Reconstruction en tomographie dynamique par approche inverse sans compensation de mouvement

Fabien Momey

▶ **To cite this version:**

Fabien Momey. Reconstruction en tomographie dynamique par approche inverse sans compensation de mouvement. Autre [cond-mat.other]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2013. Français. NNT : 2013STET4006 . tel-00842572v5

HAL Id: tel-00842572

https://theses.hal.science/tel-00842572v5

Submitted on 28 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Présentée à

l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne

pour obtenir

le grade de: Docteur de l'Université de Saint-Étienne

Spécialité: Image

par

Fabien Momey

et intitulée

Reconstruction en tomographie dynamique par approche inverse sans compensation de mouvement

soutenue le 20 juin 2013 devant la commission d'examen:

Rapporteurs:	J.-F. Giovannelli	Professeur, Université Bordeaux 1
	D. Visvikis	Directeur de Recherche, LaTIM, CHU Morvan, Brest
Examinateurs:	L. Blanc-Féraud	Directrice de Recherche, INRIA, Sophia-Antipolis
	E. Thiébaut	Astronome, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon
Directeur:	J.M. Becker	Enseignant chercheur, CPE Lyon
Co-directrice:	C. Burnier-Mennessier	Enseignante chercheuse, CPE Lyon

Remerciements

Je tenais tout d'abord à remercier MM. Jean-François Giovannelli et Dimitris Visvikis d'avoir aimablement accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit de thèse. Je suis également très honoré de compter Mme Laure Blanc-Féraud parmi les membres du jury de soutenance.

Je remercie M. Jean-Marie Becker et M^{me} Catherine Burnier-Mennessier d'avoir assuré respectivement la direction et la co-direction de cette thèse.

Je remercie enfin MM. Loïc Denis, Laurent Desbat, et tout spécialement Éric Thiébaut, pour leur encadrement.

Ces trois années de thèse ont été pour moi une tranche de vie extrêmement riche et importante, pour mon développement intellectuel tant professionnel que personnel.

Il serait illusoire de ma part de résumer formellement sur une simple page ou deux les raisons de ma reconnaissance envers toutes les personnes qui ont permis à ce travail d'aboutir. En revanche, d'une vision plus personnelle, je peux résumer cette reconnaissance en une seule phrase :

Merci à tous ceux qui ont eu cette confiance en moi
que je n'avais pas moi-même.

Je remercie très chaleureusement Catherine et Jean-Marie, pour leur extrême gentillesse, leur implication et leur disponibilité. Ils ont toujours su m'accompagner et me conseiller au cours de mes revirements dans mon parcours de thésitif, et je leur en suis très reconnaissant. J'ai eu grand plaisir à les côtoyer, que ce soit dans le cadre de ce travail ou lors des encadrements de TP à CPE. J'ai notamment été fier de pouvoir assister, en tant qu'ami et non plus collègue, au mariage de Catherine.

Merci à l'équipe du projet MiTiV avec qui ce travail de thèse a directement été réalisé (ce n'est assurément pas le travail d'une seule personne), Catherine, Éric, Loïc, Jean-Marie et Laurent.

Merci aux autres collaborateurs de MiTiV, Ferréol Soulez, Yves Tourneur, Didier Rabaud, Louis Thibon, pour la satisfaction que l'on éprouve à faire partie d'un projet de recherche commun. Un grand merci à Christophe Pichon pour l'accès aux machines de calcul du projet Horizon (`http://www.projet-horizon.fr/rubrique3.html`), et surtout pour m'avoir "couvert" pendant tous ces mois d'une utilisation intensive et peu orthodoxe !

Merci à Simon Rit, du Centre Léon Bérard, pour nous avoir fourni des données *scanner* "réelles", et pour sa disponibilité face à mes questions pour le traitement de ces données.

Merci aux autres chercheurs que j'ai pu côtoyer, dans diverses discussions et collaborations, qui permettent toujours d'élargir son champ de connaissances et son expérience. Je pense particulièrement à Maxime Moreaud et Viet-Dung Tran, de l'IFP Énergies Nouvelles, pour notre collaboration avec l'équipe MiTiV, autour de la nanotomographie électronique. Je souhaite particulièrement bonne chance à Viet-Dung dans la rédaction de son manuscrit !

J'adresse des remerciements tout particuliers à tous les membres de l'équipe AIRI, passés et présents, avec qui j'ai passé quatre années riches d'enseignement, mais aussi de bonne ambiance et d'humour (toujours très fin et ciselé) : Isabelle Tallon-Bosc, Clémentine Béchet, Françoise Foy, Marie Fradin, Maud Langlois, Élisabeth Brunner, Éric Thiébaut, Michel Tallon, Ferréol Soulez, Renaud Foy, Loïc Denis, Louis Thibon, Nicolas Meilard, Paul Berlioz-Arthaud. Ce fut un réel plaisir de vivre ces années professionnelles à leurs côtés, et je peux dire que c'est avec eux que j'ai réellement appris à penser comme un scientifique. J'espère continuer à faire partie encore longtemps de la "famille".

J'adresse mes sincères remerciements et toute ma reconnaissance à Éric, pour son encadrement quotidien, sa disponibilité et son enseignement des *problèmes inverses*, en ayant toujours eu soin de me laisser une grande liberté d'action, mais aussi et surtout pour son humour et sa bonne humeur.

Un autre merci spécial à Michel, avec qui j'ai travaillé pendant une année au sein de l'équipe, avant de débuter ma thèse, et particulièrement pour les discussions "michellisantes" mais toujours passionnantes.

Merci plus largement à l'ensemble des personnes travaillant au CRAL, pour leur gentillesse à tous et le bon accueil qui m'a été fait depuis que je suis arrivé ici.

Je passe à présent hors du cadre professionnel, à mon entourage personnel, car il est là aussi énormément de personnes qui méritent de figurer sur ces pages.

Je commence par mes amis, que je qualifierais sans hésiter de "seconde famille" : Aurélie, Aurélie, Céline et Nico (et Raphaël), Éstelle et Ben, Thom et Alex, Thuvan et Floppy, Nadège et Stéph. Ne vous fiez surtout pas à l'ordre, vous comptez tous autant pour moi, et je ne serais pas là sans vous aujourd'hui ! J'adresse une dédicace spéciale à la bande des "*biwells*", qui se reconnaîtront !

Merci également à mes amis de l'escrime artistique, Maxime, Aurélie, Alexis, Manu, avec qui j'ai aussi vécu une sacrée époque au fil de l'épée (et du bâton) !

Merci enfin à mes amis de CPE, avec qui j'ai passé des années d'études, certes pas toujours faciles, mais très agréables et faites d'excellents souvenirs en leur compagnie : Thomas, Vincent, Lionel, Frédéric, Paul, Laurie-Anne, et les autres.

Mais ma plus grande reconnaissance revient sans hésitation à mes parents, Évelyne et Gérard, qui ont toujours été là pour moi, et m'ont soutenu dans tous les moments difficiles. J'espère qu'ils sont aussi fiers de moi que je le suis d'eux. Je n'oublie pas non plus ma sœur et mon frère, Stéphanie et Sébastien, que j'aime et dont je suis tout aussi fier, ainsi que de toute ma famille.

Enfin je remercie du fond du cœur Audrey, mon amour, pour sa grande patience et son soutien le plus fort. Merci d'avoir tenu le coup et de m'avoir rassuré dans les instants les plus difficiles.

Je lui dédie ce manuscrit. Ce n'est certes pas le plus romantique, mais c'est, en ce qui me concerne, très symbolique.

Notre vie à deux a commencé il y a trois ans, en même temps que cette thèse. Cette dernière se termine, mais notre histoire continue ... à trois d'ici peu, pour mon plus grand bonheur.

Résumé

La tomographie est la discipline qui cherche à reconstruire une donnée physique dans son volume, à partir de l'information indirecte de projections intégrées de l'objet, à différents angles de vue. L'une de ses applications les plus répandues, et qui constitue le cadre de cette thèse, est l'imagerie *scanner* par rayons X pour le médical. Or, les mouvements inhérents à tout être vivant, typiquement le mouvement respiratoire et les battements cardiaques, posent de sérieux problèmes dans une reconstruction classique. Il est donc impératif d'en tenir compte, *i.e.* de reconstruire le sujet imagé comme une séquence spatio-temporelle traduisant son "évolution anatomique" au cours du temps : c'est la tomographie dynamique.

Élaborer une méthode de reconstruction spécifique à ce problème est un enjeu majeur en radiothérapie, où la localisation précise de la tumeur dans le temps est un prérequis afin d'irradier les cellules cancéreuses en protégeant au mieux les tissus sains environnants.

Des méthodes usuelles de reconstruction augmentent le nombre de projections acquises, permettant des reconstructions indépendantes de plusieurs phases de la séquence échantillonnée en temps. D'autres compensent directement le mouvement dans la reconstruction, en modélisant ce dernier comme un champ de déformation, estimé à partir d'un jeu de données d'acquisition antérieur.

Nous proposons dans ce travail de thèse une approche nouvelle ; se basant sur la théorie des problèmes inverses, nous affranchissons la reconstruction dynamique du besoin d'accroissement de la quantité de données, ainsi que de la recherche explicite du mouvement, elle aussi consommatrice d'un surplus d'information. Nous reconstruisons la séquence dynamique à partir du seul jeu de projections courant, avec pour seules hypothèses a priori la continuité et la périodicité du mouvement.

Le problème inverse est alors traité rigoureusement comme la minimisation d'un terme d'attache aux données et d'une régularisation. Nos contributions portent sur la mise au point d'une méthode de reconstruction adaptée à l'extraction optimale de l'information compte tenu de la parcimonie des données — un aspect typique du problème dynamique — en utilisant notamment la variation totale (TV) comme régularisation. Nous élaborons un nouveau modèle de projection tomographique précis et compétitif en temps de calcul, basé sur des fonctions B-splines séparables, permettant de repousser encore la limite de reconstruction imposée par la parcimonie. Ces développements sont ensuite insérés dans un schéma de reconstruction dynamique cohérent, appliquant notamment une régularisation TV spatio-temporelle efficace. Notre méthode exploite ainsi de façon optimale la seule information courante à disposition ; de plus sa mise en œuvre fait preuve d'une grande simplicité.

Nous faisons premièrement la démonstration de la force de notre approche sur des reconstructions 2-D+t à partir de données simulées numériquement. La faisabilité pratique de notre méthode est ensuite établie sur des reconstructions 2-D et 3-D+t à partir de données physiques "réelles", acquises sur un fantôme mécanique et sur un patient.

Abstract

Computerized tomography (CT) aims at the retrieval of 3-D information from a set of projections acquired at different angles around the object of interest (OOI). One of its most common applications, which is the framework of this Ph.D. thesis, is X-ray CT medical imaging. This reconstruction can be severely impaired by the patient's breath (respiratory) motion and cardiac beating. This is a major challenge in radiotherapy, where the precise localization of the tumor is a prerequisite for cancer cells irradiation with preservation of surrounding healthy tissues. The field of methods dealing with the reconstruction of a dynamic sequence of the OOI is called Dynamic CT.

Some state-of-the-art methods increase the number of projections, allowing an independent reconstruction of several phases of the time sampled sequence. Other methods use motion compensation in the reconstruction, by a beforehand estimation on a previous data set, getting the explicit motion through a deformation model.

Our work takes a different path ; it uses dynamic reconstruction, based on inverse problems theory, without any additional information, nor explicit knowledge of the motion. The dynamic sequence is reconstructed out of a single data set, only assuming the motion's continuity and periodicity.

This inverse problem is considered as a minimization of an error term combined with a regularization. One of the most original features of this Ph.D. thesis, typical of dynamic CT, is the elaboration of a reconstruction method from very sparse data, using Total Variation (TV) as a very efficient regularization term. We also implement a new rigorously defined and computationally efficient tomographic projector, based on B-splines separable functions, outperforming usual reconstruction quality in a data sparsity context. This reconstruction method is then inserted into a coherent dynamic reconstruction scheme, applying an efficient spatio-temporal TV regularization. Our method exploits current data information only, in an optimal way ; moreover, its implementation is rather straightforward.

We first demonstrate the strength of our approach on 2-D+t reconstructions from *numerically* simulated dynamic data. Then the practical feasibility of our method is established on 2-D and 3-D+t reconstructions of a mechanical phantom and real patient data.

Table des matières

Table des matières vii

Principales notations ix

Contexte scientifique 1

Introduction générale 3

1 La Tomographie : un problème inverse 5
- 1.1 La tomographie . . . 6
  - 1.1.1 Définition, historique et application en imagerie du vivant . . . 6
  - 1.1.2 Principe physique . . . 10
  - 1.1.3 Modèle mathématique . . . 14
- 1.2 La reconstruction . . . 16
  - 1.2.1 Données du problème . . . 17
  - 1.2.2 Modèle de bruit . . . 18
  - 1.2.3 Le projecteur tomographique . . . 20
  - 1.2.4 Petit état de l'art . . . 21
  - 1.2.5 Simulation de données 2-D . . . 27
  - 1.2.6 Reconstructions avec les algorithmes de l'état de l'art . . . 32
  - 1.2.7 Approche inverse régularisée . . . 34
  - 1.2.8 Mise à l'épreuve de notre approche à nombre de projections faible . . . 45
- 1.3 Conclusion et objectifs . . . 54

2 Modèle numérique de projection optimisé 55
- 2.1 Approche continue de la représentation de l'objet d'intérêt . . . 56
  - 2.1.1 Concept et formalisme . . . 56
  - 2.1.2 État de l'art . . . 69
  - 2.1.3 Des B-splines comme base de représentation . . . 72
- 2.2 La modélisation des projections . . . 80
  - 2.2.1 Caractérisation géométrique du système . . . 80
  - 2.2.2 Définition d'un projecteur . . . 88
  - 2.2.3 État de l'art . . . 93
- 2.3 Le projecteur de B-splines . . . 103
  - 2.3.1 Détermination de l'empreinte . . . 103
  - 2.3.2 Étude des erreurs de modélisation . . . 108
  - 2.3.3 Mise en œuvre pratique . . . 114
- 2.4 Mise en application en reconstruction 2-D statique à faible nombre de projections 118

2.5 Conclusion et perspectives 154

3 Tomographie dynamique **159**
3.1 La problématique dynamique en reconstruction tomographique 161
3.2 Contexte 167
3.3 État de l'art 168
3.4 Approche inverse globale sans compensation de mouvement 177
3.4.1 Modélisation du problème 177
3.4.2 Simulation de données dynamiques 2-D 184
3.4.3 Étude des erreurs de modélisation 191
3.4.4 Le schéma de reconstruction 194
3.5 Mise en application en reconstruction 2-D+t 203
3.5.1 Données simulées 203
3.5.2 Données réelles à partir d'un fantôme mécanique 232
3.6 Mise en application en reconstruction 3-D+t 237
3.6.1 Fantôme mécanique 238
3.6.2 Patient 239
3.7 Conclusion et perspectives 245

Conclusion générale et perspectives **249**

Bibliographie **259**

Bibliographie personnelle **271**

Principales notations

Acronymes

ART	Technique de reconstruction algébrique (*Algebraic Reconstruction Technique*).
CLB	Centre Léon Bérard.
CT	*Computerized Tomography*.
FBP	Rétroprojection filtrée (*Filtered BackProjection*).
FDK	Algorithme de rétroprojection filtrée *cone beam* de Fedlkamp, Davis & Kress.
SART	Technique de reconstruction algébrique simultanée (*Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique*).
TEP	Tomographie par Émission de Positons.
TEMP	Tomographie d'Émission MonoPhotonique.
TV	Régularisation par variation totale (Total Variation).
$\mathcal{TV}$	Expression analytique de la variation totale.

Notations mathématiques usuelles

$\mathbb{R}$	Espace des réels.
$\mathbb{Z}$	Espace des entiers naturels.
$\mathbb{X}$	Autre espace de définition.
$\mathbb{R}^n$	Espace de dimension n des réels.
$\mathbb{Z}^n$	Espace de dimension n des entiers naturels.
$\mathbf{M}$	Une lettre majuscule grasse désigne une matrice.
$\boldsymbol{x}$	Une lettre minuscule grasse désigne un vecteur.
$\|\cdot\|$	Norme L_2.
$\|\cdot\|_p$	Norme L_p.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Produit scalaire dans un espace de Hilbert.
∇f	Gradient d'une fonction f.
$\mathbb{E}[\cdot]$	Espérance mathématique.
$\mathbb{V}[\cdot]$	Variance.
$\mathrm{div}(\cdot)$	Divergence d'un champ vectoriel.
i	Racine carrée de -1.
e	Exponentielle.

Critères et métriques d'évaluation

EMAX	Erreur quadratique maximale.
EQM	Erreur quadratique moyenne.
EQMN	Erreur quadratique moyenne normalisée.

RES	Erreur résiduelle vis-à-vis des données.
ROI	Région d'intérêt.
CUT	Profil de coupe.

Problèmes inverses

$\underset{\boldsymbol{f}\in\mathbb{X}}{\arg\min}$	"argument $\boldsymbol{f} \in \mathbb{X}$ qui minimise ..."
$\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f})$	Critère à minimiser.
$\mathcal{J}_{\mathsf{data}}(\boldsymbol{f})$	Terme d'attache aux données.
$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f})$	Terme de régularisation.
μ	Hyperparamètre de réglage du poids de la régularisation.
ϵ	Hyperparamètre de relaxation pour la régularisation TV.
$\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}}$	Opérateur *gradient* sur le voxel $\boldsymbol{k}$.
$\mathbf{D}_p$	Opérateur linéaire aux différences finies suivant la dimension p.

Tomographie

Modélisation de l'objet d'intérêt

f	Signal continu du paramètre physique associé à l'objet d'intérêt (signal à reconstruire).
$\tilde{f}$	Approximation du signal f au sens de la théorie de l'échantillonnage généralisée.
$\epsilon_f(\Delta)$	Erreur d'approximation du signal f par le signal $\tilde{f}$, en fonction du pas d'échantillonnage Δ.
$\boldsymbol{x}$	Coordonnées d'un point dans l'espace de représentation de dimension n.
$\boldsymbol{\omega}$	Coordonnées dans l'espace de Fourier en dimension n.
$\boldsymbol{k}$	Indice d'un point (voxel) de la grille d'échantillonnage en dimension n.
$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$	Position du voxel $\boldsymbol{k}$ sur la grille d'échantillonnage.
Δ	Pas d'échantillonnage de la grille dans chaque direction.
$\boldsymbol{N}$	Dimensions de l'image discrétisée des voxels en dimension n.
$\boldsymbol{f}$	Vecteur (image) des échantillons (voxels) du signal $\tilde{f}$ discrétisé.
$f_{\boldsymbol{k}}$	Échantillon de l'image $\boldsymbol{f}$ au voxel $\boldsymbol{k}$.
$\boldsymbol{c}$	Vecteur (image) des coefficients B-splines du signal $\tilde{f}$ discrétisé.
$c_{\boldsymbol{k}}$	Coefficient B-spline de l'image $\boldsymbol{c}$ au voxel $\boldsymbol{k}$.
$\boldsymbol{\Phi}$	Opérateur de conversion de l'image $\boldsymbol{c}$ des coefficients B-splines en l'image $\boldsymbol{f}$ des voxels.
φ	Fonction atomique de la base de représentation du signal $\tilde{f}$ en dimension n.
$\mathring{\varphi}$	Fonction duale de φ.
$\hat{\varphi}$	Transformée de Fourier de la fonction atomique φ.
$\varphi_{\boldsymbol{k}}$	Fonction atomique positionnée au point $\boldsymbol{k}$ de la grille d'échantillonnage en dimension n.
$\mathring{\varphi}_{\boldsymbol{k}}$	Fonction duale de $\varphi_{\boldsymbol{k}}$.
$\hat{\varphi}$	Transformée de Fourier de la fonction atomique $\varphi_{\boldsymbol{k}}$.
E_φ	Noyau d'erreur de la fonction atomique φ.
β^d	Fonction B-spline de degré d en dimension 1.
$L = d + 1$	Ordre d'approximation de la B-spline, fonction de son degré d.
$\boldsymbol{\beta}^d$	Fonction atomique B-spline séparable de degré d en dimension n.
$\mathring{\boldsymbol{\beta}}^d$	Fonction duale de $\boldsymbol{\beta}^d$.

$\hat{\boldsymbol{\beta}}^d$	Transformée de Fourier de la B-spline atomique $\boldsymbol{\beta}^d$.
$\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$	Fonction atomique B-spline de degré d positionnée au point $\boldsymbol{k}$ de la grille d'échantillonnage en dimension n.
$\mathring{\boldsymbol{\beta}}^d_{\boldsymbol{k}}$	Fonction duale de $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$.
p_Δ	Fonction *porte* de largeur Δ en dimension 1.
Π_Δ	Indicatrice de voxel de largeur Δ en dimension n.
$b_{m,a,\alpha}$	Profil radial d'un blob de paramètres m, a, et α (fonction de Kaiser-Bessel généralisée).
$\hat{b}_{m,a,\alpha}$	Transformée de Fourier du profil radial $b_{m,a,\alpha}$.

Géométrie du système tomographique

$\mathcal{R}_\mathcal{O} : \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$	Repère lié à l'objet d'intérêt.
$\mathcal{R}_\mathcal{D} : \{S, \vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$	Repère lié au détecteur.
$\mathcal{P}_\mathcal{D} : \{D, \vec{u}, \vec{v}\}$	Plan détecteur.
$\mathcal{R}_\mathcal{S} : \{S, \vec{w}_s, \vec{v}_s, \vec{u}_s\}$	Repère lié à la source.
θ	Orientation du plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$.
$\{O, \vec{z}\}$	Axe de rotation de la source et du détecteur.
$\vec{r}$	Direction du rayon X émis.
α, γ	Angles de déviation des coordonnées sphériques de $\vec{r}$ par rapport à l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$.
ℓ_{sc}	Distance *source-isocentre*.
ℓ_{sd}	Distance focale *source-détecteur*.
$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes dans le repère objet $\mathcal{R}_\mathcal{O}$.
$M(x, y, z)$	Point dans le repère objet $\mathcal{R}_\mathcal{O}$.
$\boldsymbol{u} = (u, v)$	Coordonnées cartésiennes dans le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$.
$M'(u, v)$	Projeté du point M sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$.
$\mathrm{T}_{\mathcal{R}_\mathcal{O} \to \mathcal{S}}$	Transformation de repère de $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ vers $\mathcal{R}_\mathcal{S}$.
$\mathrm{T}_{\mathcal{R}_\mathcal{S} \to \mathcal{D}}$	Transformation de repère de $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ vers $\mathcal{R}_\mathcal{D}$.
$\mathrm{T}_{\mathcal{R}'_\mathcal{O}}$	Transformation de basculement du repère $\mathcal{R}_\mathcal{O}$.
$\mathrm{T}_{\mathcal{R}'_\mathcal{D}}$	Transformation de basculement du repère $\mathcal{R}_\mathcal{D}$.

Projection tomographique

I_0	Intensité du rayonnement X émise par la source.
I	Intensité résultante du rayonnement X après traversée de l'objet.
$\rho(\boldsymbol{x})$	Carte des coefficients d'atténuation dans l'espace objet.
λ_0	Flux de photons intégré par pixel détecteur par projection sans atténuation.
$\lambda^\theta(\boldsymbol{q})$	Flux de photons intégré sur le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ à la projection θ.
R^θ	Signal continu de la transformée aux rayons X au point $\boldsymbol{u}$ du plan détecteur pour la projection θ.
$\tilde{R}^\theta$	Approximation continue de la projection R^θ.
$\boldsymbol{u}$	Coordonnées d'un point sur le plan détecteur.
$\boldsymbol{q}$	Indice d'un point (pixel détecteur) de la grille d'échantillonnage du détecteur.
$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{q}}$	Position du pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ sur la grille du détecteur.
Δ_d	Pas d'échantillonnage des pixels détecteur dans chaque direction.
$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}$	Position du voxel $\boldsymbol{k}$ projetée sur le détecteur.
T	Nombre de projections.
$\boldsymbol{M}$	Dimensions du détecteur en pixels.
Υ	Vecteur des données issu de l'ensemble des projections.
$\mathbf{y}^\theta$	Vecteur des données de la projection θ (transformée aux rayons X intégrée sur les pixels détecteur).

$\tilde{\mathbf{y}}^{\theta}$	Vecteur des pseudo-données modélisées de la projection θ.
$\mathrm{y}^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$	Donnée du pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ de la projection θ.
$\tilde{\mathrm{y}}^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$	Pseudo-donnée du pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ de la projection θ.
$\mathbf{R}^{\theta}$	Projecteur tomographique pour la génération des pseudo-données de la projection θ.
$\mathbf{R}^{\theta}_{\boldsymbol{qk}}$	Contribution du voxel $\boldsymbol{k}$ projeté sur le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ pour la projection θ.
$F_{\boldsymbol{\beta}}$	Empreinte générique de $\boldsymbol{\beta}^d$.
$F_{m,a,\alpha}$	Empreinte générique d'un blob Kaiser-Bessel de paramètres m, a, et α.
$F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}$	Empreinte de la fonction de base $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ du voxel $\boldsymbol{k}$ sur le détecteur.
$\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$	Facteur de mise à l'échelle de l'empreinte $F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ sur le détecteur, suivant l'axe $\vec{u}$, en fonction du mode de propagation des rayons X.
$\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$	Facteur de mise à l'échelle de l'empreinte $F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ sur le détecteur, suivant l'axe $\vec{v}$, en fonction du mode de propagation des rayons X.

Tomographie dynamique

f	Signal spatio-temporel continu périodique associé à l'objet d'intérêt sur toute la durée d'acquisition.
g	Signal spatio-temporel continu d'une période de f (signal à reconstruire).
Γ_t	Champ de déformation continu (vecteurs de déplacement) associé au mouvement sur toute la durée d'acquisition.
Ξ_{ι}	Champ de déformation continu associé à un cycle (période) du mouvement.
$\vec{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}, t)$	Vecteur vitesse du mouvement en tout point de l'espace et du temps.
t	Coordonnée sur l'axe temporel d'acquisition des projections.
t_a	Durée de l'acquisition des projections.
t_{θ}	Date d'acquisition instantanée d'une projection θ.
ι	Coordonnée sur l'axe temporel d'un cycle dynamique.
ι_a	Durée d'un cycle dynamique.
ι_{θ}	Date d'acquisition instantanée d'une projection θ dans un cycle.
ℓ	Indice d'un voxel sur la grille d'échantillonnage spatio-temporelle de g.
ι_{ℓ}	Position du voxel $(\boldsymbol{k}, \ell)$ sur l'axe temporel de la grille d'échantillonnage spatio-temporelle.
M	Dimension de l'image suivant l'axe temporel.
$\boldsymbol{c}$	Vecteur (image) des coefficients B-splines du signal spatio-temporel g discrétisé.
$c_{\boldsymbol{k},\ell}$	Coefficient B-spline de l'image $\boldsymbol{c}$ au voxel spatio-temporel $(\boldsymbol{k}, \ell)$.
$\mathbf{S}^{\iota}$	Opérateur d'interpolation temporelle des tranches du cycle dynamique reconstruit.
ϑ	Fonction atomique sur l'axe temporel de la base de représentation du signal spatio-temporel g.
ϑ_{ℓ}	Fonction atomique positionnée au point $(\boldsymbol{k}, \ell)$ de la grille d'échantillonnage spatio-temporelle.
β^e	B-spline atomique de degré e sur l'axe temporel de la base de représentation du signal spatio-temporel g.
β^e_{ℓ}	B-spline atomique de degré e positionnée au point $(\boldsymbol{k}, \ell)$ de la grille d'échantillonnage spatio-temporelle.

$\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}}$	Opérateur aux différences finies suivant les axes spatiaux.
$\mathbf{D}^{\iota}$	Opérateur aux différences finies suivant l'axe temporel.
μ_{space}	Hyperparamètre de réglage du poids de la régularisation spatiale.
μ_{time}	Hyperparamètre de réglage du poids de la régularisation temporelle.

Contexte scientifique

Ce travail de thèse fait partie d'un projet de recherche financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) : le projet MiTiV, *Méthodes Inverses pour le Traitement en Imagerie du Vivant*[1] (Novembre 2009 - Novembre 2012).

Ce projet est le fruit d'une collaboration entre cinq laboratoires de recherche, un hôpital et un industriel :

- le Centre de Recherche Astrophysique de Lyon (CRAL) - Observatoire de Lyon (Unité Mixte de Recherche CNRS / Université Claude Bernard Lyon 1 / ENS-Lyon ; UMR5574) (coordinateur du projet) ;
- le laboratoire Hubert Curien (LaHC) (Unité Mixte de Recherche CNRS / Université Jean Monnet de Saint-Étienne ; UMR5516) ;
- le Centre Commun de Quantimétrie (CCQ) (Université Claude Bernard Lyon 1) ;
- l'Institut Astrophysique de Paris (IAP) (CNRS) ;
- le laboratoire Techniques de l'Ingénierie Médicale et de la Complexité - Informatique, Mathématiques et Applications, Grenoble (TIMC-IMAG) (Unité Mixte de Recherche CNRS / Université Joseph Fourier de Grenoble ; UMR 5525) ;
- l'hôpital de la Croix-Rousse à Lyon ;
- l'entreprise Shaktiware (nouvellement euroShaktiware).

Initié et porté par Éric Thiébaut, astronome adjoint au CRAL, au sein de l'équipe AIRI (Astrophysique et Imagerie aux Résolutions de l'Interférométrie), l'objectif des travaux relatifs à ce projet est l'élaboration de méthodes et d'algorithmes de traitement de données biomédicales et astronomiques, à partir du socle commun "*Approche inverse*". Les thématiques principales de MiTiV sont :

- la déconvolution d'images pour la microscopie 3-D et la coronarographie ;
- le traitement de données multi-variées (spatio-spectrales, spatio-temporelles) ;
- la reconstruction d'images en tomographie dynamique.

Cette thèse s'est ainsi inscrite dans ce contexte des problèmes inverses, avec pour objectif l'exploration de la thématique de reconstruction tomographique dynamique, sous la direction de Jean-Marie Becker et Catherine Burnier-Mennessier, enseignants chercheurs à l'École Supérieure de Chimie-Physique-Électronique de Lyon (CPE-Lyon), et rattachés au LaHC. Elle s'est physiquement déroulée au CRAL, au sein de l'équipe AIRI, sous l'encadrement de Éric Thiébaut, ainsi que Loïc Denis, alors en post-doctorat au CRAL sur le projet MiTiV, et à présent maître de conférence à TELECOM Saint-Étienne, effectuant lui aussi sa recherche au LaHC. Elle a aussi été encadrée en partie par Laurent Desbat, professeur à l'université Joseph Fourier de Grenoble, spécialiste en tomographie, rattaché au TIMC-IMAG.

Ainsi ce travail de thèse a pu profiter de l'émulation engendrée par la pluridisciplinarité des domaines explorés dans ce projet. Il a bénéficié grandement du recul et du retour d'expérience des différentes applications sur la démarche scientifique du traitement des données

1. n° ANR-09-EMER-008, http://mitiv.univ-lyon1.fr/

par l'approche inverse, notamment le traitement de données multi-variées, que ce soit spatio-temporelles (tomographie) ou spatio-spectrales (astronomie).

Mais ce travail a aussi et surtout été le fruit des connaissances et savoir-faire scientifiques de l'équipe du projet MiTiV : Catherine Burnier-Mennessier, Éric Thiébaut, Loïc Denis, Laurent Desbat, Jean-Marie Becker, Ferréol Soulez (actuellement en post-doctorat au CRAL au sein de l'équipe AIRI), Christophe Pichon (astronome à l'IAP), Yves Tourneur (chargé de recherche au CCQ), Didier Rabaud (ingénieur à Shaktiware).

À cela se sont ajoutées des discussions, contributions et collaborations extérieures, qui ont aussi apporté leur pierre à l'édifice : celle de Simon Rit (chargé de recherche au CREATIS, Centre de Recherche en Acquisition et Traitement de l'Image pour la Santé (Unité Mixte de Recherche CNRS / INSERM / Université Claude Bernard Lyon 1 / INSA-Lyon ; UMR 5220 – INSERM U1044)), de Maxime Moreaud (Ingénieur chef de projet à l'IFP Énergies Nouvelles), de Viet-Dung Tran (Doctorant à l'IFP Énergies Nouvelles), de Michel Tallon (chargé de recherche au CRAL au sein de l'équipe AIRI), notamment.

Les développements algorithmiques de cette thèse ont été codés en Yorick [2], un langage libre développé par David Munro pour la programmation scientifique, ainsi qu'avec son extension Yeti [3] développée par Éric Thiébaut.

2. http://yorick.sourceforge.net/
3. http://www-obs.univ-lyon1.fr/labo/perso/eric.thiebaut/yeti.html

Introduction générale

Ce manuscrit regroupe l'ensemble des études et développements dédiés à la résolution du problème de la reconstruction d'images en tomographie dynamique, à partir d'une méthodologie basée sur les savoir-faire en problèmes inverses.

La tomographie est une technique d'imagerie 3-D, principalement développée et appliquée au domaine médical, consistant en l'estimation d'une information physique dans son volume à partir de ses projections sous différents angles de vue. Cette estimation est communément appelée reconstruction. En imagerie médicale, elle est appliquée depuis plus d'une cinquantaine d'années, notamment en utilisant le rayonnement X pour la génération des projections : c'est l'imagerie *scanner*.

Les techniques de reconstruction ont évolué avec les avancées en recherche algorithmique, notamment grâce à la discipline des problèmes inverses. Ces derniers regroupent l'ensemble des méthodes permettant de retrouver une information d'intérêt à partir d'observations ou mesures indirectes d'un paramètre auquel il est lié par un certain processus physique modélisable. La tomographie en est donc un exemple typique.

La faisabilité de ce problème inverse est souvent soumise à la contrainte forte d'un très grand nombre de projections. En imagerie par rayons X, cela se traduit par une exposition importante du sujet au rayonnement ionisant. Les progrès en reconstruction visent donc de plus en plus à réduire cette dose, en diminuant le nombre de ces acquisitions, tout en conservant la qualité des images restaurées.

Ce besoin est aussi imposé par les nouvelles modalités d'imagerie qui voient le jour au fur et à mesure des progrès technologiques appliqués au soin des patients. C'est ainsi par exemple que le traitement du cancer par la radiothérapie a fait émerger la tomographie dynamique. Cette technique curative est contrainte à une localisation précise de la tumeur afin d'optimiser le dépôt de la dose curative, en préservant autant que possible les tissus sains environnants. Or les mouvements inhérents du patient, comme sa respiration et ses battements cardiaques, sont autant de générateurs d'incertitudes de positionnement si la tumeur en question y est également soumise. Tant et si bien que la reconstruction à partir des projections d'un sujet en mouvement ne peut s'affranchir de la prise en compte de celui-ci, à moins de subir l'effet de ces incertitudes. En d'autres termes, il devient nécessaire de reconstruire le sujet comme une séquence dynamique d'images. Considérer le problème de la sorte revient à répartir les données d'acquisition entre chaque image de la séquence à laquelle elles sont corrélées dans le temps. D'un point de vue général, la tomographie dynamique constitue donc un problème typique de reconstruction à faible nombre de projections, qui est généralement abordé en cherchant à connaître explicitement le mouvement, afin d'en élaborer une modélisation directe.

Compte tenu des enjeux liés, en imagerie par rayons X, à la réduction de la dose délivrée au patient, mais aussi, dans un cadre plus général, à une économie dans la quantité des mesures utiles à la résolution d'un problème inverse, le défi d'une telle problématique va être la capacité d'un algorithme de reconstruction à extraire l'information compte tenu de cette parcimonie

des données, sans nécessiter d'apport d'information supplémentaire. C'est là l'objectif de ce travail de thèse, appliqué au cas concret de la reconstruction en tomographie dynamique.

Nous allons organiser notre propos en suivant la démarche que nous avons adoptée pour traiter ce problème. Celle-ci s'articulera autour de trois chapitres.

Le premier chapitre s'attachera à présenter le problème de la reconstruction tomographique dans sa généralité, en rappelant ses bases physiques, mathématiques et algorithmiques, ce qui est indispensable pour envisager de faire une quelconque avancée dans ce domaine. Nous appliquerons alors le formalisme et la démarche scientifique propre à l'approche inverse pour proposer une méthode régularisée de reconstruction statique à faible nombre de projections. Cela constituera le premier jalon dans l'élaboration d'une méthode appliquée au cas dynamique.

Le second chapitre portera sur l'approfondissement d'un point particulier de l'approche inverse : la modélisation des données. Cette étude et les développements associés auront pour vocation de répondre à un besoin mis en lumière dans le premier chapitre. Il s'agira du gain potentiel que peut apporter un modèle numérique de projection tomographique de précision sur la résolution de la reconstruction à données parcimonieuses. Nous proposerons alors un modèle de ce type, développé par nos soins, et basé sur l'utilisation de fonctions B-splines dans le contexte de la représentation optimale de signaux discrétisés, appliqué au principe la projection tomographique. Ce nouveau modèle sera évalué par des études théoriques étayées par des démonstrations expérimentales, et éprouvé en situation de reconstruction, en étant mis en regard du savoir-faire existant en tomographie.

Le troisième et dernier chapitre poursuivra la méthodologie mise en place jusque-là pour traiter le problème spécifique de la reconstruction en tomographie dynamique, avec pour objectif premier d'estimer la séquence dynamique de l'objet, sans recourir à la connaissance a priori explicite de son mouvement. Les nouvelles contraintes et hypothèses propres à cette problématique seront alors posées et étudiées. Il s'agira ensuite d'adapter la méthode de reconstruction statique développée dans les deux premiers chapitres, en intégrant la notion de variabilité temporelle de l'objet à reconstruire dans la modélisation de la projection tomographique, ainsi que dans la façon de prendre en compte l'information a priori de continuité spatio-temporelle de l'objet dans le terme de régularisation. Nous ferons alors la démonstration que notre approche permet une reconstruction efficace et optimale d'un objet dynamique, à partir d'un seul jeu de projections, acquises dans des conditions proches du cas statique, et avec pour simple information a priori la continuité et la périodicité du mouvement. Ces démonstrations seront effectuées aussi bien en simulation qu'à partir de données physiques "réelles".

Chapitre 1

La tomographie : un problème inverse

Sommaire

1.1 La tomographie 6
1.1.1 Définition, historique et application en imagerie du vivant 6
1.1.2 Principe physique 10
1.1.3 Modèle mathématique 14
1.2 La reconstruction 16
1.2.1 Données du problème 17
1.2.2 Modèle de bruit 18
1.2.3 Le projecteur tomographique 20
1.2.4 Petit état de l'art 21
1.2.5 Simulation de données 2-D 27
1.2.6 Reconstructions avec les algorithmes de l'état de l'art 32
1.2.7 Approche inverse régularisée 34
1.2.8 Mise à l'épreuve de notre approche à nombre de projections faible 45
1.3 Conclusion et objectifs 54

Nous allons premièrement établir les bases de ce travail de thèse, qui va traiter de l'approche inverse pour la tomographie dynamique, *i.e.* la reconstruction d'objets dont les projections sont acquises alors qu'ils sont induits d'un mouvement, par exemple les battements cardiaques et le mouvement respiratoire chez un patient.

Avant de s'engager dans ce problème particulier, il est nécessaire de présenter ce qu'est la reconstruction tomographique. Il s'agit d'un problème inverse, consistant en la restauration d'une information physique, volumique en général, à partir de ses projections, type radiographies, acquises autour de l'objet en question. Sa principale application, qui sert aussi à la définir concrètement, est l'imagerie *scanner* par rayons X. C'est ce contexte physique que nous allons explorer et traiter dans ce chapitre. Autrement dit, nous abordons la reconstruction tomographique dans son application à l'imagerie médicale.

Nous passerons ensuite à l'aspect purement algorithmique du problème, en présentant premièrement les méthodes de reconstruction les plus générales. Celles-ci se divisent en deux catégories :

- les méthodes analytiques, basées sur la formule de *Rétroprojection filtrée*, qui est l'inversion directe, mathématique, des données ;
- les méthodes itératives, basées sur l'approche inverse, qui procèdent à la reconstruction par estimations successives de l'objet reconstruit, grâce la minimisation d'un critère d'attache aux données.

Nous pointerons alors les faiblesses de ces méthodes en regard des problématiques qui se poseront à nous dans cette thèse, et qui concernent le nombre de projections, encore très important de nos jours dans les applications pratiques. Les algorithmes sus-mentionnés ne sont en effet conditionnés que par cette abondance d'information.

Or, la question de reconstruire un objet compte tenu de la parcimonie des données se pose depuis quelques années, notamment pour permettre une réduction de la dose de rayons X délivrée au patient. Nous verrons que cette question est aussi l'un des points critiques du problème de la reconstruction dynamique. Ainsi la nécessité d'élaborer de nouvelles méthodes de reconstruction dans ce contexte du faible nombre de projections est un enjeu algorithmique majeur, et absolument nécessaire en ce qui nous concerne.

À ce titre, nous allons étudier le potentiel de l'approche inverse, en élaborant une méthode de reconstruction robuste permettant, avec l'appui d'une régularisation efficace, d'exploiter au mieux l'information parcimonieuse des projections, et ainsi obtenir des reconstructions d'excellente qualité. Ainsi, nous démontrerons la faisabilité du problème de la reconstruction à faible nombre de projections, que nous mettrons en application dans des reconstructions 2-D d'objets statiques simulés. Nous poserons ainsi les premiers jalons de notre démarche qui servira à atteindre notre objectif : l'élaboration d'une méthode de reconstruction d'images en tomographie dynamique basée sur une approche inverse sans compensation de mouvement.

1.1 La tomographie

1.1.1 Définition, historique et application en imagerie du vivant

La tomographie est une technique d'imagerie visant la reconstruction d'une "image" à 2 ou 3 dimensions (2-D ou 3-D) d'un objet d'intérêt, traduisant une certaine information physique, à partir d'un ensemble fini de projections de cet objet. Ces dernières offrent, à différents angles de vue d'un détecteur autour de l'objet en question, une information du volume intégrée dans ces directions (*cf.* Fig. 1.1). La reconstruction d'un tel objet constitue un problème inverse typique, qui doit être traité numériquement par la mise en œuvre d'algorithmes permettant de remonter des mesures à l'information sur les paramètres d'intérêt.

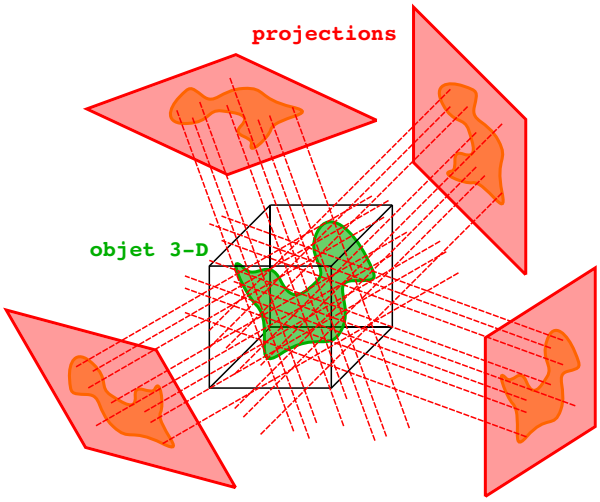


FIGURE 1.1: Schéma de principe de la tomographie.

Nous parlons de “concept général” car il existe différentes exploitations, ou modalités, basées sur ce principe, dépendant notamment du type de données imagées et de l'information reconstruite qui en découle, qui mettent en œuvre des lois physiques spécifiques. On peut considérer que la tomographie est née en géophysique au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle[1], en se basant sur la propagation des ondes sismiques dans les couches internes du globe terrestre. On retrouve aussi cette technique en océanographie avec la mesure des temps de parcours d'ondes acoustiques pour remonter à l'information des vitesses de propagation dans les bassins océaniques dans leur volume [Munk and Wunsch, 1979]. La tomographie est également présente en astrophysique, avec par exemple l'imagerie Zeeman-Doppler, qui permet de reconstruire le champ magnétique de la surface stellaire à partir des mesures des raies spectrales polarisées au cours de la rotation de l'étoile obervée.

En imagerie du vivant, la première modalité à être apparue est la tomographie par rayons X, aussi appelée *tomodensitométrie (TDM)*, qui utilise le principe d'absorption de ces rayonnements par un objet exposé, *i.e.* des tissus vivants — loi de Beer-Lambert (*cf.* section 1.1.2). Les rayons X ont été découverts par le physicien allemand Wilhelm Conrad Röntgen en 1895 ; ceci lui a valu le prix Nobel de physique en 1901. La mise en correspondance de la loi d'absorption de Beer-Lambert avec une transformée mathématique bijective — la transformée de Radon (*cf.* section 1.1.3), élaborée en 1917 par le mathématicien Johann Radon, liant une image bidimensionnelle à ses intégrales le long de droites à différentes orientations, ouvrirent la voie à la tomographie dans son contexte applicatif à partir de la radiographie par rayons X. Bien que les recherches dans ce domaine aient débuté dès le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, ce n'est que dans les années 1970 que les technologies, notamment de traitement numérique de l'information par ordinateur, permirent aux premiers tomographes, aussi appelés *scanners*, de voir le jour, avec des méthodes de reconstruction suffisamment robustes et rapides. Cette invention est l'œuvre du physicien sud-africain Allan MacLeod Cormack, qui élabora les fondements théoriques de la tomodensitométrie au début des années 1960, et de l'ingénieur britannique Godfrey Newbold Hounsfield, qui développa le premier tomographe à rayons X en 1972, ce qui leur valut conjointement le Prix Nobel de physiologie ou médecine en 1979. De nombreuses évolutions ont vu le jour au cours des quarante dernières années, tant sur les technologies — générations de *scanners*, *e.g.* leur géométrie d'acquisition, que sur les méthodes de reconstruction toujours plus performantes.

1. Découverte de l'interface croûte/manteau en 1909 par Andrija Mohorovičić.

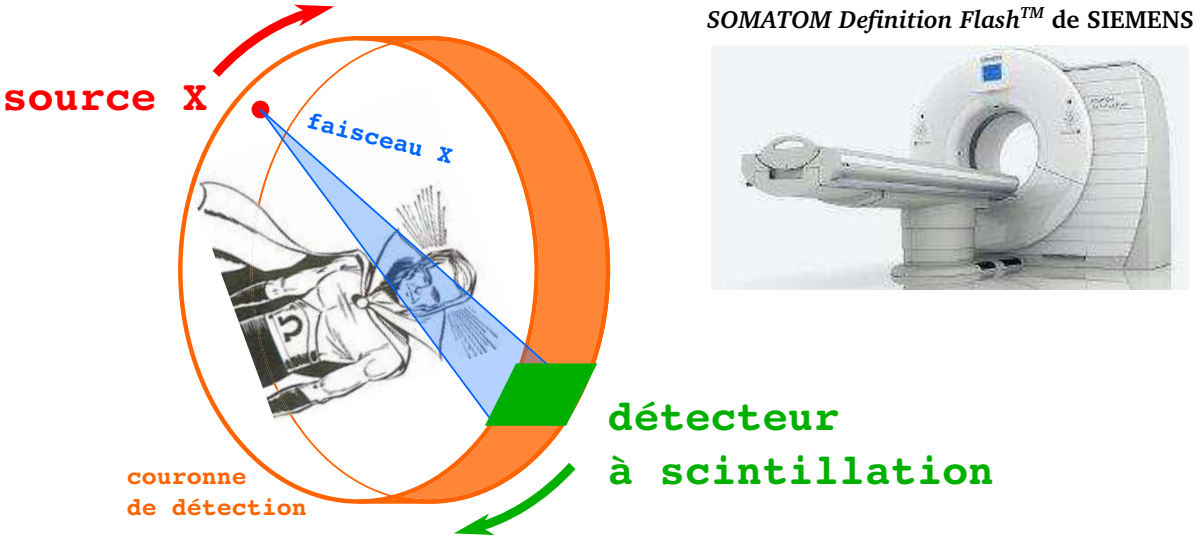
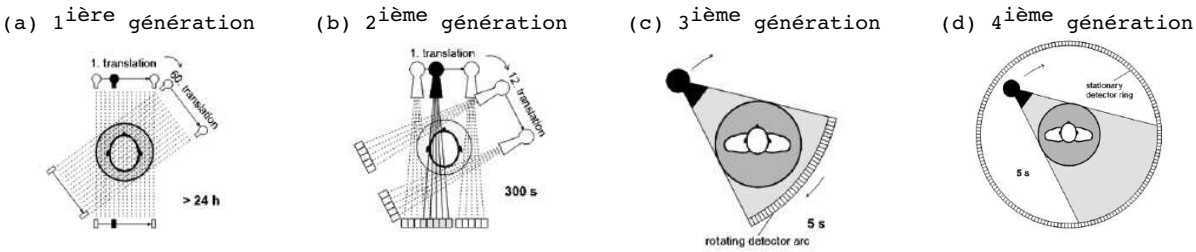


FIGURE 1.2: Schéma de principe d'un tomographe à rayons X pour la tomodensitométrie. En photo, un exemple de *scanner* actuel : le *SOMATOM Definition Flash*^{TM} de la société *Siemens*.



source : Kalender W.A., 2006, *X-ray computed tomography*, Physics in Medicine and Biology.

FIGURE 1.3: Quatre générations de tomographes 2-D. Les temps indiqués correspondent à la durée d'acquisition pour une seule coupe 2-D. Source : Kalender W.A., 2006, *X-ray computed tomography*, Physics in Medicine and Biology [Kalender, 2006].

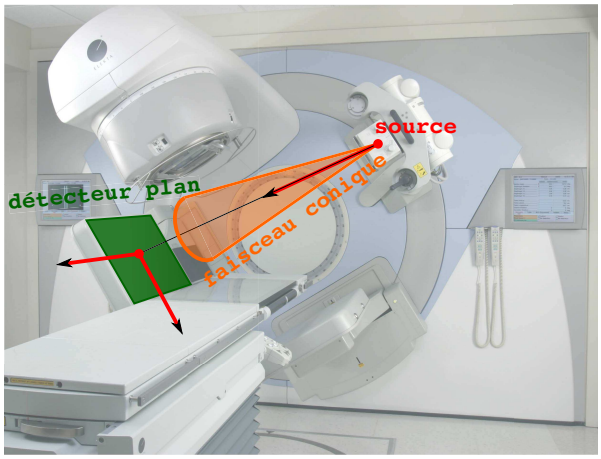


FIGURE 1.4: Schéma d'un tomographe à géométrie d'acquisition 3-D, avec propagation conique des rayons X, basé sur une photographie du système *Synergy Cone-Beam CT*^{TM} de la société Elekta, appareil servant aussi pour le traitement en radiothérapie (*cf.* chapitre 3).

Un tomographe consiste donc en une source de rayons X — tubes à rayons X — émettant ses faisceaux en étant animée d'un mouvement de rotation autour de l'objet d'intérêt — le patient. Le flux de photons transmis et atténué à travers l'objet est capté et enregistré par des détecteurs à scintillation, couplés à des photomultiplicateurs, placés en regard de la source (*cf.* Fig. 1.2), eux-mêmes en rotation autour de l'objet. Suivant le type de *scanner* et l'organisation des détecteurs, la source de rayons X peut émettre un faisceau parallèle, en éventail plan par plan — *fan beam*, ou conique — *cone beam*. Ces divers modes de propagation sont apparus avec les différentes générations de tomographes X. On peut distinguer dans un premier temps les tomographes 2-D, acquérant les projections pour la reconstruction de coupes 2-D séparées de l'objet imagé. Ce type de *scanners* a connu plusieurs évolutions notables (*cf.* Fig. 1.3, tirée de [Kalender, 2006]) :

- La première génération — tomographe prototype de Hounsfield (1970) — consistait à acquérir un à un les points des projections pour une coupe 2-D donnée, en propagation parallèle, en translatant un unique détecteur sur une ligne pour chaque orientation, elles-même obtenues par rotation de l'ensemble (*cf.* Fig. 1.3(a)).
- La seconde génération — tomographe commercial de Hounsfield (1972) — utilisait cette fois une ligne de plusieurs détecteurs, toujours animés d'un mouvement de translation/rotation. Le faisceau de rayons X vu par cette ligne de détecteurs était alors un faisceau en éventail (*cf.* Fig. 1.3(b)).
- La troisième génération, apparue vers 1976, fut cette fois équipée d'une barrette complète de détecteurs, permettant de s'affranchir de la translation du détecteur pour une orientation donnée (*cf.* Fig. 1.3(c)). Le mode de propagation des rayons X est alors de type *fan beam* étendu. Il s'agit encore aujourd'hui de l'une des géométries d'acquisition les plus répandues, avec un temps d'acquisition des projections pour la reconstruction d'une coupe avoisinant la demi-seconde.
- Pour la quatrième génération, dès 1978, une couronne entière de détecteurs équipait le tomographe, octroyant une plus grande vitesse de rotation de la source (*cf.* Fig. 1.3(d)).

D'autres types de tomographes sont apparus dans les années 2000, que l'on qualifie de tomographes 3-D, dont nous illustrons un exemple sur la figure 1.4. Ceux-ci exploitent pleinement la propagation conique d'un faisceau de rayons X en captant son rayonnement sur un large détecteur plan, en utilisant une matrice 2-D de détecteurs. La reconstruction à partir de ce type de projections devient alors totalement 3-D, sans passer par des coupes 2-D séparées. Nous nous baserons sur une géométrie de ce type dans notre chapitre sur la tomographie dynamique (*cf.* chapitre 3), et particulièrement sur un type de tomographe appelé *Cone-Beam CT* (*CT pour Computed Tomography*).

Il existe d'autres modalités pour la tomographie médicale, où la source d'émission multiple est implantée à l'intérieur même du patient. Il s'agit de la *tomographie par émission de positons (TEP)* et la *tomographe d'émission monophotonique (TEMP)*. La source d'émission consiste en un radioisotope émetteur de positons (traceur) incorporé à une molécule de fixation à un phénomène physiologique particulier, que l'on injecte au patient. Ce sont ces positons, émis en nombre plus ou moins important suivant la concentration de la molécule à différents endroits du corps du patient, qui vont être indirectement détectés par le système imageur, grâce au rayonnement γ émis lors de leur annihilation avec des électrons. En TEP, les détecteurs enregistrent en coïncidence l'arrivée des deux photons γ émis dans des directions opposées lors de l'annihilation du positon (*cf.* Fig. 1.5). En TEMP, ces photons sont détectés de façon unique, en utilisant des collimateurs pour identifier la direction d'émission. Les paramètres reconstruits par ces modalités sont donc la carte de concentration d'activité du traceur radioactif dans le corps, qui va associer des zones spécifiques à un paramètre du fonctionnement biologique comme le métabolisme cellulaire (détection de tumeurs), le débit sanguin ou la densité de

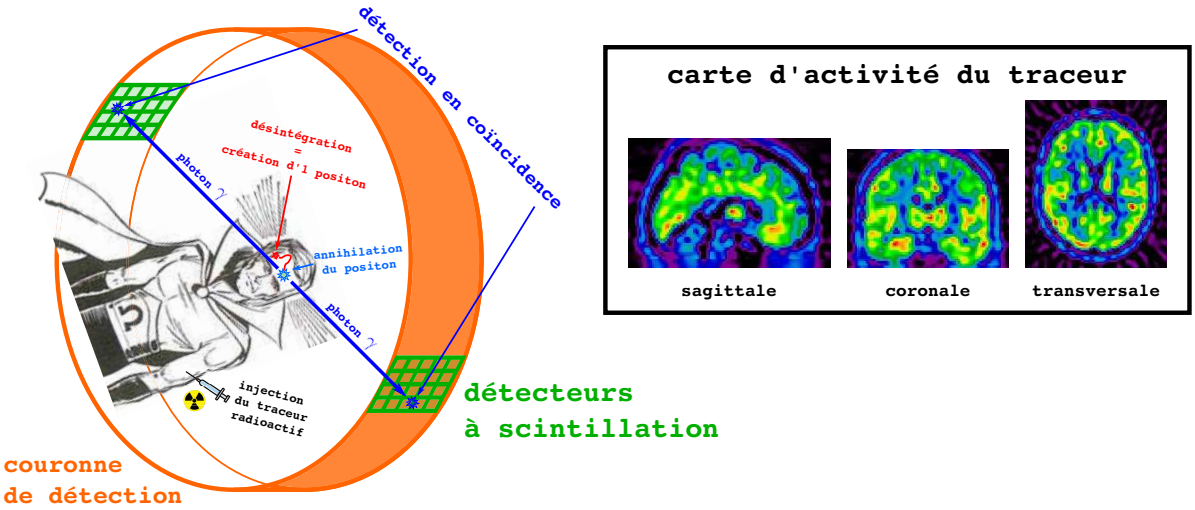


FIGURE 1.5: Schéma de principe de la tomographie par émission de positons (TEP). Un traceur radioactif, couplé à une molécule de fixation, est injecté au patient. Le radioisotope, en se désintégrant, émet un positon qui s'annihile avec un électron du milieu. Cette annihilation engendre l'émission de deux photons γ dans des directions opposées qui sont détectés en coïncidence sur une couronne de détecteurs placée autour du patient. La reconstruction permet d'obtenir la carte de concentration d'activité du radiotraceur. Pour la tomographie d'émission monophotonique (TEMP), le principe est le même mis à part le fait que les photons sont détectés de façon unique, en utilisant des collimateurs pour identifier la direction d'émission.

récepteurs d'un système de transmission neuronale.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons à la modalité de tomodensitométrie pour traiter le problème inverse de la reconstruction tomographique. Le type de mesures — les projections — ainsi que la modélisation physique des données seront donc associés à cette modalité particulière. En revanche, ces éléments mis à part, la façon de poser le problème inverse et de le traiter pourra être considérée comme commune à toute technique de tomographie, notamment la TEP/TEMP[2].

1.1.2 Principe physique

Comme nous l'avons introduit dans la section 1.1.1, la tomodensitométrie est basée sur le principe d'absorption du rayonnement X par un objet exposé, de densité non uniforme en général. Cette densité est paramétrée par le coefficient d'atténuation linéique ρ (unité SI m^{-1}) du matériau ou tissu traversé, en tout point de l'objet. On s'intéresse donc à une carte de ces coefficients dans l'espace 3-D :

$$\rho \ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \rho(\boldsymbol{x}) \tag{1.2}$$

Le principe d'absorption suit la loi de Beer-Lambert, qui définit l'intensité I résultante d'un rayonnement X, d'intensité I_0, traversant un milieu atténuant homogène de coefficient ρ :

$$I = I_0 \, \mathrm{e}^{-\rho L} \tag{1.3}$$

où L constitue la longueur du trajet optique du rayon X à travers le milieu. Étendue à une carte d'atténuation $\rho(\boldsymbol{x})$ hétérogène dans l'espace, cette loi devient :

2. Seuls le type de mesures et la modélisation du problème sont différentes.

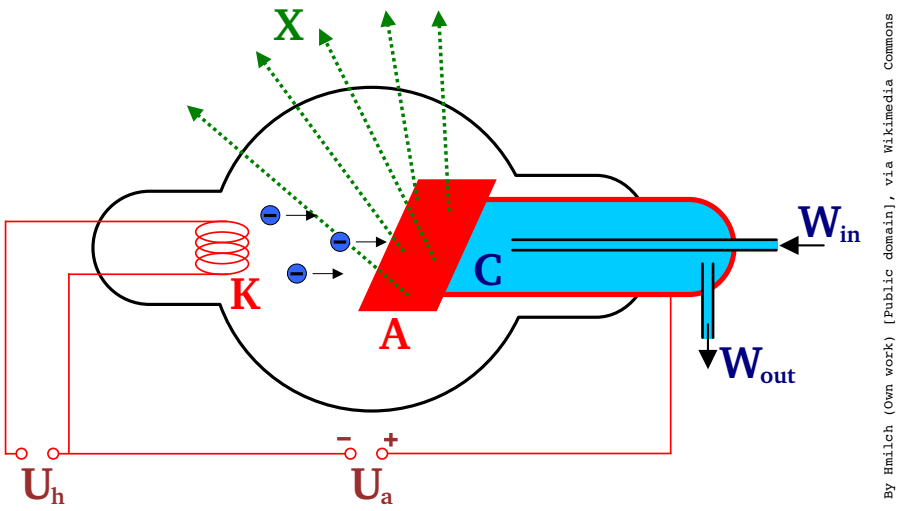


FIGURE 1.6: Schéma de principe d'un tube à rayons X de type Coolidge. Un filament de tungstène $\boldsymbol{K}$, constituant la cathode, est chauffé par un courant électrique (créé sous la tension $\boldsymbol{U_h}$), lui arrachant des électrons. Ceux-ci sont accélérés par la différence de potentiel $\boldsymbol{U_a}$ entre la cathode et l'anode $\boldsymbol{A}$, constituant la cible. Ces électrons viennent alors interagir avec les atomes de la cible en traversant leurs couches électroniques. Ces interactions — déviations, collisions — engendrent alors l'émission du rayonnement X. Source : `http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ARoentgen-Roehre.svg`.

$$I(\boldsymbol{z}) = I_0 \, \mathrm{e}^{-\int_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{z}\}} \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \tag{1.4}$$

où $I(\boldsymbol{z})$ est l'intensité en sortie de l'objet "enregistrée" en un point $\boldsymbol{z}$ de l'espace. Cette fois l'atténuation du milieu absorbant est intégrée sur la trajectoire optique $\{S, \boldsymbol{z}\}$ du rayon X partant de la source S et arrivant au point d'enregistrement $\boldsymbol{z}$, après traversée de l'objet. Cette intensité de sortie est le signal enregistré par les détecteurs à scintillation du système de tomodensitométrie. L'information recherchée étant la carte d'absorption $\rho(\boldsymbol{x})$, la conversion suivante est réalisée :

$$-\log\left(\frac{I(\boldsymbol{z})}{I_0}\right) = \int_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{z}\}} \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.5}$$

Ces *pseudo-mesures* dépendent linéairement de la carte d'atténuation $\rho(\boldsymbol{x})$, qui sera la base de la modélisation numérique des données, essentielle à la résolution du problème inverse (*cf.* chapitre. 2).

Quelques approfondissements sur la physique

La loi de Beer-Lambert est valable pour une source émettrice de rayons X monochromatique. C'est l'hypothèse qui est généralement faite en tomodensitométrie, et qui est inexacte en réalité. Nous allons voir pourquoi.

La production de rayons X est en général assurée par des tubes à rayons X, dont nous montrons un schéma de principe sur la figure 1.6. Il s'agit ici d'un tube de Coolidge (William Coolidge, 1913), l'un des plus répandus. Un filament de tungstène, constituant la cathode, est soumis à un courant électrique lui arrachant des électrons, qui sont accélérés par une différence de potentiel appliquée entre lui et une anode. Cette dernière constitue la cible dont les atomes sont "frappés" par les électrons à haute vitesse. Les interactions qui s'ensuivent génèrent le rayonnement X. Différents types d'interactions interviennent, comme des déviations ou des collisions. La figure 1.7 illustre les types d'interactions qui peuvent avoir lieu, générant

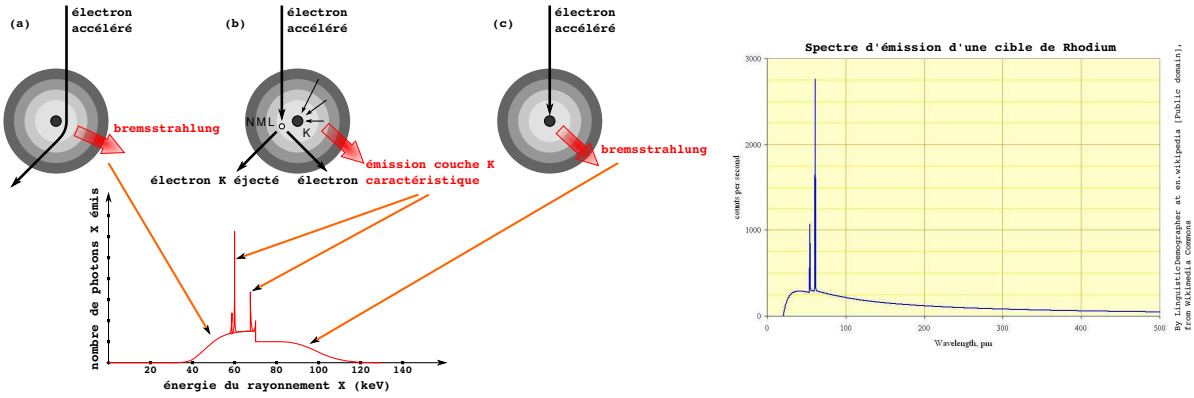


FIGURE 1.7: À gauche : schéma des interactions électrons/cible dans un tube pour la production de rayons X, soumis à une différence de potentiel de 120kV entre cathode et anode ; figure inspirée du livre *Computed Tomography : Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances* de Jiang Hsieh, 2003 [Hsieh, 2003]. Le fond continu du spectre d'émission, appelé *bremsstrahlung*, est issu **(a)** soit de la perte d'énergie de l'électron décéléré par le champ électrique du noyau des atomes de la cible (rayonnement d'énergie faible), **(c)** soit de la conversion totale de l'énergie cinétique de l'électron percutant le noyau, en énergie radiative (rayonnement d'énergie haute). Les raies d'émission caractéristiques (pics du spectre) **(b)** proviennent du rayonnement émis lorsqu'un électron des couches extérieures **L**, **M**, ou **N**, vient combler le vide laissé dans la couche intérieure **K** par un électron éjecté par la collision par un électron accéléré. À droite : illustration du spectre d'émission d'un tube à rayons X avec une cible de Rhodium ; source : `http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ATubeSpectrum.jpg`.

le spectre d'émission du rayonnement X. Cette figure simule le spectre obtenu lorsqu'on applique une différence de potentiel de 120kV entre cathode et anode. La première interaction intervient lorsque l'électron passe près du noyau d'un atome de la cible. Celui-ci subit alors une décélération. L'énergie cinétique ainsi perdue est alors convertie en énergie radiative, appelé rayonnement continu de freinage ou *bremsstrahlung*. Il intervient également lorsque l'électron entre en collision avec le noyau, abandonnant la totalité de son énergie cinétique en énergie radiative. Ce cas de figure constitue la zone d'énergie maximale du spectre. Ainsi l'énergie maximale du spectre théorique de la figure 1.7 est logiquement de 120keV, la tension d'accélération étant de 120kV. Le rayonnement de freinage constitue le fond continu du spectre d'émission. Une troisième interaction est responsable des pics d'émission que l'on peut observer. Il s'agit du cas où un électron accéléré percute un électron de la couche intérieure des atomes de la cible (ici la couche **K**). L'électron ainsi éjecté laisse un vide qui est comblé par un électron des couches supérieures (**L**, **M**, **N**). L'énergie déployée pour maintenir un électron dans ces couches extérieures étant supérieure à celle déployée pour maintenir l'électron dans la couche interne, cette transition s'accompagne d'une émission d'énergie radiative égale à la différence des énergies inter-couches. Les niveaux d'énergie des atomes étant discrets, cette émission engendre des raies caractéristiques de ces transitions sur le spectre. C'est ce dernier type d'interaction qui est le plus fréquent, d'où un pic d'intensité important. C'est aussi la raison pour laquelle on peut faire l'hypothèse que l'émission de rayons X par un tube est quasiment monochromatique. Cette approximation dans la modélisation des données sera néanmoins source d'artéfacts plus ou moins importants dans la reconstruction, qui constituent le phénomène appelé *beam-hardening* en anglais.

L'allure du spectre dépend de la tension d'accélération, qui détermine l'énergie cinétique des électrons de bombardement, et du matériau de la cible, qui détermine les transitions énergétiques des couches électroniques de ses atomes, et donc la longueur d'onde des raies caractéristiques. La figure 1.7 donne en exemple le spectre d'émission d'une cible au Rhodium. Les énergies caractéristiques en tomodensitométrie sont comprises entre 20 et 140keV [Hsieh, 2003], d'où des tensions d'accélération typiques allant de 20 à 140kV. Cette gamme d'énergie, appelée *rayons X doux*, offre le rapport le plus adéquat entre une bonne transmis-

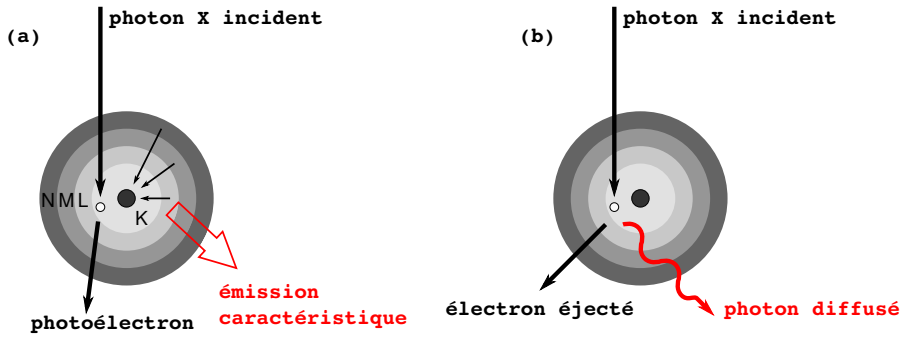


FIGURE 1.8: Schémas des deux principaux types d'interaction des rayons X avec la matière traversé : (a) l'effet photoélectrique et (b) la diffusion Compton. La première consiste à l'éjection d'un électron d'une couche éléectronique d'un atome, devenant un photoélectron. Le photon incident lègue la totalité de son énergie à l'arrachage de l'électron, le surplus lui étant conféré sous forme d'énergie cinétique. La seconde éjecte aussi un électron, mais "survit" à l'impact et est dévié suivant un angle dépendant de son énergie initiale. Figure inspirée du livre *Computed Tomography : Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances* de Jiang Hsieh, 2003 [Hsieh, 2003].

sion et un bon contraste entre les différents tissus. Les énergies supérieures, bien que davantage pénétrantes, seront moins fortement atténuées et offriront donc des contrastes trop faibles. En effet, on distingue trois types d'interaction des photons X avec la matière :

- L'effet photoélectrique (*cf.* Fig. 1.8(a)), où le photon incident arrache un électron d'une couche électronique de l'atome touché en lui cédant la totalité de son énergie, l'excédent étant converti en énergie cinétique. L'électron éjecté devient alors un photoélectron. Cet effet s'accompagne d'une émission radiative due au différentiel des transitions électroniques lorsque le vide laissé par le photoélectron est comblé par un électron d'une couche extérieure. Ce rayonnement est rapidement absorbé par le milieu et ne génère donc pas ou peu de rayonnements parasites sur le détecteur. La probabilité d'interaction photoélectrique est plus forte à faible énergie des photons X, et est très différente suivant la nature du matériau traversé, caractérisé par son numéro atomique Z, offrant donc un excellent contraste d'absorption entre les tissus.
- L'effet Compton, qui intervient en majorité à plus haute énergie des photons incidents. Dans ce cas, le photon X possède une énergie suffisante pour "survivre" à son impact avec un électron. Ainsi, en plus de l'électron diffusé, cette interaction engendre une déviation du photon incident (*cf.* Fig. 1.8(b)). L'angle de déviation peut être compris entre 0 et 180°. La rétrodiffusion intervient si l'énergie du photon est assez faible. Dans le cas contraire, l'angle de diffusion sera plutôt inférieur à 90°. Ainsi la diffusion Compton est relativement peu informative sur la direction de propagation, contrairement à l'effet photoélectrique. De plus, la probabilité d'interaction dépend de la densité du matériau traversé, et non de la nature de ses composants, d'où des contrastes inter-tissus peu élevés. En tomodensitométrie, on va donc plutôt chercher à minimiser l'effet de cette diffusion, soit par collimation des faisceaux, soit par post-traitement numérique.
- La diffusion Rayleigh, qui résulte de la mise en vibration des électrons des atomes à la fréquence de l'onde électromagnétique véhiculée par les photons X incidents, engendrant un faible rayonnement de longueur d'onde identique. Cette interaction est négligeable en regard des deux autres, et n'offre que peu d'intérêt en tomodensitométrie.

On privilégie donc des gammes d'énergie où l'interaction dominante des rayons X avec les tissus sera de type photoélectrique, plus adapté au principe de la tomodensitométrie.

Nous venons de voir que la source de rayons X n'était pas monochromatique comme le suppose la loi de Beer-Lambert. Qui plus est, les interactions entre les photons émis et les tissus dépendent de l'énergie incidente. Idéalement, il serait donc nécessaire de tenir compte de

ce “multi-chromatisme”. Cependant, l'approximation par une source monoénergétique est très coutumière en tomodensitométrie, particulièrement parce qu'il s'agit d'une modalité d'imagerie anatomique. Ainsi la quantification précise du phénomène physique en œuvre, *i.e.* des coefficients d'atténuation, n'est pas critique, d'autant plus que cette quantité dépend elle aussi de l'énergie des photons X.

Pour un tube à rayons X soumis à un potentiel d'accélération de 120kV, l'énergie moyenne des rayons est d'environ 70keV [Hsieh, 2003]. À ce niveau d'énergie, le coefficient d'atténuation de l'eau est de 0,1928cm^{-1}, celui des muscles de 0,1916cm^{-1}. Les tissus étant en très grande partie composés d'eau, leurs pouvoirs atténuants respectifs sont extrêmement similaires. Les os, en revanche, sont bien plus atténuants — coefficient proche de 1cm^{-1} à 70keV. En tomodensitométre, on utilise une échelle de valeurs d'atténuation normalisée, exprimée en unités Hounsfield (HU), en hommage à l'un de ses inventeurs :

$$1\text{HU} = \frac{\rho - \rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}} \times 1000 \tag{1.6}$$

où ρ_{eau} est la valeur du coefficient d'atténuation de l'eau. Cette dernière correspond donc à 0HU. Dans cette échelle, l'atténuation de l'air est de -1000HU, car $\rho_{\text{air}} = 0\text{cm}^{-1}$. Les tissus mous ont des valeurs comprises entre -100 et 60HU, tandis que pour les os ρ est compris entre 250 et 1000HU. Toutes les données physiques chiffrées énoncées dans cette section proviennent du livre *Computed Tomography : Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances* de Jiang Hsieh, 2003 [Hsieh, 2003].

1.1.3 Modèle mathématique

Reprenons la loi de Beer-Lambert pour une source monochromatique comme modèle physique d'obtention des projections tomographiques. Nous avons, dans l'équation 1.5, exprimé cette loi de façon à obtenir des pseudo-données dépendant linéairement de la carte d'atténuation $\rho(\boldsymbol{x})$. Si nous notons $R(\boldsymbol{z})$ les pseudo-données enregistrées en un point $\boldsymbol{z}$ de l'espace, après passage des rayons X émis en S à travers l'objet, cette relation est la suivante :

$$R(\boldsymbol{z}) = -\log\left(\frac{I(\boldsymbol{z})}{I_0}\right) = \int_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{z}\}} \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.7}$$

Plaçons-nous à présent du point de vue d'un système d'acquisition pour la tomographie 2-D. La figure 1.9 schématise le système et établit le formalisme. La carte d'atténuation $\rho(x, y)$ recherchée est 2-D et définie dans un repère cartésien $\{O, \vec{x}, \vec{y}\}$. Le détecteur associé à notre tomographe est 1-D, et acquiert les projections au cours de la rotation autour de l'objet d'intérêt. Un repère $\{D, \vec{v}, \vec{t}\}$ lui est associé. Identifions l'angle de rotation θ comme étant celui que fait le détecteur avec l'axe horizontal $\{O, \vec{x}\}$. La projection de la carte $\rho(x, y)$ est alors définie en toute position v sur le détecteur orienté suivant un angle θ donné. Ré-écrivons alors l'équation 1.8 dans le système des coordonnées détecteur :

$$R(\theta, v) = -\log\left(\frac{I(\theta, v)}{I_0}\right) = \int_{L_{\theta,v}} \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x\cdot\cos\theta + y\cdot\sin\theta = v} \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1.8}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v\cdot\cos\theta - t\cdot\sin\theta, v\cdot\sin\theta + t\cdot\cos\theta)\,\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

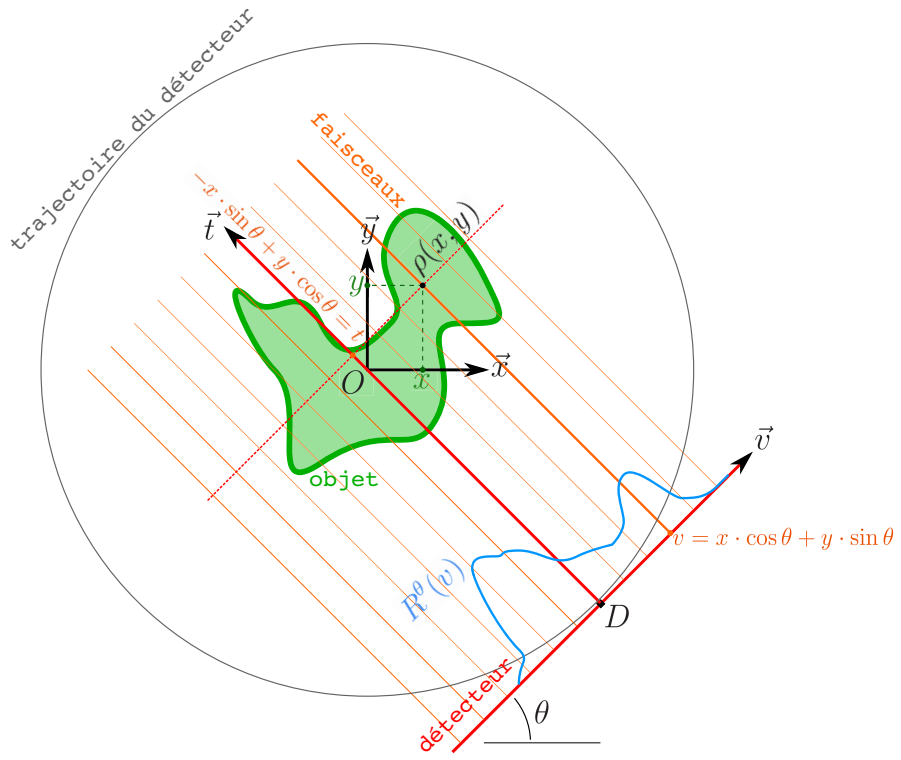


FIGURE 1.9: Schéma d'un système de tomographie 2-D avec propagation parallèle des rayons pour la définition de la transformée de Radon. Un détecteur 1-D est en rotation autour d'un objet d'intérêt symbolisé par ses coefficients d'atténuation $\rho(x, y)$ en tout point du repère cartésien $\{O, \vec{x}, \vec{y}\}$. Un repère $\{D, \vec{v}, \vec{t}\}$ est lié au détecteur. Les 2 repères ainsi définis sont liés par la rotation d'angle θ — par rapport à l'axe $\{O, \vec{x}\}$ — et de centre O. La projection $R^\theta(v)$ de l'objet suivant la trajectoire des faisceaux, pour un angle θ du détecteur, est la transformée de Radon de la fonction $\rho(x, y)$ à l'angle θ.

Cette dernière équation n'est autre que la définition même de la *transformée de Radon* de la fonction $\rho(x, y)$, qui exprime l'ensemble des intégrales de ligne autour d'un objet à 2 dimensions, pour une direction donnée, identifiée par l'angle θ. À angle θ donné, cette transformée est alors notée $R^\theta(v)$, et permet donc de modéliser mathématiquement les pseudo-mesures tomographiques suivant la loi de Beer-Lambert (*cf.* équation 1.8), à supposer que la fonction $\rho(x, y)$ soit connue. Cette notion d'intégrales de ligne est naturellement extensible à 3 dimensions, et permet donc aussi la modélisation mathématique de la projection 3-D. En revanche, dans ce cas-ci, il ne s'agit plus de la transformée de Radon à proprement parler. En effet, dans le cas 2-D, si cette dernière correspond bien aux intégrales de ligne de la fonction considérée, son extension 3-D concerne des intégrales sur des plans. En effet, la définition générique de la transformée de Radon à n dimensions est un ensemble d'intégrales de la fonction sur des hyperplans $(n-1)$-D. En tomographie, l'intégrale se fait toujours sur des trajectoires rectilignes, en tout cas supposées comme telles, des rayons X. C'est pourquoi le modèle mathématique de la projection tomographique 3-D porte plutôt directement le nom de *transformée aux rayons X*.

Après ce petit commentaire, revenons à la transformée de Radon 2-D, et intéressons-nous à la transformée de Fourier suivant la coordonnée v du détecteur, pour une orientation θ donnée. Nous la notons $\hat{R}^\theta(\nu)$. Le calcul suivant :

$$\hat{R}^\theta(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R^\theta(v)\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu v}\,\mathrm{d}v$$

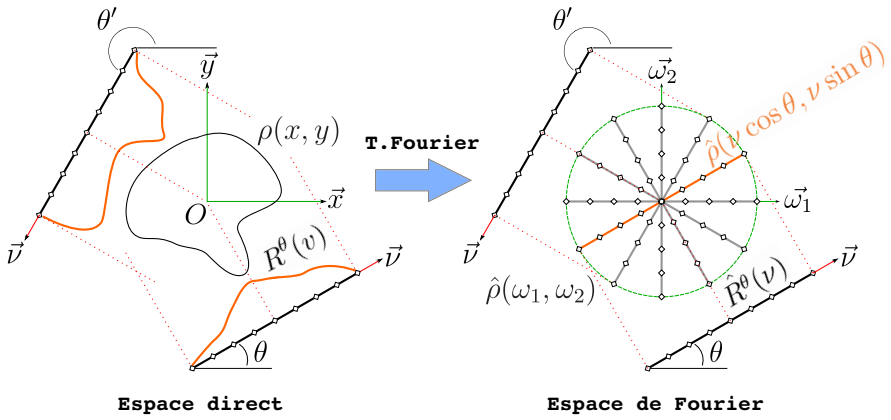


FIGURE 1.10: Illustration du théorème coupe-projection lié à la transformée de Radon 2-D. La transformée de Fourier $\hat{R}^{\theta}(\nu)$ de la projection de Radon d'un objet 2-D sur un détecteur linéaire incliné d'un angle θ est égal à la coupe 1-D, suivant cette même inclinaison et passant par l'origine, dans la transformée de Fourier 2-D de l'objet $\hat{\rho}(\omega_1, \omega_2)$.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{L_{\theta,v}} \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu v}\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v\cdot\cos\theta - t\cdot\sin\theta,\, v\cdot\sin\theta + t\cdot\cos\theta)\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y)\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu(x\cos\theta + y\sin\theta)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \hat{\rho}(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta) \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

établit que la tranformée de Fourier d'une projection à l'orientation θ correspond à la transformée de Fourier d'une coupe de la fonction $\rho(x,y)$ dans la direction radiale d'angle θ. Ce résultat fondamental de la tomographie s'appelle le théorème *coupe-projection*. La figure 1.10 schématise ce théorème, qui est à la base de la méthode d'inversion de la tranformée de Radon, ainsi que de l'algorithme de reconstruction analytique standard : la *Rétroprojection filtrée* [Kak and Slaney, 1988]. Pour entretenir le suspense, nous reviendrons plus tard sur l'élaboration de cet algorithme. À partir de maintenant, nous remplaçons la notation de la carte d'atténuation $\rho(x,y)$ par $f(x,y)$.

1.2 La reconstruction

Maintenant que nous avons posé la plupart des bases de la tomographie, attelons-nous au problème de la reconstruction. Comme nous l'avons explicité auparavant, il s'agit d'un problème inverse. Par définition, il nous faut donc retrouver une information d'intérêt à partir de mesures indirectes. La résolution de ce type de problème, et sa faisabilité, passent premièrement par la façon dont celui-ci est posé, ainsi que des différents éléments sur lesquels nous devons agir pour obtenir le résultat attendu.

L'objet de cette section est donc de présenter et décortiquer l'ensemble de ces éléments, qui nous amèneront à définir les ingrédients utilisés pour résoudre au mieux ce problème. Bien entendu, la reconstruction tomographique n'est pas un domaine nouveau, et bénéficie d'un état de l'art conséquent, ne serait-ce que sur le plan des algorithmes de reconstruction. Ceux-ci profitent par exemple largement des avancées générales dans le domaine des problèmes

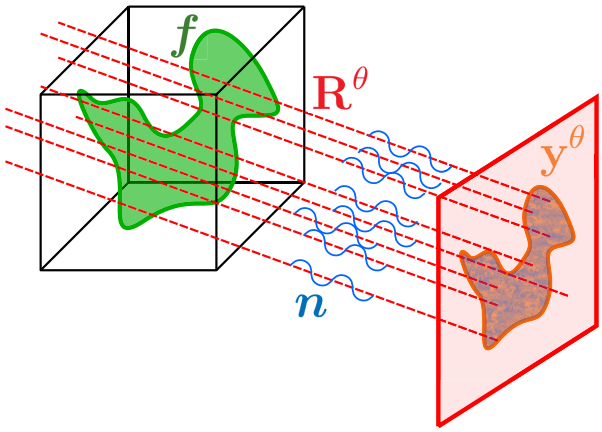


FIGURE 1.11: Problème direct de la tomographie, schématisé dans le formalisme “approche inverse”.

inverses. Nous n'évoquerons que succinctement les techniques existantes, les plus couramment utilisées.

L'approche que nous avons nous-même mis en œuvre, et qui va être présentée dans cette section, constituera pour nous le canevas des travaux et résultats de cette thèse. Rappelons-le, notre objectif est d'appliquer cette approche inverse au cas spécifique de la tomographie dynamique, que nous traiterons dans le chapitre 3. Dans ce cadre, ce chapitre, et particulièrement cette section, a donc pour vocation de “préparer le terrain” en mettant en place une méthode inverse de reconstruction régularisée. Cette méthode n'a pas la prétention d'être originale ; elle est du moins efficace et adaptée à l'une des problématiques invoquée par la tomographie dynamique : la reconstruction à faible nombre de projections. Cette problématique nous amènera à un travail plus spécifique sur un ingrédient particulier du problème : la modélisation de la projection, qui sera quant à elle traitée au chapitre 2.

1.2.1 Données du problème

Le problème direct, schématisé sur la figure 1.11, est posé comme suit :

$$\mathbf{y}^\theta = \mathbf{R}^\theta(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{n} \tag{1.11}$$

$\boldsymbol{f} = (f_{\mathbf{1}}, f_{\mathbf{2}}, \ldots, f_{\boldsymbol{N}})^\top$ correspond à l'image n-D des coefficients d'atténuation, de taille $\boldsymbol{N} = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$, *i.e.* la carte d'absorption à reconstruire, mise sous forme vectorielle. Nous choisissons de considérer la dimension n comme un paramètre non explicite puisque la tomographie peut être considérée à différentes dimensions, principalement 2-D ou 3-D.

$\mathbf{y}^\theta = (\mathrm{y}^\theta_{\mathbf{1}}, \mathrm{y}^\theta_{\mathbf{2}}, \ldots, \mathrm{y}^\theta_{\boldsymbol{M}})^\top$ constitue l'ensemble des $\boldsymbol{M} = M_1 \times \cdots \times M_{n-1}$ valeurs de la projection, à une orientation θ donnée du détecteur, mises aussi sous forme de vecteur. Notons que la dimensionalité du détecteur est inférieure d'une unité à celle de l'objet $\boldsymbol{f}$. Cette projection est constituée de la donnée spécifique à chaque pixel détecteur $\mathrm{y}^\theta_{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^n$. D'après la loi de Beer-Lambert énoncée dans l'équation 1.8, chacun de ces $\mathrm{y}^\theta_{\boldsymbol{q}}$ correspond donc à la donnée suivante :

$$\mathrm{y}^\theta_{\boldsymbol{q}} = -\log\left(\frac{\lambda^\theta(\boldsymbol{q})}{\lambda_0}\right) \tag{1.12}$$

où $\lambda^\theta(\boldsymbol{q})$ correspond au flux de photons X transmis, intégré sur le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$. Nous attirons l'attention sur le fait que cette dernière équation admet une approximation importante,

à savoir que l'intégration du flux de photons sur le pixel détecteur est une fonction linéaire de la loi d'absorption de Beer-Lambert :

$$\lambda^\theta(\boldsymbol{q}) = \int P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, I_0\, \mathrm{e}^{-R^\theta(\boldsymbol{u})}\, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \approx \lambda_0\, \mathrm{e}^{-\int P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, R^\theta(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\boldsymbol{u}} = \lambda_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^\theta} \tag{1.13}$$

où $P_{\boldsymbol{q}} : \boldsymbol{u} \mapsto P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})$ constitue la réponse du pixel détecteur $\boldsymbol{q}$. $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ correspond aux coordonnées sur le détecteur $(n-1)$-D. λ_0 correspond alors au flux de photons par pixel détecteur par projection lorsque le faisceau incident n'a pas été atténué. Nous reviendrons sur cette approximation dans le chapitre 2 quand nous détaillerons la modélisation numérique de la projection tomographique.

Chaque $\mathbf{y}^\theta$ est lui-même une composante du jeu de données englobant la totalité des T projections, à toutes les orientations θ, que l'on note $\Upsilon = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^\theta, \ldots, \mathbf{y}^T)^\top$. Ce dernier ensemble de données constitue ce l'on appelle en tomographie le sinogramme, *i.e.* l'ensemble des projections à disposition.

L'opérateur $\mathbf{R}^\theta$ correspond au processus physique d'obtention des mesures $\mathbf{y}^\theta$, s'appliquant sur l'objet $\boldsymbol{f}$, *i.e.* dans notre cas la loi d'absorption des rayons X de Beer-Lambert. Dans cette équation, $\mathbf{R}^\theta$ est formalisé comme un opérateur continu, mais pas forcément linéaire. Nous avons cependant déjà vu que le modèle physique considéré était linéarisé pour faciliter sa mise en œuvre numérique après discrétisation du problème (*cf.* section 1.1.2). Une fois de plus, cet opérateur dépend de la dimensionnalité du système. C'est aussi lui qui définit l'étalonnage du système, *e.g.* la géométrie de propagation des rayons X.

Enfin, le terme complémentaire $\boldsymbol{n}$ a été introduit pour rendre compte des incertitudes inhérentes au système d'acquisition des mesures, traduisant aussi le fait que le principe physique ne peut jamais être connu exactement. En d'autres termes il s'agit du bruit de mesure. Nous allons voir dans la section suivante quels sont les facteurs de bruit en tomographie, et comment celui-ci peut être modélisé.

1.2.2 Modèle de bruit

En tomographie, les mesures brutes sont, rappelons-le, le flux de photons $\lambda^\theta(\boldsymbol{q}) = \lambda_{\boldsymbol{q}}^\theta$ en chaque pixel détecteur à chaque orientation θ (*cf.* équation 1.12). Ainsi l'acquisition des données correspond typiquement à un comptage des photons arrivant sur les détecteurs. La statistique du bruit associée, si l'on néglige le bruit de lecture des détecteurs, est donc poissonienne. C'est aussi la statistique considérée dans les modalités TEP/TEMP. En revanche, le nombre de photons enregistrés par ces dernières est très faible en comparaison des flux typiques en tomodensitométrie X, qui sont de l'ordre de 10^5 à 10^7 photons détectés par pixel détecteur par projection [Ziegler et al., 2006], donnant lieu à un excellent rapport signal à bruit, pour lequel la statistique commence à se rapprocher d'un bruit gaussien uniforme[3]. Cette dernière remarque n'étant que spéculative, nous allons tenter de dériver un modèle de bruit cohérent, qui pourra nous servir à simuler des données bruitées réalistes.

Repartons de l'équation des mesures 1.12 établie dans la section 1.2.1, basée sur la loi d'absorption de Beer-Lambert :

$$\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^\theta = -\log\left(\frac{\lambda_{\boldsymbol{q}}^\theta}{\lambda_0}\right) = \mathrm{y}\left(\lambda_{\boldsymbol{q}}^\theta\right) \tag{1.14}$$

3. On considère en général que l'approximation gaussienne est excellente dès une trentaine de photons. L'uniformité se justifie si l'absorption le long de chaque ligne de réponse est du même ordre de grandeur.

où nous rappelons que $\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ correspond au flux de photons X transmis par projection, intégré sur le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$, et que λ_0 correspond au nombre de photons par pixel détecteur par projection lorsque le faisceau incident n'a pas été atténué.

Considérons que le flux de photons $\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ suit une statistique de Poisson. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right] & = \bar{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}, \\ \mathbb{V}\left[\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right] & = \bar{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} \end{cases} \tag{1.15}$$

où $\mathbb{E}[\cdot]$ est l'espérance mathématique, et $\mathbb{V}[\cdot]$ la variance.

Ainsi $\mathrm{y}\left(\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right)$ est aussi une variable aléatoire. Notre objectif est alors de déterminer l'espérance de la mesure, ainsi que sa variance, qui nous donnera une estimation de la statistique du bruit des pseudo-mesures $\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$. Pour ce faire, utilisons le développement de Taylor à l'ordre 2 de l'expression $\mathrm{y}(\lambda)$ au voisinage de $\bar{\lambda}$:

$$\mathrm{y}(\lambda) \approx \mathrm{y}(\bar{\lambda}) + (\lambda - \bar{\lambda})\mathrm{y}'(\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}(\lambda - \bar{\lambda})^2\mathrm{y}''(\bar{\lambda}) \tag{1.16}$$

où les dérivées de la transformation non linéaire y sont, d'après l'expression 1.14 :

$$\begin{cases} \mathrm{y}'(\lambda) & = -\frac{1}{\lambda}, \\ \mathrm{y}''(\lambda) & = \frac{1}{\lambda^2}. \end{cases}$$

En ré-écrivant l'expression 1.14 d'après ce développement limité, nous pouvons en déduire l'espérance de $\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right] = \bar{\mathrm{y}}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} \approx \mathrm{y}(\bar{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}) + \frac{1}{2}\mathbb{V}\left[\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right]\mathrm{y}''(\bar{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}) = \mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} + \frac{1}{2\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}} \approx \mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} \tag{1.17}$$

car le terme de biais $\frac{1}{2\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}}$ peut être négligé.

Pour le calcul de la variance, nous n'utilisons que l'approximation à l'ordre 1 du développement limité établi dans l'équation 1.16, ce qui nous donne :

$$\mathbb{V}\left[\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right] = \sigma^2_{\boldsymbol{q}_{\mathsf{noise}}} = \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} - \bar{\mathrm{y}}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right)^2\right] \approx \mathbb{V}\left[\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}\right]\left(\mathrm{y}'(\bar{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^{\theta})\right)^2 = \frac{1}{\lambda_{\boldsymbol{q}}^{\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}}}{\lambda_0} \tag{1.18}$$

De cette dernière expression on déduit la non-stationnarité du bruit, étant donné que sa variance dépend directement de l'atténuation intégrée sur la ligne de réponse de chaque pixel détecteur. Nous avons spécifié plus haut que le flux de photons en tomodensitométrie à rayons X était relativement important. Compte tenu de ces remarques, et si nous supposons que les mesures sur chaque pixel détecteur sont indépendantes, leur approximation par des variables aléatoires gaussiennes non stationnaires semble donc offrir un modèle de bruit acceptable. Ainsi la variable $\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ suit approximativement une loi normale possédant les paramètres suivants :

$$\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} \sim \mathcal{N}\left(\bar{\mathrm{y}}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}, \sigma^2_{\boldsymbol{q}_{\mathsf{noise}}}\right). \tag{1.19}$$

Ce modèle de bruit reste toutefois assez approximatif et doit donc être considéré avec prudence. En d'autres termes, il ne pourra être utilisé pour le traitement de données physiques "réelles", d'autant plus que sa dépendance directe vis-à-vis des pseudo-mesures impliquerait de connaître parfaitement toute la chaîne d'acquisition, du flux de photons enregistré à sa quantification en valeurs "numériques". Ce dernier point n'est pas forcément chose aisée, particulièrement lorsque l'on traite des données de tomographes médicaux. Nous estimons cependant que cet aspect ne sera pas critique lorsque nous traiterons ces données "réelles", compte

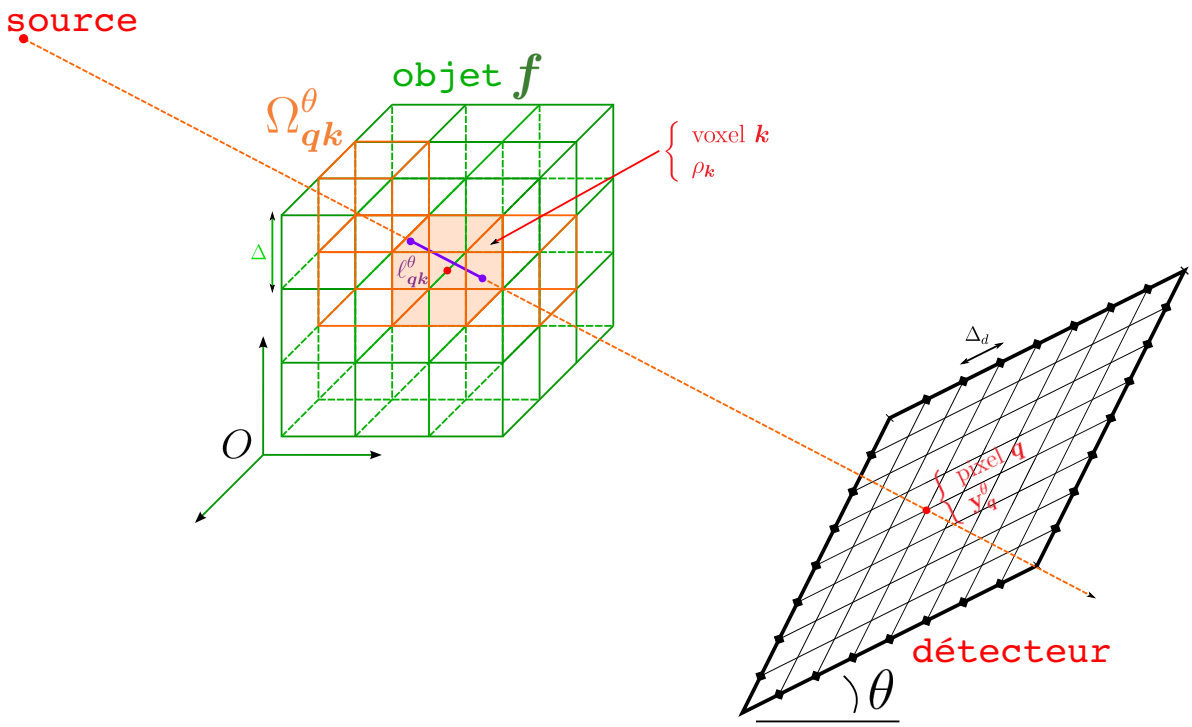


FIGURE 1.12: Schéma de principe du projecteur tomographique basique, basé sur le principe mathématique de la transformée aux rayons X.

tenu de la qualité de celles-ci en termes de rapport signal à bruit dans cette modalité, et nous supposerons pour ces données que le bruit est globalement uniforme.

En revanche, ce modèle de bruit n'a pas été déterminé en vain, et nous servira, comme nous l'avons dit, à générer des données simulées relativement réalistes dans les chapitres suivants. Nous pourrons alors travailler à statistique de bruit connue, et traiter les données en conséquence.

1.2.3 Le projecteur tomographique

La résolution du problème inverse tomographique nécessite de modéliser le processus d'acquisition des projections $\mathbf{R}^{\theta}$. Typiquement, la projection tomographique d'une image $\boldsymbol{f}$ des coefficients d'atténuation — une image 3-D de voxels — consiste alors à calculer sa transformée de Radon, ou transformée aux rayons X en 3-D, *i.e.* ses intégrales de ligne.

Ainsi, considérons le schéma de la figure 1.12, représentant un système tomographique. L'objet est défini comme une image $\boldsymbol{f}$ de voxels, modélisés par des fonctions *portes* tridimensionnelles, aussi appelées indicatrices de voxels. Ceux-ci sont échantillonnés avec un pas Δ dans les trois directions de l'espace. L'acquisition du flux de rayons X provenant de la source, et traversant l'image $\boldsymbol{f}$, se fait sur un détecteur plan, incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Il est échantillonné par des pixels espacés d'un pas Δ_d dans les deux directions du plan.

La mesure $y^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$, comme nous l'avons dit, est donc l'intégrale de l'image $\boldsymbol{f}$ sur la trajectoire du rayon X partant de la source et arrivant sur le pixel $\boldsymbol{q}$, appelée aussi *ligne de réponse*. Sur son trajet, ce rayon X intersecte un ensemble $\Omega^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$ de $N^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$ voxels $\boldsymbol{k}$. La ligne de réponse est donc la somme sur cet ensemble des longueurs d'intersection $\ell^{\theta}_{\boldsymbol{qk}}$ de la droite symbolisant la trajectoire du rayon X, avec chaque voxel $\boldsymbol{k} \in \Omega^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$, et multiplié par les valeurs respectives du

coefficient d'atténuation $\rho_{\boldsymbol{k}}$:

$$\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Omega_{\boldsymbol{q}}^{\theta}} \ell_{\boldsymbol{qk}}^{\theta} \cdot \rho_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Omega_{\boldsymbol{q}}^{\theta}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta} \cdot \rho_{\boldsymbol{k}} \tag{1.20}$$

Cette expression doit ensuite être étendue à l'ensemble des faisceaux impactant chaque pixel détecteur, pour tous les angles θ. On obtient ainsi le modèle global des données, nécessaire à la reconstruction :

$$\mathbf{y}^{\theta} = \mathbf{R}^{\theta} \cdot \boldsymbol{f} \tag{1.21}$$

Le modèle ainsi obtenu dépend donc de l'étalonnage du système tomographique : distance focale *source-détecteur*, distance *source-isocentre*, positions angulaires du détecteur, nombre de projections, géométrie de propagation des rayons, *etc.*

Il s'agit là du modèle de projection le plus simpliste, qui suit le principe purement mathématique de la transformée aux rayons X. La modélisation de la projection tomographique est un pan entier de la résolution du problème inverse. Nous verrons qu'il peut même s'avérer critique, et qu'il nécessite des choix et des mises en œuvre précis. Tous ces aspects feront l'objet d'un chapitre complet (*cf.* chapitre 2), où nous traiterons de tous les ingrédients nécessaires à l'élaboration d'un modèle de projection précis et rapide.

Nous n'en disons pas plus pour le moment, considérant dans la suite de ce chapitre que nous disposons d'un tel projecteur $\mathbf{R}^{\theta}$.

1.2.4 Petit état de l'art

Dans cette section, nous allons évoquer les méthodes de reconstruction tomographiques les plus couramment utilisées, particulièrement en clinique, *i.e.* les algorithmes standard implantés dans les tomographes. Comme nous l'avons déjà spécifié, la recherche algorithmique en reconstruction est extrêmement riche, particulièrement dans la communauté des *problèmes inverses*.

Ce travail de thèse, comme nous l'avons dit au début de cette section, se penche plus sur le traitement d'un problème particulier — la tomographie dynamique — par l'approche inverse, que sur la généralité même du problème de la reconstruction. C'est pourquoi nous n'avons pas effectué d'état de l'art exhaustif en ce qui concerne la reconstruction tomographique en général, qui serait presque un travail en soi et ne fait donc pas l'objet de cette thèse. On pourra trouver dans la littérature de nombreuses revues de l'état de l'art, particulièrement en reconstruction itérative [Bruyant, 2002, Qi and Leahy, 2006, Fessler, 2006, Defrise and Gullberg, 2006, Kalender, 2006].

La reconstruction tomographique distingue 2 grandes familles d'algorithmes :

- les méthodes analytiques, basées sur l'inversion directe de la transformée aux rayons X, et dont le tenant est le célèbre algorithme de *Rétroprojection filtrée* ;
- les méthodes dites itératives, basées sur l'approche inverse, qui consistent à reconstruire l'image sans jamais inverser le modèle de projection, en passant par la minimisation — ou la maximisation — progressive d'un critère définissant une certaine fidélité aux données, éventuellement complété par un terme de régularisation donnant une information a priori sur l'objet.

Méthodes analytiques

L'algorithme basique de *Rétroprojection filtrée* se dérive simplement de l'expression de la transformée de Radon 2-D en propagation parallèle des rayons, à partir du théorème *coupe-*

projection. Pour le déduire, partons de l'inverse de la transformée de Fourier de la fonction $f(x, y)$, représentant la carte des coefficients d'atténuation :

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi[\omega_1 x+\omega_2 y]}\,\mathrm{d}\omega_1\,\mathrm{d}\omega_2 \tag{1.22}$$

Si nous effectuons le changement de variables en coordonnées polaires (ν, θ) dans l'espace de Fourier, et appliquons le théorème *coupe-projection* ainsi que la relation $v = x\cos\theta + y\sin\theta$ (*cf.* Fig. 1.9), cela nous donne :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu\cos\theta,\nu\sin\theta)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi[\nu x\cos\theta+\nu y\sin\theta]}|\nu|\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}^{\theta}(\nu)|\nu|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu v}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \mathscr{F}^{-1}\left[\breve{R}^{\theta}(\nu)\right]\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ainsi l'inverse de la transformée de Radon consiste à intégrer sur la variable angulaire θ, comprise entre 0 et π, la transformée de Fourier inverse $\mathscr{F}^{-1}$ des projections $\hat{R}^{\theta}(\nu)$ filtrées par un filtre rampe $|\nu|$, que l'on note $\breve{R}^{\theta}(\nu)$. Voici donc la formule analytique de l'algorithme de *Rétroprojection filtrée* en géométrie parallèle, aussi appelée FBP pour *Filtered BackProjection* en anglais. Le filtre rampe permet d'amplifier les fréquences à mesure que la distance radiale dans l'espace de Fourier augmente. En effet, étant donné que l'échantillonnage angulaire des projections est radial (*cf.* Fig. 1.10), la couverture fréquentielle est de moins en moins dense à mesure que l'on s'éloigne du centre du spectre. Ainsi, appliquer la rétroprojection sans ce filtrage engendrerait une perte des hautes fréquences de l'image, autrement dit un filtrage passe-bas de l'image.

Le filtrage rampe constitue en théorie le filtrage idéal. Or, pratiquement, sa propension à amplifier de plus en plus les hautes fréquences va poser le problème de l'amplification du bruit de mesure. C'est pourquoi une apodisation est nécessaire afin qu'il devienne passe-bas pour les fréquences principalement imputables au bruit. De multiples types de fenêtres peuvent être utilisés, que nous illustrons sur un graphique tiré de [Bruyant, 2002] sur la figure 1.13, qui vont permettre de filtrer le bruit tout en préservant au mieux les fréquences de l'objet. Il s'agit en quelque sorte d'une régularisation de l'objet, étant donné que son principe est basé sur une information a priori : le spectre de l'objet est principalement composé de basses fréquences, *i.e.* l'objet est globalement lisse.

Bien entendu, l'application de cet algorithme dans sa version numérique nécessite une discrétisation de cette formule [Kak and Slaney, 1988], qui devient :

$$f(x,y) = \frac{\pi}{T}\sum_{i=1}^{T} \mathscr{F}^{-1}\left[\breve{R}^{\theta_i}(\boldsymbol{\nu})\right](\boldsymbol{x}) \tag{1.24}$$

Le filtrage rampe $|\nu|$ et la transformée de Fourier inverse $\mathscr{F}^{-1}$ se font aussi de façon discrétisée. Or la formule 1.23 s'applique, rappelons-le, dans le système de coordonnée polaires, impliquant que la reconstruction analytique est de fait obtenue dans ce système. La modélisation de l'image discrète $\boldsymbol{f}$ se faisant en coordonnées cartésiennes, une étape d'interpolation sous-jacente (parce

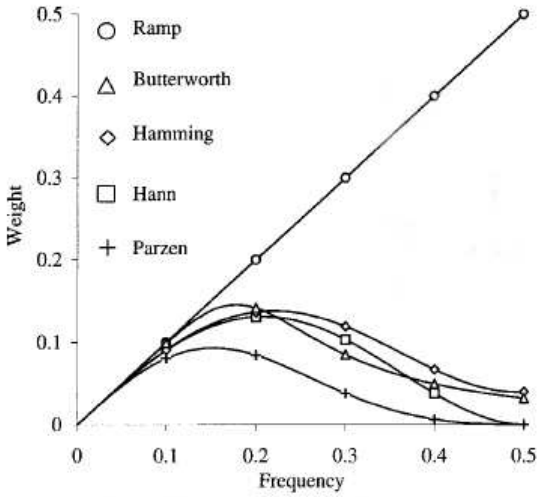


FIGURE 1.13: Quelques exemples de fenêtres d'apodisation du filtre rampe — représenté également sur ce graphique, pour le transformer en filtre passe-bas. Source : Bruyant P.P., 2002, *Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT*, Journal of Nuclear Medicine [Bruyant, 2002].

qu'elle n'est pas explicitement exprimée dans l'équation 1.24) est alors nécessaire. Il faut aussi savoir que la formule analytique 1.23 n'est exacte que dans l'hypothèse d'un nombre infini de projections, ce qui est loin d'être le cas en pratique. L'algorithme en découlant demande donc un nombre assez important de projections, de l'ordre de plusieurs centaines pour une seule coupe 2-D, pour être efficace.

Pour passer à une version de cet algorithme en géométrie de propagation *fan beam*, *i.e.* toujours dans un cas 2-D, un simple changement de variable, illustré sur la figure 1.14, permet de ramener chaque ligne de réponse *fan beam*, de coordonnées v et d'angle θ, à une ligne de réponse virtuelle *parallel beam*, de coordonnées v' et d'angle θ', selon les relations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_v = \tan^{-1}\left(\dfrac{v}{\ell_{\text{sd}}}\right), \\ \theta' = \theta - \gamma_v, \\ v' = \ell_{\text{sc}} \sin\gamma_v = \dfrac{\ell_{\text{sc}} v}{\sqrt{\ell_{\text{sd}}^2 + v^2}} \end{cases}$$

Cette ré-organisation des lignes de réponse se nomme *rebinning* en anglais. Une autre solution est d'intégrer ce changement de variable directement dans la formule de rétroprojection filtrée (*cf.* équation 1.23), ce qui donne, d'après [Kak and Slaney, 1988], la formule de *Rétroprojection filtrée pondérée* suivante :

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\ell_{\text{sc}}}{U(\theta,x,y)}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_p^{\theta}(\nu)|\nu| \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu v}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\theta \tag{1.25}$$

où $R_p^{\theta}(v) = \dfrac{\ell_{\text{sc}}}{2\sqrt{\ell_{\text{sc}}^2 + r^2}} R^{\theta}(v)$ est la projection pondérée, avec $r = v' \cos\gamma_v = \dfrac{\ell_{\text{sc}}}{\ell_{\text{sd}}} v$, et $U(\theta,x,y)$ la distance entre le projeté du point $M(x,y)$ sur la trajectoire normale au détecteur et la source (*cf.* Fig. 1.14).

La transposition de ces algorithmes en 3-D est triviale dans le cas de géométries de propagation parallèle et *fan beam* multi-coupes, puisqu'il suffit d'effectuer dans ces cas des re-

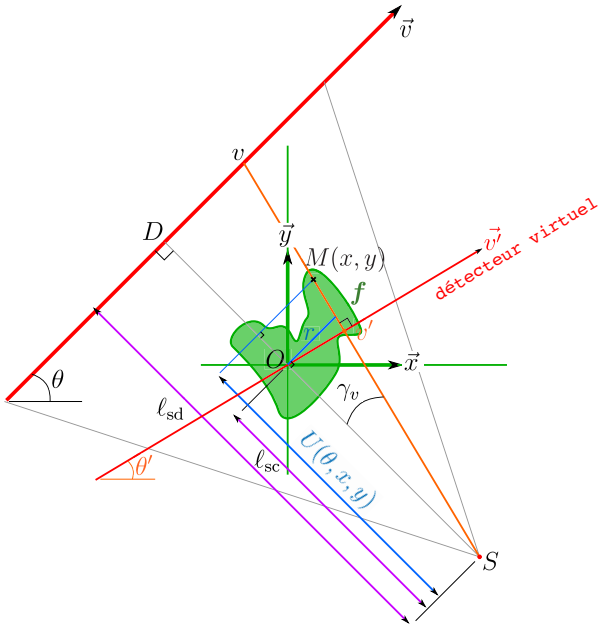


FIGURE 1.14: Schéma de la transformée de Radon pour un mode de propagation "en éventail" des rayons X et une orientation θ du détecteur. ℓ_{sd} désigne la distance entre la source S et son projeté orthogonal sur le plan détecteur, autrement dit la distance focale, tandis que ℓ_{sc} désigne la distance orthogonale entre la source et l'isocentre O de l'objet. Pour tout rayon de l'"éventail", il est possible de déterminer l'orientation θ' d'un détecteur virtuel et la position virtuelle v' d'impact du rayon sur ce détecteur, de telle sorte que son mode de propagation soit parallèle dans ce système équivalent.

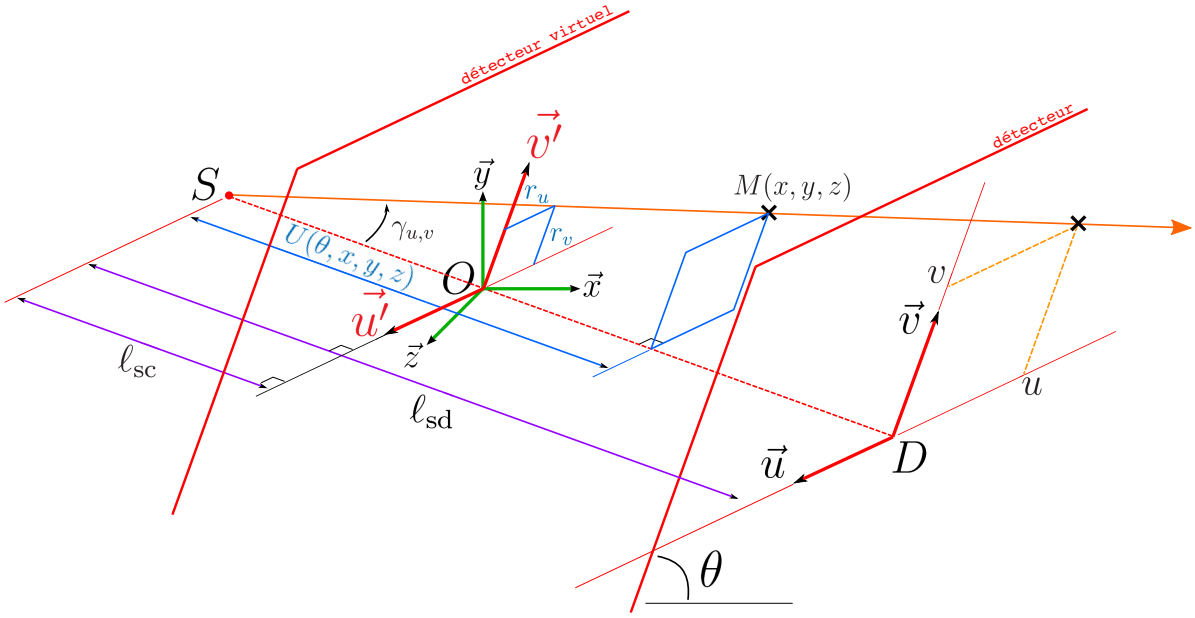


FIGURE 1.15: Schéma de la projection tomographique pour un mode de propagation *cone beam* des rayons X et une orientation θ du détecteur, permettant de définir les paramètres géométriques U, r_u et r_v pour la formule de *Rétroprojection filtrée pondérée 3-D* de l'algorithme FDK [Feldkamp et al., 1984]. ℓ_{sd} désigne la distance entre la source S et son projeté orthogonal sur le plan détecteur, autrement dit la distance focale, tandis que ℓ_{sc} désigne la distance orthogonale entre la source et l'isocentre O de l'objet (centre du repère lié à l'objet).

constructions multiples de coupes 2-D. En revanche, le passage à la géométrie de propagation *cone beam* est moins évident, puisqu'il nécessite une reconstruction 3-D "en un seul bloc". L'algorithme FDK, proposé par Feldkamp, Davis et Kress en 1984 [Feldkamp et al., 1984] — d'où son nom, permet ce type de reconstruction en généralisant à la 3-D la formule de *Rétroprojection filtrée pondérée 2-D*. Compte tenu du fait que l'objet et le détecteur sont cette fois-ci respectivement 3-D et 2-D, et admettent respectivement trois coordonnées (x, y, z) dans l'espace et 2 coordonnées (u, v) sur le plan, la formule de l'algorithme FDK est :

$$f(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\ell_{\text{sc}}}{U(\theta,x,y,z)} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_p^{\theta}(u,\nu) |\nu| \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu v} \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\theta \tag{1.26}$$

où $R_p^{\theta}(u,v) = \dfrac{\ell_{\text{sc}}}{2\sqrt{\ell_{\text{sc}}^2 + r_u^2 + r_v^2}} R^{\theta}(u,v)$ est la projection pondérée, avec :

$$\begin{cases} r_u = \dfrac{\ell_{\text{sc}}}{\ell_{\text{sd}}} u \\ r_v = \dfrac{\ell_{\text{sc}}}{\ell_{\text{sd}}} v \end{cases}$$

et $U(\theta, x, y, z)$ la distance entre le projeté du point $M(x, y, z)$ sur la trajectoire normale au détecteur et la source (*cf.* Fig. 1.15). Remarquons que le passage à l'espace de Fourier pour le filtrage rampe se fait toujours suivant une direction 1-D, *i.e.* une ligne de la projection 2-D à coordonnée u donnée. En d'autres termes on considère cette fois des reconstructions de coupes 2-D *fan beam*, non parallèles, mais réparties en éventail suivant l'angle entre la source et la coordonnée u sur le détecteur.

Méthodes itératives

Passons à présent aux méthodes itératives. Réputées plus lourdes en temps de calcul, ce type de méthodes a néanmoins démontré depuis longtemps une qualité supérieure de reconstruction [Hsieh, 2003]. Cela est dû au fait que ces méthodes, toutes issues de l'approche inverse, ne nécessitent pas l'inversion du modèle d'obtention des données, ce qui permet notamment d'élaborer des projecteurs plus fins et plus réalistes. Leur force réside aussi dans la possibilité d'inclure dans le schéma de reconstruction des informations a priori par le biais d'un terme de régularisation, qui peut être inséré et manipulé avec plus de souplesse que les fenêtres d'apodisation du filtrage dans la méthode analytique FBP[4]. Enfin, les approches itératives ajoutent aussi de la souplesse dans la gestion du bruit stochastique de mesure, en permettant de considérer des statistiques précises. Par exemple, l'algorithme ML-EM [Shepp and Vardi, 1982, Lange and Carson, 1984], que nous ne présenterons pas ici car étant plus dédié à la tomographie d'émission (TEP/TEMP), est directement basé sur une statistique de Poisson.

Les méthodes itératives sont déjà préférées pour la reconstruction tomographique dans les modalités d'acquisition TEP et TEMP, du fait notamment du faible nombre de données, nécessitant de prendre en compte une statistique de bruit précise[5]. En tomodensitométrie, de récents progrès algorithmiques, comme le champ du *Compressed Sensing* [Candès et al., 2006, Pan et al., 2009], remettent peu à peu au goût du jour — dans la communauté académique tout du moins — l'intérêt de ces méthodes dans cette modalité. De plus, les évolutions matérielles

4. Il est même possible, comme nous le verrons dans notre approche, d'insérer un terme de régularisation non linéaire.

5. Algorithme ML-EM sus-mentionné

actuelles, comme le calcul massivement parallèle sur multi-processeurs ou cartes graphiques tendent à faire progressivement sauter le verrou de la charge calculatoire de ces algorithmes.

Comme énoncé dans l'introduction de cette section, l'objet de nos travaux n'est pas de nous lancer dans une revue exhaustive de ces évolutions algorithmiques, même si l'approche inverse que nous mettons en œuvre n'est pas en retard par rapport aux dernières avancées dans ce domaine[6]. Nous restons donc assez succincts et présentons les méthodes les plus couramment utilisées en pratique en tomodensitométrie.

La première méthode que nous présentons est l'algorithme dénommé ART pour *Algebraic Reconstruction Technique* [Gordon et al., 1970]. Celui-ci est dérivé de la méthode de Kaczmarz [Kaczmarz, 1937] pour la résolution d'un système d'équations linéaires $\mathbf{A}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b}$, *i.e.* $\mathbf{R}^{\theta}\boldsymbol{f} = \mathbf{y}^{\theta}$ pour le problème tomographique. Cet algorithme est séquentiel dans son implantation, à savoir qu'il propose une correction de l'image estimée $\boldsymbol{f}$ à partir de l'information apportée successivement par une seule ligne de réponse. Autrement dit, la reconstruction de l'image $\boldsymbol{f}$ s'effectue en résolvant le système équation par équation, donnant le schéma itératif suivant :

$$f_{\boldsymbol{k}}^{(i+1)} = f_{\boldsymbol{k}}^{(i)} + \mu_i \frac{\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} - \sum\limits_{\boldsymbol{k'} \in \Omega_{\boldsymbol{q}}^{\theta}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk'}}^{\theta} f_{\boldsymbol{k'}}^{(i)}}{\left\| \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta} \right\|^2} \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta} \tag{1.27}$$

où $f_{\boldsymbol{k}}^{(i)}$ est la valeur du voxel d'indice $\boldsymbol{k}$ à l'itération i, $\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ la valeur de la donnée du pixel $\boldsymbol{q}$, à l'angle θ, impacté par le rayon passant par le voxel $\boldsymbol{k}$, *i.e.* l'intégrale de ligne sur tous les voxels $\boldsymbol{k'}$ placés sur cette trajectoire, avec une contribution repsective $\mathbf{R}_{\boldsymbol{qk'}}^{\theta}$ (*cf.* section 1.2.3). Une itération de l'algorithme est obtenue lorsque l'ensemble des lignes de réponse $\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ a été considérée une et une seule fois. L'algorithme ART converge vers une solution de moindre norme L_2 si le système est bien posé — il admet au moins une solution. La reconstruction tomographique étant typiquement un problème mal posé, un paramètre de relaxation μ_i permet de mieux contrôler la convergence de l'algorithme vers une solution satisfaisante.

Néanmoins, la solution obtenue par cette résolution séquentielle souffre fortement du phénomène d'amplification du bruit. Andersen & Kak [Andersen and Kak, 1984] ont proposé de prendre simultanément l'ensemble des lignes de réponse d'une projection à l'angle θ donnée, et d'appliquer un terme correctif calculé à partir de cet ensemble et non plus à partir d'une seule ligne de réponse. Cela a donné l'algorithme SART pour *Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique*, dont voici la formule :

$$f_{\boldsymbol{k}}^{(i+1)} = f_{\boldsymbol{k}}^{(i)} + \frac{\mu_i}{\mathbf{R}_{+\boldsymbol{k}}^{\theta}} \sum_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{M}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta} \left(\frac{\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} - \sum\limits_{\boldsymbol{k'} \in \Omega_{\boldsymbol{q}}^{\theta}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk'}}^{\theta} f_{\boldsymbol{k'}}^{(i)}}{\mathbf{R}_{\boldsymbol{q}+}^{\theta}} \right) \tag{1.28}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{+\boldsymbol{k}}^{\theta} = \sum\limits_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{M}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta} \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{q}+}^{\theta} = \sum\limits_{\boldsymbol{k'}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{qk'}}^{\theta} \end{cases}$$

La convergence de cet algorithme a été démontrée dans [Jiang and Wang, 2003]. Une itération est révolue lorsqu'on a parcouru l'ensemble des projections une et une seule fois. Cette méthode correspond, pour chaque orientation θ, à la minimisation par une méthode de plus

6. Nous y ferons toutefois allusion ultérieurement.

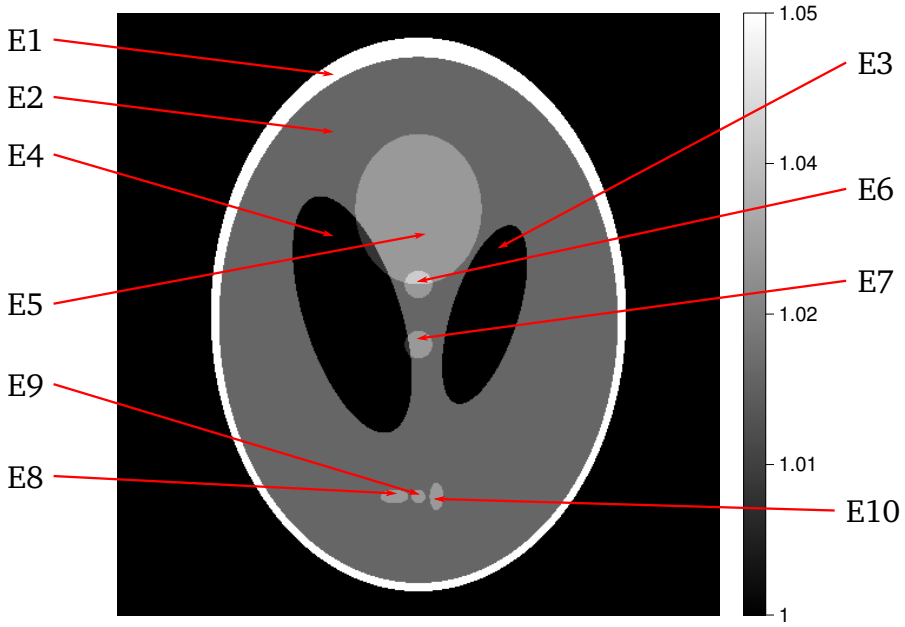


FIGURE 1.16: Fantôme de Shepp-Logan [Shepp and Logan, 1974, Kak and Slaney, 1988], composé de dix ellipses $\mathscr{E}_i$ identifiées sur le graphe.

grande pente, d'un critère des moindres carrés pondérés, préconditionné par l'inverse de la rétroprojection $\mathbf{R}^{\theta\top}$ du vecteur unité $\mathbf{1}^{\boldsymbol{M}}$ dans l'espace des projections, *i.e.* $\mathbf{R}^{\theta\top} \cdot \mathbf{1}^{\boldsymbol{M}}$. Cet opérateur de rétroprojection $\mathbf{R}^{\theta\top}$ constitue l'opérateur adjoint du projecteur $\mathbf{R}^{\theta}$, *i.e.* son transposé. Celui-ci apparaît lorsqu'on calcule le gradient du critère pour déterminer une direction de descente pour sa minimisation. Le critère minimisé est alors le suivant :

$$\boldsymbol{f}^{+}_{\text{SART}} = \arg\min_{\boldsymbol{f}} \left\| \mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta} \cdot \boldsymbol{f} \right\|^2_{\mathbf{W}} = \arg\min_{\boldsymbol{f}} \left(\mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta} \cdot \boldsymbol{f} \right)^{\top} \cdot \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta} \cdot \boldsymbol{f} \right) \tag{1.29}$$

avec $\mathbf{W} = diag\left((\mathbf{R}^{\theta} \cdot \mathbf{1}^{\boldsymbol{N}})^{-1} \right)$, *i.e.* $\mathbf{W}_{\boldsymbol{qq}} = (1/\mathbf{R}^{\theta}_{\boldsymbol{q+}})$.

Aujourd'hui encore, la méthode SART reste l'une des plus usitées en reconstruction pour la tomographie X, notamment grâce à sa simplicité de mise en œuvre. Elle a cependant un écueil important : l'amplification du bruit si on laisse l'algorithme converger (*cf.* section 1.2.6). En effet, la reconstruction d'un objet suivant le seul critère d'une attache aux données est un problème mal conditionné du fait notamment du bruit dans les mesures, mais aussi du projecteur qui n'est qu'une modélisation approximative de processus d'obtention des projections. Ce mauvais conditionnement va se traduire par une amplification importante des composantes hautes fréquences présentes dans les données, *i.e.* le bruit, qui sont dues à l'existence de valeurs propres non nulles très faibles dans l'opérateur $\mathbf{R}^{\theta}$. Pour pallier ce problème, l'ajout d'un terme de régularisation est nécessaire pour contrôler ce phénomène d'amplification en favorisant des solutions globalement lisses, ce qui permet alors de laisser converger l'algorithme vers une solution plus plausible.

1.2.5 Simulation de données 2-D

En tomographie, l'évaluation d'algorithmes de reconstruction se fait généralement sur des données simulées numériquement d'après le principe de la transformée de Radon. On crée

$\mathscr{E}_i$	Position ($\times N/2$)		Demi-axes ($\times N/2$)		Inclinaison α (°)	Atténuation
	x_0	y_0	a	b		
E1	0	0	0,92	0,69	90	2.0
E2	0	−0,0184	0,874	0,6624	90	−0,98
E3	0,22	0	0,31	0,11	72	−0,02
E4	−0,22	0	0,41	0,16	108	−0,02
E5	0	0,35	0,25	0,21	90	0,01
E6	0	0,1	0,046	0,046	0	0,01
E7	0	−0,1	0,046	0,046	0	0,01
E8	−0,08	−0,605	0,046	0,023	0	0,01
E9	0	−0,605	0,023	0,023	0	0,01
E10	0,06	−0,605	0,046	0,023	90	0,01

TABLE 1.1: Tableau regroupant les paramètres de forme des dix ellipses constituant le fantôme de Shepp-Logan $N \times N$. Les paramètres de forme en question sont : la position du centre de l'ellipse (x_0, y_0) (en fraction de $N/2$), la longueur des demi-axes a et b (en fraction de $N/2$), l'inclinaison identifiée par l'angle α que fait le demi-axe de longueur a avec l'axe x, et enfin la valeur du coefficient d'atténuation μ. La valeur d'atténuation en un point donné du fantôme global est égale à la somme des valeurs de toutes les ellipses couvrant cette position. La figure 1.16 visualise la position des ellipses.

ainsi des objets fictifs, appelés *fantômes*, dont les projections peuvent être calculées analytiquement. C'est le cas du fantôme 2-D créé par Shepp et Logan en 1974 [Shepp and Logan, 1974, Kak and Slaney, 1988]. Ce fantôme se compose d'un ensemble d'ellipses $\mathscr{E}_i$, chacune paramétrée par :

- la position (x_0, y_0) de son centre ;
- les longueurs (a, b), respectivement suivant l'axe $\vec{x}$ et $\vec{y}$, de ses deux demi-axes ;
- l'inclinaison α, correspondant à l'angle que fait le demi-axe de longueur a avec l'axe $\vec{x}$;
- une valeur μ normalisée du coefficient d'atténuation, sachant que cette valeur est constante sur la surface de l'ellipse, et peut être négative car on cumule les valeurs superposées.

Le fantôme de Shepp-Logan se compose de dix ellipses. Les paramètres de forme sont résumés dans le tableau 1.1. La figure 1.16 montre une image de l'objet ainsi modélisé, et identifie chacune des ellipses. Comment s'effectue alors le calcul analytique des projections d'un tel fantôme ? Considérons un fantôme constitué de $N_{\mathscr{E}}$ ellipses $\mathscr{E}_i(x, y)$, avec $i \in \{1, \ldots, N_{\mathscr{E}}\}$, le signal f modélisant le fantôme — 2-D statique dans un premier temps — s'écrit :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{\mathscr{E}}} \mu_i \cdot \mathscr{E}_i(x, y) \tag{1.30}$$

avec :

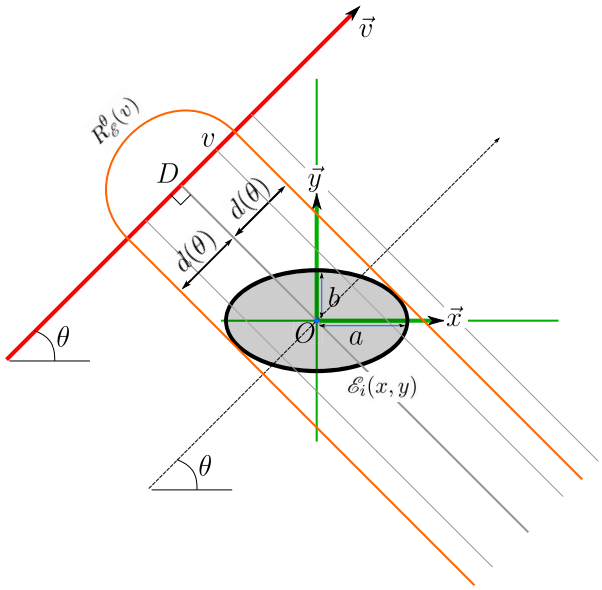


FIGURE 1.17: Schéma de la transformée de Radon $R^{\theta}_{\mathscr{E}}(v)$ d'une ellipse $\mathscr{E}_i$ centrée ($x_0 = y_0 = 0$) et non-inclinée ($\alpha = 0$), pour un mode de propagation parallèle des rayons X et une orientation θ du détecteur.

$$\mathscr{E}_i(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \frac{\left((x-x_{0_i})\cos\alpha_i + (y-y_{0_i})\sin\alpha_i\right)^2}{a_i^2} + \frac{\left((y-y_{0_i})\cos\alpha_i - (x-x_{0_i})\sin\alpha_i\right)^2}{b_i^2} \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

De façon triviale, on voit que la transformée de Radon 2-D de ce fantôme est la somme des transformées de Radon de chaque ellipse $\mathscr{E}_i$:

$$R^{\theta}(v) = \sum_{i=1}^{N_{\mathscr{E}}} R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}(v) \tag{1.31}$$

Chaque transformée de Radon $R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}$ peut être calculée analytiquement, connaissant tous les paramètres de forme de $\mathscr{E}_i$. Il s'agit, pour une orientation θ du détecteur, de l'ensemble des lignes de réponse le long de chaque trajectoire des rayons allant de la source à une position v sur le détecteur. D'après [Kak and Slaney, 1988], pour un mode de propagation parallèle des rayons, et un positionnement de l'ellipse $\mathscr{E}_i$ tel qu'illustré par la figure 1.17 ($x_0 = y_0 = 0$ et $\alpha = 0$), la formule analytique de $R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}$, que nous noterons dans ce cas $R^{\theta}_{\mathscr{E}}$, est donnée par :

$$R^{\theta}_{\mathscr{E}}(v) = \begin{cases} \frac{2\mu ab}{d^2(\theta)}\sqrt{d^2(\theta) - v^2}, & \text{si} \quad |v| \leq \mathrm{d}(\theta) \\ 0, & \text{si} \quad |v| > \mathrm{d}(\theta) \end{cases} \tag{1.32}$$

où $d^2(\theta) = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$. De là, pour un positionnement quelconque, *i.e.* des paramètres de positionnement non nuls, comme illustré sur la figure 1.18, une formule générale de $R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}$, toujours en propagation parallèle, peut être déduite :

$$R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}(v) = R^{\theta-\alpha}_{\mathscr{E}}\left(v - s\cos\left(\varrho - \theta\right)\right) \tag{1.33}$$

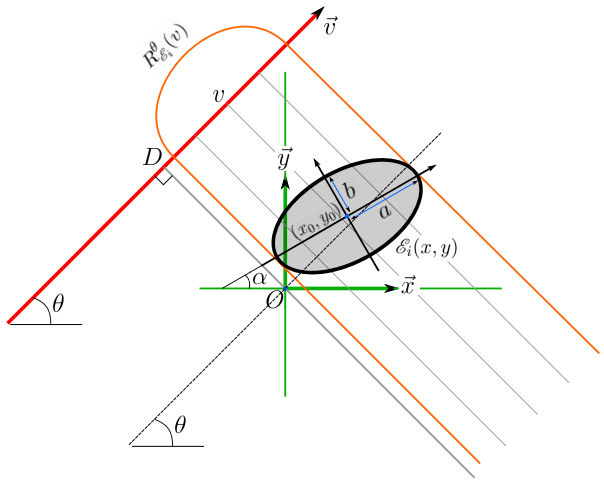


FIGURE 1.18: Schéma de la transformée de Radon $R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}(v)$ d'une ellipse $\mathscr{E}_i$ positionnée de manière quelconque (paramètres de positionnement x_0, y_0 et α non nuls), pour un mode de propagation parallèle des rayons X et une orientation θ du détecteur.

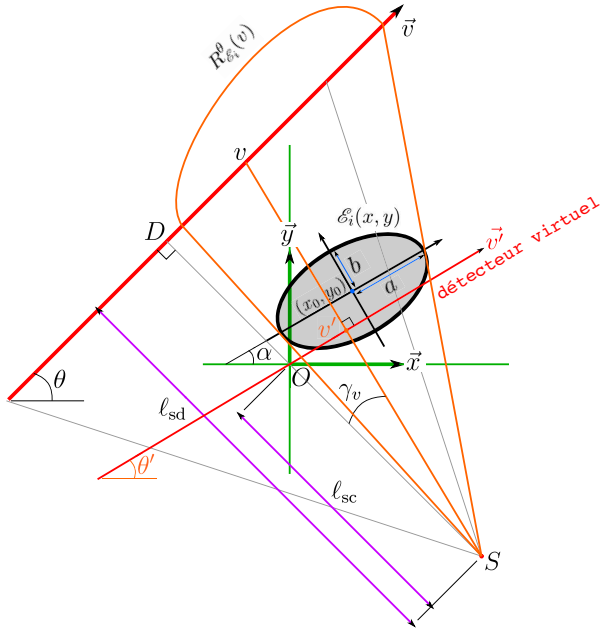


FIGURE 1.19: Schéma de la transformée de Radon $R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}(v)$ d'une ellipse $\mathscr{E}_i$ positionnée de manière quelconque (paramètres de positionnement x_0, y_0 et α non nuls), pour un mode de propagation conique des rayons X et une orientation θ du détecteur. Pour tout rayon de l'"éventail", il est possible de déterminer l'orientation θ' d'un détecteur virtuel et la position virtuelle v' d'impact du rayon sur ce détecteur, de telle sorte que son mode de propagation soit parallèle dans ce système équivalent.

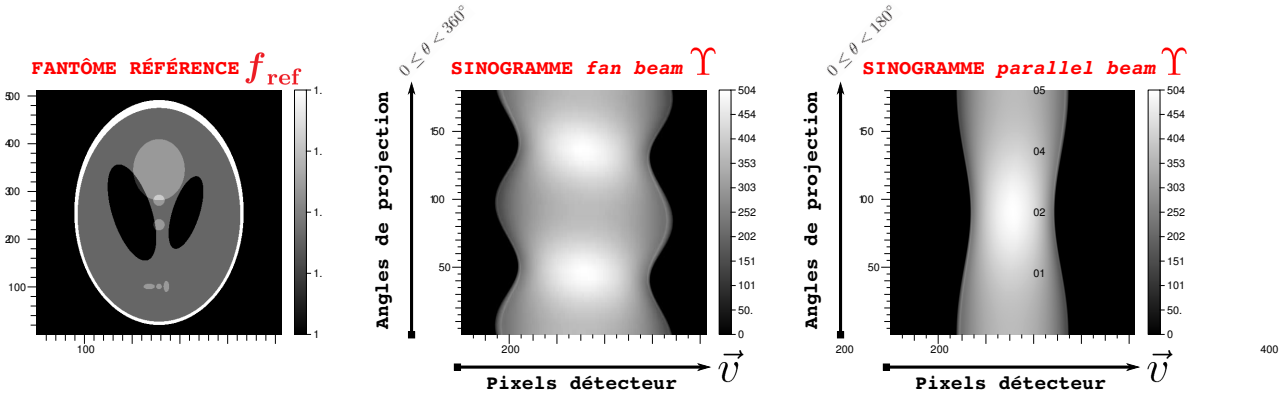


FIGURE 1.20: (À gauche) Fantôme de Shepp-Logan, noté $\boldsymbol{f_{\text{ref}}}$, simulé sur une grille de 512×512 pixels. (Au centre) Données sinogrammes Υ calculées analytiquement en géométrie *fan beam* avec 180 projections prise entre 0 et 360°. (À droite) Données sinogrammes Υ calculées analytiquement en géométrie *parallel beam* avec 180 projections prises entre 0 et 180°. Le détecteur linéaire est composé de 1024 pixels détecteur. La distance focale ℓ_{sd} est égale à 1536 pixels, et la distance *source-isocentre* est égale à 1000 pixels.

où $s = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ et $\varrho = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$. Plaçons-nous à présent dans un mode de propagation conique des rayons. D'après la figure 1.19 illustrant ce cas de figure, nous constatons que pour tout rayon de l'"éventail", nous pouvons déterminer l'orientation θ' d'un détecteur virtuel et la position virtuelle v' d'impact du rayon sur ce détecteur, de telle sorte que son mode de propagation soit parallèle dans ce système équivalent. Un simple changement de variables nous permet alors d'écrire l'expression de la projection $R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}$ dans ce mode de propagation :

$$R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}(v) = R^{\theta'-\alpha}_{\mathscr{E}}\left(v' - s\cos\left(\varrho - \theta'\right)\right) \tag{1.34}$$

où $\theta' = \theta - \gamma_v$, $\gamma_v = \tan^{-1}\left(\frac{v}{\ell_{\text{sd}}}\right)$, $v' = \dfrac{\ell_{\text{sc}} v}{\sqrt{\ell_{\text{sd}}^2 + v^2}}$, $s = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ et $\varrho = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$.

À partir de ces expressions, il nous faut finaliser le calcul du sinogramme Υ, *i.e.* de l'ensemble des projections $\mathbf{y}^{\theta} = (\mathrm{y}_1^{\theta}, \mathrm{y}_2^{\theta}, \ldots, \mathrm{y}_q^{\theta}, \ldots, \mathrm{y}_M^{\theta})$, sur un détecteur linéaire — nous sommes en 2-D spatiale, discrétisé par un ensemble de M pixels avec un certain pas Δ_d. Rappelons qu'aucun des pixels détecteur n'est ponctuel. Ces derniers "captent" les lignes de réponse sur leur support, *i.e.* sur la longueur d'un pas d'échantillonnage. Ainsi nous avons établi que chacun d'entre eux met en œuvre une réponse P_q. Ce dernier point sera repris en détail dans le chapitre 2, mais notre besoin actuel nous oblige à l'évoquer dès à présent. Ainsi, pour une projection à une orientation θ donnée, et un pixel détecteur q donné, nous devons intégrer l'expression de la transformée de Radon $R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}$ de chaque ellipse sur sa réponse P_q, autrement dit l'intégrer entre ses bornes puisque nous admettons que cette réponse est une *porte* :

$$\mathrm{y}_q^{\theta} = \sum_{i=1}^{N_{\mathscr{E}}} \int_{\Omega_d} P_q(v)\, R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}(v)\,\mathrm{d}v = \sum_{i=1}^{N_{\mathscr{E}}} \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} R^{\theta}_{\mathscr{E}_i}(v)\,\mathrm{d}v \tag{1.35}$$

Nous réalisons ce calcul intégral, pour chaque orientation θ et chaque pixel détecteur q, par un algorithme numérique : *la méthode d'intégration de Romberg* [Romberg, 1955], avec une précision suffisante.

Nous disposons donc d'une méthode pour simuler des projections analytiques statiques de notre fantôme, quelle que soit l'orientation θ du détecteur, et pour tout mode de propagation des rayons. La figure 1.20 montre l'image du fantôme et un exemple de données sinogrammes

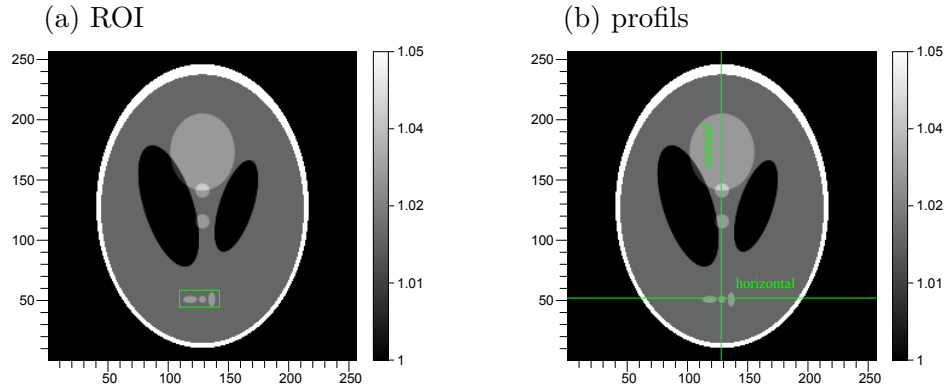


FIGURE 1.21: Identification sur le fantôme de Shepp-Logan d'une région d'intérêt ROI (a), définie pour la quantification de l'erreur de reconstruction, ainsi que de deux coupes (b), pour des observations plus précises.

ainsi simulées, pour les deux géométries de propagation des rayons, *fan beam* et *parallel beam*. Nous pouvons ainsi reconstruire notre objet simulé à partir de données exactes au sens du modèle mathématique de la tomographie, et qui plus est différent du modèle numérique de calcul des pseudo-données, *i.e.* le projecteur (*cf.* section 1.2.3). Le contraire, *i.e.* générer les données simulées avec le projecteur utilisé dans la reconstruction, reviendrait à effectuer des reconstructions à modèle exact. Cela fausserait le problème de la reconstruction puisque cela signifierait que nous pouvons résoudre exactement le système des équations tomographiques : c'est ce que l'on appelle le "*crime inverse*" [Wirgin, 2004, Kaipio and Somersalo, 2007]. Ne pas se placer dans ce cas idéal permet de se confronter à "la réalité du terrain", *i.e.* le traitement de données physiques, pour lequel le modèle exact de formation des mesures est inconnu, et ne peut être qu'approximé.

Dans l'optique d'effectuer des analyses précises des reconstructions de ce fantôme, nous définissons une région d'intérêt (ROI), qui englobe les trois petites structures inférieures du fantôme (*cf.* Fig. 1.21(a)), ainsi que deux coupes (*cf.* Fig. 1.21(b)), sur lesquels nous pourrons centrer nos observations.

1.2.6 Reconstructions avec les algorithmes de l'état de l'art

Nous allons illustrer dans cette section quelques reconstructions effectuées avec les algorithmes de l'état de l'art présentés dans la section 1.2.4. La figure 1.23 montre des reconstructions du fantôme de Shepp-Logan, de taille 256×256, réalisées avec les algorithmes SART et FBP, à partir de projections *fan beam* bruitées uniformément.

Pour l'algorithme SART, à nombre suffisant de projections, *i.e.* $T = 300$ (*cf.* Fig. 1.23(a,b)), nous pouvons observer l'influence du nombre d'itérations, avec le phénomène d'amplification des artéfacts dus au bruit et à la modélisation. Nous voyons alors les effets d'un problème mal posé et mal conditionné. Cela met en évidence l'apport que pourrait fournir une régularisation, qui permettrait de gommer ces artéfacts et ainsi mieux contrôler la convergence de l'algorithme vers une solution acceptable. Nous avons aussi tenté des reconstructions avec un nombre de projections plus faible, typiquement $T = 60$. Nous observons alors une qualité de reconstruction nettement dégradée car le problème devient encore plus mal posé (*cf.* Fig. 1.23(c)).

Là encore, nous verrons que l'apport de la régularisation dans notre approche améliorera grandement la qualité des reconstructions, même à faible nombre de projections, et en restant tout à fait cohérent avec la réalité.

Pour l'algorithme FBP, les reconstructions ont été réalisées par Laurent Desbat dans des

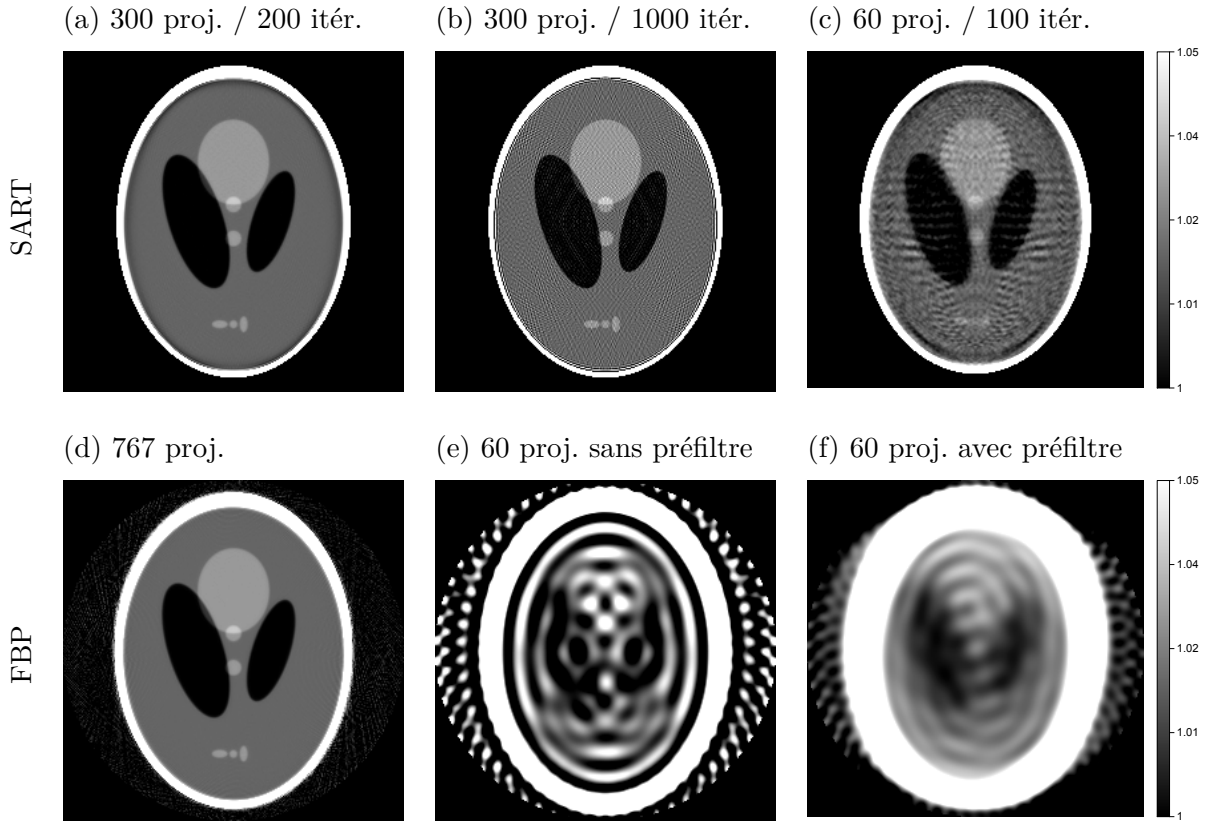


FIGURE 1.22: Reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan, à partir de projections *fan beam*. La première ligne présente des reconstructions avec SART avec 300 projections (a et b) et 60 projections (c). Un bruit gaussien uniforme a été ajouté, avec un rapport signal à bruit d'environ 20000 ($\approx 4{\times}10^8$ par pixel détecteur par projection). Le nombre d'itérations appliqué, donnant une bonne qualité de reconstruction, est indiqué. La seconde ligne correspond à des reconstructions par FBP dans des conditions relativement similaires, avec 767 projections (d), 60 projections sans préfiltre (e) et 60 projections avec préfiltre (f).

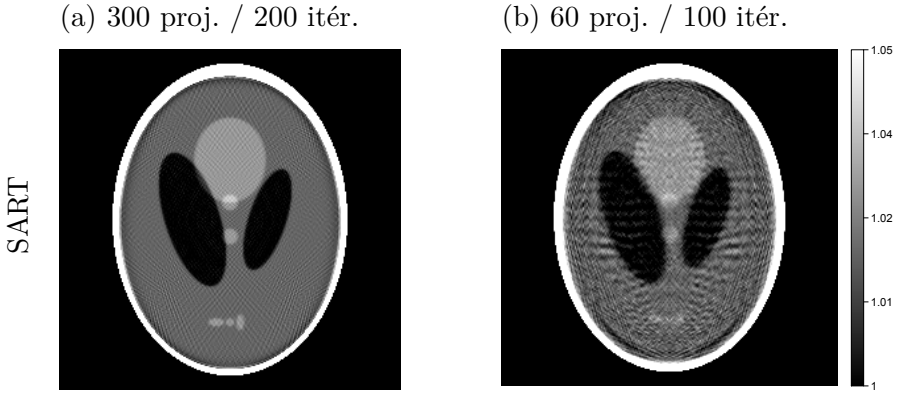


FIGURE 1.23: Reconstructions 256 × 256 du fantôme de Shepp-Logan avec la méthode SART, en "*crime inverse*", *i.e.* à partir de projections *fan beam* générées avec le projecteur numérique utilisé dans la reconstruction. Différents nombres de projections sont utilisés : 300 projections (a) et 60 projections (b). Le nombre d'itérations est indiqué.

conditions similaires, en adaptant la géométrie *fan beam*, notamment la taille du détecteur, pour assurer une mesure exacte du fantôme. La distance de la source au centre de rotation a été choisie comme le double du rayon du disque pleinement imagé par le détecteur (visible sur la Fig. 1.23(d,e,f)). Le détecteur est un arc de cercle centré sur la source ; l'échantillonnage angulaire des rayons pour une position donnée de la source est régulier en angle, sur 360°. Nous observons qu'une reconstruction d'excellente qualité peut être obtenue par cet algorithme, mais au prix d'un nombre de projections très important (*cf.* Fig. 1.23(d)). En revanche, une reconstruction à 60 projections (*cf.* Fig. 1.23(e)) montre une extrême dégradation de l'image avec cet algorithme, lequel n'est manifestement pas adapté à une telle parcimonie des données. L'application d'un préfiltre sur les projections par une fonction *porte* pour tenir compte du faible échantillonnage angulaire, *i.e.* filtrer le recouvrement du spectre[7], ne permet pas non plus d'éviter cette dégradation (*cf.* Fig. 1.23(f)).

Comme nous venons de voir que les artéfacts de reconstruction, engendrant un mauvais conditionnement du problème, pouvaient être le fait de l'imprécision du projecteur par rapport à la "réalité" du principe de projection, nous avons effectué des reconstructions à partir de projections générées par le modèle numérique lui-même. Nous nous plaçons donc dans la situation du *crime inverse* que nous avons évoqué dans la section 1.2.5. La figure 1.23 illustre alors ces reconstructions, effectuées avec la méthode SART, dans ces conditions et pour différents nombres de projections non bruitées. Nous observons alors que des artéfacts de reconstruction perdurent. Ainsi il semble que le mauvais conditionnement soit aussi intrinsèque à la projection tomographique elle-même, telle qu'on la conçoit, engendrant de nombreuses incertitudes et erreurs de reconstruction. Par exemple, il se peut que le conditionnement des valeurs propres de l'opérateur mette en jeu des "modes non vus", *i.e.* des valeurs propres nulles pour des vecteurs propres particuliers. Ainsi, même dans ce cas presque idéal, la nécessité d'une régularisation se fait sentir pour anéantir ces dégénérescences.

1.2.7 Approche inverse régularisée

La section précédente a mis en exergue les écueils des algorithmes de reconstruction standard, FBP et SART, non seulement en termes de gestion de l'amplification du bruit, mais aussi dans un cas extrême qu'est le faible nombre de projections. Cette dernière probléma-

7. *cf.* la théorie d'échantillonnage de Shannon que l'on énoncera dans le chapitre 2, section 2.1.1.

tique est l'un des points critiques que nous devons traiter pour élaborer notre approche en reconstruction tomographique dynamique (*cf.* chapitre 3).

Nous avons donc besoin d'élaborer une méthode de reconstruction plus robuste pour mieux traiter le problème, *i.e.* une approche inverse avec terme de régularisation, qui constituera, nous le verrons, un élément-clé de notre démarche. Nous nous plaçons donc dans le cadre des méthodes de reconstruction itératives. Nous allons redéfinir l'ensemble du problème inverse, de l'élaboration du critère à la méthode pour le minimiser.

Bien que premièrement destinée à l'application dynamique, l'objectif que nous nous sommes fixés d'obtenir des reconstructions de qualité en diminuant le nombre de projections possède également un intérêt pratique non négligeable : la diminuation de la dose de rayons X délivrée au patient. Il s'agit actuellement d'un thème ayant profité d'un regain d'intérêt, surtout depuis que des travaux théoriques ont mis en évidence les possibilités de l'extraction précise d'une information à partir de données parcimonieuses : nous voulons bien sûr parler du champ des problèmes inverses appelé *Compressed Sensing* [Candès et al., 2006, Pan et al., 2009, Candès and Wakin, 2008]. Ainsi l'éventualité de réduire le nombre de projections pour une qualité de reconstruction identique à l'état de l'art actuel devient largement envisageable. À cet effet, nous souhaitons aussi montrer dans ce travail qu'une approche inverse standard, si elle est correctement posée, possède déjà cette potentialité, et nous tenterons donc de le démontrer.

Critère global

Nous posons le problème inverse de la reconstruction d'un objet $\boldsymbol{f}$ appartenant à un certain domaine $\mathbb{X}$, comme la minimisation du critère global $\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}, \mu)$ suivant :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^{+} &= \underset{\boldsymbol{f}\in\mathbb{X}}{\arg\min}\ \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}, \mu) \\
&= \underset{\boldsymbol{f}\in\mathbb{X}}{\arg\min}\ \mathcal{J}_{\mathsf{data}}(\boldsymbol{f}) + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) \\
&= \underset{\boldsymbol{f}\in\mathbb{X}}{\arg\min}\ \sum_{\theta\in\Theta} \left\| \mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta}\cdot\boldsymbol{f} \right\|^{2}_{\mathbf{W}} + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) \\
&= \underset{\boldsymbol{f}\in\mathbb{X}}{\arg\min}\ \sum_{\theta\in\Theta} \left(\mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta}\cdot\boldsymbol{f} \right)^{\top} \cdot \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta}\cdot\boldsymbol{f} \right) + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f})
\end{aligned} \tag{1.36}$$

$\mathcal{J}_{\mathsf{data}}(\boldsymbol{f})$ constitue l'attache aux données, que nous définissons, à l'instar de la méthode SART, comme un critère des moindres carrés pondérés par une matrice $\mathbf{W}$. Le terme $\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f})$ constitue quant à lui le terme de régularisation, dont l'hyperparamètre μ règle le poids par rapport au terme d'attache aux données. Nous analyserons ce terme en détail dans la section 1.2.7.

Restons pour le moment sur la fidélité aux données $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}(\boldsymbol{f})$. La matrice $\mathbf{W}$ a pour rôle de pondérer le critère en fonction du niveau de bruit dans les données, à supposer que sa statistique soit connue. Typiquement, il s'agit donc de l'inverse de la matrice de covariance du bruit. En supposant que le terme de bruit $\boldsymbol{n}$ introduit dans la section 1.2.1 (*cf.* équation 1.11) a une espérance nulle, *i.e.* $\mathbb{E}[\boldsymbol{n}] = 0$, nous pouvons alors écrire :

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{n}}^{-1}, \quad \text{avec } \mathbf{C}_{\boldsymbol{n}} = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^{\top} \right] \tag{1.37}$$

Si l'on considère une statistique du bruit indépendante gaussienne non stationnaire, comme établie dans la section 1.2.2, la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{n}}$ est alors une matrice diagonale composée des variances de chaque donnée $\mathrm{y}^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$ indépendante :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{n}} \approx diag\left(\mathbb{V}[\boldsymbol{n}]\right) = diag\left(\sigma^2_{\boldsymbol{q}_{\text{noise}}}\right) \Rightarrow \mathbf{W} = diag\left(\frac{1}{\sigma^2_{\boldsymbol{q}_{\text{noise}}}}\right) \tag{1.38}$$

Ainsi chaque donnée $y^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$ aura un poids inversement proportionnel à la variance du bruit, ce qui aura pour effet de lui accorder plus ou moins de "confiance" dans le critère de reconstruction. Suivant ce formalisme, il est même possible de ne pas tenir compte de certaines données corrompues en leur associant virtuellement une variance infinie, *i.e.* en les pondérant par 0.

La pondération de $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}(\boldsymbol{f})$ par la matrice $\mathbf{W}$ nous servira dans les chapitres suivants, lorsque nous génèrerons des données simulées avec un modèle de bruit réaliste. Dans ce chapitre, les reconstructions qui suivront auront été effectuées avec un bruit gaussien uniforme, afin qu'elles puissent être comparées aux reconstructions par les algorithmes FBP et SART (*cf.* section 1.2.6), dans des conditions d'expérience honnêtes, puisque ces algorithmes ne sont pas prévus pour gérer un bruit non stationnaire. Dans ce cadre, la matrice $\mathbf{W}$ est alors la matrice identité.

Pour minimiser le critère convexe de l'équation 1.36, nous utilisons un algorithme basé sur une méthode de type Quasi-Newton : l'algorithme VMLM (*Variable Metric Limited Memory*) [Nocedal, 1980], basée sur la méthode BFGS. Dans un algorithme d'optimisation basé sur la méthode de Newton, la direction de descente $\boldsymbol{p}$ est déterminée à partir du développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction coût $\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}$ à minimiser :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{p}) = \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{p}^T \nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^T \cdot \nabla^2 \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{p} + o(\|\boldsymbol{p}\|^2) \tag{1.39}$$

où $\nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}$ symbolise le gradient du critère $\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}$. Si le critère $\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}$ est convexe et admet un minimum global, il est possible de trouver un $\boldsymbol{f}^+$ tel que $\nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}^+) = 0$. Ainsi on cherche $\boldsymbol{p}$ tel que :

$$\nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{p}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \approx -\left(\nabla^2 \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f})\right)^{-1} \nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}) = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}) \tag{1.40}$$

où $\mathbf{H}$ est la matrice Hessienne du critère $\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}$. Dans un problème à grandes dimensions, le calcul de la Hessienne peut ne pas être trivial. De plus, les conditions de convergence d'un algorithme de descente impose que $\boldsymbol{p}^\top \cdot \nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}} < 0$, ce qui d'après la relation 1.40 revient à imposer que $\mathbf{H}$ soit définie positive. Cela n'est pas forcément le cas suivant le critère optimisé. Enfin, le stockage de cette matrice, du fait de sa très grande dimension pour les problèmes qui nous intéressent, est impossible. C'est pourquoi la méthode BFGS, du nom de ses quatre auteurs indépendants Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno, propose d'approximer l'inverse de la Hessienne $\mathbf{H}^{-1}$ au fur et à mesure des itérations (i), en construisant une matrice définie positive $\mathbf{B}^{(i)}$, mise à jour de la façon suivante :

$$\mathbf{B}^{(i+1)} = \mathbf{B}^{(i)} + \frac{\boldsymbol{s}^{(i)}{\boldsymbol{g}^{(i)}}^\top \mathbf{B}^{(i)} + \mathbf{B}^{(i)}\boldsymbol{g}^{(i)}{\boldsymbol{s}^{(i)}}^\top}{{\boldsymbol{g}^{(i)}}^\top \boldsymbol{s}^{(i)}} + \left(1 + \frac{{\boldsymbol{g}^{(i)}}^\top \mathbf{B}^{(i)} \boldsymbol{g}^{(i)}}{{\boldsymbol{g}^{(i)}}^\top \boldsymbol{s}^{(i)}}\right) \frac{\boldsymbol{s}^{(i)}{\boldsymbol{s}^{(i)}}^\top}{{\boldsymbol{g}^{(i)}}^\top \boldsymbol{s}^{(i)}} \tag{1.41}$$

avec :

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}^{(i)} = \boldsymbol{f}^{(i+1)} - \boldsymbol{f}^{(i)} \\ \boldsymbol{g}^{(i)} = \nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}^{(i+1)}) - \nabla \mathcal{J}_{\mathsf{cost}}(\boldsymbol{f}^{(i)}) \\ \mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I} \end{cases}$$

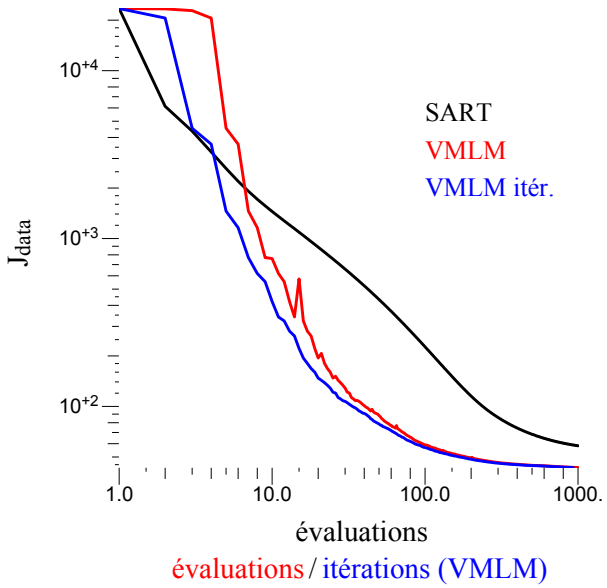


FIGURE 1.24: Convergence du terme d'attache aux données $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}$ (*cf.* équation 1.36), en fonction du nombre d'évaluations de la fonction coût, *i.e.* du nombre d'occurences de calculs du couple projecteur tomographique direct/adjoint ($\mathbf{R}^\top\mathbf{R}$), d'une reconstruction du fantôme de Shepp-Logan 256×256 à partir 300 projections, avec les algorithmes SART (noir) et VMLM (rouge). Dans les deux cas, on n'a minimisé que l'attache aux données, sans ajout de régularisation. Dans une évaluation, le projecteur tomographique — direct ou transposé — est calculé deux fois pour SART ainsi que pour VMLM. La courbe bleue montre, à titre indicatif, l'évolution de la convergence en fonction du nombre d'itérations pour l'algorithme VMLM.

Nocedal, en 1980 [Nocedal, 1980], développa l'algorithme VMLM, dont l'évolution par rapport à la méthode originelle est de ne stocker quelques vecteurs $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{g}$ de m itérations antérieures, représentatifs pour le calcul de l'approximation $\mathbf{B}^{(i)}$ sans la stocker directement. Ainsi l'algorithme devient utilisable pour les problèmes à très grandes dimensions, où la matrice $\mathbf{B}^{(i)}$ serait trop volumineuse.

La figure 1.24 compare les courbes de convergence du terme d'attache aux données $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}$ (*cf.* équation 1.36), en fonction du nombre d'évaluations de la fonction coût, sur des reconstructions du fantôme de Shepp-Logan, avec l'algorithme SART (courbe noire) et l'algorithme VMLM (courbe rouge) sans régularisation. Ces courbes mettent en évidence une plus grande rapidité de convergence pour l'algorithme VMLM, malgré un démarrage plus lent, pour un temps de calcul équivalent, sachant que dans une évaluation, quel que soit l'algorithme, le projecteur tomographique — principal "chronophage" — est calculé deux fois. Pour SART, chaque itération met en œuvre une seule évaluation, alors que pour VMLM, plusieurs évaluations peuvent avoir lieu (*cf.* courbe bleue, particulièrement au démarrage de l'algorithme, où la recherche d'une première direction pertinente demande plus de calculs pour être validée.

Régularisation

Le rôle du terme de régularisation $\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f})$ dans le critère 1.36 est d'apporter une information a priori sur l'objet à reconstuire. Celle-ci doit permettre, comme nous l'avons déjà évoqué, de contrôler le phénomène d'amplification des hautes fréquences dans l'image reconstruite, imputables au bruit, en favorisant des solutions globalement lisses. Elle permet aussi de pallier l'insuffisance éventuelle des projections, source de dégénérescence du problème. Ainsi la reconstruction devient alors un compromis entre un bon accord aux données et une solution plausible compte tenu de ce que l'on connait a priori de l'objet à reconstruire.

En tomodensitométrie, l'objet en question est une carte d'atténuation des tissus du patient

imagé, *i.e.* une image anatomique 3-D. Ces tissus forment des zones relativement continues par morceaux. En termes plus mathématiques, le spectre de l'image à reconstruire met principalement en évidence des fréquences spatiales basses, les hautes fréquences n'étant que le signe de frontières entre tissus. Le fantôme de Shepp-Logan (*cf.* Fig. 1.20), qui se veut représentatif, dans une moindre mesure, de l'anatomie typique d'une image tomodensitométrique, atteste de ce constat.

En première analyse, la régularisation doit donc tendre à lisser l'image reconstruite. En tomographie, on utilise fréquemment une simple régularisation quadratique sur le gradient spatial de l'image — régularisation de type Tikhonov :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \|\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{f}\|_2^2 = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} (\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}^2\right]^2 \tag{1.42}$$

où $\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}}$ est l'opérateur *gradient* sur le voxel $\boldsymbol{k}$, composé par les $\mathbf{D}_p$ qui sont des opérateurs linéaires aux différences finies suivant chaque dimension p, définis pour chaque voxel $\boldsymbol{k}$:

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} (\mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} \\ \vdots \\ (\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} \\ \vdots \\ (\mathbf{D}_n \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} - f_{k_1+1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} \\ \vdots \\ f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} - f_{k_1,k_2,\ldots,k_p+1,\ldots,k_n} \\ \vdots \\ f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} - f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n+1} \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

Notons que les expressions ci-dessus sont généralisées à n dimensions spatiales. Les calculs des différences finies sur les bords de l'image sont gérés en considérant des valeurs nulles en dehors du support.

Ce type de régularisation possède l'avantage d'engendrer un critère $\mathcal{J}_{\mathsf{cost}}$ quadratique, dont l'optimisation est alors aisée et peut converger rapidement.

Nous étudions succinctement le comportement d'une telle régularisation sur des reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan à partir de 300 projections bruitées uniformément. Nous avons appliqué une gamme de six valeurs de l'hyperparamètre μ (*cf.* équation 1.36), logarithmiquement équiréparties, allant de la "sur-régularisation" μ_{max} (n° 1) à la "sous-régularisation" (n° 6) μ_{min}. Pour chaque reconstruction, nous avons laissé itérer l'algorithme jusqu'à un nombre d'itérations assurant une bonne convergence. La figure 1.25 expose ces six reconstructions. Nous y observons alors l'effet lissant, fonction du poids appliqué, sur la reconstruction, qui permet d'obtenir une image visuellement satisfaisante, ôtée des artéfacts que l'on pouvait voir apparaître sur les reconstruction SART ou FBP non régularisées (*cf.* Fig. 1.23). Il est ainsi naturel de constater qu'à niveau de régularisation faible, les artéfacts en question tendent à ré-apparaître. L'image encadrée en bleu sur la figure 1.25 correspond à ce qui serait pour nous la reconstruction de meilleure qualité visuelle. En effet, nous observons un bon compromis entre une bonne récupération des détails des structures, et des artéfacts bien atténués. Pour renforcer cette observation, la figure 1.26 illustre un agrandissement des reconstructions sur la région d'intérêt ROI définie dans la section 1.2.5 (*cf.* Fig. 1.21(a)). Nous y voyons alors la reconstruction pour laquelle les trois petites structures peu contrastées offrent une résolution apparente de qualité. Pour un poids de régularisation supérieur, le rendu est clairement trop lisse, tandis que pour un poids inférieur, le bruit commence à être amplifié. Néanmoins, comme attendu du comportement d'une régularisation quadratique, une image

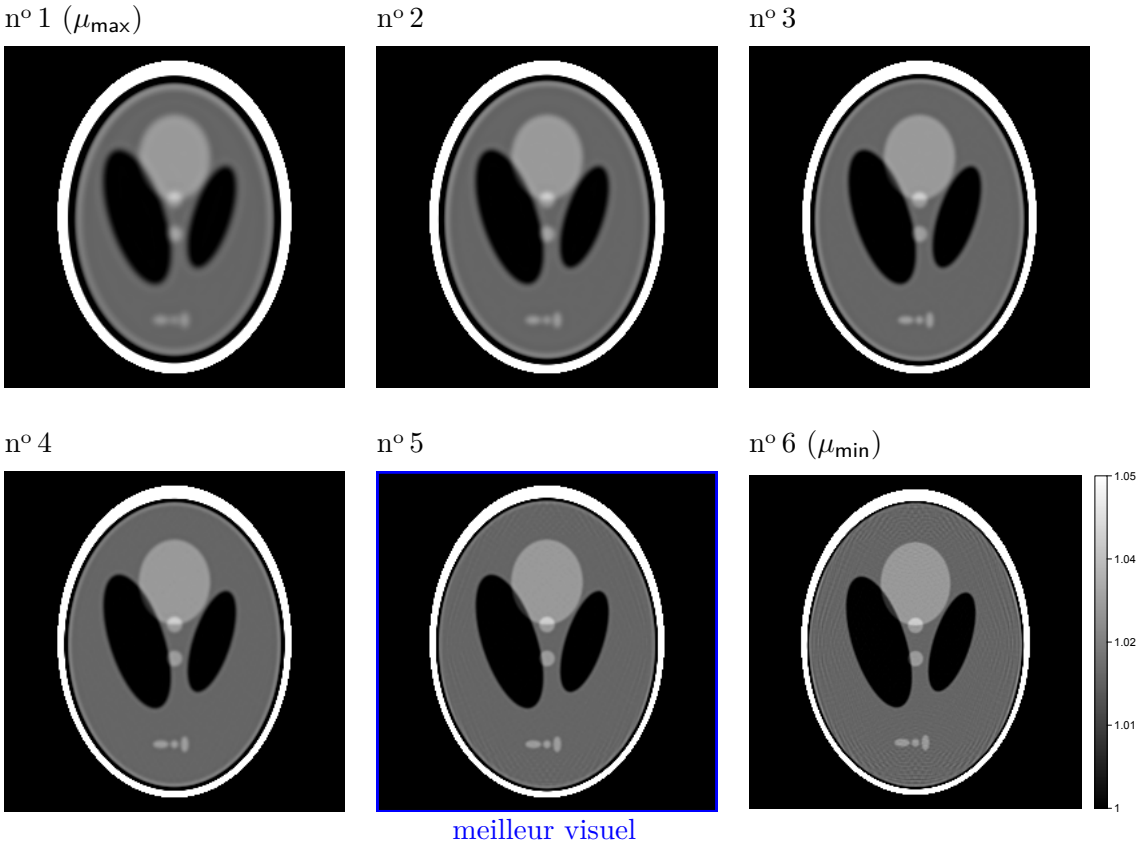


FIGURE 1.25: Reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan avec notre approche inverse avec régularisation quadratique, *i.e.* à partir de 300 projections *fan beam*. Un bruit gaussien uniforme a été ajouté, avec un rapport signal à bruit d'environ 20000 ($\approx 4 \times 10^8$ par pixel détecteur par projection). Les reconstructions sont numérotées en fonction du niveau de régularisation appliqué — le poids μ, le n° 1 correspondant au poids le plus fort μ_{max}, et le n° 6 au plus faible μ_{min}. La meilleure reconstruction au sens de la meilleure qualité visuelle globale est encadrée en bleu.

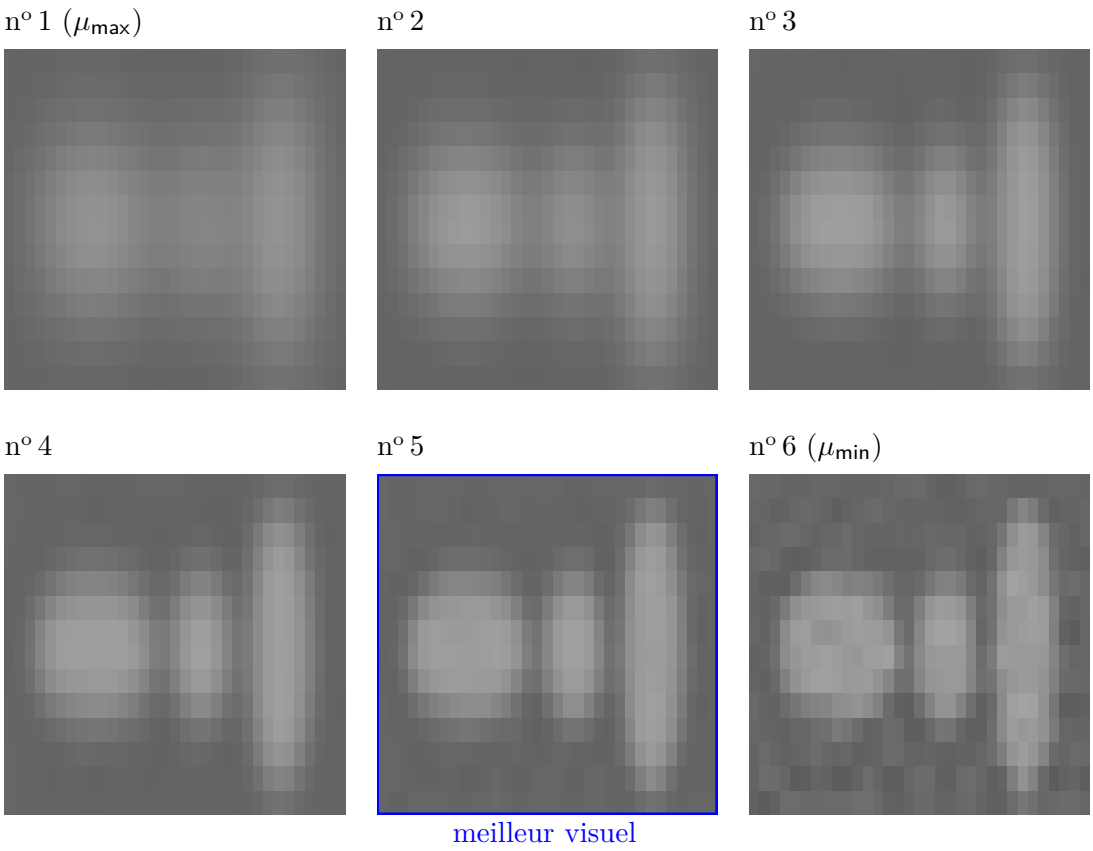


FIGURE 1.26: Reconstructions de la figure 1.25 (légende identique), agrandie sur la région d'intérêt ROI (*cf.* Fig. 1.21(a)).

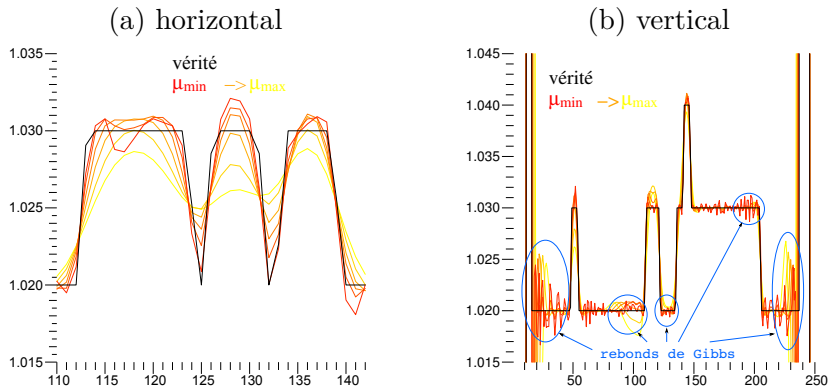


FIGURE 1.27: Visualisation des profils de coupes horizontal (a) et vertical (b), identifiés sur la figure 1.21(b), pris sur les reconstructions de la figure 1.25, pour toute la gamme d'hyperparamètres de régularisation, allant progressivement de la couleur jaune à la couleur rouge, à poids décroissant — de μ_{max} à μ_{min}. Le profil de référence est de couleur noire. Le phénomène de rebonds de Gibbs est identifié en bleu sur le graphe (b).

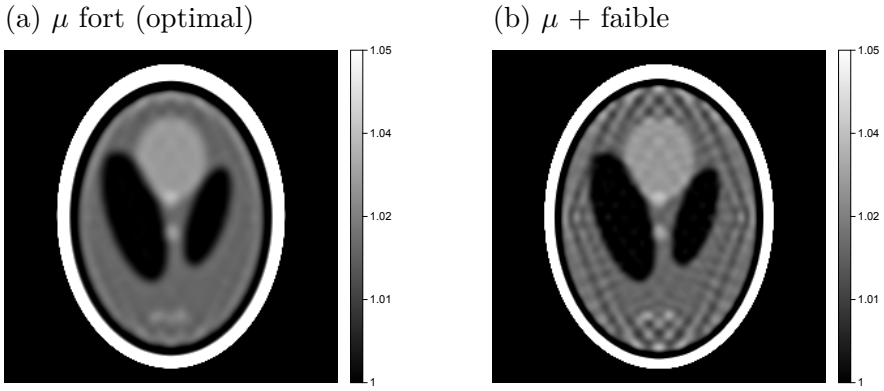


FIGURE 1.28: Reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan avec notre approche inverse avec régularisation quadratique, *i.e.* à partir de 100 projections *fan beam* bruitées uniformément. (a) Image reconstruite avec le meilleur poids de régularisation possible (fort). (b) Image reconstruite sous-régularisée.

bien régularisée n'en demeure pas moins relativement floue, ce qui pourrait être problématique pour la discrimination des petites structures rapprochées et/ou peu contrastées.

La figure 1.27(a) montre le profil horizontal défini dans la figure 1.21(b)), cadré sur la ROI, pour chaque poids de régularisation, de μ_{max} (en jaune) à μ_{min} (en rouge). L'effet de la régularisation quadratique y est bien visible. De même, la figure 1.27(b) affiche les reconstructions sur le profil vertical (*cf.* Fig. 1.21(b)), rendant compte de structures plus grosses et mieux contrastées. Là, les reconstructions montrent un phénomène de rebonds à proximité des transitions abruptes (entourés en bleu sur la figure). Il s'agit d'un phénomène de type Gibbs, typique pour des régularisations quadratiques, qui est dû à l'approximation extrême d'un bord franc, non dérivable — fréquence infinie, par une fonction lisse donc dérivable — bornée spectralement. Ce type d'artéfact limite alors également l'intérêt d'une telle régularisation, particulièrement lorsqu'il s'agit de reconstruire des objets continus par morceaux.

Pour terminer cette étude, la figure 1.28 illustre le meilleur résultat que nous ayons obtenu dans des reconstructions à 100 projections, avec une régularisation quadratique, où l'on voit que le manque de projections a obligé à sur-régulariser pour contrôler des artéfacts beaucoup trop importants, amplifiant les rebonds déjà observés. Augmenter le poids de régularisation en-

gendrerait alors un lissage trop fort de l'image, tandis qu'un poids de régularisation légèrement plus faible (*cf.* Fig. 1.28(b)) ne fait que dégrader complètement la qualité. Une régularisation quadratique n'est donc pas une solution idéale dans nos conditions de reconstruction, *i.e.* avec un faible nombre de projections.

C'est la raison pour laquelle nous souhaitons trouver une régularisation préservant la nature des objets à reconstruire, *i.e.* la continuité par morceaux délimités par des bords assez francs. Nous nous intéressons alors à un type de régularisation, appelée *variation totale* (TV). [Rudin et al., 1992], qui consiste à minimiser la racine carrée de la norme L_2 du gradient de l'image $\boldsymbol{f}$. Cela a pour effet de favoriser des solutions parcimonieuses dans l'espace du gradient de l'image, *i.e.* des solutions continues par morceaux où le gradient n'est non nul qu'aux frontières entre les différents "aplats".

L'expression de $\mathcal{TV}(f)$ (sous sa forme théorique), généralisée à n dimensions, s'écrit :

$$\mathcal{TV}(f) = \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} [\nabla_p f(\boldsymbol{x})]^2\right]^{1/2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right)^2 (\boldsymbol{x})\right]^{1/2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.44}$$

où ∇ correspond au gradient global de la fonction f :

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_1 f(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \nabla_p f(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \nabla_n f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right)(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

Très usitée dans le domaine du débruitage d'image [Rudin et al., 1992, Vogel and Oman, 1996, Vogel and Oman, 1998], la variation totale est aussi utilisée en reconstruction tomographique. En effet, son principe de minimisation d'une sorte de norme non quadratique — en quelque sorte la valeur absolue du gradient — dans un espace parcimonieux — le gradient spatial de l'image tomodensitométrique — la rend proche des concepts du *Compressed Sensing*, même si elle leur est largement antérieure. Ainsi l'intérêt pour cette nouvelle théorie, dans le cadre de la reconstruction à faible nombre de projections, relance en quelque sorte l'utilisation de la variation totale comme application directe de celle-ci [Sidky et al., 2006, Sidky and Pan, 2008, Pan et al., 2009] [8]. Ainsi nous choisissons logiquement cette régularisation dans notre critère de reconstruction.

Dans sa version numérique, en reprenant les notations de la régularisation quadratique (*cf.* équation 1.42), nous pouvons alors implanter la variation totale comme suit :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \|\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{f}\|_2 = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} (\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}^2\right]^{1/2} \approx \mathcal{TV}(f) \tag{1.46}$$

8. Prenons tout de même garde à ne pas croire que l'utilisation de la variation totale en tomographie est aussi récente que le *Compressed Sensing*. Il n'en est rien, et des travaux sur le sujet ont existé avant [Panin et al., 1999], dont nous n'avons malheureusement pas fait la revue détaillée dans ce travail.

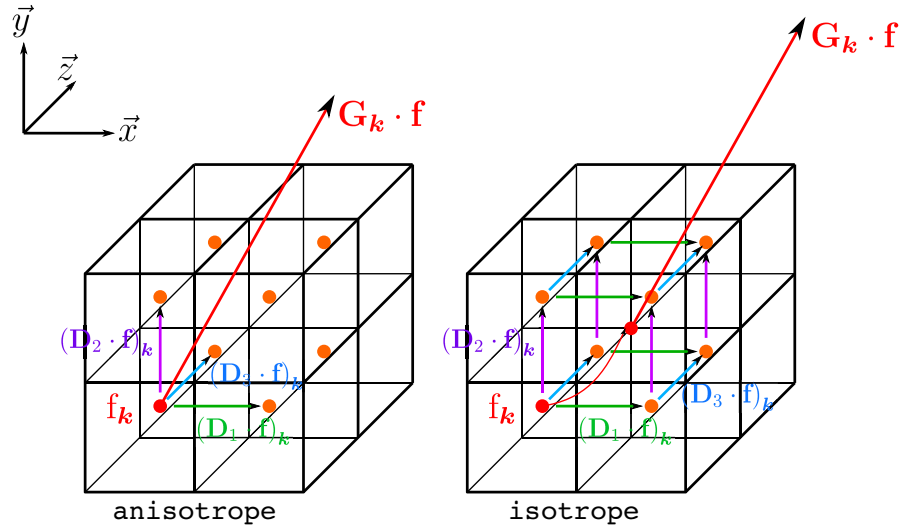


FIGURE 1.29: Calculs anisotrope et isotrope des différences finies pour le calcul du gradient spatial 3-D, pour la régularisation par variation totale. Dans le cas anisotrope, le gradient $(\mathbf{G_k} \cdot \boldsymbol{f})$ dépend de l'orientation du repère. Dans le cas isotrope, le gradient $(\mathbf{G_k} \cdot \boldsymbol{f})$ n'en dépend pas et peut être vu comme une estimation du gradient du voxel $\boldsymbol{k} + \mathbf{(1/2)}$.

Une régularisation de ce type posséde une singularité partout où $\nabla \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. En effet, ramenée à une dimension, la fonction $\mathcal{TV}$ est la valeur absolue, non dérivable en 0. Afin de lever cette singularité et pouvoir utiliser notre algorithme d'optimisation convexe lisse, nous introduisons un hyperparamètre ϵ de relaxation. L'équation 1.46 devient alors :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} (\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{1.47}$$

Typiquement, le paramètre ϵ doit être très inférieur au contraste minimal de l'image. Ainsi, un gradient de valeurs supérieur à ce seuil est pénalisé linéairement, à l'instar de ce que fait la variation totale, tandis que les contrastes inférieurs sont lissés quadratiquement. Le comportement de cette régularisation se rapproche donc d'une régularisation de type L_2L_1, comme la pénalisation de Huber, déjà utilisée en tomographie [Elbakri and Fessler, 2002, Chlewicki et al., 2004, Wang et al., 2009].

Les opérateurs différentiels $\mathbf{D}_p$ peuvent être implantés simplement suivant les expressions de l'équation 1.43. Nous proposons cependant une manière d'implanter ces opérateurs avec un calcul du gradient plus isotrope et plus robuste au bruit, engendrant une meilleure corrélation dans le voisinage des voxels [Getreuer, 2012]. Nous calculons une moyenne quadratique des différences finies dans un voisinage de 2^n voxels adjacents, comme l'illustre en 3-D spatiale la figure 1.29. Ces opérateurs isotropes sont donc définis, ici en 3-D, comme suit :

$$(\mathbf{D}_x \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,k_3} - f_{k_1+1,k_2,k_3} \\ f_{k_1,k_2+1,k_3} - f_{k_1+1,k_2+1,k_3} \\ f_{k_1,k_2,k_3+1} - f_{k_1+1,k_2,k_3+1} \\ f_{k_1,k_2+1,k_3+1} - f_{k_1+1,k_2+1,k_3+1} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_y \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,k_3} - f_{k_1,k_2+1,k_3} \\ f_{k_1+1,k_2,k_3} - f_{k_1+1,k_2+1,k_3} \\ f_{k_1,k_2,k_3+1} - f_{k_1,k_2+1,k_3+1} \\ f_{k_1+1,k_2,k_3+1} - f_{k_1+1,k_2+1,k_3+1} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_z \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,k_3} - f_{k_1,k_2,k_3+1} \\ f_{k_1+1,k_2,k_3} - f_{k_1+1,k_2,k_3+1} \\ f_{k_1,k_2+1,k_3} - f_{k_1,k_2+1,k_3+1} \\ f_{k_1+1,k_2+1,k_3} - f_{k_1+1,k_2+1,k_3+1} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

Cette implantation engendre néanmoins un surcroît d'opérations. En effet, au lieu de n différences finies à calculer par voxel (en n-D), cette méthode requiert cette fois le calcul de $n \times 2^{n-1}$ différences finies. L'expression de la régularisation 1.47 devient alors, compte tenu du fait que les $(\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}$ sont à présent des vecteurs :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} \left\| \frac{1}{2^n} \cdot (\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} \right\|_2^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{1.49}$$

Le facteur $\dfrac{1}{2^n}$ sert à moyenner les différences finies des vecteurs $(\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}$.

D'intéressants travaux sur la variation totale ont été réalisés pour étudier son comportement [Strong and Chan, 2003] en fonction du poids μ donné par rapport au terme d'attache aux données. Il y a été montré qu'à poids μ croissant, l'image régularisée tend vers la fonction constante dont la valeur est la moyenne de l'image "vraie" attendue. Ainsi la variation totale va avoir tendance à localement "aplatir" les contrastes vers la valeur moyenne locale. L'amplitude de cet aplatissement dépend naturellement du poids μ, mais aussi de la taille de la structure. Strong & Chan ont déterminé analytiquement la valeur de ce biais δ, dans une application simple de débruitage d'images 2-D par TV, et pour des structures simples, à symétrie radiale, comme des disques :

$$\delta \propto \frac{\mu}{\sigma_{\mathsf{scale}}} \tag{1.50}$$

où σ_{scale} est défini comme le rapport de l'aire de la structure à son périmètre en 2-D, et comme le rapport de son volume à sa surface en 3-D. Les hypothèses faites sont que le bruit doit être connu, centré, uniforme, et doit aussi être à symétrie radiale. De plus la valeur de μ doit être suffisamment forte pour éliminer complètement le bruit. Ainsi, le "taux d'aplatissement" est inversement proportionnel à la taille de la structure. Les très petites structures, comme le bruit, seront donc fortement affectées par cette régularisation, tandis que les structures de plus grande taille seront préservées. Bien entendu, cela va dépendre du poids de la régularisation μ appliqué à la reconstruction. Ce poids étant global, les structures seront affectées en fonction de leur taille. Il sera donc plus judicieux d'adapter ce poids sur les petites structures, sachant que les grandes structures n'en seront alors pas perturbées.

Nous allons voir si ce comportement de la variation totale s'applique aussi dans le cadre de la reconstruction tomographique. C'est ce que nous étudions dans la section suivante, de façon empirique, sur des reconstructions mettant en jeu un faible nombre de projections.

1.2.8 Mise à l'épreuve de notre approche à nombre de projections faible

Testons à présent notre algorithme de reconstruction par approche inverse régularisée sur le fantôme de Shepp-Logan, en utilisant de moins en moins de projections afin d'éprouver sa limite de reconstructibilité. Nous pourrons ainsi étudier le comportement de la régularisation par variation totale en conditions extrêmes, *i.e.* lorsque le manque de données rend le problème très mal posé. Notre objectif est de montrer que dans ce contexte de données parcimonieuses, une reconstruction de qualité reste possible.

Nous avons effectué des reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan à partir de 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10 et 5 projections calculées analytiquement suivant la démarche présentée dans la section 1.2.5, et bruitées uniformément avec le rapport signal à bruit de 20000, déjà utilisé dans les reconstructions précédentes (*cf.* section 1.2.6), et correspondant à environ 4×10^8 photons par pixel détecteur par projection. À chacune de ces configurations, nous avons appliqué une gamme de dix valeurs de l'hyperparamètre μ (*cf.* équation 1.36), logarithmiquement équiréparties, allant de la "sur-régularisation" μ_{max} (n° 1) à la "sous-régularisation" (n° 10) μ_{min}[9]. Pour chaque reconstruction, le critère d'arrêt d'itération était basé sur la stabilisation du résultat, assurant une bonne convergence[10]. Typiquement, cela nous a amenés à imposer 5000 itérations, ce qui est amplement suffisant. C'est un nombre certes extrêmement important en regard du nombre d'itérations typique dans les algorithmes itératifs standard (de l'ordre de 50 pour SART). Des raffinements sont bien sûr possibles pour accélérer la convergence de ce type d'algorithmes, *e.g.* le préconditionnement, mais ce champ n'a pas été l'objet de nos travaux. Ainsi nous nous plaçons malgré tout à convergence de nos algorithmes, pour assurer des reconstructions optimales d'après notre approche.

Nous avons également réalisé le même jeu de reconstructions, mais cette fois-ci à partir de projections générées par le modèle numérique utilisé dans notre critère, *i.e.* en mode "*crime inverse*".

Reconstructions à 100 projections analytiques

Intéressons-nous dans un premier temps aux reconstructions à 100 projections, afin d'étudier le comportement de la variation totale en fonction du poids qui lui est donné par μ. La figure 1.30 expose les dix reconstructions de la régularisation la plus forte μ_{max} à la plus faible μ_{min}. Nous observons globalement l'effet de la régularisation sur les reconstructions, avec comme premier constat une excellente qualité de reconstruction des bords francs du fantôme, due à l'utilisation de la variation totale.

Celle-ci a extrêmement bien géré ces artéfacts et a réellement permis d'obtenir la solution continue par morceaux escomptée, en comparaison des reconstructions à régularisation quadratique étudiées dans la section 1.2.7. Nous verrons dans l'observation de profils de coupes qu'un phénomène de rebonds de Gibbs est néanmoins apparent, particulièrement sur les transitions à très fort contraste. Nous pouvons déjà observer le phénomène d'aplatissement des structures, en fonction du poids de régularisation, évoqué dans la section 1.2.7. Ainsi, à fort μ, les petites structures, et plus précisément les frontières entre celles-ci, s'atténuent pour former une tache moins contrastée par rapport au fond. À mesure que μ diminue, les structures apparaissent de plus en plus nettement, jusqu'à un point où la régularisation devient trop faible, *i.e.* où le phénomène d'amplification des artéfacts de reconstruction — bruit, données, modélisation —

9. Nous ne spécifions pas les valeurs numériques car celles-ci n'ont que peu d'intérêt en soi, notamment car elles dépendent du niveau de bruit. C'est plutôt la "force" de régularisation qu'elles impliquent qui compte. Nous nous contenterons donc d'identifier les reconstructions par leur numéro, fonction du poids de régularisation pour chacune.

10. À partir du moment où les variations dans l'image reconstruite sont complètement négligeables.

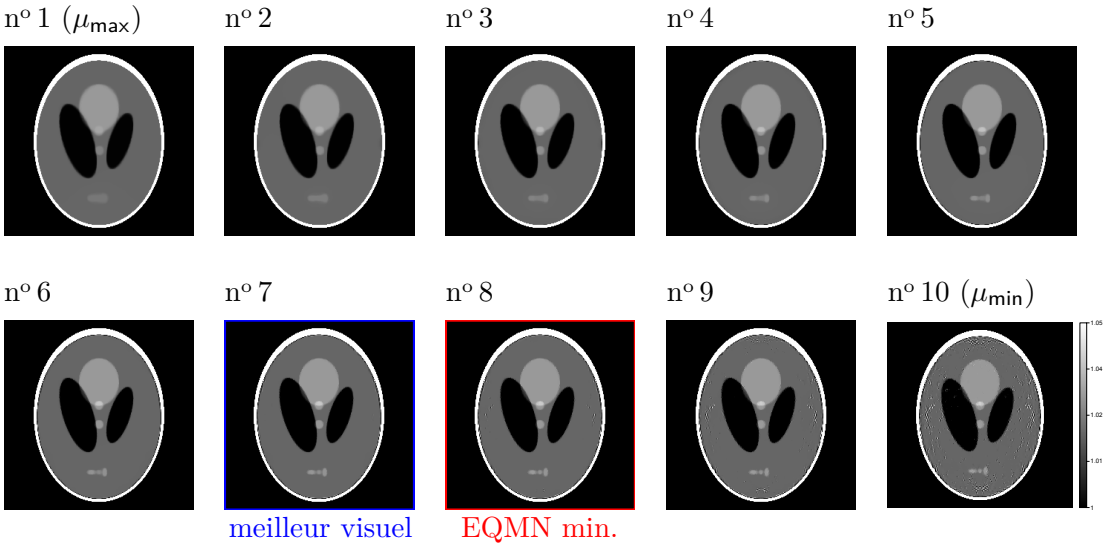


FIGURE 1.30: Reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan avec notre approche inverse régularisée, *i.e.* à partir de 100 projections *fan beam*. Un bruit gaussien uniforme a été ajouté, avec un rapport signal à bruit d'environ 20000. Les reconstructions sont numérotées en fonction du niveau de régularisation appliqué — le poids μ, le n° 1 correspondant au poids le plus fort $\mu_{\max}$, et le n° 10 au plus faible $\mu_{\min}$. La meilleure reconstruction au sens de l'erreur EQMN minimale dans la région d'intérêt choisie (*cf.* Fig. 1.21(a)) est encadrée en rouge, celle au sens de la meilleure qualité visuelle globale est encadrée en bleu.

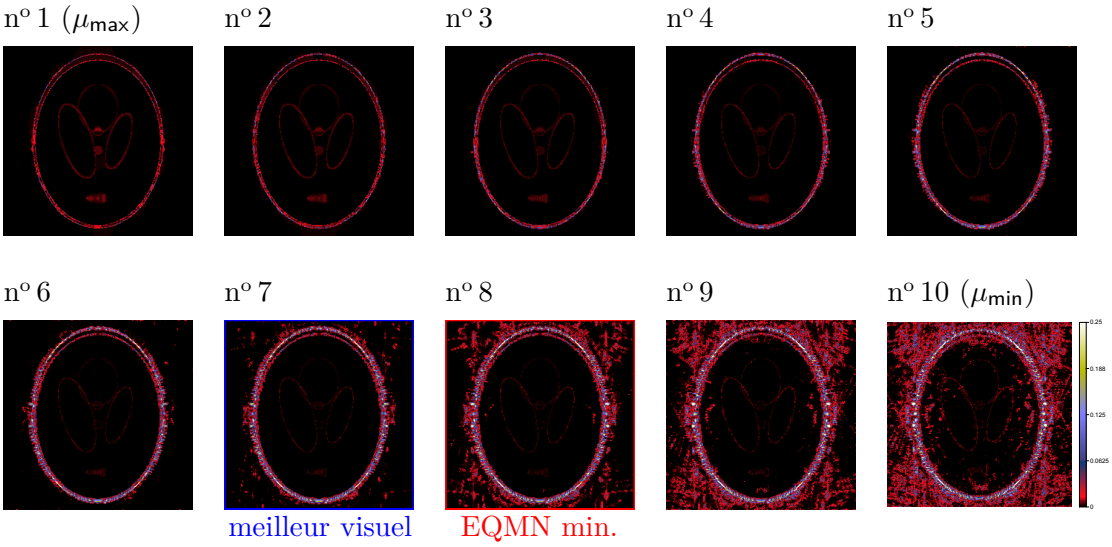


FIGURE 1.31: Cartes d'erreur (valeur absolue de la différence) des reconstructions de la figure 1.30 (légende identique).

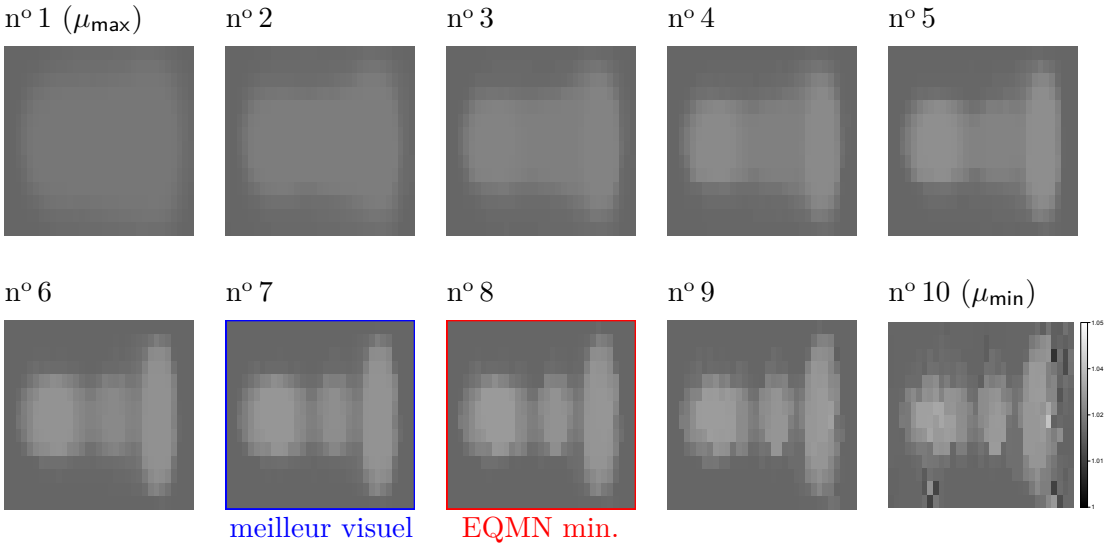


FIGURE 1.32: Reconstructions de la figure 1.30 (légende identique), agrandie sur la région d'intérêt ROI (*cf.* Fig. 1.21(a)).

prend le dessus. Ce dernier constat est bien visible sur les cartes d'erreur de la figure 1.31. On constate, sur ces dernières images, que des erreurs fortes sont systématiquement apparentes sur les bords des structures, signe que la qualité de reconstruction est aussi tributaire de la résolution effective que l'on est capable d'atteindre. Or la modélisation de bords abruptes est extrêmement complexe, voire impossible, car elle correspond à la fréquence infinie dans le spectre de l'image ; nous en parlerons dans le chapitre 2.

La figure 1.32 permet d'observer un agrandissement des reconstructions précédentes (*cf.* Fig. 1.30) sur la région d'intérêt ROI définie dans la section 1.2.5 (*cf.* Fig. 1.21(a)), qui étayent nos observations sur le comportement de la variation totale, à savoir, à poids μ croissant, l'aplatissement progressif des trois structures présentes dans cette région. Nous voyons aussi nettement que la plus petite structure, au sens du rapport (aire/périmètre) (*cf.* équation 1.50), au centre, est la première affectée lorsque μ augmente, et finit par fusionner avec ses voisines, ce qui tend à concrétiser, dans notre contexte, la théorie énoncée dans l'article de Strong & Chan [Strong and Chan, 2003]. La visualisation sur la figure 1.33(a) du profil horizontal (*cf.* Fig. 1.21(b)) cadré sur la ROI, pour chaque poids de régularisation, de $\mu_{\max}$ (en jaune) à $\mu_{\min}$ (en rouge), vient encore confirmer ce comportement, en observant précisément l'atténuation du contraste. La figure 1.33(b) montre, de la même manière, le profil vertical (*cf.* Fig. 1.21(b)). Là encore, le comportement de la variation totale est bien visible. Nous avons mesuré le biais δ d'aplatissement, pour le mettre en regard de la valeur de μ et de l'échelle σ_{scale} des structures. Celui-ci ne corrobore cependant pas, dans notre cas, l'équation 1.50. Ainsi une quantification précise des effets de la variation totale dans notre cas nécessiterait de plus amples calculs.

Nous voyons aussi, sur ces profils, apparaître un léger phénomène de rebonds, à l'instar de la régularisation quadratique, qui reste cependant beaucoup plus ténu, même s'il semble être amplifié à faible poids de régularisation. Pour mieux l'observer, nous avons défini un nouveau profil horizontal, cadré sur deux bords du fantôme, où les contrastes sont très importants. Ce sont les zones où ces rebonds sont bien identifiables. La figure 1.34 montre ces profils.

Revenons à la figure 1.30. L'image encadrée en bleu correspond à ce qui serait pour nous la reconstruction de meilleure qualité visuelle. Nous avons tenté de déterminer si ce critère empirique était en bonne corrélation avec une erreur de reconstruction quantitative. Nous nous

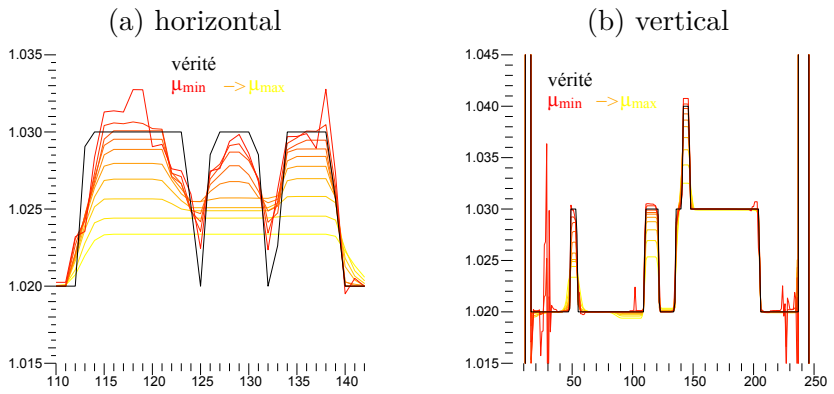


FIGURE 1.33: Visualisation des profils de coupes horizontal (a) et vertical (b), identifiés sur la figure 1.21(b), pris sur les reconstructions de la figure 1.30, pour toute la gamme d'hyperparamètres de régularisation, allant progressivement de la couleur jaune à la couleur rouge, à poids décroissant — de μ_{max} à μ_{min}. Le profil de référence est de couleur noire.

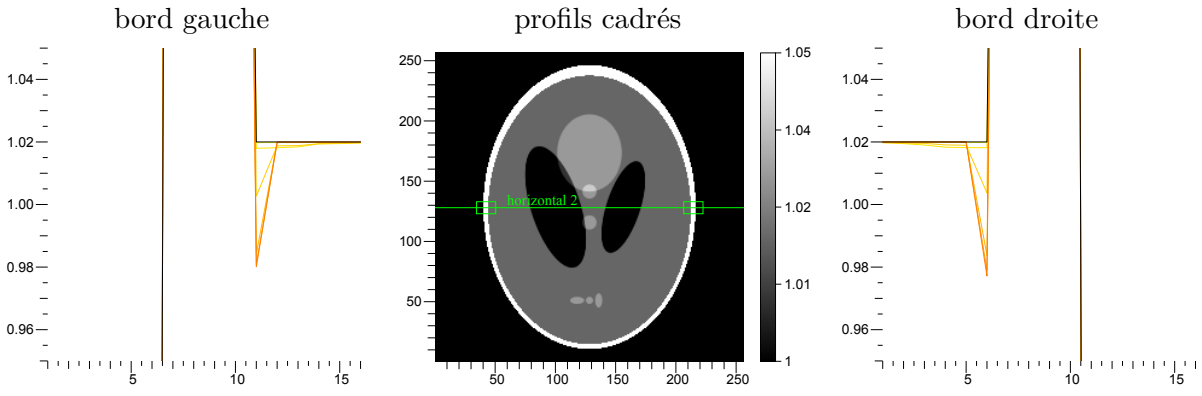


FIGURE 1.34: Observation, sur des profils de coupes, du phénomène de rebond présent sur les reconstructions du fantôme de Shepp-Logan, au niveau de transitions fortement contrastées, pour différents poids de régularisation par variation totale. La légende des couleurs est identique à celle de la figure 1.33.

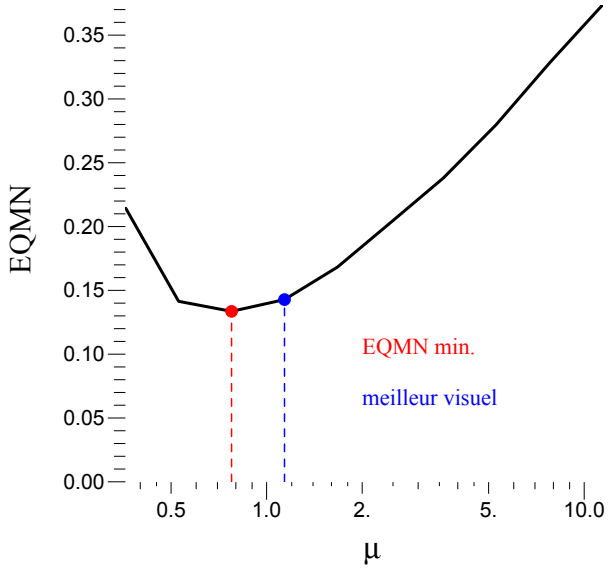


FIGURE 1.35: Courbe de l'erreur EQMN des reconstructions de la figure 1.30, calculée dans la région d'intérêt ROI, en fonction de l'hyperparamètre μ. Le point rouge désigne l'erreur minimale obtenue. Le point indique l'erreur correspondant à la reconstruction de meilleure qualité visuelle empirique.

sommes alors intéressés à l'erreur quadratique moyenne EQMN— en racine — normalisée par la dynamique maximale D_{max} des valeurs dans l'image de référence $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$:

$$\mathrm{EQMN} = \frac{\sqrt{\mathbb{E}\left[(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}} - \boldsymbol{f})^2\right]_{\mathrm{ROI}}}}{D_{\mathsf{max}}}, \quad \text{avec } D_{\mathsf{max}} = |\max(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}})_{\mathrm{ROI}} - \min(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}})_{\mathrm{ROI}}| \tag{1.51}$$

Nous avons calculé cette erreur EQMN à l'intérieur de la région d'intérêt ROI, pour les reconstructions de l'ensemble de la gamme d'hyperparamètres testés. La courbe obtenue, fonction de l'hyperparamètre μ, est tracée sur la figure 1.35. Nous y voyons apparaître une erreur minimale (point rouge), relativement proche de notre estimation visuelle. La reconstruction à EQMN minimale est encadrée en rouge sur les figures 1.30, 1.31 et 1.32. La différence avec notre choix empirique vient du fait que ce critère quantitatif n'est optimal que dans la ROI, et ne tient

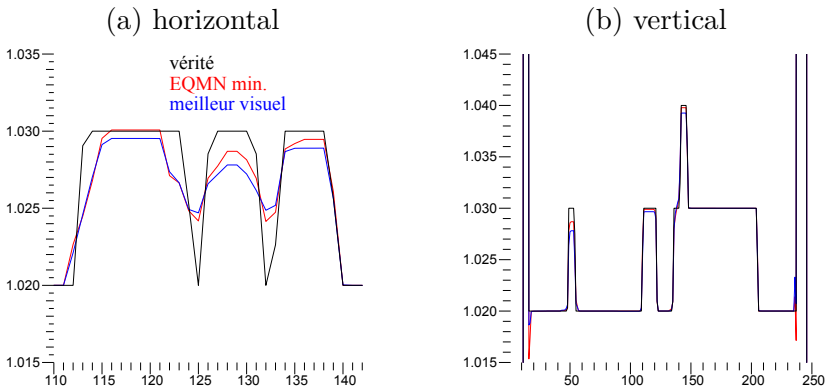


FIGURE 1.36: Visualisation des profils de coupes horizontal (a) et vertical (b), identifiés sur la figure 1.21(b), pris sur les reconstructions de la figure 1.30, la reconstruction donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI (rouge), et la reconstruction de meilleure qualité visuelle empirique (bleu). Le profil de référence est de couleur noire.

pas compte du reste de l'image. Nous voyons que la reconstruction correspondante laisse apparaître des artéfacts que notre jugement visuel a préféré disqualifier. La figure 1.36 montre l'allure des profils précédemment observés (*cf.* Fig. 1.33) pour ces deux reconstructions, avec la même légende de couleur. Nous voyons un avantage pour la reconstruction "rouge" sur le profil horizontal, en termes de finesse de restauration des contrastes, tendant à montrer que le critère quantitatif d'erreur EQMN est robuste dans cette région. En revanche, les différences sur le profil vertical sont moins visibles, et peu représentatives de la globalité des images reconstruites, car nous n'y observons notamment pas les artéfacts de la reconstrucion "rouge".

Dans la suite de l'étude, nous allons uniquement visualiser les reconstructions régularisées de façon optimale, d'après notre propre jugement empirique.

Reconstructions à nombre de projections décroissant

Nous venons de montrer la force de la variation totale pour la régularisation de notre critère de reconstruction, pour un nombre de projections relativement faible. Nous avons notamment montré que les gains apportés par cette régularisation surpassaient largement une régularisation quadratique standard.

Nous souhaitons à présent voir jusqu'à quel nombre de projections T notre approche peut descendre et conserver néanmoins une bonne qualité de reconstruction. Notre analyse se fera simplement sur les reconstructions globales de meilleure qualité visuelle, pour chaque nombre de projections. Notre objectif est d'initier la potentialité de notre approche inverse pour la reconstruction avec peu de données, qui sera l'amorce du traitement de la tomographie dynamique. En d'autres termes, nous démontrons ici la faisabilité de la reconstruction dans ces conditions, qui constitue l'un des points critiques du problème dynamique (*cf.* chapitre 3).

Nous ferons cette étude à la fois dans le cas des projections analytiques et du "*crime inverse*", *i.e.* à modèle de projection connu exactement. Nous pourrons ainsi voir à quel point un projecteur réaliste — symbolisé par les reconstructions à modèle connu — peut apporter en qualité finale de reconstruction, et s'il est un élément essentiel dans le traitement de la parcimonie des données.

Les figures 1.37 et 1.38 montrent l'ensemble des reconstructions pour toute la gamme des T, respectivement pour les reconstructions à modèle non exact et modèle exact. Commençons par le cas du modèle non exact. Nous observons qu'une excellente qualité de reconstruction est conservée jusqu'à $T = 50$. Dans ces configurations, l'ensemble des structures, même les plus petites, sont correctement restaurées et sont détectables et discrimables à l'oeil nu. Bien sûr, nous remarquons une baisse progressive de résolution apparente à mesure que T diminue. À partir de $T = 40$ et jusqu'à $T = 20$, la dégradation devient plus importante, et l'on finit par perdre certaines structures, noyées dans un halo flou englobant les structures voisines, particulièrement si celles-ci sont petites et rapprochées, à l'instar des trois inserts de la ROI. Enfin, à partir de $T = 10$, la reconstruction "décroche" totalement et montre clairement une insuffisance des projections. Dans ces cas, la régularisation ne peut plus agir correctement, car incapable de détecter des structures d'intérêt, hormis la forme du support de l'objet. À si peu de projections, il faut aussi souligner que la disposition angulaire des projections peut être un élément perturbateur. Ainsi, une autre configuration des angles de vue des projections peut potentiellement extraire plus d'information.

Voyons à présent notre fameux "*crime inverse*". Cette fois, des reconstructions que l'on peut aisément qualifier de parfaites — mais pas forcément exactes — sont obtenues jusqu'à $T = 40$. Dans ces reconstructions, seul un examen qualitatif et quantitatif appronfondis — que nous nous sommes ici épargné — permettrait de différencier les qualités de reconstruction les unes des autres, voire même du fantôme original. Pour $T = 30$, la dégradation commence à

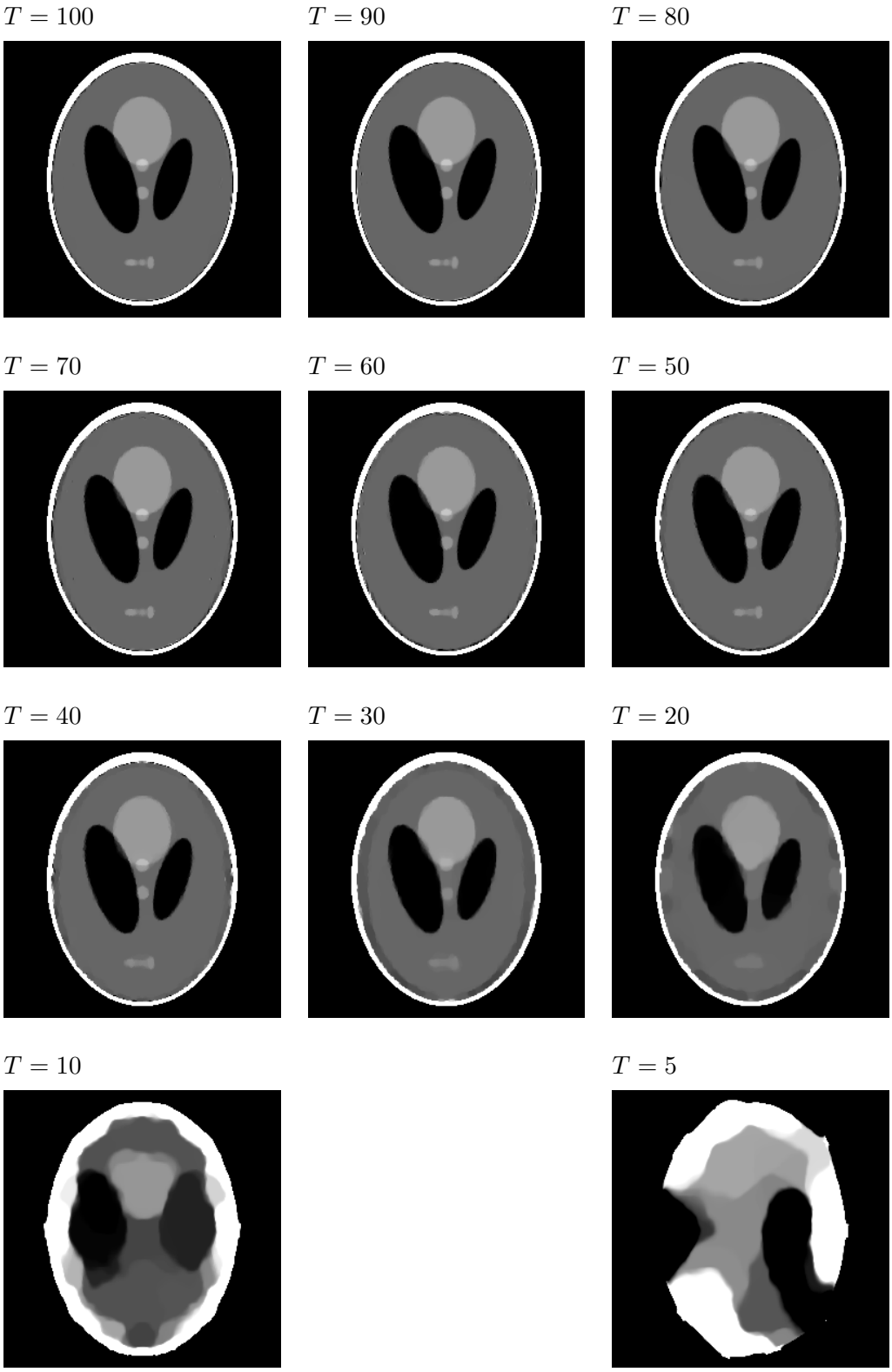


FIGURE 1.37: Reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan par notre approche inverse avec régularisation par variation totale, *i.e.* à partir de projections *fan beam* calculées analytiquement. Un bruit gaussien uniforme a été ajouté, avec un rapport signal à bruit d'environ 20000. Pour chaque T, La meilleure reconstruction au sens de la meilleure qualité visuelle globale a été sélectionnée.

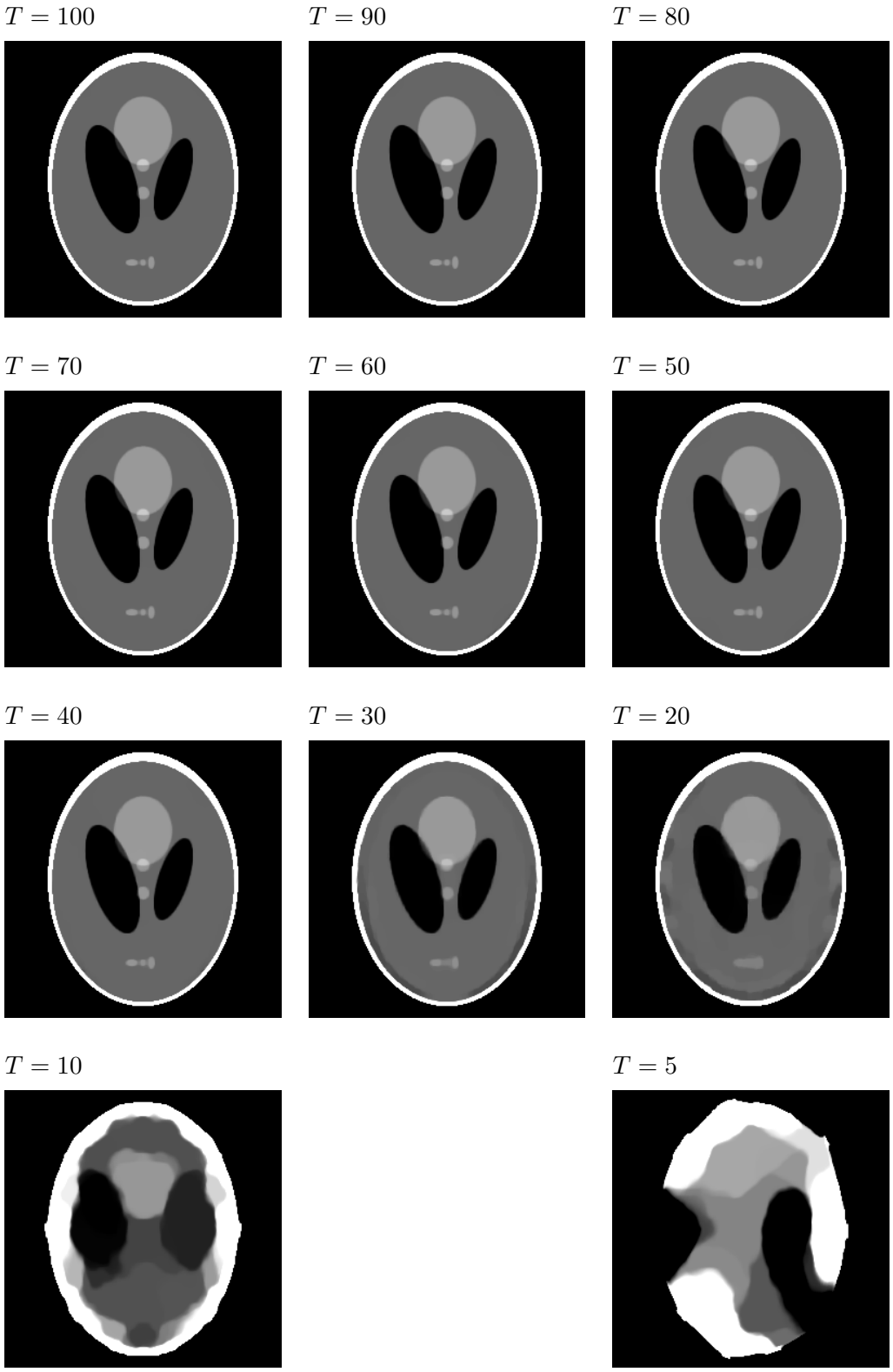


FIGURE 1.38: Reconstructions 256×256 du fantôme de Shepp-Logan par notre approche inverse avec régularisation par variation totale, *i.e.* à partir de projections *fan beam* calculées avec le modèle numérique : en "*crime inverse*". Un bruit gaussien uniforme a été ajouté, avec un rapport signal à bruit d'environ 20000. Pour chaque T, La meilleure reconstruction au sens de la meilleure qualité visuelle globale a été sélectionnée.

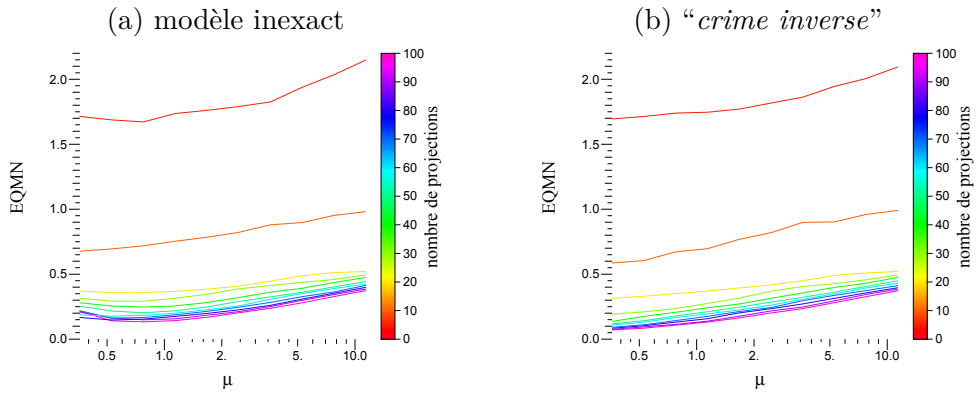


FIGURE 1.39: Courbes de l'erreur EQMN en fonction de l'hyperparamètre μ, pour les reconstructions à modèle non exact (a) et à modèle exact (b) — "*crime inverse*". Chaque courbe de couleur correspond au nombre de projections T— de 5 à 100 — utilisé pour la reconstruction. L'échelle des couleurs, identifiant T, est indiquée à droite de chaque graphique.

intervenir malgré une résolution apparente des structures encore acceptable. Pour $T = 20$, nous pouvons décemment affirmer que la reconstruction n'est plus satisfaisante. Enfin, à l'instar des reconstructions à modèle non exact, les reconstructions réalisées pour $T = 10$ et $T = 5$ sont totalement "hors de contrôle".

La figure 1.39 illustre les courbes d'erreur EQMN dans la ROI pour toute la gamme des T, respectivement pour les reconstructions à modèle non exact Fig. 1.39(a) et modèle exact Fig. 1.39(b). L'erreur quantifiée dans ces graphes est un bon indicateur de qualité de reconstruction, mais n'est cependant pas un critère absolu. Ce qui nous intéresse dans ces courbes est plutôt leur évolution les unes par rapport aux autres en fonction du nombre de projections T. Ainsi nous voyons que les courbes d'erreur "s'élèvent" logiquement à mesure que T diminue. Nous distinguons notamment parfaitement les courbes correspondant à $T = 10$ et $T = 5$, qui ont complètement décroché par rapport en autres. En revanche, l'ensemble des autres courbes sont relativement groupées, signe que la qualité de reconstruction au sens de l'erreur EQMN varie peu pour ces nombres de projections. Cela vient corroborer nos observations, et nous pouvons évaluer assez distinctement à partir de quel nombre raisonnable de projections la qualité des reconstructions va se dégrader.

En revanche, déterminer, à partir de ces graphiques, si les reconstructions à modèle exact ont surpassé celles à modèle inexact, s'avère impossible, et il faut nous en remettre à des observations directes des reconstructions pour établir les différences. Ces dernières ont montré un léger gain de l'approche "*crime inverse*", qui atteint presque l'exactitude par rapport à l'objet de référence. C'est évidemment logique étant donné que les projections peuvent être expliquées parfaitement par le modèle de projection, *i.e.* le système d'équations sous-jacent possède effectivement une solution, en théorie du moins (si les projections ne sont pas bruitées). Gardons tout de même à l'esprit que des reconstructions parfaitement exactes sont inatteignables, même dans ces conditions. En effet, rappelons que nous avons ajouté du bruit aux projections, qui rendent le problème évidemment mal posé. Ensuite, nous l'avons vu avec les reconstructions en "*crime inverse*" avec la méthode SART (*cf.* section 1.2.6), le modèle de projection est lui-même intrinsèquement mal conditionné, rendant la résolution du problème incertaine quoi qu'il arrive.

Ce que nous pouvons déduire au final de cette étude est tout d'abord la robustesse de l'approche inverse dans le traitement de ce problème à peu de projections, notamment par le biais de la régularisation par variation totale, qui explique en partie la proximité des résultats

à modèle exact et à modèle non exact. Nous déduisons néanmoins qu'un modèle de projection très précis, voire exact, peut apporter un gain non négligeable en qualité de reconstruction, particulièrement lorque l'on cherche à atteindre la limite faisable de résolution, pour un coût moindre, car il faut rappeler que l'objectif est d'être capable de reconstruire un objet à qualité égale et avec moins de données. À ce niveau, ces travaux préliminaires sont extrêmement encourageants pour la suite, en montrant, en théorie et en 2-D, que quelques dizaines de projections sont suffisantes.

1.3 Conclusion et objectifs

Nous venons de présenter le problème inverse de la tomographie, qui consiste en la reconstruction d'un objet physique 2-D ou 3-D à partir de ses projections intégrées dans différentes directions. Le principal domaine d'application de cette technique est l'imagerie médicale, par le biais des *scanners* à rayons X, qui tentent de reconstruire une carte anatomique du patient à partir de radiographies acquises en rotation autour de lui. La loi d'absorption des rayons X se rapprochant mathématiquement de la transformée de Radon de l'objet, *i.e.* de ses intégrales de ligne, la faisabilité théorique de la reconstruction a été établie et a permis à ces techniques de voir le jour.

Peu à peu, la recherche algorithmique, particulièrement dans le domaine des problèmes inverses, a élargi les possibilités de poser et résoudre le problème de la reconstruction. L'objectif de ce travail de thèse est le traitement d'un problème particulier : la reconstruction d'un objet en mouvement dans le temps d'acquisition, connu sous le nom de tomographie dynamique. Dans cette configuration, le nombre de projections à disposition pour la reconstruction de l'objet à un instant donné est réduit, afin de préserver le patient d'une dose trop importante de rayonnement ionisant. Ce point critique amène la nécessité de disposer d'une méthode permettant la reconstruction effective de l'objet dans ces conditions extrêmes vis-à-vis du manque de données.

Ainsi, nous avons premièrement élaboré dans ce chapitre une méthode de reconstruction tomographique basée sur une approche inverse robuste, utilisant une régularisation TV efficace et adaptée à l'anatomie des objets reconstruits. Nous avons alors montré qu'une qualité de reconstruction égale était tout à fait atteignable avec peu de projections, typiquement quelques dizaines seulement dans le cas 2-D. Les conclusions de nos études, ainsi que la méthode de reconstruction développée, augurent de la bonne faisabilité du traitement du problème de la tomographie dynamique par une approche inverse similaire, qui sera l'objet du chapitre 3.

Avant cela, nos études ont aussi démontré l'intérêt de disposer d'un modèle de projection précis et réaliste, essentiel à la reconstruction, et qui permettrait potentiellement de repousser encore les limites de qualité de reconstruction dans les conditions que la tomographie dynamique nous impose. À cet effet, nous allons étudier en détail, dans le chapitre 2, l'aspect de la projection tomographique, et proposerons un modèle satisfaisant aux besoins de précision mis au jour dans ce chapitre, tout en restant compétitif en temps de calcul.

Chapitre 2

Modèle numérique de projection optimisé par les B-splines

Sommaire

2.1 Approche continue de la représentation de l'objet d'intérêt 56
2.1.1 Concept et formalisme 56
2.1.2 État de l'art 69
2.1.3 Des B-splines comme base de représentation 72
2.2 La modélisation des projections 80
2.2.1 Caractérisation géométrique du système 80
2.2.2 Définition d'un projecteur 88
2.2.3 État de l'art 93
2.3 Le projecteur de B-splines 103
2.3.1 Détermination de l'empreinte 103
2.3.2 Étude des erreurs de modélisation 108
2.3.3 Mise en œuvre pratique 114
2.4 Mise en application en reconstruction 2-D statique à faible nombre de projections 118
2.5 Conclusion et perspectives 154

Nous avons, dans le chapitre précédent, élaboré une approche inverse adaptée au problème de la reconstruction tomographique à faible nombre de projections, notamment grâce à l'emploi de la régularisation très efficace que constitue la variation totale TV. De nos études est ressorti le gain substantiel que pourrait apporter, dans ces conditions, un modèle de projection tomographique extrêmement précis.

Nous nous penchons donc dans ce chapitre sur ce point essentiel qu'est la modélisation du processus d'obtention des données dans tout problème inverse. En tomographie, nous verrons que des recherches conséquentes ont déjà été menées sur le sujet, amenant à des modèles de pointe, pourtant peu utilisés du fait notamment des contraintes en temps de calcul imposées par la reconstruction itérative.

Nous allons redéfinir les propriétés et les besoins essentiels à l'élaboration d'un projecteur tomographique précis et compétitif en temps de calcul. Nous proposerons alors de développer notre propre modèle optimisé, basé sur l'utilisation de fonctions B-splines, qui devrait surpasser en précision les modèles existants et améliorer grandement la qualité des reconstructions.

Grâce à un tel projecteur, qui sera expérimenté dans le cadre de reconstructions 2-D à faible nombre de projections, nous pensons assurer à notre méthode de reconstruction une robustesse accrue dans le traitement optimal de l'information parcimonieuse, qui nous permettra de traiter au mieux le problème de la tomographie dynamique, dans le chapitre suivant.

2.1 Approche continue de la représentation de l'objet d'intérêt

2.1.1 Concept et formalisme

Représenter l'information physique

Nous allons dans un premier temps établir le formalisme de la représentation de l'objet d'intérêt, dont nous souhaitons reconstruire une *image*. La finalité de cette image, ne l'oublions pas, est de rendre compte d'une information ou phénomène physique. Pour ce faire nous utilisons le seul langage qui nous est intelligible : le formalisme mathématique. Il est soumis à une théorie, à des règles et des contraintes qu'il nous faut suivre pour obtenir la meilleure représentation possible de notre information physique, et que nous développerons. En tomographie par rayons X, l'information physique associée à cette image est l'absorption d'une source monochromatique, émise à une énergie donnée, par l'objet en tout point de l'espace (*cf.* chapitre 1). Elle s'interprète, dans notre représentation, par une quantité : le coefficient d'atténuation linéique (unité SI m^{-1}) du matériau ou tissu traversé. Il faut noter que lorsqu'un faisceau de rayons X traverse un corps, il passe par différents tissus, qui peuvent chacun avoir un coefficient d'atténuation différent. La transition entre les tissus est nette, on suppose que ceux-ci ne se mélangent pas. Nous considérons l'image des valeurs des coefficients d'atténuation comme un signal continu par morceaux dans un espace à 2 ou 3 dimensions spatiales suivant le problème de tomographie mis en œuvre. Dans le cas de la tomographie dynamique, une $3^{\text{ème}}$ (respectivement $4^{\text{ème}}$) dimension, temporelle cette fois, s'intégrera au signal pour tenir compte de son évolution continue dans le temps. Cependant, dans notre approche de la projection tomographique, nous allons supposer que l'acquisition des données pour un état fixé du système — *i.e.* à position fixée de l'objet, de la source et du détecteur — se fait à un instant t, pour lequel l'objet est totalement statique. Nous nous limiterons donc dans ce chapitre à considérer le signal comme une simple fonction de l'espace, et développerons le formalisme dynamique — *i.e.* le signal vu comme une fonction de l'espace et du temps — dans le chapitre 3 qui lui est consacré.

Un problème d'échantillonnage

Revenons à notre objet, statique donc. Soit $f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$, avec $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, la fonction continue n-dimensionnelle ($n \in \{2, 3\}$) modélisant mathématiquement le signal d'intérêt soit, dans notre cas, l'atténuation linéique en $\boldsymbol{x}$[1]. Le traitement de données étant une discipline s'épanouissant presqu'exclusivement dans un cadre numérique, il nous faut discrétiser ce signal, et par voie de conséquence en considérer une forme approchée. Nous noterons $\tilde{f} : \boldsymbol{x} \mapsto \tilde{f}(\boldsymbol{x})$ cette approximation. Ainsi nous nous basons sur la théorie de l'échantillonnage, initiée en grande partie par Shannon en 1949 [Shannon, 1949], mais aussi par d'autres avant lui, comme Whittaker en 1929 [Whittaker, 1929] et Kotel'nikov en 1933 [Kotelnikov, 1933]. Cette théorie est la base des approches de la projection tomographique, comme la méthode élémentaire présentée dans le chapitre 1, section 1.2.3. Cependant nous verrons que cette théorie, du "pur" échantillonnage, possède ses limites, car elle ne se place notamment que dans le cas où l'on échantillonne un signal à bande spectrale limitée, pour lequel il est alors possible de définir la fréquence d'échantillonnage limite — la fréquence de Nyquist égale à 2 fois la fréquence maximale du signal. En d'autres termes, elle considère le cas de l'estimation exacte d'un tel signal. L'échantillonnage de ce dernier engendrant une périodisation de son spectre, les fréquences situées au-delà de cette limite subissent alors le phénomène de recouvrement (ou repliement). Or nous l'avons dit plus haut, nous sommes en présence d'un signal a priori continu par morceaux, donc à support spectral non borné. Quelle que soit la représentation du signal que l'on considérera, celle-ci sera de fait à bande limitée car coupée en fréquence par l'échantillonnage. Il nous sera donc impossible de rendre compte de la totalité de l'information spectrale du signal. Nous pouvons, d'une certaine façon, contourner la seule théorie de Shannon et considérer le problème sous d'autres aspects. En effet, de récents travaux, notamment ceux de Blu, Thévenaz et Unser [Blu and Unser, 1999a, Blu and Unser, 1999b, Unser, 2000, Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a], ont fait émerger une nouvelle façon d'aborder la théorie de l'échantillonnage, qui élargit nos possibilités, et que nous détaillerons tout au long de cette partie. La fonction $\tilde{f}$, qui approxime la fonction signal f, y est donnée par l'expression générale :

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, \varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) \tag{2.1}$$

Il s'agit d'une décomposition sur une base discrète de fonctions invariantes par translation, celle-ci étant donc composée d'une unique fonction compacte $\varphi(\boldsymbol{x})$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, nommée fonction atomique de la base, régulièrement disposée sur une grille n-dimensionnelle à N éléments. $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^\top \in \mathbb{Z}^n$ correspond aux indices des N éléments de la grille (ses nœuds en quelque sorte), et dont les $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n})^\top \in \mathbb{R}^n$ constituent les coordonnées respectives.

Dans la théorie de Shannon, la fonction atomique φ est la fonction sinus cardinal. Elle constitue la fonction d'échantillonnage idéale dans le cas d'un signal à bande limitée. Elle a l'avantage de s'annuler sur les positions échantillonnées $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$ voisines, de sorte que les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ sont égaux aux valeurs $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}})$, que nous notons $f_{\boldsymbol{k}}$, de $\tilde{f}$ en ces points. Elle a cependant un support non borné, ce qui en fait une fonction peu adaptée à un cas pratique et à une mise en œuvre numérique.

On va plutôt rechercher une fonction φ à influence localisée, qui nous amènera, pour notre application, à un opérateur de projection creux. On l'autorise également à "s'étaler" sur les positions d'échantillonnage $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$ voisines, c'est-à-dire à ne pas s'annuler à ces positions — les $c_{\boldsymbol{k}}$

1. Comme la tomographie se place dans un espace tridimensionnel (ou bidimensionnel), les coordonnées $\boldsymbol{x}$ seront alors écrites (x, y, z) ((x, y) en 2-D).

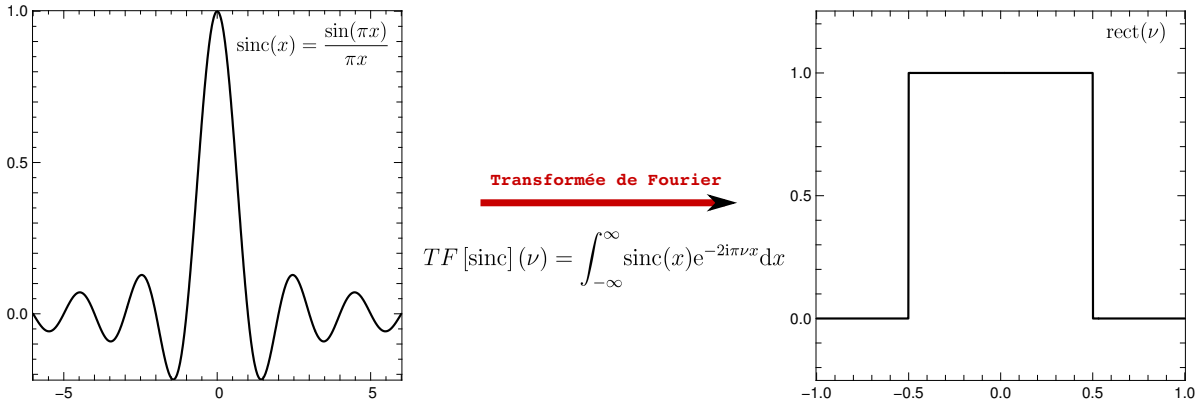


FIGURE 2.1: La fonction sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$; et sa transformée de Fourier : $TF\left[\mathrm{sinc}\right](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(x) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x} \mathrm{d}x = \mathrm{rect}(\nu)$.

ne sont plus égaux aux $f_{\boldsymbol{k}}$. Ainsi, pour repasser à une représentation échantillonnée de $\tilde{f}$, *i.e.* l'image discrétisée $\boldsymbol{f}$, une opération linéaire est nécessaire :

$$\boldsymbol{f} = (f_{\boldsymbol{1}}, f_{\boldsymbol{2}}, \ldots, f_{\boldsymbol{N}})^{\top}, \quad \text{avec } f_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}' \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}'}\, \varphi_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) \tag{2.2}$$

Il s'agit en fait d'une interpolation des $c_{\boldsymbol{k}}$ sur les positions $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$ à partir des fonctions $\varphi_{\boldsymbol{k}}$, qui se trouve alors être une base d'interpolation. Cette opération peut être exprimée par un opérateur matriciel $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c} \tag{2.3}$$

En définitif, $\tilde{f}$ reste une fonction continue, paramétrée par l'ensemble des valeurs discrètes $c_{\boldsymbol{k}}$— d'où le nom de *paramètres* donné aux inconnues du problème de la reconstruction. Ces derniers constituent donc le vecteur à $\boldsymbol{N} = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ éléments que nous devons estimer :

$$\boldsymbol{c} = (c_{\boldsymbol{1}}, c_{\boldsymbol{2}}, \ldots, c_{\boldsymbol{N}})^{\top} \tag{2.4}$$

La seule connaissance de ces paramètres, associés à leur base de fonctions sous-jacente, permet ainsi de définir $\tilde{f}$. Ainsi, il est important de noter que nous n'abordons plus la discrétisation de l'image comme un pur échantillonnage au sens de Shannon, mais comme un ajustement continu de $\tilde{f}$ sur f [Unser, 2000, Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a]. Nous conservons ainsi une représentation "analytique" de l'objet d'intérêt, donc plus réaliste, puisqu'intrinsèquement $\tilde{f}$ est définie en tout point de l'espace. Le cadre purement discret constitue généralement l'interprétation qui est faite de la théorie de Shannon, ce qui est assez réducteur. En effet, la fonction sinus cardinal, fonction de base sous-jacente, selon Shannon, à la représentation du signal $\tilde{f}$, est complètement compatible avec la notion d'ajustement conitnu de f. Il ne s'agit simplement que du cas idéal, uniquement adapté aux signaux à bande spectrale limitée. Ce que nous avons introduit comme une évolution de cette théorie, constitue donc une généralisation à tout type de signaux.

Généralisation de la théorie de l'échantillonnage

Dans la théorie de Unser[2], les paramètres $c_{\boldsymbol{k}}$ sont déterminés de façon à minimiser l'erreur d'approximation $\left\|f - \tilde{f}\right\|_2$, au sens de la norme L_2 — moindre norme au carré, dans le domaine continu. Par conséquent $\tilde{f}$ est la projection orthogonale de f sur l'espace des combinaisons linéaires des fonctions de base $\varphi_{\boldsymbol{k}}$, réparties sur une grille régulière. Les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ optimaux au sens de la norme L_2 peuvent donc être déduits, et sont le résultat du produit scalaire dans L_2 de f avec les fonctions duales des $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ correspondantes, notées $\mathring{\varphi}_{\boldsymbol{k}}$ [Unser, 2000] :

$$c_{\boldsymbol{k}} = \langle f, \mathring{\varphi}_{\boldsymbol{k}} \rangle \tag{2.5}$$

La fonction duale $\mathring{\varphi}_{\boldsymbol{k}}$ est unique, et est une combinaison linéaire des $\varphi_{\boldsymbol{k}}$. Elle hérite de la propriété d'invariance par translation de φ : $\mathring{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \mathring{\varphi}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}})$, et est déterminée par la condition de bi-orthogonalité :

$$\langle \mathring{\varphi}_{\boldsymbol{k}}, \varphi_{\boldsymbol{l}} \rangle = \delta(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{l}}) \tag{2.6}$$

Dans l'espace de Fourier, son expression est la suivante :

$$\hat{\mathring{\varphi}}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega})}{\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{k}\pi)|^2} \tag{2.7}$$

où le symbole $\hat{}$ désigne la transformée de Fourier. Les $c_{\boldsymbol{k}}$ optimaux ne sont pas directement issus du produit scalaire de f avec les $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ car, comme nous l'avons dit plus haut, ces fonctions de base sont susceptibles de voir leur support s'étaler sur les positions adjacentes de la grille, *i.e.* de se recouvrir mutuellement — $\langle \varphi_{\boldsymbol{k}}, \varphi_{\boldsymbol{l}} \rangle \neq 0$ pour $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{l}$. Ainsi, le produit scalaire $\langle \varphi_{\boldsymbol{k}}, f \rangle$ ne définit pas de façon unique et indépendante la contribution de $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ au signal $\tilde{f}$ sur sa zone d'influence, puisque d'autres $\varphi_{\boldsymbol{l}}$ y contribuent. Il est donc nécessaire, dans le calcul de chaque coefficient $c_{\boldsymbol{k}}$, "d'ôter" en quelque sorte la contribution des atomes adjacents, d'où l'introduction de cette base duale. Dans le cas d'une base orthonormale — $\langle \varphi_{\boldsymbol{k}}, \varphi_{\boldsymbol{l}} \rangle = 0$ pour $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{l}$ —, la fonction duale $\mathring{\varphi}$ est la fonction φ elle-même.

Selon la théorie de l'échantillonnage, la projection de f sur cette base de fonctions se décompose en plusieurs étapes qui sont résumées sur la figure 2.2 tirée de [Unser, 1999] et [Unser, 2000] :

- Une étape de pré-filtrage passe-bas de f, pour obtenir un signal à bande spectrale limitée. Cette étape est essentielle pour éviter les problèmes de recouvrement, qui influeraient sur l'erreur d'approximation $\left\|f - \tilde{f}\right\|_2$. Ainsi le rôle du pré-filtre est joué par la fonction duale $\mathring{\varphi}$.
- Une étape d'échantillonnage du signal filtré, qui a pour effet de périodiser le spectre de Fourier du signal au double de la fréquence de Nyquist. Les 2 premières étapes constituent le calcul des coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ défini dans l'équation 2.5.
- Une étape de post-filtrage par la fonction φ qui a pour but de récupérer un spectre unique du signal. Autrement dit, il permet de retrouver un signal continu à partir des échantillons $c_{\boldsymbol{k}}$: il s'agit d'une interpolation pour obtenir $\tilde{f}$ en tout point de l'espace, et dont la base associée est celle constituée par φ.

2. Nous la nommerons ainsi par abus de langage (et d'attribution des lauriers !), car Unser, en plus d'en être un des principaux contributeurs, est celui qui en a fait la revue dans un cadre général [Unser, 2000], mais elle est bien évidemment l'aboutissement de multiples travaux d'autres auteurs au cours des 50 dernières années.

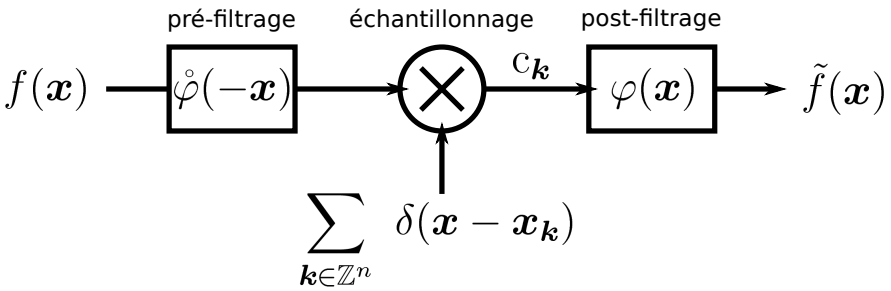


FIGURE 2.2: Schéma d'échantillonnage d'un signal f, selon le principe de minimisation de l'erreur d'approximation $\left\|f-\tilde{f}\right\|_2$ au sens des moindres carrés (tiré de [Unser, 1999] et [Unser, 2000]).

On voit donc que ce formalisme peut s'interpréter du point de vue spectral[3], où la fonction atomique φ et sa fonction duale $\mathring{\varphi}$ jouent les rôles des pré et post-filtres passe-bas. On peut donner sens à ce parallèle de façon simple :

- Pour le pré-filtre, on peut ré-écrire l'équation 2.5 ainsi :

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{k}} &= \langle f, \mathring{\varphi}_{\boldsymbol{k}} \rangle \\ &= \int f(\boldsymbol{x})\, \mathring{\varphi}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int f(\boldsymbol{x})\, \mathring{\varphi}(-(\boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{x}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \left(f(\boldsymbol{x}) * \mathring{\varphi}(\boldsymbol{x})\right)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_k}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

  Les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ correspondent donc à la convolution de la fonction f par le filtre $\mathring{\varphi}(-\cdot)$, prise aux points $\boldsymbol{x_k}$. Ainsi l'équation 2.8 démontre comment l'on peut déduire de la théorie de l'échantillonnage initiée dans le domaine spectral, la notion qu'elle est équivalente à une projection orthogonale dans l'espace des fonctions $\varphi_{\boldsymbol{k}}$.
- Pour le post-filtre, il suffit de développer l'expression 2.1 en y introduisant l'écriture de la fonction échantillonnée à l'aide de la distribution de Dirac δ, que nous noterons $f_\delta(\boldsymbol{x})$:

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_k}) = \underbrace{\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_k})\right)}_{f_\delta(\boldsymbol{x})} * \varphi(\boldsymbol{x}) \tag{2.9}$$

  On retrouve ainsi la notion de convolution par le filtre φ, mais cette fois-ci sur la fonction "peigne de Dirac" f_δ.

En fin de compte $\tilde{f}$ est une projection de f sur un sous-espace de fonctions à support spectral borné, défini par les combinaisons linéaires des $\varphi_{\boldsymbol{k}}$. Selon cette interprétation, le problème d'échantillonnage constitue alors un problème de filtrage optimal. C'est ici que l'on peut évoquer le cas idéal, à savoir l'échantillonnage d'une fonction à support spectral borné, et dont le tenant est la théorie de Shannon. Celle-ci considère alors une fonction $f(\boldsymbol{x})$ dont le spectre $\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$ s'annule au-delà d'une fréquence maximale $\omega_{\max}$. La figure 2.3 illustre le processus d'échantillonnage selon Shannon, dans l'espace de Fourier. On y retrouve les 3 étapes présentées dans la figure 2.2. L'étape de pré-filtrage est réalisée par une fonction porte, *i.e.* le spectre du sinus cardinal qui est la fonction de base utilisée dans ce cadre. La phase d'échantillonnage engendrant une périodisation du spectre, il faut définir un pas d'échantillonnage Δ, dont découle

3. Pour être plus précis, il en découle, mais j'ai décidé de ne pas faire les choses dans l'ordre !

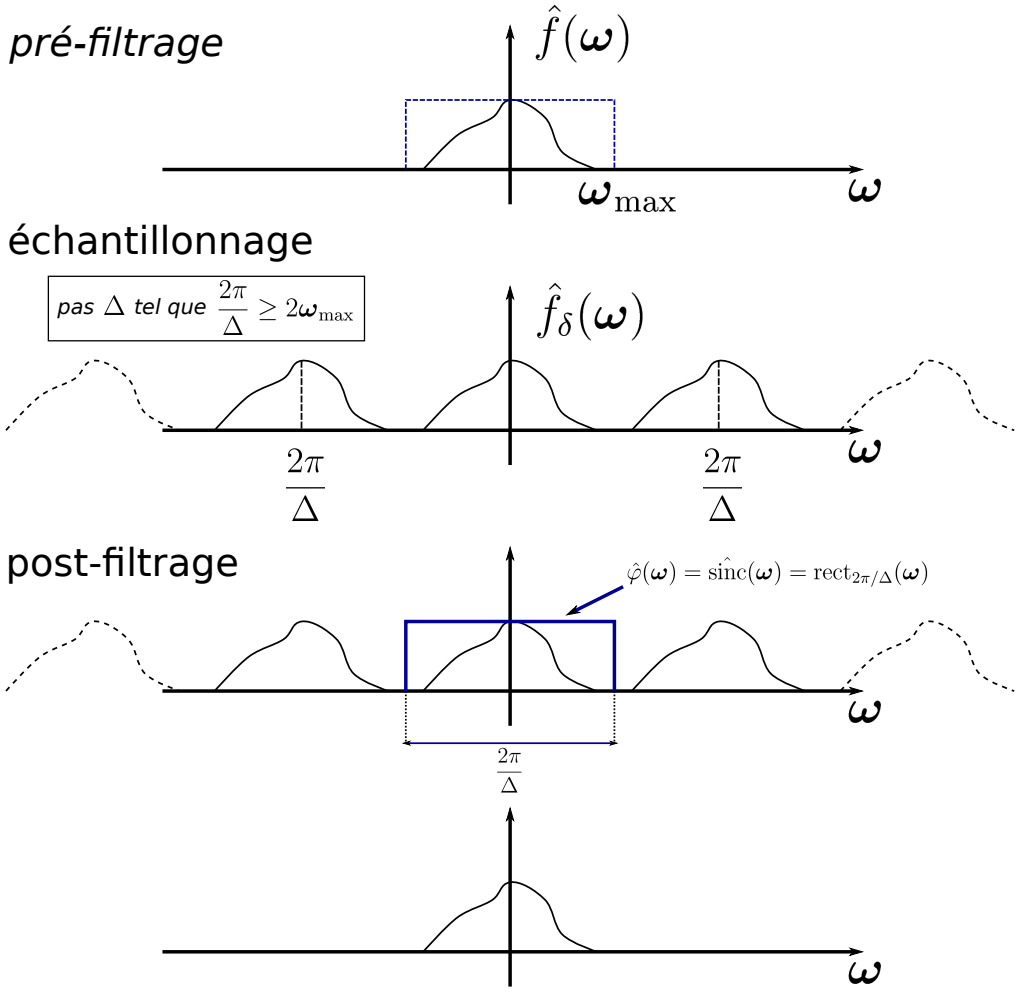


FIGURE 2.3: Schéma d'échantillonnage (tiré de [Unser, 2000]), dans le domaine de Fourier, selon la théorie de Shannon, s'appliquant à une fonction f à support spectral borné (fréquence maximale du spectre $\omega_{\max}$). Sa transformée de Fourier est notée $\hat{f}(\omega)$. On retrouve les trois étapes vues dans la figure 2.2. Le pas d'échantillonnage Δ est choisi tel que la fréquence d'échantillonnage $\frac{2\pi}{\Delta}$ soit supérieure au double de la fréquence de Nyquist $2\omega_{\max}$. L'étape d'échantillonnage revient à une périodisation du spectre. Le post-filtrage $\hat{\varphi}(\omega)$ permet de retrouver le spectre initial. Dans la théorie de Shannon, ce filtre est idéal, c'est la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(x)$ dont la transformée de Fourier est la fonction *porte* $\text{rect}_{2\pi/\Delta}(\omega)$ de largeur $\frac{2\pi}{\Delta}$ qui permet la récupération parfaite du signal.

directement la période $\frac{2\pi}{\Delta}$ du spectre $\hat{f}_\delta(\boldsymbol{\omega})$, suffisamment fin pour éviter les recouvrements. Le théorème de Shannon, qui impose $\frac{2\pi}{\Delta} \geq 2\omega_{\max}$, traduit donc la condition précédente. $\omega_{\max}$ est alors appelée la fréquence de Nyquist. La phase de "reconstruction" du spectre initial $\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$ est accomplie par un filtre passe-bas idéal, à savoir la fonction *porte* $\mathrm{rect}_{2\pi/\Delta}(\boldsymbol{\omega})$, transformée de Fourier du sinus cardinal $\mathrm{sinc}(\boldsymbol{x})$[4] (*cf.* Fig. 2.1). Là encore, pour récupérer l'intégralité du spectre, la largeur idéale de la *porte* doit être de $\frac{2\pi}{\Delta}$. Nous remarquons alors que, dans ce cas, les pré et post-filtres sont identiques.

Pour notre part, l'idéalité n'est pas au programme. Cela s'explique d'une part car le spectre $\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$ n'est pas borné, du fait, comme nous l'avons évoqué plus haut, de la potentielle continuité par morceaux de f, pouvant engendrer les transitions abruptes dans l'image. D'autre part, quand bien même le spectre serait-il borné, il nous faudrait encore disposer d'un filtre idéal, ce qui nous conduit à $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sinc}(\boldsymbol{x})$. Nous le verrons, cette fonction n'est pas adaptée à une mise en œuvre numérique, notamment de par son support infini. En revanche, on pourra chercher à s'approcher au mieux de l'idéalité au sens de Shannon, qui sera donc pour nous un moyen d'interpréter la théorie de Unser d'après ce "cas d'école" du traitement du signal.

Revenons au cœur de l'approche de Unser de la modélisation. Nous abordons pour finir un point essentiel de la théorie, à savoir la façon d'évaluer l'erreur d'approximation $\left\|f - \tilde{f}\right\|_2$. Cette erreur dépend à la fois de la base de fonctions formée par l'atome φ, mais aussi et surtout du pas d'échantillonnage Δ. Nous la notons donc $\epsilon_f(\Delta)$. D'après [Unser, 1999], cette erreur peut s'écrire dans le domaine fréquentiel :

$$\epsilon_f(\Delta) = \left\|f - \tilde{f}\right\|_2 = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(\Delta\boldsymbol{\omega})\,|\hat{f}(\boldsymbol{\omega})|^2\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{2\pi}\right]^{1/2}}_{\bar{\epsilon}_f(\Delta)} + \gamma\,\Delta^r\,\left\|f^{(r)}\right\|_2 \tag{2.10}$$

sous condition que $f \in W_2^r$ [Unser, 2000], où W_2^r est l'espace de Sobolev d'ordre r[5]. Dans le premier terme, $E_\varphi(\Delta\boldsymbol{\omega})$, constitue le noyau d'erreur fréquentiel, défini ainsi :

$$E_\varphi(\boldsymbol{\omega}) = 1 - \frac{|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega})|^2}{\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n}|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)|^2} = 1 - \frac{|\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega})|^2}{A_\varphi(\mathrm{e}^{j\omega})} \tag{2.11}$$

φ étant la fonction atomique de la base. $E_\varphi(\boldsymbol{\omega})$ nous donnera par la suite un très bon aperçu du comportement de la base dans le domaine spectral, et nous permettra de faire le lien avec des interprétations "type Shannon". On verra notamment que le noyau contrôle — plus ou moins bien suivant φ — l'erreur sur le spectre de f en-deçà de la fréquence de Nyquist $\frac{\pi}{\Delta}$. Il peut finalement être vu comme une prédiction de l'erreur d'approximation quand l'atome φ est utilisé pour interpoler une version échantillonnée de la fonction $f(\boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{\omega}^\top\boldsymbol{x})$[6] d'énergie infinie [Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a]. Ce dernier postulat nous servira par la suite.

Le premier terme de 2.10, $\bar{\epsilon}_f(\Delta)$, correspond à l'erreur d'approximation moyenne de toutes les erreurs $\epsilon_f(\Delta)$ sur tous les décalages possibles de la grille d'échantillonnage par rapport à l'origine du signal f. Cela correspond d'après [Blu and Unser, 1999a] à une simple intégration dans le domaine fréquentiel. Cette erreur constitue la part dominante de l'erreur $\epsilon_f(\Delta)$. Le second terme de 2.10 constitue une correction d'erreur en $o(\Delta^r)$, pouvant être positive ou négative suivant le signe de γ, dont la valeur absolue est bornée par :

4. La notation $\mathrm{sinc}(\boldsymbol{x})$ définit la fonction sinus cardinal n-dimensionnelle séparable $\mathrm{sinc}(x_1)\times\mathrm{sinc}(x_2)\times\cdots\times\mathrm{sinc}(x_n)$.

5. L'espace de Sobolev W_2^r constitue un espace de fonctions r fois différentiables, muni de la norme L_2 (*cf.* [Unser, 2000]).

6. $\sin(\boldsymbol{\omega}^\top\boldsymbol{x}) = \mathrm{sinc}(\omega_1 x_1)\times\mathrm{sinc}(\omega_2 x_2)\times\cdots\times\mathrm{sinc}(\omega_n x_n)$.

$$|\gamma| \leq \frac{2}{\pi^r}\sqrt{\zeta(2r)\,\|E\|_\infty} \tag{2.12}$$

où ζ est la fonction de Riemann définie comme $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$. r correspond à l'ordre de dérivabilité de f— $f \in W_2^r$, donc $f^{(r)}$ correspond à la dérivée $r^{\text{ème}}$ de f. Ce terme est nul ou négligeable si le signal f est à bande spectrale limitée ou bien si f est suffisamment lisse. r sera relié à l'ordre d'approximation $L = r + 1$ de la fonction atomique φ.

Qu'est-ce qu'une "bonne" base ?

À partir de là, nous pouvons commencer à définir des critères de sélection de notre base de fonctions, *i.e.* rechercher la "bonne" fonction atomique φ, qui nous amènera à sélectionner les fonctions B-splines (*cf.* section 2.1.3).

On a dit que la fonction $\tilde{f}$ était une approximation de f. On l'a vu précédemment, il nous est impossible de définir une grille discrète et une base de fonctions qui permettraient de modéliser exactement l'information contenue dans f, que ce soit d'un point de vue spectral ou au sens d'une projection orthogonale du signal sur l'espace défini par cette base (étant donné que f n'en fait pas nécessairement partie). À supposer que cela soit possible, trouver la base de fonctions et l'échantillonnage de la grille — fini bien entendu — qui permettraient d'atteindre une erreur nulle, tout en restant général, relève plus alors de l'utopie, du moins pour l'humble doctorant traiteur de signal que je suis. De plus, d'un point de vue plus pratique et réaliste, une modélisation idéale n'aurait aucun intérêt, étant donné qu'elle doit servir à résoudre un problème de reconstruction, à partir de données qui sont par nature entachées d'incertitude, où le bruit notamment est l'un de nos fardeaux. Celui-ci induit des fréquences "parasites" dans le signal f, que nous aimerions bien enlever. Un cas de figure où le spectre du bruit serait complétement dissocié du spectre du signal d'intérêt, de sorte que l'on puisse "couper" directement ces fréquences indésirables, n'est absolument pas réaliste. Ces spectres peuvent être "mélangés", et l'on voit bien que dans ce cas l'idéalité, *e.g.* au sens de Shannon avec des filtres *portes* — $\varphi(\boldsymbol{x}) = \text{sinc}(\boldsymbol{x})$, n'a plus de sens et peut même s'avérer désastreuse pour notre signal. Nous recherchons alors plutôt l'optimalité sous différentes contraintes, d'où l'ambition de minimiser l'erreur $\epsilon_f(\Delta)$ plutôt que de chercher le "bon filtre"[7]. À ces fins nous nous orientons donc vers des solutions plus pragmatiques, afin de gagner en simplicité pour nous adapter aussi aux verrous du "monde numérique", *i.e.* la discrétisation du signal f en un nombre fini de paramètres.

Pragmatisme et simplicité certes, mais la modélisation exige néanmoins un certain degré de réalisme vis-à-vis des données. En effet, le terme d'attache aux données, dans le critère d'optimisation pour la reconstruction (*cf.* chapitre 1), doit mettre en évidence la vraisemblance entre l'information modélisée et l'information réelle. De fait, les erreurs de modélisation seront sources de grand "désaccord" avec les données, si celles-ci deviennent supérieures au niveau du bruit. D'où la nécessité, dans le contexte de la représentation de l'image, qui est le point de départ à la modélisation de la projection tomographique, de choisir φ qui permettra de minimiser l'erreur d'approximation $\epsilon_f(\Delta)$, du moins à un niveau négligeable par rapport à l'erreur due au bruit.

Restons dans un premier temps dans le champ de la seule théorie de l'échantillonnage, ensuite nous viendrons greffer des contraintes spécifiques à la projection tomographique[8], pour dégager l'ensemble des propriétés d'intérêt.

7. Certes ce sont des points de vue intrinsèquement liés, mais la première proposition est plus intuitive et intelligible, et offre plus de possibilités de mise en œuvre

8. Ce serait trop facile sinon !

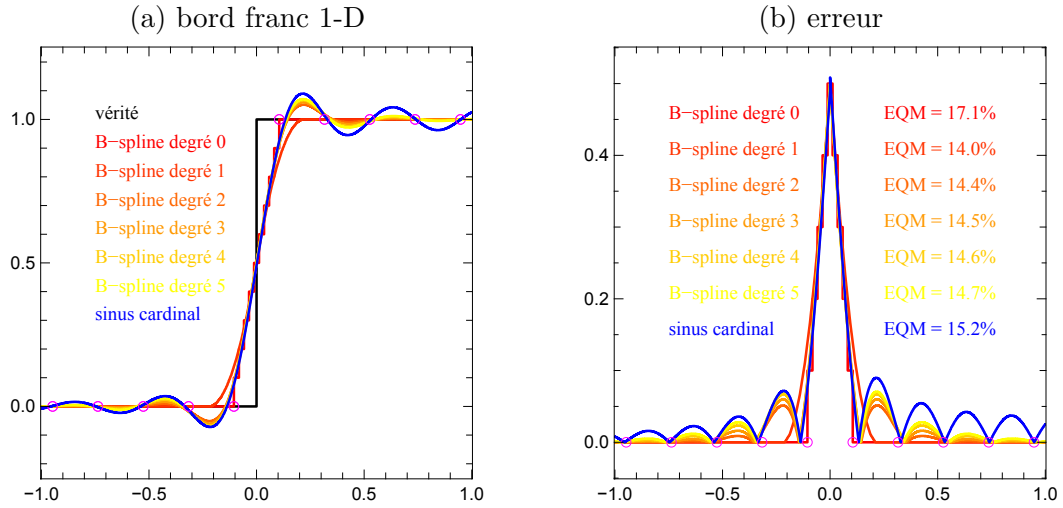


FIGURE 2.4: (a) Approximations continues d'un bord franc 1-D (en noir) sur une grille à pas fixe Δ (points magenta) à partir de diverses fonctions atomiques φ : B-splines de degré 0 à 5 (de rouge à jaune), sinus cardinal (en bleu). Chaque courbe est l'approximation moyenne sur 10 décalages de la grille entre -0.5Δ et 0.5Δ. (b) Erreur — différence en valeur absolue — de chaque approximation par rapport à la vérité. L'erreur quadratique moyenne globale EQM sur tous les décalages est indiquée.

Nous avons au préalable effectué une petite étude numérique comparative de diverses fonctions de base φ, dans le cas de l'approximation d'un bord franc sur une grille discrète en 1-D et en 2-D. Les fonctions φ que nous comparons sont la fonctions sinus cardinal sinc avec les fonctions qui vont être notre centre d'intérêt dans ce chapitre : les B-splines.

La figure 2.4 illustre les différentes approximations d'une transition abrupte telle que l'on pourrait en trouver dans les signaux que nous sommes amenés à reconstruire. La discrétisation est faite sur un grille à pas fixe, mais nous avons successivement décalé la grille pour obtenir des approximations moyennes indépendantes de sa translation. Pour les fonctions sinus cardinal et les B-splines de degré strictement supérieur à 1, nous pouvons observer le phénomène de rebonds (*cf.* Fig. 2.4(a)) dû à l'approximation extrême du bord non dérivable — phénomène de Gibbs. C'est la fonction sinus cardinal qui montre les rebonds les plus importants. Plus le degré de la B-splines est grand, plus ces rebonds sont également prononcés. Nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne EQM globale de approximations moyennes sur tous les décalages de la grille (*cf.* Fig. 2.4(b)), *i.e.* une estimation de l'erreur $\epsilon_f(\Delta)$. Les résultats montrent que les erreurs maximales sont atteintes pour le sinus cardinal et la fonction B-spline de degré 0 — fonction *porte*. L'erreur la plus faible est atteinte pour la B-spline de degré 1, *i.e.* l'approximation linéaire du bord franc. L'erreur augmente ensuite petit à petit avec le degré de la B-spline mais reste inférieur à l'erreur du sinus cardinal. Nous commençons à entrevoir l'intérêt de cette fonction en termes de modélisation d'un signal.

La figure 2.5 présente l'étude similaire 2-D, où notre bord franc est symbolisé dans toutes les directions par les rebors d'un disque uniforme sur un fond froid. Nous avons alors représenté ce signal 2-D avec chacune des fonctions testées en 1-D — dans leur version respective 2-D séparable — sur une grille 2-D à différents décalages, pour obtenir une fois de plus les approximations moyennes indépedantes de la translation de la grille. Les résultats présentés sont en très bonne corrélation avec l'étude 1-D, à savoir que le phénomène de Gibbs est aussi présent pour les mêmes fonctions, et plus important pour le sinus cardinal. Nous avons aussi calculé l'erreur EQM globale sur tous les décalages, et là encore la variabilité des erreurs est identique au cas 1-D.

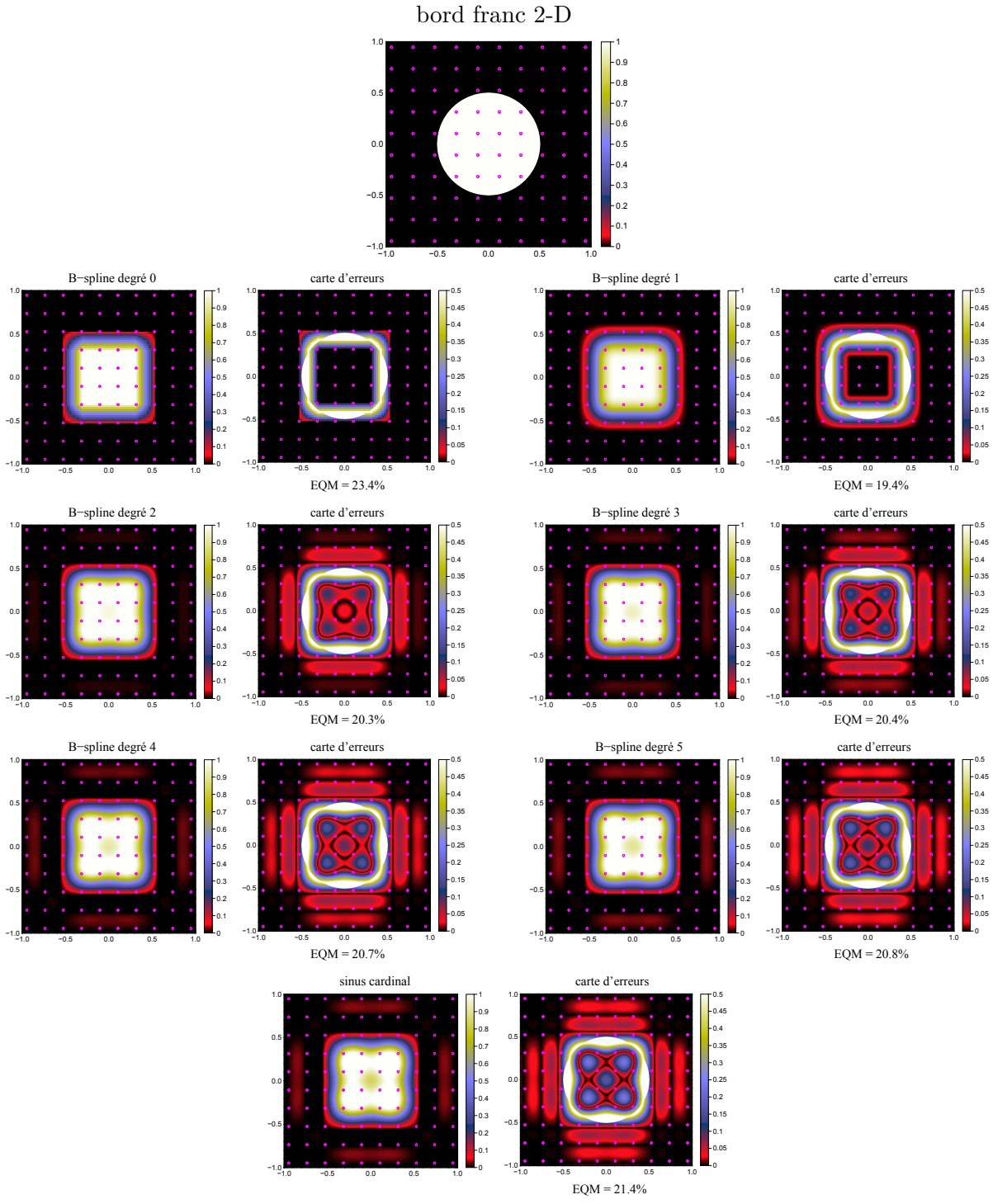


FIGURE 2.5: (a) Approximations continues d'un bord franc isotrope 2-D (disque) sur une grille 2-D à pas fixe Δ en x et en y (points magenta) à partir de diverses fonctions atomiques φ : B-spline de degré 0 à 5, sinus cardinal. Chaque image est l'approximation moyenne sur 10×10 décalages en x et en y de la grille entre -0.5Δ et 0.5Δ, associée à sa carte d'erreur — différence en valeur absolue — par rapport à la vérité. L'erreur quadratique moyenne globale EQM sur tous le décalages est indiquée.

Cette petite étude nous a donc permis d'introduire, dans un cadre concret, la théorie que nous allons présenter et les choix que nous allons faire. Il semblerait ressortir que l'approximation d'un bord franc la plus adaptée — comprendre la moins génératrice d'erreurs — soit l'approximation linéaire par la B-spline de degré 1, du moins du seul point de vue de la représentation du signal. Encore faut-il aussi qu'elle soit adaptée à la projection tomographique, et aux approximations que l'on devra mettre en place, source d'erreurs additionnelles (*cf.* section 2.2). Quoi qu'il en soit, cette étude a surtout illustré nos propos concernant les écueils de la fonction sinus cardinal lorsque le signal à représenter n'est pas borné spectralement.

Revenons, comme nous l'avons dit, à la théorie. Notre objectif est donc de contrôler l'erreur $\epsilon_f(\Delta)$. L'une des premières choses que l'on voudrait, serait de décroître vers une erreur nulle quand $\Delta \to 0$. Satisfaire cette propriété nécessite, d'après 2.10, que $E_\varphi(\boldsymbol{\omega}) \to 0$ quand $\Delta \to 0$. Cela conduit à la propriété très importante dite de *partition de l'unité* que doit satisfaire la base φ :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,, \quad \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}) = 1 \tag{2.13}$$

Cette propriété traduit également la capacité de la base à représenter la fonction constante — fonction dont le spectre contient une unique harmonique à la fréquence nulle. Pour information, la fonction sinus cardinal satisfait la partition de l'unité.

Unser, 2000 et Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a vont plus loin en précisant que l'on peut connaître le taux de décroissance de $\epsilon_f(\Delta)$ quand $\Delta \to 0$, en analysant le comportement polynomial à l'origine approché par le noyau d'erreur $E_\varphi(\boldsymbol{\omega})$ (*e.g.* par développement de Taylor). Des conditions supplémentaires, appelées conditions de Strang-Fix d'ordre L Strang and Fix, 1971, sont imposées à φ :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(0) = 1 \\ \hat{\varphi}^{(r)}(2\pi\boldsymbol{k}) = 0\,, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n_*\,, \quad r \in [0, L-1] \end{cases} \tag{2.14}$$

Elles sont valides pour toute fonction atomique φ décroissant suffisamment rapidement vers 0 — le sinus cardinal est l'une des rares fonctions à ne pas satisfaire ces conditions Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a. Les conditions de Strang-Fix amènent alors au résultat suivant :

$$\epsilon_f(\Delta) \leq C_L \cdot \Delta^L \cdot \left\| f^{(L)} \right\|_2 \tag{2.15}$$

où l'on suppose que f est L fois dérivable, de telle sorte que $\left\| f^{(L)} \right\|_2$ soit fini. C_L est une constante connue. Le résultat 2.15 implique donc que $\epsilon_f(\Delta)$ décroît globalement comme $O(\Delta^L)$ quand $\Delta \to 0$. Ce taux de décroissance est appelé *ordre d'approximation* L. Ce dernier correspond à la capacité de la fonction φ à reproduire exactement des polynômes de degré $d = L-1$ ou inférieur. La figure 2.6 illustre le facteur de décroissance de l'erreur par rapport à une erreur initiale $\epsilon_0 = \epsilon_f(\Delta_0)$, obtenue pour un pas d'échantillonnage Δ_0. On regarde ainsi de combien est divisée cette erreur ϵ_0, pour différents ordres d'approximation L, si l'on divise Δ_0 par un certain facteur $s \geq 1$, avec $s \to +\infty$.

La partition de l'unité constitue l'équivalent strict de l'inégalité 2.15 pour l'ordre $L = 1$ (reproduction de la constante), et une condition nécessaire pour les ordres supérieurs. Dans ce cas, et sous condition de bi-orthogonalité de la base (*cf.* 2.6), la constante C_L est donnée par :

$$C_L = \frac{1}{L!} \left(2 \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{+\infty} |\hat{\varphi}^{(L)}(2\pi\boldsymbol{k})|^2 \right)^{1/2} \tag{2.16}$$

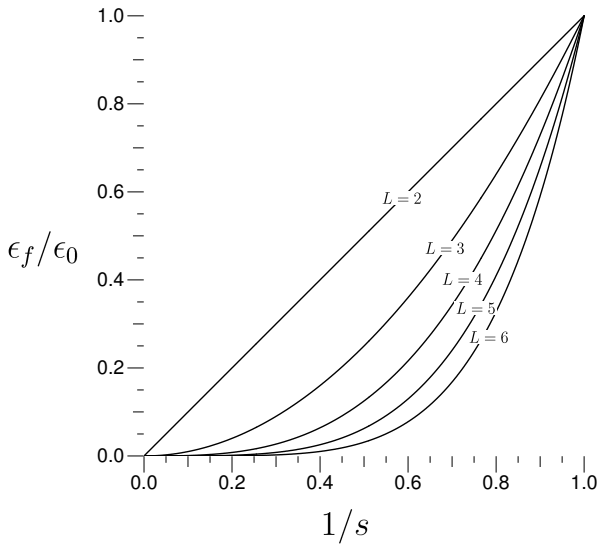


FIGURE 2.6: Taux de décroissance ϵ_f/ϵ_0 de l'erreur d'approximation ϵ_f, par rapport à l'erreur initiale $\epsilon_0 = \epsilon_f(\Delta_0)$, obtenue pour un pas d'échantillonnage Δ_0, en fonction du facteur de sur-échantillonnage $s \to +\infty$, pour différents ordres d'approximation L.

mettant ainsi en évidence que C_L dépend non seulement de la fonction atomique φ, mais est aussi proportionnelle à l'inverse de la factorielle de L. Ainsi, 2 fonctions atomiques φ_1 et φ_2 ayant des ordres d'approximation L_1 et L_2 différents, n'auront pas les mêmes niveaux d'erreur de par la valeur de leur constante C_{L_1} et C_{L_2} respective. Dans ce cas Δ^L n'aura que peu d'influence sur le membre de droite de l'équation 2.15, hormis pour les valeurs de Δ faibles, typiquement quand $\Delta \leq C_L$ [Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a], où il devient dominant. C'est ce cas de figure qu'illustre la figure 2.6, d'un point de vue purement théorique. On imaginerait alors que quelles que soient les valeurs des constantes C_{L_1} et C_{L_2}, il existerait un Δ_0 (et donc une erreur ϵ_0 associée) à partir duquel (de laquelle) elles seraient négligeables devant le terme de décroissance polynomiale Δ^L. À partir de cette limite, on voit alors l'intérêt de l'ordre d'approximation dans le contrôle de l'augmentation de l'erreur pour un Δ plus grand — sous-échantillonnage. Une bonne connaissance du taux de décroissance de l'erreur va en effet permettre de déterminer le meilleur compromis entre l'erreur maximale tolérable et le nombre de paramètres nécessaires pour modéliser f (un "point chaud" en termes de contrainte numérique, plus précisément d'espace mémoire et de temps de calcul). De plus, si l'énergie spectrale du signal f se concentre en grande partie au voisinage de la fréquence nulle ($\boldsymbol{\omega} = 0$), l'ordre d'approximation L sera alors un facteur déterminant pour la qualité de la modélisation, puisqu'une décroissance plus rapide engendrera une erreur moindre sur une bande spectrale plus large. Ces raffinements ne sont possibles qui si l'on a déjà atteint ce niveau critique de finesse d'échantillonnage, ce qui n'est pas toujours possible dans les applications (limitations d'ordre numérique d'une manière générale). Dans d'autres cas, il paraît plus logique de comparer des fonctions ayant le même ordre d'approximation, et les classer suivant la valeur de leur constante C_L.

En résumé, il faut relativiser l'importance de l'ordre d'approximation L en fonction de l'application. Il reste néanmoins une propriété essentielle, car il est intrinsèquement lié à la forme du noyau d'erreur $E_\varphi(\boldsymbol{\omega})$, dont on a dit plus haut qu'il était une prédiction de l'erreur d'approximation de la fonction $f(\boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x})$ d'énergie infinie, par un signal représenté à partir de l'atome φ. De plus il traduit la facilité plus ou moins grande que l'on aura de représenter des polynômes de plus haut degré. En d'autres termes, on pourra s'approcher

localement du développement de Taylor du signal f à des ordres de plus en plus élevéss, nous permettant ainsi d'approximer des détails de plus en plus fins. Mais cette recherche de détails a un prix : en effet une fonction φ avec un ordre d'approximation L signifie un support supérieur ou égal à L, c'est-à-dire que φ s'étendra sur L nœuds voisins d'une grille régulière d'échantillonnage. Ce théorème a été établi dans [Blu et al., 2001], et définit les fonctions dites MOMS (Maximum Order Minimum Support), qui sont les fonctions d'ordre L à support minimal, *i.e.* L d'après le théorème sus-nommé. L'intérêt d'avoir une fonction φ à support compact suffisamment petit est double : son influence localisée évite une propagation trop large d'éventuels artéfacts, et par dessus tout rend la charge d'implantation plus légère puisqu'une fonction $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ n'aura d'impact que sur ses voisins proches. Cette dernière propriété est capitale pour l'élaboration d'un projecteur tomographique rapide, puisqu'elle engendrera un impact localisé de la projection d'une fonction de base $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ sur les pixels du détecteur. Notre opérateur de projection sera alors creux et donc plus rapide à calculer.

Puisque l'on vient d'y faire allusion, passons à présent au cadre de la projection tomographique, dont nous donnerons des détails dans la section 2.2. Nous pouvons cependant aborder d'ores et déjà quelques aspects. Outre la précision de la modélisation des données, qui sera en partie donnée par la qualité de la fonction atomique φ et de surcroît par la bonne représentation du signal f, l'autre contrainte majeure sera la charge calculatoire du projecteur. On a répondu en partie au problème en soulignant la nécessité d'un support assez compact pour φ, mais on peut ajouter d'autres points d'intérêt. Premièrement, la séparabilité éventuelle de φ, autrement dit la possibilité d'écrire cette fonction atomique multi-dimensionnelle comme un produit de fonctions monodimensionnelles (1 par dimension de l'espace), aurait un avantage certain puiqu'elle permettrait la factorisation des calculs par dimension — *e.g.* le calcul de coefficients pour une interpolation séparable d'une grille N^n est en $O(nN)$ au lieu de $O(N^n)$ sans la séparabilité. Deuxièmement, qui dit projection tomographique dit orientation de la source et du détecteur, ce qui signifie des trajectoires de projection des fonctions $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ différentes. Il serait donc intéressant, par souci de simplicité d'implantation, que ces fonctions aient un comportement similaire quel que soit l'angle sous lequel elles seront projetées. Il serait donc très souhaitable que φ ait un caractère isotrope, autrement dit soit à une symétrie sphérique. Ainsi la projection d'une fonction $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ serait indépendante de l'orientation, ce qui nous permettrait de la généraliser à tout type de géométrie de projection.

Mais ce n'est pas là le seul intérêt de l'isotropie. En effet cette propriété apporterait aussi du réalisme à la modélisation des données. En effet il paraît logique que le comportement de l'atome φ, et par extension du signal qu'il modélise, soit indépendant des paramètres géométriques du système. On pense notamment ici aux erreurs de modélisation, lesquelles devraient être préférentiellement homogènes sur l'ensemble des données, afin que le "bruit de modélisation" soit stationnaire sur l'objet reconstruit, pour ainsi limiter les artéfacts "directionnels". On présentera dans la section 2.2 d'autres arguments, réellement spécifiques au problème de la tomographie, qui justifieront plus précisément en quoi la symétrie sphérique de la base de fonctions constitue un gage de finesse de la modélisation des projections.

Pour conclure, faisons un bilan des propriétés désirables de la base φ :

- permettre une modélisation précise de la fonction f, afin notamment de préserver des transitions abruptes (f peut éventuellement être continue par morceaux) — cette propriété est liée à l'erreur d'approximation $\epsilon_f(\Delta)$, liée elle-même à l'ordre d'approximation L de la base ;
- être à support compact, afin d'avoir une influence localisée qui nous amènera à un opérateur de projection creux (peu de coefficients non nuls) ;
- être séparable suivant les directions de l'espace, c'est-à-dire un produit de fonctions monodimensionnelles dépendant chacune d'une seule coordonnée cartésienne. Cette propriété permet d'alléger la charge de calcul grâce à la factorisation des expressions analytiques ;

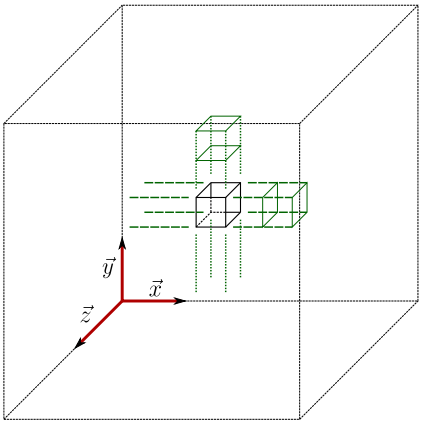


FIGURE 2.7: L'indicatrice de voxel.

- être robuste aux artéfacts générés par d'éventuelles transformations géométriques (rotation, recalage, ré-échantillonnage) ;
- être à symétrie sphérique, ce caractère isotropique simplifiant grandement son implantation (*cf.* section 2.2).

Il est bien sûr évident qu'on ne pourra atteindre la perfection dans tous les domaines. Le choix de la fonction φ va par conséquent être affaire de compromis entre les besoins de précision de la modélisation et de satisfaction aux contraintes de l'implantation numérique de la projection tomographique. Les parties suivantes aborderont ce sujet, d'abord par un état de l'existant en matière de modélisation, avec leurs avantages et leurs limites. Puis nous proposerons ensuite notre approche du problème, basée sur l'utilisation des propriétés des fonctions de type B-splines. Nous mettons ensuite en évidence le bien-fondé de nos choix en exploitant les principes énoncés dans la théorie de l'échantillonnage "moderne".

2.1.2 État de l'art

Les indicatrices de voxels

La fonction de base la plus usitée en reconstruction tomographique est l'indicatrice de voxels, autrement dit la fonction *porte* n-dimensionnelle ($n = 2$ ou $n = 3$ dans notre cas) — uniforme sur son support cubique de largeur le pas d'échantillonnage Δ, et notée $\Pi_\Delta(\boldsymbol{x})$.

$$\Pi_\Delta(\boldsymbol{x}) = p_\Delta(x_1) \times \cdots \times p_\Delta(x_n)\,, \quad \text{avec } p_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.17}$$

Cette fonction est séparable et répond parfaitement à la contrainte de compacité. De plus, comme son support n'empiète pas sur les positions adjacentes de la grille d'échantillonnage, les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ sont égaux aux valeurs $f_{\boldsymbol{k}}$ du signal f en ces points ($\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$, avec $\mathbf{I}$ l'identité, dans l'équation 2.3). Elle est donc relativement légère en termes de charge de calcul. En revanche, elle ne satisfait que la partition de l'unité et pas les conditions de Strang-Fix d'ordre supérieur. Son ordre d'approximation n'est donc que de 1. Nous verrons dans la section 2.1.3 que ce n'est ni plus ni moins que la B-spline de degré 0, ce qui en fait une base très grossière pour la représentation du signal f, avec une erreur $\epsilon_f(\Delta)$ élevée (*cf.* Fig. 2.4 et 2.5). Nous l'illustrons ici sur la figure 2.8 avec la représentation 1-D de la fonction $\sin(\pi x)$. On donnera les explications

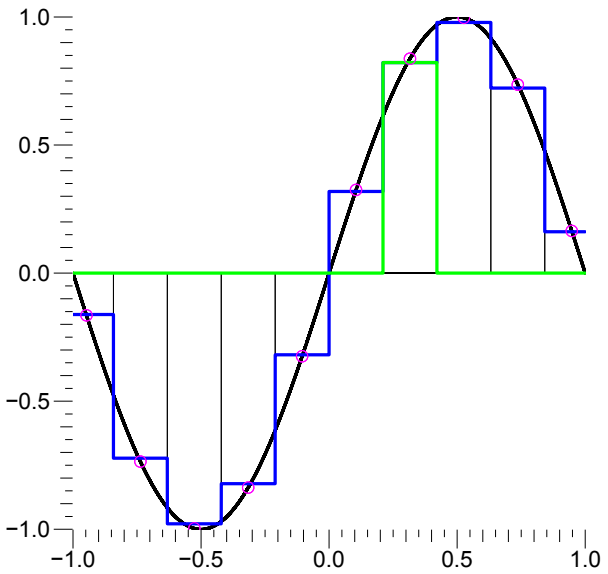


FIGURE 2.8: Modélisation 1-D — en bleu — de la fonction $\sin(\pi x)$ — en noir — à partir de fonctions *portes* — en vert — positionnées régulièrement aux points indiqués en magenta, au sens de la meilleure approximation en norme L_2. Le pas d'échantillonnage Δ est d'$\frac{1}{10}^{\text{ème}}$ de la période 2 du signal, donnant une erreur d'environ $2{,}5 \times 10^{-2}$ d'après le noyau d'erreur de Π_Δ (*cf.* Fig. 2.13, section 2.1.3).

de la légende, notamment la valeur de l'erreur, dans la section 2.1.3 avec l'analyse des noyaux d'erreur $E_\varphi(\boldsymbol{\omega})$ des fonctions B-splines.

À cela, ajoutons qu'elle est fortement anisotrope. Elle présente notamment des transitions abruptes uniquement perpendiculairement aux axes de séparabilité (*cf.* figure 2.7), ce qui la rend inadaptée pour modéliser des bords francs éventuels dans toutes les directions. Sa projection tomographique exacte sur le plan détecteur devient de fait non triviale du point de vue de l'implantation, et des approximations généralement grossières sont nécessaires. On le verra dans la section 2.2 lorsqu'on présentera les modèles basés sur ces fonctions, comme les projecteurs *voxel driven*, *ray driven* et *distance driven*.

Les blobs

Les éléments de volume à symétrie sphérique, communément appelées "blobs", ont été introduits par Lewitt et Matej au début des années 90 [Lewitt, 1990, Lewitt, 1992, Matej and Lewitt, 1992]. Ils furent présentés à l'époque comme une alternative très efficace aux nombreux écueils, mentionnés dans la section précédente, engendrés par l'utilisation des indicatrices de voxels. Leur propriété fondamentale, à savoir leur symétrie sphérique, permet notamment de s'affranchir totalement des problèmes d'anisotropie de projection (du moins en géométrie parallèle). Elles constituent une catégorie globale de fonctions, du moment qu'elles satisfont la propriété susnommée et qu'elles sont à support fini. Cependant, elles n'ont, dans la littérature en reconstruction tomographique, qu'un seul représentant : la fonction de Kaiser-Bessel généralisée. Elle est définie par son profil radial :

$$b_{m,a,\alpha}(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{I_m(\alpha)} \left[\sqrt{1-(r/a)^2}\right]^m I_m\left(\alpha\sqrt{1-(r/a)^2}\right), & |r| \leq a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.18}$$

où r est la distance au centre du blob (normalisée ici, c'est-à-dire en unités telles que $\Delta = 1$), a le paramètre contrôlant le support de la fonction (normalisé aussi). Ce même profil mis à

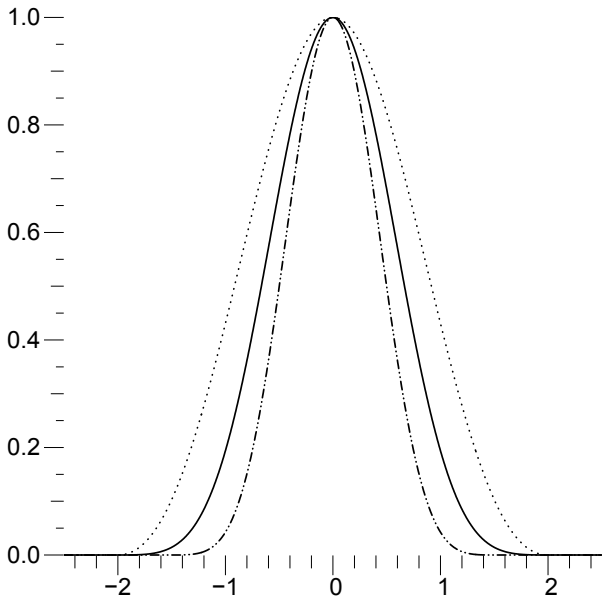


FIGURE 2.9: Profils radiaux de blobs à différents paramètres. En trait plein : $m = 2$; $a = 2$; $\alpha = 10{,}4$. En trait mixte (tiret / 2 points) : $m = 2$; $a = 1{,}5$; $\alpha = 10{,}4$. En trait pointillé : $m = 2$; $a = 2$; $\alpha = 4$. Le blob en trait plein est idéal pour être utilisé en tant que fonction atomique d'une base de représentation.

l'échelle d'un pas d'échantillonnage Δ non unitaire s'écrirait :

$$b^{\Delta}_{m,a,\alpha}(r) = b_{m,a,\alpha}\left(\frac{r}{\Delta}\right) \tag{2.19}$$

I_m est la fonction de Bessel modifiée d'ordre m, qui contrôle la continuité et la dérivabilité du blob au point où il s'annule : $b_{m,a,\alpha}(r)$ est donc C^{m-1} en $r = a$, et son ordre d'approximation est proche de $m + 1$. Le paramètre α quant à lui contrôle la forme du blob. De par leur support compact, les blobs satisfont également les conditions de Strang-Fix, et un paramètre $m \geq 2$ garantit un bon raccordement continu en $r = a$, au moins C^1, ainsi qu'un ordre d'approximation $L \geq 3$. La transformée de Fourier de $b_{m,a,\alpha}(r)$ en fonction de ces paramètres est également connue sous forme analytique :

$$\hat{b}_{m,a,\alpha}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}\, a\, \alpha^m}{I_m(\alpha)} \cdot \dfrac{I_{m+1/2}\left(\sqrt{|\alpha^2 - (\omega a)^2|}\right)}{\left[\sqrt{|\alpha^2 - (\omega a)^2|}\right]^{m+1/2}}, & |\omega a| \leq \alpha \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}\, a\, \alpha^m}{I_m(\alpha)} \cdot \dfrac{J_{m+1/2}\left(\sqrt{|\alpha^2 - (\omega a)^2|}\right)}{\left[\sqrt{|\alpha^2 - (\omega a)^2|}\right]^{m+1/2}}, & |\omega a| > \alpha \end{cases} \tag{2.20}$$

$J_{m+1/2}$ est la fonction de Bessel de première espèce à l'ordre $m + 1/2$. La figure 2.10 illustre les densités spectrales d'énergie pour les fréquences positives des blobs présentés dans la figure 2.9.

Matej et Lewitt ont défini les paramètres m, a et α les plus adaptés [Matej and Lewitt, 1996] pour satisfaire aux critères exigés par leur utilisation en qualité de base de fonctions d'échantillonnage, notamment la partition de l'unité 2.13. En imposant au spectre de s'annuler ou d'être négligeable à tous les multiples non nuls de la fréquence d'échantillonnage, les valeurs qu'ils proposent, $m = 2$, $a = 2$ et $\alpha = 10{,}4$, permettent d'utiliser un blob en tant que fonction atomique d'une base de représentation d'un signal. Le paramètre $m = 2$ garantit le bon raccordement continu en $r = a$ jusqu'à sa première dérivée, ainsi qu'un ordre d'approximation $L = 3$.

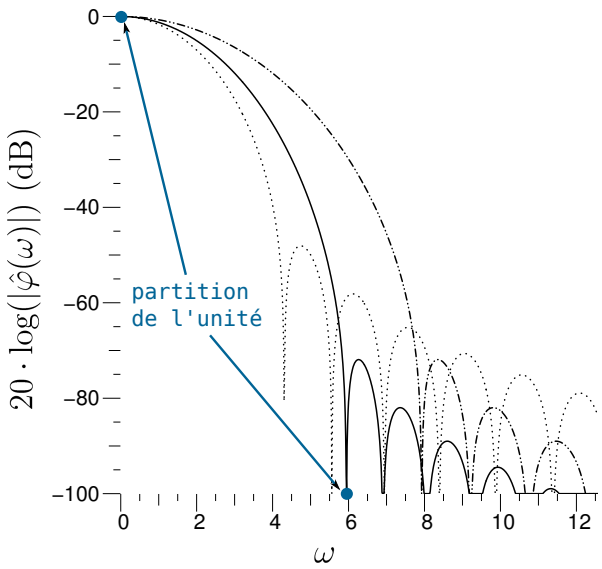


FIGURE 2.10: Densités spectrales d'énergie en échelle logarithmique — $20\log_{10}(\cdot)$ (dB), des blobs à différents paramètres. En trait plein : $m = 2$; $a = 2$; $\alpha = 10{,}4$. En trait mixte (tiret / 2 points) : $m = 2$; $a = 1{,}5$; $\alpha = 10{,}4$. En trait pointillé : $m = 2$; $a = 2$; $\alpha = 4$. Le blob en trait plein est idéal pour être utilisé en tant que fonction atomique d'une base de représentation.

De par son support compact ($a = 2$), ce blob satisfait également les conditions de Strang-Fix. Cependant, à la différence de l'indicatrice de voxel, ce blob empiète sur les positions de grille adjacente, et les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ ne correspondent donc pas aux valeurs $f_{\boldsymbol{k}}$ du signal f en ces points. Pour retrouver ces valeurs, il faut passer par l'étape de ré-interpolation $\boldsymbol{\Phi}$. Cette opération n'est pas extrêmement lourde en charge de calcul si les coefficients d'interpolation sont stockés — ce n'est qu'une convolution discrète. En revanche c'est l'opération inverse $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$, permettant d'obtenir les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ à partir des échantillons $f_{\boldsymbol{k}}$, qui peut s'avérer non triviale et coûteuse, surtout si elle doit être appliquée plusieurs fois dans un algorithme itératif.

Le blob, paramétré idéalement, possède donc tous les atouts d'une "bonne" base de fonctions, à commencer par son isotropie en fonction de l'orientation du plan détecteur, qui en fait une base de modélisation réaliste. Ils ont donc été exploités en modélisation de la projection tomographique [Ziegler et al., 2006], et ont même fait l'objet d'adaptation au cas de la tomographie dynamique [Isola et al., 2008a] (*cf.* chapitre 3). En revanche, utilisé comme une fonction multidimensionnelle, dont le profil radial est la fonction de Kaiser-Bessel généralisée, un blob n'est pas séparable sur la grille cartésienne de discrétisation de f, ce qui induit une charge calculatoire notable, surtout en reconstruction 3-D. Il faut aussi voir que cette fonction met en jeu des fonctions (fonctions de Bessel) qui sont numériquement difficiles à manipuler. Nous allons voir dans la section suivante qu'il existe des fonctions bien mieux adaptées à la représentation du signal, satisfaisant parfaitement, ou pour certaines approchant avec une très bonne précision, toutes les propriétés d'intérêt, tout en étant bien plus aisées à manipuler numériquement : il s'agit des B-splines, dont nous comparerons la qualité et les performances à celle des blobs.

2.1.3 Des B-splines comme base de représentation

Les fonctions splines de degré d sont des fonctions polynomiales par morceaux, dont le degré maximum des polynômes les constituant est d. Elles sont continûment différentiables à l'ordre $d-1$. Une spline peut être exprimée par un combinaison linéaire unique de fonctions atomiques, elles-mêmes polynomiales par morceaux, régulièrement espacées. Ces fonctions atomiques sont

appelées *B-splines*. Elles ont été décrites pour la première fois en 1946 [Schönberg, 1946], et ont fait l'objet de nombreuses exploitations en mathématiques appliquées à partir des années 60, notamment grâce aux travaux de De Boor [De Boor, 1972]. Aujourd'hui, leurs excellentes propriétés en font des fonctions de choix en traitement du signal et de l'image [Unser, 1999]. Nous allons les décrire en détail.

Soit

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

la fonction *porte* monodimensionnelle. Notons β^d la B-spline de degré d, définie comme puissance $(d+1)^{\text{ème}}$ de convolution de β^0, qui correspond alors au membre générique de cette famille de fonctions.

$$\beta^d(x) = \underbrace{\beta^0 * \cdots * \beta^0}_{d+1 \text{ termes}}(x) \tag{2.21}$$

Il s'agit de notre fonction atomique 1-D, dont on connait également une expression analytique :

$$\beta^d(x) = \sum_{k=0}^{d+1} (-1)^d \binom{d+1}{k} \left(\frac{d+1}{2} + \frac{x}{\Delta} - k \right)_+^d \tag{2.22}$$

où $(x)_+^d = (\max(0, x))^d$, ainsi que sa transformée de Fourier :

$$\hat{\beta}^d(\omega) = \left(\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2})}{\frac{\Delta\omega}{2}} \right)^{d+1} = \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \right) \right]^{d+1} \tag{2.23}$$

La figure 2.11 illustre l'allure des B-splines pour les degrés 0, 1, 2 et 3. Les B-splines de degré 0 et 1, ne sont autres, respectivement, que l'indicatrice de voxel[9], qui est en fait équivalente à une interpolation au plus proche voisin, et la fonction *triangle*, utilisée pour l'interpolation linéaire. Ce sont les 2 seules B-splines qui sont nulles sur les positions adjacentes de la grille d'échantillonnage, *i.e.* pour lesquelles $c_{\boldsymbol{k}} = f_{\boldsymbol{k}} = f(\boldsymbol{x_k})$ et $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$. Parmi les B-splines de degré supérieur, la B-spline cubique (de degré 3) retiendra notre attention par la suite, son expression analytique normalisée ($\Delta = 1$) est :

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(2 - |x|)\, x^2 & 0 \le |x| \le 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & 1 \le |x| \le 2 \end{cases} \tag{2.24}$$

La figure 2.12 illustre les densités spectrales d'énergie pour les fréquences positives des B-splines présentées dans la figure 2.11.

Les B-splines ont fait l'objet d'un intérêt particulier dans le cadre de la théorie de l'échantillonnage et de l'interpolation [Unser et al., 1993a, Unser et al., 1993b, Unser, 1999, Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a]. Pouvant par définition représenter parfaitement des polynômes par morceaux de degré d — les *splines* sus-nommées, elles remplissent donc les conditions de

9. Dans sa version 3-D dont on montre ici un profil 1-D.

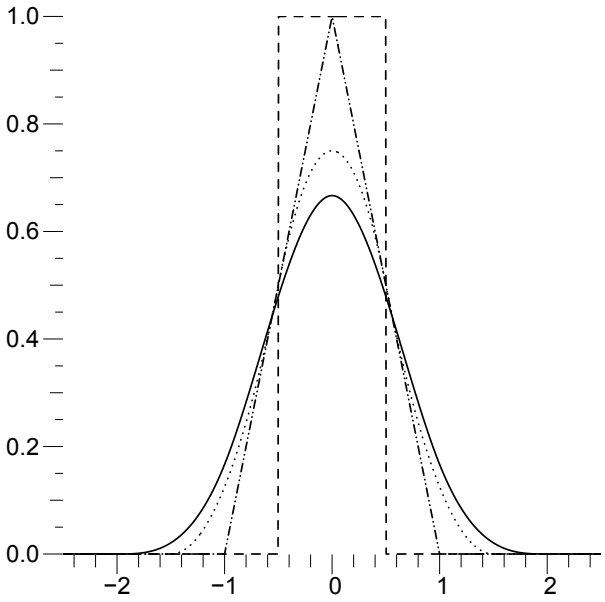


FIGURE 2.11: B-splines monodimensionnelles de degré 0 (β^0) — trait tireté, 1 (β^1) — trait mixte, 2 (β^2) — trait pointillé, et 3 (β^3) — trait plein. Il s'agit de puissances de convolution de la fonction générique β^0, *i.e.* la fonction *porte*.

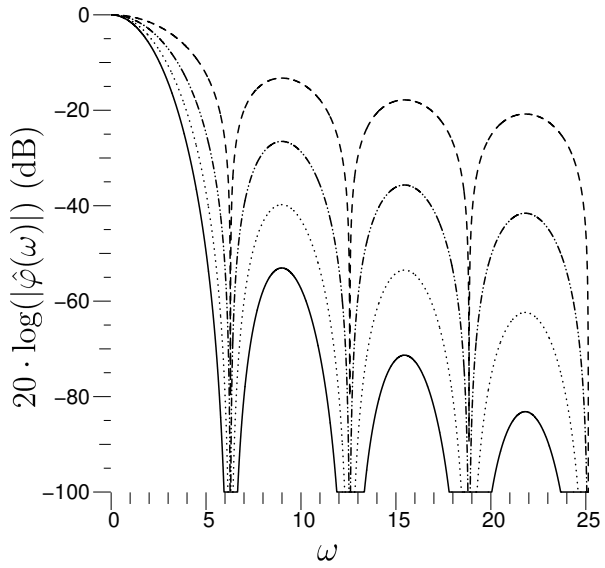


FIGURE 2.12: Densités spectrales d'énergie en échelle logarithmique — $20\log_{10}(\cdot)$ (dB), des B-splines monodimensionnelles de degré 0 (β^0) — trait tireté, 1 (β^1) — trait mixte, 2 (β^2) — trait pointillé, et 3 (β^3) — trait plein.

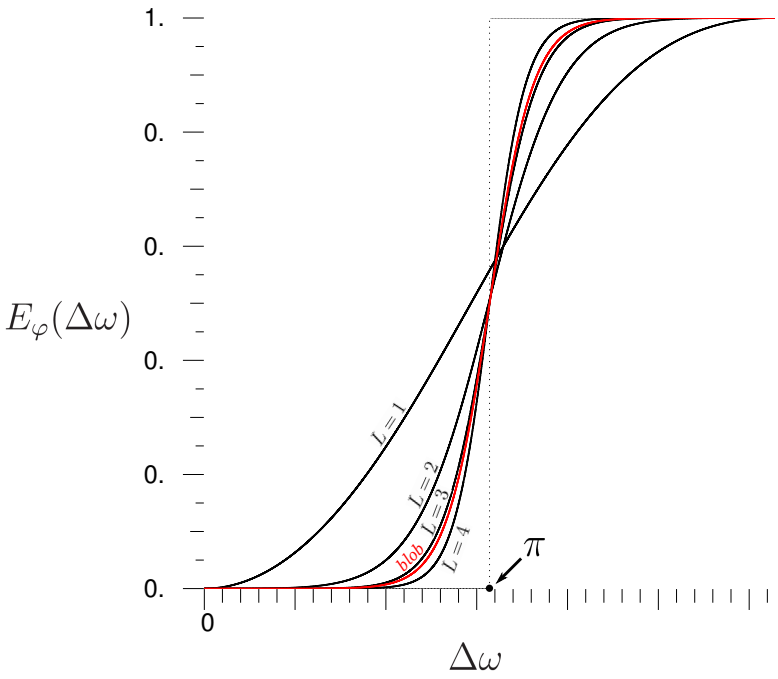


FIGURE 2.13: Noyaux d'erreur normalisés — en noir — des B-splines pour différents ordres d'approximation $L = d + 1$, où d est le degré des B-splines. Pour $L = 1$, le noyau d'erreur correspond à celui de l'indicatrice de voxel monodimensionnelle. Le noyau d'erreur d'un blob atomique ($m = 2$; $a = 2$; $\alpha = 10{,}4$) — en rouge, est aussi représenté à titre de comparaison. La courbe en trait pointillé correspond au cas idéal, *i.e.* le noyau d'erreur de la fonction sinus cardinal (théorie d'échantillonnage de Shannon), où l'erreur est nulle en-deçà de la fréquence de Nyquist $\omega = \frac{\pi}{\Delta}$).

Strang-Fix à l'ordre $L = d + 1$, qui est alors leur ordre d'approximation. Un degré plus élevé garantit donc une meilleure approximation du signal f, mais au détriment d'un support plus large. En effet une B-spline de degré d a un support de largeur $d + 1$ (en unités du pas d'échantillonnage). Malgré leur support étendu, les B-splines n'en demeurent pas moins les fonctions les plus compactes pour un ordre d'approximation donné L. Dit autrement, elles sont d'ordre maximum pour un support entier donné, les classant dans la catégorie des fonctions dites Moms (Maximum Order Minimum Support) dont on a parlé dans la section 2.1.1. En termes d'erreur d'approximation, elles ne sont surpassées que par les fonctions o-Moms (optimal Maximum Order Minimum Support), une sous-catégorie des Moms dérivant des B-splines [Blu et al., 1998], dont la constante C_L (*cf.* équations 2.15 et 2.16) est minimale à l'ordre L, mais au prix d'une moins bonne dérivabilité. Pour ce dernier point, ce sont les B-splines qui sont optimales, constituant les fonctions les plus compactes et les plus lisses à l'ordre L, *i.e.* continûment différentiables à l'ordre $L - 1$.

C'est donc le degré d qui va permettre de contrôler entre autres l'ordre d'approximation que l'on va souhaiter atteindre pour la représentation du signal f. La figure 2.13 montre les noyaux d'erreur $E_\varphi(\Delta\omega)$ (*cf.* 2.11), en dimension 1, pour les B-splines de degré $d = 0$ à 3, ainsi que celui du blob idéal (courbe rouge) présenté dans la section 2.1.2, pour comparaison. À noter que le noyau d'erreur de la B-spline de degré 0 équivaut à celui d'une représentation à l'aide d'indicatrices de voxels[10] présentées aussi dans la section 2.1.2. La courbe en trait pointillé correspond au cas idéal dans le cadre de la théorie de Shannon pour les signaux à support spectral borné. Dans ce cas, la fonction atomique idéale est, on l'a vu dans la section 2.1.1, le sinus cardinal, dont le noyau d'erreur, et donc l'erreur d'approximation, est nul en-deçà de la

10. Il s'agit bien entendu d'une illustration à 1 dimension, mais cela donne un aperçu du comportement de la base.

fréquence de Nyquist $\omega = \frac{\pi}{\Delta}$. De la sorte, plus le degré de la B-spline est grand, plus l'erreur d'approximation décroît rapidement quand $\Delta \to 0$, ce qui corrobore bien le comportement dicté par l'ordre d'approximation L. Ainsi, pour un pas d'échantillonnage Δ donné, *i.e.* une fréquence de Nyquist donnée, on diminue l'erreur sur une bande spectrale plus large à mesure que L augmente, le cas $L = 1$ étant le plus défavorable (indicatrice de voxels). De ce point de vue, c'est la B-spline cubique (degré 3) qui, sur cette figure, est la meilleure. On constate de plus que le noyau d'erreur du blob atomique est quasiment identique à celui de la B-spline quadratique (degré 2), ce qui confirme que son ordre d'approximation est proche de 3.

Comme on l'a présenté auparavant, $E_\varphi(\boldsymbol{\omega})$ est la prédiction de l'erreur d'approximation quand l'atome φ est utilisé pour interpoler une version échantillonnée de la fonction $f(\boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x})$ d'énergie infinie. C'est ce que l'on peut voir sur la figure 2.8 pour la représentation de la fonction $\sin(\pi x)$ avec l'indicatrice de voxel monodimensionnelle. La figure 2.14 fait de même, mais cette fois avec la B-spline cubique. On remarque l'extrême précision dans la représentation du signal. D'après l'échantillonnage Δ de la fonction, qui correspond au $\frac{1}{10}^{\text{ème}}$ de la période du signal à modéliser, on en déduit que la fréquence du signal d'origine est 5 fois inférieure à la fréquence de Nyquist normalisée π, et on peut alors identifier l'erreur d'approximation sur le graphe 2.13 des noyaux d'erreur. La figure 2.15 montre un grandissement de ce graphe, pour $\omega \in [0, \pi/\Delta]$ et $E_\varphi(\Delta\omega) \in [0, 3 \times 10^{-2}]$. On y voit que pour cet échantillonnage, identifié par la droite verticale en trait tireté bleu, l'erreur est d'environ $2{,}5 \times 10^{-2}$ pour l'indicatrice de voxels, $1{,}24 \times 10^{-6}$ pour le blob et $2{,}8 \times 10^{-8}$ pour la B-spline cubique. On peut envisager ce résultat selon un autre point de vue, identifié par la droite horizontale en trait tireté bleu, où l'on considère l'erreur de la B-spline de degré 0 pour cet échantillonnage comme un seuil d'erreur à ne pas dépasser. On voit alors qu'avec des fonctions d'ordre supérieur, on peut modéliser un signal $\sin(\omega x)$ de fréquence plus élevée tout en restant sous ce seuil, et pour ce même échantillonnage. Cette fréquence maximale normalisée de $\frac{\pi}{5}$ pour l'indicatrice, est d'environ $0{,}725 \times \pi$ pour le blob et $0{,}775 \times \pi$ pour la B-spline cubique. Enfin, on peut mener un dernier raisonnement : la représentation d'un signal de type $\sin(\omega_0 x)$, et a fortiori de tout signal ayant un contenu fréquentiel n'excédant pas ω_0, à partir de fonctions atomiques d'ordre supérieur, comme les blobs ou les B-splines de degré $d \geq 0$, peut être échantillonnée à une fréquence moindre pour une même erreur d'approximation. En effet, l'échantillonnage Δ joue comme un facteur de contraction ($\Delta \nearrow$) ou de dilatation ($\Delta \searrow$) de la courbe représentant le noyau d'erreur $E_\varphi(\Delta\boldsymbol{\omega})$. Intuitivement, pour un seuil d'erreur d'approximation donné, il est possible d'adapter le noyau d'erreur par réglage du pas Δ, suivant la fonction atomique utilisée. Ainsi, d'après le graphe 2.15, si l'on prend comme seuil maximum d'erreur tolérable $2{,}5 \times 10^{-2}$, le pas d'échantillonnage Δ limite est de $\frac{\pi}{5\omega_0}$ pour l'indicatrice de voxels, $\frac{0{,}725\pi}{\omega_0}$ pour le blob et $\frac{0{,}775\pi}{\omega_0}$ pour la B-spline cubique. Ainsi l'utilisation de cette dernière comme fonction de base permet de relâcher l'échantillonnage pour une erreur équivalente, par rapport aux 2 autres fonctions citées — indicatrice de voxel et blob. Ce dernier constat est d'une grande importance en ce qui concerne le nombre de paramètres $c_{\boldsymbol{k}}$ devant être utilisés dans notre problème de reconstruction, et qui est largement assujetti au pas d'échantillonnage de la grille, en fonction de la base sélectionnée et de la précision d'approximation souhaitée.

Revenons alors à la formulation de la représentation de l'image 2.1, et choisissons les B-splines comme fonctions $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ de notre base :

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\Delta}} \right) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{\beta}^d \left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{\Delta}} \right) \tag{2.25}$$

où $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)^\top$ sont les pas d'échantillonnage dans chaque direction de l'espace, et $\boldsymbol{\beta}^d$ est une B-spline n-dimensionnelle normalisée ($\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{1}$) de degré d, séparable suivant chaque

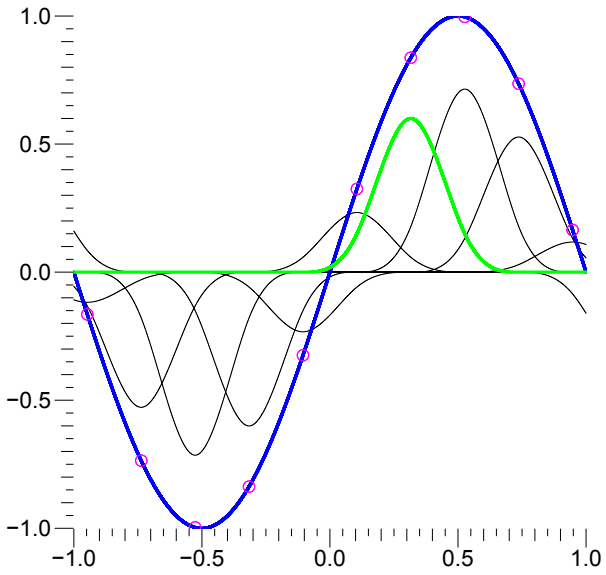


FIGURE 2.14: Modélisation 1-D — en bleu — de la fonction $\sin(\pi x)$ — en noir — à partir de B-splines cubiques — en vert — positionnées régulièrement aux points indiqués en magenta. Le pas d'échantillonnage Δ est d'$\frac{1}{10}$ ème de la période 2 du signal, donnant une erreur d'environ $2{,}8 \times 10^{-8}$ d'après le noyau d'erreur de β^3 (*cf.* figure 2.13).

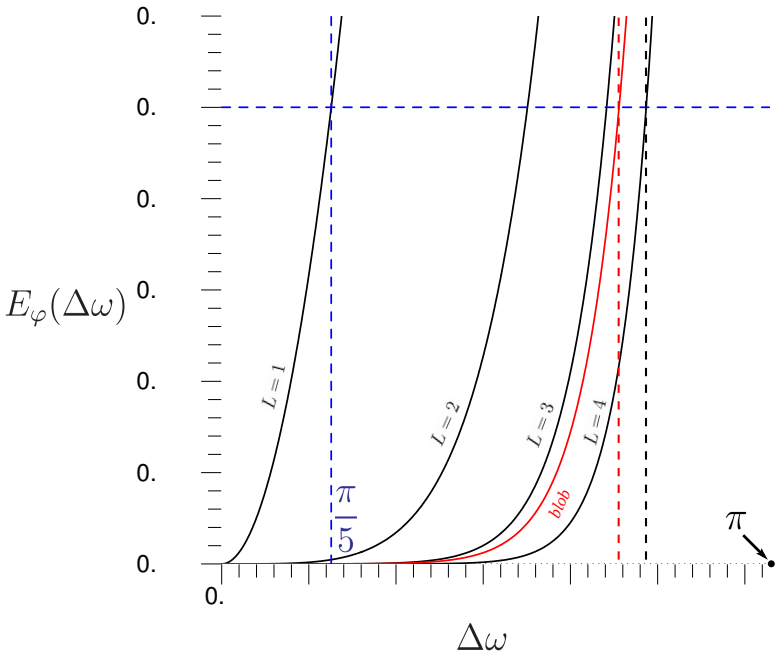


FIGURE 2.15: Grandissement de la figure 2.13 pour $\omega \in [0, \pi]$ et $E_\varphi(\omega) \in [0, 3\times10^{-2}]$. La droite verticale en trait tireté rouge indique la fréquence du signal $\sin(\pi x)$, par rapport à la fréquence de Nyquist donnée par l'échantillonnage du signal illustré dans les figures 2.8 et 2.14. La droite horizontale en trait tireté bleu indique l'erreur d'approximation du signal représenté par des B-splines de degré 0 (indicatrices). Les droites verticales en trait tireté rouge et noir indiquent la fréquence maximale du signal $\sin(\omega x)$ que l'on peut modéliser avec respectivement des blobs et des B-splines cubiques, avec une erreur inférieure au seuil horizontal.

direction de l'espace $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{\beta}^d\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\Delta}}\right) = \prod_{l=1}^{n} \beta^d\left(\frac{x_l}{\Delta_l}\right). \tag{2.26}$$

$\tilde{f}$ devient une spline n-dimensionnelle s'ajustant à la fonction réelle f que nous souhaitons modéliser. D'après l'un des théorèmes de Unser énoncés dans la section 2.1.1, $\tilde{f}$ est la projection orthogonale de f sur l'espace des splines de degré d. Les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ sont donc les composantes de $\tilde{f}$ dans cet espace, et, d'après 2.5 :

$$c_{\boldsymbol{k}} = \langle f, \mathring{\boldsymbol{\beta}}^d_{\boldsymbol{k}} \rangle \tag{2.27}$$

Contrairement à un blob, si l'on se place dans le cas 3-D, une B-spline de degré d n'est pas à symétrie sphérique. Sa projection tomographique ne sera donc pas isotrope. Cependant, elle tend à l'être pour un degré d suffisamment grand. La raison se trouve dans son expression comme produit de convolution de $d+1$ fonctions β^0 (*cf.* équation 2.21). Lorsque d tend vers l'infini, la B-spline, convenablement renormalisée, tend vers la gaussienne de variance identique, à symétrie sphérique, du fait du théorème central limite. On l'illustre sur la figure 2.16 avec la comparaison entre une gaussienne (colonne de gauche) et une B-spline (colonne du milieu) bidimensionnelles, à variance identique, pour un degré $d = 3$ ($1^{\text{ère}}$ ligne) puis $d = 9$ (2^{nde} ligne). La variance est différente suivant l'ordre de la B-spline. On voit que la distinction entre les 2 fonctions s'atténue à mesure que d augmente. La colonne de droite montre la différence en valeur absolue entre les 2 fonctions 2-D. Cela confirme notre constat qualitatif, puisque l'erreur maximale pour la B-spline cubique est de 3,3%, ce qui est déjà relativement faible, et que celle pour la B-spline de degré 9 est d'environ 0,6%. Le graphe du bas montre des profils médians de la gaussienne 2-D (en trait tireté) et de la B-spline 2-D (en trait plein) pour les degrés 3 et 9 (respectivement en noir et en bleu). Les courbes en trait mixte correspondent à la différence absolue de ces profils.

Joignant ainsi à une excellente modélisation du signal f en termes d'erreur d'approximation, à la fois séparabilité et "quasi-isostropie" sous condition d'un degré suffisamment élevé, la B-spline satisfait à toutes les propriétés d'intérêt que nous avons citées. Il paraît alors naturel qu'elle constitue également l'une des meilleurs bases d'interpolation en traitement de l'image [Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a], extrêmement robuste aux artéfacts générés par des transformations géométriques, *e.g.* des rotations. La B-spline cubique est notamment présentée dans la littérature comme l'un des meilleurs compromis entre qualité d'approximation et compacité pour permettre un calcul suffisamment rapide. Compacité certes, mais à l'instar des blobs, une B-spline de degré supérieur ou égal à 2 voit son support empiéter sur les positions de grille adjacentes. À partir des valeurs $f_{\boldsymbol{k}}$ de f, il faut donc ré-interpoler les coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ pour obtenir les valeurs $f_{\boldsymbol{k}}$ de f. Si l'opération dans ce sens, *i.e.* l'application de l'opérateur $\boldsymbol{\Phi}$, constitue une simple convolution discrète du signal échantillonné f_δ, c'est en revanche l'opération inverse qui peut s'avérer complexe, comme on l'a signalé pour les blobs. Mais là encore, les B-splines font montre d'une grande flexibilité de manipulation, puisque le passage des échantillons $f_{\boldsymbol{k}}$ aux coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$, *i.e.* l'application de l'opérateur $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$, consiste en l'application d'une série de filtres numériques récursifs causaux et anti-causaux, simples et rapides. Nous n'entrerons pas dans le détail de ces techniques, qui ne font pas partie du champ de cette étude, et renvoyons une fois de plus aux travaux de Blu, Thévenaz et Unser sur le sujet [Unser et al., 1993a, Unser et al., 1993b, Unser, 1999, Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a].

En conclusion, nous pouvons largement valider l'emploi des B-splines comme notre base de représentation, parfaitement adaptée au problème de la projection tomographique. Étant

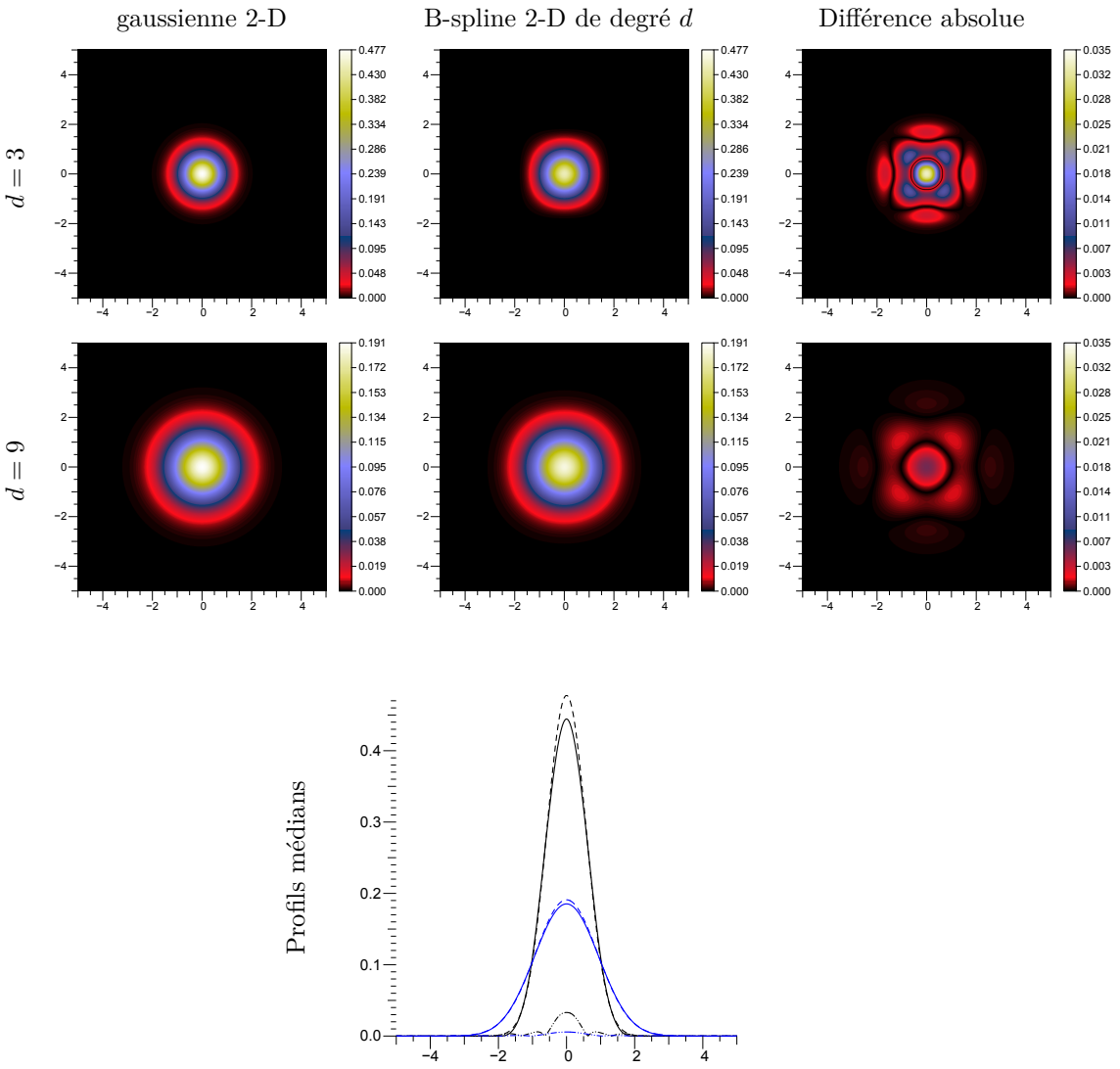


FIGURE 2.16: Comparaison de gaussiennes (1ère colonne) et de B-splines (2ème colonne) 2-D, à variance identique, pour un degré $d = 3$ (1ère ligne) et $d = 9$ (2nde ligne). La variance change avec l'ordre de la B-spline. La colonne de droite montre la différence en valeur absolue entre les 2 fonctions 2-D, avec une erreur maximale de 3,3% pour la B-spline cubique, et de 0,6% pour la B-spline de degré 9. Le graphe du bas montre des profils médians de la gaussienne 2-D (en trait tireté) et de la B-spline 2-D (en trait plein) pour les degrés 3 et 9 (respectivement en noir et en bleu). Les courbes en trait mixte correspondent à la différence absolue de ces profils.

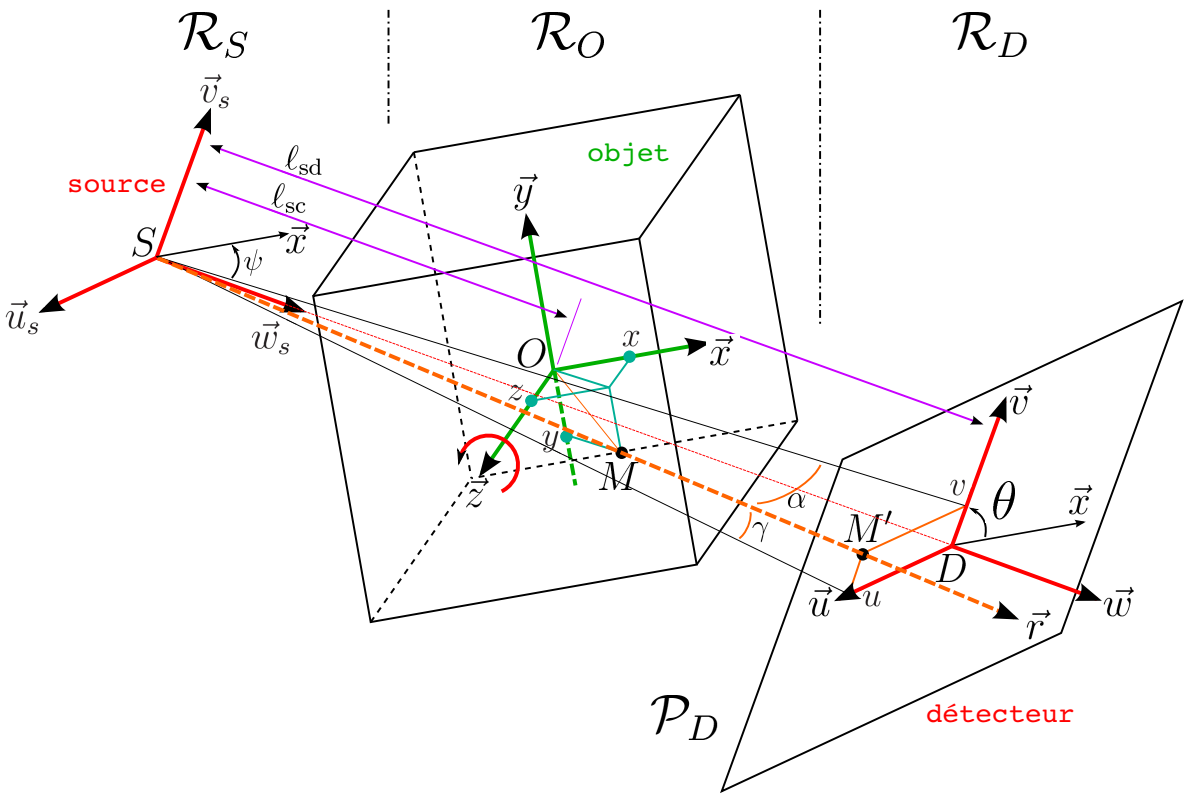


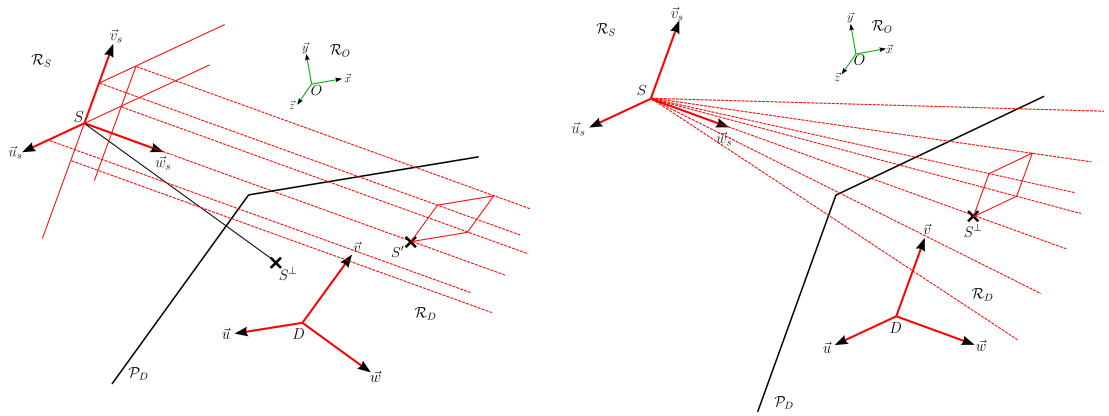
FIGURE 2.17: Schéma géométrique de caractérisation d'un système d'acquisition pour la tomographie 3-D. Il est composé des 3 repères, source $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, objet $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ et détecteur $\mathcal{R}_\mathcal{D}$ associé à son plan d'acquisition $\mathcal{P}_\mathcal{D}$. La source et le détecteur sont en rotation autour de l'axe $\{O, \vec{z}\}$. ℓ_{sd} désigne la distance entre la source S et son projeté orthogonal sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$, autrement dit la distance focale ; ℓ_{sc} désigne la distance orthogonale entre la source et l'axe de rotation $\{O, \vec{z}\}$. La source émet un rayon X dans la direction $\vec{r}$, dont la déviation par rapport à l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$ est définie par les angles α et γ des coordonnées sphériques centrées dans le repère $\mathcal{R}_\mathcal{S}$. $M'(u, v)$ est le projeté du point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ dans la direction du faisceau X. θ désigne l'orientation du détecteur pour une projection donnée.

extrêmement simple à manipuler — c'est un polynôme par morceaux de degré d séparable, en comparaison des blobs qui eux sont basés sur des fonctions de Bessel et sont non séparables en multidimension, elle va nous permettre d'élaborer à moindre frais un projecteur rapide tant en étant beaucoup plus précis que les modèles conventionnels à base d'indicatrices de voxels.

2.2 La modélisation des projections

2.2.1 Caractérisation géométrique du système

Dans un premier temps, nous devons poser les bases géométriques d'un système d'acquisition pour la tomographie. La figure 2.17 caractérise la géométrie d'un système 3-D telle que nous allons la considérer, avec l'introduction des notations. Celui-ci s'articule autour de 3 sous-systèmes distincts : la source, l'objet d'intérêt et le détecteur. Chacun est lié à un repère cartésien 3-D : $\mathcal{R}_\mathcal{S} : \{S, \vec{w}_s, \vec{v}_s, \vec{u}_s\}$ pour la source, $\mathcal{R}_\mathcal{O} : \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ pour l'objet, et $\mathcal{R}_\mathcal{D} : \{S, \vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$ pour le détecteur. La source et le détecteur sont en rotation autour de l'objet. Pour l'ensemble de nos travaux, nous considérons un détecteur plan. Une position donnée dans l'espace des 3 sous-systèmes définit une projection tomographique, à condition que les rayons X projetés depuis la source traversent l'objet d'intérêt et aient une intersection avec le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D} : \{D, \vec{u}, \vec{v}\}$. Si l'on suppose un plan infini, cela implique donc que le produit scalaire entre le vecteur $\vec{r}$, correspondant à la direction d'un rayon partant de la source S,



Propagation parallèle **Propagation conique**

FIGURE 2.18: Les deux modes de propagation des rayons X dans un système tomographique.

dont la déviation par rapport à l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$ est définie par les angles α et γ des coordonnées sphériques centrées dans le repère $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, et le vecteur $\vec{w}_s$ du repère $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, doit être strictement positif. La même condition prévaut entre les vecteurs $\vec{w}_s$ de $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{R}_\mathcal{D}$ pour assurer que le détecteur ait son champ de vue orienté du côté de l'objet. On peut noter 2 longueurs particulières sur la Fig. 2.17, à savoir ℓ_{sc} et ℓ_{sd}, respectivement la distance orthogonale entre la source S et l'axe de rotation $\{O, \vec{z}\}$, et la distance entre S et son projeté sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$, *i.e.* la distance focale. On identifie alors l'état du système correspondant à une projection tomographique donnée, par une certaine orientation θ de la source et du détecteur par rapport à l'objet, dans les conditions sus-nommées. Idéalement, les repères $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}_\mathcal{D}$ sont identiques à la translation près, et le vecteur $\vec{z}$ est colinéaire aux vecteurs $\vec{u}_s$ et $\vec{u}$, de sorte que l'axe $\{O, \vec{z}\}$ constitue l'axe de rotation trigonométrique, comme indiqué sur la Fig. 2.17. Dans ce cas de figure, que nous nommerons *géométrie standard*, nous considérerons l'orientation θ comme l'angle d'inclinaison du plan $\mathcal{P}_\mathcal{D}$ par rapport au vecteur $\vec{x}$ du repère $\mathcal{R}_\mathcal{O}$, *i.e.* l'angle $(\widehat{\vec{x}, \vec{v}})$. Nous allons caractériser notre système en supposant que nous ne sommes pas en géométrie standard, c'est-à-dire en laissant la liberté au plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$ d'avoir un certain "basculement" par rapport au plan $\{S, \vec{u}_s, \vec{v}_s\}$. Ce basculement sera bien sûr limité pour rester dans les conditions viables de projection. Cela nous permettra d'écrire un formalisme de projection très général, exception faite de la géométrie de projection des rayons X — parallèle ou conique (*cf.* Fig. 2.18) — qui va demander d'appliquer des conventions différentes. Le projecteur que nous avons mis en œuvre, utilisant une base de B-splines (*cf.* section 2.3), est conçu selon ce formalisme, de sorte qu'il puisse être adapté facilement à tout type de géométrie et tout type de projection.

On verra plus loin que la projection tomographique va utiliser la position $M'(u, v)$ du projeté sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$ d'un point donné $M(x, y, z)$ appartenant au repère $\mathcal{R}_\mathcal{O}$, suivant la trajectoire $\vec{r}$ d'un rayon. À cette fin, il nous faut caractériser les transformations géométriques qui lient chacun des repères des sous-systèmes les uns aux autres. Ces transformations mettent simplement en œuvre des rotations et des translations, et on peut les traduire par des matrices 3-D de passage d'un repère de coordonnées à un autre. En utilisant un système de coordonnées homogènes $(x, y, z, 1)$, il est possible d'écrire une rotation suivie d'une translation dans une seule matrice 4×4 :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t_1 \\ r_4 & r_5 & r_6 & t_2 \\ r_7 & r_8 & r_9 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

où les r_j sont les composantes de la rotation 3-D et les t_i les 3 composantes cartésiennes de la translation. On peut définir simplement une matrice de rotation d'angle ψ autour d'un axe quelconque $\vec{\rho}$ en utilisant des quaternions, définis comme suit :

$$Q_w = \cos\frac{\psi}{2} \quad ; \quad Q_x = x_\rho \sin\frac{\psi}{2} \quad ; \quad Q_y = y_\rho \sin\frac{\psi}{2} \quad ; \quad Q_z = z_\rho \sin\frac{\psi}{2}. \tag{2.29}$$

où (x_ρ, y_ρ, z_ρ) sont les composantes du vecteur normalisé $\vec{\rho}$ $(x_\rho^2 + y_\rho^2 + z_\rho^2 = 1)$. La matrice de rotation en fonction de ces quaternions s'écrit alors, en coordonnées homogènes, avec des composantes de translation (T_x, T_y, T_z) éventuelles :

$$\mathrm{T}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} Q_w^2 + Q_x^2 - Q_y^2 - Q_z^2 & 2Q_xQ_y - 2Q_wQ_z & 2Q_xQ_z + 2Q_wQ_y & T_x \\ 2Q_xQ_y + 2Q_wQ_z & Q_w^2 - Q_x^2 + Q_y^2 - Q_z^2 & 2Q_yQ_z - 2Q_wQ_x & T_y \\ 2Q_xQ_z - 2Q_wQ_y & 2Q_yQ_z - 2Q_wQ_x & Q_w^2 - Q_x^2 - Q_y^2 + Q_z^2 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Ceci définit le "squelette" de notre matrice de transformation type. Dans notre problème, seules 2 transformations sont nécessaires :

- une transformation du repère objet $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ vers le repère source $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, que l'on note $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_s \\ v_s \\ u_s \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} o_1 & o_2 & o_3 & o_4 \\ o_5 & o_6 & o_7 & o_8 \\ o_9 & o_{10} & o_{11} & o_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Cette transformation fait intervenir une rotation de repère d'axe $\{O, \vec{\rho}\}$. En géométrie standard, il s'agira d'une rotation d'angle ψ (fonction de l'orientation θ), autour de l'axe $\{O, \vec{z}\}$.

L'angle ψ correspond alors à l'angle $(\widehat{\vec{w}_s, \vec{x}})$ et est égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$ (*cf.* Fig. 2.17). En notant $(w_{s_O}, v_{s_O}, u_{s_O})$ les coordonnées du centre O de $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ dans le repère $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, et en constatant que $w_{s_O} = \ell_{\text{sc}}$, il est alors aisé de construire la transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}}$ standard connaissant les paramètres d'étalonnage géométrique du système :

$$\mathrm{T}^{standard}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & \ell_{\text{sc}} \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & v_{s_O} \\ 0 & 0 & 1 & u_{s_O} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & \ell_{\text{sc}} \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & v_{s_O} \\ 0 & 0 & 1 & u_{s_O} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Si les conditions de géométrie standard ne sont pas respectées, la rotation se fera autour d'un axe $\vec{\rho}$ quelconque :

$$\vec{\rho} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z}, \quad \text{avec } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Il faudrait alors passer par une transformation intermédiaire $\mathrm{T}_{\mathcal{R}'_\mathcal{O}}$ qui "amènent" les coordonnées des points M de $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ dans un repère $\mathcal{R}'_\mathcal{O} : \{O, \vec{x'}, \vec{y'}, \vec{z'}\}$, satisfaisant aux conditions de géométrie standard, *i.e.* la colinéarité des vecteurs $\vec{u}_s$ et $\vec{z'}$. On aurait alors :

$$\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}} = \mathrm{T}^{standard}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}} \cdot \mathrm{T}_{\mathcal{R}'_\mathcal{O}} \tag{2.33}$$

Nous n'entrons pas dans le détail des composantes de $\mathrm{T}_{\mathcal{R}'_\mathcal{O}}$ qui vont dépendre du système considéré ; nous l'avons simplement introduite pour illustrer la flexibilité de notre généralisation de la géométrie du système tomographique. L'étalonnage peut alors être décomposé en sous-étapes plus intelligibles et faciles à manipuler et à implanter, pour être ensuite combinées dans la transformation globale $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}}$.

- une transformation du repère source $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ vers le repère détecteur $\mathcal{R}_\mathcal{D}$, que l'on note $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_s \\ v_s \\ u_s \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}} \cdot \begin{bmatrix} w \\ v \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_s \\ v_s \\ u_s \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.34}$$

En géométrie standard, cette transformation est une simple translation de repère. En notant (w_S, v_S, u_S) les coordonnées de la source S dans le repère $\mathcal{R}_\mathcal{D}$, et en constatant que $w_S = -\ell_{\text{sd}}$, la transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ standard s'écrirait :

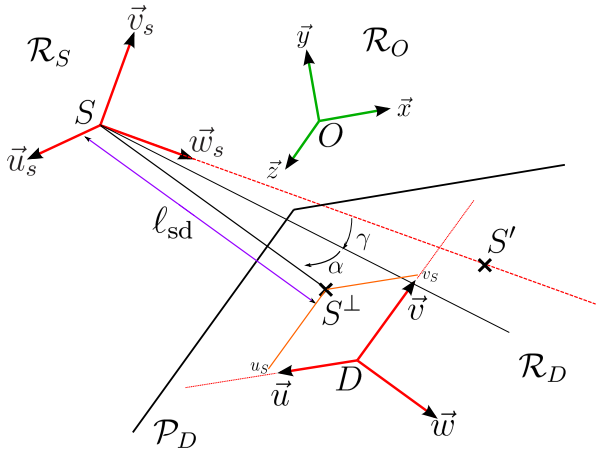


FIGURE 2.19: Convention de caractérisation du système tomographique pour la transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ reliant les repères source $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ et détecteur $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$, pour un mode de propagation parallèle des rayons X. Le sens de propagation est défini par l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$ du repère $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$. Le repère détecteur $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ peut alors avoir un basculement par rapport à cette trajectoire, c'est-à-dire que les rayons X n'intersectent pas nécessairement de façon orthogonale le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. Le point S' constitue le projeté de la source S suivant la direction $\vec{w}_s$. Le point $S^\perp$ est le projeté orthogonal de la source S, de coordonnées (u_S, v_S) dans le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. Les angles α et γ définissent cette déviation par rapport à la normale au plan $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, en coordonnées sphériques centrées dans le repère $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$.

$$\mathrm{T}^{standard}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\ell_{\text{sd}} \\ 0 & 1 & 0 & v_S \\ 0 & 0 & 1 & u_S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Là encore, on est amené à considérer le cas où les conditions de géométrie standard ne sont pas respectées. Il existe en effet des applications de tomographie où le détecteur peut subir des basculements autour de sa position standard. C'est le cas par exemple en *nanotomographie électronique*, une modalité utilisée pour l'imagerie des matériaux par un microscope électronique à balayage (MET) [Frank, 2006]. Dans cette dernière, la source d'électrons, émettant un faisceau parallèle est immobile et c'est le porte-échantillon qui est incliné autour d'un axe de rotation pour l'acquisition de différents angles de vue. Le problème ce type d'acquisition est l'incertitude de l'inclinaison du porte-échantillon, qui peut subir des légers décalages angulaires — *tip-tilt* — autour de sa position de référence, supposée normale aux faisceaux incidents. Ainsi, dans cette modalité, les conditions de géométrie standard ne sont typiquement pas respectées. De la même manière que pour $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}}$, on pourrait alors faire intervenir une transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}'_{\mathcal{D}}}$ qui servirait d'intermédiaire entre un repère détecteur virtuel $\mathcal{R}'_{\mathcal{D}} : \{D, \vec{w'}, \vec{v'}, \vec{u'}\}$ satisfaisant la géométrie standard vers le réel repère détecteur $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$:

$$\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}} = \mathrm{T}_{\mathcal{R}'_{\mathcal{D}}} \cdot \mathrm{T}^{standard}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}} \tag{2.36}$$

Dans le cas de la nanotomographie, les coefficients de $\mathrm{T}_{\mathcal{R}'_{\mathcal{D}}}$, étant dus à une incertitude sur la position, seraient alors inconnus. L'étalonnage d'un système tomographique étant relativement complexe, on peut tout à fait imaginer que ce type de basculement du détecteur soit aussi présent dans une modalité de tomodensitométrie. Cependant, le formalisme de

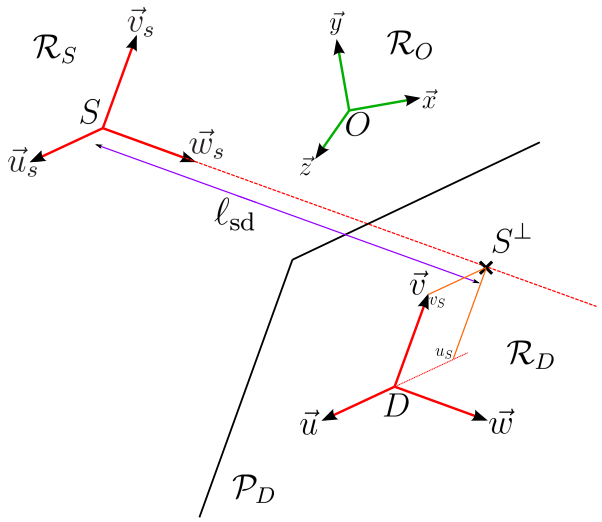


FIGURE 2.20: Convention de caractérisation du système tomographique pour la transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ reliant les repères source $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ et détecteur $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$, pour un mode de propagation conique des rayons X. La notion de basculement n'a pas de sens, du fait de la divergence des faisceaux X. Celui-ci sera différent suivant le point projeté. On suppose alors la géométrie standard entre les repères $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ en assurant la colinéarité de leurs axes 2 à 2 : $\{S, \vec{w}_s\}$ avec $\{D, \vec{w}\}$, $\{S, \vec{v}_s\}$ avec $\{D, \vec{v}\}$ et $\{S, \vec{u}_s\}$ avec $\{D, \vec{u}\}$. Le point $S^{\perp}$ est le projeté orthogonal de la source S, de coordonnées (u_S, v_S) dans le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$.

l'équation 2.36 peut s'avèrer inutilement complexe. En effet l'utilisation de $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ dans la projection tomographique est dépendante de la manière dont se propagent les faisceaux. Ainsi il est possible d'émettre certaines conventions suivant le mode de propagation mis en jeu :

1. **En propagation parallèle**, on suppose que la direction des faisceaux est définie par l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$ du repère $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$. Le repère détecteur $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ peut alors avoir un basculement par rapport à cette trajectoire, c'est-à-dire que les rayons X n'intersectent pas forcément orthogonalement le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, comme illustré sur la figure 2.19. Les angles α et γ définissent cette déviation par rapport à la normale au plan $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, en coordonnées sphériques centrées dans le repère $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$. $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ doit donc dans ce cas mettre en œuvre la décomposition proposée dans l'équation 2.36, où $\mathrm{T}_{\mathcal{R}'_{\mathcal{D}}}$ est la transformation intermédiaire faisant intervenir la rotation de basculement du détecteur virtuel qui satisfait les conditions de géométrie standard.
2. **En propagation conique**, étant donnée la divergence des faisceaux X, la notion de basculement n'a pas de sens, puisqu'il sera différent suivant le point projeté. On parlera alors plutôt d'incidence dans ce cas. On suppose alors la géométrie standard entre les repères $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ en assurant la colinéarité de leurs axes 2 à 2 : $\{S, \vec{w}_s\}$ avec $\{D, \vec{w}\}$, $\{S, \vec{v}_s\}$ avec $\{D, \vec{v}\}$ et $\{S, \vec{u}_s\}$ avec $\{D, \vec{u}\}$. La figure 2.20 illustre cette convention géométrique. On peut alors considérer $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}} = \mathrm{T}^{standard}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$.

À présent, nous cherchons à déterminer les coordonnées $(u_{M'}, v_{M'})$ dans le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ du point M', projeté d'un point M de coordonnées (x_M, y_M, z_M) dans $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$, suivant la trajectoire de propagation d'un rayon X passant par ce point. Nous utiliserons pour cela les transformations $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}}$ et $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ définies dans un cadre général, comme présenté dans les équations 2.31 et 2.34. La première étape consiste à écrire les coordonnées $(w_{s_M}, v_{s_M}, u_{s_M})$ de M dans le repère source $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$, à l'aide de la transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}}$:

$$\begin{cases} w_{s_M} &= o_1 \cdot x_M + o_2 \cdot y_M + o_3 \cdot z_M + o_4 \\ v_{s_M} &= o_5 \cdot x_M + o_6 \cdot y_M + o_7 \cdot z_M + o_8 \\ u_{s_M} &= o_9 \cdot x_M + o_{10} \cdot y_M + o_{11} \cdot z_M + o_{12} \end{cases} \tag{2.37}$$

À partir de là, le point M est attaché au repère source $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, d'où nous allons "lancer" un rayon X, qui passera par M et atteindra son point d'impact M' sur le plan détecteur, suivant une trajectoire rectiligne, fonction du mode de propagation, que nous allons décrire ainsi :

- en propagation parallèle, on l'a dit au-dessus, la trajectoire suit la direction de l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$:

$$(d_M) : \begin{cases} v_s &= v_{s_M} \\ u_s &= u_{s_M} \end{cases} \tag{2.38}$$

- en propagation conique, le rayon part du point source S et passe par M puis M'. On passe alors par les coordonnées sphériques $(r_M, \alpha_M, \gamma_M)$ de M définies dans la figure 2.17, et que l'on illustre plus précisément sur la figure 2.21 :

$$\begin{cases} w_{s_M} &= r_M \cdot \cos\alpha_M \cdot \cos\gamma_M \\ v_{s_M} &= r_M \cdot \cos\alpha_M \cdot \sin\gamma_M \\ u_{s_M} &= r_M \cdot \sin\alpha_M \end{cases} \tag{2.39}$$

On en déduit l'équation de la droite (MM') :

$$(d_M) : \begin{cases} v_s &= \tan\gamma_M \cdot w_s = \dfrac{v_{s_M}}{w_{s_M}} \cdot w_s \\ u_s &= \dfrac{\tan\alpha_M}{\cos\gamma_M} \cdot u_s = \dfrac{u_{s_M}}{w_{s_M}} \cdot u_s \end{cases} \tag{2.40}$$

Pour déterminer le point d'intersection du faisceau X avec le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$, nous devons passer dans le repère $\mathcal{R}_\mathcal{D}$, et donc utiliser la transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$. Pour un point quelconque de coordonnées (w_s, v_s, u_s) dans $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, ses coordonnées (w, v, u) dans $\mathcal{R}_\mathcal{D}$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} w &= a_1 \cdot w_s + a_2 \cdot v_s + a_3 \cdot u_s + a_4 \\ v &= a_5 \cdot w_s + a_6 \cdot v_s + a_7 \cdot u_s + a_8 \\ u &= a_9 \cdot w_s + a_{10} \cdot v_s + a_{11} \cdot u_s + a_{12} \end{cases} \tag{2.41}$$

Le point M' se trouvant sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$, d'équation $w = 0$ dans $\mathcal{R}_\mathcal{D}$, on en déduit les relations suivantes :

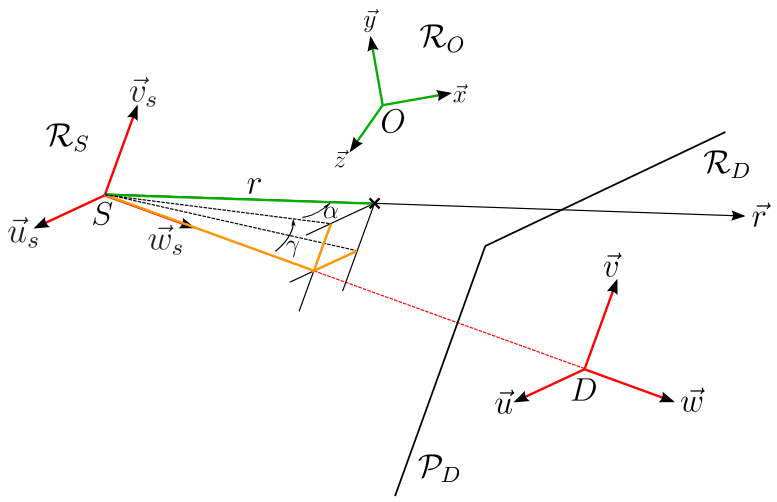


FIGURE 2.21: Système de coordonnées sphériques (r, α, γ) dans le repère $\mathcal{R}_S$.

$$\begin{cases} w_s &= -\dfrac{1}{a_1}\left(a_2 \cdot v_s + a_3 \cdot u_s + a_4\right) \\ v &= \underbrace{\left(a_6 - \dfrac{a_5}{a_1}a_2\right)}_{b_1} v_s + \underbrace{\left(a_7 - \dfrac{a_5}{a_1}a_3\right)}_{b_2} u_s + \underbrace{\left(a_8 - \dfrac{a_5}{a_1}a_4\right)}_{b_3} \\ u &= \underbrace{\left(a_{10} - \dfrac{a_9}{a_1}a_2\right)}_{c_1} v_s + \underbrace{\left(a_{11} - \dfrac{a_9}{a_1}a_3\right)}_{c_2} u_s + \underbrace{\left(a_{12} - \dfrac{a_9}{a_1}a_4\right)}_{c_3} \end{cases} \tag{2.42}$$

Dans le système d'équations 2.42, les coordonnées (w_s, v_s, u_s) sont celles d'un point du plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$ écrites dans le repère source $\mathcal{R}_\mathcal{S}$. Pour obtenir les coordonnées (u_M, v_M) de M' dans $\mathcal{P}_\mathcal{D}$, pour un mode de propagation donné, on remplace (w_s, v_s, u_s) par les équations 2.38 et 2.40, nous conduisant à

$$\begin{cases} v_{M'} &= b_1 \cdot v_{s_M} + b_2 \cdot u_{s_M} + b_3 \\ u_{M'} &= c_1 \cdot v_{s_M} + c_2 \cdot u_{s_M} + c_3 \end{cases} \tag{2.43}$$

en propagation parallèle, et

$$\begin{cases} w_{M'} &= -\dfrac{a_4}{a_1 + a_2 \cdot \tan\gamma_M + a_3 \cdot \dfrac{\tan\alpha_M}{\cos\gamma_M}} \\ v_{M'} &= \left(b_1 \cdot \tan\gamma_M + b_2 \cdot \dfrac{\tan\alpha_M}{\cos\gamma_M}\right) w_M + b_3 \\ u_{M'} &= \left(c_1 \cdot \tan\gamma_M + c_2 \cdot \dfrac{\tan\alpha_M}{\cos\gamma_M}\right) w_M + c_3 \end{cases} \tag{2.44}$$

en propagation conique.

Ainsi la transformation $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ ne s'applique pas directement pour l'étape de projection du point M sur le plan détecteur, à partir de sa position dans le repère $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$, mais utilise des combinaisons non linéaires de ses coefficients. Il nous suffit donc de déterminer les 2 transformations de repère $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{O}\to\mathcal{S}}}$ et $\mathrm{T}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{D}}}$ pour pouvoir projeter un point de l'objet d'intérêt sur le plan détecteur, compte tenu d'une source S et d'un mode propagation des rayons X, et ce quelle que soit la géométrie du système tomographique. Bien sûr, dans une géométrie simple et notamment la géométrie standard, les équations 2.43 et 2.44 peuvent être simplifiées. Voici leurs expressions pour la propagation parallèle :

$$\begin{cases} v_{M'} &= v_{s_M} + v_S \\ u_{M'} &= u_{s_M} + u_S \end{cases} \tag{2.45}$$

et pour la propagation conique :

$$\begin{cases} w_{M'} &= \ell_{\mathrm{sd}} \\ v_{M'} &= \tan\gamma_M \cdot w_M + v_S \\ u_{M'} &= \dfrac{\tan\alpha_M}{\cos\gamma_M} \cdot w_M + u_S \end{cases} \tag{2.46}$$

avec

$$\begin{cases} \tan\gamma_M &= \dfrac{v_{s_M}}{w_{s_M}} \\ \dfrac{\tan\alpha_M}{\cos\gamma_M} &= \dfrac{u_{s_M}}{w_{s_M}} \\ w_{s_M} &= \sin\theta \cdot x_M + \cos\theta \cdot y_M + \ell_{\mathrm{sc}} \\ v_{s_M} &= -\cos\theta \cdot x_M + \sin\theta \cdot y_M + v_{s_O} \\ u_{s_M} &= z_M + u_{s_O} \end{cases} \tag{2.47}$$

La caractérisation géométrique du système tomographique, ou étalonnage, que nous venons d'établir, constitue le premier jalon dans l'élaboration de notre modèle numérique de projection.

2.2.2 Définition d'un projecteur

Nous avons déjà abordé dans le chapitre 1 la notion du modèle dans la mise en place du problème inverse de reconstruction tomographique. Celui-ci a pour but de générer les pseudo-données à partir de l'estimation courante de l'image $\boldsymbol{f}$ reconstruite, qui sont comparées aux données initiales dans le terme d'attache quadratique pondéré (*cf.* équation 1.36, section 1.2.7, chapitre 1).

Nous entrons à présent dans les détails de l'élaboration du *projecteur tomographique*. L'approche que l'on a de cette modélisation s'inscrit dans la continuité de la section 2.1. Autrement dit, à partir de la réprésentation continue de notre objet $\tilde{f}$ sur une base discrète de fonctions,

approximant au mieux le signal original f, il nous faut à présent en modéliser la projection au sens tomographique du terme, tout en s'attachant à exploiter au mieux certaines des propriétés de la base de représentation, et à en conserver d'autres.

À ces fins, notre objectif premier est d'assurer une modélisation réaliste de nos données, au sens là encore de la minimisation d'une certaine erreur d'approximation. Notons $R^\theta : \boldsymbol{u} \mapsto R^\theta(\boldsymbol{u})$ le signal continu associé à la projection tomographique de l'objet f, pour une orientation θ donnée du système d'acquisition, avec $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ la position sur le détecteur[11][12]. Comme énoncé dans la section 1.1.2 du chapitre 1, $R^\theta(\boldsymbol{u})$ représente l'intégrale de l'absorption (en m^{-1}), par l'objet d'intérêt, du rayon X monochromatique partant de la source et impactant le détecteur à la position $\boldsymbol{u}$, le long de sa trajectoire, selon la loi physique de Beer-Lambert (*cf.* équation 1.3). C'est la *transformée aux rayons X*, plus connue sous le nom, pour le cas 2-D, de transformée de Radon, dont on rappelle ici l'expression mathématique :

$$R^\theta(\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{x} \in \{S, \boldsymbol{r}\}} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.48}$$

où $\{S, \boldsymbol{r}\}$ désigne la droite partant de la source S, de vecteur directeur $\boldsymbol{r}$ tel que le point d'impact sur le détecteur soit en $\boldsymbol{u}$ (*cf.* section 2.2.1). On peut alors ré-écrire la loi de Beer-Lambert (*cf.* équation 1.3) en fonction du signal R^θ, et pour une orientation θ donnée du système, comme suit :

$$I^\theta(\boldsymbol{u}) = I_0 \, \mathrm{e}^{-R^\theta(\boldsymbol{u})} \tag{2.49}$$

Cette équation correspond à l'intensité des rayons X parvenant sur le plan détecteur en $\boldsymbol{u}$, qui est une fonction non linéaire de R^θ. Comme c'est ce dernier signal qui nous intéresse, car nous en connaissons une expression mathématique simple, les données I^θ acquises sont généralement converties pour traiter directement le signal R^θ correspondant à la transformée aux rayons X :

$$R^\theta(\boldsymbol{u}) = -\log\left(\frac{I^\theta(\boldsymbol{u})}{I_0}\right) \tag{2.50}$$

Ainsi, avec cette conversion, les données "effectives" R^θ dépendent linéairement du signal f, permettant de modéliser la projection comme un opérateur algébrique linéaire.

Il y a cependant un problème dans cette modélisation. En effet l'intensité I^θ est un signal continu. Or, le détecteur est constitué de pixels qui discrétisent physiquement l'intensité I^θ leur parvenant en l'intégrant sur leur "surface". L'intégration de cette intensité est fonction de la réponse d'un pixel détecteur, que l'on note $P_{\boldsymbol{q}} : \boldsymbol{u} \mapsto P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})$. Chaque pixel détecteur ne voit donc pas qu'un simple rayon X rectiligne, mais un faisceau de largeur non nulle dont il pondère le flux par sa réponse. La forme de ce faisceau diffère en fonction du mode de propagation des rayons X (*cf.* Fig. 2.18) :

- en propagation parallèle, ce faisceau sera de forme parallélépipédique ;
- en propagation conique, il sera de forme pyramidale.

Le modèle mathématique de la transformée aux rayons X n'est donc pas suffisant, puisqu'il ne spécifie que des intégrales sur des droites. On doit en réalité exprimer le signal intégré $\lambda_{\boldsymbol{q}}^\theta$ capté par le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$, positionné en $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{q}} = (u_{q_1}, u_{q_2}, \ldots, u_{q_{n-1}})$ sur la grille d'échantillonnage :

$$\lambda_q^\theta = \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u}) \, I^\theta(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u}) \, I_0 \, \mathrm{e}^{-R^\theta(\boldsymbol{u})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{2.51}$$

11. Le détecteur possède 1 dimension de moins que l'objet, *e.g.* on a un détecteur 2-D pour un objet 3-D.
12. Dans le cas 3-D, et d'après le formalisme fixé dans la section 2.2.1, les coordonnées $\boldsymbol{u}$ seront écrites (u, v).

où Ω_d correspond au support $(n-1)$-D de la réponse du pixel détecteur. Nous supposons que cette réponse est invariante pour tous les pixels du détecteur, et homogène sur un support carré. Elle constitue donc une fonction *porte* bidimensionnelle :

$$P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u}) = \Pi_{\Delta_d}(\boldsymbol{u}) \tag{2.52}$$

où Δ_d correspond à la taille du pixel, et donc au pas d'échantillonnage du détecteur puisque nous supposons également qu'il n'y a aucun espace entre 2 pixels voisins. On peut donc ré-écrire l'équation 2.51 comme suit :

$$\lambda_q^\theta = \underbrace{\int \dots \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}}}_{(n-1)\text{ dimensions}} I^\theta(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int \dots \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} I_0\,\mathrm{e}^{-R^\theta(\boldsymbol{u})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{2.53}$$

Cette intégration de l'intensité par une réponse invariante par translation n'est rien d'autre qu'une opération de filtrage de l'intensité $I^\theta(\boldsymbol{u})$ des rayons X captés, *i.e.* une convolution par le filtre $P_{\boldsymbol{q}}$, qui est ensuite échantillonnée sur la grille des pixels détecteur. L'acquisition de l'intensité sur les pixels du détecteur induit donc une modification du contenu fréquentiel de $I^\theta(\boldsymbol{u})$, dont on doit tenir compte, et que l'on modélise par le filtrage passe-bas induit par la fonction *porte*. Il devient donc extrêmement difficile de traiter directement la transformée aux rayons X R^θ, d'autant plus que la conversion des données acquises par le détecteur, comme présenté dans l'équation 2.50, n'est elle-même plus possible. En d'autres termes, nous ne pouvons plus modéliser la projection comme un opérateur linéaire. Pour pallier ce problème, une approximation linéaire de l'équation 2.51 est généralement faite :

$$\lambda_q^\theta = \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\,I_0\,\mathrm{e}^{-R^\theta(\boldsymbol{u})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \approx \lambda_0\,\mathrm{e}^{-\int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\,R^\theta(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}} \tag{2.54}$$

où λ_0 correspond alors au flux de photons par pixel détecteur par projection sans atténuation. Cette approximation est valable étant donnée la taille très faible des pixels détecteur [Joseph and Spital, 2000, Ziegler et al., 2006, Long et al., 2010]. Avec ces simplifications, nous pouvons ré-exprimer la conversion des données :

$$\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^\theta = -\log\left(\frac{\lambda_{\boldsymbol{q}}^\theta}{\lambda_0}\right) = \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\,R^\theta(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int \dots \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} R^\theta(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{2.55}$$

$\mathrm{y}_{\boldsymbol{q}}^\theta$ correspond donc à la donnée du pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ positionné en $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{q}}$ sur la grille d'échantillonnage du détecteur, pour l'orientation θ du système. Dans le chapitre 1, nous avons noté $\mathbf{y}^\theta = (\mathrm{y}_{\mathbf{1}}^\theta, \mathrm{y}_{\mathbf{2}}^\theta, \dots, \mathrm{y}_{\boldsymbol{M}}^\theta)^\top$ l'ensemble des $\boldsymbol{M} = M_1 \times \dots \times M_{n-1}$ valeurs de la projection θ sous forme de vecteur. Chaque $\mathbf{y}^\theta$ est lui-même une composante du jeu de données englobant la totalité des T projections, pour toutes les orientations θ, que l'on a noté Υ dans le chapitre 1 : $\Upsilon = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^\theta, \dots, \mathbf{y}^T)^\top$. On remarquera que l'on a, dans l'équation 2.54, approximé l'opération de filtrage de l'intensité I^θ par la réponse $P_{\boldsymbol{q}}$, par le filtrage de R^θ par cette même réponse.

Revenons à présent à la définition de $R^\theta(\boldsymbol{u})$ (*cf.* équation 2.48). Nous remplaçons dans cette expression le signal f par sa représentation $\tilde{f}$ sur une base de fonctions $\varphi_{\boldsymbol{k}}$:

$$\tilde{R^\theta}(\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} \tilde{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

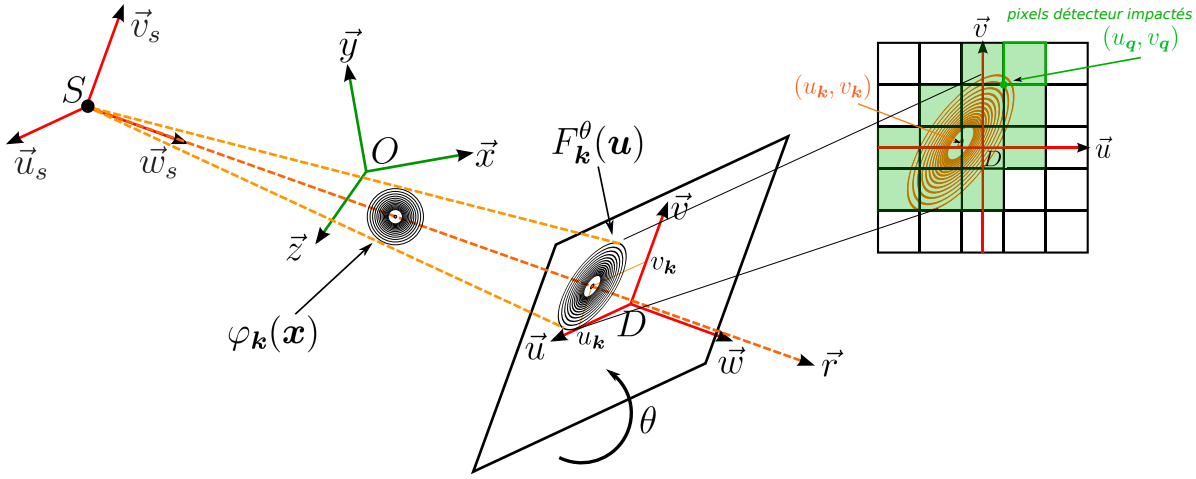


FIGURE 2.22: Schéma de la projection conique d'une fonction de base $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ sur le détecteur. θ correspond à l'orientation du détecteur. La direction du faisceau X passant par la position centrale $\boldsymbol{x_k}$ de $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ est identifiée par le vecteur $\vec{r}$. L'empreinte $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ de $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ est centrée en $(u_{\boldsymbol{k}}, v_{\boldsymbol{k}})$, la position projetée de $\boldsymbol{x_k}$ sur le détecteur suivant la direction $\vec{r}$. Dans le projecteur, $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ est alors intégrée sur les pixels impactés $\boldsymbol{q}$ du détecteur, comme illustré sur l'extension du schéma à droite.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, \varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (\textit{cf.}\ \text{équation } 2.1) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\, F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})\,, \quad \text{avec } F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} \varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

Nous obtenons ainsi une représentation $\tilde{R}^\theta$ approximée de la transformée aux rayons X du signal f. La fonction $F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})$ est nommée l'*empreinte* de la fonction de base $\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ sur le détecteur. Cette empreinte constitue la projection tomographique du voxel $\boldsymbol{k}$ (*cf.* Fig. 2.22). En incorporant l'expression de $\tilde{R}^\theta$ avec l'empreinte $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ dans l'équation des données 2.55, on obtient la modélisation des pseudo-données $\tilde{y}^\theta_{\boldsymbol{q}}$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}^\theta_{\boldsymbol{q}} &= \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, \tilde{R}^\theta(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\Omega^\theta_{\boldsymbol{q}}} c_{\boldsymbol{k}} \cdot \left(\int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Omega^\theta_{\boldsymbol{q}}} c_{\boldsymbol{k}} \cdot \left(\int \ldots \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\Omega^\theta_{\boldsymbol{q}}} c_{\boldsymbol{k}} \cdot \mathbf{R}^\theta_{\boldsymbol{qk}}
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

où $\Omega^\theta_{\boldsymbol{q}}$ représente l'ensemble des voxels $\boldsymbol{k}$ dont l'empreinte a une intersection non vide avec le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$. En notant $\tilde{\mathbf{y}}^\theta = (\tilde{y}^\theta_{\mathbf{1}}, \tilde{y}^\theta_{\mathbf{2}}, \ldots, \tilde{y}^\theta_{\boldsymbol{M}})$ le vecteur des pseudo-données pour la projection θ, on peut écrire globalement l'expression ci-dessus sous forme d'opérateur matriciel :

$$
\tilde{\mathbf{y}}^\theta = \mathbf{R}^\theta \cdot \boldsymbol{c} \tag{2.58}
$$

$\mathbf{R}^\theta$ est donc notre projecteur numérique, dont chaque coefficient $\mathbf{R}^\theta_{\boldsymbol{qk}}$ correspond à la contribution de l'empreinte du voxel $\boldsymbol{k}$ sur le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$, *i.e.* la projection de la fonction de base $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ intégrée sur le support du pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ (*cf.* Fig. 2.22). L'image à projeter est ainsi l'image $\boldsymbol{c}$ des coefficients $c_{\boldsymbol{k}}$ affectés à chaque fonction $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ de la grille. Pour certaines

bases, cela pourra ne pas correspondre à l'image $\boldsymbol{f}$ dont les échantillons $f_{\boldsymbol{k}}$ sont les valeurs du signal f aux positions $\boldsymbol{x_k}$ de la grille (*cf.* section 2.1.1), ce qui va impliquer l'utilisation de la transformation $\boldsymbol{\Phi}$ (*cf.* équation 2.3).

Le projecteur est donc directement déterminé par la base de fonctions utilisée, étant défini à partir de son empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$, dont il suffit alors de connaître une expression et de la positionner sur le détecteur par projection suivant le mode de propagation des rayons X — d'où l'importance de savoir projeter un point de l'objet sur le détecteur, comme nous l'avons initié dans la section 2.2.1. Les fonctions de base utilisées étant en général à support borné[13], et par extension leur empreinte, un voxel $\boldsymbol{k}$ n'impacte pas tous les pixels détecteur $\boldsymbol{q}$, *i.e.* l'ensemble $\Omega_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ introduit dans l'équation 2.57 ne contient pas tous les voxels de la grille, pour une orientation θ et un pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ donnés. Il en contient même très peu en regard du nombre total de voxels, ce qui explique pourquoi l'opérateur est creux, *i.e.* possède peu de coefficients non nuls. Plus le projecteur est creux, plus son calcul est rapide car il implique peu d'opérations. La largeur du support d'impact de $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ sera donc un élément très important pour qualifier un "bon" projecteur. De plus, suivant la base de fonctions, l'expression de $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ n'est pas forcément aisée à implanter numériquement, et des approximations sont en général nécessaires pour limiter la charge de calcul, signifiant par ailleurs des erreurs de modélisation supplémentaires.

Le choix de la base va être directement lié à la précision de la modélisation, qui ne peut dépasser un certain seuil de tolérance si l'on veut que le problème soit suffisamment bien posé et conditionné. Mais ceci va induire un compromis nécessaire, car en général la précision recherchée se fait au détriment de la charge de calcul, et vice versa. Il est cependant possible que les propriétés de certaines bases de fonctions n'engendrent pas de "dilemme" sur les contraintes, *i.e.* les fassent converger de concert dans la bonne voie. La propriété de symétrie sphérique, *i.e.* d'isotropie de la fonction atomique φ, énoncée dans la section 2.1.1, en fait partie, car elle va à la fois permettre de simplifier l'implantation (projection tomographique isotrope) donc la charge potentielle de calcul, tout en favorisant une modélisation réaliste, précise et très adaptée au problème de la tomographie. Pourquoi adaptée ? Tout simplement parce que la tomographie est, de par sa défintion en termes mathématiques et dans son expression la plus simple (la transformée de Radon), un problème radial dans l'espace de Fourier. On a en effet énoncé, dans le chapitre 1, un théorème fondamental de la tomographie à 2 dimensions en propagation parallèle, à savoir le théorème *coupe-projection*, qui a permis de développer la méthode de reconstruction analytique, basée sur l'inversion directe de la transformée de Radon : la *Rétroprojection filtrée* [Kak and Slaney, 1988]. Dans les conditions sus-nommées, ce théorème stipule que la transformée de Fourier de la projection de Radon d'un objet 2-D sur un détecteur linéaire incliné d'un angle θ est égal à la coupe 1-D, suivant cette même inclinaison et passant par l'origine du repère objet $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$, dans la transformée de Fourier 2-D de l'objet. La figure 2.23, déjà présentée dans le chapitre 1, illustre le théorème. Avec cet exemple simple, il paraît alors évident qu'une base de fonctions $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ capable de décrire le spectre d'un objet de façon isotrope, *i.e.* sans direction privilégiée, assurera par là même une description spectrale précise des projections, avec la même fidélité quelle que soit l'orientation θ du détecteur, et ce sans équivoque. Ce postulat, qui se base sur une propriété mathématique très idéaliste en regard de la réalité, n'en demeure pas moins valable. En effet l'algorithme de *Rétroprojection filtrée*, état de l'art en reconstruction, en est la preuve en pratique. De plus, d'un point de vue plus pragmatique, la rétroprojection d'un objet anisotrope est par définition extrêmement dépendante de directions particulières, et peut donc potentiellement être différente suivant les angles de vue considérés. Pour remédier à cet écueil, il est clair qu'une

13. Il s'agit même d'une nécessité pour notre problème !

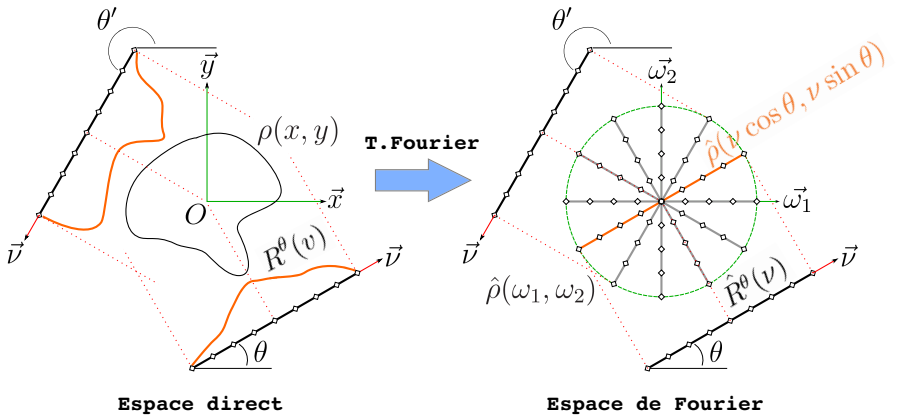


FIGURE 2.23: Illustration du théorème coupe-projection lié à la transformée de Radon 2-D standard, *i.e.* en géométrie standard et propagation parallèle. La transformée de Fourier $\hat{R}^{\theta}(\nu)$ de la projection de Radon d'un objet 2-D sur un détecteur linéaire incliné d'un angle θ est égal à la coupe 1-D, suivant cette même inclinaison et passant par l'origine, dans la transformée de Fourier 2-D de l'objet $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$.

augmentation du nombre de projections serait une solution pour "tuer" ces dégénérescences. A contrario, un objet isotrope ne souffrira pas de cette incertitude liée à l'étalonnage même du système, rendant sa reconstruction indépendante de cette variablilité, ce qui permettrait potentiellement de réduire le nombre de projections nécessaires pour l'extraction optimale de l'information spatiale de l'objet lors de la reconstruction[14]. Nous allons donc considérer ces principes pour les inclure dans notre approche inverse, d'autant plus que celle-ci nous octroie plus de possibilités en termes de modélisation et de reconstruction. Notre objectif est donc développer un projecteur très fin quel que soit la direction de projection et le mode de propagation des rayons. Nous le présentons dans la section 2.3, après avoir donné un bon aperçu de l'état de l'art (*cf.* section 2.2.3). Nous nous attèlerons ensuite à évaluer ses performances en reconstruction.

2.2.3 État de l'art

Les modèles standard Voxel Driven et Ray Driven

Nous présentons ici deux méthodes de projection, appelées respectivement *voxel driven* et *ray driven*, que l'on peut considérer comme la référence, depuis une trentaine d'années, en matière de modélisation de la projection en tomographie. Préalablement à cette présentation, il convient de dire d'emblée qu'ils diffèrent de l'approche définie dans la section 2.2.2, *i.e.* une *approche basée empreinte* [Ziegler et al., 2006], notamment par le fait que le faisceau X est considéré comme rectiligne, et n'est ni pondéré ni intégré par une quelconque réponse des pixels détecteur. Ceux-ci sont considérés ponctuels, et disposés régulièrement sur une grille d'échantillonnage, de pas Δ_d. Cette hypothèse occulte le phénomène de filtrage de la transformée aux rayons X par cette réponse, qui devient source d'une modélisation imparfaite du contenu fréquentiel des données, et donc d'une interprétation quelque peu insuffisante de celles-ci.

À l'instar des pixels détecteur, les voxels aussi sont définis comme étant ponctuels sur leur grille d'échantillonnage — la valeur du voxel $\boldsymbol{k}$ correspond à la valeur du signal f au point $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$. C'est donc une approche type Shannon. Si l'on se basait sur notre approche de la projection, la fonction atomique φ à considérer serait donc le sinus cardinal, qu'on a estimé peu approprié du fait principalement de la non compacité de son support, ainsi des erreurs et artéfacts de

14. Sous condition bien sûr que la finesse du projecteur soit associée à un "bon" algorithme de reconstruction

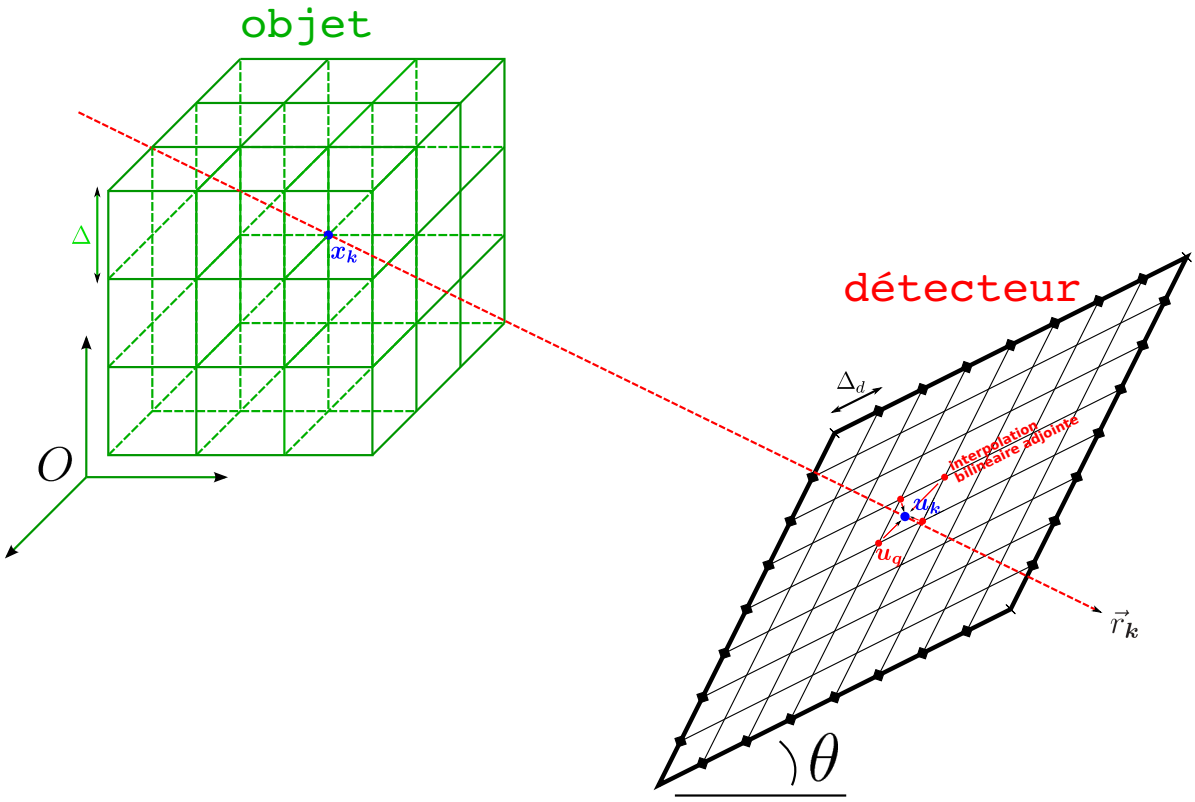


FIGURE 2.24: Schéma de principe du projecteur *voxel driven*.

modélisation importants générés lorsqu'elles sont utilisées pour représenter un signal à support spectral non borné (*cf.* Fig. 2.4 et 2.5, section 2.1.1). Les deux projecteurs que l'on présente ne considèrent pas explicitement cette fonction, qui constitue néanmoins le modèle sous-jacent de la représentation du signal f en tant que fonction continue de l'espace, avec les écueils propres qui lui sont associés.

Commençons par la plus standard des deux méthodes, à savoir *voxel driven* [Peters, 1981] (*cf.* Fig. 2.24). Pour chaque voxel $\boldsymbol{k}$ positionné en $\boldsymbol{x_k}$, la position $\boldsymbol{u_k}$ sur le détecteur de sa projection est calculée par la méthode présentée dans la section 2.2.1. Ensuite, les positions $\boldsymbol{u_q}$ des pixels détecteur encadrant la position $\boldsymbol{u_k}$ sont calculées, desquelles sont déduits les poids d'interpolation bilinéaire par rapport à $\boldsymbol{u_k}$. Ces derniers leur sont alors affectés, pondérés par la valeur $f_{\boldsymbol{k}}$ du voxel. Dans le cas 2-D (par souci de simplicité), nous pouvons écrire le projecteur comme suit :

$$\tilde{y}_q^{\theta} = \sum_{\boldsymbol{k}' \in V_{\text{inf}}} \left(1 - \frac{u_{\boldsymbol{k}'} - u_q}{\Delta_d}\right) \cdot f_{\boldsymbol{k}'} + \sum_{\boldsymbol{k}'' \in V_{\text{sup}}} \left(\frac{u_{\boldsymbol{k}''} - u_q}{\Delta_d}\right) \cdot f_{\boldsymbol{k}''} \tag{2.59}$$

où V_{inf} constitue l'ensemble des voxels $\boldsymbol{k'}$ dont le pixel q est le voisin inférieur de sa projection $u_{\boldsymbol{k}'}$ sur le détecteur, et V_{sup} constitue l'ensemble des voxels $\boldsymbol{k''}$ dont le pixel q est le voisin supérieur de sa projection $u_{\boldsymbol{k}''}$ sur le détecteur. Δ_d est le pas d'échantillonnage de la grille des pixels détecteur. Il s'agit donc en réalité de l'opération adjointe à l'interpolation bilinéaire, *i.e.* en termes matriciels, de la transposée de l'interpolation directe.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que, suivant le dimensionnement des grilles d'échantillonnage, le rayon d'influence d'un voxel sur le détecteur dépend de sa position projetée par rapport aux positions des pixels détecteur voisins, et non de son support initial. Cela

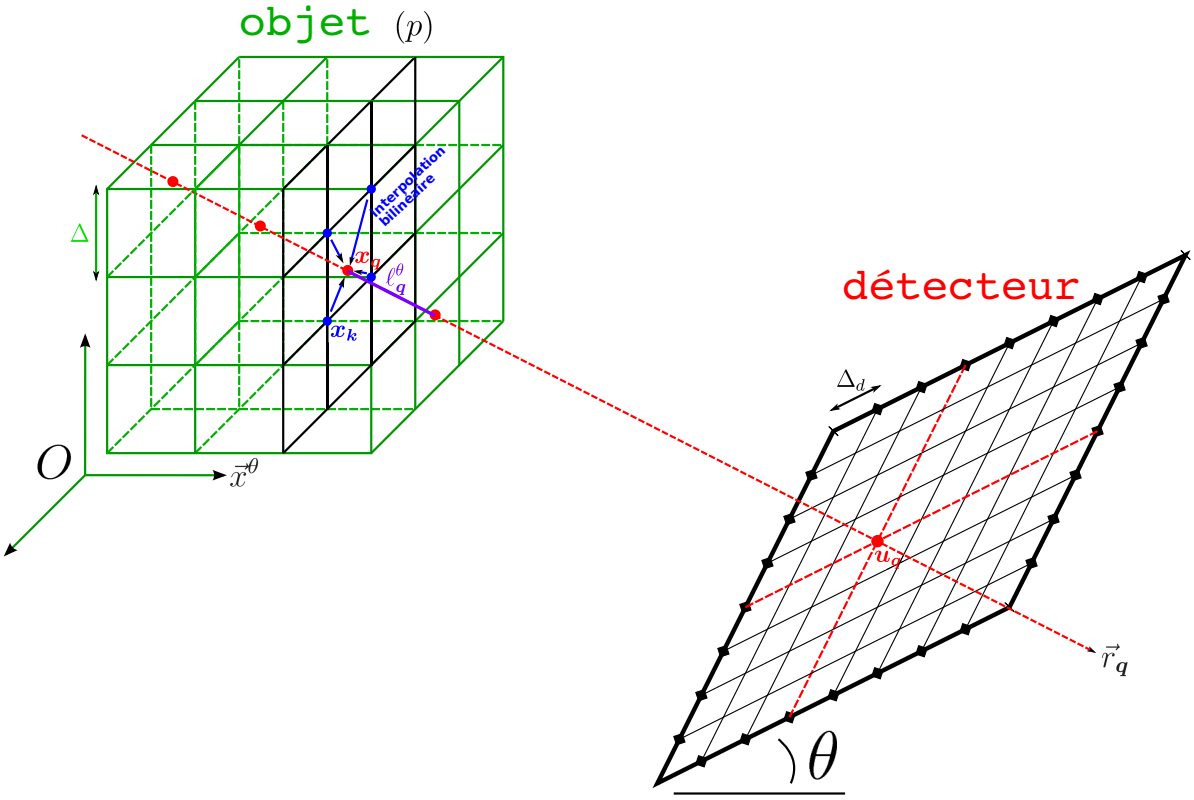


FIGURE 2.25: Schéma de principe du projecteur *ray driven*.

induit une résolution différente, à la fois des voxels les uns par rapport aux autres, mais aussi d'un même voxel pour différentes orientations θ. Ce phénomène sera d'autant plus important que le rapport de finesse d'échantillonnage de la grille des voxels par rapport à la grille des pixels détecteur sera grand, et aura pour effet principal une perte de résolution sur le signal $\tilde{f}$. Pour corriger le problème, on peut bien sûr dimensionner correctement la grille d'échantillonnage de l'objet en fonction de celle du détecteur qui, elle, est contrainte par le système physique d'acquisition (capteurs). Mais cette adaptation se fera aussi au prix d'une perte de résolution, puisque pour assurer une zone d'influence assez homogène de chaque voxel, on ne pourra descendre en-dessous d'un certain seuil pour le pas Δ, qui est, d'après cette modélisation, l'unique paramètre réglant l'étendue du contenu fréquentiel possible de $\tilde{f}$. Ce type de projecteur est donc à exclure.

Le projecteur *ray driven*, aussi appelé *méthode de Joseph* du nom de son auteur [Joseph, 1982], se base sur une approche type *lancer de rayons*, illustrée par la figure 2.25. Il se positionne du point de vue détecteur, en contraste avec *voxel driven* qui, lui, s'effectue du point de vue de l'objet. On "tire" un rayon depuis le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ suivant l'incidence $\vec{r}_{\boldsymbol{q}}$ dictée par le mode de propagation des rayons et l'orientation θ du détecteur. La trajectoire du rayon coupe l'objet défini par son support cubique du fait de sa représentation sur une grille d'échantillonnage. On définit alors les plans de la grille qui sont coupés par le rayon, de sorte que son incidence $\vec{r}_{\boldsymbol{q}}$ soit la plus proche de l'orthogonalité avec ces plans. Dit autrement, on définit l'axe $\vec{x}^\theta$ dont la direction est la plus proche de la colinéarité avec $\vec{r}_{\boldsymbol{q}}$, de sorte que les plans de coupe soient orthogonaux à cet axe, *i.e.* qu'ils soient définis par les deux autres axes. Chacun des plans de coupe constitue donc une grille 2-D de voxels $\boldsymbol{k}^{(p)}$, où p est l'indice de chacun des plans, sur laquelle le rayon va avoir une position d'intersection $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{q}}^{(p)}$. On effectue alors une interpolation bilinéaire, en cette position, à partir des quatre voxels l'encadrant au plus près. La valeur de

la projection sur le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ d'où le rayon a été lancé est obtenue comme somme cumulée des interpolations des voxels sur chaque plan de coupe. En 2-D, le projecteur peut alors s'écrire :

$$\tilde{y}_q^\theta = \ell_q^\theta \left[\sum_p \left(1 - \frac{x_k^{(p)} - x_q^{(p)}}{\Delta} \right) \cdot f_k^{(p)} + \left(\frac{x_k^{(p)} - x_q^{(p)}}{\Delta} \right) \cdot f_{k+1}^{(p)} \right], \quad \text{avec } \ell_q^\theta = \Delta \frac{\left\| \vec{x}^\theta \right\| \cdot \| \vec{r_q} \|}{|\langle \vec{x}^\theta, \vec{r_q} \rangle|} \tag{2.60}$$

Le facteur ℓ_q^θ correspond à la distance parcourue par le rayon dans l'épaisseur Δ entre 2 plans de coupe successifs, en fonction de la direction $\vec{r_q}$, afin d'avoir l'approximation de l'intégrale de ligne sur cette trajectoire (somme de Riemann).

Suivant ce principe de projection et, encore une fois, selon le dimensionnement des grilles d'échantillonnage, on s'aperçoit que certains voxels peuvent potentiellement n'être "vus" par aucun pixel détecteur. On se trouverait alors en présence d'un opérateur linéaire de projection ayant un noyau non nul ($\operatorname{Ker} \mathbf{R}^\theta \neq \emptyset$), source potentielle d'artéfacts dans les reconstructions. C'est l'opérateur adjoint de $\mathbf{R}^\theta$, autrement dit son transposé, qui mettrait en évidence ce défaut, en générant fatalement des "trous" dans l'image reconstruite (mise à zéro des voxels non vus), et que seule la régularisation serait à même de "combler", mais au prix d'une perte de détails fins. À l'instar de ce que l'on a dit pour *voxel driven*, un dimensionnement correct de la grille d'échantillonnage de l'objet en fonction de celle du détecteur pourrait corriger le problème, mais au détriment de la résolution, puisque pour assurer une "visibilité" totale des voxels, on ne pourrait descendre en-dessous d'un certain seuil pour le pas Δ. Pour pallier cela, une autre solution consisterait à utiliser une interpolation plus fine que l'interpolation linéaire, *e.g.* une interpolation par B-splines de degré supérieur, qui garantirait un rayon d'influence plus important de chaque voxel. Le projecteur *ray driven*, moyennant quelques raffinements, pourrait être utilisable, d'autant plus qu'il est simple à mettre en œuvre et rapide à calculer ($\mathbf{R}^\theta$ est très creux). Quoi qu'il en soit, il reste toujours l'écueil de ne pas considérer la convolution par la réponse des pixels détecteur[15], qui, on l'a dit dans la section 2.2.2, engendre une modélisation imparfaite des données, ce qui nous conduit finalement à bannir aussi ce projecteur.

Le modèle Distance Driven

Dans la section précédente, nous avons présenté des modèles de projection qui n'étaient basés ni sur notre modélisation du signal f à reconstruire comme une fonction continue de l'espace (*cf.* section 2.1), ni sur notre approche continue de la projection tomographique, tenant compte notamment de la réponse des pixels détecteur (*cf.* section 2.2.2). Les défauts de telles approches ont déjà été identifiés dans la littérature, et des solutions ont été proposées, se rapprochant de la modélisation *basée empreinte*. C'est le cas de De Man et Basu qui proposèrent en 2004 [DeMan and Basu, 2004] cette nouvelle approche, que nous allons présentée dans cette section, et qu'ils ont nommé *distance driven*.

Ce projecteur considère comme fonction atomique φ de représentation du signal $\tilde{f}$ l'indicatrice de voxels (*cf.* section 2.1.2). Moyennant quelques approximations, il projette pour chaque voxel $\boldsymbol{k}$ une empreinte de $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ sur le détecteur, qui est intégrée sur le support des pixels détecteur impactés, leur réponse étant caractérisée par une fonction *porte* bidimensionnelle (*cf.* section 2.2.2).

L'empreinte de l'indicatrice du voxel $\boldsymbol{k}$, centrée en $\boldsymbol{x_k}$, étant assez complexe à calculer

15. Il en est d'ailleurs de même pour *voxel driven*.

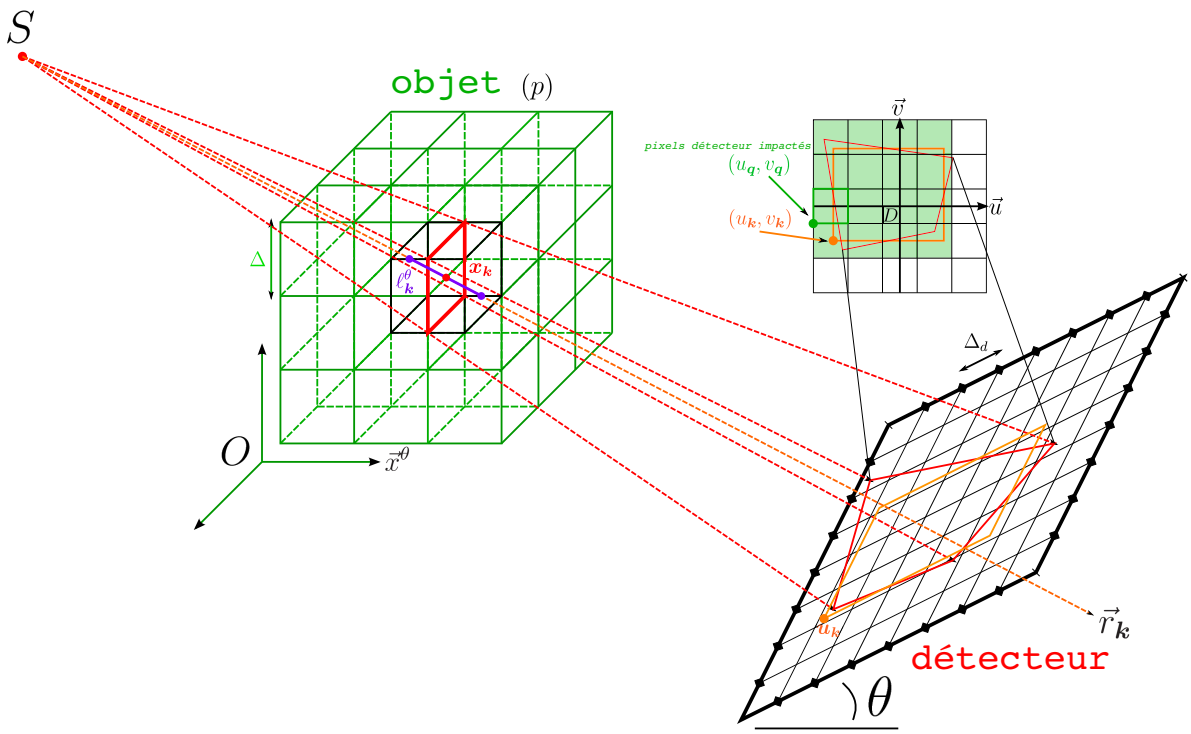


FIGURE 2.26: Schéma de principe du projecteur *distance driven*.

analytiquement, et donc difficile à implanter, le projecteur *distance driven* en fait une approximation, en procédant de la façon suivante pour chaque orientation θ du détecteur :

- on définit l'axe $\vec{x}^\theta$ dont la direction est la plus proche de la colinéarité avec $\vec{r}_{\boldsymbol{k}}$, la direction du rayon tiré depuis la source et passant par le centre $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$ du voxel $\boldsymbol{k}$;
- on projette alors les quatre sommets du carré de section centrale du voxel $\boldsymbol{k}$, orthogonale à l'axe $\vec{x}^\theta$;
- ces quatre sommets projetés, en fonction de la position du voxel $\boldsymbol{k}$ et du mode de propagation, vont dessiner la forme de l'empreinte : un quadrilatère sans propriété particulière[16] ;
- ce quadrilatère est alors approximé par un rectangle comme illustré sur la figure 2.26 ;
- l'empreinte rectangulaire ainsi déduite est alors affectée d'une valeur uniforme $\ell_{\boldsymbol{k}}^\theta$ sur son support, qui est la distance parcourue par le rayon passant par $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$ dans l'épaisseur Δ du voxel $\boldsymbol{k}$:

$$\ell_{\boldsymbol{k}}^\theta = \Delta \frac{\left\|\vec{x}^\theta\right\| \cdot \|\vec{r}_{\boldsymbol{k}}\|}{|\langle \vec{x}^\theta, \vec{r}_{\boldsymbol{k}} \rangle|} \; ; \tag{2.61}$$

- cette empreinte est finalement intégrée sur chaque pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ impacté, le résultat étant cumulé à la valeur $\tilde{y}_{\boldsymbol{q}}^\theta$, dont l'expression donne alors, pour un cas 2-D :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_q^\theta = & \sum_{\boldsymbol{k}' \in V_{\text{bsup}}} \ell_{\boldsymbol{k}'}^\theta \left(u_{\boldsymbol{k}'+1} - u_q\right) f_{\boldsymbol{k}'} \\ & + \sum_{\boldsymbol{k}'' \in V_{\text{binf}}} \ell_{\boldsymbol{k}''}^\theta \left(u_{q+1} - u_{\boldsymbol{k}''}\right) f_{\boldsymbol{k}''} \\ & + \sum_{\boldsymbol{k}''' \in V_{\text{bint}}} \ell_{\boldsymbol{k}'''}^\theta \left(u_{\boldsymbol{k}'''+1} - u_{\boldsymbol{k}'''}\right) f_{\boldsymbol{k}'''} \end{aligned} \tag{2.62}$$

16. La forme de ce quadrilatère peut être particulière étant donné que le mode de propagation des rayons n'est pas aléatoire. On généralise cependant à un quadrilatère quelconque car sa forme exacte n'a pour ce projecteur pas d'intérêt, puisqu'une approximation rectangulaire va en être faite.

Les ensembles $V_{\cdot}$ correspondent aux voxels impactant le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$, qui sont partitionnés en trois familles différentes, suivant la position d'impact de l'empreinte par rapport aux bords du pixel détecteur. Ces trois familles sont illustrées par la figure 2.27 ci-dessous.

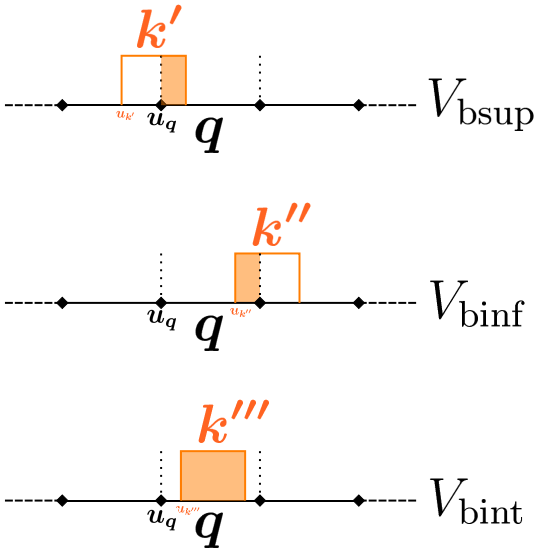


FIGURE 2.27: Les trois configurations d'impact de l'empreinte du voxel $\boldsymbol{k}$ sur le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$, dans le modèle *distance driven*.

On a dit dans la section 2.1.2 que l'utilisation des indicatrices de voxels constituait une base de représentation trop grossière pour modéliser le signal f, constat corroboré par notre étude numérique préalable de représentation d'un bord franc (*cf.* Fig. 2.4 et 2.5, section 2.1.1). À cela s'ajoutent les approximations faites par *distance driven* pour projeter efficacement une telle fonction, qui vont être sources d'erreurs supplémentaires entre la modélisation des pseudo-données $\tilde{\mathbf{y}}^\theta$ et les données initiales $\mathbf{y}^\theta$: $\left\|\mathbf{y}^\theta - \tilde{\mathbf{y}}^\theta\right\|_2$. La section 2.3.2 illustrera le niveau de ces erreurs pour conclure quant aux gains qu'apportera notre approche en termes de précision de la modélisation.

L'approche Long & Fessler

Récemment, une amélioration des approximations sur la projection des indicatrices de voxels en 3-D a été proposée par Long & Fessler [Long et al., 2010], pour un coût de calcul au plus double de celui de *distance driven*. L'approche proposée dans cet article est totalement *basée empreinte*. C'est précisément sur l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$ que le raffinement de la méthode s'opère, celle-ci étant approximée par une fonction séparable sur le détecteur, dont les composantes monodimensionnelles suivant chaque axe sont des fonctions trapézoïdales, dont les sommets sont définis par les positions projetées des sommets des indicatrices. Le système tomographique est considéré dans une géométrie standard, quel que soit le mode de propagation — la rotation de la source et du détecteur se font autour de l'axe $\{O, \vec{z}\}$ (*cf.* section 2.2.1). L'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$ du voxel $\boldsymbol{k}$ s'écrit alors :

$$F_{\boldsymbol{k}}^\theta(\boldsymbol{u}) = F_{\boldsymbol{k}}^\theta(u,v) = \ell_{\boldsymbol{k}}^\theta \; \Lambda_{\boldsymbol{k},\vec{u}}^\theta(u) \; \Lambda_{\boldsymbol{k},\vec{v}}^\theta(v) \tag{2.63}$$

avec :

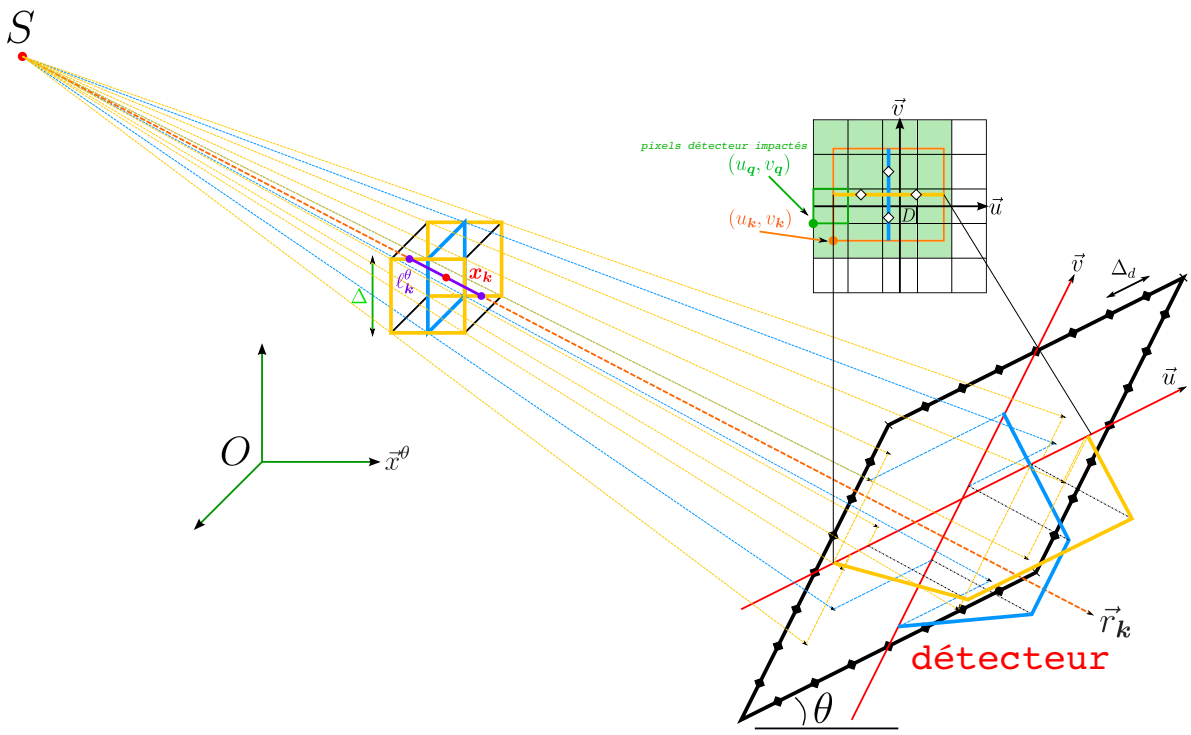


FIGURE 2.28: Schéma de principe du projecteur *basé empreinte* créé par Long & Fessler [Long et al., 2010], basé sur des indicatrices de voxels.

- $\Lambda^\theta_{\boldsymbol{k},\vec{v}}(v)$ la fonction trapézoïdale monodimensionnelle suivant l'axe $\vec{v}$:

$$\Lambda^\theta_{\boldsymbol{k},\vec{v}}(v) = \mathrm{trap}_{(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3)}(v) = \begin{cases} \frac{v-\tau_0}{\tau_1-\tau_0}\,, & \tau_0 < v < \tau_1 \\ 1\,, & \tau_1 \leq v \leq \tau_2 \\ \frac{\tau_3-v}{\tau_3-\tau_2}\,, & \tau_2 < v < \tau_3 \\ 0\,, & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.64}$$

où les sommets τ_0, τ_1, τ_2 et τ_3 du trapèze sont les coordonnées v des positions projetées, ordonnées dans l'ordre croissant, des quatre sommets de la section centrale du voxel $\boldsymbol{k}$ orthogonale à l'axe de rotation $\vec{z}$, autrement dit la section formant un plan parallèle à l'axe $\vec{v}$ (*cf.* figure 2.28) ;

- $\Lambda^\theta_{\boldsymbol{k},\vec{u}}(u)$ la fonction trapézoïdale monodimensionnelle suivant l'axe $\vec{u}$:

$$\Lambda^\theta_{\boldsymbol{k},\vec{u}}(u) = \mathrm{trap}_{(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}(u) = \begin{cases} \frac{u-\xi_0}{\xi_1-\xi_0}\,, & \xi_0 < u < \xi_1 \\ 1\,, & \xi_1 \leq v \leq \xi_2 \\ \frac{\xi_3-u}{\xi_3-\xi_2}\,, & \xi_2 < u < \xi_3 \\ 0\,, & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.65}$$

où les sommets ξ_0 et ξ_1 du trapèze sont respectivement la plus petite et la plus grande des coordonnées u des positions projetées des 4 sommets du côté du voxel $\boldsymbol{k}$, orthogonal à l'axe

$\vec{z}$, et situé à la position z inférieure. Les sommets ξ_2 et ξ_3 du trapèze sont respectivement la plus petite et la plus grande des coordonnées u des positions projetées des quatre sommets du coté du voxel $\boldsymbol{k}$, orthogonal à l'axe $\vec{z}$, et situé à la position z supérieure (*cf.* figure 2.28). Notons que dans le cas d'un mode de propagation parallèle, l'approximation par une fonction trapézoïdale n'est plus nécessaire puisqu'on aura forcément $\tau_0 = \tau_1$ et $\tau_2 = \tau_3$, ce qui va donner une fonction *porte* dans cette direction, de largeur Δ. Cette variante est prise en compte par Long & Fessler pour adapter leur projecteur en fonction de la géométrie ;

- $\ell_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ le facteur de mise à l'échelle de l'empreinte correspondant à la distance parcourue par le rayon passant par $\boldsymbol{x_k}$ dans l'épaisseur Δ du voxel $\boldsymbol{k}$ (*cf.* figure 2.28) :

$$\ell_{\boldsymbol{k}}^{\theta} = \Delta \frac{\left\|\vec{x}^{\theta}\right\| \cdot \|\vec{r}_{\boldsymbol{k}}\|}{|\langle \vec{x}^{\theta}, \vec{r}_{\boldsymbol{k}} \rangle|} \tag{2.66}$$

Il s'agit de la même pondération que pour *distance driven* (*cf.* équation 2.61). Cela implique que, à l'instar du projecteur de De Man et Basu, l'axe $\vec{x}^{\theta}$ est défini comme étant la direction la plus proche de la colinéarité avec $\vec{r}_{\boldsymbol{k}}$, la direction du rayon tiré depuis la source et passant par le centre $\boldsymbol{x_k}$ du voxel $\boldsymbol{k}$. Long & Fessler proposent d'autres façons de mettre l'empreinte à l'échelle, en la pondérant différemment en fonction du pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ impacté par celle-ci. On doit alors considérer la direction $\vec{r}_{\boldsymbol{q}}$ du rayon passant par le centre $\boldsymbol{u_q}$ de ce pixel détecteur. Ainsi :

$$\ell_{\boldsymbol{q}}^{\theta} = \Delta \frac{\left\|\vec{x}^{\theta}\right\| \cdot \|\vec{r}_{\boldsymbol{q}}\|}{|\langle \vec{x}^{\theta}, \vec{r}_{\boldsymbol{q}} \rangle|} \tag{2.67}$$

Cette dernière méthode de pondération, équivalente à celle utilisée dans le projecteur *ray driven* (*cf.* équation 2.60), permet de réduire drastiquement le temps de calcul du projecteur, car on a un poids $\ell_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ à calculer par pixel détecteur par projection, au lieu d'un poids $\ell_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ par voxel par projection. Cela se fait cependant au prix d'une erreur d'approximation de l'empreinte un peu plus grande mais peu significative.

À partir de la définition de cette empreinte, qui rappelons-le reste séparable suivant les axes du détecteur, la modélisation des pseudo-données et l'opérateur de projection qui en découle sont obtenus de la même manière que dans l'équation 2.57 définie dans la section 2.2.2, avec une réponse uniforme des pixels détecteur sur leur support — fonction *porte* (*cf.* équation 2.52). Dans leur approche, Long & Fessler déterminent analytiquement l'intégration de l'empreinte sur la réponse des pixels détecteur (simple étant donnée la forme de l'empreinte). Le projecteur ainsi créé met donc en œuvre des erreurs d'approximation bien moindres que le modèle *distance driven* (on étudiera ces erreurs dans la section 2.3.2), pour une charge de calcul compétitive grâce à la séparabilité (au maximum un facteur 2 en temps par rapport à *distance driven*). Cependant la fonction atomique φ demeurant l'indicatrice de voxels, on perd intrinsèquement en qualité de modélisation et en isotropie du modèle de projection (*cf.* Fig. 2.4 et 2.5, section 2.1.1).

L'approche par blobs

Dans cette partie, nous allons décrire succinctement les travaux de Ziegler *et al.* Ziegler et al., 2006, qui ont défini un projecteur *basé empreinte* à partir de blobs type Kaiser-Bessel, en s'inspirant des travaux antérieurs de Matej et Lewitt Lewitt, 1990, Lewitt, 1992, Matej and Lewitt, 1992, Matej and Lewitt, 1996. L'empreinte $F_{m,a,\alpha}$ générique du blob Kaiser-Bessel atomique 3-D est d'abord déterminée à partir de la transformée aux rayons X de celui-ci, pour une géométrie standard du système tomographique et un mode de propagation parallèle des rayons. En considérant un blob centré en O, centre du repère objet $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$, son expression, définie à partir de son profil radial $b_{m,a,\alpha}(r)$, s'écrit :

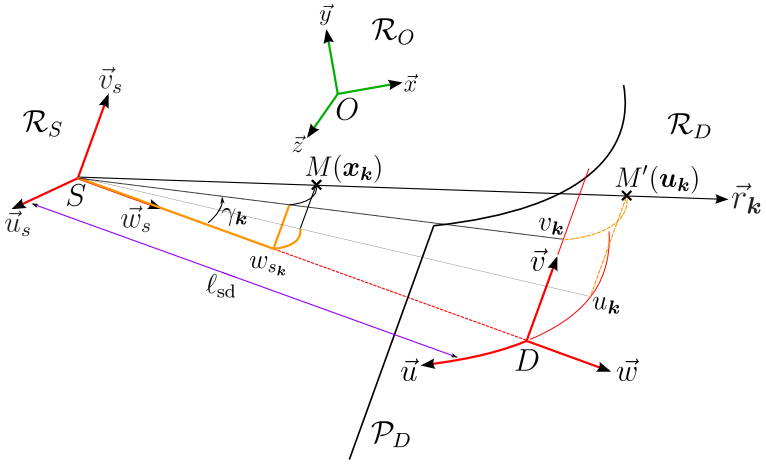


FIGURE 2.29: Principe du système tomographique, avec détecteur cylindrique et source de rayons X focalisée en son centre, considéré dans l'article de Ziegler *et al.* [Ziegler et al., 2006], présentant un projecteur *basé empreinte* à base de blobs Kaiser-Bessel. $M'(u_{\boldsymbol{k}}, v_{\boldsymbol{k}})$ est le projeté du point $M(\boldsymbol{x_k})$ de $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ dans la direction $\vec{r}_{\boldsymbol{k}}$ du faisceau X passant par M. $w_{s_{\boldsymbol{k}}}$ est la position projetée du point M sur l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$ du repère source $\mathcal{R}_\mathcal{S}$. L'angle $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ désigne la déviation du faisceau X passant par M suivant la direction $\vec{v}$. ℓ_{sd} désigne la distance entre la source S et son projeté orthogonal sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$.

$$F_{m,a,\alpha}(\boldsymbol{u}) = F_{m,a,\alpha}(u,v) = 2\int_0^{(a^2-\boldsymbol{u}^2)} b_{m,a,\alpha}\left[\sqrt{w^2+\boldsymbol{u}^2}\right] dw \tag{2.68}$$

Il s'agit d'une empreinte normalisée par le pas d'échantillonnage Δ de la grille des voxels (d'où l'appellation d'empreinte *générique*), *i.e.* l'empreinte pour $\Delta = 1$. $\boldsymbol{u} = (u, v)$ sont les coordonnées du point d'impact sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$ du rayon partant de la source et de direction $\vec{w}$, *i.e.* les coordonnées selon les axes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du blob dans le repère source $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ (équivalent à $\mathcal{R}_\mathcal{D}$ à la translation près suivant $\vec{w}$, *cf.* section 2.2.1). Dans ce cas $\boldsymbol{u}^2$ désigne le carré scalaire de $\boldsymbol{u}$ (le produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ avec lui-même, soit $\boldsymbol{u}^2 = u^2 + v^2$). w dénote la coordonnée suivant la direction de ce rayon. Connaissant l'expression analytique du profil radial $b_{m,a,\alpha}(r)$, il est donc possible de déterminer une expression analytique de cette empreinte $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$[17], qui, grâce à la symétrie sphérique du blob, est invariante quelle que que soit la position $\boldsymbol{x_k}$ du blob $\boldsymbol{k}$ et l'orientation θ de la projection, mais n'est pas séparable suivant les axes du détecteur :

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = F_{m,a,\alpha}\left(\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u_k}}{\Delta}\right) = F_{m,a,\alpha}\left(\frac{u-u_{\boldsymbol{k}}}{\Delta}, \frac{v-v_{\boldsymbol{k}}}{\Delta}\right) \tag{2.69}$$

où $\boldsymbol{u_k}$ est la position projetée sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$ du centre $\boldsymbol{x_k}$ du blob $\boldsymbol{k}$.

On veut à présent pouvoir obtenir l'empreinte $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ pour un mode de propagation conique. Ziegler *et al.* font alors l'hypothèse que la divergence des faisceaux coniques à l'intérieur même du blob est négligeable[18], de sorte que l'isotropie de l'empreinte est toujours valable. On peut utiliser la même expression de l'empreinte quelle que soit la position du blob et l'orientation θ de la projection. Cependant la divergence des faisceaux X va malgré tout imposer une mise à l'échelle de l'empreinte sur le détecteur en fonction de la position du blob. Dans leur article [Ziegler et al., 2006], les auteurs considèrent un détecteur cylindrique, avec la source de rayons X focalisée en son centre (*cf.* figure 2.29). Cela signifie que le détecteur est parallèle à l'axe

17. Lewitt a constaté que l'expression de l'empreinte n'était autre que la transformée d'Abel du profil profil radial $b^{\Delta}_{m,a,\alpha}(r)$, dont il a dégagé une expression analytique [Lewitt, 1990].

18. Nous ferons nous-mêmes cette hypothèse pour la projection de nos B-splines dans la section 2.3.1.

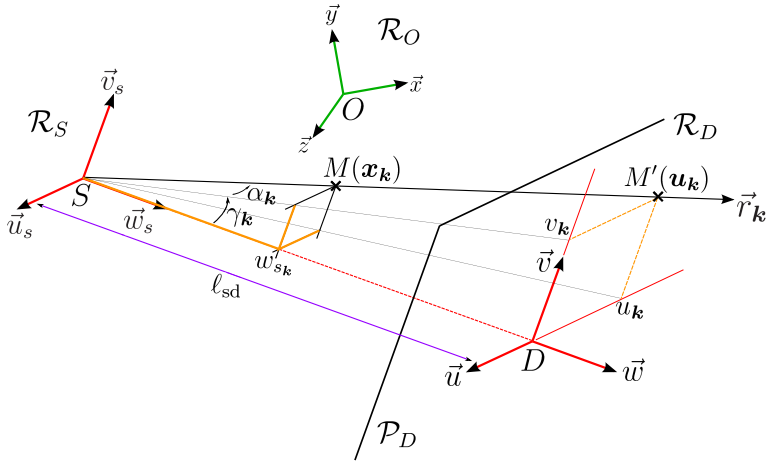


FIGURE 2.30: Paramètres de mise à l'échelle de l'empreinte dans le cas d'un détecteur plan, pour une géométrie standard et un mode de propagation des rayons X conique. $M'(u_{\boldsymbol{k}}, v_{\boldsymbol{k}})$ est le projeté du point $M(x_{\boldsymbol{k}}, y_{\boldsymbol{k}}, z_{\boldsymbol{k}})$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ dans la direction $\vec{r}_{\boldsymbol{k}}$ du faisceau X passant par M. $w_{s_{\boldsymbol{k}}}$ est la position projetée du point M sur l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$ du repère source $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$. Les angles $\alpha_{\boldsymbol{k}}$ et $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ désignent la déviation du faisceau X passant par M, dans le système de coordonnées sphériques lié au repère $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ (*cf.* figure 2.21). ℓ_{sd} désigne la distance entre la source S et son projeté orthogonal sur le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$.

de rotation $\{O, \vec{z}\}$. D'après cette configuration, l'empreinte $F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ du blob $\boldsymbol{k}$ mise à l'échelle et positionnée sur le détecteur s'écrit donc :

$$F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = F_{m,a,\alpha}\left(\frac{u - u_{\boldsymbol{k}}}{\Delta \cdot \delta_{u_{\boldsymbol{k}}}}, \frac{v - v_{\boldsymbol{k}}}{\Delta \cdot \delta_{v_{\boldsymbol{k}}}}\right) \tag{2.70}$$

où $\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$ et $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$ sont deux facteurs de mise à l'échelle, respectivement suivant les directions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des axes détecteur. Leurs expressions sont données par (*cf.* figure 2.29) :

$$\begin{cases} \delta_{u_{\boldsymbol{k}}} &= \dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}}} \\ \delta_{v_{\boldsymbol{k}}} &= \dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}} \cdot \cos\gamma_{\boldsymbol{k}}} = \dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}}} \cdot \sqrt{\dfrac{\ell^2_{\text{sd}} + v^2_{\boldsymbol{k}}}{\ell^2_{\text{sd}}}} = \dfrac{\sqrt{\ell^2_{\text{sd}} + v^2_{\boldsymbol{k}}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}}} \end{cases} \tag{2.71}$$

où $w_{s_{\boldsymbol{k}}}$ est la cote du centre du blob $\boldsymbol{k}$ écrite dans le repère source $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$.

Si l'on considère à présent un système à détecteur plan tel qu'on l'a caractérisé dans la section 2.2.1, la mise à l'échelle suivant la direction $\vec{u}$ va présenter quelques différences, illustrées par la figure 2.30. On peut alors en déduire le nouveau paramètre $\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$:

$$\delta_{u_{\boldsymbol{k}}} = \frac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}} \cdot \cos\alpha_{\boldsymbol{k}}} = \frac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}}} \cdot \sqrt{\frac{\ell^2_{\text{sd}} + v^2_{\boldsymbol{k}} + u^2_{\boldsymbol{k}}}{\ell^2_{\text{sd}} + v^2_{\boldsymbol{k}}}} \tag{2.72}$$

Le facteur $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$ reste quant à lui inchangé.

On peut donc noter que le projecteur de Ziegler *et al.*, à base de blobs type Kaiser-Bessel, génère très peu d'erreurs d'approximation car l'hypothèse de très faible divergence des faisceaux dans le blob est tout à fait justifiée. On n'étudiera donc pas les erreurs d'approximation de ce modèle dans la section 2.3.2.

À l'instar du projecteur de Long & Fessler, en accord avec l'approche *basée empreinte*, la modélisation des pseudo-données et l'opérateur de projection qui en découle sont obtenus de la même manière que dans l'équation 2.57 définie dans la section 2.2.2, avec une réponse uniforme des pixels détecteur sur leur support — fonction *porte* (*cf.* équation 2.52). Mais à la différence de Long et Fessler, qui calculent analytiquement les valeurs $\tilde{y}^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$, la complexité du calcul de

l'empreinte d'un blob, même connaissant son expression analytique, ne peut être envisagée dans un calcul "à la volée", surtout dans le cas 3-D. Ziegler *et al.* proposent de pré-calculer l'empreinte $F_{m,a,\alpha}$ et de stocker ses valeurs. Cette méthode donnera une bonne précision si l'échantillonnage est judicieusement choisi, en tenant compte du fait que l'on doive intégrer ces valeurs sur le support du pixel détecteur. Cependant l'absence de séparabilité obligera à stocker une empreinte 2-D, engendrant des accès mémoire également 2-D[19], plus coûteux, pour chaque pixel détecteur impacté, surtout dans le cadre éventuel d'une implantation sur processeurs graphiques, dont ils sont le goulot d'étranglement.

2.3 Le projecteur de B-splines

2.3.1 Détermination de l'empreinte

Comme nous l'avons annoncé dans la section 2.1.3, le projecteur que nous proposons est basé sur l'utilisation des B-splines de degré supérieur à 0, et de leurs propriétés. Au vu de l'état de l'art que l'on vient de présenter, notre approche se considère comme le compromis entre le modèle de Long et Fessler et le modèle à base de blobs de Ziegler *et al.*, exploitant au mieux leurs avantages, et tentant de corriger dans une certaine mesure les défauts mis en évidence pour chacun d'eux. On peut dans ce cadre résumer dans un tableau les apports et écueils de ces deux approches *basées empreinte* :

	Long & Fessler	Ziegler *et al.*
Les *plus*	• support minimal (égal au pas d'échantillonnage Δ) impliquant un opérateur de projection $\mathbf{R}^\theta$ avec très peu de coefficients non nuls (très creux) ; • projection très précise de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$ engendrant des erreurs d'approximation faibles en comparaison du projecteur *distance driven* ; • séparabilité de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$ suivant les axes du détecteur pour la rapidité de calcul ; • calcul analytique de l'intégration de l'empreinte sur la réponse des pixels détecteur, ne nécessitant pas de stockage de valeurs dans des tableaux. En d'autres termes, un calcul "à la volée" rapide et sans accès mémoire, excepté ceux dans les tableaux des valeurs des voxels et des pixels détecteur, est alors possible.	• meilleure modélisation du signal continu f (bon ordre d'approximation), avec isotropie de la fonction de base donnant une faible erreur de modélisation $\left\|f - \tilde{f}\right\|_2$; • le blob est à support borné. L'opérateur de projection induit $\mathbf{R}^\theta$ est donc creux ; • l'isotropie du blob permet l'isotropie de la projection, *i.e.* l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$, dont l'expression analytique est connue, est invariante suivant la position du voxel et l'orientation de la projection, au facteur de mise à l'échelle près. Il n'y a donc pas d'approximation de l'empreinte — ou du moins très négligeables, d'où une projection "quasi-exacte" du signal $\tilde{f}$, et une erreur de modélisation des données $\left\|\mathbf{y}^\theta - \tilde{\mathbf{y}^\theta}\right\|_2$ faible.

19. Plusieurs accès sont nécessaires puisqu'on doit intégrer les valeurs !

	Long & Fessler	Ziegler *et al.*
Les *moins*	• modélisation grossière du signal continu f (mauvais ordre d'approximation), avec forte anisotropie de la fonction de base engendrant de fait une forte erreur de modélisation $\left\|f - \tilde{f}\right\|_2$; • empreinte complexe à déterminer analytiquement, obligeant à des approximations, d'où des erreurs supplémentaires dans la modélisation des données.	• le support du blob est plus large que celui de l'indicatrice de voxel. Il y a par conséquent davantage de pixels détecteur impactés donc plus de coefficients non nuls dans l'opérateur de projection $\mathbf{R}^\theta$; • l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$ n'est pas séparable suivant les axes détecteur d'où un accroissement du temps de calcul. • expression analytique de l'empreinte difficile à calculer "à la volée", d'où une nécessité de pré-calculer et de stocker l'empreinte. Cela entraîne plus d'accès mémoire, problématique notamment dans le cadre d'une implantation sur carte graphique.

Au vu de ce récapitulatif, les gains à apporter en modélisation de la projection tomographique doivent s'opérer sur la précision de la modélisation, minimisant les erreurs intrinsèques à la représentation $\tilde{f}$ du signal f en fonction de la base utilisée. De la même manière, il faut minimiser les erreurs d'approximation éventuelles sur la projection de ce signal, tout en conservant les atouts propres à la rapidité du calcul que sont la compacité de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$ du voxel (liée à la compacité de la fonction de base elle-même), sa séparabilité suivant les axes du détecteur et sa simplicité de calcul (un calcul "à la volée" étant à privilégier par rapport à un stockage en mémoire).

Nous allons démontrer en quoi notre utilisation des B-splines et leur manipulation dans le cadre d'un projecteur tomographique vont permettre de satisfaire à toutes ces contraintes.

Des travaux sur la modélisation pour la tomographie à partir de B-splines ont déjà été effectués par Horbelt *et al.* en 2002 [Horbelt et al., 2002] [20]. Ces travaux se placent dans le contexte de la tomographie 2-D suivant un mode propagation parallèle des rayons X et une géométrie standard. Préalablement, Horbelt *et al.* établissent une expression générale du produit de convolution de deux B-splines monodimensionnelles de degré respectif d_1 et d_2, et échantillonnées respectivement par les pas Δ_1 et Δ_2. Ils nomment cette expression le *bi-noyau spline*, noté $\beta^{d_1,d_2}_{\Delta_1,\Delta_2}$ (*cf.* équation 2.22) :

$$\beta^{d_1,d_2}_{\Delta_1,\Delta_2}(x) = \sum_{k_1=0}^{d_1+1}\sum_{k_2=0}^{d_2+1}(-1)^{k_1+k_2}\binom{d_1+1}{k_1}\binom{d_2+1}{k_2} \cdot \frac{\left(x + \left(\frac{d_1+1}{2} - k_1\right)\cdot\Delta_1 + \left(\frac{d_2+1}{2} - k_2\right)\cdot\Delta_2\right)_+^{d_1+d_2+1}}{(d_1+d_2+1)!\cdot\Delta_1^{d_1+1}\cdot\Delta_2^{d_2+1}} \tag{2.73}$$

où $(x)_+ = \max(0, x)$. À partir de là, ils déterminent l'expression de la transformée de Radon d'une B-spline bidimensionnelle pour une inclinaison θ du détecteur, s'écrivant sous la forme du *bi-noyau spline* suivant :

20. Unser est l'un des co-auteurs de cet article.

$$\beta^{d,d}_{\Delta|\cos\theta|,\Delta|\sin\theta|}(v) = \frac{1}{|\cos\theta||\sin\theta|}\left[\beta^d\left(\frac{v}{\Delta|\cos\theta|}\right)\cdot\beta^d\left(\frac{v}{\Delta|\sin\theta|}\right)\right] \tag{2.74}$$

Ils définissent donc en quelque sorte l'empreinte 1-D d'une B-spline atomique sur le détecteur. Cependant l'approche de leur modélisation n'est pas *basée empreinte*, l'objectif de leur article étant de définir une formule analytique de la transformée de Radon d'un signal f modélisé par les B-splines, et de pouvoir l'inverser pour en dégager une formule de rétroprojection filtrée :

$$\tilde{R^\theta_\beta}(v) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\,\beta^{d,d}_{\Delta|\cos\theta|,\Delta|\sin\theta|}(v - v_{\boldsymbol{k}}) \tag{2.75}$$

L'étape suivante de leur raisonnement consiste à approximer cette transformée de Radon *spline* $\tilde{R^\theta_\beta}$ par une spline de degré d_3 sur un échantillonnage détecteur Δ_3, de façon à avoir une erreur d'approximation minimale au sens des moindres carrés. En d'autres termes, ils effectuent la projection orthogonale de $\tilde{R^\theta_\beta}$ sur l'espace des splines de degré d_3. Ils appliquent donc la théorie de l'échantillonnage selon Unser à tout le processus de modélisation de la projection tomographique. Cette démarche les amènent à représenter cette projection à l'aide d'un *tri-noyau spline*, autrement dit le *bi-noyau spline* de l'équation 2.74 convolué par la B-spline de degré d_3 et de pas Δ_3, qui est ensuite échantillonné aux positions des pixels détecteur. Ils prennent en fait comme fonction atomique de la base de représentation sur le détecteur la fonction duale $\mathring{\beta^{d_3}}$:

$$\begin{aligned}\tilde{R^\theta}(v) &= \sum_{q\in\mathbb{Z}}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}\,\Delta_3\,\langle\beta^{d,d}_{\Delta|\cos\theta|,\Delta|\sin\theta|}(v - v_{\boldsymbol{k}}), \beta^{d_3}(v - v_q)\rangle\cdot\mathring{\beta^{d_3}}(v - v_q)\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n}\sum_{q\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k}}\,\Delta_3\,\beta^{d,d,d_3}_{\Delta|\cos\theta|,\Delta|\sin\theta|,\Delta_3}(v_{\boldsymbol{k}} - v_q)\cdot\mathring{\beta^{d_3}}(v - v_q)\end{aligned} \tag{2.76}$$

Horbelt *et al.* élaborent ensuite leur algorithme de rétroprojection filtrée, optimal au sens d'une représentation par B-splines. Avec cette approche, il leur est même possible d'évaluer avec précision les erreurs d'approximation en utilisant tous les outils et le formalisme de la théorie de Unser, comme le noyau d'erreur $E_\varphi(\boldsymbol{\omega})$ (*cf.* équations 2.10 et 2.11), qui leur permet d'évaluer quelles combinaisons de degrés de B-splines — celui de la représentation de l'objet et celui de la représentation de la projection de Radon sur le détecteur, offrent les meilleures précisions. On se doute bien entendu qu'elles sont atteintes pour des degrés de plus en plus élevés. Nous ne nous étendons pas plus sur le sujet et renvoyons pour plus de détails et de résultats à l'article de Horbelt *et al.*.

Ces travaux de recherche nous permettent d'ores et déjà de renforcer nos conclusions antérieures sur le bien-fondé d'une approche de la modélisation tomographique à l'aide de fonctions B-splines, confirmant une forme d'optimalité lorqu'elles sont utilisées en tant que base de représentation d'un signal f n-dimensionnel, et satisfaisant toutes les propriétés et compromis imposés dans le cadre de la théorie de l'échantillonnage généralisée (*cf.* section 2.1.1), à condition de choisir un bon ordre d'approximation L, autrement dit un degré d suffisamment élevé. En revanche, on l'a évoqué, l'approche de Horbelt *et al.* se limite au cas 2-D et à un mode de propagation parallèle. Or notre objectif est d'appliquer la projection de B-splines dans un cadre bien plus général, à savoir la 2-D comme la 3-D, ainsi qu'un mode de propagation aussi bien parallèle que conique des rayons X. Dans cette optique, nous nous plaçons dans le contexte d'une approche *basée empreinte*, telle que nous l'avons définie dans la section 2.2.2. La mise en œuvre de notre projecteur sera donc quelque peu différente, et nous allons à présent la détailler.

Nous nous concentrons sur la détermination de l'empreinte d'une B-spline n-dimensionnelle $\boldsymbol{\beta}^d$ de degré d, projetée suivant une orientation θ du détecteur. Nous nous focalisons sur une B-spline tridimensionnelle, pour travailler dans le cadre concret et standard de la tomographie. Notre B-spline de base $\boldsymbol{\beta}^d$, fonction atomique de la représentation de l'objet d'intérêt, est donc une B-spline 3-D, écrite dans le repère objet $\mathcal{R}_\mathcal{O}$. Elle est donc séparable en les variables x, y et z :

$$\boldsymbol{\beta}^d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta}^d(x,y,z) = \beta^d(x)\cdot\beta^d(y)\cdot\beta^d(z) \tag{2.77}$$

où β^d est une B-spline monodimensionnelle normalisée ($\Delta = 1$). L'équation 2.77 considère donc $\boldsymbol{\beta}^d$ comme une B-spline normalisée par le pas d'échantillonnage Δ de la grille des voxels, ce qui nous permettra d'écrire une empreinte générique $F_{\boldsymbol{\beta}}$ de $\boldsymbol{\beta}^d$, à l'instar du blob Kaiser-Bessel dans le projecteur de Ziegler *et al.* présenté dans la section 2.2.3 (*cf.* équation 2.68). Cette empreinte générique est définie comme la transformée aux rayons X de la fonction $\boldsymbol{\beta}^d$, pour une géométrie standard du système tomographique et un mode de propagation parallèle des rayons dans la direction d'un des axes du repère $\mathcal{R}_\mathcal{O}$, *e.g.* $\vec{w}_s = \vec{x}$. Dans cette configuration, les axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont respectivement colinéaires aux axes $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ($y = v$ et $z = u$). On peut donc écrire :

$$F_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) = F_{\boldsymbol{\beta}}(u,v) = \int_x \boldsymbol{\beta}^d(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x = \beta^d(u)\cdot\beta^d(v)\cdot\underbrace{\int\beta^d(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} = \beta^d(u)\cdot\beta^d(v) \tag{2.78}$$

L'empreinte $F_{\boldsymbol{\beta}}$ est donc une B-spline bidimensionnelle, de degré d, séparable suivant les axes du détecteur. Nous souhaiterions à présent bénéficier de la propriété d'isotropie propre aux blobs, et nous avons vu dans la section 2.1.3 que les B-splines tendaient vers la symétrie sphérique à mesure que leur degré d augmentait. Ce constat nous sert à émettre l'hypothèse de symétrie sphérique de notre fonction atomique, *i.e.* à en faire l'approximation. Il en découle que l'empreinte générique $F_{\boldsymbol{\beta}}$ va être indépendante de l'orientation θ du détecteur, tout en restant séparable suivant ses axes. Nous quantifierons dans la section suivante l'erreur d'approximation engendrée par cette première hypothèse, qui nous rend par là même tributaire d'un degré d suffisamment élevé pour limiter cette erreur[21]. En propagation parallèle, $F_{\boldsymbol{\beta}}$ est aussi stationnaire quelle que soit la position projetée $\boldsymbol{u_k}$ du voxel $\boldsymbol{k}$. On a ainsi :

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = F_{\boldsymbol{\beta}}\left(\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u_k}}{\Delta}\right) = \beta^d\left(\frac{u-u_{\boldsymbol{k}}}{\Delta}\right)\cdot\beta^d\left(\frac{v-v_{\boldsymbol{k}}}{\Delta}\right), \quad \forall\theta \quad \text{et} \quad \forall\boldsymbol{k} \tag{2.79}$$

On considère à présent un mode de propagation conique, avec une géométrie non standard mais dont on a respecté la convention de caractérisation établie dans la section 2.2.1 en fonction du mode de propagation. Dans ces conditions, il devient nécessaire d'effectuer une mise à l'échelle de l'empreinte. C'est la divergence des faisceaux X qui induit un grandissement, ainsi qu'une incidence d'impact sur le détecteur différente suivant la position du voxel $\boldsymbol{k}$ dans l'espace, engendrant une déformation de l'empreinte $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ sur le plan détecteur. On a déjà illustré ce phénomène précédemment, notamment dans la présentation des projecteurs de Long & Fessler et de Ziegler *et al.* (*cf.* section 2.2.3). On se réfère alors à l'équation 2.70, qui définissait la mise à l'echelle de l'empreinte du blob Kaiser-Bessel, pour obtenir l'expression suivante :

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = F_{\boldsymbol{\beta}}\left(\frac{u-u_{\boldsymbol{k}}}{\Delta\cdot\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}}, \frac{v-v_{\boldsymbol{k}}}{\Delta\cdot\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}}\right) \tag{2.80}$$

21. On va voir notamment que cette hypothèse d'isotropie est beaucoup trop grossière pour une B-spline de degré 0, *i.e.* l'indicatrice de voxels, ce qui se pressent d'ailleurs assez bien.

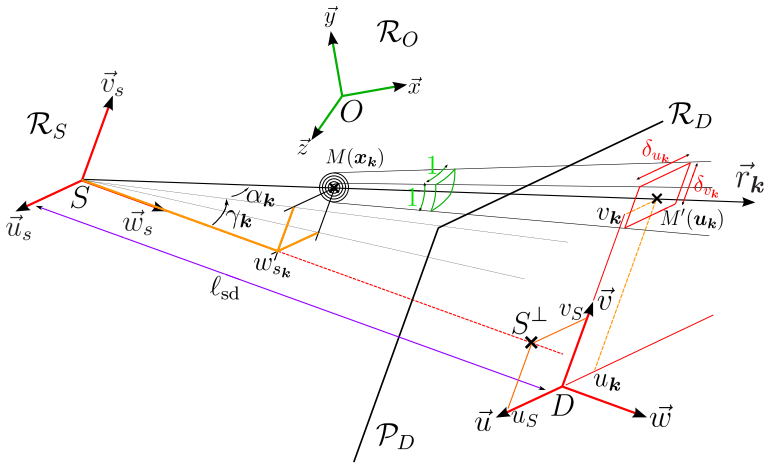


FIGURE 2.31: Paramètres de mise à l'échelle de l'empreinte dans le cas d'un détecteur plan, pour une géométrie non standard et sous la convention propre à un mode de propagation conique des rayons X (*cf.* section 2.2.1). $M'(u_{\boldsymbol{k}}, v_{\boldsymbol{k}})$ est le projeté du point $M(x_{\boldsymbol{k}}, y_{\boldsymbol{k}}, z_{\boldsymbol{k}})$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ dans la direction $\vec{r}_{\boldsymbol{k}}$ du faisceau X passant par M. $w_{s_{\boldsymbol{k}}}$ est la position projetée du point M sur l'axe $\{S, \vec{w}_s\}$ du repère source $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$. Le point $S^\perp$ est le projeté orthogonal de la source S, de coordonnées (u_S, v_S) dans le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. Les angles $\alpha_{\boldsymbol{k}}$ et $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ désignent la déviation du faisceau X passant par M, dans le système de coordonnées sphériques lié au repère $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ (*cf.* figure 2.21). ℓ_{sd} désigne la distance entre la source S et son projeté orthogonal sur le plan détecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$.

où $\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$ et $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$ sont deux facteurs de mise à l'échelle, respectivement suivant les directions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des axes détecteur. La figure 2.31 illustre la configuration géométrique de l'incidence du voxel $\boldsymbol{k}$ sur le détecteur en propagation conique, de laquelle on dégage les expressions de $\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$ et $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$:

$$\begin{cases} \delta_{u_{\boldsymbol{k}}} &= \dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}} \cdot \cos\alpha_{\boldsymbol{k}}} &= \dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{(u_{\boldsymbol{k}} - u_S)^2}{\ell_{\text{sd}}^2 + (v_{\boldsymbol{k}} - v_S)^2}} \\ \delta_{v_{\boldsymbol{k}}} &= \dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}} \cdot \cos\gamma_{\boldsymbol{k}}} &= \dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{(v_{\boldsymbol{k}} - v_S)^2}{\ell_{\text{sd}}^2}} \end{cases} \tag{2.81}$$

où le terme $\dfrac{\ell_{\text{sd}}}{w_{s_{\boldsymbol{k}}}}$ dans chacun des facteurs correspond au grandissement dû à la divergence, le terme suivant traduisant quant à lui la distorsion respective de l'empreinte suivant les axes $\vec{u}$ et $\vec{v}$. À l'instar de Ziegler *et al.*, nous faisons l'hypothèse que la divergence des faisceaux coniques à l'intérieur même de la B-spline $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}^d$ est négligeable. On peut ainsi établir que les facteurs de mise à l'échelle $\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$ et $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$ sont homogènes sur le support de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$, d'où l'estimation de ceux-ci à partir de la position $\boldsymbol{x_k}$ du centre de $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}^d$.

Pour un mode de propagation parallèle, dans une géométrie non standard, on a dit dans la section 2.2.1 qu'un basculement du détecteur était possible par rapport au plan orthogonal à la direction $\vec{w}_s$ de propagation des rayons X. Si tel est le cas, il y aura également une déformation de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^\theta$ en fonction de l'incidence d'impact, mais indépendante en revanche de la position du voxel $\boldsymbol{k}$, et sans terme de grandissement. Ainsi les angles d'incidence α et γ dépendent uniquement de la position sur le détecteur du point $S'(u'_S, v'_S)$, projection du point source S suivant la direction $\vec{w}_s$ des rayons, et la position du point $S^\perp(u_S, v_S)$, projection orthogonale du point source S sur le plan détecteur (*cf.* figure 2.32). On en déduit donc :

$$\begin{cases} \delta_u &= \dfrac{1}{\cos\alpha} &= \sqrt{1 + \dfrac{(u'_S - u_S)^2}{\ell_{\text{sd}}^2 + (v'_S - v_S)^2}} \\ \delta_v &= \dfrac{1}{\cos\gamma} &= \sqrt{1 + \dfrac{(v'_S - v_S)^2}{\ell_{\text{sd}}^2}} \end{cases} \tag{2.82}$$

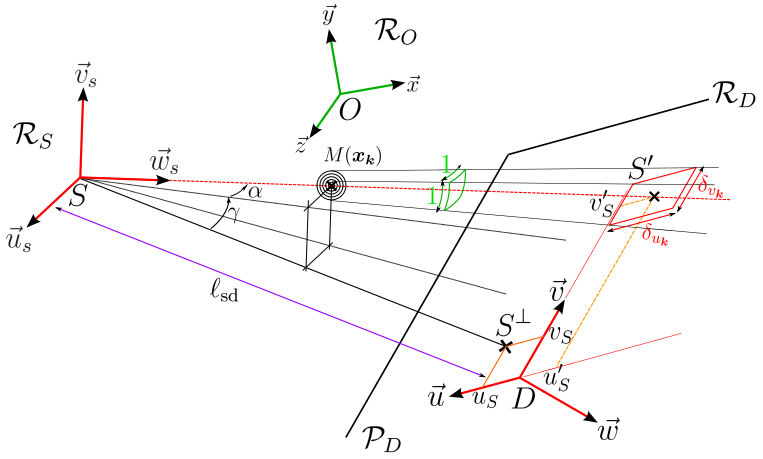


FIGURE 2.32: Paramètres de mise à l'échelle de l'empreinte dans le cas d'un détecteur plan, pour une géométrie non standard et sous la convention propre à un mode de propagation parallèle des rayons X (*cf.* section 2.2.1). Le point $S^\perp$ est le projeté orthogonal de la source S, de coordonnées (u_S, v_S) dans le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$. Le point S' est la projection de la source S, suivant la direction de propagation $\vec{w}_s$, de coordonnées (u'_S, v'_S) dans le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$. Les angles α et γ désignent la déviation des faisceaux X, dans le système de coordonnées sphériques lié au repère $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ (*cf.* figure 2.21). ℓ_{sd} désigne la distance entre la source S et son projeté orthogonal sur le plan détecteur $\mathcal{P}_\mathcal{D}$.

2.3.2 Étude des erreurs de modélisation

Nous venons d'établir l'expression $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$, séparable, de notre B-spline de base. Celle-ci n'est qu'une approximation de l'empreinte exacte de la B-spline $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$. Nous commettons donc une certaine erreur sur la modélisation des pseudo-données, à l'instar du projecteur *distance driven*, ainsi que de celui de Long & Fessler, que l'on a vus dans la section 2.2.3[22]. Nous proposons de quantifier ces erreurs d'approximation et de les comparer à l'état de l'art sus-mentionné.

Pour ce faire, nous calculons, pour une fonction de base donnée, *i.e.* une B-spline de degré d ou une indicatrice de voxels, son empreinte exacte et son empreinte approximée par l'un des 3 modèles de projection : *distance driven*, Long & Fessler et notre approximation par B-splines. Nous considérons donc un système tomographique avec une distance *source-isocentre* de 514mm, une distance focale de 949mm, et un détecteur plan dont les pixels ont une taille de $1 \times 1\text{mm}^2$. Il s'agit de la configuration du système définie dans l'article de Long & Fessler [Long et al., 2010] pour l'étude des erreurs d'approximation de leur modèle. Nous comparons nos résultats à ceux de leur méthode dans les mêmes conditions d'expérience. En fonction de la position du voxel et du mode de propagation des rayons, parallèle ou conique[23], nous déterminons le support d'impact de l'empreinte en projetant le support de la fonction de base. À l'intérieur de ce support d'impact, nous utilisons une méthode de Monte Carlo consistant à tirer aléatoirement un très grand nombre — 5×10^6 — de positions pour lesquelles nous déterminons la valeur des empreintes projetées. En d'autres termes, nous définissons des lignes de réponse aléatoires. Pour l'empreinte exacte, nous calculons analytiquement l'intégrale de ligne correspondante suivant la trajectoire du rayon arrivant en ce point. Pour les approximations, les expressions analytiques des empreintes respectives de chaque modèle nous donnent directement les valeurs en ces positions. Nous définissons alors une grille régulière très fine échantillonnant le support d'impact, typiquement sur 100×100. En chaque position de la grille, nous effectuons une somme des lignes de réponse aléatoires située à l'intérieur d'un sup-

22. Nous avons établi que les erreurs d'approximation du projecteur de blobs de Ziegler *et al.* étaient négligeables.

23. Nous allons étudier les erreurs dans ces 2 modes de propagation.

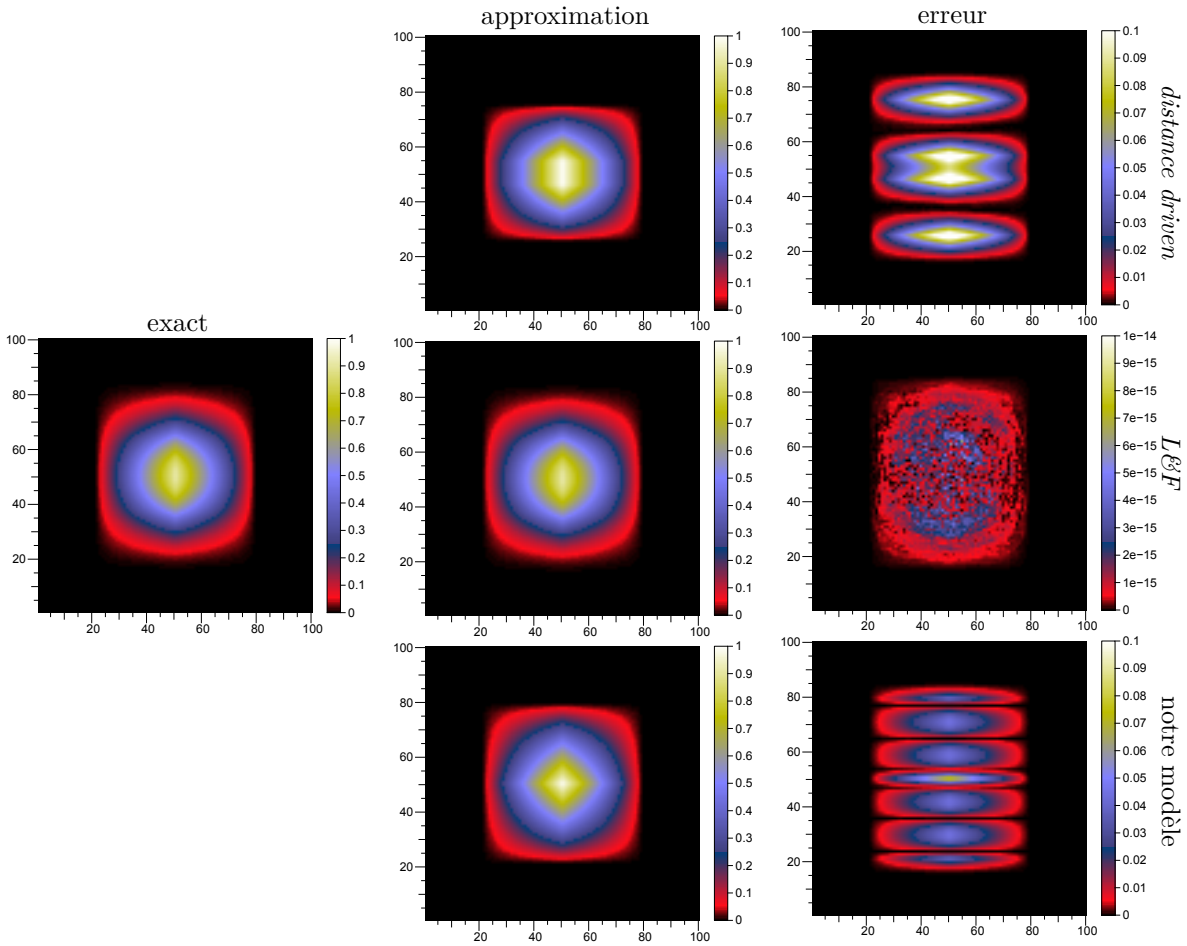


FIGURE 2.33: Comparaison des empreintes d'une indicatrice de voxel (B-spline de degré 0) en propagation parallèle après convolution par le pixel du détecteur, incliné à 45° par rapport au plan horizontal. À gauche : l'empreinte exacte ; au centre : empreintes approximées ; à droite : la différence en valeur absolue entre les empreintes exacte et approchées. En haut : résultats pour l'approximation *distance driven*, EMAX ≈ 12,3% (erreur maximale) et EQM ≈ 2,4% (erreur quadratique moyenne) ; au milieu : résulats pour le modèle *Long & Fessler* [Long et al., 2010], EMAX ≈ 0% et EQM ≈ 0% ;*en bas :* résultats pour notre approximation, EMAX ≈ 7% et EQM ≈ 1,3%.

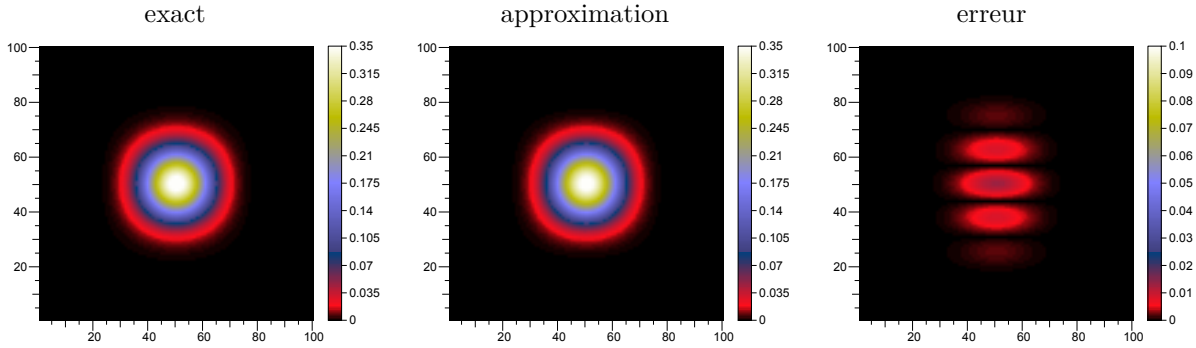


FIGURE 2.34: Comparaison des empreintes d'une B-spline cubique (degré 3) en propagation parallèle convoluées par le pixel du détecteur, incliné à 45° par rapport au plan horizontal. À gauche : l'empreinte exacte ; au centre : l'empreinte approximée par notre modèle ; à droite : la différence en valeur absolue entre les empreintes exacte et approchée. Les erreurs valent : EMAX ≈ 1,3% et EQM ≈ 0,2%.

port centré en cette position, et dont la taille est celle d'un pixel détecteur. Cette somme est pondérée par le pas d'échantillonnage moyen des lignes de réponses aléatoires, *i.e.* la surface du support d'impact divisée par le nombre de lignes de réponse, afin de rester dans le même ordre de magnitude que les dimensions métriques du système. Nous obtenons ainsi une mesure précise de la convolution des empreintes par la réponse des pixels détecteur, en chacune des positions de la grille fine, nous donnant une représentativité indépendante de l'agencement des pixels détecteur par rapport à la grille de voxels. Nous pouvons alors déterminer les cartes d'erreurs d'approximations et calculer les erreurs maximale EMAX et quadratique moyenne EQM, pour chacun des modèles, associés à leur fonction de base respective, pour diverses positions des voxels et différentes orientations du détecteur.

La figure 2.33 quantifie les erreurs d'approximation en propagation parallèle d'une indicatrice de voxel, pour les modèles *distance driven* et de Long & Fessler, noté *L&F*, ainsi que pour notre approximation. On considère le cas le plus défavorable, *i.e.* le voxel est centré dans le champ de vue et le détecteur est incliné à 45° par rapport au plan horizontal. Nous visualisons l'erreur relative, *i.e.* la différence en valeur absolue entre l'empreinte exacte et son approximation, divisée par la valeur maximale de l'empreinte exacte dans une direction privilégiée, *i.e.* le détecteur incliné à 0° par rapport au plan horizontal. Dans cette configuration, l'erreur maximale vaut EMAX ≈ 12,3% pour *distance driven* contre EMAX ≈ 0% pour le modèle *L&F* et EMAX ≈ 6,4% pour notre modèle, et l'erreur quadratique moyenne vaut EQM ≈ 2,4% pour *distance driven* contre EQM ≈ 0% pour *L&F* et EQM ≈ 1,2% pour notre projecteur. Notre approximation est donc environ 2 fois plus précise que *distance driven*, même pour une modélisation de l'objet d'intérêt aussi anisotrope que des indicatrices de voxels. Le projecteur *L&F* est quant à lui exact dans cette configuration.

Toujours en propagation parallèle, et pour la même position du voxel et la même orientation du détecteur, la qualité de notre approximation s'améliore encore si l'on choisit pour voxel une B-spline séparable cubique (*cf.* Fig. 2.34). Dans ce cas, l'erreur de notre modèle est pratiquement réduite d'un ordre de grandeur (EMAX ≈ 1,3% et EQM ≈ 0,2%).

La figure 2.35 montre l'évolution de l'erreur maximale (*cf.* Fig. 2.35(a)) et de l'erreur quadratique moyenne (*cf.* Fig. 2.35(b)) en fonction du degré de B-spline utilisé pour notre modèle, comparé à celles du modèle *distance driven*. On vérifie que notre approximation d'isotropie — sphéricité de la fonction de base — est de plus en plus fine, comme nous l'avions prévu, à mesure que le degré augmente. Les deux graphes Fig. 2.35(a) et Fig. 2.35(b) illustrent le cas le plus défavorable — détecteur à 45°, mais qu'en est-il de l'évolution de l'erreur en fonction

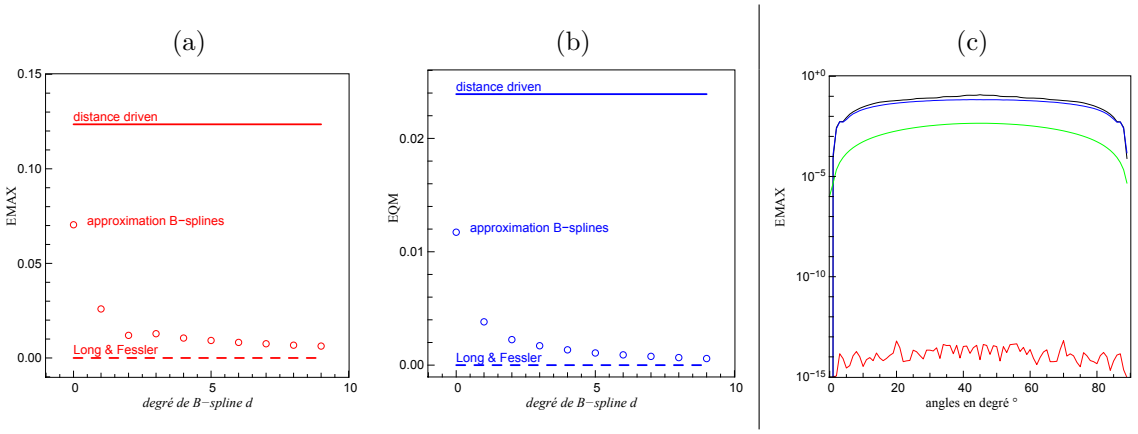


FIGURE 2.35: Évolution de l'erreur maximale EMAX (a) et de l'erreur quadratique moyenne EQM (b) en fonction du degré d de B-spline utilisé pour notre modèle, comparé à celles des modèles *distance driven* (en trait plein sur chaque graphe) et *L&F* (en trait pointillé sur chaque graphe). La projection est réalisée pour un détecteur incliné à 45° par rapport au plan horizontal. En (c) : erreur d'approximation maximale, en propagation parallèle, en fonction de l'inclinaison du détecteur, allant de 0° à 90°, pour le modèle *distance driven* (noir), le modèle *L&F* (rouge), notre modèle avec indicatrice de voxel (bleu) et avec B-spline cubique (vert).

de l'orientation du détecteur ? C'est ce que montre le graphe Fig. 2.35(c) pour chacun des modèles avec indicatrice de voxel : *distance driven* en noir, *L&F* en rouge et notre modèle en bleu. La courbe verte correspond toujours à notre modèle, mais avec une B-spline cubique. On voit que pour tous les modèles, l'erreur est bien maximale à 45°. En utilisant des B-splines cubiques, notre projecteur engendre une erreur d'approximation 10 fois moins importante que les modèles avec indicatrices de voxel, exception faite du modèle *L&F* qui est exact dans cette configuration.

En projection conique, nous avons comparé les modèles *distance driven* et *L&F* avec notre projecteur utilisant des B-splines de degré 0 puis des B-splines cubiques. La figure 2.36 montre les résultats obtenus pour un cas de figure très défavorable pour les modèles : le voxel est positionné aux coordonnées $(100, -150, 100)$mm, *i.e.* très éloigné du centre du champ de vue et le détecteur est incliné à 0° par rapport au plan horizontal. Dans cette configuration, les approximations sur la distorsion de l'empreinte vont être plus grossières puisque tous les modèles supposent des déformations séparables et colinéaires aux axes du détecteur, alors qu'en réalité il n'en est rien. Dans notre approximation, ce sont ces erreurs qui vont dominer par rapport aux incertitudes sur l'isotropie de la B-spline, que nous avons quantifiées en propagation parallèle (*cf.* Fig. 2.33, Fig. 2.34 et Fig. 2.35). Nous l'observons d'ailleurs sur la forme des empreintes exactes. Les erreurs d'approximation valent alors respectivement EMAX $\approx 14{,}5\%$ et EQM $\approx 2{,}7\%$ pour *distance driven*, et EMAX $\approx 3{,}5\%$ et EQM $\approx 1{,}1\%$ pour *L&F*, contre EMAX $\approx 13{,}5\%$ et EQM $\approx 2{,}7\%$ pour notre projecteur. Cela montre que nos approximations, en propagation conique, ne sont pas du tout adaptées à l'indicatrice de voxel, du fait de sa trop forte anisotropie engendrant des erreurs d'approximation aussi grandes que le modèle *distance driven*. Encore une fois le projecteur *L&F* montre une grande précision au niveau de ces approximations. Pour notre projecteur avec les B-splines cubiques, les erreurs d'approximation valent EMAX $\approx 2{,}8\%$ et EQM $\approx 0{,}6\%$, qui sont alors inférieures aux erreurs des 2 autres modèles.

Dans l'article de Long & Fessler [Long et al., 2010], des courbes d'évolution des erreurs d'approximation maximales en fonction de l'angle du détecteur, en géométrie conique, sont données. Ils ont ainsi comparé le modèle *distance driven* à leur modèle, pour un voxel positionné au centre du champ de vue et des inclinaisons du détecteur allant de 0° à 90°, et un voxel

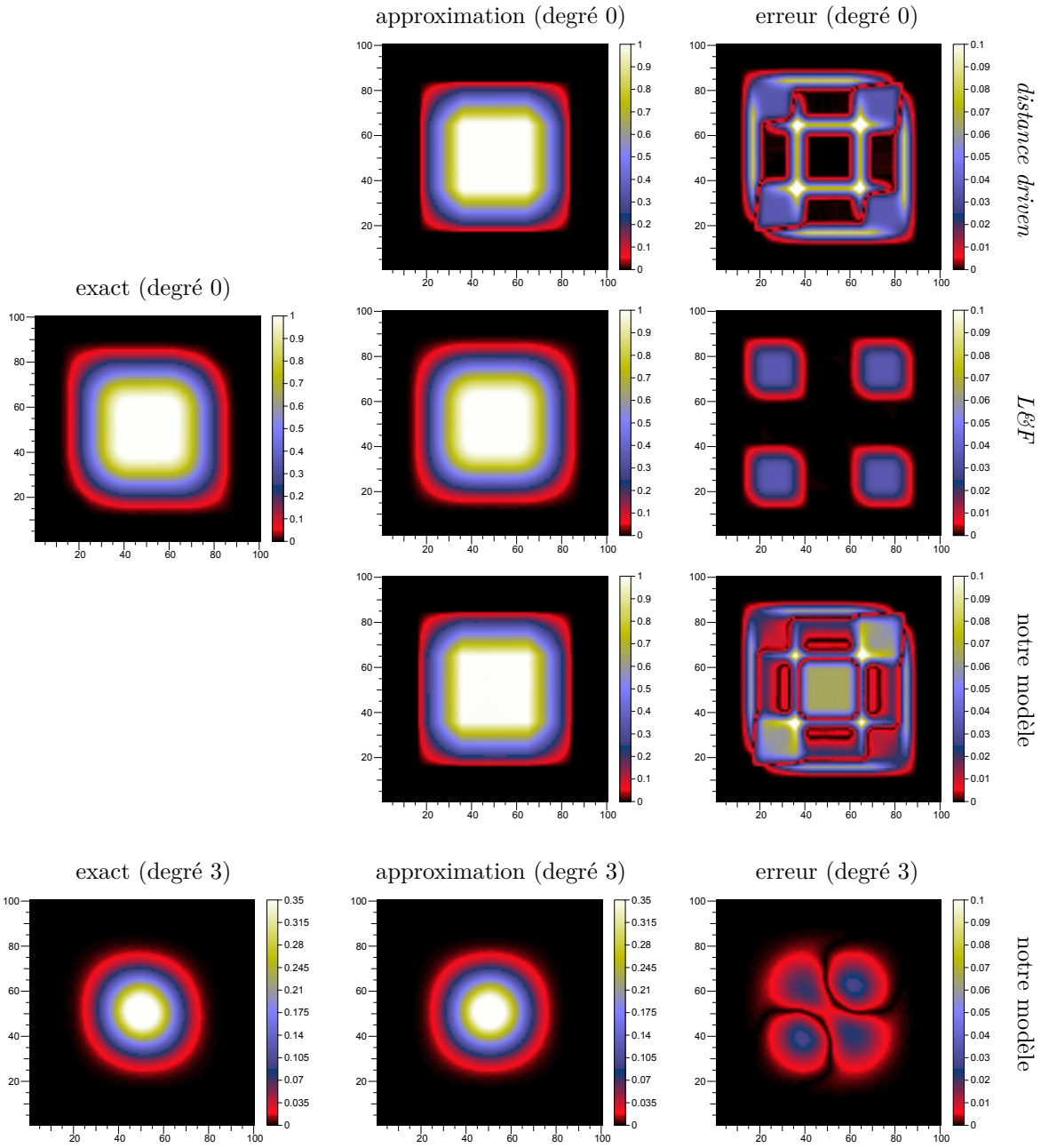
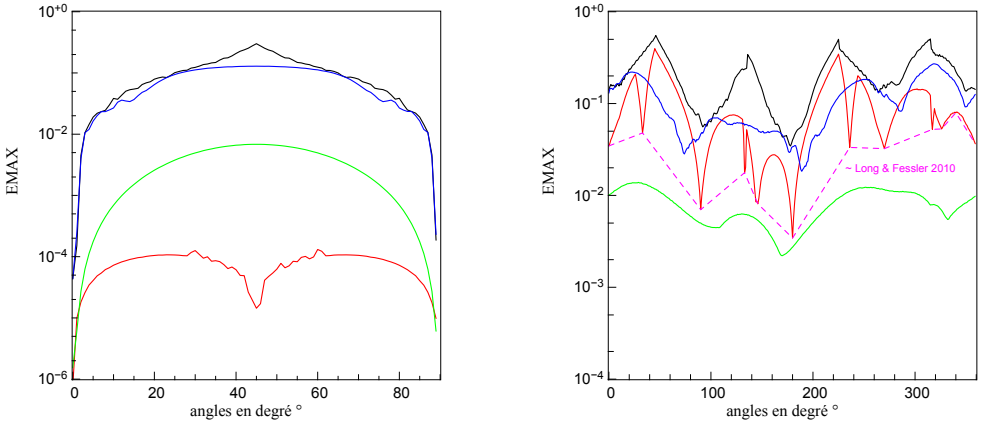


FIGURE 2.36: Comparaison des empreintes d'un voxel positionné aux coordonnées $(100, -150, 100)$mm, *i.e.* très éloigné du centre du champ de vue, en projection conique (*fan beam*), et convoluées par le pixel du détecteur, incliné à 0°. Les erreurs d'approximation sont, respectivement pour les modèles *distance driven* (1ère ligne), *L&F* (2nde ligne) et pour notre modèle à base de B-splines de degré 0 (3ème ligne) : EMAX ≈ 14,5%, EMAX ≈ 3,5% et EMAX ≈ 13,5% (erreur max.) et EQM ≈ 2,7%, EQM ≈ 1,1% et EQM ≈ 2,7% (erreur quadratique moyenne). Pour notre modèle utilisant des B-splines cubiques (4ème ligne), les erreurs sont EMAX ≈ 2,8% et EQM ≈ 0,6%.



a. voxel centré $(0, 0, 0)$mm

b. voxel excentré $(100, -150, 100)$mm

FIGURE 2.37: Erreurs d'approximation maximales, en propagation conique, pour un voxel centré (a) et un voxel excentré (b) — positions indiquées sous les graphes, en fonction de l'inclinaison du détecteur — de 0° à 90° pour (a) et de 0° à 360° pour ((b). Chaque courbe de couleur correspond à un modèle de projection : *distance driven* en noir ; *L&F* en rouge ; notre modèle avec indicatrice de voxel en bleu ; notre modèle avec B-spline cubique en vert. Ces courbes d'erreurs sont à comparer avec celles de l'article de Long & Fessler [Long et al., 2010], où sont comparés les modèles *distance driven* et *L&F*. La courbe en trait pointillé magenta correspond à l'allure de la courbe d'erreur originale trouvée par les auteurs de l'article.

excentré positionné aux coordonnées $(100, -150, 100)$mm et des inclinaisons du détecteur allant de 0° à 360°. Nous nous sommes efforcés de retracer ces courbes dans les mêmes conditions d'expérience, en y ajoutant les erreurs de notre modèle avec indicatrice de voxel et B-spline cubique. La figure 2.37 illustre ces courbes. Le graphe 2.37(a) montre les erreurs pour le voxel centré, où nous retrouvons les mêmes résultats que dans [Long et al., 2010]. Pour cette position du voxel, les erreurs d'approximation du projecteur *L&F* sont inférieures à celles des autres modèles, y compris notre modèle avec B-spline cubique présentant toutefois des erreurs plus de dix fois inférieures à celles du modèle *distance driven*. Le graphe 2.37(b) met en évidence les erreurs pour le voxel excentré, où rappelons-le les erreurs de distorsion dominent. Cette fois-ci c'est notre modèle qui est le plus précis, le modèle *L&F* montrant cette fois des erreurs supérieures. En revanche, pour ce modèle, nous ne retrouvons pas tout à fait la même courbe d'erreur que dans [Long et al., 2010]. Les résultats que nous trouvons sont plus défavorables pour le modèle *L&F* que dans leur article (il ne faut pas exclure des erreurs numériques dans l'implantation de nos simulations). Cependant, après confrontation des deux résultats, nous avons constaté que la courbe tracée dans [Long et al., 2010] passait par les minimums locaux de notre propre courbe. Nous avons relié ces minimums sur notre graphe, ce qui nous donne en trait pointillé magenta une allure assez fidèle de la courbe originale des auteurs. La courbe d'erreur de notre modèle avec B-spline cubique (verte) reste néanmoins sous cette approximation de la courbe d'erreur de l'article de Long & Fessler. Notre projecteur est donc bien le plus précis dans ce cas-là.

En conclusion, le modèle *L&F* peut s'avérer dans certains cas plus précis que notre projecteur, en termes d'erreurs d'approximation. Cependant, en propagation conique, nous avons pu montrer que nos approximations étaient globalement les plus robustes aux erreurs, particulièrement dans les cas les plus défavorables, *e.g.* pour les voxels excentrés subissant une forte distorsion. De plus, rappelons que cette étude ne tient pas compte des erreurs de modélisation intrinsèques à la base de fonction utilisée. Dans ce cadre-ci, la section 2.1.3 a montré que les B-splines de degré supérieur à 0 étaient bien plus adaptées, d'une part par la meilleure préci-

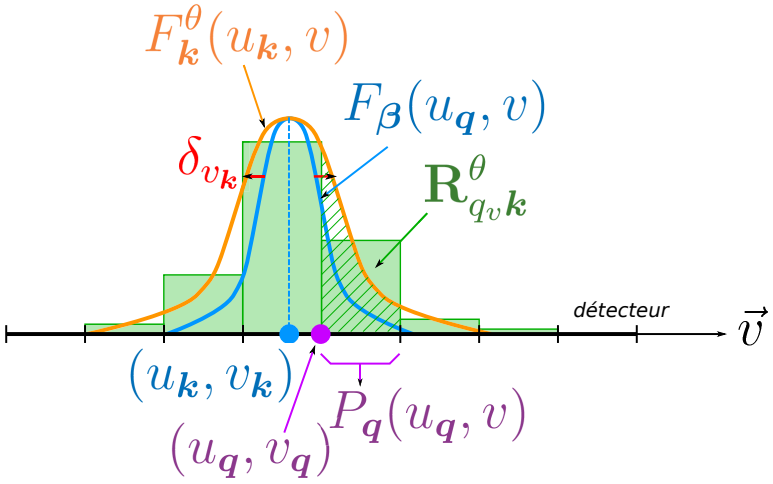


FIGURE 2.38: Intégration de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ du voxel $\boldsymbol{k}$ sur les pixels détecteur $\boldsymbol{q}$ impactés. $F_{\boldsymbol{\beta}}$ est l'empreinte générique centrée sur la position $\boldsymbol{u_k}$ projetée du centre $\boldsymbol{x_k}$ de la fonction voxel $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}^{d}$, mise ensuite à l'échelle par le paramètre $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$ pour obtenir $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$. L'empreinte étant séparable, on illustre l'intégration suivant une seule dimension (ici suivant l'axe $\vec{v}$ du détecteur), sachant que la même opération est effectuée indépendamment pour l'autre dimension, et que pour chacune, seules comptent les coordonnées (empreinte et pixels détecteur) suivant l'axe concerné (principe de la séparabilité). La contribution finale $\mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta}$ sur le plan 2-D du détecteur est alors le produit séparable des deux composantes monodimensionnelles respectives $\mathbf{R}_{q_u \boldsymbol{k}}^{\theta}$ et $\mathbf{R}_{q_v \boldsymbol{k}}^{\theta}$. Pour un pixel détecteur $\boldsymbol{q}$ donné, l'accumulation des $\mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta}$ de chaque voxel $\boldsymbol{k}$ impactant $\boldsymbol{q}$, pondérés par leur coefficient $c_{\boldsymbol{k}}$ respectif, donne la valeur $\tilde{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ dans le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}^{\theta}$ des pseudo-données.

sion de modélisation qu'elles apportent (*cf.* Fig. 2.4 et 2.5, section 2.1.1), et d'autre part par leur caractère quasi-isotrope. Les erreurs d'approximation de la projection venant se cumuler à ces erreurs de modélisation, même une projection très fine des indicatrices de voxels ne sera pas suffisante pour garantir la bonne qualité de la projection. Le meilleur compromis est donc sans conteste celui que nous proposons.

2.3.3 Mise en œuvre pratique

Dans la section 2.3.1, nous avons déterminé une expression analytique de l'empreinte approximée $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$, séparable, de notre B-spline de base $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}^{d}$. Cette empreinte est centrée à la position $\boldsymbol{u_k}$ projetée sur le plan détecteur du centre $\boldsymbol{x_k}$ de $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}^{d}$ (*cf.* équation 2.80).

Notre implantation du projecteur de B-splines est basée sur une approche orientée voxels (type *voxel driven*). On parcourt donc la grille des positions voxels, et effectuons pour chacun d'eux les étapes suivantes :

- pour une orientation θ et un voxel $\boldsymbol{k}$ donnés, on calcule la position $\boldsymbol{u_k}$ projetée du centre $\boldsymbol{x_k}$ de $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}^{d}$, par la méthode présentée dans la section 2.2.1. L'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ est virtuellement positionnée sur le détecteur ;
- connaissant le support d'impact de l'empreinte après sa mise à l'échelle par les paramètres $\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$ et $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$ (*cf.* équations 2.81 et 2.82), on détermine les pixels détecteur $\boldsymbol{q}$ impactés ;
- on applique alors la méthode d'intégration *basée empreinte* que nous avons définie dans la section 2.2.2. Pour chaque pixel détecteur $\boldsymbol{q}$, le cumul de l'intégration des empreintes $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ ayant une intersection avec le support de ce pixel, pondérée par son coefficient $c_{\boldsymbol{k}}$ respectif, nous donne les valeurs $\tilde{y}_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ du vecteur des pseudo-données $\tilde{\mathbf{y}}^{\theta}$ à l'orientation θ, d'après l'équation 2.57. Pour chaque voxel $\boldsymbol{k}$, l'intégration de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ correspond au calcul du coefficient $\mathbf{R}_{\boldsymbol{qk}}^{\theta}$ du projecteur $\mathbf{R}^{\theta}$. Tout comme le projecteur de Long & Fessler, la séparabilité de $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$ permet d'intégrer ses composantes monodimensionnelles séparément, suivant

les axes concernés ($\vec{u}$ et $\vec{v}$). Une "passe" d'intégration 1-D, pour un voxel $\boldsymbol{k}$, est illustrée sur la figure 2.38. La valeur $\mathbf{R}^{\theta}_{\boldsymbol{qk}}$ globale est ensuite obtenue par le produit séparable des intégrations monodimensionnelles sur le pixel $\boldsymbol{q}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\theta}_{\boldsymbol{qk}} &= \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(u)\, F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \\ &= \left[\int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} \beta^d\left(\frac{u-u_{\boldsymbol{k}}}{\Delta\cdot\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}}\right)\mathrm{d}u\right]\cdot\left[\int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} \beta^d\left(\frac{v-v_{\boldsymbol{k}}}{\Delta\cdot\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}}\right)\mathrm{d}v\right] \end{aligned} \tag{2.83}$$

Nous venons donc d'établir l'algorithme de calcul de notre projecteur de B-splines. En référence aux modèles existants de l'état de l'art, nous le nommerons *spline driven*, afin d'y faire aisément référence dans la suite du manuscrit.

Bien que la séparabilité ne dispense pas d'une étape de calcul bidimensionnel de l'intégration de l'empreinte, celui-ci se résume à une simple multiplication de deux scalaires au lieu d'une intégrale 2-D. Le gain dû à la séparabilité vient alors du fait que le calcul d'une intégration monodimensionnelle, suivant $\vec{u}$ (respectivement $\vec{v}$) de l'empreinte $F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}$, est valable pour toute la colonne (respectivement la ligne) de la "matrice" de pixels détecteur $\boldsymbol{q}$ impactés, dont la coordonnée suivant l'axe $\vec{u}$ (respectivement $\vec{v}$) est $u_{\boldsymbol{q}}$ (respectivement $v_{\boldsymbol{q}}$). Ainsi, pour une empreinte $F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ impactant N pixels détecteur dans chaque direction, le calcul de $\mathbf{R}^{\theta}_{\boldsymbol{qk}}$ ne nécessite que $2N$ intégrations monodimensionnelles séparables, plus N^2 multiplications, au lieu de N^2 intégrations bidimensionnelles dans le cas non séparable. Le coût calculatoire d'une intégration, 1-D ou 2-D, dépend d'abord de l'expression analytique de l'empreinte $F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}$. Puisque nous manipulons des B-splines, donc des polynômes par morceaux, ce calcul d'intégrale se résume à une série de multiplications et d'additions simples, dont le nombre va dépendre du degré d de la B-spline considérée. Si l'on prend une B-spline cubique (de degré 3), ce nombre d'opérations, multiplications et additions confondues, est de l'ordre de la dizaine. Dans les cas des projecteurs à base d'indicatrices de voxels (*distance driven*, *L&F*, donc toujours des approches séparables et utilisant des fonctions polynomiales (B-spline de degré 0), ce nombre est moindre compte tenu du support d'impact de l'empreinte qui se trouve diminué : on peut penser intuitivement qu'il devrait être diminué d'un facteur 2 à 4 par rapport à l'utilisation de B-splines cubiques. Le nombre d'opérations mises en œuvre dans l'intégration d'une empreinte de blob, selon l'approche de Ziegler *et al.*, est beaucoup plus important, du fait premièrement de sa non-séparabilité, et deuxièmement car ce calcul met en jeu des opérations plus lourdes (fonctions de Bessel) et plus complexes (racines carrées, *cf.* équation 2.68), ce qui explique d'ailleurs que Ziegler *et al.* préfèrent pré-calculer et stocker l'empreinte générique 2-D (*cf.* section 2.2.3), de sorte que l'intégration se résume à un accès mémoire à cette "matrice", plus rapide que le calcul "à la volée". Cette solution est tout aussi envisageable dans le cas de notre projecteur *spline driven*, la séparabilité nous permettant de surcroît de ne stocker qu'une empreinte générique 1-D. On continue ainsi à gagner par rapport à l'approche par blobs, puisqu'on a besoin de seulement $2N$ accès 1-D au lieu de N^2 accès 2-D. Dans ce raisonnement, nous n'avons pas considéré les opérations mises en œuvre dans la projection des positions sur le plan détecteur, ni dans le calcul des facteurs de mise à l'échelle $\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}$ et $\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}$, puisqu'ils sont globalement identiques quelles que soient les approches. Ces derniers sont de l'ordre de quelques dizaines d'opérations élémentaires par voxel. La différence se trouve réellement dans le calcul de l'intégration de l'empreinte.

Les commentaires précédents nous permettent donc d'envisager deux implantations différentes, tout aussi simples et réalisables, pouvant s'adapter aux contraintes spécifiques :

(a) la première se base sur un calcul totalement analytique de l'intégration de l'empreinte $F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}$, puiqu'on connait aisément les positions des bords des pixels détecteur impactés, et donc les bornes d'intégration. En plus de permettre un calcul exact de l'intégration, extrêmement simple à obtenir (simple intégration d'un polynôme), de sorte qu'aucune erreur numérique supplémentaire n'est générée, elle est exempte de toute nécessité de stockage, l'ensemble du calcul pouvant alors être réalisé "à la volée" ;

(b) la seconde implantation possible utilise un pré-stockage de l'empreinte générique F_{β} monodimensionnelle, servant à toutes les directions (séparabilité). Plus exactement, on stocke l'intégrale cumulée de F_{β}. Celle-ci, pour les mêmes raisons que la version analytique, peut être calculée de manière exacte et très facilement. Cette méthode implique bien sûr de choisir un nombre de points adapté pour l'empreinte stockée de manière à avoir une représentation assez fine — typiquement l'empreinte doit être largement sur-échantillonnée par rapport à l'échantillonnage des pixels détecteur. Il suffit alors, pour chaque pixel détecteur impacté, et chaque direction, d'accéder, dans un tableau, la valeur correspondant aux deux bornes d'intégration, et d'en faire la soustraction (en valeur absolue). En fonction de la finesse d'échantillonnage de l'empreinte, la récupération des valeurs peut se faire par simple extraction du plus proche voisin, ou bien par interpolation, en ayant soin de ne pas ajouter aux erreurs d'approximation des erreurs numériques d'interpolation inutiles.

Nous avons effectué des simulations pour évaluer le temps de calcul de notre projecteur, en fonction de l'implantation et du degré des B-splines choisi — de 0 à 9, pour différentes tailles de l'objet à projeter — de 128 à 1024 dans chaque direction. L'échantillonnage Δ des voxels et Δ_d des pixels détecteur a été choisi identique et égal à 1mm. Pour chaque taille de l'objet, la taille du détecteur a été choisie de manière à ce que la projection ne soit pas tronquée — typiquement deux fois la taille de l'objet dans chaque direction. Pour mesurer les temps de calcul, nous avons appliqué, pour chaque configuration, une centaine de fois le projecteur en 2-D, une dizaine seulement en 3-D (à cause du temps de calcul décuplé), et nous avons pris le temps de calcul moyen. L'implantation de *spline driven* utilisée dans ces simulations est celle basée sur l'approche avec pré-stockage de la somme cumulée de l'empreinte générique monodimensionnelle F_{β} (*cf.* version (b) ci-dessus).

Chaque projection a été calculée sur l'unique cœur d'un processeur Quad-Core AMD Opteron$^{\text{TM}}$ 8380, cadencé à 2,5GHz, présent sur les machines de calcul du projet Horizon[24]. Il s'agit d'une plateforme multi-processeurs dédiée au calcul massivement parallèle et distribué, principalement appliqué aux simulations numériques cosmologiques et de formation des galaxies. Nous verrons que nombre des simulations réalisées dans ce travail de thèse ont été lancées sur cette plateforme, dont l'accès nous a été aimablement fourni par Christophe Pichon, collaborateur du projet MiTiV.

Les graphes Fig. 2.39(a) et Fig. 2.39(b) donnent les temps de calcul en 2-D Fig. 2.39(a) et 3-D Fig. 2.39(b). La couleur de chaque courbe en trait plein indique le degré de B-splines associé — du jaune au rouge pour un degré respectivement de 1 à 9. Les courbes bleues indiquent le calcul pour une B-spline de degré 0, *i.e.* l'indicatrice de voxel, et servent de temps de référence à peu près équivalent aux approches à base d'indicatrices, telles *distance driven* ou le projecteur de *L&F* (au maximum plus rapides d'un facteur 2 par rapport à la courbe bleue). Les graphes Fig. 2.39(c) et Fig. 2.39(d) indiquent le facteur multiplicatif du temps de calcul du projecteur pour des degrés de B-splines de 1 à 9, par rapport au projecteur avec indicatrice de voxel, en 2-D Fig. 2.39(c) et 3-D Fig. 2.39(d). On voit par exemple que quelle que soit la dimensionalité du système, l'utilisation de B-splines de degré 3 n'engendre qu'un doublement approximatif du temps de calcul supplémentaire par rapport à l'utilisation des indicatrices de

24. http://www.projet-horizon.fr/rubrique3.html

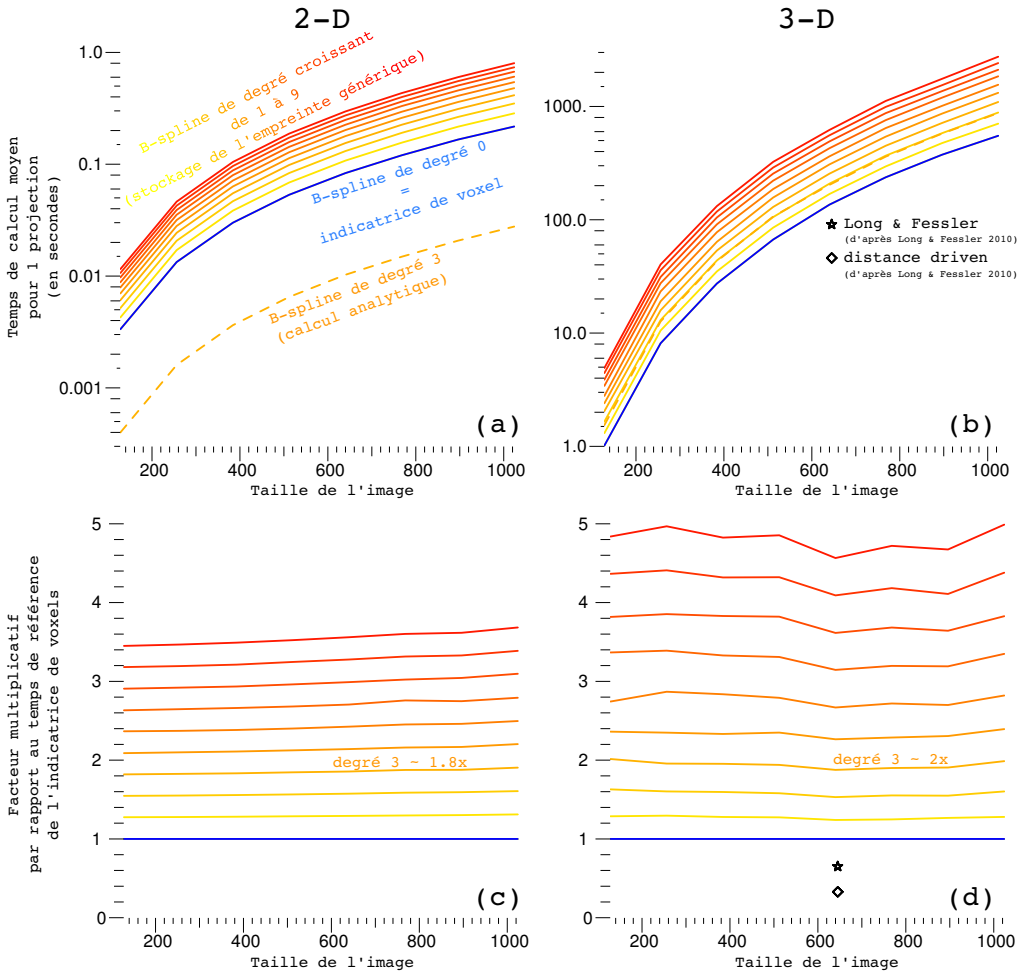


FIGURE 2.39: Temps de calcul du projecteur *spline driven*, pour différents degrés d — de 0 à 9 — et différentes tailles de l'image — de 128 à 1024 dans chaque direction. L'échantillonnage Δ des voxels et Δ_d des pixels détecteur est de 1mm. (a) et (b) : temps de calcul moyens sur 100 projections en 2-D (a) (10 en 3-D (b)). Chaque courbe en trait plein correspond à un degré de B-splines — du jaune au rouge pour un degré respectivement de 1 à 9. Les courbes bleues indiquent le calcul pour une B-spline de degré 0, et servent de temps de référence. (b) et (c) : facteur multiplicatif du temps de calcul de notre projecteur pour des degrés de 1 à 9, par rapport au temps de référence, en 2-D (b) et 3-D (c). On indique sur les graphes (b) et (d), les temps de calcul des projecteurs *L&F* (symbole $\star$) et *distance driven* (symbole $\diamond$), établis dans l'article de Long & Fessler [Long et al., 2010].

voxels. Ceci est possible grâce à la propriété de séparabilité du projecteur, ayant pour effet de rendre ce facteur multiplicatif indépendant de la dimension du système.

Les courbes en trait tireté orange des graphes Fig. 2.39(a) et Fig. 2.39(b), représentant le temps de calcul de *spline driven* avec un degré 3 des polynômes, mesuré dans les mêmes conditions, lorsqu'on utilise l'implantation purement analytique du calcul de l'intégration de l'empreinte (*cf.* version (a) ci-dessus). On voit qu'en 2-D, l'implantation analytique est beaucoup plus rapide, d'un facteur 15, tandis qu'en 3-D la différence est relativement négligeable en n'étant plus rapide que d'un facteur 1,25. Ainsi si l'on souhaite, en 3-D, éviter tout stockage mémoire, on ne perdra pas en temps de calcul.

Afin de mettre en regard les temps de calcul mesurés avec l'état de l'art, nous donnons sur les graphes Fig. 2.39(b) et Fig. 2.39(d), les temps de calcul des projecteurs de *L&F* et *distance driven*, en 3-D, d'après les résultats présentés dans l'article de Long & Fessler [Long et al., 2010]. Ces temps ont été obtenus sur un serveur Sun Fire X2270 à 8 cœurs composé de processeurs Xeon X5500 cadencés à 2,66GHz, en appliquant 5 fois chaque projecteur et en prenant le temps moyen. La taille de l'objet utilisée dans l'article est de $512 \times 512 \times 128$ avec un échantillonnage $\Delta = 0{,}5$mm. Celui-ci est projeté sur un détecteur 512×512 avec un échantillonnage $\Delta_d = 1$mm. D'après la lecture que nous avons fait de l'article, notamment au niveau de l'implantation, nous pouvons dire que la taille de l'objet revient dans notre étude à une taille d'environ 645^3, ce qui positionne l'abscisse des symboles sur nos graphes. Bien sûr nous ne présentons ces résultats qu'à titre indicatif, puisque le mode opératoire et les conditions d'expérience (notamment les machines de calcul utilisées) sont différentes, mais suffisamment similaires pour donner un bon ordre d'idée. On peut donc en conclure que la charge calculatoire de notre projecteur, bien que supérieure, reste tout à fait compétitive par rapport à ces projecteurs, et ce même si l'on utilise un degré de B-spline suffisamment élevé (typiquement 3) pour obtenir un bonne précision de modélisation.

2.4 Mise en application en reconstruction 2-D statique à faible nombre de projections

Fantôme de tête *FORBILD* 2-D

Nous évaluons notre projecteur sur des reconstructions 2-D statiques à partir d'un jeu de données simulées du fantôme de tête *FORBILD*, développé en 1999 par des chercheurs du *Institute of Medical Physics (Erlangen, Allemagne)*, en collaboration avec des scientifiques de *Siemens Healthcare*. Récemment, un code Matlab® a été développé et offert à la communauté scientifique par Yu & Noo [Yu et al., 2012] pour la simulation des projections analytiques Υ de ce fantôme 2-D. C'est ce code que nous allons utiliser pour générer les données et les images de référence de ce fantôme.

Celui-ci a une taille virtuelle de $30 \times 30\text{cm}^2$. Nous considérons un système de tomographie 2-D, acquérant en propagation *fan beam*. Il met en œuvre un détecteur linéaire, composé de 2000 pixels détecteur échantillonnés avec un pas de 0,03cm. La réponse de chacun des pixels détecteur est une porte de même taille que le pas d'échantillonnage, ceux-ci sont donc en contact les uns avec les autres, sans espace intermédiaire. La distance focale ℓ_{sd} est prise égale à 153,6cm, la distance *source-isocentre* quant à elle est prise égale à 100cm[25]. Nous calculons 1200 projections sur 360°, régulièrement espacées en angle. Nous créons également le fantôme

25. Ces dimensions ne sont pas prises au hasard. Elles correspondent aux dimensions de la modalité d'acquisition type que nous considèrerons en tomographie dynamique dans le chapitre 3. Il s'agit d'un *scanner Synergy Cone-Beam CT*.

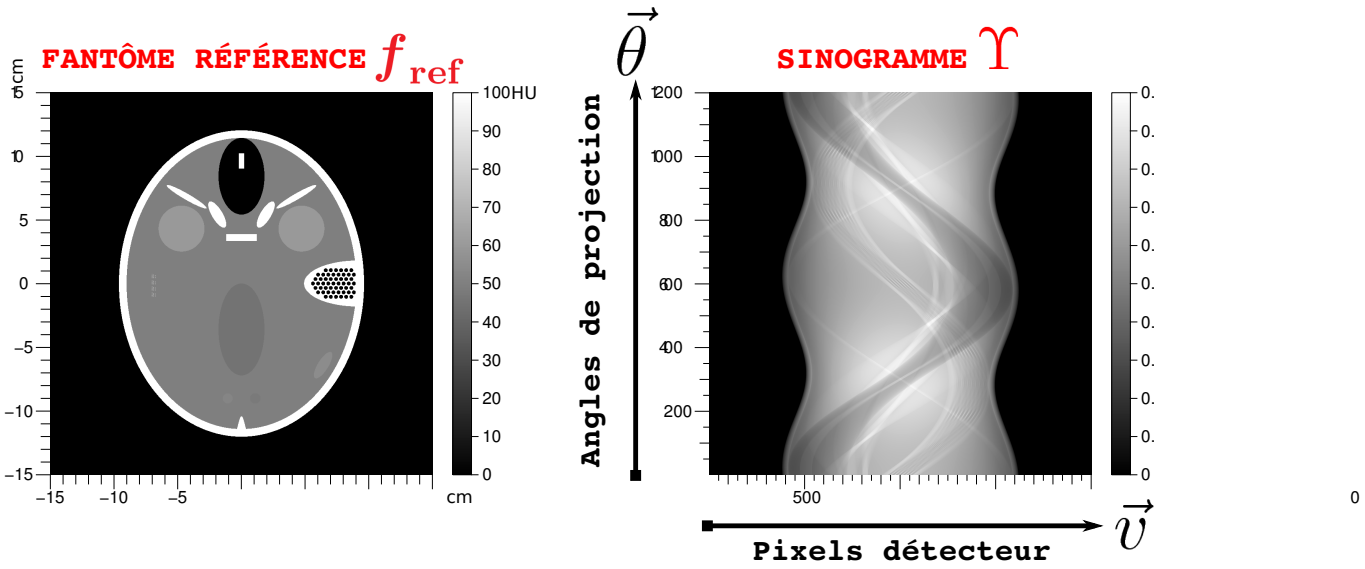


FIGURE 2.40: (À gauche) Fantôme de tête *FORBILD* $30 \times 30\text{cm}^2$ de référence, noté $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$, simulé sur une grille de 1000×1000 pixels. La dynamique des valeurs d'atténuation est affichée en unités Hounsfield, avec $\mu_{\text{eau}} = 0{,}1928\text{cm}^{-1}$. (À droite) Données sinogramme Υ calculées analytiquement. Un détecteur linéaire, composé de 2000 pixels détecteur échantillonnés avec un pas de 0,03cm, acquiert 1200 projections régulières sur 360°, suivant un mode de propagation *fan beam*. La distance focale ℓ_{sd} est égale à 153,6cm, et la distance *source-isocentre* ℓ_{sc} est égale à 100cm.

de référence, de taille 1000×1000 pixels, soit un échantillonnage spatial de $0{,}03 \times 0{,}03\text{cm}^2$. Ce dernier constituera la vérité de ce que nous sommes censés reconstruire. Nous le notons $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$.

La figure 2.40 montre l'image du fantôme et des données sinogrammes ainsi simulées. Pour le fantôme, la dynamique des valeurs d'atténuation est affichée en unités Hounsfield (HU) (*cf.* équation 1.6). Nous prenons, comme dans le chapitre 1, $\mu_{\text{eau}} = 0{,}1928\text{cm}^{-1}$ comme valeur standard de l'atténuation de l'eau, correspondant à une énergie moyenne des rayons X de 70keV— énergie typique en tomographie X [Hsieh, 2003]. Nous simulons ainsi un cas réaliste d'objet tomographique. Pour les données, la dynamique des valeurs correspond, pour chaque pixel détecteur, à la transformée aux rayons X des valeurs physiques d'atténuation du fantôme.

Planification des reconstructions

Afin d'évaluer les performances du projecteur *spline driven* de façon précise, nous créons différentes configurations pour nos reconstructions, à la fois au niveau des paramètres du modèle, mais aussi de l'image reconstruite et des données. Les divers paramètres que nous faisons varier sont :

- le nombre de projections utilisées dans la reconstruction, à savoir successivement $T = 60$, 45, 35, 25 et 15. Les projections sont sélectionnées régulièrement parmi les 1200, en ne prenant qu'une projection toutes les $(1200/T)$. Nous évaluons ainsi comme prévu notre projecteur dans le cadre de reconstructions à faible nombre de projections ;
- la taille de l'objet reconstruit, à savoir successivement $\boldsymbol{N} = 500 \times 500$, 375×375, 250×250 et 125×125, l'échantillonnage variant de concert[26], afin d'évaluer la robustesse des modèles, *i.e.* leur capacité à restituer correctement les détails, en dépit du sous-échantillonnage ;
- le degré des B-splines utilisées pour le projecteur *spline driven*, à savoir successivement $d = 2$, 3 et 5, afin de déterminer le meilleur compromis entre qualité de modélisation et compacité du projecteur. Nous confrontons également notre projecteur au modèle *distance*

26. La taille métrique de l'objet, à savoir $30 \times 30cm$, reste donc constante.

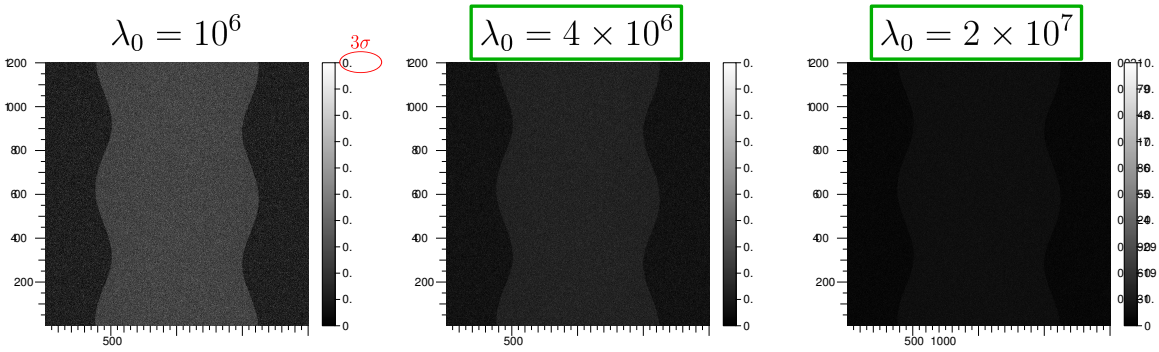


FIGURE 2.41: Illustration du bruit additif, gaussien non uniforme, appliqué aux données simulées du fantôme de tête *FORBILD*. Les sinogrammes du centre et de droite correspondent aux bruits sélectionnés dans nos configurations, en plus des données non bruitées, à savoir des bruits correspondant respectivement à $\lambda_0 = 4 \times 10^6$ et $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ photons par pixel détecteur par projection, sans atténuation. On visualise la valeur absolue du bruit. La dynamique des valeurs est de 0 à 3 fois l'écart-type σ_{noise} d'un bruit correspondant à $\lambda_0 = 10^6$ photons par pixel détecteur par projection, sans atténuation (sinogramme de gauche).

driven, qui utilise, rappelons-le, des B-splines de degré 0[27];

- le bruit dans les données, que nous choisissons additif, gaussien non stationnaire, d'après le modèle élaboré dans le chapitre 1 (*cf.* équation 1.19). Sa variance est liée au nombre moyen de photons λ_0 sans atténuation par pixel détecteur par projection (*cf.* équation 1.18, sectioné1.2.2, chapitre 1), par l'expression :

$$\sigma^2_{q_{\mathsf{noise}}} = \mathbb{V}\left[\mathrm{y}^{\theta}_{q}\right] \approx \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{y}^{\theta}_{q}}}{\lambda_0} \tag{2.84}$$

où $\mathbb{V}[\cdot]$ désigne la variance. Nous définissons alors le niveau de bruit moyen σ_{noise}sur l'ensemble des données par la relation suivante :

$$\sigma^2_{\mathsf{noise}} = \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{y}^{\theta}_{q}}\right]}{\lambda_0} \tag{2.85}$$

$\mathbb{E}[\cdot]$ désignant l'espérance mathématique. Nous souhaitons définir des niveaux de bruit σ_{noise} adéquats dans nos reconstructions, afin de pouvoir étudier correctement notre modèle de projection. C'est pourquoi ces niveaux doivent être du même ordre de grandeur que l'erreur moyenne de modélisation des données $\sigma_{\mathsf{data}} = \sqrt{\mathbb{E}[(\Upsilon - \tilde{\Upsilon})^2]}$, sans quoi celle-ci sera "noyée" dans le bruit. Pour ce faire, nous déterminons l'erreur résiduelle moyenne typique entre les données simulées Υ non bruitées du fantôme *FORBILD* et les pseudo-données obtenues par reprojection d'un fantôme de référence $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$, de taille 500×500, que nous notons $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{ref}}$. Cela correspond à l'erreur de modélisation pure, nous donnant une estimation du niveau d'erreur de reconstruction que l'on peut espérer atteindre, pour le meilleur échantillonnage des voxels que l'on reconstruit :

$$\sigma_{\mathsf{data}} = \sqrt{\mathbb{E}[(\Upsilon - \tilde{\Upsilon}_{\mathbf{ref}})^2]} \tag{2.86}$$

Le tableau 2.1 donne les valeurs de l'erreur σ_{data} pour les 4 projecteurs que nous allons tester. Nous prenons alors l'erreur minimale calculée comme référence, soit $4{,}7 \times 10^{-4}$, l'erreur obtenue pour *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$. Nous déterminons alors des niveaux de bruit moyens σ_{noise} pour nos données de reconstruction, à savoir $\sigma_{\mathsf{noise}} = 0.0$ (pas de bruit), $\sigma_{\mathsf{noise}} =$

27. Nous ne testons pas le degré 0 pour *spline driven* car nous avons vu dans la section 2.3.2 que nos approximations n'étaient pas adaptées aux indicatrices de voxels, trop génératrices d'erreurs.

distance driven	B-spline $d = 2$	B-spline $d = 3$	B-spline $d = 5$
$5{,}1 \times 10^{-4}$	$4{,}7 \times 10^{-4}$	$4{,}7 \times 10^{-4}$	$4{,}8 \times 10^{-4}$

TABLE 2.1: Tableau de l'erreur de modélisation pure σ_{data} des projecteurs *spline driven* à $d = 2$, 3 et 5, et *distance driven* calculée d'après l'équation 2.86 à partir de la reprojection du fantôme *FORBILD* 500×500.

$(1/2) \times \sigma_{\mathsf{data}}$ et $\sigma_{\mathsf{noise}} = \sigma_{\mathsf{data}}$, ce qui correspond respectivement à $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$. La figure 2.41 illustre les bruits additifs appliqués aux données Υ, en valeur absolue, correspondant à ces deux dernières valeurs d'écart-type du bruit, par rapport à un bruit obtenu pour $\lambda_0 = 10^6$.

Nos reconstructions mettent en œuvre l'ensemble des combinaisons possibles de ces jeux de paramètres, soit $5 \times 4 \times 4 \times 3 = 240$ reconstructions différentes. Nous reprenons le critère de minimisation établi dans le chapitre 1 (*cf.* équation 1.36, section 1.2.7) pour la reconstruction statique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^+ &= \underset{\boldsymbol{c}\in\mathbb{X}}{\arg\min} \sum_{\theta\in\Theta} \left\| \mathbf{y}^\theta - \mathbf{R}^\theta \cdot \boldsymbol{c} \right\|_{\mathbf{W}}^2 + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) \\ &= \underset{\boldsymbol{c}\in\mathbb{X}}{\arg\min} \sum_{\theta\in\Theta} \left(\mathbf{y}^\theta - \mathbf{R}^\theta \cdot \boldsymbol{c} \right)^\top \cdot \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{y}^\theta - \mathbf{R}^\theta \cdot \boldsymbol{c} \right) + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c}) \end{aligned} \tag{2.87}$$

La matrice $\mathbf{W}$ pondère chaque pixel des résidus $(\mathbf{y}^\theta - \mathbf{R}^\theta \cdot \boldsymbol{c})^2$ par l'inverse de la variance du bruit modélisé pour les données $\mathbf{y}^\theta$ (*cf.* équation 1.38, section 1.2.7, chapitre 1). Autrement dit, nous reconstruisons à bruit connu. Pour les données non bruitées, la matrice $\mathbf{W}$ est l'identité.

L'algorithme utilisé pour minimiser le critère reste aussi le même, *i.e.* VMLM [Nocedal, 1980] (*cf.* section 1.2.7, chapitre 1).

Le terme de régularisation $\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}$ est la variation totale isotrope relaxée définie une fois de plus dans le chapitre 1 (*cf.* équation 1.49, section 1.2.7) :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c}) = \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} (\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} \approx \mathcal{TV}(f) \tag{2.88}$$

L'hyperparamètre de relaxation ϵ est choisi très faible, typiquement 10^{-12}, pour approcher le plus possible la variation totale. Pour chaque reconstruction, nous appliquons une série de 10 valeurs d'hyperparamètre μ afin de déterminer a posteriori, à la fois qualitativement et quantitativement, le poids optimal. Ces valeurs de μ sont successivement : $\mu_1 = 5 \times 10^{-2}$, $\mu_2 = 10^{-2}$, $\mu_3 = 5 \times 10^{-3}$, $\mu_4 = 10^{-3}$, $\mu_5 = 5 \times 10^{-4}$, $\mu_6 = 10^{-4}$, $\mu_7 = 5 \times 10^{-5}$, $\mu_8 = 10^{-5}$, $\mu_9 = 5 \times 10^{-6}$ et $\mu_{10} = 10^{-6}$. Ces valeurs correspondent à un éventail déterminé lors de tests de reconstructions préalables à partir de données non bruitées ; elles sont donc normalisées. Cet éventail est suffisamment large pour englober à coup sûr la valeur optimale. Cependant, lorsque les données sont bruitées, du fait de la pondération par la matrice $\mathbf{W}$, ces valeurs typiques de l'hyperparamètre μ sont théoriquement modifiées proportionnellement à la variance du bruit $\sigma^2_{\mathsf{noise}}$. C'est pourquoi nous adaptons cette série de valeurs normalisées, en les divisant par cette variance.

Systématiquement, quelle que soit la taille choisie pour l'objet reconstruit, nous effectuons la comparaison avec l'objet de référence de taille identique.

L'ensemble de ces reconstructions ont été lancées sur différents cœurs (1 reconstruction par cœur) des machines de calcul du projet Horizon (*cf.* note 24), présenté dans la section 2.3.3.

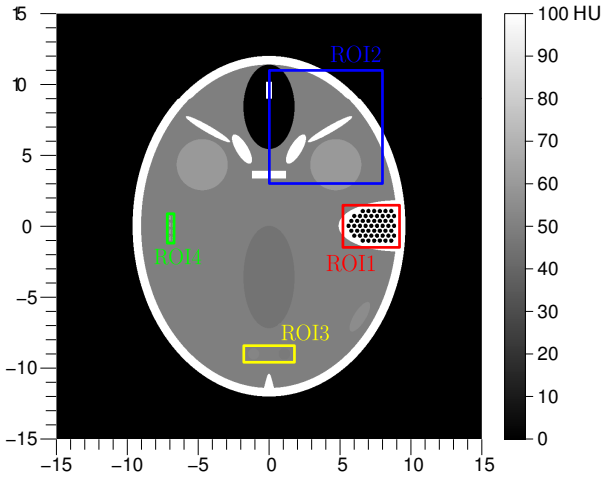


FIGURE 2.42: Identification sur le fantôme de référence *FORBILD* $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$ 1000×1000, des quatre régions d'intérêt ROI1 (rouge), ROI2 (bleu), ROI3 (vert) et ROI4 (jaune), définies pour la quantification des erreurs de reconstructions 2-D par le critère EQMN.

Techniques d'évaluation sur régions d'intérêt, profils de coupes et métriques

En plus de visualiser la qualité empirique des reconstructions, nous quantifions précisément nos résultats au travers de deux métriques. Tout d'abord nous mesurons, pour toutes les reconstructions, l'erreur résiduelle vis-à-vis des données, notée RES, calculée pour l'ensemble de l'image reconstruite $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{aligned}\text{RES} &= \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\Upsilon - \tilde{\Upsilon}\right)^2\right]} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}\left[\sum_{\theta=1}^{T}\left(\mathbf{y}^\theta - \tilde{\mathbf{y}^\theta}\right)^2\right]} = \sqrt{\mathbb{E}\left[\sum_{\theta=1}^{T}\left(\mathbf{y}^\theta - \mathbf{R}^\theta\cdot\boldsymbol{c}\right)^2\right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{TM}\sum_{\theta=1}^{T}\sum_{q=1}^{M}\left(\mathrm{y}_q^\theta - \tilde{\mathrm{y}_q^\theta}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{TM}\sum_{\theta=1}^{T}\sum_{q=1}^{M}\left(\mathrm{y}_q^\theta - \sum_{\boldsymbol{k}\in\Omega_q^\theta}\mathbf{R}_{q\boldsymbol{k}}^\theta\cdot c_{\boldsymbol{k}}\right)^2}\end{aligned} \tag{2.89}$$

où T est le nombre de projections et M le nombre de pixels sur le détecteur linéaire. La seconde métrique que nous utilisons est la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne normalisée par la dynamique maximale D_{max} des valeurs dans l'image de référence $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$, que nous avons déjà utilisée dans le chapitre 1, et notée EQMN :

$$\text{EQMN} = \frac{\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}} - \boldsymbol{f}\right)^2\right]_{\text{ROI}}}}{D_{\mathsf{max}}}, \quad \text{avec } D_{\mathsf{max}} = \left|\max(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}})_{\text{ROI}} - \min(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}})_{\text{ROI}}\right| \tag{2.90}$$

Cette erreur est calculée sur 4 régions d'intérêt (ROI), nommées respectivement ROI1, ROI2, ROI3 et ROI4, et qui englobent des inserts d'intérêt représentant des détails fins du fantôme. Chacune de ces régions, rectangulaire, est visualisée sur le fantôme de référence $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$, sur la figure 2.42.

Nous définissons également trois coupes, nommées respectivement CUT1 et CUT2 et CUT3, afin de visualiser la capacité de récupération des détails, notamment les contrastes et les bords francs. Sur la figure 2.43, nous visualisons les droites caractérisant ces profils.

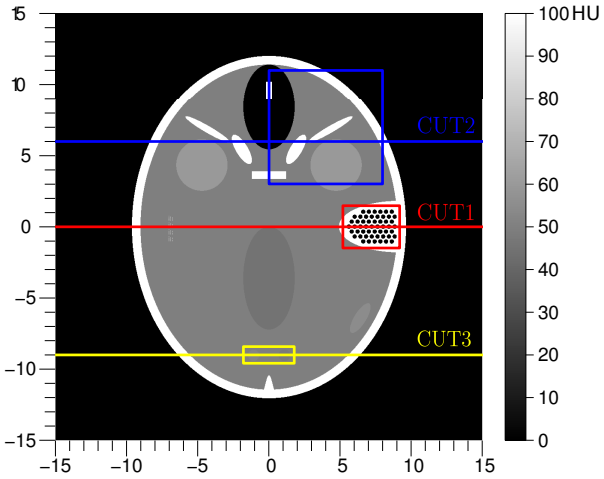


FIGURE 2.43: Identification sur le fantôme de référence *FORBILD* $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$ 1000×1000, des trois coupes CUT1 (rouge), CUT2 (bleu) et CUT3 (jaune), définis pour la comparaison des reconstructions 2-D.

Reconstructions 500×500 à projections non bruitées

Intéressons-nous dans un premier temps aux reconstructions 500×500, à partir des projections non bruitées. Les figures 2.44, 2.45 et 2.46 illustrent les reconstructions, respectivement pour 60, 35 et 15 projections, réalisées avec *distance driven* et les 3 degrés de *spline driven*. Nous montrons les images reconstruites à différents niveaux de régularisation, afin d'apprécier visuellement la qualité des reconstructions pour chaque modèle. Ce critère empirique doit satisfaire les points suivants :

- l'image doit être relativement "lisse" et discriminer aux mieux les différentes structures visibles sur l'image de référence ;
- les artéfacts doivent être les plus ténus possibles.

Nous observons donc qu'un niveau trop élevé de régularisation — de μ_5 à μ_7 — a pour effet systématique de trop lisser l'image reconstruite, de gommer les structures trop petites ou faiblement contrastées et d'engendrer un étalement des grandes structures bien contrastées les unes sur les autres : c'est l'effet "d'aplatissement" de la variation totale [Strong and Chan, 2003] (*cf.* sections 1.2.7 et 1.2.8, chapitre 1).

Plus le poids de régularisation baisse, plus les structures apparaissent nettement mais au prix de l'amplification des artéfacts de reconstruction. Nous remarquons notamment des traînées rectilignes partant de la ROI1 dans des directions particulières — horizontale, verticale et oblique (45°). Ces directions correspondent aux angles de vue pour lesquels les petits disques disposés en quinconce forment des alignements parfaits. À ces positions angulaires, ils engendrent alors sur les sinogrammes un phénomène de créneaux très contrastés qui sont amplifiés lors de leur rétroprojection. Il s'agit de l'artéfact occasionnant la plus grande dégradation des images du fantôme *FORBILD* dans nos reconstructions, certainement due à l'insuffisance du nombre de projections qui engendre une mauvaise localisation des structures haute fréquence de la ROI1. Cela peut aussi être dû à la position angulaire particulière des projections, l'absence de certaines à une position donnée favorisant potentiellement l'amplification de ces artéfacts.

Pour les configurations des figures 2.44, 2.45 et 2.46, nous constatons que cet artéfact est malheureusement persistant quel que soit le modèle de projection utilisé, avec néanmoins une intensité variable. Étant assez contrastés, ils sont même probablement entretenus par la régularisation par variation totale — leurs gradients sont trop forts et trop structurels pour être éradiqués. L'absence de bruit joue également en défaveur de la capacité de la régularisation

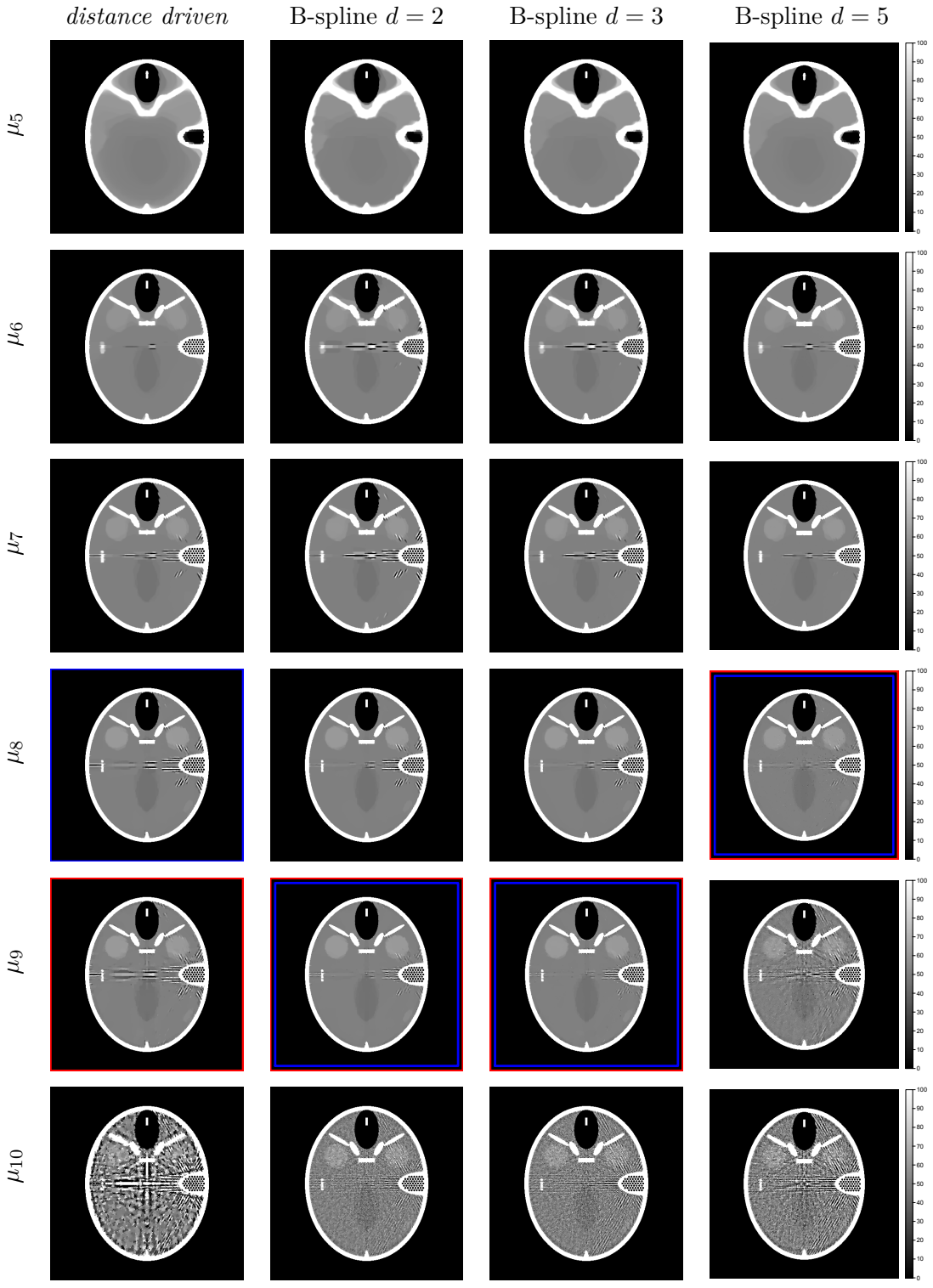


FIGURE 2.44: Reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, pour les poids de régularisation allant de μ_5 à μ_{10}. Les images encadrées en rouge correspondent aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI1, et celles encadrées en bleu aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI2.

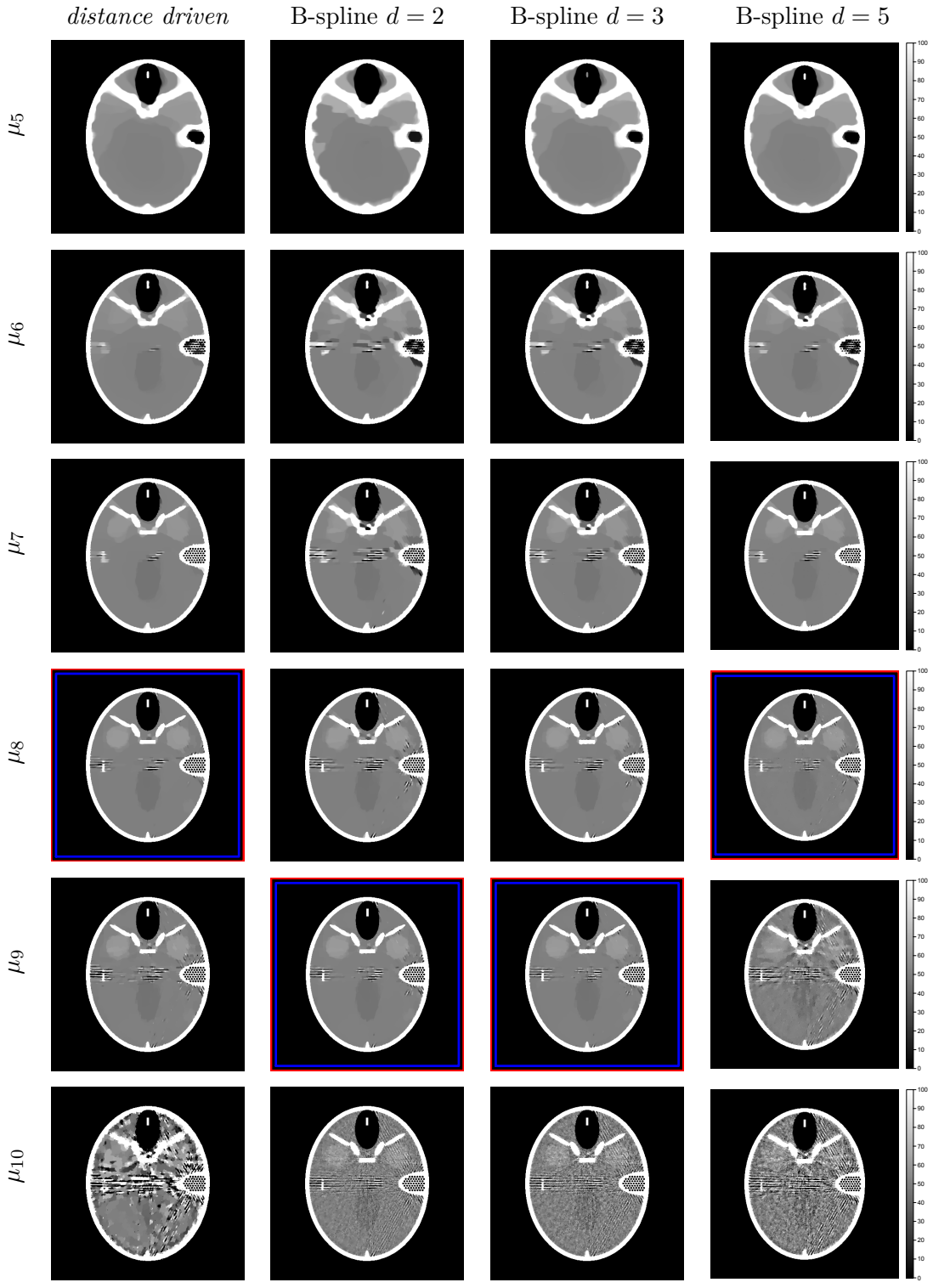


FIGURE 2.45: Reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, à partir de 35 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, pour les poids de régularisation allant de μ_5 à μ_{10}. Les images encadrées en rouge correspondent aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI1, et celles encadrées en bleu aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI2.

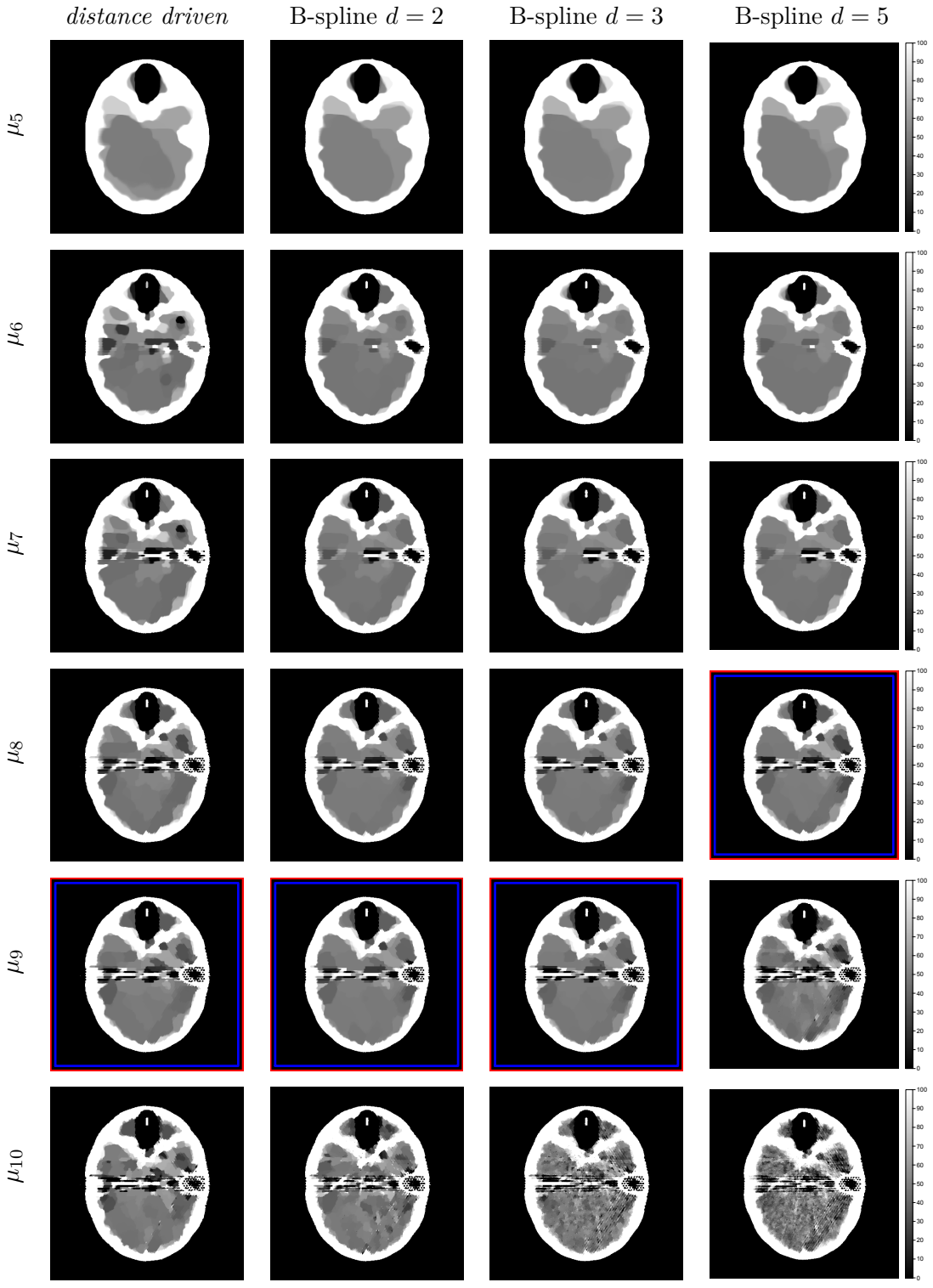


FIGURE 2.46: Reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, à partir de 15 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, pour les poids de régularisation allant de μ_5 à μ_{10}. Les images encadrées en rouge correspondent aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI1, et celles encadrées en bleu aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI2.

à éliminer ces dégradations, car elles sont entretenues par les erreurs de modélisation. Ces dernières peuvent être vues comme un bruit qui n'est pas compensé dans le terme d'attache aux données de la reconstruction (*cf.* équation 2.87). En effet, dans ce cas, la matrice $\mathbf{W}$ est l'identité, alors qu'elle devrait aussi tenir compte de ce "bruit de modélisation"[28], non stationnaire et particulièrement fort dans les structures haute fréquence très contrastées — donc très atténuantes, à l'instar de la ROI1. En présence de bruit, la pondération du terme $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}$ par l'inverse de sa covariance diminuerait l'influence des données dans ces zones — le bruit étant plus fort dans les zones fortement atténuantes — et donnerait ainsi un poids plus fort à la régularisation pour "gommer" ces artéfacts. Idéalement, nous aurions pu tenir compte du bruit de modélisation dans nos reconstructions. Si l'on connaissait la "vérité terrain", la quantification de ce bruit, et donc sa compensation, nous serait accessible. Mais celui-ci n'est pas estimable en pratique, car la vérité est naturellement inconnue. Ainsi, dans ce cas, ce type d'artéfact est inhérent à la reconstruction, et dépendant notamment de la modélisation, ce qui est typiquement ce que nous souhaitons montrer dans cette étude. Il est donc finalement naturel de ne pas chercher à compenser le bruit de modélisation.

Un autre moyen d'éradiquer totalement ces artéfacts serait d'utiliser un nombre plus important de projections. Or, la configuration à 60 projections est celle mettant en jeu le plus grand nombre de projections dans notre étude. Notre campagne de reconstructions pour l'étude de notre projecteur n'est donc pas exhaustive ni optimale, car elle ne permettra pas de déterminer le nombre idéal de projections pour s'affranchir totalement de cet artéfact. Une astuce aurait été d'étudier les performances des différents projecteurs indépendamment d'un artéfact particulier, qui peut être aussi dû, comme nous l'avons dit plus haut, à un positionnement angulaire particulier des projections. Pour s'en affranchir dans ce cas, une solution consisterait à effectuer, à nombre de projections constant et équiréparti, un ensemble de reconstructions en décalant les positions angulaires d'une fraction du pas angulaire. Pour un nombre de projections donné, nous disposerions alors d'un jeu de reconstructions dans lequel nous extrairions des résultats quantitatifs statistiques indépendants d'une répartition particulière, qui peut être davantage génératrice d'artéfacts qu'une autre.

Il nous faut garder à l'esprit que l'étude que nous allons réaliser à partir de ces simulations est représentative d'un cas très particulier, potentiellement très défavorable[29], mais absolument pas général. Il s'agit en revanche d'un cas tout à fait probable et plausible, étant donné qu'il est extrêmement difficile, même en pratique, d'étalonner un système pour s'affranchir de tous les problèmes liés à la reconstruction et aux artéfacts qu'elle peut engendrer, surtout si ceux-ci dépendent de l'objet lui-même, qui est l'inconnue du problème[30]. Nos conditions de simulations sont donc tout à fait valables, et c'est dans ce cadre, constituant par conséquent un excellent "cas d'école", que le modèle de projection peut éventuellement, comme nous en avons l'intuition, faire la différence. Ainsi, notre objectif est de démontrer que notre projecteur *spline driven* est plus robuste en qualité de reconstruction que le projecteur *distance driven*, pour un faible nombre de projections, aussi bien pour cette dégradation particulière engendrée par les structures de la ROI1, que pour d'autres perturbations telles que l'amplification du bruit et des erreurs de modélisation de la projection. Dans ces conditions "extrêmes" de reconstruction, nous pourrons quand même faire des déductions intéressantes sur la capacité des projecteurs testés à reconstruire un objet à qualité identique — même médiocre, mais avec moins de données. Nous gageons que les conclusions que nous tirerons de notre étude pourront

28. Chose que nous n'avons pas pris en compte.
29. Ou bien très favorable !
30. Le meilleur moyen utilisé à l'heure actuelle reste de multiplier le nombre de projections pour surcontraindre le problème, ce qui n'est pas forcément le plus idéal ni le plus judicieux, surtout en imagerie X, du fait notamment de la dose délivrée au patient.

être extrapolées au comportement des projecteurs dans le cadre d'un plus grand nombre de projections ou d'une configuration différente, permettant notamment d'éradiquer l'artéfact de la ROI1.

Cette mise au point faite, revenons aux figures 2.44, 2.45 et 2.46. Nous observons qu'à très faible niveau de régularisation — typiquement μ_{10}, les reconstructions avec *spline driven*, bien qu'assez bruitées[31], permettent toujours de discriminer les structures, même peu contrastées, avec une relative efficacité, tandis que la reconstruction avec *distance driven* semble détruire plus fortement l'intégrité générale de l'objet. Nous avons donc là un premier exemple du gain de notre projecteur *spline driven* sur *distance driven*. Ces observations ne sont valables que pour 60 et 45 projections, car à 15 projections, la qualité des reconstructions est trop dégradée pour en tirer une quelconque conclusion globale. Les images encadrées en rouge correspondent aux reconstructions donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI1, et celles encadrées en bleu aux reconstructions donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2. Nous constatons alors que l'EQMN minimale dans la ROI2 correspond aux reconstructions de meilleure qualité visuelle. Nous considérons donc l'erreur EQMN dans cette région d'intérêt comme étant le critère objectif de sélection de la meilleure reconstruction dans une configuration donnée. Les figures 2.47 et 2.48 illustrent les cartes d'erreur quadratique, respectivement à l'intérieur des régions d'intérêt ROI1 et ROI2, pour les meilleures reconstructions suivant le critère tout juste sélectionné — EQMN minimale dans la ROI2. L'observation de ces cartes montre un comportement globalement équivalent des projecteurs aux différentes configurations, notamment la forte dégradation de la qualité à 15 projections, alors qu'au-dessus les reconstructions se sont montrées assez robustes malgré une qualité décroissante à mesure que le nombre de données diminue. Ces cartes d'erreur ne mettent donc pas au jour d'avantage visuel net pour *distance driven* ou *spline driven*. Nous remarquons toutefois que les reconstructions avec *spline driven* à $d = 5$ semblent faire apparaître plus d'artéfacts sporadiques, même à 60 projections.

Passons aux comparaisons des profils de coupes. La figure 2.49 regroupe les graphes des profils CUT1, CUT2 et CUT3, sur les reconstructions à EQMN minimale dans la ROI2. Pour les profils CUT1 et CUT2, qui illustrent des structures bien contrastées, nous observons que la récupération des détails est globalement équivalente pour les 4 projecteurs, particulièrement sur la coupe CUT2. Nous distinguons néanmoins, dans la coupe CUT1, un meilleur comportement de *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$, qui retrouve plus efficacement les contrastes des structures en créneau, en affichant des valeurs crête à crête plus importantes. Cela est particulièrement visible pour 25 et 15 projections. Les structures mises en évidence par le profil CUT3 étant extrêmement peu contrastées, leur récupération est beaucoup plus complexe. En effet, un poids de régularisation trop important risquant "d'aplatir" totalement ces structures, ce dernier doit être "dosé" avec minutie. Or, nos reconstructions se placent dans des configurations à faible nombre de projections, ce qui risque d'engendrer des erreurs importantes si la régularisation ne contrôle pas leur amplification. C'est donc typiquement sur ce type de structures que le projecteur, associé à une régularisation adéquate, peut faire la différence. Nous l'observons d'ailleurs sur la figure 2.49, où notre projecteur *spline driven* se démarque assez visiblement de *distance driven*, en affichant les meilleurs contrastes sur le profil CUT3 pour la plupart des configurations, particulièrement pour 60 et 45 projections. Nous étayons cette observation par un critère quantitatif : nous affichons les cartes d'erreur quadratique pour ces 2 configurations sur la figure 2.50. Là encore ce sont les degrés $d = 2$ et $d = 3$ qui donnent les meilleurs résultats. Dans l'absolu, la qualité générale des reconstructions dans ces zones n'en reste pas moins relativement médiocre étant donnée l'insuffisance des projections dans ces

31. Ce que nous nommons "bruit" dans ce cas sont les dégradations de la qualité visuelle de l'image, notamment l'aspect continu par morceaux.

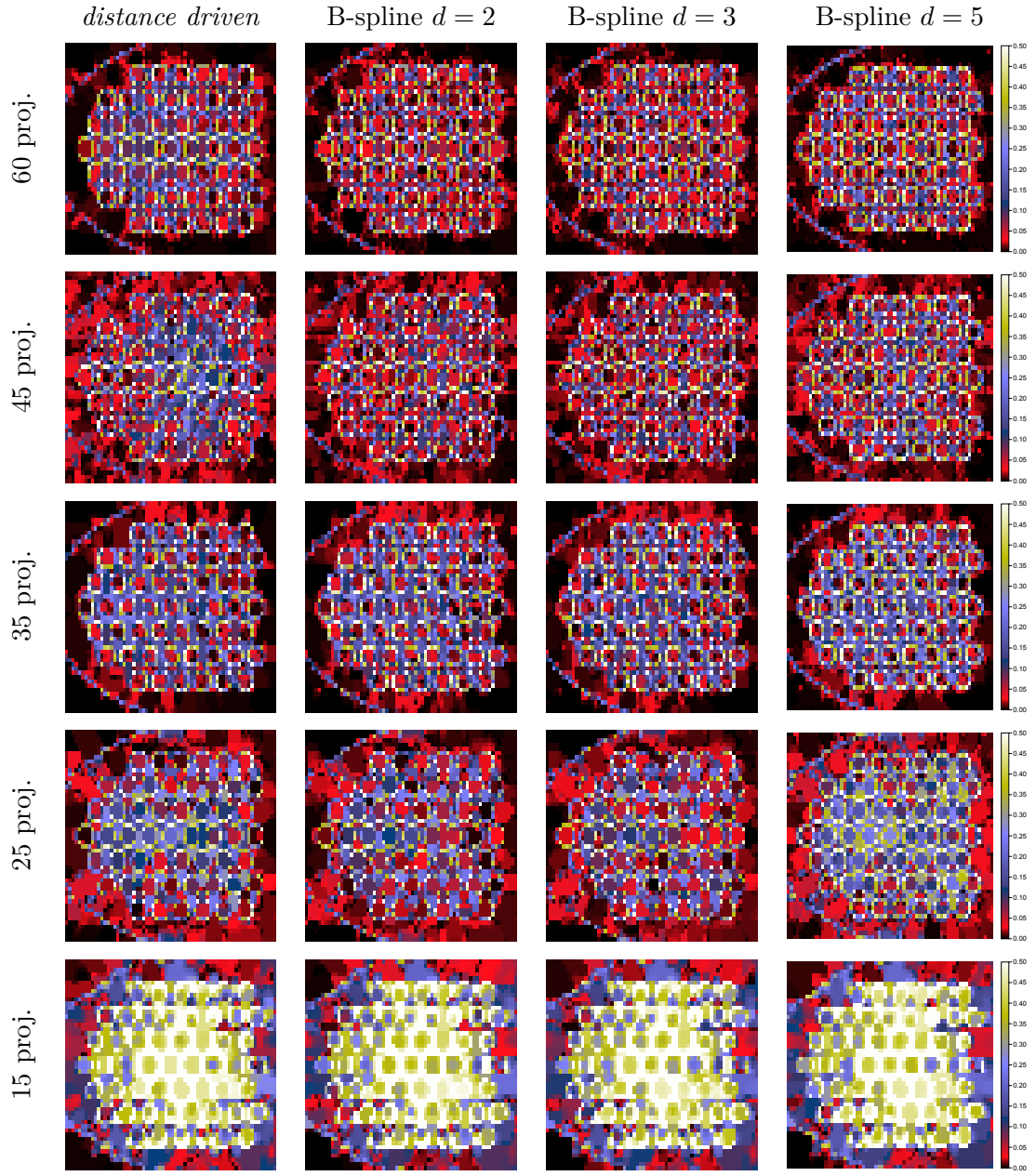


FIGURE 2.47: Cartes d'erreur quadratique (valeur absolue de la différence au carré), dans la région d'intérêt ROI1, des reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, à partir de projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d et pour différents nombres de projections — 60, 45, 35, 25 et 15, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2 — les reconstructions encadrées en bleu sur les figures 2.44 et 2.45.

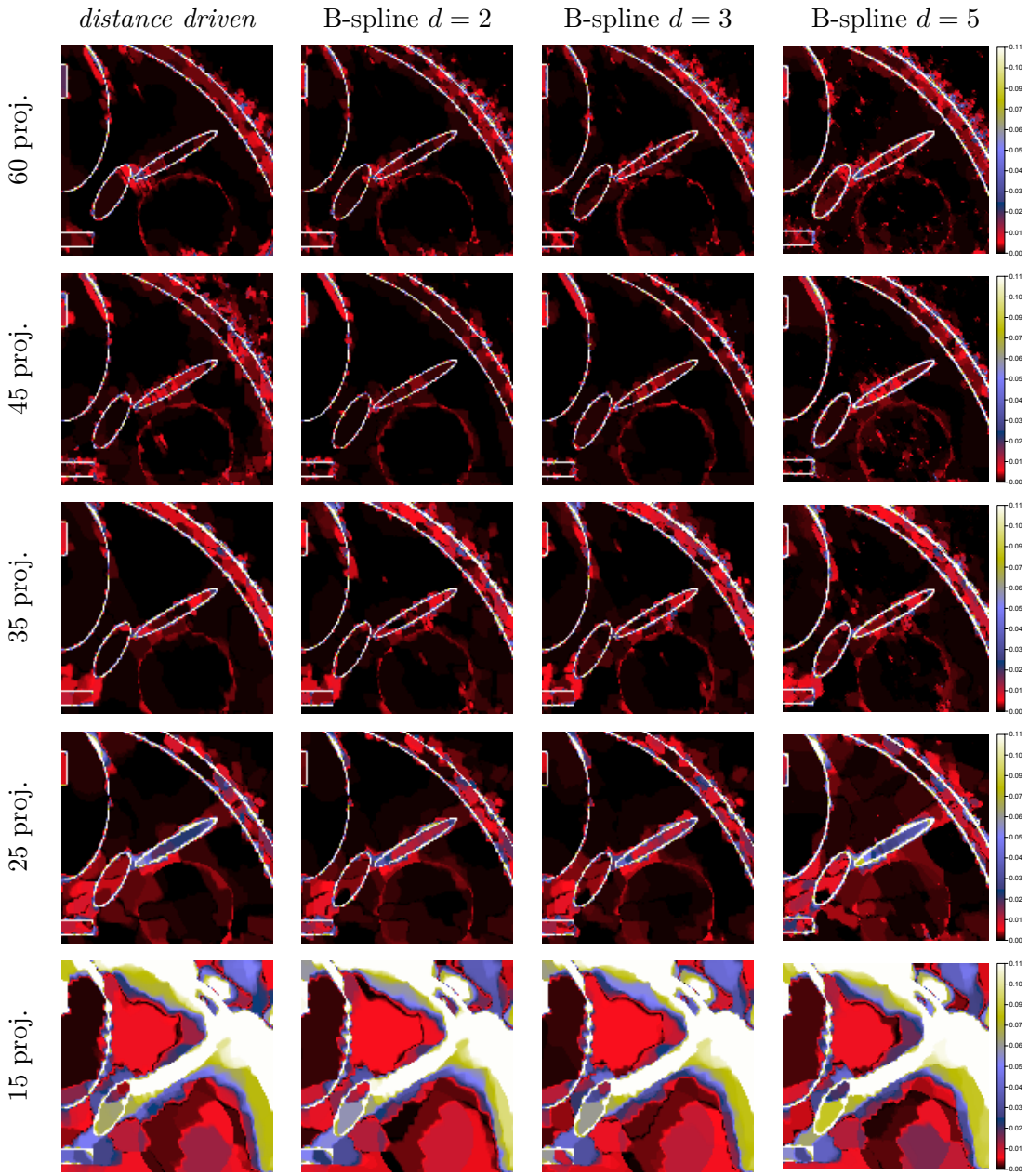


FIGURE 2.48: Cartes d'erreur quadratique, dans la région d'intérêt ROI2, des reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, à partir de projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d et pour différents nombres de projections — 60, 45, 35, 25 et 15, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2 — les reconstructions encadrées en bleu sur les figures 2.44 et 2.45.

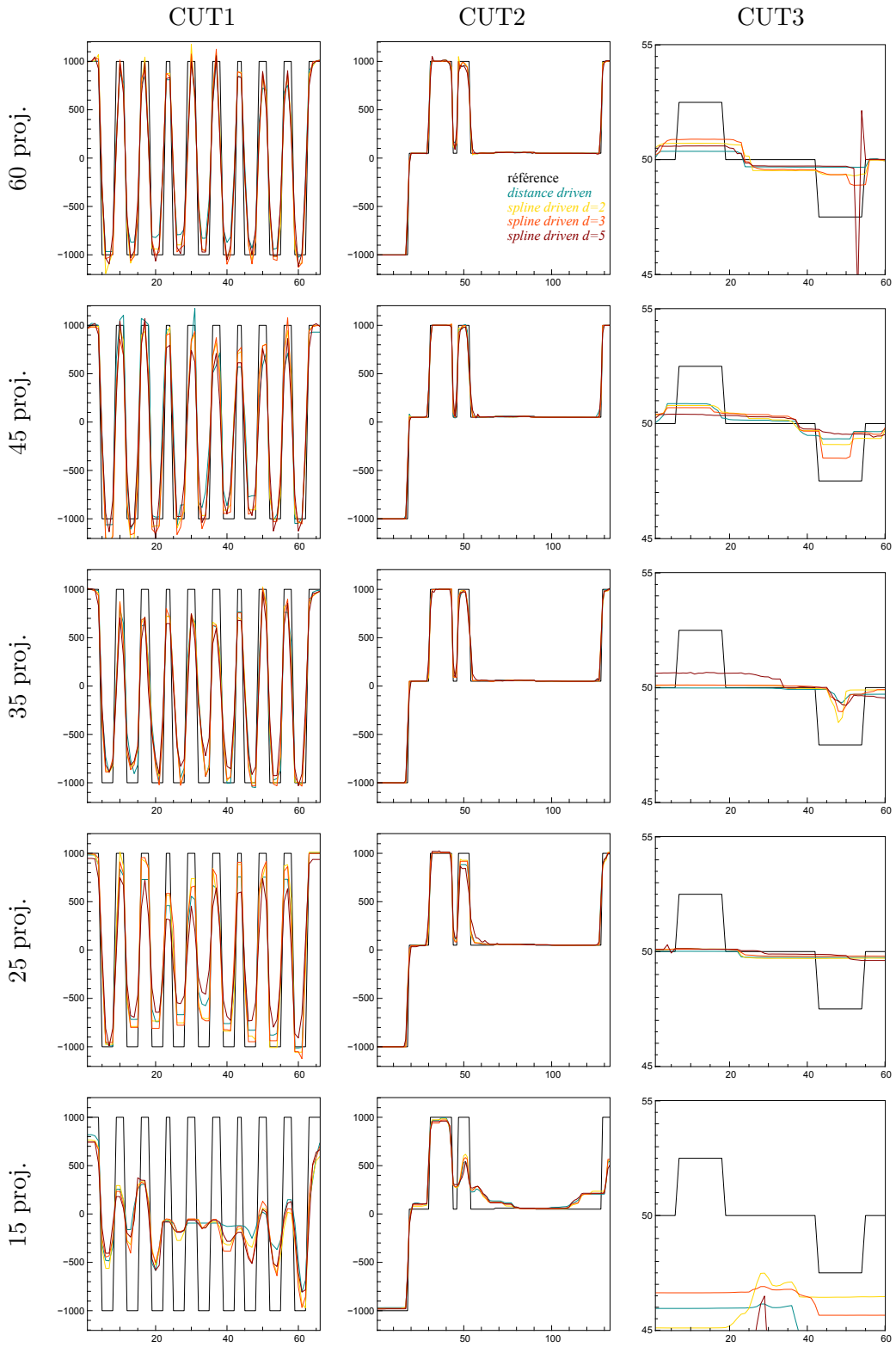


FIGURE 2.49: Profils de coupes CUT1, CUT2 et CUT3, tracés pour les reconstructions 500×500 à EQMN minimale dans la ROI2. Un graphe correspond à un profil de coupe et un nombre de projections donnés. Chaque graphe compare les profils des reconstructions correspondantes avec les 4 modèles de projection : *distance driven* (bleu), *spline driven* à $d = 2$ (jaune), *spline driven* à $d = 3$ (orange) et *spline driven* à $d = 5$ (rouge). Le profil de référence est tracé en noir.

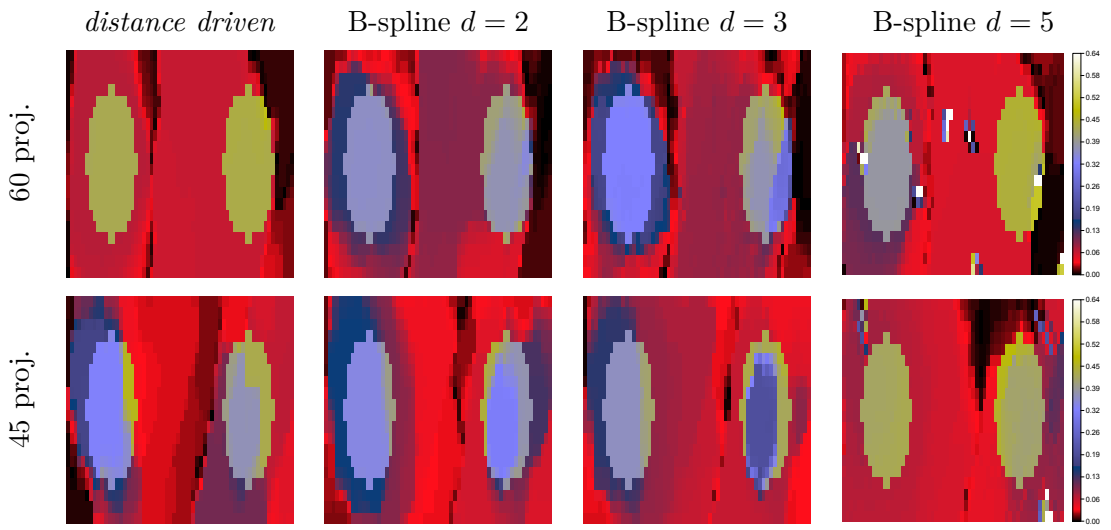


FIGURE 2.50: Cartes d'erreur quadratique, dans la région d'intérêt ROI3 des reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, à partir de projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d et pour 60 et 45 projections, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2 — les reconstructions encadrées en bleu sur les figures 2.44 et 2.45.

reconstructions, comme nous l'avons fait remarquer plus haut. Nous en dégageons néanmoins des comparaisons intéressantes des projecteurs en termes de qualité de reconstruction dans ces conditions "extrêmes".

Nous venons de comparer la qualité des reconstructions pour les diverses configurations, en focalisant nos analyses sur les régions d'intérêt ROI1, ROI2 et ROI3. Au vu des artéfacts importants au niveau de la ROI4, et ce sur toutes les reconstructions, nous n'avons pas jugé pertinent pour le moment d'effecteur des comparaisons visuelles dans cette région.

Passons aux analyses des données quantitatives. Nous réalisons un ensemble de graphes montrant l'erreur EQMN dans chaque région d'intérêt en fonction de l'erreur résiduelle RES. Ceux-ci sont visualisés sur la figure 2.51. Une première observation permet de confirmer que les reconstructions à 15 projections (violet) se distinguent des autres par des valeurs d'erreur EQMN trop importantes. En revanche nous constatons que l'erreur résiduelle RES associée peut être assez faible. Or cette erreur résiduelle traduit la fidélité aux données, *i.e.* la similitude entre les projections originales et la reconstruction reprojetée. Nous avons cependant observé sur la figure 2.46 que les reconstructions à 15 projections donnaient une qualité visuelle de reconstruction extrêmement médiocre et donc inexploitable. L'accord d'une image reconstruite reprojetée vis-à-vis des données originales n'est donc pas un critère en soi de qualité de reconstruction. Autrement dit un bon accord aux données ne signifie pas que la reconstruction est correcte. Il est donc très important de le mettre en regard d'un autre critère offrant une comparaison directe avec l'image de référence, d'où l'erreur EQMN. Une "bonne" reconstruction a alors une erreur EQMN faible par rapport à la référence, et dans ce cas l'erreur résiduelle RES permet de confirmer que cette image reconstruite est bien capable d'expliquer les projections avec précision. Ces deux critères doivent donc aller de pair pour évaluer quantitativement la qualité d'une reconstruction.

Observons l'agrandissement des graphes omettant la configuration à 15 projections (colonne de droite sur la Fig 2.51). L'analyse de ces graphes montrent alors que le meilleur compromis entre erreur EQMN et accord aux données — par l'entremise de l'erreur résiduelle RES — est obtenu par les projecteurs *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$, et ce de façon assez systématique

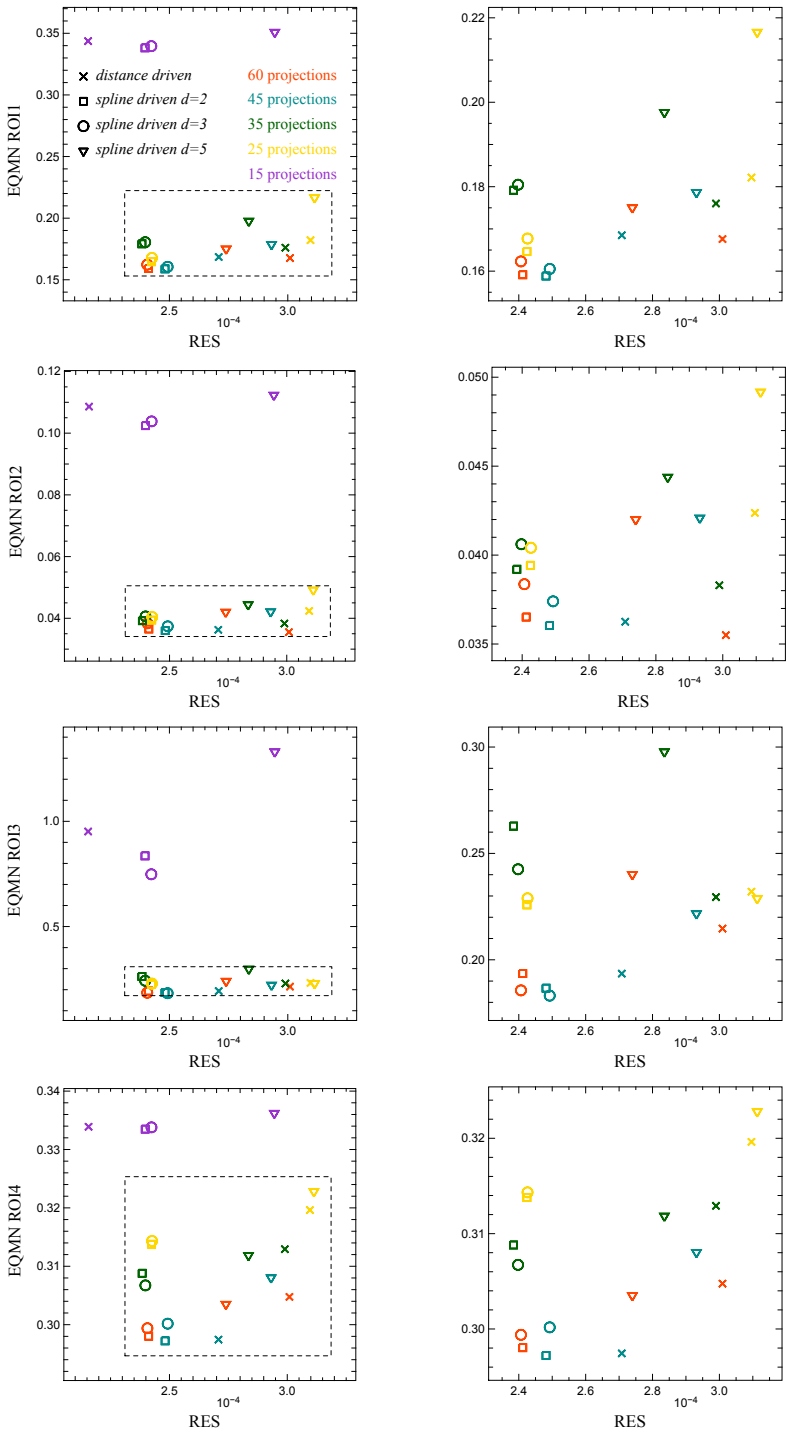


FIGURE 2.51: Graphes donnant l'erreur EQMN dans chaque région d'intérêt ROI, en fonction de l'erreur résiduelle RES, pour les reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD* à projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d. Chaque symbole correspond à la reconstruction donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2, pour un projecteur et un nombre de projections donnés — les reconstructions encadrées en bleu sur les figures 2.44 et 2.45. Les croix correspondent à *distance driven*, les carrés à *spline driven* avec $d = 2$, les cercles à *spline driven* avec $d = 3$ et les triangles inversés à *spline driven* avec $d = 5$. Chaque couleur correspond à un nombre de projections donné : 60 (rouge), 45 (bleu), 35 (vert), 25 (jaune) et 15 (violet). Les graphes de la colonne de gauche montrent l'ensemble des reconstructions. La colonne de droite montre des agrandissements respectifs des graphes ôtant les points correspondant à 15 projections, et identifiés sur la colonne de droite par un rectangle en trait pointillé noir.

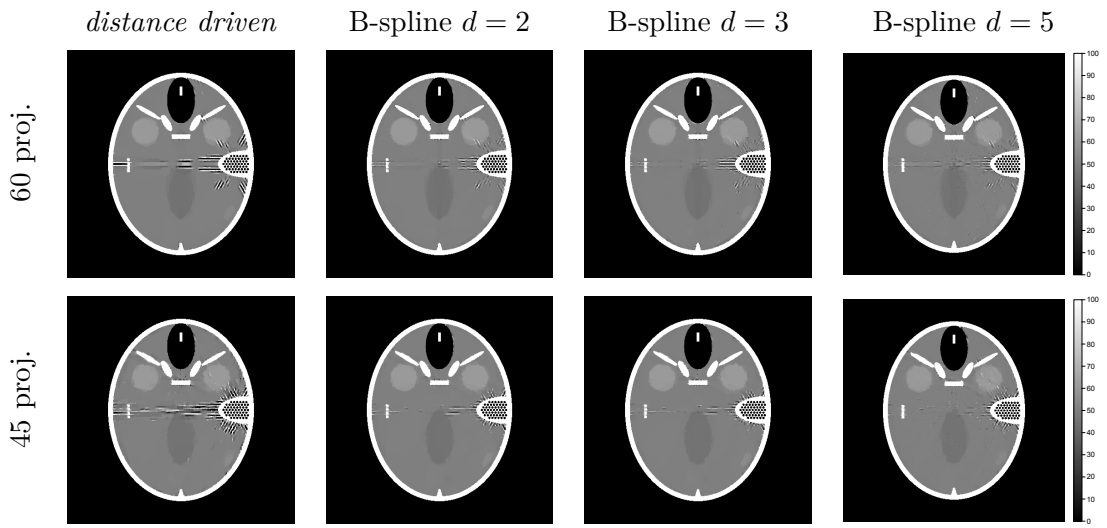


FIGURE 2.52: Reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, donnant l'EQMN minimale dans la ROI2, réalisées à partir de 60 et 45 projections non bruitées, avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d.

quelle que soit la région d'intérêt considérée. Le projecteur *distance driven* atteint également des bons niveaux en termes d'erreur EQMN, mais avec un accord aux données plus faible. Ainsi, à erreur EQMN égale, notre projecteur est plus réaliste vis-à-vis des projections. En ce qui concerne le nombre de projections, c'est logiquement que l'erreur EQMN est la plus faible pour 45 et 60 projections, que pour 35 et 25 projections. Nous remarquons aussi que dans la plupart des ROI, particulièrement la ROI2, l'erreur EQMN à 45 projections est plus faible qu'à 60 projections pour le projecteur *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$. Nous décidons alors de comparer visuellement les meilleures reconstructions pour 45 et 60 projections, sur la figure 2.52. Nous constatons en effet que les artéfacts sont légèrement moins forts dans la ROI2 pour les degrés 2 et 3 de *spline driven*, contrairement au degré 5 et à *distance driven*. Cela peut être dû au fait que le positionnement des projections est plus favorable dans cette configuration pour ces modèles, rendant compte de la non-généralité de nos simulations, comme nous l'avons souligné auparavant.

L'erreur résiduelle RES est quant à elle plus concentrée quel que soit le nombre de projections pour le projecteur *spline driven*, ce qui tendrait à montrer que notre modèle explique les données de la même façon quelle que soit leur parcimonie. C'est un avantage certain car cela signifie qu'il est très cohérent vis-à-vis des données quel que soit le degré à partir de 2. Ce n'est pas le cas de *distance driven* qui montre une variance plus importante de l'erreur résiduelle RES. Ceci dit, c'est le cas également de *spline driven* à $d = 5$, qui ne corrobore pas les analyses faites pour $d = 2$ et $d = 3$, aussi bien pour l'erreur EQMN que RES, tendant à montrer que ce modèle n'explique pas correctement les données, ce qui s'en ressent aussi sur la qualité des images reconstruites en terme d'erreur EQMN. Cela confirme aussi ce que nous avions vu dans nos simulations d'un bord franc 1-D et 2-D dans la section 2.1.1 (*cf.* Fig. 2.4 et 2.5), qui avaient montré que l'erreur de modélisation augmentait à degré croissant.

Une autre observation que l'on peut faire concerne le niveau moyen atteint par l'erreur RES, tout projecteur confondu, qui est d'environ $2{,}6 \times 10^{-4}$. Or, rappelons-nous que nous avions calculé une estimation du niveau atteignable d'erreur de reconstruction (*cf.* équation 2.86), si les seules erreurs présentes dans les reconstructions étaient les erreurs de modélisation pures σ_{data}. Ce niveau était d'environ $4{,}7 \times 10^{-4}$ pour *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$, $4{,}8 \times 10^{-4}$ pour

$d = 5$, et $5{,}1 \times 10^{-4}$ pour *distance driven* (*cf.* tableau 2.1). L'erreur résiduelle moyenne atteinte est donc dans le bon ordre de grandeur de ces estimations. Cependant nous constatons qu'elle est même inférieure, ce qui peut paraître incohérent. Cela signifie simplement que la solution qui minimise le critère pour la reconstruction n'est pas l'objet de référence, et ce même pur des projections non bruitées. C'est le signe que le problème est mal posé. En effet, les niveaux d'erreur que nous avons estimés constituent l'écart aux données atteignable seulement si l'on utilise suffisamment de projections pour décrire totalement l'objet, notamment en termes de fréquences spatiales. En reconstruisant avec moins de projections, nous modifions le problème, en introduisant une dégénérescence du système d'équations, de telle manière que les données ne reflètent plus le même objet, voire un objet unique. L'algorithme de reconstruction cherche donc toujours à minimiser un écart aux données, mais entaché d'incertitudes puisqu'il n'y a plus unicité de la solution. Pour contrôler cette dérive et reconstruire "le bon objet", la régularisation oriente la reconstruction vers une solution plus plausible, au sens des a priori. Le critère à minimiser s'en trouve donc encore modifié, modifiant également la solution optimale. Cela explique que l'erreur résiduelle n'atteigne pas le niveau estimé par les seules erreurs de modélisation pures, puisque les nouvelles solutions possibles ne dépendent plus uniquement du modèle de projection. Dans le cas de nos expériences, ce résidu est même inférieur. Or, l'erreur résiduelle n'étant rien d'autre qu'une erreur quadratique moyenne dans l'espace des projections, elle est donc liée au contenu spectral des reprojections de la solution par rapport aux projections initiales, le minimum devant logiquement être atteint si tout le spectre est "expliqué" — le critère est convexe. Comment expliquer alors qu'à faible nombre de projections, *i.e.* des données déficientes en information spectrale, la solution trouvée puisse engendrer des résidus inférieurs ? La réponse pourrait se trouver dans la régularisation. En effet, nous utilisons la variation totale, dont l'une des propriétés est de favoriser la continuité par morceaux des objets, donc par extension de conserver des bords francs entre les structures. Ainsi, là où les données échouent à retrouver les hautes fréquences spatiales de l'objet, c'est la régularisation qui pourrait potentiellement se charger de "combler" les trous dans le spectre de l'objet, et par voie de conséquence dans les données. Bien que cette dernière remarque soit spéculative, elle pourrait donc expliquer le fait que la solution optimale minimisant le critère de reconstruction puisse passer en-dessous du niveau résiduel attendu.

Nous ne pouvons néanmoins pas nous en remettre totalement à la régularisation pour trouver la solution, qui doit certes satisfaire les données, mais tout en restant plausible. Dans ce cadre, c'est le modèle de projection qui garde la cohérence de la solution avec les données. Ce dernier étant imparfait, il peut être extrêmement sensible à des perturbations dans les données — comme la réduction de leur nombre : c'est le mauvais conditionnement. Si celui-ci exige un poids de régularisation trop fort, nous perdons la structure correcte de l'objet, même si les données reprojetées semblent en bon accord. Ainsi, une bonne fidélité aux données n'est le gage d'une bonne reconstruction que si le modèle est suffisamment précis et stable pour éviter qu'une petite perturbation dans les données n'engendre une variation importante de l'erreur résiduelle. Cela nous ramène à nos précédentes analyses. Dans ce cadre, c'est bien *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$ qui se montre le plus efficace, avec une erreur résiduelle plus stable aux variations du nombre de projections, et de surcroît plus faible qu'avec *distance driven*. Notre projecteur est donc mieux conditionné, ce que nous avons déjà pu constater sur les reconstructions en voyant que l'image reconstruite garde une meilleure cohérence avec l'objet original à mesure que le niveau de régularisation décroît (*cf.* Fig. 2.44 et Fig. 2.45). Les niveaux d'erreur EQMN équivalents, voire inférieurs dans certains cas pour *spline driven*, nous prouvent aussi que les reconstructions sont fidèles à l'objet de référence.

Nous devons faire quelques commentaires sur les analyses que nous venons de faire. Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, cette campagne de simulations n'est pas représentative

du comportement général des projecteurs dans ces conditions, car nous avons effectué des reconstructions uniques pour une configuration donnée, et ce sur un objet particulier. Nos résultats quantitatifs sont donc directement liés à ces configurations et à l'objet reconstruit, sans nuance vis-à-vis de la variabilité éventuelle de certains paramètres, tels que les positions angulaires des projections. Autrement dit, ces quantités n'apportent pas d'information sur la variance des erreurs en fonction de ce genre de perturbations — décalages angulaires des projections. Cela peut expliquer certains comportements chaotiques sur nos graphes d'erreurs, qui peuvent paraître illogiques, comme par exemple lorsque les erreurs EQMN à 45 projections sont inférieures à celles obtenues à 60 projections. Nous devons donc relativiser nos conclusions, en gardant à l'esprit la variabilité éventuelle de nos résultats si les configurations testées avaient pris en compte tous les cas possibles. Néanmoins, nos comparaisons entre les projecteurs *spline driven* et *distance driven* mettent clairement en avant les gains de notre projecteur en termes de qualité de reconstruction, dans cette expérience particulière. Ces différences sont suffisamment importantes pour n'être pas seulement le fait du hasard des configurations, et rendent bel et bien compte du comportement effectif de ces divers modèles en situation. Nous le verrons d'ailleurs dans les reconstructions à projections bruitées, et celles à différentes résolutions des voxels, qui attesteront de la reproductibilité de nos conclusions dans des conditions d'expérience différentes.

Reconstructions à projections bruitées

Toujours pour une résolution des voxels 500×500, nous réalisons la même étude que précédemment, mais cette fois-ci en considérant les reconstructions réalisées à partir de projections perturbées par du bruit. Nous rappelons que nous avons créé deux jeux de projections bruitées avec $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$.

Les meilleures reconstructions au sens de l'erreur EQMN minimale dans la ROI2 — notre critère objectif de sélection — sont visualisées sur les figures 2.53 et 2.54. Nous décidons volontairement de ne pas visualiser les reconstructions à 15 projections étant donné la mauvaise qualité qu'elles engendraient déjà à partir des projections non bruitées. L'observation de ces images reconstruites nous permet de voir qu'aux artéfacts de reconstructions précédemment observés, se rajoutent les dégradations dues au bruit dans les données qui, à mesure que le poids de la régularisation baisse, engendrent une "rugosité" à l'intérieur des structures, censées être lisses, et qui a pour effet de "noyer" les détails les plus fins, notamment les structures de petite taille ou peu contrastées. Nous observons que les artéfacts structurels, particulièrement ceux provoqués par la ROI1, sont bien plus importants avec *distance driven*. Avec *spline driven*, ceux-ci semblent atténués, probablement par l'effet du bruit qui induit un caractère aléatoire dans les détails haute fréquence, qui sont alors moins "localisables". Ce phénomène atténue alors la dégénérescence provoquée par le caractère très structuré de ces artéfacts, et réduit de fait l'amplification des dégradations en découlant, à la fois par la régularisation et par le bruit de modélisation. De plus, le bruit est compensé dans le terme d'attache aux données $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}$ (*cf.* équation 2.87) par l'inverse de sa covariance $\mathbf{W}$, plus importante dans les zones fortement atténuantes. Or, les structures fortement constrastées de la ROI1 appartenant à cette catégorie, elles sont de surcroît pondérées dans les données par cette matrice $\mathbf{W}$. Leur influence dans la reconstruction est donc diminuée, permettant à la régularisation d'effacer plus efficacement les artéfacts en découlant. Le fait que ces artéfacts perdurent plus intensément avec le modèle *distance driven* est le signe que ses erreurs de modélisation intrinsèques entretiennent les dégénérescences à un niveau plus élevé que le niveau du bruit, plus que ne le fait *spline driven*. Ce dernier constat est totalement logique étant donné que nous avons montré que les erreurs de modélisation de *spline driven* étaient bien moins importantes que celles de *distance*

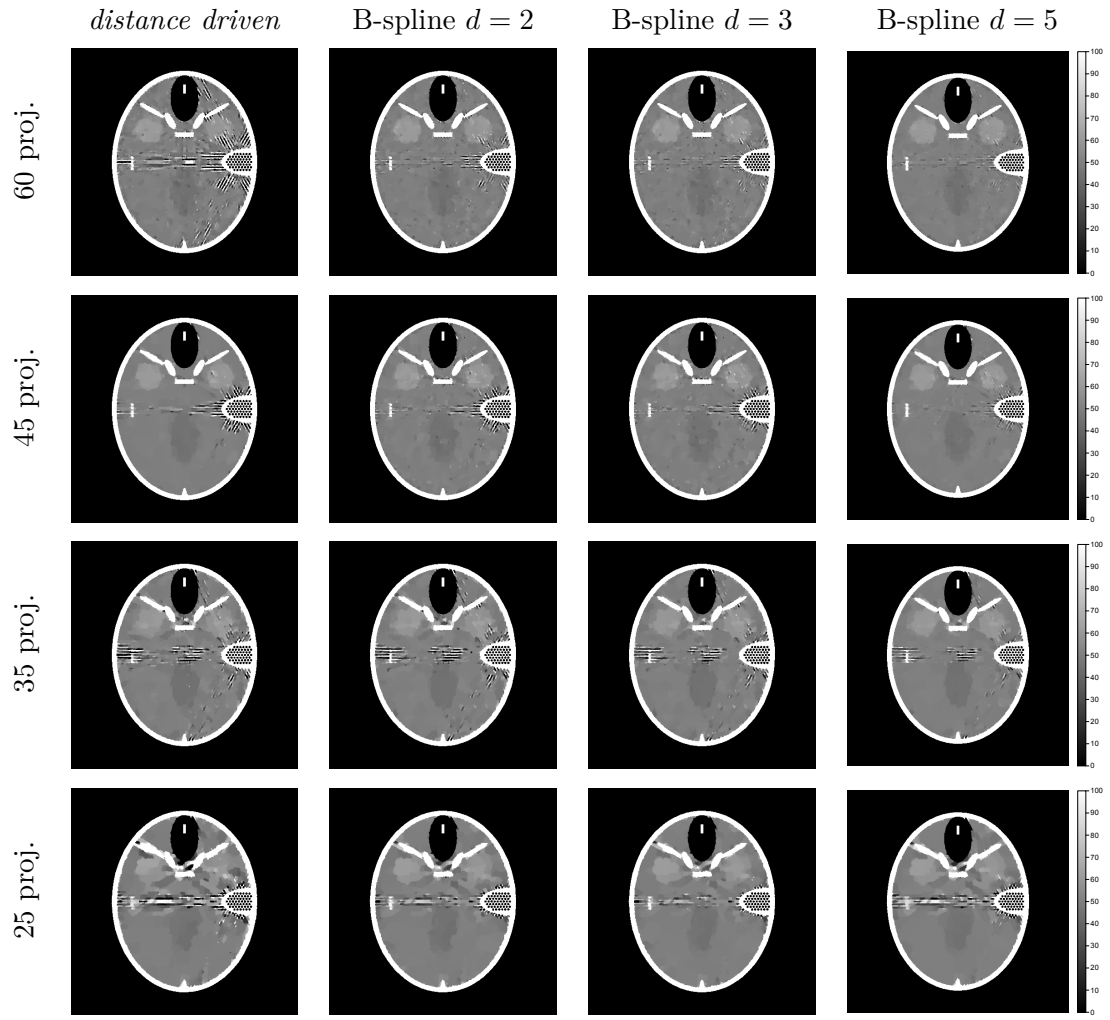


FIGURE 2.53: Reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, donnant l'EQMN minimale dans la ROI2, réalisées à partir de projections bruitées avec $\lambda_0 = 2 \times 10^7$, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, pour différents nombres de projections : 60, 45, 35 et 25.

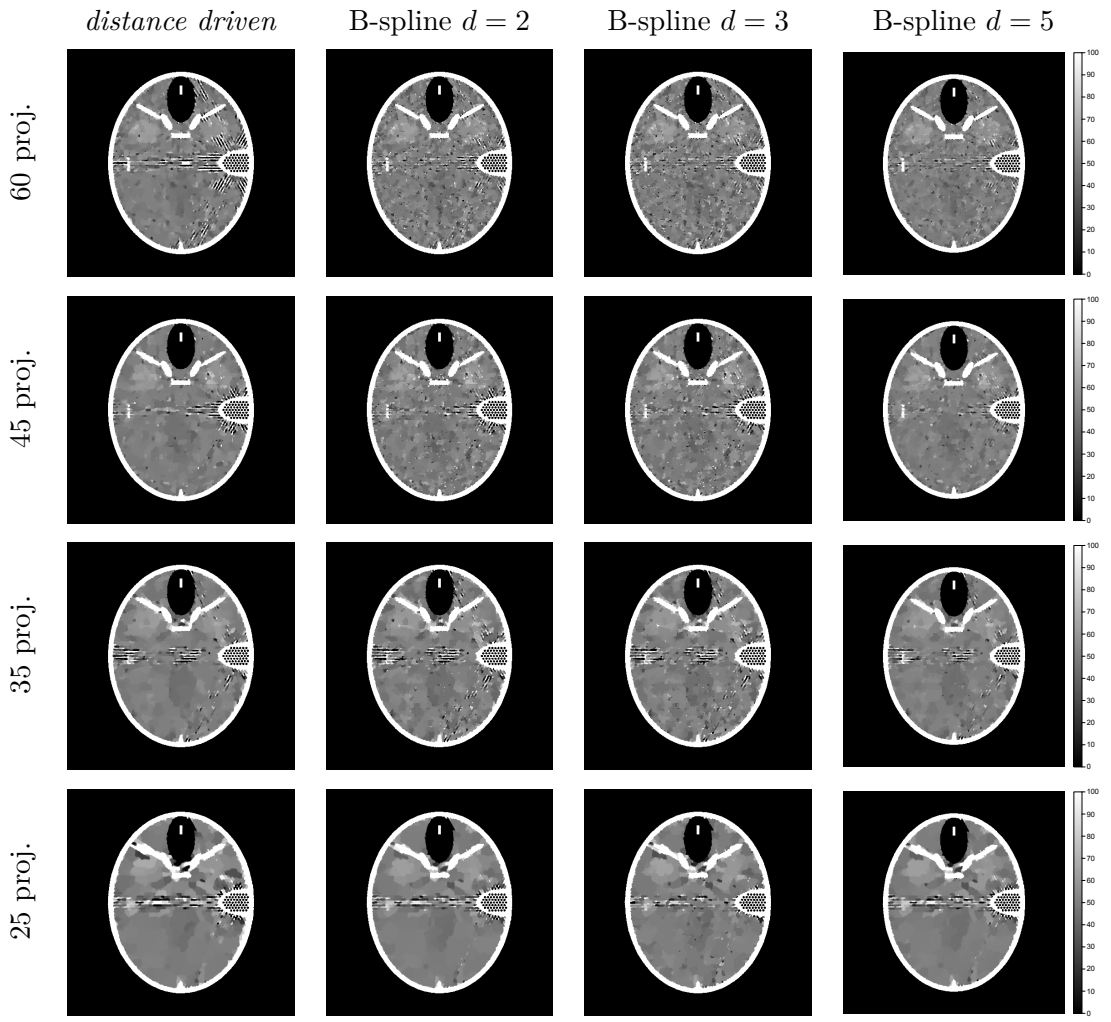


FIGURE 2.54: Reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD*, donnant l'EQMN minimale dans la ROI2, réalisées à partir de projections bruitées avec $\lambda_0 = 4 \times 10^6$, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, pour différents nombres de projections : 60, 45, 35 et 25.

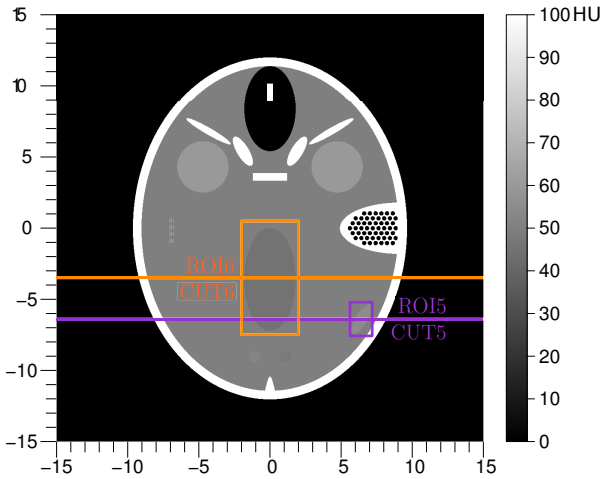


FIGURE 2.55: Identification sur le fantôme *FORBILD* $\boldsymbol{f_{\text{ref}}}$ de référence 1000×1000, des 5ème et 6ème régions d'intérêt ROI5 (violet) et ROI6 (Orange), introduites pour l'étude des reconstructions à données bruitées, et associées à leur profil de coupe respectif CUT5 et CUT6.

driven (*cf.* section 2.3.2).

Compte tenu de nos remarques sur l'effet du bruit dans les petites zones peu contrastées, l'étude des ROI3 et ROI4 est sans intérêt, car les structures correspondantes sont perdues ou trop dégradées. En revanche, l'étude des structures très contrastées des régions ROI1 et ROI2 ne peut être suffisante pour effectuer une comparaison quantitative complète des projecteurs. Nous devons donc nous tourner vers d'autres zones du fantôme *FORBILD*. Introduisons à cet effet deux nouvelles régions d'intérêt, nommées respectivement ROI5 et ROI6. Elles sont visualisées sur la figure 2.55, et représentent des inserts peu contrastés mais de plus grande taille. Sur les figures 2.53 et 2.54, nous observons que ces structures sont décelables sur les reconstructions, avec plus ou moins de facilité suivant les configurations. Elles constituent donc de bons sujets d'analyse, et nous quantifierons les résultats sur ces deux régions en plus des ROI1 et ROI2. Nous les associons d'ores et déjà chacune à deux coupes respectives CUT5 et CUT6, indiquées également sur la figure 2.55.

Après examen visuel des reconstructions, nous estimons que l'observation des cartes d'erreur, comme il a été fait pour les reconstructions à projections non bruitées, n'apporteront rien en termes de comparaison des projecteurs. C'est pourquoi nous décidons de ne pas les visualiser. Nous montrons tout de même les graphes des profils de coupes CUT1 et CUT2 sur la figure 2.56, et CUT5 et CUT6 sur la figure 2.57, suivant le même principe et la même légende que la figure 2.49, et ce pour les deux configurations du bruit dans les données. Une fois encore, la comparaison des modèles s'avère relativement inutile sur ces profils de coupes, qui ne mettent pas en évidence de différence réellement notable. Nous pouvons tout de même remarquer que la récupération des structures contrastées des ROI1 et ROI2 reste efficace, même en présence de bruit. Ce n'est pas le cas pour les structures des ROI5 et ROI6 qui montrent des résultats très chaotiques particulièrement pour $\lambda_0 = 4 \times 10^6$. Les seuls profils acceptables sont obtenus pour $\lambda_0 = 2 \times 10^7$, à 60 et 45 projections pour le profil CUT5. Ceux-ci donnent un léger avantage en faveur de *spline driven*. Pour le profil CUT6, les graphes sont acceptables à tout nombre de projections, avec des performances équivalentes pour tous les modèles. Ces observations demeurent néanmoins trop empiriques pour en tirer une quelconque conclusion valide.

Ainsi seules les données quantitatives — erreurs EQMN et RES— extraites des reconstructions vont permettre des analyses rigoureuses et des comparaisons claires, même si nous prévoyons que les différences devraient être assez ténues. Nous réalisons donc les graphes d'erreur EQMN dans les régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI5 et ROI6, en fonction de l'erreur résiduelle RES, de la même manière que la figure 2.51. La figure 2.58 illustre l'ensemble de ces graphes, chaque colonne représentant les reconstructions à projections bruitées respectivement pour $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$.

Analysons d'abord les résultats concernant *spline driven*. Aussi bien pour $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ que pour $\lambda_0 = 4 \times 10^6$, nous observons, à l'instar de notre étude des reconstructions à projections non bruitées, une erreur résiduelle RES faible et très stable quel que soit le nombre de projections et le degré utilisé dans le projecteur, signe de son bon conditionnement et de sa robustesse, à l'exception de $d = 5$, qui montre un accord aux données plus erratique. Des comportements chaotiques interviennent pour $\lambda_0 = 4 \times 10^6$, notamment à 25 projections et pour $d = 2$, où l'erreur RES devient étrangement supérieure. L'erreur EQMN est globalement décroissante à nombre de projections croissant, avec parfois des inversions entre 60 et 45 projections, surtout pour $\lambda_0 = 4 \times 10^6$, et aussi entre 35 et 25 projections, aux deux λ_0. Ces comportements chaotiques peuvent bien sûr s'expliquer par le fait que nos données quantitatives sont extraites de reconstructions uniques dans chaque configuration, comme nous avons déjà pu l'évoquer. Une tendance plus stable serait certainement obtenue si nous disposions de plusieurs reconstructions pour une configuration donnée, à partir de plusieurs réalisations du

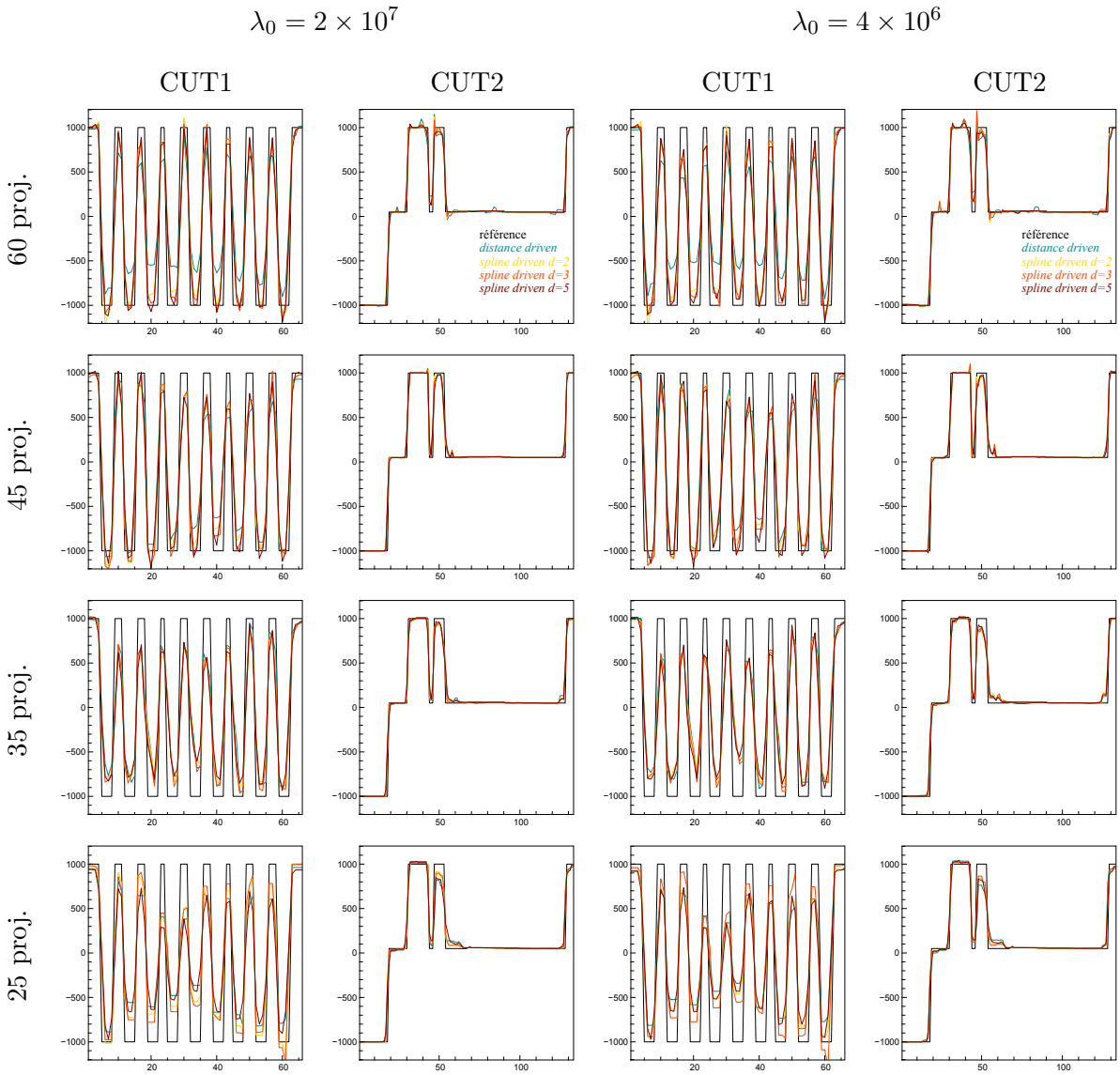


FIGURE 2.56: Profils de coupes CUT1 et CUT2, tracés pour les reconstructions 500×500 à EQMN minimale dans la ROI2, à partir de projections bruitées avec $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ (double colonne de gauche) et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$ (double colonne de droite). Un graphe correspond à un profil de coupe et un nombre de projections donnés. Chaque graphe compare les profils des reconstructions correspondantes avec les quatre modèles de projection : *distance driven* (bleu), *spline driven* à $d = 2$ (jaune), *spline driven* à $d = 3$ (orange) et *spline driven* à $d = 5$ (rouge). Le profil de référence est tracé en noir.

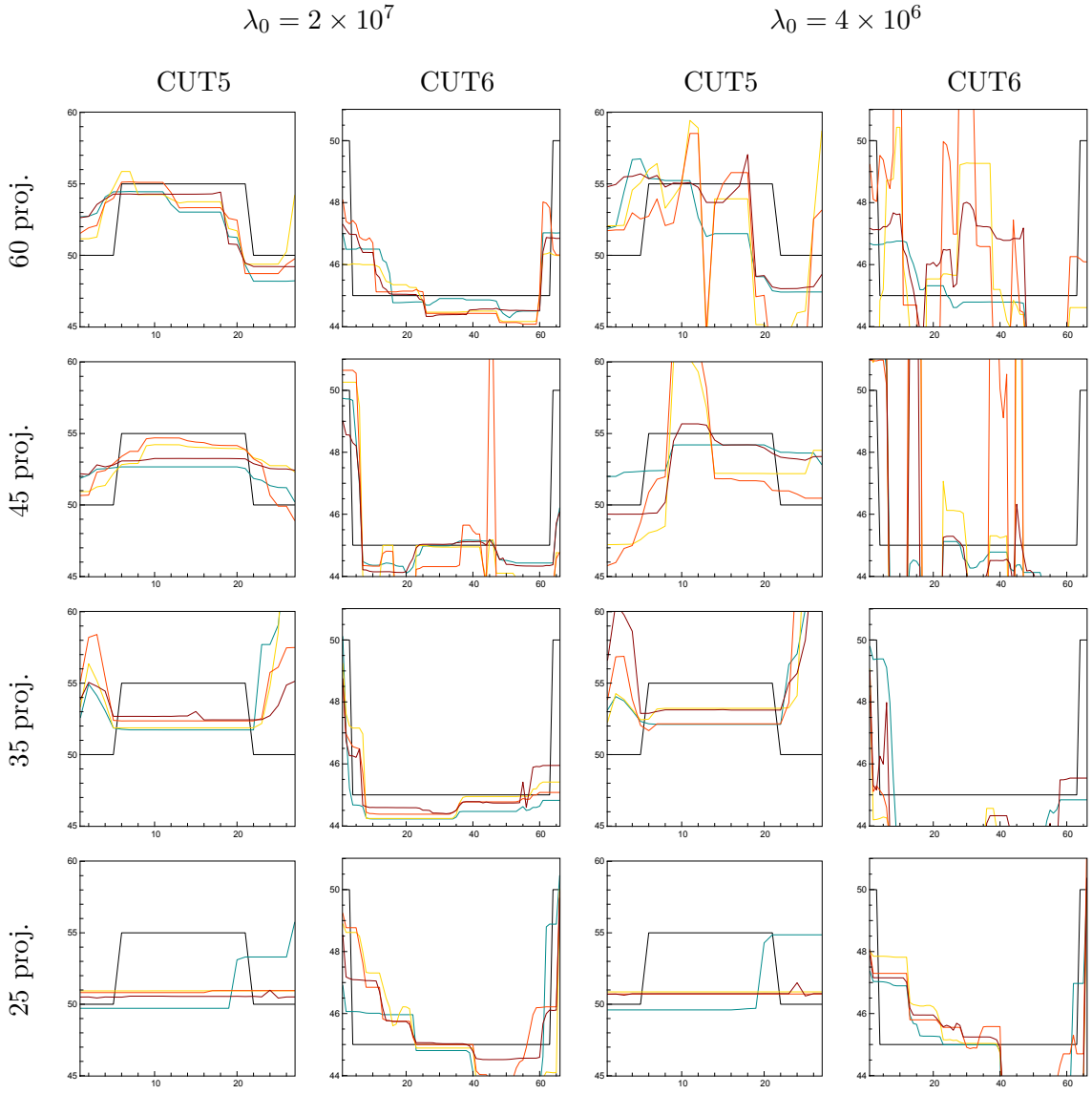


FIGURE 2.57: Profils de coupes CUT5 et CUT6, tracés pour les reconstructions 500×500 à EQMN minimale dans la ROI2, à partir de projections bruitées avec $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ (double colonne de gauche) et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$ (double colonne de droite). Un graphe correspond à un profil de coupe et un nombre de projections donnés. Chaque graphe compare les profils des reconstructions correspondantes avec les quatre modèles de projection : *distance driven* (bleu), *spline driven* à $d = 2$ (jaune), *spline driven* à $d = 3$ (orange) et *spline driven* à $d = 5$ (rouge). Le profil de référence est tracé en noir.

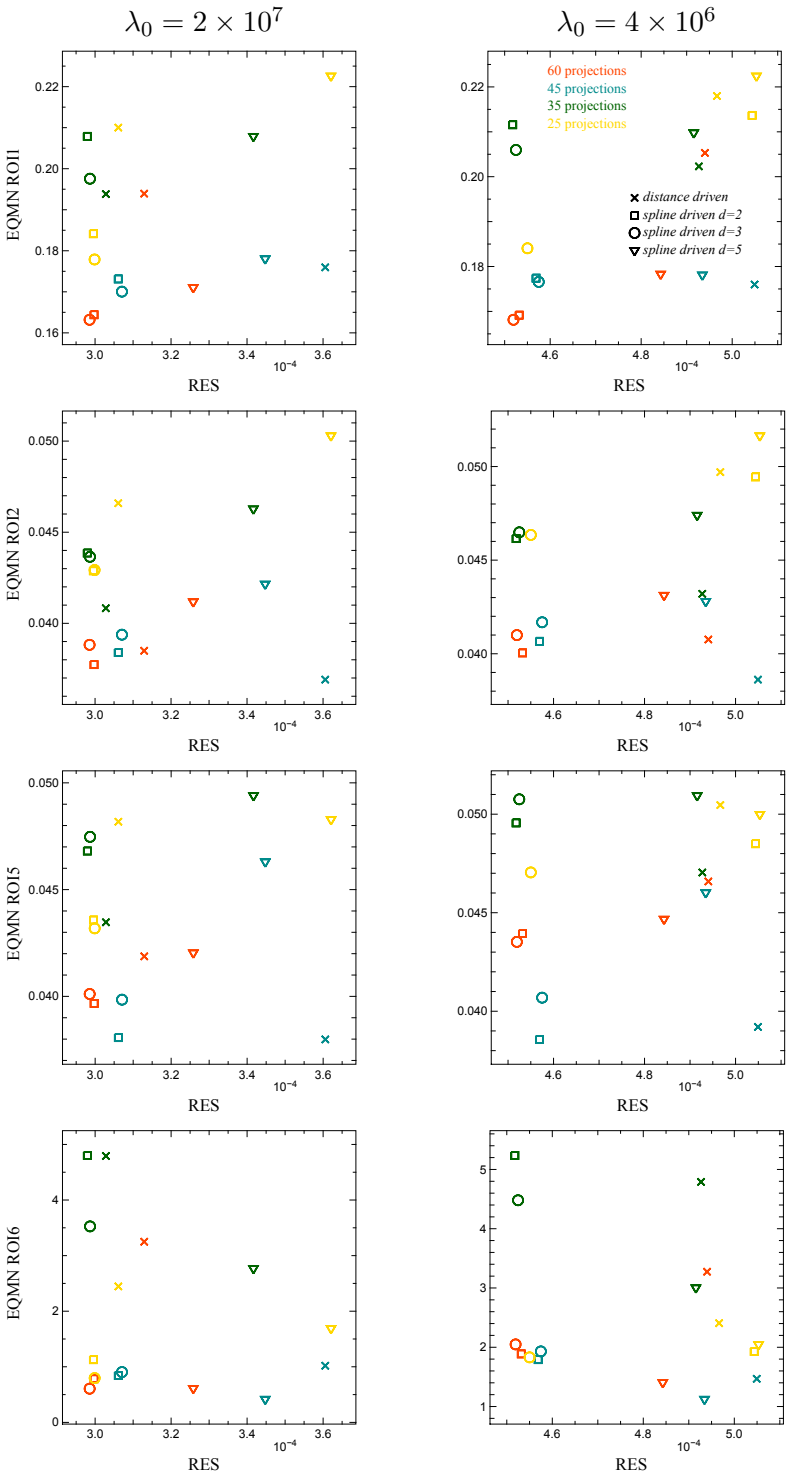


FIGURE 2.58: Graphes donnant l'erreur EQMN dans les régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI5 et ROI6, en fonction de l'erreur résiduelle RES, pour les reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD* à projections bruitées avec $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ (colonne de gauche) et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$ (colonne de droite), réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d. Chaque symbole correspond à la reconstruction donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2, pour un projecteur et un nombre de projections donnés. Les croix correspondent à *distance driven*, les carrés à *spline driven* avec $d = 2$, les cercles à *spline driven* avec $d = 3$ et les triangles inversés à *spline driven* avec $d = 5$. Chaque couleur correspond à un nombre de projections donné : 60 (rouge), 45 (bleu), 35 (vert) et 25 (jaune).

bruit, afin d'en extraire une statistique plus générale. Néanmoins la reproductibilité apparente de nos observations pour les différentes régions d'intérêt et pour les deux statistiques de bruit testées nous confirment que nos analyses sont suffisamment robustes. En ce qui concerne *distance driven*, nous constatons que l'erreur résiduelle RES est assez stable pour $\lambda_0 = 2 \times 10^7$, et d'un niveau égal à *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$, sauf pour 45 projections. Elle est en revanche plus stable pour $\lambda_0 = 4 \times 10^6$, mais est cette fois-ci supérieure à l'erreur résiduelle avec *spline driven*. Un bruit plus important semble donc améliorer le conditionnement du problème. Cela peut s'expliquer par le fait que les erreurs de modélisation commencent à être "noyées" dans le niveau de bruit. Ainsi la régularisation a, dans ces conditions, davantage un rôle de débruitage classique, donc plus efficace, en étant moins perturbée par l'amplification du bruit de modélisation. Ces constats sont surtout valables pour 60 et 45 projections, où le manque de données ne provoque pas trop d'erreurs de reconstruction. Nous observons alors, sur les figures 2.53 et 2.54, que les artéfacts dominants pour $\lambda_0 = 4 \times 10^6$ sont bien ceux dus au bruit, qui, par leur aspect plus aléatoire et isotrope, sont certainement mieux contrôlés par la régularisation que les artéfacts structurels, donnant une allure plus homogène, même si la qualité visuelle des reconstructions est plus dégradée. Les images reconstruites avec *distance driven* restent néanmoins visuellement plus touchées que celles reconstruites avec *spline driven*.

L'erreur EQMN, pour *distance driven*, ne suit pas systématiquement une décroissance logique avec la croissance du nombre de projections. Cela montre que le bruit perturbe plus les reconstructions utilisant ce projecteur, qui entraîne des erreurs plus chaotiques. Au final, le modèle *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$ offre le meilleur accord aux données à erreur EQMN égale ou inférieure à celles de *distance driven*, et ce pour les 2 statistiques de bruit, et particulièrement pour 45 et 60 projections. Le projecteur *spline driven* à $d = 5$ offre à la fois des erreurs EQMN et RES supérieures par rapport à $d = 2$ et $d = 3$ et *distance driven*. Pourtant nous constatons, sur la figure 2.53, que ce sont les reconstructions donnant, pour $\lambda_0 = 2 \times 10^7$, la meilleure qualité visuelle, mais certainement au prix d'une perte de résolution et de contraste, expliquant les fortes erreurs.

Ainsi nous retrouvons, pour des projections bruitées, des conclusions identiques à celles établies pour les reconstructions à projections non bruitées, à savoir que notre modèle *spline driven* traduit une meilleure fidélité aux données à erreur de reconstruction équivalente, avec en général une qualité visuelle des reconstructions supérieure à *distance driven*. Cela tend à montrer que le comportement de notre modèle est globalement reproductible dans des conditions d'expérience différentes, prouvant sa robustesse par rapport au modèle *distance driven*.

La figure 2.59 donne le même type de graphes, toujours dans les régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI5 et ROI6, mais en comparant cette fois-ci les différents niveaux de bruit, pour les reconstructions 500×500 à 60 projections. La première observation est bien sûr l'augmentation globale des erreurs à niveau de bruit croissant. Si nous regardons le niveau moyen d'erreur résiduelle RES, tout projecteur confondu, pour chaque niveau de bruit, nous constatons qu'il atteint bien le niveau que nous avons injecté dans les projections simulées. Pour rappel, nous avions déterminé un seuil égal à l'erreur de modélisation pure σ_{data} de *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$, qui était de $4{,}7 \times 10^{-4}$. Nous avions ensuite défini les deux niveaux de bruit σ_{noise}, correspondant respectivement à σ_{data} ($\lambda_0 = 4 \times 10^6$) et $(1/2) \times \sigma_{\mathsf{data}}$ ($\lambda_0 = 2 \times 10^7$). Ainsi, pour $\lambda_0 = 4 \times 10^6$, le niveau résiduel atteint est très proche du niveau de bruit injecté. Pour $\lambda_0 = 2 \times 10^7$, le niveau résiduel atteint est quant à lui légèrement supérieur. Nous avons déjà expliqué ce phénomène, à savoir qu'à $\lambda_0 = 4 \times 10^6$, le bruit domine largement les erreurs de modélisation, qui sont alors peu amplifiées, car "noyées". Pour $\lambda_0 = 2 \times 10^7$, le bruit de modélisation — les artéfacts structurels — persiste encore ; il est donc amplifié. Il faut cependant prendre garde à ne pas considérer le niveau résiduel atteint pour les reconstructions à données non bruitées, comme le niveau de bruit de modélisation absolu. En effet, le nombre restreint de

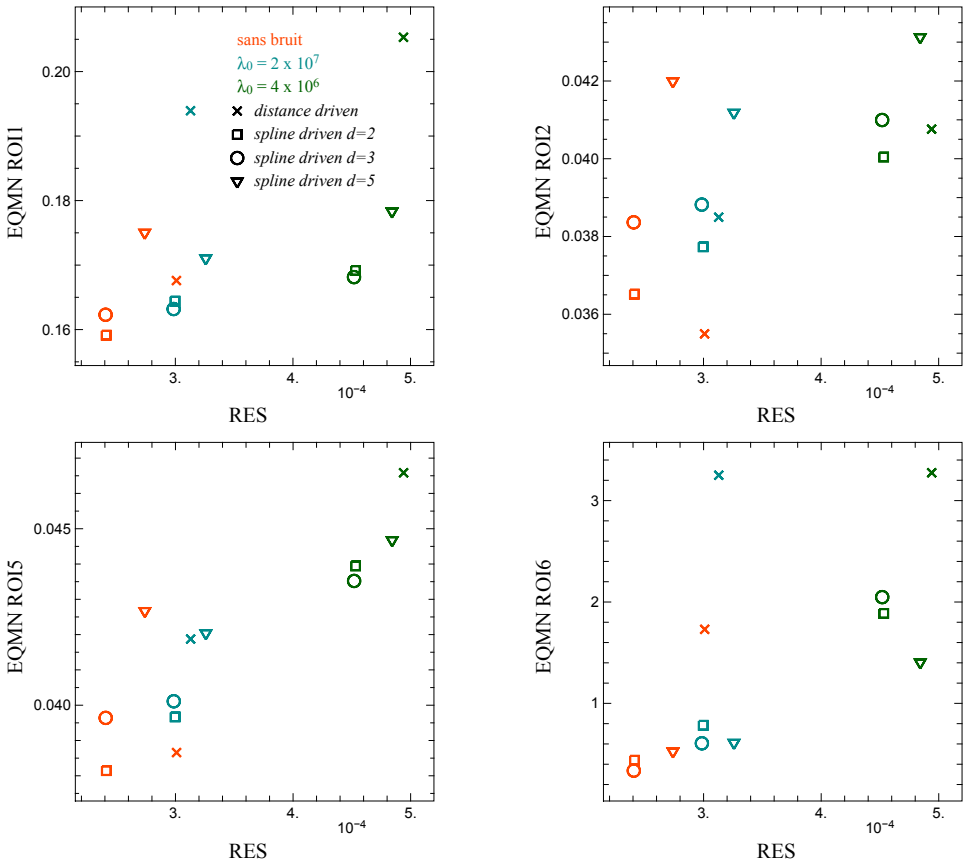


FIGURE 2.59: Graphes donnant l'erreur EQMN dans les régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI5 et ROI6, en fonction de l'erreur résiduelle RES, pour les reconstructions 500×500 du fantôme *FORBILD* à 60 projections, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, et pour les 3 statistiques du bruit : λ_0 infini (pas de bruit), $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$. Chaque symbole correspond à la reconstruction donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2, pour un projecteur et un λ_0 donnés. Les croix correspondent à *distance driven*, les carrés à *spline driven* avec $d = 2$, les cercles à *spline driven* avec $d = 3$ et les triangles inversés à *spline driven* avec $d = 5$. Chaque couleur correspond à un niveau de bruit donné : λ_0 infini (rouge), $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ (bleu) et $\lambda_0 = 4 \times 10^6$ (vert).

projections engendrant un problème mal posé, qui plus est mal conditionné, fait que les erreurs de modélisation s'auto-entretiennent et s'amplifient d'autant plus qu'elles sont dominantes. Ainsi, à bruit stochastique croissant, le phénomène d'amplification est certainement atténué, et le bruit de modélisation s'en trouve réduit. C'est pourquoi l'erreur résiduelle du bruit de modélisation n'est pas indépendante de celle du bruit stochastique, ce qui explique que l'erreur RES à données non bruitées ne se somme pas avec le niveau de bruit injecté. À niveau de bruit donné, *spline driven* à $d = 2$ et $d = 3$ montre ainsi un bruit résiduel toujours inférieur à *distance driven*, donc beaucoup plus proche du niveau de bruit stochastique, ce qui signifie que le bruit de modélisation y est moins important.

Toutes nos analyses, à la fois quantitatives grâce aux graphes d'erreurs et empiriques grâce à la visualisation des reconstructions, montrent que le traitement correct du problème de la reconstruction par l'approche inverse ne dépend pas d'un unique élément comme le modèle de projection, mais constitue un tout où, notamment, modèle et régularisation agissent de concert pour déterminer la solution expliquant les données de façon optimale, tout en étant plausible. Ainsi nous voyons que même si la régularisation joue un rôle très important dans la qualité de reconstruction, un modèle plus pertinent peut encore améliorer la cohérence du problème posé pour permettre de gagner encore sur l'optimalité de la solution. C'est dans ce cadre que *spline driven*, du fait de sa précision théorique, tant sur la modélisation intrinsèque avec les B-splines que sur les faibles approximations qu'il met en œuvre, permet de mieux conditionner le problème pour mieux extraire l'information des données et obtenir des images reconstruites de meilleure qualité, et ce avec un nombre de projections plus faible.

Influence de la résolution des voxels

Jusqu'à maintenant, nos comparaisons ont été effectuées, rappelons-le, pour les reconstructions 500×500. Nous allons voir à présent si elles se vérifient à différentes résolutions des voxels de l'image reconstruite, et quelle est l'influence de ce paramètre. Nous considérons alors les reconstructions à 60 projections non bruitées. Le paramètre variable, en plus du modèle de projection, est cette fois la taille de l'image reconstruite, autrement dit la résolution des voxels[32] : $0{,}6 \times 0{,}6$mm (500×500), $0{,}8 \times 0{,}8$mm (375×375), $1{,}2 \times 1{,}2$mm (250×250) et $2{,}4 \times 2{,}4$mm (125×125).

La figure 2.60 illustre l'ensemble des reconstructions, donnant l'EQMN minimale dans la ROI2. De prime abord, nous observons que les artéfacts provoqués par la ROI1 sont largement visibles sur ces reconstructions censées donner la qualité optimale d'image, surtout pour les reconstructions réalisées avec *spline driven*. Afin de montrer que la sélection des "meilleures" reconstructions suivant ce critère est acceptable, on trouvera sur la figure 2.61 les reconstructions à la résolution 375×375 à différents niveaux de régularisation, *i.e.* pour les hyperparamètres allant de μ_5 à μ_{10}. Nous constatons que des reconstructions avec *spline driven* plus régularisées présentent une allure plus "lisse", mais peut-être au prix d'une perte de certains détails de structures, difficilement décelables visuellement. Nous voyons alors l'erreur EQMN minimale dans la ROI2 (images encadrées en bleu) est atteinte pour *spline driven* à un poids de régularisation beaucoup plus faible que pour *distance driven*. Cela signifie que notre modèle a permis de contrôler suffisamment l'amplification des artéfacts pour atteindre un niveau de régularisation adéquat révélant mieux les structures fines, et engendrant une erreur EQMN plus faible. Ainsi, nous pensons important de faire nos comparaisons des projecteurs à partir de ces reconstructions-ci, en faisant abstraction des dégradations occasionnées par la ROI1. En effet les artéfacts dus à cette structure particulière ne doivent pas éluder les gains en récupération

32. Le fantôme *FORBILD* conserve sa taille intrinsèque de 30×30cm, car le détecteur reste dimensionné à l'identique.

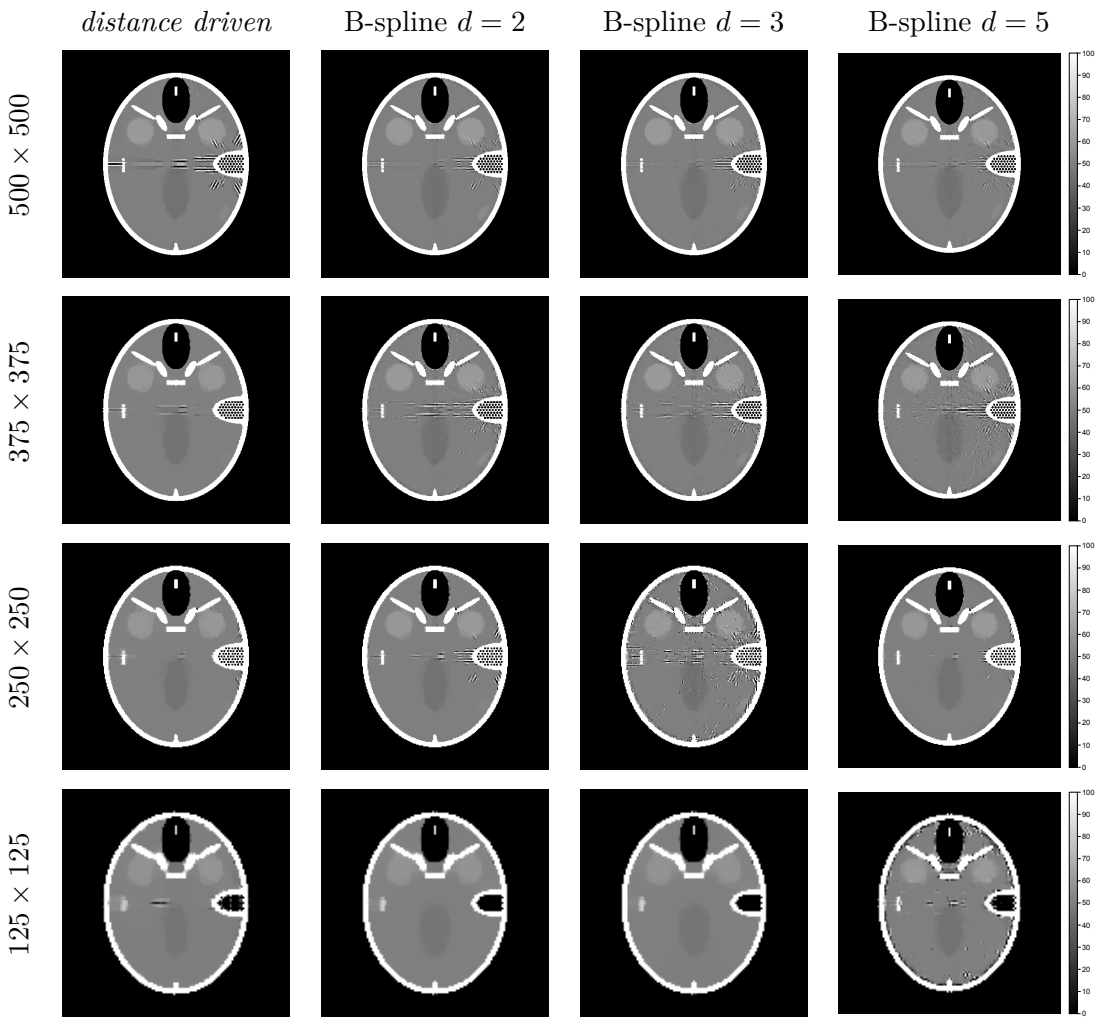


FIGURE 2.60: Reconstructions du fantôme *FORBILD*, donnant l'EQMN minimale dans la ROI2, réalisées à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, pour différentes résolutions des voxels : $0{,}6 \times 0{,}6$mm (500×500), $0{,}8 \times 0{,}8$mm (375×375), $1{,}2 \times 1{,}2$mm (250×250) et $2{,}4 \times 2{,}4$mm (125×125).

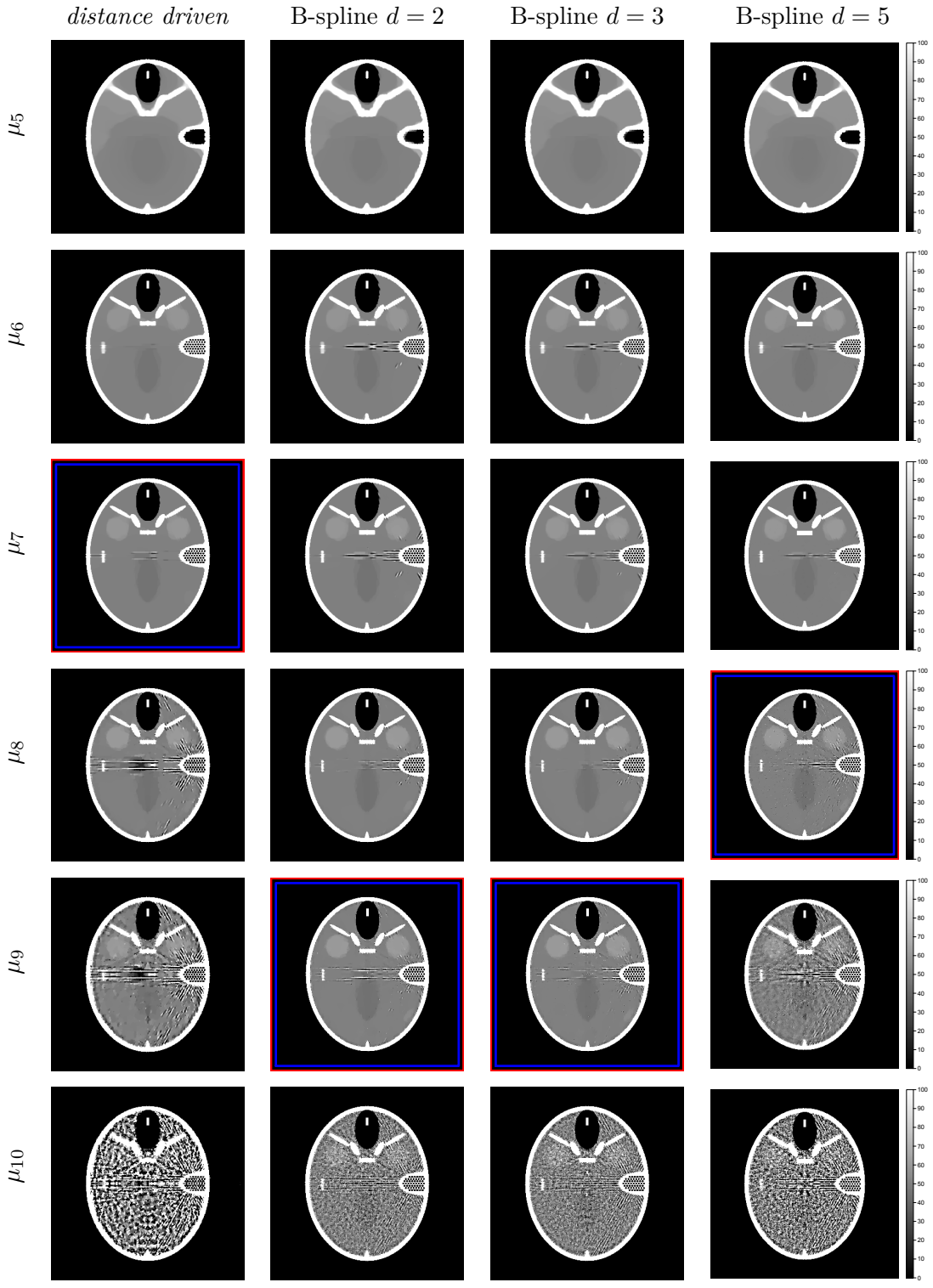


FIGURE 2.61: Reconstructions 375×375 du fantôme *FORBILD*, à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d, pour les poids de régularisation allant de μ_5 à μ_{10}. Les images encadrées en rouge correspondent aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI1, et celles encadrées en bleu aux reconstructions donnant l'EQMN minimale dans la ROI2.

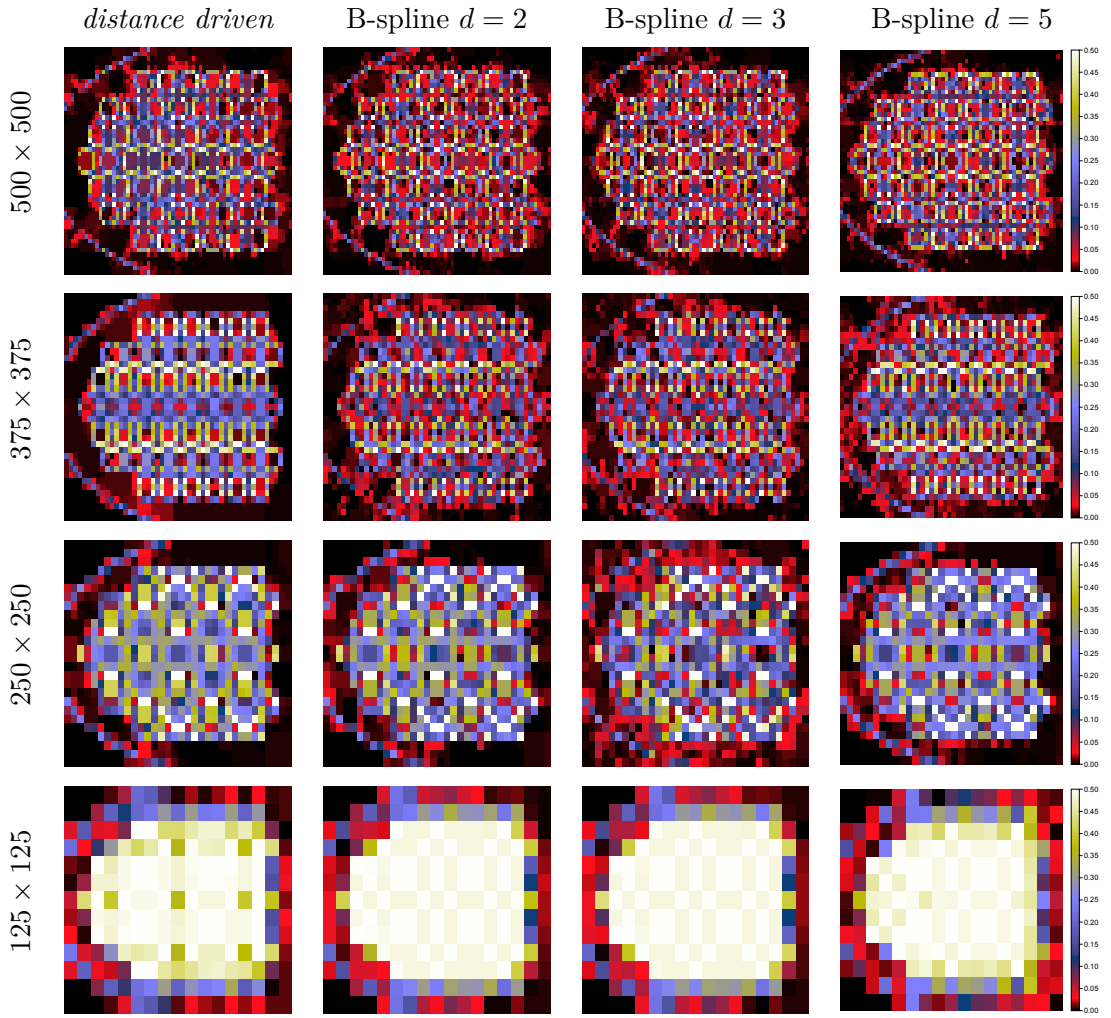


FIGURE 2.62: Cartes d'erreur quadratique, dans la région d'intérêt ROI1, des reconstructions du fantôme *FORBILD*, à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d et pour différentes résolutions des voxels — 500×500, 375×375, 250×250 et 125×125, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

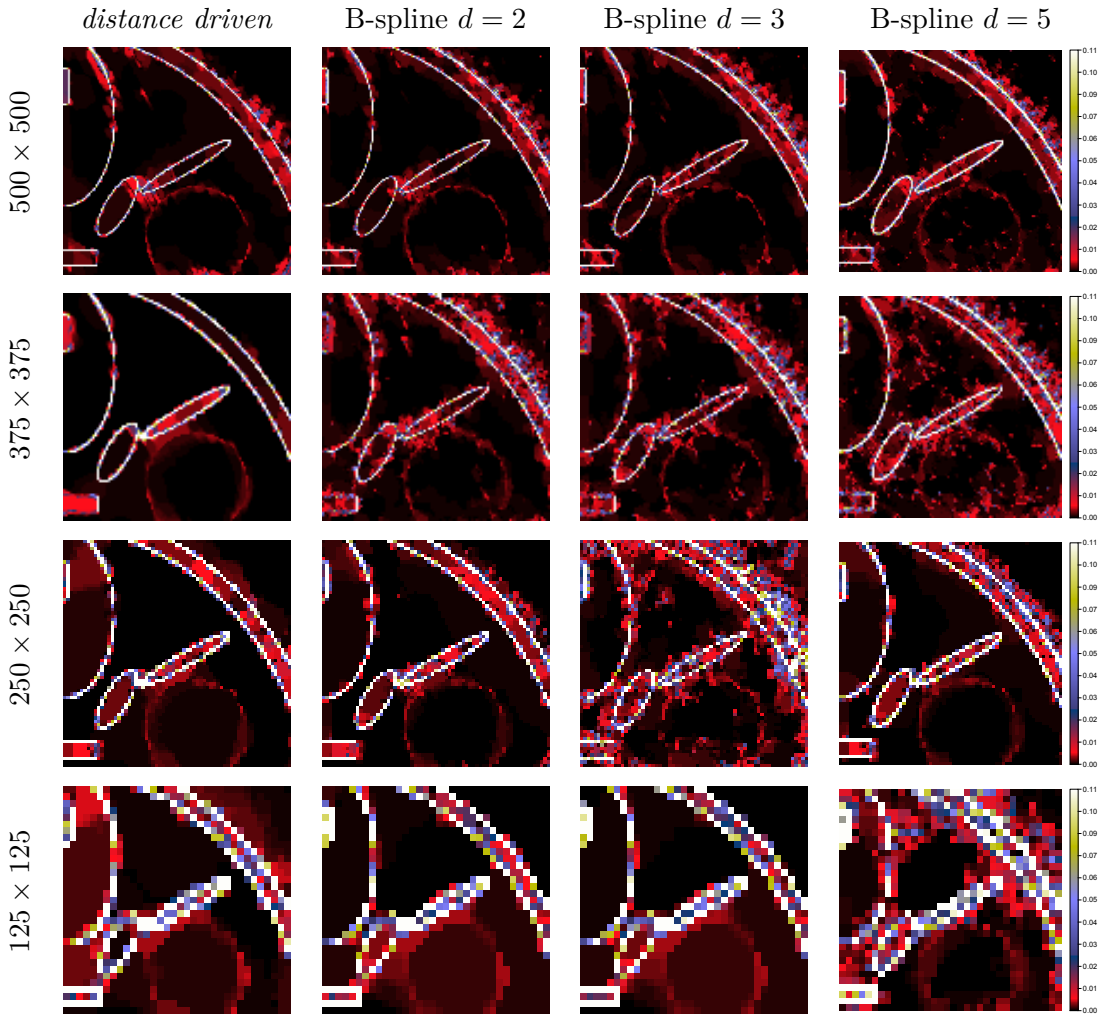


FIGURE 2.63: Cartes d'erreur quadratique, dans la région d'intérêt ROI2, des reconstructions du fantôme *FORBILD*, à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d et pour différentes résolutions des voxels — 500×500, 375×375, 250×250 et 125×125, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

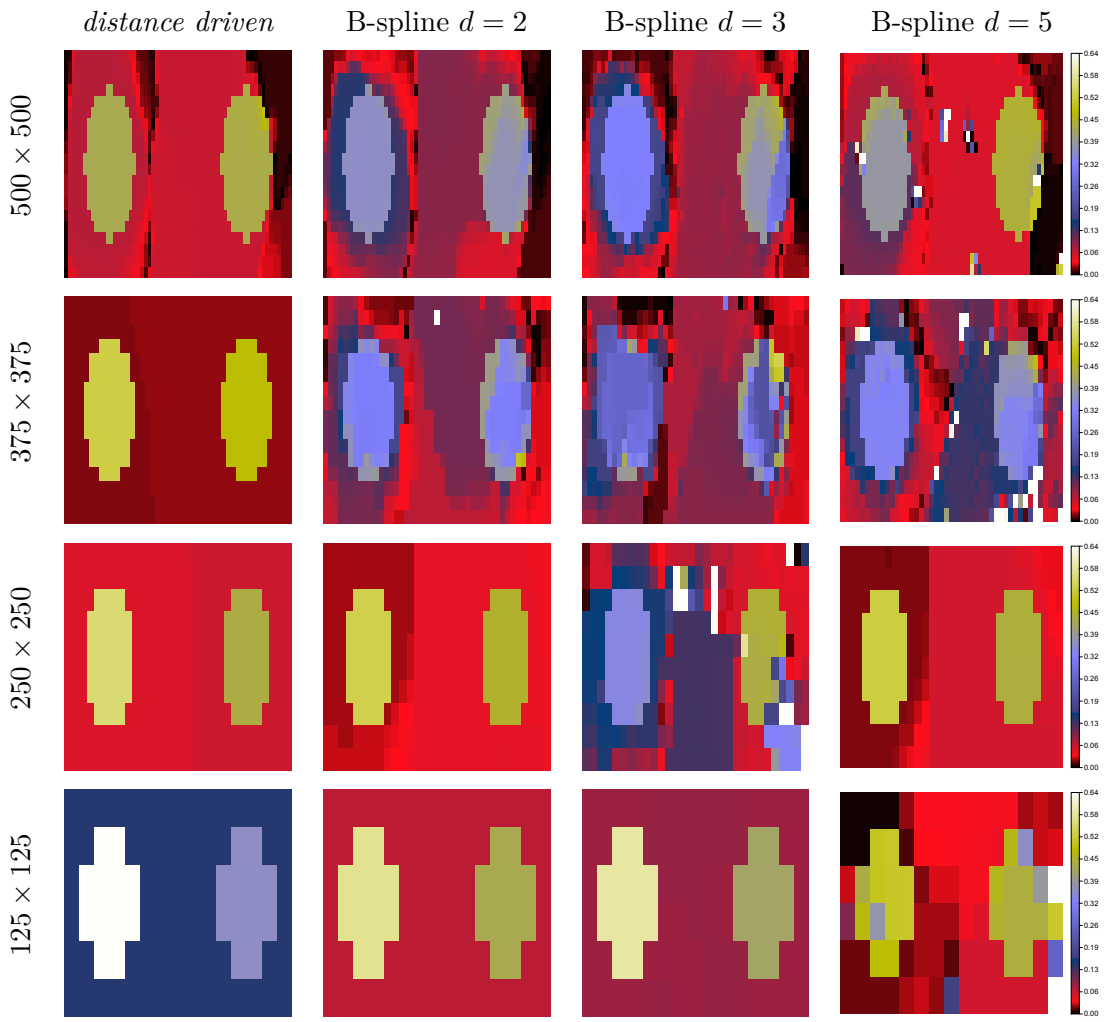


FIGURE 2.64: Cartes d'erreur quadratique, dans la région d'intérêt ROI3, des reconstructions du fantôme *FORBILD*, à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d et pour différentes résolutions des voxels — 500×500, 375×375, 250×250 et 125×125, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

de détails dans les autres zones, même si ceux-ci constituent quasiment l'élément perturbateur principal. C'est dans ce cadre-là que l'on voit à quel point le modèle de projection devient important. C'est pourquoi nous faisons le choix de conserver le critère de décision objectif, qui nous paraît plus pertinent pour évaluer les performances des projecteurs dans ces conditions.

Regardons à présent les cartes d'erreur quadratique des meilleures reconstructions à l'intérieur des régions d'intérêt ROI1 et ROI2, sur les figures 2.62 et 2.63. Les cartes de la ROI1 montrent naturellement une augmentation de l'erreur à mesure que la résolution des voxels baisse. Pour les cartes de la ROI2, les erreurs ne semblent pas évoluer en dégradation de façon très prononcée, à part peut-être pour *spline driven* à $d = 3$, où davantage d'artéfacts apparaissent. Une fois de plus nous ne visualisons pas de différence flagrante entre les modèles de projection dans ces régions d'intérêt. Nous devons donc encore nous tourner vers les régions d'intérêt où les structures sont moins contrastées. Nous nous intéressons alors à la région d'intérêt ROI5 définie précédemment, et illustrée sur la figure 2.55 avec son profil de coupe CUT5 associé.

Les figures 2.64 et 2.65 montrent les cartes d'erreur dans la ROI3 et la ROI5, où nous nous

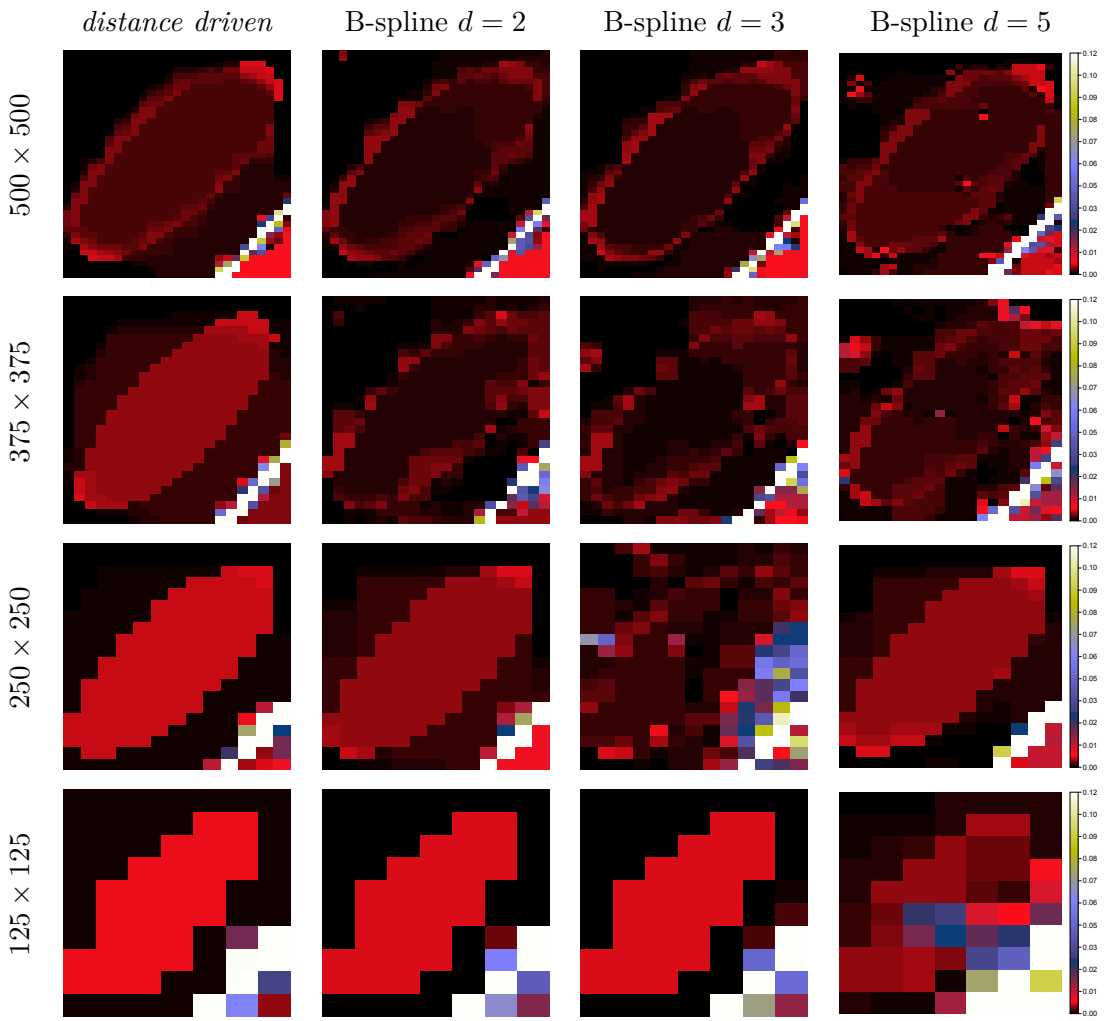


FIGURE 2.65: Région d'intérêt ROI5 des reconstructions du fantôme *FORBILD*, à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d et pour les différentes résolutions des voxels — 500×500, 375×375, 250×250 et 125×125, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

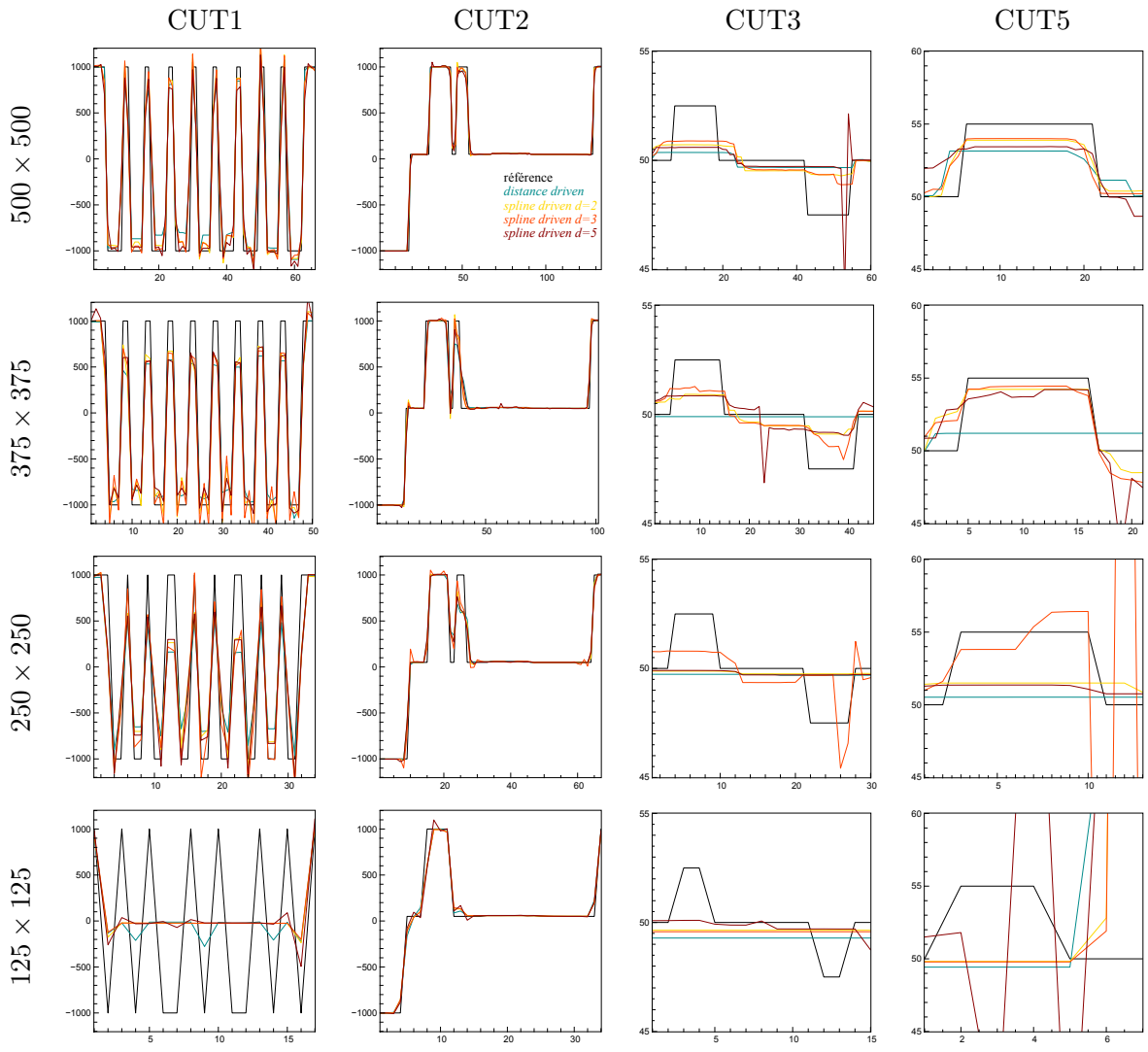


FIGURE 2.66: Profils de coupes CUT1, CUT2, CUT3 et CUT5, tracés pour les reconstructions à EQMN minimale dans la ROI2, réalisées à partir de 60 projections non bruitées. 1 graphe correspond à un profil de coupe et une résolution des voxels — 500×500, 375×375, 250×250 et 125×125 — donnés. Chaque graphe compare les profils des reconstructions correspondantes avec les 4 modèles de projection : *distance driven* (bleu), *spline driven* à $d = 2$ (jaune), *spline driven* à $d = 3$ (orange) et *spline driven* à $d = 5$ (rouge). Le profil de référence est tracé en noir.

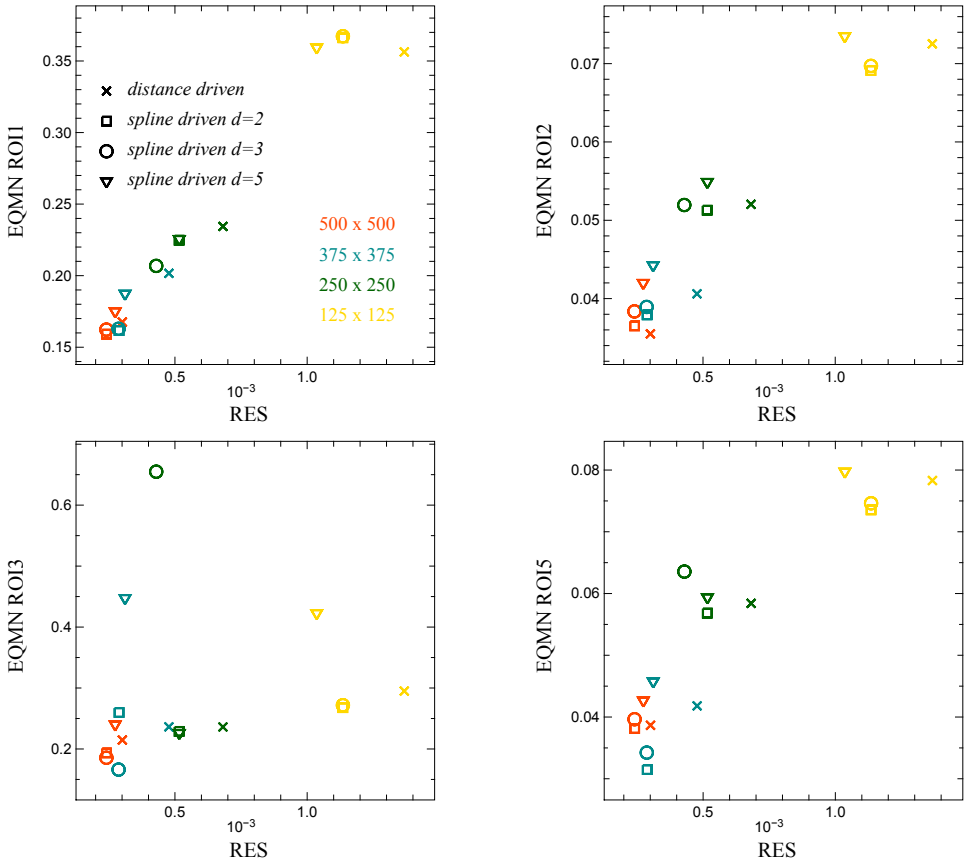


FIGURE 2.67: Graphes donnant l'erreur EQMN dans les régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI3 et ROI5, en fonction de l'erreur résiduelle RES, pour les reconstructions du fantôme *FORBILD*, à partir de 60 projections non bruitées, réalisées avec les projecteurs *distance driven* et *spline driven* à différents degrés d. Chaque symbole correspond à la reconstruction donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2, pour un projecteur et une résolution des voxels — 500×500, 375×375, 250×250 et 125×125 — donnés. Les croix correspondent à *distance driven*, les carrés à *spline driven* avec $d = 2$, les cercles à *spline driven* avec $d = 3$ et les triangles inversés à *spline driven* avec $d = 5$. Chaque couleur correspond à une résolution donnée : 500×500 (rouge), 375×375 (bleu), 250×250 (vert) et 125×125 (jaune).

apercevons qu'à résolution descendante, les reconstructions avec le projecteur *spline driven* sont capables de faire apparaître — par une erreur EQMN plus faible — ces structures très faiblement contrastées, quasi-systématiquement, sauf à la résolution la plus basse. Le degré de *spline driven* où le projecteur est le plus robuste est $d = 3$. En revanche, pour les reconstructions avec *distance driven*, la récupération de ces structures aux basses résolutions se montre plus compliquée, avec des erreurs supérieures à *spline driven* qui montrent que ces détails sont même généralement perdus on indécelables visuellement.

La figure 2.66 affiche les graphes des profils de coupes CUT1, CUT2, CUT3 et CUT5 pour les quatre projecteurs, et pour les reconstructions satisfaisant notre critère objectif de sélection. L'observation de ces coupes vient corroborer les analyses précédentes sur les cartes d'erreur dans les régions d'intérêt. Ainsi, les profils CUT1 et CUT2, illustrant les structures très contrastées, offrent des résultats comparables pour les quatre modèles. En revanche, les profils CUT3 et CUT5 vérifient bien notre constat d'une meilleure restauration des structures faiblement contrastées aux résolutions plus basses, excepté 125×125, pour le projecteur *spline driven*, alors que *distance driven* les perd totalement. Notons une fois de plus la médiocre qualité, tant sur les reconstructions globales que sur les profils. Nous concluons que la baisse de résolution n'est guère acceptable en-dessous de 375×375, résolution qui valide nos comparaisons

entre *spline driven* et *distance driven*.

La figure 2.67 illustrent les graphes, déjà tracés précédemment dans la figure 2.51, donnant l'erreur EQMN minimale dans les régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI3 et ROI5, en fonction de l'erreur résiduelle RES, pour chaque résolution de voxels. Globalement, nous observons l'augmentation conjointe de l'erreur EQMN et de l'erreur résiduelle RES avec la baisse progressive de résolution, quel que soit le projecteur et la région d'intérêt. À résolution donnée, et sur la ROI1, nous voyons alors en général des erreurs inférieures avec les trois projecteurs *spline driven*, par rapport à *distance driven*. Les écarts d'erreur entre les modèles augmentent avec la baisse de la résolution. À partir de 375×375, l'avantage de *spline driven* est plus net. Pour les autres régions d'intérêt, le comportement peut être plus disparate mais la tendance générale reste celle de la ROI1, *i.e. spline driven* l'emporte souvent sur *distance driven*, particulièrement à la résolution 375×375. À résolution inférieure, l'avantage perdure quasi-systématiquement, mais surtout en erreur résiduelle, l'erreur EQMN étant à peu près au même niveau. Les degrés de *spline driven* qui semblent l'emporter la plupart du temps sont 2 et 3. Enfin, les meilleures performances en termes d'écart d'erreur par rapport à *distance driven* interviennent pour la résolution 375×375. En-dessous, comme nous l'avions déjà constaté, la basse résolution entraîne des niveaux d'erreur peu acceptables. Nous ajoutons même que nous atteignons, à la résolution 375×375, une qualité de reconstruction quasiment identique voire meilleure dans certains cas à celle obtenue avec *distance driven* à résolution supérieure.

Ainsi cette étude nous confirme encore la plus grande robustesse et la meilleure qualité de reconstruction obtenue avec notre modèle *spline driven*, et ce même lorsque la résolution des voxels diminue. Autrement dit, nous pouvons diminuer la résolution en voxels des reconstructions et obtenir une qualité identique à un modèle moins fin tel que *distance driven* à résolution supérieure, ce qui occasionne un gain intéressant en temps de calcul. En effet, d'après l'étude des temps de calcul de *spline driven* en 2-D (*cf.* Fig. 2.39, section 2.3.3), on gagnerait, pour $d = 3$, un facteur quasiment 2 entre les résolutions 500×500 et 375×375, ce qui amène au temps de calcul de *spline driven* pour $d = 0$ à la résolution 500×500. Comme nous avions dit que le temps de calcul de *distance driven* était au maximum plus rapide d'un facteur 2 par rapport à *spline driven* à $d = 0$, *spline driven* à $d = 3$ passerait ainsi d'un facteur 4 à un facteur 2 supérieur à *distance driven*.

2.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons développé un nouveau modèle de projection tomographique, précis et compétitif en temps de calcul, basé sur la modélisation de l'objet d'intérêt sur une base de fonctions B-splines. Son développement est parti du besoin de disposer d'un modèle plus robuste, permettant d'expliquer les données avec le moins de dégénérescences possibles, en minimisant les erreurs de modélisation intrinsèques et inhérentes à la réprésentation mathématique d'un signal multidimensionnel, ainsi que les erreurs d'approximation liées à sa projection tomographique dans le cadre d'un algorithme itératif de reconstruction, obligeant à un calcul rapide du projecteur. Un tel modèle permet d'atteindre une excellente qualité de reconstruction avec moins de données, anticipant ainsi sur le problème de la reconstruction dynamique, que nous développons dans le chapitre 3, et qui constitue typiquement, nous le verrons, un problème de reconstruction à faible nombre de projections.

Dans ce cadre, la finesse du modèle permet à l'algorithme de reconstruction de ne jamais s'éloigner des données initiales, même parcimonieuses, sous contrôle d'une régularisation. Celle-ci ne doit cependant pas prendre le pas sur la fidélité aux données, et n'a alors pour seul rôle que de contrôler l'amplification des bruits stochastique et de modélisation — artéfacts structurels

de reconstruction — dus au mauvais conditionnement du problème, qui plus est mal posé.

Les modèles de projection conventionnels considèrent généralement la représentation du signal sur une base d'indicatrices de voxels, des fonctions à support cubique uniforme. Leur avantage est leur compacité maximale, permettant une influence très localisée de leur projection sur le détecteur, ainsi que leur séparabilité, engendrant un opérateur creux rapide à calculer. Il s'agit cependant d'une base de représentation très grossière, générant une erreur de modélisation importante du signal, ce qui contraint à un échantillonnage très fin, source d'une charge de calcul accrue. À cela s'ajoute leur forte anisotropie, incompatible avec une description homogène du signal dans toutes les directions. Cela rend la projection non uniforme en fonction de l'orientation du détecteur, d'autant plus que des approximations importantes sont nécessaires pour faciliter son calcul, trop complexe et coûteux pour être réalisé analytiquement. Nous avons considéré le projecteur *distance driven* [DeMan and Basu, 2004] comme représentant de cette classe de modèles, qui en constituent déjà une version avancée. D'autres modèles proposent l'utilisation de fonctions à symétrie sphérique — les blobs — qui permettent d'élaborer un projecteur isotrope. Nous pouvons citer le modèle de Ziegler *et al.* [Ziegler et al., 2006]. Ces fonctions offrent également une modélisation bien plus fine que les indicatrices de voxels. Cependant, ce sont des fonctions complexes à manipuler, et de surcroît non séparables, augmentant la charge de calcul du projecteur.

Pour satisfaire à la fois les besoins de finesse de modélisation et d'isotropie, conjointement à une facilité de manipulation et aux bénéfices de la séparabilité, nous nous sommes tournés vers les fonctions B-splines. Ce sont des fonctions polynomiales par morceaux, dépendant donc du degré des polynômes en question. L'indicatrice de voxels n'est autre que la B-spline de degré 0. Nous avons donc considéré des degrés supérieurs. Dans ce cadre, les B-splines sont connues pour faire partie des classes de fonctions optimales en termes de finesse de modélisation, pour un support le plus compact possible. Elles présentent donc deux propriétés d'un grand intérêt pour notre problème. Étendues à la multidimensionalité, ce sont des fonctions séparables et quasiment à symétrie sphérique à haut degré, car elles tendent vers la fonction gaussienne. Ainsi, de la finesse de modélisation découle aussi naturellement la propriété d'isotropie recherchée. Nous avons tiré partie de ces avantages pour émettre une hypothèse de symétrie sphérique de la B-spline, qui, une fois projetée, conserve aussi sa séparabilité. Il s'agit bien sûr d'une approximation, nous permettant de décrire analytiquement l'empreinte projetée d'une B-spline n-dimensionnelle comme une B-spline $(n-1)$-dimensionnelle séparable sur le détecteur. Des facteurs de mise à l'échelle séparable interviennent aussi pour tenir compte de la divergence des faisceaux projectifs dans le cas d'une propagation conique de ces rayons. Nous avons ainsi montré que nos approximations surpassaient, en terme de contrôle d'erreur, les approximations faites dans les modèles à base d'indicatrices, tels *distance driven* ou le modèle de Long & Fessler [Long et al., 2010].

Nous avons alors démontré les gains de notre projecteur, baptisé *spline driven*, en reconstructions 2-D simulées avec le fantôme de tête *FORBILD*, dans des conditions extrêmes d'expérience, *i.e.* à très faible nombre de projections. Nous avons pris comme étalon de comparaison le modèle *distance driven*. L'analyse des résultats a confirmé la pertinence de nos hypothèses, à savoir que notre modèle, théoriquement plus précis, inséré dans un critère de reconstruction incluant une attache aux données et une régularisation, permettait d'extraire plus finement l'information contenue dans les données. Notre projecteur s'est ainsi montré plus robuste au manque de données, même en présence de bruit stochastique, en permettant d'éviter l'amplification trop importante d'artéfacts structurels liés au mauvais conditionnement du problème. La précision de ce modèle permet de préserver la cohérence de la solution à la fois vis-à-vis des données mais aussi de l'objet d'origine, avec le soutien de la régularisation qui permet de rendre le problème bien posé. *Spline driven* s'est montré, dans ce cadre, plus robuste

que *distance driven*, ce qui s'est ressenti directement sur la qualité visuelle des reconstructions. Nous avons alors déterminé que des B-splines de degré 2 ou 3 donnaient les résultats optimaux, ne surchargeant ainsi le calcul du projecteur que d'un facteur 2 par rapport à *distance driven*. Nous en avons conclu que l'emploi du modèle de projection *spline driven* permettait de réduire, à qualité égale, le nombre de projections nécessaire à la reconstruction. Nous avons aussi montré que notre projecteur permettait, à qualité égale de reconstruction avec *distance driven*, de réduire la résolution des voxels, *i.e.* de relâcher l'échantillonnage, octroyant encore un gain en temps de calcul.

Les expériences menées ici restent cependant assez préliminaires, même si nos conclusions augurent des performances de notre projecteur en regard des modèles conventionnels. En effet, celles-ci n'ont été menées que sur des simulations, qui illustrent des configurations particulières du système tomographique, et se sont montrées assez dépendantes de l'objet lui-même, qui se compose de structures bien particulières. Nous n'avons notamment pas fait l'étude du nombre optimal de projections nécessaire pour chaque modèle testé, afin d'obtenir des reconstructions de qualité totalement acceptables — les artéfacts de reconstruction perduraient pour les configurations testées. En d'autres termes, pour cet objet-ci, il est clair qu'un nombre de projections supérieur est nécessaire pour s'affranchir des principaux artéfacts. L'étude exigerait aussi d'être plus exhaustive, et de multiplier notamment les réalisations pour une configuration donnée, en les rendant indépendantes d'un positionnement particulier des projections, afin d'en dégager des résultats quantitatifs plus statistiques. Cette remarque est aussi valable en ce qui concerne les reconstructions à données bruitées, qui auraient nécessité de multiplier les réalisations aléatoires du bruit. De telles études permettraient de dégager des résultats encore plus précis, comme par exemple les résolutions effectives que sont capables d'atteindre chaque modèle. Le projecteur *distance driven* n'étant pas le plus fin de sa classe — celle utilisant les indicatrices de voxels, il serait également intéressant de comparer *spline driven* à des projecteurs plus fins de la même classe, comme celui de Long & Fessler.

À ce titre, nous pouvons aussi discuter des critères de quantification que nous avons utilisés dans nos expériences, et de la manière d'évaluer la qualité des reconstructions. En effet, nous avons utilisé l'erreur quadratique moyenne de l'image reconstruite avec une image de référence censée être une représentation de la vérité. Or, dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter de façon précise la théorie de l'échantillonnage liée à la modélisation optimale d'un signal au sens de la moindre norme L_2. Nous avons ensuite intégré ces concepts à la modélisation de la projection tomographique. Cette erreur de modélisation intrinsèque dépend directement de la base de fonctions utilisée, à laquelle viennent ensuite se greffer les erreurs dues à l'approximation même de la projection suivant le modèle utilisé. À supposer que ces erreurs soient indépendantes, il aurait été intéressant de les quantifier séparément, *i.e.* de déterminer dans un premier temps la représentation de moindre erreur de l'image de référence compte tenu de la base de représentation utilisée dans le modèle de projection, et de la résolution des voxels choisie. Sur ce plan, la théorie, ainsi que quelques études pratiques réalisées au début de ce chapitre, ont clairement donné l'avantage aux B-splines en termes de modélisation optimale du signal. Pour réellement quantifier les performances de chaque projecteur, l'erreur de reconstruction aurait alors pu être calculée par rapport à chaque approximation optimale, respectivement associées à l'indicatrice de voxel et à la B-spline de degré d. Nous aurions ainsi pu étudier la réelle erreur de reconstruction par rapport à la limite intrinsèque atteignable au sens de l'erreur en norme L_2, afin de dégager quel projecteur était le plus robuste vis-à-vis de son propre espace de représentation.

Nos simulations ont été menées à 2 dimensions. Une étape indispensable serait d'effectuer la même étude à 3 dimensions. Or cela peut s'avérer extrêmement fastidieux au niveau du temps de calcul. Au préalable, un effort d'implantation des algorithmes serait donc nécessaire,

afin de les rendre suffisammment rapides, en les déployant par exemple sur des plateformes multi-processeurs ou utilisant des processeurs graphiques. Toute cette partie n'a pas fait l'objet de nos travaux, dont la vocation a été de démontrer la faisabilité et l'efficacité des concepts algorithmiques.

Enfin, la démonstration des gains de notre projecteur dans le cadre de reconstructions à partir de données physiques parcimonieuses constitue la suite logique et primordiale à ces travaux, afin de le mettre à l'épreuve en conditions "réelles" d'utilisation, comme par exemple en tomographie X dynamique. Cependant, comme nous l'avons souligné auparavant, le modèle de projection n'est pas une solution en soi dans le problème de la reconstruction, et s'inscrit dans une démarche globale qu'est l'approche inverse. À ce titre, nos travaux ont su montrer quels peuvent être les apports de la modélisation dans le traitement de ce problème inverse. Le passage aux données physiques ne doit donc pas négliger les recherches nécessaires concernant tous les autres aspects du problème, tels que la gestion du bruit dans les mesures ou la méthode de régularisation, afin que la démonstration de l'efficacité du modèle soit réalisée dans des conditions ne laissant pas de place à de multiples interprétations.

Pour clore cette discussion, une amélioration de notre modèle pourrait être proposée. En effet, le cœur de ce projecteur se trouvant dans l'expression de l'empreinte projetée d'une B-spline, convoluée par la réponse stationnaire des pixels détecteur, nous aurions pu cherché à déterminer cette empreinte convoluée optimale comme la B-spline bidimensionnelle séparable donnant la meilleure approximation au sens de la moindre norme L_2 avec la projection convoluée de la B-spline de base, moyennée sur toutes les orientations. Nous aurions ainsi pu déterminer le degré et les facteurs de mise à l'échelle les plus adéquats du point de vue de ce critère, pour toutes les positions de la grille d'échantillonnage des voxels. Autrement dit, nous aurions obtenu des erreurs d'approximation optimales au sens la moindre norme L_2, en lien direct avec la théorie de l'échantillonnage généralisée que nous avons présentée dans ce chapitre. Il s'agit d'ailleurs de la démarche adoptée par Horbelt *et al.* [Horbelt et al., 2002] dans leurs travaux sur un algorithme de reconstruction 2-D par rétroprojection filtrée en propagation parallèle, basée sur une modélisation à partir de B-splines. Nul doute qu'une telle approche serait sans doute beaucoup plus cohérente, car réellement optimale au sens de la moindre norme L_2 dans l'espace de représentation des B-splines. De plus, nous respecterions beaucoup plus la notion d'isotropie du modèle, étant donné que la variance des erreurs serait homogène à toutes les orientations, et non plus dépendantes de directions particulières[33] comme c'est le cas de notre approximation. En revanche, notons qu'une telle méthode nécessiterait une étape d'estimation — ou d'étalonnage — des paramètres du modèle antérieure à la reconstruction. Ces derniers devraient alors être stockés. En effet, une estimation "à la volée" de ces paramètres serait certainement trop coûteuse en temps de calcul, à moins d'en dégager une expression analytique.

33. Certaines orientations sont plus défavorables que d'autres.

Chapitre 3

Approche inverse pour la tomographie dynamique sans compensation de mouvement

Sommaire

3.1 La problématique dynamique en reconstruction tomographique . 161
3.2 Contexte . . . 167
3.3 État de l'art . . . 168
3.4 Approche inverse globale sans compensation de mouvement . . . 177
3.4.1 Modélisation du problème . . . 177
3.4.2 Simulation de données dynamiques 2-D . . . 184
3.4.3 Étude des erreurs de modélisation . . . 191
3.4.4 Le schéma de reconstruction . . . 194
3.5 Mise en application en reconstruction 2-D+t . . . 203
3.5.1 Données simulées . . . 203
3.5.2 Données réelles à partir d'un fantôme mécanique . . . 232
3.6 Mise en application en reconstruction 3-D+t . . . 237
3.6.1 Fantôme mécanique . . . 238
3.6.2 Patient . . . 239
3.7 Conclusion et perspectives . . . 245

Avec le modèle de projection très précis développé dans le chapitre 2, nous avons complété la robustesse de notre approche inverse pour la reconstruction à faible nombre de projections, en optimisant le terme de fidélité aux données pour extraire et expliquer au mieux l'information parcimonieuse. De cette manière, notre critère d'optimisation gagne en cohérence du problème posé, avec notamment une efficacité accrue de la régularisation.

Nous allons à présent étendre notre approche au problème inverse de la tomographie dynamique, *i.e.* la reconstruction d'objets dont les projections sont acquises alors qu'ils sont induits d'un mouvement (par exemple les battements cardiaques et le mouvement respiratoire chez un patient). Le problème de reconstruction tomographique devient alors un problème 2-D ou 3-D + "temps".

Il s'agit d'un thème de recherche très actif dans la communauté depuis ces vingt dernières années. En tomodensitométrie par rayons X, nous verrons que les méthodes les plus usitées consistent soit à trier les projections suivant leur appartenance à une même phase du mouvement, *i.e.* un instant où l'état anatomique de l'objet est identique, soit à utiliser un modèle de déformation de l'objet pour compenser le mouvement, afin d'utiliser toutes les projections pour la reconstruction d'une phase de référence. Cette dernière méthode est contraignante dans le sens où ce modèle de déformation doit être premièrement estimé, la plupart du temps sur un autre jeu de données. Cette modélisation est difficile à appréhender et à mettre en œuvre étant donné que les types de mouvement mis en jeu sont extrêmement complexes et ne sont connus qu'approximativement. Un effort algorithmique supplémentaire, source d'erreurs additionnelles, est alors nécessaire, notamment pour incorporer cette déformation au modèle de projection tomographique. La première méthode, quant à elle, n'utilise qu'une partie des projections pour la reconstruction d'une phase donnée, ce qui oblige, pour que les algorithmes de reconstruction standard fonctionnent, à acquérir beaucoup plus de projections, augmentant ainsi la dose délivrée au patient.

Nous allons montrer que l'approche inverse que nous avons développée, dédiée au traitement d'un faible nombre de projections, peut être adaptée au cas dynamique pour reconstruire une séquence de l'objet en mouvement à partir des données d'une acquisition non sur-numéraire, et n'appliquant aucune compensation de mouvement. La seule hypothèse a priori sur la dynamique de l'objet sera que le mouvement dont il est animé est un phénomène continu et périodique. Il nous faudra alors compléter notre modélisation de la projection, et modifier la régularisation pour l'adapter à un objet spatio-temporel, *i.e.* à dimensions hétérogènes. L'intérêt d'une telle approche est d'être capable de reconstruire une séquence dynamique d'un objet en mouvement à partir du même nombre de projections par tranche temporelle que réclamerait une reconstruction statique avec la méthode développée dans le chapitre 1, et ce sans connaissance a priori du type de mouvement mis en jeu. La seule information à disposition est donc celle des données courantes, épaulée par une régularisation basée sur les mêmes principes généraux qu'en reconstruction statique.

Nous évaluerons notre méthode sur des reconstructions 2-D + "temps" à partir de données dynamiques simulées numériquement dans un premier temps. Puis nous la mettrons à l'épreuve sur données physiques, provenant premièrement d'un fantôme mécanique, dans des reconstructions 2-D + "temps" puis en 3-D + "temps". Nous terminerons sur une démonstration 3-D + "temps" très prometteuse à partir des acquisitions d'un patient en respiration.

3.1 La problématique dynamique en reconstruction tomographique

Dans le chapitre 1, nous avons présenté le problème inverse de la tomographie dans le cadre statique, *i.e.* l'objet imagé est totalement immobile au cours du temps, plus particulièrement pendant l'acquisition des projections. Par immobile, nous entendons que la position de tout point de l'objet est identique dans le repère $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ lié à celui-ci, qui est lui-même invariant temporellement. L'ensemble des données "voit" donc le même objet dans l'espace, et la dimension temporelle est ignorée. Dans le chapitre 2, nous avons mis en œuvre notre projecteur *spline driven* dans des reconstructions à faible nombre de projections, également sur un objet statique.

Le temps est venu de nous consacrer au cas dynamique. Par déduction et en regard de notre définition du cas statique, notre "objet dynamique" devient à présent mobile au cours du temps. Il est animé d'un mouvement, pouvant être un déplacement ou une déformation, complet ou mettant en jeu uniquement certaines ses parties. Nous nous cantonnons donc, dans cette définition, à une dynamique de notre objet d'intérêt de type anatomique. Étant donné que l'acquisition des projections ne peut se faire de manière instantanée[1], les données ne sont, au sens le plus restrictif, pas reliées au même objet à un instant donné. En effet, nous disposons toujours d'un jeu de données $\Upsilon = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^\theta, \ldots, \mathbf{y}^T)^\top$, correspondant à T projections acquises chacune à une orientation θ du détecteur. En revanche, cette fois-ci, chaque projection $\mathbf{y}^\theta$ n'est plus associée à un objet unique, assimilé au signal f, mais à un objet f^θ correspondant à l'objet effectivement vu lors de la projection en question, que l'on nommera *phase temporelle*. L'indice θ, qui caractérisait l'orientation de la projection associée dans le cas statique, caractérise aussi à présent la date d'acquisition de cette projection, notée t_θ, ainsi qu'éventuellement le temps de pose nécessaire, sur une durée totale d'acquisition t_a. Il est alors a priori impossible de reconstruire un même objet statique f à partir du jeu de données provenant pourtant de la même séquence d'acquisition, *i.e.* un *scanner* réalisant une acquisition de l'objet continue dans le temps, sans interruption. La recontruction d'une phase temporelle f^θ seule est également insoluble puisqu'on ne dispose techniquement que d'une unique projection à cet instant. Nous illustrons cette situation sur la figure 3.1. Pour que la phase temporelle f^θ soit reconstructible, il faudrait un nombre de projections suffisant avec une couverture angulaire régulière et totale (2π en propagation conique). Cela impliquerait que f^θ "ré-apparaisse" plusieurs fois au cours de l'acquisition et selon des orientations différentes (cette situation n'est pas illustrée sur la figure 3.1), *i.e.* les phases de mouvement devraient présenter un caractère périodique[2].

En réalité, les objets ne sont pas aussi décorrélés temporellement que ne le laisse supposer notre première définition, et son illustration dans la figure 3.1. En effet, le mouvement dont est animé l'objet n'en modifie pas la nature fondamentale. Par exemple, le coefficient d'atténuation d'un point de l'objet ne change pas quelle que soit sa position, fût-elle variable dans le temps[3]. De plus, ce point fait partie intégrante de l'objet et ne s'en détache pas, autant d'éléments qui nous permettent d'imposer à l'objet la conservation d'une certaine cohérence ou continuité

1. On peut à la limite supposer l'instantanéité pour l'acquisition d'une unique projection, si sa durée est très inférieure à la vitesse d'évolution du mouvement de l'objet. C'est d'ailleurs l'hypothèse que l'on fera dans notre approche (*cf.* section 3.4), et qui est également faite dans la plupart des approches de l'état de l'art (*cf.* section 3.3)

2. On devine tout de suite qu'on est en train d'orienter progressivement notre problème vers ce type de mouvement, *e.g.* les mouvements respiratoires ou cardiaques d'un patient

3. En revanche la concentration des positions des points peut être variable (contraction ou dilatation de matière).

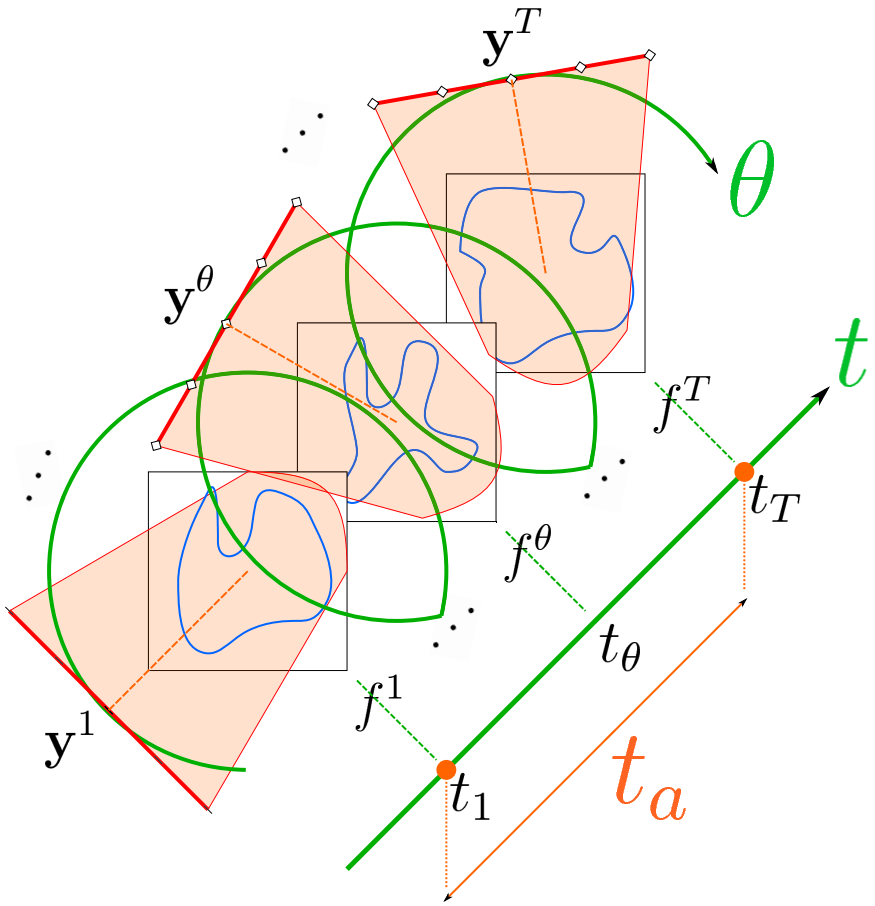


FIGURE 3.1: Illustration de la problématique dynamique dans sa forme la plus générale. L'objet f est animé d'un mouvement au cours de l'acquisition, de telle manière qu'à chaque projection, d'orientation θ, le système "voit" un objet f^θ différent, appelé phase temporelle. L'orientation θ, autrement dit la trajectoire du détecteur (ou de la source), indiquée en vert sur la figure, est donc liée au déroulement de l'acquisition à la date t. Dans le jeu de données, constitué de T projections, $\Upsilon = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^\theta, \ldots, \mathbf{y}^T)^\top$, chaque composante $\mathbf{y}^\theta$ est associée à la phase temporelle f^θ.

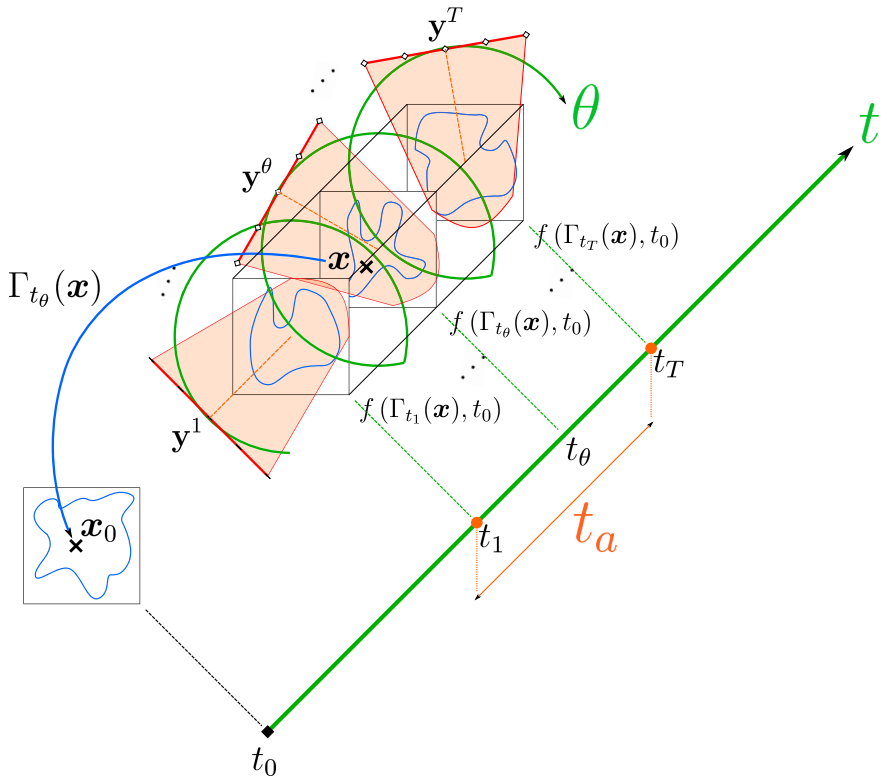


FIGURE 3.2: Illustration de la problématique dynamique dans le cadre d'une variabilité temporelle anatomique, *i.e.* un mouvement et/ou une déformation spatiale de l'objet au cours du temps. Ce mouvement est modélisé par une transformation $\Gamma_t(\boldsymbol{x})$ définissant le déplacement de chaque point $\boldsymbol{x}$, à la date t, nécessaire pour revenir à sa position initiale $\boldsymbol{x}_0$, à la date de référence t_0. L'hypothèse de base est la conservation de l'information physique globale contenue dans l'objet à un instant de référence t_0. Ainsi le signal $f(\boldsymbol{x}, t)$ est une fonction continue de l'espace et du temps. L'orientation θ de chaque projection est alors reliée à une date t_θ sur l'axe temporel. Dans le jeu de données, constitué de T projections, $\Upsilon = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^\theta, \ldots, \mathbf{y}^T)^\top$, chaque composante $\mathbf{y}^\theta$ est associée au signal f projeté sur le détecteur à la date t_θ.

de structure d'une projection à l'autre, et donc que les données Υ rendent bien compte d'une information commune.

Nous avançons ces hypothèses car nous avons une certaine idée du mouvement qui anime notre objet, en fonction de l'application. Concrètement, en imagerie médicale anatomique, notamment la tomodensitométrie, le mouvement dont nous parlons concerne évidemment le mouvement respiratoire, ou bien les battements cardiaques d'un même patient.

Dans ces conditions, le signal f n'est plus modélisé comme un ensemble de phases temporelles f^θ décorrélées, mais bien comme un signal $f : (\boldsymbol{x}, t) \mapsto f(\boldsymbol{x}, t)$ continu dans l'espace et dans le temps, où $\boldsymbol{x}$ désigne les dimensions spatiales et t la dimension temporelle. Ainsi la notion de *phase temporelle* est définie en tout point sur l'axe du temps. D'après ce que l'on a dit au-dessus sur la nature du mouvement animant l'objet, on affine encore notre modélisation en spécifiant qu'à chaque date t, ce sont les positions spatiales de chaque point de l'objet qui varient suivant une certaine loi $\Gamma_t : \boldsymbol{x} \mapsto \Gamma_t(\boldsymbol{x})$, symbolisant le déplacement de chaque point $\boldsymbol{x}$, à la date t, à effectuer pour revenir à sa position initiale $\boldsymbol{x}_0$, à une date de référence t_0. $\Gamma_t(\boldsymbol{x})$ constitue alors un vecteur de déplacement 3-D. En d'autres termes, la valeur du signal f en une position $\boldsymbol{x}$ donnée à l'instant initial t_0 se retrouve nécessairement à une position dans l'espace à l'instant t, *i.e.* il y a conservation "en chaque point du temps" de l'information physique contenue dans f— ses valeurs en tout point de l'espace — à la date de référence t_0. Ainsi, du point de vue physique, notre objet est assimilable à un fluide, où l'on modé-

lise l'objet comme un ensemble de "particules" en mouvement, identifiées par leur position à l'instant initial t_0 et leur valeur du coefficient d'atténuation. Ce fluide est stationnaire — ses caractéristiques sont constantes dans le temps, notamment le nombre des "particules", et éventuellement compressible — la concentration des particules est variable en certaines zones. À ce titre, la conservation de notre "fluide" f est régie par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \cdot \vec{\mathrm{v}}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f) \cdot \vec{\mathrm{v}} + f \cdot \operatorname{div}(\vec{\mathrm{v}}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f \cdot \operatorname{div}(\vec{\mathrm{v}}) = 0 \tag{3.1}$$

où $\vec{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}, t)$ est le vecteur vitesse du fluide f en tout point de l'espace et du temps. Dans le cas d'un fluide localement incompressible — la concentration du fluide est constante, nous pouvons simplifier l'équation précédente car $\operatorname{div}(\vec{\mathrm{v}}) = 0$ à un instant donné[4], nous donnant :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \cdot \vec{\mathrm{v}}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f) \cdot \vec{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.2}$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation de contrainte utilisée dans les méthodes de flot optique pour l'estimation d'un champ de vecteurs de mouvement [Horn and Schunck, 1981], dont nous parlerons dans notre revue de l'état de l'art en section 3.3, et qui constitue la loi Γ_t sus-mentionnée. Nous reviendrons sur ce concept de fluide, qui étayera certaines de nos explications et justifications dans la suite de ce chapitre. L'introduction de la notion de vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ de déplacement des points de f, et du champ de déformation Γ_t en découlant, nous permet d'introduire la modélisation suivante :

$$f(\boldsymbol{x}, t) = f\left(\Gamma_t(\boldsymbol{x}), t_0\right) \tag{3.3}$$

Il s'agit là d'une formalisation très générale du signal spatio-temporel f, où le mouvement est alors considéré comme un déplacement spatial des points de l'objet au cours du temps. À ce titre, la transformation Γ_t, paramétrée par la vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ en tout point et en tout instant, symbolise tout type de mouvement possible, qu'il soit rigide (translations, rotations) ou non (déformations). Cette formalisation du problème a déjà été initiée dans la littérature [Blondel et al., 2004], [Desbat et al., 2006], [Rit et al., 2009a]. On peut alors revoir la schématisation de la figure 3.1, incluant cette nouvelle modélisation, et que l'on illustre sur la figure 3.2. Ainsi ce n'est plus un objet à 2 ou 3 dimensions spatiales uniquement que l'on cherche à reconstruire, mais un objet à 2 ou 3 dimensions spatiales, plus 1 dimension temporelle (2-D ou 3-D+t). On remarque, sur cette figure montrant un objet à 2 dimensions spatiales, qu'une trajectoire circulaire du détecteur dans l'espace ressemble à une trajectoire hélicoïdale dans l'espace en évolution dans le temps — un espace 3-D aux dimensions non homogènes. Virtuellement, le *scanner* considéré image l'objet 3-D spatio-temporel f suivant une trajectoire hélicoïdale de la source, avec l'hypothèse que f est une fonction continue du temps. Nous reprendrons cette interprétation empirique et visuelle du principe d'acquisition d'une information spatio-temporelle continue, qui nous servira à justifier la cohérence de notre approche (*cf.* section 3.4).

Comme nous l'avons précisé plus haut, cette modélisation du signal dynamique est restreinte à une variabilité temporelle purement anatomique de l'objet d'intérêt. Mais la problématique dynamique peut être autre, où les hypothèses que nous avons faites ne sont plus valables. C'est le cas notamment pour les modalités TEP/TEMP, évoquées dans le chapitre 1, où l'aspect dynamique concerne aussi l'évolution de l'activité du traceur radioactif, *i.e.* sa concentration, au cours du temps. Cette concentration constitue l'information physique modélisée dans le signal f, et non plus l'absorption des rayons X par les tissus. On en déduit donc

4. Toutes les particules, dans un volume local, vont à la même vitesse à un instant donné.

que, pour ce cas de figure, l'hypothèse de conservation de l'information physique contenue dans f, au cours du temps, est fausse, puisque c'est typiquement cette donnée-là qui varie, et ce même à position constante des points de l'objet[5]. En revanche, on peut de la même manière établir une certaine continuité temporelle de ce type de signal, car la diminution de l'activité du traceur radioactif est un processus continu, dont on est capable de modéliser la physique.

Mais restons dans le cadre d'une dynamique anatomique. Nous l'avons dit, l'une des hypothèses principales est la conservation de l'absorption totale de l'objet au cours du temps, régie par l'équation 3.1, ce qui est vrai pour le type d'objet que nous sommes amenés à reconstruire. En revanche, même si cette hypothèse nous permet de justifier la faisabilité de la reconstruction dynamique, elle peut ne pas être forcément utilisable en terme algorithmique, et ce à cause du champ de vue du détecteur. En effet, si celui-ci n'est pas en mesure de voir l'ensemble de l'objet suivant son orientation, il est possible que des zones en mouvement "sortent" de ce champ de vue au cours de l'acquisition, rendant l'hypothèse fausse du point de vue des données. On se trouve en présence du problème de la troncature des données en tomographie, dont on tient compte en reconstruisant l'image du signal f sur un support englobant a priori l'intégralité de l'objet, même les zones non vues. En approche inverse, et particulièrement celle que nous mettons en œuvre dans ce chapitre, nous verrons que le traitement de données tronquées ne perturbera pas la bonne marche de la méthode de reconstruction. Malgré cet écueil pratique, la loi de conservation n'en reste pas moins la vérité physique, et ne remet pas en cause la continuité temporelle du signal f, mais complique simplement[6] le problème.

Pour ajouter encore à la difficulté, nous avions introduit dans le second paragraphe la nécessité d'avoir, pour chaque phase temporelle, une couverture angulaire suffisante des projections, condition sine qua non de faisabilité d'une reconstruction tomographique, même statique. Ce constat reste valable pour notre signal f continu dans le temps, et implique que celui-ci repasse plusieurs fois, et si possible à intervalles assez réguliers, par le même "état anatomique", *i.e.* la même disposition spatiale à différentes dates t_θ, où les θ couvrent totalement l'espace angulaire. On l'aura compris, nous sommes bien entendu en train de parler de périodicité, ou du moins de pseudo-périodicité, du mouvement $\Gamma_t(\boldsymbol{x})$ de notre objet, et donc du signal f, qui devient à son tour une condition nécessaire de reconstructibilité. Heureusement pour nous, si l'on se projette dans le domaine applicatif, à savoir par exemple la reconstruction d'une image d'un patient animé de son mouvement respiratoire, cette condition est bien entendue remplie, même si elle ne l'est qu'approximativement puisqu'un mouvement anatomique de ce type n'est pas parfaitement périodique et peut varier légèrement en fréquence et en amplitude. Il s'agit toutefois, nous le verrons, d'une approximation relativement acceptable [Blondel et al., 2004], qui permet même de considérer que ce type de mouvement, pour un patient donné, est assez reproductible, même d'une acquisition à l'autre [Sonke et al., 2008, Rit et al., 2009a]. C'est pourquoi nous considérons à partir de maintenant un objet d'intérêt animé d'un mouvement totalement ou quasiment périodique. Ainsi notre signal f, vu dans l'intervalle de temps de l'acquisition des projections t_a, à partir de la date t_1 et jusqu'à la date t_T, peut aussi être modélisé par la concaténation du signal $g : (\boldsymbol{x}, \iota) \mapsto g(\boldsymbol{x}, \iota)$, défini sur $\mathbb{R}^n \times [0, \iota_a[$, donc de durée finie ι_a, symbolisant la période de f, tel que :

$$f(\boldsymbol{x}, t+\iota_a) = f(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x}, \iota)\,, \quad \text{avec } t \in [t_1, t_T] \quad \text{et} \quad \iota \in [0, \iota_a[\,, \quad \iota = (t-t_1) (\text{mod } \iota_a) \tag{3.4}$$

Ainsi, au cours de l'acquisition, plusieurs projections, impliquant une même phase temporelle dans le signal g, prises à des orientations θ différentes, seront associées à la même date

5. Cette dynamique de l'activité du traceur peut très bien être associée à une dynamique anatomique, puisque ce sont toujours des patients que l'on image en TEP.

6. Belle figure de style, un oxymore si je ne trompe pas !

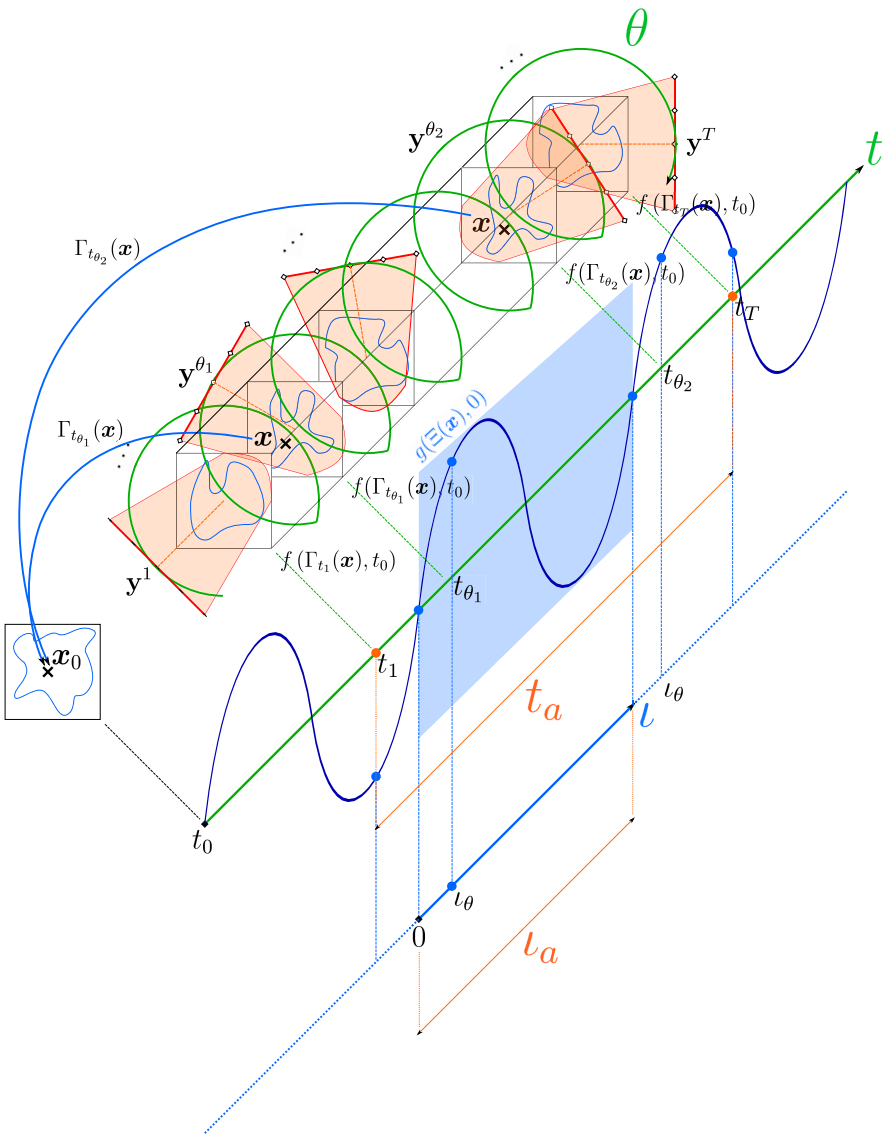


FIGURE 3.3: Illustration de la problématique dynamique dans le cadre d'une variabilité temporelle anatomique périodique, *i.e.* un mouvement et/ou une déformation spatiale périodique de l'objet au cours du temps. Le signal $f(\boldsymbol{x}, t)$, vu dans l'intervalle de temps de l'acquisition des projections t_a, à partir de la date t_1 et jusqu'à la date t_T, peut alors être modélisé par la concaténation du signal $g(\boldsymbol{x}, \iota)$ défini temporellement sur l'intervalle $[0, \iota_a[$, représentant un cycle de mouvement modélisé par la transformation $\Xi_\iota(\boldsymbol{x})$. Plusieurs projections d'orientations θ différentes sont alors reliées à une même date ι_θ sur l'axe temporel de g. Ainsi, dans le jeu de données, constitué de T projections, $\Upsilon = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^\theta, \ldots, \mathbf{y}^T)^\top$, chaque composante $\mathbf{y}^\theta$ est associée au signal g projeté sur le détecteur à la date ι_θ correspondante.

ι_θ sur l'axe temporel de g. De fait, nous étayons une ultime fois notre schématisation du problème, dans la figure 3.3. Nous avons associé à g, sur cette figure, sa propre loi de mouvement $\Xi_\iota : \boldsymbol{x} \mapsto \Xi_\iota(\boldsymbol{x})$, symbolisant le déplacement de chaque point $\boldsymbol{x}$, à la date ι, à effectuer pour revenir à l'état anatomique à la date initale $\iota = 0$ du signal g, de telle sorte que :

$$f(\boldsymbol{x}, t) = f\left(\Gamma_t(\boldsymbol{x}), t_0\right) = g\left(\Xi_\iota(\boldsymbol{x}), 0\right) = g(\boldsymbol{x}, \iota) \tag{3.5}$$

Pour résumer, le problème de la reconstruction tomographique dynamique tel que nous l'avons présenté, c'est-à-dire impliquant un objet d'intérêt ayant une variabilité temporelle anatomique périodique, peut être traité. Il s'agit maintenant de le poser de manière correcte. On pense notamment tout de suite à rechercher un moyen de connaître la transformation $\Gamma_t(\boldsymbol{x})$ ou $\Xi_\iota(\boldsymbol{x})$, qui nous permettrait de décrire l'objet en tout point de l'espace et du temps. Bien que ce soit une modélisation mathématique difficile à mettre en œuvre, c'est le principe utilisé majoritairement dans les méthodes ayant actuellement court et que nous allons présenter ci-après (*cf.* section 3.3). Mais nous verrons que le problème peut aussi être abordé de manière plus générale, sans pré-supposer du type de mouvement mis en jeu, offrant plus de souplesse à la résolution de ce problème inverse.

3.2 Contexte

Au vu de la définition que nous avons faite de la problématique dynamique dans la section précédente, notre contexte est bien entendu celui de l'imagerie médicale. Plus précisément, c'est dans le domaine de la détection et du traitement du cancer, particulièrement celui du poumon (oncologie), que la nécessité de tenir compte du mouvement respiratoire ou cardiaque du patient dans la reconstruction constitue un problème critique.

De nos jours, l'une des méthodes les plus répandues dans le traitement du cancer est la radiothérapie, une technique consistant à irradier, par des rayons X, les cellules cancéreuses afin de les détruire et stopper ainsi leur prolifération, tout en préservant au maximum les tissus sains environnants. La radiothérapie, seule ou associée à d'autres méthodes telles que la chimiothérapie, traite actuellement plus de 60% des patients atteints d'un cancer. Cette technique fit son apparition dès la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, à partir de la découverte en 1895 des rayons X par Wilhelm Conrad Röntgen, et où des chercheurs comme Pierre et Marie Curie commencèrent à étudier les radiations et leurs effets sur l'organisme (curiethérapie, Henri-Alexandre Danlos, 1901). En 1928, le premier accélérateur linéaire voit le jour, mis au point par Rolf Wideroë, puis dès les années 40, les rayons X sont utilisés pour la génération de rayons ionisants, et appliqués à la radiothérapie externe à partir des années 50. Avec l'apparition au début des années 70 de la tomodensitométrie par rayons X (Godfrey Hounsfield, 1971), les physiciens médicaux accèdent à la planification du traitement à partir d'images anatomiques 3-D du patient, permettant de cibler correctement la tumeur et de calculer plus précisément la distribution de la dose des rayons X curatifs. Dans les années 90, la radiothérapie a évolué en radiothérapie dite conformationnelle, qui permet d'adapter la forme du faisceau de traitement au volume tumoral, optimisant ainsi la délivrance de la dose et diminuant l'impact sur les tissus sains périphériques. Les techniques d'imagerie IRM (années 70) et TEP (années 80) ouvrirent aussi la voie à la radiothérapie avec modulation d'intensité (RCMI) et la radiothérapie guidée par l'image (IGRT), qui ont permis aux radio-oncologues de visualiser et de traiter plus efficacement les tumeurs, engendrant un meilleur pronostic des patients, une meilleure préservation des organes sains et moins d'effets secondaires. De nos jours, une nouvelle technique de radiothérapie voit peu à peu le jour : l'hadronthérapie. Celle-ci utilise, au lieu des photons X, un autre type de particules : les hadrons, ou ions légers, dont les protons et les ions carbone

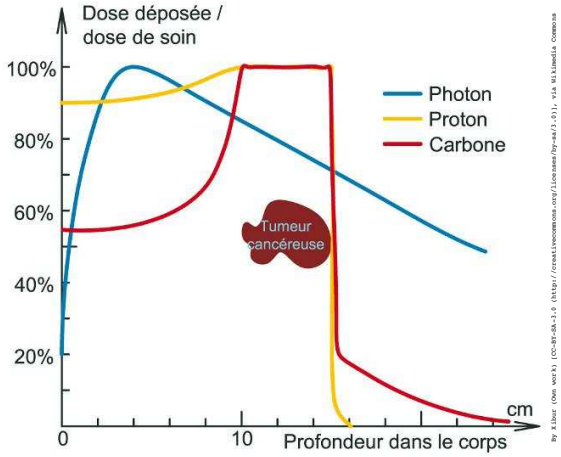


FIGURE 3.4: Illustration des courbes de dépôt de dose (en rendement) en profondeur des photons, des protons et des ions carbone, utilisés en radiothérapie et hadronthérapie. Source : http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3APhotonProtonCarbone.jpg.

sont des représentants. Ces particules présentent des propriétés balistiques bien plus précises que les rayons X, car le dépôt d'énergie est maximum à l'endroit où le faisceau est arrêté par les tissus (pic de Bragg). Il est ainsi possible de "contrôler le tir" pour délivrer la dose maximale en profondeur sur la tumeur, en épargnant bien mieux les tissus environnants (notamment ceux situés "derrière" le pic de Bragg). De plus, ce type de rayonnement a des effets thérapeutiques bien supérieurs au rayonnement X, avec une efficacité destructive accrue des cellules tumorales. La figure 3.4 illustre les courbes de rendement en profondeur des photons, des protons et des ions carbone.

3.3 État de l'art

En radiothérapie externe conformationnelle, l'élaboration du plan de traitement, *i.e.* la planification de l'exposition de la tumeur aux rayons X curatifs, visant à sa destruction, en préservant les tissus sains environnants, est donc fortement assujetie à la localisation précise de la tumeur. Plus l'incertitude est grande, plus la zone d'exposition devra être élargie pour assurer un dépôt efficace. Étant donné que ce plan de traitement ne peut être défini par le physicien médical qu'à partir d'une image 3-D préalable du patient, reconstruire l'information anatomique en mouvement devient primordiale pour réduire ces incertitudes [Rit, 2007].

Or, l'influence du mouvement sur les projections acquises ne peut être ignoré, du fait des artéfacts indésirables très importants qu'il engendre sur des reconstructions d'objets supposés statiques. On peut citer parmi ces artéfacts le flou induit par la variabilité de la position des structures dans leur zone de déplacement, créant une sorte de convolution de la structure par une fonction d'étalement issue de la distribution de ses positions. On peut aussi observer des traînées droites très contrastées[7]. La figure 3.5 montre une reconstruction d'un thorax de patient en respiration, effectuée à partir de données acquises au Centre Léon Bérard de lutte contre le cancer (CLB), situé à Lyon, en France. Pour cette reconstruction, nous avons supposé le patient totalement statique, d'où les artéfacts sus-mentionnés que nous observons. Ces artéfacts ont largement été étudiés dans la littérature [Ritchie et al., 1992, Balter et al., 1996, Shimizu et al., 2000, Nehmeh et al., 2002, Seppenwoolde et al., 2002, Osman et al., 2003a, Osman et al., 20 Chen et al., 2004, Visvikis et al., 2004], à la fois en tomodensitométrie mais aussi en TEP/TEMP,

7. On les appelle "*streak artifacts*", en anglais.

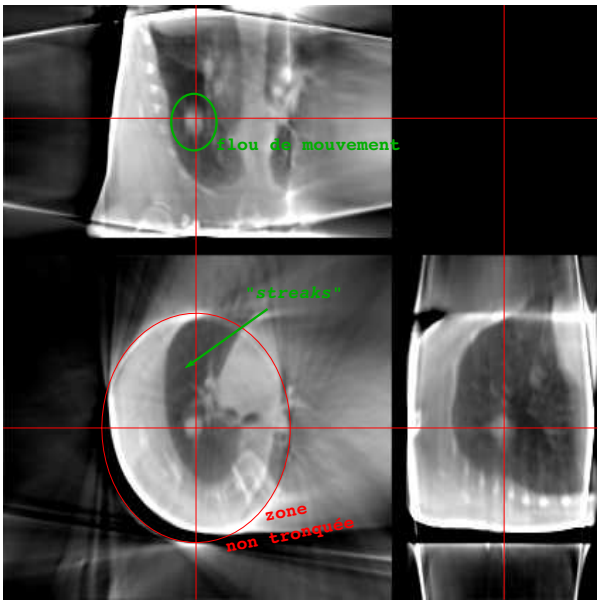


FIGURE 3.5: Illustration des artéfacts de reconstruction dus au mouvement, sur une image reconstruite du thorax d'un patient en respiration. Ces données ont été fournies par le Centre Léon Bérard (CLB), Lyon, France, et utilisées dans la thèse de Simon Rit [Rit, 2007]. On peut distinguer le phénomène de flou dû au mouvement au niveau de la tumeur dans le poumon et du diaphragme, ainsi que les traînées droites contrastées sur toute l'image (les "*streaks*" en anglais). Les artéfacts de reconstruction visibles en dehors de la zone cerclée sont dus à la troncature des projections dans cette acquisition.

car ils entraînent, en plus d'une dégradation considérable des images reconstruites, des incertitudes parfois très importantes sur la localisation précise de tumeurs dans les poumons, d'où une recherche abondante, amorcée depuis ces trente dernières années, dans ce domaine de la reconstruction tomographique, et toujours très active de nos jours grâce aux avancées technologiques — systèmes d'acquisition, et algorithmiques.

Certaines investigations ont été faites sur le protocole d'acquisition [Willis and Bresler, 1995b, Willis and Bresler, 1995a]. D'autres se sont intéressés à la vitesse d'acquisition des projections, *i.e.* la vitesse de rotation du détecteur, à mettre en œuvre pour s'affranchir du mouvement de l'objet [Goldberg et al., 1989, Ritchie et al., 1992], *i.e.* permettre d'acquérir les projections dans un laps de temps pour lequel l'objet peut être considéré comme immobile. [Ritchie et al., 1992] ont établi à l'époque qu'aucun système d'acquisition existant, même les plus rapides[8], n'était suffisamment rapide pour imager une phase figée d'un objet en mouvement, et donc éviter les artéfacts dus au mouvement, d'où une nécessité de se tourner vers des approches considérant le caractère dynamique des acquisitions.

Les contributions des chercheurs dans ce domaine ont donné lieu à une bibliographie très riche, en fonction des modalités d'imagerie (TEP/TEMP/X), du type de mouvement (respiratoire/cardiaque) et des méthodologies, que ce soit du point de vue technologique ou algorithmique. Certaines publications donnent de bonnes revues de l'état de l'art [Li et al., 2006a, Reyes et al., 2007, Gravier et al., 2006, Rit et al., 2009a].

Approches *gated* : tri des projections

Pour aborder le problème 4-D, une des méthodologies les plus usitées encore aujourd'hui se base sur la propriété de périodicité du mouvement, et effectue un tri, rétrospectif ou en temps réel suivant les systèmes, des projections en fonction de leur appartenance

8. Les *scanners* actuels ont une vitesse de rotation autour de 0,5s/360°.

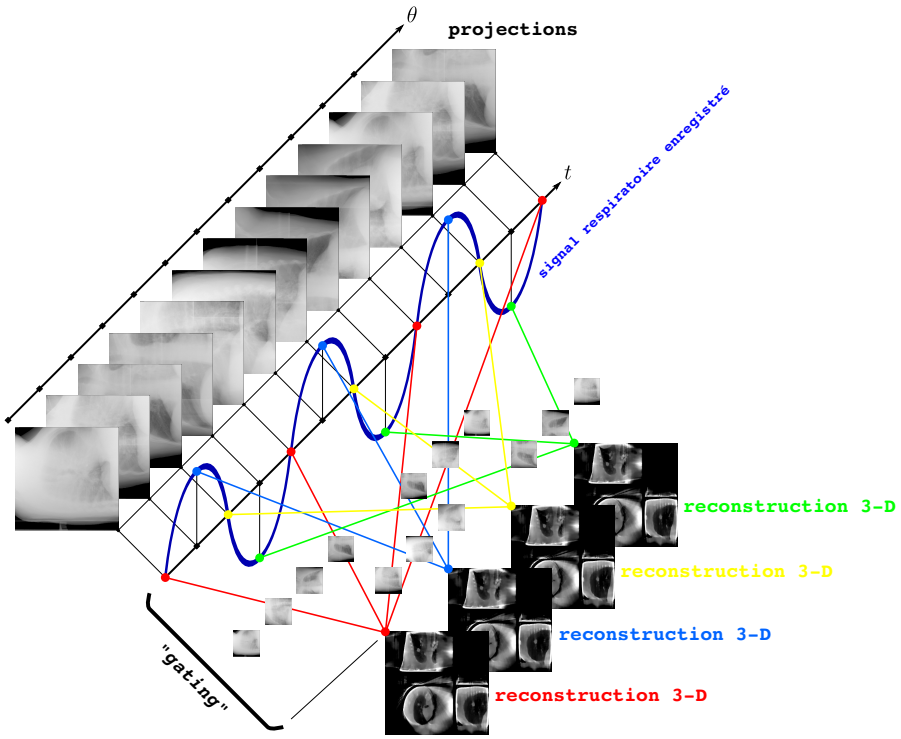


FIGURE 3.6: Schéma de principe des méthodes de reconstructions 4-D dites *gated*, effectuant un tri des projections corrélé à 1 signal temporel 1-D traduisant les variations du mouvement, permettant de relier les phases temporelles aux projections, et ainsi reconstruire indépendamment ces phases, supposées statiques.

à une phase temporelle donnée du mouvement, permettant ainsi de reconstruire plusieurs phases indépendantes, alors "assimilées statiques". Ces méthodes, surnommées respectivement, selon le type de mouvement, *cardiac-gated* ou *respiratory-gated*, ou encore *respiratory-correlated*, opèrent donc des reconstructions 4-D, *i.e.* une séquence de reconstructions 3-D [Picard and Thompson, 1997], [Seppenwoolde et al., 2002], [Low et al., 2003], [Ford et al., 2003], [Nehmeh et al., 2003], [Pan et al., 2004], [Keall et al., 2004], [Keall et al., 2005], [Berbeco et al., 2005], [Sonke et al., 2005], [Rietzel et al., 2005]. La figure 3.6, illustre le principe de ces approches. Picard et Thompson [Picard and Thompson, 1997] ont appliqué cette approche en imagerie TEP du cerveau, pour corriger les différences de positionnement de la tête d'une projection à l'autre lors de l'acquisition, en enregistrant ses déplacements à l'aide de deux caméras. Lorsque le mouvement est de type respiratoire ou cardiaque, la méthode *gated* nécessite de disposer d'un signal temporel 1-D traduisant l'évolution périodique du mouvement, et permettant d'identifier les phases temporelles pour les relier aux projections. Ce signal est généralement enregistré au moyen de dispositifs annexes. Par exemple, en imagerie cardiaque, un électrocardiogramme (ECG) est utilisé comme signal temporel [Lackner and Thurn, 1981], [Moore and Judy, 1987], [Kachelriess et al., 2000], [Rasche et al., 2002], [Blondel et al., 2003]. Pour un mouvement respiratoire, de nombreuses solutions ont été proposées. Dans [Seppenwoolde et al., 2002], des marqueurs en or, *i.e.* radio-opaques, de 2mm sont implantés dans le patient, à l'intérieur ou près de la tumeur, qui sont ensuite tracés et localisés en 3-D et en temps réel par fluoroscopie, permettant un ciblage de la tumeur synchronisé avec le traitement radiothérapeutique. Low *et al.* [Low et al., 2003] mesurent le flux d'air en sortie de la bouche à l'aide d'un spiromètre. D'autres utilisent des systèmes qui suivent les mouvements externes du thorax [Kubo and Hill, 1996], par exemple à l'aide de marqueurs réfléchissants, positionnés à la surface du buste, suivis par une caméra infrarouge [Vedam et al., 2003], [Ford et al., 2003],

Pan et al., 2004, Keall et al., 2004, Keall et al., 2005, ou d'une ceinture élastique mesurant la variation de circonférence de l'abdomen [Li et al., 2006b]. En TEP/TEMP, on utilise aussi une source d'émission positionnée sur le buste, qui est alors directement suivie sur les acquisitions [Nehmeh et al., 2003]. Cependant, cette information externe n'est pas forcément corrélée aux mouvements internes, notamment ceux de la tumeur [Vedam et al., 2003, Berbeco et al., 2005], c'est pourquoi une approche consiste à obtenir ce signal temporel directement à partir des projections [Visvikis et al., 2003, Zijp et al., 2004, Sonke et al., 2005, Zeng et al., 2007]. Dans [Visvikis et al., 2003], une analyse de Fourier des projections TEP permet de déterminer la fréquence du signal respiratoire, à partir duquel sont triées les projections. Zijp *et al.* [Zijp et al., 2004] proposent de rechercher, sur les projections issues d'un *scanner Cone-Beam*, la translation du diaphragme, sachant que celle-ci est dirigée parallèlement à l'axe de rotation[9].

L'inconvénient majeur des approches *gated* est qu'elles considèrent des reconstructions indépendantes, sans aucune corrélation temporelle. Ainsi chaque reconstruction s'effectue avec un nombre restreint de projections, sans apport d'aucune information complémentaire potentiellement exploitable des autres tranches reconstruites. De plus, le tri des projections est organisé en découpant un cycle de mouvement en intervalles de temps, et en affectant chaque projection à l'intervalle dans lequel elle a été acquise. Autrement dit, il s'agit d'une interpolation au plus proche voisin suivant l'échantillonnage des intervalles, ce qui va engendrer un phénomène de recouvrement de spectre si la fréquence d'échantillonnage est inférieure à la fréquence du signal temporel, et donc une perte de résolution sur les reconstructions indépendantes. Cela est tout simplement dû au fait que dans ce cas de figure, l'objet n'est pas "suffisamment statique" dans un intervalle de temps, l'image reconstruite étant alors en quelque sorte "convoluée" par le mouvement résiduel présent dans les projections, et de surcroît potentiellement dégradée par les artéfacts en découlant. Pour pallier ce problème, il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage, au risque de restreindre le nombre de projections sélectionnées pour une phase temporelle donnée. En effet, les intervalles de temps devenant plus restrictifs, la probabilité qu'une projection tombe dans un intervalle donné est nécessairement plus faible[10]. Ainsi, dans la pratique, un grand nombre de projections sont acquises pour assurer la reconstructibilité de chacune des tranches avec une résolution suffisante, engendrant une dose plus importante de rayons X délivrée au patient.

Approches par estimation et compensation de mouvement

En réponse aux nombreux écueils des approches *gated*, notamment la perte de résolution et la dose trop importante délivrée pour avoir des reconstructions 4-D viables, les recherches se sont tournées vers des méthodes ayant pour objectif d'inclure la connaissance du mouvement dans la reconstruction, c'est-à-dire de pouvoir compenser les déplacements et déformations de l'objet d'intérêt, afin de se ramener à un état anatomique de référence, *i.e.* une phase donnée du cycle de mouvement.

Limitant le mouvement à des transformations rigides ou affines, certaines approches consistent à corriger les données sinogrammes en repositionnant simplement les intégrales de ligne [Thielemans et al., 2003, Rahmim et al., 2004, Qi and Huesman, 2002]. Ces méthodes ne sont malheureusement pas assez précises car les transformations mises en jeu sont trop peu représentatives de mouvements réels tels que la respiration.

9. Autrement dit la frontière entre le diaphragme et les poumons est perpendiculaire à l'axe de rotation.

10. La distribution des projections sur les intervalles suit typiquement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$, où n est le nombre total de projections et $p = \frac{1}{m}$ la probabilité d'une projection de tomber dans un des m intervalles. Ainsi, à n constant, le nombre moyen de projections par intervalle va diminuer si la probabilité p diminue, *i.e.* si le nombre m d'intervalles possibles augmente.

D'autres travaux se sont appliqués à adapter l'algorithme de reconstruction analytique FBP, en insérant dans le modèle de projection une transformation des voxels liée au mouvement. Ainsi Wang et Varnier [Wang and Vannier, 1995] ont compensé une translation globale du patient, estimée entre les projections adjacentes. Partant des travaux initiés en imagerie IRM sur la compensation de mouvement du buste [Cuppen et al., 1985, Atalar and Onural, 1991] basée sur des modèles paramétriques de déformation, Crawford *et al.* [Crawford et al., 1996] ont dérivé une formule exacte de reconstruction analytique pour la tomographie X en propagation parallèle, à partir d'un modèle de mouvement définissant des déplacements et des grandissements dans des sections de l'objet 3-D. Ritchie *et al.* [Ritchie et al., 1996] ont alors développé un modèle plus réaliste du mouvement respiratoire du thorax, en adaptant l'approche de Crawford *et al.* [Crawford et al., 1996] localement au niveau des pixels dans des sections planes de l'objet 3-D[11]. Lu et Mackie [Lu and Mackie, 2002] ont utilisé un modèle de ce type mais pour corriger directement le sinogramme et appliquer la reconstruction FBP standard. Toujours dans les méthodes de reconstruction analytique, Desbat *et al.* [Desbat et al., 2006] ont montré que des déformations conservant la géométrie de propagation, *i.e.* préservant les intégrales de ligne, pouvaient être compensées analytiquement, élargissant le champ de faisabilité supposé à d'autres déformations que les simples transformations affines.

En tomographie d'émission, de nombreux travaux similaires ont été effectués. Klein *et al.* [Klein et al., 1997], pour l' imagerie TEP cardiaque, ont estimé une déformation non rigide entre 2 phases reconstruites par approche *gated* en utilisant une technique de flot optique 3-D [Song and Leahy, 1991, Song et al., 1994], et les ont sommées pour obtenir une seule phase reconstruite avec un meilleur rapport signal à bruit. En imagerie TEMP du cerveau, Kyme *et al.* [Kyme et al., 2003] ont effectué des mesures de similarité entre les données initiales et les reprojections d'une reconstruction non compensée, pour estimer la transformation rigide associée à chacune d'elles par rapport à une référence. Ils ont ainsi reconstruit cette phase de référence en utilisant l'ensemble des projections "transformées".

Les méthodes les plus représentées dans l'état de l'art, à la fois en tomographie dynamique en transmission, mais aussi d'émission, appliquées à la compensation du mouvement cardiaque ou respiratoire, sont sans conteste celles basées sur l'estimation d'un modèle de mouvement assimilé à un champ de vecteurs de déformation Γ_t, suivant le principe présenté dans la section 3.1. Cependant tous les travaux en la matière diffèrent suivant la modalité en jeu, la méthode d'estimation et l'application de la compensation. Nombre d'entre elles recherchent ce champ de déformation sur des reconstructions 4-D *gated* X[12] préalables.

En imagerie TEP/TEMP, nous pouvons citer dans ce cadre [Blondel et al., 2003, Blondel et al., 2004, Brankov et al., 2002, Qiao et al., 2006, Lamare et al., 2006, Lamare et al., 2007, Prummer et al., 2009]. Blondel *et al.* [Blondel et al., 2003, Blondel et al., 2004], en TEMP cardiaque, opèrent une segmentation des artères sur les angiogrammes triés par phases temporelles et reconstruisent en 3-D, par stéréovision sur un ensemble de points, un squelette de ces vaisseaux. Ils recentrent alors ces reconstructions les unes par rapport aux autres, et estiment un modèle paramétrique de déformation 4-D, par maximisation d'une énergie évaluant la superposition des angiogrammes avec les squelettes 3-D reprojetés, et d'une énergie définissant un terme de régularisation. À partir de ce modèle de mouvement, un modèle numérique de projection est déduit, tenant compte des déplacements individuels des voxels suivant le champ de vecteurs 4-D de mouvement estimé, et calé temporellement sur un signal cardiaque 1-D. Ce signal est normalisé en temps sur le déroulement d'un cycle cardiaque, associant une date normalisée unique à une phase particulière. Ainsi la durée d'un cycle pendant l'acquisition est virtuellement dilatée ou

11. Autrement dit les paramètres du mouvement sont variants dans l'objet au lieu d'être figés comme dans le modèle de [Crawford et al., 1996].

12. Des reconstructions 4-D *gated* en tomographie X.

contractée pour s'adapter au cycle normalisé, ce qui permet de tenir compte des variations de périodicité et rend ainsi le modèle plus réaliste vis-à-vis des données. En revanche l'amplitude spatiale du mouvement cardiaque est supposée constante. Ils insèrent alors ce projecteur dynamique dans un algorithme de reconstruction itérative type ART (*cf.* section 1.2.4, chapitre 1). Dans notre approche, nous utiliserons la même adaptation du signal temporel et la même hypothèse d'invariabilité d'amplitude pour notre modèle de projection lorsque nous traiterons des données patient (*cf.* section 3.4.1).

Li *et al.* [Li et al., 2006a], en tomographie X *Cone-Beam*, estiment le champ de déformation par recalage non rigide d'une reconstruction 4-D *gated*, suivant la méthode développée par Mattes *et al.* [Mattes et al., 2003] en imagerie TEP/X. À partir de ce modèle, ils dérivent une méthode de reconstruction basée sur une heuristique. Cette dernière part du constat que la rétroprojection filtrée de l'ensemble des projections, dans sa forme discrète, peut être vue comme une somme de rétroprojections filtrées intermédiaires à partir d'une unique projection :

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\pi}{T} \sum_{i=1}^{T} \mathscr{F}^{-1} \left[\breve{R}^{\theta_i}(\boldsymbol{\nu}) \right] (\boldsymbol{x}) = \frac{\pi}{T} \sum_{i=1}^{T} \tilde{f}^{\theta_i}(\boldsymbol{x}) \tag{3.6}$$

L'équation 3.6 rappelle la formule semi-discrète de la rétroprojection filtrée en propagation parallèle, où $\breve{R}^{\theta_i}$ désigne la projection θ_i filtrée, $\mathscr{F}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse dans l'espace objet, et $\tilde{f}^{\theta_i}$ la reconstruction FBP intermédiaire à partir de l'unique projection R^{θ_i}. Li *et al.* étendent alors ce principe en appliquant la déformation associée à chacune des reconstructions intermédaires pour les ramener à la même phase de référence, avant sommation :

$$f(\boldsymbol{x}, t_0) = \frac{\pi}{T} \sum_{i=1}^{T} \tilde{f}^{\theta_i}(\Gamma_{t_{\theta_i}}^{-1}(\boldsymbol{x}), t_{\theta_i}) = \frac{\pi}{T} \sum_{i=1}^{T} \mathrm{T}_{\theta_i} \left[\tilde{f}^{\theta_i}(\boldsymbol{x}, t_{\theta_i}) \right] \tag{3.7}$$

où les T_{θ_i} désignent les transformations associées aux déformations $\Gamma_{t_{\theta_i}}^{-1}$ de la date de référence t_0 vers la date t_{θ_i}. À partir de cette expression heuristique, Li *et al.* adaptent leur algorithme de reconstruction analytique à la géométrie de *scanner Cone-Beam*, suivant le principe de la méthode dédiée FDK [Feldkamp et al., 1984] (*cf.* section 1.2.4, chapitre 1).

Les *scanners Cone-Beam* ont fait l'objet d'un intérêt particulier dans la littérature, car ils ont été implantés, au début des années 2000 [Jaffray et al., 1999, Jaffray and Siewerdsen, 2000, Jaffray et al., 2002], sur des accélérateurs linéaires pour la radiothérapie, permettant ainsi des acquisitions pendant le traitement. Nous allons nous-mêmes nous intéresser à cette modalité ; elle sera présentée en détail dans la section 3.4.1. L'une des particularités de ce type de système est sa période de rotation lente (environ 2 minutes), et une acquisition des projections sur un unique tour du détecteur plan. Cette modalité d'acquisition rend difficile des reconstructions 4-D de type *gated* du fait de l'insuffisance du nombre de projections, même si la faible vitesse de rotation permet la révolution de plusieurs cycles du mouvement respiratoire et assure ainsi une couverture angulaire satisfaisante pour chaque phase temporelle. D'où les travaux de recherche effectués, spécifiques à la compensation du mouvement respiratoire, tels ceux de Li *et al.* [Li et al., 2006a] déjà cités, ou encore Rit *et al.* [Rit et al., 2009a, Rit et al., 2009b] sur la reconstruction dynamique à partir de ce type de données. Ainsi, Rit *et al.* [Rit et al., 2009a] ont comparé l'approche analytique de Li *et al.* avec une méthode de reconstruction itérative SART (*cf.* section 1.2.4, chapitre 1), en y implantant un modèle de projection de volumes déformables [Rit and Sarrut, 2007]. De même que Li *et al.*, le champ de déformation est estimé à partir de reconstructions 4-D *gated*, en utilisant un algorithme de recalage déformable régularisé entre les différentes images 3-D de la séquence [Boldea et al., 2003, Boldea et al., 2008]. Rit *et al.* précisent que le modèle respiratoire ainsi construit est issu d'un jeu de données *gated*

antérieur, provenant d'un système différent. Cela nécessite alors un calage spatial et temporel de ce modèle sur les projections *Cone-Beam* courantes. Rit *et al.* partent cependant de l'hypothèse que le mouvement est reproductible d'une acquisition à l'autre [Sonke et al., 2008], justifiant la corrélation des projections *gated* et *Cone-Beam*. Un recalage spatial rigide, basé sur une mesure de similarité par information mutuelle [Vandemeulebroucke et al., 2006], est réalisé entre l'image 4-D moyennée dans la direction temporelle, *i.e.* une image 3-D floutée par le mouvement, et la reconstruction 3-D sans compensation, par l'algorithme FDK, des projections *Cone-Beam*, afin de recentrer le modèle de déformation sur la position spatiale de la future reconstruction du système *Cone-Beam*. Le recalage temporel du modèle est quant à lui réalisé à partir d'un signal 1-D respiratoire, extrait directement des projections *Cone-Beam* [Rit et al., 2006].

Zeng *et al.* [Zeng et al., 2007] proposent, toujours pour cette modalité, une méthode différente n'utilisant aucune reconstruction 4-D *gated*, afin d'éviter les problèmes éventuels de non-reproductibilité du mouvement, et de s'affranchir également des erreurs de recalage spatio-temporel des données *gated* et *Cone-Beam*. Leur idée est d'estimer le champ de déformation directement à partir des projections *Cone-Beam*. Pour ce faire, ils supposent qu'ils ont à disposition une image 3-D statique de référence $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$ de l'anatomie de l'objet à reconstruire, obtenue par exemple lors d'une acquisition en respiration retenue[13]. Ils posent alors le problème inverse de la reconstruction comme la détermination des paramètres $\boldsymbol{\Gamma}$ du champ de déformation qui minimisent un critère d'attache aux données $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}$— moindres carrés pondérés ou opposé du logarithme du coefficient de corrélation — entre les projections *Cone-Beam* et les reprojections de l'image 3-D anatomique $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$ déformée par $\boldsymbol{\Gamma}$, associé à des termes de régularisation :

$$\boldsymbol{\Gamma}^{+} = \arg\min_{\boldsymbol{\Gamma}} \; \mathcal{J}_{\mathsf{data}}\left(\left\{\mathbf{y}^{\theta}\right\}, \left\{\tilde{\mathbf{y}}^{\theta}(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}, \boldsymbol{\Gamma}^{t_\theta})\right\}\right) + \mu_{\mathsf{s}}\,\mathcal{J}_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{\Gamma}) + \mu_{\mathsf{t}}\,\mathcal{J}_{\mathsf{t}}(\boldsymbol{\Gamma}) \tag{3.8}$$

où $\left\{\tilde{\mathbf{y}}^{\theta}(\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}, \boldsymbol{\Gamma}^{t_\theta})\right\}$ constituent l'ensemble des reprojections de l'image $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$ déformées par les paramètres $\boldsymbol{\Gamma}^{t_\theta}$ du champ de déformation à la date t_θ correspondante. $\mathcal{J}_{\mathsf{s}}$ est une pénalisation favorisant un champ de déformation lisse spatio-temporellement, et $\mathcal{J}_{\mathsf{t}}$ une pénalisation d'apériodicité, *i.e.* favorisant la similarité du champ $\boldsymbol{\Gamma}$ correspondant à la même phase respiratoire. Là encore, la mise en relation des phases respiratoires dans le champ de déformation $\boldsymbol{\Gamma}$ nécessite un signal respiratoire 1-D. Zeng *et al.* utilisent la méthode d'extraction sur les projections *Cone-Beam* proposée par Zijp *et al.* [Zijp et al., 2004]. Après reconstruction, l'obtention d'une phase donnée du cycle de mouvement peut être obtenue en déformant le modèle anatomique, conformément au champ estimé, en concordance avec les données initiales.

Rappelons que les approches citées jusque-là estiment le mouvement à partir de reconstructions 4-D *gated* X préalables, qu'ils injectent ensuite dans la reconstruction, à l'exception de Zeng *et al.* [Zeng et al., 2007], qui utilisent directement les projections *Cone-Beam* pour estimer uniquement le champ vectoriel de déformation à appliquer à un modèle anatomique connu. Ces méthodes utilisent donc toute une information a priori, en plus des projections courantes. Ceci nous amène à parler d'un autre type d'approche que l'on trouve dans la littérature, qui consiste à estimer conjointement le champ de déformation et l'image 3-D à reconstruire à une phase de référence. Il s'agit d'une extension du concept de la méthode de Zeng *et al.* où le modèle anatomique n'est plus connu a priori, mais est recherché dans les projections en même temps que la déformation. Ce sont donc des reconstructions avec compensation que l'on pourrait qualifier d'aveugles, en analogie avec les méthodes de déconvolution dite aveugle en traitement de l'image, un problème inverse consistant à estimer conjointement l'image défloutée et la fonction d'étalement de point (PSF) responsable de sa

13. Ce type d'acquisition est assez contraignant pour le patient, voire dans certains cas impossible.

convolution [Campisi and Egiazarian, 2007]. Dans ce cadre, nous avons les travaux de Gilland et Cao en imagerie TEP cardiaque *et al.* [Gilland et al., 2002, Cao et al., 2003]. Toujours en TEP, Jacobson *et al.* [Jacobson and Fessler, 2003] utilisent un critère de maximum de vraisemblance pour estimer aussi bien les paramètres de déformation que l'image, en pointant du doigt que la fonction coût à minimiser devient alors non convexe. Une stratégie d'optimisation alternée est alors adoptée, basée sur le principe des fonctions majorantes [Erdogan and Fessler, 1999, Erdogan, 1999, Fessler and Erdogan, 1998]. Schumacher *et al.* [Schumacher et al., 2009], en TEMP, simplifient la reconstruction jointe en réduisant le mouvement à une transformation rigide, avec seulement 6 paramètres à estimer (3 translations et 3 rotations), en plus de l'image.

Enfin, certaines approches élaborent des méthodes d'interpolation du champ vectoriel de déformations, leur permettant de générer n'importe quelle phase temporelle de façon cohérente à partir de la séquence 4-D *gated* reconstruite, cela afin d'améliorer sa qualité en terme de résolution temporelle [Schreibmann et al., 2005, Brock et al., 2003, Ehrhardt et al., 2007, Ouksili and Batatia, 2010], ou bien de réaliser des simulations numériques réalistes [Sarrut et al., 2006].

Application de la déformation dans les méthodes par compensation

On constate que toutes ces méthodes de reconstruction avec compensation du mouvement visent à ramener l'objet dynamique d'intérêt à une phase donnée d'un cycle de mouvement. L'un des points durs de ces méthodes est donc la déformation de l'image des voxels vers cette phase de référence en vue de sa projection, *i.e.* l'application de l'opérateur de transformation basé sur le champ 4-D de vecteurs de mouvement. Ce champ est généralement paramétré par les trois composantes spatiales du vecteur de déplacement associé à un voxel à une phase donnée du cycle. La modélisation de ces "images" de composantes vectorielles est identique à la modélisation d'un signal continu multidimensionnel, *i.e.* une décomposition sur une base de fonctions disposées sur une grille régulière. À cet effet, la plupart des auteurs utilisent comme fonctions de base les B-splines [Mattes et al., 2003, Blondel et al., 2004, Zeng et al., 2007, Lamare et al., 2007, Rit et al., 2009a], que nous avons présentées en détail dans le chapitre 2, et dont les excellentes propriétés se prêtent parfaitement à cette application. D'autres méthodologies de modélisation sont aussi utilisées. C'est le cas de Brankov *et al.* [Brankov et al., 2002, Brankov et al., 2004] qui estiment la déformation comme les déplacements des nœuds d'un maillage adaptatif modélisant chaque image de la séquence cardiaque TEMP *gated*. Ils effectuent alors la reconstruction compensée en mouvement dans l'espace de ces maillages.

Pour la transformation liée à un modèle 4-D vectoriel de déformation paramétré sur la grille de voxels, plusieurs solutions sont envisagées dans la littérature. Blondel *et al.* [Blondel et al., 2004] simplifient la déformation en la ramenant à un simple déplacement du voxel cubique, suivie de sa projection sur le détecteur avec comme règle de n'impacter qu'un seul pixel détecteur — interpolation au plus proche voisin. Qiao *et al.* [Qiao et al., 2006] ré-interpolent trilinéairement le voxel déplacé sur la grille régulière. Étant donné que les modèles standard de projection tomographique, tel *ray driven* [Joseph, 1982], induisent généralement déjà une étape d'interpolation sur les voxels, multipliant les erreurs dues à cette transformation, d'autres auteurs proposent de calculer la contribution du voxel — intégrale de ligne — à partir de sa localisation exacte [Lamare et al., 2007]. Dans [Rit et al., 2009a], l'algorithme de projection conique est basé sur deux transformations de la grille des voxels, suivies d'une interpolation trilinéaire sur une autre grille "alignée" aux pixels détecteur : c'est l'algorithme *shearwarp* [Lacroute, 1995]. Pour la combinaison avec la déformation, l'astuce consiste alors à effectuer le déplacement des voxels après les transformations de la grille et avant l'interpolation, de manière à n'effectuer qu'une

seule interpolation dans le projecteur dynamique global. Ces méthodes ne tiennent jusqu'à présent pas compte du fait que le voxel lui-même devrait, en toute logique "continue", être déformé, car les mouvements en jeu sont de type non rigide — la grille des voxels déformée n'est plus régulière, d'où une variation de leur forme et de leur volume [Blondel et al., 2004, Reyes et al., 2007, Isola et al., 2008b, Isola et al., 2008a, Isola et al., 2010]. Or le calcul de la déformation de l'indicatrice de voxels s'avère trop fastidieux, d'autant plus que cette dernière dépend de sa localisation dans l'espace et le temps. Reyes *et al.* [Reyes et al., 2007] utilisent des voxels de forme sphérique, uniformes en atténuation, dont ils approximent les déformations par des ellipsoïdes, dont les demi-axes sont orientés dans les directions locales privilégiées, déterminées par la décomposition en valeurs singulières (SVD) du gradient de la transformation. Isola *et al.* [Isola et al., 2008b, Isola et al., 2008a, Isola et al., 2010] reprennent le projecteur *basé empreinte* de Ziegler *et al.* [Ziegler et al., 2006] utilisant des fonctions blobs de type Kaiser-Bessel, que nous avons présenté dans le chapitre 2. Ils appliquent alors la déformation, supposée connue et toujours sous forme d'un champ vectoriel, directement à l'empreinte projetée du blob, en effectuant une mise à l'échelle fonction de la grille déformée — étirement ou compression de ses dimensions suivant les axes détecteur. Ils opèrent aussi une adaptation de densité du volume du blob, répercutée sur l'empreinte, afin de satisfaire l'équation de continuité dans le cas d'un fluide compressible (*cf.* équation 3.1) — divergence non nulle de la déformation, ce que ne font pas Reyes *et al.*. Cette loi physique n'est d'ailleurs pas souvent prise en compte dans la littérature. Brankov *et al.* [Brankov et al., 2002], dans leur méthode d'estimation du mouvement, incluent la variation de densité des parois du myocarde, due à la contraction de leur épaisseur, et qui se traduit par une hausse de contraste dans ces zones [Galt et al., 1990].

Autres approches

Les méthodes que nous évoquons à présent font l'hypothèse que le mouvement est connu et disponible sous forme d'un champ de déformation et d'une transformation associée, et tentent de reconstruire l'objet, à partir de projections *gated*, en ajoutant cette fois une composante de régularisation spatio-temporelle pour corréler les phases temporelles. L'application est l'imagerie TEMP cardiaque. C'est ainsi que De Murcia *et al.* [De Murcia and Grangeat, 1996] utilisent une régularisation basée sur le principe du filtre de Kalman [Swerling, 1958, Kalman, 1960, Kalman and Bucy, 1961], pour la prédiction des états d'un système dynamique, appliquée à l'ensemble de la séquence 4-D, par le biais de sa covariance a posteriori faisant intervenir la déformation. Lalush et Tsui [Lalush and Tsui, 1999] reconstruisent la séquence cardiaque par une approche bayésienne type MAPEM avec une régularisation 4-D basée sur une distribution de Gibbs. Gravier *et al.* [Gravier et al., 2006] utilisent aussi l'algorithme MAPEM pour la reconstruction, avec un terme de régularisation spatio-temporelle 4-D. Attardons sur quelques détails de leur approche, afin d'illustrer nos propos par un exemple, en prémices à la présentation de notre approche. Le critère du maximum a posteriori est le suivant :

$$\boldsymbol{f}^{+} = \arg\max_{\boldsymbol{f}} \underbrace{\log\left[prob\left(\Upsilon, \boldsymbol{f}\right)\right]}_{\text{log-vraisemblance}} + \underbrace{\log\left[prob\left(\boldsymbol{f}\right)\right]}_{\text{log-probabilité a priori}} \tag{3.9}$$

La probabilité a priori est mise sous forme d'une distribution de Gibbs, fonction de deux énergies, l'une spatiale $U_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{f})$ et l'autre temporelle $U_{\mathsf{t}}(\boldsymbol{f})$:

$$prob\left(\boldsymbol{f}\right) \propto \exp\left[-\mu_{\mathsf{s}} U_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{f}) - \mu_{\mathsf{t}} U_{\mathsf{t}}(\boldsymbol{f})\right] \tag{3.10}$$

L'énergie $U_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{f})$ définit un lissage quadratique spatial dans un voisinage autour de chaque voxel de chaque tranche temporelle :

$$U_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\ell=1}^{M} \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}} \sum_{\boldsymbol{k'} \in V_{\boldsymbol{k}}} \left[f_{\boldsymbol{k},\ell} - f_{\boldsymbol{k'},\ell} \right]^2 \tag{3.11}$$

L'énergie $U_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{f})$ assure la corrélation temporelle des tranches en se servant du champ de déformation pour les faire correspondre deux à deux, par l'expression :

$$U_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\ell=1}^{M} \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}} \left[f_{\boldsymbol{k},\ell} - \left(\sum_{\ell' \neq \ell} \frac{1}{|\ell - \ell'|^n} \right)^{-1} \sum_{\ell'' \neq \ell} \frac{1}{|\ell - \ell''|^n} \bar{f}_{\boldsymbol{k},\ell'' \to \ell} \right]^2 \tag{3.12}$$

où $\bar{f}_{\boldsymbol{k},\ell'' \to \ell}$ correspond à la tranche ℓ'' déformée vers la phase ℓ, $|\ell - \ell''|$ est la distance temporelle, modulo la période d'un cycle, entre les deux tranches en question. Ainsi la similarité entre deux tranches est pondérée par l'éloignement, celle-ci étant favorisée pour des tranches de plus en plus proches. Le paramètre $n > 0$ règle la vitesse de décroissance de la pondération au fur et à mesure de l'éloignement. Gravier *et al.* choisissent $n = 3$ afin que les corrélations inter-tranches deviennent négligeables assez rapidement, et ce afin de prévenir les erreurs dues aux différences de contraste engendrées par les variations de densité dans les parois du myocarde [Galt et al., 1990].

Les travaux de Wernick *et al.* [Wernick et al., 1999] et Narayanan *et al.* [Narayanan et al., 2000], toujours en TEP/TEMP, peuvent aussi s'apparenter à des approches régularisées spatio-temporellement. En effet, ils opèrent leurs reconstructions 4-D dans l'espace de la transformée de Karhunen-Loève, afin de décorréler les composantes spatiales et temporelle, de manière à reconstruire chaque tranche 3-D indépendamment. Ils ont alors montré qu'une telle méthode était quasiment équivalente à une reconstruction 4-D par moindres carrés pondérés, associés à une régularisation quadratique 4-D séparable en temps en espace (norme au carré du Laplacien de l'image 4-D).

3.4 Approche inverse globale sans compensation de mouvement

3.4.1 Modélisation du problème

Définition des hypothèses

Comme nous l'avons initié dans la section introductive 3.1, notre approche va faire fi de la modélisation de la déformation $\Gamma_t(\boldsymbol{x})$ subie par l'objet f au cours du temps, *i.e.* d'une estimation préalable d'un champ de vecteurs de mouvement qui servirait d'information a priori pour ramener le signal f en une date t, à son état en une date de référence t_0, comme nous l'avons présenté pour les méthodes de l'état de l'art basées sur ce principe (*cf.* section 3.3). Ainsi nous ne pré-supposons rien de la forme explicite du mouvement. Nous avons néanmoins besoin de certaines hypothèses, celles-là même que nous avons présentées dans la section 3.1, à savoir que nous considérons le signal f comme continu dans l'espace et le temps, et aussi périodique dans le temps. Nous pouvons donc, comme dans l'équation 3.4, "réduire" la définition du signal f à celui restreint à une période g, définie sur $\mathbb{R}^n \times [0, \iota_a[$. C'est ce dernier qui devient notre signal d'intérêt, *i.e.* nous allons chercher à reconstruire g, compte tenu de nos hypothèses et des données Υ datées dans le temps sur la durée d'acquisition (*cf.* Fig. 3.3).

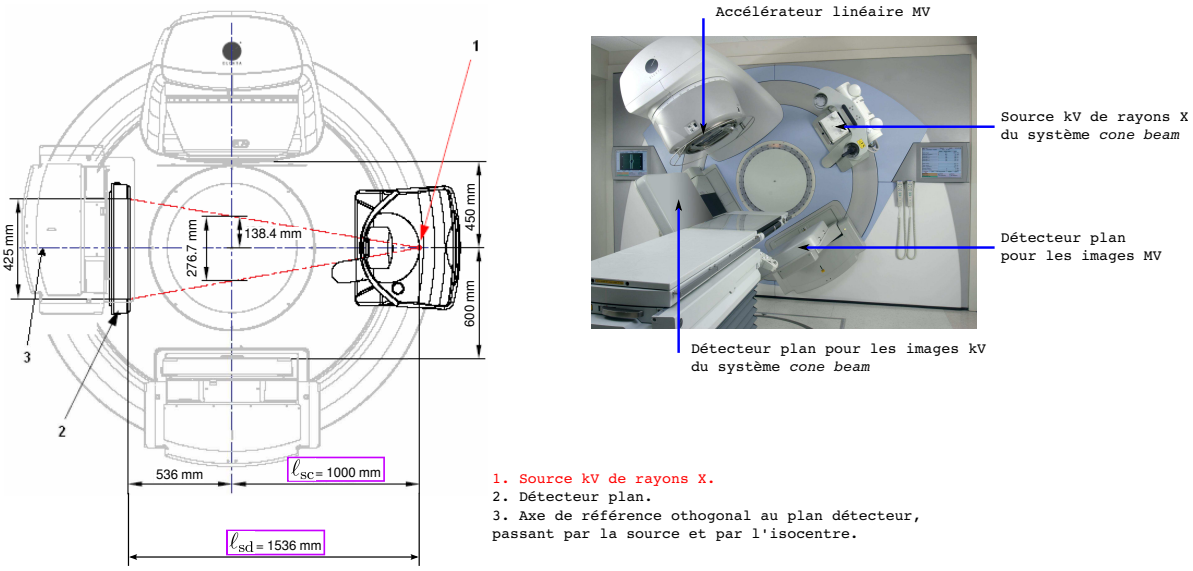


FIGURE 3.7: L'accélérateur linéaire mégavolt (MV) *Synergy Cone-Beam CT*$^{\text{TM}}$ de la société *Elekta* (en photo à droite) équipé d'un système d'acquisition de projections avec un faisceau kilovolt (kV), et un détecteur plan possédant 512×512 pixels de taille $0{,}08 \times 0{,}08\text{cm}^2$. Le schéma de gauche décrit la géométrie du système en position initiale. La distance focale ℓ_{sd} est de 153,6cm ; la distance ℓ_{sc} est de 100cm, de la source à l'isocentre — intersection de l'axe de référence (3) et de l'axe de rotation. Cette figure est tirée de la thèse de Simon Rit [Rit, 2007], qui a travaillé en reconstruction dynamique sur les données d'un tel système au Centre Léon Bérard de Lyon.

Modalité d'acquisition type

Notre approche va se baser, pour en faire sa démonstration, sur un système d'acquisition des projections tomographiques existant. Il s'agit d'un *scanner Synergy Cone-Beam CT*$^{\text{TM}}$ (*CT* pour *Computed Tomography*) de la société *Elekta* (*cf.* Fig. 3.7), un système de tomodensitométrie équipé d'un détecteur plan possédant 512×512 pixels de $0{,}08 \times 0{,}08\text{cm}^2$, et d'une source de rayons X en propagation conique — *cone beam* — dont l'énergie est de l'ordre du kilo-électron-volt (keV). La distance focale ℓ_{sd} est de 153,6cm, et la distance entre la source et l'*isocentre*, est de 100cm (*cf.* Fig. 3.7). Cet imageur est fixé au même système de rotation qu'un accélérateur linéaire pour le traitement en radiothérapie (énergie de l'ordre du méga-électron-volt(MeV)), et peut ainsi effectuer ses acquisitions pendant un traitement, ce qui explique sa rotation lente par rapport à la plupart des *scanners* du marché. Cette période de rotation est de 2 minutes, pendant laquelle il acquiert 600 à 700 projections espacées régulièrement dans le temps — soit en moyenne 5,5 projections par seconde.

Cet appareil étant principalement utilisé pour le traitement du cancer du poumon, c'est le mouvement respiratoire qui constitue la composante dynamique des acquisitions que nous allons traiter dans nos reconstructions. Un mouvement de ce type est bien entendu approximativement périodique, la durée d'un cycle respiratoire avoisinant les 5 secondes. Ainsi, durant l'acquisition, suivant la modalité que l'on vient de présenter, plusieurs cycles de mouvement sont révolus, de l'ordre de quelques dizaines, ce qui signifie qu'à une phase temporelle g^ι du signal g à reconstruire, à une date donnée ι, vont correspondre quelques dizaines de projections réparties régulièrement sur 360°. Si l'on considérait uniquement cette phase g^ι donnée, d'un point de vue statique, on serait en présence d'un problème de reconstruction à très peu de projections, mais néanmoins soluble.

Le CLB est équipé d'un tel système. Les données physiques sur lesquelles nous allons tester notre méthode (*cf.* sections 3.5 et 3.6), nous ont été fournies par ce laboratoire ; c'est pourquoi nous allons baser nos simulations 2-D (*cf.* section 3.4.2) sur la même procédure d'acquisition,

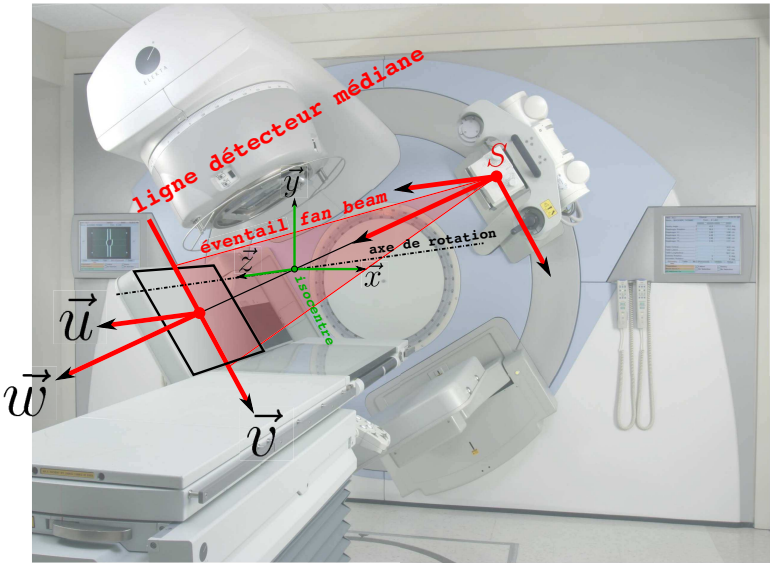


FIGURE 3.8: Schéma d'extraction de la ligne détecteur médiane d'un système *Cone-Beam* suivant l'axe $\vec{v}$ perpendiculaire à l'axe de rotation $\vec{z}$, dont les données sont équivalentes aux données *fan beam* pour la reconstruction 2-D de la coupe médiane de l'objet d'intérêt. On visualise le schéma sur une photographie du système *Synergy Cone-Beam* CT^{TM}, pour illustrer le fait que la reconstruction 2-D de cette coupe est possible aussi sur des données physiques, et non pas seulement en simulation.

la propagation *cone beam* se ramenant en 2-D à une propagation *fan beam*, si l'on n'extrait que la ligne médiane, dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation (axe $\vec{v}$) des projections du détecteur plan (*cf.* Fig. 3.8).

Représentation du signal spatio-temporel

À l'instar de la démarche établie dans le chapitre 2 pour l'élaboration d'un modèle de projection tomographique, d'un point de vue statique, la première étape consiste à définir une représentation mathématique de notre signal $g : (\boldsymbol{x}, \iota) \mapsto g(\boldsymbol{x}, \iota)$. Dans le chapitre 2, le signal d'intérêt f était défini uniquement spatialement, *i.e.* $f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$. Notons g^{ι} un signal de ce type, qui correspondrait au signal g "figé" à l'instant ι. On peut alors écrire :

$$g(\boldsymbol{x}, \iota) = g^{\iota}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}(\iota)\, \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}(\iota)\, \boldsymbol{\beta}^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) \tag{3.13}$$

Pour rester dans la continuité de l'étude effectuée jusqu'à présent, nous conservons notre représentation du signal g^{ι}, défini spatialement, sur une base de B-splines de degré d, réparties sur la grille d'échantillonnage des voxels[14]. Les conditions spatiales de la modélisation de g sont donc identiques à celles instaurées dans le chapitre 2, *i.e.* le signal g, pris à une date ι, est une image n-dimensionnelle ($n \in \{2, 3\}$) échantillonnée sur la grille des voxels, et définie par ces valeurs $c_{\boldsymbol{k}}(\iota)$ en ces points, qui sont cette fois-ci fonctions de la date ι.

g étant définie en tout point de l'espace et de l'intervalle de temps $[0, \iota_a[$, l'équation 3.13 est définie quel que soit $\iota \in [0, \iota_a[$. Comme pour le signal spatial statique considéré au chapitre 2, nous ne devons pas oublier que g n'est qu'une approximation du signal physique recherché. Ainsi, de la même manière que nous devons discrétiser le signal dans l'espace pour pouvoir le traiter numériquement, nous devons également le discrétiser dans le temps, autrement dit définir une "grille" régulière d'échantillonnage temporel, associée à des dates "discrètes" $\iota_\ell \in$

14. À termes, on devine que cette représentation nous permettra d'amener notre projecteur *spline driven* dans le modèle de projection dynamique.

$[0, \iota_a[$, avec $\ell \in \{1, \dots, M\}$, où M est le nombre de "tranches" temporelles que l'on décide de reconstruire. Ainsi, si l'on souhaite définir un signal g continu sur l'axe temporel également, nous devons associer à cette dimension, à l'instar des dimensions spatiales, une fonction de base, que l'on note ϑ, dupliquée en ϑ_ℓ aux positions temporelles ι_ℓ. L'équation 3.13 de représentation du signal g devient donc :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \iota) &= \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}(\iota)\, \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\, \vartheta_\ell(\iota) \right) \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\, \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\, \vartheta_\ell(\iota) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\, \boldsymbol{\beta}^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}})\, \vartheta(\iota - \iota_\ell) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Les $c_{\boldsymbol{k},\ell}$ constituent alors les paramètres de l'image $\boldsymbol{c}$ à n dimensions spatiales et 1 dimension temporelle définissant le signal g :

$$\boldsymbol{c} = (c_{\boldsymbol{1},1}, \dots, c_{\boldsymbol{N},1}, \dots, c_{\boldsymbol{1},\ell}, \dots, c_{\boldsymbol{N},\ell}, \dots, c_{\boldsymbol{1},M}, \dots, c_{\boldsymbol{N},M})^\top \in \mathbb{R}^n \tag{3.15}$$

où $\boldsymbol{N} = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ est le nombre d'éléments dans les n dimensions spatiales et M le nombre d'éléments dans la dimension temporelle.

Étant donné que l'on modélise la part spatiale du signal g à l'aide de fonctions B-splines, il est logique, afin de garder une certaine cohérence entre les dimensions, d'utiliser également une B-spline monodimensionnelle β^e comme atome temporel ϑ, pour lequel on peut utiliser un degré e différent du degré d utilisé spatialement. Ainsi, nous pouvons continuer à mettre à profit les très bonnes propriétés des B-splines en matière de modélisation (*cf.* chapitre 2), dans la dimension temporelle. Le signal g devient :

$$g(\boldsymbol{x}, \iota) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\, \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\, \beta^e_\ell(\iota) \tag{3.16}$$

D'après nos hypothèses, g correspond donc à une période du signal f spatio-temporel défini sur toute la durée d'acquisition des projections. La durée de cette période est ι_a, et donc g est défini sur $[0, \iota_a[$. La date ι_a est exclue du domaine d'étude de g car elle correspond au même état à l'instant initial $\iota = 0$, et ce à cause de sa périodicité. On a donc la propriété suivante :

$$g(\boldsymbol{x}, \iota_a) = g(\boldsymbol{x}, 0) \tag{3.17}$$

Une telle modélisation du signal g suppose donc, comme nous l'avons précédemment évoqué dans la section 3.1, que la durée d'un cycle de mouvement est identique en toute circonstance et reproductible, ainsi que les variations anatomiques de l'objet. Or, rappelons-nous que nous nous sommes situés dans le cadre de la tomodensitométrie pour l'imagerie médicale. Même si, en pratique, la reproductibilité de mouvements de type respiratoire ou cardiaque a pu être observée et vérifiée [Sonke et al., 2008, Rit et al., 2009a, Rit et al., 2009b], elle n'est que relative. Ainsi la durée ι_a du signal g peut être variable, y compris au cours d'une même acquisition, puisque plusieurs réalisations de celui-ci interviennent. Il en est de même pour l'amplitude des variations anatomiques. Tout comme Blondel *et al.* [Blondel et al., 2004], nous négligeons ces variations, que l'on ne peut pas prendre en compte dans la représentation que l'on a faite des signaux f et g. Nous faisons ce choix pour conserver une modélisation suffisamment générale quitte à perdre quelque peu en réalisme dans un premier temps. En revanche, la variabilité de la période des cycles de mouvement n'est pas un problème si nous considèrons que notre signal

g est en fait un cycle normalisé que l'on peut aisément recaler temporellement à l'aide d'un signal temporel 1-D enregistré simultanément avec les projections[15], comme le font Blondel *et al.*[16].

Modèle de projection tomographique dynamique

Ayant défini l'expression mathématique de notre signal d'intérêt g, il nous faut déterminer sa projection tomographique, et ce en tenant compte de l'évolution temporelle de celui-ci, de concert avec l'évolution de l'orientation θ du détecteur, que l'on a identifiée, dans la section introductive 3.1, aux dates respectives t_θ sur l'axe temporel de l'acquisition, par rapport à un temps de référence t_0 (*cf.* Fig. 3.3). Nous pouvons donc inclure dans l'équation 2.48, vue dans la section 2.2.2 du chapitre 2, de définition de la transformée aux rayons X, l'aspect temporel des projections :

$$R^\theta(\boldsymbol{u},t) = \int\limits_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} f(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} g(\boldsymbol{x},(t-t_1)(\mathrm{mod}\ \iota_a))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} g(\boldsymbol{x},\iota)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = R^\theta(\boldsymbol{u},\iota) \quad (3.18)$$

où $\{S,\boldsymbol{r}\}$ désigne la demi-droite issue de la source S, de vecteur directeur $\boldsymbol{r}$ tel que le point d'impact sur le détecteur soit en $\boldsymbol{u}$ (*cf.* section 2.2.1). Suivant cette expression, à une unique date ι peuvent[17] correspondre plusieurs orientations θ du détecteur pendant l'acquisition. Ainsi l'on peut dire que la variable ι "classe" les projections sur l'axe temporel du signal g. Si nous incorporons l'équation 3.16 dans l'équation 3.18, nous obtenons alors la représentation $\tilde{R}^\theta$ approximée de la transformée aux rayons X du signal g :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^\theta(\boldsymbol{u},\iota) &= \int\limits_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} g(\boldsymbol{x},\iota)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\,\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\,\beta^e_\ell(\iota) \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\,\beta^e_\ell(\iota) \left(\int\limits_{\boldsymbol{x}\in\{S,\boldsymbol{r}\}} \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\,\beta^e_\ell(\iota)\,F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

où nous faisons apparaître l'expression de l'empreinte $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ du voxel $\boldsymbol{k}$. On peut ainsi voir ce modèle de transformée aux rayons X dynamique comme une interpolation des tranches dans la direction temporelle sur la date ι, suivie de la transformée aux rayons X statique telle qu'elle a été définie dans l'équation 2.56 sus-mentionnée :

$$\tilde{R}^\theta(\boldsymbol{u},\iota) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}(\iota)\,F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})\,, \quad \text{avec } c_{\boldsymbol{k}}(\iota) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell}\,\beta^e_\ell(\iota) \qquad (3.20)$$

Cette modélisation de la projection dynamique suppose que l'on est en mesure de relier la variable temporelle ι du signal g aux dates des projections t_θ, autrement dit de pouvoir recaler le signal à reconstruire sur le processus d'acquisition. Cela va pouvoir se faire comme il a été

15. Nous verrons dans la section suivante qu'un signal de ce type nous est nécessaire pour notre modèle de projection.

16. Notons que ce recalage temporel ne nous affranchira pas de la variabilité interne à un cycle (tels les phénomènes d'hystérésis), et que nous supposons donc un comportement uniforme des cycles de mouvements.

17. Et même doivent !

dit plus haut grâce à un signal 1-D donnant l'évolution des cycles de mouvement, *e.g.* le signal des phases respiratoires du patient, tout comme dans les autres méthodes, *gated* ou par compensation, que nous avons vues dans notre état de l'art (*cf.* section 3.3). Un tel signal est facilement enregistrable en même temps que l'acquisition des projections [Kachelriess et al., 2000, Seppenwoolde et al., 2002, Low et al., 2003, Vedam et al., 2003, Zijp et al., 2004, Sonke et al., 2005]. Il nous permettra également de recaler en temps le cycle reconstruit sur le déroulement de l'acquisition, pour s'adapter à l'éventuelle variabilité de périodicité, comme nous l'avons fait remarquer dans la section précédente.

Étendons à présent la modélisation des pseudo-données statiques vue dans l'équation 2.57, dans la section 2.2.2 du chapitre 2, à la modélisation dans le cadre dynamique, sous la forme :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{y}}_{\boldsymbol{q}}^{\theta} &= \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, \tilde{R}^{\theta}(\boldsymbol{u}, \iota)\, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}(\iota) \cdot \left(\int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}(\iota) \cdot \left(\int \ldots \int_{-\frac{\Delta_d}{2}}^{\frac{\Delta_d}{2}} F_{\boldsymbol{k}}^{\theta}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}}(\iota) \cdot \mathbf{R}_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{k}}^{\theta} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell} \cdot \mathbf{S}_{\ell}^{\iota} \right) \cdot \mathbf{R}_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{k}}^{\theta}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$\Omega_{\boldsymbol{q}}^{\theta}$ représente l'ensemble des voxels $\boldsymbol{k}$ dont l'empreinte impacte effectivement le pixel détecteur $\boldsymbol{q}$. En notant $\tilde{\mathbf{y}}^{\theta} = (\tilde{\mathrm{y}}_{\mathbf{1}}^{\theta}, \tilde{\mathrm{y}}_{\mathbf{2}}^{\theta}, \ldots, \tilde{\mathrm{y}}_{\boldsymbol{M}}^{\theta})$ le vecteur des pseudo-données pour la projection θ, cette expression met en évidence un opérateur matriciel :

$$\tilde{\mathbf{y}}^{\theta} = \mathbf{R}^{\theta} \cdot \mathbf{S}^{\iota} \cdot \boldsymbol{c} \tag{3.22}$$

On retrouve le projecteur numérique $\mathbf{R}^{\theta}$ défini dans le chapitre 2, précédé cette fois-ci de l'opérateur $\mathbf{S}^{\iota}$ d'interpolation temporelle des tranches sur la date ι, à partir de la base de B-splines monodimensionnelles de degré e :

$$\mathbf{S}_{\ell}^{\iota} = \beta_{\ell}^{e}(\iota) \tag{3.23}$$

Comme nous l'avons spécifié dans l'équation 3.17, la propriété de périodicité du signal g induit la périodicité dans cet interpolateur temporel. Par exemple, si l'on choisissait une interpolation linéaire, *i.e.* $e = 1$, et dans l'hypothèse où l'on devrait interpoler les tranches sur une date $\iota \in [\iota_M, \iota_a[$, la tranche supérieure d'interpolation "reboucle" sur la tranche initiale en ι_1.

Étant donné que nous sommes partis d'une représentation de g sur une base de B-splines, notre projecteur *spline driven* s'impose pour l'opérateur $\mathbf{R}^{\theta}$. Mais nous pouvons tout à fait sélectionner une autre base pour la composante spatiale du signal, et donc utiliser tout autre projecteur statique de l'état de l'art (*cf.* section 2.1.2, chapitre 2), sachant que le formalisme présenté jusque-là découple les composantes spatiales et temporelle. Il paraît néanmoins plus judicieux de garder une cohérence spatio-temporelle de la base pour garder les bonnes propriétés intrinsèques de cette modélisation continue globale du signal g.

Nous avons implicitement, dans la modélisation de l'équation 3.21, émis une hypothèse : l'acquisition d'une projection d'orientation θ, à une date ι donnée, est considérée comme instantanée. On néglige donc le temps d'intégration nécessaire sur le détecteur, que l'on suppose alors très inférieur à la vitesse d'évolution anatomique de l'objet d'intérêt. Il s'agit là, certes,

d'une hypothèse relativement grossière, et fortement soumise à l'application considérée, car elle suppose, pour être valable, que l'objet d'intérêt a une vitesse de variation anatomique très inférieure à la résolution spatiale souhaitée, *i.e.* approximativement l'échantillonnage spatial de l'image reconstruite, qui est de l'ordre du millimètre en tomographie par rayons X. Or, dans l'application que l'on va considérer pour tester notre approche, typiquement la modalité *Cone-Beam CT* présentée dans la section 3.4.1, le temps de pose du détecteur pour une projection est d'environ 200 millisecondes, alors que l'objet présente des zones pouvant se déplacer de quelques centimètres par seconde [Ritchie et al., 1992], typiquement les parois du poumon et le diaphragme pendant le cycle respiratoire. Nous ne serons donc pas totalement dans le cas de figure supposé par notre hypothèse, mais nous choisissons néanmoins de la conserver. Nous tolérons donc dans un premier temps la perte de résolution potentielle engendrée par cette approximation, car nous prévoyons qu'elle sera assez faible, voire négligeable, compte tenu de tous les autres facteurs d'erreurs potentiels intervenant dans la reconstruction 4-D, *e.g.* le faible nombre de projections disponibles par tranche temporelle.

Bien entendu, notre approche se voulant assez générale, un autre type d'application peut nécessiter de prendre absolument en compte la non-instantanéité des projections. De plus, nous avons insisté, tout au long du chapitre 2, sur l'importance de disposer d'une modélisation précise de l'acquisition de nos données, qui est l'un des piliers de l'approche inverse. À ce titre, il paraît important de "coller" au mieux à la réalité du processus d'acquisition. C'est pourquoi nous présentons, ci-dessous, la modélisation dynamique de la projection qui tiendrait compte du temps d'intégration d'une projection sur le détecteur. Nous verrons que ce modèle modifiera simplement les coefficients de l'opérateur $\mathbf{S}^{\iota}$ dans l'équation 3.22. Ainsi, à une projection d'orientation θ acquise à un temps ι, nous n'associons plus seulement une date ponctuelle, mais un intervalle d'intégration $\Omega_\iota = [\iota_\mathsf{i}, \iota_\mathsf{f}]$. Si ce temps d'intégration des projections est constant quel que soit ι, nous notons Δ_ι cette durée et l'intervalle Ω_ι devient $[\iota - \frac{\Delta_\iota}{2}, \iota + \frac{\Delta_\iota}{2}]$. On peut alors repartir de l'équation 3.21 des pseudo-données $\tilde{\mathrm{y}}^{\theta}_{\boldsymbol{q}}$, en y insérant l'intégration dans le temps :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{y}}^{\theta}_{\boldsymbol{q}} &= \int_{\Omega_\iota} \int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, \tilde{R}^{\theta}(\boldsymbol{u}, \iota)\, \mathrm{d}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\iota \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell} \cdot \left(\int_{\Omega_\iota} \beta^{e}_{\ell}(\iota)\, \mathrm{d}\iota \right) \cdot \left(\int_{\Omega_d} P_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u})\, F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\boldsymbol{k},\ell} \cdot \mathbf{S}^{\iota}_{\ell} \right) \cdot \mathbf{R}^{\theta}_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{k}}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Cette expression néglige la variation potentielle de l'angle θ si la rotation du *scanner* est continue. Le modèle matriciel établi dans l'équation 3.22 est donc préservé, la seule différence tenant à l'écriture des coefficients de l'opérateur $\mathbf{S}^{\iota}$, qui est :

$$\mathbf{S}^{\iota}_{\ell} = \int_{\iota_\mathsf{i}}^{\iota_\mathsf{f}} \beta^{e}_{\ell}(\iota)\, \mathrm{d}\iota \tag{3.25}$$

Nous pouvons faire remarquer que cette dernière expression correspond simplement à la convolution de la fonction de base temporelle par la réponse temporelle d'une pose dans l'acquisition, assimilée à une fonction *porte*.

3.4.2 Simulation de données dynamiques 2-D

Simulation de l'objet d'intérêt

Afin de pouvoir évaluer la qualité du projecteur dynamique présenté dans la section précédente, aussi bien en termes de précision de modélisation (*cf.* section 3.4.3) que d'apport de qualité dans la reconstruction finale[18] (*cf.* sections 3.5 et 3.6), nous avons créé un fantôme dynamique selon le modèle 2-D de Shepp-Logan [Shepp and Logan, 1974, Kak and Slaney, 1988], dont nous nous sommes déjà servis dans le chapitre 1.

Nous disposons donc d'une méthode de simulation des projections analytiques statiques de notre fantôme, quelle que soit l'orientation θ du détecteur, et pour tout mode de propagation des rayons. Nous nous focaliserons cependant sur la propagation "en éventail", *i.e. fan beam*. Nous pouvons ainsi reconstruire notre objet simulé à partir de données générées par un modèle différent du modèle numérique de calcul des pseudo-données, afin d'éviter le "*crime inverse*" [Wirgin, 2004, Kaipio and Somersalo, 2007], vu dans le chapitre 1.

Nous passons à présent à la simulation dynamique du fantôme. Pour ce faire, nous simplifions la simulation des données en imposant l'hypothèse d'instantanéité des projections, ainsi que la parfaite périodicité du mouvement, identifiée simplement par le paramètre ι_a définissant la durée d'un cycle. Nous définissons le mouvement de chaque ellipse composant le fantôme indépendamment, le seul paramètre commun étant la durée du cycle présentée ci-dessus. Trois types de mouvement peuvent être donnés à chaque ellipse :

- une translation, en faisant varier la position (x_0, y_0) du centre de l'ellipse avec une amplitude (A_{x_0}, A_{y_0}) ;
- une rotation, en faisant varier l'angle d'inclinaison α des axes avec une amplitude A_α ;
- une distorsion, en faisant varier la longueur (a, b) des demi-axes avec une amplitude (A_a, A_b).

À partir de ces paramètres d'amplitude, nous générons, pour chaque ellipse et chaque mouvement associé, un signal temporel sinusoïdal — soit sinus, soit cosinus, de période ι_a, définissant la variation du paramètre de forme concerné. Connaissant donc, pour un paramètre de forme κ donné, l'amplitude $\mathcal{A}$ de sa variation périodique, sa valeur moyenne κ_0, et la durée ι_a de la période, le signal temporel associé est défini comme suit :

$$\kappa(t) = \kappa_0 + \mathcal{A} \cdot \sin\left[\left(\frac{2\pi}{\iota_a}\right) \cdot t\right]$$

ou

$$\kappa(t) = \kappa_0 + \mathcal{A} \cdot \cos\left[\left(\frac{2\pi}{\iota_a}\right) \cdot t\right] \tag{3.26}$$

Il ne nous reste ensuite qu'à définir le temps d'acquisition t_a, ainsi que les T angles de projection auxquels on associe leur date d'acquisition t_θ respective. L'instant de la première projection est pris comme instant de référence $t_0 = 0$, et constitue également le point de départ des signaux temporels de variation des paramètres des ellipses. Pour visualiser le principe, on peut se référer à la figure 3.3, en admettant $t_1 = t_0$. Il est alors aisé de "caler" les dates t_θ sur les instants ι équivalents dans les cycles de mouvement. À ces instants, compte tenu de notre connaissance du signal $\kappa(t)$ (*cf.* équation 3.26), nous connaissons alors exactement les paramètres de forme de chaque ellipse, dont nous calculons analytiquement les projections instantanées d'après les expressions présentées plus haut.

Nous simulons un fantôme, composé de quinze ellipses, ayant une taille fixe virtuelle de

18. Entre autres facteurs, tels que la régularisation utilisée.

$\mathscr{E}_i$	Mvt	Signal	Position (cm)				Demi-axes (cm)				Inclinaison (°)		Atténuation
			x_0	$\mathcal{A}_{x_0}$	y_0	$\mathcal{A}_{y_0}$	a	$\mathcal{A}_a$	b	$\mathcal{A}_b$	α	$\mathcal{A}_\alpha$	(μ_{eau} cm^{-1})
E1	-	-	0	-	0	-	11,73	-	8,80	-	90	-	2,0
E2	-	-	0	-	−0,23	-	11,14	-	8,44	-	90	-	−0,94
E3	D	sin	2,80	-	0	-	3,95	0,51	1,40	0,51	72	-	−0,16
E4	D	sin	−2,80	-	0	-	5,23	0,51	2,04	0,51	108	-	−0,16
E5	T	x : cos y : sin	−2,80	0,20	0	0,76	0,44	-	0,44	-	72	-	0,1
E6	T	x : cos y : sin	2,68	−0,10	0	0,38	0,19	-	0,19	-	72	-	0,1
E7	T	x : cos y : sin	2,93	−0,10	0,38	0,38	0,19	-	0,19	-	72	-	0,15
E8	D	sin	0	-	4,46	-	3,19	0,1275	2,68	0,1275	90	-	−0,01
E9	-	-	0	-	−7,71	-	0,64	-	0,64	-	0	-	0,94
E10	T&R	sin	4,46	0,51	−8,29	0,51	0,76	-	0,25	-	45	15	0,01
E11	T&R	sin	−4,46	0,51	−8,29	0,51	0,76	-	0,25	-	135	-15	0,01
E12	D	sin	3,82	-	7,65	-	1,02	0,25	0,51	0,13	-45	-	0,025
E13	T	sin	−7,01	0,25	0	0,51	0,76	-	0,25	-	60	-	0,025
E14	T	sin	−6,37	−0,25	−0,64	−0,51	0,76	-	0,25	-	60	-	−0,025
E15	D	sin	5,74	-	−3,19	-	1,27	−0,25	8,80	−0,13	30	-	−0,01

TABLE 3.1: Tableau regroupant les paramètres dynamiques de forme des 15 ellipses constituant le fantôme dynamique simulé, type Shepp-Logan, ayant 256×256 voxels spatiaux avec une taille de $0{,}1 \times 0{,}1\text{cm}^2$, soit $25{,}6 \times 25{,}6\text{cm}^2$. La colonne *Mvt* indique le type de mouvement appliqué : T pour une translation, R pour une rotation et D pour une distorsion. Les paramètres de forme en question sont : la position du centre de l'ellipse (x_0, y_0) (en cm), la longueur des demi-axes a et b (en cm), l'inclinaison identifiée par l'angle α que fait le demi-axe de longueur a avec l'axe x, et enfin la valeur du coefficient d'atténuation μ, exprimé comme un facteur du coefficient d'atténuation de l'eau μ_{eau} (exprimé en cm^{-1}). À chaque paramètre de forme, on associe éventuellement, si le type de mouvement les concerne, l'amplitude $\mathcal{A}$ du signal temporel périodique donnant leur variation, identifié comme une fonction *sinus* ou *cosinus* dans la colonne *Signal* (*cf.* équation 3.26). La période ι_a de tous les signaux est identique, égale à 5 secondes, ce qui correspond à peu près au cycle respiratoire humain, à l'exception de l'ellipse E8, dont la durée du cycle est prise égale à 1 seconde, qui simule un battement cardiaque au milieu du mouvement respiratoire global. La valeur d'atténuation en un point donné du fantôme global est égale à la somme de la valeur de toutes les ellipses couvrant cette position. La figure 3.9 visualise la position des ellipses dans la tranche temporelle à $\iota = 0$.

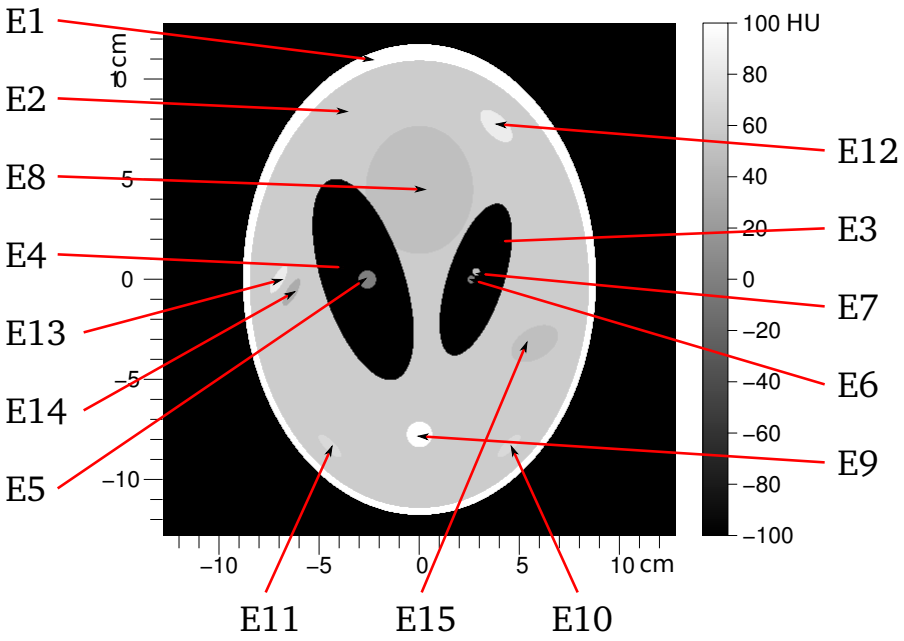


FIGURE 3.9: Tranche temporelle à $\iota = 0$ du fantôme dynamique type Shepp-Logan 25,6 × 25,6cm, composé de 15 ellipses $\mathscr{E}_i$ identifiées sur le graphe. La dynamique des valeurs d'atténuation est affichée en unités Hounsfield, avec $\mu_{\text{eau}} = 0{,}1928\text{cm}^{-1}$.

$25{,}6 \times 25{,}6\text{cm}^2$, *i.e.* approximativement la taille d'un thorax humain[19]. Les paramètres de forme sont résumés dans le tableau 3.1, avec l'amplitude de leurs variations si un mouvement les faisant intervenir anime l'ellipse. La figure 3.9 montre la tranche temporelle à $\iota = 0$, et identifie chacune des ellipses. La dynamique des valeurs d'atténuation est affichée en unités Hounsfield (HU). Nous prenons, comme dans les chapitres 1 et 2, $\mu_{\text{eau}} = 0{,}1928\text{cm}^{-1}$ comme valeur standard de l'atténuation de l'eau. Nous choisissons de simuler par ce fantôme un cas dynamique réaliste en nous basant sur un cycle respiratoire humain, dont la durée d'inspiration et d'expiration, qui correspond à notre période ι_a, est de 5 secondes. Cette durée de cycle est identique pour toutes les ellipses, à l'exception d'une seule, qui varie suivant une période de 1 seconde, symbolisant quant à elle le battement cardiaque au milieu du mouvement respiratoire global. Ce fantôme de Shepp-Logan 2-D dynamique a donc approximativement les dimensions spatiales et temporelle d'un thorax humain en respiration. La figure 3.10 nous permet de visualiser ce fantôme 2-D dynamique en vue 3-D "éclatée", *i.e.* par coupes spatio-temporelles sélectionnées dans l'objet, avec en plus des vues de ces coupes en perspective. La figure 3.11 représente 25 tranches spatiales du cycle de mouvement du fantôme. La figure 3.12 illustre ce même objet, mais suivant des vues 3-D segmentées, où la profondeur correspond à la dimension temporelle. Ces figures ne représentent qu'un cycle de mouvement ; il faut bien entendu avoir conscience que l'évolution anatomique ainsi représentée peut se répéter plusieurs fois pendant l'acquisition des projections par le système tomographique, puisqu'on est en présence d'une dynamique périodique. Cette façon d'observer l'objet 2-D dynamique, considéré globalement dans l'espace et le temps, nous montre qu'il est assimilable à un objet 3-D, avec des dimensions hétérogènes. Par extension, un objet 3-D dynamique sera assimilable à un objet 4-D hétérogène. Cette simulation permet de visualiser également la continuité spatio-temporelle, à savoir que l'objet est censé être défini en tout point de l'espace et du temps. On peut donc le discrétiser sur une grille de voxels 3-D (en 2-D dynamique) ou 4-D (en 3-D dynamique),

19. On peut échantillonner plus ou moins finement la grille des voxels pour s'adapter à cette taille métrique, et suivant la résolution de reconstruction souhaitée.

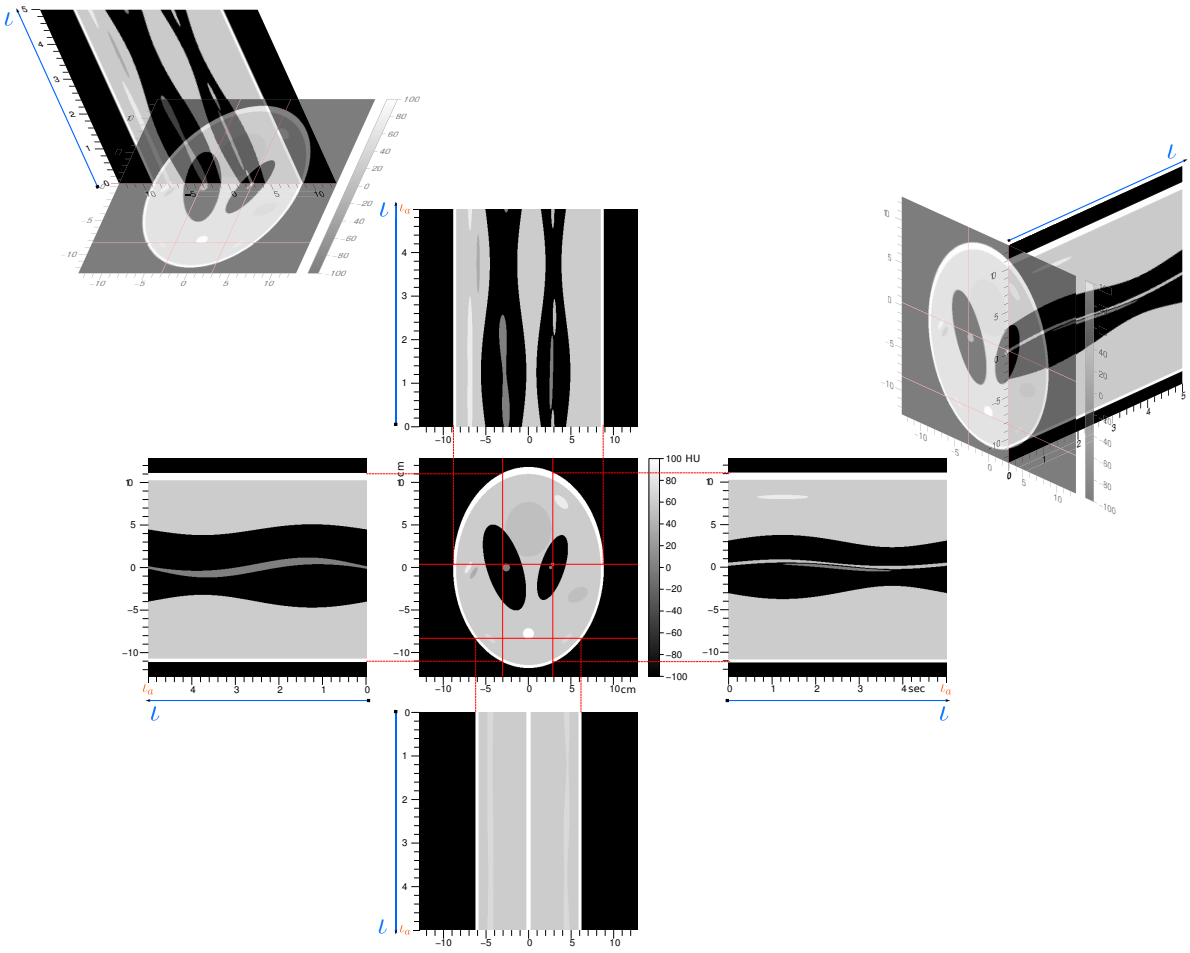


FIGURE 3.10: Fantôme dynamique de Shepp-Logan, de taille $25{,}6 \times 25{,}6\text{cm}^2$, simulé sur une durée de cycle ι_a de 5 secondes. La construction du fantôme sur cette figure a été réalisée sur une grille de 512×512 voxels spatiaux ayant une taille de $0{,}05 \times 0{,}05\text{cm}^2$, et 512 tranches temporelles par cycle. On n'a construit qu'un seul cycle de mouvement de l'objet, dont on visualise au centre la tranche temporelle en $\iota = 0$. Autour, on visualise différentes coupes 2-D dans la direction temporelle, *i.e.* des tranches spatio-temporelles (la direction temporelle est indiquée). Chacune de ces coupes est localisée sur la tranche centrale. Ces coupes permettent de visualiser la continuité spatio-temporelle de l'objet, assimilable de ce fait à un objet 3-D hétérogène.

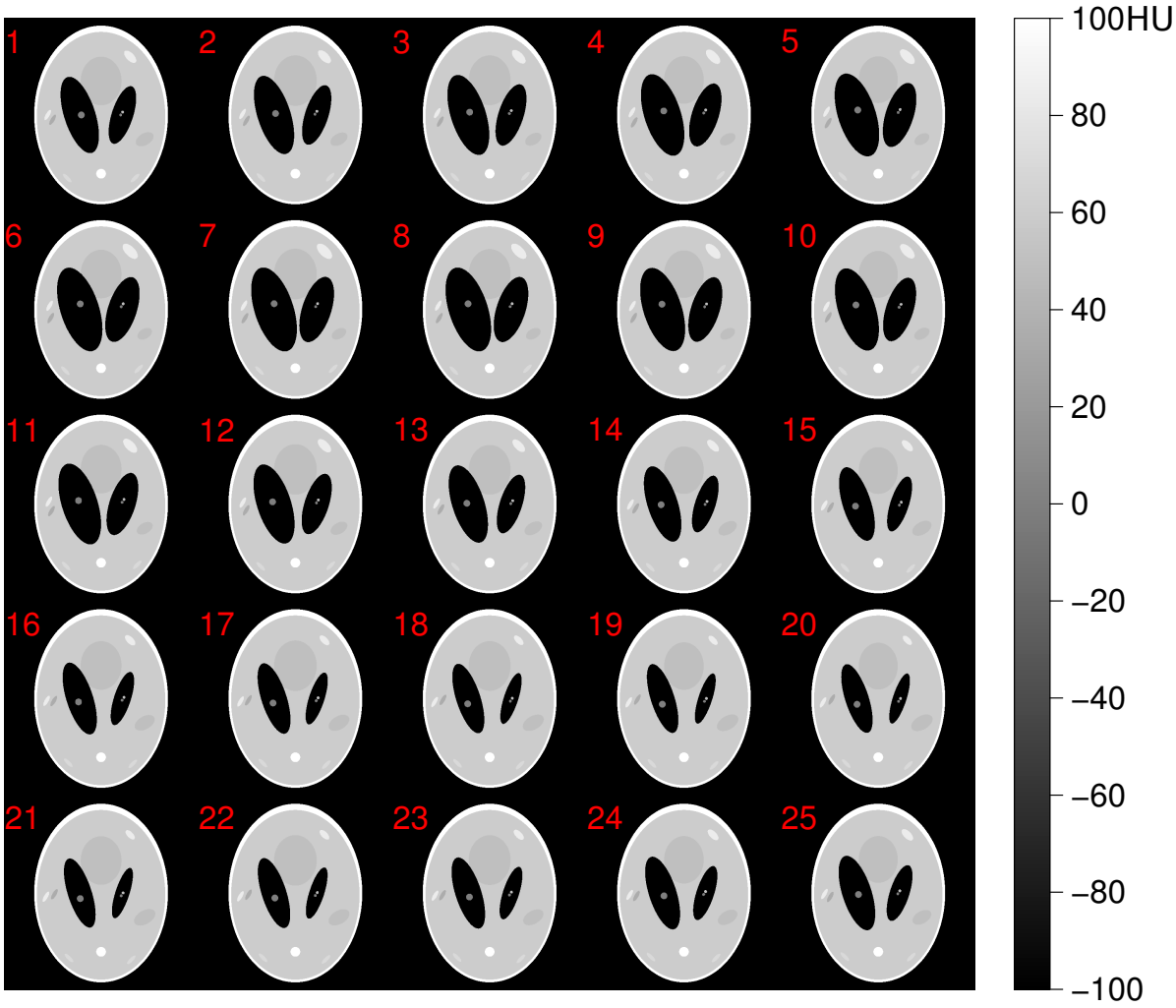


FIGURE 3.11: Vue de 25 tranches d'un cycle de mouvement du fantôme dynamique type Shepp-Logan vu dans la figure 3.10.

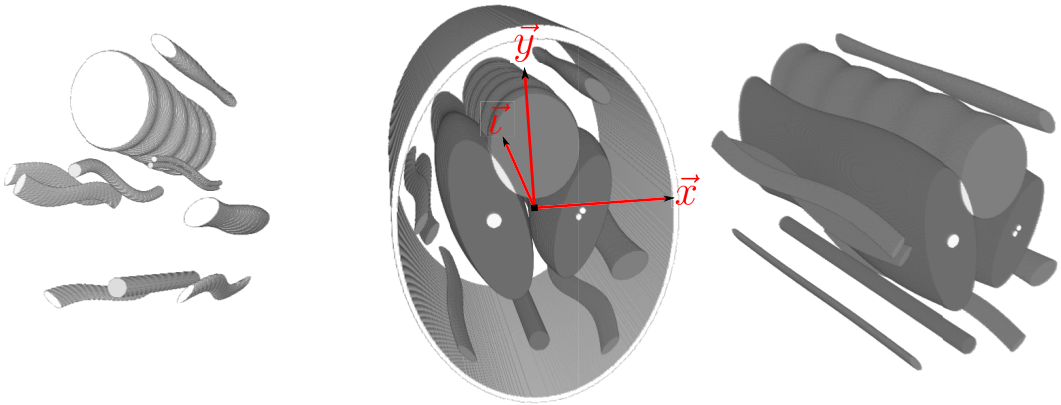


FIGURE 3.12: Vues segmentées 3-D du fantôme dynamique type Shepp-Logan vu dans la figure 3.10, où la profondeur correspond à la dimension temporelle. On visualise ainsi l'évolution de forme des ellipses dans le temps, ce qui illustre la notion d'"objet 3-D hétérogène" que l'on a introduite pour la simulation de ce fantôme.

sans décorréler la dimension spatiale de la dimension temporelle, mais en tenant compte cependant de l'hétérogénéité, et modéliser ainsi l'évolution dynamique anatomique de l'objet dans sa continuité. Ces observations nous serviront à justifier notre méthode de régularisation appliquée à la reconstruction d'un tel objet (*cf.* section 3.4.4).

Ce fantôme simulé est une représentation très idéalisée du mouvement de respiration d'un patient. En effet, chaque ellipse y évolue en forme et en position indépendamment des autres, car notre modélisation ne suppose aucun lien physique entre ses composantes anatomiques. En quelque sorte, les ellipses "glissent" les unes sur les autres. Idéalement, pour simuler un véritable thorax, ces ellipses devraient être liées, *i.e.* le mouvement d'une ellipse devrait "pousser" ou "tirer" son voisinage qui devrait alors, sous contrainte d'élasticité éventuelle, plus ou moins absorber la déformation en comprimant la concentration de l'atténuation, à l'instar des muscles, tel le diaphragme, qui se comprime et se dilate lors du cycle respiratoire. On en revient alors au concept de fluide énoncé dans la section 3.1. Dans l'idéal il faudrait simuler un fluide stationnaire compressible hétérogène[20]; or notre fantôme modélise en fait des fluides ayant des dynamiques indépendantes, correspondant chacun à une ellipse donnée. Chaque fluide a des caractéristiques différentes suivant le mouvement dont il est animé. Ainsi, les ellipses impliquant des variations volumiques — mouvement de distorsion — sont des fluides a priori non stationnaires. En effet leur concentration d'absorption est constante à l'intérieur de chaque ellipse, tandis que la quantité varie avec leur volume. L'hypothèse de conservation du nombre de particules, dans un volume fermé, impliquerait une concentration variable dans un fluide stationnaire. Les équations de continuité (3.1 et 3.2), vues dans la section 3.1, ne sont alors plus applicables aux ellipses en distorsion. Pour être valables, c'est-à-dire pour que ces fluides puissent être considérés comme stationnaires, il faudrait qu'un peu de matière puisse entrer et sortir du volume délimité par chacune des ellipses correspondantes. Ce volume ne serait donc en théorie pas fermé. Cette hypothèse faite, le fluide associé devient stationnaire, et peut même être considéré comme incompressible. Cette hypothèse se réalise par exemple dans le phénomène d'inspiration et d'expiration du poumon, où celui-ci s'emplit et se vide d'air, un fluide que l'on peut considérer comme incompressible. Pour les ellipses en mouvement de translation, ce problème ne se pose pas puisque leur volume est constant au cours du temps, et l'on peut aisément les assimiler à des fluides stationnaires incompressibles. Nous évoquons toutes ces hypothèses sur la nature de notre objet, car l'équation de continuité qui en découle nous permettra de déduire certaines propriétés dans notre façon de régulariser spatio-temporellement notre objet simulé, et a fortiori tout objet dynamique reconstruit à partir de ses projections physiques, *e.g.* provenant du *scanner* d'un patient (*cf.* section 3.4.4).

Simulation des projections dynamiques

Comme nous l'avons dit précédemment, notre méthode de simulation nous permet de décrire analytiquement notre fantôme à n'importe quelle date t, donc a fortiori n'importe quelle date t_θ correspondant à une projection instantanée. Nous devons donc à présent simuler le système d'acquisition, c'est-à-dire définir les caractéristiques de notre "*scanner* virtuel" pour le calcul des projections tomographiques. Dans la section 3.4.1, nous avons défini une modalité d'acquisition type en géométrie *cone beam*, basée sur un système existant, présent au CLB. Comme annoncé dans cette partie, nous allons nous baser sur cette modalité dans notre simulation. La figure 3.13 donne un schéma de l'acquisition. Étant en 2-D spatiale, nous considérons un détecteur linéaire, composé de 512 pixels détecteur échantillonnés avec un pas de 0,1cm. La réponse de chacun des pixels détecteur est une *porte* de même taille

20. Hétérogène dans le sens où les tissus le constituant ont des propriétés différentes, notamment en termes de concentration d'atténuation et d'élasticité.

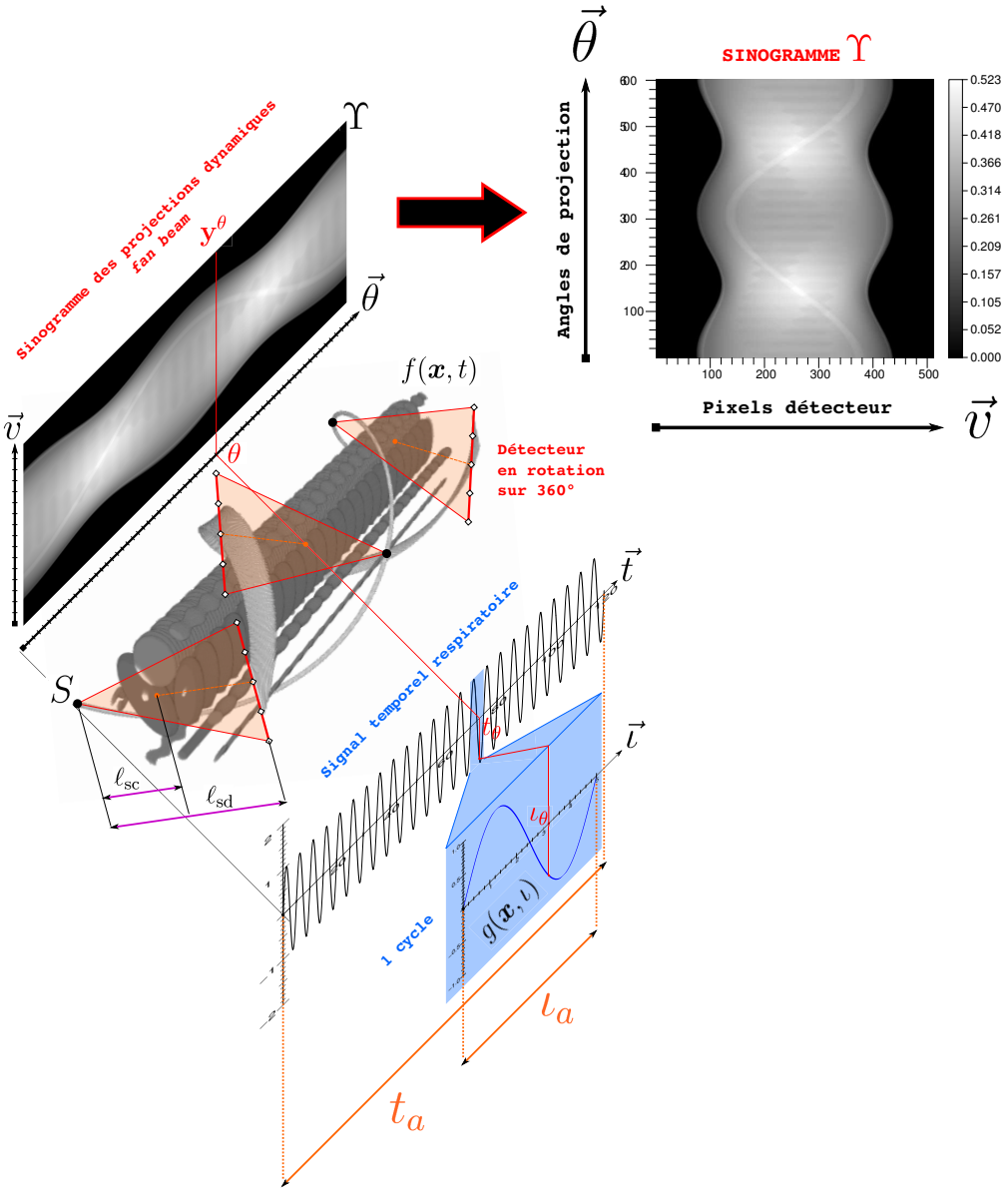


FIGURE 3.13: Schéma de la modalité d'acquisition utilisée pour la simulation des projections du fantôme dynamique 2-D type Shepp-Logan. Cette modalité est basée sur le *scanner Synergy Cone-Beam CT*$^{\text{TM}}$, de la société *Elekta*, présentée dans la section 3.4.1. Un détecteur linéaire, composé de 512 pixels détecteur échantillonnés avec un pas de 0,1cm, acquiert 601 projections sur 360°, pendant une durée de 120 secondes. La distance focale ℓ_{sd} est égale à 153,6cm, et la distance *source-isocentre* ℓ_{sc} est égale à 100cm. L'objet simulé a une périodicité de ses cycles de mouvement de 5 secondes. Durant l'acquisition, plusieurs cycles de mouvement sont révolus, 24 exactement dans ces conditions, ce qui signifie 24 projections réparties régulièrement sur 360° pour une phase temporelle g^{ι} donnée. On remarque que l'acquisition 2-D+t des projections peut se voir comme l'acquisition d'un objet 3-D sur un détecteur linéaire suivant une trajectoire hélicoïdale le long de l'axe temporel $\vec{t}$, qui serait assimilé à la profondeur spatiale $\vec{z}$ en 3-D.

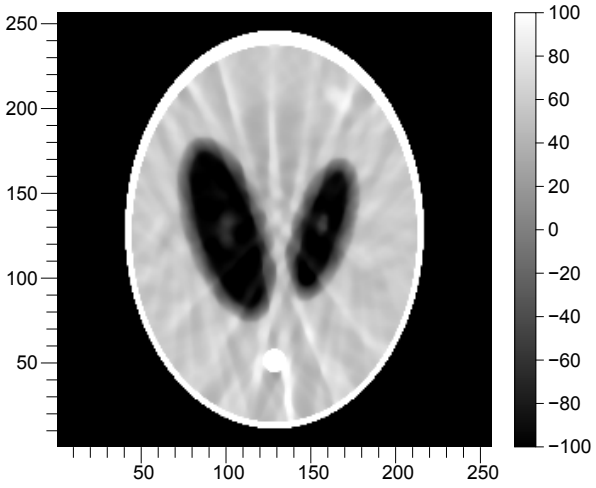


FIGURE 3.14: Reconstruction 256×256 statique du fantôme dynamique 2-D type Shepp-Logan à partir de l'ensemble des 601 projections dynamiques simulées.

que le pas d'échantillonnage, ceux-ci sont donc en contact les uns avec les autres, sans espace intermédiaire (*cf.* chapitre 2). La distance focale ℓ_{sd} est prise égale à 153,6cm, la distance *source-isocentre* quant à elle est prise égale à 100cm, à l'instar du système *Synergy Cone-Beam CT*$^{\text{TM}}$. Notre détecteur acquiert 601 projections sur 360°, régulièrement espacées dans le temps pendant une durée de 120 secondes. Ainsi les angles de projections θ, tout comme les dates t_θ correspondantes, sont eux aussi répartis régulièrement sur la couverture angulaire du système, *i.e.* 360°. Comme nous l'avons spécifié auparavant, notre objet simulé a une périodicité de ses cycles de mouvement de 5 secondes, la durée typique d'un cycle respiratoire. Ainsi, durant l'acquisition, plusieurs cycles de mouvement sont révolus, 24 exactement dans ces conditions, ce qui signifie qu'à une phase temporelle g^ι du signal g, à une date donnée ι, correspondraient en théorie 24 projections réparties régulièrement sur 360°[21]. Nous faisons également remarquer qu'il y a exactement 25 projections par cycle révolu. Compte tenu des ces paramètres d'étalonnage, nous pouvons alors calculer les projections simulées pour obtenir les données du *sinogramme* (*cf.* Fig. 3.13).

La figure 3.48 illustre ce que donnerait une reconstruction statique du fantôme à partir des projections dynamiques que nous avons simulées. La nécessité de prendre en compte la dimension temporelle parle donc d'elle-même.

3.4.3 Étude des erreurs de modélisation

Nous devons à présent évaluer la qualité de la modélisation présentée dans la section 3.4.1. Nous avons vu que celle-ci allait dépendre des fonctions ϑ_ℓ de la base temporelle dans la représentation du signal spatio-temporel g (*cf.* équation 3.14). Nous avons choisi des B-splines monodimensionnelles β^e_ℓ. Ce sont donc le degré e de ces composantes, ainsi que l'échantillonnage temporel du signal g, paramétré par le nombre M de tranches réparties régulièrement sur la durée ι_a, qui vont régler la précision du modèle, en supposant figées les composantes spatiales de la réprésentation et de la projection.

Nous allons donc fixer l'atome spatial $\boldsymbol{\beta}^d$ comme étant une B-spline cubique bidimensionnelle[22]. Comme nous l'avons présenté dans la section 3.4.1, notre projecteur dynamique se décompose en un opérateur d'interpolation temporelle des tranches $\mathbf{S}^\iota$, suivi d'un projecteur

21. À supposer une acquisition continue et infinie de projections.
22. Nous évaluons les erreurs de modélisation en 2-D dynamique, pour pouvoir utiliser nos données simulées.

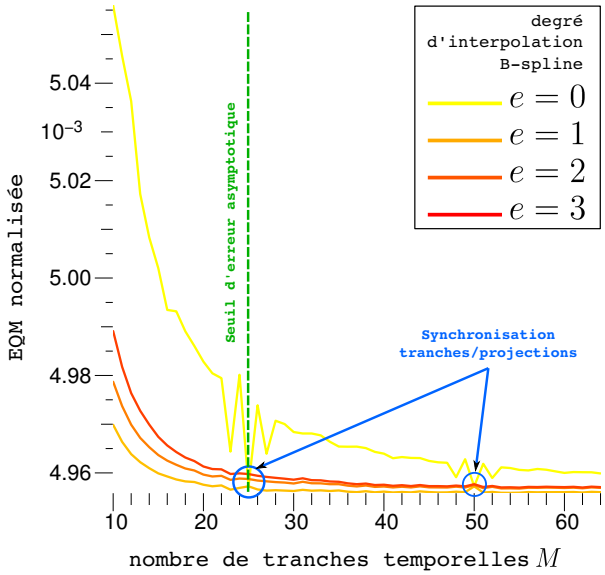


FIGURE 3.15: Courbes des erreurs de modélisation $\epsilon_\Upsilon = \left\|\Upsilon - \tilde{\Upsilon}\right\|^2$ (EQM), entre le sinogramme simulé du fantôme 2-D dynamique type Shepp-Logan et le pseudo-sinogramme calculé par le projecteur dynamique $(\mathbf{R}^\theta \cdot \mathbf{S}^\iota)$, normalisées par la valeur maximale du sinogramme simulé Υ, en fonction du nombre de tranches temporelles $M \in [2, 64] \cup \mathbb{Z}$, et pour différentes valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$ du degré e des B-splines interpolantes de l'opérateur $\mathbf{S}^\iota$. Les conditions de simulation sont celles du *cas n° 1* : une durée d'acquisition t_a de 120 secondes, 601 projections sur une couverture angulaire du détecteur de 360°, et une durée du cycle de mouvement du fantôme de 5 secondes. La couleur des courbes allant du jaune au rouge indique un degré e croissant.

statique $\mathbf{R}^\theta$ de la tranche interpolée (*cf.* équation 3.22). Ainsi, en fixant, pour notre étude, la partie spatiale de la modélisation, nous fixons le projecteur $\mathbf{R}^\theta$, et choisissons notre modèle *spline driven*.

L'objectif de cette étude est donc d'évaluer l'influence de la paramétrisation de $\mathbf{S}^\iota$, *i.e.* le degré e et le nombre de tranches M, sur l'erreur quadratique moyenne (EQM) globale de modélisation :

$$\epsilon^2_\Upsilon = \sum_{\theta\in\Theta} \left\|\mathbf{y}^\theta - \tilde{\mathbf{y}^\theta}\right\|^2 = \sum_{\theta\in\Theta} \left\|\mathbf{y}^\theta - \mathbf{R}^\theta \cdot \mathbf{S}^\iota \cdot \boldsymbol{c}\right\|^2 = \left\|\Upsilon - \tilde{\Upsilon}\right\|^2 \tag{3.27}$$

Pour ce faire, nous partons des projections simulées dans la section 3.4.2. Pour rappel, les paramètres d'acquisition étaient les suivants : une durée d'acquisition t_a de 120 secondes, 601 projections sur une couverture angulaire du détecteur de 360°, et une durée du cycle de mouvement du fantôme de 5 secondes. Nous nommons ces conditions de simulation le *cas n° 1*.

Suivant ces conditions, nous définissons un jeu de paramètres du modèle temporel $\mathbf{S}^\iota$: $M \in [2, 64] \cup \mathbb{Z}$ et $e \in \{0, 1, 2, 3\}$, pour lesquelles nous allons calculer l'erreur ϵ^2_Υ. Ainsi, pour chaque valeur de M, nous générons le fantôme 3-D hétérogène $\boldsymbol{f}$ sur la grille d'échantillonnage $256 \times 256 \times M$ qui en découle, que nous convertissons en image 3-D des coefficients $\boldsymbol{c}$, en fonction des degrés de B-splines spatio-temporelles du modèle. Nous créons également les projecteurs dynamiques globaux $(\mathbf{R}^\theta \cdot \mathbf{S}^\iota)$ pour chaque angle θ de projection. Nous calculons alors le pseudo-sinogramme $\tilde{\Upsilon}$ et l'erreur ϵ_Υ.

La figure 3.15 montre les courbes de l'erreur ϵ_Υ, normalisée par la valeur maximale du sinogramme simulé Υ, en fonction du nombre de tranches temporelles M, *i.e.* de l'échantillonnage temporel. Chaque courbe correspond à un degré e de l'interpolateur temporel par B-splines $\mathbf{S}^\iota$. La première observation que l'on peut faire est la décroissance rapide de l'erreur, quel que soit le degré d'interpolation, qui atteint une asymptote pour $M > 25$, c'est-à-dire à partir de l'échantillonnage temporel correspondant à peu près au nombre de projections par

cycle. À partir de ce point, augmenter le nombre de tranches temporelles n'apporte quasiment rien en termes de précision de modélisation. La courbe correspondant au degré d'interpolation $e = 0$ se démarque nettement des autres courbes par une erreur plus importante, quel que soit l'échantillonnage temporel, et une asymptote plus tardive. Cette courbe, correspondant au cas où $\mathbf{S}^{\iota}$ est un interpolateur au plus proche voisin, représente tout simplement l'approche *gated* (*cf.* section 3.3), où la reconstruction de chaque tranche temporelle s'effectue à partir des projections acquises dans son intervalle de temps correspondant à l'échantillonnage temporel. Ces résultats montrent donc clairement qu'un interpolateur de ce type est à exclure, car trop imprécis. Pour cette même courbe, on remarque des points particuliers en $M = 25$ et $M = 50$, où l'erreur chute brusquement pour se confondre avec l'erreur de la courbe correspondant à $e = 1$, *i.e.* où $\mathbf{S}^{\iota}$ est un interpolateur linéaire. Cela est dû au fait que pour ces échantillonnages temporels, d'après les paramètres d'étalonnage de la simulation, chaque date de projection t_θ est exactement calée avec la date ι_ℓ d'une tranche ℓ du signal discret $\boldsymbol{c}$ (1 sur 2 seulement pour $M = 50$). Ainsi dans ces conditions l'opérateur $\mathbf{S}^{\iota}$, pour un degré $e = 0$ ou 1, n'est autre que l'identité $\mathbf{I}$, et l'erreur ϵ_Υ correspond uniquement à l'erreur de modélisation du projecteur $\mathbf{R}^{\theta}$, qui constitue alors l'erreur minimale atteignable compte tenu du fait que l'on a fixé les paramètres du projecteur statique dans cette étude — pour rappel il s'agit de *spline driven* utilisant des B-splines cubiques. En revanche, pour les courbes correspondant aux degrés $e = 2$ et 3, l'erreur en ces points n'est pas confondue avec les autres, alors qu'elles devraient l'être en théorie. Plus généralement on constate que pour un degré e croissant à partir de 1, l'erreur de modélisation croît légèrement. Intuitivement ce n'est pas le résultat que l'on aurait pu espérer, sachant que l'interpolation est censée être plus fine pour un degré e plus grand. Même si ce n'était pas le cas, les erreurs aux points de synchronisation devraient aussi se confondre avec les deux autres. Nous pensons que cela est dû au fait que pour interpoler les tranches avec un degré $e > 1$, il faut au préalable convertir l'image $\boldsymbol{f}$ en l'image des coefficients $\boldsymbol{c}$, et qu'ainsi ce biais peut être dû à l'opérateur de conversion $\mathbf{\Phi}^{-1}$ (*cf.* section 2.1.3, chapitre 2). Quoi qu'il en soit, ce biais, de l'ordre de 10^{-6}, est négligeable devant l'erreur globale, de l'ordre de 5×10^{-3}.

Nous concluons de l'analyse de ces courbes qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un échantillonnage temporel de l'objet à reconstruire dépassant de trop l'échantillonnage limite à partir duquel le comportement de l'erreur est asymptotique. Cela est d'autant plus vrai que la résolution temporelle que l'on peut espérer atteindre dans notre reconstruction ne pourra dépasser celle de la fréquence d'acquisition des projections, qui joue le rôle d'un filtre passe-bas sur les fréquences du signal temporel d'évolution des composantes anatomiques de l'objet, reliées aux vitesses de mouvement. D'après les courbes, et pour le cas spécifique à cette simulation, un nombre M de tranches temporelles environ égal à 30 est suffisant. En ce qui concerne le degré de l'interpolateur à utiliser, on constate que ce dernier a peu d'influence à partir de $e = 1$. L'interpolateur linéaire semble par conséquent suffisant.

Le *cas n^o 1* illustre un cas de simulation relativement idéal puisqu'il existe un échantillonnage temporel de l'objet permettant de synchroniser les projections avec les tranches temporelles. Nous simulons à présent un cas plus général, où la durée d'acquisition n'est plus commensurable avec la durée d'un cycle de mouvement, de sorte qu'une synchronisation parfaite soit impossible. Les nouveaux paramètres de simulation sont les suivants : une durée d'acquisition t_a de 127 secondes, 601 projections sur une couverture angulaire du détecteur de 360°, et une durée du cycle de mouvement du fantôme de 7 secondes. Nous nommons cette nouvelle simulation le *cas n^o 2*. Dans ces conditions, environ 18,1 cycles de mouvement sont révolus pendant l'acquisition, soit environ 33,1 projections par cycle. Nous effectuons alors l'étude des erreurs de modélisation, avec le même jeu de paramètres que pour le *cas n^o 1*. Les résultats sont présentés sur la figure 3.16. Hormis les points particuliers de synchronisation qui ont cette fois disparus, les conclusions sur l'analyse de ces courbes est la même que pour

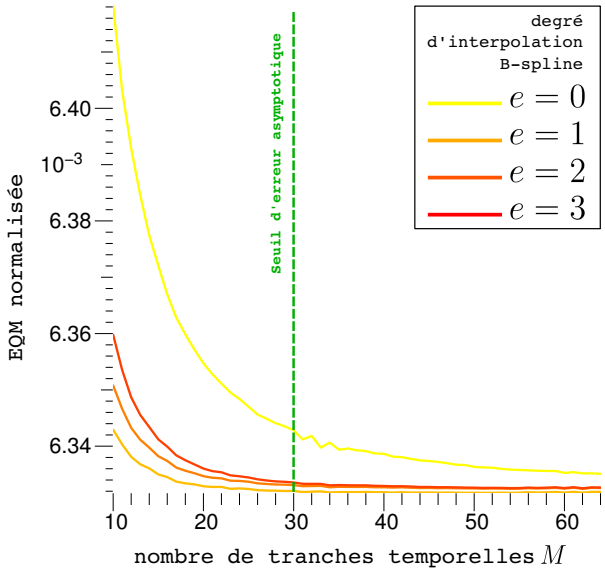


FIGURE 3.16: Courbes des erreurs de modélisation $\epsilon_{\Upsilon} = \left\|\Upsilon - \tilde{\Upsilon}\right\|^2$, entre le sinogramme simulé du fantôme 2-D dynamique type Shepp-Logan et le pseudo-sinogramme calculé par le projecteur dynamique $(\mathbf{R}^{\theta} \cdot \mathbf{S}^{\iota})$, normalisées par la valeur maximale du sinogramme simulé Υ, en fonction du nombre de tranches temporelles $M \in [2, 64] \cup \mathbb{Z}$, et pour différentes valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$ du degré e des B-splines interpolantes de l'opérateur $\mathbf{S}^{\iota}$. Les conditions de simulation sont celles du *cas n° 2* : une durée d'acquisition t_a de 127 secondes, 601 projections sur une couverture angulaire du détecteur de 360°, et une durée du cycle de mouvement du fantôme de 7 secondes. La couleur des courbes allant du jaune au rouge indique un degré e croissant.

la figure 3.15, le seuil d'erreur asymptotique se trouvant cette fois-ci, comme prévu, autour de $M = 30$, *i.e.* l'échantillonnage temporel correspondant à peu près au nombre de projections par cycle.

3.4.4 Le schéma de reconstruction

Schéma global

Nous reprenons le critère de minimisation établi dans le chapitre 1 et utilisé dans le chapitre 2 pour la reconstruction statique, en remplaçant le modèle d'obtention des pseudo-données y^{θ} par le projecteur dynamique présenté dans la section 3.4.1 :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^{+} &= \arg\min_{\boldsymbol{c}} \; \mathcal{J}_{\mathsf{data}}(\boldsymbol{c}) + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c}) \\
&= \arg\min_{\boldsymbol{c}} \; \sum_{\theta \in \Theta} \left\| \mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta} \cdot \mathbf{S}^{\iota} \cdot \boldsymbol{c} \right\|_{\mathbf{W}}^{2} + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c}) \\
&= \arg\min_{\boldsymbol{c}} \; \sum_{\theta \in \Theta} \left(\mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta} \cdot \mathbf{S}^{\iota} \cdot \boldsymbol{c} \right)^{\top} \cdot \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{y}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta} \cdot \mathbf{S}^{\iota} \cdot \boldsymbol{c} \right) + \mu\, \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Hormis la modification du modèle des pseudo-données, le terme d'attache aux données du critère $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}(\boldsymbol{c})$ reste le même, à savoir un moindre carré pondéré par la matrice $\mathbf{W}$. En revanche le terme de régularisation $\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c})$, outre le fait de s'appliquer à un objet ayant une dimensionnalité différente — on a ajouté 1 dimension temporelle, doit être remanié pour s'adapter aux caractéristiques du signal spatio-temporel à reconstruire, *e.g.* son hétérogénéité, sachant que notre objectif reste de le traiter globalement, dans sa continuité. Ce sera l'objet de la section suivante.

L'algorithme utilisé pour minimiser le critère reste aussi le même, *i.e.* VMLM [Nocedal, 1980] (*cf.* section 1.2.7, chapitre 1).

La régularisation spatio-temporelle

Dans nos reconstructions statiques des chapitres 1 et 2, nous avions choisi la variation totale [Rudin et al., 1992] (TV) comme régularisation. Pour rappel, l'expression de $\mathcal{TV}(f)$, généralisée à n dimensions, s'écrit :

$$\mathcal{TV}(f) = \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} [\nabla_p f(\boldsymbol{x})]^2\right]^{1/2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right)^2 (\boldsymbol{x})\right]^{1/2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.29}$$

où ∇ correspond au gradient global de la fonction f :

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_1 f(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \nabla_p f(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \nabla_n f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_p}\right)(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

L'utilisation de la variation totale comme régularisation consiste alors à minimiser la racine carrée de la norme L_2 du gradient de l'image $\boldsymbol{f}$, qui a pour effet de favoriser des solutions parcimonieuses dans l'espace de leur gradient, *i.e.* des solutions continues par morceaux où le gradient n'est non nul qu'aux frontières entre les différents "aplats". Nous avions montré que ce type de régularisation était très adapté aux images anatomiques que nous sommes amenés à reconstruire en tomographie. Nous rappelons ici la formule de la variation totale telle que nous l'avons codée dans sa version la plus simple, généralisée à n dimensions spatiales :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{c}) = \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \|\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{f}\|_2 = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} (\mathbf{D}_p\cdot\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}^2\right]^{1/2} \approx \mathcal{TV}(f) \tag{3.31}$$

où $\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}}$ est l'opérateur *gradient* sur le voxel $\boldsymbol{k}$, composé par les $\mathbf{D}_p$ qui sont des opérateurs linéaires aux différences finies suivant chaque dimension p, définis pour chaque voxel $\boldsymbol{k}$:

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} (\mathbf{D}_1\cdot\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} \\ \vdots \\ (\mathbf{D}_p\cdot\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} \\ \vdots \\ (\mathbf{D}_n\cdot\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} - f_{k_1+1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} \\ \vdots \\ f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} - f_{k_1,k_2,\ldots,k_p+1,\ldots,k_n} \\ \vdots \\ f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n} - f_{k_1,k_2,\ldots,k_p,\ldots,k_n+1} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

Une régularisation de ce type possédant une singularité en $\nabla \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$[23], nous avions introduit un hyperparamètre ϵ de relaxation, afin de lever cette singularité et pouvoir utiliser notre algorithme d'optimisation convexe lisse. L'équation 3.31 devenait :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{c}) = \mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \left[\sum_{p=1}^{n} (\mathbf{D}_p \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k}}^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{3.33}$$

Les caractéristiques anatomiques des objets dynamiques à reconstruire étant inchangées, nous n'avons pas de raison de considérer une autre régularisation spatiale. Mais qu'en est-il pour la dimension temporelle ? Étant donné que nous avons défini l'objet dynamique comme un signal continu dans l'espace et le temps, il y une corrélation forte entre les différentes tranches temporelles. Il paraît donc logique, voire essentiel, de tenir compte de cette information a priori dans notre manière de régulariser l'objet, et ne pas seulement considérer chaque tranche indépendamment les unes des autres, comme il est fait dans les approches *gated* (*cf.* section 3.3). Dans ces approches, les projections sont distribuées suivant leur occurence dans les intervalles de temps des phases temporelles définies, et des reconstructions indépendantes sont réalisées. Une telle approche dans les conditions d'acquisition que nous considérons, aussi bien en simulation qu'à partir de données physiques (*cf.* section 3.4.1), revient à un problème de reconstruction à partir de très peu de projections. Des reconstructions statiques décorrélées s'avèrent alors largement insuffisantes pour atteindre la qualité souhaitée. Pour pallier ce manque de données, d'autres approches de l'état de l'art utilisent un modèle de déformation de l'objet, estimé d'une reconstruction *gated* antérieure à partir d'un nombre suffisant de projections par tranche temporelle (*cf.* section 3.3). Cet apport d'information permet alors d'utiliser l'intégralité des projections dans la même reconstruction, en "déformant" chaque tranche vers un état anatomique de référence, *i.e.* une même phase temporelle.

Notre approche vise à s'affranchir d'une acquisition antérieure pour rechercher une quelconque information a priori, et se baser uniquement sur les projections actuelles, avec toutefois le signal temporel 1-D donnant l'évolution des cycles de mouvement, *e.g.* le signal des phases respiratoires du patient. Nous devons alors trouver le moyen de corréler les phases temporelles pour exploiter au mieux l'information contenue dans les données, chose qu'une régularisation spatiale seule ne peut faire. Nous avons déjà induit cette corrélation dans notre modèle de projection, puisque celui-ci part du signal spatio-temporel global et passe par une interpolation dans le temps, au lieu de "trier" les projections. Cette modélisation trouve son origine dans le constat que le signal est continu, donc "interpolable". Il reste à exploiter cette continuité comme un lien de cause à effet des phases temporelles les unes par rapport aux autres. Notre régularisation temporelle a ainsi pour but de "souder" de façon cohérente les tranches les unes aux autres, en propageant leurs caractéristiques individuelles sur toute la séquence.

En première hypothèse, il paraît logique, de par l'hétérogénéité des dimensions, de considérer que la régularisation temporelle doit agir séparément par rapport à la régularisation spatiale. Ainsi le terme de régularisation $\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}$ s'écrirait avec deux composantes séparables, comme suit :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \mathcal{J}^{\boldsymbol{x}}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) + \eta \cdot \mathcal{J}^{\iota}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) \tag{3.34}$$

où η est un facteur d'homogénéisation des dimensions spatiales avec la dimension temporelle, fonction du facteur de normalisation $(\Delta_{\boldsymbol{x}}/\Delta_{\iota})$, où $\Delta_{\boldsymbol{x}} = \Delta_{x_1} \times \cdots \times \Delta_{x_n}$ est le pas d'échantillonnage n-D spatial et Δ_{ι} le pas d'échantillonnage temporel de l'image n-D+t $\boldsymbol{f}$.

Pour déterminer de quelle manière doit agir la régularisation temporelle $\mathcal{J}^{\iota}_{\mathsf{prior}}$, nous pouvons observer les figures 3.10, 3.11 et 3.12, qui représentent le fantôme dynamique simulé. Nous

23. Non dérivabilité en ces points.

pourrions en déduire qu'il suffit d'appliquer une simple régularisation de type quadratique sur le gradient temporel — régularisation de type Tikhonov, qui permettrait de "lisser" l'objet dans le temps, en évitant par exemple les sauts d'intensité d'une tranche à l'autre, particulièrement dans les zones immobiles, qui seraient alors harmonisées sur toute la séquence. On pénaliserait donc la norme L_2 au carré du gradient temporel $\nabla_\iota g$ du signal spatio-temporel :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^\iota_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) &= \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n} \left\| \mathbf{G}^\iota_{\boldsymbol{k},\ell} \cdot \boldsymbol{f} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n} (\mathbf{D}^\iota \cdot \boldsymbol{f})^2_{\boldsymbol{k},\ell} = \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n} (f_{\boldsymbol{k},\ell} - f_{\boldsymbol{k},\ell+1})^2 \\ &\approx \int_{\iota=0}^{\iota_a} \|\nabla_\iota g(\boldsymbol{x},\iota)\|_2^2 \,\mathrm{d}\iota \end{aligned} \tag{3.35}$$

où $\mathbf{G}^\iota_{\boldsymbol{k},\ell}$ désigne l'opérateur *gradient temporel*, identique à l'opérateur $\mathbf{D}^\iota$ aux différences finies dans la direction temporelle. Ce type d'a priori a été préconisé dans [Schmitt and Louis, 2002, Schmitt et al., 2002] pour la régularisation en temps de problèmes inverses dynamiques. Dans ces articles, la composante spatiale est aussi régularisée quadratiquement pour faciliter la résolution du problème. Dans l'analyse que nous avons faite de [Zeng et al., 2007], nous avons vu que le champ de vecteurs de déformation estimé est également régularisé de cette manière, avec en plus un terme de pénalisation quadratique pour renforcer la périodicité des tranches temporelles du champ. Une régularisation spatio-temporelle est également appliquée dans la méthode d'estimation de Blondel *et al.* [Blondel et al., 2003]. Cependant, un tel "lissage" à l'interface entre deux tissus en mouvement, d'atténuations différentes, risque de trop atténuer cette transition, et l'on pourrait même faire disparaître les détails de certains objets de petite taille. Cet écueil de la régularisation quadratique a d'ailleurs aussi été mis en évidence dans le cas d'un objet statique (*cf.* section 1.2.7, chapitre 1). C'est la raison pour laquelle nous lui avions préféré une régularisation préservant ces transitions relativement abruptes compte tenu du type d'objets que nous reconstruisons. À ce propos, on peut observer que l'objet, modélisé comme étant continu par morceaux dans l'espace, est, de par son évolution anatomique, également continu par morceaux dans le temps. En effet, si nous nous basons sur la figure 3.10 de la section 3.4.2 représentant le fantôme dynamique de Shepp-Logan, nous pouvons voir l'évolution des formes des tissus simulés, qui mettent en évidence des frontières nettes aux interfaces. Ainsi, dans un souci de cohérence, et pour "protéger" les bords francs spatiaux, la régularisation temporelle devrait elle aussi favoriser des transitions assez abruptes. En effet, considérons une transition entre deux tissus en mouvement. Imaginons alors la valeur en une position spatiale, située à un instant donné t dans le premier tissu, et l'instant d'après $t + \mathrm{d}t$ dans le suivant, étant donné que leur frontière se déplace. Ce dernier met donc en évidence une variation abrupte d'intensité entre ces deux instants, d'un constraste correspondant au saut spatial d'intensité entre les deux tissus. Nous illustrons cet exemple sur la figure 3.17.

Nous décidons donc appliquer également la variation totale relaxée (*cf.* équation 3.33) pour le gradient temporel, ce qui donnerait :

$$\mathcal{J}^\iota_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n} \left| (\mathbf{D}^\iota \cdot \boldsymbol{f})^2_{\boldsymbol{k},\ell} + \epsilon^2 \right| = \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n} \left| (f_{\boldsymbol{k},\ell} - f_{\boldsymbol{k},\ell+1})^2 + \epsilon^2 \right| \tag{3.36}$$

L'hyperparamètre de relaxation ϵ peut a priori être choisi identique à celui de la régularisation spatiale. En effet, celui-ci correspond à un seuil de contraste minimum à préserver (*cf.* section 1.2.7, chapitre 1). Or, les niveaux de contraste entre les tissus sont identiques, indépendamment de la dimension suivant laquelle on observe un bord franc, *i.e.* que ce soit spatialement ou temporellement.

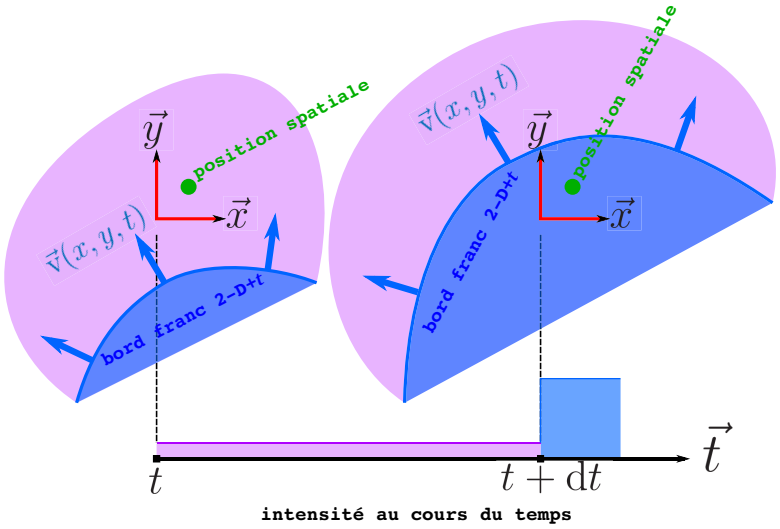


FIGURE 3.17: Schéma du passage d'un bord franc entre deux tissus en mouvement au niveau d'une position spatiale entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$, mettant en évidence une transition temporelle d'intensité abrupte.

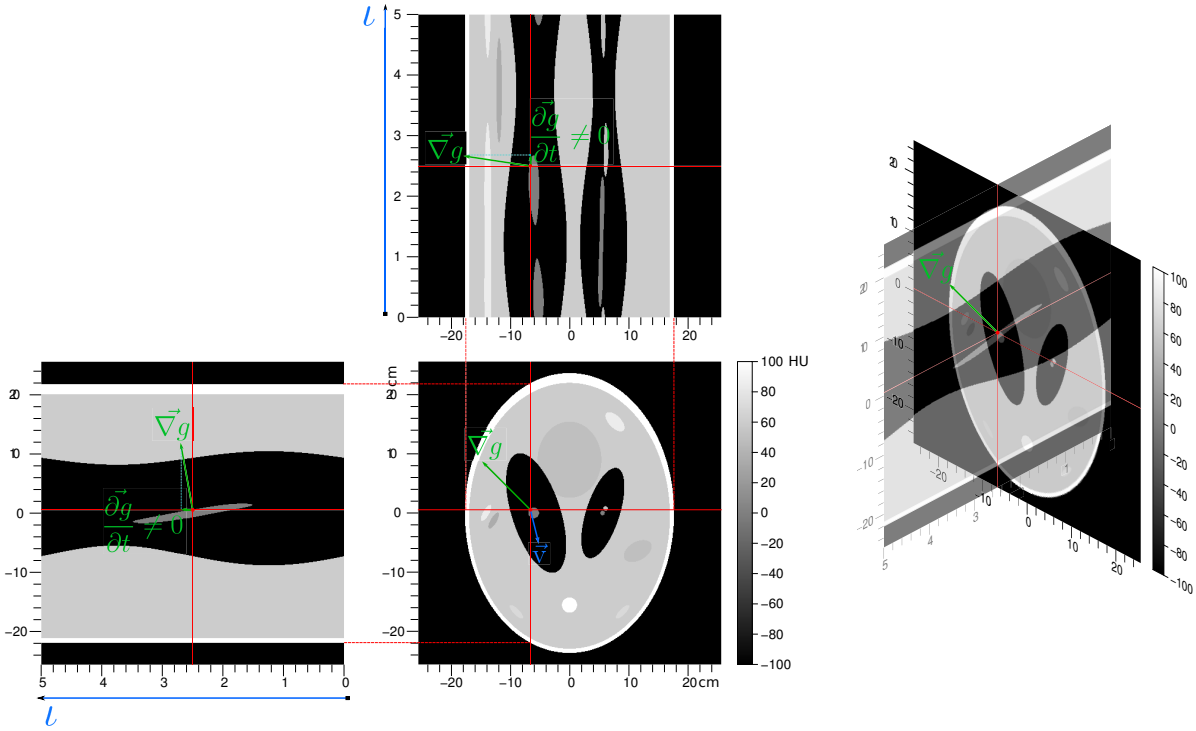


FIGURE 3.18: Illustration du gradient spatio-temporel global $\vec{\nabla} g$ en un point du fantôme dynamique de Shepp-Logan, simulé dans le *cas n° 1*. La tranche temporelle en $\iota = 2{,}5$s est représentée au centre. Les schémas périphériques montrent les différentes coupes 2-D dans la direction temporelle, *i.e.* des tranches spatio-temporelles (la direction temporelle est indiquée). Chacune de ces coupes est localisée sur la tranche centrale. On met ainsi en évidence la notion de frontière spatio-temporelle de l'objet, indiquant une corrélation entre les tranches.

Cette dernière constatation rend compte, cette fois encore, du fait que l'objet spatio-temporel n-D+t à reconstruire, défini continûment dans l'espace et le temps, peut être vu comme un objet $(n+1)$-D, hétérogène dimensionnellement, mais homogène en intensité. On peut même aller plus loin dans l'exploitation de cette notion, en s'interrogeant sur le fait d'avoir défini une régularisation séparable en espace et en temps. Serait-il donc possible de définir une régularisation spatio-temporelle globale de l'objet, qui agirait conjointement dans toutes les dimensions, à la prise en compte de l'hétérogénéité près ?

Considérons le gradient global de l'image spatio-temporelle en un point au niveau d'une interface, dont on présente une illustration sur la figure 3.18. On constate qu'une composante temporelle non nulle indique que la frontière se déplace. Ainsi un gradient dans le temps est intrinsèquement lié à un gradient dans l'espace. On peut donc parler de *frontières spatio-temporelles*, qui sont les surfaces 3-D délimitant les interfaces en mouvement — ou non — dans l'espace-temps. Cette caractéristique, au départ spatiale, s'avère donc indissociable de son extension au domaine temporel qui en est une conséquence directe.

Les gradients de l'objet $(n+1)$-D, marqueurs de ces frontières spatio-temporelles, constituent donc des points d'ancrage de la continuité spatio-temporelle recherchée. Autrement dit, la régularisation peut opérer, aux lieux de ces gradients, une "soudure" cohérente des tranches temporelles, pour délimiter les tissus conjointement dans le temps et l'espace. Compte tenu du type d'objets considérés, ces gradients sont parcimonieux dans l'espace global $(n+1)$-D. L'objet peut donc être régularisé globalement en minimisant l'hypersurface[24] totale des frontières spatio-temporelles de la même manière que l'on minimisait la surface totale (dans l'espace 3-D) des frontières spatiales entre les tissus en tomographie statique. Ainsi, tout naturellement, la régularisation par variation totale que nous avons déduite passe d'une forme séparable n-D+t à une forme globale $(n+1)$-D, en joignant toutes les composantes du gradient du signal g dans la minimisation de la même norme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{TV}(g) &= \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\int_{\iota=0}^{\iota_a} \left\|\nabla g(\boldsymbol{x},\iota)\right\|_2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\iota \\
&= \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\int_{\iota=0}^{\iota_a} \left[\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x},\iota)\right\|_2^2 + \eta^2\cdot\left(\nabla_\iota g(\boldsymbol{x},\iota)\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\iota \\
&= \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\int_{\iota=0}^{\iota_a} \left[\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right)(\boldsymbol{x},\iota)\right\|_2^2 + \eta^2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial \iota}\right)^2(\boldsymbol{x},\iota)\right]^{1/2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\iota
\end{aligned} \tag{3.37}$$

On peut remarquer que nous avons conservé le facteur η d'homogénéisation du gradient ∇g, qui prend justement tout son sens pour rendre le gradient homogène. Cette nouvelle forme devrait théoriquement favoriser des frontières spatiales et temporelles positionnées au même endroit dans l'objet $(n+1)$-D, ce à quoi la version séparable est a priori indifférente.
À partir de l'équation 3.37, et en utilisant les équations 3.31 et 3.35 pour les expressions séparées des termes de régularisation spatial et temporel, nous pouvons déduire une formule de la variation totale relaxée, conjointe spatio-temporellement :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n}\left[\left(\sum_{p=1}^{n}\left(\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{f}\right)_{\boldsymbol{k},\ell}^2\right) + \eta^2\cdot\left(\mathbf{D}^{\iota}\cdot\boldsymbol{f}\right)_{\boldsymbol{k},\ell}^2 + \epsilon^2\right]^{1/2} \approx \mathcal{TV}(g) \tag{3.38}$$

où les $\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}}$ sont les opérateurs différentiels finis spatiaux et $\mathbf{D}^{\iota}$ leur homologue temporel. $\mathbf{D}^{\iota}$ exploite la propriété de périodicité de l'image $\boldsymbol{f}$ dans la dimension temporelle en attribuant la

24. La "surface" des hyperplans en 4-D.

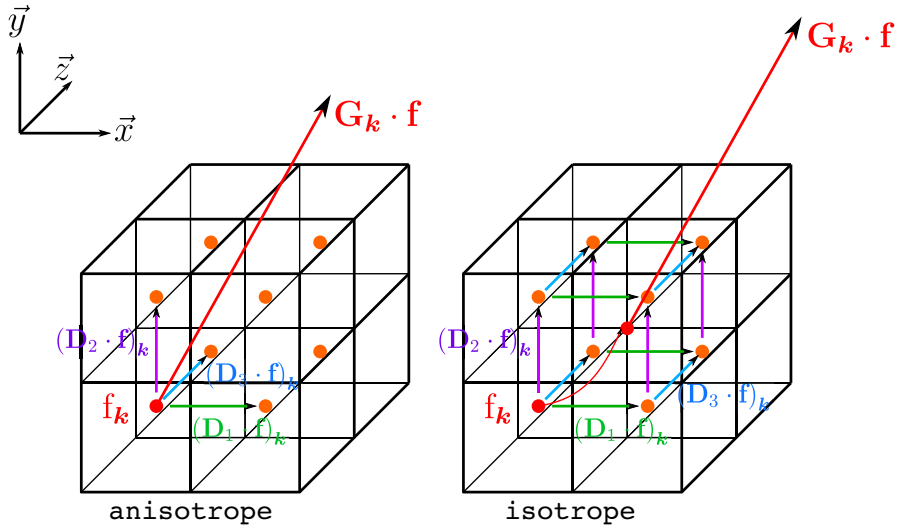


FIGURE 3.19: Calculs anisotrope et isotrope des différences finies pour le calcul du gradient spatial 3-D, pour la régularisation par variation totale. Dans le cas anisotrope, le gradient $(\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{f})$ dépend de l'orientation du repère. Dans le cas isotrope, le gradient $(\mathbf{G}_{\boldsymbol{k}})$ n'en dépend pas et peut être vu comme une estimation du gradient du voxel $\boldsymbol{k} + (\mathbf{1/2})$.

tranche initiale comme successeur de la tranche finale[25], tandis que les contraintes aux bords pour les $\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}}$ supposent des valeurs nulles en dehors du support de l'image (*cf.* section 1.2.7, chapitre 1).

Modifions l'équation 3.38 en incorporant l'hyperparamètre μ à l'intérieur du terme $\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}$:

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k},\ell \in \mathbb{Z}^n} \left[\mu^2 \cdot \left(\sum_{p=1}^{n} \left(\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f} \right)^2_{\boldsymbol{k},\ell} \right) + \mu^2 \cdot \eta^2 \cdot (\mathbf{D}^{\iota} \cdot \boldsymbol{f})^2_{\boldsymbol{k},\ell} + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{3.39}$$

Notre approche étant au stade de démonstration, nous ne nous sommes pas penchés en détail sur le paramètre d'homogénéisation η. Il est possible qu'il puisse être plus complexe qu'une simple normalisation par les pas d'échantillonnage. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous choisissons de régler librement ce paramètre, *i.e.* d'en faire un hyperparamètre de régularisation. Nous avons ainsi deux hyperparamètres à régler pour notre terme de régularisation, que nous définissons de la façon suivante :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k},\ell \in \mathbb{Z}^n} \left[\mu_{\mathsf{space}} \cdot \left(\sum_{p=1}^{n} \left(\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f} \right)^2_{\boldsymbol{k},\ell} \right) + \mu_{\mathsf{time}} \cdot (\mathbf{D}^{\iota} \cdot \boldsymbol{f})^2_{\boldsymbol{k},\ell} + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{3.40}$$

Nous avons donc un hyperparamètre $\mu_{\mathsf{space}} = \mu^2$ pour la composante spatiale et un autre $\mu_{\mathsf{time}} = \mu^2 \cdot \eta^2$ pour la composante temporelle, que nous règlerons manuellement dans notre étude[26]. Des travaux ultérieurs permettront certainement de déterminer le facteur d'homogénéisation η pour n'avoir plus qu'un unique hyperparamètre μ à régler.

Les opérateurs différentiels $\mathbf{D}^{-}$ peuvent être implantés simplement comme décrits par les équations 3.32 et 3.35. Cependant nous avons vu dans la section 1.2.7 du chapitre 1 une

25. La matrice $\mathbf{D}^{\iota}$ est circulante.

26. En d'autres termes, nous simplifions le principe dans un premier temps, sachant que notre objectif premier est de démontrer la qualité de l'approche. Nous recherchons donc avant tout la souplesse de réglage, au détriment de l'automatisation.

manière d'implanter ces opérateurs avec un calcul du gradient plus isotrope et plus robuste au bruit, d'où une meilleure corrélation entre voxels voisins [Getreuer, 2012]. Nous calculions en effet une moyenne quadratique des différences finies dans un voisinage de 2^n voxels adjacents, comme l'illustre en 3-D spatiale la figure 3.19. On peut donc étendre cette implantation à notre régularisation spatio-temporelle. Rappelons ici, en 2-D+t ($n = 2$) pour plus de clarté, le détail de ces opérateurs isotropes composante à composante :

$$(\mathbf{D}_1^{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,\ell} - f_{k_1+1,k_2,\ell} \\ f_{k_1,k_2+1,\ell} - f_{k_1+1,k_2+1,\ell} \\ f_{k_1,k_2,\ell+1} - f_{k_1+1,k_2,\ell+1} \\ f_{k_1,k_2+1,\ell+1} - f_{k_1+1,k_2+1,\ell+1} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_2^{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,\ell} - f_{k_1,k_2+1,\ell} \\ f_{k_1+1,k_2,\ell} - f_{k_1+1,k_2+1,\ell} \\ f_{k_1,k_2,\ell+1} - f_{k_1,k_2+1,\ell+1} \\ f_{k_1+1,k_2,\ell+1} - f_{k_1+1,k_2+1,\ell+1} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}^{\iota} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell} = \begin{pmatrix} f_{k_1,k_2,\ell} - f_{k_1,k_2,\ell+1} \\ f_{k_1+1,k_2,\ell} - f_{k_1+1,k_2,\ell+1} \\ f_{k_1,k_2+1,\ell} - f_{k_1,k_2+1,\ell+1} \\ f_{k_1+1,k_2+1,\ell} - f_{k_1+1,k_2+1,\ell+1} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

Cette implantation engendre néanmoins un surcroît d'opérations. En effet, au lieu de $(n+1)$ différences finies à calculer par voxel (en n-D+t), cette méthode requiert cette fois le calcul de $(n+1) \times 2^n$ différences finies. Afin de s'adapter au fait que les $(\mathbf{D}^{-} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell}$ sont à présent des vecteurs, l'expression de la régularisation 3.38 devient alors :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k},\ell \in \mathbb{Z}^n} \left[\mu_{\mathsf{space}} \cdot \left(\sum_{p=1}^{n} \left\| \frac{1}{2^n} \cdot \left(\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f} \right)_{\boldsymbol{k},\ell} \right\|_2^2 \right) + \mu_{\mathsf{time}} \cdot \left\| \frac{1}{2^n} \cdot (\mathbf{D}^{\iota} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell} \right\|_2^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{3.42}$$

Le facteur $\dfrac{1}{2^n}$ sert à moyenner les différences finies des vecteurs $(\mathbf{D}^{-} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell}$. Cette régularisation globale est celle que nous considérons la plus judicieuse. Nous la notons *Reg1* pour l'identifier dans nos études en reconstructions (*cf.* section 3.5). Néanmoins, pour en faire la démonstration, nous allons la confronter à la version purement séparable, identifiée comme *Reg2*, établie dans les équations 3.34 et 3.36, et qui donnerait :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k},\ell \in \mathbb{Z}^n} \left[\mu_{\mathsf{space}} \cdot \sum_{p=1}^{n} \left\| \frac{1}{2^n} \cdot \left(\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f} \right)_{\boldsymbol{k},\ell} \right\|_2^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} + \sum_{\boldsymbol{k},\ell \in \mathbb{Z}^n} \left[\mu_{\mathsf{time}} \cdot (\mathbf{D}^{\iota} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell}^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{3.43}$$

où l'opérateur $\mathbf{D}^{\iota}$ est implémenté dans sa version "simple différence finie", sous la forme :

$$(\mathbf{D}^{\iota} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell} = f_{k_1,k_2,\ell} - f_{k_1,k_2,\ell+1}$$

Ainsi la régularisation spatiale et la régularisation temporelle sont complètement décorrélées. Nous pouvons aussi imaginer une deuxième version de régularisation spatio-temporelle séparable, plus robuste, où le gradient temporel est calculé sur un voisinage spatial, avec l'opérateur $\mathbf{D}^{\iota}$ "isotrope" de l'équation 3.41 :

$$\mathcal{J}_{\mathsf{prior}}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n} \left[\mu_{\mathsf{space}} \cdot \sum_{p=1}^{n} \left\| \frac{1}{2^n} \cdot \left(\mathbf{D}_p^{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f} \right)_{\boldsymbol{k},\ell} \right\|_2^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} + \sum_{\boldsymbol{k},\ell\in\mathbb{Z}^n} \left[\mu_{\mathsf{time}} \cdot \left\| \frac{1}{2^n} \cdot (\mathbf{D}^{\iota} \cdot \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{k},\ell} \right\|_2^2 + \epsilon^2 \right]^{1/2} \tag{3.44}$$

Cette dernière version est intermédiaire entre l'implantation globale (*cf.* équation 3.42) et l'implantation totalement séparable (*cf.* équation 3.43), car le moyennage spatial du gradient temporel sur un voisinage de voxels apporte une forme de corrélation spatio-temporelle. Nous la notons *Reg3*.

Il existe des antécédents à ces principes de régularisation dans d'autres domaines. En effet, Weickert et Schnörr [Weickert and Schnörr, 2001], dans le cadre d'algorithmes d'estimation du flot optique d'une séquence d'images, régularisent le champ des vitesses en minimisant une fonctionnelle convexe du gradient spatio-temporel des composantes des vecteurs vitesse, de type L_2L_1, proche de la variation totale. Ils montrent ainsi que régulariser un objet spatio-temporel n-D+t — le champ des vecteurs vitesse — non seulement spatialement, mais aussi temporellement, en globalisant les composantes du gradient comme un gradient $(n+1)$-D, apporte un gain substantiel dans la corrélation des tranches temporelles. Cette régularisation favorise la cohérence de la continuité de la séquence, notamment en faisant coïncider les localisations des frontières spatio-temporelles du champ de vecteurs reconstruit. Cette méthode de régularisation a donc fait ses preuves en pratique sur un type de paramètres spatio-temporels similaires à ceux de notre problème, à ceci près qu'il s'agit en flot optique d'un champ vectoriel dynamique, au lieu d'un champ scalaire dynamique pour la tomographie. Quoi qu'il en soit, leurs caractéristiques "anatomiques" sont très proches, voire même corrélées puisque l'on peut quasiment relier notre champ de densité au champ des vitesses des particules qui le composent. On retrouve ainsi l'assimilation de l'objet à un fluide en mouvement. La continuité par morceaux est notamment une propriété que l'on retrouvera à la fois dans le champ de vitesses et dans le champ de densité, particulièrement pour un fluide incompressible, catégorie dans laquelle nous avons classé, sous certaines hypothèses, nos objets à reconstruire, notamment notre fantôme simulé (*cf.* section 3.4.2). Cette hypothèse d'incompressibilité est fausse en pratique, car les tissus se déforment, et mettent en œuvre des variations de densité. Si l'on veut satisfaire l'équation de continuité appliquée à nos paramètres, nous ne pouvons considérer une divergence nulle du champ des vitesses (*cf.* équation 3.1). Il s'agit d'ailleurs d'un constat que nous avons fait dans notre revue de l'état de l'art (*cf.* section 3.3), avec notamment les travaux de Galt *et al.* [Galt et al., 1990], Brankov *et al.* [Brankov et al., 2002] et Isola *et al.* [Isola et al., 2008b]. Dans ces deux derniers articles, les variations de densité dues à la compression des tissus sont prises en compte dans les modèles. La contrainte de continuité par morceaux imposée par notre variation totale $(n+1)$-D n'est donc pas complètement représentative de la réalité des mouvements tissulaires. Cependant, ces variations de densité se traduisant par une hausse de contraste sur une certaine épaisseur, comme les parois du myocarde [Galt et al., 1990], elles vont engendrer un étalement du gradient dans ces zones. Or notre hyperparamètre ϵ est typiquement fait pour relaxer la contrainte sur les transitions

abruptes. Nous pouvons donc jouer sur cet hyperparamètre pour tenir compte de ces effets de contraction des densités. De plus, ceux-ci font certainement partie de l'information présente dans les données. Ils sont donc extractibles dans la recontruction, pourvu que la régularisation n'ait pas contribué à les faire disparaître, d'où la nécessité supplémentaire de relaxer TV à l'aide de l'hyperparamètre ϵ.

La conceptualisation de cette régularisation est bien entendu empirique et basée uniquement sur les observations de l'anatomie de notre objet simulé. Mais cette dernière n'en demeure pas moins inspirée de caractéristiques réalistes. De plus la présente régularisation n'a pour objectif que de favoriser, dans la reconstruction, des solutions $(n+1)$-D possédant ces caractéristiques anatomiques, qui restent relativement souples et peu contraignantes si les hyperparamètres μ_{space} et μ_{time} sont idéalement déterminés pour obtenir le compromis optimal avec le terme d'attache aux données. Ce dernier doit apporter l'information "réelle" sur la structure et les détails des tissus de l'objet, dans une certaine mesure étant donné que le manque d'information, inhérent au problème dynamique, va entacher la reconstruction d'incertitudes et d'erreurs. La régularisation aura donc en charge d'aiguiller la reconstruction vers une solution plus plausible — de coût minimal — satisfaisant les contraintes de continuité et de cohérence spatio-temporelles telles que nous les avons établies. Ainsi les détails anatomiques récurrents dans les tranches temporelles devraient être propagés "intelligemment" à travers toutes les dimensions de l'objet reconstruit. La reconstruction finale extrait en principe au mieux l'information contenue dans les données, et de la façon la plus réaliste compte tenu des a priori que l'on a sur l'objet. Grâce à cette méthode, notre reconstruction conserve une grande souplesse dans ses réglages et sa mise en œuvre. Elle n'est notamment pas liée à un modèle de mouvement estimé au préalable sur un jeu de données différent[27], et qui plus est potentiellement entaché d'erreurs. Bien entendu le réglage des hyperparamètres μ_{space}, μ_{time} et ϵ peut s'avérer délicat, car généralement assez empirique à moins de disposer d'une méthode automatique[28]. Cependant, comme les objets à recontruire sont assez similaires pour une application donnée, les réglages optimaux sont dans ce cas peu variables, donc à terme relativement prévisibles.

3.5 Mise en application en reconstruction 2-D+t

3.5.1 Données simulées

Planification des reconstructions

Nous évaluons notre méthode sur des reconstructions 2-D+t à partir de données simulées de notre fantôme dynamique type Shepp-Logan élaboré dans la section 3.4.2. Nous perturbons les données avec un bruit additif gaussien non uniforme, d'après le modèle élaboré dans la section 1.2.2 du chapitre 1, avec $\lambda_0 = 2 \times 10^7$ photons par pixel détecteur par projection. Nous considérons différents cas de figure. Nous nous focalisons premièrement sur notre *cas de simulation n° 1*, où les dates des projections peuvent être synchronisées sur les dates des tranches reconstruites. Le projecteur spatial $\mathbf{R}^\theta$ utilisé est notre projecteur *spline driven* utilisant des B-splines cubiques.

En mode synchronisé, *i.e.* en mode de reconstruction type *gated* idéalisé — $M = 25$, nous étudions premièrement le gain dû à la régularisation temporelle, en plus de la régularisation

27. Il s'agit néanmoins du même objet. Pour un mouvement de type respiratoire, on rappelle que l'hypothèse faite est que celui-ci est suffisamment reproductible d'une acquisition à l'autre [Sonke et al., 2008, Rit et al., 2009a]. Il ne tient donc pas compte d'une éventuelle évolution anatomique de l'objet entre deux acquisitions.

28. C'est un problème difficile et toujours l'objet de nombreuses recherches.

spatiale de chaque tranche. C'est pourquoi nous considérons ces dimensions comme étant décorrélées, et appliquons de fait notre régularisation spatio-temporelle purement séparable *Reg2* vue dans l'équation 3.43.

Dans l'étape suivante, nous nous intéressons à comparer les régularisations spatio-temporelles globale *Reg1* et séparable pure *Reg2* (*cf.* équations 3.42 et 3.43), afin de démontrer nos hypothèses stipulant que gradients spatiaux et temporel sont intimement corrélés dans l'objet 2-D+t. Nous testerons également la seconde version de la régularisation séparable, *Reg3*, introduisant une corrélation spatiale du gradient temporel (*cf.* équation 3.44). Nous passons pour cette étude au *cas de simulation n^o 2*, où la synchronisation projections/tranches n'est plus possible. Pour rappel, les paramètres de simulation sont dans ce cas : une durée d'acquisition t_a de 127 secondes, 601 projections sur une couverture angulaire du détecteur de 360°, et une durée du cycle de mouvement du fantôme de 7 secondes. Dans ces conditions, environ 18,1 cycles de mouvement sont révolus pendant l'acquisition, soit environ 33,1 projections par cycle. Nous reconstruisons $M = 32$ tranches temporelles. L'interpolateur temporel $\mathbf{S}^\iota$ est donc mis en jeu ; nous l'utilisons avec un degré d'interpolation $e = 1$. En nous plaçant dans ces conditions de reconstruction plus réalistes, nous mettons en quelque sorte à l'épreuve les divers types de régularisation spatio-temporelle, pour en étudier le comportement sans ambiguïté vis-à-vis d'un cas trop idéal[29].

Pour chaque configuration des paramètres de reconstruction, nous faisons varier les hyperparamètres μ_{space} et μ_{time} et enregistrons l'image reconstruite pour chaque combinaison. Nous procédons en faisant varier les valeurs des hyperparamètres, dans une dynamique comprise entre 10^{-7} et 10^{-11}, de façon empirique pour chaque configuration[30]. Pour les besoins de notre étude, nous testons aussi l'hyperparamètre μ_{time} mis à 0. Cela revient, dans le cas des régularisations *Reg2* et *Reg3*, à n'appliquer qu'une simple régularisation spatiale des tranches indépendamment les unes des autres. Ainsi nous disposons d'un panel d'images reconstruites pour divers poids de régularisation, et pouvons extraire a posteriori la reconstruction de meilleure qualité compte tenu de ces hyperparamètres.

Techniques d'évaluation sur régions d'intérêt, profils de coupes et métriques

Notre objet étant simulé, nous disposons de la vérité de ce que nous sommes censés reconstruire. Nous pourrons donc systématiquement comparer nos reconstructions avec cette référence, que nous notons $\boldsymbol{f}_{\mathbf{ref}}$. Suivant la paramétrisation de l'objet reconstruit, *i.e.* le nombre de tranches temporelles M, nous créons donc en regard l'objet "vrai" $256 \times 256 \times M$.

En plus de visionner la qualité visuelle empirique des reconstructions, nous quantifierons précisément les erreurs sur quatre régions d'intérêt (ROI), nommées respectivement ROI1, ROI2, ROI3 et ROI4, et qui englobent des inserts d'intérêt représentant des détails fins : les ellipses $\mathscr{E}_5$ (ROI1), $\mathscr{E}_6$ et $\mathscr{E}_7$ (ROI2), $\mathscr{E}_{13}$ et $\mathscr{E}_{14}$ (ROI3), et $\mathscr{E}_{10}$ (ROI4), du fantôme, identifiées sur la figure 3.9. Chacune de ces régions est un ellipsoïde défini sur chaque tranche temporelle ; certains d'entre eux suivent le mouvement de translation des inserts du fantôme. La figure 3.20 visualise ces régions sur chaque tranche d'un objet de référence $256 \times 256 \times 25$.

La métrique que nous sélectionnons pour la quantification des erreurs est la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne EQMN normalisée par la dynamique maximale dans la région d'intérêt, précédemment utilisée dans les reconstructions statiques du chapitre 2 sur le fantôme

29. Dans un cas synchronisé, les 2 régularisations peuvent être d'efficacité équivalente. On se place donc dans un cas plus complexe pour étudier quelle méthode de régularisation donne les meilleurs résultats.

30. Ainsi nous n'avons pas forcément appliqué exactement le même jeu de valeurs pour toutes les configurations, il est donc possible que certaines configurations aient un panel de reconstructions plus grand que d'autre, mais toujours avec une dynamique de valeurs suffisamment représentative.

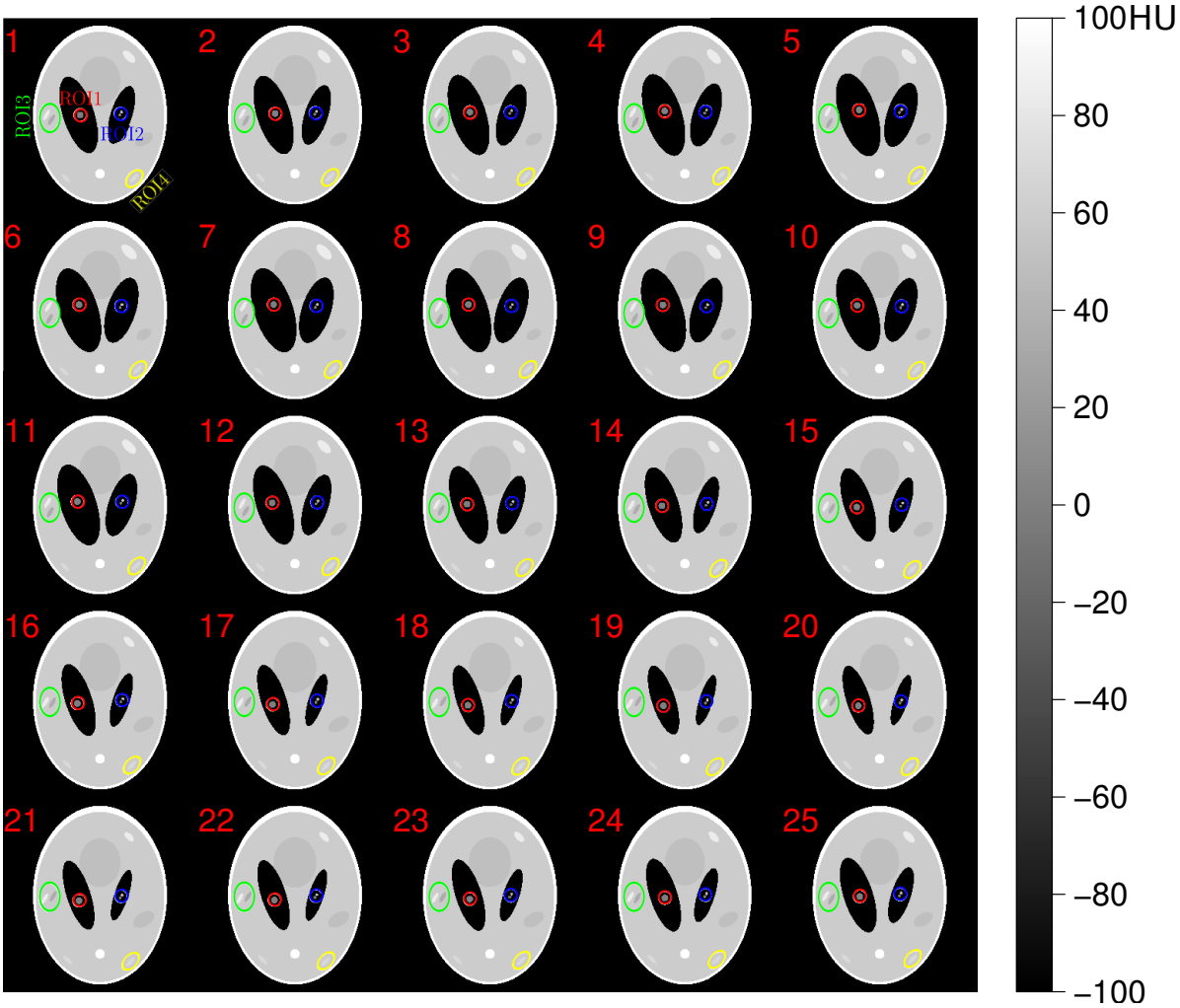


FIGURE 3.20: Identification tranche par tranche sur un objet simulé type Shepp-Logan de référence $256 \times 256 \times 25$, des quatre régions d'intérêt ROI1 (rouge), ROI2 (bleu), ROI3 (vert) et ROI4 (jaune), définies pour la quantification des erreurs de reconstructions 2-D+t par les critères EQM et SSIM.

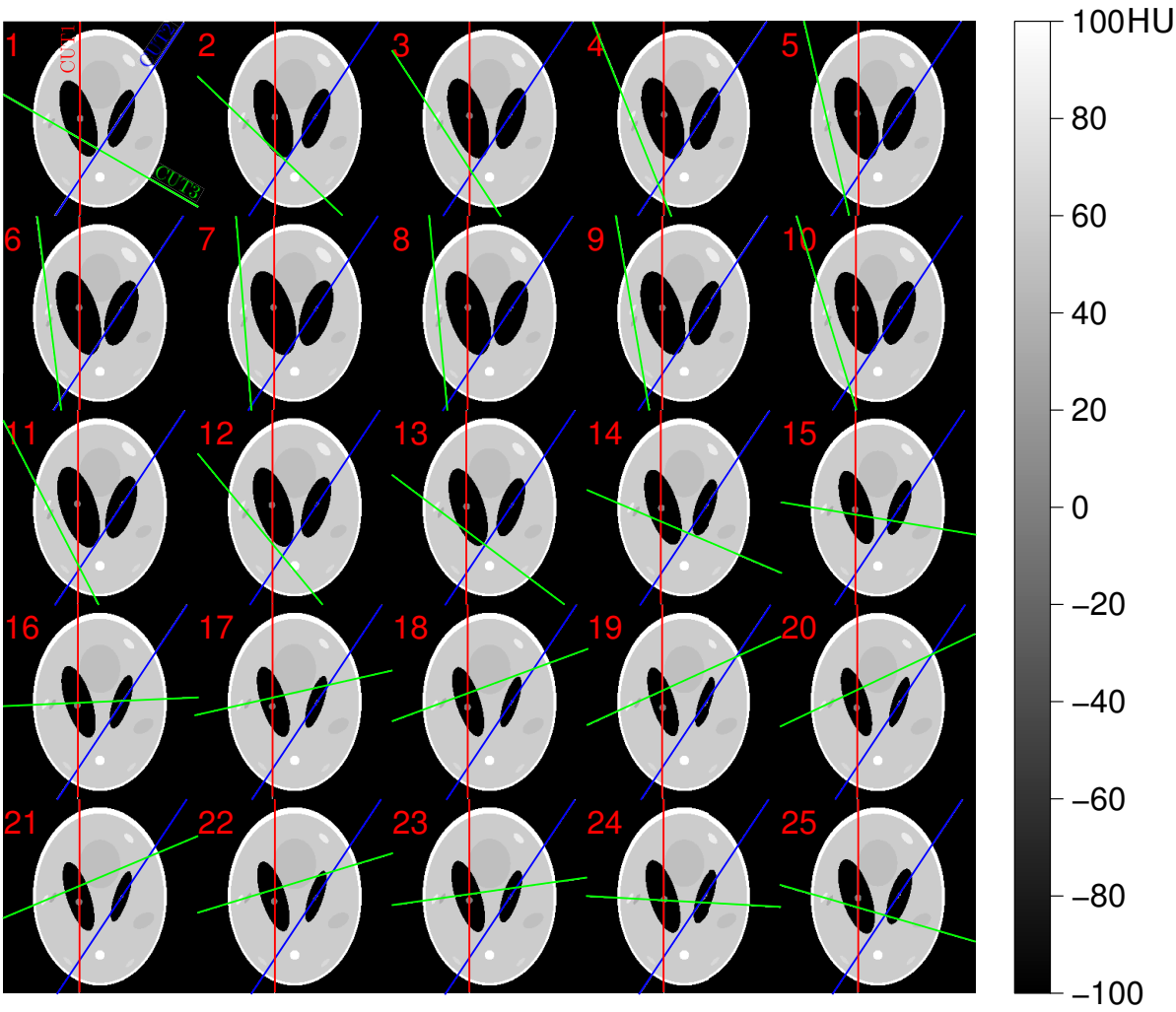


FIGURE 3.21: Identification tranche par tranche sur un objet simulé type Shepp-Logan de référence $256 \times 256 \times 25$, des trois profils de coupe CUT1 (rouge), CUT2 (bleu) et CUT3 (vert), définis pour la comparaison des reconstructions 2-D+t.

FORBILD (*cf.* équation 2.90).

Nous définissons également trois profils de coupe, nommés respectivement CUT1, CUT2 et CUT3, afin de visualiser la qualité de restauration des détails, notamment les contrastes et les bords francs. Sur la figure 3.21, les droites caractérisant ces profils sont visualisées sur chaque tranche d'un objet de référence $256 \times 256 \times 25$. Nous ne nous sommes pas limités à des coupes horizontales ou verticales, et avons plutôt recherché des directions privilégiées, pour une meilleure discrimination des résultats dans les reconstructions. De plus les profils, à l'instar des ROI, suivent les mouvements des inserts. Ainsi, par exemple, le profil CUT2 est orienté dans la direction définie par les centres des ellipses $\mathscr{E}_6$ et $\mathscr{E}_7$, et ce au cours du temps, pour nous permettre d'observer l'aptitude des reconstructions à discriminer ces 2 inserts et à obtenir les bons contrastes.

Cas n° 1 synchronisé : apport de la régularisation temporelle

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer le meilleur couple d'hyperparamètres μ_{space} et μ_{time} au sens de l'erreur EQMN la plus faible, sur chacune des qautre ROI. Pour illustrer cette étude, pour une configuration et une ROI données, nous créons un graphe 2-

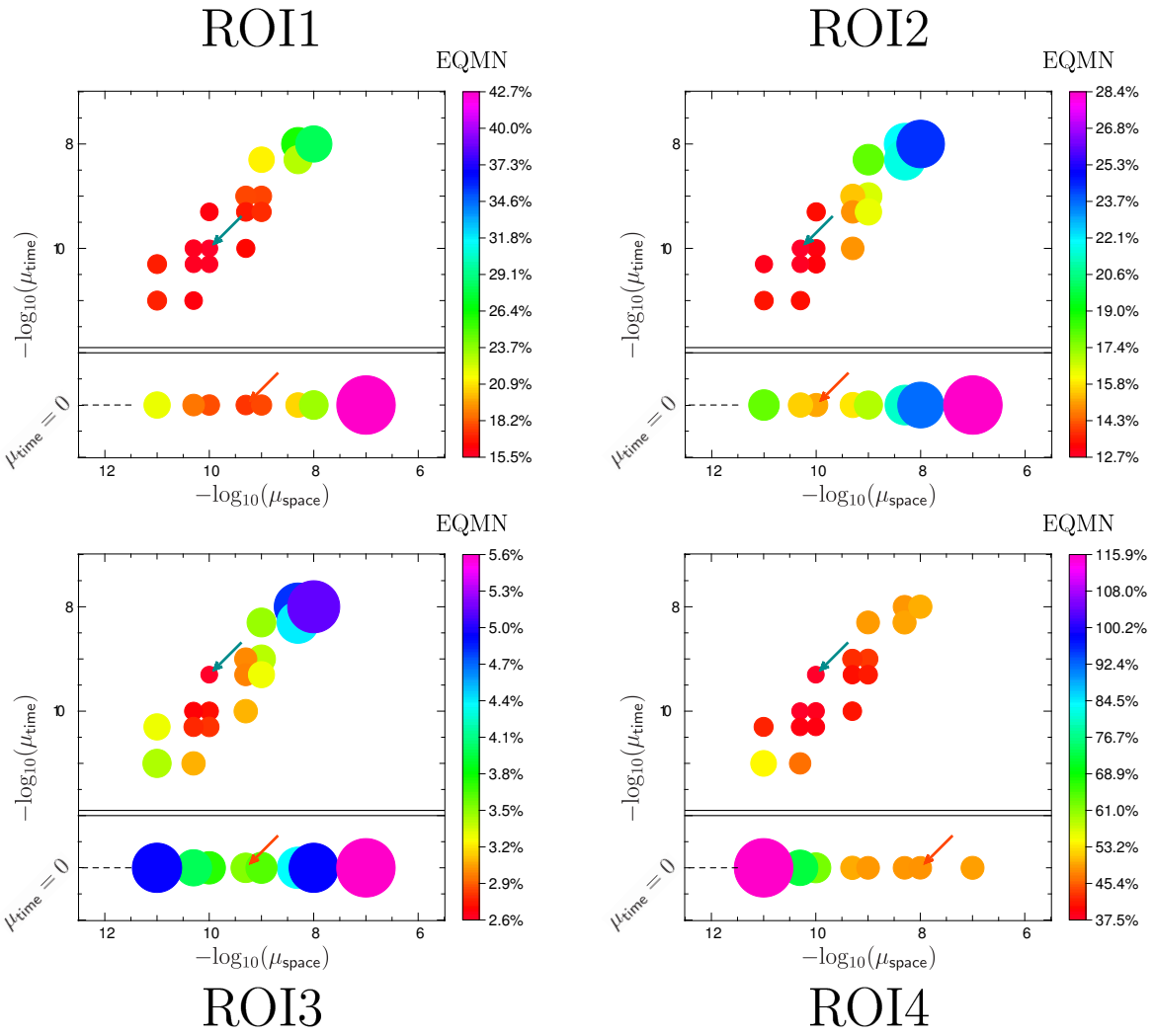


FIGURE 3.22: Graphes des erreurs EQMN, sur les quatre ROI, pour les reconstructions du fantôme type Shepp-Logan dynamique, dans la configuration du *cas n° 1* synchronisé ($M = 25$), effectuées avec la régularisation spatio-temporelle séparable *Reg2*, en fonction des valeurs des couples $(\mu_{\text{space}}, \mu_{\text{time}})$. Chaque erreur EQMN associée à un couple d'hyperparamètres est visualisée par un disque, dont la couleur indique la valeur de l'EQMN. La dynamique des couleurs, affichée à droite de chaque graphe, va de l'erreur EQMN minimale à l'erreur EQMN maximale (en %). La taille de chaque disque est proportionnelle à la valeur de l'erreur EQMN. Chaque disque est positionné sur le graphe en $(-\log_{10}(\mu_{\text{space}}), -\log_{10}(\mu_{\text{time}}))$. L'axe $-\log_{10}(\mu_{\text{time}}))$ affiche aussi le cas où sa valeur est ∞, ce qui correspond à $\mu_{\text{time}} = 0$, *i.e.* pas de régularisation temporelle. Les flèches indiquent la tâche d'erreur minimale pour chaque ROI, à la fois lorsque $\mu_{\text{time}} \neq 0$ (en cyan sombre) et $\mu_{\text{time}} = 0$ (en orange sombre). L'erreur minimale globale est systématiquement obtenue pour un μ_{time} non nul.

D, fonction des hyperparamètres μ_{space} en abscisse et μ_{time} en ordonnée. Compte tenu de la dynamique des valeurs d'hyperparamètres prises, les axes sont mis en échelle logarithmique, *i.e.* nous prenons $-\log_{10}(\mu_{\text{space}})$ en abscisse et $-\log_{10}(\mu_{\text{time}})$ en ordonnée. Ces axes permettent ainsi de donner une position à un couple de valeurs de μ_{space} et μ_{time}. Pour chaque couple, nous dessinons sur le graphe un disque plein dont la couleur correspond à la valeur de l'EQMN dans la ROI. La mise en correspondance de couleur à valeur EQMN, en %, est visible sur la barre de couleurs à droite de chaque graphe, qui va de l'erreur EQMN minimale à l'erreur EQMN maximale, dans la région d'intérêt considérée. Pour ajouter en visibilité, la taille de chaque disque est proportionnelle à la valeur de l'erreur EQMN. Ainsi nous pouvons visualiser sur le graphe une image représentant l'ensemble des disques correspondant à tous les couples de valeurs de μ_{space} et μ_{time} testés, et nous pouvons facilement identifier les couples d'erreur minimale dans chaque ROI.

La figure 3.22 montre quatre graphes de ce type, correspondant chacun à une ROI, pour les reconstructions réalisées avec la régularisation spatio-temporelle séparable *Reg2*, avec l'hyperparamètre μ_{time} mis à zéro ou non. On peut évoquer, au vu de ces graphes, la procédure que nous avons suivie dans la variation des valeurs d'hyperparamètres. Au "niveau bas", nous sommes partis de reconstructions avec une forte régularisation spatiale ($\mu_{\text{space}} = 10^{-7}$) et pas de régularisation temporelle ($\mu_{\text{time}} = 0$). Nous avons diminué progressivement μ_{space} (disques EQMN se déplaçant vers la gauche) en observant conjointement le gain en qualité de reconstruction. Nous avons ainsi balayé un large éventail de valeurs μ_{space}, et avons constaté que la reconstruction se dégradait en général de part et d'autre d'une valeur centrale "optimale", autrement dit le meilleur compromis entre sur-régularisation et sous-régularisation. À partir de cette valeur adéquate de μ_{space}, nous avons alors injecté cette fois-ci la régularisation temporelle par l'hyperparamètre μ_{time}, en partant d'un "niveau haut", et avons entrepris une "descente", en abaissant alternativement μ_{space} et μ_{time}, pour converger vers la qualité visuelle optimale.

Pour chaque ROI, nous avons indiqué par une flèche de couleur cyan sombre la tâche pour laquelle l'EQMN est minimale, qui est en général en bonne corrélation avec notre jugement visuel. Dans la totalité des cas, on constate que l'erreur minimale est atteinte pour un hyperparamètre μ_{time} non nul. En comparaison, nous avons aussi identifié par une flèche de couleur orange sombre l'erreur minimale pour $\mu_{\text{time}} = 0$. Ainsi, même pour une configuration aussi idéale que le *cas n° 1*, la régularisation temporelle apporte réellement un gain en qualité de reconstruction.

Pour nous en convaincre, nous souhaitons alors observer les meilleures reconstructions, au sens de l'erreur EQMN minimale. En revanche, sur les graphes de la figure 3.22, nous constatons que les hyperparamètres optimaux sont différents dans chaque région d'intérêt. Nous remarquons cependant qu'ils sont assez proches, avec une tolérance plus importante à s'en éloigner pour les régions ROI1 et ROI2 — la variance apparente en taille et en couleur des "disques d'erreur" semble plus faible autour de la position optimale pour ces régions. Notre première hypothèse consisterait alors à sélectionner les hyperparamètres qui donneraient la reconstruction optimale dans les régions mettant en évidence les structures les plus complexes à récupérer, autrement dit les structures de plus petite taille et/ou peu contrastées. Les inserts présents dans la ROI2 et la ROI3 font partie de cette classe. Plus particulièrement, les inserts de la ROI3 ont le contraste le plus faible par rapport au fond (*cf.* Tab. 3.1). Les inserts de la ROI2 ont un contraste par rapport au fond plus important, mais sont de plus petites tailles. En revanche, pour ces 2 régions, le contraste "inter-insert" est identique. En ce qui concerne la ROI1, le contraste par rapport au fond est du niveau de celui de la ROI2, mais celle-ci ne possède qu'un seul insert, et de grande taille. Ce n'est donc probablement par la structure la plus sensible aux variations de régularisation. Enfin, la ROI4 met en évidence des contrastes

	ROI1	ROI2	ROI3	ROI4
EQMN minimale dans ROI1	15,5%	13%	2,7%	38,2%
EQMN minimale dans ROI2	15,7%	12,7%	2,7%	37,5%
EQMN minimale dans ROI3	16%	13,3%	2,6%	37,5%
EQMN minimale dans ROI4	16,1%	13,3%	2,6%	37,5%
Écart-type de l'erreur	$2{,}5 \times 10^{-3}$	$2{,}4 \times 10^{-3}$	$5{,}2 \times 10^{-4}$	3×10^{-3}

TABLE 3.2: Tableau regroupant les erreurs EQMN dans les quatre régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI3 et ROI4, pour les reconstructions effectuées dans le *cas n° 1* synchronisé, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI1 ($1^{\text{ère}}$ ligne), la ROI2 (2^{nde} ligne), la ROI3 ($3^{\text{ème}}$ ligne) et la ROI4 ($4^{\text{ème}}$ ligne). La $5^{\text{ème}}$ ligne donne l'écart-type des erreurs dans chaque ROI suivant chacun des critères.

trop faibles, qui seront difficilement récupérables[31]. Nous excluons donc cette région de nos analyses pour le moment. Le choix de la région servant de critère de sélection se joue alors entre la ROI2 et la ROI3.

Le tableau 3.3 regroupe les valeurs d'erreur EQMN dans les quatre régions, en considérant quatre critères de sélection : EQMN minimale dans la ROI1, la ROI2, la ROI3 et la ROI4, autrement dit tous les cas possibles. Ces valeurs montrent que la région la plus sensible aux variations d'hyperparamètres semble être la ROI2. C'est aussi le critère de sélection de cette région qui affiche les erreurs EQMN les plus basses en moyenne. Ainsi, il vaut mieux privilégier l'optimalité de reconstruction des structures de la ROI2. Autrement dit, notre critère de sélection objectif des meilleures reconstructions sera l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

Nous observons, sur la figure 3.23, les meilleures reconstructions, au sens de l'erreur EQMN minimale dans la ROI2, obtenues respectivement lorsque $\mu_{\mathsf{time}} = 0$ et $\mu_{\mathsf{time}} \neq 0$. Il est aussi intéressant de visualiser ces reconstructions suivant l'axe temporel. Ainsi nous prenons des coupes spatio-temporelles dans les reconstructions 2-D+t, déterminées sur l'objet de référence, que nous montrons sur la figure 3.24. La figure 3.23 montre ces coupes spatio-temporelles pour les reconstructions de la figure 3.25. Nous visualisons, à la fois lorsque $\mu_{\mathsf{time}} = 0$ et $\mu_{\mathsf{time}} \neq 0$, la $13^{\text{ème}}$ tranche temporelle, où la vitesse des inserts des régions ROI1, ROI2 et ROI3 est maximale, accompagnée des deux coupes spatio-temporelles prises respectivement dans les directions horizontale et verticale (*cf.* Fig. 3.24).

L'apport de la régularisation temporelle sur la qualité globale des reconstructions est sans équivoque. Les gains observables en qualité se font principalement, et substantiellement, sur les zones correspondant aux régions d'intérêt ROI2 et ROI3, où la forme et le contraste des petits objets apparaît bien plus nettement. D'un point de vue global, les coupes spatio-temporelles (*cf.* Fig. 3.25) mettent en évidence, lorsque $\mu_{\mathsf{time}} = 0$, un phénomène de découpage des tranches temporelles dû à leur exacte décorrélation en l'absence d'un quelconque lien de continuité a priori. Ainsi nous pouvons voir par endroit des "marches d'escalier" identifiées par des petits écarts abrupts de contraste. Ceux-ci sont imputables au fait que les tranches sont reconstruites indépendamment les unes des autres, avec un même poids de régularisation spatiale qui n'agira cependant pas de la même manière, étant donné que les structures changent de forme. Il faudrait adapter le poids de régularisation spatiale pour chaque tranche, ce qui serait en

31. Reconstruire des détails de ce type serait un bonus évident, même si nous ne nous y intéressons pas dans un premier temps.

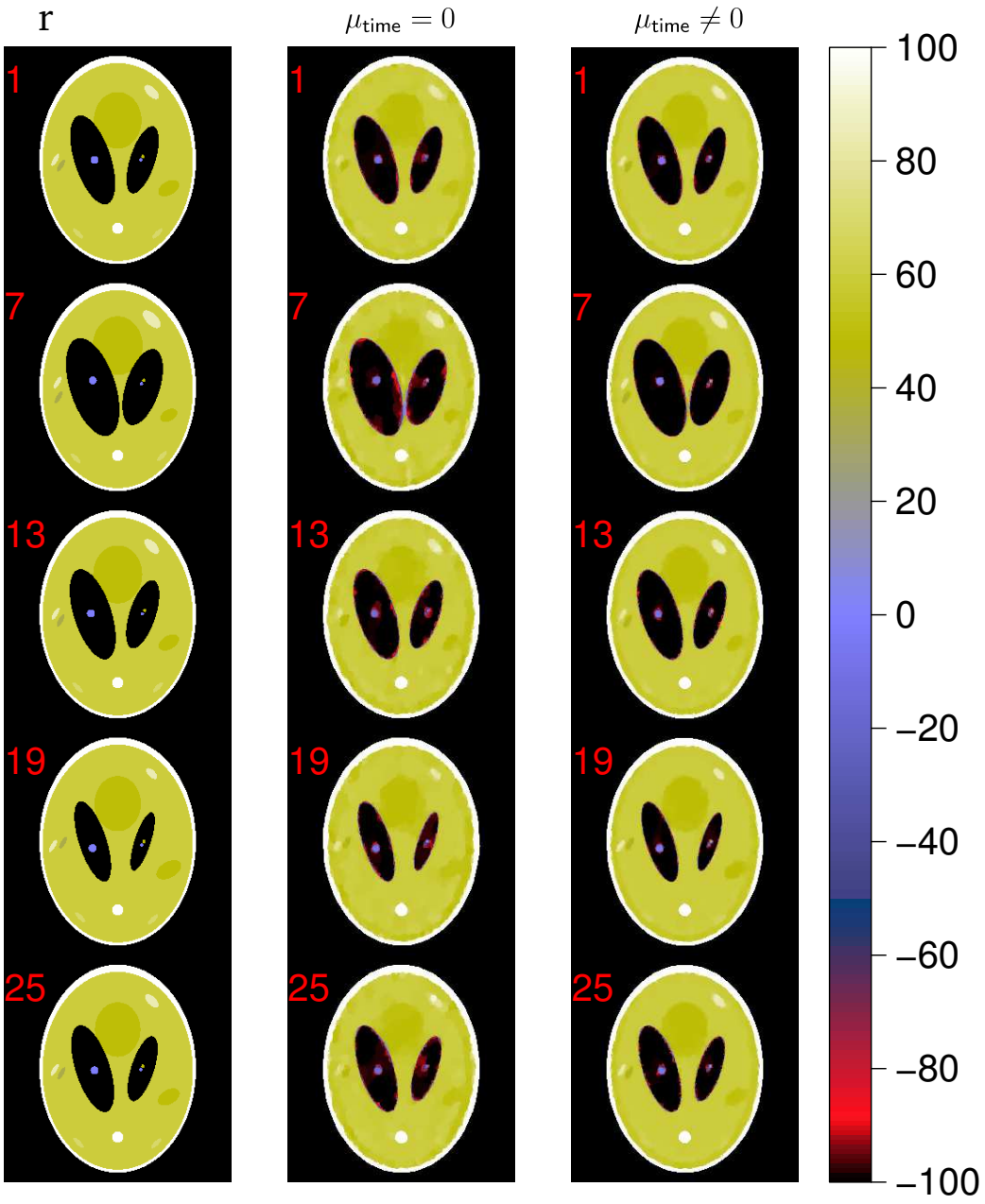


FIGURE 3.23: Visualisation des reconstructions dans le *cas n° 1* synchronisé (24 projections par tranche reconstruite), pour la régularisation spatio-temporelle séparable *Reg2*, avec $\mu_{\text{time}} = 0$ (au centre) et $\mu_{\text{time}} \neq 0$ (à droite). On visualise les reconstructions donnant l'erreur EQMN dans la ROI2 minimale. Ces reconstructions sont comparées à la référence (à gauche). Seule une partie des tranches temporelles est affichée, régulièrement espacées sur la durée du cycle, et numérotées, dans un souci de clarté.

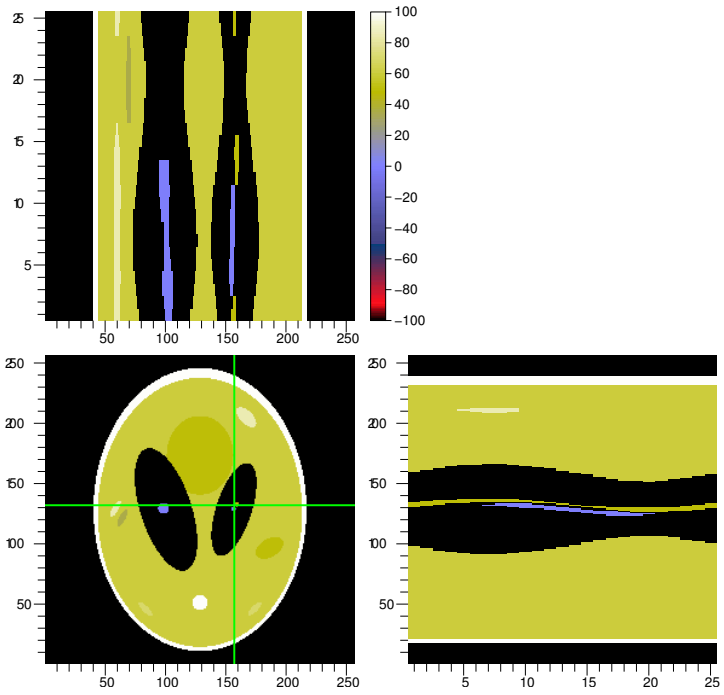


FIGURE 3.24: Visualisation du fantôme dynamique type Shepp-Logan 256 × 256 de référence dans le *cas n° 1* synchronisé — 25 tranches temporelles, suivant différentes coupes spatio-temporelles, identifiées sur la vue spatiale à la 13$^{\text{ème}}$ tranche. Les reconstructions seront visualisées sur ces mêmes coupes.

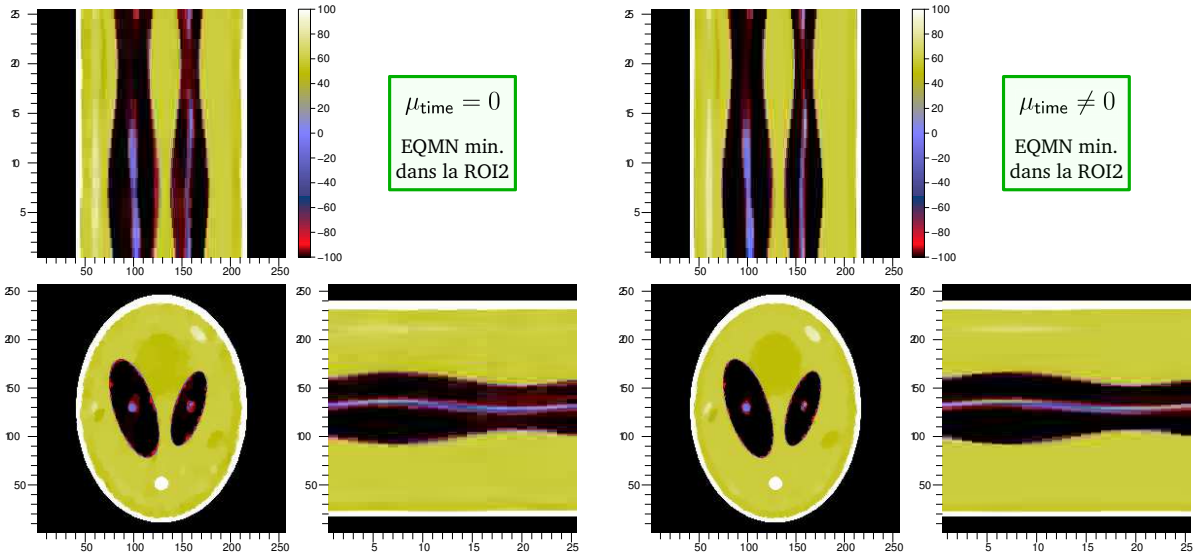


FIGURE 3.25: Visualisation des reconstructions dans le *cas n° 1* synchronisé, pour la régularisation spatio-temporelle séparable *Reg2*, avec $\mu_{\text{time}} = 0$ (à gauche) et $\mu_{\text{time}} \neq 0$ (à droite). On visualise les coupes spatio-temporelles, illustrées dans la figure 3.24, des reconstructions à EQMN minimale dans la ROI2.

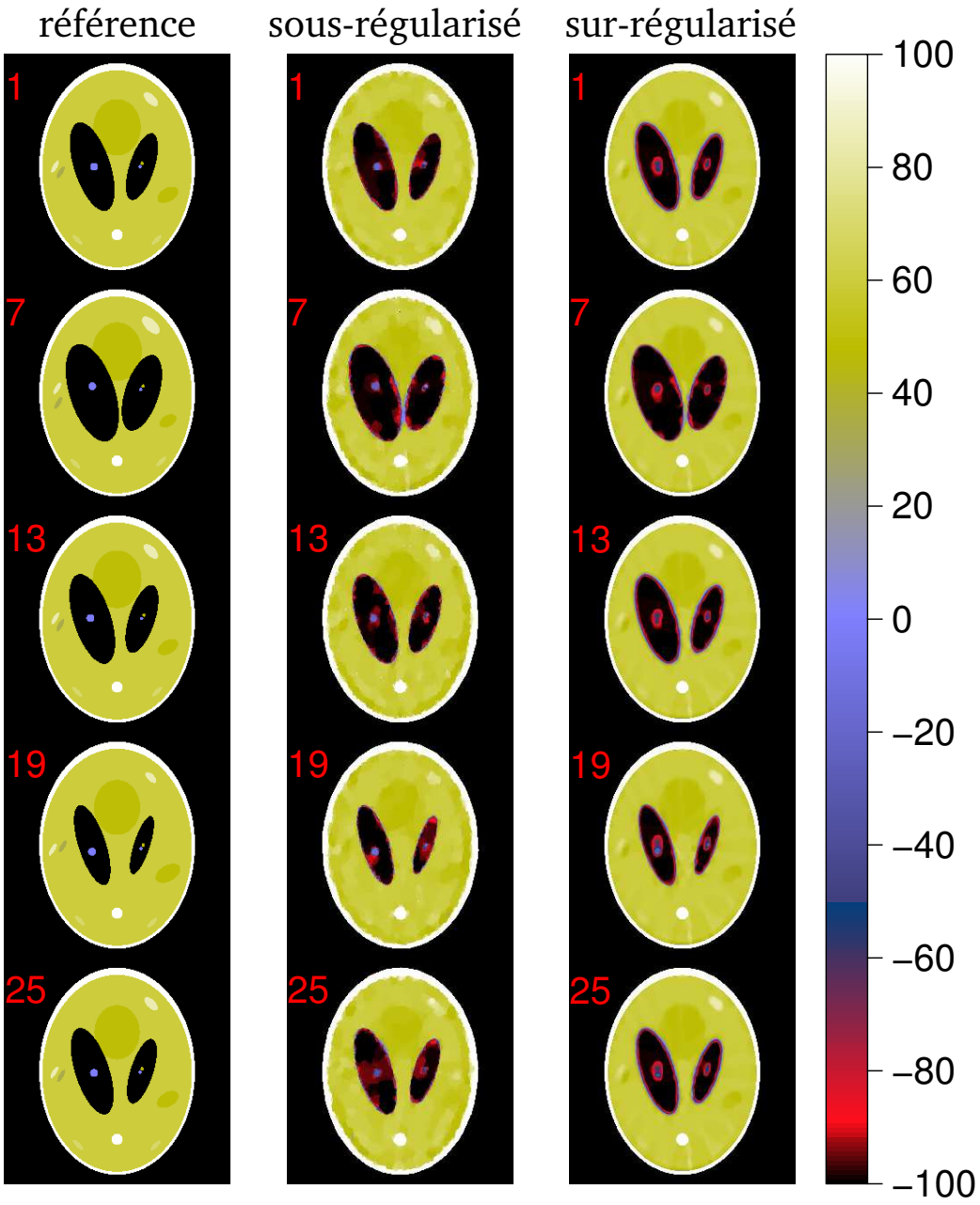


FIGURE 3.26: Visualisation des reconstructions dans le *cas n° 1* synchronisé, mettant en jeu un hyperparamètre μ_{time} très fort — $= 10^{-7}$ — (sur-régularisation, à droite), ainsi que celle mettant en jeu, à $\mu_{\mathsf{time}} = 0$, un hyperparamètre μ_{space} très faible (sous-régularisation, au centre). Ces reconstructions sont comparées à la référence (à gauche). Seule une partie des tranches temporelles est affichée, régulièrement espacées sur la durée du cycle, et numérotées, dans un souci de clarté.

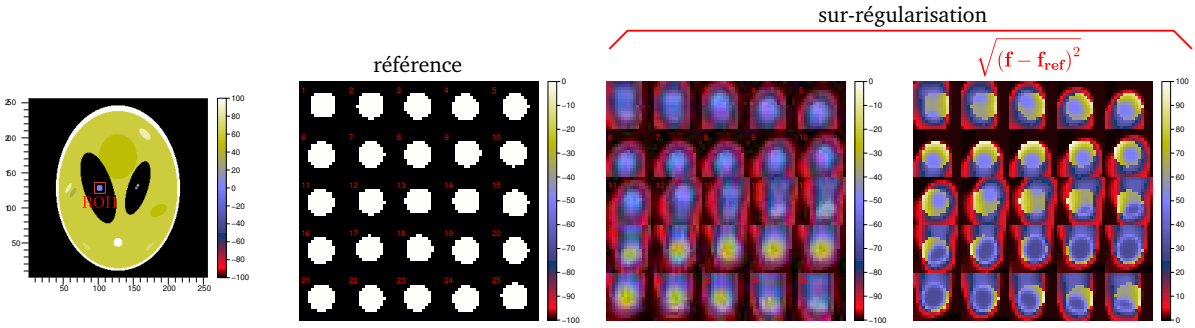


FIGURE 3.27: Visualisation d'une zone rectangulaire, englobant la ROI1, prise sur les 25 tranches temporelles reconstruites dans le *cas n° 1* synchronisé. On visualise la référence (à gauche) ainsi que la reconstruction mettant en jeu un hyperparamètre μ_{time} très fort — $= 10^{-7}$ — (sur-régularisation, à droite), associée (à sa droite) à l'image des erreurs quadratiques pixel à pixel. On aperçoit le phénomène de "traînée" dû au moyennage des tranches temporelles, particulièrement sur les tranches où la vitesse de mouvement de l'insert $\mathscr{E}_5$ est la plus importante.

pratique extrêmement complexe, et ne ferait au final que décorréler encore plus les tranches temporelles.

Le lien de continuité peut donc être apporté par la régularisation temporelle qui harmonise les tranches temporelles dans les zones constantes, ce qui est bien observable sur la figure 3.25. Bien entendu, au même titre que la régularisation spatiale, le poids de la régularisation temporelle μ_{time} doit être choisi judicieusement. D'après le principe de la variation totale [Rudin et al., 1992, Strong and Chan, 2003], nous avons vu qu'un poids de régularisation spatiale trop fort engendre un moyennage de l'image. Nous avons donc l'intuition qu'une sur-régularisation temporelle risque de moyenner les tranches temporelles. Autrement dit, chaque tranche temporelle reconstruite sera composée de la moyenne des positions de chaque structure en mouvement. Nous visualisons ce phénomène, de la même manière que pour la figure 3.23, sur la figure 3.26, où nous avons effectué une reconstruction mettant en jeu un hyperparamètre μ_{time} très fort — $\mu_{\text{time}} = 10^{-7}$ (non présent sur les graphes de la figure 3.22) — pour illustrer la sur-régularisation. Pour mieux effectuer la comparaison, nous montrons également les tranches de référence. Nous observons alors, d'un point de vue général, une baisse de contraste des petites structures engendrée par le phénomène de moyennage spatio-temporel des tranches. Cette sur-régularisation est très flagrante au niveau de l'insert $\mathscr{E}_5$, situé dans la ROI1, où l'on aperçoit, particulièrement sur les tranches 13 et 25 où sa vitesse de mouvement est la plus forte, une sorte de "traînée" le long de sa trajectoire, signe que ses positions sur les tranches adjacentes "déteignent" les unes sur les autres. La figure 3.27 montre un agrandissement sur une zone rectangulaire englobant la ROI1, où ce phénomène de "traînée" est visible, particulièrement sur l'image donnant les erreurs quadratiques pixel à pixel, par rapport à la référence. En regard de la sur-régularisation, nous visualisons également sur la figure 3.26 une reconstruction mettant en jeu, à $\mu_{\text{time}} = 0$, un hyperparamètre μ_{space} très faible, *i.e.* une reconstruction sous-régularisée. Nous voyons apparaître dans ce cas-là les artéfacts de reconstruction dus au bruit, au manque de données et aux erreurs de modélisation.

Revenons à présent au cas des hyperparamètres optimaux. Nous allons cibler nos analyses de la qualité de reconstruction sur les régions d'intérêt ROI2 et ROI3. Les figures 3.28 et 3.29 illustrent le rendu des reconstructions, sur des zones rectangulaires englobant respectivement la ROI2 et la ROI3 à toutes les tranches temporelles. Nous mettons donc en évidence, sur ces figures, dans quelle mesure ces reconstructions ont été capables de discriminer les deux inserts $\mathscr{E}_6$ et $\mathscr{E}_7$ (ROI2), ainsi que les deux inserts $\mathscr{E}_{13}$ et $\mathscr{E}_{14}$ (ROI3).

L'observation de ces reconstructions montrent bien qu'à niveau de régularisation spatiale optimal, au sens de l'erreur EQMN, et sans régularisation temporelle, la récupération des

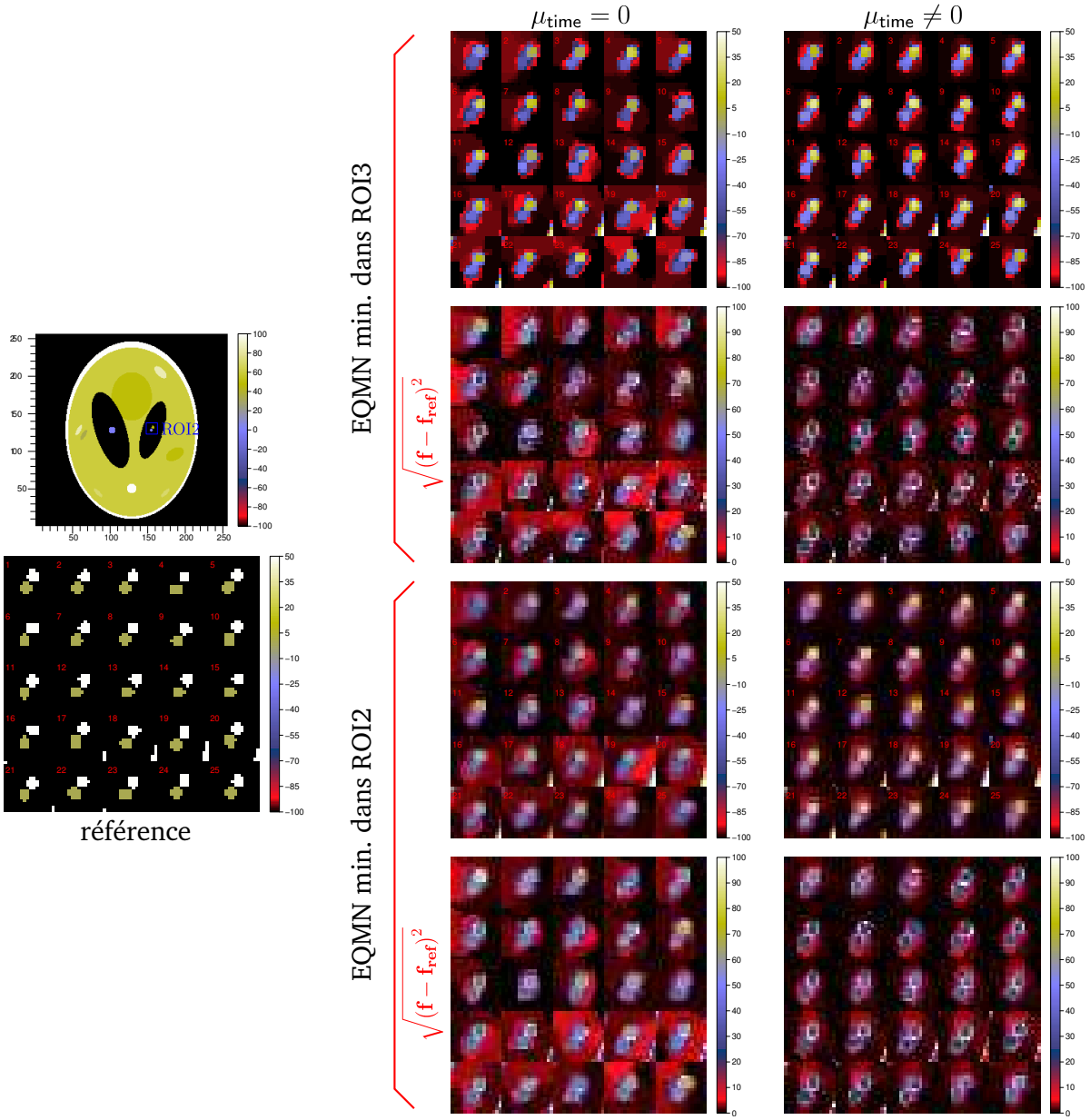


FIGURE 3.28: Visualisation de zones rectangulaires, englobant la ROI2, prises sur les 25 tranches temporelles reconstruites dans le *cas n° 1* synchronisé. La référence est affichée, avec la numérotation des tranches. On montre, sur les deux lignes du haut, les reconstructions donnant l'erreur EQMN dans la ROI3 minimale lorsqu'on ne régularise pas dans le temps ($\mu_{\text{time}} = 0$ à gauche) et lorsqu'on régularise dans le temps ($\mu_{\text{time}} \neq 0$ à droite), associées (en-dessous) chacune à l'image des erreurs quadratiques pixel à pixel. Sur les deux lignes du bas, l'agencement est identique, mais concerne les reconstructions donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

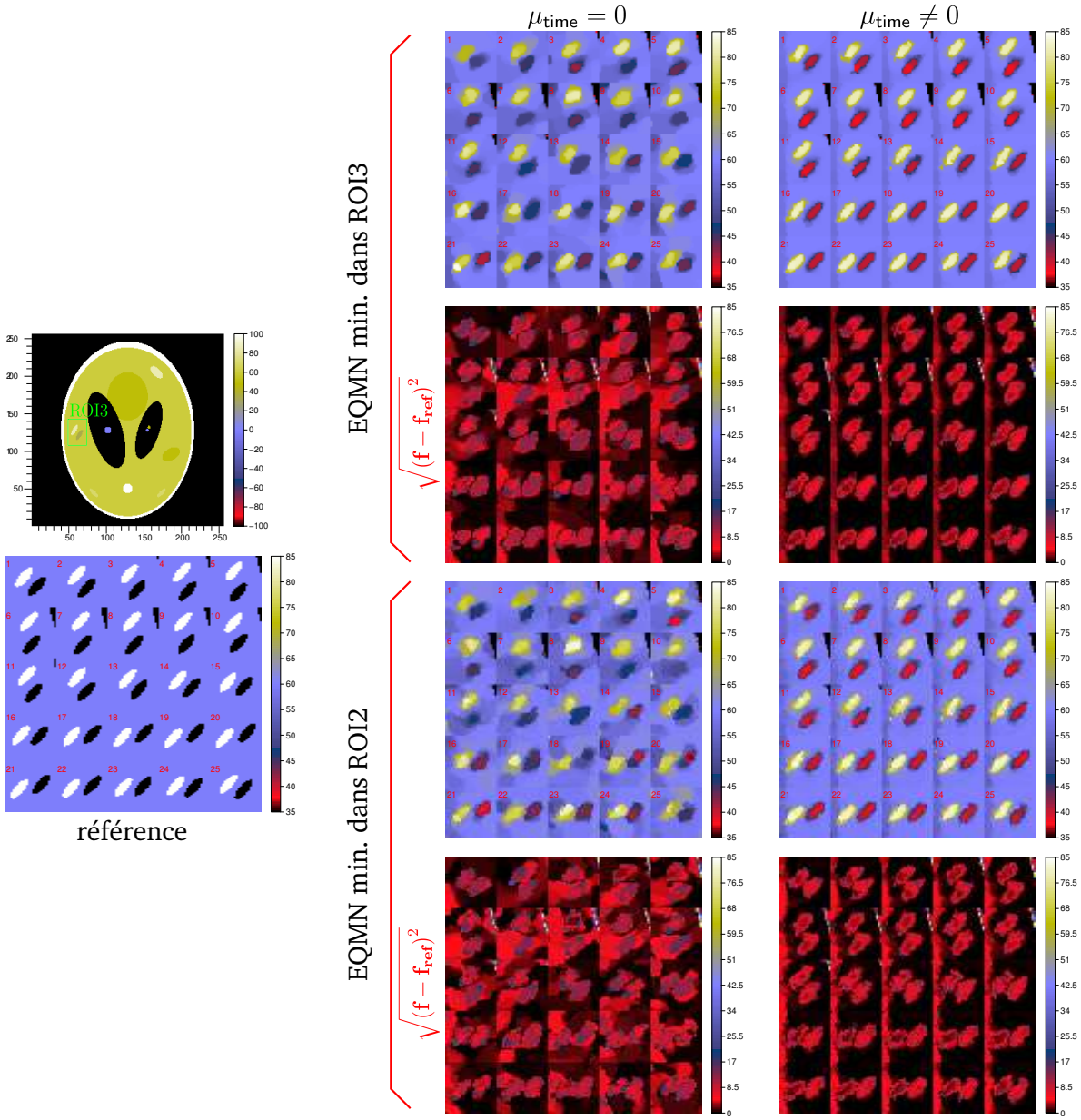


FIGURE 3.29: Visualisation de zones rectangulaires, englobant la ROI3, prises sur les 25 tranches temporelles reconstruites dans le *cas n° 1* synchronisé. La référence est affichée, avec la numérotation des tranches. On montre les reconstructions donnant l'erreur EQMN dans la ROI3 minimale lorsqu'on ne régularise pas dans le temps ($\mu_{\text{time}} = 0$ à gauche) et lorsqu'on régularise dans le temps ($\mu_{\text{time}} \neq 0$ à droite), associées (en-dessous) chacune à l'image des erreurs quadratiques pixel à pixel. Sur les deux lignes du bas, l'agencement est identique, mais concerne les reconstructions donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

détails fins dans ces zones n'est pas satisfaisante. L'ajout de régularisation temporelle a donc permis de gagner encore, et de façon très nette, en contraste et finesse de détails. Cela se ressent aussi bien empiriquement sur les reconstructions (*cf.* Fig. 3.28 et Fig. 3.29), que quantitativement avec l'erreur EQMN (*cf.* Fig. 3.22). Les gains sont encore plus flagrants dans la ROI3, qui met en évidence des structures peu contrastées, donc plus difficiles à reconstruire. Bien entendu, nous ciblons les résultats optimaux indépendamment dans chaque région d'intérêt, ne tenant pas compte de l'impact des valeurs d'hyperparamètres sur le reste de l'objet. Nous avons sélectionné l'erreur EQMN minimale dans la ROI2 comme critère de sélection général de meilleure reconstruction. Nous vérifions alors l'impact de ce critère global sur les zones agrandies. Pour ce faire, nous montrons sur la figure 3.28 illustrant les reconstructions dans la ROI2, les résultats pour les valeurs d'hyperparamètres donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI3. Nous avons fait de même sur la figure 3.29 en montrant les reconstructions dans la ROI3, pour les valeurs d'hyperparamètres donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2. Nous observons alors que la qualité visuelle des reconstructions par rapport à l'optimalité dans ces deux régions ne s'en trouve pas bouleversée. Ainsi, empiriquement dans ces régions, l'un ou l'autre de ces deux critères n'a pas d'impact sur la bonne qualité des reconstructions. Dernière observation générale, on constate que des erreurs fortes sont visibles sur les contours des structures pour toutes les reconstructions. Cela est dû au fait que c'est typiquement la reconstruction des bords francs dans ces images qui est la plus complexe et donc la plus génératrice d'erreurs. Cela traduit tout simplement la résolution effective atteignable par la méthode de reconstruction. Nous avions déjà identifié ce phénomène dans les reconstructions du chapitre 1 (*cf.* section 1.2.8), quelle que soit la régularisation utilisée, qui mettait en évidence, notamment au niveau de la modélisation de l'objet, l'impossibilité de représenter les fréquences spatiales infinies — typiquement les bords francs.

Passons à un examen des profils de coupe présentés dans la figure 3.21. Les figures 3.30, 3.31 et 3.32 illustrent respectivement les profils de coupe CUT1, CUT2 et CUT3. Pour l'ensemble de ces profils, il est clair que la régularisation temporelle a accentué la restauration des contrastes dans les régions correspondantes.

Cas n^o 2 : comparaison des régularisations séparable et globale

Cette étude s'effectue, rappelons-le, dans le *cas n^o 2*, *i.e.* un cas réaliste où il est cette fois-ci impossible de synchroniser les tranches temporelles avec les projections. Disposant dans ces conditions d'environ 33,1 projections par cycle, soit environ 18,1 projections pour un instant donné d'un cycle, nous reconstruisons $M = 32$ tranches temporelles. L'interpolateur temporel $\mathbf{S}^{\iota}$ utilise une B-spline d'interpolation de degré $e = 1$ (interpolation linéaire). Ainsi, chaque reprojection met en jeu deux tranches temporelles, pondérées chacune par un coefficient d'interpolation linéaire. Au final, chaque tranche temporelle est corrélée à environ 18×2 projections.

Pour ces reconstructions, nous avons amélioré le mode de variation des hyperparamètres pour couvrir beaucoup plus de valeurs. Ainsi les figures 3.33 et 3.34 montrent chacune les quatre graphes des erreurs EQMN en fonction des hyperparamètres μ_{space} et μ_{time}, mais cette fois-ci pour les reconstructions réalisées avec les régularisations spatio-temporelles *Reg1* (*cf.* équation 3.42) et *Reg2* (*cf.* équation 3.43). Notons que nous n'avons pas effectué de reconstructions avec l'hyperparamètre $\mu_{\mathsf{time}} = 0$, étant donné que nous avons montré, dans l'étude précédente, la nécessité sans équivoque de régulariser dans le temps. Notre objectif, dans cette étude-ci, est de comparer les deux régularisations spatio-temporelles mises en œuvre. Ce que nous souhaitons surtout étudier est le gain éventuel apporté par le fait de minimiser la variation totale de l'image 2-D+t globalement (*Reg1*), *i.e.* en considérant le gradient spatio-temporel

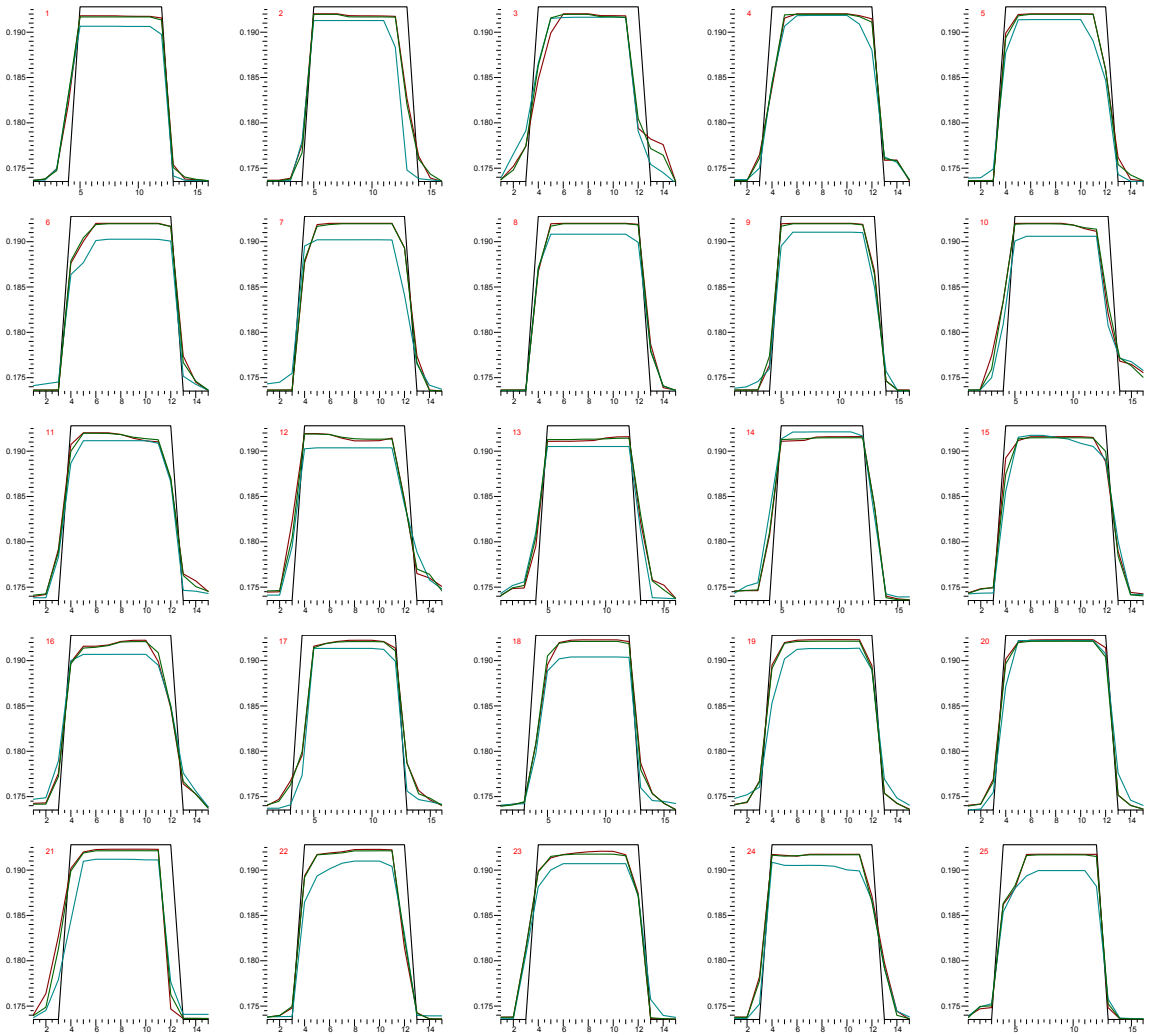


FIGURE 3.30: Profils de coupe tranche à tranche CUT1, intersectés avec la ROI1, pris sur les reconstructions dans le *cas n^o 1* synchronisé, à EQMN minimale dans la ROI2, lorsqu'on ne régularise pas dans le temps ($\mu_{\text{time}} = 0$ en bleu) et lorsqu'on régularise dans le temps ($\mu_{\text{time}} \neq 0$ en rouge). Les profils en vert correspondent à la reconstruction à EQMN minimale dans la ROI1, régularisée dans le temps. Les profils en noir correspondent à la référence.

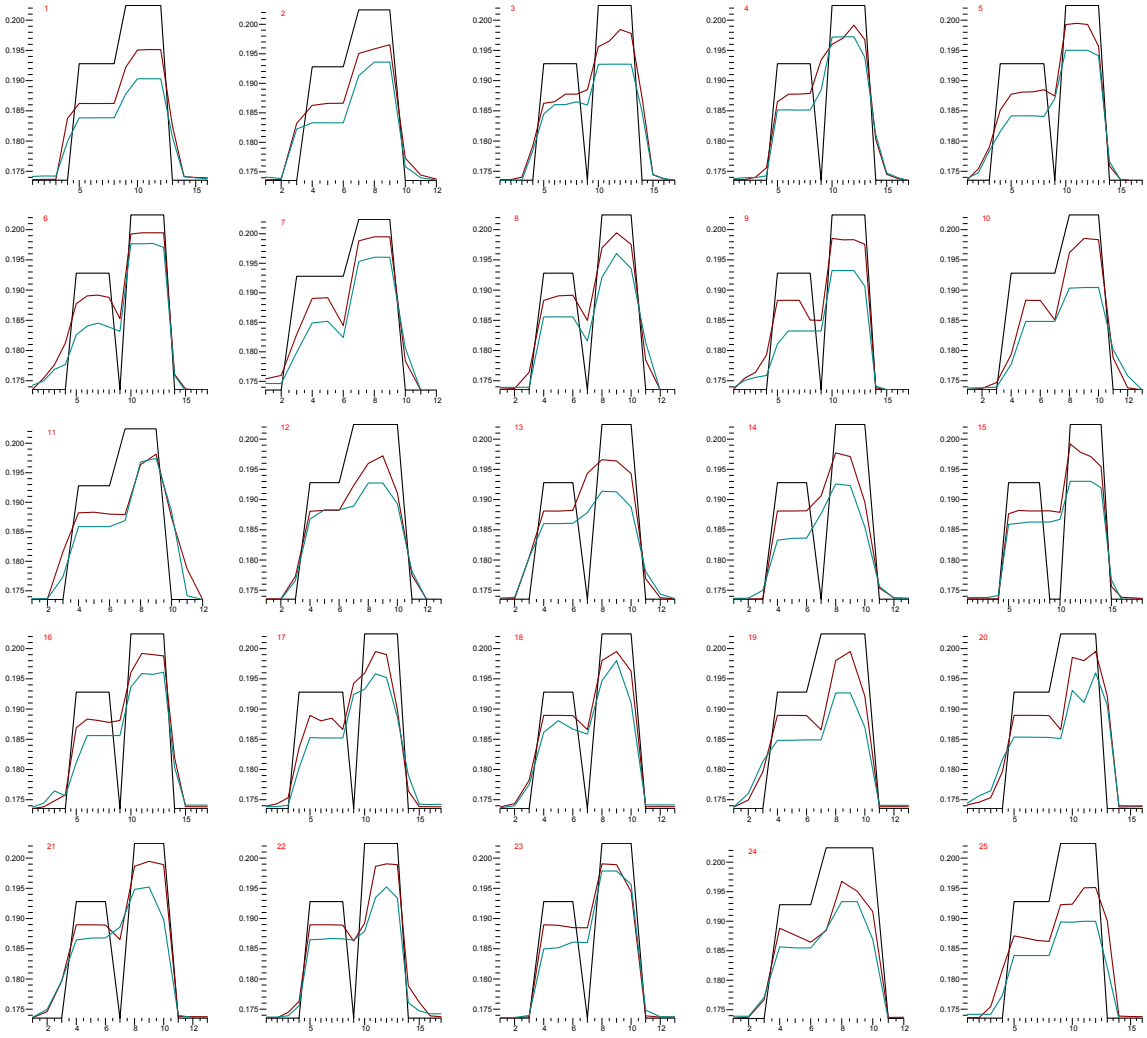


FIGURE 3.31: Profils de coupe tranche à tranche CUT2, intersectés avec la ROI2, pris sur les reconstructions dans le *cas n° 1* synchronisé, à EQMN minimale dans la ROI2. Les profils visualisés et la légende associée sont identiques à ceux de la figure 3.30.

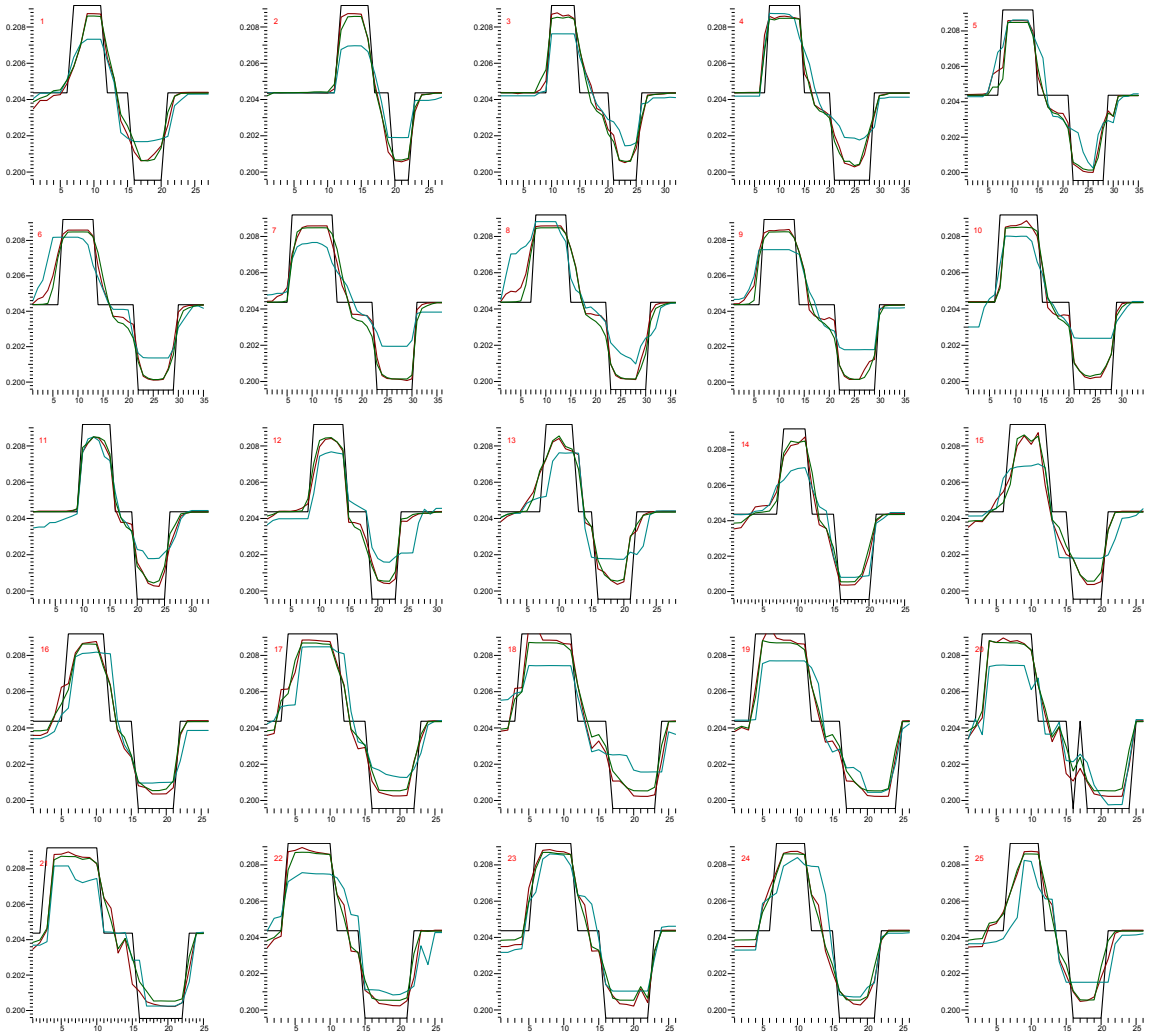


FIGURE 3.32: Profils de coupe tranche à tranche CUT3, intersectés avec la ROI3, pris sur les reconstructions dans le *cas n^o 1* synchronisé, à EQMN minimale dans la ROI2. Les profils visualisés et la légende associée sont identiques à ceux de la figure 3.30.

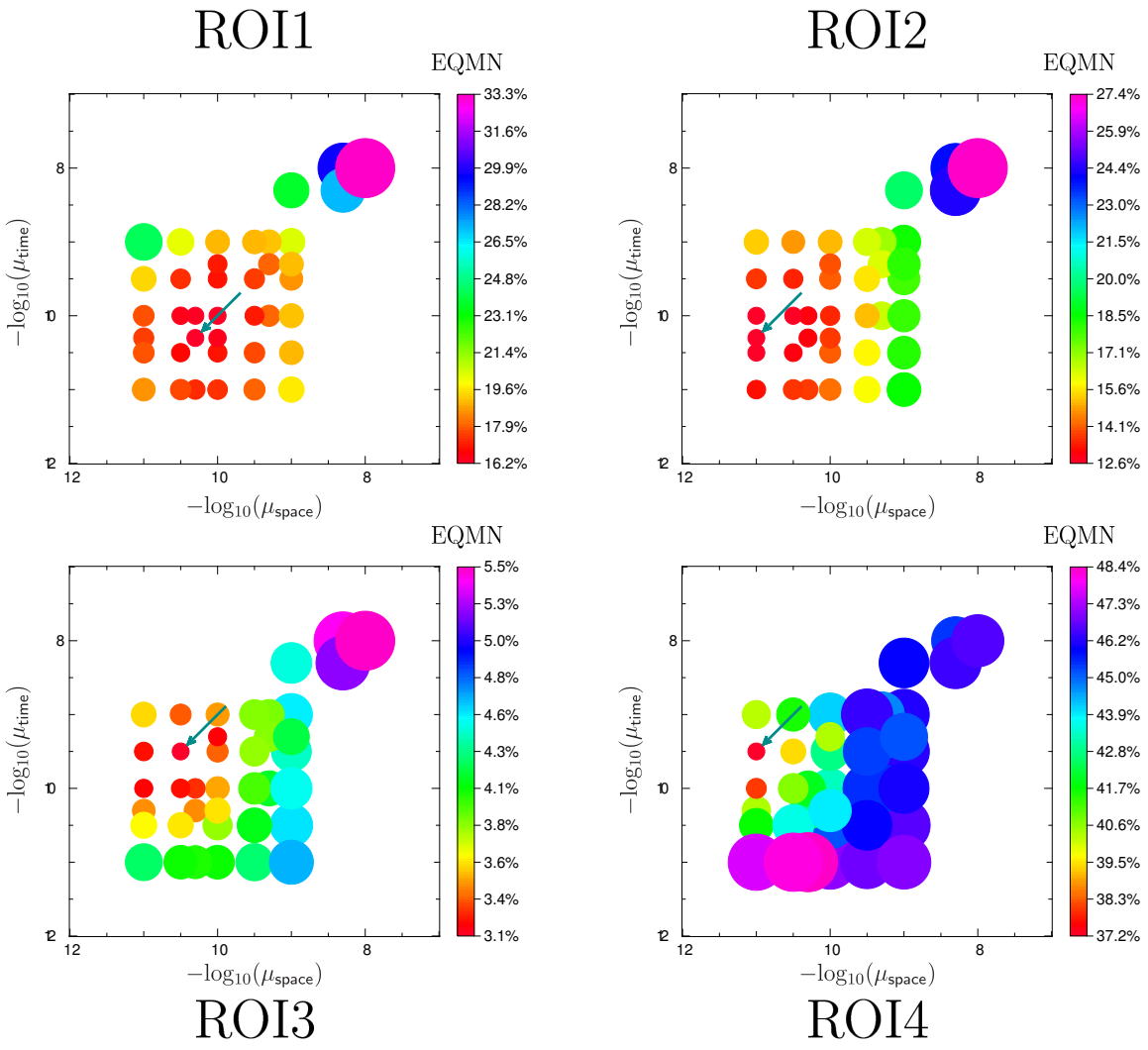


FIGURE 3.33: Graphes des erreurs EQMN, sur les quatre ROI, pour les reconstructions du fantôme type Shepp-Logan dynamique, dans la configuration du *cas n° 2* non synchronisé ($M = 32$ et $e = 1$), avec la régularisation spatio-temporelle séparable *Reg2* (*cf.* équation 3.43), en fonction des valeurs des couples $(\mu_{\text{space}}, \mu_{\text{time}})$. Chaque erreur EQMN associée à un couple d'hyperparamètres est visualisée par un disque, dont la couleur indique la valeur de l'EQMN. La dynamique des couleurs, affichée à droite de chaque graphe, va de l'erreur EQMN minimale à l'erreur EQMN maximale (en %). La taille de chaque disque est proportionnelle à la valeur de l'erreur EQMN. Chaque disque est positionné sur le graphe en $(-\log_{10}(\mu_{\text{space}}), -\log_{10}(\mu_{\text{time}}))$. La flèche cyan sombre indique la tâche d'erreur minimale pour chaque ROI.

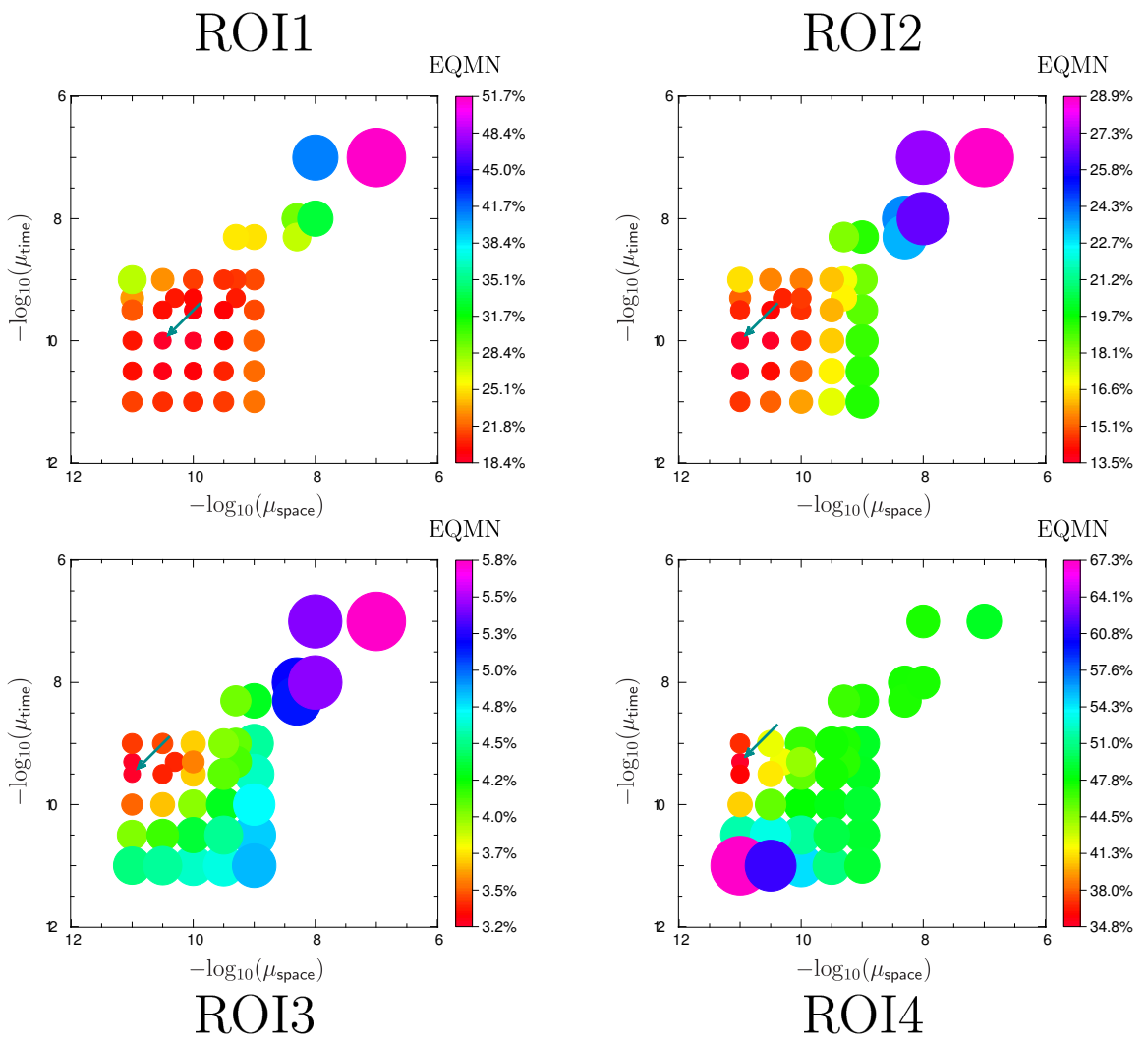


FIGURE 3.34: Graphes des erreurs EQMN, sur les quatre ROI, pour les reconstructions du fantôme type Shepp-Logan dynamique, dans la configuration du *cas n° 2* non synchronisé ($M = 32$ et $e = 3$), avec la régularisation spatio-temporelle globale *Reg1* (*cf.* équation 3.42), en fonction des valeurs des couples $(\mu_{\text{space}}, \mu_{\text{time}})$. Chaque erreur EQMN associée à un couple d'hyperparamètres est visualisée par un disque, dont la couleur indique la valeur de l'EQMN. La dynamique des couleurs, affichée à droite de chaque graphe, va de l'erreur EQMN minimale à l'erreur EQMN maximale (en %). La taille de chaque disque est proportionnelle à la valeur de l'erreur EQMN. Chaque disque est positionné sur le graphe en $(-\log_{10}(\mu_{\text{space}}), -\log_{10}(\mu_{\text{time}}))$. La flèche cyan sombre indique la tâche d'erreur minimale pour chaque ROI.

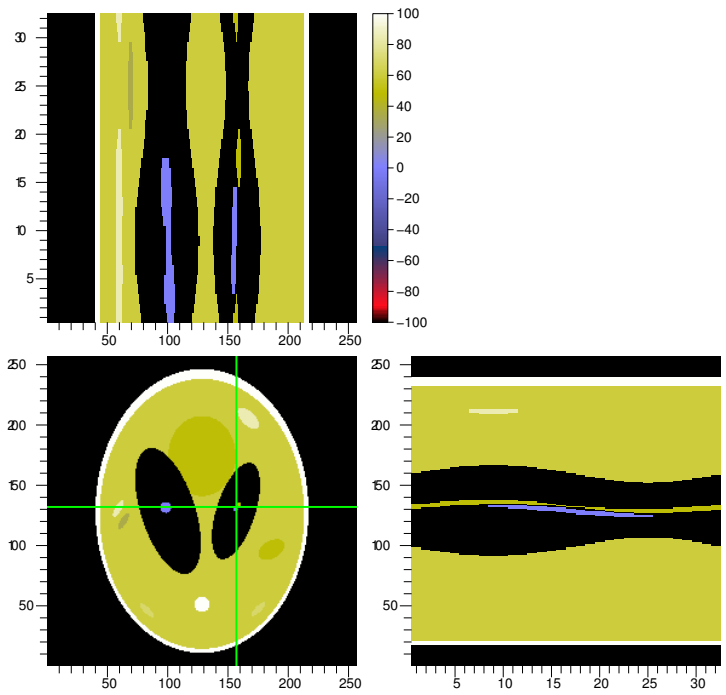


FIGURE 3.35: Visualisation du fantôme dynamique type Shepp-Logan 256 × 256 de référence dans le *cas n° 2* — 32 tranches temporelles, suivant différentes coupes spatio-temporelles, identifiées sur la vue spatiale à la 15ème tranche. Les reconstructions seront visualisées sur ces mêmes coupes.

"3-D" — temps + espace, au lieu de séparer les dimensions non homogènes en minimisant deux variations totales, l'une spatiale et l'autre temporelle (*Reg2*).

Une fois de plus, l'analyse de ces graphes montre que l'erreur EQMN minimale dans chaque région d'intérêt n'est pas atteinte pour le même jeu d'hyperparamètres μ_{space} et μ_{time}. Nous avons précédemment postulé que les régions les plus critiques à reconstruire étaient les régions ROI2 et ROI3. Nous recherchons donc la meilleure restauration possible des détails dans ces régions, tout en conservant autant que possible une bonne qualité générale de reconstruction. Dans l'étude du *cas n° 1*, nous avions déterminé que le meilleur critère de sélection global était l'erreur EQMN minimale dans la ROI2. Il se peut cependant que les conditions d'expérience différentes du *cas n° 2* modifient cette observation. C'est pourquoi nous considérons dans un premier temps les deux régions d'intérêt comme critère potentiel de sélection des reconstructions de meilleure qualité.

Comme dans l'étude du *cas n° 1*, nous visualisons les reconstructions globales sous forme de tranches spatio-temporelles, identifiées sur la figure 3.35. Nous observons sur la figure 3.36 les reconstructions donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2, ainsi que dans la ROI3, et pour les deux régularisations spatio-temporelles *Reg1* et *Reg2*. Les deux reconstructions, pour chaque régularisation, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2, montrent une assez bonne restauration des structures, notamment les inserts de la ROI2, $\mathscr{E}_6$ et $\mathscr{E}_7$, et ceux de la ROI3, $\mathscr{E}_{13}$ et $\mathscr{E}_{14}$. En revanche, les deux reconstructions sont très perturbées par de nombreux artéfacts. En effet, la reconstruction avec *Reg2* met en évidence de nombreux pics d'intensité parsemés sur la coupe spatiale, que la variation totale a préservés, faisant apparaître de fines traînées sporadiques sur les coupes spatio-temporelles, particulièrement autour des structures de la région ROI3. Ainsi, des sauts de contraste fort isolés, d'une tranche temporelle à l'autre, clairement identifiables comme du bruit indésirable par leur caractère épars et extrêmement ponctuel, persistent même à l'intérieur d'une zone d'intensité constante. La reconstruction avec *Reg1* semble aussi montrer ce comportement, mais nous observons cette fois-ci que les artéfacts

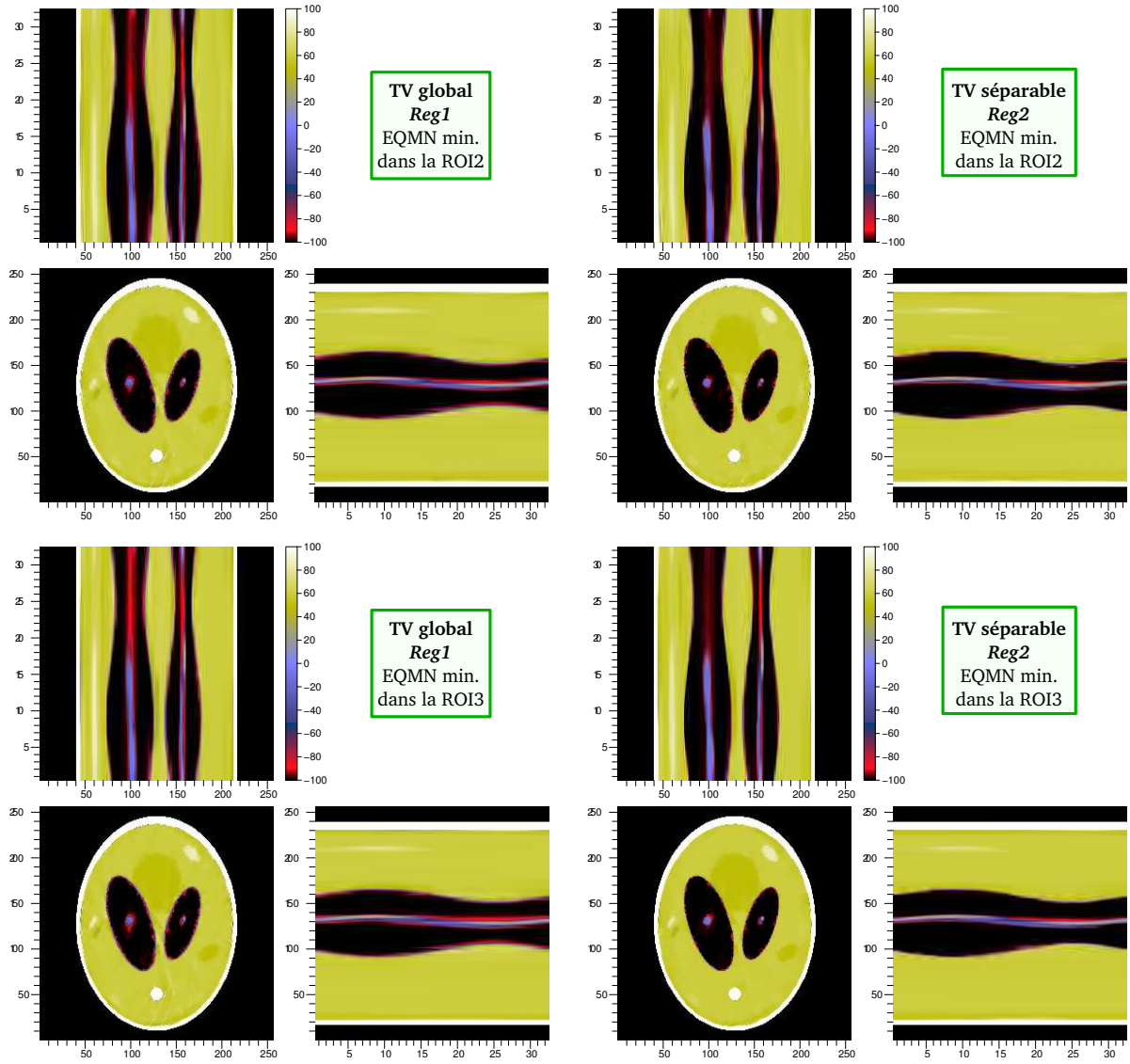


FIGURE 3.36: Visualisation des reconstructions dans le *cas n° 2*, pour les configurations avec régularisations spatio-temporelles globale *Reg1* (1ère colonne) et séparable *Reg2* (2ème colonne). On visualise les coupes spatio-temporelles, illustrées dans la figure 3.35, des reconstructions à EQMN minimale dans la ROI2 (1ère ligne), et à EQMN minimale dans la ROI3 (2ème ligne).

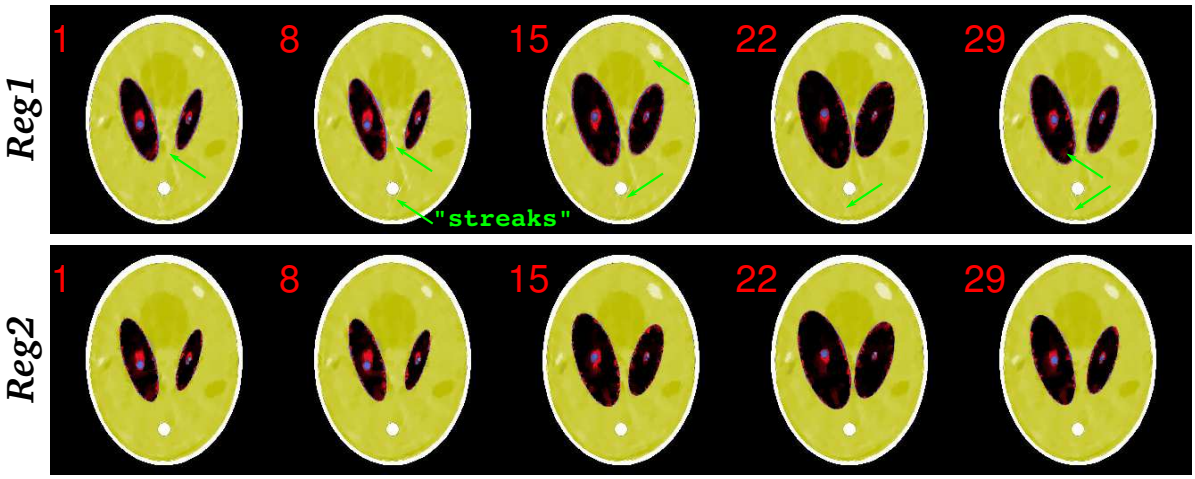


FIGURE 3.37: Visualisation des "*streak artifacts*", pointés par des flèches vertes, apparaissant sur une reconstruction régularisée avec *Reg1* (1ère ligne), pour un poids de régularisation temporel μ_{time} fort, et le poids de régualrisation spatiale μ_{space} optimal dans la ROI3, *i.e.* la plus basse des valeurs testées (*cf.* Fig. 3.34). En comparaison, une reconstruction régularisée avec *Reg2* (2nde ligne) dans les mêmes conditions montre que ce phénomène est moins prononcé.

se prolongent en traînées rectilignes, que l'on identifie clairement comme étant les fameux "*streak artifacts*" présentés dans la section 3.3. En affinant notre examen de la reconstruction avec *Reg2*, nous voyons que ces artéfacts y sont également présents, bien que légèrement plus atténués.

En ce qui concerne les reconstructions donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI3, nous observons que la reconstruction avec *Reg2* est de meilleure qualité, les artéfacts ayant disparu tout en conservant une bonne restauration des structures. En observant les graphes d'erreurs EQMN correspondants sur la figure 3.33, nous constatons que les poids de régularisation optimaux dans la ROI3 sont supérieurs à ceux de la ROI2. Ainsi la reconstruction optimale dans la ROI3 est plus régularisée, expliquant la disparition des artéfacts. En revanche, la reconstruction avec *Reg1* voit les "*streak artifacts*" perdurer. Ces derniers sont même bien plus visibles que sur la reconstruction optimale dans la ROI2. En se référant aux graphes d'erreurs EQMN de la figure 3.34, nous observons que le poids μ_{time} optimal dans la ROI3 est supérieur au poids optimal dans la ROI2, à μ_{space} identique. Il semblerait donc que ce soit la composante de régularisation temporelle dans *Reg1* qui entretienne elle-même ces artéfacts lorsque l'on augmente le poids. La figure 3.37 atteste de cette hypothèse, car elle montre une reconstruction avec un niveau de régularisation spatiale μ_{space} égal, mais pour la valeur maximale de μ_{time} testée correspondante. Les "*streak artifacts*" y semblent encore plus amplifiés. A contrario, la régularisation *Reg2* semble, dans ces conditions, moins souffrir de ce phénomène.

Ces observations nécessitent néanmoins des examens complémentaires avant de conclure sur le réel comportement de *Reg1*. En effet, les observations de la figure 3.36 établissent clairement que les reconstructions avec *Reg1* ne sont pas acceptables. Les deux critères de choix ayant conduit à sélectionner ces résultats sont donc inadaptés. Pour obtenir des reconstructions éliminant ces artéfacts, des poids de régularisation plus importants sont nécessaires, surtout spatialement et particulièrement pour *Reg1*. Ces critères se focalisent, rappelons-le, sur les régions d'intérêt mettant en évidence les structures de plus petite taille dans le fantôme. Donc, si nous nous souvenons du comportement théorique de la variation totale exploré dans les sections 1.2.7 et 1.2.8 du chapitre 1, une bonne restauration de ces structures réclame des poids de régularisation assez faibles pour éviter de les "aplatir". Un critère de choix permettant de sélectionner des poids de régularisation plus forts doit donc logiquement se focaliser sur des

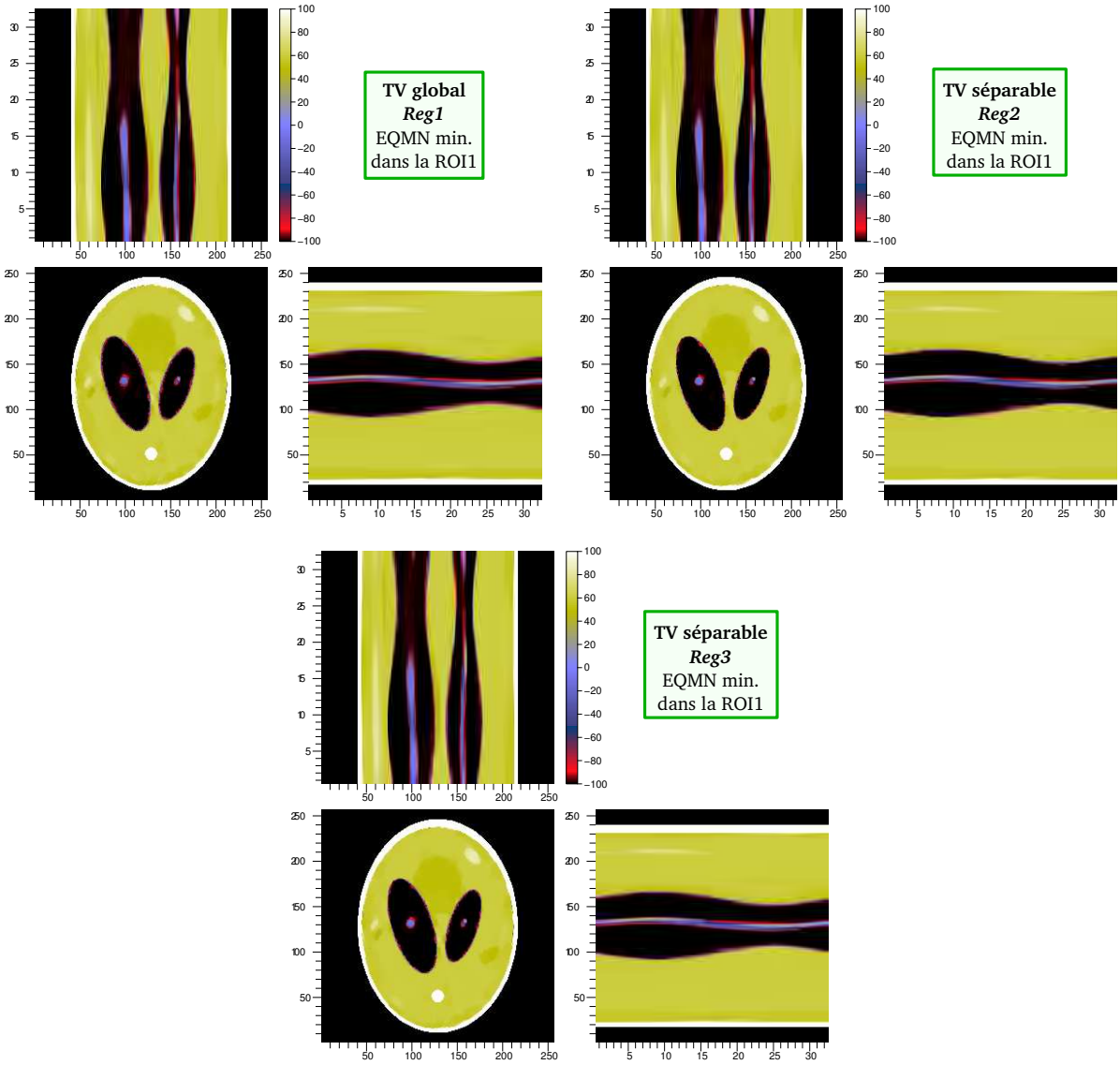


FIGURE 3.38: Visualisation des reconstructions dans le *cas n° 2*, pour les configurations avec régularisations spatio-temporelles globale *Reg1* et séparables *Reg2* et *Reg3*. On visualise les coupes spatio-temporelles, illustrées dans la figure 3.35, des reconstructions à EQMN minimale dans la ROI1.

structures de plus grande taille. Nous devons tout de même prendre soin de garder un certain compromis de taille caractéristique afin d'empêcher qu'un poids trop fort n'élimine les petites structures. Nous pouvons alors choisir la structure de la ROI1, dont l'insert $\mathscr{E}_5$ est d'une taille satisfaisante. Nous observons d'ailleurs sur les graphes des figures 3.33 et 3.34 que les poids optimaux au sens de l'erreur EQMN dans cette région vérifient notre théorie, à savoir qu'ils accroissent le niveau de régularisation, particulièrement spatial.

La figure 3.38 montre les reconstructions optimales pour *Reg1* et *Reg2*, au sens de l'erreur EQMN minimale dans la ROI1. Les résultats sont, comme nous en avions l'intuition, de bien meilleure qualité. Particulièrement, nous constatons que la reconstruction avec *Reg2* est totalement exempte d'artéfacts, et a conservé, malgré un niveau de régularisation spatiale supérieur (*cf.* Fig. 3.33), une excellente restauration des structures de la ROI2 et de la ROI3. La reconstruction avec *Reg1* montre une restauration de ces structures équivalente. En revanche, nous observons que des reliquats d'artéfacts persistent, déteriorant la qualité générale de l'image

FIGURE 3.39: Visualisation des "*streak artifacts*", pointés par des flèches vertes, apparaissant sur la reconstruction régularisée avec *Reg3* donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI2.

comparée à l'image reconstruite avec *Reg2*.

Nous montrons également sur cette figure la reconstruction à EQMN minimale dans la ROI1 obtenue avec la régularisation spatio-temporelle *Reg3* (*cf.* équation 3.44) qui, rappelons-le, reste séparable mais calcule un gradient temporel moyen sur un voisinage spatial. La qualité de reconstruction est sensiblement identique à celle de la reconstruction avec *Reg1*, car on y aperçoit les mêmes reliquats de "*streak artifacts*", quoique plus ténus. Il semblerait donc que la régularisation *Reg3* entretienne ces artéfacts de façon similaire. La figure 3.39, montrant la reconstruction avec *Reg3* à EQMN minimale dans la ROI2 nous confirme cette hypothèse, en laissant apparaître les mêmes artéfacts qu'avec *Reg1*.

Notre conclusion de ces observations est que les régularisations *Reg1* et *Reg3*, par la mise en corrélation des gradients spatiaux et temporel, entretiennent — et même lient — ces "*streak artifacts*" au cours du temps. En effet, étant par nature assez contrastés et liés continûment dans le temps[32], il paraît logique que l'action corrélée spatio-temporellement de ces régularisations engendre cet effet pervers de conservation, nécessitant d'augmenter le poids de régularisation spatiale μ_{space}[33], au prix d'une baisse de résolution. Ces artéfacts sont en revanche éradiqués par la régularisation *Reg2*, du fait de la décorrélation des gradients spatiaux et temporel, qui permet certainement de les rendre moins significatifs, *i.e.* de les traiter comme un bruit.

Afin de vérifier si ces différences ne sont pas dues à des problèmes de convergence de l'algorithme de reconstruction en fonction de la régularisation utilisée, compte tenu du fait que nous fixons un nombre d'itérations limite (environ 5000), nous avons tracé les courbes d'évolution du terme d'attache aux données $\mathcal{J}_{\mathsf{data}}$ en fonction du nombre d'évaluations — nombre d'occurences de calculs du couple projecteur tomographique direct/adjoint (*cf.* Fig. 1.24, section 1.2.7, chapitre 1). Ces courbes, tracées sur la figure 3.40), montrent que les deux versions atteignent une convergence acceptable au bout du même nombre d'évaluations, de l'ordre de 1000.

Quoi qu'il en soit, la qualité générale des reconstructions à niveau de régularisation adéquat est relativement comparable, et montre encore une fois l'apport de la régularisation temporelle dans la restauration d'une séquence d'images cohérente. Nous l'observons d'ailleurs sur la figure 3.41 qui visualise les agrandissements de ces reconstructions dans les régions ROI2 et ROI3, à l'instar des figures 3.28 et 3.29 dans l'étude du *cas n° 1*. Ces agrandissements montrent clairement des résultats similaires pour les trois régularisations dans la restauration des petites structures d'intérêt, correctement discriminées.

D'un point de vue quantitatif, les valeurs d'erreurs EQMN dans chaque ROI, regroupées dans le tableau 3.3, viennent confirmer nos analyses observationnelles, et donnent l'avantage à la régularisation séparable *Reg3*. En effet, celle-ci étant plus robuste face notamment aux "*streak artifacts*", le réglage de son poids est sans doute plus optimal. Elle permet ainsi d'at-

32. En général, ils se décalent angulairement tranche à tranche, donnant un effet de rotation continue des traînées rectilignes.

33. Augmenter le poids de régularisation temporelle μ_{time} ne va faire qu'entretenir encore plus ces artéfacts.

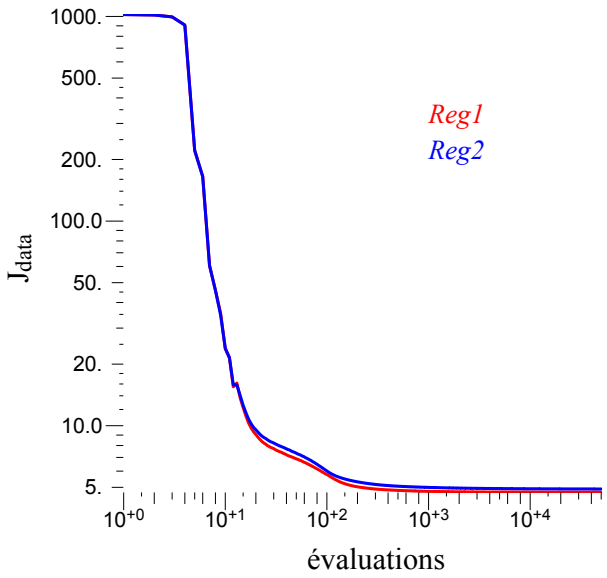


FIGURE 3.40: Convergence du terme d'attache aux données $\mathcal{J}_{\text{data}}$ (*cf.* équation 3.28), en fonction du nombre d'évaluations, de deux reconstructions régularisées respectivement avec *Reg1* (en rouge) et *Reg2* (en bleu), pour les mêmes poids μ_{space} et μ_{time}.

	ROI1	ROI2	ROI3	ROI4
Reg1	18,4%	13,5%	3,6%	45,3%
Reg2	16,2%	13%	3,4%	42,6%
Reg3	17%	13,3%	3,4%	40,7%

TABLE 3.3: Tableau regroupant les erreurs EQMN dans les quatre régions d'intérêt ROI1, ROI2, ROI3 et ROI4, pour les reconstructions effectuées dans le *cas n° 2*, donnant l'erreur EQMN minimale dans la ROI1, pour les trois régularisations spatio-temporelles *Reg1* (1ère ligne), *Reg2* (2nde ligne) et *Reg3* (3ème ligne). L'erreur minimale pour chaque ROI est écrite en rouge.

teindre une restauration beaucoup plus fine des détails, tandis que les régularisations *Reg1* et *Reg3* obligent à régler plus fortement leurs poids pour éliminer ces dégradatations, perdant ainsi en finesse de restauration.

Nous terminons l'étude de ces différentes régularisations par l'observation des profils de coupe présentés dans la figure 3.21. Les figures 3.42, 3.43 et 3.44 illustrent respectivement les profils de coupe CUT1, CUT2 et CUT3. Nous avons extrait les profils des reconstructions à EQMN minimale dans la ROI1. L'examen de ces profils confirme que du point de vue observationnel, les qualités de restauration des structures dans ces régions d'intérêt restent relativement similaires.

Petit bilan provisoire de ces études

Ce que nous devons retenir de ces expériences en simulation 2-D+t, est la démonstration évidente de la faisabilité de notre approche appliquée à la reconstruction dynamique sans compensation de mouvement.

À partir d'un simple jeu de données dynamiques, satisfaisant à des conditions pratiques d'acquisition, sans multiplication du nombre de projections à la différence des approches *gated*, nous avons montré que notre méthode était capable de reconstruire avec une excellente qualité

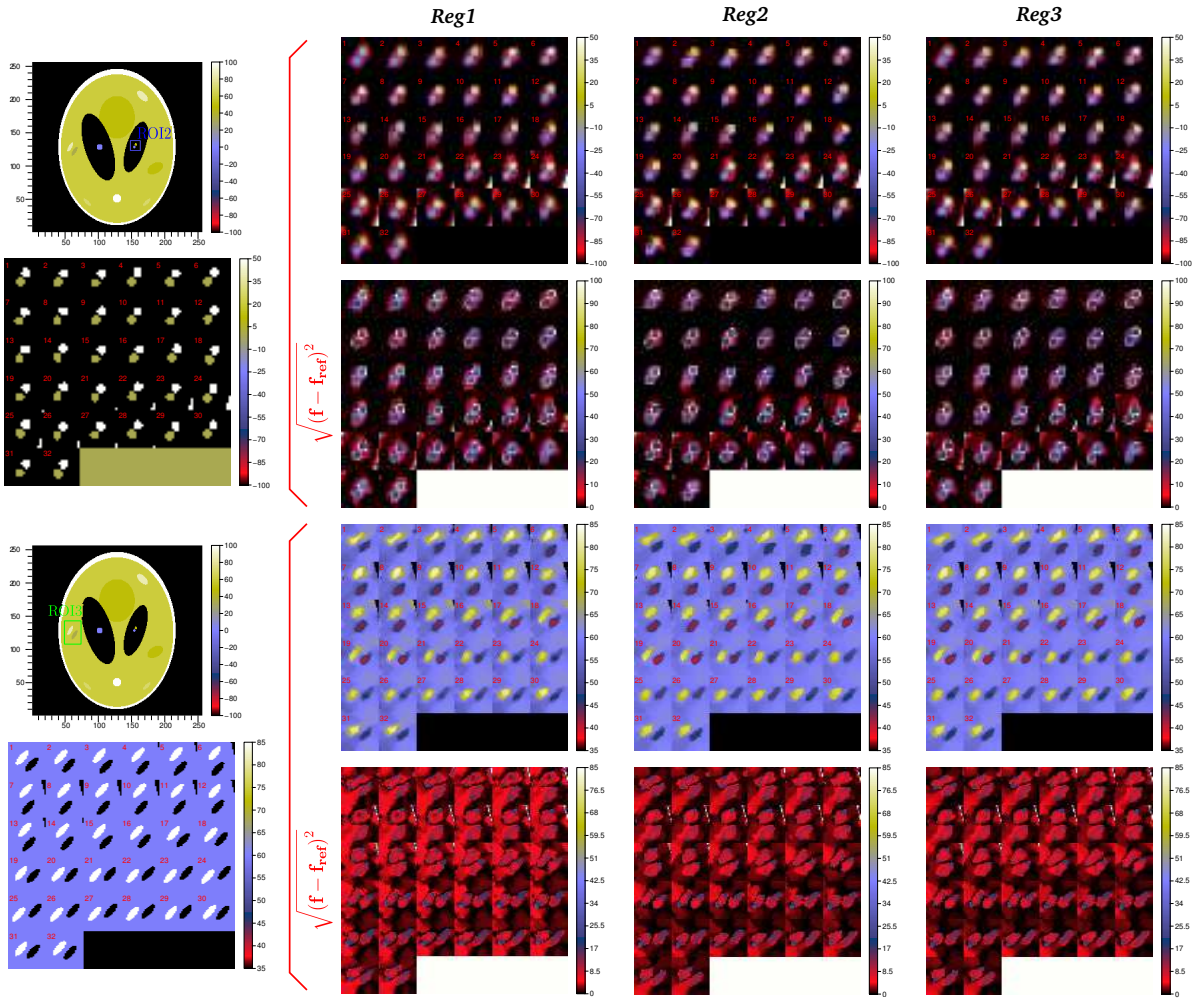


FIGURE 3.41: Visualisation dans le *cas n° 2* de zones rectangulaires, englobant la ROI2 (en haut) et la ROI3 (en bas), prises sur les 32 tranches temporelles reconstruites dans le *cas n° 2*. Les références sont affichées, avec la numérotation des tranches. On visualise les reconstructions donnant l'erreur EQMN dans la ROI1 minimale pour les régularisations *Reg1* (colonne de gauche), *Reg2* (colonne centrale) et *Reg3* (colonne de droite), associées (en-dessous) chacune à l'image des erreurs quadratiques pixel à pixel.

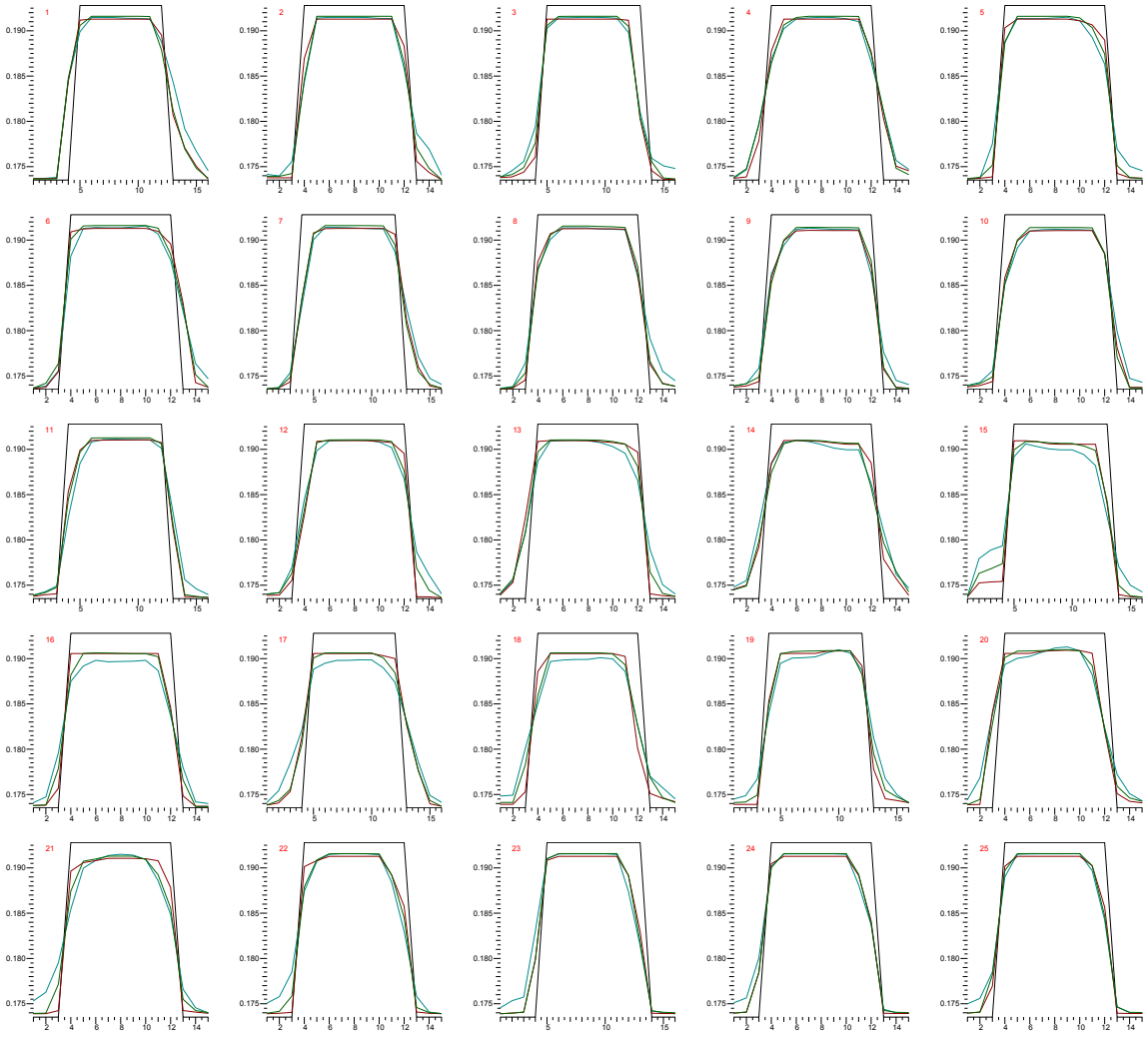


FIGURE 3.42: Profils de coupe tranche à tranche CUT1, intersectés avec la ROI1, pris sur les reconstructions dans le *cas n° 2*, à EQMN minimale dans la ROI1, avec la régularisation *Reg1* (en bleu), *Reg2* (en rouge) et *Reg3* (en vert). Les profils en noir correspondent à la référence.

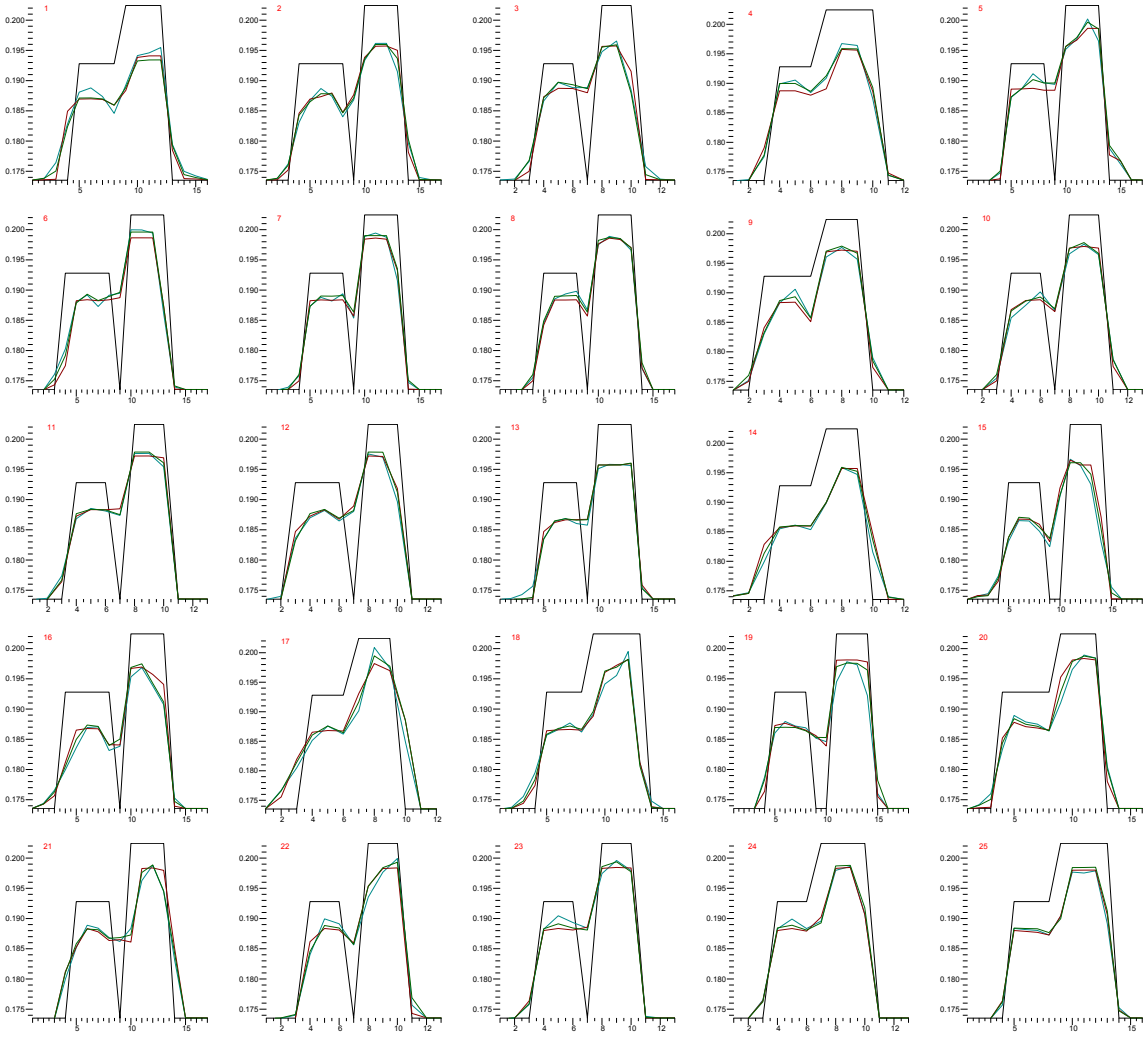


FIGURE 3.43: Profils de coupe tranche à tranche CUT2, intersectés avec la ROI2, pris sur les reconstructions dans le *cas n° 2*, à EQMN minimale dans la ROI1, avec la régularisation *Reg1* (en bleu), *Reg2* (en rouge) et *Reg3* (en vert). Les profils en noir correspondent à la référence.

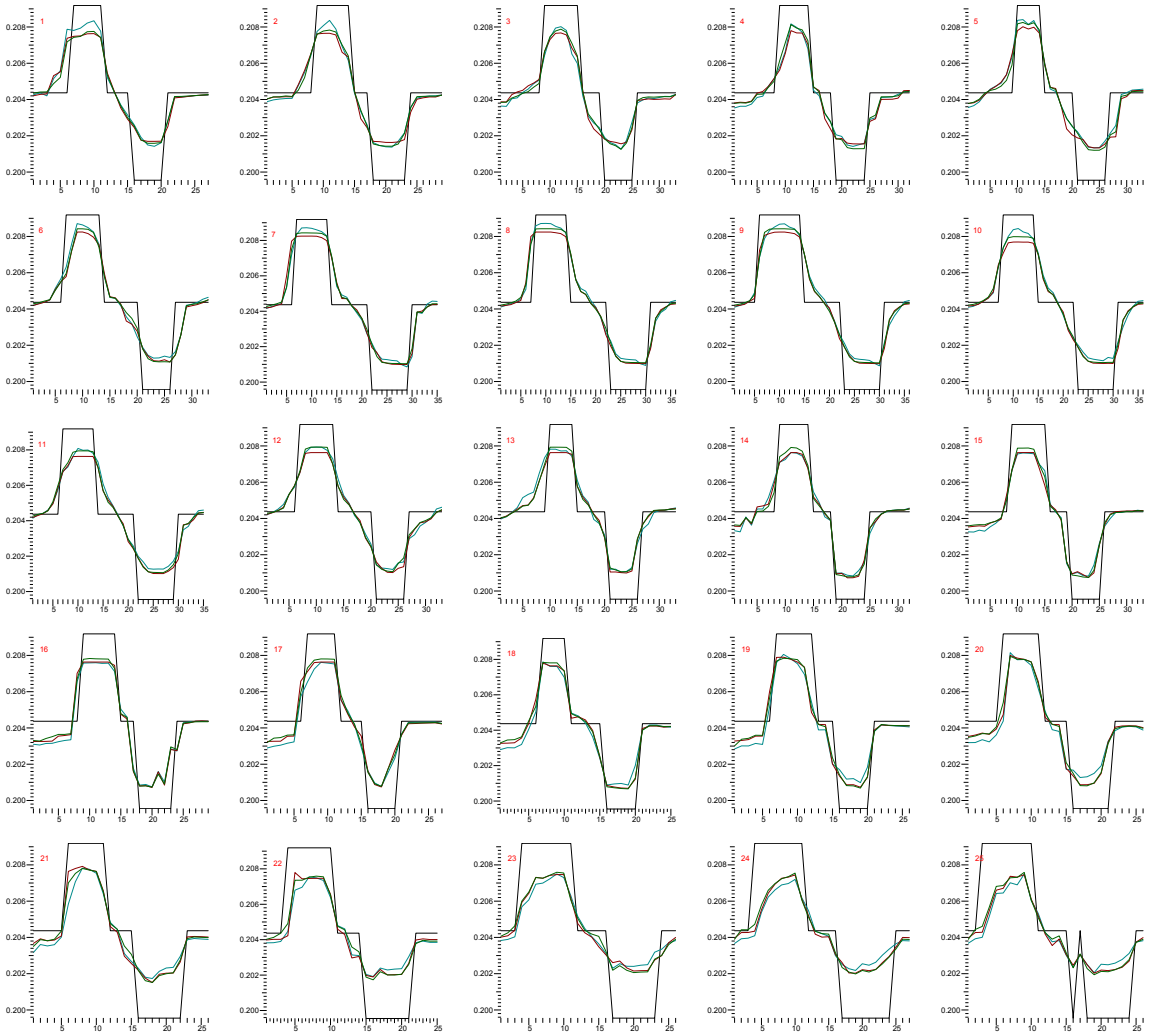


FIGURE 3.44: Profils de coupe tranche à tranche CUT3, intersectés avec la ROI3, pris sur les reconstructions dans le *cas n° 2*, à EQMN minimale dans la ROI1, avec la régularisation *Reg1* (en bleu), *Reg2* (en rouge) et *Reg3* (en vert). Les profils en noir correspondent à la référence.

le cycle de mouvement d'un objet, sans apport extérieur d'information.

La force de notre approche réside principalement dans la régularisation spatio-temporelle, qui apporte la corrélation nécessaire entre les tranches reconstruites, afin de combiner les caractéristiques anatomiques de l'objet dans leur continuité temporelle.

Les différentes versions de ce type de régularisation, utilisant la variation totale, de façon globale ou séparable, ont été testées et ont toutes montré un comportement relativement similaire dans l'efficacité de leur action.

À noter tout de même que nos hypothèse théoriques de départ prévoyaient les meilleures performances pour la régularisation globale *Reg1*. Nos expériences ont infirmé cette hypothèse, en donnant l'avantage à la version *Reg2*, séparable spatio-temporellement. C'est donc cette version que nous sélectionnons dans les reconstructions qui suivent cette étude préliminaire.

Précisons tout de même que nos conclusions sur ce dernier point sont uniquement observationnelles. Une étude en profondeur des différentes régularisations demeure nécessaire pour comprendre théoriquement leur comportement et dégager avec pleine objectivité leurs avantages et inconvénients respectifs.

3.5.2 Données réelles à partir d'un fantôme mécanique

Nous passons à présent à la mise en application et l'évaluation des performances de notre approche dans le cadre de reconstructions 2-D à partir de données physiques "réelles".

Présentation du "patient"

Ces données ont été acquises au Centre Léon Bérard, sur le *scanner Synergy Cone-Beam CT*$^{\text{TM}}$ (*CT pour Computed Tomography*) de la société *Elekta* que nous avons décrit au début de la section 3.4.1, et qui constitue, rappelons-le, une modalité d'acquisition par rayons X *Cone Beam*. Le détecteur plan est composé de 512×512 pixels de $0{,}08 \times 0{,}08\text{cm}^2$. La distance focale ℓ_{sd} (distance entre la source et son projeté orthogonal sur le plan détecteur) est de 153,6cm, et la distance entre la source et l'*isocentre*, est de 100cm (*cf.* Fig. 3.7).

L'objet imagé est un fantôme dynamique mécanique — modèle *008A*$^{\text{TM}}$ de la société *CIRS*, ayant les caractéristiques anatomiques d'un thorax humain, *e.g.* les poumons et la colonne vertébrale, avec des densités différentes symbolisant les absorptions des divers tissus (*cf.* Fig. 3.45). Notamment, le matériau définissant les poumons est de plus faible densité que le matériau périphérique, symbolisant les tissus musculaires, eux-mêmes moins denses que les "os" de la colonne vertébrale. À l'intérieur du "poumon droit", une petite sphère, de 2 centimètres de diamètre, a été insérée, et peut être animée mécaniquement d'un mouvement de translation circulaire dans le plan transversal, et rectiligne dans la direction crânio-caudale — les deux mouvements pouvant être combinés, reproduisant assez fidèlement le déplacement d'une tumeur lors de la respiration, affranchi cependant de toute déformation.

Nous avons acquis environ 630 projections régulièrement en temps et en angle, sur une couverture angulaire de 360°, et pour une durée exacte de 116 secondes. Nous avons simplement animé l'insert sphérique d'un mouvement circulaire transversal périodique sinusoïdal, avec une période de cycle de 4 secondes. Nous avons positionné le fantôme de sorte que l'insert, et son mouvement, soient en permanence dans le plan transversal passant par l'isocentre du système[34]. Nous avons ainsi pu extraire la ligne détecteur médiane suivant l'axe $\vec{v}$ perpendiculaire à l'axe de rotation $\vec{z}$, pour laquelle les données sont alors équivalentes à des projections *fan beam* de ce plan, de la manière que nous avons énoncée dans la section 3.45, et illustrée sur

34. Cette configuration est pour le cas 2-D, mais nous ne nous contenterons pas d'un mouvement plan dans le cas 3-D.

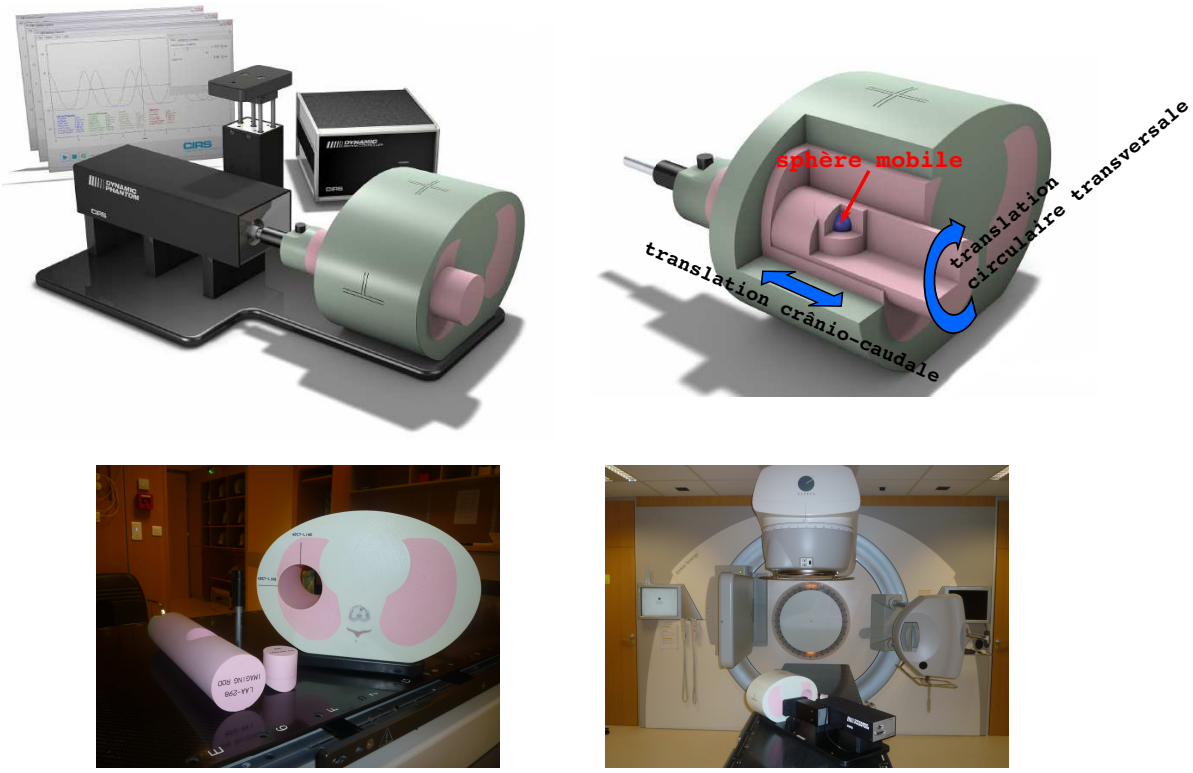


FIGURE 3.45: Le fantôme dynamique mécanique *008A*$^{\text{TM}}$ de la société *CIRS*.

la figure 3.8. Nous avons ainsi défini la coupe à reconstruire, centrée sur l'insert animé alors d'un mouvement de translation circulaire plan. Nous avons également réalisé des acquisitions d'autant de projections, suivant ce même positionnement de l'insert, mais immobile cette fois, afin de pouvoir comparer nos reconstructions dynamiques avec des reconstructions statiques qui serviront de référence. La figure 3.46 montre les données ainsi obtenues. Notons que pour les acquisitions dynamiques, un filtre anti-diffusion a été appliqué sur le flux de photons enregistré par le détecteur, dans une zone d'intérêt englobant la ligne détecteur extraite.

En observant les projections et les sinogrammes de la figure 3.46, on s'aperçoit que le champ de vue du détecteur est insuffisant pour voir l'intégralité de l'objet. Nos données sont donc tronquées, ce qui va perturber la qualité des reconstructions dans les zones du fantôme qui ne sont pas entièrement imagées, *i.e.* non visibles à certains angles de projections. Dans ces zones, le problème de la reconstruction devient à couverture angulaire limitée. En reconstruction itérative, cela peut être partiellement réglé en ayant soin de définir un support reconstruit englobant a priori l'objet complet — cette information est connue puisqu'il n'est pas difficile d'évaluer le volume "cube" approximatif occupé par l'objet. Cette astuce permet à la reconstruction de ne pas concentrer l'information en surplus des projections, *i.e.* les détails de l'objet seulement vus partiellement sur certaines projections et non visibles sur d'autres, dans les zones correctement imagées. Ainsi cette information de surplus sera théoriquement "rangée" dans les sites extérieurs au support de l'objet intégralement observé par le détecteur (*cf.* Fig. 3.47). En reconstruction analytique, on a longtemps cru que le problème de la troncature des données était insoluble, mais de récents travaux, notamment ceux de Clackdoyle et Noo [Noo et al., 2002, Clackdoyle et al., 2004, Clackdoyle and Noo, 2004, Noo et al., 2004], ont démontré la possibilité de reconstruire exactement une région d'intérêt d'un objet à partir de ses projections tronquées, sous certaines conditions sur la trajectoire du détecteur. L'avan-

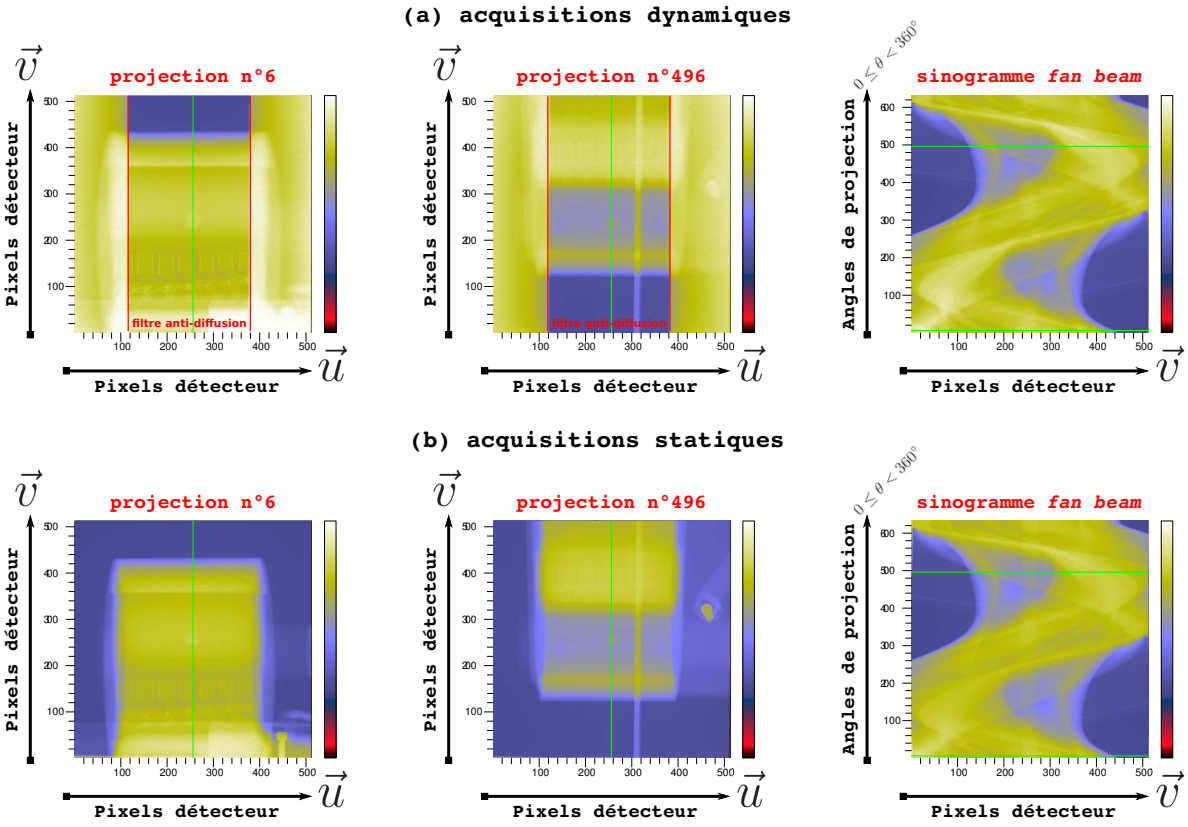


FIGURE 3.46: Données du fantôme dynamique mécanique, acquises sur le *scanner Cone Beam* du Centre Léon Bérard. (a) L'insert sphérique est animé d'un mouvement périodique sinusoïdal, au cours de l'acquisition des quelques 630 projections. (b) L'insert sphérique est immobile au cours de l'acquisition. La ligne détecteur horizontale médiane a été extraite pour obtenir des données *fan beam* permettant des reconstructions 2-D. Pour les acquisitions dynamiques, un filtre anti-diffusion a été appliqué avant le détecteur, dans la zone d'intérêt.

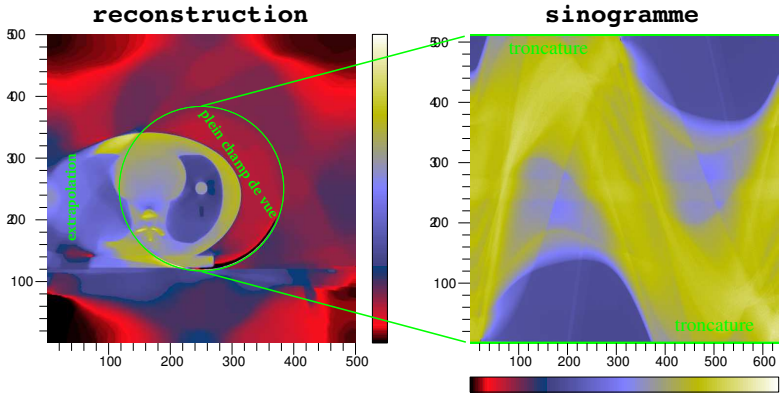


FIGURE 3.47: Illustration du traitement de la troncature des données par l'approche inverse sur une reconstruction 500×500 de la coupe centrale 2-D du fantôme mécanique, à partir des acquisitions statiques. La zone pleinement imagée est correctement reconstruite, tandis que celle en dehors du champ de vue intégral a pu être relativement extrapolée, car prise en compte dans le support de reconstruction.

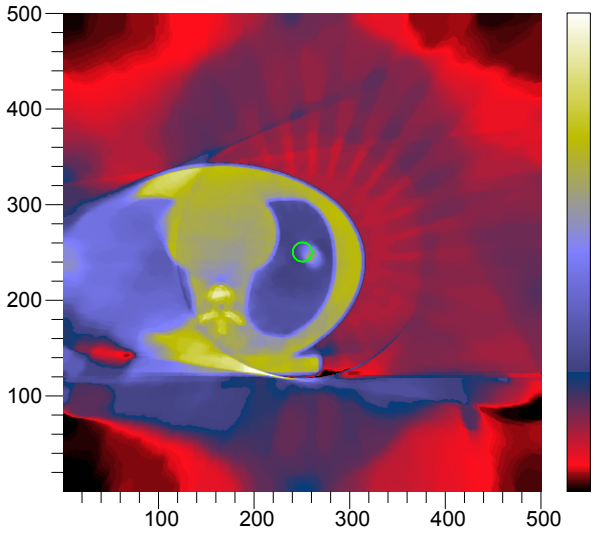


FIGURE 3.48: Reconstruction statique 500×500 de la coupe centrale 2-D du fantôme mécanique dynamique, à partir de 630 projections de l'acquisition avec l'insert sphérique en mouvement. La position de référence de ce dernier, lorsqu'il est inanimé, est identifiée par un disque de couleur verte.

tage de l'approche inverse dans ce domaine est que la reconstruction va être capable d'exploiter le peu d'information procurée par les projections tronquées pour extrapoler les zones en dehors de ce champ pleinement vu. Nous le constatons sur la figure 3.47 illustrant une reconstruction 2-D à partir de ces données tronquées, et qui démontre par là-même la faisabilité de notre approche sur ce fantôme.

Reconstructions 2-D+t

Nous reconstruisons des tranches temporelles de taille 500×500 pour une taille de pixel de $1 \times 1\text{mm}^2$. D'après les conditions d'acquisition présentées au-dessus, *i.e.* la durée d'acquisition des quelques 630 projections et de la période du cycle de mouvement de l'insert sphérique, environ 29 cycles sont révolus pendant l'acquisition, autrement dit 29 projections pour un instant donné d'un cycle. Nous disposons donc d'environ 22 projections par cycle, et choisissons de reconstruire $M = 22$ tranches temporelles. L'interpolateur temporel $\mathbf{S}^t$ utilise une B-spline d'interpolation de degré $e = 1$. Ainsi, chaque reprojection implique deux tranches temporelles, pondérées chacune par un coefficient d'interpolation linéaire. Au final, chaque tranche temporelle est corrélée à environ 29×2 projections. Nous reconstruisons l'objet avec trois régularisations : spatiale uniquement, spatio-temporelle séparable *Reg2* et spatio-temporelle globale *Reg1*.

Les reconstructions ont été lancées sur un unique processeur Intel Core$^{\text{TM}}$ i7-2600, cadencé à 3,4GHz. Le temps de reconstruction typique est de l'ordre de 5 heures pour 1000 itérations de l'algorithme, au bout desquelles une bonne convergence est obtenue.

Au préalable, la figure 3.48 illustre une reconstruction statique à partir des 630 projections de l'acquisition où l'insert sphérique est en mouvement, pour illustrer, sur données physiques, les mêmes artéfacts typiques de la tomographie dynamique, notamment les fameux "*streaks*" et le phénomène de traînée, que nous avions pu observer sur une reconstruction similaire de notre fantôme de Shepp-Logan dynamique (*cf.* Fig. 3.48, section 3.4.2).

La figure 3.49 montre l'ensemble des reconstructions obtenues. Pour chaque configuration de régularisation, l'insert sphérique est correctement discriminé par rapport au fond et dans le temps, ne montrant aucun phénomène de traînée. En revanche, la qualité générale des tranches

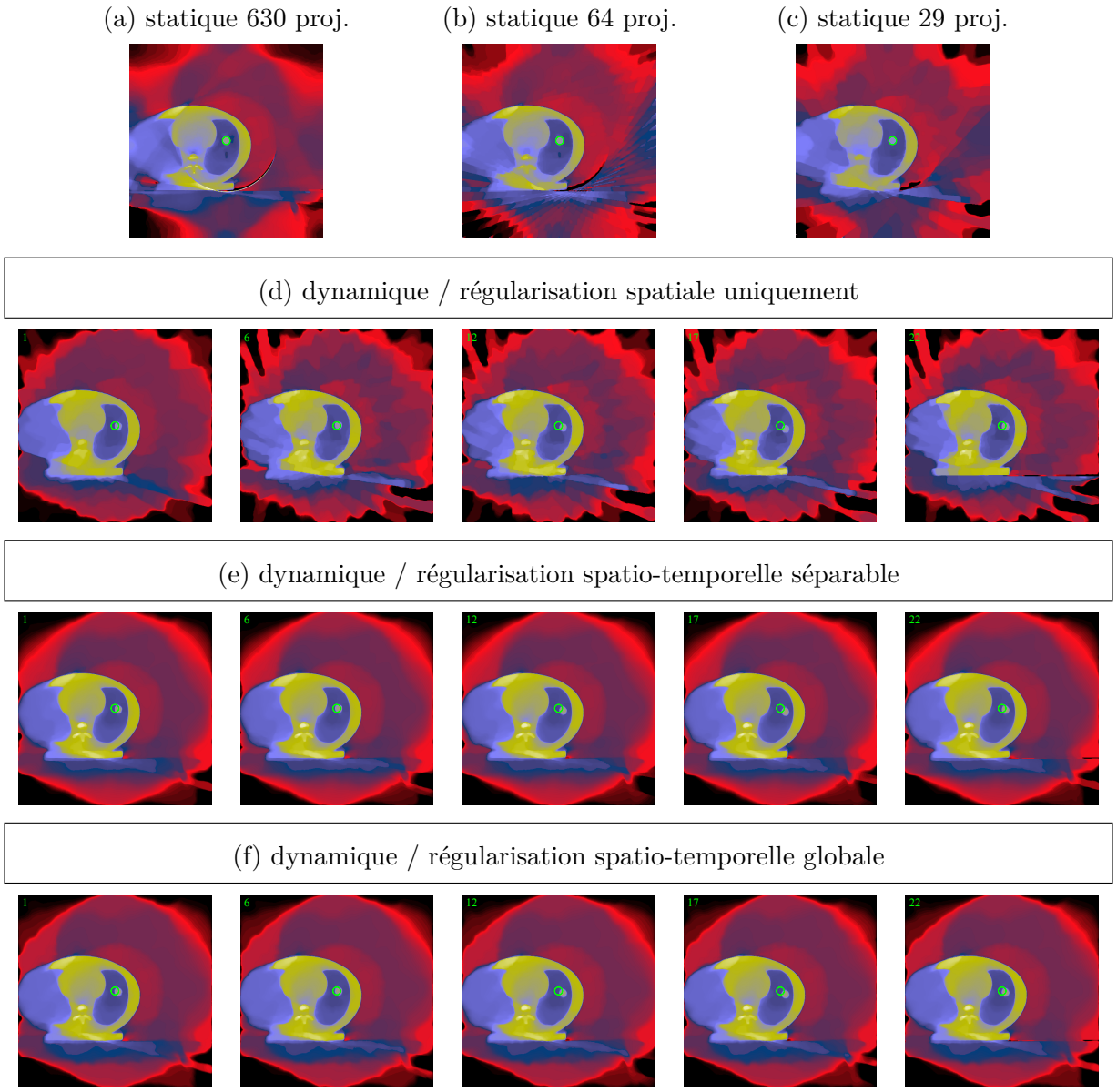


FIGURE 3.49: Reconstructions 2-D+t (d,e,f) de la coupe médiane du fantôme dynamique mécanique, dont l'insert sphérique est animé d'un mouvement de translation circulaire périodique sinusoïdal dans le plan. (d) Reconstruction régularisée uniquement spatialement. (e) Reconstruction régularisée par la variation totale spatio-temporelle séparable *Reg2* (*cf.* équation 3.43). (f) Reconstruction régularisée par la variation totale spatio-temporelle globale *Reg1* (*cf.* équation 3.42). On visualise les tranches n° 1, n° 6, n° 12, n° 17 et n° 22 de chaque reconstruction. La position de référence de l'insert, lorsqu'il est inanimé, est identifiée sur chaque tranche par un disque de couleur verte. Les reconstructions de l'objet statique — insert immobile — ont été effectuées pour comparaison, à partir de (a) 630, (b) 64 et (c) 29 projections.

reconstruites régularisées uniquement dans l'espace est relativement médiocre, mettant en évidence beaucoup de "*streaks*", ainsi qu'une mauvaise restauration des structures immobiles, comme la "vertèbre" (*cf.* Fig. 3.49(d)). Nous pouvons alors mettre en regard chacune de ces tranches avec la reconstruction statique à partir de 29 projections, Fig. 3.49(c), soit le nombre de projections disponible théoriquement pour chaque tranche. Le nombre très insuffisant de projections se manifeste par le fait que ces dernières sont quasiment indépendantes les unes des autres (à l'interpolation temporelle près).

Lorsque l'on rajoute la régularisation temporelle (*cf.* Fig. 3.49(e) et Fig. 3.49(f)), qu'elle soit séparable ou globale, le gain en qualité de reconstruction est sans équivoque, particulièrement dans la restauration des structures immobiles comme la "vertèbre" qui est cette fois-ci parfaitement identifiable. Ainsi chaque tranche est totalement exempte d'artéfacts de type "*streaks*", et parfaitement "lissée" dans les zones continues, à tel point que les zones extrapolées en dehors du plein champ de vue permettent d'identifier le support du fantôme, ainsi que le "poumon gauche", de façon très cohérente. On peut alors largement comparer la qualité de ces reconstructions à celle de la reconstruction de l'objet statique à partir des 630 projections, Fig. 3.49(a). Chaque tranche montre même une meilleure qualité visuelle que la reconstruction statique à partir de 64 projections, Fig. 3.49(b), qui avait théoriquement à disposition plus d'information.

Le gain substantiel de la régularisation temporelle sur les reconstructions de ces données physiques est donc totalement démontré, en ayant permis de restaurer le mouvement de l'insert sphérique sans aucune connaissance du type de mouvement mis en jeu, tout en restaurant fidèlement le reste des structures de l'objet. Ainsi nous voyons que la robustesse de notre approche inverse a bien permis d'extraire l'information spatio-temporelle globale des projections, et de corréler les caractéristiques anatomiques de l'objet en mouvement en toute cohérence.

Nous allons à présent étudier les performances de notre approche en reconstruction 3-D+t, à partir des données de ce fantôme mécanique, mais aussi d'acquisitions réalisées sur un patient réellement humain cette fois.

3.6 Mise en application en reconstruction 3-D+t

Dans cette section, nous montrons des reconstructions préliminaires 3-D+t à partir de données physiques, qui servent de démonstrateurs à la faisabilité de notre approche inverse dans ce contexte.

Ces reconstructions ont été lancées sur les machines du projet Horizon. Compte-tenu de la charge de calcul extrême engendrée par la 4-D, nous avons parallélisé l'étape de projection tomographique, à l'aide d'une extension du langage Yorick[35], nommée MPY, interfaçant la libraire Open MPI[36], sous licence libre BSD[37], dédiée au calcul parallèle distribué.

Dans cette procédure, un nombre N_{proc} de cœurs de processeurs est défini, inférieur au nombre de projections T. Nous distribuons alors le calcul de N_{proc} projections, chacune sur un cœur respectif, séquentiellement jusqu'à ce que l'ensemble des projections soit réalisé. Nous divisons ainsi le temps de calcul des pseudo-données d'un facteur preque égal à N_{proc}[38], à chaque itération de l'algorithme.

Nous donnerons dans la suite les temps de calcul de ces reconstructions, qui, nous le verrons, sont loin d'être optimaux mais ont tout de même permis d'obtenir des résultats dans des délais

35. `http://yorick.sourceforge.net/`
36. `http://www.open-mpi.org/`
37. `http://opensource.org/licenses/bsd-license.php`
38. "Presque" car les accès mémoire assez volumineux, ainsi que le calcul de la régularisation, qui lui n'est pas parallélisé, limitent ce gain en temps.

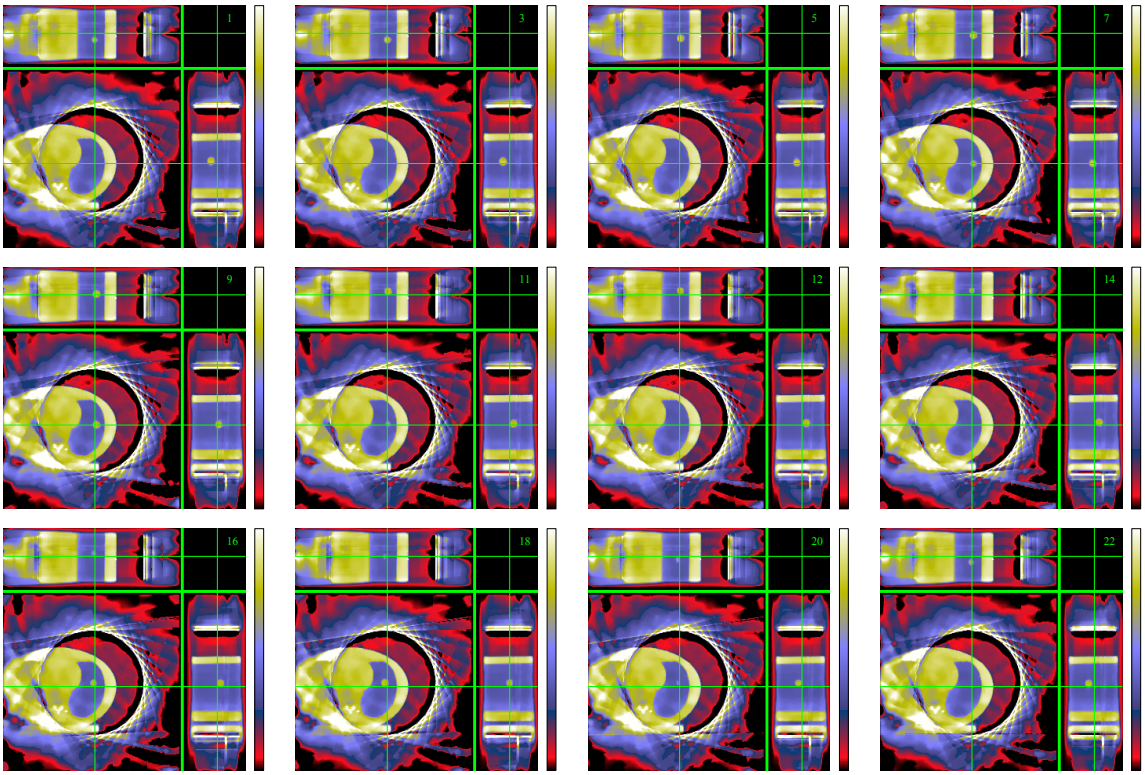


FIGURE 3.50: Reconstruction 3-D+t du fantôme dynamique mécanique. On montre 12 tranches du cycle reconstruit, en vue éclatée suivant des coupes en z (axiale, au centre), en x (sagittale, à droite) et en y (coronale, en haut).

acceptables à l'échelle d'un travail de thèse !

3.6.1 Fantôme mécanique

Nous avons réalisé ici une reconstruction 3-D+t du fantôme mécanique dynamique étudié précédemment, dont les données ont été obtenues, à quelques différences près, dans les mêmes conditions.

- Environ 630 projections ont été acquises régulièrement en temps et en angle, sur une couverture angulaire de 360°, et pour une durée exacte de 116 secondes.
- L'insert sphérique a été animé d'un mouvement de translation circulaire dans la direction transversale, et rectiligne dans la direction crânio-caudale, avec une période de cycle de 4 secondes.

Nous avons reconstruit $M = 22$ tranches temporelles de taille $225 \times 225 \times 75$ suivant les axes respectifs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ pour une taille de voxel de $2 \times 2 \times 2\text{mm}^3$. Pour information, le temps de calcul d'une telle reconstruction avoisine les 5 heures pour une dizaine d'itérations, sachant que nous avons besoin, comme nous l'avons déjà vu, de plusieurs centaines d'itérations pour arriver à convergence.

La figure 3.50 illustre différentes tranches du cycle reconstruit en vue éclatée suivant les coupes axiale, sagittale et coronale. Nous constatons que les artéfacts de troncature sont beaucoup plus importants que sur les reconstructions 2-D+t, certainement à cause de la complexité accrue de la géométrie projective *cone beam*. L'extrapolation à l'extérieur du champ de vue a donc été plus compliquée, mais nous pouvons voir que le support externe du fantôme est néanmoins relativement bien identifié.

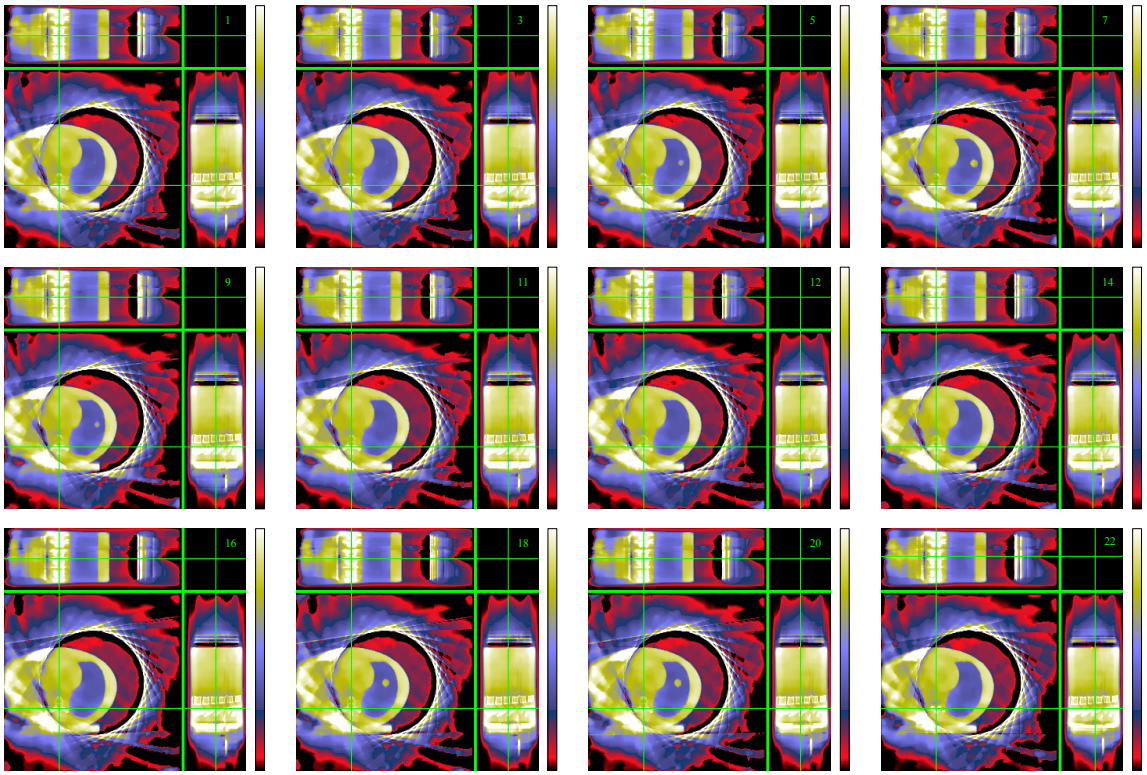


FIGURE 3.51: Reconstruction 3-D+t, centrée sur les "vertèbres", du fantôme dynamique mécanique. On montre 12 tranches du cycle reconstruit, en vue éclatée suivant des coupes en z (axiale, au centre), en x (sagittale, à droite) et en y (coronale, en haut).

Toujours en dehors du plein champ de vue du détecteur, nous repérons des "*streak artifacts*". En revanche, à l'intérieur du support pleinement imagé, la reconstruction dynamique est de bonne qualité ; le mouvement de l'insert sphérique est parfaitement détectable, particulièrement la translation crânio-caudale que l'on visualise sur les coupes sagittale et coronale de chaque tranche. Pour les structures immobiles, nous voyons que le "lissage" des zones continues a aussi été efficace.

Pour l'observation des "vertèbres", nous avons centré les coupes directement sur celles-ci, que nous montrons sur la figure 3.51. Là encore, ces structures fines ont été relativement bien restaurées.

Bien entendu, il s'agit de résultats préliminaires, qui ont été assez longs à obtenir compte tenu du temps de calcul prohibitif en 3-D+t. Il nous a notamment été compliqué de trouver de bons réglages des hyperparamètres, qui ne sont certainement pas optimaux dans la reconstruction que nous montrons ici. Nul doute, au vu des études en simulation qui ont été faites, et qui ont montré la qualité et la robustesse de notre approche, qu'une reconstruction de meilleure qualité est atteignable.

3.6.2 Patient

Nous avons obtenu les données d'acquisition d'un thorax de patient, utilisées dans l'article de Rit *et al.* [Rit et al., 2009a], et aimablement mises à disposition par son premier auteur. Nous avons évoqué ces travaux dans la section 3.3, traitant d'une méthode de reconstruction par compensation de mouvement. Des reconstructions par cette méthode, ainsi que par une méthode *gated*, nous ont également été fournies pour nous permettre de comparer notre

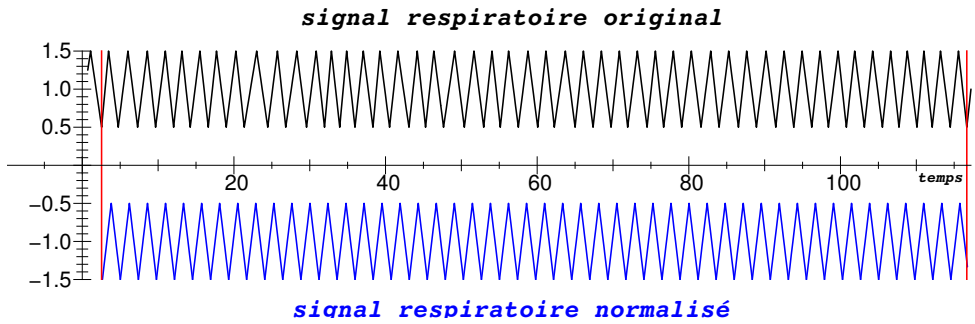


FIGURE 3.52: Signal 1-D des phases respiratoires du patient pendant l'acquisition. Original (en noir) ; normalisé sur la durée moyenne du cycle et tronqué aux cycles complets (en bleu).

approche à l'état de l'art.

Il s'agit plus précisément d'acquisitions réalisées au Centre Léon Bérard sur le *scanner Elekta Synergy cone-beam CT*$^{\text{TM}}$. Ainsi les conditions d'acquisition sont identiques à celles du fantôme mécanique. Le plein champ de vue du détecteur est centré sur une tumeur située à l'intérieur du poumon droit.

Nous avons également pu utiliser un signal temporel 1-D représentant la phase linéaire du cycle respiratoire du patient entre fin d'inspiration et fin d'expiration. Ce dernier nous a permis de caler les paramètres de l'opérateur d'interpolation temporel $\mathbf{S}^{\iota}$, en normalisant les dates d'acquisition sur une durée moyenne du cycle respiratoire de 2,4 secondes. Nous n'avons également conservé du signal que les cycles complets, réduisant le nombre de projections sélectionnées à 625. Ainsi, à l'instar de la méthode utilisée en reconstruction TEMP cardiaque par Blondel *et al.* [Blondel et al., 2003, Blondel et al., 2004] (*cf.* section 3.3), la durée d'un cycle pendant l'acquisition est virtuellement dilatée ou contractée pour s'adapter au cycle normalisé, ce qui permet de tenir compte des variations de périodicité et rend ainsi le modèle plus réaliste vis-à-vis des données. Nous illustrons sur la figure 3.52 l'allure de ce signal temporel d'origine et sa normalisation sur la durée moyenne du cycle.

Compte tenu de la durée du cycle respiratoire, environ 48,3 périodes sont révolues pendant l'acquisition, soit ce même nombre de projections par phase temporelle à un instant donné. Cela correspond aussi à environ 13 projections par cycle. C'est le nombre M de tranches temporelles que nous avons reconstruites, ayant chacune une taille de $275 \times 200 \times 135$, soit une taille de voxels de $2 \times 2 \times 2\text{mm}^3$. En comparaison, les reconstructions de l'article de Rit *et al.* ont une taille de $262 \times 261 \times 132$ — support rogné sur la zone d'intérêt pleinement imagée — avec des voxels de $0{,}98 \times 0{,}98 \times 2\text{mm}^3$. Rappelons que dans une méthode de reconstruction par compensation de mouvement, on ne reconstruit qu'une phase de référence, mise en regard de toutes les projections grâce au modèle de déformation.

Le temps de calcul de cette reconstruction est presque identique à celui de la reconstruction précédemment effectuée du fantôme mécanique, à savoir environ 5 heures pour 10 itérations.

La figure 3.53 montre plusieurs tranches du cycle sur l'ensemble du support reconstruit. Nous observons alors, de la même façon que pour la reconstruction du fantôme mécanique, les artéfacts de troncature en dehors du champ. À l'intérieur du plein champ de vue du détecteur, le thorax du patient est correctement reconstruit, et nous pouvons bien identifier les différentes structures anatomiques : poumon droit et tumeur, cœur, os et côtes. Le mouvement respiratoire est bien détectable, avec notamment le déplacement du diaphragme dans la direction crânio-caudale, que suit également la tumeur, en plus d'un déplacement suivant le plan axial — on voit que la tumeur sort de cette coupe puis réapparaît dans le cycle. Nous arrivons aussi à repérer ce qui semble être les bronches, dont nous détectons quelques ramifications.

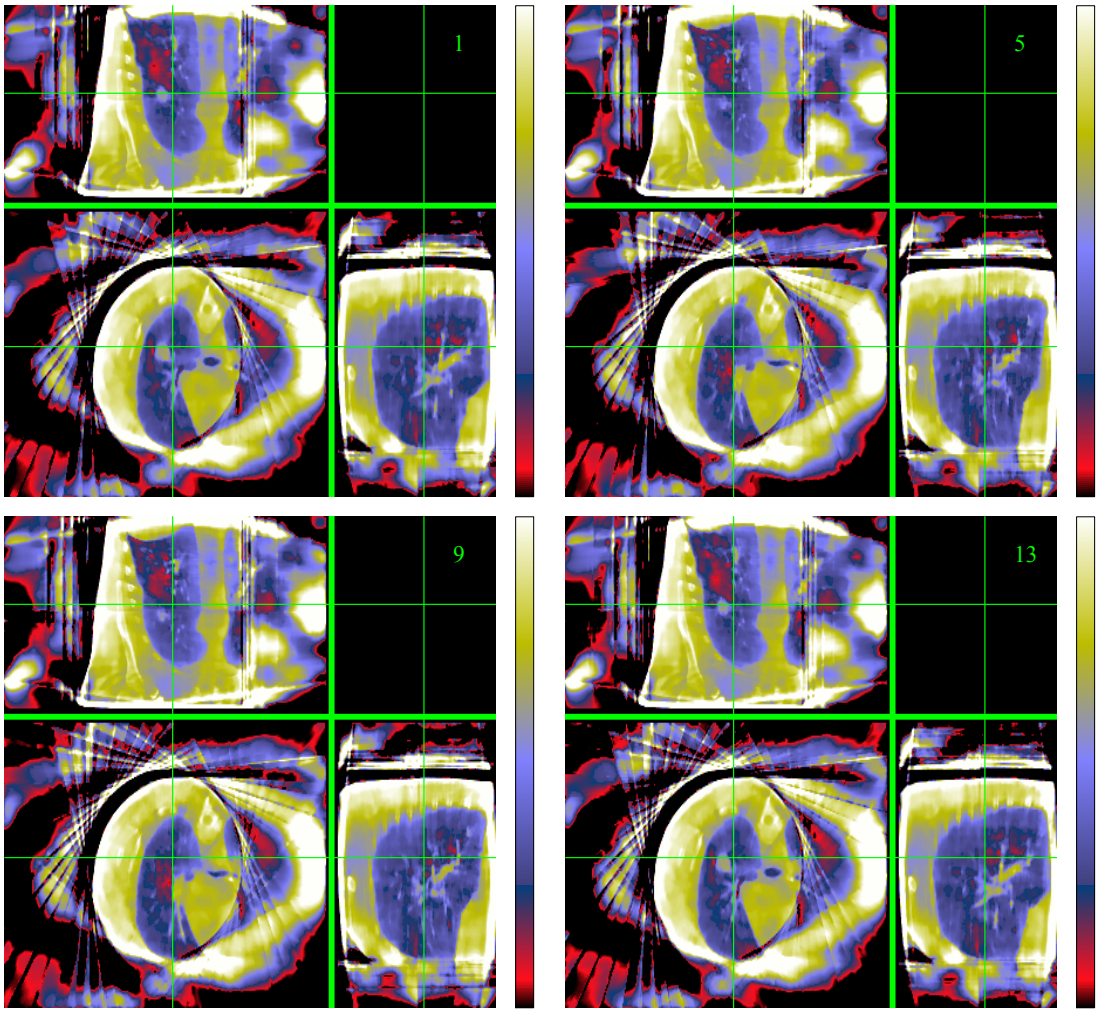


FIGURE 3.53: Reconstruction 3-D+t du thorax d'un patient à partir des données acquises au Centre Léon Bérard sur un *scanner Elekta Synergy cone-beam CT*$^{\text{TM}}$, et exploitées par Rit *et al.* dans [Rit et al., 2009a]. On montre quatre tranches du cycle sur la totalité du support reconstruit, en vue éclatée suivant des coupes en z (axiale, au centre), en x (sagittale, à droite) et en y (coronale, en haut).

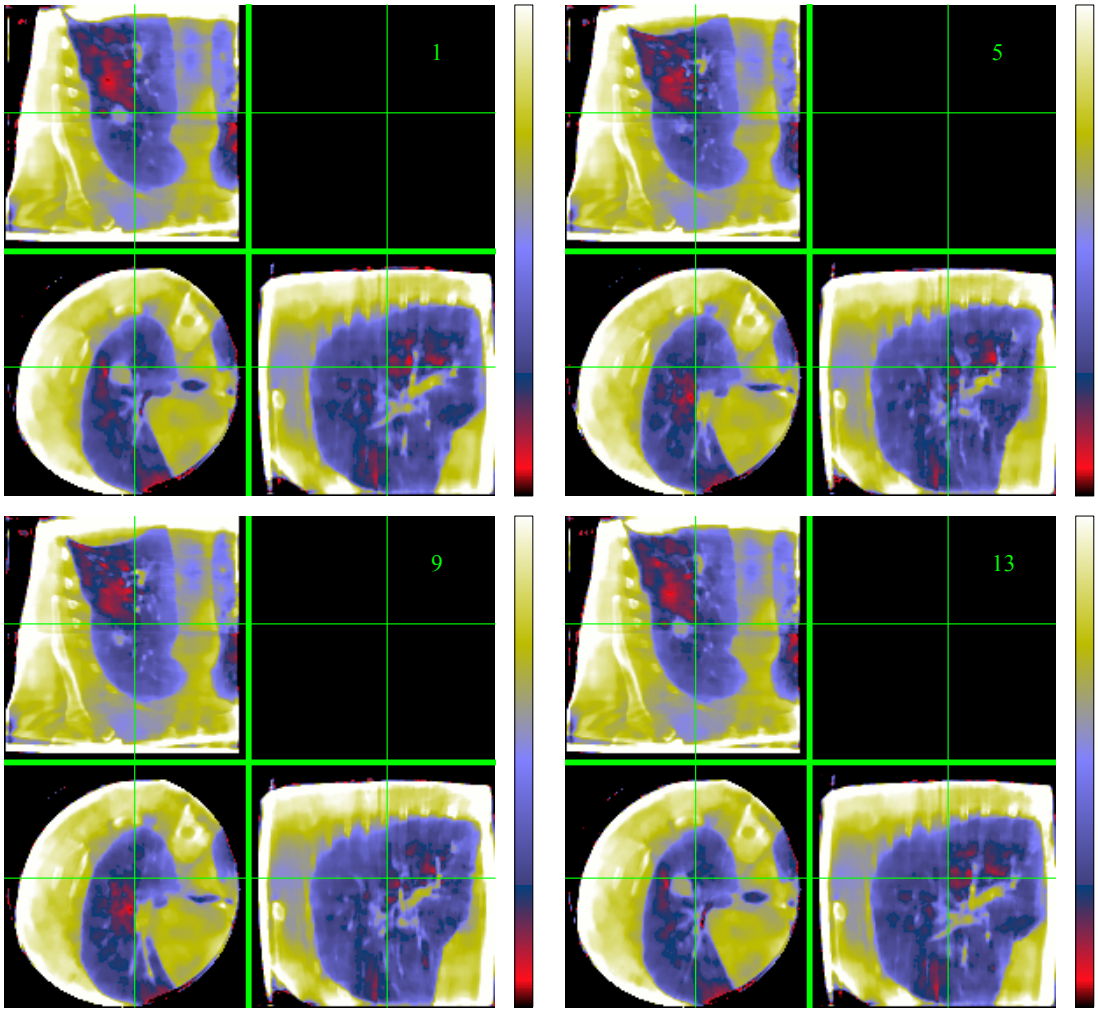


FIGURE 3.54: Reconstruction 3-D+t où le champ est rogné au support englobant la zone d'intérêt pleinement imagée. On visualise les mêmes coupes que dans la figure 3.53.

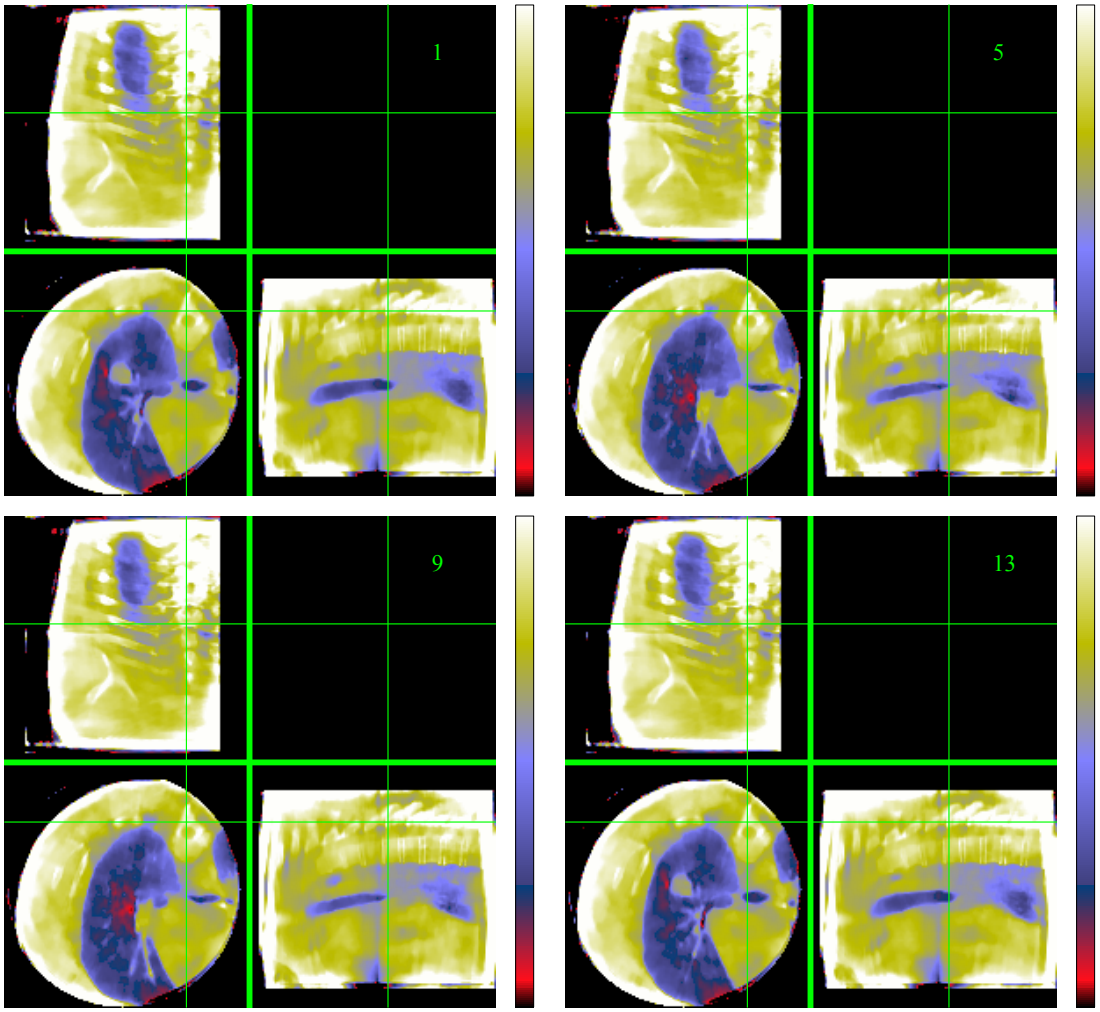


FIGURE 3.55: Reconstruction 3-D+t où le champ est rogné au support englobant la zone d'intérêt pleinement imagée. On visualise des coupes centrées sur la colonne vertébrale.

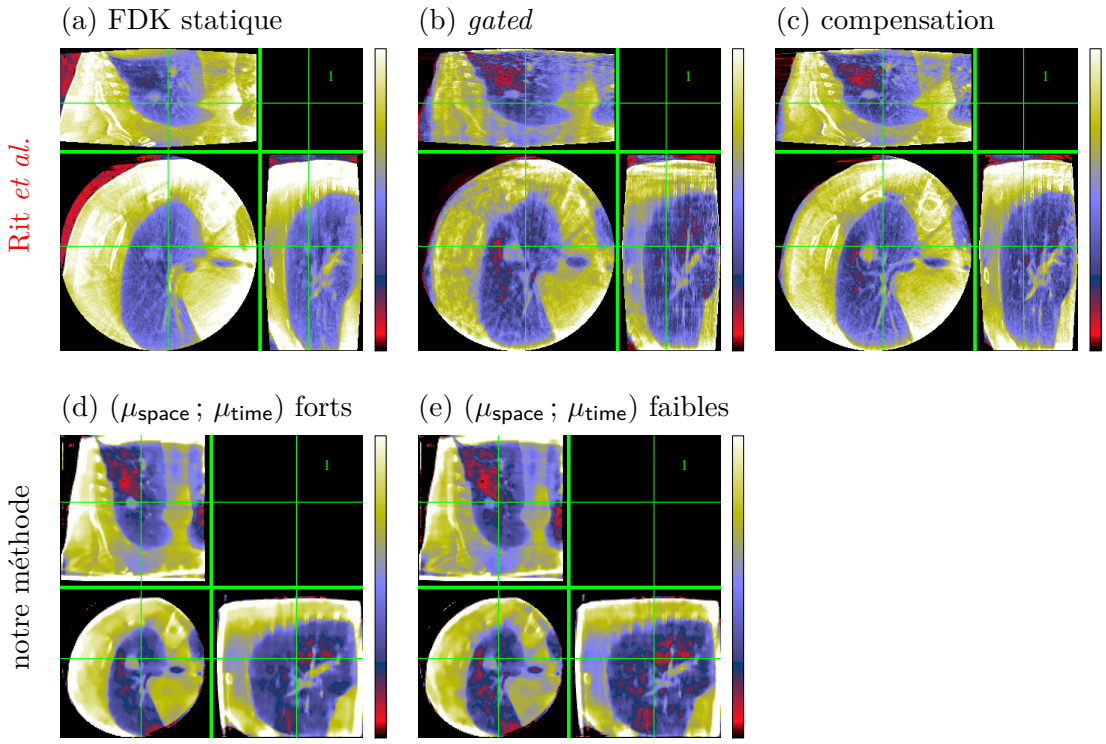


FIGURE 3.56: Comparaison de la phase de fin d'expiration des reconstructions 3-D+t réalisées dans l'article de Rit *et al.* (a,b,c), et des reconstructions par notre méthode (d,e). (a) Reconstruction statique par l'algorithme FDK. (b) Reconstruction *gated*. (c) Reconstruction par compensation de mouvement, réalisée par 3 itérations de l'algorithme SART. (d) Reconstruction par notre méthode avec les meilleurs poids de régularisation testés (*cf.* Fig. 3.53). (e) Reconstruction par notre méthode avec des poids de régularisation plus faibles.

Afin de réaliser un examen visuel plus approfondi, nous montrons deux agrandissements de la reconstruction sur la zone pleinement reconstruite, en ayant mis à zéro les voxels en dehors de celle-ci. Ces agrandissements sont visualisés sur les figures 3.54 et 3.55. La première montre les mêmes coupes que la figure 3.53 et confirme nos observations précédentes. La seconde se concentre sur la colonne vertébrale, afin de montrer la qualité de restauration de ces structures complexes immobiles. Globalement, nous pouvons dire que la reconstruction est d'assez bonne qualité, en permettant de visualiser correctement le mouvement et notamment de cibler relativement bien la tumeur. Toutefois, la résolution apparente est assez peu précise ; la détection de certaines structures tissulaires est difficile ; par exemple les bronches dont on ne perçoit les ramifications que jusqu'à un certain niveau de finesse.

Nous allons à présent comparer cette reconstruction par notre méthode à deux reconstructions, réalisées dans l'article de Rit *et al.*, à partir d'une méthode *gated* et de la méthode par compensation de mouvement qu'ils ont développée. La figure 3.56 montre l'ensemble des reconstructions. Pour mieux comparer les méthodes, nous montrons deux reconstructions par notre méthode, ayant utilisé deux jeux d'hyperparamètres μ_{space} et μ_{time}. En regard de la reconstruction *gated*, notre méthode a su éliminer les artéfacts de mouvement et restaurer ainsi plus rigoureusement les structures. On ne peut ainsi plus confondre un artéfact avec, par exemple, les ramifications des bronches. De plus, la détectabilité de la tumeur en a été améliorée. En revanche, la reconstruction avec compensation de mouvement, même si quelques artéfacts résiduels subsistent, montrent une bien meilleure résolution des structures que nos reconstructions, où la régularisation a légèrement aplati et lissé les tissus.

Quoi qu'il en soit, la qualité générale de nos reconstructions est assez comparable avec les

autres. Celles-ci ont rempli leur objectif principal : pouvoir localiser correctement la tumeur dans le poumon droit, sans ambiguïté, à toutes les phases temporelles du cycle, et ce à partir de l'unique jeu de projections courant, alors que la reconstruction par compensation a utilisé d'autres données plus informatives pour estimer le modèle de mouvement.

Ces résultats préliminaires sont donc globalement encourageants, sachant que de nombreuses améliorations sont encore possibles, notamment dans le réglage des hyperparamètres. Notons également que nous avons réalisé ces reconstructions avec une taille des voxels deux fois plus grande suivant la coupe axiale, par rapport aux reconstructions de Rit *et al.*. Il serait alors intéressant de voir un résultat à taille des voxels égale.

3.7 Conclusion et perspectives

Ce chapitre était dédié à la mise en œuvre d'une méthode de reconstruction originale pour la tomographie dynamique. Celle-ci est partie de l'adaptation de l'approche inverse régularisée pour la reconstruction en tomographie à faible nombre de projections, que nous avons mise en œuvre dans le chapitre 1, et renforcée dans le chapitre 2 par l'apport d'un modèle numérique de projection offrant une précision accrue. Ainsi notre démarche globale depuis le début de ce manuscrit s'est inscrite dans un processus cohérent pour nous amener à traiter cette application particulière.

La tomographie dynamique consiste en quelque sorte en une extension des méthodes de reconstruction au cas d'un objet animé d'un mouvement pendant l'acquisition des projections. Traité comme un problème statique, la reconstruction d'un tel objet génère nombre d'artéfacts dus aux incertitudes sur les positions de ses structures anatomiques, différentes suivant la projection considérée. La problèmatique de la reconstruction doit donc impérativement intégrer cette dimension temporelle, la transformant en un problème d'estimation de paramètres n-D+t.

Il s'agit notamment d'un problème critique en imagerie médicale appliquée au traitement du cancer par la technique de radiothérapie. En effet, la planification de l'émission des faisceaux de rayonnement ionisant curatif est soumise à la localisation précise de la tumeur visée, le but étant de maximiser l'efficacité de ces faisceaux à détruire les cellules cancéreuses, tout en préservant le plus possible les tissus sains environnants. C'est pourquoi la tomographie dynamique constitue un axe de recherche très important.

Une revue poussée de l'état de l'art dans ce domaine nous a permis de faire ressortir deux classes de méthodes :

- Les approches *gated* effectuent un classement des projections suivant la phase plus ou moins instantanée du mouvement à laquelle elles appartiennent. Des reconstructions statiques indépendantes sont alors réalisées pour obtenir la séquence dynamique de l'objet. Ces méthodes nécessitent un très grand nombre de projections pour que la reconstruction statique de chaque phase temporelle, avec des algorithmes standard, s'appuie sur suffisamment de données pour être de bonne qualité.
- Les approches par compensation utilisent une connaissance a priori du mouvement, généralement sous forme d'un champ de déformation, permettant de transformer les structures anatomiques de l'objet à chaque instant pour les ramener à un état de référence, et vice versa. Il est ainsi possible de mettre en correspondance temporelle l'ensemble des projections sur cette phase de référence, et ainsi la reconstruire efficacement. Le modèle de mouvement, complexe à modéliser, nécessite d'être estimé sur une séquence dynamique antérieure, comme par exemple une reconstruction type *gated*. Autrement dit, l'apport d'un jeu de données supplémentaire est indispensable.

  L'objectif et l'originalité de la méthode que nous avons élaborée est de ne se baser que

sur les projections courantes, provenant d'une acquisition classique non sur-numéraire, pour effectuer la reconstruction, avec pour seule connaissance a priori la continuité spatio-temporelle de l'objet, et la périodicité de son mouvement. L'idée est par là-même d'étudier à quel point il est possible d'extraire l'information temporelle d'un tel jeu de données, par une approche inverse simple mais robuste. L'intérêt est alors double : éviter une exposition accrue aux rayons X, et s'affranchir de la modélisation du mouvement, trop complexe et peu souple, et requérant la plupart du temps un surcroît d'information.

Nous avons donc posé le problème inverse suivant un schéma identique au cas statique préalablement étudié, à savoir la minimisation d'un critère d'attache aux données et d'un terme de régularisation.

Le traitement de la spécificité du problème dynamique s'est opéré premièrement sur la modélisation de la projection tomographique, celle-ci devant naturellement s'adapter à un objet spatio-temporel. Partant d'une hypothèse d'instantanéité de l'acquisition d'une projection, nous avons défini le projecteur dynamique comme la composition d'un opérateur d'interpolation suivant la dimension temporelle de la grille d'échantillonnage n-D+t, suivi d'une projection statique classique. Cette dernière est opérée par le modèle *spline driven* développé dans la chapitre 2, tandis que l'interpolation temporelle est définie par la base de représentation du signal dans le temps. Nous avons naturellement choisi une représentation par des B-splines, par cohérence vis-à-vis de la modélisation spatiale.

L'adaptation de la régularisation à la dimensionalité spatio-temporelle a constitué la seconde spécificité du problème. Nous avons donc dû repenser cette régularisation pour tenter d'exploiter l'information temporelle a priori de l'objet, en plus des connaissances anatomiques spatiales déjà connues, *i.e.* la continuité par morceaux, que nous avions traduit concrètement par l'utilisation de la variation totale TV dans les chapitres 1 et 2. Considérant l'anatomie spatio-temporelle de l'objet n-D+t, nous avons constaté que celui-ci pouvait être assimilé à un objet $(n+1)$-D continu par morceaux. Nous avons alors choisi d'appliquer à l'objet une régularisation par variation totale aux dimensions spatiales et temporelle. L'hétérogénéité des dimensions nous a néanmoins obligés à adapter quelque peu notre raisonnement, ce qui nous a amenés à envisager deux types de régularisation :

- La première suppose une décorrélation des dimensions spatiales et temporelle de l'objet, que nous avons concrétisée par deux termes TV séparés, l'un spatial et l'autre temporel.
- La seconde fait l'hypothèse que gradients spatiaux et temporel sont indissociables car totalement corrélés, rendant logique l'application d'un terme TV global sur le gradient spatio-temporel.

Pour les deux versions développées, deux hyperparamètres μ_{space} et μ_{time} sont alors nécessaires pour contrôler l'hétérogénéité des dimensions en permettant de régler différemment le poids des gradients spatiaux et du gradient temporel.

La pertinence et l'efficacité de notre méthode ont alors été démontrées par des reconstructions 2-D+t d'un fantôme dynamique de type Shepp-Logan que nous avons adapté pour permettre aux ellipses le constituant de mettre en jeu des mouvements de types translation, rotation et distorsion. Nous avons basé notre démonstration sur la modalité d'acquisition d'un *scanner Cone-Beam* du marché, parfaitement adaptée aux objectifs que nous nous sommes fixés. Les résultats obtenus ont montré l'extrême efficacité de notre méthode, qui se démarque d'une approche *gated* d'une part par la souplesse du modèle de projection qui prend en compte la continuité du signal et ne nécessite donc pas de trier les projections, et d'autre part par la régularisation temporelle qui apporte une corrélation entre les tranches temporelles, en les liant de façon cohérente. Elle permet ainsi d'éliminer les artéfacts dus au mouvement observables en reconstruction *gated* en propageant aux tranches voisines l'information provenant des projections "allouées" à une tranche temporelle. Nous avons ainsi démontré que régulariser l'objet

dans l'espace, mais aussi dans le temps, était absolument primordial pour renforcer la qualité des reconstructions de chaque tranche. Considérer les tranches indépendamment les unes des autres est une mauvaise solution, et l'on voit qu'une approche inverse cohérente permet de tirer le meilleur parti de toute l'information disponible, sans nécessiter d'apport d'information complémentaire d'un autre jeu de données.

Plus spécifiquement, c'est la régularisation spatio-temporelle séparable qui a montré les meilleures performances, notamment par sa robustesse vis-à-vis des artéfacts de mouvement qui semblent être relativement entretenus dans la version globale. La restauration des structures est alors bien plus fine, qui plus est pour un temps de calcul inférieur du fait de la séparablilité engendrée par la décorrélation de la composante temporelle et des composantes spatiales.

Les conclusions de cette étude sur données simulées ont été largement confirmées sur des reconstructions 2-D+t, à partir de données physiques acquises sur un fantôme mécanique dynamique, par une modalité *Cone-Beam*. Là encore, la régularisation temporelle s'est avérée indispensable, permettant d'atteindre une qualité de reconstruction presque équivalente à une reconstruction de ce même objet statique à partir d'un très grand nombre de projections.

Pour terminer, nous avons entamé une démonstration de notre approche sur des reconstructions 3-D+t, à partir des données physiques du fantôme mécanique sus-mentionné, ainsi que celles provenant du *scanner Cone-Beam* d'un patient en respiration, exploitées dans l'article de Rit *et al.* [Rit et al., 2009a]. Nous avons alors pu comparer la qualité de notre approche en regard d'une méthode basée sur la compensation de mouvement. Bien que ces résultats constituent une démonstration préliminaire, les performances obtenues sont très encourageantes pour les développements et améliorations à venir.

À l'instar de l'étude de notre projecteur *spline driven* dans le chapitre 2, nous restons conscients que des expérimentations plus exhaustives sont nécessaires, ainsi que des critères de quantification plus robustes, afin de comprendre plus en détail le réel comportement des régularisations mises en œuvre. Ces dernières ont été développées d'après des observations empiriques, mais ont toutefois prouvé leur efficacité, gageant de la pertinence de nos hypothèses. C'est pourquoi une exploration théorique plus approfondie s'avère indispensable pour expliquer objectivement les résultats pratiques. Il nous faudrait notamment déterminer les raisons pour lesquelles la régularisation spatio-temporelle séparable (*Reg2*) semble montrer de meilleures performances que la version globale (*Reg1*), alors que nous en avions initialement l'intuition contraire. Des expériences complémentaires seraient alors utiles, en étudiant notamment leur comportement sur des objets dynamiques plus simples, ce qui nous permettrait de mieux maîtriser nos déductions par l'évaluation de critères objectifs précis et quantitatifs, *e.g.* la résolution effective, spatiale et temporelle.

Quelles améliorations pourrait-on envisager pour la régularisation ? Nous l'avons déjà dit, les hypothèses que nous avons établies dans ce chapitre, et qui nous ont conduit à sélectionner la variation totale TV comme terme de régularisation spatio-temporelle, se sont appuyées sur des constats empiriques et observationnels. Nous avons commenté ces hypothèses en stipulant qu'elles ne rendaient pas compte de la réalité physique de la dynamique des tissus. Par exemple, la régularisation ne peut tenir compte que partiellement, grâce à l'hyperparamètre de relaxation ϵ, des variations de densité dues à la contraction des tissus, notamment aux interfaces. Sur ce point, de nouvelles expérimentations seraient encore à proposer, puisqu'il ne s'agit que d'une conjecture, qu'aucun de nos tests n'a mise à l'épreuve. Dans ce cadre, l'utilisation d'un fantôme numérique plus réaliste, modélisant ce type de déformations des tissus, permettrait d'étudier plus précisément cet aspect. Nous pensons notamment aux fantômes existants NCAT (*NURBS Based Cardiac Torso*) et MCAT (*Mathematical Based Cardiac Torso*), proposés par Segars *et al.* [Segars et al., 1999, Segars et al., 2001], et plus récemment le XCAT [Segars et al., 2010], tous basés sur une modélisation des déformations du thorax (cœur, poumons, *etc.*), en utilisant

des fonctions *NURBS (Non-Uniform Rational Basis Splines)* et B-splines. De tels fantômes seraient des "patients numériques" de choix pour tester notre méthode, et particulièrement la régularisation à μ_{space}, μ_{time} et ϵ variables. Les résultats de telles études pourraient notamment nous aider à améliorer celle-ci pour y inclure potentiellement des notions plus "physiques", en se basant par exemple sur l'assimilation des tissus à des fluides en mouvement et sur les équations en découlant, que nous avons évoquées dans ce chapitre.

Une étude plus poussée de la précision de notre modèle de projection dynamique, afin de déterminer la base de représentation temporelle ainsi que l'échantillonnage temporel optimaux, minimisant l'erreur de modélisation, serait également indispensable. Cette étude pourrait se faire, à l'instar de ce que nous avons proposé en conclusion du chapitre 2, du point de vue de la théorie de l'échantillonnage généralisée, *i.e.* la modélisation optimale d'un signal spatio-temporel et de sa projection au sens de la moindre norme L_2.

Nous ne le dirons jamais assez, le fait de se confronter au traitement de données physiques est un atout majeur pour la validation des méthodes mises en œuvre. Cela permet aussi d'avoir le recul nécessaire vis-à-vis des études théoriques ou en simulation, qui ne doivent au final jamais se substituer à une application concrète. Nous devons donc pour la suite poursuivre dans cette voie de démonstration à partir de ce type de données.

Pour clore cette discussion, prenons quelque peu de recul sur les possibilités de notre méthode. Il faut en effet remarquer que celle-ci ne peut gérer qu'"une seule périodicité de mouvement". Autrement dit, notre approche n'est pas prévue pour traiter la reconstruction d'un objet composé de structures dynamiques mettant en jeu des cycles de mouvement de durées différentes. Du point de vue médical, on ne peut donc pas reconstruire à la fois le mouvement respiratoire et les battements cardiaques. Il faut donc, à l'instar d'ailleurs de toute méthode de l'état de l'art en tomographie dynamique, "cibler" le mouvement que l'on souhaite reconstruire, sous condition que le processus d'acquisition soit adapté à la fréquence du mouvement traité.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de cette thèse était l'élaboration d'une méthode de reconstruction d'images en tomographie dynamique basée sur une approche inverse sans compensation de mouvement.

La reconstruction tomographique suppose à la base un objet immobile au cours du temps d'acquisition de ses projections. Lorsque celui-ci est animé d'un mouvement pendant cette acquisition, les projections ne peuvent théoriquement plus être associées à un même objet, en termes de positions spatiales de ses caractéristiques anatomiques. On parle alors de tomographie dynamique où l'objet à reconstruire devient un signal spatio-temporel n-D+t. La prise en compte du mouvement dans la reconstruction de l'objet est alors primordiale pour éviter les artéfacts liés à l'incertitude sur la position des structures en mouvement. En imagerie médicale, cet aspect devient critique lorsqu'il s'agit, par exemple, de localiser une tumeur à l'intérieur du poumon du patient, afin d'élaborer un plan de traitement par radiothérapie précis et le moins destructif possible pour les tissus sains environnants.

La reconstruction dynamique est un thème de recherche actif dans la communauté, notamment par la demande forte de son application au traitement du cancer par radiothérapie. Une solution très usitée consiste à acquérir les projections en corrélation avec l'enregistrement d'un signal temporel donnant l'évolution du mouvement. Celui-ci étant en général périodique (respiration, battements cardiaques), les projections sont ordonnancées en fonction de leur appartenance à un instant donné du cycle de mouvement, ce qui permet des reconstructions statiques indépendantes à chaque instant : ce sont les méthodes dites *gated*. Celles-ci nécessitent un certain nombre de projections pour chaque tranche temporelle reconstruite, augmentant l'exposition du patient aux rayons X.

D'autres méthodes considèrent le mouvement de l'objet comme un champ de déformation qui peut être connu ou estimé, et incorporé dans le modèle de projection tomographique. Il est ainsi possible d'utiliser la totalité des projections acquises pour effectuer la reconstruction, en se ramenant à un instant de référence : ce sont les méthodes par compensation de mouvement. L'estimation du champ de déformation, modélisé comme un champ de vecteurs de déplacement, se fait en général à partir d'une reconstruction 4-D préalable type *gated*. Il faut donc disposer d'un jeu de données provenant d'une acquisition antérieure, en supposant que le mouvement imagé est reproductible. De plus, l'estimation du mouvement est un problème inverse relativement complexe puisque le type de déformations recherché est difficilement modélisable. Cela surcharge donc le coût calculatoire de la reconstruction, entachant potentiellement la modélisation de plus d'incertitudes et d'erreurs.

Notre objectif était donc de nous affranchir de la connaissance du mouvement de l'objet, et de traiter cette reconstruction comme un problème inverse régularisé consistant à estimer globalement le signal spatio-temporel à partir de l'ensemble des projections dynamiques courantes, sans jeu de données alternatif, avec pour simples hypothèses a priori la continuité et la périodicité du mouvement.

Démarche, réalisations et résultats

Reconstruction à faible nombre de projections par l'approche inverse

Dans ce cadre, par rapprochement avec des méthodes de type *gated*, nous avons estimé que la résolution de ce problème passait par la reconstruction d'un objet statique ou d'une phase d'un objet en mouvement à un instant donné, à partir d'un très petit nombre de projections. Cela a été l'objet du chapitre 1.

L'algorithme correspondant consiste en la minimisation, par une méthode d'optimisation convexe, nommée VMLM [Nocedal, 1980], d'un critère d'attache aux données, traduisant l'erreur quadratique entre les données initiales et une estimation de l'objet reprojetée par un modèle numérique. La minimisation de ce seul critère ne suffit pas. En effet la reconstruction tomographique est un problème :

- mal posé, du fait des données elles-mêmes qui sont entachées d'incertitudes dues au bruit de mesure ;
- mal conditionné, en raison de l'impossibilité de modéliser exactement la physique du processus d'obtention des mesures.

La solution obtenue après convergence n'est donc pas l'objet espéré, notamment à cause du bruit qui est amplifié au fur et à mesure des itérations de reconstruction, lesquelles propagent également les erreurs dues à la modélisation même de la projection tomographique.

Une régularisation est donc indispensable pour orienter l'optimiseur vers une solution acceptable. Elle se traduit par l'ajout au critère d'attache aux données d'un autre terme à minimiser, définissant une information ou un comportement a priori de l'objet à reconstruire. Ce terme de régularisation doit essentiellement favoriser une solution globalement lisse pour contrôler l'amplification du bruit constitué principalement par les hautes fréquences spatiales de l'image reconstruite.

Dans notre cas, cette régularisation doit aussi permettre de combler le manque d'information dû à la parcimonie des données. Les caractéristiques anatomiques des objets à reconstruire conduisant à la recherche de signaux continus par morceaux, nous avons choisi la variation totale [Rudin et al., 1992] comme terme de régularisation. Minimisant la racine carrée de la norme L_2 du gradient de l'image, la variation totale favorise donc les solutions parcimonieuses dans cet espace et engendre des reconstructions continues par morceaux.

Nous avons montré l'extrême efficacité d'une telle régularisation sur les images du fantôme 2-D de Shepp-Logan, modélisant très bien l'anatomie des cartes d'atténuation que nous sommes amenés à reconstruire.

De plus, notre approche s'est avérée très robuste même dans le cas d'un très faible nombre de projections. Ces dernières ont été générées de telle manière que le modèle de projection numérique utilisé dans le critère d'attache aux données ne soit pas exact en regard des données obtenues, ce qui est le cas lorsque l'on reconstruit un objet à partir de données physiques "réelles". Des reconstructions d'excellente qualité sont encore obtenues même lorsqu'on dispose de seulement quelques dizaines de projections. Nous avons comparé les différences avec des reconstructions obtenues à modèle exact, surnommé *crime inverse*, *i.e.* lorsque les données ont été générées à partir du modèle numérique de projection. Les résultats ont montré une bien meilleure qualité de reconstruction dans ce cadre idéal.

De cette dernière comparaison, il est ressorti que disposer d'un modèle de projection atteignant une précision extrême dans la modélisation des données octroie un gain substantiel en qualité de restauration des structures de l'objet reconstruit, particulièrement lorsque les projections sont en nombre limité.

Développement d'un modèle de projection optimisé par les B-splines

Nous avons alors entrepris de développer un tel modèle de projection, pour s'approcher davantage d'une certaine optimalité dans la résolution de notre problème. En d'autres termes, nous avons recherché un projecteur qui nous approcherait des conditions du "*crime inverse*", mais de façon légale !

Nous avons alors basé notre démarche sur une théorie de l'échantillonnage généralisée, établies entre autres dans les travaux de Blu, Thévenaz et Unser [Blu and Unser, 1999a, Blu and Unser, 1999b, Unser, 2000, Thévenaz et al., 2000b, Thévenaz et al., 2000a]. Celle-ci voit la représentation optimale d'un signal f, sur une grille d'échantillonnage régulière, comme la meilleure approximation $\tilde{f}$, au sens de la moindre norme L_2, dans l'espace des combinaisons linéaires d'une fonction de base φ et de ses translatées sur une grille régulière.

L'élaboration de notre modèle de projection, mais aussi de toute modélisation dans le cadre des problèmes inverses, passe premièrement par la représentation du signal que l'on cherche à reconstruire. Il s'agit donc de trouver la base de fonctions adéquate pour obtenir la meilleure approximation possible, tout en satisfaisant les contraintes inhérentes à la projection tomographique. Ainsi la fonction atomique φ doit satisfaire un certain nombre de propriétés, qui sont les suivantes :

- modéliser précisément le signal d'intérêt f, afin notamment de préserver la continuité par morceaux ;
- être à support compact, afin d'avoir un opérateur de projection creux ;
- être séparable suivant les directions de l'espace ;
- être robuste aux artéfacts générés par d'éventuelles transformations géométriques ;
- être à symétrie sphérique.

Nous avons alors inventorié les fonctions de base utilisées en tomographie. Les indicatrices de voxels, malgré l'extrême compacité de leur support, constituent une base trop grossière pour la représentation du signal f, du fait notamment de leur forte anisotropie et des erreurs de modélisation importantes qu'elles génèrent. Utilisées dans un projecteur tomographique, celles-ci ont l'avantage de le rendre rapide, la fonction étant assez simple à manipuler numériquement et sa projection impactant un faible nombre de pixels détecteur. En revanche, une approximation de son empreinte projetée est nécessaire pour ne pas surcharger l'opérateur de projection en calculs. C'est le cas notamment du projecteur *distance driven* [DeMan and Basu, 2004] qui met en œuvre des approximations peu fines, accroissant les erreurs de modélisation. Nous avons aussi étudié une amélioration de ce projecteur, que nous avons baptisée *L&F*, proposée par Long & Fessler [Long et al., 2010], qui met en œuvre une approximation bien plus précise de l'empreinte d'une indicatrice de voxels. Nous avons cependant renoncé à utiliser une telle fonction de base en raison de sa faible précision en termes de modélisation d'un signal.

Nous avons alors considéré la classe des fonctions nommées *blobs*, étudiée dans les travaux de Matej & Lewitt [Lewitt, 1990, Lewitt, 1992, Matej and Lewitt, 1992], dont la particularité est d'être à symétrie sphérique parfaite. La représentante principale de cette classe de fonctions en tomographie est la fonction de Kaiser-Bessel généralisée. En plus de posséder l'isotropie pointée par le modèle de projection tomographique, ces fonctions fournissent également une excellente approximation d'un signal continu. Des projecteurs à base de blobs ont été développés, notamment par Ziegler *et al.* [Ziegler et al., 2006], qui ne nécessitent aucune approximation (sauf en propagation divergente, où elles sont négligeables) de leur projection tomographique, connue analytiquement quelle que soit l'orientation. L'inconvénient majeur de ce type de fonctions est qu'elles sont relativement complexes à manipuler, obligeant à un calcul préliminaire et à un stockage de l'empreinte projetée. De plus, le blob étant une fonction non séparable, son empreinte l'est également, ce qui engendre encore une surcharge en temps de

calcul.

Nous avons finalement trouvé le compromis idéal entre rapidité de calcul et précision de modélisation dans la classe de fonctions dites B-splines, polynômiales par morceaux, caractérisées par le degré d des polynômes mis en jeu. Ce degré définit aussi leur ordre d'approximation $L = d + 1$, qui témoigne d'une certaine manière de la qualité d'approximation du signal f fournie par la fonction. À ce titre, les B-splines sont connues pour être les fonctions les plus compactes pour un ordre d'approximation donné. Autrement dit, nous disposons là de la fonction optimale en largeur de support, pour une précision donnée. L'indicatrice de voxels étant la B-spline de degré 0, nous nous sommes intéressés à des degrés supérieurs. Il est bien connu que les B-splines tendent, à une renormalisation près, vers la densité gaussienne, donc par extension dimensionnelle vers la symétrie sphérique. En constatant également qu'une B-spline étendue à la multi-dimensionalité est une fonction séparable, nous avions là un compromis idéal pour notre projecteur.

Nous avons alors recherché une expression de l'empreinte projetée d'une fonction B-spline en partant d'une approximation de symétrie sphérique, afin que cette empreinte soit isotrope, tout en conservant sa séparabilité sur le détecteur, ce qui a débouché sur une modélisation que nous avons nommée *spline driven*. Nous avons alors démontré que les erreurs d'approximation étaient plus faibles en comparaison des modèles *distance driven* et *L&F* pour une propagation conique des rayons. Ces dernières erreurs restent cependant supérieures à celles obtenues avec le projecteur à base de blobs de Ziegler *et al.*. Mais la supériorité de notre projecteur est manifeste dans la rapidité de calcul du modèle, grâce à la propriété de séparabilité. Cette dernière offre de surcroît la possibilité de s'affranchir d'un stockage de l'empreinte projetée, car son calcul "à la volée" demeure rapide, et simple compte tenu de la facilité de manipulation de la B-spline. Nous atteignons potentiellement un temps de calcul seulement supérieur d'un facteur 2 par rapport aux projecteurs d'indicatrices de voxels, et ce même en 3-D, ce qui reste largement compétitif.

Nous avons alors mis notre projecteur *spline driven* à l'épreuve dans des reconstructions 2-D du fantôme numérique *FORBILD*, à faible nombre de projections, que nous avons comparé au modèle *distance driven*. Nous avons repris pour cela la méthode de reconstruction régularisée par la variation totale développée dans le chapitre 1.

Les résultats ont pu montrer la plus grande robustesse du modèle *spline driven* à expliquer l'information parcimonieuse des projections, permettant à la régularisation d'avoir une action plus cohérente et efficace. Il faut toutefois admettre que des conditions d'expérience plus représentatives, ainsi que des critères d'évaluation plus robustes, seraient souhaitables pour démontrer sans équivoque l'apport d'un modèle plus précis.

Les expériences menées dans ce travail, rendant compte des performances du projecteur dans un cas relativement particulier et potentiellement défavorable, ne lui rendaient certainement pas justice compte tenu des gains augurés dans nos études préliminaires plus ciblées, notamment celles menées sur les erreurs de modélisation intrinsèques de chacune des bases de fonctions, ainsi que sur les erreurs d'approximation de chacun des modèles de projection, qui mettaient clairement en avant la force de notre approche. Il faut cependant relativiser ces gains, car dépendants notamment de la résolution des voxels, dont le raffinement se traduit directement par une diminution de ces erreurs.

Quoi qu'il en soit, certaines hypothèses sur les performances attendues de *spline driven* ont pu être vérifiées, notamment la meilleure fidélité aux données quel que soit le nombre de projections ou le niveau de bruit, ainsi que la possibilité de diminuer la résolution de l'échantillonnage de la grille des voxels, tout en conservant une qualité de reconstruction égale à un modèle plus grossier.

Il faut enfin noter que l'apport d'un tel modèle doit être aussi relativisé vis-à-vis de l'ap-

plication visée. Il est en effet problable que le gain en précision obtenu par le projecteur soit négligeable en regard des autres types d'erreurs pouvant être impliqués dans la reconstruction. Par exemple, cet apport est négligeable si les données sont perturbées par un bruit trop important dont la variance surpasse d'un ordre de grandeur celle des erreurs de modélisation. Il n'en demeure pas moins que disposer d'un tel modèle, qui renforce la cohérence du problème inverse, n'est pas plus coûteux en termes de temps de calcul. On ne perd donc quasiment pas en rapidité de reconstruction en utilisant notre projecteur, et pour un gain intrinsèque avéré en précision de modélisation des données.

Approche inverse pour la tomographie dynamique sans compensation de mouvement

Disposant de tous les éléments d'une approche inverse robuste pour la reconstruction à faible nombre de projections, nous nous sommes penchés sur le problème dynamique. Nous en avons posé la problématique et défini nos hypothèses de travail, à savoir le cadre de la reconstruction d'un signal spatio-temporel continu et périodique, de sorte que plusieurs cycles de mouvement soient révolus pendant l'acquisition des projections. Il est ainsi théoriquement possible de relier à une phase temporelle donnée de ce cycle, un ensemble de projections réparties régulièrement sur une couverture angulaire rendant faisable une reconstruction statique de cette phase. Le signal à reconstruire est alors une image n-D+t de voxels, échantillonnée sur une grille spatio-temporelle.

La première étape a été de définir une modélisation de la projection tomographique d'un objet dynamique. Nous avons fait l'hypothèse que l'acquisition d'une projection était instantanée, et qu'un recalage des instants de projection avec une date d'un cycle de mouvement était possible à condition de disposer d'un signal temporel 1-D définissant ces périodes. Nous en avons déduit qu'une projection revenait à faire une interpolation temporelle des tranches à la date de la projection en question, suivie de la projection statique standard de cette tranche interpolée. Il nous a ainsi été possible de ré-utiliser dans le modèle direct le projecteur *spline driven* développé au chapitre 2.

La seconde étape a concerné l'élaboration d'une régularisation spatio-temporelle adaptée à l'"anatomie" du signal à reconstruire. Pour la composante spatiale, nous avons conservé le principe de la variation totale étant donné que le type d'objet à reconstruire obéissait toujours aux principes énoncés dans le chapitre 1, *i.e.* la continuité par morceaux. Nous avons étendu cette continuité par morceaux au cas d'un objet spatio-temporel, en constatant que les variations temporelles des structures se faisaient exclusivement au niveau des interfaces entre les tissus. Ainsi les gradients spatiaux de l'objet sont intrinsèquement liés à ses gradients temporels, engendrant une continuité par morceaux spatio-temporelle. Nous avons alors choisi d'appliquer à l'objet une régularisation par variation totale aux dimensions spatiales et temporelle. Nous avons ainsi défini deux approches pour l'implantation de cette régularisation :

- une forme séparable où deux variations totales sont appliquées, de façon non corrélée, respectivement aux composantes spatiales et temporelle du gradient de l'image ;
- une forme globale où l'on minimise directement le gradient spatio-temporel "sous la même norme".

Nous avons défini deux hyperparamètres μ_{space} et μ_{time} pour contrôler l'hétérogénéité des dimensions spatiales et temporelle en permettant de régler différemment le poids affecté aux gradients spatiaux et aux gradient temporel.

La modélisation de la projection dynamique et la régularisation spatio-temporelle ainsi développées ont ensuite pu être insérées directement dans le même schéma de reconstruction qu'en mode statique.

L'évaluation de notre approche a été premièrement réalisée sur des reconstructions 2-D+t, à partir de projections dynamiques d'un fantôme type Shepp-Logan adapté aux besoins du temporel. Les résultats obtenus ont montré l'extrême efficacité de notre méthode, capable de reconstruire la séquence dynamique de façon précise et cohérente grâce à la régularisation spatio-temporelle, et ce sans surcroît d'information, que ce soit en nombre de projections ou par l'apport d'un autre jeu de données.

L'ensemble de ces résultats a ensuite été confirmé dans une mise à l'épreuve sur des jeux de données physiques, acquises prémièrement sur un fantôme mécanique dynamique, dont nous avons effectué des reconstructions 2-D+t et 3-D+t. Puis, une démonstration très prometteuse a été réalisée grâce à une reconstruction 3-D+t à partir des données d'acquisition du thorax d'un patient en respiration, que nous avons comparé à l'état de l'art en compensation de mouvement [Rit et al., 2009a].

Nous avons alors pointé que des approfondissements étaient nécessaires, notamment en ce qui concerne l'étude du comportement de la régularisation spatio-temporelle suivant la manière dont celle-ci est implantée. D'autres améliorations seraient également souhaitables pour donner plus de cohérence à cette régularisation en regard des aspects physiques du mouvement, *e.g.* l'assimilation des objets à des fluides de diverses natures.

La démonstration de l'approche inverse

Ce travail de thèse a pu démontrer la puissance de l'approche inverse dans le traitement du problème complexe qu'est la reconstruction d'images en tomographie dynamique. Nous avons à cet effet élaboré une démarche progressive cohérente pour traiter des différents points liés à la définition du problème inverse puis à sa résolution. Ces points sont :

- la définition d'un critère de fidélité aux données posant le problème de façon robuste et suffisamment générale pour pallier le manque d'information ;
- l'élaboration d'un modèle précis d'obtention des mesures, permettant d'expliquer les données sans ambiguïté vis-à-vis de petites perturbations ;
- l'utilisation d'un terme de régularisation rendant compte d'une information a priori réaliste, contrôlant la dérive de la solution due au mauvais conditionnement du problème sans s'éloigner des données, et sans imposer de contrainte trop forte en autorisant un réglage de son influence ;
- le choix d'une stratégie d'optimisation adéquate pour minimiser le critère et obtenir la solution.

Nous avons traité ces points de façon pragmatique, avec comme objectif d'extraire de façon optimale, au sens du critère défini, la seule information des données à disposition. Nous en avons dégagé une méthode simple à mettre en œuvre, dont les performances rivalisent avec les approches usuelles nécessitant, elles, un apport d'information supplémentaire.

Nous avons alors confronté nos travaux et nos résultats à l'état de l'art dans les différents domaines traités, que ce soit en reconstruction statique, en modélisation de la projection tomographique ou en reconstruction dynamique.

Régularisation

Nos travaux ont gravité autour de l'importance à régulariser un problème inverse. Il s'agit d'un domaine de pointe, très étudié par les mathématiciens et numériciens, et en évolution permanente. La façon même d'implanter numériquement une régularisation est importante, en témoignent par exemple les nombreux travaux sur la variation totale [Strong and Chan, 2003], [Chambolle, 2004], [Getreuer, 2012], [Chambolle et al., 2011]. Ces raffinements peuvent de prime

abord sembler superflus, mais s'avèrent essentiels pour relier précisément les propriétés théoriques aux résultats pratiques, ne serait-ce que pour comprendre et expliquer de façon certaine le comportement d'un type de régularisation. Ainsi de nombreux progrès sont encore possibles pour parfaire nos méthodes dans ce contexte particulier.

Stratégie d'optimisation et temps de calcul

Un point que nous n'avons que peu abordé dans ce travail de thèse concerne la stratégie d'optimisation à mettre en œuvre ainsi que les temps de calcul des reconstructions imposés par la méthode utilisée. L'algorithme d'optimisation que nous utilisons nécessite plusieurs centaines d'itérations avant que la solution ne soit à convergence, avec des temps de reconstruction de l'ordre de 5 heures pour 1000 itérations en reconstruction dynamique 2-D+t, et de l'ordre de 10 heures pour 10 itérations en reconstruction dynamique 3-D+t.

Comme nous l'avons fait remarquer dans la chapitre 1, les algorithmes itératifs sont encore peu exploités en tomodensitométrie par rayons X, et les méthodes analytiques restent préférées pour leur rapidité de reconstruction d'une image de qualité. Cela se fait cependant au prix d'un très grand nombre de projections. Ainsi le problème de la dose de rayonnement X délivrée au patient peut les remettre en cause, particulièrement depuis que l'on a montré que les approches itératives pouvaient permettre de réduire ce nombre de projections.

L'intérêt est donc double, puisqu'une réduction de la quantité de données réduit par là-même directement les temps de calcul. Nous avons également parlé d'une autre avancée, à savoir le calcul massivement parallèle, qui se prête parfaitement aux problématiques de tomographie : développement des plateformes multi-processeurs, ou encore calcul numérique de pointe sur processeurs graphiques.

Avant cela, il faut porter l'effort sur une optimisation des algorithmes permettant d'accélérer la convergence des méthodes, par exemple en implantant un pré-conditionneur dans l'algorithme. C'est un point des problèmes inverses qui n'a pas fait l'objet d'études poussées dans cette thèse, mais qui serait une perspective essentielle et d'un grand intérêt pour asseoir une fois de plus les avantages de l'approche inverse pour la reconstruction tomographique, et ce conjointement à une réflexion sur la parallélisation de la méthode.

Mise à l'épreuve sur des données "réelles"

Nous avons testé nos méthodes dans le cadre du traitement de données physiques, qui valident la pertinence de l'approche inverse en l'éprouvant sur des cas concrets. Cette confrontation constitue un point essentiel à la démarche scientifique liée aux problèmes inverses, puisque nous manipulons sans cesse, dans cette discipline, des concepts qui ne sont que des approximations de la vérité physique. Les mettre en regard de la "réalité du terrain" constitue donc l'unique moyen de valider une approche de ce type et de l'améliorer. Sans cela, l'approche inverse perdrait tout crédit vis-à-vis de son objectif premier qu'est le traitement rigoureux de l'information en vue de son exploitation par l'humain.

Perspectives en tomographie

Pour clore ce manuscrit, nous proposons quelques perspectives supplémentaires, notamment applicatives, pour les travaux spécifiques liés à ce travail de thèse en tomographie.

Perspectives d'utilisation du projecteur optimisé en reconstruction tomographique

Nos travaux ont concrètement montré qu'une reconstruction de qualité pouvait être obtenue sans nécessiter autant de projections que ne l'imposent des méthodes plus usuelles. À cet effet, nous avons montré que la précision du modèle de projection permettait de réduire encore ce nombre de projections.

Cette avancée n'est pas seulement d'intérêt pour la tomographie dynamique, elle l'est aussi pour la reconstruction tomographique en général. En effet, la récente théorie du *Compressed Sensing*, et notamment les travaux de Candès *et al.* [Candès et al., 2006, Candès and Wakin, 2008], ont déjà démontré qu'une reconstruction exacte était possible avec des données parcimonieuses. Cette démonstration a été réalisée dans un cas idéal, *i.e.* une reconstruction à modèle exact, qui plus est, parfaitement conditionné. Dans nos simulations, nous avons vu qu'une reconstruction d'excellente qualité était atteignable à peu de projections, même dans un cadre de génération de données réalistes, à condition de disposer d'un modèle suffisamment précis.

Il nous semble donc avoir ouvert la voie à une application pratique de ces concepts, et il est probable que beaucoup d'applications nécessitant d'atteindre une résolution extrême dans les structures reconstruites, et ce à moindre frais d'acquisition, profiteraient du gain substantiel fourni par un modèle extrêmement précis, que ce soit *spline driven* ou même un projecteur à base de blobs tel le modèle de Ziegler *et al.*

Nous pensons que de tels modèles seraient particulièrement efficaces pour traiter des données parcimonieuses avec un excellent rapport signal à bruit où la variance du bruit est inférieure aux erreurs de modélisation. Nous pouvons citer par exemple la microtomographie par rayonnement synchrotron ; une modalité de ce type a été développée à l'ESRF (*European Synchrotron Radiation Facility*) de Grenoble. Le rayonnement synchrotron possède des propriétés d'un grand intérêt pour la tomographie : la monochromaticité du rayonnement X émis ainsi que le flux élevé donnant un excellent rapport signal à bruit. Ces conditions d'acquisition seraient donc optimales pour évaluer la finesse de notre modèle dans des reconstructions à très haute résolution — de l'ordre de 6 à 7 microns — à faible nombre de projections.

Perspectives en tomographie dynamique

Nous avons mis en évidence le potentiel de notre approche inverse pour l'extraction de l'information dynamique d'un objet à partir de ses seules projections courantes, sous conditions de périodicité, sans avoir recours à la connaissance explicite du mouvement par l'estimation d'un modèle paramétrique de déformation sur un autre jeu de données.

Sans arriver au niveau de qualité des méthodes les plus robustes de reconstruction par compensation de mouvement, notre approche rend possible la reconstruction d'un objet dynamique de façon réaliste et tout à fait exploitable, pourvu que l'information soit traitée de manière optimale.

Notons que l'incertitude supplémentaire liée à la reproductibilité du mouvement d'une acquisition à l'autre est absente dans notre mode de reconstruction. La seule incertitude restante à ce niveau-là proviendrait du signal temporel 1-D de recalage des projections sur la séquence d'images reconstruites, permettant de déduire les paramètres de l'opérateur d'interpolation temporelle $\mathbf{S}^{\iota}$. Nous pourrions alors étalonner ces paramètres, généralisés à des paramètres $\mathbf{S}$ de recalage, directement dans l'algorithme de reconstruction, à la manière des méthodes de déconvolution aveugle. L'avantage de cette solution serait une fois de plus de profiter de la force de l'approche inverse pour estimer *conjointement* la reconstruction et ces paramètres d'étalonnage dynamique, et ce de manière optimale au sens du critère à minimiser.

L'évaluation de notre approche n'est pas terminée, et il y a, comme nous l'avons dit plus haut, encore beaucoup à faire pour améliorer la qualité de nos reconstructions dynamiques,

particulièrement en ce qui concerne la régularisation spatio-temporelle, ou encore le modèle dynamique de projections.

Nous pouvons cependant déjà entrevoir quelques applications. La première serait l'amélioration directe des méthodes de reconstruction type *gated*. En effet, notre méthode engendrerait assurément d'aussi bons, voire de bien meilleurs résultats dans ce contexte, et pour un nombre de projections moindre. Rappelons qu'un traitement par radiothérapie nécessite forcément, dans l'état actuel, un double *scanner* du patient, l'un pour l'élaboration du plan de traitement, et l'autre pour le suivi et le contrôle du dépôt de dose. Ainsi notre méthode pourrait d'ores et déjà concerner la première acquisition, à moindre exposition du patient au rayonnement X. L'estimation du mouvement sur une reconstruction à partir de notre méthode, en vue de reconstructions compensées en mouvement, est alors tout à fait envisageable. Les images reconstruites par notre méthode pouvant même offrir une bien meilleure qualité de reconstruction, notamment par la corrélation temporelle des tranches, l'estimation du mouvement n'en serait que plus précise.

Notre approche ayant mis en évidence l'intérêt de régulariser la reconstruction dans le temps, il est également tout aussi envisageable de la combiner avec une approche par compensation de mouvement. La cohérence spatio-temporelle de la reconstruction dynamique serait alors renforcée par la régularisation, qui permettrait de corriger éventuellement les artéfacts de mouvement résiduels.

Bibliographie

[Andersen and Kak, 1984] Andersen, A. and Kak, A. (1984). Simultaneous algebraic reconstruction technique (sart) : a superior implementation of the art algorithm. *Ultrasonic Imaging*, 6 :81–94.

[Atalar and Onural, 1991] Atalar, E. and Onural, L. (1991). A respiratory motion artifact reduction method in magnetic resonance imaging of the chest. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10(1) :11–24.

[Balter et al., 1996] Balter, J., Ten Haken, R., Lawrence, T., Lam, K., and Robertson, J. (1996). Uncertainties in ct-based radiation therapy treatment planning associated with patient breathing. *International Journal of Radiation Oncology*Biology*Physics*, 36(1) :167–174.

[Berbeco et al., 2005] Berbeco, R., Mostafavi, H., Sharp, G., and Jiang, S. (2005). Towards fluoroscopic respiratory gating for lung tumours without radiopaque markers. *Physics in Medicine & Biology*, 50(19) :4481.

[Blondel et al., 2003] Blondel, C., Malandain, G., Vaillant, R., and Ayache, N. (2003). 4d deformation field of coronary arteries from monoplane rotational x-ray angiography. In *International Congress Series*, volume 1256, pages 1073–1078. Elsevier.

[Blondel et al., 2004] Blondel, C., Vaillant, R., Malandain, G., and Ayache, N. (2004). 3d tomographic reconstruction of coronary arteries using a precomputed 4d motion field. *Physics in Medicine & Biology*, 49 :2197–2208.

[Blu et al., 1998] Blu, T., Thevenaz, P., and Unser, M. (1998). Minimum support interpolators with optimum approximation properties. In *IEEE Proceedings of the International Conference on Image Processing*, pages 242–245. IEEE.

[Blu et al., 2001] Blu, T., Thévenaz, P., and Unser, M. (2001). Moms : Maximal-order interpolation of minimal support. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(7) :1069–1080.

[Blu and Unser, 1999a] Blu, T. and Unser, M. (1999a). Quantitative fourier analysis of approximation techniques. i. interpolators and projectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(10) :2783–2795.

[Blu and Unser, 1999b] Blu, T. and Unser, M. (1999b). Quantitative fourier analysis of approximation techniques. ii. wavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(10) :2796–2806.

[Boldea et al., 2003] Boldea, V., Sarrut, D., and Clippe, S. (2003). Lung deformation estimation with non-rigid registration for radiotherapy treatment. In *Medical Image Computing*

and Computer-Assisted Intervention, Montréal, Canada, pages 770–777. Springer Verlag Lecture Notes in Computer Science.

[Boldea et al., 2008] Boldea, V., Sharp, G., Jiang, S., and Sarrut, D. (2008). 4d-ct lung motion estimation with deformable registration : quantification of motion nonlinearity and hysteresis. *Medical Physics*, 35 :1008.

[Brankov et al., 2002] Brankov, J., Yang, Y., Narayanan, M., and Wermck, M. (2002). Motion-compensated 4d processing of gated spect perfusion studies. In *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, volume 3, pages 1380–1384. IEEE.

[Brankov et al., 2004] Brankov, J., Yang, Y., and Wernick, M. (2004). Tomographic image reconstruction based on a content-adaptive mesh model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(2) :202–212.

[Brock et al., 2003] Brock, K., McShan, D., Ten Haken, R., Hollister, S., Dawson, L., and Balter, J. (2003). Inclusion of organ deformation in dose calculations. *Medical Physics*, 30 :290.

[Bruyant, 2002] Bruyant, P. (2002). Analytic and iterative reconstruction algorithms in spect. *Journal of Nuclear Medicine*, 43 :1343–1358.

[Campisi and Egiazarian, 2007] Campisi, P. and Egiazarian, K. (2007). *Blind image deconvolution : theory and applications*. CRC.

[Candès et al., 2006] Candès, E., Romberg, J., and Tao, T. (2006). Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2) :489–509.

[Candès and Wakin, 2008] Candès, E. and Wakin, M. (2008). An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 21–30.

[Cao et al., 2003] Cao, Z., Gilland, D., Mair, B., and Jaszczak, R. (2003). Three-dimensional motion estimation with image reconstruction for gated cardiac ect. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 50(3) :384–388.

[Chambolle, 2004] Chambolle, A. (2004). An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20 :89–97.

[Chambolle et al., 2011] Chambolle, A., Levine, S., and Lucier, B. (2011). An upwind finite-difference method for total variation–based image smoothing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(1) :277–299.

[Chen et al., 2004] Chen, G., Kung, J., and Beaudette, K. (2004). Artifacts in computed tomography scanning of moving objects. In *Seminars in Radiation Oncology*, volume 14, pages 19–26. Elsevier.

[Chlewicki et al., 2004] Chlewicki, W., Hermansen, F., and Hansen, S. (2004). Noise reduction and convergence of bayesian algorithms with blobs based on the huber function and median root prior. *Physics in Medicine & Biology*, 49(20) :4717.

[Clackdoyle and Noo, 2004] Clackdoyle, R. and Noo, F. (2004). A large class of inversion formulae for the 2d radon transform of functions of compact support. *Inverse Problems*, 20(4) :1281.

[Clackdoyle et al., 2004] Clackdoyle, R., Noo, F., Guo, J., and Roberts, J. (2004). Quantitative reconstruction from truncated projections in classical tomography. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 51(5) :2570–2578.

[Crawford et al., 1996] Crawford, C., King, K., Ritchie, C., and Godwin, J. (1996). Respiratory compensation in projection imaging using a magnification and displacement model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(3) :327–332.

[Cuppen et al., 1985] Cuppen, J., Groen, J., Kleef, J., and Tuithof, H. (1985). Reduction of motion artifacts by data processing. In *Proceedings of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, pages 962–963.

[De Boor, 1972] De Boor, C. (1972). On calculating with b-splines. *Journal of Approximation Theory*, 6(1) :50–62.

[De Murcia and Grangeat, 1996] De Murcia, J. and Grangeat, P. (1996). Spatio-temporally regularized reconstruction of gated spect myocardial image sequences. In *IEEE Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 721–724. IEEE.

[Defrise and Gullberg, 2006] Defrise, M. and Gullberg, G. (2006). Image reconstruction. *Physics in Medicine & Biology*, 51 :R139–R154.

[DeMan and Basu, 2004] DeMan, B. and Basu, S. (2004). Distance driven projection and backprojection in three dimensions. *Physics in Medicine & Biology*, 49(11) :2463–2475.

[Desbat et al., 2006] Desbat, L., Roux, S., and Grangeat, P. (2006). Compensation of some time dependent deformations in tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(2) :261–269.

[Ehrhardt et al., 2007] Ehrhardt, J., Werner, R., Säring, D., Frenzel, T., Lu, W., Low, D., and Handels, H. (2007). An optical flow based method for improved reconstruction of 4d ct data sets acquired during free breathing. *Medical Physics*, 34 :711–721.

[Elbakri and Fessler, 2002] Elbakri, I. and Fessler, J. (2002). Statistical image reconstruction for polyenergetic x-ray computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(2) :89–99.

[Erdogan, 1999] Erdogan, H. (1999). *Statistical image reconstruction algorithms using paraboloidal surrogates for PET transmission scans*. PhD thesis, The University of Michigan.

[Erdogan and Fessler, 1999] Erdogan, H. and Fessler, J. (1999). Monotonic algorithms for transmission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(9) :801–814.

[Feldkamp et al., 1984] Feldkamp, L., Davis, L., and Kress, J. (1984). Practical cone-beam algorithm. *Journal of the Optical Society of America A*, 1(6) :612–619.

[Fessler, 2006] Fessler, J. (2006). Iterative methods for image reconstruction. *Tutorial at the International Symposium on Biomedical Imaging. Arlington, Virginia.*

[Fessler and Erdogan, 1998] Fessler, J. and Erdogan, H. (1998). A paraboloidal surrogates algorithm for convergent penalized-likelihood emission image reconstruction. In *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference Record*, volume 2, pages 1132–1135.

[Ford et al., 2003] Ford, E., Mageras, G., Yorke, E., and Ling, C. (2003). Respiration-correlated spiral ct : a method of measuring respiratory-induced anatomic motion for radiation treatment planning. *Medical Physics*, 30 :88.

[Frank, 2006] Frank, J. (2006). *Electron tomography : methods for three-dimensional visualization of structures in the cell*. Springer Science + Business Media.

[Galt et al., 1990] Galt, J., Garcia, E., and Robbins, W. (1990). Effects of myocardial wall thickness on spect quantification. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(2) :144–150.

[Getreuer, 2012] Getreuer, P. (2012). Rudin-osher-fatemi total variation denoising using split bregman. *Image Processing On Line*.

[Gilland et al., 2002] Gilland, D., Mair, B., Bowsher, J., and Jaszczak, R. (2002). Simultaneous reconstruction and motion estimation for gated cardiac ect. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 49(5) :2344–2349.

[Goldberg et al., 1989] Goldberg, H., Gould, R., Feuerstein, I., Sigeti, J., and Lipton, M. (1989). Evaluation of ultrafast ct scanning of the adult abdomen. *Investigative Radiology*, 24 :537–543.

[Gordon et al., 1970] Gordon, R., Bender, R., and Herman, G. (1970). Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29(3) :471–481.

[Gravier et al., 2006] Gravier, E., Yang, Y., King, M., and Jin, M. (2006). Fully 4d motion-compensated reconstruction of cardiac spect images. *Physics in Medicine & Biology*, 51 :4603–4619.

[Horbelt et al., 2002] Horbelt, S., Liebling, M., and Unser, M. (2002). Discretization of the radon transform and of its inverse by spline convolutions. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(4) :363–376.

[Horn and Schunck, 1981] Horn, B. and Schunck, B. (1981). Determining optical flow. *Artificial intelligence*, 17(1-3) :185–203.

[Hsieh, 2003] Hsieh, J. (2003). *Computed tomography : principles, design, artifacts, and recent advances*, volume 114. Society of Photo Optical.

[Isola et al., 2008a] Isola, A., Ziegler, A., Kohler, T., Niessen, W., and Grass, M. (2008a). Efficient projection model for blobs in motion-compensated iterative cone-beam ct. *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, pages 4130–4137.

[Isola et al., 2008b] Isola, A., Ziegler, A., Kohler, T., Niessen, W., and Grass, M. (2008b). Motion-compensated iterative cone-beam ct image reconstruction with adapted blobs as basis functions. *Physics in Medicine & Biology*, 53 :6777–6797.

[Isola et al., 2010] Isola, A., Ziegler, A., Schäfer, D., Köhler, T., Niessen, W., and Grass, M. (2010). Motion compensated iterative reconstruction of a region of interest in cardiac cone-beam ct. *Journal of Computerized Medical Imaging and Graphics*, 34(2) :149–159.

[Jacobson and Fessler, 2003] Jacobson, M. and Fessler, J. (2003). Joint estimation of image and deformation parameters in motion-corrected pet. In *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, volume 5, pages 3290–3294. IEEE.

[Jaffray et al., 1999] Jaffray, D., Drake, D., Moreau, M., Martinez, A., and Wong, J. (1999). A radiographic and tomographic imaging system integrated into a medical linear accelerator for localization of bone and soft-tissue targets. *International Journal of Radiation Oncology*Biology*Physics*, 45(3) :773–789.

[Jaffray and Siewerdsen, 2000] Jaffray, D. and Siewerdsen, J. (2000). Cone-beam computed tomography with a flat-panel imager : initial performance characterization. *Medical Physics*, 27 :1311.

[Jaffray et al., 2002] Jaffray, D., Siewerdsen, J., Wong, J., and Martinez, A. (2002). Flat-panel cone-beam computed tomography for image-guided radiation therapy. *International Journal of Radiation Oncology*Biology*Physics*, 53(5) :1337–1349.

[Jiang and Wang, 2003] Jiang, M. and Wang, G. (2003). Convergence of simultaneous algebraic reconstruction technique. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8) :957–961.

[Joseph, 1982] Joseph, P. (1982). An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(3) :192–196.

[Joseph and Spital, 2000] Joseph, P. and Spital, R. (2000). The exponential edge-gradient effect in x-ray computed tomography. *Physics in Medicine & Biology*, 26(3) :473.

[Kachelriess et al., 2000] Kachelriess, M., Ulzheimer, S., and Kalender, W. (2000). Ecg-correlated image reconstruction from subsecond multi-slice spiral ct scans of the heart. *Medical Physics*, 27 :1881.

[Kaczmarz, 1937] Kaczmarz, S. (1937). Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen. *Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences et des Lettres*, 35 :355–357.

[Kaipio and Somersalo, 2007] Kaipio, J. and Somersalo, E. (2007). Statistical inverse problems : discretization, model reduction and inverse crimes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 198(2) :493–504.

[Kak and Slaney, 1988] Kak, A. and Slaney, M. (1988). *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press.

[Kalender, 2006] Kalender, W. (2006). X-ray computed tomography. *Physics in Medicine & Biology*, 51(13) :R29.

[Kalman, 1960] Kalman, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35–45.

[Kalman and Bucy, 1961] Kalman, R. and Bucy, R. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(3) :95–108.

[Keall et al., 2005] Keall, P., Joshi, S., Vedam, S., Siebers, J., Kini, V., and Mohan, R. (2005). Four-dimensional radiotherapy planning for dmlc-based respiratory motion tracking. *Medical Physics*, 32 :942.

[Keall et al., 2004] Keall, P., Starkschall, G., Shukla, H., Forster, K., Ortiz, V., Stevens, C., Vedam, S., George, R., Guerrero, T., and Mohan, R. (2004). Acquiring 4d thoracic ct scans using a multislice helical method. *Physics in Medicine & Biology*, 49(10) :2053.

[Klein et al., 1997] Klein, G., Reutter, B., and Huesman, R. (1997). Non-rigid summing of gated pet via optical flow. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 44(4) :1509–1512.

[Kotelnikov, 1933] Kotelnikov, V. (1933). On the transmission capacity of the 'ether'and of cables in electrical communications. In *Proceedings of the first All-Union Conference on the technological reconstruction of the communications sector and the development of low-current engineering*.

[Kubo and Hill, 1996] Kubo, H. and Hill, B. (1996). Respiration gated radiotherapy treatment : a technical study. *Physics in Medicine & Biology*, 41(1) :83.

[Kyme et al., 2003] Kyme, A., Hutton, B., Hatton, R., Skerrett, D., and Barnden, L. (2003). Practical aspects of data-driven motion correction approach for brain spect. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(6) :722–729.

[Lackner and Thurn, 1981] Lackner, K. and Thurn, P. (1981). Computed tomography of the heart : Ecg-gated and continuous scans. *Radiology*, 140(2) :413–420.

[Lacroute, 1995] Lacroute, P. (1995). *Fast Volume Rendering Using a Shear-Warp Factorization of the Viewing Transformation*. PhD thesis, Stanford University.

[Lalush and Tsui, 1999] Lalush, D. and Tsui, B. (1999). Block-iterative techniques for fast 4d reconstruction using a priori motion models in gated cardiac spect. *Physics in Medicine & Biology*, 43(4) :875.

[Lamare et al., 2007] Lamare, F., Carbayo, M., Cresson, T., Kontaxakis, G., Santos, A., Le Rest, C., Reader, A., and Visvikis, D. (2007). List-mode-based reconstruction for respiratory motion correction in pet using non-rigid body transformations. *Physics in Medicine & Biology*, 52(17) :5187.

[Lamare et al., 2006] Lamare, F., Cresson, T., Savean, J., Le Rest, C., Reader, A., and Visvikis, D. (2006). Respiratory motion correction for pet oncology applications using affine transformation of list mode data. *Physics in Medicine & Biology*, 52(1) :121.

[Lange and Carson, 1984] Lange, K. and Carson, R. (1984). Em reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 8(2) :306–316.

[Lewitt, 1990] Lewitt, R. (1990). Multidimensional digital image representations using generalized kaiser-bessel window functions. *Journal of the Optical Society of America A*, 7(10) :1834–1846.

[Lewitt, 1992] Lewitt, R. (1992). Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. *Physics in Medicine & Biology*, 37 :705–716.

[Li et al., 2006a] Li, T., Schreibmann, E., Yang, Y., and Xing, L. (2006a). Motion correction for improved target localization with on-board cone-beam computed tomography. *Physics in Medicine & Biology*, 51 :253–267.

[Li et al., 2006b] Li, X., Stepaniak, C., and Gore, E. (2006b). Technical and dosimetric aspects of respiratory gating using a pressure-sensor motion monitoring system. *Medical Physics*, 33 :145.

[Long et al., 2010] Long, Y., Fessler, J., and Balter, J. (2010). 3d forward and back-projection for x-ray ct using separable footprints. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 29(11) :1839–1850.

[Low et al., 2003] Low, D., Nystrom, M., Kalinin, E., Parikh, P., Dempsey, J., Bradley, J., Mutic, S., Wahab, S., Islam, T., Christensen, G., et al. (2003). A method for the reconstruction of four-dimensional synchronized ct scans acquired during free breathing. *Medical Physics*, 30 :1254.

[Lu and Mackie, 2002] Lu, W. and Mackie, T. (2002). Tomographic motion detection and correction directly in sinogram space. *Physics in Medicine & Biology*, 47 :1267–1284.

[Matej and Lewitt, 1992] Matej, S. and Lewitt, R. (1992). Image representation and tomographic reconstruction using spherically symmetric volume elements. *IEEE Medical Imaging Conference Record*, pages 1191–1193.

[Matej and Lewitt, 1996] Matej, S. and Lewitt, R. (1996). Practical considerations for 3d image reconstruction using spherically symmetric volume elements. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(1) :68–78.

[Mattes et al., 2003] Mattes, D., Haynor, D., Vesselle, H., Lewellen, T., and Eubank, W. (2003). Pet-ct image registration in the chest using free-form deformations. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(1) :120–128.

[Moore and Judy, 1987] Moore, S. and Judy, P. (1987). Cardiac computed tomography using redundant-ray prospective gating. *Medical Physics*, 14 :193.

[Munk and Wunsch, 1979] Munk, W. and Wunsch, C. (1979). Ocean acoustic tomography : A scheme for large scale monitoring. *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*, 26(2) :123–161.

[Narayanan et al., 2000] Narayanan, M., King, M., Wernick, M., Byrne, C., Soares, E., and Pretorius, P. (2000). Improved image quality and computation reduction in 4-d reconstruction of cardiac-gated spect images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(5) :423–433.

[Nehmeh et al., 2002] Nehmeh, S., Erdi, Y., Ling, C., Rosenzweig, K., Schoder, H., Larson, S., Macapinlac, H., Squire, O., and Humm, J. (2002). Effect of respiratory gating on quantifying pet images of lung cancer. *Journal of Nuclear Medicine*, 43(7) :876–881.

[Nehmeh et al., 2003] Nehmeh, S., Erdi, Y., Rosenzweig, K., Schoder, H., Larson, S., Squire, O., and Humm, J. (2003). Reduction of respiratory motion artifacts in pet imaging of lung cancer by respiratory correlated dynamic pet : methodology and comparison with respiratory gated pet. *Journal of Nuclear Medicine*, 44(10) :1644–1648.

[Nocedal, 1980] Nocedal, J. (1980). Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of Computation*, 35(151) :773–782.

[Noo et al., 2004] Noo, F., Clackdoyle, R., and Pack, J. (2004). A two-step hilbert transform method for 2d image reconstruction. *Physics in Medicine & Biology*, 49(17) :3903.

[Noo et al., 2002] Noo, F., Defrise, M., Clackdoyle, R., and Kudo, H. (2002). Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan. *Physics in Medicine & Biology*, 47(14) :2525.

[Osman et al., 2003a] Osman, M., Cohade, C., Nakamoto, Y., Marshall, L., Leal, J., and Wahl, R. (2003a). Clinically significant inaccurate localization of lesions with pet/ct : frequency in 300 patients. *Journal of Nuclear Medicine*, 44(2) :240–243.

[Osman et al., 2003b] Osman, M., Cohade, C., Nakamoto, Y., and Wahl, R. (2003b). Respiratory motion artifacts on pet emission images obtained using ct attenuation correction on pet-ct. *European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 30(4) :603–606.

[Ouksili and Batatia, 2010] Ouksili, Z. and Batatia, H. (2010). 4d ct image reconstruction based on interpolated optical flow fields. In *IEEE Proceedings of the International Conference on Image Processing*.

[Pan et al., 2004] Pan, T., Lee, T., Rietzel, E., and Chen, G. (2004). 4d-ct imaging of a volume influenced by respiratory motion on multi-slice ct. *Medical Physics*, 31 :333.

[Pan et al., 2009] Pan, X., Sidky, E., and Vannier, M. (2009). Why do commercial ct scanners still employ traditional, filtered back-projection for image reconstruction ? *Inverse problems*, 25 :123009.

[Panin et al., 1999] Panin, V., Zeng, G., and Gullberg, G. (1999). Total variation regulated em algorithm [spect reconstruction]. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 46(6) :2202–2210.

[Peters, 1981] Peters, T. (1981). Algorithms for fast back-and re-projection in computed tomography. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 28(4) :3641–3647.

[Picard and Thompson, 1997] Picard, Y. and Thompson, C. (1997). Motion correction of pet images using multiple acquisition frames. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(2) :137–144.

[Prummer et al., 2009] Prummer, M., Hornegger, J., Lauritsch, G., Wigstrom, L., Girard-Hughes, E., and Fahrig, R. (2009). Cardiac c-arm ct : a unified framework for motion estimation and dynamic ct. *IEEE Medical Imaging Conference Record*, 28(11) :1836–1849.

[Qi and Huesman, 2002] Qi, J. and Huesman, R. (2002). List mode reconstruction for pet with motion compensation : a simulation study. In *IEEE Proceedings of the International Symposium on Biomedical Imaging*, pages 413–416.

[Qi and Leahy, 2006] Qi, J. and Leahy, R. (2006). Iterative reconstruction techniques in emission computed tomography. *Physics in Medicine & Biology*, 51(15) :541.

[Qiao et al., 2006] Qiao, F., Pan, T., Clark, J., and Mawlawi, O. (2006). A motion-incorporated reconstruction method for gated pet studies. *Physics in Medicine & Biology*, 51(15) :3769.

[Rahmim et al., 2004] Rahmim, A., Bloomfield, P., Houle, S., Lenox, M., Michel, C., Buckley, K., Ruth, T., and Sossi, V. (2004). Motion compensation in histogram-mode and list-mode em reconstructions : beyond the event-driven approach. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 51(5) :2588–2596.

[Rasche et al., 2002] Rasche, V., Grass, M., Koppe, R., Bücker, A., Günther, R., Kühl, H., de Beek, J., Bertrams, R., and Suurmond, R. (2002). Ecg-gated 3d rotational coronary angiography. In *Proceedings of Computer Assisted Radiology and Surgery*, pages 826–831.

[Reyes et al., 2007] Reyes, M., Malandain, G., Koulibaly, P., Gonzalez-Ballester, M., and Darcourt, J. (2007). Model-based respiratory motion compensation for emission tomography image reconstruction. *Physics in Medicine & Biology*, 52(12) :3579.

[Rietzel et al., 2005] Rietzel, E., Pan, T., and Chen, G. (2005). Four-dimensional computed tomography : image formation and clinical protocol. *Medical Physics*, 32 :874.

[Rit, 2007] Rit, S. (2007). *Prise en compte du mouvement respiratoire pour la reconstruction d'images tomodensitométriques*. PhD thesis, Université Lumière Lyon 2.

[Rit and Sarrut, 2007] Rit, S. and Sarrut, D. (2007). Cone-beam projection of a deformable volume for motion compensated algebraic reconstruction. In *IEEE Proceedings of the Annual International Conference on Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 6543–6546.

[Rit et al., 2006] Rit, S., Sarrut, D., Boldea, V., and Ginestet, C. (2006). Extraction du signal respiratoire à partir de projections cone-beam pour l'imagerie tdm 4d. In *GRETSI, Saint Martin d'Hères, France*.

[Rit et al., 2009a] Rit, S., Sarrut, D., and Desbat, L. (2009a). Comparison of analytic and algebraic methods for motion-compensated cone-beam ct reconstruction of the thorax. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 28(10) :1513–1525.

[Rit et al., 2009b] Rit, S., Wolthaus, J., Van Herk, M., and Sonke, J. (2009b). On-the-fly motion-compensated cone-beam ct using an a priori model of the respiratory motion. *Medical Physics*, 36 :2283.

[Ritchie et al., 1996] Ritchie, C., Crawford, C., Godwin, J., King, K., and Kim, Y. (1996). Correction of computed tomography motion artifacts using pixel-specific back-projection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(3) :333–342.

[Ritchie et al., 1992] Ritchie, C., Godwin, J., Crawford, C., Stanford, W., Anno, H., and Yongmin, K. (1992). Minimum scan speeds for suppression of motion artifacts in ct. *Radiology*, 185(1) :37–42.

[Romberg, 1955] Romberg, W. (1955). Vereinfachte numerische integration. *Norske Vid. Selsk. Forh.(Trondheim)*, 28 :30–36.

[Rudin et al., 1992] Rudin, L., Osher, S., and Fatemi, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1-4) :259–268.

[Sarrut et al., 2006] Sarrut, D., Boldea, V., Miguet, S., and Ginestet, C. (2006). Simulation of four-dimensional ct images from deformable registration between inhale and exhale breath-hold ct scans. *Medical Physics*, 33 :605.

[Schmitt and Louis, 2002] Schmitt, U. and Louis, A. (2002). Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems : I. theory. *Inverse Problems*, 18 :645.

[Schmitt et al., 2002] Schmitt, U., Louis, A., Wolters, C., and Vauhkonen, M. (2002). Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems : Ii. applications. *Inverse Problems*, 18 :659.

[Schreibmann et al., 2005] Schreibmann, E., Chen, G., and Xing, L. (2005). Image interpolation in 4d ct using a bspline deformable registration model. *International Journal of Radiation Oncology*Biology*Physics*, 64(5) :1537–1550.

[Schumacher et al., 2009] Schumacher, H., Modersitzki, J., and Fischer, B. (2009). Combined reconstruction and motion correction in spect imaging. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 56(1) :73–80.

[Schönberg, 1946] Schönberg, I. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quarterly of Applied Mathematics*, 4(45-99) :112–141.

[Segars et al., 1999] Segars, W., Lalush, D., and Tsui, B. (1999). A realistic spline-based dynamic heart phantom. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 46(3) :503–506.

[Segars et al., 2001] Segars, W., Lalush, D., and Tsui, B. (2001). Modeling respiratory mechanics in the mcat and spline-based mcat phantoms. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 48(1) :89–97.

[Segars et al., 2010] Segars, W., Sturgeon, G., Mendonca, S., Grimes, J., and Tsui, B. (2010). 4d xcat phantom for multimodality imaging research. *Medical physics*, 37 :4902.

[Seppenwoolde et al., 2002] Seppenwoolde, Y., Shirato, H., Kitamura, K., Shimizu, S., Van Herk, M., Lebesque, J., and Miyasaka, K. (2002). Precise and real-time measurement of 3d tumor motion in lung due to breathing and heartbeat, measured during radiotherapy. *International Journal of Radiation Oncology*Biology*Physics*, 53(4) :822–834.

[Shannon, 1949] Shannon, C. (1949). Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1) :10–21.

[Shepp and Logan, 1974] Shepp, L. and Logan, B. (1974). The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21(3) :21–43.

[Shepp and Vardi, 1982] Shepp, L. and Vardi, Y. (1982). Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(2) :113–122.

[Shimizu et al., 2000] Shimizu, S., Shirato, H., Kagei, K., Nishioka, T., Bo, X., Dosaka-Akita, H., Hashimoto, S., Aoyama, H., Tsuchiya, K., and Miyasaka, K. (2000). Impact of respiratory movement on the computed tomographic images of small lung tumors in three-dimensional (3d) radiotherapy. *International Journal of Radiation Oncology*Biology*Physics*, 46(5) :1127–1133.

[Sidky et al., 2006] Sidky, E., Kao, C., and Pan, X. (2006). Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam ct. *Journal of X-ray Science and Technology*, 14(2) :119–139.

[Sidky and Pan, 2008] Sidky, E. and Pan, X. (2008). Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total-variation minimization. *Physics in Medicine & Biology*, 53 :4777–4807.

[Song and Leahy, 1991] Song, S. and Leahy, R. (1991). Computation of 3-d velocity fields from 3-d cine ct images of a human heart. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10(3) :295–306.

[Song et al., 1994] Song, S., Leahy, R., Boyd, D., Brundage, B., and Napel, S. (1994). Determining cardiac velocity fields and intraventricular pressure distribution from a sequence of ultrafast ct cardiac images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(2) :386–397.

[Sonke et al., 2008] Sonke, J., Lebesque, J., and Van Herk, M. (2008). Variability of four-dimensional computed tomography patient models. *International Journal of Radiation Oncology*Biology*Physics*, 70(2) :590–598.

[Sonke et al., 2005] Sonke, J., Zijp, L., Remeijer, P., and van Herk, M. (2005). Respiratory correlated cone beam ct. *Medical Physics*, 32 :1176.

[Strang and Fix, 1971] Strang, G. and Fix, G. (1971). A fourier analysis of the finite element variational method. *Constructive Aspects of Functional Analysis*, pages 793–840.

[Strong and Chan, 2003] Strong, D. and Chan, T. (2003). Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization. *Inverse problems*, 19 :S165.

[Swerling, 1958] Swerling, P. (1958). A proposed stagewise differential correction procedure for satellite tracking and prediction,-report p-1292. *The Rand Corporation, Santa Monica, Calif.*

[Thielemans et al., 2003] Thielemans, K., Mustafovic, S., and Schnorr, L. (2003). Image reconstruction of motion corrected sinograms. In *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, volume 4, pages 2401–2406. IEEE.

[Thévenaz et al., 2000a] Thévenaz, P., Blu, T., and Unser, M. (2000a). *Handbook of Medical Imaging - Processing and Analysis*, chapter Image Interpolation and Resampling, pages 393–420. Academic Press.

[Thévenaz et al., 2000b] Thévenaz, P., Blu, T., and Unser, M. (2000b). Interpolation revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(7) :739–758.

[Unser, 1999] Unser, M. (1999). Splines : A perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 16(6) :22–38.

[Unser, 2000] Unser, M. (2000). Sampling-50 years after shannon. *Proceedings of the IEEE*, 88(4) :569–587.

[Unser et al., 1993a] Unser, M., Aldroubi, A., and Eden, M. (1993a). B-spline signal processing. i. theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(2) :821–833.

[Unser et al., 1993b] Unser, M., Aldroubi, A., and Eden, M. (1993b). B-spline signal processing. ii. efficiency design and applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(2) :834–848.

[Vandemeulebroucke et al., 2006] Vandemeulebroucke, J., Vansteenkiste, E., and Philips, W. (2006). A multi-modal 2d/3d registration scheme for preterm brain images. In *IEEE Proceedings of the Annual International Conference on Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 3341–3344. IEEE.

[Vedam et al., 2003] Vedam, S., Keall, P., Kini, V., Mostafavi, H., Shukla, H., and Mohan, R. (2003). Acquiring a four-dimensional computed tomography dataset using an external respiratory signal. *Physics in Medicine & Biology*, 48(1) :45.

[Visvikis et al., 2004] Visvikis, D., Barret, O., Fryer, T., Lamare, F., Turzo, A., Bizais, Y., and Cheze Le Rest, C. (2004). Evaluation of respiratory motion effects in comparison with other parameters affecting pet image quality. In *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, volume 6, pages 3668–3672. IEEE.

[Visvikis et al., 2003] Visvikis, D., Barret, O., Fryer, T., Turzo, A., Lamare, F., Cheze Le Rest, C., and Bizais, Y. (2003). A posteriori respiratory motion gating of dynamic pet images. In *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, volume 5, pages 3276–3280. IEEE.

[Vogel and Oman, 1996] Vogel, C. and Oman, M. (1996). Iterative methods for total variation denoising. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(1) :227–238.

[Vogel and Oman, 1998] Vogel, C. and Oman, M. (1998). Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(6) :813–824.

[Wang and Vannier, 1995] Wang, G. and Vannier, M. (1995). Preliminary study on helical ct algorithms for patient motion estimation and compensation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(2) :205–211.

[Wang et al., 2009] Wang, J., Li, T., and Xing, L. (2009). Iterative image reconstruction for cbct using edge-preserving prior. *Medical Physics*, 36 :252.

[Weickert and Schnörr, 2001] Weickert, J. and Schnörr, C. (2001). Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3) :245–255.

[Wernick et al., 1999] Wernick, M., Infusino, E., and Milosevic, M. (1999). Fast spatio-temporal image reconstruction for dynamic pet. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(3) :185–195.

[Whittaker, 1929] Whittaker, J. (1929). The fourier theory of the cardinal functions. In *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, volume 1, page 140. Cambridge Univ Press.

[Willis and Bresler, 1995a] Willis, N. and Bresler, Y. (1995a). Optimal scan for time-varying tomography. ii. efficient design and experimental validation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(5) :654–666.

[Willis and Bresler, 1995b] Willis, P. and Bresler, Y. (1995b). Optimal scan for time-varying tomography. i. theoretical analysis and fundamental limitations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(5) :642–653.

[Wirgin, 2004] Wirgin, A. (2004). The inverse crime. *arXiv preprint math-ph/0401050*.

[Yu et al., 2012] Yu, Z., Noo, F., Dennerlein, F., Wunderlich, A., Lauritsch, G., and Hornegger, J. (2012). Simulation tools for two-dimensional experiments in x-ray computed tomography using the forbild head phantom. *Physics in Medicine & Biology*, 57(13) :N237.

[Zeng et al., 2007] Zeng, R., Fessler, J., and Balter, J. (2007). Estimating 3-d respiratory motion from orbiting views by tomographic image registration. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(2) :153–163.

[Ziegler et al., 2006] Ziegler, A., Köhler, T., Nielsen, T., and Proksa, R. (2006). Efficient projection and backprojection scheme for spherically symmetric basis functions in divergent beam geometry. *Medical Physics*, 33 :4653–4663.

[Zijp et al., 2004] Zijp, L., Sonke, J., and Herk, M. (2004). Extraction of the respiratory signal from sequential thorax cone-beam x-ray images. In *International Conference on the Use of Computers in Radiation Therapy, Seoul, Korea*, pages 507–509.

Bibliographie personnelle

Conférences internationales avec actes

Fabien Momey, Loïc Denis, Catherine Mennessier, Éric Thiébaut, Jean-Marie Becker & Laurent Desbat. A B-spline based and computationally performant projector for iterative reconstruction in tomography. *Second X-ray CT meeting, Salt Lake City (Utah, USA, juin 2012)* [http://www.ucair.med.utah.edu/CTmeeting/]. [http://hal-ujm.ccsd.cnrs.fr/ujm-00715785] ;

Fabien Momey, Loïc Denis, Catherine Mennessier, Éric Thiébaut, Jean-Marie Becker & Laurent Desbat. A new representation and projection model for tomography, based on separable B-splines. *IEEE Medical Imaging Conference, Valencia (Espagne, octobre 2011)* [http://www.nss-mic.org/2011]. [http://hal.archives-ouvertes.fr/ujm-00670025].

Conférences nationales françaises avec actes

Fabien Momey, Jean-Marie Becker, Loïc Denis, Catherine Mennessier & Éric Thiébaut. Modèle direct pour la tomographie 3D : apport d'une approximation par B-splines séparables. *Actes de la 23ème édition du colloque Gretsi, (Bordeaux, septembre 2011)* [http://www.gretsi2011.org/]. [http://hal.archives-ouvertes.fr/ujm-00667081].

A B-spline based and computationally performant projector for iterative reconstruction in tomography *Application to dynamic X-ray gated CT*

Fabien Momey, Loïc Denis, Catherine Mennessier, Éric Thiébaut, Jean-Marie Becker, Laurent Desbat

I. Introduction

ITERATIVE reconstruction methods for tomography have long proven their potential to enhance reconstruction quality, compared to the filtered backprojection (FBP) [2]. The drawback of iterative methods is their expensive computation time. However ongoing researches on algorithms and recent enhancements in computational power, call for a re-evaluation of the potential of iterative reconstruction in this domain.

Such methods require an accurate numerical modelization of the data acquisition process: the so-called *projector*. The representation of the object of interest (image) is the starting point of the projector. It is assimilated to a continuous function decomposed on a discrete basis of functions. The choice of this basis is essential for an accurate representation of the true function. Standard models such as *voxel driven* or *ray driven* [5] are based on raw samples, yielding modelization errors and artifacts on the reconstructed image. More advanced models, such as the recent *distance driven* [1] projector, define the function at any point considering staircase voxels, and thus make a better modelization. However such a basis of functions provides a coarse representation of the image because of its anisotropic behaviour, causing large modelization errors. Such issues can be dealt with the spherically symmetric volume elements, mostly known as blobs [7] [8] [9] [10] [11], but at the cost of increased complexity. Finally, for implementation purposes, the projection of the staircase voxel, in the *distance driven* model, is approximated, increasing its modelization errors.

We propose the use of B-splines as an alternative to both staircase voxel and blob approaches. B-splines are well known piecewise polynomial functions, and are characterized by the degree of their constituting polynomials. Recent works in sampling theory [18] [19] [15] have shown their efficiency in representing a continuous signal, with a good recovering accuracy. Increasing their degree makes them more and more similar to the 3D Gaussian functions, with a quasi-isotropic behaviour, while keeping local influence and separability property.

This gives us clues to develop a new efficient numerical projector for iterative reconstruction. One of the most important improvements we get is the reduction of the angular sampling of projections without any loss of quality.

Such an improvement is particularly of interest in the case of dynamic gated X-ray CT, which can be considered as a tomographic reconstruction problem with very few projection data, and for which we show some preliminary results.

This work was supported by the MiTiV project (Méthodes Inverses pour le Traitement en Imagerie du Vivant), funded by the French ANR (N° ANR-09-EMER-008).

Fabien Momey is with the Centre de Recherche Astrophysique de Lyon - Observatoire de Lyon, Lyon, France, and with the Laboratoire Hubert Curien, Université Jean Monnet, Saint-Étienne, France (telephone: +33 478 868 546, e-mail: author fabien.momey@univ-lyon1.fr).

Loïc Denis is with the Laboratoire Hubert Curien.

Catherine Mennessier is with the Laboratoire Hubert Curien, and with the engineer school CPE, Lyon, France.

Éric Thiébaut is with the Centre de Recherche Astrophysique de Lyon - Observatoire de Lyon.

Jean-Marie Becker is with the Laboratoire Hubert Curien, and with CPE Lyon.

Laurent Desbat is with the TIMC-IMAG, Grenoble, France.

II. Materials and Methods

A. Use of B-splines for image representation

Let $f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$, with $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, be the n-dimensional continuous function modelizing the true image to be reconstructed. Its decomposition on a discrete basis of functions gives:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) \qquad (1)$$

where this discrete shift-invariant basis is assumed to be composed of the compact atom function $\varphi(\boldsymbol{x})$, regularly spaced on a n-dimensional grid of N samples. $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Z}^n$ corresponds to indexes of the N samples of the discrete grid in the n-dimensional space, $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ are the coordinates of this discrete grid.

For numerical purposes, f is described as a vector of its N coefficients:

$$\mathbf{c} = (\mathrm{c}_{\mathbf{1}}, \mathrm{c}_{\mathbf{2}}, \ldots, \mathrm{c}_{\boldsymbol{N}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

The choice of the atom function φ of the basis is essential for warranting consistency with the image intrinsic continuity. It will be a key point for the design of the projector which has to modelize accurately the data.

B-splines are piecewise polynomial functions with degree d, continuously differentiable up to order $d-1$ [18]. Let $\beta^0(x)$ be the rectangular pulse. Thus β^d is a B-spline of degree d, constructed by d convolutions of β^0.

$$\beta^d(x) = \underbrace{\beta^0 * \cdots * \beta^0}_{d+1 \text{ terms}}(x) \qquad (3)$$

Hence going back to the formulation of the image representation in (1), we choose B-splines as our basis of functions φ, leading to:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\beta}^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) \tag{4}$$

Classical basis functions used by some existing projectors are the simple staircase voxels. This is the case for the *distance driven* projector [1]. These functions are advantageous for being the most compact B-splines (of degree 0), easy to manipulate. However, staircase voxels suffer from a high anisotropic behaviour. They constitute a too coarse basis of representation of a continuous object, leading to large modelization errors. A finer sampling rate lowers these errors, but at the cost of an increased computational burden.

The accuracy of the model can be improved using B-splines of higher degree. Indeed B-splines are close to a Gaussian function when their degree d is large. Thus they tend to spherically symmetric function, while preserving a local support. As a result we can deal with quasi-isotropic functions. We also get a better approximation order in the modelization of $f(\boldsymbol{x})$. These two properties are related by the fact that B-splines are the shortest and smoothest scaling functions for a given order of approximation [19].

B. Projector

We consider a general tridimensional system with coordinates $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ linked to the object of interest. The regular sampling grid is therefore identified by the samples positions $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$, corresponding also to the center of each basis function $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$. Then we consider a flat detector, with coordinates $\boldsymbol{u} = (u, v)$. The detector acquires the projection with a given orientation denoted θ. Let $\mathbf{c}$ be the vector of coefficients of the image, defined in (2). The numerical data modelization at orientation θ is:

$$\mathbf{g}^\theta = \mathbf{R}^\theta \cdot \mathbf{c}\ , \quad \mathrm{g}^\theta_q = \sum_{k\in\Omega^\theta_q} \mathbf{R}^\theta_{qk} \cdot \mathrm{c}_k \tag{5}$$

where $\mathbf{R}^\theta$ is the projector and $\mathbf{g}^\theta$ is the resulting data vector, the elements of which are noted g^θ_q. The coefficient $\mathbf{R}^\theta_{qk}$ of the matrix $\mathbf{R}^\theta$ is the contribution of the voxel function k on the q^{th} data element. Ω^θ_q is the set of voxels k impinging the θ-oriented detector pixel q. Let $P_q : \boldsymbol{u} \mapsto P_q(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\beta}^0(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_q)$ be the q^{th} detector pixel response, assumed to be a 2D rectangular pulse, centered at position $\boldsymbol{u}_q$. This response is shift-invariant over each detector pixel. Thus:

$$\mathbf{R}^\theta_{qk} = \int\int F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \cdot P_q(\boldsymbol{u})\ d\boldsymbol{u} \tag{6}$$

$F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ is the footprint of the basis function $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$. It is nothing else than the X-ray transform of this function on the θ-oriented detector, along each ray trajectory $\{S(\theta), \vec{r}(\theta, \boldsymbol{u})\}$ crossing it, and impinging the detector plane at the position $\boldsymbol{u}$.

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{x}\in\{S(\theta),\vec{r}(\theta,\boldsymbol{u})\}} \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} \tag{7}$$

A given projector $\mathbf{R}^\theta$ determines the expression of this footprint $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$. Obviously, $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ depends on the chosen basis of functions. Moreover some approximations are often made in the calculation of this footprint and its contribution to detector pixels, in order to lower the computation cost.

Our approach uses the quasi-isotropy property of B-splines of higher degree, stated in section II-A, to suppose that the footprint is identical whatever the orientation θ. As a result, we first state that the footprint of $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$, in parallel beam geometry, is a $n-1$-dimensional B-spline of degree d, separable over the detector axis. For the 3D case, this gives:

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \beta^d(u - u_k) \cdot \beta^d(v - v_k) \tag{8}$$

where $(u_k, v_k) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}$ is the position, on the detector, of the projection of the center $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$ of $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$.

In the case of cone beam geometry, the magnification effect has to be taken into account, as well as the distorsion effect depending on the position of the voxel in the field of view. For the 3D case, this gives:

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \beta^d\left(\frac{u}{\Gamma^\theta_S \cdot \delta_{u_{\boldsymbol{k}}}} - u_{\boldsymbol{k}}\right) \cdot \beta^d\left(\frac{v}{\Gamma^\theta_S \cdot \delta_{v_{\boldsymbol{k}}}} - v_{\boldsymbol{k}}\right) \tag{9}$$

Γ^θ_S is the magnification factor; δ_{u_k} et δ_{v_k} are the distorsion factors.

A study of modelization and approximation errors of our model, compared with the *distance driven* model, has been done previously in [12], and has proven its better accuracy. We have shown that the use of cubic B-splines (degree 3) already reaches almost the best accuracy. However such a gain is at the cost of an increase of the required number of operations, due to the larger footprint of a given voxel as a function of the B-spline degree, as shown in Fig.1. But at the degree 3, it is only about 6 times larger, which remains is the same range of computational burden. Moreover our projection scheme, as well as the staircase voxel based approaches, is highly parallelizable, making possible to optimize the implementation for speeding up the calculation.

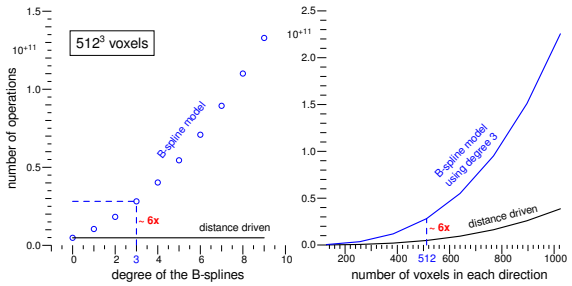


Fig. 1. Number of operations involved in the calculation of the 3D B-spline based projector, as a function of the B-spline degree and the number of voxels in each direction, compared with the *distance driven* projector.

III. Results on 2D fan beam reconstructions

A linear detector, linked to the fan beam source, is considered. The set source-detector rotates around the 2-dimensional object of interest. The B-spline coefficients of the image $\mathbf{c}$,

are reconstructed from the set of projections $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}^\theta | \theta \in \Theta\}$, where Θ is the set of projection angles, by minimization of:

$$\mathbf{c} = \underset{\hat{\mathbf{c}}}{argmin} \underbrace{\sum_{\theta \in \Theta} ||\mathbf{g}^\theta - \mathbf{R}^\theta \cdot \hat{\mathbf{c}}||^2_{\mathbf{W}}}_{\text{data residuals}} + \underbrace{\mu \cdot \Psi(\mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{c}})}_{\text{regularization term}} \quad (10)$$

where $||\cdot||^2_{\mathbf{W}}$ corresponds to the weighted least squares term. The weighting matrix $\mathbf{W}$ is the inverse of the noise covariance. $\Psi : \mathbf{f} \mapsto \Psi(\mathbf{f})$ is a regularization operator applied to the image in the samples space. The interpolation operator $\mathbf{\Phi}$, which transforms the B-spline coefficients in samples values, can be applied using fast digital filtering operations [16] [17] [18], as well as its inverse. Thus the additional computational burden is negligible. The regularization we use is a relaxed total variation prior [14]. The minimization of (10) is performed with a quasi-Newton optimization algorithm: the L-BFGS method [13].

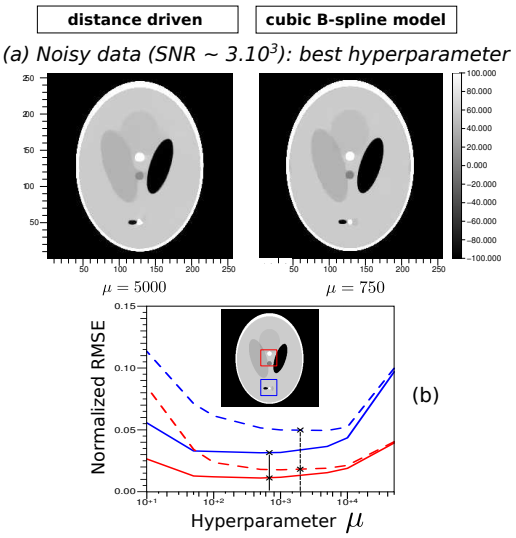


Fig. 2. (a) Reconstructions of a Shepp-Logan phantom 256×256, from a set of 60 projections with 512 detector pixels, with both the B-spline projector using cubic B-splines and the *distance driven* projector. Visualization in Hounsfield units. Reconstructions from noisy data (additional non-stationary Gaussian noise with a signal to noise ratio of about 3000), obtained with the value of μ giving the best visual image quality. (b) Normalized root mean square error in 2 regions of interest (ROI) of the reconstructed image, for various values of the hyperparameter μ (logarithmic scale). The ROIs are indicated on the image, with the corresponding color on the graphs. Solid curves : reconstructions with the B-spline projector. Dashed curves : reconstructions with the *distance driven* projector.

Fig.2 shows some of the previous results obtained in [12]. We had reconstructed a 256×256 Shepp-Logan phantom, from a set of 60 projections with 512 detector pixels, calculated analytically. The sampling rate was the same for both voxels and detector pixels. The reconstructions were performed with both our B-spline based projector, using cubic B-splines, and the *distance driven* projector, for comparison. The data were corrupted by a non-stationary Gaussian noise, with a signal to noise ratio approximately 3000.

Fig.2(a) displays some reconstructed images, obtained in [12]. The best value of the hyperparameter μ is found, which gives the best qualitative visual quality of the reconstructed

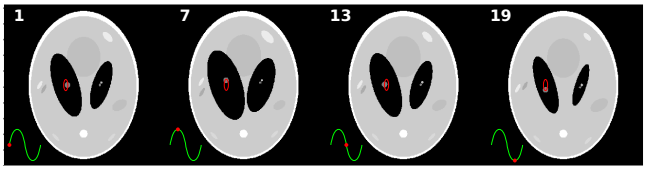


Fig. 3. Dynamic Shepp-Logan phantom 512×512. A 5 seconds period of motion is chosen and 25 frames are extracted. The frames 1, 7, 13 and 19 are represented. The position of each frame's date in the temporal sinusoidal signal is indicated. The red ellipse corresponds to the trajectory of the small circular insert in the left big ellipse distorted over time.

image. Our B-spline based projector leads to a better image quality than *distance driven*, without regularizing a lot. Fig.2(b) shows curves of the normalized root mean square error (RMSE), calculated on 2 regions of interest (ROI) taken on the image, as a function of the hyperparameter μ, using both the B-spline based projector using cubic B-splines (solid curves) and the *distance driven* projector (dashed curves). The curves show that, for each ROI, the B-spline based projector's RMSE is always lower than the *distance driven* projector's RMSE. Thus for this given evaluation metric, our projector shows again the best performances.

IV. Application on simulated 2D dynamic X-ray gated CT

We experiment our projector in the context of dynamic X-ray tomography. More precisely we simulate a 2D case of gated iterative reconstruction of a Shepp-Logan phantom, some ellipses of which see its parameters periodically moving over time (semi-minor or major axis, center's position). Hence the motion of the phantom's ellipses can be either translations or distorsions. The temporal signal associated to the periodic variation of the parameters is a sinus function, that is to say that the speed of motion is not constant over a period. Fig.3 shows frames of the simulated object. Each frame's size is 512×512. The speed of the motion is almost the fastest for frames 1 and 13, and almost the slowest for frames 7 and 19. For instance the trajectory of motion of the small circular insert in the left big ellipse is indicated on Fig.3 for illustration. The position of the frame's date in the temporal sinusoidal signal is also indicated.

The geometry of the acquisition system is the same as in III, but now a period is defined for a whole rotation of the detector around the object. We choose this acquisition time to be equal to 120 seconds. During this period, 600 projections, regularly spaced in time, and on $360°$, are simulated analytically from the state of the object at the corresponding date. The period of motion lasts 5 seconds. As a result 24 periods of motion occur during the acquisition. We want to be in gated mode, so we reconstruct 25 frames of a period of motion of the object, such that a given projection is exactly registered to a given frame. Hence we have 25 frames, each one repeated 24 times during the acquisition, thus associated with 24 projections regularly spaced on $360°$. It is very important to notice that this problem results in reconstructing each frame from very angularly undersampled data.

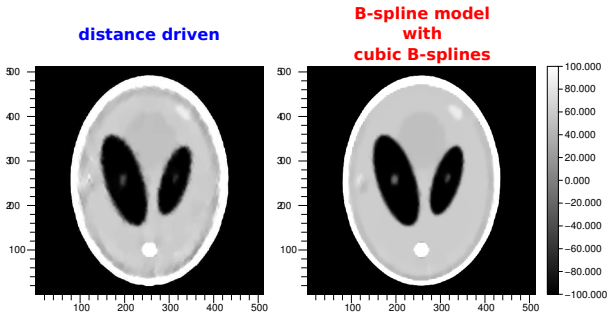


Fig. 4. Frame 13 of the reconstructed gated 128×128 Shepp-Logan sequence, with both the B-spline projector using cubic B-splines (right) and the *distance driven* projector (left). The reconstructed images are re-interpolated on a finer 512×512 grid, using cubic B-spline interpolator.

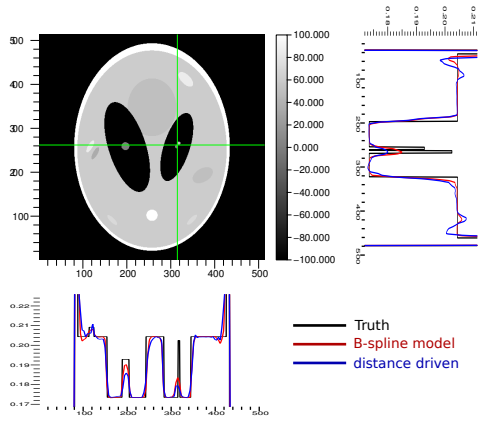


Fig. 5. Horizontal and vertical profiles taken on frame 13 of the reconstructed gated 128×128 Shepp-Logan sequence, with both the B-spline projector using cubic B-splines (right) and the *distance driven* projector (left). The reconstructed images are re-interpolated on a finer 512×512 grid, using cubic B-spline interpolator.

From this set of projections, we perform gated reconstructions of the 25 frames. The reconstruction of this sequence is performed globally, each frame reconstruction following the same optimization scheme as in Eq.10, for the data residuals' part. A global spatio-temporal regularization is performed on the "2D + time" sequence, which consists in the same regularizer used in III, but extended to 3 dimensions to take into account the temporal correlation between frames.

Fig.4 shows preliminary results of reconstructions, with both our B-spline based projector, using cubic B-splines, and the *distance driven* projector, for comparison. We focus our visualization on a single frame, the 13^{th}, at which the speed of the motion is faster. The reconstructed 128×128 images are re-interpolated on a finer 512×512 grid, using a cubic B-spline interpolator, for a better image quality. We can see the better visual quality of the frame reconstructed with our B-spline projector.

Fig.5 shows profiles of the reconstructions shown in Fig.4, for a more precise evaluation. Again the superior ability of our projector to recover finer details is visible.

V. Conclusion and Further Works

We have presented a new type of numerical projector for iterative reconstruction in tomography. It is based on the use of a basis of separable 3D B-splines, which is much more adapted for data modelization than the staircase voxels.

We have demonstrated the better accuracy of our projector based on cubic B-splines, on 2-dimensional regularized iterative reconstructions, from simulated data, using a small number of projections, compared with the *distance driven* projector.

We also have studied its behaviour in the context of dynamic gated X-ray tomography. The fact that the temporal dimension has to be included in the reconstructed image, i.e. it becomes a "2D + time" image, reduces drastically the number of projections available for a given temporal frame. Preliminary results have again shown that the accuracy of the projector is a key point to deal with this lack of data in the reconstruction process, and to make the best use of available information.

References

[1] B. DeMan and S. Basu. *Distance driven projection and backprojection in three dimensions*. Physics in Medicine and Biology, 2004, 49, p2463-2475.

[2] J.A. Fessler. *Iterative methods for image reconstruction*. IEEE International Symposium on Biomedical Imaging Tutorial, Arlington Virginia, 2006.

[3] Y. Long, J.A. Fessler and J.M. Balter. *3D Forward and Back-Projection for X-Ray CT Using Separable Footprints*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2010, 29, p1839-1850.

[4] S. Horbelt, M. Liebling and M. Unser. *Discretization of the Radon transform and of its inverse by spline convolutions*. IEEE Transactions on medical imaging, 2002, 21, p363-376.

[5] P.M. Joseph. *An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982, 1, p192-196.

[6] M. Slaney and A. Kak. *Principles of computerized tomographic imaging*. SIAM, Philadelphia, 1988.

[7] R.M. Lewitt. *Multidimensional digital image representations using generalized Kaiser-Bessel window functions*. JOSA A, 1990, 7, p1834-1846.

[8] R.M. Lewitt. *Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms*. Physics in Medicine and Biology, 1992, 37, p705-716.

[9] S. Matej and R.M. Lewitt. *Image representation and tomographic reconstruction using spherically symmetric volume elements*. IEEE Medical Imaging Conference Record, 1992, p1191-1193.

[10] S. Matej and R.M. Lewitt. *Efficient 3D grids for image reconstruction using spherically-symmetric volume elements*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1995, 42, p1361-1370.

[11] S. Matej and R.M. Lewitt. *Practical considerations for 3D image reconstruction using spherically symmetric volume elements*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1996, 15, p68-78.

[12] F. Momey, L. Denis, C. Mennessier, É. Thiébaut, J.M. Becker and L. Desbat. *A new representation and projection model for tomography, based on separable B-splines*. IEEE Medical Imaging Conference Record, 2011, p2602-2609.

[13] J. Nocedal. *Updating quasi-Newton matrices with limited storage*. Mathematics of computation, 1980, 35, p773-782.

[14] L.I. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60, p259-268.

[15] P. Thévenaz, T. Blu and M. Unser. *Interpolation Revisited*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2000, 19, p739-758.

[16] M. Unser., A. Aldroubi and M. Eden. *B-spline signal processing: Part I-Theory*. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41, p821-833.

[17] M. Unser., A. Aldroubi and M. Eden. *B-spline signal processing: Part II-Efficient design and applications*. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41, p834-848.

[18] M. Unser. *Splines: A perfect fit for signal and image processing*. IEEE Signal Processing Mag., 1999, 16, p22-38.

[19] M. Unser. *Sampling-50 years after Shannon*. Proceedings of the IEEE, 2000, 88, p569-587.

A new representation and projection model for tomography, based on separable B-splines

Fabien Momey, Loïc Denis, Catherine Mennessier, Éric Thiébaut, Jean-Marie Becker, Laurent Desbat

***Abstract*—Data modelization in tomography is a key point for iterative reconstruction. The design of the projector, i.e. the numerical model of projection, is mostly influenced by the representation of the object of interest, decomposed on a discrete basis of functions.**

Standard projector models are *voxel* or *ray driven*; more advanced models such as *distance driven*, use simple staircase voxels, giving rise to modelization errors due to their anisotropic behaviour. Moreover approximations made at the projection step amplify these errors. Though a more accurate projection could reduce approximation errors, characteristic functions of staircase voxels constitute a too coarse basis for representing a continuous function. As a result, pure modelization errors still hold. Spherically symmetric volume elements (blobs) have already been studied to eradicate such errors, but at the cost of increased complexity, because they require some tuning parameters for adapting them to this use.

We propose to use 3D B-splines, which are piecewise polynomials, as basis functions. When the degree of these polynomials is sufficiently high, they are very close from being with a spherical symmetry, i.e. blobs, avoiding projection inconsistencies, while keeping local influence and separability property. B-splines are considered, in sampling theory, as the almost optimal functions for the discretization of a continuous signal, not necessarily band-limited, potentially allowing to reduce the angular sampling of the data without any loss of quality.

We show that the projection of B-splines can be approximated rather accurately by a separable function, independent from the angle of projection, easier to integrate on detector pixels. The higher the degree of the used B-splines, the better the quality of the approximation, but also the larger the number of required operations. Thanks to these approximations, a convenient trade-off between the need of accuracy and a fast calculation can be obtained. This has resulted in the implementation of a more accurate numerical projector, which can deal with a reduced angular sampling without loss of performance. The additional computation cost is also efficiently reduced. We have studied the quality of enhancement involved by this projector on 2D iterative reconstructions of a Shepp-Logan phantom, from a small number of fan beam projections. Reconstructions have been performed by optimization methods, minimizing the squared data residuals with a regularization term, using an efficient Quasi-Newton optimization algorithm.

Manuscript received November 22, 2011. This work was supported by the MiTiV project (Méthodes Inverses pour le Traitement en Imagerie du Vivant), funded by the French ANR (N° ANR-09-EMER-008).

Fabien Momey is with the Centre de Recherche Astrophysique de Lyon - Observatoire de Lyon, Lyon, France, and with the Laboratoire Hubert Curien, Université Jean Monnet, Saint-Étienne, France (telephone: +33 478 868 546, e-mail: author fabien.momey@univ-lyon1.fr).

Loïc Denis is with the Laboratoire Hubert Curien, and has just left the Centre de Recherche Astrophysique de Lyon - Observatoire de Lyon.

Catherine Mennessier is with the Laboratoire Hubert Curien, and with the engineer school CPE, Lyon, France.

Éric Thiébaut is with the Centre de Recherche Astrophysique de Lyon - Observatoire de Lyon.

Jean-Marie Becker is with the Laboratoire Hubert Curien, and with CPE Lyon.

Laurent Desbat is with the TIMC-IMAG, Grenoble, France.

I. Introduction

ITERATIVE reconstruction methods for tomography have long proven their potential to enhance reconstruction quality, compared to the filtered backprojection (FBP) [2]. The drawback of iterative methods is their expensive computation time. Due to very low signal-to-noise ratio in PET/SPECT imaging, iterative methods are preferred because they allow a better modelization of the underlying physics and counting statistic of positron annihilations. However FBP is still the method of choice in X-ray computed tomography. Ongoing researches on algorithms and recent enhancements in computational power, such as multi-core processor units or GPU-based implementation facilities, call for a re-evaluation of the potential of iterative reconstruction in this domain.

Such methods require a numerical modelization of the data acquisition process: the so-called *projector*. It is used for the reprojection of the current estimate of the image to be reconstructed, and compared with the true data at each iteration step. A backprojection operator is also needed, which is the transpose of this projector. This numerical model has to reproduce as accurately as possible the physical process of data acquisition, based on the mathematical principle of the X-ray transform (Radon transform in 2D), while not increasing the computational burden.

The representation of the object of interest (image) is the starting point of the projector. The real nature of this image is a continuous signal, discretized for numerical purposes. Mathematically, it is assimilated to a continuous function decomposed on a discrete basis of functions. The choice of this basis is essential for an accurate representation of the true function. Standard models such as *voxel driven* or *ray driven* [5] are based on raw samples, linearly interpolated at the projection step, either in the image space or in the data space, yielding strong modelization errors and artifacts on the reconstructed image. Hence the quality of the modelization strongly depends on the sampling rate. More advanced models, such as the recent *distance driven* [1] projector, take a better account of the continuity of the image by using staircase voxels. These functions, uniform on their cubic support, are entirely projected on the detector plane. Their projection is calculated as the length of overlap of the projected support with the impinged detector pixels. Each voxel impinges at least one detector pixel for a given projection, and vice versa for the related backprojection. However such a basis of functions

provides a coarse representation of the image. This kind of basis has an anisotropic behaviour, causing large modelization errors in the projector, and thus in the reconstruction step. Moreover, for implementation purposes, the projection of the staircase voxel, in the *distance driven* model, is approximated, increasing its modelization errors. In [3], a more accurate projection of the staircase voxel reduces these approximation errors, but errors due to this unadequate basis still hold. Such issues can be dealt with another type of basis functions, already considered: the spherically symmetric volume elements, mostly known as blobs [7] [8] [9] [10] [11]. Thanks to their sphericity property, the projection of such functions is totally isotropic (at least in parallel beam geometry), yielding a better modelization of the projection process. The most usual blobs are the Kaiser-Bessel functions. However, they require the tuning of many parameters to be used as a suitable basis for the representation of a continuous function. An apodization is necessary because their support is not compact, and optimal parameters have to be found to satisfy the partition of unity. A projector based on these blob representations is complex to handle.

We propose the use of B-splines as an alternative to both staircase voxel and blob approaches. B-splines are well known piecewise polynomial functions, and are characterized by the degree of their constituting polynomials. Recent works in sampling theory [17] [18] [14] have shown a large interest when such functions are used as a basis of representation of a continuous signal as a discrete sequence of coefficients, with a good recovering accuracy. Thus B-splines involve some of the best approximation order as their degree increases. The staircase voxel being in fact a B-spline of degree 0, we turn to B-splines of higher degree. Increasing their degree makes them more and more similar to the 3D Gaussian functions, with a quasi-isotropic behaviour, approximating quite well blobs main feature, while keeping local influence and separability property. All these properties indicate that B-splines would constitute a smart basis for image representation and projection modelization in tomography. This has already been done in [4] for 2D FBP reconstruction in parallel beam geometry, giving us clues to develop a new efficient numerical projector for iterative reconstruction. Moreover [4] shows that it is possible to reduce the angular sampling of projections without any loss of quality. We claim that it is also one of the most important improvements we might get with our B-spline-based projector approach.

The core of our projector lies in the way a tridimensional separable B-spline is projected on the detector plane. The exact projection, called *footprint* in the following, is approximated by a separable function on the detector, independently of the angle of projection, yielding an easier and faster integration on detector pixels. In section II, we detail some features of the basis of B-splines, then we present the principle of our projector, explaining our approximations and comparing them with the *distance driven* projector. In section III we present our iterative reconstruction scheme and show some results of 2D reconstructions, in fan beam geometry, of a Shepp-Logan phantom, with noiseless and noisy data, and from a few number of projections.

II. Materials and Methods

A. General formalism of image representation

Let $f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$, with $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, be the n-dimensional continuous function modelizing the true image to be reconstructed. Let $\tilde{f} : \boldsymbol{x} \mapsto \tilde{f}(\boldsymbol{x})$ be its approximate decomposition on a discrete basis of functions:

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}\varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_k}) \qquad (1)$$

where this discrete shift-invariant basis is assumed to be composed of the compact atom function $\varphi(\boldsymbol{x})$, regularly spaced on a n-dimensional grid of N samples. $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Z}^n$ corresponds to indexes of the N samples of the discrete grid in the n-dimensional space, $\boldsymbol{x_k} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ are the coordinates of this discrete grid.

The function $\tilde{f}$ is an approximation of f, where the $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}$ coefficients must be determined so that the approximation error is minimal. Thus $\tilde{f}$ defines a continuous function from a discrete sequence of coefficients $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}$. For numerical purposes, $\tilde{f}$ is described as a vector of its N coefficients:

$$\mathbf{c} = (\mathrm{c}_{\mathbf{1}}, \mathrm{c}_{\mathbf{2}}, \ldots, \mathrm{c}_{\boldsymbol{N}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

Even though the basis functions $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ have a compact support, they can spread over the neighboring samples (this is the case for B-splines of degree higher than 1). Thus, because $\varphi_{\boldsymbol{k}}(x) \geq 0$, the coefficients $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}$ do not correspond to the samples values $\mathrm{f}_{\boldsymbol{k}} = \tilde{f}(\boldsymbol{x_k})$:

$$\mathbf{f} = (\mathrm{f}_{\mathbf{1}}, \mathrm{f}_{\mathbf{2}}, \ldots, \mathrm{f}_{\boldsymbol{N}})^{\mathrm{T}} \ , \quad \text{with } \mathrm{f}_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k'}\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k'}}\varphi_{\boldsymbol{k'}}(\boldsymbol{x_k}) \qquad (3)$$

Eq.(3) can be expressed as a matrix operator:

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{c} \qquad (4)$$

where $\mathbf{\Phi}$ is, for the case of B-splines, the spline interpolation operator. Instead of solving a system of linear equations, there exists a very fast way to apply and to invert it, based on digital filtering [15] [16] [17]. Hence it is very easy to deal with either $\mathbf{c}$ or $\mathbf{f}$ in the reconstruction process, since the transformation from one space to another is simple to handle.

The choice of the atom function φ of the basis is essential for warranting consistency with the image intrinsic continuity. It will be a key point for the design of the projector which has to modelize accurately the data. Desired properties are:

1. A good modelization of the continuity of the function, while preserving sharp edges: this property can be related to the approximation order of the basis;
2. A compact support, leading to a sparse projector;
3. Separability, allowing factorization of involved expressions, thus lowering the computational burden;
4. Robustness of the basis of functions with respect to artifacts generated by geometric transformations (rotation, registration, resampling);
5. Spherical symmetry for isotropic projection.

B. B-splines as basis functions

Splines with degree d are piecewise polynomial functions with degree at most d, continuously differentiable up to order $d-1$. Any spline can be written as a unique linear combination of regularly shifted *atom* piecewise polynomial functions. These atom functions are called B-splines [17].
Let

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

be the rectangular pulse. Let us now denote by β^d a B-spline of degree d, constructed by $d+1$ convolutions of β^0, corresponding to the generic member of this family of functions.

$$\beta^d(x) = \underbrace{\beta^0 * \cdots * \beta^0}_{d+1 \text{ terms}}(x) \tag{5}$$

This is the atom we are going to consider. With this notation, a spline of degree d can be written as follows:

$$s(x) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \ \delta(x - x_k) \right) * \beta^d(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \ \beta^d(x - x_k) \tag{6}$$

where δ is the Dirac distribution. Hence going back to the formulation of the image representation in (1), we choose B-splines as our basis of functions φ, leading to:

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{c}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\beta}^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_k}) \tag{7}$$

where $\boldsymbol{\beta}^d$ is a n-dimensional B-spline of degree d, separable on each component of $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{\beta}^d(\boldsymbol{x}) = \prod_{l=1}^{n} \beta^d(x_l).$$

$\tilde{f}$ is thus a n-dimensional spline approximating the true function f. In spline sampling theory [17], the $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}$ coefficients are chosen so that the approximation error $||f - \tilde{f}||_{L_2}$ is minimal, in the sense of L_2 norm. That is to say that $\tilde{f}$ is the orthogonal projection of f on the space of splines of degree d, the functions $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$ being a basis of this space. As a result the $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}$ are deduced from the L_2 inner product of f with the dual of each shifted basis function $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$, denoted $\mathring{\boldsymbol{\beta}}^d_{\boldsymbol{k}}$:

$$\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}} = \langle f(\boldsymbol{x}), \mathring{\boldsymbol{\beta}}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \rangle$$

Stated otherwise, the $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}}$ are the components of $\tilde{f}$ in the space defined by the basis of functions $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$.

For a 1-dimensional function, the error of approximation is $O(\Delta^L)$, where $L = d + 1$ is the order of approximation and Δ is the sampling step [17] [18] [14]. Hence using B-splines of higher degree decreases the approximation error, and potentially induces a reduction of the sampling step for a given tolerance.

As already mentioned in section I, classical basis functions used by some existing projectors are the simple staircase voxels, in other words B-splines of degree 0. This is the case for the *distance driven* projector [1]. These functions are advantageous for being the most compact B-splines, easy to manipulate, with no spreading over the neighboring samples of the grid (as for the B-splines of degree 1). As a result we have $\mathbf{f} = \mathbf{c}$ in this case. Besides, staircase voxels suffer from a high anisotropic behaviour. In addition to their low approximation order, they constitute a too coarse basis of representation of a continuous object, leading to large modelization errors. A finer sampling rate lowers these errors, but at the cost of an increased computational burden.

The main goal of this paper is to show that the accuracy of the model can be improved using B-splines of higher degree. Indeed, B-splines being $d+1$-fold convolutions of a rectangular pulse, they are close to a Gaussian function when their degree d is large, according to the central limit theorem. Thus they tend to spherically symmetric function, while preserving a local support. As a result we can deal with quasi-isotropic functions, at the expense of only a slight spreading of the support of these functions. We also get a better approximation order. These two properties are related by the fact that B-splines are the shortest and smoothest scaling functions for a given order of approximation [18]. Moreover, the cubic (degree 3) B-splines are members of the family of Moms functions (Maximum order minimum support), giving them a kind of optimality in this context [18].

The use of blobs, for instance the Kaiser-Bessel functions, has also improved the quality of image modelization, due to their isotropic behaviour [7] [8] [9] [10] [11], giving a more accurate projection on the detector. However, as stated in section I, they have to be tuned to comply with sampling theory, for example the partition of unity. Thus many parameters need to be adjusted to approach optimal performances. Moreover, because these functions are not separable, the computation of a blob-based projector is more expensive, or needs approximations to accelerate the calculation. These observations have convinced us that this basis is too complex and therefore is not adapted enough to our problem, unlike B-splines. However the comparison of our approach with blobs is not in the scope of this paper, and we are aware that a thorough study is necessary before concluding this subject.

C. Projector

We consider a general tridimensional system (see Fig.1) where the object of interest is included in a 3D cartesian frame, with coordinates $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. The regular sampling grid of the object is therefore identified by the samples positions $\boldsymbol{x_k}$, corresponding also to the center of each basis function $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$. Then we consider a flat detector, linked with another 2D cartesian frame, with coordinates $\boldsymbol{u} = (u, v)$. The detector acquires the projection with a given orientation denoted θ. The direction of a ray, starting from the X-ray source S, orthogonal to the detector plane is identified by the vector $\vec{w}$. The position of S and the vector $\vec{w}$ are directly related to the orientation θ. Let $\mathbf{f}$ be the vector of samples values of the image. The numerical data modelization at orientation θ is:

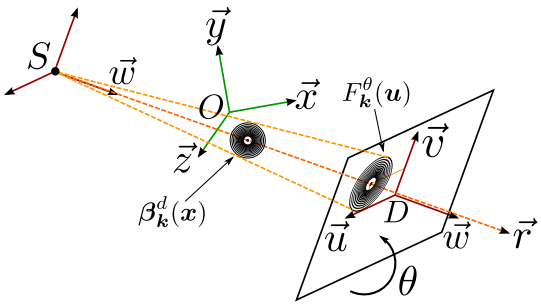


Fig. 1. Cone beam projection scheme of a basis function $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$ on the detector. θ denotes the orientation of the detector. The direction of the ray, starting from the source $S(\theta)$, orthogonal to the detector plane is identified by the vector $\vec{w}(\theta)$. The direction of the ray passing through the central position $\boldsymbol{x_k} = (x, y, z)$ of $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$ is identified by the vector $\vec{r}$. The footprint of $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$ is named $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$.

$$\mathbf{g}^\theta = \mathbf{R}^\theta \cdot \mathbf{c} = \mathbf{R}^\theta \cdot \left(\mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{f}\right) \tag{8}$$

where $\mathbf{R}^\theta$ is the projector and $\mathbf{g}^\theta$ is the resulting projection. Coefficient $\mathbf{R}^\theta_{qk}$ of the matrix $\mathbf{R}^\theta$ is the contribution of the voxel function k on the detector pixel q. Thus the value g^θ_q of the q^{th} data element is:

$$\mathrm{g}^\theta_q = \sum_{k \in \Omega^\theta_q} \mathbf{R}^\theta_{qk} \cdot \mathrm{c}_k \tag{9}$$

where Ω^θ_q is the set of voxels k impinging the θ-oriented detector pixel q. Let $P_q : \boldsymbol{u} \mapsto P_q(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\beta}^0(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_q)$ be the q^{th} detector pixel response, assumed to be a 2D rectangular pulse, centered at position $\boldsymbol{u}_q$. This response is shift-invariant over each detector pixel. Thus:

$$\mathbf{R}^\theta_{qk} = \int\int F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \cdot P_q(\boldsymbol{u})\ d\boldsymbol{u} \tag{10}$$

$F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ is the footprint of the basis function $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$. It is nothing else than the X-ray transform of this function on the θ-oriented detector, along each ray trajectory $\{S(\theta), \vec{r}(\theta, \boldsymbol{u})\}$ crossing it, and impacting the detector plane at the position $\boldsymbol{u}$ (see Fig.1).

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{x} \in \{S(\theta), \vec{r}(\theta, \boldsymbol{u})\}} \boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} \tag{11}$$

A given projector $\mathbf{R}^\theta$ determines the expression of this footprint $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$. Obviously, $F^\theta_{\boldsymbol{k}}$ depends on the chosen basis of functions. Moreover some approximations are often made in the calculation of this footprint and its contribution to detector pixels, in order to lower the computation cost.

Based on staircase voxels, the *distance driven* projector [1] first considers a plane on which both detector pixels bounds, and the central section of the voxel mostly parallel to this plane, are projected. Then it approximates the footprints with rectangles covering at best the real footprints. Thirdly it determines the overlapping areas of the voxel footprint on the impinged detector pixels footprints. Finally these footprints are used to weight the voxel value, and calculate the contribution of the voxel to each impinged detector pixel.

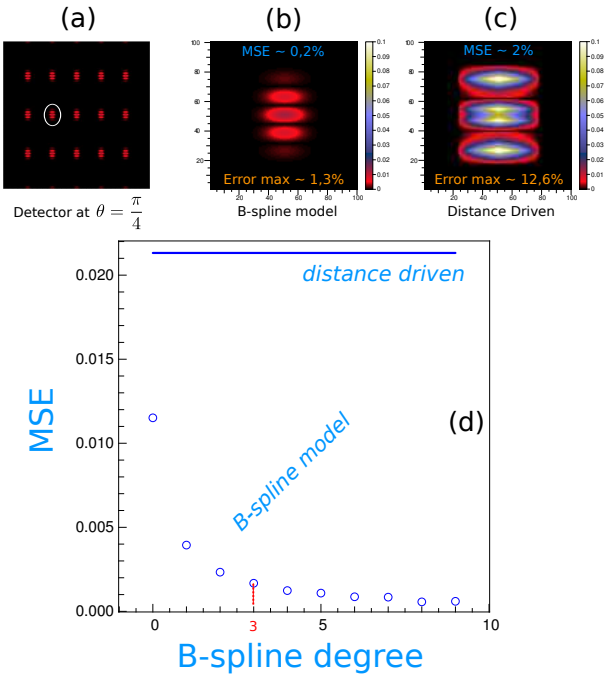


Fig. 2. Comparison of approximation errors for footprints, in parallel beam geometry, for our projector using cubic B-spline, and for the *distance driven* projector. The detector is in simple rotation around the $\vec{z}$-axis. The worst case orientation of the detector is considered (here it is tilted with an angle of $45°$ from the horizontal plane). On (a), (b) and (c), the absolute value of the difference between the true footprint and the model-approximated footprints is represented. Footprints are convolved by the detector pixel response. (a) Illustration of footprints on the detector. (b) B-spline projector with cubic B-splines. (c) *Distance driven* projector (staircase voxels). (d) shows the evolution of the mean square error as a function of the B-spline degree.

Our approach uses the quasi-isotropy property of B-splines of higher degree, stated in section II-A, to suppose that the footprint is identical whatever the orientation θ. As a result, we first state that the footprint of $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$, in parallel beam geometry ($\vec{r}(\theta, \boldsymbol{u}) = \vec{w}(\theta),\ \forall \boldsymbol{u}$), is a $n-1$-dimensional B-spline of degree d, separable over the detector axis. For the 3D case, this gives:

$$F^\theta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \beta^d(u - u_k) \cdot \beta^d(v - v_k) \tag{12}$$

where $(u_k, v_k) = \boldsymbol{u_k}$ is the position, on the detector, of the projection of the center $\boldsymbol{x_k}$ of $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$. The expression (12) is exact when the direction of parallel beam projection $\vec{w}(\theta)$ is equal to one of the axis directions $\vec{x}$, $\vec{y}$ or $\vec{z}$; it is the reason why we extend it to all other directions. It also justifies the use of the same spline degree d for the projection (before convolution by the detector pixel response).

Fig.2 displays a quantification of the worst case errors caused by our approximations using cubic B-splines, compared with the *distance driven* projector's errors, in parallel beam geometry. Our projector proves its better accuracy, while *distance driven*'s approximations look coarser. It also evidences the large decrease of approximation errors, as the B-spline degree increases, as said before. Because a higher degree also means a wider support, the curve Fig.2(d) shows that the use of cubic B-splines is a very good tradeoff between accuracy and compacity.

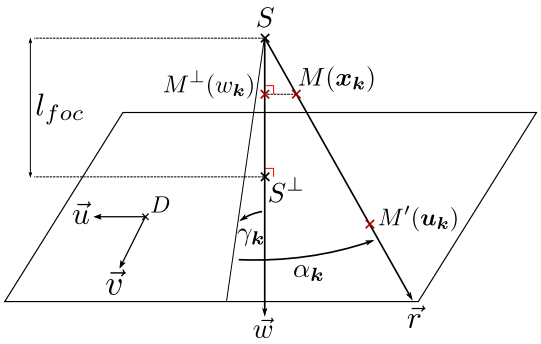


Fig. 3. Scaling parameters in cone beam geometry. l_{foc} is the focal length of the system (distance between the source point S and and its orthogonal projection $S^{\perp}$ on the detector). $M(\boldsymbol{x_k})$ is the center of the basis function $\boldsymbol{\beta}^d_{\boldsymbol{k}}$. Its cone beam projection on the detector is the point $M'(\boldsymbol{u_k})$. $M^{\perp}(w_{\boldsymbol{k}})$ is the orthogonal projection of M on the straight line $\{S, \vec{w}\}$. Its position $w_{\boldsymbol{k}}$ is used to determine the magnification factor Γ^{θ}_{S}. $\alpha_{\boldsymbol{k}}$ and $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ are the cone beam deviation angles related respectively to directions $\vec{u}$ and $\vec{v}$.

In the case of cone beam geometry, the magnification effect has to be taken into account, as well as the distorsion effect depending on the position of the voxel in the field of view (see Fig.3). In order to keep the separability property of the footprint on the detector, these effects are compensated with adapted scaling factors applied to the footprint in (12). For the 3D case, this gives:

$$F^{\theta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \beta^d\left(\frac{u}{\Gamma^{\theta}_{S}\cdot\delta_{u_{\boldsymbol{k}}}} - u_{\boldsymbol{k}}\right)\cdot\beta^d\left(\frac{v}{\Gamma^{\theta}_{S}\cdot\delta_{v_{\boldsymbol{k}}}} - v_{\boldsymbol{k}}\right) \quad (13)$$

with (see Fig.3):

$$\Gamma^{\theta}_{S} = \frac{l_{foc}}{w_{\boldsymbol{k}}}\ , \quad \delta_{u_{\boldsymbol{k}}} = \frac{1}{\cos\alpha_{\boldsymbol{k}}}\ , \quad \delta_{v_{\boldsymbol{k}}} = \frac{1}{\cos\gamma_{\boldsymbol{k}}} \quad (14)$$

Γ^{θ}_{S} is the magnification factor; δ_{u_k} et δ_{v_k} are the distorsion factors.

Fig.4 shows a quantification of the worst case errors due to our approximations using cubic B-splines, compared with the *distance driven* projector's errors, in cone beam geometry. Errors are enhanced due to approximations made to deal with the geometric effects. However, it brings a confirmation that our projector is more accurate than *distance driven*.

Therefore our projector involves much less modelization and approximation errors than the *distance driven* projector. Its only drawback is the increased number of operations necessary to calculate the data values g^{θ}_{q} (9), due to the larger footprint of a given voxel. However, cubic B-splines yield sufficient accuracy, inducing a support only 4 times larger than that of the staircase voxel. Let us give the example of a system where the voxels and detector pixels sampling rates are approximately equal. Then let us consider a B-spline of degree d. Its support is $s = d+1$ in each direction; thus its footprint impinges approximately $(s+1)^2 = (d+2)^2$ detector pixels. Thus if we compare a cubic voxel ($d = 0$) with a cubic B-spline ($d = 3$), the number of impinged detector pixels for a given voxel, is now multiplied by 6.25 with respect to a cubic voxel based projector such as *distance driven*. Thus the amount of accuracy is at reasonable increasing computation

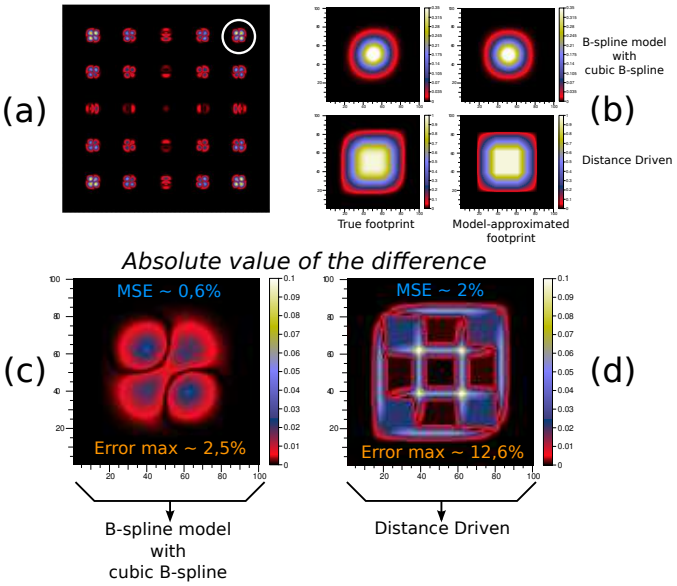


Fig. 4. Comparison of approximation errors of the footprints, in cone beam geometry, for our projector with cubic B-spline, and for the *distance driven* projector. The detector is in simple rotation around the $\vec{z}$-axis. The worst case orientation of the detector is considered (here it is tilted with an angle of 0° from the horizontal plane). On (a), (c) and (d), the absolute value of the difference between the true footprint and the model-approximated footprints is visualized. Footprints are convolved by the detector pixel response. (a) Illustration of footprints on the detector. (b) shows, for each projector, the true footprint and the model-approximated footprint. (c) B-spline projector with cubic B-splines. (d) *Distance driven* projector (staircase voxels).

cost. Moreover our projection scheme, as well as the staircase voxel based approaches, is highly parallelizable, making the computational burden issue possible to address.

The next section will study the gain of our B-spline based projector, when applied to an iterative reconstruction process where only a small number of projections is available.

III. Results on 2D fan beam reconstructions

A linear detector, linked to the source in the same frame, is considered. The set source-detector rotates around the 2-dimensional object of interest, acquiring the projections in a fan beam geometry. The B-spline coefficients of the image $\mathbf{c}$, is reconstructed from the set of projections $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}^{\theta} | \theta \in \Theta\}$, where Θ is the set of projection angles, by minimization of:

$$\mathbf{c} = \underset{\hat{\mathbf{c}}}{argmin} \underbrace{\sum_{\theta\in\Theta} ||\mathbf{g}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta}\cdot\hat{\mathbf{c}}||^2_{\mathbf{W}}}_{\text{data residuals}} + \underbrace{\mu\cdot\Psi(\mathbf{\Phi}\cdot\hat{\mathbf{c}})}_{\text{regularization term}} \quad (15)$$

$$(16)$$

$$= \underset{\hat{\mathbf{c}}}{argmin} \sum_{\theta\in\Theta} \left(\mathbf{g}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta}\cdot\hat{\mathbf{c}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{W}\left(\mathbf{g}^{\theta} - \mathbf{R}^{\theta}\cdot\hat{\mathbf{c}}\right) + \mu\cdot\Psi(\mathbf{\Phi}\cdot\hat{\mathbf{c}}) \quad (17)$$

where $||\cdot||^2_{\mathbf{W}}$ corresponds to the weighted least squares term. The weighting matrix $\mathbf{W}$ is the inverse of the noise covariance. This matrix is diagonal because we assume the noise to be uncorrelated. $\Psi : \mathbf{f} \mapsto \Psi(\mathbf{f})$ is a regularization operator applied to the image in the samples space. As stated in (4),

the interpolation operator $\mathbf{\Phi}$, which transforms the B-spline coefficients in samples values, can be applied using fast digital filtering operations [15] [16] [17], as well as its inverse. Thus the additional computational burden is negligible.

Here we use a relaxed total variation prior [13]:

$$\Psi(\mathbf{f}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{f}_{\boldsymbol{k}}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{f}_{\boldsymbol{k}}}{\partial y}\right)^2 + \epsilon^2} \qquad (18)$$

The minimization of (15) is performed with a quasi-Newton optimization algorithm: the limited memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (L-BFGS) method [12]. From the reconstructed B-spline coefficients $\mathbf{c}$, we obtain the reconstructed image $\mathbf{f}$ by simply applying the operator $\mathbf{\Phi}$, to get back in the samples space.

We have reconstructed a 256×256 Shepp-Logan phantom, from a set of 60 projections with 512 detector pixels, calculated analytically. The sampling rate is the same for both voxels and detector pixels. The reconstructions are performed with both our B-spline based projector, using cubic B-splines, and the *distance driven* projector, for comparison. The presented reconstructions are obtained from noiseless data first, then from data corrupted by a non-stationary Gaussian noise, with a signal to noise ratio approximately 3000. Different values of the hyperparameter μ have been taken in order to look at the effect of the regularization.

Fig.5 displays some reconstructed images. It first illustrates, for reconstructions from noiseless data Fig.5(a), the evolution of the tradeoff between the smoothness of the image and the recovering of details, as a function of the hyperparameter μ. The lower its value, the less smooth the reconstructed image, but at the cost of increasing artifacts, due the lack of projections (ill-posedness of the inverse problem). However our B-spline based projector looks more robust, at decreasing hyperparameter, than *distance driven*. Then, still for noiseless data Fig.5(b), the best value of the hyperparameter μ is found, which gives the best qualitative visual quality of the reconstructed image. The criterion is that the image recovers at best the most details, while being sufficiently smooth to avoid noticeable artifacts. Once again, our B-spline based projector leads to a much better image quality than *distance driven*. The same conclusion can be made in Fig.5(c) with best reconstructions obtained from noisy data, even though a loss of quality is visible with both projectors.

For the noiseless case, the value of the hyperparameter is lower for the B-spline based projector than for the *distance driven* projector. Hence, the regularization weight being smaller with our method, the data residuals term (15) of the reconstructed image has converged to a lower value. Indeed the convergence of the reconstruction algorithm is a tradeoff between data residuals and prior (regularization). Thus less regularizing allows the solution to converge closer to accordance with the data. The same data residuals can be obtained with *distance driven*; the corresponding reconstructed image is visualized in (a) for $\mu = 0.00001$. Two conclusions can be made from this analysis:

• A lower regularization is needed by the B-spline based projector, to obtain the best image quality, than the *distance*

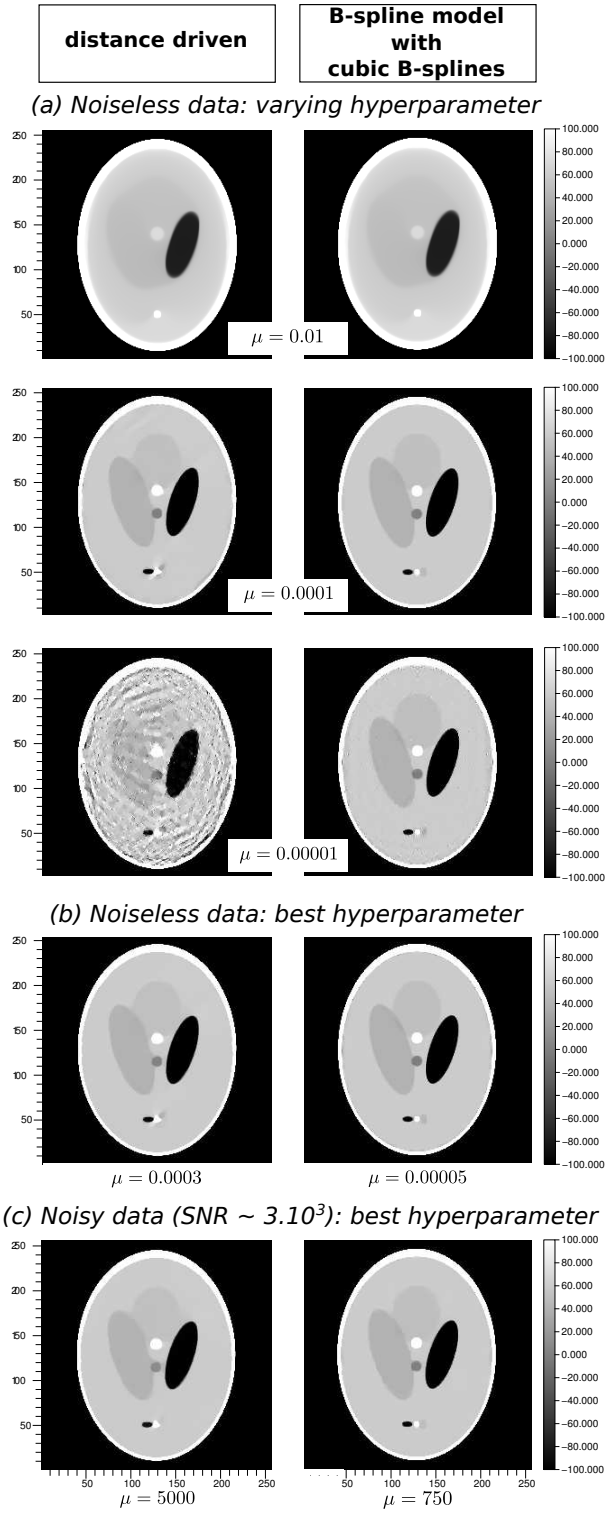


Fig. 5. Reconstructions of a Shepp-Logan phantom 256×256, from a set of 60 projections with 512 detector pixels, with both the B-spline projector using cubic B-splines and the *distance driven* projector. Visualization in Hounsfield units. (a) Reconstructions from noiseless data, and for several values of the hyperparameter μ. (b) Reconstructions from noiseless data, obtained with the value of μ giving the best visual image quality. (c) Reconstructions from noisy data (additional non-stationary Gaussian noise with a signal to noise ratio of about 3000), obtained with the value of μ giving the best visual image quality.

driven projector.

• For the same accordance with the noiseless data, the B-spline based projector generates a much better image quality than the *distance driven* projector.

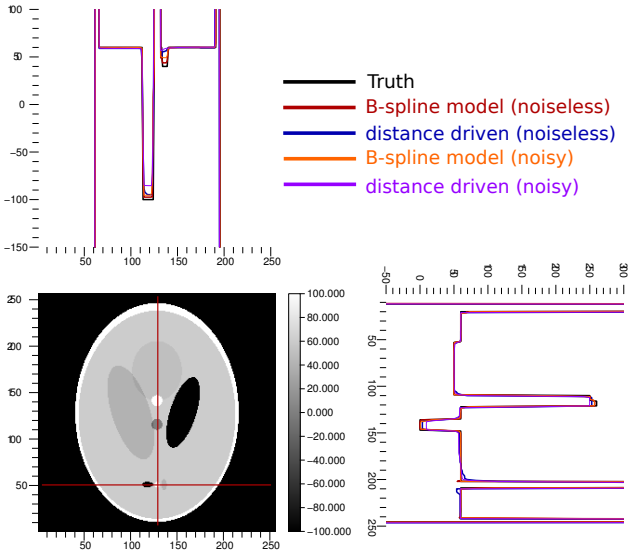


Fig. 6. Profiles of the best reconstructions in Fig.5, from noiseless and noisy data. The cut lines are indicated on the image. In black: the true image. In red: B-spline model from noiseless data. In blue: *distance driven* from noiseless data. In orange: B-spline model from noisy data. In purple: *distance driven* from noisy data.

Fig.6 confirms the analysis of Fig.5 for the best reconstructed images, from noiseless and noisy data, showing some cut lines of the image. It illustrates the recovering of details, compared with the true image, and proves the better accuracy of our B-spline based projector, with and without noise. We can see, for instance, on the horizontal profile, that the less contrasted of the three small ellipses cut by the line is not recovered when using the *distance driven* projector, while the use of the B-spline based projector allows to detect it.

Fig.7 shows quantitative results on the reconstructions. The root mean square error (RMSE) has been calculated on 2 regions of interest (ROI) taken on the image. RMSE has then been normalized by the average of the ROI in the true image. The curves Fig.7(a) and Fig.7(b) present the evolution of the RMSE in the 2 ROIs (a given color corresponds to a given ROI), as a function of the hyperparameter μ, for images reconstructed from noiseless (Fig.7(a)) and noisy (Fig.7(b)) data, using both the B-spline based projector using cubic B-splines (solid curves) and the *distance driven* projector (dashed curves).

First, the convex shape of each curve illustrates the necessity of precisely tuning μ to get a good reconstruction which suits the truth and does not increase errors. From these curves, it is possible to approximately find the best hyperparameter determined in Fig.5, taking their minimum. It shows that the RMSE, calculated on well chosen ROIs, seems to be an appropriate metric to evaluate the quality of a reconstructed image.

Secondly, the curves show that, for each ROI, the B-spline based projector's RMSE is always lower than the *distance driven* projector's RMSE. Thus for this given evaluation metric, our projector shows again the best performances.

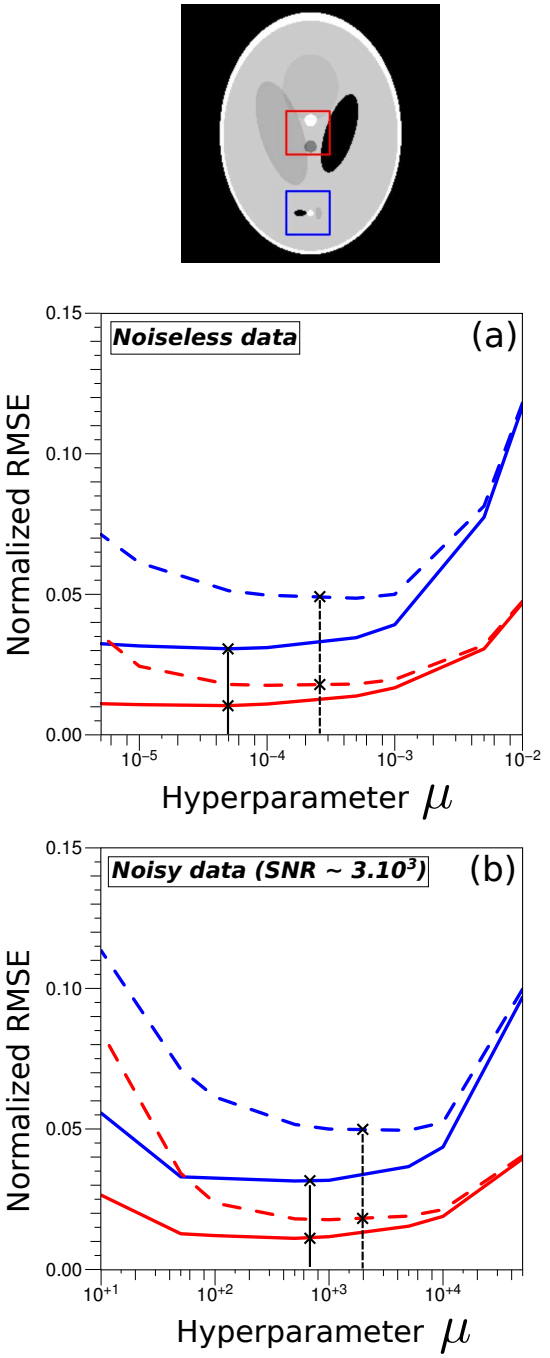


Fig. 7. Root mean square error in 2 regions of interest (ROI) of the reconstructed image, normalized by the average of the ROI, for various values of the hyperparameter μ (logarithmic scale). The ROIs are indicated on the image, with the corresponding color on the graphs. (a) Noiseless data. (b) Noisy data with SNR $\approx$ 3000. The solid curves correspond to reconstructions with the B-spline projector, and the dashed curves correspond to reconstructions with the *distance driven* projector.

IV. Conclusion

In this paper, we have presented a new type of numerical projector for iterative reconstruction in tomography. The pro-

jector is the numerical modelization of data acquisition; it is based on the mathematical principle of the X-ray transform. We have shown that its accuracy depends on the modelization of the continuous image to be reconstructed; it can allow the reduction of the angular sampling of the data without any loss in the quality of reconstruction. The basis of functions used to discretize the related continuous function on a grid of samples, while keeping an underlying continuous behaviour, is then an essential issue.

We have determined that the use of separable 3D B-splines (compactly supported piecewise polynomials), is the ideal tradeoff between the accuracy of the model and the computation cost, conditioned by the degree of the polynomials. Such a basis of functions is much more adapted to the modelization than the staircase voxels, and easier to manipulate than the blobs.

We have developed a projector, based on the calculation of the footprint of these functions on the detector, and its integration on the impinged pixels. The property of B-splines of tending to the Gaussian curve, with increasing degree (3 or more), has been used to approximate the footprint by a separable B-spline of identical degree on the detector. This makes the calculation of the projections values fast and relatively easy to implement. It also yields less approximation errors than the *distance driven* projector, which uses staircase voxels.

We have demonstrated, both in a qualitative and quantitative way, the accuracy of our projector based on cubic B-splines, on 2-dimensional regularized iterative reconstructions, from noiseless and noisy simulated data, and from a small number of projections. Reconstructions have shown a substantial gain in image quality compared with reconstructions using the *distance driven* projector.

Future work will focus on the evaluation of our projector in the 3-dimensional reconstruction case, from real data acquisitions.

REFERENCES

[1] B. DeMan and S. Basu. *Distance driven projection and backprojection in three dimensions*. Physics in Medicine and Biology, 2004.

[2] J.A. Fessler. *Iterative methods for image reconstruction*. IEEE International Symposium on Biomedical Imaging Tutorial, Arlington Virginia, 2006.

[3] Y. Long, J.A. Fessler and J.M. Balter. *3D Forward and Back-Projection for X-Ray CT Using Separable Footprints*. 10th Intl. Mtg. on Fully 3D Im. Rec. in Rad. and Nuc. Med., 2009.

[4] S. Horbelt, M. Liebling and M. Unser. *Discretization of the Radon transform and of its inverse by spline convolutions*. IEEE Transactions on medical imaging, 2002.

[5] P.M. Joseph. *An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982.

[6] M. Slaney and A. Kak. *Principles of computerized tomographic imaging*. SIAM, Philadelphia, 1988.

[7] R.M. Lewitt. *Multidimensional digital image representations using generalized Kaiser-Bessel window functions*. JOSA A, 1990.

[8] R.M. Lewitt. *Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms*. Physics in Medicine and Biology, 1992.

[9] S. Matej and R.M. Lewitt. *Image representation and tomographic reconstruction using spherically symmetric volume elements*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1993.

[10] S. Matej and R.M. Lewitt. *Efficient 3D grids for image reconstruction using spherically-symmetric volume elements*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1995.

[11] S. Matej and R.M. Lewitt. *Practical considerations for 3D image reconstruction using spherically symmetric volume elements*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1996.

[12] J. Nocedal. *Updating quasi-Newton matrices with limited storage*. Mathematics of computation, 1980.

[13] L.I. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992.

[14] P. Thévenaz, T. Blu and M. Unser. *Interpolation Revisited*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2000.

[15] M. Unser., A. Aldroubi and M. Eden. *B-spline signal processing: Part I-Theory*. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993.

[16] M. Unser., A. Aldroubi and M. Eden. *B-spline signal processing: Part II-Efficient design and applications*. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993.

[17] M. Unser. *Splines: A perfect fit for signal and image processing*. IEEE Signal Processing Mag., 1999.

[18] M. Unser. *Sampling-50 years after Shannon*. Proceedings of the IEEE, 2000.

Modèle direct pour la tomographie 3D : apport d'une approximation par B-splines séparables

Fabien MOMEY[1,2], Jean-Marie BECKER[1], Loïc DENIS[2], Catherine MENNESSIER[1], Éric THIÉBAUT[2]

[1]Laboratoire Hubert Curien
Bâtiment F 18 Rue du Professeur Benoît Lauras, 42000 Saint-Étienne, France

[2]Centre de Recherche Astrophysique de Lyon
9 avenue Charles André, 69561 Saint Genis Laval cedex, France
fabien.momey@univ-lyon1.fr

Résumé – En tomographie, les méthodes de reconstruction itératives nécessitent une modélisation discrète du processus d'obtention des mesures. La représentation de l'objet d'intérêt est le point de départ à l'élaboration d'un modèle de projection tomographique sur le détecteur, précis et rapide. Les modèles conventionnels *ray driven* [4] et *distance driven* [1], construits à partir d'indicatrices de voxels, ont l'inconvénient d'être fortement anisotropes. Nous proposons un modèle utilisant des fonctions de bases B-splines de degré adéquat, nous fournissant un projecteur quasiment isotrope. Une approximation de la projection par une B-spline séparable sur le détecteur conduit à un modèle efficace en géométrie parallèle et conique, de qualité supérieure aux modèles conventionnels. Nous montrons notamment que l'erreur de modélisation est améliorée d'un facteur 10 par rapport au modèle *distance driven*. Nous illustrons l'amélioration de la qualité de reconstruction apportée par notre modèle sur des simulations du fantôme de Shepp-Logan, en utilisant une méthode itérative de reconstruction régularisée.

Abstract – Iterative reconstruction methods for tomography require discrete data modelization. The representation of the object of interest is the starting point of the projector. The standard models *ray driven* [4] and *distance driven* [1], relying on cubic voxel basis functions, suffer from high modelization errors due to anisotropic behaviour. We propose the use of B-spline basis functions of sufficiently high degree, yielding an almost isotropic projector. An approximation of the projection by a separable B-spline on the detector enforces the efficiency of the model in parallel and cone beam geometries, with higher quality than the standard models. We demonstrate that the modelization error is divided by 10 with respect to the *distance driven* model. We show the quality improvement of reconstruction of our model on simulations of the Shepp-Logan phantom, using regularized iterative reconstruction methods.

1 Méthode

1.1 Des B-splines comme base générale de représentation

Les méthodes de reconstruction itératives pour la tomographie nécessitent une modélisation numérique du processus d'obtention des mesures. C'est le *modèle direct* qui définit le passage de l'espace des paramètres de l'objet d'intérêt discrétisé à l'espace des mesures (projections communément appelées sinogrammes en tomographie, discrétisées également). Le calcul de ces *projections* est basé sur le principe de la transformée de Radon [5], qui constitue l'ensemble des intégrales de la fonction continue le long des droites intersectant son support. La représentation de l'objet d'intérêt est le point de départ à l'élaboration de ce *projecteur*. Cet objet est assimilé à une fonction continue $f(\boldsymbol{x})$, décomposée sur une base discrète de fonctions. Une simple fonction $b(\boldsymbol{x})$ compose cette base, et celle-ci est dupliquée sur une grille régulière, en chaque point de laquelle elle est affectée d'un coefficient multiplicatif $c_{\boldsymbol{k}}$:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}} b(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) \qquad (1)$$

Où $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ correspond aux indices des points de la grille discrète dans l'espace de dimension n, $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$ sont les coordonnées de cette grille discrète et $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sont les coordonnées des points continus de f dans ce même espace.

Le choix de la base de fonctions est primordial pour modéliser au mieux la continuité de la fonction f, et ainsi assurer la cohérence du projecteur avec le système de mesures réel. Les fonctions classiquement utilisées sont les indicatrices de voxels. Ce sont simplement des fonctions *portes* tridimensionnelles (i.e. fonctions caractéristiques d'intervalles unitaires), donc uniformes sur un support cubique de la taille du pas d'échantillonnage de la grille. Elles sont utilisées pour des modèles standard de projection tels que *ray driven* [4] et *distance driven* [1] (cf. 1.2.2).

Les propriétés souhaitées pour une base de fonctions efficace sont :

1. Bonne modélisation de la continuité de la fonction, tout en

préservant les bords francs éventuels ;
2. support compact pour une influence locale ;
3. séparabilité (ré-interpolation séparable) ;
4. robustesse de la base de fonctions aux artéfacts générés par des transformations géométriques (rotation, ré-échantillonnage, recalage, etc.) ;
5. symétrie sphérique pour avoir un profil de projection indépendant de l'orientation du détecteur : fonctions de type *blobs* (éléments à symétrie sphérique) [6].

Remplissant l'ensemble de ces conditions (asymptotiquement seulement pour la propriété 5), les B-splines multidimensionnelles séparables, notées $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})$, fonctions polynomiales par morceaux, s'avèrent être d'excellentes candidates.

Bien connues en traitement du signal, les B-splines modélisent de manière efficace la continuité d'une fonction, notamment par leur parfaite reproduction de la constante, ainsi que par leur bonne conservation des bords francs. Une B-spline est définie par le degré d des fonctions polynomiales qui la composent. Pour un degré suffisamment élevé, elles constituent d'excellentes fonctions d'interpolation. Cette propriété est très intéressante lorsqu'une ré-interpolation est nécessaire suite à une transformation géométrique. Notre base de fonctions devient donc :

$$b_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) = \prod_{q=1}^{n} \beta(x_q - x_{k_q}) \qquad (2)$$

Avec par exemple, pour une B-spline normalisée (pas d'échantillonnage $h = 1$) de degré 3 (cf. Fig. 1) :

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}|x|^2(2 - |x|) & 0 \leq |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases} \qquad (3)$$

L'indicatrice de voxel est une B-spline de degré 0. Notre approche va généraliser l'utilisation de B-splines à des degrés supérieurs.

Une B-spline est normalisée à 1. Pour un pas d'échantillonnage h non unitaire, on conserve cette intégration à l'unité : $\beta^h(x) = \frac{1}{h} \cdot \beta(\frac{x}{h})$.

La B-spline standard de degré d n'est pas à symétrie sphérique. Cependant elle tend à l'être si d est suffisamment grand. La raison est qu'elle peut s'écrire comme produit de convolution de $d + 1$ fonctions *portes* ayant pour largeur de support le pas d'échantillonnage. Lorsque d tend vers l'infini, à une renormalisation près, la B-spline tend donc vers la gaussienne, à symétrie sphérique, du fait du théorème central limite.

1.2 Modèle de projection

1.2.1 Transformée de Radon

Comme énoncé dans 1.1, le modèle mathématique d'acquisition des mesures en tomographie est la transformée de Radon. Dans le cas de la tomographie par rayons X, elle traduit l'absorption des rayons X par l'objet qu'ils traversent (loi de Beer-Lambert). La métrique mesurée est ainsi l'intégrale du coefficient d'absorption le long de la trajectoire du faisceau X. La

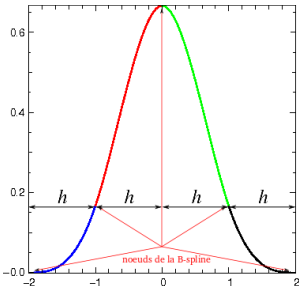


FIGURE 1 – B-spline cubique (degré $d = 3$) monodomensionnelle. La fonction est composée de $d + 1 = 4$ *morceaux* de fonctions polynomiales de degré d occupant chacun un pas d'échantillonnage h sur la grille, avec un raccordement C^{d-1}. Le support de la fonction est donc de $(d + 1)h$, et "empiète" donc sur celui des fonctions adjacentes. Ainsi la valeur $f_{\boldsymbol{k}}$ de la fonction $f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}})$ en un point de la grille d'échantillonnage $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$ n'est pas égale au coefficient $c_{\boldsymbol{k}}$ affecté à la fonction de base $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}})$ en ce point.

transformée de Radon de la fonction f pour une orientation θ du détecteur s'écrit :

$$P_\theta(\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{x} \in \{S, \boldsymbol{r}\}} f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{k}} F_\theta^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})$$

$$\text{avec} \quad F_\theta^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{x} \in \{S, \boldsymbol{r}\}} \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (4)$$

Où $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ est la position sur le détecteur et $\{S, \boldsymbol{r}\}$ désigne la droite partant de la source S et de vecteur directeur $\boldsymbol{r}$. $F_\theta^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})$ est alors nommée l'*empreinte* de la fonction de base $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ sur le détecteur. Cette empreinte constitue la projection du voxel, qui sera intégrée sur le support de chaque pixel détecteur impacté dans l'opérateur de projection final. Nous pouvons noter que notre modèle est général et s'adapte aussi bien à la projection parallèle que conique.

1.2.2 Modèles conventionnels

On présente ici 3 modèles standards largement utilisés en tomographie, tous trois basés sur une représentation de l'objet par des indicatrices de voxels.
– Le modèle *voxel driven* constitue le modèle le plus utilisé. On projette le centre du voxel sur le détecteur et on interpole linéairement sa valeur sur les centres des pixels du détecteur ;
– Le modèle *ray driven* [4] se base sur une approche type *lancer de rayons*. On « tire » un rayon depuis chaque pixel détecteur d'après l'incidence donnée par la géométrie de projection. La mesure de la projection pour ce pixel est obtenue par sommation des valeurs de l'objet interpolées le long de ce rayon. Cette approche est génératrice de *trous* dans les reconstructions puisque certains voxels peuvent ne jamais être *vus* par le détecteur, suivant le dimensionnement et l'orientation du système de mesures ;
– Le modèle *distance driven* [1] projette une section du voxel et approxime l'empreinte trapézoïdale par le parallèlépipède (empreinte uniforme sur un rectangle) couvrant au mieux la surface

d'impact. Ce modèle est une évolution de *ray driven* puisque les artéfacts de *trous* n'existent plus avec cette approche (tous les voxels sont *vus* par le détecteur).

1.2.3 Approximations par B-splines séparables

L'expression analytique de l'empreinte $F_\theta^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})$ (4), c'est-à-dire la transformée de Radon d'une fonction B-spline de base, peut être déterminée en géométrie parallèle [3], mais semble difficile à mettre en œuvre numériquement. De plus, en géométrie conique, elle devient bien plus complexe à déterminer analytiquement. Nous proposons de simplifier le calcul avec les approximations suivantes :

1. L'empreinte d'une B-spline de degré d à m dimensions est approximée par une B-spline à $m-1$ dimensions, de degré identique, séparable suivant les axes du détecteur ;

2. la projection conique d'une B-spline est approximée de façon similaire mais dilatée d'un facteur de grandissement isotrope dû à la divergence du faisceau.

La première approximation se justifie par la propriété de la B-spline à tendre vers la gaussienne lorsque son degré augmente. En effet la gaussienne est à symétrie sphérique et séparable quelle que soit l'orientation de ses axes. Ainsi il est trivial de déduire que l'empreinte d'une gaussienne à m dimensions est une gaussienne à $m-1$ dimensions. Une B-spline cubique (de degré 3) diffère déjà très peu de la gaussienne [8].

La seconde approximation se justifie par le fait que l'angle d'ouverture du support de la B-spline par rapport à la source est très petit. Le grandissement variable $\gamma_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})$ (variation en fonction de la divergence du faisceau) que subit le support de la B-spline, dépendant de sa position, peut alors être supposé invariant pour un voxel donné. À cela est associé une dilatation $\delta_c^{\boldsymbol{u}} = (\delta_c^{u_1}\delta_c^{u_2}\dots\delta_c^{u_{n-1}})$ due à l'angle d'incidence du faisceau sur le détecteur, supposée invariante également pour un voxel donné :

$$F_\theta^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) = \prod_{q=1}^{n-1} \beta\left(\frac{u_q}{\delta_c^{u_q}\cdot\gamma_{\boldsymbol{k}}} - u'_q\right) \tag{5}$$

Où $\boldsymbol{u'} = (u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ est la projection du centre de la B-spline $\boldsymbol{\beta_k}(\boldsymbol{x})$ sur le détecteur.

La figure 2 quantifie l'erreur d'approximation du projecteur. L'empreinte exacte sur le détecteur d'une B-spline séparable à 3 dimensions, convoluée par la réponse du pixel (fonction *porte* à 2 dimensions) est calculée numériquement, puis comparée au calcul de l'empreinte approximée. On visualise l'erreur relative (c'est-à-dire la différence en valeur absolue entre la vraie empreinte et son approximation, divisée par la valeur maximale de la vraie empreinte) pour des B-splines de degrés différents : une indicatrice de voxel (degré 0) et une B-spline cubique.

– Dans le cas de l'indicatrice de voxel, on s'intéresse, pour une géométrie de projection conique, à la position du voxel et l'orientation du détecteur générant la pire erreur pour notre approximation : le voxel est très éloigné du centre du champ de vue et le détecteur est incliné de 45° par rapport au plan horizontal. On compare, dans cette même configuration géométrique du système, l'erreur d'approximation du modèle *distance driven* (image de gauche) avec celle de notre modèle (image de droite). L'erreur maximale mesurée pour le modèle *distance driven* est de 30.5%, contre 17.7% pour notre projecteur. Notre approximation est donc deux fois plus précise, même pour une modélisation de l'objet d'intérêt aussi anisotrope que des indicatrices de voxels. Il a d'ailleurs déjà été montré dans [2] qu'une approximation plus fine de la projection d'une indicatrice de voxels réduisait l'erreur de modélisation et améliorait la qualité de reconstruction, et ce sans surcoût de calcul.

– Dans le cas de la B-spline cubique, on s'intéresse au même type d'erreur, également dans le pire cas, mais en considérant deux géométries de projection différentes : parallèle et conique. En projection parallèle (image de gauche), l'empreinte est indépendante de la position du voxel pour une orientation donnée du détecteur. Le cas le plus défavorable intervient logiquement lorsque le détecteur est incliné de 45° par rapport au plan horizontal (le projecteur est exact lorsque le détecteur oriente la projection suivant l'un des axes principaux de la B-spline). On mesure dans ce cas une erreur de 1.21%. En projection conique (image de droite), le cas le plus défavorable se produit lorsque le voxel est excentré, et lorsque les axes du détecteur sont alignés avec 2 axes de séparablilité de la B-spline. L'erreur mesurée est alors de 2.24%. On a donc gagné un facteur 10 environ en précision par rapport à une modélisation par indicatrices de voxel.

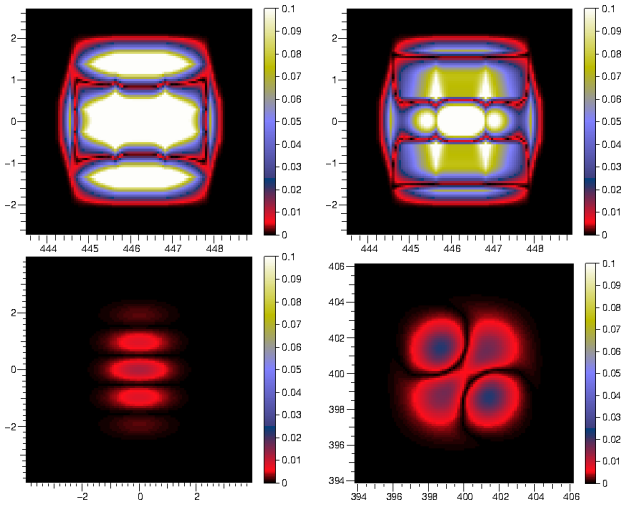


FIGURE 2 – Quantification de l'erreur d'approximation (dans les cas les plus défavorables) des projections de B-splines tridimensionnelles de différents degrés suivant notre approximation et celle d'un modèle standard type *distance driven*. On visualise l'erreur relative (valeur absolue de la différence entre la vraie empreinte et son approximation, divisée par la valeur maximale de la vraie empreinte). En haut : projection conique d'une B-spline de degré 0 (indicatrice de voxel) suivant le modèle *distance driven* (à gauche), et l'approximation B-splines séparables (à droite). Erreurs : 30.5% à gauche et 17.7% à droite. En bas : projection parallèle (à gauche) et conique (à droite) d'une B-spline cubique suivant l'approximation B-splines séparables. Erreurs : 1.21% à gauche et 2.24% à droite.

2 Résultats sur des reconstructions à 2 dimensions et futurs travaux

La figure 3 montre des résultats de reconstructions itératives d'un fantôme de Shepp-Logan 128×128 (image (a)), à partir de sinogrammes non bruités calculés analytiquement en géométrie parallèle, pour 200 pixels sur le détecteur et 60 angles de projection espacés régulièrement sur un intervalle de 180°. L'échantillonnage des pixels sur le détecteur est identique à l'échantillonnage de la grille de pixels de l'objet d'intérêt. L'algorithme de reconstruction utilisé est une méthode d'optimisation Quasi-Newton (BFGS à mémoire limitée), minimisant un critère d'attache aux données quadratique avec une régularisation de type variation totale lissée [7]. On compare les reconstructions utilisant notre modèle et le modèle *distance driven*.

L'image (b) représente le meilleur résultat qualitatif avec notre projecteur utilisant des B-splines cubiques. Le poids de la régularisation est réglé pour obtenir une bonne qualité de l'image, avec notamment une bonne reconstruction des petits objets faiblement contrastés. L'image (c) représente le meilleur résultat qualitatif avec le projecteur *distance driven*. On constate déjà une qualité d'image inférieure à l'image (b). L'image (d) représente une reconstruction avec le projecteur *distance driven*, où l'erreur résiduelle par rapport aux mesures initiales est identique à l'image (b). On en conclut qu'à niveau égal d'accord aux données, notre modèle engendre une bien meilleure reconstruction que le modèle *distance driven*. Les images (e) et (f) représentent des profils pris sur les images reconstruites (cf. légende de la figure 3). Ces profils renforcent encore la démonstration du gain de notre modèle sur la précision de reconstruction, puisque la récupération des détails est bien supérieure à celle du modèle *distance driven*.

Les objectifs futurs sont la quantification des gains et apports de notre modèle sur les reconstructions à nombre limité d'angles de projection, à partir de mesures bruitées et pour différentes géométries de projection. Le passage à la reconstruction à 3 dimensions en géométrie conique est également en cours.

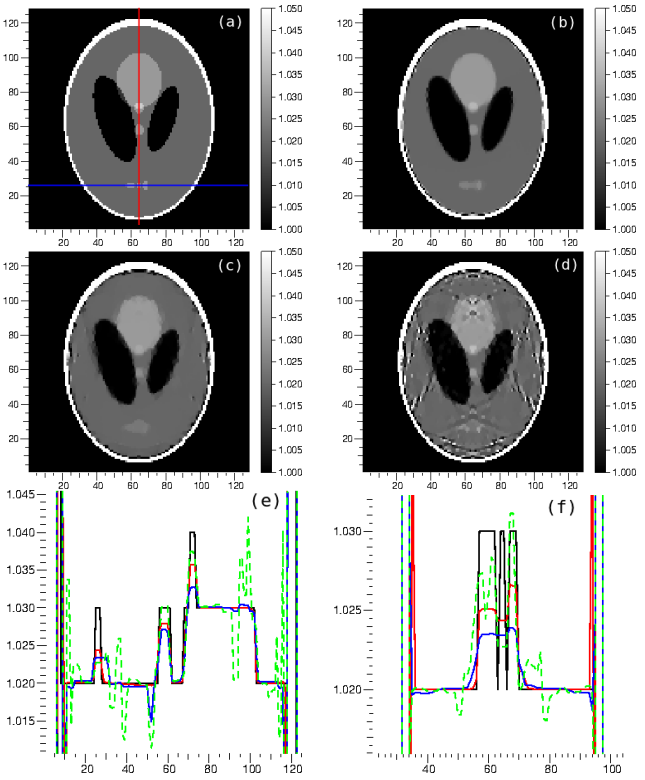


FIGURE 3 – Reconstructions d'un fantôme de Shepp-Logan 128×128 (axes en pixels), à partir de sinogrammes calculés analytiquement en géométrie parallèle, pour 200 pixels sur le détecteur et 60 angles de projection espacés régulièrement sur un intervalle de 180° (axes en pixels détecteur + numéro d'angle croissant). (a) : image originale. (b) : meilleur résultat qualitatif avec le projecteur B-spline utilisant des B-splines cubiques. (c) : meilleur résultat qualitatif avec le projecteur *distance driven*. (d) : reconstruction *distance driven* avec une erreur résiduelle par rapport aux sinogrammes initiaux (erreur quadratique moyenne de l'image reprojetée par rapport aux vrais sinogrammes) identique à la reconstruction avec le modèle B-spline (b). (e) : profils des reconstructions (ligne rouge sur l'image (a)) ; en noir : (a) - en rouge : (b) - en bleu : (c) - en vert : (d). (f) : profils des reconstructions (ligne bleue sur l'image (a)) ; même légende couleur que le graphe (e).

Références

[1] B. DeMan et S. Basu. *Distance driven projection and backprojection in three dimensions*. Physics in Medicine and Biology, 2004.

[2] Y. Long, J.A. Fessler et J.M. Balter. *3D Forward and Back-Projection for X-Ray CT Using Separable Footprints with Trapezoid Functions*. 10th Intl. Mtg. on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, 2009.

[3] S. Horbelt, M. Liebling, M. Unser. *Discretization of the Radon transform and of its inverse by spline convolutions*. IEEE Transactions on medical imaging, 2002.

[4] P.M. Joseph *An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982.

[5] M. Slaney et A. Kak *Principles of computerized tomographic imaging* SIAM, Philadelphia, 1988

[6] R.M. Lewitt *Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms*. Physics in Medicine and Biology, 1992.

[7] L.I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D : Nonlinear Phenomena, 1992.

[8] P. Thévenaz, T. Blu et M. Unser. *Interpolation Revisited*. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2000.

Résumé

La tomographie est la discipline qui cherche à reconstruire une donnée physique dans son volume, à partir de l'information indirecte de projections intégrées de l'objet, à différents angles de vue. L'une de ses applications les plus répandues, et qui constitue le cadre de cette thèse, est l'imagerie *scanner* par rayons X pour le médical. Or, les mouvements inhérents à tout être vivant, typiquement le mouvement respiratoire et les battements cardiaques, posent de sérieux problèmes dans une reconstruction classique. Il est donc impératif d'en tenir compte, *i.e.* de reconstruire le sujet imagé comme une séquence spatio-temporelle traduisant son "évolution anatomique" au cours du temps : c'est la tomographie dynamique.

Élaborer une méthode de reconstruction spécifique à ce problème est un enjeu majeur en radiothérapie, où la localisation précise de la tumeur dans le temps est un prérequis afin d'irradier les cellules cancéreuses en protégeant au mieux les tissus sains environnants.

Des méthodes usuelles de reconstruction augmentent le nombre de projections acquises, permettant des reconstructions indépendantes de plusieurs phases de la séquence échantillonnée en temps. D'autres compensent directement le mouvement dans la reconstruction, en modélisant ce dernier comme un champ de déformation, estimé à partir d'un jeu de données d'acquisition antérieur.

Nous proposons dans ce travail de thèse une approche nouvelle ; se basant sur la théorie des problèmes inverses, nous affranchissons la reconstruction dynamique du besoin d'accroissement de la quantité de données, ainsi que de la recherche explicite du mouvement, elle aussi consommatrice d'un surplus d'information. Nous reconstruisons la séquence dynamique à partir du seul jeu de projections courant, avec pour seules hypothèses a priori la continuité et la périodicité du mouvement.

Le problème inverse est alors traité rigoureusement comme la minimisation d'un terme d'attache aux données et d'une régularisation. Nos contributions portent sur la mise au point d'une méthode de reconstruction adaptée à l'extraction optimale de l'information compte tenu de la parcimonie des données — un aspect typique du problème dynamique — en utilisant notamment la variation totale (TV) comme régularisation. Nous élaborons un nouveau modèle de projection tomographique précis et compétitif en temps de calcul, basé sur des fonctions B-splines séparables, permettant de repousser encore la limite de reconstruction imposée par la parcimonie. Ces développements sont ensuite insérés dans un schéma de reconstruction dynamique cohérent, appliquant notamment une régularisation TV spatio-temporelle efficace. Notre méthode exploite ainsi de façon optimale la seule information courante à disposition ; de plus sa mise en œuvre fait preuve d'une grande simplicité.

Nous faisons premièrement la démonstration de la force de notre approche sur des reconstructions 2-D+t à partir de données simulées numériquement. La faisabilité pratique de notre méthode est ensuite établie sur des reconstructions 2-D et 3-D+t à partir de données physiques "réelles", acquises sur un fantôme mécanique et sur un patient.

Mots-clés : Tomographie, Tomographie dynamique, Reconstruction, Problèmes inverses, Traitement du signal, Imagerie médicale, B-splines.

Abstract

Computerized tomography (CT) aims at the retrieval of 3-D information from a set of projections acquired at different angles around the object of interest (OOI). One of its most common applications, which is the framework of this Ph.D. thesis, is X-ray CT medical imaging. This reconstruction can be severely impaired by the patient's breath (respiratory) motion and cardiac beating. This is a major challenge in radiotherapy, where the precise localization of the tumor is a prerequisite for cancer cells irradiation with preservation of surrounding healthy tissues. The field of methods dealing with the reconstruction of a dynamic sequence of the OOI is called Dynamic CT.

Some state-of-the-art methods increase the number of projections, allowing an independent reconstruction of several phases of the time sampled sequence. Other methods use motion compensation in the reconstruction, by a beforehand estimation on a previous data set, getting the explicit motion through a deformation model.

Our work takes a different path ; it uses dynamic reconstruction, based on inverse problems theory, without any additional information, nor explicit knowledge of the motion. The dynamic sequence is reconstructed out of a single data set, only assuming the motion's continuity and periodicity.

This inverse problem is considered as a minimization of an error term combined with a regularization. One of the most original features of this Ph.D. thesis, typical of dynamic CT, is the elaboration of a reconstruction method from very sparse data, using Total Variation (TV) as a very efficient regularization term. We also implement a new rigorously defined and computationally efficient tomographic projector, based on B-splines separable functions, outperforming usual reconstruction quality in a data sparsity context. This reconstruction method is then inserted into a coherent dynamic reconstruction scheme, applying an efficient spatio-temporal TV regularization. Our method exploits current data information only, in an optimal way ; moreover, its implementation is rather straightforward.

We first demonstrate the strength of our approach on 2-D+t reconstructions from *numerically* simulated dynamic data. Then the practical feasibility of our method is established on 2-D and 3-D+t reconstructions of a mechanical phantom and real patient data.

Keywords : Tomography, Dynamic Tomography, Reconstruction, Inverse Problems, Signal processing, Bio-medical imaging, B-splines.