x, \tag{A.9}$$

où,

$$s_1 = \left[r + \sqrt{\Delta} \right]^{1/3}. \tag{A.10}$$

Discriminant négatif. Dans ce cas l'expression de f est :

$$f(x, \lambda) = \gamma + \left(\frac{2}{3}\eta' \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-\psi - \frac{9}{2}(3(\gamma + 2\lambda x) - 1)}{\zeta \eta'^3} \right) \right) - \frac{1}{3\zeta} \right)^2 + \lambda x, \tag{A.11}$$

avec,

$$\eta' = \sqrt{-3 + \psi}. \tag{A.12}$$

Annexe B

Régime statique non oscillant et seuil statique d'oscillation :

Cas où $\lambda < 1$ - Calcul par méthode perturbative

Sommaire

B.1 Régime statique non-oscillant du modèle "Raman" . . . 149
B.1.1 Solution exacte . . . 149
B.1.2 Solution approchée : méthode des perturbations . . . 150
B.2 Seuil d'oscillation statique du modèle de "Raman" . . . 152

B.1 Régime statique non-oscillant du modèle "Raman"

B.1.1 Solution exacte

Le régime statique non-oscillant en pression p^* est, lorsque l'on prend en compte des pertes indépendantes de la fréquence (i.e. modèle de "Raman"), solution de l'équation (1.37), rappelée ici. Nous rajoutons explicitement la dépendance de la caractéristique non linéaire en γ :

$$p^* - F(p^*, \gamma) = -\lambda \left(p^* + F(p^*, \gamma)\right), \tag{B.1}$$

dont la solution est $p^* = 0$ s'il n'y pas de pertes, i.e si $\lambda = 1$. Lorsque $\lambda < 1$, la solution exacte de (B.1) est obtenue par la méthode de Cardan, son expression est donnée par (1.41), également rappelée ici :

$$p^*(\gamma) = 2\sqrt{\frac{-\Sigma}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-\Pi}{2}\sqrt{\frac{-27}{\Sigma^3}}\right)\right) - \frac{b}{3}, \tag{B.2}$$

avec,

$$a = \left(\frac{\Lambda}{\zeta}\right)^2 - 3\gamma + 2 \quad ; \quad b = (1-\gamma)(1-3\gamma) \quad ; \quad c = -\gamma(1-\gamma)^2 \quad ; \quad \Lambda = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}, \tag{B.3}$$

et,

$$\Sigma = -\frac{a^2}{3} + b \qquad ; \qquad \Pi = \frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} + c. \tag{B.4}$$

L'expression de la caractéristique non linéaire F est donnée par l'équation (1.20) pour un débit positif, en anche non battante :

$$F(p) = \zeta(1 + p - \gamma)\sqrt{\gamma - p}. \tag{B.5}$$

B.1.2 Solution approchée : méthode des perturbations

L'expression (B.2) n'est pas facilement utilisable (notamment dérivable). De plus, lorsque λ se rapproche de 1, en particulier pour les faibles ζ, l'argument de le fonction arccos $\left(-\Pi/2\sqrt{-27/\Sigma^3}\right)$ peut devenir très proche de -1 et peut rendre fausse l'estimation de la fonction par un ordinateur utilisant une précision usuelle.

Nous nous proposons de donner une expression analytique approchée de (B.2) obtenue par une méthode perturbative. Le paramètre de perturbation est $\beta = 1 - \lambda$, l'équation (B.1) se réécrit donc :

$$p^*(2 - \beta) = \beta F(p^*). \tag{B.6}$$

Ensuite la solution $p^*_\beta(\gamma)$ de (B.6) est développée en série de puissance du paramètre β :

$$p^*_\beta(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} \beta^i p^*_i(\gamma) + o\left(\beta^{n+1}\right), \tag{B.7}$$

où le terme d'ordre 0 est la solution du système sans pertes, i.e. $p^*_0(\gamma) = 0$. La fonction F est quant à elle exprimée sous la forme d'un développement limité autour de $p^*_0(\gamma) = 0$:

$$F(p, \gamma) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^i}{i!} \frac{\partial^i F(0, \gamma)}{\partial p^i} + o\left(p^{n+1}\right). \tag{B.8}$$

En reportant les expressions (B.7) et (B.8) dans l'équation (B.6) et en résolvant ordre par ordre, on obtient les expressions des fonctions $p^*_i(\gamma)$. En s'arrêtant à l'ordre 2, on trouve :

$$p^*(\gamma) \approx \underbrace{(1-\lambda)\frac{F(0,\gamma)}{2}}_{\text{Ordre 1}} + \underbrace{(1-\lambda)^2 \frac{F(0,\gamma)}{4}\left(\frac{\partial F(0,\gamma)}{\partial p} + 1\right)}_{\text{Ordre 2}} \tag{B.9}$$

$$= -\frac{1}{8}(\gamma - 1)\zeta(\lambda - 1)\left(3\gamma\zeta(\lambda - 1) + 2\sqrt{\gamma}(\lambda - 3) - \zeta\lambda + \zeta\right) \tag{B.10}$$

Une fois obtenue l'expression de $p^*_\beta(\gamma)$, celle de $x^*(\gamma)$ (régime statique non-oscillant de la variable onde aller p^{+*} ou x) s'obtient facilement en utilisant les équations (1.35) et (B.10) :

$$x^*(\gamma) = \frac{1}{2}\left[p^*(\gamma) + F\left(p^*(\gamma)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{64}(\gamma-1)\zeta\Bigg(-4\sqrt{\frac{1}{8}(\gamma-1)\zeta(\lambda-1)^2\left(3\gamma\zeta+2\sqrt{\gamma}-\zeta\right) - \frac{1}{2}(\gamma-1)\sqrt{\gamma}\zeta(\lambda-1)+\gamma}$$

$$\times\left(3\gamma\zeta^2(\lambda-1)^2+2\sqrt{\gamma}\zeta\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)-\zeta^2(\lambda-1)^2+8\right)$$

$$-4(\lambda-1)^2\left(3\gamma\zeta+2\sqrt{\gamma}-\zeta\right)+16\sqrt{\gamma}(\lambda-1)\Bigg) \quad \text{(B.11)}$$

La figure B.1(a) montre la comparaison entre l'expression exacte de $p^*(\gamma)$ (cf. équation (B.2)) et l'expression approchée (cf. équation (B.10)). La même comparaison pour le régime statique de la variable x (ou p^+) est donnée en figure B.1(b).

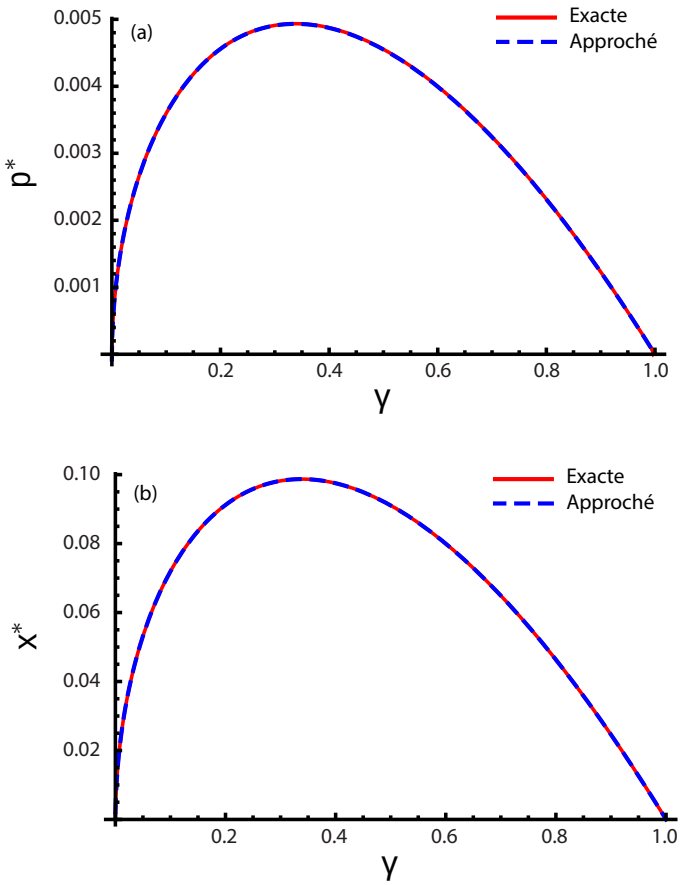


FIGURE B.1 – (a) Comparaison entre l'expression exacte de $p^*(\gamma)$ (cf. équation (B.2) ; ligne rouge) et l'expression approchée (cf. équation (B.10) ; ligne pointillée bleue). (b) Même comparaison pour $x^*(\gamma)$. $\zeta = 0.5$ et $\lambda = 0.95$.

B.2 Seuil d'oscillation statique du modèle de "Raman"

Toujours en utilisant une méthode perturbative nous fournissons une expression approchée su seuil statique défini par l'équation (1.47) :

$$\gamma_{st} - p^*(\gamma_{st}) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\zeta\Lambda} + \sqrt{3 + \frac{1}{(\zeta\Lambda)^2}}\right)^2 = \psi(\zeta,\lambda). \tag{B.12}$$

Le paramètre de perturbation est toujours $\beta = 1-\lambda$ et le seuil statique est développé en série de puissance du paramètre β :

$$\gamma_{st,\beta} = \sum_{i=0}^{n} \beta^i \gamma_{st,i} + o\left(\beta^{n+1}\right). \tag{B.13}$$

Le régime statique $p^*(\gamma)$ est quant à lui exprimé sous la forme d'un développement limité autour de la solution $\gamma_{st,0}$, le terme d'ordre 0 de (B.13) :

$$p^*(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(\gamma - \gamma_{st,0}\right)^i}{i!} \frac{d^i p^*(\gamma)}{d\gamma^i} + o\left(\left(\gamma - \gamma_{st,0}\right)^{n+1}\right), \tag{B.14}$$

où l'expression de $p^*(\gamma)$ est celle obtenue, également par méthode perturbative, au paragraphe B.1.2 (cf. équation (B.7)).

En substituant les expressions de γ_{st} et $p^*(\gamma)$ dans l'équation (B.12) par leurs développements en séries (B.13) et (B.14) respectivement, et en se limitant à l'ordre 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\gamma_{st,0} + \beta\gamma_{st,1} - p^*\left(\gamma_{st,0} + \beta\gamma_{st,1}\right) &= \psi(\zeta,\lambda) \\
\gamma_{st0} + \beta\gamma_{st1} - p^*(\gamma_{st0}) - \beta\gamma_{st1}\frac{dp^*(\gamma_{st0})}{d\gamma} &= \psi(\zeta,\lambda) \\
\gamma_{st,0} + \beta\gamma_{st,1} - \beta\frac{F(0,\gamma_{st,0})}{2} - \frac{\beta^2\gamma_{st,1}}{2}\frac{\partial F(0,\gamma_{st,0})}{\partial\gamma} &= \psi(\zeta,\lambda).
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Les expressions de $\gamma_{st,0}$ et $\gamma_{st,1}$ sont obtenues en résolvant (B.15) ordre par ordre, en ignorant les termes d'ordre 2 :

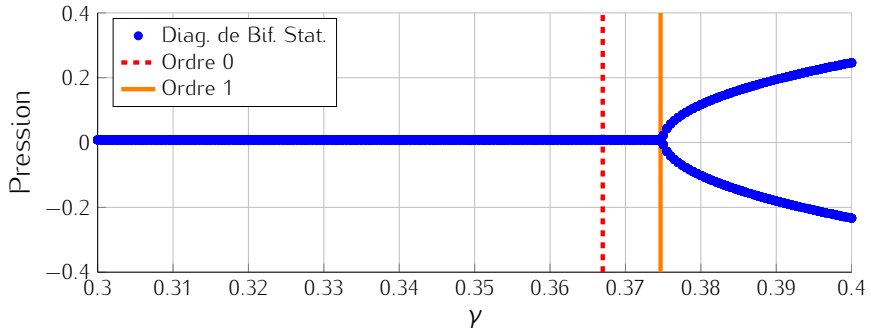
$$\gamma_{st,0} = \psi(\zeta,\lambda), \tag{B.16}$$

Comme attendu, nous retrouvons l'expression donnée par Kergomard *et al.* [60]. Le terme d'ordre 1 est :

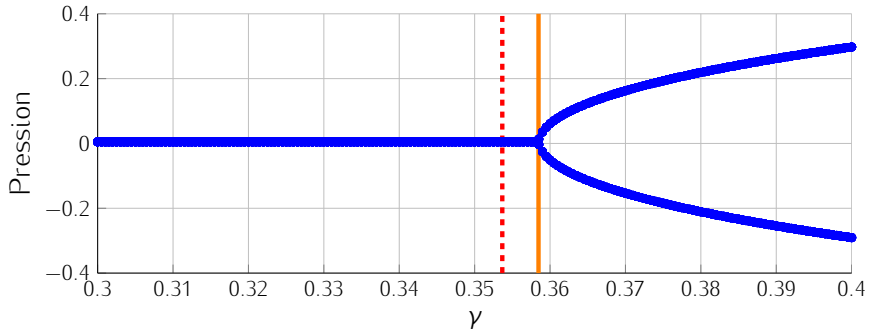
$$\gamma_{st,1} = \frac{F\left(0,\gamma_{st,0}\right)}{2} = \frac{F\left(0,\psi(\zeta,\lambda)\right)}{2}. \tag{B.17}$$

Finalement, à l'ordre 1 en β, l'expression approchée du seuil statique d'oscillation est :

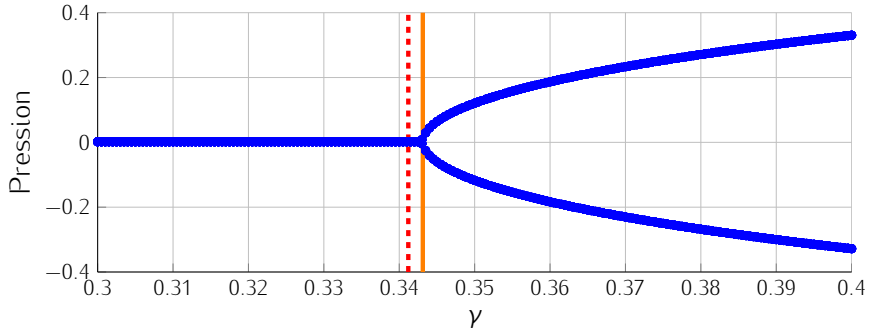
$$\gamma_{st} \approx \underbrace{\psi(\zeta,\lambda)}_{\text{Ordre 0}} + \underbrace{(1-\lambda)\frac{F\left(0,\psi(\zeta,\lambda)\right)}{2}}_{\text{Ordre 1}}. \tag{B.18}$$



(a) $\lambda = 0.92$



(b) $\lambda = 0.95$



(c) $\lambda = 0.98$

FIGURE B.2 – (a), (b) et (c) Représentation du digramme de bifurcation statique (points bleus) et du seuil statique d'oscillation donné par (B.13) (ordre 0 : pointillés rouges ; ordre 1 ligne orange) pour trois valeurs du paramètre de pertes λ : (a) $\lambda = 0.92$, (b) $\lambda = 0.95$, valeur typique pour une clarinette et (c) $\lambda = 0.98$. $\zeta = 0.5$.

L'expression (B.18) est représentée à la figure B.2, où les développements jusqu'à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont comparés pour différentes valeurs du paramètres de pertes λ. Notamment pour $\lambda = 0.95$, valeur typique du paramètre de pertes pour une clarinette, la comparaison avec le diagramme de bifurcation montre que le développement jusqu'à l'ordre 1 permet une meilleure prédiction du seuil statique d'oscillation (cf. figure B.2(b)). Le taux de variation par rapport au seuil statique sans pertes $\gamma_{st}(\lambda = 1) = 1/3$ défini en pour cent par :

$$\frac{\gamma_{st}(\lambda) - \gamma_{st}(1)}{\gamma_{st}(1)} \times 100, \tag{B.19}$$

est calculé pour l'ordre 0 et l'ordre 1 et tracé à la figure B.3 pour λ compris entre 0.9 et 1.

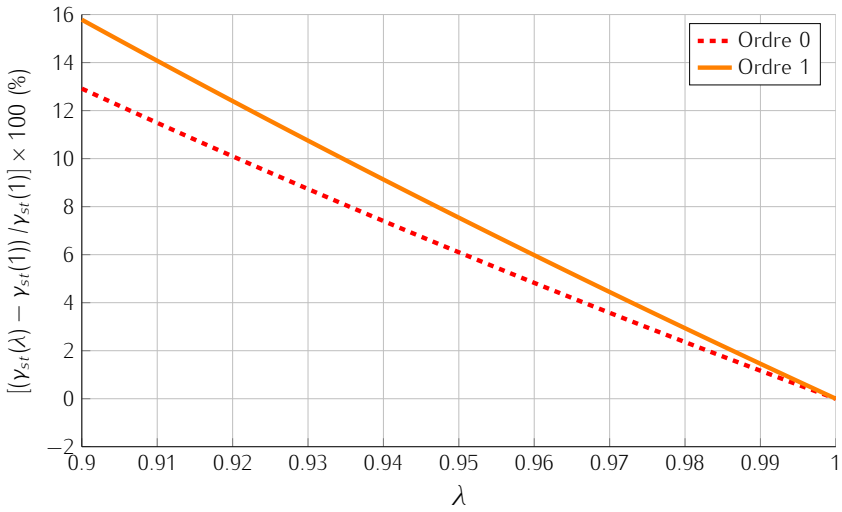


FIGURE B.3 – Taux de variation du seuil statique d'oscillation $\gamma_{st}(\lambda)$ donné par (B.13) par rapport au seuil statique du modèle sans pertes $\gamma_{st}(\lambda = 1)$: développement jusqu'à l'ordre 0 (pointillés rouges) et jusqu'à l'ordre 1 (ligne orange). $\zeta = 0.5$.

Annexe C

Passage à proximité d'un point superstable

Sommaire

C.1 Position du problème 155
C.2 Prise en compte du phénomène dans la prédiction du seuil dynamique 158

Cette annexe traite des cas où le passage à proximité d'un point superstable peut entrainer un allongement du retard à la bifurcation. Ce phénomène déjà évoqué à la section 1.4.4.1 (après l'équation (1.72), page 34) est spécifique des systèmes discrets. Il est également mentionné par Baesens [9, 10, 11] et Fruchard [43].

C.1 Position du problème

La figure 3.1(a) du chapitre 3 est reportée ici (cf. figure C.1). Une partie de la figure est repérée par un encadré orange où l'on observe des pics dans la courbe de γ_{dt}^{num}. Ces pics correspondent à un allongement du retard à la bifurcation pour certaines valeurs de la pente ϵ de la pression dans la bouche. Ce phénomène, déjà évoqué au paragraphe 3.2.4.1, est dû à la nature discrète du système. Dans l'exemple de la figure C.2, l'allongement du retard à la bifurcation n'est observé que lorsque le système évolue dans un régime déterministe (niveau de bruit très faible, cf. paragraphe 3.2.4.1) détaillé au chapitre 2. Le but de cette section est de donner une expression modifiée de l'intégrale

$$I(\gamma_n) = \int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln\left|\partial_x G\left(\phi(\gamma'-\epsilon),\gamma'\right)\right| d\gamma', \tag{C.1}$$

afin de proposer une prédiction théorique du seuil d'oscillation dynamique qui puisse rendre compte de ce phénomène. Nous verrons *a posteriori* que cette prédiction n'est cependant pas tout à fait satisfaisante.

Dans l'équation (2.33) qui décrit l'évolution dans le temps de la variable $w_n = p_n^+ - \phi(\gamma_n) = w_0 \prod_{i=1}^{n} \partial_x G\left(\phi(\gamma_i-\epsilon),\gamma_i\right)$ on remarque que si le terme $\partial_x G\left(\phi(\gamma_i-\epsilon),\gamma_i\right)$ s'annule à une itération donnée, pour une valeur de γ notée $\gamma_{s\phi}$, la variable w_n devient et reste égale à zéro jusqu'à la fin du processus. La valeur de $\gamma_{s\phi}$ est proche du point superstable γ_{ss} du système défini par :

$$\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma_{ss}),\gamma_{ss}\right) = 0, \tag{C.2}$$

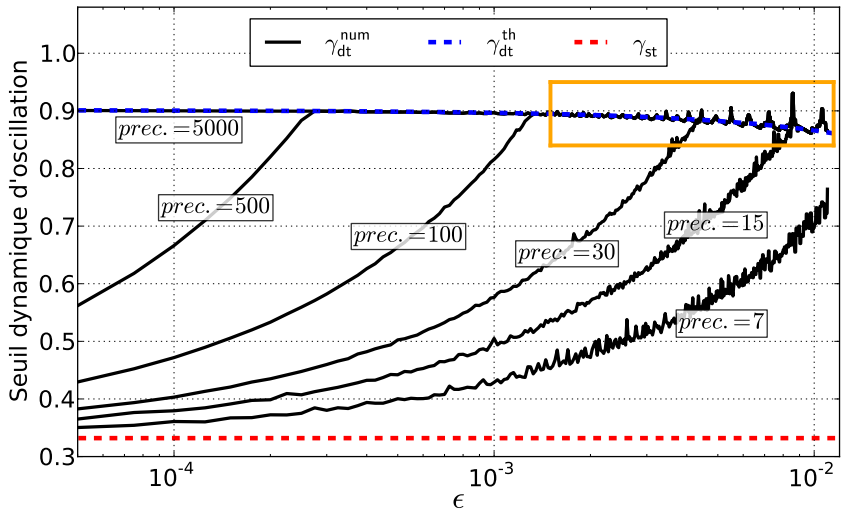
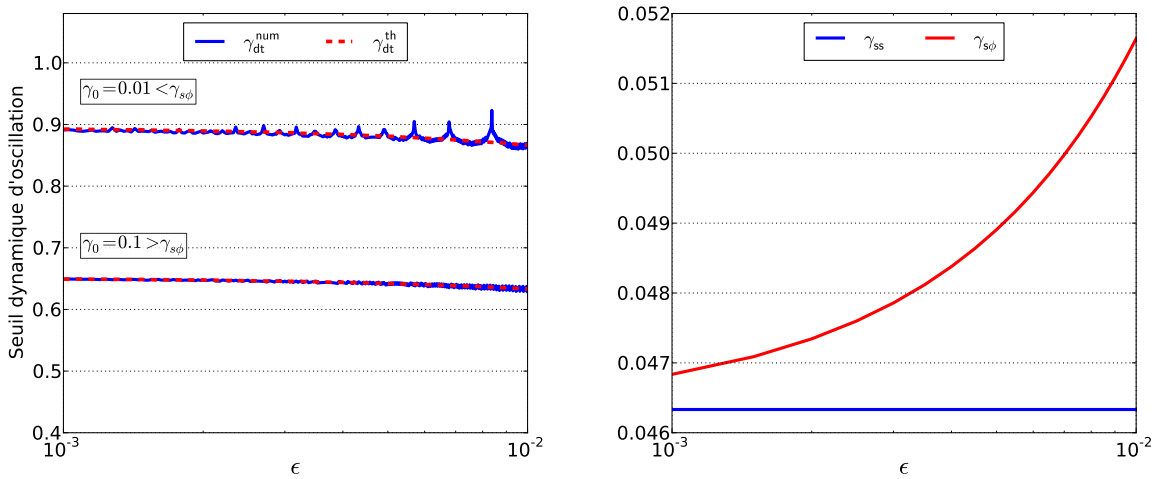


FIGURE C.1 – Figure 3.1(a) du chapitre 3. L'encadré orange met en relief la zone où se produisent des allongements localisés du retard à la bifurcation.



(a) (b)

FIGURE C.2 – (a) Seuil dynamique γ_{dt}^{num} calculé sur la simulation du système (2.23) comparé à la prédiction théorique γ_{dt}^{num} obtenu par la résolution de l'équation (2.36) pour $\gamma_0 = 0.01 < \gamma_{s\phi}$ (courbes du haut) et $\gamma_0 = 0.1 > \gamma_{s\phi}$ (courbe du bas). (b) Point $\gamma_{s\phi}$ et point superstable γ_{ss} en fonction de ϵ. $\zeta = 0.5$ et la précision utilisée est de 200 chiffres significatifs.

alors que $\gamma_{s\phi}$ est défini par :

$$\partial_x G\left(\phi(\gamma_{s\phi} - \epsilon), \gamma_{s\phi}\right) = 0. \tag{C.3}$$

La méthode pour obtenir l'expression de γ_{ss} est exposée dans l'encadré gris ci-dessous, titré : *"Expression du point superstable"*.

Dans la pratique, si $\partial_x G\left(\phi(\gamma_i - \epsilon), \gamma_i\right)$ s'annule, même si le système évolue dans un régime déterministe, du fait de la présence du bruit ou à cause de la précision de calcul, la valeur minimale de w_n est égale (en moyenne) au niveau de bruit σ (cf. paragraphe contenant l'équation (3.21),

page 74). En effet on peut montrer que si $\partial_x G\left(\phi(\gamma-\epsilon),\gamma\right)=0$, le terme A_n qui correspond à l'équation (2.33) (page 54) est bien égal à zéro. Par contre on montre que le terme B_n, dû au bruit, vaut σ^2. Pour s'en rendre compte, développons les termes A_n et B_n jusqu'à $n=n_{s\phi}$ correspondant à l'instant où le système passe sur $\gamma_{s\phi}$. Afin d'alléger la notation on note $\partial_x G\left(\phi(\gamma-\epsilon),\gamma\right)=g(\gamma)$:

$$A_{n_{s\phi}} = w_0^2 \exp\left(2\sum_{k=1}^{n_{s\phi}} \ln|g(\gamma_k)|\right) \tag{C.4}$$

$$= w_0^2 \exp\left(2\left(\ln|g(\gamma_1)|+\ln|g(\gamma_2)|+\ln|g(\gamma_3)|+\ldots+\underbrace{\ln\left|g\left(\gamma_{s\phi}\right)\right|}_{\to-\infty}\right)\right) \tag{C.5}$$

$$= 0, \tag{C.6}$$

et,

$$B_{n_{s\phi}} = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n_{s\phi}} \exp\left(2\sum_{m=k+1}^{n_{s\phi}} \ln|g(\gamma_m)|\right) \tag{C.7}$$

$$= \sigma^2\left[\exp\left(2\left(\ln|g(\gamma_2)|+\ln|g(\gamma_3)|+\ldots+\underbrace{\ln|g(\gamma_{s\phi})|}_{\to-\infty}\right)\right)\right. \tag{C.8}$$

$$+\exp\left(2\left(\ln|g(\gamma_3)|+\ldots+\underbrace{\ln|g(\gamma_{s\phi})|}_{\to-\infty}\right)\right) \tag{C.9}$$

$$+\ldots \tag{C.10}$$

$$\left.+\exp\left(2\underbrace{\sum_{m=n_{s\phi}+1}^{n_{s\phi}} \ln|g(\gamma_m)|}_{m>n_{s\phi}\text{ donc }=0}\right)\right] \tag{C.11}$$

$$= \sigma^2, \tag{C.12}$$

où l'on a utilisé la convention $\sum_{k=n_1}^{n_2}=0$ si $n_1>n_2$.

Ainsi, pour des niveaux de bruit faible, si la valeur initiale de γ_0 est inférieure à $\gamma_{s\phi}$ et que l'une des itérations de γ_n passe sur $\gamma_{s\phi}$, l'écart entre la courbe invariante et l'orbite peut devenir très faible ce qui a pour conséquence d'allonger le retard à la bifurcation. La figure C.2(a) montre les seuils dynamiques γ_{dt}^{num} et γ_{dt}^{th} calculés dans deux situations différentes. Sur les courbes du haut, $\gamma_0<\gamma_{s\phi}$, et des allongements du retard à la bifurcation sont observés sur le seuil numérique. Par contre, nous remarquons qu'en l'état la prédiction théorique, calculé par (2.36) (cf. page 55), n'est pas en mesure de reproduire le phénomène. Lorsque $\gamma_0>\gamma_{s\phi}$ (cf. courbes du bas) l'allongement du retard à la bifurcation n'est plus observé. La figure C.2(b) montre le profil de $\gamma_{s\phi}$ en fonction de ϵ correspondant aux cas tracés à la figure C.2(a). Le point $\gamma_{s\phi}$ est obtenu par la résolution numérique de (C.3).

Toujours à la figure C.2(b), $\gamma_{s\phi}$ est également comparé à la valeur du point superstable γ_{ss} qui est indépendante de la pente de la pression dans la bouche. Dans la situation étudiée, le point $\gamma_{s\phi}$ se trouve au dessus de γ_{ss}. L'écart entre les deux valeurs reste cependant toujours inférieur à ϵ.

Expression du point superstable

En remarquant que (voir équation (1.45), page 24, avec $\lambda = 1$) :

$$\partial_x G\left(p^{+*}(\gamma), \gamma\right) = \frac{\partial_x F\left(p^*(\gamma), \gamma\right) + 1}{\partial_x F\left(p^*(\gamma), \gamma\right) - 1}, \tag{C.13}$$

où F est la caractéristique non linéaire de l'instrument (voir équations (1.20b) et (1.20c)) et :

$$\partial_x F(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \tag{C.14}$$

nous pouvons déduire que l'équation (C.2) est équivalente à :

$$\partial_x F\left(p^*(\gamma_{ss}), \gamma_{ss}\right) = -1. \tag{C.15}$$

Dans un cas sans pertes, l'équation (C.15) est facile à résoudre car p^* (le régime statique non-oscillant de la variable p) est nul (voir équation (1.37)). L'expression de γ_{ss} est finalement :

$$\gamma_{ss} = \frac{3\,\zeta^2 + 2 - 2\sqrt{3\,\zeta^2 + 1}}{9\,\zeta^2}. \tag{C.16}$$

C.2 Prise en compte du phénomène dans la prédiction du seuil dynamique

La différence entre le seuil γ_{dt}^{num}, qui peut posséder des singularités et donc provoquer un allongement du retard à la bifurcation, et le seuil théorique γ_{dt}^{th}, vient du passage de l'équation (2.34) (cf. page 54), une somme discrète, à l'intégrale (2.35). Sur le schéma C.3 nous pouvons voir que si l'une des itérations de γ_n est égale $\gamma_{s\phi}$ et que ϵ est trop grand l'équation

$$\epsilon \sum_{k=1}^{n} \ln\left|g(\gamma_k)\right| \approx \int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln\left|g(\gamma')\right| d\gamma', \tag{C.17}$$

n'est plus respectée. Dans ce cas, une meilleure approximation de la somme est :

$$\epsilon \sum_{k=1}^{n} \ln\left|g(\gamma_k)\right| \approx \ln\left|g(\gamma_{s\phi})\right| \epsilon + \int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln\left|g(\gamma')\right| d\gamma', \tag{C.18}$$

qui consiste simplement à ajouter à l'intégrale $\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln\left|g(\gamma')\right| d\gamma'$ la grandeur $\epsilon \ln\left|g(\gamma_{s\phi})\right|$ correspondant à l'aire rectangle bleuté sur la figure C.3.

Pour prendre en compte la correction apportée par l'équation (C.18) dans la prédiction du seuil dynamique γ_{dt}^{th}, nous proposons une version modifiée de l'intégrale $I(\gamma)$ (cf. équation (C.1)), notée $I_{s\phi}(\gamma)$:

$$I_{s\phi}(\gamma_n) = \int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln\left|g(\gamma')\right| d\gamma' + \epsilon\left[\ln\left|g\left(\alpha_{s\phi}\right)\right| - \ln\left|g\left(\alpha_{sU+1/2}\right)\right|\right], \tag{C.19}$$

avec,

$$\alpha_{s\phi} = \left[\text{arrondi}\left(\frac{\gamma_{s\phi} - \gamma_0}{\epsilon}\right)\right]\epsilon + \gamma_0 \tag{C.20}$$

et,

$$\alpha_{sU+1/2} = \gamma_{s\phi} + \frac{\epsilon}{2}. \tag{C.21}$$

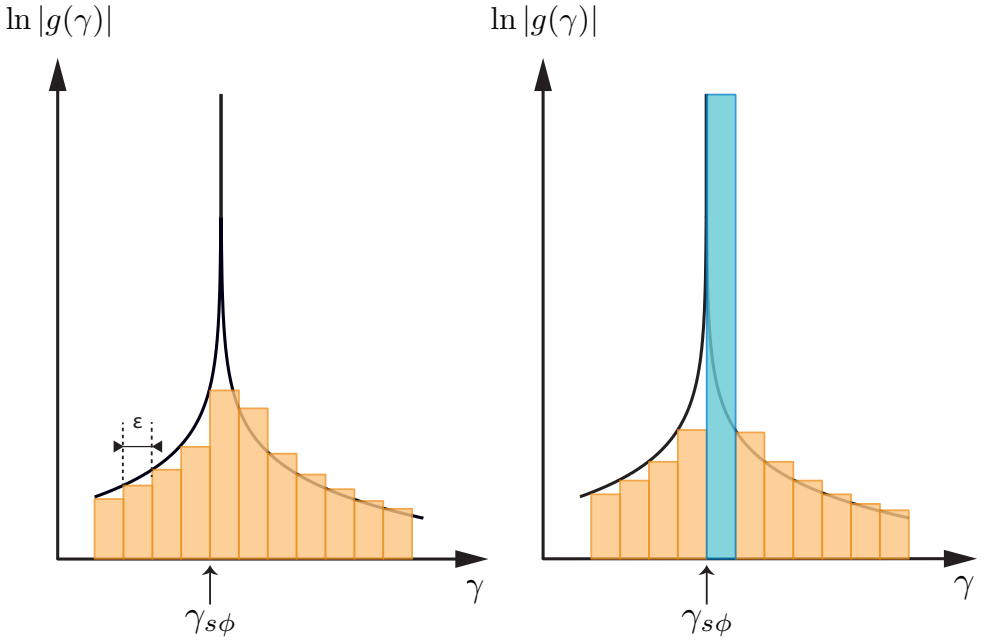
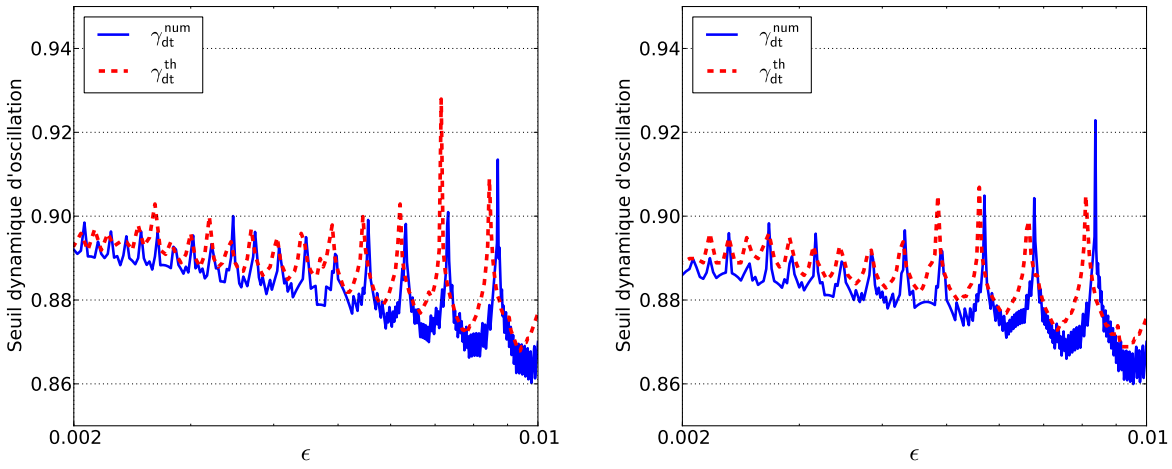


FIGURE C.3 – Comparaison entre la somme $\epsilon \sum_{k=1}^{n} \ln|g(\gamma_k)|$ et l'intégrale $\int_{\gamma_0+\epsilon}^{\gamma_n+\epsilon} \ln|g(\gamma')|\, d\gamma'$. À gauche : aucune itération de γ_n n'est égale à $\gamma_{s\phi}$. À droite : l'une des itération de γ_n est égale à $\gamma_{s\phi}$.



(a) $\gamma_0 = 10^{-6}$ (b) $\gamma_0 = 10^{-2}$

FIGURE C.4 – Seuil dynamique numérique γ_{dt}^{num} (ligne bleue) et théorique γ_{dt}^{th} obtenu par (C.22) (pointillés rouges). (a) $\gamma_0 = 10^{-6}$ et (b) $\gamma_0 = 10^{-2}$. $\zeta = 0.5$ et la précision utilisée est de 200 chiffres significatifs.

La fonction arrondi(x) renvoie l'entier le plus proche de x.

Ainsi, pour une condition initiale γ_0 et une pente ϵ données, si une itération de γ_n est égale à $\gamma_{s\phi}$, alors le terme $\alpha_{s\phi} = \gamma_{s\phi}$. Dans ce cas $\ln\left|g\left(\alpha_{s\phi}\right)\right|$ diverge, permettant la prise en compte de l'allongement du retard à la bifurcation. Le terme $\ln\left|g\left(\alpha_{sU+1/2}\right)\right|$ est ajouté pour que lorsque le point $\gamma_{s\phi}$ se trouve entre deux itérations, i.e. si arrondi$\left(\frac{\gamma_{s\phi}-\gamma_0}{\epsilon}\right) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (l'ensemble des demi-entiers), l'on puisse retrouver la valeur de $I(\gamma)$ et ne pas surestimer le retard.

Finalement, il est possible d'obtenir une estimation théorique du retard à la bifurcation γ_{dt}^{th},

solution de :

$$l_{s\phi}\left(\gamma_{dt}^{th}\right) = 0. \tag{C.22}$$

Le seuil dynamique théorique défini par (C.22) est représenté et comparé au seuil numérique γ_{dt}^{num} à la figure C.4. Deux valeurs de γ_0 sont utilisées : $\gamma_0 = 10^{-6}$ (figure C.4(a)) et $\gamma_0 = 10^{-2}$ (figure C.4(b)). Même si le seuil théorique prend dorénavant en compte l'allongement du retard à la bifurcation nous pouvons remarquer que la position des pics présents sur les courbes de γ_{dt}^{th} et γ_{dt}^{num} n'est pas la même. Ceci est dû à la mauvaise estimation de $\gamma_{s\phi}$. Nous émettons 3 hypothèses pour expliquer cette mauvaise estimation :

Hypothèse 1. L'estimation numérique de $\gamma_{s\phi}$ n'est pas assez précise. Nous verrons à l'hypothèse 3 que cette première hypothèse peut être écartée.

Hypothèse 2. La courbe invariante est mal définie en $\gamma_{s\phi}$. En effet, définie à l'ordre 1 en ϵ par l'équation (2.29) (cf . page 54), la courbe invariante diverge en $\gamma = 0$ (ceci est aussi vrai pour des ordres supérieurs) or par définition (voir équation (2.43), page 61) elle doit être proche de la courbe des points fixes $p^{+*}(\gamma)$ qui elle est nulle en zéro. Il est donc possible qu'arriver en $\gamma_{s\phi}$, nous ne soyons pas assez éloigné de 0 pour que l'approximation linéaire faite à l'équation (2.43) soit respectée et donc que la courbe invariante soit mal définie. Mais le tableau C.1 qui montre l'écart entre la courbe invariante ϕ et la courbe des points fixes x^* en $\gamma = \gamma_{s\phi}$ permet d'écarter également cette hypothèse.

Tableau C.1 – Écart entre la courbe invariante ϕ et la courbe des points fixes x^* en $\gamma = \gamma_{s\phi}$ pour $\epsilon = 10^{-3}$, $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

ϵ	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
$\left\lvert \phi\left(\gamma_{s\phi}, \epsilon\right) - p^{+*}\left(\gamma_{s\phi}\right)\right\rvert$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$

Hypothèse 3. Le nombre d'itérations nécessaires pour que l'orbite de p_n^+ rentre dans le voisinage de la courbe invariante n'est pas atteint en $\gamma_{s\phi}$. Toujours parce que la courbe invariante diverge en $\gamma = 0$, il faut un certains nombre d'itérations pour que p_n^+ et $\phi(\gamma_n)$ soient assez proches pour que l'approximation linéaire soit respectée (il ne faut pas oublier que tout le travail théorique présenté dans ce mémoire repose sur la linéarisation du système autour de la courbe invariante, voir équation (4.22), page 98, par exemple). Cette hypothèse semble se justifier lorsque l'on trace le seuil dynamique estimé à l'aide de la simulation du système linéarisé autour de la courbe invariante. Le système linéarisé est défini à la section 2.2.3.2, son expression (2.32) est rappelée ici :

$$w_n = w_{n-1}\partial_x G\left(\phi(\gamma_n - \epsilon), \gamma_n\right). \tag{C.23}$$

On observe en effet dans ce cas que les allongements localisés du retard à la bifurcation ont lieu pour les mêmes valeurs de ϵ que le résultat théorique γ_{dt}^{th} (voir la courbe verte et la courbe en pointillés rouges sur la figure C.5). Au passage le bon accord entre γ_{dt}^{th} et γ_{dt}^{num} calculé sur w_n défini par (C.23) permet d'écarter la l'hypothèse 1.

Malheureusement, d'autres simulations numériques tendent à montrer que même lorsque l'approximation linéaire est respectée, le décalage entre les pics de γ_{dt}^{th} et γ_{dt}^{num} est toujours

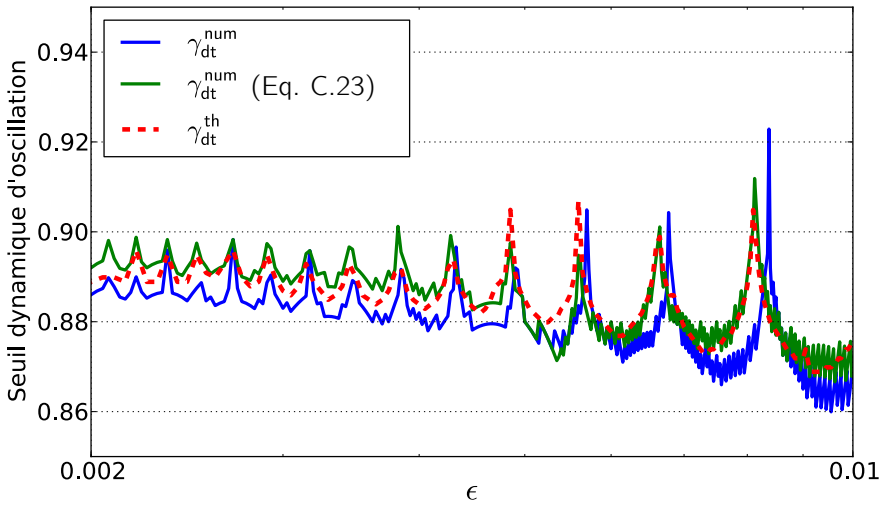


FIGURE C.5 – Seuils dynamiques numériques γ_{dt}^{num} (ligne bleue) calculé sur la simulation du système non linéaire (2.23) et (ligne verte) sur la simulation du système linéarisé autour de la courbe invariante (2.32) et seuil théorique γ_{dt}^{th} obtenu par (C.22) (pointillés rouges). $\zeta = 0.5$ et $\gamma_0 = 10^{-2}$.

observé. Il reste donc encore du travail pour comprendre les écarts observés sur la figure C.4.

Un dernière remarque : toute la démarche présentée dans cette section pour fournir une expression théorique du seuil dynamique pouvant prédire les allongements de retard à la bifurcation peut être évitée en calculant le seuil théorique γ_{dt}^{th} directement sur la somme, i.e. en résolvant $\sum_{k=1}^{n} \ln|g(\gamma_k)| = 0$. En effet, le seuil γ_{dt}^{th} calculé ainsi prend en compte directement un possible allongement du retard[a]. Cependant, la démarche présentée ici permet la compréhension des phénomènes mis en jeu même si des zones d'ombres subsistent.

a. Procéder ainsi n'améliore pas les résultats, les écarts entre les "pics", observés à la figure C.4, sont toujours présents.

Bibliographie

[1] Méthode de cardan, Wikipédia (dernière visite le 7 août 2013). URL http://fr.wikipedia.org/wiki/Methode_de_Cardan.

[2] M. Abramowitz et I. A. Stegun : *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover books on mathematics. Dover Publications, Incorporated, New York, first édition, 1964.

[3] A. Almeida : *The Physics of Double-reed Wind Instruments and its Application to Sound Synthesis*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 2006.

[4] A. Almeida, B. Bergeot, C. Vergez et B. Gazengel : Estimation of the attack transient in a clarinet with time-varying blowing pressure. *Acta. Acust. united Ac.*, 2014.

[5] A. Almeida, C. Vergez et R. Caussé : Quasi-static nonlinear characteristics of double-reed instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121 :536–546, 2007.

[6] E. Arimondo, D. Dangoisse, C. Gabbanini, E. Menchi et F. Papoff : Dynamic behavior of bistability in a laser with a saturable absorber. *J. Opt. Soc. Am. B*, 4(6) :892–899, Jun 1987. URL http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-4-6-892.

[7] M. Atig, J. P. Dalmont et J. Gilbert : Saturation mechanism in clarinet-like instruments, the effect of the localised nonlinear losses. *Appl. Acoust.*, 65(12) :1133–1154, 2004.

[8] J. Backus : Small-vibration theory of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35(3) :305–313, 1963. URL http://link.aip.org/link/?JAS/35/305/1.

[9] C. Baesens : Noise effect on dynamic bifurcations : The case of a period-doubling cascade. *In Dynamic Bifurcations*, volume 1493 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 107–130. Springer Berlin Heidelberg, 1991.

[10] C. Baesens : Slow sweep through a period-doubling cascade : Delayed bifurcations and renormalisation. *Physica D*, 53 :319–375, 1991.

[11] C. Baesens : Gevrey series and dynamic bifurcations for analytic slow-fast mappings. *Nonlinearity*, 8 :179–201, 1995.

[12] Carl M. Bender et Steven A. Orszag : *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers (International Series in Pure and Applied Mathematics)*, chapitre 2 "Difference equations". Mcgraw-Hill College, 1978. URL http://www.worldcat.org/isbn/007004452X.

[13] C.M. Bender et S.A. Orszag : *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill Book Company, 1987.

[14] E. Benoît : Dynamic bifurcations. *In Lect. Notes Math.*, volume 1493. Springer, 1990.

[15] E. Benoît : Linear dynamic bifurcation with noise. *In Lect. Notes Math. (Dynamic Bifurcations)*, volume 1493, pages 131–150. Springer, 1990.

[16] E. Benoît, J.L. Callot, F. Diener et M. Diener : Chasse au canard ("duck hunting"). *Collectanea Mathematica*, 32(1-2) :37–119, 1981.

[17] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal : *L'ordre dans le chaos : vers un approche déterministe de la turbulence*. Hermann, 1984.

[18] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal : *Order within chaos : towards a deterministic approach to turbulence*. Wiley/Hermann, 1986.

[19] B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel : Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure. *Nonlinear Dynam.*, 73(1-2) :521–534, 2013. URL http://dx.doi.org/10.1007/s11071-013-0806-y.

[20] B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez et B. Gazengel : Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with a linearly increasing blowing pressure : Influence of noise. *Nonlinear Dynam.*, 74(3) :591–605, 2013. URL http://dx.doi.org/10.1007/s11071-013-0991-8.

[21] B. Bergeot, A. Almeida, C. Vergez, B. Gazengel et D. Ferrand : Response of an artificially blown clarinet to different blowing pressure profiles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 135(1) :479–490, 2014.

[22] B. Bergeot, C. Vergez, A. Almeida et B. Gazengel : Measurement of attack transients in a clarinet driven by a ramp-like varying pressure. *In 11ème Congrès Français d'Acoustique and 2012 Annual IOA Meeting*, Nantes, France, April 23rd-27th 2012.

[23] N. Berglund et B. Gentz : The effect of additive noise on dynamical hysteresis. *Nonlinearity*, 15(3) :605–632, 2002. URL http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/15/3/305.

[24] N. Berglund et B. Gentz : Pathwise description of dynamic pitchfork bifurcations with additive noise. *Probab. Theory Related Fields*, 122(3) :341–388, 2002. URL http://dx.doi.org/10.1007/s004400100174.

[25] R. Blandin : Interaction musicien-instrument dans la flûte à bec : Étude de l'influence de la dynamique du signal de pression d'alimentation. Mémoire de D.E.A., Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille, France,2013. Mémoire de stage de fin d'étude, Encadré par S. Terrien et C. Vergez.

[26] A. Chaigne et J. Kergomard : Instruments à anche. *In Acoustique des instruments de musique*, chapitre 9, pages 400–468. Belin, 2008.

[27] J. P. Dalmont : Discussion informelle.

[28] J. P. Dalmont et C. Frappe : Oscillation and extinction thresholds of the clarinet : Comparison of analytical results and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(2) :1173–1179, 2007.

[29] J. P. Dalmont, J. Gilbert, J. Kergomard et S. Ollivier : An analytical prediction of the oscillation and extinction thresholds of a clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(5) :3294–3305, 2005.

[30] J. P. Dalmont, J. Gilbert et S. Ollivier : Nonlinear characteristics of single-reed instruments : Quasistatic volume flow and reed opening measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114(4) :2253–2262, 2003.

[31] V. Debut : *Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : Analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseilles II, 2004.

[32] V. Debut et J. Kergomard : Analysis of the self-sustained oscillations of a clarinet as a van der pol oscillator. *In 18th International Congress on Acoustics-ICA*, volume 2, pages 1425–1428, 2004.

[33] T. Erneux et P. Mandel : Imperfect bifurcation with a slowly-varying control parameter. *SIAM J. Appl. Math.*, 46(1) :pp. 1–15, 1986. URL http://www.jstor.org/stable/2101482.

[34] M. J. Feigenbaum : Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phy.*, 19(1) :25–52, 1978.

[35] M. J. Feigenbaum : The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phy.*, 21(6) :669–706, 1979.

[36] D. Ferrand et C. Vergez : Blowing machine for wind musical instrument : toward a real-time control of blowing pressure. *In 16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 1562–1567, Ajaccion, France, 2008.

[37] D. Ferrand, C. Vergez, B. Fabre et F. Blanc : High-precision regulation of a pressure controlled artificial mouth : the case of recorder-like musical instruments. *Acta. Acust. Acust.*, 96 :701–712, 2010.

[38] D. Ferrand, C. Vergez et F. Silva : Seuils d'oscillation de la clarinette : validité de la représentation excitateur-résonateur. *In 10ème Congrès Français d'Acoustique*, Lyon, France, April 12nd-16th 2010.

[39] N. H. Fletcher et T. D. Rossing : *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[40] A. Fruchard : Canards et râteaux. *Ann. Inst. Fourier*, 42(4) :825–855, 1992.

[41] A. Fruchard : Sur l'équation aux différences affine du premier ordre unidimensionnelle. *Ann. Inst. Fourier*, 46(1) :139–181, 1996.

[42] A. Fruchard et R. Schäfke : Bifurcation delay and difference equations. *Nonlinearity*, 16 :2199–2220, 2003.

[43] A. Fruchard et R. Schäfke : Sur le retard à la bifurcation. *In International conference in honor of claude Lobry*, 2007. URL http://intranet.inria.fr/international/arima/009/pdf/arima00925.pdf.

[44] B. Gazengel : *Caratérisation objective de la qualité de justesse, de timbre et d'émission des instruments à vent à anche simple*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 1994.

[45] B. Gazengel et J. P. Dalmont : Mechanical response characterization of saxophone reeds. *In 6th Forum Acusticum*, Aalborg, Denmark, 26 June-1 July 2011.

[46] V. Gibiat et M. Castellengo : Period doubling occurences in wind instruments musical performance. *Acta. Acust. united Ac.*, 86(4) :746–754, 2000. URL http://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaua/2000/00000086/00000004/art00016.

[47] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik : *Table of Integrals, Series, and Products (7th Ed.)*. Academic Press, New York, 1965.

[48] P. Guillemain, J. Kergomard et T. Voinier : Real-time synthesis of clarinet-like instruments using digital impedance models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(1) :483–494, 2005. URL http://link.aip.org/link/?JAS/118/483/1.

[49] P. Guillemain, C. Vergez, D. Ferrand et A. Farcy : An instrumented saxophone mouthpiece and its use to understand how an experienced musician plays. *Acta. Acust. united Ac.*, 96 :622–634, 2010.

[50] R. Haberman : Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 37(1) :pp. 69–106, 1979. URL http://www.jstor.org/stable/2100819.

[51] A. Hirschberg : Aero-acoustics of wind instruments. *In Mechanics of musical instruments by A. Hirschberg| J. Kergomard| G. Weinreich*, volume 335 of *CISM Courses and lectures*, chapitre 7, pages 291–361. Springer-Verlag, 1995.

[52] A. Hirschberg, R. W. A. Van de Laar, J. P. Maurires, A. P. J Wijnands, H. J. Dane, S. G. Kruijswijk et A. J. M. Houtsma : A quasi-stationary model of air flow in the reed channel of single-reed woodwind instruments. *Acustica*, 70 :146–154, 1990.

[53] T. Idogawa, T. Kobata, K. Komuro et I. Masakazu : Nonlinear vibrations in the air column of a clarinet artificially blown. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(1) :540–551, 1993. URL http://link.aip.org/link/?JAS/93/540/1.

[54] K. Jensen : Enveloppe model of isolated musical sounds. *Proceedings of the 2nd COST G-6 Workshop on Digital Audio Effects (DAFx99), NTNU, Trondheim*, 1999.

[55] R. Kapral et P. Mandel : Bifurcation structure of the nonautonomous quadratic map. *Phys. Rev. A*, 32(2) :1076–1081, 1985.

[56] Sami Karkar, Christophe Vergez et Bruno Cochelin : Oscillation threshold of a clarinet model : A numerical continuation approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1) :698–707, 2012.

[57] D. H. Keefe : Acoustical wave propagation in cylindrical ducts : transmission line parameter approximations for isothermal and non-isothermal boundary conditions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1) :58–62, 1984.

[58] J. Kergomard : Elementary considerations on reed-instrument oscillations. *In Mechanics of musical instruments by A. Hirschberg| J. Kergomard| G. Weinreich*, volume 335 of *CISM Courses and lectures*, chapitre 6, pages 229–290. Springer-Verlag, 1995.

[59] J. Kergomard, J. P. Dalmont, J. Gilbert et P. Guillemain : Period doubling on cylindrical reed instruments. *In Proceeding of the Joint congress CFA/DAGA 04*, pages 113–114. Société Française d'Acoustique - Deutsche Gesellschaft für Akustik, 22nd-24th March 2004, Strasbourg, France.

[60] J. Kergomard, S. Ollivier et J. Gilbert : Calculation of the spectrum of self-sustained oscillators using a variable troncation method. *Acta. Acust. united Ac.*, 86 :665–703, 2000.

[61] Y. A. Kuznetsov : *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112. chap. 4, p. 136, Springer, 3rd édition, 2004.

[62] A. Liénard : Etude des oscillations entretenues. *Revue générale d'électricité*, 23(22) :901–954, 1928.

[63] C. Lobry : La théorie des bifurcations dynamiques, 2010. URL http://www.biologie.ens.fr/eceem/Berder_2010/documents/Lobry.pdf.

[64] C. Maganza, R. Caussé et F. Laloë : Bifurcations, period doublings and chaos in clarinet-like systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 1(6) :295, 1986.

[65] P. Mandel et T. Erneux : Laser lorenz equations with a time-dependent parameter. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1818–1820, Nov 1984. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.1818.

[66] P. Mandel et T. Erneux : The slow passage through a steady bifurcation : Delay and memory effects. *J. Stat. Phy.*, 48(5-6) :1059–1070, 1987. URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01009533.

[67] R. Manella, P.V.E. McClintock et Frank Moss : Postponed bifurcations of a quadratic map with a swept parameter ring laser with additive white noise. *Phys. Lett. A*, 120(1) :11–14, 1987.

[68] R. M. May. : Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560) : 459–467, juin 1976. URL http://dx.doi.org/10.1038/261459a0.

[69] M. E. Mcintyre, R. T. Schumacher et J. Woodhouse : On the oscillations of musical instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(5) :1325–1345, novembre 1983.

[70] B. Morris et F. Moss : Postponed bifurcations of a quadratic map with a swept parameter. *Phys. Lett. A*, 118(3) :117–120, 1986. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960186904925.

[71] C. J. Nederveen : *Acoustical aspects of woodwind instruments*. Northern Illinois University Press, Illinois, New edition, 1998.

[72] A. I. Neishtadt : Asymptotic study of stability loss of equilibrium under slow transition of two eigenvalues through critical point. *Uspeki Mat. Nauk,*, 40(5) :300–301, 1985.

[73] A. I. Neishtadt : Persistence of stability loss for dynamical bifurcations. *Differntial'nye Uraveniya*, 23 :2060–2067, 1988.

[74] S. Ollivier, J. P. Dalmont et J. Kergomard : Idealized models of reed woodwinds. part 2 : On the stability of two-step oscillations. *Acta. Acust. united Ac.*, 91 :166–179, 2005.

[75] P. Pierański et J. Malecki : Noise-sensitive hysteresis loops around period-doubling bifurcation points. *Nuovo Cimento D*, 9(7) :757–780, 1987.

[76] J. D. Polack, X. Meynial, J. Kergomard, C. Cosnard et M. Bruneau : Reflection function of a plane sound wave in a cylindrical tube. *Rev. Phys. Appl.*, 22 :331–337, 1987. URL http://dx.doi.org/10.1051/rphysap:01987002205033100.

[77] C. V. Raman : On the mechanical theory of vibrations of bowed string [etc.]. *Assoc. Cult. Sci. Bull.*, 15 :1–158, 1918.

[78] A. Robinson : *Non-standard analysis (1966)*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics (2nd ed.), 1996.

[79] S. M. Ross : *Introduction to Probability Models, 9ème édition*, chapitre 2 "Random variables". Academic Press, 2006. URL http://www.worldcat.org/isbn/0125980558.

[80] L. A. Rubenfeld : A model bifurcation problem exhibiting the effects of slow passage through critical. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37(2) :pp. 302–306, 1979. URL http://www.jstor.org/stable/2100836.

[81] R. T. Schumacher : Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet. *Acustica*, 48 :71–85, 1981.

[82] R. Seydel : *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, volume 5 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, 3ième édition, 2010.

[83] F. Silva : *Émergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseilles I, 2009. URL http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/47/20/71/PDF/Manuscript.pdf.

[84] F. Silva, P. Guillemain, J. Kergomard, C. Vergez et V. Debut : Some simulations of the effect of varying excitation parameters on the transients of reed instruments. URL http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779636. 2013.

[85] F. Silva, C. Vergez, F. Guillemain, J. Kergomard et V. Debut : MoReeSC : a framework for the simulation and analysis of sound production in reed and brass instruments. URL http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00770238. 2012.

[86] P.A. Taillard, J. Kergomard et F. Laloë : Iterated maps for clarinet-like systems. *Nonlinear Dynam.*, 62 :253–271, 2010.

[87] J. R. Tredicce, G. L. Lippi, P. Mandel, B. Charasse, A. Chevalier et B. Picqué : Critical slowing down at a bifurcation. *Am. J. Phys.*, 72(6) :799–809, 2004.

[88] J. van Zon : Stromingsgeinduceerde klepinstabiliteiten. Mémoire de D.E.A., Vakgroep Transport Fysica, Eindhoven University of Technology, 1989.

[89] H. von Helmholtz : *On the sensation of tones (titre original : "Lehre von den tonempfindungen")*. Traduction anglaise : Dover (1954), 1877.

[90] T. A. Wilson et G. S. Beavers : Operating modes of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(2) :653–658, 1974.

Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable

Thèse de Doctorat en Acoustique, Université du Maine, Le Mans, France

Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit est une contribution à l'étude des transitoires d'attaque dans les instruments auto-oscillants de type clarinette. L'objectif principal est d'analyser le comportement de l'instrument en réponse à une variation lente et linéaire de la pression dans la bouche du musicien.
Dans des simulations numériques ou des expériences *in vitro*, lorsque la pression dans la bouche du musicien varie lentement et linéairement dans le temps, on observe en général l'apparition du son lorsque la pression dans la bouche atteint une valeur, appelée *seuil d'oscillation dynamique*, supérieure au seuil d'oscillation statique théorique. L'apport principal de ce travail est d'interpréter ce phénomène par la présence d'un *retard à la bifurcation*.
L'approche analytique est privilégiée. La contribution majeure de ce doctorat est de comprendre les fondements de la théorie de la bifurcation dynamique et de s'inspirer de la méthodologie pour étudier le retard à la bifurcation dans un modèle de clarinette simple et bien connu de (le modèle dit "de Raman"). Les propriétés du seuil dynamique d'oscillation sont ainsi reliées aux caractéristiques de la variation temporelle de la pression dans la bouche que sont sa valeur initiale et sa pente. L'une des caractéristiques notoires du retard à la bifurcation se révèle être sa grande dépendance au bruit, même si ce dernier provient des erreurs d'arrondi de l'ordinateur. Les propriétés du seuil dynamique changent selon que le bruit peut être ignoré ou non.
Nous montrons ensuite expérimentalement à l'aide d'une bouche artificielle et d'une clarinette de laboratoire que le retard à la bifurcation n'est pas qu'un phénomène numérique. Il est ainsi non seulement mis en évidence expérimentalement, mais ses propriétés sont également étudiés et comparées avec celles obtenues dans le cas numérique.

Mots clés : Acoustique Musicale, Clarinette, Cartes itérées, Transitoires, Bifurcation dynamique, Retard à la bifurcation.

Birth of oscillations in clarinet-like instruments with variable control parameter

Doctoral thesis in Acoustic, Université du Maine, Le Mans, France

The research presented in this thesis is a contribution to the study of attack transients in clarinet-like instruments. The main objective is to understand the behavior of the instrument when the mouth pressure of the musician is increased slowly through time at a constant rate.
Although previous research proves that oscillations can appear at a value of the mouth pressure corresponding to 1/3 of the pressure needed to close the reed (the static oscillation threshold), numerical simulations and *in vitro* experiments show that for gradual increases of the mouth pressure, the audible sound generally appears when mouth pressure reaches a much higher value, called the *dynamic oscillation threshold*. This phenomenon is referred to as *bifurcation delay* in this work.
A major part of this work follows an analytical approach, using the foundations of dynamic bifurcation theory to study the bifurcation delay in a simple and well known clarinet model (the "Raman" model). The properties of the dynamic oscillation threshold are related to indicators of the time variation of the mouth pressure such as its initial value and its slope. One of the remarkable features of the bifurcation delay is its strong dependence on noise, including that arising from round-off errors of the computer. The properties of the dynamic threshold are different according to whether the noise can be ignored or not.
Additionally, an artificial mouth is used on a clarinet-like instrument to show that the bifurcation delay is not only a numerical phenomenon. Experimental observations performed on a clarinet-like instrument blown by an artificial mouth prove that bifurcation delay exists not only on numerical simulations, but also on real-life systems. These observations show that the properties of the bifurcation delay observed in low-precision simulations are similar to experimental ones.

Keywords : Musical acoustics, Clarinet, Iterated maps, Transient processes, Dynamic bifurcation, Bifurcation delay.