



HAL
open science

Plasticité anisotrope en grandes déformations

Abdelwaheb Dogui

► **To cite this version:**

Abdelwaheb Dogui. Plasticité anisotrope en grandes déformations. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 1989. Français. NNT: . tel-00848713

HAL Id: tel-00848713

<https://theses.hal.science/tel-00848713>

Submitted on 28 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant l'
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

pour obtenir le grade de
DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES

par

Abdelwaheb DOGUI

PLASTICITE ANISOTROPE

EN GRANDES DEFORMATIONS

soutenue le 17 mai 1989 devant le Jury composé de:

P. GERMAIN	}	Président
J. P. BOEHLER		
O. DEBORDES	}	Rapporteurs
F. SIDOROFF		
A. FRIAA		
B. GAY	}	Examineurs
J. N. GENGE		
J. J. MOREAU		
C. TEODOSIU		

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES
ECOLE CENTRALE DE LYON
36, Av. Guy de Collongue
69130 - ECULLY

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I
=====

. Président de l'Université	M. le Professeur P. ZECH
. 1er Vice-Président Fédération Santé	M. le Professeur L.M. PATRICOT
. 1er Vice-Président Fédération Sciences	M. le Professeur R. UZAN
. Président du Comité de Coordination des Etudes Médicales	M. le Professeur P. ZECH
. Secrétaire Général	M. F. MARIANI

FEDERATION SANTE
=====

UFR de Médecine GRANGE-BLANCHE	Directeur : Mme le Pr. H. PELLET
UFR de Médecine ALEXIS-CARREL	Directeur : M. le Pr. EVREUX
UFR de Médecine LYON-NORD	Directeur : Mme le Pr. A. PINET
UFR de Médecine LYON-SUD	Directeur : M. le Pr. J. NORMAND
UFR de PHARMACIE	Directeur : M. le Pr. C.A. BIZOLLON
UFR d'ODONTOLOGIE	Directeur : M. le Pr. G. LABE
INSTITUT de TECHNIQUES DE READAPTATION	Directeur : M. le Pr. M. EYSSETTE
Département de BIOLOGIE HUMAINE	Directeur : M. le Pr. P.A. BRYON
Département d'INNOVATION et de COORDINATION PEDAGOGIQUE	Directeur : M. le Pr. G. LLORCA

FEDERATION SCIENCES
=====

Institut des SCIENCES de la MATIERE	Directeur : M. le Pr. E. ELBAZ
Institut des SCIENCES DE L'INGENIERIE ET DU DEVELOPPEMENT TECHNOLOGIQUES	Directeur : M. le Pr. G. FONTAINE
Institut DE CHIMIE ET BIOLOGIE MOLECULAIRE ET CELLULAIRE	Directeur : Mme VARAGNAT, Maître de Conf.
Institut d'ANALYSE DES SYSTEMES BIOLOGIQUES ET SOCIO-ECONOMIQUES	Directeur : M. le Pr. J.M. LEGAY
Institut DES SCIENCES DE LA TERRE, DE L'OCEAN, DE L'ATMOSPHERE, DE L'ESPACE ET DE L'ENVIRONNEMENT	Directeur : M. le Pr. S. ELMI
UFR des ACTIVITES PHYSIQUES ET SPORTIVES	Directeur : M. le Pr. CAMY
I.U.T. A	Directeur : M. le Pr. J. GIELLY
I.U.T. B	Directeur : M. le Pr. J. PIVOT
Département de 1er Cycle pluridisciplinaire Sciences	Directeur : M. P. PONCET, Maître de Conf.
Département de 2ème Cycle	
- Sciences de la Vie et de la Terre	Directeur : M. le Pr. J.P. BLANCHET
- Sciences pour l'Ingénieur	Directeur : M. le Pr. P. BETHOUX
- Sciences de l'Analyse et de la Matière	Directeur : M. le Pr. VIALLE J.L.

RESUME

Ce travail traite de la formulation de l'élastoplasticité anisotrope en grandes déformations. Un formalisme général, en référentiel tournant, permettant de décrire tout type d'anisotropie est présenté et étudié. Les différentes théories des grandes déformations ont été situées dans ce cadre, elles se distinguent par leur façon de définir l'évolution du référentiel tournant.

Les différentes façons de choisir un référentiel tournant sont étudiées:

- Choix cinématique à-priori: Différents référentiels cinématiques sont proposés et analysés.

- Proposition d'une loi d'évolution: théorie de la rotation plastique.

- Détermination à partir de la microstructure: quelques "matériaux modèles" sont développés.

L'influence du choix du référentiel tournant est étudiée dans des cas de sollicitations simples telles que le cisaillement simple, la traction-hors axes et la torsion. D'une manière générale, une cinématique bidimensionnelle est proposée et analysée. Le comportement rigide plastique avec critère de Hill et écrouissage isotrope est détaillé.

MOTS CLES

Anisotropie

Elastoplasticité

Grandes déformations

Monocristal

Plasticité

Torsion

Traction hors-axes

à toute ma famille

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur P. GERMAIN m'honore en acceptant de présider ce jury; qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

J'ai déjà été honoré par la présence de Monsieur le Professeur J.J. MOREAU dans le jury de ma thèse de 3ème cycle. Je tiens à lui exprimer, ici, mes remerciements pour l'intérêt qu'il porte à mon travail ainsi que pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec lui.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur F. SIDOROFF. Au cours de ces neuf années passées avec lui à préparer une thèse de 3ème cycle et ensuite une thèse d'état, j'ai pu me rendre compte de la grandeur de ses qualités scientifiques et humaines. Il a été pour moi beaucoup plus qu'un directeur de thèse.

Je remercie Messieurs les Professeurs J.P. BOEHLER, O. DEBORDES et C. TEODOSIU d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Je leur suis reconnaissant pour leurs remarques concernant cette thèse, ainsi que pour toutes les discussions et tous les échanges que j'ai pu avoir avec eux tout au long de mon travail dans le cadre du GRECO 47 "Grandes Déformations et Endommagement".

Je remercie Monsieur A. FRIAA, Professeur et Directeur de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Messieurs les Professeurs B. GAY et J.N. GENGE pour avoir accepté de participer à ce jury.

Je tiens à témoigner de tout l'intérêt que j'ai eu en participant aux travaux du GRECO 47 "Grandes Déformations et Endommagement" et du GIS "Mise en Forme".

Enfin, je remercie tous ceux et toutes celles, du Département de Mécanique des Solides de l'Ecole Centrale de Lyon, qui m'ont aidé ou qui m'ont témoigné leur soutien et leur sympathie au cours de la réalisation de ce travail.

NOTATIONS

- X** : Tenseur du second ordre
 - X^D** : Déviateur de **X**
 - X^S** : Partie symétrique de **X**
 - X^A** : Partie antisymétrique de **X**
 - X^T** : Transposé de **X**
 - X⁻¹** : Inverse de **X**
 - X^{-1T}** : Inverse du transposé de **X**
 - [**X**] : Matrice des composantes de **X** dans une base donnée
 - tr(**X**) : Trace de **X**
 - det(**X**) : Déterminant de **X**
 - X Y** : Produit de deux tenseurs **X** et **Y** $(\mathbf{XY})_{ij} = X_{ik} Y_{kj}$
 - X : Y** = $X_{ij} X_{ij}$
 - 1** : Tenseur unité du second ordre $(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$
 - |X|** = $(\mathbf{X} : \mathbf{X})^{1/2}$

 - X_I = tr(**X**)
 - X_{II} = $\frac{1}{2}[\text{tr}^2(\mathbf{X}) - \text{tr}(\mathbf{X}^2)]$
 - X_{III} = det(**X**)
- } Invariants principaux de **X**
- D(X) [Y]** : Application du tenseur du quatrième ordre **D**, dépendant de **X**, sur **Y**
 $D(\mathbf{X})[\mathbf{Y}]_{ij} = D_{ijkl}(\mathbf{X}) Y_{kl}$

 - <f>** = 0 si $f \leq 0$
 = f si $f > 0$

 - Q** : Tenseur de rotation du second ordre $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{1}$
 - Q[α]** : Application de la rotation **Q** à la variable α
 - X** = $\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}[\mathbf{X}]$

Dérivation par rapport au temps

- Ẋ = dX/dt** : Dérivée particulaire de **X**

- $D_Q \mathbf{X} / Dt$: Dérivée rotationnelle de **X** relative à **Q**. $= \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} \mathbf{W}_Q - \mathbf{W}_Q \mathbf{X}$
- $\frac{D_Q \mathbf{Q}}{Dt}$ = $\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$
- $\bar{\mathbf{W}}_Q$ = $\mathbf{W} - \mathbf{W}_Q$

- X^J** : Dérivée de Jaumann de **X** (relative à **W**)
- $D_J \mathbf{X} / Dt$: Dérivée de Jaumann de **X** (relative à **W**)

Tenseurs gradients

- * Total : $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}$ {
 - U** : Tenseur de déformation pure droit
 - V** : Tenseur de déformation pure gauche
 - R** : Tenseur de rotation propre $\mathbf{RR}^T = \mathbf{1}$

- * Elastique : $\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e$ {
- * Plastique : $\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p = \mathbf{V}^p \mathbf{R}^p$ } $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^{ep} \mathbf{U}^p = \mathbf{V}^e \tilde{\mathbf{F}}^p = \tilde{\mathbf{F}}^e \mathbf{U}^p$

- $J = \det(\mathbf{F}) = \rho_0 / \rho$ {
 - ρ_0 : masse volumique à l'instant initial
 - ρ : masse volumique à l'instant t

Déformations

* Petites déformations : $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$

* Grandes déformations:

C	= $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$: Tenseur de Cauchy-Green droit
E	= $\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$: Tenseur de déformation de Green-Lagrange
u	= $\text{Log}(\mathbf{U})$: Tenseur lagrangien de déformation logarithmique
B	= $\mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$: Tenseur de Cauchy-Green gauche
A	= $\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1})$: Tenseur de déformation d'Euler-Almansi
v	= $\text{Log}(\mathbf{V})$: Tenseur eulérien de déformation logarithmique (de Hencky)

Contraintes

* Petites déformations : $\boldsymbol{\sigma}$

* Grandes déformations:

T	: Tenseur de contrainte de Cauchy
τ	: Tenseur de contrainte de Kirchhoff
π	: Premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff
S	: Second tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff

$$\boldsymbol{\tau} = J \mathbf{T} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$$

Vitesses des déformations et des rotations

* Petites déformations : $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$

* Grandes déformations:

L	= $\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$: Tenseur gradient de vitesse
D	= $\tilde{\mathbf{L}}^S$: Tenseur vitesse de déformation
W	= $\tilde{\mathbf{L}}^A$: Tenseur vitesse de rotation
$\tilde{\mathbf{L}}$	= $\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}$	
D^p	= $\tilde{\mathbf{L}}^S$: Tenseur eulérien de vitesse de déformation plastique.
$\tilde{\mathbf{W}}$	= $\tilde{\mathbf{L}}^A$	
W^{ep}	= $\dot{\mathbf{R}}^{ep} \mathbf{R}^{epT}$	

INTRODUCTION

Le développement d'outils de simulation et d'aide à la conception dans le domaine de la mise en forme est maintenant une nécessité économique de premier ordre. En particulier, le développement de codes de calculs pour la simulation de l'emboutissage est un sujet important pour ses applications industrielles (industrie automobile, conditionnement alimentaire, etc...). Ces codes de calcul nécessitent la mise au point de modèles de comportement qui, compte tenu de la nature des matériaux utilisés et des sollicitations qu'ils subissent, doivent rendre compte de l'anisotropie du matériau et être formulés en grandes déformations.

Si l'on se limite aux modèles avec variables internes, une loi de comportement est alors définie par un certain nombre de fonctions constitutives reliant un certain nombre de variables sous la forme schématique suivante:

$$\sigma = e(\epsilon, \alpha) \quad (1.a)$$

$$\dot{\alpha} = l(\epsilon, \alpha) \quad (1.b)$$

La relation (1.a) indique que les variables dépendantes σ (contrainte, ...), à un instant t , sont fonctions des valeurs à l'instant t des variables observables ϵ (déformation, ...) et des variables internes α , qui sont censées décrire la structure interne du matériau, et rendre compte de l'histoire des sollicitations subies par celui-ci (nous avons utilisé ici la terminologie de Sidoroff [49.c]). La relation (1.b) permet de décrire l'évolution des variables internes au cours de la sollicitation. Les fonctions e et l sont les fonctions constitutives du modèle.

Modéliser le comportement d'un matériau, c'est choisir, pour celui-ci, la forme des fonctions constitutives ainsi que la nature et le nombre des variables internes. On se base, pour ce faire, sur l'ensemble des informations de nature microstructurale ou expérimentale disponibles sur ce matériau. Cet ensemble d'informations constitue le contenu physique de la loi de comportement.

Ce contenu physique est généralement réduit et insuffisant pour imposer une forme particulière de la loi de comportement d'un matériau; on est alors souvent amené à choisir les variables internes et les fonctions constitutives d'une manière arbitraire mais guidée par ce contenu physique. Ceci constitue la démarche phénoménologique pour formuler des lois de comportement: démarche basée sur une interprétation qualitative de la physique. Dans ce travail nous nous limiterons à cette approche qui semble, actuellement, la seule à déboucher sur une formulation macroscopique utilisable dans les codes de calcul.

Pour rendre compte de l'anisotropie du matériau, on distingue souvent l'anisotropie initiale (faisant référence à un état du matériau déclaré initial) de l'anisotropie induite par écrouissage. En supposant que les variables internes d'écrouissage sont nulles à l'état initial, l'anisotropie initiale s'exprimera, selon notre approche, en choisissant des fonctions constitutives anisotropes (e et l dans (1)); la description d'une anisotropie induite requiert l'usage de variables internes tensorielles.

L'objectif de ce travail est de proposer un cadre mécanique cohérent permettant de formuler des lois élastoplastiques anisotropes en grandes déformations en vue de leur utilisation dans des codes de calcul. Pour pouvoir utiliser tout l'acquis "petites déformations", on propose une démarche cohérente permettant une transcription aisée, selon un formalisme grandes déformations, du contenu physique à la base d'un modèle donné, développé en petites déformations.

Cette question a déjà été abordée dans notre thèse de 3ème cycle [17.a] qui porte sur l'étude de l'anisotropie induite par écrouissage dans les matériaux initialement isotropes. Les fonctions constitutives des modèles sont, dans ce cas, isotropes de leurs arguments. Nous avons montré que le formalisme eulérien est le plus adéquat pour décrire la physique de l'élastoplasticité des métaux (les variables dans (1) sont eulériennes). La difficulté essentielle dans ce formalisme est le choix de la dérivée objective à utiliser pour la loi d'évolution des variables internes tensorielles (nécessaires pour décrire une anisotropie induite) (relation (1.a)). Dans ce travail nous nous limitons toujours aux modèles élastoplastiques, mais nous intégrons la prise en compte de l'anisotropie initiale. Les fonctions constitutives sont donc anisotropes et le formalisme eulérien classique soulève la question de l'objectivité. Il faut alors trouver un compromis entre la simplicité du formalisme eulérien quant à la description de la "physique" et celui du formalisme lagrangien plus adéquat pour traiter l'anisotropie initiale: c'est l'objectif essentiel de ce travail. Nous verrons qu'il implique deux composantes principales:

Problème 1: Choix d'un formalisme assurant l'objectivité de la loi de comportement et restant relativement simple quant à la description de la physique de l'élastoplasticité.

Problème 2: Choix de la loi élastique et de sa composition avec la loi plastique.

Le chapitre I traite de quelques aspects de la description de la cinématique des grandes transformations. Les problèmes abordés concernent essentiellement les rotations, et donc l'orientation dans l'espace de l'élément matériel; ceci sans s'attacher à un modèle de comportement particulier. Nous avons voulu développer un certain nombre "d'outils" et préciser quelques préliminaires qui nous seront nécessaires tout au long de notre travail. Le problème de la définition de dérivées objectives a été abordé en distinguant les dérivées "convectives" des dérivées "rotationnelles" relatives à un référentiel tournant. Quelques référentiels tournants "cinématiques" particuliers ont été définis. Une cinématique plane est aussi définie et analysée; elle nous permettra tout au long des autres chapitres, d'illustrer la réponse de différents modèles à quelques sollicitations simples. On trouvera aussi une présentation originale du principe d'indifférence matérielle ainsi qu'une définition générale d'une cinématique triaxiale.

Le chapitre II pose le cadre général de notre étude. La première partie précise la nature des relations (1) dans le cas du comportement élastoplastique. Elle présente les hypothèses de base constituant l'élastoplasticité ainsi qu'un certain nombre de modèles plus ou moins classiques développés sous l'hypothèse des petites perturbations. La deuxième partie présente les différentes théories, proposées dans la littérature, permettant de formuler l'élastoplasticité en grandes déformations. L'accent est essentiellement mis sur les théories supposant une décomposition multiplicative du gradient de la transformation.

Le chapitre III traite du comportement rigide plastique; ce qui permet d'éliminer la difficulté liée à la décomposition de la transformation (problème 2), et de se consacrer au premier problème cité ci-dessus. Un formalisme en référentiel tournant, utilisant des variables eulériennes par leurs valeurs propres et lagrangiennes par leur orientation a été développé. La manière de choisir le référentiel tournant, selon le type d'anisotropie à modéliser, a été analysée. L'influence de ce choix est illustrée par l'étude de la réponse à des sollicitations simples, de différentes lois de comportement orthotropes. Ces lois sont basées

sur des fonctions constitutives identiques, mais des choix différents du référentiel tournant.

Le chapitre IV est consacré à la formulation de la loi élastique et sa composition avec la loi plastique. Nous avons insisté sur la décomposition de la vitesse de déformation en partie élastique et plastique, et présenté les différences entre les diverses théories élastoplastiques proposées. Là aussi, le formalisme en référentiel tournant a été utilisé.

Le chapitre V présente quelques matériaux modèles rigides plastiques dont la structure est bien définie (stratifiés, composites renforcés par fils, monocristal). L'objectif est d'étudier quelques "structures simples", et de voir, d'une part, si le formalisme en référentiel tournant est satisfaisant ou non, et d'autre part, d'illustrer l'utilisation de ce formalisme dans le cas où le choix du référentiel tournant est imposé par la structure du matériau.

En fin de cette introduction, nous tenons à signaler que tout ce travail a été effectué dans le cadre et selon la "philosophie" du GRECO Grandes déformations et endommagement. Les contacts que nous avons pu avoir avec les différentes équipes de mécaniciens, physiciens et numériciens universitaires et industriels constituant ce GRECO nous ont été très utiles. Remarquons aussi que notre travail de recherche a commencé au début de la création de ce GRECO par la préparation d'une thèse de 3ème cycle (1981) et que la soutenance de cette thèse d'état vient à la fin de la vie de ce GRECO (1989).

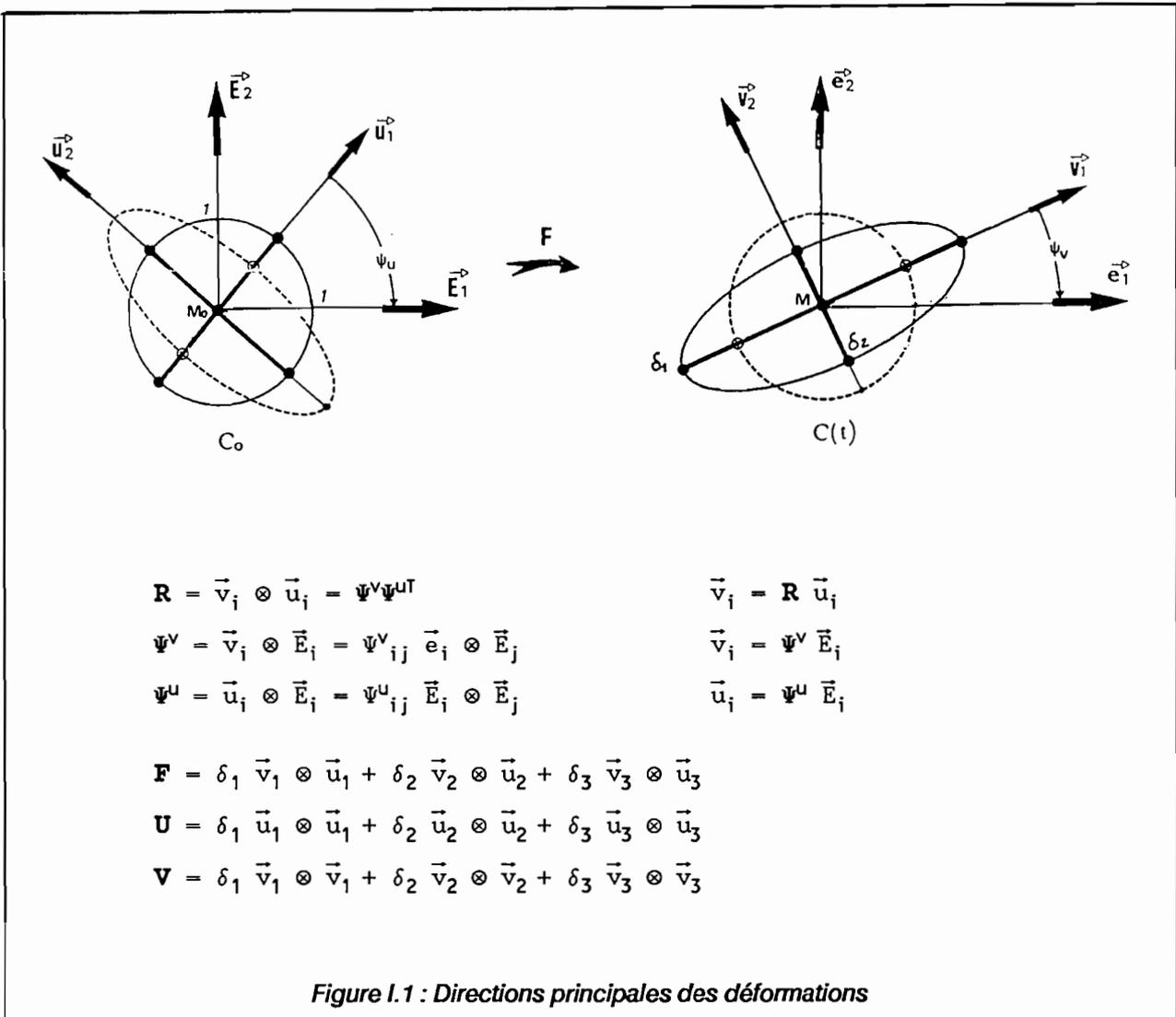
- Chapitre 1 -

CINEMATIQUE ET ROTATIONS DES TRANSFORMATIONS FINIES

RESUME

La première partie de ce chapitre traite de quelques aspects de la description de la cinématique des grandes transformations concernant, essentiellement, les rotations subies par l'élément matériel. Une définition plus générale de la cinématique triaxiale est donnée. Différentes dérivées objectives rotationnelles ont été définies et étudiées.

La deuxième partie présente une cinématique plane, relativement générale, permettant de traiter la majorité des problèmes en contraintes ou déformations planes. Les différents aspects abordés dans le cas tridimensionnel, dans la première partie, sont illustrés dans le cadre de cette cinématique. Quelques sollicitations particulières (cisaillement simple, traction hors-axes, torsion homogène, problème à deux zones) sont analysées.



1. CINEMATIQUE D'UNE GRANDE TRANSFORMATION

1.1. GENERALITES

A) GRADIENT DE LA TRANSFORMATION

Pour décrire la transformation géométrique au voisinage d'un point matériel P, d'un instant initial (configuration initiale C_0 , position initiale de P: M_0) à un instant t (configuration C(t), position de P: M), on utilise le tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}(t)$ telle que:

$$d\vec{M} = \mathbf{F} d\vec{M}_0 \quad (1)$$

où $d\vec{M}_0$ est un vecteur matériel dans la configuration initiale et qui, à l'instant t, se retrouve en $d\vec{M}$. Cette transformation est la composition d'une rotation locale de corps rigide \mathbf{R} et d'une déformation qui peut être caractérisée par le tenseur de déformation pure droit \mathbf{U} ou gauche \mathbf{V} .

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2)$$

La déformation de l'élément de volume peut alors être mesurée par tout tenseur fonction bijective isotrope de \mathbf{U} ou de \mathbf{V} selon que l'on souhaite utiliser un formalisme lagrangien ou eulérien.

Le tenseur gradient de vitesse \mathbf{L} , sa partie symétrique \mathbf{D} (tenseur vitesse de déformation) et sa partie antisymétrique \mathbf{W} (tenseur vitesse de rotation) sont donnés par:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R} [\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}] \mathbf{R}^T \quad (3.a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^S = \mathbf{R} [\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}]^S \mathbf{R}^T \quad (3.b)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^A = \mathbf{R} [\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}]^A \mathbf{R}^T + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (3.c)$$

Le tenseur vitesse de rotation \mathbf{W} est constitué, comme le montre la relation (3.c), par une partie due à la rotation de corps rigide ($\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$) et une partie due au caractère non triaxial de la déformation ($[\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}]^A$, voir §1.2). Ce dernier terme s'annule si $\dot{\mathbf{U}}$ et \mathbf{U} ont les mêmes directions principales c'est-à-dire si \mathbf{U} garde des directions principales constantes.

B) DIRECTIONS PRINCIPALES DE LA DEFORMATION

A chaque instant de la transformation, on peut définir deux trièdres orthonormés $\vec{u}_i(t)$ et $\vec{v}_i(t)$ associés aux directions principales de la déformation respectivement lagrangienne (\mathbf{U}) et eulérienne (\mathbf{V}) ainsi que les allongements principaux δ_i (valeurs propres de \mathbf{V} et de \mathbf{U}) (Fig. I.1). Un domaine matériel occupant dans l'état initial une sphère de centre M_0 et de rayon dR devient, à l'instant t, un ellipsoïde centré en M d'axes principaux \vec{v}_i et de rayons principaux $dr_i = \delta_i dR$. Les directions matérielles qui, initialement, sont portées par les axes \vec{u}_i sont à l'instant t, portées par les axes \vec{v}_i . La rotation \mathbf{R} définit alors l'orientation du trièdre \vec{v}_i par rapport au trièdre \vec{u}_i . En désignant par \otimes le produit tensoriel, on a:

$$\mathbf{R} = \vec{v}_i \otimes \vec{u}_i \quad \vec{v}_i = \mathbf{R} \vec{u}_i \quad (4.a)$$

$$\mathbf{F} = \delta_1 \vec{v}_1 \otimes \vec{u}_1 + \delta_2 \vec{v}_2 \otimes \vec{u}_2 + \delta_3 \vec{v}_3 \otimes \vec{u}_3 \quad (4.b)$$

$$\mathbf{U} = \delta_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + \delta_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + \delta_3 \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3 \quad (4.c)$$

$$\mathbf{V} = \delta_1 \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 + \delta_2 \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2 + \delta_3 \vec{v}_3 \otimes \vec{v}_3 \quad (4.d)$$

Dans les applications, la configuration initiale, soit C_0 , et à l'instant t , soit $C(t)$, sont repérées respectivement par les trièdres orthonormés \vec{E}_i et $\vec{e}_i(t)$ (Fig. I.1). Ces trièdres peuvent également dépendre du point matériel (coordonnées curvilignes par exemple). Soient $[\Psi^U]$, $[\Psi^V]$ les matrices rotations orientant \vec{u}_i, \vec{v}_i par rapport à \vec{E}_i, \vec{e}_i respectivement:

$$\vec{E}_i = \Psi^U_{ij} \vec{u}_j \quad \vec{e}_i = \Psi^V_{ij} \vec{v}_j \quad (5)$$

Si l'on note $[V]$ la matrice des composantes de \mathbf{V} dans le repère \vec{e}_i , $[U]$ celle des composantes de \mathbf{U} dans le repère \vec{E}_i , $[F]$ et $[R]$ celles des composantes de \mathbf{F} et \mathbf{R} relativement aux repères \vec{e}_i et \vec{E}_i , et enfin $[\Delta]$ la matrice diagonale formée par les allongements principaux δ_i , on a:

$$\begin{aligned} [F] &= [\Psi^V] [\Delta] [\Psi^U]^T & [R] &= [\Psi^V] [\Psi^U]^T \\ [U] &= [\Psi^U] [\Delta] [\Psi^U]^T & [V] &= [\Psi^V] [\Delta] [\Psi^V]^T \end{aligned} \quad (6)$$

D'une façon générale, la déformation peut être mesurée en formalisme lagrangien (respectivement eulérien) par tout tenseur fonction bijective isotrope de \mathbf{U} ($\epsilon_l(\mathbf{U})$) (respectivement de \mathbf{V} ($\epsilon_e(\mathbf{V})$)). En particulier, les mesures logarithmiques de la déformation sont définies par:

$$\mathbf{u} = \text{Log}(\mathbf{U}) \quad ; \quad \mathbf{v} = \text{Log}(\mathbf{V}) \quad (7)$$

Le tenseur \mathbf{v} est celui de Hencky.

Les matrices $[\epsilon_l]$ et $[u]$ des composantes de ϵ_l et de \mathbf{u} dans le repère \vec{E}_i et les matrices $[\epsilon_e]$ et $[v]$ des composantes de ϵ_e et de \mathbf{v} dans le repère \vec{e}_i sont:

$$\begin{aligned} [\epsilon_l] &= [\Psi^U] f([\Delta]) [\Psi^U]^T & [\epsilon_e] &= [\Psi^V] f([\Delta]) [\Psi^V]^T \\ [u] &= [\Psi^U] [\epsilon] [\Psi^U]^T & [v] &= [\Psi^V] [\epsilon] [\Psi^V]^T \end{aligned} \quad (8)$$

où $f([\Delta])$ est une matrice diagonale fonction bijective isotrope de $[\Delta]$. Par exemple, $[\epsilon] = \text{Log}[\Delta]$ est la matrice diagonale constituée par les logarithmes des allongements principaux.

Si \vec{e}_i est considéré comme repère d'observation, les composantes de \mathbf{L} , \mathbf{D} et \mathbf{W} dans ce repère sont:

$$[\mathbf{L}] = [\dot{F}] [F]^{-1} = [\dot{\Psi}^V] [\Psi^V]^T + [\Psi^V] [\dot{\epsilon}] [\Psi^V]^T - [F] [\dot{\Psi}^U] [\Psi^U]^T [F]^{-1} \quad (9.a)$$

$$[\mathbf{D}] = [\Psi^V] [\dot{\epsilon}] [\Psi^V]^T - \{ [F] [\dot{\Psi}^U] [\Psi^U]^T [F]^{-1} \}^S \quad (9.b)$$

$$[\mathbf{W}] = [\dot{\Psi}^V] [\Psi^V]^T - \{ [F] [\dot{\Psi}^U] [\Psi^U]^T [F]^{-1} \}^A \quad (9.c)$$

Pour définir l'orientation des directions principales de la déformation d'une manière tensorielle, on définit les tenseurs rotations $\Psi^U(t)$ et $\Psi^V(t)$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \Psi^V &= \vec{v}_i \otimes \vec{E}_i = \Psi^V_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{E}_j \\ \Psi^U &= \vec{u}_i \otimes \vec{E}_i = \Psi^U_{ij} \vec{E}_i \otimes \vec{E}_j \end{aligned} \quad (10)$$

La définition de ces tenseurs, qui dépend bien sûr du choix des repères \vec{E}_i et \vec{e}_i , n'est unique que dans la mesure où tous les allongements principaux sont différents; nous reviendrons sur ce point dans la suite de ce chapitre. Le tenseur rotation Ψ^U est lagrangien alors que Ψ^V est mi-eulérien mi-lagrangien donc de même nature que \mathbf{R} . On a bien sûr:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \Psi^V \vec{E}_i & \vec{u}_i &= \Psi^U \vec{E}_i \\ \mathbf{R} &= \Psi^V \Psi^{U^T} & R_{ij} &= \Psi^V_{ik} \Psi^U_{jk} \end{aligned} \quad (11)$$

1.2. CINEMATIQUE TRIAXIALE

A) DEFINITION

Une cinématique est dite triaxiale, si les directions principales de la déformation lagrangienne \mathbf{U} ne changent pas au cours de l'évolution.

On peut alors établir les propriétés suivantes:

-P₁: Les directions principales de \mathbf{V} sont des directions matérielles. Ce sont celles définies par les directions principales de \mathbf{U} .

-P₂: Les tenseurs $\dot{\mathbf{U}}$ et \mathbf{U} ont les mêmes directions principales et donc:

$$\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{u}} \quad (12a)$$

-P₃: Les tenseurs \mathbf{D} et \mathbf{V} ont les mêmes directions principales et donc:

$$\mathbf{V}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{V} \quad (12b)$$

-P₄: La dérivée de Jaumann du tenseur de déformation logarithmique de Hencky est égale à \mathbf{D} :

$$D_J \mathbf{V} / Dt = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v} = \mathbf{D} - \mathbf{R} \dot{\mathbf{u}} \mathbf{R}^T \quad (12c)$$

-P₅:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \dot{\Psi}^V \Psi^{V^T} \quad (12d)$$

Ces différentes propriétés peuvent être facilement établies en utilisant les relations (6), (8) et (9) en considérant que $[\Psi^U]$ est une constante.

B) REPONSE A UNE CINEMATIQUE TRIAXIALE

Considérons la réponse à une cinématique triaxiale, dans l'un des deux cas suivants:

α - matériau isotrope

β - matériau orthotrope lorsque les directions principales de \mathbf{U} coïncident avec les directions d'orthotropie.

D'une manière générale, en suivant le formalisme de Truesdell et Noll [53] pour les milieux matériellement simples, la loi de comportement d'un matériau initialement orthotrope s'écrit:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{R}(t) \Sigma\{\mathbf{U}(\tau)\} \mathbf{R}^T(t) = \mathbf{R}(t) \bar{\mathbf{T}}(t) \mathbf{R}^T(t) \quad (13)$$

où $\mathbf{T}(t)$ est le tenseur des contraintes de Cauchy et $\bar{\mathbf{T}}(t)$ est donné à partir de l'histoire de \mathbf{U} jusqu'à l'instant t par une fonctionnelle orthotrope, c'est-à-dire vérifiant la condition:

$$\Sigma\{\mathbf{Q} \mathbf{U}(\tau) \mathbf{Q}^T\} = \mathbf{Q} \Sigma\{\mathbf{U}(\tau)\} \mathbf{Q}^T \quad (14)$$

pour toute transformation \mathbf{Q} appartenant au groupe d'orthotropie. Si l'on suppose maintenant que la sollicitation est triaxiale ($[\Psi^u] = \text{cte}$), $\bar{\mathbf{T}}$ s'écrit dans $\bar{\mathbf{E}}_i$:

$$[\bar{\mathbf{T}}(t)] = \sum_{\tau \leq t} \{ [\Psi^u][\Delta(\tau)][\Psi^u]^T \} \quad (15)$$

Dans le cas particulier où le comportement est initialement isotrope, la relation (14) est vérifiée pour tout tenseur orthogonal \mathbf{Q} , et l'on a donc:

$$[\Psi^u]^T [\bar{\mathbf{T}}(t)] [\Psi^u] = \sum_{\tau \leq t} \{ [\Delta(\tau)] \} = [\mathbf{T}_d] \quad (16)$$

où $[\mathbf{T}_d]$ est une matrice diagonale. La relation (16) s'obtient facilement à partir de (14) et (15) en choisissant \mathbf{Q} sous la forme:

$$[\mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}_i][\Psi^u]^T$$

où $[\mathbf{Q}_i]$ est l'une des 3 matrices suivantes:

$$[\mathbf{Q}_1]: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{Q}_2]: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{Q}_3]: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Puisque les $[\mathbf{Q}_i]$ n'affectent pas $[\Delta]$, elles doivent aussi garder $[\mathbf{T}_d]$ invariant, ce qui implique $T_{d12} = T_{d13} = T_{d23} = 0$. La relation (16) reste aussi valable pour un comportement orthotrope, si les directions principales de \mathbf{U} restent confondues avec les axes d'orthotropie $\bar{\mathbf{E}}_i$ ($[\Psi^u] = [1]$). En conclusion, si l'on est dans l'un ou l'autre des deux cas α ou β , la réponse du matériau à une sollicitation triaxiale vérifiera de plus:

-P₆: Les directions principales de \mathbf{S} , second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff, sont fixes et coïncident avec celles de \mathbf{U} .

-P₇: Les directions principales de \mathbf{T} , \mathbf{D} et \mathbf{V} coïncident à chaque instant t . En effet, les relations (13) et (16) permettent d'écrire $[\mathbf{T}] = [\Psi^v][\mathbf{T}_d][\Psi^v]^T$.

1.3. DERIVEES OBJECTIVES

A) PRINCIPE D'OBJECTIVITE

Ce principe stipule que la loi de comportement doit être indépendante du référentiel d'observation. On trouvera dans [1] un exposé plus détaillé de ce principe; nous n'entrerons pas, ici, dans le débat sur son caractère universel.

Le problème d'objectivité ne se pose qu'en formulation eulérienne. Dans ce cas, une loi de comportement permet de déterminer la réponse en contrainte $t \rightarrow \mathbf{T}(t)$ (contrainte de Cauchy), à partir de la donnée d'une histoire de transformation $t \rightarrow \mathbf{F}(t)$. Le principe d'objectivité impose que si, à une histoire de transformation $t \rightarrow \mathbf{F}(t)$, on superpose une rotation $\mathbf{q}(t)$ quelconque, la contrainte $\mathbf{T}'(t)$ associée à $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{q}(t)\mathbf{F}(t)$ doit être donnée par $\mathbf{T}'(t) = \mathbf{q}(t)\mathbf{T}(t)\mathbf{q}^T(t)$:

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{q}(t) \mathbf{F}(t) \Rightarrow \mathbf{T}'(t) = \mathbf{q}(t) \mathbf{T}(t) \mathbf{q}^T(t) \quad (18)$$

La condition (18) peut être obtenue d'une autre manière:

Une loi de comportement est, par définition, intrinsèque au matériau. C'est donc une relation entre des quantités lagrangiennes. Elle permet de connaître la réponse $t \rightarrow \mathbf{S}(t)$ (tenseur lagrangien de contrainte) si

l'on se donne un chemin cinématique $t \rightarrow \mathbf{C}(t)$ ($\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$). Si cette hypothèse est acceptée, il est alors facile de démontrer qu'une formulation eulérienne permettant de connaître $t \rightarrow \mathbf{T}(t)$ par la donnée d'un chemin cinématique $t \rightarrow \mathbf{F}(t)$ peut correspondre à une loi de comportement (autrement dit peut admettre une formulation lagrangienne équivalente) si et seulement si la condition (18) est vérifiée. En effet, il est évident que toute formulation lagrangienne a une formulation eulérienne équivalente. La réciproque exige la condition (18): si on superpose à $\mathbf{F}(t)$ une rotation $\mathbf{q}(t)$ (c'est-à-dire que l'on considère $\mathbf{F}' = \mathbf{q}\mathbf{F}$), les tenseurs \mathbf{C} et \mathbf{S} ne sont pas modifiés. On doit donc avoir:

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-1T} = \det \mathbf{F}' \mathbf{F}'^{-1} \mathbf{T}' \mathbf{F}'^{-1T}$$

Il est alors clair que \mathbf{T}' doit se transformer selon (18).

Si l'on souhaite utiliser une formulation eulérienne, il est important d'utiliser, pour les lois de comportement, des tenseurs objectifs. Les tenseurs objectifs sont ceux qui se transforment, après superposition de \mathbf{q} à \mathbf{F} selon (18), comme \mathbf{T} : c'est le cas par exemple du tenseur de déformation \mathbf{B} , du tenseur vitesse de déformation \mathbf{D} , de la dérivée de Jaumann $D_J \mathbf{T} / Dt$ de \mathbf{T} , d'un vecteur matériel \vec{m} , etc... Les tenseurs qui se transforment d'une autre manière ne sont pas objectifs: c'est le cas par exemple du tenseur vitesse de rotation \mathbf{W} :

$$\mathbf{W}' = \mathbf{q} [\mathbf{W} + \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}] \mathbf{q}^T \quad (19)$$

ainsi que les dérivées particulières de tenseurs eulériens. D'une façon générale, il est important, en présence de dérivées de tenseurs eulériens, d'utiliser des dérivées objectives.

B) DERIVEES "CLASSIQUES"

En formulation eulérienne, le tenseur \mathbf{D} est une mesure objective de la vitesse de déformation. Pour définir une vitesse de contrainte eulérienne et objective, il est nécessaire d'utiliser une dérivation objective; on en distingue deux types : les dérivées convectives et les dérivées rotationnelles:

- Dérivées convectives

Les dérivées convectives classiques sont obtenues en effectuant un transport convectif de la quantité à dériver dans la configuration de référence, on dérive alors dans cette configuration et on effectue ensuite le transport inverse. Les dérivées les plus classiques sont les suivantes (explicitées pour un tenseur du second ordre):

- Dérivée convective contravariante

$$\begin{aligned} d^c \mathbf{X} / dt &= \mathbf{F} d(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{F}^{-1T}) / dt \mathbf{F}^T \\ &= \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{L} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{L}^T \end{aligned} \quad (20)$$

Cette dérivée est relative au repère matériel convectif qui, dans le cas général, n'est pas orthonormé puisqu'il est défini par:

$$\vec{\epsilon}_i = \mathbf{F} \vec{E}_i$$

Les vecteurs \vec{E}_i et $\vec{\epsilon}_i$ définissent les mêmes directions matérielles dans la configuration C_0 et $C(t)$.

- Dérivée convective covariante

$$\begin{aligned} d_c \mathbf{X} / dt &= \mathbf{F}^{-1T} d(\mathbf{F}^T \mathbf{X} \mathbf{F}) / dt \mathbf{F}^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{L}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (21)$$

Cette dérivée est relative au repère $\bar{\mathbf{e}}^i$ dual de $\bar{\mathbf{e}}_i$:

$$\bar{\mathbf{e}}^i = \mathbf{F}^{-1T} \bar{\mathbf{E}}^i \quad ; \quad \bar{\mathbf{e}}^i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \delta^i_j$$

sachant que $\bar{\mathbf{E}}_i = \bar{\mathbf{e}}^i$ parce qu'il s'agit de repères orthonormés.

- *Dérivée de Truesdell*

Dans ce cas, le transport fait référence à la masse. On fait donc intervenir l'opérateur qui permet de passer du tenseur des contraintes de Cauchy \mathbf{T} au second tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} d^T \mathbf{X} / dt &= J^{-1} \mathbf{F} \, d[J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{F}^{-1T}] / dt \mathbf{F}^T \\ &= \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{L} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{L}^T + \mathbf{X} (\text{tr} \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (22)$$

Aucune des dérivées ci-dessus ne dépend de la configuration de référence choisie; par contre, ce sont des dérivées par rapport à des repères non orthonormés.

- *Dérivées rotationnelles*

Les dérivées rotationnelles sont celles relatives à un repère orthonormé tournant, par rapport au repère d'observation, avec une vitesse de rotation \mathbf{W}_Q ($\mathbf{W}_Q^T = -\mathbf{W}_Q$). Le choix de \mathbf{W}_Q est arbitraire. Pour un tenseur symétrique du second ordre, cette dérivée s'écrit de la façon suivante:

$$D_Q \mathbf{X} / Dt = \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} \mathbf{W}_Q - \mathbf{W}_Q \mathbf{X} \quad (23)$$

Ces dérivées ont notamment les propriétés suivantes:

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{X}}) = \text{tr}(D_Q \mathbf{X} / Dt) \quad ; \quad \mathbf{X} : \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} : (D_Q \mathbf{X} / Dt) \quad (24)$$

- *Dérivée de Jaumann*

La dérivée rotationnelle la plus classique est la dérivée de Jaumann. Elle est relative à un repère dit corotationnel: on prend:

$$\mathbf{W}_Q = \mathbf{W} \quad (25)$$

Cette vitesse de rotation est définie sans se référer à une configuration initiale particulière. Nous montrons au §3.3 que, dans une cinématique plane, cette vitesse de rotation est une moyenne eulérienne des rotations matérielles [17.c].

- *Dérivée en rotation propre*

Cette dérivée est relative à un repère dit en rotation propre. Elle est définie en choisissant:

$$\mathbf{W}_Q = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \quad (26)$$

où \mathbf{R} désigne la rotation obtenue par décomposition polaire de \mathbf{F} . Cette vitesse de rotation dépend de la configuration initiale choisie. Dans une cinématique plane, elle est une moyenne lagrangienne des rotations matérielles (voir §3.3 ou [17.c]).

Nous avons donné, en [17.a], la relation permettant de déterminer $\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ en fonction de \mathbf{W} , \mathbf{D} et \mathbf{V} . Cette relation s'obtient à partir de (3c) sachant que $\dot{\mathbf{U}}$ est la solution de l'équation $\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U} + \mathbf{U} \dot{\mathbf{U}} = 2 \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}$; équation dont la solution générale est donnée dans [54.f] et [17.a]. On trouve:

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \mathbf{W} - \bar{\mathbf{W}}_R$$

$$\bar{\mathbf{W}}_R = 2 [\mathbf{V}_I \mathbf{V}_{III} \mathbf{D} \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{V}]^A / (\mathbf{V}_I \mathbf{V}_{II} - \mathbf{V}_{III}) \quad (27)$$

où $\mathbf{V}_I, \mathbf{V}_{II}$ et \mathbf{V}_{III} sont les invariants principaux de \mathbf{V} :

$$\mathbf{V}_I = \text{tr}\mathbf{V} \quad ; \quad \mathbf{V}_{II} = \frac{1}{2} [(\text{tr}\mathbf{V})^2 - \text{tr}\mathbf{V}^2] \quad ; \quad \mathbf{V}_{III} = \det\mathbf{V}$$

2. REFERENTIELS TOURNANTS

Nous avons défini, au paragraphe précédent, les dérivées rotationnelles comme étant des dérivées relatives à un trièdre orthonormé (que l'on notera $\vec{\bar{e}}_i$). L'évolution de ce trièdre au cours de la transformation est donnée par une rotation \mathbf{Q} définie par:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{w}_Q \mathbf{Q} \quad ; \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1} \quad (28)$$

Pour que cette dérivation soit objective, il faut que la quantité $\bar{\mathbf{w}}_Q = \mathbf{w} - \mathbf{w}_Q$ soit objective. La rotation \mathbf{Q} doit alors se transformer, par (18), en:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{q} \mathbf{Q} \quad (29)$$

Le tenseur \mathbf{Q} est donc de même "nature" que \mathbf{R} . Il réalise un transport, par rotation, de la configuration initiale, à celle à l'instant t . Le repère $\vec{\bar{e}}_i$ est donc un repère tournant, lié d'une certaine manière à la matière, et indépendant du référentiel d'observation; il définit alors ce qu'on appelle un référentiel tournant:

$$\vec{\bar{e}}_i = \mathbf{Q} \vec{E}_i = Q_{ji} \vec{e}_j \quad ; \quad \mathbf{Q} = Q_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{E}_j \quad (30)$$

La dérivation dans un référentiel tournant revient alors à effectuer les opérations suivantes:

- 1) Transporter l'objet à dériver de la configuration actuelle à celle de référence, ceci par l'intermédiaire de la rotation \mathbf{Q}^T .
- 2) Dériver dans la configuration initiale.
- 3) Réaliser le transport inverse.

Dans le cas d'un tenseur du second ordre \mathbf{X} , la dérivée $D_Q \mathbf{X} / Dt$ par rapport à ce référentiel tournant est donnée par:

$$D_Q \mathbf{X} / Dt = \mathbf{Q} [d(\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \mathbf{Q}) / dt] \mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} \mathbf{w}_Q - \mathbf{w}_Q \mathbf{X} \quad (31)$$

En conclusion, une dérivation rotationnelle objective est définie par la donnée d'un tenseur antisymétrique $\bar{\mathbf{w}}_Q$ objectif tel que:

$$\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \mathbf{w}_Q = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}_Q \quad (32)$$

Les référentiels corotationnel ($\bar{\mathbf{w}}_Q = 0$) ou en rotation propre ($\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ et $\bar{\mathbf{w}}_Q$ donné par la relation (27)) sont des cas particuliers.

2.1. REFERENTIEL PRINCIPAL DES DEFORMATIONS

Nous appelons référentiel principal des déformations, le référentiel associé aux directions principales de \mathbf{V} (\vec{v}_i). Soit \mathbf{w}_V la vitesse de rotation correspondante.

Si les valeurs propres de \mathbf{V} sont distinctes, la vitesse de rotation \mathbf{w}_V est égale à celle du trièdre \vec{v}_i ; elle est donnée par:

$$\mathbf{w}_V = \dot{\Psi}^V \Psi^{VT} = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}_V \quad (33)$$

La rotation Ψ^V est définie par (10). Sa dérivée $\dot{\Psi}^V$ est indéterminée si deux des valeurs propres de \mathbf{V} sont identiques. En effet, si par exemple $v_1 = v_2$, alors tout repère \vec{v}'_i en rotation par rapport à \vec{v}_i autour de \vec{v}_3 ($\vec{v}'_3 = \vec{v}_3$) est aussi repère principal pour \mathbf{V} . Dans ce cas, la composante indéterminée de \mathbf{w}_V est prise égale à la partie correspondante dans \mathbf{w} . Ce choix est explicité en ANNEXE 1.

Pour calculer $\bar{\mathbf{W}}_V$ en fonction de \mathbf{V} et \mathbf{D} , on définit la dérivée $D_V \mathbf{B}^D / Dt$ de \mathbf{B}^D , déviateur de $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$, dans un de ces repères principaux, soit $(\bar{\mathbf{v}}_i)$:

$$\begin{aligned} D_V \mathbf{B}^D / Dt &= \dot{B}^D_1 \bar{\mathbf{v}}_1 \otimes \bar{\mathbf{v}}_1 + \dot{B}^D_2 \bar{\mathbf{v}}_2 \otimes \bar{\mathbf{v}}_2 + \dot{B}^D_3 \bar{\mathbf{v}}_3 \otimes \bar{\mathbf{v}}_3 \\ &= \dot{\mathbf{B}}^D + \mathbf{B}^D \mathbf{W}_V - \mathbf{W}_V \mathbf{B}^D \end{aligned} \quad (34)$$

La quantité $(\mathbf{B}^D \mathbf{W}_V - \mathbf{W}_V \mathbf{B}^D)$ ne dépend pas du choix des directions principales (voir ANNEXE 1). La dérivée $D_V \mathbf{B}^D / Dt$ est donc définie dans tous les cas.

Remarquons que \mathbf{B}^D et $D_V \mathbf{B}^D / Dt$ commutent, puisqu'ils ont les mêmes directions principales. Si l'on écrit la quantité $\mathbf{B}^D D_V \mathbf{B}^D / Dt$ en fonction, d'une part de \mathbf{D} , et d'autre part de $D_V \mathbf{B}^D / Dt$ on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^D \mathbf{B}^{Dj} &= \mathbf{B}^{D2} \mathbf{D} + \mathbf{B}^D \mathbf{D} \mathbf{B}^D + 2/3 B_I \mathbf{B}^D \mathbf{D} - 1/3 B_I \mathbf{B}^D \\ &= \mathbf{B}^D D_V \mathbf{B}^D / Dt + \mathbf{B}^{D2} \bar{\mathbf{W}}_V - \mathbf{B}^D \bar{\mathbf{W}}_V \mathbf{B}^D \end{aligned} \quad (35)$$

avec $\bar{\mathbf{W}}_V = \mathbf{W} - \mathbf{W}_V$ et B_I la trace de \mathbf{B} .

Si maintenant on prend la partie antisymétrique de (35), sachant que $\mathbf{B}^D D_V \mathbf{B}^D / Dt$ est symétrique, on obtient une équation permettant de définir $\bar{\mathbf{W}}_V$:

$$[\mathbf{B}^{D2} \bar{\mathbf{W}}_V]^A - \mathbf{B}^D \bar{\mathbf{W}}_V \mathbf{B}^D = [\mathbf{B}^{D2} \mathbf{D}]^A + 2/3 B_I [\mathbf{B}^D \mathbf{D}]^A \quad (36)$$

(L'utilisation du déviateur \mathbf{B}^D au lieu de \mathbf{B} permet de simplifier le calcul puisque \mathbf{B}^D admet uniquement deux invariants principaux non nuls). Le référentiel principal des déformations est donc défini par la donnée de $\bar{\mathbf{W}}_V$ solution de (36).

La solution $\bar{\mathbf{W}}_V$ de (36) est une fonction isotrope de (\mathbf{D}, \mathbf{B}) , linéaire en \mathbf{D} , et s'écrit sous la forme générale:

$$\bar{\mathbf{W}}_V = 2f_1 [\mathbf{B}^D \mathbf{D}]^A + 2f_2 [\mathbf{B}^{D2} \mathbf{D}]^A + 2f_3 [\mathbf{B}^D \mathbf{D} \mathbf{B}^{D2}]^A \quad (37)$$

les f_i étant fonctions des invariants principaux $B_I = \text{tr} \mathbf{B}$, $B^D_{II} = -\text{tr}(\mathbf{B}^{D2}/2)$ et $B^D_{III} = \det \mathbf{B}^D$.

En remplaçant (37) dans (36), on obtient un système linéaire de trois équations à trois inconnues (f_1, f_2, f_3) dont le déterminant Δ est:

$$\Delta = -(4B^D_{II}{}^3 + 27B^D_{III}{}^2) = (B_1 - B_2)^2 (B_2 - B_3)^2 (B_3 - B_1)^2 \quad (38)$$

Le déterminant Δ s'annule si au moins deux des valeurs propres de \mathbf{B} (B_i) sont égales, ce qui correspond à l'indétermination de la définition de Ψ^V . Considérons le cas où deux seulement des valeurs propres de \mathbf{B} sont égales ($\mathbf{B}^D \neq 0$), dans ce cas, on peut remarquer que \mathbf{B}^D s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{B}^D = s (\mathbf{1} - \alpha) \quad ; \quad s = 3B^D_{III} / B^D_{II} = - (B^D_{III} / 2)^{1/3} \quad (39)$$

où $\alpha = \bar{\mathbf{v}}_k \otimes \bar{\mathbf{v}}_k$ si $B_i = B_j$ (i, j, k permutation circulaire de 1, 2, 3). Si maintenant on remplace (39) dans (36), on obtient une équation permettant de définir $\bar{\mathbf{W}}_V$ dont la solution est de la forme (37) où seul le premier terme subsiste. Reste maintenant le cas particulier où les 3 valeurs propres de \mathbf{B} sont identiques ($B_1 = B_2 = B_3 = B$ c.à.d $\mathbf{B}^D = 0$), dans ce cas, $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^j = 2\mathbf{B}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{B} / Dt$ pour toute dérivée rotationnelle D / Dt ; en plus, $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ ($\bar{\mathbf{W}}_R = 0$ dans (27)), ceci bien sûr à l'instant où $B_1 = B_2 = B_3$. On choisit alors, dans ce cas, $\bar{\mathbf{W}}_V = 0$ et donc $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{W}}_R = \mathbf{W}_V$.

En conclusion, les fonction f_i sont données par:

* Si $\Delta \neq 0$ ($B_1 \neq B_2 \neq B_3$):

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= [(8/3)B^D_{II}{}^2 B_I + 12B^D_{III} B^D_{III}] / \Delta \\ f_2 &= [4B^D_{II}{}^2 - 6B^D_{III} B_I] / \Delta \\ f_3 &= [9B^D_{III} + 2B^D_{II} B_I] / \Delta \end{aligned} \right\} \quad (40.a)$$

* Si $\Delta = 0$ et $\mathbf{B}^D \neq 0$:

$$f_1 = -2 B_1 / 9 B_{II}^D + B_{III}^D / 2 B_{II}^D{}^2 ; f_2 = f_3 = 0 \quad (40.b)$$

* Si $\mathbf{B}^D = 0$ ($B_1 = B_2 = B_3$):

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (40.c)$$

Les relations (37-40) définissent \mathbf{W}_v d'une manière unique. On trouvera tous les détails des calculs en ANNEXE 1.

2.2. REFERENTIEL TRIAXIAL

Nous appelons référentiel triaxial, celui par rapport auquel la dérivée du tenseur de déformation logarithmique $\mathbf{v} = \text{Log}(\mathbf{V})$ est égale à \mathbf{D} . Sa vitesse de rotation est notée \mathbf{W}_T et définie par:

$$D_T \mathbf{v} / Dt = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \mathbf{W}_T - \mathbf{W}_T \mathbf{v} = \mathbf{D} \quad (41)$$

L'existence de \mathbf{W}_T n'est pas évidente à première vue. Pour la montrer, Il suffit d'écrire l'équation (41) dans le repère \bar{v}_i (voir ANNEXE 1).

Le calcul de $\bar{\mathbf{W}}_T = \mathbf{W} - \mathbf{W}_T$ se fait, comme plus haut pour \mathbf{W}_v , en faisant intervenir $D_v \mathbf{v} / Dt$, dérivée de \mathbf{v} par rapport à ses directions principales (les mêmes que celles de \mathbf{B}). Les détails de calcul sont en ANNEXE 1, nous ne donnons dans ce qui suit que la démarche.

En prenant la partie antisymétrique de la quantité $\mathbf{v}^D [D_T \mathbf{v}^D / Dt]$, on obtient une relation permettant de définir $\mathbf{\Omega} = \mathbf{W}_T - \mathbf{W}_v$:

$$[\mathbf{v}^D \mathbf{\Omega}]^A - \mathbf{v}^D \mathbf{\Omega} \mathbf{v}^D = [\mathbf{v}^D \mathbf{D}]^A ; \mathbf{W}_T = \mathbf{W}_v + \mathbf{\Omega} \quad (42)$$

L'équation (42) est analogue à (36) et se résout de la même manière. Le tenseur antisymétrique $\mathbf{\Omega}$ est donc fonction isotrope de \mathbf{D} et \mathbf{v} et linéaire en \mathbf{D} , il s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{\Omega} = 2g_1 [\mathbf{v}^D \mathbf{D}]^A + 2g_2 [\mathbf{v}^{D2} \mathbf{D}]^A + 2g_3 [\mathbf{v}^D \mathbf{D} \mathbf{v}^{D2}]^A \quad (43)$$

les scalaires g_i étant fonctions des invariants principaux v_{II}^D et v_{III}^D . En remplaçant (43) dans (42), on obtient un système linéaire de trois équations à trois inconnues (g_1, g_2, g_3) dont le déterminant δ s'annule, comme Δ , quand deux des valeurs propres de \mathbf{v} sont égales. En raisonnant de la même manière que pour le référentiel principal des déformations, on obtient une solution unique pour $\mathbf{\Omega}$ donc pour \mathbf{W}_T , soit:

$$\delta = -(4v_{II}^D{}^3 + 27v_{III}^D{}^2) = (v_1 - v_2)^2 (v_2 - v_3)^2 (v_3 - v_1)^2 \quad (44.a)$$

* si $\delta \neq 0$:

$$g_1 = 4v_{II}^D{}^2 / \delta ; g_2 = -9v_{III}^D / \delta ; g_3 = 3v_{II}^D / \delta \quad (44.b)$$

* si $\delta = 0$ et $\mathbf{v}^D \neq 0$:

$$g_1 = -1/3 v_{II}^D ; g_2 = g_3 = 0 \quad (44.c)$$

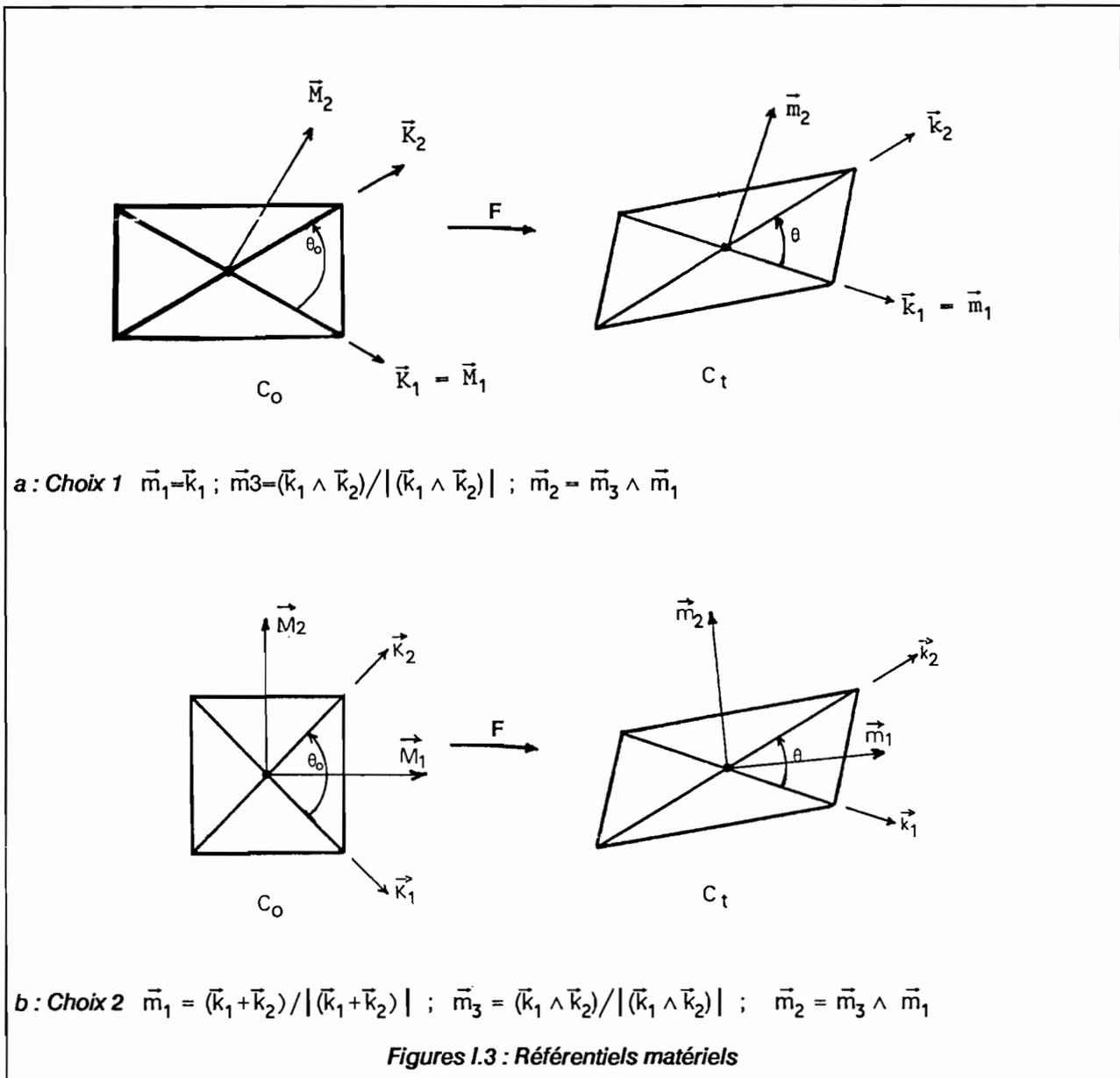
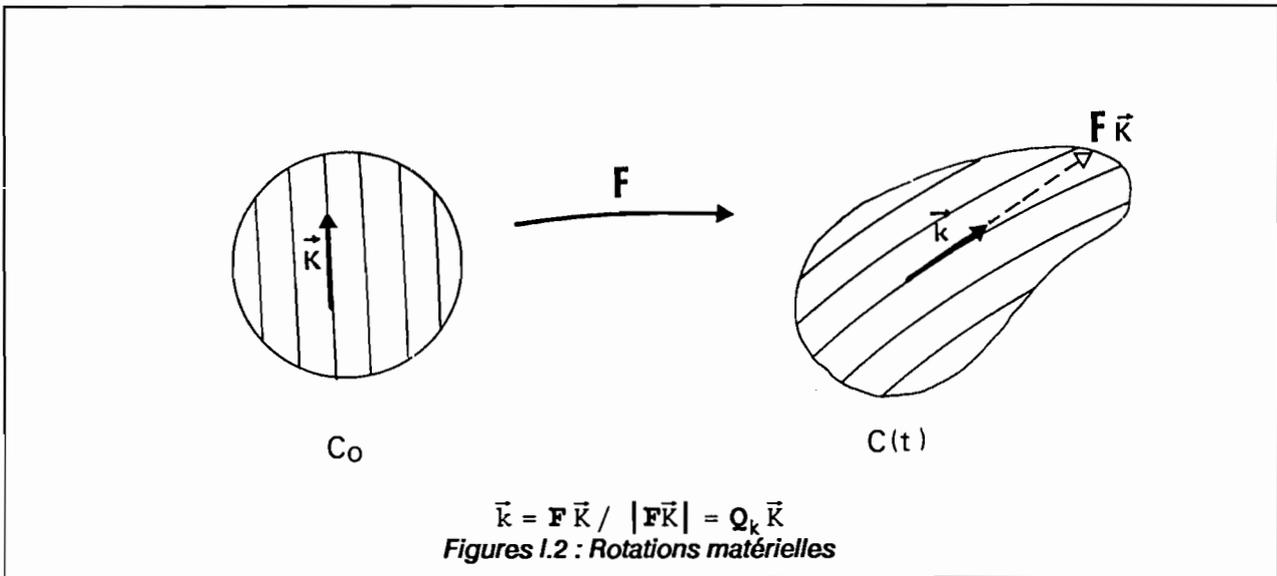
* si $\mathbf{v}^D = 0$:

$$g_1 = g_2 = g_3 = 0 \quad (44.d)$$

Signalons qu'avec les relations (43-44), il est possible d'écrire directement la relation entre $D_J \mathbf{v} / Dt$ et \mathbf{D} :

$$D_J \mathbf{v} / Dt = \mathbf{D} + \mathbf{v} (\mathbf{W} - \mathbf{W}_T) - (\mathbf{W} - \mathbf{W}_T) \mathbf{v} \quad (45)$$

$$\mathbf{W} - \mathbf{W}_T = \bar{\mathbf{W}}_T = \bar{\mathbf{W}}_v - \mathbf{\Omega}$$



2.3. REFERENTIELS MATERIELS

Il est également possible de définir des référentiels tournants en particulierisant des directions matérielles. L'utilisation de ce genre de référentiels est avantageuse quand on veut modéliser des matériaux dont l'anisotropie est du type "matérielle" tels que les composites à fibres ou les stratifiés; on en verra quelques exemples au chapitre V. Remarquons que la différence essentielle entre ces référentiels et ceux présentés ci-dessus, est que les premiers font intervenir, en plus de la cinématique, des directions privilégiées dans le matériau.

Une direction matérielle selon $\bar{\mathbf{k}}$ dans C_0 définie par le tenseur $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{k}} \otimes \bar{\mathbf{k}}$ sera, dans $C(t)$, selon $\bar{\mathbf{k}}$ et définie par le tenseur $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} \otimes \bar{\mathbf{k}}$ (Fig. 1.2.) telle que ($\bar{\mathbf{k}}$ et $\bar{\mathbf{k}}$ étant unitaires):

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{F} \bar{\mathbf{k}} / |\mathbf{F} \bar{\mathbf{k}}| \quad ; \quad \mathbf{k} = (\mathbf{F} \mathbf{K} \mathbf{F}^T) / (\mathbf{K} : \mathbf{C}) \quad (46)$$

A) UNE DIRECTION MATERIELLE

Il existe plusieurs rotations \mathbf{Q}_k qui permettent d'écrire:

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{Q}_k \bar{\mathbf{k}} \quad \mathbf{k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{K} \mathbf{Q}_k^T$$

et donc:

$$\dot{\bar{\mathbf{k}}} = \mathbf{k} \mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k \mathbf{k} \quad \mathbf{w}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k \mathbf{Q}_k^T = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}_k$$

Le choix le plus simple consiste à prendre, pour $\bar{\mathbf{w}}_k$ (voir ANNEXE 2):

$$\bar{\mathbf{w}}_k = 2 [\mathbf{k} \mathbf{D}]^A \quad (47)$$

La relation (47) permet de définir un référentiel tournant associé à la direction matérielle $\bar{\mathbf{k}}$.

B) UN PLAN MATERIEL

Considérons maintenant deux directions matérielles $\bar{\mathbf{k}}_1$ et $\bar{\mathbf{k}}_2$ qui se retrouvent en $\bar{\mathbf{k}}_1$ et $\bar{\mathbf{k}}_2$; on définit ainsi un plan matériel. On peut alors associer à ce plan matériel un trièdre orthonormé initial dans C_0 noté $\bar{\mathbf{M}}_i$ et un autre, dans $C(t)$, noté $\bar{\mathbf{m}}_i(t)$ tels que $\bar{\mathbf{m}}_3$ soit normal au plan $(\bar{\mathbf{k}}_1, \bar{\mathbf{k}}_2)$ et $\bar{\mathbf{m}}_3$ normal au plan $(\bar{\mathbf{k}}_1, \bar{\mathbf{k}}_2)$. Le référentiel tournant correspondant sera défini par:

$$\bar{\mathbf{m}}_i = \mathbf{Q}_k \bar{\mathbf{M}}_i \quad (48)$$

tel que $\bar{\mathbf{w}}_k = \mathbf{w} - \dot{\mathbf{Q}}_k \mathbf{Q}_k^T$ est fonction isotrope de $(\mathbf{D}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$. La forme de $\bar{\mathbf{w}}_k$ dépend de la manière dont on définit le trièdre orthonormé. Une première possibilité consiste à choisir $\bar{\mathbf{M}}_1 = \bar{\mathbf{k}}_1$ ($\bar{\mathbf{m}}_1 = \bar{\mathbf{k}}_1$) (Fig. 1.3.a), dans ce cas, $\bar{\mathbf{w}}_k$ est donné par:

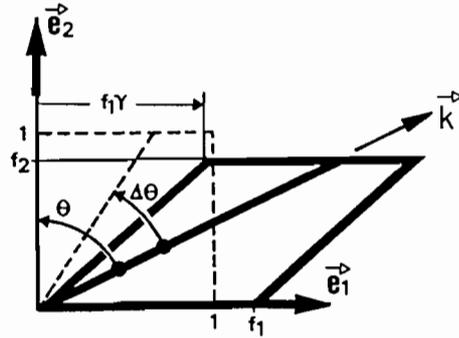
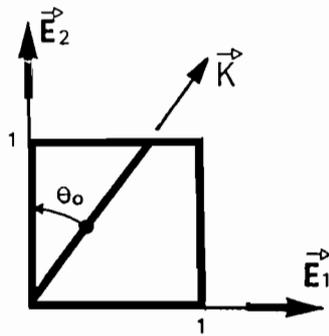
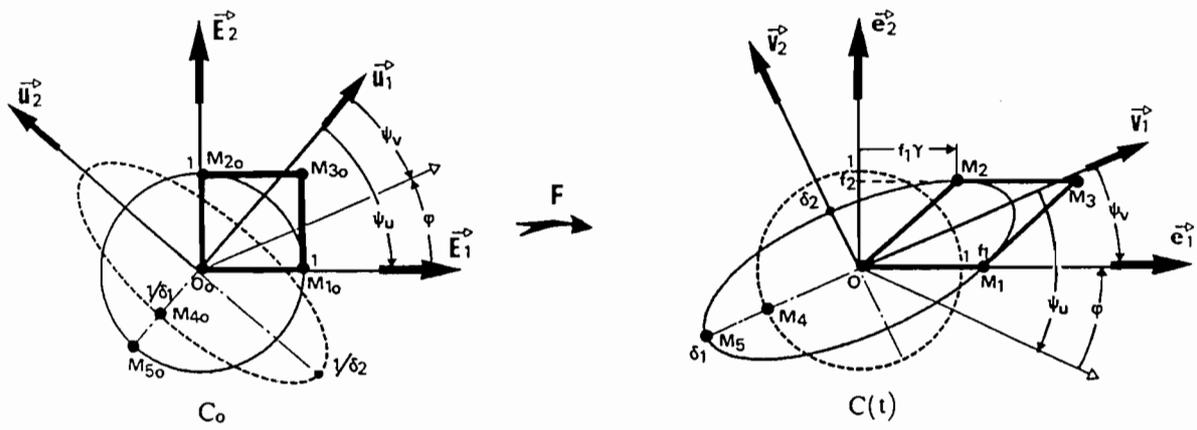
$$\bar{\mathbf{w}}_k = 2 [\mathbf{D} \mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_1 \mathbf{D} \mathbf{m}_2]^A \quad \mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}_i \text{ (sans sommation)} \quad (49.a)$$

Une seconde possibilité consiste à choisir $\bar{\mathbf{M}}_1$ comme bissectrice de $\bar{\mathbf{k}}_1$ et $\bar{\mathbf{k}}_2$ ($\bar{\mathbf{m}}_1$ bissectrice de $\bar{\mathbf{k}}_1$ et $\bar{\mathbf{k}}_2$) (fig. 1.3.b), on obtient alors:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_k &= 2 [\mathbf{D} \mathbf{m}_3 + \cos \theta \mathbf{m}_1 \mathbf{D} \mathbf{m}_2]^A \\ \dot{\theta} &= \sin \theta [(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) : \mathbf{D}] \end{aligned} \quad (49.b)$$

l'angle θ étant l'angle entre $\bar{\mathbf{k}}_1$ et $\bar{\mathbf{k}}_2$. Les détails des calculs sont en ANNEXE 2.

On trouve dans la littérature d'autres propositions de référentiels tournants ou de dérivées objectives rotationnelles, mais elles se réfèrent souvent à des modèles de comportement spécifiques. Nous n'en parlerons donc pas ici, nous y reviendrons au chapitre III.



$$F: \begin{bmatrix} f_1 & f_1\gamma & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix}$$

Figure I.4 : Cinématique plane

3. CINEMATIQUE PLANE

3.1. DEFINITION

Nous dirons que la transformation subie par un élément matériel est plane, s'il existe un plan matériel et une direction matérielle, qui restent orthogonaux à chaque instant. Cette direction sera noté \vec{E}_3 dans la configuration de référence, et \vec{e}_3 à l'instant t.

Au voisinage d'un point matériel P, la déformation est donc telle qu'un cylindre matériel de révolution d'axe \vec{E}_3 passant par O_0 position initiale de P, se transforme en un cylindre elliptique d'axe \vec{e}_3 passant par O position à l'instant t de P (Fig. I.4). Cette déformation sera donc entièrement définie par la transformation d'un cercle en ellipse dans le plan de la cinématique, et par la compression ou l'extension selon l'axe \vec{e}_3 .

Si l'on choisit une direction matérielle dans le plan de la cinématique, comme premier axe (\vec{E}_1, \vec{e}_1) du repère dans lequel on écrit cette cinématique, la forme générale du gradient de la transformation dans ce repère est alors donnée par:

$$\mathbf{F}: \begin{bmatrix} f_1 & f_1\gamma & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Un point matériel P_1 qui initialement est infiniment voisin de P, reste au cours de la transformation (continuité de la transformation) infiniment voisin de P. Si l'on appelle M_{10} et M_1 les positions initiale et à l'instant t de P_1 , les points matériels se trouvant initialement sur un cercle centré en O_0 et passant par M_{10} se retrouvent à l'instant t sur une ellipse centrée en O, passant par M_1 dont les axes définissent les directions principales de \mathbf{V} , soit \vec{v}_i , et dont les demi-axes définissent les allongements principaux δ_i (Fig. I.4). Inversement, les points matériels se trouvant à l'instant t sur un cercle centré en O et passant par M_1 , sont ceux qui, initialement, se trouvaient sur une ellipse centrée en O_0 , passant par M_{10} et dont les axes définissent les directions principales \mathbf{U} , soit \vec{u}_i . La configuration initiale C_0 étant repérée par les axes $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ et la configuration déformée $C(t)$ par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où \vec{E}_1 et \vec{e}_1 sont respectivement portés par $O_0\vec{M}_{10}$ et $O\vec{M}_1$, \mathbf{F} s'écrit sous la forme (50).

3.2. CARACTERISTIQUES

- DECOMPOSITION POLAIRE

La rotation \mathbf{R} obtenue par décomposition polaire de \mathbf{F} est définie par un angle φ . La matrice des composantes de \mathbf{R} relativement aux repères (\vec{E}_i, \vec{e}_i) s'écrit alors sous la forme:

$$\mathbf{R}: \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51.a)$$

la relation qui donne φ en fonction de γ et les f_i s'obtient en calculant le produit $\mathbf{R}^T \mathbf{F}$ et en imposant que ce produit soit symétrique puisque $\mathbf{R}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}$. Sachant que $U_{11} + U_{22}$ doit être positif, on obtient alors:

$$\varphi = \text{Arctg}[f_1\gamma/(1+f)] \quad f = f_1/f_2 \quad (51.b)$$

- ALLONGEMENTS PRINCIPAUX

Les allongements principaux δ_i , valeurs propres de \mathbf{U} et de \mathbf{V} , sont donnés par:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2) f_2 & ; & \quad \delta_2 = \frac{1}{2} (a_1 - a_2) f_2 & \quad ; & \quad \delta_3 = f_3 \\ a_1 &= [(1+f)^2 + f^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}} & ; & \quad a_2 = [(1-f)^2 + f^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}} & ; & \quad \delta_1 \delta_2 = f_1 f_2 \end{aligned} \quad (52)$$

- DIRECTIONS PRINCIPALES DES DEFORMATIONS

Dans cette cinématique, les matrices $[\Psi^U]$ et $[\Psi^V]$ ne font intervenir qu'un seul angle chacune, soit Ψ^U et Ψ^V . Ces angles sont donnés par:

$$\operatorname{tg} 2\Psi^U = \frac{2f^2\gamma}{1+f^2(\gamma^2-1)} \quad ; \quad \operatorname{tg} 2\Psi^V = \frac{2f\gamma}{1-f^2(\gamma^2+1)} \quad ; \quad \varphi = \Psi^V - \Psi^U \quad (53)$$

Ces angles ne sont, bien sûr, définis que dans la mesure où $\delta_1 \neq \delta_2$, c.à.d. si $a_2 \neq 0$. Le coefficient a_2 ne s'annule que si $f=1$ et $\gamma=0$ (indétermination des relations (53)). Dans ce cas, le plan de la cinématique est un plan propre.

- DEFORMATION LOGARITHMIQUE

Les composantes de $\mathbf{v} = \operatorname{Log} \mathbf{V}$ s'écrivent, dans le repère (\vec{e}_i) , sous la forme:

$$\begin{aligned} v_{11} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(\delta_2/\delta_1) \cos 2\Psi^V \\ v_{22} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \operatorname{Log}(\delta_2/\delta_1) \cos 2\Psi^V \\ v_{33} &= \varepsilon_3 & \varepsilon_i &= \operatorname{Log} f_i \\ v_{12} &= \frac{1}{2} \operatorname{Log}(\delta_2/\delta_1) \sin 2\Psi^V \end{aligned} \quad (54)$$

- ROTATIONS MATERIELLES

Une direction matérielle selon \vec{K} dans C_0 orientée par θ_0 sera, dans $C(t)$ selon \vec{k} et orientée par θ (fig. I.4) tel que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg} \theta_0 / f(1 - \gamma \operatorname{tg} \theta_0) \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) + f \sin^2 \theta \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (55)$$

- GRADIENT DE VITESSE

Le tenseur gradient de vitesse \mathbf{L} , ses parties symétrique \mathbf{D} et antisymétrique \mathbf{W} , s'écrivent dans (\vec{e}_i) :

$$\mathbf{L}: \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & f\dot{\gamma} & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}: \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & \frac{1}{2}f\dot{\gamma} & 0 \\ \frac{1}{2}f\dot{\gamma} & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W}: \frac{1}{2}f\dot{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

3.3. REFERENTIELS TOURNANTS

Les différents référentiels tournants introduits précédemment sont, selon la cinématique (50), définis par un angle α tel que:

$$\mathbf{Q}: \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T: \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Les composantes de \mathbf{Q} sont relatives aux repères (\vec{E}_1, \vec{e}_1) et celles de $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ au repère (\vec{e}_1) .
La vitesse de rotation $\dot{\alpha}$ est sous la forme:

$$\dot{\alpha} = A (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) + B f \dot{\gamma} / 2 \quad (58)$$

les paramètres A et B sont fonctions de f et γ et dépendent du référentiel choisi.

- REFERENTIEL COROTATIONNEL

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha_J & A &\equiv A_J & B &\equiv B_J \\ A_J &= 0 & B_J &= 1 \end{aligned} \quad (59.a)$$

La vitesse de rotation de ce référentiel représente une moyenne eulérienne, à un instant donné, de celle des directions matérielles définies par θ . En effet, on trouve:

$$\dot{\alpha}_J = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\theta}(\theta, f, \gamma) d\theta \quad (60)$$

- REFERENTIEL EN ROTATION PROPRE

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha_R & A &\equiv A_R & B &\equiv B_R \\ A_R &= \frac{f\gamma}{(1+f)^2 + f^2\gamma^2} & B_R &= \frac{2(1+f)}{(1+f)^2 + f^2\gamma^2} \end{aligned} \quad (59.b)$$

L'angle α_R et sa vitesse $\dot{\alpha}_R$ sont des moyennes lagrangiennes des rotations matérielles et de leurs vitesses, respectivement:

$$\begin{aligned} \alpha_R &= (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\theta_0, f, \gamma) d\theta_0 \\ \dot{\alpha}_R &= (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\theta}(\theta_0, f, \gamma) d\theta_0 \end{aligned} \quad (61)$$

- REFERENTIEL PRINCIPAL DES DEFORMATIONS

$$\alpha \equiv \alpha_v \quad A \equiv A_v \quad B \equiv B_v$$

Dans le cas où Ψ^v est défini sans ambiguïté, c.à.d. pour $a_2 \neq 0$, $\dot{\alpha}_v$ est défini par la relation (40.a), ce qui correspond à $\dot{\alpha}_v = \dot{\Psi}^v$. Si $a_2 = 0$, il faut alors utiliser la relation (40.b) (ou 40.c si $\delta_3 = \delta_1 = \delta_2$):

* si $a_2 \neq 0$:

$$A_v = \frac{f\gamma [1 + f^2(\gamma^2 + 1)]}{a_1^2 a_2^2} \quad B_v = \frac{2 [1 + f^2(\gamma^2 - 1)]}{a_1^2 a_2^2} \quad (59.c)$$

* si $a_2 = 0$:

$$A_v = A_J \quad B_v = B_J \quad (59.c \text{ bis})$$

- REFERENTIEL TRIAXIAL

$$\alpha \equiv \alpha_T \quad A \equiv A_T \quad B \equiv B_T$$

* si $a_2 \neq 0$

$$A_T = A_V + \frac{f\gamma}{a_1 a_2 \text{Log}(\delta_2/\delta_1)} \quad B_T = B_V - \frac{[f^2(1+\gamma^2)-1]}{a_1 a_2 \text{Log}(\delta_2/\delta_1)} \quad (59.d)$$

* si $a_2 = 0$:

$$A_V = A_J \quad B_V = B_J \quad (59.d \text{ bis})$$

- REFERENTIELS MATERIELS

$$\alpha \equiv \alpha_k \quad A \equiv A_k \quad B \equiv B_k$$

En cinématique plane, une seule direction matérielle suffit pour définir un référentiel tournant. La vitesse de rotation d'un référentiel défini par (47), sachant que \vec{k} est dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , est donnée par (55):

$$\alpha_k = \theta - \theta_0 \quad (59.e)$$

$$A_k = -\frac{1}{2} \sin 2(\alpha_k + \theta_0) \quad B_k = 2 \sin^2(\alpha_k + \theta_0)$$

Les relations (59.e) définissent plusieurs référentiels en fonction de la valeur de θ_0 c'est-à-dire de la direction matérielle choisie.

- VALEURS INITIALES DES VITESSES DE ROTATION

A l'instant initial correspondant à $f=1$ et $\gamma=0$, on a:

$$A_J = A_R = A_V = A_T = 0 \quad B_J = B_R = B_V = B_T = 1 \quad (62.a)$$

$$A_k = -\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \quad B_k = 2 \sin^2 \theta_0$$

Concernant $\dot{\alpha}_V$ et $\dot{\alpha}_T$, l'instant initial correspond à $a_2=0$, donc à l'indétermination de Ψ^V ; c'est donc les définitions (40.c) et (44.c) qui sont utilisées pour avoir (62.a). Il est possible de faire un développement limité, au voisinage de $f=1$ et $\gamma=0$, des relations (59.c) et (59.d), pour un chemin cinématique particulier, défini par une fonction $f(\gamma)$ ou $\gamma(f)$. En notant K_0 et K_1 les valeurs initiales respectivement de $d\gamma/df$ et $d^2\gamma/df^2$, les valeurs initiales de $d\alpha/d\gamma$ sont:

$$d\alpha_T/d\gamma = d\alpha_J/d\gamma = 1/2 \quad (62.b)$$

$$\frac{d\alpha_V}{d\gamma} = \frac{K_0(K_0^2-1)-K_1}{4 K_0(1+K_0^2)}$$

Les relations (62.b) donnent la même valeur initiale que (62.a) pour $\dot{\alpha}_T$, mais une valeur différente pour $\dot{\alpha}_V$. Dans le cas d'une cinématique de cisaillement simple, par exemple, $\dot{\Psi}^V = \dot{\gamma}/(4+\gamma^2)$; la valeur initiale de $\dot{\Psi}^V$ selon cette relation est de $\dot{\gamma}/4$, alors que la définition de $\dot{\alpha}_V$, pour $a_2=0$, donne une valeur de $\dot{\gamma}/2$. Dans toute la suite, on considérera toujours la définition générale, et on utilisera les relations (62.a).

4. SOLLICITATIONS PARTICULIERES

4.1. CISAILLEMENT SIMPLE

Le cisaillement simple est une cinématique non triaxiale définie avec une seule variable γ ($f=1$). Même si l'essai correspondant reste difficile à réaliser expérimentalement, l'intérêt théorique de cette cinématique est grand, puisque c'est la cinématique la plus simple permettant d'engendrer des rotations des directions principales des déformations.

La figure I.5 montre l'évolution, en fonction de γ , de la rotation des référentiels tournants définis précédemment. Les courbes en pointillés concernent différentes directions matérielles (α_k pour différents θ_0). Remarquons que si la rotation des référentiels en rotation propre (R) et principal des déformations (V) admettent une limite finie quand $\gamma \rightarrow \infty$, celles du référentiel corotationnel (J) et triaxial (T) tendent vers l'infini. D'autre part, parmi les référentiels cinématiques (J,R,T,V), seul le référentiel principal des déformations (V) admet une pente à l'origine différente (la moitié de celle des autres).

4.2. TRACTION HORS AXES

La traction hors-axes est un essai de traction homogène sur un matériau anisotrope, selon une direction \vec{e}_1 différente des directions de symétrie du matériau. Cet essai est généralement réalisé sur des tôles ([5]-[6]). Si l'on suppose que le matériau est orthotrope, et que la direction (\vec{E}_3, \vec{e}_3) est direction d'orthotropie (direction normale à la tôle), une telle sollicitation va introduire un cisaillement dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) (plan de la tôle). La cinématique est donc du type (50). La déformation de l'éprouvette est schématisée par la figure I.6. Les composantes f_1 et γ sont donnés, en fonction des dimensions de l'éprouvette, par:

$$f_1 = l/l_0 = e^\varepsilon \quad ; \quad f_2 = d/d_0 = e^{-\eta} \quad ; \quad \gamma = e^{-(\varepsilon+\eta)} \operatorname{tg} \xi \quad (63)$$

où l_0 et l (d_0 et d) sont les longueurs (largeurs) initiale et à l'instant t de l'éprouvette et ξ l'angle de rotation de la section finale de celle-ci.

La présence de ξ nécessite un dispositif expérimental adéquat pour réaliser ce type d'essais [5]-[6].

La force P , appliquée à l'éprouvette de section initiale S_0 est donnée, en fonction de ε et de la contrainte σ , par:

$$P = S_0 \sigma e^{-\varepsilon} \quad (64)$$

4.3. TRACTION TORSION HOMOGENE

On considère maintenant un tube soumis à un état de contrainte de traction torsion. On suppose que le tube est assez mince pour pouvoir considérer que l'état de déformation est homogène. La déformation du tube est schématisée par la figure I.7. Avant déformation, un point matériel M_0 est défini dans le repère cylindrique initial R_0 ($\vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_{z_0}, \vec{e}_{r_0}$) par:

$$OM_0 = (r_0 + \xi h_0) \vec{e}_{r_0} + \eta z_0 \vec{e}_{z_0} \quad ; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad ; \quad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$$

Les scalaires r_0 , h_0 et z_0 définissent respectivement le rayon moyen, l'épaisseur et la longueur du tube avant déformation. Après déformation, ces quantités deviennent r , h et z , et la section droite correspondant à M_0 aura tourné de $\eta\omega$. La position M du point matériel M_0 est alors définie dans le repère cylindrique actuel R ($\vec{e}_\theta, \vec{e}_z, \vec{e}_r$) par:

$$O\vec{M} = (r+\xi h) \vec{e}_r + \eta z \vec{e}_z$$

avec:

$$\vec{e}_r = \cos \eta\omega \vec{e}_{r_0} + \sin \eta\omega \vec{e}_{\theta_0}$$

Le gradient \mathbf{F} est donné par $dO\vec{M} = \mathbf{F} dO\vec{M}_0$. Les composantes de \mathbf{F} , relatives aux repères R_0 et $R(t)$, sont sous la forme (50) ($\vec{E}_i=R_0, \vec{e}_i=R$). Les composantes f_i et γ sont alors définis par:

$$\begin{aligned} f_1 &= r/r_0 & : \text{variation de rayon moyen} \\ f_2 &= z/z_0 & : \text{variation de longueur} \\ f_3 &= h/h_0 & : \text{variation d'épaisseur} \\ \gamma &= \omega r_0/z_0 & : \text{rotation de la section droite par unité de longueur initiale.} \end{aligned} \tag{65}$$

4.4. INSTABILITE: PROBLEME A DEUX ZONES

Nous décrivons, dans ce paragraphe, une cinématique, sous la forme (50), permettant de traiter le problème à deux zones (fig. 1.8) de type Marciniak. L'utilisation du problème à deux zones est une méthode couramment utilisée pour étudier l'instabilité due à des sollicitations planes sur des tôles, et donc pour déterminer les courbes limites de formage [20]. Cette méthode est basée sur les hypothèses suivantes:

- La tôle est constituée de deux zones d'épaisseurs différentes: une zone A d'épaisseur H dont la valeur initiale est H_0 , et une bande B d'épaisseur h , de valeur initiale h_0 . On note ξ le rapport h/H (fig. 1.8).
- Les déformations et les contraintes sont homogènes dans les deux zones. On appellera \mathbf{T}^A et \mathbf{F}^A , \mathbf{T}^B et \mathbf{F}^B , les tenseurs de contrainte et gradient de la transformation dans les zones A et B. \mathbf{F}^A est la transformation globale imposée à la tôle.
- Les contraintes sont planes et le matériau est incompressible.

On suppose que \mathbf{F}^A s'écrit dans les repères (\vec{E}_i, \vec{e}_i) (fig. 1.8) sous la forme:

$$\mathbf{F}^A: \begin{bmatrix} F_1 & F_1\Gamma & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} ; \quad F_3 = 1/F_1F_2 = H/H_0 \tag{66}$$

et on note Ψ l'angle orientant la direction de la bande B (valeur initiale Ψ_0) (fig. 1.8). En utilisant la relation (55) ($\Psi = -\theta$), on a:

$$\text{tg}\Psi = F_2 \text{tg}\Psi_0 / [F_1(1+\Gamma\text{tg}\Psi_0)] \tag{67}$$

La direction (\vec{B}_1, \vec{b}_1) étant une direction matérielle, \mathbf{F}^A et \mathbf{F}^B s'écrivent aussi, dans les repères (\vec{B}_i, \vec{b}_i), sous la forme (66), soit:

$$\mathbf{F}^A: \begin{bmatrix} f_1^A & f_1^A\gamma^A & 0 \\ 0 & f_2^A & 0 \\ 0 & 0 & f_3^A \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F}^B: \begin{bmatrix} f_1^B & f_1^B\gamma^B & 0 \\ 0 & f_2^B & 0 \\ 0 & 0 & f_3^B \end{bmatrix} \tag{68}$$

..... : Directions Matérielles

——— : Référentiels tournants

J : Corotationnel

T : Triaxial

R : Rotation Propre

V : Principal des Déformations

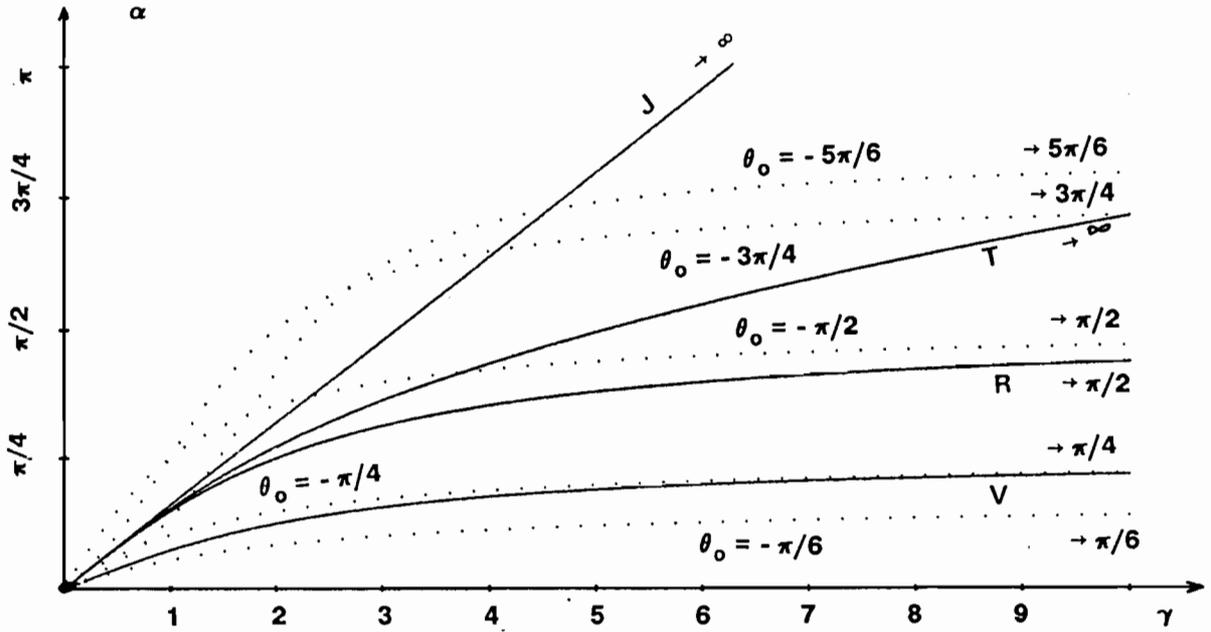
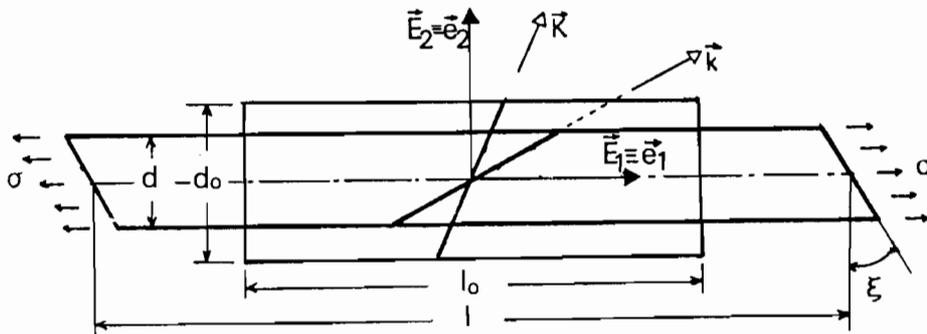


Figure I.5 : Rotation des référentiels tournants et des directions matérielles en cisaillement simple



$$\mathbf{F}: \begin{bmatrix} f_1 & f_1\gamma & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= l/l_0 = e^\epsilon \\ f_2 &= d/d_0 = e^{-\eta} \\ \gamma &= e^{-(\epsilon+\eta)} \operatorname{tg} \xi \end{aligned}$$

Figure I.6 : Traction hors-axes

avec:

$$\begin{aligned}
 f_3^A &= F_3 = H/H_0 & ; & & f_3^B &= h/h_0 \\
 f_1^A &= F_1 / [(F_2/F_1)^2 \sin^2 \Psi_0 + (\cos \Psi_0 + \Gamma \sin \Psi_0)^2]^{1/2} \\
 f_2^A &= F_2 / [(F_2/F_1)^2 \sin^2 \Psi_0 + (\cos \Psi_0 + \Gamma \sin \Psi_0)^2]^{1/2} \\
 \gamma^A &= \frac{1/2 \sin 2\Psi_0 [F_2^2 + F_1^2 (\Gamma^2 - 2 \sin^2 \Psi_0)]}{F_2^2 \sin^2 \Psi_0 + F_1^2 (\cos \Psi_0 + \Gamma \sin \Psi_0)^2}
 \end{aligned} \tag{69}$$

Les contraintes étant supposées planes, \mathbf{T}^A et \mathbf{T}^B s'écrivent:

$$\mathbf{T}^A: \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & T & 0 \\ T & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ (\underline{e}_i) \end{matrix} ; \quad \mathbf{T}^A: \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1^A & \tau^A & 0 \\ \tau^A & \sigma_2^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ (\underline{b}_i) \end{matrix} ; \quad \mathbf{T}^B: \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1^B & \tau^B & 0 \\ \tau^B & \sigma_2^B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ (\underline{b}_i) \end{matrix} \tag{70}$$

avec:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^A &= 1/2 (\Sigma_1 + \Sigma_2) + 1/2 (\Sigma_1 - \Sigma_2) \cos 2\Psi + T \sin 2\Psi \\
 \sigma_2^A &= 1/2 (\Sigma_1 + \Sigma_2) - 1/2 (\Sigma_1 - \Sigma_2) \cos 2\Psi - T \sin 2\Psi \\
 \tau^A &= 1/2 (\Sigma_2 - \Sigma_1) \sin 2\Psi + T \cos 2\Psi
 \end{aligned} \tag{71}$$

La compatibilité des déformations et les équations d'équilibre donnent:

$$\begin{aligned}
 f_1^A &= f_1^B \\
 \tau^A &= \tau^B h/H \\
 \sigma_2^A &= \sigma_2^B h/H
 \end{aligned} \tag{72}$$

avec:

$$h/H = \xi = \xi_0 f_3^B / f_3^A = \xi_0 f_2^A / f_2^B$$

Pour un essai déterminé, on impose 3 parmi les 6 variables ($\Sigma_1, \Sigma_2, T, F_1, F_2, \Gamma$) ou par équivalence ($\sigma_1^A, \sigma_2^A, \tau^A, f_1^A, f_2^A, \gamma^A$). La loi de comportement sur la zone A permet de déterminer les 3 autres variables. Les relations (72) et la loi de comportement sur la zone B permettent de déterminer $\sigma_1^B, \sigma_2^B, \tau^B, f_1^B, f_2^B$ et γ^B .

4.5. SOLLICITATIONS TRIAXIALES

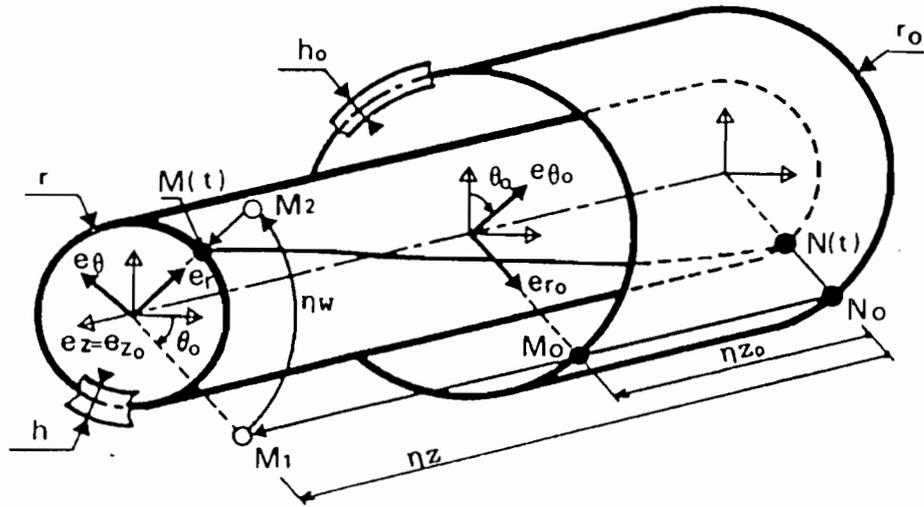
Pour identifier ou valider une loi de comportement, il est souvent nécessaire de réaliser, sur le même matériau, des essais triaxiaux de révolution classiques et des essais en rotation, particulièrement de traction-torsion. Ces essais se faisant sur des machines différentes, on se pose, pour pouvoir étalonner ces machines, la question suivante: Existe-t-il un chemin de sollicitation indépendant de la loi de comportement, qui puisse être réalisé indépendamment sur une machine triaxiale ou une machine de traction-torsion? Autrement dit, existe-t-il un chemin de traction-torsion équivalent à un essai triaxial, ceci quel que soit le comportement du matériau?.

Nous avons défini au début de ce chapitre, d'une manière générale, ce qu'est un essai triaxial: c'est un essai tel que les directions principales de \mathbf{U} restent constantes. Ceci se traduit, en cinématique plane, par la condition $\Psi^U = \text{cte}$, soit:

$$\text{tg} 2\Psi^U = 2/a_0 \quad a_0 = \text{Cte.} \tag{73}$$

Si la condition (73) est vérifiée, alors on peut démontrer différentes propriétés (paragraphe 1.2) et en particulier, sous des conditions d'isotropie initiale:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_z \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_r \end{aligned}$$



$$\mathbf{F}: \begin{bmatrix} f_1 & f_1 \gamma & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} f_1 &= r/r_o & f_2 &= z/z_o \\ f_3 &= h/h_o & \gamma &= \omega r_o/z_o \end{aligned}$$

Figure I.7.: Traction-Torsion

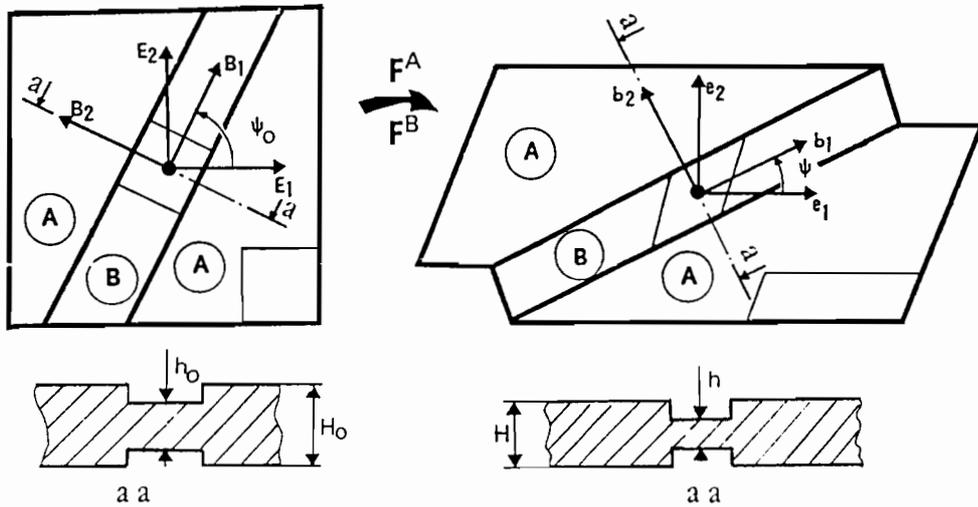


Figure I.8 : Problème à deux zones

- Les directions principales de \mathbf{S} , second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff sont confondues avec celles de \mathbf{U} , et restent donc constantes;
- Les directions principales de \mathbf{T} , \mathbf{D} et \mathbf{B} coïncident à chaque instant;
- La réponse à un tel chemin cinématique peut être entièrement étudiée par un essai triaxial classique.

La condition (73) utilisée avec la première relation (53), permet de définir le chemin cinématique, soit:

$$(1/f)^2 + (\gamma - a_0/2)^2 = 1 + a_0^2/4 \quad (74)$$

C'est donc un demi-cercle dans le plan $(\gamma, 1/f)$. On vérifie bien que la condition (74) implique que les directions principales de \mathbf{D} (Ψ^D) sont confondues avec celles de \mathbf{B} (Ψ^V):

$$\begin{aligned} d\gamma/d(1/f) &= \operatorname{tg} 2\Psi^D = -f^2 d\gamma/df \\ &= 2 [1 - \gamma^2 + a_0\gamma]^{1/2} / (a_0 - 2\gamma) = \operatorname{tg} 2\Psi^V \end{aligned} \quad (75)$$

Les directions principales de \mathbf{T} (traction-torsion, $T_{11} = \sigma$, $T_{12} = \tau$) étant confondues avec celles de \mathbf{B} , on a alors:

$$\sigma/\tau = a(\gamma) = (a_0 - 2\gamma) / (1 - \gamma^2 + a_0\gamma)^{1/2} \quad (76)$$

La constante a_0 définit donc la valeur initiale de σ/τ . On trouvera, dans [10], quelques illustrations de cette cinématique, ainsi que les règles qu'il convient d'appliquer pour la réalisation de ces étalonnages.

- Chapitre 2 -

PHENOMENOLOGIE DE L'ELASTOPLASTICITE

RESUME

La première partie de ce chapitre présente les hypothèses de base constituant le comportement élastoplastique ainsi que les modèles classiques utilisés sous l'hypothèse des petites perturbations. Quelques modèles plus compliqués sont présentés.

La deuxième partie présente les différentes théories élastoplastiques en grandes déformations.

1. INTRODUCTION

Les mécanismes réels mis en jeu au cours de la déformation des matériaux sont si complexes qu'il semble exclu de prétendre les modéliser complètement. Selon la précision des résultats souhaités et selon le degré de complexité toléré dans la mise en place d'une modélisation, seuls quelques aspects du comportement, jugés les plus influents pour l'application voulue, seront pris en compte par le modèle. L'écriture d'une loi de comportement est alors basée, d'une part sur un ensemble d'hypothèses physiques caractérisant le matériau (contenu physique) constituant ce que nous appellerons un matériau modèle, d'autre part sur la traduction de ces hypothèses en un ensemble de relations mathématiques (formulation) constituant une loi de comportement. Le degré de concordance d'une loi de comportement avec la réalité qu'elle modélise dépend donc d'une part, du degré de fiabilité et de précision des hypothèses physiques sur lesquelles elle est basée, d'autre part de la cohérence de la traduction de ces hypothèses en langage mathématique.

La modélisation du comportement des matériaux solides a essentiellement été faite dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Plusieurs "matériaux modèles" ont donc été définis et traduits selon cette hypothèse. L'objectif de ce travail est de proposer une méthodologie cohérente pour l'extension aux grandes transformations de ces modèles.

Les difficultés liées à la prise en compte des grandes transformations sont essentiellement de nature cinématique, et peuvent apparaître quel que soit le type de comportement. Toutefois, leur nature dépend largement du type de comportement. Le domaine d'application que nous visons étant, essentiellement, la mise en forme des métaux, nous concentrons notre étude sur la classe de modèles élastoplastiques phénoménologiques avec variables internes.

L'approche phénoménologique est beaucoup moins fine que l'approche microstructurale en ce qui concerne la compréhension et la description de ce qui se passe à l'échelle microscopique. C'est donc une approche basée sur une interprétation qualitative de la physique ; mais elle semble, actuellement, la seule à déboucher sur une formulation macroscopique utilisable dans les codes de calcul classiques.

Du point de vue "mécanique", les lois de comportement doivent satisfaire aux principes généraux de la mécanique, en particulier le principe d'indifférence matérielle et les deux principes thermodynamiques. Du point de vue "physique", une loi de comportement doit, entre autres, respecter les symétries de la matière et être "physiquement raisonnable" c'est-à-dire ne pas présenter de comportement aberrant, encore que cette notion soit à utiliser avec précaution en grandes transformations, domaine dans lequel notre intuition est souvent prise en défaut. D'un point de vue pratique, une loi de comportement doit être la plus simple possible: simple à identifier et à utiliser ; en plus, il ne faut pas perdre de vue que dans la majorité des cas une loi de comportement est un élément d'un code de calcul et qu'il faut veiller à ce que sa numérisation soit abordable.

TABLEAU 1: COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE		
Ecriture thermodynamique		
Décomposition de la déformation	$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$ ou $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$	
Variables internes d'érouissage	α : tensorielles ou scalaires	
		* Energie libre: $\psi(\epsilon^e, \alpha)$ * Dissipation: $\sigma : \dot{\epsilon}^p + X \dot{\alpha}$ $X = -\rho \partial \psi / \partial \alpha$ forces σ } thermodynamiques
Loi élastique → ou hypoélastique →	$\sigma = e(\epsilon^e, \alpha)$ $\dot{\sigma} = A(\sigma, \alpha) : \dot{\epsilon}^e$	$e = \rho \partial \psi / \partial \epsilon^e$ $A = \partial(\rho \partial \psi / \partial \epsilon^e) / \partial \epsilon^e$
Fonction seuil	$f(\sigma, \alpha) \leq 0$	$f(\sigma, X(\alpha); \alpha) \leq 0$
Lois d'évolution	$\dot{\epsilon}^p = \lambda h(\sigma, \alpha)$ $\dot{\alpha} = \lambda l(\sigma, \alpha)$ $\lambda = \langle (\partial f / \partial \sigma) : \dot{\sigma} \rangle / [-l(\partial f / \partial \alpha)]$	$h = \partial f / \partial \sigma$ $l = \partial f / \partial X$

2. PHENOMENOLOGIE DE L'ELASTOPLASTICITE

2.1. CADRE GENERAL

Les lois élastoplastiques constituent une classe importante de modèles utilisés en calcul de structures métalliques. On s'intéresse ici aux modèles mécaniques phénoménologiques par variables internes. L'utilisation des variables internes permet de tenir compte, globalement, de la structure interne du matériau ainsi que de l'histoire des sollicitations. L'état de contrainte du matériau sera donc fonction des valeurs actuelles des déformations et des variables internes. Les variables internes peuvent être de différentes natures: tensorielle, vectorielle ou scalaire. Dans tous les cas pratiques qu'on aura à étudier dans la suite, seules des variables internes tensorielles du second ordre α_i ou scalaire p_i seront utilisées. Quand il n'est pas nécessaire de préciser la nature de ces variables, on les désignera par α qui représentera alors l'ensemble des α_i et p_i .

A) HYPOTHESES DE BASE

La phénoménologie de l'élastoplasticité est basée sur deux hypothèses essentielles. La première suppose la décomposition de la déformation totale en partie élastique (réversible) et partie plastique (irréversible). La deuxième hypothèse suppose que le comportement plastique est indépendant des vitesses. La loi de comportement est donc homogène d'ordre zéro par rapport à la vitesse de déformation plastique ; ce qui implique l'existence d'un seuil de plasticité[6b]. La majorité des lois élastoplastiques peuvent alors s'écrire sous la forme usuelle suivante (en utilisant un formalisme petites déformations):

$$\text{Décomposition de la déformation:} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (1.a)$$

$$\text{Critère de plasticité:} \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \quad (1.b)$$

$$\text{Loi élastique (hypoélastique):} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}; \alpha) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (1.c)$$

$$\text{Loi d'évolution plastique:} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \quad (1.d)$$

$$\text{Lois d'évolution des variables internes:} \quad \dot{\alpha} = \lambda \mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \quad (1.e)$$

- La première relation (1a) est celle qui lie la déformation totale aux déformations élastique et plastique, c'est la première hypothèse de base du modèle élastoplastique.

- La relation (1b) définit le critère de plasticité ; la fonction f définit la surface seuil dans l'espace des contraintes. Tant que les contraintes restent à l'intérieur de cette surface seuil, seules les déformations élastiques peuvent évoluer. La présence de α dans f permet de rendre compte d'une évolution de la surface seuil au cours de l'érouissage.

- La relation (1c) est la loi élastique ; elle est écrite ici sous forme hypoélastique linéaire (\mathbf{A} est un tenseur du 4ème ordre). La présence des variables internes d'érouissage α permet de rendre compte d'une modification des propriétés élastiques au cours de l'érouissage.

- Les relations (1.d-e) définissent l'évolution de la déformation plastique et des variables internes. La fonction scalaire λ est le multiplicateur plastique. Elle est déterminée à partir de la condition de consistance ($\dot{f}=0$).

Les fonctions constitutives f , A , h et l définissent ce que nous appelons un matériau modèle. Le choix des mesures des contraintes (σ), des vitesses des contraintes ($\dot{\sigma}$), des déformations ($\epsilon, \epsilon^e, \epsilon^p$) et des vitesses de déformations ($\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}^e, \dot{\epsilon}^p$) constitue le cadre cinématique du modèle. Ce choix, trivial en petites déformations, est essentiel en grandes.

B) CADRE THERMODYNAMIQUE

Le développement depuis quelques années de la thermodynamique des milieux continus appliquée aux milieux dissipatifs [24], ainsi que de l'analyse convexe [41], a fourni à la fois un outil puissant pour l'écriture de lois de comportement, et un cadre précis permettant d'analyser et de classer différents types de comportements.

Le cadre des matériaux standard généralisés [26], en particulier, permet d'englober la majorité des lois de comportement proposées pour les métaux. L'avantage de ce cadre est, d'une part, de fournir une méthodologie d'écriture systématique de lois de comportement satisfaisant automatiquement les principes de la thermodynamique ; d'autre part, de permettre la définition d'un modèle de comportement par la seule donnée de deux potentiels: un potentiel thermodynamique (énergie libre, enthalpie libre,...) et un potentiel de dissipation qui, pour les matériaux élastoplastiques, se traduit par la donnée de la fonction seuil.

La première hypothèse des modèles thermodynamiques suppose l'existence d'une famille de variables internes α telle que l'état du matériau soit défini par la déformation élastique ϵ^e (ou par dualité la contrainte σ) et les variables α . L'énergie libre spécifique s'écrit alors, en négligeant les effets thermiques:

$$\psi = \psi(\epsilon^e, \alpha) \quad (2)$$

L'écriture de l'inégalité de Clausius-Duhem, traduction du second principe de la thermodynamique, permet de trouver la loi élastique (hyperélasticité), de définir les forces généralisées associées aux variables internes et de mettre en dualité contrainte et taux de déformation plastique:

$$\sigma = e(\epsilon^e; \alpha) = \rho \partial \psi / \partial \epsilon^e \quad (1.c \text{ bis})$$

$$\Phi = \sigma : \dot{\epsilon}^p + X(\alpha) \dot{\alpha} \quad ; \quad X = - \rho \partial \psi / \partial \alpha \quad (3)$$

La deuxième hypothèse (dissipativité normale [41], [26]) suppose l'existence d'un potentiel ω fonction convexe des forces thermodynamiques et éventuellement, paramétriquement, des variables internes α ($\omega(\sigma, X; \alpha)$), tel que (σ, X) appartienne au sous différentiel de ω . L'application de cette hypothèse au comportement plastique équivaut à postuler la fonction seuil définissant un domaine convexe dans l'espace des contraintes et les lois d'évolution sous la forme (1) avec:

$$f(\sigma, X; \alpha) \leq 0 \quad (1.b \text{ bis})$$

$$h = \partial f / \partial \sigma \quad (1.d \text{ bis})$$

$$l = \partial f / \partial X \quad (1.e \text{ bis})$$

La donnée des fonctions ψ et f permet donc de définir complètement la loi de comportement. Cette structure de base est résumée dans le tableau 1.

C) ISOTROPIE - ANISOTROPIE

La forme des fonctions constitutives (relations (1) ou (1) bis) doit être telle que les symétries matérielles soit respectées. On distingue souvent le comportement du matériau dans un état initial avant écrouissage, de son comportement après écrouissage. On supposera dans toute la suite (sauf mention

contraire) que l'état initial correspond à une valeur nulle de la déformation plastique et des variables internes d'érouissage α .

Si les fonctions constitutives du modèle admettent des symétries particulières par rapport à leurs arguments (σ, α) (isotropie, orthotropie, etc..), ces symétries sont celles du comportement initial ; ce sont les symétries initiales (symétries par rapport à σ puisque à l'état initial $\alpha=0$) ; on parlera alors d'isotropie initiale, orthotropie initiale, etc.... Si au cours de l'érouissage ces symétries sont conservées (symétries par rapport à σ et non pas par rapport au couple (σ, α)) on dira que l'on a un érouissage isotrope. Dans ce cas, les variables internes ne peuvent être que des scalaires (ou des invariants scalaires de tenseurs). Les modifications des symétries initiales au cours de l'érouissage définissent l'anisotropie induite ; ces modifications ne peuvent avoir lieu que s'il existe parmi les α au moins une variable interne tensorielle.

D'un point de vue formel, il est commode de rendre compte des symétries matérielles par l'introduction de variables de structure m choisies de telle manière qu'une relation $f(\sigma, \alpha; m)$ (par exemple) isotrope par rapport aux arguments $(\sigma, \alpha; m)$ présentera les seules symétries que l'on souhaite par rapport aux arguments (σ, α) . Par exemple, une relation $f(\sigma, \alpha; \mathbf{m})$ isotrope en $(\sigma, \alpha, \mathbf{m})$, où \mathbf{m} est le produit tensoriel $\vec{m} \otimes \vec{m}$ (\vec{m} étant un vecteur unitaire représentant une direction géométrique), sera une relation orthotrope de révolution en (σ, α) par rapport à la direction \mathbf{m} [4c]. Ceci permettra d'utiliser tous les développements récents sur la théorie de représentation des fonctions tensorielles anisotropes [4a,b,e].

Si l'évolution de la surface seuil se fait uniquement par translation dans l'espace des contraintes [$f(\sigma, \alpha) = f(\sigma - \mathbf{X}(\alpha))$], l'érouissage est un érouissage cinématique. C'est un cas très particulier mais qui a fait l'objet de nombreuses études.

Pour une analyse plus détaillée des différents types d'érouissage, nous renvoyons aux travaux de J.P. Boehler [4d].

2.2. MODELES CLASSIQUES

A) ELASTICITE LINEAIRE

L'élasticité des métaux résulte de la déformation du réseau cristallin, alors que la déformation plastique résulte des glissements intercrystallins. La loi élastique linéaire isotrope est souvent suffisante pour modéliser correctement le comportement élastique des métaux usuels. En général, l'élasticité sera supposée isotrope, mais il pourra parfois être nécessaire de prendre en compte une anisotropie élastique. Dans tous les cas, pour les métaux, l'élasticité est supposée linéaire:

$$\sigma = A : \epsilon^e \quad \text{ou} \quad \epsilon^e = \Lambda : \sigma \quad ; \quad A = \Lambda^{-1} \quad (4)$$

Les tenseurs du quatrième ordre A et Λ inverses l'un de l'autre sont souvent appelés respectivement tenseur de rigidité (ou tenseur de Hooke dans le cas isotrope) et tenseur de complaisance élastique.

Les tenseurs A et Λ sont, dans la majorité des cas, supposés constants et donc identifiables à partir d'un (ou plusieurs) essai(s) purement élastique(s), avant tout érouissage. La modification des propriétés élastiques au cours de la déformation (par exemple le module d'Young) est souvent attribuée à l'endommagement et non à l'érouissage. Il est bien sûr assez aisé, au moins théoriquement, de rendre compte d'une variation des propriétés élastiques au cours de l'érouissage ; il suffit de supposer que A (ou Λ) dépend des variables internes d'érouissage. Si les symétries de la relation élastique changent au cours de l'érouissage, on dira alors que l'on a une anisotropie élastique induite.

B) PLASTICITE PARFAITE DE VON MISES

Le modèle plastique le plus simple et qui fut pendant longtemps le seul pratiquement utilisable est le modèle isotrope parfaitement plastique. La surface seuil dans ce cas est invariante au cours de la déformation, il n'y a donc pas d'écrouissage. C'est une approximation du fait que la courbe contrainte déformation de traction, pour les aciers, est assez aplatie après le seuil élastique. Ce type de modèle est utilisé pour le calcul des charges limites avant écoulement plastique en vue de déterminer les efforts minimaux à exercer pour déformer une pièce (méthode des tranches - méthode des caractéristiques - etc ...). On utilise alors le critère de Von Mises et la loi de normalité associée:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma} - \sigma_s \leq 0 \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \lambda \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} = \lambda 3 \boldsymbol{\sigma}^D / 2 \bar{\sigma} \quad \lambda = \dot{\bar{\epsilon}}^P \quad (6)$$

où σ_s est une constante égale à la valeur du seuil en traction, $\boldsymbol{\sigma}^D$ le déviateur des contraintes, tandis que $\bar{\sigma}$ et $\bar{\epsilon}^P$ représentent respectivement la contrainte et la déformation équivalentes de Von Mises ($\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^P$):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(3/2) |\boldsymbol{\sigma}^D|} \quad \dot{\bar{\epsilon}}^P = \sqrt{(2/3) |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|} \quad (7)$$

C) ECROUISSAGE ISOTROPE

Le deuxième modèle aussi classique que le premier est le modèle isotrope avec écrouissage isotrope basé sur le même critère de plasticité (5) et la loi de normalité associée pour les déformations plastiques (6), mais en supposant que σ_s évolue au cours de la déformation:

$$\sigma_s = \sigma_s(\bar{\epsilon}^P) \quad (8)$$

La surface seuil garde la même forme au cours de l'écrouissage mais se dilate homothétiquement. La fonction $\sigma_s(\bar{\epsilon}^P)$ s'identifie à partir d'un essai de traction. Ce modèle classique est donc basé sur l'introduction d'une variable interne scalaire d'écrouissage, qui se trouve ici être égale à la déformation équivalente de Von Mises:

$$\alpha \equiv \bar{\epsilon}^P \quad \dot{\bar{\epsilon}}^P = \lambda \partial f / \partial (-\sigma_s) = \lambda$$

La condition de consistance $\dot{f}=0$ permet de calculer λ (on suppose un écrouissage positif):

$$\lambda = 3 \langle \boldsymbol{\sigma}^D : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle [2 \bar{\sigma} d\sigma_s / d\bar{\epsilon}^P]^{-1} \quad (9)$$

La composition de ce comportement plastique avec la loi élastique linéaire isotrope aboutit à la loi classique de Prandtl-Reuss:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{1} - \frac{3 \langle \boldsymbol{\sigma}^D : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle}{2h \bar{\sigma}^2} \boldsymbol{\sigma}^D \right\} \quad (10)$$

$$h = 1 + [2(1+\nu)/3E] d\sigma_s / d\bar{\epsilon}^P$$

L'écriture de $\lambda = \dot{\bar{\epsilon}}^P$ en fonction de la déformation totale est:

$$\lambda = (1+\nu) \langle \boldsymbol{\sigma}^D : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle / (Eh\bar{\sigma}) \quad (9 \text{ bis})$$

la plasticité parfaite correspond à $d\sigma_s / d\bar{\epsilon}^P = 0$ c'est-à-dire à $h = 1$.

Ce modèle a l'avantage d'être simple puisqu'il ne fait intervenir qu'une seule variable interne scalaire. Elle est supposée, d'un point de vue physique, caractériser globalement la densité de dislocation dans le matériau. Ce modèle ne permet pas de rendre compte de tous les aspects du comportement macroscopique des métaux. Si, dans le cas de chargements simples ce comportement donne de bons

résultats, ce n'est pas le cas si les sollicitations sont complexes telles que les sollicitations cycliques ou sollicitations avec changement de trajet de chargement. Pour pouvoir rendre compte de phénomènes particuliers (effet Baushinger, rochet etc.. pour les sollicitations cycliques ; dépendance de l'écroissage du trajet de chargement etc...), il est indispensable de faire intervenir d'autres variables internes. On peut alors ajouter une ou plusieurs autres variables scalaires, c'est la voie suivie par Sidoroff [49f] qui fait intervenir une variable scalaire supplémentaire caractérisant globalement le libre parcours moyen des dislocations pour décrire l'influence du trajet de chargement sur l'écroissage. On peut aussi faire intervenir une variable interne tensorielle ; c'est le cas de l'écroissage cinématique abordé au paragraphe suivant.

La représentation générale du comportement plastique isotrope, selon les modèles définis par les relations (1) ou (1 bis), est la suivante (les fonctions f , \mathbf{h} et \mathbf{l} doivent être isotropes en $\boldsymbol{\sigma}$, donc seules des variables internes scalaires p_i peuvent intervenir):

$$f(\sigma_i, p_i) \leq 0 \quad (11.a)$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, p_i) = h_0(\sigma_i, p_i) \mathbf{1} + h_1(\sigma_i, p_i) \boldsymbol{\sigma} + h_2(\sigma_i, p_i) \boldsymbol{\sigma}^2 \quad (11.b)$$

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}, p_i) = \mathbf{l}(\sigma_i, p_i) \quad (11.c)$$

Les scalaires σ_i sont les invariants principaux du tenseur des contraintes:

$$\sigma_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) ; \sigma_{II} = \frac{1}{2} [\sigma_1^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)] ; \sigma_{III} = \det(\boldsymbol{\sigma})$$

Pour un comportement avec une loi de normalité, on doit avoir:

$$\begin{aligned} h_0 &= \partial f / \partial \sigma_1 + \sigma_1 \partial f / \partial \sigma_{II} + \sigma_{II} \partial f / \partial \sigma_{III} \\ h_1 &= - \partial f / \partial \sigma_{II} - \sigma_1 \partial f / \partial \sigma_{III} \\ h_2 &= \partial f / \partial \sigma_{III} \end{aligned} \quad (11.d)$$

D) ECROUissage CINEMATIQUE

La prise en compte de l'effet Baushinger constaté au cours d'un cycle charge-décharge a poussé à développer des comportements avec anisotropie induite, donc introduisant une variable interne tensorielle $\boldsymbol{\alpha}$. Le plus classique et le plus simple est le modèle (initialement) isotrope avec écrouissage cinématique linéaire (modèle de Prager). On utilise alors un critère de Von Mises (5) modifié ($\bar{\sigma}$ devient $\bar{\sigma}_c$), avec toujours la loi de normalité associée:

$$\bar{\sigma}_c = \sqrt{(3/2) |\boldsymbol{\sigma}_c^D|} \quad \boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X} \quad \mathbf{X} = \beta \boldsymbol{\alpha} \quad (12)$$

La surface seuil, maintenant, garde la même forme et les mêmes "dimensions" mais se déplace dans l'espace des contraintes ; ce déplacement est défini par le tenseur \mathbf{X} . Les lois d'évolution s'écrivent:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \mathbf{h} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} = 3 \boldsymbol{\sigma}_c^D / 2 \bar{\sigma}_c \quad (13.a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda \mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \mathbf{l} = \partial f / \partial (-\mathbf{X}) = \mathbf{h} \quad (13.b)$$

Le coefficient λ , qui est toujours égal à $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ défini dans le cas isotrope, se calcule toujours en écrivant que $\dot{\hat{f}}=0$:

$$\lambda = \langle \boldsymbol{\sigma}_c^D : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle / \beta \bar{\sigma}_c$$

Ce modèle est bien sûr standard généralisé. La relation (13.b) permet d'interpréter la signification de la variable interne $\boldsymbol{\alpha}$ de deux manières différentes qui, en petites déformations, aboutissent au même modèle, alors qu'en grandes déformations elles donnent deux modèles différents [17a], [18b]. La première

interprétation suppose dès le début que la variable d'érouissage est la déformation plastique, alors que la deuxième définit cette variable interne par sa loi d'évolution (13.b).

La loi en vitesse avec l'élasticité linéaire isotrope s'obtient aisément:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{1} - \frac{3 \langle (\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X})^D : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle}{2h \bar{\sigma}_c^2} (\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X})^D \right\} \quad (14)$$

$$h = 1 + \beta/E(1+\nu)$$

Le scalaire $\lambda = \dot{\epsilon}^p$ en fonction des déformations totales s'écrit:

$$\lambda = [\boldsymbol{\sigma}_c^D : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}] / h \bar{\sigma}_c$$

Si ce modèle permet effectivement de rendre compte d'un effet Baushinger, il ne permet pas de modéliser entièrement le comportement cyclique des métaux. En particulier, il ne permet pas de rendre compte du phénomène du rochet. C'est ce qui a poussé au développement de lois d'écrouissage cinématique non linéaire [12], [38], [42],.... Il est bien sûr possible de coupler l'écrouissage cinématique avec un écrouissage isotrope, l'écriture d'une telle loi de comportement ne pose aucun problème de principe. Dans le cas général, un critère de plasticité initialement isotrope avec écrouissage isotrope et cinématique s'écrit sous la forme:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, p_i) = f[\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}), p_i] = f[\sigma_{c_i}, p_i]$$

Les scalaires σ_{c_i} sont les invariants principaux du tenseur $(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X})$. Si le comportement est incompressible, c'est le tenseur $(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X})^D$ qui interviendra.

E) PLASTICITE ORTHOTROPE DE HILL

Tous les modèles décrits ci-dessus sont initialement isotropes. Ils ne permettent donc pas de décrire une anisotropie initiale. Parmi les critères de plasticité initialement anisotropes, le plus classique, pour les métaux, est le critère de Hill. C'est un critère quadratique en contraintes, orthotrope et indépendant de la partie sphérique du tenseur de contrainte. Ce critère est classiquement associé à un écrouissage isotrope ; la plasticité dans ce cas reste toujours orthotrope. En désignant par \vec{M}_i un repère orthonormé définissant les directions d'orthotropie, par \mathbf{M}_i le produit tensoriel $\vec{M}_i \otimes \vec{M}_i$ (sans sommation) et par σ_{ij} les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ dans le repère \vec{M}_i , ce critère s'écrit:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}_i, p) &= f_o(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}_i) - \sigma_s(p) \\ f_o^2 &= \boldsymbol{\sigma}^D : H(\mathbf{M}_i) : \boldsymbol{\sigma}^D = H_{ijkl} \sigma_{ij}^D \sigma_{kl}^D \\ &= F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \end{aligned} \quad (15.a)$$

Les coefficients du critère (F, G, H, L, M et N) sont souvent supposés constants au cours de l'écrouissage. Il est possible de les faire varier tout en gardant un critère orthotrope ; pour cela, il suffit de supposer ces coefficients dépendants des variables d'écrouissage scalaires. L'écriture générale d'un critère orthotrope quadratique en contraintes avec écrouissage isotrope est:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}_i, p_k) &= f_o(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}_i, p_k) - \sigma_s(p_k) \\ f_o^2 &= \boldsymbol{\sigma} : H(\mathbf{M}_i, p_k) : \boldsymbol{\sigma} = H_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \\ &= a_i [\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}_i]^2 + b_i [\boldsymbol{\sigma}^2 : \mathbf{M}_i] + c_{ij} [\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}_i][\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}_j] \end{aligned} \quad (15.b)$$

Les 9 scalaires a_i , b_i ($i=1,2,3$) et c_{ij} ($c_{ij}=c_{ji}$; $i \neq j$) sont des fonctions des variables d'écroissage p_k . Si l'on veut un critère indépendant de la partie sphérique du tenseur de contrainte, il ne reste alors que 6 coefficients indépendants puisque les 9 coefficients sont reliés par 3 relations qu'il faut vérifier:

$$a_1 + b_1 - c_{12} - c_{13} = 0 \quad ; \quad a_2 + b_2 - c_{21} - c_{23} = 0 \quad ; \quad a_3 + b_3 - c_{31} - c_{32} = 0$$

On peut alors écrire les coefficients a_i , b_i et c_{ij} sous la forme:

$$\begin{aligned} a_1 &= G+H+L-M-N \quad ; \quad b_1 = M+N-L \quad ; \quad c_{23} = F \\ a_2 &= H+F+M-L-N \quad ; \quad b_2 = N+L-M \quad ; \quad c_{31} = G \\ a_3 &= F+G+N-L-M \quad ; \quad b_3 = L+M-N \quad ; \quad c_{12} = H \end{aligned} \quad (15.c)$$

En utilisant les relations (15.c), f_o peut alors s'écrire sous la forme:

$$f_o = \{A_{ij} (\mathbf{M}_i \boldsymbol{\sigma}^D) : (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{M}_j) + B_{ij} (\boldsymbol{\sigma}^D : \mathbf{M}_i) (\boldsymbol{\sigma}^D : \mathbf{M}_j)\}^{1/2} \quad (15.d)$$

avec:

$$[A_{ij}] : \begin{bmatrix} 0 & N & M \\ N & 0 & L \\ M & L & 0 \end{bmatrix} \quad [B_{ij}] : \begin{bmatrix} G+H & -H & -G \\ -H & H+F & -F \\ -G & -F & F+G \end{bmatrix}$$

et on retrouve le critère de Hill classique si les coefficients sont indépendants des variables d'écroissage p_k .

Les seuils élastiques en traction, dans les directions d'orthotropie 1, 2 et 3 (σ_i) et ceux en torsion dans les plans (\bar{M}_i, \bar{M}_j) (τ_{ij}) sont donnés par:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_s / \sqrt{G+H} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_s / \sqrt{H+F} \quad ; \quad \sigma_3 = \sigma_s / \sqrt{F+G} \\ \tau_{23} &= \sigma_s / \sqrt{2L} \quad ; \quad \tau_{31} = \sigma_s / \sqrt{2M} \quad ; \quad \tau_{12} = \sigma_s / \sqrt{2N} \end{aligned} \quad (15.e)$$

ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} F &= k_2^2 + k_3^2 - k_1^2 \quad ; \quad G = k_3^2 + k_1^2 - k_2^2 \quad ; \quad H = k_1^2 + k_3^2 - k_2^2 \\ L &\geq 0 \quad ; \quad M \geq 0 \quad ; \quad N \geq 0 \end{aligned} \quad (15.f)$$

Les conditions (15.f) assurent que $H(\mathbf{M}_i)$ est défini positif.

2.3. AUTRES MODELES

A) ANISOTROPIE PLUS GENERALE

Les modèles présentés précédemment sont tous basés sur une loi élastique linéaire isotrope, un critère de plasticité quadratique et la loi de normalité associée. Plusieurs travaux expérimentaux ont montré les limites de ces modèles quant à la description de la surface de plasticité ou à son évolution au cours de l'écroissage, surtout en chargements complexes. De nombreux travaux, de nature expérimentale ou théorique, sont encore menés pour définir, décrire et modéliser l'évolution de la surface de plasticité pour les métaux [28], mais aucun modèle ne semble s'imposer. La formulation de lois de comportement anisotropes reste donc encore un problème ouvert même en petites perturbations. La difficulté consiste, d'une part, à rendre compte, le plus simplement possible, des phénomènes particuliers liés à l'anisotropie, et d'autre part, à identifier les modèles proposés.

L'approche qui semble la plus satisfaisante est celle qui s'appuie sur l'utilisation des théorèmes de représentation des fonctions anisotropes [4][5][6]. Si on se limite à un comportement initialement

orthotrope et ne faisant intervenir qu'une seule variable interne tensorielle du second ordre, soit α , les équations du comportement (1) s'écrivent alors sous la forme suivante:

$$f(\sigma, \alpha, \mathbf{M}_i) \leq 0 \quad (16.a)$$

$$\dot{\epsilon}^P = \lambda \mathbf{h}(\sigma, \alpha, \mathbf{M}_i) \quad (16.b)$$

$$\dot{\alpha} = \lambda \mathbf{l}(\sigma, \alpha, \mathbf{M}_i) \quad (16.c)$$

où les $\mathbf{M}_i (i=1,2,3)$ définissent les directions d'orthotropie et où les différentes fonctions f, \mathbf{h} et \mathbf{l} sont isotropes de leurs arguments. En utilisant les théorèmes de représentation des fonctions anisotropes, on peut écrire la forme la plus générale des fonctions f, \mathbf{h} et \mathbf{l} et préciser le nombre minimal et le type des variables indépendantes intervenant dans cette forme générale. Dans la plupart des cas toutefois, on se limite à prendre pour α la déformation plastique (pas de relation (16.c)) [4][5][6] ; on trouvera une présentation plus détaillée de ce comportement et une analyse des divers termes relatifs aux différents types d'anisotropie dans [6] (α est la prédéformation subie par le matériau).

Le nombre des variables intervenant dans le cas général est très important. Le problème essentiel consiste alors à choisir parmi ces variables, celles qui sont les plus influentes pour une application donnée. Nous proposons, pour illustrations futures, un modèle simplifié, cas particulier de (16), permettant de rendre compte d'une anisotropie initiale couplée avec une anisotropie induite.

B) UN MODELE PARTICULIER

Ce modèle est basé sur un critère quadratique et indépendant de la pression hydrostatique, qui s'écrit sous la forme:

$$f(\sigma, \alpha, p) = f_0 - \sigma_s(p) \leq 0 \quad (17.a)$$

$$f_0 = \sqrt{(3/2)} \|\mathbf{H}\| \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\sigma^D, \alpha, \mathbf{M}_i) \quad \text{tr}\mathbf{H} = 0,$$

où l'on suppose que le tenseur \mathbf{H} est une fonction isotrope de ses arguments, que α ($\text{tr}\alpha=0$) est une variable interne tensorielle du second ordre et que p est une variable interne scalaire.

Le tenseur \mathbf{H} est une fonction isotrope des arguments $(\sigma^D, \alpha, \mathbf{M}_i)$ donc orthotrope de (σ^D, α) . Le critère est alors initialement ($\alpha=0$) orthotrope, mais au cours de l'érouissage ($\alpha \neq 0$), il peut devenir non orthotrope en fonction du type de la sollicitation. La fonction tensorielle \mathbf{H} est une transformation particulière dans l'espace des déviateurs. Les différents types d'érouissage possibles seront pris en compte de la manière suivante:

- Pour rendre compte d'un érouissage cinématique, on réalise une première transformation de σ^D en $\mathbf{H}_1 = \sigma^D - \mathbf{X}(\alpha)$. La forme la plus simple pour \mathbf{X} est la forme linéaire soit $\mathbf{X} = \beta\alpha$:

$$\mathbf{H}_1 = \sigma^D - \mathbf{X}(\alpha) \quad \mathbf{X} = \beta\alpha \quad (17.b)$$

- Pour rendre compte d'une déformation de la surface seuil, on réalise une deuxième transformation $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2(\mathbf{H}_1, \alpha)$. La forme la plus simple pour \mathbf{H}_2 est linéaire en \mathbf{H}_1 et en α soit:

$$\mathbf{H}_2 = \{ [\mathbf{H}_1(\mathbf{1} + a\alpha)]^S \}^D \quad (17.c)$$

- Pour rendre compte d'une orthotropie initiale, on réalise une troisième et dernière transformation de sorte que \mathbf{H} soit linéaire et orthotrope par rapport à \mathbf{H}_2 donc isotrope de $(\mathbf{H}_2, \mathbf{M}_i)$:

$$\mathbf{H} = a_{ij} (\mathbf{M}_i \mathbf{H}_2 \mathbf{M}_j)^S + b_{ij} \text{tr}(\mathbf{H}_2 \mathbf{M}_j) \mathbf{M}_i \quad (17.d)$$

les matrices [a] et [b] étant définies par:

$$[a]: \begin{bmatrix} 0 & n & m \\ n & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [b]: \begin{bmatrix} g+h & -h & -g \\ -h & h+f & -f \\ -g & -f & f+g \end{bmatrix} \quad (17.e)$$

Les coefficients β et a rendent compte, respectivement, d'un écrouissage cinématique et d'une anisotropie induite plus générale. Les coefficients l, m, n, f, g et h caractérisent l'orthotropie initiale.

Pour avoir un comportement standard généralisé, on interprète \mathbf{X} et σ_s comme forces thermodynamiques associées respectivement à α et p , et on postule les lois d'évolution sous la forme:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^P &= \lambda \partial f / \partial \sigma \\ \dot{\alpha} &= -\lambda \partial f / \partial \mathbf{X} = \dot{\epsilon}^P \\ \dot{p} &= -\lambda \partial f / \partial \sigma_s = \lambda \end{aligned} \quad (17.f)$$

- Anisotropie induite

Si l'on suppose que $n=m=l=1$ et $f=g=h=1/3$, alors le tenseur \mathbf{H} se réduit à \mathbf{H}_2 ($\mathbf{H}=\mathbf{H}_2$), et on retrouve un critère initialement isotrope avec un écrouissage cinématique (si $\beta \neq 0$) et une anisotropie induite plus générale (si $a \neq 0$). Le critère introduit alors deux constantes matérielles a et β définissant l'anisotropie et une fonction d'écrouissage isotrope $\sigma_s(p)$. C'est un critère initialement isotrope ($\alpha_0 = \mathbf{0}$) et qui, au cours de l'écrouissage, devient orthotrope (les directions d'orthotropie sont les directions principales de α) et quadratique par rapport au déviateur ($\sigma^D - \mathbf{X}$). La surface seuil, dans l'espace des déviateurs, se déplace selon \mathbf{X} (écrouissage cinématique linéaire introduisant la constante β), gonfle homothétiquement (écrouissage isotrope dû à la dépendance de σ_s par rapport à p) et se déforme à cause du terme $\{[(\sigma^D - \mathbf{X})\alpha]^S\}^D$ (remarquons que cet aspect ne peut être important que si a est suffisamment grand puisque les déformations sont petites). Il est clair que si $a=0$ et $\beta=0$ on retrouve un écrouissage isotrope classique (critère de Von Mises), si $\beta \neq 0$, $a=0$ et σ_s est constant on retrouve l'écrouissage cinématique linéaire classique.

Les lois d'évolution (matériaux standard généralisés (17.f)) sont:

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\alpha} = \lambda 2 \{ [\mathbf{H}(\mathbf{1} + a\alpha)]^S \}^D / 3f_0 \quad ; \quad \dot{p} = \lambda \quad (18)$$

A un instant donné de l'écrouissage, ce critère s'écrit dans le repère principal de α sous une forme analogue à celle du critère de Hill soit:

$$f_0^2 = F(s_{22} - s_{33})^2 + G(s_{33} - s_{11})^2 + H(s_{11} - s_{22})^2 + 2Ls_{23}^2 + 2Ms_{31}^2 + 2Ns_{12}^2$$

avec:

$$\begin{aligned} F &= [1 - 2a\alpha_1 + a^2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3)]/3 / 2 & L &= 3[1 - a\alpha_1/2]^2/2 \\ G &= [1 - 2a\alpha_2 + a^2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_3)]/3 / 2 & M &= 3[1 - a\alpha_2/2]^2/2 \\ H &= [1 - 2a\alpha_3 + a^2(\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_1)]/3 / 2 & N &= 3[1 - a\alpha_3/2]^2/2 \end{aligned}$$

où les s_{ij} sont les composantes de $(\sigma^D - \mathbf{X})$ dans le repère principal des déformations plastiques et les α_i sont les déformations plastiques principales.

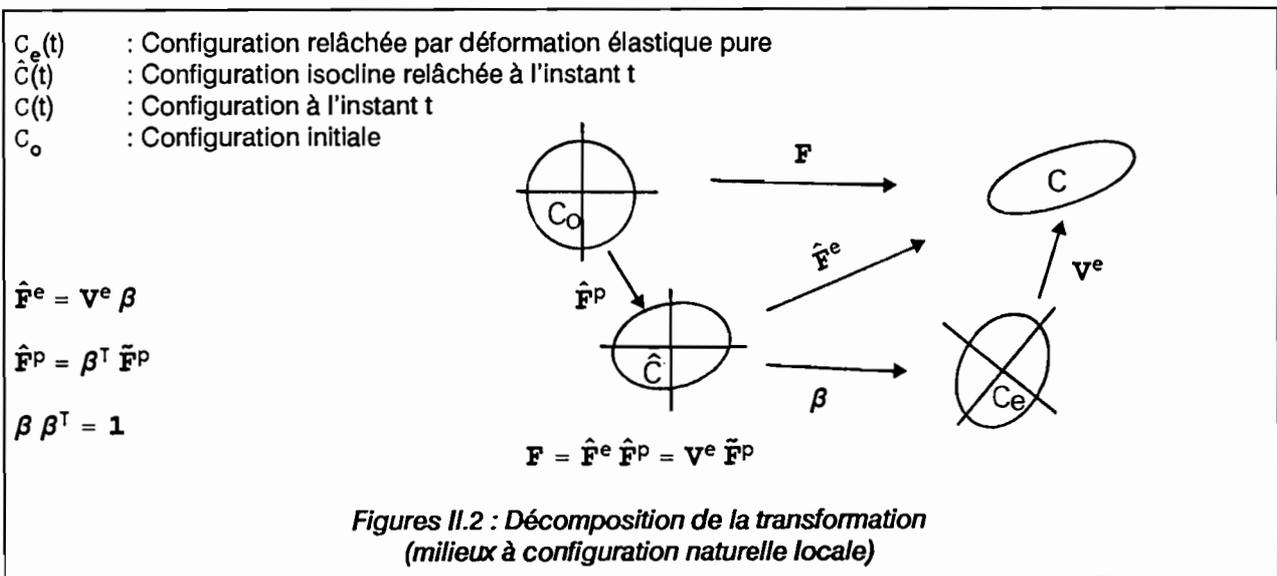
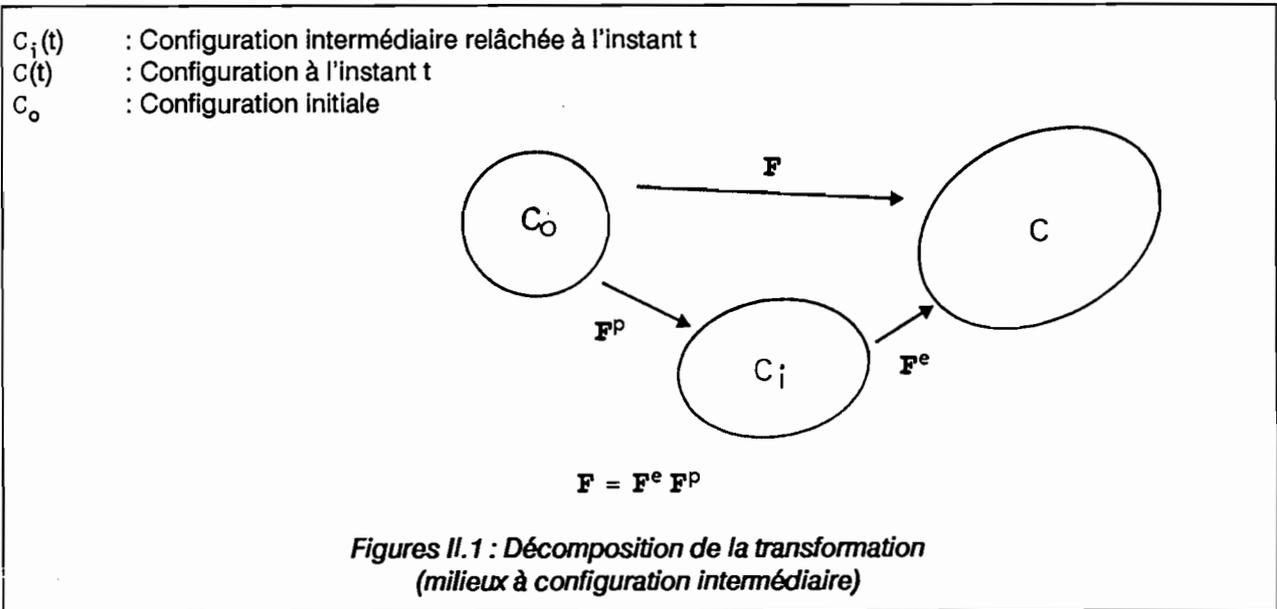
- Anisotropie initiale

Si l'on prend $\beta = a = 0$, dans la définition de \mathbf{H} , on retrouve le critère orthotrope de Hill classique avec écoulement isotrope tel que:

$$\begin{aligned} F &= 3(2f^2 + fg + fh - hg)/2 & L &= 3l^2/2 \\ G &= 3(2g^2 + fg + gh - hf)/2 & M &= 3m^2/2 \\ H &= 3(2h^2 + hg + fh - fg)/2 & N &= 3n^2/2 \end{aligned} \quad (19)$$

- Conclusions

Ce modèle, passablement général, fait intervenir un nombre important de coefficients, mais ceci est inévitable compte tenu de la variété des effets pris en compte. Il nous servira de modèle de référence dans la suite.



3. GRANDES TRANSFORMATIONS ELASTOPLASTIQUES

3.1. PRESENTATION DU PROBLEME

Si la transformation subie par l'élément matériel est infinitésimale (petites perturbations), configurations initiale et déformée sont infiniment voisines et repérées dans le même repère spatial. La partie symétrique du gradient de déplacement (ϵ) de l'élément matériel suffit alors pour définir son comportement. En grandes transformations, par contre, les deux configurations peuvent être très différentes; contraintes et déformations peuvent être définies par rapport à l'une ou l'autre des configurations (le passage d'une configuration à l'autre se faisant par l'intermédiaire du gradient de la transformation \mathbf{F}); un comportement peut donc être écrit en formalisme lagrangien (relatif à une configuration initiale) ou eulérien (relatif à la configuration déformée), il faut alors choisir le formalisme le plus simple pour un comportement donné; d'où une première question:

Quel est le formalisme le plus simple permettant de modéliser correctement un comportement?

Le mot comportement ici est pris dans le sens du "matériau modèle" défini en introduction de ce chapitre et dont une quantité d'exemples ont été présentés dans la première partie de ce chapitre dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations; alors que le mot "correctement" est souvent essentiellement lié à la notion d'objectivité de la loi. D'un point de vue pratique, et dans la majorité des cas, l'écriture d'une loi de comportement grandes transformations est une extension d'une loi petites perturbations; cette extension nécessite alors une bonne interprétation du modèle petites perturbations.

Pour un comportement élastoplastique, la première extension concerne la notion d'élasticité et de plasticité; d'où une deuxième question:

comment décomposer la transformation totale en partie élastique et partie plastique?

Plusieurs théories différentes ont été proposées pour modéliser le comportement élastoplastique en grandes déformations:

- Green et Naghdi [25] utilisent un cadre thermodynamique équivalent à celui des petites perturbations avec un formalisme lagrangien et proposent une décomposition additive formelle du tenseur de déformation de Green Lagrange $\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})/2$ en partie élastique et partie plastique ($\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$).

- Rice [47] utilise lui aussi un formalisme lagrangien mais définit la vitesse de déformation plastique comme la contribution, dans la vitesse de déformation totale $\dot{\mathbf{E}}$, de la variation des variables internes. Sa décomposition de la déformation n'est donc pas cinématique. L'application pratique de cette théorie est relativement compliquée puisqu'elle postule, a priori, la forme de l'enthalpie libre, démarche non classique en plasticité.

- Lee [30][36] a utilisé la notion de configuration intermédiaire définie localement par relâchement des contraintes à partir de la configuration déformée, comme cela avait été suggéré par Eckart [21]. Un

matériau élastoplastique est alors un matériau élastique par rapport à cette configuration intermédiaire variable dans le temps. Ceci se traduit par la décomposition multiplicative du gradient de la transformation en partie élastique et partie plastique:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (20)$$

Cette décomposition ne définissant la configuration intermédiaire qu'à une rotation près, on suppose alors que la rotation de la configuration relâchée n'influe pas sur le comportement: ce comportement est celui dit des milieux à configuration intermédiaire.

- Mandel [37], lui aussi, postule la décomposition multiplicative du gradient de la transformation en partie élastique et partie plastique ($\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$), mais postule en plus l'existence d'un trièdre directeur permettant d'orienter la configuration intermédiaire et donc d'en privilégier une dans laquelle le comportement sera le plus facilement écrit. Teodosiu [52] a aussi proposé une approche équivalente faisant intervenir un trièdre local attaché à la particule matérielle. Ce comportement est celui dit des milieux à configuration naturelle locale.

On trouvera dans Sidoroff [49c] ou Stolz [51] une synthèse de ces différentes théories. On montre en particulier que:

- la théorie de Lee est un cas particulier de la théorie de Green-Naghdi [49a],

- la théorie de Green et Naghdi est équivalente à l'introduction d'une configuration intermédiaire, mais cette configuration ne pourra pas être, dans le cas général, interprétée comme configuration relâchée [49a],

- la décomposition de la déformation selon Rice ne peut pas être identifiée, dans le cas général, à une décomposition cinématique avec configuration intermédiaire.

3.2. MILIEUX A CONFIGURATION INTERMEDIAIRE

A) FORMALISME GENERAL

Le gradient \mathbf{F} est donc supposé être le produit d'un "gradient" élastique \mathbf{F}^e et d'un "gradient" plastique \mathbf{F}^p selon la relation (20) (Fig. II.1). La rotation de la configuration intermédiaire n'intervenant pas dans la loi de comportement, les transformations plastique et élastique n'interviennent dans le comportement que par leur partie déformation pure (pas de rotations). La déformation plastique (déformation pure) apparaît alors comme une première variable interne tensorielle symétrique.

Cette théorie n'a été, jusqu'ici, utilisée que pour décrire un comportement initialement isotrope (Lee [30] [31] [32] [33] [34] [36], Sidoroff-Dogui [17a] [18a,b,c] [49e,g]). Dans ce cas, le formalisme qui semble s'imposer est le formalisme eulérien. La loi élastique, le critère de plasticité et les lois d'évolution s'écrivent alors sous les formes suivantes, qui sont donc une extension particulière des relations (1):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}(\boldsymbol{\epsilon}^e; \alpha) \quad (21)$$

$$f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \leq 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{D}^p = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \quad (23.a)$$

$$D\alpha/Dt = \lambda l(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \quad (23.b)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}^e$ est un tenseur eulérien fonction isotrope bijective de \mathbf{V}^e ($\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e$) qui représente les

déformations élastiques. Les fonctions \mathbf{e} , f , \mathbf{h} et l sont isotropes de leurs arguments. La présence éventuelle des variables internes d'écouissage α dans la relation (21) permet de rendre compte d'une anisotropie élastique induite. La dérivée D/Dt est une dérivée objective (pour des variables α non scalaires). Le tenseur \mathbf{D}^p est le représentant eulérien de la vitesse de déformation plastique (voir Chap. IV):

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{R}^e (\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1})^s \mathbf{R}^{eT} = \mathbf{R}^{ep} (\dot{\mathbf{U}}^p \mathbf{U}^{p-1})^s \mathbf{R}^{epT} \quad (24)$$

les rotations \mathbf{R}^e et \mathbf{R}^p sont obtenues par décomposition polaire de \mathbf{F}^e et \mathbf{F}^p respectivement ($\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e$, $\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p$), et \mathbf{R}^{ep} représente le produit $\mathbf{R}^e \mathbf{R}^p$. La décomposition de la vitesse de déformation \mathbf{D} en parties élastique et plastique est donnée par la relation suivante [49e]:

$$[\mathbf{V}^{e-1} \mathbf{D} \mathbf{V}^e]^s = [\mathbf{V}^{eJ} \mathbf{V}^{e-1}]^s + \mathbf{D}^p \quad (25)$$

Tous les termes de la relation (25) sont objectifs et invariants par rotation de la configuration relâchée.

L'extension d'un modèle particulier aux grandes transformations, selon l'hypothèse des milieux à configuration intermédiaire, introduit donc deux aspects nouveaux et propres aux grandes transformations: Le premier étant l'interprétation de la loi élastique (choix de $\boldsymbol{\epsilon}^e$) et le deuxième, le choix de la dérivée objective dans les lois d'évolution des variables internes autres que scalaires. D'un point de vue pratique, pour les métaux, les déformations élastiques sont souvent supposées infinitésimales ($\mathbf{V}^e = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}^e$; $|\boldsymbol{\epsilon}^e| \ll 1$). Les relations (20) et (25) deviennent alors (en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $\boldsymbol{\epsilon}^e$ dans \mathbf{D} et en notant $\boldsymbol{\epsilon}^{eJ}$ la dérivée de Jaumann de $\boldsymbol{\epsilon}^e$):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}^e) \mathbf{R}^e \quad \mathbf{F}^p = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}^e) \mathbf{R}^{ep} \mathbf{U}^p \quad (20. \text{ bis})$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}^{eJ} + \mathbf{D}^p \quad (25 \text{ bis})$$

En plus, dans ce cas, la rotation \mathbf{R}^{ep} est, en première approximation, égale à la rotation totale \mathbf{R} ($\mathbf{R}^{ep} = \mathbf{R}$). Nous reviendrons au chapitre IV plus en détail sur la décomposition des vitesses de déformation en parties élastique et plastique. Signalons que, là encore, tous les termes de la relation (25 bis) sont objectifs et invariants par rotation de la configuration relâchée.

B) CADRE THERMODYNAMIQUE

D'un point de vue thermodynamique, on suppose que l'état du matériau dépend de la déformation élastique (\mathbf{B}^e ou tout autre tenseur $\boldsymbol{\epsilon}^e$ fonction bijective isotrope de \mathbf{V}^e) et des variables internes d'écouissage α ; l'énergie libre spécifique ψ est donc une fonction isotrope (objectivité) de ses arguments (\mathbf{B}^e, α):

$$\psi = \psi(\mathbf{B}^e, \alpha) \quad (26)$$

Pour écrire l'inégalité de Clausius-Duhem sous une forme objective, il faut "choisir" une dérivée objective D/Dt telle que:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (\partial\psi/\partial\mathbf{B}^e) : \dot{\mathbf{B}}^e + (\partial\psi/\partial\alpha) : \dot{\alpha} \\ &= (\partial\psi/\partial\mathbf{B}^e) : (D\mathbf{B}^e/dt) + (\partial\psi/\partial\alpha) : (D\alpha/dt) \end{aligned} \quad (27)$$

On pourra alors, selon la nature des variables internes α , écrire la loi élastique sous la forme (21) (s'il n'y a pas de couplage, dans la relation (26), entre élasticité et écouissage, c.a.d. si ψ est isotrope en \mathbf{B}^e , il n'y aura pas de termes en α dans la relation et donc pas d'anisotropie élastique induite), et la dissipation sous la forme:

$$\Phi = \boldsymbol{\tau}' : \mathbf{D}^p + X : D\alpha/Dt \quad (28)$$

où $\boldsymbol{\tau}'$ est un tenseur symétrique fonction isotrope de (\mathbf{B}^e, α) donc de ($\boldsymbol{\tau}, \alpha$) (d'après la relation (21)), et X

fonction isotrope de (\mathbf{B}^e, α) aussi. On peut alors postuler un critère sous la forme:

$$f(\boldsymbol{\tau}', \mathbf{X}; \alpha) \leq 0 \quad (22 \text{ bis})$$

et écrire les lois d'évolution, en supposant un comportement standard généralisé, sous la forme (23):

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \partial f / \partial \boldsymbol{\tau}' \quad (23. a \text{ bis})$$

$$l(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \partial f / \partial \mathbf{X} \quad (23. b \text{ bis})$$

C) CAS PARTICULIER: UNE SEULE VARIABLE D'ECROUISSAGE TENSORIELLE

Pour fixer les idées, si l'on suppose qu'une seule variable interne tensorielle du second ordre symétrique α intervient dans le comportement (plus éventuellement des variables scalaires p), la relation (26) devient:

$$\psi = \psi(\mathbf{B}^e, \alpha, p) \quad (26 \text{ bis})$$

On montre alors dans [17a] que l'on a les propriétés suivantes:

P1:

$$\begin{aligned} (\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e)^e \mathbf{B}^e &= \mathbf{B}^e (\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) \Leftrightarrow (\partial \psi / \partial \alpha) \alpha = \alpha (\partial \psi / \partial \alpha) \\ &\Leftrightarrow \psi = \psi_1(\mathbf{B}^e, p) + \psi_2(\alpha, p) \end{aligned} \quad (29. a)$$

où les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont isotropes.

P2:

$$(\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) \mathbf{B}^e + (\partial \psi / \partial \alpha) \alpha = \mathbf{B}^e (\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) + \alpha (\partial \psi / \partial \alpha) \quad (29. b)$$

P3: Pour tout Ω antisymétrique

$$(\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) : (\mathbf{B}^e \Omega - \Omega \mathbf{B}^e) + (\partial \psi / \partial \alpha) : (\alpha \Omega - \Omega \alpha) = 0 \quad (29. c)$$

L'équation (29.c) permet d'écrire que, quelle que soit la dérivée objective en rotation définie par Ω :

$$D\mathbf{X} / Dt = \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X}\Omega - \Omega\mathbf{X}$$

on a:

$$\dot{\psi} = (\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) : (D\mathbf{B}^e / Dt) + (\partial \psi / \partial \alpha) : (D\alpha / Dt) \quad (27. bis)$$

Si l'on choisit la dérivée de Jaumann ($\Omega = \mathbf{W}$) alors [17a]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= 2\rho_0 [(\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) \mathbf{B}^e]^S \\ \boldsymbol{\tau}' &= 2\rho_0 \mathbf{V}^e (\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) \mathbf{V}^e \\ \mathbf{X} &= \rho_0 \partial \psi / \partial \alpha \end{aligned} \quad (30. a)$$

Ce n'est pas le seul choix possible; on peut utiliser, par exemple, la dérivée de Jaumann relative à la transformation plastique définie par:

$$\Omega = \mathbf{W}^p = \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{R}^e [\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}] \mathbf{R}^{eT}$$

alors:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= 2\rho_0 \mathbf{V}^e (\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) \mathbf{V}^e \\ \boldsymbol{\tau}' &= 2\rho_0 [(\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e) \mathbf{B}^e]^S \\ \mathbf{X} &= \rho_0 \partial \psi / \partial \alpha \end{aligned} \quad (30. b)$$

et ainsi de suite. Remarquons qu'en particulier, s'il y a découplage entre élasticité et écrouissage (pas d'anisotropie élastique induite), ψ étant isotrope en \mathbf{B}^e et α (\mathbf{B}^e et $\partial \psi / \partial \mathbf{B}^e$ commutent, ainsi que α et

$\partial\psi/\partial\alpha$), alors les relations (30.a) et (30.b) sont équivalentes et sont valables quelle que soit la dérivée objective en rotation choisie pour α .

Il existe un cas intéressant où le choix de la dérivée objective ne se pose pas, c'est celui où l'on suppose que la seule variable interne d'érouissage non scalaire est la déformation plastique (une interprétation du modèle de Prager, Boehler,...). La traduction d'une telle hypothèse aux grandes transformations selon un formalisme eulérien nécessite la définition d'une mesure eulérienne des déformations plastiques α . On définit alors les tenseurs eulériens \mathbf{H}^P et \mathbf{G}^P , indépendants de l'orientation de la configuration intermédiaire et représentant bien les déformations plastiques dans la configuration déformée [18a]:

$$\mathbf{H}^P = \mathbf{R}^{eP} \mathbf{U}^{P2} \mathbf{R}^{ePT} = \mathbf{R}^e \mathbf{F}^P \mathbf{F}^{PT} \mathbf{R}^{eT} \quad (31.a)$$

$$\mathbf{G}^P = \mathbf{R} \mathbf{U}^{P2} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{F}^{PT} \mathbf{F}^P \mathbf{R}^T \quad (31.b)$$

Il suffit maintenant de choisir α comme fonction bijective isotrope de \mathbf{H}^P ou \mathbf{G}^P (ou de $\mathbf{H}^{P/2}$ ou $\mathbf{G}^{P/2}$); ce qui donne, en supposant que la fonction $\bar{\alpha}$ est isotrope en \mathbf{U}^P :

$$\alpha = \mathbf{R}^{eP} \alpha(\mathbf{U}^P) \mathbf{R}^{ePT} \text{ ou } \alpha = \mathbf{R} \bar{\alpha}(\mathbf{U}^P) \mathbf{R}^T$$

Si les déformations élastiques sont petites, la rotation \mathbf{R}^{eP} étant égale à la rotation totale \mathbf{R} , \mathbf{H}^P et \mathbf{G}^P représentent le même tenseur.

3.3. MILIEUX A CONFIGURATION NATURELLE LOCALE: TRIEDRE DIRECTEUR

A) FORMALISME GENERAL

A l'inverse de la théorie précédente, c'est toute la transformation plastique (Déformation + rotation) qui peut intervenir dans le comportement. L'orientation de la configuration relâchée est alors indispensable. On suppose donc l'existence d'un "trièdre directeur" lié à l'élément de matière d'une manière telle que la connaissance de sa position au cours du mouvement permette de préciser l'orientation de celui-ci (Mandel [37]). Deux types de configurations relâchées particulières peuvent être définis (Fig. II.2): La configuration "isocline" (selon la terminologie de Mandel) notée $\hat{C}(t)$ telle que le trièdre directeur garde la même orientation que dans la configuration initiale C_0 ; et la configuration relâchée $C_e(t)$ déduite de la configuration actuelle $C(t)$ par déformation élastique pure (sans rotation). La décomposition multiplicative du gradient des déformations s'écrit:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}^e \hat{\mathbf{F}}^P \quad (\text{configuration isocline } \hat{C}(t)) \quad (32.a)$$

$$= \mathbf{V}^e \tilde{\mathbf{F}}^P \quad (\text{configuration relâchée par déformation élastique pure}) \quad (32.b)$$

$$\hat{\mathbf{F}}^e = \mathbf{V}^e \boldsymbol{\beta} \quad \hat{\mathbf{F}}^P = \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{F}}^P \quad \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T = \mathbf{1}$$

La rotation $\boldsymbol{\beta}$ définit la rotation du trièdre directeur au cours de la déformation.

L'état du matériau est supposé défini, dans la configuration isocline (la rotation du trièdre directeur n'intervenant pas), par la déformation élastique $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ ($\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ étant un tenseur fonction isotrope bijective de $\mathbf{U}^e = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{V}^e \boldsymbol{\beta}$), et les variables internes $\hat{\alpha}$ (on néglige les effets thermiques; on peut aussi prendre le tenseur de contrainte de Kirchhoff $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ relatif à la configuration isocline comme variable d'état à la place de la déformation élastique). La configuration isocline dépend bien sûr du trièdre directeur choisi; choix qui, dans le cas général, n'est pas unique [37d,e]. Le meilleur choix est celui permettant l'écriture la plus simple du comportement. A l'inverse des théories classiques de la plasticité, c'est l'évolution de tout le gradient de la vitesse de déformation plastique qui doit être donnée et non pas uniquement celle de sa partie

symétrique; ceci est nécessaire puisque, selon cette théorie, c'est toute la transformation plastique qui intervient dans le comportement et non pas seulement la déformation pure. La loi d'évolution de la partie antisymétrique du gradient de vitesse plastique permet de définir l'évolution de la rotation du trièdre directeur β . Le comportement sera donc défini par les relations suivantes:

$$\hat{\tau} = \hat{\mathbf{e}}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \hat{\alpha}) \quad (33)$$

$$\hat{f} = \hat{f}(\hat{\tau}, \hat{\alpha}) \quad (34)$$

$$[\dot{\hat{\mathbf{F}}^P \hat{\mathbf{F}}^{P-1}}]^S = \lambda \hat{\mathbf{h}}(\hat{\tau}, \hat{\alpha}) \quad (35.a)$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = \lambda \hat{\mathbf{l}}(\hat{\tau}, \hat{\alpha}) \quad (35.b)$$

$$[\dot{\hat{\mathbf{F}}^P \hat{\mathbf{F}}^{P-1}}]^A = \lambda \hat{\mathbf{a}}(\hat{\tau}, \hat{\alpha}) \quad (36)$$

Les fonctions $\hat{\mathbf{h}}$ et $\hat{\mathbf{a}}$ peuvent être considérées respectivement comme la partie symétrique et antisymétrique d'une même fonction $\hat{\mathbf{h}}'(\hat{\tau}, \hat{\alpha})$. Le tenseur $\hat{\tau}$ est le tenseur de contrainte de Kirchhoff relatif à la configuration isocline:

$$\hat{\tau} = \hat{\mathbf{F}}^{e-1} \boldsymbol{\tau} \hat{\mathbf{F}}^{e-1T} = \mathbf{U}^{e-1} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{U}^{e-1} = \hat{\mathbf{F}}^P \mathbf{s} \hat{\mathbf{F}}^{PT} \quad (37)$$

A l'inverse de la théorie précédente, les fonctions $\hat{\mathbf{e}}$, \hat{f} , $\hat{\mathbf{h}}$, $\hat{\mathbf{a}}$ et $\hat{\mathbf{l}}$ peuvent être quelconques et en particulier non isotropes de leurs arguments.

Les relations (33-35) peuvent être considérées comme une extension des relations (1)(petites déformations). Par contre, la relation (36) apparaît comme une relation propre aux grandes transformations; c'est cette relation qui permet de connaître l'évolution du trièdre directeur au cours du mouvement, comme on va le voir au paragraphe suivant.

B) ECRITURE EULERIENNE

Le gradient de vitesse \mathbf{L} , sa partie symétrique \mathbf{D} et antisymétrique \mathbf{W} s'écrivent:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} + \langle \mathbf{D}\mathbf{V}^e / \mathbf{D}t \rangle \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^e \langle \mathbf{D}\tilde{\mathbf{F}}^P / \mathbf{D}t \rangle \tilde{\mathbf{F}}^{P-1} \mathbf{V}^{e-1} \quad (38.a)$$

$$\mathbf{D} = [\langle \mathbf{D}\mathbf{V}^e / \mathbf{D}t \rangle \mathbf{V}^{e-1}]^S + [\mathbf{V}^e \langle \mathbf{D}\tilde{\mathbf{F}}^P / \mathbf{D}t \rangle \tilde{\mathbf{F}}^{P-1} \mathbf{V}^{e-1}]^S \quad (38.b)$$

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega} + [\langle \mathbf{D}\mathbf{V}^e / \mathbf{D}t \rangle \mathbf{V}^{e-1}]^A + [\mathbf{V}^e \langle \mathbf{D}\tilde{\mathbf{F}}^P / \mathbf{D}t \rangle \tilde{\mathbf{F}}^{P-1} \mathbf{V}^{e-1}]^A \quad (38.c)$$

Tous les tenseurs intervenant dans la relation (38.b) sont objectifs et indépendants de la configuration relâchée (mais dépendent du choix du trièdre directeur). Le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse de rotation du trièdre directeur ($\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}^T$). La dérivée $\mathbf{D} / \mathbf{D}t$ est la dérivée par rapport au trièdre directeur:

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{F}}^P / \mathbf{D}t = \boldsymbol{\beta} [d(\boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{F}}^P) / dt] = \boldsymbol{\beta} \dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} = \dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} - \boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{F}}^P \quad (39.a)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^e / \mathbf{D}t = \boldsymbol{\beta} [d(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{V}^e \boldsymbol{\beta}) / dt] \boldsymbol{\beta}^T = \dot{\mathbf{V}}^e + \mathbf{V}^e \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \mathbf{V}^e \quad (39.b)$$

Il est intéressant d'écrire l'équation (38.b) autrement. En effet, si on appelle vitesse de déformation plastique et vitesse de rotation plastique les tenseurs \mathbf{D}^P et \mathbf{W}^P définis par:

$$\mathbf{D}^P = [\langle \mathbf{D}\tilde{\mathbf{F}}^P / \mathbf{D}t \rangle \tilde{\mathbf{F}}^{P-1}]^S = \boldsymbol{\beta} [\dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} \tilde{\mathbf{F}}^{P-1}]^S \boldsymbol{\beta}^T \quad (40.a)$$

$$\mathbf{W}^P = [\langle \mathbf{D}\tilde{\mathbf{F}}^P / \mathbf{D}t \rangle \tilde{\mathbf{F}}^{P-1}]^A = \boldsymbol{\beta} [\dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} \tilde{\mathbf{F}}^{P-1}]^A \boldsymbol{\beta}^T \quad (40.b)$$

et si on écrit la relation (38.a) en faisant intervenir la dérivée de Jaumann \mathbf{V}^{eJ} de \mathbf{V}^e on a:

$$\mathbf{L} = \mathbf{V}^{eJ} \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^e \mathbf{D}^P \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^e (\mathbf{W}^P + \boldsymbol{\omega} - \mathbf{W}) \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{W}$$

Le tenseur \mathbf{L} étant la somme de \mathbf{D} et \mathbf{W} , les trois premiers termes du second membre de la relation ci-dessus constituent alors le tenseur \mathbf{D} , ce qui permet d'écrire:

$$\mathbf{v}^{e-1} \mathbf{D} \mathbf{v}^e = \mathbf{v}^{e-1} \mathbf{v}^{eJ} + \mathbf{D}^P + \mathbf{W}^P + \boldsymbol{\omega} - \mathbf{W}$$

d'où:

$$[\mathbf{v}^{e-1} \mathbf{D} \mathbf{v}^e]^S = [\mathbf{v}^{e-1} \mathbf{v}^{eJ}]^S + \mathbf{D}^P \quad (41)$$

La relation (41) est exactement la même que (25). Tous les termes de cette relation sont objectifs et indépendants de la configuration relâchée et du trièdre directeur choisi.

L'écriture eulérienne équivalente aux relations (33-36) est:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}^e \boldsymbol{\beta} \hat{\mathbf{e}}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \hat{\alpha}) \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{v}^e = \mathbf{e}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \alpha; \boldsymbol{\beta}) \quad (42)$$

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\tau}, \alpha; \boldsymbol{\beta}) \quad (43)$$

$$\mathbf{D}^P = \lambda \boldsymbol{\beta} \hat{\mathbf{h}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}) \boldsymbol{\beta}^T = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \alpha; \boldsymbol{\beta}) \quad (44.a)$$

$$D\alpha/Dt = \lambda \boldsymbol{\beta} [\hat{\mathbf{l}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha})] = \lambda \mathbf{l}(\boldsymbol{\tau}, \alpha; \boldsymbol{\beta}) \quad (44.b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}^T = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{W} - [\mathbf{v}^e (\mathbf{D}^P + \mathbf{W}^P) \mathbf{v}^{e-1}]^A - [(D\mathbf{v}^e/Dt) \mathbf{v}^{e-1}]^A \quad (45.a)$$

$$\mathbf{W}^P = \lambda \boldsymbol{\beta} \hat{\mathbf{a}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}) \boldsymbol{\beta}^T = \lambda \mathbf{a}(\boldsymbol{\tau}, \alpha; \boldsymbol{\beta}) \quad (45.b)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}^e$ est fonction isotrope bijective de \mathbf{v}^e ($\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\beta} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e \boldsymbol{\beta}^T$); la notation $\boldsymbol{\beta}[x]$ signifie la transformée de x par la rotation $\boldsymbol{\beta}$. La dérivée objective D/Dt , permettant de définir l'évolution des variables internes α , est une dérivée en rotation relative à $\boldsymbol{\beta}$. La rotation $\boldsymbol{\beta}$ apparaît donc comme une variable interne d'orientation dont l'évolution est donnée par les relations (45).

Si les déformations élastiques sont petites ($\mathbf{v}^e = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}^e$, $|\boldsymbol{\epsilon}^e| < 1$), les relations (37), (41) et (31.c) deviennent:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\beta} \quad (37 \text{ bis})$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}^{eJ} + \mathbf{D}^P \quad (41 \text{ bis})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^P \quad (45.a \text{ bis})$$

C) CADRE THERMODYNAMIQUE

On suppose que l'énergie libre massique est fonction des variables d'état: $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{U}^e, \hat{\alpha})$. L'écriture de l'inégalité de Clausius Duhem, en supposant que les déformations élastiques ne dissipent pas, permet de donner la loi élastique et de définir les forces thermodynamiques associées aux variables $\hat{\mathbf{F}}^P$, et $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mathbf{e}}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \hat{\alpha}) = \rho_0 \partial \hat{\psi} / \partial \mathbf{E}^e \quad \mathbf{E}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{e2} - \mathbf{1}) \quad (33 \text{ bis})$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \dot{\hat{\mathbf{F}}}^P \hat{\mathbf{F}}^{P-1} : \boldsymbol{\Sigma} / \rho_0 - \hat{\mathbf{X}} : \dot{\hat{\alpha}} \quad \hat{\mathbf{X}} = \partial \hat{\psi} / \partial \hat{\alpha} \quad (46)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\mathbf{F}}^{eT} \boldsymbol{\tau} \hat{\mathbf{F}}^{eT-1} = \mathbf{U}^{e-2} \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (47)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\Sigma} / \rho_0$, non symétrique, apparaît comme la force thermodynamique associée au tenseur $\dot{\hat{\mathbf{F}}}^P \hat{\mathbf{F}}^{P-1}$; ρ_0 est la masse volumique dans la configuration initiale.

Il reste maintenant à postuler la fonction seuil et les lois d'évolution permettant de définir à chaque instant $\hat{\mathbf{F}}^P$ et $\hat{\alpha}$. En supposant un comportement standard généralisé, la fonction seuil dépend alors des forces thermodynamiques, et les lois d'évolution s'obtiennent en utilisant l'hypothèse de normalité, ce qui donne:

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} / \rho_0, \hat{\mathbf{X}}; \hat{\alpha}) \quad (34 \text{ bis})$$

$$\hat{\mathbf{h}} = [\partial \hat{\mathbf{f}} / \partial (\boldsymbol{\Sigma} / \rho_0)]^S \quad (35.a \text{ bis})$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \partial \hat{\mathbf{f}} / \partial (-\hat{\mathbf{X}}) \quad (35.b \text{ bis})$$

$$\hat{\mathbf{a}} = [\partial \hat{\mathbf{E}} / \partial (\boldsymbol{\Sigma} / \rho_0)]^A \quad (36 \text{ bis})$$

Si les déformations élastiques sont petites, le tenseur $\boldsymbol{\Sigma}$ est, en première approximation, égal à $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ et donc symétrique.

3.4. CONCLUSIONS

Si l'on compare les relations (21-23) d'une part et (42-44) d'autre part on peut tirer les remarques suivantes:

- Si le comportement est initialement isotrope, les fonctions constitutives du modèle sont alors isotropes de leurs arguments; la rotation $\boldsymbol{\beta}$ (trièdre directeur) n'intervient dans les relations (42-45) que dans les lois d'évolution de α pour définir la dérivée objective à utiliser. La différence essentielle entre les deux théories ci-dessus réside alors dans la définition de cette dérivée objective nécessaire pour écrire les lois d'évolution des variables internes; problème qui ne se pose que si, au moins, une variable interne est tensorielle (anisotropie induite).

- La théorie à configuration intermédiaire, telle que présentée précédemment, ne permet pas de rendre compte d'une anisotropie initiale. Dans le chapitre IV, nous montrerons comment on peut utiliser cette théorie pour palier à cette limitation.

Si nous revenons à notre objectif initial, on peut alors conclure que pour étendre aux grandes transformations un matériau modèle défini en petites déformations, deux difficultés sont à résoudre: choix du formalisme assurant l'objectivité de la loi de comportement et choix de la loi élastique et sa composition avec la loi plastique. Pour étudier ces deux aspects plus en détail et d'un point de vue plus appliqué, nous consacrons le chapitre III à l'étude du comportement rigide plastique (ce qui permet de laisser tomber l'aspect décomposition de la déformation) alors que le chapitre VI sera essentiellement consacré au couplage entre l'élasticité et la plasticité.

- Chapitre 3 -

COMPORTEMENT RIGIDE PLASTIQUE

RESUME

Ce chapitre traite du comportement rigide plastique. La première partie présente un formalisme général, en référentiel tournant, permettant de décrire tout type d'anisotropie (initiale ou induite). Les différentes théories des grandes déformations développées au chapitre II sont reprises sous ce formalisme. Le problème du choix du référentiel tournant est abordé.

La deuxième partie étudie des comportements remarquables: anisotropie induite, anisotropie initiale, anisotropie initiale et induite. En particulier, la plasticité de type Hill est détaillée.

La troisième partie présente la réponse de différents modèles (basés sur divers choix de référentiels tournants) à quelques sollicitations planes particulières dont la cinématique a été étudiée au chapitre I: cisaillement simple, traction hors-axes, torsion.

1. INTRODUCTION: Euler ou Lagrange?

D'une manière relativement générale, un comportement rigide plastique peut être formulé de la façon suivante:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0 \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \quad \dot{\alpha} = \lambda l(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \quad (1)$$

Les fonctions f , \mathbf{h} et l sont les fonctions constitutives du modèle alors que $\boldsymbol{\sigma}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, α et $\dot{\alpha}$ représentent respectivement, les contraintes, la vitesse des déformations, les variables internes d'érouissage et leur vitesse ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ et $\dot{\alpha}$ doivent bien sûr être des quantités objectives). Si le modèle est standard généralisé, on définit les forces thermodynamiques $X(\alpha)$ associées aux variables internes α par la donnée de l'énergie libre massique $\psi(\alpha)$: $X = \partial\psi/\partial\alpha$, et on suppose que la fonction seuil (qui dépendra alors des forces thermodynamiques X et éventuellement, paramétriquement, des α) est un potentiel plastique ce qui permet de préciser les fonctions \mathbf{h} et l :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, X(\alpha); \alpha) \leq 0 \quad \mathbf{h} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad l = \partial f / \partial (-X) \quad (1 \text{ bis})$$

Les modèles grandes déformations sont généralement basés sur des fonctions constitutives établies soit en petites déformations, soit à partir d'essais triaxiaux. Ce sont, en général, des extensions de modèles petites déformations interprétant, selon le formalisme grandes déformations, les hypothèses "physiques" ayant amené à la forme particulière des fonctions constitutives. Cette interprétation se traduit par le choix du formalisme (lagrangien ou eulérien) et donc des variables $\boldsymbol{\sigma}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, α et $\dot{\alpha}$ dans les relations (1).

L'étude de la plasticité isotrope en grandes transformations [17a] a montré que le formalisme eulérien convient mieux pour décrire la "physique" du comportement plastique. Ceci s'explique par le fait que la plasticité isotrope présente des caractéristiques typiques d'un fluide: pas de configuration privilégiée, déformations permanentes après relâchement des contraintes, déformations infinies sous contraintes finies, etc... En particulier, il est aujourd'hui bien établi que la formulation convenable du modèle isotrope avec érouissage isotrope s'obtient en utilisant, dans (1), $\boldsymbol{\tau}$ à la place de $\boldsymbol{\sigma}$, et \mathbf{D} à la place de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. C'est ce formalisme qui est aujourd'hui à la base des codes de calcul élastoplastiques utilisés en mise en forme ([16][19][39]).

Par contre, sitôt que l'on cherche à prendre en compte une certaine anisotropie, le formalisme eulérien soulève le problème d'objectivité:

- Dans le cas d'une anisotropie induite, les fonctions f , \mathbf{h} et l sont isotropes de leurs arguments, l'anisotropie apparaissant au cours de la déformation du fait du caractère tensoriel des variables internes α . L'écriture grandes déformations exige alors le choix, pour leur loi d'évolution, d'une dérivée objective.

- Dans le cas d'une anisotropie initiale, les fonctions f , \mathbf{h} et l ne sont plus isotropes. Le formalisme eulérien basé sur (1) ne sera pas objectif.

- Si l'on ajoute, aux arguments des fonctions constitutives, des tenseurs de structure adéquats, on peut traiter l'anisotropie initiale avec des fonctions isotropes. Il convient alors de déterminer ces tenseurs de structures et surtout de suivre leur évolution au cours de la transformation.

Le comportement maintenant n'est plus un comportement fluide classique, la notion d'isotropie initiale se réfère toujours à une configuration initiale privilégiée. Il semble alors plus commode d'utiliser un formalisme lagrangien qui fait disparaître tous ces problèmes (les dérivées par rapport au temps sont les dérivées habituelles et les fonctions constitutives peuvent être anisotropes). Mais si le formalisme lagrangien classique (déformation: \mathbf{E} , contrainte: \mathbf{S}) se prête bien à la description de l'anisotropie, il aboutit presque toujours à des écritures compliquées dues au transport convectif des forces appliquées dans une configuration déformée ; donnons pour simple exemple la forme lagrangienne de la contrainte équivalente de von Mises:

$$\bar{\sigma}^2 = 3/2 \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}) - 1/2 [\operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{S})]^2 \quad \mathbf{C} = \mathbf{1} + 2\mathbf{E}$$

qui est bien plus compliquée que l'écriture eulérienne. Ceci s'explique par le fait que seules les composantes principales du tenseur des contraintes de Cauchy ont une signification physique intrinsèque vis-à-vis du matériau.

Ainsi la formulation eulérienne introduit les bonnes grandeurs mais pose problème par son orientation, tandis que le formalisme lagrangien, s'il résout ce problème d'orientation, perturbe par convection les grandeurs physiques. Le bon compromis permettant d'avoir une formulation simple et physiquement satisfaisante devrait donc être une formulation eulérienne par ses valeurs propres mais lagrangienne par son orientation: c'est la formulation en référentiel tournant que nous allons développer au paragraphe suivant.

2. CADRE GENERAL

2.1. FORMULATION EN REFERENTIEL TOURNANT

A) PRESENTATION

L'idée de base de cette formulation consiste à écrire les fonctions constitutives du modèle à partir de tenseurs lagrangiens, ayant les valeurs principales de tenseurs eulériens; autrement dit, faire un transport entre les configurations initiale et déformée par l'intermédiaire d'une rotation \mathbf{Q} plutôt qu'un transport convectif par le gradient de la transformation \mathbf{F} . Le comportement sera alors défini par les fonctions f , \mathbf{h} et l (1) mais fera intervenir les quantités $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, $\bar{\mathbf{D}}$ et $\bar{\alpha}$ définies par:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{Q} \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} \quad \bar{\alpha} = \mathbf{Q}^T [\alpha] \quad (2)$$

où $\mathbf{Q}^T [\alpha]$ indique que l'on soumet la rotation \mathbf{Q}^T à α , le résultat dépendant de la nature tensorielle de α .

Pour que les tenseurs $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, $\bar{\mathbf{D}}$, etc... soient invariants par changement de référentiel d'observation, il faut et il suffit que la rotation \mathbf{Q} se transforme, dans un changement de référentiel défini par une rotation \mathbf{q} (I.18), par:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{q} \mathbf{Q} \quad (3)$$

ce qui représente une transformation analogue à celle de la rotation propre \mathbf{R} obtenue par décomposition polaire de \mathbf{F} ; la rotation \mathbf{Q} doit donc être de même "nature" que \mathbf{R} : c'est un tenseur mixte mi-eulérien mi-lagrangien qui réalise un transport de la configuration initiale à la configuration déformée. La vitesse de rotation du référentiel tournant définie par $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ se transforme par \mathbf{q} en:

$$[\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T]' = \mathbf{q} [\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{q}] \mathbf{q}^T \quad (3 \text{ bis})$$

transformation analogue à celle de \mathbf{w} (I.19). En particulier, la quantité $\bar{\mathbf{w}}_q = \mathbf{w} \cdot \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ est une quantité objective puisqu'elle se transforme par \mathbf{q} en $\bar{\mathbf{w}}_q' = \mathbf{q} \bar{\mathbf{w}}_q \mathbf{q}^T$. Dans la suite, pour des raisons de commodité, on définira la vitesse de rotation $\dot{\mathbf{Q}}$ par $\bar{\mathbf{w}}_q$ sachant que:

$$\mathbf{w}_q = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}_q \quad (4)$$

L'écriture eulérienne équivalente au formalisme en référentiel tournant est immédiate (les fonctions f , \mathbf{h} et l sont remplacées par \bar{f} , $\bar{\mathbf{h}}$ et \bar{l} respectivement):

$$\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \leq 0 \quad (5. a)$$

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{Q} \bar{\mathbf{h}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \mathbf{Q}^T \quad (5. b)$$

$$D\alpha/Dt = \lambda \mathbf{Q} [\bar{l}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha})] \quad (5. c)$$

$$+ \text{définition de } \mathbf{Q} \quad (5. d)$$

La dérivée $D\alpha/Dt$ est définie par:

$$D\alpha/Dt = \mathbf{Q} [\dot{\bar{\alpha}}] \quad (6)$$

Dans le cas d'un tenseur du second ordre, on a:

$$\bar{\alpha} = \mathbf{Q}^T \alpha \mathbf{Q}$$

$$D\alpha/Dt = \dot{\alpha} + \alpha \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_0 \alpha = \alpha^J + \bar{\omega}_0 \alpha - \alpha \bar{\omega}_0$$

La rotation \mathbf{Q} dans les relations (5) apparaît comme une variable interne d'orientation. Si les fonctions \bar{E} , \bar{h} et \bar{I} sont isotropes de leurs arguments, on retrouve le formalisme eulérien classique. La rotation \mathbf{Q} n'intervient, dans ce cas, que dans le choix de la dérivée objective des variables internes α .

L'utilisation du formalisme ci-dessus apparaît comme un moyen commode mais artificiel pour assurer l'objectivité de la loi de comportement; il lui manque une assise physique. Nous verrons dans la suite de ce paragraphe ainsi qu'au chapitre V que l'on peut, dans plusieurs cas, donner une interprétation physique à cette écriture surtout lorsqu'on a une idée assez précise de la nature de l'anisotropie (monocristal, anisotropie matérielle,...); dans ce cas, le choix de la rotation \mathbf{Q} , qui reste pour le moment complètement arbitraire, sera imposé par la physique. Par contre si l'on ne dispose pas d'indications physiques suffisantes permettant de nous guider dans ce choix, ou plus généralement de caractériser précisément l'origine de l'anisotropie dont on veut rendre compte, l'utilisation de l'écriture en référentiel tournant, même si le choix de ce dernier reste arbitraire, est le moyen qui semble le plus simple pour décrire tout type d'anisotropie et particulièrement pour transposer aux grandes déformations un comportement défini en petites déformations. Le choix de la rotation \mathbf{Q} (et donc du référentiel tournant) est la seule hypothèse supplémentaire nécessaire pour étendre aux grandes déformations les modèles petites déformations.

B) INTERPRETATION GEOMETRIQUE

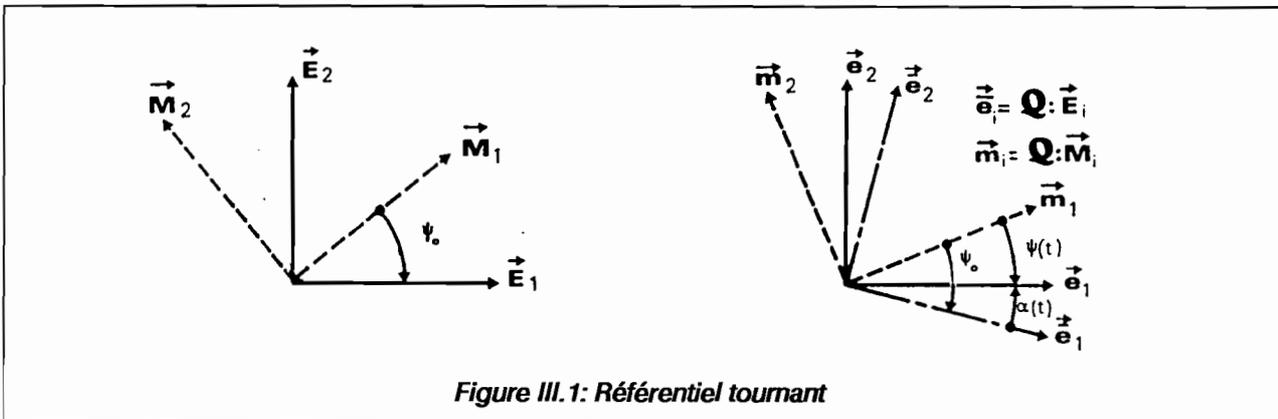


Figure III.1: Référentiel tournant

La donnée de la rotation \mathbf{Q} revient à postuler l'existence d'une configuration ou d'une orientation privilégiée de l'élément de matière étudié (nous sommes ici en rigide plastique, la prise en compte de la déformation élastique nous obligera plus tard à distinguer configuration et orientation), c'est-à-dire l'existence d'un trièdre (orthonormé) "privilégié" associé à cet élément de matière (le mot privilégié voulant dire que l'écriture des relations constitutives dans cette configuration ou par rapport à ce trièdre est l'écriture la plus simple). Dans le cas d'un matériau orthotrope (initialement orthotrope et qui le reste) par exemple, ce trièdre privilégié est bien sûr celui défini par les directions d'orthotropie. Supposons que les trièdres orthonormés \vec{M}_i et \vec{m}_i ($i=1,2,3$) représentent le trièdre privilégié respectivement à l'état initial non déformé et à l'état actuel. La rotation \mathbf{Q} est alors définie par :

$$\mathbf{Q} = \vec{m}_i \otimes \vec{M}_i = Q_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{M}_j \tag{7}$$

le repère \vec{e}_i étant le repère du mouvement choisi pour repérer la configuration actuelle de l'élément

matériel étudié (Fig.III.1). Ecrire les lois constitutives en fonction des tenseurs $\bar{\mathbf{T}}$, $\bar{\mathbf{D}}$ etc... revient à écrire les mêmes fonctions entre les composantes des tenseurs \mathbf{T} , \mathbf{D} , etc... mais en prenant ces composantes dans le trièdre $\bar{\mathbf{m}}_i$. En effet, les composantes de $\bar{\mathbf{T}}$ par rapport à $\bar{\mathbf{M}}_i$ et celles de \mathbf{T} dans $\bar{\mathbf{m}}_i$ sont les mêmes:

$$\mathbf{T} = T_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{T}_{ij} \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}_j \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{T}_{ij} \bar{\mathbf{M}}_i \otimes \bar{\mathbf{M}}_j \quad ; \quad \bar{T}_{ij} = Q_{ki} Q_{lj} T_{kl}$$

puisque:

$$\bar{\mathbf{m}}_i = \mathbf{Q} : \bar{\mathbf{M}}_i \quad ; \quad \bar{\mathbf{e}}_i = Q_{ij} \bar{\mathbf{m}}_j \quad (9)$$

L'appellation référentiel tournant vient du fait que le référentiel dans lequel il faut écrire les lois de comportement est le référentiel défini par le trièdre $\bar{\mathbf{m}}_i$ qui, lui, est en rotation dans l'espace. En particulier, la dérivation relative au référentiel tournant définie par (6) est celle par rapport à $\bar{\mathbf{m}}_i$:

$$D\mathbf{T}/Dt = \mathbf{Q} [d(\mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q})/dt] \mathbf{Q}^T = \dot{\bar{T}}_{ij} \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}_j \quad (10)$$

Reste à voir maintenant comment les modélisations usuelles, décrites au chapitre II, entrent dans ce cadre.

C) RELATIONS AVEC LA CINEMATIQUE DE LA PLASTICITE

Le formalisme en référentiel tournant a déjà été utilisé explicitement pour décrire une anisotropie initiale ou induite ([6] [14] [29] [35] [37] ...). D'autres modèles reviennent implicitement à une formulation en référentiel tournant ([31] [34] [45] [46] ...).

- Milieux à configuration intermédiaire

La théorie des milieux à configuration intermédiaire a été utilisée, comme on l'a vu au chapitre II, essentiellement pour modéliser le comportement élastoplastique avec isotropie initiale. On a montré que, dans ce cas, le problème à résoudre est le choix de la dérivée objective dans la loi d'évolution de α (II.23.b). En particulier, le modèle qui suppose que la variable interne d'écroûissage est la déformation plastique (§ II.3.2.C) a nécessité la définition d'une mesure eulérienne, indépendante de la configuration intermédiaire, de la déformation plastique ($\mathbf{H}^P, \mathbf{G}^P$). Cette démarche était guidée par le souci d'avoir une écriture eulérienne plus satisfaisante pour décrire la plasticité. Cette démarche revient à choisir comme configuration intermédiaire privilégiée la configuration $C_e(t)$ obtenue par relâchement des contraintes sans rotation. Si l'on est en présence d'une anisotropie initiale, cette démarche n'est plus satisfaisante. Toutefois, on peut utiliser cette théorie à condition de choisir comme configuration privilégiée du matériau, par exemple, la configuration $C_p(t)$ obtenue par déformation plastique pure (pas de rotation). Le cas rigide plastique ne peut, dans ce cas, s'obtenir que par passage à la limite, en supposant que la déformation élastique est infinitésimale. Nous y reviendrons de manière détaillée au chapitre IV et nous montrerons alors, qu'à la limite rigide plastique, les milieux à configuration intermédiaire utilisent comme référentiel tournant, le référentiel en rotation propre (si la configuration intermédiaire choisie est C_p):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \quad (11)$$

- Milieux à configuration naturelle locale

Dans le cas rigide plastique, toute configuration relâchée est obtenue à partir de la configuration actuelle par une rotation de celle-ci. En particulier, la configuration isocline est définie par la rotation β qui représente la rotation du trièdre directeur par rapport au référentiel d'observation et l'on a:

$$\mathbf{F} = \beta \hat{\mathbf{F}}^P \quad (12)$$

Selon cette théorie, on doit se donner l'évolution du gradient de vitesse plastique en entier et non pas

uniquement sa partie symétrique (Il. 35-36) [37]. La définition de β est alors donnée par une loi de comportement (II-45); en effet on a:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}\beta^T &= \omega = \mathbf{W} - \mathbf{W}^P ; & \mathbf{W}^P &= \beta [\dot{\mathbf{F}}^P \hat{\mathbf{F}}^{P-1}]^A \beta^T \\ \mathbf{W}^P &= \lambda \beta \hat{\mathbf{a}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}) \beta^T ; & \hat{\boldsymbol{\tau}} &= \beta^T \boldsymbol{\tau} \beta \end{aligned} \quad (13.a)$$

Il est tout à fait clair que la théorie des milieux à configuration naturelle locale est une théorie en référentiel tournant ([14]), ce dernier étant défini par β :

$$\mathbf{Q} = \beta \quad (13.b)$$

Nous reviendrons au problème de la définition de la fonction $\hat{\mathbf{a}}$ dans la suite de ce chapitre.

2.2. CHOIX DU REFERENTIEL TOURNANT

A) CAS GENERAL

Le référentiel tournant fait partie intégrante de la loi de comportement et dépend essentiellement de la nature de l'anisotropie à modéliser; c'est lui qui permet de définir l'orientation privilégiée de l'élément matériel. Les arguments justifiant son choix devraient alors être de nature physique et/ou expérimentale. Malheureusement, la majorité des expériences classiquement réalisées correspondent à des sollicitations triaxiales alors que le problème de l'objectivité se pose essentiellement quand les sollicitations engendrent des rotations de l'élément matériel. On se retrouve donc dans l'une des situations suivantes:

- Le référentiel a une définition physique précise (c'est le cas par exemple d'un monocristal (directions cristallographiques) ou d'un composite renforcé par fibres (direction des fibres) etc...). On pourra alors (plus ou moins difficilement) suivre son évolution au cours de la transformation et donc préciser sa loi d'évolution.

- Les données physiques ou expérimentales ne permettent pas de préciser le choix convenable de ce référentiel. On est, dans ce cas, obligé de le postuler par une démarche purement phénoménologique. Deux possibilités existent alors: lui donner une définition cinématique a priori, ou lui postuler une loi d'évolution comme pour toutes les variables internes. Dans tous les cas, il faut s'assurer qu'un tel choix n'aboutit pas à des réponses déraisonnables de la loi de comportement.

D'une manière générale et sachant que la quantité $\bar{\mathbf{W}}_0 = \mathbf{W} - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ doit être objective, celle-ci doit s'écrire sous la forme :

$$\bar{\mathbf{W}}_0 = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{A}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\alpha}) \mathbf{Q}^T \quad (14)$$

La fonction tensorielle antisymétrique du second ordre $\bar{\mathbf{A}}$ est une fonction constitutive du modèle dont les arguments doivent être invariants par changement de référentiel, ce qui est assuré par l'utilisation des tenseurs tournés par \mathbf{Q} .

La présence de $\bar{\mathbf{V}}$ et $\bar{\alpha}$ dans (14) permet de rendre compte de l'influence, d'une part de la transformation géométrique de l'élément matériel ($\bar{\mathbf{V}}$), et d'autre part de l'influence de l'érouissage ($\bar{\alpha}$). En particulier, si la fonction $\bar{\mathbf{A}}$ doit dépendre de $\bar{\mathbf{D}}$, elle doit être positivement homogène de degré un par rapport à $\bar{\mathbf{D}}$ (indépendance des vitesses). Un cas particulier important consiste à supposer la fonction $\bar{\mathbf{A}}$ linéaire en $\bar{\mathbf{D}}$ ce qui permet d'écrire (14) sous la forme:

$$\bar{\mathbf{W}}_0 = \mathbf{Q} [\bar{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{\alpha}) : \mathbf{D}] \mathbf{Q}^T \quad (15)$$

où $\bar{\mathbf{K}}$ est une application linéaire (tenseur du quatrième ordre) de l'espace des tenseurs symétriques du

second ordre dans l'espace des tenseurs antisymétriques du second ordre. Il est bien évident que (15) est un cas particulier de (14) mais la majorité des modèles existants peuvent s'écrire sous cette forme.

B) REFERENTIELS CINEMATIQUES

Les référentiels cinématiques sont ceux qui peuvent être définis uniquement par la cinématique de la transformation; ils ne dépendent donc pas de la loi de comportement. Leur forme générale (14), ou particulière (15), est telle que seules les variables cinématiques interviennent ($\bar{\mathbf{V}}$ et $\bar{\mathbf{D}}$) et pas $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ et $\bar{\alpha}$. On peut en distinguer deux types différents:

- Ceux qui ne font référence à aucune direction matérielle, ce qui implique que $\bar{\mathbf{A}}$ est isotrope de $(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{D}})$ ou $\bar{\mathbf{K}}$ isotrope de $(\bar{\mathbf{V}})$ et donc $\bar{\mathbf{W}}_Q$ est fonction isotrope de (\mathbf{D}, \mathbf{V}) :

$$\bar{\mathbf{W}}_Q = \mathbf{A}(\mathbf{D}, \mathbf{V}) \quad (16.a)$$

ou plus particulièrement (linéarité en \mathbf{D}):

$$\bar{\mathbf{W}}_Q = \mathbf{K}(\mathbf{V}) : \mathbf{D} \quad (16.b)$$

Nous avons explicité au chapitre I les formes particulières de la fonction \mathbf{A} (dans le cas tridimensionnel et en cinématique plane) pour différents référentiels, à savoir, le référentiel corotationnel, le référentiel en rotation propre, le référentiel principal des déformations et le référentiel triaxial.

- Ceux qui sont attachés à une ou plusieurs directions matérielles. Les référentiels définis au chapitre I par les relations (I.47) et (I.49) en sont un exemple.

C) THEORIE DE LA ROTATION PLASTIQUE

Une autre approche consiste à écrire la loi d'évolution de \mathbf{Q} comme on le fait pour les autres variables internes d'état, soit:

$$\bar{\mathbf{W}}_Q = \lambda \mathbf{Q} \bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \mathbf{Q}^T \quad (17.a)$$

ou bien en utilisant la forme (14) plus commode:

$$\bar{\mathbf{W}}_Q = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{D}}, \bar{\alpha}) \mathbf{Q}^T \quad (17.b)$$

Cette approche correspond à celle du Trièdre Directeur développée par Mandel [37], et reprise par Dafalias [14] ainsi que d'autres ([35] [46]...) avec quelques variantes. Le terme utilisé dans les pays anglophones pour désigner cette approche est "the plastic spin concept"; en ce qui nous concerne nous l'appellerons désormais théorie de la rotation plastique. En effet, $\bar{\mathbf{W}}_Q$ peut être interprété comme la vitesse de rotation plastique puisque $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\beta}$ représente l'orientation du trièdre directeur relativement à sa configuration isocline.

La loi de comportement (17.a) (ou (17.b)) ne pouvant pas être déduite des modèles petites déformations, elle pourra être explicitée et choisie suivant les techniques usuelles:

1- Soit directement a priori en partant des écritures (17.a) ou (17.b) et en utilisant les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles anisotropes. Les formes particulières dépendront bien sûr du type d'anisotropie.

2- Soit en nous référant à l'interprétation de la configuration naturelle locale discutée plus haut, et en remarquant que la force thermodynamique associée à $\hat{\mathbf{F}}^P \hat{\mathbf{F}}^{P-1}$ est le tenseur $\boldsymbol{\Sigma}$ (II.47) qui, même s'il est symétrique dans le cas rigide plastique, ne l'est pas dans le cas général (élastoplastique). En étendant la

notion de matériau standard généralisé, nous écrivons:

$$\dot{\hat{\mathbf{F}}}\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{P}-1} = \lambda \partial \bar{\mathbf{F}}/\partial \boldsymbol{\Sigma}$$

où $\bar{\mathbf{F}}$ étant supposée fonction du tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\Sigma}$.

En remarquant que $\dot{\hat{\mathbf{F}}}\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{P}-1} = \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{a}}$, on aura:

$$\bar{\mathbf{h}} = [\partial \bar{\mathbf{F}}/\partial \boldsymbol{\Sigma}]^{\mathbf{S}} \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}} = [\partial \bar{\mathbf{F}}/\partial \boldsymbol{\Sigma}]^{\mathbf{A}} \quad \text{pour } \boldsymbol{\Sigma} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (18)$$

Quelle que soit la méthode utilisée pour expliciter ces lois d'évolution (17.a ou 17.b), leur structure dépendra fortement du type d'anisotropie visée. Nous en verrons des exemples au prochain paragraphe.

3. CAS PARTICULIERS

3.1. ANISOTROPIE INDUITE

A) FORMALISME GENERAL

Le comportement plastique initialement isotrope avec anisotropie induite a déjà été largement étudié ([17a]). Il est admis que la difficulté essentielle, introduite par les grandes transformations, concerne la prise en compte des rotations, et donc le choix de la dérivée objective dans les lois d'évolution des variables internes. On suppose donc que les fonctions f , h et l sont isotropes de leurs arguments. La forme eulérienne du comportement est alors:

$$f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \leq 0 \quad (19.a)$$

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \quad (19.b)$$

$$D\alpha/Dt = \lambda l(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \quad (19.c)$$

où $D\alpha/Dt$ est une dérivée objective en référentiel tournant définie par $\bar{\mathbf{W}}_0$ dont la loi d'évolution est donnée par l'une des formes (14), (15), (16.a), (16.b), (17.a) ou (17.b) dans lesquelles toutes les fonctions sont isotropes de leurs arguments.

La dérivation de la fonction seuil (condition de "consistance") permet de calculer λ soit:

$$\lambda = \langle (\partial f / \partial \boldsymbol{\tau}) : (D\boldsymbol{\tau} / Dt) \rangle [-(\partial f / \partial \alpha) : 1]^{-1} \quad (20)$$

où $\langle \rangle$ indique la partie positive et où l'on a supposé que $-(\partial f / \partial \alpha) : 1 > 0$. La relation (20) s'obtient en remarquant que la dérivée d'une fonction isotrope de n tenseurs $f(x_i)$ s'écrit quelle que soit la dérivée en rotation D/Dt :

$$\dot{f} = \sum (\partial f / \partial x_i) (Dx_i / Dt) \quad (21)$$

On peut alors récrire (19.b) sous une forme différentielle utilisable dans les codes de calcul:

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} : D\boldsymbol{\tau} / Dt \quad (19.b \text{ bis})$$

$$\begin{aligned} L_{ijkl} &= [-(\partial f / \partial \alpha) : 1]^{-1} h_{ij} \partial f / \partial \tau_{kl} && : \text{en charge} \\ &= 0 && : \text{en décharge} \end{aligned}$$

Le choix du référentiel tournant n'intervient donc que par la dérivée objective D/Dt dans (19.c) et éventuellement dans (19.b bis). De très nombreux travaux ont été consacrés au cas de l'érouissage cinématique (le modèle le plus simple rendant compte d'une certaine anisotropie induite) que nous allons aborder au paragraphe suivant. De manière plus générale, tous les résultats que nous allons décrire et commenter resteront valables dans le cas d'une seule variable interne tensorielle α , tenseur symétrique du second ordre.

B) ECROUISSAGE CINEMATIQUE

On trouvera dans [17a] ou [18b] un exposé plus détaillé sur la formulation thermodynamique de l'écroissage cinématique. En partant de l'écriture de l'énergie libre ψ que l'on suppose fonction isotrope de α : $\psi(\alpha)$, la dissipation s'écrit:

$$\Phi = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \mathbf{X} : D\alpha/Dt \geq 0 \quad \mathbf{X} = \rho_0 \partial\psi/\partial\alpha \quad (22)$$

où l'on a remplacé $\dot{\alpha}$ par la dérivée objective $D\alpha/Dt$, cette dérivée devant vérifier la condition

$$\mathbf{X} : D\alpha/Dt = \mathbf{X} : \dot{\alpha} \quad , \quad (23)$$

qui est satisfaite par toute dérivée en rotation (voir (21)) (dans la suite on prendra $\mathbf{X} = \beta\alpha$).

En supposant un critère de type von Mises avec écroissage cinématique ($f(\boldsymbol{\tau}-\mathbf{X})$), l'hypothèse des matériaux standard généralisés donne les lois d'évolution pour \mathbf{D} et α :

$$\mathbf{D}/|\mathbf{D}| = (\boldsymbol{\tau}-\mathbf{X})^D / |(\boldsymbol{\tau}-\mathbf{X})^D| \quad (24.a)$$

$$|\mathbf{D}| = \langle (\boldsymbol{\tau}-\mathbf{X})^D : (D\boldsymbol{\tau}/Dt) \rangle / (\beta |(\boldsymbol{\tau}-\mathbf{X})^D|) \quad (24.b)$$

$$D\alpha/Dt = \mathbf{D} \quad (24.c)$$

L'utilisation de la dérivée de Jaumann (référentiel corotationnel) dans la relation (24.c), aboutit à des oscillations (dont la période est indépendante du matériau) dans la réponse contrainte de cisaillement (τ) - cisaillement (γ), au cours d'un cisaillement simple [43] (ou d'une torsion [17a]). Ces oscillations s'expliquent par le fait qu'au cours du cisaillement, le référentiel corotationnel tourne indéfiniment avec une vitesse égale à $\dot{\gamma}/2$. C'est pour éliminer ces oscillations que de nombreux auteurs ont proposé d'utiliser d'autres dérivées objectives ou de modifier la relation (24.c).

Il faut signaler que les dérivées convectives (covariante ou contravariante) ainsi que celle de Truesdell ne vérifient pas les relations (21) ou (22) et ne permettent donc pas d'écrire la relation (24.b); leur utilisation dans la relation (24.c) ([2]) fait perdre au modèle son assise thermodynamique. Il a été aussi montré [23] que l'utilisation de la dérivée de Jaumann en ajoutant un terme de restauration à la partie droite de (24.c) permet d'éliminer les oscillations; mais dans ce cas on sort du cadre de l'écroissage cinématique linéaire. Reste maintenant l'utilisation des dérivées en rotation qui correspond à une formulation en référentiel tournant. La vitesse de rotation de ces référentiels doit être inférieure à celle du référentiel corotationnel (en cisaillement simple); plusieurs dérivées ont été proposées:

a) Le choix de la dérivée en rotation propre (référentiel en rotation propre ($\mathbf{Q}=\mathbf{R}$)) ([14b-c], [23], etc...) permet d'éliminer ces oscillations. Ceci s'explique par le fait que le référentiel en rotation propre suit mieux les rotations des directions matérielles (en moyenne) que le référentiel corotationnel. En particulier, la rotation de ce référentiel tend vers une limite ($\pi/2$) quand le cisaillement tend vers l'infini (voir figure I.5). On a montré au chapitre I que, dans une cinématique plane, la rotation du référentiel tournant est une moyenne (lagrangienne) des rotations des directions matérielles. Le choix du référentiel en rotation propre semble alors être un choix phénoménologique satisfaisant.

b) Dans le cas d'une cinématique plane, Lee et ses co-auteurs ([30] [34]) ont proposé de choisir comme référentiel tournant celui qui, à chaque instant, a la même vitesse de rotation que la direction matérielle coïncidant avec la direction principale de plus grande valeur propre de α . Cette proposition permet d'éliminer les oscillations en cisaillement simple. Nous signalons que la rotation d'un tel référentiel tend vers l'infini quand le cisaillement γ tend vers l'infini.

c) Dans un article plus récent [30c], Lee préconise, pour ceux qui préfèrent l'utilisation du référentiel en rotation propre, de prendre plutôt un référentiel ayant une vitesse de rotation dans un cisaillement simple égale à la moitié de celle du référentiel en rotation propre; c'est alors un référentiel qui a la même vitesse de rotation que les directions principales de \mathbf{V} . L'extension de ce référentiel dans une cinématique tridimensionnelle aboutit au référentiel que l'on a appelé au chapitre I référentiel principal des déformations (voir figure I.5).

d) Selon la théorie de la rotation plastique, et en utilisant les théorèmes de représentation des fonctions isotropes, on peut écrire la forme générale des fonctions \mathbf{a} ou \mathbf{b} dans les relations (17). Si on se limite au terme $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\alpha})$ (ou $(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})$), on obtient une loi d'évolution pour $\bar{\mathbf{W}}_q$ sous la forme:

$$\bar{\mathbf{W}}_q = \lambda \eta (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\alpha}) = a (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}) \quad (25)$$

le scalaire a pouvant être fonction des invariants principaux de $\boldsymbol{\alpha}$. L'égalité entre les deux derniers termes de (25) s'obtient à partir de la relation (24.a). Ce cas a été étudié en détail par Dafalias [14e] ainsi que par Loret [35] et Onat [44]. Différentes justifications de cette relation peuvent être trouvées dans ces références. Selon la forme de la fonction a (ou η), on peut avoir différents comportements:

- Si l'on prend $a = 1/\sqrt{2\text{tr}\boldsymbol{\alpha}^2}$, on retrouve en cisaillement simple la vitesse de rotation proposée par Lee (cas b) [14e].
- Si l'on suppose que a est une constante, on peut retrouver une réponse en cisaillement simple oscillatoire ou non, selon la valeur de a (voir [14e]).
- Dans une étude systématique du cisaillement simple, toujours avec écrouissage cinématique, Paulun et Pecherski ([45] [46]) ont proposé d'utiliser un référentiel tournant ayant, en cisaillement simple, une vitesse de rotation proportionnelle à une direction matérielle donnée. Le coefficient de proportionnalité est choisi de telle manière que la vitesse de rotation de ce référentiel soit, au départ, égale à celle du référentiel corotationnel. En simulant des essais avec des choix différents de la direction matérielle, ils ont constaté que ce choix n'influe pas beaucoup sur la réponse contraintes déformations et ils ont donc choisi la direction matérielle qui est, au départ, confondue avec l'axe 2 du cisaillement simple. Ils ont ensuite étendu ce modèle au cas tridimensionnel sous la forme (25) avec:

$$a = \frac{3\sqrt{3} \bar{\epsilon}^2 \dot{\bar{\epsilon}}}{\sqrt{2(1+3\bar{\epsilon}^2)} |(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})|} \quad \text{si } |(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})| \neq 0 \quad (26)$$

$$= 0 \quad \text{si } |(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})| = 0$$

avec:

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{2/3} |\mathbf{D}|$$

e) Il est possible de formuler l'écrouissage cinématique d'une autre manière, en supposant que la variable interne d'écrouissage est la déformation plastique (voir paragraphe précédent). Le tenseur $\boldsymbol{\alpha}$ doit alors être une fonction isotrope de \mathbf{V} . Différentes mesures de la déformation plastique peuvent être proposées (on trouvera dans [17a], [18a,b,c] et [49e] la formulation thermodynamique de cette approche):

- Si l'on choisit la mesure logarithmique ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}$), ceci revient à choisir comme référentiel tournant le référentiel triaxial puisque dans ce cas $D\mathbf{v}/Dt = \mathbf{D}$.
- Si l'on choisit $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{1})$ [17a], il n'existe aucun référentiel tournant tel que $D\boldsymbol{\alpha}/Dt = \mathbf{D}$. Ce cas revient à écrire [27]:

$$d^c\boldsymbol{\alpha}/dt = \mathbf{D} \quad (27)$$

où $d^c\boldsymbol{\alpha}/dt$ est la dérivée convective contravariante de $\boldsymbol{\alpha}$; ce n'est donc pas une dérivée en rotation. On peut écrire ce modèle dans le cadre de la formulation en référentiel tournant en modifiant la loi d'évolution de $\boldsymbol{\alpha}$ puisque la relation (27) est équivalente à $\boldsymbol{\alpha}^j = \mathbf{D} + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D} + \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})$.

On peut donc conclure que finalement, les différences entre ces modèles se ramènent à différentes hypothèses faites sur la rotation du référentiel tournant.

C) LA DEFORMATION PLASTIQUE EST LA VARIABLE D'ECROUISSAGE

La plupart des modèles avec anisotropie induite font intervenir une seule variable interne tensorielle, et éventuellement d'autres variables scalaires p . Parmi ces modèles, beaucoup supposent que cette variable interne est la déformation plastique (ou en rigide plastique, la déformation totale [4]). C'est une hypothèse très discutée (la déformation plastique n'est pas une variable d'état, puisque le chemin cinématique suivi influe en général sur la réponse), mais permet, en première approximation, de rendre compte d'une anisotropie induite, tout en s'affranchissant du choix d'un référentiel tournant (la variable interne est définie directement et non pas par une loi d'évolution). Le problème consiste à choisir une mesure adéquate des déformations. En suivant la philosophie du formalisme en référentiel tournant, cette mesure doit être eulérienne par ses valeurs propres et lagrangienne par son orientation. Si l'on choisit comme valeurs propres, le logarithme des allongements principaux, la déformation sera alors définie par $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v} \mathbf{Q}$ où \mathbf{v} est le tenseur des déformations logarithmiques de Hencky, et \mathbf{Q} la rotation définissant le référentiel tournant. Il serait intéressant de choisir comme référentiel tournant celui où $\bar{\mathbf{v}}$ serait la variable duale de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ (par rapport à l'énergie de déformation). Pour cela il faut que $\mathbf{D} : \boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{D}} : \bar{\boldsymbol{\tau}}$ soit égal à $\bar{\mathbf{v}} : \bar{\boldsymbol{\tau}}$. Ce choix correspond au référentiel triaxial défini par la rotation \mathbf{Q}_T et dans lequel on a $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{D}}$ (§1.2.2). Un modèle initialement isotrope avec anisotropie induite sera alors défini par:

$$f = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, p) \leq 0 \quad (28.a)$$

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, p) \quad (28.b)$$

$$\dot{p} = \lambda l(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, p) \quad (28.c)$$

Il est bien évident que ce modèle est un cas particulier de (19), la loi d'évolution de \mathbf{Q}_T est donnée, au chapitre I, par les relations (I.43) et (I.44). Tous les modèles petites déformations basés sur l'hypothèse où la déformation est la seule variable interne tensorielle peuvent s'étendre simplement aux grandes déformations selon le formalisme (28). Le modèle particulier proposé au chapitre II (II.17-18), s'écrit automatiquement selon (28).

Il est possible de donner un statut thermodynamique à ce modèle, si l'on suppose que l'énergie libre dépend de \mathbf{v} et d'autres variables internes scalaires p :

$$\psi = \psi(\mathbf{v}, p) \quad (29.a)$$

la dissipation s'écrit alors:

$$(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}) : \mathbf{D} - R \dot{p} \leq 0 \quad ; \quad \mathbf{x} = \rho_0 \partial \psi / \partial \mathbf{v} \quad ; \quad R = \rho_0 \partial \psi / \partial p \quad (29.b)$$

Les quantités $(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{x})$ et R sont alors les forces thermodynamiques. Selon la procédure des matériaux standard généralisés, on postule un critère sous la forme:

$$f = f((\boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}), R; \mathbf{v}, p) \leq 0 \quad (30)$$

La dépendance de f par rapport à \mathbf{x} rend compte d'un écrouissage de type cinématique, alors que la présence de \mathbf{v} permet de tenir compte d'une anisotropie induite plus générale.

La loi de normalité permet de donner les fonctions \mathbf{h} et l :

$$\mathbf{h} = \partial f / \partial (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}) \quad ; \quad l = \partial f / \partial (-R) \quad (31)$$

3.2. ORTHOTROPIE INITIALE ET ECROUISSAGE ISOTROPE

A) CAS GENERAL

On suppose maintenant que le comportement est initialement orthotrope avec un écrouissage isotrope (ou plasticité parfaite): les variables internes d'écrouissage sont toutes des scalaires (ou des invariants scalaires de tenseurs) que l'on notera p . Le matériau restant toujours orthotrope, on note $\bar{\mathbf{M}}_i$ et $\bar{\mathbf{m}}_i$ les directions d'orthotropie respectivement à l'instant initial (C_0) et à l'instant t (C_t). Les fonctions $\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{h}}$ et $\bar{\mathbf{l}}$ étant orthotropes de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, elles peuvent donc s'écrire sous une forme isotrope des arguments $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{M}_i)$ où les \mathbf{M}_i sont les tenseurs unitaires définissant les directions initiales d'orthotropie ($\mathbf{M}_i = \bar{\mathbf{M}}_i \otimes \bar{\mathbf{M}}_i$, sans sommation). La rotation \mathbf{Q} définissant le référentiel tournant est celle qui permet le passage des $\bar{\mathbf{M}}_i$ aux $\bar{\mathbf{m}}_i$, autrement dit, c'est \mathbf{Q} qui permet de connaître l'orientation des directions d'orthotropie au cours du temps:

$$\bar{\mathbf{m}}_i = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{M}}_i \quad \mathbf{m}_i = \mathbf{Q} \mathbf{M}_i \mathbf{Q}^T \quad (32)$$

Il est évident que la rotation \mathbf{Q} est la seule information supplémentaire sur le comportement et qu'elle ne peut pas être déduite d'un modèle petites perturbations puisque, dans ce cas, on suppose que les directions d'orthotropie restent infiniment voisines et donc constantes.

Le comportement peut alors s'écrire sous la forme générale suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}_i, p) &\leq 0 \\ \mathbf{D} &= \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}_i, p) \\ p &= \lambda \mathbf{l}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}_i, p) \end{aligned} \quad (33)$$

où les fonctions \mathbf{f} , \mathbf{h} et \mathbf{l} sont isotropes des arguments $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}_i)$. Les variables tensorielles d'orientation \mathbf{m}_i sont définies par (32), leurs lois d'évolution peuvent s'écrire simplement:

$$\dot{\bar{\mathbf{m}}}_i = \dot{\mathbf{M}}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_i^j = \mathbf{m}_i \bar{\mathbf{W}}_Q - \bar{\mathbf{W}}_Q \mathbf{m}_i \quad (34)$$

Il est possible, en utilisant la théorie de représentation des fonctions tensorielles anisotropes, d'écrire la forme générale des fonctions constitutives du modèle; mais pour des raisons pratiques, nous allons nous limiter au cas particulier d'une plasticité incompressible avec un critère de plasticité quadratique en contrainte et les lois de normalité associées (plasticité de Hill).

B) PLASTICITE DE HILL

On se limite à un comportement plastique incompressible avec un critère orthotrope et quadratique en contrainte, dont la forme générale (donnée au chapitre II (II.15)) s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}_i, p) - \sigma_s \leq 0 \\ \mathbf{f}_0 &= \{A_{ij} (\mathbf{m}_i \boldsymbol{\tau}^D) : (\boldsymbol{\tau}^D \mathbf{m}_j) + B_{ij} (\boldsymbol{\tau}^D : \mathbf{m}_i) (\boldsymbol{\tau}^D : \mathbf{m}_j)\}^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

avec:

$$[A_{ij}] : \begin{bmatrix} 0 & N & M \\ N & 0 & L \\ M & L & 0 \end{bmatrix} \quad [B_{ij}] : \begin{bmatrix} G+H & -H & -G \\ -H & H+F & -F \\ -G & -F & F+G \end{bmatrix}$$

Les coefficients L , M , N , F , G et H étant les coefficients de Hill classiques; ils pourront, comme σ_s , dépendre des variables internes p .

La loi de normalité associée au critère (35) permet de préciser la fonction \mathbf{h} :

$$\mathbf{h} = [A_{ij} \mathbf{m}_i \boldsymbol{\tau}^D \mathbf{m}_j + B_{ij} (\mathbf{m}_i : \boldsymbol{\tau}^D) \mathbf{m}_j] / \sigma_s \quad (36)$$

Il est clair qu'en remplaçant dans (35) $\boldsymbol{\tau}$ par $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ et \mathbf{m}_i par $\bar{\mathbf{m}}_i = \mathbf{M}_i$, la définition de f_0 reste invariante et que la loi d'évolution $\mathbf{h} = \partial f / \partial \boldsymbol{\tau}$ est équivalente à $\bar{\mathbf{h}} = \partial \bar{f} / \partial \bar{\boldsymbol{\tau}}$.

Reste maintenant à postuler le choix du référentiel tournant, ce qui équivaut, dans ce cas, à postuler l'évolution des directions principales d'orthotropie. On retrouve les possibilités de choix discutées plus haut: soit un référentiel cinématique, soit une loi d'évolution selon la théorie de la rotation plastique. Dans ce dernier cas, $\bar{\mathbf{w}}_0$ s'écrit (\mathbf{a} et \mathbf{b} étant isotropes de leurs arguments):

$$\bar{\mathbf{w}}_0 = \lambda \mathbf{a}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}_i, p) = \mathbf{b}(\mathbf{D}, \mathbf{m}_i, p)$$

- Un premier choix simple consiste à supposer que \mathbf{b} est linéaire en \mathbf{D} ; ce qui permet alors d'écrire la forme générale de $\bar{\mathbf{w}}_0$:

$$\bar{\mathbf{w}}_0 = 2a_1 [\mathbf{m}_2 \mathbf{D} \mathbf{m}_3]^A + 2a_2 [\mathbf{m}_3 \mathbf{D} \mathbf{m}_1]^A + 2a_3 [\mathbf{m}_1 \mathbf{D} \mathbf{m}_2]^A \quad (37)$$

les scalaires a_i pouvant dépendre de p .

- Un deuxième choix peut être fait de la façon suivante (cas 2 du paragraphe 1.2.C):

On suppose l'existence d'un potentiel plastique f , fonction quadratique orthotrope d'un tenseur non symétrique $\boldsymbol{\Sigma}$ ($\text{tr} \boldsymbol{\Sigma} = 0$) telle que pour $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\tau}^D$ on retrouve le critère (35). La forme générale d'une telle fonction est:

$$\begin{aligned} f_0^2(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{m}_i) = & A_{ij}(\mathbf{m}_i \boldsymbol{\Sigma}^S) : (\boldsymbol{\Sigma}^S \mathbf{m}_j) + B_{ij}(\boldsymbol{\Sigma}^S : \mathbf{m}_i) (\boldsymbol{\Sigma}^S : \mathbf{m}_j) \\ & + c_{ij}(\mathbf{m}_i \boldsymbol{\Sigma}^S) : (\boldsymbol{\Sigma}^A \mathbf{m}_j) + d_{ij}(\mathbf{m}_i \boldsymbol{\Sigma}^A) : (\boldsymbol{\Sigma}^A \mathbf{m}_j) \end{aligned} \quad (35\text{bis})$$

Les matrices A_{ij} et B_{ij} sont définies comme en (35), c_{ij} est une matrice antisymétrique et d_{ij} symétrique avec $d_{ij} = 0$ pour $i=j$. Il est clair que pour $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\tau}^D$ ($\boldsymbol{\Sigma}^A = 0$), on retrouve le critère (35). On écrit maintenant:

$$\mathbf{h} = [\partial f / \partial \boldsymbol{\Sigma}]^S = \partial f / \partial \boldsymbol{\Sigma}^S \quad \text{pour } \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^S = \boldsymbol{\tau}^D \quad (38.a)$$

$$\mathbf{a} = [\partial f / \partial \boldsymbol{\Sigma}]^A = \partial f / \partial \boldsymbol{\Sigma}^A \quad \text{pour } \boldsymbol{\Sigma}^A = 0 \quad (38.b)$$

La relation (38.a) donne exactement (36) alors que (38.b) permet de définir $\bar{\mathbf{w}}_0$ soit:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_0 &= \lambda \mathbf{a} = \lambda c_{ij} [\mathbf{m}_i \boldsymbol{\tau}^D \mathbf{m}_j] \\ &= \lambda [2c_1 (\mathbf{m}_2 \boldsymbol{\tau}^D \mathbf{m}_3)^A + 2c_2 (\mathbf{m}_3 \boldsymbol{\tau}^D \mathbf{m}_1)^A + 2c_3 (\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\tau}^D \mathbf{m}_2)^A] \end{aligned} \quad (39)$$

En utilisant les relations (33) et (36), il est facile de voir que $\lambda(\mathbf{m}_i \boldsymbol{\tau}^D \mathbf{m}_j)$ est proportionnelle à $(\mathbf{m}_i \mathbf{D} \mathbf{m}_j)$; on retrouve alors la forme (37) pour le tenseur $\bar{\mathbf{w}}_0$.

Nous présentons, à la fin de ce chapitre, quelques illustrations de ce comportement.

3.3. ANISOTROPIE INITIALE ET INDUITE

C'est le cas général. Nous allons nous intéresser à la classe des modèles avec orthotropie initiale et une seule variable interne tensorielle d'écrouissage α intervenant dans le comportement (par exemple le modèle particulier proposé au chapitre II):

$$f = f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_i, p) \leq 0 \quad (40. a)$$

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_i, p) \quad (40. b)$$

$$D\boldsymbol{\alpha}/Dt = \lambda \mathbf{l}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_i, p) \quad (40. c)$$

$$\dot{p} = \lambda l(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_i, p) \quad (40. d)$$

$$D\mathbf{m}_i/Dt = 0 \quad (\mathbf{m}_i = \mathbf{Q} \mathbf{M}_i \mathbf{Q}^T) \quad (40. e)$$

Les fonctions f , l , \mathbf{h} et \mathbf{l} sont isotropes de leurs arguments. Les tenseurs \mathbf{M}_i définissent les directions initiales d'orthotropie.

Les travaux de Boehler et co-auteurs ([4] [5] [6]) sur les tôles prédéformées peuvent être intégrés dans ce cadre (la forme générale de f ainsi que de \mathbf{h} est donnée dans [6]). La variable interne $\boldsymbol{\alpha}$ est alors prise égale à la déformation plastique, elle doit donc être une fonction isotrope bijective de \mathbf{V} ($\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{V})$) ou bien suivie par $D\boldsymbol{\alpha}/Dt = \mathbf{D}(\mathbf{l} = \mathbf{h})$; l'utilisation, dans ce cas, du référentiel triaxial équivaut à prendre $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}$.

Reste à postuler le choix du référentiel tournant. Les référentiels cinématiques peuvent toujours être utilisés et l'on peut aussi supposer une loi d'évolution pour $\bar{\mathbf{w}}_Q$:

$$\bar{\mathbf{w}}_Q = \lambda \mathbf{a}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_i, p) = \mathbf{b}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_i, p) \quad (41)$$

Les fonctions \mathbf{a} et \mathbf{b} étant isotropes de leurs arguments, on peut écrire leur forme générale en utilisant la théorie de représentation des fonctions tensorielles anisotropes.

- UN MODELE PARTICULIER

Nous reprenons les bases du modèle particulier proposé au paragraphe 2.3. E du chapitre II (relations 17). Son extension aux grandes déformations se fait en remplaçant $\boldsymbol{\sigma}$ par $\boldsymbol{\tau}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ par \mathbf{D} et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ par $D\boldsymbol{\alpha}/Dt$ (dérivée en référentiel tournant relatif à \mathbf{Q}) ce qui donne:

$$f = \sqrt{(3/2) |\mathbf{H}|} - \sigma_s(p) \leq 0 \quad (42. a)$$

$$\mathbf{H} = a_{ij} (\mathbf{m}_i \mathbf{H}_2 \mathbf{m}_j)^S + b_{ij} \text{tr}(\mathbf{H}_2 \mathbf{m}_j) \mathbf{m}_i \quad \mathbf{m}_i = \mathbf{Q} \mathbf{M}_i \mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{H}_2 = \{ [(\boldsymbol{\sigma} - \beta \boldsymbol{\alpha})^D (\mathbf{1} + a \boldsymbol{\alpha})]^S \}^D$$

$$\mathbf{D} = \lambda \partial f / \partial \boldsymbol{\tau} \quad \dot{p} = \lambda \quad (42. b)$$

$$D\boldsymbol{\alpha}/Dt = \boldsymbol{\alpha}^J - \boldsymbol{\alpha} \bar{\mathbf{w}}_Q + \bar{\mathbf{w}}_Q \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{D} \quad \bar{\mathbf{w}}_Q = \mathbf{w} - \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (42. c)$$

Plusieurs extensions du modèle petites déformations (II.17) basées sur les relations (42) et un choix particulier du référentiel tournant (\mathbf{Q}) peuvent être proposées.

4. SOLLICITATIONS PLANES SUR UN MATERIAU ORTHOTROPE

4.1. CAS GENERAL

A) LOIS D'EVOLUTION

On considère un matériau orthotrope, ayant un comportement de type plasticité de Hill (§ 2.2.b), soumis à une sollicitation plane (§ 1.3.) dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , sachant que la direction \vec{e}_1 est une direction matérielle. On désigne par \vec{M}_i et \vec{m}_i , les directions d'orthotropie à l'instant initial et à l'instant t respectivement. On suppose que la direction \vec{m}_3 est confondue avec \vec{e}_3 ; les composantes T_{13} et T_{23} du tenseur de contrainte de Cauchy \mathbf{T} sont donc nulles. Le comportement étant incompressible, la loi de comportement ne permet de déterminer \mathbf{T} qu'à une pression hydrostatique près. Le gradient \mathbf{F} et \mathbf{T} s'écrivent alors dans \vec{e}_i :

$$\mathbf{F}: \begin{bmatrix} f_1 & f_1\gamma & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}: \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + T_{33} \mathbf{1}$$

On désigne par ψ l'orientation du repère d'observation \vec{e}_i par rapport au repère d'orthotropie (\vec{m}_i) . L'angle ψ est donné par:

$$\psi(t) = \psi_0 + \alpha(t) \quad (43)$$

l'angle $\alpha(t)$ définit le référentiel tournant choisi, et ψ_0 l'orientation initiale du repère d'orthotropie (Fig. III.1, p. 58).

Le comportement est défini par le critère (35) et la loi de normalité associée. La fonction \mathbf{h} permettant d'écrire la loi d'évolution plastique est donnée par (36). Les lois d'évolution pour ϵ_i et γ s'écrivent alors:

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda h_{11} \quad ; \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda h_{22} \quad ; \quad \dot{\gamma} = \lambda 2h_{12}/f \quad (44)$$

où $\epsilon_i = \text{Log} f_i$, $\epsilon_3 = -(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, $f = f_1/f_2$ et h_{ij} sont les composantes de \mathbf{h} relatives à \vec{e}_i . En cas d'écoulement plastique, le critère (35) s'écrit:

$$h_{11}\sigma_1 + h_{22}\sigma_2 + 2h_{12}\tau = \sigma_s \quad (45)$$

Les composantes de \mathbf{h} (dans le repère \vec{e}_i) en fonction de σ_1 , σ_2 , τ et ψ s'obtiennent à partir de (36).

On obtient:

$$\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{22} \\ \sqrt{2} h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1/\sigma_s \\ \sigma_2/\sigma_s \\ \sqrt{2} \tau/\sigma_s \end{bmatrix} \quad (46)$$

avec:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (G+H) - d_1 \sin^2 2\psi + 2d_2 \sin^2 \psi & ; & \quad c_{22} = (H+F) - d_1 \sin^2 2\psi - 2d_2 \sin^2 \psi \\ c_{12} &= c_{21} = -H + d_1 \sin^2 2\psi & ; & \quad c_{33} = N + 2d_2 \sin^2 2\psi \\ c_{23} &= c_{32} = (d_1 \sin 4\psi + d_2 \sin 2\psi)/\sqrt{2} & ; & \quad c_{31} = c_{13} = (-d_1 \sin 4\psi + d_2 \sin 2\psi)/\sqrt{2} \\ d_1 &= (F+G+4H-2N)/4 & & \quad d_2 = (F-G)/2 \end{aligned}$$

Pour définir complètement le comportement, il reste à se donner les lois d'évolution pour les variables d'érouissage et pour le référentiel tournant. On supposera dans toute la suite, qu'une seule variable interne p intervient dans le comportement. Sa loi d'évolution est (normalité):

$$\sigma_s = \sigma_s(p) \quad ; \quad \dot{p} = \lambda = \mathbf{D} : \boldsymbol{\tau} / \sigma_s \quad (47)$$

B) REFERENTIELS TOURNANTS

Le choix du référentiel tournant, dans ce cas (orthotropie), équivaut au choix de la rotation des directions principales d'orthotropie au cours de la déformation. En se limitant à une forme linéaire en \mathbf{D} pour $\bar{\mathbf{W}}_0$, l'évolution de $\alpha = \psi - \psi_0$ se réduira toujours à la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = \dot{\psi} &= A (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) + B f \dot{\gamma} / 2 \\ &= \lambda [A (h_{11} - h_{22}) + B h_{12}] \end{aligned} \quad (48)$$

où A et B sont fonctions des arguments (f, γ, ψ) .

- Référentiels cinématiques

Le choix du référentiel corotationnel (modèle J) équivaut à supposer que les directions d'orthotropie ont une vitesse de rotation égale à la moyenne eulérienne des rotations matérielles (§1.3.3 relations (59.a) et (60)).

Le choix du référentiel en rotation propre (modèle R) équivaut à supposer que les directions d'orthotropie ont une vitesse de rotation égale à la moyenne lagrangienne des rotations matérielles (§1.3.3 relations (59.b) et (61)).

Le choix du référentiel principal des déformations (modèle V) équivaut à supposer que les directions d'orthotropie ont une vitesse de rotation égale à celle des directions principales de \mathbf{V} (§1.3.3 relations (59.c)).

L'utilisation du référentiel triaxial (modèle T) se justifie essentiellement dans le cas de l'anisotropie induite où l'on suppose que la variable interne d'érouissage est la déformation plastique (§3.2.c). Même si son utilisation pour l'orthotropie de Hill ne semble pas se justifier, nous le mentionnerons quand même (§1.3.3 relations (59.d)).

L'utilisation d'un référentiel matériel (§1.3.3 relation (59.e)) défini par une direction matérielle θ_0 (modèle M) en prenant $\psi_0 = \theta_0$, suppose que cette direction est une des directions d'orthotropie. Cette hypothèse est justifiable pour les matériaux fibrés (composites renforcés par fils par exemple).

- Théorie de la rotation plastique (Modèles P)

En cinématique plane, le seul terme non nul de (37) est le troisième; la loi d'évolution pour α qui en résulte est:

$$\dot{\alpha} = -a/2 \sin 2(\alpha + \psi_0) (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) + (1 - a \cos 2(\alpha + \psi_0)) f \dot{\gamma} / 2 \quad (49)$$

Le coefficient a (a_3 dans (37)) peut être fonction de la variable d'érouissage $p: a(p)$. Remarquons que le choix $a=1$ est équivalent au choix d'un référentiel défini par une direction matérielle $\bar{\mathbf{k}}$ confondue avec $\bar{\mathbf{m}}_1$ ($\theta = \psi$ dans (1.55) ou (1.59.e), modèle M). L'influence du coefficient a sur la rotation du référentiel tournant sera étudiée en cisaillement simple au paragraphe suivant. Nous choisirons, pour la suite, deux valeurs particulières de a que l'on supposera constante: $a=-1$ (Modèle P1) et $a=-2$ (Modèle P2).

Nous allons étudier, dans ce qui suit, la réponse de ce type de loi de comportement dans des sollicitations simples de cisaillement simple, de traction hors-axes et de torsion homogène de tube mince. La cinématique de ces essais est définie au paragraphe 4 du chapitre I. Les différents référentiels tournants qui seront utilisés sont ceux décrits ci-dessus dont la loi d'évolution sous la forme (48) est définie par les fonctions A et B comme suit:

Modèle J:	relations (I.59.a) ou (49) avec $a=0$
Modèle R:	relations (I.59.b)
Modèle V:	relations (I.59.c)
Modèle T:	relations (I.59.d)
Modèle M:	relations (I.59.e) ou (49) avec $a=1$
Modèle P1:	relations (49) avec $a=-1$
Modèle P2:	relations (49) avec $a=-2$

4.2. CISAILLEMENT SIMPLE

A) LOIS D'EVOLUTION

L'essai de cisaillement simple étant défini par $f_1=f_2=f_3=1, (\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3=0)$, les relations (44) impliquent $h_{11}=h_{22}=0$. En utilisant (46), on peut alors déterminer σ_1 et σ_2 en fonction de τ et ψ , soit:

$$\sigma_1 = \tau g_1(\psi) \quad \sigma_2 = \tau g_2(\psi) \quad (50)$$

$$g_1(\psi) = \sin 2\psi [\beta_2 + \beta_1 \cos 2\psi] / [1 + \beta_1 \sin^2 2\psi]$$

$$g_2(\psi) = \sin 2\psi [\beta_2 - \beta_1 \cos 2\psi] / [1 + \beta_1 \sin^2 2\psi]$$

avec:

$$\beta_1 = \frac{(F+G)N - 2(FG+GH+HF)}{2(FG+GH+HF)} \quad \beta_2 = \frac{(F-G)N}{2(FG+GH+HF)}$$

En utilisant (50), on peut écrire h_{12} en fonction uniquement de τ , ψ et des coefficients d'anisotropie. Le critère (45) permet alors de déterminer τ :

$$\tau = g(\psi) \tau_s \quad g(\psi) = [1 + \beta_1 \sin^2 2\psi]^{-1/2} \quad (51)$$

avec:

$$\tau_s = \sigma_s / \sqrt{2} N$$

L'écoulement influe sur l'évolution de τ_s , en fonction de γ , à travers la dépendance de σ_s par rapport à p , dont la loi d'évolution est donnée à partir de (47) par:

$$\dot{p} = \dot{\gamma} g(\psi) / \sqrt{2} N \quad (52)$$

B) ILLUSTRATIONS ET CONCLUSIONS

Dans toutes les simulations nous avons supposé que les coefficients d'anisotropie (F,G,H et N) restent constants. Mais même s'ils évoluent, les relations (50), (51) et (52) restent valables. Il faut, dans ce cas, proposer les relations de dépendance de ces coefficients par rapport à p .

Les relations (50), (51) et (52) montrent que la réponse $\tau(\gamma)$ à une sollicitation donnée, sera la composition de deux fonctions:

- La première ($g(\psi)$) est une fonction de ψ . Elle ne dépend que de l'anisotropie du matériau (pour un matériau isotrope $\beta_1 = \beta_2 = 0$). Elle exprime le fait que, pour un matériau orthotrope, la réponse dépend de l'orientation du chargement par rapport aux directions d'orthotropie. Par exemple, en plasticité parfaite ($\tau_s = \text{cte}$), le seuil τ dépend de l'orientation ψ de ce cisaillement par rapport aux directions d'orthotropie. La fonction $g(\psi)$ caractérise donc la "physique" du comportement.

- En revanche, la deuxième fonction ($\psi(\gamma)$) donne l'évolution de $\psi(t)$. Elle ne dépend que du choix du référentiel tournant; c'est la contribution "géométrique" apportée par les grandes transformations.

Ce résultat est illustré sur la figure III.2. où l'on a tracé graphiquement la courbe τ/τ_s pour une anisotropie, donc une courbe $g(\psi)$, fixée, et pour différents référentiels tournants (en prenant $\psi_0 = 0$).

La fonction $g(\psi)$ étant périodique (période $\pi/2$), l'allure de la réponse $\tau/\tau_s(\gamma)$ (oscillations ou non) dépend de l'évolution de ψ en fonction de γ (voir la figure I.4 montrant la fonction $\psi(\gamma)$ pour les différents référentiels cinématiques). On distingue 3 cas (on suppose que $\psi_0 = 0$,):

1- Si ψ tend vers l'infini avec γ (Modèles J et T), la courbe τ/τ_s oscille avec une amplitude égale à celle de $g(\psi)$. Elle est périodique si ψ est linéaire en γ (cas 1 sur la figure III.2).

2- Si ψ tend vers une limite finie quand γ tend vers l'infini (Modèles R, M et V), la courbe τ/τ_s se stabilise après un certain nombre de cycles, fonction de la limite de ψ (cas 2 sur la figure III.2).

3- Si la limite de ψ (pour γ infini) est inférieure à $\pi/4$ (Modèle V), la courbe τ/τ_s est alors monotone (cas 3 sur la figure III.2).

Pour les modèles P, l'allure de $\psi(\gamma)$ dépend du coefficient a . Dans un cisaillement simple ($f=1$), si l'on suppose que a est une constante, l'intégration de la relation (49), selon la valeur de a , donne:

$$a=1 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi_0 / (1 - \gamma \operatorname{tg} \psi_0) \quad ; \quad a=-1 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi_0 + \gamma$$

$$|a| < 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} [\arctg(K \operatorname{tg} \psi_0) + \gamma \sqrt{(1-a^2)}/2] / K$$

$$a > 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = [K_1 - K_2 \exp(\gamma \sqrt{(a^2-1)})] / K [K_1 + K_2 \exp(\gamma \sqrt{(a^2-1)})]$$

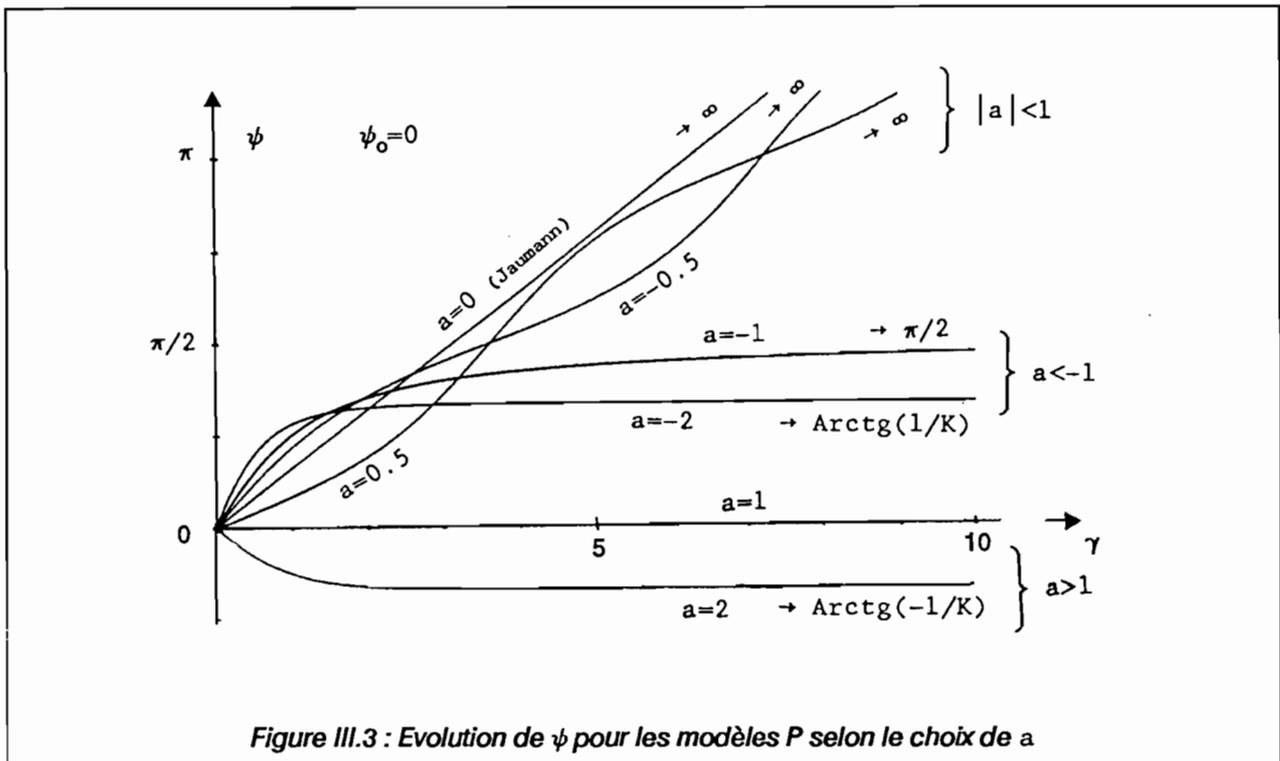
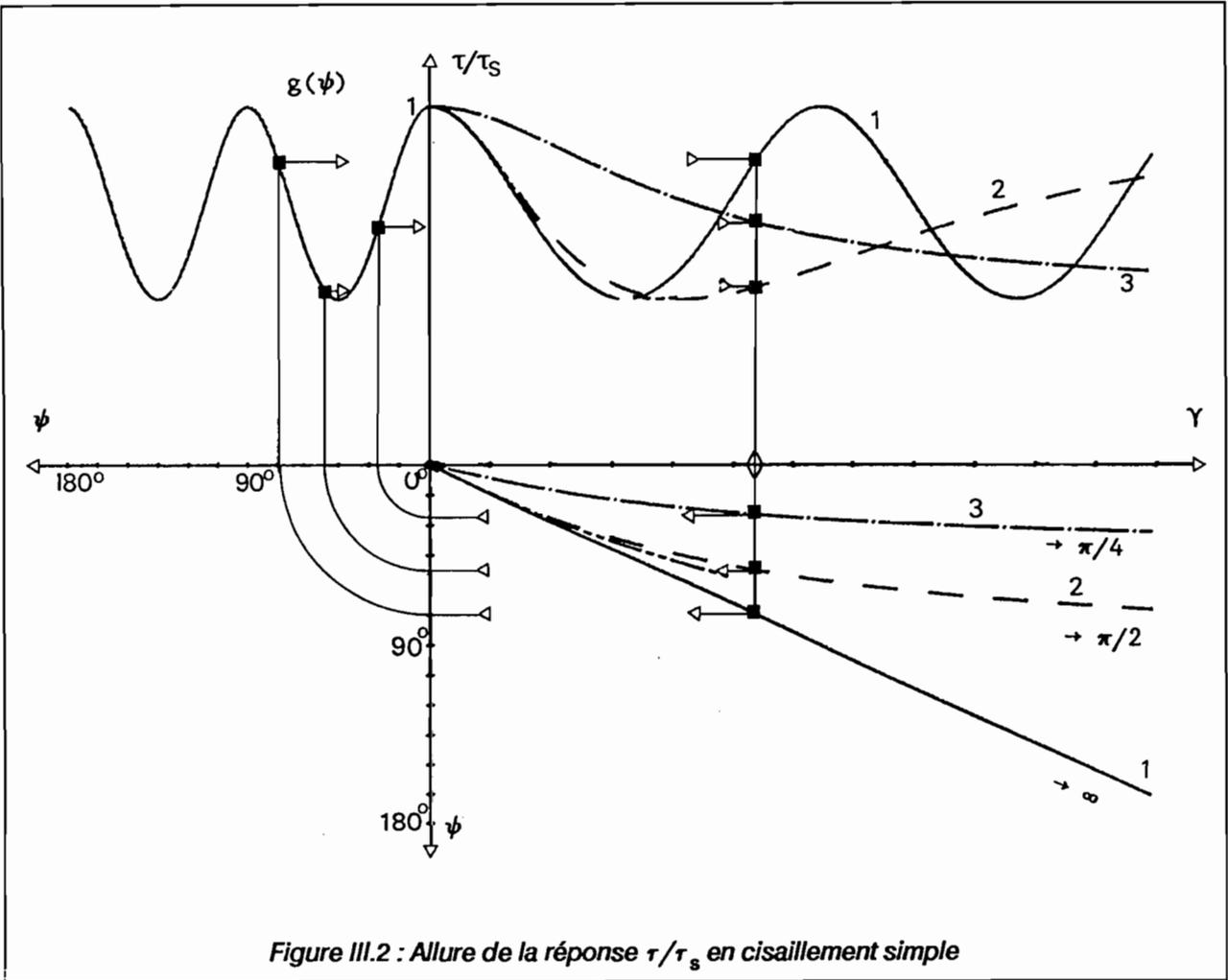
$$a < -1 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = [-K_2 + K_1 \exp(\gamma \sqrt{(a^2-1)})] / K [K_2 + K_1 \exp(\gamma \sqrt{(a^2-1)})]$$

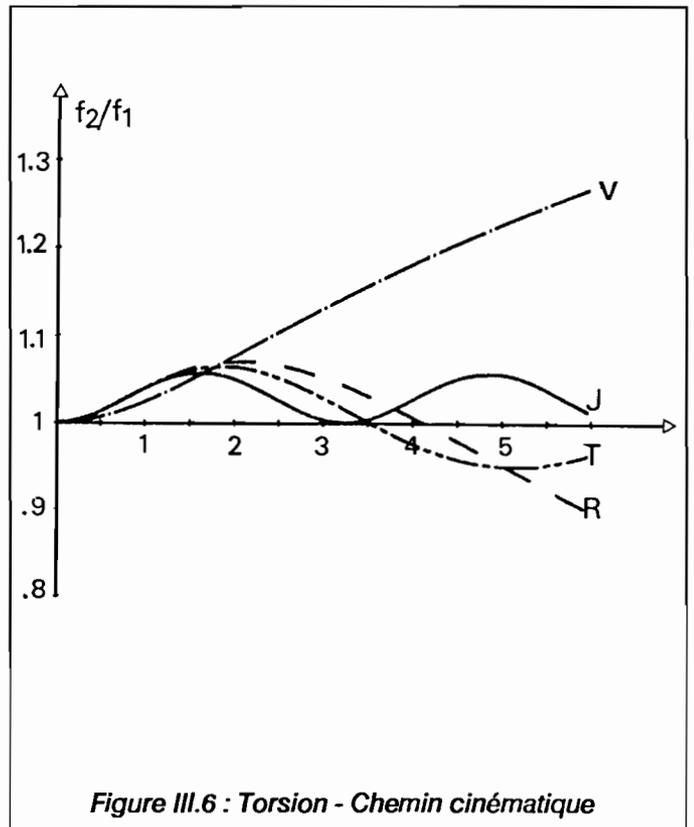
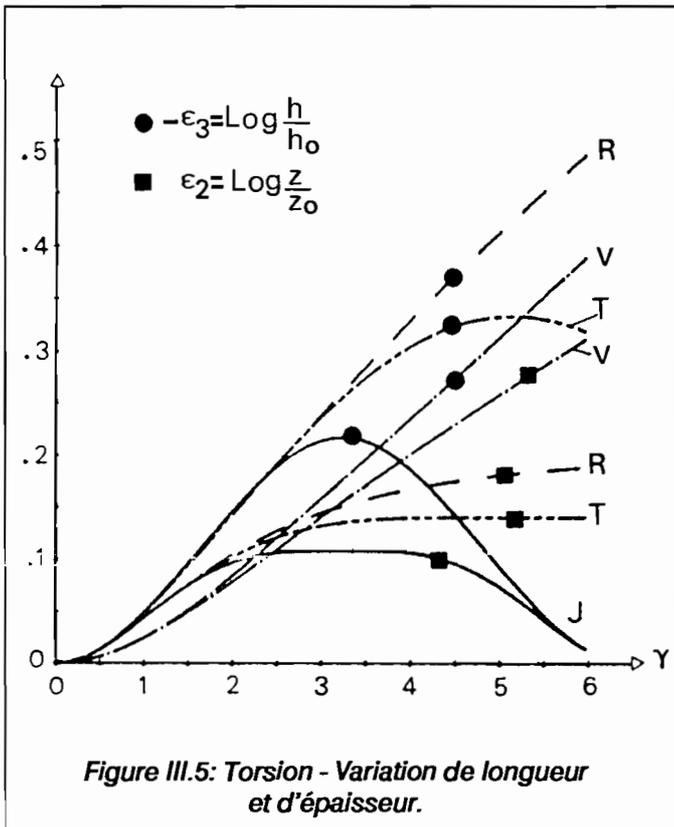
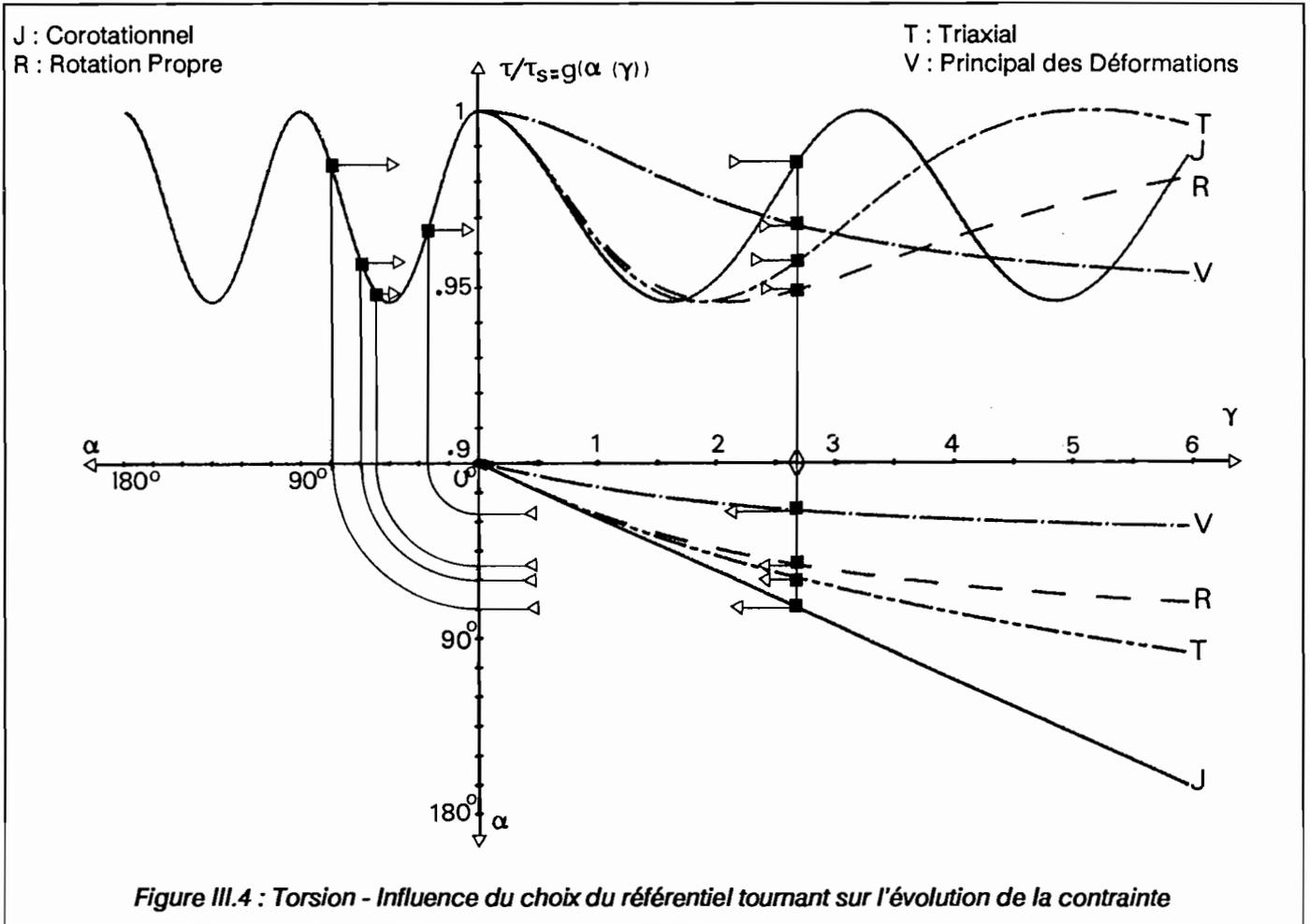
avec:

$$K = \sqrt{|(1+a)/(1-a)|} \quad ; \quad K_1 = 1 + K \operatorname{tg} \psi_0 \quad ; \quad K_2 = 1 - K \operatorname{tg} \psi_0$$

La figure III.3 montre l'allure de l'évolution de $\psi(\gamma)$ (pour $\psi_0 = 0$) selon la valeur de a . Nous choisirons pour la suite les deux modèles correspondants à $a = -1$ et $a = -2$.

Si l'on suppose que a est une fonction de p $a(p)$, il est possible d'identifier cette fonction si l'on réussit à réaliser un essai de cisaillement simple. En effet, en supposant connue la fonction d'écroutissage $\sigma_s(p)$ (identifiée à partir d'un essai de traction sur les axes par exemple) et la réponse expérimentale $\tau(\gamma)$, la relation (51) permet d'avoir $\psi(\gamma)$ donc $a(\gamma)$ et donc $a(p)$.





4.3. TORSION (CISSION PURE)

A) LOIS D'EVOLUTION

On simule maintenant un essai de torsion homogène sur un tube mince. La cinématique est définie au chapitre I paragraphe 4.3 (voir Fig. I.7). Le tenseur de contrainte \mathbf{T} est tel que $\sigma_1 = \sigma_2 = T_{33} = 0$. Les équations (44) donnent:

$$\begin{aligned} d\epsilon_1/d\gamma &= f \ c_{13}/c_{33} \ \sqrt{2} \\ d\epsilon_2/d\gamma &= f \ c_{23}/c_{33} \ \sqrt{2} \\ dp/d\gamma &= f \ (2c_{33})^{-1/2} \\ d\psi/d\gamma &= \text{dépend du réf. tournant} \end{aligned} \quad (53)$$

Les fonctions c_{ij} sont données, à partir de ψ et des coefficients d'anisotropie, par les relations (46).

Le système (53) s'intègre numériquement pour donner $\epsilon_1(\gamma)$, $\epsilon_2(\gamma)$, $p(\gamma)$ et $\psi(\gamma)$. Le critère permet d'avoir $\tau(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \tau &= g(\psi) \ \tau_s & \tau_s &= \sigma_s / \sqrt{2N} \\ g(\psi) &= (1 + d \sin^2 2\psi)^{-1/2} & d &= (F+G+4H-2N)/4N \end{aligned} \quad (54)$$

B) ILLUSTRATIONS

Ici encore, on constate que la réponse $\tau(\gamma)$ dépend de la composition de deux fonctions $\tau(\psi)$ et $\psi(\gamma)$; la première ne dépend que de l'anisotropie, elle ne fait pas intervenir le référentiel tournant; la seconde donne la rotation des axes d'orthotropie. La relation (54) est identique à (51) en cisaillement simple ; tout ce qui a été dit en cisaillement simple reste valable dans ce cas.

La figure III.4 montre bien l'influence du choix du référentiel tournant sur la réponse de la loi de comportement. L'amplitude d'oscillation de la courbe $g(\psi)$, et donc celle éventuelle de $\tau/\tau_s(\gamma)$, est directement liée au coefficient d'anisotropie d .

4.4. TRACTION HORS-AXES

A) LOIS D'EVOLUTION

La cinématique de l'essai de traction hors-axes est présentée au chapitre I, paragraphe 4.2 (voir Fig. I.6). Le tenseur \mathbf{T} est tel que seule la composante $\sigma_1 = \sigma$ est non nulle. les relations (44) donnent (sachant que $\epsilon_1 = \epsilon$ et $\epsilon_2 = -\eta$) :

$$d\eta/d\epsilon = g_1(\psi) = -c_{12}/c_{11} \quad (55.a)$$

$$d\gamma/d\epsilon = 2g_2(\psi) / f = \sqrt{2} \ c_{13}/fc_{11} \quad (55.b)$$

$$d\psi/d\epsilon = g_3(\psi, f, \gamma) = A(1+g_1) + Bg_2 \quad (55.c)$$

$$dp'/d\epsilon = g(\psi) = \sqrt{(G+H)} \ (c_{11})^{-1/2} \quad (55.d)$$

avec $p' = \sqrt{(G+H)}p$, et la fonction g_3 dépendant du choix du référentiel tournant (défini par les fonctions A et B). En utilisant le critère (45) on détermine $\sigma(\epsilon, \psi_0)$:

$$\sigma = \sigma_\psi = g(\psi) \sigma_0 \quad ; \quad \sigma_0 = \sigma_s / \sqrt{G+H} \quad (56)$$

la fonction scalaire σ_0 est le seuil en traction à $\psi=0$. La fonction g est donnée par:

$$g(\psi) = [1 + 2a_2 \sin^2\psi - a_1 \sin^2 2\psi]^{-1/2} \quad (57)$$

$$a_1 = (F+G+4H-2N)/4(G+H) \quad ; \quad a_2 = (F-G)/2(G+H) \quad ; \quad a_3 = (G-H)/2(G+H)$$

Le coefficient de Lankford, pour une direction ψ est défini par:

$$\begin{aligned} r_\psi &= d\epsilon_2/d\epsilon_3 = -dh/d(\epsilon-\eta) \\ &= [1 - 2a_3 - 2a_1 \sin^2 2\psi] / [1 + 2a_3 + 4a_2 \sin^2\psi] \end{aligned} \quad (58)$$

Les coefficients d'anisotropie a_i peuvent être donnés en fonction des valeurs initiales r_0 , r_{45} et r_{90} ($\gamma = \epsilon = \eta = 0$; $\psi = 0, 45^\circ$ et 90°):

$$r_0 = H/G \quad ; \quad r_{90} = F/H \quad ; \quad r_{45} = (2N-F-G)/2(F+G) \quad (59)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= [r_0 r_{90} - r_{45} (r_{90} + r_0)/2] / [r_{90}(1+r_0)] \\ a_2 &= [r_0 - r_{90}] / [2r_{90}(1+r_0)] \\ a_3 &= [1 - r_0] / [2(1+r_0)] \end{aligned} \quad (60)$$

La résultante P des forces appliquées sur l'éprouvette en traction est donnée par la relation (I.64) au chapitre I. Si l'on suppose une loi d'érouissage sous la forme:

$$\sigma_s / \sqrt{G+H} = K p'^n \quad (61)$$

en désignant par S_0 la section initiale de l'éprouvette on a:

$$P/P_0 = g(\psi) e^{-\epsilon} p'^n \quad P_0 = S_0 K \quad (62)$$

Si l'on considère un critère d'instabilité de sorte que celle-ci apparaisse au maximum de la courbe $P(\epsilon)$, il y aura alors instabilité quand $dP/d\epsilon=0$, soit:

$$\begin{aligned} p' / g(\psi) &= n / (1+h) \\ h &= \sqrt{2} (c_{13}/c_{11}) (d\psi/d\epsilon) = f (d\gamma/d\epsilon) (d\psi/d\epsilon) \end{aligned} \quad (63)$$

L'équation (55.b) montre que la seule possibilité pour ne pas avoir cisaillement, donc rotation de l'éprouvette, est que la fonction g_2 soit nulle. Ceci correspond, soit à $\psi_0=0$ ou $\psi_0=\pi/2$ (essai sur les axes d'orthotropie), soit à $\psi_0=\psi_e$ tel que:

$$\cos 2\psi_e = a_2/2a_1 = (F-G)/(F+G+4H-2N) \quad (64)$$

à condition que $a_2/2a_1$ soit inférieur à 1. Dans ce cas, les directions principales des contraintes et des déformations sont confondues.

L'angle ψ_e correspond d'ailleurs à l'orientation ayant le seuil initial extrémal ($dg/d\psi=0$). La figure III.7 montre les différentes formes que peut avoir la courbe $\sigma_\psi(\psi)$ en fonction des coefficients d'anisotropie. Les cas a et b sont les seuls où $d_2/2d_1 < 1$, l'extremum de σ_ψ correspond à $\psi=\psi_e$ défini par (64). On trouvera une analyse similaire en [4a]

La différence essentielle entre une analyse "petite déformation" et une analyse "grande déformation" de l'essai de traction hors-axes, réside dans le fait que la première suppose que ψ reste fixe, et donc égal à ψ_0 , alors que la seconde prévoit l'évolution de ψ . Nous voulons analyser l'influence de l'évolution de ψ sur

la réponse du matériau; pour ce faire, on postule différents choix de la fonction g_3 dans (55.c) correspondants à différents choix du référentiel tournant (Modèles J, T, R, V, M, P1 et P2)

B) ILLUSTRATIONS ET CONCLUSIONS

Le système (55) s'intègre numériquement pour donner η , γ , ψ et p' en fonction de ϵ , ψ_0 et des coefficients d'anisotropie a_i . Comme pour le cisaillement simple ou la torsion, la réponse $\sigma/\sigma_0(\epsilon)$ est, selon la relation (56), la composition d'une fonction $g(\psi)$ caractérisant l'anisotropie du matériau ($g=1$ pour un matériau isotrope), et d'une fonction $\psi(\epsilon)$ dépendant du choix du référentiel tournant, c'est-à-dire de l'hypothèse faite sur l'évolution des directions d'orthotropie. La fonction $g(\psi)$ est toujours périodique mais de période π . Sa forme, pour des valeurs particulières des coefficients d'anisotropie ($r_0=1.93$, $r_{45}=1.48$, $r_{90}=2.27$), est représentée dans la figure III.8.a. Les commentaires sur l'allure (oscillations ou pas) de la réponse contrainte déformation faits en cisaillement simple, restent toujours valables. L'évolution de σ/σ_0 au cours de la déformation (Fig. III.8.b) va dépendre essentiellement de l'évolution de la rotation α du référentiel tournant (Fig. III.12).

La relation (63) illustre l'influence du choix du référentiel tournant sur la prévision de l'instabilité. En effet, même si la déformation avant instabilité n'est pas très grande, l'influence de ce choix peut être importante si la pente à l'origine ($d\psi/d\epsilon$) est grande.

Les différentes courbes présentées ci-après, correspondent à un matériau défini par $r_0=1.93$, $r_{45}=1.48$ et $r_{90}=2.27$; ce sont des valeurs pour une tôle d'emboutissage réelle. Les coefficients a_i correspondants sont (60):

$$a_1 = 0,191 \quad ; \quad a_2 = - 0,026 \quad ; \quad a_3 = - 0,159$$

Les figures III.8.a et III.9.a représentent respectivement σ/σ_0 et r_ψ en fonction de ψ . L'essai de traction est effectué à $\psi_0=30^\circ$. Les référentiels tournants utilisés sont les référentiels cinématiques (J,R,V,T), matériel (M) pour un choix de $\theta_0=\psi_0$, et selon la théorie de la rotation plastique (P1 pour $a=-1$, P2 pour $a=-2$).

Les figures III.10, III.11 et III.12 donnent l'évolution de γ , p' , ϵ_2 , et $\alpha=(\psi-\psi_0)$ en fonction de ϵ . On constate que les différents modèles donnent à peu près la même chose pour p' et ϵ_2 mais sont très différents pour γ et α .

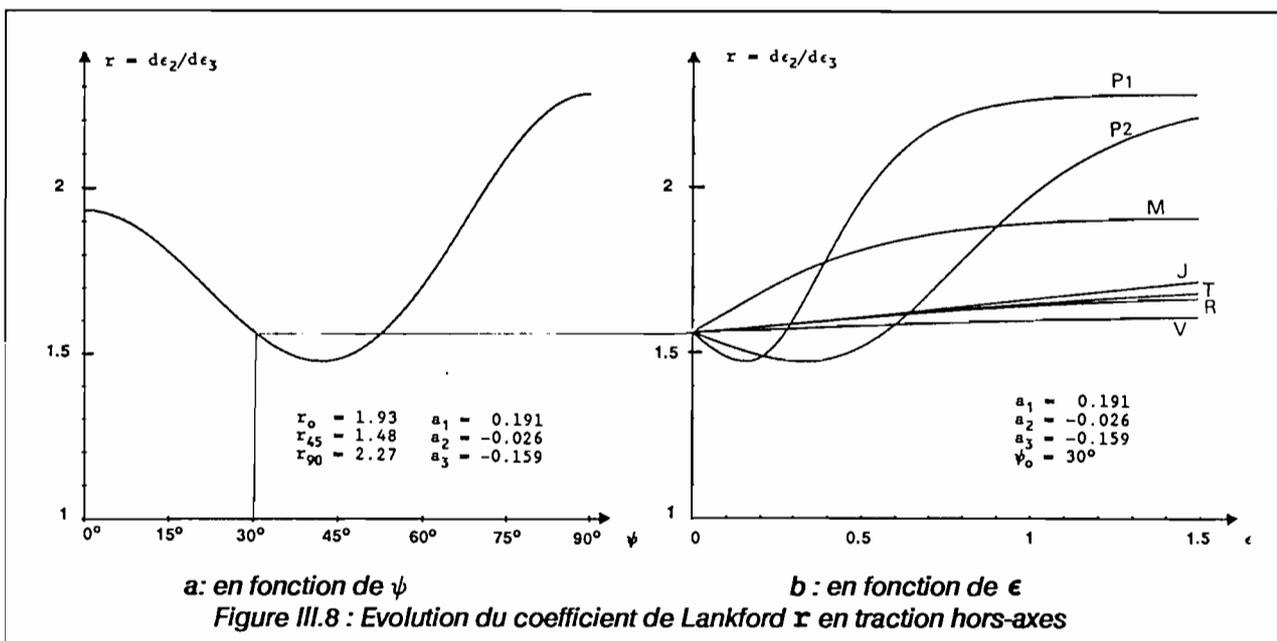
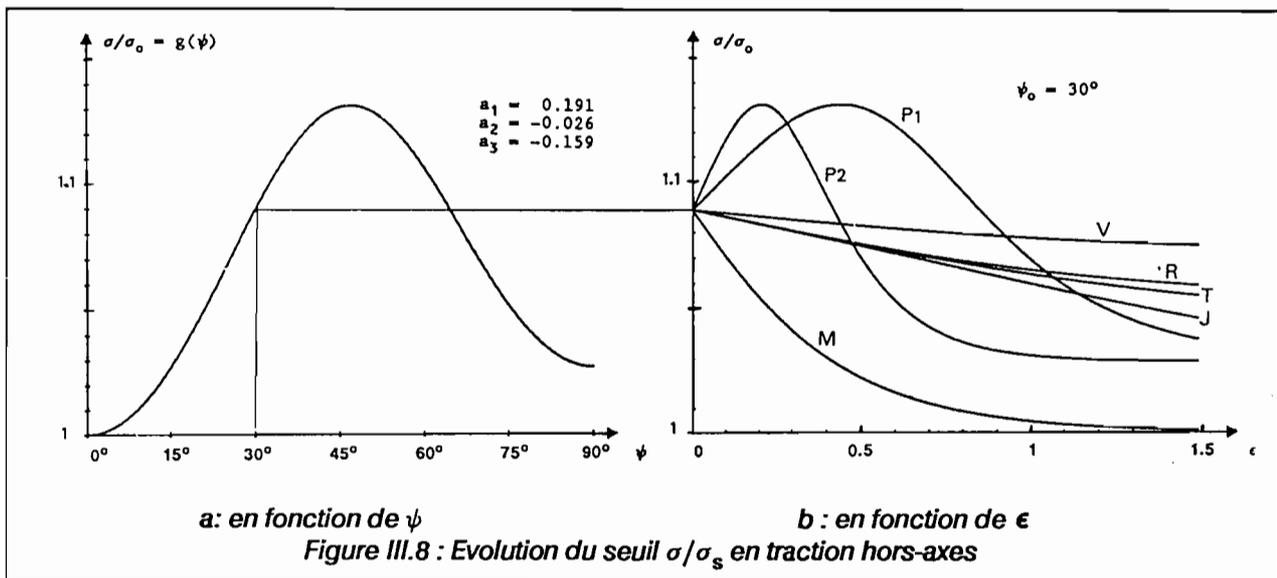
Les figures III.8.b, III.9.b III.13 et III.14 donnent l'évolution de σ/σ_0 , r_ψ , la rotation de la section droite ξ et la force de traction P/KS_0 en fonction de ϵ . On constate que tous les référentiels cinématiques (J,R,V,T) donnent des réponses très proches l'une de l'autre ; ceci n'est pas le cas pour les autres (M, P1, et P2).

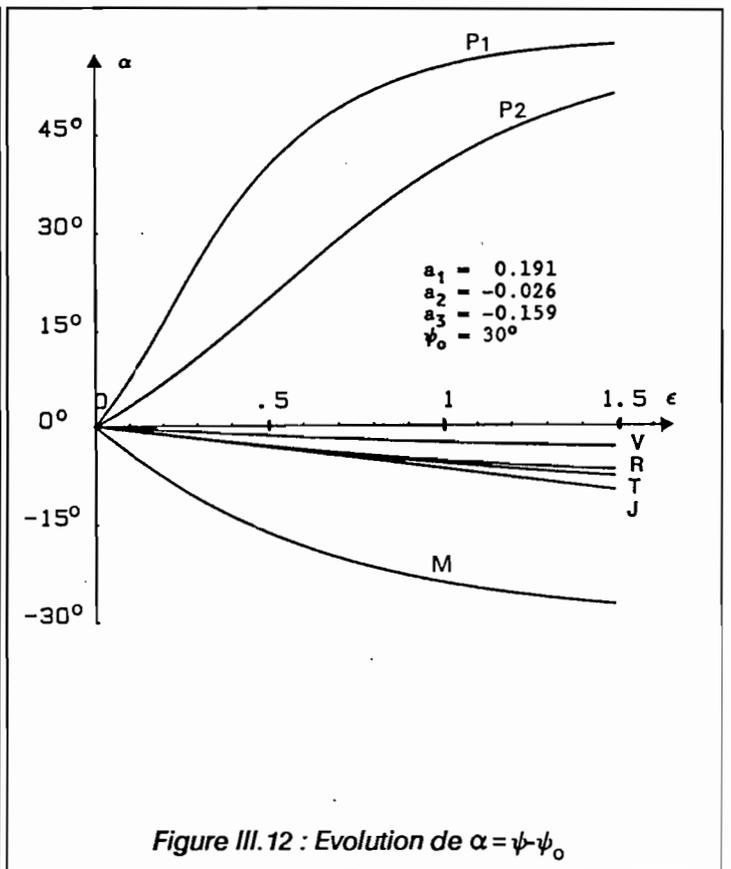
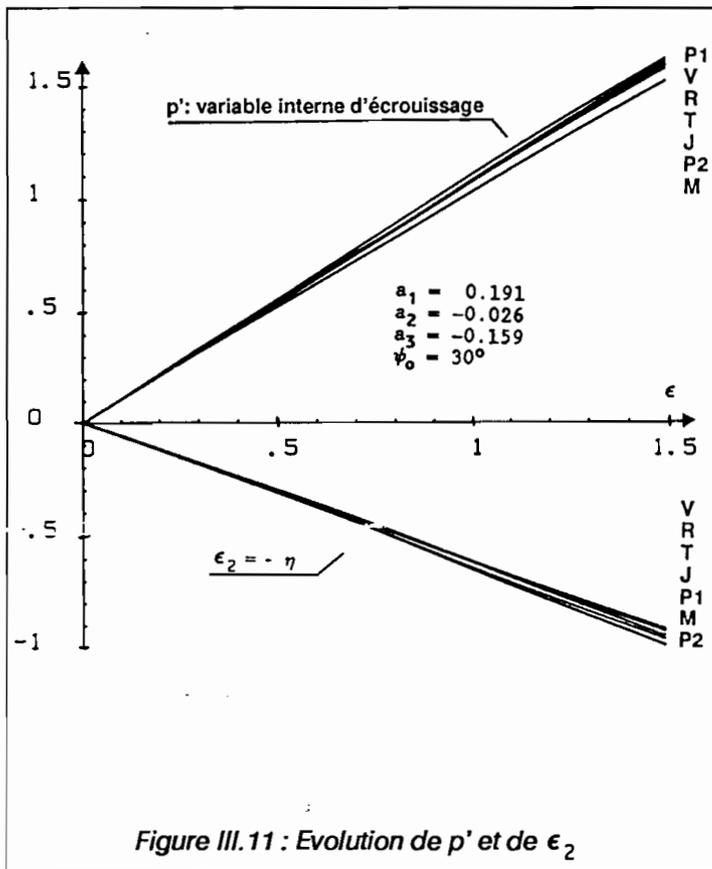
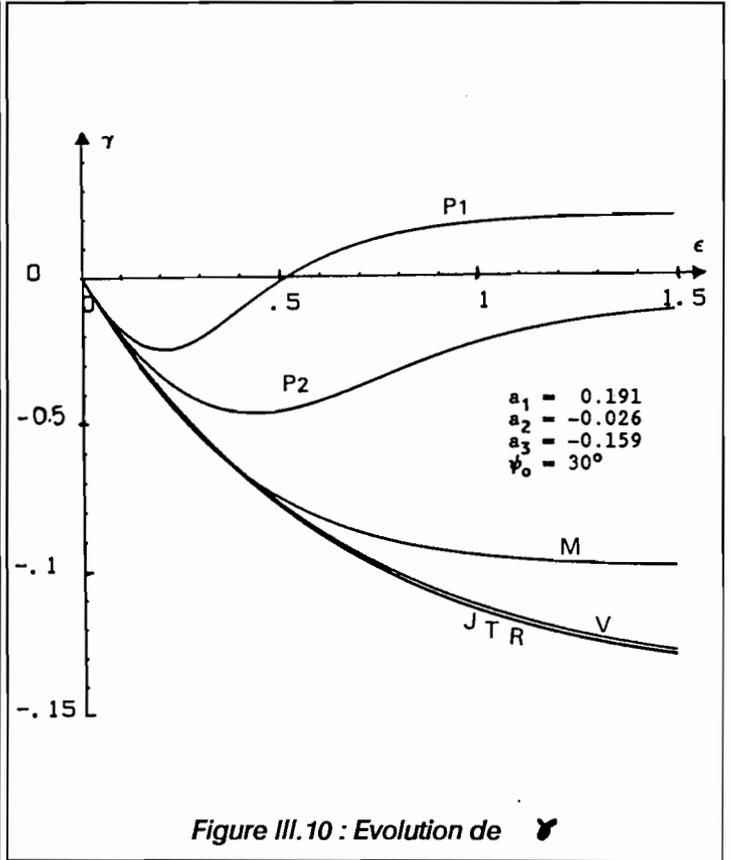
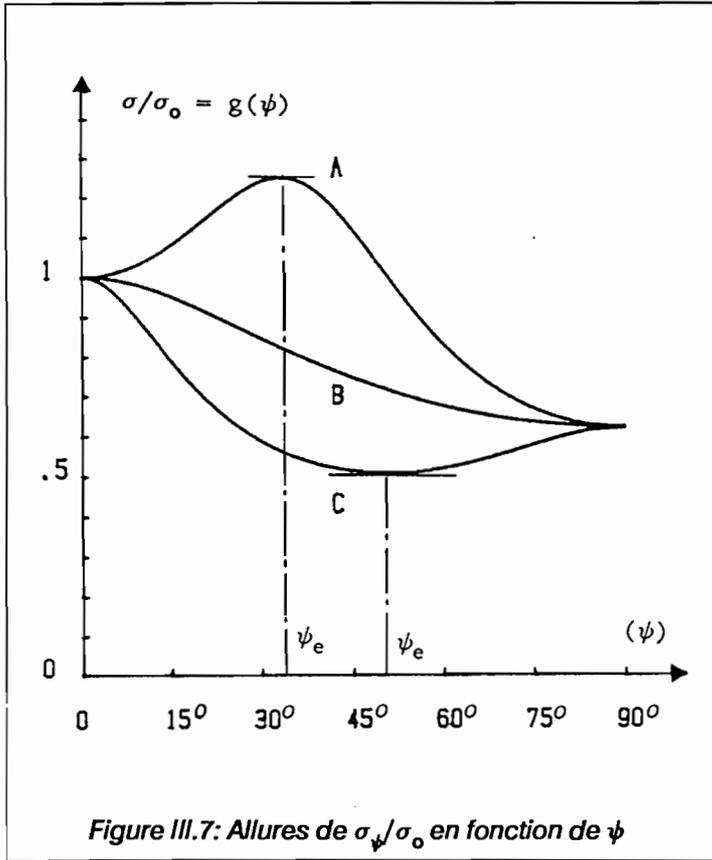
La figure III.12 montre que l'évolution de α est très faible pour les référentiels cinématiques mais importante pour les autres. Ceci peut s'expliquer par le fait que le terme $(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)$ dans (48) étant beaucoup plus important que $\dot{\gamma}$ ($d\gamma/d\epsilon = -0.2$ initialement), l'évolution de α va donc essentiellement dépendre de la fonction A; or cette fonction A dans (48) est très faible pour les référentiels cinématiques ($A=0$ initialement) alors qu'elle est importante pour les autres (initialement $A=-0.4$ pour M, 0.4 pour P1 et 0.9 pour P2). D'un autre côté, la rotation ξ de la section droite (Fig. III.13) peut être importante même si le cisaillement γ reste petit puisque cette rotation dépend aussi de $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ (relations I.63), le référentiel lié à une direction matérielle (M) évolue alors d'une manière importante.

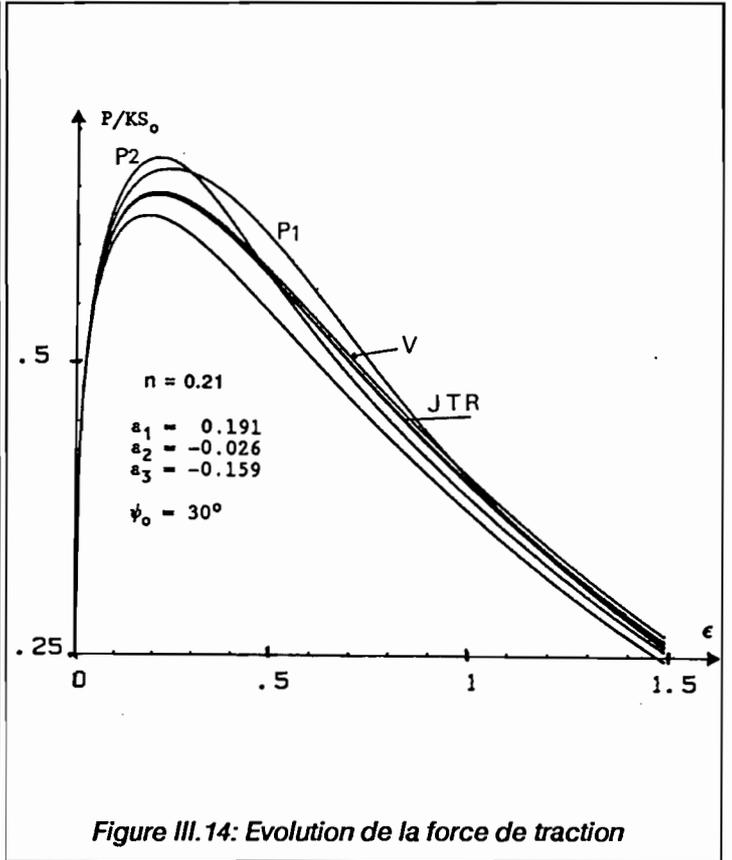
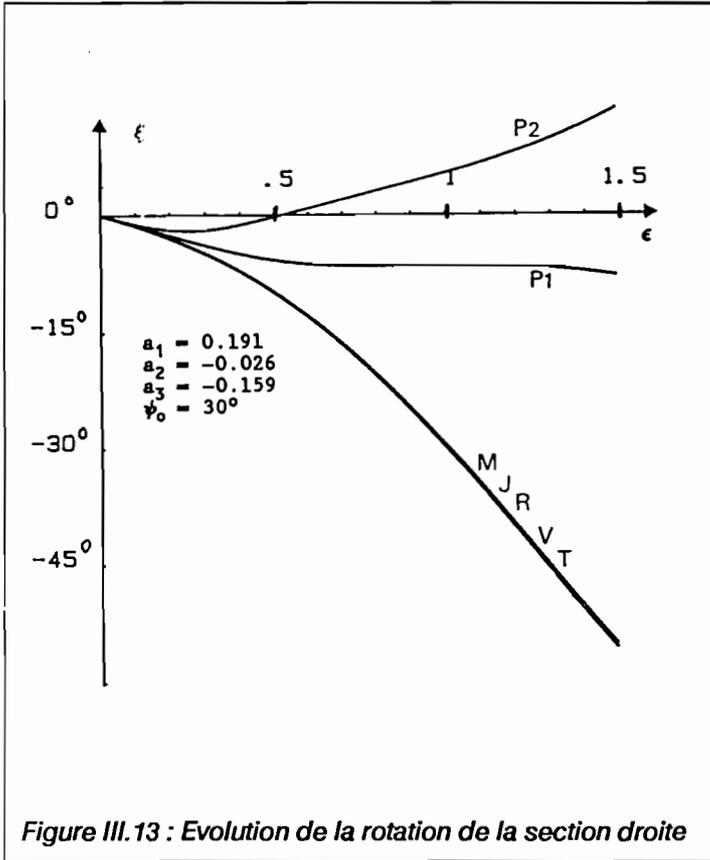
La prévision de l'instabilité peut être influencée par le choix du référentiel tournant par l'intermédiaire du terme h dans la relation (63). En prenant $n=0.21$, les figures III.10 et III.12 montrent que, même pour

des déformations de l'ordre de 0.2, les pentes $d\gamma/d\epsilon$ et $d\psi/d\epsilon$ peuvent varier beaucoup (ce n'est pas le cas pour les référentiels cinématiques); ce qui influe sur l'apparition de l'instabilité. Les modèles J,T,R,V prévoient une instabilité pour $\epsilon \neq n$ (0.20 ou 0.21), le modèle M pour $\epsilon = 0.18$, le modèle P1 pour $\epsilon = 0.24$ et P2 pour $\epsilon = 0.21$ (parce que pour ce modèle $d\gamma/d\epsilon$ est très faible pour $\epsilon = 0.2$).

La variable mesurable qui peut être sensiblement influencée par le choix de ψ , est la rotation ξ de la section droite. C'est elle qui pourrait, éventuellement, suggérer un ensemble de choix particuliers de l'évolution de ψ . Mais, même pour cette variable, les référentiels cinématiques (J,R,V,T) donnent sensiblement la même réponse. Par contre, si les essais de traction hors-axes sont utilisés pour identifier les courbes d'érouissage, l'influence de l'évolution de ψ semble pratiquement négligeable ; et l'on peut donc considérer ψ constant.







- Chapitre 4 -

COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

RESUME

Ce chapitre traite du comportement élastoplastique. La première partie concerne la cinématique élastoplastique: les différentes hypothèses sur la décomposition de la transformation sont discutées.

La deuxième partie met en place la formulation du comportement selon l'hypothèse cinématique choisie.

La dernière partie est consacrée au cas où la déformation élastique est supposée infinitésimale.

1. INTRODUCTION

Si l'on veut formuler un comportement élastoplastique, il est nécessaire, avant tout, de postuler une décomposition de la transformation subie par l'élément matériel en partie élastique et partie plastique (proposer une alternative à la relation (1.a) du chapitre II). Une fois cette hypothèse faite, il faut alors formuler les comportements élastique et plastique. On peut distinguer deux démarches basées sur deux hypothèses cinématiques différentes sur la décomposition de la déformation totale:

- La première est basée sur l'hypothèse qu'un matériau élastoplastique est un matériau élastique par rapport à une configuration relâchée variable dans le temps (milieu à configuration relâchée). Cette configuration s'obtient en effectuant une décharge totale de l'élément matériel. Cette hypothèse se traduit par une décomposition multiplicative du gradient de la transformation \mathbf{F} en une partie élastique ("gradient" de la transformation élastique \mathbf{F}^e) et une partie plastique ("gradient" de la transformation plastique \mathbf{F}^p):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (1)$$

L'orientation de la configuration relâchée n'est pas définie par (1); on peut alors soit supposer que cette orientation n'intervient pas dans le comportement (milieux à configuration intermédiaire) soit fixer son orientation en supposant l'existence d'un trièdre directeur attaché à la matière (milieux à configuration naturelle locale). La différence entre ces deux approches apparaît essentiellement en présence d'une anisotropie initiale. La deuxième approche permet de rendre compte de toute anisotropie initiale, ce qui n'est pas le cas des milieux à configuration intermédiaire, du moins selon la formulation eulérienne classique (voir chapitre II). Nous montrerons au paragraphe 3 de ce chapitre comment utiliser l'hypothèse de la configuration intermédiaire pour rendre compte d'une anisotropie initiale.

- La deuxième approche suppose, a priori, une décomposition additive de la vitesse de déformation totale \mathbf{D} en une partie élastique (vitesse de déformation élastique \mathbf{D}^e) et une partie plastique (vitesse de déformation plastique \mathbf{D}^p):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2)$$

On peut donner une interprétation géométrique à cette décomposition en raisonnant comme pour la décomposition (1) mais en considérant que la configuration initiale est celle à l'instant t et que l'on n'effectue pas une décharge complète mais que l'on ramène la contrainte ainsi que toutes les variables d'état à leur valeur à l'instant t (Mandell [37d]): nous appellerons cette démarche celle des "milieux à configuration relativement relâchée". Nous reviendrons, au paragraphe 3, sur ce point, ainsi que sur la manière de formuler un comportement élastoplastique anisotrope objectif et cohérent selon cette décomposition.

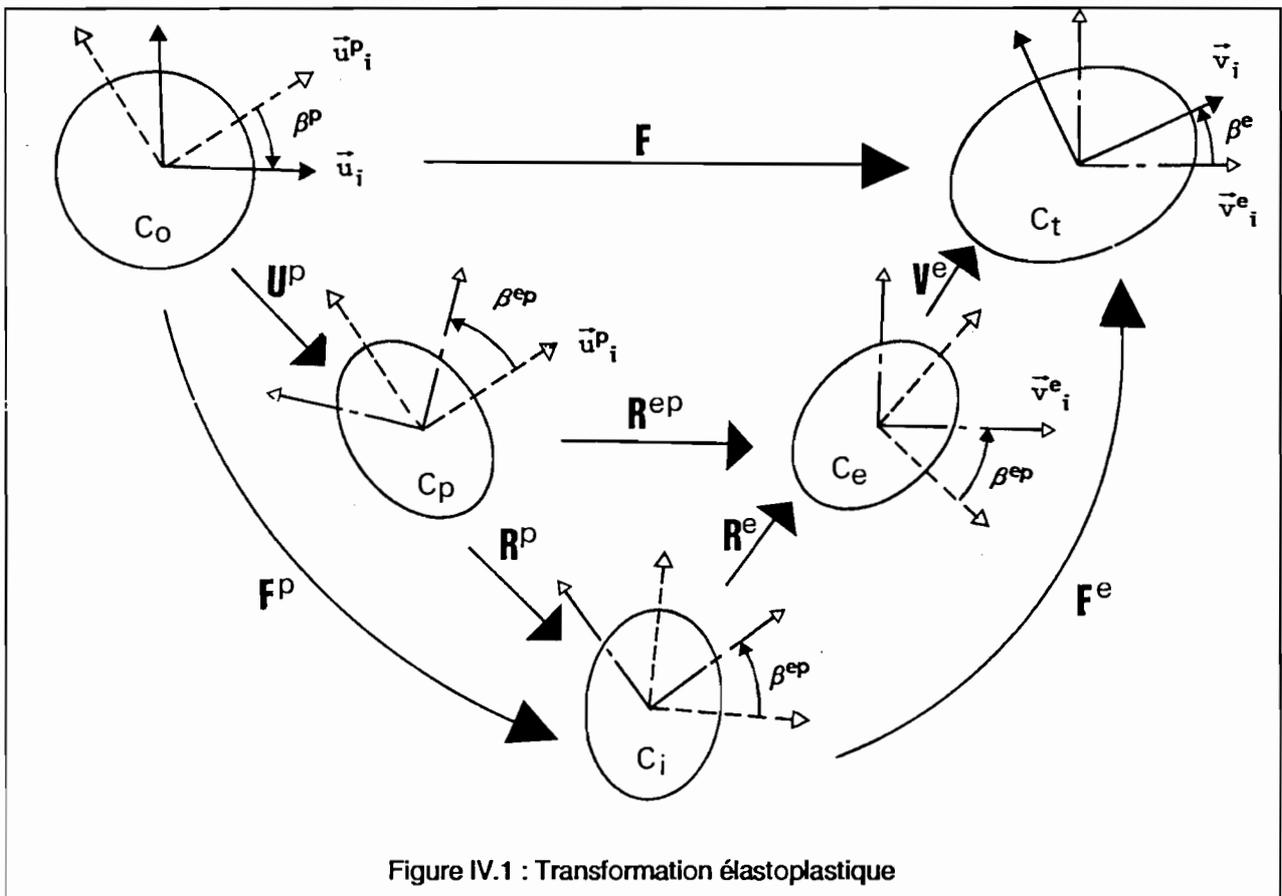
La première partie de ce chapitre traite de la cinématique de la transformation élastoplastique: mesures des déformations, des vitesses de déformation, des vitesses de rotation élastiques et plastiques.

La deuxième partie met en place la formulation du comportement élastoplastique selon l'une des deux hypothèses (1) ou (2). Les théories des milieux à configuration intermédiaire ou naturelle locale sont

abordées en parallèle sous le titre "milieux à configuration relâchée" ce qui permet de voir directement leurs convergences et leurs divergences.

Enfin, la troisième partie aborde le cas d'une élasticité linéaire selon l'hypothèse que la déformation élastique reste infinitésimale: La décomposition (1) se ramène alors à (2) avec une mesure particulière de la vitesse de déformation plastique.

Le comportement plastique ayant déjà été suffisamment développé, nous n'insisterons dans ce chapitre que sur la loi élastique et sa composition avec la loi plastique.



2. CINEMATIQUE DE LA TRANSFORMATION ELASTOPLASTIQUE

2.1. MILIEUX A CONFIGURATION RELACHEE: $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$

A) GENERALITES

- Gradients de la transformation

En supposant une décomposition de \mathbf{F} sous la forme $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$, on peut définir plusieurs configurations relâchées qui se déduisent l'une de l'autre par une rotation. Deux d'entre elles ont une orientation particulière: la configuration $C_p(t)$ obtenue par déformation plastique pure (\mathbf{U}^p) et la configuration $C_e(t)$ obtenue par décharge élastique pure (\mathbf{V}^e) (Fig. IV.1.). La configuration C_e s'obtient à partir de C_p par une rotation \mathbf{R}^{ep} :

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \quad ; \quad \mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p = \mathbf{V}^p \mathbf{R}^p \quad ; \quad \mathbf{R}^{ep} = \mathbf{R}^e \mathbf{R}^p \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (4.a)$$

$$= \mathbf{V}^e \mathbf{R}^{ep} \mathbf{U}^p = \mathbf{V}^e \tilde{\mathbf{F}}^p = \tilde{\mathbf{F}}^e \mathbf{U}^p \quad (4.b)$$

Les décompositions (4.b) ne dépendent pas de l'orientation de la configuration relâchée: \mathbf{V}^e , \mathbf{U}^p , \mathbf{R}^{ep} , $\tilde{\mathbf{F}}^e$ et $\tilde{\mathbf{F}}^p$ sont définis d'une manière unique. Le gradient \mathbf{F} se réduit à $\tilde{\mathbf{F}}^p$ pour une cinématique rigide plastique ($\mathbf{V}^e = \mathbf{1}$). On notera dans la suite:

$$\tilde{\mathbf{U}}^e = \mathbf{R}^{epT} \mathbf{V}^e \mathbf{R}^{ep} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{V}}^p = \mathbf{R}^{ep} \mathbf{U}^p \mathbf{R}^{epT}$$

- Directions principales - Allongements principaux

Comme pour la transformation totale (paragraphe 1.1.A du chapitre I), on peut définir les directions principales et les allongements principaux des déformations élastiques et plastiques.

Soient $[\beta^p]$, $[\beta^e]$ et $[\beta^{ep}]$ les matrices de rotation orientant respectivement les directions principales de la déformation plastique (\mathbf{U}^p) par rapport à celles de la déformation totale (\mathbf{U}) dans C_o , les directions principales de la déformation élastique (\mathbf{V}^e) par rapport à celles de la déformation totale (\mathbf{V}) dans C_t et les directions principales de la déformation élastique par rapport à celles de la déformation plastique dans une configuration relâchée quelconque C_i (Fig. IV.1). Ces 3 matrices sont indépendantes de l'orientation de l'élément matériel dans l'espace et indépendantes de la rotation de la configuration relâchée.

Soient $[\Psi^u]$, $[\Psi^v]$, $[\Psi^{up}]$, $[\tilde{\Psi}^{vp}]$, $[\tilde{\Psi}^{ue}]$ et $[\Psi^{ve}]$ les matrices orientant respectivement les directions principales de \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{U}^p , $\tilde{\mathbf{V}}^p$, $\tilde{\mathbf{U}}^e$ et \mathbf{V}^e dans l'espace (par rapport au repère d'observation: \vec{E}_i en C_o ou C_p et \vec{e}_i en C_t ou C_e , voir paragraphe 1.1.B du chapitre I). Si l'on note $[\mathbf{R}]$ et $[\mathbf{R}^{ep}]$ les matrices de \mathbf{R} et \mathbf{R}^{ep} relativement aux repères \vec{E}_i et \vec{e}_i , on a:

$$\mathbf{R} = R_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{E}_j \quad \mathbf{R}^{ep} = R^{ep}_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{E}_j$$

$$\begin{aligned} [\Psi^{UP}] &= [\Psi^U] [\beta^P] & [\Psi^{ve}] &= [\Psi^V] [\beta^e] \\ [\tilde{\Psi}^{ue}] &= [\Psi^{UP}] [\beta^{eP}]^T & [\tilde{\Psi}^{VP}] &= [\Psi^{ve}] [\beta^{eP}] \\ [R] &= [\Psi^V] [\Psi^U]^T & [R^{eP}] &= [\Psi^{ve}] [\tilde{\Psi}^{ue}]^T = [\tilde{\Psi}^{VP}] [\Psi^{UP}]^T \end{aligned}$$

Soient $[\Delta]$, $[\Delta^e]$ et $[\Delta^P]$ les matrices diagonales formées par les allongements principaux respectivement totaux, élastiques et plastiques. Les matrices des composantes de \mathbf{F} , $\tilde{\mathbf{F}}^e$ et $\tilde{\mathbf{F}}^P$ relativement aux repères $\tilde{\mathbf{E}}_i$ et $\tilde{\mathbf{e}}_i$ sont respectivement $[F]$, $[\tilde{F}^e]$ et $[\tilde{F}^P]$:

$$\begin{aligned} [F] &= [\Psi^V] [\Delta] [\Psi^U]^T = [\Psi^{ve}] [\Delta^e] [\beta^{eP}] [\Delta^P] [\Psi^{UP}]^T \\ [\tilde{F}^e] &= [\Psi^{ve}] [\Delta^e] [\tilde{\Psi}^{ue}]^T \\ [\tilde{F}^P] &= [\tilde{\Psi}^{VP}] [\Delta^P] [\Psi^{UP}]^T \end{aligned}$$

B) VITESSES DE DEFORMATION ET VITESSES DE ROTATION

La transformation plastique \mathbf{F}^P (ou $\tilde{\mathbf{F}}^P$) est analogue à \mathbf{F} dans le sens que les deux transformations partent d'une configuration initiale constante dans le temps. Ceci n'est pas vrai pour la transformation élastique \mathbf{F}^e (ou $\tilde{\mathbf{F}}^e$). On définit les tenseurs \mathbf{D}^P et $\tilde{\mathbf{W}}^P$ par:

$$\tilde{\mathbf{L}}^P = \dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} \tilde{\mathbf{F}}^{P-1} = \mathbf{D}^P + \tilde{\mathbf{W}} \quad (5)$$

soit:

$$\mathbf{D}^P = (\dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} \tilde{\mathbf{F}}^{P-1})^S = \mathbf{R}^{eP} (\dot{\mathbf{U}}^P \mathbf{U}^{P-1})^S \mathbf{R}^{ePT} = \mathbf{R}^e (\dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} \tilde{\mathbf{F}}^{P-1})^S \mathbf{R}^{eT} \quad (6)$$

et:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}} &= (\dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} \tilde{\mathbf{F}}^{P-1})^A = \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{R}^e (\dot{\tilde{\mathbf{F}}^P} \tilde{\mathbf{F}}^{P-1})^A \mathbf{R}^{eT} = \mathbf{R}^{eP} (\dot{\mathbf{U}}^P \mathbf{U}^{P-1})^A \mathbf{R}^{ePT} + \mathbf{W}^{eP} \\ \mathbf{W}^{eP} &= \dot{\mathbf{R}}^{eP} \mathbf{R}^{ePT} \end{aligned} \quad (7)$$

Le tenseur \mathbf{D}^P (noté $\bar{\mathbf{D}}^P$ dans [17.a]) représente une mesure eulérienne objective de la vitesse de déformation plastique. Cette mesure est indépendante du choix de la configuration relâchée. \mathbf{D}^P est pour la transformation plastique ce qu'est \mathbf{D} pour la transformation totale.

La vitesse de rotation $\tilde{\mathbf{W}}$ (déjà introduite dans [17a]) représente une certaine vitesse de rotation plastique. Elle est pour la transformation plastique $\tilde{\mathbf{F}}^P$ ce qu'est \mathbf{W} pour la transformation totale: c'est la vitesse de rotation des directions matérielles qui, à l'instant t sont confondues avec les directions principales de \mathbf{D}^P . Le référentiel tournant défini par $\tilde{\mathbf{W}}$ sera appelé dans la suite référentiel corotationnel plastique alors que celui défini par \mathbf{W}^{eP} sera appelé référentiel en rotation propre plastique. Dans le cas rigide plastique ($\mathbf{R}^{eP} = \mathbf{R}$, $\mathbf{U}^P = \mathbf{U}$), $\tilde{\mathbf{W}}$ se réduit à \mathbf{W} et \mathbf{W}^{eP} à $\mathbf{W}_R = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$.

La définition d'une vitesse de déformation élastique est moins évidente du fait que la configuration de référence de la transformation élastique est variable dans le temps. En fait, on peut définir plusieurs vitesses de déformation élastique relatives à différentes orientations de la configuration relâchée. Si l'on suppose l'existence d'une orientation privilégiée de la configuration relâchée (configuration isocline pour les milieux à configuration naturelle locale) donnée par une rotation \mathbf{Q} , on peut définir une vitesse de déformation élastique et une vitesse de rotation associées par:

$$\mathbf{F}^e_{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}^e \mathbf{Q} \quad ; \quad \mathbf{L}^e_{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{F}}^e_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^e_{\mathbf{Q}}^{-1} = \mathbf{D}^e_{\mathbf{Q}} + \mathbf{W}^e_{\mathbf{Q}} \quad (8)$$

soit:

$$\mathbf{D}^e_{\mathbf{Q}} = [\dot{\mathbf{F}}^e_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^e_{\mathbf{Q}}^{-1}]^S = [D_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}^e / D_t \mathbf{V}^{e-1}]^S \quad (9)$$

et:

$$\mathbf{W}^e_{\mathbf{Q}} = [\dot{\mathbf{F}}^e_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^e_{\mathbf{Q}}^{-1}]^A = [D_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}^e / D_t \mathbf{V}^{e-1}]^A + \mathbf{W}_{\mathbf{Q}} \quad ; \quad \mathbf{W}_{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (10)$$

où D_Q/Dt représente la dérivée rotationnelle relative à Q . Il est bien évident que pour que la vitesse D^e_Q soit objective il faut que la rotation Q se transforme dans un changement de référentiel défini par q (I.18) en $Q' = qQ$. Il faut remarquer que la définition d'une telle vitesse de déformation élastique est purement cinématique; en fonction du comportement à modéliser, elle peut contenir une partie irréversible, comme nous allons le voir dans la suite.

Signalons deux choix cinématiques particuliers de Q : $Q = R^{eP}$ et Q défini par $W_Q = \tilde{W}$. Ces choix privilégient les configurations C_p ($F^e_Q = \tilde{F}^e$), et \tilde{C} respectivement. On appellera dans la suite \tilde{D}^e la vitesse de déformation relative au second choix c.à.d à $W_Q = \tilde{W}$:

$$\tilde{D}^e = [\dot{\tilde{V}}^e \mathbf{v}^{e-1}]^S \quad (11)$$

où $\dot{\tilde{V}}^e$ représente la dérivée en rotation relative à \tilde{W} .

Les relations entre W , \tilde{W} et W^{eP} dans le cas général sont (voir annexe II de [17.a]):

$$\tilde{W} = W - \mathfrak{R}(V^e) [D + D^P] \quad (12.a)$$

$$= W^{eP} + \mathfrak{R}(\tilde{V}^P) [D^P] \quad (12.b)$$

l'opérateur \mathfrak{R} étant défini, pour \mathbf{a} symétrique et \mathbf{b} quelconque, par:

$$\mathfrak{R}(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = (a_I a_{II} - a_{III})^{-1} [a_I a_{III} (\mathbf{b} \mathbf{a}^{-1} - \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}) + (\mathbf{a}^2 \mathbf{b} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{a}^2)]$$

où a_I , a_{II} et a_{III} sont les invariants principaux de \mathbf{a} . Le tenseur $\mathbf{x} = \mathfrak{R}(\mathbf{a})[\mathbf{b}]$ est une fonction isotrope par rapport au couple (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , linéaire en \mathbf{D} . Il est antisymétrique si \mathbf{b} est symétrique, et symétrique si \mathbf{b} est antisymétrique. Il est la solution de l'équation $(\mathbf{a} \mathbf{x} + \mathbf{x} \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a})$. En plus, pour tout tenseur \mathbf{c} du second ordre, on a:

$$\mathbf{c} : \mathfrak{R}(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = \mathfrak{R}(\mathbf{a})[\mathbf{c}] : \mathbf{b}$$

On peut montrer que (voir annexe II de [17.a]):

$$\dot{\tilde{B}}^e = 2 \mathbf{V}^e \mathbf{D} \mathbf{V}^e - 2 [\mathbf{B}^e \mathbf{D}^P]^S \quad (13.a)$$

$$\mathbf{B}^{eJ} = 2 [\mathbf{B}^e \mathbf{D}]^S - 2 \mathbf{V}^e \mathbf{D}^P \mathbf{V}^e \quad (13.b)$$

où $\dot{\tilde{B}}^e$ et \mathbf{B}^{eJ} sont les dérivées rotationnelles de \mathbf{B}^e relativement à \tilde{W} et W respectivement, sachant que $\mathbf{B}^e = \mathbf{V}^{e2}$.

A partir de (13.a), on peut écrire une décomposition de \mathbf{D} en partie élastique et plastique, soit:

$$\mathbf{D} = [\dot{\tilde{V}}^e \mathbf{v}^{e-1}]^S + [\mathbf{V}^e \mathbf{D}^P \mathbf{v}^{e-1}]^S$$

Si l'on pose:

$$W_Q = \tilde{W} - W^P \quad (14)$$

on a:

$$\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}}^e + [\mathbf{V}^e \mathbf{D}^P \mathbf{v}^{e-1}]^S \quad (15.a)$$

$$= \mathbf{D}^e_Q + [\mathbf{V}^e (\mathbf{D}^P + \mathbf{W}^P) \mathbf{v}^{e-1}]^S \quad (15.b)$$

La décomposition (15.a) représente une extension particulière de la relation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ en petites déformations.

Les composantes de \mathbf{D} , \mathbf{D}^P et $\tilde{\mathbf{D}}^e$ dans le repère d'observation \vec{e}_i sont:

$$[\mathbf{D}] = [\Psi^V] \{ [\dot{\epsilon}] + ([\Delta] [\Omega^U] [\Delta]^{-1})^S \} [\Psi^V]^T \quad (16.a)$$

$$[\mathbf{D}^P] = [\tilde{\Psi}^{VP}] \{ [\dot{\epsilon}^P] + ([\Delta^P] [\Omega^{UP}] [\Delta^P]^{-1})^S \} [\tilde{\Psi}^{VP}]^T \quad (16.b)$$

$$[\tilde{\mathbf{D}}^e] = [\Psi^{Ve}] \{ [\dot{\epsilon}^e] + ([\Delta^e] [\Omega^{ue}] [\Delta^e]^{-1})^S \} [\Psi^{Ve}]^T \quad (16.c)$$

avec:

$$[\epsilon] = \text{Log}[\Delta] ; [\epsilon^P] = \text{Log}[\Delta^P] ; [\epsilon^e] = \text{Log}[\Delta^e]$$

$$[\Omega^U] = [\dot{\Psi}^U]^T [\Psi^U] ; [\Omega^{UP}] = [\dot{\Psi}^{UP}]^T [\Psi^{UP}]$$

$$[\Omega^{ue}] = [\dot{\beta}^{ep}] [\beta^{ep}]^T + [\beta^{ep}] \{ [\Delta^P] [\Omega^{UP}] [\Delta^P]^{-1} \}^A [\beta^{ep}]^T$$

Les premiers termes des relations (16) représentent la vitesse de variation des allongements principaux, alors que les seconds viennent du caractère non triaxial de la sollicitation (voir I.1.2 et le paragraphe suivant). De la même manière, on peut écrire les composantes de \mathbf{W} et $\tilde{\mathbf{W}}$ dans \vec{e}_i :

$$[\mathbf{W}] = [\Omega^V] + [\Psi^V] \{ [\Delta] [\Omega^U] [\Delta]^{-1} \}^A [\Psi^V]^T$$

$$[\tilde{\mathbf{W}}] = [\Omega^{VP}] - [\Psi^{VP}] \{ [\Delta^P] [\Omega^{UP}] [\Delta^P]^{-1} \}^A [\Psi^{VP}]^T$$

avec:

$$[\Omega^V] = [\dot{\Psi}^V] [\Psi^V]^T ; [\Omega^{VP}] = [\dot{\Psi}^{VP}] [\Psi^{VP}]^T$$

C) CINEMATIQUE ELASTOPLASTIQUEMENT TRIAXIALE

Vu les relations (16), nous dirons que la cinématique est élastoplastiquement triaxiale, si la cinématique totale est triaxiale (c'est à dire si $[\Omega^U]=0$, chapitre I) et si les directions principales des déformations totale, élastique et plastique sont confondues (c.à.d $[\beta^e]=[\beta^P]=[\beta^{ep}]=[1]$). On peut alors facilement montrer que, dans ce cas, \mathbf{D} , \mathbf{V} et \mathbf{V}^e commutent et que:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{ep} \quad \mathbf{W} = \tilde{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{R}}^{ep}\mathbf{R}^{epT}$$

$$\mathbf{D}^P = \mathbf{R} \dot{\mathbf{u}}^P \mathbf{R}^T \quad \tilde{\mathbf{D}}^e = \mathbf{v}^{eJ} = \mathbf{R} \, d(\mathbf{R}^T \mathbf{v}^e \mathbf{R}) / dt \, \mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{u}} \mathbf{R}^T = \tilde{\mathbf{D}}^e + \mathbf{D}^P$$

avec:

$$\mathbf{u} = \text{Log}\mathbf{U} \quad \mathbf{u}^P = \text{Log}\mathbf{U}^P \quad \mathbf{v}^e = \text{Log}\mathbf{V}^e$$

Remarquons que dans ce cas la vitesse de déformation se décompose additivement en partie élastique et partie plastique.

2.2. MILIEUX A CONFIGURATION RELATIVEMENT RELACHEE: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^P$

On peut donner une interprétation géométrique à la décomposition (2) en raisonnant de la façon suivante: appelons C_t et C_τ les configurations de l'élément matériel aux instants t et τ ($\tau > t$), et \mathbf{F}_τ le gradient de la transformation entre C_t et C_τ (Fig. IV.2). Le gradient de vitesse \mathbf{L} à l'instant t vérifie:

$$\mathbf{L}(t) = \lim_{\tau \rightarrow t} [(\mathbf{F}_\tau - \mathbf{1}) / (\tau - t)] \quad (17)$$

Si à l'instant τ on ramène la contrainte de Cauchy et toutes les variables d'état à leurs valeurs à l'instant t , l'élément matériel se retrouvera dans une configuration C_τ^P que l'on appellera "configuration relativement relâchée". La transformation entre C_t et C_τ^P est une transformation purement plastique que l'on note \mathbf{F}_τ^P (FIG. IV.2), et l'on a:

$$\mathbf{F}_\tau = \mathbf{F}_\tau^P \mathbf{F}_\tau^e = \mathbf{V}_\tau^e \mathbf{R}_\tau^{ep} \mathbf{U}_\tau^P$$

en posant:

$$\mathbf{U}_\tau^P = \mathbf{1} + (\tau-t) \mathbf{D}_\tau^P \quad ; \quad \mathbf{V}_\tau^e = \mathbf{1} + (\tau-t) \mathbf{D}_\tau^e$$

la relation (17) devient alors:

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} + \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^P \tag{18}$$

où \mathbf{D}^P et \mathbf{D}^e sont les valeurs de \mathbf{D}_τ^P et \mathbf{D}_τ^e pour $\tau=t$, et:

$$\mathbf{W} = \lim_{\tau \rightarrow t} [(\mathbf{R}_\tau^{ep} - \mathbf{1})/(\tau-t)]$$

et l'on obtient la décomposition (2) ($\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^P$).

Remarquons que la définition de \mathbf{D}^e , \mathbf{D}^P et \mathbf{W} de cette manière est indépendante de l'orientation de la configuration C_τ^P et que \mathbf{D}^e et \mathbf{D}^P sont des quantités objectives. Si l'on suppose maintenant que τ est infiniment voisin de t ($\tau = t + dt$); on a alors:

$$\mathbf{V}_\tau^e = \mathbf{1} + \mathbf{D}^e dt \quad ; \quad \mathbf{U}_\tau^P = \mathbf{1} + \mathbf{D}^e dt \quad ; \quad \mathbf{R}_\tau^{ep} = \mathbf{1} + \mathbf{W} dt \tag{19}$$

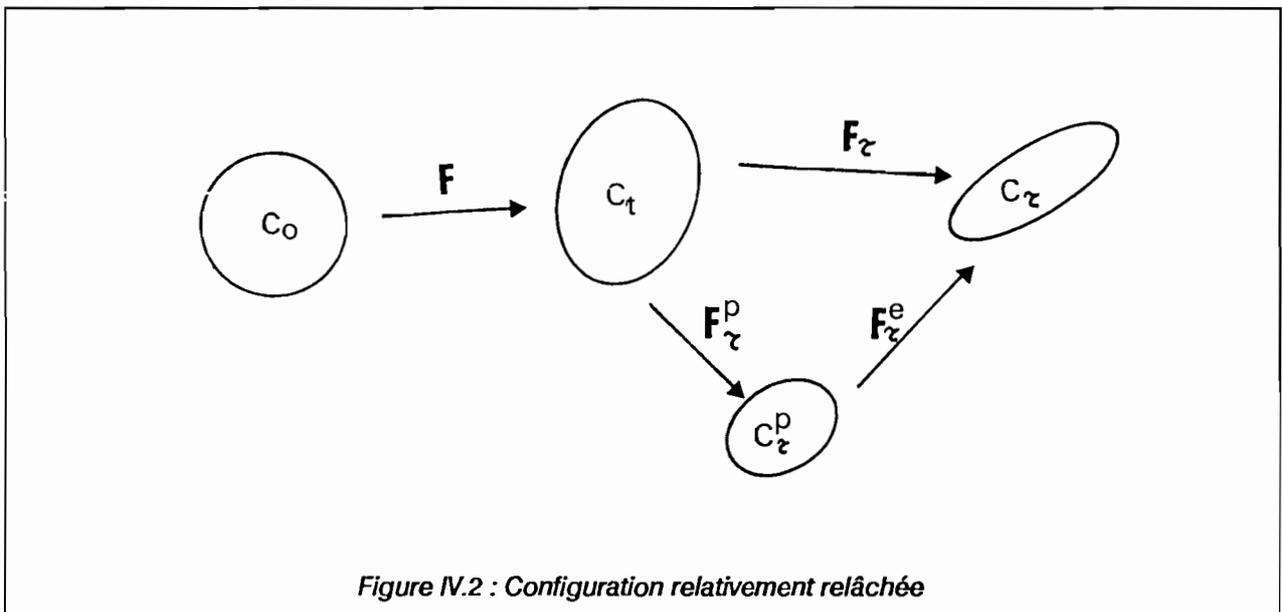


Figure IV.2 : Configuration relativement relâchée

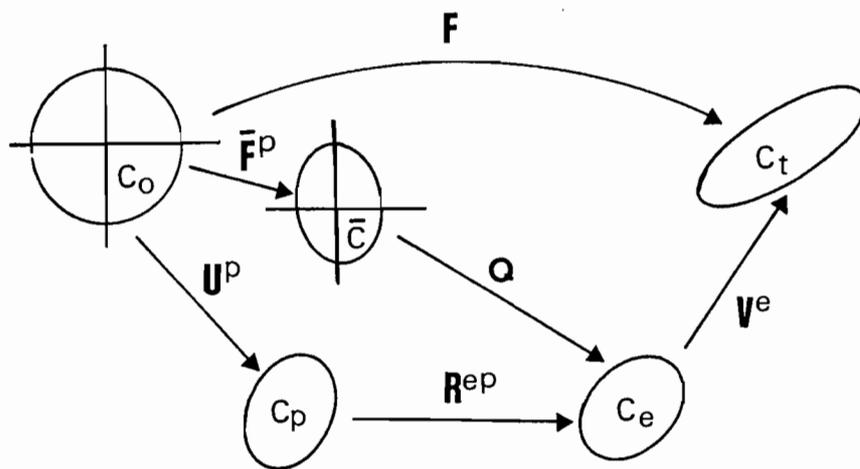


Figure IV.3 : Configurations relâchées

3. FORMULATION GENERALE DU COMPORTEMENT

3.1. MILIEUX A CONFIGURATION RELACHEE

A) CADRE GENERAL

- *Comportement plastique*

La formulation du comportement plastique a été déjà discutée au chapitre III. Il s'en dégage que la formulation en référentiel tournant est un cadre adéquat et suffisamment général pour décrire un comportement plastique. Ce formalisme se traduit dans une cinématique élastoplastique par la formulation du comportement plastique dans une configuration relâchée particulière \bar{C} (configuration isocline, Fig. IV.3) obtenue à partir de C_e par une rotation Q . Cette rotation doit se transformer dans un changement de référentiel défini par q (I.18), en $Q' = qQ$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^e Q \bar{\mathbf{F}}^p \quad (20)$$

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \lambda \bar{\mathbf{h}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \quad (22.a)$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = \lambda \bar{\mathbf{l}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \quad (22.b)$$

où α désigne les variables internes d'écroissage, \mathbf{D}^p est la vitesse de déformation plastique définie par (6), et la barre au dessus d'une quantité indique que l'on ramène cette quantité dans la configuration \bar{C} par la rotation Q .

- *Comportement élastique*

On part de l'hypothèse de base que le matériau est élastique par rapport à la configuration relâchée. Autrement dit, pour $\bar{\mathbf{F}}^p$ et $\bar{\alpha}$ fixés, il existe une relation bijective entre la déformation élastique et la contrainte. Cette relation ne doit bien sûr pas dépendre de l'orientation du corps dans l'espace (principe d'objectivité). La manière la plus simple pour assurer l'objectivité de cette relation est d'utiliser aussi un formalisme en référentiel tournant, ce qui revient dans ce cas à formuler la loi élastique dans la configuration \bar{C} . Cette loi peut dépendre des variables internes d'écroissage (dont la transformation plastique peut faire partie), elle s'écrira alors sous la forme:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{e}}(\bar{\mathbf{v}}^e, \bar{\alpha}) \quad ; \quad \bar{\mathbf{v}}^e = \bar{\mathbf{s}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \quad (23.a)$$

et la vitesse de déformation élastique relative à Q (9) s'écrit:

$$\mathbf{D}_Q^e = \Lambda : (\mathbf{D}_Q \boldsymbol{\tau} / D\tau) + \mathbf{D}_\alpha \quad (23.b)$$

Le tenseur (du 4ème ordre) de complaisance élastique Λ qui peut dépendre de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, $\bar{\alpha}$ et de Q est donné en fonction de $\partial \bar{\mathbf{s}} / \partial \bar{\boldsymbol{\tau}}$ par:

$$\Lambda_{ijkl} = V_{ijkl} L_{klmn}$$

avec:

$$L_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} [\partial \bar{\mathbf{s}} / \partial \bar{\boldsymbol{\tau}}]_{mnpq}$$

et:

$$V_{ijkl} = \frac{1}{2} (V_{ik}^e V_{lj}^{e-1} + V_{ik}^{e-1} V_{lj}^e)$$

Le tenseur \mathbf{D}_α résulte de la dépendance éventuelle de la loi élastique par rapport aux variables internes. En utilisant la loi d'évolution pour α (22.b), il est donné par:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\alpha &= \lambda \mathbf{h}_\alpha & ; & & \mathbf{h}_\alpha &= \mathbf{Q} \bar{\mathbf{h}}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \mathbf{Q}^T \\ \bar{\mathbf{h}}_\alpha &= \{ [(\partial \bar{\mathbf{s}} / \partial \bar{\alpha}) : \bar{\mathbb{I}}] \bar{\mathbf{v}}^{e-1} \}^s = \{ [(\partial \bar{\mathbf{s}} / \partial \bar{\alpha}) : \bar{\mathbb{I}}] \bar{\mathbf{s}}^{-1} \}^s \end{aligned} \quad (24)$$

Nous avons utilisé au paragraphe précédent le terme vitesse de déformation élastique avec une définition cinématique. Il est évident, à partir de (23.b), que dans \mathbf{D}^e existe une partie réversible (premier terme de droite de 23.b) et une partie irréversible (\mathbf{D}_α).

- Choix de la configuration $\bar{\mathbf{C}}$

Le choix de la configuration $\bar{\mathbf{C}}$ et donc de la rotation \mathbf{Q} peut se faire selon deux hypothèses différentes:

- La première consiste à définir \mathbf{Q} cinématiquement. Par exemple choisir $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_p$ revient à prendre $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{ep}$ ($\bar{\mathbf{F}}^p = \mathbf{U}^p$). On retrouve là la démarche milieu à configuration intermédiaire, mais utilisée cette fois-ci avec une formulation d'orientation lagrangienne qui permet de rendre compte de l'anisotropie initiale.

Si l'élément matériel est soumis à une sollicitation élastique après qu'il ait subi une transformation plastique fixée, la configuration élastique initiale $\bar{\mathbf{C}}$ ne doit pas varier au cours du temps; son orientation par rapport à la configuration \mathbf{C}_p (ou $\bar{\mathbf{C}}$) ne doit donc dépendre que de la cinématique plastique. L'évolution de \mathbf{Q} sera alors donnée par une relation cinématique, postulée a priori, sous une forme (14) avec:

$$\mathbf{W}^p = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{W}}^p(\bar{\mathbf{v}}^p, \bar{\mathbf{D}}^p) \mathbf{Q}^T \quad (25.a)$$

La relation (25.a) doit être positivement homogène de degré 1 par rapport à $\bar{\mathbf{D}}^p$ (indépendance des vitesses), soit en utilisant la loi d'évolution de $\bar{\mathbf{D}}^p$ (24.a):

$$\mathbf{W}^p = \lambda \mathbf{a} \quad ; \quad \mathbf{a} = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{v}}^p, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \mathbf{Q}^T \quad (25.b)$$

Remarquons que dans le cas rigide plastique ($\mathbf{R}^{ep} = \mathbf{R}$, $\mathbf{U}^p = \mathbf{U}$ et $\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{W}$), on retrouve la formulation avec un choix cinématique du référentiel tournant (§III.2.2B). En particulier le choix de la configuration \mathbf{C}_p revient au choix du référentiel en rotation propre, et prendre $\mathbf{W}_Q = \bar{\mathbf{W}}$ revient au choix du référentiel corotationnel.

- La deuxième hypothèse consiste à dire qu'il existe une structure interne dans le matériau et que le référentiel tournant est attaché à cette structure; la rotation \mathbf{Q} définit alors l'orientation spatiale de la structure: c'est la démarche milieu à configuration naturelle locale ou "théorie de la rotation plastique" présentée au §II.3.3 avec $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\beta}$ et $\bar{\mathbf{F}}^p = \hat{\mathbf{F}}^p$ dans le cas élastoplastique, et au §III.2.2.C dans le cas rigide plastique. On définit alors la vitesse de rotation plastique eulérienne (relation II.40.b) qui sera donnée par une loi d'évolution (relations II.45):

$$\mathbf{W}^p = \mathbf{Q} [\dot{\bar{\mathbf{F}}^p} \bar{\mathbf{F}}^{p-1}]^A \mathbf{Q}^T = \lambda \mathbf{Q} \bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \mathbf{Q}^T \quad (26)$$

Sachant que $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{ep} \mathbf{U}^p \bar{\mathbf{F}}^{p-1}$, $\mathbf{W}_Q = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$ est alors donné par (14).

- Conclusions

En conclusion, l'hypothèse de la configuration relâchée revient à formuler le comportement élastoplastique dans un référentiel tournant dont l'évolution est donnée par la relation (14). La vitesse de

rotation \mathbf{W}^P peut être soit formulée cinématiquement a priori selon (25), soit considérée comme une variable interne dont la loi d'évolution est donnée par (26). Tout ce qui a été dit au chapitre précédent concernant le comportement plastique peut être repris ici en remplaçant \mathbf{F} par $\tilde{\mathbf{F}}^P$ et donc \mathbf{D} par \mathbf{D}^P , \mathbf{W} par $\tilde{\mathbf{W}}$, \mathbf{V} par $\tilde{\mathbf{U}}^P$, etc... Le comportement total est alors terminé par le choix d'une loi élastique sous la forme (23.a) ou (23.b). La composition de la vitesse de déformation est obtenue par (15). La loi en vitesse s'écrit alors:

$$\mathbf{D} = \Lambda : \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} + \lambda \tilde{\mathbf{h}} \quad (27.a)$$

$$= \Lambda : (\mathbf{D}_Q \boldsymbol{\tau} / Dt) + \lambda \mathbf{h}_Q \quad (27.b)$$

avec:

$$\mathbf{h}_Q = \mathbf{h}^P + \mathbf{h}_\alpha + [\mathbf{v}^e \mathbf{a} \mathbf{v}^{e-1}]^S$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^P + \mathbf{h}_\alpha + [\mathbf{v}^e \mathbf{a} \mathbf{v}^{e-1}]^S - 2 \Lambda : [\boldsymbol{\tau} \mathbf{a}]^S$$

$$\mathbf{h}^P = [\mathbf{v}^e \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{h}} \mathbf{Q}^T \mathbf{v}^{e-1}]^S$$

Le tenseur $\tilde{\mathbf{h}}$ représente l'évolution de la déformation plastique (22.a), \mathbf{a} celle de la rotation plastique (relations (25) ou (26)) et \mathbf{h}_α la variation des propriétés élastiques au cours de l'écoulement.

B) CADRE THERMODYNAMIQUE

- Energie libre

Dans la configuration $\bar{\mathcal{C}}$, l'état du matériau est défini par la déformation élastique (par exemple $\bar{\mathbf{B}}^e$) et les variables internes $\bar{\alpha}$; l'énergie libre s'écrit alors:

$$\psi = \bar{\psi}(\bar{\mathbf{B}}^e, \bar{\alpha})$$

soit:

$$\rho_0 \dot{\psi} = \rho_0 (\partial \bar{\psi} / \partial \bar{\mathbf{B}}^e) : \dot{\bar{\mathbf{B}}}^e + \rho_0 (\partial \bar{\psi} / \partial \bar{\alpha}) : \dot{\bar{\alpha}} \quad (28.a)$$

Vu la relation (14), on a:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{B}}}^e &= \mathbf{Q}^T (\dot{\bar{\mathbf{B}}}^e + \mathbf{W}^P \bar{\mathbf{B}}^e - \bar{\mathbf{B}}^e \mathbf{W}^P) \mathbf{Q} \\ &= 2 \bar{\mathbf{v}}^e \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{v}}^e - 2 [\bar{\mathbf{B}}^e (\bar{\mathbf{D}}^P + \bar{\mathbf{W}}^P)]^S \end{aligned} \quad (29)$$

En utilisant (29) dans (28.a) on a:

$$\rho_0 \dot{\psi} = \bar{\boldsymbol{\tau}}^e : \bar{\mathbf{D}} - \boldsymbol{\Sigma} : (\bar{\mathbf{D}}^P + \bar{\mathbf{W}}^P) - \bar{\mathbf{X}} : \dot{\bar{\alpha}} \quad (28.b)$$

avec:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^e = 2 \rho_0 \bar{\mathbf{v}}^e (\partial \bar{\psi} / \partial \bar{\mathbf{B}}^e) \bar{\mathbf{v}}^e \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \bar{\mathbf{v}}^e \bar{\boldsymbol{\tau}}^e \bar{\mathbf{v}}^{e-1} \quad (31.a)$$

$$\bar{\mathbf{X}} = - \rho_0 (\partial \bar{\psi} / \partial \bar{\alpha}) \quad (31.b)$$

- Dissipation - Forces thermodynamiques

L'utilisation de la relation (28.b) dans l'inégalité de Clausius-Duhem permet d'écrire la loi élastique et la dissipation:

$$\text{Dissipation:} \quad \Phi = \boldsymbol{\Sigma} : (\bar{\mathbf{D}}^P + \bar{\mathbf{W}}^P) + \bar{\mathbf{X}} : \dot{\bar{\alpha}} \quad (32.a)$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}^S : \bar{\mathbf{D}}^P + \boldsymbol{\Sigma}^A : \bar{\mathbf{W}}^P + \bar{\mathbf{X}} : \dot{\bar{\alpha}} \quad (32.b)$$

$$\text{Loi élastique:} \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}^e \quad (33)$$

Faisons les remarques suivantes:

- La loi élastique (33) avec $\bar{\tau}^e$ défini par (30) est un cas particulier de (23.a).

- Selon la théorie de la rotation plastique, \bar{w}^p est une variable interne qui nécessite une loi d'évolution comme \bar{D}^p . La force thermodynamique associée à cette variable interne est la partie antisymétrique de Σ soit $\Sigma^A = [\bar{v}^e \bar{\tau} \bar{v}^{e-1}]^A$. En cas d'isotropie du comportement (isotropie initiale et écrouissage isotrope), Σ^A est nul (directions principales des contraintes et des déformations confondues).

- Selon la théorie de la configuration intermédiaire, \bar{w}^p est postulé a priori sous la forme (25). On peut alors écrire (32) sous la forme:

$$\Phi = \bar{\tau}^p : \bar{D}^p + \bar{\lambda} : \dot{\bar{\alpha}} \quad (34)$$

le tenseur symétrique $\bar{\tau}^p$ étant fonction de \bar{v}^e (ou $\bar{\tau}$), \bar{U}^p et les variables internes d'écrouissage. Sa forme précise dépend du choix de \bar{w}^p et donc de w_Q :

$$\begin{aligned} w_Q = \bar{w} &\Rightarrow \bar{\tau}^p = \Sigma^s \\ w_Q = w^{ep} &\Rightarrow \bar{\tau}^p = \Sigma^s + \mathfrak{R}(U^p) [\Sigma^A] \end{aligned}$$

- Le fait que \bar{w}^p ne dépende que de la transformation plastique est important dans l'écriture thermodynamique. En effet, si \bar{w}^p dépendait de la transformation totale, il y aurait un terme en \bar{D} qui viendrait de $\Sigma^A : \bar{w}^p$ et qu'il faudrait faire intervenir dans $\bar{\tau}^e$. Par exemple, si l'on prend $Q = R$, c'est-à-dire si l'on choisit le référentiel en rotation propre, on aura:

$$\bar{w}^p = \mathfrak{R}(U) [\bar{D}] + \mathfrak{R}(\bar{v}^e) [\bar{D}] + \mathfrak{R}(\bar{v}^e) [\bar{D}^p]$$

Dans ce cas on peut toujours écrire la dissipation sous la forme (34) mais avec modification de la loi élastique:

$$\bar{\tau}^e = 2\rho_0 [\bar{B}^e (\partial\bar{\psi}/\partial\bar{B}^e)]^s + 2\rho_0 \mathfrak{R}(U) [(\bar{B}^e \partial\bar{\psi}/\partial\bar{B}^e)^A] \quad (35.a)$$

$$\bar{\tau}^p = 2\rho_0 \bar{v}^e (\partial\bar{\psi}/\partial\bar{B}^e) \bar{v}^e \quad (35.b)$$

et l'on voit la dépendance de la loi élastique (35.a) par rapport à U .

- Lois d'évolution

Pour finir la formulation du comportement, il faut postuler un critère de plasticité qui pourra dépendre des forces thermodynamiques et des variables internes, et postuler les lois d'évolution pour \bar{D}^p et $\dot{\bar{\alpha}}$ en utilisant la procédure des matériaux standard généralisés par exemple.

3.2. MILIEUX A CONFIGURATION RELATIVEMENT RELACHÉE

On part de l'hypothèse que D se décompose selon (2). Pour formuler un comportement anisotrope général il faut utiliser l'écriture en référentiel tournant qui permet d'assurer l'objectivité de la loi. Le comportement plastique est alors défini par les relations (21) et (22). Le comportement élastique est de type hypoélastique: on suppose une relation bijective réversible entre l'incrément de déformation élastique \bar{v}_r^e (entre la configuration relativement relâchée et celle à $t+dt$) et l'incrément des contraintes $\bar{\tau} dt$ ($\bar{\tau}_r = \bar{\tau} + \dot{\bar{\tau}} dt$, voir §2.2):

$$\bar{v}_r^e = \bar{s}(\dot{\bar{\tau}} dt) = \mathbf{1} + \bar{\lambda} : \dot{\bar{\tau}} dt = \mathbf{1} + \bar{D}^e dt$$

soit:

$$\bar{\mathbf{D}}^e = \bar{\Lambda}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) : \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (36)$$

ce qui permet d'écrire la loi en vitesse:

$$\mathbf{D} = \Lambda : (D_{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\tau} / D\tau) + \lambda \mathbf{h} \quad (37)$$

La relation (37) est analogue à (27.b). La formulation générale du comportement selon la théorie à configuration relâchée ou relativement relâchée est donc identique. La différence essentielle entre ces deux théories réside, comme prévu, dans l'interprétation du comportement élastique. Les mêmes fonctions constitutives obtenues à partir d'un formalisme petites déformations mènent à des comportements différents suivant que l'on interprète celui-ci selon l'une ou l'autre des deux théories. Il existe une autre différence relative au choix du référentiel tournant: selon la théorie à configuration relâchée, la rotation \mathbf{Q} doit dépendre de la transformation plastique uniquement, alors que selon la théorie à configuration relativement relâchée elle est complètement arbitraire.

4. CAS PARTICULIERS: PETITES DEFORMATIONS ELASTIQUES

4.1. HYPOTHESE DES PETITES DEFORMATIONS ELASTIQUES

Pour la décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$, cette hypothèse revient à supposer que $\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{V}^e - \mathbf{1}$ est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à l'unité ($|\boldsymbol{\epsilon}^e| \ll 1$). A partir des relations (15), on peut aussi voir, que dans le cas général, la différence entre les diverses vitesses (objectives) de déformation élastique est du même ordre que celle entre $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ et \mathbf{D}^p . Le gradient de vitesse \mathbf{L} s'écrit:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^p + \tilde{\mathbf{W}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + 2[\boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{D}^p]^A + \dots \quad (38)$$

Les deux premiers termes de droite de (38) sont d'ordre 0, les deux suivants sont d'ordre 1 et les pointillés représentent les termes d'ordre supérieur à 1. Si l'on ne garde que les termes d'ordre 0, \mathbf{D} se réduit à \mathbf{D}^p et \mathbf{W} à $\tilde{\mathbf{W}}$ (cas rigide plastique), par contre si l'on garde les termes d'ordre 1 on a:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^p + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{D}^p + \boldsymbol{\epsilon}^{eJ} = \mathbf{D}^p + \tilde{\mathbf{D}}^e \quad (39.a)$$

$$\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{W}} + 2[\boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{D}^p]^A \quad (39.b)$$

La relation (39.a) représente la décomposition "rigoureuse" de la vitesse de déformation totale en partie élastique et partie plastique. L'utilisation "rigoureuse" d'une autre vitesse de déformation élastique relative à une autre configuration relâchée dans (39.a) n'est possible que si \mathbf{W}_Q est du même ordre que $\tilde{\mathbf{D}}^e$, c'est-à-dire si \mathbf{W}^p est du même ordre que $[\boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{D}^p]$. D'un point de vue "pratique" la prise en compte de la vitesse de déformation élastique n'est, en général, nécessaire que pendant la décharge élastique; dans ce cas $\mathbf{W}^p = 0$ et toutes les vitesses de déformation élastique se retrouvent égales (relations (15)).

Si l'on effectue un développement limité de la loi élastique (23.a) autour de $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ en remarquant que pour $\boldsymbol{\epsilon}^e$ nul $\boldsymbol{\tau}$ doit être nul (configuration relâchée), on obtient:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{A}}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad \text{ou} \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \bar{\boldsymbol{\Lambda}}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (40.a)$$

soit:

$$\mathbf{D}^e_Q = D_Q \boldsymbol{\epsilon}^e / Dt = \boldsymbol{\Lambda} : (D_Q \boldsymbol{\tau} / Dt) + \lambda \mathbf{h}_\alpha \quad (40.b)$$

$$\Lambda_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} \bar{\Lambda}_{mnpq}$$

La formulation en vitesse (27) du comportement devient alors:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^p + \tilde{\mathbf{D}}^e \quad (41.a)$$

$$\mathbf{D}^p = \lambda \mathbf{h} = \lambda \mathbf{Q} \bar{\mathbf{h}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) \mathbf{Q}^T \quad (41.b)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^e = \boldsymbol{\Lambda} : \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} + \lambda \tilde{\mathbf{h}}^e = \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\tau}^J + \lambda \tilde{\mathbf{h}}^e \quad (41.c)$$

$$= \boldsymbol{\Lambda} : (D_Q \boldsymbol{\tau} / Dt) + \lambda \mathbf{h}^e_Q$$

avec:

$$\mathbf{h}^e_Q = \mathbf{h}_\alpha + 2[\boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{a}]^S ; \quad \tilde{\mathbf{h}}^e = \mathbf{h}^e_Q - 2\boldsymbol{\Lambda} : [\boldsymbol{\tau} \mathbf{a}]^S$$

Remarquons tout de suite qu'en cas d'isotropie de la loi élastique, $\tilde{\mathbf{h}}^e$ se réduit à \mathbf{h}_α ce qui n'est pas le cas pour \mathbf{h}^e_Q . Si en plus, il n'y a pas d'influence de l'écroutissage sur la loi élastique alors $\tilde{\mathbf{h}}^e = 0$ ce qui n'est pas le cas pour \mathbf{h}^e_Q .

4.2. ELASTICITE LINEAIRE ISOTROPE

Si l'on suppose un comportement élastique (configuration relâchée) ou hypoélastique (configuration relativement relâchée) linéaire isotrope et indépendant de l'écouissage, on obtient la formulation générale suivante:

Décomposition de la vitesse de déformation: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$

Comportement élastique:

Elasticité: $\mathbf{D}^e = \Lambda : \boldsymbol{\tau}^J$ (42.a)

Hypoélasticité: $\mathbf{D}^e = \Lambda : (D_{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\tau} / Dt)$ (42.b)

Comportement plastique:

$$\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \leq 0 \quad (43.a)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \lambda \bar{\mathbf{h}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \quad (43.b)$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = \lambda \bar{\mathbf{l}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\alpha}) \quad (43.c)$$

La relation (42.a) concerne les milieux à configuration relâchée. Elle est considérée comme élastique parce qu'elle vient de l'hypothèse que $\boldsymbol{\epsilon}^e = \Lambda : \boldsymbol{\tau}$ et qu'en première approximation $\mathbf{D}^e = \boldsymbol{\epsilon}^{eJ}$. La relation (42.b) concerne les milieux à configuration relativement relâchée.

- Chapitre 5 -

QUELQUES MATERIAUX MODELES en ELASTOPLASTICITE ANISOTROPE

RESUME

Ce chapitre présente quelques "matériaux modèles" anisotropes, construits à partir d'hypothèses simples : matériaux stratifiés, matériaux renforcés par des fibres, le monocristal plan.

L'objectif essentiel de ce chapitre est d'illustrer l'utilisation du formalisme en référentiel tournant dans des cas où celui-ci s'impose par la structure du matériau.

1. INTRODUCTION

Au cours des quatre chapitres précédents, nous avons développé le cadre "mécanique des milieux continus" permettant la formulation d'un comportement élastoplastique anisotrope. L'écriture en référentiel tournant apparaît comme une manière simple et saine pour concilier objectivité et formulation eulérienne. Une loi de comportement est alors basée sur un ensemble de fonctions constitutives relativement simples, écrites dans un référentiel tournant lié d'une certaine manière à la matière. Ceci nous amène à nous poser deux questions:

- Cette approche est elle satisfaisante pour tout type de comportement?
- Comment peut-on choisir le référentiel tournant?

La réponse à ces questions dépend bien sûr du matériau à modéliser et de l'origine microstructurale de l'anisotropie.

Si la microstructure du matériau est soit trop mal connue soit trop complexe pour pouvoir être prise en compte, ce qui est actuellement le cas pour la plasticité des métaux, le choix du référentiel tournant ne peut se faire que phénoménologiquement. Cette approche a été discutée au chapitre III.

Si la microstructure est bien connue, le choix éventuel du référentiel tournant sera imposé. L'objectif de ce chapitre est de construire quelques exemples simples de "structures modèles" susceptibles de nous guider dans le choix phénoménologique du référentiel tournant pour les matériaux réels présentant des microstructures plus complexes.

Différents types de "matériaux modèles" sont étudiés: les matériaux stratifiés ou renforcés par fils représentent une anisotropie que nous avons appelée "anisotropie matérielle" du fait de l'existence de directions (renforcement par fils) ou surfaces matérielles (stratifiés) privilégiées; le référentiel tournant dans ce cas sera attaché à cette direction ou à cette surface matérielle. Par contre, l'exemple du monocristal illustre le cas où la microstructure est non matérielle; le référentiel tournant n'est attaché à aucune direction ou surface matérielle. Dans les différents cas, le comportement est analysé et son écriture en formalisme en référentiel tournant est discutée.

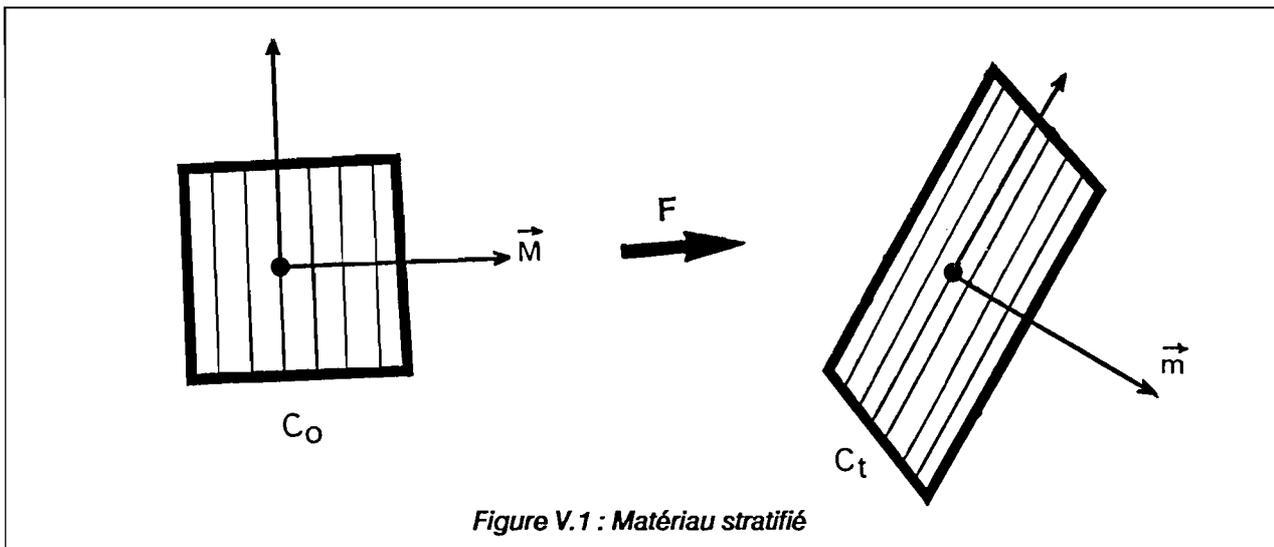


Figure V.1 : Matériau stratifié

2. MATERIAUX STRATIFIES

2.1. HYPOTHESES DE BASE

Si l'on considère une structure stratifiée constituée par des couches de matériaux plastiques isotropes différents, le comportement global sera plastique anisotrope: c'est le premier matériau modèle que l'on veut construire. Pour des raisons de simplicité, on supposera que le comportement de chaque matériau constituant est rigide parfaitement plastique.

A) HYPOTHESES D'HOMOGENEISATION

On considère un matériau stratifié dont la structure est périodique et constituée par N matériaux différents de concentration volumique c_a ($a=1,..N$). On note \vec{M} et \vec{m} la normale unitaire à la structure respectivement à l'état initial (C_0) et à l'état déformé (C_t) (Fig. V.1). Dans tout ce paragraphe on notera par de grandes lettres les grandeurs macroscopiques globales et par de petites lettres les grandeurs microscopiques relatives à chaque constituant, par exemple le tenseur de contrainte de Cauchy sera noté \mathbf{T} pour le matériau homogénéisé et par \mathbf{t}^a pour chaque constituant. On suppose que \mathbf{T} et \mathbf{D} sont les moyennes volumiques des \mathbf{t}^a et \mathbf{d}^a :

$$\mathbf{T} = \sum c_a \mathbf{t}^a \quad (1.a)$$

$$\mathbf{D} = \sum c_a \mathbf{d}^a \quad (1.b)$$

L'hypothèse de continuité des vecteurs déplacement et contrainte à l'interface, entre deux couches, se traduit par les conditions suivantes:

$$T_{i1} = t^a_{i1} \quad ; \quad D_{\alpha\beta} = d^a_{\alpha\beta} \quad (2.a)$$

$$D_{i1} = \sum c_a d^a_{i1} \quad ; \quad T_{\alpha\beta} = \sum c_a t^a_{\alpha\beta} \quad (2.b)$$

La direction 1 est supposée portée par \vec{m} , les indices grecs prennent les valeurs 2,3 alors que les indices latins prennent les valeurs 1,2,3 (Cette notation sera utilisée dans tout ce paragraphe). Dans le paragraphe qui va suivre nous allons écrire les relations (2) sous forme tensorielle et pour cela nous proposons une décomposition orthogonale particulière sur l'espace des tenseurs et plus précisément sur l'espace des déviateurs.

B) DECOMPOSITION ORTHOGONALE D'UN DEVIATEUR

En notant $\mathbf{m} = \vec{m} \otimes \vec{m}$, le déviateur \mathbf{X}^D de tout tenseur symétrique \mathbf{X} peut se décomposer sous la forme:

$$\mathbf{X}^D = \mathbf{X}_V + \mathbf{X}_H \quad (3.a)$$

avec:

$$\mathbf{X}_V = 2 [\mathbf{mX}(\mathbf{1}-\mathbf{m})]^S \quad (3.b)$$

Si l'on choisit une base orthonormée \vec{e}_i de sorte que $\vec{e}_1 = \vec{m}$, les matrices des composantes de \mathbf{X}_V et \mathbf{X}_H dans cette base sont:

$$[X_V] : \begin{bmatrix} 0 & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & 0 & 0 \\ X_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [X_H] : \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

avec

$$S_{11} = (2X_{11} - X_{22} - X_{33})/3 ; S_{22} = (2X_{22} - X_{33} - X_{11})/3 ; S_{33} = (2X_{33} - X_{11} - X_{22})/3$$

Les tenseurs \mathbf{X}_H et \mathbf{X}_V sont orthogonaux puisque:

$$\mathbf{X}_V : \mathbf{X}_H = 0 ; |\mathbf{X}^D|^2 = |\mathbf{X}_V|^2 + |\mathbf{X}_H|^2 \quad (5)$$

En utilisant la décomposition (3), les conditions d'homogénéisation (2) deviennent:

$$\mathbf{T}_V = \mathbf{t}_V^a ; \quad \mathbf{D}_H = \mathbf{d}_H^a \quad (6.a)$$

$$\mathbf{D}_V = \sum c_a \mathbf{d}_V^a ; \quad \mathbf{T}_H = \sum c_a \mathbf{t}_H^a \quad (6.b)$$

avec

$$\text{tr} \mathbf{D} = \text{tr} \mathbf{d}^a = 0 ; \quad \text{tr} \mathbf{T} \mathbf{m} = \text{tr} \mathbf{t}^a \mathbf{m} \quad (6.c)$$

Les relations (6) permettent d'écrire la relation de comportement entre \mathbf{T} et \mathbf{D} du matériau homogénéisé si l'on se donne le comportement local des différents constituants par des relations entre \mathbf{t}^a et \mathbf{d}^a . Le passage du comportement local au comportement homogénéisé est plus facile si le premier est donné sous forme de relations reliant $(\mathbf{d}_V^a, \mathbf{t}_H^a)$ à $(\mathbf{t}_V^a, \mathbf{d}_H^a)$ (dans ce cas le comportement global s'obtient par simple moyennage selon les relations (2.b)).

2.2. EQUATIONS CONSTITUTIVES

A) COMPORTEMENT LOCAL DECOMPOSE

On suppose que chaque constituant est rigide parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises avec la loi d'évolution plastique associée. On peut écrire le critère ainsi que les lois d'évolution en utilisant la décomposition (3) soit:

$$f(\mathbf{t}_V^a, \mathbf{t}_H^a) = |\mathbf{t}_V^a|^2 + |\mathbf{t}_H^a|^2 - 2\sigma_a^2/3 \leq 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{d}_V^a = \lambda_a \mathbf{t}_V^a \quad (8.a)$$

$$\mathbf{d}_H^a = \lambda_a \mathbf{t}_H^a \quad (8.b)$$

$$\lambda_a = \sqrt{(3/2)} |\mathbf{d}^a| / \sigma_a \quad (9)$$

Pour écrire le comportement sous la forme de relations donnant $(\mathbf{d}_V^a, \mathbf{t}_H^a)$ en fonction de $(\mathbf{t}_V^a, \mathbf{d}_H^a)$, il faut écrire le critère d'écoulement (7) et la relation (9) en fonction de \mathbf{t}_V^a et \mathbf{d}_H^a . Il est clair d'après (7) que l'on a toujours:

$$|\mathbf{t}_V^a|^2 \leq (2/3) \sigma_a^2 \quad (10)$$

Considérons le cas où $|\mathbf{d}_H^a| > 0$. Il y a donc écoulement plastique ($\lambda_a \neq 0$). L'inégalité (10) se transforme en inégalité stricte (l'inégalité (7) est une égalité) et l'on a:

$$\mathbf{d}_V^a = \lambda_a \mathbf{t}_V^a \quad (11.a)$$

$$\mathbf{t}_H^a = 1/\lambda_a \mathbf{d}_H^a \quad (11.b)$$

Le scalaire λ_a s'obtient à partir de (11.b) et (7):

$$\lambda_a = |\mathbf{d}_H^a| / \sqrt{[(2/3) \sigma_a^2 - |\mathbf{t}_V^a|^2]} \quad (12)$$

Considérons maintenant le cas où $|\mathbf{d}_H^a| = 0$. Si (10) est une inégalité stricte, la relation (8.b)

implique soit $\mathbf{t}_H^a = 0$ c'est-à-dire que $f < 0$ et donc il n'y a pas d'écoulement plastique ($\mathbf{d}_V^a = 0$); soit $\lambda_a = 0$ et là aussi on a $\mathbf{d}_V^a = 0$. Si maintenant (10) est une égalité ($|\mathbf{t}_V^a| = \sqrt{(2/3)} \sigma_a$), le critère est alors automatiquement vérifié ($f = 0$) et l'on a $\mathbf{t}_H^a = 0$. La relation (8.a) devient:

$$\mathbf{d}_V^a / |\mathbf{d}_V^a| = \mathbf{t}_V^a / (\sqrt{(2/3)} \sigma_a) \quad (11.a \text{ bis})$$

En conclusion, pour écrire le comportement sous la forme de relations donnant $(\mathbf{d}_V^a, \mathbf{t}_H^a)$ en fonction de $(\mathbf{t}_V^a, \mathbf{d}_H^a)$ il faut distinguer 2 cas:

- **cas 1:**

$$|\mathbf{t}_V^a| < \sqrt{(2/3)} \sigma_a \quad \text{et} \quad |\mathbf{d}_H^a| > 0 \quad (13.a)$$

Dans ce cas le comportement est défini par les relations (11.a), (11.b) et (12).

- **cas 2:**

$$|\mathbf{t}_V^a| = \sqrt{(2/3)} \sigma_a \quad \text{et} \quad |\mathbf{d}_H^a| = 0 \quad (13.b)$$

Dans ce cas seul $\mathbf{d}_V^a / |\mathbf{d}_V^a|$ est donné par la relation (11.a bis) avec $\mathbf{t}_H^a = 0$.

B) COMPORTEMENT HOMOGENEISE

Le comportement global s'obtient en utilisant les conditions (6). On distingue 2 cas:

- **cas 1: $\mathbf{D}_H \neq 0$**

Si $\mathbf{D}_H \neq 0$, on se trouve dans le cas 1 (13.a) pour toutes les couches ($\mathbf{d}_H^a = \mathbf{D}_H$, $|\mathbf{T}_V| = |\mathbf{t}_V^a| < \sqrt{(2/3)} \inf(\sigma_a)$). Toutes les couches sont donc en charge et l'on a alors:

$$\mathbf{D}_V = (\sum c_a \lambda_a) \mathbf{T}_V \quad (14.a)$$

$$\mathbf{T}_H = (\sum c_a / \lambda_a) \mathbf{D}_H \quad (14.b)$$

avec:

$$\lambda_a = |\mathbf{D}_H| / \sqrt{[(2/3) \sigma_a^2 - |\mathbf{T}_V|^2]} \quad (15)$$

La surface de plasticité s'obtient en écrivant:

$$|\mathbf{T}^D|^2 - |\mathbf{T}_V|^2 = |\mathbf{T}_H|^2 = (\sum c_a \sqrt{[(2/3) \sigma_a^2 - |\mathbf{T}_V|^2]})^2$$

soit:

$$f(\mathbf{T}^D, \mathbf{m}) = (3/2) \mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D - h - (\sum c_a \sqrt{[\sigma_a^2 - h]})^2 \leq 0 \quad (16)$$

$$h = (3/2) \mathbf{T}_V : \mathbf{T}_V = 4 \operatorname{tr} \{ [\mathbf{m} \mathbf{T} (\mathbf{1} - \mathbf{m})]^S \}^2 = 3 (T_{12}^2 + T_{13}^2)$$

Le critère (11) est un critère orthotrope de révolution de direction privilégiée portée par \mathbf{m} . La loi de comportement globale entre \mathbf{T}^D et \mathbf{D} s'écrit à partir des relations (14), soit:

$$\mathbf{D} = \lambda \{ \mathbf{T}^D + (\beta - 1) 2 [\mathbf{m} \mathbf{T}^D (\mathbf{1} - \mathbf{m})]^S \} \quad (17)$$

avec:

$$\beta = \frac{\sum [c_a \sqrt{(\sigma_a^2 - h)}]}{\sum [c_a / \sqrt{(\sigma_a^2 - h)}}$$

$$\lambda = 1 / (\sum c_a / \lambda_a)$$

et on vérifie que:

$$\mathbf{D} = (\lambda/3) \partial f / \partial \mathbf{T}$$

- **cas 2: $\mathbf{D}_H = 0$**

Si $\mathbf{D}_H = 0$, pour qu'il y ait écoulement il faut que $|\mathbf{T}_V| = \sigma_1 \sqrt{(2/3)}$, σ_1 étant la valeur inférieure de σ_a .

On se retrouve dans le cas 2 pour la couche ayant le seuil inférieur (couche 1), aucune des autres couches n'est en charge. Seul \mathbf{d}_V^1 est donc non nul et l'on a $\mathbf{D} = \mathbf{D}_V = c_1 \mathbf{d}_V^1$. \mathbf{D} est donc donné par:

$$|\mathbf{D}|/|\mathbf{D}| = c_1 / (\sqrt{(2/3) \sigma_1})^2 [\mathbf{mT}(\mathbf{1}-\mathbf{m})]^S \quad (18)$$

et tous les \mathbf{t}_H^a vérifient:

$$|\mathbf{t}_H^a| \leq \sqrt{[2(\sigma_a^2 - \sigma_1^2)/3]} \quad (19)$$

C) INTERPRETATION EN REFERENTIEL TOURNANT

Le comportement défini par les relations (11) et (12) rentre dans le cadre des lois rigides plastiques écrites en référentiel tournant. C'est un comportement rigide parfaitement plastique orthotrope de révolution. Le référentiel tournant associé à ce comportement est n'importe quel référentiel qui contient comme vecteur de base le vecteur $\bar{\mathbf{m}}$. Par exemple, on peut choisir comme référentiel tournant celui défini par $\bar{\mathbf{m}}$ et une direction matérielle $(\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{k}})$ dans un plan normal à $(\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{m}})$ de sorte que $\bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{m}}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{k}}$ et $\bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{m}} \wedge \bar{\mathbf{k}}$. L'évolution de ce référentiel tournant est alors définie par:

$$\bar{\mathbf{W}}_Q = \mathbf{W} - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = 2 [\mathbf{mD} + (\mathbf{1}-\mathbf{m}-\mathbf{k})\mathbf{Dk}]^A \quad (20)$$

avec

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q} \quad ; \quad \mathbf{k} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q}$$

Il est bien évident que le choix (20) dépend du choix de \mathbf{K} , mais à cause de l'orthotropie de révolution, le choix de \mathbf{K} n'influe pas sur le comportement.

3.3. COMPORTEMENT EN CISAILLEMENT SIMPLE

Supposons que l'on réalise un cisaillement simple dans le plan $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2)$ tel que $\bar{\mathbf{e}}_1$ fasse un angle ψ par rapport à $\bar{\mathbf{m}}$ (Fig. V.2). Le repère $\bar{\mathbf{m}}_i$ ($\bar{\mathbf{m}}_1 = \bar{\mathbf{m}}$, $\bar{\mathbf{m}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3$) est repère principal de l'orthotropie de révolution. Son évolution au cours de la sollicitation est donnée par ψ :

$$\text{tg } \psi = \text{tg}(\psi_0) + \gamma \quad \dot{\psi} = (1 + \cos 2\psi) \dot{\gamma}/2 \quad (21)$$

Remarquons que $\dot{\gamma}$ et $\dot{\psi}$ ont le même signe.

Les matrices des composantes de \mathbf{D} et \mathbf{T}^D dans $\bar{\mathbf{e}}_i$ sont:

$$\mathbf{D} : (\dot{\gamma}/2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^D : \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si l'on note $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ et $(\bar{D}_{11}, \bar{D}_{12})$ les composantes respectives de \mathbf{T}^D et \mathbf{D} dans le repère $\bar{\mathbf{m}}_i$, on a:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma \cos 2\psi - \tau \sin 2\psi & \bar{D}_{11} &= -\sin 2\psi \dot{\psi}/2 \\ \bar{\tau} &= \sigma \sin 2\psi + \tau \cos 2\psi & \bar{D}_{12} &= \cos 2\psi \dot{\psi}/2 \end{aligned} \quad (22)$$

La décomposition (4) de \mathbf{D} et \mathbf{T}^D dans $\bar{\mathbf{m}}_i$ donne:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_V : \bar{D}_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \quad \mathbf{T}_V : \bar{\tau} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_H : \bar{D}_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \quad \mathbf{T}_H : \bar{\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et:

$$|\mathbf{T}_V| = |\mathbf{t}_V^a| = \sqrt{2} |\bar{\tau}| \quad (23.a)$$

$$|\mathbf{D}_H| = |\mathbf{d}^a_H| = \sqrt{2} |\bar{D}_{11}| = |\sin 2\psi| \dot{\psi}/\sqrt{2} \quad (23.b)$$

Nous avons supposé dans (23.b) que $\dot{\psi}$ est toujours positif.

cas 1: $\sin 2\psi \neq 0$

Ceci correspond au cas 1 du paragraphe précédent. Le comportement est alors défini par les relations (16) et (17) avec $h=3\bar{\tau}^2$:

$$\bar{\sigma}^2 - (1/3) \{ \Sigma c_a \sqrt{[\sigma_a^2 - 3\bar{\tau}^2]} \}^2 = 0 \quad (24)$$

$$\bar{D}_{11} = - \sin 2\psi \dot{\gamma}/2 = \lambda \bar{\sigma} \quad (25.a)$$

$$\bar{D}_{12} = \cos 2\psi \dot{\gamma}/2 = \lambda \beta \bar{\tau} \quad (25.b)$$

Les relations (25) indiquent que pour $\dot{\gamma} > 0$, $\bar{\tau}$ a le même signe que $\cos 2\psi$ et $\bar{\sigma}$ le signe opposé de $\sin 2\psi$. Distinguons 2 cas:

Cas 1.a: $\cos 2\psi = 0$

Dans ce cas $\bar{\tau} = 0$ et l'on a:

$$\sigma = 0 \quad (26.a)$$

$$\tau = |\sin 2\psi| \Sigma c_a \sigma_a / \sqrt{3} \quad (26.b)$$

Cas 1.b: $\cos 2\psi \neq 0$

En divisant (25.a) par (25.b) et en reportant la valeur de $\bar{\sigma}$ ainsi obtenue en fonction de $\bar{\tau}$ et ψ dans (24), on obtient:

$$3\bar{\tau}^2 \operatorname{tg}^2 2\psi \{ \Sigma c_a \sqrt{(\sigma_a^2 - 3\bar{\tau}^2)} \}^2 = 1 \quad (27)$$

Les relations (24) et (27) permettent de déterminer $\bar{\tau}^2$ et $\bar{\sigma}^2$ en fonction de ψ ; ce qui permet d'avoir σ et τ :

$$\sigma = \sin 4\psi \left| \bar{\tau} / 2 \cos 2\psi \right| (1 - \beta) \quad (28.a)$$

$$\tau = \left| \bar{\tau} \cos 2\psi \right| + \{ \Sigma c_a \sqrt{[\sigma_a^2 - 3\bar{\tau}^2]} \} |\sin 2\psi| / \sqrt{3} \quad (28.b)$$

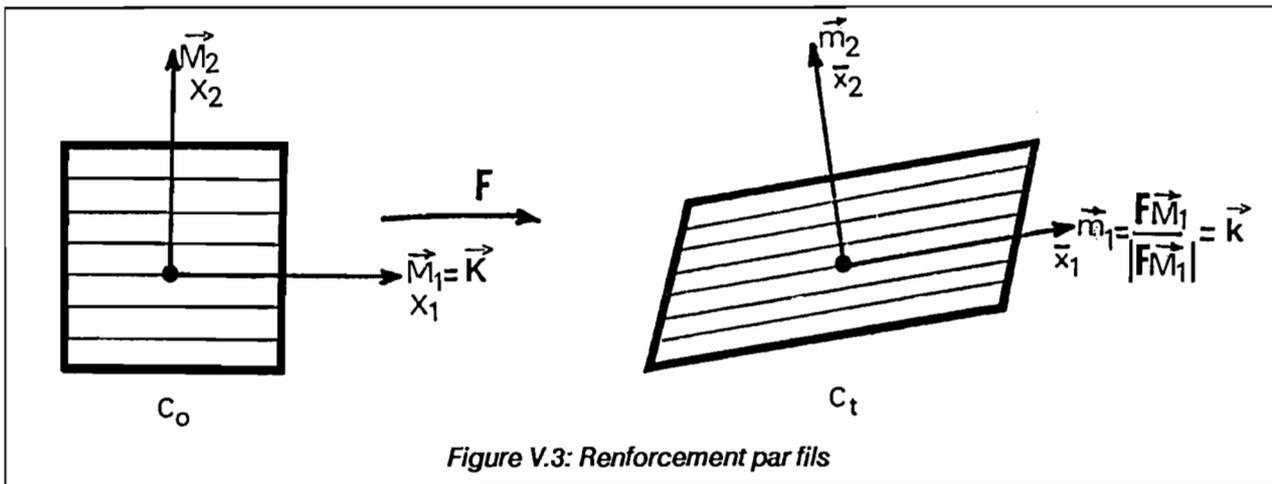
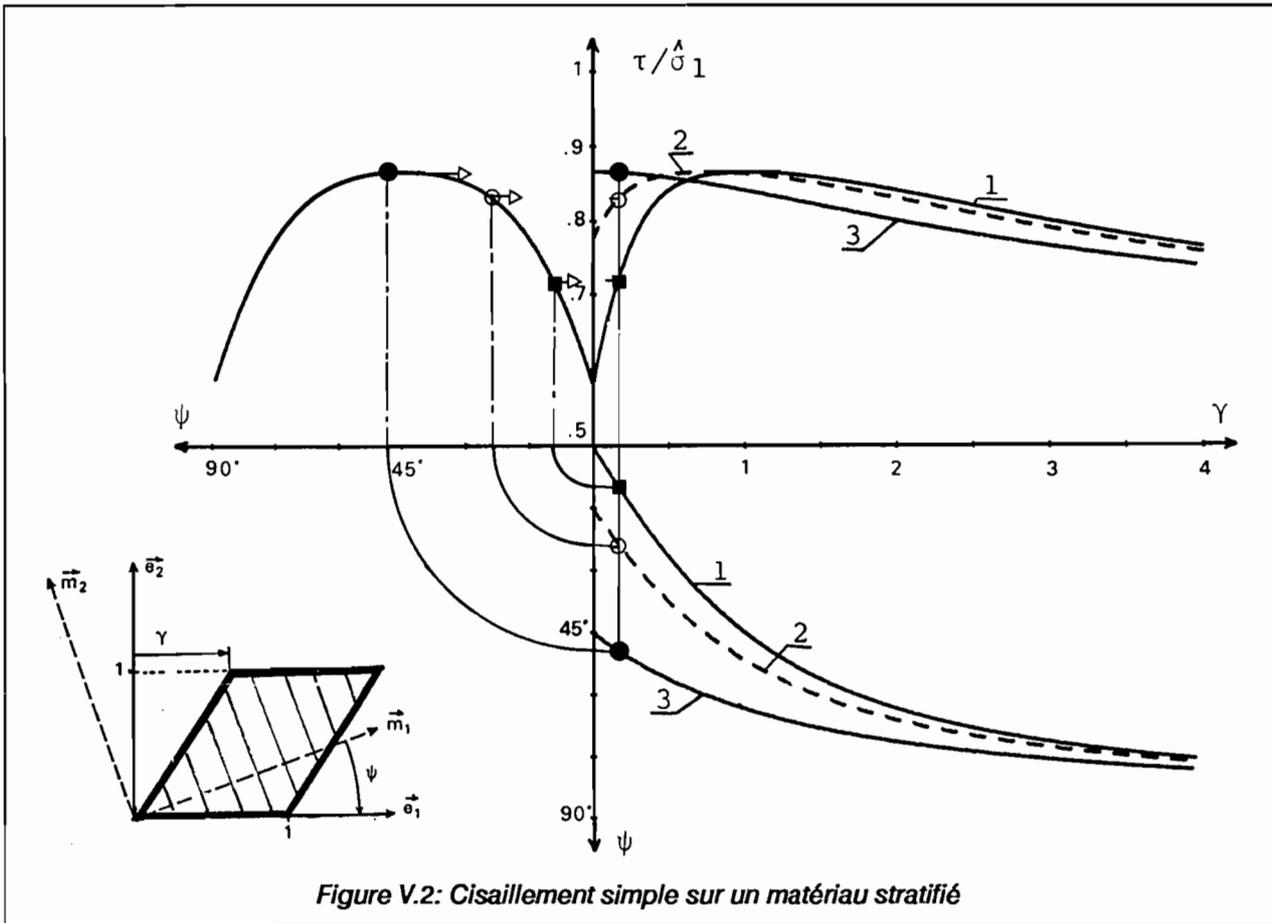
$$\beta = \frac{[\Sigma c_a \sqrt{(\sigma_a^2 - 3\bar{\tau}^2)}]}{[\Sigma c_a \sqrt{(\sigma_a^2 - 3\bar{\tau}^2)}]}$$

Les relations (26) ou (28) permettent de déterminer $\sigma(\psi)$ et $\tau(\psi)$. Ces relations sont les mêmes en grande ou petite déformation; c'est l'anisotropie de la loi. Par contre, l'aspect grande déformation intervient par l'évolution de ψ en fonction de γ , qui représente dans ce cas l'évolution du référentiel tournant au cours de la sollicitation. L'allure de la réponse $\tau(\gamma)$ est donnée par les courbes de la figure V.2 pour différentes valeurs de ψ_0 et pour un matériau constitué par deux couches avec $c_1 = c_2 = 1/2$ et $\sigma_2 = 2\sigma_1$.

cas 2: $\sin 2\psi = 0$

Ceci correspond au cas 2 du paragraphe précédent ($\mathbf{D}_H = 0$). Le comportement est alors défini par la relation (18) avec $|\mathbf{T}_V| = \sigma_1 \sqrt{(2/3)}$ et donc $|\bar{\tau}| = \sigma_1 / \sqrt{3}$ soit:

$$\tau = \sigma_1 / \sqrt{3} \quad (29)$$



3. RENFORCEMENT PAR FILS

3.1. CADRE GENERAL

Le deuxième matériau modèle que l'on va étudier est constitué d'une matrice renforcée par N systèmes de fibres. Le comportement homogénéisé sera obtenu selon l'hypothèse de Voigt qui suppose que la matrice et les fibres subissent la même déformation alors que la contrainte totale est la somme des contraintes transmises par les fibres et la matrice. Le tenseur de contrainte de Cauchy s'obtient alors par:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_m + \sum \mathbf{T}_a \quad (30)$$

où \mathbf{T}_m est la contrainte dans la matrice et \mathbf{T}_a celle dans le système de fibres a (a=1,..N).

Un système de fibres est défini par son orientation initiale $\bar{\mathbf{K}}$ dans C_0 (Fig. V.3), sa densité initiale ξ (nombre de fils par unité de surface normale à $\bar{\mathbf{K}}$ dans C_0) et sa loi de comportement, qui donne la force F dans le fil en fonction de l'histoire de déformation subie par ce dernier. En appelant $\bar{\mathbf{k}}$ l'orientation actuelle du système (Fig. V.3), λ la variation de longueur subie par le fil ($\lambda = dl/dl_0$), et ϵ la déformation logarithmique, on a:

$$\epsilon = \text{Log } \lambda = \text{Log } |\mathbf{F} \bar{\mathbf{K}}| \quad (31.a)$$

$$\dot{\epsilon} = \bar{\mathbf{k}} \mathbf{D} \bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k} : \mathbf{D} \quad (31.b)$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{F} \bar{\mathbf{K}} / \lambda \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} \otimes \bar{\mathbf{k}} \quad (31.c)$$

Le tenseur de contrainte de Cauchy transmis par le fil est alors une extension selon $\bar{\mathbf{k}}$ qui peut s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{T} = \sigma \mathbf{k} \quad \sigma = \xi \lambda F \quad (32)$$

où $\xi \lambda$ représente le nombre de fils par unité de surface normale à $\bar{\mathbf{k}}$ dans $C(t)$ [18.f].

Le comportement de la matrice est supposé rigide plastique isotrope obéissant au critère de von Mises (matrice métallique) avec un seuil en traction σ_0 qui peut être constant (plasticité parfaite) ou dépendant de la déformation équivalente de von Mises. Le comportement global est alors donné par:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{1} + \sqrt{(2/3)} \sigma_0 \mathbf{D}/|\mathbf{D}| + \sum \sigma_a \mathbf{k}_a \quad (33)$$

$$\text{tr } \mathbf{D} = 0$$

où la sommation sur a est étendue à tous les systèmes de fibres.

Le comportement résultant dépendra du nombre, de l'orientation et du comportement des systèmes de fibres. Le comportement de chaque système de fibres sera caractérisé par la dépendance de la force F_a et donc de la contrainte σ_a par rapport à la déformation ϵ_a . En considérant des fibres plastiques, on obtient un comportement global plastique anisotrope. Des fibres élastiques permettent de rendre compte d'un certain type d'écrouissage cinématique.

3.2. FIBRES PLASTIQUES

A) COMPORTEMENT GENERAL

Si l'on considère des systèmes de fibres plastiques, la loi de comportement reliant la force F sur le fil en fonction de la déformation subie par celui-ci peut s'écrire sous la forme:

$$F = F_0 \text{ind}(\dot{\epsilon}) = F_0 \text{ind}(\mathbf{k}:\mathbf{D}) \quad (34)$$

où F_0 désigne la force limite (seuil), et la fonction $\text{ind}(x)$ prend la valeur 1 si $x>0$, -1 si $x<0$ et n'importe quelle valeur entre -1 et 1 si $x=0$.

Remarquons que cette relation correspond à un comportement symétrique en traction et en compression, ce qui n'est pas tout à fait raisonnable, mais un comportement non symétrique peut être étudié de la même façon. On peut, par exemple, considérer que les fils ne transmettent aucune force de compression et dans ce cas considérer que $\text{ind}(x)=1$ si $x>0$, 0 si $x<0$ et n'importe quelle valeur entre 0 et 1 si $x=0$.

La relation de comportement (33) devient alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p \mathbf{1} + \sqrt{(2/3)} \sigma_0 \mathbf{D}/|\mathbf{D}| + \sum [\hat{\sigma}_a \text{ind}(\mathbf{k}_a:\mathbf{D}) \mathbf{k}_a] \\ \hat{\sigma}_a &= \xi_a \lambda_a F_{0a} \end{aligned} \quad (35)$$

A un état de déformation donné, σ_0 et $\hat{\sigma}_a$ sont fixés et \mathbf{T}^D est une fonction de \mathbf{D} positivement homogène de degré 0. Il s'ensuit qu'il existe une fonction scalaire $f(\mathbf{T}^D, \mathbf{k}_a, \sigma_0, \sigma_a)=0$ qui est la fonction seuil et qui définit la surface de plasticité. Plusieurs démarches peuvent être suivies pour déterminer cette fonction:

- Transformation de Legendre du potentiel de dissipation:

$$\Omega = \sqrt{(2/3)} \sigma_0 \mathbf{D}/|\mathbf{D}| + \sum (\hat{\sigma}_a \text{ind}(\mathbf{k}_a:\mathbf{D})) \quad (36.a)$$

$$\mathbf{T} = \partial\Omega/\partial\mathbf{D} \quad ; \quad \text{tr}(\mathbf{D})=0 \quad (36.b)$$

$$\omega(\mathbf{T}) = \sup_{\mathbf{D}} [\mathbf{T}:\mathbf{D} - \Omega(\mathbf{D})] \quad (36.c)$$

où ω est la fonction indicatrice du convexe de plasticité ($\omega=0$ à l'intérieur, $\omega=+\infty$ à l'extérieur) [24].

- Evaluation des invariants scalaires des arguments $(\mathbf{T}, \mathbf{k}_a)$ en fonction de ceux de $(\mathbf{D}, \mathbf{k}_a)$ et élimination de ces derniers; c'est ce que nous ferons au paragraphe suivant.

Dans tous les cas, on obtient un critère de plasticité anisotrope qui dépend des seuils en traction (σ_0, σ_a) et de l'orientation actuelle des fibres $f(\mathbf{T}^D, \mathbf{k}_a, \sigma_0, \sigma_a)$. La différence essentielle entre l'écriture en petite déformation et celle en grande, réside dans l'évolution de l'orientation de directions matérielles particulières qui sont les directions des fibres. Remarquons que le comportement général satisfait à la loi de normalité.

B) UN SYSTEME DE FIBRES

Dans le cas où subsiste un seul système de fibres, la relation de comportement (35) dépend uniquement de l'orientation actuelle des fibres par l'intermédiaire de \mathbf{k} . Le comportement est donc orthotrope de révolution autour de $\bar{\mathbf{k}}$. C'est évidemment un comportement qui rentre dans le cadre des formulations en référentiel tournant, ce dernier étant défini par la direction matérielle \mathbf{k} (voir 1.2.3.A). Le choix du référentiel tournant n'est évidemment pas unique dans ce cas, puisque seule une direction est donnée. Toutefois, à cause de l'orthotropie de révolution, cette indétermination n'est pas gênante et l'on

peut prendre le choix le plus simple (I.47):

$$\bar{\mathbf{w}}_Q = \mathbf{w} - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = 2 [\mathbf{kD}]^A \quad (37.a)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (37.b)$$

soit:

$$D_Q \mathbf{k} / D t = 0 \quad ; \quad \mathbf{k}^J = \mathbf{kD} + \mathbf{Dk} \quad (37.c)$$

- Détermination de la surface seuil

La relation (35) s'écrit dans le cas d'un seul système de fibres sous la forme:

$$\mathbf{T}^D = \sqrt{(2/3)} \sigma_o \mathbf{D} / |\mathbf{D}| + \sigma_1 \mathbf{k}^D \quad \sigma_1 = \hat{\sigma}_1 \text{ind}(\mathbf{k}:\mathbf{D}) \quad (38)$$

Les invariants $\mathbf{k}:\mathbf{T}^D$ et $\mathbf{T}^D:\mathbf{T}^D$ s'écrivent alors:

$$\mathbf{k}:\mathbf{T}^D = \sqrt{(2/3)} \sigma_o \mathbf{k}:\mathbf{D} / |\mathbf{D}| + 2\sigma_1/3 \quad (39)$$

$$\mathbf{T}^D:\mathbf{T}^D = 2\sqrt{(2/3)} \sigma_o \sigma_1 \mathbf{k}:\mathbf{D} / |\mathbf{D}| + 2(\sigma_1^2 + \sigma_o^2)/3 \quad (40.a)$$

$$= 2(\sigma_o^2 - \sigma_1^2)/3 + 2\sigma_1 \mathbf{k}:\mathbf{T}^D \quad (40.b)$$

La relation (40.b) n'est pas satisfaisante pour décrire la surface seuil puisque dans σ_1 subsiste le terme $\text{ind}(\mathbf{k}:\mathbf{D})$. Pour éliminer ce terme distinguons deux cas:

- Si $\mathbf{k}:\mathbf{D} \neq 0$, alors $|\sigma_1| = |\hat{\sigma}_1|$ et donc d'après (39):

$$\sigma_1 \mathbf{k}:\mathbf{T}^D > 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{k}:\mathbf{T}^D| > 2\hat{\sigma}_1/3$$

ce qui permet d'écrire d'après (40.b):

$$\mathbf{T}^D:\mathbf{T}^D = 2(\sigma_o^2 - \hat{\sigma}_1^2)/3 + 2\sigma_1 |\mathbf{k}:\mathbf{T}^D| \quad (41.a)$$

- Si $\mathbf{k}:\mathbf{D} = 0$, alors $|\sigma_1| < |\hat{\sigma}_1|$ et donc d'après (39):

$$\mathbf{k}:\mathbf{T}^D = 2\sigma_1/3 \quad ; \quad |\mathbf{k}:\mathbf{T}^D| < 2\hat{\sigma}_1/3$$

ce qui permet d'écrire d'après (40.b):

$$\mathbf{T}^D:\mathbf{T}^D = 2\sigma_o^2/3 + 3(\mathbf{k}:\mathbf{T}^D)^2/2 \quad (41.b)$$

Finalement, le critère de plasticité est donné par (41.a) ou (41.b) selon que $|\mathbf{k}:\mathbf{T}^D|$ est plus grand que $2\hat{\sigma}_1/3$ (les fibres se déforment) ou plus petit que $2\hat{\sigma}_1/3$ (les fibres ne se déforment pas). En introduisant la partie positive $\langle |\mathbf{k}:\mathbf{T}^D| - 2\hat{\sigma}_1/3 \rangle$ ces deux équations peuvent s'écrire sous une forme unique qui représente le critère de plasticité soit:

$${}_{(3/2)} \mathbf{T}^D:\mathbf{T}^D + \langle 3|\mathbf{k}:\mathbf{T}^D|/2 - \hat{\sigma}_1 \rangle^2 - 9(\mathbf{k}:\mathbf{T}^D)^2/4 \leq \sigma_o^2 \quad (42)$$

- Contrainte plane

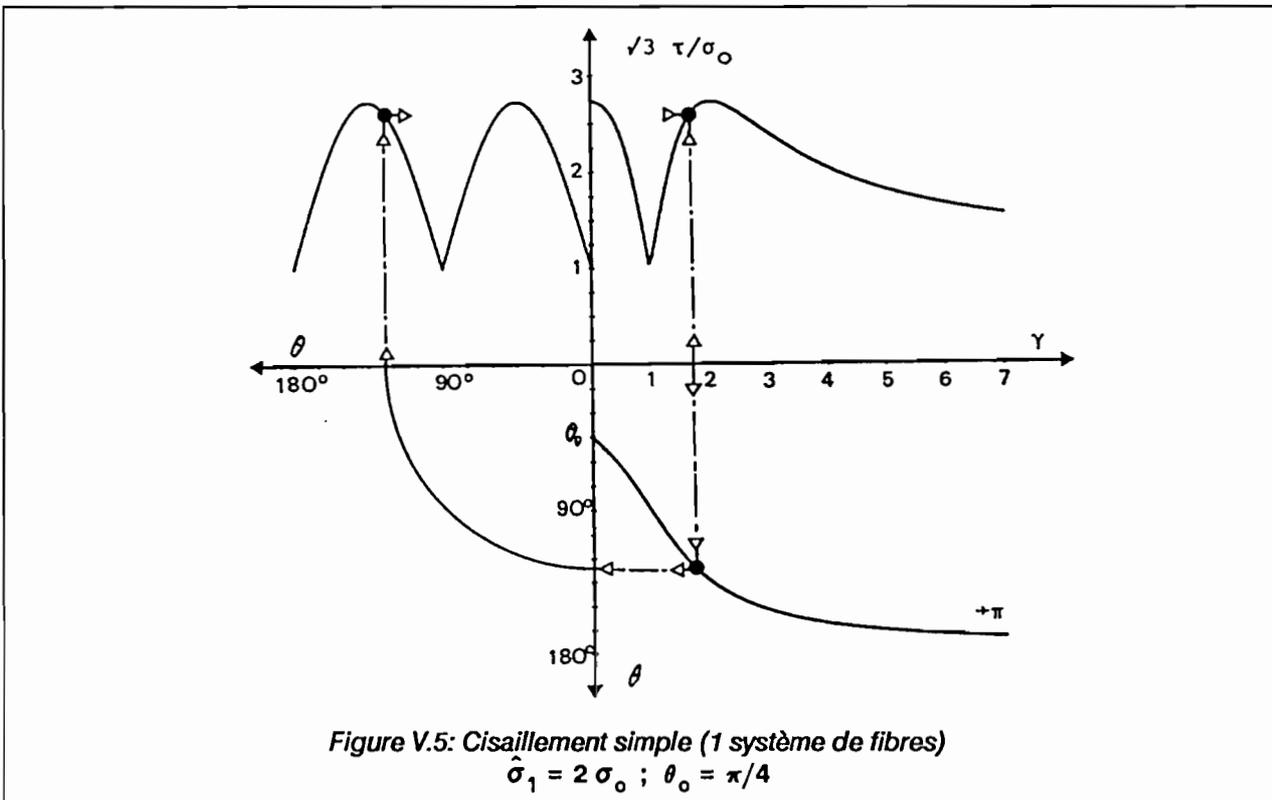
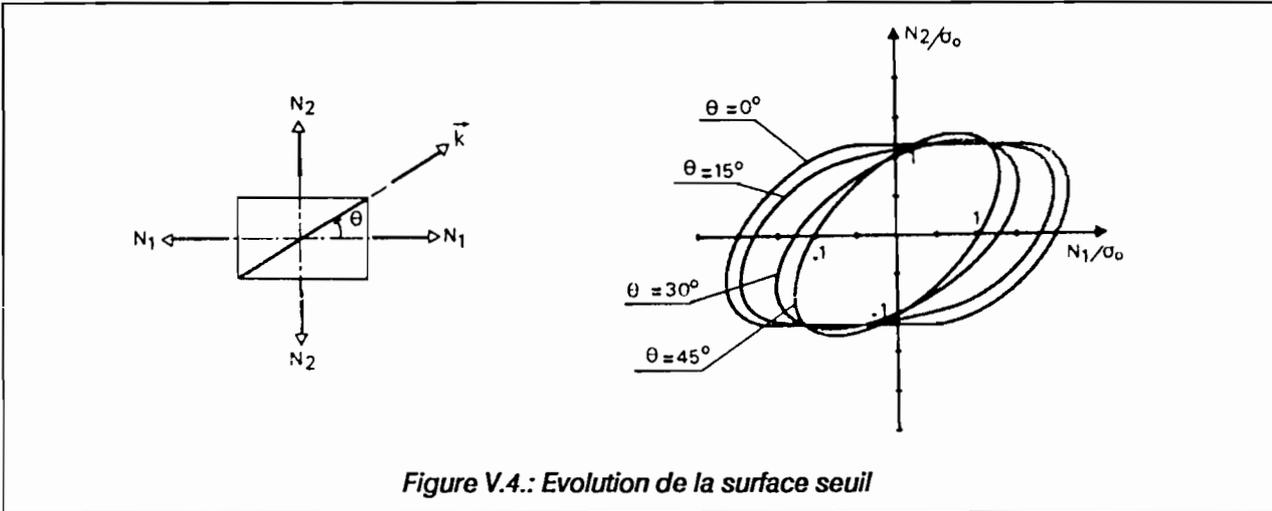
On suppose une sollicitation en contrainte plane dans un plan contenant $\vec{\mathbf{k}}$ (on note $T_{11}=N_1$, $T_{22}=N_2$, $T_{12}=\tau$). Le gradient de la transformation \mathbf{F} est sous la forme (I.50). L'orientation de $\vec{\mathbf{k}}$ par rapport à $\vec{\mathbf{e}}_1$ est donnée par θ (rotation du référentiel tournant) (I.55):

$$\text{tg} \theta = \text{tg} \theta_o / f(1 - \gamma \text{tg} \theta_o) \quad (43)$$

La construction géométrique de la surface seuil (42) dans l'espace $(N_1, N_2, \tau/\sqrt{2})$ s'obtient de la façon suivante (voir [18.f]): on coupe l'ellipsoïde de von Mises (matrice) par le plan correspondant à la condition $\mathbf{k}:\mathbf{D}=0$ (que l'on peut écrire en fonction de N_1 , N_2 , τ et θ), et on translate les deux moitiés de $\pm \hat{\sigma}_1$ dans la direction $(\cos^2 \theta, \sin^2 \theta, -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta)$. La surface de plasticité est alors constituée par deux moitiés

d'ellipsoïde reliées par un cylindre. La figure V.4 représente la trace de cette surface seuil dans le plan ($\tau=0$) pour différentes valeurs de θ et pour $\hat{\sigma}_1 = \sigma_0$: c'est l'ensemble de 4 segments elliptiques. Il faut signaler que les différentes surfaces relatives aux différentes valeurs de θ dans la figure V.4 sont des représentations différentes du même convexe de plasticité; la dépendance par rapport à θ illustre l'anisotropie du critère.

La figure V.6. représente la réponse à un essai de cisaillement simple ($\hat{\sigma}_1 = 2\sigma_0, \theta_0 = \pi/4$) où l'on distingue la forme de $\tau(\theta)$ qui représente l'anisotropie, et l'évolution de θ en fonction de γ . La situation dans ce cas est similaire à celle des stratifiés.



C) DEUX SYSTEMES DE FIBRES IDENTIQUES

Le deuxième cas simple correspond au cas de deux systèmes de fibres identiques (mêmes fibres, même densité, même seuil $\hat{\sigma}_1$). L'angle entre les deux directions des fibres (\bar{k}_1, \bar{k}_2) est noté θ (Fig. V.6.) dont la valeur initiale est θ_0 . La fonction seuil va dépendre de \bar{k}_1 et \bar{k}_2 qui peuvent être considérés comme les variables d'écroissage.

L'interprétation de ce comportement selon le formalisme en référentiel tournant reste encore valable et permet de donner quelques éclaircissements sur la nature et l'évolution de l'anisotropie. En effet, le matériau est orthotrope et reste orthotrope relativement aux directions \bar{m}_1 définies par les deux bissectrices (\bar{m}_1, \bar{m}_2) des fibres et la normale \bar{m}_3 au plan (\bar{k}_1, \bar{k}_2) (Fig. V.6.) et qui peuvent définir un référentiel tournant dont l'évolution est donnée par (I.49.b):

$$\bar{\mathbf{W}} = 2[\mathbf{d}\bar{\mathbf{m}}_3 + \cos\theta \mathbf{m}_1 \mathbf{D}\mathbf{m}_2]^A \quad (44)$$

$$\dot{\theta} = \sin\theta [(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) : \mathbf{D}] \quad (45)$$

Il faut remarquer que le comportement global n'est plus dans ce cas parfaitement plastique puisque la surface seuil va dépendre d'une variable scalaire qui est l'angle θ . La formulation en référentiel tournant du critère de plasticité s'écrit alors:

$$f(\bar{\mathbf{T}}, \theta) \leq 0 \quad (46)$$

La fonction f étant orthotrope et la loi d'évolution de la variable scalaire d'écroissage θ est donnée par (45).

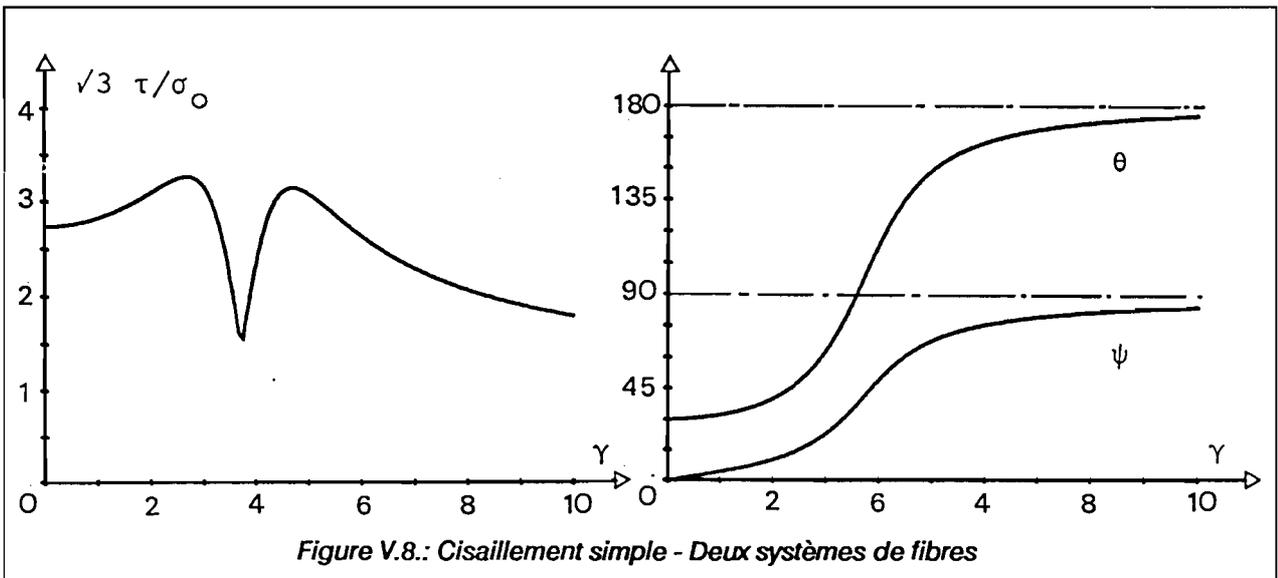
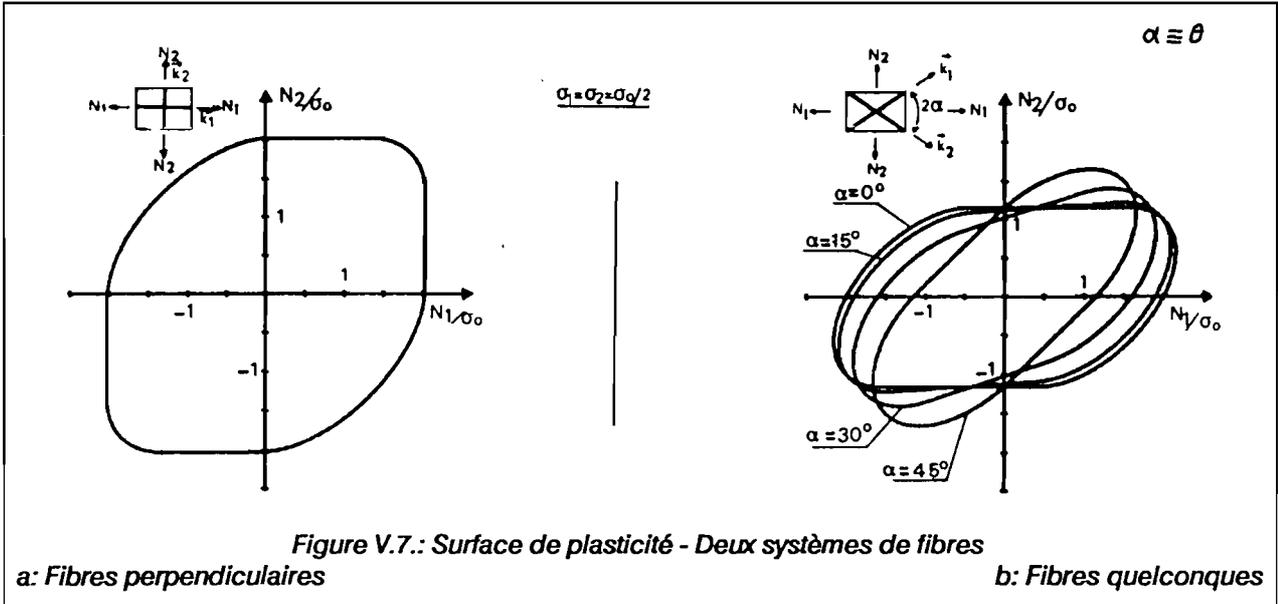
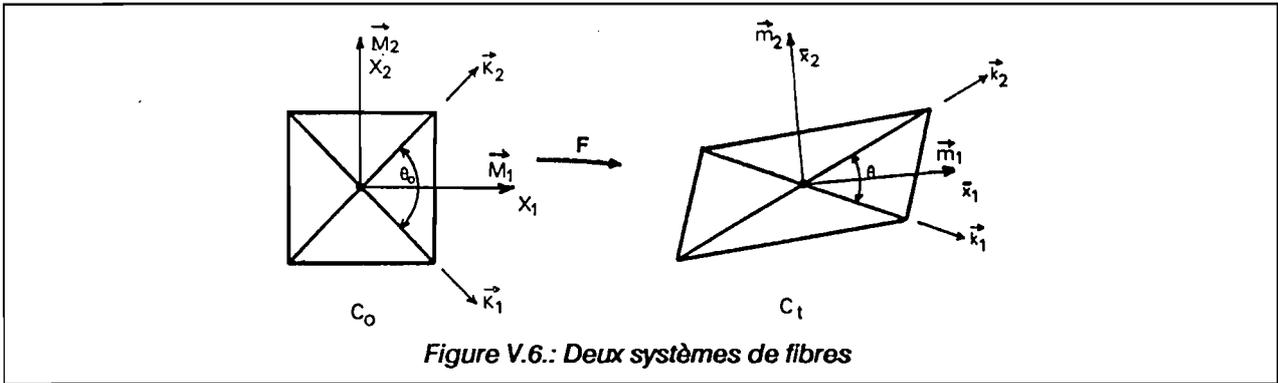
Les figures V.7 représentent (comme la figure V.4) la surface seuil définie par (44) dans le plan (N_1, N_2) . La figure V.7.b représente l'évolution de cette surface en fonction de θ (par exemple au cours d'un essai de traction selon \bar{m}_1). Si les deux systèmes de fibres sont perpendiculaires, le matériau est alors aussi orthotrope relativement à \bar{k}_1 , \bar{k}_2 et \bar{m}_3 . Si les directions principales de \mathbf{T} restent portées par \bar{k}_1 et \bar{k}_2 , les fibres ne tournent pas et la surface de plasticité reste constante; celle ci est représentée dans la figure V.7.a.

La réponse en cisaillement simple est représentée à la figure V.8., mais plus sous la même forme que précédemment, puisque dans ce cas τ dépend aussi de θ :

$$\tau(\gamma) = \tau[\psi(\gamma), \theta(\gamma)] \quad (47)$$

D) CAS GENERAL

Dans les cas plus compliqués (2 systèmes de fibres différents ou plusieurs systèmes) le comportement fera intervenir les différentes orientations des fibres comme des variables internes. Le comportement présentera une anisotropie plus générale que l'orthotropie. Une interprétation dans un formalisme en référentiel tournant peut toujours être faite, mais elle sera plus compliquée que la formulation directe. Remarquons que dans ce cas, la structure du matériau est complètement définie; la formulation directe est donc possible et il n'est pas nécessaire de chercher à utiliser un formalisme en référentiel tournant.



3.3. FIBRES ELASTIQUES

A) COMPORTEMENT GENERAL

Si l'on considère des fibres élastiques la contrainte σ_a dans (33) ne va dépendre que de la déformation ϵ_a du système des fibres a:

$$\sigma_a = \sigma_a(\epsilon_a) \quad (48.a)$$

soit:

$$\dot{\sigma}_a = E_a \mathbf{k}_a : \mathbf{D} \quad ; \quad E_a = d\sigma_a/d\epsilon_a \quad (48.b)$$

Dans le cas d'une élasticité linéaire, le module E_a est constant; sinon il est fonction de ϵ_a ou de σ_a .

La contrainte totale étant la somme de celle due à la déformation plastique de la matrice et celle due à la déformation élastique des fibres, le comportement global est donc du type rigide plastique initialement isotrope ($\sigma_a(0)=0$) avec écrouissage cinématique. Il est défini par les fonctions constitutives suivantes:

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{k}_a, \epsilon_a) = |\mathbf{T}^D - \mathbf{X}| - \sqrt{(2/3)} \sigma_0 \leq 0 \quad (49.a)$$

$$\mathbf{D} = \lambda (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}) / (\sqrt{(2/3)} \sigma_0) \quad (49.b)$$

$$\mathbf{k}_a^J = \mathbf{kD} + \mathbf{Dk} \quad (49.c)$$

$$\dot{\epsilon}_a = \mathbf{k}_a : \mathbf{D} \quad (49.d)$$

Le déviateur symétrique \mathbf{X} (back stress) qui définit le déplacement de la surface seuil est donné par:

$$\mathbf{X} = \sum \sigma_a \mathbf{k}_a^D \quad (50)$$

La surface de plasticité à un instant t dépend donc de l'orientation et de la déformation des différents systèmes de fibres, et est entièrement définie par la variable \mathbf{X} qui est la variable essentielle à suivre. L'évolution de \mathbf{X} ne peut quand même pas être directement déterminée, il est nécessaire de déterminer à chaque instant l'orientation et la déformation de tous les systèmes (relations (49.c) et (49.d)). Quelques exemples sont donnés sur les figures V.9 et V.10 qui représentent l'évolution de la surface de plasticité dans le plan (N_1, N_2) au cours d'essais de traction. La figure V.9 correspond à un essai de traction (hors axes) sur un composite avec un seul système de fibres, alors que la figure V.10 correspond à un essai de traction selon la bissectrice des fibres pour un composite à deux systèmes de fibres. Ces situations sont similaires à celles décrites dans les figures V.4 et V.7 pour des fibres plastiques, mais il faut remarquer qu'il existe une différence importante entre ces deux cas. La surface de plasticité pour les fibres plastiques ne dépend que de l'orientation des fibres, les courbes V.4 et V.7 ont été obtenues sans analyse précise de la réponse du matériau à l'essai de traction. Ceci n'est pas possible dans le cas présent où les fibres sont élastiques parce que la surface de plasticité dépend aussi de la déformation sur les fibres. Les figures V.9 et V.10 ont été obtenues après une analyse complète de l'essai de traction que nous allons présenter au paragraphe suivant. Nous avons supposé que les différents fibres ont la même loi élastique:

$$\sigma_a = E \epsilon_a \quad (51)$$

B) TRACTION HORS AXES

Nous utilisons les mêmes notations que dans le paragraphe I.4.2. On désigne par θ_a (initialement θ_{a0}) l'angle (\vec{k}_a, \vec{e}_1) , la direction \vec{e}_1 étant celle de la traction. L'évolution de θ_a est donnée par la relation (43).

La loi de comportement (33) donne:

$$\sigma = \sqrt{(2/3)} \sigma_o (2\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) / |\mathbf{D}| + a \quad (52)$$

$$0 = \sqrt{(2/3)} \sigma_o (\dot{\epsilon} - 2\dot{\eta}) / |\mathbf{D}| + b \quad (53.a)$$

$$0 = \sqrt{(2/3)} \sigma_o e^{\epsilon+\eta} \dot{\gamma} / |\mathbf{D}| + 2c \quad (53.b)$$

avec:

$$a = \sum \sigma_a \cos^2 \theta_a \quad b = \sum \sigma_a \sin^2 \theta_a \quad c = \frac{1}{2} \sum \sigma_a \sin 2\theta_a$$

et $|\mathbf{D}|$ donné par:

$$|\mathbf{D}| = \sqrt{2} |\dot{\epsilon}| [1 + (d\eta/d\epsilon)^2 - d\eta/d\epsilon + e^{\epsilon+\eta}/4 d\gamma/d\epsilon]^{1/2} \quad (54)$$

L'utilisation de (54) dans les relations (53) donne un système de deux équations qui permettent de déterminer $d\eta/d\epsilon$ et $d\gamma/d\epsilon$. Après quelques calculs on obtient:

$$d\eta/d\epsilon = \frac{1}{2} + 3b/2u \quad (55.a)$$

$$d\gamma/d\epsilon = -6e^{-\epsilon+\eta} c/u \quad (55.b)$$

avec:

$$u = (4\sigma_o^2 - 3b^2 - 12c^2)^{1/2}$$

la contrainte σ est alors donnée par:

$$\sigma = a + (u-b)/2 \quad (56)$$

Les courbes des figures V.11 montrent la réponse d'un composite unidirectionnel ($E/\sigma_o = 10$) à un essai de traction avec $\theta_o = 60^\circ$. La figure V.11.a donne l'évolution du rapport σ/σ_o , du coefficient de Lankford, de θ et de la rotation de la section droite ξ en fonction de ϵ . L'évolution de l'anisotropie est illustrée par la figure V.11.b qui montre l'évolution de la dépendance du seuil en traction par rapport à θ en fonction de ϵ .

C) INTERPRETATION EN REFERENTIEL TOURNANT

Le comportement, pour un ensemble donné de systèmes de fibres, est complètement défini par les relations (49). Les relations (49.c) définissent l'évolution de l'orientation des différents systèmes.

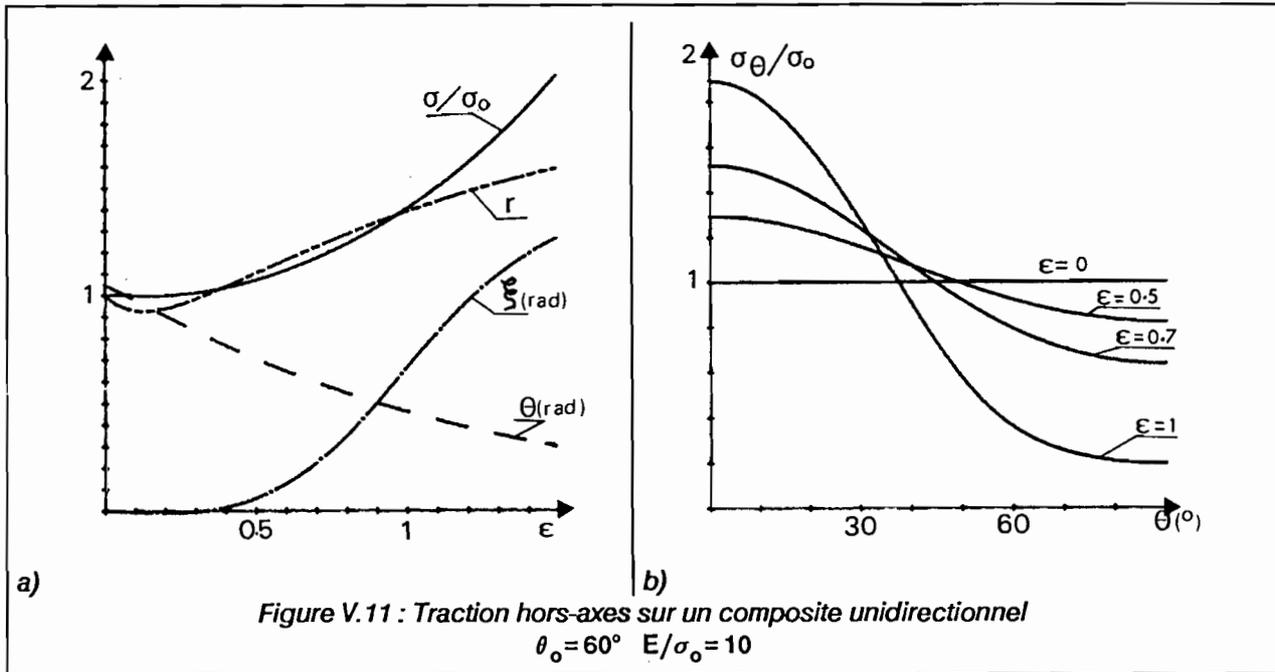
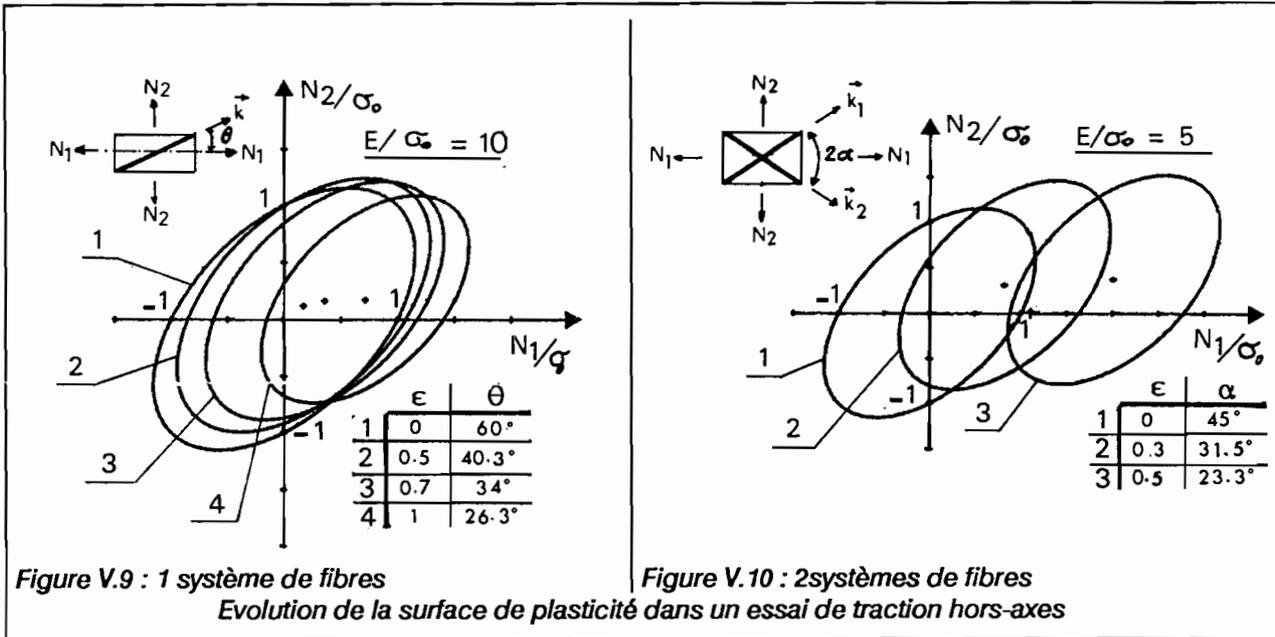
Dans le cas d'un seul système de fibres, il est clair que le comportement est un comportement en référentiel tournant dont l'évolution est donnée par la relation (37). Le référentiel tournant dans ce cas n'intervient que dans la loi d'évolution de la variable \mathbf{X} :

$$D_o \mathbf{X} / Dt = E \mathbf{kDk} \quad ; \quad E = d\sigma/d\epsilon \quad (57.a)$$

ou

$$\mathbf{X}^J - (\mathbf{XD} + \mathbf{DX}) = E \mathbf{kDk} \quad (57.b)$$

Dans le cas général, le formalisme en référentiel tournant est plus difficile à écrire que le formalisme direct (49). En effet, on peut définir un référentiel tournant à partir de l'orientation de deux systèmes choisis (plan matériel, voir I.2.3.b). L'orientation de tout autre système peut alors être définie par rapport à ce référentiel tournant par l'intermédiaire de variables scalaires θ_i qui seront considérées comme des variables internes.



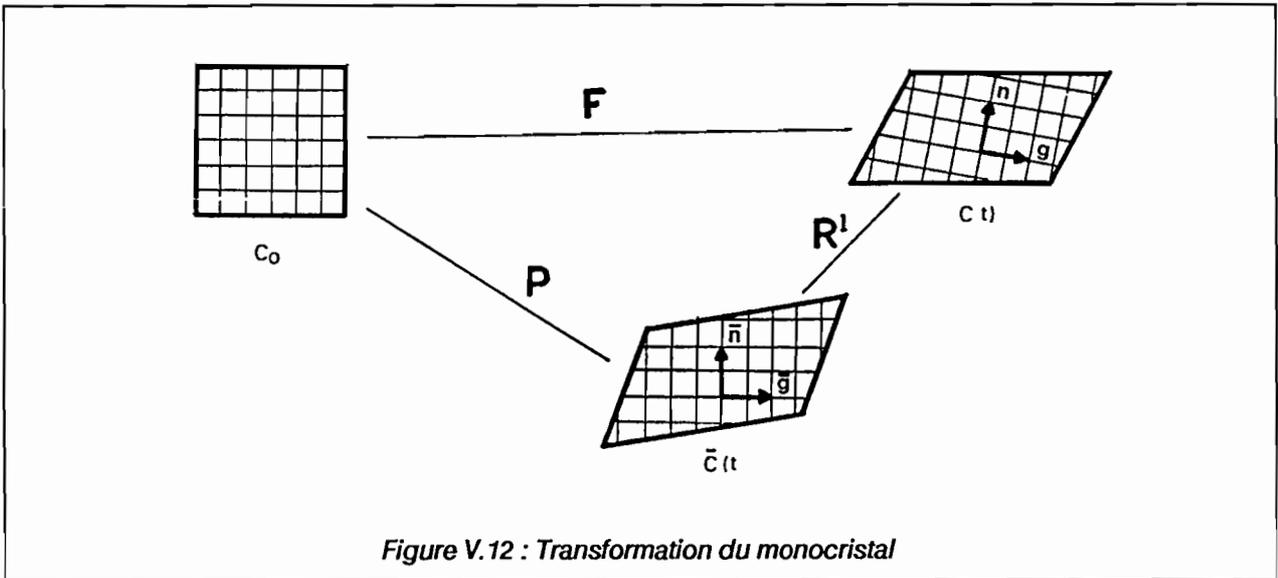


Figure V.12 : Transformation du monocristal

4. UN EXEMPLE DE MONOCRISTAL

4.1. CADRE GENERAL

Le monocristal est le troisième exemple de matériau modèle que nous présentons. La différence essentielle entre ce modèle et les deux précédents est que la structure de celui-ci n'est pas "matérielle". C'est d'ailleurs le comportement du monocristal qui a initialement motivé l'introduction de la notion de "trièdre directeur" [37], celui-ci pouvant être identifié au repère cristallographique. Nous allons nous limiter ici à un comportement rigide plastique, le gradient de la transformation \mathbf{F} peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^l \mathbf{P} \quad (58)$$

où \mathbf{R}^l représente la rotation du trièdre cristallographique principal alors que \mathbf{P} désigne le gradient de la transformation plastique dû au mouvement des dislocations et au glissement cristallographique sur les différents systèmes de glissement (fig.V.12). Chacun des systèmes de glissement est défini par la normale au plan de glissement et la direction du glissement qui sont désignées respectivement par \vec{n}^s et \vec{g}^s dans la configuration déformée et par $\vec{\bar{n}}^s$ et $\vec{\bar{g}}^s$ dans le repère cristallographique (fig.V.12). La loi d'évolution plastique peut alors s'écrire [50.b]:

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \sum \dot{\gamma}^s \bar{\mathbf{M}}^s \quad ; \quad \bar{\mathbf{M}}^s = \vec{\bar{g}}^s \otimes \vec{\bar{n}}^s \quad (59)$$

où $\dot{\gamma}^s$ désigne la quantité de glissement selon le système $(\vec{\bar{n}}^s, \vec{\bar{g}}^s)$.

Dans le cas rigide, parfaitement plastique, on suppose que la vitesse de glissement $\dot{\gamma}^s$ sur chaque système obéit à la loi de Schmid:

$$\dot{\gamma}^s \geq 0 \quad ; \quad \tau^s - \tau_0 \leq 0 \quad ; \quad (\tau^s - \tau_0) \dot{\gamma}^s = 0 \quad (60)$$

où τ_0 et τ^s désignent respectivement la cission critique et la cission réduite relative au système s:

$$\tau^s = \vec{g}^s \mathbf{T} \vec{n}^s = \vec{\bar{g}}^s \bar{\mathbf{T}} \vec{\bar{n}}^s \quad ; \quad \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{lT} \mathbf{T} \mathbf{R}^l \quad (61)$$

A partir de (58) et (59), la décomposition de $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ donne:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^{lT} \mathbf{D} \mathbf{R}^l = \sum \dot{\gamma}^s [\bar{\mathbf{M}}^s]^s \quad (62.a)$$

$$\bar{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{R}}^l \mathbf{R}^{lT} + \sum \dot{\gamma}^s [\mathbf{M}^s]^A \quad ; \quad \mathbf{M}^s = \mathbf{R}^l \bar{\mathbf{M}}^s \mathbf{R}^{lT} = \vec{g}^s \otimes \vec{n}^s \quad (62.b)$$

La rotation du référentiel tournant, qui dans ce cas est identifié au repère défini par \vec{g}^s et \vec{n}^s , est donnée par \mathbf{R}^l ($\mathbf{Q} = \mathbf{R}^l$):

$$\vec{g}^s = \mathbf{R}^l \vec{\bar{g}}^s \quad ; \quad \vec{n}^s = \mathbf{R}^l \vec{\bar{n}}^s \quad (63.a)$$

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \dot{\mathbf{R}}^l \mathbf{R}^{lT} = \sum \dot{\gamma}^s [\mathbf{M}^s]^A \quad (63.b)$$

Pour une cinématique donnée (\mathbf{D}), le problème consiste à déterminer les différents $\dot{\gamma}^s$ ainsi que la contrainte \mathbf{T} : c'est le problème classique en mécanique du monocristal. Si ce problème est résolu, l'évolution du référentiel tournant est automatiquement donnée par (63.b). La forme explicite $\bar{\mathbf{W}}$ en fonction

de \mathbf{D} reste quand même difficile à obtenir sauf pour des cas particuliers, par exemple le cas du monocristal visqueux [11] où $\vec{\mathbf{W}}=0$ (la vitesse de rotation du trièdre $(\vec{\mathbf{g}}^s, \vec{\mathbf{n}}^s)$ est la même que celle du référentiel corotationnel).

Dans le paragraphe qui va suivre, nous allons présenter quelques résultats concernant l'évolution de \mathbf{R}^l pour un comportement rigide plastique, au cours de sollicitations de contrainte ou déformation plane. Nous ne présenterons pas tous les détails de calcul, nous renvoyons le lecteur aux références [7], [9] et [13] pour de plus amples explications.

4.2. LE MONOCRISTAL PLAN

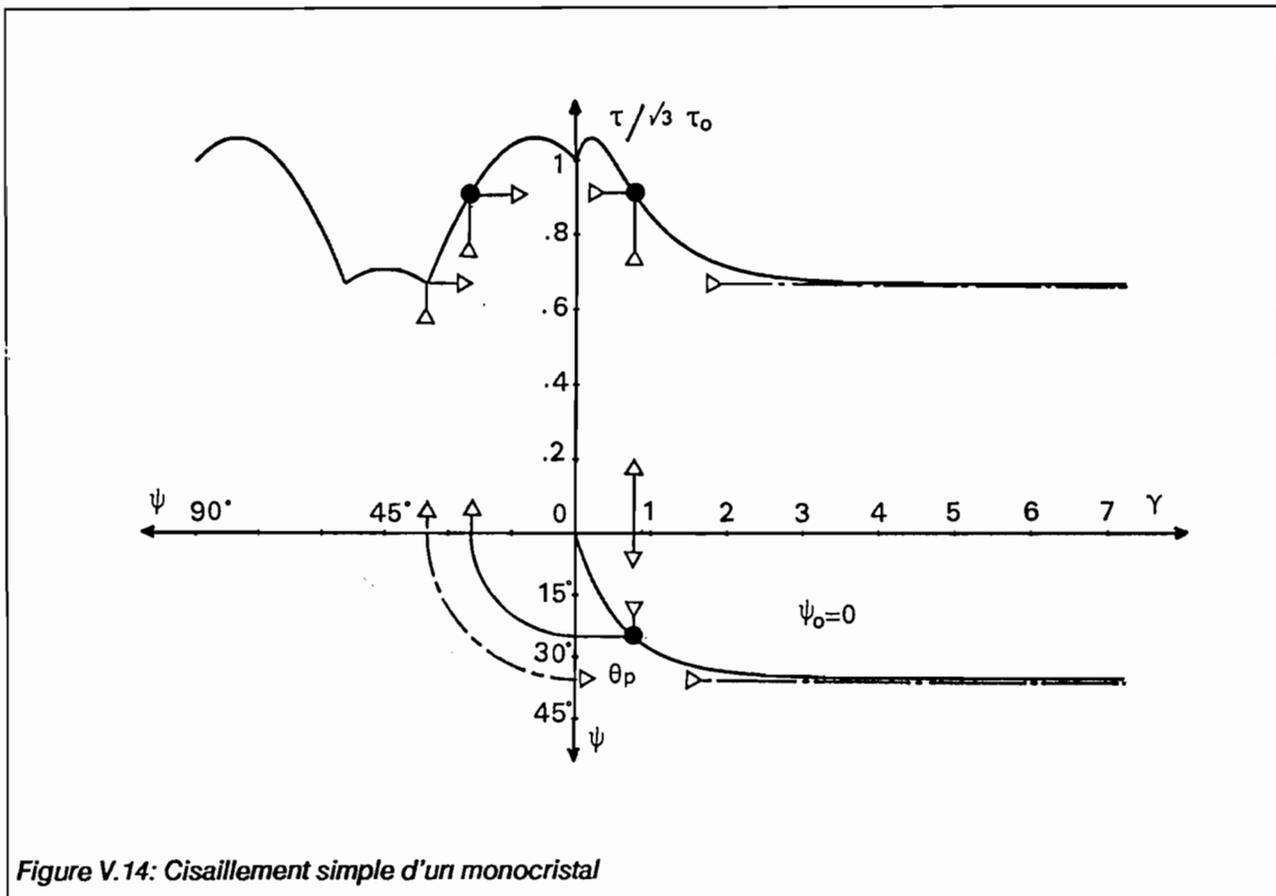
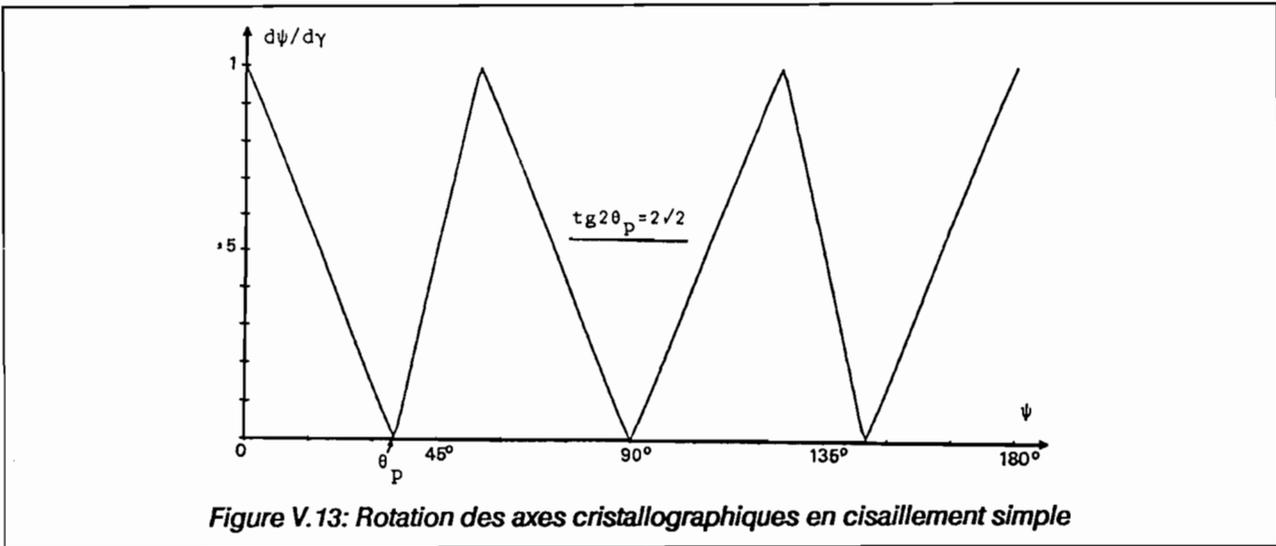
Pour pouvoir avancer l'analyse du comportement du monocristal, il faut définir les vecteurs $\vec{\mathbf{g}}^s$ et $\vec{\mathbf{n}}^s$ pour les différents systèmes de glissement. Dans le cas d'un monocristal cubique faces centrées, il existe 12 systèmes de glissement ($\{111\}\langle 110\rangle$). Nous nous intéressons ici aux états de contrainte et déformation planes; ceci ne peut être réalisé que si le monocristal est sollicité dans un de ses plans de symétrie qui sont les plans $\{100\}$ ou $\{110\}$. Considérons alors un monocristal cubique faces centrées sollicité dans son plan (110), le trièdre cristallographique est choisi de sorte que les directions 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux directions cristallographiques $[001]$, $[1\bar{1}0]$ et $[110]$. On peut alors montrer (voir [9]) qu'en cas de contrainte plane, d'une part il existe deux systèmes de glissement qui ne peuvent jamais être activés puisque leur cission réduite est nulle, et d'autre part, les 10 autres systèmes peuvent être regroupés en 5 couples de systèmes symétriques ayant la même cission réduite.

Ceci définit ce que nous appelons un "monocristal plan" constitué par 5 pseudo-systèmes de glissement. Sa structure mathématique est identique au monocristal tridimensionnel, et permet d'avoir un modèle simplifié mais physiquement raisonnable. Nous allons présenter ici uniquement le comportement de ce modèle en cisaillement simple et nous renvoyons le lecteur aux références [7], [9] et [13] pour plus de détails. Dans le cas du cisaillement simple, le problème classique d'indétermination des glissements n'apparaît pas; le résultat essentiel qui nous intéresse ici, concerne l'évolution de la rotation ψ du référentiel tournant (donc du trièdre défini par les directions cristallographiques $[001]$ et $[1\bar{1}0]$).

La figure V.13 représente la courbe $d\psi/d\gamma$ en fonction de ψ . Cette courbe montre que dans tous les cas, ψ augmente en fonction de γ et se stabilise en une des 3 valeurs limites θ_p , $\pi/2$ ou $\pi-\theta_p$ avec:

$$\text{tg}2\theta_p = 2\sqrt{2} \quad (64)$$

La figure V.14 représente la réponse $\tau(\gamma)$ en cisaillement simple qui, selon le schéma classique, est la composition de deux réponses: $\tau(\psi)$ et $\psi(\gamma)$. Il faut signaler que cette analyse aboutit dans le cas rigide plastique à un résultat (stabilisation asymptotique de ψ) complètement différent du cas visqueux (référentiel corotationnel $\psi = \psi_0 + \gamma/2$ [11]). On montre aussi que si l'on considère un comportement viscoplastique du type Bingham, on obtient une transition continue du cas plastique (stabilisation) au cas visqueux (non stabilisation) en augmentant $\dot{\gamma}$.



5. CONCLUSIONS

Différentes situations ont été étudiées dans ce chapitre et l'on peut maintenant répondre aux deux questions posées en introduction:

- L'approche en référentiel tournant est-elle satisfaisante pour tout type de comportement?. Il est évident que dans le cas des stratifiés, du composite renforcé par un système de fibres et dans le cas du monocristal, cette approche est la bonne approche. Dans le cas de composites avec plusieurs systèmes de fibres, on peut encore utiliser cette approche, mais il semble que l'approche directe est plus simple à mettre en oeuvre.

- Comment peut-on choisir le référentiel tournant?. La réponse à cette question est plus complexe. Les structures composites font intervenir des référentiels tournants attachés à des directions matérielles privilégiées; ce qui est logique du fait que la microstructure est essentiellement matérielle. Le cas du monocristal est plus complexe: le référentiel tournant est physiquement identifié, mais l'écriture de son évolution dans le cas général (plastique) présente des difficultés importantes. Il faut signaler que dans tous les exemples que nous avons présentés, l'évolution du référentiel tournant en cisaillement simple se stabilise pour γ tendant vers l'infini. C'est là une indication qui pousse à dire que, dans le cas où l'on n'a aucune information supplémentaire sur le choix du référentiel tournant, le référentiel en rotation propre semble être un choix phénoménologique raisonnable.

CONCLUSIONS

Au cours de ce travail, nous avons discuté et analysé les problèmes relatifs à la formulation de lois de comportements élastoplastiques anisotropes en grandes déformations. En réponse au premier problème posé en introduction, nous avons proposé, développé et étudié un cadre général: formalisme en référentiel tournant. Ce formalisme ne pose aucune restriction sur la forme des fonctions constitutives ou sur la nature des variables internes. Toute loi de comportement développée en petites perturbations (ou en sollicitation triaxiale) peut alors s'étendre en grandes déformations en utilisant les mêmes fonctions constitutives et le même type de variables internes. Les difficultés dues aux grandes déformations sont concentrées dans le choix du référentiel tournant. Ce choix fait partie intégrante de la loi de comportement et dépend de la nature de l'anisotropie à modéliser. Les différentes théories des grandes déformations ont été situées dans ce cadre, elles diffèrent sur la manière de choisir le référentiel tournant.

Ce formalisme est bien sûr intéressant dans le cadre de lois de comportement phénoménologiques concernant des matériaux dont la structure est trop mal connue ou trop complexe pour pouvoir être prise en compte précisément dans un modèle utilisable. Le choix du référentiel tournant est donc un choix phénoménologique comme d'ailleurs le choix des fonctions constitutives et des variables internes.

L'avantage de ce formalisme est qu'il permet d'utiliser tout l'acquis "physique" des modèles développés en petites déformations (qui se traduit dans le choix des fonctions constitutives et des variables internes) et qu'il concentre la difficulté liée aux grandes déformations dans le choix d'une rotation (rotation du référentiel tournant). L'intégration d'une loi de comportement en grandes déformations écrite selon ce formalisme dans un code de calcul se fera alors en intégrant une "boite" permettant de déterminer à chaque pas de calcul la rotation du repère dans lequel on écrit la loi de comportement.

Le maillon faible de ce formalisme réside dans le choix du référentiel tournant. Les arguments de ce choix doivent être de nature physique et/ou expérimentale. Malheureusement, la majorité des expériences classiquement réalisées correspondent à des sollicitations triaxiales alors que l'influence du référentiel tournant n'apparaît qu'au cours de sollicitations engendrant des rotations importantes.

Nous avons étudié l'influence du référentiel tournant dans quelques sollicitations particulières simples pour un comportement rigide plastique orthotrope. Différents référentiels "cinématiques" ou obtenus à partir de lois d'évolutions simples ont été étudiés. L'influence du choix du référentiel est évidemment nulle dans le cas de sollicitations triaxiales, elle est négligeable dans le cas de sollicitations engendrant de faibles rotations (traction hors-axes), et dans le cas où les rotations sont importantes (glissement simple), l'influence ne devient significative que pour un glissement de l'ordre de l'unité ce qui est loin d'être fréquent dans les applications pratiques. Ceci nous amène à dire qu'il est essentiel de tenir compte des rotations et donc d'utiliser un formalisme objectif en référentiel tournant, mais que le choix de celui-ci ne semble pas présenter une importance capitale, du moins dans une analyse contraintes déformations (la situation serait différente par exemple dans l'étude des instabilités où l'influence du référentiel tournant peut être importante).

D'un point de vue pratique, et vu le manque de données permettant de confirmer ou d'infirmier tel ou tel choix, il nous semble, qu'en première approximation, il faut utiliser les choix les plus simples. Dans le cas de sollicitations n'engendrant pas de grandes rotations, le référentiel corotationnel semble être un bon choix: sa détermination est aisée et l'on a montré que la décomposition de la vitesse de déformation en parties élastique et plastique dans le cas où les déformations élastiques restent petites fait intervenir la dérivée de Jaumann de la déformation élastique. En présence de rotations importantes, vu que le référentiel corotationnel peut engendrer des oscillations du fait qu'il tourne plus vite que les directions matérielles, le référentiel en rotation propre semble être un bon choix.

Pour conclure, il nous semble que l'aspect géométrique des grandes déformations est aujourd'hui suffisamment bien maîtrisé et que les efforts qui restent à faire pour développer des lois utilisables en mise en forme doivent porter sur deux aspects:

- d'un point de vue expérimental, il serait important de disposer de plus de résultats expérimentaux permettant de mieux asseoir le contenu phénoménologique et éventuellement de choisir à bon escient entre les divers référentiels tournants.

- d'un point de vue théorique, il nous semble que les efforts doivent désormais porter davantage sur le choix des variables d'écroutissage et sur leur influence. Il importera de leur intégrer davantage de micro-physique.

ANNEXE 1: REFERENTIELS CINEMATIQUES

1. PRELIMINAIRES

A) OBJET

Etudier l'évolution des directions principales de \mathbf{V} pour définir:

- Le référentiel principal des déformations
- Le référentiel triaxial

B) NOTATIONS

\vec{v}_i : Directions principales de \mathbf{V}

[V] : Matrice des composantes de \mathbf{V} dans \vec{v}_i (valeurs propres de \mathbf{V} : V_i)

[v] : Matrice des composantes de \mathbf{v} dans \vec{v}_i (valeurs propres de \mathbf{v} : v_i)

[B] : Matrice des composantes de \mathbf{B} dans \vec{v}_i ($B_i = V_i^2$)

[D] : Matrice des composantes de \mathbf{D} dans \vec{v}_i (D_{ij})

[\dot{V}] : Matrice des composantes de $\dot{\mathbf{V}}$ dans \vec{v}_i (\dot{V}_{ij})

[R] : Matrice des composantes de $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ dans \vec{v}_i (R_i)

[W] : Matrice des composantes de \mathbf{W} dans \vec{v}_i (W_i)

[W_v] : Matrice des composantes de \mathbf{W}_v dans \vec{v}_i (W_{vi})

[W_T] : Matrice des composantes de \mathbf{W}_T dans \vec{v}_i (W_{Ti})

[Ω] : Matrice des composantes de $\mathbf{\Omega} = \mathbf{W}_T - \mathbf{W}_v$ dans \vec{v}_i (Ω_i)

$$[R] : \begin{bmatrix} 0 & R_3 & -R_2 \\ -R_3 & 0 & R_1 \\ R_2 & -R_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [W] : \begin{bmatrix} 0 & W_3 & -W_2 \\ -W_3 & 0 & W_1 \\ W_2 & -W_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Idem pour } [W_v], [W_T] \text{ et } [\Omega]$$

C) RESULTATS PRELIMINAIRES

En écrivant \mathbf{L} à partir de la décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, on a:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (1)$$

L'écriture de (1) dans \vec{v}_i , permet d'avoir les relations suivantes:

$$\dot{V}_{11} = V_1 D_{11} \quad ; \quad \dot{V}_{22} = V_2 D_{22} \quad ; \quad \dot{V}_{33} = V_3 D_{33} \quad (2.a)$$

$$D_{12} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2V_1V_2} R_3 + \frac{V_1 + V_2}{2V_1V_2} \dot{V}_{12} \quad \text{et permutation circulaire pour } D_{23} \text{ et } D_{31} \quad (2.b)$$

$$W_3 = \frac{V_1^2 + V_2^2}{2V_1V_2} R_3 + \frac{V_1 - V_2}{2V_1V_2} \dot{V}_{12} \quad \text{et permutation circulaire pour } W_1 \text{ et } W_2 \quad (2.c)$$

Les relations (2.b) et (2.c) permettent d'avoir:

$$R_3 = W_3 + \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} D_{12} \quad \text{et permutation circulaire pour } R_1 \text{ et } R_2 \quad (3)$$

$$V_{12} = \frac{V_1^2 + V_2^2}{V_1 + V_2} D_{12} + (V_2 - V_1) W_3 \quad \text{et permutation circulaire pour } W_1 \text{ et } W_2 \quad (4)$$

Remarquons que, si $V_1 = V_2$ par exemple, alors $R_3 = W_3$.

2. REFERENTIEL PRINCIPAL DES DEFORMATIONS

A) ECRITURE DANS LE REPERE \vec{v}_i

- *Les valeurs propres de \mathbf{V} sont distinctes*

Considérons le cas où toutes les valeurs propres de \mathbf{V} sont distinctes. La vitesse de rotation \mathbf{W}_V du référentiel principal des déformations est égale, dans ce cas, à celle des directions principales de \mathbf{V} . Et l'on a:

$$\begin{aligned} D_V \mathbf{V} / Dt &= \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V} \mathbf{W}_V - \mathbf{W}_V \mathbf{V} & (5) \\ &= \dot{V}_1 \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 + \dot{V}_2 \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2 + \dot{V}_3 \vec{v}_3 \otimes \vec{v}_3 \end{aligned}$$

Si l'on écrit (5) dans le repère \vec{v}_i , on a :

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_{11} \quad \dot{V}_2 = \dot{V}_{22} \quad \dot{V}_3 = \dot{V}_{33} \quad (6.a)$$

$$0 = \dot{V}_{12} + (V_1 - V_2) W_{V3} \quad \text{et permutation circulaire pour } W_{V1} \text{ et } W_{V2} \quad (6.b)$$

Les relations (4) et (6.b), permettent de déterminer W_{Vi} en fonction de D_{ij} et W_i , soit (sachant que $B_i = V_i^2$):

$$W_{V3} = W_3 - \frac{B_1 + B_2}{B_1 - B_2} D_{23} \quad \text{et permutation circulaire pour } W_{V2} \text{ et } W_{V3} \quad (7)$$

- *Cas où deux des valeurs propres de \mathbf{V} sont égales ($V_1 = V_2$)*

Dans le cas où deux des valeurs propres de \mathbf{V} sont égales, par exemple $V_1 = V_2$ et donc $B_1 = B_2$, le plan (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est un plan propre pour \mathbf{V} . Tout autre repère \vec{v}'_i , en rotation par rapport à \vec{v}_i autour de \vec{v}_3 , est repère principal pour \mathbf{V} . On ne peut donc pas parler de vitesse de rotation de \vec{v}'_i . La relation (7) ne permet pas de définir W_{V3} . Remarquons quand même que:

1. Quelle que soit W_{V3} , la composante 12 de $\mathbf{V} \mathbf{W}_V - \mathbf{W}_V \mathbf{V}$, soit $(V_1 - V_2) W_{V3}$, est nulle. Autrement dit, la quantité $\mathbf{V} \mathbf{W}_V - \mathbf{W}_V \mathbf{V}$ est la même quelle que soit le choix de W_{V3} .
2. La composante R_3 est égale à W_3 .

Nous choisirons alors, pour la définition de \mathbf{W}_V :

$$W_{V3} = W_3 \quad (8)$$

B) ECRITURE GENERALE

La définition générale de \mathbf{W}_V est donnée par la relation (1.36) sachant que $\bar{\mathbf{W}}_V = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}_V$. Pour résoudre cette équation, nous allons déterminer la solution \mathbf{A} de l'équation générale suivante:

$$[\mathbf{S}^2 \mathbf{A}]^A - \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S} = a_1 [\mathbf{S} \mathbf{D}]^A + a_2 [\mathbf{S}^2 \mathbf{D}]^A \quad (9)$$

où \mathbf{S} est un déviateur symétrique, \mathbf{D} un tenseur symétrique, a_i des fonctions scalaires quelconques, et \mathbf{A} un tenseur antisymétrique.

La solution \mathbf{A} de (9) étant isotrope en (\mathbf{S}, \mathbf{D}) et linéaire en \mathbf{D} , elle s'écrit sous la forme générale suivante:

$$\mathbf{A} = 2f_1 [\mathbf{S} \mathbf{D}]^A + 2f_2 [\mathbf{S}^2 \mathbf{D}]^A + 2f_3 [\mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^2]^A \quad (10)$$

En reportant (10) dans (9), et en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on peut identifier les fonction f_i en fonction des a_i et des invariants principaux de \mathbf{S} , soit:

$$\left. \begin{aligned} -S_{II} f_1 + 3S_{III} f_2 &= a_1 \\ -S_{II} f_2 - 3S_{III} f_3 &= a_2 \\ 3 f_1 - 4S_{II} f_2 &= a_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

sachant que:

$$S_{II} = -\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{S} \quad ; \quad S_{III} = \det \mathbf{S}$$

Le déterminant D du système (11) est:

$$D = - (27S_{III}^2 + 4S_{II}^3) = (S_1 - S_2)^2 (S_2 - S_3)^2 (S_3 - S_1)^2 \quad (12)$$

qui s'annule si deux des valeurs propres S_i de \mathbf{S} coïncident.

- Cas 1: $D \neq 0$

La résolution de (12) est automatique, soit:

$$f_1 = [4S_{II}^2 a_1 + 12S_{II}S_{III} a_2] / D \quad (13.a)$$

$$f_2 = [-9S_{II}^3 a_1 + 4S_{III}^2 a_2] / D \quad (13.b)$$

$$f_3 = [3S_{II} a_1 + 9S_{III} a_2] / D \quad (13.c)$$

- Cas 2: $D=0$ et \mathbf{S} non nul

Dans ce cas, on peut écrire \mathbf{S} sous la forme:

$$\mathbf{S} = s (\mathbf{1} - 3\boldsymbol{\alpha}) \quad ; \quad s = 3S_{III}/2S_{II} = \sqrt[3]{(S_{III}/2)} \quad (14)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\alpha}$ définit la direction principale orthogonale au plan principal. Si, par exemple $S_1 = S_2$, alors $\boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{v}}_3 \otimes \bar{\mathbf{v}}_3$, où $\bar{\mathbf{v}}_3$ est le vecteur unitaire sur la direction principale de \mathbf{S} associée à S_3 .

En reportant (14) dans (9), on obtient:

$$[\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}]^A = (a_1 - a_2 s) / 3s [\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}]^A \quad (15)$$

dont la solution est:

$$\mathbf{A} = 2f [\mathbf{S} \mathbf{D}]^A \quad \varphi = (a_1 - a_2 s) / 9s^2 \quad (16)$$

La vitesse $\bar{\mathbf{w}}_v$ est la solution de (9) pour $\mathbf{S} = \mathbf{B}^D$, $a_1 = 2\text{tr} \mathbf{B} / 3$ et $a_2 = 1$. Sa forme est donnée par les relations (I.37) et (I.40).

3. REFERENTIEL TRIAXIAL

Le référentiel triaxial est défini par (I.41), soit:

$$D_T \mathbf{v} / Dt = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \mathbf{W}_T - \mathbf{W}_T \mathbf{v} = \mathbf{D} \quad (17)$$

La dérivée de \mathbf{v} par rapport à ses directions principales \bar{v}_i , soit $D_V \mathbf{v} / Dt$, est donnée par :

$$\begin{aligned} D_V \mathbf{v} / Dt &= \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \mathbf{W}_V - \mathbf{W}_V \mathbf{v} \\ &= (\dot{V}_1 / V_1) \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_1 + (\dot{V}_2 / V_2) \bar{v}_2 \otimes \bar{v}_2 + (\dot{V}_3 / V_3) \bar{v}_3 \otimes \bar{v}_3 \end{aligned} \quad (18)$$

soit en reportant (18) dans (17):

$$D_T \mathbf{v} / Dt = D_V \mathbf{v} / Dt + \mathbf{v} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v} = \mathbf{D} \quad ; \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}_T - \mathbf{W}_V \quad (19)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\Omega}$ vérifie l'équation (I.42) qui est un cas particulier de (9). $\exists \lambda$ est donc solution de (9) pour $\mathbf{S} = \mathbf{v}^D$, et $a_1 = 1$. Sa forme est donnée par les relations (I.43) et (I.44).

Les composantes de $\boldsymbol{\Omega}$ dans \bar{v}_i sont:

$$\Omega_1 = D_{23} / (v_2 - v_3) \quad ; \quad \Omega_2 = D_{31} / (v_3 - v_1) \quad ; \quad \Omega_3 = D_{12} / (v_1 - v_2) \quad (20)$$

ANNEXE 2: ROTATIONS MATERIELLES

1. UNE DIRECTION MATERIELLE

On considère une direction matérielle définie par le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{K}}$ dans C_0 . A l'instant t, cette direction est définie par le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{k}}$ (Fig. I.2). On note:

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}} \otimes \bar{\mathbf{K}} \quad ; \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} \otimes \bar{\mathbf{k}}$$

et l'on a:

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{F} \bar{\mathbf{K}} / |\mathbf{F} \bar{\mathbf{K}}| \quad ; \quad \mathbf{k} = (\mathbf{F} \mathbf{K} \mathbf{F}^T) / (\mathbf{K} : \mathbf{C}) \quad (1)$$

avec $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. L'orientation de $\bar{\mathbf{k}}$ par rapport à $\bar{\mathbf{K}}$ peut être définie par un tenseur rotation \mathbf{Q}_k telle que:

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{Q}_k \bar{\mathbf{K}} \quad ; \quad \mathbf{k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{K} \mathbf{Q}_k^T \quad (2)$$

et donc:

$$\dot{\mathbf{k}} = 2 [\mathbf{k} \mathbf{W}_k]^S \quad ; \quad \mathbf{W}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k \mathbf{Q}_k^T = \mathbf{W} - \bar{\mathbf{W}}_k \quad (3)$$

Si l'on dérive la deuxième relation (1) on a:

$$\dot{\mathbf{k}} = -2 [\mathbf{k} \mathbf{W}]^S + 2 \{ \mathbf{k} [\mathbf{D} - (\mathbf{k} : \mathbf{D}) \mathbf{1}] \}^S \quad (4)$$

En égalisant (3) et (4), on obtient une relation permettant de déterminer $\bar{\mathbf{W}}_k = \mathbf{W} - \mathbf{W}_k$:

$$[\mathbf{k} \bar{\mathbf{W}}_k]^S = \{ \mathbf{k} [\mathbf{D} - (\mathbf{k} : \mathbf{D}) \mathbf{1}] \}^S \quad (5)$$

La solution de (5) n'est pas unique, puisqu'une seule direction matérielle ne permet pas de définir complètement le tenseur \mathbf{Q} . En effet, si \mathbf{W}_k est solution de (5), alors tout \mathbf{W}_k' sous la forme :

$$\mathbf{W}_k' = \mathbf{W}_k + 2\alpha [\mathbf{D} \mathbf{k}_T + \mathbf{k}_T \mathbf{D} \mathbf{k}]^A \quad (6)$$

est aussi solution. Le scalaire α est quelconque, et $\mathbf{k}_T = \bar{\mathbf{k}}_1 \otimes \bar{\mathbf{k}}_T$, avec $\bar{\mathbf{k}}_T$ un vecteur unitaire, orthogonal à $\bar{\mathbf{k}}$.

La solution la plus simple de (5) est:

$$\bar{\mathbf{W}}_k = 2 [\mathbf{k} \mathbf{D}]^A \quad (7)$$

2. UN PLAN MATERIEL

Considérons maintenant deux directions matérielles $\bar{\mathbf{K}}_1$ et $\bar{\mathbf{K}}_2$ qui se retrouvent, à l'instant t, en $\bar{\mathbf{k}}_1$ et $\bar{\mathbf{k}}_2$. Soient θ_0 et θ les angles entre ces deux directions, à l'instant initial et à l'instant t respectivement. On note:

$$\mathbf{K}^S = \bar{\mathbf{K}}_1 \otimes \bar{\mathbf{K}}_2 + \bar{\mathbf{K}}_2 \otimes \bar{\mathbf{K}}_1 \quad ; \quad \mathbf{k}^S = \bar{\mathbf{k}}_1 \otimes \bar{\mathbf{k}}_2 + \bar{\mathbf{k}}_2 \otimes \bar{\mathbf{k}}_1 \quad (8)$$

on montre que :

$$\mathbf{k}^S = (\mathbf{F} \mathbf{K} \mathbf{F}^T) / \sqrt{[(\mathbf{K}_1 : \mathbf{C})(\mathbf{K}_2 : \mathbf{C})]} \quad (9)$$

et que :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{k}^S = (\mathbf{K}^S : \mathbf{C}) / 2 \sqrt{[(\mathbf{K}_1 : \mathbf{C})(\mathbf{K}_2 : \mathbf{C})]} \quad (10)$$

En dérivant (10) par rapport au temps, on a:

$$\dot{\theta} \sin\theta = \cos\theta [(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) : \mathbf{D}] - \mathbf{k}^s : \mathbf{D} \quad (11)$$

Les direction $\bar{\mathbf{k}}_1$ et $\bar{\mathbf{k}}_2$ permettent de définir plusieurs référentiels tournants $\bar{\mathbf{m}}_i$. Chacun sera défini par une rotation \mathbf{Q} telle que:

$$\bar{\mathbf{m}}_i = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{M}}_i \quad ; \quad \mathbf{m}_i = \mathbf{Q} \mathbf{M}_i \mathbf{Q}^T \quad (12)$$

On note:

$$\mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{m}}_i \otimes \bar{\mathbf{m}}_i \text{ (sans sommations)} \quad ; \quad \mathbf{m}^s = \bar{\mathbf{m}}_1 \otimes \bar{\mathbf{m}}_2 + \bar{\mathbf{m}}_2 \otimes \bar{\mathbf{m}}_1$$

En dérivant (12), on a:

$$\dot{\mathbf{m}}_i = \mathbf{W}_Q \mathbf{m}_i - \mathbf{m}_i \mathbf{W}_Q \quad ; \quad \mathbf{W}_Q = \dot{\mathbf{Q}}_Q \mathbf{Q}_Q^T = \mathbf{W} - \bar{\mathbf{W}}_Q \quad (13)$$

Nous allons étudier deux choix particuliers de référentiels tournants.

A) CHOIX 1:

$$\bar{\mathbf{m}}_1 = \bar{\mathbf{k}}_1 \quad ; \quad \bar{\mathbf{m}}_3 = (\bar{\mathbf{k}}_1 \wedge \bar{\mathbf{k}}_2) / |(\bar{\mathbf{k}}_1 \wedge \bar{\mathbf{k}}_2)| \quad ; \quad \bar{\mathbf{m}}_2 = \bar{\mathbf{m}}_3 \wedge \bar{\mathbf{m}}_1 \quad (14)$$

on montre que:

$$\mathbf{k}_2 = \cos^2\theta \mathbf{m}_1 + \sin^2\theta \mathbf{m}^2 + \cos\theta \sin\theta \mathbf{m}^s \quad (15.a)$$

$$\mathbf{k}^s = 2\cos\theta \mathbf{m}_1 + \sin\theta \mathbf{m}^s \quad (15.b)$$

Les relations (11) et (15) permettent d'avoir:

$$\dot{\theta} = \sin\theta [\cos\theta (\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) : \mathbf{D} - \sin\theta \mathbf{m}^s : \mathbf{D}] \quad (16)$$

En utilisant (1) et (14), on peut déterminer $\dot{\mathbf{m}}_i$ en fonction de \mathbf{D} et \mathbf{W} . En égalant avec (13), on trouve les relations permettant de déterminer $\bar{\mathbf{W}}_Q$ en fonction de \mathbf{D} . La solution, unique cette fois (si $\theta \neq 0$), est:

$$\bar{\mathbf{W}}_k = 2[\mathbf{D} \mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_1 \mathbf{D} \mathbf{m}_2]^A \quad (17)$$

B) CHOIX 2:

$$\bar{\mathbf{m}}_1 = (\bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_2) / |(\bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_2)| \quad ; \quad \bar{\mathbf{m}}_3 = (\bar{\mathbf{k}}_1 \wedge \bar{\mathbf{k}}_2) / |(\bar{\mathbf{k}}_1 \wedge \bar{\mathbf{k}}_2)| \quad ; \quad \hat{\mathbf{m}}_2 = \bar{\mathbf{m}}_3 \wedge \bar{\mathbf{m}}_1 \quad (18)$$

En raisonnant de la même manière que ci-dessus, on trouve:

$$\bar{\mathbf{W}}_k = 2[\mathbf{D} \mathbf{m}_3 + \cos\theta \mathbf{m}_1 \mathbf{D} \mathbf{m}_2]^A \quad (19)$$

$$\dot{\theta} = \sin\theta [(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) : \mathbf{D}]$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ANGLES D'AURIAC P.

(1970) *"Les principes en mécanique des milieux continus"*, La Houille Blanche, n° 5, pp. 427-432.

[2] ATLURI S.N.

(1984) *"On constitutive relations at finite strain: hypo-elasticity and elasto-plasticity with isotropic or kinematic hardening"*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 43, pp. 137-171, 1984.

[3] BALTOV A. - SAWCZUK A.

(1965) *"A rule of anisotropic hardening"*, Acta Mech., 1/2, pp. 81-92, 1965.

[4] BOEHLER J.P.

a (1975) *"Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes"*, Thèse de Doctorat ès-sciences, Grenoble.

b (1978) *"Lois de comportement anisotrope des milieux continus"*, Journal de Mécanique, Vol. 17, n° 2, pp. 153-190.

c (1979) *"A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy"*, ZAMM 59, pp. 157-167.

d (1983) *"On a Rational formulation of isotropic and anisotropic hardening"*, Comm. au: International Symposium on Current Trends and Results in Plasticity. CISM, Udine 1983. Dans "Plasticity Today" (ed. A. SAWCZYK and G. BIANCHI), Elsevier 1985, pp. 483-502.

e (1987) *"Applications of tensor functions in solid mechanics"*, CISM Courses and Lectures n° 292, Springer-Verlag, Wien, 1987.

[5] BOEHLER J.P. - EL AOUI L.

(1984) *"Hétérogénéité des champs de contraintes et de déformations dans les matériaux anisotropes"*, Communication au 19ème Colloque du G.F.R., Paris, novembre 1984. Dans "Rhéologie de matériaux anisotropes", Cepadues Editions 1986, pp. 131-149.

[6] BOEHLER J.P. - RACLIN LJ

(1982) *"Anisotropic hardening of prestrained rolled sheet-steel"*, Current advances in mechanical design and production, second Cairo University MDP conference, 1982, pp. 483-492.

[7] BOUKADIA J.

"Contribution à l'étude de la viscoplasticité anisotrope en grandes déformations : le monocristal", thèse de doctorat (en préparation)

[8] BOUKADIA J.- DOGUI A.- SIDOROFF F.

(1987) *"On the rotations in large strain plasticity of some model materials"*, IUTAM/ICM Symposium: Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids, Grenoble, 1987, à paraître dans les actes du colloque.

[9] BOUKADIA J. - SIDOROFF F.

(1987) *"Simple shear and torsion of a perfectly plastic single crystal in finite transformations"*, Symposium Franco-Polonais, Villard de Lans 1987, Arc. Mech., à paraître.

[10] CAMBOU B. - DOGUI A. - JAFARI K. - SIDOROFF F.

- (1986) *"On the equivalence between true triaxial and torsion shear loading paths"*, Computers and Geotechnics, 2, 1986, pp. 207-217.

[11] CANOVA G.R.- MOLINARI A. - FRESSENGEAS C.

- (1984) *"Approche de l'écroissage textural des métaux aux grandes vitesses de déformations"*, Actes du 19ème Colloque GFR, Paris 1984: Rhéologie des matériaux anisotropes, C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 327-338.

[12] CHABOCHE J.L.

- (1975) *"Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behaviour of metals"*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série Sciences et Techniques, Vol. 25, 1975, pp. 33-42.

[13] CHENAOUI A.

Thèse de Doctorat (en préparation)

[14] DAFALIAS Y. F.

- a (1979) *"Anisotropic hardening of initially orthotropic materials"*, ZAMM, 59, 1979, pp. 437-446
- b (1981) *"Lagrangian and eulerian description of plastic anisotropy at large strains. Case study: orthotropy and isotropy"*, Actes du Colloque international du CNRS No 319, Villard de Lens, Juin 1981: Comportement plastique des solides anisotropes, ed. J. P. Boehler, pp. 341-356, 1985.
- c (1983) *"Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations"*, J. Appl. Mech., 50, 1983, pp. 561-565.
- d *"On the evolution of structure variables in anisotropic yield criteria at large plastic transformations"*, Colloque international du CNRS No 351: critères de rupture des matériaux à structure interne orientée, Villard de Lens, juin 1983.
- e *"A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations"*, Communication au: International Symposium on Current Trends and Results in Plasticity. CISM, Udine 1983. Dans "Plasticity Today", Elsevier, 1985.
- f (1984) *"A missing link in the formulation and numerical implementation of finite transformation elastoplasticity"*, dans "Constitutive Equations: Macro and Computational Aspects", ed. K. J. William, 1984.
- g *"The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations"*, Mechanics of Materials, 3, 1984, pp. 223-233.
- h (1985) *"The plastic spin"*, J. Appl. Mech., 52, 1985, pp. 865-871.
- i *"On large deformation of rock-type transversely isotropic materials"*, Proc. Physical Basis and Modelling of Finite Deformation of Agregates, CNRS, Paris 1985.

[15] DEBORDES O. - LICHT C. - MARIGO J.J. - MIALON P; - MICHEL J.C. - SUQUET P.

- (1985) *"Calcul des charges limites de structures fortement hétérogènes"*, actes du 3ème colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures, Bastia 1985, ed. Pluralis, Paris 1985.

[16] DETRAUX J. M.

- (1985) *"Formulations et applications en grandes déformations des solides"*, Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Technologie de Compiègne, 1985.

[17] DOGUI A.

- a (1983) *"Contribution à l'étude de l'écroissage isotrope et anisotrope en grandes déformations élastoplastiques"*, Thèse de Doctorat 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1983.

- b (1985) **"Traction hors-axes et torsion en plasticité anisotrope et grandes déformations"**, Actes du 7ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, 1985.
- c (1987) **"Cinématique bidimensionnelle en grandes déformations - application à la traction hors axes et à la torsion"**, J. Méca. Th. et Appl, Vol ,no1, 1988.

[18] DOGUI A. - SIDOROFF F.

- a (1981) **"Anisotropic hardening in large elasto-plastic strain"**, Actes du Colloque international du CNRS No 319, Villard de lens, Juin 1981: Comportement plastique des solides anisotropes, ed. J. P. Boehler, pp. 341-356, 1985.
- b (1983) **"Kinematic hardening in large elastoplastic strain"**, Communication au: 'International Symposium on Current Trends and Results in Plasticity', CISM, Udine 1983. Eng. Fract. Mech., 21, No 4, 1985, pp. 685.
- c **"Anisotropie en grandes déformations élastoplastiques"**, Rapport GRECO Grandes Déformations et Endommagement, N° 105/1983.
- d (1984) **"Quelques remarques sur la plasticité anisotrope en grandes déformations"**, CRAS, t. 299, série II, No 18, pp. 1225-1228.
- e **"Rhéologie anisotrope en grandes déformations"**, Actes du 19ème Colloque GFR, Paris 1984: Rhéologie des matériaux anisotropes, C. HUET, D. BOURGOIN, S. RICHEMOND, Editions CEPADUES, Toulouse, 1986, pp. 69-78.
- f (1986) **"Plastic behavior of fiber reinforced composites in large deformation"**, Proc. Euromech 214, Kupari Yougolavie, 1986: Mechanical behaviour of composites and laminates, Elsevier App. Sc., ed. W.A. GREEN and M. MICUNOVIC, 1987, pp. 209-218.
- g **"Large strain formulation of anisotropic elasto-plasticity for metal forming"**, Computational Methods for Predicting Processing Defects, ed. M. Predeleanu, Elsevier app. sc., Amsterdam, 1987.

[19] DROBYSZ S.

- (1985) **"Intégration numérique de lois de comportement et construction automatique de problèmes tests en grandes transformations élastoplastiques"**, Thèse de Doctorat 3ème Cycle, Université de Nantes, 1985.

[20] DUDZINSKI D.

- (1986) **"Application du modèle d'écouissage cinématique à la mise en forme. Influence de la température sur la limite du formage"**, Thèse de Doctorat, Université de Metz, juin 1986.

[21] ECKART G.

- (1948) **"Theory of elasticity and inelasticity"**, Phys. Rev., 73, pp. 373-380, 1948.

[22] FOUGERES M. - HAMEL A. - SIDOROFF F. - VINCENT A.

- (1985) **"Rôle de l'élasticité dans les variations de raideur en sollicitations cycliques"**, Rapport GRECO Grandes Déformations et Endommagement, n°165/1985.

[23] FRESSENGEAS C.- MOLINARI A.

- a (1983) **"Modèle d'écrouissage cinématique en grandes déformations"**, C.R.A.S., II, t. 372, 1983.
- b **"Représentation du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations"**, Arch. Mech., 36, 4, pp. 483-498, 1983.

[24] GERMAIN P.

- a (1973) **"Cours de mécanique des milieux continus, tome I"**, Masson, Paris, 1973.
- b **"Thermodynamique des milieux continus"**, Conférence au 1er Congrès Français de Mécanique, Poitiers, 1973; Entropie, No 55, 1974, p. 7-14.
- c (1986) **"Mécanique, tomes I et II"**, Ellipses, Paris, 1986.

[25] GREEN A. E. - NAGHDI P. M.

- a (1965) *"A general theory of an elastic plastic continuum"*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 18, 1965, pp. 251-281
- b (1971) *"Some remarks on elastic plastic deformations at finite strain"*, Int. J. Eng. Sc., Vol. 9, 1971, pp. 1219-1229
- c (1973) *"Rate-type constitutive equations and elastic-plastic materials"*, Int. J. Eng. Sc., 1973, Vol. 11, pp. 725-734

[26] HALPHEN B. - NGUYEN QUOC SON

- (1975) *"Sur les matériaux standard généralisés"*, Journal de Mécanique, Vol. 14, N° 1, 1975, pp. 39-63.

[27] HAUPT P. - TSAKMAKIS C.

- (1986) *"On kinematic hardening and large plastic deformations"*, Int. J. Plasticity, Vol.2, pp. 279-293.

[28] IKEGAMI K.

- (1979) *"Experimental plasticity on the anisotropy of metals"*, Conférence générale au colloque CNRS 295, euromech 115, juin 1979: *"Comportement mécanique des solides anisotropes"*, ed. J. P. Boehler, pp. 202-242, 1982.

[29] LADEVEZE P.

- (1980) *"Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations"*, Rapport interne E.N.S.E.T. L.M.T. N° 9, 1980.

[30] LEE E. H.

- a (1969) *"Elastic-plastic deformation at finite strains"*, J. App. Mech., Vol. 36, 1969, pp. 1-6
- b (1981) *"Some comments on elastic-plastic analysis"*, Int. J. Solids Structures, Vol. 17, 1981, pp. 859-872.
- c (1985) *"Interaction between physical mechanisms and the structure of continuum theories"*, Proc. Physical Basis and Modelling of Finite Deformation of Aggregates, CNRS, Paris 1985 à paraître.

[31] LEE E. H. - MALLET R. L. - WERTHEIMER T. B.

- a (1981) *"Stress analysis for kinematic hardening in finite-deformation plasticity"*, Stanford University Report SUDAM 81-11, 1981, J. Appl. Mech., 50, pp. 554-560, 1983.
- b (1983) *"Stress analysis for anisotropic hardening in finite deformation plasticity"*, J. Appl. Mechanics, Vol. 50, 1983, pp. 554-560.

[32] LEE E. H. - MCMEEKING R. M.

- (1980) *"Concerning elastic and plastic components of deformation"*, Int. J. Solids Structures, Vol. 16, 1980, pp. 715-721.

[33] LEE E. H. - LIU D. T.

- (1966) *"Finite strain elastic-plastic theory"*, Proc. IUTAM Symp. on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids (Vienna, 1966), p. 117. Springer (1968)

[34] LEE E. H. - WERTHEIMER T. B.

- (1983) *"Deformation analysis of simple shear loading with anisotropic hardening in finite-deformation plasticity"*, ASME Applied Mechanics Division Symposium: Recent Developments in Computing Methods for Nonlinear Solid and Structural Mechanics, June 1983.

[35] LORET B.

- (1984) *"On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials"*, Mechanics of Materials

[36] LUBARDA V. A. - LEE E. H.

- (1980) *"A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance"*, Stanford University Report SUDAM 80-1, 1980, J. App. Mechanics, Vol. 48, pp. 35-40.

[37] MANDEL J.

- a (1971) *"Plasticité et viscoplasticité"*, Cours CISM, 97, Udine. Springer, New York, 1971
- b *"Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques"*, Int. J. Solids Structures, Vol. 9, 1973, pp. 725-740.
- c *"Introduction à la mécanique des milieux continus déformables"*, Editions P. W. N. Varsovie 1974.
- d (1981) *"Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte"*, Int. J. Solids structures, Vol. 17, 1981, pp. 873-878.
- e (1982) *"Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal"*, J. Méca. Th. et Appl., Vol. 1, No 1, 1982, pp. 7-23.
- f (1983) *"Sur la définition de la vitesse de déformation élastique en grande transformation élastoplastique"*, Int. J. Solids Structures, Vol. 19, No 7, 1983, pp. 573-578.

[38] MARQUIS D.

- (1979) *"Modélisation et identification de l'écrouissage anisotrope des métaux"*, Thèse de 3ème cycle, ENSET Paris VI.

[39] MC MEEKING R. M. - RICE J. R.

- (1975) *"Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation"*, Int. J. Solids Structures, 1975, Vol. 11, pp. 601-616.

[40] MORANDO A. - DEBORDES O.

- (1988) *"Etude numérique d'un problème de collerette d'emboutissage présentant des instabilités par bandes de cisaillement"*, J. Méch. Thé. Appl. Vol. 7, N° 4, pp; 409-441.

[41] MOREAU J.J.

- a (1970) *"Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité"*, C.R.A.S., Série A, t. 271, pp. 608-611, 1970.
- b (1981) *"La convexité en mécanique"*, Conférence au 5ème Congrès Français de Mécanique, Marseille, 1981.

[42] MROZ Z.

- (1967) *"In the description of anisotropic workhardening"*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, pp. 163-175, 1967.

[43] NAGTEGAAL J. C. - DE JONG J. E.

- (1981) *"Some aspects of non-isotropic workhardening in finite strain plasticity"*, Proc. Workshop on plasticity of metals at finite strain: experiments and computation, Stanford University (Edited by E.H. Lee and R.L. Mallett), pp. 64-102, Division of applied mechanics, Stanford University, California, and department of mechanical engineering, aeronautical engineering and mechanics, R.P.Y., New York (1982).

[44] ONAT E. T.

- a (1982) *"Representation of inelastic behaviour in the presence of anisotropie and of finite deformations"*, Recent advances in creep and fracture of engineering materials and structures, Wilshire B. and Owen D.R.J. eds., Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 231-264, 1982.
- b (1984) *"Shear flow of kinematically hardening rigid plastic materials"*, Mechanics of material behaviour, Dvorak G.J. and Shield R.T. eds., Elsevier, pp. 311-324, 1984.

[45] PAULUN J. E. - PECHERSKI R. B.

- a (1985) **"Study of corotational rates for kinematic hardening in finite deformation plasticity"**, Arch. Mech., 37, 6, pp. 661-677.
- b () **"A new evolution equation of kinematic hardening in finite deformation plasticity"**,

[46] PAULUN J. E. - RYSZARD B. - PECHERSKI R. B.

- (1987) **"On the application of the plastic spin concept for the description of anisotropic hardening in finite deformation plasticity"**, Int. J. of Plasticity, Vol. 3, pp.

[47] RICE J. R.

- (1971) **"Inelastic constitutive relations for solids, an internal variable theory and its application to metal plasticity"**, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 9, 1971, pp. 433-455

[48] ROUGEE P.

- a (1980) **"Formulation lagrangienne intrinsèque en mécanique des milieux continus"**, Journal de Mécanique, vol. 19, N° 1, pp. 7-32, 1980.
- b (1988) **"La variété des métriques locales et son utilisation pour le postulat lagrangien intrinsèque des lois constitutives"**, Rapport interne n° 82, L.M.T, E.N.S. Cachan.

[49] SIDOROFF F.

- a (1973) **"The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain"**, Arch. Mech., 25, 2, 1973, pp. 299-308.
- b (1975) **"On the formulation of plasticity and viscoplasticity with internal variables"**, Archives of Mechanics, 27, 5-6, 1975, pp. 807-819.
- c (1976) **"Variables internes en viscoélasticité et plasticité"**, Thèse de Doctorat es-sciences, Université Pierre et Marie Curie, 1976.
- d (1978) **"Sur l'équation tensorielle $AX+XA=H$ "**, C.R.A.S., T. 286, 9 janvier 1978.
- e (1982) **"Incremental constitutive equation for large strain elasto plasticity"**, Int. J. Engng Sci, Vol. 20, No 1, 1982, pp. 19-26.
- f **"Influence du trajet de chargement sur l'écroûissage, une modélisation"**, Rapport GRECO GDE, N° 64 / 1982
- g (1984) **"Ecroûissage cinématique et anisotropie induite en grandes déformations élasto-plastiques"**, J. Méca. Th. Appl., Vol. 3, No 1, 1984, pp. 117-133.

[50] SIDOROFF F. - TEODOSIU C.

- a (1976) **"A theory of finite elastoviscoplasticity of single crystals"**, Int. J. Engng Sci., 1976, Vol. 14, pp. 165-176.
- b (1985) **"Microstructure and phenomenological models for metals"**, Proc. Physical Basis and Modelling of Finite Deformation of Agregates, CNRS, Paris 1985.

[51] STOLZ C.

- (1982) **"Contribution à l'étude des grandes transformations en élastoplasticité"**, Thèse de Docteur Ingénieur, E.C.N.P.

[52] TEODOSIU C.

- a (1967) **"Contributions to the continuum theory of dislocations and initial stress"**, Revue Roumaine SC. Tech., Série Méca. Appl., Vol. 12, 1967, pp. 961-977; 1061-1077 et 1291-1308.
- b (1970) **"A dynamic theory of dislocations and its applications to the theory of the elastic-plastic continuum"**, Fundamental aspects of dislocation theory, J. A. Simmons, R. de Witt, and R. Bullough, eds. (Nat. Bur. Stand., U.S., Spec. Publ. 317, II, 1970)

[53] TRUESDELL C.A. - NOLL W.

- (1965) **"The non linear field theories of mechanics"**, Handbuch der Physik, Bd III/3, Springer Verlag, Berlin, 1965.

[54] WANG C. C.

(1972) *"On Gosiewski's theorem"*,

[55] WEIL F. - DEBORDES O.

(1983) *"Homogénéisation en plasticité, un exemple de calculs"*, Rapport GRECO Grandes Déformations et Endommagement, n° 107/1983.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I: Cinématique et rotations des transformations finies	5
1. Cinématique d'une grande transformation	7
1.1. Généralités	
a) Gradient de la transformation	
b) Directions principales de la déformation	
1.2. Sollicitations triaxiales	
a) Définition	
b) Réponse à une cinématique triaxiale	
1.3. Dérivées objectives	
a) Principe d'objectivité	
b) Dérivées "classiques"	
2. Référentiels tournants	15
2.1. Référentiel principal des déformations	
2.2. Référentiel triaxial	
2.3. Référentiels matériels	
3. Cinématique plane	21
3.1. Définition	
3.2. Caractéristiques	
3.3. Référentiels tournants	
4. Sollicitations particulières	25
4.1. Cisaillement simple	
4.2. Traction hors-axes	
4.3. Traction torsion homogène	
4.4. Instabilité: problème à deux zones	
4.5. Sollicitations triaxiales	
CHAPITRE II: Phénoménologie de l'élastoplasticité	31
1. Introduction	33
2. Phénoménologie de l'élastoplasticité	35
2.1. Cadre général	
a) Hypothèses de base	

b) Cadre thermodynamique	
c) Isotropie-anisotropie	
2.2. Modèles classiques	
a) Elasticité linéaire	
b) Plasticité parfaite de von Mises	
c) Ecrouissage isotrope	
d) Ecrouissage cinématique	
e) Plasticité orthotrope de Hill	
2.3. Autres modèles	
a) Anisotropie générale	
b) un modèle particulier	
3. Grandes transformations élastoplastiques	45
3.1. Présentation du problème	
3.2. Milieux à configuration intermédiaire	
a) Formalisme général	
b) Cadre thermodynamique	
c) Cas particulier: une seule variable tensorielle	
3.3. Milieux à configuration naturelle locale: trièdre directeur	
a) Formalisme général	
b) Ecriture eulérienne	
c) Cadre thermodynamique	
3.4. Conclusions	
CHAPITRE III: Comportement rigide plastique	53
1. Introduction: Euler ou Lagrange?	55
2. Cadre général	57
2.1. Formalisme en référentiel tournant	
a) Présentation	
b) Interprétation géométrique	
c) Relations avec la cinématique de la plasticité	
2.2. Choix du référentiel tournant	
a) Cas général	
b) Référentiels cinématiques	
c) Théorie de la rotation plastique	
3. Cas particuliers	63
3.1. Anisotropie induite	
a) Cas général	
b) Ecrouissage cinématique	
c) La déformation plastique est la variable d'écrouissage	
3.2. Orthotropie initiale et écrouissage isotrope	

a) Cas général	
b) Plasticité de Hill	
3.3. Anisotropie initiale et induite	
4. Sollicitations planes sur un matériau orthotrope	71
4.1. Cas général	
a) Lois d'évolution	
b) Référentiels tournants	
4.2. Cisaillement simple	
a) Lois d'évolution	
b) Illustrations et conclusions	
4.3. Traction hors-axes	
a) Lois d'évolution	
b) Illustrations et conclusions	
4.4. Torsion (cission pure)	
a) Lois d'évolution	
b) Illustrations et conclusions	
CHAPITRE IV: Comportement Elastoplastique	83
1. Introduction	85
2. Cinématique de la transformation élastoplastique	87
2.1. Milieux à configuration relâchée	
a) Généralités	
b) Vitesses de déformation et vitesses de rotation	
c) Cinématique élastoplastiquement triaxiale	
2.2. Milieux à configuration relativement relâchée	
3. Formulation générale du comportement	93
3.1. Milieux à configuration relâchée	
a) Cadre général	
b) Cadre thermodynamique	
3.2. Milieux à configuration relativement relâchée	
4. Cas particulier: Petites déformations élastiques	99
4.1. Hypothèse des petites déformations élastiques	
4.2. Elasticité linéaire isotrope	
CHAPITRE V: Quelques matériaux modèles en élastoplasticité anisotrope	101
1. Introduction	103
2. Matériaux stratifiés	105
2.1. Hypothèses de base	
a) Hypothèses d'homogénéisation	
b) Décomposition orthogonale d'un déviateur	

2.2. Equations constitutives	
a) Comportement local décomposé	
b) Comportement homogénéisé	
c) Interprétation en référentiel tournant	
2.3. Comportement en cisaillement simple	
3. Renforcement par fils	111
3.1. Cadre général	
3.2. Fibres Plastiques	
a) Comportement général	
b) Un système de fibres	
c) Deux systèmes de fibres identiques	
d) Cas général	
3.3. Fibres élastiques	
a) Comportement général	
b) Traction hors axes	
c) Interprétation en référentiel tournant	
4. Un exemple de monocristal	121
4.1. Cadre général	
4.2. Le monocristal plan	
5. Conclusions	125
CONCLUSIONS	127
ANNEXES 1: Référentiels cinématiques	129
ANNEXES 2: Rotations matérielles	133
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	135
TABLE DES MATIERES	145

DOGUI A.

- Plasticité Anisotrope en Grandes Déformations -

1989

RESUME

Ce travail traite de la formulation de l'élastoplasticité anisotrope en grandes déformations. Un formalisme général, en référentiel tournant, permettant de décrire tout type d'anisotropie est présenté et étudié. Les différentes théories des grandes déformations ont été situées dans ce cadre, elles se distinguent par leur façon de définir l'évolution du référentiel tournant.

Les différentes façons de choisir un référentiel tournant sont étudiées:

- Choix cinématique à-priori: Différents référentiels cinématiques sont proposés et analysés.

- Proposition d'une loi d'évolution: théorie de la rotation plastique.

- Détermination à partir de la microstructure: quelques "matériaux modèles" sont développés.

L'influence du choix du référentiel tournant est étudiée dans des cas de sollicitations simples telles que le cisaillement simple, la traction-hors axes et la torsion. D'une manière générale, une cinématique bidimensionnelle est proposée et analysée. Le comportement rigide plastique avec critère de Hill et écrouissage isotrope est détaillé.

MOTS CLES

Anisotropie

Elastoplasticité

Grandes déformations

Monocristal

Plasticité

Torsion

Traction hors-axes