Ergodicité et fonctions propres du laplacien sur les grands graphes réguliers

Etienne Le Masson

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
École doctorale : Mathématiques de la Région Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Discipline : Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le 24 septembre 2013
par
Étienne Le Masson

Ergodicité et fonctions propres du laplacien sur les grands graphes réguliers

Composition du jury :

M^{me}	Nalini	Anantharaman	(Directrice de thèse)
M.	Yves	Colin de Verdière	(Rapporteur)
M.	Patrick	Gérard	(Examinateur)
M.	Stéphane	Nonnenmacher	(Examinateur)
M^{me}	Sandrine	Péché	(Présidente du jury)

Rapporteurs :

M.	Shimon	Brooks
M.	Yves	Colin de Verdière

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions les propriétés de concentration des fonctions propres du laplacien discret sur des graphes réguliers de degré fixé dont le nombre de sommets tend vers l'infini. Cette étude s'inspire de la théorie de l'ergodicité quantique sur les variétés. Par analogie avec cette dernière, nous développons un calcul pseudo-différentiel sur les arbres réguliers : nous définissons des classes de symboles et des opérateurs associés, et nous prouvons un certain nombre de propriétés de ces classes de symboles et opérateurs. Nous montrons notamment que les opérateurs sont bornés dans L^2, et nous donnons des formules de l'adjoint et du produit. Nous nous servons ensuite de cette théorie pour montrer un théorème d'ergodicité quantique pour des suites de graphes réguliers dont le nombre de sommets tend vers l'infini. Il s'agit d'un résultat de délocalisation de la plupart des fonctions propres dans la limite des grands graphes réguliers. Les graphes vérifient une hypothèse d'expansion et ne comportent pas trop de cycles courts, deux hypothèses vérifiées presque sûrement par des suites de graphes réguliers aléatoires.

Mots-clefs : fonctions propres, laplacien, ergodicité quantique, analyse semi-classique, opérateurs pseudo-différentiels, graphes réguliers, grands graphes aléatoires.

Ergodicity and eigenfunctions of the Laplacian on large regular graphs

Abstract

In this thesis, we study concentration properties of eigenfunctions of the discrete Laplacian on regular graphs of fixed degree, when the number of vertices tend to infinity. This study is made in analogy with the Quantum Ergodicity theory on manifolds. We construct a pseudo-differential calculus on regular trees by defining symbol classes and associated operators and proving some properties of these classes of symbols and operators. In particular we prove that the operators are bounded on L^2 and give adjoint and product formulas. We then use this theory to prove a Quantum Ergodicity theorem on large regular graphs. This is a property of delocalization of most eigenfunctions in the large scale limit. We consider expander graphs with few short cycles (for instance random large regular graphs). These hypothesis are almost surely satisfied by sequences of random regular graphs.

Keywords : Laplacian, eigenfunctions, quantum ergodicity, semi-classical analysis, pseudo-differential operators, regular graphs, large random graphs.

Remerciements

Je voudrais remercier tout d'abord ma directrice de thèse Nalini Anantharaman de m'avoir permis de travailler avec elle sur un sujet original, riche et motivant, et de m'avoir guidé tout au long de cette thèse en se montrant très disponible. Ses explications ont toujours été claires et intuitives, et c'était un vrai plaisir de parler de mathématiques avec elle pendant ces trois années. J'ai de la chance d'avoir pu apprendre la recherche auprès d'elle.

Je remercie aussi particulièrement Yves Colin de Verdière, qui m'a accompagné au début de ma thèse durant un séjour à l'Institut Fourier à Grenoble, et qui a continué à m'encourager par la suite. Ses remarques et ses questions sont une source précieuse de problèmes ouverts stimulants. Je suis aussi reconnaissant envers lui et Shimon Brooks d'avoir accepté d'être rapporteurs et d'avoir pris le temps de lire mon manuscrit en détails.

J'ai eu le plaisir pendant ma thèse de participer à un certain nombre de rencontres et groupes de travail en lien avec l'ANR « Méthodes spectrales en chaos classique et quantique ». Je voudrais en remercier les organisateurs et participants pour la bonne ambiance qui y a régné et pour les discussions que j'ai pu y avoir. Je pense ici en particulier à Stéphane Nonnenmacher.

Je remercie Patrick Gérard, Stéphane Nonnenmacher, et Sandrine Péché de me faire l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Merci enfin aux doctorants d'Orsay avec qui j'ai eu le plaisir de déjeuner régulièrement pendant ces années. Et merci en particulier aux occupants successifs du bureau 16, dans lequel il m'a été très agréable de travailler.

Introduction

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le domaine du chaos quantique. Le but est de comprendre les conséquences sur les systèmes quantiques d'une dynamique classique chaotique, c'est-à-dire présentant une certaine sensibilité aux conditions initiales. Pour préciser cela, commençons par donner un exemple important de situation dans laquelle cette étude se fait.

L'espace physique est représenté mathématiquement par une variété riemannienne (X, g), que nous supposerons compacte, et les états classiques sont donnés par des couples (x, ξ) du fibré cotangent T^*X, représentant la position x et l'impulsion ξ. On peut se restreindre à une couche d'énergie en considérant le fibré cotangent unitaire $S^*X = \{(x,\xi) \in T^*X \mid |\xi|_g = 1\}$. La dynamique classique est donnée par le flot géodésique $\phi_t : S^*X \to S^*X$ qui déplace à vitesse 1 sur la géodésique correspondant à un couple (x, ξ). On note L la mesure de Liouville normalisée sur S^*X, qui se projette sur X en la mesure de volume riemannien. La manifestation du chaos qui nous intéresse ici est l'*ergodicité* du flot géodésique par rapport à la mesure L. Cela se traduit par le fait que pour toute fonction $a \in L^1(S^*X)$ on a pour presque tout $(x, \xi) \in S^*X$

$$\frac{1}{T}\int_0^T a \circ \phi_t(x,\xi)dt \to \int_{S^*X} a\,dL$$

quand $T \to +\infty$. Cela signifie concrètement que presque toutes les trajectoires classiques visitent l'ensemble de l'espace des phases S^*X uniformément, dans le sens où elles passent dans une région donnée un temps proportionnel au volume de cette région.

Du côté quantique les états du système sont donnés par des fonctions normalisées $\psi \in L^2(X)$, la quantité $|\psi(x)|^2$ pouvant s'interpréter comme la densité de probabilité associée à la position du système dans l'état ψ sur X. Les fonctions propres du laplacien Δ_g sur (X, g) donnent les états stationnaires (n'évoluant pas dans le temps), les valeurs propres correspondantes étant les niveaux d'énergie possibles. Dans la limite des hautes énergies, le principe de correspondance veut que l'on retrouve en un certain sens la mécanique classique. La question est alors de savoir dans cette limite comment l'ergodicité du flot géodésique se traduit dans les propriétés des fonctions propres du laplacien.

Le *théorème d'ergodicité quantique* donne une partie de la réponse. Notons $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(X)$ de fonctions propres du laplacien associées à la suite de valeurs propres (ou d'énergies) $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \lambda_j \to +\infty$, sur la variété compacte X. À une fonction $a \in C^\infty(T^*X)$ à support compact, on fait correspondre un opérateur $\mathrm{Op}(a)$ par un processus de *quantification*. On étudie alors les distributions $a \mapsto \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle$. Si a ne dépend que de x, $\mathrm{Op}(a)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction a, et dans ce cas

$$\langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle = \int_X a(x)|\psi_j(x)|^2 d\mathrm{Vol}_g(X).$$

Les fonctions a sont donc en fait des fonctions test permettant d'étudier les densités de probabilités $|\psi_j(x)|^2$. L'application $a \mapsto \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle$ est appelée *relèvement microlocal*. Elle permet de travailler dans l'espace des phases T^*X où l'on peut faire intervenir le flot géodésique. On a alors le théorème suivant.

Théorème. *[45, 50, 10] Soit (X,g) une variété riemannienne compacte telle que le flot géodésique ϕ_t est ergodique par rapport à la mesure de Liouville normalisée L sur S^*X. On note $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(X)$ de fonctions propres du laplacien Δ_g et $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite de valeurs propres correspondante ($\lambda_j \to +\infty$). Alors pour tout $a \in C^\infty(S^*X)$ (que l'on prolonge à T^*X par homogénéité de degré 0),*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j\leq\lambda} \left| \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle - \int_{S^*M} a\, dL \right|^2 = 0,$$

où $N(\lambda)$ est le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ.

L'interprétation de ce résultat est facilitée par le corollaire suivant.

Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe $\mathcal{S}\subset\mathbb{N}$ de densité 1 tel que pour tout $a\in C^\infty(T^*X)$ homogène de degré 0,*

$$\lim_{\substack{j\to+\infty\\ j\in\mathcal{S}}} \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle = \int_{S^*M} a\, dL.$$

On entend par densité 1 que $\frac{\{j\in\mathcal{S}, j\leq N\}}{N} \to 1$ quand $N\to+\infty$.

Cela nous dit en particulier qu'à une sous-suite de densité 1 près, la suite de densités $|\psi_j(x)|^2$ converge vers la densité uniforme. Dans le cas où le flot géodésique est ergodique, la plupart des fonctions propres du laplacien suivent donc une loi d'*équidistribution spatiale* dans la limite des hautes énergies. Cela correspond bien à l'intuition physique que l'on peut avoir de l'ergodicité et en ce sens, on retrouve bien dans la limite des hautes énergies la mécanique classique.

Le théorème d'ergodicité quantique n'exclut pas l'existence de sous-suites exceptionnelles. Dans le cas des variétés riemanniennes compactes à courbure sectionnelle négative, sur lesquelles le flot géodésique a des propriétés plus fortes que l'ergodicité, cela a donné lieu à la conjecture d'unique ergodicité quantique (QUE d'après les initiales en anglais) par Rudnick et Sarnak dans [42].

Conjecture (QUE)**.** *[42] Soit (X,g) une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle négative. Alors pour tout $a\in C^\infty(X)$,*

$$\lim_{j\to+\infty} \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle = \int_{S^*M} a\, dL,$$

(toute la suite converge).

D'importantes avancées ont été faites récemment dans la direction de cette conjecture, par Anantharaman ([3, 5]) et Lindenstrauss ([35]). Ce dernier montre un théorème d'unique ergodicité quantique dans un contexte arithmétique, c'est-à-dire pour un certain type de surfaces hyperboliques sur lesquelles il est possible de faire intervenir des techniques de théorie des nombres. Anantharaman étudie l'entropie des *mesures* *semi-classiques*, c'est-à-dire des valeurs d'adhérence de la suite de distributions [1] $a \mapsto \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j \rangle$, montrant que *toutes* ces mesures vérifient une forme de délocalisation spatiale. Dans le cas d'un flot géodésique sur des variétés riemanniennes à bord, appelées billards, la famille de contre-exemples de Hassell dans [24] montre cependant qu'il existe des systèmes classiquement ergodiques ne vérifiant pas l'unique ergodicité quantique.

Le chaos quantique sur les graphes s'est développé plus récemment, avec l'idée de se poser les mêmes questions sur des modèles plus simples ([29, 31]). Pour les graphes métriques [2] et discrets en forme d'étoile, [7, 27] montrent que l'ergodicité quantique est fausse. Pour une famille de graphes métriques associés à un système dynamique à une dimension, [6] montre au contraire un théorème d'ergodicité quantique. Les fonctions propres ont été aussi étudiées sur les grands graphes réguliers discrets dans [44, 9, 14].

C'est à ce dernier cas que nous nous intéressons dans cette thèse. Les graphes réguliers présentent l'avantage d'être un analogue discret des surfaces hyperboliques, sur lesquelles les fonctions propres du laplacien ont fait l'objet de nombreuses études. C'est sur les surfaces hyperboliques que Zelditch a fourni la première démonstration complète du théorème d'ergodicité quantique, dans [50]. On peut s'attendre à ce qu'un théorème analogue existe dans le cas des graphes réguliers, mais jusqu'à présent un tel résultat n'était à notre connaissance pas disponible.

Dans cette thèse, nous construisons d'abord un calcul pseudo-différentiel sur les graphes réguliers, fournissant un outil similaire à celui utilisé dans le cas des variétés pour montrer le théorème d'ergodicité quantique (le processus de quantification). On tire partie pour cela de l'existence d'une transformée de Fourier analogue à celle qui existe sur les surfaces hyperboliques et sur laquelle Zelditch s'est appuyé pour développer un calcul pseudo-différentiel hyperbolique dans [49]. Nous nous servons ensuite des opérateurs ainsi définis pour démontrer, en collaboration avec Nalini Anantharaman, un théorème d'ergodicité quantique sur les graphes réguliers.

Dans le chapitre 1, nous rappelons brièvement des éléments de calcul pseudo-différentiel sur les variétés riemanniennes compactes, et les étapes de la preuve du théorème d'ergodicité quantique dans ce cas. Notre travail sur les graphes s'inspire en effet de ces idées, et bien que cela ne soit pas strictement nécessaire, il peut être intéressant de les avoir à l'esprit.

Dans le chapitre 2, nous donnons les définitions indispensables sur les graphes réguliers ainsi que des éléments d'analyse harmonique sur les arbres réguliers qui seront utilisés par la suite.

Le chapitre 3 constitue une présentation condensée du travail original de cette thèse, qui simplifie et complète par des commentaires les chapitres suivants, pour résumer la démarche générale.

Le chapitre 4 est une reproduction de l'article [34] dans lequel nous développons le calcul pseudo-différentiel sur les arbres réguliers. Donnons-en les principaux résultats. Soit $\mathfrak{X}$ l'arbre $q+1$-régulier. On définit des opérateurs $\mathrm{Op}(a)$ associés à des symboles

1. On peut montrer que ces valeurs d'adhérence sont en effet des mesures.
2. C'est-à-dire dont les arêtes sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

$a(x, \omega, s)$ et agissant sur les fonctions à support fini sur $\mathfrak{X}$, où $x \in \mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega$ est un élément de la frontière de $\mathfrak{X}$, et $s \in [0, \pi/\log q] \subset \mathbb{R}$ est un paramètre spectral.[3] La définition est analogue à celle de [49] sur les surfaces hyperboliques. Les symboles appartiennent à une classe générale S ou à un sous-ensemble S_{sc} de symboles dits *semi-classiques* et dépendant d'un petit paramètre $\epsilon > 0$ qui contrôle la variation du symbole sur l'arbre. Ces classes contiennent des exemples non-triviaux et ont des propriétés intéressantes de stabilité sous l'action d'opérateurs liés à la dynamique sur l'arbre. Les résultats principaux de [34] sont les suivants.

Théorème 1. *Soit $a = a(x, \omega, s) \in S$ un symbole, alors* $\mathrm{Op}(a)$ *se prolonge en un opérateur sur $L^2(\mathfrak{X})$ et on a l'inégalité*

$$\| \mathrm{Op}(a)\|_{L^2 \to L^2} \leq C \left(\|a\|_\Omega + \sum_{k=0}^{4} \|\partial_s^k a\|_\infty \right),$$

où $\|a\|_\Omega$ est une norme associée à la régularité de a dans ω.

Nous montrons aussi une formule de l'adjoint

Théorème 2. *Soit $a = a_\epsilon \in S_{sc}$. Soit* $\mathrm{Op}(a)^*$ *l'adjoint de l'opérateur pseudo-différentiel* $\mathrm{Op}(a)$ *associé au symbole a. Alors*

$$\| \mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a})\|_{L^2 \to L^2} = o_\epsilon(1).$$

et une formule du produit

Théorème 3. *Soit $a \in S$ et $b = b_\epsilon \in S_{sc}$. Alors*

$$\| \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(ab)\|_{L^2 \to L^2} = O(\epsilon).$$

Le chapitre 5 reproduit l'article [4] écrit en collaboration avec Nalini Anantharaman et dans lequel nous prouvons un théorème d'ergodicité quantique. On peut en présenter une version de la manière suivante. On fixe un entier $q \geq 2$ et on considère une suite de graphes $q+1$-réguliers connexes $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $G_n = (V_n, E_n)$ avec $V_n = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des sommets et E_n l'ensemble des arêtes (que nous verrons ici comme des paires de sommets). On suppose que la suite vérifie les conditions suivantes :

(1) La suite de graphe est une famille d'expanseurs.[4]

(2) Pour tout R, $\frac{|\{x \in V_n, \rho(x) < R\}|}{n} \longrightarrow 0$, où $\rho(x)$ est le rayon d'injectivité en x (c'est-à-dire le plus grand ρ tel que la boule $B(x, \rho)$ sur G_n ne contient pas de cycles). La condition (2) est une condition sur le nombre de cycles de petites tailles. Pour des suites (G_n) de graphes $q+1$-réguliers aléatoires, (1) et (2) sont vérifiés avec une probabilité tendant vers 1 exponentiellement vite quand $n \longrightarrow +\infty$.

On étudie l'opérateur

$$Af(x) = \frac{1}{q+1} \sum_{\{x,y\} \in E_n} f(y).$$

3. Voir les chapitres 2 ou 4 pour des définitions.

4. Voir la section 3.5 ou le chapitre 5 pour une définition précise.

Il est lié au laplacien discret Δ par la relation $A - I = \Delta$. On note $(\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)})$ le spectre de A sur G_n, et $(\psi_1^{(n)}, \ldots, \psi_n^{(n)})$ une base orthonormée de fonctions propres correspondantes. Le spectre est inclus dans l'intervalle $[-1, 1]$. Notre résultat concerne les fonctions propres correspondant aux valeurs propres $\lambda \in \left]-\frac{2\sqrt{q}}{q+1}, \frac{2\sqrt{q}}{q+1}\right[$. On peut montrer que dans la limite $n \to +\infty$, la densité de valeurs propres en dehors de cette région du spectre tend vers 0.

Théorème 4. *On fixe* $\lambda_0 \in \left]-\frac{2\sqrt{q}}{q+1}, \frac{2\sqrt{q}}{q+1}\right[$. *Il existe une suite* $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers* 0 *telle que si* $I_n = [\lambda_0 - \delta_n, \lambda_0 + \delta_n]$, *et si* $a_n : V_n \longrightarrow \mathbb{C}$ *est une suite de fonctions uniformément bornées, alors on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{N(I_n, G_n)} \sum_{\lambda_j^{(n)} \in I_n} \left| \langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)} \rangle - \overline{a_n} \right|^2 = 0,$$

où $N(I_n, G_n)$ *est le nombre de valeurs propres dans* I_n *(*$N(I_n, G_n) \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$*), et* $\overline{a_n} = \frac{1}{n}\sum_{x\in V_n} a_n(x)$.

Remarquons que $\langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)} \rangle = \sum_{x\in V_n} a_n(x)|\psi_j^{(n)}(x)|^2$. On peut énoncer une version probabiliste de ce théorème.

Corollaire. *On choisit aléatoirement* $G_n = (V_n, E_n)$ *uniformément parmi les graphes* $(q+1)$*-réguliers tels que* $V_n = \{1, \ldots, n\}$. *On choisit aléatoirement* j *uniformément dans* $\{1, \ldots, N(I_n, G_n)\}$. *Soit* $a_n : V_n = \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une suite de fonctions uniformément bornées.*

Pour tout $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left| \langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)} \rangle - \overline{a_n} \right| \geq \epsilon \right) \longrightarrow 0$$

quand $n \to +\infty$, *avec* $\overline{a_n} = \frac{1}{n}\sum_{x\in V_n} a_n(x)$.

Table des matières

Chapitre 1

Ergodicité quantique sur les variétés

La démonstration du théorème d'ergodicité quantique sur les graphes réguliers du chapitre 5, ainsi que la construction du calcul pseudo-différentiel dans le chapitre 4 s'inspirent du cas des variétés. Bien que cela ne soit pas un prérequis, il est donc utile d'avoir à l'esprit ce dernier cas. Nous allons présenter brièvement des éléments de cette théorie, ainsi que les idées de la preuve du théorème d'ergodicité quantique sur les variétés dans une version semi-classique. [1] Nous considérons comme connues les notions de base de géométrie différentielle et symplectique. On peut se reporter aux chapitres 2 et 14 de [52] pour un résumé de ces notions.

La preuve du théorème d'ergodicité quantique repose sur l'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels. Elle se base comme on l'a vu dans l'introduction sur l'étude des distributions $a \mapsto \langle \psi, \mathrm{Op}(a)\psi \rangle$. Ces distributions permettent de travailler dans l'espace des phases et de faire intervenir le flot géodésique. Elles nous donnent des renseignements sur la fonction ψ mais aussi sur sa transformée de Fourier, permettant d'étudier à la fois les propriétés spatiale et les oscillations. Le principe d'incertitude empêchant de localiser à la fois une fonction et sa transformée de Fourier, ce que nous allons faire est valable asymptotiquement, dans la limite dite *semi-classique*.

1.1 Opérateurs pseudo-différentiels

Nous présentons la théorie des opérateurs pseudo-différentiels dans sa version semi-classique, dépendant d'un petit paramètre $h > 0$. La théorie des opérateurs pseudo-différentiels est bien plus riche que ce que nous montrons ici. Pour une introduction plus complète, on peut consulter [52] ou [13] pour le point de vue semi-classique, et [1] pour la version sans petit paramètre h.

On se place pour commencer sur $\mathbb{R}^n$. Il existe plusieurs façons de définir l'opérateur $\mathrm{Op}(a)$, appelées *quantifications* en référence au processus qui permet en mécanique quantique d'associer un opérateur à une fonction sur l'espace des phases (une observable classique). Nous choisissons de privilégier la *quantification à gauche* par simplicité et car

1. Un traitement complet est disponible dans [52].

c'est l'analogue direct de la quantification que nous définissons sur les graphes dans les chapitres suivants.

Le point de départ est la transformée de Fourier semi-classique. Rappelons la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions à décroissance rapide :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| < +\infty \right\}.$$

On définit pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la transformée de Fourier semi-classique pour tout $h > 0$ par la formule

$$\mathcal{F}_h u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi h)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h}\xi \cdot x} u(x) dx.$$

C'est une bijection $\mathcal{F}_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

À une fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ à support compact sur l'espace des phases, on associe l'opérateur $\mathrm{Op}_h(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la formule

$$\mathrm{Op}_h(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{i}{h}\xi \cdot (x-y)} a(x,\xi) u(y) dy d\xi,$$

pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On peut remarquer que

$$\mathrm{Op}_h(a)u(x) = \mathcal{F}_h^{-1}(a(x,\cdot)\mathcal{F}_h u(\cdot)).$$

Exemple 1.1.1.
- Si $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ne dépend que de x, alors $\mathrm{Op}(a)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $a(x)$.
- La formule donnant $\mathrm{Op}(a)$ a encore un sens pour $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha$ un polynôme d'ordre m. On obtient alors l'opérateur différentiel

$$\mathrm{Op}(a) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x)(-ih\partial_x)^\alpha.$$

Comme nous le voyons dans le dernier exemple les opérateurs $\mathrm{Op}(a)$ peuvent être définis pour des fonctions a plus générales que des fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Une telle fonction est appelée *symbole* de l'opérateur. Donnons un exemple courant de classes de symboles à partir desquelles on définira les opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 1.1.1. On définit $S^m = S^m(\mathbb{R}^n)$ comme étant l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Un élément $a \in S^m$ est appelé *symbole d'ordre m*.

On peut définir une topologie sur S^m qui en fait un espace de Fréchet à l'aide de la famille de semi-normes

$$|a|_{\alpha,\beta}^m = \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-(m-|\beta|)} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Bien que nous ne le faisions pas apparaître en général, on autorise les symboles à dépendre de h. On écrira que $a = O_{S^m}(h^k)$ si $a \in S^m$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ tel que

$$|a|^m_{\alpha,\beta} \leq Ch^k.$$

On note $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des opérateurs $\mathrm{Op}_h(a)$ pour $a \in S^m$. Un élément de $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$ est appelé *opérateurs pseudo-différentiels d'ordre* m. On note aussi $\Psi^{-\infty} = \cap_{m\in\mathbb{Z}}\Psi^m$. Un opérateur différentiel d'ordre m est un cas particulier d'opérateur pseudo-différentiel appartenant à Ψ^m.

On dira qu'un opérateur pseudo-différentiel est *négligeable* s'il est associé à un symbole $O_{S^{-\infty}}(h^\infty)$. [2] En ce qui nous concerne, cela se justifie par le fait que si un opérateur pseudo-différentiel $\mathrm{Op}_h(a)$ est négligeable, les quantités $\langle \psi, \mathrm{Op}(a)\psi \rangle$ que nous étudierons seront alors des $O(h^\infty)$.

Autres quantifications Signalons deux autres types de quantifications sur lesquelles nous ne reviendrons pas, mais qui présentent des propriétés intéressantes.

La *quantification de Weyl*, définie par la formule

$$\mathrm{Op}_h^W(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{i}{h}\xi\cdot(x-y)} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)dyd\xi,$$

présente l'avantage d'associer à un symbole réel un opérateur formellement auto-adjoint.

La *quantification anti-Wick*, ou quantification par les états cohérents, a la particularité d'être une quantification *positive*, associant un opérateur positif à un symbole positif. On définit d'abord un *état cohérent* centré en (x_0, ξ_0) comme étant la fonction (normalisée)

$$e_{x_0,\xi_0}(x) = \frac{1}{(\pi h)^{n/4}} e^{\frac{i}{h}\xi_0\cdot x} \exp\left(-\frac{\|x - x_0\|^2}{2h}\right).$$

Pour tout $a \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on définit alors

$$\mathrm{Op}^+(a) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int a(x,\xi)\Pi_{x,\xi} dxd\xi, \tag{1.1.1}$$

où $\Pi_{x,\xi}$ est l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathbb{C}e_{x,\xi}$. Cette quantification a l'avantage d'associer aux formes linéaires du type $a \mapsto \langle \psi, \mathrm{Op}^+(a)\psi \rangle$ des mesures au sens strict. Ce point de vue est important pour certains aspects de la théorie sur les variétés, et le développement d'une telle quantification sur les graphes est un problème ouvert que nous pensons intéressant d'étudier.

Opérateurs sur les variétés compactes Soit (X, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. On peut remplacer $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par le fibré cotangent T^*X dans la définition de la classe de symboles $S^m(\mathbb{R}^n)$ pour définir une classe $S^m(X)$. On note alors

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que $O(h^\infty) \leq Ch^N$.

(U_i) un recouvrement fini d'ouverts de X, et (U_i, ϕ_i) un atlas associé qui se relève sur le fibré cotangent en (T^*U_i, Φ_i). Soit $\chi_i \in C_o^\infty(U_i)$ une partition de l'unité sur X telle que $\sum_i \chi_i^2 = 1$. Pour tout symbole $a \in S^m(X)$, on définit l'*opérateur pseudo-différentiel d'ordre m* associé par la formule :

$$\mathrm{Op}_X(a)u(x) = \sum_i \chi_i[\mathrm{Op}(a \circ \Phi_i^{-1})((\chi_i u) \circ \phi_i^{-1})] \circ \phi_i.$$

On notera simplement $\mathrm{Op}(a) = \mathrm{Op}_X(a)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Bien que la définition dépende de la partition de l'unité choisie, la différence entre deux opérateurs définis par une partition de l'unité différente est négligeable dans la limite $h \to 0$.

1.2 Règles de calcul symbolique et continuité L^2

Dans cette section et les suivantes, (X, g) est une variété riemannienne compacte. Le calcul symbolique semi-classique consiste à remplacer les opérations faites sur les opérateurs par des opérations sur les symboles, à un reste près, petit dans la limite $h \to 0$.

Nous nous intéressons à la taille de ces restes en norme L^2, on utilise pour cela le théorème suivant [3]

Théorème 1.2.1 (Calderon-Vaillancourt)**.** *Soit $a \in S^0(X)$ un symbole d'ordre 0. L'opérateur pseudo-différentiel $\mathrm{Op}(a)$ associé se prolonge en un opérateur borné de $L^2(X)$ dans $L^2(X)$.*

En ce qui concerne le produit d'opérateurs pseudo-différentiels on a le théorème suivant.

Théorème 1.2.2 (Produit et commutateur)**.** *Si $a \in S^{m_1}$ et $b \in S^{m_2}$, alors il existe un symbole noté $a\#b \in S^{m_1+m_2}$ tel que $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(a\#b)$ et*

$$a\#b - ab = O_{S^{m_1+m_2-1}}(h).$$

Par ailleurs il existe un symbole $c \in S^{m_1+m_2-2}$ tel que $[\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(b)] = \mathrm{Op}(c)$ et

$$c - \frac{h}{i}\{a, b\} = O_{S^{m_1+m_2-2}}(h^2),$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ est le crochet de Poisson.

En utilisant le théorème de Calderon-Vaillancourt on en déduit par exemple que si $a, b \in S^0$, alors

$$\| \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(ab)\|_{L^2\to L^2} = O(h),$$

et

$$\left\| [\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(b)] - \mathrm{Op}\left(\frac{h}{i}\{a, b\}\right) \right\|_{L^2\to L^2} = O(h^2), .$$

Pour l'adjoint formel d'un opérateur pseudo-différentiel, on a

3. Nous renvoyons à [52] pour les démonstrations des résultats de cette section.

Théorème 1.2.3 (Adjoint). *Si $a \in S^m$, alors il existe $c \in S^m$ tel que formellement* $\mathrm{Op}(c)$ *soit l'adjoint de* $\mathrm{Op}(a)$, *et*

$$c - \overline{a} = O_{S^{m-1}}(h).$$

En particulier si $a \in S^0$, alors

$$\| \mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a})\|_{L^2 \to L^2} = O(h),$$

où l'on a noté $\mathrm{Op}(a)^* := \mathrm{Op}(c)$.

1.3 Théorèmes de Weyl et d'Egorov

On trouve la première démonstration du théorème d'ergodicité quantique dans sa version semi-classique dans [25]. Nous nous limitons au cas particulier du laplacien mais ce dernier peut être remplacé par un opérateur hamiltonien plus général. Pour la démonstration des théorèmes qui suivent dans ce cadre semi-classique plus général, on peut se reporter à [25] ou à [52]. Pour une version non semi-classique, on peut consulter [10], qui généralise la première démonstration de Zelditch ([50]).

On se place sur la variété riemannienne compacte (X, g) de dimension n, et on étudie le problème suivant associé au laplacien Δ_g, dans la limite $h \to 0$:

$$-h^2 \Delta_g \psi_j = E_j \psi_j$$

où $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la suite de valeurs propres de $-h^2\Delta_g$ ($E_0 = 0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots$, et $E_j \to +\infty$ quand $j \to +\infty$), et $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(X)$ de fonctions propres correspondantes. [4]

On note $d\mu_r$ la mesure de Liouville sur la *couche d'énergie*

$$\Sigma_r = \{(x, \xi) \in T^*X \mid |\xi|_g^2 = r\}$$

issue de la désintégration de la mesure de volume symplectique $dxd\xi$ sur T^*X. Si on note $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{S}^n$ un élément d'une fibre de T^*X, en coordonnées locales on a simplement $d\mu_r(x, \theta) = r^{n-1} dx d\sigma(\theta)$, où σ est la mesure de Lebesgue sur la sphère unité $\mathbb{S}^n$.

Un élément important de la démonstration du théorème d'ergodicité quantique est le théorème de Weyl, qui nous donne une convergence en moyenne (convergence de Cesàro) des quantités du type $\langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle$.

Théorème 1.3.1 (Théorème de Weyl). *Soit $a \in S^0(X)$, alors pour tout $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$*

$$(2\pi h)^n \sum_{E_j \in [s_0, s_1]} \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle \longrightarrow \int_{\{s_0 \leq |\xi|^2 \leq s_1\}} a \, dxd\xi$$

quand $h \to 0$.

4. Remarquons que l'étude de la limite $h \to 0$ est équivalente à l'étude de la limite $\lambda_j \to +\infty$ de l'introduction, où $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la suite de valeurs propres de Δ_g et $E_j = h^2\lambda_j$.

Démonstration. Donnons l'idée principale de la preuve, en supposant que $a \in S^{-\infty}$ pour simplifier. Dans ce cas $\mathrm{Op}(a)$ est un opérateur à trace et on peut exprimer cette trace à partir de la somme spectrale

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j \rangle$$

d'une part, et d'une intégrale du symbole (c'est l'intégrale du noyau de $\mathrm{Op}(a)$ sur la diagonale)

$$\frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{T^*X} a(x,\xi)dxd\xi.$$

Il s'agit alors de localiser dans l'intervalle $E_j \in [s_0, s_1]$ à l'aide d'opérateurs de projection. □

L'autre ingrédient fondamental est le théorème suivant, qui permet de faire le lien avec le flot géodésique.

Théorème 1.3.2 (Théorème d'Egorov)**.** *On définit l'opérateur* $U(t) = e^{-i\frac{t}{h}\Delta_g}$. *Soit* $a \in S^{-\infty}(X)$. *Alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\|U(-t)\,\mathrm{Op}(a)U(t) - \mathrm{Op}(a\circ\phi_t)\|_{L^2\to L^2} = O_t(h),$$

où ϕ_t *est le flot géodésique sur* T^*X.

Démonstration. La preuve repose sur l'utilisation de la formule du commutateur (voir section 1.2). Soit $a \in S^{-\infty}(X)$. Notons $a_t = a\circ\phi_t$, avec ϕ_t le flot géodésique. On a alors la relation (admise)

$$\partial_t a_t = \{p, a_t\},$$

avec $p(x,\xi) = |\xi|_g^2$, le symbole de Δ_g.

On a par ailleurs

$$\partial_s(U(t-s)\,\mathrm{Op}(a_s)U(s-t)) = U(t-s)\left(\partial_s\,\mathrm{Op}(a_s) - \frac{i}{h}[\Delta_g, \mathrm{Op}(a_s)]\right)U(s-t)$$

et d'après la formule du commutateur

$$\begin{aligned}\frac{i}{h}[\Delta_g, \mathrm{Op}(a_s)] &= \mathrm{Op}(\{p, a_s\}) + O_{L^2}(h)\\ &= \partial_s\,\mathrm{Op}(a_s) + O_{L^2}(h)\end{aligned}$$

donc

$$\partial_s(U(t-s)\,\mathrm{Op}(a_s)U(s-t)) = O_{L^2}(h)$$

et en intégrant par rapport à s entre 0 et t on obtient

$$\mathrm{Op}(a_t) - U(t)\,\mathrm{Op}(a)U(-t) = O_{L^2}(h),$$

avec un reste $O_{L^2}(h)$ dépendant de t.

□

1.4 Preuve du théorème d'ergodicité quantique

Notre but est de donner l'idée de la preuve du théorème suivante

Théorème 1.4.1. *Soit* (X, g) *une variété riemannienne compacte telle que le flot géodésique* ϕ_t *soit ergodique par rapport à la mesure de Liouville* $d\mu_1$ *sur* S^*X*. On note* $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une base hilbertienne de fonctions propres de* $-h^2\Delta_g$ *et* $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *la suite croissante de valeurs propres correspondantes. Alors pour tout* $s_0 < s_1$ *et pour tout* $a \in S^0(T^*X)$ *homogène de degré* 0*, on a*

$$(2\pi h)^n \sum_{E_j\in[s_0,s_1]} \left| \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle - \frac{1}{\mathrm{Vol}(S^*X)} \int_{S^*X} a\, d\mu_1 \right|^2 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque. *Pour retrouver le théorème énoncé dans l'introduction, il suffit de prendre* $s_0 = 0$*,* $s_1 = 1$*, et* $h = 1/\sqrt{\lambda}$*. On a aussi* $E_j = h^2\lambda_j$*. Grâce au théorème de Weyl (théorème 1.3.1) appliqué à un symbole a constant égal à* 1*, on trouve que le nombre* $N(\lambda)$ *de valeurs propres inférieures à* λ *vérifie* $\lim_{h\to 0} \frac{N(\lambda)}{(2\pi h)^n} = c$ *pour une certaine constante c. On a donc bien*

$$\frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j\le\lambda} \left| \langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle - \frac{1}{\mathrm{Vol}(S^*X)} \int_{S^*X} a\, d\mu_1 \right|^2 \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. On va montrer le résultat équivalent suivant : si b est homogène de degré 0 et si $\int_{S^*X} b\, d\mu_1 = 0$, on a

$$(2\pi h)^n \sum_{E_j\in[s_0,s_1]} |\langle \psi_j, \mathrm{Op}(b)\psi_j\rangle|^2 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

On peut montrer qu'il suffit de prendre $b \in S^{-\infty}$, ce que nous admettrons, et qui permet d'appliquer le théorème d'Egorov. On fixe d'abord $T > 0$. En utilisant le fait que l'opérateur $U(t)$ est unitaire dans le théorème d'Egorov, on obtient

$$\langle \psi_j, \mathrm{Op}(b)\psi_j\rangle = \langle \psi_j, \mathrm{Op}(b^T)\psi_j\rangle + O_T(h)$$

avec

$$b^T = \frac{1}{T}\int_0^T b\circ\phi_t dt.$$

Par ailleurs, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \psi_j, \mathrm{Op}(b^T)\psi_j\rangle|^2 \le \|\mathrm{Op}(b^T)\|_{L^2}^2 \le \langle \psi_j, \mathrm{Op}(b^T)^*\mathrm{Op}(b^T)\psi_j\rangle$$

et par les formules de l'adjoint et du produit

$$\langle \psi_j, \mathrm{Op}(b^T)^*\mathrm{Op}(b^T)\psi_j\rangle = \langle \psi_j, \mathrm{Op}(|b^T|^2)\psi_j\rangle + O(h).$$

On a donc par le théorème de Weyl (théorème 1.3.1), à T fixé

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to 0}&\left((2\pi h)^n \sum_{E_j\in[s_0,s_1]} |\langle\psi_j, \mathrm{Op}(b)\psi_j\rangle|^2\right)\\
&\leq \limsup_{h\to 0}\left((2\pi h)^n \sum_{E_j\in[s_0,s_1]} \langle\psi_j, \mathrm{Op}(|b^T|^2)\psi_j\rangle\right)\\
&\leq \int_{s_0}^{s_1}\int_{\Sigma_r} |b^T|^2 d\mu_r dr.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'hypothèse d'ergodicité du flot géodésique. Les mesures μ_r sont invariantes par le flot géodésique ϕ_t, qui préserve les couches d'énergie Σ_r. L'ergodicité implique en plus par le théorème de Birkhoff que pour presque tout $(x,\xi)\in\Sigma_r$,

$$b^T(x,\xi) = \frac{1}{T}\int_0^T b\circ\phi_t(x,\xi)\,dt \to \int_{\Sigma_r} b\,d\mu_r$$

quand $T\to+\infty$. Remarquons que l'homogénéité de a entraîne que la fonction $r\mapsto \frac{1}{\mu_r(\Sigma_r)}\int_{\Sigma_r} a d\mu_r$ est constante, et comme on a fait l'hypothèse que $\int_{S^*X} b\,d\mu_1 = 0$, elle est nulle. On a donc $\lim_{T\to+\infty} b^T(x,\xi) = 0$ presque partout.

Ainsi en faisant tendre T vers l'infini, on obtient

$$\lim_{h\to 0}\left((2\pi h)^n \sum_{E_j\in[s_0,s_1]} |\langle\psi_j, \mathrm{Op}(b)\psi_j\rangle|^2\right) = 0.$$

□

Chapitre 2

Graphes réguliers

Dans ce chapitre sont regroupées quelques définitions et résultats concernant les graphes réguliers et l'analyse harmonique sur les arbres réguliers, nécessaires pour le chapitre suivant. Pour plus de détails sur les arbres réguliers et leurs groupes d'automorphismes, on peut consulter le premier chapitre de [21]. Pour les résultats concernant la transformée de Fourier-Helgason, on peut se reporter à [11] et [12].

2.1 Définitions

Un *graphe* $G = (V, E, \mathcal{I})$ est la donnée d'un ensemble de *sommets* V, d'un ensemble d'*arêtes* E ainsi que d'une relation d'incidence $\mathcal{I} \subset V \times E$. Si $(x, e) \in \mathcal{I}$, alors on dit que x est incident à e et que e est incidente à x. Chaque arête est incidente à un seul (dans ce cas l'arête est une *boucle*) ou bien à deux sommets. Deux sommets incidents à une même arête sont dits *adjacents*, ou *voisins*.

La définition précédente autorise les arêtes multiples entre deux sommets ainsi que les boucles. Tout ce que nous allons faire s'applique à ces graphes généraux. Mentionnons cependant qu'on appelle aussi souvent graphe un *graphe simple* qui est un graphe dans lequel les boucles et les arêtes multiples ne sont pas autorisées. Dans ce cas, l'ensemble des arêtes s'identifie à un ensemble de couples de sommets.

Un *isomorphisme de graphes* entre deux graphes $G_1 = (V_1, E_1, \mathcal{I}_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2, \mathcal{I}_2)$ est une bijection $f : V_1 \longrightarrow V_2$ qui préserve les relations d'incidence.

Un *chemin* est une suite de sommets $(x_0, \ldots, x_{n+1})$ et d'arêtes $(e_0, \ldots, x_n)$ associée telles que x_i et x_{i+1} sont adjacents et incidents à e_i pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Si $x_0 = x_{n+1}$ on dit que le chemin est *fermé*. Si les sommets et les arêtes sont tous distincts, à l'exception peut-être de x_0 et x_{n+1}, on dira que le chemin est une *chaîne*. On appelle *cycle*, ou *circuit*, une chaîne fermée.

Un *arbre* est un graphe simple, connexe et sans cycles.

Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. On s'intéressera ici uniquement aux graphes réguliers. Pour tout entier $k \geq 1$, on dit qu'un graphe G

est k-régulier si chaque sommet a pour degré k. On dira que k est le *degré* de G. Les graphes réguliers peuvent être vus comme des quotients d'*arbres réguliers* (aussi appelés *arbres homogènes*), et nous allons donc nous intéresser particulièrement à ces derniers. Pour un entier $q \geq 2$, on notera $\mathfrak{X}$ l'arbre $(q+1)$-régulier (unique à isomorphisme près). Le choix d'exprimer le degré de cette façon simplifie les formules d'analyse harmonique que nous utiliserons par la suite.

Une chaîne infinie de la forme $(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ sera appelée *géodésique* sur $\mathfrak{X}$. On appellera demi-géodésique partant de x_0 une chaîne de la forme $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. On définit aussi un *segment géodésique* entre x et y, noté $[x, y]$, comme étant l'unique chaîne sur l'arbre $\mathfrak{X}$ reliant x et y.

On peut définir une distance d_G sur les sommets d'un graphe connexe G. La distance entre deux sommets x, y est le nombre d'arêtes minimal reliant x et y.

2.2 Analyse harmonique sur les arbres réguliers

Soit $\mathfrak{X}$ l'arbre $q+1$-régulier. On fixe un point de référence (ou origine de l'arbre) $o \in \mathfrak{X}$.

On note Ω la *frontière* de l'arbre. C'est l'ensemble des classes d'équivalence de demi-géodésiques infinies de $\mathfrak{X}$ pour la relation : deux demi-géodésiques $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ sont équivalentes si et seulement si $\exists k, N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N$, $x_{n+k} = y_n$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on notera $[x, \omega)$ l'unique demi-géodésique partant de x et équivalente à ω.

La frontière Ω s'identifie aussi à l'ensemble des demi-géodésiques partant de l'origine o.

On définit les fonctions de hauteur $h_\omega : \mathfrak{X} \to \mathbb{Z}$ (analogues des fonctions de Busemann) pour tout $\omega = (x_0, x_1, \ldots)$ dans Ω avec $x_0 = o$ par

$$h_\omega(x) = \lim_{m \to +\infty} (m - d(x, x_m)).$$

Ces fonctions sont normalisées de sorte que $h_\omega(o) = 0$. Les *horocycles* en ω sont alors les ensembles de niveau de h_ω : pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathfrak{h}(\omega, k) = \{x \in \mathfrak{X} : h_\omega(x) = k\}.$$

2.2.1 Transformée de Fourier-Helgason

On peut voir la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ comme une façon de décomposer les fonctions sur une base d'ondes planes $x \mapsto e^{ix\cdot\xi}$ indexées par ξ. Sur l'arbre $(q+1)$-régulier, on va décomposer sur une base d'ondes horocycliques (c'est-à-dire constantes sur les horocycles) $x \mapsto q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(x)}$ indexées par (ω, s).

Soit $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ une fonction à support fini. On définit la *transformée de Fourier-Helgason* de f, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{H}f$ par la formule

$$\mathcal{H}f(\omega, s) = \hat{f}(\omega, s) = \sum_{y \in T} f(y) q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(y)}$$

pour tous $\omega \in \Omega$ et $s \in \mathbb{T}$, avec $\mathbb{T} = \mathbb{Z}/2\tau\mathbb{Z}$, $\tau = \frac{\pi}{\ln q}$. On a une formule d'inversion

$$f(x) = \int_\Omega \int_\mathbb{T} q^{(\frac{1}{2}-is)h_\omega(x)} \hat{f}(\omega, s) d\nu(\omega) d\mu(s).$$

Pour tout $x \in \mathfrak{X}$ la mesure ν_x est la mesure harmonique sur Ω vu depuis x. On note $\nu = \nu_o$. La mesure $d\mu(s)$ est la *mesure de Plancherel*, dont l'expression exacte ne sera pas utilisée dans ces chapitres introductifs (voir la section 4.2 pour plus de détails).

On dispose d'une formule de Plancherel : si f et g sont deux fonctions de $\mathfrak{X}$ à support compact, alors

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} f(x)\overline{g(x)} = \int_\mathbb{T} \int_\Omega \hat{f}(\omega, s)\overline{\hat{g}(\omega, s)} d\nu(\omega) d\mu(s).$$

La transformée de Fourier-Helgason $\mathcal{H}$ peut donc se prolonger en une isométrie de $L^2(\mathfrak{X})$ sur son image, qui est l'espace des fonctions F de $L^2(\Omega \times \mathbb{T})$ vérifiant la *condition de symétrie* :

$$\int_\Omega q^{(\frac{1}{2}-is)h_\omega(x)} F(\omega, s) d\nu(\omega) = \int_\Omega q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(x)} F(\omega, -s) d\nu(\omega) \qquad (2.2.1)$$

2.2.2 Théorèmes de type Paley-Wiener

La démonstration des théorèmes de cette section est due à Cowling et Setti ([12]). Les espaces de fonctions qu'ils introduisent, ainsi que les liens entre régularité et décroissance sont à la base de notre choix de classe de symboles de la section 3.2.1.

Nous nous intéressons d'abord aux fonctions à support fini sur l'arbre.

Définition 2.2.1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $C_N(\mathfrak{X})$ l'ensemble des fonctions à support dans la boule centrée en o et de rayon N.

La régularité correspondante dans l'espace $\mathbb{T} \times \Omega$ va être donnée par la définition suivante.

Définition 2.2.2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $E_N(\mathbb{T} \times \Omega)$ comme étant l'ensemble des fonctions $F : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{T} \times \Omega$;
2. F se prolonge en une fonction entière 2τ-périodique, exponentielle de type N, uniformément en ω ; i.e. il existe $C > 0$ tel que

$$|F(\omega, z)| \leq C q^{N|\Im m(z)|} \qquad \forall \omega \in \Omega;$$

3. F vérifie la condition de symétrie (2.2.1) ;

4. F est une fonction N-cylindrique, i.e. si ω et ω' sont tels que les deux demi-géodésiques $[o,\omega) = (o, x_1, x_2, \ldots)$ et $[o,\omega') = (o, x'_1, x'_2, \ldots)$ vérifient $x_j = x'_j$ pour $0 \leq j \leq N$, alors $F(\omega, s) = F(\omega', s)$.

On a alors le théorème

Théorème 2.2.1. *[12] La transformée de Fourier-Helgason $\mathcal{H}$ est un isomorphisme de $C_N(\mathfrak{X})$ dans $E_N(\Omega \times \mathbb{T})$.*

Intéressons-nous maintenant à un espace analogue à l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide.

Définition 2.2.3. Une fonction $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ est dite à *décroissance rapide* si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq C_k \frac{q^{-\frac{|x|}{2}}}{(1+|x|)^k}.$$

On notera $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathfrak{X}$.

Notons que la géométrie de l'arbre est telle que contrairement à ce qui se passe dans le cas euclidien, ces fonctions ne sont pas dans L^p pour tout $p \in \mathbb{N}$. Elles sont dans L^2 mais elles ne sont pas dans L^1, et cela complique considérablement la preuve de la continuité sur L^2 des opérateurs associés aux symboles que nous définirons dans la section 3.2.1.

Voici maintenant la notion de régularité en (ω, s) correspondante. L'opérateur $\mathcal{E}_n$ est l'opérateur de projection sur l'espace des fonctions n-cylindriques (voir la section 4.2 pour une formule).

Définition 2.2.4. Une fonction $F : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est dans $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})$ si

1. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, $(\omega, s) \mapsto \partial_s^l F(\omega, s)$ est continue sur $\Omega \times \mathbb{T}$.
2. $\forall k, l \in \mathbb{N}, \exists C_{k,l} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \|\partial_s^k (F - \mathcal{E}_n F)\|_\infty \leq C_{k,l}(n+1)^{-l}$

On notera $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})^\flat$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})$ vérifiant la condition de symétrie (4.2.11).

On a alors le théorème

Théorème 2.2.2. *[12] La transformée de Fourier-Helgason $\mathcal{H}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ dans $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})^\flat$.*

Chapitre 3

Introduction à l'ergodicité quantique sur les graphes réguliers

Ce chapitre est un résumé détaillé des résultats de la thèse et une présentation de la démarche qui y a conduit. Il présente en particulier les nouveaux objets et outils que nous avons développés, les difficultés rencontrées et les pistes mises de côté bien que peut-être pertinentes. Il se termine par les grandes lignes de la preuve d'une version simplifiée du théorème d'ergodicité quantique sur les graphes réguliers, épurée des complications techniques mais faisant apparaître les principales idées.

Notre but est donc de montrer un théorème d'ergodicité quantique sur les graphes réguliers en s'inspirant du cas des variétés. Pour cela la première question est de savoir si l'on peut développer des outils analogues. L'outil principal de la démonstration du théorème d'ergodicité quantique est le calcul pseudo-différentiel. Celui-ci fournit une façon de quantifier des observables classiques, autrement dit de transformer des fonctions définies sur l'espace des phases en opérateurs. Une des premières questions qui se pose est : quel est l'espace des phases pertinent sur les graphes réguliers ? Une réponse est donnée de façon naturelle par l'analyse harmonique sur les arbres homogènes.

3.1 Espace des phases et dynamique

La transformée de Fourier permet habituellement en mécanique quantique de passer des variables d'espace aux variables d'impulsion. Sur l'arbre, par analogie avec le cas euclidien, la variable d'espace sera naturellement donnée par $x \in \mathfrak{X}$ et la variable d'impulsion par le couple $(\omega, s) \in \Omega \times [0, \tau]$. Nous proposons alors de définir l'espace des phases comme étant $\mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau]$. Un point de cet espace $(x, \omega, s) \in \mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau]$ peut s'écrire comme la donnée d'une trajectoire géodésique partant de x (en effet le couple (x, ω) définit une demi-géodésique partant de x), et d'un paramètre spectral s. La dynamique sur l'arbre est alors donnée par l'opérateur de décalage

$$\sigma : \mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau] \longrightarrow \mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau]$$

défini de la façon suivante : on écrit d'abord $(x, \omega, s) = (x, x_1, x_2, \ldots, s)$, et alors $\sigma(x, \omega, s) = \sigma(x, x_1, x_2, \ldots, s) = (x_1, x_2, \ldots, s) = (x_1, \omega, s)$.

Un graphe $(q+1)$-régulier G est un quotient de $\mathfrak{X}$ par un sous-groupe Γ d'automorphismes de l'arbre. Le groupe Γ agit sur les demi-géodésiques de l'arbre et donc sur $\mathfrak{X} \times \Omega$. Le quotient par cette action nous donne l'espace des phases sur le graphe G. C'est l'espace des chaînes infinies $(x_0, x_1, \ldots)$ sur le graphe. Cet espace tient lieu de fibré tangent unitaire dans le cas des graphes réguliers. La dynamique sur le graphe est alors donnée par le décalage σ, qui passe au quotient.

3.2 Calcul pseudo-différentiel

La première démonstration complète du théorème d'ergodicité quantique a été donnée par Zelditch dans le cas des surfaces hyperboliques. Il a utilisé pour cela un calcul pseudo-différentiel développé spécifiquement pour ces surfaces dans [49]. Le calcul que nous développons sur les graphes réguliers en est inspiré. Notre définition des opérateurs pseudo-différentiels sera l'exact analogue de la définition de Zelditch, basée sur la transformée de Fourier-Helgason.

3.2.1 Quantification et classes de symboles

On a le choix entre plusieurs quantifications équivalentes pour démontrer le théorème d'ergodicité quantique sur les variétés. Elles présentent en pratique des propriétés différentes qui facilitent différentes étapes de la preuve. Par analogie avec les travaux de Zelditch dans [49], nous avons introduit et étudié un type de quantification sur les arbres réguliers : la *quantification à gauche*. La définition et l'étude d'une quantification positive du type quantification par les états cohérents (1.1.1) sur les graphes est une question ouverte.

Pour un symbole $a(x, \omega, s)$, on définit

$$\mathrm{Op}(a)u(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x, \omega, s) u(y) d\mu(s) d\nu_x(\omega). \tag{3.2.1}$$

Un avantage important de la quantification choisie, est que le noyau d'un opérateur $\mathrm{Op}(a)$, donné par

$$k_a(x, y) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x, \omega, s) u(y) d\mu(s) d\nu_x(\omega),$$

apparaît comme une transformée de Fourier-Helgason inverse du symbole. En effet, si on fixe x et qu'on le prend comme nouveau point de référence sur l'arbre, ce noyau est la transformée de Fourier-Helgason inverse de la fonction $(\omega, s) \mapsto a(x, \omega, s)$. [1] Les théorèmes

1. Rappelons que la définition de la transformée de Fourier-Helgason sur l'arbre dépend du point de référence choisi. Par contre, il est explicite dans l'expression de nos opérateurs que ces derniers n'en dépendent pas.

du type Paley-Wiener de la section 2.2.2 donnent donc un lien entre la régularité du symbole a par rapport aux variables (ω, s) et la décroissance du noyau $k_a(x, y)$ en dehors de la diagonale. On met ainsi en relation les propriétés des opérateurs avec celles de leurs symboles, ce qui constitue une étape importante dans le développement d'un calcul symbolique.

Mettons de côté dans un premier temps la régularité par rapport à la variable x, par exemple en supposant que les conditions dont on parle sur les variables (ω, s) sont vérifiées uniformément en x. Pour avoir des opérateurs à support fini hors de la diagonale (opérateurs de rang fini) on peut demander à un symbole $a(x, \omega, s)$ de vérifier les conditions de la définition 2.2.2 en ω et s. Pour avoir des opérateurs à décroissance rapide hors de la diagonale, on peut utiliser la définition 2.2.4.

Un problème important se pose cependant. Afin d'avoir une classe satisfaisante d'opérateurs pseudo-différentiels, et de symboles associés, nous aimerions définir une classe de symboles qui forme une algèbre. Si l'on se sert des définitions 2.2.2 et 2.2.4, on doit demander aux symboles $a(x, \omega, s)$ de vérifier la condition de symétrie suivante :

$$\int_\Omega q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x, \omega, s) d\nu_x(\omega) = \int_\Omega q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x, \omega, -s) d\nu_x(\omega)$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathfrak{X}$. Mais cette condition n'est pas stable par produit et ne permet donc pas d'obtenir une algèbre de symboles.

Pour remédier à ce problème, remarquons d'abord que la transformée de Fourier-Helgason peut être vue comme une isométrie de $L^2(\mathfrak{X})$ dans $L^2(\Omega \times [0, \tau])$ (auparavant nous la voyions comme une isométrie de $L^2(\mathfrak{X})$ dans les fonctions de $L^2(\Omega \times [-\tau, \tau])$ vérifiant la condition de symétrie). Ainsi, le fait de prendre la variable s dans $[0, \tau]$ évite d'avoir à demander que la fonction $a(x, \omega, s)$ vérifie la condition de symétrie dans la définition (3.2.1). En revanche, les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 du type Paley-Wiener ne peuvent plus être utilisés directement dans ce cas. Nous n'avons pas trouvé de façon d'obtenir des opérateurs de rang fini à partir de symboles ne vérifiant pas de condition de symétrie, en se servant de conditions de régularité du type de celles de la définition 2.2.2. Par contre, l'examen de la preuve du théorème 2.2.2 dans [12] nous montre que cette condition n'est pas nécessaire pour montrer que la transformée inverse d'une fonction vérifiant les conditions de la définition 2.2.4 est à décroissance rapide. On peut en fait la remplacer par une autre condition stable par produit.

Nous proposons donc d'utiliser la classe de symboles suivante, qui a en plus la propriété importante pour nous d'être stable par l'action d'opérateurs liés à la dynamique sur l'arbre, comme la composition par le décalage $a \mapsto a \circ \sigma$. On a noté $\mathcal{E}_n^x$ l'opérateur de projection sur les fonctions n-cylindriques centrées en x, c'est à dire que $\mathcal{E}_n^x a(x, \omega, s)$ ne dépend que des n premières coordonnées de la demi-géodésique $[x, \omega)$.

Définition 3.2.1. Soit $S(\mathfrak{X})$ l'ensemble de fonctions $a : \mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau] \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\partial_s^k a(x, \omega, s) \in C(\mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau])$, et pour tout $l \in \mathbb{N}$ il existe une

constante C_l telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathfrak{X} \quad \|(a - \mathcal{E}_n^x a)(x, \cdot, \cdot)\|_\infty \le \frac{C_l}{(1+n)^l}.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathfrak{X}$ et $\omega \in \Omega$,

$$\partial_s^k a(x, \omega, 0) = \partial_s^k a(x, \omega, \tau) = 0.$$

La deuxième condition remplace la condition de symétrie et on obtient la propriété de décroissance rapide suivante par une adaptation de la preuve du théorème 2 de [12] que nous détaillons dans la section 4.4 :

Proposition 3.2.1. *Le noyau* $k_a(x, y)$ *de l'opérateur* $\mathrm{Op}(a)$ *associé à un symbole* $a \in S(\mathfrak{X})$ *vérifie : pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *il existe une constante* C_N *telle que*

$$|k_a(x, y)| \le C_N \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1 + d(x, y))^N}$$

pour tous $x, y \in \mathfrak{X}$.

3.2.2 Continuité L^2

Une des premières choses dont nous avons besoin est de pouvoir évaluer la norme d'opérateurs pseudo-différentiels. Nous allons voir que nos opérateurs son bornés sur L^2 et donner la dépendance de la borne par rapport au symbole.

Nous avons choisi une classe de symboles qui nous donne des noyaux à décroissance rapide hors de la diagonale. On pourrait penser que comme dans le cas euclidien pour des noyaux avec une telle régularité, on peut facilement prouver que de tels opérateurs sont bornés de $L^2(\mathfrak{X})$ dans $L^2(\mathfrak{X})$ en utilisant le lemme classique suivant :

Lemme 3.2.1 (Lemme de Schur)**.** *Soit* A *un opérateur sur l'arbre* $\mathfrak{X}$ *de noyau* $K(x, y)$. *Si il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\sup_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{y \in \mathfrak{X}} |K(x, y)| \le C \quad \text{et} \quad \sup_{y \in \mathfrak{X}} \sum_{x \in \mathfrak{X}} |K(x, y)| \le C$$

Alors $\|A\|_{L^2 \to L^2} \le C$.

Cela revient à demander que le noyau soit dans L^1 par rapport à chacune des variables, uniformément en l'autre variable. Comme nous l'avons déjà remarqué ce n'est pas le cas de nos noyaux. On peut envisager de demander encore plus de régularité aux symboles, de façon à ce que les conditions du lemme soient vérifiées. Une possibilité que nous avons explorée est de demander que les symboles soient prolongeables analytiquement en la variable s dans une bande du plan complexe, ce qui au passage rapproche de la régularité de la définition 2.2.2. Mais il s'avère finalement que nos opérateurs sont bien continus dans L^2 et qu'il n'est pas nécessaire de demander plus de régularité aux symboles, bien que la démonstration soit plus compliquée que la simple application du lemme précédent. Voici le premier théorème que nous montrons dans le chapitre 4.

Théorème 3.2.2. *L'opérateur* $\mathrm{Op}(a)$ *associé à un symbole* $a \in S(\mathfrak{X})$ *se prolonge en un opérateur borné de* $L^2(\mathfrak{X})$ *dans* $L^2(\mathfrak{X})$. *On a l'inégalité suivante : il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\| \mathrm{Op}(a)\|_2 \leq C \left(\|a\|_{\Omega,4} + \sum_{k=0}^{4} \|\partial_s^k a\|_\infty \right),$$

où

$$\|a\|_{\Omega,4} = \sup_{x\in\mathfrak{X}} \sup_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^4 \|(a - \mathcal{E}_n^x a)(x,\cdot,\cdot)\|_\infty .$$

3.2.3 Adjoint et produit

La preuve du théorème d'ergodicité quantique sur les variétés telle que nous l'avons présentée dans le chapitre 1 se sert aussi de formules de l'adjoint et du produit. Nous montrons dans le chapitre 4 les théorèmes suivants concernant les formules de l'adjoint et du produit pour nos opérateurs pseudo-différentiels. Signalons que nous n'aurons besoin dans la preuve du chapitre 5 que de cas particuliers bien plus simples.

Nous avons besoin d'introduire d'abord une classe plus restreinte de symboles que nous appellerons *semi-classiques* et pour lesquels on contrôle la variation en x par un petit paramètre $\epsilon > 0$.

Définition 3.2.2. Soit $\epsilon > 0$. On définit une classe de *symboles semi-classiques* $S_{sc}(\mathfrak{X})$ comme l'ensemble des fonctions $a_\epsilon \in S(\mathfrak{X})$ qui vérifient les conditions supplémentaires suivantes :

1. Il existe $C > 0$ tel que
$$\forall x, y \in \mathfrak{X}, \forall k \in \mathbb{N} \quad |\partial_s^k a_\epsilon(x,\omega,s) - \partial_s^k a_\epsilon(y,\omega,s)| \leq C\epsilon d(x,y),$$
2. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe une fonction positive $t \mapsto C_l(t)$ tel que pour tout $x, y \in \mathfrak{X}$ et $n \in \mathbb{N}$
$$|(a_\epsilon - \mathcal{E}_n^x a_\epsilon)(x,\omega,s) - (a_\epsilon - \mathcal{E}_n^x a_\epsilon)(y,\omega,s)| \leq \epsilon \frac{C_l(d(x,y))}{(1+n)^l}.$$

Du point de vue semi-classique, on s'intéresse à la limite $\epsilon \longrightarrow 0$. L'idée est de lier le paramètre ϵ à des caractéristiques d'un graphe, de sorte que quand la taille du graphe tend vers l'infini, ϵ tende vers 0 à une vitesse adaptée au problème que l'on considère.

La classe des *Opérateurs pseudo-différentiels* peut être définie comme l'ensemble des opérateurs $\mathrm{Op}(a)$ pour des symboles $a \in S(\mathfrak{X})$, modulo des opérateurs dits *négligeables*. On dira dans ce chapitre [2] qu'un opérateur R est *négligeable* si $\|R\|_{L^2\to L^2} \longrightarrow 0$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$.

Théorème 3.2.3. *Soit* $a = a_\epsilon \in S_{sc}$. *On note* $\mathrm{Op}(a)^*$ *l'adjoint de* $\mathrm{Op}(a)$. *Alors* $\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}^*(a)$ *est négligeable. On a*

$$\| \mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a})\|_{L^2\to L^2} = o_\epsilon(1).$$

2. Une définition plus forte est donnée dans le chapitre 4.

Théorème 3.2.4. *Soient $a \in S$ et $b = b_\epsilon \in S_{sc}$. Alors* $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(ab)$ *est négligeable. En particulier on a*

$$\| \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(ab)\|_{L^2 \to L^2} = o_\epsilon(1).$$

Pour avoir ces formules de l'adjoint et du produit, nous avons donc été conduits à demander plus de régularité aux symboles en la variable x.[3] Nous avons cependant cherché à éviter de demander une telle régularité en x dans le théorème d'ergodicité quantique sur les graphes du chapitre 5, et notre démonstration contourne donc l'utilisation de ces formules.

3.3 De l'arbre aux graphes

Nous avons développé un outil sur l'arbre, mais pour l'utiliser sur des suites de graphes il faut passer au quotient. Ce passage au quotient présente des difficultés que nous allons détailler.

Précisons déjà la situation dans laquelle nous allons nous placer. Pour simplifier, dans cette introduction nous allons considérer des suites $G_n = (V_n, E_n)$ de graphes $(q+1)$-réguliers connexes dont le rayon d'injectivité tend vers l'infini. Cette hypothèse plus forte que celle que nous faisons dans la démonstration complète du chapitre 5 nous permettra d'éliminer quelques complications techniques tout en gardant les idées principales de la preuve. Chaque G_n est vu comme un quotient de l'arbre $\mathfrak{X}$ par un groupe d'automorphismes Γ_n : $G_n = \Gamma_n \backslash \mathfrak{X}$. On notera D_n un sous-arbre de $\mathfrak{X}$ constituant un domaine fondamental pour l'action de Γ_n sur les sommets.

Commençons par quelques considérations algébriques. On se place sur un graphe régulier $G = \Gamma \setminus \mathfrak{X}$. On note π la projection canonique.

$$\pi : \mathfrak{X} \to \Gamma \setminus \mathfrak{X}$$

Soient $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{L}(G)$ les algèbres d'opérateurs linéaires agissant respectivement sur les fonctions de $\mathfrak{X}$ et de G. On note $\mathcal{F}_\Gamma(\mathfrak{X})$ l'ensemble des fonctions invariantes par l'action $T_\gamma g(x) = g(\gamma \cdot x)$ du groupe Γ sur les fonctions de l'arbre. On définit alors $\mathcal{L}_\Gamma(\mathfrak{X})$ comme l'ensemble des opérateurs agissant sur $\mathcal{F}_\Gamma(\mathfrak{X})$, invariants par l'action de Γ. Plus précisément, l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ est invariant par Γ si

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad A \circ T_\gamma = T_\gamma \circ A.$$

La condition correspondante sur le noyau $k_A(x,y)$ de A est donnée par

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad k_A(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = k_A(x,y).$$

On vérifie immédiatement que $\mathcal{L}_\Gamma(\mathfrak{X})$ est une algèbre.

3. Remarquons cependant que dans la formule du produit seul un des deux symboles doit être plus régulier.

On peut alors associer à tout opérateur de l'arbre invariant par Γ un opérateur du graphe. Pour tout $A \in \mathcal{L}_\Gamma(\mathfrak{X})$, on définit l'opérateur $\Phi(A)$ sur le graphe ainsi. Soit $f : G \to \mathbb{C}$. On relève cette fonction en une fonction sur l'arbre $\tilde{f} = f \circ \pi$, qui est invariante par l'action de Γ. La fonction $(A\tilde{f})(x)$ est aussi invariante par Γ. En effet

$$A\tilde{f}(\gamma \cdot x) = (T_\gamma \circ A)\tilde{f}(x) = (A \circ T_\gamma)\tilde{f}(x) = A\tilde{f}(x).$$

Elle passe donc au quotient en une fonction $\Phi(A)(f)$ sur le graphe. On a défini une application

$$\Phi : \mathcal{L}_\Gamma(\mathfrak{X}) \to \mathcal{L}(G)$$

qui est en fait un isomorphisme d'algèbres. Étudier les opérateurs sur le graphe $\Gamma \setminus \mathfrak{X}$ revient donc à étudier les opérateurs invariants par Γ sur l'arbre $\mathfrak{X}$.

On peut appliquer cette procédure aux opérateurs pseudo-différentiels $A = \mathrm{Op}(a)$ pour définir les opérateurs pseudo-différentiels sur G. On en déduit une condition d'invariance du symbole.

Proposition 3.3.1. *L'opérateur* $\mathrm{Op}(a)$ *est invariant par l'action de* Γ*, i.e.*

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad [\mathrm{Op}(a), T_\gamma] = 0$$

si et seulement si

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad a(\gamma \cdot x, \gamma \cdot \omega, s) = a(x, \omega, s).$$

Démonstration. C'est formellement la même démonstration que dans [49]. Soit $\gamma \in \Gamma$. On va utiliser d'une part la propriété

$$h_{\gamma\cdot\omega}(\gamma \cdot x) = h_\omega(x) + h_{\gamma\cdot\omega}(\gamma \cdot o)$$

et d'autre part

$$\frac{d\nu_o(\gamma^{-1} \cdot \omega)}{d\nu_o(\omega)} = q^{h_\omega(\gamma\cdot o)}$$

qui va servir au changement de variable.

$$\begin{aligned}
&k_a(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) \\
&= \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(\gamma\cdot x)-h_\omega(\gamma\cdot y))} a(\gamma \cdot x, \omega, s) d\nu_{\gamma\cdot y}(\omega) d\mu(s) \\
&= \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}-is)(h_{\gamma^{-1}\cdot\omega}(x)-h_{\gamma^{-1}\cdot\omega}(y))} a(\gamma \cdot x, \omega, s) q^{h_\omega(\gamma\cdot y)} d\nu_o(\omega) d\mu(s) \\
&= \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}-is)(h_{\gamma^{-1}\cdot\omega}(x)-h_{\gamma^{-1}\cdot\omega}(y))} a(\gamma \cdot x, \omega, s) q^{h_{\gamma^{-1}\cdot\omega}(y)} q^{h_\omega(\gamma\cdot o)} d\nu_o(\omega) d\mu(s) \\
&= \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(x)-h_\omega(y))} a(\gamma \cdot x, \gamma \cdot \omega, s) q^{h_\omega(y)} d\nu_o(\omega) d\mu(s) \\
&= \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(x)-h_\omega(y))} a(\gamma \cdot x, \gamma \cdot \omega, s) d\nu_y(\omega) d\mu(s)
\end{aligned}$$

On en déduit par injectivité de la transformée de Fourier-Helgason que $k_a(\gamma\cdot x, \gamma\cdot y) = k_a(x, y)$ si et seulement si $a(\gamma \cdot x, \gamma \cdot \omega, s) = a(x, \omega, s)$. □

Travailler sur le graphe revient donc à travailler avec des fonctions et des opérateurs Γ-invariants sur l'arbre. En ce qui concerne les noyaux, si $k(x,y)$ est le noyau sur l'arbre d'un opérateur Γ-invariant A, et si f est une fonction Γ-invariante sur $\mathfrak{X}$, alors

$$Af(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} k(x,y)f(y) = \sum_{y\in D}\sum_{\gamma\in\Gamma} k(x,\gamma\cdot y)f(y),$$

où D est un domaine fondamental de G sur $\mathfrak{X}$. Ainsi on peut définir un noyau bi-invariant $k_G(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(x,\gamma\cdot y)$ associé à un opérateur sur le graphe, tel que si f est une fonction sur le graphe que l'on identifie à la fonction Γ-invariante associée sur l'arbre, et D un domaine fondamental, on a

$$Af(x) = \sum_{y\in D} k_G(x,y)f(y).$$

Le raisonnement que nous avons fait jusqu'à présent est formel. En effet rien ne dit *a priori* que pour les opérateurs qui nous intéressent, la somme $\sum_{\gamma\in\Gamma} k(x,\gamma\cdot y)$ converge. Pour s'assurer que nos opérateurs pseudo-différentiels sur les graphes sont bien définis, nous proposons de tronquer les noyaux en dehors de la diagonale. Par définition, nous dirons que l'opérateur $\mathrm{Op}_G(a)$ associé au symbole Γ-invariant a est donné par le noyau

$$k_G(x,y;a) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k_{\mathfrak{X}}(x,\gamma\cdot y;a)\chi\left(\frac{d(x,\gamma\cdot y)}{r}\right),$$

où $k_{\mathfrak{X}}(x,y;a) = k_a(x,y)$ est le noyau de l'opérateur associé à a sur l'arbre, r est un paramètre de troncature, χ est une fonction de troncature C^∞ à support dans $[-1,1]$ et constante égale à 1 sur $[-1/2,1/2]$.

Nous choisissons le paramètre r de sorte qu'il soit inférieur au rayon d'injectivité du graphe. Comme on s'intéresse à des suites de graphes dont la taille et le rayon d'injectivité tendent vers l'infini, l'idée est que ce paramètre tende aussi vers l'infini, et que les opérateurs ainsi définis aient des propriétés similaires aux opérateurs correspondants sur l'arbre, à un reste près tendant vers 0 (le caractère négligeable du reste provenant de la décroissance rapide des noyaux).

Mais pour mesurer la taille des restes en comparant les opérateurs, il faut choisir une norme, la norme L^2 étant le choix le plus naturel dans notre cas. L'espace des fonctions sur G étant un espace vectoriel de dimension fini, les opérateurs agissant sur cet espace sont bornés en norme L^2, mais la borne peut dépendre *a priori* de la taille du graphe. Comme nous avons déjà vu que nos opérateurs sont bornés en norme L^2 sur l'arbre, on peut penser mettre en relation la norme L^2 des opérateurs sur les graphes avec la norme des opérateurs correspondants sur l'arbre. Dans l'idéal, on obtiendrait ainsi une norme L^2 sur le graphe indépendante de la taille du graphe. Malheureusement un raisonnement simple montre que la seule propriété de décroissance rapide des noyaux ne permet pas d'obtenir une telle propriété. En effet, sur un graphe G la fonction constante égale à 1 est dans $L^2(G)$. Considérons un noyau sur le graphe du type

$$k_G(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{q^{-\frac{d(x,\gamma\cdot y)}{2}}}{(1+d(x,\gamma\cdot y))^N}\chi\left(\frac{d(x,\gamma\cdot y)}{r}\right)$$

Alors la fonction constante égale à 1 est fonction propre sur $L^2(G)$ de l'opérateur associé, de valeur propre

$$\sum_{y\in\mathfrak{X}} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N}\chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right) \geq \frac{q+1}{q} \sum_{n\in\mathbb{N},n\leq r/2} \frac{q^{n/2}}{(1+n)^N}$$

et quelle que soit la façon dont r tend vers l'infini, cette valeur propre tend aussi vers l'infini.

On peut envisager de demander plus de régularité aux symboles pour éliminer cette difficulté, mais on risque de perdre un avantage important de la classe $S(\mathfrak{X})$, qui est la stabilité par l'action de l'opérateur $a \mapsto a\circ\sigma$ de composition par le décalage.

En fait la dépendance des normes par rapport à la taille du graphe ne sera pas un vrai problème car elle sera compensée dans les expressions qui nous intéressent. Nous allons même privilégier l'utilisation de la norme Hilbert-Schmidt qui est bien plus facile à manipuler que la norme L^2. Si le paramètre de troncature est de l'ordre du rayon d'injectivité, on a le lemme :

Lemme 3.3.1.

$$\|\mathrm{Op}_G(a)\|_{HS}^2 \leq \sum_{x\in D}\int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s),$$

où D est un domaine fondamental pour G.

Démonstration. Par définition

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Op}_G(a)\|_{HS}^2 &= \sum_{x,y\in D} |k_G(x,y;a)|^2\\ &= \sum_{x,y\in D}\left|\sum_{\gamma\in\Gamma} k_{\mathfrak{X}}(x,\gamma\cdot y;a)\chi\left(\frac{d(x,\gamma\cdot y)}{r}\right)\right|^2.\end{aligned}$$

Si r est inférieur au rayon d'injectivité, alors la somme sur $\gamma\in\Gamma$ se limite à un seul terme, et on a

$$\|\mathrm{Op}_G(a)\|_{HS}^2 \leq \sum_{x\in D}\sum_{y\in\mathfrak{X}} |k_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|^2.$$

On applique alors la formule de Plancherel pour la transformée de Fourier-Helgason, à la fonction $y\mapsto k_{\mathfrak{X}}(x,y;a)$. □

3.4 Loi de Kesten-McKay et Théorème d'Egorov

Rappelons que l'on s'intéresse à une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de graphes $(q+1)$-réguliers vus chacun comme un quotient $\Gamma_n\setminus\mathfrak{X}$, avec D_n un domaine fondamental sur $\mathfrak{X}$ pour l'action de Γ_n. Les opérateurs Op_{G_n} dépendent d'un paramètre de troncature r_n, tendant vers l'infini quand $n\to+\infty$, et inférieur au rayon d'injectivité de G_n.

On considère l'opérateur suivant, agissant sur les fonctions Γ_n-invariantes sur $\mathfrak{X}$,

$$Af(x) = \frac{1}{q+1} \sum_{d(x,y)=1} f(y)$$

Il est lié au laplacien discret Δ par la relation $A - I = \Delta$.

Les valeurs propres de A sont incluses dans $[-1, 1]$. On utilise la paramétrisation suivante :

$$\lambda = \frac{2\sqrt{q}}{q+1} \cos(s \ln q).$$

Le cas $s \in \mathbb{R}$ correspond à $\lambda \in \left[-\frac{2\sqrt{q}}{q+1}, \frac{2\sqrt{q}}{q+1}\right]$, qui est le spectre tempéré. On choisira dans ce cas $s \in [0, \tau]$ ($\tau = \frac{\pi}{\ln(q)}$). Le cas $s \in i] - 1/2, 1/2[+ ik\frac{\pi}{\ln(q)}$ ($k \in \mathbb{Z}$) correspond à $\lambda \in [-1, 1] \setminus \left]-\frac{2\sqrt{q}}{q+1}, \frac{2\sqrt{q}}{q+1}\right[$, qui est le spectre non-tempéré.

La loi de Weyl du laplacien riemannien sur les variétés est remplacée ici par la loi de Kesten-McKay dont nous donnons une démonstration dans le chapitre 5 basée sur les opérateurs pseudo-différentiels.

Théorème 3.4.1. *Soit $\chi \in C^\infty([0, \tau])$. Alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi(s_j)^2 \longrightarrow \int_0^\tau \chi(s)^2 d\mu(s)$$

quand $n \longrightarrow +\infty$.

Dans la preuve du chapitre 5, nous autorisons la fonction χ à dépendre de n, et en particulier d'avoir un support dont la taille tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Cela nécessite de préciser la vitesse à laquelle la taille du support tend vers 0. Comme cette hypothèse n'est pas nécessaire, pour simplifier nous ne la faisons pas dans ce chapitre introductif.

Intéressons-nous maintenant à l'analogue du théorème d'Egorov. Le calcul du commutateur d'un opérateur pseudo-différentiel avec le laplacien nous donne sur le graphe

Proposition 3.4.1. *Soit $a_n \in L^\infty(\mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau])$ une fonction Γ_n-invariante, alors*

$$[\Delta, \mathrm{Op}_{G_n}(a_n)] = \mathrm{Op}_{G_n}(c_n) + R$$

où c_n est donné par l'expression

$$c_n(x, \omega, s) = \frac{q^{1/2}}{q+1} \left(q^{is}(a_n \circ \sigma - a_n)(x, \omega, s) + q^{-is}(La_n - a_n)(x, \omega, s) \right),$$

et R un reste tel que

$$\|R\|_{HS}^2 = O\left(\frac{1}{r_n^2}\right) \sum_{x \in D_n} \int |a_n(x, \omega, s)|^2 d\nu_x(\omega) d\mu(s),$$

où $\| \cdot \|_{HS}$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt.

On peut se reporter à la section 5.3.4 pour la démonstration de cette proposition fondamentale dans une version plus générale.

Une fois ce résultat admis, on utilise le fait que $\langle\psi_j, [\Delta, \mathrm{Op}_{G_n}(a_n)]\psi_j\rangle = 0$ pour toute fonction propre ψ_j du laplacien, ce qui entraîne que

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle\psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(c_n)\psi_j\rangle|^2 = O\left(\frac{1}{r_n^2}\right) \sum_{x\in D_n} \int |a_n(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega) d\mu(s).$$

Pour obtenir une loi d'invariance analogue au théorème d'Egorov sur les variétés on aimerait avoir $c_n = a_n \circ \sigma - a_n$. Malheureusement $c_n = Ta_n - a_n$ avec un opérateur T dont les propriétés ne sont pas simples.

Notons $a_n \circ \sigma = Ua_n$. En appliquant la proposition précédente à un symbole de la forme $q^{is}Ua_n(x,\omega,s)$ avec $a_n L^\infty(\mathfrak{X} \times \Omega \times [0,\tau])$ une fonction Γ_n invariante, le symbole c_n se factorise en

$$\frac{q^{1/2}}{q+1}(U-I)(q^{2is}U - I)a_n, \tag{3.4.1}$$

et le reste n'est pas modifié. L'idée est alors d'appliquer cette nouvelle relation à un symbole Va_n, où V est un opérateur qui inverse $\frac{q^{1/2}}{q+1}(q^{2is}U - I)$. Ainsi le symbole c_n sera exactement égal à $a_n - a_n \circ \sigma$ comme nous le voulons.

Formellement, l'opérateur $(q^{2is}U - I)$ est inversé par la série $\sum_k q^{2iks}U^k$. Mais cette série n'est pas normalement convergente, et nous allons donc plutôt appliquer la dernière relation à un symbole du type $a_{n,N-1} := \sum_{k=0}^{N-1} q^{2iks}U^k a_n$, pour un entier N arbitraire, en espérant que le reste obtenu sera négligeable dans la limite $N \to +\infty$. On a alors

$$(U-I)(q^{2is}U-I)a_{n,N-1} = (U-I)(q^{2iNs}U^N - I)a_n = (I-U)a_n + (U-I)q^{2iNs}U^N a_n.$$

Bien que $q^{2iNs}U^N a_n$ ne soit pas *a priori* négligeable dans la limite $N \to +\infty$, l'ergodicité nous permettrait de traiter un reste du type $\sum_{k=0}^{N-1} q^{2iks}U^k a_n$. La dernière étape est donc de remplacer a_n par $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k}$ dans (3.4.1) et on obtient finalement

Théorème 3.4.2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \left|\langle\psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}\left(a_n\circ\sigma - a_n\right)\psi_j\rangle\right|^2 \leq O\left(\frac{N}{r_n^2}\right) &\sum_{x\in D_n} \int |a_n(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\ &+ 2\sum_{x\in D_n}\int |a_n^{(s,N)}(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s)\end{aligned}$$

où $a_n^{(s,N)}(x,\omega,s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^{2isk} a_n \circ \sigma^k(x,\omega,s)$.

Ce théorème nous donne une loi d'invariance par l'action de l'opérateur de composition par σ, analogue au théorème d'Egorov dans le cas des variétés, où σ est remplacé par le flot géodésique. Remarquons cependant qu'il y a plusieurs différences. Nous travaillons avec la norme de Hilbert-Schmidt, et les restes dans le membre de droite ne tendent vers

0 que lorsque l'on divise par le nombre de termes dans la somme du membre de gauche de l'inégalité. Par ailleurs nous avons besoin d'utiliser une propriété d'ergodicité pour le deuxième reste, alors que le théorème d'Egorov dans le cas des variétés n'utilise pas cette hypothèse.

3.5 Énoncé simplifié du théorème

Nous demanderons que la suite de graphes vérifie les conditions suivantes :

(EXP) La suite de graphes est une famille d'expanseurs : il existe $\beta > 0$ tel que le spectre de A sur $L^2(G_n)$ est contenu dans $\{1\} \cup [-1+\beta, 1-\beta]$ pour tout n. Cette hypothèse remplace la condition d'ergodicité du flot géodésique sur les variétés.

(IR) Le rayon d'injectivité tend vers l'infini.

On a alors le théorème suivant, qui concerne les fonctions propres correspondant au spectre tempéré :

Théorème 3.5.1. *Soit (G_n) une suite de graphes $(q+1)$-réguliers, $G_n = (V_n, E_n)$ avec $V_n = \{1, \dots, n\}$. On suppose que (G_n) vérifie (IR) et (EXP). On fixe $s_0 \in]0, \tau[$ et on pose $I = [s_0 - \delta, s_0 + \delta] \subset]0, \tau[$. On note $(s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$ le spectre de A sur G_n, et $(\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)})$ une base orthonormée de fonctions propres correspondantes.*

Soit $N(I, G_n) = \left|\{j \in \{1, \dots, n\}, s_j^{(n)} \in I\}\right|$ le nombre de valeurs propres dans l'intervalle I. Soit $a_n : V_n \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions vérifiant

$$\sum_{x \in V_n} a_n(x) = 0, \qquad \sup_x |a_n(x)| \leq 1.$$

Alors

$$\frac{1}{N(I, G_n)} \sum_{s_j^{(n)} \in I} \left| \langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)} \rangle \right|^2 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.6 Les grandes lignes de la preuve

Soit χ une fonction de troncature C^∞ à support dans $[-1, 1]$ et constante égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$. On note

$$\chi_\delta(s) = \chi\left(\frac{s - s_0}{2\delta}\right)$$

de sorte que $\chi_\delta \equiv 1$ sur l'intervalle I.

Nous aurons besoin du lemme suivant dont la démonstration repose sur la décroissance rapide des noyaux d'opérateurs pseudo-différentiels (voir section 5.3.5) :

Lemme 3.6.1. *Pour tout* $\delta > 0$,

$$\mathrm{Op}_{G_n}(\chi_\delta)\psi_j^{(n)} = \lambda_j^{(n)}\psi_j^{(n)}$$

avec[4]

$$\lambda_j^{(n)} = \chi_\delta(s_j) + O\left(\frac{1}{r_n^\infty}\right)$$

si $s_j \in [0, \tau]$.

Nous utiliserons aussi le fait dont la vérification est immédiate, que si $a = a(x)$ et $\chi = \chi(s)$, alors

$$\mathrm{Op}_{G_n}(a\chi) = \mathrm{Op}_{G_n}(a)\,\mathrm{Op}_{G_n}(\chi).$$

Pour alléger les notations, on écrira $\psi_j = \psi_j^{(n)}$, $s_j = s_j^{(n)}$, et $a = a_n$. On utilise le lemme 3.6.1 et le Théorème d'Egorov 3.4.2 pour obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \chi(s_j)^2 \left|\langle \psi_j, a\psi_j\rangle\right|^2 &= \sum_{j=0}^{n} \left|\langle \psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a\chi)\psi_j\rangle\right|^2 + nO\left(r_n^{-\infty}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left|\langle \psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi)\psi_j\rangle\right|^2 + nO\left(r_n^{-\infty}\right) \\
&\quad + O\left(T^2\frac{N^2}{r_n^2}\right)\sum_{x\in D_n}\int |a(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega)\chi(s)^2 d\mu(s) \\
&\quad + O(T^2)\sum_{x\in D_n}\int |a^{(s,N)}(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega)\chi(s)^2 d\mu(s)
\end{aligned}$$

avec

$$a^T := \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a\circ\sigma^k \quad \text{et} \quad a^{(s,N)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^{2isk} a\circ\sigma^k.$$

On utilise le lemme 3.3.1, et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \left|\langle \psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi)\psi_j\rangle\right|^2 &\leq \left\|\mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi)\right\|^2{}_{HS} \\
&\leq \sum_{x\in D_n}\int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega)\chi(s)^2 d\mu(s).
\end{aligned}$$

On peut alors montrer en utilisant la propriété d'expansion de la suite de graphes (voir section 5.2.2), que

$$\sum_{x\in D_n}\int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega) = O\left(\frac{n}{T\beta}\right),$$

et de même que

$$\sum_{x\in D_n}\int |a^{(s,N)}(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega) = O\left(\frac{n}{N\beta}\right).$$

4. Le paramètre r_n est ici inférieur au rayon d'injectivité de G_n.

Par ailleurs, la loi de Kesten-McKay (théorème 3.4.1) nous donne

$$\frac{n}{N(I,G_n)}\int \chi(s)^2 d\mu(s) = O(1).$$

On obtient finalement

$$\frac{1}{N(I,G_n)}\sum_{s_j\in I_n} |\langle \psi_j, a\psi_j\rangle|^2 = O\left(r_n^{-\infty}\right) + O\left(\frac{N^2T^2}{r_n^2}\right) + O\left(\frac{T^2}{N\beta}\right) + O\left(\frac{1}{T\beta}\right),$$

On fait tendre r_n vers l'infini quand n tend vers l'infini (ce qui est possible car le rayon d'injectivité tend vers l'infini),

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{N(I,G_n)}\sum_{s_j\in I_n} |\langle \psi_j, a\psi_j\rangle|^2 = O\left(\frac{T^2}{N\beta}\right) + O\left(\frac{1}{T\beta}\right).$$

Et comme le membre de gauche de l'égalité ne dépend pas de T et N, on prend successivement la limite $N \longrightarrow \infty$ puis $T \longrightarrow \infty$ pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N(I,G_n)}\sum_{s_j\in I_n} |\langle \psi_j, a\psi_j\rangle|^2 = 0.$$

Chapitre 4

Pseudo-differential calculus on homogeneous trees

Dans ce chapitre, nous reproduisons l'article [34], à paraître dans les Annales Henri Poincaré. Nous y construisons un calcul pseudo-différentiel sur les arbres réguliers dont certaines propriétés seront utilisées dans le chapitre 5. Le passage aux graphes réguliers finis des opérateurs pseudo-différentiels sur les arbres définis ici est effectué au chapitre 5.

4.1 Introduction

The study of the Laplacian on graphs has attracted much attention in the field of quantum chaos since the work of Kottos and Smilansky ([30, 32]). Most of the interest has been on metric graphs, specifically on the spectrum of the Laplacian in this context, and to a lesser extent on eigenfunctions ([27, 7, 6]). Recently, the discrete Laplacian on regular graphs has gained popularity as a good simplified model for quantum chaos (See [43], and also [44] for many references).

The aim of this paper is to provide a tool to study concentration and oscillation properties of eigenfunctions of the discrete Laplacian on regular graphs. It is known that on compact hyperbolic surfaces (and more generally on compact Riemannian manifolds with strictly negative curvature) the eigenfunctions of the Laplacian are associated with probability densities, most of which tend to a uniform distribution in the high-frequency limit. This result called quantum ergodicity is proved with the help of pseudo-differential calculus on manifolds, and the proof uses the ergodicity of the geodesic flow ([46, 50, 10]). A recent result ([9]) suggests a similar behaviour should exist for eigenfunctions on finite regular graphs when the high-frequency limit is replaced by a large spatial scale limit (that is when the size of the graphs tends to infinity). But one of the difficulties preventing from going further is that, even though ergodic dynamics can be defined on these graphs, to our knowledge no pseudo-differential calculus is available in this context. We therefore construct in this article a pseudo-differential calculus on the universal covers of regular graphs (that is regular trees). It is analogous to the one constructed by Zelditch in [49] for hyperbolic surfaces, in the sense that it is based on the Fourier-Helgason transform and thus is adapted to the geometry. We use this construction to prove a Quantum Ergodicity theorem on large regular graphs in a joint work with Nalini Anantharaman ([4]).

The outline of the paper is as follows. In section 4.2 we recall some necessary elements of harmonic analysis on homogeneous trees. In particular we define the Fourier-Helgason transform and give some of its properties.

In section 4.3 we define operators $\mathrm{Op}(a)$ on the $q+1$-regular tree $\mathfrak{X}$, associated with functions $a(x, \omega, s)$, where $x \in \mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega$ is an element of the boundary of $\mathfrak{X}$, and $s \in [0, \pi/\log q] \subset \mathbb{R}$ is a spectral parameter (see section 4.2 for definitions). We introduce a general symbol class S and a subset S_{sc} of *semi-classical* symbols depending on a small parameter $\epsilon > 0$ controlling the variation of the symbol on the tree. We also prove in this section that S and S_{sc} are algebras, and closed under the action of two operators related to the dynamics of the tree (the shift and the transfer operator associated, see definition 4.3.5). Using these properties, we then show that S_{sc} contains nontrivial examples of symbols.

In section 4.4 we adapt an existing result of [12] on the Fourier-Helgason transform on trees to show that the kernels of the operators we defined have a rapid decay property away from the diagonal.

This fact will be essential to prove that our pseudo-differential operators are bounded as operators from $L^2(\mathfrak{X})$ to $L^2(\mathfrak{X})$, which is done in section 4.5. The theorem can be stated in the following way

Theorem 4.1.1. *Let $a = a(x, \omega, s) \in S$ be a symbol, then the pseudo-differential operator* $\mathrm{Op}(a)$ *can be extended as a bounded operator from $L^2(\mathfrak{X})$ to $L^2(\mathfrak{X})$ and we have the inequality*

$$\| \mathrm{Op}(a)\|_{L^2\to L^2} \leq C \left(\|a\|_\Omega + \sum_{k=0}^{4} \|\partial_s^k a\|_\infty \right),$$

where $\|a\|_\Omega$ is a norm associated with the regularity of a in ω.

In section 4.6 we consider semi-classical symbols and prove an adjoint formula

Theorem 4.1.2. *Let $a = a_\epsilon \in S_{sc}$. Let* $\mathrm{Op}(a)^*$ *be the adjoint of the pseudo-differential operator* $\mathrm{Op}(a)$ *associated with the symbol a. Then*

$$\| \mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a})\|_{L^2\to L^2} = o_\epsilon(1).$$

and a product formula

Theorem 4.1.3. *Let $a \in S$ and $b = b_\epsilon \in S_{sc}$. Then*

$$\| \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(ab)\|_{L^2\to L^2} = o_\epsilon(1).$$

We also give (theorem 4.6.3) a proof leading to a stronger conclusion (replacing $o_\epsilon(1)$ with $O(\epsilon)$) when the symbols satisfy a more restrictive (but reasonable) condition. The expansions in all these formulas are done only to the first order, as it is not clear what higher orders would mean in this setting.

In section 4.7 we give a formula for the symbol of the commutator of a pseudo-differential operator $\mathrm{Op}(a)$ and the discrete Laplacian on the tree, which makes evident a relationship with the dynamics. This is the starting point of an Egorov-type theorem for large regular graphs, a central element of [4].

4.2 Harmonic analysis on homogeneous trees

The basic elements of harmonic analysis on homogeneous trees that we will need can be found in [11] and in the first two chapters of [21]. We will recall them briefly in this section.

4.2.1 The tree and its boundary

Let $\mathfrak{X}$ be the $q+1$-homogeneous tree. We see it as a metric space $(\mathfrak{X}, d)$ with $\mathfrak{X}$ the set of vertices and $d : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{N}$ the geodesic distance : for all $x, y \in \mathfrak{X}$, $d(x, y)$ is the smallest number of edges connecting x and y. We denote by $[x, y]$ the unique *geodesic path* joining two arbitrary vertices x and y, that is the sequence of vertices

$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ such that $x_0 = x$, $x_n = y$, and $d(x_i, x_j) = |i - j|$ for all $i, j \in \{0, \ldots, n\}$. We fix an arbitrary reference point $o \in \mathfrak{X}$, and $|x|$ will denote the distance from o of the vertex x.

The boundary Ω of the tree can be defined in one of the following equivalent ways.
– It is the set of half geodesics $(o, x_1, x_2, \ldots) \in \mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ starting at o.
– It is also the set of equivalence classes of half geodesics, where two half geodesics $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ and $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$ are equivalent if they meet at infinity, that is if there exists $k, N \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geq N, x_n = y_{n+k}$.

The half geodesic starting at a point x and equivalent to ω will be denoted by $[x, \omega)$.

The topology on the boundary Ω is described by the basis of open *cylinders*

$$\Omega(x, y) = \{\omega \in \Omega, [x, y] \text{ is a subsequence of } [x, \omega)\},$$

for all $x, y \in \mathfrak{X}$.

Let us introduce also the set $\Omega_n(x, \omega)$, for every $x \in \mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega$ and $n \in \mathbb{N}$. It is defined by

$$\Omega_n(x, \omega) = \Omega(x, x_n), \tag{4.2.1}$$

where $d(x, x_n) = n$ and $[x, x_n]$ is a subsequence of $[x, \omega)$.

For every $x \in \mathfrak{X}$, a measure ν_x can be defined on the boundary by noticing that for every $n \in \mathbb{N}$, $\{\Omega(x, y)\}_{y:d(x,y)=n}$ forms a partition of Ω into $(q + 1)q^{n-1}$ sets. For every $x \in \mathfrak{X}$, there is a probability measure ν_x such that on these partitions we have

$$\nu_x(\Omega(x, y)) = \frac{1}{(q + 1)q^{n-1}}.$$

When $x = o$, we will generally denote this measure by ν instead of ν_o.

4.2.2 Horocycles and height functions

The analogue of the Busemann functions of Riemannian geometry are the height functions $h_\omega : \mathfrak{X} \to \mathbb{Z}$ defined for all $\omega = (x_0, x_1, \ldots)$ in Ω with $x_0 = o$ by

$$h_\omega(x) = \lim_{m \to +\infty} (m - d(x, x_m)).$$

Note that these functions are normalized so that $h_\omega(o) = 0$. We can then define the ω-horocycles to be the level sets of h_ω : for all $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathfrak{h}(\omega, k) = \{x \in \mathfrak{X} : h_\omega(x) = k\}.$$

We will mostly use another description of the height functions. For every $x \in \mathfrak{X}$ and $\omega \in \Omega$, we denote by $c(x, \omega)$ the last point lying on $[o, \omega)$ in the geodesic path $[o, x]$ and call it the *confluence point* of x and ω. We have

$$h_\omega(x) = 2|c(x, \omega)| - |x|. \tag{4.2.2}$$

This allows us to introduce a partition of Ω. For $x \in \mathfrak{X}$, it is the family of sets defined by

$$E_i(x) = \{\omega \in \Omega : |c(x,\omega)| = i\}, \tag{4.2.3}$$

for all $i \in \mathbb{N}$ such that $0 \leq i \leq |x|$. The set $E_{|x|}(x)$ is also simply denoted by $E(x)$. We have

$$\nu(E_i(x)) \leq q^{-i} \tag{4.2.4}$$

for every $0 \leq i \leq |x|$. More precisely we have $\nu(E_0(x)) = \frac{q}{q+1}$, $\nu(E(x)) = \frac{q}{q+1}q^{-|x|}$ and $\nu(E_j(x)) = \frac{q-1}{q+1}q^{-j}$ for every $i \in \mathbb{N}$ such that $0 < i < |x|$.

We define a family of averaging operators $\mathcal{E}_n$ acting on bounded measurable functions η defined on Ω, by $\mathcal{E}_{-1} = 0$ and, when $n \geq 0$,

$$\mathcal{E}_n\eta(\omega) = \frac{1}{\nu(\Omega_n(o,\omega))} \int_{\Omega_n(o,\omega)} \eta(\omega')d\nu(\omega'). \tag{4.2.5}$$

4.2.3 Change of reference point

Note that all the previous objects can be defined with respect to another reference point. We will often use a superscript to denote the change of reference point: for a new reference point x_0 we would write $c^{x_0}(x,\omega)$, $E_i^{x_0}(x)$, $\mathcal{E}_n^{x_0}\dots$ However, we will write directly $h_\omega(x) - h_\omega(x_0)$ rather than $h_\omega^{x_0}(x)$.

Note the Radon-Nikodym derivative

$$\frac{d\nu_y}{d\nu_x}(\omega) = q^{h_\omega(y) - h_\omega(x)}, \tag{4.2.6}$$

for all $x, y \in \mathfrak{X}$ and $\omega \in \Omega$.

4.2.4 The Fourier-Helgason transform

Let $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ be a finite support function. The *Fourier-Helgason transform* of f, denoted by $\hat{f}$ or $\mathcal{H}f$ is given by the formula[1]

$$\mathcal{H}f(\omega,s) = \hat{f}(\omega,s) = \sum_{y \in T} f(y)q^{(1/2+is)h_\omega(y)}$$

for every $\omega \in \Omega$ and $s \in \mathbb{T}$, with $\mathbb{T} = \mathbb{Z}/2\tau\mathbb{Z}$, $\tau = \frac{\pi}{\log q}$. Note that here $\log(t)$ is the natural logarithm of $t \in \mathbb{R}$. We have an inverse formula given by

$$f(x) = \int_\Omega \int_{\mathbb{T}} q^{(1/2-is)h_\omega(x)} \hat{f}(\omega,s)d\nu(\omega)d\mu(s). \tag{4.2.7}$$

The measure $d\mu(s)$ is called the *Plancherel measure*, defined by

$$d\mu(s) = c_P|c(s)|^{-2}, \tag{4.2.8}$$

1. Note that this formula depends on the reference point o, that we fixed arbitrarily here.

where $c_P = \frac{q\log(q)}{4\pi(q+1)}$ and for every $z \in \mathbb{C} \setminus \tau\mathbb{Z}$,

$$c(z) = \frac{q^{1/2}}{q+1} \frac{q^{1/2+iz} - q^{-1/2-iz}}{q^{iz} - q^{-iz}}. \tag{4.2.9}$$

In particular

$$|c(s)|^{-2} = \frac{(q+1)^2}{q} \frac{4\sin^2(s\log q)}{q + q^{-1} - 2\cos(2s\log q)} \tag{4.2.10}$$

is a smooth function.

There is a Plancherel formula: if f and g are two finitely supported functions on $\mathfrak{X}$, then

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}} f(x)\overline{g(x)} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\Omega} \hat{f}(\omega, s)\overline{\hat{g}(\omega, s)} d\nu(\omega) d\mu(s).$$

The Fourier-Helgason transform $\mathcal{H}$ can therefore be extended to an isometry from $L^2(\mathfrak{X})$ to its image in $L^2(\Omega \times \mathbb{T})$, which is the subspace of functions F satisfying the *symmetry condition*

$$\int_{\Omega} q^{(\frac{1}{2}-is)h_\omega(x)} F(\omega, s) d\nu(\omega) = \int_{\Omega} q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(x)} F(\omega, -s) d\nu(\omega) \tag{4.2.11}$$

4.2.5 Spherical functions

The spherical functions are defined, for $z \in \mathbb{C}$ by

$$\phi_z(x) = \int_{\Omega} q^{(\frac{1}{2}+iz)h_\omega(x)} d\nu(\omega).$$

They are given explicitly by

$$\phi_z(x) = \begin{cases} \left(\frac{q-1}{q+1}|x| + 1\right) q^{-\frac{|x|}{2}} & \text{if } z \in 2\tau\mathbb{Z} \\ \left(\frac{q-1}{q+1}|x| + 1\right) q^{-\frac{|x|}{2}} (-1)^{|x|} & \text{if } z \in \tau + 2\tau\mathbb{Z} \\ c(z) q^{(iz-\frac{1}{2})|x|} + c(-z) q^{(-iz-\frac{1}{2})|x|} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \tau\mathbb{Z} \end{cases} \tag{4.2.12}$$

4.2.6 Rapidly decreasing functions

A fundamental property used in this article will be the link between rapid decay of functions and regularity of their Fourier-Helgason transform. To make this link we need some definitions.

Definition 4.2.1. A function $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ is said to be *rapidly decreasing* if for every $k \in \mathbb{N}$, there exists $C_k > 0$ such that

$$|f(x)| \le C_k \frac{q^{-\frac{|x|}{2}}}{(1 + |x|)^k}.$$

We denote by $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ the space of rapidly decreasing functions on $\mathfrak{X}$.

Definition 4.2.2. A function $F : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ is in $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})$ if

1. $\forall l \in \mathbb{N} \quad \partial_s^l F(\omega, s) \in C(\Omega \times \mathbb{T})$, where $C(\Omega \times \mathbb{T})$ denotes the space of continuous functions on $\Omega \times \mathbb{T}$.
2. $\forall k, l \in \mathbb{N}, \exists C_{k,l} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \|\partial_s^k (F - \mathcal{E}_n F)\|_\infty \leq C_{k,l}(n+1)^{-l}$

We will denote by $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})^\flat$ the space of functions in $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})$ satisfying the symmetry condition (4.2.11).

We then have the following theorem, proved in [12]

Theorem 4.2.1. *The Fourier-Helgason transform $\mathcal{H}$ is an isomorphism from $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ onto $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})^\flat$.*

4.2.7 About the symmetry condition

The symmetry condition (4.2.11) does not behave well when we take the product of two functions. This means that the product of two functions satisfying this condition does not satisfy it anymore in general. We would like to avoid working with this condition. For this purpose, let us examine the inversion formula (4.2.7) and note that we have

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_\Omega \int_\mathbb{T} q^{(\frac{1}{2} - is)h_\omega(x)} \hat{f}(\omega, s) d\nu(\omega) d\mu(s) \\ &= 2 \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2} - is)h_\omega(x)} \hat{f}(\omega, s) d\nu(\omega) d\mu(s), \end{aligned}$$

using the fact that $d\mu(-s) = d\mu(s)$ and the symmetry condition (4.2.11). We can therefore work with $s \in [0, \tau]$ instead of $s \in \mathbb{T}$. We will see the Fourier-Helgason transform $\mathcal{H}$ as an isometry from $L^2(\mathfrak{X})$ onto $L^2(\Omega \times [0, \tau])$, and we will not need to refer to the symmetry condition anymore.

But then, theorem 4.2.1 cannot be used in this form. The only part of this theorem we will be interested in is the fact that if a function $F(\omega, s)$ is in $C^\infty(\Omega \times \mathbb{T})$ and satisfies the symmetry condition, then $\mathcal{H}^{-1}F$ is rapidly decreasing. To maintain this property without the symmetry condition, we will need to ask that $\partial_s^k F(\omega, 0) = \partial_s^k F(\omega, \tau) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$. This is what we will do when we define symbol classes in section 4.3.1. The adaptation of the proof of theorem 4.2.1 to the new context will be done in section 4.4.

4.3 Operators and symbol classes

4.3.1 Definitions

Following the idea of [49] on the hyperbolic plane, we will use the Fourier-Helgason transform to globally define pseudo-differential operators on the tree.

Definition 4.3.1. Let $a : \mathfrak{X} \times \Omega \times [0,\tau] \to \mathbb{C}$ be a bounded measurable function. We associate an operator $\mathrm{Op}(a)$ with a in the following way:

$$\mathrm{Op}(a)u(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s)u(y)d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$

for every $u : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ with finite support.

For $c : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \Omega \times [0,\tau] \to \mathbb{C}$ measurable and bounded, we define the operator $\mathrm{OP}(c)$ associated with c by

$$\mathrm{OP}(c)u(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} c(x,y,\omega,s)u(y)d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$

for every $u : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ with finite support.

Note that if $c(x,y,\omega,s) = c(x,\omega,s)$ does not depend on y, then $\mathrm{OP}(c) = \mathrm{Op}(c)$. The operators of the second definition are therefore more general.

The kernels associated with these operators are easy to extract from the definition. We will denote by

$$k_a(x,y) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s)d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$

the kernel of $\mathrm{Op}(a)$ and by

$$K_c(x,y) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} c(x,y,\omega,s)d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$

the kernel of $\mathrm{OP}(c)$.

These definitions have the important property that they do not depend on the choice of reference point on the tree.

We can recover the function $a(x,\omega,s)$ from the kernel of $\mathrm{Op}(a)$ by noticing that

$$a(x,\omega,s) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} k_a(x,y) q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}. \tag{4.3.1}$$

Indeed, if we fix $x \in \mathfrak{X}$ and take it as the reference point this is a consequence of the Fourier inversion formula (4.2.7) applied to the function $y \mapsto k_a(x,y)$.

We now define classes of functions called *symbols* for which these operators will have interesting properties. The conditions are chosen so that these classes contain interesting examples of symbols (see Example 4.3.1). Let us first consider a general class of *double symbols*

Definition 4.3.2. Let $S(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ be the set of bounded functions

$$c : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \Omega \times [0,\tau] \to \mathbb{C}$$

satisfying the following conditions:

1. For every $x, y \in \mathfrak{X}$, $\partial_s^k c(x,y,\omega,s) \in C(\Omega \times [0,\tau])$, and for every $l \in \mathbb{N}$ there exists a constant C_l such that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathfrak{X} \quad \|(c - \mathcal{E}_n^x c)(x,y,\cdot,\cdot)\|_\infty \le \frac{C_l}{(1+n)^l}.$$

2. For every $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathfrak{X}$ and $\omega \in \Omega$,

$$\partial_s^k c(x,y,\omega,0) = \partial_s^k c(x,y,\omega,\tau) = 0.$$

The class of symbols $c(x,y,\omega,s) = c(x,\omega,s)$ in $S(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ (independent of y) will be denoted by $S(\mathfrak{X})$. We introduce another important class of symbols.

Definition 4.3.3. Let $\epsilon > 0$. We define the class of *semi-classical symbols* $S_{sc}(\mathfrak{X})$ to be the set of bounded functions $a_\epsilon : \mathfrak{X} \times \Omega \times [0,\tau] \to \mathbb{C}$ satisfying the following conditions:

1. For every $x \in \mathfrak{X}$ and $k \in \mathbb{N}$, $\partial_s^k a_\epsilon(x,\omega,s) \in C(\Omega \times [0,\tau])$, and for every $l \in \mathbb{N}$ there exists a constant C_l such that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathfrak{X} \quad \|(a_\epsilon - \mathcal{E}_n^x a_\epsilon)(x,\cdot,\cdot)\|_\infty \le \frac{C_l}{(1+n)^l}.$$

2. For every $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathfrak{X}$ and $\omega \in \Omega$, $\partial_s^k a_\epsilon(x,\omega,0) = \partial_s^k a_\epsilon(x,\omega,\tau) = 0$.
3. (a) We have a control over the variation in the first argument of the derivatives of a_ϵ with respect to s: For every $k \in \mathbb{N}$, there exists $C_k > 0$ such that

$$\forall x, y \in \mathfrak{X}, \quad |\partial_s^k a_\epsilon(x,\omega,s) - \partial_s^k a_\epsilon(y,\omega,s)| \le C_k \epsilon d(x,y),$$

   (b) For every $l \in \mathbb{N}$, there exists a positive function $t \mapsto f_l(t)$ such that for every $x, y \in \mathfrak{X}$ and $n \in \mathbb{N}$

$$|(a_\epsilon - \mathcal{E}_n^x a_\epsilon)(x,\omega,s) - (a_\epsilon - \mathcal{E}_n^x a_\epsilon)(y,\omega,s)| \le \epsilon \frac{f_l(d(x,y))}{(1+n)^l}.$$

   The function f_l is arbitrary. In particular we can think of it as an increasing function.

Remark 4.3.1. Condition 1 in both definitions is a condition of regularity with respect to ω. It would be natural for a smoothness condition on (ω, s) to require that the derivatives $\partial_s^k c$ of the symbols satisfy it also, but this stronger condition is not needed for the results of the paper. Condition 2 is here to compensate for the absence of symmetry condition (see the paragraph "About the symmetry condition" in section 4.2). These two conditions are sufficient to get a rapid decay of the kernels and continuity of the operators on L^2. That is why these two results are true for symbols that are only in S. Note that in S the only regularity with respect to x is the requirement that the symbols be bounded.

Condition 3a asks that the symbols do not vary too much in x. Condition 3b is in a way a "cross derivative" between x and ω, the derivative in x being taken before the derivative in ω. The dependence on $d(x,y)$ of the constant reflects the fact that we have the term $\mathcal{E}_n^x a_\epsilon(y,\cdot,\cdot)$ where the projection $\mathcal{E}_n^x$ is not centered on the first coordinate of a_ϵ.

Remark 4.3.2. Functions $a(x)$ depending only on x (constant with respect to y, ω and s) do not belong to the class S because they do not vanish when $s = 0$ and when $s = \tau$ unless they are constant equal to 0 (they do not satisfy condition 2). However, it can be checked that all the results of this article applying to symbols in S also apply to these functions. This is essentially because the associated operator $\mathrm{OP}(a)$ (the operator of multiplication by a) has a kernel $k_a(x, y)$ vanishing when $x \neq y$, thus satisfying proposition 4.4.1 about the rapid decay of the kernel. We can therefore add these functions to the class without changing the statements of the results. In the same way we can add functions $a(x)$ satisfying only the Lipschitz condition (3a) to the class S_{sc}.

Definition 4.3.4. We will call *negligible* an operator A with a kernel $K_A(x, y)$ satisfying the following property: for every $N \in \mathbb{N}$ there exists a function $C_N(\epsilon)$ such that

$$|K_A(x,y)| \leq C_N(\epsilon)\frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N}, \tag{4.3.2}$$

and $C_N(\epsilon) \to 0$ when $\epsilon \to 0$.

The set Ψ of *pseudo-differential operators* is defined as the set of operators $\mathrm{OP}(c)$ associated with symbols $c \in S(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, modulo negligible operators.

4.3.2 Properties and examples

The classes of symbols of definitions 4.3.2 and 4.3.3 are algebras over $\mathbb{C}$. Indeed the main difficulty is to prove the following proposition.

Proposition 4.3.1. *If $a, b \in S$ then $ab \in S$, and if $a, b \in S_{sc}$, then $ab \in S_{sc}$.*

Proof. We will only prove the proposition for $a, b \in S_{sc}$, it will be clear that the case $a, b \in S$ can be treated in a similar way.

The following lemma will be used several times throughout the proof

Lemma 4.3.1. *For every function $a : \mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau] \to \mathbb{C}$ and $b : \mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau] \to \mathbb{C}$,*

$$|\mathcal{E}_n^x a \mathcal{E}_n^x b - \mathcal{E}_n^x(ab))(y,\omega,s)| \leq \sup_{\omega'} a(y,\omega',s) \sup_{\omega'} |\mathcal{E}_n^x b(y,\omega',s) - b(y,\omega',s)|$$

for all $x, y \in \mathfrak{X}$, and $(\omega, s) \in \Omega \times [0, \tau]$.

Proof. To simplify the notation, we can ignore the dependence on x, y and s.

Recall from (4.2.5) that

$$\mathcal{E}_n(ab)(\omega_0) = \frac{1}{\nu(\Omega_n(o,\omega_0))}\int_{\Omega_n(o,\omega_0)} (ab)(\omega)d\nu(\omega).$$

We also have

$$\mathcal{E}_n a(\omega_0)\mathcal{E}_n b(\omega_0) = \frac{1}{\nu(\Omega_n(o,\omega_0))^2}\int_{\Omega_n(o,\omega_0)}\int_{\Omega_n(o,\omega_0)} a(\omega)b(\omega')d\nu(\omega)d\nu(\omega').$$

Let us write $dm(\omega) = \frac{d\nu(\omega)}{\nu(\Omega_n(o,\omega_0))}$, which gives a probability measure on $\Omega_n(o,\omega_0)$. We have

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_n a\mathcal{E}_n b - \mathcal{E}_n(ab))(\omega_0) \\
&\quad= \int_{\Omega_n(o,\omega_0)}\int_{\Omega_n(o,\omega_0)} (a(\omega)b(\omega') - a(\omega)b(\omega))\, dm(\omega')dm(\omega) \\
&\quad= \int_{\Omega_n(o,\omega_0)}\int_{\Omega_n(o,\omega_0)} a(\omega)(b(\omega') - b(\omega))dm(\omega')dm(\omega) \\
&\quad= \int_{\Omega_n(o,\omega_0)} a(\omega)\left(\int_{\Omega_n(o,\omega_0)} b(\omega')dm(\omega') - b(\omega)\right) dm(\omega) \\
&\quad= \int_{\Omega_n(o,\omega_0)} a(\omega)\left(\mathcal{E}_n b(\omega_0) - b(\omega)\right) dm(\omega),
\end{aligned}$$

but $\mathcal{E}_n b(\omega_0) = \mathcal{E}_n b(\omega)$ for all $\omega \in \Omega_n(o,\omega_0)$ by definition. So

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{E}_n a\mathcal{E}_n b - \mathcal{E}_n(ab))(\omega_0)| &= \left|\int_{\Omega_n(o,\omega_0)} a(\omega)\left(\mathcal{E}_n b(\omega) - b(\omega)\right) dm(\omega)\right| \\
&\leq \sup_\omega a(\omega) \sup_\omega \left|\mathcal{E}_n b(\omega) - b(\omega)\right|.
\end{aligned}$$

□

Let us now begin the proof of proposition 4.3.1.

1. As x and s are fixed, we ignore the dependence on these variables to simplify the notation. We will put it back at the end. We decompose

$$ab - \mathcal{E}_n(ab) = a(b - \mathcal{E}_n b) + \mathcal{E}_n b(a - \mathcal{E}_n a) + ((\mathcal{E}_n a)(\mathcal{E}_n b) - \mathcal{E}_n(ab)).$$

The first two terms are easy to bound, we have

$$|ab - \mathcal{E}_n(ab)| \leq \|a\|_\infty |b - \mathcal{E}_n b| + \|b\|_\infty |a - \mathcal{E}_n a| + |(\mathcal{E}_n a)(\mathcal{E}_n b) - \mathcal{E}_n(ab)|,$$

because $\|\mathcal{E}_n b\|_\infty \leq \|b\|_\infty$. For the last term, we use lemma 4.3.1, which gives

$$|\mathcal{E}_n a\mathcal{E}_n b - \mathcal{E}_n(ab))(\omega)| \leq \sup_{\omega'} a(\omega') \sup_{\omega'} \left|\mathcal{E}_n b(\omega') - b(\omega')\right|.$$

We thus have finally, for all (x,ω,s)

$$\begin{aligned}
|ab - \mathcal{E}_n^x(ab)|(x,\omega,s) \leq{}& 2\|a\|_\infty \sup_{\omega'} \left|b - \mathcal{E}_n^x b\right|(x,\omega',s) \\
&+ \|b\|_\infty \sup_{\omega'} |a - \mathcal{E}_n^x a|(x,\omega',s).
\end{aligned}$$

As a and b satisfy the inequality of condition 1, this proves that the product ab satisfies it too. We still have to prove the inequality for the derivatives $\partial_s^k(ab)$. But for all $k \in \mathbb{N}$, $\partial_s^k(ab)$ is a linear combination of products of the form $\partial_s^i a\partial_s^{k-i} b$ with $i \in \{0,\dots,k\}$ and each factor satisfies the inequality. The preceding proof thus gives the result.

2. The second condition is clear if we write $\partial_s^k(ab)$ as a linear combination of products of the form $\partial_s^i a \partial_s^{k-i} b$ with $i \in \{0, \dots, k\}$.
3. We use the fact that, ignoring the dependence on ω and s,

$$(ab)(x) - (ab)(y) = a(x)(b(x) - b(y)) + b(y)(a(x) - a(y)).$$

We then apply this to the derivatives of $(ab)(x, \omega, s)$ with respect to s to obtain condition 3a.

To obtain condition 3b, we will combine some of the preceding ideas. Let us ignore the dependence on s and work only with x and ω.

$$\begin{aligned} &((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega)) - \mathcal{E}_n^x((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega)) \\ &\qquad = a(x,\omega)(b(x,\omega) - b(y,\omega)) + b(y,\omega)(a(x,\omega) - a(y,\omega)) \\ &\quad - \mathcal{E}_n^x(a(x,\omega)(b(x,\omega) - b(y,\omega))) - \mathcal{E}_n^x(b(y,\omega)(a(x,\omega) - a(y,\omega))) \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

According to lemma 4.3.1, we have

$$\mathcal{E}_n^x(a(x,\omega)(b(x,\omega) - b(y,\omega))) = \mathcal{E}_n^x a(x,\omega) \mathcal{E}_n^x(b(x,\omega) - b(y,\omega)) + R(x,y,\omega)$$

with

$$|R(x,y,\omega)| \le \sup_{\omega'}(b(x,\omega') - b(y,\omega')) \sup_{\omega'}(\mathcal{E}_n^x a(x,\omega') - a(x,\omega')).$$

Using condition 1 for a and condition 3a for b we have

$$|R(x,y,\omega)| \lesssim_l \epsilon \frac{d(x,y)}{(1+n)^l}. \tag{4.3.4}$$

Still using lemma 4.3.1,

$$\mathcal{E}_n^x(b(y,\omega)(a(x,\omega) - a(y,\omega))) = \mathcal{E}_n^x b(y,\omega) \mathcal{E}_n^x(a(x,\omega) - a(y,\omega)) + R'(x,y,\omega)$$

where

$$|R'(x,y,\omega)| \le \sup_{\omega'}(a(x,\omega') - a(y,\omega')) \sup_{\omega'}(\mathcal{E}_n^x b(y,\omega') - b(y,\omega')).$$

We have for all ω'

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_n^x b(y,\omega') - b(y,\omega') \\ &\qquad = \mathcal{E}_n^x(b(y,\omega') - b(x,\omega')) - (b(y,\omega') - b(x,\omega')) + \mathcal{E}_n^x b(x,\omega') - b(x,\omega') \end{aligned}$$

so according to conditions 3b and 1, there is a constant C_l and a function f_l such that:

$$|\mathcal{E}_n^x b(y,\omega') - b(y,\omega')| \le \frac{1}{(1+n)^l}\big(C_l + \epsilon f_l(d(x,y))\big) \tag{4.3.5}$$

and using condition 3a we finally have

$$\begin{aligned} |R'(x,y,\omega)| &\lesssim_l \frac{1}{(1+n)^l}\big(\epsilon d(x,y) + 2\|a\|_\infty \epsilon f_l(d(x,y))\big) \\ &\lesssim_{a,l} \epsilon \frac{g_l(d(x,y))}{(1+n)^l}. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

where $g_l(t) \geq \max\{t, f_l(t)\}$. Going back to the main expression (4.3.3) we obtain after some more modifications

$$\begin{aligned}
&((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega)) - \mathcal{E}_n^x((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega))\\
&\quad = a(x,\omega)(b(x,\omega) - b(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(b(x,\omega) - b(y,\omega))\\
&\qquad + \mathcal{E}_n^x(b(x,\omega) - b(y,\omega))(a(x,\omega) - \mathcal{E}_n^x a(x,\omega))\\
&\qquad + R(x,y,\omega)\\
&\quad + b(y,\omega)(a(x,\omega) - a(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a(x,\omega) - a(y,\omega)))\\
&\qquad + \mathcal{E}_n^x(a(x,\omega) - a(y,\omega))(b(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x b(y,\omega))\\
&\qquad + R'(x,y,\omega).
\end{aligned}$$

Using the different conditions in the symbol class and inequality (4.3.5) in addition to the inequalities (4.3.4) and (4.3.6) on R and R' we obtain

$$\begin{aligned}
&((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega)) - \mathcal{E}_n^x((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega))\\
&\lesssim_{a,l} \|a\|_\infty \epsilon \frac{f_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\\
&\qquad + \epsilon d(x,y) \frac{1}{(1+n)^l}\\
&\qquad + \epsilon \frac{d(x,y)}{(1+n)^l}\\
&\quad + \|b\|_\infty \epsilon \frac{\tilde{f}_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\\
&\qquad + \frac{1}{(1+n)^l}(\epsilon d(x,y) + 2\|a\|_\infty \epsilon f_l(d(x,y)))\\
&\qquad + \epsilon \frac{g_l(d(x,y))}{(1+n)^l}
\end{aligned}$$

for some arbitrary function $\tilde{f}$. Finally

$$((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega)) - \mathcal{E}_n^x((ab)(x,\omega) - (ab)(y,\omega)) \lesssim_{a,b,l} \epsilon \frac{\tilde{g}_l(d(x,y))}{(1+n)^l},$$

where $t \mapsto \tilde{g}_l(t)$ is an increasing function such that

$$\tilde{g}_l(t) \geq \max\{t, f_l(t), \tilde{f}_l(t)\}.$$

This gives us condition 3b.

□

We will now show that the symbol classes are also closed under the action of operators related to the dynamics on the tree. These properties are important for quantum ergodicity. They also allow us to give more elaborate examples of symbols. First, we need some definitions.

Definition 4.3.5. Recall that any point $(x,\omega) \in \mathfrak{X}\times\Omega$ can be written as a half-geodesic $(x, x_1, x_2, \ldots)$ starting at x. We define the *shift* $\sigma : \mathfrak{X}\times\Omega \to \mathfrak{X}\times\Omega$ acting on these sequences

$$\sigma(x,\omega) = \sigma(x, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots) = (x_1, \omega).$$

We will also denote by σ the map defined on $\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau]$ such that $\sigma(x,\omega,s) = (x_1,\omega,s)$, and write $\sigma_\omega(x) = x_1$.

The map σ has a left inverse, the *transfer operator* L defined on functions $a(x,\omega,s)$ by

$$La(x,\omega,s) = \frac{1}{q}\sum_{y:\sigma_\omega(y)=x} a(y,\omega,s).$$

Proposition 4.3.2. *Let $a \in S_{sc}$ be a semi-classical symbol. Its composition with the shift is still a semi-classical symbol, that is $a\circ\sigma \in S_{sc}$.*

Remark 4.3.3. It will be clear from the following proof that S is also closed under composition by the shift.

Proof. As σ does not act on the variable s, condition 2 of definition 4.3.3 is satisfied by $a\circ\sigma$.

Let us now ignore the dependence on s, fix $\omega\in\Omega$, $x\in\mathfrak{X}$ and write $\sigma(x,\omega) = (x_1,\omega)$. When $n \geq 2$,

$$|a\circ\sigma(x,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a\circ\sigma)(x,\omega)| = |a(x_1,\omega) - \mathcal{E}_{n-1}^{x_1}a(x_1,\omega)| \lesssim_l \frac{1}{n^l} \lesssim_l \frac{1}{(1+n)^l}$$

so condition 1 is also satisfied by $a\circ\sigma$.

Now fix $y\in\mathfrak{X}$ and write $\sigma(y,\omega) = (y_1,\omega)$. Notice that $d(x_1,y_1) \leq d(x,y)$, so

$$|a\circ\sigma(x,\omega) - a\circ\sigma(y,\omega)| = |a(x_1,\omega) - a(y_1,\omega)| \lesssim \epsilon d(x_1,y_1) \lesssim \epsilon d(x,y)$$

and this is also true for the derivatives of a with respect to s when we add back the dependence on this variable, so condition 3a is satisfied.

Let us now prove that condition 3b is satisfied. That is: for every $l,n\in\mathbb{N}$, $x,y\in\mathfrak{X}$ and $\omega\in\Omega$,

$$|a\circ\sigma(x,\omega) - a\circ\sigma(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a\circ\sigma(x,\omega) - a\circ\sigma(y,\omega))| \leq \frac{f_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\epsilon,$$

for some function $t\mapsto f_l(t)$.

We have for all $n\geq 2$

$$\mathcal{E}_n^x(a\circ\sigma(x,\omega)) = \mathcal{E}_{n-1}^{x_1}(a(x_1,\omega)).$$

Recall now from (4.2.5) that

$$\mathcal{E}_n^x(a\circ\sigma)(y,\omega) = \frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}\int_{\Omega_n(x,\omega)} a\circ\sigma(y,\omega')d\nu_x(\omega'),$$

where $\Omega_n(x,\omega)$ is the cylinder starting at x of length n in the direction of ω. If $n \geq d(x,y)+1$ then for all $\omega' \in \Omega_n(x,\omega)$, $\sigma(y,\omega') = (y_1,\omega')$, thus

$$\mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(y,\omega)) = \mathcal{E}_{n-1}^{x_1}(a(y_1,\omega)).$$

Therefore

$$\mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega)) = \mathcal{E}_{n-1}^{x_1}(a(x_1,\omega) - a(y_1,\omega)).$$

Using the fact that $a \in S_{sc}$ satisfies condition 3b, we have

$$\begin{aligned}&|a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega))| \\ &\quad = |a(x_1,\omega) - a(y_1,\omega) - \mathcal{E}_{n-1}^{x_1}(a(x_1,\omega) - a(y_1,\omega))| \\ &\quad \leq \frac{f_l(d(x_1,y_1))}{n^l}\epsilon.\end{aligned}$$

Therefore we have for some function $t \mapsto g_l(t)$,

$$|a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega))| \leq \frac{g_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\epsilon, \qquad (4.3.7)$$

and condition 3b is thus satisfied when $n \geq 1 + d(x,y)$.

Let us now consider the case $n \leq 1 + d(x,y)$. Recall that

$$\mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega)) = \int_{\Omega_n(x,\omega)} a \circ \sigma(x,\omega') - a \circ \sigma(y,\omega') \frac{d\nu_x(\omega')}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}.$$

We have to estimate

$$\begin{aligned}&a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega)) \\ &= \int_{\Omega_n(x,\omega)} a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(x,\omega') - (a \circ \sigma(y,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega'))\frac{d\nu_x(\omega')}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}. \quad (4.3.8)\end{aligned}$$

Note that $a \circ \sigma(x,\omega) = a(x_1,\omega)$ and $a \circ \sigma(x,\omega') = a(x_1',\omega')$ with $d(x_1,x_1') \leq 2$. We thus have

$$|a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(x,\omega')| \lesssim 2\epsilon$$

and the same is true when we replace x with y. Therefore (4.3.8) gives

$$|a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega))| \lesssim 4\epsilon.$$

Moreover, as $n \leq 1 + d(x,y)$ we have $(1+n) \leq (2 + d(x,y))$. Thus for every $l \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^l |a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega))| \lesssim (2 + d(x,y))^l 4\epsilon,$$

in this case. Together with (4.3.7) it gives for every $l,n \in \mathbb{N}$, $x,y \in \mathfrak{X}$ and $\omega \in \Omega$,

$$|a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(a \circ \sigma(x,\omega) - a \circ \sigma(y,\omega))| \leq \frac{f_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\epsilon,$$

for some function $t \mapsto f_l(t)$ that grows at least like t^l. This is compatible with condition 3b. $\square$

Remark 4.3.4. From the preceding proof, we see that if $a \in S_{sc}$, then the symbol $a \circ \sigma \in S_{sc}$ will satisfy condition 3b of definition 4.3.3 with for all $l \in \mathbb{N}$, $f_l(t) \geq t^l$.

A similar proposition can be proved for the transfer operator L.

Proposition 4.3.3. *Let $a \in S_{sc}$ be a semi-classical symbol. Then $La \in S_{sc}$.*

Remark 4.3.5. As in proposition 4.3.2, S is also closed under the action of L.

Proof. We follow the same steps as in the proof of proposition 4.3.1. But here, L gives us more regularity in ω and less in x.

Recall from definition 4.3.5 that

$$La(x, \omega, s) = \frac{1}{q} \sum_{x' : \sigma_\omega(x') = x} a(x', \omega, s).$$

As L does not act on the variable s, condition 2 of definition 4.3.3 is satisfied by La. Let us now ignore the dependence on s, fix $\omega \in \Omega$ and $x \in \mathfrak{X}$, and prove that condition 1 is satisfied.

Using the definition (4.2.5) of the operator $\mathcal{E}_n^x$ on La we have

$$\mathcal{E}_n^x(La)(x, \omega) = \frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x, \omega))} \frac{1}{q} \int_{\Omega_n(x,\omega)} \sum_{x' : \sigma_{\omega'}(x') = x} a(x', \omega') d\nu_x(\omega').$$

If $n \geq 1$, then $\sigma_{\omega'}(x') = \sigma_\omega(x')$ for every $\omega' \in \Omega_n(x, \omega)$. So we have

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^x(La)(x, \omega) &= \frac{1}{q} \sum_{x' : \sigma_\omega(x') = x} \frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x, \omega))} \int_{\Omega_n(x,\omega)} a(x', \omega') d\nu_x(\omega') \\ &= \frac{1}{q} \sum_{x' : \sigma_\omega(x') = x} \mathcal{E}_n^x a(x', \omega) \qquad (4.3.9) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{x' : \sigma_\omega(x') = x} \mathcal{E}_{n+1}^{x'} a(x', \omega) \end{aligned}$$

which can be used to bound the following expression

$$\begin{aligned} |La(x, \omega) - \mathcal{E}_n^x(La)(x, \omega)| &= \left| \frac{1}{q} \sum_{x' : \sigma_\omega(x') = x} (a(x', \omega) - \mathcal{E}_{n+1}^{x'} a(x', \omega)) \right| \\ &\lesssim_l \frac{1}{(2+n)^l} \lesssim_l \frac{1}{(1+n)^l}, \end{aligned}$$

because a satisfies condition 1. Therefore condition 1 is also satisfied by La.

For condition 3a, fix $y \in \mathfrak{X}$. If $x', y' \in \mathfrak{X}$ are such that $\sigma_\omega(y') = y$ and $\sigma_\omega(x') = x$, then $d(x', y') \leq d(x, y) + 2$. So

$$\begin{aligned} |La(x, \omega) - La(y, \omega)| &= \frac{1}{q} \left| \sum_{x' : \sigma_\omega(x') = x} a(x', \omega) - \sum_{y' : \sigma_\omega(y') = y} a(y', \omega) \right| \\ &\lesssim \epsilon(d(x, y) + 2) \qquad (4.3.10) \end{aligned}$$

in whatever way we regroup the terms of the two sums in q differences, and using the fact that a satisfies condition 3a. Notice then that if $d(x,y) \geq 1$ then we get from (4.3.10) that

$$|La(x,\omega) - La(y,\omega)| \lesssim 3\epsilon d(x,y),$$

and this inequality is also true when $d(x,y) = 0$, so it is true for all $x, y \in \mathfrak{X}$ and condition 3a is satisfied.

Let us now prove that condition 3b is satisfied. That is for every $l, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathfrak{X}$ and $\omega \in \Omega$,

$$|La(x,\omega) - La(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(La(x,\omega) - La(y,\omega))| \leq \frac{f_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\epsilon,$$

for some function $t \mapsto f_l(t)$.

Recall that

$$\mathcal{E}_n^x(La)(y,\omega) = \frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))} \frac{1}{q} \int_{\Omega_n(x,\omega)} \sum_{y':\sigma_{\omega'}(y')=y} a(y',\omega') d\nu_x(\omega').$$

If $n \geq d(x,y) + 1$ then $\{y' : \sigma_{\omega'}(y') = y\} = \{y' : \sigma_\omega(y') = y\}$ for every $\omega' \in \Omega_n(x,\omega)$. So

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n^x(La)(y,\omega) &= \frac{1}{q} \sum_{y':\sigma_\omega(y')=y} \frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))} \int_{\Omega_n(x,\omega)} a(y',\omega') d\nu_x(\omega') \\
&= \frac{1}{q} \sum_{y':\sigma_\omega(y')=y} \mathcal{E}_n^x a(y',\omega),
\end{aligned}$$

and recall from equality (4.3.9) at the beginning of the proof that

$$\mathcal{E}_n^x(La)(x,\omega) = \frac{1}{q} \sum_{x':\sigma_\omega(x')=x} \mathcal{E}_n^x a(x',\omega)$$

For every $x', y' \in \mathfrak{X}$ such that $\sigma_\omega(x') = x$ and $\sigma_\omega(y') = y$, we have

$$\begin{aligned}
|a(x',&\omega) - a(y',\omega) - \mathcal{E}_n^x(a(x',\omega) - a(y',\omega))| \\
&= |a(x',\omega) - a(y',\omega) - \mathcal{E}_{n+1}^{x'}(a(x',\omega) - a(y',\omega))| \\
&\leq \frac{f_l(d(x',y'))}{(2+n)^l}\epsilon,
\end{aligned}$$

using for the last inequality the fact that $a \in S_{sc}$ satisfies condition 3b. Therefore when we sum over pairs (x', y') formed by grouping arbitrarily the elements of the two sets $\{x' : \sigma_\omega(x') = x\}$ and $\{y' : \sigma_\omega(y') = y\}$, and divide by q, we obtain

$$|La(x,\omega) - La(y,\omega) - \mathcal{E}_n^x(La(x,\omega) - La(y,\omega))| \leq \frac{g_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\epsilon, \tag{4.3.11}$$

for some function $t \mapsto g_l(t)$ and condition 3b is thus satisfied when $n \geq 1 + d(x,y)$.

Let us now consider the case $n \leq 1 + d(x, y)$. The end of the proof is the same as that of proposition 4.3.2. We just have to replace the shift with the transfer operator. Recall that for each $n \leq 1 + d(x, y)$,

$$\mathcal{E}_n^x(La(x, \omega) - La(y, \omega)) = \frac{1}{\nu(\Omega_n(x, \omega))} \int_{\Omega_n(x,\omega)} La(x, \omega') - La(y, \omega') d\nu_x(\omega').$$

We have to estimate

$$\begin{aligned} &La(x, \omega) - La(y, \omega) - \mathcal{E}_n^x(La(x, \omega) - La(y, \omega)) \\ &= \frac{1}{\nu(\Omega_n(x, \omega))} \int_{\Omega_n(x,\omega)} La(x, \omega) - La(x, \omega') - (La(y, \omega) - La(y, \omega')) d\nu_x(\omega'). \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Recall that

$$La(x, \omega) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{x' \\ \sigma_\omega(x')=x}} a(x', \omega) \quad \text{and} \quad La(x, \omega') = \frac{1}{q} \sum_{\substack{x'' \\ \sigma_{\omega'}(x'')=x}} a(x'', \omega').$$

For each $x', x'' \in \mathfrak{X}$ such that $\sigma_\omega(x') = x$ and $\sigma_{\omega'}(x'') = x$, we have $d(x', x'') \leq 2$. We thus have

$$|La(x, \omega) - La(x, \omega')| \lesssim 2\epsilon$$

and the same is true when we replace x with y. Therefore (4.3.12) gives

$$|La(x, \omega) - La(y, \omega) - \mathcal{E}_n^x(La(x, \omega) - La(y, \omega))| \lesssim 4\epsilon.$$

Moreover, as $n \leq 1 + d(x, y)$ we have $(1 + n) \leq (2 + d(x, y))$. Thus for every $l \in \mathbb{N}$

$$(1 + n)^l |La(x, \omega) - La(y, \omega) - \mathcal{E}_n^x(La(x, \omega) - La(y, \omega))| \lesssim (2 + d(x, y))^l 4\epsilon,$$

in this case. Together with (4.3.11) it gives for every $l, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathfrak{X}$ and $\omega \in \Omega$,

$$|La(x, \omega) - La(y, \omega) - \mathcal{E}_n^x(La(x, \omega) - La(y, \omega))| \leq \frac{f_l(d(x, y))}{(1 + n)^l} \epsilon,$$

for some function $t \mapsto f_l(t)$ that grows at least like t^l. This is compatible with condition 3b. $\square$

Using the previous properties, we will now give some natural and nontrivial examples of symbols belonging to our symbol classes.

Example 4.3.1. Condition 1 tells us that the symbol must not vary too much with respect to ω. Recall that a pair (x, ω) is equivalent to a half-geodesic starting at x : $[x, \omega) = (x, x_1, x_2, \ldots)$. We can therefore write equivalently $a(x, \omega, s)$ or $a(x, x_1, x_2, \ldots, s)$. Asking that the symbol depend only on a finite number of coordinates — more precisely that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that for every $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{X}^n$,

$$a(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots, s) = a(x_1, \ldots, x_n, x'_{n+1}, x'_{n+2}, \ldots, s)$$

for all half geodesics $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots)$ and $(x_n, x'_{n+1}, x'_{n+2} \ldots)$ — is a simple way of satisfying condition 1. Indeed, if a depends only on n_0 coordinates, then

$$\sup_x \|a(x,\cdot,\cdot) - \mathcal{E}_n^x a(x,\cdot,\cdot)\|_\infty = 0,$$

for all $n \geq n_0$. Incidentally, condition 3b is then also satisfied. But it is not clear at first sight if this can be easily coupled with condition 3a, asking that the symbols do not vary too much with respect to x, for symbols depending on more than one coordinate.

A way to get a symbol satisfying all the conditions and depending on more than one coordinate is to start from a function $a(x,s)$ satisfying conditions 2 and 3a. As a does not depend on ω, it automatically satisfies condition 1 and 3b and therefore belongs to S_{sc}. Then for every $k \in \mathbb{N}$, $a \circ \sigma^k$ is still a symbol in S_{sc}, according to proposition 4.3.2, and it depends on k coordinates. This is a fundamental example of symbol for quantum ergodicity.

4.4 Rapid decay of the kernel

Many proofs of pseudo-differential calculus theorems will rely on the following result about the rapid decay of the kernel away from the diagonal.

Proposition 4.4.1. *The kernel of the operator* $\mathrm{OP}(a)$ *associated with a double symbol* $a \in S(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$*, defined by*

$$K_a(x,y) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,y,\omega,s) d\nu_x(\omega) d\mu(s),$$

has the following property: for all $N \in \mathbb{N}$ *there exists a constant* $C_a(N)$ *such that*

$$|K_a(x,y)| \leq C_a(N) \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N}$$

for every $x, y \in \mathfrak{X}$*. The dependence on* a *of the constant* $C_a(N)$ *is given by*

$$C_a(N) = C_N \left(\|a\|_{\Omega,N} + \sum_{k=0}^{N+1} \|\partial_s^k a\|_\infty \right),$$

where

$$\|a\|_{\Omega,N} = \sup_{x,y\in\mathfrak{X}} \sup_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^N \|(a - \mathcal{E}_n^x a)(x,y,\cdot,\cdot)\|_\infty$$

is the constant of condition 1 of definition 4.3.2 with $l = N$.

Remark 4.4.1. The proof is essentially a paraphrase of the second part of the proof of Theorem 2 in [12]. The regularity in s of the symbol and integration by parts are used to get a decay of the kernel. We include it here for completeness and because of the small difference in the hypothesis. Indeed our variable s is in $[0,\tau]$ rather than $[-\tau,\tau]$ and the *symmetry condition* is replaced by condition 2 of definition 4.3.2. We also keep track of the dependence on a of the constants.

Proof. We fix $x, y \in \mathfrak{X}$ and $N \in \mathbb{N}$. As the definition of the kernel does not depend on the choice of a reference point, we can take x to be the new reference point ($x = o$), to simplify the notation. We thus have to prove that there exists a constant $C_a(N)$ independent of x and y, such that the kernel

$$K_a(o,y) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(y)} a(o,y,\omega,s)d\nu(\omega)d\mu(s)$$

satisfies

$$|K_a(o,y)| \leq C_a(N)\frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(1+|y|)^N}.$$

We take M to be the integer part of $\frac{|y|}{3}$ and we decompose

$$a(o,y,\omega,s) = (a - \mathcal{E}_M a)(o,y,\omega,s) + \mathcal{E}_M a(o,y,\omega,s).$$

The first part of the decomposition leads to the following computation [2]

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(y)}(a - \mathcal{E}_M a)(o,y,\omega,s)d\nu(\omega)d\mu(s)\right| \\
&\leq \|a - \mathcal{E}_M a\|_\infty \left|\sum_{j=0}^{|y|}\int_{E_j(y)} q^{j-\frac{|y|}{2}}d\nu(\omega)\right| \\
&\leq \|a - \mathcal{E}_M a\|_\infty \sum_{j=0}^{|y|} \nu(E_j(y))q^{j-\frac{|y|}{2}} \\
&\leq \|a - \mathcal{E}_M a\|_\infty (1+|y|)q^{-\frac{|y|}{2}} \\
&\leq \|a\|_{\Omega,N+1}\frac{1}{(1+M)^{N+1}}(1+|y|)q^{-\frac{|y|}{2}} \\
&\lesssim_N \|a\|_{\Omega,N+1}\frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(1+|y|)^N}
\end{aligned}$$

where we used the fact (4.2.4) that $\nu(E_j(y)) \leq q^{-j}$, and that $1 + M \geq C(1+|y|)$.

For the second part of the decomposition we use the notation $A_M(y,s) = \mathcal{E}_M a(o,y,\omega,s)$ for any $\omega \in \cup_{j=M}^{|y|} E_j(y)$ (for every s, $\mathcal{E}_M a(o,y,\cdot,s)$ is constant on this set), and

$$\mathcal{A}_M(y,\omega,s) = \mathcal{E}_M a(o,y,\omega,s) - A_M(y,s),$$

so that we can write

$$\mathcal{E}_M a(o,y,\omega,s) = \mathcal{A}_M(y,\omega,s) + A_M(y,s).$$

2. See (4.2.3) for the definition of the sets E_j.

Because $|y| \geq M$ we then have

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^\tau & q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(y)} \mathcal{E}_M a(o,y,\omega,s) d\nu(\omega) d\mu(s) \\
&= \sum_{j=0}^{|y|} \int_{E_j(y)} \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(2j-|y|)} \mathcal{A}_M(y,\omega,s) d\nu(\omega) d\mu(s) \\
&\quad + \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)h_\omega(y)} A_M(y,s) d\nu(\omega) d\mu(s) \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(2j-|y|)} \int_{E_j(y)} \mathcal{A}_M(y,\omega,s) d\nu(\omega) d\mu(s) \\
&\quad + \int_0^\tau A_M(y,s) \phi_s(y) d\mu(s) \\
&= \sum_{j=0}^{M} I_{j,M},
\end{aligned}
$$

where for all $j \in \{0,\ldots,M-1\}$

$$
I_{j,M} = \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(2j-|y|)} \int_{E_j(y)} \mathcal{A}_M(y,\omega,s) d\nu(\omega) d\mu(s),
$$

and

$$
I_{M,M} = \int_0^\tau A_M(y,s) \phi_s(y) d\mu(s).
$$

We first look at the last term $I_{M,M}$ of the sum. The spherical function $\phi_s(y)$ is given on $\mathbb{R} \setminus \tau\mathbb{Z}$ by

$$
\phi_s(y) = c(s) q^{(is-\frac{1}{2})|y|} + c(-s) q^{(-is-\frac{1}{2})|y|}.
$$

Recall from (4.2.8) that $d\mu(s) = c_P |c(s)|^{-2} ds$. We integrate $I_{M,M}$ by parts N times. The boundary terms vanish because of condition 2 of the definition of the class of symbols. We have

$$
\begin{aligned}
I_{M,M} &= c_P \int_0^\tau A_M(y,s) q^{(is-\frac{1}{2})|y|} c(s) |c(s)|^{-2} \\
&\quad + A_M(y,s) q^{(-is-\frac{1}{2})|y|} c(-s) |c(s)|^{-2} ds \\
&= \frac{c_P q^{-\frac{|y|}{2}} (-1)^N}{(i|y| \log q)^N} \int_0^\tau q^{is|y|} \partial_s^N \left(A_M(y,s) c(s) |c(s)|^{-2} \right) \\
&\quad + (-1)^N q^{-is|y|} \partial_s^N \left(A_M(y,s) c(-s) |c(s)|^{-2} \right) ds
\end{aligned}
$$

The derivative

$$
\partial_s^N \left(A_M(y,s) c(\pm s) |c(s)|^{-2} \right)
$$

is a linear combination of $N+1$ terms of the form

$$
\partial_s^k A_M(y,s) \partial_s^{N-k} \left(c(\pm s) |c(s)|^{-2} \right).
$$

Because $\|\partial_s^k A_M(y,\cdot)\|_\infty \leq \|\partial_s^k a\|_\infty$ for all k we have

$$\left|\int_0^\tau q^{\pm is|y|}\partial_s^k A_M(y,s)\partial_s^{N-k}\left(c(\pm s)|c(s)|^{-2}\right)ds\right|$$
$$\leq \|\partial_s^k a\|_\infty \int_0^\tau \partial_s^{N-k}\left(|c(\pm s)||c(s)|^{-2}\right)ds.$$

Using the fact that the poles of $c(\pm s)$ are compensated by $|c(s)|^{-2}$, as can be seen in (4.2.9) and (4.2.10) and therefore that the map $s\mapsto c(\pm s)|c(s)|^{-2}$ is $C^\infty([0,\tau])$ we conclude that

$$|I_{M,M}| \lesssim_N \frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(1+|y|)^N}\sum_{k=0}^N \|\partial_s^k a\|_\infty.$$

It remains to bound the terms $I_{j,M}$ for $0\leq i\leq M-1$. After $N+1$ integration by parts each term is given by

$$\frac{c_P q^{j-\frac{|y|}{2}}(-1)^{N+1}}{[i(2j-|y|)\log q]^{N+1}}\int_0^\tau q^{is(2j-|y|)}\partial_s^{N+1}\left(\int_{E_j(y)}\mathcal{A}_M(y,\omega,s)d\nu(\omega)|c(s)|^{-2}\right)ds,$$

which is a linear combination of $N+2$ terms of the form

$$\frac{q^{j-\frac{|y|}{2}}(\log q)^{-1-N}}{[-i(2j-|y|)]^{N+1}}\int_0^\tau q^{is(2j-|y|)}\int_{E_j(y)}\partial_s^k\mathcal{A}_M(y,\omega,s)d\nu(\omega)\partial_s^{N+1-k}(|c(s)|^{-2})ds,$$

the modulus of which is bounded from above by

$$\frac{q^{j-\frac{|y|}{2}}(\log q)^{-1-N}}{(2j-|y|)^{N+1}}\nu(E_j(y))\|\partial_s^k a\|_\infty\int_0^\tau \partial_s^{N+1-k}(|c(s)|^{-2})ds$$
$$\lesssim_N \frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(2j-|y|)^{N+1}}\|\partial_s^k a\|_\infty,$$

using the fact that $\nu(E_j(y))\leq q^{-j}$ and $s\mapsto |c(s)|^{-2}$ is $C^\infty([0,\tau])$.

Now, because $0\leq j\leq M$ and $\frac{|y|}{3}-1\leq M\leq\frac{|y|}{3}$ we have $|2j-|y||\geq\frac{|y|}{3}$ and we obtain

$$\frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(2j-|y|)^{N+1}}\|\partial_s^k a\|_\infty \lesssim_N \frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(1+|y|)^{N+1}}\|\partial_s^k a\|_\infty.$$

Finally

$$|I_{j,M}| \lesssim_N \frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(1+|y|)^{N+1}}\sum_{k=0}^{N+1}\|\partial_s^k a\|_\infty.$$

We thus have

$$\sum_{j=0}^{M-1}|I_{j,M}| \lesssim_N M\frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(1+|y|)^{N+1}}\sum_{k=0}^{N+1}\|\partial_s^k a\|_\infty.$$

But $M \leq C(1+|y|)$, so

$$\sum_{j=0}^{M-1} |I_{j,M}| \lesssim_N \frac{q^{-\frac{|y|}{2}}}{(1+|y|)^N} \sum_{k=0}^{N+1} \|\partial_s^k a\|_\infty .$$

$\square$

4.5 Continuity of the operators

Theorem 4.5.1. *The operator* $\mathrm{OP}(a)$ *associated with a double symbol* $a \in S(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ *can be extended to a bounded operator from* $L^2(\mathfrak{X})$ *to* $L^2(\mathfrak{X})$*. The following inequality holds: there exists* $C > 0$ *such that*

$$\|\mathrm{OP}(a)\|_2 \leq C \left(\|a\|_{\Omega,4} + \sum_{k=0}^{4} \|\partial_s^k a\|_\infty \right),$$

where

$$\|a\|_{\Omega,4} = \sup_{x,y\in\mathfrak{X}} \sup_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^4 \|(a - \mathcal{E}_n^x a)(x,y,\cdot,\cdot)\|_\infty .$$

This theorem is an immediate consequence of the following proposition and of proposition 4.4.1 on the rapid decay of the kernel associated with $\mathrm{OP}(a)$.

Proposition 4.5.1. *Let* $A : \mathcal{F}_c(\mathfrak{X}) \to L^2(\mathfrak{X})$ *be an operator, where* $\mathcal{F}_c$ *is the set of finitely supported functions on* $\mathfrak{X}$*. Suppose that there exists an integer* $N \geq 3$ *such that the kernel of* A *satisfies*

$$|K_A(x,y)| \leq C_A(N) \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N}. \tag{4.5.1}$$

Then A *can be extended to a bounded operator from* L^2 *to* L^2 *and there exists a constant* $C(N)$ *such that*

$$\|A\|_{L^2\to L^2} \leq C_A(N) C(N),$$

the constant $C_A(N)$ *being the same as in inequality* (4.5.1).

The following lemma will be used

Lemma 4.5.2. *Let* $N \geq 3$*. If there are constants* $C_A = C_A(N)$ *and* $C_B = C_B(N)$ *such that for all* $x, y \in \mathfrak{X}$

$$|K_A(x,y)| \leq C_A \frac{q^{-d(x,y)/2}}{(1+d(x,y))^N} \quad \text{and} \quad |K_B(x,y)| \leq C_B \frac{q^{-d(x,y)/2}}{(1+d(x,y))^N},$$

then there is a constant $C(N)$ *such that*

$$|K_{AB}(x,y)| \leq C(N) C_A(N) C_B(N) \frac{q^{-d(x,y)/2}}{(1+d(x,y))^N}$$

for all $x, y \in \mathfrak{X}$.

Proof. The kernel of the product $K_{AB}(x,y)=\sum_z K_A(x,z)K_B(z,y)$ can be bounded by

$$|K_{AB}(x,y)|\leq C_AC_B\sum_z\frac{q^{-d(x,z)/2}}{(1+d(x,z))^N}\frac{q^{-d(z,y)/2}}{(1+d(z,y))^N}$$

On the tree $\mathfrak{X}$, we have $d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)+2d(z,c_z(x,y))$, where $c_z(x,y)$ is the first vertex lying on both oriented segments $[x,z]$ and $[y,z]$. Note that this vertex lies on $[x,y]$. The sets $F_n=\{z\mid d(z,c_z(x,y))=n\}$, $n\in\mathbb{N}$ then form a partition of the tree. In each F_n, for every $k=d(x,c_z(x,y))$ between 0 and $d(x,y)$, the number of vertices z such that $d(x,z)=k+n$ (i.e. such that $d(z,y)=d(x,y)+n-k$) is equal to q^n when $k=0$ or $k=d(x,y)$, and is equal to $(q-1)q^{n-1}$ in the other cases.

We then have

$$\begin{aligned}|K_{AB}(x,y)|&\leq C_AC_Bq^{-\frac{d(x,y)}{2}}\sum_z\frac{q^{-d(z,c_z(x,y))}}{(1+d(x,z))^N(1+d(z,y))^N}\\&=C_AC_Bq^{-\frac{d(x,y)}{2}}\sum_{n\geq0}\sum_{z\in F_n}\frac{q^{-n}}{(1+d(x,z))^N(1+d(z,y))^N}\\&\leq C_AC_Bq^{-\frac{d(x,y)}{2}}\sum_{n\geq0}\sum_{k=0}^{d(x,y)}\frac{1}{(1+k+n)^N(1+d(x,y)+n-k)^N}\end{aligned}$$

To get the result, it is sufficient to prove that there exists a constant $C(N)$ such that for all $D\in\mathbb{N}$

$$\sum_{n\geq0}\sum_{k=0}^{D}\frac{1}{(1+k+n)^N(1+D+n-k)^N}\leq\frac{C(N)}{(1+D)^N}. \tag{4.5.2}$$

Let us denote by $\lfloor D/2\rfloor$ the integral part of $D/2$. We have

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq0}\sum_{k=0}^{D}\frac{1}{(1+k+n)^N(1+D+n-k)^N}\\&\qquad\leq2\sum_{n\geq0}\sum_{k=0}^{\lfloor D/2\rfloor}\frac{1}{(1+k+n)^N(1+D+n-k)^N}\end{aligned}$$

where the inequality is an equality when D is odd. Now for every $n\geq0$ and every $k\in\{0,\dots,\lfloor D/2\rfloor\}$, $D-k\geq D/2$ and

$$\frac{1}{(1+D+n-k)}\leq\frac{1}{1+D/2}.$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{D}&\frac{1}{(1+k+n)^N(1+D+n-k)^N}\\ &\leq \frac{2}{(1+D/2)^N}\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{\lfloor D/2\rfloor}\frac{1}{(1+k+n)^N}\\ &\leq \frac{2}{(1+D/2)^N}\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+k+n)^N}\end{aligned}$$

The series converges whenever $N \geq 3$, and $(1+D/2)^{-1} \leq 2(1+D)^{-1}$, so we obtain (4.5.2), which concludes the proof. □

Proof of Proposition 4.5.1. Notice that A^*, the adjoint of A, also satisfies (4.5.1), because $K_{A^*}(x,y) = \overline{K_A(y,x)}$. Therefore, by Lemma 4.5.2 $(A^*A)^k$ satisfies (4.5.1) with constant $C_A(N)^{2k}C(N)^{2k}$, by induction.

We will first assume that $K_A(x,y)$ has finite support and then go back to the general case.

Because $K_A(x,y)$ has finite support, both K_A and K_{A^*} have finite support in the first argument. The support of $K_{(A^*A)^k}$ in the first argument is thus finite[3] :

$$\#\mathrm{Supp}_1 = \#\{x \in \mathfrak{X} \mid \exists y \in \mathfrak{X}, K_{(A^*A)^k}(x,y) \neq 0\} < \infty.$$

In this case $(A^*A)^k$ is Hilbert-Schmidt : we have

$$\begin{aligned}\|(A^*A)^k\|_2^2 \leq \|(A^*A)^k\|_{HS}^2 &= \sum_{x,y\in\mathfrak{X}} |K_{(A^*A)^k}(x,y)|^2\\ &\leq C_A(N)^{4k}C(N)^{4k}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{y\in S(x,n)}\frac{q^{-n}}{(1+n)^{2N}}\\ &\leq C_A(N)^{4k}C(N)^{4k}\#\mathrm{Supp}_1\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2}{(1+n)^{2N}}\\ &\leq C_A(N)^{4k}C(N)^{4k}C'\#\mathrm{Supp}_1\end{aligned}$$

where on the third line we used the fact that there are $(q+1)q^{n-1} \leq 2q^n$ vertices on the sphere $S(x,n)$ of center x and radius n, for each $x \in \mathfrak{X}$. We then use the facts that $\|A^*A\|_2 = \|A\|_2^2$ and A^*A is self-adjoint in order to write

$$\begin{aligned}\|A\|_2 = \|A^*A\|_2^{1/2} = \rho(A^*A)^{1/2} &= \lim_{k\to\infty}\|(A^*A)^k\|_2^{\frac{1}{2k}}\\ &\leq \lim_{k\to\infty}(C'\#\mathrm{Supp}_1)^{\frac{1}{4k}}C_A(N)C(N)\\ &= C_A(N)C(N)\end{aligned}$$

3. Note that a finite support in the first argument for K_{A^*} is enough here, because then $K_{(A^*A)^k}$ has also finite support in the first argument

where $\rho(A^*A)$ is the spectral radius of A^*A. We thus have a bound on $\|A\|_2$ which is independent of the support of A.

Going back to the general case, for an operator $A : \mathcal{F}_c(\mathfrak{X}) \to L^2(\mathfrak{X})$ satisfying (4.5.1) we write

$$A_R = M_{\chi_{B(0,R)}} A M_{\chi_{B(0,R)}}$$

where M_f is the multiplication by the function f and $\chi_{B(0,R)}$ is the characteristic function of the ball of center 0 and radius R. The operator A_R has a kernel with finite support and converges weakly to A. Now A_R satisfies (4.5.1) with constant $C_A(N)C(N)$ and therefore we have

$$\langle \psi, A_R \varphi \rangle \leq C_A(N)C(N)\|\psi\|_2\|\varphi\|_2,$$

the right member of the inequality being independent of R, which gives when $R \to \infty$

$$\langle \psi, A\varphi \rangle \leq C_A(N)C(N)\|\psi\|_2\|\varphi\|_2$$

for all φ, ψ with finite support on $\mathfrak{X}$. By a density argument we can replace ψ with $A\varphi$ in the previous inequality and we get, for all φ with finite support

$$\|A\varphi\|_2 \leq C_A(N)C(N)\|\varphi\|_2.$$

The operator A can thus be extended to a bounded operator from $L^2(\mathfrak{X})$ to $L^2(\mathfrak{X})$ with the same bound. □

4.6 Adjoint and product

Theorem 4.6.1. *Let $a = a_\epsilon \in S_{sc}$. Let* $\mathrm{Op}(a)^*$ *be the adjoint of* $\mathrm{Op}(a)$. *Then* $\mathrm{Op}(\bar{a}) - \mathrm{Op}(a)^*$ *is negligible. In particular we have*

$$\| \mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a})\|_{L^2 \to L^2} = o_\epsilon(1).$$

Proof. We work on the kernels in order to estimate the difference $\mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a})$.

If $K_a(x, y)$ is the kernel of $\mathrm{Op}(a)$, then $\overline{K_a(y, x)}$ is the kernel of the adjoint $\mathrm{Op}(a)^*$. We study the kernel of the remainder $K(x, y) = \overline{K_a(y, x)} - K_{\overline{a}}(x, y)$.

As the rapid decay property away from the diagonal (proposition 4.4.1) is symmetric in x and y, the kernel of the adjoint also has it and we have [4]

$$|K(x, y)| \lesssim_N \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1 + d(x, y))^N}$$

for all $N \in \mathbb{N}$. Therefore if we cut off the kernel, for all $\rho > 0$

$$K(x, y) = K(x, y)\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} + K_R(x, y)$$

4. Note that we will omit the dependence on a in our notation throughout the proof.

then $K_R(x,y) = K(x,y)\chi_{\{d(x,y)>\rho\}}$ satisfies

$$|K_R(x,y)| \lesssim_N \frac{1}{(1+\rho)^\alpha} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^{N-\alpha}}.$$

We take $N - \alpha \geq 3$ so that the operator R associated with this kernel is bounded on $L^2(\mathfrak{X})$, according to proposition 4.5.1, and we have

$$\|R\|_2 \lesssim_\alpha \frac{1}{(1+\rho)^\alpha} \lesssim_\alpha \rho^{-\alpha}.$$

The other part $K(x,y)\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}}$ is the kernel associated with the pseudo-differential operator of double symbol

$$r(x,y,\omega,s) = (\overline{a(y,\omega,s)} - \overline{a(x,\omega,s)})\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}}.$$

But $a \in S_{sc}$, and according to condition 3 of definition 4.3.3 of S_{sc}, $\forall l \in \mathbb{N}, \exists f_l$ such that $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ and $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|(r - \mathcal{E}_n^x r)(x,y,\omega,s)| &= |(a - \mathcal{E}_n^x a)(x,\omega,s) - (a - \mathcal{E}_n^x a)(y,\omega,s)|\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} \\
&\leq \epsilon \frac{f_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} \\
&\leq \epsilon \frac{f_l(\rho)}{(1+n)^l}.
\end{aligned}$$

We used that $t \mapsto f_l(t)$ is an increasing function. Therefore, r satisfies condition 1 (and 2) of definition 4.3.2 uniformly in y and according to proposition 4.4.1 we have

$$|K_r(x,y)| \leq \epsilon g_l(\rho) \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^l},$$

where K_r is the kernel of the pseudo-differential operator $\mathrm{Op}(r)$ associated with the double symbol r and $g_l(t) = \max\{t, f_l(t)\}$. We take $l = 3$ and apply proposition 4.5.1 in order to obtain

$$\|\mathrm{Op}(r)\|_2 \lesssim \epsilon g_3(\rho).$$

We thus have for every $\alpha, \rho > 0$

$$\|\mathrm{Op}(a)^* - \mathrm{Op}(\overline{a})\|_2 \lesssim_\alpha (\epsilon g_3(\rho) + \rho^{-\alpha}).$$

We then take $\rho = \rho(\epsilon)$ tending to infinity when $\epsilon \to 0$ but sufficiently slowly such that $\epsilon g_3(\rho) \to 0$ when $\epsilon \to 0$. □

Theorem 4.6.2. *Let $a \in S(\mathfrak{X})$ and $b = b_\epsilon \in S_{sc}(\mathfrak{X})$. Then $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(ab)$ is negligible. In particular we have*

$$\|\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(ab)\|_{L^2 \to L^2} = o_\epsilon(1).$$

Proof. Recall that if we define $\tilde{a}(x,y,\omega,s) = a(x,\omega,s)$ for all $y \in \mathfrak{X}$, then $\mathrm{OP}(\tilde{a}) = \mathrm{Op}(a)$. We will call this the *left quantization* and denote it by $\mathrm{Op}_l(a)$. Now if $\hat{a}(x,y,\omega,s) = a(y,\omega,s)$ for all $x \in \mathfrak{X}$, we can define another operator, the *right quantization*, by writing $\mathrm{Op}_r(a) = \mathrm{OP}(\hat{a})$. If $k_a(x,y)$ is the kernel of $\mathrm{Op}_l(a)$:

$$k_a(x,y) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s) d\nu_x(\omega) d\mu(s)$$

then the kernel of $\mathrm{Op}_r(a)$ is

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^\tau & q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(y,\omega,s) d\nu_x(\omega) d\mu(s) \\ &= \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}-is\right)(h_\omega(x)-h_\omega(y))} a(y,\omega,s) d\nu_y(\omega) d\mu(s) \\ &= \overline{k_{\bar{a}}(y,x)}\end{aligned}$$

because $d\nu_x(\omega) = q^{(h_\omega(x)-h_\omega(y))} d\nu_y(\omega)$. If a is real, then $\mathrm{Op}_l(a) = \mathrm{Op}_r(a)^*$ and theorem 4.6.1 tells us that $\mathrm{Op}_l(a) - \mathrm{Op}_r(a)$ is negligible. If a is complex, we can treat separately the real and imaginary parts and we get also that $\mathrm{Op}_l(a) - \mathrm{Op}_r(a)$ is negligible.

Let $c(x,y,\omega,s) = a(x,\omega,s)b(y,\omega,s)$. We have $\mathrm{Op}_l(a)\,\mathrm{Op}_r(b) = \mathrm{OP}(c)$. Indeed, the kernel of $\mathrm{OP}(c) = \mathrm{Op}_l(a)\,\mathrm{Op}_r(b)$ is given by

$$K_c(x,y) = \sum_{z \in \mathfrak{X}} k_a(x,z) \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(z))} b(y,\omega,s) d\nu_z(\omega) d\mu(s).$$

We then use (4.3.1) to write

$$a(x,\omega,s) = \sum_{z \in \mathfrak{X}} k_a(x,z) q^{\left(\frac{1}{2}-is\right)(h_\omega(z)-h_\omega(x))}$$

and we obtain that $K_c(x,y)$ is equal to

$$\int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} q^{h_\omega(x)-h_\omega(z)} a(x,\omega,s) b(y,\omega,s) d\nu_z(\omega) d\mu(s).$$

According to (4.2.6) we have

$$q^{h_\omega(x)-h_\omega(z)} d\nu_z(\omega) = d\nu_x(\omega),$$

so

$$K_c(x,y) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s) b(y,\omega,s) d\nu_x(\omega) d\mu(s),$$

as we wanted.

Modulo negligible operators, we thus have

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) &= \mathrm{Op}_l(a)\,\mathrm{Op}_l(b) \\ &= \mathrm{Op}_l(a)\,\mathrm{Op}_r(b) \\ &= \mathrm{OP}(c) \\ &= \mathrm{Op}(ab) + \mathrm{OP}(r)\end{aligned}$$

where $r(x,y,\omega,s) = a(x,\omega,s)(b(y,\omega,s) - b(x,\omega,s))$. As in the proof of theorem 4.6.1, it is sufficient to study a cut-off of the remainder $\mathrm{OP}(r)$. Indeed, lemma 4.5.2 tells us that the kernel K of $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b)$ has the property of rapid decay

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad |K(x,y)| \lesssim_N \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N}$$

as a product of two operators satisfying this property, and the same is true for $\mathrm{Op}(ab)$, because $ab \in S_{sc}$ according to lemma 4.3.1.

If we denote by K_r the kernel of $\mathrm{OP}(r)$, for all $\rho > 0$ we have

$$K_r(x,y) = K_r(x,y)\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} + K_R(x,y)$$

where K_R satisfies

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad |K_R(x,y)| \lesssim_N \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N}\rho^{-\alpha}$$

and therefore corresponds to a negligible operator, provided that we choose $\rho = \rho(\epsilon)$ such that $\lim_{\epsilon\to 0} \rho^{-\alpha}(\epsilon) = 0$.

The part $K_r(x,y)\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}}$ is the kernel of the operator $\mathrm{OP}(r_\rho)$, where

$$\begin{aligned} r_\rho(x,y,\omega,s) &= r(x,y,\omega,s)\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} \\ &= a(x,\omega,s)(b(y,\omega,s) - b(x,\omega,s))\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} \end{aligned}$$

Given that a is bounded and $b \in S_{sc}$, we have, using condition 3 of definition 4.3.3 of S_{sc}, $\forall l \in \mathbb{N}, \exists f_l$ such that $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ and $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &|(r_\rho - \mathcal{E}_n^x r_\rho)(x,y,\omega,s)| \\ &\quad\leq \|a\|_\infty |(b - \mathcal{E}_n^x b)(x,\omega,s) - (b - \mathcal{E}_n^x b)(y,\omega,s)|\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} \\ &\quad\lesssim_a \epsilon\frac{f_l(d(x,y))}{(1+n)^l}\chi_{\{d(x,y)\leq\rho\}} \\ &\quad\lesssim_a \epsilon\frac{f_l(\rho)}{(1+n)^l}. \end{aligned}$$

We used that $t \mapsto f_l(t)$ is an increasing function. The rest of the proof is then similar to the proof of theorem 4.6.1 on the adjoint. The function r_ρ satisfies the conditions of definition 4.3.2 and is therefore in the class S. According to proposition 4.4.1 we have for every $l \in \mathbb{N}$,

$$|K_{r_\rho}(x,y)| \lesssim_{a,b} \epsilon g_l(\rho)\frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^l},$$

for some function $t \mapsto g_l(t)$, where K_{r_ρ} is the kernel of $\mathrm{OP}(r_\rho)$. We take $l = 3$ and apply proposition 4.5.1 in order to obtain

$$\|\mathrm{OP}(r_\rho)\|_2 \lesssim_{a,b} \epsilon g_3(\rho).$$

We thus have for every $\alpha, \rho > 0$

$$\| \operatorname{Op}(a) \operatorname{Op}(b) - \operatorname{Op}(ab) \|_2 \lesssim_{a,b,\alpha} (\epsilon g_3(\rho) + \rho^{-\alpha}).$$

We then take $\rho = \rho(\epsilon)$ tending to infinity when $\epsilon \to 0$ but sufficiently slowly such that $\epsilon g_3(\rho) \to 0$ when $\epsilon \to 0$. $\square$

With the preceding proof, we obtain a remainder in the product formula of the order of $O_\delta(\epsilon^{1-\delta})$ for any $\delta > 0$. By following a different strategy, it is possible to have a better remainder. But we have to make a stronger hypothesis on one of the symbols. However, this hypothesis is satisfied by our principal example of symbols (see Example 4.3.1).

Theorem 4.6.3. *Let $a \in S(\mathfrak{X})$ and $b = b_\epsilon \in S_{sc}(\mathfrak{X})$. Recall condition 3b of Definition 4.3.3 as satisfied by the symbol b: for every $l \in \mathbb{N}$, there exists a function $t \mapsto f_l(t)$ such that for every $x, y \in \mathfrak{X}$ and $n \in \mathbb{N}$*

$$|(b - \mathcal{E}_n^x b)(x, \omega, s) - (b - \mathcal{E}_n^x b)(y, \omega, s)| \leq \epsilon \frac{f_l(d(x, y))}{(1+n)^l},$$

and suppose that for the symbol b the function $t \mapsto f_l(t)$ is polynomial. In this case we have

$$\| \operatorname{Op}(a) \operatorname{Op}(b) - \operatorname{Op}(ab) \|_2 = O(\epsilon).$$

Proof. The action of $\operatorname{Op}(a) \operatorname{Op}(b)$ is equivalent to the action of an operator $\operatorname{Op}(a\#b)$ where, according to (4.3.1), $a\#b(x, \omega, s)$ is obtained from the kernel by

$$\begin{aligned}
a\#b&(x, \omega, s) \\
&= \sum_{z \in \mathfrak{X}} q^{(\frac{1}{2} - is)(h_\omega(z) - h_\omega(x))} K_{a\#b}(x, z) \\
&= \sum_{z \in \mathfrak{X}} q^{(\frac{1}{2} - is)(h_\omega(z) - h_\omega(x))} \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_a(x, y) K_b(y, z) \\
&= \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_a(x, y) q^{(\frac{1}{2} - is)(h_\omega(y) - h_\omega(x))} \sum_{z \in \mathfrak{X}} q^{(\frac{1}{2} - is)(h_\omega(z) - h_\omega(y))} K_b(y, z) \\
&= \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_a(x, y) q^{(\frac{1}{2} - is)(h_\omega(y) - h_\omega(x))} b(y, \omega, s).
\end{aligned}$$

The operator $\operatorname{Op}(a) \operatorname{Op}(b) - \operatorname{Op}(ab) = \operatorname{Op}(a\#b) - \operatorname{Op}(ab)$ is then an operator $\operatorname{Op}(r)$, where

$$\begin{aligned}
r(x, \omega, s) &= a\#b(x, \omega, s) - (ab)(x, \omega, s) \\
&= \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_a(x, y) q^{(1/2 - is)(h_\omega(y) - h_\omega(x))} (b(y, \omega, s) - b(x, \omega, s)),
\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

because

$$\sum_{y \in \mathfrak{X}} K_a(x, y) q^{(1/2 - is)(h_\omega(y) - h_\omega(x))} b(x, \omega, s) = a(x, \omega, s) b(x, \omega, s).$$

We would like to show that $r \in S(\mathfrak{X})$ and that the L^2-norm of $\mathrm{Op}(r)$ is bounded by ϵ. In order to do that, according to theorem 4.5.1, we must first bound the derivatives of $r(x, \omega, s)$ with respect to s.

Note that for every $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|\partial_s^k q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}| &= |(h_\omega(y) - h_\omega(x))^k q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}| \\ &\leq d(x,y)^k q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))}.\end{aligned}$$

We thus have for every $\alpha \in \mathbb{N}$, using the Leibniz rule on (4.6.1), and the previous inequality

$$\begin{aligned}&|\partial_s^\alpha r(x,\omega,s)| \qquad (4.6.2)\\ &\lesssim_\alpha \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_a(x,y)| d(x,y)^k q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} |\partial_s^{\alpha-k}(b(y,\omega,s) - b(x,\omega,s))| \\ &\lesssim_{\alpha,N} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{y\in\mathfrak{X}} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N} d(x,y)^k q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} \epsilon d(x,y) \\ &\lesssim_{\alpha,N} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{y\in\mathfrak{X}} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^{N-k-1}} q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} \epsilon, \qquad (4.6.3)\end{aligned}$$

for all $N \in \mathbb{N}$. We used proposition 4.4.1 for symbol a on the rapid decay of the kernel of an operator with symbol in S, and condition 3 in the definition of S_{sc} for symbol b, controlling the variation with respect to x of a semi-classical symbol.

To complete this estimation we will use the equality

$$\sum_{y:d(x,y)=n} q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} = (1+n) q^{\frac{n}{2}}.$$

We have for every $\alpha \in \mathbb{N}$ and $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|\partial_s^\alpha r(x,\omega,s)| &\lesssim_{\alpha,N} \epsilon \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{q^{-\frac{n}{2}}}{(1+n)^{N-k-1}} \sum_{y:d(x,y)=n} q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} \qquad (4.6.4)\\ &\lesssim_{\alpha,N} \epsilon \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{q^{-\frac{n}{2}}}{(1+n)^{N-k-1}} (1+n) q^{\frac{n}{2}} \\ &\lesssim_{\alpha,N} \epsilon \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+n)^{N-k-2}} \\ &\lesssim_\alpha \epsilon,\end{aligned}$$

if we take $N \geq \alpha + 4$.

We must also bound, for every l

$$\sup_n (1+n)^l |r - \mathcal{E}_n^x r|(x,\omega,s).$$

We have

$$(r - \mathcal{E}_n^x r)(x,\omega,s) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} K_a(x,y)\Bigg(q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}(b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s)) \\ - \mathcal{E}_n^x\left(q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}(b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s))\right)\Bigg).$$

Recall that $c^x(y,\omega)$ is the confluence point of y and ω centered in x, that is the last point lying on $[x,\omega)$ of the geodesic segment $[x,y]$. According to (4.2.2), we have $h_\omega(y) - h_\omega(x) = 2d(x,c^x(y,\omega)) - d(x,y)$. We will divide into two parts, whether $d(x,c^x(y,\omega)) = n$ or not.

If $d(x,c^x(y,\omega)) \neq n$ we have

$$\mathcal{E}_n^x\left(q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}(b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s))\right) \\ = q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}\mathcal{E}_n^x(b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s)).$$

Indeed, using the definition (4.2.5) of $\mathcal{E}_n^x$ and the decomposition along the family of sets $\{E_j^x(y)\}_j$ defined by (4.2.3) we have

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_n^x(q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}(b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s))) \\
&= \sum_{j=0}^{d(x,y)} q^{(\frac{1}{2}-is)(2j-d(x,y))} \int_{\Omega_n(x,\omega)\cap E_j^x(y)} b(y,\omega',s)-b(x,\omega',s)\frac{d\nu_x(\omega')}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))} \\
&= q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}\int_{\Omega_n(x,\omega)} b(y,\omega',s)-b(x,\omega',s)\frac{d\nu_x(\omega')}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}
\end{aligned}$$

because if $d(x,c^x(y,\omega)) \neq n$, $E_j^x(y)\cap\Omega_n(x,\omega) = \emptyset$, unless $j = d(x,c^x(y,\omega))$, in which case $2j - d(x,y) = h_\omega(y) - h_\omega(x)$ and $E_j^x(y)\cap\Omega_n(x,\omega) = \Omega_n(x,\omega)$.

This leads for this part of $(r-\mathcal{E}_n^x r)(x,\omega,s)$ to an expression of the form

$$\sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))\neq n} K_a(x,y)q^{(1/2-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}f(x,y,\omega,s),$$

where

$$f(x,y,\omega,s) = b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s)-\mathcal{E}_n^x(b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s)).$$

From the hypothesis of the theorem, we have

$$|f(x,y,\omega,s)| \leq f_l(d(x,y))\epsilon\frac{1}{(1+n)^l}$$

with $t \mapsto f_l(t)$ polynomial in t. We thus have

$$\begin{aligned}(1+n)^l & \left| \sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))\neq n} K_a(x,y) q^{(1/2-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} f(x,y,\omega,s) \right| \\ & \leq \sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_a(x,y)| q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} f_l(d(x,y))\epsilon \\ & \lesssim_N \epsilon \sum_{y\in\mathfrak{X}} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^N} q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} f_l(d(x,y)),\end{aligned}$$

which is very similar to (4.6.3). We can therefore follow the same steps, and use the fact that the polynomial dependence of $f_l(d(x,y))$ in $d(x,y)$ is compensated by the rapid decay of $K_a(x,y)$, if we take N sufficiently large. We obtain finally

$$(1+n)^l \left| \sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))\neq n} K_a(x,y) q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} f(x,y,\omega,s) \right| \lesssim_l \epsilon$$

If $d(x,c^x(y,\omega)) = n$ then $d(x,y) \geq n$ and we have

$$|K_a(x,y)| \lesssim_N \frac{1}{(1+n)^l} \frac{1}{(1+d(x,y))^{N-l}}.$$

Let $g(x,y,\omega,s) = q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}(b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s))$. We have

$$(1+n)^l \left| \sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))=n} K_a(x,y)\left(g(x,y,\omega,s) - \mathcal{E}_n^x g(x,y,\omega,s)\right) \right| \tag{4.6.5}$$

$$\begin{aligned}\lesssim_N & \sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))=n} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^{N-l}} \Bigg(q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} |b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s)| \\ & + \frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))} \int_{\Omega_n(x,\omega)} q^{\frac{1}{2}(h_{\omega'}(y)-h_{\omega'}(x))} |b(y,\omega',s)-b(x,\omega',s)| d\nu_x(\omega') \Bigg).\end{aligned}$$

The first part of the sum between brackets leads to a computation similar to (4.6.3): we know we have

$$\begin{aligned}& \sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))=n} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^{N-l}} q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} |b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s)| \\ & \leq \sum_{y\in\mathfrak{X}} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^{N-l}} q^{\frac{1}{2}(h_\omega(y)-h_\omega(x))} |b(y,\omega,s)-b(x,\omega,s)| \\ & \lesssim_l \epsilon\end{aligned}$$

The second part of the sum can be written

$$\frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}\sum_{j=0}^{d(x,y)} q^{j-\frac{d(x,y)}{2}} \int_{\Omega_n(x,\omega)\cap E_j^x(y)} |b(y,\omega',s)-b(x,\omega',s)|d\nu_x(\omega')$$
$$= \frac{1}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}\sum_{j=n}^{d(x,y)} q^{j-\frac{d(x,y)}{2}} \int_{E_j^x(y)} |b(y,\omega',s)-b(x,\omega',s)|d\nu_x(\omega')$$

noticing that when $d(x,c^x(y,\omega))=n$, $E_j^x(y)\cap\Omega_n(x,\omega)=\emptyset$ unless $n\le j\le d(x,y)$ in which case $E_j^x(y)\cap\Omega_n(x,\omega)=E_j^x(y)$. We can then bound this by

$$\sum_{j=n}^{d(x,y)} \frac{q^{j-\frac{d(x,y)}{2}}}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}\nu_x(E_j^x(y))\epsilon d(x,y)$$
$$\le \sum_{j=n}^{d(x,y)} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}\epsilon d(x,y)$$

where we used condition 3 of the definition 4.3.3 of the symbol class, and the fact that $\nu_x(E_j^x(y))\le q^{-j}$.

Using the inequality $\nu_x(\Omega_n(x,\omega))^{-1}\le C_q q^n$ and defining

$$B_k=\{y: d(x,y)=k, d(x,c^x(y,\omega))=n\},$$

we have, going back to (4.6.5)

$$\sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))=n} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^{N-l}} \sum_{j=n}^{d(x,y)} \frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{\nu_x(\Omega_n(x,\omega))}\epsilon d(x,y)$$
$$\lesssim_q \sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))=n} \frac{q^{-d(x,y)}}{(1+d(x,y))^{N-l-2}} q^n\epsilon$$
$$\lesssim_q \sum_{k\ge n}\sum_{y\in B_k} \frac{q^{-k}}{(1+k)^{N-l-2}} q^n\epsilon.$$

Finally, because $\#B_k\lesssim_q q^{k-n}$ we have

$$\sum_{k\ge n}\sum_{y\in B_k} \frac{q^{-k}}{(1+k)^{N-l-2}} q^n\epsilon \lesssim_q \left(\sum_{k\ge n}\frac{1}{(1+k)^{N-l-2}}\right)\epsilon$$

and

$$(1+n)^l\left|\sum_{y:d(x,c^x(y,\omega))=n} K_a(x,y)[g(x,y,\omega,s)-\mathcal{E}_n^x g(x,y,\omega,s)]\right| \lesssim_{l,q}\epsilon.$$

We thus have for every $l\in\mathbb{N}$, and for all $x\in\mathfrak{X}$

$$\sup_n (1+n)^l\|(r-\mathcal{E}_n^x r)(x,\cdot,\cdot)\|_\infty \lesssim_{l,q}\epsilon.$$

Together with (4.6.4) and using theorem 4.5.1, we get the desired result. □

4.7 Commutator with the Laplacian

In the usual pseudo-differential calculus on manifolds, the highest order term in the expansion of the symbol of the commutator $[\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(b)]$ of two pseudo-differential operators is given by the Poisson bracket $\{a, b\}$. In our case it is not clear what the analogue of this quantity would be. We will limit ourselves to the special case of the commutator of a pseudo-differential operator with the Laplacian, defined for every function $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ by

$$\Delta f(x) = \frac{1}{q+1} \sum_{y:d(x,y)=1} f(y).$$

This is the starting point of an Egorov-type theorem for large regular graphs, which gives invariance properties relating pseudo-differential operators and the dynamics, and is a central point of the proof of the quantum ergodicity theorem in [4].

Proposition 4.7.1. *Let $a \in S$ be a symbol. We assume for simplicity that $a(x, y, \omega, s) = a(x, \omega, s)$ does not depend on y. The commutator*

$$[\Delta, \mathrm{Op}(a)] = \Delta\, \mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(a)\Delta$$

is an operator $\mathrm{Op}(c)$ where c is given by[5]

$$c(x, \omega, s) = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{q+1} \left(q^{-is}(a \circ \sigma - a)(x, \omega, s) + q^{is} \left(La - a \right) (x, \omega, s) \right).$$

According to propositions 4.3.2 and 4.3.3, $c \in S$ and the commutator is still a pseudo-differential operator.

The same result is true if we take $a \in S_{sc}$. In this case $c \in S_{sc}$.

Remark 4.7.1. If $a \in S_{sc}$, then $\mathrm{Op}(c)$ is negligible in the sense of Definition 4.3.4. In particular we have $\mathrm{Op}(c) = O_{L^2}(\epsilon)$. Indeed, $a \circ \sigma(x, \omega, s) - a(x, \omega, s) = a(y, \omega, s) - a(x, \omega, s)$ with $d(x, y) = 1$, and $La(x, \omega, s) - a(x, \omega, s)$ is also a sum of terms of this form. So according to condition 3a of Definition 4.3.3, for every $k \in \mathbb{N}$, $\|\partial_s^k c\| \lesssim_k \epsilon$. Furthermore, using condition 3b and the notation of Proposition 4.4.1, for every $N \in \mathbb{N}$, $\|c\|_{\Omega,N} \lesssim_N \epsilon$. According to Proposition 4.4.1 and to Definition 4.3.4, the operator $\mathrm{Op}(c)$ is thus negligible.

Proof. Let us first compute the symbol of $\Delta\, \mathrm{Op}(a)$. Recall that

$$\begin{aligned} \mathrm{Op}(a)u(x) &= \sum_{y \in \mathfrak{X}} \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x, \omega, s) u(y) d\nu_x(\omega) d\mu(s) \\ &= \sum_{y \in \mathfrak{X}} \int_\Omega \int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(x)-h_\omega(y))} a(x, \omega, s) u(y) d\nu_y(\omega) d\mu(s). \end{aligned}$$

5. See Definition 4.3.5 for the definition of σ and L.

We have

$$\Delta \operatorname{Op}(a)(u)(x)$$
$$= \sum_{y\in\mathfrak{X}} \int_\Omega \int_0^\tau \Delta \left(q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(\cdot)-h_\omega(y))} a(\cdot,\omega,s)\right)(x)u(y)d\nu_y(\omega)d\mu(s).$$

Fix ω and s, and let $g(x) = q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(x)-h_\omega(y))}a(x,\omega,s)$. We split $\Delta g(x) = \frac{1}{q+1}\sum_{d(x,z)=1} g(z)$ into two parts depending on the direction of the shift:

$$\begin{aligned}(q+1)\Delta g(x) = {} & q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(\sigma_\omega(x))-h_\omega(y))} a\circ\sigma(x,\omega,s)\\ & + \sum_{z:\sigma_\omega(z)=x} q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(z)-h_\omega(y))} a(z,\omega,s).\end{aligned}$$

where σ_ω is as defined in Definition 4.3.5. Then we can use the fact that $h_\omega(\sigma_\omega(x)) = h_\omega(x)+1$ to write

$$q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(\sigma_\omega(x))-h_\omega(y))} a\circ\sigma(x,\omega,s)$$
$$= q^{(\frac{1}{2}-is)} q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(x)-h_\omega(y))} a\circ\sigma(x,\omega,s).$$

We use the fact that $h_\omega(z) = h_\omega(x)-1$ when $\sigma_\omega(z)=x$ in the second part of the sum to obtain

$$\sum_{z:\sigma_\omega(z)=x} q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(z)-h_\omega(y))} a(z,\omega,s)$$
$$= q^{(\frac{1}{2}+is)} \frac{1}{q} \sum_{z:\sigma_\omega(z)=x} q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(x)-h_\omega(y))} a(z,\omega,s)$$

The symbol of $\Delta \operatorname{Op}(a)$ is thus given by

$$\frac{1}{q+1}\left(q^{(\frac{1}{2}-is)} a\circ\sigma(x,\omega,s) + q^{(\frac{1}{2}+is)}\frac{1}{q}\sum_{z:\sigma_\omega(z)=x} a(z,\omega,s)\right)$$

Let us now compute the symbol of $\operatorname{Op}(a)\Delta$. The kernel of $\operatorname{Op}(a)\Delta$ is given by

$$K(x,y) = \frac{1}{q+1}\sum_{z:d(z,y)=1} k_a(x,z),$$

where k_a is the kernel of $\operatorname{Op}(a)$.

$$\begin{aligned}K(x,y) &= \frac{1}{q+1}\sum_{\substack{z\\ d(z,y)=1}} \int_\Omega\int_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(z)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s)u(y)d\nu_x(\omega)d\mu(s)\\ &= \frac{1}{q+1}\int\limits_\Omega \int\limits_0^\tau q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s)b(y,\omega,s)u(y)d\nu_x(\omega)d\mu(s)\end{aligned}$$

where
$$b(y,\omega,s)=\sum_{z:d(z,y)=1} q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(z)-h_\omega(y))}=q^{(\frac{1}{2}+is)}+q^{(\frac{1}{2}-is)}$$
depends only on s. Thus by the inversion formula, the symbol of $\mathrm{Op}(a)\Delta$ is equal to
$$\frac{1}{q+1}\left(q^{(\frac{1}{2}+is)}+q^{(\frac{1}{2}-is)}\right)a(x,\omega,s),$$
and by substracting this from the symbol of $\Delta\,\mathrm{Op}(a)$ we obtain the symbol of the commutator. $\square$

Chapitre 5

Quantum ergodicity on large regular graphs

Nous reproduisons ici l'article [4] écrit en collaboration avec Nalini Anantharaman, dans lequel nous démontrons un théorème d'ergodicité quantique sur les graphes réguliers. On utilise pour cela des résultat du chapitre 4, plus précisément la décroissance rapide des noyaux des opérateurs pseudo-différentiels que nous y avons défini (proposition 4.4.1), et la formule du commutateur d'un opérateur pseudo-différentiel avec le laplacien (proposition 4.7.1).

5.1 Introduction and main results

It has been suggested by Kottos and Smilansky that graphs are a good ground of exploration of the ideas of "quantum chaos" [29, 31]. This means that the spectrum of the laplacian, as well as its eigenfunctions, should exhibit universal features that depend only on qualitative geometric properties of the graph. Whereas spectral statistics have been extensively studied, both numerically and analytically, the localization of eigenfunctions have (to our knowledge) only been investigated in a few models : the *star* graphs (both metric and discrete) [7, 27], the large *regular* discrete graphs [44, 9, 14], and a family of metric graphs arising from measure preserving 1-dimensional dynamical systems [6]. For the latter, a version of the "Quantum Ergodicity theorem" (also known as Shnirelman theorem) has been established. For star graphs, the paper [7] shows on the opposite that "Quantum Ergodicity" holds neither in the high frequency limit nor in the large graph limit. Furthermore it shows there are eigenfunctions that localise on two bonds of the graph. Spectral properties of large regular *discrete* graphs have been studied in [40, 33, 26, 47, 43] but eigenfunctions have attracted attention only recently. A statistical study of the auto-correlations and the level sets of eigenvectors appeared in the papers [15, 16] that introduce a random wave model (see also [23] for a random wave model on metric graphs). The paper [9] has pioneered the study of quantum ergodicity on large regular graphs – that is to say, the study of the spatial distribution of eigenfunctions of the laplacian. The result of [9] shows some form of delocalization of eigenfunctions :

Theorem 5.1.1. *[9] Let (G_n) be a sequence of $(q+1)$-regular graphs (with q fixed), $G_n = (V_n, E_n)$ with $V_n = \{1, \ldots, n\}$. Assume that*[1] *there exists $c > 0, \delta > 0$ such that, for any $k \leq c \ln n$, for any pair of vertices $x, y \in V_n$,*

$$|\{\text{paths of length } k \text{ in } G_n \text{ from } x \text{ to } y\}| \leq q^{k\left(\frac{1-\delta}{2}\right)}.$$

Fix $\epsilon > 0$. Then, if ϕ is an eigenfunction of the discrete laplacian on G_n and if $A \subset V_n$ is a set such that

$$\sum_{x \in A} |\phi(x)|^2 \geq \epsilon \sum_{x \in V_n} |\phi(x)|^2,$$

then $|A| \geq n^\alpha$ — where $\alpha > 0$ is given as an explicit function of ϵ, δ and c.

A similar form of delocalization (but on weaker scales) is established when the degree $q = q_n$ goes to infinity in [14, 48]. We also refer to the papers [19, 20, 18, 17] where various forms of delocalization have been established for eigenvectors of random Wigner matrices and random band matrices.

In this paper, our aim is to establish for large regular graphs a result which reads like an analogue of the "quantum ergodicity theorem" on manifolds. Compared to Theorem 5.1.1 it pertains to a different definition of delocalization : delocalization is now tested by averaging an observable and comparing with the average along the uniform measure. As a motivation, let us recall the Quantum Ergodicity theorem in its original form.

1. This assumption holds in particular if the injectivity radius is $\geq c \ln n$. The interest of the weaker assumption is that it holds for typical random regular graphs [39].

Quantum Ergodicity Theorem (Shnirelman theorem, [45, 10, 50]). Let (M, g) be a compact Riemannian manifold.[2] Call Δ the Laplace-Beltrami operator on M. Assume that the geodesic flow of M is *ergodic* with respect to the Liouville measure. Let $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an orthonormal basis of $L^2(M, g)$ made of eigenfunctions of the laplacian

$$\Delta\psi_n = -\lambda_n\psi_n, \qquad \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \longrightarrow +\infty.$$

Let a be a continuous function on M such that $\int_M a(x)d\,\mathrm{Vol}(x) = 0$. Then

$$\frac{1}{N(\lambda)} \sum_{n,\lambda_n\leq\lambda} |\langle\psi_n, a\psi_n\rangle_{L^2(M)}|^2 \underset{\lambda\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5.1.1}$$

where the normalizing factor is $N(\lambda) = |\{n, \lambda_n \leq \lambda\}|$. Here $\langle\psi_n, a\psi_n\rangle_{L^2(M)} = \int_M a(x)|\psi_n(x)|^2 d\,\mathrm{Vol}(x)$.

Remark 5.1.2. Equation (5.1.1) implies that there exists a subset $S \subset \mathbb{N}$ of density 1 such that

$$\langle\psi_n, a\psi_n\rangle \underset{n\longrightarrow+\infty, n\in S}{\longrightarrow} \int_M a(x)d\,\mathrm{Vol}(x). \tag{5.1.2}$$

(Note that (5.1.2) is true even for a function a with non-zero mean.)

In addition, since the space of continuous functions is separable, one can actually find $S \subset \mathbb{N}$ of density 1 such that (5.1.2) holds for *all* $a \in C^0(M)$. In other words, the sequence of measures $(|\psi_n(x)|^2 d\,\mathrm{Vol}(x))_{n\in S}$ converges weakly to the uniform measure $d\,\mathrm{Vol}(x)$.

Actually, the full statement of the theorem says that there exists a subset $S \subset \mathbb{N}$ of density 1 such that

$$\langle\psi_n, A\psi_n\rangle \underset{n\longrightarrow+\infty, n\in S}{\longrightarrow} \int_{S^*M} \sigma^0(A)dL \tag{5.1.3}$$

for every pseudodifferential operator A of order 0 on M. On the right-hand side, $\sigma^0(A)$ is the principal symbol of A, that is a function on the unit cotangent bundle S^*M, and L is the normalized Liouville measure (uniform measure), arising naturally from the symplectic structure of the cotangent bundle.

Here we consider a sequence of $(q+1)$-regular connected graphs $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $G_n = (V_n, E_n)$ with vertices $V_n = \{1, \dots, n\}$ and edge set E_n. The valency $(q + 1)$ is fixed. We denote by $\mathfrak{X}$ the $(q + 1)$-regular tree and identify it with its set of vertices, equipped with the geodesic distance $d_{\mathfrak{X}}$, that we will simply denote by d most of the time. We will denote by d_{G_n} the geodesic distance on the graph. Each G_n is seen as a quotient of $\mathfrak{X}$ by a group of automorphisms Γ_n : $G_n = \Gamma_n\backslash\mathfrak{X}$, where we assume that the elements of Γ_n act without fixed points. Accordingly, a function $f : V_n \longrightarrow \mathbb{C}$ may be seen as a function $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfying $f(\gamma \cdot x) = f(x)$ for each $x \in \mathfrak{X}, \gamma \in \Gamma_n$. We will denote by D_n a subtree of $\mathfrak{X}$ which is a fundamental domain for the action of Γ_n on vertices.

We consider the stochastic operator acting on Γ_n-invariant functions,

$$Af(x) = \frac{1}{q+1} \sum_{x\sim y} f(y) \tag{5.1.4}$$

2. We assume that $\mathrm{Vol}(M) = 1$.

where $x \sim y$ means that x and y are neighbours in the tree[3]. It is related to the discrete laplacian by $A - I = \Delta$.

Whereas the Shnirelman theorem deals with the *high frequency* asymptotics ($\lambda_n \longrightarrow +\infty$), there is no such asymptotic régime for discrete graphs since the laplacian is a bounded operator. We will instead work (like in [9]) in the *large spatial scale* régime $n \longrightarrow +\infty$.

We will assume the following conditions on our sequence of graphs :

(EXP) The sequence of graphs is a family of expanders. More precisely, there exists $\beta > 0$ such that the spectrum of A on $L^2(G_n)$ is contained in $\{1\} \cup [-1+\beta, 1-\beta]$ for all n.

(EIIR) For all R, $\frac{|\{x \in V_n, \rho(x) < R\}|}{n} \longrightarrow 0$ where $\rho(x)$ is the injectivity radius at x (meaning the largest ρ such that the ball $B(x,\rho)$ in G_n is a tree).

(EIIR) is equivalent to saying that there exists $R_n \longrightarrow +\infty$ and $\alpha_n \longrightarrow 0$ such that

$$\frac{|\{x \in V_n, \rho(x) < R_n\}|}{n} \leq \alpha_n.$$

In particular, it is satisfied if the injectivity radius goes to infinity (with R_n taken to be the minimal injectivity radius and $\alpha_n = 0$).

Condition (EXP) replaces the ergodicity assumption in the usual quantum ergodicity theorem.

Example 1. The graph G_n can be chosen uniformly at random among the $(q+1)$-regular graphs with n vertices (see [8] section 2.4 for an introduction to this model). We can then take $R_n = k$ and $n\alpha_n = 40Akq^k$ for any $k = k(n)$ such that $kq^k n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, and $A = A(n)$ such that $A \geq c > 1$ (see [39], Theorem 4). For instance, we can take $k = (1-\delta)\log_q(n)$, with $0 < \delta < 1$, and $A = 2$. In this case we have $R_n = (1-\delta)\log_q(n)$ and $\alpha_n = 80(1-\delta)\log_q(n)n^{-\delta}$. For this choice of parameters, (EIIR) is satisfied with a probability tending to 1 when $n \longrightarrow +\infty$. More precisely, this probability is greater than $1 - e^{-Cn^{1-\delta}}$, for some constant $C > 0$ independent of n.

Condition (EXP) is also satisfied by these sequences of random graphs : [2] proves an equivalence between having a uniform spectral gap and having a uniform Cheeger constant. The latter condition was shown to hold generically in [41]. In [22], a spectral gap estimate that is close to optimal is established.

Example 2. An explicit example of sequence of $(q+1)$-regular graphs to which our results apply is given by the construction of Ramanujan graphs of [36] for prime q. The sequence obtained satisfies conditions (EXP) and (EIIR) even more strongly than the sequences of random graphs of Example 1. A method for obtaining bi-partite Ramanujan graphs of arbitrary degrees has appeared recently in [37].

3. This is also the (normalized) adjacency matric of the graph G_n, but note that this definition allows G_n to have loops and multiple edges.

Eigenvalues of A on a $(q+1)$-regular graph may be parameterized by their "spectral parameter" s thanks to the relation

$$\lambda = \frac{2\sqrt{q}}{q+1}\cos(s\ln q). \tag{5.1.5}$$

The case $s \in \mathbb{R}$ corresponds to $\lambda \in \left[-\frac{2\sqrt{q}}{q+1}, \frac{2\sqrt{q}}{q+1}\right]$, which is the tempered spectrum. In that case we will usually choose $s \in [0,\tau]$ ($\tau = \frac{\pi}{\ln(q)}$). The case $s \in i(-1/2,1/2) + ik\frac{\pi}{\ln(q)}$ ($k \in \mathbb{Z}$) corresponds to $\lambda \in [-1,1] \setminus \left(-\frac{2\sqrt{q}}{q+1}, \frac{2\sqrt{q}}{q+1}\right)$, which is the untempered spectrum. The result of this paper will only be of interest in the tempered part of the spectrum.

In what follows, (r_n) will be a sequence satisfying $r_n + 2 \leq R_n$ and $q^{r_n}\alpha_n \longrightarrow 0$. The sequence (δ_n) will be assumed to satisfy $\delta_n^K r_n^{K-4} \longrightarrow +\infty$, for some integer K. We also assume that $\delta_n \longrightarrow 0$, although it is not necessary for the general proof of section 5.4.

Our aim is to prove the following :

Theorem 5.1.3. *Let (G_n) be a sequence of $(q+1)$-regular graphs, $G_n = (V_n, E_n)$ with $V_n = \{1,\ldots,n\}$. Assume that (G_n) satisfies (EIIR) and (EXP). Fix $s_0 \in (0,\tau)$ and let $I_n = [s_0 - \delta_n, s_0 + \delta_n]$. Call $(s_1^{(n)},\ldots,s_n^{(n)})$ the spectrum of A on G_n, and $(\psi_1^{(n)},\ldots,\psi_n^{(n)})$ a corresponding orthonormal eigenbasis.*

Let $N(I_n, G_n) = \left|\{j \in \{1,\ldots,n\}, s_j^{(n)} \in I_n\}\right|$ be the number of eigenvalues in I_n.[4] *Finally, let $a_n : V_n \longrightarrow \mathbb{C}$ be a sequence of functions such that*

$$\sum_{x\in V_n} a_n(x) = 0, \qquad \sup_x |a_n(x)| \leq 1.$$

Then

$$\frac{1}{N(I_n,G_n)} \sum_{s_j^{(n)}\in I_n} \left|\langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)}\rangle\right|^2 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remark 5.1.4. If a_n does not have zero mean, then by applying the theorem to $a_n - \overline{a_n}$ (where $\overline{a_n} = \frac{1}{n}\sum_{x\in V_n} a_n(x)$) we obtain

$$\frac{1}{N(I_n,G_n)} \sum_{s_j^{(n)}\in I_n} \left|\langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)}\rangle - \overline{a_n}\right|^2 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remark 5.1.5. If we exclude the case $s_0 = \tau/2$ in Theorem 5.1.3, we can assume, instead of (EXP), the following weaker condition : there exists $\beta > 0$ such that the spectrum of A on $L^2(G_n)$ is contained in $\{1\} \cup [-1, 1-\beta]$ for all n. In particular, the theorem applies for bipartite regular graphs in this case.

We can also say something in the case $s_0 = \tau/2$ for bipartite expander graphs, that is if there exists $\beta > 0$ such that the spectrum of A on $L^2(G_n)$ is contained in $\{-1,1\} \cup [-1+\beta, 1-\beta]$ for all n. We need to strengthen the condition on the functions

4. Note that with the assumptions on δ_n, $N(I_n, G_n) \longrightarrow +\infty$ (see Corollary 5.5.2).

$a_n(x)$ in the theorem for the conclusion to apply : if $V_n = V_n^1 \sqcup V_n^2$ is the bi-partition of V_n, then we need that

$$\sum_{x\in V_n^1} a_n(x) = \sum_{x\in V_n^2} a_n(x) = 0.$$

The theorem then tells us that we have equidistribution of most eigenfunctions with eigenvalue near $\tau/2$ on each set V_n^1 and V_n^2, without providing information on the relative weight of these two sets.

Remark 5.1.6. The proof will show that we can weaken condition (EXP), by allowing the spectral gap β to decay with n "not too fast" ($\beta \gg r_n^{-2/9}$ is enough). See Section 5.6.

Since random $(q+1)$-regular graphs satisfy both (EXP) [41, 2, 22] and (EIIR) [39], our theorem applies to them with the values of R_n, α_n given in Example 1.

Corollary 1. Let $a_n : V_n = \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ be a sequence of functions such that

$$\sum_{x\in V_n} a_n(x) = 0, \qquad \sup_x |a_n(x)| \leq 1.$$

Choose (G_n) uniformly at random amongst the $(q+1)$-regular graphs $G_n = (V_n, E_n)$ such that $V_n = \{1, \dots, n\}$. Choose j uniformly at random in $N(I_n, G_n)$.

Then for any fixed $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left|\langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)} \rangle\right| \geq \epsilon\right) \longrightarrow 0$$

when $n \longrightarrow +\infty$.

The statement of Theorem 5.1.3 is the exact analogue of the Shnirelman theorem in its form (5.1.1). However, we do not have a statement analogous to the convergence of measures (5.1.2), because our sequence of measures does not live on a single space; instead, it is defined on the sequence of graphs G_n. We do not know of a notion that would be adapted to describe the limit of the family (G_n) endowed with the probability measure $(|\psi_j^{(n)}(x)|^2)_{x\in V_n}$.

We can generalize Theorem 5.1.3 by replacing the function a with any finite range operator :

Theorem 5.1.7. *Let (G_n) be a sequence of $(q+1)$-regular graphs, $G_n = (V_n, E_n)$ with $V_n = \{1, \dots, n\}$. Assume that (G_n) satisfies (EIIR) and (EXP). Fix $s_0 \in (0, \tau)$ and let $I_n = [s_0 - \delta_n, s_0 + \delta_n]$. Call $(s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$ the spectrum of the laplacian on G_n, and $(\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)})$ a corresponding orthonormal eigenbasis.*

Let $N(I_n, G_n) = \left|\{j \in \{1, \dots, n\}, s_j^{(n)} \in I_n\}\right|$.

Fix $D \in \mathbb{N}$. Let A_n be a sequence of operators on $L^2(G_n)$ whose kernels $K_n : V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{C}$ are such that $K_n(x,y) = 0$ for $d(x,y) > D$.

Assume that $\sup_{x,y\in V_n} |K_n(x,y)| \leq 1$.

Then there exists a number $\overline{A_n}(s_0)$ such that

$$\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j^{(n)}\in I_n}\left|\langle\psi_j^{(n)},A_n\psi_j^{(n)}\rangle-\overline{A_n}(s_0)\right|^2\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

With the notation of section 5.3.2, we can write $A_n=\mathrm{Op}(a_n)$, $a_n\in S_o^D$; and we have the expression $\overline{A_n}(s_0)=\frac{1}{n}\sum_{x\in D_n}\int_\Omega a_n(x,\omega,s_0)d\nu_x(\omega)$.

Quantitative statements (i.e. rates of convergence) will be given in Section 5.6.

5.2 Theorem 5.1.3 : outline of the proof in the case $s_0=\tau/2$

We first give a proof in the special case $s_0=\tau/2$. The reason for treating this case separately is that one can give a proof which is exactly parallel to that of the Shnirelman theorem on manifolds [45, 10, 50, 51]. The case of arbitrary s_0 requires additional arguments and will be treated in Section 5.4.

5.2.1 Upper bound on the variance

Fix an integer $T>0$. Let χ be a smooth cut-off function supported in $[-1,1]$ and taking the constant value 1 on $[-1/2,1/2]$. We write

$$\chi_n(s)=\chi\left(\frac{s-s_0}{2\delta_n}\right) \tag{5.2.1}$$

so that $\chi_n\equiv 1$ on I_n. We use the pseudodifferential calculus and the notation defined in Section 5.3, taking the cut-off parameter r equal to r_n (from condition (EIIR), as explained before the statement of Theorem 5.1.3).

To simplify the notation, we will write $\psi_j=\psi_j^{(n)}$, $s_j=s_j^{(n)}$, and $a=a_n$. The observable a is a function on G_n, in other words a Γ_n-invariant function on $\mathfrak{X}$. Let Ω be the boundary of $\mathfrak{X}$ (see section 5.3), then a extends to a function on $\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau]$ that does not depend on the last two coordinates. The notation $\mathrm{Op}(a)$ is then defined in section 5.3.

Thanks to Lemma 5.3.10 and to the "Egorov property" Corollary 5.3.9, we have [5]

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \chi_n(s_j)^2 \left|\langle \psi_j, a\psi_j\rangle\right|^2 &= \sum_{j=0}^{n} \left|\langle \psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a\chi_n)\psi_j\rangle\right|^2 + nr^3 O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^\infty}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left|\langle \psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi_n)\psi_j\rangle\right|^2 + nr^3 O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^\infty}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{T^2}{r^2}\right) n \int \chi_n^2(s) d\mu(s) \\
&\quad + O(T^2 q^{r+2}) |\{x \in D_n, \rho(x) \leq r+2\}| \int \chi_n^2(s) d\mu(s) \\
&\quad + O(T^2) n \int O(|s-s_0|^2)\chi_n^2(s) d\mu(s)
\end{aligned}$$

where $a^T := \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a \circ \sigma^{2k}$ and $\sigma : \mathfrak{X} \times \Omega \longrightarrow \mathfrak{X} \times \Omega$ is the shift (see section 5.3.4).

Next, we use Lemma 5.3.3 to write

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \left|\langle \psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi_n)\psi_j\rangle\right|^2 &\leq \|\mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi_n)\|_{HS}^2 \\
&\leq \sum_{x \in D_n} \int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega)\chi_n(s)^2 d\mu(s) \\
&\quad + q^r \sum_{x \in D_n, \rho(x) \leq r} \int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega)\chi_n(s)^2 d\mu(s) \\
&\leq \sum_{x \in D_n} \int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega) \int \chi_n(s)^2 d\mu(s) \\
&\quad + q^r |\{x \in D_n, \rho(x) \leq r\}| \int \chi_n(s)^2 d\mu(s).
\end{aligned}$$

We also know from the Kesten-McKay law (Section 5.5, Corollary 5.5.2) that

$$\frac{n}{N(I_n, G_n)} \int \chi_n(s)^2 d\mu(s) = O(1).$$

5. To prove the extended Theorem 5.1.7, we also need Lemma 5.3.11.

We thus have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n}|\langle\psi_j,a\psi_j\rangle|^2 &= O(1)\frac{1}{n}\sum_{x\in D_n}\int|a^T(x,\omega)|^2d\nu_x(\omega)\\
&\quad+O(T^2q^{r+2})\frac{|\{x\in D_n,\rho(x)\le r+2\}|}{n}\\
&\quad+\frac{n}{N(I_n,G_n)}r^3O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^\infty}\right)+O\left(\frac{T^2}{r^2}\right)+O(T^2\delta_n^2)\\
&=O(1)\frac{1}{n}\sum_{x\in D_n}\int|a^T(x,\omega)|^2d\nu_x(\omega)\\
&\quad+O(T^2q^r)\alpha_n+O(1)\frac{r^3}{\delta_n}O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^\infty}\right)\\
&\quad+O\left(\frac{T^2}{r^2}\right)+O(T^2\delta_n^2).
\end{aligned}$$

Our choices of $r=r_n$ and δ_n imply that the last four terms vanish as n goes to infinity while T is fixed.

5.2.2 Expansion and ergodicity

We write, using (5.3.3)

$$\frac{1}{n}\sum_{x\in D_n}\int|a^T(x,\omega)|^2d\nu_x(\omega)=\frac{1}{n}\frac{1}{T^2}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{x\in D_n}\int a\circ\sigma^{2|k-j|}(x,\omega)a(x)d\nu_x(\omega)$$

For every $x\in\mathfrak{X}$ and $k\in\mathbb{N}$, define the partition of Ω in $(q+1)q^{k-1}$ sets [6]

$$\Omega(x,y):=\{\omega\in\Omega\mid[x,\omega)=(x,x_1,x_2,\dots)\text{ and }x_k=y\},$$

where $y\in\mathfrak{X}$ and $d(x,y)=k$. Then $\omega\mapsto a\circ\sigma^k(x,\omega)$ is constant on $\Omega(x,y)$ for every $y\in\mathfrak{X}$ such that $d(x,y)=k$, and $\nu_x(\Omega(x,y))=\frac{1}{(q+1)q^{k-1}}$. We have

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in D_n}\int_\Omega a\circ\sigma^k(x,\omega)a(x)d\nu_x(\omega)&=\sum_{x\in D_n}\sum_{\substack{y\in\mathfrak{X}\\ d_{\mathfrak{X}}(x,y)=k}}\int_{\Omega(x,y)}a\circ\sigma^k(x,\omega)a(x)d\nu_x(\omega)\\
&=\sum_{x\in D_n}S_ka(x)a(x),
\end{aligned}$$

where $S_0=\mathrm{Id}$ and for all $k\ge1$, S_k is the stochastic operator defined as follows by its kernel on the tree $\mathfrak{X}$:

$$S_kf(x)=\frac{1}{(q+1)q^{k-1}}\sum_{d_{\mathfrak{X}}(x,y)=k}f(y). \tag{5.2.2}$$

6. See section 5.3 for a definition of the boundary Ω and of the notation $[x,\omega)$.

We thus have

$$\frac{1}{n}\sum_{x\in D_n}\int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega) = \frac{1}{n}\frac{1}{T^2}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{x\in D_n} S_{2|k-j|}a(x)a(x).$$

On the quotient G_n, the spectrum of S_k is the set $\left\{\phi_{s_j}(k), j = 1,\ldots,n\right\}$ where ϕ_s is the spherical function,

$$\phi_s(k) = q^{-k/2}\left(\frac{2}{q+1}\cos(ks\ln(q)) + \frac{q-1}{q+1}\frac{\sin(k+1)s\ln(q)}{\sin s\ln(q)}\right) \tag{5.2.3}$$

and $\{s_j, j = 1,\ldots,n\}$ are the spectral parameters for the operator A defined by (5.1.4).

Using the parameterization (5.1.5) of the spectrum, the eigenvalue $\lambda = 1$ corresponds to

$$is = \frac{1}{2}.$$

Because of the (EXP) condition, the other untempered eigenvalues satisfy $is \in (0, \frac{1}{2}-\beta)$ or $is + i\frac{\pi}{\ln q} \in (0, \frac{1}{2}-\beta)$, for some $\beta > 0$ independent of n. It follows that $|\phi_{s_j}(k)| \leq Cq^{-\beta k}$ with C, β independent of n. The eigenvalues of the self-adjoint stochastic operator $\frac{1}{T^2}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} S_{2|k-j|}$ are therefore bounded by

$$\frac{C}{T^2}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} q^{-2\beta|k-j|} \leq \frac{C}{2T(1-q^{-2\beta})}$$

in modulus. They are contained in $\{1\} \cup \left[-\frac{C}{T\beta}, \frac{C}{T\beta}\right]$ for some C, independent of n, T, β (the eigenvalue 1 has multiplicity 1, corresponding to the constant function).

Thus, if a satisfies $\sum_{x\in V_n} a(x) = 0$ and $\sup_x |a(x)| \leq 1$, we have

$$\frac{1}{n}\frac{1}{T^2}\sum_{k=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{x\in D_n} S_{2|k-j|}a(x)a(x) = O\left(\frac{1}{T\beta}\right).$$

5.2.3 Conclusion

We obtain, using the results of the previous sections and the Kesten-McKay law (Corollary 5.5.2),

$$\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n} |\langle\psi_j, a\psi_j\rangle|^2 \leq O\left(\frac{r^3}{\delta_n(r\delta_n)^\infty}\right) + O\left(\frac{T^2}{r^2}\right) + O(T^2\delta_n^2)$$
$$+ O(T^2 q^r\alpha_n) + O\left(\frac{1}{T\beta}\right).$$

If we choose the sequences $r = r_n$ and δ_n satisfying $q^r\alpha_n \longrightarrow 0$ and $\frac{r^3}{\delta_n(r\delta_n)^K} \longrightarrow 0$ for some integer K, we finally have

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n} |\langle\psi_j, a\psi_j\rangle|^2 = O\left(\frac{1}{T\beta}\right).$$

As the left-hand side of the equality does not depend on T, we take the limit $T \longrightarrow \infty$ to obtain

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N(I_n, G_n)} \sum_{s_j \in I_n} |\langle \psi_j, a\psi_j \rangle|^2 = 0.$$

5.3 Elements of pseudodifferential calculus

In sections 5.3.1–5.3.2 we recall some of the tools of pseudodifferential calculus that were introduced in [34]. However, the following important remark has to be made : in order for Theorems 5.1.3 and 5.1.7 to have full strength, we should not impose on the symbols a too strong regularity conditions, that would have the effect of making the theorems trivial consequences of the (EXP) condition. Thus, we pay attention to only use from [34] the properties that do not require regularity of a with respect to the x-variable.

In the following sections we try to construct a pseudodifferential calculus on the quotient.

5.3.1 Definition of $\mathrm{Op}(a)$ on the infinite $(q+1)$-regular tree.

Let Ω be the boundary of the tree. It is the set of equivalence classes of infinite half-geodesics of $\mathfrak{X}$ for the relation : two half-geodesics $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ and $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ are equivalent iff there exist $k, N \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geq N$, $x_{n+k} = y_n$. For every $\omega \in \Omega$, we will denote by $[x, \omega)$ the unique half-geodesic starting at x and equivalent to ω.

Let $a : \mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{C}$ be a bounded measurable function. In [34], the operator $\mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a)$ was defined by

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a)u(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s)u(y)d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$

for every $u : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ with finite support. Here $h_\omega(x)$ is the height function (or Busemann function), $d\mu(s)$ is the Plancherel measure associated to the $(q+1)$-regular tree [7], and ν_x is the harmonic measure on Ω, seen from the point x. We refer to [12] for more background. We will denote by

$$K_{\mathfrak{X}}(x, y; a) = \int_\Omega \int_0^\tau q^{\left(\frac{1}{2}+is\right)(h_\omega(y)-h_\omega(x))} a(x,\omega,s)d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$

the kernel of $\mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a)$.

7. $d\mu(s) = |c(s)|^{-2}ds$ where c is the Harish-Chandra function.

5.3.2 Class of symbols

From [12], we know that the fact that $K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)=0$ for $d_{\mathfrak{X}}(x,y)>D$ is equivalent to the four following conditions on a :

- a is a continuous function;
- a extends to a 2τ-periodic entire function of exponential type D uniformly in ω; i.e. for all x there exists $C(x)>0$ such that

$$|a(x,\omega,z)|\leq C(x)q^{D|\Im m(z)|}\qquad \forall\omega\in\Omega,\forall x\in\mathfrak{X};$$

- a satisfies the symmetry condition

$$\int_{\Omega}q^{(\frac{1}{2}-is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}a(x,\omega,s)d\nu_x(\omega)=\int_{\Omega}q^{(\frac{1}{2}+is)(h_\omega(y)-h_\omega(x))}a(x,\omega,-s)d\nu_x(\omega)$$

  for all $s\in\mathbb{C}$, $x\in\mathfrak{X}$.
- a is a D-cylindrical function, that is : if the two half-geodesics $[x,\omega)=(x_0,x_1,x_2,\ldots)$ and $[x',\omega')=(x'_0,x'_1,x'_2,\ldots)$ satisfy $x_j=x'_j$ for $0\leq j\leq D$, then $a(x,\omega,s)=a(x',\omega',s)$.

We shall denote by $S_o^D(\mathfrak{X})$ the class of such functions. In [34], another class of symbols was considered :

Definition 5.3.1. $S(\mathfrak{X})$ is the class of functions $a:\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau]\longrightarrow\mathbb{C}$ such that
- for every (x,ω,s), for every $k\in\mathbb{N}$, $\partial_s^k a(x,\omega,s)$ is continuous on $\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau]$, and for every $l\in\mathbb{N}$, there exists $C_l>0$ such that, for all $n\in\mathbb{N}$, for every (x,ω,s),

$$|(a-\mathcal{E}_n^x a)(x,\omega,s)|\leq\frac{C_l}{(1+n)^l}.$$

- for every $k\in\mathbb{N}$, and every (x,ω), $\partial_s^k a(x,\omega,0)=\partial_s^k a(x,\omega,\tau)=0$.

Here $\mathcal{E}_n^x a(x,\omega,s)$ is the projection of $a(x,\omega,s)$ on functions depending only on the first n vertices of the half-geodesic $[x,\omega)$ (see [34] for a formula). In particular, $\mathcal{E}_n^x a(x,s)=a(x,s)$ if a does not depend on ω.

It is proven in [34] that $S(\mathfrak{X})$ endowed with usual addition and multiplication is an algebra. This makes it more suitable for semiclassical analysis than the class $S_o^D(\mathfrak{X})$. It also has the property, crucial for us, that

$$a\in S(\mathfrak{X})\Longrightarrow a\circ\sigma\in S(\mathfrak{X})$$

where σ is the shift, $\sigma(x,\omega)=(x_1,\omega)$ if $[x,\omega)=(x_0,x_1,x_2,\ldots)$. It is proven in [34] that

$$|K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|\leq C\left(\|a\|_{\Omega,M}+\sum_{k=0}^{M+1}\|\partial_s^k a\|_\infty\right)\frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1+d(x,y))^M}\tag{5.3.1}$$

for any M, where $\|a\|_{\Omega,M}=\sup_{(x,\omega,s)}\sup_n(1+n)^M|a-\mathcal{E}_n^x a|(x,\omega,s)$, and that as a consequence, $\mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a)$ extends to a bounded operator on $L^2(\mathfrak{X})$ if $a\in S(\mathfrak{X})$.

If $a(x, \omega, s) = a(x)$ depends only on x, then $\mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a)$ is the operator of multiplication by a. At several places we will use the fact that

$$\mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a)\,\mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(\varphi) = \mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a\varphi) \tag{5.3.2}$$

if $\varphi = \varphi(s)$ only depends on the last variable and $a(x, \omega, s) \in S(\mathfrak{X})$, say.

In most of what follows, we will actually need very few conditions on the symbols $a(x, \omega, s)$. Essentially it will be required that $a \in L^\infty(\mathfrak{X} \times \Omega \times [0, \tau])$. For convenience, we can always assume that $a \in S_o^D(\mathfrak{X})$ for some $D \in \mathbb{N}$, or that $a \in S(\mathfrak{X})$. In Lemma 5.3.11 we use the condition $a \in S_o^D(\mathfrak{X})$.

5.3.3 Definition of $\mathrm{Op}_{G_n}(a)$ on a finite graph.

Recall that G_n is written as a quotient $\Gamma_n \backslash \mathfrak{X}$, where Γ_n is a group of automorphisms of $\mathfrak{X}$, whose elements act without fixed points.

Let us now assume that a is Γ_n-invariant, meaning that $a(\gamma \cdot x, \gamma \cdot \omega, s) = a(x, \omega, s)$ for all (x, ω, s) and all $\gamma \in \Gamma_n$ (where the action of Γ_n on the boundary Ω is obtained by extending its action on $\mathfrak{X}$). For a Γ_n-invariant symbol, we have

$$K_{\mathfrak{X}}(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y; a) = K_{\mathfrak{X}}(x, y; a)$$

for all $x, y \in \mathfrak{X}$ and $\gamma \in \Gamma_n$. The proof of this fact is identical to the proof of Proposition 1.1 in [49].

We now define $\mathrm{Op}(a)$ on the quotient.

Definition 5.3.2. Assume the sequence (G_n) satisfies (EIIR). Let $r = r_n$ be a positive number.

If a is Γ_n-invariant, we define $\mathrm{Op}_{G_n}(a)$ to be the operator with Γ_n-bi-invariant kernel

$$K_{G_n}(x, y; a) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} K_{\mathfrak{X}}(x, \gamma \cdot y; a)\chi\left(\frac{d(x, \gamma \cdot y)}{r}\right).$$

Here χ is a cut-off function that satisfies the conditions of section 5.2.1 (although it need not be the same cut-off as in section 5.2.1, we use the same notation).

Compared to the case of manifolds, a difficulty we meet is that we are not able to prove that $\mathrm{Op}_{G_n}(a)$ is bounded on $L^2(V_n)$ independently of n (actually, inspection of simple examples show that our conditions on a are not sufficient to ensure this). Note however that we are only interested in $\mathrm{Op}_{G_n}(a)\psi_j^{(n)}$ for $\lambda_j^{(n)}$ in the tempered spectrum; more precisely, we shall only need to estimate quantities such as $\frac{1}{N(I_n, G_n)} \sum_{s_j^{(n)} \in I_n} \left|\langle \psi_j^{(n)}, \mathrm{Op}_{G_n}(a)\psi_j^{(n)} \rangle\right|^2$. For that purpose it will be sufficient to know that the Hilbert-Schmidt norm of $\mathrm{Op}_{G_n}(a)$ does not grow too fast :

Lemma 5.3.3. *If $a \in L^\infty(\mathfrak{X} \times \Omega \times [0,\tau])$ is Γ_n-invariant, we have for every $r \geq 0$*

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Op}_{G_n}(a)\|_{HS}^2 &\leq \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\geq r}} \sum_{\substack{y\in\mathfrak{X}\\ d(y,x)\leq r}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|^2 + q^r \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\leq r}} \sum_{\substack{y\in\mathfrak{X}\\ d(y,x)\leq r}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|^2 \\ &\leq \sum_{x\in D_n} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega) d\mu(s) + q^r \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\leq r}} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega) d\mu(s)\end{aligned}$$

Proof. By definition we have

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Op}_{G_n}(a)\|_{HS}^2 &= \sum_{x,y\in D_n} |K_{G_n}(x,y;a)|^2 \\ &= \sum_{x,y\in D_n} \left| \sum_{\gamma\in\Gamma_n} K_{\mathfrak{X}}(x,\gamma\cdot y;a)\chi\left(\frac{d(x,\gamma\cdot y)}{r}\right)\right|^2.\end{aligned}$$

We split the sum into two parts, whether $\rho(x) \geq r$ or not. If $\rho(x) \geq r$, then the sum over $\gamma \in \Gamma_n$ is reduced to only one term, thanks to the cut-off function. If $\rho(x) \leq r$, then there are at most q^r terms in the sum over $\gamma \in \Gamma_n$, and we can use Cauchy-Schwarz inequality to bound it as follows

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Op}_{G_n}(a)\|_{HS}^2 &\leq \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\geq r}} \sum_{\substack{y\in\mathfrak{X}\\ d(y,x)\leq r}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|^2 + q^r \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\leq r}} \sum_{\substack{y\in\mathfrak{X}\\ d(y,x)\leq r}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|^2 \\ &\leq \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\geq r}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|^2 + q^r \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\leq r}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)|^2.\end{aligned}$$

Plancherel formula for the Fourier-Helgason transform, applied to $y \mapsto K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)$ with x fixed, converts this last expression to

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Op}_{G_n}(a)\|_{HS}^2 \leq &\sum_{x\in D_n} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega) d\mu(s) \\ &+ q^r \sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\leq r}} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega) d\mu(s).\end{aligned}$$

□

5.3.4 "Egorov"-type properties

For Quantum Ergodicity on manifolds, the Egorov theorem is a statement saying that the matrix elements $\langle \psi_j, \mathrm{Op}(a)\psi_j\rangle$ remain almost invariant when transporting a along the geodesic flow, when ψ_j are the eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator Δ. This is proven by showing that taking the bracket $[\Delta, \mathrm{Op}(a)]$ amounts to differentiating a along the geodesic flow (up to some "negligible" error term). Here we try to perform a similar calculation.

We define a map $\sigma\ :\mathfrak{X}\times\Omega\longrightarrow\mathfrak{X}\times\Omega$ by $\sigma(x,\omega)=(x',\omega)$ where $x'\in\mathfrak{X}$ is the unique point such that $d_{\mathfrak{X}}(x,x')=1$ and x' belongs to the half-geodesic $[x,\omega)$. If $[x,\omega)=(x,x_1,x_2,x_3,\ldots)$, then $\sigma(x,\omega)=(x_1,\omega)$, corresponding to the half-geodesic $[x_1,\omega)=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$. In symbolic dynamics, σ is the shift, and if we compare with Quantum Ergodicity on manifolds, σ plays the role of the "geodesic flow" on phase space $\mathfrak{X}\times\Omega$. This map is not invertible, actually each point has exactly q pre-images. We shall denote by U the operator $a\mapsto a\circ\sigma$. For $a:\mathfrak{X}\times\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$, we define $La:\mathfrak{X}\times\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ by

$$La(x,\omega)=\frac{1}{q}\sum_{y\in\mathfrak{X},\sigma(y,\omega)=(x,\omega)}a(y,\omega).$$

If a and b are compactly supported functions, we have

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}}\int_\Omega a\circ\sigma(x,\omega)b(x,\omega)d\nu_x(\omega)=\sum_{x\in\mathfrak{X}}\int_\Omega a(x,\omega)Lb(x,\omega)d\nu_x(\omega),$$

in other words L is the adjoint of U on the Hilbert space $L^2(\mathfrak{X}\times\Omega,\sum_x\delta_x d\nu_x(\omega))$. In addition, we also have $LU=I$, reflecting the fact that U is an isometry of $L^2(\mathfrak{X}\times\Omega,\sum_x\delta_x d\nu_x(\omega))$. The operators U and L preserve the Γ_n-invariant functions. If a and b are a Γ_n-invariant functions, we still have

$$\sum_{x\in D_n}\int_\Omega a\circ\sigma(x,\omega)b(x,\omega)d\nu_x(\omega)=\sum_{x\in D_n}\int_\Omega a(x,\omega)Lb(x,\omega)d\nu_x(\omega).\tag{5.3.3}$$

Recall that D_n is a fundamental domain for the action of Γ_n on $\mathfrak{X}$.

In what follows, we extend the definition of U and L to functions on $\mathfrak{X}\times\Omega\times\mathbb{R}$, by a trivial action on the last component. The crucial bracket calculation is the following :

Proposition 5.3.1. *If $a\in L^\infty(\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau])$ is Γ_n-invariant, then*

$$[\Delta,\mathrm{Op}_{G_n}(a)]=\mathrm{Op}_{G_n}(c)+R$$

where c is given by

$$c(x,\omega,s)=\frac{q^{1/2}}{q+1}\left(q^{is}(a\circ\sigma-a)(x,\omega,s)+q^{-is}(La-a)(x,\omega,s)\right),$$

and R is a remainder such that

$$\|R\|_{HS}^2\le O\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\sum_{x\in D_n}\int|a(x,\omega,s)|^2d\nu_x(\omega)d\mu(s)\right.$$
$$\left.+\,q^{r+2}\sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\le r+2}}\int|a(x,\omega,s)|^2d\nu_x(\omega)d\mu(s)\right).$$

Since $\langle\psi_j, [\Delta, \mathrm{Op}_{G_n}(a)]\psi_j\rangle = 0$ *for every laplacian eigenfunction* ψ_j*, this implies*

$$\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(c)\psi_j\rangle|^2 \leq O\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\sum_{x\in D_n}\int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s)\right.$$
$$\left. + q^{r+2}\sum_{\substack{x\in D_n\\ \rho(x)\leq r+2}}\int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s)\right). \quad (5.3.4)$$

Remark 5.3.4. An exact analogue of the usual Egorov theorem on manifolds would require an estimate of $\|\mathrm{Op}(c)\|_{L^2}$ and show that it is 0 up to a vanishing remainder term. Here, due to our use of the Hilbert-Schmidt norm, we will only show this for the average

$$\frac{1}{N(I_n, G_n)}\sum_{s_j^{(n)}\in I_n} |\langle\psi_j^{(n)}, \mathrm{Op}_{G_n}(c)\psi_j^{(n)}\rangle|^2,$$

which is sufficient to prove our theorem.

Proof. Let us denote by $K_{G_n}(x,y;[.])$ the kernel of $[\Delta, \mathrm{Op}_{G_n}(a)]$. We know from [34] that $K_{\mathfrak{X}}(x,y;c)$ is the kernel of $[\Delta, \mathrm{Op}_{\mathfrak{X}}(a)]$. We are interested in the difference $K_{G_n}(x,y;[.]) - K_{G_n}(x,y;c)$, which is the kernel of the operator R.

We have

$$\begin{aligned} K_{G_n}(x,y;[.]) &= \frac{1}{q+1}\left(\sum_{d(x,z)=1} K_{G_n}(z,y;a) - \sum_{d(z,y)=1} K_{G_n}(x,z;a)\right) \\ &= \frac{1}{q+1}\sum_{\gamma\in\Gamma_n} K_{\mathfrak{X}}(x,\gamma\cdot y), \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

where

$$K_{\mathfrak{X}}(x,y) := \sum_{d(x,z)=1} K_{\mathfrak{X}}(z,y;a)\chi\left(\frac{d(z,y)}{r}\right) - \sum_{d(z,y)=1} K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)\chi\left(\frac{d(x,z)}{r}\right) \quad (5.3.6)$$

Because of the cut-off functions, the sum (5.3.5) only runs on those $\gamma \in \Gamma_n$ for which $d(x,\gamma\cdot y) \leq r+1$; and in (5.3.6) we have $K_{\mathfrak{X}}(x,y) = K_{\mathfrak{X}}(x,y)\mathbb{1}_{\{d(x,y)\leq r+1\}}$.

In the first sum of the right-hand side of equality (5.3.6), $d(z,y) = d(x,y) \pm 1$, because x and z are neighbours. In the second sum $d(x,z) = d(x,y) \pm 1$, because z and y are neighbours. Since χ is a smooth function, both $\chi\left(\frac{d(z,y)}{r}\right)$ and $\chi\left(\frac{d(x,z)}{r}\right)$ are equal to $\chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right)$, and we have

$$
\begin{aligned}
K_{\mathfrak{X}}(x,y) &= \left(\sum_{d(x,z)=1} K_{\mathfrak{X}}(z,y;a) - \sum_{d(z,y)=1} K_{\mathfrak{X}}(x,z;a) \right) \chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{r}\right) \left(\sum_{d(x,z)=1} |K_{\mathfrak{X}}(z,y;a)| + \sum_{d(z,y)=1} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)| \right) \mathbb{1}_{\{d(x,y)\le r+1\}} \\
&= (q+1) K_{\mathfrak{X}}(x,y;c) \chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{r}\right) \left(\sum_{d(x,z)=1} |K_{\mathfrak{X}}(z,y;a)| + \sum_{d(z,y)=1} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)| \right) \mathbb{1}_{\{d(x,y)\le r+1\}}.
\end{aligned}
$$

Now if we go back to (5.3.5) we get $K_{G_n}(x,y;[.]) = K_{G_n}(x,y;c) + K_{G_n}(x,y;R)$, where $K_{G_n}(x,y;R)$ is the kernel of the operator R, given by

$$
K_{G_n}(x,y;R) = O\left(\frac{1}{r}\right) \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \left(\sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d(x,z)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(z,\gamma\cdot y;a)| + \sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d(z,\gamma\cdot y)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)| \right) \mathbb{1}_{\{d(x,\gamma\cdot y)\le r+1\}}.
$$

We estimate the Hilbert-Schmidt norm of R by first writing

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in D_n}\sum_{y\in D_n} \left| \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \left(\sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d_{\mathfrak{X}}(x,z)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(z,\gamma\cdot y;a)| + \sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d_{\mathfrak{X}}(z,\gamma\cdot y)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)| \right) \mathbb{1}_{\{d_{\mathfrak{X}}(x,\gamma\cdot y)\le r+1\}} \right|^2 \\
&= \sum_{x\in D_n}\sum_{y\in D_n} \left| \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d_{\mathfrak{X}}(x,z)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(z,\gamma\cdot y;a)| \mathbb{1}_{\{d_{\mathfrak{X}}(z,\gamma\cdot y)\le r+2\}} + \sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d_{\mathfrak{X}}(z,\gamma\cdot y)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)| \mathbb{1}_{\{d_{\mathfrak{X}}(x,\gamma\cdot y)\le r+1\}} \right|^2.
\end{aligned}
$$

We then use Cauchy-Schwarz and reason along the same lines as in lemma 5.3.3, to bound the former expression by

$$
\begin{aligned}
&\le 2(q+1) \Bigg(\sum_{\substack{z\in D_n \\ \rho(z)\ge r+2}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} \sum_{\substack{x\in D_n \\ d_{G_n}(z,x)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(z,y;a)|^2 + \sum_{\substack{x\in D_n \\ \rho(x)\ge r+1}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} \sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d_{\mathfrak{X}}(z,y)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)|^2 \\
&\quad + q^{r+2} \sum_{\substack{z\in D_n \\ \rho(z)\le r+2}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} \sum_{\substack{x\in D_n \\ d_{G_n}(z,x)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(z,y;a)|^2 + q^{r+1} \sum_{\substack{x\in D_n \\ \rho(x)\le r+1}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} \sum_{\substack{z\in\mathfrak{X} \\ d_{\mathfrak{X}}(z,y)=1}} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)|^2 \Bigg) \\
&\le 2(q+1)^2 \Bigg(\sum_{\substack{z\in D_n \\ \rho(z)\ge r+2}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(z,y;a)|^2 + \sum_{\substack{x\in D_n \\ \rho(x)\ge r+1}} \sum_{z\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)|^2 \\
&\quad + q^{r+2} \sum_{\substack{z\in D_n \\ \rho(z)\le r+2}} \sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(z,y;a)|^2 + q^{r+1} \sum_{\substack{x\in D_n \\ \rho(x)\le r+1}} \sum_{z\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,z;a)|^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$\leq 4(q+1)^2 \sum_{x\in D_n} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) + q^{r+2} \sum_{\substack{x\in D_n \\ \rho(x)\leq r+2}} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s).$$

Finally we have

$$\|R\|_{HS}^2 \leq O\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\sum_{x\in D_n}\int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \right.$$
$$\left. + q^{r+2} \sum_{\substack{x\in D_n \\ \rho(x)\leq r+2}} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s)\right).$$

□

In what follows, Proposition 5.3.1 will be translated into an invariance property of the type

$$\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n} |\langle\psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a)\psi_j\rangle|^2 \sim \frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n} |\langle\psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(Ta)\psi_j\rangle|^2$$

for some operator T. A key idea is then to take advantage of the spectral properties of T and its iterates T^k for $k\in\mathbb{N}$. In the special case where $s_0=\tau/2$ we can take $T=U^2$ (Corollary 5.3.9), which makes this spectral value special. For general values of s_0, T is a linear combination with complex coefficients of the non-commuting operators L and U, and its spectral properties are not so nice. The aim of the successive operations done in Corollaries 5.3.5 to 5.3.8 is to replace Ta with Ua up to some error term. We first replace a with $q^{is}a\circ\sigma$ in (5.3.4) to obtain

Corollary 5.3.5. *If $a\in L^\infty(\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau])$ is Γ_n-invariant, then*

$$\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}\left((U-I)(q^{2is}U-I)a\right)\psi_j\rangle|^2$$
$$\leq O\left(\frac{1}{r^2}\right)\sum_{x\in D_n}\int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$
$$+ O(q^r)|\{x\in D_n, \rho(x)\leq r+2\}| \int \|a(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s)$$

where $Ua=a\circ\sigma$.

Proof. Recall that symbol c of proposition 5.3.1 is given by

$$c = \frac{q^{1/2}}{q+1}(q^{is}(Ua-a)+q^{-is}(La-a)).$$

If we replace a with $q^{is}Ua$ we have

$$c = \frac{q^{1/2}}{q+1}(q^{2is}(U^2a-Ua)+(a-Ua)) = \frac{q^{1/2}}{q+1}(U-I)(q^{2is}U-I)a.$$

It follows from (5.3.4) that

$$\begin{aligned}
&\sum_j |\langle \psi_j, \mathrm{Op}\left((U-I)(q^{2is}U-I)a\right)\psi_j\rangle|^2 \\
&\qquad \le O\left(\frac{1}{r^2}\right) \sum_{x\in D_n} \int |Ua(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\qquad\quad + O\left(\frac{q^r}{r^2}\right) \sum_{x\in D_n, \rho(x)\le r+2} \int |Ua(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\qquad \le O\left(\frac{1}{r^2}\right) \sum_{x\in D_n} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\qquad\quad + O\left(\frac{q^r}{r^2}\right) |\{x\in D_n, \rho(x)\le r+2\}| \int \|a(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s),
\end{aligned}$$

where we used the fact that U preserves the L^2 and L^∞ norms. □

The idea is then to invert $(q^{2is}U-I)$. As the series $\sum_k q^{2iks}U^k$ is a formal inverse to $(q^{2is}U-I)$, we apply Corollary 5.3.5 to $a=\sum_{k=0}^{N-1} q^{2iks}U^k b := b_{N-1}$, where $b\in L^\infty$ and N is an arbitrary integer. We obtain

Corollary 5.3.6.

$$\begin{aligned}
&\sum_j |\langle \psi_j, \mathrm{Op}\left((U-I)(I-q^{2iNs}U^N)b\right)\psi_j\rangle|^2 \\
&\qquad \le O\left(\frac{N^2}{r^2}\right) \sum_{x\in D_n} \int |b(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\qquad\quad + O\left(\frac{N^2q^r}{r^2}\right) |\{x\in D_n, \rho(x)\le r+2\}| \int \|b(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s)
\end{aligned}$$

Proof. We apply Corollary 5.3.5 to $a=\sum_{k=0}^{N-1} q^{2iks}U^k b := b_{N-1}$ and use the identity

$$(q^{2is}U-I)b_{N-1} = (q^{2iNs}U^N-I)b$$

combined with the fact that U preserves the L^2 and L^∞ norms. □

If we apply Corollary 5.3.5 to $a=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} b_k$, we obtain

Corollary 5.3.7.

$$\begin{aligned}
&\sum_j \left|\langle \psi_j, \mathrm{Op}\left(Ub-b-q^{2is}U(U-I)b^{(s,N)}\right)\psi_j\rangle\right|^2 \\
&\qquad \le O\left(\frac{N^2}{r^2}\right) \sum_{x\in D_n} \int |b(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\qquad\quad + O\left(\frac{N^2q^r}{r^2}\right) |\{x\in D_n, \rho(x)\le r+2\}| \int \|b(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s)
\end{aligned}$$

where $b^{(s,N)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^{2isk}U^k b$.

Note that the "remainder term" $q^{2is}U(U-I)b^{(s,N)}$ is not small in the symbol norm : in Section 5.4, the (EXP) assumption will be used to show that it is small in the L^2-norm. This is a major difference with the Egorov theorem on manifolds, where no ergodicity assumption is needed.

Proof. We know from the proof of the previous corollary that

$$(I-q^{2is}U)b_k = (I-q^{2i(k+1)s}U^{k+1})b.$$

It follows that $(I-q^{2is}U)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} b_k = b - q^{2is}Ub^{(s,N)}$, and

$$(U-I)(I-q^{2is}U)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} b_k = Ub - b - q^{2is}U(U-I)b^{(s,N)}.$$

$\square$

Combining with the Hilbert-Schmidt estimate, Lemma 5.3.3, we get

Corollary 5.3.8. *If $b \in L^\infty(\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau])$ is Γ_n-invariant, then we have*

$$\begin{aligned}\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}\,(Ub-b)\,\psi_j\rangle|^2 \leq O\left(\frac{N}{r^2}\right)&\sum_{x\in D_n}\int |b(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s)\\ &+ 2\sum_{x\in D_n}\int |b^{(s,N)}(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s)\\ &+ O(N^2q^r)|\{x\in D_n, \rho(x)\leq r+2\}|\int \|b(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s)\end{aligned}$$

Proof. We write

$$\begin{aligned}\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}\,(Ub-b)\,\psi_j\rangle|^2 \leq 2&\sum_j \left|\langle\psi_j, \mathrm{Op}\left(Ub-b-q^{2is}U(U-I)b^{(s,N)}\right)\psi_j\rangle\right|^2\\ &+2\sum_j \left|\langle\psi_j, \mathrm{Op}\left(q^{2is}U(I-U)b^{(s,N)}\right)\psi_j\rangle\right|^2\end{aligned}$$

The first term on the right-hand side is estimated by Corollary 5.3.7. We estimate the last term thanks to Lemma 5.3.3, and we use the fact that U preserves the L^2 norm by

U :

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \left|\langle\psi_j, \mathrm{Op}\left(q^{2is}U(I-U)b^{(s,N)}\right)\psi_j\rangle\right|^2 \\
&\quad\leq \sum_{x\in D_n}\int |(I-U)b^{(s,N)}(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad\quad + q^r \sum_{x\in D_n,\rho(x)\leq r}\int |(I-U)b^{(s,N)}(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad\leq \sum_{x\in D_n}\int |b^{(s,N)}(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad\quad + 4N^2 q^r |\{x\in D_n, \rho(x)\leq r\}| \int \|b(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s).
\end{aligned}
$$

□

As already mentioned, the value $s_0 = \tau/2$ is special and the previous corollaries may be replaced by the following, simpler one. In case the support of a shrinks around $s_0 = \tau/2$, this is a closer analogue of the Egorov theorem on manifolds in the sense that no ergodicity or expanding assumption is needed to show that the remainder term goes to 0.

Corollary 5.3.9. *If $a \in L^\infty(\mathfrak{X}\times\Omega\times[0,\tau])$ is Γ_n invariant, then*

$$
\begin{aligned}
&\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(a\circ\sigma^2)\psi_j\rangle|^2 \\
&\quad\quad\leq O\left(\frac{1}{r^2}\right)\sum_{x\in D_n}\int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad\quad\quad + O\left(q^{r+2}\right)|\{x\in D_n,\rho(x)\leq r+2\}|\int \|a(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s) \\
&\quad\quad\quad + n\int O(|s-s_0|^2)\|a(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s)
\end{aligned}
$$

Proof. We replace the symbol a in proposition 5.3.1 with $q^{is}a\circ\sigma$. As $L(a\circ\sigma) = a$, the symbol b becomes $b = a - Ta$, where

$$
Ta(x,\omega,s) = -q^{2is}a\circ\sigma^2(x,\omega,s) + 2q^{is}\cos(s\ln q)a\circ\sigma(x,\omega,s)
$$

and we have $\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(Ta)\psi_j\rangle|^2 \leq \|R\|_{HS}^2$, where

$$\begin{aligned}
\|R\|_{HS}^2 &\leq O\left(\frac{1}{r^2}\right) \sum_{x\in D_n} \int |a\circ\sigma(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad + O\left(q^{r+1}\right) \sum_{x\in D_n, \rho(x)\leq r+1} \int |a\circ\sigma(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\leq O\left(\frac{1}{r^2}\right) \sum_{x\in D_n} \int |a(x,\omega,s)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad + O\left(q^{r+1}\right) |\{x\in D_n, \rho(x)\leq r+1\}| \int \|a(\cdot,\cdot,s)\|_\infty^2 d\mu(s).
\end{aligned}$$

Now $Ta = a\circ\sigma^2 - c$, with

$$c(x,\omega,s) = (1+q^{2is})a\circ\sigma^2(x,\omega,s) + 2q^{is}\cos(s\ln q)a\circ\sigma(x,\omega,s)$$

and we can write

$$\begin{aligned}
\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(a\circ\sigma^2)\psi_j\rangle|^2 &\leq 2\sum_j |\langle\psi_j, \mathrm{Op}(c)\psi_j\rangle|^2 + 2\|R\|_{HS}^2 \\
&\leq 2\|\mathrm{Op}(c)\|_{HS}^2 + 2\|R\|_{HS}^2.
\end{aligned}$$

Recalling that $s_0 = \frac{\pi}{2\ln q}$, we have

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Op}(c)\|_{HS}^2 &\leq \sum_{x\in D_n} \int |(1+q^{2is})a\circ\sigma^2 + 2q^{is}\cos(s\ln q)a\circ\sigma)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad + q^r \sum_{x\in D_n, \rho(x)\leq r} \int |(1+q^{2is})a\circ\sigma^2 + 2q^{is}\cos(s\ln q)a\circ\sigma)|^2 d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\leq \sum_{x\in D_n} \int O(|s-s_0|^2)(|a\circ\sigma^2| + |a\circ\sigma|)^2(x,\omega,s)d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\quad + q^r \sum_{x\in D_n, \rho(x)\leq r} \int O(|s-s_0|^2)(|a\circ\sigma^2| + |a\circ\sigma|)^2(x,\omega,s)d\nu_x(\omega)d\mu(s) \\
&\leq n\int O(|s-s_0|^2)\sup_{x,\omega}|a(x,\omega,s)|^2 d\mu(s) \\
&\quad + q^r|\{x\in D_n, \rho(x)\leq r\}| \int O(|s-s_0|^2)\sup_{x,\omega}|a(x,\omega,s)|^2 d\mu(s)
\end{aligned}$$

□

5.3.5 Two more formulas about $\mathrm{Op}_{G_n}(\chi_n)$

Lemma 5.3.10.

$$\mathrm{Op}_{G_n}(\chi_n)\psi_j^{(n)} = \lambda_j^{(n)}\psi_j^{(n)}$$

with

$$\lambda_j^{(n)} = \chi_n(s_j) + r^3 O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^\infty}\right)$$

if $s_j \in [0, \tau]$ *(tempered eigenfunctions).*

Proof. First note that $\psi_j^{(n)}$ is associated to a Γ_n-invariant eigenfunction of the laplacian on the tree $\mathfrak{X}$, that we will still denote by $\psi_j^{(n)}$. We have on the tree

$$\mathrm{Op}_{G_n}(\chi_n)\psi_j^{(n)}(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; \chi_n)\chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\psi_j^{(n)}(y)$$

and $K_{\mathfrak{X}}(x, y; \chi_n)\chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)$ depends only on $d(x, y)$ because χ_n does not depend on (x, ω). We thus have

$$\mathrm{Op}_{G_n}(\chi_n)\psi_j^{(n)}(x) = f(s_j)\psi_j^{(n)}(x)$$

where $f(s_j)$ is given by the spherical transform of the kernel

$$f(s_j) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; \chi_n)\chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\phi_{s_j}(d(x, y))$$

and ϕ_{s_j} is the spherical function associated to s_j defined in (5.2.3). Now

$$\begin{aligned} f(s_j) &= \sum_{y\in\mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; \chi_n)\phi_{s_j}(d(x, y)) \\ &\quad - \sum_{y\in\mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; \chi_n)\phi_{s_j}(d(x, y))\left(1 - \chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\right) \\ &= \chi_n(s_j) \\ &\quad - \sum_{y\in\mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; \chi_n)\phi_{s_j}(d(x, y))\left(1 - \chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\right). \end{aligned}$$

Because $\chi_n \in S(\mathfrak{X})$, according to the rapid decay property of the kernel of pseudodifferential operators (5.3.1), we have

$$|K_{\mathfrak{X}}(x, y; \chi_n)| \leq C\left(\sum_{k=0}^{M+1} \|\partial_s^k \chi_n\|_\infty\right)\frac{q^{-\frac{d(x,y)}{2}}}{(1 + d(x, y))^M}$$

for every $M \in \mathbb{N}$. Moreover, if s_j is a tempered eigenvalue, then

$$|\phi_{s_j}(d(x, y))| \leq Cq^{-\frac{d(x,y)}{2}}.$$

So, using also the fact that $\|\partial_s^k \chi_n\|_\infty \leq C_k \delta_n^{-k}$, we obtain that for every $M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|f(s_j) - \chi_n(s_j)| &\leq \frac{C_{M+1}}{\delta_n^{M+1}} \sum_{y \in \mathfrak{X}} \frac{q^{-d(x,y)}}{(1+d(x,y))^M} \left(1 - \chi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\right) \\
&\leq \frac{C_{M+1}}{\delta_n^{M+1}(1+r)^{M-2}} \sum_{y \in \mathfrak{X}} \frac{q^{-d(x,y)}}{(1+d(x,y))^2} \\
&= \frac{C_{M+1}}{\delta_n^{M+1}(1+r)^{M-2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{y : d(x,y) = k} \frac{q^{-k}}{(1+k)^2} \\
&\leq \frac{C_{M+1}}{\delta_n^{M+1}(1+r)^{M-2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(1+k)^2}.
\end{aligned}$$

We thus have

$$|f(s_j) - \chi_n(s_j)| = r^3 O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^{M+1}}\right)$$

for any M. □

Lemma 5.3.11. *Fix an integer D. Let a be such that $K_{\mathfrak{X}}(x, y; a) = 0$ for $d_{\mathfrak{X}}(x, y) > D$ (in other words, $a \in S_o^D(\mathfrak{X})$) and $\varphi = \varphi(s)$. We have*

$$\mathrm{Op}_{G_n}(a\varphi) = \mathrm{Op}_{G_n}(a)\,\mathrm{Op}_{G_n}(\varphi) + R$$

where

$$\|R\|_{HS}^2 \leq O(r^{-1}) \int \varphi^2(s) d\mu(s) \left(n + |\{x \in V_n, \rho(x) \leq r + D\}| q^{r+D}\right)$$

Proof. The kernel $K_{G_n}(x, z; a\varphi)$ of $\mathrm{Op}_{G_n}(a\varphi)$ is obtained by the periodization

$$K_{G_n}(x, z; a\varphi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} K_{\mathfrak{X}}(x, \gamma \cdot z; a\varphi) \chi\left(\frac{d(x, \gamma \cdot z)}{r}\right).$$

Because φ only depends on s, we note that

$$K_{\mathfrak{X}}(x, z; a\varphi) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; a) K_{\mathfrak{X}}(y, z; \varphi)$$

(see (5.3.2)) and

$$\begin{aligned}
K_{\mathfrak{X}}(x, z; a\varphi)\chi\left(\frac{d(x,z)}{r}\right) &= \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; a) K_{\mathfrak{X}}(y, z; \varphi) \chi\left(\frac{d(y,z)}{r}\right) \\
&\quad + \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; a) K_{\mathfrak{X}}(y, z; \varphi) \left(\chi\left(\frac{d(x,z)}{r}\right) - \chi\left(\frac{d(y,z)}{r}\right)\right) \\
&= \sum_{y \in \mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x, y; a) K_{\mathfrak{X}}(y, z; \varphi) \chi\left(\frac{d(y,z)}{r}\right) \\
&\quad + O(r^{-1}) \sum_{y \in \mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x, y; a)| |K_{\mathfrak{X}}(y, z; \varphi)| \mathbb{1}_{d_{\mathfrak{X}}(x,z) \leq r+D}
\end{aligned}$$

After Γ_n-periodization, we note that $\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\sum_{y\in\mathfrak{X}} K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)K_{\mathfrak{X}}(y,\gamma\cdot z;\varphi)\chi\left(\frac{d(y,\gamma\cdot z)}{r}\right)$ is the kernel of $\mathrm{Op}_{G_n}(a)\,\mathrm{Op}_{G_n}(\varphi)$ (as soon as $D<r$). Using Cauchy-Schwarz and the fact that $K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)$ is supported near the diagonal, the Hilbert-Schmidt norm of the operator with kernel

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\sum_{y\in\mathfrak{X}}|K_{\mathfrak{X}}(x,y;a)||K_{\mathfrak{X}}(y,\gamma\cdot z;\varphi)|\mathbb{1}_{d_{\mathfrak{X}}(x,\gamma\cdot z)\leq r+D}$$

on $L^2(G_n)$ can be bounded by

$$q^{2D}\sup_{x,y}|K(x,y;a)|^2\int\varphi^2(s)d\mu(s)\left(n+|\{x\in V_n,\rho(x)\leq r+D\}|q^{r+D}\right).$$

□

5.4 The proof for arbitrary s_0

5.4.1 Upper bound on the variance

Fix an integer $T>0$. Let χ be a smooth cut-off function supported in $[-1,1]$ and taking the constant value 1 on $[-1/2,1/2]$. We write

$$\chi_n(s)=\chi\left(\frac{s-s_0}{2\delta_n}\right)$$

so that $\chi_n\equiv 1$ on I_n. We use the pseudodifferential calculus and the notation defined in Section 5.3, taking the cut-off parameter r equal to r_n (from condition (EIIR), as explained before the statement of theorem 5.1.3).

To simplify the notation, we will write $\psi_j=\psi_j^{(n)}$, $s_j=s_j^{(n)}$, and $a=a_n$. Thanks to Lemmas 5.3.10 and to the "Egorov property" Corollary 5.3.8, we have[8]

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\chi_n(s_j)^2\left|\langle\psi_j,a\psi_j\rangle\right|^2 &= \sum_{j=0}^{n}\left|\langle\psi_j,\mathrm{Op}_{G_n}(a\chi_n)\psi_j\rangle\right|^2+nr^3O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^\infty}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left|\langle\psi_j,\mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi_n)\psi_j\rangle\right|^2+nr^3O\left(\frac{1}{(r\delta_n)^\infty}\right)\\
&\quad+O\left(T^2\frac{N^2}{r^2}\right)\sum_{x\in D_n}\int|a(x,\omega)|^2d\nu_x(\omega)\chi_n(s)^2d\mu(s)\\
&\quad+O(T^2N^2q^r)|\{x\in D_n,\rho(x)\leq r+2\}|\int\chi_n(s)^2d\mu(s)\\
&\quad+O(T^2)\sum_{x\in D_n}\int|a^{(s,N)}(x,\omega)|^2d\nu_x(\omega)\chi_n(s)^2d\mu(s)\end{aligned}$$

8. To prove the extended Theorem 5.1.7, we also need Lemma 5.3.11.

where

$$a^T := \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a\circ\sigma^k \quad \text{and} \quad a^{(s,N)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q^{2isk} a\circ\sigma^k.$$

We use Lemma 5.3.3 to write

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\left|\langle\psi_j, \mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi_n)\psi_j\rangle\right|^2 &\leq \left\|\mathrm{Op}_{G_n}(a^T\chi_n)\right\|^2{}_{HS}\\ &\leq \sum_{x\in D_n}\int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega)\chi_n(s)^2 d\mu(s)\\ &\quad +q^r\sum_{x\in D_n,\rho(x)\leq r}\int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega)\int \chi_n(s)^2 d\mu(s).\end{aligned}$$

We have seen in Section 5.2.2 that $\sum_{x\in D_n}\int |a^T(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega) = O\left(\frac{n}{T\beta}\right)$. The same proof shows that $\sum_{x\in D_n}\int |a^{(s,N)}(x,\omega)|^2 d\nu_x(\omega) = O\left(\frac{n}{N\beta}\right)$. A major difference here with the usual Quantum Ergodicity (and with the special proof of section 5.2) is that condition (EXP) is used already to show that the "remainder term" $a^{(s,N)}$ of the Egorov theorem is small in the L^2-norm.

Remark 5.4.1. For s staying away from $\tau/2$, a slightly more careful proof would show that we only need to assume here that the spectrum of A is contained in $\{1\}\cup[-1, 1-\beta]$. Hence our Remark 5.1.5.

Recall also, from the Kesten-McKay law (Section 5.5, Corollary 5.5.2) that

$$\frac{n}{N(I_n, G_n)}\int \chi_n(s)^2 d\mu(s) = O(1).$$

We obtain finally

$$\begin{aligned}\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n}|\langle\psi_j, a\psi_j\rangle|^2 &= r^3 O\left(\frac{1}{\delta_n(r\delta_n)^\infty}\right) + O\left(\frac{N^2T^2}{r^2}\right)\\ &\quad +O(N^2T^2q^r\alpha_n) + O\left(\frac{T^2}{N\beta}\right) + O\left(\frac{1}{T\beta}\right),\end{aligned}$$

and if we choose the sequences $r = r_n$ and δ_n as explained in section 5.5,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n}|\langle\psi_j, a\psi_j\rangle|^2 = O\left(\frac{T^2}{N\beta}\right) + O\left(\frac{1}{T\beta}\right).$$

As the left-hand side of the equality does not depend on T and N, we take the limit $N \longrightarrow \infty$ and then $T \longrightarrow \infty$ to get

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N(I_n,G_n)}\sum_{s_j\in I_n}|\langle\psi_j, a\psi_j\rangle|^2 = 0.$$

5.5 Kesten-McKay law for sequences of graphs satisfying (EIIR)

In this section we give an alternative proof of the Kesten-McKay law [28, 38], which gives the spectral density for large regular graphs satisfying (EIIR) and is analogous to the Weyl law for the spectral density of the laplacian on Riemannian manifolds. Note that we consider the density of eigenvalues in intervals that are allowed to shrink as $n \longrightarrow +\infty$.

In the definition of Op_{G_n}, we take $r = r_n$ such that $r_n + 2 \leq R_n$ and $q^{r_n}\alpha_n \longrightarrow 0$ (where R_n and α_n are the quantities occurring in (EIIR)) [9]. We also assume that there exists an integer M such that

$$\frac{1}{\delta_n^{M+1} r_n^{M-3}} \longrightarrow 0.$$

If χ_n is the function defined in (5.2.1) with $s_0 \in (0, \tau)$, this ensures that

$$\int_0^\tau \chi_n(s)^2 d\mu(s) \gg r_n^3 (\delta_n r_n)^{-M}.$$

Theorem 5.5.1. *Assume (EIIR). Let $\chi = \chi_n$ be a smooth function satisfying*

$$\|\partial_s^k \chi\| \leq C_k \delta_n^{-k},$$

with $\delta_n r_n \longrightarrow +\infty$, such that $\frac{1}{\delta_n^{M+1} r_n^{M-3}} \longrightarrow 0$ for some M.

Then we have

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_n(s_j)^2 \sim \int_0^\tau \chi_n(s)^2 d\mu(s)$$

when $n \longrightarrow +\infty$.

9. We can take for example $r_n = \min\left\{R_n - 2, -(1-\epsilon)\frac{\log \alpha_n}{\log q}\right\}$, for any $0 < \epsilon < 1$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \chi_n(s_j)^2 &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Op}_{G_n}(\chi_n)^2\right) + O(nr_n^3(\delta_n r_n)^{-\infty}) \\
&= \sum_{x\in D_n}\sum_{y\in D_n} |K_{G_n}(x,y;\chi_n)|^2 + O(nr_n^3(\delta_n r_n)^{-\infty}) \\
&= \sum_{\rho(x)>r_n}\sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;\chi_n)|^2 + O(nr_n^3(\delta_n r_n)^{-\infty}) \\
&\quad + O(q^{r_n}) \sum_{\rho(x)\le r_n}\sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;\chi_n)|^2 \\
&= \sum_{x\in D_n}\sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;\chi_n)|^2 + O(nr_n^3(\delta_n r_n)^{-\infty}) \\
&\quad + (O(q^{r_n})-1) \sum_{\rho(x)\le r_n}\sum_{y\in\mathfrak{X}} |K_{\mathfrak{X}}(x,y;\chi_n)|^2 \\
&= n\int_0^{\tau} \chi_n(s)^2 d\mu(s) + O(nr_n^3(\delta_n r_n)^{-\infty}) \\
&\quad + (O(q^{r_n})-1)\,|\{x\in D_n, \rho(x)\le r_n\}| \int_0^{\tau} \chi_n(s)^2 d\mu(s).
\end{aligned}$$

Thus, we get the desired result if

$$\int_0^{\tau} \chi_n(s)d\mu(s) \gg r_n^3(\delta_n r_n)^{-\infty}.$$

□

Corollary 5.5.2. *Under the assumptions of Theorem 5.1.3, we have*

$$N(I_n, G_n) \sim n\int_{s_0-\delta_n}^{s_0+\delta_n} d\mu(s) \sim 2n\delta_n|c(s_0)|^{-2}$$

where $|c(s_0)|^{-2}$ *is the density of the Plancherel measure at* s_0.

5.6 Quantitative statement

In this section we will give explicit upper bounds on the rate of convergence, first in terms of the parameters R_n and α_n associated with the sequence of graphs (G_n) in condition (EIIR), then depending only on n for sequences of random graphs. These results are certainly not optimal because some of our inequalities were written in a non optimal way.

In the general case $s_0 \in (0,\tau)$, we have

Lemma 5.6.1. *If* $\delta_n = r_n^{-1+\epsilon}$ *for some* $0<\epsilon<1$*, then we have*

$$\frac{1}{N(I_n,G_n)} \sum_{s_j^{(n)}\in I_n} \left|\langle \psi_j^{(n)}, a_n\psi_j^{(n)}\rangle\right|^2 = O\left(r_n^{-2/9} + r_n^{16/9} q^{r_n}\alpha_n\right),$$

where we can take $r_n = \min\left\{R_n - 2, -(1-\epsilon')\log_q(\alpha_n)\right\}$, *for any* $0 < \epsilon' < 1$.

Proof. According to the proof of section 5.4, we have

$$\frac{1}{N(I_n, G_n)} \sum_{s_j \in I_n} |\langle \psi_j, a_n \psi_j \rangle|^2 \leq r_n^3 O\left(\frac{1}{\delta_n (r_n \delta_n)^\infty}\right) + O\left(\frac{N^2T^2}{r_n^2}\right) + O(N^2T^2 q^{r_n}\alpha_n) + O\left(\frac{T^2}{\beta N}\right) + O\left(\frac{1}{T\beta}\right).$$

Take $N = r_n^{2/3}$ and $T = r_n^{2/9}$ such that $\frac{1}{T} = \frac{T^2}{N} = \frac{N^2T^2}{r_n^2} = r_n^{-2/9}$. For every $M > 0$, we have $O\left(\frac{r_n^3}{\delta_n(r_n\delta_n)^\infty}\right) = O\left(r_n^{3-M}\delta_n^{-(1+M)}\right) = O\left(r_n^{4-(1+M)\epsilon}\right)$ and this term can be made negligible in comparison with the other terms by taking M sufficiently large. Finally $N^2T^2q^{r_n}\alpha_n = r_n^{16/9}q^{r_n}\alpha_n$. □

Remark 5.6.2. Here we kept the spectral gap β fixed, but we see that this could be relaxed to $\beta \gg r_n^{-2/9}$.

For sequences of random graphs, we have

Lemma 5.6.3. *Let* $\delta > 1/2$, $\epsilon > 0$, *and* $\delta_n = (\log_q(n^{1-\delta}))^{1-\epsilon}$. *If* G_n *is chosen uniformly at random among the* $(q+1)$*-regular graphs with* n *vertices, we have*

$$\frac{1}{N(I_n, G_n)} \sum_{s_j^{(n)} \in I_n} \left|\langle \psi_j^{(n)}, a_n \psi_j^{(n)} \rangle\right|^2 = O\left(\log_q(n)^{-2/9}\right),$$

with overwhelming probability.

Proof. Take R_n and α_n as in example 1. Let $1/2 < \delta < 1$, then $R_n = (1-\delta)\log_q(n)$ and $\alpha_n = 80(1-\delta)\log_q(n)n^{-\delta}$. In this case, we take

$$r_n = \min\left\{R_n - 2, -(1-\epsilon')\frac{\log \alpha_n}{\log q}\right\} = R_n - 2,$$

and apply lemma 5.6.1. □

5.7 Proof of Theorem 5.1.7

Most steps of the proof carry over to arbitrary $a \in S_o^D(\mathfrak{X})$. Actually, all that needs modifying is the treatment of the expression

$$\sum_{x \in D_n} \int \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} q^{2isk} a \circ \sigma^k \right|^2 (x, \omega, s) d\nu_x(\omega) d\mu(s) \tag{5.7.1}$$

that is used in section 5.2.2 (for $s=0$) and Section 5.4 (for s close to s_0). Equation (5.7.1) is also

$$\frac{1}{N^2}\sum_{x\in D_n}\int\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{k} q^{2isj} a\circ\sigma^j(x,\omega,s)a(x,\omega,s)d\nu_x(\omega)d\mu(s)$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_{x\in D_n}\int\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{k} q^{-2isj} a\circ\sigma^j(x,\omega,s)a(x,\omega,s)d\nu_x(\omega)d\mu(s) \quad (5.7.2)$$

In section 5.2.2, the integral

$$\sum_{x\in D_n}\int a\circ\sigma^j(x,\omega)a(x,\omega)d\nu_x(\omega)$$

was rewritten as $\sum_{x\in D_n} S_j a(x)a(x)$ using the fact that a did not depend on ω – thus establishing a link between the shift σ and the laplacian. We need to adapt that argument to the case when $a(x,\omega)$ depends on the first D coordinates of the half geodesic $[x,\omega)=(x,x_1,x_2,\ldots)$.

5.7.1 Proof when $D=2$.

When $D=2$, $a(x,\omega)=a(x,x_1)$, so that a is a function on the set B of directed bonds of $G=G_n$ [10]. We use the notation of [43] : if e is an element of B, we shall denote by $o(e)\in V_n$ its origin, $t(e)\in V_n$ its terminus, and $\hat{e}\in B$ the reversed bond.

One sees that

$$\sum_{x\in D_n}\int a\circ\sigma^j(x,\omega)a(x,\omega)d\nu_x(\omega)=\frac{1}{q+1}\sum_{e\in B}M^{\sharp j}a(e)a(e)$$

where $M^\sharp$ is a bistochastic matrix indexed by B, defined by

$$M^\sharp(e,e')=\frac{1}{q}$$

if $o(e')=t(e)$ and $e'\neq\hat{e}$; and $M^\sharp(e,e')=0$ otherwise. This is (up to normalization) the matrix appearing in section 3 of [43]. It is the (normalized) adjacency matrix of the q-regular directed graph, whose vertices are the directed bonds of G, and where we draw an edge between two bonds if they are consecutive without allowing back-tracking. What we need is an explicit relation between the spectrum of $M^\sharp$ and the spectrum of the discrete laplacian on G, in other words, of the matrix A. The relation between the eigenvalues is formula (44) in [43], but since we also need relations between the eigenfunctions, we shall be more explicit below. We did not write all the detailed calculations because they are lengthy but basic. We assume these relations must already be known but did not find any reference.

10. Note that B has cardinality $n(q+1)$ if G has n vertices and is $(q+1)$-regular.

(o) Both A and $M^\sharp$ have 1 in their spectrum, corresponding to the constant eigenfunction. The matrix A has -1 in its spectrum iff the graph G is bi-partite, in which case $M^\sharp$ also trivially has -1 in its spectrum.

(i) each eigenvalue $\lambda \neq \pm 1$ of A gives rise to the two eigenvalues

$$\frac{2}{(q+1)\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \frac{4q}{(q+1)^2}}\right)}$$

of $M^\sharp$;

(ii) in addition, $M^\sharp$ admits the eigenvalue $1/q$ with multiplicity $b := |E_n| - |V_n| + 1$ (the rank of the fundamental group of G); and the eigenvalue $-1/q$ with multiplicity $b-1$ if -1 is not an eigenvalue of A, or b if -1 is an eigenvalue of A. [11]

In particular, the eigenvalue 1 of $M^\sharp$ has multiplicity 1. The tempered spectrum of A corresponds to eigenvalues of $M^\sharp$ of modulus $1/\sqrt{q}$; the untempered spectrum of A contained in $[-1, 1-\beta]$ gives rise to real eigenvalues of $M^\sharp$ contained in $[-1, 1-\beta']$ with

$$1 - \beta' = \frac{2}{(q+1)\left(1 - \beta - \sqrt{(1-\beta)^2 - \frac{4q}{(q+1)^2}}\right)}.$$

Since $M^\sharp$ is not normal, the knowledge of its spectrum is not sufficient to control the growth of $M^{\sharp k}$ in a precise manner (we need a bound that is independent of the size of the matrix, in other words, independent of n). Below, we describe explicitly the eigenvectors of $M^\sharp$ in terms of those of A; these eigenvectors do not form an orthogonal family but this is compensated by the fact that one can compute their scalar products explicitly.

(i) an eigenfunction ϕ of A for the eigenvalue $\lambda \neq \pm 1$ gives rise to the two eigenfunctions of $M^\sharp$,

$$f_1(e) = \phi(t(e)) - \epsilon_1 \phi(o(e)); \qquad f_2(e) = \phi(t(e)) - \epsilon_2 \phi(o(e)),$$

where ϵ_1, ϵ_2 are the two roots of $q\epsilon^2 - (q+1)\lambda\epsilon + 1 = 0$ (in what follows we index them so that $|\epsilon_1| \leq |\epsilon_2|$). Special attention has to be paid to the case $\lambda = \pm\frac{2\sqrt{q}}{q+1}$, for which $\epsilon_1 = \epsilon_2$ (see below).

(ii) the eigenvalues $\pm 1/q$ of $M^\sharp$ correspond, respectively, to odd and even [12] solutions of $\sum_{o(e)=x} f(e) = 0$ (for every vertex x). For the eigenvalue $1/q$, an explicit basis of eigenfunctions is indexed by generators of the fundamental group, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_b)$: every closed circuit γ made of consecutive edges $(e_1, \ldots, e_k)$ gives rise to an odd eigenfunction

$$f_\gamma = \sum_{j=1}^{k} \delta_{e_j} - \delta_{\hat{e}_j}.$$

If G is bi-partite, then all circuits have even length and we have an explicit basis of even eigenfunctions for the eigenvalue $-1/q$, again indexed by generators of the

11. Or, equivalently, if the graph is bi-partite.
12. Odd means $f(\hat{e}) = -f(e)$ and even means $f(\hat{e}) = f(e)$, for every bond e.

fundamental group :

$$g_\gamma = \sum_{j=1}^{k} (-1)^k (\delta_{e_j} + \delta_{\hat{e}_j})$$

if γ is a closed circuit made of consecutive edges $(e_1, \ldots, e_k)$. If G is not bi-partite, there are closed circuits of odd lengths, in which case g_γ is not an eigenfunction of $M^\sharp$. Nevertheless, if γ, γ' are two circuits of odd lengths, $g_\gamma - g_{\gamma'}$ is now an eigenfunction of $M^\sharp$ for the eigenvalue $-1/q$.

The eigenfunctions of the family (ii) are automatically orthogonal to those of the family (i). In (i), eigenfunctions of $M^\sharp$ stemming from different eigenvalues λ of A are orthogonal; however, the two eigenfunctions f_1, f_2 stemming from the same λ are not orthogonal.

To evaluate the norm of a matrix, it is safer to work in an orthogonal basis, and thus we shall consider, instead of a pair (f_1, f_2), the pair

$$f_1(e) = \phi(t(e)) - \epsilon_1 \phi(o(e)), f_2'(e) = \phi(t(e)) - \mu\phi(o(e))$$

which can be checked to be orthogonal for

$$\mu = \frac{\bar{\epsilon}_1 \lambda - 1}{\bar{\epsilon}_1 - \lambda}.$$

In the plane generated by $\left(\frac{f_1}{\|f_1\|}, \frac{f_2'}{\|f_2'\|}\right)$, $M^\sharp$ has matrix

$$\begin{pmatrix} 1/q\epsilon_1 & \star \\ 0 & 1/q\epsilon_2 \end{pmatrix}$$

where $\star$ is a number that can be calculated explicitly in terms of ϵ_1, ϵ_2 and λ, and which is uniformly bounded (since the norm of $M^\sharp$, anyway, is bounded independently of n).

This discussion is also valid for $\lambda = \pm\frac{2\sqrt{q}}{q+1}$, a special case where $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{q}}$.

To summarize, the spectrum of $M^\sharp$ is contained in $[-1, 1-\beta'] \cup \{1\}$ (resp. $[-1+\beta', 1-\beta'] \cup \{1\}$) if the spectrum of A is contained in $[-1, 1-\beta] \cup \{1\}$ (resp. $[-1+\beta, 1-\beta] \cup \{1\}$). We can find an orthonormal basis of $L^2(\mathbb{C}^B)$ in which $M^\sharp$ is block diagonal, each diagonal block being an upper triangular matrix of size ≤ 2, and the non-diagonal coefficients are uniformly bounded.

This implies that the operator

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k} q^{2isj} M^{\sharp j} = \frac{1}{N^2} (q^{2is} M^\sharp - I)^{-2} \left(q^{2is(N+1)} M^{\sharp(N+1)} - q^{2is} M^\sharp - N(q^{2is} M^\sharp - I)\right)$$

has norm $O\left(\frac{1}{N}\right)$ on the orthogonal of the constant function (for any real s if the spectrum of $M^\sharp$ is contained in $[-1+\beta', 1-\beta'] \cup \{1\}$, or for q^{2is} away from -1 if the spectrum of $M^\sharp$ is contained in $[-1, 1-\beta'] \cup \{1\}$). This tells us that (5.7.2), and hence (5.7.1), is $O\left(\frac{1}{N}\right)$.

5.7.2 Reduction to the case $D = 2$

Let us now consider Theorem 5.1.7 in the case of an operator whose kernel on the tree satisfies $K(x, y) \neq 0 \Longrightarrow d_{\mathfrak{X}}(x, y) = D$. Theorem 5.1.7, proven in the case $D = 2$, can be applied to the $(q + 1)q^{D-1}$-regular graph with vertex set V_n and adjacency matrix $(q + 1)q^{D-1}S_D$, with the notation of (5.2.2). This implies Theorem 5.1.7 in the general case.

Bibliographie

[1] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* Savoirs Actuels. Paris : InterEditions. Paris : Editions du CNRS. 188 p. , 1991.

[2] N. Alon. Eigenvalues and expanders. *Combinatorica*, 6(2) :83–96, 1986. Theory of computing (Singer Island, Fla., 1984).

[3] N. Anantharaman. Entropy and the localization of eigenfunctions. *Ann. of Math. (2)*, 168(2) :435–475, 2008.

[4] N. Anantharaman and E. Le Masson. Quantum ergodicity on large regular graphs. *Preprint*, 2013. arXiv :1304.4343.

[5] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher. Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(7) :2465–2523, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.

[6] G. Berkolaiko, J. P. Keating, and U. Smilansky. Quantum ergodicity for graphs related to interval maps. *Comm. Math. Phys.*, 273(1) :137–159, 2007.

[7] G. Berkolaiko, J. P. Keating, and B. Winn. No quantum ergodicity for star graphs. *Comm. Math. Phys.*, 250(2) :259–285, 2004.

[8] B. Bollobás. *Random graphs*, volume 73 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.

[9] S. Brooks and E. Lindenstrauss. Non-localization of eigenfunctions on large regular graphs. *Israel J. Math.*, 193(1) :1–14, 2013.

[10] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102(3) :497–502, 1985.

[11] M. Cowling, S. Meda, and A. G. Setti. An overview of harmonic analysis on the group of isometries of a homogeneous tree. *Exposition. Math.*, 16(5) :385–423, 1998.

[12] M. Cowling and A. G. Setti. The range of the Helgason-Fourier transformation on homogeneous trees. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 59(2) :237–246, 1999.

[13] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[14] I. Dumitriu and S. Pal. Sparse regular random graphs : Spectral density and eigenvectors. *Ann. Prob.*, 40(5) :2197–2235, 2012.

[15] Y. Elon. Eigenvectors of the discrete Laplacian on regular graphs—a statistical approach. *J. Phys. A*, 41(43) :435203, 17, 2008.

[16] Y. Elon and U. Smilansky. Percolating level sets of the adjacency eigenvectors of d-regular graphs. *J. Phys. A*, 43(45) :455209, 13, 2010.

[17] L. Erdős and A. Knowles. Quantum diffusion and delocalization for band matrices with general distribution. *Ann. Henri Poincaré*, 12(7) :1227–1319, 2011.

[18] L. Erdős and A. Knowles. Quantum diffusion and eigenfunction delocalization in a random band matrix model. *Comm. Math. Phys.*, 303(2) :509–554, 2011.

[19] L. Erdős, B. Schlein, and H.-T. Yau. Local semicircle law and complete delocalization for Wigner random matrices. *Comm. Math. Phys.*, 287(2) :641–655, 2009.

[20] L. Erdős, B. Schlein, and H.-T. Yau. Semicircle law on short scales and delocalization of eigenvectors for Wigner random matrices. *Ann. Probab.*, 37(3) :815–852, 2009.

[21] A. Figà-Talamanca and C. Nebbia. *Harmonic analysis and representation theory for groups acting on homogeneous trees*, volume 162 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[22] J. Friedman. A proof of Alon's second eigenvalue conjecture and related problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 195(910) :viii+100, 2008.

[23] S. Gnutzmann, J. P. Keating, and F. Piotet. Eigenfunction statistics on quantum graphs. *Ann. Physics*, 325(12) :2595–2640, 2010.

[24] A. Hassell. Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic. *Ann. of Math. (2)*, 171(1) :605–619, 2010. With an appendix by the author and Luc Hillairet.

[25] B. Helffer, A. Martinez, and D. Robert. Ergodicité et limite semi-classique. (Ergodicity and semi-classical limit). *Commun. Math. Phys.*, 109 :313–326, 1987.

[26] D. Jakobson, S. D. Miller, I. Rivin, and Z. Rudnick. Eigenvalue spacings for regular graphs. In *Emerging applications of number theory (Minneapolis, MN, 1996)*, volume 109 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 317–327. Springer, New York, 1999.

[27] J. P. Keating, J. Marklof, and B. Winn. Value distribution of the eigenfunctions and spectral determinants of quantum star graphs. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3) :421–452, 2003.

[28] H. Kesten. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 :336–354, 1959.

[29] T. Kottos and U. Smilansky. Quantum chaos on graphs. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :4794–7, 1997.

[30] T. Kottos and U. Smilansky. Quantum chaos on graphs. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :4794–4797, Dec 1997.

[31] T. Kottos and U. Smilansky. Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs. *Ann. Physics*, 274(1) :76–124, 1999.

[32] T. Kottos and U. Smilansky. Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs. *Annals of Physics*, 274(1) :76 – 124, 1999.

[33] J. D. Lafferty and D. N. Rockmore. Level spacings for Cayley graphs. In *Emerging applications of number theory (Minneapolis, MN, 1996)*, volume 109 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 373–386. Springer, New York, 1999.

[34] E. Le Masson. Pseudo-differential calculus on homogeneous trees. *Ann. Henri Poincaré*, 2013. To appear.

[35] E. Lindenstrauss. Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :165–219, 2006.

[36] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Ramanujan graphs. *Combinatorica*, 8(3) :261–277, 1988.

[37] A. Marcus, D. A. Spielman, and N. Srivastava. Interlacing families i : Bipartite ramanujan graphs of all degrees. preprint 2013.

[38] B. D. McKay. The expected eigenvalue distribution of a large regular graph. *Linear Algebra Appl.*, 40 :203–216, 1981.

[39] B. D. McKay, N. C. Wormald, and B. Wysocka. Short cycles in random regular graphs. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 66, 12 pp. (electronic), 2004.

[40] A. D. Mirlin and Y. V. Fyodorov. Universality of level correlation function of sparse random matrices. *J. Phys. A*, 24(10) :2273–2286, 1991.

[41] M. S. Pinsker. On the complexity of a concentrator. *7th International Teletraffic Conference*, pages 318/1–318/4, 1973.

[42] Z. Rudnick and P. Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 161(1) :195–213, 1994.

[43] U. Smilansky. Quantum chaos on discrete graphs. *J. Phys. A*, 40(27) :F621–F630, 2007.

[44] U. Smilansky. Discrete graphs – a paradigm model for quantum chaos. *Séminaire Poincaré*, XIV :1–26, 2010.

[45] A. I. Šnirel′man. Ergodic properties of eigenfunctions. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(6(180)) :181–182, 1974.

[46] A. I. Šnirel′man. Ergodic properties of eigenfunctions. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(6(180)) :181–182, 1974.

[47] A. Terras. *Fourier analysis on finite groups and applications*, volume 43 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[48] L. V. Tran, V. H. Vu, and K. Wang. Sparse random graphs : eigenvalues and eigenvectors. *Random Structures Algorithms*, 42(1) :110–134, 2013.

[49] S. Zelditch. Pseudodifferential analysis on hyperbolic surfaces. *J. Funct. Anal.*, 68(1) :72–105, 1986.

[50] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55(4) :919–941, 1987.

[51] S. Zelditch. Quantum ergodicity of C^* dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, 177(2) :507–528, 1996.

[52] M. Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.