Relèvements cristallins de représentations galoisiennes

Alain Muller

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et C.N.R.S. (UMR 7501)
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex

Relèvements cristallins de représentations galoisiennes

Alain Muller

4 novembre 2013

Table des matières

Introduction

Le présent travail porte sur le problème de relever certaines représentations galoisiennes : si p désigne un nombre premier, si K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et si G_K est le groupe de Galois absolu de K, on démontre que pour une certaine classe de représentations continue $\bar{r} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, il existe une relèvement $r : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Z}}_p)$ qui est cristallin. Cela répond partiellement à une question posée par Caruso et Liu dans [CL11].

Un tel problème est motivé par des questions de nature globale. On pense notamment aux généralisations des conjectures de Serre : si F est un corps de nombres, il est espéré que certaines représentations continues $\bar{r} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ soient modulaires (en un sens que l'on ne précise pas ici). Or dans ce contexte, une représentation modulaire provient d'une représentation en caractéristique 0 à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_p$ qui est cristalline en les places v de F divisant p. Démontrer que *toute* représentation continue $\bar{r} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ admet un relèvement cristallin permettrait de démontrer ainsi qu'il n'y a pas "d'obstruction locale" dans ce type de conjecture. La littérature concernant ce sujet est très fournie. On pourra consulter [BDJ10], [Gee11] section 4, ainsi que l'introduction de [BLGG13] pour plus de détails.

Au début des années 90, Mazur commença l'étude des relèvements (ou plutôt déformations) de représentations galoisiennes [Maz89] . Si G désigne un groupe profini et si k est un corps fini, il démontra que sous certaines conditions sur la représentation continu

$$\bar{r} : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$$

(et sur G), l'ensemble des déformations est paramétré par un certain anneau $R(\bar{r})$:

le foncteur des déformations de $\bar{r}$ est représentable par $R(\bar{r})$.
Une description explicite de $R(\bar{r})$ permettrait d'obtenir une classification complète de tous les relèvements de $\bar{r}$. En général, on sait présenter cet anneau comme un quotient d'un anneau de séries formelles à coefficients dans $\mathcal{O}$ (anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) à plusieurs variables

$$R(\bar{r}) = \mathcal{O}[[x_1, \ldots, x_m]]/I.$$

On sait calculer le nombre m de variables et borner le nombre minimal de générateurs de l'idéal I mais il est souvent difficile d'avoir une description plus explicite.

L'intérêt de $R(\bar{r})$ est qu'il possède des quotients qui encodent certaines propriétés des relèvements (par exemple être non ramifié en un nombre premier, être cristallin, etc.). On pourra consulter [Ram93] pour un exemple d'une telle propriété.
Kisin démontra dans [Kis08] que les relèvements cristallins à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a, b]$ sont paramétrés par un quotient de $R(\bar{r})$ que l'on note $R_{cris,a,b}$ (l'existence de ce quotient dans des cas particuliers était déjà connu suite aux travaux de Ramakrishna, Breuil ou encore Berger : on pourra consulter l'introduction de [Kis08] pour avoir une généalogie plus complète et plus précise). Il démontre même plus car il parvient à donner une bonne description de $R_{cris}[1/p]$, mais sous la condition restrictive que $R_{cris,a,b}$ admettent des points en caractéristique 0.

L'objet de cette thèse est de démontrer que pour certaines représentations

$$\bar{r} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

continues de G_K, il existe un relèvement $r : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Z}}_p)$ de $\bar{r}$ en une représentation cristalline. C'est un problème purement local, tout comme les méthodes utilisées pour le résoudre.

Détaillons le contenu de ce texte. Le premier chapitre est entièrement consacré à des rappels sur des notions comme la cohomologie galoisienne et la théorie de Hodge p-adique. On y rappelle le lien entre extensions de représentations galoisiennes et cohomologie, on rappelle la notion de représentation de Hodge-Tate, de de Rham, cristalline ou semi-stable à coefficients, ainsi qu'un résultat sur les extensions de représentations cristallines.

Le deuxième chapitre est le coeur de ce travail. On utilise la machinerie introduite au chapitre précédent pour relever des représentations $\bar{r} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ en caractéristique 0. Dans un premier temps, on ne prescrit aucune condition du type "être cristallin" pour les relèvements considérés. En revanche, on impose le fait de relever une suite de Jordan-Hölder donnée à l'avance. L'idée principale est de décomposer $\bar{r}$ en une extension successive de représentations absolument irréductibles, de relever ces facteurs irréductibles en des représentations à coefficients dans $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ désignant une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'uniformisante π) puis de relever les diverses extensions, d'abord modulo π^2 puis modulo π^3 puis modulo π^4, etc. et de passer à la limite.

On commence donc d'abord par classifier les représentations absolument irréductibles de G_K à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il est bien connu que ces représentations sont induites d'extensions peu ramifiées de caractères fondamentaux de Serre. Relever de telles représentations en caractéristique 0 est aisé car il suffit alors de relever les caractères fondamentaux en caractéristique 0. C'est une simple application de la théorie locale du corps de classes et ces caractères se relèvent alors en des caractères de Lubin-Tate.

On s'attaque ensuite aux représentations de longueur 2, i.e. telles qu'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bar{\rho}_1 \longrightarrow \bar{r} \longrightarrow \bar{\rho}_2 \longrightarrow 0,$$

avec $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$ absolument irréductibles. Une telle représentation définit un élément $cl(\bar{r}) \in \mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^*)$. Si ρ_1 et ρ_2 sont des relèvements de $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$, on relève, lorsque c'est possible, l'élément $cl(\bar{r})$ en un élément de $\mathrm{H}^1(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*/\pi^n)$ pour tout entier $n \geq 1$. Le résultat principal est qu'on peut toujours le faire quitte à parfois modifier quelque peu ρ_1 :

Proposition 0.0.1. *Soit $\bar{r} : G_K \longrightarrow GL_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue, extension de $\bar{\rho}_2$ par $\bar{\rho}_1$. Supposons $\bar{\rho}_1 \not\cong \bar{\rho}_2(1)$ et soient ρ_1 et ρ_2 des relèvements* quelconques *de $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$. Il existe un relèvement r de $\bar{r}$ qui est extension de ρ_2 par ρ_1.*

Proposition 0.0.2. *Soit $0 \longrightarrow \bar{\rho}(1) \longrightarrow \bar{r} \longrightarrow \bar{\rho} \longrightarrow 0$ une représentation de longueur 2. Soient ρ et ρ' deux relèvements de $\bar{\rho}$ à coefficients dans $\mathcal{O}$ tels que $\rho = \rho' \mod \pi^2$. Il existe un caractère $\theta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ continu non ramifié, trivial modulo π, et un relèvement r de $\bar{r}$, extension de ρ par $\rho'(1)\theta$.*

Pour démontrer cette deuxième proposition, on généralise les notions d'extensions peu ramifiées et très ramifiées introduite par Serre (c.f. §(2.4) de [Ser87]) aux cas des éléments du groupe $\mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ lorsque $\bar{\rho}$ est absolument irréductible en se ramenant au cas classique via l'application trace : $\mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \overline{\mathbb{F}}_p(1)\right)$. Cela revient grosso modo à ramener l'étude des relèvements de représentations de longueur 2 à l'étude des relèvements de représentations réductibles de dimension 2.

On démontre que l'obstruction à relever une telle représentation se calcule par un cup-produit, élément de $\mathrm{H}^1\left(G_K, \overline{\mathbb{F}}_p(1)\right)$, que l'on est en mesure d'évaluer grâce à la théorie locale du corps de classes et qu'en tordant ρ' par un caractère θ non ramifié et judicieusement choisi, cette obstruction s'annule.
Enfin, à l'aide de ces deux propositions, on démontre des résultats de relèvements pour certaines représentations $\bar{r} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Pour cela, on introduit la notion de matrice très bien échelonnée (c.f. section 2.4.5) et on démontre le théorème :

Théorème 0.0.3. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K et supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\bar{r}$ s'écrit sous la forme*

$$R = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * & * & * \\ 0 & \bar{T}_{n-1} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_0 \end{pmatrix}$$

où

1. *chaque $\bar{T}_i = \oplus_1^{m_i} \bar{\rho}_i$ avec $\bar{\rho}_i$ absolument irréductible, de dimension non divisible par p,*
2. *soit $\bar{\rho}_{i+1} = \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas, $\bar{T}_{i+1}$ est le quotient maximal semi-simple de $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ dont tous les facteurs sont isomorphes à $\bar{\rho}_{i+1}$*
3. *soit $\bar{\rho}_{i+1} \ncong \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas $\bar{r}_{i+1}$ n'admet pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_i(1)$,*
4. *la matrice R est très bien échelonnée,*
5. *pour tout $1 \leq i \leq n-2$ $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ n'admet pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_{i-1}(1)$.*

   Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des caractères triviaux modulo π^2. Soit ρ_i un relèvement de $\bar{\rho}_i$. Si $\bar{\rho}_{i+1} = \bar{\rho}_i(1)$, on choisit $\rho_{i+1} = \rho_i(1)$. Il existe alors un relèvement de $\bar{r}$ donné matriciellement par

$$\begin{pmatrix} T_n & * & * & * & * \\ 0 & T_{n-1} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_0 \end{pmatrix}$$

avec $T_i = \oplus_{j=1}^{m_i} \rho_i \alpha_i \theta_{i,j}$, chaque $\theta_{i,j}$ étant un caractère non ramifié, trivial modulo π, non trivial modulo π^2 et tel que pour chaque i fixé, les $\theta_{i,j}$ sont deux à deux distincts lorsque $1 \leq j \leq m_i$.

Utilisant alors les résultats précédents, il est immédiat de construire des relèvements qui sont cristallins, dès lors que l'on sait relever une représentation absolument irréductible $\bar{r} : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ en une représentation cristalline, ce qui est toujours le cas.

On a alors :

Théorème 0.0.4. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K et supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice R de $\bar{r}$ s'écrit*

$$R = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * & * & * \\ 0 & \bar{T}_{n-1} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_0 \end{pmatrix}$$

où

1. *chaque $\bar{T}_i = \oplus_1^{m_i} \bar{\rho}_i$ avec $\bar{\rho}_i$ absolument irréductible et p ne divise la dimension d'aucun des $\bar{\rho}_i$,*
2. *soit $\bar{\rho}_{i+1} = \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas, $\bar{T}_{i+1}$ est le quotient maximal semi-simple de $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ dont tous les facteurs sont isomorphes à $\bar{\rho}_{i+1}$,*
3. *soit $\bar{\rho}_{i+1} \not\cong \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas $\bar{r}_{i+1}$ n'admet pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_i(1)$,*
4. *la matrice R est très bien échelonnée,*
5. *pour tout $1 \leq i \leq n-2$ $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ n'admet pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_{i-1}(1)$.*

Alors $\bar{r}$ se relève en une représentation cristalline r.

On discute enfin rapidement quelques cas en longueur 3 qui ne sont pas couverts par le théorème précédent et on démontre en particulier que toute représentation modulo π de G_K de dimension 3 se relève en une représentation cristalline.
Mentionnons que certains résultats présentés ici (notamment en longueur 2) ont été obtenu indépendament par Toby Gee, Tong Liu et David Savitt dans un travail non publié.

Notations et conventions

Sauf mention contraire, dans tout ce texte

p	est un nombre premier.
$\mathbb{F}_p$	est le corps fini de cardinal p.
$\bar{\mathbb{F}}_p$	est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.
$\mathbb{Q}_p$	est le corps des nombres p-adiques.
$\mathbb{Z}_p$	est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p$.
K	est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.
$\bar{K}$	est une clôture algébrique de K.
$\mathcal{O}_K$	est l'anneau des entiers de K.
ϖ	est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$.
k	est le corps résiduel de $\mathcal{O}_K$.
K_n	est l'extension non ramifiée de K de degré n lorsque $n \geq 1$.
$\mathcal{O}$	est l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.
π	est une uniformisante de $\mathcal{O}$.
$\mathbb{F}$	est le corps résiduel de $\mathcal{O}$.
G_K	est le groupe de Galois absolu de K.
I_K	est le sous-groupe d'inertie de G_K
$\mu_m(L)$	est le groupe des racines m-èmes de l'unité (m entier) du corps L.
χ_p	est le caractère cyclotomique p-adique.
ω_p	est la réduction modulo p de χ_p.
$\mathbb{Z}_p(n)$	est le $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1 muni de l'action de χ_p^n avec $n \in \mathbb{Z}$.

Si T est un module libre sur $\mathcal{O}$ et si $\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}(T)$ est un homomorphisme continu, on notera souvent ρ en lieu et place de (ρ, T) pour désigner la représentation correspondante.

On notera toujours $\bar{\rho}$ pour la réduction modulo π de ρ et par ρ/π^n pour la réduction modulo π^n (ne pas confondre avec la matrice de la représentation dans une base dont tous les coefficients sont divisés par π^n : une telle confusion n'a pas lieu d'être puisqu'une telle division n'apparaitra jamais).

Si A est l'un des anneaux $\mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}/\pi^m$ pour un certain entier m, et si ρ est une représentation de G_K à coefficients dans A dont on note T le A-module libre sous-jacent, alors pour tout entier relatif n, $\rho(n)$ est la représentation de G_K correspondante à $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(n)$.

On parlera de représentation modulo π pour désigner une représentation continue à coefficients dans $\mathbb{F}$. De même, une représentation modulo π^n n'est rien d'autre qu'une représentation à coefficients dans $\mathcal{O}/\pi^n$.

CHAPITRE 1

Cohomologie galoisienne, extensions de représentations et théorie de Hodge p-adique

1.1 Cohomologie Galoisienne

1.1.1 Cohomologie des groupes : définitions et premières propriétés.

Soit G un groupe profini. On note $\mathrm{Mod}(G)$ la catégorie des G-modules topologiques : ses objets sont les groupes abéliens topologiques M munis d'une action continue de G (si M est fini, on imposera toujours la topologie discrète sur M) et ses morphismes ne sont rien d'autre que les homomorphismes de groupes continus. Cette catégorie admet suffisamment d'injectifs (Lemma (2.6.5) [NSW08]). Considérons alors le foncteur exact à gauche

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}(G) & \longrightarrow & \text{Groupes} \\ M & \longmapsto & M^G = \{m \in M \,|\, \forall g \in G, g.m = m\} \end{array}$$

que l'on peut dériver pour obtenir, pour tout entier n, des groupes $\mathrm{H}^n(G, M)$.
Si M est muni d'une structure de A-module pour un anneau A commutatif unitaire et si l'action de G sur M préserve cette structure, alors $\mathrm{H}^n(G, M)$ est également muni d'une structure de A-module. On notera $A - Mod(G)$ la catégorie des A-modules munis d'une action continue de G.

Dans la suite, on considèrera souvent les cas où A est un corps fini ou l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Par construction des foncteurs dérivés, si $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ est une suite exacte dans $A - Mod(G)$, alors il existe une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, M) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, N) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, L) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{H}^1(G, M) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, N) \longrightarrow \ldots$$

associée. L'homomorphisme $\delta_n : \mathrm{H}^{n-1}(G, L) \longrightarrow \mathrm{H}^n(G, M)$ est appelé homomorphisme de connexion.

Dans la pratique, on va être amené à faire quelques calculs explicites, notamment de l'homomorphisme de connexion δ_2. Il est alors plus commode de travailler avec une définition plus explicite de ces groupes de cohomologie.

1.1.2 Complexes de cochaînes

Soit M un objet de $A - Mod(G)$. Notons $\mathcal{C}^n(G, M)$ l'ensemble des applications *continues* de G^n dans M pour $n \geq 1$ et pour $n = 0$, considérons $\mathcal{C}^0(G, M) = M$.

Définition 1.1.1. L'application différentielle $\partial_n : \mathcal{C}^n(G, M) \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}(G, M)$ est l'application donnée par :

$$\begin{aligned}\partial_n f(g_1, \ldots, g_{n+1}) &= g_1.f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n)\end{aligned}$$

où $f \in \mathcal{C}^n(G, M)$ et $g_1, \ldots, g_{n+1} \in G$.

On vérifie que $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$, d'où un complexe de cochaînes

$$\mathcal{C}^0(G, M) \xrightarrow{\partial_0} \ldots \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}^n(G, M) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}^{n+1}(G, M) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \ldots$$

Définition 1.1.2. Le n-ième groupe de cocycles (les éléments étant appelés des n-cocyles) est $\mathcal{Z}^n(G, M) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$ pour $n \geq 0$.
Le n-ième groupe de cobords (les éléments étant appelés n-cobords) est $\mathcal{B}^n(G, M) = \mathrm{Im}(\partial_{n-1})$ pour $n \geq 1$ et $\mathcal{B}^0(G, M) = \{0\}$.

Théorème 1.1.3. *Avec les notations précédentes, on a*

$$H^n(G, M) \simeq \mathcal{Z}^n(G, M) / \mathcal{B}^n(G, M).$$

Démonstration. Voir par exemple [NSW08] Theorem 2.6.3. □

Exemples 1.1.4. 1. Si G agit trivialement sur M, on a $H^0(G,M) = M$.

2. On a $\mathcal{Z}^1(G,M) = \{f : G \to M \mid f(g_1g_2) = g_1.f(g_2) + f(g_1)\ \forall g_1, g_2 \in G\}$ (toutes les applications étant continues). C'est l'ensemble des homomorphismes croisés continus de G dans M.
   $\mathcal{B}^1(G,M) = \{f : G \to M \mid \exists m \in M,\ f(g) = g.m - m\}$. En particulier, si G agit trivialement sur M, on a $H^1(G,M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G,M)$(les homomorphismes continus de G dans M).

Calcul de l'homomorphisme de connexion

Lorsque l'on sera amené à relever certaines représentations galoisiennes, il sera nécessaire de comprendre certaines obstructions. Celles-ci, dans le cas particulier qui nous intéresse, s'obtiennent via l'homomorphisme de connexion δ_2. Voyons comment l'on obtient explicitement cet homomorphisme (c'est encore classique et résulte du lemme du serpent) : si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte dans $A - Mod(G)$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}^1/\mathcal{B}^1(L) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial^1"] & \mathcal{C}^1/\mathcal{B}^1(M) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial^1"] & \mathcal{C}^1/\mathcal{B}^1(N) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Z}^2(L) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{Z}^2(M) \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{Z}^2(N) &
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Si $x \in \mathrm{H}^1(G,N)$, la flèche du serpent nous donne un élément $y \in \mathrm{H}^2(G,L)$ qui est alors $\delta_2(x)$. Si l'on explicite la chasse au diagramme et abusant des notations, on a $y = \delta_2(x) = \alpha^{-1} \circ \partial_1 \circ \beta^{-1}(x)$.

Le cup-produit

Définition 1.1.5. Si A, B et C sont des objets de $A - Mod(G)$, l'application :

$$b : A \times B \longrightarrow C$$

est appelée G-accouplement si elle est A-bilinéaire et si $\forall \sigma \in G, \forall (a,b) \in A \times B$ on a

$$b(\sigma a, \sigma b) = \sigma b(a,b).$$

Proposition 1.1.6. *Soit $b : A \times B \longrightarrow C$ un tel accouplement. Alors b induit un accouplement que l'on note $\cup$:*

$$H^p(G,A) \times H^q(G,B) \longrightarrow H^{p+q}(G,C)$$

donné de façon explicite par :

$$(f \cup g)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{p+q}) = b\left(f(\sigma_1, \ldots, \sigma_p), \sigma_1 \ldots \sigma_p g(\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{p+q})\right)$$

où $f \in \mathcal{Z}^p(G, A)$ et $g \in \mathcal{Z}^q(G, B)$.

1.2 Représentations galoisiennes et cohomologie galoisienne

On se place à présent dans la situation qui nous intéresse : on se donne $G = G_K$, groupe de Galois absolu d'une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, ainsi que T un $\mathcal{O}$-module libre de type fini muni d'une action continue de G_K. Notons $\bar{T}$ la réduction modulo π de T.

1.2.1 Limites projectives de groupes de cohomologie

Le premier résultat concerne la dimension cohomologique de G_K. De façon plus précise, on a :

Proposition 1.2.1. *Soit M un G_K-module. Alors $\forall i \neq 0, 1, 2$, $H^i(G_K, M) = 0$.*

Démonstration. Voir Corollary (7.2.5) de [NSW08]. □

La proposition suivante nous dit que la cohomologie de T se retrouve en connaissant la cohomologie de chaque T/π^n :

Proposition 1.2.2. *Pour $i = 0, 1$ ou 2,*

$$H^i(G_K, T) = \varprojlim_n H^i(G_K, T/\pi^n T).$$

Démonstration. Voir le §2. de [Tat76]. □

Remarque 1.2.3. C'est un résultat essentiel pour la suite : en effet, dans le second chapitre, on s'attachera à relever des cocycles $\bar{\eta} \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T}\right)$ en des cocycles $\eta \in \mathrm{H}^1\left(G_K, T\right)$ en les relevant mod π^2, puis mod π^3, etc. Un passage à la limite permettra alors d'en déduire un relèvement en caractéristique 0.

1.2.2 Dualité

On rappelle le théorème de dualité locale de Tate, qui sera lui aussi un ingrédient important dans le chapitre 2.
Si M est un G-module fini, on note $M^*(1)$ le module dual de Cartier défini par : $M^*(1) = \mathrm{Hom}(M, \mu\left(\bar{K}\right))$ où $\mu\left(\bar{K}\right)$ est le groupe des racines de l'unité dans $\bar{K}$. Si $m \in \mathbb{N}$ est l'ordre de M, alors $\mathrm{Hom}(M, \mu\left(\bar{K}\right)) = \mathrm{Hom}(M, \mu_m\left(\bar{K}\right))$ où bien

entendu, $\mu_m\left(\bar{K}\right)$ est le groupe des racines m-ièmes de l'unité dans $\bar{K}$. Ce module dual est naturellement muni d'une action de G_K via la formulle usuelle : $(\sigma f)(x) = \sigma f(\sigma^{-1}x)$.

Théorème 1.2.4 (Théorème de dualité locale de Tate)**.** *Soit M un G_K-module de cardinal fini. Soit $M^*(1)$ son dual de Cartier. Le G_K-accouplement naturel*

$$M \times M^*(1) \longrightarrow \bar{K}^\times$$

induit une dualité parfaite entre $\mathrm{H}^i(G_K, M)$ et $\mathrm{H}^{2-i}(G_K, M^*(1))$ via le cup produit

$$\mathrm{H}^i(G_K, M) \times \mathrm{H}^{2-i}(G_K, M^*(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{K}^\times\right) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On a donc un isomorphisme

$$\mathrm{H}^{2-i}(G_K, M^*(1))^* \simeq \mathrm{Hom}\left(\mathrm{H}^{2-i}(G_K, M^*(1)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right).$$

Démonstration. Voir [NSW08], Theorem (7.2.6). □

Corollaire 1.2.5. *Soit T un $\mathcal{O}$-module libre de type fini muni d'une action continue de G_K. Notons E le corps des fractions de $\mathcal{O}$. Alors pour $i = 0, 1, 2$,*

$$\mathrm{H}^i(G_K, T) \simeq \mathrm{H}^{2-i}(G_K, T^* \otimes (E/\mathcal{O})(1))^*$$

Démonstration. Cela résulte de la proposition 1.2.2 et du théorème précédent. □

1.2.3 Extensions de représentations galoisiennes

On fait le lien entre les représentations continues de G_K qui sont extensions de ρ_2 par ρ_1 avec $\mathrm{H}^1(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*)$.

Définition 1.2.6. Si ρ est une représentation linéaire continue de G_K et si V désigne son A-module sous-jacent (avec $A = E, \mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}/\pi^n$) muni de l'action de G_K, on définit $\mathrm{H}^1(G_K, \rho) := \mathrm{H}^1(G_K, V)$.

Définition 1.2.7. Soit r une représentation de G_K telle que

$$0 \longrightarrow \rho_1 \longrightarrow r \longrightarrow \rho_2 \longrightarrow 0.$$

On dit que r est extension de ρ_2 par ρ_1.
Soit r' une autre représentation de G_K extension de ρ_2 par ρ_1. On dit que les extensions r et r' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de représentations $f : r \xrightarrow{\sim} r'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \rho_1 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & r \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \rho_2 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \rho_1 \arrow[r] & r' \arrow[r] & \rho_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.2.8. *L'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de ρ_2 par ρ_1 est en bijection avec* $\mathrm{H}^1(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*)$.

Démonstration. Une démonstration fonctorielle : une extension de ρ_2 par ρ_1 définit un élément de $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(\rho_2, \rho_1)$ où $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(.,.)$ est le bifoncteur dérivé de $\mathrm{Hom}_{G_K}(.,.)$. Or le foncteur $\mathrm{Hom}_{G_K}(\rho_2, .)$ est naturellement isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_{G_K}(1, . \otimes \rho_2^*) = (. \otimes \rho_2^*)^{G_K}$. On en déduit le résultat par unicité des foncteurs dérivés.
Une démonstration en coordonnées : écrivons r sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} \rho_1 & \eta \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$.
La bijection recherchée est l'application qui envoie l'extension r sur $\eta \otimes \rho_2^*$. On montre en effet que $\eta \otimes \rho_2^*$ est un 1-cocycle pour l'action de $\rho_1 \otimes \rho_2^*$, que cette application est bien définie (le choix d'une autre base dans laquelle la matrice de r est triangulaire par bloc change ce 1-cocyle par un cobord) et que si r et r' sont deux extensions équivalentes, alors les cocycles correspondant diffèrent par un cobord. □

Remarque 1.2.9. L'ensemble $\mathcal{Z}^1(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*)$ est lui en bijection avec l'ensemble des couples $(\rho, \mathcal{B})$ où ρ est une extension de ρ_2 par ρ_1 et où $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel (ou module) sous-jacent à ρ dans laquelle sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \rho_1 & \eta \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$.

1.2.4 Théorie de Kummer

Soit $n \geq 1$ un entier. De la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mu_{p^n}\left(\bar{K}\right) \longrightarrow \bar{K}^\times \stackrel{x \mapsto x^{p^n}}{\longrightarrow} \bar{K}^\times \longrightarrow 1$$

on tire la suite exacte longue

$$1 \longrightarrow \mu_{p^n}(K) \longrightarrow K^\times \stackrel{x \mapsto x^{p^n}}{\longrightarrow} K^\times \stackrel{\delta}{\longrightarrow} \mathrm{H}^1\left(G_K, \mu_{p^n}\left(\bar{K}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{K}^\times\right) \longrightarrow \dots$$

Le théorème 90 de Hilbert assure que $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{K}^\times\right) = 1$, de sorte que l'application

$$\delta^n : K^\times / \left(K^\times\right)^{p^n} \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \mu_{p^n}\left(\bar{K}\right)\right)$$

soit un isomorphisme : c'est l'isomorphisme de Kummer.
Par passage à la limite sur n, on en déduit un isomorphisme

$$\delta : \widehat{K^\times} \simeq \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{Z}_p(1)\right).$$

Decrivons le explicitement. Soit $q \in \widehat{K^\times}$ et soit $(q^{(n)})$ une suite compatible de racines p^n-èmes de q, i.e. $q^{(0)} = q$ et $\left(q^{(n+1)}\right)^p = q^{(n)}$ pour tout n. Si g est un élément de G_K, alors $\delta(q) = \eta$ est le cocycle défini par

$$\frac{g(q^{(n)})}{q^{(n)}} = \left(\epsilon^{(n)}\right)^{\eta(g)}$$

où $\left(\epsilon^{(n)}\right)$ est une suite compatible de racines p^n-èmes de l'unité. On vérifie qu'avec cette définition, l'image de $\eta = \delta(q)$ dans $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Z}_p(1))$ ne dépend pas du choix des q^n.

1.2.5 Représentations induites et lemme de Shapiro

Soit A l'un des anneaux $\mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}/\pi^n$ pour un certain entier n. Soit H un sous-groupe fermé de G_K et soit V une représentation continue de H à coefficients dans A. La représentation induite par V de H à G_K est la représentation définie par :

$$Ind_H^{G_K}(V) = \{f : G_K \longrightarrow V \mid f \text{ continue et } f(\tau\sigma) = \tau f(\sigma)\, \forall \tau \in H\}.$$

L'action de $g \in G_K$ sur $Ind_H^{G_K}(V)$ est donnée par $f(\sigma) \mapsto f(\sigma g)$.

Proposition 1.2.10 (Lemme de Shapiro)**.** *Soit H un sous-groupe fermé de G_K et soit V une représentation continue de H. Alors pour $i = 0, 1$ ou 2, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{H}^i\left(G_K, Ind_H^{G_K}(V)\right) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^i(H, V).$$

Remarque 1.2.11. Pour $i = 0$, cet énoncé est plus souvent appelé théorème de réciprocité de Frobenius.

Proposition 1.2.12. *Soit L une extension finie de K. Soit V une représentation continue de G_L et soit W une représentation continue de G_K, toute deux à coefficients dans $A = \mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}/\pi^n$. Alors*

$$Ind_{G_L}^{G_K}(V) \otimes_A W \simeq Ind_{G_L}^{G_K}\left(V \otimes_A W_{|G_L}\right).$$

1.3 Théorie de Hodge p-adique sans coefficients

1.3.1 Formalisme des représentations B-admissible

Soient F un corps et G un groupe. Soit B une F-algèbre intègre munie d'une action de G F-linéaire et supposons que $E = B^G$ soit un corps. Soit $C = \mathrm{Frac}(B)$ muni de l'action évidente de G.

Définition 1.3.1. On dit que B est (F, G)-régulier si $C^G = B^G$ et si tout $b \in B$ non nul engendrant une droite $F.b$ stable par G est inversible dans B.

Soit B un anneau (F,G)-régulier et soit $E = B^G = C^G$. Notons $\mathrm{Rep}_F(G)$ la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de G sur F. On définit le foncteur

$$\begin{array}{rcl} D_B : \mathrm{Rep}_F(G) & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_E \\ V & \longmapsto & (B \otimes_F V)^G \end{array}$$

de sorte que $D_B(V)$ est un E-espace vectoriel de dimension finie muni d'une application canonique B-linéaire et G-équivariante

$$\alpha_V : B \otimes_E D_B(V) \longrightarrow B \otimes_E (B \otimes_F V) = (B \otimes_E B) \otimes_F V \longrightarrow B \otimes_F V.$$

Théorème 1.3.2. *Soit $V \in Rep_F(G)$.*

1. *L'application α_V est toujours injective et $\dim_E D_B(V) \leq \dim_F(V)$ avec égalité si et seulement si α_V est un isomorphisme. Dans ce cas on dit que V est B-admissible.*
2. *Soit $Rep_F^B(G) \subset Rep_F(G)$ la sous-catégorie pleine des représentations B-admissibles. Le foncteur covariant*

$$D_B : Rep_F^B(G) \longrightarrow Vec_E$$

   est exact et fidèle, et toute sous-représentation ou quotient d'une représentation B-admissible est B-admissible.
3. *Si V_1 et $V_2 \in Rep_F^B(G)$, on a un isomorphisme naturel*

$$D_B(V_1) \otimes_E D_B(V_2) \simeq D_B(V_1 \otimes_F V_2)$$

   de sorte que $V_1 \otimes_F V_2 \in Rep_F^B(G)$.
4. *Si $V \in Rep_F^B(G)$, alors $V^* \in Rep_F^B(G)$ et l'application naturelle*

$$D_B(V) \otimes_E D_B(V^*) \longrightarrow D_B(V \otimes_F V^*) \longrightarrow D_B(F) = E$$

   est une dualité parfaite.

Voir la première partie de [Fon94a] pour une démonstration détaillée de ce théorème.

1.3.2 Anneaux de périodes

On rappelle la construction de certains anneaux introduits par Fontaine (c.f. [Fon94b]) permettant de hiérarchiser les représentations p-adiques de G_K

L'anneau B_{HT}

On définit B_{HT} par $B_{HT} = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_K(q)$ où $\mathbb{C}_K$ est la complétion p-adique d'une clôture algébrique $\bar{K}$ de K.

Proposition 1.3.3. *L'anneau B_{HT} est $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-régulier avec $B_{HT}^{G_K} = K$.*

Définition 1.3.4. On dit que $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est de Hodge-Tate si V est B_{HT}-admissible.

L'anneau B_{HT} est muni d'une graduation définie par $gr^i B_{HT} = \mathbb{C}_K(i)$ de sorte que $B_{HT} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} gr^i B_{HT}$
Soit V une $\mathbb{Q}_p$-représentation de G_K de Hodge-Tate. On définit alors sur

$$D_{HT}(V) := D_{B_{HT}}(V)$$

une graduation par $gr^i D_{HT}(V) = \left(gr^i B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^G$ et on dit que l'entier $i \in \mathbb{Z}$ est un poids de Hodge-Tate de V si $gr^{-i}(D_{HT}(V) \neq 0$, de multiplicité la dimension de cet espace vectoriel. Une représentation de Hodge-Tate V de G_K de dimension n admet donc n poids de Hodge-Tate comptés avec multiplicité. On note cet ensemble (ou plutôt multi-ensemble) $HT(V)$

Exemple 1.3.5. Le caractère cyclotomique χ_p définit une représentation de G_K de dimension 1 qui est de Hodge-Tate à poids 1.

Exemple 1.3.6. Si V et W sont deux représentations de G_K, alors

$$HT(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W) = \{i + j \,|\, i \in HT(V), j \in HT(W)\}.$$

L'anneau B_{dR}

Soit

$$R := \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p) = \{(x_0, x_1, \ldots)|x_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/(p), (x_{i+1})^p = x_i\}.$$

C'est un anneau(l'addition et la multiplication s'effectuant composante par composante) parfait de caractéristique p dans lequel s'injecte le corps résiduel $\bar{k}$ de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.
On peut encore décrire R de la façon suivante :

$$R = \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K} = \{(x^{(0)}, x^{(1)}), \ldots)|x^{(i)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}, (x^{(i+1)})^p = x^{(i)}\}.$$

Dans ce cas, la multiplication se fait toujours composante par composante mais l'addition s'obtient de manière suivante : $(x+y)^{(i)} = \lim_{j\longrightarrow\infty} \left(x^{(i+j)} + y^{(i+j)}\right)^{p^j}$.

Si $x = (x^{(0)}, x^{(1)}), \ldots) \in R$ et si l'on pose $v_R(x) = v_p\left(x^{(0)}\right)$ (v_p est la valuation sur $\mathbb{C}_K$ normalisée par $v_p(p) = 1$), on munit R d'une valuation pour laquelle il est complet. Le groupe G_K agit continuement sur R en prenant l'action composante par composante.
Notons ϵ l'élément de R défini comme suit : $\epsilon = \left(\epsilon^{(n)}\right)$ où $\epsilon^{(0)} = 1$ et $\epsilon^{(n)} \in \mu_{p^n}$ et $\epsilon^{(1)} \neq 1$. Enfin, notons $\varpi = \epsilon - 1$. Un calcul classique donne $v_R(\varpi) = \dfrac{p}{p-1}$.
Considérons $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt de R. Tout élément de $W(R)$ s'écrit de façon unique comme une série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} p^k[x_k]$ où $x_k \in R$ et où $[.] : R \longrightarrow W(R)$ est le représentant de Teichmüller.
Avec un peu de travail on montre que l'application $\theta : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ définie par

$$\theta\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} p^k[x_k]\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p^k x_k^{(0)}$$

est un homomorphisme d'anneaux, surjectif et G_K-équivariant.
Son noyau est principal, engendré par $\omega = \dfrac{[\epsilon]-1}{[\epsilon_1]-1}$ où ϵ_1 est tel que $\epsilon_1^p = \epsilon$.
On définit alors B_{dR}^+ par

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W(R)[1/p]/(\ker\theta)^n.$$

Cela fait de B_{dR}^+ un anneau séparé, complet et de valuation discrète (qui n'est pas v_R) dont le corps résiduel est $\mathbb{C}_K$. Il est naturellement muni d'une action de G_K.
Notons

$$t := \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \frac{[\epsilon]-1}{k}.$$

C'est un élément de B_{dR}^+ et $\forall g \in G_K$,

$$g.t = \chi_p(g)t.$$

Moralement, on pense à t comme $\log([\epsilon])$. On montre qu'il s'agit d'une uniformisante de B_{dR}^+.
Définissons $B_{dR} = B_{dR}^+[1/t]$. C'est un corps, muni d'une filtration stable sous l'action de G_K que l'on définit par $\mathrm{Fil}^i B_{dR} = t^i B_{dR}^+$.
Comme B_{dR} est un corps, c'est un anneau $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-régulier et l'on a $B_{dR}^{G_K} = K$.

Définition 1.3.7. On dit que $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est de de Rham si V est B_{dR}-admissible.

On a un isomorphisme $B_{dR}^+t^i/tB_{dR}^+t^i \simeq \mathbb{C}_K(i)$ de sorte que

$$grB_{dR} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} gr^iB_{dR} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_{dR}^+t^i/tB_{dR}^+t^i \simeq B_{HT}.$$

Ainsi, si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est de de Rham, elle est de Hodge-Tate. Il existe des représentations de Hodge-Tate qui ne sont pas de de Rham (une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p$ par exemple).
Si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, on munit $D_{dR}(V) := D_{B_{dR}}(V)$ d'une filtration définie par $Fil^iD_{dR}(V) = \left(Fil^iB_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^G$.
On remarque alors que les poids de Hodge-Tate de V (si V est de de Rham) sont les entiers i tels que $Fil^{-i}D_{dR}(V) \neq Fil^{-i+1}D_{dR}(V)$.
Être de Hodge-Tate ou de de Rham est invariant par changement de base fini ou non ramifié. Plus précisément, si I_K désigne le sous-groupe d'inertie de G_K, on a :

Proposition 1.3.8. *Soit $V \in Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ et soit K' une extension finie de K. Alors V est de Hodge-Tate si et seulement si $V_{|G_{K'}} \in Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_{K'})$ est de Hodge-Tate si et seulement si $V_{|I_K}$ est de Hodge-Tate. De même pour la propriété d'être de de Rham.*

Anneaux B_{cris} et B_{st}

Notons A_{cris} le sous-anneau de B_{dR}^+ défini par

$$A_{cris} := \{\sum_{n\geq 0} a_n \frac{\omega^n}{n!} \mid a_n \in W(R), a_n \longrightarrow 0 \text{ pour la topologie } p\text{-adique}\},$$

où rappelons-le, $\omega = \frac{[\epsilon]-1}{[\epsilon_1]-1}$.
L'élément t est un élément de A_{cris} et $t^{p-1} \in pA_{cris}$. Il existe un homomorphisme φ sur A_{cris} tel que $\varphi(t) = pt$ et qui commute à l'action de G_K.
On définit B_{cris} comme la sous-algèbre $A_{cris}[1/t]$ dans B_{dR}. Le corps K_0 s'injecte naturellement dans B_{cris} et on a une injection $K \otimes_{K_0} B_{cris} \longrightarrow B_{dR}$.
Il en résulte que $B_{cris}^{G_K} = K_0$. On munit également $K \otimes_{K_0} B_{cris}$ d'une filtration en prenant la filtration induite par celle de B_{dR}. On montre que B_{cris} est $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-régulier et l'on peut donc définir :

Définition 1.3.9. On dit que $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est cristalline si V est B_{cris}-admissible.

Posons $B_{st} = B_{cris}[X]$. On définissant correctement un certain logarithme, on a également une injection $K \otimes_{K_0} B_{st} \subset B_{dR}$.
On montre également que B_{st} est $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-régulier, avec $B_{st}^{G_K} = K_0$ et que l'on peut ainsi définir :

Définition 1.3.10. On dit que $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est semistable si V est B_{st}-admissible.

Des inclusions $B_{cris} \subset B_{st}$ et $K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR}$, on déduit que si V est cristalline alors elle est semistable et que si V est semistable, alors elle est de de Rham. Les réciproques sont fausses.
Contrairement aux représentations de de Rham et de Hodge-Tate, la propriété d'être semistable ou cristalline n'est plus invariante par changement de base fini. On définit alors une notion potentielle :

Définition 1.3.11. On dit que $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est potentiellement semistable (resp. potentiellement cristalline) si $V_{|G_{K'}}$ est semistable (resp. cristalline) pour une extension finie K' de K.

Cependant, on a encore comme avant :

Proposition 1.3.12. *$V \in Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est semistable (resp. cristalline) si et seulement si $V_{|I_K}$ est semistable (resp. cristalline).*

On a vu qu'une représentation semistable est toujours de de Rham. Réciproquement, une représentation de de Rham est potentiellement semistable. C'est un théorème dû à Berger [Ber02] qui ramène l'énoncé de ce théorème à une conjecture sur les équations différentielles p-adiques démontrée indépendament par André, Kedlaya et Mebkhout.

Théorème 1.3.13. *$V \in Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est de de Rham si et seulement si elle est potentiellement semistable.*

Résumons la hiérarchie liant les représentations p-adiques des groupes de Galois absolus de corps p-adiques :

cristalline $\Rightarrow$ semistable $\Rightarrow$ de Rham $\Rightarrow$ Hodge-Tate et

potentiellement cristalline $\Rightarrow$ potentiellement semistable $\Leftrightarrow$ de Rham $\Rightarrow$ Hodge-Tate.
Comme l'on s'intéresse principalement aux représentations à coefficients entiers, il est naturel de définir :

Définition 1.3.14. Soit $T \in Rep_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$. On dit que T est cristalline ou semistable ou etc. si $T \otimes \mathbb{Q}_p$ l'est.

1.3.3 Extensions de représentations

Dans la suite, on s'intéressera principalement aux extensions de représentations. Il est naturel de se demander quelles propriétés provenant de la théorie de Hodge p-adique sont stables par extensions.

Proposition 1.3.15. *Soit* $0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0$ *une extension de représentations p-adiques de* G_K*. Supposons* V *et* W *semistables* $\min HT(V) > \max HT(W)$*. Alors* E *est semistable.*

Démonstration. C'est la combinaison des lemmes 6.4 et 6.5 de [Ber02]. □

Les groupes $H^1_*(G_K, V)$

Si V et W sont deux objets de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, on a vu que les extensions de W par V sont classifiées par $\mathrm{H}^1(G_K, V \otimes W^*)$. Etant donné une propriété provenant de la théorie de Hodge p-adique, on va introduire des sous-ensembles de $\mathrm{H}^1(G_K, V \otimes W^*)$ classifiant les extensions de W par V ayant cette propriété.

Définition 1.3.16. On note $\mathrm{H}^1_f(G_K, V)$ ou $\mathrm{H}^1_{st}(G_K, V)$ ou $\mathrm{H}^1_g(G_K, V)$ le sous-espace de $\mathrm{H}^1(G_K, V)$ formé des extensions $0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0$ qui sont cristallines ou semistables ou de de Rham.

Proposition 1.3.17. *Si* V *est cristalline, alors*

$$H^1_f(G_K, V) = \ker\left(\mathrm{H}^1(G_K, V) \longrightarrow H^1\left(G_K, B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)\right).$$

Si V *est semistable, alors*

$$H^1_{st}(G_K, V) = \ker\left(\mathrm{H}^1(G_K, V) \longrightarrow H^1\left(G_K, B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)\right).$$

Si V *est de de Rham, alors*

$$H^1_g(G_K, V) = \ker\left(\mathrm{H}^1(G_K, V) \longrightarrow H^1\left(G_K, B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)\right).$$

Démonstration. Montrons le dans le cas cristallin. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow D_{cris}(V) \longrightarrow D_{cris}(E) \longrightarrow K_0 \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1\left(G_K, B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right).$$

L'image de δ est la droite engendrée par la classe de l'extension définissant E, notée $cl(E)$, via l'application $\mathrm{H}^1(G_K, V) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)$. Ainsi, E est cristalline si et seulement si $cl(E) \in \mathrm{H}^1_f(G_K, V)$. □

Théorème 1.3.18. *Soit V une représentation cristalline. Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(G_K, V) = [K:\mathbb{Q}_p]\left(\dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K Fil^0 D_{dR}(V)\right) + \dim_{\mathbb{Q}_p} V^{G_K}$$

Démonstration. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \xrightarrow{f} B_{cris} \oplus B^+_{dR} \xrightarrow{g} B_{cris} \oplus B_{dR} \longrightarrow 0$$

avec $f(x) = (x,x)$ et $g(x,y) = (x - \varphi(x), x - y)$. De cette suite on déduit une suite exacte longue :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V^{G_K} \arrow[r, "f"] & D_{cris}(V) \oplus Fil^0 D_{dR}(V) \arrow[d, "g"] \\
& & D_{cris}(V) \oplus D_{dR}(V) \arrow[d] \\
& & \mathrm{H}^1(G_K, V) \arrow[d, "f_1"] \\
& & \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}\right) \oplus \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{dR}\right) \arrow[d, "g_1"] \\
& & \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}\right) \oplus \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR}\right)
\end{tikzcd}$$

avec $f_1(x) = (x_{cris}, x_{dR})$, x_{cris} étant l'image de x par l'application

$$\mathrm{H}^1(G_K, V) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}\right)$$

et x_{dR} étant l'image de x par l'application

$$\mathrm{H}^1(G_K, V) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR}\right).$$

On a

$$\ker f_1 = \ker\left(\mathrm{H}^1(G_K, V) \xrightarrow{x \mapsto x_{cris}} \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}\right)\right)$$

car l'application

$$\mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{dR}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR}\right)$$

est injective (V est cristalline, donc de de Rham). On en déduit que $\ker f_1 = \mathrm{H}^1_f(G_K, V)$. Comptant les dimensions, on obtient le résultat. □

Corollaire 1.3.19. *Soit $0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0$ une extension de représentations avec V et W cristallines. Supposons que les poids de Hodge-Tate de V et W sont tels que* $\min HT(V) > 1 + \max HT(W)$. *Alors E est cristalline.*

Démonstration. On a dans ce cas

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^1_f\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right) = [K : \mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p}\left(V \otimes W^*\right).$$

Or d'après le théorème de dualité locale de Tate, on a :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right) &= [K : \mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p}\left(V \otimes W^*\right) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^0\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^2\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right). \end{aligned}$$

Or $\mathrm{H}^0\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right) = 0$ (cela se voit en considérant les poids de Hodge-Tate de V et W) et $\mathrm{H}^2\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right) \simeq \mathrm{H}^0\left(G_K, V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} W(1)\right) = 0$.
On en déduit que

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^1_f\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right) = \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^1\left(G_K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^*\right).$$

□

D'après le théorème 1.3.18, le sous-espace $\mathrm{H}^1_f(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ est un hyperplan dans $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$. Tâchons de le décrire explicitement.

Proposition 1.3.20. *L'inclusion*

$$\mathrm{H}^1_f(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) \subset \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$$

correspond à l'inclusion

$$\mathbb{Q}_p \otimes \widehat{\mathcal{O}_K}^\times \subset \mathbb{Q}_p \otimes \widehat{K}^\times$$

via l'isomorphisme de Kummer.

Démonstration. Pour des raisons de dimension, il suffit de démontrer qu'une extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ correspondant à un élément de $\mathbb{Q}_p \otimes \widehat{\mathcal{O}_K}^\times$ dans $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ est cristalline.
Soit $q \in \widehat{\mathcal{O}_K^\times}$ et soit $\eta = \delta(q)$. Soit $\tilde{q} \in R$ une suite compatible de racines p^n-èmes de q, notée $\tilde{q} = \left(q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots\right)$ et soit $[\tilde{q}]$ son relèvement de Teichmüller dans $W(R)$. Remarquons que $\theta\left(\frac{[\tilde{q}]}{q^{(0)}} - 1\right) = \frac{q^{(0)}}{q^{(0)}} - 1 = 0$. Ainsi, $\frac{[\tilde{q}]}{q^{(0)}} - 1 = y\omega$ avec $y \in W(R)$.
La série

$$\log_{cris}([\tilde{q}]) := \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{[\tilde{q}]}{q^{(0)}} - 1\right)^n}{n}$$

définit un élément de A_{cris} car

$$(-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{[\tilde{q}]}{q^{(0)}} - 1\right)^n}{n} = (-1)^{n+1}(n-1)! y^n \frac{\omega^n}{n!}$$

et $(n-1)!y^n$ tend vers 0 pour la topologie p-adique.
On vérifie que pour tout $g \in G_K$,

$$g\log_{cris}([\tilde{q}]) = \log_{cris}([g(\tilde{q})]) = \log_{cris}([\tilde{q}]) + \eta(g)\log_{cris}([\epsilon]) = \log_{cris}([\tilde{q}]) + \eta(g)t.$$

Si V est une représentation de G_K, extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ donnée dans une base (u, v) sous la forme $\begin{pmatrix} \chi_p(g) & \eta(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\eta \in \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$, alors $D_{cris}(V)$ est engendré par

$$t^{-1} \otimes u$$

et

$$-\log_{cris}([\tilde{q}])\, t^{-1} \otimes u + 1 \otimes v,$$

ce qui fait de V une représentation cristalline. □

Remarque 1.3.21. On utilisera ce résultat pour démontrer que toute représentation modulo π de G_K de dimension 3 se relève en une représentation cristalline.

1.4 Théorie de Hodge p-adique avec coefficients

Pour $* \in \{HT, dR, st, cris\}$, on note B_* l'anneau de périodes correspondant. De même, on note $K_{HT} = K_{dR} = K$ et $K_{cris} = K_{st} = K_0$.

Soit V une représentation de G_K à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de dimension finie. On pose

$$D_*(V) = \left(B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^{G_K}.$$

C'est un $K_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p$-module de rang fini, de rang inférieur à la dimension de V sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Définition 1.4.1. On dit que la représentation V est B_*-admissible si le rang de $D_*(V)$ coïncide avec la dimension (sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$) de V.

Comme avant, la représentation V est dite de Hodge-Tate si elle est B_{HT}-admissible. De même pour les autres notions.
Donnons dans ce contexte une version un peu différente des poids de Hodge-Tate.
Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des $\mathbb{Q}_p$-plongements $K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$.
On a une décomposition $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \prod_{\mathcal{P}} \overline{\mathbb{Q}}_p$, de sorte que

$$D_{HT}(V) = \left(B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^{G_K} \simeq \prod_{\tau \in \mathcal{P}} \left(B_{HT} \otimes_{K,\tau} V\right)^{G_K}.$$

Ainsi, V est de Hodge-Tate si et seulement si $\dim_K (B_* \otimes_{K,\tau} V)^{G_K} = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} V$ pour tout $\tau \in \mathcal{P}$.

Définition 1.4.2. Soit V une représentation de G_K à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ qui est de Hodge-Tate. Les poids de Hodge-Tate de V sont les entiers i tels que

$$\mathrm{gr}^{-i}\left(B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^{G_K} \neq 0$$

comptés avec multiplicité $\dim_K \mathrm{gr}^{-i}\left(B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^{G_K}$.

Les poids de Hodge-Tate labellisés (par $\mathcal{P}$) sont les entiers i tels que

$$\mathrm{gr}^{-i}\left(B_{HT} \otimes_{K,\tau} V\right)^{G_K} \neq 0$$

comptés avec multiplicité $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{gr}^{-i}\left(B_* \otimes_{K,\tau} V\right)^{G_K}$.

Lemme 1.4.3. *Soit V une représentation de G_K à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et soit V_E une représentation de G_K à coefficients dans E extension finie de $\mathbb{Q}_p$ telle que $V \simeq V_E \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_p$. Alors V est de Hodge-Tate (ou de de Rham ou semistable ou cristalline) si et seulement si V_E (vu comme $\mathbb{Q}_p$-représentation) est de Hodge-Tate (ou de de Rham ou semistable ou cristalline).*

Démonstration. Effectuons la démonstration dans le cas Hodge-Tate, les autres cas étant similaires.
Soit donc $n = [E : \mathbb{Q}_p]$ et supposons V_E de Hodge-Tate. Notons $d = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} V = \dim_E V_E$. L'espace vectoriel $D_{HT}(V_E)$ est de dimension nd sur K puisque V_E est de Hodge-Tate. Mais être de Hodge-Tate signifie que V_E est B_{HT}-admissible, i.e. l'application canonique $D_{HT}(V_E) \otimes_K B_{HT} \longrightarrow V_E \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT}$ est un isomorphisme de B_{HT}-modules. Comme V est libre de rang d en tant que E-module, cela signifie que $V_E \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT}$ est libre de rang d sur $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT}$ ou encore que $D_{HT}(V_E) \otimes_K B_{HT}$ est libre de rang d sur $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT}$. Cela implique que $D_{HT}(V_E)$ est libre de rang d sur $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. En effet, on a une décomposition $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \simeq \prod L_i$, avec L_i extension finie de K. Donc $D_{HT}(V_E) \simeq \prod D_i$, chaque D_i étant un espace vectoriel sur L_i. Comme $D_{HT}(V_E) \otimes_K B_{HT}$ est libre de rang d sur $E \otimes_K B_{HT}$, D_i est de dimension d sur L_i (car $D_i \otimes_K B_{HT}$ est libre de rang d sur $L_i \otimes_K B_{HT}$) et l'affirmation s'en déduit. Finalement, $D_{HT}(V) = \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_E D_{HT}(V_E)$ et on en déduit que $D_{HT}(V)$ est libre de rang d sur $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$.
Réciproquement, si V est de Hodge-Tate, alors $D_{HT}(V)$ est libre de rang d sur $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ et vu l'isomorphisme $D_{HT}(V) = \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_E D_{HT}(V_E)$, on en déduit que $D_{HT}(V_E)$ est libre de rang d sur $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ et donc de dimension nd sur K. □

Proposition 1.4.4. *Soit* $0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0$ *une extension de représentations à coefficients dans* $\overline{\mathbb{Q}}_p$ *avec* V *et* W *cristallines. Supposons que les poids de Hodge-Tate de* V *et* W *sont tels que* $\min HT(V) > 1 + \max HT(W)$. *Alors* E *est cristalline.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de démontrer ce résultat pour des représentations à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. C'est alors une conséquence immédiate du corollaire 1.3.19 puisque si

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

est une extension de représentations à coefficients dans L extension finie de $\mathbb{Q}_p$, c'est aussi une extension de représentations vues à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$. □

Par récurrence, combinant les propositions **??** et 1.4.4 on en déduit le résultat suivant :

Théorème 1.4.5. *Soit* V *une représentation de* G_K *à coefficients dans* $\overline{\mathbb{Q}}_p$ *donnée (matriciellement) par*

$$\begin{pmatrix} W_1 & * & * & * \\ 0 & W_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & W_n \end{pmatrix}.$$

Supposons que chaque W_i *est une représentation potentiellement semistable avec* $\min HT(W_i) > \max HT(W_{i+1})$. *Alors* V *est potentiellement semistable. Si de plus chaque* W_i *est cristalline et* $\min HT(W_i) > 1 + \max HT(W_{i+1})$, *alors* V *est cristalline.*

1.5 Caractères fondamentaux et de Lubin-Tate

1.5.1 Théorie locale du corps de classes

On considère toujours K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On note k son corps résiduel. La théorie locale du corps de classes implique l'existence d'un isomorphisme

$$\Phi_K : \widehat{K^\times} \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(K^{ab}/K\right),$$

$\widehat{K^\times}$ désignant la complétion de $K^\times$ relative aux sous-groupes ouverts d'indices finis dans $K^\times$. On demande que Φ_K envoie les uniformisantes de K sur les Frobenius arithmétiques.

1.5.2 Caractères fondamentaux

On renvoie à [Ser71] §1.7 pour plus de détails.
Notons rec_K l'inverse de Φ_K. Si l'on choisit une uniformisante ϖ de K, on obtient une décomposition
$$\widehat{K^\times} \simeq \hat{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_K^\times.$$

On définit alors des caractères fondamentaux de la manière suivante :

Définition 1.5.1. Soit $\tau : k \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ un $\mathbb{F}_p$-plongement. Le caractère $\omega_{\varpi,\tau}$ est le composé :
$$G_K \longrightarrow G_K^{ab} \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow k^\times \xrightarrow{\tau} \overline{\mathbb{F}}_p^\times,$$
la flèche $G_K^{ab} \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times$ étant bien entendu la projection sur le deuxième facteur dans $\widehat{K^\times} \simeq \hat{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_K^\times$.

Remarque 1.5.2. La restriction à l'inertie du caractère $\omega_{\varpi,\tau}$ ne dépend pas du choix de ϖ.

1.5.3 Caractères de Lubin-Tate

Il existe des relèvements naturels des caractères fondamentaux précédemment définis.

Définition 1.5.3. Soit $\sigma : K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ un $\mathbb{Q}_p$-plongement. Le caractère $\chi_{\varpi,\sigma}$ est le composé
$$G_K \longrightarrow G_K^{ab} \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times \xrightarrow{\sigma} \overline{\mathbb{Z}}_p^\times.$$

Remarque 1.5.4. Comme pour les caractères fondamentaux, la restriction à l'inertie du caractère $\chi_{\varpi,\sigma}$ ne dépend pas du choix de ϖ.

Un tel caractère définit une représentation de dimension 1 de G_K à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (et même $\overline{\mathbb{Z}}_p$). Cette représentation est cristalline à poids de Hodge-Tate 0 et 1. Plus précisément :

Théorème 1.5.5. *Soit $\sigma : K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ un $\mathbb{Q}_p$-plongement et soit ϖ une uniformisante de K. Le caractère $\chi_{\varpi,\sigma}$ est cristallin à poids de Hodge-Tate labellisés : $HT_\sigma(\chi_{\varpi,\sigma}) = 1$ et $HT_{\sigma'}(\chi_{\varpi,\sigma}) = 0$ $\forall \sigma' \neq \sigma$.*

Démonstration. C'est essentiellement le contenu de l'Appendix B de [Con12]. □

On pourra également consulter [Ser98] (III, A4).

1.5.4 Déformations

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et k son corps résiduel. On note $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{O}$-algèbres locales complètes noethériennes de corps résiduel k et dont les morphismes sont les homomorphismes de $\mathcal{O}$-algèbres locales induisant l'identité sur les corps résiduels. Si A est un objet de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, on note $\mathfrak{m}_A$ son idéal maximal.

Rappelons qu'un foncteur $F : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} \longrightarrow Ens$ est dit représentable s'il existe un objet $R \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ tel que F soit naturellement isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(R, .)$. Par des considérations générales, un tel R s'il existe est unique.
Soit $\bar{\rho} : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ une représentation continue. On considère deux foncteurs $D_{\bar{\rho}}, D_{\bar{\rho}}^{\square} : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} \longrightarrow Ens$ définis de la façon suivante :

$$D_{\bar{\rho}}^{\square}(A) = \{\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(A) | \rho \mod \mathfrak{m}_A = \bar{\rho}\}$$

et

$$D_{\bar{\rho}}(A) = D_{\bar{\rho}}^{\square}(A)/\sim$$

où $\rho \sim \rho'$ si et seulement si $\rho' = P^{-1}\rho P$ avec $P \in \ker(\mathrm{GL}_n(A) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))$.
Un élément de $D_{\bar{\rho}}(A)$ est appelé déformation de $\bar{\rho}$ et un élément de $D_{\bar{\rho}}^{\square}(A)$ un relèvement (ou framed deformation dans la langue de Shakespeare, ce que l'on pourrait éventuellement traduire par déformation cadrée).
A l'origine de la théorie des déformations de représentations galoisiennes, Mazur ne considérait que le foncteur $D_{\bar{\rho}}$. L'inconvénient est qu'il n'est pas tout le temps représentable, alors que $D_{\bar{\rho}}^{\square}$ l'est.
En effet, on a :

Proposition 1.5.6. *Le foncteur $D_{\bar{\rho}}^{\square}$ est représentable par un objet $R^{\square}$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$. Si $End_G(\bar{\rho}) = \mathbb{F}$ (c'est le cas si $\bar{\rho}$ est absolument irréductible), alors $D_{\bar{\rho}}$ est représentable par R dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$.*

Démonstration. Pour la représentabilité de $D_{\bar{\rho}}$, voir [Maz89] Proposition 1. Pour la représentabilité de $D_{\bar{\rho}}^{\square}$ (qui s'obtient plus facilement), voir [Boe13] Proposition 1.3.1. $\square$

Moralement, les anneaux $R^{\square}$ et R paramétrisent l'ensemble des relèvements et déformations de $\bar{\rho}$.

Dans la suite, on ne considérera plus que $D_{\bar{\rho}}^{\square}$. On note $\rho_{univ}^{\square} : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n\left(R^{\square}\right)$ la représentation (universelle) correspondant à l'identité dans $\mathrm{Hom}\left(R^{\square}, R^{\square}\right)$. Si ρ_A est un relèvement de $\bar{\rho}$ à coefficients dans A, alors il existe un unique morphisme $f : R^{\square} \longrightarrow A$ tel que $\rho_A = f \circ \rho_{univ}^{\square}$.

1.5.5 Déformations cristallines

Soit P une propriété (par exemple : être cristalline, semistable, etc.). Une question importante est de savoir s'il existe un quotient de $R^{\square}$ qui détecte les relèvements qui ont la propriété P.
C'est chose faite par Kisin (et indépendamment par Liu) dans [Kis08] pour la propriété d'être cristalline (et aussi semistable). Notons E le corps des fractions de $\mathcal{O}$. Soit B une E-algèbre de type finie. Si $x : R^{\square} \longrightarrow B$ est un homomorphisme, on note $\rho_x : G_K \longrightarrow GL_n(B)$ la représentation qui s'en déduit (via la représentation universelle ρ_{univ}). Dans ce cas, ρ_x est une représentation qui admet un réseau stable G_K qui se réduit sur $\bar{\rho}$.
Rappelons, d'après Kisin, ce qu'est une donnée de Hodge. Soit D un espace vectoriel de dimension finie sur E et supposons que $D_K = D \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ soit muni d'une filtration décroissante par des $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-modules.

Définition 1.5.7. Une donnée de hodge $\mathbf{v}$ est l'ensemble $\{D, Fil^i D_K\}$ pour un certain D comme précédemment.

Définition 1.5.8. Si B est une E-algèbre finie et si V_B est une représentation de de Rham de G_K à coefficients dans B, on dit que V_B est de type $\mathbf{v} = \{D, Fil^i D_K\}$ si pour tout i,
$$gr^i\left(D_{dR}(V_B)\right) \simeq gr^i\left(D_K\right) \otimes_E B$$

Fixons $\mathbf{v}$ une donnée de Hodge.

Théorème 1.5.9 (Kisin)**.** *Il existe un quotient $R^{\square,\mathbf{v},cris}$ sans p-torsion de $R^{\square}$ tel que pour toute E-algèbre locale B et tout homomorphisme $x : R^{\square} \longrightarrow B$, la représentation ρ_x est cristalline de type $\mathbf{v}$ si et seulement si x se factorise à travers $R^{\square,\mathbf{v},cris}$.*
De plus, les composantes irréductibles de $SpecR^{\square,\mathbf{v},cris}[\frac{1}{p}]$ sont formellement lisses.

Remarque 1.5.10. Si l'anneau $R^{\square,\mathbf{v},cris}$ est non trivial, alors il admet des points en caractéristique 0 et on a l'existence de relèvements cristallins. Cependant, il se peut tout à fait que cet anneau soit trivial (par exemple, si $K = \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$, l'anneau paramétrisant les relèvements cristallins du caractère cyclotomique à poids 2 est trivial). Une application immédiate du théorème 2.5.4 est alors donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.5.11. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation modulo p de G_K de longueur 2. Il existe une infinité de données de Hodge $\mathbf{v}$ telles que $R^{\square,\mathbf{v},cris}$ soit non trivial.*

CHAPITRE 2

Relèvements

On démontre dans un premier temps que l'on peut relever les représentations modulo π de G_K qui sont absoluments irréductibles, puis les représentations de longueur 2 et on introduit enfin les notions de matrice bien et très bien échelonnée qui nous permettront de démontrer que certaines représentations modulo π de G_K se relèvent en caractéristique 0.

2.1 Représentations absolument irréductibles

Si d est un entier, rapellons que K_d est l'extension non ramifiée de degré d de K. On note k_d son corps résiduel qui est donc une extension de degré d de k, corps résiduel de K. On suppose que K est de degré $n = ef$ sur $\mathbb{Q}_p$, avec comme d'habitude e indice de ramification absolu et f degré résiduel.
La proposition suivante permet de classifier les représentations absolument irréductibles de G_K modulo π.

Proposition 2.1.1. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation modulo π de G_K, absolument irréductible et de dimension d. Il existe $\tilde{\tau} \in Hom_{\mathbb{F}_p}\left(k_d, \overline{\mathbb{F}}_p\right)$, un entier r non divisible par aucun des $\frac{p^{df}-1}{p^{if}-1}$ (i parcourant l'ensemble des diviseurs stricts de d) et un caractère non ramifié $\bar{\mu} : G_{K_d} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ tel que $\bar{\rho}$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{G_{K_d}}^{G_K}\left(\omega_{\varpi,\tilde{\tau}}^r \bar{\mu}\right)$ (après avoir éventuellement étendu le corps des coefficients).*

Démonstration. C'est essentiellement la même démonstration que dans [Ber10] Lemma 2.1.4. La restriction de $\bar{\rho}$ au sous-groupe d'inertie I_K de G_K se factorise à travers l'inertie modérée. En effet, l'image du sous-groupe d'inertie sauvage est un p-groupe fini, donc l'ensemble $\bar{V}'$ des éléments de l'espace vectoriel $\bar{V}$ sous-jacent à $\bar{\rho}$ fixés par l'inertie sauvage est non trivial. Comme l'inertie sauvage est distinguée dans G_K, $\bar{V}'$ est stable par G_K et par irréductibilité de $\bar{\rho}$, on en déduit que $\bar{V}' = \bar{V}$. Comme I_t, le groupe d'inertie modérée de K est pro-cyclique d'ordre (ou plutôt de pro-ordre) premier à p, l'image $\bar{\rho}(I_t)$ est cyclique d'ordre premier à p. Ainsi, $\bar{\rho}_{I_t}$ se diagonalise en une somme de d caractères modérés $\psi_1, \ldots, \psi_d$. D'après [Ser71] proposition 3 et §1.7, un tel caractère est de la forme $\omega^r_{\varpi,\bar{\tau}}$, avec $\omega_{\varpi,\bar{\tau}}$ défini comme étant le composé

$$I_K \xrightarrow{\simeq} I_{K_n} \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{K_n} \longrightarrow k^\times_{K_n} \xrightarrow{\bar{\tau}} \overline{\mathbb{F}}^\times_p$$

pour un certain entier n. L'ensemble des $\psi_1, \ldots, \psi_n$ est stable par l'action de Frobenius, et par irréductibilité de $\bar{\rho}$, cette action est transitive. On en déduit que $n = d$, que r n'est divisible par aucun des $\frac{p^{df}-1}{p^{if}-1}$ (critère de Mackey) et que $\bar{V} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} V_i$, l'action de I_K sur V_i se faisant à travers $\omega^{q^i r}_{\varpi,\bar{\tau}}$. Comme ϖ est aussi une uniformisante de K_d, le caractère $\omega_{\varpi,\bar{\tau}}$ se prolonge à G_{K_d}, que l'on note encore $\omega_{\varpi,\bar{\tau}}$. Chaque V_i est donc stable sous l'action de G_{K_d} qui est alors donnée par $\omega^r_{\varpi,\bar{\tau}}\mu_i$, avec μ_i caractère non ramifié.
La proposition se déduit alors du théorème de réciprocité de Frobenius (proposition 1.2.10). □

Proposition 2.1.2. *Toute représentation absolument irréductible*

$$\bar{\rho} : G_K \longrightarrow GL_d(k)$$

admet un relèvement

$$\rho : G_K \longrightarrow GL_d(\mathcal{O}_{K_d}).$$

Démonstration. Ecrivons $\bar{\rho} = \mathrm{Ind}^{G_K}_{G_{K_d}} \left(\omega^r_{\varpi,\bar{\tau}}\bar{\mu}\right)$. Soit $\mu : G_{K_d} \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{K_d}$ le relèvement de Teichmüller de $\bar{\mu}$. Soit $\tilde{\sigma} : K_d \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ un $\mathbb{Q}_p$-plongement relevant $\bar{\tau}$. Le caractère $\chi_{\varpi,\tilde{\sigma}}$ relève $\omega_{\varpi,\tilde{\sigma}}$ et donc la représentation $\rho = \mathrm{Ind}^{G_K}_{G_{K_d}} \left(\chi^r_{\varpi,\bar{\tau}}\mu\right)$ relève $\bar{\rho}$. □

2.2 Représentations de longueur 2

Dans ce paragraphe, on se donne une fois pour toute une représentation modulo π $\bar{r}$ de longueur 2 de G_K et on suppose que l'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{\rho}_1 \longrightarrow \bar{r} \longrightarrow \bar{\rho}_2 \longrightarrow 0,$$

avec $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$ (absolument) irréductibles.

2.2.1 Deux lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1. *Soit T une représentation de G_K à coefficients dans $\mathcal{O}$. Soit $\bar{T}$ sa réduction modulo π. Soit $\bar{\eta} \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{T}\right)$ un 1-cocycle. Supposons que l'image $[\bar{\eta}]$ de $\bar{\eta}$ dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T}\right)$ se relève en un élément de $\mathrm{H}^1\left(G_K, T\right)$. Alors $\bar{\eta}$ se relève en $\eta \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, T\right)$.*

Démonstration. Notons $[\eta_1] \in \mathrm{H}^1\left(G_K, T\right)$ un relèvement de $[\bar{\eta}]$. Le représentant $\eta_1 \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, T\right)$ ne se réduit pas nécessairement sur $\bar{\eta}$, cependant, on a $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta} + c_{\bar{a}}$ où $c_{\bar{a}}$ est le cocycle défini par $c_{\bar{a}}(\sigma) = \sigma\bar{a} - \bar{a}$ pour tout $\sigma \in G_K$ avec $\bar{a} \in k$. Si $a \in \mathcal{O}$ est un relèvement de $\bar{a}$, alors le cocycle $\eta := \eta_1 - c_a$ relève $\bar{\eta}$. □

Lemme 2.2.2. *Soit T une représentation p-adique entière de G_K à coefficients dans $\mathcal{O}$. Soit $\bar{T}$ sa réduction modulo π. Alors $\mathrm{H}^2\left(G_K, T\right) = 0$ si et seulement si $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T}\right) = 0$.*

Démonstration. La démonstration ainsi présentée, plus élégante qu'une version ultérieure, m'a été communiquée par Xavier Caruso. On a

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T}\right) \simeq \mathrm{H}^2\left(G_K, T\right)/\pi\mathrm{H}^2\left(G_K, T\right)$$

car $\mathrm{H}^3\left(G_K, \bar{T}\right) = 0$. Comme $\mathrm{H}^2\left(G_K, T\right)$ est de type fini, on déduit le résultat par le lemme de Nakayama. □

Proposition 2.2.3. *Supposons $\bar{\rho}_1$ non isomorphe à $\bar{\rho}_2(1)$ et soient ρ_1 et ρ_2 des relèvements* quelconques *de $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$. Alors l'application de réduction*

$$\mathrm{Ext}^1\left(\rho_2, \rho_1\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1\left(\bar{\rho}_2, \bar{\rho}_1\right)$$

est surjective.

Démonstration. Comme

$$\mathrm{Ext}^1\left(\rho_2, \rho_1\right) \simeq \mathrm{H}^1\left(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*\right)$$

et

$$\mathrm{Ext}^1\left(\bar{\rho}_2, \bar{\rho}_1\right) \simeq \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^*\right),$$

il suffit de montrer que l'application de réduction

$$\mathrm{H}^1\left(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^*\right)$$

est surjective.

Pour cela, considérons la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \rho_1 \otimes \rho_2^* \longrightarrow \rho_1 \otimes \rho_2^* \longrightarrow \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^* \longrightarrow 0.$$

On obtient alors la suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*\right) \longrightarrow \ldots$$

Par le théorème de dualité locale de Tate (c.f. 1.2.4), on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^*\right) \simeq \mathrm{H}^0\left(G_K, \bar{\rho}_1^* \otimes \bar{\rho}_2(1)\right)^*,$$

Or

$$\mathrm{H}^0\left(G_K, \bar{\rho}_1^* \otimes \bar{\rho}_2(1)\right) \simeq \mathrm{Hom}_{G_K}\left(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2(1)\right) = 0.$$

On en déduit que $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^*\right) = 0$ et d'après le lemme précédent,

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*\right) = 0.$$

Ceci implique que l'application de réduction

$$\mathrm{H}^1\left(G_K, \rho_1 \otimes \rho_2^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2^*\right)$$

est surjective.

$\square$

Vu la proposition, on est amené à étudier les représentations de longueur 2 qui sont extensions de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$ avec $\bar{\rho}$ absolument irréductible.

2.2.2 Extensions peu et très ramifiées

On rappelle d'abord ce qu'est un cocycle dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}(1)\right)$ peu ramifié ou très ramifié selon Serre (voir [Ser87] (cf 2.4 (ii))) puis on généralise cette notion aux cocycles dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ où $\bar{\rho}$ est une représentation modulo π de G_K, absolument irréductible.

La suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mu_p(\bar{K}) \longrightarrow \bar{K}^\times \xrightarrow{x \mapsto x^p} \bar{K}^\times \longrightarrow 1$$

induit la suite exacte longue

$$\ldots K^\times \xrightarrow{x \mapsto x^p} K^\times \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \mu_p(\bar{K})\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{K}^\times\right) \longrightarrow \ldots$$

D'après le théorème 90 de Hilbert, $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{K}^\times\right) = 1$ de sorte que

$$\mathrm{H}^1\left(G_K, \mu_p(\bar{K})\right) \simeq K^\times / \left(K^\times\right)^p :$$

c'est l'isomorphisme de Kummer. L'ensemble $K^\times / \left(K^\times\right)^p$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension $[K : \mathbb{Q}_p] + 1 + \delta$ avec $\delta = 1$ si K contient les racines p-èmes de l'unité et 0 sinon.

Définition 2.2.4. Soit $[\bar{\eta}]$ un élément de $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{F}(1)) \simeq K^\times / (K^\times)^p \otimes \mathbb{F}$ (isomorphisme de Kummer). On dit que $\bar{\eta}$ est peu ramifié si c'est un élément de l'hyperplan $\mathcal{O}_K{}^\times / \left(\mathcal{O}_K{}^\times\right)^p \otimes \mathbb{F}$, et très ramifié sinon.
Un élément $\bar{\eta} \in \mathcal{Z}^1(G_K, \mathbb{F}(1))$ est dit peu ramifié ou très ramifié si son image $[\bar{\eta}]$ dans $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{F}(1))$ l'est.

On suppose à présent que l'on a une représentation $\bar{r}$ extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$ avec $\bar{\rho}$ absolument irréductible.
La représentation $\bar{r}$ définit un élément de

$$\mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*) = \mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{End}(\bar{\rho})(1)),$$

que l'on note $cl(\bar{r})$.
Considérons l'application

$$\mathrm{End}(\bar{\rho})(1) \stackrel{\mathrm{trace}}{\longrightarrow} \mathbb{F}(1)$$

qui induit l'application

$$\mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{End}(\bar{\rho})(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{F}(1)).$$

Définition 2.2.5. Soit $\bar{r}$ une représentation de longueur 2, extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$. On dit que $\bar{r}$ est peu ramifiée (resp. très ramifiée) si l'image de $cl(\bar{r})$ dans $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{F}(1))$ via la trace est peu ramifiée (resp. très ramifiée).

2.2.3 Un calcul d'obstruction

Le lemme suivant permet une première réduction : on ramène un problème en longueur 2 en un problème en dimension 2.

Lemme 2.2.6. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation modulo π de G_K absolument irréductible. La trace* $\mathrm{End}(\bar{\rho})(1) \stackrel{\mathrm{trace}}{\longrightarrow} \mathbb{F}(1)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^2(G_K, \mathrm{End}(\bar{\rho})(1)) \simeq \mathrm{H}^2(G_K, \mathbb{F}(1)).$$

Démonstration. L'application duale de la trace $\bar{\rho} \otimes \bar{\rho}^* \longrightarrow \mathbb{F}$ n'est rien d'autre que l'injection des homothéties $\mathbb{F} \longrightarrow \bar{\rho} \otimes \bar{\rho}^*$. En effet, si λ est un élément de $\mathbb{F}$ et si v est un élément de $\bar{\rho} \otimes \bar{\rho}^* = \mathrm{End}(\bar{\rho})$, alors $\lambda id \circ trace(v) = \lambda trace(v)$, où $id : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$.
L'application duale de

$$\mathrm{H}^2(G_K, \mathrm{End}(\bar{\rho})(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G_K, \mathbb{F}(1))$$

est alors donnée, via le théorème de dualité locale de Tate par l'injection

$$\mathrm{H}^0(G_K, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{End}(\bar{\rho})).$$

Vu l'absolue irréductibilité de $\bar{\rho}$, $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{End}(\bar{\rho}))$ est isomorphe à $\mathbb{F}$, tout comme $\mathrm{H}^0(G_K, \mathbb{F})$. L'affirmation s'en déduit. □

Soit ρ une représentation de G_K à coefficients dans $\mathcal{O}$ dont on note $\bar{\rho}$ sa réduction modulo π (que l'on ne suppose pas nécessairement irréductible). Soit

$$\theta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

un caractère tel que $\theta = 1 + u\pi^n \mod \pi^{n+1}$ pour un certain entier n. Considérons la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bar{\rho} \xrightarrow{\alpha} (\rho\theta)/\pi^{n+1} \xrightarrow{\beta} \rho/\pi^n \longrightarrow 0$$

(où β est la réduction modulo π^n et α la multiplication par π^n) donnant lieu à la suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \rho\theta/\pi^{n+1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \rho/\pi^n\right) \xrightarrow{\delta_u} \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}\right) \longrightarrow \ldots.$$

On a de même, lorsque $u = 0 \mod \pi$ (i.e. lorsque θ est trivial modulo π^{n+1}) une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \rho/\pi^{n+1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \rho/\pi^n\right) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}\right) \longrightarrow \ldots.$$

Lemme 2.2.7. *Soit η_n un élément de $\mathrm{H}^1\left(G_K, \rho/\pi^n\right)$. Soit $\bar{\eta}$ son image via l'application de réduction modulo π*

$$\mathrm{H}^1\left(G_K, \rho/\pi^n\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}\right).$$

Soit $\bar{u}$ la réduction modulo π de u de sorte que $\bar{u} \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}\right)$ est un caractère additif. La différence $\delta_u(\eta_n) - \delta_0(\eta_n)$ est égale au cup-produit $\bar{u} \cup \bar{\eta} \in \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}\right)$.

Démonstration. Rappelons que l'on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bar{\rho} \xrightarrow{\alpha} \rho\theta/\pi^{n+1} \xrightarrow{\beta} \rho/\pi^n \longrightarrow 0.$$

Abusons des notations et notons de la même manière les éléments d'un H^i et les i-cocycles qui les représentent. Alors $\bar{u} \cup \bar{\eta}$ est représenté par le 2-cocycle défini par $\bar{u} \cup \bar{\eta}(\sigma, \tau) = \bar{u}(\sigma).\sigma.\bar{\eta}(\tau)$, pour $\sigma, \tau \in G_K$ (cf 1.1.6). Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit A un G_K-module discret. Rappelons que si $\mathcal{C}^r(A)$ désigne l'ensemble des applications continues ${G_K}^r \longrightarrow A$ et que si $\mathcal{Z}^r(A) = \ker\left(\mathcal{C}^r(A) \xrightarrow{\partial^{r+1}} \mathcal{C}^{r+1}(A)\right)$ et $\mathcal{B}^r(A) = \mathrm{im}\left(\mathcal{C}^{r-1}(A) \xrightarrow{\partial^r} \mathcal{C}^r(A)\right)$ avec $\partial^{r+1} : \mathcal{C}^r(A) \longrightarrow \mathcal{C}^{r+1}(A)$ la différentielle, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}^1/\mathcal{B}^1\left(\bar{\rho}\right) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial^1"] & \mathcal{C}^1/\mathcal{B}^1\left(\rho\theta/\pi^{n+1}\right) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial^1"] & \mathcal{C}^1/\mathcal{B}^1\left(\rho/\pi^n\right) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Z}^2\left(\bar{\rho}\right) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{Z}^2\left(\rho\theta/\pi^{n+1}\right) \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{Z}^2\left(\rho/\pi^n\right) &
\end{tikzcd}$$

Par définition de l'homomorphisme de connexion, et utilisant la notation "$\delta = \alpha^{-1} \circ \partial^1 \circ \beta^{-1}$", on a, pour tous $\sigma, \tau \in G_K$:

$$\begin{aligned}
\delta_u(\eta_n)(\sigma,\tau) &= \alpha^{-1} \circ \partial^1 \circ \beta^{-1}(\eta_n)(\sigma,\tau) \\
&= \alpha^{-1}\left(\theta(\sigma)\sigma\left(\beta^{-1}(\eta_n)(\tau)\right) - \beta^{-1}(\eta_n)(\sigma\tau) + \beta^{-1}(\eta_n))(\sigma)\right)
\end{aligned}$$

Comme $\theta(\sigma) = 1 + u(\sigma)\pi^n \mod \pi^{n+1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(\delta_u(\eta_n)) - \delta_0(\eta_n))(\sigma,\tau) &= \alpha^{-1}\left(\pi^n u(\sigma)\sigma\left(\beta^{-1}(\eta_n)(\tau)\right)\right) \\
&= \bar{u}(\sigma)\sigma(\bar{\eta}(\tau)) \\
&= \bar{u} \cup \bar{\eta}(\sigma,\tau).
\end{aligned}$$

□

Un relèvement particulier

Lemme 2.2.8. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K, extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$ avec $\bar{\rho}$ absolument irréductible. Soit ρ un relèvement de $\bar{\rho}$ modulo π^a (avec a entier ≥ 1). Alors $\bar{r}$ se relève en une représentation r_a modulo π^a, extension de ρ par $\rho(1)$.*

Démonstration. On le démontre par récurrence sur a. Si $a = 1$, c'est trivial. Supposons donc $a \geq 2$ et soit r_{a-1} un relèvement de $\bar{r}$ modulo π^{a-1}, extension de ρ $\mod \pi^{a-1}$ par $\rho(1) \mod \pi^{a-1}$.
Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^* \xrightarrow{\times \pi^{a-1}} (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^a \longrightarrow (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^{a-1} \longrightarrow 0$$

qui induit la suite exacte longue

$$\begin{aligned}
\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1(G_K, (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^a) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G_K, (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^{a-1}) \\
\longrightarrow \mathrm{H}^2(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G_K, (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^a) \longrightarrow \ldots
\end{aligned}$$

Utilisant le théorème de dualité locale de Tate, on voit que l'application induite par la multiplication par π^{a-1} :

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^{a-1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G_K, (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^a)$$

est injective. En effet, l'application duale n'est rien d'autre que l'application induite par la réduction modulo π : $\mathrm{H}^0(G_K, (\rho \otimes \rho^*)/\pi^a) \xrightarrow{f} \mathrm{H}^0(G_K, (\rho \otimes \rho^*)/\pi^{a-1})$ qui est surjective puisque l'on a supposé $\bar{\rho}$ absolument irréductible. On en déduit la surjectivité de $\mathrm{H}^1(G_K, (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^a) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G_K, (\rho(1) \otimes \rho^*)/\pi^{a-1})$. Ainsi, r_{a-1} et donc $\bar{r}$ se relève modulo π^a en une extension de ρ par $\rho(1)$.

□

Stabilisation de l'obstruction

Lemme 2.2.9. *Soit a un entier non nul. Soient ρ, $\rho' : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ deux représentations continues telles que $\rho' \simeq \rho$ mod π^a et $\rho' \not\simeq \rho$ mod π^{a+1}. On fait l'hypothèse que ρ mod π est absolument irréductible. Alors :*

1. *pour tout $m \leq a$, $\mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^m\right) \simeq \mathcal{O}/\pi^m$ et l'isomorphisme est celui qui envoie $1 \in \mathcal{O}/\pi^m$ sur l'identité (après avoir identifié $\rho \mod \pi^m$ et $\rho' \mod \pi^m$)*
2. *pour tout $m \geq a+1$, $\mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^m\right) \simeq \pi^{m-a}\mathcal{O}/\pi^m \simeq \mathcal{O}/\pi^a$ et l'isomorphisme est celui qui envoie $1 \in \mathcal{O}/\pi^m$ sur la multiplication par π^{m-a} (à identification près).*

Démonstration. Démontrons d'abord (1) par récurrence sur m. Pour $m = 1$, on a le résultat étant donné que $\mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi\right) \simeq \mathrm{Hom}_{G_K}\left(\rho' \mod \pi, \rho \mod \pi\right)$ et $\mathrm{Hom}_{G_K}\left(\rho' \mod \pi, \rho \mod \pi\right) \simeq \mathcal{O}/\pi$ d'après le lemme de Schur. On peut supposer $a > 1$ pour la suite du raisonnement.
Notons $\ell(r) = \ell\left(\mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^r\right)\right)$ pour tout entier r, $\ell(A)$ désignant la longueur d'un $\mathcal{O}$-module A.
Supposons alors que (1) est vraie pour $m \leq a-1$. Comme $\rho' \simeq \rho \mod \pi^{m+1}$, $\mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^{m+1}\right) = \mathrm{Hom}_{G_K}\left(\rho' \mod \pi^{m+1}, \rho \mod \pi^{m+1}\right)$ contient toutes les homothéties, donc contient $\mathcal{O}/\pi^{m+1}$. On en déduit que $\ell(m+1) \geq m+1$. De plus, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^m\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^{m+1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi\right)$$

de laquelle on déduit la majoration : $\ell\left(m+1\right) \leq \ell(m) + \ell(1) = m+1$. Ceci implique que $\ell(m+1) = m+1$, donc $\mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^{m+1}\right) \simeq \mathcal{O}/\pi^{m+1}$.

Démontrons (2), encore par récurrence sur m. Supposons donc (2) vraie pour $m \geq a+1$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^m\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi^{m+1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, \left(\rho'^* \otimes \rho\right)/\pi\right)$$

on a l'encadrement $a \leq \ell(m+1) \leq a+1$.
Si $\ell(m+1) = a+1$, deux cas sont possibles :
– ou bien $\mathrm{Hom}_{G_K}\left(\rho' \mod \pi^{m+1}, \rho \mod \pi^{m+1}\right) \simeq \mathcal{O}/\pi^{a+1}$, mais dans ce cas si f correspond à un générateur de $\mathcal{O}/\pi^{a+1}$, son image est exactement annulée par π^{a+1}, donc f est exactement divisible par π^{m-a}. Ecrivons $f = \pi^{m-a}g$ avec g non nulle modulo π. L'application g est définie modulo π^{a+1}, et définit donc un élément $g' \in \mathrm{Hom}_{G_K}\left(\rho' \mod \pi^{a+1}, \rho \mod \pi^{a+1}\right)$. Comme g (et donc g') est non nulle modulo π, l'application $\bar{g}'$ ($g' \mod \pi$) est surjective par irréductibilité de

$\bar{\rho}$, ce qui implique la surjectivité de g d'après le lemme de Nakayama. Elle est alors aussi injective et l'on en déduit que $\rho' \simeq \rho \bmod \pi^{a+1}$ ce qui est contraire aux hypothèses
– ou bien $\mathrm{Hom}_{G_K}(\rho' \bmod \pi^{m+1}, \rho \bmod \pi^{m+1}) \simeq \mathcal{O}/\pi^a \oplus \mathcal{O}/\pi$. Dans ce cas, si f désigne un élément de $\mathrm{Hom}_{G_K}(\rho' \bmod \pi^{m+1}, \rho \bmod \pi^{m+1})$, alors f est tué par π^a : sa réduction mod π est nulle, et par exactitude de

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, (\rho'^* \otimes \rho)/\pi^m\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, (\rho'^* \otimes \rho)/\pi^{m+1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(G_K, (\rho'^* \otimes \rho)/\pi\right)$$

on a $\mathrm{H}^0(G_K, (\rho'^* \otimes \rho)/\pi^m) \simeq \mathrm{H}^0(G_K, (\rho'^* \otimes \rho)/\pi^{m+1})$, ce qui contredit l'hypothèse effectuée sur $\ell(m+1)$.

Ainsi, la seule possibilité est que $\ell(m+1) = a$, d'où

$$\mathrm{H}^0\left(G_K, (\rho'^* \otimes \rho)/\pi^{m+1}\right) \simeq \mathcal{O}/\pi^a.$$

□

Corollaire 2.2.10. *Soient ρ et ρ' deux représentations de G_K à coefficients dans $\mathcal{O}$ telles que $\rho' \cong \rho$ mod π^a (avec $a \geq 1$) mais $\rho' \ncong \rho$ mod π^{a+1}. Supposons $\bar{\rho}$ absolument irréductible. Soit k un entier supérieur ou égal à $a+2$. Alors l'application*

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, (\rho'(1) \otimes \rho^*)/\pi^{k-1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, (\rho'(1) \otimes \rho^*)/\pi^{k-2}\right)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Cette application est surjective ($\mathrm{H}^3(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*) = 0$). D'après le lemme précédent, $\mathrm{H}^2\left(G_K, (\rho'(1) \otimes \rho^*)/\pi^{k-1}\right)$ et $\mathrm{H}^2\left(G_K, (\rho'(1) \otimes \rho^*)/\pi^{k-2}\right)$ ont même ordre. On en déduit que c'est un isomorphisme. □

Remarque 2.2.11. Ce lemme sera fondamental dans la construction d'un relèvement dans le cas peu ramifié, voir les propositions 2.2.16 et 2.2.17 ci-après.

Le cas très ramifié

Dans ce paragraphe, on relève une représentation modulo π de G_K en caractéristique 0 en la relevant d'abord modulo π^2, puis modulo π^3, etc.

Proposition 2.2.12. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K, de longueur 2, extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$ très ramifiée. Soient ρ et ρ' des relèvements de $\bar{\rho}$ à coefficients dans $\mathcal{O}$. Il existe un unique caractère θ non ramifié et trivial modulo π et un relèvement r de $\bar{r}$ qui est extension de ρ par $\rho'(1)\theta$. Si de plus $\rho' = \rho$ mod π^m pour $m \geq 1$, alors $\theta = 1 \mod \pi^m$.*

Démonstration. Effectuons une récurrence. Soit n un entier et supposons donné un relèvement r_n de $\bar{r}$ modulo π^n, qui est extension de ρ mod π^n par $\rho'(1) \otimes \theta$ mod π^n où θ est un caractère non ramifié $G_K \longrightarrow (\mathcal{O}/\pi^n)^*$, trivial modulo π. Matriciellement, on a $r_n = \begin{pmatrix} \rho'(1)\theta & \eta \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ mod π^n.
Soit $\hat{\theta}$ un relèvement de θ modulo π^{n+1}. Relevons r_n en une représentation r_{n+1} modulo π^{n+1}, en modifiant le relèvement de $\bar{\rho}(1)$ choisi (i.e. le bloc en haut à gauche). Pour cela, considérons un caractère additif $u : G_K \longrightarrow \mathbb{F}$ et posons $\theta_u = 1 + u\pi^n$ mod π^{n+1}.
La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^* \xrightarrow{\times \pi^n} \left(\rho'(1) \otimes \rho^* \hat{\theta}\theta_u\right)/\pi^{n+1} \longrightarrow \left(\rho'(1) \otimes \rho^*\theta\right)/\pi^n \longrightarrow 0$$

induit la suite exacte longue

$$\begin{array}{l} \ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \left(\rho'(1) \otimes \rho^* \hat{\theta}\theta_u\right)/\pi^{n+1}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \left(\rho'(1) \otimes \rho^*\theta\right)/\pi^n\right) \\ \qquad \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \left(\rho'(1) \otimes \rho^* \hat{\theta}\theta_u\right)/\pi^{n+1}\right) \end{array}$$

pour laquelle on note δ_u l'homomorphisme de connexion. Notons $cl(r_n)$ l'élément de $\mathrm{H}^1\left(G_K, \left(\rho'(1) \otimes \rho^* \otimes \theta\right)/\pi^n\right)$ correspondant à r_n.
D'après le lemme 2.2.7, on a

$$\delta_u\left(cl(r_n)\right) = \delta_0\left(cl(r_n)\right) + u \cup cl(\bar{r}).$$

Il suffit donc, pour relever $\bar{r}$ modulo π^{n+1}, de trouver un caractère u de sorte que le cup-produit $u \cup cl(\bar{r})$ soit égal à $-\delta_0\left(cl(r_n)\right)$.

Lemme 2.2.13. *On a* $\mathrm{trace}\left(u \cup cl(\bar{r})\right) = u \cup \mathrm{trace}\left(cl(\bar{r})\right)$.

Démonstration. L'application

$$\mathrm{End}\left(\bar{\rho}\right)(1) \xrightarrow{\mathrm{trace}} \mathbb{F}(1)$$

induit le diagramme commutatif suivant (cf [NSW08], Proposition (1.4.2)) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathrm{End}\left(\bar{\rho}\right)(1)\right) & \times & \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2\left(G_K, \mathrm{End}\left(\bar{\rho}\right)(1)\right) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{trace}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{trace}} \\ \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}(1)\right) & \times & \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2\left(G_K, \mathbb{F}(1)\right) \end{array}$$

les flèches horizontales n'étant rien d'autre que le cup-produit. On en déduit le résultat d'après le lemme 2.2.6. □

[Fin de la démonstration de la proposition 2.2.12] D'après le lemme précédent et le lemme 2.2.6, pour relever $cl(r_n)$, il suffit de choisir u tel que

$$u \cup \mathrm{trace}(cl(\bar{r})) = -\mathrm{trace}(\delta_0(cl(\bar{r}))).$$

Or l'accouplement

$$\mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}(1)\right) \times \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \mathbb{F}(1)\right)$$

est parfait (théorème de dualité locale de Tate) et de [NSW08] Corollary (7.2.13), on voit que la droite des caractères non ramifiés dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}\right)$ n'est pas contenu dans l'hyperplan orthogonal à $\mathrm{trace}(cl(\bar{r}))$ (car c'est un cocycle très ramifié). Ainsi, il existe un (et un seul) caractère u *non ramifié* tel que $\delta_u(cl(r_n)) = 0$.
Pour un tel u, $cl(r_n)$ se relève en un élément $cl(r_{n+1})$, et r_n, donc $\bar{r}$ admet un relèvement modulo π^{n+1}.
La limite projective des r_n est alors un relèvement de $\bar{r}$ de la forme $\begin{pmatrix} \rho'(1)\theta' & * \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$, où θ' est un caractère non ramifié, trivial modulo π.
La dernière assertion de la proposition résulte de l'unicité de θ et du lemme 2.2.8.
□

Le cas peu ramifié

L'idée est similaire au cas très ramifié. L'obstruction $Ob(\bar{r})_n$ à relever $cl(\bar{r}) \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ modulo π^n est un élément d'un H^2 modulo π^{n-1}. Sous certaines hypothèses, le lemme 2.2.10 permet d'affirmer que $Ob(\bar{r})_2 = Ob(\bar{r})_3 = \ldots = Ob(\bar{r})_n = \ldots$. Il convient alors de trouver un relèvement judicieux modulo π^2 pour annuler simultanément toutes ces obstructions.

Lemme 2.2.14. *Soit ρ une représentation modulo π^2 de G_K. On suppose que p ne divise pas la dimension de $\bar{\rho}$. Soit $\theta : G_K \longrightarrow (\mathcal{O}/\pi^2)^\times$ un caractère continu trivial modulo π et non trivial modulo π^2. Alors $\rho\theta \not\simeq \rho$.*

Démonstration. Supposons au contraire que $\rho\theta \simeq \rho$. Alors $\det(\rho\theta) = \det \rho$. Si l'on note d la dimension de $\bar{\rho}$, cela implique que $\theta^d = (1 + u\pi)^d = 1 \bmod \pi^2$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur u (rappelons que p ne divise pas d.). □

Remarque 2.2.15. Si p divise la dimension de $\bar{\rho}$ et si $\rho = Ind_{G_{K_p}}^{G_K}(\kappa)$ où $\kappa : G_{K_p} \longrightarrow (\mathcal{O}/\pi^2)^\times$ est un caractère, alors quelque soit $\theta : G_K \longrightarrow (\mathcal{O}/\pi^2)^\times$ non ramifié, trivial modulo π, $\rho\theta \simeq \rho$. C'est une simple conséquence du théorème de réciprocité de Frobenius (proposition 1.2.10) et du fait que la restriction de θ à G_{K_p} est triviale.

Proposition 2.2.16. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K, extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$ peu ramifiée. On suppose que p ne divise pas la dimension de $\bar{\rho}$. Soient ρ et ρ' des relèvements de $\bar{\rho}$ à coefficients dans $\mathcal{O}$ tels que $\rho \simeq \rho'$ modulo π^2. Soit $\theta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ un caractère continu non ramifié, trivial modulo π et non trivial modulo π^2. Alors $\bar{r}$ admet un relèvement r, extension de ρ par $\rho'(1)\theta$.*

Démonstration. On suppose que $\theta = 1 + u\pi \bmod \pi^2$ avec $\bar{u} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}/\pi$ un caractère additif *non nul*.
Soit $cl(r_2)$ un élément de $\mathrm{H}^1\left(G_K, \left(\rho'(1) \otimes \rho^*\right)/\pi^2\right)$ relevant $cl(\bar{r})$ (l'existence d'un tel élément est assurée par le lemme 2.2.8). Considérons la suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^2\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right) \xrightarrow{\delta_u} \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$$

D'après le lemme 2.2.7, $\delta_u\left(cl(\bar{r})\right) - \delta_0\left(cl(\bar{r})\right) = u \cup cl(\bar{r})$ et d'après le lemme 2.2.8, $\delta_0\left(cl(\bar{r})\right) = 0$. On en déduit que $\delta_u\left(cl(\bar{r})\right) = u \cup cl(\bar{r})$. Or $\bar{r}$ est peu ramifié, et u est non ramifié, ce qui implique la nullité du cup-produit. On en déduit qu'il existe un relèvement $cl(r_{2,\theta}) \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^2\right)$ de $cl(\bar{r}) \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$.
Soit k un entier ≥ 3 et soit

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \mathrm{H}^2\left(G_K, \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^{k-1}\right) \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^2\left(G_K, \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^{k-2}\right)
\end{tikzcd}$$

le diagramme commutatif induit par

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^{k-1} \arrow[r, "\times\pi"] \arrow[d] & \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^{k} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^* \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^{k-2} \arrow[r, "\times\pi"] & \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^{k-1} \arrow[r] & \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

les lignes étant exactes et les flèches de gauche et du milieu étant les applications de réduction évidentes.
Vu le lemme précédent et le corollaire 2.2.10, f est un isomorphisme. On en déduit que l'obstruction à relever $cl(\bar{r})$ en un élément

$$cl(r_{k,\theta}) \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \left(\rho'(1)\theta \otimes \rho^*\right)/\pi^{k}\right)$$

est nulle quelque soit l'entier k. Par passage à la limite et extraction diagonale, on en déduit un relèvement de $\bar{r}$, extension de ρ par $\rho'(1) \otimes \theta$. $\square$

Les propositions 2.2.12 et 2.2.16 permettent d'obtenir un relèvement en caractéristique 0 pour toute représentation modulo π de G_K, extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$, sans considération sur la dimension de $\bar{\rho}$. Supposons donc que $\bar{\rho}$ est de dimension d : c'est l'induite d'un caractère $\bar{\kappa}$ (rappelons que K_d désigne l'extension non ramfiée de K de degré d) et on a :

Corollaire 2.2.17. *Soit $\bar{r}$ une représentation de longueur 2, extension de $\bar{\rho} = Ind_{G_{K_d}}^{G_K}(\bar{\kappa})$ par $\bar{\rho}(1)$. Soient $\rho = Ind_{G_{K_d}}^{G_K}(\kappa)$ et $\rho' = Ind_{G_{K_d}}^{G_K}(\kappa')$ deux relèvements de $\bar{\rho}$ tels que $\kappa = \kappa' \mod \pi^2$. Alors il existe un caractère $\theta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ non ramifié, trivial modulo π et un relèvement r de $\bar{r}$, extension de ρ par $\rho'(1)\theta$.*

Démonstration. Si p ne divise pas la dimension de $\bar{\rho}$, cela résulte immédiatement des propositions 2.2.12 et 2.2.16. En général, le lemme de Shapiro, ainsi que les propositions 2.2.16 et 2.2.12 permettent également de conclure. En effet, si θ' : $G_{K_d} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ est un caractère non ramifié et trivial modulo π et si $\rho = Ind(\kappa)$, notons $\rho_{\theta'} := Ind_{G_{K_d}}^{G_K}(\kappa\theta')$. Remarquons qu'après avoir éventuellement étendu les scalaires, $\rho_{\theta'} \simeq \rho\theta$ pour un caractère $\theta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ non ramifié, trivial modulo π. Considérons alors $\theta' : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ un tel caractère. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(G_K, \rho_{\theta'}(1) \otimes \rho^*) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(G_{K_d}, \kappa'(1)\theta' \otimes \kappa^{-1}) \bigoplus \oplus_{s \in G_K/G_{K_d}, s \neq id} \mathrm{H}^1(G_{K_d}, \kappa'(1)\theta' \otimes (\kappa^s)^{-1}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(G_{K_d}, \mathbb{F}(1)) \bigoplus \oplus_{s \in G_K/G_{K_d}, s \neq id} \mathrm{H}^1(G_{K_d}, \bar{\kappa}(1) \otimes (\bar{\kappa}^s)^{-1}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^2(G_K, \rho_{\theta'}(1) \otimes \rho^*) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{H}^2(G_{K_d}, \kappa'(1)\theta' \otimes \kappa^{-1}) \bigoplus \oplus_{s \in G_K/G_{K_d}, s \neq id} \mathrm{H}^2(G_{K_d}, \kappa'(1)\theta' \otimes (\kappa^s)^{-1})
\end{tikzcd}$$

Comme les groupes $\mathrm{H}^2(G_{K_d}, \kappa'(1)\theta' \otimes (\kappa^s)^{-1})$ sont nuls pour $s \neq id$, on conclut qu'il existe θ' tel que l'image de $\bar{r} \in \mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ se relève en un élément de $\mathrm{H}^1(G_K, \rho_{\theta'}(1) \otimes \rho^*) = \mathrm{H}^1(G_K, \rho(1)\theta \otimes \rho^*)$

□

Remarque 2.2.18. Dans la démonstration du théorème 2.4.11, on n'utilise pas le corollaire précédent mais bel et bien les propositions 2.2.12 et 2.2.16 car on a besoin d'avoir un certain contrôle sur les caractères non ramifiés que l'on utilise pour annuler les obstructions.

2.3 Représentations de longueur 3

Utilisant les résultats précédents en longueur 2, on démontre dans cette partie que beaucoup de représentations de longueur 3 se relèvent en caractéristique 0. A la fin de cette partie, on discute également les limites de la méthode employée.

Rappelons que si $\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ est une représentation continue telle que $\rho = \mathrm{Ind}_{G_{K_n}}^{G_K}(\kappa)$ et si $\theta : G_{K_n} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ est un caractère, alors ρ_θ est la représentation $\mathrm{Ind}_{G_{K_n}}^{G_K}(\kappa\theta)$.

Proposition 2.3.1. *Soit* $\bar{r} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_1 & * & * \\ 0 & \bar{\rho}_2 & * \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_3 \end{pmatrix}$ *une représentation modulo* π *de* G_K *de longueur* 3*. On suppose que* $\bar{r}$ *n'est pas de la forme*

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho}(1) & x & y \\ 0 & \bar{\rho}(1) & z \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}$$

où $\bar{\rho}$ *est absolument irréductible, vérifie* $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}(1)$*,* x *et* $z \in \mathcal{Z}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ *sont tous deux d'images non nulles et* z *est peu ramifiées dans* $\mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$*.*
Pour chaque i*, considérons un relèvement* $\rho_i = Ind_{G_{K_{d_i}}}^{G_K}(\kappa_i)$ *de* $\bar{\rho}_i = Ind_{G_{K_{d_i}}}^{G_K}(\bar{\kappa}_i)$*. Si* $\bar{\rho}_i = \bar{\rho}_j$*, on choisit* $\kappa_i = \kappa_j$ *et si* $\bar{\rho}_i = \bar{\rho}_j(1)$*, on choisit* $\rho_i = \rho_j(1)$*. Soient* $\alpha_1, \alpha_2 : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ *des caractères triviaux modulo* π^2*. Pour* $i = 1$ *ou* 2*, il existe alors* $\theta_i : G_{K_{d_i}} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ *un caractère non ramifié, trivial modulo* π *tel que* $\bar{r}$ *se relève en* $r = \begin{pmatrix} \rho_{1,\theta_1}\alpha_1 & * & * \\ 0 & \rho_{2,\theta_2}\alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}$.

Démonstration. La démonstration consiste d'abord à analyser les différentes formes possibles que peut prendre $\bar{r}$ puis d'utiliser les résultats en longueur 2.
Notons $\bar{T}$ le sous-objet de longueur 2 de $\bar{r}$ correspondant au noyau de $\bar{r} \longrightarrow \bar{\rho}_3$ et notons $\bar{U}$ le quotient $\bar{r}/\bar{\rho}_1$. Supposons que $\bar{T}$ n'admette pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_3(1)$. Dans ce cas, pour tout relèvement T de $\bar{T}$ et tout relèvement ρ_3 de $\bar{\rho}_3$, l'application de réduction $\mathrm{H}^1(G_K, T \otimes \rho_3^*) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T} \otimes \bar{\rho}_3^*\right)$ est surjective car $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T} \otimes \bar{\rho}_3^*\right) = 0$ d'après les hypothèses et le théorème de dualité locale de Tate. On peut donc construire un relèvement comme annoncé par l'énoncé.
De même, si $\bar{U}$ n'admet pas de sous-objet isomorphe à $\bar{\rho}_1(-1)$, alors

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{U}^*\right) = 0$$

et pour tout relèvement ρ_1 de $\bar{\rho}_1$ et tout relèvement U de $\bar{U}$, l'application de réduction

$$\mathrm{H}^1(G_K, \rho_1 \otimes U^*) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{U}^*\right)$$

est surjective.

On est donc amené à considérer une représentation $\bar{r}$ qui prend, dans une base convenable, la forme $\begin{pmatrix} \bar{\rho}(2) & * & * \\ 0 & \bar{\rho}(1) & * \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}$.

Supposons dans un premier temps que $\bar{\rho} \not\cong \bar{\rho}(1)$. Soit U un relèvement de $\bar{U}$ de la forme

$$U = \begin{pmatrix} \rho_{\theta_2}(1)\alpha_2 & * \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

avec $\theta_2 : G_{K_d} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ non ramifié et trivial modulo π (c.f. corollaire 2.2.17). Soit T un relèvement de $\bar{T}$ de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \rho_{\theta_1\theta_2}(2)\alpha_1 & * \\ 0 & \rho_{\theta_2}(1)\alpha_2 \end{pmatrix},$$

avec $\theta_1 : G_{K_d} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ toujours non ramifié et trivial modulo π.
On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1\left(G_K, T \otimes \rho^*\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T} \otimes \bar{\rho}^*\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2\left(G_K, T \otimes \rho^*\right) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1\left(G_K, \rho_{\theta_2}(1)\alpha_2 \otimes \rho^*\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^2\left(G_K, \rho_{\theta_2}(1)\alpha_2 \otimes \rho^*\right)
\end{tikzcd}$$

L'application

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, T \otimes \rho^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \rho_{\theta_2}(1)\alpha_2 \otimes \rho^*\right)$$

est un isomorphisme car $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}(2) \otimes \bar{\rho}^*\right) = 0$ et donc $\mathrm{H}^2\left(G_K, \rho_{\theta_1\theta_2}(2)\alpha_1 \otimes \rho^*\right)$ est également trivial (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse que $\bar{\rho}(1) \not\cong \bar{\rho}$).
Or l'image de $cl(\bar{r}) \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T} \otimes \bar{\rho}^*\right)$ dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ est $cl(\bar{U})$ qui se relève en un élément de $\mathrm{H}^1\left(G_K, \rho_{\theta_2}(1)\alpha_2 \otimes \rho^*\right)$ par construction de θ_2. On en déduit que $\bar{r}$ se relève en une extension de ρ par T.

Il ne reste plus qu'à considérer le cas où $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}(1)$.

Supposons dans un premier temps que $\bar{T}$ soit semi-simple. Dans ce cas, soient ρ un relèvement de $\bar{\rho}$ et $\alpha_1, \alpha_2 : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ deux caractères triviaux modulo π^2. D'après le corollaire 2.2.17, il existe θ_1 et $\theta_2 : G_{K_d} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ non ramifiés et triviaux modulo π tels que $\bar{r}$ se relève en $r = \begin{pmatrix} \rho_{\theta_1}(1)\alpha_1 & 0 & * \\ 0 & \rho_{\theta_2}(1)\alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$.

Si $\bar{U}$ est semi-simple, en passant au dual on se ramène au cas précédent d'un sous-objet de longueur 2 semi-simple.

Finalement on en vient à étudier les représentations modulo π $\bar{r}$ de la forme $\begin{pmatrix} \bar{\rho}(1) & x & y \\ 0 & \bar{\rho}(1) & z \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}$ avec x et z d'images non nulles dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho} \otimes \bar{\rho}^*\right)$. Montrons que $\bar{r}$ se relève en caractéristique 0 si z définit un élément de $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ très ramifié.
Rappelons que l'on a la suite exacte courte $0 \longrightarrow \bar{T} \longrightarrow \bar{r} \longrightarrow \bar{\rho} \longrightarrow 0$. Relevons $\bar{T}$ en une représentation de la forme $T = \begin{pmatrix} \rho_{\theta_1}(1)\alpha_1 & * \\ 0 & \rho(1)\alpha_2 \end{pmatrix}$.
Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\theta : G_K \longrightarrow (\mathcal{O}/\pi^{n+1})^\times$ un caractère non ramifié, trivial modulo π et $\theta' : G_K \longrightarrow (\mathcal{O}/\pi^{n+1})^\times$ un caractère non ramifié, trivial modulo π^n Ecrivons $\theta' = 1 + \pi^n u \mod \pi^{n+1}$. On a le diagramme commutatif suivant, les lignes étant exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1\left(G_K, (T\theta\theta' \otimes \rho^*)/\pi^{n+1}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1\left(G_K, (T\theta \otimes \rho^*)/\pi^n\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T} \otimes \bar{\rho}^*\right) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{H}^1\left(G_K, (\rho(1)\alpha_2\theta\theta' \otimes \rho^*)/\pi^{n+1}\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^1\left(G_K, (\rho(1)\alpha_2\theta \otimes \rho^*)/\pi^n\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T} \otimes \bar{\rho}^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ provient du fait que $\bar{\rho}$ est un quotient de multiplicité 1 de $\bar{T}$.
Supposons donc donné un relèvement de r_n modulo π^n de $\bar{r}$, extension de ρ par $T\theta\theta'$. Notons η_n l'image de la classe de r_n dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, (\rho(1)\alpha_2\theta \otimes \rho^*)/\pi^n\right)$. D'après le lemme 2.2.7, l'obstruction à relever η_n modulo π^{n+1} est égale à $\bar{u} \cup \bar{\eta} + a$, où $a \in \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$. Comme $\bar{\eta}$ est très ramifié, il existe un unique $\bar{u}$ non ramifié annulant cette obstruction.
Comme l'application $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T} \otimes \bar{\rho}^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}\right)$ est un isomorphisme, on en déduit que r_n se relève modulo π^{n+1} en une représentation extension de $\rho \mod \pi^{n+1}$ par $T\theta\theta' \mod \pi^{n+1}$.
Passant à la limite, on en déduit un relèvement de $\bar{\rho}$ comme annoncé. □

Remarque 2.3.2. Lorsque $\bar{r}$ admet un quotient qui est une extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$ peu ramifiée, je ne sais pas comment la relever en une représentation de la forme $\begin{pmatrix} \rho(1)\alpha_1\theta_1 & * & * \\ 0 & \rho(1)\alpha_2\theta_2 & * \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$. Par exemple, si K contient les racines p-ème de l'unité, et si $\bar{r}$ est de dimension 3 avec $\bar{\rho} = 1$, caractère trivial, je ne sais pas si $\bar{\rho}$ admet un

relèvement de la forme $r = \begin{pmatrix} \chi_p^{p^2}\theta_1 & * & * \\ 0 & \chi_p^p\theta_2 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, il n'est pas difficile de voir que pour qu'un tel relèvement existe, il est nécessaire que θ_1 soit non trivial modulo π^2 (rappelons que le quotient est une extension peu ramifiée) et que dans ce cas, si T désigne comme toujours $\begin{pmatrix} \chi_p^{p^2}\theta_1 & * \\ 0 & \chi_p^p\theta_2 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{H}^2\left(G_K, T\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T}\right)$ est surjective, mais non injective (le groupe $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{T}\right)$ est d'ordre isomorphe à $\mathbb{F}$ tandis que $\mathrm{H}^2\left(G_K, T\right)$ est isomorphe à $\mathcal{O}/\pi^2$).
On contourne ce problème au paragraphe 2.5.2 pour relever n'importe quelle représentation de dimension 3 en une représentation cristalline.

2.4 Quelques cas en longueur supérieure

Dans cette partie, on démontre que l'on peut relever certaines représentations modulo π en caractéristique 0, en préservant une suite de Jordan-Hölder bien choisie. On introduit d'abord la notion de matrice très bien échelonnée, on démontre ensuite un résultat de relèvement pour certaines matrices très bien échelonnées.

2.4.1 Une convention

Soit k un entier. Convenons que si une matrice M est donnée par blocs par

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,m} \end{pmatrix},$$

on appelle i-ème b-ligne de M la matrice

$$\begin{pmatrix} M_{i,1} & \dots & M_{im} \end{pmatrix}$$

et j-ème b-colonne la matrice

$$\begin{pmatrix} M_{1,j} \\ \vdots \\ M_{n,j} \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Matrices bien et très bien échelonnées

Commençons par introduire les notions de matrices échelonnées et très bien échelonnées dans le contexte de ce travail.

Définition 2.4.1. Soit $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible de G_K modulo π. Soit M une matrice donnée par blocs par

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,m} \end{pmatrix},$$

chaque $M_{i,j}$ étant des matrices, éléments de $\mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$. On dit que M est échelonnée si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. si une b-ligne ne contient que des cocycles peu ramifiés, alors toutes les b-lignes suivantes ne contiennent que des cocycles peu ramifiés
2. si le premier terme très ramifié de la i-ème b-ligne est sur la b-colonne j, alors soit la b-ligne $i+1$ n'est composée que de cocycles peu ramifiés, soit le premier terme très ramifié de la b-ligne $i+1$ est sur la b-colonne k avec $k > j$.

Remarque 2.4.2. Fixons un élément $\bar{\eta}_{tr} \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ non nul et dont l'image dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ est très ramifiée. Tout élément

$$\bar{\eta} \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$$

s'écrit alors sous la forme $\bar{\eta} = a\bar{\eta}_{tr} + \bar{\eta}_{peu}$ où a est un élément de $\mathbb{F}$ et où $\bar{\eta}_{peu}$ est un cocycle peu ramifié. Il est alors clair que toute matrice par blocs (les blocs étant des éléments de $\mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$) peut se mettre sous forme échelonnée via des opérations élémentaires sur les b-lignes.

Définition 2.4.3. Soit $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible de G_K modulo π. Soit M une matrice à coefficients dans $\mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$. On dit que M est très bien échelonnée, que l'on abrège par TBE, si M est échelonnée et si de plus toute b-ligne admet au plus un cocycle très ramifié.

Remarque 2.4.4. Si M est bien échelonnée, des opérations élémentaires sur les b-colonnes permettent de la mettre sous forme très bien échelonnée.

2.4.3 Mise sous forme très bien échelonnée

Lemme 2.4.5. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible modulo π de G_K et soit $\bar{r}$ une représentation que l'on suppose extension successive de représentations*

$\bar{\rho}(i)$-isotypiques pour i entier variant de 0 à n, n entier strictement positif. On suppose donc qu'il existe une base dans laquelle $\bar{r}$ est donnée matriciellement par

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_n}\bar{\rho}(n) & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \oplus_1^{m_{n-1}}\bar{\rho}(n-1) & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$$

où chaque $\bar{\eta}_i$ est une matrice par blocs à m_i b-ligne(s) et m_{i-1} b-colonne(s), chaque bloc étant un élément de $\mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$.
Il existe une base dans laquelle les matrices $\bar{\eta}_i$ sont échelonnées.

Démonstration. On le démontre par récurrence sur n. L'idée de la démonstration est d'effectuer un changement de base particulier qui se traduit par des opérations élémentaires sur les lignes des différentes matrices $\bar{\eta}_i$.

Notons par d la dimension de $\bar{\rho}$. Lorsque $n = 1$, on est en présence d'une représentation qui s'écrit dans une base sous la forme

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}.$$

Abusons des notations : on note par I_k la matrice identité d'ordre dk. Si i et j sont des entiers compris entre 1 et k, on note par E_{ij} la matrice carrée d'ordre dk définie par blocs de la façon suivante : tous les blocs sont des matrices carrées d'ordre d, et sont nuls excepté le bloc à l'intersection de la i-ème b-ligne et de la j-ème b-colonne qui est la matrice identité d'ordre d
Le changement de base donné par la matrice de passage

$$P_{ij}(x) = \begin{pmatrix} I_{m_1} + xE_{ij} & 0_{m_1 m_0} \\ 0_{m_0 m_1} & I_{m_0} \end{pmatrix}$$

(où $x \in \mathbb{F}$, $1 \leq i, j \leq m_1$ et $i \neq j$) a pour effet de transformer la matrice de la représentation en la matrice

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & (I_{m_1} - xE_{ij})\bar{\eta}_1 \\ 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que l'on a ajouté à la i-ème b-ligne de $\bar{\eta}_1$ la j-ième multipliée par $-x$. Par un pivot de Gauss, on obtient une base dans laquelle $\bar{\rho}$ est donnée matriciellement par

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$$

avec $\bar{\eta}_1$ échelonnée.
Supposons à présent $n \geq 2$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base dans laquelle $\bar{r}$ admet la forme

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_n}\bar{\rho}(n) & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \oplus_1^{m_{n-1}}\bar{\rho}(n-1) & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$$

avec $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{n-1}$ échelonnées. Le changement de base défini par la matrice $Q_{ij}(x) = \begin{pmatrix} I_{m_n} + xE_{ij} & 0_{m_n(m_0+\ldots+m_{n-1})} \\ 0_{(m_0+\ldots+m_{n-1})m_n} & I_{(m_0+\ldots+m_{n-1})} \end{pmatrix}$ a encore pour effet d'agir sur les lignes de $\bar{\eta}_n$ et de préserver le quotient $\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_{n-1}}\bar{\rho}(n-1) & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$. Effectuant alors encore une fois un pivot de Gauss sur les b-lignes de $\bar{\eta}_n$, on rend cette matrice échelonnée. $\square$

La proposition suivante permet de passer d'une suite d'extensions définies par des matrices échelonnées à une suite d'extensions définies par des matrices très bien échelonnées.

Proposition 2.4.6. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible modulo π de G_K et soit $\bar{r}$ une représentation que l'on suppose donnée dans une base par*

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_n}\bar{\rho}(n) & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \oplus_1^{m_{n-1}}\bar{\rho}(n-1) & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$$

où chaque $\bar{\eta}_i$ est une matrice par blocs dont les blocs sont des éléments de $\mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$.
Il existe une base dans laquelle les matrices $\bar{\eta}_i$ sont très bien échelonnées.

Cette fois, on utilise des opérations élémentaires sur les colonnes pour parvenir à nos fins. Il faut cependant prendre garde car opérer sur les colonnes de $\bar{\eta}_i$ en changeant convenablement de base induira une opération sur les lignes de $\bar{\eta}_{i-1}$.

Démonstration. Fixons une base dans laquelle la matrice R de $\bar{r}$ est telle que les $\bar{\eta}_i$ sont bien échelonnées (c.f. lemme précédent). Raisonnons par récurrence sur n. Si $n = 1$, écrivons $R = \begin{pmatrix} \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$. La matrice $P_{ij}(x)^{-1}RP_{ij}(x)$, avec $P_{ij}(x) = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0_{m_1m_0} \\ 0_{m_0m_1} & I_{m_0} + xE_{ij} \end{pmatrix}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1(I_{m_0} + xE_{ij}) \\ 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}.$$

On a donc ajouté à la j-ième b-colonne de $\bar{\eta}_1$ la i-ième b-colonne multipliée par x. Procéder alors à un changement de base convenable (correspondant aux diverses opérations effectuées sur les colonnes) permet de rendre $\bar{\eta}_1$ très bien échelonnée.
Si $n = 2$, écrivons

$$R = \begin{pmatrix} \oplus_1^{m_2}\bar{\rho}(2) & \bar{\eta}_2 & * \\ 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$$

avec $\bar{\eta}_1$ et $\bar{\eta}_2$ bien échelonnées.
Soit $P_{ij}(x) = \begin{pmatrix} I_{m_2} & 0_{m_2m_1} & 0_{m_2m_0} \\ 0_{m_1m_2} & I_{m_1} + xE_{ij} & 0_{m_1m_0} \\ 0_{m_0m_2} & 0_{m_0m_1} & I_{m_0} \end{pmatrix}$. La matrice $P_{ij}(x)^{-1}RP_{ij}(x)$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_2}\bar{\rho}(2) & \bar{\eta}_2(I_{m_1} + xE_{ij}) & * \\ 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & (I_{m_1} - xE_{ij})\bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}.$$

On a ajouté à la j-ème b-colonne de $\bar{\eta}_2$ la i-ème multipliée par x et à la i-ème b-ligne de $\bar{\eta}_1$ la j-ième multipliée par $-x$. Effectuant des changements de bases convenables, avec $j > i$, on rend $\bar{\eta}_2$ très bien echelonnée tout en préservant le caractère bien échelonnée de $\bar{\eta}_1$.

Finalement, utilisant les matrices de la forme $\begin{pmatrix} I_{m_2} & 0_{m_2m_1} & 0_{m_2m_0} \\ 0_{m_1m_2} & I_{m_1} & 0_{m_1m_0} \\ 0_{m_0m_2} & 0_{m_0m_1} & I_{m_0} + xE_{ij} \end{pmatrix}$, on agit uniquement sur les colonnes de $\bar{\eta}_1$ ajoutant à la j-ième b-colonne la i-ème multipliée par x, préservant ansi $\bar{\eta}_2$. Ce faisant, on obtient par opérations convenables une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \oplus_1^{m_2}\bar{\rho}(2) & \bar{\eta}_2 & * \\ 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$$

avec $\bar{\eta}_1$ et $\bar{\eta}_2$ très bien échelonnées.

Pour $n \geq 3$, on effectue d'abord des opérations sur les colonnes de $\bar{\eta}_n$ qui préservent le caractère bien échelonné de $\bar{\eta}_{n-1}$, puis on agit sur les colonnes de $\bar{\eta}_{n-1}$, toujours en préservant le caractère bien échelonné de $\bar{\eta}_{n-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $\bar{\eta}_1$. La matrice obtenue est alors telle que les $\bar{\eta}_i$ sont toutes très bien échelonnées. $\square$

Définition 2.4.7. Soit $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible modulo π de G_K et soit $\bar{r}$ une représentation de G_K que l'on suppose donnée dans une base par

$$R = \begin{pmatrix} \oplus_1^{m_n}\bar{\rho}(n) & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \oplus_1^{m_{n-1}}\bar{\rho}(n-1) & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}(1) & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho} \end{pmatrix}$$

où chaque $\bar{\eta}_i$ est une matrice très bien échelonnée.
On dit que R est très bien échelonnée.
De même, si pour $0 \leq i \leq n$ $\bar{\rho}_i$ est une représentation absolument irréductible modulo π de G_K et si $\bar{r}$ est une représentation de G_K que l'on suppose donnée dans une base par

$$R = \begin{pmatrix} \oplus_1^{m_n}\bar{\rho}_n & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \oplus_1^{m_{n-1}}\bar{\rho}_{n-1} & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}_1 & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_0}\bar{\rho}_0 \end{pmatrix},$$

on dit que R est très bien échelonnée si chaque $\bar{\eta}_i$ est une matrice très bien échelonnée dès que $\bar{\rho}_i \simeq \bar{\rho}_{i-1}(1)$.

2.4.4 Relèvements de représentations très bien échelonnées

Commençons par rappeler :

Rappel 2.4.8. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation modulo π de G_K, absolument irréductible dont la dimension n'est pas divisible par p. Soit $\bar{r}$ une représentation, extension de $\bar{\rho}$ par $\bar{\rho}(1)$. Soit ρ un relèvement de $\bar{\rho}$ et $\alpha : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ un caractère trivial modulo π^2. Soit $\theta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ un caractère non ramifié, trivial modulo π, non trivial modulo π^2 et soit $\theta' : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ un autre caractère non ramifié, trivial modulo π (on n'exige pour l'instant rien de $\theta' \mod \pi^2$)*

1. *Si $\bar{r}$ définit un élément de $\mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ peu ramifié, pour que $\bar{r}$ se relève en une extension de $\rho\theta'$ par $\rho(1)\alpha\theta$ il suffit que $\theta\theta'^{-1} \neq 1 \mod \pi^2$ (il s'agit de la proposition 2.2.16).*

2. *Si $\bar{r}$ définit un élément de* $\mathrm{H}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ *très ramifié, pour que $\bar{r}$ se relève en une extension de $\rho\theta'$ par $\rho(1)\alpha\theta$ il suffit que $\theta\theta'^{-1} = \beta$ où $\beta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ est un (certain) caractère fixé, trivial modulo π^2 (il s'agit de la proposition 2.2.12, le fait que β est fixé et trivial modulo π^2 résulte de l'unicité dans l'énoncé de cette proposition).*

Proposition 2.4.9. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K, extension de $\bar{T}_0$ par $\bar{T}_1$ avec $\bar{T}_1 = \oplus_{j=1}^{m_1}\bar{\rho}_1$ et $\bar{T}_0 = \oplus_{j=1}^{m_0}\bar{\rho}_0$, où $\bar{\rho}_0$ et $\bar{\rho}_1$ sont des représentations absolument irréductibles dont la dimension n'est pas divisible par p.*
Soit α_1 un caractère trivial modulo π^2 de G_K et soit T_1 un relèvement de $\bar{T}_1$ de la forme $T_1 = \oplus_{j=1}^{m_1}\rho_1\alpha_1\theta_{1,j}$ où les $\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m_1}$ sont des caractères non ramifiés de G_K, triviaux modulo π, non triviaux modulo π^2 et distincts deux à deux modulo π^2.
Alors il existe un relèvement r de $\bar{r}$ et des caractères $\theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$ non ramifiés, triviaux modulo π, non triviaux modulo π^2 et distincts deux à deux modulo π^2 tels que r soit extension de $T_0 = \oplus_{j=1}^{m_0}\rho_0\theta_{0,j}$ par T_1.

Démonstration.

1. Premier cas : on a $\bar{\rho}_1 \not\cong \bar{\rho}_0(1)$. Dans ce cas, on choisit les $\theta_{0,j}$ de sorte que les $\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m_1}, \theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$ soient deux à deux distincts. Comme $\bar{\rho}_1 \not\cong \bar{\rho}_0(1)$, $\mathrm{H}^2(G_K, \bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_0^*) = 0$, et la proposition 2.2.3 assure que chaque $\bar{\eta}_{i,j}$ admet un relèvement $\eta_{i,j} \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, \rho_1\theta_i \otimes (\rho_0\theta'_j)^*\right)$.
2. Second cas : les cocycles $(\bar{\eta}_{i,j})$ sont tous des éléments de $\mathcal{Z}^1(G_K, \bar{\rho}_0(1) \otimes \bar{\rho}_0^*)$ peu ramifiés. On choisit $\theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$ de sorte que les
$$\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m_1}, \theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$$
soient non triviaux et deux à deux distincts modulo π^2. On a alors $\theta_{1,i}\theta_{0,j}^{-1} \neq 1 \mod \pi^2$ quelque soient i, j et d'après 1) dans le rappel précédent, chaque $\bar{\eta}_{i,k} \in \mathcal{Z}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ $(1 \leq k \leq m_0)$ admet un relèvement
$$\eta_{i,k} \in \mathcal{Z}^1(G_K, \rho(1)\alpha_1\theta_{1,i} \otimes (\rho\theta_{0,j})^*).$$
3. Troisième cas : la matrice des cocycles n'a qu'une seule b-ligne, et celle-ci contient un (unique) élément très ramifié. Notons k l'indice de la b-colonne correspondante. Pour relever les différents $\bar{\eta}_{1,1}, \ldots, \bar{\eta}_{1,m_0}$, le rappel précédent nous dit qu'il suffit de résoudre le système d'équations et d'inéquations suivant :
$$\begin{array}{rcl} \theta_{1,1}\theta_{0,k}^{-1} & = & \beta_k \\ \theta_{1,1}\theta_{0,j}^{-1} & \neq & 1 \mod \pi^2 \ \forall 1 \leq j \leq m_0, j \neq k \end{array}$$

où β_k est fixé, trivial modulo π^2. Un tel système admet toujours des solutions avec les $\theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$ non triviaux et distincts modulo π^2.
Ainsi, chaque $\bar{\eta}_{1,j} \in \mathcal{Z}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ se relève en

$$\eta_{1,j} \in \mathcal{Z}^1(G_K, \rho(1)\alpha_1\theta_{1,j} \otimes (\rho\theta_{0,j})^*).$$

4. Quatrième cas : la matrice des cocycles n'a qu'une seule b-colonne qui contient un élément très ramifié. C'est nécessairement $\bar{\eta}_{1,1}$.
Le rappel nous dit que pour relever les $\bar{\eta}_{1,1}, \ldots, \bar{\eta}_{m_1,1}$, il suffit de résoudre le système d'équations et d'inéquations suivant :

$$\begin{array}{rcl} \theta_{1,1}\theta_{0,1}^{-1} & = & \beta_1 \\ \theta_{1,j}\theta_{0,1}^{-1} & \neq & 1 \mod \pi^2 \ \ \forall 2 \leq j \leq m_1 \end{array}$$

où β_1 est fixé, trivial modulo π^2. Comme les $\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m_1}$ sont distincts deux à deux, un tel système admet toujours une (unique) solution.
Ainsi, chaque $\bar{\eta}_{j,1} \in \mathcal{Z}^1(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*)$ se relève en

$$\eta_{j,1} \in \mathcal{Z}^1(G_K, \rho(1)\alpha_1\theta_{j,1} \otimes (\rho\theta_{0,1})^*).$$

5. Cinquième cas : la matrice des cocycles a strictement plus qu'une ligne, et strictement plus qu'une colonne et contient des éléments dans $\mathcal{Z}^1(G_K, \bar{\rho}_0(1) \otimes \bar{\rho}_0^*)$ très ramifiés. Notons $\bar{\eta}_{1,k_1}, \ldots, \bar{\eta}_{l,k_l}$ les éléments très ramifiés avec $1 \leq l \leq m_1$ et $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_{m_0}$.
Toujours d'après le rappel, pour relever les $\bar{\eta}_{i,j}$, il suffit de résoudre le système d'équations et d'inéquations suivant :

$$\begin{array}{rcl} \theta_{1,1}\theta_{0,k_1}^{-1} & = & \beta_{k_1} \\ \vdots & = & \vdots \\ \theta_{1,l}\theta_{0,k_l}^{-1} & = & \beta_{k_l} \\ \theta_{1,i}\theta_{0,j}^{-1} & \neq & 1 \mod \pi^2 \ \ \forall 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq m_0, (i,j) \neq (l', k_{l'}), l' = 1, \ldots, l \end{array}$$

où les $\beta_{k_1}, \ldots, \beta_{k_l}$ sont fixés, triviaux modulo π^2.

Les équations du système déterminent les $\theta_{0,k_{l'}}$ et sont compatibles avec les inéquations car les $\theta_{1,1},\dots,\theta_{1,m_1}$ sont distincts deux à deux. On peut de plus choisir les autres caractères de sorte que $\theta_{0,1},\dots,\theta_{0,m_0}$ soient distincts deux à deux modulo π^2 quitte à étendre les scalaires.
Ainsi, chaque $\bar{\eta}_{i,j} \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, \bar{\rho}(1) \otimes \bar{\rho}^*\right)$ se relève en

$$\eta_{i,j} \in \mathcal{Z}^1\left(G_K, \rho(1)\alpha\theta_{1,i} \otimes (\rho\theta_{0,j})^*\right).$$

□

Proposition 2.4.10. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K. Il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\bar{r}$ s'écrit sous la forme*

$$R = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \bar{T}_{n-1} & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_0 \end{pmatrix}$$

où
– *chaque $\bar{T}_i = \oplus_1^{m_i}\bar{\rho}_i$ avec $\bar{\rho}_i$ absolument irréductible.*
– *soit $\bar{\rho}_{i+1} = \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas, $\bar{T}_{i+1}$ est le quotient maximal semi-simple de $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ dont tous les facteurs sont isomorphes à $\bar{\rho}_{i+1}$*
– *soit $\bar{\rho}_{i+1} \not\cong \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas $\bar{r}_{i+1}$ n'admet pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_i(1)$*
– *la matrice R est très bien échelonnée.*

Démonstration. Soit $\bar{\rho}_0 =: \bar{T}_0$ un quotient absolument irréductible de $\bar{r}$. Ecrivons

$$0 \longrightarrow \bar{r}_1 \longrightarrow \bar{r} \longrightarrow \bar{\rho}_0 \longrightarrow 0.$$

Soit $\bar{T}_1$ le quotient maximal semi-simple de $\bar{r}_1$ dont tous les facteurs sont isomorphes à $\bar{\rho}_0(1)$. Ou bien ce quotient est non trivial et dans ce cas on écrit $\bar{T}_1 = \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}_0(1)$, ou bien ce quotient est trivial et dans ce cas on choisit un quotient $\bar{\rho}_1$ absolument irréductible de $\bar{r}_1$ que l'on appelle aussi $\bar{T}_1$.
Ecrivons alors $0 \longrightarrow \bar{r}_2 \longrightarrow \bar{r}_1 \longrightarrow \bar{T}_1 \longrightarrow 0$. Désignons alors comme avant $\bar{T}_2$ pour le quotient maximal semi-simple de $\bar{r}_2$ dont tous les facteurs sont isomorphes à $\bar{\rho}_1(1)$. Si ce quotient est non trivial, on écrit $\bar{T}_2 = \oplus_1^{m_2}\bar{\rho}_1(1)$. Si ce quotient est trivial, on choisit alors un quotient absolument irréductible de $\bar{r}_2$, que l'on nomme $\bar{\rho}_2$ ou encore $\bar{T}_2$.

Répétant ce procédé, on a trouvé une base dans laquelle la matrice de $\bar{r}$ est comme annoncé, excepté qu'elle n'est pas nécessairement très bien échelonnée. Mais le lemme 2.4.5 permet de trouver une telle base.

$\square$

Théorème 2.4.11. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K. Fixons une base $\mathcal{B}$ comme dans la proposition précédente. La matrice R de $\bar{r}$ dans cette base s'écrit donc sous la forme*

$$R = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \bar{T}_{n-1} & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_0 \end{pmatrix}.$$

Faisons l'hypothèse (H) que pour tout $1 \leq i \leq n-1$ $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ n'admet pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_{i-1}(1)$.
Supposons également que p ne divise pas la dimension des $\bar{\rho}_i$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des caractères triviaux modulo π^2. Soit ρ_i un relèvement de $\bar{\rho}_i$. Si $\bar{\rho}_{i+1} = \bar{\rho}_i(1)$, on choisit $\rho_{i+1} = \rho_i(1)$. Il existe alors un relèvement r de $\bar{r}$ et des caractères non ramifiés $\theta_{i,j}$ triviaux modulo π tels que r est donné matriciellement par

$$\begin{pmatrix} T_n & * & * & * & * \\ 0 & T_{n-1} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_0 \end{pmatrix}$$

avec $T_i = \oplus_{j=1}^{m_i} \rho_i \alpha_i \theta_{i,j}$. On peut de plus choisir $\theta_{i,j}$ non trivial modulo π^2 et tel que pour chaque i fixé, les $\theta_{i,j}$ sont deux à deux distincts modulo π^2 lorsque $1 \leq j \leq m_i$.

Démonstration. Démontrons ce résultat par récurrence sur n que l'on peut supposer ≥ 2.
Le cas $n = 2$ n'est rien d'autre que la proposition 2.4.9.
Supposons donc $n \geq 3$. Ecrivons

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} \oplus_1^{m_n} \bar{\rho}_n & \bar{\eta}_n & * & * & * \\ 0 & \oplus_1^{m_{n-1}} \bar{\rho}_{n-1} & \bar{\eta}_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_1} \bar{\rho}_1 & \bar{\eta}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_0} \bar{\rho}_0 \end{pmatrix}$$

et fixons un relèvement r_1 de

$$\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} \oplus_1^{m_n}\bar{\rho}_n & \bar{\eta}_n & * & * \\ 0 & \oplus_1^{m_{n-1}}\bar{\rho}_{n-1} & \bar{\eta}_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \ddots & \bar{\eta}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \oplus_1^{m_1}\bar{\rho}_1 \end{pmatrix}$$

comme dans l'énoncé.

Considérons un relèvement T_0 de $\bar{T}_0 = \oplus_1^{m_0}\bar{\rho}$ de la forme $\begin{pmatrix} \rho\theta_{0,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \rho\theta_{0,m_0} \end{pmatrix}$ où les $\theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$ sont des caractères non ramifiés, triviaux modulo π, non triviaux modulo π^2 et deux à deux distincts modulo π^2 convenablement choisis. Expliquons comment choisir ces caractères : considérons la suite exacte

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, r_1 \otimes T_0^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{r}_1 \otimes \bar{T}_0^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, r_1 \otimes T_0^*\right) \longrightarrow \ldots$$

Si $\bar{\rho}_1 \not\simeq \bar{\rho}_0(1)$, alors $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{r}_1 \otimes \bar{T}_0^*\right) = 0$ (par construction de $\bar{r}_1$), et donc $\mathrm{H}^2\left(G_K, r_1 \otimes T_0^*\right) = 0$ via le lemme 2.2.2. On en déduit la surjectivité de

$$\mathrm{H}^1\left(G_K, r_1 \otimes T_0^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{r}_1 \otimes \bar{T}_0^*\right)$$

(et ce, quelque soit le choix des $\theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$), d'où l'existence d'un relèvement de $\bar{r}$ comme escompté.

Si $\bar{\rho}_1 \simeq \bar{\rho}_0(1)$, choisissons les $\theta_{0,1}, \ldots, \theta_{0,m_0}$ comme dans la discussion du cas $n = 2$ de sorte que l'extension $\begin{pmatrix} \bar{T}_1 & \bar{\eta}_1 \\ 0 & \bar{T}_0 \end{pmatrix}$ se relève en caractéristique nulle.
Notons T_1 le quotient de r_1 se réduisant modulo π sur $\bar{T}_1$.
Vu la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1\left(G_K, r_1 \otimes T_0^*\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{r}_1 \otimes \bar{T}_0^*\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2\left(G_K, r_1 \otimes T_0^*\right) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^1\left(G_K, T_1 \otimes T_0^*\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T}_1 \otimes \bar{T}_0^*\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^2\left(G_K, T_1 \otimes T_0^*\right) \end{tikzcd}$$

pour achever la démonstration, il suffit de démontrer que l'application

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, r_1 \otimes T_0^*\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(T_1 \otimes T_0^*\right)$$

est un isomorphisme.
Or d'après l'hypothèse (H) de l'énoncé, on a $\mathrm{H}^2\left(G_K, \bar{r}_1/\bar{r}_2 \otimes \bar{T}_0^*\right) = 0$ et donc $\mathrm{H}^2\left(G_K, (r_1/r_2) \otimes T_0^*\right) = 0$ d'après le lemme 2.2.2.

□

2.5 Relèvements en des représentations cristallines

On applique les résultats des sections précédentes pour construire des relèvements cristallins de certaines représentations modulo π de G_K .

2.5.1 Représentations absolument irréductibles

Commençons par rappeler :

Lemme 2.5.1. *Soit L une extension finie de K. Soit V une représentation p-adique de G_L. Alors $\mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K}(V)$ est cristalline si et seulement si V est cristalline et L/K est non ramifiée. Dans ce cas, si $\tilde{\sigma}$ est un $\mathbb{Q}_p$-plongement $L \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ dont la restriction est $\sigma : K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, alors $HT_\sigma\left(\mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K}(V)\right) = HT_{\tilde{\sigma}}(V)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de réciprocité de Frobenius. Voir lemme 10.2.1 de [Pat13]. □

Théorème 2.5.2. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible modulo π de G_K. Alors $\bar{\rho}$ se relève en une représentation cristalline.*

Démonstration. Ecrivons $\bar{\rho} = \mathrm{Ind}_{G_{K_d}}^{G_K}\left(\omega_{\varpi,\tilde{\tau}}^r \bar{\mu}\right)$ avec K_d extension non ramfiée de degrée d sur K et $\bar{\mu}$ caractère de G_{K_d} non ramifié.
Soit μ le relèvement de Teichmüller de $\bar{\mu}$. Soit $\tilde{\sigma} : K_d \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ un $\mathbb{Q}_p$-plongement relevant $\tilde{\tau}$. Le caractère $\chi_{\varpi,\tilde{\sigma}}$ relève $\omega_{\varpi,\tilde{\sigma}}$ et donc la représentation $\rho = \mathrm{Ind}_{G_{K_d}}^{G_K}\left(\chi_{\varpi,\tilde{\tau}}^r \mu\right)$ relève $\bar{\rho}$. D'après le théorème 1.5.5 et le lemme précédent, c'est une représentation cristalline.

□

On a un résultat semblable lorsque l'on souhaite prescrire les poids de Hodge-Tate du relèvement de la représentation absolument irréductible, il est cependant nécessaire de modifier la condition d'être cristalline en la condition d'être potentiellement cristalline :

Théorème 2.5.3. *Soit $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible modulo π de G_K. Soient $\{m_{0,\sigma}, \ldots, m_{d-1,\sigma}\}$ des ensembles d'entiers indexés par $\sigma \in \mathcal{P}_K$. Alors $\bar{\rho}$ admet un relèvement potentiellement cristallin à poids de Hodge-Tate labélisés $\{m_{0,\sigma}, \ldots, m_{d-1,\sigma}\}_{\sigma\in\mathcal{P}_K}$*

Démonstration. Ecrivons $\bar{\rho} = \mathrm{Ind}_{G_{K_d}}^{G_K}\left(\omega_{\varpi,\tilde{\tau}}^r \bar{\mu}\right)$. Soit μ le relèvement de Teichmüller de $\bar{\mu}$. Il suffit de relever judicieusement le caractère $\omega_{\varpi,\tilde{\tau}}^r$. Pour chaque $\sigma \in \mathcal{P}_K$, on fixe un relèvement $\tilde{\sigma} \in \mathcal{P}_{K_d}$. Si γ désigne un générateur du groupe cyclique

$\mathrm{Gal}\,(K_d/K)$, alors $\mathcal{P}_{K_d} = \{\tilde{\sigma} \circ \gamma^i, \sigma \in \mathcal{P}_K, 0 \leq i \leq d-1\}$. Considérons alors le caractère

$$\eta = \prod_{\sigma,i} \chi_{\varpi,\tilde{\sigma}\circ\gamma^i}^{a_{\sigma,i}}$$

avec $a_{\sigma_0,i} = m_{i,\sigma_0} - k$ et $a_{\sigma,i} = m_{i,\sigma}$ pour $\sigma \neq \sigma_0$. Soit $[\bar{\eta}^{-1}]$ le relèvement de Teichmüller de $\bar{\eta}$. La représentation $\rho = \mathrm{Ind}_{G_{K_d}}^{G_K}\left(\chi_{\tilde{\sigma}_0}^k \mu\eta\,[\bar{\eta}^{-1}]\right)$ est un relèvement de $\bar{\rho}$ avec les propriétés annoncées. $\square$

2.5.2 Représentations de longueur supérieure à 1

Théorème 2.5.4. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K de longueur 2. Ecrivons $0 \longrightarrow \bar{\rho}_1 \longrightarrow \bar{r} \longrightarrow \bar{\rho}_2 \longrightarrow 0$. Alors il existe des relèvements ρ_1 et ρ_2 de $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$ en des représentations cristallines et un relèvement cristallin de $\bar{\rho}$, extension de ρ_2 par ρ_1.*

Démonstration. Relevons $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$ en des représentations cristallines ρ_1' et ρ_2' comme dans le théorème 2.5.2. Choisissons une puissance convenable du caractère cyclotomique χ_p^k de sorte que $\chi_p^k = 1 \mod \pi^2$ et $\min HT(\rho_1'\chi_p^k) > 1 + \max HT(\rho_2')$. Les propositions 2.2.3, 2.2.12 et 2.2.16 assurent l'existence d'un caractère non ramifié $\theta : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ (ou $\theta : G_{K_d} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$) et d'un relèvement r de $\bar{r}$, extension de ρ_2' par $\rho_{\theta,1}'\chi_p^k$. Une telle représentation est cristalline d'après le corollaire 1.3.19. $\square$

Théorème 2.5.5. *Soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K. Supposons qu'il existe une base dans laquelle la matrice R de $\bar{r}$ s'écrit*

$$R = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * & * & * \\ 0 & \bar{T}_{n-1} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{T}_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_0 \end{pmatrix}$$

où

1. *chaque $\bar{T}_i = \oplus_1^{m_i} \bar{\rho}_i$ avec $\bar{\rho}_i$ absolument irréductible et p ne divise la dimension d'aucun des $\bar{\rho}_i$.*
2. *soit $\bar{\rho}_{i+1} = \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas, $\bar{T}_{i+1}$ est le quotient maximal semi-simple de* $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ *dont tous les facteurs sont isomorphes à $\bar{\rho}_{i+1}$*
3. *soit $\bar{\rho}_{i+1} \not\cong \bar{\rho}_i(1)$ et dans ce cas $\bar{r}_{i+1}$ n'admet pas de quotient isomorphe à $\bar{\rho}_i(1)$*

4. *pour tout* $1 \leq i \leq n-2$ $\bar{r}_{i+1} = \begin{pmatrix} \bar{T}_n & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \bar{T}_{i+1} \end{pmatrix}$ *n'admet pas de quotient isomorphe à* $\bar{\rho}_{i-1}(1)$.

Alors $\bar{r}$ *se relève en une représentation cristalline* r.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 2.4.11 en choisissant les caractères $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ cristallins et tels que $\min HT(\rho_{i+1}\alpha_{i+1}) > 1 + \max HT(\rho_i\alpha_i)$. Le corollaire 1.3.19 assure alors que les représentations obtenues par ce théorème sont cristallines. □

En dimension 3

Proposition 2.5.6. *Soit* $\bar{r}$ *une représentation modulo* π *de dimension* 2 *de* G_K*, extension du caractère trivial par le caractère cyclotomique. On suppose que cette représentation est peu ramifiée. Alors* $\bar{r}$ *se relève en une représentation cristalline* r*, extension du caractère trivial par le caractère cyclotomique.*

Démonstration. La représentation $\bar{r}$ définit un élément de $\mathbb{F} \otimes \underbrace{\mathcal{O}_K^\times} \simeq \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{F}(1))$ (c.f. section 1.2.4). Un tel élément se relève en un élément de $\mathcal{O} \otimes \widehat{\mathcal{O}_K^\times} \simeq \mathrm{H}^1(G_K, \mathcal{O}(1))$ et la représentation correspondante est cristalline d'après la proposition 1.3.20. □

Proposition 2.5.7. *Toute représentation modulo* π *de* G_K *de dimension* 3 *se relève en une représentation cristalline.*

Démonstration. Soit $\bar{r}$ une telle représentation. Alors $\bar{r}$ admet $1, 2$ ou 3 facteurs de Jordan-Hölder. Le premier cas résulte de 2.5.2. Le deuxième cas résulte aisément du fait que $\bar{r}$ est extensions de $\bar{r}_2$ par $\bar{r}_1$ avec $\mathrm{H}^2(G_K, \bar{r}_1 \otimes \bar{r}_2^*) = 0$. Enfin, quand $\bar{r}$ admet 3 facteurs absolument irréductibles, seul le cas où $\bar{r}$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \bar{\chi}_p & x & y \\ 0 & \bar{\chi}_p & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathrm{H}^1(G_K, \bar{\chi}_p)$ non nul et peu ramifié, x non nul et K contenant les racines p-ème de l'unité n'est pas encore traité (sinon se référer à la proposition 2.3.1).

Relevons pour cela le sous-objet $\bar{T}$ de dimension 2 de $\bar{r}$ en une représentation cristalline T de la forme $\begin{pmatrix} \chi_p^k\theta & \mu \\ 0 & \chi_p \end{pmatrix}$ où k est un entier > 1 congru à 1 modulo p.

On a le diagramme commutatif suivant, les lignes étant exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1\left(G_K, T\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2\left(G_K, T\right) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1\left(G_K, \chi_p\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\chi}_p\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^2\left(G_K, \chi_p\right)
\end{tikzcd}$$

L'application $\mathrm{H}^2\left(G_K, T\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \chi_p\right)$ est un isomorphisme. En effet, si $n \geq 1$ est un entier, alors

$$\mathrm{H}^2\left(G_K, T/\pi^n\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \chi_p/\pi^n\right)$$

est duale de

$$\mathrm{Hom}_{G_K}\left(\chi_p/\pi^n, \chi_p/\pi^n\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_K}\left(T/\pi^n, \chi_p/\pi^n\right).$$

Prouvons que cette dernière application est surjective. Pour ce faire, soit $\mathcal{B}_1$ une base de T/π^n et $\mathcal{B}_2$ une base de χ_p/π^n. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{G_K}\left(T/\pi^n, \chi_p/\pi^n\right)$ et écrivons la matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ comme $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathcal{O}/\pi^n$. Vu que f commute à l'action de G_K, on déduit que $a\mu = 0$. Comme $\mu \mod \pi = x \neq 0$, on a $a = 0$. Ainsi, l'application $\mathrm{Hom}_{G_K}\left(\chi_p/\pi^n, \chi_p/\pi^n\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_K}\left(T/\pi^n, \chi_p/\pi^n\right)$ est surjective, donc $\mathrm{H}^2\left(G_K, T/\pi^n\right) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left(G_K, \chi_p/\pi^n\right)$ est injective. C'est donc un isomorphisme, et ce pour tout entier $n \geq 1$. Par passage à la limite sur n, on en déduit que $\mathrm{H}^2\left(G_K, T\right) \simeq \mathrm{H}^2\left(G_K, \chi_p\right)$.
Soit alors $\bar{\eta}$ l'image de $\bar{r} \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{T}\right)$ dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{\chi}_p\right)$. La proposition précédente implique que cet élément se relève en $\eta \in \mathrm{H}^1\left(G_K, \chi_p\right)$ et que la représentation correspondante est cristalline. On en déduit que $\bar{r}$ se relève en une représentation r en caractéristique 0. Comme $k > 2$, r est cristalline. □

2.6 Quelques perspectives

Il serait intéressant de savoir si l'on peut relever les représentations ordinaires (les représentations modulo π dont les facteurs de Jordan-Hölder sont de dimension 1) en caractéristique 0 en des représentations cristallines en s'aidant de l'observation suivante : soit $\bar{r}$ une représentation modulo π de G_K, extension de $\bar{\chi}_p$ par $\bar{\chi}_p$. Supposons que $\bar{r}$ définisse un caractère non ramifié dans $\mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}\right)$. Soit $\bar{V}$ une représentation modulo π de G_K, extension du caractère trivial par $\bar{r}$. On a une application $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{r}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}(1)\right)$.

Proposition 2.6.1. *L'image de l'application* $\mathrm{H}^1\left(G_K, \bar{r}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1\left(G_K, \mathbb{F}(1)\right)$ *est l'hyperplan des extensions peu ramifiées.*

Savoir relever les représentations ordinaires permettrait de démontrer que toute représentation modulo π de G_K se plonge dans une représentation qui se relève en caractéristique 0 en une représentation cristalline (c'est dû au fait que les représentation absolument irréductibles sont induites de caractères).

Bibliographie

[BDJ10] K. Buzzard, F. Diamond, and F. Jarvis. On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields. *Duke Math. J.*, 155(1) :105–161, 2010.

[Ber02] L. Berger. Représentations p-adiques et équations différentielles. *Inventiones mathematicae*, 148(2) :219–284, 2002.

[Ber10] L. Berger. On some modular representations of the Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. *Compos. Math.*, 146 :58–80, 2010.

[BLGG13] T. Barnet-Lamb, T. Gee, and D. Geraghty. Serre weights for rank two unitary groups. *Math. Ann.*, 356(4) :1551–1598, 2013.

[Boe13] G Boeckle. Deformations of Galois representations. In *Arithmetic Geometry and Modularity*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2013.

[CL11] X. Caruso and T. Liu. Some bounds for ramification of p^n-torsion semi-stable representations. *Journal of Algebra*, 325(1) :70–96, 2011.

[Con12] B. Conrad. Lifting global representations with local properties. *Preprint*, 2012.

[Fon94a] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques semi-stables. *Astérisque*, (223) :113–184, 1994.

[Fon94b] J.M. Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. *Astérisque*, 223(59) :111, 1994.

[Gee11] T. Gee. Automorphic lifts of prescribed types. *Mathematische Annalen*, 350(1) :107–144, 2011.

[Kis08] M. Kisin. Potentially semi-stable deformation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(2) :513–546, 2008.

[Maz89] B. Mazur. Deforming Galois representations. In *Galois groups over* $\mathbf{Q}$ *(Berkeley, CA, 1987)*, volume 16 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 385–437. Springer, New York, 1989.

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg. *Cohomology of number fields.* Springer Verlag, 2008.

[Pat13] S. Patrikis. Variations on a theorem of Tate. *preprint*, 2013.

[Ram93] R Ramakrishna. On a variation of Mazur's deformation functor. *Compositio Math.*, 87(3) :269–286, 1993.

[Ser71] J.P. Serre. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Inventiones mathematicae*, 15(4) :259–331, 1971.

[Ser87] J.P. Serre. Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. *Duke Math. J.*, 54(1) :179–230, 1987.

[Ser98] J.P. Serre. *Abelian* ℓ *- adic representations and elliptic curves.* AK Peters, Ltd., 1998.

[Tat76] J. Tate. Relations between K_2 and Galois cohomology. *Inventiones mathematicae*, 36(1) :257–274, 1976.