

# Étude mathématique des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes

Chloé Mullaert

► **To cite this version:**

Chloé Mullaert. Étude mathématique des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT : 2011PA066538 . tel-00825556

**HAL Id: tel-00825556**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00825556>**

Submitted on 24 May 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité  
**Mathématiques appliquées**

Présentée par  
**Chloé MULLAERT**

Pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse  
**Étude mathématique des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes**

Soutenue le 16 Décembre 2011 devant le jury composé de

|      |                     |                        |
|------|---------------------|------------------------|
| M.   | Lorenzo BRANDOLOSE  | Examineur              |
| M.   | Jean-Yves CHEMIN    | Co-directeur de thèse  |
| Mme. | Anne-Laure DALIBARD | Examinatrice           |
| M.   | David GERARD-VARET  | Examineur              |
| Mme. | Isabelle GALLAGHER  | Co-directrice de thèse |
| M.   | Olivier GLASS       | Examineur              |
| M.   | Olivier GUES        | Examineur              |
| M.   | Frédéric ROUSSET    | Rapporteur             |

Invités :

|      |                     |
|------|---------------------|
| M.   | Christophe LACAVE   |
| Mme. | Laure SAINT-RAYMOND |



**Résumé :****Étude mathématique des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes**

Cette thèse s'articule en deux parties. Dans la première, nous étudions les équations de Saint-Venant qui modélisent le comportement des océans, et de façon générale des fluides homogènes peu profonds, au voisinage de l'équateur dans le cadre d'une rotation rapide de la Terre. Grâce à ces hypothèses et aux équations de Navier-Stokes, nous commencerons par obtenir un modèle également connu sous le nom d'"Equatorial Shallow Water System". Les équations obtenues font apparaître un paramètre de pénalisation  $\varepsilon$  contenant les hypothèses de petitesse faites pour obtenir ce système simplifié. L'étude de la matrice de pénalisation permettra par une méthode de filtrage d'exhiber un système limite formel lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro pour lequel nous donnerons une condition nécessaire et suffisante de globalité. Nous montrerons ensuite la convergence des solutions filtrées vers la solution du système limite.

Dans la deuxième partie, nous exhiberons une classe de données initiales engendrant une solution globale aux équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ . En effet, les solutions de ces équations sont globales dans le cadre bidimensionnel mais dans le cas tridimensionnel, il faut rajouter, par exemple, des conditions suffisantes de petitesse des données initiales pour que la solution n'explose pas en temps fini. Nous prouverons que si on considère une donnée initiale ayant un spectre proche du plan horizontal alors elle engendre une solution globale des équations de Navier-Stokes. De plus, nous montrerons que, sous certaines hypothèses, la perturbation d'une donnée initiale engendrant une solution globale, par ce type de données au spectre quasi-horizontale, engendre encore une solution globale.

**Mots-clés :**

Saint-Venant, Equatorial Shallow Water, système symétrique, pénalisation antisymétrique, filtrage, données bien préparées, données mal préparées, Navier-Stokes, globalité.

**Abstract :****Mathematical study of the Equatorial Shallow Water and Navier-Stokes equations**

This thesis is divided into two parts. In the first one, we are interested in the Equatorial Shallow Water equations which modelize the behaviour of shallow homogeneous fluids in the equatorial zone in case of large rotation of the Earth. Thanks to these hypotheses, using the Navier-Stokes equations, we get a penalized system. The penalization parameter is called  $\varepsilon$  and takes into account the smallness hypotheses. Studying the penalization term, we exhibit a formal limit system when the parameter  $\varepsilon$  tends to zero. Finally, we prove the convergence of the filtered solutions toward the solution of the limit system.

In the second part, we exhibit a class of initial data which generate a global solution of the Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^3$ . These equations are well-posed in  $\mathbb{R}^2$  but in  $\mathbb{R}^3$  we need, for example, to add a sufficient smallness condition on the initial data. When the initial data spectrum is near the horizontal plane then we will prove that it generates a global solution to the Navier-Stokes equations. Moreover, we establish that, under some hypotheses, the perturbation of an initial data generating a global solution, by these data with quasi-horizontal spectrum, also generates a global solution.

**Key words :**

Saint-Venant, Equatorial Shallow Water, symmetric system, skew-symmetric penalization, filtering method, well-prepared initial data, ill-prepared initial data, Navier-Stokes, global wellposedness.



## Remerciements

Cette thèse est avant tout le fruit de ma rencontre en Master 2 avec Jean-Yves Chemin, professeur rigoureux, exigeant et motivant. Son cours m'a donné envie de me dépasser et c'est donc tout naturellement que je me suis tournée vers lui pour mon stage de Master 2, ravie d'être encadrée par quelqu'un de si investi qui n'a pas compté son temps et a toujours eu à cœur de me transmettre ses connaissances.

Cette collaboration s'est poursuivie par une thèse. Pendant celle-ci j'ai aussi été épaulée par Isabelle Gallagher. J'avais commencé à travailler sur ses travaux et, lorsque je l'ai rencontrée, j'ai été frappée par sa gentillesse et son dynamisme. Elle a accepté de codiriger ma thèse avec Jean-Yves et je m'estime chanceuse d'avoir travaillé avec deux personnes si motivantes et si engagées, toujours là lorsque j'avais des questions ou lorsqu'il fallait relire des démonstrations parfois longues.

Mais ils n'ont pas été uniquement là pour moi dans le cadre de ma thèse, ils étaient aussi présents pour me motiver et pour me soutenir dans la voie que j'avais choisie : l'enseignement. Loin de la caricature que certains se font d'un monde de la recherche fermé, ils ont accepté mon choix et m'ont aidée à le réaliser. Pour cela, je ne saurai jamais assez les remercier.

Je tenais aussi à remercier tous ceux grâce à qui j'ai pu voyager et rencontrer d'autres chercheurs. Je commencerai par David Lannes. Lors de son atelier organisé à Bayonne, j'ai pu assister à son cours avec Jérémie Szeftel mais aussi à celui d'Isabelle et de Christophe Lacave sur les solutions de Navier-Stokes qui fut pour moi l'objet d'une longue réflexion et lors des journées EDP à Port d'Albret qu'il a organisé avec Jean-François Bony, j'ai pu suivre le cours de Laure Saint Raymond sur les perturbations singulières. Merci à eux d'avoir rendu accessibles des résultats aussi complexes.

Merci aussi à Gérard Iooss pour son école d'hiver où j'ai pu revisiter le calcul para différentiel grâce au cours de Gilles Lebeau et entrapercevoir l'ambiance sympathique d'Orsay avec Thomas Alazzard et Nicolas Burcq.

Je voulais aussi remercier Anne-Laure Dalibard pour son cours très intéressant au Collège de France sur les couches limites en mécanique des fluides.

Enfin, merci à Patrick Penel pour m'avoir invitée à Marseille pour présenter mes travaux.

Une pensée particulière pour mes deux rapporteurs Frédéric Rousset et Steven Schochet ainsi que pour ceux qui ont accepté d'être membres de mon jury : Lorenzo Brandolese, Anne-Laure Dalibard, David Gérard-Varet, Olivier Glass et Olivier Gues. Je remercie aussi vivement Christophe Lacave et Laure Saint-Raymond, qui pour des raisons administratives, n'en font pas partie mais qui me font l'honneur d'assister à ma soutenance de thèse.

Enfin, un merci particulier à Robert, qui, part sa bonne humeur, a égayé ma thèse.

Je terminerai en remerciant Jimmy qui m'a supportée et soutenue pendant cette thèse et continue à rendre ma vie plus douce.



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b> .....  | <b>9</b>  |
| <br>   |           |
| <b>partie 1. Étude du modèle de Saint-Venant équatorial non visqueux</b> ..... | <b>19</b> |
| <br>   |           |
| Chapitre 1. Modélisation physique .....  | 21        |
| 1.1. Equations du fluide .....   | 21        |
| 1.2. Conditions aux bords .....  | 23        |
| 1.3. Approximation de Saint-Venant .....                                       | 24        |
| 1.4. Rotation rapide au voisinage de l'équateur .....                          | 26        |
| <br>   |           |
| Chapitre 2. Réécriture du problème .....                                       | 27        |
| 2.1. Symétrisation du système .....  | 27        |
| 2.2. Nouveau système .....   | 30        |
| 2.3. Espaces adaptés .....   | 34        |
| <br>   |           |
| Chapitre 3. Étude de la matrice de pénalisation $M$ .....                      | 39        |
| 3.1. Éléments propres de $M$ .....   | 39        |
| 3.2. Normes équivalentes .....   | 46        |
| <br>   |           |
| Chapitre 4. Existence de solutions. Convergence dans le cas bien préparé ..... | 51        |
| 4.1. Étude de la forme quadratique $Q$ .....                                   | 51        |
| 4.2. Existence de solutions des systèmes pénalisés .....                       | 55        |
| 4.3. Convergence dans le cas bien préparé .....                                | 58        |
| <br>   |           |
| Chapitre 5. Étude du système limite .....                                      | 61        |
| 5.1. Filtrage et système limite .....  | 61        |
| 5.2. Étude des résonances .....  | 62        |
| 5.3. Existence de solutions .....  | 68        |
| <br>   |           |
| Chapitre 6. Résultat de convergence dans le cas mal préparé .....              | 79        |
| 6.1. Retour au système pénalisé par "défiltrage" .....                         | 80        |
| 6.2. Terme correctif .....   | 81        |
| 6.3. Démonstration du théorème de convergence .....                            | 83        |



|   |           |
|---|-----------|
| <b>partie 2. Condition de globalité pour les équations de Navier-Stokes</b> ..... | <b>85</b> |
| Chapitre 7. Résultats et trame des démonstrations .....                           | 87        |
| 7.1. Résultats .....  | 87        |
| 7.2. Réécriture du problème .....   | 88        |
| 7.3. Condition suffisante de globalité .....                                      | 89        |
| Chapitre 8. Démonstrations des lemmes .....                                       | 93        |
| 8.1. Démonstration du lemme 7.8 .....   | 93        |
| 8.2. Démonstrations des lemmes 7.9 et 7.10 .....                                  | 104       |
| 8.3. Lemmes calculatoires .....   | 108       |
| Bibliographie .....   | 111       |

# Introduction



En océanographie, les équations de Saint-Venant sont utilisées pour décrire le comportement des fluides peu profonds et dont la vitesse est essentiellement horizontale, ce qui est vérifié dans le cas des océans. Comme nous le verrons dans le premier chapitre, ces équations sont obtenues à partir de celles de Navier-Stokes grâce à ces hypothèses. Ces équations complexes, du fait de leur non linéarité, sont par exemple résolues par simulation numérique à l'aide d'une discrétisation par éléments finis ou volumes finis. Afin d'en faire une étude théorique plus avancée, nous nous limiterons à un cadre plus restreint en considérant uniquement la zone équatoriale, ce qui nous permettra de linéariser le terme issu de la force de Coriolis et de modéliser la Terre par un cylindre  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ . Nous supposerons aussi que la rotation de la Terre est rapide. Nous détaillerons dans le premier chapitre comment ces hypothèses de petitesse conduisent formellement au système pénalisé suivant

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla h + \frac{\beta}{\varepsilon} \mathbf{y} \mathbf{v}^\perp & = 0 \\ \partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + h \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} & = 0. \end{cases}$$

où, après normalisation, le vecteur  $\mathbf{v}$  représente la vitesse horizontale du fluide et  $h$  les variations de sa hauteur. Le paramètre de pénalisation  $\varepsilon$  prend en compte les hypothèses de petitesse tandis que la paramètre  $\beta$  relie la vitesse de rotation de la Terre  $\Omega$  à  $\varepsilon^{-1}$ . Nous utiliserons en particulier l'approximation du plan beta pour simplifier l'effet dynamique de l'accélération de Coriolis. Pour justifier ce modèle, nous nous appuyerons sur [9, 10, 15, 16, 23, 28].

Une fois ce système défini, on souhaite d'abord prouver que pour toute donnée initiale il existe une unique solution puis étudier son comportement lorsque le paramètre de pénalisation  $\varepsilon$  tend vers zéro. Cette question a déjà été traitée dans [9] par I. Gallagher et L. Saint-Raymond dans le cas visqueux et par A. Dutrifoy, A. Majda et S. Schochet dans [7] dans un cas restreint de données initiales. Afin de marquer qu'une solution dépend non seulement de la donnée initiale mais aussi du paramètre de pénalisation, on indexe les solutions par le paramètre  $\varepsilon$ . On s'intéresse donc pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$  et pour toute donnée initiale  $U_{\varepsilon,0} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\varepsilon,0} \\ h_{\varepsilon,0} \end{pmatrix}$  à l'existence d'une unique solution  $U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\varepsilon \\ h_\varepsilon \end{pmatrix}$ . Puis, étant donnée une famille de données initiales  $(U_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ , on étudie la convergence de la suite  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  des solutions associées. Pour cela, on commence par réécrire le système sous une forme synthétique en remarquant que, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , le champ  $U_\varepsilon$  est solution de

$$\partial_t U_\varepsilon + q(U_\varepsilon, U_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} N U_\varepsilon = 0$$

où  $q$  est un terme quadratique et où  $N$  est une matrice d'opérateurs antisymétrique au sens de la norme  $L^2$  i.e.  $N^* = -N$ . L'objet du chapitre 2 est de modifier ce système pour lui conférer des propriétés de symétrie et de stabilité.

Tout d'abord, nous allons, par un changement d'inconnues, le rendre quasi-linéaire symétrique en transformant la partie quadratique en

$$Q(U_\varepsilon, U_\varepsilon) := B_1(U_\varepsilon) \partial_x U_\varepsilon + B_2(U_\varepsilon) \partial_y U_\varepsilon$$

où les matrices  $B_1(U_\varepsilon)$  et  $B_2(U_\varepsilon)$  sont symétriques et ont pour composantes des combinaisons linéaires des composantes de  $U_\varepsilon$ . Pour cela nous nous inspirerons ce qui a été fait par A. Dutrifoy, A. Majda et S. Schochet dans [7]. Cette modification ne change pas le caractère antisymétrique de la matrice de pénalisation qui a de nombreux intérêts comme cela apparaît notamment dans [4, 11]. En particulier, lorsque l'on fait une estimation d'énergie  $L^2$  i.e. le produit scalaire formel de  $U_\varepsilon$  avec l'équation qu'il satisfait, alors le terme pénalisant n'apparaît pas car, par antisymétrie, on a

$$\langle N U_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0.$$

On peut, de ce fait, espérer obtenir une estimation uniforme de la famille  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . Malheureusement, si on veut faire une estimation d'énergie sur les dérivées des solutions pour obtenir plus de régularité, il faudrait, pour répéter ce raisonnement, que ces dérivées soit solutions du même type d'équations.

Or, si on applique une matrice de dérivation spatiale  $D$ , la famille  $(DU_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est solution de la même équation avec une force extérieure non nulle. En particulier, elle contient un terme en  $\varepsilon^{-1}$  qui n'est nul que si  $D$  et  $N$  commutent. Ainsi, dans le but d'obtenir des estimations uniformes en  $\varepsilon$ , condition nécessaire à toute convergence, il faut se limiter à des matrices de dérivation commutant avec la matrice de pénalisation.

Pour cela, nous procéderons de nouveau à un changement d'inconnues. Il sera cette fois linéaire et orthogonal pour conserver la symétrie du système. Il permettra d'obtenir des matrices de dérivation conservant la structure symétrique à pénalisation symétrique du système c'est-à-dire des matrices de dérivation spatiales  $D$  telles que la famille  $(DU_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  soit encore solution du même type d'équation. Plus précisément, nous transformerons la famille  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  en une famille  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  telle que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ ,  $V_\varepsilon$  est solution de

$$(S_\varepsilon) : \quad \partial_t V_\varepsilon + A_1(V_\varepsilon) \partial_x V_\varepsilon + A_2(V_\varepsilon) \partial_y V_\varepsilon + \varepsilon^{-1} M V_\varepsilon = 0$$

où les matrices  $A_1(V_\varepsilon)$  et  $A_2(V_\varepsilon)$  sont symétriques et ont pour composantes des combinaisons linéaires des composantes de  $V_\varepsilon$  et où la matrice de pénalisation  $M$  est antisymétrique pour la norme  $L^2$  et commute avec les opérateurs de dérivation spatiale  $\partial_x$  et

$$D := \begin{pmatrix} \partial_y^2 - \beta^2 y^2 - 2\beta & & \\ & \partial_y^2 - \beta^2 y^2 & \\ & & \partial_y^2 - \beta^2 y^2 + 2\beta \end{pmatrix}.$$

À l'aide de ces matrices, nous introduirons alors des espaces adaptés au système, dans lesquels il sera plus simple de démontrer l'existence et la convergence des solutions, en définissant pour tout entier  $s$

$$\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) := \left\{ V \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) : \sum_{k+2p \leq 2s} \|\partial_x^k D^p V\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 < \infty \right\}.$$

Dans le troisième chapitre, nous étudierons les éléments propres de la matrice de pénalisation comme cela a été fait dans [9] par I. Gallagher et L. Saint-Raymond. L'intérêt de cette démarche apparaît clairement si, par exemple, on considère une version simplifiée sans terme quadratique. Nous exhiberons en particulier une base hilbertienne de vecteurs propres qui nous permettra d'énoncer, dans le chapitre 4, un résultat similaire au théorème de Parseval. Nous introduirons ensuite des opérateurs de troncature adaptés à la matrice de pénalisation qui nous permettront de démontrer le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**THÉORÈME.** *Pour toute valeur strictement positive du paramètre  $\varepsilon$  et pour toute donnée initiale  $V_{\varepsilon,0}$ , il existe un temps  $T_\varepsilon^*$ , tel que pour tout entier  $s \geq 2$ , si la donnée initiale appartient à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors le système pénalisé  $(S_\varepsilon)$  admet une unique solution dans  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon^*[, \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .*

*De plus, si la famille  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  des données initiales est bornée dans l'espace  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors il existe un temps  $T > 0$ , indépendant de  $\varepsilon$ , tel que les systèmes pénalisés admettent d'unique solutions  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  appartenant à l'espace  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  et tel que la suite  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  soit bornée dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .*

Pour obtenir ce résultat, nous utiliserons les propriétés de la forme quadratique liées notamment à sa forme symétrique. À ce stade, nous pourrions déjà démontrer le résultat de convergence suivant dans le cas d'une famille de données initiales "bien préparées", i.e. qui converge vers un élément du noyau de la matrice de pénalisation.

**THÉORÈME.** *Pour tout entier  $s \geq 2$ , si la famille des conditions initiales  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  converge dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  vers un élément  $V_0$  appartenant à  $\text{Ker}(M) \cap \mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors le temps de vie  $T_\varepsilon^*$  associé à la solution  $V_\varepsilon$  du système  $(S_\varepsilon)$  tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.*

*De plus, pour tout temps  $T > 0$ , les solutions  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  convergent dans  $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  vers la fonction constante à  $V_0$ .*

Ces résultats ont été présentés dans [26].

Pour considérer des données initiales "mal préparées" i.e. convergeant vers un élément quelconque, nous utiliserons une méthode de filtrage, déjà développée, par exemple, dans [24] et [14] en regardant le système vérifiée par

$$\Phi_\varepsilon(t, \cdot) := \sum_{i\lambda \in \text{Sp}(M)} e^{i\lambda t/\varepsilon} \Pi_\lambda V_\varepsilon(t, \cdot)$$

où pour chaque valeur propre  $i\lambda$  de la matrice de pénalisation  $M$ ,  $\Pi_\lambda$  est la projection orthogonale sur l'espace propre associé. L'idée est alors de passer à la limite dans l'équation

$$\partial_t \Phi_\varepsilon(t, \cdot) + \sum_{(i\lambda, i\mu, i\mu') \in \text{Sp}(M)^3} e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi_\varepsilon(t, \cdot), \Pi_{\mu'} \Phi_\varepsilon(t, \cdot)) = 0$$

en ne conservant que les termes non oscillants car, formellement, les autres tendent faiblement vers zéro. Nous obtiendrons ainsi un système limite formel

$$(SL) \quad \begin{cases} \partial_t \Phi + Q_L(\Phi, \Phi) = 0 \\ \Phi|_{t=0} = \Phi^0 \end{cases}$$

où la forme quadratique limite est définie par

$$Q_L(\Phi, \Phi) := \sum_{(i\lambda, i\mu, i\mu') \in \text{Sp}(M)^3 : \lambda = \mu + \mu'} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi, \Pi_{\mu'} \Phi).$$

En nous appuyant sur l'étude de l'ensemble des résonances

$$\mathcal{R} := \left\{ (i\lambda, i\mu, i\mu') \in \text{Sp}(M)^3 : \lambda = \mu + \mu' \right\}$$

qui a été faite dans [9], nous prouverons, dans le chapitre 5, que le système limite est bien posé et donnerons une condition nécessaire et suffisante de globalité faisant intervenir la composante de Kelvin de la donnée initiale i.e. sa projection sur les espaces propres de  $M$  associés aux valeurs propres  $(ik)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ .

**THÉORÈME.** *Pour toute donnée initiale  $\Phi^0$ , il existe  $T^* > 0$  tel que pour tout entier  $s \geq 2$ , si la donnée initiale appartient à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors le système limite*

$$(SL) \quad \begin{cases} \partial_t \Phi + Q_L(\Phi, \Phi) = 0 \\ \Phi|_{t=0} = \Phi^0 \end{cases}$$

*admet une unique solution appartenant à  $\mathcal{C}([0, T^*[, \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .*

*De plus, pour presque toute valeur du paramètre  $\beta$ , le système limite (SL) a une solution globale si et seulement si la composante de Kelvin de la donnée initiale  $\Phi^0$  est nulle.*

Enfin, dans le chapitre 6, nous montrerons que pour toute famille de données initiales  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon > 0}$  convergeant vers  $\Phi^0$ , la suite  $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  des solutions filtrées associées converge vers la solution du système limite formel engendrée par  $\Phi^0$ . Plus précisément, nous prouverons le résultat de convergence suivant.

**THÉORÈME.** *Pour tout entier  $s \geq 2$  et pour toute famille de données initiales  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon > 0}$  convergeant vers  $\Phi^0$  dans  $\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , si  $\Phi$ , la solution du système limite avec  $\Phi^0$  pour donnée initiale, appartient à  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ , alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que les solutions maximales  $(V_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$  des problèmes pénalisés  $(S_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$  sont définies sur  $[0, T]$  et*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \Phi - \mathcal{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) V_\varepsilon \right\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0.$$

Nous généraliserons ainsi ce qui a été fait dans [7] dans le cas de données initiales bien préparées.

La seconde partie de cette thèse s'intéresse à la globalité des solutions régulières des équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ . Ces équations modélisent l'évolution d'un fluide homogène incompressible par le système suivant

$$(NS) : \begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} &= -\nabla p \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse du fluide et  $p$  sa pression.

Comme ces équations ont une origine physique, on souhaite, pour que la modélisation soit pertinente, qu'à une donnée initiale corresponde une unique solution. On s'intéresse aussi à la durée de validité du modèle. Étant donnée une condition initiale, la solution qu'elle engendre existe-t-elle éternellement ou "explose"-t-elle en temps fini ? Dans ce dernier cas, cela signifie que le modèle n'est plus valable à partir d'un certain temps. Les hypothèses qui ont conduit au modèle, notamment celle d'incompressibilité sont à remettre en cause et le fluide suit alors d'autres équations. La compréhension de ces équations est difficile et fait partie des problèmes à un million de dollars posés par le Clay Mathematical Institute en 2000.

Dans le cas d'un fluide bidimensionnel, J. Leray ([22]) a montré que les équations de Navier-Stokes étaient bien posées mais dans le cas tridimensionnel qui nous intéresse, la question de la globalité des solutions régulières n'est pas tranchée. Commençons par faire quelques remarques qui permettent d'entrevoir la difficulté liée à l'augmentation de la dimension du domaine spatial.

Tout d'abord, remarquons que seule la vitesse du fluide est une inconnue dans les équations de Navier-Stokes. En effet, comme la vitesse est de divergence nulle, on obtient

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\Delta p$$

et par suite

$$p = -\Delta^{-1}(\operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})) .$$

D'autre part, les équations de Navier-Stokes présentent une invariance d'échelle : si la donnée initiale  $\mathbf{u}_0$  génère une solution  $\mathbf{u}$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^d$  alors la donnée initiale

$$\mathbf{u}_{\lambda,0}(\mathbf{x}) := \lambda \mathbf{u}_0(\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$$

engendre la solution

$$\mathbf{u}_\lambda(t, \mathbf{x}) := \lambda \mathbf{u}(\lambda^2 t, \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$$

sur  $[0, \lambda^{-2}T] \times \mathbb{R}^d$ . En particulier, elles sont simultanément globales ou non.

Enfin, si on fait une estimation d'énergie formelle dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  alors on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = 0$$

car le terme  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  est nul grâce à la condition d'incompressibilité. Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(t')\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt' = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

où apparaît notamment l'effet régularisant du laplacien. Par conséquent, si  $\mathbf{u}$  est solution alors elle est, a priori, contrôlée dans l'espace

$$L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) .$$

D'autre part, un espace invariant par le changement d'échelle est

$$L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{d/2-1}(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{d/2}(\mathbb{R}^d)) .$$

Par suite, si on prend  $d = 2$  alors les équations de Navier-Stokes sont dites "critiques" car la quantité conservée est invariante d'échelle. Lorsque  $d = 3$ , on parle d'équations "sur-critiques" car la quantité conservée est moins régulière que celle obtenue par changement d'échelle. Cela explique notamment que les résultats bidimensionnels ne se généralisent pas simplement au cas tridimensionnel.

Pour obtenir des solutions régulières globales de Navier-Stokes, une solution a été de trouver des conditions suffisantes de petitesse sur la donnée initiale. A l'origine, J. Leray a démontré dans [22] que si la quantité  $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2}$  est assez petite, alors la donnée initiale  $\mathbf{u}_0$  engendre une solution globale régulière des équations de Navier-Stokes. Plus tard, on a comparé la solution  $u$  de (NS) à celle de l'équation de la chaleur issue de la même donnée initiale  $u_0$  en posant

$$\mathbf{u} = e^{t\Delta} \mathbf{u}_0 + B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

où l'opérateur bilinéaire  $B$  associe à tout couple  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  de divergence nulle, la solution de

$$\begin{cases} \partial_t B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \Delta B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \mathbb{P} \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \\ B(\mathbf{v}, \mathbf{w})(0, \cdot) &= 0. \end{cases}$$

avec  $\mathbb{P}$  le projecteur de Leray sur les vecteurs de divergence nulle.

L'idée est alors de trouver un espace de Banach  $X$  de fonctions de divergence nulle de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$  permettant d'appliquer un théorème de point fixe. Plus précisément, si, pour tout couple  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  de  $X$ , on a

$$\|B(\mathbf{v}, \mathbf{w})\|_X \leq C \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{w}\|_X$$

alors  $u$  est globale dès que

$$\|e^{t\Delta} \mathbf{u}_0\|_X \leq (4C)^{-1}.$$

Il faut alors trouver un espace de Banach qui convienne et qui soit le plus grand possible. Le premier fut défini par H. Fujita et T. Kato dans [8] par

$$\|\mathbf{u}\|_X := \sup_{t \in \mathbb{R}^+} t^{1/4} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}.$$

En particulier, si une donnée initiale est petite dans  $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  alors elle engendre une solution régulière globale de (NS).

Cette recherche a ensuite été poursuivie, entre autres, par Y. Giga et T. Miyakawa dans [14] et par M. Cannone, Y. Meyer et F. Planchon dans [3] et a permis de montrer que si une donnée initiale  $\mathbf{u}_0$  est petite dans un des espaces de Besov  $B_{p,\infty}^{-1+3/p}$  avec  $3 < p < \infty$ , i.e. si la quantité

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} t^{(1-3/p)/2} \|e^{t\Delta} \mathbf{u}_0(t)\|_{L^p}$$

est petite, alors elle engendre une unique solution régulière globale. Très récemment, il a été montré ([2, 13]) que les équations de Navier-Stokes étaient mal posées dans l'espace limite  $B_{\infty,\infty}^{-1}$  alors que H. Koch et D. Tataru avaient démontré dans [21] que si une donnée initiale  $\mathbf{u}_0$  est petite dans l'espace  $BMO^{-1}$  i.e. si la quantité

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} t \|e^{t\Delta} \mathbf{u}_0(t)\|_{L^\infty}^2 + \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, R > 0} \frac{1}{R^3} \int_{[0,R^2] \times B(\mathbf{x},R)} |e^{t\Delta} \mathbf{u}_0(t, \mathbf{y})|^2 dt d\mathbf{y}$$

était petite alors elle engendrait une solution régulière globale, ce qui laisse penser que l'espace  $BMO^{-1}$  est optimal. Pour cela, on dit qu'une donnée initiale est "petite" quand sa norme  $BMO^{-1}$  l'est et qu'elle est grande quand sa norme  $B_{\infty,\infty}^{-1}$  l'est.

Il est à noter que ces résultats restent vrais pour une classe plus large d'équations car ils n'utilisent pas spécifiquement la structure du terme non linéaire  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  ni le fait que dans les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes soient bien posées. Au contraire, il existe des conditions "géométriques" suffisantes sur la donnée initiale (sphérique, hélicoïdale ou axisymétrique) pour qu'elle engendre une solution globale (voir [24, 30]). Ces conditions ont l'avantage d'être vérifiées par des données initiales arbitrairement "grandes" ce qui permet de s'affranchir de toute hypothèses de petitesse.

Un autre critère de globalité, valable pour de "grandes" données initiales a été établi dans [5, 6] par J.-Y. Chemin, I. Gallagher et P. Zhang. Ils y comparent la solution de (NS) tridimensionnel à celle du système bidimensionnel en considérant des données initiales variant peu selon la direction verticale. Plus précisément, ils prouvent que si on considère une donnée initiale de la forme

$$(\mathbf{v}_0^x + \varepsilon \mathbf{w}_0^x, w_0^z)(\mathbf{x}, \varepsilon z)$$



où  $\mathbf{x} = (x, y)$  et où  $\mathbf{v}_0 = (v_0^x, 0)$  et  $\mathbf{w}_0 = (w_0^x, w_0^z)$  sont des vecteurs réguliers définis sur  $\mathbb{R}^3$  de divergence nulle alors, pour  $\varepsilon$  assez petit, elle engendre une solution globale des équations de Navier-Stokes. Ils montrent aussi que si on perturbe une donnée initiale qui engendre une solution globale de  $(NS)$  par ce type de données alors, sous certaines hypothèses, la solution engendrée reste globale.

Dans la deuxième partie, on se propose de modifier ces résultats et d'exhiber deux classes de données initiales générant des solutions globales de  $(NS)$  en s'appuyant sur la structure du spectre de la donnée initiale. Pour les mêmes raisons que dans [5] ces données peuvent être arbitrairement "grandes". L'idée est la suivante : si le spectre de la donnée initiale est suffisamment près du plan horizontal alors elle engendre une solution globale de  $(NS)$ . Nous démontrerons le résultat suivant.

**THÉORÈME.** *Pour toute famille  $(u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  de données initiales de divergence nulle telle que la suite  $(\sqrt{\varepsilon}u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  soit bornée dans  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  pour tout réel  $s \geq -1$ , s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$*

$$\xi = (\xi_x, \xi_z) \in \text{Supp}(\widehat{u_{\varepsilon,0}}) \implies |\xi_z| \leq C\varepsilon|\xi_x|$$

alors il existe un réel strictement positif  $\varepsilon_0$  tel que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  alors  $u_{\varepsilon,0}$  engendre une solution globale des équations de Navier-Stokes.

En effet, les données initiales étudiées dans [5, 6] oscillent peu selon la direction verticale, et on peut espérer qu'une donnée initiale dont le spectre est quasi-horizontal, pourra pour les mêmes raisons engendrer une solution globale. Mais, a priori, il ne suffit pas d'avoir un tel spectre pour se mettre sous la forme précédente (et réciproquement, à moins de faire des hypothèses de compacité sur les spectres de  $\mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{w}_0$ ). Néanmoins, il est naturel de se dire que la combinaison d'un spectre quasi-horizontal et d'une divergence nulle va permettre d'obtenir d'autres informations. C'est ce qui sera détaillé au chapitre 7. Plus précisément, si on considère une donnée initiale  $\mathbf{u}_{\varepsilon,0}$  de divergence nulle et ayant un spectre vérifiant

$$\exists C, \quad \xi \in \text{Supp}(\widehat{\mathbf{u}_{\varepsilon,0}}) \implies |\xi_z| \leq C\varepsilon|\xi_x|$$

alors il existe des fonctions  $\mathbf{v}_{\varepsilon,0}$  et  $\mathbf{w}_{\varepsilon,0}$  de divergence nulle et de même spectre que  $\mathbf{u}_{\varepsilon,0}$  telles que

$$\mathbf{u}_{\varepsilon,0} = (\mathbf{v}_{\varepsilon,0}, 0) + \mathbf{w}_{\varepsilon,0}$$

et que, pour tout  $\xi$  appartenant à ce spectre, on ait

$$|\widehat{\mathbf{w}_{\varepsilon,0}^x}(\xi)| \leq C\varepsilon|\widehat{w_{\varepsilon,0}^z}(\xi)|.$$

On considère alors la solution  $\mathbf{v}_\varepsilon$  des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles engendrée par  $\mathbf{v}_{\varepsilon,0}$  et  $\mathbf{w}_\varepsilon$  la solution de l'équation d'Oseen non stationnaire i.e.

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla_x \mathbf{w}_\varepsilon - \Delta \mathbf{w}_\varepsilon &= -\nabla q_\varepsilon \\ \text{div } \mathbf{w}_\varepsilon &= 0 \\ \mathbf{w}_\varepsilon(0, \cdot) &= \mathbf{w}_{\varepsilon,0} \end{cases}$$

afin de comparer la solution issue de  $\mathbf{u}_{\varepsilon,0}$  à la solution approchée  $\mathbf{v}_\varepsilon^{app} := (\mathbf{v}_\varepsilon, 0) + \mathbf{w}_\varepsilon$ .

Cette différence  $D_\varepsilon$  est solution de

$$\partial_t D_\varepsilon + D_\varepsilon \cdot \nabla D_\varepsilon - \Delta D_\varepsilon + \mathbf{v}_\varepsilon^{app} \cdot \nabla D_\varepsilon + D_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v}_\varepsilon^{app} = -\nabla r_\varepsilon + F_\varepsilon$$

où la force  $F_\varepsilon$  est détaillée à la proposition 7.7. On démontrera qu'elle est globale s'il existe un couple de réels positifs  $(C_1, C_2)$  tel que

$$\|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}^2 e^{C_1 N_\varepsilon^2} \leq C_2$$

où  $N_\varepsilon$  est la norme de la solution approchée dans un espace invariant par changement d'échelle. Nous commencerons par prouver que, sous les hypothèses du théorème, la famille  $(N_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée puis nous montrerons que la famille  $\left(\|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}^2\right)_{\varepsilon>0}$  tend vers zéro.

Ces deux étapes sont fastidieuses car elles nécessitent de nombreuses estimations d'énergie et lois de produit mais le fait que la force extérieure tende vers zéro peut se concevoir simplement. La force  $F_\varepsilon$  est essentiellement égale à

$$\mathbf{w}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v}_\varepsilon^{app} = \mathbf{w}_\varepsilon^x \cdot \nabla_s \mathbf{v}_\varepsilon^{app} + \mathbf{w}_\varepsilon^z \partial_z \mathbf{v}_\varepsilon^{app}.$$

Or, si le fait que les conditions initiales oscillent peu selon  $z$  se propage alors on peut s'attendre à ce que le terme faisant intervenir une dérivée verticale soit faible et de même, on peut espérer que la composante horizontale de  $w_\varepsilon$  reste petite. Nous détaillerons cela dans le chapitre 8.

Nous verrons aussi que ce résultat se généralise. Si on perturbe une donnée initiale engendrant une solution globale des équations de Navier-Stokes par ce type de données à spectre quasi-horizontale alors on génère encore une solution globale. Plus précisément, on montrera le théorème suivant.

**THÉORÈME.** *Soit  $u_0$  une donnée initiale de divergence nulle, appartenant à  $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  et générant une solution globale régulière de (NS). Pour toute famille  $(u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  de données initiales de divergence nulle telle que  $(\sqrt{\varepsilon}u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  soit bornée dans  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $s \geq -1$ , s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$*

$$\xi \in \text{Supp}(\widehat{u_{\varepsilon,0}}) \implies |\xi_z| \leq C\varepsilon |\xi_x|.$$

*alors il existe des constantes  $c_0$  et  $\varepsilon_0$  telles que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  et si*

$$\|u_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \leq c_0$$

*alors  $u_0 + u_{\varepsilon,0}$  génère une solution globale de (NS).*



Première partie

Étude du modèle de Saint-Venant équatorial  
non visqueux



## CHAPITRE 1

### Modélisation physique

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir à partir des équations de Navier-Stokes, les équations de Saint-Venant puis le système que nous étudierons dans la suite et qui modélise le comportement des océans dans la zone équatoriale. Pour cela, nous nous appuyons sur [9, 10, 15, 16, 23, 28].

Pour obtenir les équations de Saint-Venant, on supposera que la densité du fluide est homogène et que le mouvement est essentiellement horizontal et en eaux peu profondes, ce qui est justifié dans l'étude du mouvement des océans. En effet, la hauteur caractéristique des océans est de l'ordre du kilomètre alors que la longueur caractéristique peut atteindre plus de 1000 kilomètres. De plus, les courants horizontaux évoluent à une vitesse de l'ordre de un mètre par seconde quand les vitesses verticales sont mille fois plus faibles. Ensuite, on se placera au niveau de l'équateur dans le cas d'une rotation rapide ce qui permet en particulier de linéariser le sinus de la latitude qui intervient dans le terme dû à la rotation de la Terre. Cette approximation est connue sous le nom de modèle bétaplan du fait du paramètre  $\beta$  qu'elle introduit.

Une fois les variables adimensionnées en tenant compte des hypothèses de petitesse, on montrera que si on note  $\mathbf{v}$  la vitesse horizontale du fluide et  $h$  les variations de sa hauteur alors elles ne dépendent que des coordonnées horizontales et vérifient le système suivant

$$(ESW)_\varepsilon \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla h + \frac{\beta}{\varepsilon} \mathbf{y} \mathbf{v}^\perp = 0 \\ \partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + h \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  prend en compte les hypothèses de petitesse et où  $\beta$  relie  $\Omega$  et  $\varepsilon^{-1}$ . Du fait de la linéarisation du sinus que nous effectuerons au niveau de l'équateur, nous choisirons le domaine spatial d'étude  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ .

#### 1.1. Equations du fluide

Nous commençons par rappeler les équations de Navier-Stokes. On considère un fluide incompressible et homogène de densité  $\rho$  évoluant dans un domaine spatial  $\mathbb{S}^2 \times [0, H(t, \mathbf{x})]$  dont la vitesse est notée  $\mathbf{U}$ . En particulier, l'équation de conservation de la masse implique que  $\mathbf{U}$  est un champ de vecteurs solénoïdal. En dehors des termes classiques de convection et des efforts internes, l'étude du mouvement des océans à la surface de la Terre nécessite d'ajouter à l'équation de conservation de la quantité de mouvement deux termes supplémentaires :

La rotation de la Terre est prise en compte via un terme d'accélération de Coriolis égal à  $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{U}$  où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le vecteur taux de rotation de la Terre. Son expression dans les coordonnées locales est reliée à la latitude  $\theta$  par  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(0, \cos\theta, \sin\theta)$ .

L'étude des ondes de surface nécessite d'introduire l'accélération de la pesanteur d'intensité  $-g$  et dirigée selon  $\mathbf{e}_z$ , le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut.

Si on note  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes du fluide, les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{U} = -g \mathbf{e}_z \\ \operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0. \end{cases}$$

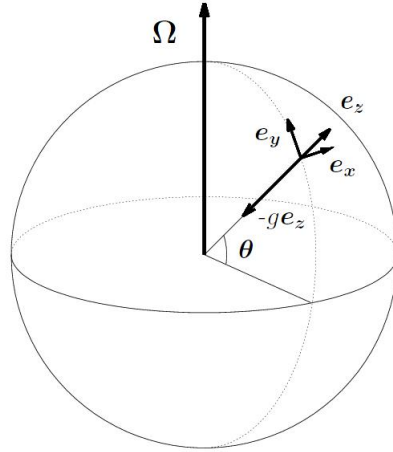


FIG. 1.1.1. Notations utilisées

Dans les océans, les ordres de grandeur des vitesses horizontale et verticale sont différents. Pour cette raison, on note  $\mathbf{U} = (\mathbf{v}, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  la vitesse et on va écrire le système dont ses composantes sont solutions. Pour cela, on décompose la divergence en deux parties de sorte que l'équation de conservation de la masse devient

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \partial_z w = 0$$

où la divergence horizontale est donnée par

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \partial_x v^1 + \partial_y v^2$$

si  $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$ .

De même, en posant

$$\nabla = (\nabla_{\mathbf{x}}, \partial_z),$$

on obtient

$$\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} \\ w \partial_z w + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w \end{pmatrix}$$

D'autre part, l'accélération de Coriolis s'écrit

$$2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2\Omega \sin\theta \mathbf{v}^\perp + 2\Omega \cos\theta w \mathbf{e}_x \\ 2\Omega \cos\theta v^1 \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{v}^\perp = (-v^2, v^1)$  si  $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$ .

Il reste à décomposer le terme faisant intervenir le tenseur des contraintes de Cauchy. Celui-ci comporte une partie due aux efforts de pression et une autre liée à la viscosité du fluide. Plus précisément,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu D(\mathbf{U})$$

où  $D(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U})$  est la partie symétrique du gradient de  $\mathbf{U}$  et où  $\mu$  est le coefficient de viscosité cinématique du fluide. Par suite,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{x}} p + 2\mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \mu \partial_z^2 \mathbf{v} + \mu \nabla_{\mathbf{x}} (\partial_z w) \\ -\partial_z p + \mu \Delta_{\mathbf{x}} w + 2\mu \partial_z^2 w + \mu \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \partial_z \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} p + \frac{2\mu}{\rho} \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \partial_z^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_z w - 2\Omega \sin \theta \mathbf{v}^\perp - 2\Omega \cos \theta w \mathbf{e}_x \\ \partial_t w + w \partial_z w + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w = -\frac{1}{\rho} \partial_z p + \frac{\mu}{\rho} \Delta_{\mathbf{x}} w + \frac{2\mu}{\rho} \partial_z^2 w + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \partial_z \mathbf{v} - \Omega \cos \theta v^1 - g \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \partial_z w = 0. \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant écrire ce système sous forme adimensionnée. Pour cela, on introduit une longueur et une vitesse horizontales caractéristiques  $L$  et  $V$ . On fait l'hypothèse que le fluide évolue dans un domaine peu profond, c'est-à-dire que la hauteur caractéristique est petite devant  $L$ . Le rapport entre ces deux longueurs est noté  $\varepsilon$ . On introduit donc de nouvelles variables adimensionnées  $\mathbf{x}'$  et  $z'$  définies par

$$\mathbf{x}' := \frac{1}{L} \mathbf{x} \quad \text{et} \quad z' := \frac{1}{\varepsilon L} z.$$

En particulier,

$$\nabla_{\mathbf{x}'} = L \nabla_{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \partial_{z'} = \varepsilon L \partial_z.$$

On suppose également que la vitesse du fluide est essentiellement horizontale, c'est-à-dire que le rapport entre les vitesses caractéristiques verticale et horizontale est d'ordre  $\varepsilon$ . On définit donc les vitesses adimensionnées suivantes

$$\mathbf{v}' := \frac{1}{V} \mathbf{v} \quad \text{et} \quad w' := \frac{1}{\varepsilon V} w.$$

De même, on fait apparaître un temps et une pression caractéristiques en posant

$$t' := \frac{V}{L} t \quad \text{et} \quad p' = \frac{1}{\rho V^2} p.$$

On définit alors

$$Re = \frac{V}{\mu}, \quad Ro = \frac{V}{2L\Omega} \quad \text{et} \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{\varepsilon g L}}$$

à savoir les nombres de Reynolds, Rossby et de Froude. En utilisant toutes ces variables adimensionnées, le système  $(NS)$  se traduit alors par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{x}} p + \frac{2}{Re} \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{1}{Re \varepsilon^2} \partial_z^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} \partial_z w - \frac{1}{Ro} \sin \theta \mathbf{v}^\perp - \frac{\varepsilon}{Ro} \cos \theta w \mathbf{e}_x \\ (2) \quad \partial_t w + w \partial_z w + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w = -\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z p + \frac{1}{Re} \Delta_{\mathbf{x}} w + \frac{2}{Re \varepsilon^2} \partial_z^2 w + \frac{1}{Re \varepsilon^2} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \partial_z \mathbf{v} - \frac{1}{\varepsilon Ro} \cos \theta v^1 - \frac{1}{\varepsilon^2 Fr^2} \\ (3) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \partial_z w = 0. \end{array} \right.$$

## 1.2. Conditions aux bords

Pour obtenir un problème bien posé, il est nécessaire d'ajouter aux équations d'évolution du fluide des conditions aux bords du domaine. Remarquons tout d'abord que le domaine spatial choisi n'a que deux bords du fait de la périodicité selon les variables horizontales.

On commence par adimensionner l'équation de la surface libre du fluide en  $z = \eta(t, \mathbf{x})$ . Puis, on traduit le fait que le fluide ne subit aucune contrainte à travers cette surface par une condition de Neumann homogène  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface dont l'expression est

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla_{\mathbf{x}} \eta)^2}} \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{x}} \eta \\ 1 \end{pmatrix}.$$



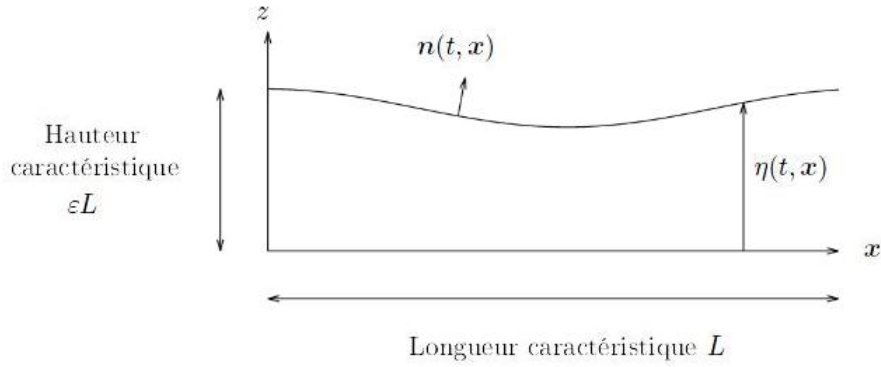


FIG. 1.2.1. Modélisation du fluide

Si l'on avait pris en compte les effets de la tension de surface, cela aurait conduit à la condition non homogène  $\sigma \mathbf{n} = a\kappa \mathbf{n}$ , avec  $a$  la capillarité et  $\kappa$  la courbure moyenne.

De plus, l'évolution de la fonction  $\eta$  est régie par l'équation de transport  $\partial_t \eta + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta = w|_{z=\eta}$ . Cette équation est invariante par adimensionnement et s'obtient en considérant le comportement d'un point matériel à la surface du fluide.

Les conditions aux limites imposées sur cette surface libre s'écrivent donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \eta + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta = w|_{z=\eta} \\ p \nabla_{\mathbf{x}} \eta - \frac{2}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta + \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w + \frac{1}{Re \varepsilon^2} \partial_z \mathbf{v} = 0 \\ -p - \frac{\varepsilon^2}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta - \frac{1}{Re} \partial_z \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta + \frac{2}{Re} \partial_z w = 0. \end{array} \right.$$

Au niveau du fond, supposé plat et donc d'équation  $z = 0$ , on utilise une condition de non-pénétration qui se traduit par la nullité de la vitesse verticale  $w$ . De plus, aucun effort tangentiel n'est transmis i.e. la composante horizontale des efforts est nulle.

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w + \frac{1}{Re \varepsilon^2} \partial_z \mathbf{v} = 0. \end{array} \right.$$

### 1.3. Approximation de Saint-Venant

Afin d'obtenir le système d'équations de Saint-Venant, nous allons faire des approximations liées à la petitesse du paramètre  $\varepsilon$ . Tout d'abord, on considère que les termes pénalisés par  $\varepsilon^{-2}$  sont négligeables, ce qui implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z^2 \mathbf{v} = 0 \\ \partial_z p = \frac{2}{Re} \partial_z^2 w + \frac{1}{Re} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \partial_z \mathbf{v} - \frac{1}{Fr^2} \\ \partial_z \mathbf{v}|_{z=\eta} = 0 \\ p|_{z=\eta} + \frac{1}{Re} \partial_z \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta - \frac{2}{Re} \partial_z w|_{z=\eta} = 0 \\ \partial_z \mathbf{v}|_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

En particulier, on en déduit que  $\mathbf{v}$  est indépendant de la variable verticale  $z$ .

Grâce à cette indépendance, si l'on intègre l'équation (3) entre le fond et la surface alors on a

$$\eta \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + w_{z=\eta} - w_{z=0} = 0.$$

Les conditions obtenues sur la vitesse verticale au fond et à la surface conduisent alors à

$$\eta \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \partial_t \eta + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta = 0$$

et par suite à

$$\partial_t \eta + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \mathbf{v}) = 0.$$

D'autre part, la nullité de la dérivée verticale de  $\mathbf{v}$  donne

$$\partial_z p = \frac{2}{Re} \partial_z^2 w - \frac{1}{Fr^2}.$$

En intégrant cette relation entre les altitudes  $z$  et  $\eta$ , on obtient l'expression de la pression suivante

$$p_{z=\eta} - p = \frac{2}{Re} (\partial_z w_{z=\eta} - \partial_z w) - \frac{1}{Fr^2} (\eta - z).$$

Or, à la surface,  $p = \frac{2}{Re} \partial_z w$ , ce qui, en négligeant la viscosité, se simplifie en une loi hydrostatique

$$p = \frac{1}{Fr^2} (\eta - z).$$

Remarquons que la pression devient indépendante de la variable verticale lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro car le nombre de Froude est inversement proportionnel à  $\sqrt{\varepsilon}$ .

On va maintenant intégrer l'équation (1) qui régit l'évolution de la vitesse horizontale pour obtenir celle vérifiée par  $\eta \mathbf{v}$ . Comme la vitesse horizontale est indépendante de la variable verticale, en négligeant le terme en  $\varepsilon$ , on a

$$\partial_t (\eta \mathbf{v}) - \partial_t \eta \mathbf{v} + \eta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = - \int_0^\eta \nabla_{\mathbf{x}} p + \frac{2\eta}{Re} \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w|_{z=\eta} - \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w|_{z=0} - \frac{1}{Ro} \sin \theta \eta \mathbf{v}^\perp.$$

L'expression de la pression obtenue conduit à

$$\int_0^\eta p = \frac{1}{Fr^2} \int_0^\eta (\eta - z) = \frac{1}{2Fr^2} \eta^2.$$

puis

$$\int_0^\eta \nabla_{\mathbf{x}} p = \nabla_{\mathbf{x}} \left( \int_0^\eta p \right) - p_{z=\eta} \nabla_{\mathbf{x}} \eta = \frac{1}{Fr^2} \eta \nabla_{\mathbf{x}} \eta.$$

Ainsi,

$$\partial_t (\eta \mathbf{v}) - \partial_t \eta \mathbf{v} + \eta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = - \frac{1}{Fr^2} \eta \nabla_{\mathbf{x}} \eta + \frac{2\eta}{Re} \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w|_{z=\eta} - \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w|_{z=0} - \frac{1}{Ro} \sin \theta \eta \mathbf{v}^\perp.$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse

$$-\partial_t \eta \mathbf{v} + \eta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \mathbf{v}) \mathbf{v} + \eta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}).$$

D'autre part, en utilisant les conditions aux bord simplifiées, on obtient

$$\nabla_{\mathbf{x}} w|_{z=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w = \frac{2}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta$$

donc

$$\frac{2\eta}{Re} \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w|_{z=\eta} - \frac{1}{Re} \nabla_{\mathbf{x}} w|_{z=0} = \frac{2}{Re} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}).$$

Par conséquent, on a

$$\partial_t (\eta \mathbf{v}) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{Fr^2} \eta \nabla_{\mathbf{x}} \eta - \frac{2}{Re} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) + \frac{\sin \theta}{Ro} \eta \mathbf{v}^\perp = 0.$$

On appelle modèle de Saint-Venant le système :

$$\begin{cases} \partial_t (\eta \mathbf{v}) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{Fr^2} \eta \nabla_{\mathbf{x}} \eta - \frac{2}{Re} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) + \frac{\sin \theta}{Ro} \eta \mathbf{v}^\perp = 0 \\ \partial_t \eta + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\eta \mathbf{v}) = 0. \end{cases}$$

#### 1.4. Rotation rapide au voisinage de l'équateur

Afin d'étudier les petites fluctuations de la hauteur du fluide autour d'une hauteur moyenne, on pose

$$\eta = 1 + \varepsilon h.$$

La deuxième équation devient donc

$$\partial_t h + \nabla_{\mathbf{x}} h \cdot \mathbf{v} + h \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0.$$

Pour le première, on néglige le terme visqueux car on se place dans le cadre d'un écoulement à haut Reynolds et on suppose que le nombre de Froude, i.e. le rapport entre la vitesse du fluide et celle des ondes de gravité, est de taille  $\varepsilon$ . De plus, au voisinage de l'équateur, on peut faire l'approximation suivante

$$\frac{\sin \theta}{Ro} \sim \frac{yL}{Ro R_T} = \frac{yL^2 \Omega}{V R_T}$$

où  $R_T$  est le rayon terrestre. Comme le nombre de Rossby vaut environ  $10^{-2}$ , on fait l'approximation suivante :

$$\frac{\sin \theta}{Ro} \sim \frac{\beta}{\varepsilon} y.$$

Cette linéarisation nous incite, du fait du terme en  $y$ , à transformer le domaine spatial  $\mathbb{T}^2$  en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ . Cette modélisation cylindrique de la Terre, bien que peu physique, est acceptable au niveau de l'équateur. Ainsi, on a

$$\partial_t ((1 + \varepsilon h) \mathbf{v}) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} ((1 + \varepsilon h) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (1 + \varepsilon h) \nabla_{\mathbf{x}} h + \frac{\beta}{\varepsilon} y (1 + \varepsilon h) \mathbf{v}^\perp = 0$$

que l'on décompose en

$$(1 + \varepsilon h) \partial_t \mathbf{v} + (1 + \varepsilon h) (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) + (1 + \varepsilon h) \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} h + \frac{\beta}{\varepsilon} y \mathbf{v}^\perp \right) = -\varepsilon \partial_t h \mathbf{v} - \varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \mathbf{v}.$$

Par suite,

$$(1 + \varepsilon h) \left( \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} h + \frac{\beta}{\varepsilon} y \mathbf{v}^\perp \right) = -\varepsilon \partial_t h \mathbf{v} - \varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \mathbf{v} - (1 + \varepsilon h) \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}.$$

La relation obtenue sur  $h$  implique que

$$-\varepsilon \partial_t h \mathbf{v} - \varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \mathbf{v} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \varepsilon h \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$$

et par conséquent, la vitesse horizontale est solution de

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} h + \frac{\beta}{\varepsilon} y \mathbf{v}^\perp = 0.$$

Ainsi, le système obtenu est

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla h + \frac{\beta}{\varepsilon} y \mathbf{v}^\perp = 0 \\ \partial_t h + \mathbf{v} \cdot \nabla h + h \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Il s'agit du système étudié dans [9] sans le terme visqueux.

## CHAPITRE 2

### Réécriture du problème

Dans ce chapitre, on va, dans les deux premières sections, transformer le système obtenu précédemment en un système quasi-linéaire symétrique à pénalisation antisymétrique. Pour cela, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , on va transformer la solution  $\begin{pmatrix} v_\varepsilon \\ h_\varepsilon \end{pmatrix}$  du système pénalisé  $(ESW)_\varepsilon$  en un champ de vecteurs  $V_\varepsilon$  solution de

$$\partial_t V_\varepsilon + A_1(V_\varepsilon) \partial_x V_\varepsilon + A_2(V_\varepsilon) \partial_y V_\varepsilon + \varepsilon^{-1} M V_\varepsilon = 0$$

où les matrices  $A_1(V_\varepsilon)$  et  $A_2(V_\varepsilon)$  sont symétriques et ont pour composantes des combinaisons linéaires de celles de  $V_\varepsilon$  et où la matrice de pénalisation  $M$  est antisymétrique pour le produit scalaire  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  i.e.  $M^* = -M$ . Cette modification s'inspire fortement de ce qui a été fait dans [7].

Cette structure symétrique à pénalisation antisymétrique confèrera au système de nombreuses propriétés comme cela apparaît dans [4, 11]. En particulier, lors d'estimations d'énergie dans l'espace  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , le terme pénalisant n'apparaîtra pas du fait de l'antisymétrie de  $M$ . Pour pouvoir obtenir des résultats analogues sur les dérivées des solutions et ainsi avoir une convergence plus forte, cette transformation est choisie de sorte qu'il existe des opérateurs de dérivation conservant la forme du système en commutant avec l'opérateur de pénalisation. On pourra alors, dans une dernière section, définir des espaces adaptés à notre nouveau système.

#### 2.1. Symétrisation du système

Commençons par mettre sous forme symétrique le terme quadratique.

Si l'on pose  $U_\varepsilon = \begin{pmatrix} v_\varepsilon \\ h_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ v_\varepsilon \\ h_\varepsilon \end{pmatrix}$  alors le modèle équatorial de Saint-Venant  $(ESW)_\varepsilon$  se réécrit

$$\partial_t U_\varepsilon + \begin{pmatrix} u_\varepsilon & 0 & \varepsilon^{-1} \\ 0 & u_\varepsilon & 0 \\ h_\varepsilon + \varepsilon^{-1} & 0 & u_\varepsilon \end{pmatrix} \partial_x U_\varepsilon + \begin{pmatrix} v_\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & v_\varepsilon & \varepsilon^{-1} \\ 0 & h_\varepsilon + \varepsilon^{-1} & v_\varepsilon \end{pmatrix} \partial_y U_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -\beta y v_\varepsilon \\ \beta y u_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Le système n'est pas symétrique mais pour y remédier, on va faire un changement d'inconnues non linéaire de la forme  $h_\varepsilon = f(\widetilde{h}_\varepsilon)$  où  $f$  est est fonction scalaire qui s'annule en zéro et dont la dérivée ne s'annule pas au voisinage de l'origine ce qui assure qu'elle réalise une bijection de ce voisinage dans un autre.

En posant  $\widetilde{U}_\varepsilon = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ v_\varepsilon \\ \widetilde{h}_\varepsilon \end{pmatrix}$ , on obtient

$$\partial_t \widetilde{U}_\varepsilon + M_1(\widetilde{U}_\varepsilon) \partial_x \widetilde{U}_\varepsilon + M_2(\widetilde{U}_\varepsilon) \partial_y \widetilde{U}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -\beta y v_\varepsilon \\ \beta y u_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

avec

$$M_1(\widetilde{U}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} u_\varepsilon & 0 & \varepsilon^{-1} f'(\widetilde{h}_\varepsilon) \\ 0 & u_\varepsilon & 0 \\ \frac{f(\widetilde{h}_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}}{f'(\widetilde{h}_\varepsilon)} & 0 & u_\varepsilon \end{pmatrix}$$

et

$$M_2(\widetilde{U}_\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & v_\varepsilon & \varepsilon^{-1} f'(\widetilde{h}_\varepsilon) \\ 0 & \frac{f(\widetilde{h}_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}}{f'(\widetilde{h}_\varepsilon)} & v_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

On est donc naturellement amené à chercher une fonction  $f$  telle que

$$\frac{f + \varepsilon^{-1}}{f'} = \varepsilon^{-1} f'$$

c'est-à-dire telle que

$$1 + \varepsilon f = f'^2.$$

Remarquons que la définition physique de  $h_\varepsilon$  implique la positivité stricte de  $1 + \varepsilon h_\varepsilon$  et donc de  $1 + \varepsilon f$ . Comme  $f'$  ne change pas de signe autour de l'origine, on la choisit positive et on résout donc l'équation à variables séparées suivante :

$$f' = \sqrt{1 + \varepsilon f}$$

en remarquant que

$$\frac{f'}{\sqrt{1 + \varepsilon f}} = \left( \frac{2}{\varepsilon} \sqrt{1 + \varepsilon f} \right)'$$

Ainsi, comme  $f$  est nulle à l'origine,

$$f(x) = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon x}{2}\right)^2 - 1}{\varepsilon}$$

et on définit  $\widetilde{h}_\varepsilon$  par

$$\widetilde{h}_\varepsilon := \frac{2}{\varepsilon} \left( \sqrt{1 + \varepsilon h_\varepsilon} - 1 \right).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{f(\widetilde{h}_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}}{f'(\widetilde{h}_\varepsilon)} = \varepsilon^{-1} f'(\widetilde{h}_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \left( 1 + \frac{\varepsilon \widetilde{h}_\varepsilon}{2} \right)$$

et en particulier, les termes pénalisés sont les mêmes malgré le changement d'inconnues, la partie quadratique est par contre modifiée. En particulier, elle diffère de celle conservée dans [9].

En mettant à part tous les termes en  $\frac{1}{\varepsilon}$  afin de mettre en évidence la matrice de pénalisation, le système obtenu est alors

$$\partial_t \widetilde{U}_\varepsilon + \begin{pmatrix} u_\varepsilon & 0 & \frac{\widetilde{h}_\varepsilon}{2} \\ 0 & u_\varepsilon & 0 \\ \frac{\widetilde{h}_\varepsilon}{2} & 0 & u_\varepsilon \end{pmatrix} \partial_x \widetilde{U}_\varepsilon + \begin{pmatrix} v_\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & v_\varepsilon & \frac{\widetilde{h}_\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{\widetilde{h}_\varepsilon}{2} & v_\varepsilon \end{pmatrix} \partial_y \widetilde{U}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -\beta y v_\varepsilon + \partial_x \widetilde{h}_\varepsilon \\ \beta y u_\varepsilon + \partial_y \widetilde{h}_\varepsilon \\ \partial_x u_\varepsilon + \partial_y v_\varepsilon \end{pmatrix} = 0.$$

Dans toute la suite on omettra les  $\widetilde{\cdot}$  afin d'alléger l'écriture. Le système est donc sous la forme

$$\partial_t U_\varepsilon + B_1(U_\varepsilon) \partial_x U_\varepsilon + B_2(U_\varepsilon) \partial_y U_\varepsilon + \varepsilon^{-1} N U_\varepsilon = 0$$

où  $B_1(U_\varepsilon)$  et  $B_2(U_\varepsilon)$  sont symétriques et leurs composantes sont des combinaisons linéaires de celles de  $U_\varepsilon$  et où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\beta y & \partial_x \\ \beta y & 0 & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix}$$

est antisymétrique pour le produit scalaire  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  i.e.  $N^* = -N$ .

On dit que le système est sous forme symétrique à pénalisation antisymétrique, ce qui lui confère de nombreuses propriétés, notamment en ce qui concerne les estimations d'énergie. C'est l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. *Si la famille  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est solution de l'équation*

$$\partial_t U_\varepsilon + \sum_{i=1}^d B_{\varepsilon,i} \partial_i U_\varepsilon + \varepsilon^{-1} N U_\varepsilon = F_\varepsilon$$

où les matrices  $(B_{\varepsilon,i})_{1 \leq i \leq d, \varepsilon>0}$  sont symétriques et où  $N$  est antisymétrique pour le produit scalaire  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors on a l'estimation

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|U_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \frac{1}{2} \|\operatorname{div} B_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|U_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

DÉMONSTRATION. Du fait de l'antisymétrie de  $N$ , une estimation d'énergie dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 &= \langle \partial_t U_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= \langle F_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} - \sum_{i=1}^d \langle B_{\varepsilon,i} \partial_i U_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} - \varepsilon^{-1} \langle N U_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= \langle F_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} - \left\langle \sum_{i=1}^d B_{\varepsilon,i} \partial_i U_\varepsilon, U_\varepsilon \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \end{aligned}$$

De plus, comme les matrices  $(B_{\varepsilon,i})_{1 \leq i \leq d, \varepsilon>0}$  sont symétriques

$$\begin{aligned} \langle B_{\varepsilon,i} \partial_i U_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} &= \langle \partial_i U_\varepsilon, B_{\varepsilon,i} U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = - \langle U_\varepsilon, \partial_i (B_{\varepsilon,i} U_\varepsilon) \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= - \langle U_\varepsilon, \partial_i B_{\varepsilon,i} U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} - \langle U_\varepsilon, B_{\varepsilon,i} \partial_i U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \end{aligned}$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^d \langle B_{\varepsilon,i} \partial_i U_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = -\frac{1}{2} \langle \operatorname{div} B_\varepsilon U_\varepsilon, U_\varepsilon \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

ce qui conduit à l'inégalité annoncée.  $\square$

Ainsi, si la famille  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  et si la famille  $(\operatorname{div} B_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  l'est dans  $L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors on a une estimation uniforme de  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

Mais dans notre cas, les matrices  $(B_{\varepsilon,i})_{1 \leq i \leq d, \varepsilon>0}$  dépendent de la famille  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . Plus précisément, on a, par inclusion de Sobolev,

$$\|\operatorname{div} B(U_\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U_\varepsilon\|_{H^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

ce qui ne permet pas de conclure même si la force extérieure est, dans notre cas, nulle.

On remarque alors que si on considère une matrice de dérivation spatiale  $D$  alors la famille  $(DU_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vérifie

$$\partial_t (DU_\varepsilon) + B_1(U_\varepsilon) \partial_x (DU_\varepsilon) + B_2(U_\varepsilon) \partial_y (DU_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} N D U_\varepsilon = F_\varepsilon^D$$

avec cette fois ci un second membre non nul faisant intervenir les commutateurs entre la matrice de dérivation  $D$  et les matrices du système. Plus précisément,

$$F_\varepsilon^D = [B_1(U_\varepsilon) \partial_x, D] U_\varepsilon + [B_2(U_\varepsilon) \partial_y, D] U_\varepsilon + \varepsilon^{-1} [N, D] U_\varepsilon.$$

Si on veut espérer, grâce à la proposition précédente, obtenir une estimation uniforme de la famille  $(DU_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  il est nécessaire que le commutateur  $[N, D]$  soit nul. En effet, si c'était le cas pour toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 3 alors on pourrait estimer les forces extérieures par

$$\|F_\varepsilon^D\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq \|U_\varepsilon\|_{H^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2$$

et par suite on aurait

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_\varepsilon\|_{H^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \lesssim \|U_\varepsilon\|_{H^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^3$$

ce qui permettrait d'obtenir localement une estimation uniforme de la famille  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  pour peu que la famille des données initiales  $(U_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  converge. Or, pour l'instant, notre matrice de pénalisation commute avec la dérivation par rapport à  $x$ , mais pas avec la dérivation par rapport à  $y$  car le commutateur  $[y, \partial_y]$  est non nul. Il va donc falloir réaliser un nouveau changement d'inconnues, cette fois-ci linéaire, et trouver des matrices de dérivations adaptées pour que la structure du système soit stable par dérivation.

## 2.2. Nouveau système

L'objectif de cette section est de modifier le système pour trouver des matrices de dérivations commutant avec la nouvelle matrice de pénalisation. Pour cela, on introduit les opérateurs suivants.

DÉFINITION 2.2. *On définit l'opérateur de Hermite selon  $y$  par*

$$H := \partial_y^2 - \beta^2 y^2$$

et les opérateurs de création et d'annihilation correspondants par

$$L_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_y \mp \beta y) .$$

Ces opérateurs ont des propriétés de commutation qui vont nous être utiles. Plus précisément, on a le résultat suivant

PROPOSITION 2.3. *Les opérateurs  $H$ ,  $L_+$  et  $L_-$  vérifient*

$$L_+ L_- = \frac{1}{2} (H + \beta) , \quad L_- L_+ = \frac{1}{2} (H - \beta) \quad \text{et} \quad [L_+, L_-] = \beta I$$

ainsi que

$$[H, L_+] = -2\beta L_+ \quad \text{et} \quad [H, L_-] = 2\beta L_- .$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} L_+ L_- &= \frac{1}{2} (\partial_y - \beta y)(\partial_y + \beta y) = \frac{1}{2} (\partial_y^2 + \beta + \beta y \partial_y - \beta y \partial_y - \beta^2 y^2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_y^2 - \beta^2 y^2 + \beta) = \frac{1}{2} (H + \beta I) . \end{aligned}$$

et en changeant  $\beta$  en  $-\beta$ , on obtient

$$L_- L_+ = \frac{1}{2} (H - \beta I)$$

puis

$$[L_+, L_-] = \beta I .$$

Enfin,

$$[H, L_+] = [2L_+ L_- - I, L_+] = [2L_+ L_-, L_+] = 2L_+ [L_-, L_+] = -2\beta L_+$$

et

$$[H, L_-] = [2L_+ L_- - I, L_-] = [2L_+ L_-, L_-] = 2[L_+, L_-] L_- = 2\beta L_- .$$

□

Ces propriétés vont nous permettre d'obtenir le résultat suivant similaire à celui énoncé dans [7].

THÉORÈME 2.4. *Si on note*

$$V_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ v_\varepsilon \\ r_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-u_\varepsilon + h_\varepsilon) \\ v_\varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\varepsilon + h_\varepsilon) \end{pmatrix}$$

alors la famille  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vérifie

$$(S_\varepsilon) : \quad \partial_t V_\varepsilon + A_1(V_\varepsilon)\partial_x V_\varepsilon + A_2(V_\varepsilon)\partial_y V_\varepsilon + \varepsilon^{-1} M V_\varepsilon = 0$$

où

$$M = \begin{pmatrix} -\partial_x & L_- & 0 \\ L_+ & 0 & L_- \\ 0 & L_+ & \partial_x \end{pmatrix},$$

$$A_1(V_\varepsilon) = \text{Diag} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}(r_\varepsilon - 3l_\varepsilon); \frac{1}{\sqrt{2}}(r_\varepsilon - l_\varepsilon); \frac{1}{2\sqrt{2}}(r_\varepsilon - 3l_\varepsilon) \right)$$

et

$$A_2(V_\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_\varepsilon & \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) & 0 \\ \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) & v_\varepsilon & \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) \\ 0 & \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) & v_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice de pénalisation  $M$  commute avec les opérateurs  $\partial_x$  et

$$D := \begin{pmatrix} H - 2\beta & & \\ & H & \\ & & H + 2\beta \end{pmatrix}.$$

Une fois énoncé, ce théorème peut se démontrer par de fastidieux mais simples calculs. On se propose ici de détailler les étapes qui ont conduit à ce changement d'inconnues.

On souhaite ne pas modifier la structure du système et obtenir une matrice de pénalisation dont les coefficients soient des combinaisons linéaires des opérateurs  $\partial_x$ ,  $L_+$  et  $L_-$  du fait de leurs propriétés de commutation. La proposition suivante justifie que l'on privilégie une transformation orthogonale.

PROPOSITION 2.5. *Si la famille  $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est solution d'une équation du type*

$$\partial_t U_\varepsilon + B_1(U_\varepsilon)\partial_x U_\varepsilon + B_2(U_\varepsilon)\partial_y U_\varepsilon + \varepsilon^{-1} N U_\varepsilon = 0$$

où  $B_1(U_\varepsilon)$  et  $B_2(U_\varepsilon)$  sont des matrices symétriques dont les composantes sont des combinaisons linéaires de celles de  $U_\varepsilon$  et où  $N$  est une matrice d'opérateur antisymétrique et si  $P$  est une matrice orthogonale alors la famille  $(\widetilde{U}_\varepsilon = P U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est solution d'une équation du même type.

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{U}_\varepsilon &= P \partial_t U_\varepsilon = -P [B_1(U_\varepsilon)\partial_x U_\varepsilon + B_2(U_\varepsilon)\partial_y U_\varepsilon + \varepsilon^{-1} N U_\varepsilon] \\ &= -P [B_1(U_\varepsilon)\partial_x (P^{-1} \widetilde{U}_\varepsilon) + B_2(U_\varepsilon)\partial_y (P^{-1} \widetilde{U}_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} N P^{-1} \widetilde{U}_\varepsilon] \\ &= -[P B_1(U_\varepsilon) P^{-1}] \partial_x \widetilde{U}_\varepsilon + [P B_2(U_\varepsilon) P^{-1}] \partial_y \widetilde{U}_\varepsilon + \varepsilon^{-1} [P N P^{-1}] \widetilde{U}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi  $\widetilde{U}_\varepsilon$  est solution de

$$\partial_t \widetilde{U}_\varepsilon + A_1(U_\varepsilon)\partial_x \widetilde{U}_\varepsilon + A_2(U_\varepsilon)\partial_y \widetilde{U}_\varepsilon + \varepsilon^{-1} M \widetilde{U}_\varepsilon = 0$$

avec

$$A_1(U_\varepsilon) = P B_1(U_\varepsilon) P^{-1}, \quad A_2(U_\varepsilon) = P B_2(U_\varepsilon) P^{-1} \quad \text{et} \quad M = P N P^{-1}.$$



La matrice  $M$  est clairement antisymétrique car  $P^{-1} = P^*$ . De même, les matrices  $A_1(U_\varepsilon)$  et  $A_2(U_\varepsilon)$  sont symétriques et leurs coefficients sont des combinaisons linéaires des composantes de  $U_\varepsilon$  donc de  $\widetilde{U}_\varepsilon$ .  $\square$

Détaillons maintenant les calculs qui conduisent au changement proposé dans le théorème 2.4.

On cherche donc une matrice orthogonale  $P = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$  telle que si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -A & B \\ A & 0 & C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $A^* = A$ ,  $B^* = -B$  et  $C^* = -C$  alors  $PNP^*$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda B & nA' + mC' + pB & rA' + qC' + sB \\ mA' + nC' + pB & \mu B & uA' + tC' + vB \\ qA' + rC' + sB & tA' + uC' + vB & \tau B \end{pmatrix}.$$

avec  $A' := A + C$  et  $C' := C - A$ .

Bien sûr, on ne veut pas que les termes en  $A'$  et  $C'$  se recombinent en termes uniquement en  $A$  ou  $C$ , donc si un des termes  $n \pm m$ ,  $q \pm r$  ou  $t \pm u$  est nul alors on impose respectivement  $n = m = 0$ ,  $q = r = 0$  et  $t = u = 0$ .

Commençons par le cas où  $(A, B, C) = (Id, 0, 0)$ . Dans ce cas, on veut

$$PMP^* = \begin{pmatrix} 0 & -dh + eg & -dk + ej \\ -ge + dh & 0 & -gk + hj \\ -je + kd & -jh + kg & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n - m & r - q \\ m - n & 0 & u - t \\ q - r & t - u & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc un premier système

$$(1) \quad \begin{cases} -dh + eg = n - m \\ -dk + ej = r - q \\ -gk + hj = u - t. \end{cases}$$

Si  $(A, B, C) = (0, Id, 0)$  alors, dans ce cas, on veut avoir

$$PMP^* = \begin{pmatrix} 2df & di + fg & dl + fj \\ gf + id & 2gi & gl + ij \\ jf + ld & ji + lg & 2jl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & p & s \\ p & \mu & v \\ s & v & \tau \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(2) \quad \begin{cases} 2df = \lambda \\ gf + id = p \\ jf + ld = s \\ 2gi = \mu \\ ji + lg = v \\ 2jl = \tau. \end{cases}$$

Enfin, si  $(A, B, C) = (0, 0, Id)$  alors on veut que

$$PMP^* = \begin{pmatrix} 2ef & ei + fh & el + fk \\ hf + ie & 2hi & hl + ik \\ kf + le & ki + lh & 2kl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n + m & r + q \\ m + n & 0 & u + t \\ q + r & t + u & 0 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$(3) \quad \begin{cases} ef = 0 \\ ih = 0 \\ kl = 0 \\ hf + ei = m + n \\ kf + el = q + r \\ ik + lh = t + u. \end{cases}$$

De plus, l'orthogonalité de  $P$  implique les relations

$$(4) \quad \begin{cases} ed + gh + jk = 0 \\ df + gi + jl = 0 \\ ef + ih + kl = 0 \\ d^2 + g^2 + j^2 = 1 \\ e^2 + h^2 + k^2 = 1 \\ f^2 + k^2 + l^2 = 1. \end{cases}$$

On veut donc, pour que le changement d'inconnues ait un intérêt, que les trois quantités  $n + m$ ,  $q + r$  et  $t + u$  ne soient pas toutes nulles, ce qui nous guide dans l'utilisation des trois premières inégalités de (3). On choisit de prendre  $e = i = k = 0$ .

En réinjectant dans (1), (2), (3) et (4), on en déduit que  $h = 1$ , que  $q = r = \mu = g = 0$  puis que  $p = v = 0$ . La forme de la matrice de passage devient donc

$$P = \begin{pmatrix} d & 0 & f \\ 0 & 1 & 0 \\ j & 0 & l \end{pmatrix}$$

et celle de la nouvelle matrice de pénalisation

$$PMP^* = \begin{pmatrix} \lambda B & nA' + mC' & sB \\ mA' + nC' & 0 & uA' + tC' \\ sB & tA' + uC' & \tau B \end{pmatrix}.$$

On choisit la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

i.e.  $-d = j = l = f = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ce qui implique  $u + t = u - t$  et  $m + n = n - m$  et par suite  $t = m = 0$ .

Pour conclure, on pose  $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\lambda = -1$ ,  $s = 0$ ,  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\tau = 1$ .

La nouvelle matrice de pénalisation est donc

$$\begin{pmatrix} -B & \frac{1}{\sqrt{2}}(A + C) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(C - A) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(A + C) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(C - A) & B \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en faisant le changement d'inconnues

$$V_\varepsilon := \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ v_\varepsilon \\ r_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-u_\varepsilon + h_\varepsilon) \\ v_\varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\varepsilon + h_\varepsilon) \end{pmatrix},$$

on obtient

$$A_1(V_\varepsilon) = \text{Diag} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}(r_\varepsilon - 3l_\varepsilon); \frac{1}{\sqrt{2}}(r_\varepsilon - l_\varepsilon); \frac{1}{2\sqrt{2}}(r_\varepsilon - 3l_\varepsilon) \right)$$

$$A_2(V_\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_\varepsilon & \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) & 0 \\ \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) & v_\varepsilon & \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) \\ 0 & \frac{1}{4}(r_\varepsilon + l_\varepsilon) & v_\varepsilon \end{pmatrix}$$

et la nouvelle matrice de pénalisation est

$$M = \begin{pmatrix} -\partial_x & L_- & 0 \\ L_+ & 0 & L_- \\ 0 & L_+ & \partial_x \end{pmatrix}.$$

Reste à trouver une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} H+a & & \\ & H+b & \\ & & H+c \end{pmatrix}$  qui commute avec cette nouvelle matrice de pénalisation. Le commutateur vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & [H, L_-] + (a-b)L_- & 0 \\ [H, L_+] + (b-a)L_+ & 0 & [H, L_-] + (b-c)L_- \\ 0 & [H, L_+] + (c-b)L_+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $[H, L_+] = -2\beta L_+$  et  $[H, L_-] = 2\beta L_-$ , il suffit de prendre  $a, b$ , et  $c$  de telle sorte que  $a-b = -2\beta$  et  $b-c = -2\beta$ . En particulier,

$$D := \begin{pmatrix} H-2\beta & & \\ & H & \\ & & H+2\beta \end{pmatrix}$$

convient.

### 2.3. Espaces adaptés

Maintenant que l'on a construit des matrices de dérivation laissant stable la structure du système, on va définir à partir d'elles des espaces fonctionnels adaptés. D'après ce qui précède, on est amenés à s'intéresser à la norme  $L^2$  des familles de dérivées  $(\partial_x^k D^p V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . On introduit donc, comme dans [7], les espaces adaptés suivants.

**DÉFINITION 2.6.** *Pour tout entier  $n$ , on introduit l'espace  $\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  composé des fonctions  $V$  de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$  telles que  $\partial_x^k D^p V$  appartient à  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  pour tout couple d'entiers  $(k, p)$  vérifiant  $k+2p \leq 2n$ . Il est muni de la norme*

$$\|V\|_{\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 := \sum_{k+2p \leq 2n} \|\partial_x^k D^p V\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

REMARQUE. Les rôles joués par les entiers  $k$  et  $p$  diffèrent car la matrice d'opérateur  $D$  fait intervenir des dérivées d'ordre 2 contrairement à l'opérateur  $\partial_x$ .

On remarque, du fait de la définition de  $D$  qu'une fonction vectorielle  $W$  appartient à  $\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  si et seulement si chacune de ses composantes  $w$  vérifie

$$\sum_{k+2p \leq 2n} \|\partial_x^k H^p w\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 < \infty$$

ce qui permet de définir la norme  $\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  pour des fonctions scalaires de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ . C'est ce qui est fait dans [7].

Les espaces introduits peuvent se définir très simplement à partir des dérivations par rapport aux variables  $x$  et  $y$  ainsi que la multiplication par  $y$ .

PROPOSITION 2.7. *Pour tout entier  $n$ , la norme  $\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{W}}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$  définie par*

$$\|w\|_{\widetilde{\mathcal{W}}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} := \sqrt{\sum_{j+k+m \leq 2n} \|y^j \partial_x^k \partial_y^m w\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2}.$$

En particulier, l'espace  $\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  est continûment inclus dans l'espace de Sobolev  $H^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

DÉMONSTRATION. Pour tout entier  $p$ , l'opérateur  $H^p$  se décompose en une somme d'opérateurs du type  $y^j \partial_y^m$  avec  $j+m \leq p$ . On en déduit que l'espace  $\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  est continûment inclus dans  $\widetilde{\mathcal{W}}_{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

Montrons maintenant, pour tout entier  $n$ , l'existence d'une constante  $c_n$  telle que, pour toute fonction  $w$ ,

$$\sum_{j+k+m \leq 2n} \|y^j \partial_x^k \partial_y^m w\|_{L^2}^2 \leq c_n \sum_{k+2p \leq 2n} \|\partial_x^k H^p w\|_{L^2}^2$$

Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer que pour tout entier  $N$ , il existe une constante  $d_N$  telle que pour toute fonction  $f$ ,

$$\sum_{j+m \leq 2N} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 \leq d_N \sum_{p \leq N} \|H^p f\|_{L^2}^2.$$

En effet, on aura alors

$$\begin{aligned} \sum_{j+k+m \leq 2n} \|y^j \partial_x^k \partial_y^m w\|_{L^2}^2 &= \sum_{k \leq 2n} \sum_{j+m \leq 2n-k} \|y^j \partial_y^m \partial_x^k w\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{k \leq 2n} \sum_{j+m \leq 2n-2E(k/2)} \|y^j \partial_y^m \partial_x^k w\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{k \leq 2n} d_{n-E(k/2)} \sum_{p \leq n-E(k/2)} \|H^p w\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{j+k+m \leq 2n} \|y^j \partial_x^k \partial_y^m w\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{k \leq 2n} d_{n-E(k/2)} \sum_{p \leq n-k/2} \|H^p w\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_n \sum_{k+2p \leq 2n} \|\partial_x^k H^p w\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

en prenant  $c_n = \text{Max}_{k \leq 2n} d_{n-E(k/2)}$ .

Il reste donc à montrer l'assertion de récurrence suivante

$$\mathcal{H}(N) : \exists d_N : \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \sum_{j+m \leq 2N} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 \leq d_N \sum_{p \leq N} \|H^p f\|_{L^2}^2.$$

Le résultat est évidemment vrai pour  $N$  nul. Néanmoins, on va le montrer pour  $N = 1$  car nous en aurons besoin pour montrer l'hérédité. Fixons  $f$  et montrons le résultat pour  $N = 1$ . Comme

$$\|yf\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|y^2f\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|\partial_y f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 + \|y^2f\|_{L^2}^2,$$

il suffit de prouver que

$$\|y^2f\|_{L^2}^2 + \|y\partial_y f\|_{L^2}^2 + \|\partial_y^2 f\|_{L^2}^2 \lesssim \left( \|f\|_{L^2}^2 + \|Hf\|_{L^2}^2 \right) = \left( \|f\|_{L^2}^2 + \|\partial_y^2 f - \beta^2 y^2 f\|_{L^2}^2 \right).$$

Or, en développant, on a

$$\|\partial_y^2 f - \beta^2 y^2 f\|_{L^2}^2 = \|\partial_y^2 f\|_{L^2}^2 + \|\beta^2 y^2 f\|_{L^2}^2 - 2\beta^2 \langle y^2 f, \partial_y^2 f \rangle_{L^2}$$

donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \|\partial_y^2 f - \beta^2 y^2 f\|_{L^2}^2 &= \|\partial_y^2 f\|_{L^2}^2 + \beta^2 \|y^2 f\|_{L^2}^2 + 2\beta^2 \langle \partial_y (y^2 f), \partial_y f \rangle_{L^2} \\ &= \|\partial_y^2 f\|_{L^2}^2 + \beta^2 \|y^2 f\|_{L^2}^2 + 4\beta^2 \langle yf, \partial_y f \rangle_{L^2} + 2\beta^2 \langle y^2 \partial_y f, \partial_y f \rangle_{L^2} \\ &= \|\partial_y^2 f\|_{L^2}^2 + \beta^2 \|y^2 f\|_{L^2}^2 + 2\beta^2 \langle y\partial_y (f^2) \rangle_{L^2} + 2\beta^2 \|y\partial_y f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|Hf\|_{L^2}^2 + 2\beta^2 \|f\|_{L^2}^2 = \beta^2 \|y^2 f\|_{L^2}^2 + 2\beta^2 \|y\partial_y f\|_{L^2}^2 + \|\partial_y^2 f\|_{L^2}^2$$

et l'assertion  $\mathcal{H}(1)$  est vérifiée.

Supposons l'assertion  $\mathcal{H}(N-1)$  vraie pour un certain entier  $N$  non nul et montrons  $\mathcal{H}(N)$ . Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Grâce au cas  $N = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{j+m \leq 2N} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 + \sum_{j+m=2N} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \left( 2\|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 + \|Hy^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\sum_{j+m \leq 2N} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 \leq 2d_{N-1} \sum_{p \leq N-1} \|H^p f\|_{L^2}^2 + \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|Hy^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2.$$

L'idée est alors de translater l'opérateur  $H$  dans le dernier terme, d'appliquer l'hypothèse de récurrence à  $Hf$  puis de conclure en calculant un commutateur. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|Hy^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|y^j \partial_y^m Hf\|_{L^2}^2 + \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|[H, y^j \partial_y^m] f\|_{L^2}^2 \\ &\leq d_{N-1} \sum_{p \leq N-1} \|H^{p+1} f\|_{L^2}^2 + \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|[H, y^j \partial_y^m] f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Or, le commutateur  $[H, y^j \partial_y^m]$  est une somme de termes de la forme  $y^p \partial_y^q$  avec  $p+q \leq j+m$ .

Si on admet cela, alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient l'existence d'une constante  $M_N$  telle que

$$\sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|[H, y^j \partial_y^m] f\|_{L^2}^2 \leq M_N \sum_{j+m \leq 2(N-1)} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 \leq M_N d_{N-1} \sum_{p \leq N-1} \|H^p f\|_{L^2}^2$$

et par suite

$$\sum_{j+m \leq 2N} \|y^j \partial_y^m f\|_{L^2}^2 \leq (3d_{N-1} + M_N d_{N-1}) \sum_{p \leq N} \|H^p f\|_{L^2}^2.$$

Il suffit alors de prendre  $d_N = 3d_{N-1} + M_N d_{N-1}$  pour conclure.

Il reste donc à prouver le résultat énoncé sur le commutateur  $[H, y^j \partial_y^m]$ . Par définition, on a

$$\begin{aligned} Hy^j \partial_y^m &= (\partial_y^2 - \beta^2 y^2) y^j \partial_y^m \\ &= y^j \partial_y^{m+2} + 2j y^{j-1} \partial_y^{m+1} + j(j-1) y^{j-2} \partial_y^m - \beta^2 y^{j+2} \partial_y^m \\ &= y^j H \partial_y^m + 2j y^{j-1} \partial_y^{m+1} + j(j-1) y^{j-2} \partial_y^m \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y^j \partial_y^m H &= y^j \partial_y^m (\partial_y^2 - \beta^2 y^2) \\ &= y^j \partial_y^{m+2} - \beta^2 y^{j+2} \partial_y^m - 2\beta^2 m y^{j+1} \partial_y^{m-1} - \beta^2 m(m-1) y^j \partial_y^{m-2} \\ &= y^j H \partial_y^m - 2\beta^2 m y^{j+1} \partial_y^{m-1} - \beta^2 m(m-1) y^j \partial_y^{m-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$[H, y^j \partial_y^m] = 2j y^{j-1} \partial_y^{m+1} + j(j-1) y^{j-2} \partial_y^m + 2\beta^2 m y^{j+1} \partial_y^{m-1} + \beta^2 m(m-1) \partial_y^{m-2}$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Pour simplifier les démonstrations à venir, on introduit les notations suivantes.

**DÉFINITION 2.8.** *Pour tout entier  $q$ , on appelle opérateur d'ordre  $q$ , et on note  $\tilde{\partial}^q$ , tout opérateur de la forme  $y^p \partial_x^r \partial_y^k$  avec  $r + p + k \leq q$  de sorte que pour toute fonction  $w$  appartenant à  $\mathcal{W}^q(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,*

$$\left\| \tilde{\partial}^q w \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|w\|_{\mathcal{W}^q(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$



## Étude de la matrice de pénalisation $M$

Dans ce chapitre, nous allons, dans une première section, étudier les éléments propres de  $M$  en nous inspirant de ce qui a été fait dans [9]. Nous exhiberons notamment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  composée de vecteurs propres de la matrice de pénalisation et donnerons quelques propriétés importantes du spectre de  $M$ . Grâce cette base, nous obtiendrons, dans une seconde section, des normes équivalentes à la norme  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  et énoncerons un résultat similaire au théorème de Parseval.

### 3.1. Éléments propres de $M$

Pour obtenir les vecteurs propres, nous allons utiliser la décomposition de Fourier dans  $L^2(\mathbb{T})$  et celle selon les fonctions de Hermite dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Habituellement, les fonctions de Hermite forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  composée de fonctions propres associée à l'opérateur  $\partial^2 - y^2$ . Un changement d'échelle en fait donc une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  constituée des fonctions propres de l'opérateur  $H$ . Dans la suite, nous noterons  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la famille des fonctions de Hermite modifiées. Elle hérite de certaines propriétés, en particulier, pour tout entier  $n$ , on a les relations suivantes

$$\begin{cases} H\psi_n &= -\beta(2n+1)\psi_n \\ L_-\psi_n &= \sqrt{\beta n}\psi_{n-1} \\ L_+\psi_n &= -\sqrt{\beta(n+1)}\psi_{n+1} \end{cases}$$

avec, par convention,  $\psi_{-1} \equiv 0$ .

Grâce à ces fonctions, nous allons détailler la forme des vecteurs propres de la matrice de pénalisation  $M$ .

**PROPOSITION 3.1.** *Si pour tout couple  $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , on appelle  $(\tau(k, n, j))_{j \in \{-1, 0, 1\}}$  les trois racines distinctes du polynôme*

$$P_{k,n}(\tau) := \tau^3 - \tau(k^2 + \beta(2n+1)) - \beta k$$

avec  $\tau(k, n, -1) < \tau(k, n, 0) < \tau(k, n, 1)$  et si, pour tout entier relatif  $k$ , on note

$$\tau(k, 0, \pm 1) = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4\beta}}{2} \quad \text{et} \quad \tau(k, 0, 0) = k$$

alors le spectre de la matrice de pénalisation  $M$  est  $i\mathfrak{S}$  avec

$$\mathfrak{S} := \{\tau(k, n, j), (k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}\}.$$

De plus, pour tout  $(k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}$  tel que  $(n, j) \neq (0, 0)$ , il existe des constantes  $a_{k,n,j}$ ,  $b_{k,n,j}$  et  $c_{k,n,j}$  telles que

$$\Psi_{k,n,j}(x, y) = \begin{pmatrix} a_{k,n,j} \psi_{n-1}(y) \\ b_{k,n,j} \psi_n(y) \\ c_{k,n,j} \psi_{n+1}(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$



soit un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $i\tau(k, n, j)$  et pour tout entier relatif  $k$ ,

$$\Psi_{k,0,0}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $i\tau(k, 0, 0) = ik$ . Ce dernier type d'élément propre est dit de Kelvin.

REMARQUE. Les notations sont légèrement différentes de celles utilisées dans [9]. En particulier, la définition des  $\tau(k, 0, 0)$  est modifiée de sorte que pour tout  $(k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}$ , le vecteur  $\Psi_{k,n,j}$  fasse apparaître le mode de Fourier  $e^{ikx}$ .

REMARQUE. La valeur propre nulle est uniquement obtenue par les triplets  $(0, n, 0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

DÉMONSTRATION. Commençons par quelques remarques. Tout d'abord, comme  $M$  est antisymétrique, ses valeurs propres sont imaginaires pures, on les cherche donc sous la forme  $i\tau$  où  $\tau$  est un réel.

D'autre part, si  $\begin{pmatrix} l \\ v \\ r \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $i\tau$  et si on le décompose dans la base de Fourier de  $L^2(\mathbb{T})$  en

$$\begin{pmatrix} l \\ v \\ r \end{pmatrix}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} l_k(y) \\ v_k(y) \\ r_k(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} M \begin{pmatrix} l_k(y) \\ v_k(y) \\ r_k(y) \end{pmatrix} e^{ikx} = i\tau \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} l_k(y) \\ v_k(y) \\ r_k(y) \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

Or, pour tout entier relatif  $k$ ,

$$M \begin{pmatrix} l_k(y) \\ v_k(y) \\ r_k(y) \end{pmatrix} e^{ikx} = \begin{pmatrix} -ikl_k + L_-v_k \\ L_+l_k + L_-r_k \\ L_+v_k + ikr_k \end{pmatrix} (y) e^{ikx},$$

donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -ikl_k + L_-v_k \\ L_+l_k + L_-r_k \\ L_+v_k + ikr_k \end{pmatrix} (y) e^{ikx} = i\tau \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} l_k(y) \\ v_k(y) \\ r_k(y) \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} l \\ v \\ r \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} l_k \\ v_k \\ r_k \end{pmatrix} \neq 0,$$

le complexe  $i\tau$  est une valeur propre de la matrice de pénalisation  $M$  si et seulement si il existe un entier relatif  $k$  et des fonctions  $f, g, h$ , non toutes nulles, appartenant à  $L^2(\mathbb{R})$  et vérifiant le système

$$\begin{cases} -ikf + L_-g &= i\tau f \\ L_+f + L_-h &= i\tau g \\ L_+g + ikh &= i\tau h. \end{cases}$$

On remarque que si  $\tau \neq k$  alors on peut exprimer  $h$  en fonction de  $g$  et que si  $\tau \neq -k$  alors on peut exprimer  $f$  en fonction de  $g$ . On va donc séparer trois cas.

- Si  $\tau^2 \neq k^2$  alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} (\tau - k) L_+ L_- g + (\tau + k) L_- L_+ g = \tau (k^2 - \tau^2) g \\ f = \frac{1}{i(\tau + k)} L_- g \\ h = \frac{1}{i(\tau - k)} L_+ g \end{cases}$$

On va maintenant décomposer  $g$  dans la base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  composée des fonctions de Hermite pour expliciter l'action des opérateurs  $L_+$  et  $L_-$ . Si on pose  $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \psi_n$  alors

$$L_+ L_- g = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta n a_n \psi_n(y) \quad \text{et} \quad L_- L_+ g = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta (n + 1) a_n \psi_n(y)$$

et la dernière relation devient

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (\tau (k^2 - \tau^2) + \tau \beta (2n + 1) + \beta k) a_n \psi_n(y) = 0.$$

Ainsi,  $g$  est non nulle si et seulement s'il existe un entier  $n$  tel que  $\tau$  soit racine du polynôme

$$P_{k,n}(\tau) = \tau^3 - \tau(k^2 + \beta(2n + 1)) - \beta k.$$

Si  $\tau$  est une racine de  $P_{k,n}$  différente de  $\pm k$  alors le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\beta n}}{i(\tau + k)} \psi_{n-1}(y) \\ \psi_n(y) \\ \frac{-\sqrt{\beta(n+1)}}{i(\tau - k)} \psi_{n+1}(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $i\tau$ .

Reste à déterminer si  $P_{k,n}$  a pour racine  $\pm k$  pour savoir combien de racines sont à conserver. Comme

$$P_{k,n}(k) = -2(n+1)\beta k \quad \text{et} \quad P_{k,n}(-k) = 2\beta nk,$$

si le produit  $nk$  est non nul alors  $\pm k$  n'est pas racine du polynôme  $P_{k,n}$ . Vérifions que, dans ce cas,  $P_{k,n}$  a trois racines réelles distinctes.

Comme  $P'_{k,n}(\tau) = 3\tau^2 - (k^2 + \beta(2n + 1))$ , on pose

$$\alpha = \sqrt{\frac{k^2 + \beta(2n + 1)}{3}}$$

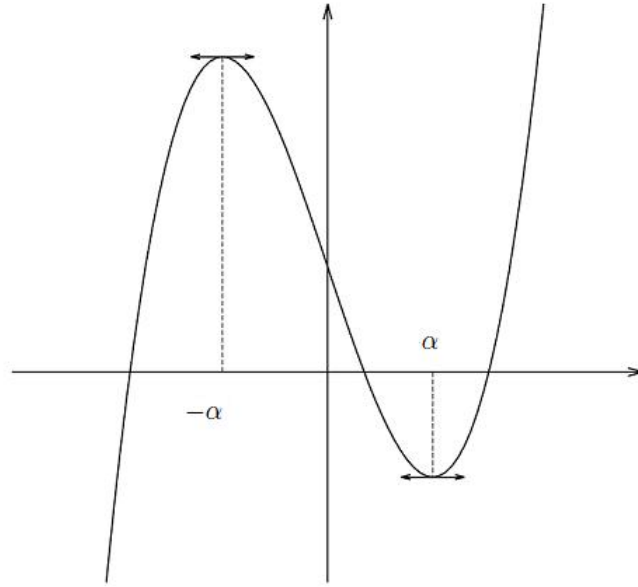
de sorte que pour montrer que  $P_{k,n}$  a trois racines distinctes il suffit de prouver que

$$P_{k,n}(\alpha) P_{k,n}(-\alpha) < 0.$$

Or,  $P_{k,n}(\alpha) P_{k,n}(-\alpha) = k^2 \beta^2 - 4\alpha^6$  et, comme  $n > 0$ ,

$$4\alpha^6 = \frac{4}{27} (k^2 + \beta(2n + 1))^3 > \frac{4}{9} k^2 \beta^2 (2n + 1)^2 > 4k^2 \beta^2$$

donc le polynôme  $P_{k,n}$  a bien trois racines réelles distinctes.

FIG. 3.1.1. Comportement de  $P_{k,n}$  pour  $kn$  non nul

Étudions maintenant le cas où le produit  $nk$  est nul.

Si  $n = 0$  alors  $P_{k,n}(\tau) = (\tau + k)(\tau^2 - k\tau - \beta)$  et ses racines sont  $-k$  et  $\frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4\beta}}{2}$ . Ainsi, si  $n$  est nul alors soit  $\beta \neq 2k^2$  et on conserve les racines  $\tau(k, 0, \pm 1) = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4\beta}}{2}$  associées aux vecteurs propres

$$\Psi_{k,0,\pm 1}(x, y) = C_{k,0,\pm 1} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0(y) \\ \frac{-\sqrt{\beta}}{i(\tau(k, 0, \pm 1) - k)} \psi_1(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

soit  $\beta = 2k^2$  et on conserve uniquement la racine  $\tau(k, 0, -1) = -2k$  associée au vecteur propre

$$\Psi_{k,0,-1}(x, y) = C_{k,0,-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0(y) \\ \frac{\sqrt{\beta}}{3ik} \psi_1(y) \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

Si  $k = 0$  alors  $P_{k,n}(\tau) = \tau(\tau^2 - \beta(2n + 1))$  et ses racines sont donc 0 et  $\pm\sqrt{\beta(2n + 1)}$ . On ne conserve que les deux racines non nulles  $\tau(0, n, \pm 1) = \pm\sqrt{\beta(2n + 1)}$  associées aux vecteurs propres unitaires

$$\Psi_{0,n,\pm 1}(x, y) = C_{0,n,\pm 1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\beta n}}{i\tau(0, n, \pm 1)} \psi_{n-1}(y) \\ \psi_n(y) \\ \frac{-\sqrt{\beta(n+1)}}{i\tau(0, n, \pm 1)} \psi_{n+1}(y) \end{pmatrix}.$$

- Si  $\tau = k$  alors on doit résoudre le système

$$\begin{cases} L_- g &= 2ik f \\ L_+ f + L_- h &= ik g \\ L_+ g &= 0. \end{cases}$$

Si on décompose  $g$  dans la base des fonctions de Hermite en  $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \psi_n$  alors la dernière équation devient

$$L_+ g = - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sqrt{\beta(n+1)} \psi_{n+1}(y) = 0$$

et par conséquent,  $g$  est nulle. Il faut alors distinguer deux cas suivant que  $k$  est nul ou pas.

Si  $k \neq 0$  alors  $f$  est nulle et on a  $L_- h = 0$ . Si on décompose  $h$  en  $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \psi_n$  alors

$$L_- h = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \sqrt{\beta n} \psi_{n-1}(y) = 0$$

donc  $h$  est proportionnelle à  $\psi_0$ . On pose alors  $\tau(k, 0, 0) = k$  et

$$\Psi_{k,0,0}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0(y) \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

Si  $k = 0$  alors on obtient  $L_+ f + L_- h = 0$ . On pose  $f = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m \psi_m$  et  $h = \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m \psi_m$ . On obtient alors

$$- \sum_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\beta(m+1)} a_m \psi_{m+1} + \sum_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\beta m} b_m \psi_{m-1} = 0$$

i.e.

$$b_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_{m-1} = \sqrt{\frac{m+1}{m}} b_{m+1} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*.$$

Si on prend  $b_m = \delta_{0,m}$  alors  $h$  est proportionnelle à  $\psi_0$  et  $f$  est nulle. On pose donc  $\tau(k, 0, 0) = 0$  et

$$\Psi_{k,0,0}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0(y) \end{pmatrix}.$$

Si on prend  $b_m = \delta_{n+1,m}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  alors  $a_m = \sqrt{\frac{n+1}{m}} \delta_{n+1,m}$ . On pose donc  $\tau(0, n, 0) = 0$  et

$$\Psi_{0,n,0}(x, y) = C_{0,n,0} \begin{pmatrix} \psi_{n-1}(y) \\ 0 \\ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \psi_{n+1}(y) \end{pmatrix}.$$

- Si  $\tau = -k \neq 0$  alors on doit résoudre le système suivant

$$\begin{cases} L_- g &= 0 \\ L_+ f + L_- h &= -ik g \\ L_+ g &= -2ik h. \end{cases}$$

Si on pose  $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \psi_n$  alors  $L_- g = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sqrt{\beta n} \psi_{n-1}$ . Il existe donc une constante  $c$  telle que  $g = c \psi_0$ .

Comme  $k$  est supposé non nul,  $h = \frac{1}{2ik} \sqrt{\beta} \psi_1$  puis  $L_+ f = ic \left( \frac{\beta}{2k} - k \right) \psi_0$ . Cette relation n'est réalisable que si  $c \left( \frac{\beta}{2k} - k \right) = 0$ . Donc les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont nulles sauf si  $\beta = 2k^2$ .

Si  $\beta = 2k^2$ , on pose  $\tau(k, 0, 1) = -k$  et

$$\Psi_{k,0,1}(x, y) = C_{k,0,1} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0(y) \\ \frac{1}{2ik} \sqrt{\beta} \psi_1(y) \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

□

**PROPOSITION 3.2.** *La famille  $(\Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  est une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de la matrice de pénalisation  $M$ .*

**DÉMONSTRATION.** Commençons par prouver que la famille  $(\Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  est orthogonale.

Grâce à la forme des vecteurs propres explicitée dans la proposition 3.1 et à l'orthogonalité des familles  $(e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  respectivement dans  $L^2(\mathbb{T})$  et  $L^2(\mathbb{R})$  si  $(n, k) \neq (n', k')$  alors

$$\langle \Psi_{k,n,j}, \Psi_{k',n',j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0.$$

De plus, si  $j \neq j'$ , alors  $\tau(k, n, j) \neq \tau(k, n, j')$ . En effet, si  $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , alors on utilise le fait que les trois racines de  $P_{k,n}$  sont distinctes et sinon il s'agit d'une vérification directe. Or, comme  $M$  est antisymétrique et comme les vecteurs  $\Psi_{k,n,j}$  et  $\Psi_{k,n,j'}$  sont des vecteurs propres de  $M$  associés respectivement aux valeurs propres  $i\tau(k, n, j)$  et  $i\tau(k, n, j')$ , on a

$$\begin{aligned} i\tau(k, n, j) \langle \Psi_{k,n,j}, \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} &= \langle M \Psi_{k,n,j}, \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= -\langle \Psi_{k,n,j}, M \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= i\tau(k, n, j') \langle \Psi_{k,n,j}, \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

et par suite, si  $j \neq j'$  alors

$$\langle \Psi_{k,n,j}, \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0.$$

Ainsi, si  $(n, k, j) \neq (n', k', j')$  alors les vecteurs  $\Psi_{k,n,j}$  et  $\Psi_{k',n',j'}$  sont orthogonaux.

Montrons maintenant que la famille  $(\Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  est totale dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

Pour tout  $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , l'orthogonalité et la normalité de la famille  $(\Psi_{k,n,j})_{j \in \{-1,0,1\}}$  implique l'orthogonalité et par suite l'inversibilité de la matrice

$$A_{k,n} := \begin{pmatrix} a_{k,n,-1} & a_{k,n,0} & a_{k,n,1} \\ b_{k,n,-1} & b_{k,n,0} & b_{k,n,1} \\ c_{k,n,-1} & c_{k,n,0} & c_{k,n,1} \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\begin{pmatrix} \Psi_{k,n,-1} & \Psi_{k,n,0} & \Psi_{k,n,1} \end{pmatrix}(x, y) = e^{ikx} \begin{pmatrix} \psi_{n-1}(y) & 0 & 0 \\ 0 & \psi_n(y) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{n+1}(y) \end{pmatrix} A_{k,n}$$

et, par conséquent, la famille  $(\Psi_{k,n,j})_{j \in \{-1,0,1\}}$  engendre les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \psi_{n-1}(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n(y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_{n+1}(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

pour tout  $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ .

De même, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , la matrice

$$A_{k,0} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_{k,n,-1} & 0 & b_{k,n,1} \\ c_{k,n,-1} & 0 & c_{k,n,1} \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$\begin{pmatrix} \Psi_{k,0,-1} & \Psi_{k,0,0} & \Psi_{k,0,1} \end{pmatrix} (x, y) = e^{ikx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_0(y) & 0 \\ \psi_0(y) & 0 & \psi_1(y) \end{pmatrix} A_{k,0}$$

donc la famille  $(\Psi_{k,n,j})_{j \in \{-1,0,1\}}$  engendre les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0(y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0(y) \end{pmatrix} e^{ikx} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_1(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

Par conséquent, comme la famille  $(\psi_n(y) e^{ikx})_{(k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}}$  est totale dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on en déduit que la famille  $(\Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  l'est aussi.  $\square$

On introduit les projecteurs associés.

**DÉFINITION 3.3.** *Pour tout  $(k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}$ , on note  $\Pi_{k,n,j}$  la projection orthogonale sur la vecteur propre  $\Psi_{k,n,j}$  i.e.*

$$\Pi_{k,n,j} \Psi = \langle \Psi, \Psi_{k,n,j} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \Psi_{k,n,j}$$

et pour tout  $\lambda \in \mathfrak{S}$ , on note  $\Pi_\lambda$  la projection orthogonale sur l'espace propre associé i.e.

$$\Pi_\lambda = \sum_{\tau(k,n,j)=\lambda} \Pi_{k,n,j}.$$

Une étude du comportement des racines du polynôme  $P_{k,n}$  va nous permettre d'obtenir les résultats suivants.

**PROPOSITION 3.4.** *Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $(k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}$ , si  $\tau(k, n, j)$  est non nul alors*

$$\frac{1}{|\tau(k, n, j)|} \leq C(1 + k + n).$$

De plus, l'ensemble

$$\{\tau(k, n, j), (k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}\}.$$

a pour seuls points d'accumulation zéro et l'infini et pour toute valeur propre non nulle, l'espace propre associé de dimension finie.

**DÉMONSTRATION.** Si  $n = 0$  alors, par définition,

$$\tau(k, 0, \pm 1) = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4\beta}}{2} \quad \text{et} \quad \tau(k, 0, 0) = k$$

donc on a l'estimation annoncée :

$$\tau(k, 0, -1) \sim -k, \quad \tau(k, 0, 0) = k \quad \text{et} \quad \tau(k, 0, \pm 1) \sim \frac{-\beta}{k}.$$

Pour  $n$  non nul, les réels  $(\tau(k, n, j))_{j \in \{-1, 0, 1\}}$  sont les racines du polynôme  $P_{k, n}$ . Nous allons montrer, à l'aide des relations coefficients racines, que si  $n$  ou  $|k|$  tend vers l'infini alors on a les approximations suivantes

$$\tau(n, k, \pm 1) \sim \pm \sqrt{k^2 + \beta(2n + 1)} \quad \text{et} \quad \tau(n, k, 0) \sim \frac{-\beta k}{k^2 + \beta(2n + 1)}$$

ce qui nous permettra d'obtenir toutes les propriétés énoncées.

Comme

$$\sum_{j \neq j'} \tau(n, k, j) \tau(n, k, j') = -k^2 - \beta(2n + 1),$$

une des racines extrémales,  $\tau(n, k, 1)$  ou  $\tau(n, k, -1)$ , tend en valeur absolue vers l'infini. Mais comme la somme des racines est nulle, on en déduit que  $\tau(n, k, 1)$  et  $-\tau(n, k, -1)$  tendent vers l'infini. En particulier pour ces deux racines,  $\beta k$  est négligeable devant  $(k^2 + \beta(2n + 1)) \tau$  donc

$$\tau^3 \sim (k^2 + \beta(2n + 1)) \tau.$$

Les racines extrémales de  $P_{n, k}$  sont donc approximables par

$$\tau(n, k, \pm 1) \sim \pm \sqrt{k^2 + \beta(2n + 1)}.$$

Enfin, comme le produit des trois racines est égal à  $\beta k$ , on obtient

$$\tau(n, k, 0) \sim \frac{-\beta k}{k^2 + \beta(2n + 1)}.$$

On en déduit l'estimation annoncée et le fait que les points d'accumulation de l'ensemble

$$\{\tau(k, n, j), (k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}\}$$

sont zéro et l'infini.

Enfin, si on considère une valeur propre  $i\lambda$  dont l'espace propre associé est de dimension infinie alors il existe une suite  $(k_m, n_m, j_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}$  telle que pour tout entier  $m$ ,

$$\tau(k_m, n_m, j_m)_{m \in \mathbb{N}} = \lambda.$$

Ainsi, le réel  $\lambda$  est fini et appartient aux points d'accumulation de l'ensemble

$$\{\tau(k, n, j), (k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}\}.$$

Par suite,  $\lambda$  est nul. □

### 3.2. Normes équivalentes

Nous allons ici utiliser le fait que les normes  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  soient adaptées à la matrice de pénalisation et la base hilbertienne  $(\Psi_{k, n, j})_{(k, n, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}}$  pour obtenir des propriétés sur ces normes.

PROPOSITION 3.5. *Pour tout entier  $s$  et pour tout vecteur  $U$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on a*

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{G}} \|\Pi_\lambda U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 = \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 &= \sum_{r+2p \leq 2s} \langle \partial_x^r D^p U, \partial_x^r D^p U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= \sum_{r+2p \leq 2s} \sum_{(\lambda, \mu) \in \mathfrak{G}^2} \langle \partial_x^r D^p \Pi_\lambda U, \partial_x^r D^p \Pi_\mu U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Comme la matrice de pénalisation  $M$  commute avec l'opérateur  $\partial_x^r D_\beta^p$ , les sous-espaces propres de la matrice  $M$  sont stables par ces opérateurs. Par conséquent, les vecteurs  $\partial_x^r D^p \Pi_\lambda U$  et  $\partial_x^r D^p \Pi_\mu U$

sont des vecteurs propres de  $M$  associés respectivement aux valeurs propres  $i\lambda$  et  $i\mu$ . Ils sont donc orthogonaux si  $\lambda \neq \mu$ . Par suite,

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 = \sum_{r+2p \leq 2s} \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}} \|\partial_x^r D^p \Pi_\lambda U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 = \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}} \|\Pi_\lambda U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

□

On peut ainsi exprimer la norme  $\mathcal{W}^{2s}$  grâce à la décomposition sur les espaces propres. On va maintenant étudier l'action des opérateurs de dérivation  $\partial_x^r D^p$  sur la famille  $(\Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  et en déduire une décomposition plus fine.

**PROPOSITION 3.6.** *Pour tout couple d'entiers  $(r,p)$ , la famille  $(\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  est une famille orthogonale de  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de la matrice de pénalisation  $M$ . En particulier, pour tout entier  $s$  et pour tout vecteur  $U$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on a*

$$\sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} \|\Pi_{k,n,j} U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 = \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

**DÉMONSTRATION.** Considérons un couple d'entiers  $(r,p)$ , deux triplets distincts  $(k,n,j)$  et  $(k',n',j')$  appartenant à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}$  et montrons l'orthogonalité des vecteurs  $\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}$  et  $\partial_x^r D^p \Psi_{k',n',j'}$  dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

Tout d'abord si  $(k,n) = (k',n')$ , alors les valeurs propres  $i\tau(k,n,j)$  et  $i\tau(k',n',j')$  sont distinctes et, par suite, les vecteurs  $\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}$  et  $\partial_x^r D^p \Psi_{k',n',j'}$  sont orthogonaux. En effet, comme la matrice  $M$  commute avec l'opérateur  $\partial_x^r D^p$  les vecteurs  $\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}$  et  $\partial_x^r D^p \Psi_{k',n',j'}$  sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $i\tau(k,n,j)$  et  $i\tau(k',n',j')$  donc

$$\begin{aligned} i\tau(k,n,j) \langle \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}, \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} &= \langle M \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}, \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= - \langle \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}, M \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= i\tau(k,n,j') \langle \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}, \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j'} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $(k,n) \neq (k',n')$ . On va expliciter la forme de  $\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}$ . La relation

$$H\psi_n = -\beta(2n+1)\psi_n$$

implique que pour tout réel  $t$

$$(H + t\beta I)^p \psi_n = (-\beta)^p (2n+1-t)^p \psi_n.$$

Si  $(n,j) \neq (0,0)$  alors on a

$$\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}(x,y) = (ik)^r (-\beta)^p (2n+1)^p \begin{pmatrix} a_{k,n,j} \psi_{n-1}(y) \\ b_{k,n,j} \psi_n(y) \\ c_{k,n,j} \psi_{n+1}(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

et si  $(n,j) = (0,0)$  alors on a

$$\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}(x,y) = (ik)^r \beta^p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0(y) \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

L'orthogonalité des familles  $(e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  et  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , implique alors l'orthogonalité des vecteurs  $\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}$  et  $\partial_x^r D^p \Psi_{k',n',j'}$  dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  et on conclut comme dans la démonstration précédente. □

Ce résultat conduit à définir les opérateurs suivants, qui approximent l'identité dans les espaces fonctionnels  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .



DÉFINITION 3.7. On note  $K_N$  l'opérateur de troncature

$$K_N := \sum_{(k,n,j) \in S_N} \Pi_{n,k,j} \quad \text{où} \quad S_N := \left\{ (k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\} : \sqrt{k^2+n} \leq N \right\}.$$

et l'espace associé

$$E_N := \{ \Psi \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \text{ tel que } K_N \Psi = \Psi \}$$

qui est de dimension finie.

L'étude précédente de la famille des dérivées  $(\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  va permettre d'obtenir une norme équivalente à la norme  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

PROPOSITION 3.8. Pour tout entier  $s$  et pour tout vecteur  $U$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on a l'équivalence des normes

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \sim \sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} (1+k^2+n)^{2s} \|\Pi_{k,n,j} U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

DÉMONSTRATION. Considérons un couple d'entiers  $(r,p)$  tels que  $r+2p \leq 2s$  et un vecteur  $U$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ . Par définition,

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 = \sum_{r+2p \leq 2s} \|\partial_x^r D^p U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2$$

D'après la proposition 3.2, on peut décomposer  $U$  en

$$U = \sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} \langle U, \Psi_{k,n,j} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \Psi_{k,n,j}$$

donc

$$\partial_x^r D^p U = \sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} \langle U, \Psi_{k,n,j} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}.$$

La famille  $(\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j})_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}}$  étant une famille orthogonale de  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\partial_x^r D^p U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 &= \sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} \left| \langle U, \Psi_{k,n,j} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right|^2 \|\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \\ &= \sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} \|\Pi_{k,n,j} U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \|\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

Or, si  $(n,j) \neq (0,0)$  alors

$$\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j} = (ik)^r (-\beta)^p (2n+1)^p e^{ikx} \Psi_{k,n,j}$$

et sinon

$$\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j} = (ik)^r \beta^p \Psi_{k,n,j}.$$

Ainsi,

$$\|\partial_x^r D^p \Psi_{k,n,j}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \lesssim k^{2r} (1+n)^{2p} \lesssim (1+k^2+n)^{2s}$$

ce qui conduit au résultat.  $\square$

REMARQUE. On retrouve la norme utilisée dans [9]. Elle permet de généraliser la norme  $\mathcal{W}^{2s}$  pour tout réel  $s$ .

Cette norme a l'avantage de faire apparaître des résultats d'interpolation semblables à ceux obtenus dans les espaces de Sobolev.

PROPOSITION 3.9. *Pour tout couple de réel  $(s_1, s_2)$  et pour tout  $\theta$  appartenant à  $]0, 1[$ , si*

$$s = \theta s_1 + (1 - \theta) s_2$$

*alors pour tout vecteur  $U$  appartenant à  $\mathcal{W}^{s_1} \cap \mathcal{W}^{s_2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$*

$$\|U\|_{\mathcal{W}^s(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq \|U\|_{\mathcal{W}^{s_1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^\theta \|U\|_{\mathcal{W}^{s_2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{1-\theta}.$$

DÉMONSTRATION. Considérons un couple de réel  $(s_1, s_2)$ , un réel  $\theta$  appartenant à  $]0, 1[$  et un vecteur  $U$  appartenant à  $\mathcal{W}^{s_1} \cap \mathcal{W}^{s_2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ . Si  $s = \theta s_1 + (1 - \theta) s_2$ , alors

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}}^2 &\lesssim \sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} (1+k^2+n)^{2s} \|\Pi_{k,n,j} U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \\ &\lesssim \sum_{(k,n,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{-1,0,1\}} \left( (1+k^2+n)^{2s_1} \|\Pi_{k,n,j} U\|_{L^2}^2 \right)^\theta \left( (1+k^2+n)^{2s_2} \|\Pi_{k,n,j} U\|_{L^2}^2 \right)^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder

$$\sum ab \leq \left( \sum a^p \right)^{1/p} \left( \sum b^q \right)^{1/q}$$

avec  $p = \frac{1}{\theta}$  pour conclure. □



## Existence de solutions. Convergence dans le cas bien préparé

Dans cette partie, nous allons prouver l'existence de solutions aux problèmes pénalisés  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  sur un intervalle de temps commun indépendant du paramètre  $\varepsilon$  lorsque les données initiales  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  convergent. C'est l'objet du théorème 4.6. Puis nous montrerons que ces solutions convergent si la limite des données initiales est un élément du noyau de la matrice de pénalisation. Ces données initiales sont dites "bien préparées", notion introduite dans [20]. Le théorème 4.8 obtenu généralise celui obtenu dans [7].

Pour cela, nous allons commencer par estimer le terme non linéaire apparaissant dans les systèmes pénalisés  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . Ces estimations nous seront également nécessaires dans le cas plus général de données "mal préparées".

### 4.1. Étude de la forme quadratique $Q$

Commençons par réécrire le terme non linéaire apparaissant dans les systèmes  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  sous une forme plus concise.

DÉFINITION 4.1. *On définit la forme bilinéaire  $Q$  par*

$$Q(U, V) := A_1(U)\partial_x V + A_2(U)\partial_y V$$

où les matrices  $A_1(U)$  et  $A_2(U)$  sont celles du théorème 2.4.

Dans cette section, nous allons donner des estimations sur  $Q$  nécessaires à toute estimation d'énergie des systèmes  $(S_\varepsilon)$ . La plus simple est la suivante.

PROPOSITION 4.2. *Il existe une constante  $C_0$  telle que pour tout couple de vecteurs  $(U, V)$  appartenant à  $L^2 \times \mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,*

$$\|Q(U, V)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_0 \|U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

DÉMONSTRATION. On a directement l'estimation

$$\|Q(U, V)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

et on conclut grâce à la proposition 2.7 et à l'inclusion continue de  $H^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .  $\square$

On va généraliser ce résultat.

PROPOSITION 4.3. *Pour tout entier  $s$ , il existe une constante  $C_s$  telle que pour tout couple de vecteurs  $(U, V)$  appartenant à  $(\mathcal{W}^{2s} \cap \mathcal{W}^4) \times (\mathcal{W}^{2s+1} \cap \mathcal{W}^4)(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,*

$$\|Q(U, V)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \left( \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right).$$

*En particulier, pour tout entier  $s \geq 2$ , il existe une constante  $C_s$  telle que pour tout couple de vecteurs  $(U, V)$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$*

$$\|Q(U, V)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

DÉMONSTRATION. Considérons un entier  $s$  et un couple  $(U, V)$  de  $(\mathcal{W}^{2s} \cap \mathcal{W}^4) \times (\mathcal{W}^{2s+1} \cap \mathcal{W}^4)$ . Par souci de clarté, on utilise les notations de la définition 2.8.

Par conséquent, pour estimer la norme  $L^2$  de  $\tilde{\partial}^{2s} Q(U, V)$ , il suffit de contrôler, pour tout entier  $q$  appartenant à  $[0, 2s]$ , la norme  $L^2$  de  $\tilde{\partial}^q U \tilde{\partial}^{2s-q+1} V$ .

L'inclusion continue de  $H^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  et donc de  $\mathcal{W}^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  implique l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\partial}^q U \tilde{\partial}^{2s-q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} &\leq \left\| \tilde{\partial}^q U \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \left\| \tilde{\partial}^{2s-q+1} V \right\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\leq C_s \|U\|_{\mathcal{W}^q(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s-q+3}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On souhaite conclure par interpolation, ce qui va nécessiter de différencier plusieurs cas :

- Si  $3 \leq q < 2s$  alors on pose  $\theta = \frac{2s-q}{2s-3}$  de sorte que

$$\begin{cases} 2s - q + 3 &= \theta \times 2s + (1 - \theta) \times 3 \\ q &= (1 - \theta) 2s + \theta \times 3 \end{cases}.$$

Grâce à la propriété d'interpolation 3.9, comme  $\theta \in ]0, 1[$  on a

$$\left\| \tilde{\partial}^q U \tilde{\partial}^{2s-q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^\theta \|U\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{1-\theta} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{1-\theta} \|V\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^\theta.$$

L'inégalité de convexité  $ab \leq \theta a^{\frac{1}{\theta}} + (1 - \theta) b^{\frac{1}{1-\theta}}$  avec

$$a = \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^\theta \|V\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^\theta \quad \text{et} \quad b = \|U\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{1-\theta} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{1-\theta}$$

conduit alors à

$$\left\| \tilde{\partial}^q U \tilde{\partial}^{2s-q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \left( \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|U\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right).$$

• Si  $q = 2s$  alors, grâce à l'inclusion continue de  $H^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  dans  $W^{2,\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  et à la proposition 2.7, on a

$$\left\| \tilde{\partial}^q U \tilde{\partial}^{2s-q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \left\| \tilde{\partial}^{2s} U \tilde{\partial} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

- Si  $0 \leq q \leq 2$  alors

$$\left\| \tilde{\partial}^q U \tilde{\partial}^{2s-q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

On a ainsi contrôlé les différentes contributions de la norme  $\mathcal{W}^{2s}$  de  $Q(U, V)$  ce qui permet de conclure.  $\square$

Dans les démonstrations précédentes, nous n'avons pas utilisé la symétrie des matrices  $A_x$  et  $A_y$ . En la prenant en compte, nous allons obtenir des résultats plus fins. On obtient facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 4.4. *Il existe une constante  $C_0$  telle que pour tout couple de vecteurs  $(U, V)$  appartenant à  $L^2 \times \mathcal{W}^4$ ,*

$$\left| \langle Q(U, V), V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \leq C_0 \|V\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

DÉMONSTRATION. La symétrie des matrices  $A_z$ ,  $z \in \{x, y\}$  implique que

$$\langle A_z(U) \partial_z V, V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \langle \partial_z V, A_z(\bar{U}) V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Par intégration par parties, on a donc

$$\langle A_z(U) \partial_z V, V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = - \langle V, A_z(\bar{U}) \partial_z V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} - \langle V, A_z(\partial_z \bar{U}) V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

i.e.

$$\langle A_z(U) \partial_z V, V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = -\frac{1}{2} \langle V, A_z(\partial_z \bar{U}) V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Ainsi,

$$\left| \langle Q(U, V), V \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \lesssim \|V\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \|U\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

et on conclut grâce à la proposition 2.7 et à l'inclusion continue de  $H^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$   $\square$

On va généraliser ce résultat.

PROPOSITION 4.5. *Pour tout entier  $s$ , il existe une constante  $C_s$  tel que pour tout couple  $(U, V)$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,*

$$\left| \langle Q(U, V), V \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \leq C_s \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \left( \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right).$$

*En particulier, pour tout entier  $s \geq 2$ , il existe une constante  $C_s$  tel que pour tout couple  $(U, V)$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,*

$$\left| \langle Q(U, V), V \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \leq C_s \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout entier  $q$  inférieur ou égal à  $2s$ , il faut, avec les notations de la définition 2.8, estimer le produit scalaire

$$\left\langle \tilde{\partial}^{2s} Q(U, V), \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

• Commençons par utiliser la symétrie des matrices  $A_z$ ,  $z \in \{x, y\}$  pour traiter les termes les plus problématiques à savoir ceux qui font intervenir un opérateur d'ordre  $2s$  sur le terme  $\partial_z V$  i.e.

$$\left\langle A_z(U) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Par symétrie de la matrice  $A_z$ ,

$$\left\langle A_z(U) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \left\langle \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V, A_z(\bar{U}) \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

On va distinguer deux cas selon que  $z = x$  ou  $z = y$ .

▷ Si  $z = x$  alors le commutateur  $[\tilde{\partial}^{2s}, \partial_z]$  est nul ce qui implique, par intégration par parties, que

$$\left\langle A_z(V) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z U, \tilde{\partial}^{2s} U \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = - \left\langle \tilde{\partial}^{2s} U, A_z(\partial_z \bar{V}) \tilde{\partial}^{2s} U \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} - \left\langle \tilde{\partial}^{2s} U, A_z(\bar{V}) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z U \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

i.e.

$$\left\langle A_z(U) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = -\frac{1}{2} \left\langle \tilde{\partial}^{2s} V, A_z(\partial_z \bar{U}) \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Par suite, comme  $\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  est continûment inclus dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on a le contrôle suivant

$$\left| \left\langle A_z(U) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

▷ Si  $z = y$  alors le commutateur  $[\tilde{\partial}^{2s}, \partial_z]$  est non nul et la première intégration par parties devient

$$\left\langle A_z(U) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = - \left\langle \tilde{\partial}^{2s} V, \partial_z \left( A_z(\bar{U}) \tilde{\partial}^{2s} V \right) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \left\langle [\tilde{\partial}^{2s}, \partial_z] V, A_z(\bar{U}) \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Comme  $[\tilde{\partial}^{2s}, \partial_z]$  est un opérateur d'ordre inférieur ou égal à  $2s$ , le terme correctif est contrôlé par

$$\left| \left\langle [\tilde{\partial}^{2s}, \partial_z] V, A_z(\bar{U}) \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \lesssim \|U\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

Par symétrie de la matrice  $A_z$ , l'autre terme s'écrit

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\partial}^{2s} V, \partial_z \left( A_z (\bar{U}) \tilde{\partial}^{2s} V \right) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} &= \left\langle \tilde{\partial}^{2s} V, A_z (\partial_z \bar{U}) \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \left\langle A_z (U) \tilde{\partial}^{2s} V, \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\quad + \left\langle \tilde{\partial}^{2s} V, A_z (\bar{U}) \left[ \partial_z, \tilde{\partial}^{2s} \right] V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On contrôle le terme correctif par

$$\left| \left\langle \tilde{\partial}^{2s} V, A_z (\bar{U}) \left[ \partial_z, \tilde{\partial}^{2s} \right] V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \lesssim \|U\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

On peut donc conclure comme dans le cas précédent à la majoration

$$\left| \left\langle A_z (U) \tilde{\partial}^{2s} \partial_z V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

- Étudions maintenant les termes qui restent c'est-à-dire les produits scalaires

$$\left\langle \tilde{\partial}^{2s-q} U \tilde{\partial}^{q+1} V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

où  $q$  est un entier tel que  $0 \leq q < 2s$  car le terme correspondant à  $q = 2s$  vient d'être traité.

On a la majoration

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \tilde{\partial}^{2s-q} U \tilde{\partial}^{q+1} V, \tilde{\partial}^{2s} V \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| &\lesssim \left\| \tilde{\partial}^{2s-q} U \tilde{\partial}^{q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^{2s-q}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{q+3}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On souhaite conclure par interpolation, ce qui va nécessiter de différencier plusieurs cas :

- ▷ Si  $0 < q < 2s - 3$  alors on pose  $\theta = \frac{q}{2s-3}$  de sorte que

$$\begin{cases} 2s - q &= \theta \times 2s + (1 - \theta) \times 3 \\ q + 3 &= (1 - \theta) \times 2s + \theta \times 3. \end{cases}$$

Grâce à la proposition 3.9, comme  $\theta \in ]0, 1[$ , on a

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{2s-q}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{q+3}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^\theta \|U\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{1-\theta} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^\theta \|V\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{1-\theta}.$$

L'inégalité de convexité  $ab \leq \theta a^{\frac{1}{\theta}} + (1 - \theta) b^{\frac{1}{1-\theta}}$  conduit donc à

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{2s-q}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{q+3}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

- ▷ Si  $q = 0$  alors, par inclusion continue de  $\mathcal{W}^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,

$$\left\| \tilde{\partial}^{2s-q} U \tilde{\partial}^{q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \left\| \tilde{\partial}^{2s} U \tilde{\partial}^1 V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

- ▷ Si  $q = 2s - 3$  alors

$$\left\| \tilde{\partial}^{2s-q} U \tilde{\partial}^{q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^{2s-q}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{q+3}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^3(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

- ▷ Si  $2s - 2 < q < 2s$  alors

$$\left\| \tilde{\partial}^{2s-q} U \tilde{\partial}^{q+1} V \right\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^{2s-q+2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{q+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \lesssim \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{r+2p}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

□

Les différents résultats que nous venons de démontrer sur la forme quadratique  $Q$  vont conduire, par des estimations d'énergie, à des résultats d'existence et d'estimation uniformes sur les systèmes pénalisés  $(S_\varepsilon)$ .

### 4.2. Existence de solutions des systèmes pénalisés

Dans cette section, nous allons utiliser les résultats des deux sections précédentes pour démontrer le théorème suivant.

**THÉORÈME 4.6.** *Pour toute valeur strictement positive du paramètre  $\varepsilon$  et pour toute donnée initiale  $V_{\varepsilon,0}$ , il existe un temps  $T_\varepsilon^*$ , tel que pour tout entier  $s \geq 2$ , si la donnée initiale appartient à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors le système pénalisé  $(S_\varepsilon)$  admet une unique solution dans  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon^*[, \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ . De plus, si la famille  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  des données initiales est bornée dans l'espace  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors il existe un temps  $T > 0$ , indépendant de  $\varepsilon$ , tel que les systèmes pénalisés admettent d'unique solutions  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  appartenant à l'espace  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  et tel que la suite  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  soit bornée dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Commençons par montrer l'existence d'une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $U_0 \equiv V_{\varepsilon,0}$  et

$$\begin{cases} \partial_t U_{n+1} + Q(U_n, U_{n+1}) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{n+1} = 0 \\ U_{n+1}(t=0, \cdot) = V_{\varepsilon,0} \end{cases}$$

On prouvera alors que cette suite est de Cauchy sur un intervalle de temps indépendant de  $\varepsilon$ . La limite, à extraction près, sera alors solution du système pénalisé  $(S_\varepsilon)$ .

► Nous allons d'abord prouver l'existence d'un temps  $T_\varepsilon > 0$  tel que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soient définie et uniformément bornée dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

Supposons que  $U_n$  soit construite dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  où

$$T_\varepsilon = \frac{\ln(3/2)}{6C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}}$$

et vérifie

$$\|U_n\|_{L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \leq \frac{3}{2} \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

La constante  $C_s$  est celle de la proposition 4.5.

• On va montrer que le système définissant  $U_{n+1}$  admet une solution en étudiant les systèmes approchée suivants :

$$\begin{cases} \partial_t V^N + K_N Q(U_n, V^N) + \frac{1}{\varepsilon} M V^N = 0 \\ V^N(t=0, \cdot) = K_N V_{\varepsilon,0} \end{cases}$$

où  $K_N$  est l'opérateur de la définition 3.7.

On obtient une équation différentielle linéaire sur l'espace  $E_N$  qui est de dimension finie. Pour tout entier  $N$ , il existe donc une unique solution  $V^N$  appartenant à  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon], E_N)$ .

Grâce à la proposition 4.5, comme  $s \geq 2$ , une estimation d'énergie  $\mathcal{W}^{2s}$  conduit à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V^N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq 2C_s \|V^N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \|U_n\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V^N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq 3C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V^N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2$$

puis

$$\|V^N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \leq \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} e^{6C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} t}.$$

Ainsi, par définition de  $T_\varepsilon$ , la suite des solutions  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est bornée par  $\frac{3}{2} \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$  dans l'espace  $L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

- Montrons que la suite  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .



Pour tout couple d'entiers  $(N, p)$ , si on pose  $R^{N,p} = V^{N+p} - V^N$  alors

$$\begin{cases} \partial_t R^{N,p} + K_{N+p} Q(U_n, V^{N+p}) - K_N Q(U_n, V^N) + \frac{1}{\varepsilon} M R^{N,p} = 0 \\ R^{N,p}(t=0, \cdot) = (K_{N+p} - K_N) V_{\varepsilon,0}. \end{cases}$$

Or,

$$K_{N+p} Q(U_n, V^{N+p}) - K_N Q(U_n, V^N) = K_{N+p} Q(U_n, R^{N,p}) + (K_{N+p} - K_N) Q(U_n, V^N)$$

donc on a, grâce à la proposition 4.4, l'estimation d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|R^{N,p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 &\lesssim \|R^{N,p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + \langle (K_{N+p} - K_N) Q(U_n, V^N), R^{N,p} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\lesssim \|R^{N,p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + \langle Q(U_n, V^N), (K_{N+p} - K_N) R^{N,p} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.2 et l'hypothèse de récurrence sur  $U_n$ ,

$$\begin{aligned} \left| \langle Q(U_n, V^N), (K_{N+p} - K_N) R^{N,p} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| &\lesssim \|(K_{N+p} - K_N) R^{N,p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\lesssim \|(Id - K_N) V^{N+p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Du fait de l'orthogonalité des vecteurs propres intervenant dans la définition de  $K_N$ ,

$$\|(Id - K_N) V^{N+p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 = \sum_{\sqrt{k^2+n} > N} \|\Pi_{k,n,j} V^{N+p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2$$

et, grâce à la proposition 3.8,

$$\|\Pi_{k,n,j} V^{N+p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq \frac{C}{1+n+k^2} \|\Pi_{k,n,j} V^{N+p}\|_{\mathcal{W}^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})},$$

donc

$$\|(Id - K_N) V^{N+p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq \frac{C}{1+N^2} \|V^{N+p}\|_{\mathcal{W}^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq \frac{C'}{1+N^2}.$$

Ainsi, il existe une constante  $C$  telle que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|R^{N,p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq C \|R^{N,p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + \frac{C}{\sqrt{1+N^2}}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \|R^{N,p}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2(t) &\leq \left( \|(K_{N+p} - K_N) V_{\varepsilon,0}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + \frac{C}{\sqrt{1+N^2}} \right) e^{Ct} \\ &\leq \left( \|(Id - K_N) V_{\varepsilon,0}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + \frac{C}{\sqrt{1+N^2}} \right) e^{Ct}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ . Grâce à la propriété d'interpolation 3.9, comme elle est bornée dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , la suite  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est aussi de Cauchy dans l'espace  $L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ . On note  $U_{n+1}$  sa limite qui est solution de

$$\begin{cases} \partial_t U_{n+1} + Q(U_n, U_{n+1}) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{n+1} = 0 \\ U_{n+1}(t=0, \cdot) = V_{\varepsilon,0}. \end{cases}$$

De plus,  $U_{n+1}$  appartient à  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  comme limite uniforme de fonctions continues.

• On va maintenant améliorer la régularité de la solution  $U_{n+1}$  en montrant qu'elle appartient à  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ . Cette méthode est exposé dans un cas plus général dans [25].

Il faut prouver que, pour tout  $t_0 \in [0, T_\varepsilon]$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \|U_{n+1}(t_0, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

La suite  $(V^N)_{N \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  donc converge faiblement vers  $U_{n+1}$  dans cet espace. Ainsi, pour tout  $t_0 \in [0, T_\varepsilon]$ ,

$$(*) \quad \|U_{n+1}(t_0, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq \liminf_{t \rightarrow t_0} \|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Comme

$$\partial_t U_{n+1} + Q(U_n, U_{n+1}) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{n+1} = 0$$

et comme  $s \geq 2$  on a l'estimation d'énergie suivante sur  $[0, T_\varepsilon]$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq C_s \|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|U_n(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C'_s$$

donc

$$\|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq \|U_{n+1}(t_0, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + C'_s(t - t_0)$$

puis

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq \|U_{n+1}(t_0, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Par conséquent, grâce à (\*), on obtient

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \underline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \|U_{n+1}(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \|U_{n+1}(t_0, \cdot)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

et par suite  $U_{n+1}$  appartient à  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

• Comme  $U_0 \equiv V_{\varepsilon,0}$ , en posant  $T_\varepsilon = \frac{\ln(3/2)}{6C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}}$ , on en déduit qu'on a construit une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  et uniformément bornée dans l'espace  $L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  par  $\frac{3}{2} \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$ .

► Montrons que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ . On pose  $R_n = U_{n+1} - U_n$  de sorte que

$$\begin{cases} \partial_t R_n + Q(U_n, U_{n+1}) - Q(U_{n-1}, U_n) + \frac{1}{\varepsilon} M R_n = 0 \\ R_n(t = 0, \cdot) = 0. \end{cases}$$

Comme

$$Q(U_n, U_{n+1}) - Q(U_{n-1}, U_n) = Q(R_{n-1}, U_{n+1}) + Q(U_{n-1}, R_n),$$

une estimation d'énergie  $L^2$  conduit à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|R_n\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq 3C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|R_n\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \left( \|R_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|R_n\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right).$$

Tant que l'inégalité  $\|R_n\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \leq \|R_{n-1}\|_{L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}$  est vérifiée, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|R_n\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq 3C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \left( \|R_{n-1}\|_{L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}^2 + \|R_n\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \right)$$

i.e.

$$\|R_n\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2(t) \leq \|R_{n-1}\|_{L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}^2 \left( e^{6C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} t} - 1 \right).$$

Comme  $T_\varepsilon = \frac{\ln(3/2)}{6C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}}$ , on obtient

$$\|R_n\|_{L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \leq \frac{1}{2} \|R_{n-1}\|_{L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}^2.$$

On en déduit que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  puis, par interpolation, qu'elle est de Cauchy dans  $L^\infty([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

► Par un raisonnement similaire à ce qui a été fait précédemment, la limite  $U$  de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ . Par conséquent, pour tout  $\varepsilon$  strictement positif et pour tout entier  $s \geq 2$ , on a l'existence d'une solution du système pénalisé dans l'espace  $\mathcal{C}([0, T_\varepsilon], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

En particulier, comme  $T_\varepsilon = \frac{\ln(3/2)}{6C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}}$ , si la famille  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  des données initiales est bornée dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors il existe un temps commun  $T > 0$  tel que les systèmes pénalisés admettent des solutions  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  et tel que la suite  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  soit bornée dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

► Montrons maintenant pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, le temps de vie,  $T_{\varepsilon,s}^*$ , de la solution du système pénalisé dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  est le même pour tout entier  $s \geq 2$ .

• Pour cela, on va commencer par démontrer le résultat d'unicité suivant :

Si  $\Phi_\varepsilon$  et  $\Psi_\varepsilon$  sont solution du système pénalisé sur  $[0, T]$  dans  $\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors elles sont égales sur cet intervalle de temps.

En effet, leur différence  $R_\varepsilon = \Phi_\varepsilon - \Psi_\varepsilon$  vérifie

$$\begin{cases} \partial_t R_\varepsilon + Q_L(R_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) + Q_L(\Psi_\varepsilon, R_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} M R_\varepsilon = 0 \\ R_\varepsilon|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

D'où l'estimation d'énergie sur  $[0, T]$

$$\frac{d}{dt} \|R_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \lesssim \|R_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \left( \|\Phi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + \|\Psi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \right)$$

ce qui permet de conclure à l'unicité.

• Pour tout  $s \geq 2$  on a déjà prouvé l'existence de solutions du système pénalisé dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  et  $\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ . On note  $[0, T_{\varepsilon,s}^*]$  et  $[0, T_\varepsilon^*]$  les intervalles de temps maximaux respectifs où elles sont définies et continues. Par unicité, on a  $T_{\varepsilon,s}^* \leq T_\varepsilon^*$ .

Supposons, par l'absurde, que  $T_{\varepsilon,s}^* < T_\varepsilon^*$ . Alors, sur  $[0, T_{\varepsilon,s}^*]$ , la norme  $\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  de la solution  $U_\varepsilon$  du système limite dans  $\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  est bornée. Donc, sur  $[0, T_{\varepsilon,s}^*]$ , on a

$$\begin{aligned} \langle Q(U_\varepsilon, U_\varepsilon), U_\varepsilon \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) &\leq C_s \|U_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2(t) \|U_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \\ &\leq M_s \|U_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2(t). \end{aligned}$$

Donc, par estimation d'énergie, la norme  $\mathcal{W}^{2s}$  de  $U_\varepsilon$  n'explose pas en  $T_{\varepsilon,s}^*$ , ce qui conduit à une contradiction. Ainsi,

$$T_{\varepsilon,s}^* = T_\varepsilon^*.$$

En particulier,  $T_\varepsilon^*$  est minoré par  $\frac{\ln(3/2)}{6C_s \|V_{\varepsilon,0}\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}}$  et on a montré l'unicité des solutions.  $\square$

### 4.3. Convergence dans le cas bien préparé

Dans cette section, on va présenter un résultat de convergence dans le cas bien préparé c'est-à-dire quand la famille des données initiales tend vers un élément du noyau de la matrice de pénalisation.

Commençons par donner un résultat important sur la forme des éléments du noyau.

PROPOSITION 4.7. *Si le vecteur  $\begin{pmatrix} l \\ v \\ r \end{pmatrix}$  appartient au noyau de la matrice de pénalisation  $M$  alors il ne dépend pas de la variable  $x$  et la composante  $v$  est nulle.*

DÉMONSTRATION. Par définition, si  $\begin{pmatrix} l \\ v \\ r \end{pmatrix}$  appartient au noyau de la matrice de pénalisation  $M$ , alors

$$\begin{cases} -\partial_x l + L_- v = 0 \\ L_+ l + L_- r = 0 \\ L_+ v + \partial_x r = 0. \end{cases}$$

Grâce à la proposition 2.3, on a

$$\beta v = [L_+, L_-]v = L_+ \partial_x l + L_- \partial_x r = \partial_x (L_+ l + L_- r) = 0.$$

Par suite,  $v$ ,  $\partial_x r$  et  $\partial_x l$  sont nuls i.e.  $r$  et  $l$  sont indépendants de  $x$ .  $\square$

Cette forme particulière va nous permettre d'obtenir le résultat de convergence énoncé dans [26].

**THÉORÈME 4.8.** *Pour tout entier  $s \geq 2$ , si la famille des conditions initiales  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  converge dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  vers un élément  $V_0$  appartenant à  $\text{Ker}(M) \cap \mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors, le temps de vie  $T_\varepsilon^*$  associé à la solution  $V_\varepsilon$  du système  $(S_\varepsilon)$  tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. De plus, pour tout temps  $T > 0$ , les solutions  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  convergent dans  $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  vers la fonction constante à  $V_0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour montrer que le temps de vie de la solution  $V_\varepsilon$  tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, on va comparer  $V_\varepsilon$  à  $V_0$ , la limite des conditions initiales qui, par définition, est globale. Pour cela, on introduit les vecteurs  $\widetilde{V}_\varepsilon = V_\varepsilon - V_0$ . Ils sont solutions de

$$\partial_t \widetilde{V}_\varepsilon + A_1(V_\varepsilon) \partial_x \widetilde{V}_\varepsilon + A_2(V_\varepsilon) \partial_y \widetilde{V}_\varepsilon + \varepsilon^{-1} M \widetilde{V}_\varepsilon = -A_2(V_\varepsilon) \partial_y V_0$$

i.e.

$$\partial_t \widetilde{V}_\varepsilon + Q(V_\varepsilon, \widetilde{V}_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} M \widetilde{V}_\varepsilon = -A_2(V_\varepsilon) \partial_y V_0.$$

De plus, la suite des données initiales  $(\widetilde{V}_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  tend vers zéro dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

Le problème réside dans le fait que le vecteur nul n'est pas solution de ce système car l'égalité

$$L_+ l_0 + L_- r_0 = 0$$

implique que

$$\partial_y (r_0 + l_0) = \beta y (l_0 - r_0)$$

et donc

$$A_2(V_0) \partial_y V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} (r_0 + l_0) \partial_y (r_0 + l_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{4} y (l_0^2 - r_0^2) \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

C'est la raison pour laquelle on cherche des solutions de

$$\partial_t W_\varepsilon + \varepsilon^{-1} M W_\varepsilon = -A_2(V_0) \partial_y V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{4} y (r_0^2 - l_0^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on pose  $W_\varepsilon = \begin{pmatrix} a_\varepsilon \\ b_\varepsilon \\ c_\varepsilon \end{pmatrix}$  alors le système s'écrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} a_\varepsilon \\ b_\varepsilon \\ c_\varepsilon \end{pmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} -\partial_x a_\varepsilon + L_- b_\varepsilon \\ L_+ a_\varepsilon + L_- c_\varepsilon \\ L_+ b_\varepsilon + \partial_x c_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} y (r_0^2 - l_0^2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution simple indépendante du temps et de la variable  $x$  ce qui implique

$$L_- b_\varepsilon = L_+ b_\varepsilon = 0$$

et donc  $b_\varepsilon = 0$ . Le système est alors réduit à

$$L_+ a_\varepsilon + L_- c_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_y (c_\varepsilon + a_\varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{2}} y (c_\varepsilon - a_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4} y (r_0^2 - l_0^2).$$

En cherchant  $a_\varepsilon$  et  $c_\varepsilon$  comme des fonctions de  $l_0^2 - r_0^2$ , on trouve que

$$W_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} l_0^2 - r_0^2 \\ 0 \\ r_0^2 - l_0^2 \end{pmatrix}$$

est solution. De plus, la norme de cette solution est contrôlée par  $\varepsilon$ , on pose donc  $W_\varepsilon := \varepsilon W_1$  avec  $W_1$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2n+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ .

Il reste donc à étudier le système vérifié par  $\overline{V}_\varepsilon = \widetilde{V}_\varepsilon - \varepsilon W_1$ . On sait déjà que la suite  $(\overline{V}_{\varepsilon,0})_{\varepsilon > 0}$  des données initiales tend vers zéro dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ . En soustrayant les équations vérifiées par  $\widetilde{V}_\varepsilon$  et  $\varepsilon W_1$ , on obtient

$$\partial_t \overline{V}_\varepsilon + Q(V_\varepsilon, \widetilde{V}_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} M \overline{V}_\varepsilon = 0$$

i.e.

$$\partial_t \overline{V}_\varepsilon + Q(V_\varepsilon, \overline{V}_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} M \overline{V}_\varepsilon = -\varepsilon Q(V_\varepsilon, W_1).$$

Par estimation d'énergie, grâce aux propositions 4.3 et 4.5,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^2 &\leq |\langle Q(V_\varepsilon, \overline{V}_\varepsilon), \overline{V}_\varepsilon \rangle_{\mathcal{W}^{2s}}| + \varepsilon |\langle Q(V_\varepsilon, W_1), \overline{V}_\varepsilon \rangle_{\mathcal{W}^{2s}}| \\ &\lesssim \|V_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}} \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^2 + \varepsilon \|V_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}} \|W_1\|_{\mathcal{W}^{2s+1}} \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}} \end{aligned}$$

Par définition,  $V_\varepsilon = \overline{V}_\varepsilon + \varepsilon W_1 + V_0$  donc

$$\|V_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}} \leq \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}} + \varepsilon \|W_1\|_{\mathcal{W}^{2s}} + \|V_0\|_{\mathcal{W}^{2s}}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^2 &\lesssim \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^3 + (\|V_0\|_{\mathcal{W}^{2s}} + 2\varepsilon \|W_1\|_{\mathcal{W}^{2s+1}}) \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^2 \\ &\quad + \varepsilon \|W_1\|_{\mathcal{W}^{2s+1}} (\varepsilon \|W_1\|_{\mathcal{W}^{2s}} + \|V_0\|_{\mathcal{W}^{2s}}) \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}. \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en

$$\frac{d}{dt} \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^2 \lesssim \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^3 + \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}^2 + \varepsilon \|\overline{V}_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que si  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est une suite de fonctions positives vérifiant

$$\begin{cases} f'_\varepsilon \leq R \left( f_\varepsilon^{3/2} + f_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon^{1/2} \right) \\ f_\varepsilon(0) = f_{\varepsilon,0} \end{cases}$$

où la suite des données initiales  $(f_{\varepsilon,0})_{\varepsilon > 0}$  tend vers zéro, alors le temps de vie de  $f_\varepsilon$  tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. De plus, pour tout  $T > 0$ , la suite  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est majorée sur  $[0, T]$  par une constante qui tend vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

En effet, soit  $T_\varepsilon$  le temps maximal tel que  $f_\varepsilon$  soit inférieure à 1 sur  $[0, T_\varepsilon]$ . Si  $T_\varepsilon$  est fini, alors sur  $[0, T_\varepsilon]$  on a

$$f'_\varepsilon \leq R(2f_\varepsilon + \varepsilon)$$

donc

$$\frac{f'_\varepsilon}{2f_\varepsilon + \varepsilon} = \left[ \frac{1}{2} \ln(2f_\varepsilon + \varepsilon) \right]' \leq R.$$

Ainsi,

$$2RT_\varepsilon \geq \ln(2 + \varepsilon) - \ln(2f_{\varepsilon,0} + \varepsilon)$$

et le minorant tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro ce qui prouve que  $T_\varepsilon$  aussi.

De plus, si  $T$  est un réel positif donné, alors pour  $\varepsilon$  assez petit,  $T \leq T_\varepsilon$ , donc sur  $[0, T]$  on a

$$\ln(2f(t) + \varepsilon) - \ln(2f_0 + \varepsilon) \leq 2RT$$

D'où

$$f(t) \leq \left( f_{\varepsilon,0} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \exp(2RT) = C_\varepsilon.$$

Or,  $C_\varepsilon$  tend vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, ce qui conclut la démonstration.  $\square$

## Étude du système limite

Dans le résultat de convergence précédent, on s’est appuyé sur le fait que la famille des données initiales convergeait vers un élément du noyau de la matrice de pénalisation. En effet, dans ce cas les solutions des systèmes pénalisés convergent vers la limite des données initiales. Lorsque la suite des données initiales converge vers un élément quelconque, les données sont dite “mal préparées”. Dans ce cas, on va filtrer le système afin d’obtenir un système limite a priori vérifié par la limite des solutions filtrées. C’est l’objet de la première section. Dans ce système apparaît un ensemble dit des résonances de la matrice de pénalisation que nous étudierons dans une deuxième section. En nous inspirant de ce qui a été fait pour les systèmes pénalisés, nous montrerons que ce système limite admet une solution et donnerons une condition nécessaire et suffisante de globalité.

### 5.1. Filtrage et système limite

Pour toute valeur propre  $i\lambda$  de la matrice de pénalisation, la projection des solutions pénalisées sur l’espace propre associé vérifie

$$\partial_t \Pi_\lambda V_\varepsilon + \Pi_\lambda Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon) + \frac{i\lambda}{\varepsilon} \Pi_\lambda V_\varepsilon = 0.$$

Pour faire disparaître le terme pénalisant de ce système, il suffit de considérer le vecteur  $e^{i\lambda t/\varepsilon} \Pi_\lambda V_\varepsilon$ . Pour cette raison, on introduit un opérateur de filtrage, comme cela a été fait notamment par S.Schochet dans [29] et par E. Grenier dans [17].

**DÉFINITION 5.1.** *L’opérateur de filtrage  $\mathfrak{L}$  associé à  $M$  est donné par  $t \mapsto \mathfrak{L}(t)$  avec pour tout vecteur  $U$  appartenant à  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,*

$$\mathfrak{L}(t)U = \sum_{\lambda \in \mathfrak{G}} e^{-it\lambda} \Pi_\lambda U.$$

**REMARQUE.** D’après la proposition 3.5, l’opérateur de filtrage est une isométrie. Pour tout entier  $s$  et pour tout vecteur  $U$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on a

$$\|\mathfrak{L}(t)U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Étudions maintenant le système vérifié par les solutions filtrées  $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  définies par

$$\Phi_\varepsilon(t, \cdot) := \mathfrak{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) V_\varepsilon(t, \cdot) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{G}} e^{i\lambda t/\varepsilon} \Pi_\lambda V_\varepsilon(t, \cdot)$$

où la suite  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est la famille des solutions des systèmes pénalisés  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  définis au théorème 2.4. Par définition,

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_\varepsilon(t, \cdot) &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{G}} \frac{i\lambda}{\varepsilon} e^{i\lambda t/\varepsilon} \Pi_\lambda V_\varepsilon(t, \cdot) + \sum_{\lambda \in \mathfrak{G}} e^{i\lambda t/\varepsilon} \partial_t \Pi_\lambda V_\varepsilon(t, \cdot) \\ &= - \sum_{\lambda \in \mathfrak{G}} e^{i\lambda t/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon)(t, \cdot) \end{aligned}$$

i.e.

$$\partial_t \Phi_\varepsilon(t, \cdot) = -\mathfrak{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon)(t, \cdot).$$

Donc  $\Phi_\varepsilon$  vérifie

$$\partial_t \Phi_\varepsilon(t, \cdot) + \mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) Q \left( \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Phi_\varepsilon(t, \cdot), \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Phi_\varepsilon(t, \cdot) \right) = 0.$$

Or, par définition de l'opérateur de filtrage, on a

$$\mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) Q \left( \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Phi_\varepsilon(t, \cdot), \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Phi_\varepsilon(t, \cdot) \right) = \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S}^3} e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi_\varepsilon(t, \cdot), \Pi_{\mu'} \Phi_\varepsilon(t, \cdot)).$$

Si la condition  $\lambda = \mu + \mu'$  n'est pas vérifiée alors on peut supposer que le terme

$$e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi_\varepsilon(t, \cdot), \Pi_{\mu'} \Phi_\varepsilon(t, \cdot))$$

tend faiblement vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Ainsi, si la famille de données initiales  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  converge vers  $\Phi^0$  et si la suite  $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers  $\Phi$ , on peut s'attendre (et on le démontrera plus tard) à ce que  $\Phi$  soit solution du système limite suivant.

DÉFINITION 5.2. *On appelle système limite le système suivant :*

$$(SL) \quad \begin{cases} \partial_t \Phi + Q_L(\Phi, \Phi) = 0 \\ \Phi|_{t=0} = \Phi^0 \end{cases}$$

où la forme quadratique limite est donnée par

$$Q_L(\Phi, \Phi) := \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S}^3 : \lambda = \mu + \mu'} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi, \Pi_{\mu'} \Phi).$$

D'après la forme des vecteurs propres de la matrice  $M$  rappelée au théorème 3.1, si les entiers relatifs  $k, k'$  et  $k''$  ne vérifient pas la condition  $k'' = k + k'$  alors, pour tout vecteur  $U$ , pour tout triplet d'entiers  $(m, n, n')$  et pour tout triplet  $(l, j, j')$  appartenant à  $\{-1, 0, 1\}^3$ , on a

$$\Pi_{k'', m, l} Q(\Pi_{k, n, j} U, \Pi_{k', n', j'} U) = 0.$$

Afin d'étudier ce système limite, il faut étudier l'ensemble  $\mathcal{R}$  des résonances de l'opérateur  $M$  défini par

$$\mathcal{R} := \left\{ (k, k', n, n', m, j, j', l) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^3 \times \{-1, 0, 1\}^3 : \tau(k + k', m, l) = \tau(k, n, j) + \tau(k', n', j') \right\}.$$

## 5.2. Étude des résonances

L'objet de cette section est la démonstration du théorème suivant énoncé dans [9] et faisant intervenir les valeurs propres de Kelvin introduites dans la définition 3.1.

THÉORÈME 5.3. *A l'exception d'un ensemble dénombrable de valeurs de  $\beta$ , pour tout  $(k, k', n, n', m, j, j', l)$  appartenant à  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^3 \times \{-1, 0, 1\}^3$ , la relation*

$$\tau(k + k', m, l) = \tau(k, n, j) + \tau(k', n', j')$$

*implique qu'un des trois termes est nul ou qu'il s'agit de trois racines de Kelvin i.e.*

$$\tau(k, n, j) = k, \quad \tau(k', n', j') = k' \quad \text{et} \quad \tau(k + k', m, l) = k + k'.$$

REMARQUE. Il est évident que les triplets  $(\lambda, \mu, \mu')$  de la forme  $(0, \mu, -\mu)$ ,  $(\mu, \mu, 0)$ ,  $(\mu, 0, \mu)$  ou  $(k + k', k, k')$  avec  $(k, k')$  appartenant à  $\mathbb{Z}^2$ , vérifient la relation

$$\lambda = \mu + \mu'.$$

Il reste à montrer que ce sont les seuls pour peu que  $\beta$  ne soit pas trop mal choisi.

Dans le but d'étudier les résonances, on définit les quantités suivantes

DÉFINITION 5.4. Étant donné un triplet d'entiers  $(m, n, n')$ , un couple d'entiers relatifs  $(k, k')$  et un triplet  $(l, j, j')$  appartenant à  $\{-1, 0, 1\}^3$ , on introduit les quantités

$$R_{k,k',n,n',m,j,j',l} := \tau(k, n, j) + \tau(k', n', j') - \tau(k + k', m, l)$$

et

$$P_{k,k',n,n',m} := \prod_{j, j', l \in \{-1, 0, 1\}} (\tau(k, n, j) + \tau(k', n', j') - \tau(k + k', m, l)).$$

On s'intéresse aux conditions d'annulation de  $R_{k,k',n,n',m,j,j',l}$ . On introduit la quantité  $P_{k,k',n,n',m}$  car, contrairement à  $R_{k,k',n,n',m,j,j',l}$ , elle est polynomiale en  $\beta$ .

PROPOSITION 5.5. *Pour tout triplet d'entiers  $(m, n, n')$  et tout couple d'entiers relatifs  $(k, k')$ , la quantité  $P_{k,k',n,n',m}$  est polynomiale en  $\beta$ .*

DÉMONSTRATION. Si on développe  $P_{k,k',n,n',m}$  alors les valeurs propres  $(\tau(k, n, j))_{j \in \{-1, 0, 1\}}$  jouent un rôle symétrique. On peut donc le réécrire à l'aide des fonctions symétriques associés aux triplets

$$(\tau(k, n, j))_{j \in \{-1, 0, 1\}}, (\tau(k', n', j'))_{j' \in \{-1, 0, 1\}} \text{ et } (\tau(k + k', m, l))_{l \in \{-1, 0, 1\}}.$$

Si  $n$  est non nul alors le triplet  $(\tau(k, n, j))_{j \in \{-1, 0, 1\}}$  est l'ensemble des racines du polynôme

$$P_{k,n}(\tau) = \tau^3 - (k^2 + \beta(2n + 1))\tau - \beta k$$

et sinon, le triplet  $(\tau(k, n, j))_{j \in \{-1, 0, 1\}}$  est l'ensemble des racines du polynôme

$$(\tau - k)(\tau^2 - k\tau - \beta) = \tau^3 - (k^2 + \beta)\tau + \beta k$$

ce qui permet de réécrire  $P_{k,k',n,n',m}$  comme un polynôme en les quantités

$$\beta k, \beta k', \beta(k + k'), k^2 + \beta(2n + 1), k'^2 + \beta(2n' + 1), (k + k')^2 + \beta(2m + 1).$$

Ainsi, la quantité  $P_{k,k',n,n',m}$  est polynomiale en  $\beta$ .  $\square$

Par conséquent, pour tout triplet d'entiers  $(m, n, n')$  et tout couple d'entiers relatifs  $(k, k')$ , il y a deux éventualités.

Soit le polynôme  $P_{k,k',n,n',m}$  possède un nombre fini de zéros et, dans ce cas, à l'exception d'un nombre fini de  $\beta$ , il n'existe pas de triplet  $(j, j', l)$  appartenant à  $\{-1, 0, 1\}^3$  tel que

$$\tau(k, n, j) + \tau(k', n', j') = \tau(k + k', m, l).$$

Soit le polynôme  $P_{k,k',n,n',m}$  est identiquement nul et, dans ce cas, pour tout  $\beta$ , il existe un triplet  $(j, j', l)$  appartenant à  $\{-1, 0, 1\}^3$  tel que

$$\tau(k, n, j) + \tau(k', n', j') = \tau(k + k', m, l).$$

Pour trancher entre ces deux possibilités, on va étudier le comportement du polynôme  $P_{k,k',n,n',m}$  quand  $\beta$  tend vers l'infini afin de déterminer s'il est nul ou pas. Pour cela, commençons on va préciser par le comportement de  $\tau(k, n, j)$ .

PROPOSITION 5.6. *Pour tout couple  $(k, n)$  appartenant à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  lorsque  $\beta$  tend vers l'infini, on a les développements suivants :*

$$\begin{aligned} \tau(k, n, \pm 1) &= \pm \sqrt{\beta(2n + 1)} + \frac{k}{2(2n + 1)} + o(1) \\ \tau(k, n, 0) &= -\frac{k}{2n + 1} + \frac{4k^3 n(n + 1)}{\beta(2n + 1)^4} + o\left(\frac{1}{\beta}\right). \end{aligned}$$



DÉMONSTRATION. Commençons par deux cas simples.

Si  $n$  est nul alors

$$\tau(k, 0, \pm 1) = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4\beta}}{2} \quad \text{et} \quad \tau(k, 0, 0) = k.$$

Le développement

$$\sqrt{k^2 + 4\beta} = 2\sqrt{\beta} + o(1)$$

permet alors de conclure.

Si  $k$  est nul, alors

$$\tau(0, n, \pm 1) = \sqrt{\beta(2n+1)} \quad \text{et} \quad \tau(0, n, 0) = 0$$

et on a directement le résultat.

Supposons désormais que  $n$  et  $k$  sont non nuls. Dans ce cas, le triplet  $(\tau(k, n, j))_{j \in \{-1, 0, 1\}}$  est l'ensemble des racines de

$$P_{k,n}(\tau) := \tau^3 - \tau(k^2 + \beta(2n+1)) - \beta k$$

Le produit des racines tend vers l'infini et leur somme est nulle donc  $\tau(k, n, 1)$  et  $-\tau(k, n, 1)$  tendent vers l'infini quand  $\beta$  tend vers l'infini. Elles vérifient donc

$$\tau^3 = \tau(k^2 + \beta(2n+1)) + \beta k \sim \beta(2n+1)\tau$$

i.e.

$$\tau(k, n, \pm 1)^2 \sim \pm \beta(2n+1).$$

Afin d'obtenir un développement plus poussé, on pose

$$\rho_{\pm 1} = \tau(k, n, \pm 1) \mp \sqrt{\beta(2n+1)}.$$

Comme  $\rho_{\pm 1} = o(\sqrt{\beta})$ ,

$$\tau(k, n, \pm 1)^3 = \pm (\beta(2n+1))^{3/2} + 3\beta(2n+1)\rho_{\pm 1} + o(\beta\rho_{\pm 1}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \tau(k, n, \pm 1)^3 &= (k^2 + \beta(2n+1)) \left( \rho_{\pm 1} \pm \sqrt{\beta(2n+1)} \right) + \beta k \\ &= \pm (\beta(2n+1))^{3/2} + \beta(2n+1)\rho_{\pm 1} \pm k^2\sqrt{\beta(2n+1)} + k^2\rho_{\pm 1} + \beta k \end{aligned}$$

donc

$$2\beta(2n+1)\rho_{\pm 1} + o(\beta\rho_{\pm 1}) = \beta k + o(\beta)$$

et par suite

$$\rho_{\pm 1} = \frac{k}{2(2n+1)} + o(1)$$

ce qui permet d'obtenir les développements des racines extrémales.

Comme la somme des trois racines est nulle on en déduit que

$$\tau(k, n, 0) = -\frac{k}{2n+1} + o(1).$$

Afin de poursuivre le développement, on pose

$$\rho = \tau(k, n, 0) + \frac{k}{2n+1}.$$

Comme  $\rho = o(1)$ , on a

$$\tau(k, n, 0)^3 = \left( \frac{k}{2n+1} \right)^3 - 3 \left( \frac{k}{2n+1} \right)^2 \rho + o(\rho)$$

et

$$\tau(k, n, 0)(k^2 + \beta(2n+1)) - \beta k = (k^2 - \beta(2n+1)) \left( \rho + \frac{k}{2n+1} \right) + \beta k$$

i.e.

$$\rho(\beta(2n+1) + o(\beta)) = \frac{k^3}{2n+1} - \left( \frac{k}{2n+1} \right)^3 = \frac{4k^3n(n+1)}{(2n+1)^3}$$

Ainsi,

$$\rho \sim \frac{4k^3n(n+1)}{\beta(2n+1)^4}$$

ce qui donne

$$\tau(k, n, 0) = -\frac{k}{2n+1} + \frac{4k^3n(n+1)}{\beta(2n+1)^4} + o\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

On donc le développement de la racine du milieu.  $\square$

Grâce ces développements, on obtient le résultat suivant.

**PROPOSITION 5.7.** *Pour tout triplet non nul d'entiers  $(n, n', m)$  et pour tout couple d'entiers relatifs  $(k, k')$  tels que  $kk'(k+k')$  soit non nul, le polynôme  $P_{k, k', n, n', m}$  n'est pas identiquement nul. En particulier, à l'exception d'un nombre fini de valeurs du paramètre  $\beta$ , il n'existe pas de triplet  $(j, j', l)$  appartenant à  $\{-1, 0, 1\}^3$  tel que*

$$\tau(k, n, j) + \tau(k', n', j') = \tau(k+k', m, l).$$

**DÉMONSTRATION.** Étant donné un triplet non nul d'entiers  $(m, n, n')$ , un couple d'entiers relatifs  $(k, k')$  tels que  $kk'(k+k')$  soit non nul, on va montrer que si  $(l, j, j') \in \{-1, 0, 1\}^3$  est non nul alors il existe des constantes  $A_{k, k', n, n', m, j, j', l}$  et  $B_{k, k', n, n', m, j, j', l}$  non toutes les deux nulles telles que

$$R_{k, k', n, n', m, j, j', l} = \sqrt{\beta} A_{k, k', n, n', m, j, j', l} + B_{k, k', n, n', m, j, j', l} + o(1).$$

Pour montrer que le polynôme  $P_{k, k', n, n'}$  n'est pas identiquement nul, il faudra alors étudier  $R_{k, k', n, n', m, 0, 0, 0}$ .

Grâce aux développements précédents, on a les développements suivants.

- Si  $jj'l \neq 0$ , alors

$$R_{k, k', n, n', m, j, j', l} = \sqrt{\beta} \left[ j\sqrt{2n+1} + j'\sqrt{2n'+1} - l\sqrt{2m+1} \right] + \frac{k}{2(2n+1)} + \frac{k'}{2(2n'+1)} - \frac{k+k'}{2(2m+1)} + o(1).$$

Le terme en  $\sqrt{\beta}$  n'est nul que si, à une permutation près de  $(n, n', m)$ ,

$$\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n'+1} = \sqrt{2m+1}$$

ce qui implique l'égalité

$$2n+1 + 2n'+1 + 2\sqrt{2n+1}\sqrt{2n'+1} = 2m+1.$$

Or,

$$\left(2\sqrt{2n+1}\sqrt{2n'+1}\right)^2 \equiv 0 [2] \quad \text{et} \quad (2(m-n-n')-1)^2 \equiv 1 [2]$$

ce qui prouve que le terme en  $\sqrt{\beta}$  est non nul.

- Si  $j = 0$  et  $j'l \neq 0$ , alors

$$R_{k, k', n, n', m, 0, j', l} \sim \sqrt{\beta} \left[ j'\sqrt{2n'+1} - l\sqrt{2m+1} \right] - \frac{k}{2n+1} + \frac{4k^3n(n+1)}{\beta(2n+1)^4} + \frac{k'}{2(2n'+1)} - \frac{k+k'}{2(2m+1)}.$$

Le terme en  $\sqrt{\beta}$  est nul uniquement si  $(j', n') = (l, m)$ . Dans ce cas, le terme constant, égal à

$$-k \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(2n'+1)} \right),$$

est non nul.

Du fait de la symétrie des rôles joués par  $j$  et  $j'$ , on a un résultat similaire sur  $R_{k, k', n, n', m, j, 0, l}$  lorsque  $jl \neq 0$ .

- Si  $l = 0$  et  $jj' \neq 0$ , alors

$$R_{k, k', n, n', m, j, j', 0} = \sqrt{\beta} \left[ j\sqrt{2n+1} + j'\sqrt{2n'+1} \right] + \frac{k}{2(2n+1)} + \frac{k'}{2(2n'+1)} + \frac{k+k'}{2m+1} + o(1).$$

Le terme en  $\sqrt{\beta}$  est nul uniquement si  $j = -j'$  et  $n = n'$ . Dans ce cas, le terme constant, est égal à

$$(k + k') \left( \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2m+1} \right),$$

est non nul.

- Si  $j = l = 0$  et  $j' \neq 0$ , alors

$$R_{k,k',n,n',m,0,j',0} \sim j' \sqrt{\beta} \sqrt{2n'+1}$$

et, du fait de la symétrie des rôles joués par  $j$  et  $j'$ , on a un résultat similaire sur  $R_{k,k',n,n',m,j,0,0}$  avec  $j \neq 0$

- Si  $j = j' = 0$  et  $l \neq 0$ , alors

$$R_{k,k',n,n',m,0,0,l} \sim -l \sqrt{\beta} \sqrt{2m+1}.$$

Prouvons maintenant que  $R_{k,k',n,n',m,0,0,0}$  n'est pas identiquement nul quand  $\beta$  tend vers l'infini ce qui prouvera que le polynôme  $P_{k,k',n,n',m}$  n'est pas identiquement nul.

On a

$$R_{k,k',n,n',m,0,0,0} = A_{k,k',n,n',m} + \frac{B_{k,k',n,n',m}}{\beta} + o\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

avec

$$A_{k,k',n,n',m} = -\frac{k}{2n+1} - \frac{k'}{2n'+1} + \frac{k+k'}{2m+1}$$

et

$$B_{k,k',n,n',m} = \frac{4k^3n(n+1)}{\beta(2n+1)^4} + \frac{4(k')^3n'(n'+1)}{\beta(2n'+1)^4} - \frac{4(k+k')^3m(m+1)}{\beta(2m+1)^4}.$$

- Si parmi  $(n, n', m)$  il y a exactement deux zéros alors  $B_{k,k',n,n'}$  est non nul.
- Si parmi  $(n, n', m)$  il y a exactement un zéro alors, à permutation près,  $n = 0$  et  $n'm \neq 0$  et par suite

$$A_{k,k',n,n'} = -k - \frac{k'}{2n'+1} + \frac{k+k'}{2m+1} = k' - \frac{k'}{2n'+1} - (k+k') + \frac{k+k'}{2m+1} = \frac{2n'k'}{2n'+1} - \frac{2m(k+k')}{2m+1}$$

et

$$B_{k,k',n,n',m} := \frac{4(k')^3n'(n'+1)}{(2n'+1)^4} - \frac{4(k+k')^3m(m+1)}{(2m+1)^4}$$

Si  $A_{k,k',n,n',m}$  est nul, alors  $k' = \frac{m(2n'+1)}{n'(2m+1)}(k+k')$  et par suite

$$\begin{aligned} B_{k,k',n,n'} &= \frac{4n'(n'+1)}{(2n'+1)^4} \left( \frac{m(2n'+1)}{n'(2m+1)} \right)^3 (k+k')^3 - \frac{4(k+k')^3m(m+1)}{(2m+1)^4} \\ &= \frac{4m(k+k')^3}{(2m+1)^3} \left( \frac{m^2(n'+1)}{n'^2(2n'+1)} - \frac{(m+1)}{(2m+1)} \right). \end{aligned}$$

Comme  $k+k'$  est non nul,  $B_{k,k',n,n',m,j,j',l}$  est nul si et seulement si

$$\frac{n'+1}{n'^2(2n'+1)} = \frac{m+1}{m^2(2m+1)}.$$

Or, la fonction  $x \mapsto \frac{x+1}{x^2(2x+1)}$  décroît strictement sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Donc, si  $A_{k,k',n,n',m,j,j',l}$  et  $B_{k,k',n,n',m,j,j',l}$  sont simultanément nuls, alors  $n' = m$  puis  $k' = k+k'$  i.e.  $k = 0$ , ce que l'on a exclu.

Par symétrie, on en déduit que s'il y a exactement un zéro parmi  $(n, n', m)$  et si  $kk'(k+k')$  est non nul alors le développement de  $R_{n,n',m,k,k',j,j',l}$  lorsque  $\beta$  tend vers l'infini est non nul.

- Si  $nn'm$  est non nul alors on va étudier  $R_{n,n',m,k,k',0,0,0}$  au voisinage de  $\beta = 0$ . Comme cette fonction est analytique par rapport à  $\beta$ , il suffit de montrer qu'elle n'est pas nulle au voisinage de

l'origine pour en déduire qu'elle n'est pas identiquement nulle. Or, pour  $k$  non nul, lorsque  $\beta$  tend vers zéro on a le développement suivant

$$\tau(n, k, 0) = -\frac{\beta}{k} + o(\beta)$$

et par suite

$$R_{n,n',m,k,k',0,0,0} = -\frac{\beta}{k} - \frac{\beta}{k'} + \frac{\beta}{k+k'} + o(\beta) = -\beta \frac{\left(k + \frac{k'}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k'^2}{kk'(k+k')} + o(\beta)$$

donc  $R_{k,k',n,n',m,0,0,0}$  n'est pas identiquement nul quand  $\beta$  tend vers l'infini.  $\square$

La proposition précédente implique donc, qu'à l'exception d'un ensemble dénombrable de valeurs du paramètre  $\beta$ , pour tout  $(k, k', n, n', m, j, j', l) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^3 \times \{-1, 0, 1\}^3$ , la relation

$$\tau(k+k', m, l) = \tau(k, n, j) + \tau(k', n', j')$$

implique

$$n = n' = m = 0 \quad \text{et} \quad kk'(k+k') \neq 0$$

ou

$$kk'(k+k') = 0.$$

Dans le premier cas, l'expression

$$\tau(k, n, j) + \tau(k', n', j') - \tau(k+k', m, l)$$

est explicite et à l'exception d'un nombre fini de valeurs du paramètre  $\beta$  (dépendant de  $k$  et  $k'$ ), elle est nulle si et seulement si

$$j = j' = l = 0$$

i.e. si et seulement si on a trois racines de Kelvin.

Dans le second cas, on introduit

$$Q_{k,k',n,n',m} := \prod_{j,j',l \in I_{k,k'}} R_{k,k',n,n',m,j,j',l}$$

avec

$$I_{k,k'} = \left\{ (j, j', l) \in \{-1, 0, 1\}^3 : j \neq 0 \text{ si } k = 0, j' \neq 0 \text{ si } k' = 0 \text{ et } l \neq 0 \text{ si } k + k' = 0 \right\}.$$

Comme précédemment, cette quantité est polynomial en  $\beta$  et chacun des termes dont elle est le produit admet un développement, lorsque  $\beta$  tend vers l'infini, de la forme

$$R_{k,k',n,n',m,j,j',l} = \sqrt{\beta} A_{k,k',n,n',m,j,j',l} + B_{k,k',n,n',m,j,j',l} + o(1)$$

avec  $A_{k,k',n,n',m,j,j',l}$  et  $B_{k,k',n,n',m,j,j',l}$  non tous les deux nuls ce qui implique qu'à l'exception d'un nombre fini de valeur du paramètre  $\beta$ ,  $Q_{k,k',n,n',m}$  est non nul i.e.

$$\forall (j, j', l) \in I_{k,k'}, R_{k,k',n,n',m,j,j',l} \neq 0.$$

Par conséquent, si  $(n, n', m) \neq (0, 0, 0)$  alors la relation

$$\tau(k+k', m, l) = \tau(k, n, j) + \tau(k', n', j')$$

implique qu'une des trois racines est nulle ce qui conclut la démonstration du théorème 5.3.

### 5.3. Existence de solutions

Dans cette section, nous étudierons les propriétés de la forme quadratique limite  $Q_L$  en nous appuyant sur celles de  $Q$ . Les estimations obtenues conduiront au théorème suivant :

**THÉORÈME 5.8.** *Pour toute donnée initiale  $\Phi^0$ , il existe un temps  $T^* > 0$  tel que pour tout entier  $s \geq 2$ , si la donnée initiale appartient à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  alors le système limite*

$$(SL) \quad \begin{cases} \partial_t \Phi + Q_L(\Phi, \Phi) = 0 \\ \Phi|_{t=0} = \Phi^0 \end{cases}$$

*admet une unique solution appartenant à  $\mathcal{C}([0, T^*[, \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .*

Nous énoncerons alors une condition nécessaire et suffisante sur la donnée initiale pour que la solution du système limite soit globale.

#### 5.3.1. Propriétés de la forme quadratique $Q_L$ .

L'objet de cette sous-section est d'utiliser les propriétés de la forme quadratique  $Q$  pour en obtenir de similaires sur sa limite formelle  $Q_L$ . En effet, on pourra alors réitérer le raisonnement effectué pour prouver l'existence de solutions aux systèmes pénalisés et obtenir un résultat d'existence et d'unicité.

**PROPOSITION 5.9.** *Pour tout entier  $s$ , il existe une constante  $C_s$  telle que pour tout couple de vecteurs  $(U, V)$  appartenant à  $(\mathcal{W}^{2s} \cap \mathcal{W}^4) \times (\mathcal{W}^{2s+1} \cap \mathcal{W}^4)(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,*

$$\|Q_L(U, V)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \left( \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right)$$

*et pour tout couple de vecteurs  $(U, V)$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})^2$ ,*

$$\left| \langle Q_L(U, V), V \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \leq C_s \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \left( \|U\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right).$$

**DÉMONSTRATION.** On va commencer par prouver le résultat pour un couple de vecteurs  $(U_N, V_N)$  appartenant à  $E_N$ , l'espace de dimension fini introduit à la définition 3.7, puis on utilisera les opérateurs de troncature  $K_N$  associés pour conclure.

- On introduit, comme dans [9], la forme quadratique filtrée

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(U_N, V_N)(t, \cdot) &= \mathfrak{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) Q\left(\mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) U_N, \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) V_N\right) \\ &= \sum_{\lambda, \mu, \mu' \in \mathfrak{S}} e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{\mu'} V_N) \end{aligned}$$

dont  $Q_L$  est la limite formelle car

$$Q_\varepsilon(U_N, V_N) - Q_L(U_N, V_N) = \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{\mu'} V_N)(t, \cdot).$$

On pose alors

$$G_\varepsilon(t, \cdot) = \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} \frac{e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon}}{i(\lambda - \mu - \mu')} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{\mu'} V_N)(t, \cdot)$$

de sorte que

$$\varepsilon \partial_t G_\varepsilon = Q_\varepsilon(U_N, V_N) - Q_L(U_N, V_N).$$

Pour toute  $\varphi$  une fonction test et  $W \in \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \langle Q_\varepsilon(U_N, V_N) - Q_L(U_N, V_N), W \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \varphi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} \varepsilon \langle G_\varepsilon, W \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \partial_t \varphi(t) dt.$$

Par suite, il suffit de prouver que  $G_\varepsilon$  est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  indépendamment de  $\varepsilon$ , ce qui sera fait dans le lemme suivant, pour avoir

$$\int_{\mathbb{R}} \langle Q_\varepsilon(U_N, V_N) - Q_L(U_N, V_N), W \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \varphi(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Grâce à l'estimation

$$\left| \langle Q_\varepsilon(U_N, V_N), W \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right| \leq \|Q_\varepsilon(U_N, V_N)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|W\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})},$$

comme l'opérateur de filtrage est une isométrie, on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} \langle Q_\varepsilon(U_N, V_N), W \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \left\| Q \left( \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) U_N, \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) V_N \right) \right\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|W\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété 4.3 sur  $Q$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} \langle Q_\varepsilon(U_N, V_N), W \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}(t) \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} C_s \|U_N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|W\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} |\varphi(t)| dt \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} C_s \|U_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|W\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro

$$\begin{aligned} & \langle Q_L(U_N, V_N), W \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ & \leq C_s \left( \|U_N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right) \|W\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

i.e.

$$\|Q_L(U_N, V_N)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \left( \|U_N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right).$$

La deuxième inégalité se démontre de façon similaire.

• Considérons un couple de vecteurs  $(U, V)$  et, pour tout entier  $N$ , on pose  $(U_N, V_N) = K_N(U, V)$  de sorte que, d'après la proposition 3.6, la suite  $(U_N, V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{W}^{2s} \times \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  vers  $(U, V)$  et que pour tout entier  $N$ , le couple  $(U_N, V_N)$  appartient à  $E_N$ .

Ainsi,

$$\|Q_L(U_N, V_N)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_s \left( \|U_N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|U_N\|_{\mathcal{W}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^{2s+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right).$$

La définition de la forme quadratique  $Q_L$  implique alors la convergence de la suite  $(Q_L(U_N, V_N))_{N \in \mathbb{N}}$  vers  $Q_L(U, V)$  dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  ce qui conduit au résultat.

La deuxième inégalité se démontre de façon similaire.  $\square$

Il reste donc à démontrer le lemme suivant pour prouver le résultat précédent et ainsi transmettre les propriétés 4.3 et 4.5 de la forme quadratique  $Q$  à la forme quadratique  $Q_L$ .

LEMME 5.10. *Pour tout couple d'entier  $(s, N)$ , pour tout temps  $T > 0$ , et pour tout couple  $(U_N, V_N)$  appartenant à  $L^\infty([0, T], E_N)^2$ , si on pose*

$$G_\varepsilon(t, \cdot) = \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} \frac{e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon}}{i(\lambda - \mu - \mu')} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{\mu'} V_N)(t, \cdot), \quad \forall t \in [0, T]$$

alors  $G_\varepsilon$  appartient  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

De plus, il existe une constante  $C$  dépendant de  $s, N$ ,  $\|U_N\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}$  et  $\|V_N\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}$  mais indépendante de  $\varepsilon$  telle que

$$\|G_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \leq C.$$

DÉMONSTRATION. Pour contrôler le terme  $G_\varepsilon$ , on va le découper en deux contributions, comme cela est fait dans [9],

$$G_\varepsilon^1(t, \cdot) := \sum_{\substack{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R} \\ \mu + \mu' = 0}} \frac{e^{it\lambda/\varepsilon}}{i\lambda} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{\mu'} V_N)(t, \cdot)$$

et

$$G_\varepsilon^2(t, \cdot) := \sum_{\substack{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R} \\ \mu + \mu' \neq 0}} \frac{e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon}}{i(\lambda - \mu - \mu')} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{\mu'} V_N)(t, \cdot).$$

- D'après la proposition 3.6, la norme de  $\mathcal{W}^{2s}$  de  $G_\varepsilon^1$  est égale à celle de

$$\tilde{G}_1 := \sum_{\lambda \in \mathfrak{S} \setminus \{0\}} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \frac{\Pi_\lambda}{\lambda} Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{-\mu} V_N).$$

Il suffit donc de montrer que  $\tilde{G}_1$  appartient à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  pour contrôler la première contribution dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

Or, d'après les propositions 3.8 et 3.4, on a, pour tout  $\phi \in \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\lambda \in \mathfrak{S} \setminus \{0\}} \frac{\Pi_\lambda}{\lambda} \phi \right\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 &\lesssim \sum_{\tau(k, n, j) \in \mathfrak{S} \setminus \{0\}} \frac{(1 + k^2 + n)^{2s}}{|\tau(n, k, j)|^2} \|\Pi_{k, n, j} \phi\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \\ &\lesssim \sum_{\tau(k, n, j) \in \mathfrak{S} \setminus \{0\}} (1 + n + k^2)^{2(s+1)} \|\Pi_{k, n, j} \phi\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

i.e.

$$\left\| \sum_{\lambda \in \mathfrak{S} \setminus \{0\}} \frac{\Pi_\lambda}{\lambda} \phi \right\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \lesssim \|\phi\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.$$

En particulier,

$$\|\tilde{G}_1\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \lesssim \left\| \sum_{\mu \in \mathfrak{S}} Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{-\mu} V_N) \right\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}.$$

La proposition 4.3 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduisent alors à

$$\|\tilde{G}_1\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \lesssim \|U_N\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|V_N\|_{\mathcal{W}^{2(s+2)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Comme l'espace  $E_N$  toutes les normes sont équivalentes ce qui conclut l'estimation de ce terme.

- La norme  $\mathcal{W}^{2s}$  de  $G_\varepsilon^2$  est égale à celle de

$$\tilde{G}_2 := \sum_{\substack{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S}^3 \setminus \mathfrak{R} \\ (\mu, \mu') \in \mathfrak{S}_N^2 \\ \mu + \mu' \neq 0}} \frac{1}{|\lambda - \mu - \mu'|} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{\mu'} V_N).$$

Pour la contrôler, on va prouver l'existence d'une constante  $c_N > 0$  tel que pour tout triplet  $(\lambda, \mu, \mu')$  appartenant à  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}_N^2$  si  $\lambda \neq \mu + \mu'$  et  $\mu + \mu' \neq 0$  alors  $|\lambda - \mu - \mu'| \geq c_N$ .

Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si une telle constante n'existait pas alors il existerait une suite

$$(\lambda_m, \mu_m, \mu'_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N)^\mathbb{N}$$

telle que  $(\lambda_m - \mu_m - \mu'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers zéro et vérifiant les relations  $\lambda_m \neq \mu_m + \mu'_m$  et  $\mu_m + \mu'_m \neq 0$ . Comme l'ensemble

$$\{\mu + \mu', (\mu, \mu') \in \mathfrak{S}_N^2 \text{ tel que } \mu + \mu' \neq 0\}$$

ne contient qu'un nombre fini de valeurs, quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(\mu_m + \mu'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est stationnaire, on note  $\ell$  sa limite. En particulier, cette limite  $\ell$  est un point d'accumulation de  $\mathfrak{S}$  ce qui implique, du fait de la proposition 3.4 que  $\ell = 0$  ce qui est exclu.

Par conséquent,

$$\|G_\varepsilon^2\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}^2 \leq \frac{1}{c_N^2} \left\| \sum_{\substack{(\mu, \mu') \in \mathfrak{S}_N^2 \\ \mu + \mu' \neq 0}} Q(\Pi_\mu U_N, \Pi_{-\mu} V_N) \right\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}^2$$

et on conclut comme pour la première contribution.  $\square$

Désormais, on dispose des mêmes estimations sur la forme quadratique limite  $Q_L$  que sur  $Q$ , on peut donc répéter le raisonnement de la section 2.3 pour obtenir le théorème 5.8

### 5.3.2. Caractère global de la solution du système limite.

L'étude des résonances va permettre de simplifier le système limite et notamment de mettre en évidence le caractère local ou global de la solution pour presque toute valeur du paramètre  $\beta$ . Le théorème suivant énonce une condition nécessaire et suffisante de globalité lorsque  $\beta$  n'est pas trop mal choisi.

**THÉORÈME 5.11.** *Pour presque toute valeur du paramètre  $\beta$ , le système limite (SL) a une solution globale si et seulement si la composante de Kelvin de la donnée initiale  $\Phi^0$  est nulle.*

Afin d'utiliser le résultat 5.3 pour simplifier le système limite, on introduit les projecteurs suivants.

**DÉFINITION 5.12.** *On note  $\Pi_0$  la projection sur le noyau de la matrice de pénalisation,  $\Pi_K$  la projection sur les ondes de Kelvin c'est-à-dire sur l'espace associé aux valeurs propres  $(i\tau(k, 0, 0))_{k \in \mathbb{Z}^*}$  et*

$$\Pi_\star = Id - \Pi_0 - \Pi_K$$

*la projection sur les espaces propres restants.*

Commençons par énoncer une propriété importante.

**PROPOSITION 5.13.** *Pour tout vecteur  $\Phi$ ,*

$$\Pi_0 Q_L(\Phi, \Phi) = 0.$$

**DÉMONSTRATION.** Considérons un vecteur  $\Phi$  et un vecteur  $\Psi_0$  appartenant au noyau de la matrice de pénalisation  $M$ . Par définition, il faut montrer que

$$\langle Q_L(\Phi, \Phi), \Psi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0$$

i.e.

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \langle Q(\Pi_\mu \Phi, \Pi_{-\mu} \Phi), \Psi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0.$$

Afin d'utiliser de simplifier les calculs, on va utiliser la forme de la forme quadratique avant le changement orthogonal de variables. Plus précisément

$$Q(\Phi, \Phi) = P\tilde{Q}(P^{-1}\Phi, P^{-1}\Phi)$$

avec

$$P := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



et

$$\tilde{Q} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u\partial_x u + v\partial_y u \\ u\partial_x v + v\partial_y v \\ u\partial_x h + h\partial_x u + v\partial_y h + h\partial_y v \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h\partial_x h \\ h\partial_y h \\ -h\partial_x u - h\partial_y v \end{pmatrix}.$$

Il est donc équivalent de prouver que pour tout vecteur  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}$  et pour tout vecteur  $\begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix}$  appartenant au noyau de  $P^{-1}MP = N$  on a l'égalité

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \left\langle \tilde{Q} \left( \tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \overline{\tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}} \right), \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0$$

où, pour tout réel  $\mu$  appartenant à  $\mathfrak{S}$ ,  $\tilde{\Pi}_\mu$  est la projection sur l'espace propre de la matrice  $N$  associé à la valeur propre  $i\mu$ . On notera

$$\tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix}.$$

On découpe le terme en deux en posant

$$\tilde{Q}_1 \left( \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u\partial_x u + v\partial_y u \\ u\partial_x v + v\partial_y v \\ u\partial_x h + h\partial_x u + v\partial_y h + h\partial_y v \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{Q}_2 \left( \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} h\partial_x h \\ h\partial_y h \\ -h\partial_x u - h\partial_y v \end{pmatrix}$$

de sorte de retrouver d'une part ce qui a été fait dans [9] et d'autre part le terme correctif lié au changement non linéaire effectué pour symétriser le système.

Comme le vecteur  $\begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix}$  est un élément du noyau de  $N = \begin{pmatrix} 0 & -\beta y & \partial_x \\ \beta y & 0 & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix}$ , on peut montrer qu'il est indépendant de la variable  $x$  et que sa deuxième composante est nulle.

• Pour le premier terme, pour tout  $\mu$  appartenant à  $\mathfrak{S}$ , on introduit le terme symétrique

$$S_\mu = \left\langle \tilde{Q}_1 \left( \begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix}, \overline{\begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix}} \right), \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \left\langle \tilde{Q}_2 \left( \overline{\begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

de sorte que

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \left\langle \tilde{Q} \left( \tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \overline{\tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}} \right), \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \frac{1}{2} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}} S_\mu.$$

Par définition,

$$\begin{aligned} S_\mu &= \langle u_\mu \partial_x \overline{u_\mu}, U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle \overline{u_\mu} \partial_x u_\mu, U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\quad + \langle v_\mu \partial_y \overline{v_\mu}, U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle \overline{v_\mu} \partial_y v_\mu, U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\quad + \langle u_\mu \partial_x \overline{h_\mu} + v_\mu \partial_y \overline{h_\mu}, H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle \overline{u_\mu} \partial_x h_\mu + \overline{v_\mu} \partial_y h_\mu, H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\quad + \langle h_\mu \partial_x \overline{u_\mu} + h_\mu \partial_y \overline{v_\mu}, H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle \overline{h_\mu} \partial_x u_\mu + \overline{h_\mu} \partial_y v_\mu, H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Comme  $U$  est indépendant de la variable  $x$ , la première contribution est nulle i.e.

$$\langle u_\mu \partial_x \bar{u}_\mu, U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle \bar{u}_\mu \partial_x u_\mu, U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0$$

Les deux dernières se réécrivent

$$\left\langle \operatorname{div} \left( \bar{h}_\mu \begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \end{pmatrix} + h_\mu \begin{pmatrix} \bar{u}_\mu \\ \bar{v}_\mu \end{pmatrix} \right), H \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = - \left\langle \bar{h}_\mu \begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \end{pmatrix} + h_\mu \begin{pmatrix} \bar{u}_\mu \\ \bar{v}_\mu \end{pmatrix}, \nabla H \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

et sont donc égales à

$$\langle \bar{h}_\mu v_\mu + h_\mu \bar{v}_\mu, \beta y U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_\mu &= \langle v_\mu (\partial_y \bar{u}_\mu + \beta y \bar{h}_\mu), U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle \bar{v}_\mu (\partial_y u_\mu + \beta y h_\mu), U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= \langle v_\mu (\partial_y \bar{u}_\mu + \beta y \bar{h}_\mu - \partial_x \bar{v}_\mu), U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle \bar{v}_\mu (\partial_y u_\mu + \beta y h_\mu - \partial_x v_\mu), U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Or, par le théorème de Schwarz, on a

$$\partial_x (-\beta y u_\mu + i\mu v_\mu) = \partial_y (\beta y v_\mu + i\mu u_\mu)$$

i.e.

$$\beta v_\mu = -i\mu (\partial_y u_\mu - \partial_x v_\mu + \beta y h_\mu) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \beta S_\mu &= -i\mu \langle (\partial_y u_\mu - \partial_x v_\mu + \beta y h_\mu) (\partial_y \bar{u}_\mu + \beta y \bar{h}_\mu - \partial_x \bar{v}_\mu), U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\quad + i\mu \langle (\partial_y \bar{u}_\mu - \partial_x \bar{v}_\mu + \beta y \bar{h}_\mu) (\partial_y u_\mu + \beta y h_\mu - \partial_x v_\mu), U \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Tout d'abord comme  $\begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix}$  est un élément du noyau de  $N = \begin{pmatrix} 0 & -\beta y & \partial_x \\ \beta y & 0 & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix}$ , il est

indépendant de la variable  $x$  et sa deuxième composante est nulle. Ainsi,

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \left\langle \tilde{Q}_2 \left( \tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \overline{\tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}} \right), \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = - \sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \langle h_\mu (\partial_x \bar{u}_\mu + \partial_y \bar{v}_\mu), H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

où pour tout  $\mu$  appartenant à  $\mathfrak{S}$ , on a posé

$$\tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\mu \\ v_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix}.$$

Comme  $\partial_x \bar{u}_\mu + \partial_y \bar{v}_\mu = i\mu \bar{h}_\mu = -i\mu h_\mu$ , on a

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \left\langle \tilde{Q}_2 \left( \tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \overline{\tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}} \right), \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \sum_{\mu \in \mathfrak{S}} i\mu \langle h_\mu \bar{h}_\mu, H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Or, en changeant  $\mu$  en  $-\mu$ , transformation qui laisse stable l'ensemble  $\mathfrak{S}$ , on a

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{S}} i\mu \langle h_\mu \bar{h}_\mu, H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \sum_{\mu \in \mathfrak{S}} -i\mu \langle \bar{h}_\mu h_\mu, H \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

i.e.

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{S}} \left\langle \tilde{Q}_2 \left( \tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \overline{\tilde{\Pi}_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}} \right), \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = 0.$$

□

Ainsi, si  $\Phi$  est solution du système limite

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + Q_L(\Phi, \Phi) = 0 \\ \Phi|_{t=0} = \Phi^0 \end{cases}$$

alors grâce à la proposition 5.13, sa projection sur le noyau de la matrice de pénalisation vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \Pi_0 \Phi = 0 \\ \Pi_0 \Phi(0, \cdot) = \Pi_0 \Phi^0, \end{cases}$$

elle est donc indépendante du temps

Le théorème 5.3 sur les résonances implique, en utilisant la définition 5.12, que pour presque toute valeur de  $\beta$ ,

$$\begin{cases} \partial_t \Pi_* \Phi + Q_L(\Pi_* \Phi, \Pi_0 \Phi) + Q_L(\Pi_0 \Phi, \Pi_* \Phi) = 0 \\ \Phi|_{t=0} = \Pi_* \Phi^0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t \Pi_K \Phi + Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_0 \Phi) + Q_L(\Pi_0 \Phi, \Pi_K \Phi) + Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi) = 0 \\ \Pi_K \Phi(0, \cdot) = \Pi_K \Phi^0. \end{cases}$$

On en déduit que  $\Pi_* \Phi$  est solution d'un système linéaire. L'existence locale ou globale de la solution du système limite dépend donc uniquement de celle de sa composante de Kelvin.

Nous allons utiliser la structure de  $Q$  pour expliciter l'équation vérifiée par la composante de Kelvin.

PROPOSITION 5.14. *Étant donnée  $\Phi^0$  appartenant à  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , si on pose*

$$\Pi_K \Phi^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k^0 \Psi_{k,0,0} \quad \text{et} \quad f^0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k^0 e^{ikx}$$

alors il existe des constantes  $C$  et  $C'$  telles que  $\Psi(t, \cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k(t) \Psi_{k,0,0}$  soit solution dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  de

$$(SL_K) : \begin{cases} \partial_t \Psi + Q_L(\Psi, \Pi_0 \Phi) + Q_L(\Pi_0 \Phi, \Psi) + Q_L(\Psi, \Psi) = 0 \\ \Psi(0, \cdot) = \Pi_K \Phi^0. \end{cases}$$

si et seulement si  $f(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k(t) e^{ikx}$  est solution dans  $H^{2s}(\mathbb{T})$  de

$$(B) : \begin{cases} \partial_t f = C' \partial_x f + C f \partial_x f \\ f(0, \cdot) = f^0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Commençons par étudier le terme non linéaire.

- Du fait des propositions 5.3 et 5.13,

$$Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi) = \Pi_K Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi).$$

Par définition,

$$\Pi_K Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \langle Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi), \Psi_{k,0,0} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \Psi_{k,0,0}.$$

L'orthogonalité de la famille  $(e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$  dans  $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  implique que

$$\Pi_K Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi) = \sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^{*2}} a_{k'}(t) a_{k-k'}(t) \langle Q(\Psi_{k',0,0}, \Psi_{k-k',0,0}), \Psi_{k,0,0} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \Psi_{k,0,0}.$$

Il faut donc évaluer

$$\langle Q(\Psi_{k',0,0}, \Psi_{k-k',0,0}), \Psi_{k,0,0} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Par simples calculs, on a

$$A_x \Psi_{k',0,0}(x,y) \partial_x \Psi_{k-k',0,0}(x,y) = \frac{3i(k-k')}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0^2(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

et

$$A_y \Psi_{k',0,0}(x,y) \partial_y \Psi_{k-k',0,0}(x,y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0(y) \psi_0'(y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

Donc

$$\langle Q(\Psi_{k',0,0}, \Psi_{k-k',0,0}), \Psi_{k,0,0} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \frac{3i\pi}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi_0^3(y) dy (k-k') = C(k-k').$$

Ainsi, il existe une constante  $C$  telle que

$$\Pi_K Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi) = C \sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^{*2}} a_{k'}(t) a_{k-k'}(t) (k-k') \Psi_{k,0,0}.$$

En particulier

$$\langle \Pi_K Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_K \Phi), \Psi_{k,0,0} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = C \sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^{*2}} a_{k'}(k-k') a_{k-k'}.$$

Étudions maintenant les termes linéaires

• Comme  $\Pi_0 \Phi = \Pi_0 \Phi^0$  est un élément du noyau, d'après la proposition 4.7, il existe de fonctions  $l_0$  et  $r_0$  ne dépendant que de  $y$  telles que

$$\Pi_0 \Phi = \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

donc

$$Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_0 \Phi) = \Pi_K Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_0 \Phi) = A_y(\Pi_K \Phi) \partial_y \Pi_0 \Phi.$$

Or, comme

$$\Psi_{k,0,0}(x,y) = C_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0(y) \end{pmatrix} e^{ikx}$$

on a

$$A_y(\Psi_{k,0,0}) \partial_y \Pi_0 \Phi(t,x,y) = \frac{C_0}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0(y) \partial_y r_0(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par suite,

$$Q_L(\Pi_K \Phi, \Pi_0 \Phi) = 0.$$

Pour le second terme,

$$A_y(\Pi_0 \Phi) \partial_y \Psi_{k,0,0} = \frac{C_0}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ (r_0 + l_0)(y) \psi_0'(y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx}$$

donc

$$Q_L(\Pi_0 \Phi, \Pi_K \Phi) = \Pi_K Q_L(\Pi_0 \Phi, \Pi_K \Phi) = A_x(\Pi_0 \Phi) \partial_x \Pi_K \Phi.$$

Enfin,

$$A_x(\Pi_0 \Phi) \partial_x \Pi_K \Phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k(t) A_x(\Pi_0 \Phi) \partial_x \Psi_{k,0,0}$$

et

$$A_x(\Pi_0 \Phi) \partial_x \Psi_{k,0,0} = ik \frac{3C_0}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} r_0(y) \psi_0(y) \end{pmatrix} e^{ikx} = ik \frac{3C_0}{2\sqrt{2}} r_0(y) \Psi_{k,0,0}(x,y).$$

Ainsi,

$$Q_L(\Pi_0\Phi, \Pi_K\Phi) + Q_L(\Pi_K\Phi, \Pi_0\Phi) = \frac{3C_0}{2\sqrt{2}}r_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} ik a_k \Psi_{k,0,0}.$$

En particulier,

$$\langle Q_L(\Pi_0\Phi, \Pi_K\Phi) + Q_L(\Pi_K\Phi, \Pi_0\Phi), \Psi_{k,0,0} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}^*} ik' a_k(t) \left\langle \frac{3C_0}{2\sqrt{2}}r_0 \Psi_{k',0,0}, \Psi_{k,0,0} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

ce qui conduit au résultat car

$$\left\langle \frac{3C_0}{2\sqrt{2}}r_0(y) \Psi_{k',0,0}, \Psi_{k,0,0} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = C' \delta_{k,k'}.$$

Ainsi, les coefficients  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^*}$  vérifient

$$a'_k(t) = C' ik a_k(t) + \sum_{k' \in \mathbb{Z}^*} C(k - k') a_{k'}(t) a_{k-k'}(t).$$

□

PROPOSITION 5.15. *Pour tout  $s \geq 1$  et pour toute donnée initiale  $f^0$  appartenant à  $H^{2s}(\mathbb{T})$ , il existe un temps  $T > 0$  indépendant de  $s$  tel que le système*

$$(B) : \begin{cases} \partial_t f = C' \partial_x f + C f \partial_x f \\ f(0, \cdot) = f^0. \end{cases}$$

*admette une solution appartenant à  $C([0, T], H^{2s}(\mathbb{T}))$ .*

*De plus, si la donnée initiale est de moyenne nulle alors la solution est globale si et seulement si la donnée initiale  $f^0$  est nulle.*

DÉMONSTRATION.

• La démonstration est similaire à celle sur l'existence de solution du système limite et nécessite d'avoir des estimations du type

$$\left| \langle g \partial_x f, f \rangle_{H^{2s}(\mathbb{T})} \right| \leq C_s \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})} \left( \|f\|_{H^{2s_0}(\mathbb{T})} \|g\|_{H^{2s}(\mathbb{T})} + \|g\|_{H^{2s_0}(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})} \right)$$

et

$$\left| \langle g \partial_x f, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \|g\|_{H^{2s_0}(\mathbb{T})}$$

Pour la deuxième inégalité, comme  $\langle g \partial_x f, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = -\frac{1}{2} \langle f \partial_x g, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$ ,

$$\left| \langle g \partial_x f, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \|g\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{T})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \|g\|_{H^2(\mathbb{T})}.$$

Pour la première, on va procéder comme on l'a fait pour la forme quadratique  $Q$ . En estimant les termes

$$\langle \partial_x^r (g \partial_x f), \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \quad 0 \leq r \leq 2s$$

i.e. les termes

$$\langle \partial_x^q g \partial_x^{r+1-q} f, \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \quad 0 \leq q \leq r \leq 2s.$$

▷ Si  $q = 0$  alors

$$\langle \partial_x^q g \partial_x^{r+1-q} f, \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = -\frac{1}{2} \langle \partial_x^r f, \partial_x g \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

donc

$$\left| \langle \partial_x^q g \partial_x^{r+1-q} f, \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \lesssim \|f\|_{H^r(\mathbb{T})}^2 \|g\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{T})} \lesssim \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})}^2 \|g\|_{H^2(\mathbb{T})}.$$

▷ Si  $2 < q < r$  alors

$$\left| \langle \partial_x^q g \partial_x^{r+1-q} f, \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \lesssim \|g\|_{H^q(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{r+2-q}(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})}.$$

et on peut définir  $\theta = \frac{q-2}{r-2} \in ]0, 1[$  tel que

$$\begin{cases} q = 2\theta + (1-\theta)r \\ r+2-q = (1-\theta)r + 2\theta. \end{cases}$$

Un argument d'interpolation permet d'obtenir

$$\left| \langle \partial_x^q g \partial_x^{r+1-q} f, \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \lesssim \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})} \left( \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} \|g\|_{H^{2s}(\mathbb{T})} + \|g\|_{H^2(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})} \right).$$

▷ Si  $q = 2$  ou  $q = r$  alors l'inégalité

$$\left| \langle \partial_x^q g \partial_x^{r+1-q} f, \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \lesssim \|g\|_{H^q(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{r+2-q}(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})}$$

permet de conclure.

▷ Si  $q = 1$  alors l'inégalité

$$\left| \langle \partial_x^q g \partial_x^{r+1-q} f, \partial_x^r f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \lesssim \|g\|_{H^{q+1}(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{r+1-q}(\mathbb{T})} \|f\|_{H^{2s}(\mathbb{T})}$$

permet de conclure.

Ainsi, on obtient le même type d'inégalité que pour la forme quadratique limite avec  $s_0 = 2$ . La gain par rapport à la forme quadratique limite est dû au fait que l'on se soit ramené à un problème en une dimension grâce à la projection sur les ondes de Kelvin.

• Étudions maintenant l'équation de Burgers dans  $H^2(\mathbb{T})$ .

Si la donnée initiale est nulle alors la solution de (B) est clairement globale. Réciproquement, on considère une solution  $f$  de (B) à valeur dans  $H^2(\mathbb{T})$  issue d'une donnée initiale  $f^0$  de moyenne nulle. Tout d'abord, alors elle est suffisamment régulière pour être constante sur les caractéristiques

$$\{(t, x - (C' + Cf^0(x))t), t \in [0, T^*]\}.$$

En effet, pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{T}$ , le système

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -C' - Cf(t, \varphi(t)) \\ \varphi(0) = x \end{cases}$$

admet une solution sur  $[0, T^*]$ . On remarque alors que pour tout temps  $t$  appartenant à  $[0, T^*]$

$$f(t, \varphi(t)) = f^0(x)$$

donc  $\varphi'(t) = -C' - Cf^0(x)$  et par suite,

$$\varphi(t) = x - (C' + Cf^0(x))t.$$

En particulier, si la donnée initiale  $f^0$  n'est pas constante alors, du fait de la périodicité, il y a intersection de deux caractéristique et la solution  $f$  ne peut pas être globale. Par conséquent,  $f^0$  est nulle.  $\square$



## Résultat de convergence dans le cas mal préparé

L'objet de cette section est de justifier l'appellation de système "limite" comme cela a été fait dans le cas visqueux dans [9]. Pour cela on va, dans une première section, "défiltrer" la solution du système limite pour revenir à un système proche du système pénalisé. Il faudra alors contrôler les termes supplémentaires qui apparaîtront en utilisant notamment des opérateurs de troncature adaptés à la matrice de pénalisation. C'est l'objet de la deuxième section. Enfin, dans une dernière section, nous démontrerons le théorème de convergence suivant.

**THÉORÈME 6.1.** *Pour tout entier  $s \geq 2$  et pour toute famille de données initiales  $(V_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  convergeant vers  $\Phi^0$  dans  $\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , si  $\Phi$ , la solution du système limite avec  $\Phi^0$  pour donnée initiale, appartient à  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ , alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que les solutions maximales  $(V_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$  des problèmes pénalisés  $(S_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$  sont définies sur  $[0, T]$  et*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \Phi - \mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) V_\varepsilon \right\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0.$$

**REMARQUE.** Ce résultat justifie le système limite, sa solution étant la limite des solutions filtrées. D'autre part, si le système limite a une solution régulière définie sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  alors les systèmes pénalisés admettent des solutions sur ce même intervalle. En particulier, en utilisant le théorème 5.11, on obtient le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 6.2.** *Pour presque toute valeur du paramètre  $\beta$ , si la limite des données initiales a une composante de Kelvin nulle alors la suite des temps de vie  $(T_\varepsilon^*)_{\varepsilon>0}$  des solutions maximales des problèmes pénalisés  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vérifie*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^* = \infty.$$

Pour obtenir ces résultats, on fixe un entier  $s \geq 2$  et une donnée initiale  $\Phi^0$  appartenant à l'espace  $\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ . D'après le théorème 5.8, le système limite admet une solution  $\Phi$  appartenant à  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  où  $T$  est un temps strictement positif dépendant de  $s$  et de la donnée initiale. Pour revenir au système pénalisé, on "défiltre" cette solution en posant, pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif,

$$U_\varepsilon(t, \cdot) := \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Phi(t, \cdot).$$

Dans la suite, on aura besoin de travailler dans les espaces  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  introduits à la définition 3.7. On pose donc, pour tout entier  $N$ ,

$$\Phi_N := K_N \Phi.$$

Grâce à la proposition 3.6, la suite  $(\Phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  vers  $\Phi$ . On va aussi défiltrer ces troncatures en introduisant, pour tout entier  $N$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif,

$$U_{N,\varepsilon}(t, \cdot) := \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Phi_N(t, \cdot).$$

L'objet des deux premières sections est de montrer que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , à une modification légère près, la suite  $(U_{N,\varepsilon})_{N \in \mathbb{N}}$  est solution du système pénalisé  $(S_\varepsilon)$  avec une force extérieur tendant vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini.



### 6.1. Retour au système pénalisé par “défltrage”

Pour tout entier  $N$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, nous allons montrer que le système vérifié par  $U_{N,\varepsilon}$  est proche du système pénalisé ( $S_\varepsilon$ ). Le terme correctif  $(Q_L - Q)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon})$  sera étudié dans la section suivante.

PROPOSITION 6.3. *Pour tout entier  $N$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, le vecteur  $U_{N,\varepsilon}$  vérifie*

$$\partial_t U_{N,\varepsilon} + Q(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{N,\varepsilon} = (Q_L - Q)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}) + F_{N,\varepsilon}$$

où la force extérieure  $F_{N,\varepsilon}$  tend vers zéro dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  indépendamment de  $\varepsilon$  lorsque  $N$  tend vers l'infini.

DÉMONSTRATION. On considère un entier  $N$  et un réel  $\varepsilon$  strictement positif. On va d'abord trouver le système vérifié par le vecteur  $U_{N,\varepsilon}$  puis estimer la force extérieure.

- Comme  $U_{N,\varepsilon}(t, \cdot) = \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Phi_N(t, \cdot)$ , sa dérivée temporelle est égale à

$$\partial_t U_{N,\varepsilon}(t, \cdot) = -\frac{1}{\varepsilon} M U_{N,\varepsilon}(t, \cdot) - \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K_N Q_L(\Phi, \Phi)(t, \cdot).$$

On va réécrire le terme quadratique. Par définition, il est égal à

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K_N Q_L(\Phi, \Phi)(t, \cdot) &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}} e^{-it\lambda/\varepsilon} \Pi_\lambda K_N Q_L(\Phi, \Phi)(t, \cdot) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}_N} e^{-it\lambda/\varepsilon} \Pi_\lambda Q_L(\Phi, \Phi)(t, \cdot). \end{aligned}$$

Par définition

$$Q_L(\Phi, \Phi) = \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{A}} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi, \Pi_{\mu'} \Phi),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K_N Q_L(\Phi, \Phi)(t, \cdot) &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{A}, \lambda \in \mathfrak{S}_N} e^{-it\lambda/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi, \Pi_{\mu'} \Phi)(t, \cdot) \\ &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{A}, \lambda \in \mathfrak{S}_N} \Pi_\lambda Q\left(e^{-it\mu/\varepsilon} \Pi_\mu \Phi, e^{-it\mu'/\varepsilon} \Pi_{\mu'} \Phi\right)(t, \cdot). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K_N Q_L(\Phi, \Phi)(t, \cdot) &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{A}, \lambda \in \mathfrak{S}_N} \Pi_\lambda Q\left(\Pi_\mu \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Phi, \Pi_{\mu'} \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Phi\right)(t, \cdot) \\ &= K_N Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon)(t, \cdot). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\partial_t U_{N,\varepsilon} + K_N Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{N,\varepsilon} = 0.$$

On va décomposer le terme  $K_N Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon)$  pour faire apparaître  $Q(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon})$ . On a

$$K_N Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon) = (K_N - Id) Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon) + Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon)$$

et par bilinéarité de  $Q_L$ ,

$$Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon) - Q_L(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}) = Q_L(U_\varepsilon - U_{N,\varepsilon}, U_\varepsilon) + Q_L(U_{N,\varepsilon}, U_\varepsilon - U_{N,\varepsilon})$$

donc

$$K_N Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon) = Q_L(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}) - F_{N,\varepsilon}$$

avec

$$F_{N,\varepsilon} := Q_L(U_{N,\varepsilon} - U_\varepsilon, U_\varepsilon) + Q_L(U_\varepsilon, U_{N,\varepsilon} - U_\varepsilon) + (Id - K_N) Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon).$$

Ainsi,

$$\partial_t U_{N,\varepsilon} + Q(U_\varepsilon, U_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{N,\varepsilon} = (Q - Q_L)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}) - F_{N,\varepsilon}.$$

- Il faut désormais estimer la force extérieure  $F_{N,\varepsilon}$ .

Commençons par le terme  $Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon)$ . Par définition de  $U_\varepsilon$ , pour tout  $\mu$  appartenant à  $\mathfrak{S}$ ,

$$\Pi_\mu U_\varepsilon = e^{-it\mu/\varepsilon} \Pi_\mu \Phi$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon) &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S}^3 : \lambda = \mu + \mu'} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_\varepsilon, \Pi_{\mu'} U_\varepsilon) \\ &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S}^3 : \lambda = \mu + \mu'} e^{-it(\mu + \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi, \Pi_{\mu'} \Phi) \\ &= \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) Q_L(\Phi, \Phi). \end{aligned}$$

Comme l'opérateur de filtrage est une isométrie, on en déduit que

$$\|(K_N - Id) Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon)\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} = \|(K_N - Id) Q_L(\Phi, \Phi)\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Grâce à la proposition 3.6, les opérateurs de troncature approximent l'identité dans  $\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  donc, comme  $\Phi$  appartient à  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ , le terme

$$(K_N - Id) Q_L(U_\varepsilon, U_\varepsilon)$$

tend vers zéro dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  indépendamment du paramètre  $\varepsilon$  lorsque  $N$  tend vers l'infini.

D'autre part, comme l'opérateur de filtrage est une isométrie, les inégalités de la proposition 5.9 conduisent à

$$\|Q_L(U_\varepsilon - U_{N,\varepsilon}, U_\varepsilon)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C \|\Phi - \Phi_N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|\Phi\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

et

$$\|Q_L(U_\varepsilon, U_{N,\varepsilon} - U_\varepsilon)\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C \|\Phi - \Phi_N\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \|\Phi\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Comme  $(\Phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\Phi$  dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ , le terme

$$Q_L(U_{N,\varepsilon} - U_\varepsilon, U_\varepsilon) + Q_L(U_\varepsilon, U_{N,\varepsilon} - U_\varepsilon)$$

tend vers zéro dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  indépendamment de  $\varepsilon$  lorsque  $N$  tend vers l'infini.  $\square$

## 6.2. Terme correctif

Pour tout entier  $N$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, afin de faire disparaître le terme résiduel  $(Q_L - Q)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon})$  dans le système précédent, on va modifier légèrement  $U_{N,\varepsilon}$  en  $V_{N,\varepsilon}$  et obtenir la proposition suivante.

PROPOSITION 6.4. *Il existe une suite  $(V_{N,\varepsilon})_{N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0}$  telle que*

$$\partial_t V_{N,\varepsilon} + Q(V_{N,\varepsilon}, V_{N,\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} M V_{N,\varepsilon} = \tilde{F}_{N,\varepsilon}$$

avec

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \tilde{F}_{N,\varepsilon} \right\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \Phi(t, \cdot) - \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) V_{N,\varepsilon} \right\|_{L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout entier  $N$  et pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , on a

$$\partial_t U_{N,\varepsilon} + Q(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{N,\varepsilon} = (Q_L - Q)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}) + F_{N,\varepsilon}$$

où la force extérieure  $F_{N,\varepsilon}$  tend vers zéro dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$ .

Par définition de  $U_{N,\varepsilon}$ , pour tout  $\mu$  appartenant à  $\mathfrak{S}$ ,

$$\Pi_\mu U_{N,\varepsilon} = e^{-it\mu/\varepsilon} \Pi_\mu \Phi_N$$

donc

$$\begin{aligned} (Q - Q_L)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon})(t, \cdot) &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu U_{N,\varepsilon}, \Pi_{\mu'} U_{N,\varepsilon})(t, \cdot) \\ &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} \Pi_\lambda Q\left(e^{-it\mu/\varepsilon} \Pi_\mu \Phi_N(t, \cdot), e^{-it\mu'/\varepsilon} \Pi_{\mu'} \Phi_N(t, \cdot)\right) \\ &= \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \left( \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi_N, \Pi_{\mu'} \Phi_N)(t, \cdot) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, comme l'opérateur de filtrage est une isométrie, pour contrôler le norme de

$$(Q - Q_L)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon}),$$

il suffit de contrôler celle de

$$\sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi_N, \Pi_{\mu'} \Phi_N)(t, \cdot).$$

Pour cela, on procède comme dans la démonstration de la proposition 5.10 en introduisant

$$G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) = \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} \frac{e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon}}{i(\lambda - \mu - \mu')} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi_N, \Pi_{\mu'} \Phi_N)(t, \cdot)$$

de sorte que

$$\partial_t G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) = \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) (Q - Q_L)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon})(t, \cdot) + \Psi_{N,\varepsilon}(t, \cdot)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{N,\varepsilon}(t, \cdot) &= \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} \frac{e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon}}{i(\lambda - \mu - \mu')} \Pi_\lambda Q(\partial_t \Pi_\mu \Phi_N, \Pi_{\mu'} \Phi_N)(t, \cdot) \\ &+ \sum_{(\lambda, \mu, \mu') \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}} \frac{e^{it(\lambda - \mu - \mu')/\varepsilon}}{i(\lambda - \mu - \mu')} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu \Phi_N, \partial_t \Pi_{\mu'} \Phi_N)(t, \cdot). \end{aligned}$$

Grâce au lemme 5.10, les termes  $G_{N,\varepsilon}$  et  $\Psi_{N,\varepsilon}$  sont bornés dans l'espace  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  indépendamment de  $\varepsilon$  par une constante dépendant uniquement de  $N$ ,  $s$ ,  $\|\Phi_N\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}$  et  $\|\partial_t \Phi_N\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))}$ .

De plus,

$$\begin{aligned} (Q - Q_L)(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon})(t, \cdot) &= \varepsilon \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) (\partial_t G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) - \Psi_{N,\varepsilon}(t, \cdot)) \\ &= \varepsilon \partial_t \left( \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) \right) + M \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) - \varepsilon \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Psi_{N,\varepsilon}(t, \cdot) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \partial_t U_{N,\varepsilon}(t, \cdot) + Q(U_{N,\varepsilon}, U_{N,\varepsilon})(t, \cdot) + \frac{1}{\varepsilon} M U_{N,\varepsilon}(t, \cdot) \\ = \varepsilon \partial_t \left( \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) \right) + M \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) - \varepsilon \mathfrak{L}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Psi_{N,\varepsilon}(t, \cdot) + F_{N,\varepsilon}(t, \cdot). \end{aligned}$$

On pose alors  $V_{N,\varepsilon}(t, \cdot) = U_{N,\varepsilon}(t, \cdot) - \varepsilon \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) G_{N,\varepsilon}(t, \cdot)$  de sorte que

$$\partial_t V_{N,\varepsilon} + Q(V_{N,\varepsilon}, V_{N,\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} M V_{N,\varepsilon} = \tilde{F}_{N,\varepsilon}$$

avec

$$\tilde{F}_{N,\varepsilon}(t, \cdot) := F_{N,\varepsilon}(t, \cdot) - \varepsilon Q \left( U_{N,\varepsilon}(t, \cdot), \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) G_{N,\varepsilon}(t, \cdot) \right) (t, \cdot) - \varepsilon \mathfrak{L} \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \Psi_{N,\varepsilon}(t, \cdot).$$

On a alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \tilde{F}_{N,\varepsilon} \right\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0.$$

Il reste à montrer la convergence des solutions défiltrées  $\mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) V_{N,\varepsilon}(t, \cdot)$ . Par définition, on a

$$\mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) V_{N,\varepsilon}(t, \cdot) = \Phi_N(t, \cdot) - \varepsilon G_{N,\varepsilon}(t, \cdot).$$

D'après le lemme 5.10, le terme  $G_{N,\varepsilon}$  est borné dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  indépendamment de  $\varepsilon$  et, comme la suite  $(\Phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^\infty([0, T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))$  vers  $\Phi$ , on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \Phi(t, \cdot) - \mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) V_{N,\varepsilon} \right\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 6.3. Démonstration du théorème de convergence

Nous allons maintenant justifier l'appellation système limite en démontrant le théorème 6.1 grâce aux résultats de la proposition 6.4.

DÉMONSTRATION. Pour passer de la proposition 6.4 au théorème 6.1, nous allons étudier l'équation vérifiée par  $S_{N,\varepsilon} := V_{N,\varepsilon} - V_\varepsilon$ . Du fait de la bilinéarité de  $Q$ ,  $S_{N,\varepsilon}$  vérifie

$$\partial_t S_{N,\varepsilon} + Q(V_\varepsilon, S_{N,\varepsilon}) + Q(S_{N,\varepsilon}, V_{N,\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} M S_{N,\varepsilon} = \tilde{F}_{N,\varepsilon}.$$

Une estimation d'énergie donne donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 = \left\langle \tilde{F}_{N,\varepsilon}, S_{N,\varepsilon} \right\rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \langle Q(V_\varepsilon, S_{N,\varepsilon}) + Q(S_{N,\varepsilon}, V_{N,\varepsilon}), S_{N,\varepsilon} \rangle_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Les estimations des propositions 4.3 et 4.5 impliquent que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 &\lesssim \left\| \tilde{F}_{N,\varepsilon} \right\|_{L^2([0,T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\quad + \left( \|V_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|V_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \right) \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

En décomposant  $V_{N,\varepsilon}$ , comme l'opérateur de filtrage est un isométrie, on obtient

$$\|V_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq \left\| V_{N,\varepsilon} - \mathfrak{L} \left( -\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \Phi \right\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|\Phi\|_{\mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}$$

puis

$$\|V_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \left\| V_{N,\varepsilon} - \mathfrak{L} \left( -\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \Phi \right\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \|\Phi\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \\ & \lesssim \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^3 + \left\| \tilde{F}_{N,\varepsilon} \right\|_{L^2([0,T], \mathcal{W}^{ss}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ & + \left( \left\| \Phi(t, \cdot) - \mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) (V_{N,\varepsilon}) \right\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} + \|\Phi\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2(s+1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} \right) \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Il existe donc des constantes positives  $C$  et  $(c_{N,\varepsilon})_{N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0}$  telles que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{N,\varepsilon} = 0$  et

$$\frac{d}{dt} \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 \leq \left( c_{N,\varepsilon} \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + C \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 + \|S_{N,\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^3 \right).$$

Pour conclure, il suffit de prouver que si une suite de fonctions positives  $(f_{N,\varepsilon})_{N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0}$  vérifient

$$\begin{cases} f_{N,\varepsilon} \leq c_{N,\varepsilon} f_{N,\varepsilon}^{1/2} + C f_{N,\varepsilon} + f_{N,\varepsilon}^{3/2} \\ f_{N,\varepsilon}(0) = f_{N,\varepsilon,0} \end{cases}$$

où les constantes  $C$  et  $(c_{N,\varepsilon})_{N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0}$  sont positives et où

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{N,\varepsilon} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{N,\varepsilon,0} = 0$$

alors pour tout  $T > 0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_{N,\varepsilon}\|_{L^\infty([0,T])} = 0.$$

Une fois ce résultat montré, on aura

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|S_{N,\varepsilon}\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2s}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0$$

ce qui, grâce à la proposition 6.4, conduira à

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \Phi - \mathfrak{L} \left( -\frac{t}{\varepsilon} \right) (V_\varepsilon) \right\|_{L^\infty([0,T], \mathcal{W}^{2(s-1)}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}))} = 0$$

et conclura la démonstration du théorème 6.1.

Il ne reste plus qu'à montrer le résultat intermédiaire.

Considérons un entier  $N$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$  tels que la condition initiale  $f_{N,\varepsilon,0}$  soit inférieure à 1. Soit  $T_{N,\varepsilon}^*$  le temps maximal tel que  $f_{N,\varepsilon}$  soit inférieure ou égale à 1 sur  $[0, T_{N,\varepsilon}^*]$ . Si  $T_{N,\varepsilon}^*$  est fini, alors sur l'intervalle de temps  $[0, T_{N,\varepsilon}^*]$ , on a

$$\frac{f'_{N,\varepsilon}}{c_{N,\varepsilon} f_{N,\varepsilon}^{1/2} + (C+1) f_{N,\varepsilon}} = \frac{2}{C} \ln \left( c_{N,\varepsilon} + (C+1) \sqrt{f_{N,\varepsilon}} \right)' \leq 1.$$

et par conséquent,

$$T_{N,\varepsilon}^* \geq \frac{2}{C} \ln \left( \frac{c_{N,\varepsilon} + (C+1)}{c_{N,\varepsilon} + (C+1) \sqrt{f_{N,\varepsilon,0}}} \right).$$

Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{N,\varepsilon}^* = \infty.$$

Pour  $T$  strictement positif fixé, si  $T \leq T_{N,\varepsilon}^*$  alors pour tout  $t$  appartenant à  $[0, T]$ ,

$$\sqrt{f_{N,\varepsilon}(t)} \leq \left( \frac{c_{N,\varepsilon}}{C+1} + \sqrt{f_{N,\varepsilon,0}} \right) e^{CT/2}$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_{N,\varepsilon}\|_{L^\infty([0,T])} = 0.$$

□

Deuxième partie

Condition de globalité pour les équations de  
Navier-Stokes



## Résultats et trame des démonstrations

Dans ce chapitre, on va d'abord énoncer deux théorèmes qui conduisent à deux classes de données initiales qui engendrent des solutions globales des équations de Navier-Stokes. Ces équations modélisent l'évolution d'un fluide homogène par le système suivant

$$(NS) : \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u &= -\nabla p \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

où  $u$  est la vitesse du fluide et  $p$  sa pression. Dans la suite, le domaine spatial choisi est l'espace tout entier  $\mathbb{R}^3$ .

Pour les prouver, on va commencer par décomposer la perturbation de la donnée initiale puis on donnera une condition suffisante de globalité pour la solution issue de cette donnée initiale particulière. On énoncera alors trois lemmes qui nous permettront de conclure. Ces lemmes seront démontrés dans le chapitre suivant.

### 7.1. Résultats

Comme la direction verticale va jouer un rôle particulier dans nos résultats, on introduit les espaces fonctionnels suivants.

DÉFINITION 7.1. *Pour tout couple de réels  $(p, s)$ , l'espace  $\dot{H}_z^p \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  est défini par sa semi-norme*

$$\|f\|_{\dot{H}_z^p \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)}^2 := \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_z|^{2p} |\xi_x|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Le résultat suivant assure que si l'on prend une donnée initiale dont le spectre est suffisamment proche du plan horizontal alors elle engendre une solution globale de  $(NS)$ . Plus précisément,

THÉORÈME 7.2. *Pour toute famille  $(u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  de données initiales de divergence nulle telle que la suite  $(\sqrt{\varepsilon}u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  soit bornée dans  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  pour tout réel  $s \geq -1$ , s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$*

$$\xi = (\xi_x, \xi_z) \in \operatorname{Supp}(\widehat{u_{\varepsilon,0}}) \implies |\xi_z| \leq C\varepsilon |\xi_x|$$

*alors il existe un réel strictement positif  $\varepsilon_0$  tel que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  alors  $u_{\varepsilon,0}$  engendre une solution globale des équations de Navier-Stokes.*

Plus généralement, le théorème suivant affirme que si l'on perturbe une donnée initiale générant une solution globale de  $(NS)$  par une fonction dont le spectre est suffisamment proche du plan horizontal alors, sous certaines hypothèses, elle engendre encore une solution globale de  $(NS)$ .

THÉORÈME 7.3. *Soit  $u_0$  une donnée initiale de divergence nulle, appartenant à  $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  et générant une solution globale régulière de  $(NS)$ . Pour toute famille  $(u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  de données initiales de divergence nulle telle que  $(\sqrt{\varepsilon}u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  soit bornée dans  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $s \geq -1$ , s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$*

$$\xi \in \operatorname{Supp}(\widehat{u_{\varepsilon,0}}) \implies |\xi_z| \leq C\varepsilon |\xi_x|.$$



alors il existe des constantes  $c_0$  et  $\varepsilon_0$  telles que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  et si

$$\|u_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \leq c_0$$

alors  $u_0 + u_{\varepsilon,0}$  génère une solution globale de (NS).

REMARQUE. Ces deux résultats se démontrent simultanément. En effet, le premier théorème traduit simplement que lorsque la donnée initiale  $u_0$  du théorème 7.3 est nulle alors la condition de petitesse en  $z = 0$  est inutile.

REMARQUE. La démonstration de ce résultat s'adapte à ce qui a été fait dans [6] et généralise légèrement le théorème 2 en

THÉORÈME 7.4. Si  $u_0, v_0^x$  et  $w_0$  sont des vecteurs réguliers définis sur  $\mathbb{R}^3$  et de divergence nulle tels que :

- $u_0$  appartient à  $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  et génère une solution globale régulière de (NS).
- $v_0^x$  est un vecteur bidimensionnel dont toutes les dérivées appartiennent à  $L_z^2 \dot{H}_x^{-1}(\mathbb{R}^3)$

alors il existe des constantes  $c_0$  et  $\varepsilon_0$  telles que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  et si

$$\|v_0^x(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \leq c_0$$

alors la donnée initiale

$$u_0(\mathbf{x}, z) + (v_0^x + \varepsilon w_0^x, w_0^z)(\mathbf{x}, \varepsilon z)$$

engendre une solution globale de (NS).

## 7.2. Réécriture du problème

La proposition suivante va permettre, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , de réécrire la donnée initiale  $u_{\varepsilon,0}$  comme la somme de deux contributions de même spectre que  $u_{\varepsilon,0}$ . La première étant uniquement horizontale c'est-à-dire à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et la deuxième ayant une transformé de Fourier "essentiellement" horizontale c'est-à-dire que la composante verticale de celle-ci est petite devant sa composante horizontale.

PROPOSITION 7.5. Pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , si la donnée initiale  $u_{\varepsilon,0}$  est de divergence nulle et a un spectre vérifiant

$$\exists C, \quad \xi \in \text{Supp}(\widehat{u_{\varepsilon,0}}) \implies |\xi_z| \leq C\varepsilon|\xi_x|$$

alors il existe des fonctions  $v_{\varepsilon,0}$  et  $w_{\varepsilon,0}$  de divergence nulle et de même spectre que  $u_{\varepsilon,0}$  telles que

$$u_{\varepsilon,0} = (v_{\varepsilon,0}, 0) + w_{\varepsilon,0}$$

et telles que, pour tout  $\xi$  appartenant à ce spectre,

$$|\widehat{w_{\varepsilon,0}^x}(\xi)| \leq C\varepsilon|\widehat{w_{\varepsilon,0}^z}(\xi)|$$

où  $\widehat{w_{\varepsilon,0}^x}$  et  $\widehat{w_{\varepsilon,0}^z}$  sont respectivement les composantes horizontale et verticale de  $\widehat{w_{\varepsilon,0}}$ .

DÉMONSTRATION. Considérons un réel strictement positif  $\varepsilon$ . En terme de transformée de Fourier, la nullité de la divergence de  $u_{\varepsilon,0}$  s'écrit

$$\xi_x \cdot \widehat{u_{\varepsilon,0}^x}(\xi) + \xi_z \widehat{u_{\varepsilon,0}^z}(\xi) = 0.$$

La projection orthogonale de  $u_{\varepsilon,0}^x$  sur l'espace des fonctions de divergence horizontale nulle est donnée par

$$u_{\varepsilon,0,\perp}^x := u_{\varepsilon,0}^x - u_{\varepsilon,0,\parallel}^x$$

avec

$$\widehat{u_{\varepsilon,0,\parallel}^x}(\xi) := \frac{\widehat{u_{\varepsilon,0}^x}(\xi) \cdot \xi_x}{|\xi_x|^2} \xi_x.$$

La condition de divergence nulle devient alors

$$|\xi_x \cdot \widehat{u_{\varepsilon,0}^x}(\xi)| = |\xi_x| |\widehat{u_{\varepsilon,0,\parallel}^x}(\xi)| = |\xi_z| |\widehat{u_{\varepsilon,0}^z}(\xi)|.$$

Donc pour tout vecteur  $\xi$  appartenant au spectre de  $u_{\varepsilon,0}$ , sa partie horizontale  $\xi_x$  est non nulle et par suite

$$|\widehat{u_{\varepsilon,0,\parallel}^x}(\xi)| \leq C\varepsilon |\widehat{u_{\varepsilon,0}^z}(\xi)|.$$

Ainsi, en posant

$$v_{\varepsilon,0} = u_{\varepsilon,0,\perp}^x \quad \text{et} \quad w_{\varepsilon,0} = \left( u_{\varepsilon,0,\parallel}^x, u_{\varepsilon,0}^z \right),$$

on obtient le résultat.  $\square$

**DÉFINITION 7.6.** *Avec les notations de la proposition précédente, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , on décompose les données initiales en*

$$u_{\varepsilon,0} = (v_{\varepsilon,0}, 0) + w_{\varepsilon,0}$$

et comme dans [5], on introduit  $(v_\varepsilon, q_\varepsilon^1)$  solution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles i.e.

$$(NS_{2D}) : \begin{cases} \partial_t v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon - \Delta_x v_\varepsilon &= -\nabla_x q_\varepsilon^1 \\ \operatorname{div}_x v_\varepsilon &= 0 \\ v_\varepsilon(0, \cdot, z) &= v_{\varepsilon,0}(\cdot, z) \end{cases}$$

et  $(w_\varepsilon, q_\varepsilon^2)$  solution de

$$(C) : \begin{cases} \partial_t w_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon &= -\nabla q_\varepsilon^2 \\ \operatorname{div} w_\varepsilon &= 0 \\ w_\varepsilon(0, \cdot) &= w_{\varepsilon,0}. \end{cases}$$

On introduit alors

$$(v_\varepsilon^{app}, q_\varepsilon^{app}) := ((v_\varepsilon, 0) + w_\varepsilon, (q_\varepsilon^1, 0) + q_\varepsilon^2)$$

et

$$(u_\varepsilon^{app}, p_\varepsilon^{app}) := (u + v_\varepsilon^{app}, p + q_\varepsilon^{app})$$

où  $(u, p)$  est la solution de (NS) issue de  $u_0$ .

Cette solution approchée sera comparée à  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$  solution des équations de Navier-Stokes issue de la donnée initiale perturbée i.e.

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon &= -\nabla p_\varepsilon \\ \operatorname{div} u_\varepsilon &= 0 \\ u_\varepsilon(0, \cdot) &= u_0 + u_{\varepsilon,0}. \end{cases}$$

### 7.3. Condition suffisante de globalité

La proposition suivante donne une condition suffisante pour l'existence globale de  $u_\varepsilon$ .

**PROPOSITION 7.7.** *Si on pose*

$$F_\varepsilon := (-\partial_z^2 v_\varepsilon, \partial_z q_\varepsilon^1) + w_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} - u \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} - v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla u$$

et

$$N_\varepsilon^2 := \|u_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3))}^2 + \|\nabla u_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3))}^2$$

alors il existe un couple de réels positifs  $(C_1, C_2)$  tel que si

$$\|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}^2 e^{C_1 N_\varepsilon^2} \leq C_2$$

alors la solution  $u_\varepsilon$  existe globalement.

DÉMONSTRATION. On va d'abord montrer que la différence

$$(D_\varepsilon, r_\varepsilon) := (u_\varepsilon - u_\varepsilon^{app}, p_\varepsilon - p_\varepsilon^{app})$$

est solution de

$$\partial_t D_\varepsilon + D_\varepsilon \cdot \nabla D_\varepsilon - \Delta D_\varepsilon + u_\varepsilon^{app} \cdot \nabla D_\varepsilon + D_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon^{app} = -\nabla r_\varepsilon + F_\varepsilon.$$

Pour cela, on développe

$$\partial_t v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} - \Delta v_\varepsilon^{app}$$

en

$$(\partial_t v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon, 0) + \partial_t w_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon + w_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} - (\Delta_x v_\varepsilon + \partial_z^2 v_\varepsilon, 0) - \Delta w_\varepsilon$$

ce qui se simplifie en

$$-\nabla q_\varepsilon^{app} + (0, \partial_z q_\varepsilon^1) + w_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} - (\partial_z^2 v_\varepsilon, 0).$$

Par conséquent, par différence,

$$\partial_t D_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - u \cdot \nabla u - v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} - \Delta D_\varepsilon = -\nabla r_\varepsilon + w_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} - (\partial_z^2 v_\varepsilon, -\partial_z q_\varepsilon^1).$$

Comme

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - u \cdot \nabla u - v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} &= (D_\varepsilon + u + v_\varepsilon^{app}) \cdot \nabla (D_\varepsilon + u + v_\varepsilon^{app}) - u \cdot \nabla u - v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} \\ &= D_\varepsilon \cdot \nabla D_\varepsilon + u_\varepsilon^{app} \cdot \nabla D_\varepsilon + D_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon^{app} + u \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

on obtient le résultat annoncé.

On introduit alors, pour tout temps  $t$ ,

$$V_\varepsilon(t) := \|v_\varepsilon^{app}\|_{L^\infty}^2(t) + \|\nabla v_\varepsilon^{app}\|_{L^\infty L_x^2}^2(t)$$

de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^+} V_\varepsilon(t) dt = N_\varepsilon^2$$

et on pose

$$D_{\varepsilon, \lambda}(t) := D_\varepsilon(t) \exp\left(-\lambda \int_0^t V_\varepsilon(s) ds\right)$$

où  $\lambda$  est un réel que l'on fixera ultérieurement.

On va déterminer l'équation vérifiée par  $D_{\varepsilon, \lambda}$ . Par définition,

$$\begin{aligned} \partial_t D_{\varepsilon, \lambda}(t) &= (\partial_t D_\varepsilon(t) - \lambda V_\varepsilon(t) D_\varepsilon(t)) \exp\left(-\lambda \int_0^t V_\varepsilon(s) ds\right) \\ &= \partial_t D_\varepsilon(t) \exp\left(-\lambda \int_0^t V_\varepsilon(s) ds\right) - \lambda V_\varepsilon(t) D_{\varepsilon, \lambda}(t) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_t D_{\varepsilon, \lambda}(t) &= (F_\varepsilon - \nabla r_\varepsilon)(t) \exp\left(-\lambda \int_0^t V_\varepsilon(s) ds\right) - D_{\varepsilon, \lambda}(t) \cdot \nabla D_{\varepsilon, \lambda}(t) \exp\left(\lambda \int_0^t V_\varepsilon(s) ds\right) \\ &\quad + \Delta D_{\varepsilon, \lambda}(t) - u_\varepsilon^{app}(t) \cdot \nabla D_{\varepsilon, \lambda}(t) - D_{\varepsilon, \lambda}(t) \cdot \nabla u_\varepsilon^{app}(t) - \lambda V_\varepsilon(t) D_{\varepsilon, \lambda}(t). \end{aligned}$$

Une estimation  $\dot{H}^{1/2}$  conduit alors à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_{\varepsilon, \lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 &\leq \|F_\varepsilon\|_{\dot{H}^{-1/2}} \| \nabla D_{\varepsilon, \lambda} \|_{\dot{H}^{1/2}} + e^{\lambda N_\varepsilon^2} \langle D_{\varepsilon, \lambda} \cdot \nabla D_{\varepsilon, \lambda}, D_{\varepsilon, \lambda} \rangle_{\dot{H}^{1/2}} - \| \nabla D_{\varepsilon, \lambda} \|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \\ &\quad - \langle u_\varepsilon^{app} \cdot \nabla D_{\varepsilon, \lambda} + D_{\varepsilon, \lambda} \cdot \nabla u_\varepsilon^{app}, D_{\varepsilon, \lambda} \rangle_{\dot{H}^{1/2}} - \lambda V_\varepsilon(t) \|D_{\varepsilon, \lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2. \end{aligned}$$

Pour traiter les produits scalaires restants, on utilise les estimations des propositions 8.14 et 8.17 pour obtenir

$$|\langle D_{\varepsilon, \lambda} \cdot \nabla D_{\varepsilon, \lambda}, D_{\varepsilon, \lambda} \rangle_{\dot{H}^{1/2}}| \lesssim \|D_{\varepsilon, \lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}} \| \nabla D_{\varepsilon, \lambda} \|_{\dot{H}^{1/2}}^2$$

et

$$\left| \langle u_\varepsilon^{app} \cdot \nabla D_{\varepsilon,\lambda} + D_{\varepsilon,\lambda} \cdot \nabla u_\varepsilon^{app}, D_{\varepsilon,\lambda} \rangle_{\dot{H}^{1/2}} \right| \lesssim \left( \|u_\varepsilon^{app}\|_{L^\infty} + \|\nabla u_\varepsilon^{app}\|_{L_z^\infty L_x^2} \right) \|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}} \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}.$$

En utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2$ , on a

$$\|F_\varepsilon\|_{\dot{H}^{-1/2}} \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}} - \frac{1}{4} \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \leq \|F_\varepsilon\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2$$

et

$$\begin{aligned} \left| \langle u_\varepsilon^{app} \cdot \nabla D_{\varepsilon,\lambda} + D_{\varepsilon,\lambda} \cdot \nabla u_\varepsilon^{app}, D_{\varepsilon,\lambda} \rangle_{\dot{H}^{1/2}} \right| - \frac{1}{4} \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 &\lesssim \left( \|u_\varepsilon^{app}\|_{L^\infty} + \|\nabla u_\varepsilon^{app}\|_{L_z^\infty L_x^2} \right)^2 \|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \\ &\lesssim V_\varepsilon \|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \\ \leq C \|F_\varepsilon\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 + C e^{\lambda N_\varepsilon^2} \|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}} \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}} + (C - 2\lambda) V_\varepsilon \|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2. \end{aligned}$$

On choisit alors  $\lambda$  positif tel que  $C - 2\lambda$  soit négatif et, comme  $D_{\varepsilon,\lambda}(0, \cdot)$  est nul, on se place l'un intervalle maximal  $[0, T_\varepsilon]$  sur lequel on a  $\|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2C} e^{-\lambda N_\varepsilon^2}$ . Sur cet intervalle de temps, on a

$$\frac{d}{dt} \|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \leq C \|F_\varepsilon\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2$$

et donc

$$\|D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla D_{\varepsilon,\lambda}\|_{\dot{H}^{1/2}}^2(s) ds \leq C \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})}^2.$$

Ainsi, si

$$C \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})}^2 \leq \frac{1}{4C^2} e^{-2\lambda N_\varepsilon^2}$$

alors  $T_\varepsilon = \infty$  ce qui implique l'existence globale de  $D_\varepsilon$ . Par hypothèse, la solution approchée est globale donc, sous cette hypothèse,  $u_\varepsilon$  l'est aussi.  $\square$

Il ne reste plus qu'à prouver les lemmes suivants pour conclure

LEMME 7.8. *Sous les hypothèses du théorème 7.3, la famille  $(u_\varepsilon^{app})_{\varepsilon > 0}$  des solutions approchées est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$  et la famille  $(\nabla u_\varepsilon^{app})_{\varepsilon > 0}$  l'est dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3))$ .*

LEMME 7.9. *Sous les hypothèses du théorème 7.2, si on pose*

$$F_\varepsilon^1 := (\partial_z^2 v_\varepsilon, \partial_z q_\varepsilon^1) - w_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^{app}$$

alors

$$\|F_\varepsilon^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \lesssim \varepsilon^{1/2}.$$

LEMME 7.10. *Sous les hypothèses précédentes du théorème 7.3, si on pose*

$$F_\varepsilon^2 := u \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla u$$

alors pour tout réel  $\delta$  strictement positif, il existe un réel strictement positif  $\varepsilon_0(\delta)$  et une constante  $c_0(\delta)$  tels que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\delta)$  et si  $\|u_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \leq c_0$  alors

$$\|F_\varepsilon^2\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \leq \delta.$$

En effet, si on admet ces trois lemmes alors la famille  $(N_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée par une constante  $C$  donc pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif

$$\|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}^2 e^{C_1 N_\varepsilon^2} \leq \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}^2 e^{CC_1}.$$

Dans la cadre du théorème 7.2, on a  $F_\varepsilon = F_\varepsilon^1$  et il suffit de prendre  $\varepsilon$  assez petit pour avoir l'inégalité

$$\|F_\varepsilon^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}^2 e^{C_1 N_\varepsilon^2} \leq C_2.$$

Pour le théorème 7.3,  $F_\varepsilon = F_\varepsilon^1 + F_\varepsilon^2$  il faut donc prendre  $\varepsilon$  et  $\|u_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2}$  assez petits pour que cette condition soit remplie.

## Démonstrations des lemmes

Ce chapitre est consacré à la démonstration des lemmes restant à prouver pour obtenir les théorèmes 7.2 et 7.3. Nous commencerons par le lemme 7.8 d'estimation des solutions approchées puis nous traiterons les lemmes 7.9 et 7.10 sur les forces extérieures. Enfin, une dernière section comportera tous les lemmes calculatoires utilisés précédemment.

### 8.1. Démonstration du lemme 7.8

Si une donnée initiale  $u_0$  engendre une solution globale des équations de Navier-Stokes alors cette solution a des propriétés de régularité. C'est ce que traduit le résultat suivant dont la démonstration est détaillée dans l'appendice B de [6].

**PROPOSITION 8.1.** *Si  $u_0$  appartient à  $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ , est de divergence nulle et engendre une solution globale régulière  $u$  de (NS) alors  $u$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$  et  $\nabla u$  à  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3))$ .*

Ainsi, pour obtenir le lemme 7.8, il suffit de montrer que la famille  $(v_\varepsilon^{app})_{\varepsilon>0}$  est bornée dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$  et que la famille  $(\nabla v_\varepsilon^{app})_{\varepsilon>0}$  l'est dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3))$ . Pour cela, on va traiter séparément les familles  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  et  $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ .

#### 8.1.1. Estimations de $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ .

Nous allons d'abord estimer les données initiales ce qui nous sera nécessaire dans la suite et qui découle du caractère particulier du spectre de celles-ci.

**PROPOSITION 8.2.** *Pour tout réel  $s \geq -1$  et pour tout triplet d'entiers  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ , la famille  $(\varepsilon^{1/2-\alpha_z} \partial^\alpha v_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  est bornée dans l'espace  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  et la famille  $(\varepsilon^{-\alpha_z} \partial^\alpha v_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$  l'est dans  $L_z^\infty \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Considérons un réel  $s \geq -1$  et un triplet d'entiers  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ . Comme le spectre de  $v_{\varepsilon,0}$  vérifie

$$\xi \in \text{Supp}(\widehat{v_{\varepsilon,0}}) \implies |\xi_z| \leq C\varepsilon |\xi_x|$$

on a

$$\|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \leq C^{\alpha_z} \varepsilon^{\alpha_z} \|\partial^{\alpha_x} v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s+\alpha_z}}.$$

Donc si  $s \geq -1$  alors

$$\|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \lesssim \varepsilon^{\alpha_z-1/2}$$

et la famille  $(\varepsilon^{1/2-\alpha_z} \partial^\alpha v_{\varepsilon,0})_\varepsilon$  est bornée dans  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$ .

D'après le lemme 8.16 on a

$$\|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^s}^2 \leq \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \|\partial_z \partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}.$$

Ainsi, si  $s \geq -1$  alors la famille  $(\varepsilon^{-\alpha_z} \partial^\alpha v_{\varepsilon,0})_\varepsilon$  est bornée dans  $L_z^\infty \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$ . □

Cette estimation initiale est prolongée dans le temps par le résultat suivant.

PROPOSITION 8.3. *Sous les hypothèses du théorème 7.2, pour tout réel  $s > -1$  et pour tout triplet d'entiers  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ ,*

$$\|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))}^2 + \sup_z \int_0^t \|\partial^\alpha \nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2(t) dt \lesssim \varepsilon^{2\alpha_z}$$

et

$$\|\partial^\alpha \nabla_x v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))}^2 \lesssim \varepsilon^{2\alpha_z - 1}.$$

DÉMONSTRATION. Considérons un réel  $s \geq -1$  et un triplet d'entiers  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ .

Remarquons, tout d'abord, que l'on peut se ramener à un réel  $s$  appartenant à  $] -1, 1[$ .

En effet, si  $s \geq 1$ , alors

$$\|\partial^\alpha f\|_{\dot{H}_x^s}^2 \leq \sum_{|\beta_x| = E(s)} \left\| \partial^{\alpha + (0, \beta_x)} f \right\|_{\dot{H}_x^{s - E(s)}}^2$$

et comme  $s - E(s) \in [0, 1[$ , on peut se restreindre à choisir  $s$  dans  $] -1, 1[$ .

On va démontrer ce résultat par récurrence sur  $\alpha$ .

• Pour  $\alpha = 0$ , on va commencer par établir un résultat propre au cas  $s = 0$  avant de montrer le résultat annoncé. Considérons un réel  $\varepsilon$  strictement positif.

Comme  $v_\varepsilon$  est de divergence nulle, une estimation dans  $L_x^2$  donne

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 + \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 = 0$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2(t, z) + \int_0^t \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2(t', z) dt' \leq \frac{1}{2} \|v_{\varepsilon, 0}\|_{L_x^2}^2(z) \leq \frac{1}{2} \|v_{\varepsilon, 0}\|_{L_x^\infty L_x^2}^2.$$

D'après le lemme 8.2, on en déduit que la quantité

$$\frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2(t, z) + \int_0^t \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2(t', z) dt'$$

est bornée indépendamment de  $z$  et de  $\varepsilon$ .

Pour un réel  $s$  quelconque appartenant à  $] -1, 1[$ , on fait une estimation d'énergie :

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + \langle v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} + \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 = 0.$$

D'après la proposition 8.14, comme  $s \in ] -1, 1[$ , le produit scalaire est estimé par

$$\begin{aligned} \langle v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} &\lesssim \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2} \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \|v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + C \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 \|v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 \end{aligned}$$

donc

$$\partial_t \|v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 \lesssim \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 \|v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2.$$

Par suite, en utilisant l'estimation obtenue dans le cas  $s = 0$  et un lemme de Gronwall, on a

$$\|v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2(t, z) + \int_0^t \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2(t', z) dt' \lesssim \|v_{\varepsilon, 0}\|_{\dot{H}_x^s(\mathbb{R}^2)}^2(z).$$

En utilisant la proposition 8.2 sur les données initiales, on en déduit que la quantité

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^s)}^2 + \sup_z \int_0^t \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2$$

est bornée indépendamment de  $\varepsilon$  et que

$$\|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s)}^2 \lesssim \varepsilon^{-1}.$$

• Pour montrer l'hérédité, on suppose le résultat vrai pour tous les triplets d'entiers  $\beta$  vérifiant  $|\beta| \leq k$ . Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, une estimation d'énergie sur l'équation vérifiée par  $\partial^\alpha v_\varepsilon$ , avec  $|\alpha| = k + 1$ , donne

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + \langle \partial^\alpha (v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon), \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} + \|\nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 = 0.$$

On décompose le terme non linéaire en

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha (v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon), \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} &= \langle v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} + \langle \partial^\alpha v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial v_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} \\ &\quad + \sum_{0 < \beta < \alpha} C_\beta \langle \partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s}. \end{aligned}$$

En utilisant les propositions 8.14 et 8.15, les deux premiers produits scalaires sont estimés par

$$\begin{aligned} \langle v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} + \langle \partial^\alpha v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial v_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} &\lesssim \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2} \|\nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \\ &\leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + C \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2. \end{aligned}$$

Pour les autres termes, on remarque, comme  $v_\varepsilon$  est de divergence horizontale nulle, que l'on a

$$\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon = \operatorname{div}_x (\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon \otimes \partial^\beta v_\varepsilon)$$

et par suite

$$\left| \langle \partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \leq \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon \otimes \partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s(\mathbb{R}^2)} \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{s+1}}$$

En utilisant la loi de produit de la proposition 8.13 avec  $(s_1, s_2, d) = (\frac{s+1}{2}, \frac{s+1}{2}, 2)$  on obtient

$$\begin{aligned} \left| \langle \partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| &\lesssim \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s+1)/2}} \|\nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s-1)/2}} \|\nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \\ &\leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + C \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s+1)/2}}^2 \|\nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s-1)/2}}^2. \end{aligned}$$

L'estimation d'énergie devient donc

$$\partial_t \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + \|\nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 \lesssim \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + \sum_{0 < \beta < \alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s+1)/2}}^2 \|\nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s-1)/2}}^2.$$

En particulier, lorsque  $\alpha$  et  $s$  sont nuls, la quantité

$$\int_0^t \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)}^2(t', z) dt'$$

est bornée indépendamment de  $z$  et de  $\varepsilon$ , et par suite, un lemme de Gronwall conduit à

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha v_\varepsilon(t, \cdot, z)\|_{\dot{H}_x^s}^2 + \int_0^t \|\nabla_x \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2(t', z) dt' \\ \lesssim \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}(z)\|_{\dot{H}_x^s}^2 + \int_0^t \sum_{0 < \beta < \alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s+1)/2}}^2(t', z) \|\nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s-1)/2}}^2(t', z) dt'. \end{aligned}$$

Grâce à l'assertion de récurrence et à la proposition 8.2 sur les données initiales, on a

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^s)} + \operatorname{Sup}_z \int_0^t \|\partial^\alpha \nabla_x v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 \\ \lesssim \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^s}^2 + \sum_{0 < \beta < \alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{(s+1)/2})}^2 \operatorname{Sup}_z \int_0^t \|\nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s-1)/2}}^2(t', z) dt' \\ \lesssim \varepsilon^{2\alpha_z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \nabla_x v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s)}^2 \\ \lesssim \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + \sum_{0 < \beta < \alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{(s+1)/2})}^2 \|\partial^\beta \nabla_x v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{(s-1)/2})}^2 \\ \lesssim \varepsilon^{2\alpha_z - 1} + \sum_{0 < \beta < \alpha} \varepsilon^{2(\alpha_z - \beta_z)} \varepsilon^{2\beta_z - 1} \lesssim \varepsilon^{2\alpha_z - 1} \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.  $\square$



Il reste à estimer la famille  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  et ses dérivées dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$ .

PROPOSITION 8.4. *Sous les hypothèses du théorème 7.2, pour tout triplet  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ , la famille  $(\varepsilon^{1/2-\alpha_z} \partial^\alpha v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons un triplet d'entiers  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$ . L'équation vérifiée par  $\partial^\alpha v_\varepsilon$  est

$$\partial_t \partial^\alpha v_\varepsilon + \partial^\alpha (v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon) - \Delta_x \partial^\alpha v_\varepsilon = -\partial^\alpha \nabla_x q_\varepsilon^1.$$

Une estimation d'énergie conduit donc à

$$\frac{1}{2} \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{H_x^{-1}}^2(t, z) + \int_0^t \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2(t', z) dt' \leq \frac{1}{2} \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{H_x^{-1}}^2(z) + \int_0^t \langle f_\varepsilon, \partial^\alpha v_\varepsilon \rangle_{H_x^{-1}}(t', z) dt'$$

avec

$$f_\varepsilon = \partial^\alpha (v_\varepsilon \cdot \nabla_x v_\varepsilon).$$

On pose  $M_\varepsilon(t, z) = \sup_{0 \leq t' \leq t} \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{H_x^{-1}}(t', z)$  de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_\varepsilon^2(t, z) &\leq \frac{1}{2} \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{H_x^{-1}}^2(z) + M_\varepsilon(t, z) \int_0^t \|f_\varepsilon\|_{H_x^{-1}}(t', z) dt' \\ &\leq \frac{1}{2} \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{H_x^{-1}}^2(z) + \frac{1}{4} M_\varepsilon^2(t, z) + \left( \int_0^t \|f_\varepsilon\|_{H_x^{-1}}(t', z) dt' \right)^2 \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{1}{4} M_\varepsilon^2(t, z) \leq \frac{1}{2} \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{H_x^{-1}}^2(z) + \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+, H_x^{-1})}^2(z).$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L_x^2}^2(t', z) dt' &\leq \frac{1}{2} \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{H_x^{-1}}^2(z) + M_\varepsilon(t, z) \int_0^t \|f_\varepsilon\|_{H_x^{-1}}(t', z) dt' \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{H_x^{-1}}^2(z) + M_\varepsilon(t, z)^2 + \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+, H_x^{-1})}^2(z) \right) \end{aligned}$$

on obtient,

$$\int_0^t \|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)}^2(t', z) dt' \lesssim \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{H_x^{-1}(\mathbb{R}^2)}^2(z) + \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+, H_x^{-1}(\mathbb{R}^2))}^2(z)$$

puis

$$\|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))}^2 \lesssim \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_x^2 H_x^{-1}(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_{\mathbb{R}} \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+, H_x^{-1}(\mathbb{R}^2))}^2(z) dz.$$

Or, comme  $v_\varepsilon$  est de divergence horizontale nulle,

$$\|f_\varepsilon\|_{H_x^{-1}} \leq \|\partial^\alpha (v_\varepsilon \otimes v_\varepsilon)\|_{L_x^2} \lesssim \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \|\partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}} \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}$$

ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+, H_x^{-1})}^2(z) dz \lesssim \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}(t, z) \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}(t, z) dt \right)^2 dz.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}(t, z) \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon(t, \cdot, z)\|_{\dot{H}_x^{1/2}}(t, z) dt \right)^2 dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2(t, z) dt \right) \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon(t, \cdot, z)\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2 dt \right) dz \\ &\leq \sup_z \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\nabla_x \partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{-1/2}}^2 dt \right) \times \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_x^2 \dot{H}_x^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}^2. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 8.3, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\partial^\beta v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}(t, z) \|\partial^{\alpha-\beta} v_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}(t, z) dt \right)^2 dz \lesssim \varepsilon^{2\beta_z} \varepsilon^{2(\alpha_z - \beta_z) - 1} = \varepsilon^{2\alpha_z - 1}.$$

Par conséquent,

$$\|\partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))}^2 \lesssim \|\partial^\alpha v_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{-1}(\mathbb{R}^2)}^2 + \varepsilon^{2\alpha_z - 1}$$

et on peut conclure grâce à la proposition 8.2 sur les données initiales.  $\square$

Les deux propositions précédentes peuvent se résumer ainsi :

**COROLLAIRE 8.5.** *Pour tout réel positif  $s$  et pour tout triplet  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ , la famille  $(\varepsilon^{1/2 - \alpha_z} \partial^\alpha v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))$  et pour tout réel  $s \geq -1$ , la famille  $(\varepsilon^{-\alpha_z} \partial^\alpha v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  l'est dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))$ .*

### 8.1.2. Estimations de $(w_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ .

Comme pour l'estimation de la famille  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ , on va effectuer des estimations d'énergie sur la famille  $(w_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  mais il va falloir traiter différemment les composantes horizontales et verticale car elles ne sont pas de même taille. En effet, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , la donnée initiale  $w_{\varepsilon,0}$  est telle que pour tout élément  $\xi$  de son spectre,

$$|\xi_z| \leq C\varepsilon |\xi_x| \quad \text{et} \quad |\widehat{w_{\varepsilon,0}^x}(\xi)| \leq C\varepsilon |\widehat{w_{\varepsilon,0}^z}(\xi)|$$

ce qui motive la définition suivante.

**DÉFINITION 8.6.** Pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , on pose

$$W_\varepsilon = \left( \frac{w_\varepsilon^x}{\varepsilon}, w_\varepsilon^z \right) (\cdot, \cdot, \varepsilon^{-1} \cdot)$$

qui est solution de

$$(C_\varepsilon) : \begin{cases} \partial_t W_\varepsilon + V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon - \Delta_x W_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_z^2 W_\varepsilon = -(\nabla_x Q_\varepsilon, \varepsilon^2 \partial_z Q_\varepsilon) \\ \operatorname{div} W_\varepsilon = 0 \\ W_\varepsilon(0, \cdot) = W_{0,\varepsilon} \end{cases}$$

où

$$V_\varepsilon = v_\varepsilon(\cdot, \cdot, \varepsilon^{-1} \cdot) \quad \text{et} \quad Q_\varepsilon = \varepsilon^{-1} q_\varepsilon^2(\cdot, \cdot, \varepsilon^{-1} \cdot).$$

Commençons par estimer les données initiales  $(W_{\varepsilon,0})_{\varepsilon > 0}$ .

**PROPOSITION 8.7.** *Sous les hypothèses du théorème 7.2, pour tout réel  $s \geq -1$ , la famille  $(W_{\varepsilon,0})_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Par propriété de dilatation, la définition de  $W_{\varepsilon,0}$  implique que

$$\|W_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{\|w_{\varepsilon,0}^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}}{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \|w_{\varepsilon,0}^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}.$$

Comme  $|\widehat{w_{\varepsilon,0}^x}| \leq C\varepsilon |\widehat{w_{\varepsilon,0}^z}|$ , on en déduit que

$$\|W_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \lesssim \sqrt{\varepsilon} \|w_{\varepsilon,0}^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

On va maintenant suivre un raisonnement analogue à celui fait pour l'estimation de la famille  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  et semblable à celui développé dans [5].

PROPOSITION 8.8. *Sous les hypothèses du théorème 7.2, pour tout réel  $s > -1$  et pour tout triplet d'entiers  $\alpha \in \mathbb{N}^3$ , la famille  $(\partial^\alpha W_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))$  et la famille  $(\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  l'est dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))$ .*

DÉMONSTRATION. On peut comme précédemment se ramener à  $s \in ]-1, 1[$  et démontrer ce résultat par récurrence sur  $\alpha$ .

- Une estimation d'énergie conduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_z W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 \\ = -\langle V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s} - \langle \nabla_x Q_\varepsilon, W_\varepsilon^x \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s} - \langle \varepsilon^2 \partial_z Q_\varepsilon, W_\varepsilon^z \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 8.14, on estime le terme non linéaire par

$$\begin{aligned} \langle V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} &\lesssim \|\nabla_x V_\varepsilon\|_{L_x^2} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \|W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \\ &\leq \frac{1}{4} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + C \|\nabla_x V_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 \|W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + \frac{3}{4} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_z W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 \\ \leq C \|\nabla_x V_\varepsilon\|_{L_x^\infty L_x^2}^2 \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 - \langle \nabla_x Q_\varepsilon, W_\varepsilon^x \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s} - \langle \varepsilon^2 \partial_z Q_\varepsilon, W_\varepsilon^z \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s}. \end{aligned}$$

Dans l'estimation de la famille  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  de la proposition 8.3, les deux derniers termes n'apparaissent pas grâce à la condition de divergence horizontale nulle. Ici,  $W_\varepsilon$  est de divergence nulle ce qui n'implique pas une divergence horizontale et verticale nulles mais simplement une relation entre elles. En particulier,

$$-\langle \nabla_x Q_\varepsilon, W_\varepsilon^x \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s} - \langle \varepsilon^2 \partial_z Q_\varepsilon, W_\varepsilon^z \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s} = (\varepsilon^2 - 1) \langle \nabla_x Q_\varepsilon, W_\varepsilon^x \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s}.$$

On définit donc

$$(*) := \langle \nabla_x Q_\varepsilon, W_\varepsilon^x \rangle_{L_z^2 \dot{H}_x^s}$$

et on va prouver que cette quantité peut être estimée par

$$|(*)| \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_\varepsilon \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2$$

où  $C_\varepsilon$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$  indépendamment de  $\varepsilon$ , ce qui permettra d'obtenir

$$\frac{d}{dt} \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_z W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 \lesssim C_\varepsilon \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2$$

puis un lemme de Gronwall conduira à

$$\|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2(t) + \int_0^t \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2(t') dt' \lesssim \|W_{\varepsilon,0}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

Il suffira alors d'utiliser la proposition 8.7 pour conclure.

- Il reste à prouver l'estimation sur la quantité  $(*)$ .

Pour tout réel  $r$ , on a

$$|(*)| \leq \|\nabla_x Q_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^r} \|W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{2s-r}}$$

Pour estimer le terme faisant intervenir la pression, on va utiliser le lien entre  $W_\varepsilon^x$  et  $\nabla_x Q_\varepsilon$  que l'on obtient grâce à la nullité de la divergence qui se traduit par

$$\operatorname{div}(V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon) = -\Delta_x Q_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_z^2 Q_\varepsilon.$$

Pour cela, on définit  $N_\varepsilon := V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon^x + \partial_z(W_\varepsilon^z V_\varepsilon)$  de sorte que

$$\operatorname{div}(V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon) = \operatorname{div}_x(N_\varepsilon).$$

En effet, comme  $V_\varepsilon$  est de divergence horizontale nulle,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon) &= \operatorname{div}_x(V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon^x) + \partial_z V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon^z \\ &= \operatorname{div}_x(V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon^x) + \partial_z \operatorname{div}_x(V_\varepsilon W_\varepsilon^z) = \operatorname{div}_x(N_\varepsilon). \end{aligned}$$

En considérant  $\langle \operatorname{div}_x(N_\varepsilon), Q_\varepsilon \rangle_{L^2 \dot{H}_x^r(\mathbb{R}^3)}$ , pour tout réel  $r$ , on obtient

$$\varepsilon^2 \|\partial_z Q_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r}^2 + \|\nabla_x Q_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r}^2 \leq \|N_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} \|\nabla_x Q_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r}$$

i.e.

$$\|\nabla_x Q_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} \leq \|N_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r}.$$

Ainsi, pour tout réel  $r$ ,

$$|(*)| \leq \|N_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} \|W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^{2s-r}}.$$

On peut alors estimer  $\|N_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r}$  par

$$\begin{aligned} \|N_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} &\leq \|V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} + \|\partial_z(W_\varepsilon^z V_\varepsilon)\|_{L^2 \dot{H}_x^r} \\ &\leq \|V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} + \|W_\varepsilon^z \partial_z V_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} + \|V_\varepsilon \operatorname{div}_x W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^r}. \end{aligned}$$

Grâce à la loi proposition 8.13, si  $-1 < r < 0$  alors en prenant  $(s_1, s_2, d) = (1/2, r + 1/2, 2)$ , on obtient

$$\|V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} + \|V_\varepsilon \operatorname{div}_x W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^r} \lesssim \|V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{r+1/2}}$$

et en prenant  $(s_1, s_2, d) = (0, r + 1, 2)$ , on a

$$\|W_\varepsilon^z \partial_z V_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} \lesssim \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2} \|W_\varepsilon^z\|_{L^2 \dot{H}_x^{r+1}}.$$

En particulier, si  $-1 < r < 0$ ,

$$\|N_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^r} \lesssim \|V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{r+1/2}} + \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2} \|W_\varepsilon^z\|_{L^2 \dot{H}_x^{r+1}}$$

ce qui va permettre de traiter le cas où  $s$  est positif.

◦ Si  $0 < s < 1$ , on prend  $r = s - 1$  ce qui conduit à

$$|(*)| \lesssim \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^s} \left( \|V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{s-1/2}} + \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2} \|W_\varepsilon^z\|_{L^2 \dot{H}_x^s} \right).$$

puis

$$|(*)| \lesssim \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^s} \|V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{s-1/2}} + \frac{1}{8} \|\nabla W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \|W_\varepsilon^z\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

Par interpolation, on obtient

$$\|V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{s-1/2}} \lesssim \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^{1/2} \|V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^{1/2} \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^{1/2} \|W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^{1/2}.$$

En utilisant l'inégalité de convexité  $ab \leq \frac{3}{4}a^{4/3} + \frac{1}{4}b^4$ , on a alors

$$\|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s} \|V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{s-1/2}} \leq \frac{1}{8} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C \|V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \|W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

Dans ce cas, il suffit donc de prendre

$$C_\varepsilon = C \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \left( 1 + \|V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \right)$$

pour obtenir

$$|(*)| \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_\varepsilon \|W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

◦ Si  $s = 0$ , on prend  $r = -1/2$  ce qui donne

$$|(*)| \lesssim \|W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^{1/2}} \left( \|V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2} + \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2} \|W_\varepsilon^z\|_{L^2 \dot{H}_x^{1/2}} \right)$$

puis par interpolation,

$$|(*)| \lesssim \|W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{3/2} \|V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^{1/2} \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^{1/2} + \|W_\varepsilon^x\|_{L^2} \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2} \|\nabla V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}.$$

En utilisant l'inégalité de convexité  $ab \leq \frac{3}{4}a^{4/3} + \frac{1}{4}b^4$ , on a alors

$$\|W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{3/2} \|V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^{1/2} \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^{1/2} \leq \frac{1}{8} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|W_\varepsilon^x\|_{L^2}^2 \|V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2$$

et

$$\|W_\varepsilon^x\|_{L^2} \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2} \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2} \leq \frac{1}{8} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|W_\varepsilon^x\|_{L^2}^2 \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2.$$

Ainsi, dans ce cas aussi, il suffit de prendre

$$C_\varepsilon = C \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \left(1 + \|V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2\right)$$

pour obtenir

$$|(*)| \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_\varepsilon \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2$$

Lorsque  $s$  est négatif, il faut procéder autrement.

◦ Si  $-1 < s < 0$ , on écrit

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_x|^{2s} \xi_x \widehat{Q}_\varepsilon(t, \xi) \widehat{W}_\varepsilon^x(t, \xi) d\xi.$$

Or,  $\operatorname{div}_x(N_\varepsilon) = -\Delta_x Q_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_z^2 Q_\varepsilon$  avec  $N_\varepsilon = V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon + \partial_z(W_\varepsilon^z V_\varepsilon)$  de sorte que

$$\xi_x \cdot \widehat{N}_\varepsilon(t, \xi) = -(\xi_x^2 + \varepsilon^2 \xi_z^2) \widehat{Q}_\varepsilon(t, \xi).$$

Ainsi,

$$(*) = - \int_{\mathbb{R}^3} \xi_x^{2s} \xi_x \frac{\xi_x \cdot \widehat{N}_\varepsilon(t, \xi)}{(\xi_x^2 + \varepsilon^2 \xi_z^2)} \widehat{W}_\varepsilon^x(t, \xi) d\xi.$$

Grâce à la condition de divergence nulle de  $W_\varepsilon$ , on a

$$N_\varepsilon = V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon^x - V_\varepsilon \operatorname{div}_x W_\varepsilon^x + W_\varepsilon^z \partial_z V_\varepsilon.$$

On décompose alors  $N_\varepsilon$  en  $N_{\varepsilon,1} + N_{\varepsilon,2}$  avec  $N_{\varepsilon,1}$  faisant intervenir des termes de la forme  $\partial_x(V_{\varepsilon,i} W_{\varepsilon,j})$  et  $N_{\varepsilon,2}$  faisant intervenir des termes de la forme  $\partial_k V_{\varepsilon,i} W_{\varepsilon,j}$ .

Par suite,

$$|(*)| \leq \|N_{\varepsilon,1}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{t_1}} \|W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{2s-t_1}} + \|N_{\varepsilon,2}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{t_2}} \|W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{2s-t_2}}.$$

Pour le premier terme, on prend  $t_1 = s - 1$  et la loi de produit de la proposition 8.13 pour obtenir

$$\|N_{\varepsilon,1}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s-1}} \lesssim \|V_\varepsilon W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \lesssim \|V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s+1/2}}$$

et pour le second terme, on prend  $t_2 = s$  et la loi de produit pour obtenir

$$\|N_{\varepsilon,2}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \lesssim \|\nabla V_\varepsilon W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \lesssim \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L^2} \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s+1}}.$$

On a majoré le terme  $(*)$  par

$$\|V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s+1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} + \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L^2} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \|W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}$$

Par interpolation

$$\|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s+1/2}} \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \lesssim \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^{1/2} \|\nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^{3/2}$$

donc, en utilisant les inégalités de convexité  $ab \leq \frac{3}{4}a^{4/3} + \frac{1}{4}b^4$  et  $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ , on en déduit que la fonction

$$C_\varepsilon \lesssim \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \left(1 + \|V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2\right)$$

permet d'obtenir

$$|(*)| \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_\varepsilon \|W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

• Pour poursuivre la récurrence, on suppose le résultat vrai pour les triplets d'entiers  $\beta$  tels que  $|\beta| \leq k$  et on considère un triplet d'entiers  $\alpha$  tel que  $|\alpha| = k + 1$ . Pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , l'équation vérifiée par  $\partial^\alpha W_\varepsilon$  est

$$\partial_t \partial^\alpha W_\varepsilon + \partial^\alpha (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon) - \Delta_x \partial^\alpha W_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_z^2 \partial^\alpha W_\varepsilon = -(\nabla_x \partial^\alpha Q_\varepsilon, \varepsilon^2 \partial_z \partial^\alpha Q_\varepsilon).$$

Par estimation d'énergie, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + \langle \partial^\alpha (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon), \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} + \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 \\ \leq - \langle \nabla_x \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^x \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} - \varepsilon^2 \langle \partial_z \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^z \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s}. \end{aligned}$$

Le terme  $\langle \partial^\alpha (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon), \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s}$  est décomposé en deux contributions

$$\langle V_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} + \sum_{\beta < \alpha} C_\beta \langle \partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\beta W_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s}.$$

Pour le premier terme,

$$\begin{aligned} \langle V_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} &\lesssim \|\nabla_x V_\varepsilon\|_{L_x^2} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \\ &\leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 + C \|\nabla_x V_\varepsilon\|_{L_x^2}^2 \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s}^2 \end{aligned}$$

donc

$$\langle V_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C \|\nabla_x V_\varepsilon\|_{L_x^\infty L_x^2}^2 \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

Pour les autres termes, comme  $V_\varepsilon$  est de divergence horizontale nulle, grâce à la loi produit de la proposition 8.13,

$$\begin{aligned} \langle \partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\beta W_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} &= \langle \operatorname{div}_x (\partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon \otimes \partial^\beta W_\varepsilon), \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{\dot{H}_x^s} \\ &\lesssim \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \|\partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon \otimes \partial^\beta W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \\ &\lesssim \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^s} \|\partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s-1)/2}} \|\partial^\beta W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{(s+1)/2}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\langle \partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^\beta W_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C \sum_{\beta < \alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon\|_{L_x^\infty \dot{H}_x^{(s-1)/2}}^2 \|\partial^\beta W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{(s+1)/2}}^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_z \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 \\ \leq - \langle \nabla_x \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^x \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} - \varepsilon^2 \langle \partial_z \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^z \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} + C \sum_{\beta < \alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon\|_{L_x^\infty \dot{H}_x^{(s-1)/2}}^2 \|\partial^\beta W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{(s+1)/2}}^2. \end{aligned}$$

Comme précédemment, la nullité de la divergence implique que

$$- \langle \nabla_x \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^x \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} - \langle \varepsilon^2 \partial_z \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^z \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} = (\varepsilon^2 - 1) \langle \nabla_x \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^x \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s}.$$

et on va montrer que

$$(*)_\alpha := \left| \langle \nabla_x \partial^\alpha Q_\varepsilon, \partial^\alpha W_\varepsilon^x \rangle_{L^2 \dot{H}_x^s} \right| \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_{1,\varepsilon} + C_{2,\varepsilon} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2$$

avec  $C_{1,\varepsilon}$  et  $C_{2,\varepsilon}$  bornées dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$  indépendamment de  $\varepsilon$ .

Or, par hypothèse de récurrence

$$\sum_{\beta < \alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} V_\varepsilon\|_{L_x^\infty \dot{H}_x^{(s-1)/2}}^2 \|\partial^\beta W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{(s+1)/2}}^2$$

est borné dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$  indépendamment de  $\varepsilon$  donc en modifiant  $C_{1,\varepsilon}$ , on aura

$$\frac{d}{dt} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 \leq C_{1,\varepsilon} + C_{2,\varepsilon} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

Par le lemme de Gronwall, on en déduira que

$$\|\partial^\alpha W_\varepsilon(t)\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + \int_0^t \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2(t') dt' \lesssim \|\partial^\alpha W_{\varepsilon,0}\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2$$

et l'utilisation de la proposition 8.7 sur les données initiales permettra de conclure la récurrence.

- Montrons l'estimation annoncée sur le terme de pression.

On va adapter ce qui a été fait dans le cas où  $\alpha$  était nul. Pour cela, on introduit

$$N_{\varepsilon, \alpha, \beta} := \partial^\beta V_\varepsilon \cdot \nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^x + \partial_z (\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z \partial^\beta V_\varepsilon)$$

de sorte que

$$(*)_{\alpha} \lesssim \sum_{\beta \leq \alpha} \|N_{\varepsilon, \alpha, \beta}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{r\beta}} \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x(t, \cdot)\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{2s-r\beta}}$$

ce qui incite à définir

$$(*)_{\alpha, \beta} := \|N_{\varepsilon, \alpha, \beta}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{r\beta}} \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x(t, \cdot)\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{2s-r\beta}}.$$

Le terme  $(*)_{\alpha, 0}$  se traite comme dans le cas où  $\alpha = 0$ , en changeant simplement  $W_\varepsilon^x$  en  $\partial^\alpha W_\varepsilon^x$ . Ainsi, on obtient

$$\left| (*)_{\alpha, 0} \right| \leq \frac{1}{8} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + C \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 \|\nabla_x \partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \left(1 + \|\partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2\right).$$

Pour les autres termes en réitérant le raisonnement détaillé dans le cas où  $\alpha = 0$ , on obtient les estimations suivantes.

- Si  $0 < s < 1$ ,

$$\begin{aligned} \left| (*)_{\alpha, \beta} \right| &\lesssim \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s-1/2}} \\ &\quad + \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2} \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \left| (*)_{\alpha, \beta} \right| &\leq \frac{1}{8} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}^2 + C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}}^2 \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s-1/2}}^2 \\ &\quad + C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on prend

$$C_{1, \varepsilon} = C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}}^2 \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s-1/2}}^2 + C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2$$

et

$$C_{2, \varepsilon} = C \|\nabla_x \partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3)}^2 \left(1 + \|\partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3)}^2\right)$$

pour obtenir

$$(*)_{\alpha} \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_{1, \varepsilon} + C_{2, \varepsilon} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

La famille  $(C_{1, \varepsilon})_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$ . En effet, pour tout triplet  $\beta$ , les familles  $\left(\|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}}^2\right)_{\varepsilon > 0}$

et  $\left(\|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2}^2\right)_{\varepsilon > 0}$  sont respectivement bornées dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+)$  et  $L^1(\mathbb{R}^+)$  et, par hypothèse

de récurrence, pour tout triplet  $\beta$  vérifiant  $0 < \beta \leq \alpha$ , les familles  $\left(\|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{s-1/2}}^2\right)_{\varepsilon > 0}$

et  $\left(\|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}^2\right)_{\varepsilon > 0}$  sont respectivement bornées dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$  et  $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ . Pour les mêmes raisons, la famille  $(C_{2, \varepsilon})_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$ .

- Si  $s = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \left| (*)_{\alpha, \beta} \right| &\lesssim \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\quad + \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2} \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \end{aligned}$$

et par interpolation

$$\begin{aligned} \left| (*)_{\alpha, \beta} \right| &\lesssim \|\partial^\alpha \nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{1/2} \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{1/2} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\quad + \|\partial^\alpha \nabla_x W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{1/2} \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L_z^\infty L_x^2} \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de convexité  $abc \leq \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{2}c^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\beta < \alpha} \left| (*_{\alpha, \beta} \right| &\leq \frac{1}{8} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \sum_{\beta < \alpha} \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L^2}^2 \left( \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}}^4 + \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^4 \right) \\ &+ C \sum_{\beta < \alpha} \left( \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L^2 \dot{H}_x^{-1/2}}^2 \right). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on prend

$$C_{1,\varepsilon} = C \sum_{\beta < \alpha} \left( \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon^z\|_{L^2 \dot{H}_x^{-1/2}}^2 \right)$$

et

$$C_{2,\varepsilon} = C \|\nabla_x \partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \left( 1 + \|\partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \right) + C \sum_{\beta < \alpha} \left( \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}}^4 + \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^4 \right)$$

pour obtenir

$$(*_{\alpha}) \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_{1,\varepsilon} + C_{2,\varepsilon} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

Comme précédemment, les familles  $(C_{1,\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$  et  $(C_{2,\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$  sont bornées dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$  du fait des estimations de la proposition 8.5 et de l'hypothèse de récurrence.

o si  $-1 < s < 0$ , alors

$$\left| (*_{\alpha, \beta} \right| \lesssim \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}} \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{s+1/2}} \|\nabla \partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^s} + \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty L^2} \|\nabla \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s} \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^s}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{\beta < \alpha} \left| (*_{\alpha, \beta} \right| &\leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + \sum_{\beta < \alpha} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}}^2 \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{s+1/2}}^2 \\ &+ \sum_{\beta < \alpha} \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty L^2} \|\nabla \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s} \|\partial^\alpha W_\varepsilon^x\|_{L^2 \dot{H}_x^s}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on prend

$$C_{1,\varepsilon} = C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty \dot{H}_x^{1/2}}^2 \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^{s+1/2}}^2$$

et

$$C_{2,\varepsilon} = C \|\nabla_x \partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \left( 1 + \|\partial^\alpha V_\varepsilon\|_{L^\infty L_x^2}^2 \right) + C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|\nabla \partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^\infty L^2} \|\nabla \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}$$

pour obtenir

$$(*_{\alpha}) \leq \frac{1}{4} \|\nabla_x \partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2 + C_{1,\varepsilon} + C_{2,\varepsilon} \|\partial^\alpha W_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}_x^s}^2.$$

Comme précédemment, les familles  $(C_{1,\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$  et  $(C_{2,\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$  sont bornées dans  $L^1(\mathbb{R}^+)$  du fait des estimations de la proposition 8.5 et de l'hypothèse de récurrence.

Dans tous les cas, on a l'estimation annoncée ce qui conclut la récurrence.  $\square$

**PROPOSITION 8.9.** *Sous les hypothèses du théorème 7.2, pour tout entier  $s \geq -1$  et pour tout triplet d'entiers  $\alpha$ , la famille  $(\partial^\alpha W_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$ .*

**DÉMONSTRATION.** En suivant le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 8.4, il faut montrer que pour tout triplet d'entiers  $\alpha$  la fonction

$$f_{\varepsilon, \alpha} := \partial^\alpha (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon + (\nabla_x Q_\varepsilon, \varepsilon^2 \partial_z Q_\varepsilon))$$

est telle que la quantité

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_{\varepsilon, \alpha}\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1})}^2(z) dz$$



soit bornée indépendamment de  $\varepsilon$ .

Comme  $V_\varepsilon$  est de divergence horizontale nulle,

$$\|\partial^\alpha (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon)\|_{\dot{H}_x^{-1}} \leq \|\partial^\alpha (V_\varepsilon \otimes W_\varepsilon)\|_{L_x^2} \lesssim \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}} \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}.$$

Ainsi, par inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \|\partial^\alpha (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1})}^2(z) dz \\ & \leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2(t, z) dt \right) \left( \int_{\mathbb{R}^+} \|\partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2(t, z) dt \right) dz \\ & \leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \|\partial^\beta V_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2})}^2 \|\nabla_x \partial^{\alpha-\beta} W_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{-1/2})}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à traiter la partie faisant intervenir la pression.

Comme  $V_\varepsilon$  est de divergence horizontale nulle,

$$\operatorname{div} (\nabla_x Q_\varepsilon, \varepsilon^2 \partial_z Q_\varepsilon) = \operatorname{div}_x (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon^x + \partial_z (W_\varepsilon^z V_\varepsilon))$$

donc

$$\|\partial^\alpha (\nabla_x Q_\varepsilon, \varepsilon^2 \partial_z Q_\varepsilon)\|_{\dot{H}_x^{-1}} \leq \|\partial^\alpha (V_\varepsilon \cdot \nabla_x W_\varepsilon^x + \partial_z (W_\varepsilon^z V_\varepsilon))\|_{\dot{H}_x^{-1}}$$

ce qui se traite de la même manière.  $\square$

Les deux propositions précédentes se résument en :

**COROLLAIRE 8.10.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  et pour tout entier  $s \geq 0$ , la famille  $(\partial^\alpha W_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))$ .*

Du fait de la définition 8.6 de  $W_\varepsilon$ , ce résultat se traduit par

**COROLLAIRE 8.11.** *Pour tout triplet d'entiers  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ , et pour tout entier  $s \geq 0$ , la famille  $(\varepsilon^{1/2-\alpha_z} \partial^\alpha w_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3))$ .*

En utilisant la proposition 8.16 et les inclusions de Sobolev, on en déduit le lemme 7.8.

## 8.2. Démonstrations des lemmes 7.9 et 7.10

### 8.2.1. Démonstrations du lemme 7.9.

Pour estimer la force extérieure  $F_\varepsilon^1$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ , on va la décomposer en plusieurs contributions

$$F_{\varepsilon,1}^1 := (\partial_z^2 v_\varepsilon, 0), \quad F_{\varepsilon,2}^1 := (0, -\partial_z q_\varepsilon^1), \quad F_{\varepsilon,3}^1 := w_\varepsilon^x \cdot \nabla_x v_\varepsilon^{app} \text{ et } F_{\varepsilon,4}^1 := w_\varepsilon^z \partial_z v_\varepsilon^{app}.$$

- Pour la première contribution, on a, grâce au lemme 8.2,

$$\|F_{\varepsilon,1}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} = \|\partial_z^2 v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} \leq \|\partial_z v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{1/2})}.$$

Grâce aux estimations aux propositions 8.3 et 8.4, on a donc

$$\|F_{\varepsilon,1}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})}^2 \leq \|\partial_z v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2)} \|\nabla \partial_z v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2)} \lesssim \varepsilon.$$

- Comme  $v_\varepsilon$  est de divergence nulle,  $v_\varepsilon$  et  $q_\varepsilon$  sont liés et on a

$$\|F_{\varepsilon,2}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} = \|\partial_z q_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} \lesssim \sum_{i,j} \|v_{\varepsilon,i} \partial_z v_{\varepsilon,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})}$$

ce qui grâce au lemme 8.18 et aux estimations de la proposition 8.3, se traduit par

$$\begin{aligned} \|F_{\varepsilon,2}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} &\lesssim \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \|\partial_z v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})} \\ &\lesssim \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \|\nabla_x \partial_z v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{-3/4})} \\ &\lesssim \varepsilon^{1/2} \end{aligned}$$

- Grâce au lemme 8.18,

$$\begin{aligned} \|F_{\varepsilon,3}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} &= \|w_\varepsilon^x \cdot \nabla_x v_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} \\ &\leq \|w_\varepsilon^x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \|\nabla_x v_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 7.8, on obtient

$$\|w_\varepsilon^x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \leq \|w_\varepsilon^x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2} \|\partial_z w_\varepsilon^x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2}.$$

Par définition,

$$w_\varepsilon^x = \varepsilon W_\varepsilon^x(\cdot, \varepsilon.)$$

donc

$$\|w_\varepsilon^x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \leq \varepsilon \|W_\varepsilon^x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2} \|\partial_z W_\varepsilon^x\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2} \lesssim \varepsilon$$

et par suite

$$\|F_{\varepsilon,3}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} \lesssim \varepsilon^{1/2}.$$

- Grâce au lemme 8.18, on obtient

$$\begin{aligned} \|F_{\varepsilon,4}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} &= \|w_\varepsilon^z \partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} \\ &\leq \|w_\varepsilon^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \|\partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})} \\ &\leq \|w_\varepsilon^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \|\nabla_x \partial_z v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{-3/4})}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 7.8 et la proposition 8.3, on a

$$\|F_{\varepsilon,4}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} \lesssim \varepsilon^{1/2} \|w_\varepsilon^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2} \|\partial_z w_\varepsilon^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2}.$$

Par définition,

$$w_\varepsilon^z = W_\varepsilon^z(\cdot, \varepsilon.)$$

donc

$$\|w_\varepsilon^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4})} \leq \|W_\varepsilon^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2} \|\partial_z W_\varepsilon^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4})}^{1/2}$$

et par suite

$$\|F_{\varepsilon,4}^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2})} \lesssim \varepsilon^{1/2}.$$

On a donc estimé les différentes composantes de  $F_\varepsilon^1$  ce qui conclut la démonstration du lemme 7.9.

### 8.2.2. Démonstration du lemme 7.10.

Afin d'estimer  $F_\varepsilon^2$ , on va commencer par l'approximer puis traiter cette approximation.

- D'après [12],

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} = 0$$

ce qui permet d'approximer  $u$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$ . Ainsi pour tout  $\eta$  strictement positif, il existe un entier  $N$ , des réels  $(t_j)_{0 \leq j \leq N}$  et des fonctions régulières  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$  de support compact et de divergence nulle tels que

$$\widetilde{u}_\eta(t, \cdot) := \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j]}(t) \phi_j(\cdot)$$

approxime  $u$  dans  $L^\infty \left( \mathbb{R}^+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \right)$  au sens où

$$\|u - \widetilde{u}_\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))} \leq \eta.$$

On va donc décomposer  $F_\varepsilon^2$  en deux contributions

$$F_\varepsilon^2 = F_{\varepsilon, \eta}^2 + (\widetilde{u}_\eta - u) \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla (\widetilde{u}_\eta - u)$$

où  $F_{\varepsilon, \eta}^2 = \widetilde{u}_\eta \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla \widetilde{u}_\eta$ .

Comme  $v_\varepsilon^{app}$  est de divergence nulle,

$$F_\varepsilon^2 - F_{\varepsilon, \eta}^2 = \operatorname{div}((\widetilde{u}_\eta - u) \otimes v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \otimes (\widetilde{u}_\eta - u)).$$

Grâce au lemme 8.19, on a donc

$$\|F_\varepsilon^2 - F_{\varepsilon, \eta}^2\|_{\dot{H}^{-1/2}} \lesssim \|\widetilde{u}_\eta - u\|_{\dot{H}^{1/2}} \left( \|\nabla_x v_\varepsilon^{app}\|_{L_z^\infty L_x^2} + \|v_\varepsilon^{app}\|_{L^\infty} + \|\partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \right)$$

et l'étude de  $v_\varepsilon^{app}$  via la proposition 8.5 permet d'obtenir

$$\|F_\varepsilon^2 - F_{\varepsilon, \eta}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \lesssim \eta.$$

• Il ne reste donc plus qu'à estimer  $F_{\varepsilon, \eta}^2 = \widetilde{u}_\eta \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla \widetilde{u}_\eta$  avec  $\widetilde{u}_\eta$  à support compact. Commençons par le terme faisant intervenir la dérivée horizontale de  $v_\varepsilon^{app}$ . Grâce à la loi de produit de la proposition 8.13 et aux estimations sur  $v_\varepsilon^{app}$ ,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}_\eta^z \partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} &\lesssim \|\widetilde{u}_\eta^z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))} \|\partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))} \\ &\lesssim \|\widetilde{u}_\eta^z\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme  $\widetilde{u}_\eta$  appartient à  $L^\infty \left( \mathbb{R}^+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \right)$ , on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\widetilde{u}_\eta^z \partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

Pour les termes restants, on va utiliser le lemme 8.19. On a

$$\|\widetilde{u}_\eta^x \cdot \nabla_x v_\varepsilon^{app}\|_{\dot{H}^{-1/2}} \lesssim \left\| \widetilde{u}_\eta^h \right\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} + \|z \widetilde{u}_\eta^x\|_{L^2} \|\partial_z \nabla_x v_\varepsilon^{app}\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}}$$

et

$$\|v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla \widetilde{u}_\eta\|_{\dot{H}^{-1/2}} \lesssim \|\nabla \widetilde{u}_\eta\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \|v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} + \|z \nabla \widetilde{u}_\eta\|_{L^2} \|\partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}}.$$

Comme  $\widetilde{u}_\eta$  est à support compact temporellement et spatialement, il suffit d'estimer les termes faisant intervenir  $v_\varepsilon^{app}$ . Les estimations sur  $v_\varepsilon^{app}$  impliquent que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \|z \widetilde{u}_\eta^x\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\partial_z \nabla_x v_\varepsilon^{app}\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \|z \nabla \widetilde{u}_\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\partial_z v_\varepsilon^{app}\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 = 0$$

Il suffit donc d'estimer les termes

$$\|\nabla_x v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))} + \|v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))}.$$

C'est l'objet de la proposition suivante qui permettra de conclure la démonstration du théorème 7.3.

**PROPOSITION 8.12.** *Pour tout réel  $\delta$  strictement positif, il existe des constantes  $\varepsilon_0(\delta)$  et  $c_0(\delta)$  telles que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\delta)$  et si  $\|u_{\varepsilon, 0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \leq c_0(\delta)$  alors*

$$\|\nabla_x v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))} + \|v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))} \leq \delta.$$

DÉMONSTRATION. On va décomposer le terme à estimer

- Tout d'abord, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , une estimation d'énergie dans  $L_x^2$  conduit à

$$\frac{1}{2} \|v_\varepsilon(t, \cdot, 0)\|_{L_x^2}^2 + \int_0^t \|\nabla_x v_\varepsilon(t', \cdot, 0)\|_{L_x^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|v_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2}^2.$$

Ainsi, pour tout  $\delta$  donné, il existe  $c_0(\delta)$  tel que si  $\|v_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \leq c_0(\delta)$  alors

$$\|\nabla_x v_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))} + \|v_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))} \leq \delta.$$

D'autre part, comme les familles  $(W_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  et  $(\nabla_x W_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  sont respectivement bornées dans les espaces  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3))$  et  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3))$  par définition de  $W_\varepsilon$ ,

$$\|\nabla_x w_\varepsilon^x(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))} + \|w_\varepsilon^x(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_x^2(\mathbb{R}^2))} \lesssim \varepsilon.$$

Il ne reste plus qu'à traiter la composante verticale de  $w_\varepsilon$ .

- Par interpolation, comme les familles  $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  et  $(\nabla_x w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  sont bornées respectivement dans les espaces  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$  et  $L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ , il suffit de montrer que pour tout réel  $\delta$  strictement positif, il existe  $\varepsilon_0(\delta)$  et  $c_0(\delta)$  tels que si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\delta)$  et si  $\|u_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \leq c_0(\delta)$  alors

$$\|\nabla_x w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^2))} + \|w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^2))} \leq \delta.$$

Pour cela, pour tout réel positif  $\varepsilon$ , on se ramène à l'équation vérifiée par  $w_\varepsilon^z$

$$\begin{cases} \partial_t w_\varepsilon^z + v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon^z - \Delta_x w_\varepsilon^z &= \varepsilon^2 \partial_z^2 w_\varepsilon^z - \varepsilon^2 \partial_z q_\varepsilon^2 \\ w_\varepsilon^z(0, \cdot) &= w_{\varepsilon,0}^z. \end{cases}$$

Si on pose

$$R_\varepsilon := \partial_z^2 w_\varepsilon^z - \partial_z q_\varepsilon^2$$

alors une estimation en norme  $\dot{H}_x^{1/2}$  conduit à :

$$\begin{aligned} & \|w_\varepsilon^z(t, 0)\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2 + \int_0^t \|\nabla_x w_\varepsilon^z(t', 0)\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2 dt' \\ & \lesssim \|w_{\varepsilon,0}^z(\cdot, 0)\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2 + \|\varepsilon^2 R_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2})}^2 + \int_0^t \left| \langle v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon^z, w_\varepsilon^z \rangle_{\dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^2)}(t', 0) \right| dt'. \end{aligned}$$

D'après la proposition 8.14

$$\left| \langle v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon^z, w_\varepsilon^z \rangle_{\dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^2)} \right| \lesssim \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla_x w_\varepsilon^z\|_{\dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^2)} \|w_\varepsilon^z\|_{\dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^2)}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left| \langle v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon^z, w_\varepsilon^z \rangle_{\dot{H}_x^{1/2}}(t', 0) \right| dt' \\ & \lesssim \|\nabla_x v_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_x^2)} \|\nabla_x w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})} \|w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})} \\ & \lesssim \|v_{\varepsilon,0}\|_{L_x^2} \|\nabla_x w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})} \|w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})} \\ & \lesssim \|v_{\varepsilon,0}\|_{L_x^2} \left( \|\nabla_x w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})}^2 + \|w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})}^2 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe donc une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} & \left(1 - C \|v_0(\cdot, 0)\|_{L_x^2}\right) \|\nabla_x w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})}^2 + \|w_\varepsilon^z(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{1/2})}^2 \\ & \lesssim \|w_{\varepsilon,0}^z(\cdot, 0)\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2 + \varepsilon^2 \|R_\varepsilon(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2})}^2 \\ & \lesssim \|w_{\varepsilon,0}^z(\cdot, 0)\|_{L_x^2} \|w_{\varepsilon,0}^z(\cdot, 0)\|_{\dot{H}_x^1} + \varepsilon^2 \|R_\varepsilon(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2})}^2. \end{aligned}$$

Comme  $(w_{\varepsilon,0})_\varepsilon$  est bornée dans  $L_z^\infty \dot{H}_x^1(\mathbb{R}^3)$ , il ne reste qu'à prouver que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \|R_\varepsilon(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2}(\mathbb{R}^2))} = 0$$

pour conclure la démonstration.

- On va montrer que  $\varepsilon \|R_\varepsilon(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2}(\mathbb{R}^2))}$  est borné indépendamment de  $\varepsilon$ .

On commence par remarquer que  $\partial_z^2 w_\varepsilon^z = -\partial_z \operatorname{div}_x w_\varepsilon^x$  et donc

$$\|\partial_z^2 w_\varepsilon^z(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2})} \leq \|\partial_z \nabla_x w_\varepsilon^x(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2})} \leq \|\partial_z \nabla_x w_\varepsilon^x\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{-1/2})}.$$

Grâce aux propositions 8.16 et 8.11, on a

$$\begin{aligned} \|\partial_z^2 w_\varepsilon^z(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2})}^2 &\leq \|\partial_z \nabla_x w_\varepsilon^x\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{-1/2})} \|\partial_z^2 \nabla_x w_\varepsilon^x\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{-1/2})} \\ &\lesssim \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à traiter le terme faisant intervenir la pression. Pour cela, on utilise la relation

$$-\Delta_x p_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_z^2 p_\varepsilon = \operatorname{div}_x (N_\varepsilon)$$

avec  $N_\varepsilon := v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon + \partial_z (w_\varepsilon^z v_\varepsilon) = v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon + \operatorname{div}_x w_\varepsilon^x v_\varepsilon + w_\varepsilon^z \partial_z v_\varepsilon$  pour avoir l'estimation

$$\varepsilon \|\partial_z p_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H_z^1 \dot{H}_x^{-1/2})} \lesssim \|N_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H_z^1 \dot{H}_x^{-1/2})}.$$

Or, grâce à la loi de produit de la proposition 8.13,

$$\|v_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon + \operatorname{div}_x w_\varepsilon^x v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H_z^1 \dot{H}_x^{-1/2})} \lesssim \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, H_z^1 L_x^2)} \|\nabla_x w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H_z^1 \dot{H}_x^{-1/2})}$$

et

$$\|w_\varepsilon^z \partial_z v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H_z^1 \dot{H}_x^{-1/2})} \lesssim \|\partial_z v_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, H_z^1 L_x^2)} \|\nabla_x w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H_z^1 \dot{H}_x^{-1/2})}.$$

Les estimations précédentes permettent donc d'en déduire que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \|R_\varepsilon(\cdot, \cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}_x^{-1/2}(\mathbb{R}^2))} = 0.$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 8.3. Lemmes calculatoires

Dans cette section, nous énoncerons les lemmes calculatoires utilisés précédemment. Nous les démontrerons ou référerons à des ouvrages contenant leurs preuves.

Commençons par rappeler deux lois de produit issues de [5] dont la démonstration utilise le calcul para différentiel et dont la démonstration est faite dans [1].

**PROPOSITION 8.13.** *Pour tout couple de réels  $(s_1, s_2)$  et tout couple  $(u, v)$  appartenant à l'espace  $\dot{H}^{s_1} \times \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^d)$  avec  $s_1 < d/2$ ,  $s_2 < d/2$  et  $s_1 + s_2 > 0$ ,*

$$\|uv\|_{\dot{H}^{s_1+s_2-d/2}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|u\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^d)}.$$

**PROPOSITION 8.14.** *Si  $s \in ]-d/2, d/2[$  alors pour tout couple de vecteurs  $(a, b)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $a$  soit de divergence nulle, on a l'estimation*

$$\left| \langle a \cdot \nabla b, b \rangle_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \right| \lesssim \|\nabla a\|_{\dot{H}^{d/2-1}(\mathbb{R}^d)} \|\nabla b\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \|b\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

La proposition suivante permet d'estimer une partie du terme non linéaire dans les estimations d'énergie.

**PROPOSITION 8.15.** *Si  $s \in ]-1, 1[$  alors pour tout vecteur  $b$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , on a l'estimation*

$$\left| \langle \partial^\alpha b \cdot \nabla_x b, \partial^\alpha b \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \lesssim \|\nabla_x b\|_{L_x^2} \|\nabla_x \partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^s} \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^s}.$$

DÉMONSTRATION. On utilise les lois de produit de la proposition 8.13. Pour  $s = 0$ , on écrit

$$\left| \langle \partial^\alpha b \cdot \nabla_x b, \partial^\alpha b \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \leq \|\partial^\alpha b \cdot \nabla_x b\|_{\dot{H}_x^{-1/2}} \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^{1/2}}$$

et on utilise la loi de produit avec  $(s_1, s_2, d) = (1/2, 0, 2)$  pour obtenir

$$\left| \langle \partial^\alpha b \cdot \nabla_x b, \partial^\alpha b \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \leq \|\nabla_x b\|_{\dot{H}_x^{1/2}} \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^{1/2}}^2.$$

Pour  $-1 < s < 0$ , on a

$$\left| \langle \partial^\alpha b \cdot \nabla_x b, \partial^\alpha b \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \leq \|\partial^\alpha b \cdot \nabla_x b\|_{\dot{H}_x^s} \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^s}$$

et on utilise la loi de produit avec  $(s_1, s_2, d) = (s+1, 0, 2)$  ce qui conduit à

$$\left| \langle \partial^\alpha b \cdot \nabla_x b, \partial^\alpha b \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \leq \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^{s+1}} \|\nabla_x b\|_{L_x^2} \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^s}.$$

Pour  $0 < s < 1$ , on utilise l'inégalité

$$\left| \langle \partial^\alpha b \cdot \nabla_x b, \partial^\alpha b \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \leq \|\partial^\alpha b \cdot \nabla_x b\|_{\dot{H}_x^{s-1}} \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^{s+1}}$$

et la loi de produit avec  $(s_1, s_2, d) = (s, 0, 2)$  se traduit par

$$\left| \langle \partial^\alpha b \cdot \nabla_x b, \partial^\alpha b \rangle_{\dot{H}_x^s} \right| \leq \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^s} \|\nabla_x b\|_{L_x^2} \|\partial^\alpha b\|_{\dot{H}_x^{s+1}}.$$

□

La proposition suivante permet de passer d'estimations dans  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  à de estimations dans  $L_z^\infty \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$ .

PROPOSITION 8.16. *Si  $f$  et  $\partial_z f$  appartiennent à  $L_z^2 \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  alors  $f$  appartient à  $L_z^\infty \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$  et*

$$\|f\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^s}^2 \leq \|f\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \|\partial_z f\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $g(z) = \|f(\cdot, z)\|_{\dot{H}_x^s}^2$ . On a  $g'(z) = 2 \langle f(\cdot, z), \partial_z f(\cdot, z) \rangle_{\dot{H}_x^s}$ . Comme  $g$  est à valeurs dans  $H^1(\mathbb{R})$  elle s'annule à l'infini. Par conséquent,

$$\sup_z g \leq 2 \|f\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s} \|\partial_z f\|_{L_z^2 \dot{H}_x^s}.$$

Ainsi,  $f$  appartient à  $L_z^\infty \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$ . □

Afin d'obtenir une condition suffisante de globalité pour la solution perturbée, on a besoin du résultat suivant.

PROPOSITION 8.17. *Pour tout couple de vecteurs  $(a, b)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , on a l'estimation*

$$|\langle a \cdot \nabla b, b \rangle_{\dot{H}^{1/2}}| + |\langle b \cdot \nabla a, b \rangle_{\dot{H}^{1/2}}| \lesssim \left( \|a\|_{L^\infty} + \|\nabla a\|_{L_z^\infty L_x^2} \right) \|\nabla b\|_{\dot{H}^{1/2}} \|b\|_{\dot{H}^{1/2}}.$$

DÉMONSTRATION. Pour le premier produit scalaire, on a

$$|\langle a \cdot \nabla b, b \rangle_{\dot{H}^{1/2}}| \lesssim \|a \cdot \nabla b\|_{L^2} \|\nabla b\|_{L^2} \lesssim \|a\|_{L^\infty} \|\nabla b\|_{L^2}^2$$

et, par interpolation,

$$\|\nabla b\|_{L^2} \leq \|b\|_{\dot{H}^{1/2}}^{1/2} \|b\|_{\dot{H}^{3/2}}^{1/2}$$

donc

$$|\langle a \cdot \nabla b, b \rangle_{\dot{H}^{1/2}}| \lesssim \|a\|_{L^\infty} \|\nabla b\|_{\dot{H}^{1/2}} \|b\|_{\dot{H}^{1/2}}.$$

Pour le deuxième produit scalaire, on a

$$|\langle b \cdot \nabla a, b \rangle_{\dot{H}^{1/2}}| \lesssim \|b \cdot \nabla a\|_{L^2} \|\nabla b\|_{L^2} \lesssim \|\nabla b\|_{L^2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |b(x, z) \cdot \nabla a(x, z)|^2 dx dz \right)^{1/2}.$$

Comme  $b$  est dans  $\dot{H}_x^{3/2}(\mathbb{R}^2)$ , il est nul à l'infini et

$$|b(x, z)|^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} |b(x, z)| |\nabla_x b(x, z)| dx \lesssim \|b\|_{\dot{H}_x^{1/2}(z)} \|\nabla_x b\|_{\dot{H}_x^{1/2}(z)}$$

donc

$$\begin{aligned} |\langle b \cdot \nabla a, b \rangle_{\dot{H}^{1/2}}| &\lesssim \|\nabla a\|_{L_z^\infty L_x^2} \int_{\mathbb{R}} \|b\|_{\dot{H}_x^{1/2}(z)} \|\nabla_x b\|_{\dot{H}_x^{1/2}(z)} dz \\ &\lesssim \|\nabla a\|_{L_z^\infty L_x^2} \|b\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x b\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}}. \end{aligned}$$

On conclut, en remarquant que

$$\|b\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \|\nabla_x b\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}} \leq \|b\|_{\dot{H}^{1/2}} \|\nabla_x b\|_{\dot{H}^{1/2}}$$

□

Pour estimer la force  $F_\varepsilon$  et ainsi démontrer les lemmes 7.9 et 7.10, on a besoin des résultats suivants. Le premier découle directement de la proposition 8.13 et le second est démontré dans [6].

PROPOSITION 8.18. *Si  $(f, g)$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3))$  alors leur produit appartient à  $L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$  et on a*

$$\|fg\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3))} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3))}.$$

*Si le couple  $(f, g)$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3))$  alors leur produit appartient à  $L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$  et on a*

$$\|fg\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L_z^2 \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3))} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L_z^\infty \dot{H}_x^{1/4}(\mathbb{R}^3))}.$$

PROPOSITION 8.19. *Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions régulières alors on a*

$$\|ab\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|a\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \left( \|\nabla_x b\|_{L_z^\infty L_x^2(\mathbb{R}^3)} + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\partial_z b\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \right)$$

et

$$\|ab\|_{\dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|a\|_{L_z^2 \dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \|b(\cdot, 0)\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)} + \|za\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\partial_z b\|_{L_z^\infty \dot{H}_x^{1/2}(\mathbb{R}^3)}.$$

## Bibliographie

- [1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin. *Fourier Analysis and non linear partial differential equations*. GMW 343, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [2] J. Bourgain et N. Pavlovic. *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D*, J. Funct. Anal. 255, pages 2233-2247, 2008.
- [3] M. Cannone, Y.Meyer et F. Planchon. *Solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes*. Séminaire “Équations aux Dérivées Partielles” de l’École Polytechnique, Exposé VIII, 1993-1994.
- [4] J.-Y. Chemin. *A propos d’un problème de pénalisation de type antisymétrique*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 76, pages 739-755, 1997.
- [5] J.-Y. Chemin et I. Gallagher. *Large, global solutions to the Navier-Stokes equations, slowly varying in one direction*. Transactions of the American Mathematical Society, 362, n°6, pages 2859-2873, 2010.
- [6] J.-Y. Chemin, I. Gallagher and P. Zhang. *On large perturbations to global solutions of the 3-D incompressible Navier-Stokes equations*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. A paraître.
- [7] A. Dutrifoy, A. Majda and S. Schochet . *A simple justification of the singular limit for equatorial shallow water dynamics*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 2008.
- [8] H. Fujita et T. Kato. *On the Navier-Stokes initial value problem I*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 16, pages 269-315, 1964.
- [9] I. Gallagher and L. Saint-Raymond. *Mathematical study of the betaplane model*, Mémoires de la Société Mathématique de France, 2007.
- [10] I. Gallagher and L. Saint-Raymond. *On the influence of the Earth’s rotation on geophysical flows*. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, S. Friedlander & D. Serre eds, Vol. 4, pages 201-239, 2007.
- [11] I. Gallagher. *Asymptotics for hyperbolic equations with a skew-symmetric perturbation*. Hyperbolic problems : theory, numerics, applications, Vol. 1, pages 369-373, 1998.
- [12] I. Gallagher, D.Iftimie and F.Planchon. *Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations*. Annales de l’Institut fourier, 53, pages 2075-2083, 2003.
- [13] P. Germain. *The second iterate for the Navier-Stokes equation*, J. Funct. Anal. 255, 2008.
- [14] Y. Giga et T. Miyakawa. *Solutions in  $L^r$  of the Navier-Stokes initial value problem*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 89, n°3, pages 267-281, 1985.
- [15] A. Gill. *Atmosphere-Ocean Dynamics*, International Geophysics Series, Vol. 30, 1982.
- [16] H. Greenspan. *The Theory of rotating fluids*, Cambridge monographs on mechanisms and applied mathematics, 1969.
- [17] E. Grenier. *Oscillatory Perturbations of the Navier-Stokes Equations*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 76, pages 477-498, 1997.
- [18] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Generic Rigorous Asymptotic Expansions for Weakly Nonlinear Multidimensional Oscillatory Waves*, Duke Mathematical Journal, 70, pages 373–404, 1993.
- [19] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Coherent and Focusing Multidimensional Nonlinear Geometric Optics*, Annales Scientifiques de l’ENS Paris, 28, pages 51–113, 1995.



- [20] S. Klainerman and A. Majda. *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 34, pages 481-524, 1981.
- [21] H. Koch et D. Tataru. *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*. Advances in Mathematics, 157, pages 22-35, 2001.
- [22] J. Leray. *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta Mathematica, 63, pages 193-248, 1933.
- [23] C. Lucas. *Effets de petites échelles, du tenseur des contraintes, des conditions au fond et à la surface sur les équations de Saint-Venant*, Thèse de Mathématiques appliquées, Université J. Fourier - Grenoble 1, 2007.
- [24] A. Mahalov, E. S. Titi, and S. Leibovich. *Invariant helical subspaces for the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 112, pages 193-222, 1990.
- [25] A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*. Springer-Verlag, 1984.
- [26] C. Mullaert. *Remarks on the equatorial water system*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. XIX, n°1, pages 27-36, 2011.
- [27] C. Mullaert. *Study of the non viscous equatorial shallow water system*. Soumis au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.
- [28] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics*, Springer, 1979.
- [29] S. Schochet. Fast singular limits of hyperbolic PDEs, *J. Differential Equations*, 114, pages 476-512, 1994.
- [30] M. R. Ukhovskii and V. I. Iudovich. *Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space*, J. Appl. Math. Mech. 32, pages 52-61, 1968.

## Index des notations

|  |    |
|--|----|
| $D$ matrice de dérivation adaptée à $(S_\varepsilon)$ .....                                | 31 |
| $E_N$ espace obtenu par troncature .....   | 48 |
| $H$ opérateur de Hermite .....   | 30 |
| $\dot{H}_z^p \dot{H}_x^s(\mathbb{R}^3)$ espace de Sobolev anisotrope .....                 | 87 |
| $K_N$ opérateur de troncature .....  | 48 |
| $L_+$ opérateur de création .....  | 30 |
| $L_-$ opérateur d'annihilation .....   | 30 |
| $\mathfrak{L}$ opérateur de filtrage .....   | 61 |
| $M$ matrice de pénalisation .....  | 31 |
| $\Pi_\lambda$ projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(M - i\lambda M)$ .....                 | 45 |
| $\Pi_{k,n,j}$ projecteur orthogonal sur $\Psi_{k,n,j}$ .....                               | 45 |
| $\Pi_0$ projecteur orthogonal sur le noyau de $M$ .....                                    | 71 |
| $\Pi_0$ projecteur orthogonal sur les vecteurs de Kelvin .....                             | 71 |
| $\Psi_{k,n,j}$ vecteurs propres de $M$ .....   | 39 |
| $\Psi_{k,0,0}$ vecteurs propres de Kelvin .....  | 40 |
| $Q$ terme quadratique apparaissant dans $(S_\varepsilon)$ .....                            | 51 |
| $Q_L$ terme quadratique apparaissant dans $(SL)$ .....                                     | 62 |
| $\mathcal{R}$ ensemble des résonances de $M$ .....   | 62 |
| $(S_\varepsilon)$ système pénalisé .....   | 31 |
| $(SL)$ système limite .....  | 62 |
| $i\tau(k, n, j)$ valeurs propres de $M$ .....  | 39 |
| $\mathcal{W}^{2n}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ espaces adaptés à $(S_\varepsilon)$ ..... | 34 |