SUR LES EXTENSIONS DES FEUILLETAGES

Cyrille Dadi

SUR LES EXTENSIONS DES FEUILLETAGES

Cyrille DADI

Juin 2008

Table des matières

Remerciements **4**

Introduction **6**

1 Rappels **8**

1.1 Généralités sur les feuilletages 8

1.2 Feuilletages et systèmes différentiels 12

1.3 Eléments basiques 13

1.4 Holonomie d'une feuille d'un feuilletage 15

1.5 Holonomie d'une (G,T)-structure transverse 18

1.6 Structures transverses et théorèmes de structure 20

2 Généralités sur les extensions des feuilletages **29**

2.1 Définitions, construction d'extensions de feuilletage 30

2.1.1 Exemples de construction d'extension de feuilletage 31

2.2 Extension de feuilletage et holonomie 36

2.2.1 (G',T')-extension d'un (G,T)-feuilletage et holonomie 36

2.2.2 Extensions de feuilletage à structure transverse presque produit et holonomie 40

2.3 Extension d'un feuilletage riemannien 42

3 Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte 46

3.1 Position du problème 46

3.2 Généralités 47

3.3 Extension d'un feuilletage de Lie minimal 54

Perspectives de Recherche 71

Bibliographie 72

Dédicace

A ma mère Marie Thérèse ATEHON

A tous mes parents

A la mémoire de mon père

Charles Bodji DADI

Remerciements

Je suis heureux d'exprimer ma profonde gratitude au Professeur Hassimiou DIALLO. IL a encadré et dirigé mes recherches avec une grande patience et un interêt soutenu. Sa disponibilité, ses conseils et sa rigueur m'ont été d'un grand profit dans la réalisation de ce travail.

Je suis très reconnaissant au Professeur Edmond FEDIDA, Directeur du laboratoire de Mathématiques Fondamentales, pour avoir bien voulu codiriger cette thèse. Sa disponibilité, ses encouragements et ses conseils me furent un constant appui.

Le Professeur Modeste N'ZI, m'a fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance de thèse, les Professeurs :

- Ibrahim FOFANA,

- Toussaint SOHOU, un des rapporteurs de cette thèse,

celui d'y participer. Qu'ils me permettent de leur exprimer ma reconnaissance.

Je remercie vivement le Professeur Assohoun ADJE, Directeur de l'UFR de Mathématiques et Informatique, pour m'avoir permis de réaliser ce travail dans de très bonnes conditions.

Je remercie les membres de l'équipe du séminaire de géométrie différentielle, plus particulièrement le Professeur Moussa KOUROUMA, pour leurs critiques pertinentes lors de mes exposés aux séminaires de géométrie différentielle.

Je remercie le Professeur Gozé TAPE, Directeur de l'Ecole normale superieure (E.N.S) d'Abidjan pour avoir permis mon récrutement à l'E.N.S pendant la rédaction de cette thèse.

Je suis enfin reconnaissant de l'intérêt amical et fraternel que m'ont témoigné Tatiana Yolande KONAN, Docteur Adolphe CODJIA, Julien BOKA, Désiré DADI, Alain DADI, Carlos DADI, Sylvain BODJI, Yves NAKI, Djakaridja BAKAYOKO, Noèl ESSIS, Léa SERI, Omer ZEBALE, Ardles KOUASSI, ainsi que tous ceux et celles que j'aime et qui m'ont aidé par leur présence proche ou lointaine.

Introduction

La théorie des feuilletages est la généralisation naturelle de la théorie qualitative des équations différentielles. Elle a été initiée par les travaux de H.POINCARE et puis développée plus tard par C.EHRESMANN, G.REEB et plusieurs autres mathématiciens. Dans l'étude d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M (nature des feuilles, existence, classification, etc. ...), on est amené souvent à considérer les adhérences des feuilles et se demander si elles forment un nouveau feuilletage $\mathcal{F}'$.

C'est ainsi que FEDIDA a montré que si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Lie et M compacte alors $\mathcal{F}'$ est un feuilletage simple (donnée par une fibration). MOLINO a généralisé ce résultat aux feuilletages transversalement parallélisables [18]. Dans ces deux cas les feuilles de $\mathcal{F}'$, adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$, sont en fait des réunions de feuilles de $\mathcal{F}$.

Cette situation nous amène naturellement à aborder le problème suivant. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M. Existe-t-il sur M un feuilletage $\mathcal{F}'$ tel que ses feuilles soient des réunions de feuilles de $\mathcal{F}$? Un tel feuilletage $\mathcal{F}'$, s'il existe, mérite alors le nom d'extension de $\mathcal{F}$.

L'objet de ce mémoire est d'étudier pour un feuilletage de type donné, l'existence et la nature de ses extensions. Il ne faudrait pas croire que ces extensions existent toujours. En effet, CAIRNS a donné dans [4] une obstruction à l'existence d'une extension d'un feuilletage riemannien transversalement orientable.

En outre, on montre dans ce mémoire que les informations sur les extensions d'un feuilletage de Lie minimal (*ie.* à feuilles denses) sur une variété compacte de groupe G sont contenues dans ce groupe. En effet dans ce cas, il existe une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de Lie connexes de G et les extensions de $\mathcal{F}$.

Le mémoire est divisé en trois chapitres :

- Le premier chapitre est consacré aux rappels sur des notions de base de la théorie des feuilletages.

- Le deuxième chapitre est divisé en quatre parties. Dans la première partie on donne quelques méthodes de construction d'extensions de feuilletages. Dans la deuxième partie on établit, dans le cas des $(G,T)-$structures, un lien entre les groupes d'holonomie d'un feuilletage et de son extension. Dans la troisième partie on montre qu'un feuilletage à structure transverse bifeuilletée est intersection de deux extensions transverses et que le groupe d'holonomie d'une feuille du feuilletage est le produit des groupes d'holonomie des feuilles des deux extensions qui la contiennent. Dans la quatrième partie on donne un exemple de feuilletage non riemannien extension d'un feuilletage riemannien.

- Enfin le troisième chapitre contient le résultat essentiel portant sur l'existence et la classification des extensions d'un feuilletage de Lie minimal sur une variété compacte.

Nous abordons enfin les perspectives de recherche dans ce domaine.

Nous signalons pour terminer que l'essentiel de ce travail se trouve dans [7] et [8].

Chapitre 1

Rappels

Les variétés, les applications, les formes différentielles, les champs de vecteurs sont supposés de classe C^∞. M est une variété différentiable connexe de dimension $n = p + q$. $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M et $\mathcal{A}^0(M)$ l'anneau des fonctions sur M.

1.1 Généralités sur les feuilletages

Définition 1.1.1. *Un **feuilletage** $(M, \mathcal{F})$ de codimension q sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M, de submersion $f_i : U_i \to T$ où T est une variété de dimension q et, pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, d'un difféomorphisme*

$$\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset T \to f_i(U_i \cap U_j) \subset T$$

satisfaisant :

$$f_i(x) = (\gamma_{ij} \circ f_j)(x) \quad \text{pour tout } x \in U_i \cap U_j.$$

*On dit que $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i\in I}$ est un **cocycle feuilleté**.*

*La variété T est appelée **variété transverse** du feuilletage $(M, \mathcal{F})$.*

On notera que la variété T peut être considérée comme une réunion disjointe des $f_i(U_i)$.

Remarque 1.1.2. *i) L'entier naturel $p = n - q$ est la **dimension** du feuilletage.*

*ii) Les ouverts U_i s'appellent ouverts **distingués**.*

*iii) Les composantes connexes des fibres des f_i, appelées **plaques,** forment une base d'une topologie pour laquelle les composantes connexes sont appelées les **feuilles** du feuilletage* [14].

iv) Les feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M constituent une partition de M.

On notera par F_x la feuille passant par $x \in M$.

La relation

$$xRy \Longleftrightarrow F_x = F_y$$

pour $x \in M$ et $y \in M$ est une relation d'équivalence. L'espace quotient

$$M/R = M/\mathcal{F}$$

*est appelé **l'espace des feuilles** de $\mathcal{F}$.*

Exemple 1.1.3. (*de feuilletages*)

1) Il existe deux feuilletages canoniques sur toute variété M :

- Le feuilletage de dimension 0 ou **feuilletage par points**. Les feuilles sont les points de la variété.

- Le feuilletage de dimension n, les feuilles sont les composantes connexes de M.

2) Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur M, alors les traces de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U non vide de M définissent sur U un feuilletage de même nature que $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{F}_U$ ou $(U, \mathcal{F})$, et

appelé **feuilletage induit** par $\mathcal{F}$ sur U, ou encore **feuilletage restriction** de $\mathcal{F}$ à U.

3) Soit $\pi : M \to T$ une submersion de M sur une variété T de dimension q. π définie un feuilletage sur M de codimension q dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de π. Le feuilletage ainsi défini est appelé **feuilletage simple**.

Un ouvert U de M est dit **simple** pour un feuilletage $\mathcal{F}$ définie sur M si $\mathcal{F}_U$ est un feuilletage simple.

4) Soit $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ deux feuilletages.

Il existe sur $M_1 \times M_2$ un feuilletage dont chaque feuille est le produit cartésien d'une feuille $(M_1, \mathcal{F}_1)$ par une feuille de $(M_2, \mathcal{F}_2)$. On l'appelle **feuilletage produit** de $(M_1, \mathcal{F}_1)$ par $(M_2, \mathcal{F}_2)$. Il est noté $(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, M_1 \times M_2)$

5) Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage de codimension q défini par le cocycle feuilleté $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$.

Si $\pi : V \to M$ est un revêtement de M, les submersions $f_i \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \to T$ définissent un feuilletage sur la variété V appelé **feuilletage relevé** de $\mathcal{F}$ sur V, il est noté $\pi^* \mathcal{F}$ et il a la même dimension que $\mathcal{F}$.

6) Soit G un groupe discret de difféomorphismes d'une variété M opérant proprement et librement sur M.

La projection canonique $\pi : M \to M/G$ de M sur la variété quotient M/G est un revêtement.

Si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage de codimension q invariant par G, il existe un feuilletage $\mathcal{F}/G$ de M/G de même nature que $(M, \mathcal{F})$, et un seul, de sorte que si π est un difféomorphisme d'un ouvert U de M sur un ouvert V de M/G on ait $(\mathcal{F}/G)_{/V} = \pi^* (\mathcal{F}_U)$. $\mathcal{F}/G$ est le **feuilletage quotient** du feuilletage $(M, \mathcal{F})$ par le groupe G. Les feuilles de $(M, \mathcal{F})$ sont des revêtements de celles de $\mathcal{F}/G$.

7) Soit f un difféomorphisme d'une variété M. La variété M_f **suspension** de f est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par l'action du groupe discret $\mathbb{Z}$ engendré par le difféomorphisme $(t, x) \to (t+1, f(x))$, soit

$$M_f \quad = \frac{\mathbb{R} \times M}{(t, x) \sim (t+1, f(x))}.$$

Dans ces conditions, si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de codimension q de M invariant par f; le feuilletage produit $\mathbb{R} \times \mathcal{F}$ est invariant par l'action de $\mathbb{Z}$ et détermine sur M_f un feuilletage $\mathcal{F}_f$ de codimension q appelé **feuilletage suspension de $\mathcal{F}$ par le difféomorphisme** f.

8) Soit B une variété, φ une réprésentation de $\pi_1(B)$ dans un groupe de difféomorphismes de M et $\pi : \widetilde{B} \to B$ le revêtement universel de B.

$\pi_1(B)$ opère proprement et librement sur le produit $\widetilde{B} \times M$ par son action canonique sur $\widetilde{B}$, et par la réprésentation φ sur le second.

Le quotient de $\widetilde{B} \times M$ par cette action, est une variété différentielle $B_{\varphi} = \frac{\widetilde{B} \times M}{\pi_1(B)}$.

La projection π, détermine une fibration p de B_{φ} sur B de fibre type M. Si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage sur M de codimension q invariant par l'action de $\pi_1(B)$, le feuilletage produit $\widetilde{B} \times \mathcal{F}$ passe au quotient en un feuilletage $\mathcal{F}_{\varphi}$ de codimension q sur B_{φ} : $\mathcal{F}_{\varphi}$ est le **feuilletage suspension de $\mathcal{F}$ par la réprésentation** φ. Dans le cas particulier où $(M, \mathcal{F})$ est le feuilletage par points sur M, $\mathcal{F}_{\varphi}$ est appelé **feuilletage suspension de** φ.

On notera que si U est un ouvert de trivialisation locale de la fibration $p : B_{\varphi} \to B$, la restriction de $\mathcal{F}_{\varphi}$ à $p^{-1}(U)$ est difféomorphe à $U \times \mathcal{F}$.

1.2 Feuilletages et systèmes différentiels

Définition 1.2.1. *Un **système différentiel** de classe C^r de dimension p sur une variété différentiable M, est la donnée en chaque point $x \in M$ d'un sous-espace P_x de T_xM de dimension p tel que pour tout $x_0 \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x_0, $X_1,..., X_p$, p champs de vecteurs sur U linéairement indépendants de classe C^r engendrant le sous-espace P_y en tout point y de U. On notera*

$$\chi(\mathcal{P}) = \{X \in \chi(M)/ \;\; X_x \in P_x, \;\; \forall x \in M \;\}$$

Définition 1.2.2. *Soit $\mathcal{P}$ un système différentiel de classe C^r et de dimension p sur M.*

*Une **variété intégrale** de $\mathcal{P}$ est une sous-variété immergée W de M de dimension p telle que si $i : W \to M$ est l'immersion de W dans M alors $di_x(T_xW) = P_x$ pour tout $x \in W$.*

Définition 1.2.3. *Un système différentiel $\mathcal{P}$ de dimension p sur M est dit **complètement intégrable** si pour tout x de M passe une variété intégrale.*

Dans ce cas on démontre dans [12] que les sous-variétés intégrales maximales forment une partition de M en sous-variétés connexes de dimension p c'est-à-dire un feuilletage de dimension p de M.

Théorème 1.2.4. (*Froebénius*) [18] *Soit $\mathcal{P}$ un système différentiel de dimension p et de classe C^r sur M.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{P}$ est complètement intégrable,

ii) $\chi(\mathcal{P})$ est une sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$, *iii) pour tout* $x_0 \in M$, *il existe une carte* (U,φ) *de* M *contenant* x_0 et $\omega^1, ..., \omega^q$, $(n-p)$ *1-formes différentielles sur* U *engendrant en tout point* x *de* U, *le sous-espace* $(P_x)^* \subset T_x^*M$ *telles que si*

$$J_U = \left\{ \omega \in \Lambda(U,\mathbb{R}) \ / \ \omega = \sum_{i=1}^{q} \beta^i \wedge \omega^i, \ \beta^i \in \Lambda(U,\mathbb{R}) \right\}$$

alors $dJ_U \subset J_U$ où

$$dJ_U = \{ d\omega \ / \ \omega \in J_U \}.$$

Remarque 1.2.5. *On montre dans* [18] *qu'il y a une correspondance biunivoque entre les feuilletages de dimension* p *et les systèmes différentiels de dimension* p *complètement intégrables.*

On dira qu'un champ de vecteurs est tangent à un feuilletage $\mathcal{F}$ si et seulement si, il est tangent aux feuilles de $\mathcal{F}$ en chaque point où il est défini. L'ensemble des valeurs prises par les champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}$ est un sous-fibré du fibré tangent TM. Il est appelé **fibré tangent** à $\mathcal{F}$. Il est noté $T\mathcal{F}$. Le quotient $\mathcal{V}(\mathcal{F}) = \frac{TM}{T\mathcal{F}}$ est le **fibré transverse** du feuilletage $\mathcal{F}$.

1.3 Eléments basiques

$\mathcal{F}$ désigne un feuilletage de dimension p sur une variété M et $\chi(\mathcal{F})$ l'ensemble des champs de vecteurs tangents au feuilletage $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.1. *Soit* $f \in \mathcal{A}^0(M)$.

On dit que f *est* ***basique*** *pour le feuilletage* $\mathcal{F}$ *si et seulement si* $\forall X \in \chi(\mathcal{F})$, Xf *est identiquement nulle .*

L'ensemble des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathcal{F}$ est noté $\mathcal{A}_b^0(M, \mathcal{F})$.

On montre dans [18] que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est basique,

ii) f est constante sur chaque feuille de $\mathcal{F}$,

iii) dans tout ouvert simple distingué, de coordonnées locales $(x_1, ..., x_p,\ y_1, ..., y_q)$, f s'exprime comme fonction des seules variables y_1,..., y_q.

On remarquera en particulier que si $\mathcal{F}$ admet une feuille partout dense alors toute fonction basique est constante sur M.

Définition 1.3.2. *Soit $X \in \chi(M)$.*

*X est dit **feuilleté** si et seulement si $\forall Y \in \chi(\mathcal{F})$, $[X, Y] \in \chi(\mathcal{F})$.*

L'ensemble des champs feuilletés est noté $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$, c'est une sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$.

On montre dans [18] que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) X est feuilleté,

ii) si $(\varphi_t^X)_{|t|<\varepsilon}$ est le groupe local à un paramètre associé à X au voisinage d'un point arbitraire de M, pour tout t, le difféomorphisme local φ_t^X laisse invariant $\mathcal{F}$,

iii) dans tout ouvert simple distingué, de coordonnées locales $(x_1$,..., x_p, y_1,..., $y_q)$, les q dernières composantes de X s'expriment comme fonction des seules variables y_1,..., y_q.

Remarque 1.3.3. *i) Dans tout ouvert simple distingué U, un champ feuilleté X est **projetable** en un champ de vecteurs sur la variété quotient locale $\overline{U}$,*

ii) $\chi(\mathcal{F})$ est un idéal de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$. On a la suite exacte suivante:

$$0 \to \chi(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}(M, \mathcal{F}) \to \mathcal{L}(M, \mathcal{F})/\chi(\mathcal{F}) \to 0.$$

Le quotient $\ell(M,\mathcal{F}) = \mathcal{L}(M,\mathcal{F})/\chi(\mathcal{F})$ *est appelé l'algèbre de Lie des* ***champs transverses*** *au feuilletage* $\mathcal{F}$. *On remarquera que c'est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les sections du fibré transverse* $\mathcal{V}(\mathcal{F})$.

Définition 1.3.4. *Soit* α *une* r*-forme différentiable sur* M.

On dit que α *est* ***basique*** *si et seulement si*

$$\forall\ X \in \chi(\mathcal{F}),\ i_X\alpha = 0 \ \textit{et}\ i_X d\alpha = 0.$$

On montre dans [18] que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) α *est basique,*

ii) dans tout ouvert simple distingué, de coordonnées locales $(x_1,\ldots, x_p, y_1,\ldots, y_q)$, α *s'écrit*

$$\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_r} \alpha_{i_1\ldots i_r} dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_r}$$

où les coefficients $\alpha_{i_1\ldots i_r}$ *ne dépendent que des seules variables* $y_1,\ldots, y_q$.

Notons que si α est une r-forme basique et $X_1,\ldots,X_r$ sont r champs feuilletés, $\alpha(X_1,\ldots,X_r)$ est une fonction basique.

1.4 Holonomie d'une feuille d'un feuilletage

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage simple sur une variété M défini par la submersion $\pi : M \to W$ de M sur une variété quotient W, T et T' deux sous-variétés transverses de $\mathcal{F}$. Si $x_0 \in T$ et $x'_0 \in T'$ se projettent sur le même point y de W alors il existe un voisinage ouvert ω de x_0 dans T et ω' de x'_0 dans T' telle que la relation d'appartenance à la même feuille définit un difféomorphisme $\theta : \omega \to \omega'$ avec $\theta(x_0) = x'_0$.

Définition 1.4.1. *Le difféomorphisme $\theta : \omega \to \omega'$ s'appelle <<**glissement le long des feuilles**>>.*

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M non nécessairement simple, F une feuille de $\mathcal{F}$, $\gamma : [0,1] \to F$ avec $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ un lacet de base x_0 contenu dans F, $(U_i)_{i\in\{0,1,\ldots,k+1\}}$ une famille d'ouverts simples distingués recouvrant le lacet γ telle que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et $U_{k+1} = U_0$.

Soit également $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = 1$ une subdivision de $[0,1]$ telle que $\gamma(t_i) = x_i \in U_i \cap U_{i+1}$ $\forall i \in \{0,1,\ldots,k\}$ et $\forall i \in \{1,2,\ldots,k+1\}$, $\gamma([t_{i-1},t_i]) \subset U_i \cap F$.

$\gamma([t_{i-1},t_i])$ est connexe car γ est continu. D'où $\gamma([t_{i-1},t_i])$ est contenu dans une plaque de $\mathcal{F}$ contenue dans U_i. Soit T_i pour $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ une sous-variéte transverse de $\mathcal{F}$ passant par $x_i = \gamma(t_i)$. Le <<glissement le long des feuilles>> dans les ouverts simples U_0, U_1,..., U_{k+1} nous permet d'avoir des familles $(\omega_i)_{i\in\{0,1,\ldots,k+1\}}$ et $(\theta_i)_{i\in\{1,\ldots,k+1\}}$ telles que ω_i est un voisinage ouvert de x_i dans T_i (on prendra $T_{k+1} = T_0$) et $\theta_i : \omega_{i-1} \to \omega_i$ est un difféomorphisme vérifiant $\theta_i(x_{i-1}) = x_i$. De ce fait, on obtient un difféomorphisme

$$\theta = \theta_{k+1} \circ \theta_k \circ \ldots \circ \theta_1 : \omega_0 \to \omega_{k+1}$$

d'un voisinage ouvert de x_0 dans T_0 dans un voisinage ouvert de x_0 dans T_0 laissant invariant x_0.

Soit ρ_γ le germe en x_0 de θ. On établit dans [6] que ρ_γ ne dépend pas des variétés transverses et des ouverts simples utilisés. On établit aussi dans [6] que ρ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ.

Si γ_1 est un autre lacet de base x_0 dans F on a

$$\rho_{\gamma.\gamma_1} = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_\gamma.$$

Comme ρ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$, la correspondance $[\gamma] \rightarrow \rho_\gamma$ définit un homomorphisme

$$\rho_{x_0} : \pi_1(F, x_0) \rightarrow Diff_{x_0}(T_0)$$

du groupe d'homotopie de la feuille F en x_0 dans le groupe des germes en x_0 de difféomorphisme locaux de T_0 laissant x_0 fixe.

Définition 1.4.2. ρ_{x_0} *s'appelle la* ***représentation d'holonomie*** *de la feuille F en x_0.*

On notera grâce aux théorèmes de stabilité locale et globale que **le groupe d'holonomie** $\rho_{x_0}(\pi_1(F, x_0))$ de la feuille F en x_0 caractérise le voisinage de la feuille F.

Théorème 1.4.3. (*Stabilité locale*) [20] *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage ayant une feuille compacte F.*

Si le groupe fondamental de F est fini alors F admet un voisinage Ω saturé et toute feuille contenue dans Ω est compacte et admet un groupe fondamental fini.

Théorème 1.4.4. (*Stabilité globale*) [20] *Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage de codimension un sur une variété compacte.*

Si $(M, \mathcal{F})$ admet une feuille compacte ayant son groupe fondamental fini alors toute feuille du feuilletage $(M, \mathcal{F})$ est compacte et a son groupe fondamental fini.

Remarque 1.4.5. *Lorsque* $\rho_{x_0}(\pi_1(\ F,\ x_0)\ ) = \ \{Id\}$ *où Id est l'identité de* $Diff_{x_0}(T_0)$ *on dit que* F *est sans holonomie en* x_0.

Exemple 1.4.6. (*de feuilles sans holonomie*)

i) Toute feuille d'un feuilletage simple est sans holonomie,

ii) toute feuille simplement connexe est sans holonomie.

1.5 Holonomie d'une (G,T)-structure transverse

Dans cette partie, nous allons rappeler la constrution de la représention d'holonomie associée à une $(G, T)-$structure.

Soit G un groupe de difféomorphismes d'une variété T. On dit que G **opère analytiquement** sur T si deux difféomorphismes appartenant à G sont égaux dès qu'ils coincident sur un ouvert non vide de T.

Définition 1.5.1. *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage sur* M.

Supposons qu'il existe un cocycle feuilleté $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i\in I}$ *définissant* $\mathcal{F}$ *tel que :*

i) Les γ_{ij} *sont des restrictions de difféomorphismes de* T *appartenant à un groupe* G.

ii) Le groupe G *opère analytiquement sur* T.

On dit que $\mathcal{F}$ *admet une* ***(G,T)−structure transverse.***

Nous allons construire la représentation d'holonomie de cette (G, T) −structure. Soit x_0 et x_1 deux points de M et c un chemin joignant x_0 à x_1.

Recouvrons c par des ouverts $U_0, ..., U_k$ du cocycle feuilleté $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i\in I}$ choisis tels que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i = 0, ..., k-1$.

Comme G opère analytiquement sur T, nous pouvons noter de la même manière le changement de coordonnées transverses γ_{ij} et l'unique difféomorphisme appartenant à G dont il est la restriction, ceci pourvu que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

On définit alors $\rho(c)$ comme la composée des changements de coordonnées transverses γ_{ii+1} le long de c :

$$\rho(c) = \gamma_{01} \circ \gamma_{12} \circ ... \circ \gamma_{k-1k}.$$

Cette expression a bien un sens car chaque γ_{ii+1} est défini, puisque $U_i \cap U_{i+1}$ est non vide.

En utilisant encore une fois le fait que G agit analytiquement sur T, on vérifie aisément que l'élément $\rho(c)$ de G ainsi obtenu ne dépend pas du recouvrement choisi et qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de c.

En particulier, si l'on suppose que $x_0 = x_1$, on obtient ainsi une représentation :

$$\rho : \pi_1(x_0, M) \to G$$

appelé **holonomie** (relative à x_0) de la (G, T) $-$structure transverse de $\mathcal{F}$. Son image est le **groupe holonomie** (relative à x_0) .

Dans la suite, nous ne préciserons pas le point de base choisi et nous parlerons simplement de la représentation d'holonomie et du groupe d'holonomie de la (G, T) $-$structure transverse de $\mathcal{F}$.

1.6 Structures transverses et théorèmes de structure

Définition 1.6.1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M défini par le cocycle feuilleté $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i\in I}$.*

*On appelle **structure transverse** à $\mathcal{F}$ toute structure géométrique sur T invariante par les difféomorphismes locaux γ_{ij}.*

Exemple 1.6.2. (*de structures transverses*)

i) Une (G,T) −structure transverse.

ii) S'il existe une orientation sur T invariant par les γ_{ij}, on dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage **transversalement orientable.**

iii) Si $T = G$ est un groupe de Lie connexe et les γ_{ij} des restrictions des translations à gauche de G alors, on dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est un **feuilletage de Lie.** On l'appelle aussi un ***G*−feuilletage de Lie**.

On remarquera qu'un G−feuilletage de Lie est muni d'une (G,G) −structure transverse.

Un type particulier de feuilletage de Lie s'obtient par la construction suivante :

Etant donnés H et G deux groupes de Lie simplement connexes, $\mathcal{D} : H \to G$ un morphisme de groupes de Lie surjectif et Γ un sous-groupe discret uniforme de H (*i.e.* H/Γ est compacte); les images dans H/Γ des fibres de $\mathcal{D}$ sont les feuilles d'un G−feuilletage de Lie appelé **feuilletage homogène**.

En particulier si $H = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}^p$, $p<n$, $\mathcal{D}$ une application linéaire surjective, $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, alors le feuilletage homogène correspondant est appelé **feuilletage linéaire du tore** $\mathbb{T}^n$.

iv) Si T est l'espace homogène d'un groupe de Lie G ($T = G/H$ où G est un groupe de Lie et H un sous- groupe fermé de G) et les γ_{ij} sont induits par les translations à gauche de G qui opèrent sur $T = G/H$, alors on dit que $\mathcal{F}$ est un $G/H-$feuilletage **transversalement homogène.**

On note également qu'un tel feuilletage admet une $(G, G/H) -$ structure transverse.

v) Si T est une variété de dimension q admettant un parallélisme (c'est-à-dire qu'il existe sur T, q champs de vecteurs X_1,..., X_q linéairement indépendants) invariant par les γ_{ij}, alors, on dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage **transversalement parallélisable**.

vi) S'il existe une métrique riemannienne g_T sur T invariant par les γ_{ij}, on dit que $\mathcal{F}$ est un **feuilletage riemannien**. La métrique riemannienne g_T est dans ces conditions appelée **métrique transverse** du feuilletage riemannien $\mathcal{F}$.

La métrique transverse g_T et une identification du fibré tangent TM à la somme directe des fibrés tangent $T\mathcal{F}$ et normal $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ à $\mathcal{F}$ permettent de construire une métrique riemannienne g sur M ayant les propriétés suivantes :

1) les sous-fibrés $T\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ sont orthogonaux pour g;

2) pour chaque application $f_i : U_i \to T$ et pour chaque point x de U_i l'application tangente $T_x f_i$ induit une isométrie de la fibre $V_x(\mathcal{F})$ sur l'espace tangent $T_{f_i(x)}(T)$.

Une métrique vérifiant les conditions 1) et 2) est dite **quasi-fibrée** relativement à $\mathcal{F}$.

L'existence d'une métrique quasi-fibrée caractérise les feuilletages riemanniens [21].

Notons que pour toute métrique quasi-fibrée g relativement à un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$, si Y et Z sont deux champs de vecteurs normaux à $\mathcal{F}$, alors pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$ on a

$$Xg\left(Y,Z\right)=g\left(\left[X,Y\right],Z\right)+g\left(Y,\left[X,Z\right]\right)\quad [15].$$

De façon générale, tout champ de vecteurs X (tangent ou non à $\mathcal{F}$) vérifiant la relation précédente est appelé **champ de Killing** pour $\mathcal{F}$. Un tel champ de vecteurs est feuilleté [18]. Le champ transverse associé est appelé **champ de Killing transverse** pour $\mathcal{F}$.

Pour terminer, remarquons que tout feuilletage de Lie est transversalement parallélisable et tout feuilletage transversalement parallélisable est riemannien.

Nous allons à présent donner quelques résultats essentiels.

La proposition suivante caractérise les métriques quasi-fibrées. Elle est due à B. REINHART dans [21].

Proposition 1.6.3. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q d'une variété M. Une métrique riemannienne g sur M est quasi-fibrée relativement à $\mathcal{F}$ si quels que soient les champs de vecteurs Y et Z sur un ouvert U de M feuilletés pour la restriction de $\mathcal{F}$ à U et normaux à $\mathcal{F}$ la fonction $g\left(Y,Z\right)$ sur U est basique pour cette restriction.*

Le résultat qui suit est démontré dans [22].

Proposition 1.6.4. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage admettant une $(G,T)-$structure transverse sur une variété M. Alors il existe un homomorphisme $\rho:\pi_1\left(M\right)\rightarrow G$ et une submersion $\mathcal{D}$, définie de $\widetilde{M}$ (revêtement universel de M) sur un ouvert V de la variété transverse T, **équivariante** par ρ et dont les composantes connexes des fibres sont les feuilles du feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}=p^{*}\mathcal{F}$ à $\widetilde{M}$; $p:\widetilde{M}\rightarrow M$.*

$\mathcal{D}$ équivariante par ρ signifie que : pour tout $\gamma\in\pi_1\left(M\right)$ et pour tout $\widetilde{x}\in\widetilde{M}$, on a $\mathcal{D}(\gamma.\widetilde{x})=\rho(\gamma).\mathcal{D}(\widetilde{x})$.

L'application $\mathcal{D}$ est appelée **application développante** de la (G,T) −structure transverse.

Réciproquement, si l'on se donne un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \to G$ et une submersion $\mathcal{D}$ de $\widetilde{M}$ sur un ouvert de T, équivariante par ρ ; le feuilletage défini par $\mathcal{D}$ sur $\widetilde{M}$, passe au quotient en un feuilletage sur M admettant une (G,T) −structure transverse.

Notons que l'homomorphisme d'holonomie et le groupe d'holonomie de la (G,T) −structure transverse de $\mathcal{F}$ sont respectivement l'homomorphisme
$\rho : \pi_1(M) \to G$ et $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$.

En considérant les notations de l'exemple 1.6.2. *iii),* notons que dans le cas particulier d'un feuilletage homogène, l'homomorphisme de groupes de Lie
$\mathcal{D} : H \to G$ est l'application développante et la restriction de $\mathcal{D}$ à Γ est l'homomorphisme d'holonomie.

Dans les cas particuliers d'un feuilletage transversalement homogène et d'un G-feuilletage de Lie, la proposition précédente se précise des façons suivantes :

Proposition 1.6.5. [2] *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement homogène sur une variété connexe M et modelé sur un espace homogène G/H. $\widetilde{\mathcal{F}}$ le relèvement de $\mathcal{F}$ à $\widetilde{M}$. Alors il existe un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \to G$ et une submersion $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to G/H$ équivariante par ρ, telle que :*

i) Les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont les composantes connexes des fibres de $\mathcal{D}$,

ii) pour tout élément $\gamma \in \pi_1(M)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & \widetilde{M} & \overset{\mathcal{D}}{\to} & G/H & \\ \gamma & \downarrow & & \downarrow & \rho(\gamma) \\ & \widetilde{M} & \overset{\mathcal{D}}{\to} & G/H & \end{array} .$$

Ici $\gamma : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ *est vue comme automorphisme de revêtement et l'élément* $\rho(\gamma)$ *est le difféomorphisme de* G/H *induit par la translation à gauche sur* G *associé à* $\rho(\gamma)$.

Proposition 1.6.6. [14] *Soit* $\mathcal{F}$ *un* $G-$*feuilletage de Lie sur une variété* M*. Alors il existe :*

- un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$,

- une submersion $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow G$*, telle que :*

i) Le feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ *sur* $\widetilde{M}$ *est simple et est défini par la submersion* $\mathcal{D}$.

ii) $\mathcal{D}$ *est équivariante par* ρ.

Une autre proposition donnée par FEDIDA avec les formes différentielles est la suivante :

Proposition 1.6.7. [14] *Une structure de G-feuilletage de Lie* $\mathcal{F}$ *sur une variété* M *est équivalente à la donnée d'une 1-forme différentielle* ω *sur* M *à valeurs dans l'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *de* G *telle que :*

1) Pour tout $x \in M$*, l'application linéaire* $\omega_x : T_xM \rightarrow \mathcal{G}$ *est surjective ;*

2) ω *vérifie l'équation de Maurer-cartan* $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$;

3) deux 1-forme ω *et* ω' *vérifiant ces propriétés sont liées par la relation*

$\omega' = ad_g(\omega)$*, pour un certain* $g \in G$.

En particulier si G est le groupe abélien $\mathbb{R}^n$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par une famille de 1-forme fermées $\omega^1, ..., \omega^n$ linéairement indépendantes en chaque point. Si M est le tore $\mathbb{T}^n$ et les 1-formes toutes linéaires, alors le feuilletage $\mathcal{F}$ est **linéaire.**

Théorème 1.6.8. [14] (*structure des feuilletages de Lie*) *Soit $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie sur une variété connexe et compacte M. Alors on a :*

i) L'application développante $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}$ est une fibration localement triviale de $\widetilde{M}$ sur le groupe de Lie G,

ii) les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ sont les fibres d'une fibration localement triviale $\overline{\mathcal{D}} : M \to G/H$ où $H = \overline{\Gamma}$ est l'adhérence dans G du groupe d'holonomie $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$,

iii) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \overset{\mathcal{D}}{\to} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \overset{\overline{\mathcal{D}}}{\to} & G/H \end{array},$$

iv) dans chaque fibre de la fibration $\overline{\mathcal{D}}$, le feuilletage induit par $\mathcal{F}$ est un H_e- feuilletage de Lie à feuilles denses, où H_e est la composante connexe dans H de l'élément neutre e de G.

Un autre cas particulier de $(G, T\ )-$structure transverse est obtenu lorsque G est un groupe d'isométries d'une variété riemannienne T. Ce type de $(G, T\ )-$structure transverse est appelé $(G, T\ )-$**structure riemannienne transverse**. Pour ce cas particulier, on a le résultat suivant dû à EHRESMANN (non publié) et démontré dans [22].

Théorème 1.6.9. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage admettant une $(G, T)-$structure riemannienne transverse sur une variété compacte M. Alors la variété riemannienne T est complète et l'application développante $\mathcal{D}$ est une fibration localement triviale de $\widetilde{M}$ sur T.*

Le théorème de structure des feuilletages transversalement parallélisables a été démontré par MOLINO [18], il précise la rélation existant entre les feuilletages transversallement parallélisables et les feuilletages de Lie.

Théorème 1.6.10. (*structure des feuilletages tranversalement parallélisables*) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte connexe M.*

On a :

i) Toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont difféomorphes.

ii) Les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi : M \to W$ où W est une variété compacte connexe.

iii) Il existe un groupe de Lie simplement connexe G tel que $\mathcal{F}$ induit sur chaque adhérence des feuilles de $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie.

On notera :

i) π s'appelle la **fibration basique** de $\mathcal{F}$, la variété W est la **variété basique** de $\mathcal{F}$. Le groupe de Lie G est un invariant du feuilletage $\mathcal{F}$; pour cette raison, on dit que G est **le groupe structural** de $\mathcal{F}$ et l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est **l'algèbre de Lie structurale** de $\mathcal{F}$,

ii) si $\mathcal{F}$ est un G-feuilletage de Lie sur une variété M compacte connexe alors $\mathcal{F}$ est transversalement parallélisable et la variété basique $W = G/H$.

Dans la suite de ce paragraphe, $(M, \mathcal{F})$ désigne un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte connexe M.

Un repère **orthonormé transverse** de $(M, \mathcal{F})$ en un point x de M est une base orthonormée de l'espace transverse $\mathcal{V}_x(\mathcal{F})$, que l'on regardera comme un isomorphisme linéaire $z_x : \mathbb{R}^q \to \mathcal{V}_x(\mathcal{F})$.

On note $M^\natural$ l'ensemble des repères orthonormés transverses aux différents points de M et $p^\natural : M^\natural \to M$, la projection qui à un repère orthonormé transverse en un point x fait correspondre x. $p^\natural : M^\natural \to M$ est un fibré principal de base M et de groupe structural le groupe orthogonal $O(q, \mathbb{R})$. $M^\natural$ est appelé **fibré des repères orthonormés transverses** du feuilletage $(M, \mathcal{F})$.

Notons que le feuilletage riemannien $(M, \mathcal{F})$ se relève sur $M^\natural$.

Désignons par $\mathcal{F}^\natural$ le feuilletage relevé de $(M, \mathcal{F})$ sur $M^\natural$.

Proposition 1.6.11. [18] *i) $\mathcal{F}^\natural$ est invariant par les translations à droite de $O(q, \mathbb{R})$,*

ii) $\mathcal{F}^\natural$ a la même dimension que $\mathcal{F}$,

iii) les feuilles de $\mathcal{F}^\natural$ se projettent par $p^\natural$ sur les feuilles de $\mathcal{F}$ et sont pour la projection $p^\natural$ des revêtements des feuilles de $\mathcal{F}$.

Le théorème qui suit précise la rélation existant entre les feuilletages riemanniens et les feuilletages transversallement parallélisables [18].

Théorème 1.6.12. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte et connexe M :*

i) Le feuilletage relevé $\mathcal{F}^\natural$ dans $M^\natural$ est transversalement parllélisable,

ii) les adhérences de ses feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale de $M^\natural$ sur une variété W. Sur chaque fibre de cette fibration, $\mathcal{F}^\natural$ induit un $G-$feuilletage de Lie où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}^\natural$.

$\mathcal{G}$ s'appelle aussi **l'algèbre de Lie structurale** du feuilletage riemannien $\mathcal{F}$.

Le lien entre l'algèbre de Lie structurale d'un feuilletage riemannien et les adhérences de ses feuilles est précisé par la proposition qui suit.

Proposition 1.6.13. [15] *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *un feuilletage riemannien transversalement orientable sur une variété compacte et connexe.*

Les adhérences des feuilles de $(M, \mathcal{F})$ *correspondent à un système différentiel* $\mathcal{P}$ *sur* M *tel que* $\frac{\mathcal{P}}{T\mathcal{F}}$ *peut être engendré localement par des champs de Killing transverses* $Z_1, ..., Z_r$ *pour* $(M, \mathcal{F})$ *ayant les propriétés suivantes :*

i) $Z_1, ..., Z_r$ *commutent avec les champs feuilletés transverses.*

ii) $Z_1, ..., Z_r$ *engendrent librement une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie structurale* $\mathcal{G}$ *de* $(M, \mathcal{F})$.

Rappelons, pour terminer cette partie :

- qu'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dite **résoluble** si et seulement s'il existe une suite strictement décroissante d'idéaux $(J_i)_{i\geq 0}$ de $\mathcal{G}$ avec $J_0 = \mathcal{G}$, $J_n = \{0\}$ telle que $\frac{J_i}{J_{i+1}}$ soit commutative,

- qu'un groupe G est dit résoluble si son algèbre de Lie est résoluble,

- qu'un groupe G est dit **virtuellement résoluble** s'il contient un sous-groupe résoluble G_0 d'indice fini (*i.e.* G/G_0 est un ensemble fini).

Et le théorème suivant dù à A. HAEFLIGER [16] nous sera utile pour la suite.

Théorème 1.6.14. *Un feuilletage riemannien à feuilles denses sur une variété riemannienne complète* M *à groupe fondamental* $\pi_1(M)$ *virtuellement résoluble est transversalement homogène.*

On notera qu'un feuilletage transversalement homogène n'est pas forcement riemannien. En effet, pour que la $(G, G/H)-$structure transverse d'un feuilletage transversalement homogène soit riemannienne, il faut et il suffit qu'il existe sur G une métrique invariante à gauche qui soit aussi invariante à droite par H.

Chapitre 2

Généralités sur les extensions des feuilletages

On cherche à étudier l'existence et la nature des extensions d'un feuilletage de structure transverse donnée.

Ici , nous nous bornerons à

1) donner quelques méthodes de construction d'extensions de feuilletages,

2) établir, dans le cas des $(G, T)-$structures transverse, un lien entre les groupes d'holonomie d'un feuilletage et de son extension,

3) montrer qu'un feuilletage à structure transverse bifeuilletée est intersection de deux extensions transverses et que le groupe d'holonomie d'une feuille du feuilletage est le produit des groupes d'holonomie des feuilles des deux extensions qui la contiennent,

4) donner un exemple de feuilletage non riemannien extension d'un feuilletage riemannien.

Dans tout ce qui suit, si nécessaire la variété et les feuilletages considérés seront pris orientables.

2.1 Définitions, construction d'extensions de feuilletage

Définition 2.1.1. *Une* ***extension d'un feuilletage*** $(M, \mathcal{F})$ *de codimension* q *est un feuilletage* $(M, \mathcal{F}')$ *de codimension* q' *tel que* $0 < q' < q$ *et les feuilles de* $(M, \mathcal{F}')$ *sont des réunions de feuilles de* $(M, \mathcal{F})$ *(on notera* $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$*).*

Une extension $(M, \mathcal{F}')$ *d'un feuilletage sera dite riemannienne, (resp., de Lie, tranversalement homogène, linéaire) si* $(M, \mathcal{F}')$ *est un feuilletage riemannien, (resp., de Lie, tranversalement homogène, linéaire). Une* $(G', T')-$*extension d'un feuilletage admettant une* $(G, T)-$*structure transverse est une extension de ce feuilletage munie d'une* $(G', T')-$*structure transverse.*

Dans la suite, pour simplifier un feuilletage admettant une $(G, T)-$structure transverse sera appelé $(G, T)-$feuilletage.

Remarque 2.1.2. *On montre dans* [11] *que si* $(M, \mathcal{F}')$ *est une extension simple d'un feuilletage simple* $(M, \mathcal{F})$ *et si* $(M, \mathcal{F})$ *et* $(M, \mathcal{F}')$ *sont définis respectivement par les submersions* $\pi : M \to T$ *et* $\pi' : M \to T'$*, alors il existe une submersion* $\theta : T \to T'$ *telle que* $\pi' = \theta \circ \pi$.

On dira que la submersion θ est une **liaison** entre le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ et son feuilletage extension $(M, \mathcal{F}')$.

Définition 2.1.3. *Soient G et G' deux groupes de Lie, Γ un sous-groupe de G, et θ une submersion de G sur G'. On dira que θ est un $\Gamma-$**morphisme** si pour tout $(\gamma, g) \in \Gamma \times G$, on a :*

$$\theta(\gamma.g) = \theta(\gamma).\theta(g)$$

Dans ce qui suit on donne des exemples de construction d'extensions de feuilletage.

2.1.1 Exemples de construction d'extension de feuilletage

Proposition 2.1.4. *Etant donné un feuilletage $(M,\mathcal{F})$ de variété transverse modèle T, soit T' une variété de dimension q'>0. Si les difféomorphismes locaux de transition de $\mathcal{F}$ préservent les fibres d'une submersion de T sur T', alors le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une extension de codimension q' et de variété modèle transverse T'.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de M formé d'ouverts distingués pour $\mathcal{F}$ de sorte que la structure de feuilletage $\mathcal{F}$ soit définie par le cocycle $(U_i, T, f_i, g_{ij})_{i\in I}$ et considérons la famille des submersions $f'_i = \theta \circ f_i$. En remarquant que pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $Tg_{ji}(KerT\theta_{|f_i(U_i\cap U_j)}) = KerT\theta_{|f_j(U_i\cap U_j)}$, on note alors que les difféormorphismes locaux de transition g_{ij} préservent les fibres des restrictions de la submersion θ aux ouverts $f_i(U_i\cap U_j)$; par conséquent chaque g_{ij} définit un difféomorphismes g'_{ij} de $f'_j(U_i\cap U_j)$ sur $f'_i(U_i\cap U_j)$ de sorte qu'on a pour tous i, j, $g'_{ji}\circ\theta = \theta\circ g_{ji}$. Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & f_i(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\theta} & f'_i(U_i \cap U_j) \\
{\scriptstyle Id_{U_i\cap U_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_{ji}} & & \downarrow{\scriptstyle g'_{ji}} \\
U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_j} & f_j(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\theta} & f'_j(U_i \cap U_j)
\end{array}$$

permet de voir que $\left(U_i, T', f'_i, g'_{ij}\right)_{i\in I}$ est un cocycle définissant un feuilletage $\mathcal{F}'$ extension du feuilletage $\mathcal{F}$. ■

Exemple 2.1.5. (*de construction d'extension de feuilletage*)

1) Si T et T' sont des groupes de Lie, $\mathcal{F}$ un feuilletage de Lie et s'il existe un morphisme surjectif de groupes θ de T sur T', alors il existe une extension de Lie $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$.

2) Si $\mathcal{F}$ est un $G/H-$ feuilletage transversalement homogène et si H' est un sous-groupe de Lie fermé de G contenant H alors l'inclusion $H \subset H'$ définit une submersion canonique θ de G/H sur G/H' et $\mathcal{F}$ admet alors une $G/H'-$extension transversalement homogène.

3) Si $\mathcal{F}$ est un $G-$feuilletage de Lie sur une variété M, alors à tout sous-groupe fermé (resp. sous-groupe normal) propre de G correspond une extension transversalement homogène (resp. de Lie) de $\mathcal{F}$.

4) Si $\mathcal{F}$ est un $G-$feuilletage de Lie d'une variété compacte, à feuilles ni fermées ni denses, on sait par le théorème de structure des feuilletages de Lie [14], que les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ forment un feuilletage simple. Ce feuilletage des adhérences est alors une extension transversalement homogène de $\mathcal{F}$.

5) Soit $\mathcal{F}$ un $(G,T)-$feuilletage sur une variété M, avec $T = T_1 \times T_2$ et $G = G_1 \times G_2$ où chaque G_i est un groupe de difféomorphismes de T_i opérant analytiquement sur T_i , $i = 1, 2$. Si $\mathcal{D}$ est une développante de $\mathcal{F}$ sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M, alors le feuilletage simple défini par $pr_i \circ \mathcal{D}$ passe au quotient et définit un $(G_i, T_i)-$extension de $\mathcal{F}$.

6) Ici, nous construisons un exemple concret de $(G', T')-$feuilletage extension d'un $(G,T)-$feuilletage. Avec les résultats du paragraphe suivant on pourra établir un lien entre les groupes d'holonomie de ces $(G,T)-$structures transverses.

En s'inspirant de la construction du flot de Morse-Smale [5], considérons la variété compacte $\mathbb{S}^{2p+2q} \times \mathbb{S}^1$ obtenue comme le quotient de $\mathbb{R}^{2p+2q+1} - \{0\}$ par l'homothétie h de rapport 2. Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^{2p+2q} \times \mathbb{S}^1)$ est cyclique. Soit c_0 un générateur de $\pi_1(\mathbb{S}^{2p+2q} \times \mathbb{S}^1)$ qui agit sur $\mathbb{R}^{2p+2q+1} - \{0\}$ par l'homothétie h et soit la représentation de $\pi_1(\mathbb{S}^{2p+2q} \times \mathbb{S}^1)$ dans le groupe des similitudes $Sim(\mathbb{C}^q)$ de $\mathbb{C}^q$ qui à c_0 associe l'homothétie de rapport 2. En écrivant $\mathbb{R}^{2p+2q+1}$ sous la forme $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}$ et en considérant la restriction $\mathcal{D}$ à $\mathbb{R}^{2p+2q+1} - \{0\}$ de la projection pr_2 de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}^q$, $\mathcal{D}$ est une submersion h- équivariante. Elle définit donc sur $\mathbb{S}^{2p+2q} \times \mathbb{S}^1$ un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension $2q$ qui est un $(Sim(\mathbb{C}^q),\, \mathbb{C}^q)-$feuilletage transverse ; ce feuilletage a une seule feuille compacte isomorphe à $\mathbb{S}^{2p} \times \mathbb{S}^1$ si $p \neq 0$, et deux feuilles compactes si $p = 0$ (flot de Morse-Smale).

Si nous supposons que $q > 2$, et si q' est un entier tel que $q > q' \geq 1$ alors, comme toute application linéaire L de $\mathbb{C}^q$ sur $\mathbb{C}^{q'}$commute avec l'homothétie de rapport 2 , le feuilletage simple sur $\mathbb{R}^{2p+2q+1} - \{0\}$ défini par $L \circ \mathcal{D}$ où L est surjective, permet par passage au quotient, d'obtenir sur $\mathbb{S}^{2p+2q} \times \mathbb{S}^1$ une $(Sim(\mathbb{C}^{q'}),\, \mathbb{C}^{q'})-$feuilletage $\mathcal{F}'$ extension du $(Sim(\mathbb{C}^q)$,$\mathbb{C}^q)-$feuilletage précédent.

7) Cet exemple nous permettra au paragraphe 2.3 de donner un exemple d'extension non riemannienne d'un feuilletage de Lie non minimal.

Soit $\mathbb{R} \ltimes_A \mathbb{R}^2$ le groupe de Lie (résoluble) obtenu en mettant sur l'espace $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ le produit

$$(t, u)\,(t', u') = \Big(t + t', A^t u' + u\Big)$$

où A est un automorphisme unimodulaire $(A \in SL\,(2, \mathbb{Z}))$ à coefficients entiers du plan $\mathbb{R}^2$ ayant pour valeurs propres λ et $\frac{1}{\lambda}$ positives et différentes de 1, ce qui signifie que la trace $trA \gneqq 2$ (par exemple l'automorphisme d'Anosov $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$).

Si v_1 et v_2 sont les vecteurs propres associés respectivement à λ et $\frac{1}{\lambda}$, l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathbb{R} \ltimes_A \mathbb{R}^2$ est engendrée par les champs de vecteurs

$$X = \left(\frac{1}{\log \lambda}\right) \frac{\partial}{\partial t};\ Y = \lambda^t v_1;\ Z = \lambda^{-t} v_2$$

avec les crochets :

$$[X, Y] = Y;\ \ [X; Z] = -Z;\ \ [Y; Z] = 0.$$

$\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$ est un sous-groupe discret uniforme de $\mathbb{R} \ltimes_A \mathbb{R}^2$ ayant pour quotient la variété compacte $\mathbb{T}^3_A$ appelé **tore hyperbolique** de dimension 3.

Le sous-groupe à un paramètre engendré par Y c'est-à-dire la direction "**propre**" engendrée par v_1 est un sous-groupe fermé et normal de $\mathbb{R} \ltimes_A \mathbb{R}^2$ ayant pour quotient le groupe affine $\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})$ des transformations affines croissantes de la droite réelle. $\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*_+ \ltimes \mathbb{R}$ est identifié au groupe de Lie obtenu en considérant sur $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$, la loi de groupe

$$(t, x)\,(t', x') = (tt', tx' + x)\,.$$

Le flot engendré par v_1 est invariant par l'action de $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$. On en déduit que v_1 détermine sur $\mathbb{T}^3_A$ un flot ϕ_1 de groupe $\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})$, appelé "**flot propre**" du tore hyperbolique $\mathbb{T}^3_A$ défini par λ.

La direction " propre" engendrée par v_2 détermine également sur $\mathbb{T}^3_A$ un flot ϕ_2 de groupe $\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})$, appelé "flot propre" du tore hyperbolique $\mathbb{T}^3_A$ défini par $\frac{1}{\lambda}$.

Soit $\mathcal{F}$ un des deux "flots propres" du tore hyperbolique $\mathbb{T}^3_A$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ son feuilletage relevé sur le rêvetement universel $\widetilde{\mathbb{T}_A^3} = \mathbb{R} \ltimes_A \mathbb{R}^2$ de $\mathbb{T}_A^3$; ce flot est un feuilletage de Lie homogène [5]. Il en résulte que sa développante $\mathcal{D}$ est un morphisme de groupes. Ainsi, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathbb{T}_A^3} & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \mathcal{A}ff^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* \ltimes \mathbb{R} & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{R} \cong \frac{\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})}{\mathbb{R}_+^*} \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{T}_A^3 & & & & \end{array}$$

montre que la submersion $pr_2 \circ \mathcal{D}$ défini une extension de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\widetilde{\mathbb{T}_A^3}$.

Soit $\gamma \in \pi_1(\mathbb{T}_A^3) = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$ et $x \in \widetilde{\mathbb{T}_A^3}$. On a

$$pr_2 \circ \mathcal{D}\left(\gamma.x\right) = pr_2\left(\mathcal{D}\left(\gamma\right).\mathcal{D}\left(x\right)\right).$$

Comme $\frac{\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})}{\mathbb{R}_+^*}$ est l'espace affine $\mathbb{R}$ considéré comme espace homogène du groupe $\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})$ des transformations affines croissantes de la droite réelle par le sous-groupe $\mathbb{R}_+^*$ des homothéties ayant l'origine pour centre, l'action à gauche de $\mathcal{D}\left(\gamma\right)$ sur $\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})$ passe au quotient. Ainsi,

$$\forall \gamma \in \pi_1(\mathbb{T}_A^3) \;\text{ et }\; \forall x \in \widetilde{\mathbb{T}_A^3}, \quad pr_2 \circ \mathcal{D}\left(\gamma.x\right) = \mathcal{D}\left(\gamma\right).pr_2 \circ \mathcal{D}\left(x\right).$$

Il résulte de l'équivariante de $pr_2 \circ \mathcal{D}$ par rapport au morphisme de groupes de Lie $\mathcal{D}$ que le feuilletage défini par $pr_2 \circ \mathcal{D}$ sur $\widetilde{\mathbb{T}_A^3}$ passe au quotient en une extension transverslement homogène de $\mathcal{F}$.

8) Soit $\mathcal{F}'$ une extension d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M, B une variété, φ une réprésentation de $\pi_1(B)$ dans un groupe de difféomorphismes de M préservant les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Alors sur la variété suspension B_φ, le feuilletage suspension $\mathcal{F}'_\varphi$ de $\mathcal{F}'$ est une extension de la suspension $\mathcal{F}_\varphi$ de $\mathcal{F}$. En effet, si U est un ouvert de trivialisation locale de la fibration $p: B_\varphi \to B$, les restrictions respectives de $\mathcal{F}_\varphi$ et $\mathcal{F}'_\varphi$ à $p^{-1}(U)$ sont respectivement difféomorphes à $U \times \mathcal{F}$ et $U \times \mathcal{F}'$.

En particulier $\mathcal{F}_\varphi$ et $\mathcal{F}'_\varphi$ sont des extensions du feuilletage suspension de φ.

2.2 Extension de feuilletage et holonomie

Nous allons étudier les rapports entre les extensions d'un feuilletage et l'holonomie dans les cas particuliers suivants.

2.2.1 (G',T')-extension d'un (G,T)-feuilletage et holonomie

La proposition suivante établit un lien entre un $(G, T)-$feuilletage et une de ses $(G', T')-$extensions quelconques et généralise le résultat obtenu dans [9] sur les drapeaux de feuilletages de Lie.

Proposition 2.2.1. *Soient M une variété compacte et connexe, $(M, \mathcal{F})$ un $(G, T)-$feuilletage, de groupe d'holonomie Γ.*

Si $(M, \mathcal{F}')$ est un $(G', T')-$feuilletage extension de $(M, \mathcal{F})$ de groupe d'holonomie Γ', alors il existe un homomorphisme de groupes σ de Γ dans G' telle que $\Gamma' = \sigma(\Gamma)$.

En particulier si $\mathcal{F}'$ est une $G'-$extension de Lie d'un $G-$feuilletage de Lie $\mathcal{F}$, σ se prolonge en un Γ-morphisme θ de groupes de Lie de G sur G' (en un morphisme de groupes lorsque $\mathcal{F}$ est à feuilles denses.) tel que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont les applications développantes respectives de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, on ait $\mathcal{D}' = \theta \circ \mathcal{D}$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$' sont respectivement un $(G,T)-$feuilletage et un $(G',T')-$feuilletage, soient $\widetilde{\mathcal{F}}$ et $\widetilde{\mathcal{F'}}$ leurs relèvements sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M ; on sait qu'il existe des représentations ρ de $\pi_1(M)$ dans G et ρ' de $\pi_1(M)$ dans G', une submersions $\mathcal{D}$ de $\widetilde{M}$ sur un ouvert V de T, ρ- équivariante définissant $\widetilde{\mathcal{F}}$, et une submersion $\mathcal{D}'$ de $\widetilde{M}$ sur un ouvert V' de T', ρ'- équivariante définissant $\widetilde{\mathcal{F'}}$. Comme les deux feuilletages relevés sur $\widetilde{M}$ de ces deux feuilletages sont des feuilletages simples et que $\mathcal{F}'$ est une extension de $\mathcal{F}$, alors $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \widetilde{\mathcal{F'}}$ et il existe donc une submersion θ de V sur $V^{'}$ telle que $\mathcal{D}'$=$\theta \circ \mathcal{D}$. Remarquons que l'équivariance de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ implique pour tout $s \in \pi_1(M)$

$$\rho(s)(V) = V \text{ et } \rho'(s)(V^{'}) = V'.$$

Soit $v \in V$. Puisque $\mathcal{D}$ est surjective on a

$$\begin{aligned}
(\rho'(s) \circ \theta)(v) &= (\rho'(s) \circ \theta)(\mathcal{D}(\widetilde{x})) \\
&= \rho'(s)(\theta \circ \mathcal{D}(\widetilde{x})) \\
&= \rho'(s)\mathcal{D}'(\widetilde{x}) \\
&= \mathcal{D}'(s\widetilde{x}) \\
&= (\theta \circ \mathcal{D})(s\widetilde{x}) \\
&= \theta(\rho(s).\mathcal{D}(\widetilde{x})) \\
&= (\theta \circ \rho(s))(\mathcal{D}(\widetilde{x})) \\
&= (\theta \circ \rho(s))(v);
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

(*) pour tout $s \in \pi_1(M)$,

$$\rho'(s) \circ \theta = \theta \circ \rho(s).$$

Soit $\gamma \in \Gamma$, et soit $s \in \pi_1(M)$ tel que $\gamma= \rho(s)$, alors l'élément $\gamma'=\rho'(s)$ ne dépend que de γ. En effet si $\gamma= \rho(s)=\rho(r)$, puisque l'application θ considérée est surjective, pour tout $t' \in V'$, on a

$$\rho'(s)(t') = \rho'(s)(\theta(t)) = (\theta \circ \rho(s))(t) = (\theta \circ \rho(r))(t) = (\rho'(r) \circ \theta)(t) = \rho'(r)(t')$$

Ce qui montre que $\rho'(\mathrm{s})_{/V'}=\rho'(r)_{/V'}$. Comme l'action de G' est analytique sur T' alors $\rho'(\mathrm{s})=\rho'(r)$. L'application σ de Γdans G' qui à $\gamma= \rho(s)$ associe $\gamma'= \rho'(s)$ ainsi définie, vérifie la relation

$$\rho' = \sigma \circ \rho$$

Puisque σ est définie sur $\Gamma= \rho(\ \pi_1(M))$ et puisque ρ et ρ' sont des morphismes de groupes, alors la relation $\rho' = \sigma \circ \rho$ permet de voir que σ est nécessairement un morphisme de groupes et que

$$\Gamma' = \sigma(\Gamma)$$

Dans le cas où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des feuilletages de Lie, en identifiant un élément d'un groupe de Lie avec la translation à gauche qu'il définit, on a G=T, G'=T'. En plus l'application θ considérée est ici une submersion de G sur G' de sorte qu'avec (*) on a :

(**) pour tout g$\in G$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\theta(\gamma.g) = \sigma(\gamma).\theta(g)$

Quitte à remplacer le développement ($\mathcal{D}'$, ρ') de $\mathcal{F}'$ par le développement

($(\theta\ (\mathrm{e}))^{-1}.\mathcal{D}'$, $(\theta\ (\mathrm{e}))^{-1}\rho'\theta(\mathrm{e})$), on peut toujours supposer que θ envoie l'élément neutre e de G sur l'élément neutre de G', il vient, en prenant g=e dans la relation précédente, que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\theta(\gamma) = \sigma(\gamma)$. Ceci montre que θ prolonge σ sur G tout entier et en réécrivant (**) on a : pour tout $g \in G$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\theta(\gamma.g) = \theta(\gamma).\theta(g),$$

i.e. θ est un $\Gamma-$morphisme.

En plus, si $\mathcal{F}$ est à feuilles denses, alors Γ est une partie dense de G [14], comme la restriction de θ à Γest un morphisme de groupes, il suit par continuité, que θ est tout simplement un morphisme de groupes de G sur G'. ■

Remarque 2.2.2. *Réciproquement la donnée d'un $G-$feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ de groupe d'holonomie Γ sur une variété M (non nécessairement compacte) et d'un $\Gamma-$morphisme θ de G sur un groupe de Lie G' détermine sur M un $G'-$feuilletage de Lie extension de $\mathcal{F}$, obtenu par passage au quotient du feuilletage simple défini par la submersion D'=$\theta \circ D$ où D est une développante de $\mathcal{F}$ sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M.*

Exemple 2.2.3. (*de calcul de groupe d'holonomie d'une* (G',T') $-$ *extension*)

Calculons le groupe d'holonomie de la ($Sim(\mathbb{C}^{q'})$, $\mathbb{C}^{q'}$)$-$extension $\mathcal{F}'$ du ($Sim(\mathbb{C}^q)$,$\mathbb{C}^q$) $-$feuilletage $\mathcal{F}$ de l'exemple 2.1.5.

Soit $L : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^{q'}$ l'application linéaire surjective assurant la liaison entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, Γ et Γ' les groupes d'holonomie respectifs de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}'$, h_2 et h'_2 les homothéties respectives de rapport 2 de $\mathbb{C}^q$ et $\mathbb{C}^{q'}$.

On a

$$\mathbb{C}^q = KerL \oplus \mathbb{C}^{q'}$$

et puisque suivant cette décompostion $L = pr_2$, il résulte de (*) que pour tout $\gamma \in \Gamma$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} KerL \oplus \mathbb{C}^{q'} & \overset{pr_2}{\rightarrow} & \mathbb{C}^{q'} \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \ \sigma(\gamma) \,. \\ KerL \oplus \mathbb{C}^{q'} & \overset{pr_2}{\rightarrow} & \mathbb{C}^{q'} \end{array}$$

Comme $\Gamma = \left\{ h_2^n, \ n \in \mathbb{Z} \right\}$, alors tout élément de Γ préserve la décompostion précédente de $\mathbb{C}^q$. Par conséquent il résulte de la commutativité du diagramme précédent que

$$\forall \ n \in \mathbb{Z}, \ \sigma\left(h_2^n\right) = h_2'^{\,n}.$$

Ainsi, $\Gamma' = \sigma(\Gamma) = \left\{ h_2'^{\,n}, \ n \in \mathbb{Z} \right\}$.

2.2.2 Extensions de feuilletage à structure transverse presque produit et holonomie

Définition 2.2.4. *Une variété N de dimension $q = q' + q''$, où $q' > 0$ et $q'' > 0$ est appelée **variété bifeuilletée** ou **variété presque produit de type** $(\mathbf{q}', \mathbf{q}'')$ si son fibré tangent est somme directe de deux sous-fibrés intégrables de dimensions respectives q' et q''.*

Théorème 2.2.5. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M admettant pour variété transverse une variété bifeuilletée de type (q', q''), alors $\mathcal{F}$ admet deux extensions transverses $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ de codimension respective q' et q'' telles que*

1) $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}'' = \mathcal{F}$,

2) le groupe d'holonomie d'une feuille de $\mathcal{F}$ est le produit direct des groupes d'holonomie des feuilles de $\mathcal{F}'$ et de $\mathcal{F}''$ qui la contiennent.

Démonstration. Soit T la variété bifeuilletée transverse modèle de $\mathcal{F}$. Alors la structure de variété de T peut être obtenue par un atlas de cartes produit
$\varphi : V \longrightarrow V_1 \times V_2$, où V, V_1, V_2 sont des ouverts respectifs de T, T^1, T^2, et les T^i étant les variétés transverses modèles des feuilletages de la variété bifeuilletée T. Si $\psi : W \longrightarrow W_1 \times W_2$ est une seconde carte produit telle que $V \cap W \neq \emptyset$, alors le difféomorphisme de changement de cartes est de la forme $\ell_1 \times \ell_2$. Ainsi quitte à réduire les ouverts distingués de $\mathcal{F}$, on peut considérer un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de M formé d'ouverts distingués pour $\mathcal{F}$ de sorte que

1) la structure de feuilletage $\mathcal{F}$ soit définie par le cocycle $(U_i, T, f_i, g_{ij})_{i\in I}$ et

2) si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $f_i(U_i \cap U_j)$ soit isomorphe au moyen d'un isomorphisme de variétés produit à un produit d'un ouvert de T^1, par un ouvert de T^2,

3) $g_{ij} = g^1_{ij} \times g^2_{ij}$.

Dans ces conditions les cocycles $\left(U_i, T^s, f^s_i = pr_s \circ f_i, g^s_{ij}\right)_{i\in I}$, $s = 1, 2$ définissent bien deux feuilletages transverses extensions de $\mathcal{F}$, de feuilletage intersection $\mathcal{F}$.

On établit la deuxième partie du théorème en suivant pas à pas la construction classique de groupe d'holonomie d'une feuille [18], et cela en utisant des isormorphismes locaux de transition pour $\mathcal{F}$ de la forme 3) ci-dessus, puisque la définition de la réprésentation d'holonomie d'une feuille ne dépend, ni du recouvrement, ni des variétés transverses choisis. Dans ces conditions, il apparait clairement qu'on a la deuxième partie du théorème et il en résulte que si le groupe d'holonomie d'une feuille de $\mathcal{F}$ est triviale (par exemple si cette feuille est simplement connexe) alors les feuilles des extensions qui la contiennent sont d'holonomie triviale. ∎

Remarque 2.2.6. *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien, alors les feuilletages transverses $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont aussi riemanniens. En particulier si le feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ est de codimension 2, le groupe d'holonomie Γ d'une feuille est fini.*

2.3 Extension d'un feuilletage riemannien

Soit $(M, \mathcal{F}')$ une extension d'un feuilletage $(M, \mathcal{F})$.

En se référant à la remarque 2.1.2, il est clair qu'il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de M formé d'ouverts distingués à la fois pour $(M, \mathcal{F})$ et $(M, \mathcal{F}')$ de sorte que ces deux feuilletages soient définis respectivement par les cocycles $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i\in I}$ et $(U_i, f_i' = \theta_i \circ f_i, T', \gamma_{ij}')_{i\in I}$ où θ_i est une liaison entre le feuilletage $(U_i, \mathcal{F})$ et son feuilletage extension $(U_i, \mathcal{F}')$.

En tenant compte de ce qui précède on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *Si $\mathcal{F}$ est riemannien, alors $\mathcal{F}'$ est riemannien si et seulement si pour tout $i \in I$, θ_i est une submersion riemannienne.*

Démonstration. Soit, T la variété transverse modèle du feuilletage riemannien $\mathcal{F}$, h la métrique riemannienne de T définissant $\mathcal{F}$.

- Supposons que $\mathcal{F}'$ soit un feuilletage riemannien.

Il existe sur M une métrique g quasi-fibrée pour les feuilletages riemanniens $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Il en résulte que

$$(T\mathcal{F})^{\perp} = \left((T\mathcal{F})^{\perp} \cap T\mathcal{F}'\right) \oplus (T\mathcal{F}')^{\perp}.$$

Soit $i \in I$ et $x \in U_i$, comme $T_x f_i : (T_x\mathcal{F})^{\perp} \to T_{f_i(x)}(T)$ est une isométrie [21], alors

$$T_{f_i(x)}(T) = T_x f_i \left((T_x\mathcal{F})^{\perp} \cap T_x\mathcal{F}'\right) \oplus T_x f_i \left((T_x\mathcal{F}')^{\perp}\right)$$

et

$$\left(T_x f_i \left((T_x\mathcal{F})^{\perp} \cap T_x\mathcal{F}'\right)\right)^{\perp} = T_x f_i \left((T_x\mathcal{F}')^{\perp}\right).$$

D'où il résulte de :

$i)$ La commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \stackrel{T_xf_i}{\longrightarrow} & T_{f_i(x)}(T) \\ Id_{(T_xM)}\downarrow & & \downarrow T_{f_i(x)}\theta_i \\ T_xM & \stackrel{T_xf'_i}{\longrightarrow} & T_{f'_i(x)}(T') \end{array} \quad ,$$

$ii)$ $T_xf'_i : (T_x\mathcal{F}')^{\perp} \to T_{f'_i(x)}(T')$ est une isométrie [21] ,

$iii)$

$$TM = T\mathcal{F} \oplus (T\mathcal{F})^{\perp} = T\mathcal{F} \oplus \left((T\mathcal{F})^{\perp} \cap T\mathcal{F}'\right) \oplus (T\mathcal{F}')^{\perp}$$

que

$$KerT_{f_i(x)}\theta_i = T_xf_i\left((T_x\mathcal{F})^{\perp} \cap T_x\mathcal{F}'\right)$$

et $T_{f_i(x)}\theta/_{\left(KerT_{f_i(x)}\theta_i\right)^{\perp}} : T_xf_i\left((T_x\mathcal{F}')^{\perp}\right) \to T_{f'_i(x)}(T')$ est une isométrie. Ainsi, θ_i est une submersion riemannienne.

- Supposons que pour tout $i \in I$, θ_i soit une submersion riemannienne.

Il existe sur chaque $f'_i(U_i)$ une métrique h'_i qui est la métrique projetée par θ_i de la métrique transverse de $\mathcal{F}$.

La variété transverse modèle T' du feuilletage $\mathcal{F}'$, est par constrution, la somme disjointe des $f'_i(U_i)$. Il en résulte que la somme disjointe des métriques h'_i définissent sur T' une métrique h'.

Soit $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} U_i \cap U_j & \stackrel{f_i}{\longrightarrow} & f_i(U_i \cap U_j) & \stackrel{\theta_i}{\longrightarrow} & f'_i(U_i \cap U_j) \\ Id_{U_i \cap U_j}\downarrow & & \downarrow\gamma_{ji} & & \downarrow\gamma'_{ji} \\ U_i \cap U_j & \stackrel{f_j}{\longrightarrow} & f_j(U_i \cap U_j) & \stackrel{\theta_j}{\longrightarrow} & f'_j(U_i \cap U_j) \end{array} \quad .$$

Comme $\gamma'_{ji} \circ \theta_i = \theta_j \circ \gamma_{ji}$, et que γ_{ij} est une isométrie locale, alors

$$T\gamma_{ji}\left(KerT\theta_i\right) = KerT\theta_j$$

et

$$T\gamma_{ji}\left(\left(KerT\theta_i\right)^{\perp}\right) = \left(KerT\theta_j\right)^{\perp}.$$

Il résulte de cela que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
(KerT\theta_i)^{\perp} & \stackrel{T\theta_i}{\rightarrow} & T\left(f'_i\left(U_i \cap U_j\right)\right) \\
{\scriptstyle T\gamma_{ji}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle T\gamma'_{ji}} \\
(KerT\theta_j)^{\perp} & \stackrel{T\theta_j}{\rightarrow} & T\left(f'_j\left(U_i \cap U_j\right)\right).
\end{array}$$

Par conséquent $T\gamma'_{ji}$ est une isométrie. Ainsi, $\mathcal{F}'$ est un feuilletage riemannien. ■

Cette proposition va nous permettre de donner un exemple de feuilletage non riemannien extension d'un feuilletage de Lie non minimal.

Dans la suite $\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q) = GL(q, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^q$ désigne le groupe de Lie obtenu en mettant sur l'espace $GL(q, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ le produit

$$(g, u)\left(g', u'\right) = \left(gg', g\left(u'\right) + u\right).$$

On remarquera que l'espace homogène $\frac{\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q)}{GL(q,\mathbb{R})}$ est l'espace affine $\mathbb{R}^q$.

Soit G un groupe de Lie muni de sa structure métrique invariante à gauche, H un sous-groupe de Lie fermé de G. Pour que la projection canonique $\pi : G \to G/H$ soit une submersion riemannienne, il faut et il suffit que les actions à droite des éléments de H soient des isométries.

Comme dans le cas où $G = \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q)$ les actions à droite des éléments de

$H = GL(q,\mathbb{R})$ qui sont des isométries de $\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q)$ sont des éléments du groupe orthogonal $O(q,\mathbb{R})$ et que $O(q,\mathbb{R}) \subsetneq GL(q,\mathbb{R})$, alors la submersion

$$\pi : \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q) = GL(q,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^q \longrightarrow \frac{\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q)}{GL(q,\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^q$$

ne peut être riemannienne. Il en résulte que le feuilletage horizontal du fibré principal trivial

$$GL(q,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q) = GL(q,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^q \longrightarrow \frac{\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q)}{GL(q,\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^q$$

est un feuilletage non riemannien pour toute valeur de $q \geq 1$.

Considérons maintenant l'extension transversalement homogène d'un “flot propre” du tore hyperbolique $\mathbb{T}^3_A$ de l'exemple 2.1.5. 7).

Le feuilletage horizontal du fibré principal trivial

$$\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*_+ \ltimes \mathbb{R} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R} \cong \frac{\mathcal{A}ff^+(\mathbb{R})}{\mathbb{R}^*_+}$$

n'est pas riemannien. Par conséquent le feuilletage défini par la submersion $pr_2 \circ \mathcal{D}$ est un feuilletage non riemannien sur $\widetilde{\mathbb{T}^3_A}$. Comme il est invariant par l'action de $\pi_1(\mathbb{T}^3_A) = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$, alors l'extension transverslement homogène d'un “flot propre” du tore hyperbolique $\mathbb{T}^3_A$ de l'exemple 2.1.5. 7) n'est pas riemannienne. Et on a ainsi l'exemple cherché.

Ceci étant, on pourrait tout de même se poser la question de savoir, si l'extension d'un feuilletage riemannien minimal d'une variété compacte et connexe est riemannienne. Dans le prochain chapitre, on examine la question dans le cas d'une extension d'un feuilletage Lie minimal d'une variété compacte et connexe.

Chapitre 3

Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte

3.1 Position du problème

Le théorème de structure de FEDIDA montre que l'étude d'un feuilletage de Lie d'une variété compacte et connexe se ramène modulo à une fibration, à l'étude d'un feuilletage de Lie minimal (*i.e.* à feuilles denses) [14].

Il s'agit ici, étant donné un G-feuilletage de Lie minimal $(M, \mathcal{F})$ d'une variété compacte et connexe, d'étudier l'existence et la nature de ses extensions. Les informations, qu'on obtiendrait, pourraient nous donner une obstruction à l'existence d'une extension d'un feuilletage de Lie.

Les résultats obtenus font apparaître clairement que le groupe de Lie G contient toutes les informations concernant l'existence et la nature des extensions de $(M, \mathcal{F})$.

De façon précise, on montre [8] que :

- il y a une correspondance biunivoque entre les sous-algèbres de Lie de $\mathcal{G}$ =Lie (G) (ou si l'on préfère entre les sous-groupes de Lie connexes de G) et les extensions de $\mathcal{F}$,

*- une extension de $\mathcal{F}$ est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$**feuilletage** (voir définition) transversalement riemannien, à fibré normal trivial, défini par une 1-forme vectorielle à valeurs dans $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$.*

Ce qui permet d'obtenir une caractérisation et par suite une classification des extensions de $\mathcal{F}$.

Une extension $\mathcal{F}'$ d'un feuilletage de Lie minimal $(M, \mathcal{F})$ d'une variété compacte et connexe est transversalement homogène (resp. de Lie) si et seulement si le sous-groupe de Lie connexe correspondant est fermé (resp. normal).

Il en résulte que :

- toute extension d'un feuilletage de Lie (resp. d'un feuilletage linéaire) minimal du tore est un feuilletage de Lie (resp. un feuilletage linéaire) et

- si un feuilletage de Lie d'une variété compacte est dense dans une de ses extensions alors cette extension est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage transversalement riemannien, à fibré normal trivial.

3.2 Généralités

Notation 3.2.1. *Dans ce qui suit $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie de dimension q, de groupe de Lie connexe et simplement connexe G, $\mathcal{H}$ une sous- algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ de codimension q', $\left(e_1, ..., e_q\right)$ une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ telle que $\left(e_{q'_{+1}}, ..., e_q\right)$ soit une base de $\mathcal{H}$; on pose $\left[e_i, e_j\right] = \sum\limits_{k=i}^{q} K_{ij}^k e_k$, les K_{ij}^k étant les constantes de structure* *de $\mathcal{G}$. Ainsi si ω est une 1-forme sur une variété M à valeurs dans $\mathcal{G}$, relativement à cette base, on a $\omega = \sum\limits_{i=1}^{q} \omega^i \otimes e_i$ qu'on note encore $\omega = (\omega^1, ..., \omega^q)$; par exemple si θ est la 1-forme canonique de G, on écrira $\theta = \sum\limits_{i=1}^{q} \theta^i \otimes e_i$ où $\theta = \left(\theta^1, ..., \theta^q\right)$.*

Précisons pour la suite qu'un sous-groupe de Lie étant vu comme un sous-groupe **immergé** d'un groupe de Lie, n'est alors ni nécessairement **plongé**, ni nécessairement **fermé**.

La notion de $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$−feuilletage, que nous allons définir maintenant, a été introduite par El KACIMI, G. GUASP et M. NICOLAU dans [13].

Observons avant tout que si $\omega = (\omega^1, ..., \omega^q)$ dans la base $\left(e_1, ..., e_q\right)$ précédente, $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$, et que $\omega^1, ..., \omega^{q'}$ sont linéairement indépendantes en tout point de M alors le système différentiel $\omega^1 = ... = \omega^{q'} = 0$ définit un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q'. En effet, la condition de Maurer Cartan $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ implique que

$$\forall k \in \{1, ..., q\}, \quad d\omega^k = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{q} K_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j \qquad (*)\,.$$

Comme $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ de base $\left(e_{q'+1}, ..., e_q\right)$, les constantes de structure K_{ij}^k de $\mathcal{G}$ sont nulles pour $k \leq q'$ et $i, j \geq q' + 1$. Ainsi, il résulte de $(*)$ que

$$\forall k \leq q',\ d\omega^k = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q'}\sum_{j=1}^{q} K_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j - \frac{1}{2}\sum_{i=q'+1}^{q}\sum_{j=1}^{q'} K_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

Par conséquent, si $\mathcal{J}$ désigne l'idéal de $\Lambda(M, \mathbb{R})$ engendré par les 1-formes $\omega^1, ..., \omega^{q'}$, on a $d\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. Ce qui assure grâce au théorème de FROBENIUS que le système différentiel $\omega^1 = ... = \omega^{q'} = 0$ est complètement intégrable (*cf. théo.*1.2.4).

Définition 3.2.2. *Le feuilletage $\mathcal{F}$ ainsi défini est appelé un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage défini par la 1-forme ω.*

Si la 1-forme ω est la 1-forme de Fédida définissant un feuilletage de Lie $\mathcal{F}_\omega$, on dira que $\mathcal{F}$ est le $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage associé au feuilletage de Lie $\mathcal{F}_\omega$.

On notera que si $M = G$, alors $\theta = \left(\theta^1, ..., \theta^q\right)$ définit un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$-feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ dont les feuilles sont les classes à gauche de H.

On notera également que si le sous-groupe H est fermé, ce $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage est un feuilletage transversalement homogène qui n'est pas forcément riemannien. Par exemple pour $G = \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q) = GL(q, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^q$, le feuilletage horizontal $\mathcal{F}_{\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q), GL(q,\mathbb{R})}$ du fibré principal trivial

$$GL(q, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q) = GL(q, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^q \longrightarrow \frac{\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^q)}{GL(q, \mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^q$$

n'est pas riemannien.

Définition 3.2.3. *Soient N une variété différentielle, $(N, \mathcal{F}')$ un feuilletage sur N.*

*Une application différentielle $\varphi : M \to N$ est dite **transverse** pour $(N, \mathcal{F}')$ si et seulement si pour tout $x \in M$,*

$$T_{\varphi(x)}N = T_x\varphi\,(T_xM) + T_{\varphi(x)}\mathcal{F}' \ .$$

On notera que si $(N, \mathcal{F}')$ est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage sur N défini par une 1-forme α et si $\varphi : M \to N$ est une application différentielle transverse pour $(N, \mathcal{F}')$, alors $\beta = \varphi^*\alpha$ défini sur M un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage $\mathcal{F}$ noté $\varphi^*\mathcal{F}'$.

En s'inspirant de la démonstration du théorème de relèvement d'un $G-$feuilletage de Lie ou d'un feuilletage transversalement homogène dans ([2], [14]) et en tenant compte des notations précédentes, on établit la proposition qui suit :

Proposition 3.2.4. *Soit $\mathcal{F}$ un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$−feuilletage sur une variété M, défini par une 1-forme ω et soit $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ le feuilletage relevé de $\mathcal{F}$ sur le revêtement universel $\pi : \widetilde{M} \to M$. Alors, il existe une application différentiable $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to G$ transverse pour $\mathcal{F}_{G,H}$ et un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \to G$ telles que :*

(i) $\mathcal{D}$ est équivariant par ρ, et

(ii) $\pi^*\omega = \mathcal{D}^*\theta$, i.e. $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,H}$.

On dira que $\mathcal{D}$ est une application développante sur $\widetilde{M}$ du $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$−feuilletage $\mathcal{F}$.

Démonstration. Pour tout $g \in G$, notons par L_g (resp. R_g) la translation à gauche (resp. à droite) de G associée à g.

Soient $p_1 : M \times G \to M$ et $p_2 : M \times G \to G$ les projections de $M \times G$ sur M et sur G respectivement.

Posons

$$\alpha = p_1^*\omega - p_2^*\theta$$

et

$$\Omega = ad_g \circ \alpha$$

c'est à dire

$$\Omega(X)(x,g) = ad_g(\alpha(X)(x,g)) = d(L_g) \circ d(R_{g^{-1}})(\alpha(X)(x,g))$$

pour tout $(x,g) \in M \times G$ et $X \in \mathcal{X}(M \times G)$.

Ω est une 1-forme sur $M \times G$ à valeurs dans $\mathcal{G}$.

Dans toute la suite $M \times G$ est considéré comme un fibré principal où l'action de G est une action à gauche.

Montrons que Ω est une 1-forme de connexion plate sur $M \times G$.

1) Soit X^* le champ fondamental sur $M \times G$ engendré par $X \in \mathcal{G}$. On a

$$\begin{aligned}
\Omega\left(X^*\right) &= ad_g\left(p_1^*\omega\left(X^*\right) - p_2^*\theta\left(X^*\right)\right) \\
&= ad_g\left(-p_2^*\theta\left(X^*\right)\right) \\
&= ad_g\left(-\theta\left(dp_2\left(X^*\right)\right)\right) \\
&= ad_g\left(-\theta\left(\left(dp_2\left(X^*\right)\right)_g\right)\right).
\end{aligned}$$

$M \times G$ étant considéré comme un fibré principal où l'action de G est une action à gauche, alors $dp_2\left(X^*\right)$ est un champ de vecteurs invariant à droite sur G et on a $\left(dp_2\left(X^*\right)\right)_g = -d\left(R_g\right)(X)$ [19]. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\Omega\left(X^*\right) &= ad_g\left(\theta\left(d\left(R_g\right)(X)\right)\right) \\
&= d\left(L_g\right) \circ d\left(R_{g^{-1}}\right) \circ d\left(L_{g^{-1}}\right) \circ d\left(R_g\right)(X).
\end{aligned}$$

Or $d\left(L_g\right)$ et $d\left(R_a\right)$ commutent pour tout $g \in G$ et tout $a \in G$, donc $\Omega\left(X^*\right) = X$.

2) Soit $a \in G$. On a

$$\begin{aligned}
\left(L_a\right)^*\Omega &= \left(L_a\right)^*\left(ad_g \circ \alpha\right) \\
&= ad_{ag} \circ \left(L_a\right)^*\alpha \\
&= ad_a \circ ad_g \circ \left(\left(L_a\right)^*\left(p_1^*\omega\right) - \left(L_a\right)^*\left(p_2^*\theta\right)\right) \\
&= ad_a \circ ad_g \circ \left(\left(p_1 \circ L_a\right)^*\omega - \left(p_2 \circ L_a\right)^*\theta\right).
\end{aligned}$$

Or $p_2 \circ L_a = L_a \circ p_2$ et $p_1 \circ L_a = p_1$ donc

$$\begin{aligned}
(L_a)^* \Omega &= ad_a \circ ad_g \circ \left(p_1^*\omega - (L_a \circ p_2)^* \theta\right) \\
&= ad_a \circ ad_g \circ \left(p_1^*\omega - (p_2)^* (L_a)^* \theta\right) \\
&= ad_a \circ ad_g \circ \left(p_1^*\omega - p_2^*\theta\right) \\
&= ad_a\Omega.
\end{aligned}$$

Ainsi Ω est équivariant par rapport à la représentation adjointe de G.

3) Soit $\beta = d\Omega + \frac{1}{2}[\Omega, \Omega]$ la forme de courbure de la 1-forme de connexion Ω et $j : M \times \{e\} \hookrightarrow M \times G$.

$$\begin{aligned}
j^*\Omega &= j^* \left(ad_g \circ \left(p_1^*\omega\right) - p_2^*\theta\right) \\
&= ad_e \circ j^* \left(p_1^*\omega - p_2^*\theta\right) \\
&= j^*p_1^*\omega - j^*p_2^*\theta \\
&= (p_1 \circ j)^* \omega - (p_2 \circ j)^* \theta.
\end{aligned}$$

Or pour tout $(x, e) \in M \times \{e\}$, $p_1 \circ j(x, e) = x$ et $p_2 \circ j(x, e) = e$ donc $j^*\Omega = \omega$.

Comme :

i) $j^*\beta = j^* \left(d\Omega + \frac{1}{2}[\Omega, \Omega]\right) = dj^*\Omega + \frac{1}{2}[j^*\Omega, j^*\Omega] = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$,

ii) β est nulle si l'un de ses arguments est tangent aux fibres de p_1,

iii) β est équivariant par rapport à la représentation adjointe de G,

alors $d\Omega + \frac{1}{2}[\Omega, \Omega] = 0$.

Il résulte de 1), 2) et 3) que Ω est 1-forme de connexion plate sur $M \times G$.

Soit M' une feuille de la connexion plate Ω et $i : M' \hookrightarrow M \times G$.

Ω étant une connexion plate sur $M \times G$, $p_1 \circ i : M' \to M$ est un revêtement galoisien de groupe $\rho(\pi_1(M))$ où $\rho : \pi_1(M) \to G$ est l'homomorphisme de la connexion Ω. Par conséquent, pour tout $(x, g) \in M'$ et tout $\gamma \in \pi_1(M)$ on a $\rho(\gamma)(x, g) \in M'$. Or pour tout $(x, g) \in M'$, $\gamma.(x, g) = \rho(\gamma)(x, g) = (x, \rho(\gamma).g)$ donc $p_2 \circ i(\gamma.(x, g)) = \rho(\gamma).g = \rho(\gamma).p_2 \circ i(x, g)$.

M' étant un revêtement galoisien de M, M' est le quotient du revêtement universel $\pi : \widetilde{M} \to M$ de M par $\pi_1(M')$ et la projection canonique $\pi' : \widetilde{M} \to M'$ vérifie les relations suivantes :

$i)$ $\pi = p_1 \circ i \circ \pi'$,

$ii)$ $\forall \widetilde{x} \in \widetilde{M}, \forall \gamma \in \pi_1(M), \pi'(\gamma.\widetilde{x}) = \gamma.\pi'(\widetilde{x}) = \rho(\gamma).\pi'(\widetilde{x})$.

Posons $\mathcal{D} = p_2 \circ i \circ \pi'$. On a pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ et tout $\gamma \in \pi_1(M)$,

$$\mathcal{D}(\gamma.\widetilde{x}) = p_2 \circ i \circ \pi'(\gamma.\widetilde{x}) = p_2 \circ i(\gamma.\pi'(\widetilde{x})) = \rho(\gamma).p_2 \circ i \circ \pi'(\widetilde{x}) = \rho(\gamma).\mathcal{D}(\widetilde{x}).$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ est $\pi_1(M)-$équivariant.

M' étant une feuille de la connexion plate Ω, on a $i^*\Omega = 0$. Il en résulte que $\pi^*\omega = \mathcal{D}^*\theta$.

Comme $\pi^*\omega = \mathcal{D}^*\theta$, alors $\forall \widetilde{x} \in \widetilde{M}$, $T_{\widetilde{x}}\mathcal{D}\left(T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}\right) = d\left(L_{\mathcal{D}(\widetilde{x})}\right)(\omega_x(T_x M))$. De plus $\mathcal{G} = \omega_x(T_x M) + Lie(H)$, d'où

$$T_{\mathcal{D}(\widetilde{x})}G = d\left(L_{\mathcal{D}(\widetilde{x})}\right)(\omega_x(T_x M)) + d\left(L_{\mathcal{D}(\widetilde{x})}\right)(Lie(H)) = T_{\widetilde{x}}\mathcal{D}\left(T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}\right) + T_{\mathcal{D}(\widetilde{x})}\mathcal{F}_{G,H}.$$

Par conséquent l'application $\mathcal{D}$ est une application $\mathcal{F}_{G,H}-$transverse. Ainsi, il résulte de l'égalité $\pi^*\omega = \mathcal{D}^*\theta$ que $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,H}$. ■

Remarque 3.2.5. *Réciproquement si l'on se donne un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \to G$ et une application différentiable $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to G$ transverse pour $\mathcal{F}_{G,H}$ et équivariante par ρ, alors le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,H}$ passe au quotient et définit sur M un feuilletage $\mathcal{F}$ qui est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage.*

En particulier si $\mathcal{D}$ est une développante de FEDIDA d'un feuilletage de Lie $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, alors $\mathcal{F}$ est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage extension de $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

En plus si le sous-groupe H est fermé, cette extension est un feuilletage riemannien si et seulement si le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ est riemannien.

3.3 Extension d'un feuilletage de Lie minimal

La propriété suivante montre la rigidité des extensions d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte.

Proposition 3.3.1. *Si $\mathcal{F}'$ est une extension d'un feuilletage de Lie minimal $(M, \mathcal{F})$ d'une variété compacte connexe, alors tout champ global $\mathcal{F}-$feuilleté transverse, tangent à $\mathcal{F}'$en un point, est tangent à $\mathcal{F}'$.*

Démonstration. 1) Commençons par montrer que tout champ global feuilleté transverse d'un $G-$feuilletage de Lie minimal $(M, \mathcal{F})$ d'une variété compacte connexe nul en un point est identiquement nul. En effet ; dans ces conditions, on sait que l'algèbre de Lie structurale $\ell(M, \mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ et l'algèbre de Lie de G sont isomorphes de dimension la codimension de $\mathcal{F}$. Ensuite, le feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ étant à feuilles denses, si $(Y_1, ..., Y_q)$ est un parallélisme de Lie transverse de $\mathcal{F}$, et si on considère une métrique quasi-fibrée de $\mathcal{F}$, alors

- l'application "**évaluation en** x", notée ev_x de $\ell(M, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{V}_x(\mathcal{F}) \cong (T_x\mathcal{F})^{\perp}$, définie par $ev_x\ (X) = X(x)$, réalise un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels entre $\ell(M,\mathcal{F})$ et $(T_x\mathcal{F})^{\perp}$,

- pour tout $Z \in \ell(M,\mathcal{F})$, Z s'écrit :

$$Z = \sum_{i=1}^{q} \xi^{i} Y_{i}$$

où les fonctions $\mathcal{F}-$basiques ξ^{i} sont en fait des constantes réelles. Ceci dit, si Z s'annule en un point donné, les ξ^{i} sont tous nuls et par conséquent $Z = 0$.

2) Considérons maintenant un champ $Z \in \ell(M,\mathcal{F})$ tel que pour un point x_0 donné, $Z(x_0) \in T_{x_0}\mathcal{F}'$. Suivant la décomposition

$$(T\mathcal{F})^{\perp} = (T\mathcal{F})^{\perp} \cap T\mathcal{F}' \oplus (T\mathcal{F})^{\perp} \cap (T\mathcal{F}')^{\perp}$$

Z s'écrit $Z = Z_1 + Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont des sections globales respectives des sous-fibrés $(T\mathcal{F})^{\perp} \cap T\mathcal{F}'$ et $(T\mathcal{F})^{\perp} \cap (T\mathcal{F}')^{\perp} = (T\mathcal{F}')^{\perp}$ du fibré orthogonal $(T\mathcal{F})^{\perp}$ de $\mathcal{F}$. Comme $Z(x_0) \in \left(T_{x_0}\mathcal{F}\right)^{\perp} \cap T_{x_0}\mathcal{F}'$, alors $Z_2(x_0) = 0$. Ce qui implique d'après le 1) que Z_2 est identiquement nul, donc $Z = Z_1$, *i.e.* Z est tangent à $\mathcal{F}'$. ■

Ceci étant, le théorème suivant, qui est le résultat principal de ce travail, détermine et classifie les extensions d'un $G-$feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte et connexe.

Théorème 3.3.2. *Soit $(M,\mathcal{F})$ un $G-$feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte et connexe, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.*

Alors :

1- Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de Lie connexes de G et les extensions de $\mathcal{F}$.

2- Une extension de $\mathcal{F}$ est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage transversalement riemannien à fibré normal trivial, définie par une 1-forme vectorielle à valeurs dans $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$.

3- Une extension de $\mathcal{F}$ est transversalement homogène (resp. de Lie) si et seulement si le sous-groupe de Lie de G correspondant est un sous-groupe fermé (resp. un sous-groupe normal) dans G.

Démonstration. Etant donné un $G-$feuilletage de Lie minimal $(M,\mathcal{F})$ de codimension $q>0$ d'une variété compacte et connexe, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$,

1- Soit $\mathcal{F}'$ une extension de $\mathcal{F}$, de codimension q'. Considérons $\widetilde{\mathcal{H}}$ l'ensemble des champs $\mathcal{F}-$feuilletés tangents à $\mathcal{F}'$; $\widetilde{\mathcal{H}}$ est visiblement une sous-algèbre de l'algèbre de Lie structurale $\ell\,(M,\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$. Pour déterminer la dimension de cette sous-algèbre, notons, d'après ce qui précède que

- pour tout $x\in M$, et pour tout $X\in\widetilde{\mathcal{H}}$,

$$ev_x\,(X)\in(T_x\mathcal{F})^{\perp}\cap T_x\mathcal{F}',$$

- pour tout $u\in(T_x\mathcal{F})^{\perp}\cap T_x\mathcal{F}'$, la proposition précédente permet de voir que le champ $X_u=ev_x^{-1}\,(u)$ est dans $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Au total, la restriction à $\widetilde{\mathcal{H}}$ de ev_x est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\widetilde{\mathcal{H}}$ sur $ev_x\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)=(T_x\mathcal{F})^{\perp}\cap T_x\mathcal{F}'$; ce qui assure par la formule des dimensions que

$$\begin{aligned}\dim\widetilde{\mathcal{H}} &= \dim\,(T_x\mathcal{F})^{\perp}\cap T_x\mathcal{F}'\\ &= \dim\,(T_x\mathcal{F})^{\perp}+\dim T_x\mathcal{F}'-\dim<(T_x\mathcal{F})^{\perp}\cup T_x\mathcal{F}'>\\ &= \dim\mathcal{F}'-\dim\mathcal{F}\\ &= co\dim\mathcal{F}-co\dim\mathcal{F}'.\end{aligned}$$

Soit ω la 1-forme de FEDIDA définissant $\mathcal{F}$, et soit, en tout point x de M, $\overline{\omega}_x$ l'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels rendant commutatif le diagramme de projections

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "\omega_x"] \arrow[d] & \mathcal{G} \\ \mathcal{V}_x(\mathcal{F}) \arrow[ur, "\overline{\omega}_x"'] & \end{tikzcd}$$

et σ l'application de $\mathcal{G}$ dans $\ell(M,\mathcal{F})$ qui à tout $\lambda \in \mathcal{G}$ associe $\sigma(\lambda)$ définie par $\sigma(\lambda) = (\overline{\omega}_x \circ ev_x)^{-1}(\lambda)$; σ est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\ell(M,\mathcal{F})$.

On remarquera que pour tous X, $Y \in \ell(M,\mathcal{F})$,

1) $\omega(X)$ est une fonction constante sur M

2) $\sigma^{-1}(X) = \omega(X)$ et

3) $\omega[X,Y] = [\omega(X), \omega(Y)]$.

Il en résulte que σ est aussi un isomorphisme d'algèbres : c'est cet isomorphisme canonique qui permet d'identifier $\mathcal{G} = Lie(G)$ et l'algèbre de Lie structurale $\ell(M,\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$. Ici pour la clarté de la démonstration nous nous garderons de faire une telle identification. Ceci étant, considérons le système différentiel $\mathcal{P}$ défini sur M par

$$\mathcal{P}(x) = T_x\mathcal{F} \oplus ev_x\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$$

Soit $\mathcal{X}(\mathcal{P})$ et $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ les $\mathcal{A}^0(M)-$modules des champs de vecteurs tangents respectivement à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{F}$. On a

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus \left(\mathcal{A}^0(M) \otimes \widetilde{\mathcal{H}}\right).$$

Comme les champs de vecteurs de $\widetilde{\mathcal{H}}$ sont feuilletés pour $\mathcal{F}$, cette décomposition permet de voir que le module $\mathcal{X}(\mathcal{P})$ est stable par le crochet et que par suite $\mathcal{P}$ est un système différentiable complètement intégrable qui défini $\mathcal{F}'$. Ainsi la sous-algèbre de Lie $\mathcal{H} = \sigma^{-1}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{G}$ et le sous-groupe de Lie connexe H dans G correspondant sont définis sans ambiguïté à partir de l'extension $\mathcal{F}'$.

Réciproquement la donnée d'un sous-groupe de Lie connexe H de G permet de définir sur M un système différentiel $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P}(x) = T_x\mathcal{F} + ev_x(\sigma(Lie(H))) \text{ (cette somme est en fait directe).}$$

Le module de champs correspondant étant

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus \left(\mathcal{A}^0(M) \otimes \sigma(Lie(H))\right)$$

et σ étant un isomorphisme d'algèbres, il est facile de voir que le système différentiel $\mathcal{P}$ ainsi défini est complètement intégrable, et le feuilletage $\mathcal{F}'$ qu'il définit est bien sûr une extension de $\mathcal{F}$ puisque pour tout $x \in M$, on a

$$T_x\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(x) = T_x\mathcal{F}'.$$

Et la correspondance biunivoque est ainsi établie.

2- Soit $\mathcal{F}_H$ une extension de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ correspondant à H, soit $(e_1, ..., e_q)$ une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ telle que $\left(e_{q'+1}, ..., e_q\right)$ engendre $\mathcal{H}$ et $\omega = \sum_{i=1}^{q} \omega^i \otimes e_i$ la 1-forme de FEDIDA de $\mathcal{F}$. Puisque en tout point de M les 1-formes scalaires $\omega^1, ..., \omega^q$ sont linéairement indépendantes, alors les 1-formes scalaires $\omega^1, ..., \omega^{q'}$ sont aussi linéairement indépendantes partout et la condition de Maurer-Cartan $(*)$ assure que le système différentiel $\omega^1 = ... = \omega^{q'} = 0$ est complètement intégrable et définit donc un feuilletage $\mathcal{F}'$ de codimension q' qui n'est rien d'autre que le $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage défini par ω.

Par ailleurs, encore comme $\sigma^{-1}(X) = \omega(X)$ si $X \in \widetilde{\mathcal{H}}$=$\sigma(\mathcal{H})$ alors pour tout $X \in \widetilde{\mathcal{H}}$, $\omega(X) \in \mathcal{H}$. Ce qui permet alors de voir que pour tout k; $1\leq k \leq q'$, et pour tout $X \in \widetilde{\mathcal{H}}$, $\omega^k(X) = 0$, *i.e.* X est tangent à $\mathcal{F}'$. Ce qui montre que pour tout $x \in M$,

$$T_x\mathcal{F}_H = T_x\mathcal{F} \oplus ev_x\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) \subset T_x\mathcal{F}'$$

et à cause d'égalité des dimensions, on a en fait $T_x\mathcal{F}_H = T_x\mathcal{F}'$; $\mathcal{F}_H$ est bien le $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage associé à $\mathcal{F}$.

- Réciproquement si $\mathcal{F}'$ est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage défini par ω et si $\mathcal{D}$ est une développante de FEDIDA de $\mathcal{F}$ définie sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M, et si $\widetilde{\mathcal{F}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}'}$ sont les feuilletages relevés sur $\widetilde{M}$ respectifs de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, alors l'application $\mathcal{D}$ étant aussi une développante du $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage $\mathcal{F}'$, par la proposition 3.2.4, on a

$$\widetilde{\mathcal{F}'} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,H}.$$

Comme

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^*\mathcal{F}_{G,\{e\}} \text{ et } \mathcal{F}_{G,\{e\}} \subset \mathcal{F}_{G,H},$$

alors $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \widetilde{\mathcal{F}'}$ et $\mathcal{F}'$ est une extension de $\mathcal{F}$.

Montrons maintenant que le feuilletage $\mathcal{F}_H$ est riemannien.

L'inclusion $T\mathcal{F} \subset T\mathcal{F}_H$ induit un morphisme canonique surjectif α de fibrés vectoriels de $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ sur $\mathcal{V}(\mathcal{F}_H)$ tel que

$$\begin{array}{ccccc} & TM & \overset{Id}{\rightarrow} & TM & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi_{_H} \\ & \mathcal{V}(\mathcal{F}) & \overset{\alpha}{\rightarrow} & \mathcal{V}(\mathcal{F}_H) & \end{array}$$

est un diagramme commutatif où π et $\pi_{_H}$ sont les projection canoniques.

Soit g une métrique quasi-fibrée relativement à $\mathcal{F}$.

Avec cette métrique, on a les identifications

$$(T\mathcal{F})^{\perp} = \mathcal{V}(\mathcal{F}) = (Ker\alpha) \oplus (Ker\alpha)^{\perp} \qquad (**)$$

et

$$(Ker\alpha)^{\perp} = \mathcal{V}(\mathcal{F}_H) = (T\mathcal{F}_H)^{\perp} \qquad (***)$$

de sorte qu'on peut regarder $\mathcal{V}(\mathcal{F}_H)$ comme un sous-fibré de $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Ainsi, tout champ normal à $\mathcal{F}_H$ est normal à $\mathcal{F}$.

Par ailleurs, $\mathcal{F}$ étant un $G-$feuilletage de Lie à feuilles denses, $\ell(M,\mathcal{F})$ et l'algèbre de Lie de G sont isomorphes de dimension la codimension de $\mathcal{F}$. Il en résulte d'après la proposition 1.6.12 qu'il existe en tout point x de M un ouvert U contenant x tel que la restriction à U de tout champ de $\ell(M,\mathcal{F})$ soit un champ de Killing transverse local pour $\mathcal{F}$.

Pour montrer que la métrique g est quasi-fibrée pour $\mathcal{F}_H$, il suffit d'après la proposition 1.6.3 d'établir, quelques soient des champs de vecteurs Y et Z sur un ouvert U de M feuilletés pour la restriction de $\mathcal{F}_H$ à U et normaux à $\mathcal{F}_H$, que

$$X_{\mathcal{F}_H}\, g(Y,Z) = 0$$

pour tout champ de vecteurs $X_{\mathcal{F}_H}$ tangent à $\mathcal{F}_H$. C'est-à-dire, pour tout $x \in U$,

$$X_{\mathcal{F}_H} g\,(Y, Z)\,(x) = 0.$$

Le problème étant local on peut supposer que l'ouvert U contenant x est tel que la restriction à U de tout champ de $\ell\,(M, \mathcal{F})$ est un champ de Killing transverse local pour $\mathcal{F}$.

Soient U un tel ouvert de M , $X_{\mathcal{F}_H}$ un champ de vecteurs tangent à $\mathcal{F}_H$, Y et Z deux champs de vecteurs sur U feuilletés pour la restriction de $\mathcal{F}_H$ à U et normaux à $\mathcal{F}_H$.

Comme $\mathcal{X}\,(\mathcal{F}_H) = \mathcal{X}\,(\mathcal{F}) \oplus \left(\mathcal{A}^0\,(M) \otimes \widetilde{\mathcal{H}}\right)$, il existe $X_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}\,(\mathcal{F})$, $X_{_H} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ et $f \in \mathcal{A}^0\,(M)$ tels que

$$X_{\mathcal{F}_H} = X_{\mathcal{F}} + f X_{_H}.$$

Ainsi

$$X_{\mathcal{F}_H} g\,(Y, Z) = X_{\mathcal{F}} g\,(Y, Z) + f X_{_H} g\,(Y, Z)\,.$$

La restriction de $X_{_H}$ à U étant un champ de Killing transverse local pour $\mathcal{F}$ et les champs de vecteurs locaux Y et Z étant normaux à $\mathcal{F}$ on a nécessairement

$$X_{_H} g\,(Y, Z) = g\left(\left[X_{_H}, Y\right], Z\right) + g\left(Y, \left[X_{_H}, Z\right]\right) = 0$$

car $X_{_H}$ tangent à $\mathcal{F}_H$ et Y, Z feuilletés pour la restriction de $\mathcal{F}_H$ à U alors $\left[X_{_H}, Y\right]$ et $\left[X_{_H}, Z\right]$ sont tangents à $\mathcal{F}_H$ donc orthogonaux à Y et Z.

Ensuite comme Y, Z sont normaux à $\mathcal{F}$ et la métrique g est quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$, alors

$$X_{\mathcal{F}}g\left(Y,Z\right)=g\left(\left[X_{\mathcal{F}},Y\right],Z\right)+g\left(Y,\left[X_{\mathcal{F}},Z\right]\right)=0$$

pour les mêmes raisons que précédemment.

Il résulte de ce qui précède que $X_{\mathcal{F}_H}g\left(Y,Z\right)=0$. Ainsi $\mathcal{F}_H$ est riemannien.

En utilisant les identifications $(**)$ et $(***)$ on obtient :

$$\mathcal{V}\left(\mathcal{F}_H\right)=\frac{\mathcal{V}\left(\mathcal{F}\right)}{Ker\alpha}.$$

Comme $\mathcal{V}\left(\mathcal{F}\right)$ en tant que fibré normal d'un feuilletage de Lie est trivial $\left(\mathcal{V}\left(\mathcal{F}\right)\cong M\times\mathcal{G}\right)$ et comme $Ker\alpha$ est aussi trivial $\left(Ker\alpha\cong M\times\mathcal{H}\right)$, alors $\mathcal{V}\left(\mathcal{F}_H\right)$ est trivialisable et de section globale $\left(\sigma\left(e_1\right),...,\sigma\left(e_{q'}\right)\right)$. De façon précise

$$\mathcal{V}\left(\mathcal{F}_H\right)\cong M\times\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}\cong M\times\mathcal{H}^{\perp}$$

et où $\mathcal{G}=\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^{\perp}$ et $\mathcal{H}^{\perp}$ l'orthocomplément de $\mathcal{H}$ dans l'espace euclidien $\mathcal{G}=T_eG$ muni de la base orthonormée $\left(e_1,...,e_q\right)$.

3- Soit $\mathcal{F}_H$ une extension d'un feuilletage de Lie minimal $\mathcal{F}$ d'une variété compacte M, H étant le sous-groupe de Lie connexe associé à cette extension. Soit $(\mathcal{D},\rho)$ un développement de FEDIDA de $\mathcal{F}$ sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. Puisque le feuilletage $\mathcal{F}_H$ est aussi un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage, notons $\widetilde{\mathcal{F}_H}$ le relèvement de $\mathcal{F}_H$ sur $\widetilde{M}$; $\mathcal{F}_H$ est alors de même développante que le feuilletage de Lie $\mathcal{F}$.

a) En gardant les notations de la prop.3.2.4, il est clair que si le sous-groupe H est fermé, le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ *i.e.* le feuilletage de G par les translatés de H, est défini par la submersion canonique $\theta:G\to G/H$, et comme d'après la prop. 3.2.4,

$\widetilde{\mathcal{F}_H} = \mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G,H}$, il vient que

$$\mathcal{D}_H = \theta \circ \mathcal{D} : \widetilde{M} \to G/H$$

est une submersion définissant $\widetilde{\mathcal{F}_H}$, équivariante pour la représentation $\rho : \pi_1(M) \to G$ associée au feuilletage de Lie $\mathcal{F}$; par suite cette extension est un feuilletage transversalement homogène.

b) Réciproquement si $\mathcal{F}_H$ est une extension de $\mathcal{F}$ transversalement homogène de variété transverse une variété homogène T, comme $\widetilde{\mathcal{F}_H}$ est une extension de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et que ces deux feuilletages sont simples ($[2], [14]$), alors il existe une submersion θ de G sur T telle que la submersion $\mathcal{D}' = \theta \circ \mathcal{D}$ définit $\widetilde{\mathcal{F}_H}$. Si $\mathcal{F}_\theta$ est le feuilletage simple donnée par la submersion θ, il est clair que

$$\mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G,H} = \widetilde{\mathcal{F}_H} = \mathcal{D}^* \mathcal{F}_\theta.$$

Puisque $\mathcal{D}$ est une submersion surjective on a évidemment

$$\mathcal{F}_{G,H} = \mathcal{D}\mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G,H} = \mathcal{D}\mathcal{D}^* \mathcal{F}_\theta = \mathcal{F}_\theta,$$

et il en résulte que le sous-groupe H est la composante connexe de la fibre $\theta^{-1}(\theta(e))$ qui contient l'élément neutre e de G. Comme cette fibre est fermée dans G, alors H est aussi une partie fermée de G.

Ce qui précède en a) assure que cette extension $\mathcal{F}_H$ est un $G/H-$feuilletage transversalement homogène dont ρ serait une réprésentation.

En plus, si le sous-groupe H est normal dans G, alors le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$, *i.e.*le feuilletage de G par les translatés de H est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage de Lie. Comme le groupe de Lie G est pris connexe et simplement connexe, alors ce feuilletage est necessairement un feuilletage simple [14] ; par suite le sous-groupe H étant la feuille passant par l'élément neutre est fermée et le feuilletage $\mathcal{F}_{G,H}$ est défini par la projection canonique $\theta : G \to G/H$. Ensuite puisque θ est un morphisme de groupes, alors le feuilletage extension $\mathcal{F}_H$ de $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Lie car son feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}_H}$ sur $\widetilde{M}$ est défini par la submersion $\theta \circ \mathcal{D}$ équivariante pour la réprésentation $\rho' = \theta \circ \rho : \pi_1(M) \to G/H$.

Réciproquement si l'extension $\mathcal{F}_H$ est un feuilletage de Lie et si $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to G$ et $\mathcal{D}_H : \widetilde{M} \to G'$ sont des développantes de FEDIDA respectives pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_H$, alors, on montre comme dans [9], que si Γ est le groupe d'holonomie du feuilletage de Lie

$\mathcal{F}$, il existe une submersion θ de G sur G' telle que

1)

$$\mathcal{D}_H = \theta \circ \mathcal{D}.$$

2) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\theta} & G' \\ \gamma \downarrow & & \downarrow_{\theta(\gamma)} \\ G & \xrightarrow{\theta} & G' \end{array}$$

i.e. pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $g \in G$,

$$\theta(\gamma.g) = \theta(\gamma).\theta(g).$$

Comme Γ est dense dans G et que la restriction de θ à Γ est un homomorphisme de groupes qui est continu, alors par continuité, θ est évidemment un morphisme de groupes. Dans ces conditions, $\mathcal{F}_H$ est aussi une extension de Lie de $\mathcal{F}$ correspondant au sous-groupe K composante connexe de l'élément neutre du sous-groupe normal $Ker\theta$ de G. En raison de la correspondance biunivoque entre extensions et sous-groupes de Lie connexes, on a necessairement $H = K$ et le sous-groupe H est alors normal. ■

Remarque 3.3.3. *1- Il découle de cette dernière caractérisation que toute extension de Lie d'un feuilletage homogène minimal d'une variété compacte est également un feuilletage homogène.*

2- L'hypothèse que le feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ est minimal est essentielle comme le montre l'extension non riemannienne d'un "flot propre" du tore hyperbolique $\mathbb{T}^3_A$ du paragraphe 2.3.

En gardant les notations de la preuve du théorème précédent, considérons pour un $G-$feuilletage de Lie minimal $(M, \mathcal{F})$ d'une variété compacte et connexe, la 1-forme $\overline{\omega}_H$ sur M à valeurs dans $\mathcal{G}$ définie par

$$\overline{\omega}_{_H} = \alpha_{_H} \circ \omega \quad (i.e. \;\; \forall x \in M, \;\; \overline{\omega}_{_H}(x) = \alpha_{_H} \circ \omega_x \;),$$

où $\alpha_{_H}$ est la projection canonique de $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ sur $\mathcal{H}^\perp$. On vérifie que $\overline{\omega}_{_H} = 0$ est une équation de $\mathcal{F}_H$. On peut associer à cette une 1-forme une 2-forme de courbure

$$\Omega_H = d\omega_{_H} + \frac{1}{2}[\omega_{_H}, \omega_{_H}]$$

définie sur M à valeurs dans $\mathcal{G}$, où

$$\omega_{_H} = j_{_H} \circ \overline{\omega}_{_H},$$

$j_{_H}$ étant l'injection canonique de $\mathcal{H}^\perp$ dans $\mathcal{G}$.

En partant de la formule classique,

$$\Omega_H(X,Y) = X\omega_H(Y) - Y\omega_H(X) - \omega_H[X,Y] + [\omega_H(X), \omega_H(Y)],$$

et en remarquant que, pour tout $X \in \ell(M,\mathcal{F})$, $\omega_H(X)$ est une fonction constante, alors un calcul facile permet de voir que :

1) $\Omega_H(X,Y) = 0$ si X et Y sont tangents à $\mathcal{F}_H$,

2) $\Omega_H(X,Y) = -\alpha_H \sigma^{-1}[X,Y]$ si $X \in \sigma(\mathcal{H}) = \widetilde{\mathcal{H}}$ et $Y \in \sigma(\mathcal{H}^{\perp})$

3) $\Omega_H(X,Y) = (1-\alpha_H)\sigma^{-1}[X,Y]$ $X \in \sigma(\mathcal{H}^{\perp})$ et $Y \in \sigma(\mathcal{H}^{\perp})$

La 2-forme de courbure Ω_H étant une application $\mathcal{A}^0(M)-$bilinéaire de

$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{G}$, les relations précédentes déterminent parfaitement la 2-forme Ω_H.

En partant de cette 1-forme ω_H, on obtient les caractérisations suivantes d'une extension de Lie d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte.

Corollaire 3.3.4. *Si $\mathcal{F}_H$ est une extension d'un $G-$feuilletage de Lie minimal $(M,\mathcal{F})$ d'une variété compacte connexe, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1- $\mathcal{F}_H$ est une extension de Lie,

2- H est un sous-groupe normal,

3- ω_H est basique pour $\mathcal{F}_H$,

4- $\Omega_H = d\omega_H + \frac{1}{2}[\omega_H, \omega_H]$ est basique pour $\mathcal{F}_H$,

5- $\Omega_H = 0$

Démonstration. 5)⇒4) évident.

4)⇒3) : Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_H)$ et $Y \in \mathcal{X}(M)$.

$i_X\omega_H = 0$ car $\omega_H = 0$ est une équation de $\mathcal{F}_H$.

Comme Ω_H est $\mathcal{F}_H-$basique et $\omega_H(X) = 0$ on a

$$0 = \Omega_H(X, Y) = d\omega_H(X, Y) + [\omega_H(X), \omega_H(Y)] = (i_X d\omega_H)(Y),$$

ce qui implique que $i_X d\omega_H = 0$.

3)⇒2) : Soit $h_1 \in \mathcal{H}$ et $h_2 \in \mathcal{G}$.

On a $\sigma(h_1) \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_H)$ et $\sigma(h_2) \in \ell(M, \mathcal{F})$.

Comme ω_H est $\mathcal{F}_H-$basique et $\omega_H(\sigma(h_2)) = (\alpha_H \circ \omega)(\sigma(h_2))$ est une fonction constante puisque $\omega(\sigma(h_2))$ l'est, alors puisque $\sigma(h_1) \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_H)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_H(\sigma(h_1), \sigma(h_2)) \\ &= \sigma(h_1)\,\omega_H(\sigma(h_2)) - \sigma(h_2)\,\omega_H(\sigma(h_1)) - \omega_H[\sigma(h_1), \sigma(h_2)] \\ &= -\omega_H[\sigma(h_1), \sigma(h_2)]. \end{aligned}$$

$\omega_H = 0$ étant une équation de $\mathcal{F}_H$ et $\ell(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs $\mathcal{F}-$feuilletés transverses, alors

$$[\sigma(h_1), \sigma(h_2)] \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_H) \cap \ell(M, \mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{H}).$$

σ étant un isomorphisme d'algèbre de Lie, il vient

$$[h_1, h_2] = \sigma^{-1}[\sigma(h_1), \sigma(h_2)] \in \sigma^{-1}\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{H}.$$

2)⇒1) : C'est un résultat du théorème 3-3-2.

1)⇒5) : $\mathcal{F}_H$ étant un feuilletage de Lie, alors la projection canonique $\alpha_{_H} : \mathcal{G} \to \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ est un homonorphisme d'algèbre de Lie. Il résulte de $\omega_{_H} = \alpha_{_H} \circ \omega$ que
$\Omega_H = d\alpha_{_H} \circ \omega + \frac{1}{2}\left[\alpha_{_H} \circ \omega, \alpha_{_H} \circ \omega\right] = \alpha_{_H} \circ \left(d\omega + \frac{1}{2}\left[\omega, \omega\right]\right) = \alpha_{_H} \circ \Omega.$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ étant un feuilletage de Lie, sa forme de courbure Ω est identiquement nulle, ce qui implique que $\Omega_H = 0$. ■

On notera que lorsque l'extension $\mathcal{F}_H$ est de Lie, la 1-forme $\omega_{_H}$ expliciter ci-dessus est sa 1-forme de FEDIDA [14].

Corollaire 3.3.5. *Soit $(M, \mathcal{F})$ un $G-$feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte connexe.*

Si le groupe fondamental $\pi_{_1}(M)$ est virtuellement résoluble (resp. abélien) toute extension de $\mathcal{F}$ est transversalement homogène (resp. de Lie).

En particulier :

1) toute extension d'un feuilletage linéaire minimal du tore est également linéaire,

2) toute extension d'un flot riemannien minimal d'une variété compacte est conjuguée à un feuilletage linéaire minimal du tore.

En particulier tout drapeau à flot riemannien minimal d'une variété compacte est conjuguée à un drapeau linéaire. Ce qui est une généralisation du résultat obtenu dans [3].

Démonstration. En considérant sur M une métrique quasi-fibrée quelconque pour $\mathcal{F}$, cette métrique étant complète et $\pi_{_1}(M)$ virtuellement résoluble, et comme par ailleurs toute extension de $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien minimal (*cf. théo.*3.3.2) alors d'après le théo.1.6.13. cette extension est aussi un feuilletage transversalement homogène.

Si en plus $\pi_1(M)$ est abélien, alors le groupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ étant abélien et dense dans G, il vient par continuité de la loi de groupe, que le groupe de Lie G est abélien et par suite toute extension de $\mathcal{F}$ est de Lie.

Pour le reste cela tient de la partie 1) de la remarque 3.3.3 et du résultat de Yves CARRIERE sur les flots riemanniens minimaux [5]. ■

Ensuite, en rappelant qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ est dit **dense** dans un autre feuilletage $\mathcal{F}'$ si toute feuille de $\mathcal{F}$ est dense dans la feuille de $\mathcal{F}'$ qui la contient, on a :

Corollaire 3.3.6. *1) si une variété compacte à groupe fondamental virtuellement résoluble supporte un $G-$feuilletage de Lie minimal, alors tout sous-groupe de Lie connexe de G est fermé, et toute extension de ce feuilletage est transversalement homogène.*

2) Si un flot riemannien $(M, \mathcal{F})$ d'une variété compacte est dense dans une de ses extensions $\mathcal{F}'$ alors la restriction de $\mathcal{F}'$ à l'adhérence de l'une quelconque de ses feuilles est conjuguée à un feuilletage linéaire.

Démonstration. 1) En effet au sous-groupe de Lie H de G, il correspond d'après le théo.3.3.2 une extension de ce $G-$feuilletage de Lie minimal qui par le théorème de HAEFLIGER (*c.f. théo.* 1.6.14.) est un feuilletage transversalement homogène ; ce qui, d'après le théo.3.3.2 encore implique que H est fermé.

2) Ceci résulte immédiatement de [5] et du corollaire 3.3.5 précédent. ■

Avant de donner la conclusion rappelons ce qui suit :

- Soit $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs feuilletés globaux. Si X est un tel champ et $\overline{X}$ le champ feuilleté transverse correspondant, alors une **orbite** de $\overline{X}$ est la réunion des feuilles de $(M, \mathcal{F})$ qui rencontre une même orbite de X.

On définit de même une orbite d'une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs feuilletés transverses $\ell(M, \mathcal{F})$ [1].

- Tout feuilletage défini par les orbites d'une algèbre de Lie de champs de Killing est un feuilletage riemannien.

Par analogie au théorème de MOLINO sur les feuilletages transversalement parallélisables [18], le théo.3.3.2 permet de dire en

Conclusion 3.3.7. *Si $\mathcal{F}'$ est une extension d'un feuilletage transversalement parallélisable $\mathcal{F}$ d'une variété compacte connexe, telle que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{F}'$ alors :*

1- les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}'$ forment une fibration localement triviale égale à la fibration basique de $\mathcal{F}$,

2- les feuilles de $\mathcal{F}'$ sont les orbites d'une sous-algèbre de Lie $\mathcal{H}$ de l'algèbre de Lie structurale $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$,

3- le feuilletage $\mathcal{F}'$ est transversalement riemannien et à fibré normal trivial,

4- la restriction de $\mathcal{F}'$ à l'adhérence de chaque feuille de $\mathcal{F}$ est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}-$feuilletage associé au $G-$feuilletage de Lie défini par $\mathcal{F}$ dans cette restriction.

Perspectives de recherche

1) On a montré (*c.f. théo.* 3.3.2) que pour un feuilletage $\mathcal{F}$ de Lie minimal sur une variété compacte, toute extension $\mathcal{F}'$ est riemannienne. Par contre si $\mathcal{F}$ est seulement riemannien, $\mathcal{F}'$ n'est pas forcement riemannien (*c.f. paragraphe* 2.3.). Néanmoins, on peut légitimement se poser la question suivante :

Si $\mathcal{F}$ est transversalement parallélisable, toute extension $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est-elle riemannienne ? voire transversalement parallélisable ?

2) Les travaux de FEDIDA et MOLINO nous amènent aussi à étudier la question suivante :

Dans quel cas un feuilletage donné $\mathcal{F}$ admet-il une extension $\mathcal{F}'$ dont les feuilles sont les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$?

On sait que l'existence de $\mathcal{F}'$ est assurée dans le cas où $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement complet [18].

Bibliographie

[1] **R.Almeida et P.Molino, "***Flots riemanniens sur les 4-variétés compactes*" Tôhoku Mathematical Journal, The Second Series, Vol. 38, no. 2, pp. 313-326 (june 1986).

[2] **R.A.Blumenthal, "***Transversely homogenous foliations*". Ann. Inst. Fourier. 29, 4 (1979), 143-158.

[3] **B.Bossoto and H.Diallo,** "*Sur les drapeaux de feuilletages Riemanniens*", JP Journal of Geometry and Topology, 2, 3 (2002), 281-288.

[4] **G.Cairns, "***Feuilletages riemanniens et classes caractéristiques fines et exotiques*". Thèse 3è cycle, Montpellier (7 juin 1982).

[5] **Y.Carrière,** "*Flots Riemanniens. In Structures transverses des feuilletages*", Astérisque, 116 (1984), 31-52.

[6] **C.Camacho and A.Lins Neto,** "*Geometric theory of foliations*". Birkhäuser, (1985) .

[7] **C.Dadi et H.Diallo,** "*Quelques remarques sur les extensions de feuilletage*". Rev. Ivoir. Sci. Technol., 08 (2006) 107-114.

[8] **C.Dadi et H.Diallo, "***Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte*". Afrika Matematika, Série 3, volume 18 (2007) pp 34-45.

[9] **H.Diallo,** "*Sur les drapeaux de Lie*".Afrika Mathematika,3, 13 (2002),75-86.

[10] **H.Diallo,** "*Relèvement d'un drapeau riemannien et drapeaux de Lie complets du tore hyperbolique n+1- dimensionnel*". Ann. math. Blaise Pascal 12 (2005), 245- 258.

[11] **H.Diallo, "***Caractérisation des C^r-fibrés vectoriels, variétés biriemanniennes, drapeaux riemanniens*". Thèse d'Etat, Abidjan (2002).

[12] **J.Dieudonne,** "*Elément d'analyse*", tome 4. Paris Gauthier-Villars.

[13] **A.El Kacimi Alaoui, G.Guasp and M.Nicolau, "***On deformation of transversely homogenous foliations*". Prépublication. UAB., 4 (1999).

[14] **E.Fédida,** "*Sur l'existence des Feuilletages de Lie*". CRAS de Paris, 278 (1974), 835-837.

[15] **C.Godbillon,** "*Feuilletage ; Etude géométriques I*". Publ, IRMA, Strasbourg (1985).

[16] **A.Haefliger,** "*Groupoïdes d'holonomie et classifiants*". Astérisque, 116 (1984), 98- 107.

[17] **G.Hector and U.Hirsch,** "*Introduction to the geometry of foliations*", Vieweg Verlag, Braunschweig, Part A. 1981 ; Part B, 1983.

[18] **P.Molino,** "*Riemannian foliations*". Birkhäuser (1988).

[19] **T.Masson,** "*Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*", laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI, Bâtiment 210, 91405 Orsay Cedex France (2001).

[20] **G.Reeb,** "*Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*". Hermann Paris (1950) .

[21] **B.Reinhart,** "*Foliated manifold with bundle-like metrics*", Ann. of Math. 69 (1959) 119-132.

[22] **W.Thurston, "***The geometry and topology of 3-manifolds*". Chapitre IV, Princeton University.