Cohomologie de Dolbeault feuilletée de certaines laminations complexes

Rochdi Ben Charrada

Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de

VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

et la Faculté des Sciences de Sfax

Discipline, spécialité selon la liste des spécialités pour lesquelles l'Ecole Doctorale est accréditée :
Mathématiques pures

Présentée et soutenue par Rochdi, BEN CHARRADA.

Le 29/05/2013, à Valenciennes

Ecole doctorale :
Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Equipe de recherche, Laboratoire :
Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes (LAMAV)

COHOMOLOGIE DE DOLBEAULT FEUILLETEE DE CERTAINES LAMINATIONS COMPLEXES

JURY

Président du jury
- Ben Ammar, Mabrouk. Professeur, Université de Sfax. Tunisie.

Rapporteurs
- Loeb, Jean-Jacques. Professeur, Université d'Angers.
- Zarati, Saïd. Professeur, Université El Manar de Tunis. Tunisie.

Examinateurs
- Hijazi, Oussama. Professeur, Université de Lorraine. Nancy.

Directeur de thèse
- El Kacimi, Aziz. Professeur, Université de Valenciennes.

Co-directeur de thèse : Salhi, Ezzeddine. Professeur, Université de Sfax. Tunisie.

REMERCIEMENTS

En premier lieu, j'adresse mes plus chaleureux remerciements à Aziz EL KACIMI qui m'a proposé ce sujet de travail de thèse. Il n'a pas simplement accepté de diriger ma thèse, il m'a transmis la passion de la recherche mathématique et n'a eu de cesse de m'encourager et de me soutenir. J'ai pu apprécier non seulement sa dimension mathématique, mais aussi sa non moins importante dimension humaine. J'en profite pour lui exprimer ici ma plus profonde gratitude.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Ezzeddine SALHI, codirecteur de cette thèse en cotutelle. J'ai beaucoup appris auprès de lui durant sa préparation. Je le remercie vivement pour ses qualitées humaines, ses encouragements constants et son soutien moral.

Je remercie très sincèrement Jean-Jacques LŒB et Saïd ZARATI d'avoir accepté de rapporter sur mon travail et d'y porter leur regard.

Un grand merci également à Mabrouk BEN AMMAR et Oussama HIJAZI d'avoir bien voulu se joindre à la commission d'examen de cette thèse.

Je remercie tous mes amis et mes collègues de travail pour leurs encouragements constants et leur soutien.

Je ne saurais terminer sans une pensée pour tous les membres de ma famille, qui m'ont toujours accompagné pendant ces années difficiles d'élaboration de ce travail.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette thèse est consacrée au calcul, sur certains exemples, de la *cohomologie de Dolbeault feuilletée* d'un *feuilletage complexe* sur une variété différentiable. Ce qui est équivalent au probème de la résolution du $\overline{\partial}$ le long des feuilles pour un les formes différentielles dites feuilletées. L'objet de cette introduction générale est de donner une brève description de ce probème en partant du cas classique, montrer les différents travaux qu'il y a eu dans cette direction jusqu'à présent et exposer un résumé très concis de nos propres contributions.

1. Le cas classique

Soit M une variété différentiable. Une *structure presque complexe* sur M est une section J de classe C^∞ du fibré $\mathrm{End}(TM)$ vérifiant $J^2 = -\mathrm{id}$. Le couple (M, J) est dit *variété presque complexe.* Il s'agit donc de la donnée d'une famille $\{J(x)\}$ de *structures complexes linéaires* sur les espaces vectoriels T_xM variant de manière C^∞ par rapport à x. Remarquons que dans ce cas M est de dimension réelle paire. En effet, pour tout point $x \in M$, l'espace T_xM tangent à M en x, admet une base de la forme $(X_1, \cdots, X_m, JX_1, \cdots, JX_m)$. La variété M hérite ainsi d'une orientation naturelle. Ces deux conditions (la dimension paire et l'orientation) sont nécessaires mais non suffisantes.

Soit (M, J) une variété presque complexe. Le complexifié $TM^{\mathbb{C}}$ de l'espace tangent réel TM à M se décompose en somme directe $TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ où $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ désignent les sous-fibrés propres associés respectivement aux valeurs propres i et $-i$ de J. Ceci donne lieu à une décomposition de l'espace des r-formes différentielles en somme directe $\Omega^r(M) = \displaystyle\bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$ où $\Omega^{p,q}(M)$ est l'espace des sections du fibré $\Lambda^p(T^{1,0})^* \otimes \Lambda^q(T^{0,1})^*$. L'opérateur de différentiation extérieure d se décompose en une somme $d = d_{(1,0)} + d_{(0,1)} + d_{(2,-1)} + d_{(-1,2)}$. L'opérateur :

$$(1) \qquad d_{(0,1)} : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$$

est appelé *opérateur de Cauchy-Riemann* et est noté $\overline{\partial}$.

On note $\mathfrak{X}^{1,0}(M)$ (respectivement $\mathfrak{X}^{0,1}(M)$) l'espace des sections C^∞ du fibré $T^{1,0}M$ (respectivement $T^{0,1}M$). On considère l'application $\theta : \mathfrak{X}^{1,0}(M) \times \mathfrak{X}^{1,0}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^{0,1}(M)$ qui à $X, Y \in \mathfrak{X}^{1,0}(M)$ associe la composante de type $(0, 1)$ de $[X, Y]$; on l'appelle *torsion* de la structure presque complexe J. Le *problème d'intégrabilité* consiste à trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la torsion d'une structure presque complexe soit identiquement nulle, c'est-à-dire pour que $\mathfrak{X}^{1,0}(M)$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{X}(M)$. À cet effet on a le résultat suivant :

La structure presque complexe J est intégrable si, et seulement si, l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) *le tenseur* $\mathcal{N}(X,Y) = 2\{[JX,JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY]\}$ *de Nijenhuis associé à* J *est identiquement nul* ;

(ii) $d = d_{(1,0)} + \overline{\partial}$;

(iii) $\overline{\partial}^2 = \overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$.

<u>Conséquence</u> : *Toute structure presque complexe J sur une variété différentiable de dimension 2 est intégrable.*

1.1. Formes de type (p,q)

Soit M une variété analytique complexe de dimension m. Soit $(z_1, \cdots, z_m)$ un système de coordonnées locales de M. Pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, on a $z_j = x_j + iy_j$. Ainsi $dz_j = dx_j + idy_j$, $d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$ et :

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Toute forme $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ s'écrit localement $\omega = \displaystyle\sum_{|I|=p,|J|=q} \omega_{IJ}(z_1, \ldots, z_m)\, dz_I \wedge d\overline{z}_J$ où la somme porte sur tous les multi-indices $I = (i_1, \cdots, i_p)$ et $J = (j_1, \cdots, j_q)$ vérifiant les inégalités $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq m$ et :

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \quad \text{et} \quad d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

1.2. Cohomologie de Dolbeault

Pour toute forme ω de type (p,q) comme on vient de se la donner, la $(p,q+1)$-forme $\overline{\partial}\omega$ s'écrit :

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{I,J} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \omega_{IJ}}{\partial \overline{z}_k}(z_1, \ldots, z_m)\, d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J. \tag{2}$$

On sait déjà que l'opérateur $\overline{\partial}$ vérifie la relation $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$. Donc, pour tout p fixé dans $\{0, \ldots, m\}$, on a un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow \Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,m-1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,m}(M) \longrightarrow 0$$

dit *complexe de Dolbeault* de M. On note $Z^{p,q}(M)$ (respectivement $B^{p,q}(M)$) l'espace des formes de type (p,q) sur M qui sont $\overline{\partial}$-fermées (resp. $\overline{\partial}$-exactes). On a bien sûr l'inclusion $B^{p,q}(M) \subset Z^{p,q}(M)$. La *cohomologie de Dolbeault* de M est définie comme étant le quotient $H^{p,*}(M) = Z^{p,*}(M)/B^{p,*}(M)$. Elle mesure l'obstruction à la résolution du :

<u>Problème du $\overline{\partial}$</u>. *Soient $q \geq 1$ et $\beta \in Z^{p,q}(M)$. Existe-t-il une forme $\omega \in \Omega^{p,q-1}(M)$ vérifiant $\overline{\partial}\omega = \beta$?*

Cette cohomologie est un invariant de la variété complexe M. Depuis son introduction par Pierre Dolbeault vers les années 50, a elle joué un rôle fondamental en analyse et géométrie complexe. Nous allons voir qu'il est aussi possible de la définir, et éventuellement la calculer, pour certains feuilletages dits *complexes* :

2. Cohomologie de Dolbeault feuilletée

Soit M une variété (connexe) de dimension $m+n$. Un ***feuilletage*** $\mathcal{F}$ de ***codimension*** n (ou de ***dimension*** m) sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ et pour tout i, d'un difféomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow U_i$ tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, le difféomorphisme de changement de coordonnées :

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x,y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (x',y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

soit de la forme $x' = \varphi_{ij}(x,y)$ and $y' = \gamma_{ij}(y)$.

Les systèmes de coordonnées (U_i, φ_i) satisfaisant les conditions de la définition qu'on vient de donner sont dits *distingués* pour le feuilletage. Soit M une variété différentiable munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension réelle $2m$. On notera $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$.

2.1. Définition. *On dira que $\mathcal{F}$ est **complexe** s'il peut être défini par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M et des difféomorphismes $\varphi_i : \Omega_i \times \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i$ (où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$) tels que les changements de coordonnées :*

$$\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (z,t) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (z',t') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \tag{3}$$

soient de la forme $(z',t') = \left(\varphi_{ij}^1(z,t), \varphi_{ij}^2(t)\right)$ avec $\varphi_{ij}^1(\cdot,t)$ holomorphe en z pour t fixé.

2.2. Quelques exemples

Nous en donnons quelques-uns de nature très élémentaire. D'autres se trouvent dans les deux articles constituant notre travail et qui sont joints à ce mémoire.

i) Toute variété analytique complexe de dimension m est un feuilletage complexe de dimension m. Le groupe des automorphismes de ce feuilletage est réduit à celui des automorphismes de la variété complexe.

ii) Tout feuilletage holomorphe au sens usuel sur une variété complexe est un feuilletage complexe sur la variété réelle sous-jacente.

iii) Soit M un ouvert de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}^n$, pose $M^t = \{z \in \mathbb{C}^m : (z,t) \in M\}$; c'est un un ouvert de $\mathbb{C}^m$ appelé *section* de M suivant t. Les sections sont les feuilles d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension m qu'on appellera *feuilletage complexe canonique* de M.

Soit M une variété munie d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension m. Lorsque on travaillera en coordonnées locales, on les notera toujours $(z,t) = (z_1, \cdots, z_m, t_1, \cdots, t_n)$ où n est la codimension réelle de $\mathcal{F}$. Pour chaque $j = 1, \cdots, m$, $z_j = x_j + iy_j$. Ainsi, pour $j = 1, \cdots, m$: $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$. De même :

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right). \tag{4}$$

Pour tous multi-indices $I = (i_1, \ldots, i_p)$ et $J = (j_1, \ldots, j_q)$ dans $\{1, \ldots, m\}$, on adoptera les notations suivantes pour l'écriture des formes différentielles le long des feuilles :

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \quad \text{et} \quad d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

Une forme différentielle de degré $r = p+q$ s'écrivant localement comme combinaison linéaire de telles formes est dite *feuilletée de type* (p,q). Soit $\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$ s'écrivant localement :

$$\alpha = \sum_{|I|=p,|J|=q} \alpha_{IJ}(z,t)\; dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

où la somme porte sur tous les multi-indices $I = (i_1, \cdots, i_p)$ et $J = (j_1, \cdots, j_q)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq m$. L'opérateur de Cauchy-Riemann le long des feuilles a pour expression locale :

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \sum_{I,J}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \overline{z}_k}(z,t) d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J. \tag{5}$$

Il vérifie $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} \circ \overline{\partial}_{\mathcal{F}} = 0$; pour tout p fixé dans $\{0, \ldots, m\}$, on obtient donc un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,m-1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,m}(M) \longrightarrow 0$$

appelé *complexe de Dolbeault feuilleté* (ou *complexe* du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$) de $\mathcal{F}$. On note $Z^{p,q}_{\mathcal{F}}(M)$ le noyau de $\Omega^{p,q}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega^{p,q+1}_{\mathcal{F}}(M)\}$ et $B^{p,q}_{\mathcal{F}}(M)$ l'image de $\Omega^{p,q-1}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega^{p,q}_{\mathcal{F}}(M)$. On a bien sûr $B^{p,q}_{\mathcal{F}}(M) \subset Z^{p,q}_{\mathcal{F}}(M)$. L'espace vectoriel quotient $H^{p,*}_{\mathcal{F}}(M) = Z^{p,*}_{\mathcal{F}}(M)/B^{p,*}_{\mathcal{F}}(M)$ est appelée *$\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$-cohomologie* ou *cohomologie de Dolbeault feuilletée* du feuilletage complexe $(M, \mathcal{F})$. C'est l'obstruction à l'existence des solutions pour le :

2.3. Problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$. *Étant donnée une forme feuilletée $\beta \in Z^{p,q}_{\mathcal{F}}(M)$, existe-t-il une forme feuilletée $\alpha \in \Omega^{p,q-1}_{\mathcal{F}}(M)$ telle que $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \beta$?*

Une des difficultés majeures pour résoudre le $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ ou, de manière équivalente, pour calculer les espaces vectoriels $H^{0,*}_{\mathcal{F}}(M)$ est que l'opérateur $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ n'est pas elliptique (il l'est seulement le long des feuilles) contrairement au cas classique ; et donc lorsque les solutions existent feuille par feuille, ni la continuité ni la régularité transverse ne sont acquises a priori. On peut toutefois citer des avancées dans cette direction qu'on peut trouver par exemple dans [DO], [ES], [Ek1], [Ek2], [GT] et [Sℓ].

3. Nos résultats

Les détails, les démonstrations et tout le reste se trouvent dans les papiers constituant ce mémoire de thèse. Cette section de l'introduction générale n'en donne qu'un bref résumé.

3.1. Le premier a consisté en la résolution du probème du $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ sur certains ouverts Ω de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ munis du feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont les sections $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C} : (z, t) \in \Omega\}$; on dira que $\mathcal{F}$ est le *feuilletage canonique* de Ω. Plus précisément voici son résultat.

Théorème *Soit Σ la réunion disjointe de parties Σ_i fermées de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ vérifiant les conditions qui suivent : i) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la mesure de Σ_j est nulle et Σ_j est contenue dans une section $\mathbb{C} \times \{t_j\}$ avec $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$; ii) il existe $R > 0$ tel que $\Sigma \subset D(0, \frac{R}{2}) \times \mathbb{R}$.*

On note Ω l'ouvert $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \Sigma$ qu'on munit de son feuilletage canonique $\mathcal{F}$. Soit $f \in C^k(\Omega)$, C^∞ le long des feuilles et telle que, pour tout entier $p \leq k$, la fonction $z \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial^p t}(z, t)$ se prolonge en une fonction L^1_{loc} pour tout t fixé dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une fonction $h \in C^k(\Omega)$, C^∞ le long des feuilles et telle que $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} h = f$.

3.2. Le deuxième porte sur le $\overline{\partial}$ le long des feuilles pour la lamination qui suit. On se donne une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante avec $\alpha_1 = -1$ et convergeant vers 1. Dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ on considère les points $A = (0, 1)$ et $A_n = (0, \alpha_n)$ pour $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soient S_n la sphère de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de diamètre le segment $[A_n A]$ et E la réunion de toutes ces sphères. Alors E est un sous-espace métrique compact et connexe de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Soit $\gamma : E \longrightarrow E$ l'homéomorphisme défini par $\gamma(w, u) = (\rho_n(w), u)$ lorsque $(w, u) \in S_n$ où ρ_n

est la rotation dans $\mathbb{C}$ d'angle $\frac{2\pi}{n}$. La suspension de γ donne une lamination complexe $\mathcal{L}$ dont les feuilles sont des surfaces de Riemann toutes équivalentes à $\mathbb{C}^*$. Pour cet exemple Rochdi Ben Charrada a établi le :

Théorème *L'espace vectoriel $H^{01}(\mathcal{L})$ est trivial i.e. pour toute $(0,1)$-forme feuilletée ω continue et de classe C^∞ le long des feuilles, il existe une fonction f continue et de classe C^∞ le long des feuilles telle que $\overline{\partial}_{\mathcal{L}} f = \omega$.*

3.3. Le troisième est un calcul explicite de la cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{0*}(\mathcal{F})$ du feuilletage suivant. On considère la variété différentiable $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ (les coordonnées d'un point seront notées (z,t)) qu'on munit du feuilletage complexe $\widetilde{\mathcal{F}}$ défini par l'équation différentielle $dt = 0$. Le difféomorphisme $\gamma : (z,t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z, \lambda t) \in \widetilde{M}$ agit sur $\widetilde{M}$ de façon libre et propre ; en plus, c'est un automorphisme de $\widetilde{\mathcal{F}}$; $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit alors sur le quotient $M = \widetilde{M}/\gamma$ (qui est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$) un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ par surfaces de Riemann. Dans cette direction voici le résultat obtenu :

Théorème *Les espaces de cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{00}_{\mathcal{F}}(M)$ et $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$ sont isomorphes à $\mathbb{C}$. (Les formes feuilletées considérées sont continues mais C^∞ le long des feuilles.)*

Références

[DO] Diederich, K. & Ohsawa, T. *On the parameter dependence of solutions to the $\overline{\partial}$-equation.* Math. Ann. 289, (1991), 581-588.

[Ek1] El Kacimi Alaoui, A. *The $\overline{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation.* Math. Annalen 347, (2010), 885-897.

[Ek2] El Kacimi Alaoui, A. *Leafwise meromorphic functions with prescribed poles.* (May 2012). Soumise.

[ES] El Kacimi Alaoui, A.& Slimène, J. *Cohomologie de Dolbeault le long des feuilles de certains feuilletages complexes.* Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, Tome 60 n^{o}2, (2010), 727-757.

[GT] Gigante, G. & Tomassini, G. *Foliations with complex leaves.* Diff. Geo. and its Applications 5, (1995) 33-49.

[Sℓ] Slimène, J. *Deux exemples de calcul explicite de cohomologie de Dolbeault feuilletée.* Proyecciones Vol. 27, N^0 1, pp. 63-80, May 2008.

COHOMOLOGY OF SOME COMPLEX LAMINATIONS

by

Rochdi Ben Charrada

Results in Mathematics, 57 (2010), 33-41

Abstract. In this paper we solve the $\overline{\partial}$-problem along the leaves for two types of laminations:
i) Some open sets Ω of $\mathbb{C} \times B$ (where B is any differentiable manifold) endowed with the *canonical foliation* that is, the foliation whose leaves are the sections $\Omega^t = \{z \in \mathbb{C} : (z,t) \in \Omega\}$. We construct a solution to the equation $\overline{\partial} h = f d\overline{z}$ for any function $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ of class C^s $(s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$, C^∞ along the leaves and satisfies some growth conditions near the singularities.
ii) A complex lamination by Riemann surfaces obtained by suspending a homeomorphism of a closed set of the Euclidean space $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

1. Solving the $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ for some foliations

Let M be a connected differentiable manifold endowed with a foliation $\mathcal{F}$ of real dimension $2m$ and codimension n. (For more detail see [1].)

1.1. Pefinition. *We say that $\mathcal{F}$ is* **complex** *if there exist an open cover $\{U_i\}$ of M and diffeomorphisms $\Omega_i \times \mathcal{O}_i \xrightarrow{\phi_i} U_i$ (where Ω_i is an open set of $\mathbb{C}^m$ and $\mathcal{O}_i$ an open set of $\mathbb{R}^n$) such that the coordinate change $\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ is of the form $(z', t') = \left(\phi_{ij}^1(z,t), \phi_{ij}^2(t)\right)$ with $\phi_{ij}^1(z,t)$ holomorphic in z for t fixed.*

1.2. Examples

1. Any complex manifold M of dimension m is a complex foliation of dimension m. This foliation has only one leave, the manifold itself.
2. Any holomorphic foliation on a complex manifold is a complex foliation on the real underlying manifold.

3. Let B be a differentiable manifold and M an open set of $\mathbb{C}^m \times B$. For $t \in B$, $M^t = \{z \in \mathbb{C}^m : (z,t) \in M\}$ is an open set of $\mathbb{C}^m$ called the *section* of M along t. The sections form a complex foliation of dimension m called the *complex canonical foliation* of M.

1.3. The $\overline{\partial}$ along the leaves

Let $(M, \mathcal{F})$ be a complex foliation of dimension m. Let $A_s^{p,q}(\mathcal{F})$ be the space of foliated differential forms of type (p,q) and of class C^s $(s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$, C^∞ along the leaves. Such elements can be written in local coordinates system $(z,t) = (z_1, \ldots, z_m, t)$:

$$\alpha = \sum \alpha_{j_1 \ldots j_p k_1 \ldots k_q}(z,t) dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

where $\alpha_{j_1 \ldots j_p k_1 \ldots k_q}$ is a C^∞ function on (z,t). Let $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} : A_s^{p,q}(\mathcal{F}) \longrightarrow A_s^{p,q+1}(\mathcal{F})$ be the *Cauchy-Riemann operator* along the leaves *i.e.* the operator defined by:

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}}(\alpha(z,t) dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}) =$$

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}_s}(z,t) d\overline{z}_s \wedge dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

where $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_s} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_s} + i \frac{\partial}{\partial y_s}\right\}$ with $z_s = x_s + iy_s$. It satisfies $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}^2 = 0$. A p-form α is said to be $\mathcal{F}$-*holomorphic* if it is of type $(p,0)$ and satisfies $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = 0$.

The problem of $\overline{\partial}$ along the leaves can be formulated as follows:

Let $q \geq 1$ and $\omega \in A_s^{p,q}(\mathcal{F})$ such that $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = 0$. Does there exists $\alpha \in A_s^{p,q-1}(\mathcal{F})$ such that $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \omega$?

The object of the following section is to show how we can solve this problem on some open set of $\mathbb{C} \times B$ equipped with its canonical complex foliation. But for the simplicity of the statement (no generality will be lost), we will suppose $B = \mathbb{R}$.

1.4. The foliation

Let $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Sigma_i$ be a disjoint union of closed sets of $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. We suppose that the family $\{\Sigma_i\}$ satisfies the following conditions:

a) For all $j \in \mathbb{Z}$, Σ_j is of measure zero and is contained in a section $\mathbb{C} \times \{t_j\}$ with $t_i \neq t_j$ if $i \neq j$;

b) There exists $R > 0$ such that : $\Sigma \subset D\left(0, \frac{R}{2}\right) \times \mathbb{R}$.

Let Ω be the open set $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \Sigma$ with its canonical foliation $\mathcal{F}$ *i.e.* whose leaves are the sections $\Omega^t = \{z \in \mathbb{C} : (z,t) \in \Omega\}$. For any $s \in \mathbb{N}$, let $C^s(\Omega)$ be the space of complex valued function of class C^s and C^∞ along the leaves, equipped with the family of semi-norms (indexed by the integers n and r) :

$$N_r^n(f) = \sum_{\substack{p+q+\ell \leq r \\ \ell \leq r}} \Big(\sup_{(z,t)\in D_n} \Big| \frac{\partial^{p+q+\ell}}{\partial z^p \partial \overline{z}^q \partial t^\ell} f(z,t) \Big| \Big)$$

where (D_n) is an increasing sequence of compact sets whose union is Ω. This family of semi-norms defines a topology $\mathcal{T}$ on $C^s(\Omega)$ which makes it a Fréchet space. We shall denote by δ the associated distance. The operator:

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}} : f \in C^s(\Omega) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \in C^s(\Omega) \otimes d\overline{z}$$

is continuous (with respect to the topology $\mathcal{T}$).

1.5. Theorem. *Let $f \in C^s(\Omega)$ such that, for every integer $p \leq s$, the function $z \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(z,t)$ extends to an L^1_{loc} function, for all fixed t in $\mathbb{R}$. Then there exists a function $h \in C^s(\Omega)$ such that $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h = f d\overline{z}$.*

Proof. We shall begin at first by the construction of two sequences $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ and $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of sets of $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ and a sequence of functions $(\Psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of class C^∞ on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ satisfying the following conditions:

- (L_k) and (Ω_k) are increasing sequences and converging to $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.
- For all $t \in \mathbb{R}$, the section Ω_k^t is an open neighborhood (a disc $D(0,r)$ of $\mathbb{C}$) of L_k^t which is a compact of Ω_k^t and such that $L_k^t \subset \overline{\Omega}_k^t \subset \mathrm{int}(L_{k+1}^t)$.
- For all $k \geq 1$, Ψ_k is zero on Ω_{k-1} and $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k \equiv 1$.

Indeed, let $K_0 = \overline{D(0,R)}$ where $D(0,R)$ is the disc of center 0 and radius R of $\mathbb{C}$. Let $\lambda > 1$; there exists $\varepsilon > 0$ such that:

$$W_0 = D(0, R+\varepsilon) \subset K_1 = \lambda K_0 = \{\lambda z : z \in K_0\}.$$

We define the sequences of compacts $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ and open sets $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ by :

$$K_k = \lambda\ K_{k-1} \ \text{ and } \ W_k = \lambda\ W_{k-1}.$$

It is clear that $K_k \subset \overline{W}_k \subset \mathrm{int}(K_{k+1})$. Then, for $k \in \mathbb{N}$, let $L_k = K_k \times \mathbb{R}$ and $\Omega_k = W_k \times \mathbb{R}$. These sequences verify the first two conditions.

Let $\rho : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a C^∞ function with compact support in W_0 and identically equal to 1 on K_0. For all $k \in \mathbb{N}$, we define the function $\rho_k : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ by $\rho_k(z,t) = \rho\left(\frac{z}{\lambda^k}\right)$. Then ρ_k is of class C^∞ on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ and equal to 1 on L_k. We set:

$$\psi_0 = \rho_0 \text{ and } \Psi_k = \rho_k - \rho_{k-1} \text{ for } k \geq 1.$$

The sequence of functions Ψ_k satisfies the last condition.

Let us give now the proof of the theorem. For $t \in \mathbb{R}$ fixed and any k, the function:

$$\xi \to \Psi_k(\xi, t) f(\xi, t)$$

has compact support. For $k = 0$, it is a function of class C^∞ on Ω^t and for $k \geq 1$ it is of class C^∞ on $\mathbb{C}$ because $\Psi_k \equiv 0$ in the neighborhood of Σ_t. According to [4] the integral:

$$h_k(z,t) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\Psi_k(\xi,t) f(\xi,t)}{\xi - z} \quad d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

defines a function of class C^∞ in z such that $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_k = \Psi_k f d\overline{z}$.

<u>*Case $k = 0$*</u>

The function:

$$h_0(z,t) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\Psi_0(\xi,t) f(\xi,t)}{\xi - z} \quad d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

is defined on Ω and C^∞ in z. Let us show that h_0 is of class C^s in t. Let $z_0 \in \mathbb{C}$, for almost every $\xi \in \mathbb{C}$, the function $t \mapsto \frac{\Psi_0(\xi,t)f(\xi,t)}{\xi - z_0}$ is of class C^s on $\mathbb{R}$ and its derivative of order q (with $0 \leq q \leq s$) is the function :

$$t \mapsto \frac{\Psi_0(\xi,t)\frac{\partial^q f}{\partial t^q}(\xi,t)}{\xi - z_0}.$$

For $a \in \mathbb{R}$ and $\epsilon > 0$, the function:

$$g(\xi) = \sup_{-\epsilon < t < \epsilon} \left| \Psi_0(\xi,t) \frac{\partial^q f}{\partial t^q}(\xi,t) \right|$$

is integrable on $\mathbb{C}$ because, for all $t \in \mathbb{R}$, the function $\xi \mapsto \frac{\partial^q f}{\partial t^p}(\xi,t)$ extends to an L^1_{loc} function. Then the function $\xi \mapsto \frac{\Psi_0(\xi,t)f(\xi,t)}{\xi - z_0}$ is dominated in the neighborhood of a by the integrable function on $\mathbb{C}$, $\xi \mapsto \frac{g(\xi)}{|\xi - z_0|}$. By the Lebesgue's theorem, the function $t \mapsto h_0(z_0,t)$ is of class C^s on $\mathbb{R}$ and as a consequence h_0 is of class C^s on Ω. <u>Case $k \geq 1$</u>

For $t \in \mathbb{R}$, $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_k = \Psi_k f d\overline{z} = 0$ on Ω^t_{k-1}, then h_k is $\mathcal{F}$-holomorphic on Ω^t_{k-1}; then h_k admits a power series expansion:

$$h_k(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)\ z^n$$

where a_n are given by $a_n(t) = \displaystyle\int_{\partial\Omega^t_{k-1}} \frac{h_k(\xi,t)}{\xi^{n+1}} d\xi$.

The fact that the function $t \to h_k(\xi,t)$ is of class C^s and that we take the integral on the compact set $\partial\Omega^t_{k-1}$ allows us to conclude, by using the convergence Lebesgue theorem, that the function a_n are of C^s on $\mathbb{R}$.

The series $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)\ z^n$ converges to $h_k(z,t)$ with respect to the topology $\mathcal{T}$, then there exists $n_k \in \mathbb{N}$ such that $\delta(h_k, v_k) < \frac{1}{2^k}$ where $v_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{n_k} a_n(t) z^n$.

Let $S_n = h_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (h_k - v_k)$; it is a Cauchy sequence on $C^s(\Omega)$, so it converges to a function $h \in C^s(\Omega)$. The fact that v_k is $\mathcal{F}$-holomorphic ($\overline{\partial}_{\mathcal{F}} v_k = 0$) and that $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ is a linear continuous operator give:

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h = \overline{\partial}_{\mathcal{F}}\Big(h_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(h_k - v_k)\Big) = \overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(\bar{\partial}_{\mathcal{F}} h_k - \bar{\partial}_{\mathcal{F}} v_k) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \Psi_k f\right) d\overline{z} = f d\overline{z}.$$

The function h so defined is of class C^s on Ω and verifies the equation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h = f d\overline{z}$. This ends the proof of the theorem. $\diamondsuit$

2. An example of lamination

In this section we construct a lamination by Riemann surfaces (which is not a foliation) and prove that its leafwise Dolbeault cohomology is trivial that is, the $\overline{\partial}$-problem along the leaves has always a solution. Let us first start with the general definition of a lamination by Riemann surfaces; for more details see [3].

Let M and T be two metric spaces. A *lamination* $\mathcal{F}$ (by Riemann surfaces) on M is given by an open cover $\{U_i\}$ of M and homeomorphims $\Omega_i \times T_i \xrightarrow{\phi_i} U_i$ (where Ω_i is an open set of $\mathbb{C}$ and T_i an open set of T) such that the homeomorphism

$$\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

is of the form $(z',t') = \big(\phi^1_{ij}(z,t), \phi^2_{ij}(t)\big)$ with $\phi^1_{ij}(z,t)$ holomorphic in z for t fixed.

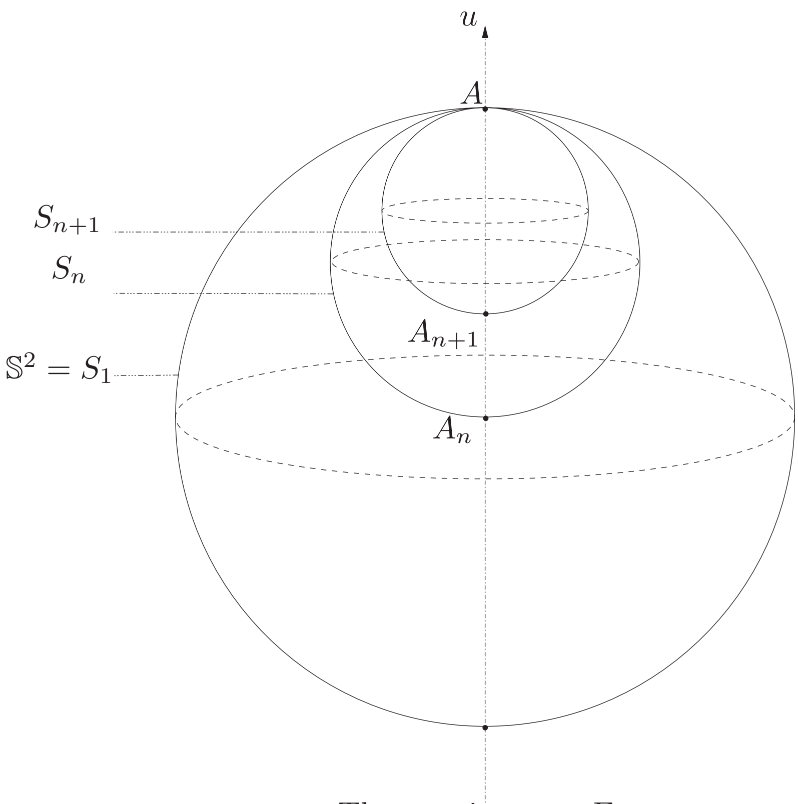
Let $(M,\mathcal{F})$ be a lamination. A leaf of $\mathcal{F}$ is defined similarly as in the case of a foliation. It is a Riemann surface; so one has the notion of foliated (or laminated) differential form of type (p,q). Let $A^{0*}(\mathcal{F})$ be the space of continuous foliated differential forms of type $(0,*)$ which are C^∞ along the leaves on $(M,\mathcal{F})$. It is equipped with the topology $\mathcal{T}$ of uniform convergence on compact sets of all the derivatives along $\mathcal{F}$, that is, a sequence (ω_n) in $A^{0*}(\mathcal{F})$ converges to $\omega \in A^{0*}(\mathcal{F})$ with respect to $\mathcal{T}$ if, for every compact set K of M, the sequence $\left(\frac{\partial^{k+\ell}\omega_n}{\partial^k z \partial^\ell \overline{z}}\right)_n$ converges uniformly on K to ω. For this topology, the operator

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}} : A^{00}(\mathcal{F}) \longrightarrow A^{01}(\mathcal{F})$$

is continuous. As in the case of complex foliation one has the leafwise Dolbeault complex $(A^{0*}(\mathcal{F}), \overline{\partial}_{\mathcal{F}})$ whose cohomology is denoted $H^{0*}(\mathcal{F})$.

2.1. Construction of the example

It is given in [2]. Let α_n be a strictly increasing sequence of real numbers converging to 1 and with $\alpha_1 = -1$. In $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ let $A = (0,1)$ and $A_n = (0,\alpha_n)$ for any $n \in \mathbb{N}^*$. Let S_n be the sphere which has the segment $[AA_n]$ as a diameter and E the subset of $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, union of all S_n; E is a compact connected and locally connected metric space.



The metric space E

Let $\gamma : E \longrightarrow E$ be the homeomorphism defined by $\gamma(w,u) = (\rho_n(w), u)$ for $(w,u) \in S_n$ where ρ_n is the rotation in $\mathbb{C}$ with angle $\frac{2\pi}{n}$. Any orbit of γ is finite but the function which assigns to each orbit its cardinality is not bounded. However the orbit space $E/\langle\gamma\rangle$ (where $\langle\gamma\rangle$ is the group of homeomorphisms of E generated by γ) with the quotient topology is Hausdorff: it is sufficient to see that the orbit of the point $A = (0,1)$ (reduced to A) is separated from the orbit of any other point (w_0, u_0) (with $u_0 \neq 1$). Indeed, for $\varepsilon > 0$ sufficiently small, the open sets:

$$V_\varepsilon = \{(w,u) \in E : 1 - \varepsilon < u \leq 1\} \text{ and } U_\varepsilon = \{(w,u) \in S_n : u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon\}$$

are γ-invariant, disjoint and contain respectively A and the orbit of (w_0, u_0). Note also that the group generated by γ is a group of isometries of E.

Let $\widehat{M}$ be $\mathbb{C}^* \times E$ endowed with the lamination $\widehat{\mathcal{F}}$ whose leaves are $\mathbb{C}^* \times \{t\}$ with $t \in E$. Let $\widehat{\gamma} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}$ be the homeomorphism defined by $\widehat{\gamma}(z, (w,u)) = (\rho_n(z), (\rho_n(w), u))$ for $(w,u) \in S_n$. The restriction of $\widehat{\gamma}$ to any leaf F is a biholomorphism $F \longrightarrow \widehat{\gamma}(F)$, so $\widehat{\gamma}$ is an automorphism of the lamination $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ and then $\widehat{\mathcal{F}}$ induces a complex lamination $\mathcal{F}$ on the orbit space $M = \widehat{M}/\langle\widehat{\gamma}\rangle$.

The main result of this section is the following theorem.

2.2. Theorem. *The vector space $H^{01}(\mathcal{F})$ is trivial that is, the equation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} f = \omega$ has a solution $f \in A^{00}(\mathcal{F})$ for any $\omega \in A^{01}(\mathcal{F})$.*

Proof. We will proceed on four steps.

1. Let us firstly give another way to construct $\mathcal{F}$ which will make more easier the computation of the leafwise Dolbeault cohomology of the lamination $(M, \mathcal{F})$. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and denote by $\gamma_n : S_n \longrightarrow S_n$ the diffeomorphism $\gamma_n(w,u) = (\rho_n(w), u)$. Let $\pi_n : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ be the mapping $\pi_n(z) = z^n$; then π_n is a covering whose automorphism group G_n is isomorphic to $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ generated by the rotation ρ_n. For any $n \in \mathbb{N}^*$, we have a complex foliation $\widehat{\mathcal{F}}_n$ on $\widehat{M}_n = \mathbb{C}^* \times S_n$ whose leaves are $\mathbb{C}^* \times \{(w,u)\}$ with $(w,u) \in S_n$. This foliation has

$$\widehat{\gamma}_n : (z, (w,u)) \in \widehat{M}_n \longmapsto (\rho_n(z), (\rho_n(w), u)) \in \widehat{M}_n$$

as an automorphism; then $\widehat{\mathcal{F}}_n$ induces a complex foliation $\mathcal{F}_n$ on the quotient manifold $M_n = \widehat{M}_n/\langle\widehat{\gamma}_n\rangle$.

The foliation $\mathcal{F}_n$ is not a product because any leaf passing through a point different from $(0, A)$ or $(0, A_n)$ has trivial holonomy while a leaf passing trough one of these points has its holonomy generated by the germ of the rotation ρ_n.

For any $n \in \mathbb{N}^*$, let $\widehat{L}_n$ be the leaf of $\widehat{\mathcal{F}}_n$ passing through the point a where $a = (0, A)$. It is not difficult to see that the lamination $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ is obtained from the foliations $(\widehat{M_n}, \widehat{\mathcal{F}}_n)$ by gluing all the leaves $\widehat{L}_n$ passing respectively through the points a: each point (z, a) in $\widehat{L}_n$ is identified to the point (z', a) when $z = z'$. Also, for any $n \in \mathbb{N}^*$, let L_n be the leaf passing through the point $\pi_n(a)$. The lamination $(M, \mathcal{F})$ is obtained from the foliations $(M_n, \mathcal{F}_n)$ by gluing all the leaves L_n passing respectively through the points a by the identity: each point (z, a) in L_n is identified to the point (z', a) when $z = z'$.

2. Let us describe now the foliated differential forms on the manifolds $\widehat{M}$ and M. Any element ω of $A^{0*}(\mathcal{F})$ is an element $\widehat{\omega} \in A^{0\omega}(\widehat{\mathcal{F}})$ invariant by $\widehat{\gamma}$. But $\widehat{\omega}$ is a collection $(\widehat{\omega}_n)$ where $\widehat{\omega}_n$ is in $A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$ and is the restriction of $\widehat{\omega}$ to $\widehat{M_n}$; these elements $\widehat{\omega}_n$ have to satisfy the following necessary and sufficient conditions on the continuity of all the derivatives along the gluing leaf $\widehat{L}$. For any $k, \ell \in \mathbb{N}$, one has: for any $\varepsilon > 0$, there exists an open neighborhood U of a in E such that:

$$\text{(C)} \qquad t \in U \Longrightarrow \left| \frac{\partial^{k+\ell}\widehat{\omega}_n}{\partial^k z \partial^\ell \overline{z}}(z, t) - \frac{\partial^{k+\ell}\widehat{\omega}_1}{\partial^k z \partial^\ell \overline{z}}(z, a) \right| < \varepsilon \text{ for any } n \in \mathbb{N}^* \text{ and any } z \in \mathbb{C}.$$

Here $\frac{\partial^{k+\ell}\widehat{\omega}_n}{\partial^k z \partial^\ell \overline{z}}(z, t) = \frac{\partial^{k+\ell}\widehat{f}_n}{\partial^k z \partial^\ell \overline{z}}(z, t) d\overline{z}$ if $\widehat{\omega}_n = \widehat{f}_n d\overline{z}$. (This is the condition the $(\widehat{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ have to satisfy to give a continuous form on $\widehat{M}$ which is C^∞ along the leaves.)

Denote by $\mathcal{B}^*$ the space of elements $(\widehat{\omega}_n)$ (where $\widehat{\omega}_n \in A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$) satisfying the condition (C). Because the operator $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}} : A^{00}(\widehat{\mathcal{F}}) \longrightarrow A^{01}(\widehat{\mathcal{F}})$ is continuous with respect to the Fréchet topology $\mathcal{T}$ on $A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}})$, it sends the subspace $\mathcal{B}^0$ into $\mathcal{B}^1$; therefore we obtain a differential complex:

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}^0 \xrightarrow{\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}} \mathcal{B}^1 \longrightarrow 0$$

isomorphic to:

$$0 \longrightarrow A^{00}(\widehat{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}} A^{01}(\widehat{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0.$$

3. We will show that $H^{01}(\mathcal{F}_n) = 0$ for $n \in \mathbb{N}^*$. The group G_n acts on the complex $(A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n), \overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}_n})$:

$$(g, \omega) \in G_n \times A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n) \longmapsto g^*(\omega) \in A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$$

and this action commutes with the operator $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}_n}$. The complex $\left(A^{0*}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n), \overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}_n}\right)$ of G_n-invariant elements of $A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$ is naturally isomorphic to the leafwise Dolbeault complex

$(A^{0*}(\mathcal{F}_n), \overline{\partial}_{\mathcal{F}_n})$ of $(M_n, \mathcal{F}_n)$ and its cohomology $H^{01}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$ is canonically isomorphic to $H^{01}(\mathcal{F}_n)$; the isomorphism is induced by the natural map:

$$\omega \in A^{0*}(\mathcal{F}_n) \longmapsto \pi_n^*(\omega) \in A^{0*}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$$

where $\pi_n : \widehat{M_n} \longrightarrow M_n$ is the covering map defined before. Moreover one has an averaging map $m : A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n) \longrightarrow A^{0*}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$ defined by:

$$m(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G_n} g^*(\omega)$$

and satisfying $m(\omega) = \omega$ for $\omega \in A^{0*}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$. The map m is linear, continuous (with respect to the topology $\mathcal{T}$) and commutes with the operator $\overline{\partial}_{\mathcal{F}_n}$; this will enables us to prove that the inclusion $A^{01}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n) \overset{j}{\hookrightarrow} A^{01}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$ induces an injection $H^{01}(\mathcal{F}_n) = H^{01}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n) \hookrightarrow H^{01}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$. Indeed let ω be an element of $A^{01}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$. Suppose that $\omega = \overline{\partial}_{\mathcal{F}_n}\widehat{\phi}$ where $\widehat{\phi} \in A^{00}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$ *i.e.* the cohomology class of ω is zero in $H^{01}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$. We set $\phi = m(\widehat{\phi})$; then:

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}_n}\phi = \overline{\partial}_{\mathcal{F}_n}(m(\widehat{\phi})) = m(\overline{\partial}_{\mathcal{F}_n}\widehat{\phi}) = m(\omega) = \omega$$

i.e. ω is zero in $H^{01}(\mathcal{F}_n) = H^{01}_{G_n}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$; this proves the desired injection. Now because the foliation $\widehat{\mathcal{F}}_n$ is just the product of S_n by the Stein manifold $\mathbb{C}^*$, we have $H^{01}(\widehat{\mathcal{F}}_n) = 0$. Hence $H^{01}(\mathcal{F}_n) = 0$.

4. Recall that the complex $0 \longrightarrow \mathcal{B}^0 \xrightarrow{\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}} \mathcal{B}^1 \longrightarrow 0$ is isomorphic to the complex:

$$0 \longrightarrow A^{00}(\widehat{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}} A^{01}(\widehat{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0.$$

But the last one is acyclic because the foliation $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ is the product of E by the Stein manifold $\mathbb{C}^*$; so is the first one. Then, if ω is an element in $A^{01}(\mathcal{F})$ given by a collection $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in $\mathcal{B}^1$ (that is the ω_n satisfy the condition (C)), for each n, there exists $\widehat{f}_n \in A^{0*}(\widehat{\mathcal{F}}_n)$ satisfying the condition (C) and such that $\overline{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}_n}\widehat{f}_n = \omega_n$. For each n, we set $f_n = m(\widehat{f}_n)$; the function f_n is invariant by the action of the group G_n and the family (f_n) still satisfy the condition (C) as we will show below. The open set U (in the condition (C)) can be chosen invariant by all the rotation ρ_n. Let k and ℓ be integers, $n \in \mathbb{N}^*$ ant $t \in U$; denote by $\partial_{k,\ell}$ the operator $\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial^k z \partial^\ell \overline{z}}$. For any $z \in L$, Let $\Delta_{k\ell} = |\partial_{k,\ell} f_n(z,t) - \partial_{k,\ell} f_n(z,a)|$.

Then we have:

$$\begin{aligned}
\Delta_{k\ell} &= \left|\partial_{k,\ell}\left(\frac{1}{n}\sum_{g\in G_n}\widehat{f}_n(z,g(t))\right) - \partial_{k,\ell}\left(\frac{1}{n}\sum_{g\in G_n}\widehat{f}_n(z,g(a))\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{g\in G_n}\left\{\partial_{k,\ell}\widehat{f}_n(z,g(t)) - \partial_{k,\ell}\widehat{f}_n(z,a)\right\}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{g\in G_n}\left|\partial_{k,\ell}\widehat{f}_n(z,g(t)) - \partial_{k,\ell}\widehat{f}_1(z,a)\right| \\
&< \frac{1}{n}\sum_{g\in G_n}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(Remember that a is fixed by all the groups G_n.) The collection (f_n) defines a function $f \in A^{00}(\mathcal{F})$ which is a solution of the equation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} f = \omega$. This proves that the vector space $H^{01}(\mathcal{F})$ is zero.

References

[1] El Kacimi Alaoui, A. *The $\overline{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation.* Math. Annalen 347, (2010), 885-897.

[2] El Kacimi Alaoui, A., Hattab, H. & Salhi, E. *Remarques sur certains groupes d'homéomorphismes d'espaces métriques.* JP Journal of Geom. & Topology Vol. 4 N$^{\text{O}}$ 3, (2004), 225-242.

[3] Ghys, E. *Laminations par surfaces de Riemann.* Panoramas & Syntheses 8, Société Mathématique de France, (1999), p. 49 - 95.

[4] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* North-Holland Mathematical Library (1990).

COHOMOLOGIE DE DOLBEAULT FEUILLETÉE DU FEUILLETAGE COMPLEXE AFFINE DE REEB

par

Rochdi Ben Charrada & Aziz El Kacimi Alaoui

(Septembre 2012)

Résumé. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage complexe affine de Reeb de dimension 1 sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$. On montre que sa cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{01}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ en en exhibant explicitement un générateur.

1. Premières définitions

Soit M une variété différentiable (de classe C^∞) de dimension $m+n$. On suppose, pour simplifier, qu'elle est connexe et qu'elle possède toutes les bonnes propriétés dont on aurait éventuellement besoin (paracompacité...).

1.1. Définion. *Un **feuilletage** $\mathcal{F}$ de **codimension** n sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ et, pour tout i, d'un difféomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow U_i$ tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, le difféomorphisme de changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (z,t) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow (z',t') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ soit de la forme $z' = \varphi_{ij}(z,t)$ et $t' = \gamma_{ij}(t)$.*

La variété M est ainsi décomposée en sous-variétés connexes de dimension m. Chacune d'elles est appelée *feuille* de $\mathcal{F}$. On note τ le fibré tangent à $\mathcal{F}$; il est constitué de tous les vecteurs tangents aux feuilles. Les sections de τ forment un module $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions sur M. Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$, par le théorème de Frobenius [Ca], le crochet $[X,Y]$ est encore un élément de $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Le quotient $\nu\mathcal{F} = TM/\tau$ est le *fibré normal* à $\mathcal{F}$; on peut le réaliser dans TM par le choix d'un supplémentaire ν de τ. On a ainsi une décomposition en somme directe $TM = \tau \oplus \nu$. Celle-ci donne une décomposition du complexifié du fibré $\Lambda^\ell T^*M \otimes \mathbb{C}$ des ℓ-formes extérieures :

$$\Lambda^\ell T^*M \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{s+r=\ell} \Lambda^{sr} \tag{1}$$

où Λ^{sr} est le fibré dont les sections globales sont les ℓ-formes complexes α de type (s, r) *i.e.* celles qui s'écrivent localement :

$$\alpha = \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_s\leq m \\ 1\leq j_1<\cdots<j_r\leq}} f_{i_1,\cdots,i_s,j_1,\cdots,j_r}(z,t)dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_s}\wedge dz_{j_1}\wedge\cdots\wedge dz_{j_r} \tag{2}$$

où les $f_{i_1,\cdots,i_s,j_1,\cdots,j_r}$ sont des fonctions continues et C^∞ en la variable $z = (z_1, \cdots, z_m)$. L'ensemble $A^{sr}(M)$ de ces formes différentielles est un module sur l'anneau $A(M)$ des fonctions complexes sur M (C^0 en (z, t) mais C^∞ en z).

La différentielle extérieure $d : A^\ell(M) \longrightarrow A^{\ell+1}(M)$ se écompose en la somme de trois opérateurs $d = d_{10} + d_{01} + d_{2,-1}$ où d_{10} transforme une forme de type (s, r) en une forme de type $(s + 1, r)$, d_{01} la transforme en une forme de type $(s, r + 1)$ et $d_{2,-1}$ en une forme de type $(s+2, r-1)$. L'opérateur $d_{2,-1}$ est nul si, et seulement si, le fibré ν est intégrable. On vérifie facilement que d_{01} est de carré nul ; ainsi, si on fixe p, on obtient un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow A^{s0}(M) \xrightarrow{d_{01}} A^{s1}(M) \xrightarrow{d_{01}} \cdots \xrightarrow{d_{01}} A^{s,m-1}(M) \xrightarrow{d_{01}} A^{sm}(M) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

Son homologie est appelée la *cohomologie de type* (s, r) du feuilletage $\mathcal{F}$. On peut démontrer qu'elle ne dépend pas du choix du fibré transverse ν.

Dorénavant on prendra $s = 0$ et on notera $A^r_{\mathcal{F}}(M)$ l'espace $A^{0r}(M)$ et $d_{\mathcal{F}}$ l'opérateur d_{01} ; Le complexe (3) se note alors :

$$0 \longrightarrow A^0_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^1_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^{m-1}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^m_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

et est appelé *complexe de de Rham feuilleté* de $\mathcal{F}$. Son homologie en degré r sera notée $H^r_{\mathcal{F}}(M)$ et appelée *cohomologie feuilletée* de $\mathcal{F}$. Elle coïncide avec la cohomologie de de Rham de M lorsque la dimension des feuilles est celle de la variété, c'est-à-dire lorsque il n'y a qu'une seule feuille, la variété M elle-même.

On se donne maintenant une variété M comme avant, qu'on suppose de dimension $2m + n$ et munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n (et donc de dimension $2m$).

1.2. Définition. *On dira que $\mathcal{F}$ est* **complexe** *s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M et des difféomorphismes $\phi_i : \Omega_i \times \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i$ (où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et $\mathcal{O}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$) tels que les changements de coordonnées :*

$$\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

soient de la forme $(z', t') = \big(\phi^1_{ij}(z,t), \phi^2_{ij}(t)\big)$ *avec* $\phi^1_{ij}(z,t)$ *holomorphe en* z *pour* t *fixé.*

Chaque feuille de $\mathcal{F}$ est une variété analytique complexe de dimension m. La notion de feuilletage complexe généralise celle de feuilletage holomorphe sur une variété analytique complexe.

La donnée d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ sur une variété M sera représentée par le couple $(M, \mathcal{F})$.

Soient $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ deux feuilletages complexes. On appelle *morphisme* de $(M, \mathcal{F})$ vers $(M', \mathcal{F}')$ toute application $f : M \longrightarrow M'$, de classe C^∞ et telle que l'image de toute feuille F de $\mathcal{F}$ est contenue dans une feuille F' de $\mathcal{F}'$ et l'application $f : F \longrightarrow F'$ est holomorphe.

On dira qu'un morphisme $f : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (M', \mathcal{F}')$ est un *isomorphisme de feuilletages complexes* si c'est un difféomorphisme qui est un biholomorphisme sur les feuilles. On dira que deux feuilletages complexes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur M sont *conjugués* (ou dans la même *classe de conjugaison*) s'il existe un isomorphisme $f : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (M, \mathcal{F}')$.

L'ensemble des automorphismes de $\mathcal{F}$ est un groupe qu'on notera $G(\mathcal{F})$. On peut remarquer qu'une feuille de $\mathcal{F}$ qui n'est biholomorphiquement équivalente à aucune autre feuille de $\mathcal{F}$ est fixée par tout le groupe $G(\mathcal{F})$.

1.3. Exemples

i) Toute variété analytique complexe de dimension m est un feuilletage complexe de dimension m. Le groupe des automorphismes de ce feuilletage est réduit à celui des automorphismes de la variété complexe.

ii) Tout feuilletage holomorphe au sens usuel sur une variété complexe est un feuilletage complexe sur la variété réelle sous-jacente.

iii) Soit M un ouvert de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, on note M^t l'ensemble :

$$\{z \in \mathbb{C}^m : (z, t) \in M\}.$$

M^t est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ appelé *section* de M suivant t. Les sections sont les feuilles d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension m qu'on appellera *feuilletage complexe canonique* de M.

iv) Soit F une variété analytique complexe de dimension m. Toute fibration localement triviale $F \hookrightarrow M \longrightarrow B$ dont le cocycle est à valeurs dans le groupe $\mathrm{Aut}(F)$ des biholomorphismes de la fibre F est un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension m. Si la fibration est triviale *i.e.* $M = F \times B$, on dira que F est un *feuilletage produit* : toutes les feuilles $F \times \{t\}$ ont la même structure complexe.

v) Supposons que $\mathcal{F}$ est un feuilletage complexe sur $M = F \times B$ dont les feuilles sont les facteurs $F \times \{t\}$ mais que la structure complexe n'est pas forcément la même sur toutes les feuilles ; on dira alors que $\mathcal{F}$ est un *produit différentiable.*

vi) Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orientable par surfaces sur une variété M. On considère une métrique riemannienne g sur le fibré $T\mathcal{F}$. A tout vecteur $u \in T_y\mathcal{F}$ on associe l'unique vecteur $v \in T_y\mathcal{F}$ de même longueur que u et tel que le repère (u, v) soit direct. En posant $Ju = v$ on définit ainsi une structure presque complexe sur chaque feuille. La version à paramètre du théorème d'intégrabilité montre que cette structure est en fait une *structure complexe* transversalement (localement) différentiable sur $\mathcal{F}$. Ainsi tout feuilletage orientable par surfaces est un feuilletage complexe de dimension 1.

2. La $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$-cohomologie

2.1. Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage complexe de dimension m. On s'intéresse aux formes feuilletées qui, dans un système de coordonnées locales $(z, t) = (z_1, \ldots, z_m, t_1, \ldots, t_n)$, ont pour expression :

$$\alpha = \sum f_{j_1 \ldots j_p k_1 \ldots k_q}(z, t) dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

où $f_{j_1 \ldots j_p k_1 \ldots k_q}$ est une fonction continue en (z, t) mais C^∞ en z. On les appelle *formes feuilletées de type* (p, q). Elles forment un espace vectoriel qu'on notera $A_{\mathcal{F}}^{pq}(M)$ et qui est aussi un module sur $A(M)$ (anneau des fonctions continues et C^∞ en z). Ainsi, toute forme $\alpha \in A_{\mathcal{F}}^r(M)$ se décompose en une somme $\alpha = \sum\limits_{p+q=r} \alpha_{pq}$ où α_{pq} est une forme feuilletée de type (p, q). Ce qui donne la décomposition en somme directe :

$$A_{\mathcal{F}}^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} A_{\mathcal{F}}^{pq}(M). \tag{5}$$

On fixe l'entier $p \in \{0, 1, \cdots, m\}$. Alors l'*opérateur de Cauchy-Riemann* le long des feuilles $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} : A^{pq}(\mathcal{F}) \longrightarrow A^{p,q+1}(\mathcal{F})$ s'écrit localement :

$$\overline{\partial}_{\mathcal{F}}(\alpha(z, t) dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}) =$$

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}_s}(z, t) d\overline{z}_s \wedge dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

où $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_s} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_s} + i\frac{\partial}{\partial y_s}\right\}$ avec $z_s = x_s + iy_s$. On peut vérifier facilement que cet opérateur est de carré nul et qu'on a un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow A^{p0}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} A^{p1}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} A^{p,m-1}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} A^{pm}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

qu'on appellera *complexe du* $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$ ou *complexe de Dolbeault feuilleté* de $(M, \mathcal{F})$; son homologie notée $H^{pq}_{\mathcal{F}}(M)$ sera appelée la $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$*-cohomologie* ou *cohomologie de Dolbeault feuilletée* de $\mathcal{F}$. Lorsque M est une variété complexe munie du feuilletage dont la seule feuille est elle-même, alors $H^{pq}_{\mathcal{F}}(M)$ n'est rien d'autre que sa cohomologie de Dolbeault usuelle.

2.2. Une p-forme feuilletée ω est dite $\mathcal{F}$*-holomorphe* si elle est de type $(p, 0)$ et vérifie $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = 0$. Le faisceau des germes de telles formes sera noté $\mathcal{O}^p_{\mathcal{F}}$; il admet une résolution fine :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^p_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{A}^{p0}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}^{p1}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}^{p,m-1}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}^{pm}_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{A}^{pq}_{\mathcal{F}}$ est le faisceau des germes des formes feuilletées de type (p, q). Comme $A^{pq}_{\mathcal{F}}(M)$ est l'espace des sections globales du faisceau $\mathcal{A}^{pq}_{\mathcal{F}}$, on a un isomorphisme canonique :

$$H^{pq}_{\mathcal{F}}(M) \simeq H^q_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{O}^p_{\mathcal{F}}). \tag{6}$$

Les deux définitions permettent de faire des calculs suivant la nature des exemples et la manière dont ils sont décrits. Nous verrons comment dans la suite. L'espace $\mathcal{H}^p_{\mathcal{F}}(M)$ des p-formes $\mathcal{F}$-holomorphes (sections globales du faisceau $\mathcal{O}^p_{\mathcal{F}}$) sur M est exactement $H^{p0}_{\mathcal{F}}(M)$.

Divers calculs de la cohomologie feuilletée de Dolbeault ont été menés par exemple dans [BC], [Ek], [ES], [GT], [Sℓ].

3. Fonctions $\mathcal{F}$-holomorphes en dimension 1

Dans toute cette section, M sera une variété réelle de dimension $2+n$ munie d'un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ de dimension 1. L'espace $A^{00}(\mathcal{F})$ n'est rien d'autre que l'anneau $C^{0,\infty}(M)$ des fonctions complexes sur M continues et C^∞ le long des feuilles qu'on a déjà noté $A(M)$.

3.1. La topologie $C^{0,\infty}$ sur $A^{0q}_{\mathcal{F}}(M)$

Soient V un ouvert de $\mathbb{C}$ et O un ouvert de $\mathbb{R}^n$; les coordonnées sur $V \times O$ seront notées $(z, t) = (z, t_1, \cdots, t_n)$. Pour tout multi-indice $k = (k_1, k_2)$ (k_1 et k_2 sont des entiers naturels), on posera $|k| = k_1 + k_2$ et :

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial z^{k_1} \partial \overline{z}^{k_2}}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, tout compact K de $\Omega \times O$ et toute fonction $f : \Omega \times O \longrightarrow \mathbb{C}$ on pose :

$$N_{s,K}(f) = \max_{|k| \leq s} \left\{ \sup_K \left| D^k(f) \right| \right\}.$$

Soit maintenant U un ouvert de M distingué pour $\mathcal{F}$ et équivalent à $V \times O$ via un isomorphisme $\varphi : V \times O \longrightarrow U$. Pour tout compact K contenu dans U et toute fonction $f \in C^{0,\infty}(U)$ on pose $N_{s,K}(f) = N_{s,K}(f \circ \varphi)$.

Soient $\mathcal{U} = \{(U, \varphi)\}$ un atlas dénombrable définissant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C} = \{C_n\}$ une famille dénombrable de compacts, chacun contenu dans une carte de $\mathcal{U}$, recouvrant M et telle que tout compact $K \subset M$ soit recouvert par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{C}$. Considérons une suite croissante de compacts K_n dont la réunion est égale à M. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des compacts de la famille $\mathcal{C}$ qui intersectent K_n est fini. Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in A(M)$, posons :

$$||f||_s^n = \sum_{C \in \mathcal{C}_n} N_{s,C}(f).$$

La famille des semi-normes $|| \ \ ||_s^n$ (indexée par $s \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) est filtrante et séparante ; elle permet de définir une distance sur $A(M)$ invariante par translations

$$\delta(f, g) = \sum_{s,n} \frac{1}{2^{s+n}} \inf \left(1, ||f - g||_s^n\right).$$

Cette distance définit une topologie faisant de $C^{0,\infty}(M)$ un espace de Fréchet. Elle ne dépend ni de l'atlas $\{(U, \varphi)\}$ ni de la famille $\mathcal{C}$ ni de la suite croissante de compacts K_n. C'est la topologie $C^{0,\infty}$ sur $A(M) = C^{0,\infty}(M)$.

Pour cette topologie, le sous-espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ des fonctions $\mathcal{F}$-holomorphes est fermé. Notons que, pour définir la topologie induite sur $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$, on peut faire l'économie des dérivées le long des feuilles : il suffit de considérer l'opérateur différentiel D^0.

La topologie $C^{0,\infty}$ se définit de manière analogue sur les espaces $A^{pq}(\mathcal{F})$, vu que tout élément $\alpha \in \Omega^{pq}(\mathcal{F})$ s'écrit, sur une carte locale (U, φ), sous la forme $\alpha = f d\overline{z}$, $\alpha = f dz$ ou $\alpha = f dz \wedge d\overline{z}$ avec $f \in A(U)$.

3.2. Zéros et pôles

On travaillera sur un ouvert U de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ muni de son feuilletage complexe canonique $\mathcal{F}$. (Le facteur $\mathbb{R}$ pourrait être remplacé par n'importe quelle variété différentiable et notamment par $\mathbb{R}^n$.)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe et Z l'ensemble de ses zéros. La restriction de f à chaque feuille F est une fonction holomorphe ; par suite, si $f : F \longrightarrow \mathbb{C}$ n'est pas identiquement nulle, par le principe des zéros isolés, $Z \cap F$ est une partie discrète de F. Donc en un point de $Z \cap F$ où f n'est pas idendiquement nulle, $Z \cap F$ est “transverse” à F.

Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *$\mathcal{F}$-méromorphe*, si sa restriction à chaque feuille est une fonction méromorphe. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f ; alors, comme pour les zéros, l'intersection de $\mathcal{P}$ avec toute feuille F est un ensemble discret de F.

Une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{F}$-méromorphe) étant simplement continue sur U (resp. sur $U \setminus \mathcal{P}$), on ne peut malheureusement pas dire plus ni sur l'ensemble de ses zéros ni celui de ses pôles. Nous ferons simplement des remarques lorsque Z et $\mathcal{P}$ possèdent une structure de variété C^∞ ; de telles fonctions existent bien sûr : si $\varphi :]-\eta, \eta[\longrightarrow U \subset \mathbb{C}$ est une courbe différentiable, alors les fonctions $f(z,t) = z - \varphi(t)$ et $g(t) = \frac{1}{f(z,t)}$ sont $\mathcal{F}$-holomorphes et ont $\{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : z = \varphi(t) \text{ avec } t \in]-\eta, \eta[\}$ respectivement comme ensemble de zéros et ensemble de pôles. Ceci permet de définir localement des fonctions du même type sur des feuilletages holomorphes $(M, \mathcal{F})$.

Soit maintenant Σ une petite sous-variété transverse à $\mathcal{F}$; elle peut donc être considérée comme le graphe d'une application $z_0 : t \in]-\eta, \eta[\longmapsto z_0(t) \in \mathbb{C}$ de classe C^∞. Soit V un voisinage ouvert relativement compact de Σ dont chaque section V^t est un disque centré en $z_0(t)$. Alors, sur $V \setminus \Sigma$, la fonction f admet un développement de Laurent

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)(z - z_0(t))^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m(t)}{(z - z_0(t))^m}$$

où les coefficients a_n et b_m sont donnés, comme habituellement, par les formules intégrales

$$(7) \qquad a_n(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1^t} \frac{f(\xi,t)}{(\xi - z_0(t))^{n+1}} d\xi \;\text{ et }\; b_m(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2^t} (\xi - z_0(t))^{n-1} f(\xi,t) d\xi.$$

γ_1^t et γ_2^t sont respectivement le grand cercle et le petit cercle d'une couronne contenant le point (z,t) dans la section V^t de V. Le point $(z_0, t_0) \in \Sigma$ est une singularité si l'un au moins des $b_m(t_0)$ est non nul ; s'il existe $m_0 \geq 1$ tel que $b_{m_0}(t_0) \neq 0$ et $b_m(t_0) = 0$ pour $m > m_0$, on dira que $(z_0, t_0) \in \Sigma$ est un *pôle* de f d'*ordre* m_0 ; s'il existe une infinité de $b_m(t_0)$ non nuls, on dira que $(z_0, t_0) \in \Sigma$ est une *singularité essentielle* ; si $a_0(t_0)$ et tous les $b_m(t_0)$ sont nuls, on dira que (z_0, t_0) est un *zéro* de f ; sa *multiplicité* est par définition le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $a_n(t_0) \neq 0$. Comme les a_n et les b_m sont des fonctions continues en t, si $(z_0, t_0) \in \Sigma$ est un point singulier de f (*i.e.* un pôle ou une singularité essentielle) par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|t - t_0| < \delta$, le point $(z_0(t), t)$ est aussi singulier. L'ensemble singulier de f est donc une transversale à $\mathcal{F}$ qui est ouverte.

Ces remarques nous permettent de montrer facilement la proposition suivante dont on fera usage dans le calcul explicite de l'exemple 2.

3.3. Proposition. *Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathcal{F}$-holomorphe en dehors d'une réunion discrète de sous-variétés transverses Σ_j. Alors :*

i) *chaque Σ_j est ouverte ;*

ii) *si chacune des Σ_j est réduite à un point, f se prolonge en une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe sur toute la variété M.*

4. Le feuilletage affine de Reeb

4.1. Construction

• On pose $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ et on considère le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ défini par le système différentiel $dt_1 = \ldots = dt_n = 0$ où $(z, t_1, \ldots, t_n)$ sont les coordonnées d'un point (z, t) dans $\widetilde{M}$. Les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont holomorphiquement équivalentes à $\mathbb{C}$ sauf celle qui correspond à $t = 0$ qui est $\mathbb{C}^*$. Soit $\phi : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ le difféomorphisme de M défini par $\phi(z, t) = (\lambda z, \lambda t)$ où $\lambda \in]0, 1[$. L'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par ϕ est libre, propre et discontinue ; le quotient $M = \widetilde{M}/\phi$ est difféomorphe à la *variété de Hopf* réelle $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ est invariant par ϕ et induit un feuilletage complexe $\mathcal{F}_\lambda$ de dimension 1 sur M. Les feuilles sont des copies de $\mathbb{C}$ sauf celle qui correspond à $t = 0$ qui est une *courbe elliptique* C_λ dont la structure complexe est donnée par celle de la couronne $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| < |z| < 1\}$. Tout isomorphisme de feuilletages $f : (M, \mathcal{F}_\lambda) \longrightarrow (M, \mathcal{F}_{\lambda'})$ induit un biholomorphisme de C_λ sur $C_{\lambda'}$. Donc si $|\lambda| \neq |\lambda'|$, $\mathcal{F}_\lambda$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{F}_{\lambda'}$.

• Cherchons le groupe $G(\mathcal{F}_\lambda)$ des automorphismes de $\mathcal{F}_\lambda$ sur $M = \widetilde{M}/\phi$ (dans le cas où $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$). Un élément $f \in G(\mathcal{F}_\lambda)$ est donné par un automorphisme $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ de $\mathcal{F}$ commutant à l'action de ϕ ; il s'écrit $\widetilde{f}(z, t) = (f_1(z, t), f_2(t))$ où f_1 est holomorphe en z et commute à la multiplication $z \longmapsto \lambda z$ et f_2 est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$; f_1 est nécessairement de la forme $f_1(z, t) = a(t)z$ où $a(t) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ dépendant différentiablement de t. D'autre part, comme $\mathbb{C}^*$ n'est pas équivalent à $\mathbb{C}$, f_2 doit fixer 0 et commuter à l'homothétie $\phi_2 : t \longmapsto \lambda t$ *i.e.* $f_2(\lambda t) = \lambda f_2(t)$; il est alors du type $f_2(t) = bt$ où $b \in \mathbb{R}^*$. Le groupe $G(\mathcal{F}_\lambda)$ est donc celui des transformations de la forme $(z, t) \longmapsto (a(t)z, bt)$ où $a \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

La variété ici est $M = \mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$ qui est le quotient de $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par l'automorphisme $(z,t) \in \widetilde{M} \xrightarrow{\gamma} (\lambda z, \lambda t) \in \widetilde{M}$. Elle sera munie du feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ défini en a) et qu'on notera simplement $\mathcal{F}$.

4.2. Théorème principal. *Les espaces vectoriels $H^{00}_{\mathcal{F}}(M) = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ et $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$ sont isomorphes à $\mathbb{C}$.*

• Réglons d'abord le cas de $H^{00}_{\mathcal{F}}(M) = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$. Un élément de $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ est une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe f sur M, donc une fonction sur $\widetilde{M}$ telle que $f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t)$ et qui est $\mathcal{F}$-holomorphe. Mais, d'après la Proposition 3.3, f s'étend en une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$. D'autre part :

$$f(z,t) = \sum_{\ell=0} f_\ell(t) z^\ell$$

où les f_ℓ sont des fonctions continues de $t \in \mathbb{R}^n$ (données par les formules intégales (7)). Comme f vérifie $f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t)$, les f_ℓ doivent satisfaire la relation $\lambda^{-\ell} f_\ell(t) = f_\ell(\lambda t)$. Mais, pour $\ell \neq 0$, cette relation force $|f_\ell|$ à tendre vers $+\infty$ quand $|t| \to 0$ et ne saurait donc être continue pour $\ell \neq 0$. Donc f est réduite à la fonction f_0 ; celle-ci vérifiant $f_0(\lambda t) = f_0(t)$ doit être en fait la constante $f_0(0)$.

Pour $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$, la démonstration se fera pour $n = 1$. (Elle est exactement la même pour $n \geq 2$.) Nous allons commencer par décrire les espaces $A^{pq}_{\mathcal{F}}(M)$ des formes feuilletées de type (p,q).

• Une forme feuilletée de type $(0,1)$ sur $\widetilde{M}$ (resp. de type $(1,0)$) s'écrit $\alpha = f(z,t)d\overline{z}$ (resp. $\omega = g(z,t)dz$) où f et g sont des éléments de $A(M)$. L'action de γ sur α (resp. ω) est donnée par $\gamma^*(\alpha) = \lambda f(\lambda z, \lambda t) d\overline{z}$ (resp. $\gamma^*(\beta) = \lambda g(\lambda z, \lambda t) d\overline{z}$). Les deux formes α et ω sont donc invariantes par γ si les fonctions f et g vérifient les relation fonctionnelles :

$$\lambda f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t) \quad \text{et} \quad \lambda g(\lambda z, \lambda t) = g(z,t). \tag{8}$$

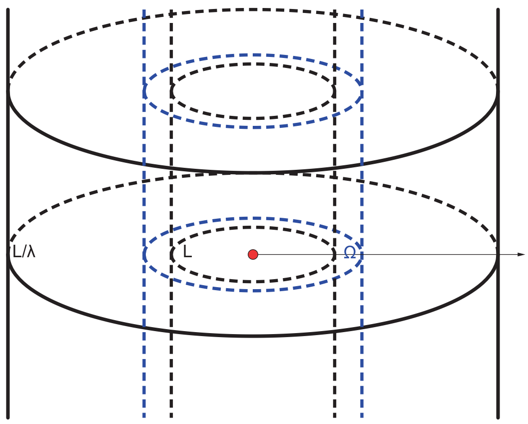
• Une forme feuilletée de type $(1,1)$ sur $\widetilde{M}$ s'écrit $\eta = h(z,t) dz \wedge d\overline{z}$. La condition d'invariance par γ impose à la fonction h de vérifier cette fois-ci $\lambda^2 h(\lambda z, \lambda t) = h(z,t)$.

• Donnons explicitement quelques exemples de ces formes feuilletées, par exemple de type $(0,1)$, situation qui va le plus nous intéresser par la suite. On doit donc trouver une fonction $f \in A(M)$ telle que $\lambda f(\lambda z, \lambda t) = f(z,t)$. Il est évident que $a(z,t) = \frac{1}{\sqrt{z\overline{z}+t^2}}$ en est une. Si f est une autre fonction (tout à fait quelconque) et vérifiant (8), la fonction $u = \frac{f}{f_0}$ (bien définie car f_0 ne s'annule nulle part) vérifie $u(\lambda z, \lambda t) = u(z,t)$, donc une fonction sur la variété compacte $M = \widetilde{M}/\langle\gamma\rangle$ et par suite bornée. Toute $(0,1)$-forme feuilletée sur M s'écrit donc $\alpha(z,t) = a(z,t)u(z,t)d\overline{z}$ où u est une fonction sur $\widetilde{M}$ invariante par l'action du difféomorphisme γ.

4.3. Démonstration du théorème principal

Première étape

Soient R et ε deux réels strictement positifs tels que $R+\varepsilon < \lambda^{-1}R$; on note L le disque fermé de $\mathbb{C}$ de rayon R et Ω un ε-voisinage ouvert de L. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $K_j = \lambda^{-j}L_0$ et $\Omega_j = \lambda^{-j}\Omega_0$ où $L_0 = L \times \mathbb{R}$ et $\Omega_0 = \Omega \times \mathbb{R}$.



Soit $\rho_0 : z \in \mathbb{C} \longmapsto \rho_0(z) \in \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞ à support compact, ne dépendant que de $|z|$ et identiquement égale à 1 sur Ω. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction $\rho_j(\xi) = \rho_0(\lambda^j\xi)$ est C^∞, à support compact et vaut 1 identiquement sur l'ouvert $\lambda^{-j}\Omega$. Soit $\phi_j : \mathbb{C}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $\phi_j(\xi,t) = \rho_j(\xi)$ et :

$$\psi_j(\xi,t) = \begin{cases} \phi_j(\xi,t) & \text{si } j=0 \\ \phi_j(\xi,t) - \phi_{j-1}(\xi,t) & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

Comme $\phi_j(\xi,t)$ et $\psi_j(\xi,t)$ ne dépendent pas de t, on les notera simplement $\phi_j(\xi)$ et $\psi_j(\xi)$. Les relations suivantes sont bien sûr immédiates mais comme elles nous seront très utiles, nous les rappelons et les mettrons bien en vue :

$$\begin{cases} \phi_j(\xi) &= \phi_0(\lambda^j\xi) \quad \text{(par définition de } \phi_j) \\ \psi_j(\lambda\xi) &= \psi_{j+1}(\xi). \end{cases} \tag{9}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, la section K_j^t de K_j est un $\mathcal{F}$-compact (son intersection avec toute feuille est un compact) contenu dans l'intérieur de K_{j+1}. On a :

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j = \mathbb{C}\times\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1.$$

Deuxième étape

On se donne une $(0,1)$-forme feuilletée $\alpha = f(z,t)d\overline{z}$ où f vérifie la relation fonctionnelle (8). Pour une raison évidente de degré, cette forme est $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}$-fermée. D'autre part, comme α s'écrit $\alpha = a(z,t)u(z,t)d\overline{z}$ avec u invariante par γ, la fonction f a la croissance de la fonction a qui est localement intégrable. Pour tout $(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\} = \widetilde{M}$, la quantité qui suit existe :

$$h_0(z,t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi)f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.$$

La fonction h_0 est donc bien définie, continue en (z,t) et C^∞ en z (*cf.* [Hö] Theorem 1.2.2 page 3). En utilisant la formule intégrale de Cauchy, on montre facilement que h_0 vérifie l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_0 = \psi_0 f$ sur $\widetilde{M}$.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Le support de la fonction ψ_j ne contient pas l'origine $(0,0)$. Comme précédemment, on pose pour tout $(z,t) \in \widetilde{M}$:

$$h_j(z,t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(\xi)f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.$$

Comme pour h_0, la fonction h_j est bien définie, continue en (z,t) et C^∞ en z. Elle vérifie l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} h_j = \psi_j f$.

Troisième étape

Il nous reste à recoller toutes les solutions partielles que nous avons obtenues. Comme $\psi_j = 0$ sur Ω_{j-1}, h_j y est $\mathcal{F}$-holomorphe (*cf.* [Hö]). Les sections Ω_{j-1}^t étant des disques ouverts, on peut développer h_j en série entière :

$$h_j(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) z^n \tag{10}$$

qui converge pour la métrique δ sur l'ouvert Ω_{j-1}. En tronquant de façon adéquate la série (9), on obtient une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe sur $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ (c'est un polynôme en z) telle que :

$$\delta(h_j, v_j) < \frac{1}{2^j}. \tag{11}$$

Soit $\widetilde{h} : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\widetilde{h}(z,t) = h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(h_j(z,t) - v_j(z,t)\right).$$

En vertu de l'inégalité (11), la série converge uniformément au sens de la métrique δ ; la fonction $\widetilde{h}$ est donc continue en (z,t) et de classe C^∞ en z. En plus, comme l'opérateur $\overline{\partial}_\mathcal{F}$ est continu pour la topologie $C^{0,\infty}$, on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\mathcal{F}\widetilde{h} &= \overline{\partial}_\mathcal{F}\left(h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty}(h_j(z,t) - v_j(z,t))\right) \\
&= \overline{\partial}_\mathcal{F} h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\overline{\partial}_\mathcal{F} h_j(z,t) - \overline{\partial}_\mathcal{F} v_j(z,t)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\overline{\partial}_\mathcal{F} h_j(z,t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(z,t)f(z,t) \\
&= f
\end{aligned}$$

qui montre bien que h est une solution de l'équation $\overline{\partial}_\mathcal{F}\widetilde{h} = f$. Mais, a priori, elle ne définit pas une solution au problème sur la variété quotient $M = \widetilde{M}/\langle\gamma\rangle$: elle ne vérifie pas forcément la condition d'invariance $\widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) = \widetilde{h}(z,t)$. Pour en obtenir une, on corrige $\widetilde{h}$ en lui rajoutant une fonction $\mathcal{F}$-holomorphe $K(z,t)$ de telle sorte que $h(z,t) = \widetilde{h}(z,t) + K(z,t)$, qui vérifie encore l'équation $\overline{\partial}_\mathcal{F} h = f$, soit γ-invariante *i.e.* $h(\lambda z, \lambda t) = h(z,t)$, ce qui impose à K de vérifier l'*équation cohomologique* :

$$K(z,t) - K(\lambda z, \lambda t) = H(z,t) \tag{12}$$

où $H(z,t) = \widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) - \widetilde{h}(z,t)$. Nous avons donc à résoudre l'équation (12) où l'inconnue est la fonction $\mathcal{F}$-holomorphe K. Remarquons que H est continue et $\mathcal{F}$-holomorphe sur $\widetilde{M}$; en effet :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\mathcal{F} H(z,t) &= \overline{\partial}_\mathcal{F}\left(\widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) - \widetilde{h}(z,t)\right) \\
&= \lambda\overline{\partial}_\mathcal{F}\widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) - \overline{\partial}_\mathcal{F}\widetilde{h}(z,t) \\
&= \lambda f(\lambda z, \lambda t) - f(z,t) \\
&= f(z,t) - f(z,t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Étant $\mathcal{F}$-holomorphe sur l'ouvert $\widetilde{M}$, H l'est sur l'espace $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ tout entier en vertu de la Proposition 3.3.

Quatrième étape

Formellement la fonction $K(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(\lambda^n z, \lambda^n t)$ est solution de l'équation (12). Il ne reste donc plus qu'à montrer que cette série converge pour la topologie $C^{0,\infty}$ pour qu'elle définisse effectivement une fonction continue et $\mathcal{F}$-holomorphe.

Une condition nécessaire de l'existence de K est $H(0,0) = 0$. Avant d'examiner comment elle est vérifiée, explicitons la quantité :

$$\begin{aligned} H(z,t) &= \widetilde{h}(\lambda z, \lambda t) - \widetilde{h}(z,t) \\ &= h_0(\lambda z, \lambda t) - h_0(z,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \{h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t)\} - \sum_{j=1}^{\infty} \{v_j(\lambda z, \lambda t) - v_j(z,t)\}. \end{aligned}$$

• Commençons par la quantité $h_0(\lambda z, \lambda t) - h_0(z,t)$. On a :

$$\begin{aligned} h_0(\lambda z, \lambda t) - h_0(z,t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi) f(\xi, \lambda t)}{\xi - \lambda z} d\xi \wedge d\overline{\xi} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\lambda\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_0(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}. \end{aligned} \tag{13}$$

Le passage de la première ligne à le deuxième se fait par chagement de variable $\xi \longmapsto \lambda\xi$ et utilise la relation $\lambda f(\lambda\xi, \lambda t) = f(\xi, t)$ et le passage de la deuxième ligne à la troisième les relations (9).

• Un calcul similaire donne :

$$h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{(\psi_j(\lambda\xi) - \psi_j(\xi)) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.$$

En utilisant la deuxième relation de (9), on obtient :

$$h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{(\psi_{j+1}(\xi) - \psi_j(\xi)) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}. \tag{14}$$

• Les relations (13) et (14) donnent finalement :

$$\sum_{j=0}^{N} \{h_j(\lambda z, \lambda t) - h_j(z,t)\} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\xi) f(\xi, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}.$$

Comme l'évaluation de la quantité $\sum_{j=1}^{\infty} \{v_j(\lambda z, \lambda t) - v_j(z,t)\}$ en $(0,0)$ est nulle (pour tout $j \geq 1$, la fonction v_j est définie en $(0,0)$), on obtient :

$$H(0,0) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\xi) f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi} \right).$$

• Pour finir cette étape, montrons que la suite de nombres complexes $(I_N)_{N\geq 1}$ où I_N est donné par :

$$I_N = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\xi) f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi}$$

est constante. Ceci résulte du calcul immédiat qui suit, qui utilise la deuxième des relations (9) et l'invariance $\lambda f(\lambda\xi, 0) = f(\xi, 0)$ de f (pour $\xi \neq 0$ bien sûr). En effet :

$$\begin{aligned}
I_{N+1} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_{N+1}(\xi) f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\lambda\xi) f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\zeta) f(\frac{\zeta}{\lambda},0)}{\frac{\zeta}{\lambda}} \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_N(\zeta) f(\zeta,0)}{\xi} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\
&= I_N.
\end{aligned}$$

Par suite, la condition $H(0,0) = 0$ est équivalente à :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(\xi) f(\xi,0)}{\xi} d\xi \wedge d\overline{\xi} = 0. \tag{15}$$

Cinquième étape

La condition $H(0,0) = 0$ est nécessaire à l'existence de la fonction K. Nous allons montrer maintenant qu'elle est en fait suffisante. Ceci sera le cas si on montre la $C^{0,\infty}$-convergence de la série :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} H(\lambda^n z, \lambda^n t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(h_0(\lambda^{n+1} z, \lambda^{n+1} t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t)\big) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{h_j(\lambda^{n+1} z, \lambda^{n+1} t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{v_j(\lambda^{n+1} z, \lambda^{n+1} t) - v_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Un calcul simple, utilisant le fait que f vérifie la relation fonctionnelle $\lambda f(\lambda\xi, \lambda t) = f(\xi, t)$, montre que :

$$h_0(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left\{\psi_0(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_0(\lambda^n\xi)\right\} f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

et :

$$h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left\{\psi_j(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_j(\lambda^n\xi)\right\} f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Pour montrer la convergence de la série $K(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(\lambda^n z, \lambda^n t)$, on va expliciter et simplifier l'expression des trois séries qui composent le membre de droite de la relation (16). Formellement :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(h_0(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t)\right) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\psi_0(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_0(\lambda^n\xi)\right\} f(\xi,t)}{2i\pi(\xi - z)} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Soit N un entier natruel positif. Un calcul presque immédiat utilisant les relations (9) nous donne :

$$\sum_{n=0}^{N}\left\{\psi_0(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_0(\lambda^n\xi)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n+1}(\xi) = \sum_{n=0}^{N}\psi_0(\xi). \tag{17}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{N}\left\{h_0(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left(\sum_{n=0}^{N}\psi_0(\xi)\right) f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

De la même manière, nous allons nous occuper de la série double :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\}.$$

D'abord on a :

$$\begin{aligned}\psi_j(\lambda^{n+1}\xi) &= \phi_j(\lambda^{n+1}\xi) - \phi_{j-1}(\lambda^{n+1}\xi)\\ &= \phi_0(\lambda^{n+j+1}\xi) - \phi_0(\lambda^{n+j}\xi).\end{aligned}$$

En sommant sur $n \in \mathbb{N}$ de 0 à N, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N}\psi_j(\lambda^{n+1}\xi) = \phi_0(\lambda^{j+N}\xi) - \phi_0(\lambda^j\xi).$$

De façon similaire, on établit l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \psi_j(\lambda^n \xi) = \phi_0(\lambda^{j+N}\xi) - \phi_0(\lambda^{j-1}\xi).$$

Et par suite :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \left\{\psi_j(\lambda^{n+1}\xi) - \psi_j(\lambda^n \xi)\right\} &= -\phi_0(\lambda^j \xi) + \phi_0(\lambda^{j-1}\xi)\\ &= -\phi_j(\xi) + \phi_{j-1}(\xi)\\ &= -\psi_j(\xi).\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{(-\psi_j(\xi))f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Après sommation sur $j \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{(1-\psi_0(\xi))f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{h_0(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} =$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left(1-\psi_0(\xi) + \sum_{n=0}^{N}\psi_0(\xi)\right) f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Le passage à la limite pour N tendant vers $+\infty$ donne en définitive :

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{h_0(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_0(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} \left\{h_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - h_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\} =$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left(1-\psi_0(\xi) + (\psi_0(\xi) - 1)\right) f(\xi,t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} = 0.$$

En réalité, la fonction $\mathcal{F}$-holomorphe K qu'on cherche est réduite à la série double :

$$K(z,t) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left\{v_j(\lambda^{n+1}z, \lambda^{n+1}t) - v_j(\lambda^n z, \lambda^n t)\right\}.$$

Sa convergence uniforme sur tout compact de $\widetilde{M}$ résulte de sa convergence en $(0,0)$ (puisque tous ses termes sont nuls) et du fait que la série des dérivées par rapport à la variable z est équivalente à des séries géométriques de raison λ (qui est dans $]0,1[$). (Rappelons que sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\widetilde{M}) = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ la convergence uniforme sur tout compact est équivalente à la $C^{0,\infty}$-convergence.)

Sixième étape

Revenons maintenant à la condition $H(0,0) = 0$ nécessaire à l'existence de la fonction $\mathcal{F}$-holomorphe K qu'on cherche. Soit $\mathcal{I} : A^{01}_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire continue définie par :

$$\mathcal{I}(fd\overline{z}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(z) f(z,0)}{z} dz \wedge d\overline{z}.$$

Alors il n'est pas difficile de voir, à partir de tous les calculs que nous avons menés précédemment, que $H(0,0) = 0$ si, et seulement si, la $(0,1)$-forme feuilletée $f(z,t)d\overline{z}$ est dans le noyau de $\mathcal{I}$. La dimension de l'espace vectoriel $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$ est donc au plus 1. Pour montrer qu'elle est en fait égale à 1, il suffit de vérifier que la forme linéaire $\mathcal{I}$ est non nulle. Nous allons voir que son évaluation sur la $(0,1)$-forme : $\omega_0 = \frac{zd\overline{z}}{z\overline{z}+t^2}$ est différente de 0. À cet effet, rappelons d'abord que ψ_1 ne dépend que du module de z et que son support est contenu dans une couronne :

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 \leq |z| \leq R_2\}$$

(avec, bien sûr, $0 < R_1 < R_2$). D'autre part, comme ψ_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et non identiquement nulle, son intégrale sur l'intervalle $[R_1, R_2]$ (en tant que fonction uniquement de $r = |z|$) est un réel strictement positif. Posons $z = re^{i\theta}$. On a :

$$dz \wedge d\overline{z} = d(re^{i\theta}) \wedge d(re^{-i\theta}) = \big(e^{i\theta}(dr + ird\theta)\big) \wedge \big(e^{-i\theta}(dr - ird\theta)\big) = -2irdr \wedge d\theta.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\omega_0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(z) z}{z \cdot |z|^2} dz \wedge d\overline{z} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} \frac{\psi_1(r)(-2i)}{r} dr \wedge d\theta \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{\psi_1(r)}{r} dr \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= -2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\psi_1(r)}{r} dr \\
&< 0
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{I}(\omega_0) \neq 0$. Par suite, la forme linéaire continue $\mathcal{I}$ n'est pas nulle. Ce qui donne en définitive :

$$H^{01}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{C}\omega_0.$$

Ceci termine la démonstration du théorème. □

4.4. Remarque

Elle pourrait être significative, et c'est la raison pour laquelle nous avons jugé de la faire. La cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{0*}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1)$ du feuilletage $\mathcal{F}$ est la "même" que celle de la feuille compacte (courbe elliptique C_λ) induite par la feuille correspondant à $t = 0$ dans le revêtement $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Ceci est sûrement dû au fait que cette feuille compacte a une holonomie contractante.

Références

[BC] Ben Charrada, R. *Cohomology of some complex laminations.* Results in Mathematics 57, (2010) 33-41.

[Ek] El Kacimi Alaoui, A. *The $\overline{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation.* Math. Annalen 347, (2010), 885-897.

[ES] El Kacimi Alaoui, A. & Slimène, J. *Cohomologie de Dolbeault le long des feuilles de certains feuilletages complexes.* Annales de l'Institut Fourier de Grenoble, Tome 60 n^{o}2, (2010), 727-757.

[GT] Gigante, G. & Tomassini, G. *Foliations with complex leaves.* Diff. Geo. and its Applications 5, (1995) 33-49.

[Hö] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* D. Van Nostrand Compagny, Inc., (1966).

[Sℓ] Slimène, J. *Deux exemples de calcul explicite de cohomologie de Dolbeault feuilletée.* Proyecciones Vol. 27, N^0 1, pp. 63-80, May 2008.

ABSTRACT

In this thesis, we are interested in computing the foliated Dolbeault cohomology groups $H^{0*}_{\mathcal{L}}(M)$ for some complex laminations. This amounts to solving the probem of the $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$ along the leaves $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}\alpha = \omega$. (Here M is a metric space or a differentiable manifold if $\mathcal{L}$ is a foliation $\mathcal{F}$.) Three situations were considered explicitly.

1. Let $M = \Omega$ be an open set of $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ equipped with the foliation $\mathcal{F}$ whose leaves are the sections $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C}(z,t) \in \Omega\}$; we say that $\mathcal{F}$ is the canonical foliation of Ω. Under certain conditions on Ω and growth conditions on the foliated form ω, we show that the equation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \omega$ has a solution.

2. Let $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of real numbers, strictly increasing with $\alpha_1 = -1$ and converging to 1. In $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ we consider the points $A = (0,1)$ and $A_n = (0,\alpha_n)$ for $n \geq 1$. For all $n \geq 1$, let S_n be the sphere of $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ with a diameter segment $[A_nA]$ and E the union of all these spheres. Then E is a compact and connected subset of $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Let $\gamma : E \longrightarrow E$ the homeomorphism defined by $\gamma(w,u) = (\rho_n(w),u)$, where $(w,u) \in S_n$ and ρ_n is the rotation in $\mathbb{C}$ with angle $\frac{2\pi}{n}$. The suspension of γ gives rise to a complex lamination $\mathcal{L}$ whose leaves are all equivalent Riemann surfaces isomorphic to $\mathbb{C}^*$. For This example we show that the vector space $H^{01}(\mathcal{L})$ is zero.

3. Consider the manifold $\widetilde{M} = \mathbb{C}\times\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ (the coordinates of a point are denoted (z,t)) endowed with the complex foliation $\widetilde{\mathcal{F}}$ defined by the differential system $dt_1 = \cdots = dt_n = 0$. The diffeomorphism $\gamma(z,t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z, \lambda t) \in \widetilde{M}$ (where $0 < \lambda < 1$) acts on $\widetilde{M}$ freely and properly; moreover it is an automorphism of the complex foliation $\widetilde{\mathcal{F}}$; then $\widetilde{\mathcal{F}}$ induces on the quotient $M = \widetilde{M}/\gamma$ (which is diffeomorphic to $\mathbb{S}^{n+1}\times\mathbb{S}^1$) a complex foliation $\mathcal{F}$ by Riemann surfaces. All leaves are isomorphic to $\mathbb{C}$ except one of them which is an elliptic curve. We show that the vector spaces $H^{00}_{\mathcal{F}}(M)$ and $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$ of foliated Dolbeault cohomology are isomorphic to $\mathbb{C}$.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous s'intéressons au calcul des groupes de *cohomologie de Dolbeault feuilletée* $H^{0*}_{\mathcal{L}}(M)$ de certaines *laminations complexes*. Ceci revient à résoudre le problème du $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$ le long des feuilles $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}\alpha = \omega$. (Ici M est un espace métrique ou une variété dans le cas où $\mathcal{L}$ est un feuilletage $\mathcal{F}$.) Trois situations ont été étudiées de manière explicite.

1. Soit $M = \Omega$ un ouvert de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ muni du feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont les sections $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C} : (z,t) \in \Omega\}$; on dira que $\mathcal{F}$ est le *feuilletage canonique* de Ω. Sous certaines conditions sur Ω et de croissance sur la forme feuilletée ω, nous montrons que l'équation $\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \omega$ a une solution.

2. On se donne une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante avec $\alpha_1 = -1$ et convergeant vers 1. Dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ on considère les points $A = (0,1)$ et $A_n = (0, \alpha_n)$ pour $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soient S_n la sphère de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de diamètre le segment $[A_n A]$ et E la réunion de toutes ces sphères. Alors E est un sous-espace métrique compact et connexe de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Soit $\gamma : E \longrightarrow E$ l'homéomorphisme défini par $\gamma(w,u) = (\rho_n(w), u)$ lorsque $(w,u) \in S_n$ où ρ_n est la rotation dans $\mathbb{C}$ d'angle $\frac{2\pi}{n}$. La suspension de γ donne une lamination complexe $\mathcal{L}$ dont les feuilles sont des surfaces de Riemann toutes équivalentes à $\mathbb{C}^*$. Pour cet exemple, nous montrons que l'espace vectoriel $H^{01}(\mathcal{L})$ est nul.

3. On considère la variété $\widetilde{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ (les coordonnées d'un point seront notées (z,t)) qu'on munit du feuilletage complexe $\widetilde{\mathcal{F}}$ défini par le système différentiel $dt_1 = \cdots = d_n = 0$. Le difféomorphisme $\gamma : (z,t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z, \lambda t) \in \widetilde{M}$ (avec $0 < \lambda < 1$) agit sur $\widetilde{M}$ de façon libre et propre ; en plus, c'est un automorphisme de $\widetilde{\mathcal{F}}$; $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit alors sur le quotient $M = \widetilde{M}/\gamma$ (qui est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$) un feuilletage complexe $\mathcal{F}$ par surfaces de Riemann. Nous montrons que les espaces vectoriels de cohomologie de Dolbeault feuilletée $H^{00}_{\mathcal{F}}(M)$ et $H^{01}_{\mathcal{F}}(M)$ sont isomorphes à $\mathbb{C}$.

Discipline

Mathématiques

Mots-Clés

Feuilletage, lamination. Cohomologie feuilletée, cohomologie des groupes, le $\overline{\partial}$ le long des feuilles. Fonction holomorphes le long des feuilles.

Adresses des Laboratoires

LAMAV
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Le Mont Houy
59313 Valenciennes Cedex 9 – France

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Sfax
3018 Sfax – Tunisie