

Étude de la vulnérabilité et de la robustesse des ouvrages

Nadia Christiana Kagho Gouadjio

▶ **To cite this version:**

Nadia Christiana Kagho Gouadjio. Étude de la vulnérabilité et de la robustesse des ouvrages. Autre. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1003 . tel-00816489

HAL Id: tel-00816489

https://theses.hal.science/tel-00816489

Submitted on 22 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

Thèse présentée pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris-Est

Ecole doctorale : "Science, Ingénierie et Environnement"

Spécialité : "Structures et matériaux"

Par

Nadia Christiana KAGHO GOUADJIO

Titre

ETUDE DE LA VULNERABILITE ET DE LA ROBUSTESSE DES OUVRAGES

Soutenue le 11 janvier 2013, devant le jury composé de :

M. Denis BREYSSE	*Rapporteur*
M. Franck SCHOEFS	*Rapporteur*
M. Vincent DENOËL	*Examinateur*
M. Georges NAHAS	*Examinateur*
M. André ORCESI	*Examinateur*
M. Christian CREMONA	*Directeur de thèse*

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je tiens à remercier le Professeur Vincent DENOËL, de l'Université de Liège en Belgique, d'avoir accepté de présider ce jury, ainsi que les Professeurs Denis BREYSSE de l'Université Bordeaux 1 et Franck SCHOEFS de l'Université de Nantes, d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail. Toute ma gratitude s'adresse aussi au Professeur Georges NAHAS de l'IRSN, qui m'a fait l'honneur de lire ce mémoire et de participer à la soutenance de cette thèse.

Je remercie tout particulièrement mon directeur de thèse, Monsieur Christian CREMONA, du SETRA, de m'avoir donné l'opportunité de réaliser ma thèse à l'IFSTTAR et d'avoir encadré cette recherche. Sa rigueur scientifique, sa patience et ses précieux conseils ont permis à ce travail d'aboutir. Je lui en suis profondément reconnaissant et lui témoigne ici toute ma gratitude. Je remercie également M. André ORCESI de l'IFSTTAR qui m'a conseillé tout au long de ma thèse. Son aide, sa disponibilité et ses conseils m'ont grandement aidé durant cette recherche.

Je tiens à remercier pour leur accueil et l'encadrement qu'ils m'ont apportés les membres du département Matériaux et Structures à l'IFSTTAR, et en particulier M. Thierry KRETZ, directeur du département, M. Bruno GODART, directeur adjoint, M. François TOUTLEMONDE, délégué scientifique, et M. Jean-François SEIGNOL chef du Laboratoire Sécurité et Durabilité des Ouvrages d'Art. Je suis également redevable de Mme Claire MARCOTTE du CETE Nord Picardie pour son aide et sa disponibilité.

Ma profonde gratitude va à mes collègues du Laboratoire Sécurité et Durabilité des Ouvrages d'Art pour le soutien qu'ils m'ont témoigné durant ces trois années: M. Lucas ADELAIDE, Mme Véronique BOUTEILLER, Mme Anne-Sophie COLAS, Mme Nina COULATY-CHIN, M. Cédric DESPREZ, M. Umair IFTIKHAR, Mme Minh ORCESI, Mme Franziska SCHMIDT, M. Ngoc Binh TA, M. Xiaoyi ZHOU, ainsi qu'à tous les collègues du Laboratoire Expérimentation et Modélisation des Matériaux et des Structures, à Mme Aurélie NOSLIER, à. M. Yannick TARDIVEL du SETRA, et à M. Benjamin RICHARD du CEA.

Une mention particulière à ma très grande famille et belle famille, mon papa M. Fabien KAGHO, ma maman Mme Jeanne d'arc ZEMO, mon beau-père M. Angiolino GARBELLINI, mon époux M. Guy NOUMEDEM et tous mes amis, pour leur patience, leur soutien, leur aide et leur présence constante.

Dedicated to my beloved children,
Steeve & Jeanne Grazia,
for giving me the daily strength and courage to move forward.

RESUME

Le terme de robustesse structurale donne lieu à diverses définitions et domaines d'application. Dans le domaine de l'ingénierie structurale, le cadre réglementaire des Eurocodes définit la robustesse structurale comme « l'aptitude d'une structure à résister à des événements tels que les incendies, les explosions, les chocs ou les conséquences d'une erreur humaine, sans présenter de dégâts disproportionnés par rapport à la cause d'origine ». Cette définition fait clairement ressortir les notions de dommage initial (défaillance locale) et de dommage disproportionné (défaillance globale). Cette thèse propose une approche de la quantification de la robustesse structurale en contexte probabiliste pour mesurer l'impact d'une défaillance localisée sur la défaillance globale de la structure.

L'objectif majeur de la thèse est de quantifier l'écart entre une défaillance locale et une défaillance globale, en introduisant différents indices de robustesse selon que la structure soit intègre ou initialement endommagée. Pour cela, dans le but de caractériser et quantifier les liens existant entre la performance des différents éléments d'une structure et la performance globale de la structure, il est nécessaire d'introduire une étude en système qui intègre de manière concomitante des notions de défaillance locale (modes de défaillance) et des notions de défaillance globale.

Une recherche « par l'intérieur » des chemins de défaillance dominants est présentée. Le terme « par l'intérieur » est utilisé car c'est le cheminement interne de la défaillance dans la structure qui est recherché. Des méthodes de parcours d'arbre d'évènements sont introduites telles que la méthode des « branches et bornes », du β-unzipping, ou encore du β-unzipping avec bornage. Ces méthodes permettent d'identifier les chemins de défaillance dominants avec des temps de calcul raisonnables. En particulier, il est possible de déterminer le chemin de défaillance associé à la plus grande probabilité de défaillance, appelé encore chemin de référence.

Une approche « par l'extérieur » est également proposée, qui consiste à identifier la défaillance globale sans parcourir un arbre d'évènement (et donc sans s'intéresser à l'ordre avec lequel la défaillance survient). Le terme « par l'extérieur » correspond donc à regarder la défaillance de manière globale sans chercher à déterminer la chronologie de la défaillance.

Dans les deux cas, l'enjeu est au final de développer une démarche globale permettant d'apprécier et de quantifier la robustesse des structures neuves ou existantes au travers de méthodes et d'indices pouvant s'appliquer à une large variété de problèmes.

ABSTRACT

Structural robustness is associated with several definitions depending on context. In the field of structural engineering, the Eurocodes define structural robustness as “the ability of a structure to withstand events like fire, explosions, impact or the consequences of human error, without being damaged to an extent disproportionate to the original cause”. Such a definition clearly involves concepts of local and global failures. This PhD work proposes a methodology to quantify structural robustness in a probabilistic way and to assess the impact of local failures on global failures.

The main objective of this PhD is to quantify the gap between local and global failures by introducing several robustness indices proposed for undamaged and damaged structures. To qualify and quantify the relationships between the performance of the different structural components and the overall structural performance, it is necessary to introduce a system-level analysis which simultaneously considers concepts of local failure modes and global failure events.

An inner approach is introduced to determine significant failure sequences and to characterize stochastically dominant failure paths identified by using branch-and-bound, β-unzipping, and mixed β-unzipping with bounding methods. These methods enable to determine significant failure paths with reasonable computational times. In particular, the path with the largest probability of occurrence is considered as the reference failure path.

An outer approach is also proposed which identifies global failure without using an event-tree search (and, consequently, without analyzing the order in the failure sequence). This concept characterizes an overall and simultaneous failure of different components without determining the chronology in the failure event.

In both cases, the goal is to provide a general and widely applicable framework for qualifying and quantifying the robustness level of new and existing structures through the introduction of methodologies and indices.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 INTRODUCTION GENERALE **1**
CHAPITRE 2 NOTIONS DE ROBUSTESSE STRUCTURALE **7**
2.1 INTRODUCTION 7
2.2 VULNERABILITE ET ROBUSTESSE 8
2.3 ATTRIBUTS DE LA ROBUSTESSE 11
2.3.1 Ductilité 11
2.3.2 Ecrouissage 12
2.3.3 Résistance 12
2.3.4 Elément fusible 12
2.3.5 Scenario de knock-out 12
2.3.6 Redondance 12
2.3.7 Seconde ligne de défense 13
2.3.8 Prise en compte de la rigidité 13
2.3.9 Résistance post-flambement 13
2.4 PRINCIPES ACTUELS DE CONCEPTION POUR LA ROBUSTESSE STRUCTURALE 13
2.4.1 Approche européenne (Eurocodes) 13
2.4.2 Approche américaine (ASCE 2005) 15
2.4.3 Approche canadienne (NBCC 1995) 15
2.4.4 Approche anglaise (ODPM 2004) 16
2.4.5 Concepts développés par le JCSS (2001, 2008) 16
2.5 QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE 18
2.5.1 Domaines d'application d'une mesure de la robustesse 18
2.5.2 Exigences d'une mesure de la robustesse 19
2.5.3 Termes relatifs à la quantification 20
2.5.4 Indices de robustesse proposés dans la littérature 20
2.6 APPROCHE PROPOSEE 27
2.6.1 Ecart entre défaillances locales et globales 27
2.6.2 Indices de robustesse 30
2.6.3 Vers la détermination des chemins de défaillance dominants 31

CHAPITRE 3 METHODES DE CARACTERISATION DE DYSFONCTIONNEMENTS GLOBAUX **33**
3.1 – INTRODUCTION 33
3.2 CARACTERISATION DU DYSFONCTIONNEMENT GLOBAL 34
3.2.1 Méthode des branches et bornes (« approche par l'intérieur ») 35
3.2.2 Méthode du β-unzipping (« approche par l'intérieur ») 39
3.2.3 Méthode du β-unzipping avec bornage (« approche par l'intérieur ») 45
3.2.4 Recherche « par l'extérieur » du dysfonctionnement global 46
3.3 APPLICATION DES RECHERCHES DE DYSFONCTIONNEMENT GLOBAL A UN CAS D'ETUDE 47
3.3.1 Nécessité d'identifier les mécanismes dominants 48
3.3.2 Rotules plastiques et chemins de défaillance 49
3.3.3 Recherche du dysfonctionnement global avec l'algorithme des branches et bornes 55
3.3.4 Recherche du dysfonctionnement global avec l'algorithme du β-unzipping 63
3.3.5 Recherche du dysfonctionnement global avec l'algorithme du β-unzipping avec bornage 71
3.3.6 Recherche du dysfonctionnement global « par l'extérieur » 72
3.4 APPLICATION DE LA QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE POUR L'EXEMPLE CONSIDERE 86
3.4.1 Calcul de l'indice de robustesse par l'approche par l'intérieur 87
3.4.2 Calcul de l'indice de robustesse par l'approche par l'extérieur 93
3.4.3 Comparaison des approches « par l'intérieur » et « par l'extérieur » 96
3.5 SYNTHESE 98
CHAPITRE 4 CARACTERISATION DE LA ROBUSTESSE STRUCTURALE **99**
4.1 INTRODUCTION 99
4.2 INFLUENCE DES PARAMETRES DU SYSTEME SUR LA QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE STRUCTURALE 100
4.2.1 Influence de la section des éléments sur l'indice de robustesse 100
4.2.2 Influence de la géométrie de la structure 103
4.2.3 Influence du degré d'hyperstaticité 108
4.2.4 Influence des actions sollicitantes 112
4.2.5 Influence des incertitudes sur les variables d'entrée 115
4.2.6 Synthèse 117
4.3 APPLICATION DE LA QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE A DES EXEMPLES TYPES DE STRUCTURES DU GENIE CIVIL 117
4.3.1 Etude d'une poutre de pont en treillis – configuration 1 118
4.3.2 Etude d'une poutre de pont en treillis – configuration 2 121
4.3.3 Etude d'une tour contreventée 124

4.3.4 Etude d'un bâtiment sous sollicitation climatique (neige et vent) 129
4.4 APPLICATION A L'ETUDE D'UNE POUTRE PRECONTRAINTE 161
4.4.1 Description du cas d'étude 162
4.4.2 Modélisation structurale 163
4.4.3 Modélisation de la défaillance locale 164
4.4.4 Modélisation de la défaillance globale 166
4.4.5 Etude de la robustesse structurale 167
4.5 APPLICATION A L'ETUDE D'UN PONT A HAUBANS 175
4.5.1 Description de l'ouvrage étudié 175
4.5.2 Modélisation de la défaillance 177
4.5.3 Analyse des efforts dans les sections 177
4.5.4 Application à l'étude de la robustesse structurale 178
4.6 SYNTHESE 180
CHAPITRE 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES GENERALES 181
BIBLIOGRAPHIE 185
ANNEXE A 199
ANNEXE B 203

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

Le développement des méthodes de construction dans le génie civil a connu de nombreux épisodes dramatiques lorsque des évènements non anticipés ou mal maîtrisés ont entraîné des défaillances majeures, voire des effondrements, des structures construites. Les ingénieurs ont dû progressivement modifier leurs méthodes de construction pour faire face aux sollicitations extérieures que les structures subissent durant leur durée de vie en service. Parmi ces sollicitations se trouvent par exemple les actions dues au trafic pour les ouvrages d'art, les actions dues aux phénomènes climatiques comme le vent, la température, l'enneigement, ou encore des actions telles que les séismes. Ainsi, le nombre d'accidents dans le domaine du génie civil a pu considérablement diminuer. La prise en compte de l'importance des stratégies de maintenance préventives a également permis de maîtriser le nombre de défaillances structurales majeures. Ce qui était perçu comme des accidents non identifiés à une certaine époque a donc progressivement été intégré dans les différents codes de construction et de conception à l'aide de notions de risques, ce qui permet désormais d'appréhender les risques structuraux vis-à-vis d'un grand nombre de menaces bien connues des concepteurs.

Pourtant, ce constat n'est pas entièrement satisfaisant au regard des nombreux évènements accidentels s'étant produits récemment et qui laissent penser que les connaissances vis-à-vis d'actions accidentelles mal identifiées restent encore limitées en ce qui concerne la conception, le dimensionnement, et l'exécution des ouvrages du génie civil. Parmi les défaillances les plus récentes et les plus médiatisées, on peut citer (Figure 1.1) l'effondrement partiel et progressif de la tour du Ronan Point à Canning Town à Londres le 16 mai 1968 à la suite d'une explosion de gaz naturel au dix-huitième étage, évènement à la suite duquel les conséquences ont été jugées inacceptables par rapport au dommage initial (Nair Shankar 2004), plus récemment, l'effondrement des tours jumelles du World Trade Centre lors des attentats du 11 septembre 2001 à New York City aux Etats-Unis (Nair Shankar 2004, Canisius et al. 2007), l'effondrement d'une

partie de la voûte d'une passerelle du Terminal 2E de l'aéroport Roissy Charles-de-Gaulle en France, le 23 mai 2004 dû à des erreurs de conception (Errard 2005), ou encore l'effondrement du pont autoroutier de l'Interstate-35 ouest du Mississippi à Minneapolis aux Etats-Unis, le 1er Août 2007 dû à un manque de redondance structurale (NTSB 2008). Sur un autre plan, le séisme de la côte Pacifique du Tōhoku au Japon le 11 mars 2011 a entraîné un bilan humain dramatique du fait de la génération d'un tsunami. L'accident nucléaire de Fukushima dans la centrale nucléaire de Fukushima Daiichi a résulté d'une perte dans un premier temps des alimentations électriques externes au site des réacteurs à la suite du séisme, suivie dans un second temps d'une perte de la source froide et des alimentations électriques internes de secours à la suite du tsunami (l'installation, bâtie pour résister à un séisme de magnitude 8 et à un tsunami de 5,7 mètres de haut, ayant été inondée par la vague de 15 mètres du tsunami). Une défaillance en chaîne s'est produite sur ce site qui a considérablement augmenté les conséquences humaines, environnementales et économiques de la catastrophe liée au séisme initial.

(a) (b)





(c) (d)





Figure 1.1. Effondrement (a) de la Tour du Ronan point, (b) du Pont de Minneapolis, (c) des Tours jumelles du World Trade Centre et (d) du Terminal 2E aéroport CDG.

Ces différents exemples montrent bien qu'un enjeu majeur pour la société dans son ensemble est le renforcement de la maîtrise des risques structuraux vis-à-vis d'actions accidentelles mal connues et mal identifiées lors de la construction, et ce quelles que soient leur nature et leur fréquence. Ce constat est d'autant plus significatif dans un contexte de changement climatique et d'avènement d'évènements météorologiques de plus en plus violents. Les bilans humain et financier de l'ouragan Sandy (dix-huitième cyclone tropical de la saison cyclonique 2012 dans l'océan Atlantique Nord) ont encore montré très récemment la vulnérabilité de la société et des infrastructures qu'elle construit vis-à-vis de ce type de phénomène climatique.

Une action accidentelle est généralement de courte durée mais d'amplitude significative, avec une probabilité d'occurrence faible au cours de la durée de vie en service d'une structure (Biondini et al. 2008, Biondini 2009a, Canisius et al. 2007, EN 1990, EN 1991-1-7). D'après l'Eurocode EN 1990, les actions accidentelles identifiables regroupent les incendies, explosions, séismes, chocs/impacts, inondations, avalanches, glissements de terrain, etc. Les actions accidentelles non identifiables comprennent les erreurs humaines, mauvaises utilisations, expositions à des agents agressifs, attaques terroristes, chute de matériels. C'est dans cette optique que les Eurocodes préconisent qu'une structure soit conçue et exécutée de sorte qu'elle ne soit pas endommagée par des évènements accidentels (explosions, chocs, conséquences des erreurs humaines, ...), de façon disproportionnée par rapport à la cause initiale.

Comme mentionné précédemment, se limiter à assurer la sécurité et la durabilité des constructions et donc des usagers dans des conditions normales d'utilisation n'est pas suffisant, les infrastructures devant également assurer un minimum de performance dans des situations exceptionnelles. La performance structurale est généralement définie comme la capacité d'une structure à assurer des exigences d'aptitude au service, de durabilité, et de sécurité. Le dimensionnement aux états limites doit pouvoir inclure des états post-ruine ou post-effondrement de structures, pour satisfaire les recommandations selon lesquelles une structure ne doit pas être endommagée de manière disproportionnée par rapport à la cause initiatrice (exigence de robustesse structurale). Cette propriété structurale est importante pour prévenir les ouvrages et bâtiments des défaillances disproportionnées et/ou progressives dues à des actions accidentelles, prévisibles ou non, identifiables ou non (Eurocode EN 1991-1-7, Knoll & Vogel 2008). Les normes actuelles de dimensionnement préconisent un dimensionnement par élément structural, ou par sous-systèmes d'éléments structuraux. Cette façon de dimensionner a montré son efficacité dans des conditions normales d'utilisation. Cependant, dans des situations accidentelles, les ouvrages dimensionnés de la sorte peuvent présenter des défaillances inadmissibles, car l'interaction entre les différents éléments n'est pas pleinement exploitée. Il est très important d'opter pour une approche en système dans la conception pour la robustesse structurale ou dans l'évaluation de cette dernière. Un système structural est un ensemble d'éléments conçus pour interagir ensemble dans le but d'assurer les différentes fonctions de stabilité globale, de redondance, etc. de sorte qu'en cas de défaillance d'un élément, l'ensemble

de la structure soit mobilisé pour répartir les efforts. Cet effet système, et la redondance structurale qu'il procure, peut empêcher les défaillances disproportionnées et/ou progressives pouvant survenir sur un ouvrage.

Dans un contexte où les fluctuations de chargements, la variabilité des propriétés mécaniques des matériaux, les incertitudes et imperfections des modèles d'analyse et des modèles des actions à considérer sont omniprésentes, la prédiction de la performance structurale est un enjeu majeur. Une approche probabiliste est particulièrement adaptée car elle permet de déterminer le degré de sécurité d'une structure dans un contexte de fortes incertitudes au travers de l'analyse de mécanismes de défaillance (sous-ensemble d'éléments qui, ayant tous défailli, entraînent la défaillance du système).

De nombreux travaux ont été menés sur le concept de la robustesse structurale (Faber et al. 2006, Baker et al. 2008, Starossek & Haberland 2008, Biondini & Restelli 2008), en dépit desquels il n'existe pas encore de consensus réel pour l'élaboration d'un plan explicite à appliquer dans la conception et l'exécution des ouvrages. Un des problèmes majeurs en ce qui concerne l'incorporation de la robustesse structurale dans les méthodes actuelles de conception, de dimensionnement et d'exécution en génie civil, est la nécessité de quantifier la robustesse structurale en prenant en compte les incertitudes. Les travaux de cette thèse ont pour but de fournir des concepts et méthodologies pour qualifier et quantifier la robustesse structurale des ouvrages existants, en cours d'exécution et en projet, dans un contexte d'incertitudes. L'enjeu d'une telle démarche est de quantifier l'écart entre les défaillances structurales locales et globales et in fine de proposer un outil d'appréciation pour le dimensionnement et la gestion des ouvrages.

Ce mémoire est subdivisé de ce fait en trois parties. La première partie traite de la robustesse structurale et de sa définition dans le cadre de cette thèse. Les études récemment réalisées dans le domaine de la robustesse structurale sont présentées en répertoriant un certain nombre d'indices de robustesse proposés dans la littérature, et les techniques et moyens pour apprécier la robustesse structurale. Cette partie présente également la démarche adoptée dans cette thèse pour quantifier la robustesse structurale en comparant les défaillances à l'échelle locale et à l'échelle globale de l'ouvrage. La deuxième partie porte sur les méthodes pour caractériser un dysfonctionnement généralisé. Il s'agit d'analyser les processus qui font qu'une défaillance localisée peut entraîner la défaillance globale de l'ouvrage. Deux approches principales sont proposées. La première repose sur l'utilisation de méthodes de parcours d'arbres de défaillance (Moses 1982) et consiste à rechercher la propagation de la défaillance au sein-même de la structure. Des algorithmes tels que la méthode des branches et bornes ou du β-unzipping sont utilisés à cet effet pour effectuer une recherche dite « par l'intérieur » de la progression de la défaillance. Une démarche originale couplant ces deux algorithmes est également proposée à cet effet. La deuxième approche consiste à regarder la défaillance globale « de l'extérieur » sans chercher à déterminer le cheminement interne de la défaillance dans la structure. Les avantages

de ces deux approches sont analysés et discutés. Ce processus pose les bases méthodologiques pour définir la notion de robustesse structurale liant la défaillance locale à la défaillance globale. La détermination de mécanismes les plus probables permet d'introduire plusieurs indices de robustesse qui sont illustrés au travers d'un exemple simple. Une troisième partie propose une étude de sensibilité au travers de plusieurs exemples. Les différentes méthodes d'identification des chemins et mécanismes de défaillance dominants sont utilisés et les résultats obtenus sont comparés. Cette troisième partie propose également une méthodologie pour intégrer l'analyse de la robustesse dans une analyse de risque plus globale au travers d'un exemple détaillé. Il est noté que les cas présentés peuvent être liés à des états limites ultimes avec formation de mécanismes défaillance, mais également à des états limites de service pour définir la défaillance globale. Deux exemples sont considérés à cet effet. Le premier porte sur l'étude d'une poutre précontrainte de VIPP (viaduc à travées indépendantes à poutres précontraintes) dans laquelle la défaillance locale est supposée être l'apparition d'une fissure au droit d'une section et la défaillance globale, un volume critique de béton fissuré. Le second exemple porte sur l'étude d'un pont haubané pour lequel la défaillance locale est supposée être la rupture d'un hauban et la défaillance globale, une flèche critique excessive à mi travée. Cette troisième partie permet finalement de montrer l'applicabilité de la démarche à des défaillances globales qui ne sont pas nécessairement liées à des pertes de stabilité et des effondrements partiels ou totaux de la structure, mais plutôt à des états limites courants pour lesquels les gestionnaires d'ouvrage peuvent mettre en place des politiques de gestion préventives. Finalement, une conclusion générale permet de faire une synthèse des résultats obtenus afin d'évaluer la démarche proposée et de proposer des perspectives pour la suite des recherches de ce travail de thèse.

CHAPITRE 2

NOTIONS DE ROBUSTESSE STRUCTURALE

2.1 INTRODUCTION

Le dictionnaire Larousse français définit le mot "robustesse" comme le caractère de quelqu'un ou de quelque chose de robuste, avec pour synonymes : fermeté, force, puissance, résistance, solidité, vigueur… Le Larousse donne une définition plus précise du mot "robuste", à savoir la qualité d'un objet solide, résistant. Dans le domaine scientifique, la définition du mot robuste est en réalité beaucoup plus large comme le souligne le Tableau 2.1. Dans le domaine du génie civil, le terme "robustesse" reste encore au centre de débats et pose des difficultés tant au niveau de son interprétation, de son insertion de manière explicite dans les codes de constructions, que de son utilisation pour l'évaluation d'ouvrages existants. Plusieurs définitions ont été proposées dans la littérature parmi lesquelles :

- l'aptitude d'une structure à soutenir des dommages arbitraires (Lu et al. 1999),
- l'aptitude d'une structure à résister à des événements tels que les incendies, les explosions, les chocs ou les conséquences d'une erreur humaine, sans présenter de dégâts disproportionnés par rapport à la cause d'origine (EN 1991 2006),
- l'insensibilité d'une structure à une défaillance locale (ces deux notions devant être définies durant l'étape de conception) (Starossek 2006, Starossek & Haberland 2008a,b),
- l'aptitude d'un système à subir un certain nombre de dommages non disproportionnés par rapport aux causes des dommages eux-mêmes (Biondini & Restelli 2008, Biondini et al. 2008, Biondini 2009),
- les propriétés des systèmes leur permettant de survivre à des circonstances imprévisibles ou inhabituelles (Knoll & Vogel 2008).

Ces définitions, relativement similaires, décrivent la robustesse comme une relation entre un aléa et des conséquences disproportionnées ou exceptionnelles induites par la réalisation de cet aléa.

Ingénierie du logiciel	Capacité d'un système à réagir de manière appropriée aux circonstances anormales (Meyer 1997).
Développement des produits et contrôle qualité	Mesure de la capacité d'un processus de production à ne pas être affecté par de petites variations délibérées de paramètres internes, de manière à fournir une indication de la fiabilité lors d'une utilisation normale.
Ecosystèmes	Capacité d'un système à maintenir sa fonction même en présence de changements dans sa structure interne ou dans l'environnement extérieur (Callaway et al. 2000).
Théorie du contrôle	Degré d'insensibilité d'un système aux effets qui n'ont pas été pris en compte lors de la conception (Slotine & Li 1991).
Statistiques	Insensibilité d'une technique statistique aux petits écarts dans les hypothèses (Huber 1996).
Optimisation de la conception	Une solution robuste dans un problème d'optimisation est celle qui a la meilleure performance dans le pire des cas du problème (Kouvelis & Yu 1997).
Théorie bayésienne de la décision	On parle de robustesse lorsqu'en introduisant une large classe de lois a priori et des fonctions de perte, les éléments de subjectivité et de sensibilité à une catégorie restreinte de choix sont réduits (Rios Insua & Ruggeri 2000).
Langage	Mesure de la capacité de l'homme à communiquer malgré une information incomplète, ambigüe, et la présence d'un élément constant de surprise (Briscoe 1997).

Tableau 2.1. Définitions du terme "robustesse" selon divers domaines scientifiques (Faber et al. 2006).

La robustesse ne serait donc finalement qu'une forme du risque, fortement dépendante des propriétés du système structural concerné. Il ne s'agit pourtant pas tant d'apprécier le risque d'endommagement de la structure, que le risque d'aboutir à un état de dysfonctionnement important à partir de cet endommagement. A ce titre, les Eurocodes EN 1990 (EN 1990 2002) et EN 1991-1-7 (EN 1991 2006) clarifient cette définition en mentionnant qu'une structure doit être conçue et exécutée de sorte qu'elle ne soit pas endommagée par des évènements accidentels (explosions, chocs, conséquences des erreurs humaines, ...), de façon disproportionnée par rapport à la cause initiale. Un objectif majeur pour la conception et l'évaluation des ouvrages du génie civil est donc d'aller au-delà des conditions normales d'utilisation, le challenge étant d'anticiper lors de la conception des évènements pouvant entraîner un endommagement généralisé de la structure.

2.2 VULNERABILITE ET ROBUSTESSE

Avant de développer un formalisme mathématique pertinent de la robustesse, il est essentiel de préciser le sens de deux notions souvent confondues à tort dans le domaine de l'ingénierie structurale : la vulnérabilité et la robustesse. Une structure est dite vulnérable si un aléa donné peut produire une dégradation/détérioration/perte de ses performances locales. La vulnérabilité d'une structure est donc associée un dysfonctionnement local, c'est-à-dire une perte de fonction au niveau local (rupture, fissuration, flambement, déformation excessive…). Elle se caractérise donc par une probabilité d'occurrence qui sera liée d'une part à la probabilité de réalisation de l'aléa, source du dysfonctionnement local, et d'autre part à l'intensité de cet aléa. Cette probabilité

d'occurrence est à rapprocher du concept de probabilité de défaillance rencontré en théorie de la fiabilité pour exprimer en contexte probabiliste, la probabilité d'apparition d'un mode de défaillance (Cremona 2011). A l'opposé, la robustesse décrit implicitement la capacité de la structure à fonctionner en mode dégradé, c'est-à-dire en cas de réalisation d'un dysfonctionnement local. Il s'agit alors de s'intéresser au dysfonctionnement du système structural : on parle de dysfonctionnement global. En reprenant la définition du risque, mesure conjointe entre aléa et conséquences de la réalisation de l'aléa, la robustesse peut donc être considérée comme la prise en compte d'un risque direct (dysfonctionnement local), exprimé par la vulnérabilité et ses conséquences directes, et d'un risque indirect (dysfonctionnement global), exprimé par l'inaptitude plus ou moins prononcée à fonctionner en mode dégradé.

La caractérisation de la robustesse implique de délimiter les frontières du système considéré avec précaution. En effet, le terme « système » peut correspondre à une multitude d'objets et il est crucial de définir de manière adéquate l'objet considéré lorsque la notion de dysfonctionnement global est considérée. Dans le cas d'un ouvrage d'art, le système peut par exemple aller d'un élément particulier de la structure à un ensemble d'éléments (délimitant une partie de l'ouvrage) jusqu'à l'ouvrage en entier, voire même jusqu'au réseau d'infrastructures contenant l'ouvrage.

Ainsi, une explosion peut entraîner la défaillance d'une poutre (conséquence directe). Si cette dernière est un élément clef d'une structure, cette défaillance locale peut entraîner une défaillance en chaîne (ou progressive) d'éléments structuraux jusqu'à la défaillance globale de l'ouvrage (conséquence indirecte). L'effondrement du pont de Minneapolis en 2007 aux USA est un exemple édifiant de cette défaillance en chaîne à trois niveaux (Figure 2.1) :

- la rupture d'un gousset fragilisant un assemblage,
- la rupture d'un assemblage fragilisant l'ouvrage,
- la défaillance de l'ouvrage fragilisant le réseau routier.

Lorsque le système est parfaitement délimité dans l'espace, le temps, et dans la fonction qui lui est associée, il est alors pertinent d'identifier l'ensemble des sous-systèmes constitutifs qui, par leur mise à contribution, doivent permettre au système de faire face à l'évènement inattendu. Selon le niveau auquel on s'intéresse, vulnérabilité et robustesse recouvrent des aspects très différents, la robustesse du niveau inférieur pouvant être perçue comme de la vulnérabilité par rapport au niveau supérieur (cf. Figure 2.1).

L'une des difficultés majeures de la notion de robustesse réside dans l'absence de mesure. Si la probabilité de défaillance peut fournir une mesure quantitative de la vulnérabilité, une mesure quantitative de la robustesse fait encore largement défaut. En effet, à ce jour la robustesse est souvent prise en compte au travers d'un ensemble de bonnes pratiques de conception, décrites sous la forme d'attributs (cf. paragraphe 2.3). Une mesure doit permettre d'apprécier

quantitativement l'écart entre l'ampleur des dégâts constatés et la cause initiale, ce qui constitue l'un des objectifs de cette thèse.

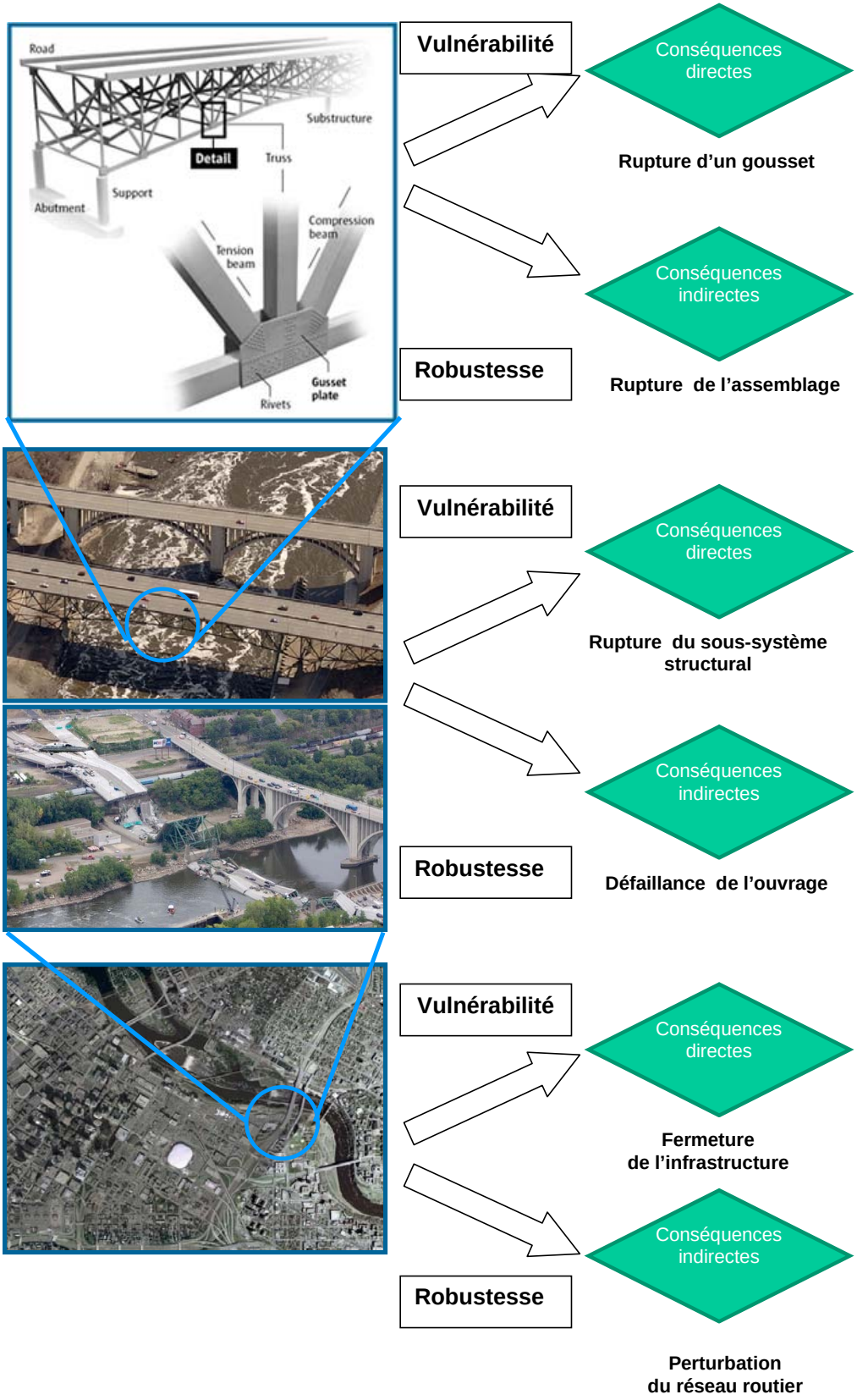


Figure 2.1. Approche multi-niveaux de la vulnérabilité et de la robustesse.

2.3 ATTRIBUTS DE LA ROBUSTESSE

D'après Knoll & Vogel (2008), la robustesse représente la capacité d'un système à faire face à des aléas ou des évènements prévus ou imprévus en conservant inchangée la fonction pour laquelle elle a été conçue. Cette robustesse confère au système une réserve de capacité suffisante pour résister aux situations pendant et après la réalisation de l'évènement. Knoll & Vogel (2008) ont introduit et défini les principaux concepts et stratégies pour assurer la robustesse des ouvrages et bâtiments qu'ils ont appelés éléments de la robustesse (Figure 2.2). Ces différents éléments sont détaillés dans les paragraphes 2.3.1 à 2.3.9.

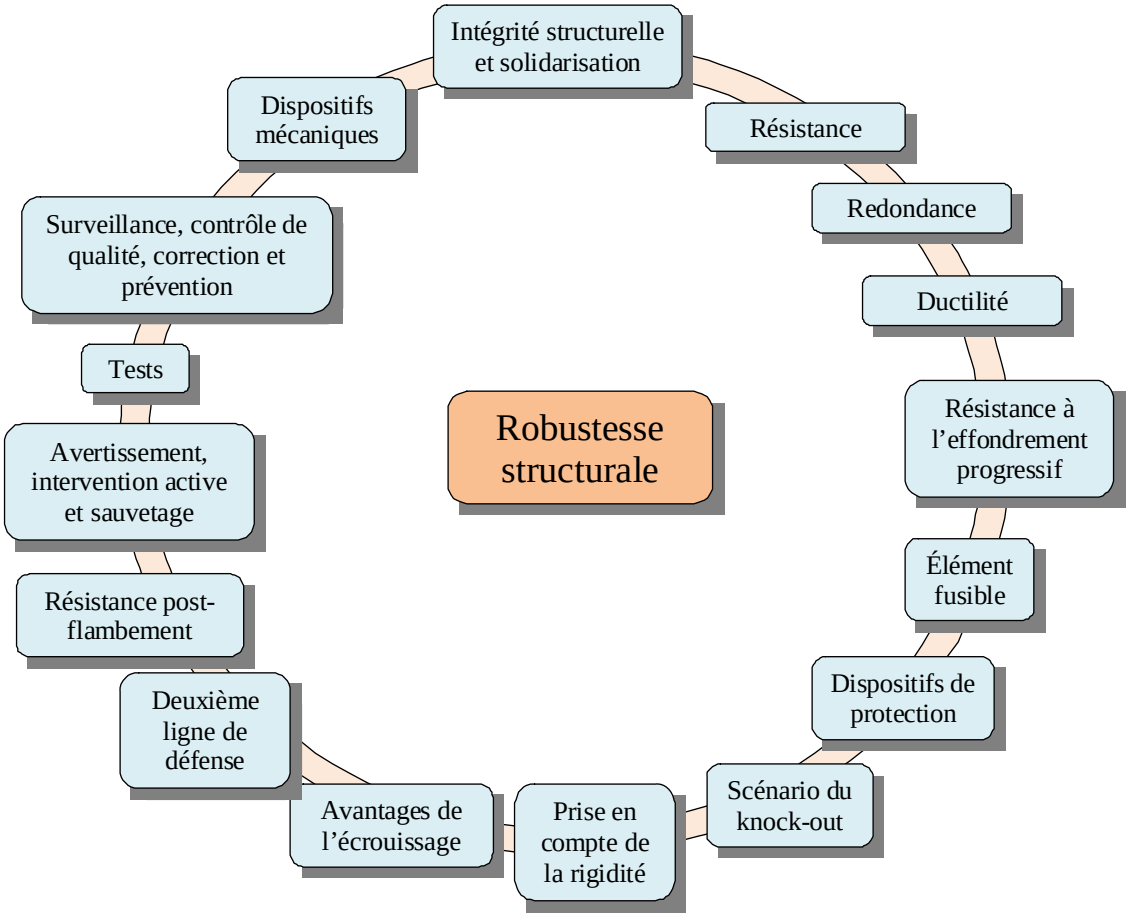


Figure 2.2. Eléments de la robustesse (Knoll & Vogel 2008).

2.3.1 Ductilité

Il s'agit de la capacité d'un matériau à se déformer plastiquement sans se rompre. L'introduction de la ductilité dans une structure peut être bénéfique à deux niveaux : premièrement, la réponse ductile des éléments directement affectés par la défaillance peut limiter les dommages et permettre de prévenir leur défaillance en dissipant plus d'énergie que les éléments moins ductiles. Deuxièmement, si les éléments adjacents aux éléments défaillants sont ductiles, cela

permet le développement de chemins alternatifs de chargement, ce qui peut faciliter le processus de redistribution des efforts dans la structure endommagée.

2.3.2 Ecrouissage

L'écrouissage est le durcissement d'un métal sous l'effet de sa déformation plastique, c'est-à-dire une augmentation de la dureté du métal avec l'augmentation de sa déformation plastique. Il ne se produit que pour des matériaux ductiles dans le domaine plastique et se caractérise par une augmentation de la limite d'élasticité et de la dureté. Dans le cas particulier des aciers de construction, cela se traduit par une augmentation de la résistance jusqu'au point de rupture.

2.3.3 Résistance

Il s'agit ici de la capacité d'un élément ou d'un composant, ou d'une section transversale d'un élément ou composant structural, à résister à des actions sans défaillance mécanique. On peut citer par exemple la résistance à la flexion, la résistance au flambement, la résistance à la traction. C'est aussi une propriété mécanique d'un matériau, indiquant sa capacité à résister à des actions, habituellement exprimée en unités de contrainte. Cette notion est à rapprocher de celle d'un mode de défaillance : elle exprime notamment la vulnérabilité en termes de dysfonctionnement local.

2.3.4 Elément fusible

Un élément fusible est un élément qui à travers sa ductilité maintient un niveau de transfert de charges, tel que les forces qui sont transmises à travers le chemin de chargement le contenant soient limitées. Ce phénomène est très utile dans tous les problèmes à déformations contrôlées (Knoll & Vogel 2008).

2.3.5 Scenario de knock-out

Certains cas existent où il est impossible de donner une résistance ou une ductilité suffisante. La possibilité d'introduire un élément conçu pour être détruit lors de la réalisation d'un aléa sans pour autant entraîner de graves conséquences peut alors être considérée.

2.3.6 Redondance

La redondance est la capacité d'une structure ou d'un ouvrage à redistribuer les efforts dus aux charges extérieures, sur l'ensemble de ses éléments constitutifs (Mohammadkhani-Shali 2007). C'est aussi une caractéristique d'un système structural possédant plusieurs chemins de chargement et pouvant supporter des charges additionnelles en cas de défaillance. La redondance, généralement associée avec la présence de chemins alternatifs de chargement peut limiter les effets d'une défaillance locale.

2.3.7 Seconde ligne de défense

Certaines structures ont la capacité de résister à des chargements de diverses façons, que ce soit en situation de bon ou de mauvais fonctionnement. En situation endommagée, la manière avec laquelle la structure continue de résister aux charges s'appelle la deuxième ligne de défense. On peut considérer ici l'exemple des barrières de sécurité situées le long d'une route. Si la limite de résistance en flexion d'un élément du garde-corps est atteinte en raison de charges agissant perpendiculaire à son axe, il se déformera cinématiquement suivant un mécanisme comportant un certain nombre de rotules plastiques (pour un matériau ductile), ce qui entraînera de grandes déformations et donc une modification de la géométrie de l'élément. Cet élément peut maintenant se comporter comme un hamac en tension qui offre une meilleure résistance en termes de maintien du véhicule : on dit qu'il a trouvé une seconde ligne de défense (Knoll & Vogel 2008).

2.3.8 Prise en compte de la rigidité

Les déformations dans une structure sont généralement inversement proportionnelles à la rigidité, exception faite des situations à déformations contrôlées lorsque la réponse dynamique de la structure est principalement liée à l'amplitude du mouvement du sol (effets sismiques). Les déformations doivent donc être limitées car elles peuvent mettre en péril la robustesse de la structure et entraîner sa défaillance par instabilité de second ordre (effet *P-Delta*).

2.3.9 Résistance post-flambement

Pour des éléments à parois minces exposés aux instabilités locales ou partielles, les études ont montré qu'un flambement partiel peut être autorisé à condition que la résistance résiduelle soit suffisante pour résister aux charges (Knoll & Vogel 2008).

2.4 PRINCIPES ACTUELS DE CONCEPTION POUR LA ROBUSTESSE STRUCTURALE

2.4.1 Approche européenne (Eurocodes)

Le sujet de la robustesse est traité dans deux Eurocodes, l'EN 1990: Bases de calcul des structures, qui énonce les principes majeurs pour la réalisation d'ouvrages robustes, sans pour autant définir le terme robustesse explicitement et l'EN 1991-1-7: Actions sur les structures (actions accidentelles), qui définit le terme *robustesse* et qui fournit les stratégies et méthodes pour l'obtention d'ouvrages robustes ainsi que les actions à considérer (Figure 2.3).

Les Eurocodes établissent une distinction nette entre les actions accidentelles identifiables et non identifiables. Les stratégies vis-à-vis des actions accidentelles non identifiées visent à limiter l'étendue d'une défaillance locale.

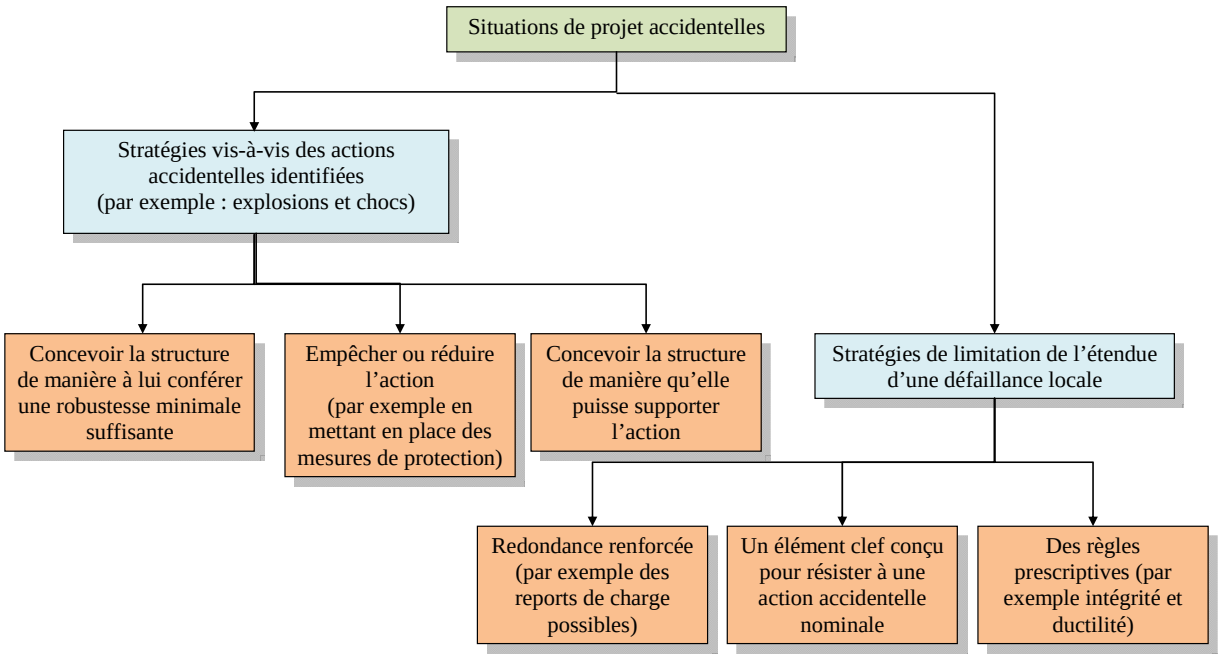


Figure 2.3. Stratégies pour les situations de projet accidentelles (EN 1991 2006).

Les méthodes utilisées pour concevoir des structures robustes peuvent être divisées selon des classes de conséquences:

- CC1 (faibles conséquences de la défaillance) : pour cette classe, il n'y a pas de considération spécifique d'actions accidentelles à prendre en compte sous condition de respecter les règles de stabilité et de robustesse fixées dans les Eurocodes EN 1990 à EN 1999.
- CC2 (conséquences moyennes de la défaillance) : cette classe nécessite de mener des analyses simplifiées par des modèles de chargements statiques équivalents ou en appliquant des règles de calcul et des dispositions constructives.
- CC3 (conséquences élevées de la défaillance) : pour cette classe, il est nécessaire de mener une analyse approfondie des scénarios de défaillance dans le cadre d'une analyse de risque par exemple, avec le recours à des analyses dynamiques et des analyses non linéaires.

L'article 3.2(2) de l'EN 1991-1-7 stipule qu'une défaillance locale due à des actions accidentelles peut être acceptable à condition qu'elle ne mette pas en danger la stabilité de la structure, et que la capacité portante globale de la structure soit conservée et permette de prendre les mesures d'urgence nécessaires. Dans le cas particulier des ponts, les mesures d'urgence peuvent comprendre la fermeture momentanée de la voie (routière ou ferrée). Pour les bâtiments, les mesures d'urgence peuvent impliquer l'évacuation en toute sécurité des personnes des locaux et des alentours (EN 1991 2006).

2.4.2 Approche américaine (ASCE 2005)

Le document essentiel traitant de la robustesse est la norme ASCE 7-02 (ASCE 2005). C'est un document concernant en particulier la conception des structures vis-à-vis de l'effondrement progressif. Il part du principe que les évènements déclencheurs, les accidents, la mauvaise utilisation, ou le sabotage sont des évènements imprévisibles qui ne peuvent de ce fait, être définis précisément lors de la conception. Le but n'est pas de déterminer les évènements spécifiques à considérer durant la conception, mais d'établir des principes pour l'obtention de la résistance à l'effondrement progressif. Pour cela, cette norme distingue deux méthodes de conception: les conceptions directes et indirectes (Diamantidis 2009).

La conception directe considère explicitement la résistance à l'effondrement progressif dans le processus de conception. Pour cela, la « méthode des chemins alternatifs » est utilisée. Cette méthode autorise l'occurrence de la défaillance locale mais vise à fournir des chemins de chargements alternatifs de sorte que le dommage soit absorbé et les effondrements majeurs évités. L'intégrité structurale peut être testée dans le but de vérifier l'existence de chemins alternatifs autour des régions hypothétiquement effondrées. La norme ASCE 7-02 recommande en plus la « méthode de résistance locale spécifique ». Cette méthode vise à fournir une résistance suffisante aux défaillances due aux accidents ou à la mauvaise utilisation.

La conception indirecte considère implicitement la résistance à l'effondrement progressif dans le processus de conception, par la fourniture de niveaux minimum de résistance, continuité et ductilité. L'étude des chemins alternatifs peut être utilisée comme guide pour développer des règlements pour l'obtention de niveaux minimum des propriétés mentionnées ci-dessus, nécessaires à l'application de l'approche par conception indirecte, pour renforcer l'intégrité structurale. Des informations supplémentaires sur la robustesse structurale dans les normes et règlements américains sont fournies par Nair & Shankar (2004).

2.4.3 Approche canadienne (NBCC 1995)

Le National Building Code of Canada (NBCC 1995), section 4.1.1.3(1), exige que les structures soient conçues de sorte à avoir une intégrité structurale suffisante, pour résister à tout effet dont on peut raisonnablement s'attendre à ce qu'il se produise durant la durée de vie. Le commentaire C de la partie 4 définit l'intégrité structurale comme « l'aptitude d'une structure à absorber une défaillance locale sans l'occurrence d'un effondrement généralisé », et recommande aux concepteurs d'examiner et de prendre des mesures contre des accidents graves ayant une probabilité d'occurrence annuelle supérieure à 10^{-4}. Cette probabilité permet de prévenir les ingénieurs quand des mesures qui vont au delà des minima du code prescripteur doivent être considérées. Le NBCC ne donne cependant aucune orientation sur la manière dont les probabilités doivent être calculées pour des scénarios de conception spécifiques. Ce document

recommande une conception qui vise à garantir une résistance locale, des forces de liaison et des chemins alternatifs de chargement (NBCC 1995).

2.4.4 Approche anglaise (ODPM 2004)

Le Royaume-Uni a été un précurseur dans la prise en compte explicite des problèmes d'effondrement progressif et de robustesse structurale. Les stratégies et dispositions pour la robustesse sont contenues dans le paragraphe A3 de l'annexe 1 des règlements de construction (ODPM 2004, Vlassis 2007). Conformément à ces dispositions, tous les bâtiments ne dépassant pas quinze étages ou 5000m2 de surface de plancher à chaque étage ainsi que les hôpitaux ne dépassant pas trois étages et les ouvrages de stationnement d'au plus six étages sont jugés suffisamment robustes pour soutenir des dommages de faible étendue à condition que les éléments de structure soient effectivement liés entre eux. Les éléments structuraux dont la suppression entraîne des dommages dont l'étendue va au-delà de 70 m^2 ou 15% de la surface du plancher doivent être conçus comme des éléments clés, capables de résister à une pression statique de 34kN/m^2. L'intégrité structurale de tous les ouvrages dont l'étendue des dommages dépasse les limites suscitées doit être vérifiée par une procédure d'évaluation systématique des risques en tenant compte de tous les aléas, prévisibles ou non.

2.4.5 Concepts développés par le JCSS (2001, 2008)

Le Joint Committee on Structural Safety (JCSS 2001, 2008) a récemment proposé des concepts et méthodologies sur le thème de la robustesse utilisant une approche par analyse de risque pour déterminer un cadre relatif à la définition de structures robustes (Figure 2.4a).

L'approche suggérée évalue la robustesse dans un contexte de prise de décision de telle sorte que la performance des structures endommagées soumises à diverses conditions de chargement ne soit pas seule à être prise en compte, mais intègre les stratégies d'inspection et d'entretien, les effets des interventions humaines ainsi que les systèmes de surveillance (Faber et al. 2006). Selon cette démarche, la robustesse est une propriété qui est fonction à la fois de la performance structurale souhaitée et des aléas cibles. La robustesse structurale est donc estimée suivant les étapes de la Figure 2.4b (Faber et al. 2006) :

1. Le système doit être identifié et clairement défini ;
2. Les objectifs spécifiques du système doivent être identifiés ;
3. Les perturbations ou désordres spécifiques tels que les effets des aléas, les influences externes ou internes, les circonstances anormales ou imprévues, ou toutes autres déviations des hypothèses de conception doivent être clairement identifiés ;

4. L'analyse de la robustesse doit se concentrer sur les conséquences globales induites par les perturbations spécifiques identifiées à l'étape précédente puisqu'elles affectent les objectifs du système identifiés à l'étape 2 ;
5. Les indices ou tous les autres indicateurs de robustesse doivent caractériser l'insensibilité du système aux perturbations spécifiques (étape 3) ;
6. L'évaluation de la robustesse doit tenir compte à la fois de toutes les incertitudes associées aux hypothèses du système (étape 1), des objectifs du système (étape 2), de l'apparition de perturbations ou de menaces (étape 3) et des modèles d'incertitudes pris en compte dans l'analyse des conséquences du système effectué à l'étape 4.

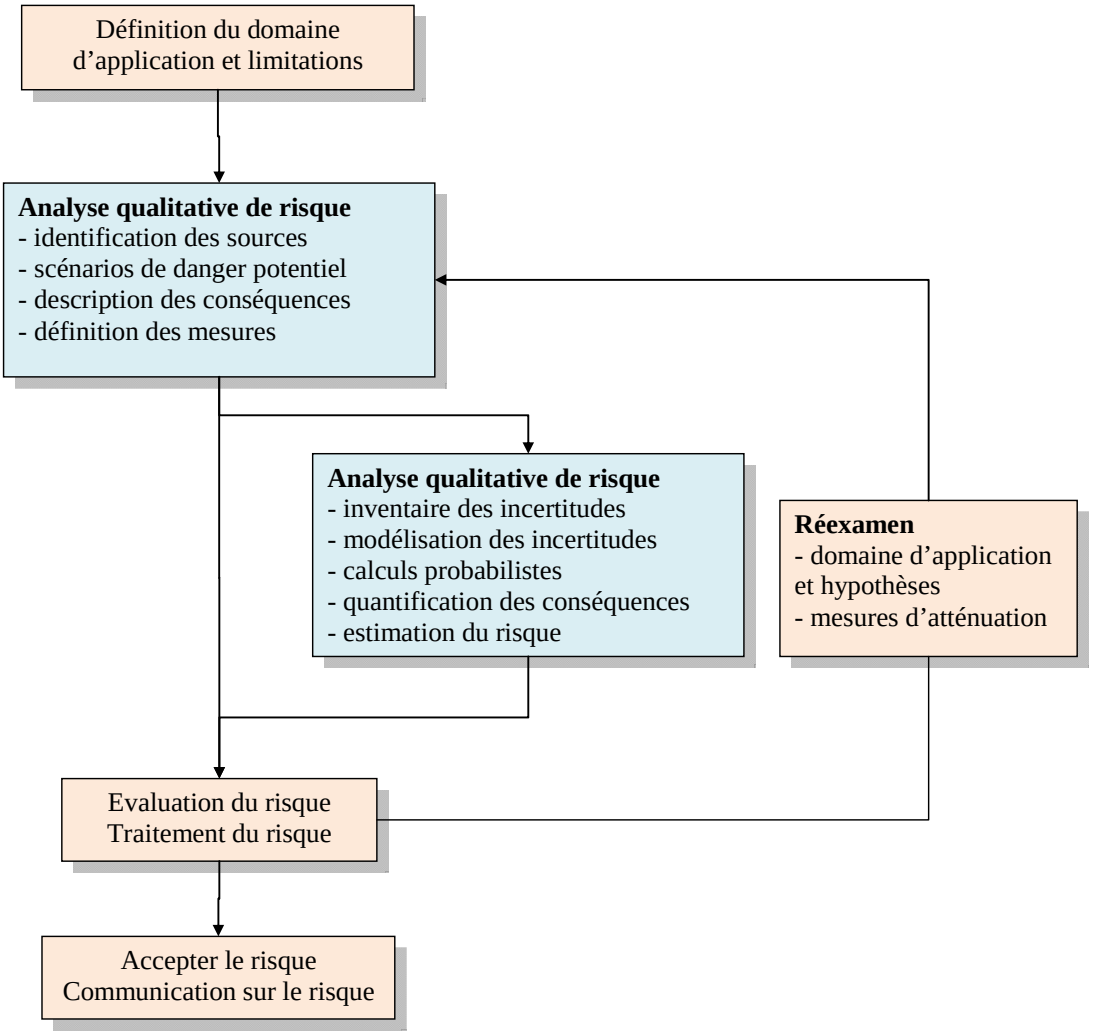


Figure 2.4. (a) Aperçu général d'une analyse de risque (EN 1991-1-7:2006 2007).

Sans offrir des réponses et des outils, les recommandations du JCSS (2008) constituent cependant une étape clé dans la formalisation de la robustesse. Elles insistent sur la prise en compte des incertitudes – ce qui justifie le recours à des approches ad hoc comme des approches probabilistes – et de l'analyse des conséquences induites par des dysfonctionnements locaux, et

sur l'importance de disposer d'outils/mesures de quantification. Cette démarche sera largement reprise au cours de cette thèse.

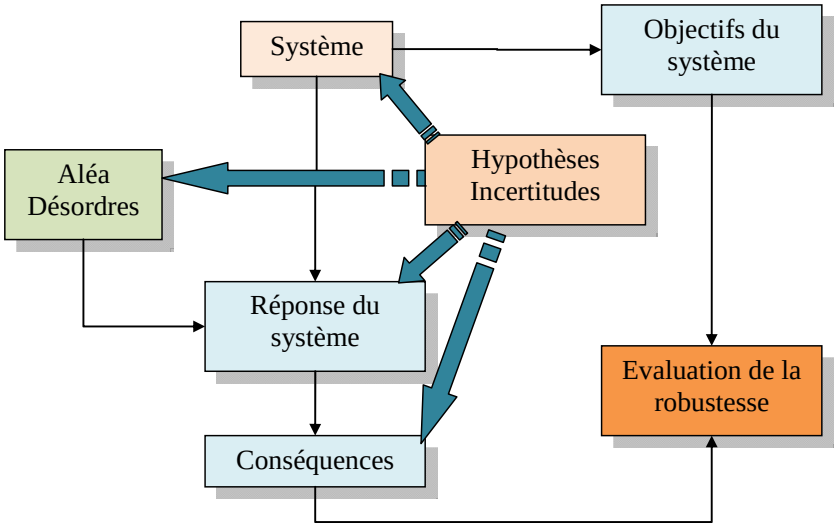


Figure 2.4. (b) Cadre général pour l'évaluation de la robustesse structurale (Maes et al. 2005, Faber et al. 2006).

2.5 QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE

Starossek & Haberland (2008a) ont formulé plusieurs approches pour quantifier la robustesse en suggérant les domaines d'application et les exigences d'une mesure de la robustesse (Figure 2.5). Il convient cependant de s'interroger d'une part sur le sens à donner à une mesure de la robustesse et d'autre part sur l'objectif de cette quantification. Le domaine d'application présenté dans la Figure 2.5 est détaillé dans le paragraphe 2.5.1. Les exigences sur la mesure de la robustesse sont discutées dans le paragraphe 2.5.2.

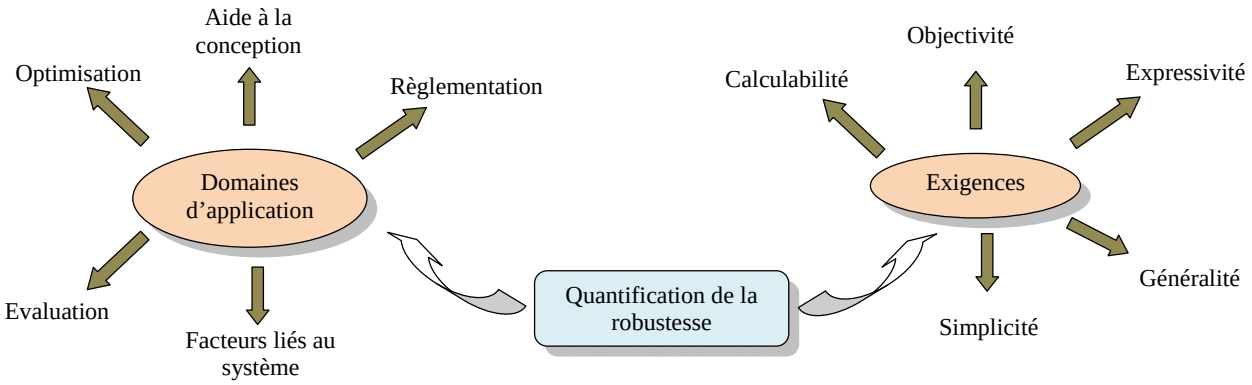


Figure 2.5. Quantification de la robustesse : domaines d'application et exigences.

2.5.1 Domaines d'application d'une mesure de la robustesse

La quantification de la robustesse ouvre un certain nombre de domaines d'applications (Starossek & Haberland 2008a) qui sont détaillés ci-après :

2.5.1.1 Optimisation

La quantification de manière explicite de la robustesse d'une structure permet de l'optimiser.

2.5.1.2 Réglementation

La quantification de la robustesse permet de la réglementer, et donc d'introduire dans les codes de conception et de construction, des normes et des règlements pour la robustesse.

2.5.1.3 Évaluation

L'utilisation d'une mesure quantitative de la robustesse permet de contrôler l'importance des scénarios de défaillance spécifiques et d'identifier les éléments critiques. En outre, les variantes de conception différentes peuvent être comparées.

2.5.1.4 Aide à la conception

Les mesures de la robustesse doivent faciliter la conception et la prise de décision.

2.5.1.5 Coefficients partiels

La quantification de la robustesse pourrait permettre de compléter à l'avenir les coefficients partiels des approches semi-probabilistes par des termes liés au système.

2.5.2 Exigences d'une mesure de la robustesse

La validité et l'utilité d'une mesure de la robustesse est liée à des exigences générales (Starossek & Haberland 2008a,b, Haberland 2007, Lind 1994) qui sont présentées dans les paragraphes 2.5.2.1 à 2.5.2.5.

2.5.2.1 Calculabilité

Tous les paramètres d'entrée doivent être quantifiables, et le calcul numérique de la mesure doit être suffisamment précis et facile à mener.

2.5.2.2 Expressivité

La mesure doit exprimer tous les aspects de la robustesse et uniquement ceux là. Elle doit permettre une différentiation claire entre des structures robustes et non robustes.

2.5.2.3 Objectivité

La mesure doit être indépendante des décisions des utilisateurs. Le résultat de la mesure doit être reproductible sous les mêmes conditions.

2.5.2.4 Simplicité

Dans l'intérêt de l'objectivité et de la généralité, aussi bien que pour promouvoir son acceptation, la définition d'une mesure de la robustesse doit être aussi simple que possible.

2.5.2.5 Généralité

La mesure doit être applicable à toute structure.

2.5.3 Termes relatifs à la quantification

Il existe plusieurs termes qualitatifs et quantitatifs pour décrire des caractéristiques et des propriétés. Les termes les plus couramment employés sont (Starossek & Haberland 2008a):

- **l'indicateur**: description qualitative d'une propriété,
- **la mesure**: description quantitative d'une propriété,
- **l'indice**: exprimé en termes de ratio, un indice est utilisé pour la description quantitative d'une propriété à une échelle fixe.

Il existe une relation entre ces différents termes de quantification. Un indicateur est la forme générale utilisée pour décrire une propriété. Chaque mesure peut aussi être considérée comme un indicateur. Un indice est quand à lui une forme particulière de mesure (Starossek & Haberland 2008a). Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature pour définir une mesure de la robustesse. Elles sont pour la plupart basées sur l'introduction d'un indice de robustesse noté I_r. Starossek et Haberland (2008a,b) les ont regroupés en deux grandes familles (Figure 2.6):

1. les indices basés sur la performance structurale**,**
2. les indices basés sur les caractéristiques de la structure**.**

2.5.4 Indices de robustesse proposés dans la littérature

De nombreux travaux ont été menés dans le but de faire ressortir les principes pour des constructions robustes (Cavaco et al. 2011, Main et al. 2011, Marjanishvili 2011) et redondantes (Mohammadkhani-Shali 2007, Mohammadkhani-Shali & Cremona 2007a, b, Anitori et al. 2012, Biondini & Frangopol 2012). Ce paragraphe présente un certain nombre de ces indices qui se basent soit sur la performance structurale, soit sur les caractéristiques structurales.

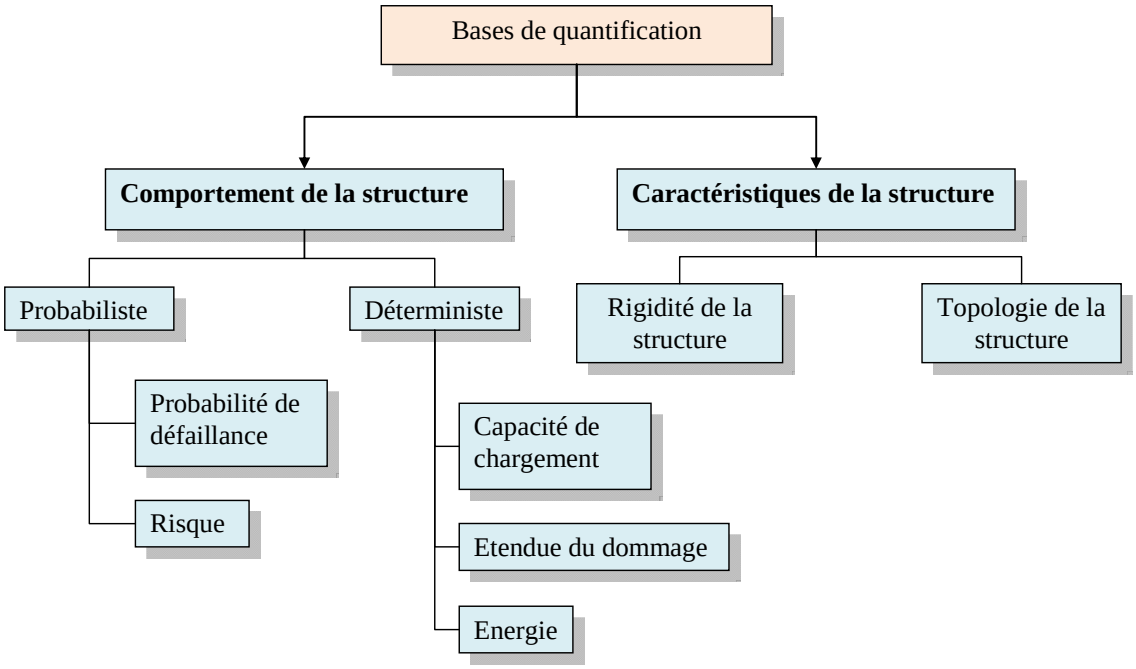


Figure 2.6. Approches de quantification (Starossek & Haberland 2008a, b).

2.5.4.1 Indices de robustesse basés sur la performance structurale

2.5.4.1.1 Méthodes probabilistes

Probabilité de défaillance

La redondance structurale est une propriété liée à la robustesse structurale dans la mesure où une structure redondante est considérée comme robuste. Frangopol & Curley (1987), Fu & Frangopol (1987) et Mohammadkhani-shali (2007) ont proposé des indices probabilistes pour mesurer la redondance structurale.

(1) L'indice de redondance proposé par Fu & Frangopol (1990) exprime la réserve de résistance d'une structure ayant subi un dommage :

$$IR_1 = \frac{\left(P_{f(dmg)} - P_{f(sys)}\right)}{P_{f(sys)}} \tag{2.1}$$

où $P_{f(dmg)}$ est la probabilité d'occurrence d'un dommage dans le système et $P_{f(sys)}$ est la probabilité de défaillance du système.

(2) L'indice de redondance proposé par Frangopol & Curley (1987) est une version alternative de l'indice précédent introduisant des indices de fiabilité à la place de probabilités de défaillance :

$$IR_2 = \frac{\beta_{intacte}}{\left(\beta_{intacte} - \beta_{endommagée}\right)} \tag{2.2}$$

où $\beta_{intacte}$ est l'indice de fiabilité de la structure intacte et $\beta_{endommagée}$ l'indice de fiabilité de la structure endommagée. L'indice IR_2 varie entre 0 et l'infini, la valeur 0 indiquant une structure défaillante, et $+\infty$ une structure hyper-robuste.

3) L'indice de redondance résiduelle proposé par Mohammadkhani-shali (2007) exprime la performance de l'ouvrage lorsqu'un élément est défaillant :

$$IR_3 = \frac{\beta_{s,d}}{\beta_{s,i}} \tag{2.3}$$

où $\beta_{s,d}$ est l'indice de fiabilité du système obtenu par des calculs non linéaires lorsqu'un élément est défaillant et $\beta_{s,i}$ l'indice de fiabilité initial du système (ou indice de fiabilité du système intact) obtenu par des calculs non linéaires. L'indice IR_3 varie entre $-\infty$ et 1. Le cas où $IR_3 = -\infty$ correspond à un ouvrage endommagé avec une probabilité de défaillance $P_f = 1$. Le cas où $IR_3 = 0$ correspond à un ouvrage endommagé avec une probabilité de défaillance $P_f = 0,5$. Enfin, le cas $IR_3 = 1$ correspond à un ouvrage intact.

4) Comme l'indice IR_3, l'indice de redondance de performance proposé par Mohammadkhani-shali (2007) mesure également la performance de l'ouvrage lorsqu'un élément est défaillant (il est semblable à l'indice IR_2) :

$$IR_4 = \frac{\beta_{s,i}}{\left(\beta_{s,i} - \beta_{s,d}\right)} \tag{2.4}$$

où $\beta_{s,d}$ et $\beta_{s,i}$ sont définis dans l'Equation 2.3. Cet indice varie entre 0 et l'infini, la valeur 0 de IR_4 correspondant à un ouvrage entièrement endommagé, la valeur 1 de IR_4 à un ouvrage endommagé à 50% et la valeur $IR_4 = +\infty$ correspondant à un ouvrage intact.

5) Deux indices de réserve de redondance ont été proposés par Mohammadkhani-shali (2007). Le premier correspond au taux de réserve du système. Il représente l'écart entre l'indice de fiabilité du système endommagé et l'indice de fiabilité de son élément le plus critique:

$$IR_5 = \beta_{s,d,nl} - \beta_{e,c,l} \tag{2.5}$$

où $\beta_{s,d,nl}$ représente l'indice de fiabilité du système lorsqu'un élément est défaillant, en faisant des calculs non linéaires, et $\beta_{e,c,l}$ l'indice de fiabilité de l'élément critique en faisant des calculs linéaires. Il n'y pas de gamme de variation type et ces mesures peuvent varier selon le type d'ouvrage.

Le second indice de réserve de redondance correspond à la réserve locale dans les éléments de structure principaux de l'ouvrage (les poutres par exemple) lorsqu'un élément est défaillant :

$$IR_6 = \frac{\beta_{e,c,nl}}{\beta_{e,c,l}} \tag{2.6}$$

où $\beta_{e,c,l}$ est défini dans l'Equation 2.5 et $\beta_{e,c,nl}$ l'indice de fiabilité de l'élément critique en faisant des calculs non linéaires. Cet indice reste toujours inférieur à 1.

Risque

Le risque $\Re$ se définit comme étant :

$$\Re = P_f \times C \tag{2.7}$$

où P_f est la probabilité de défaillance et C représente les conséquences définies suivant une mesure appropriée. Baker et al. (2008) ont proposé une mesure de la robustesse structurale prenant en compte les conséquences directes C_{dir} et indirectes C_{indir} de l'occurrence d'un aléa. Les conséquences directes sont les conséquences dues à la défaillance locale d'un élément de structure (ces conséquences étant supposées proportionnelles à la cause initiatrice). Les conséquences indirectes sont quant à elles les conséquences associées à la défaillance de la structure qui se produisent après la défaillance locale (les conséquences indirectes sont supposées disproportionnées par rapport à la cause initiatrice).

Cette démarche introduit les notions d'évènement redouté (EX), de dommage au niveau des composants (D) et la défaillance de la structure de manière globale (F). Les complémentaires $\overline{D}$ (absence de dommage au niveau des composants) et $\overline{F}$ (absence de défaillance globale) de D et F, respectivement, permettent d'envisager les différents cas possibles lors de la réalisation de l'évènement EX et de construire un arbre d'évènement (Figure 2.7) qui lie les conséquences directes et indirectes à chacune des branches de l'arbre.

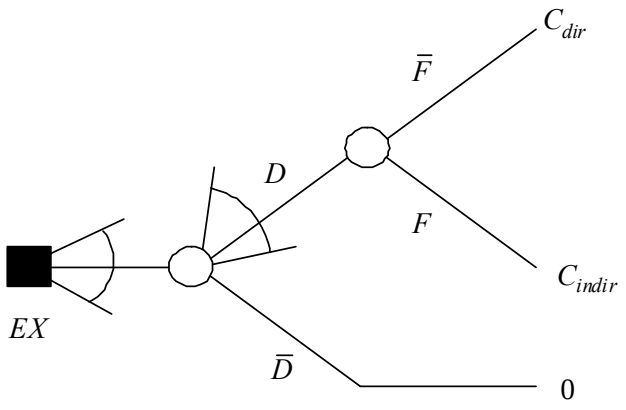


Figure 2.7. Représentation en arbre d'évènement (Baker et al. 2008, Faber et al. 2011).

Cette mesure de la robustesse exprime l'écart entre le risque total $\Re_{total}$ et le risque direct $\Re_{direct}$:

$$I_{rob,1} = \frac{\Re_{direct}}{\Re_{total}} = \frac{\Re_{direct}}{\Re_{direct} + \Re_{indirect}} \tag{2.8}$$

où $\Re_{direct}$ et $\Re_{indirect}$ s'expriment via une intégration des variables aléatoires sur l'ensemble de l'arbre d'évènement de la manière suivante :

$$\Re_{direct} = \int_{EX}\int_{D} C_{dir}(D)\,P(D|EX)\,P(EX)\,dEXdD \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\Re_{indirect} \quad = \quad & \int_{EX}\int_{D} C_{indir}(F)\,P(F|D,EX) \\ & \times P(D|EX)\,P(EX)\,dEXdD\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.5.4.1.2 Méthodes déterministes

Capacité de charge

L'indice de robustesse proposé par Biondini (2009) compare la performance de l'ouvrage au temps initial, à la performance de l'ouvrage au temps t :

$$I_{rob,2} = \frac{\lambda_c(t)}{\lambda_{c0}} \tag{2.11}$$

où λ_{c0} et $\lambda_c(t)$ sont les multiplicateurs de charge limite au temps initial (i.e., $t = 0$) et au temps t. Cet indice, variant entre 0 et 1, est une mesure efficace permettant d'estimer la performance structurale en fonction du temps.

Etendue du dommage

L'indice de robustesse proposé par Haberland (2007) s'exprime par :

$$I_{rob,3} = 1 - \frac{p}{P_{\lim}} \tag{2.12}$$

où p et $P_{\lim}$ sont respectivement l'étendue maximale du dommage additionnel causé par le dommage initial et la progression de dommage acceptable (Haberland 2007).

Energie

L'indice de robustesse proposé par Smith (2007) s'exprime par :

$$I_{rob,4} = 1 - \max_j\left(\frac{E_{r,j}}{E_{s,k}}\right) \tag{2.13}$$

où $E_{r,j}$ et $E_{s,k}$ représentent respectivement l'énergie libérée par la défaillance initiale de l'élément de structure j et disponible pour la défaillance de l'élément suivant k et l'énergie requise pour la défaillance de l'élément suivant k.

2.5.4.2 Indices de robustesse basés sur les caractéristiques structurales

Rigidité de la structure

Haberland (2007) a proposé un indice de robustesse basé sur l'étude de la rigidité du système statique. Cet indice, variant dans l'intervalle $[0,1]$ est défini comme le rapport du plus petit déterminant de la matrice de rigidité du système actif de la structure ayant perdu un élément structural ou une connexion $|K_j|$ avec le déterminant de la matrice de rigidité du système actif de la structure intacte $|K_0|$:

$$I_{rob,5} = \min_j \left(\frac{|K_j|}{|K_0|} \right) \tag{2.14}$$

Biondini & Restelli (2008) ont proposé quatre indices de robustesse pour des structures à comportement élastique linéaire, (notés $I_{rob,6}$ à $I_{rob,9}$) et variant dans l'intervalle $[0,1]$.

Ces indices quantifient le degré d'endommagement de la structure. En particulier, l'indice $I_{rob,6}$ s'exprime par :

$$I_{rob,6} = \frac{|K_d|}{|K_0|} \tag{2.15}$$

où $|K_d|$ est le déterminant de la matrice de rigidité de la structure endommagée. Il est noté que les indices 0 et d renvoient respectivement aux états intact et endommagé de la structure, K_p étant la matrice de rigidité du système structural dans l'état p ($p = 0$ ou d).

Le troisième indice s'écrit :

$$I_{rob,7} = \frac{t_d}{t_0} \tag{2.16}$$

où $t_p = \sum_i \left(\lambda_i(K_p) \right)$ est la trace de K_p ($p = 0$ ou d), $\lambda_i(K_p)$ étant la i-ème valeur propre de K_p.

Le quatrième indice de robustesse s'exprime par :

$$I_{rob,8} = \frac{c_0}{c_d} \tag{2.17}$$

où $c_p = \dfrac{\max_i \lambda_i \left(K_p \right)}{\min_i \lambda_i \left(K_p \right)}$ est le nombre de conditionnement de K_p ($p = 0$ ou d).

Enfin, le cinquième indice proposé s'écrit :

$$I_{rob,9} = \frac{T_0}{T_d} \tag{2.18}$$

où $T_p = 2\pi\sqrt{\max_i \lambda_i \left(K_p^{-1} M_p\right)}$ est la première période de vibration associée à la matrice de masse M_p de la structure ($p = 0$ ou d).

Topologie de la structure

L'analyse de la forme d'une structure peut procurer des informations intéressantes sur sa robustesse (car la forme et la fonction sont étroitement liées). C'est sur ce principe que se basent les travaux d'Agarwal et al. (2001, 2003, 2005) qui propose un indice de robustesse structurale.

Il s'agit d'analyser la qualité de la connectivité de la structure (les nœuds) :

1. Calculer le facteur de forme $F(R)$
2. Clustériser la structure
3. Déterminer les scénarios de défaillance

L'indice de robustesse s'exprime alors par :

$$I_{vul} = \frac{C(f)}{D_d} \tag{2.19}$$

où $C(f)$ est la conséquence de la défaillance de l'ouvrage et D_d est la mesure de l'effort requis pour rendre défaillants tous les éléments de la structure.

2.5.4.3 Appréciation d'endommagements disproportionnés (Ellingwood 2006)

Ellingwood (2006, 2007, 2011) propose un cadre mathématique pour estimer un niveau de risque exprimé sous la forme suivante :

$$\lambda_{pertes>\upsilon} = \sum_H \sum_{LS} \sum_{DS} P\left(Pertes > \upsilon \middle| DS\right) P\left(DS \middle| LS\right) P\left(LS \middle| H\right) \lambda_H \tag{2.20}$$

où λ_H est la fréquence annuelle de l'évènement H, $P\left(LS \middle| H\right)$ est la probabilité conditionnelle d'atteindre l'état limite LS (plastification des sections, rupture, instabilité) sachant l'évènement H, $P\left(DS \middle| LS\right)$ est la probabilité d'atteindre un état endommagé (pouvant être négligeable, faible, modéré, important, ou intolérable) provenant de l'atteinte de l'état limite LS, et $P\left(Pertes > \upsilon \middle| DS\right)$ est la fréquence moyenne annuelle pour avoir des pertes supérieures à υ pour un endommagement DS particulier. Il est noté que le terme $P\left(DS \middle| LS\right)$ est introduit pour faire le lien entre la notion d'état limite LS utilisé dans le cadre d'une analyse structurelle et les estimations des pertes liées à l'endommagement DS. Par ailleurs, la valeur de $\lambda_{pertes>\upsilon}$ dépend manifestement du nombre d'éléments considérés. Ellingwood (2006, 2011) introduit également

la notion de fréquence annuelle de défaillance généralisée $\lambda_{f,gen}$ ou encore d'endommagement disproportionné de la manière suivante :

$$\lambda_{f,gen} = \sum_H \sum_{DS} P\left(Def_{gen} \middle| DS\right) P\left(DS \middle| H\right) \lambda_H \tag{2.21}$$

où $P\left(Def_{gen} \middle| DS\right)$ est la probabilité d'une défaillance généralisée et disproportionnée sachant l'endommagement DS. Il est noté que ce formalisme permet plus d'estimer la fréquence d'un endommagement généralisé de la structure plutôt qu'une réelle mesure de la robustesse structurale. De plus, ce formalisme suppose que l'on sache recenser tous les évènements H et en quantifier la probabilité d'occurrence. Il présente cependant l'avantage de faire le lien entre un aléa et la probabilité d'occurrence d'endommagements jugés disproportionnés par rapport à la cause initiale (Ellingwood & Leyendecker 1978).

2.5.4.4 Synthèse sur les indices de robustesse

Tel qu'illustré dans le paragraphe ci-dessus, il existe globalement deux familles d'indices de robustesse probabilistes pour la quantification de la robustesse structurale :

- la première famille compare la probabilité de défaillance d'un système intègre à celle d'un système endommagé,
- la seconde famille utilise une analyse de risque et mesure l'écart entre les conséquences d'un dysfonctionnement local et celles d'un dysfonctionnement global du système.

Ces deux familles d'indices présentent des limites vis-à-vis de la caractérisation de la robustesse structurale. En effet, la première famille d'indices ne caractérise pas la cinématique de passage d'un dysfonctionnement local à un dysfonctionnement global (comment arrive t-on à un système endommagé ?). La deuxième famille d'indices présente un formalisme général mais ne propose pas de mise en œuvre pratique pour la quantification de la robustesse. Un des objectifs de cette thèse est donc de proposer un cadre permettant de qualifier et de quantifier la robustesse structurale.

2.6 APPROCHE PROPOSEE

2.6.1 Ecart entre défaillances locales et globales

La démarche proposée pour déterminer une mesure de la robustesse structurale se base sur les recommandations de l'Eurocode à savoir qu'une structure doit être conçue et exécutée pour ne pas être endommagée par des évènements accidentels de façon disproportionnée par rapport à la cause initiale. Les cas présentés en annexe A sont des exemples de défaillances d'ouvrages dus à des actions accidentelles (explosion de gaz, erreur humaine) ayant une faible probabilité d'occurrence, mais avec cependant des conséquences catastrophiques.

Reprenant le formalisme des recommandations du JCCS (paragraphe 2.4.6), l'approche proposée dans cette thèse comporte quatre étapes fondamentales :

1. Définition du problème
2. Définition des défaillances locale et globale
3. Identification des mécanismes dominants et du mécanisme de référence
4. Quantification de la robustesse structurale

L'idée est d'utiliser le concept de vulnérabilité structurale qui peut se traduire à l'échelle des éléments constitutifs du système pouvant être défaillants suite à l'occurrence d'un aléa (l'évènement inattendu représentant une menace) ou encore à l'échelle du système si un dommage de faible étendue se traduit par des conséquences importantes, disproportionnées par rapport à ce dommage initial (Figure 2.8). Si une structure est jugée vulnérable de manière inacceptable, elle sera alors peu robuste. L'étude de la vulnérabilité peut alors apporter un éclairage à l'absence de robustesse.

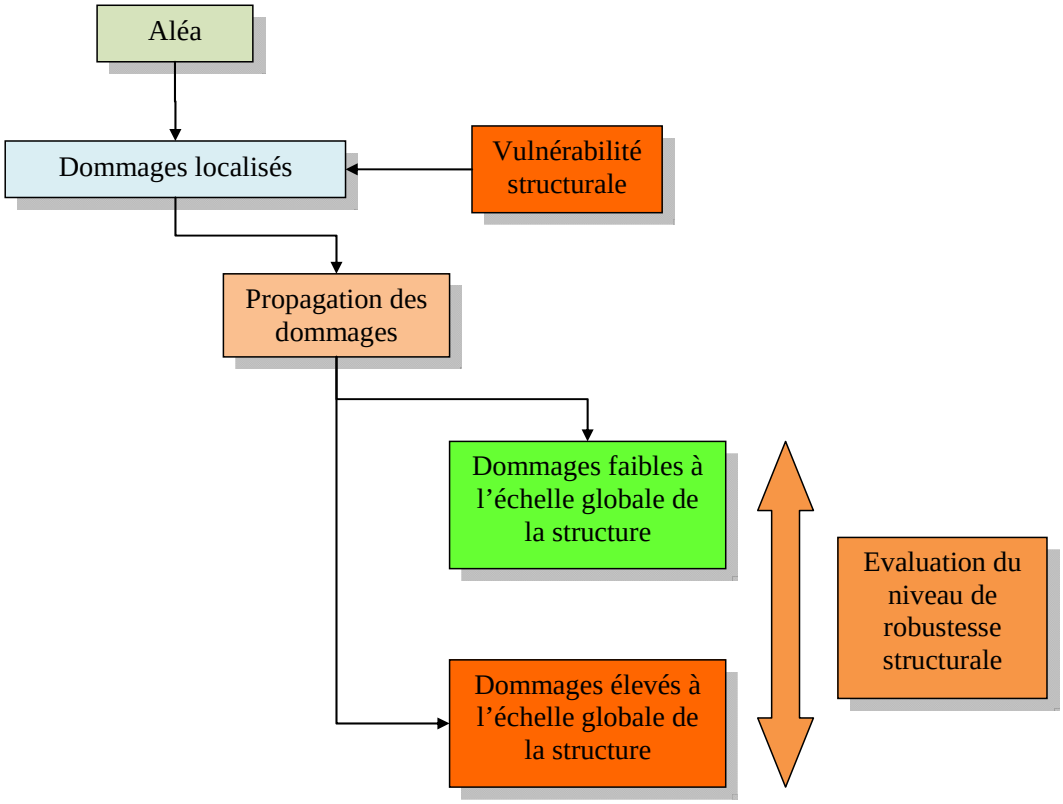


Figure 2.8. Quantification de la robustesse structurale.

L'objectif est donc de faire le lien entre les défaillances locales (selon des modes de défaillances à définir) et des défaillances globales au travers de dysfonctionnements globaux à caractériser. Une telle approche doit permettre non seulement de qualifier la robustesse structurale, mais également de la quantifier au travers d'un certain nombre d'indicateurs reliant les probabilités de défaillance locales P_{locale} et globales $P_{globale}$ (Figure 2.9).

Les définitions des défaillances locale et globale sont bien entendu spécifiques à un problème donné. Le Tableau 2.2 illustre quelques exemples de défaillances locales et globales qui peuvent être considérées dans une analyse de la robustesse. Pour les structures du génie civil, la défaillance locale peut être liée à une diminution locale de la section de béton ou d'acier, une fissuration localisée, une tension ou une compression excessive d'un élément de structure, la formation d'une rotule plastique au droit d'une section donnée, etc. La défaillance globale peut être associée à une fissuration étendue, la formation d'un mécanisme de ruine, une perte de rigidité globale dans la structure, etc. Cette démarche utilise les notions de probabilités locale et globale associées à chaque type de défaillance.

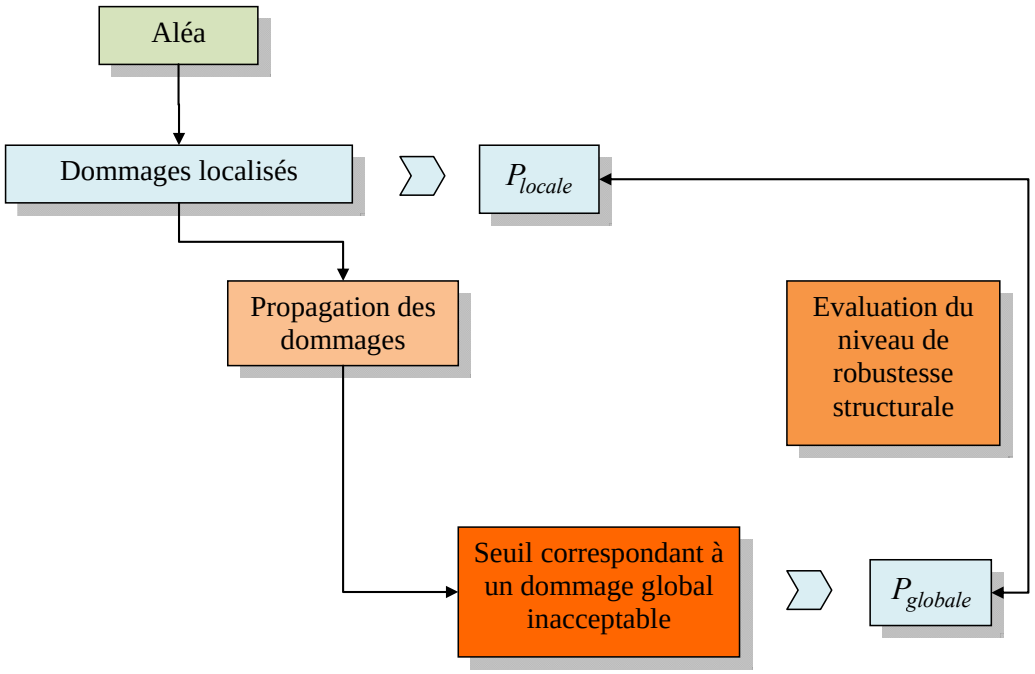


Figure 2.9. Quantification de la robustesse structurale.

Défaillances locales	Défaillances globales
Apparition d'une rotule plastique	Formation d'un mécanisme de ruine
Défaillance d'un élément de structure par tension / compression excessive	Formation d'un mécanisme de ruine
Fissuration (ou endommagement) locale	Fissuration (ou endommagement) étendue (seuil à fixer)
Plastification partielle de la section	Plastification totale de la section
Diminution de la section d'armature	Fissuration étendue (limite à fixer)
Diminution locale de la section de béton ou d'acier	Diminution de la rigidité globale de la structure (seuil à fixer)

Tableau 2.2. Exemples de défaillances locales et globales pouvant être considéré dans une analyse de la robustesse.

2.6.2 Indices de robustesse

2.6.2.1 De la défaillance locale à la défaillance globale

Un premier indice de robustesse est proposé sur la base d'un ratio entre les probabilités de défaillances locales et globales comme défini ci-dessous :

$$I_{r,1} = 1 - \frac{P_{globale}}{P_{locale}} \tag{2.22}$$

Ce premier indice de robustesse compare directement les probabilités locale et globale. L'indice de robustesse I_{r1} varie dans l'intervalle $[0;1[$. Une valeur proche de 1,0 indique une structure infiniment robuste et une valeur proche de 0 indique une structure non robuste.

Un second indice de robustesse est proposé ci-après :

$$I_{r,2} = \frac{C_{locale}P_{locale}}{C_{locale}P_{locale} + C_{globale}P_{globale}} \tag{2.23}$$

Ce second indice de robustesse compare le risque (Equation 2.7) à l'échelle locale et globale. Cet indice peut également s'écrire de la manière suivante :

$$I_{r,2} = \frac{P_{locale}}{P_{locale} + aP_{globale}} \tag{2.24}$$

où $a = \frac{C_{globale}}{C_{locale}} \geq 1$ représente un ratio entre les conséquences globales et locales. Il est intéressant de remarquer que ce deuxième indice peut finalement s'écrire de la manière suivante :

$$I_{r,2} = \frac{1}{1 + a\left(1 - I_{r,1}\right)} \tag{2.25}$$

De même que pour l'indice I_{r1}, une valeur proche de 1,0 pour $I_{r,2}$ indique une structure infiniment robuste et une valeur proche de $1/(1+a)$ indique une structure non robuste. Il est noté que dans le cas où les conséquences globales deviennent infiniment grandes par rapport aux conséquences locales, l'indice $I_{r,2}$ tend vers 0.

2.6.2.2 Lien avec les chemins de défaillance

Ce paragraphe propose une interprétation des indices de robustesse I_{r1} et $I_{r,2}$ en considérant un chemin de défaillance noté q (ce chemin pouvant par exemple être le chemin de défaillance avec la plus grande probabilité d'occurrence), avec un ordre séquentiel d'apparition de la défaillance $q_1, q_2, \ldots, q_n$, où les q_i sont les éléments défaillants et n est la longueur du chemin de ruine. Il

est donc possible d'exprimer la probabilité locale comme la probabilité de défaillance du premier élément dans le chemin de référence, et donc d'écrire $P_{locale} = P_f\left(q_1\right) = P\left(g\left(q_1\right) < 0\right)$, avec $P_f\left(q_1\right)$ la probabilité de défaillance liée à l'élément q_1 et $g\left(q_1\right)$ la marge d'évènement liée à l'élément q_1. Il est également possible d'écrire $P_{globale} = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} g^{q_1,\ldots,q_{i-1}}\left(q_i\right) \le 0\right)$ avec $g^{q_1,\ldots,q_{i-1}}\left(q_i\right)$ la marge d'évènement liée à l'élément q_i lorsque les éléments $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}$ sont déjà défaillants. Manifestement, $g^{q_1,\ldots,q_{i-1}}\left(q_i\right) = g\left(q_1\right)$ pour $i = 1$. Il est donc possible d'écrire l'indice $I_{r,1}$ de la manière suivante :

$$I_{r,1} = 1 - \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} g^{q_1,\ldots,q_{i-1}}\left(q_i\right) \le 0\right)}{P\left(g\left(q_1\right) < 0\right)} \tag{2.26}$$

Ce qui revient à réaliser un calcul de probabilité conditionnelle comme indiqué ci-dessous :

$$I_{r,1} = 1 - P\left(\bigcap_{i=2}^{n} g^{q_1,\ldots,q_{i-1}}\left(q_i\right) \le 0 \middle| g\left(q_1\right) < 0\right) \tag{2.27}$$

Dans le cas où l'indice $I_{r,2}$ est utilisé avec le chemin de défaillance q, son expression devient :

$$I_{r,2} = \frac{1}{1 + aP\left(\bigcap_{i=2}^{n} g^{q_1,\ldots,q_{i-1}}\left(q_i\right) \le 0 \middle| g\left(q_1\right) < 0\right)} \tag{2.28}$$

2.6.3 Vers la détermination des chemins de défaillance dominants

Comme il a été présenté dans le paragraphe précédent, la démarche proposée pour quantifier la robustesse structurale consiste à évaluer l'impact d'une défaillance localisée sur la défaillance globale de l'ouvrage. Un impact fort caractérise une structure peu robuste, contrairement à un impact faible qui caractérise une structure robuste.

Dans ce contexte et compte tenu du grand nombre de modes et mécanismes de défaillance pour les structures complexes, il est important de chercher les mécanismes de défaillance les plus probables (défaillance globale) issus de la défaillance d'un élément de structure (défaillance locale).

L'objectif du chapitre suivant est de déterminer les chemins de défaillance correspondant au dysfonctionnement global. Deux types d'approches sont proposés à cet effet :

- une première approche « par l'intérieur » privilégie la recherche du cheminement de la défaillance dans la structure. La caractérisation de la robustesse structurale fait alors naturellement appel à la notion de redondance définie comme la capacité d'une structure

à redistribuer des efforts dans l'ensemble de ses éléments constitutifs lorsqu'un ou plusieurs élément(s) est(sont) défaillant(s) ou endommagé(s). Bien sûr, il existe de nombreux chemins de défaillance pour une structure donnée. Le but est donc d'identifier le chemin avec la probabilité d'occurrence la plus importante. Ce chemin est appelé « chemin de référence » et est utilisé pour déterminer la probabilité de défaillance globale $P_{globale}$ dans les Equations 2.22 à 2.28. La probabilité locale P_{locale} est alors la probabilité de défaillance du premier élément dans ce chemin de référence ;

- une deuxième approche « par l'extérieur » a pour but d'identifier un dysfonctionnement global pour lequel la défaillance se réalise de manière simultanée dans tous les éléments du/des mécanisme(s) en question.

Dans les deux cas, l'objectif du Chapitre 3 est de présenter une méthodologie à la fois rigoureuse et efficace d'un point de vue des temps de calcul pour évaluer l'écart entre les défaillances locales et globales.

CHAPITRE 3

METHODES DE CARACTERISATION DE DYSFONCTIONNEMENTS GLOBAUX

3.1 – INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'aborder la notion de système structural et de proposer des méthodologies pour caractériser et quantifier les liens existant entre la performance des différents éléments d'une structure et la performance globale de la structure qu'ils constituent. En effet, la démarche retenue dans cette thèse pour caractériser la robustesse, et qui a été présentée dans le chapitre précédent, est de quantifier l'écart entre une défaillance locale et une défaillance globale. La performance d'une structure étant définie comme l'aptitude à assurer les fonctions pour lesquelles elle a été conçue, il est possible de caractériser la performance par la défaillance à assurer cette fonction. Il est noté que cette notion de défaillance peut être interprétée à l'échelle locale et à l'échelle globale. Dans le premier cas, la notion de mode de défaillance est introduite et caractérise la façon même dont la défaillance d'un élément intervient. Dans le deuxième cas, c'est le fonctionnement du système qui est impacté au travers de l'occurrence d'un nombre critique de modes de défaillance, voire de la formation d'un mécanisme de défaillance (Cremona 2011). Cette démarche permet de définir le fonctionnement du système et la notion de dysfonctionnement global.

Pour des structures réelles et complexes, il existe un grand nombre de dysfonctionnements globaux possibles. Il faut également ajouter le fait qu'un élément de structure peut présenter plusieurs modes de défaillance. Le nombre de chemins de défaillance à explorer peut de ce fait devenir très vite prohibitif. Cependant, la plupart des chemins de défaillance ont en général des probabilités d'occurrence suffisamment faibles pour ne garder que les chemins dits dominants. Dans ce contexte, il apparaît nécessaire d'utiliser une méthode à la fois fiable et rigoureuse qui permette de ne sélectionner que les chemins de défaillance dominants tout en restreignant

l'exploration du nombre de chemins de chargement menant au dysfonctionnement global. Tel est l'objet de ce chapitre qui propose un ensemble de méthodologies et d'approches permettant de qualifier les chemins de défaillance dominants et de quantifier leur probabilité d'occurrence. Cette démarche devrait permettre non seulement de caractériser les défaillances locales et globales d'une structure, mais également de quantifier l'écart entre ces défaillances locales et globales, et donc de proposer une quantification de la robustesse structurale. Comme il avait été abordé dans le chapitre 2, les notions d'aléas, d'incertitudes sur les actions sollicitantes, sur les propriétés et sur la modélisation d'une structure, font qu'un cadre probabiliste est naturellement adapté à ce problème. En particulier, la théorie de la fiabilité offre un cadre particulièrement adapté à une telle étude et a déjà été considérée dans des analyses précédentes portant notamment sur la redondance structurale (Mohammadkhani-Shali 2007, Mohammadkhani-Shali & Cremona 2007a,b, Baker et al. 2008, Cremona et al. 2008, Sørensen 2011, Saydam & Frangopol 2011). Les concepts de cette théorie sont donc largement utilisés dans ce paragraphe. Des rappels sur les notions principales de la théorie de la fiabilité peuvent être trouvés dans l'annexe B de ce mémoire.

Ce troisième chapitre est organisé comme suit : la première partie du chapitre est consacrée à la présentation de recherches « par l'intérieur » et « par l'extérieur » du dysfonctionnement global. Le terme « par l'intérieur » est utilisé car c'est le cheminement interne de la défaillance dans la structure qui est recherché. La notion de recherche « par l'extérieur » est ensuite introduite qui consiste à identifier les mécanismes dominants sans parcourir un arbre d'évènement (et donc sans s'intéresser à l'ordre avec lequel la défaillance survient). Le terme « par l'extérieur » correspond donc à regarder la défaillance de manière globale sans chercher à déterminer la chronologie dans la formation du mécanisme de défaillance. La détermination des chemins dominants avec les recherches par l'intérieur et l'extérieur est ensuite réalisée à travers un exemple simple qui sert de « fil conducteur » pour comparer les différentes méthodes proposées. Finalement, l'appréciation de la robustesse structurale est proposée pour cet exemple en utilisant les indices de robustesse introduits dans le paragraphe 2.6. Il est noté que les algorithmes décrits dans ce chapitre ont été développés et implantés sous environnement Matlab®. Les calculs de probabilité de défaillance sont réalisés grâce à la boite à outils ReliabTbx 1.5 développée à l'IFSTTAR et au Sétra. Cette dernière permet le calcul de l'indice de fiabilité et l'approximation de la probabilité de défaillance par diverses méthodes (au premier ou au second ordre) qui sont présentées dans l'annexe B de cette thèse (il est noté que seule la méthode FORM est utilisée dans ce chapitre pour mener les calculs probabilistes).

3.2 CARACTERISATION DU DYSFONCTIONNEMENT GLOBAL

Certains problèmes, en particulier les problèmes d'optimisation, ont leur ensemble de solutions fini (ou dénombrable). On peut donc énumérer toutes les solutions, et ensuite choisir la plus intéressante. L'inconvénient d'une telle approche est le nombre excessif de solutions pour des

problèmes complexes, car il est généralement impossible d'effectuer une énumération de toutes les solutions du problème au risque de se heurter à un temps de calcul prohibitif. Ce paragraphe présente trois méthodes de parcours d'évènements (approches « par l'intérieur ») et une méthode « par l'extérieur » qui permettent d'éviter un parcours intégral de toutes les possibilités en ne conservant que les branches de l'arbre ayant les probabilités d'occurrence les plus élevées.

3.2.1 Méthode des branches et bornes (« approche par l'intérieur »)

La méthode des branches et bornes est un algorithme utilisé pour trouver dans des temps de calcul raisonnables les solutions de divers problèmes d'optimisation, et plus particulièrement des problèmes d'optimisation combinatoire ou discrète. Elle a été proposée pour la première fois par Land & Doig (1960) en programmation discrète. Elle se compose d'une énumération systématique de toutes les solutions intermédiaires ou complètes possibles, dont une grande partie sera éliminée car jugée peu intéressante (Murotsu et al. 1979, Okada et al. 1984). Ce processus est réalisé en utilisant des bornes supérieures et inférieures estimées en analysant les propriétés du problème. Il s'agit d'une technique rigoureuse qui permet de mettre en valeur les mécanismes de défaillance dominants.

En fiabilité structurale, la méthode des branches et bornes a été adaptée dans le but d'identifier les mécanismes de défaillance significatifs d'un système structural, c'est-à-dire ceux dont l'occurrence affecte la fiabilité globale de celui-ci (Thoft-Christensen & Murotsu 1986, Murotsu et al. 1987). Ces mécanismes de défaillance, dits significatifs ou dominants, sont mis en série pour évaluer la probabilité de défaillance du système. L'approche proposée dans cette thèse utilise la méthode des branches et bornes pour identifier le mécanisme de défaillance significatif avec la plus grande probabilité d'occurrence. L'arbre d'évènement est parcouru en considérant une succession de défaillances localisées qui peuvent conduire à une défaillance globale. A titre d'illustration, la Figure 3.1 met en évidence le parcours d'un arbre d'évènement comprenant six éléments dans lequel les nœuds correspondent à l'occurrence de la défaillance d'un des éléments (par exemple a_1 signifie que la défaillance de l'élément 1 s'est produite, a_{12} que la défaillance de l'élément 2 s'est produite, sachant que celle de l'élément 1 s'était déjà réalisée,…). Un tel arbre, dont le parcours se fait de la gauche vers la droite et du haut vers le bas, met en évidence le fait que les chemins a_{12}, a_{13}, a_{4132}, et a_{6135} sont des chemins de défaillance globale dominants (les traits en pointillés sont des chemins écartés). Comme indiqué ci-dessus, les différents chemins dominants peuvent ainsi être mis en série pour calculer la probabilité de défaillance du système. L'objectif peut également être différent, comme c'est le cas dans cette thèse, et consister à comparer l'écart entre un endommagement local et global pour le chemin de défaillance ayant la plus grande probabilité de se produire. Dans ce contexte, c'est plutôt l'identification du chemin avec la plus grande probabilité d'occurrence qui est recherchée (chemin a_{6135} identifié avec des traits gras dans la Figure 3.1).

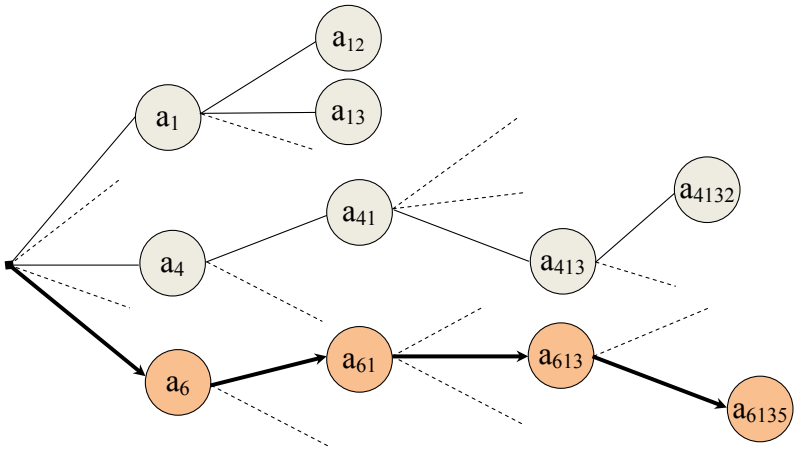


Figure 3.1. Illustration schématique d'un arbre d'évènement –méthode des branches et bornes.

Cette application de l'algorithme de la méthode des branches et bornes, qui comprend deux principales étapes, à savoir le branchement et le bornage, est détaillée ci-après. Il est noté que le cheminement de l'algorithme est illustré avec l'arbre d'évènement de la Figure 3.1.

3.2.1.1 Procédure de branchement

Le but de cette procédure est de sélectionner une combinaison d'éléments défaillants, qui constitueront un mécanisme de défaillance avec la probabilité de défaillance la plus importante. La probabilité de défaillance associée à ce mécanisme est P_{fqc} où q_c est le chemin de défaillance critique (i.e., le chemin de défaillance avec la plus grande probabilité d'occurrence). A l'étape initiale (étape 1) l'élément q_1 ayant la plus grande probabilité de défaillance est sélectionné. A l'étape r, l'élément q_r $(r > 1)$ associé à la plus grande probabilité de défaillance P_{fqr} (il s'agit de la probabilité de l'intersection des sous évènements de défaillance) est sélectionné (Thoft-Christensen & Murotsu 1986). En répétant ce processus de sélection, une séquence d'éléments défaillants se forme jusqu'à l'occurrence d'un mécanisme de défaillance. Dans la Figure 3.2a, l'élément 1 est supposé avoir la probabilité de défaillance la plus importante, c'est donc lui qui est choisi en premier. Supposant la défaillance de cet élément, il est alors recherché quel autre élément est associé à la probabilité de défaillance du chemin la plus importante. Comme il est montré dans la Figure 3.2b, c'est l'élément 2 qui est concerné. La procédure de branchement consiste donc à ajouter l'élément 2 dans le chemin de défaillance. A ce stade du parcours de l'arbre, le critère de défaillance globale est supposé atteint. Aucun autre élément n'est ajouté au chemin et la probabilité de défaillance critique P_{fqc} est actualisée comme étant celle de la probabilité du chemin a_{12}.

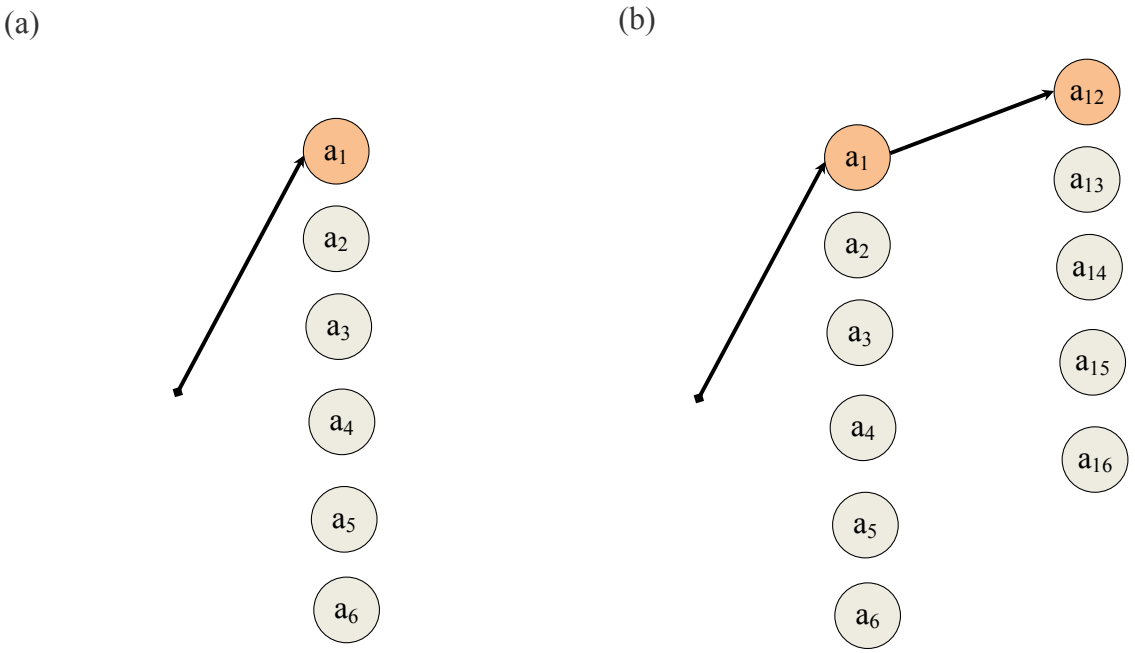


Figure 3.2. Illustration schématique du processus de branchement.

3.2.1.2 Procédure de bornage

La procédure de bornage vise à sélectionner les éléments à écarter. Il s'agit de chemins de défaillance complets ou incomplets dont la probabilité d'occurrence est jugée trop faible pour influencer la fiabilité globale du système. A l'étape de défaillance r, les éléments à éliminer sont ceux avec des probabilités de défaillance plus petites que P_{fqc}. La Figure 3.3 illustre cette démarche de bornage qui fait suite aux opérations de branchement montrées à la Figure 3.2.

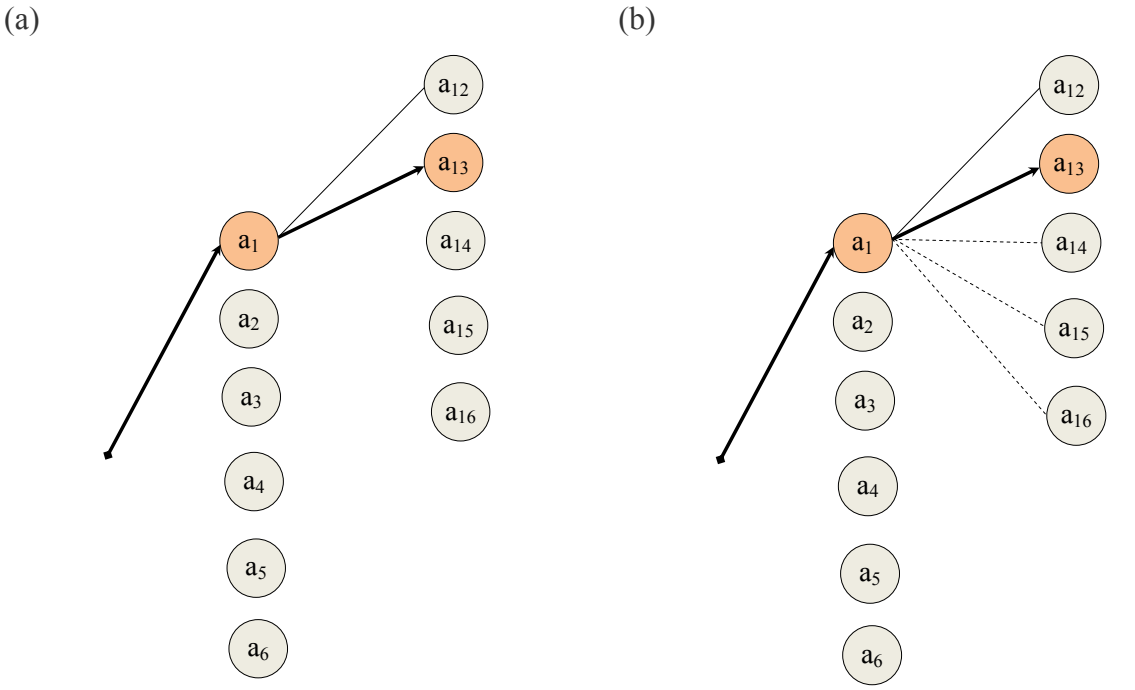


Figure 3.3. Illustration schématique du processus de bornage.

Une fois le premier chemin de défaillance globale a_{12} identifié, le processus de branchement revient un nœud en arrière (au nœud 1) pour évaluer les autres possibilités de branchement (nœuds 3, 4, 5, et 6 sachant 1 défaillant). Il est supposé dans cet exemple que c'est a_{13} qui a la probabilité d'occurrence la plus élevée. A ce moment de l'algorithme, le chemin n'est sélectionné que si sa probabilité d'occurrence est supérieure à celle de la probabilité critique déjà déterminée. En effet, la probabilité d'intersection d'évènements étant une fonction monotone décroissante, il n'est pas nécessaire de continuer le parcours d'une branche de l'arbre qui aura dans tous les cas une probabilité d'occurrence inférieure à P_{fqc}. Ce n'est pas le cas dans la Figure 3.3a pour l'élément 3 qui est alors ajouté au chemin de défaillance (branchement) et pour lequel le critère de défaillance globale est supposé atteint, ce qui conduit à la mise à jour de la probabilité critique P_{fqc} comme étant celle du chemin a_{13}. Une fois encore, l'algorithme revient un nœud en arrière pour évaluer les autres possibilités de défaillance après celle du nœud 1, mais n'ayant plus de branches avec une probabilité supérieure à P_{fqc}, tous les autres chemins postérieurs au nœud 1 sont écartés (les chemins écartés sont en pointillés dans la Figure 3.3b).

3.2.1.3 Itération des processus de branchements et de bornages

L'idée de l'algorithme des branches et bornes est d'itérer les démarches de branchements et de bornages pour parcourir les différentes possibilités de défaillance (de la gauche vers la droite et de haut en bas dans les Figures 3.1 à 3.4). La probabilité P_{fqc} est actualisée chaque fois qu'un chemin de défaillance complet avec une probabilité d'occurrence plus grande que P_{fqc} est trouvé. La Figure 3.4 illustre une étape intermédiaire de l'algorithme où les nœuds initiaux 2 et 3 ont été écartés, ce qui signifie que les probabilités de défaillance initiales de ces deux éléments sont toutes deux inférieures à la probabilité du chemin critique déjà identifié.

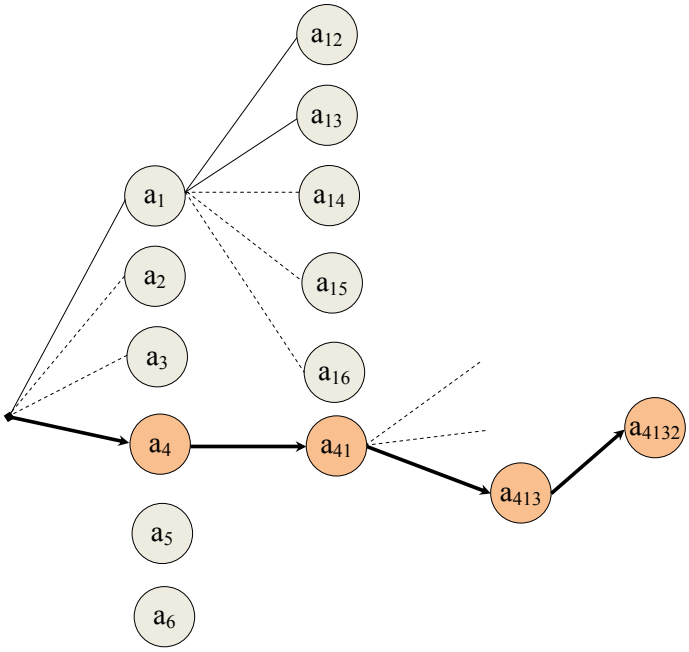


Figure 3.4. Itération des processus de branchement et bornage.

A ce stade de l'algorithme, le chemin a_{4132} est le nouveau chemin de référence et P_{fqc} est maintenant égale à la probabilité de ce chemin. Finalement, les opérations de branchement se terminent lorsqu'il n'existe plus d'élément à sélectionner, ce qui est le cas dans la Figure 3.5 dans laquelle le chemin dominant avec la plus grande probabilité d'occurrence est celle du chemin a_{6135}.

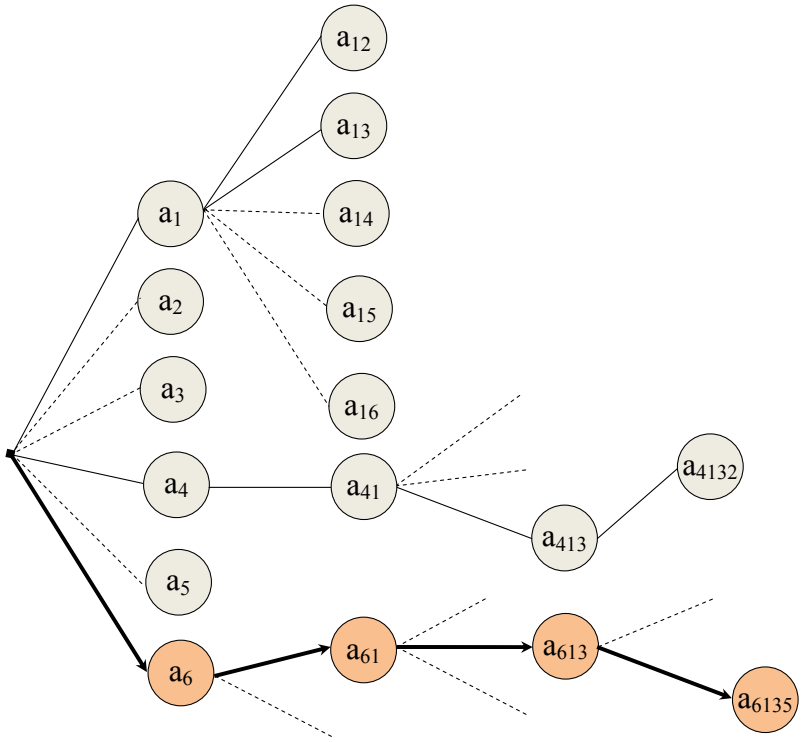


Figure 3.5. Fin du parcours de l'arbre d'évènement pour l'exemple de la Figure 3.1.

3.2.2 Méthode du *β*-unzipping (« approche par l'intérieur »)

La méthode du *β*-unzipping a été suggérée par Thoft-Christensen (1982), puis développée par Thoft-Christensen & Sorensen (1982). Comme pour l'algorithme des branches et bornes, il s'agit d'une méthode générale en ce sens où elle peut être utilisée pour des structures à treillis ou pour des structures à ossature, pour différents modes de défaillance ou encore pour des matériaux à comportement ductile ou fragile. A l'instar de la Figure 3.1 pour la méthode des branches et bornes, la Figure 3.6 illustre de façon schématique un arbre d'évènement. Cet exemple est utilisé dans le paragraphe 3.2.2.1 pour illustrer le principe de l'algorithme.

3.2.2.1 Concept de la méthode

Le *β*-unzipping est une méthode par laquelle la fiabilité d'un système structural peut être estimée à différents niveaux, en identifiant des chemins de défaillance dominants (Thoft-Christensen & Murotsu 1986). Les niveaux correspondent au nombre d'éléments défaillants supposés associés à la défaillance de la structure. L'objectif est d'identifier à chaque niveau les « nœuds d'occurrence » ayant une probabilité de réalisation suffisamment grande, ou encore ceux ayant

un indice de fiabilité β suffisamment faible. Il est important de noter que l'indice de fiabilité considéré pendant le parcours de l'arbre d'évènement est toujours celui du dernier élément dans le chemin de défaillance et non un indice de fiabilité associé à l'intersection de tous les sous évènements de défaillance (pour la méthode des branches et bornes présentée au paragraphe 3.2.1, c'est la probabilité du chemin qui est testée à chaque nœud et non la probabilité de réalisation du nœud associé).

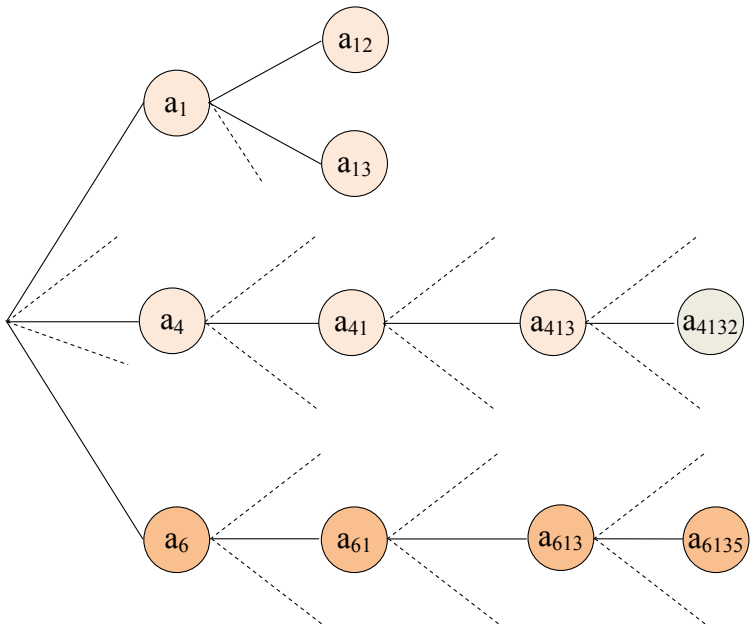


Figure 3.6. Illustration schématique d'un arbre d'évènement – méthode du β-unzipping.

Pour qu'un élément soit retenu au niveau l de l'analyse à la suite d'un élément k au niveau l-1, l'indice de fiabilité de cet élément doit appartenir à un intervalle $\left[\beta_{l-1}^{k}, \beta_{l-1}^{k} + \Delta\beta_{l}^{k}\right]$, où l est le niveau de l'analyse, β_{l-1}^{k} est l'indice de fiabilité de l'élément k à l'étape l-1, et $\Delta\beta_{l}^{k}$ est un intervalle permettant de sélectionner une partie seulement des éléments de défaillance postérieurs à la défaillance du chemin finissant par l'élément k à l'étape l-1 (Thoft-Christensen & Murotsu 1986, Kaisheng et al. 1996). Il est noté que l'intervalle $\Delta\beta_{l}^{k}$ doit être choisi de manière appropriée. En effet, un intervalle trop grand peut entraîner la prise en compte d'un grand nombre de chemins de défaillance non significatifs, avec le risque de voir les temps de calcul devenir prohibitifs pour des structures hautement redondantes. Inversement, le choix d'un intervalle trop faible pourrait écarter des chemins de défaillance pourtant dominants et biaiser l'estimation de la fiabilité du système.

La Figure 3.7a illustre le niveau 0 de l'analyse pour laquelle la fiabilité du système est estimée sur la base de la défaillance d'un seul élément (i.e., l'élément dont l'indice de fiabilité vaut $\beta_0 = \min_{i=1}^{n(0)}(\beta_i)$ où $n(0)$ est le nombre total d'éléments de la structure). La fiabilité du système est

donc celle de l'élément critique (par exemple l'élément 1 dans la Figure 3.7a) et le système structural est modélisé par un seul élément (Figure 3.8).

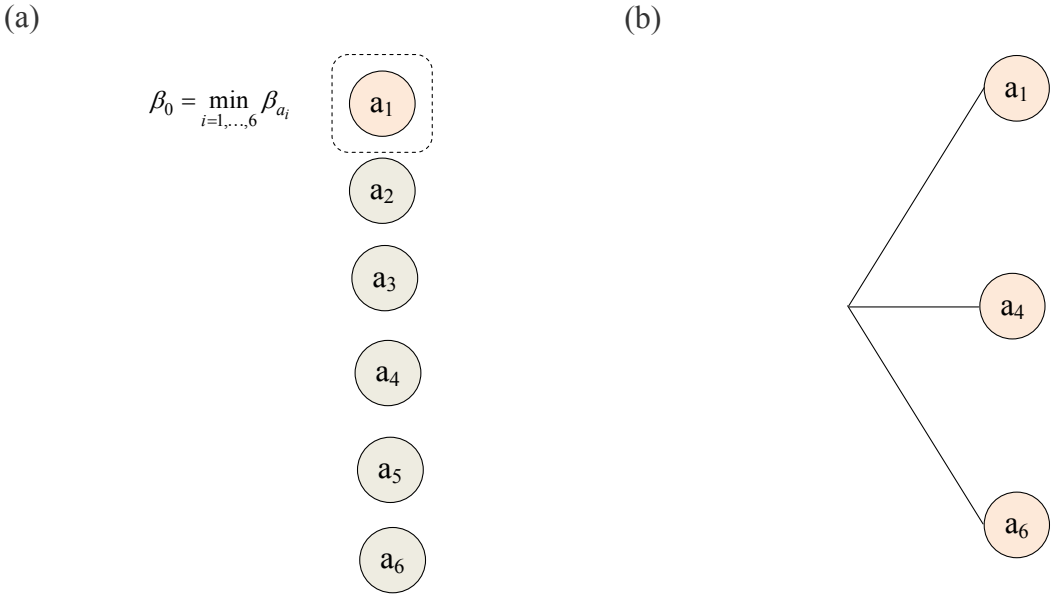


Figure 3.7. Illustrations des niveaux (a) 0 et (b) 1 de l'algorithme du β-unzipping.

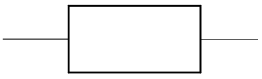


Figure 3.8. Modélisation du système au niveau 0.

Au niveau 1, la valeur de $\Delta\beta_1$ étant supposée connue, les éléments critiques de défaillance sont ceux dont l'indice de fiabilité appartient à l'intervalle $\left[\beta_0, \beta_0 + \Delta\beta_1\right]$.La fiabilité du système est donc estimée en modélisant un système en série (Figure 3.9) constitué de tous les éléments dont l'indice de fiabilité est compris dans $\left[\beta_0, \beta_0 + \Delta\beta_1\right]$ (Figure 3.7).

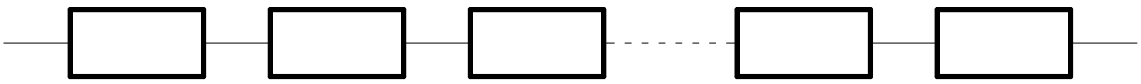


Figure 3.9. Modélisation du système au niveau 1.

Au niveau 2, considérant la défaillance des éléments du chemin finissant par l'élément k, les indices de fiabilité des autres éléments restants peuvent être calculés. Dans l'exemple de la Figure 3.7b, la valeur de l'intervalle dépend du chemin emprunté à l'étape 1. Les éléments critiques de défaillance sont ceux dont l'indice de fiabilité se trouve dans les intervalles $\left[\beta_1^{a_1}, \beta_1^{a_1} + \Delta\beta_2^{a_1}\right]$, $\left[\beta_1^{a_4}, \beta_1^{a_4} + \Delta\beta_2^{a_4}\right]$, et $\left[\beta_1^{a_6}, \beta_1^{a_6} + \Delta\beta_2^{a_6}\right]$ lorsque l'on part des nœuds a_1, a_4, et a_6, respectivement. La Figure 3.10 illustre les chemins formés à ce niveau 2 et constitués à chaque fois de deux éléments défaillants. Chacun d'eux doit être combiné avec l'élément k du

niveau $l-1$ pour former des paires d'éléments de défaillance critique, qui sont des systèmes parallèles à deux éléments.

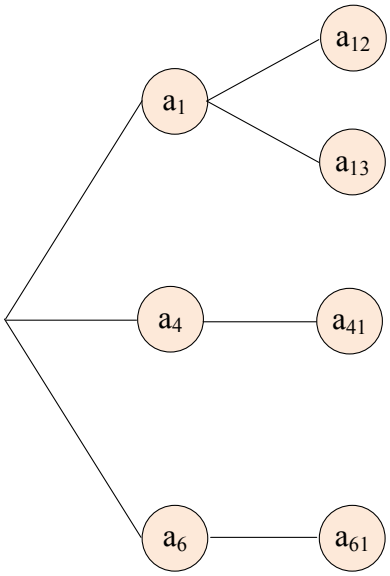


Figure 3.10. Illustrations du niveau 2 de l'algorithme du β-unzipping.

A ce stade, la fiabilité du système est estimée en modélisant un système série où tous les éléments sont des systèmes parallèles constitués d'une paire éléments défaillants (Figure 3.11).

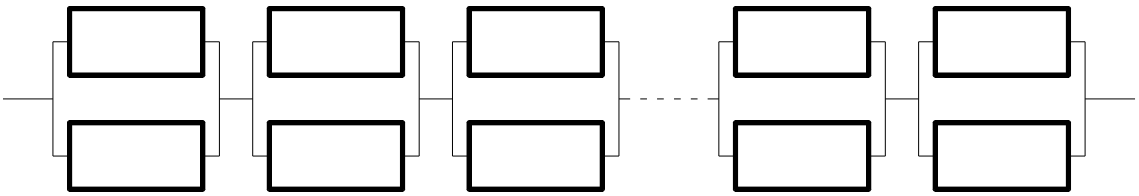


Figure 3.11. Modélisation du système au niveau 2.

De manière générale, au niveau N tel que $(N>2)$, un processus similaire est mis en œuvre de sorte qu'au niveau 3 par exemple, la fiabilité du système est estimée en modélisant un système en série de sous-systèmes parallèles constitués d'un triplet d'éléments défaillants (Figure 3.12).

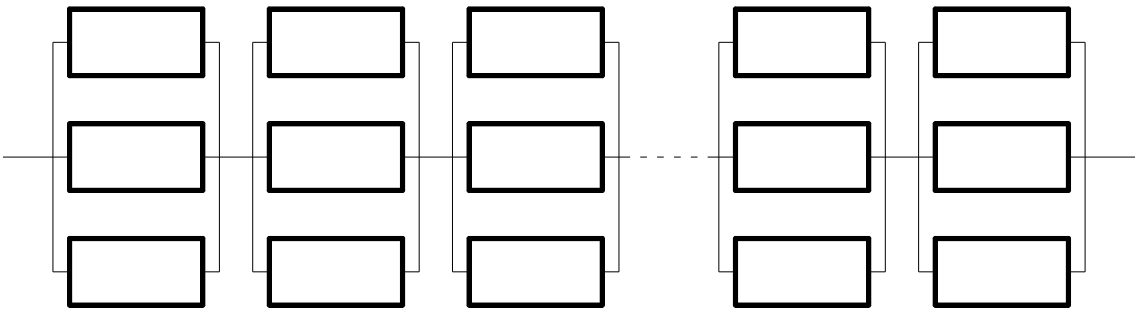


Figure 3.12. Modélisation du système au niveau 3.

Au niveau où il y a formation d'un mécanisme de défaillance, l'estimation de la fiabilité du système sera la meilleure (Figure 3.13). La structure est alors modélisée par un système en série de sous système étant tous des mécanismes. La Figure 3.14 illustre l'étape finale de l'algorithme pour l'exemple de la Figure 3.6. A ce stade, les chemins identifiés sont supposés être tous des mécanismes de défaillance. Comme pour la méthode des branches et bornes, la longueur des chemins identifiés n'est pas nécessairement identique pour toutes les branches de l'arbre.

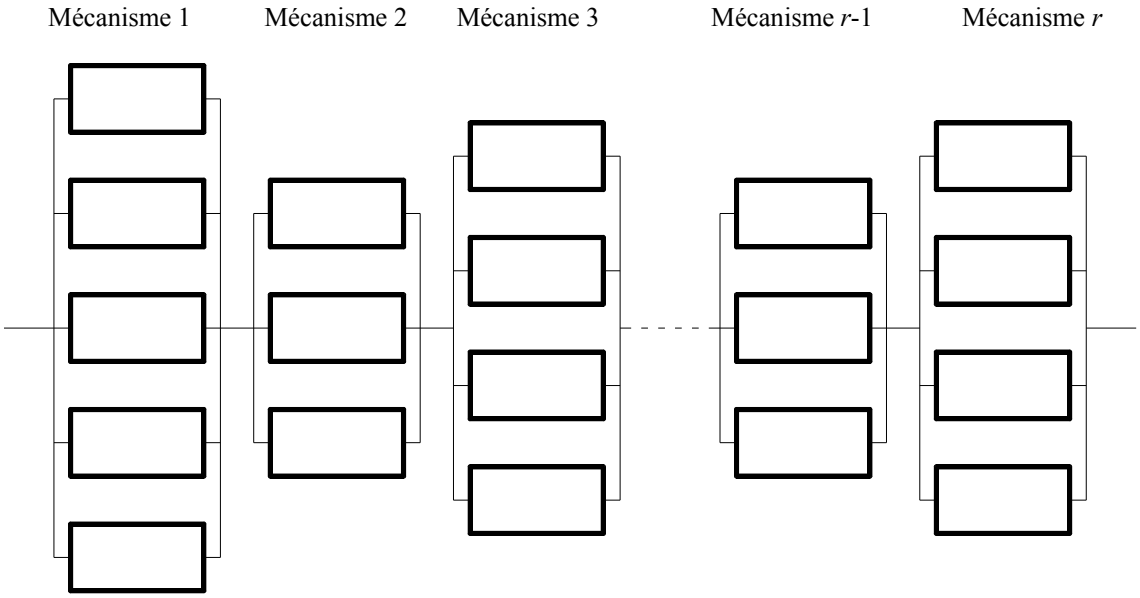


Figure 3.13. Modélisation d'un système quelconque au stade de l'occurrence d'un mécanisme de ruine.

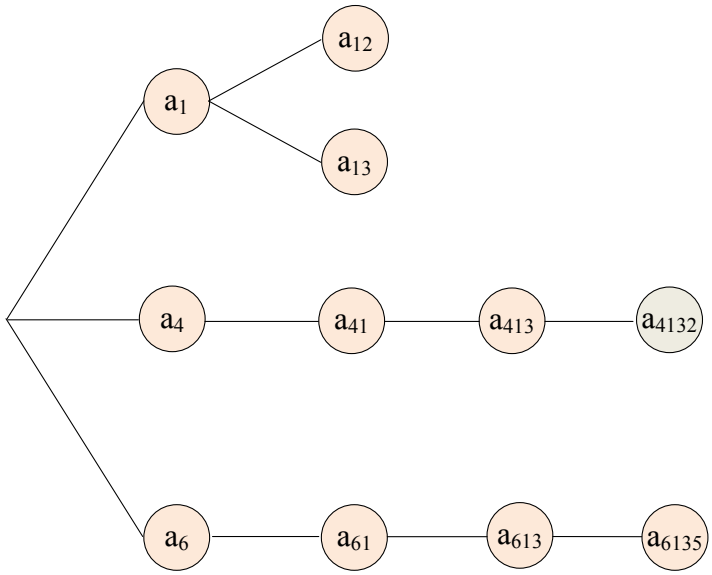


Figure 3.14. Arbre d'évènement obtenu pour l'exemple de la Figure 3.6.

3.2.2.2 Détermination de l'indice de fiabilité critique à chaque niveau d'analyse

Ce paragraphe détaille la méthodologie utilisée pour le choix de l'intervalle $\Delta\beta_l^k$ au niveau l de l'analyse lorsque l'on part du chemin finissant par le nœud k au niveau $l-1$. La notion d'indice de fiabilité critique $\beta_{c,l}^k$ est alors introduite avec $\beta_{c,l}^k = \beta_{l-1}^k + \Delta\beta_l^k$. L'indice $\beta_{c,l}^k$ représente la borne supérieure de l'encadrement des indices de fiabilité des éléments à sélectionner au niveau l de l'analyse. Thoft-Christensen & Murotsu (1986) recommandent un choix approprié de $\Delta\beta_l^k$ sans pour autant proposer une méthodologie. Dans cette thèse, la démarche proposée par Chen et al. (1995) est adoptée dans le but de déterminer $\beta_{c,l}^k$ à chaque niveau l de l'analyse. Cette démarche est présentée ci-après.

Supposons une structure possédant un degré d'hyperstaticité égal à p, la longueur d'un de ses chemins de ruine est au plus égale à $p+1$. Supposons maintenant que tous ses mécanismes de ruine possèdent $p+1$ éléments. Puisqu'un mécanisme de ruine est un système en parallèle d'éléments défaillants, la probabilité d'occurrence du mécanisme de ruine est liée à celle de ses éléments et est plus petite que les probabilités individuelles de chaque élément (cf. Annexe B). Cette probabilité est très importante pour identifier les chemins de défaillance critique. La borne inférieure de la probabilité de défaillance critique est estimée ci-dessous :

$$P_{f_{\inf}} = P_{f,1} \times P_{f,2} \times \ldots \times P_{f,(p+1)} = \Phi\left(-\beta_1\right) \times \Phi\left(-\beta_2\right) \times \ldots \times \Phi\left(-\beta_{p+1}\right) \tag{3.1}$$

avec Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La probabilité de défaillance critique $P_{f,c}^p$ s'exprime alors de la façon suivante :

$$P_{f,c}^p = \left(P_{f_{\inf}}\right)^{\frac{1}{p+1}} \tag{3.2}$$

et l'indice de fiabilité critique β_c^p relatif à $P_{f,c}^p$ vaut :

$$\beta_c^p = -\Phi^{-1}(P_{f,c}^p) \tag{3.3}$$

L'indice de fiabilité critique β_c^p est l'indice de fiabilité équivalent d'un seul élément dans un chemin de défaillance donné. A chaque niveau d'analyse l, un indice $\beta_{c,l}^p$ peut alors être calculé et utilisé dans le processus d'unzipping (Figure 3.15).

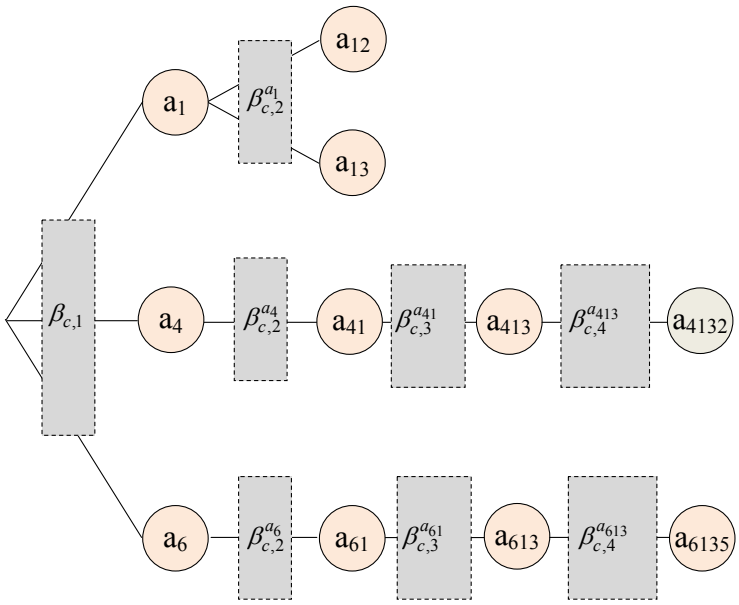


Figure 3.15. Arbre d'évènement obtenu pour l'exemple de la Figure 3.6.

Dans la Figure 3.15, les différents indices critiques identifiés à chaque nœud d'évènement permettent de ne sélectionner que les branches qui ont une probabilité d'occurrence suffisament grande. En répétant ce processus jusqu'à l'occurrence d'un mécanisme de ruine et en itérant la démarche, on peut ainsi identifier tous les mécanismes de ruine dominants.

3.2.3 Méthode du *β*-unzipping avec bornage (« approche par l'intérieur »)

Deux méthodes pour l'identification des chemins de défaillance dominants ont été présentées dans les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2 : les méthodes des branches et bornes et du *β*-unzipping. Ces deux méthodes, même si elles permettent d'éliminer un grand nombre d'occurrences avec des probabilités de réalisation faibles, nécessitent de parcourir de nombreuses branches de l'arbre d'évènement. Les deux méthodes présentent un certain nombres d'avantages et d'inconvénients qui diffèrent sensiblement. Concernant l'algorithme des branches et bornes, le processus est obligé de tester l'intégralité des nœuds de l'arbre d'évènement. Certes, l'étape de bornage fait que de nombreuses branches ne seront pas parcourues mais il se peut que la discrimination de chemins soit tardive (si toutes les branches ont à peu près le même poids en termes de probabilité), auquel cas, le temps de calcul peut être allongé significativement. Concernant l'algorithme du *β*-unzipping, tous les nœuds ne seront pas considérés du fait du choix de l'intervalle $\Delta\beta_l$ au niveau l de l'analyse. Ce facteur joue en la faveur de l'algorithme du *β*-unzipping par rapport aux branches et bornes. Cependant, deux paramètres sont à prendre en compte. Le premier est que l'intervalle $\Delta\beta_l$ risque de ne pas discriminer assez de chemins en fonction des cas rencontrés (comme précédemment, la réduction des branches à parcourir peut être faible et le temps de parcours rester élevé). Le deuxième est qu'à chaque nœud, l'algorithme ne prend pas en compte de bornage par rapport à la probabilité du chemin parcouru. Il est alors

tout à fait possible que le nombre de chemins à tester pour l'algorithme du β-unzipping soit beaucoup plus grand que celui des branches et bornes.

Une approche originale est présentée dans ce paragraphe qui consiste à mutualiser les avantages des méthodes d'unzipping et de des branches et bornes. Cette nouvelle approche, nommée méthode du β-unzipping avec bornage se base sur la technique du β-unzipping en intégrant certains des principes des branches et bornes (Kagho et al. 2012). En particulier, la recherche de chemins les plus probables, qui n'est pas présente dans l'algorithme du β-unzipping est ajoutée dans cette nouvelle approche. A l'étape initiale, la valeur de $\Delta\beta_1$ connue, les éléments critiques de défaillance sont ceux dont l'indice de fiabilité appartient à l'intervalle $[\beta_0, \beta_0 + \Delta\beta_1]$. Ces éléments critiques sont classés par ordre d'indices de fiabilité croissant de sorte que la première branche parcourue soit celle partant de l'élément correspondant à β_0. En effet, puisqu'on recherche le chemin le plus probable, on commencera par parcourir l'arbre d'évènement partant de l'élément critique ayant la plus forte probabilité d'occurrence et ainsi de suite jusqu'à l'élément critique ayant la plus faible probabilité d'occurrence. Le parcours des arbres d'évènement se fait niveau par niveau selon le processus d'unzipping en introduisant un intervalle $\Delta\beta_l^k$ à chaque niveau l de l'analyse. Dès qu'il y a occurrence d'un mécanisme de ruine, la probabilité de défaillance correspondante est stockée comme valeur référence de bornage P_{fqc}. La suite du processus d'unzipping intègre alors une notion de bornage de sorte que tous les chemins de défaillance complets ou incomplets dont les probabilités de défaillance sont inférieures à P_{fqc} soient éliminés. A la fin du parcours des arbres d'évènement, le dernier chemin de défaillance dominant identifié est donc le chemin le plus probable recherché.

3.2.4 Recherche « par l'extérieur » du dysfonctionnement global

Dans les paragraphes 3.2.1 à 3.2.3, différentes méthodes de parcours d'arbre d'évènements ont été présentées qui constituent une approche « par l'intérieur » du problème de recherche des mécanismes de défaillance dominants. Ces approches supposent l'apparition de défaillance successives qui impactent progressivement le fonctionnement structural jusqu'à l'obtention d'une défaillance globale. Si ces méthodes présentent l'avantage de caractériser précisément le cheminement de la défaillance, elles ont néanmoins l'inconvénient d'être coûteuse en temps de calcul, surtout pour des structures complexes et fortement redondantes. Dans ce contexte, ce paragraphe présente une approche différente qui consiste à rechercher les mécanismes de défaillance « par l'extérieur », en ne recherchant pas d'ordre particulier pour l'occurrence des défaillances localisées mais en supposant plutôt ces défaillances de manière simultanée. Cette recherche permet d'obtenir une probabilité de défaillance globale qui est alors comparée aux probabilités de défaillance des différents éléments constitutifs, l'idée étant d'évaluer un écart entre la défaillance locale et la défaillance globale.

3.3 APPLICATION DES RECHERCHES DE DYSFONCTIONNEMENT GLOBAL A UN CAS D'ETUDE

L'ensemble des concepts présentés dans le paragraphe 3.2 sont appliqués à un cas d'étude de référence à savoir un portique plan simple comme montré à la Figure 3.16, soumis à une force horizontale F_1 et à une force verticale F_2. Cette structure est composée d'éléments à comportement élastoplastique parfait dont le mode de ruine est la plastification, le mode de défaillance étant défini par la formation d'une rotule plastique au droit d'une section d'un élément de structure. Cet exemple, largement traité dans la littérature pour des problèmes de défaillance des systèmes (Kanchanalai 1977, Thoft-Christensen 1982, Nafday et al. 1987, Chen et al. 1995, Kemp 2002, Ziemian & McGuire 2002), permettra au lecteur d'identifier facilement les mécanismes de défaillance, et sera utilisé comme fil conducteur dans la suite de ce chapitre.

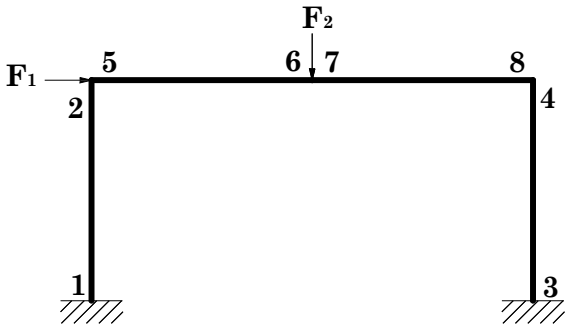


Figure 3.16. Cas d'étude considéré pour illustrer les concepts de détermination de mécanismes de défaillance dominants.

Dans une telle structure, la ruine d'une section se produit soit lorsque le moment de flexion appliqué atteint la valeur du moment plastique de la section (e.g., formation d'une rotule plastique), soit lorsque les efforts de tension ou de compression dans la section sont supérieurs à sa capacité de résistance. Le comportement mécanique des matériaux est supposé parfaitement élastoplastique. Les sections dans lesquelles se sont formées des rotules plastiques suivent donc la théorie de la déformation plastique, et les autres sections se comportent élastiquement. Lorsque toutes les fibres d'un côté de l'axe neutre sont dans un état de tension correspondant au seuil de plasticité, et que toutes celles de l'autre côté sont dans un état de compression également au seuil de plasticité, il se produit un comportement d'écoulement ou formation de rotule plastique en ce point et le moment de flexion transmis par la rotule plastique reste constant malgré l'augmentation de la charge (Henrottay 2001, Oudin 2009). Les sections dans lesquelles se sont formées des rotules plastiques possèdent une capacité de rotation nécessaire à la redistribution des efforts dans la structure. Les rotules plastiques se forment généralement dans les sections de moment maximal ou pour le cas particulier des structures soumises à des actions concentrées, sous une charge ou aux réactions d'appuis. Une rotule plastique n'est donc pas une rotule mécanique car les rotules plastiques transmettent des moments à la différence des rotules mécaniques qui n'en transmettent pas. Chaque formation de rotule plastique entraîne la perte

d'un degré de liberté à la structure, pour conduire finalement cette dernière à la ruine par formation d'un mécanisme de ruine.

3.3.1 Nécessité d'identifier les mécanismes dominants

Pour des structures réelles et complexes et pour un mode de défaillance donné, il existe une multitude de chemins de chargement menant à la défaillance, le nombre de modes de défaillance étant lui même très élevé.

La Figure 3.17 illustre cette problématique dans le cas du portique plan de la Figure 3.16, en présentant dix mécanismes de ruine possibles (indépendants ou combinés) pour le seul mode de ruine par plastification. En effet pour une structure possédant N éléments défaillants potentiels, et en supposant que chaque mécanisme de ruine contient S éléments ($S>1$), le nombre de mécanismes de ruine possible en ne prenant en compte que le mode de ruine par plastification s'exprime par (Murotsu & Yoshisada 1984, Park et al. 2004, Cremona 1994, 2005)

$$N_m = \mathrm{A}_N^S = \frac{N!}{(N\text{-}S)!} = \prod_{i=0}^{S-1}(N-i) = N(N-1)(N-2)\ldots(N-S+1) \tag{3.4}$$

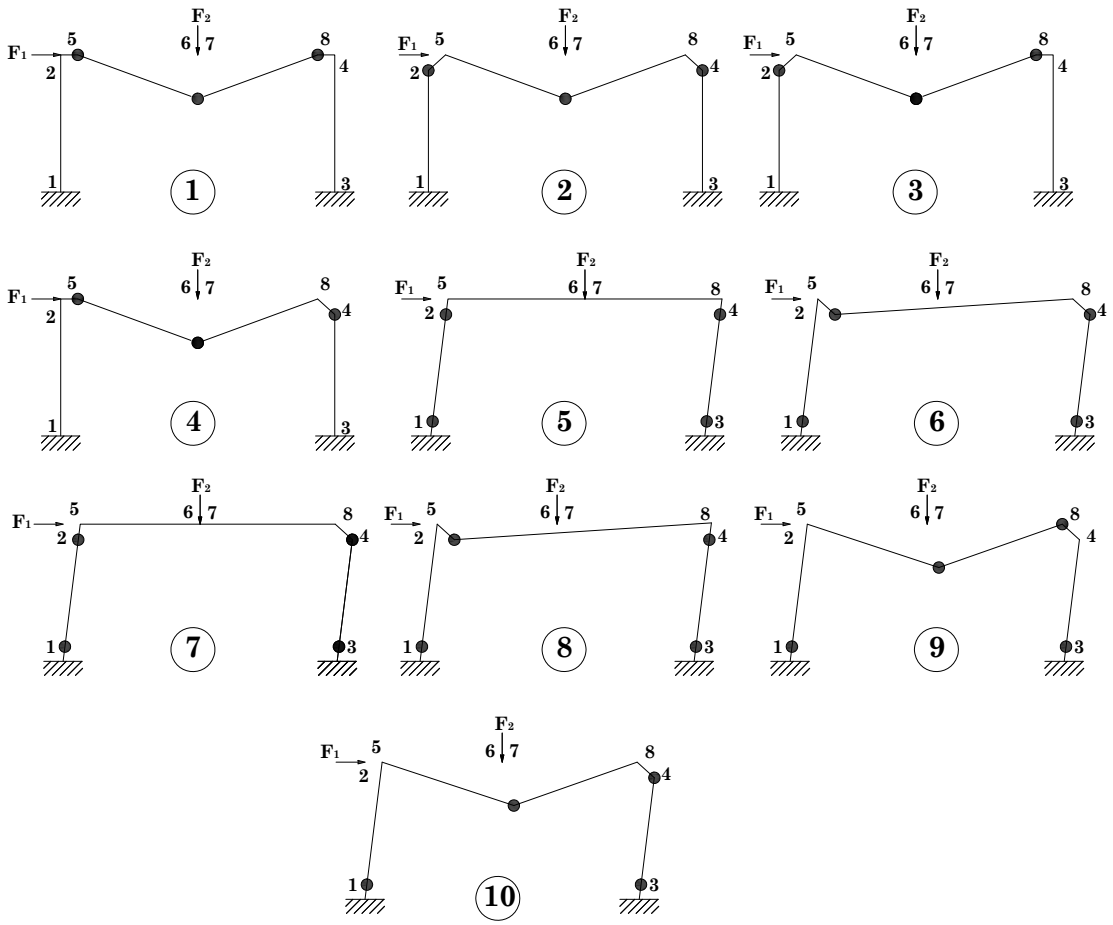


Figure 3.17. Exemples de mécanismes de défaillance du portique plan (Park et al. 2004).

Lorsque la séquence de ruine est ignorée, le nombre de mécanismes de ruine est :

$$N_m = C_N^S = \frac{N!}{S!(N-S)!} = \frac{\prod_{i=0}^{S-1}(N-i)}{\prod_{j=0}^{S-1}(S-j)} \tag{3.5}$$

Pour le portique plan de la Figure 3.16 qui comporte sept éléments défaillants potentiels et en supposant que chaque mécanisme de ruine du portique contienne quatre éléments, le nombre de mécanismes de ruine possible est égal à 840 d'après l'Equation (3.4) pour le seul mode de ruine par plastification.

3.3.2 Rotules plastiques et chemins de défaillance

Pour des structures hyperstatiques et redondantes, lorsqu'un élément de structure est défaillant, une redistribution des efforts internes se produit entre les éléments survivants (i.e., non défaillants). Pour tenir compte de ce principe lors de la recherche de mécanismes de défaillance, la structure doit être évaluée à chaque nouvelle défaillance. Dans le cas du portique plan de la Figure 3.16, les matrices de rigidités élémentaires des éléments défaillants sont remplacées par des matrices de rigidité réduites (ou actualisées), en fonction du mode de défaillance considéré. Des forces nodales fictives correspondantes (en lien avec la capacité résiduelle des éléments défaillants) sont alors appliquées aux nœuds de l'élément considéré comme défaillant (Murotsu et al. 1979, Okada et al. 1984, Thoft-Christensen & Murotsu 1986, Murotsu et al. 1987). Le processus précédent est répété jusqu'à l'apparition d'un mécanisme de ruine qui est déterminé en analysant les propriétés de la matrice de rigidité globale de la structure et/ou du vecteur global de déplacement. Cette procédure est détaillée ci-après, pour un élément poutre et pour un élément barre.

3.3.2.1 Cas d'un élément poutre

Soit t un élément poutre (Figure 3.18), l et r ses extrémités gauche et droite. En comportement élastique, la relation entre le vecteur de forces nodales $\overline{X}_t = \left(f_{xl}, f_{yl}, M_{zl}, f_{xr}, f_{yr}, M_{zr}\right)^T$, et le vecteur de déplacements nodaux $\overline{\delta}_t = \left(\nu_{xl}, \nu_{yl}, \theta_{zl}, \nu_{xr}, \nu_{yr}, \theta_{zr}\right)^T$ s'exprime d'après la méthode des matrices de rigidité (méthode des déplacements) dans le repère local comme suit :

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{k}}_t^e \times \overline{\delta}_t^e \tag{3.6}$$

où $\overline{\overline{k}}_t^e$ est la matrice de rigidité de l'élément.

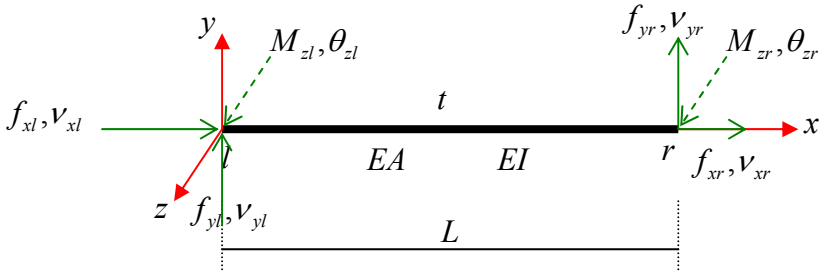


Figure 3.18. Forces nodales et déplacements nodaux de l'élément t.

Lorsqu'il y a défaillance, le vecteur nodal de déplacement s'exprime par :

$$\overline{\delta}_t = \overline{\delta}_t^e + \overline{\delta}_t^p \tag{3.7}$$

où $\overline{\delta}_t^e$ est la partie élastique et $\overline{\delta}_t^p$ la partie plastique. D'après la théorie de l'écoulement plastique, la déformation plastique s'exprime par

$$\overline{\delta}_t^p = \lambda \frac{\partial F_t}{\partial X_t} = -\lambda \overline{C}_t \tag{3.8}$$

où λ est le multiplicateur plastique indiquant l'ampleur de la déformation plastique, $\overline{C}_t$ est un vecteur de constantes déterminé par la dimension de l'élément, F_t la fonction de charge, et $\frac{\partial F_t}{\partial X_t}$ le gradient de la fonction de charge. Un élément est alors dans le domaine élastique lorsque $\lambda = 0$, et dans le domaine plastique lorsque $\lambda > 0$. La force nodale $\overline{X}_t$ s'exprime donc comme indiqué ci-dessous :

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{k}}_t^e \left(\overline{\delta}_t - \overline{\delta}_t^p \right) \tag{3.9}$$

et la marge de sécurité :

$$Z_t = R_t - \overline{C}_t^T \overline{X}_t \tag{3.10}$$

où R_t est le paramètre de résistance de l'élément. En substituant l'Equation (3.8) dans l'Equation (3.9), on a :

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{k}}_t^e \overline{\delta}_t + \lambda \overline{\overline{k}}_t^e \overline{C}_t \tag{3.11}$$

et la condition de défaillance s'écrit :

$$R_t - \overline{C}_t^T \left(\overline{\overline{k}}_t^e \overline{\delta}_t + \lambda \overline{\overline{k}}_t^e \overline{C}_t \right) = 0 \tag{3.12}$$

L'Equation (3.12) permet d'établir une relation entre λ et $\overline{\delta}_t^p$. En substituant cette relation dans l'Equation (3.11), on obtient :

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{k_t^{(P)}}}\,\overline{\delta}_t + \overline{X_t^{(P)}} \tag{3.13}$$

On a donc pour un élément élastique :

$$\begin{cases} \overline{\overline{k_t^{(P)}}} = \overline{\overline{k_t^e}} \\ \overline{X_t^{(P)}} = \overline{0} \\ \lambda = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

et pour un élément défaillant :

$$\begin{cases} \overline{\overline{k_t^{(P)}}} = \overline{\overline{k_t^e}} - \dfrac{(\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C}_t)(\overline{C}_t^T\,\overline{\overline{k_t^e}})}{(\overline{C}_t^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C}_t)} \\ \overline{X_t^{(P)}} = \dfrac{R_t(\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C}_t)}{(\overline{C}_t^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C}_t)} \\ \lambda = \dfrac{(R_t - \overline{C}_t^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{\delta}_t)}{\overline{C}_t^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C}_t} \end{cases} \tag{3.15}$$

où $\overline{\overline{k_t^{(P)}}}$ est la matrice de rigidité élémentaire réduite (modifiée ou actualisée) prenant en compte la défaillance de l'élément, et $\overline{X_t^{(P)}}$ le vecteur opposé du vecteur de forces nodales équivalent à la réduction de rigidité de l'élément t. En particulier, le Tableau 3.1 représente les valeurs de $\overline{\overline{k_t^{(P)}}}$, $\overline{X_t^{(P)}}$ et de λ pour les cas particuliers de formations de rotules plastiques à l'extrémité gauche, à l'extrémité droite et aux deux extrémités de l'élément t pour des éléments de poutre ductile ou fragile. La Figure 3.19 illustre différents états de la condition de plasticité en notant A_{p_k} la section de l'élément, W_{p_k} le module de flexion plastique de l'élément et $Aeff_{p_k}$ la section effective de l'élément. Finalement, le Tableau 3.2 donne les valeurs de $\overline{C_t}$ lorsque le moment plastique résistant suivant l'axe z est considéré comme le paramètre de résistance de la marge de sécurité. Lorsque les matrices de rigidité de tous les éléments (défaillants ou non) sont calculées, elles sont assemblées comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{cases} \overline{\overline{K^{(P)}}} = \sum_{t=1}^{n} \overline{\overline{T}}_t^T\,\overline{\overline{k_t^{(P)}}}\,\overline{\overline{T}}_t \\ \overline{\mathbb{R}^{(P)}} = -\sum_{t=1}^{n} \overline{\overline{T}}_t^T\,\overline{X_t^{(P)}} \end{cases} \tag{3.16}$$

où $\overline{\overline{K^{(P)}}}$ est la matrice de rigidité globale actualisée, $\overline{\mathbb{R}^{(P)}}$ le vecteur global équivalent des forces appliquées, et $\overline{\overline{T}}_t$ la matrice de passage du repère global au repère local lié à l'élément t,

$\sum_{t=1}^{n}$ étant une notation symbolisant l'assemblage des n vecteurs ou des n matrices élémentaires pour former le vecteur global ou la matrice globale. L'équation d'équilibre globale de la structure s'écrit donc :

$$\overline{\overline{K^{(P)}}}\,\overline{d} = \overline{L} + \overline{\mathbb{R}^{(P)}} \tag{3.17}$$

où $\overline{d}$ le vecteur global de déplacement et $\overline{L}$ le vecteur des forces extérieures appliquées.

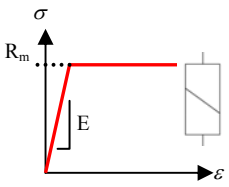
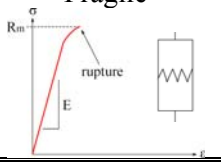
Type d'élément	Type de comportement	Rotule plastique à l'extrémité gauche	Rotule plastique à l'extrémité droite	Rotule plastique aux extrémités gauche et droite
Poutre	Ductile 	$\overline{\overline{k_t^{(P)}}} = \overline{\overline{k_t^e}} - \frac{(\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_l})(\overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}})}{(\overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_l})}$ $\overline{X_t^{(P)}} = \frac{R_l(\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_l})}{(\overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_l})}$ $\lambda_l = \frac{(R_l - \overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{\delta_t})}{\overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_l}}$ $\lambda_r = 0$	$\overline{\overline{k_t^{(P)}}} = \overline{\overline{k_t^e}} - \frac{(\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_r})(\overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}})}{(\overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_r})}$ $\overline{X_t^{(P)}} = \frac{R_r(\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_r})}{(\overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_r})}$ $\lambda_r = \frac{(R_r - \overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{\delta_t})}{\overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_r}}$ $\lambda_l = 0$	$\overline{\overline{k_t^{(P)}}} = \overline{\overline{k_t^e}} - \overline{\overline{H}}^T\,\overline{\overline{G}}^{-1}\,\overline{\overline{H}}$ $\overline{X_t^{(P)}} = \overline{\overline{H}}^T\,\overline{\overline{G}}^{-1}\begin{pmatrix} R_l \\ R_r \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda_l \\ \lambda_r \end{pmatrix} = -\overline{\overline{G}}^{-1}\overline{\overline{H}}\,\overline{\delta_t} + \overline{\overline{G}}^{-1}\begin{pmatrix} R_l \\ R_r \end{pmatrix}$ avec $\overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} \overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}} \\ \overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}} \end{pmatrix}$ $\overline{\overline{G}}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_l} & \overline{C_l}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_r} \\ \overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_l} & \overline{C_r}^T\,\overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{C_r} \end{pmatrix}$
	Fragile 	$\begin{cases} \overline{\overline{k_t^{(P)}}} = \overline{\overline{0}} \\ \overline{X_t^{(P)}} = \overline{0} \end{cases}$	Pas de rigidité résiduelle	

Tableau 3.1. Expressions des matrices de rigidité modifiées et des vecteurs de forces nodales équivalents en fonction du mode de défaillance.

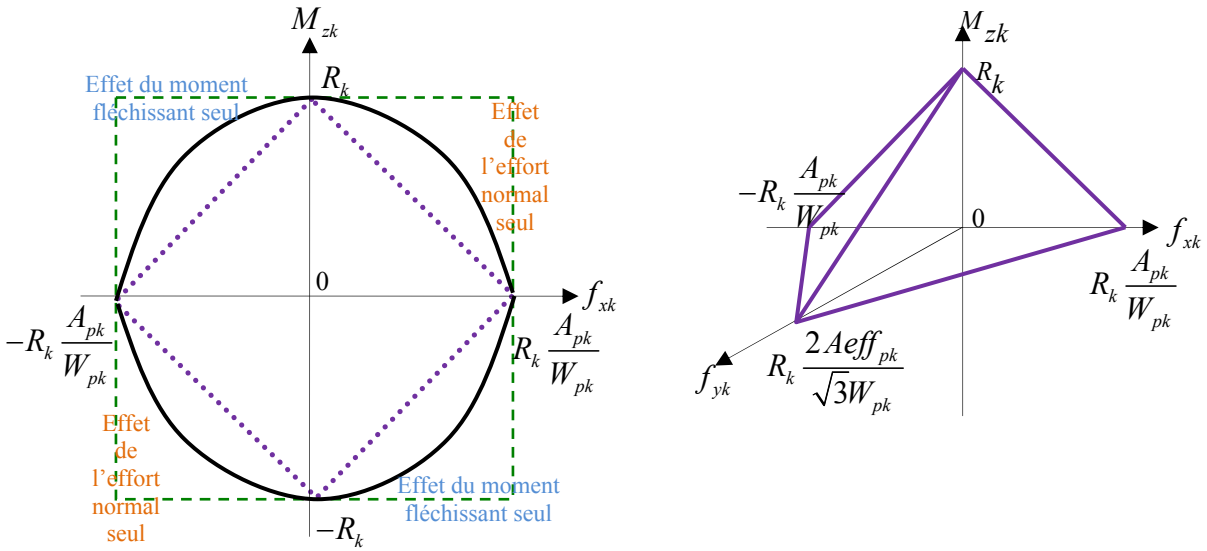


Figure 3.19. Condition de plasticité linéarisée considérant l'interaction entre le moment fléchissant et (a) l'effort normal, (b) l'effort normal et l'effort tranchant.

Conditions de plasticité linéarisée		$\overline{C_t}$	
		Rotule plastique à l'extrémité gauche	Rotule plastique à l'extrémité droite
Moment fléchissant seul	2D	$\left(0,0,sign(M_{zl}),0,0,0\right)$	$\left(0,0,0,0,0,sign(M_{zr})\right)$
	3D	$\left(0,0,0,0,0,sign(M_{zl}),0,0,0,0,0,0\right)$	$\left(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,sign(M_{zr})\right)$
Interaction entre le moment fléchissant et l'effort normal	2D	$\left(\frac{W_{p_l}}{A_{p_l}}sign(f_{xl}),0,sign(M_{zl}),0,0,0\right)$	$\left(0,0,0,\frac{W_{p_r}}{A_{p_r}}sign(f_{xr}),0,sign(M_{zr})\right)$
	3D	$\left(\frac{W_{z_{pl}}}{A_{p_l}}sign(f_{xl}),0,0,0,\frac{W_{z_{pl}}}{W_{y_{pl}}}sign(M_{yl}),\ ...sign(M_{zl}),0,0,0,0,0,0\right)$	$\left(0,0,0,0,0,0,\frac{W_{z_{pr}}}{A_{p_r}}sign(f_{xr}),...\ 0,0,0,\frac{W_{z_{pr}}}{W_{y_{pr}}}sign(M_{yr}),sign(M_{zr})\right)$
Interaction entre le moment fléchissant, l'effort normal et l'effort axial	2D	$\left(\frac{W_{p_l}}{A_{p_l}}sign(f_{xl}),\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{W_{p_l}}{Aeff_{p_l}}sign(f_{yl}),...\ sign(M_{zl}),0,0,0\right)$	$\left(0,0,0,\frac{W_{p_r}}{A_{p_r}}sign(f_{xr}),...\ \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{W_{p_r}}{Aeff_{p_r}}sign(f_{yr}),sign(M_{zr})\right)$
	3D	$\left(\frac{W_{z_{pl}}}{A_{p_l}}sign(f_{xl}),\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{W_{z_{pl}}}{Aeff_{p_l}}sign(f_{yl}),\ ...0,0,\frac{W_{z_{pl}}}{W_{y_{pl}}}sign(M_{yl}),sign(M_{zl}),...\ 0,0,0,0,0,0\right)$	$\left(0,0,0,0,0,0,...\ \frac{W_{z_{pr}}}{A_{p_r}}sign(f_{xr}),\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{W_{p_r}}{Aeff_{p_r}}sign(f_{yr}),\ ...0,0,\frac{W_{z_{pr}}}{W_{y_{pr}}}sign(M_{yr}),sign(M_{zr})\right)$

Tableau 3.2. Expressions des valeurs du vecteur $\overline{C_t}$ (la notation sign(.) représente le signe de l'expression contenue.

L'Equation (3.17) permet d'écrire que le vecteur de déplacements nodaux $\overline{d}_t = \overline{\overline{T}}_t^T \overline{\delta}_t$ de l'élément t dans le repère global s'écrit:

$$\overline{d}_t = \left[\overline{\overline{K_t^{(P)}}}\right]^{-1}\left(\overline{L} + \overline{\mathbb{R}^{(P)}}\right) \tag{3.18}$$

Finalement, la marge de sécurité s'exprime :

$$Z_t^{(P)} = R_t - \overline{C}_t^T\left[\overline{\overline{b_t^{(P)}}}(\overline{L} + \overline{\mathbb{R}^{(P)}}) + \overline{X_t^{(P)}}\right] \tag{3.19}$$

où $\overline{\overline{b_t^{(P)}}} = \overline{\overline{k_t^e}}\,\overline{\overline{T}}_t\left[\overline{\overline{K_t^{(P)}}}\right]^{-1}$ et $\left[\overline{\overline{K_t^{(P)}}}\right]^{-1}$ est la matrice obtenue en extrayant de $\left[\overline{\overline{K^{(P)}}}\right]^{-1}$ les lignes correspondantes à d_t.

Dans l'étude de la fiabilité des structures à comportement élastique parfaitement plastique, le paramètre de résistance de l'expression de la marge de sécurité est généralement le moment plastique résistant ($R = M_{Pl}$). En flexion plastique plane, la résistance limite vaut:

$$M_{Pl} = W_{Pl}\sigma_e \tag{3.20}$$

où W_{Pl} est le module de flexion plastique de la section et σ_e la limite élastique du matériau. Le moment plastique dépend donc de la forme de la section et des propriétés des matériaux. L'Equation (3.20) est toujours valable en flexion pure. Elle n'est valable en flexion simple que si l'effort tranchant ne domine pas, ce qui est généralement le cas. Elle n'est valable en flexion composée que si l'effort normal reste faible avec une valeur inférieure à 15% de l'effort normal de plastification (Davalle 2009, Bouillard 2011). Il est possible d'apporter une correction à l'Equation (3.20) dans le cas où l'effort normal n'est pas faible. En effet, pour les structures en acier, lorsque la section est sollicitée simultanément par un moment de flexion et un effort normal, une partie de la section reprend l'effort normal, tandis que le reste reprend le moment de flexion. La plastification de la section se produit donc pour un moment plastique réduit plus faible que M_{Pl} (Hirt et al. 2006).

3.3.2.2 Cas d'un élément barre

L'élément barre est un élément poutre particulier qui reprend seulement l'effort axial et qui ne travaille donc qu'à l'effort normal en traction ou en compression. Dans le cas de treillis, l'élément barre est supposé avoir un moment d'inertie géométrique I_z suffisamment petit pour être considéré comme nul. L'élément barre n'a dans ce cas pas de rigidité en flexion ($EI \approx 0$) et possède donc quatre degrés de liberté dans le plan et six degrés de liberté dans l'espace.

En cas de défaillance d'un élément structural, la matrice de rigidité modifiée ou actualisée de l'élément tenant compte de sa défaillance est une matrice nulle ($\overline{\overline{k_t^{(P)}}} = \overline{\overline{0}}$), et sa capacité résiduelle CR ($CR = \sigma A$, où A représente la section de l'élément, $\sigma = \pm\sigma_e$ pour une défaillance en traction ou en compression et $\sigma = \sigma_C$ pour une défaillance par flambement avec σ_C la contrainte limite de flambement) est appliquée au nœuds de l'élément comme une force fictive représentant la capacité portante après défaillance de l'élément dans le cas d'un comportement ductile. Dans le cas d'un élément à comportement fragile, la capacité résiduelle est nulle ($CR = 0$).

Le paramètre de résistance pour le calcul en fiabilité est pris égal à la capacité résiduelle $R_t = CR_t$. Le paramètre R_t représente l'effort axial limite que peut soutenir l'élément. Dans ce cas, la marge de sécurité évalue l'écart entre l'effort axial limite et l'effort axial sollicitant.

3.3.2.3 Critère de défaillance globale

Dans le cas d'une structure isostatique, la ruine de cette dernière intervient dès lors qu'un de ses éléments est ruiné. La description formelle en système de cette structure est un système en série. Dans le cas d'une structure hyperstatique, la ruine de cette dernière intervient lorsqu'un mécanisme de ruine s'est formé. Comme il a été détaillé dans le paragraphe précédent, lorsqu'un des éléments est défaillant, les efforts sont redistribués dans les éléments survivants et l'élément défaillant suivant est déterminé. La matrice $\overline{\overline{K^{(P)}}}$ actualisée de l'Equation (3.16) est alors considérée et la formation d'un mécanisme de ruine est déterminée en étudiant la singularité de cette matrice. Le critère relatif à la ruine de la structure est donc:

$$\left|\overline{\overline{K^{(P)}}}\right| = 0 \tag{3.21}$$

Ce critère est utilisé dans la suite de ce chapitre pour déterminer l'occurrence d'une défaillance globale de la structure.

3.3.3 Recherche du dysfonctionnement global avec l'algorithme des branches et bornes

L'exemple du portique plan introduit dans la Figure 3.16 est maintenant considéré pour illustrer de manière qualitative et quantitative la démarche de l'algorithme des branches et bornes et la détermination du chemin de défaillance le plus probable. Le portique est constitué d'éléments en acier IPE 240 (cf. Figure 3.20 et Tableau 3.3), à comportement supposé élastique parfaitement plastique, avec un module d'Young E et une limite élastique f_y respectivement égaux à 210 GPa et 276 MPa.

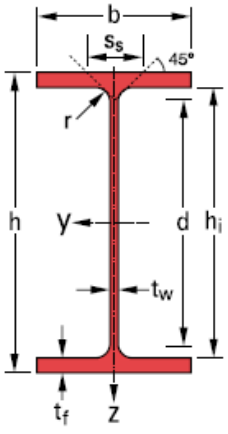


Figure 3.20. Section poutrelle européenne en I.

Ces éléments ont des sections transversales de classe 1 suivant l'Eurocode 3, c'est-à-dire qu'ils peuvent atteindre leur résistance plastique, sans risque de voilement local, et possèdent une capacité de rotation importante pour former une rotule plastique. Ce portique a une portée et une hauteur de 10 m et 5 m, respectivement. Comme il a été montré dans la Figure 3.16, le portique

est soumis à l'action simultanée de deux forces : l'une horizontale F_1 agissant au coin supérieur gauche et l'autre verticale F_2 agissant à mi-travée de sa poutre constitutive (Figures 3.16 et 3.20). Le modèle décrivant cette structure est un modèle à poutres constitué de quatre éléments poutres et de quinze degrés de liberté (Figure 3.22). Les sections étant de classe 1, le moment plastique résistant est calculé en utilisant l'Equation (3.20) et le module de flexion plastique du Tableau 3.3.

Dimensions (mm)					Section (cm^2)	Dimensions de construction (mm)		Propriétés de section			
								Axe fort y-y		Axe faible z-z	
h	b	t_w	t_f	r	A	h_i	d	I_y (cm^4)	$W_{pl,y}$ (cm^3)	I_z (cm^4)	$W_{pl,z}$ (cm^3)
240	120	6,2	9,8	15	39,12	220,4	190,4	3892	366,6	283,6	73,92

Tableau 3.3. Caractéristiques de section IPE 240.

Les moments résistants des sections d'éléments M_1 et M_2 (Figure 3.21) et les charges F_1 et F_2 sont supposés être des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale dont les paramètres sont fournis dans le Tableau 3.4.

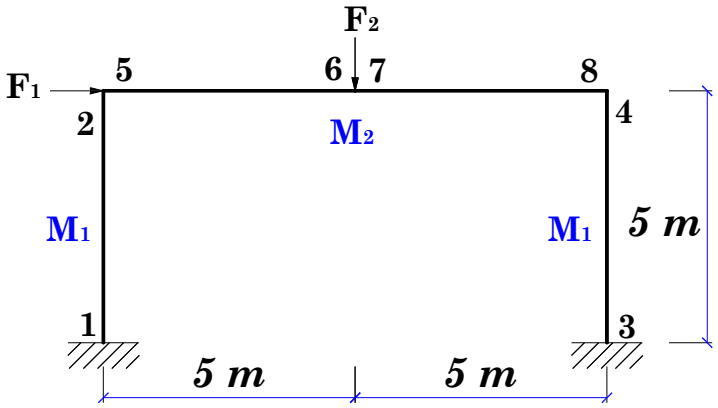


Figure 3.21. Caractéristiques du portique étudié.

Variables	Loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
M_1	Normale	101292 N.m	5%
M_2	Normale	101292 N.m	5%
F_1	Normale	20000 N	30%
F_2	Normale	40000 N	30%

Tableau 3.4. Statistiques de variables aléatoires pour l'exemple de la Figure 3.11.

La structure telle que représentée est constituée de huit sections critiques où peuvent se produire une défaillance locale, la défaillance locale étant définie comme la formation d'une rotule plastique au droit d'une section critique. La défaillance globale est quant à elle définie comme la formation d'un mécanisme de ruine au sens de l'Equation (3.21).

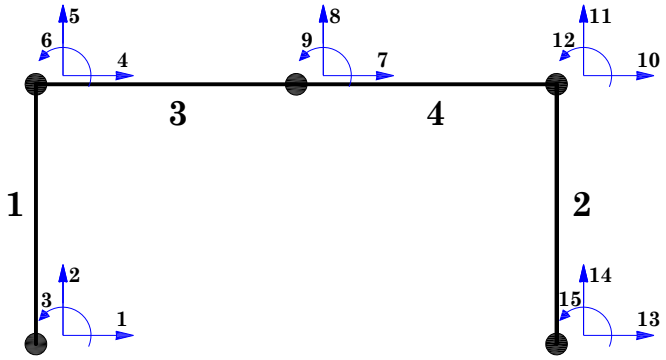


Figure 3.22. Modélisation par éléments poutres de la structure étudiée.

L'objectif est d'identifier le chemin de défaillance le plus probable de la structure de la Figure 3.22. Ce qui nous emmène logiquement à sélectionner dans une première étape l'élément ayant la plus grande probabilité de défaillance. Le Tableau 3.5 représente les probabilités de défaillance des éléments pouvant être potentiellement défaillants.

Eléments	Probabilité de défaillance P_f	Indice de fiabilité β
7 (6)	**$1{,}39.10^{-2}$**	**2,20**
8	$1{,}36.10^{-3}$	3,00
4	$1{,}36.10^{-3}$	3,00
3	$2{,}02.10^{-5}$	4,11
5	$8{,}50.10^{-9}$	5,64
2	$8{,}50.10^{-9}$	5,64
1	$1{,}08.10^{-13}$	7,34

Tableau 3.5. Probabilités de défaillance à l'étape initiale de défaillance

Comme il est indiqué dans le Tableau 3.5, les probabilités de défaillance des éléments 8 et 4 (respectivement5 et 2) sont identiques. En outre, l'élément 7 (Figure 3.23) possède la plus grande probabilité de défaillance : il est donc sélectionné. Cette opération de sélection est nommée *processus de branchement*. A ce stade qui est l'étape initiale sans aucune défaillance, le déterminant de la matrice de rigidité n'est pas nul ($|\mathrm{K}| = 1{,}26 \times 10^{66} \neq 0$). Il n'y a donc pas occurrence d'un mécanisme de ruine.

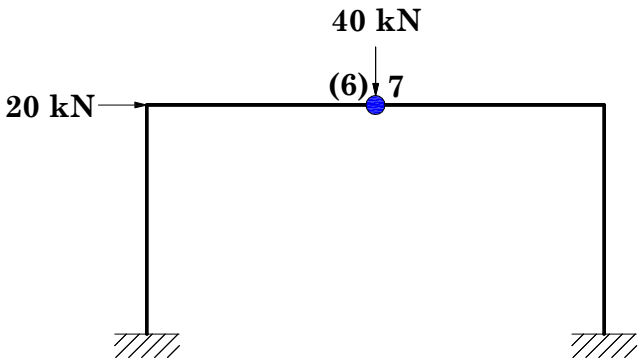


Figure 3.23. (a) Première rotule plastique au nœud 7, et (b) arbre de défaillance.

L'étape suivante consiste à sélectionner l'élément qui aura la plus grande probabilité de défaillance après que 7 soit défaillant. La défaillance de l'élément 7 est donc supposée et les probabilités de défaillance des autres éléments sachant que 7 est défaillant sont calculées. Ces probabilités de défaillance sont listées dans le Tableau 3.6.

Rotule plastique déjà formée	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
7	**8**	**$4{,}63.10^{-3}$**	**2,60**
7	4	$3{,}74.10^{-3}$	2,67
7	5	$8{,}30.10^{-5}$	3,77
7	3	$6{,}68.10^{-5}$	3,81
7	2	$5{,}60.10^{-5}$	3,86
7	1	$2{,}71.10^{-11}$	3,74

Tableau 3.6. Probabilité d'occurrence des chemins issus de la défaillance de l'élément 7.

Il est remarqué que le chemin 7 → 8 dans la Figure 3.24 (l'arbre se lit du haut vers le bas dans la Figure 3.24b) est celui qui possède la plus grande probabilité d'occurrence : l'élément 8 est donc sélectionné. A ce stade, le déterminant de la matrice de rigidité n'est toujours pas nul ($|K| = 1{,}26.10^{65}$). Il est noté que les probabilités des chemins 7 → 8 et 7 → 4 (respectivement 7 →5 et 7 → 2) sont différentes car les calculs des probabilités de défaillance des systèmes en parallèles font intervenir les corrélations entre les différents états limites concernés.

(a) (b)

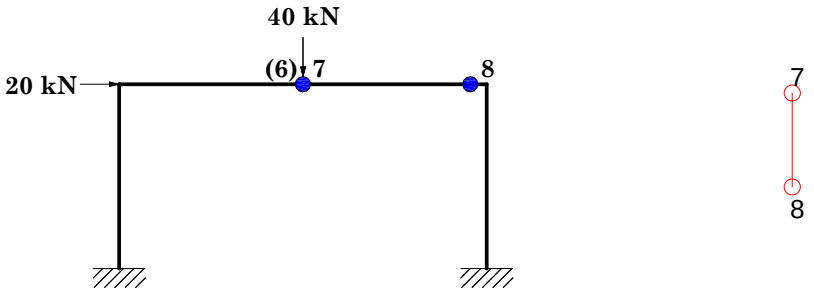


Figure 3.24. (a) Deuxième rotule plastique au nœud 8 et (b) arbre de défaillance.

Similairement à l'étape précédente, la défaillance successive des éléments 7 et 8 est supposée et les probabilités de défaillance des éléments non défaillants sont calculées dans le but de localiser la rotule plastique suivante. Les probabilités de défaillance correspondantes sont reportées dans le Tableau 3.7.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
7 → 8	**3**	**$8{,}78.10^{-4}$**	**3,13**
7 → 8	5	$6{,}16.10^{-4}$	3,23
7 → 8	2	$4{,}92.10^{-4}$	3,30
7 → 8	1	$1{,}96.10^{-11}$	6,61
7 → 8	4		

Tableau 3.7. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance successive des éléments 7 et 8.

Le chemin 7 → 8 → 3 (Figure 3.25) étant celui qui possède la plus grande probabilité d'occurrence, l'élément 3 est sélectionné. Il est noté que le chemin 7 → 8 → 4 n'est pas analysé dans le Tableau 3.7 car 8 → 4 constitue un chemin de ruine fictif (dans le sens ou la défaillance intervient au même nœud, cf. Figure 3.26). Dans la suite de l'analyse, tous les mécanismes fictifs sont ignorés.

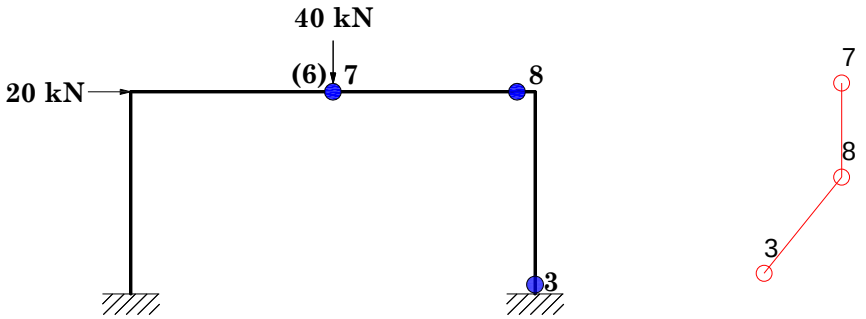


Figure 3.25. (a) Troisième rotule plastique au nœud 3 et (b) Arbre de défaillance.

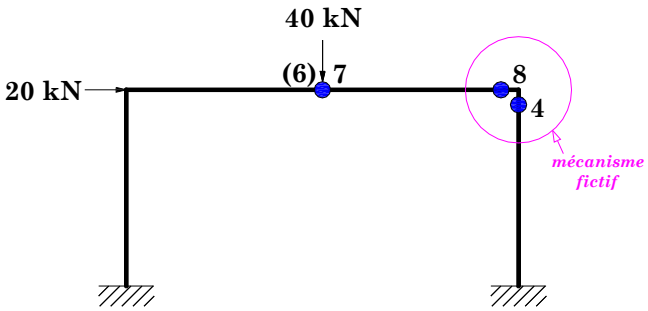


Figure 3.26. Illustration du mécanisme fictif 8 → 4.

Lorsque les éléments 7, 8 et 3 sont défaillants, le déterminant de la matrice de rigidité globale de la structure n'est pas nul ($|K| = 5.88 \times 10^{63}$). Le processus de branchement se poursuit donc pour identifier la rotule plastique suivante (Tableau 3.8).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
7 → 8 → 3	**5**	**$4.12.10^{-4}$**	**3,23**
7 → 8 → 3	2	$3.69.10^{-4}$	3,30
7 → 8 → 3	1	$7,21.10^{-6}$	4,34
7 → 8 → 3	4		

Tableau 3.8. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance successive des éléments 7, 8 et 3.

Le chemin 7 → 8 → 3 → 5 ($P_f = 4,12.10^{-4}$) est celui qui possède la plus grande probabilité. L'élément 5 est donc sélectionné. Lorsque les éléments 7, 8, 3 et 5 sont défaillants on remarque que la matrice de rigidité globale est singulière ($|K| = 0$), ce qui traduit la formation d'un mécanisme de ruine selon l'Equation (3.21). Le chemin de ruine 7 → 8 → 3 → 5 est donc un

chemin de défaillance complet (Figure 3.27(b)). L'objectif étant d'identifier le mécanisme le plus probable, le parcours de l'arbre de ruine est poursuivi dans le but de rechercher d'éventuels chemins avec une plus grande probabilité de défaillance. Il est noté que tous les chemins avec une probabilité de défaillance inférieure à $4{,}12.10^{-4}$ sont écartés.

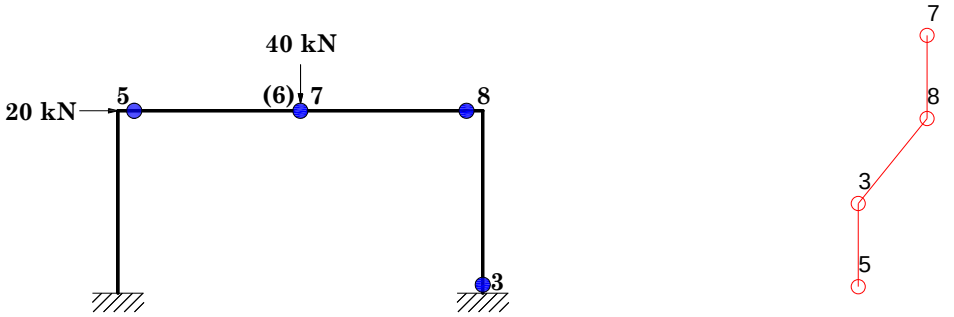


Figure 3.27. (a) Quatrième rotule plastique au nœud 5 : dernière étape de défaillance, et (b) arbre de défaillance associé.

Comme il a été présenté au paragraphe 3.2.1.2, cette opération d'élimination de chemin est appelée *processus de bornage*. Murotsu & Yoshida (1984) ont montré que la probabilité d'un chemin de ruine incomplet est une fonction monotone décroissante de la longueur du chemin. Les chemins incomplets avec une probabilité de défaillance inférieure à $4{,}12.10^{-4}$ peuvent donc être écartés sans risque de manquer un branchement avec une probabilité supérieure à cette valeur.

De façon similaire, les chemins 7 → 8 → 3 → 2 et 7 → 8 → 3 → 1 sont des chemins de ruine complets, mais écartés car ayant une probabilité d'occurrence inférieure à $4{,}12.10^{-4}$. N'ayant plus d'élément pour de futurs branchements dans le Tableau 3.8, l'algorithme retourne un nœud en arrière dans le Tableau 3.7.

A l'étape précédente (Tableau 3.7), le chemin 7 → 8 → 5 ayant la plus grande probabilité d'occurrence après le chemin 7 → 8 → 3, l'élément 5 est sélectionné (Figure 3.28). On constate en outre que le chemin 7 → 8 → 5 est un chemin de ruine complet et que sa probabilité d'occurrence ($6{,}16.10^{-4}$) est plus grande que $4{,}12.10^{-4}$. La valeur de référence utilisée pour le bornage $4{,}12.10^{-4}$ est donc remplacée par $6{,}16.10^{-4}$.

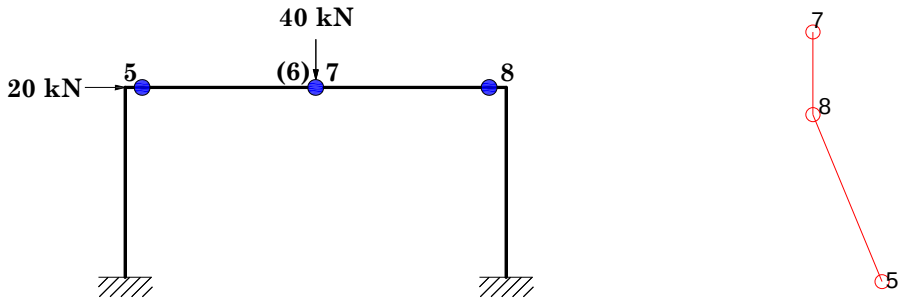


Figure 3.28. (a) Troisième rotule plastique au nœud 5 et (b) arbre de défaillance associé.

Le chemin 7 → 8 → 2 est aussi un chemin de ruine complet qui sera écarté (sa probabilité étant inférieure à la valeur référence de bornage). Il en sera de même pour le chemin de ruine incomplet 7 → 8 → 1. N'ayant plus d'opération de branchement nécessaire à cette étape, l'algorithme retourne un nœud en arrière en sélectionnant désormais le nœud 4 dans le Tableau 3.6 et les nouvelles possibilités de branchement sont illustrées dans le Tableau 3.9 en supposant 7 et 4 défaillants.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
7 → 4	**3**	**$8{,}24.10^{-4}$**	**3,14**
7 → 4	5	$4{,}92.10^{-4}$	3,30
7 → 4	2	$4{,}52.10^{-4}$	3,32
7 → 4	1	$5{,}38.10^{-11}$	6,46
7 → 4	8		

Tableau 3.9. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance successive des éléments 7 et 4.

Le Tableau 3.9 montre que le chemin 7 → 4 → 3 possède la plus grande probabilité d'occurrence, et cette probabilité est supérieure à la valeur référence de bornage. Par conséquent le processus de branchement doit continuer, l'élément 3 est alors sélectionné et la structure est re-analysée pour identifier l'élément défaillant suivant sachant que les éléments 7, 4 et 3 sont successivement défaillants.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
7 → 4 → 3	5	$3{,}36.10^{-4}$	3,30
7 → 4 → 3	2	$3{,}37.10^{-4}$	3,32
7 → 4 → 3	1	$7{,}21.10^{-6}$	4,34
7 → 4 → 3	8		

Tableau 3.10. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance successive des éléments 7, 4 et 3.

Le Tableau 3.10 montre que le chemin 7 → 4 → 3 → 5 est le plus probable. La matrice de rigidité étant singulière, il y a donc occurrence d'un mécanisme de ruine représenté par le chemin de défaillance complet 7 → 4 → 3 → 5. Cependant ce chemin sera écarté car sa probabilité d'occurrence ($3{,}36.10^{-4}$) est plus petite que la valeur référence de bornage $6{,}16.10^{-4}$. Il en sera de même pour les chemins complets 7 → 4 → 3 → 2 et 7 → 4 → 3 → 1. N'ayant plus d'opération de branchement possible, l'algorithme retourne à l'étape précédente (Tableau 3.9). Les chemins 7 → 4 → 5 et 7 → 4 → 2 sont alors des chemins de ruine complets écartés, comme le chemin de ruine partiel 7 → 4 → 1. De façon similaire, les chemins partiels 7 → 3, 7 → 5, 7 → 2 et 7 → 1 sont aussi écartés.

Tous les branchements commençant par le nœud 7 étant terminés, l'algorithme revient à l'étape initiale (Tableau 3.5). Il est noté que seuls les éléments 8 et 4 peuvent être sélectionnés car ils ont une probabilité de défaillance supérieure à la valeur référence de bornage, les autres éléments étant alors écartés. A titre d'information, les Tableaux 3.11 à 3.13 montrent les étapes de

branchements et bornages à partir du nœud 8. De même, les Tableaux 3.14 à 3.16 illustrent ces deux étapes à partir du nœud 4. Il est montré que pour ces deux nœuds initiaux, aucun nouveau chemin de défaillance complet avec une probabilité d'occurrence supérieure à la valeur de bornage n'est identifié.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
8	**7**	**$1{,}31.10^{-3}$**	**2,47**
8	3	$1{,}89.10^{-5}$	4,07
8	5	$6{,}43.10^{-9}$	5,67
8	2	$4{,}63.10^{-9}$	5,64
8	1	$8{,}88.10^{-19}$	7,96
8	4		

Tableau 3.11. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance de l'élément 8.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
8 → 7	**3**	**$7{,}88.10^{-4}$**	**3,13**
8 → 7	5	$4{,}08.10^{-4}$	3,23
8 → 7	2	$3{,}29.10^{-4}$	3,30
8 → 7	1	$1{,}96.10^{-11}$	6,61
8 → 7	4		

Tableau 3.12. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance successive des éléments 8 et 7.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
8 → 7 → 3	**5**	**$3{,}62.10^{-4}$**	**3,23**
8 → 7 → 3	2	$3{,}19.10^{-4}$	3,30
8 → 7 → 3	1	$7.19.10^{-6}$	4,34
8 → 7 → 3	4		

Tableau 3.13. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance successive des éléments 8, 7 et 3.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
4	**7**	**$1{,}11.10^{-3}$**	**2,52**
4	3	$3{,}60.10^{-5}$	3,96
4	5	$4{,}63.10^{-9}$	5,64
4	2	$6{,}43.10^{-9}$	5,67
4	1	$7{,}87.10^{-14}$	7,38
4	8		

Tableau 3.14. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance de l'élément 4.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
4 → 7	**3**	**$6{,}89.10^{-4}$**	**3,14**
4 → 7	5	$2{,}47.10^{-4}$	3,30
4 → 7	2	$2.77.10^{-4}$	3,32
4 → 7	1	$5{,}39.10^{-11}$	6,46
4 → 7	8		

Tableau 3.15. Probabilités d'occurrence des chemins issus de la défaillance successive des éléments 4 et 7.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Probabilité du chemin	Indice de fiabilité
4 → 7 → 3	**2**	**$2{,}65.10^{-4}$**	**3,32**
4 → 7 → 3	5	$2{,}62.10^{-4}$	3,30
4 → 7 → 3	1	$7{,}19.10^{-6}$	4,34
4 → 7 → 3	8		

Tableau 3.16. Probabilités d'occurrence des chemins de défaillance issus de la défaillance successive des éléments 4, 7 et 3.

L'analyse en fiabilité des mécanismes de défaillance de la structure étudiée (Figure 3.21) par la méthode des branches et bornes a finalement permis d'identifier deux chemins de défaillance dominants : 7 → 8 → 3 → 5 ($P_f = 4{,}12.10^{-4}$) et 7 → 8 → 5 ($P_f = 6{,}16.10^{-4}$). Cependant, seul le chemin 7 → 8 → 5 avec la plus grande probabilité de défaillance (Figure 3.29) est utilisé comme chemin de défaillance de référence.

On peut remarquer que les deux chemins dominants identifiés constituent en fait le même mécanisme à la différence que le chemin 7 → 8 → 5 n'est constitué que de rotules plastiques essentielles alors que le chemin 7 → 8 → 3 → 5 possède une rotule redondante qui se situe au nœud 3. L'encadrement de la probabilité de défaillance du système (bornes de Ditlevsen) en considérant les chemins de défaillance dominants identifiés est indiqué dans le Tableau 3.17.

Borne inférieure	Borne supérieure
$6{,}03.10^{-4}$	$6{,}16.10^{-4}$

Tableau 3.17. Bornes de Ditlevsen de la probabilité de défaillance du système.

Ces bornes sont très proches de la probabilité de défaillance critique ($6{,}16.10^{-4}$) qui est celle du chemin de ruine dominant le plus probable (7 → 8 → 5). Finalement, la méthode des branches et bornes a permis de déterminer le chemin de défaillance dominant de cet exemple en 51 secondes.

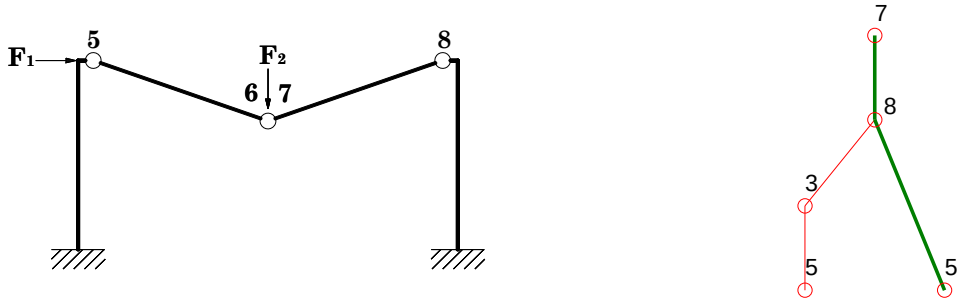


Figure 3.29. (a) Mécanisme de défaillance le plus probable et (b) arbre de défaillance associé.

3.3.4 Recherche du dysfonctionnement global avec l'algorithme du *β*-unzipping

L'exemple du portique plan de la Figure 3.16 et dont les caractéristiques sont détaillées dans le paragraphe 3.3.3 est maintenant considéré pour illustrer le cheminement de l'algorithme du *β*-unzipping.

3.3.4.1 Analyse de niveau 0

Au niveau 0, la fiabilité du système est égale à la fiabilité β_0 de l'élément ayant le plus petit indice de fiabilité. A ce stade, l'analyse de la fiabilité structurale se fait uniquement au niveau du composant le plus critique. Le Tableau 3.5 montre que l'élément critique est celui localisé en 7 (Figure 3.23). La probabilité de défaillance du système au niveau 0 est donc caractérisée par la probabilité de défaillance de cet élément (Tableau 3.18).

Probabilité de défaillance $P_{f(sys)}$	Indice de fiabilité $\beta_{(sys)}$
$1{,}39.10^{-2}$	2,20

Tableau 3.18. Performance structurale au niveau 0 de l'analyse.

3.3.4.2 Analyse de niveau 1

Au niveau 1, connaissant l'indice de fiabilité de l'élément critique $\beta_0 = \min(\beta_i) =$ 2,20, l'indice de fiabilité critique $\beta_{c,1}$ peut être calculé soit en suivant la méthode proposée par Chen et al. 1995 (Equations (3.19) à (3.21)) ou par proposition d'une valeur après analyse des résultats. Le calcul de $\Delta\beta_1$ tel que décrit au paragraphe 3.2.2.2 donne une valeur de 1,97. L'indice de fiabilité critique vaut alors $\beta_c^1 = \beta_0 + \Delta\beta_1 = 2{,}20+1{,}97$, soit 4,17. Seuls les éléments donc l'indice de fiabilité est compris dans l'intervalle [2,20 ; 4,17] sont alors sélectionnés.

Eléments	Probabilité de défaillance P_f	Indice de fiabilité β
7 (6)	**$1{,}39.10^{-2}$**	**2,20**
8	$1{,}36.10^{-3}$	3,00
4	$1{,}36.10^{-3}$	3,00
3	$2{,}02.10^{-5}$	4,11
5	$8{,}50.10^{-9}$	5,64
2	$8{,}50.10^{-9}$	5,64
1	$1{,}08.10^{-13}$	7,34

Tableau 3.19. Probabilités de défaillance et indice de fiabilité (niveau 1 de l'analyse).

Le Tableau 3.19 indique que les éléments 3, 4, 6, 7, 8 (cf. Figure 3.8) sont sélectionnés au niveau 1 de l'analyse (partie du tableau en bleu). A ce stade, il n'y a pas occurrence d'un mécanisme global de la structure puisque la matrice de rigidité globale de celle-ci n'est pas singulière. Le processus d'unzipping se poursuit donc à l'étape d'analyse suivante. En notant ρ_1 la matrice de corrélation associée aux éléments défaillants au niveau 1 de l'analyse, la probabilité de défaillance du système s'exprime de la façon suivante :

$$P_{f(sys)} = 1 - \Phi_m\left([\beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_7, \beta_8]; \rho_1\right) \tag{3.22}$$

3.3.4.3 Analyse de niveau 2

Au niveau 2 de l'analyse, la défaillance des éléments sélectionnés au stade d'analyse précédent (niveau d'analyse 1) est supposée de manière successive pour déterminer les éléments défaillants suivants. La structure est donc une nouvelle fois analysée en prenant en compte cette défaillance (modification de la matrice de rigidité et redistribution des efforts), pour calculer les marges de sécurité des autres éléments et en déduire leur probabilité de défaillance.

Le Tableau 3.20 donne les valeurs des indices de fiabilité obtenus lorsque la défaillance de l'élément 3 est considérée.

Rotule plastique déjà formée	Elément étudié	Indice de fiabilité
3	7	2,39
3	6	2,39
3	4	3,10
3	8	3,14
3	2	4,77
3	5	4,59
3	1	6,94

Tableau 3.20. Indices de fiabilité au niveau 2 de l'analyse prenant en compte la défaillance de l'élément 3.

Le calcul de $\Delta\beta_2^3$ donne la valeur 1,20 soit un intervalle critique égal à [2,39, 3,59]. Les chemins $3 \rightarrow 6$, $3 \rightarrow 7$, $3 \rightarrow 4$ et $3 \rightarrow 8$ sont donc sélectionnés. La défaillance de l'élément 4 est maintenant considérée dans le Tableau 3.21 qui donne les valeurs des indices de fiabilités obtenus.

Rotule plastique déjà formée	Elément étudié	Indice de fiabilité
4	7	2,52
4	6	2,52
4	3	3,96
4	5	5,64
4	2	5,67
4	1	7,38
4	8	

Tableau 3.21. Indices de fiabilité au niveau 2 de l'analyse prenant en compte la défaillance de l'élément 4.

L'intervalle $\Delta\beta_2^4$ à cet étape valant 1,36, l'intervalle critique est [2,52 3,88]. On obtient alors les chemins de ruines incomplets $4 \rightarrow 6$ et $4 \rightarrow 7$. Comme cela avait été indiqué dans la méthode des branches et bornes, le chemin $4 \rightarrow 8$ n'est pas retenu car il constitue un mécanisme fictif (cf. Figure 3.26). Les deux derniers éléments identifiés au niveau 1 sont finalement les éléments 7 (géométriquement identique à 6) et 8. Les résultats sont reportés dans les Tableaux 3.22 et 3.23 ci-après.

Rotule plastique déjà formée	Elément étudié	Indice de fiabilité
7	8	2,60
7	4	2,67
7	5	3,77
7	3	3,81
7	2	3,86
7	1	3,74

Tableau 3.22. Indices de fiabilité au niveau 2 de l'analyse prenant en compte la défaillance de l'élément 7 (6).

Dans le Tableau 3.22, on obtient un intervalle critique de [2,60, 3,38] pour $\Delta\beta_2^7$ égal à 0.7757, ce qui amène à sélectionner les chemins de ruine incomplets 7 → 8 et 7 → 4.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
8	7	2,47
8	3	4,07
8	5	5,67
8	2	5,64
8	1	7,96
8	4	

Tableau 3.23. Indices de fiabilité au niveau d'analyse 2 prenant en compte la défaillance de l'élément 8.

Pour un intervalle $\Delta\beta_2^8$ égal à 2,19, le Tableau 3.23 indique qu'au niveau 2 de l'analyse, en supposant la défaillance de l'élément 8 sélectionné à l'étape précédente, les chemins de ruine incomplets 8 → 6, 8 → 7 et 8 → 3 sont sélectionnés. Les arbres de défaillance obtenus au niveau 2 de l'analyse sont présentés dans la Figure 3.30. Ces arbres sont constitués de paires d'éléments défaillants représentant des chemins de ruine incomplets car il n'y a pas encore occurrence d'un mécanisme de ruine. L'algorithme se poursuit alors en passant au niveau 3 de l'analyse.

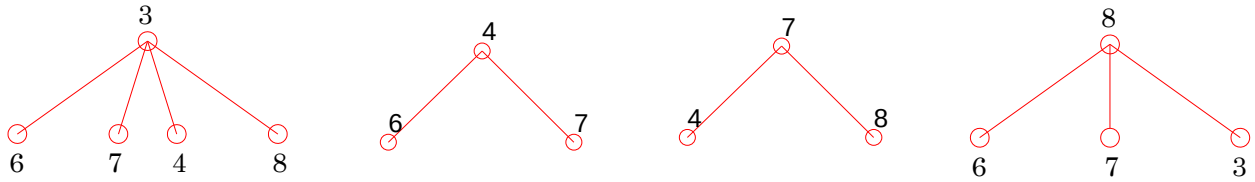


Figure 3.30. Arbres de défaillance au niveau 2 de l'analyse.

3.3.4.4 Analyse de niveau 3

Au niveau 3 de l'analyse, la défaillance des paires d'éléments sélectionnés à l'étape précédente est successivement considérée pour déterminer les éléments défaillants suivants. La structure est donc modifiée comme précédemment pour tenir compte de la défaillance des paires d'éléments déjà identifiés. Les marges de sécurité sont calculées et les indices de fiabilité correspondants sont reportés dans les Tableaux 3.24 à 3.31.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
3 → 7(6)	8	2,76
3 → 7(6)	4	2,81
3 → 7(6)	5	3,61
3 → 7(6)	2	3,73
3 → 7(6)	1	6,17

Tableau 3.24. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [3,7] ($\Delta\beta_3^{[3,7]} = 0{,}84$).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
3 → 4	7(6)	2,71
3 → 4	5	4,38
3 → 4	2	4,64
3 → 4	1	6,19
3 → 4	8	

Tableau 3.25. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [3,4] ($\Delta\beta_3^{[3,4]} = 1{,}18$).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
3 → 8	7(6)	2,66
3 → 8	5	4,46
3 → 8	2	4,59
3 → 8	1	6,57
3 → 8	4	

Tableau 3.26. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [3,8] ($\Delta\beta_3^{[3,8]} = 1{,}32$).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
4 → 7(6)	3	3,14
4 → 7(6)	5	3,30
4 → 7(6)	2	3,32
4 → 7(6)	1	6,46
4 → 7(6)	8	

Tableau 3.27. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [4,7] ($\Delta\beta_3^{[4,7]} = 0{,}23$).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
7 → 4	3	3,14
7 → 4	5	3,30
7 → 4	2	3,32
7 → 4	1	6,46
7 → 4	8	

Tableau 3.28. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [7,4] ($\Delta\beta_3^{[7,4]} = 0{,}23$).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
7 → 8	3	3,13
7 → 8	5	3,23
7 → 8	2	3,30
7 → 8	1	6,61
7 → 8	4	

Tableau 3.29. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [7,8] ($\Delta\beta_3^{[7,8]} = 0,17$).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
8 → 7(6)	3	3,13
8 → 7(6)	5	3,23
8 → 7(6)	2	3,30
8 → 7(6)	1	6,61
8 → 7(6)	4	

Tableau 3.30. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [8,7]. ($\Delta\beta_3^{[8,7]} = 0,28$).

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
8 → 3	7(6)	2,66
8 → 3	5	4,46
8 → 3	2	4,60
8 → 3	1	6,57
8 → 3	4	

Tableau 3.31. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [8,3]. ($\Delta\beta_3^{[8,3]} = 1,32$).

Dans les Tableaux 3.24 à 3.31, on remarque que les chemins de ruine 4 → 7(6) → 5, 4 → 7(6) → 2, 7(6) → 4 → 5, 7(6) → 4 → 2, 7(6) → 8 → 5, 7(6) → 8 → 2, 8 → 7(6) → 5 et 8 → 7(6) → 2 sont des chemins de ruine complets car la matrice de rigidité globale de la structure est singulière lorsqu'il y a occurrence de ses chemins de ruine. Les triplets d'éléments correspondants sont illustrés dans la Figure 3.31.

3.3.4.5 Analyse de niveau 4

Au niveau 4 de l'analyse, les triplets d'éléments constituant des chemins de ruine incomplets, identifiés à l'étape précédente sont supposés défaillants. Les éléments défaillants suivants sont recherchés avec une méthodologie identique à celle des niveaux inférieurs. Les marges de sécurité et les indices de fiabilité associés sont successivement calculés. A ce niveau, il n'y a aucun élément ajouté aux chemins de ruine du niveau 3, ce qui correspond à la fin de l'algorithme. La probabilité de défaillance du système résulte donc de la mise en série de triplets de mode de défaillance qui sont présentés à la Figure 3.32 (le chemin le plus probable 7(6) →8→5 est identifié en vert dans la Figure 3.32). Il est noté que seuls les mécanismes complets sont présentés dans cette figure.

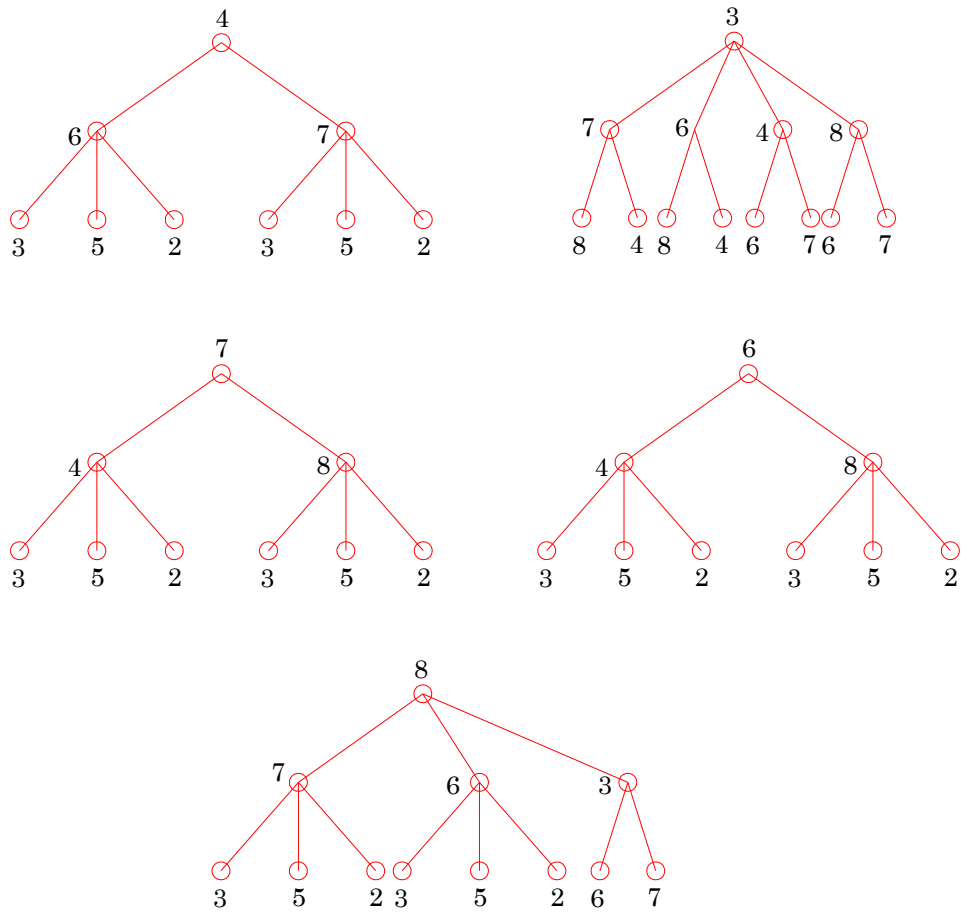


Figure 3.31. Arbres de défaillance au niveau 3 de l'analyse.

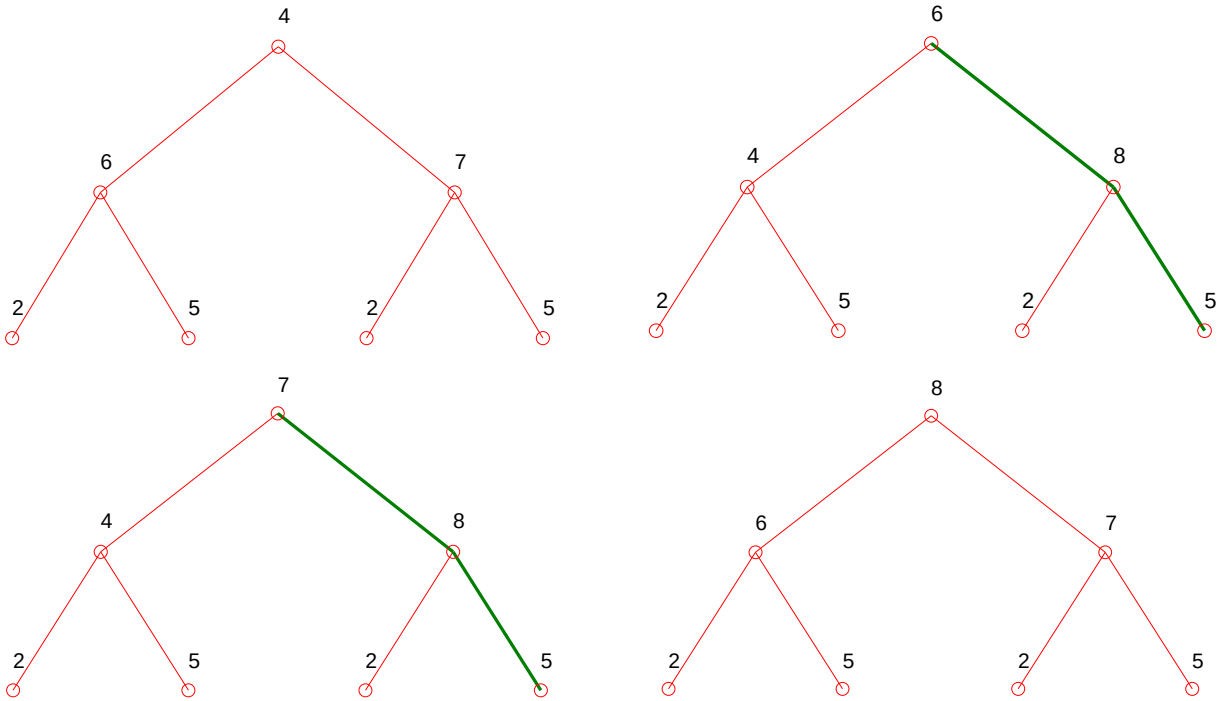


Figure 3.32. Arbres de défaillance au niveau 4 de l'analyse.

L'utilisation de la méthode du β-unzipping a finalement permis d'identifier 16 chemins dominants (pour deux chemins dominants avec la méthode des branches et bornes). Les probabilités d'occurrence de ses chemins sont ensuite calculées et reportées dans le Tableau 3.32.

On remarque que le chemin de ruine 7(6) → 8 → 5 est le chemin avec la plus grande probabilité d'occurrence. Ce chemin est identique à celui obtenu avec la méthode des branches et bornes.

Chemins de ruine complets dominants	Probabilité de défaillance
4 → 7(6) → 2	$2{,}77.10^{-4}$
4 → 7(6) → 5	$2{,}47.10^{-4}$
7(6) → 4 → 2	$4{,}52.10^{-4}$
7(6) → 4 → 5	$4{,}92.10^{-4}$
7(6) → 8 → 2	$4{,}93.10^{-4}$
7(6) → 8 → 5	$\mathbf{6{,}16.10^{-4}}$
8 → 7(6) → 2	$3{,}29.10^{-4}$
8 → 7(6) → 5	$4{,}08.10^{-4}$

Tableau 3.32. Probabilités de défaillance des chemins de ruine dominants identifiés

La méthode du β-unzipping est une analyse étape par étape qui ne prend en compte que les éléments critiques du point de vue de leur probabilité de défaillance au niveau d'analyse considéré. Le Tableau 3.33 illustre les probabilités de défaillance du système au niveau de chaque étape de défaillance. Il est noté que les différents niveaux ne correspondent pas tous à l'occurrence d'un mécanisme de défaillance.

Etapes d'analyse	**Encadrement des probabilités de défaillance par les bornes de Ditlevsen**
Niveau 0	$1{,}39.10^{-2}$
Niveau 1	$[1{,}48.10^{-2}, 2{,}09.10^{-2}]$
Niveau 2	$[5{,}00.10^{-3}, 7{,}20.10^{-3}]$
Niveau 3	$[6{,}68.10^{-4}, 8{,}46.10^{-4}]$

Tableau 3.33. Probabilités de défaillance du système à chaque étape d'analyse.

L'avantage de la méthode du β-unzipping est qu'elle permet d'estimer la fiabilité de structures complexes au niveau d'analyse souhaité sans forcément aller jusqu'à la défaillance de tous les éléments, ce qui peut réduire les temps de calcul de manière significative.

Le Tableau 3.33 montre que la probabilité de défaillance critique ($6{,}16.10^{-4}$) qui est celle du chemin de ruine le plus probable (7(6) → 8 → 5) est proche de la borne inférieure de l'encadrement de Ditlevsen de la probabilité du système au niveau 4 de l'analyse ($6{,}68.10^{-2}$).

Finalement, la méthode du β-unzipping a permis de déterminer le chemin de défaillance dominant de cet exemple en 25 secondes.

3.3.5 Recherche du dysfonctionnement global avec l'algorithme du *β*-unzipping avec bornage

L'exemple du portique simple de la Figure 3.16 est utilisé dans ce paragraphe pour illustrer la méthode du β-unzipping avec bornage.

3.3.5.1 Processus d'unzipping orienté

Le processus d'unzipping, similaire à celui introduit dans le paragraphe 3.2.2 est de nouveau utilisé ici. L'analyse de niveau 0 est identique à celle effectuée dans le paragraphe 3.3.4.1. Au niveau 1 de l'analyse, les éléments sélectionnés sont représentés dans le Tableau 3.34.

Eléments sélectionnés	7(6)	8	4	3
Indices de fiabilité	2,20	3,00	3,00	4,11
Probabilités de défaillance	$1{,}39.10^{-2}$	$1{,}36.10^{-3}$	$1{,}36.10^{-3}$	$2{,}02.10^{-5}$

Tableau 3.34. Fiabilité des éléments sélectionnés au niveau d'analyse 1.

Contrairement à la méthode présentée dans le paragraphe 3.2.2, l'idée est ici de considérer les éléments successivement et par ordre de fiabilité croissant (au sens de la fiabilité des différents éléments). Ainsi, on parcourt l'arbre en commençant toujours par les éléments qui ont la probabilité de défaillance la plus élevée. Dans l'exemple considéré, le niveau d'analyse suivant est donc abordé en supposant la défaillance de l'élément 7. Le Tableau 3.35 détaille les éléments sélectionnés au niveau 2 de l'analyse. À ce stade, il n'y a pas encore occurrence d'un mécanisme de ruine et l'algorithme continue à l'étape suivante.

Rotule plastique déjà formée	Elément étudié	Indice de fiabilité
7 (6)	**8**	**2,60**
7 (6)	4	2,67
7 (6)	3	3,77
7 (6)	5	3,81
7 (6)	2	3,86
7 (6)	1	3,74

Tableau 3.35. Indices de fiabilité au niveau 2 d'analyse prenant en compte la défaillance de l'élément 7.

Au niveau 3 de l'analyse, et en supposant la défaillance des éléments 7 et 8, les marges de sécurité des éléments non défaillants sont considérées et les indices de fiabilité correspondants sont reportés dans le Tableau 3.36. Il est montré dans ce tableau que c'est l'élément 3 qui a l'indice de fiabilité le plus faible au niveau 3. C'est donc cet élément qui est sélectionné en premier. Cependant, le niveau 4 de l'analyse n'aboutit à aucun mécanisme de défaillance à partir de l'élément 3. L'algorithme revient alors au niveau 3 de l'analyse et détermine l'élément ayant le deuxième indice de fiabilité le plus faible dans le Tableau 3.36 à savoir l'élément 5. Ce chemin est un chemin de ruine complet $7(6) \rightarrow 8 \rightarrow 5$ ($P_f = 6{,}16.10^{-4}$) pour lequel la probabilité de défaillance du chemin devient valeur de bornage dans la suite de l'algorithme (chemin le plus

probable identifié à ce stade). Par conséquent, tous les chemins de ruine ayant une probabilité de défaillance plus petite que $6{,}16\times10^{-4}$ seront éliminés par la suite, même si l'indice de fiabilité est compris dans l'intervalle fixé par $\Delta\beta_l^k$ au niveau l de l'analyse partant du chemin finissant par l'élément k. Dans l'exemple considéré, ce bornage élimine tous les chemins suivants et l'arbre de défaillance est finalement montré dans la Figure 3.33.

Rotules plastiques déjà formées	Elément étudié	Indice de fiabilité
7 → 8	3	3,13
7 → 8	5	3,23
7 → 8	2	3,30
7 → 8	1	6,61
7 → 8	4	

Tableau 3.36. Indices de fiabilité au niveau 3 de l'analyse prenant en compte la défaillance de la paire d'élément [7,8].



Figure 3.33. Arbre de défaillance de la méthode du β-unzipping avec bornage.

Finalement, la méthode du β-unzipping avec bornage a permis de déterminer le chemin de défaillance dominant de cet exemple en 17 secondes.

3.3.5.2 Conclusions

La méthode du β-unzipping avec bornage permet d'éliminer de nombreux chemins, ce qui la rend particulièrement efficace, vis-à-vis des temps de calcul, par rapport à la méthode classique du β-unzipping. Cette approche reste différente des branches et bornes puisqu'elle privilégie le parcours des branches avec des éléments présentant une probabilité de défaillance élevée à chaque nœud, là où l'approche des branches et bornes privilégie les chemins avec les probabilités de défaillance les plus élevées. Elle s'en rapproche cependant puisqu'elle intègre la probabilité du chemin critique déjà identifiée comme valeur de bornage dans la perspective de réduire le nombre de branches parcourues.

3.3.6 Recherche du dysfonctionnement global « par l'extérieur »

Ce paragraphe applique la démarche par l'extérieur abordée dans le paragraphe 3.2.4. Le portique considéré est une structure de type élasto-plastique pour laquelle la défaillance est

définie comme la formation d'un mécanisme de ruine. Les mécanismes de défaillance fondamentaux (par exemple les mécanismes 1 et 2 dans la Figure 3.34) sont des mécanismes de ruine qui peuvent être combinés entre eux pour former d'autres mécanismes appelés mécanismes combinés (le mécanisme 3 dans la Figure 3.34). Tous les mécanismes de défaillance possibles de ce type de structure peuvent alors s'écrire comme combinaisons linéaires d'un ensemble de mécanismes fondamentaux (Thoft-Christensen & Murotsu 1984). Une méthode simple et efficace permettant de générer des mécanismes fondamentaux a été proposée par Watwood (1979). Cette méthode devrait permettre d'avoir une estimation rapide (en comparaison aux méthodes de parcours d'arbres d'évènements) de la probabilité de défaillance du système, et d'identifier la probabilité d'occurrence du mécanisme le plus probable. La probabilité de défaillance globale d'un mécanisme fondamental s'exprime de la manière suivante :

$$P_{globale} = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} g\left(q_i\right) \le 0\right) \tag{3.23}$$

où les q_i sont les modes de défaillance du mécanisme fondamental étudié et n le nombre de modes de défaillance du mécanisme fondamental étudié.

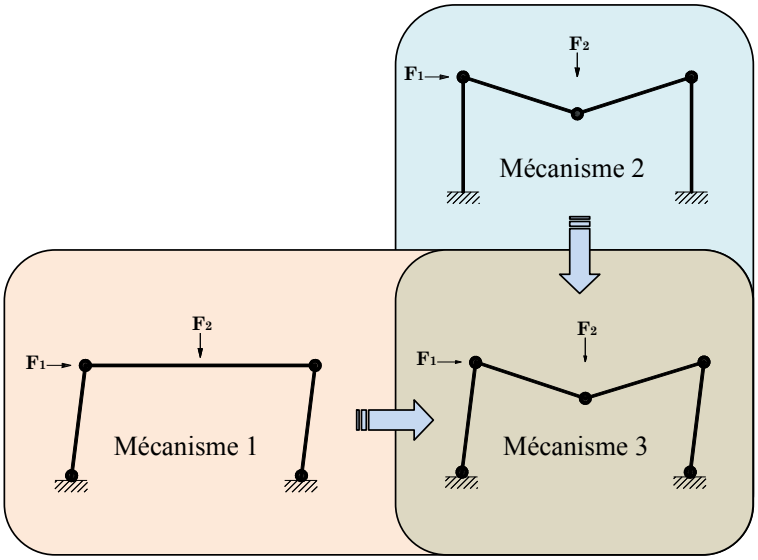


Figure 3.34. Illustration du concept de mécanismes fondamentaux.

La méthode décrite dans ce paragraphe est fondée sur deux principes de base :

- la géométrie de la structure détermine les mécanismes fondamentaux,

- l'identification des emplacements potentiels de rotules plastiques (structures 2D) et/ou de zone de défaillance par élongation (structures 3D).

Le mouvement d'un élément se compose de déformations et de mouvements de corps rigides. Lorsqu'il y a occurrence d'un mécanisme de ruine, tous les éléments de structure se comportent comme des corps rigides et la composante déformation de leur vecteur de mouvement devient donc nulle. Le paragraphe 3.3.6.1 fournit quelques explications permettant de déterminer les

mécanismes fondamentaux dans le cas particulier de structures de type élasto-plastique (Thoft-Christensen & Murotsu 1984).

3.3.6.1 Concept de la méthode des mécanismes fondamentaux

Le but de cette méthode est de formuler analytiquement à l'aide d'équations mathématiques l'exigence selon laquelle les éléments structuraux se comportent comme des corps rigides à l'intérieur d'un mécanisme. A cet effet, une transformation de coordonnées est effectuée dans les coordonnées généralisées des éléments pour représenter le mouvement des extrémités de l'élément. Cette dernière distingue les déformations de l'élément et les mouvements de corps rigides.

Il est donc important de distinguer le mouvement des extrémités de l'élément $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ (Figure 3.35) du mouvement de l'élément $\bar{s}' = (s_1', s_2', s_3', s_4', s_5', s_6')$ (Figure 3.36). Il est noté que tout mouvement de corps rigide peut s'écrire comme combinaison linéaire de s_i' pour $i = 4,\ldots,6$ et que toutes les déformations de l'élément peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de s_i' pour $i = 1,\ldots,3$. Il existe une relation entre le vecteur de coordonnées généralisées représentant le mouvement des extrémités de l'élément et le vecteur de coordonnées généralisées représentant le mouvement de l'élément (Watwood 1979 ; Thoft-Christensen & Murotsu 1984):

$$\bar{s} = \bar{\bar{T}}\bar{s}' \tag{3.24}$$

où

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

est la matrice de transformation des coordonnées généralisées représentant le mouvement de l'élément vers les coordonnées généralisées représentant le mouvement des extrémités de l'élément, tel que :

$$\bar{\bar{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

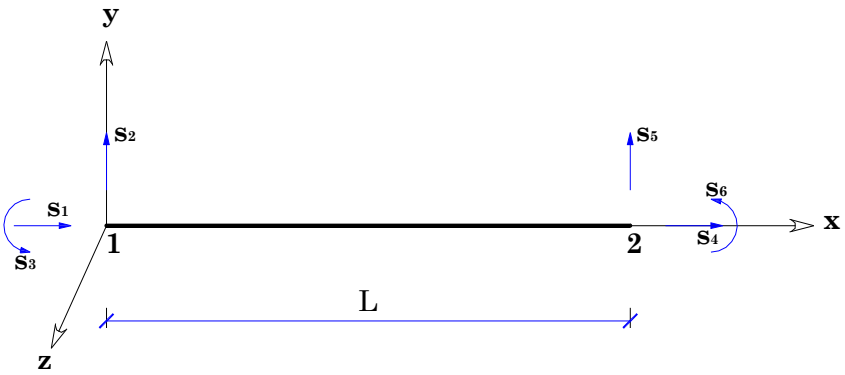


Figure 3.35. Coordonnées généralisées.

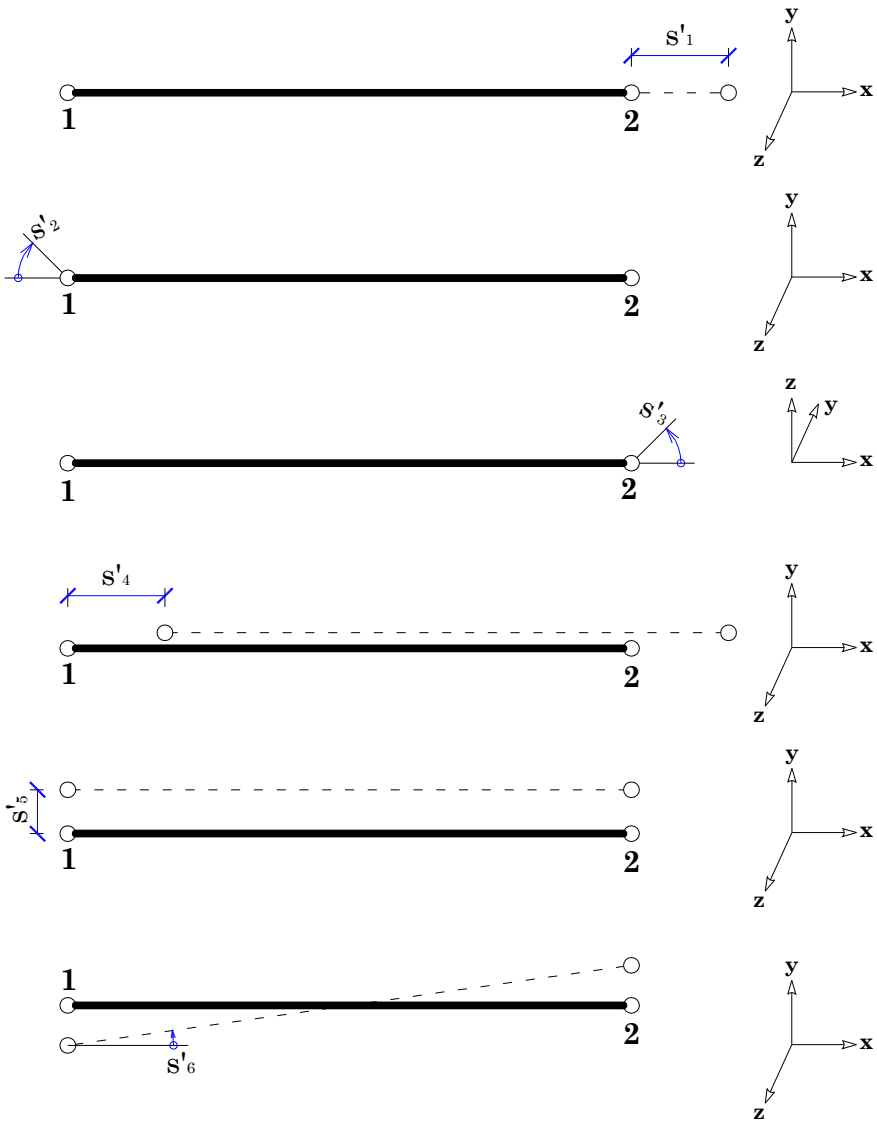


Figure 3.36. Coordonnées généralisées représentant le mouvement d'un élément plan.

Pour créer des mécanismes, les déformations de l'élément sont bloquées, en imposant aux composantes $s_1^{'}$, $s_2^{'}$ et $s_3^{'}$ d'être égales à zéro. La sous-matrice $\overline{\overline{C}}^{i}$ (où i est le numéro de l'élément) de la matrice de transformation $\overline{\overline{T}}^{-1}$ est maintenant considérée avec

$$\overline{\overline{C}}^{i} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & -1 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

En supposant que la structure contient n éléments structuraux, on obtient une matrice globale $\overline{\overline{C}}$ issue de l'assemblage de matrices élémentaires $\overline{\overline{C}}^{i}$, $i = 1,...,n$ qui s'écrit :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{C}}^{1} & \overline{\overline{0}} & ..... & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{C}}^{2} & ..... & \overline{\overline{0}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} & ..... & \overline{\overline{C}}^{n} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

avec $\overline{\overline{0}}$, une matrice de taille 3×6 dont tous les éléments sont nuls. Par conséquent on a $\overline{\overline{C}}$ de dimensions $3n \times 6n$. Les parties « déformation » des coordonnées généralisées représentant le mouvement des éléments sont à leurs tours assemblées dans un vecteur global $\overline{S}^{'}$ qui s'écrit :

$$\overline{S}^{'} = ({}^{1}s_1^{'},....., {}^{1}s_5^{'}, {}^{2}s_1^{'},....., {}^{2}s_5^{'},....., {}^{n}s_1^{'},..... {}^{n}s_5^{'}) \tag{3.29}$$

où $v = {}^{i}s_1^{'},....., {}^{i}s_5^{'}$ représente la partie *déformation* des coordonnées généralisées associées au mouvement de l'élément i. Il en est de même pour les parties *déformation* des coordonnées généralisées représentant le mouvement des extrémités des éléments :

$$\overline{S} = ({}^{1}s_1,....., {}^{1}s_5, {}^{2}s_1,....., {}^{2}s_5,....., {}^{n}s_1,..... {}^{n}s_5) \tag{3.30}$$

Dans l'analyse d'une structure en treillis ou à ossature, il est possible dans un premier temps de considérer indépendamment le comportement de chaque élément structural puis dans un deuxième temps d'assembler ces éléments structuraux de telle sorte que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud. On peut donc écrire :

$$\overline{S}^{'} = \overline{\overline{C}}\overline{S} \tag{3.31}$$

à condition que les éléments du vecteur $\overline{S}$ satisfassent l'exigence selon laquelle la compatibilité de la structure assemblée soit préservée. Soit $\overline{S}^{G}$ le vecteur des coordonnées généralisées des n éléments structuraux exprimées dans le repère global. La condition globale de compatibilité s'écrit :

$$\bar{S}^{G} = \bar{\bar{A}}\bar{r} \tag{3.32}$$

où $\bar{\bar{A}}$ est la matrice de compatibilité et $\bar{r}$ un vecteur constitué de tous les déplacements et/ou rotations correspondant aux degrés de liberté externe, et exprimés dans le repère global de coordonnées (la Figure 3.37 illustre les déplacements correspondant aux degrés de liberté externes et les rotules plastiques potentielles sur un exemple simple d'une poutre bi-encastrée sollicitée en son milieu).

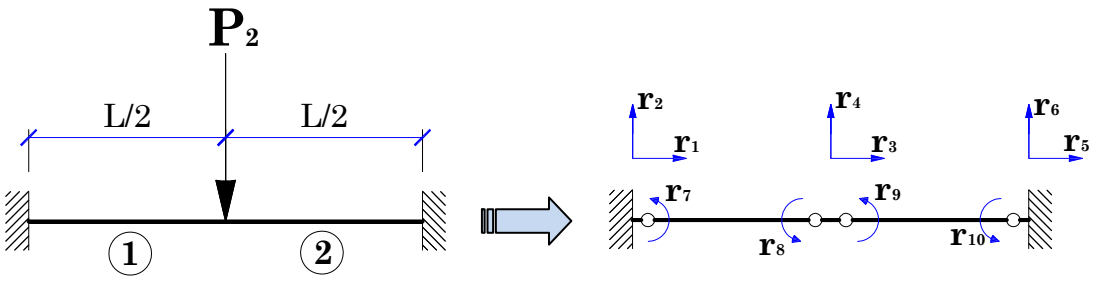


Figure 3.37. Illustration des déplacements et des rotules plastiques potentielles.

On peut écrire :

$$\bar{S} = \bar{\bar{G}}\bar{S}^{G} \tag{3.33}$$

où $\bar{\bar{G}}$ est la matrice de passage du repère global de coordonnées du système au repère local. A partir des Equations (3.31) à (3.33), il est possible de déduire l'expression de $\bar{S}'$ comme suit :

$$\bar{S}' = \bar{\bar{C}}_1\bar{r} \tag{3.34}$$

où

$$\bar{\bar{C}}_1 = \bar{\bar{C}}\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}} \tag{3.35}$$

Lorsqu'il n'existe pas de contrainte extérieure, et lorsque n désigne le nombre d'éléments, r le nombre de degrés de liberté externes, $\bar{\bar{C}}_1$ est une matrice de dimension $3n \times r$ et $5n \times r$ pour une structure plane et spatiale, respectivement. Il y a occurrence d'un mécanisme de ruine lorsque $\bar{S}' = 0$, c'est-à-dire lorsque :

$$\bar{\bar{C}}_1\bar{r} = \bar{0} \tag{3.36}$$

Une solution $\bar{r}$ à l'Equation (3.36) existe uniquement pour des structures qui sont déjà des mécanismes. Par conséquent des degrés de liberté additionnels vont être introduits dans la structure pour permettre la formation d'un mécanisme de ruine. Pour des structures planes, deux degrés de liberté additionnels peuvent être introduits. Il s'agit concrètement de deux rotules plastiques à chaque extrémité de l'élément. Le degré de liberté externe est augmenté d'une unité chaque fois qu'un degré de liberté additionnel est ajouté.

Les Equations (3.32) et (3.33) permettent d'écrire :

$$\bar{S} = \bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}}\bar{r} \tag{3.37}$$

Dans l'Equation (3.37), pour prendre en compte l'introduction des deux degrés de liberté additionnels, les éléments des lignes de la matrice $\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}}$ correspondant aux déplacements locaux s_3 et s_6 contenus dans $\bar{s}$, sont remplacés par des zéros. Une colonne supplémentaire constituée uniquement de zéros (sauf à la ligne qui a été mise à zéro précédemment où on mettra un 1) est alors ajoutée à la matrice $\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}}$ .Le vecteur $\bar{r}$ est ensuite allongé d'un élément en plus chaque fois qu'une colonne supplémentaire est ajoutée à la matrice $\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}}$. Après toutes ses modifications, on obtient $(\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}})_M$, $\bar{r}_M$ et $\bar{S} = (\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}})_M \bar{r}_M$, ce qui nous permet d'écrire d'après l'Equation (3.33) :

$$\begin{aligned} \bar{S}' &= \bar{\bar{C}}(\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}})_M \bar{r}_M \\ &= \bar{\bar{C}}_2 \bar{r}_M \end{aligned} \tag{3.38}$$

où

$$\bar{\bar{C}}_2 = \bar{\bar{C}}(\bar{\bar{G}}\bar{\bar{A}})_M \tag{3.39}$$

Comme il a été expliqué précédemment, les éléments de $\bar{S}'$ doivent tous être nuls ($\bar{S}' = \bar{0}$) pour obtenir un mécanisme. On peut donc écrire :

$$\bar{\bar{C}}_2 \bar{r}_M = \bar{0} \tag{3.40}$$

L'Equation (3.40) possède $r_M - \alpha n$ solutions indépendantes, où r_M est la longueur des vecteurs $\bar{r}_M$ qui est égale au nombre d'éléments potentiels plus le nombre de degrés de liberté externes et α est égal à 3 et 5 pour une structure plane et spatiale, respectivement. Les $r_M - \alpha n$ solutions indépendantes de l'Equation (3.40) définissent des mécanismes fondamentaux. Il est important de souligner que la matrice $\bar{\bar{C}}_2$ a pour dimension $\alpha n \times r_M$ (Watwood 1979, Thoft-Christensen & Murotsu 1984).

3.3.6.2 Illustration de la méthode avec le cas du portique plan

L'exemple du portique simple de la Figure 3.16 avec les caractéristiques géométriques et des matériaux du paragraphe 3.3.3 est maintenant considéré à titre d'illustration. Les coordonnées généralisées locales décrivant le mouvement des extrémités des éléments sont représentées dans la Figure 3.38. Les déplacements et les rotations correspondant aux degrés de liberté externes sont représentés dans la Figure 3.39.

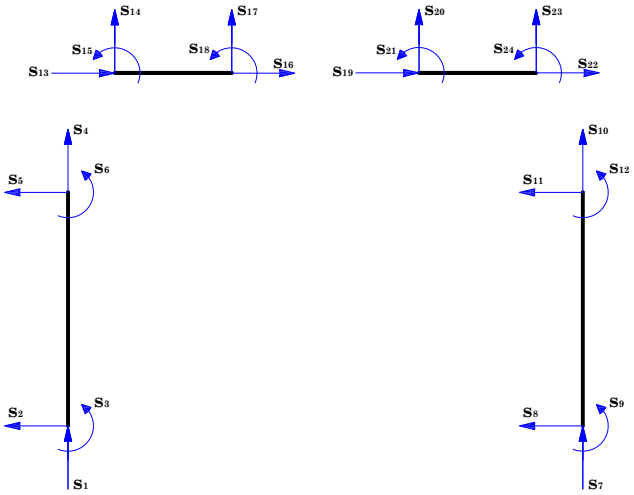


Figure 3.38. Coordonnées généralisées représentant le mouvement de chaque élément de structure.

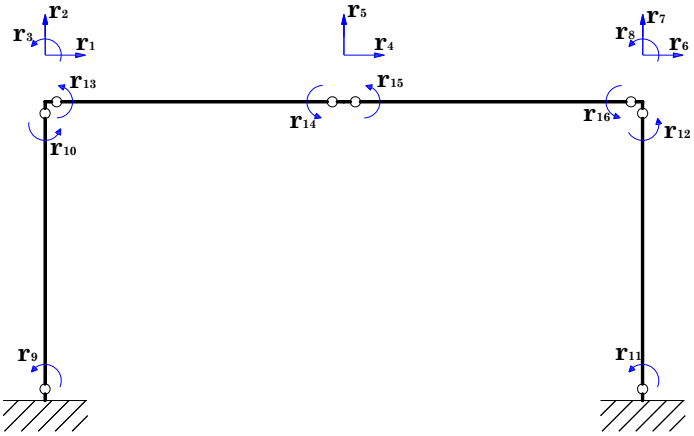


Figure 3.39. Déplacements/rotations correspondant aux degrés de liberté externes et rotules plastiques potentielles.

La matrice de transformation $\overline{\overline{C}}^{i}$ $(i = 1,...,4)$ de chaque élément s'écrit :

$$\overline{\overline{C}}^{i} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 1 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

La matrice de transformation globale de la structure assemblée de dimension 12×24 est :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{C^1}} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{\overline{C^2}} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{\overline{C^3}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{\overline{C^4}} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Les matrices de compatibilité élémentaires $\overline{\overline{A_i}}$ de chaque élément s'écrivent :

$$\overline{\overline{A_1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{\overline{A_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$\overline{\overline{A_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{\overline{A_4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

La matrice $\overline{\overline{A}}$ de compatibilité globale de la structure de dimension 24×8 s'écrit :

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{A_1}} \\ \overline{\overline{A_2}} \\ \overline{\overline{A_3}} \\ \overline{\overline{A_4}} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

La matrice de passage du repère global de coordonnées du système au repère local s'écrit :

$$\overline{\overline{G_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

pour $i = 1,2$ (Figure 3.40), et

$$\overline{\overline{G_i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

pour $i = 3,4$ (Figure 3.40).

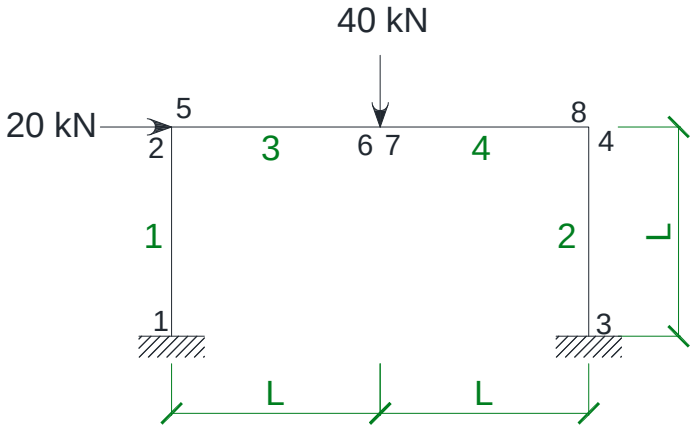


Figure 3.40. Numérotation des éléments structurels.

La matrice globale de passage du repère global de coordonnées au repère local s'écrit :

$$\overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{G_1}} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{\overline{G_2}} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{\overline{G_3}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{\overline{G_4}} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

où $\overline{0}$ est une matrice de dimension 6×6 constituée d'éléments tous nuls. On peut donc calculer la matrice $\overline{\overline{GA}}$ (24×8) et en déduire la matrice modifiée $(\overline{\overline{GA}})_M$ (24×16), puis finalement calculer la matrice $\overline{\overline{C_2}}$ (Equation (3.39)) de dimension 12×16 :

$$\overline{\overline{C_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

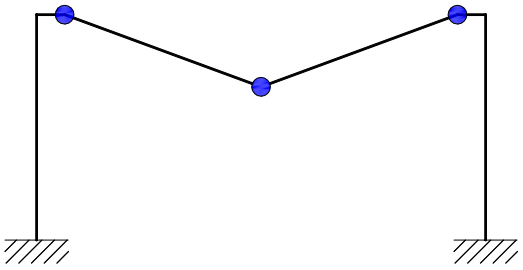
avec

$$\overline{\overline{(G.A)_M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

La résolution de l'Equation (3.40) donne quatre solutions indépendantes et donc quatre mécanismes fondamentaux (Tableau 3.37):

Mécanismes fondamentaux correspondants
$\overline{r_1} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

Mécanisme 1 : mécanisme de nœud
$\overline{r_2} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}2 \quad 0{,}2 \quad 0{,}2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

Mécanisme 2 : mécanisme de panneau
$\overline{r_3} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}2 \quad -0{,}2 \quad -0{,}2]^T$

Mécanisme 3 : mécanisme de poutre
$\overline{r_4} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

Mécanisme 4 : mécanisme de nœud

Tableau 3.37. Mécanismes fondamentaux identifiés.

Les mécanismes 1 et 4 sont des mécanismes fondamentaux fictifs car la marge de sécurité permettant le calcul de leur probabilité d'occurrence est une combinaison linéaire des paramètres de résistance (Equation (3.51)) uniquement tandis que les mécanismes 2 et 3 sont des mécanismes fondamentaux « réels » car les marges de sécurité permettant le calcul de leur probabilité d'occurrence sont des combinaisons linéaires des paramètres de résistance et de sollicitations (Equation (3.52)). Les mécanismes fictifs ne sont pas pris en compte dans cette étude car leur probabilité d'occurrence est très faible.

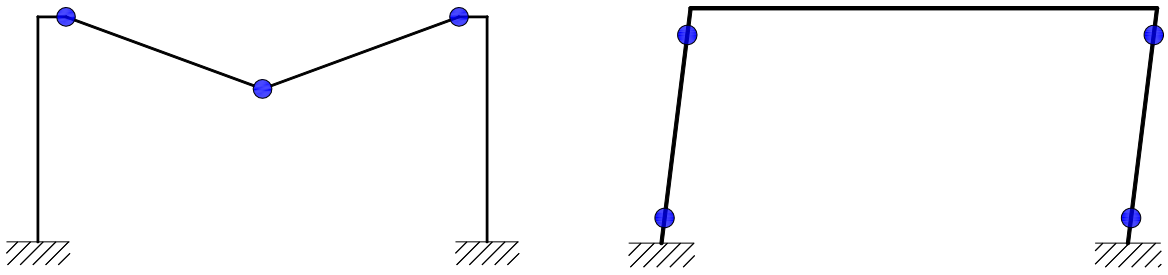
$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} R_j \qquad i = m_r + 1, ..., m \tag{3.51}$$

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} R_j - \sum_{j=1}^{n_p} B_{ij} P_j \qquad i = 1, ..., m_r \tag{3.52}$$

avec m le nombre total de mécanismes fondamentaux, m_r le nombre de mécanismes fondamentaux réels, n_p le nombre de variables de chargement qui ne sont pas parfaitement corrélées, n le nombre total d'éléments de structure, R_j et P_j les paramètres de résistance et de chargement respectifs, et finalement A_{ij} et B_{ij} les coefficients d'influence des paramètres de résistance et de charge, respectivement (Sorensen et al. 1985). La détermination de ces mécanismes fondamentaux a nécessité 0,22 secondes de temps de calcul.

3.3.6.3 Défaillance du système

Afin d'évaluer la probabilité de défaillance du système, la probabilité de défaillance individuelle de chaque mécanisme fondamental réel est d'abord évaluée (Figure 3.41).



(a) $P_{f(m3)} = 6{,}12.10^{-4}$ (b) $P_{f(m2)} = 1{,}91.10^{-17}$

Figure 3.41. Probabilité d'occurrence des mécanismes fondamentaux identifiés.

On remarque que le troisième mécanisme fondamental dans le Tableau 3.37 est représenté par le chemin de ruine 5/7/8 et a une probabilité d'occurrence $P_{f(m3)} = 6{,}12.10^{-4}$ presque égale à celle du chemin de ruine 7→8→5 identifié par les méthodes d'arbre de défaillance ($P_f = 6{,}16.10^{-4}$

calculée dans le paragraphe 3.3.3). Cette légère différence dans la valeur de la probabilité de défaillance vient des méthodes utilisées pour calculer la marge de sécurité. En effet, c'est le principe des travaux virtuels qui est utilisé lors de la recherche des mécanismes fondamentaux pour calculer la marge de sécurité plutôt que la théorie de l'écoulement plastique pour la recherche des chemins de défaillance.

Les états limites des mécanismes fondamentaux (a) et (b) s'écrivent (Figure 3.40):

$$Z_{(a)} = M_5 + 2 \times M_7 + M_8 - 50 \times L \tag{3.53}$$

$$Z_{(b)} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - 25 \times L \tag{3.54}$$

Il est noté que c'est le même mécanisme le plus probable qui est obtenu, que ce soit avec les méthodes de parcours d'arbre (paragraphe 3.3) qu'avec la méthode des mécanismes fondamentaux. Les mécanismes *a* et *b* (Figure 3.41) sont des mécanismes de poutre et de panneau respectivement. Pour calculer un encadrement de la probabilité de défaillance du système (Tableau 3.38), diverses combinaisons de mécanismes de poutres et de panneaux ont été considérés en appliquant la défaillance à gauche ou à droite du nœud (Tableau 3.39).

Borne inférieure	Borne supérieure
$6{,}52.10^{-4}$	$7{,}55.10^{-4}$

Tableau 3.38. Bornes de Ditlevsen de la probabilité de défaillance du système.

La probabilité d'occurrence du chemin de ruine le plus probable 7→8→5 ($6{,}16.10^{-4}$) identifiée avec les méthodes de parcours d'arbre (cf. Paragraphe 3.3) est proche de la borne inférieure de l'encadrement de la probabilité de défaillance du système ($6{,}52.10^{-4}$) calculée à partir des mécanismes fondamentaux et de celle du mécanisme fondamental le plus probable (a) $P_f = 6{,}12.10^{-4}$.

3.3.6.4 Conclusions

La méthode des mécanismes fondamentaux permet d'estimer la probabilité de défaillance du système dans des temps de calcul réduits. Cependant, elle présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte l'ordre d'apparition des différentes défaillances menant à la défaillance généralisée de la structure. Par ailleurs, elle nécessite la résolution de systèmes d'équations où le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations (Equation 3.40). Il faut donc se baser sur les propriétés du système d'équations linéaires et sur les propriétés de la structure étudiée pour en déduire les solutions indépendantes recherchées.

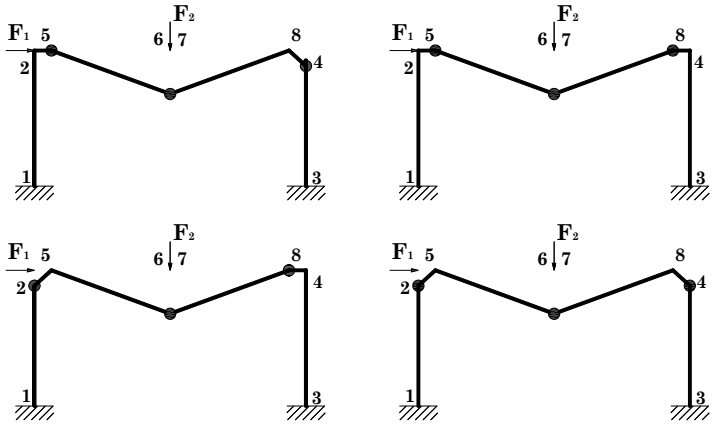
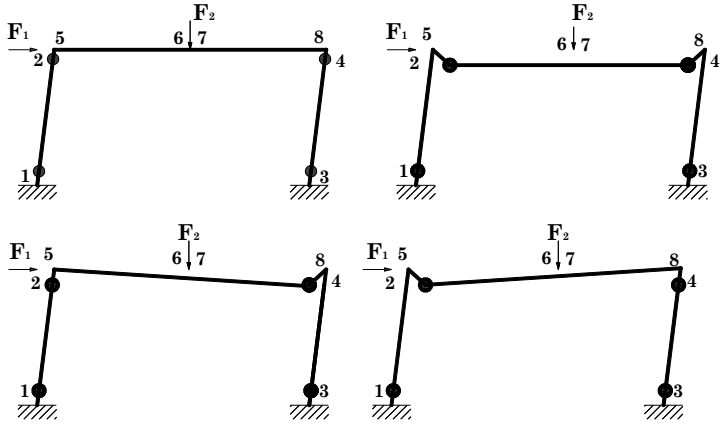
Mécanismes de poutre (a)	
Mécanismes de panneau (b)	

Tableau3.39. Mécanismes de défaillance considérés.

3.4 APPLICATION DE LA QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE POUR L'EXEMPLE CONSIDERE

Le portique simple est maintenant considéré pour estimer son niveau de robustesse structurale. Il a été montré dans le paragraphe 3.3 que le chemin de défaillance le plus probable est 7 → 8 → 5 pour l'approche par l'intérieur (mécanisme de poutre modélisé à la Figure 3.29a). A partir de cette information, il devient possible de quantifier la robustesse structurale pour cet exemple.

Dans ce paragraphe, les indices de robustesse sont notés $I_{r,1}$, $I_{r,2}$ pour l'approche « par l'intérieur » et $I^*_{r,1}$, $I^*_{r,2}$ pour l'approche « par l'extérieur ». L'intérêt majeur de proposer plusieurs indices de robustesse est de voir comment le niveau de robustesse des structures se répartit selon les définitions proposées et selon le type et la nature des structures considérées.

La démarche utilisée pour la quantification de la robustesse structurale est présentée dans la Figure 3.42. Elle comprend la définition du modèle structural, la définition de la défaillance

(locale, globale), le choix de l'approche à adopter, et finalement le choix de l'indice de robustesse.

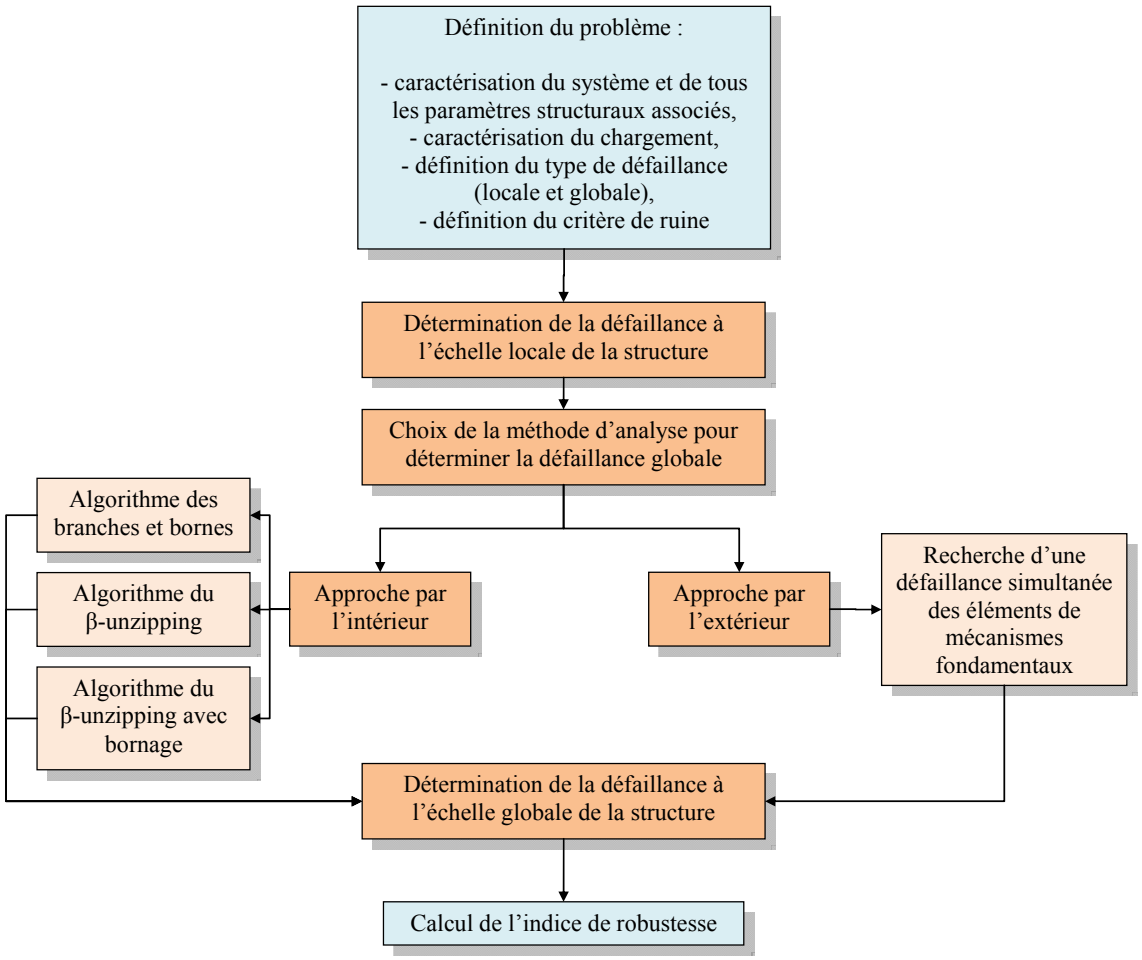


Figure 3.42. Schéma global pour l'évaluation de la robustesse structurale (Kagho et al. 2011).

3.4.1 Calcul de l'indice de robustesse par l'approche par l'intérieur

Les valeurs des probabilités de défaillance séquentielles du chemin de ruine le plus probable sont reportées dans le Tableau 3.40. Il est noté que les trois méthodes introduites aux paragraphes 3.2.1, 3.2.2 et 3.3.3 ont toutes permis d'identifier le même chemin de défaillance le plus probable allant d'une défaillance locale à une défaillance globale.

	Chemin de défaillance le plus probable $7 \rightarrow 8 \rightarrow 5$		
	7	$7 \rightarrow 8$	$7 \rightarrow 8 \rightarrow 5$
Probabilité de défaillance (P_f)	$1{,}39.10^{-2}$	$4{,}63.10^{-3}$	$6{,}16.10^{-4}$
Indice de fiabilité (β)	2,19	2,60	3,23

Tableau 3.40. Ordre séquentiel de défaillance.

Les expressions des Equations 2.22 et 2.23 permettent de calculer les indices de robustesse ci-dessous.

$$I_{r,1} = 1 - \frac{P_{globale}}{P_{locale}} = 1 - \frac{6,16 \times 10^{-4}}{1,39 \times 10^{-2}} = 0,96 \tag{3.55}$$

$$I_{r,2} = \frac{P_{locale}}{P_{locale} + a \times P_{globale}} = \frac{1,39 \times 10^{-2}}{1,39 \times 10^{-2} + a \times 6,16 \times 10^{-4}} \tag{3.56}$$

Ce deuxième indice de robustesse $I_{r,2}$ dépendant du paramètre a va être menée afin d'analyser l'influence du paramètre a (rapport des conséquences globales et locales, cf. Equation 2.23) sur le niveau de robustesse. En particulier, la Figure 3.43 montre la variation de l'indice de robustesse $I_{r,2}$ avec a pour des valeurs comprises entre 1 et 100. De manière naturelle, plus les conséquences globales sont élevées par rapport aux conséquences locales, plus le niveau de robustesse diminue. Ce deuxième indice est intéressant dans le sens où il permet de considérer à la fois un écart entre les probabilités de défaillance locale et globale, mais également un écart entre les conséquences locales et globales.

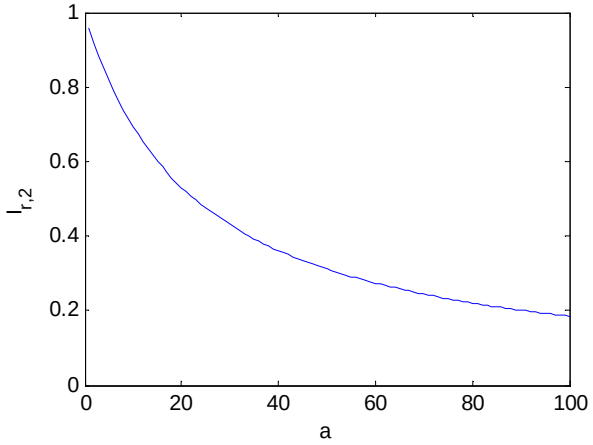


Figure 3.43. Variation de l'indice de robustesse $I_{r,2}$ avec $a = C_{globale} / C_{locale}$ (cf. Equation 2.24).

Afin d'analyser l'impact du point de départ de la défaillance sur le calcul de l'indice de robustesse, le chemin de défaillance le plus probable partant de chaque élément k de la structure étudiée est maintenant recherché, en notant $I_{r,1}^k$ et $I_{r,2}^k$ les indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ partant du nœud k. Les chemins de défaillance dominants identifiés à l'aide des méthodes des branches et bornes, du β-unzipping, et du β-unzipping avec bornage sont représentés dans les Figures 3.44 à 3.46, respectivement (les traits verts en pointillés représentant les chemins les plus probables et le trait en gras représentant le chemin avec l'indice de robustesse le plus critique). Il est noté que tous les nœuds de départ ne sont pas sélectionnés pour les méthodes du β-unzipping, et du β-unzipping avec bornage, du fait de l'introduction d'une valeur seuil critique dans ces deux approches. Les Figures 3.47 à 3.49 montrent que l'indice de robustesse $I_{r,1}^k$ le plus critique (i.e., le plus faible) n'est pas forcément celui obtenu avec le chemin le plus probable (correspondant à $I_{r,1}$ dans l'Equation 3.55). En l'occurrence, le chemin 5→7(6)→8 possède un indice de robustesse plus critique que celui du chemin le plus probable 7(6)→8→5. Les chemins de

défaillance associés à un indice de robustesse critique peuvent donc être des chemins avec une faible probabilité de défaillance, mais dont l'occurrence entraîne des conséquences très sévères sur l'ouvrage. Il est noté que dans les Figures 3.47 à 3.49, la méthode des branches et bornes permet d'identifier le chemin 5→7(6)→8 (P_f =8,50.10^{-9}) comme celui avec l'indice de robustesse le plus critique. Ce qui n'est pas le même chemin que le chemin 5→8→7(6) (P_f =8,11.10^{-9}) identifié avec les méthodes du β-unzipping et du β-unzipping avec bornage. Il s'agit en effet du même mécanisme, mais le chemin 5→7(6)→8 possède une plus grande probabilité de défaillance.

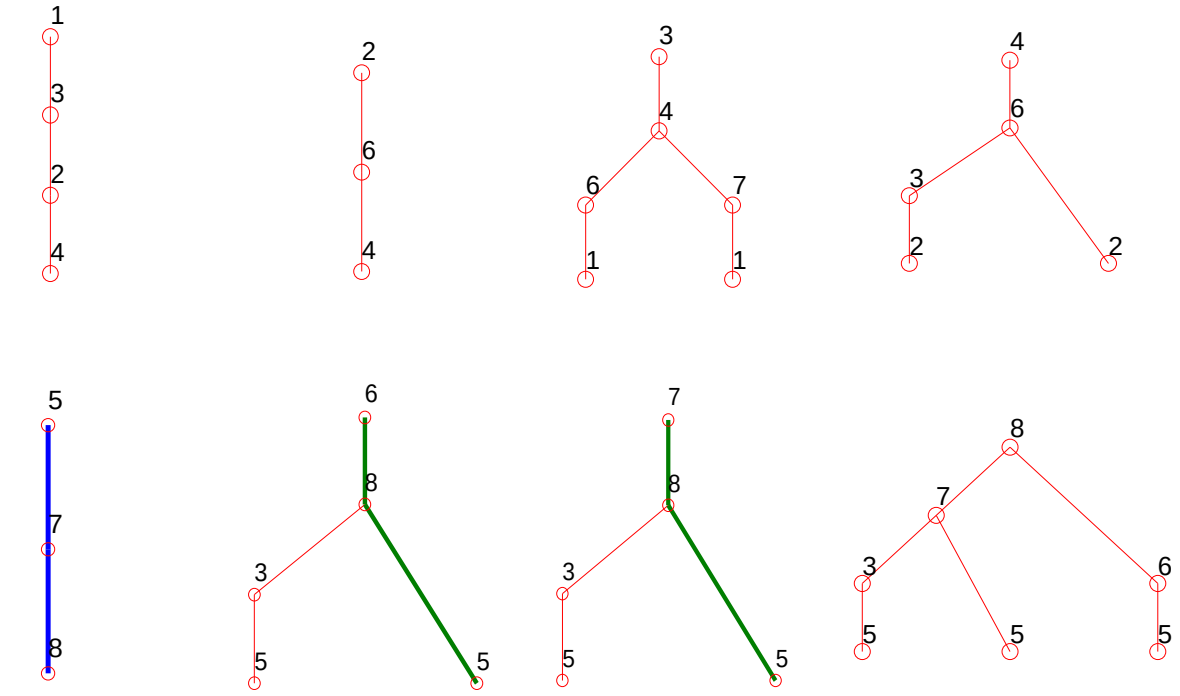
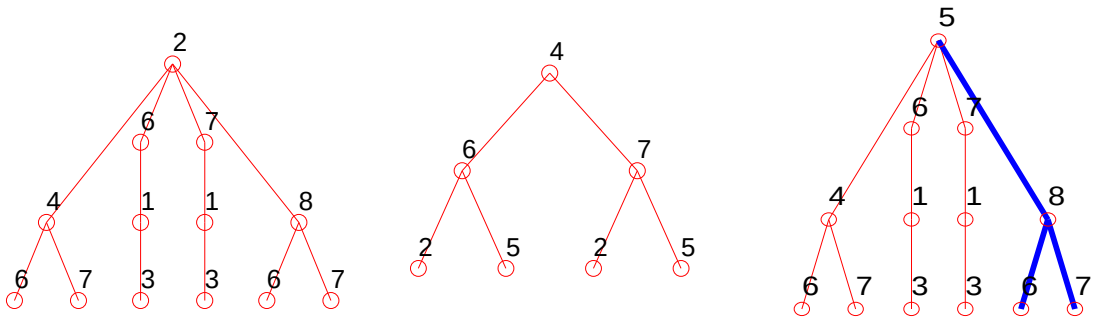


Figure 3.44. Chemins de défaillance à partir de chaque élément de rupture, avec la méthode des branches et bornes.



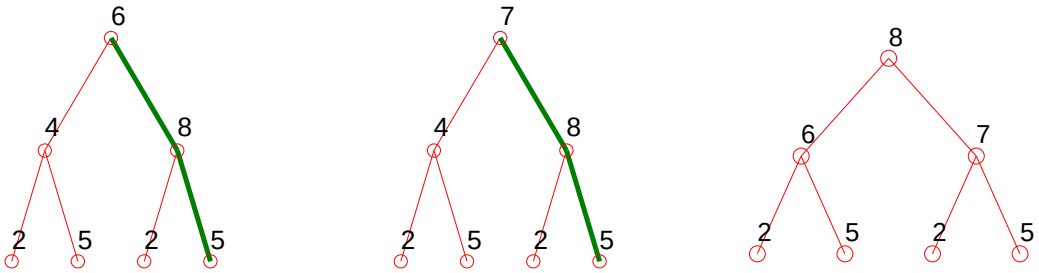


Figure 3.45. Chemins de défaillance à partir de chaque élément de rupture, avec la méthode du β-unzipping.

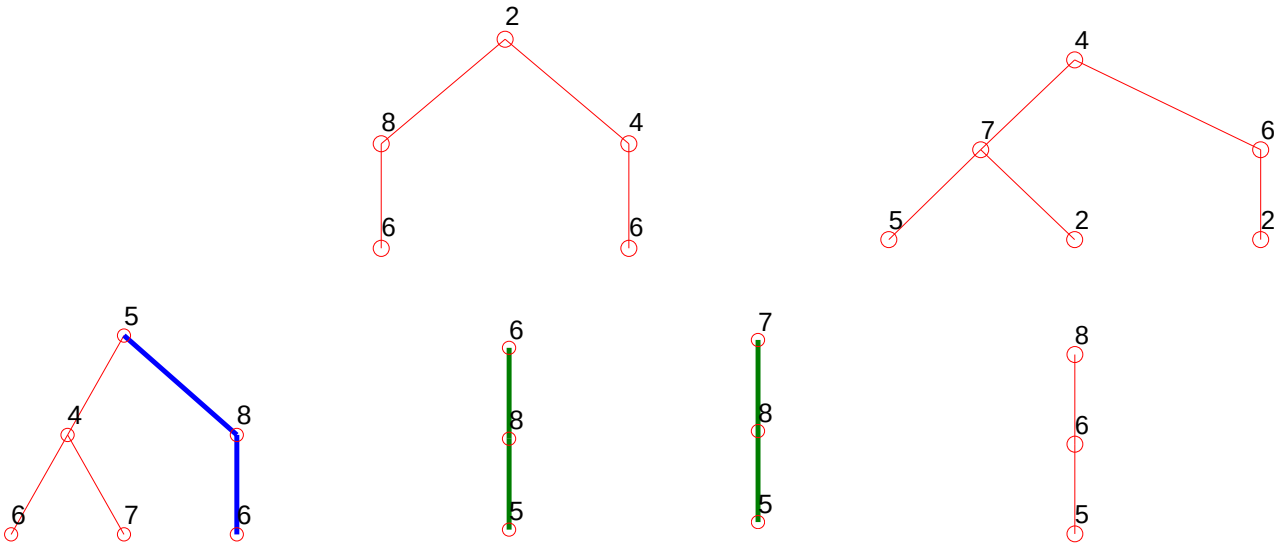


Figure 3.46. Chemins de défaillance à partir de chaque élément de rupture, avec la méthode du β-unzipping avec bornage.

(a) (b)

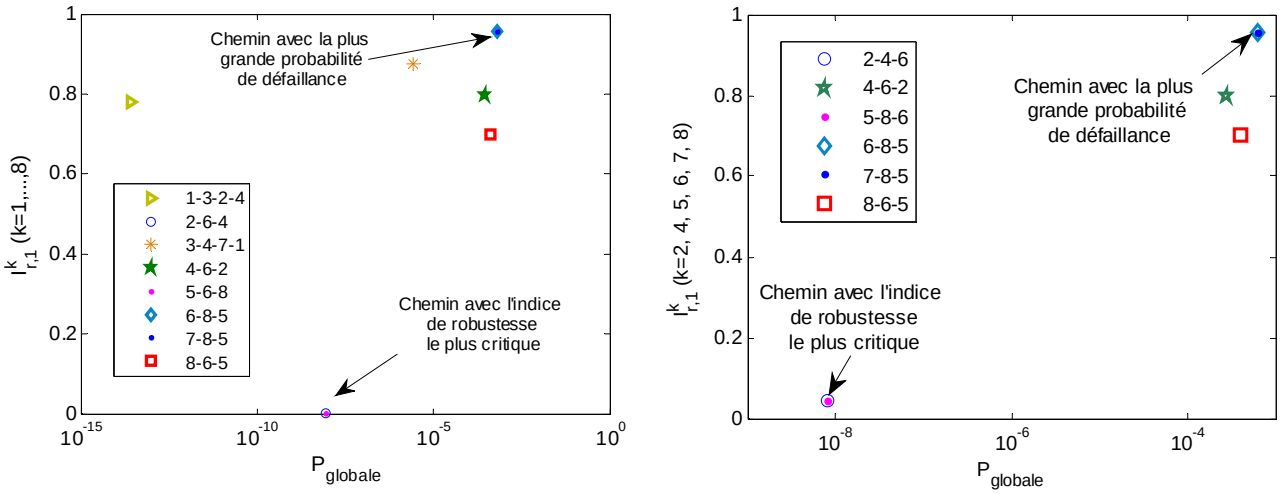
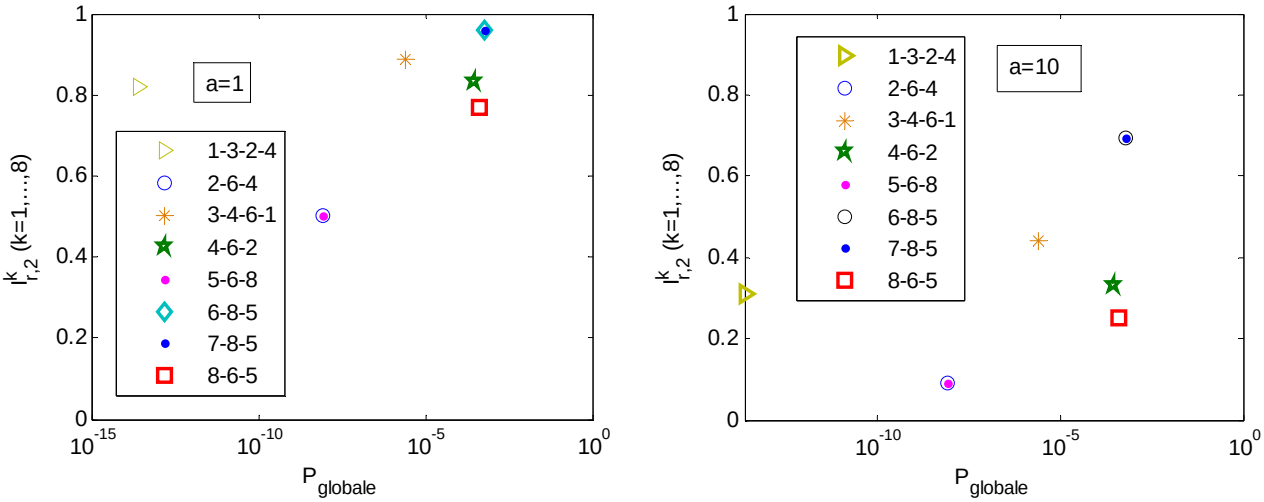


Figure 3.47. Indices de robustesse $I^k_{r,1}$ et probabilités de défaillance associées obtenus par la méthode (a) des branches et bornes et (b) du β-unzipping ou du β-unzipping avec bornage.

Des conclusions similaires sont observées lorsque l'indice $I_{r,2}^k$ est considéré. En particulier, les Figures 3.48 et 3.49 montrent les valeurs de l'indice $I_{r,2}^k$ lorsque les chemins de défaillance dominants sont identifiés à l'aide des méthodes des branches et bornes d'une part, du β-unzipping, et du β-unzipping avec bornage, respectivement. Pour chacune de ces méthodes, le paramètre a prend les valeurs 1, 10 et 100 pour analyser l'impact de ce paramètre sur la différenciation du niveau de robustesse partant de chacun des éléments structuraux.

(a) (b)



(c)

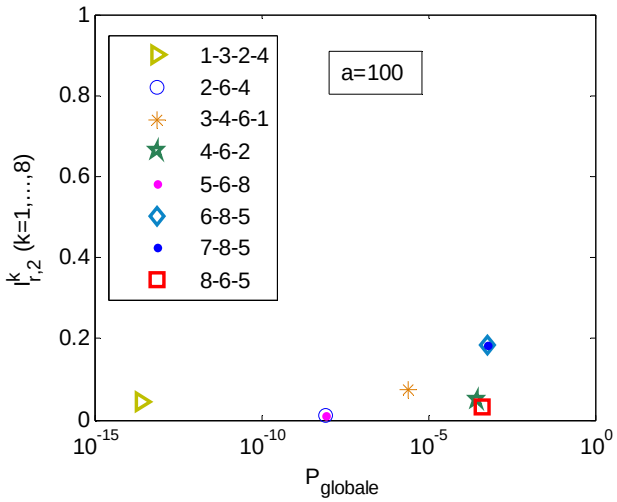


Figure 3.48. Indices de robustesse $I_{r,2}^k$ et probabilités de défaillance associées obtenus par la méthode des branches et bornes pour (a) $a = 1$, (b) $a = 10$, et (c) $a = 100$.

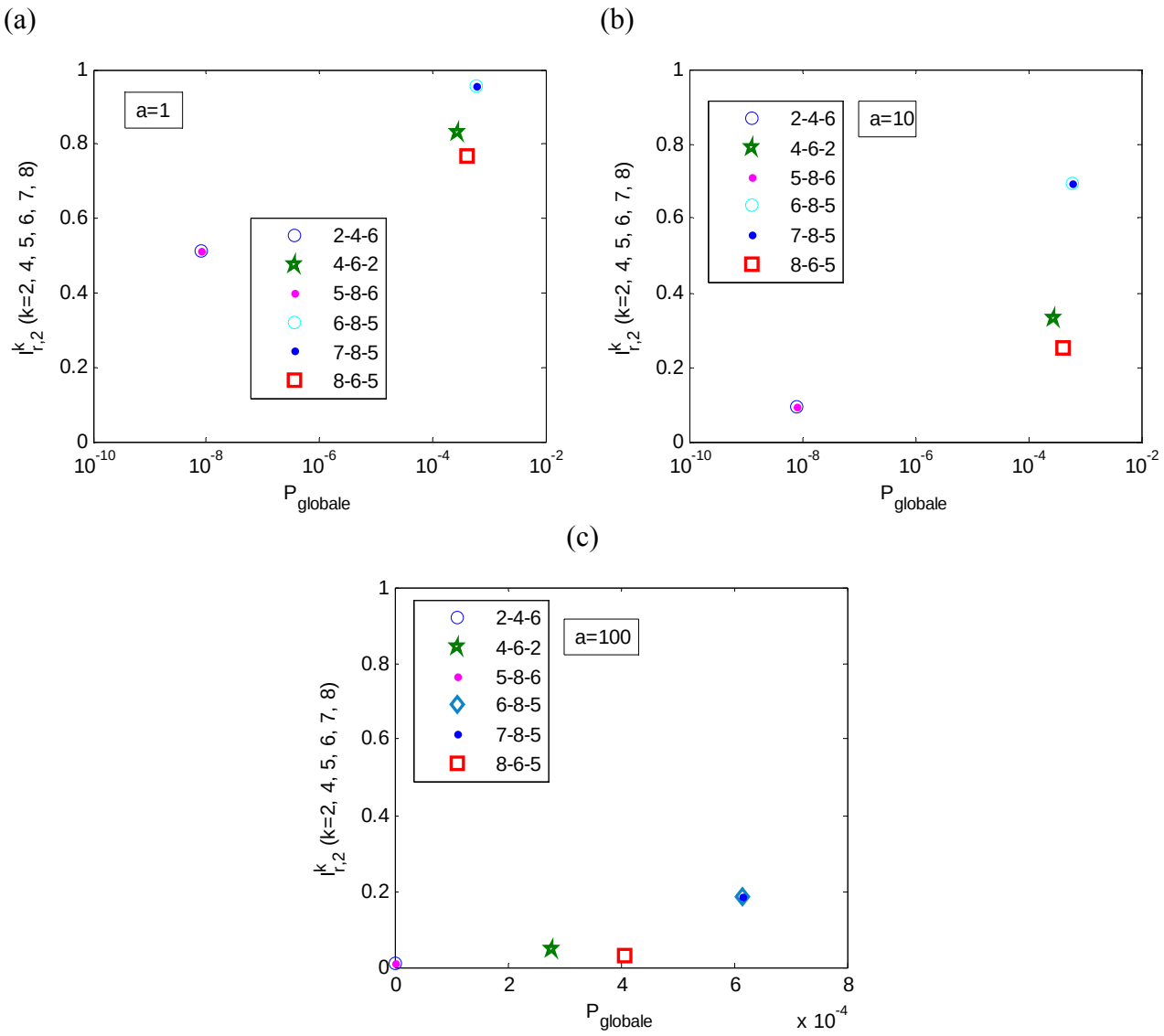


Figure 3.49. Indices de robustesse $I^k_{r,2}$ et probabilités de défaillance associées obtenus par la méthode du β-unzipping et du β-unzipping avec bornage pour (a) $a=1$, (b) $a=10$, et (c) $a=100$.

Les résultats correspondant aux Figures 3.47 à 3.49 sont regroupés dans les Tableaux 3.41 et 3.42.

Méthode des branches et bornes								
Chemin le plus probable	1-3-2-4	2-6-4	3-4-7-1	4-6-2	**5-6-8**	**6-8-5**	**7-8-5**	8-6-5
P_{locale}	$1{,}1.10^{-13}$	$8{,}5.10^{-9}$	$2{,}0.10^{-5}$	$1{,}4.10^{-3}$	$\mathbf{8{,}5.10^{-9}}$	$\mathbf{1{,}4.10^{-2}}$	$\mathbf{1{,}4.10^{-2}}$	$1{,}4.10^{-3}$
$P_{globale}$	$2{,}4.10^{-14}$	$8{,}5.10^{-9}$	$2{,}5.10^{-6}$	$2{,}8.10^{-4}$	$\mathbf{8{,}5.10^{-9}}$	$\mathbf{6{,}2.10^{-4}}$	$\mathbf{6{,}2.10^{-4}}$	$4{,}1.10^{-4}$
$I_{r,1}$	0,78	0,00	0,87	0,80	**0,00**	**0,96**	**0,96**	0,70
$I_{r,2}$ ($a=100$)	0,04	0,01	0,07	0,05	**0,01**	**0,18**	**0,18**	0,03

Tableau 3.41. Analyse à partir de tous les modes de défaillance avec la méthode des branches et bornes.

Méthode du β-unzipping et du β-unzipping avec bornage						
Chemin le plus probable	2-4-6	4-6-2	**5-8-6**	**6-8-5**	**7-8-5**	8-6-5
P_{locale}	$8{,}5.10^{-9}$	$1{,}4.10^{-3}$	$\mathbf{8{,}5.10^{-9}}$	$\mathbf{1{,}4.10^{-2}}$	$\mathbf{1{,}4.10^{-2}}$	$1{,}4.10^{-3}$
$P_{globale}$	$8{,}1.10^{-9}$	$2{,}8.10^{-4}$	$\mathbf{8{,}1.10^{-9}}$	$\mathbf{6{,}2.10^{-4}}$	$\mathbf{6{,}2.10^{-4}}$	$4{,}1.10^{-4}$
$I_{r,1}$	0,05	0,80	**0,05**	**0,96**	**0,96**	0,70
$I_{r,2}$ $(a=100)$	0,01	0,05	**0,01**	**0,18**	**0,18**	0,03

Tableau 3.42. Analyse à partir de tous les modes de défaillance avec les méthodes du β-unzipping et du β-unzipping avec bornage.

3.4.2 Calcul de l'indice de robustesse par l'approche par l'extérieur

La détermination de mécanismes fondamentaux introduite au paragraphe 3.3.6.1 ne permettant pas d'identifier une séquence de ruine (à l'inverse des méthodes de parcours d'arbres d'évènements), la probabilité de défaillance locale n'est pas explicitement liée à la défaillance d'un des éléments structuraux qui viendrait à être défaillant en premier. Deux cas de figures sont considérés dans ce paragraphe. Le premier revient à définir la probabilité de défaillance locale comme la probabilité de défaillance la plus élevée parmi celles des éléments du mécanisme fondamental le plus probable (ce qui revient à considérer la probabilité de défaillance locale comme la probabilité du mode de défaillance le plus probable dans le mécanisme fondamental correspondant). Dans l'exemple considéré, la probabilité P_{locale} est celle de l'élément de rupture 7 (Tableau 3.43). Un deuxième cas de figure revient à considérer l'ensemble des éléments du mécanisme comme point de départ possible de la défaillance et à sélectionner la défaillance locale de manière à obtenir l'indice de robustesse le plus critique (cf. Equations 2.22 et 2.23). Ce deuxième cas de figure revient à considérer la probabilité de défaillance locale comme la probabilité du mode de défaillance le moins probable dans le mécanisme fondamental correspondant.

En ce qui concerne la défaillance globale, là encore plusieurs options sont envisagées. La première est de considérer chaque mécanisme fondamental de défaillance comme défaillance globale possible. Tous les mécanismes sont considérés pour déterminer à chaque fois une probabilité de défaillance globale et chercher l'indice de robustesse le plus critique. La deuxième est de considérer la structure comme un système en série de mécanismes fondamentaux (dans le sens où la structure est supposée défaillante dès lors qu'un des mécanismes fondamentaux se forme). Un encadrement en système de $P_{globale}$ peut alors être effectué dans ce dernier cas. L'ensemble de ces possibilités est décrit dans la suite de ce paragraphe.

Eléments de rupture	P_{locale}	β_{locale}
7 (6)	**$1{,}39.10^{-2}$**	**2,20**
8	$1{,}36.10^{-3}$	3,00
4	$1{,}36.10^{-3}$	3,00
3	$2{,}01.10^{-5}$	4,11
5	$8{,}50.10^{-9}$	5,64
2	$8{,}50.10^{-9}$	5,64
1	$1{,}08.10^{-13}$	7,34

Tableau 3.43. Probabilités de défaillance initiale des éléments de rupture.

Les Tableaux 3.44 à 3.46 récapitulent notamment tous les indices de robustesse calculés pour les deux mécanismes fondamentaux réels identifiés, en considérant comme probabilité globale d'une part la probabilité de défaillance des mécanismes (a) et (b) (notés Me (a) et Me (b), respectivement, cf. Tableau 3.44), et d'autre part la borne inférieure (Tableau 3.45) ou supérieure (Tableau 3.45) de la probabilité de défaillance du système en série des deux mécanismes Me (a) et Me (b).

Localisation de la défaillance locale	$I^*_{r,1}$		$I^*_{r,2}$					
			$a=1$		$a=10$		$a=100$	
	Me (a)	Me (b)	Me (a)	Me (b)	Me (a)	Me (b)	Me (a)	Me (b)
7 (6)	0,96		0,96		0,69		0,19	
8	0,55	1	0,69	1	0,18	1	0,02	0,99
4	0,55	1	0,69	1	0,18	1	0,02	0,99
3		1		1		1		0,99
5		1		1		1		0,99
2		1		1		1		0,99
1		1		1		1		0.98

Tableau 3.44. Indices de robustesse considérant la probabilité du mécanisme.

Localisation de la défaillance locale	$I^*_{r,1}$	$I^*_{r,2}$		
		a=1	a=10	a=100
7 (6)	0,95	0,96	0,68	0,18
8	0,44	0,64	0,15	0,02
4	0,44	0,64	0,15	0,02
3				
5				
2				
1				

Tableau 3.45. Indices de robustesse considérant la borne inférieure de la probabilité de défaillance du système.

Il est noté que ces indices sont calculés uniquement pour les éléments de rupture appartenant au mécanisme concerné, à la condition que la probabilité locale (probabilité de défaillance de

l'élément de rupture) soit supérieure à la probabilité du mécanisme (les cas pour lesquels $P_{locale} < P_{globale}$ sont en gris dans les Tableaux 3.44 à 3.46).

Localisation de la défaillance locale	$I^*_{r,1}$	$I^*_{r,2}$		
		$a=1$	$a=10$	$a=100$
7 (6)	0,95	0,95	0,65	0,16
8	0,35	0,61	0,13	0,02
4	0,35	0,61	0,13	0,02
3				
5				
2				
1				

Tableau 3.46. Indices de robustesse considérant la borne supérieure de la probabilité de défaillance du système.

Dans le cas où la probabilité globale est celle du mécanisme fondamental Me (a) dans le Tableau 3.44, on obtient des indices de robustesse très proches de ceux obtenus avec les méthodes d'arbre de défaillance si la défaillance locale du nœud 7 est considérée. Le Tableau 3.44 montre qu'en considérant comme défaillance locale l'apparition d'une rotule plastique au nœud 8 ou au nœud 4, l'indice de robustesse obtenu ($I^*_{r,1} = 0{,}55$) est plus petit que celui calculé avec l'élément de rupture 7 ($I^*_{r,1} = 0{,}96$) qui a pourtant une plus grande probabilité de défaillance comparée à celles des autres éléments de rupture. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que dans la méthode des mécanismes fondamentaux, le calcul de la probabilité de défaillance globale n'est pas directement lié à l'ordre d'apparition des différents éléments et, a fortiori, du premier élément qui viendrait à être défaillant. A probabilité de défaillance globale fixe, plus la probabilité de défaillance locale est faible, plus le rapport $P_{globale} / P_{locale}$ est important, et donc plus l'indice $I^*_{r,1}$ est faible. Dans le cas où la probabilité globale est celle du mécanisme fondamental Me (b) dans le Tableau 3.44, on constate que le paramètre a n'a pas d'influence sur la valeur de l'indice $I^*_{r,2}$, compte tenu de la probabilité extrêmement faible de la réalisation de ce mécanisme (Figure 3.41b).

Dans le cas où la probabilité globale est la borne supérieure du système en série des mécanismes Me (a) et Me (b) (Tableau 3.46), on obtient les indices suivants :

$$I^*_{r,1} = 1 - \frac{P_{globale}}{P_{locale}} = 1 - \frac{7{,}55 \times 10^{-4}}{1{,}39 \times 10^{-2}} = 0{,}95 \tag{3.57}$$

$$I^*_{r,2} = \frac{1}{1 + a \times \left(1 - I^*_{r,1}\right)} = \frac{1}{1 + a \times (1 - 0{,}95)} \tag{3.58}$$

On constate encore que les indices de robustesse sont assez proches de ceux obtenus avec les méthodes de parcours d'arbre si la défaillance locale est celle correspondant à l'élément avec la plus grande probabilité de défaillance. D'autres éléments, avec une probabilité de défaillance locale plus faible, mènent à des indices de robustesse plus faibles, pour les mêmes raisons que celles expliquées précédemment.

3.4.3 Comparaison des approches « par l'intérieur » et « par l'extérieur »

Dans les paragraphes 3.4.1 et 3.4.2, il a été montré que la recherche du chemin/mécanisme le plus probable pouvait mener à des indices de robustesse différents de ceux qui seraient obtenus si la défaillance initiale était considérée possible en tout point de la structure. Ce paragraphe synthétise ces deux types de démarches. Dans la première (choix 1), l'objectif est toujours de rechercher le chemin ou le mécanisme le plus probable. Dans la deuxième (choix 2), une liberté plus importante est permise pour le nœud de départ initial de la défaillance. Les Tableaux 3.47 à 3.48 regroupent tous les résultats obtenus à partir des méthodes par l'intérieur et l'extérieur pour ces deux choix (en prenant $a = 1$ pour le calcul des indices $I_{r,2}$ et $I^*_{r,2}$).

Méthode utilisée	N_{me}	Méc.	P_{locale}	$P_{globale}$	$I_{r,1}$	$I_{r,2}$	Temps de calcul (s)
Branches et bornes	2	7-8-5	$1{,}39.10^{-2}$	$6{,}16.10^{-4}$	0,96	0,96	51
β-unzipping	16	7-8-5	$1{,}39.10^{-2}$	$6{,}16.10^{-4}$	0,96	0,96	25
β-unzipping avec bornage	1	7-8-5	$1{,}39.10^{-2}$	$6{,}16.10^{-4}$	0,96	0,96	17
					$I^*_{r,1}$	$I^*_{r,2}$	
Mécanismes fondamentaux en système	4	Me (a) ou Me (b)	$1{,}39.10^{-2}$	$7{,}55.10^{-4}$	0,95	0.95	0,22

Tableau 3.47. Comparaison des méthodes utilisées (choix 1, $a = 1$).

Dans le Tableau 3.47, on remarque que la méthode des mécanismes fondamentaux est la plus bénéfique en termes de temps de calcul. La méthode des branches et bornes est plus coûteuse en temps de calcul et la méthode du β-unzipping est celle qui identifie le plus grand nombre de chemins de défaillance dominants (cf. paragraphe 3.3.4). Dans le Tableau 3.47, les différents indices de robustesse sont pourtant très proches (hormis le cas où le mécanisme Me (b) est considéré), et ce quelque soit la méthode utilisée.

Concernant le choix 2, la défaillance peut partir de nœuds de défaillance initiaux avec des probabilités de défaillance beaucoup plus faibles. Les indices $I_{r,1}^{k}$ et $I_{r,2}^{k}$ partant de chaque nœud k sont alors considérés et la valeur minimale est sélectionnée.

Méthode utilisée	N_{me}	Méc.	P_{locale}	$P_{globale}$	$\min_k\left(I_{r,1}^{k}\right)$	$\min_k\left(I_{r,2}^{k}\right)$	Temps de calcul (s)
Branches et bornes	1	5→7(6)→8	$8{,}50.10^{-9}$	$8{,}50.10^{-9}$	$1{,}18.10^{-4}$	0,50	51
β-unzipping	6	5→8→7(6)	$8{,}50.10^{-9}$	$8{,}11.10^{-9}$	0,05	0,51	25
β-unzipping avec bornage	3	5→8→6(6)	$8{,}50.10^{-9}$	$8{,}11.10^{-9}$	0,05	0,51	17
					$I_{r,1}^{*}$	$I_{r,2}^{*}$	
Mécanismes fondamentaux en système	4	Me (a) ou Me (b)	$1{,}36.10^{-3}$	$7{,}55.10^{-4}$	0,44	0,64	0,22

Tableau 3.48. Comparaison des méthodes utilisées (choix 2, $a=1$).

Il est observé que les probabilités de défaillance globales avec de tels nœuds de départ peuvent être extrêmement proches des probabilités de défaillance locales associées. De même, l'utilisation de mécanismes fondamentaux mène à des indices de robustesse beaucoup plus faibles lorsque la défaillance initiale est liée à une probabilité plus faible (pour un nœud de départ qui n'est pas celui avec la probabilité la plus importante d'être défaillant). Dans le Tableau 3.48, la disparité entre les résultats obtenus suivant les différentes méthodes utilisées est plus importante que celle constatée dans le Tableau 3.47.

Ce paragraphe montre que les résultats obtenus en matière de robustesse peuvent dépendre fortement de la méthodologie retenue (approche par l'intérieur ou par l'extérieur), et du choix portant sur la détermination du chemin critique, à savoir celui le plus probable de manière générale, ou bien celui le plus probable lorsque chacun des points de la structure est considéré successivement du point de vue de la défaillance globale. Il est donc primordial de considérer cette dépendance lors de la quantification de la robustesse basée sur ce type d'approches. Il est noté que lorsque l'objectif est de discriminer plusieurs variantes structurales en fonction de leur niveau de robustesse, une méthodologie particulière peut être choisie et fixée afin d'éviter d'affecter les résultats par le type d'approche retenue.

3.5 SYNTHESE

Ce chapitre présente deux grandes familles de recherche de dysfonctionnements globaux, en privilégiant soit une recherche « par l'intérieur », soit une recherche « par l'extérieur ». Dans le premier cas, plusieurs méthodes de parcours d'arbres d'évènements ont été introduites parmi lesquelles les méthodes des branches et bornes, du β-unzipping, et une méthode de β-unzipping avec bornage. Cette première famille de méthodes permet de déterminer avec précision le cheminement des défaillances successives depuis la défaillance localisée jusqu'à la défaillance globale. Une probabilité d'occurrence étant associée à chacun des mécanismes de défaillance, il est alors possible de privilégier les scénarios de défaillance qui sont les plus probables et in fine d'obtenir le chemin de défaillance de référence qui est celui avec la probabilité d'occurrence la plus élevée. Cette première famille de méthodes est particulièrement adaptée dans le cas de structures redondantes pour lesquelles la défaillance d'un élément de structure ne rend pas nécessairement l'ouvrage inapte à remplir les exigences pour lesquelles il a été conçu. De ce fait, lorsqu'il y a occurrence d'une défaillance localisée, la structure est modélisée pour prendre en compte la redistribution des efforts qui s'impose.
La deuxième famille de méthodes correspond à une approche « par l'extérieur » qui se base sur l'identification des mécanismes de défaillance fondamentaux. Cette méthode ne privilégie pas un ordre d'apparition des défaillances, mais au contraire considère que les défaillances du mécanisme ont toutes lieu de manière simultanée.
Le choix d'une de ces deux familles de méthodes dépend finalement en grande partie de l'échelle de modélisation à laquelle l'utilisateur se place. Une approche « par l'intérieur » nécessite d'identifier des relations entre les différents composants pour pouvoir modéliser le report des charges lors des différentes apparitions de défaillances. Cette étape peut s'avérer délicate si la modélisation même de la structure ne permet pas de discrétiser cette étape de prise en compte de la défaillance. Dans ce dernier cas, une approche « par l'extérieur » permet d'apporter des éléments de réflexion, même s'il est peu probable dans la pratique que la défaillance ait lieu en un grand nombre de points différents de la structure.
Dans les deux cas, les deux familles de méthodes permettent d'identifier des mécanismes de défaillance à l'échelle globale de la structure et de quantifier leur probabilité d'occurrence. Il devient alors possible de quantifier un écart entre défaillances locales et globales et de caractériser la notion de robustesse structurale. Tel est l'objet du paragraphe 3.4 qui a montré comment utiliser les algorithmes des paragraphes 3.2 et 3.3 pour proposer une quantification de la robustesse structurale. En particulier, il est montré que le chemin avec le niveau de robustesse le plus critique ne correspond pas nécessairement au chemin avec la plus grande probabilité de réalisation.

CHAPITRE 4

CARACTERISATION DE LA ROBUSTESSE STRUCTURALE

4.1 INTRODUCTION

Les méthodologies introduites au Chapitre 3 permettent de faire le lien entre les défaillances locales (selon des modes de défaillances à définir) et des défaillances globales. Une telle approche permet non seulement de qualifier la robustesse structurale, mais également de la quantifier au travers d'un certain nombre d'indices reliant des dysfonctionnements locaux et globaux.

Dans ce chapitre, une étude de l'influence des paramètres structuraux sur le niveau de robustesse structural est proposée. Les exemples considérés peuvent être associés à des états limites ultimes, avec formation d'un mécanisme de ruine total ou partiel, apparition de rotules plastiques, ou ruine d'éléments de structure par allongement ou raccourcissement, transformant la structure en un système instable mais également à des états limites de service.

Ce quatrième chapitre est organisé comme suit : la première partie du chapitre est consacrée à l'étude de l'influence de divers paramètres (internes ou externes) sur la robustesse structurale tels que la géométrie de la structure, son niveau de redondance, la nature des sollicitations extérieures, et de manière générale, le niveau d'incertitudes sur les variables mises en jeu. Une deuxième partie illustre l'application de la méthodologie sur plusieurs autres types de structures. Une des applications propose en particulier de placer l'étude de la robustesse dans le cadre d'une analyse de risque globale de la structure, couplant des notions d'aléas, de vulnérabilité, et de criticité. Finalement, deux exemples sont considérés pour estimer le niveau de robustesse structural vis-à-vis d'états limites de service correspondant à des états structuraux au-delà desquelles les exigences d'aptitude au service ne sont plus satisfaites. Le premier exemple porte sur l'étude d'une poutre précontrainte de VIPP (viaduc à travées indépendantes à poutres précontraintes) dans laquelle la défaillance locale est supposée être l'apparition d'une fissure au droit d'une section et la défaillance globale, un volume critique de béton fissuré. Le second exemple porte sur l'étude d'un pont haubané pour lequel la défaillance locale est supposée être la

rupture d'un hauban ou une plastification d'un élément de la structure du tablier et la défaillance globale, une flèche critique excessive à mi travée.

Ce chapitre reprend les notations introduites au Chapitre 3 pour noter les indices $I_{r,1}$ (respectivement $I_{r,1}^{k}$), $I_{r,2}$ (respectivement $I_{r,2}^{k}$) obtenus par une approche « par l'intérieur » en considérant le chemin le plus probable de manière globale (respectivement le chemin le plus probable partant du nœud k) et $I_{r,1}^{*}$, $I_{r,2}^{*}$ obtenus par une approche « par l'extérieur ».

4.2 INFLUENCE DES PARAMETRES DU SYSTEME SUR LA QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE STRUCTURALE

Ce paragraphe propose une analyse de l'influence d'un certain nombre de paramètres, internes ou externes, sur les résultats d'une étude de la quantification de la robustesse. Les paramètres étudiés sont explicités dans la Figure 4.1.

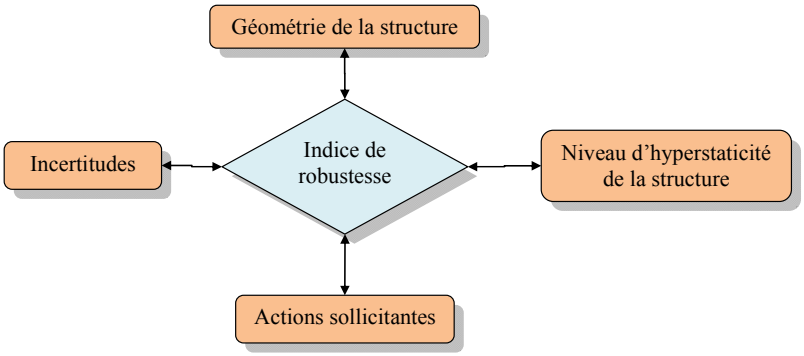


Figure 4.1. Paramètres d'entrée considérés pour l'étude de sensibilité.

4.2.1 Influence de la section des éléments sur l'indice de robustesse

L'exemple du paragraphe 3.3.3 (Figure 4.2) est considéré en sélectionnant des éléments en acier de type IPE et IPN afin d'étudier l'influence de la section des éléments sur les indices de robustesse. Les sections considérées des éléments et les caractéristiques correspondantes sont représentées dans la Figure 4.3 et les Tableaux 4.1 et 4.2.

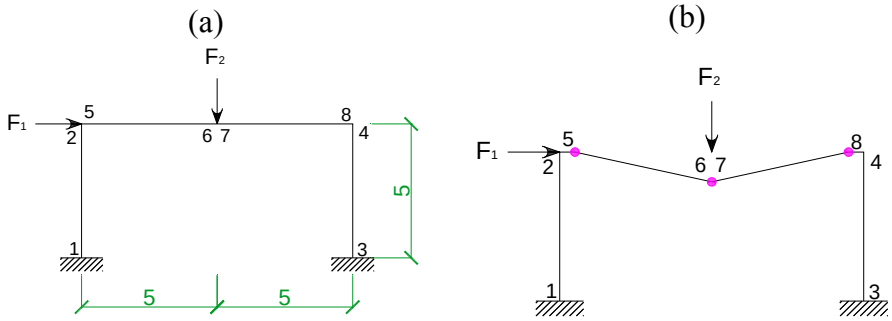


Figure 4.2. (a) Structure étudiée, (b) mécanisme de défaillance le plus probable associé.

Des indices de robustesse sont finalement estimés en considérant chaque section d'élément et en utilisant la méthode des branches et bornes (cf. Chapitre 3). Le chemin le plus probable identifié 6 → 8 → 5 est le même pour toutes les sections considérées et le mécanisme de défaillance le plus probable est représenté à la Figure 4.2b.

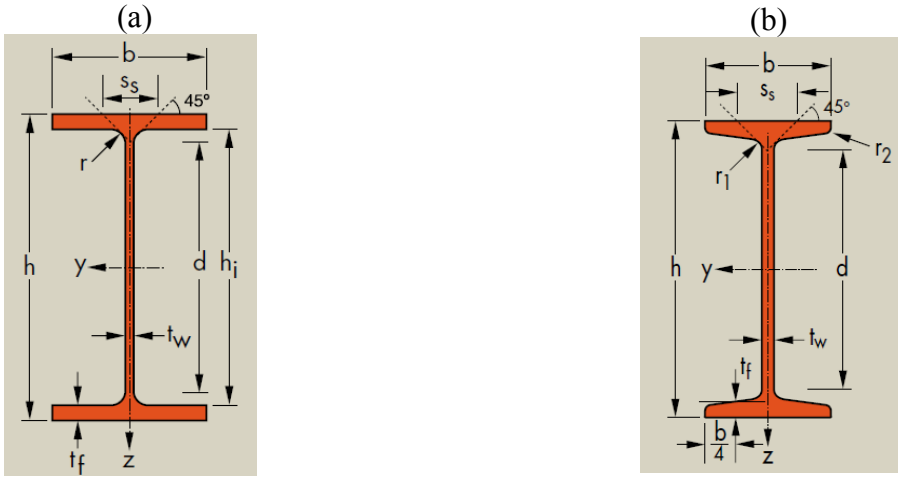


Figure 4.3. (a) Section poutrelle européenne IPE, (b) Section poutrelle européenne en IPN.

Sections IPE	Dimensions (mm)					Section (cm^2)	Dimensions de construction (mm)		Propriétés de section			
									Axe fort y-y		Axe faible z-z	
	h	b	t_w	t_f	r	A	h_i	d	I_y (cm^4)	$W_{pl,y}$ (cm^3)	I_z (cm^4)	$W_{pl,z}$ (cm^3)
220	220	110	5,9	9,2	12	33,4	201,6	177.6	2772	285	205	58,1
240	240	120	6,2	9,8	15	39,12	220,4	190,4	3892	366,6	283,6	73,92
240•	237	120	5,2	8,3	15	33,31	220,4	190,4	3290	311,6	240,1	62,40
240+	242	122	7	10,8	15	43,71	220,4	190,4	4369	410,3	328,5	84,40

Tableau 4.1. Caractéristiques des sections IPE 240, 240• et 240+ (ArcelorMittal 2012).

Sections IPN	Dimensions (mm)						Section (cm^2)	Dimensions de construction (mm)	Propriétés de section			
									Axe fort y-y		Axe faible z-z	
	h	b	t_w	t_f	r_1	r_2	A	d	I_y (cm^4)	$W_{pl,y}$ (cm^3)	I_z (cm^4)	$W_{pl,z}$ (cm^3)
200	200	90	7,5	11,3	7,5	4,5	33,4	159,1	2140	250	117	43,5
220	220	98	8,1	12,2	8,1	4,9	39,5	175,8	3060	324	162	55,7
240	240	106	8,7	13,1	8,7	5,2	46,1	192,5	4250	412	221	70,0

Tableau 4.2. Caractéristiques des sections IPN 200, 220 et 240 (ArcelorMittal 2012).

Les Figures 4.4 et 4.5 montrent que plus la section des éléments structuraux est importante, plus les indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont élevés (l'impact étant négligeable quand le minimum des indices $I^k_{r,1}$ ou $I^k_{r,2}$ est considéré). De même, les indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ augmentent avec le moment d'inertie de la section des éléments, ce qui n'est pas observé avec les minima des indices $I^k_{r,1}$ ou $I^k_{r,2}$). Les Tableaux 4.1 et 4.2 montrent que les profilés de type IPN200,

IPE220 et IPE240• ont des sections presque identiques. Le Tableau 4.3 montre qu'à section identique, plus le moment d'inertie est élevé, plus les indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont élevés.

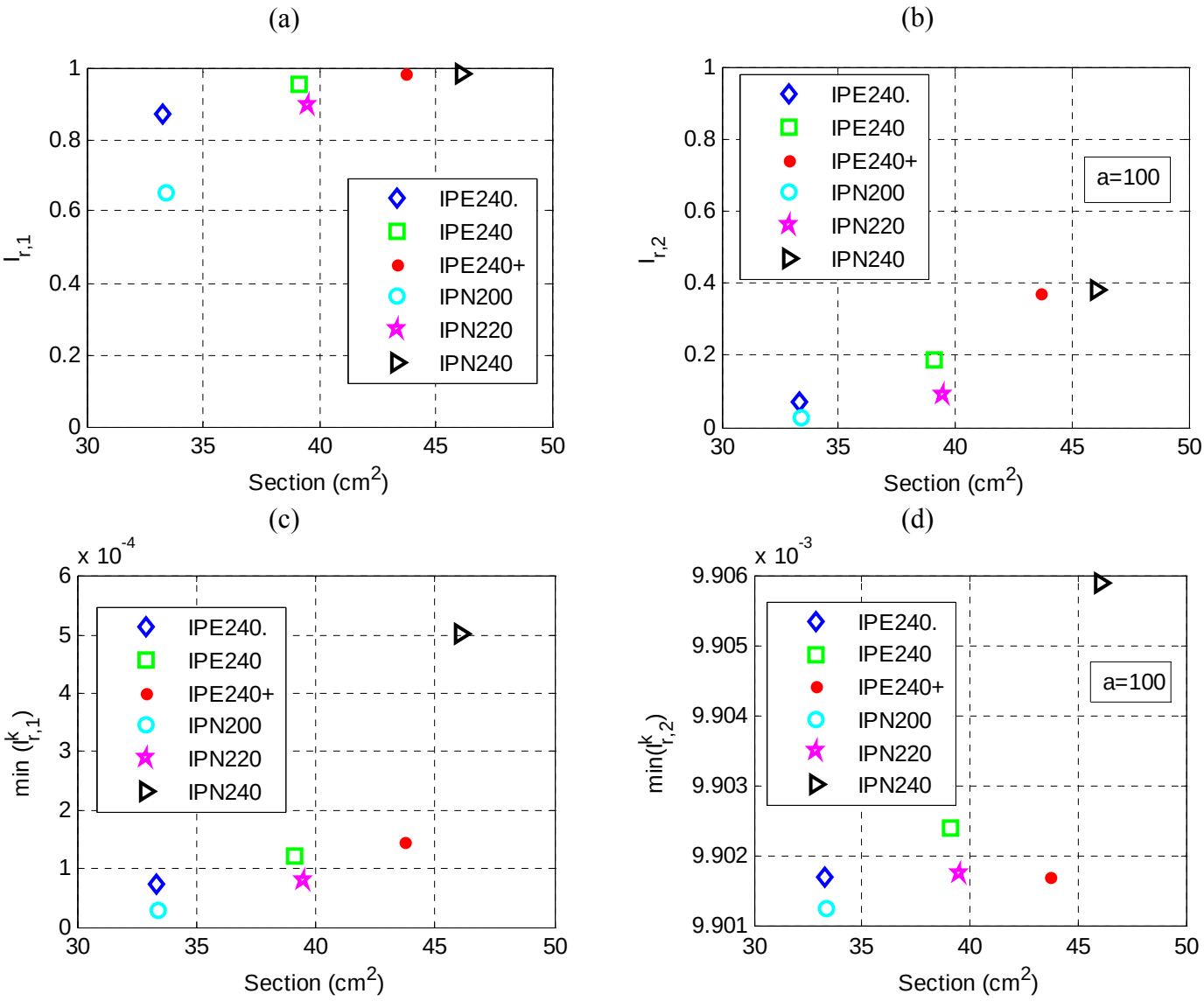


Figure 4.4. Variation des indices de robustesse(a) $I_{r,1}$, (b) $I_{r,2}$, (c) $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$, et (d) $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$ avec la section des éléments.

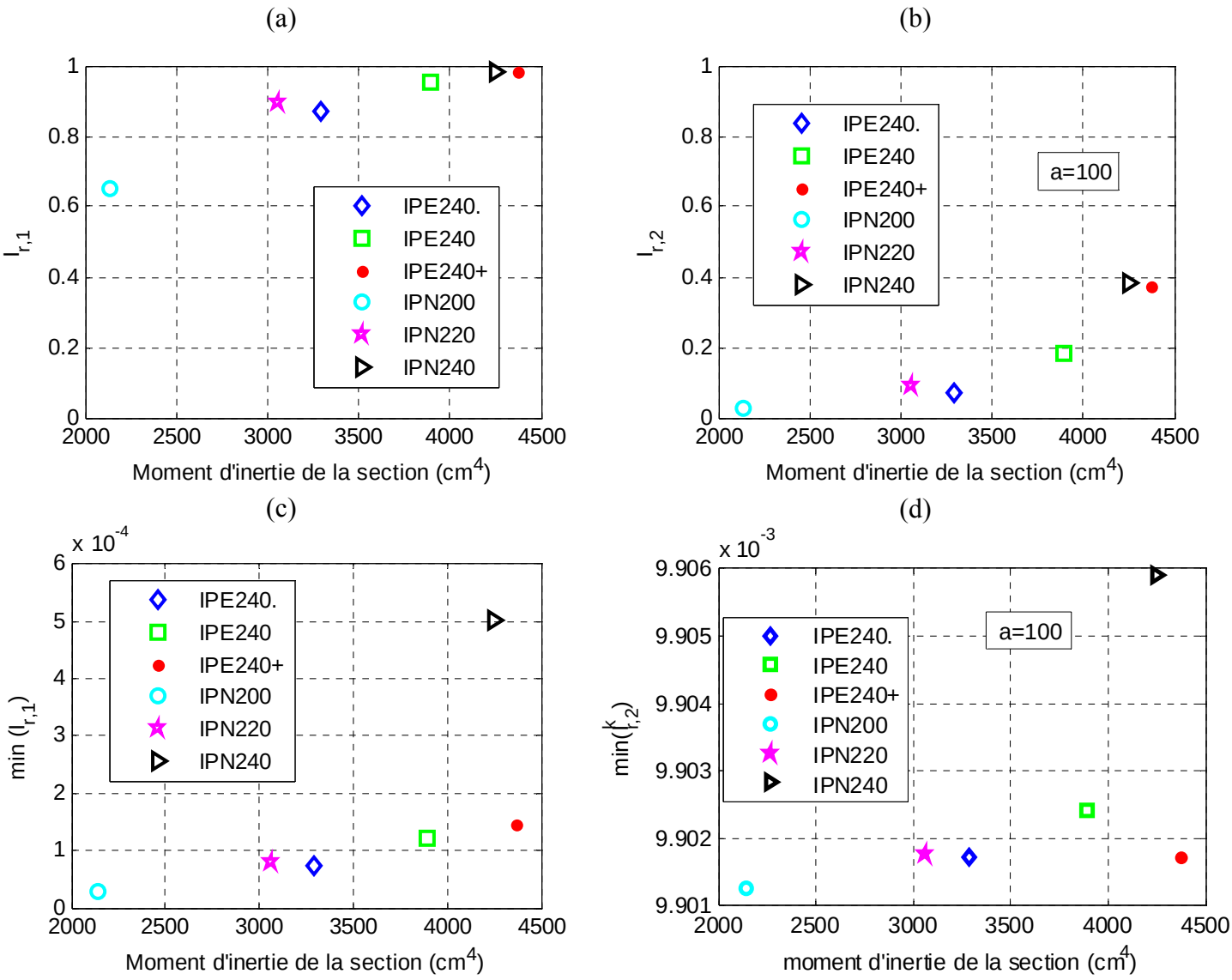


Figure 4.5. Variation des indices de robustesse(a) $I_{r,1}$, (b) $I_{r,2}$, (c) $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$, et (d) $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$ avec le moment d'inertie de section des éléments.

Types de section	Section A (cm^2)	Moment d'inertie I (cm^4)	$I_{r,1}$	$I_{r,2}\,(a=100)$
IPN200	33,4	2140	0,65	0,03
IPE220	33,4	2772	0,80	0,05
IPE240•	33,3	3290	0,87	0,07

Tableau 4.3. Variation des indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ avec le moment d'inertie de section d'éléments.

4.2.2 Influence de la géométrie de la structure

Les paramètres du portique plan étudié par Thoft-Christensen & Murotsu (1986) sont considérés dans ce paragraphe. L'objectif est de faire varier la longueur des éléments du portique afin d'étudier l'impact de ses dimensions sur le niveau de robustesse. La structure est choisie de sorte que le double de la hauteur h soit égal à la longueur L, en faisant varier la hauteur de 3 à 6 m.

Les détails des calculs sont présentés lorsque les paramètres h et L valent 5 m et 10 m, respectivement (Figure 4.6). La structure est soumise à l'action combinée de deux forces, l'une horizontale F_1 et l'autre verticale F_2 qui sont supposées être des variables aléatoires normales de moyennes $\mu_{F_1} = 20\,\text{kN}$ et $\mu_{F_2} = 40\,\text{kN}$, respectivement, et de coefficients de variation $CDV_1 = CDV_2 = 30\%$. La limite élastique f_y des éléments suit aussi une loi normale de paramètres $\mu_{f_y} = 276\,\text{MPa}$ et $CDV_{f_y} = 5\%$. Enfin, le module d'Young du matériau des éléments est fixé à $E = 210\,\text{GPa}$. Les caractéristiques des matériaux sont illustrées dans le Tableau 4.4.

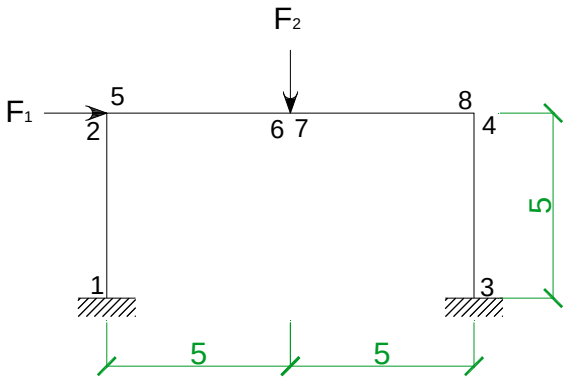


Figure 4.6. Structure étudiée.

Numéro des éléments	Numéros d'extrémité des éléments	Section d'élément A (m^2)	Moment d'inertie I (m^4)	Espérance du moment plastique résistant $M_{pl,r}$ (kN.m)
1	1 ; 2	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75
3	5 ; 6	$0{,}4.10^{-2}$	$4{,}77.10^{-5}$	101
4	7 ; 8	$0{,}4.10^{-2}$	$4{,}77.10^{-5}$	101
2	3 ; 4	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75

Tableau 4.4. Caractéristiques géométriques et propriétés des matériaux.

Les méthodes de parcours d'arbres et la méthode des mécanismes fondamentaux (cf. Chapitre 3) sont utilisées pour quantifier la robustesse structurale. La Figure 4.7 montre les chemins de défaillance dominants identifiés avec les trois approches introduites dans les paragraphes 3.2.1 à 3.2.3. Il est noté que la méthode du β-unzipping génère beaucoup plus de chemins dominants, notamment par rapport à la méthode des branches et bornes qui en génère le moins.

Par ailleurs, la Figure 4.8 montre les deux mécanismes fondamentaux identifiés. Il est noté que le chemin le plus probable 7→4→2 identifié avec les méthodes de parcours d'arbre correspond au mécanisme fondamental Me (a) qui est également caractérisé comme le plus probable. Les résultats liés au calcul des indices de robustesse sont récapitulés dans le Tableau 4.5. On remarque que la probabilité de défaillance globale $P_{globale} = 6{,}57.10^{-3}$ est bien comprise dans l'intervalle $\left[6{,}50\times10^{-3};6{,}58\times10^{-3}\right]$ déterminé par Thoft-Christensen & Murotsu (1986). Il est noté que les indices de robustesse obtenus sont tous très proches. Par ailleurs, la méthode des

branches et bornes est la plus coûteuse en temps de calcul contrairement à celle des mécanismes fondamentaux qui nécessite le moins de temps parmi toutes les méthodes. Cette dernière méthode peut donc être particulièrement adaptée pour l'analyse de structures complexes, dès lors que l'on dispose d'une technique efficace pour la résolution de systèmes d'équations dont le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations (paragraphe 3.3.6.1).

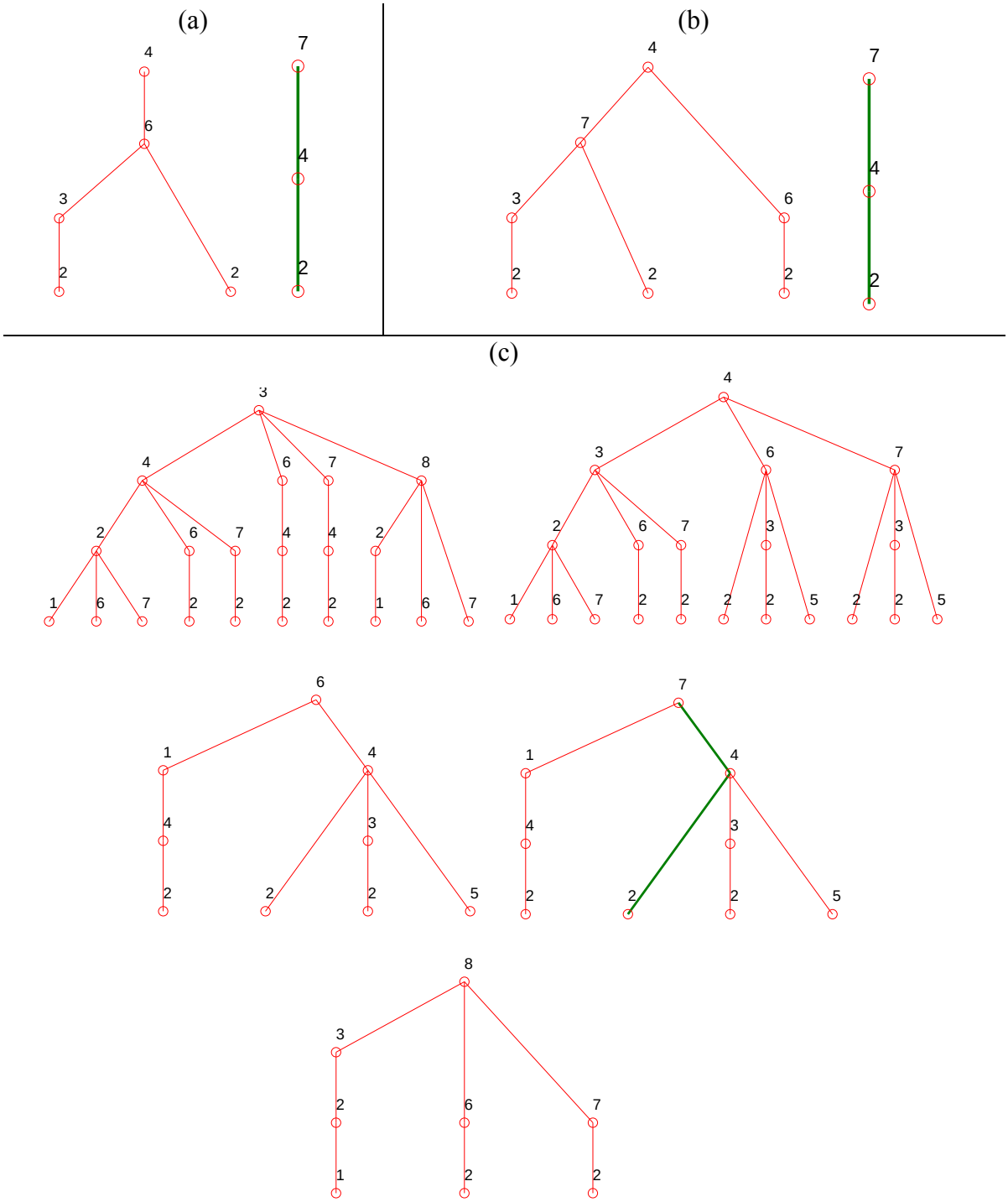
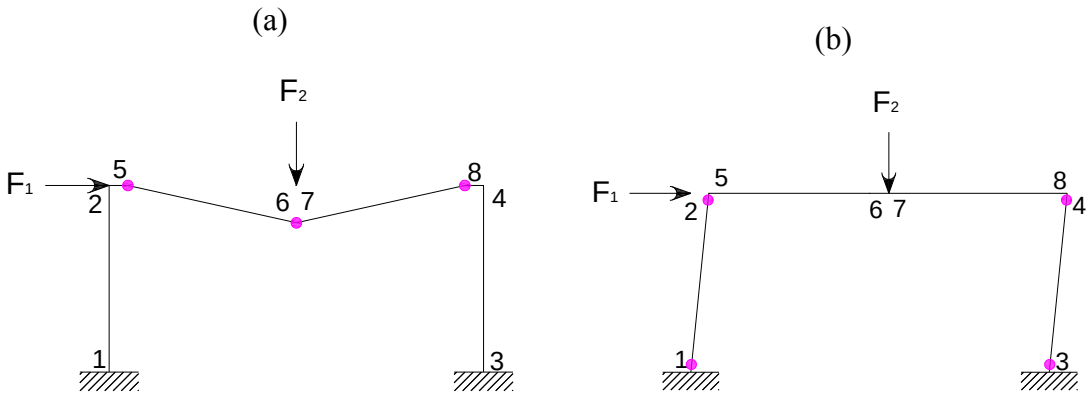


Figure 4.7. Arbres de défaillance de la méthode (a) des branches et bornes, (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping.

L'encadrement de la probabilité de défaillance du système obtenu avec les bornes de Ditlevsen pour la méthode des mécanismes fondamentaux est $[6,60\times10^{-3};6,61\times10^{-3}]$. Les résultats sont proches de ceux obtenus avec l'approche par l'intérieur.



$P_f = 6,58\times10^{-3}$ $P_f = 4,72\times10^{-15}$

Figure 4.8. Mécanismes fondamentaux identifiés et probabilités de défaillance associées.

Méthode utilisée	N_{me}	Méc.	P_{locale}	$P_{globale}$	$I_{r,1}$	$I_{r,2}$	Temps de calcul (s)
Branches et bornes	3	7-4-2	$2,39\times10^{-2}$	$6,57\times10^{-3}$	0,72	0,04	52
β-unzipping	30	7-4-2	$2,39\times10^{-2}$	$6,57\times10^{-3}$	0,72	0,04	39
β-unzipping avec bornage	4	7-4-2	$2,39\times10^{-2}$	$6,57\times10^{-3}$	0,72	0,04	21
					$I^*_{r,1}$	$I^*_{r,2}$	
Mécanismes fondamentaux en système	4	Me (a) ou Me (b)	$2,39\times10^{-2}$	$6,60\times10^{-3}$	0,72	0,04	0,29

Tableau 4.5. Comparaison des méthodes utilisées ($a = 100$ pour le calcul de $I_{r,2}$).

Comme mentionné en début de paragraphe, l'objectif est d'étudier l'impact de la longueur des éléments du portique sur les différents indices de robustesse. Cette procédure est synthétisée dans le Tableau 4.6 (le paramètre h variant de 3 m à 6 m). La méthode utilisée est celle des branches et bornes car elle permet d'identifier le chemin de défaillance dominant le plus probable. On remarque que pour cette tranche de variation, le chemin de ruine dominant identifié avec la méthode des branches et bornes est le même et vaut 6 → 4 → 2.

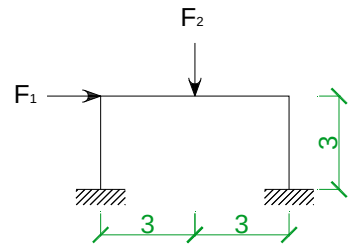
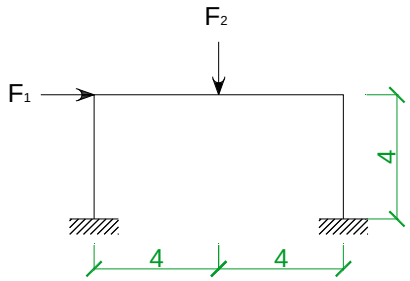
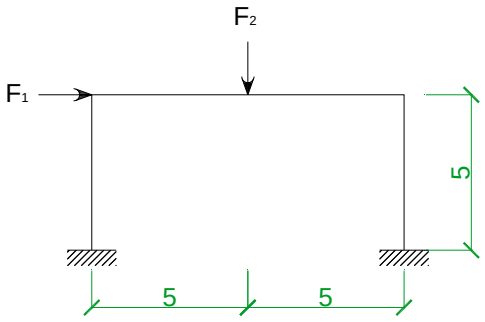
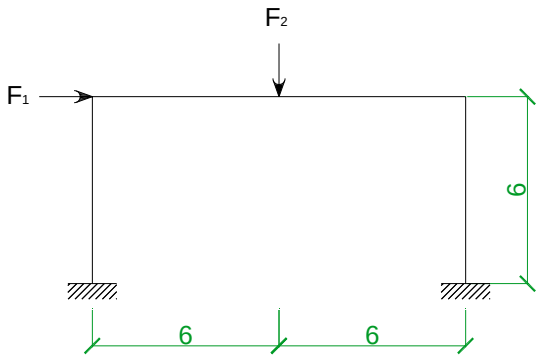
Structures étudiées	h	$I_{r,1}$ $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$	$I_{r,2}$ $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$
	3 m	1,00 $5{,}25.10^{-4}$	0,70 0,0099
	4 m	0,92 $9{,}40.10^{-3}$	0,11 0,01
	5 m	0,72 $9{,}26.10^{-5}$	0,04 0,0099
	6 m	0,52 $6{,}02.10^{-5}$	0,02 0,0099

Tableau 4.6. Variation des indices de robustesse avec la géométrie des éléments ($a = 100$ pour le calcul de $I_{r,2}$).

Finalement, même si le chemin de défaillance reste toujours le même dans ce cas d'étude pour les différentes dimensions considérées, il est observé que plus les dimensions du portique sont grandes, plus les indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont faibles. En effet, une grande longueur de poutre entraîne une flèche importante, et donc augmente la probabilité d'extension d'une défaillance locale à une défaillance globale.

4.2.3 Influence du degré d'hyperstaticité

4.2.3.1 Influence du degré d'hyperstaticité externe (conditions aux limites)

L'exemple du paragraphe 4.2.2 est utilisé pour le calcul des indices de robustesse en choisissant quatre types de conditions limites aux appuis : encastrée – encastrée (bc1), encastrée – articulée (bc2), articulée – encastrée (bc3), articulée – articulée (bc4), de degrés d'hyperstaticité externe égaux à 3, 2, 2 et 1, respectivement. Les calculs sont menés en considérant que les moments plastiques résistants de chaque élément constituent des variables aléatoires indépendantes. Le Tableau 4.7 montre que plus le degré d'hyperstaticité est élevé, plus le chemin menant à la ruine est long et plus les indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont grands.

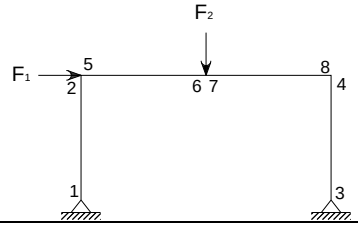
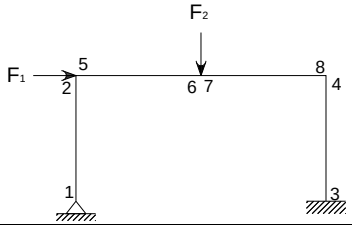
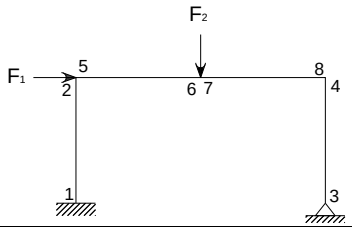
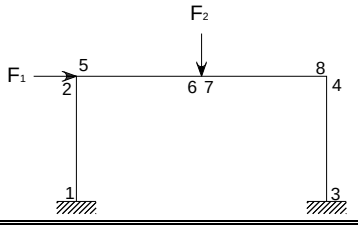
Structure étudiée	Degré d'hyperstaticité externe	Chemin le plus probable	$I_{r,1}$ $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$	$I_{r,2}$ $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$
	1	4→6	0,78 0,07	0,04 0,01
	2	4→3→2	0,98 0,06	0,31 0,01
	2	4→1→2	1,00 0,08	0,73 0,01
	3	7→2→1→3	1,00 0,91	0,92 0,10

Tableau 4.7. Variation des indices de robustesse $I_{r,1}$ (respectivement $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$) et $I_{r,2}$ (respectivement $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$)avec le degré d'hyperstaticité externe *he* ($a = 100$ pour le calcul de $I_{r,2}$).

Un coefficient α prenant les valeurs suivantes $\{0,6;0,7;0,8;0,9;1;1,1;1,2;1,3;1,4;1,5;1,6;1,7\}$ est ensuite appliqué au chargement (à la fois sur F_1 et F_2) pour comparer l'évolution de la probabilité de défaillance du système avec l'évolution de la probabilité d'occurrence du chemin de ruine complet le plus probable pour chaque type de conditions aux limites (Figure 4.9). On remarque que pour les différentes valeurs de α, et pour les conditions aux limites bc1, bc2, bc3 et bc4, la probabilité de défaillance du système reste toujours proche de la probabilité d'occurrence du chemin de ruine le plus probable. En conséquence, l'hypothèse faite dans la démarche de quantification de la robustesse structurale qui considère que la probabilité d'occurrence du chemin le plus probable est la probabilité du système peut être validée pour cet exemple.

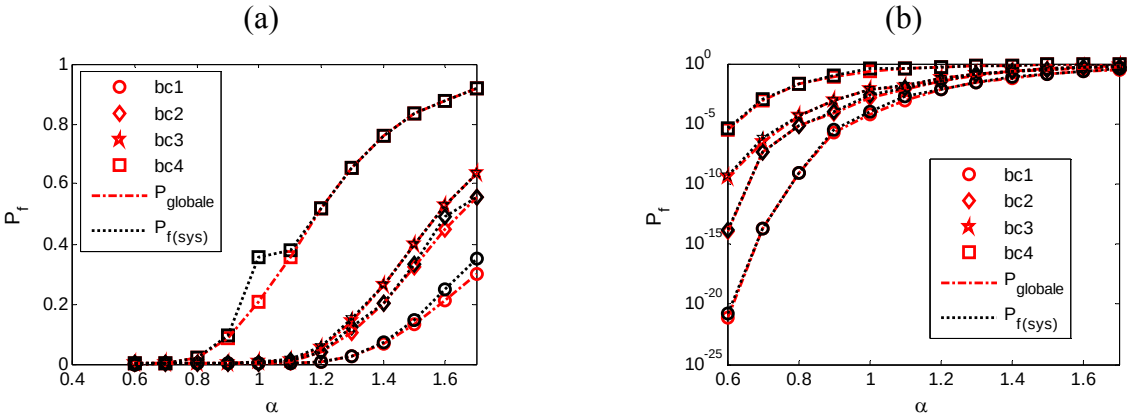


Figure 4.9. Comparaison des probabilités de défaillance du système et du chemin le plus probable, avec une échelle (a) linéaire en ordonnées et (b) logarithmique.

4.2.3.2 Influence du degré d'hyperstaticité interne (redondance)

L'objectif dans ce paragraphe est de caractériser l'influence du degré d'hyperstaticité interne sur le niveau de robustesse structurale. Pour ce faire, l'exemple de la Figure 4.6 est utilisé avec les mêmes propriétés des éléments et caractéristiques des matériaux que dans le Tableau 4.4. Il est cependant noté que les calculs prennent en compte dans ce paragraphe l'interaction entre le moment plastique résistant et l'effort axial dans la condition de plasticité. En particulier, deux types de contreventement sont étudiés : un contreventement « en V » et un contreventement « en X ». Les propriétés des éléments de contreventement sont illustrées dans les Tableaux 4.8 et 4.9. Enfin, les résultats obtenus en utilisant la méthode des branches et bornes sont reportés dans les Tableaux 4.10 et 4.11.

Numéro des éléments	Numéros d'extrémité des éléments	Section d'élément A (m^2)	Moment d'inertie I (m^4)	Espérance du moment plastique résistant $M_{pl,r}$ (kN.m)
5	9 ; 10	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75
6	11 ; 12	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75

Tableau 4.8. Paramètres considérés pour le contreventement en V.

Numéro des éléments	Numéros d'extrémité des éléments	Section d'élément A (m^2)	Moment d'inertie I (m^4)	Espérance du moment plastique résistant $M_{pl,r}$ (kN.m)
5	9 ; 10	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75
6	11 ; 12	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75
7	13 ; 14	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75
8	15 ; 16	$0{,}4.10^{-2}$	$3{,}58.10^{-5}$	75

Tableau 4.9. Paramètres considérés pour le contreventement en X.

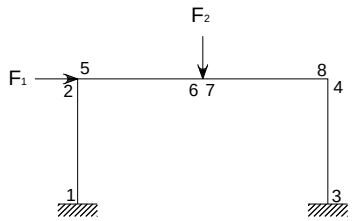
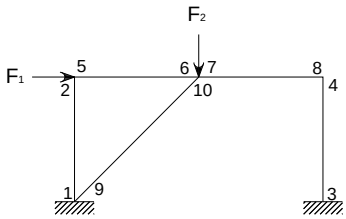
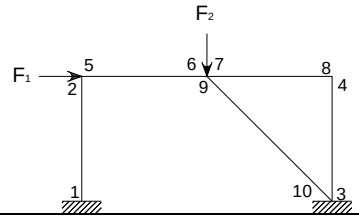
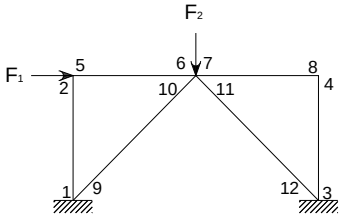
Structure étudiée	Degré d'hyperstaticité h	Chemin de référence	Probabilité de défaillance P_f	$I_{r,1}$ $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$	$I_{r,2}$ $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$
(a) 	3	6-4-2	**6**| $3{,}19.10^{-2}$ **4**| $2{,}98.10^{-2}$ **2**| $1{,}03.10^{-2}$	0,68 $1{,}11.10^{-4}$	0,03 $9{,}90.10^{-3}$
(b) 	6	4-7-3-9-1	**4**| $1{,}53.10^{-2}$ **7**| 1.10^{-3} **3**| $9{,}51.10^{-4}$ **9**| $2{,}08.10^{-4}$ **1**| $1{,}0210^{-4}$	0,99 $2{,}3.10^{-3}$	0,60 $9{,}90.10^{-3}$
(c) 	6	1-6-2-10-3	**2**| $2{,}98.10^{-7}$ **1**| $2{,}40.10^{-8}$ **4**| $1{,}59.10^{-9}$ **7**| $7{,}98.10^{-10}$ **10**| $3{,}95.10^{-10}$ **8**| $9{,}38.10^{-11}$	1 0,52	0,89 0,02
(d) 	9	Probabilité de défaillance initiale très faible pour tous les éléments de rupture	$\to 0$	$\to 1$	$\to 1$

Tableau 4.10. Variation des indices de robustesse $I_{r,1}$ (respectivement $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$) et $I_{r,2}$ (respectivement $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$) avec le degré d'hyperstaticité (h) et de redondance (contreventement en V, $a = 100$ pour le calcul de $I_{r,2}$).

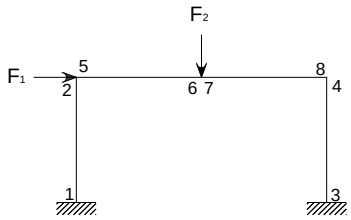
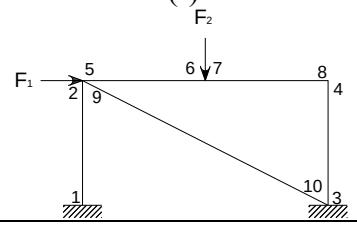
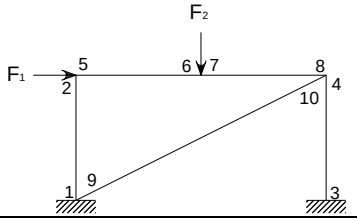
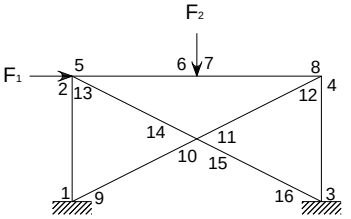
Structure étudiée	Degré d'hyperstaticité h	Chemin de *référence*	Probabilité de défaillance P_f	I_{r1} $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$	$I_{r,2}$ $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$
(e) 	3	6-4-2	**6**| $3{,}19.10^{-2}$ **4**| $2{,}98.10^{-2}$ **2**| $1{,}03\times10^{-2}$	0,68 $1{,}11.10^{-4}$	0,03 $9{,}90.10^{-3}$
(f) 	6	7-4-5	**7**| $2{,}08.10^{-2}$ **4**| 5.10^{-3} **5**| $3{,}03.10^{-3}$	0,85 $9{,}99.10^{-9}$	0,06 $9{,}90.10^{-3}$
(g) 	6	5-2-6-10-1	**5**| $2{,}61.10^{-2}$ **2**| $5{,}5.10^{-3}$ **6**| $3{,}8.10^{-3}$ **10**| $2{,}1.10^{-3}$ **1**| $1.9.10^{-3}$	0,93 $9{,}99.10^{-9}$	0,12 $9{,}90.10^{-3}$
(h) 	9	Probabilité de défaillance nulle pour tous les chemins de ruine incomplets.	$\to 0$	$\to 1$	$\to 1$

Tableau 4.11. Variation des indices de robustesse $I_{r,1}$ (respectivement $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$) et $I_{r,2}$ (respectivement $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$) avec le degré d'hyperstaticité (h) et de redondance (contreventement en X, $a=100$ pour le calcul de $I_{r,2}$).

Les Tableaux 4.10 et 4.11 montrent que plus le portique est contreventé, plus le chemin de ruine est long et plus les indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont élevés (ce qui n'est pas le cas lorsque $\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$ et $\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$ sont considérés). Concernant la structure (d), tous les éléments de rupture potentiels ont initialement une probabilité de défaillance nulle. Le parcours de l'arbre d'évènement ne peut donc pas démarrer. La structure (d) est donc qualifiée d'hyper-robuste pour ces conditions de charge et pour ces propriétés de matériaux. Concernant la structure (h), l'élément de rupture 5(4) est celui avec la plus grande probabilité de défaillance. Cependant, dans le parcours de l'arbre de

défaillance, aucun chemin de ruine complet n'est identifié car tous les chemins de ruine incomplets ont une probabilité de défaillance très faible (obtenue par le calcul). La structure (h) est donc qualifiée de robuste pour ces conditions de charges et pour ces propriétés de matériaux.

4.2.4 Influence des actions sollicitantes

4.2.4.1 Influence de l'intensité du chargement

Considérons la structure du paragraphe 4.2.2 tel que $h = L = 5m$. En appliquant les coefficients α_1 et α_2 aux charges F_1 et F_2 respectivement (Figure 4.10a), tel que $\alpha_1 \in \{0,8;0,9;1\}$ et $\alpha_2 \in \{0,8;0,9;1;1,1;1,2;1,3;1,4;1,5\}$, les chemins de ruine les plus probables sont identifiés à l'aide de la méthode des branches et bornes. Il est observé que le chemin 6→4→ 2 est toujours le chemin de ruine, et ce pour toutes les combinaisons de α_1 et α_2. Le mécanisme de défaillance correspondant est représenté dans la Figure 4.10b qui est un mécanisme de poutre et qui modélise bien le fait que la force verticale est prédominante.

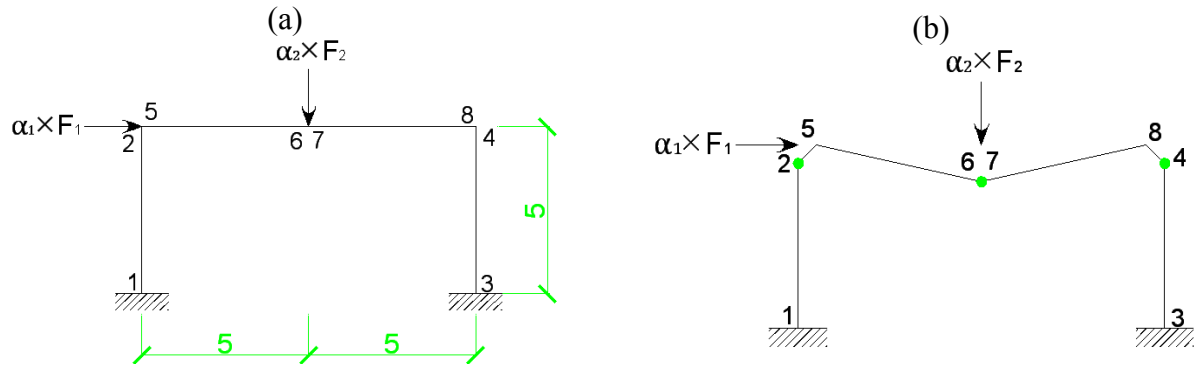


Figure 4.10. (a) coefficients de charge appliqués, (b) mécanisme de défaillance le plus probable.

Les Figures 4.11a et 4.11b représentent les variations des indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ avec les valeurs des coefficients α_1 et α_2. On remarque que α_2 est le coefficient qui influence le plus l'indice de robustesse. En d'autres termes, plus la charge verticale est élevée, plus l'indice de robustesse est faible.

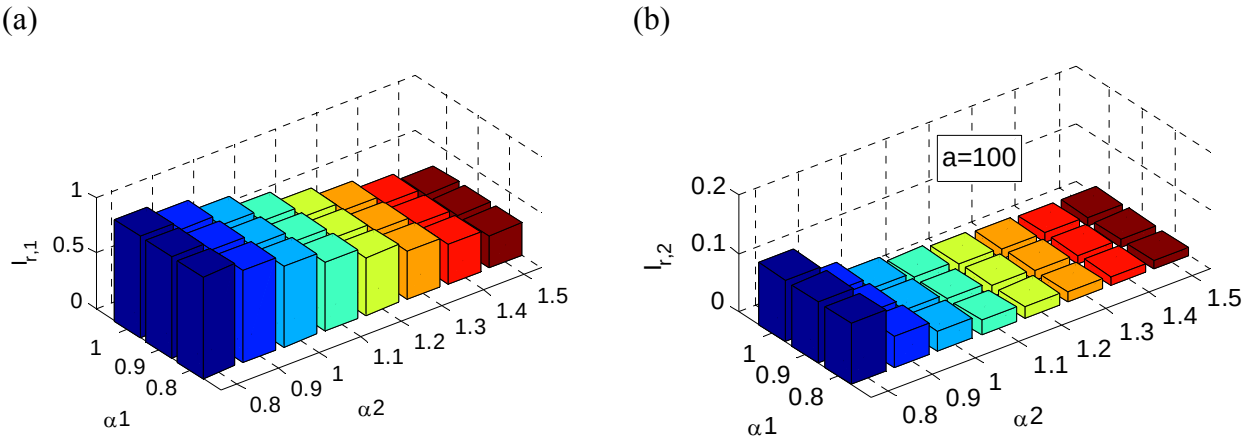


Figure 4.11. Variation des indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ avec les coefficients α_1 et α_2).

L'analyse est maintenant effectuée en inversant les valeurs de F_1 et F_2, de sorte que $\mu_{F_1} = 40$ kN et $\mu_{F_2} = 20$ kN. La force horizontale est donc maintenant prédominante par rapport à la force verticale. Le chemin de défaillance le plus probable identifié dans ce cas est le même pour tous et est 3→1→4→2, sauf pour les cas particuliers où $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{0,9;0,8\}$, $\{0,8;0,8\}$, $\{0,8;0,9\}$, et $\{0,8;1\}$. Pour ces derniers cas, le chemin le plus probable est 1→3→4→2. Il est noté que les chemins 3→1→4→ 2 et 1→3→4→ 2 représentent le même mécanisme (Figure 4.12b) qui est un mécanisme de panneau traduisant bien le fait que la force horizontale est prédominante.

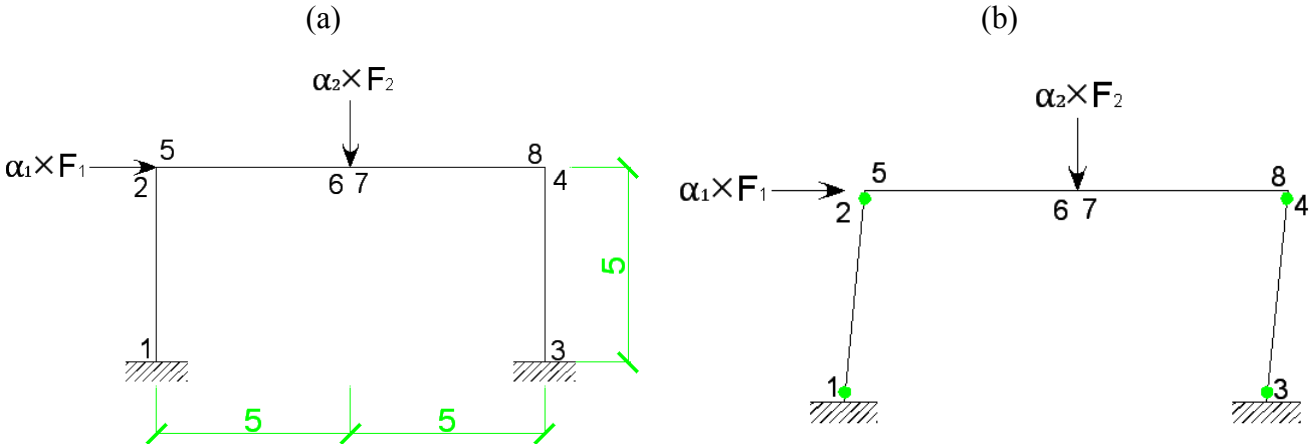


Figure 4.12. (a) Coefficients de charge appliqués et (b) mécanisme de défaillance le plus probable.

Finalement, les Figures 4.13a et 4.13b représentent la variation de l'indice de robustesse avec les coefficients α_1 et α_2. Lorsque $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{0,9;0,8\}$, $\{0,8;0,8\}$, $\{0,8;0,9\}$, et $\{0,8;1\}$, on observe une discontinuité des valeurs des indices de robustesse. Ceci est dû au fait que pour ces valeurs particulières de $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, le chemin de défaillance le plus probable est différent, comme

mentionné précédemment. De manière générale, plus la valeur de la force horizontale (à travers α_1) est élevée, plus l'indice de robustesse est faible.

(a) (b)

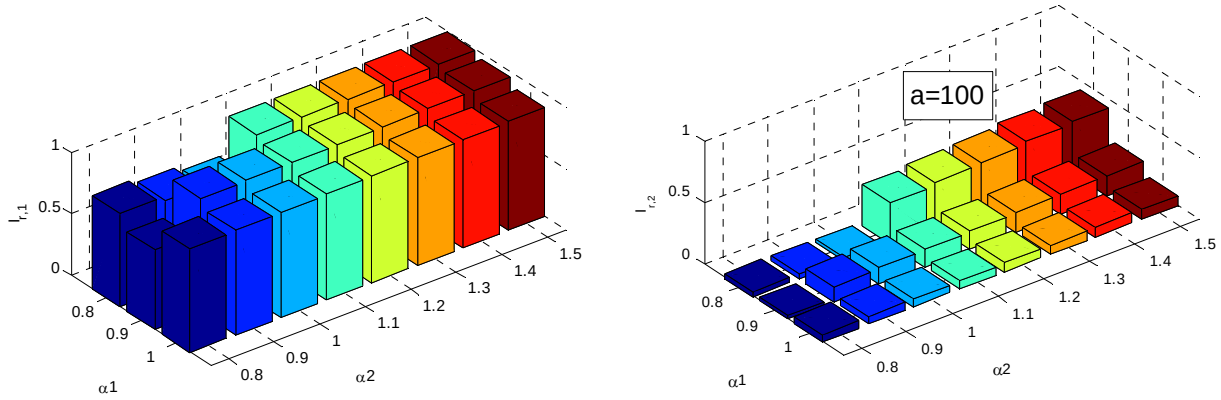


Figure 4.13. Variation des indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ avec les coefficients α_1 et α_2.

4.2.4.2 Influence de la direction et du sens du chargement

L'étude de l'influence de la nature, de la direction et du sens du chargement sur l'indice de robustesse est maintenant proposée pour la structure de la Figure 4.6. Des charges statiques ponctuelles et des moments sont appliqués sur la structure, au travers des cas 1, 2, 3, 7, 8 et 9. Des chargements avec des directions opposées sont également appliqués au travers des cas 4, 5, 6, 10, 11 et 12. Les Tableaux 4.12 à 4.15 regroupent les résultats obtenus ($a = 1$ pour le calcul de $I_{r,2}$) en prenant en compte l'interaction entre le moment fléchissant et l'effort axial dans la condition de plasticité (Figure 3.19). Il est observé dans ces différents exemples que le signe de la charge n'influence pas le chemin de ruine le plus probable, et donc la valeur de l'indice de robustesse.

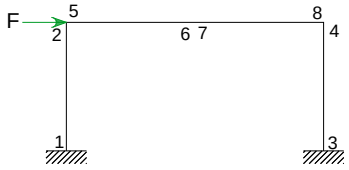
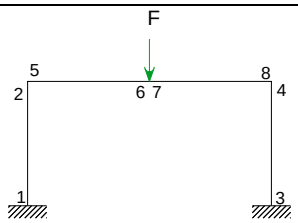
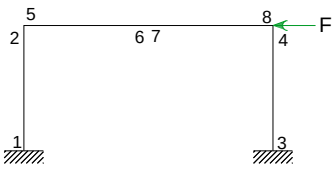
N°	1	2	3
Cas étudié			
Chemin de défaillance le plus probable	3-1-2-4	7-2-4	1-3-4-2
$I_{r,1}$	1,00	1,00	1,00
$I_{r,2}\,(a=100)$	0,95	0,99	0,95

Tableau 4.12. Indices de robustesse et chemin de référence pour les cas d'étude 1, 2 et 3.

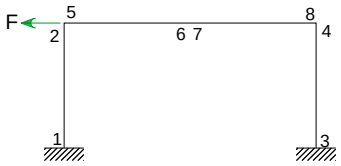
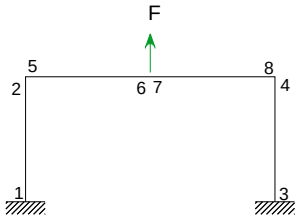
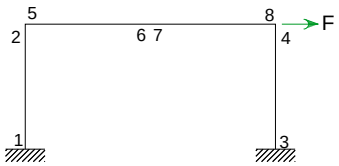
N°	4	5	6
Cas étudié			
Chemin de défaillance le plus probable	3-1-2-4	7-2-4	1-3-4-2
$I_{r,1}$	1,00	1,00	1,00
$I_{r,2}(a=100)$	0,95	0,99	0,95

Tableau 4.13. Indices de robustesse et chemin de référence pour les cas d'étude 4, 5 et 6.

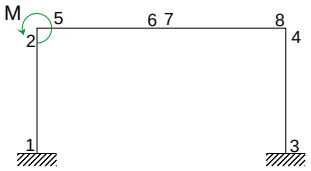
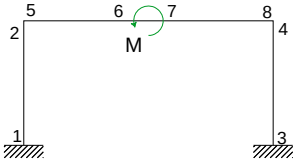
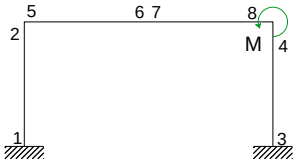
N°	7	8	9
Cas étudié			
Chemin de défaillance le plus probable	5-3-8-6	7-3-5-1-4	8-1-5-7
$I_{r,1}$	1,00	1,00	1,00
$I_{r,2}(a=100)$	1,00	0,68	1,00

Tableau 4.14. Indices de robustesse et chemin de référence pour les cas d'étude 7, 8 et 9.

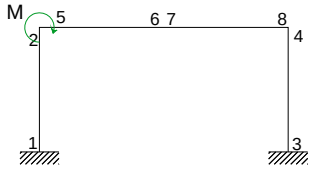
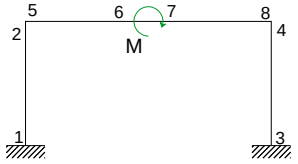
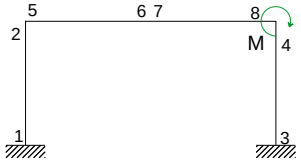
N°	10	11	12
Cas étudié			
Chemin de défaillance le plus probable	5-3-8-6	7-3-5-1-4	8-1-5-7
$I_{r,1}$	1,00	1,00	1,00
$I_{r,2}(a=100)$	1,00	0,68	1,00

Tableau 4.15. Indices de robustesse et chemin de référence pour les cas d'étude 10, 11 et 12.

4.2.5 Influence des incertitudes sur les variables d'entrée

Dans un contexte d'incertitudes sur les différents paramètres d'entrée, il est pertinent d'évaluer la sensibilité de la mesure de robustesse proposée à différents types d'incertitudes (sur les propriétés du système, sur les futurs chargements à prévoir, etc.) (Canisius et al. 2007). Pour

étudier l'influence des incertitudes associées aux charges et à la résistance des éléments de structure sur le niveau de robustesse, la structure de la Figure 4.6 est considérée en faisant varier le coefficient de variation ($\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$) associé aux charges F_1 et F_2, tel que $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}} \in \{0,2;0,3;0,4;0,5;0,6;0,7;0,8;0,9\}$, et le coefficient de variation CDV_{Mr} associé au moment plastique résistant de l'élément tel que $\mathrm{CDV}_{Mr} \in \{0,01;0,02;0,03;0,04;0,05;0,06;0,07;0,08;0,09\}$. Le chemin de défaillance le plus probable identifié à l'aide de la méthode des branches et bornes est toujours 6 → 4 → 2 pour toutes les combinaisons de $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$ et de CDV_{Mr} (le mécanisme de défaillance correspondant est représenté dans la Figure 4.10b). Il s'agit d'un mécanisme de poutre symbolisant la prédominance de la force verticale sur la force horizontale. Les Figures 4.14a et 4.14b représentent la variation des indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ en fonction des valeurs de $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$ et CDV_{Mr}, respectivement.

(a) (b)

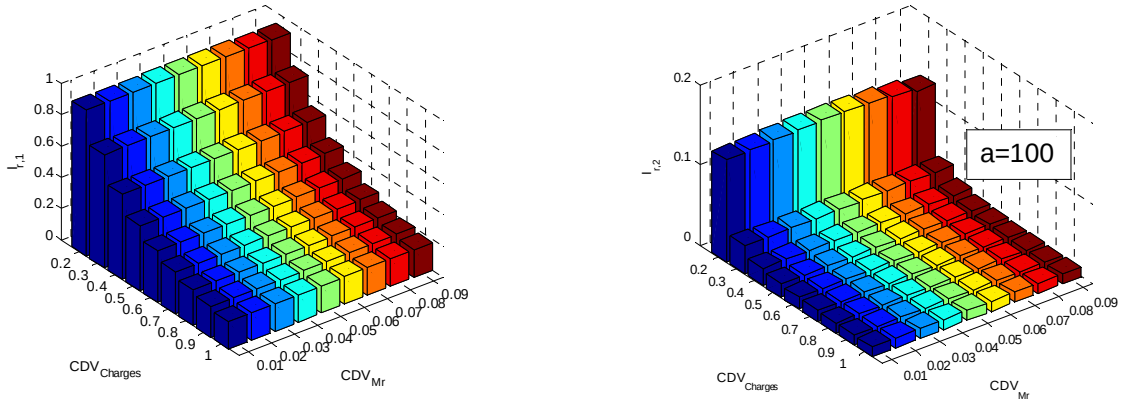


Figure 4.14. Variation des indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ avec les coefficients de variation $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$ et CDV_{Mr}.

Il est montré que le coefficient de variation $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$ a plus d'influence sur l'indice de robustesse que CDV_{Mr} (pour les valeurs considérées). Explicitement, plus il y a d'incertitudes sur les valeurs des charges, plus l'indice de robustesse est faible. Comme dans le paragraphe 4.2.4.1, les valeurs des forces agissant sont maintenant échangées (en ce qui concerne les valeurs moyennes des forces) afin d'étudier l'influence de la variabilité des paramètres de résistance et de sollicitation sur les indices de robustesse. Le chemin de défaillance le plus probable obtenu est le même (3→1→4→ 2) pour tous les couples $\{\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}};\mathrm{CDV}_{Mr}\}$, sauf pour les deux cas où le couple $\{\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}};\mathrm{CDV}_{Mr}\}$ est $\{0,2;0,09\}$ et $\{0,2;0,08\}$ et pour lesquels le chemin le plus probable est 1→3→4→ 2. Il est noté que ces deux chemins sont les mêmes que ceux identifiés

dans le paragraphe 4.2.4.1. Ils représentent le même mécanisme représenté à la Figure 4.12b qui est un mécanisme de panneau modélisant la prédominance de la force horizontale.

La Figure 4.15 représente l'évolution des indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ avec les valeurs de $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$ et CDV_{Mr}. Comme dans la Figure 4.14, On remarque que les indices de robustesse diminuent plus fortement avec le paramètre $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$ qu'avec le paramètre CDV_{Mr}.

(a) (b)

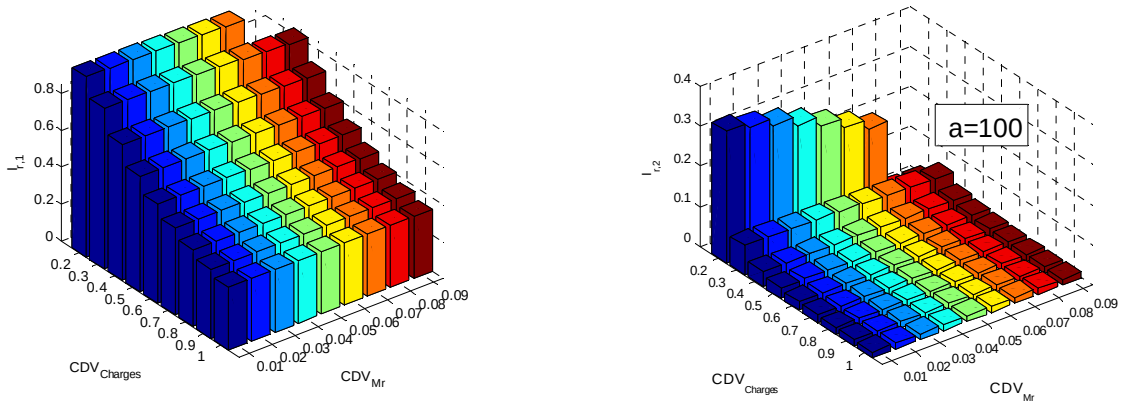


Figure 4.15. Variations de $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$, avec les coefficients de variation $\mathrm{CDV}_{\mathrm{charges}}$ et CDV_{Mr}.

4.2.6 Synthèse

Pour évaluer l'efficacité des indices de robustesse proposés, des simulations numériques ont été menés avec des structures à portique. Les exemples étudiés montrent que les indices de robustesse $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont affectés par le degré de redondance structural, le degré d'hyperstaticité externe, le chargement, les propriétés des matériaux utilisés et les caractéristiques de section des éléments de structure, comme l'ont montré Frangopol & Curley (1987).

4.3 APPLICATION DE LA QUANTIFICATION DE LA ROBUSTESSE A DES EXEMPLES TYPES DE STRUCTURES DU GENIE CIVIL

Ce paragraphe a pour but d'appliquer la démarche d'analyse de la robustesse à un certain nombre d'exemples pour lesquels la défaillance globale se traduit par une perte de stabilité de la structure. Ces exemples devraient permettre de tester l'applicabilité de la méthodologie sur quelques cas d'étude. En particulier, deux premiers exemples concernent une poutre de pont en treillis avec une conception différente dans chacun des deux cas et un troisième exemple concerne une tour contreventée.

4.3.1 Etude d'une poutre de pont en treillis – configuration 1

La poutre de pont en treillis représenté à la Figure 4.16 est considérée dans ce paragraphe. Les éléments constitutifs sont supposés être des éléments barres, reliés entre eux par des joints articulés. Cette structure, articulée à ses deux extrémités, est soumise à l'action de douze forces statiques ponctuelles.

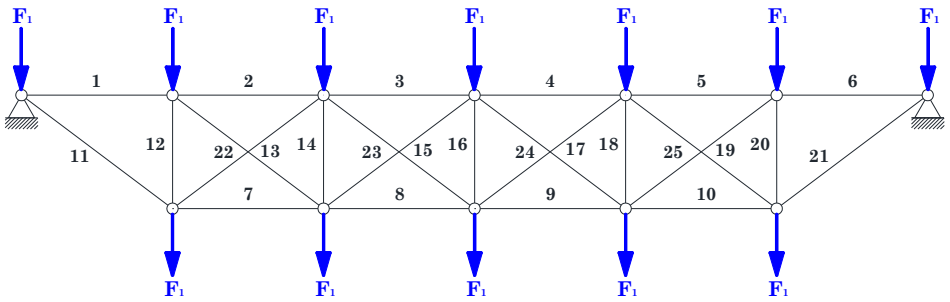


Figure 4.16. Structure étudiée.

La poutre est constituée de vingt-cinq éléments « barre » de section $A = 1{,}44.10^{-2}$ m^2 et d'inertie $I = 1728.10^{-8}$ m^4. Le module d'Young du matériau est fixé à $E = 2.10^{11}$ Pa. La hauteur de la poutre vaut $h = 4$ m et la portée 6×3 m. La limite élastique du matériau et la charge appliquée F_1 sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale dont les paramètres sont représentés dans le Tableau 4.16.

Variables	Loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
F_1	Normale	200 000 N	30%
f_y		250.10^6 Nm^{-2}	2%

Tableau 4.16. Variables aléatoires considérées.

Les chemins de défaillance dominants identifiés avec les méthodes de parcours d'arbre sont représentés dans la Figure 4.17. Il est observé que le chemin de ruine 8→9→16 est le plus probable. Le mécanisme de défaillance correspondant est représenté à la Figure 4.18.

(a) (b)



(c)

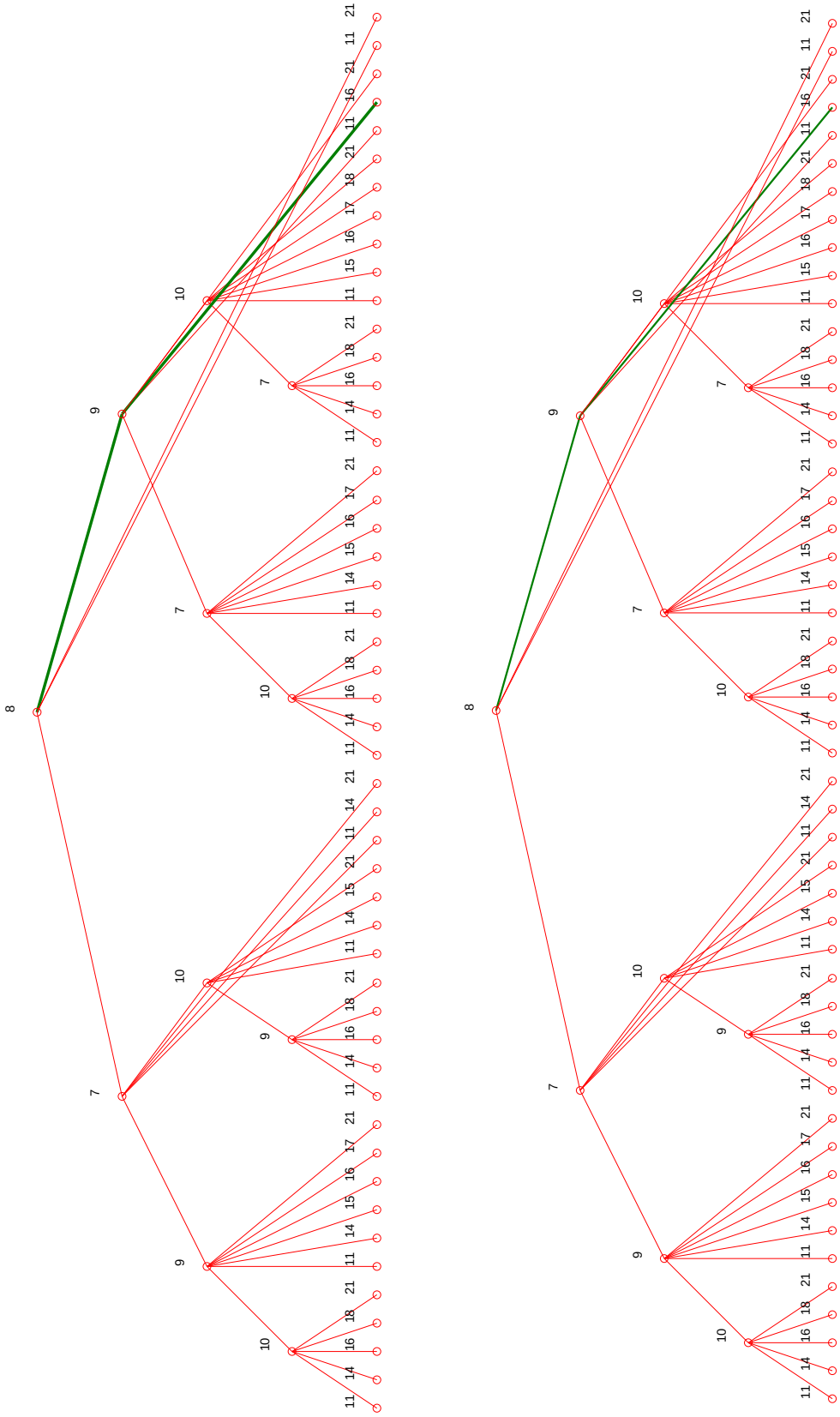


Figure 4.17. Arbres de défaillance de la méthode (a) des branches et bornes, (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping.

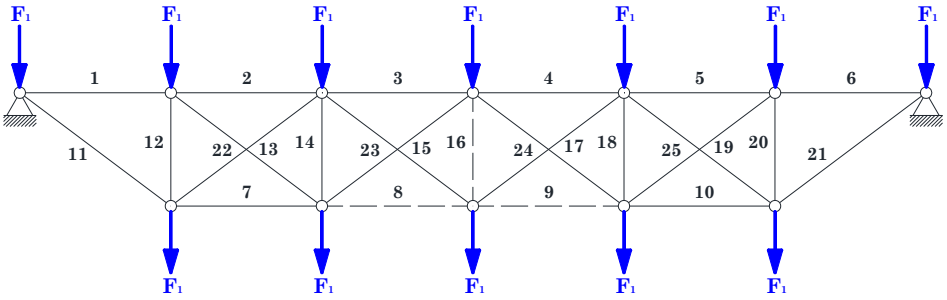


Figure 4.18. Mécanisme le plus probable correspondant au chemin de ruine 8→9→16.

Les résultats obtenus sont détaillés dans le Tableau 4.17. Il est observé que la méthode du β-unzipping est celle qui identifie le plus de chemins dominants et que la méthode du β-unzipping avec bornage est la plus bénéfique en termes de temps de calcul. Finalement, les trois méthodes permettent d'identifier le même chemin de défaillance le plus probable et donc le même indice de robustesse.

Méthodes utilisées	Branches et bornes	β-unzipping	β-unzipping avec bornage
Nombre de chemins dominants identifiés	1	2	1
Mécanisme le plus probable	8-9-16	8-9-16	8-9-16
P_{locale}	$2{,}09.10^{-9}$	$2{,}09.10^{-9}$	$2{,}09.10^{-9}$
$P_{globale}$	$5{,}99.10^{-10}$	$5{,}99.10^{-10}$	$5{,}99.10^{-10}$
$I_{r,1}$	0,71	0,71	0,71
$\min_k\left(I_{r,1}^k\right)$	0,71	0,71	0,71
$I_{r,2}$ $(a=100)$	0,03	0,03	0,03
$\min_k\left(I_{r,2}^k\right)$	0,03	0,03	0,03
Temps des calculs (s)	3392	1369	262

Tableau 4.17. Comparaison des méthodes utilisées.

Le Tableau 4.18 montre les indices de robustesse obtenus pour différentes configurations de poutre. Plus le nombre d'éléments de structure est élevé, plus les indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont élevés.

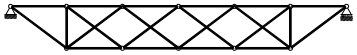
Structure	Nombre d'éléments de structure	Degré d'hyperstaticité interne/ redondance structurale	$I_{r,1}$	$I_{r,2}$ ($a=100$)
	25	5	0,71	0,03
	23	3	0,56	0,02
	22	2	0,08	0,01

Tableau 4.18. Variation des indices de robustesse avec le degré d'hyperstaticité interne.

4.3.2 Etude d'une poutre de pont en treillis – configuration 2

Ce paragraphe considère la poutre de pont en treillis représentée à la Figure 4.19. Cette poutre a une longueur de longueur 3×5 m et une hauteur de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m. Les éléments de l'ossature externe sont supposés être des éléments poutre de section $A=4{,}0.10^{-3}\text{m}^2$ et d'inertie $I=2{,}3.10^{-4}$ m^4. les éléments intérieurs sont supposés être des éléments barre de section $A=1{,}0.10^{-3}$ m^2 et d'inertie nulle. Le module d'Young vaut $E=21.10^{10}$ Pa. La poutre est articulée à l'une de ses extrémités et simplement appuyée à l'autre. Elle est soumise à l'action simultanée de quatre forces statiques ponctuelles telles que représentées dans la Figure 4.19.

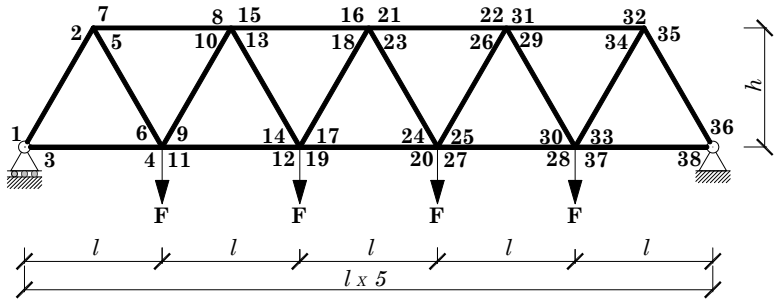


Figure 4.19. Structure étudiée.

Les statistiques des variables aléatoires considérées et supposées indépendantes sont illustrées dans le Tableau 4.19. Les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 4.20, et les arbres de défaillance des méthodes des branches et bornes et du β-unzipping avec bornage sont illustrés dans les Figures 4.20 et 4.21.

N° des éléments	N° des extrémités	Variables	loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
1	1 ; 2	M_1	Normale	75000 Nm	5%
2	3 ; 4	M_2		75000 Nm	5%
4	7 ; 8	M_3		75000 Nm	5%
6	11 ; 12	M_4		75000 Nm	5%
8	15 ; 16	M_5		75000 Nm	5%
10	19 ; 20	M_6		75000 Nm	5%
11	21 ; 22	M_7		75000 Nm	5%
14	27 ; 28	M_8		75000 Nm	5%
16	31 ; 32	M_9		75000 Nm	5%
18	35 ; 36	M_{10}		75000 Nm	5%
19	37 ; 38	M_{11}		75000 Nm	5%
		F_1		30000 N	30%
		F_2		30000 N	30%
		F_3		30000 N	30%
		F_4		30000 N	30%

Tableau 4.19. Statistiques des variables aléatoires.

Méthodes utilisées	Branches et bornes	β-unzipping avec bornage
Nombre de chemins dominants identifiés	16	28
Mécanisme le plus probable	10-11-35-33-15-27-12	11-10-22
P_{locale}	$2{,}1.10^{-3}$	$1{,}8.10^{-3}$
$P_{globale}$	$1{,}8.10^{-3}$	$1{,}26.10^{-3}$
$I_{r,1}$	0,16	0,31
$I_{r,2}$ $(a=100)$	0,01	0,01
Temps de calculs (s)	821759	410698

Tableau 4.20. Comparaison des méthodes utilisées.

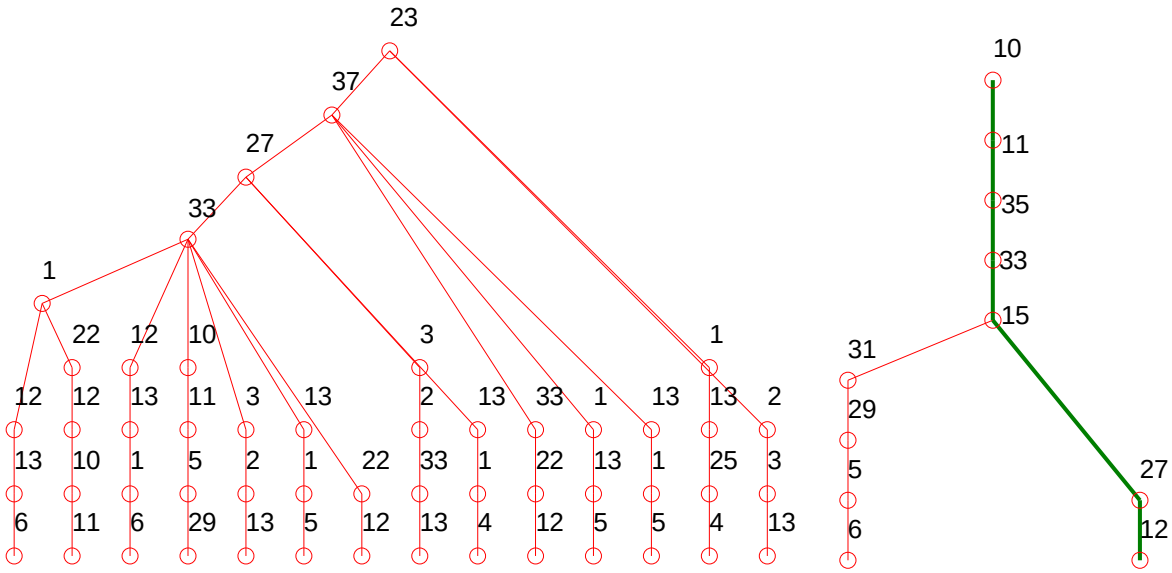


Figure 4.20**.** Arbres de défaillance obtenus avec la méthode des branches et bornes.

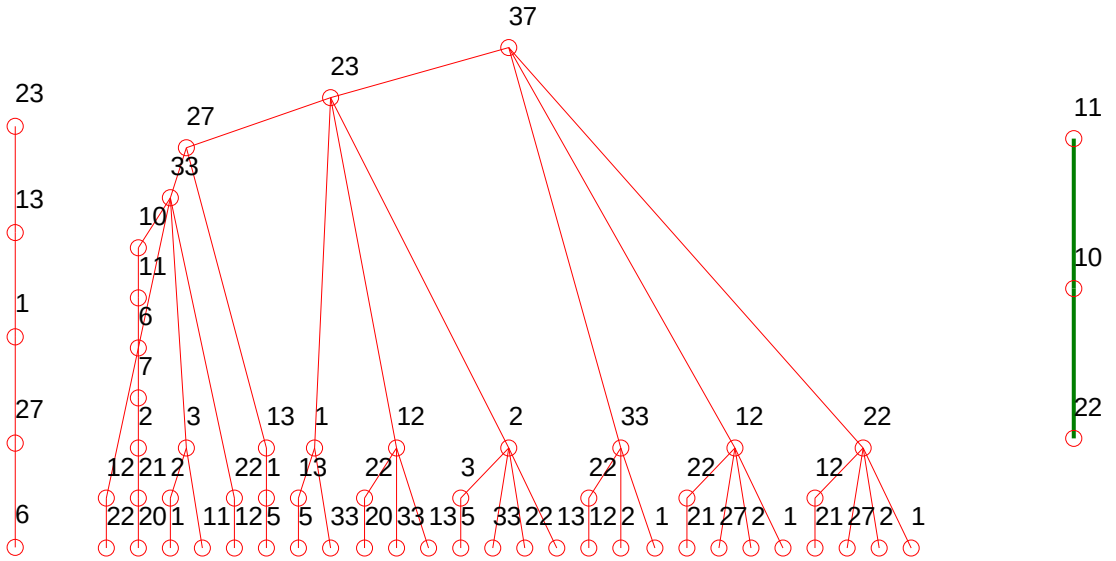


Figure 4.21. Arbres de défaillance obtenus avec la méthode du β-unzipping.

Pour ce cas d'étude, on remarque que la méthode des branches et bornes identifie beaucoup plus de chemins dominants que la méthode du β-unzipping avec bornage. Les deux méthodes utilisées identifient deux chemins de défaillance le plus probable différents et modélisés en vert dans les Figures 4.20 et 4.21. Le chemin 10→11→35→33→15→27→12 identifié par la méthode des branches et bornes est celui avec la plus grande probabilité à la fois à l'échelle locale et à l'échelle globale. C'est donc le chemin de référence cherché.

L'écart entre les résultats obtenus par les deux méthodes vient du fait que la méthode du β-unzipping avec bornage dépend du choix de l'intervalle critique à chaque étape d'analyse ou étape de défaillance (cf. paragraphe 3.2.2). Par conséquent, un intervalle critique trop faible peut entraîner l'élimination de chemins de défaillance significatifs comme c'est le cas dans cet exemple.

Pour diminuer les temps de calcul, il est maintenant supposé que la longueur du chemin de ruine ne peut excéder quatre éléments. L'approche par l'intérieur est utilisée pour quantifier la robustesse structurale. Les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau 4.21 et les arbres de défaillance correspondants sont représentés à la Figure 4.22. Il est noté que le fait de limiter les chemins de défaillance à quatre éléments a un impact significatif sur le niveau de la robustesse (en comparant les valeurs de $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ des Tableaux 4.20 et 4.21).

Méthodes utilisées	Branches et bornes	β-unzipping	β-unzipping avec bornage
Nombre de chemins dominants identifiés	3	4350	3
Mécanisme le plus probable	23-37-11-10	23-37-11-10	23-37-11-10
P_{locale}	$1{,}19.10^{-1}$	$1{,}19.10^{-1}$	$1{,}19.10^{-1}$
$P_{globale}$	$7{,}0183.10^{-5}$	$7{,}0183.10^{-5}$	$7{,}0183.10^{-5}$
$I_{r,1}$	1,00	1,00	1,00
$I_{r,2}$ $(a=100)$	0,94	0,94	0,94
Temps de calcul (s)	66120	157080	67920

Tableau 4.21. Comparaison des méthodes utilisées.

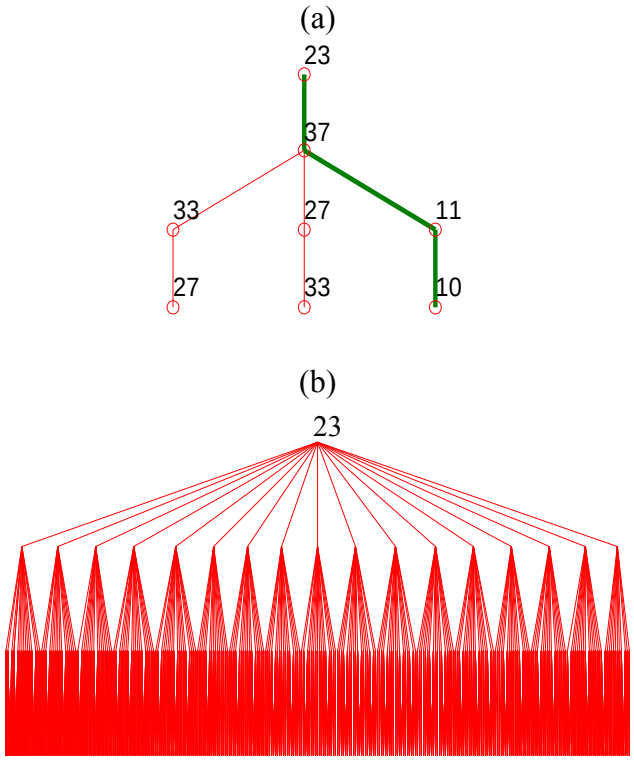
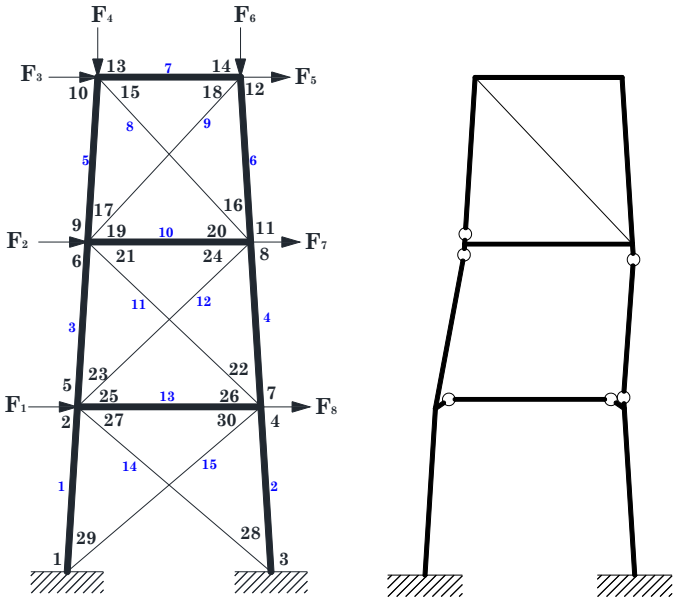


Figure 4.22. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes et du β-unzipping avec bornage et (b) du β-unzipping de l'exemple étudié.

4.3.3 Etude d'une tour contreventée

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la tour représentée dans la Figure 4.23a soumise à l'action de huit forces. L'ossature est constituée d'éléments poutre et les contreventements en X sont constitués d'éléments barres. Le comportement est supposé élastique parfaitement plastique, avec un module d'Young E et une limite élastique f_y égales à 210 GPa et 276 MPa, respectivement.



(a) (b)

Figure 4.23. (a) structure étudiée, (b) mécanisme le plus probable correspondant.

Les moments résistants des sections des éléments et les charges sont supposés être des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale dont les paramètres sont détaillés dans le Tableau 4.22. Les propriétés des éléments et les caractéristiques des matériaux sont illustrées dans le Tableau 4.23 (Thoft-Christensen & Murotsu 1984). En particulier, les correspondances entre les numéros d'éléments, les extrémités des nœuds et les moments plastiques résistants y sont en détaillés. Dans cet exemple particulier, la probabilité de chaque chemin de défaillance a été calculée en supposant que les états limites mobilisés le long du chemin de défaillance sont indépendants.

Variables	loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
M_1	Normale	2536,6 kN.m	15%
M_2		1467,9 kN.m	15%
M_3		2062,3 kN.m	15%
M_4		20,69 kN.m	15%
M_5		2062,3 kN.m	15%
M_6		39,63 kN.m	15%
M_7		2174,9 kN.m	15%
M_8		183,5 kN.m	15%
F_1		50 kN	30%
F_2		80 kN	30%
F_3		120 kN	30%
F_4		2490 kN	30%
F_5		100 kN	30%
F_6		2490 kN	30%
F_7		70 kN	30%
F_8		50 kN	30%

Tableau 4.22. Statistiques des variables aléatoires pour l'exemple étudié.

	Numéro des éléments	Numéros d'extrémité des éléments	Section d'élément A (m^2)	Moment d'inertie I (m^4)	Espérance du moment plastique résistant $M_{pl,r}$ (kN.m)
1	1 2	1 ;2 3 ;4	$5{,}37.10^{-2}$	$2{,}188.10^{-3}$	M_1
2	3 4 5 6	5 ;6 7 ;8 9 ;10 11 ;12	$3{,}73.10^{-2}$	$1{,}055.10^{-3}$	M_2
3	7	13 ;14	$4{,}68.10^{-2}$	$1{,}660.10^{-3}$	M_3
4	8 9	15 ;16 17 ;18	$2{,}10.10^{-3}$	-	M_4
5	10	19 ;20	$4{,}68.10^{-2}$	$1{,}660.10^{-3}$	M_5
6	11 12	21 ;22 23 ;24	$3{,}40.10^{-3}$	-	M_6
7	13	25 ;26	$4{,}85.10^{-2}$	$1{,}782.10^{-3}$	M_7
8	14 15	27 ;28 29 ;30	$9{,}30.10^{-3}$	-	M_8

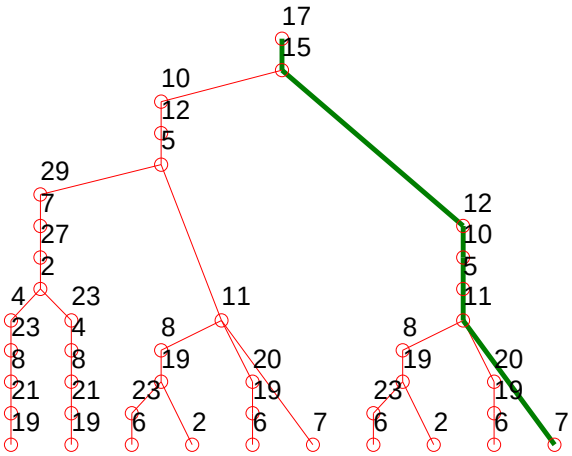
Tableau 4.23. Caractéristiques géométriques et propriétés des matériaux.

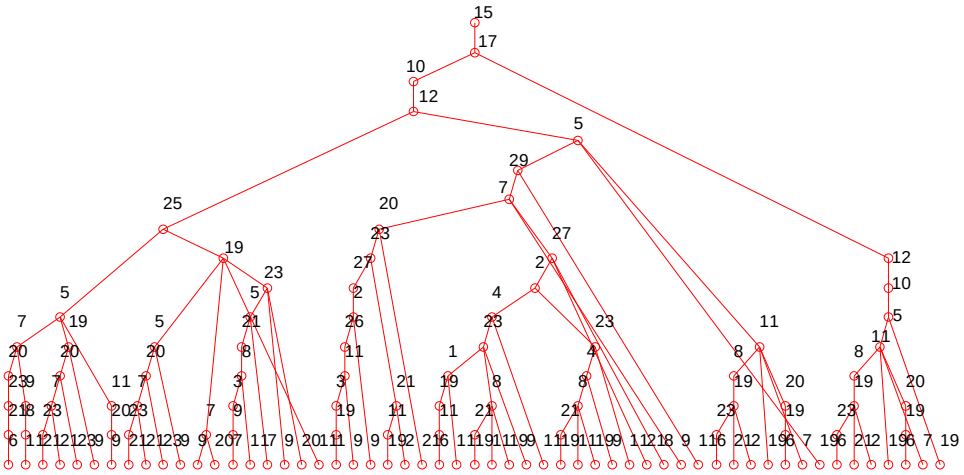
La méthode des branches et bornes et celle du β-unzipping avec bornage sont utilisées pour identifier le chemin le plus probable afin d'en déduire les indices de robustesse. Les résultats sont répertoriés dans le Tableau 4.24 et les chemins de défaillance dominants sont illustrés dans la Figure 4.24. On peut remarquer que les chemins de défaillance les plus probables identifiés par les deux méthodes sont différents. Par ailleurs, le chemin identifié par la méthode des branches et bornes est associé à l'indice de robustesse le plus faible.

Méthodes utilisées	Branches et bornes	β-unzipping avec bornage
Nombre de chemins dominants identifiés	16	23
Mécanisme le plus probable	23-21-8-9-6-17-29-7-25-27-26	17-15-12-10-5-11-20-19-6
$P_{f(locale)}$	$2{,}75.10^{-8}$	$4{,}23.10^{-7}$
$P_{f(globale)}$	$2{,}71.10^{-8}$	$2{,}68.10^{-8}$
$I_{r,1}$	0,02	0,94
$I_{r,2}$ $(a=100)$	0,01	0,14
Temps de calcul (s)	270445	583572

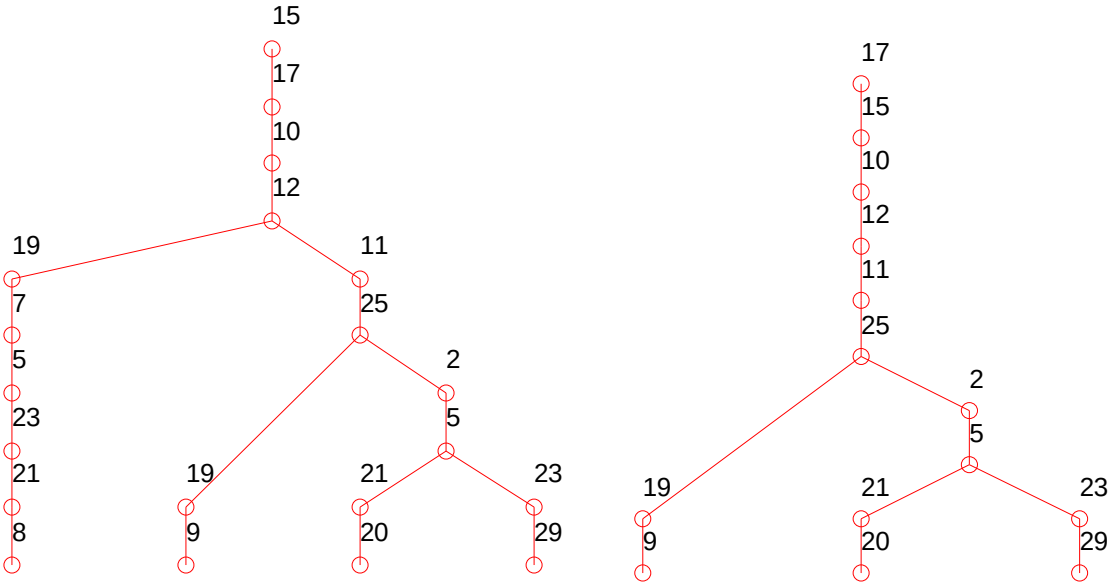
Tableau 4.24. Comparaison des méthodes utilisées.

(a)





(b)



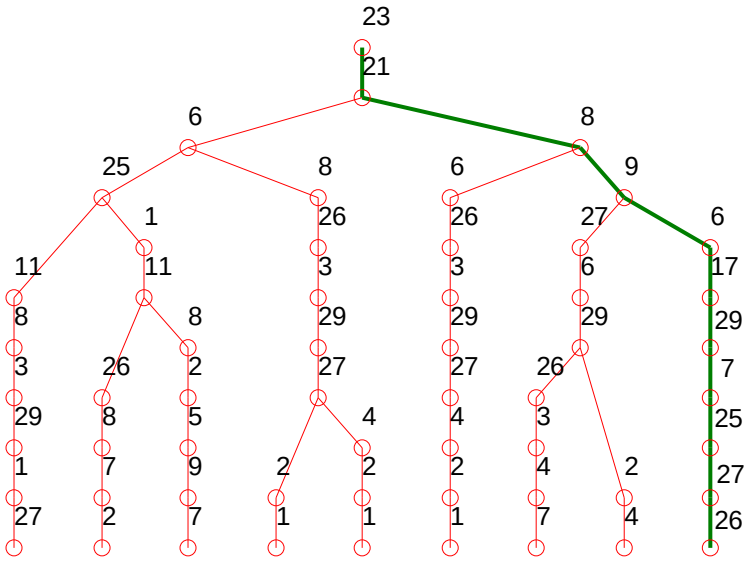


Figure 4.24. Arbres de défaillance des méthodes (a) du β-unzipping avec bornage et (b) des branches et bornes pour l'exemple étudié.

Dans la recherche des mécanismes de défaillance dominants, Thoft-Christensen & Murotsu (1986) suggèrent que les analyses au-delà du niveau 4 de défaillance ne sont pas significatives pour la recherche de la probabilité de défaillance du système structural. Pour cela, cette structure a été analysée de nouveau en supposant que la longueur du chemin de ruine ne peut pas excéder quatre éléments. En utilisant l'approche par l'intérieur pour une quantification de la robustesse structurale, les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 4.25.

Méthodes utilisées	Branches et bornes	β-unzipping	β-unzipping avec bornage
Nombre de chemins dominants identifiés	2	1420	2
Mécanisme le plus probable	17-15-10-12	17-15-10-12	17-15-10-12
P_{locale}	$4{,}23.10^{-7}$	$4{,}23.10^{-7}$	$4{,}23.10^{-7}$
$P_{globale}$	$4{,}15.10^{-7}$	$4{,}15.10^{-7}$	$4{,}15.10^{-7}$
$I_{r,1}$	0,02	0,02	0,02
$I_{r,2}$ $(a=100)$	0,01	0,01	0,01
Temps de calcul (s)	82339	14473	48151

Tableau 4.25. Comparaison des méthodes utilisées lorsque la longueur du chemin de ruine est limitée à quatre éléments.

Les arbres de défaillance correspondants sont représentés dans la Figure 4.25. Le Tableau 4.25 montre que la méthode du β-unzipping permet d'identifier 1420 chemins de défaillance dominants, là où les méthodes des branches et bornes et du β-unzipping avec bornage, beaucoup plus sélectives, n'en identifient que deux. En s'arrêtant à quatre éléments défaillants dans la séquence de ruine, les trois méthodes permettent d'identifier le même chemin de ruine et donc le

même indice de robustesse $I_{r,1} = 0,02$, qui est relativement proche de celui identifié par la méthode des branches et bornes dans le Tableau 4.24, lorsqu'il n'y a pas de restriction sur le nombre d'éléments dans le chemin de défaillance. Il convient cependant d'être prudent sur les conclusions associées à ce type d'observation, dans un contexte où des chemins, même longs, peuvent mener à des évènements aux conséquences disproportionnées.

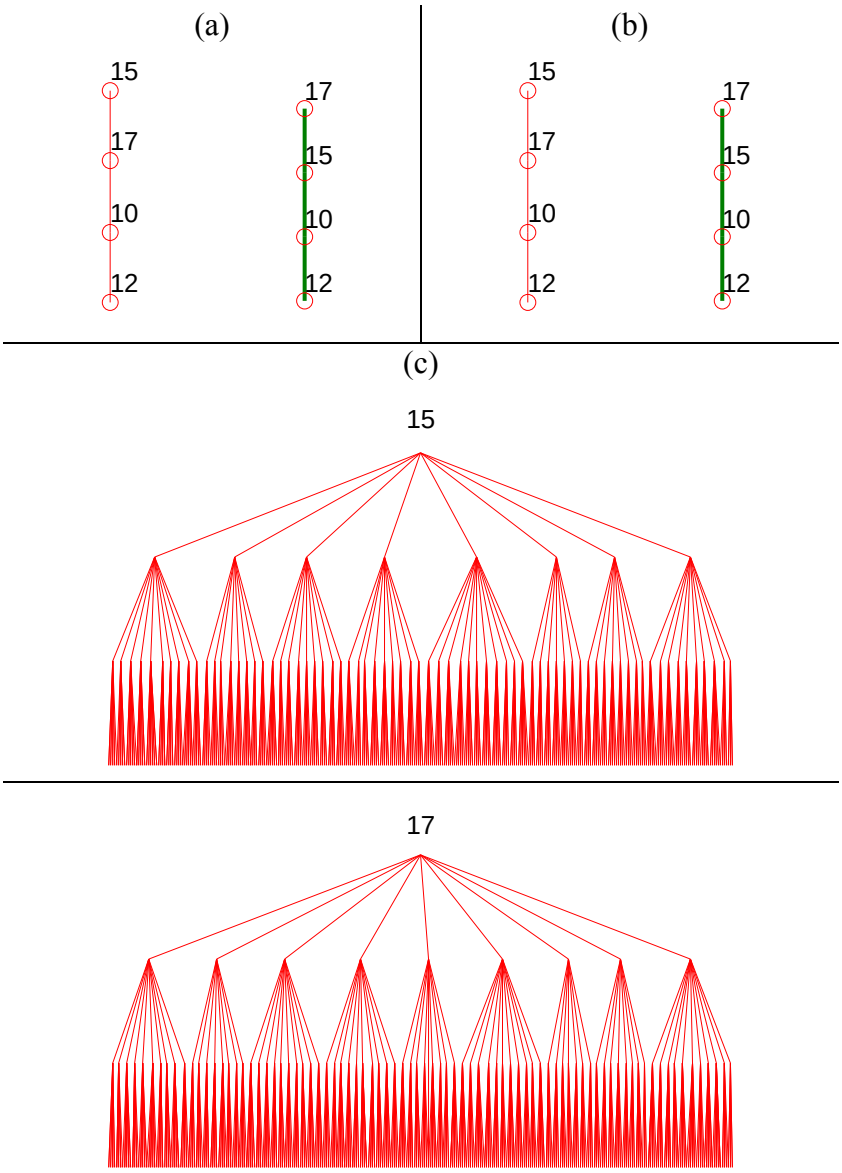


Figure 4.25. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping pour l'exemple étudié.

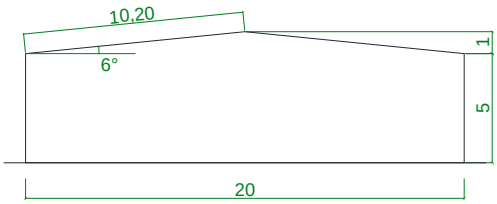
4.3.4 Etude d'un bâtiment sous sollicitation climatique (neige et vent)

4.3.4.1 Contexte de l'étude

Le concept de robustesse structurale peut s'appliquer à des actions accidentelles non identifiées de manière générale, mais peut également s'appliquer à des actions variables identifiées telles que l'action de la neige ou du vent. Dans l'objectif de quantifier la robustesse d'une structure

sous sollicitation climatique, un bâtiment fermé (Figure 4.26) constitué de portiques encastrés en pieds et espacés tous les 8 m est considéré. Les traverses et les colonnes des portiques ont été dimensionnées pour une section IPE 330 dont les caractéristiques sont présentées dans le Tableau 4.26.





(a) (b)

Figure 4.26. (a) bâtiment considéré, (b) dimensions sur pignon.

Dimensions (mm)					Section (cm^2)	Dimensions de construction (mm)		Propriétés de section			
								Axe fort y-y		Axe faible z-z	
h	b	t_w	t_f	r	A	h_i	d	I_y (cm^4)	$W_{pl,y}$ (cm^3)	I_z (cm^4)	$W_{pl,z}$ (cm^3)
330	160	7,5	11,5	18	62,60	307	271	11 770	804,30	788,10	153,70

Tableau 4.26. Caractéristiques de section IPE 330 (cf. Figure 3.20).

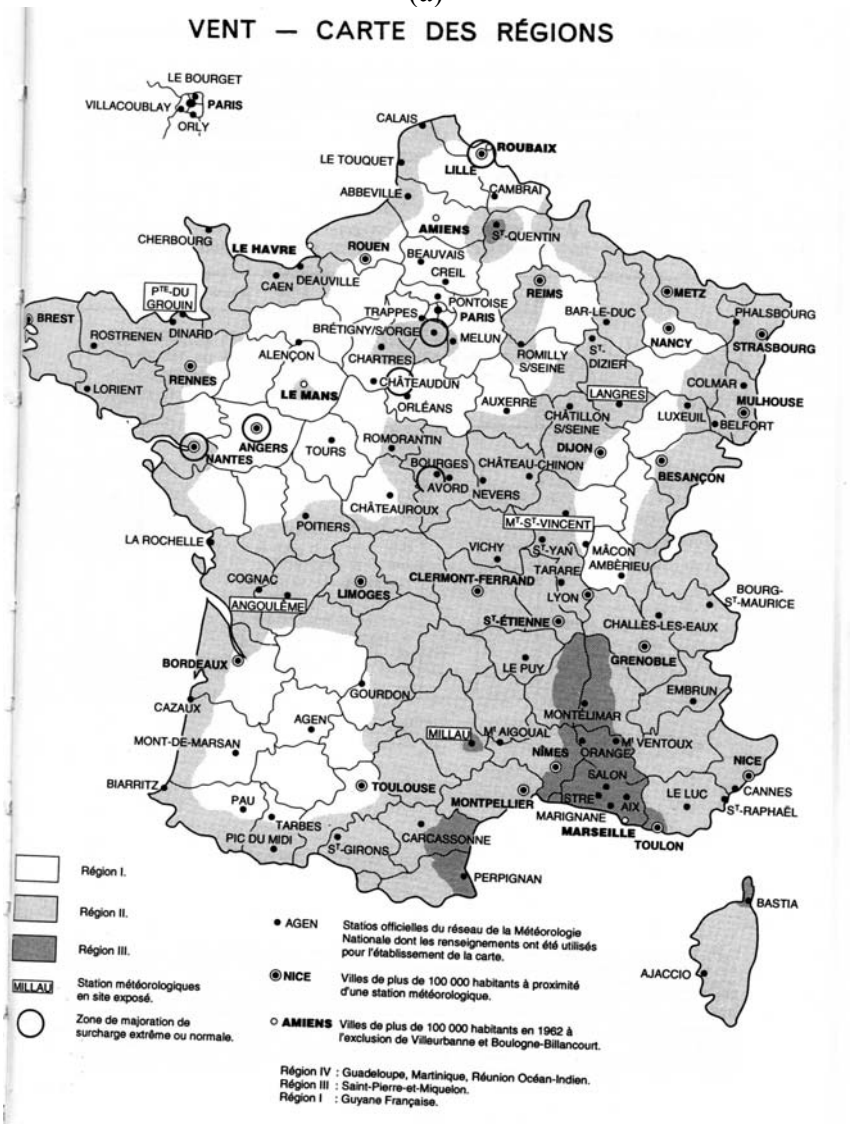
Trois situations sont considérées dans ce paragraphe suivant la localisation de la structure en région 1, 2, ou 3 au sens de la classification NV65 (Figure 4.27).

Les valeurs des pressions dynamiques de base normale en fonction des régions considérées sont détaillées dans le Tableau 4.27.

Région de vent NV65 1965	Pression dynamique de base (daN/m^2)
Région 1	50
Région 2	70
Région 3	90

Tableau 4.27. Pressions dynamiques normales (ICAB 2012).

(a)


VENT — CARTE DES RÉGIONS
LE BOURGET
VILLACOUBLAY
PARIS
ORLY
CALAIS
ROUBAIX
LE TOUQUET
LILLE
CAMBRAI
ABBEVILLE
AMIENS
ST-QUENTIN
CHERBOURG
LE HAVRE
ROUEN
BEAUVAIS
CREIL
CAEN
DEAUVILLE
PTE-DU GROUIN
REIMS
METZ
BREST
TRAPPES
PONTOISE
PARIS
BAR-LE-DUC
PHALSBOURG
ROSTRENEN
DINARD
BRÉTIGNY/S/ORGE
MELUN
NANCY
STRASBOURG
ALENÇON
CHARTRES
ROMILLY S/SEINE
ST-DIZIER
RENNES
LORIENT
LE MANS
CHÂTEAUDUN
LANGRES
COLMAR
MULHOUSE
ORLÉANS
AUXERRE
CHÂTILLON S/SEINE
LUXEUIL
BELFORT
ANGERS
NANTES
TOURS
ROMORANTIN
DIJON
BOURGES
CHÂTEAU-CHINON
BESANÇON
AVORD
NEVERS
CHÂTEAUROUX
M^T-S^T-VINCENT
POITIERS
LA ROCHELLE
VICHY
ST-YAN
MÂCON
AMBÉRIEU
TARARE
COGNAC
CLERMONT-FERRAND
LYON
BOURG-ST-MAURICE
ANGOULÊME
LIMOGES
ST-ÉTIENNE
CHALLES-LES-EAUX
BORDEAUX
LE PUY
GRENOBLE
GOURDON
EMBRUN
CAZAUX
AGEN
MONTÉLIMAR
MILLAU
M^t AIGOUAL
M^t VENTOUX
MONT-DE-MARSAN
NÎMES
ORANGE
NICE
SALON
BIARRITZ
TOULOUSE
LE LUC
CANNES
PAU
MONTPELLIER
STRE
AIX
ST-RAPHAËL
TARBES
MARIGNANE
MARSEILLE
PIC DU MIDI
CARCASSONNE
TOULON
ST-GIRONS
PERPIGNAN
BASTIA
AJACCIO
Région I.
Région II.
Région III.
MILLAU
Station météorologiques en site exposé.
Zone de majoration de surcharge extrême ou normale.
• AGEN
Statios officielles du réseau de la Météorologie Nationale dont les renseignements ont été utilisés pour l'établissement de la carte.
◉ NICE
Villes de plus de 100 000 habitants à proximité d'une station météorologique.
○ AMIENS
Villes de plus de 100 000 habitants en 1962 à l'exclusion de Villeurbanne et Boulogne-Billancourt.
Région IV : Guadeloupe, Martinique, Réunion Océan-Indien.
Région III : Saint-Pierre-et-Miquelon.
Région I : Guyane Française.

(b)



Figure 4.27. (a) Carte des régions de vent, (b) carte des régions de neige (NV65 1965).

4.3.4.2 Localisation du bâtiment dans la région 2

La région II est la première localisation étudiée pour cet exemple. Elle correspond à une situation intermédiaire du point de vue de la pression dynamique de base normale (cf. Tableau 4.27). Cette première localisation est donc utilisée pour détailler l'ensemble des calculs permettant de déterminer des indices de robustesse.

4.3.4.2.1 Modélisation des actions de chargement

Les actions à considérer pour cette région sont fournies dans le Tableau 4.28 (Tavakoli 2003).

Charges permanentes G (daN/m^2)	Neige S (daN/m^2)	Vent W (daN/m^2)
25	45	70

Tableau 4.28. Actions à considérer pour le bâtiment situé dans la région 2.

Les valeurs des coefficients des actions extérieures C_e et intérieures C_i, calculés conformément aux règles « *Neige et Vent* », en fonction de la géométrie du bâtiment sont regroupées dans le Tableau 4.29.

Actions intérieures (C_i)		Actions extérieures (C_e)		
Dépression intérieure	Surpression intérieure	Toiture	Façade au vent	Façade sous le vent
-0.20	+0,40	-0,40	+0,80	-0,40

Tableau 4.29. Coefficients des actions extérieures et intérieures.

Sachant que le poids propre des traverses des portiques est estimé à 10 daN/ml, on peut en déduire les actions équivalentes à considérer dans l'analyse structurale. Les charges permanentes par unité de longueur s'expriment de la façon suivante :

$$G = 8 \times (25 + 10) = 280 \text{ daN/ml} \tag{4.1}$$

De même l'action de la neige normale par unité de longueur s'exprime comme ci-après :

$$S = 45 \times 8 = 360 \text{ daN/ml} \tag{4.2}$$

La structure étudiée soumise à l'action simultanée de la neige S et des charges permanentes G est modélisée à la Figure 4.28.

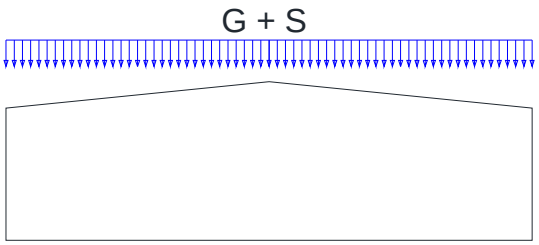


Figure 4.28. Charges permanentes + neige.

L'action du vent s'exprime comme indiqué ci-dessous :

$$W = \left(C_e - C_i\right) \times \delta \times S \times W \text{ daN}$$
$$W = \left(C_e - C_i\right) \times \delta \times l \times W \text{ daN/ml} \tag{4.3}$$

où δ et S sont respectivement le coefficient de réduction de pression dynamique, et la surface maître couple (projection de la surface considérée sur un plan normal à la direction du vent), S étant égal à $l \times h$ pour le cas particulier d'une surface rectangulaire.

Dans cette étude, trois cas de configuration de l'action du vent sont considérés :

→La configuration « Vent I » (Figure 4.29), est celle où le vent agit sur le long pan avec une surpression intérieure.

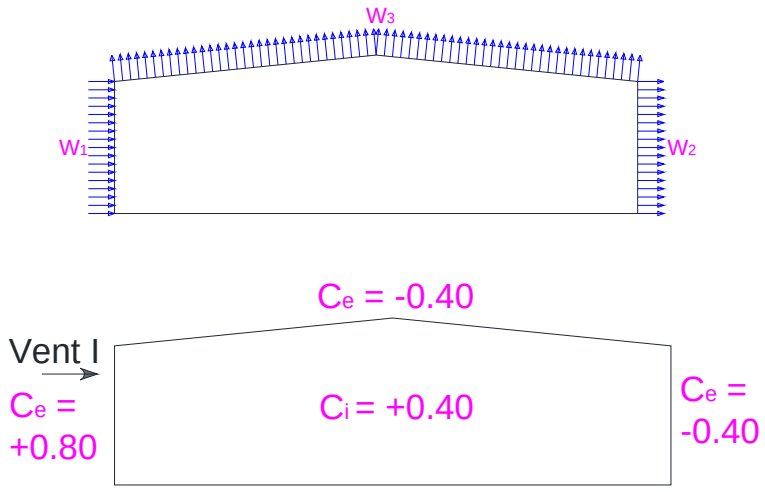


Figure 4.29. Configuration du vent I.

Le coefficient de pression dynamique déterminé en fonction des dimensions du bâtiment vaut $\delta = 0.84$ (Figure 4.30). La surface maître couple au vent, c'est-à-dire la projection de la surface considérée sur un plan normal à la direction du vent est $S = 8 \times 5 = 40\text{m}^2$.

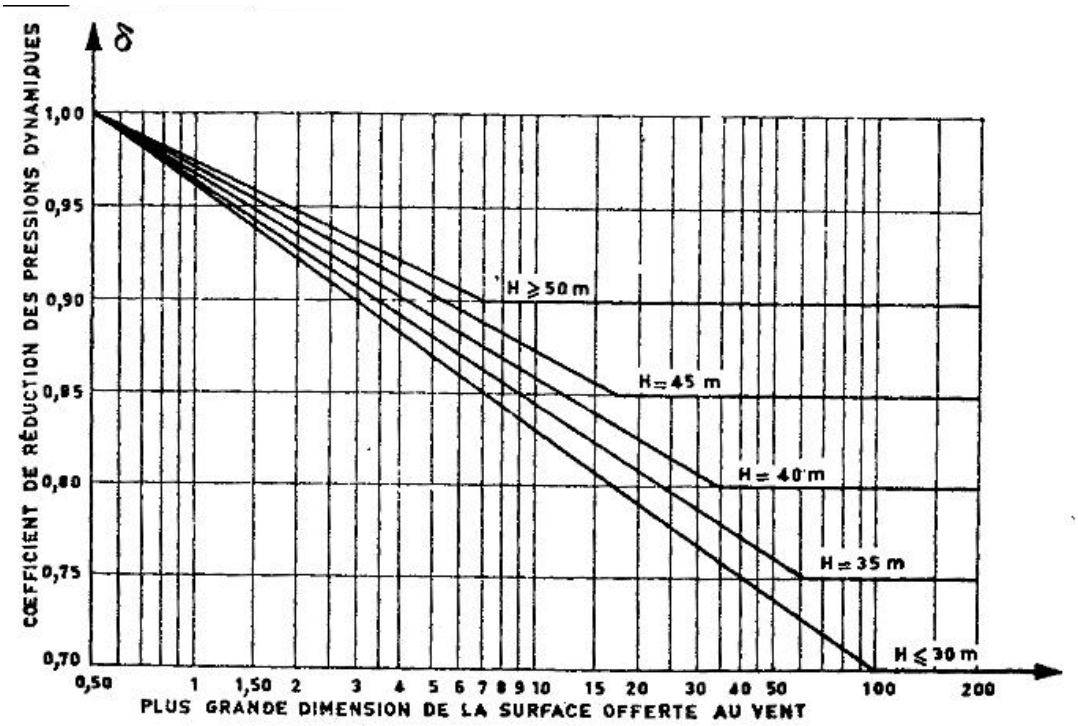


Figure 4.30. Coefficient de réduction δ des pressions dynamiques pour les grandes surfaces (Freelem 2012).

Les actions du vent W_1, W_2, et W_3 (Figure 4.29) s'expriment donc par :

$$W_1 \text{ (poteau au vent)} = 70\times(0{,}80\text{-}0{,}40)\times8\times0{,}84 = 188 \text{ daN/ml} \quad (4.4)$$

$$W_2 \text{ (poteau sous le vent)} = 70\times(-0{,}40\text{-}0{,}40)\times8\times0{,}84 = 376 \text{ daN/ml} \quad (4.5)$$

$$W_3 \text{ (traverse)} = 70\times(-0{,}40\text{-}0{,}40)\times8\times0{,}84 = 376 \text{ daN/ml} \quad (4.6)$$

→La configuration « Vent II » (Figure 4.31) est celle où le vent agit comme à la configuration « Vent I » sur le long pan mais cette fois avec une dépression intérieure.

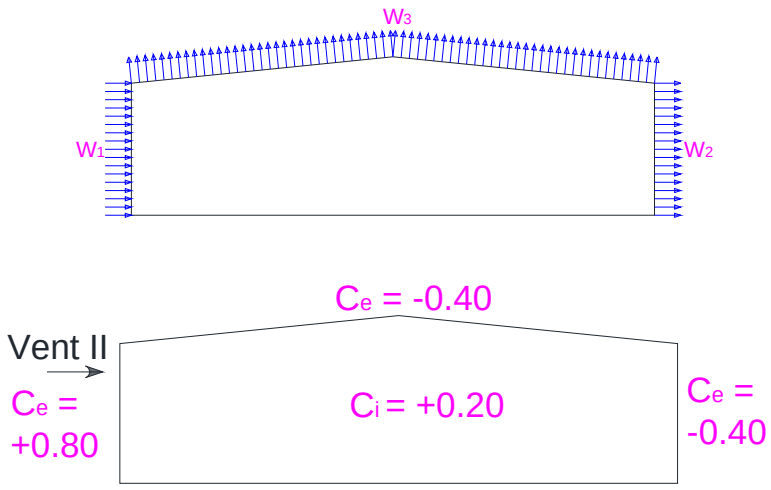


Figure 4.31. Configuration du vent II.

Les actions du vent W_1, W_2, et W_3 à considérer sont :

$$W_1 \text{ (poteau au vent)} = 70\times(0{,}80+0{,}20)\times 8\times 0{,}84 = 470 \text{ daN/ml} \quad (4.7)$$

$$W_2 \text{ (poteau sous le vent)} = 70\times(-0{,}40+0{,}20)\times 8\times 0{,}84 = 94 \text{ daN/ml} \quad (4.8)$$

$$W_3 \text{ (traverse)} = 70\times(-0{,}40+0{,}20)\times 8\times 0{,}84 = 94 \text{ daN/ml} \quad (4.9)$$

→La dernière configuration d'actions de vent (« Vent III ») à considérer est celle pour laquelle le vent agit sur le pignon avec une surpression intérieure. Cette configuration est représentée à la Figure 4.32**.**

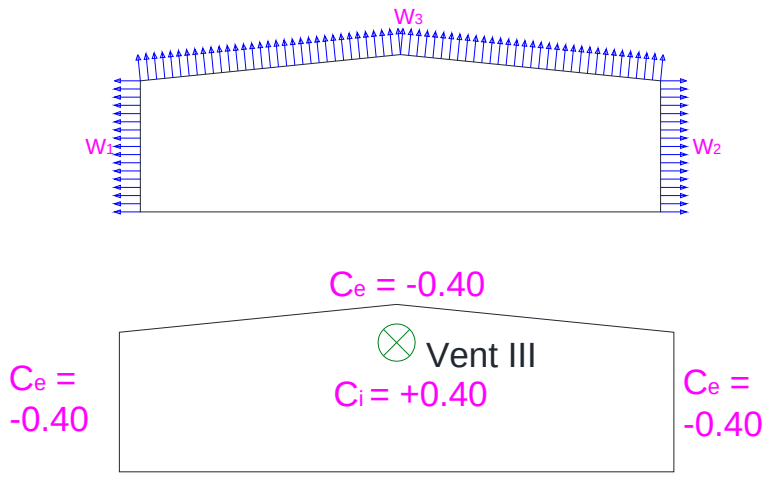


Figure 4.32. Configuration du vent III.

Le coefficient de pression dynamique déterminé en fonction des dimensions du bâtiment vaut $\delta = 0.78$. La surface maître couple au vent est $S = 20,40\times 6 = 122,40$ m^2.

Les actions du vent W_1, W_2, et W_3 à considérer s'expriment donc comme indiqué ci-dessous :

$$W_1 \text{ (poteau 1 sous le vent)} = 70\times(-0{,}40\text{-}0{,}40)\times6\times0{,}78 = 262\text{daN/ml} \quad (4.10)$$

$$W_2 \text{ (poteau 2 sous le vent)} = 70\times(-0{,}40\text{-}0{,}40)\times6\times0{,}78 = 262\text{daN/ml} \quad (4.11)$$

$$W_3 \text{ (traverse)} = 70\times(-0{,}40\text{-}0{,}40)\times6\times0{,}78 = 262\text{daN/ml} \quad (4.12)$$

La structure étudiée est finalement représentée à la Figure 4.33 en dissociant les configurations de vent I, II et III. Les statistiques des variables aléatoires indépendantes considérées sont introduites dans le Tableau 4.30.

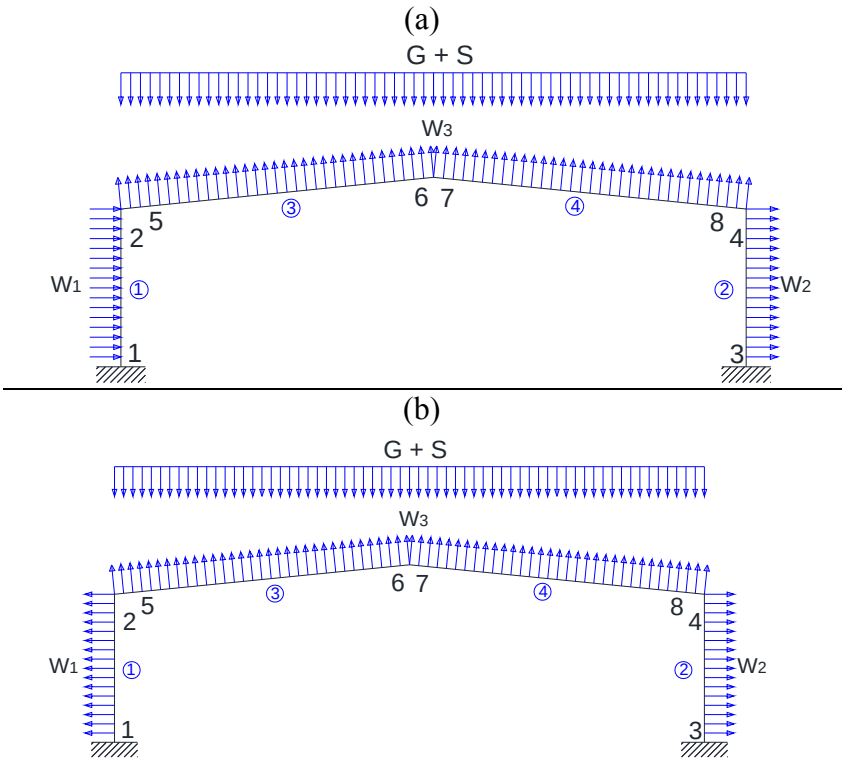


Figure 4.33. Structure étudiée pour les configurations de vents (a) I et II, et (b) III.

Variables	loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
M	Normale	221 904 Nm	5%
G		280 daN/m	30%
S		360 daN/m	30%
W_1		188 daN/m 470 daN/m 262 daN/m	30%
W_2		376 daN/m 94 daN/m 262 daN/m	30%
W_3		376 daN/m 94 daN/m 262 daN/m	30%

Tableau 4.30. Statistiques des variables aléatoires considérées.

Dans un contexte probabiliste pour l'évaluation de la robustesse structurale, plusieurs configurations prenant en compte différentes valeurs des actions G, S et W sont considérées. L'idée est de faire varier la valeur moyenne des forces appliquées en leur appliquant des coefficients de charge α_G, α_S et α_W respectivement, de sorte que la combinaison d'actions à considérer s'exprime par :

$$(\alpha_G \times G) + (\alpha_S \times S) + (\alpha_W \times W) \tag{4.13}$$

Les valeurs de α_G, α_S et α_W à considérer pour chacune des 27 analyses structurales différentes sont répertoriées dans le Tableau 4.31.

Numéro d'analyse	Valeurs des coefficients de charge		
	α_G	α_S	α_W
1	1,00	1,00	0,50
2	1,00	1,00	0,70
3	1,00	1,00	0,90
4	1,00	1,25	0,50
5	1,00	1,25	0,70
6	1,00	1,25	0,90
7	1,00	1,50	0,50
8	1,00	1,50	0,70
9	1,00	1,50	0,90
10	1,175	1,00	0,50
11	1,175	1,00	0,70
12	1,175	1,00	0,90
13	1,175	1,25	0,50
14	1,175	1,25	0,70
15	1,175	1,25	0,90
16	1,175	1,50	0,50
17	1,175	1,50	0,70
18	1,175	1,50	0,90
19	1,35	1,00	0,50
20	1,35	1,00	0,70
21	1,35	1,00	0,90
22	1,35	1,25	0,50
23	1,35	1,25	0,70
24	1,35	1,25	0,90
25	1,35	1,50	0,50
26	1,35	1,50	0,70
27	1,35	1,50	0,90

Tableau 4.31. Valeurs des coefficients de charge à chaque analyse considérée.

Il est noté que les coefficients de charge introduits à ce niveau de l'étude sont directement appliqués à la moyenne des forces concernées et non à une valeur caractéristique. L'objectif de tels coefficients est de regarder l'occurrence d'une action dont l'intensité ne serait pas anticipée dans l'état actuel des règlementations. De tels coefficients ne sont donc pas en lien avec les

coefficients partiels de sécurité qui sont couramment utilisés dans les codes se basant sur une approche semi-probabiliste (et utilisant des valeurs caractéristiques notamment).Une étude de la variation de l'indice de robustesse d'un portique de ce bâtiment en considérant la combinaison d'actions (Equation 4.13) pour chaque configuration de vent considérée ci-dessus est finalement menée.

4.3.4.2.2 Application à l'étude de la robustesse structurale

Une quantification de la robustesse structurale de la structure étudiée est effectuée dans ce paragraphe en utilisant les approches par l'intérieur introduites dans le paragraphe 3.3. Pour cela, une étude de la variation de l'indice de robustesse $I_{r,1}$ en fonction des valeurs des charges permanentes G, de l'action de la neige S et de l'action du vent W est réalisée. Les calculs sont effectués pour les trois cas de charge (Figure 4.33) correspondant chacun à une configuration de l'action du vent particulière.

Il est noté que dans le calcul des charges appliquées aux éléments de structure dans cet exemple, les charges réparties ont été rapportées aux nœuds comme indiqué dans la Figure 4.34.

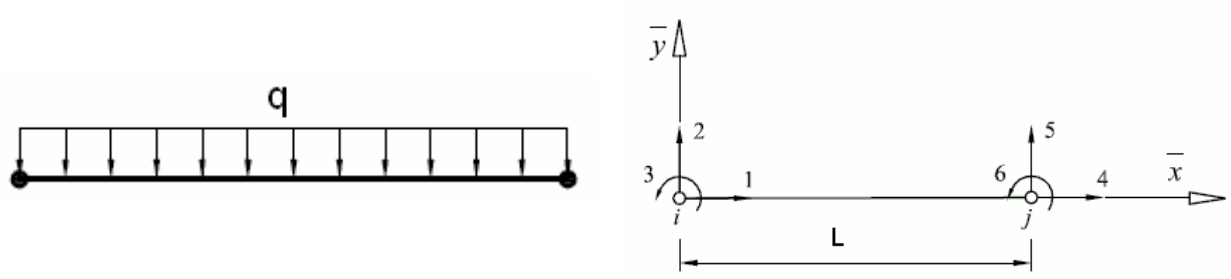


Figure 4.34. Charges sur un élément.

En effet, le vecteur de charges nodales équivalent s'exprime comme ci-dessous (Krishnamoorthy, 1987) :

$$\overline{F_r^e} = \left[0 \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \right]^t \tag{4.14}$$

Le Tableau 4. 32 représente les chemins de défaillance dominants ainsi que les valeurs maximales et minimales des indices de robustesse obtenus pour chaque cas de charge défini dans le Tableau 4.31 lorsque la méthode des branches et bornes est utilisée. Pour les deux premières configurations de vent, il est noté que le chemin de défaillance le plus probable permettant d'identifier le plus petit et le plus grand indice de robustesse sont identiques (sachant que les nœuds 6 et 7 sont confondus). Par ailleurs, il est observé que les mécanismes de défaillance dominants identifiés pour les configurations II et III de vent sont identiques (nœuds 1, 2, 4 et 6). D'autre part, la configuration du vent I est celle avec le plus faible indice de robustesse ($\min(I_{r,1}) = 0,31$ pour cette configuration) contrairement à la configuration III qui est celle avec le plus fort indice de robustesse. En effet, pour cette configuration de charge, lorsque $\alpha_G = 1$,

$\alpha_S = 1$ et $\alpha_W = 0,9$, l'analyse structurale conduit à un niveau de robustesse tendant vers 1,0 (valeur maximale).

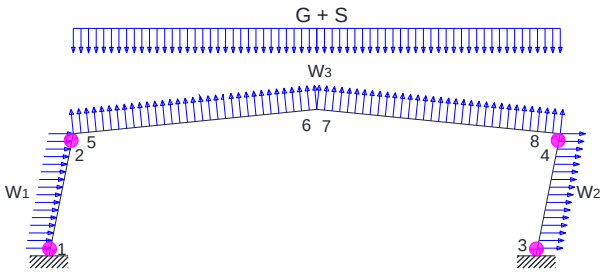
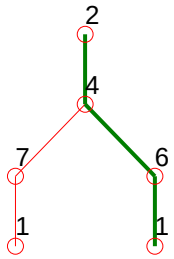
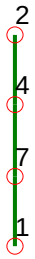
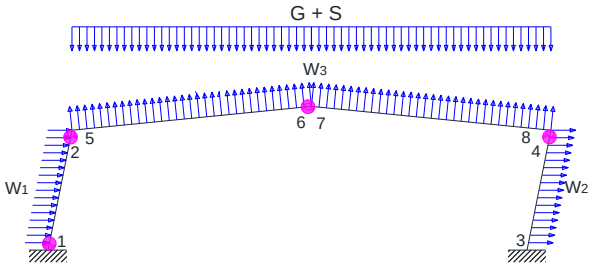
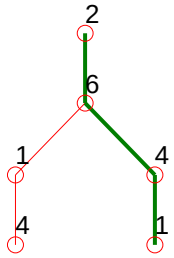
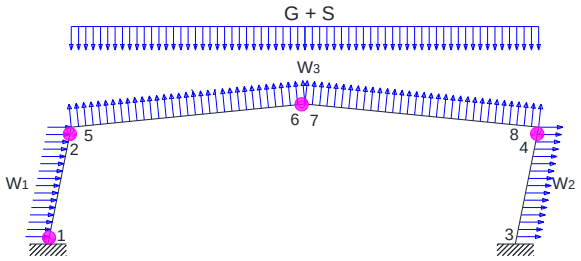
Configuration du vent	Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes		Mécanisme le plus probable correspondant
I			
	$\min(I_{r,1}) = 0,31$	$\max(I_{r,1}) \to 1$	Mécanisme 1
II			
	$\min(I_{r,1}) = 0,38$	$\max(I_{r,1}) = 0,74$	Mécanisme 2
III		-	
	$\min(I_{r,1}) = 0,89$	$\max(I_{r,1}) = 1$	Mécanisme 2

Tableau 4. 32. Arbres de défaillance correspondant aux indices de robustesse minimum et maximum pour l'ensemble configurations de vent et des cas de charge (région 2).

En complément du Tableau 4. 32, les arbres de défaillance identifiés avec les méthodes du β-unzipping et du β-unzipping avec bornage pour chaque configuration de l'action du vent, et pour le cas de charge du Tableau 4.31 conduisant à l'indice de robustesse minimum sont représentés dans les Figures 4.35 à 4.37 (le chemin le plus probable est indiqué à chaque fois en trait gras vert).

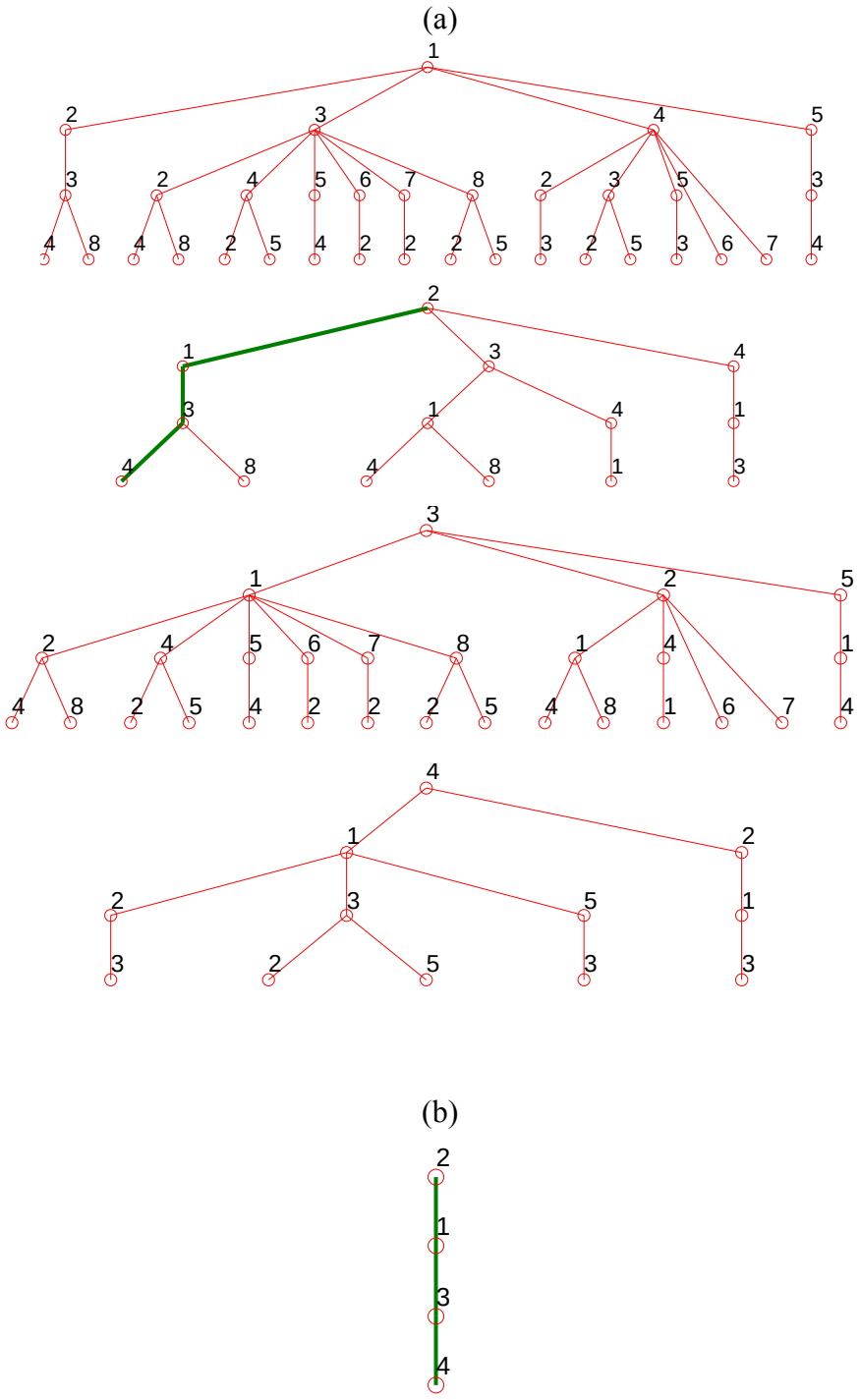


Figure 4.35. Arbres de défaillance des méthodes (a) du β-unzipping et (b) du β-unzipping avec bornage pour la configuration de vent I (région 2).

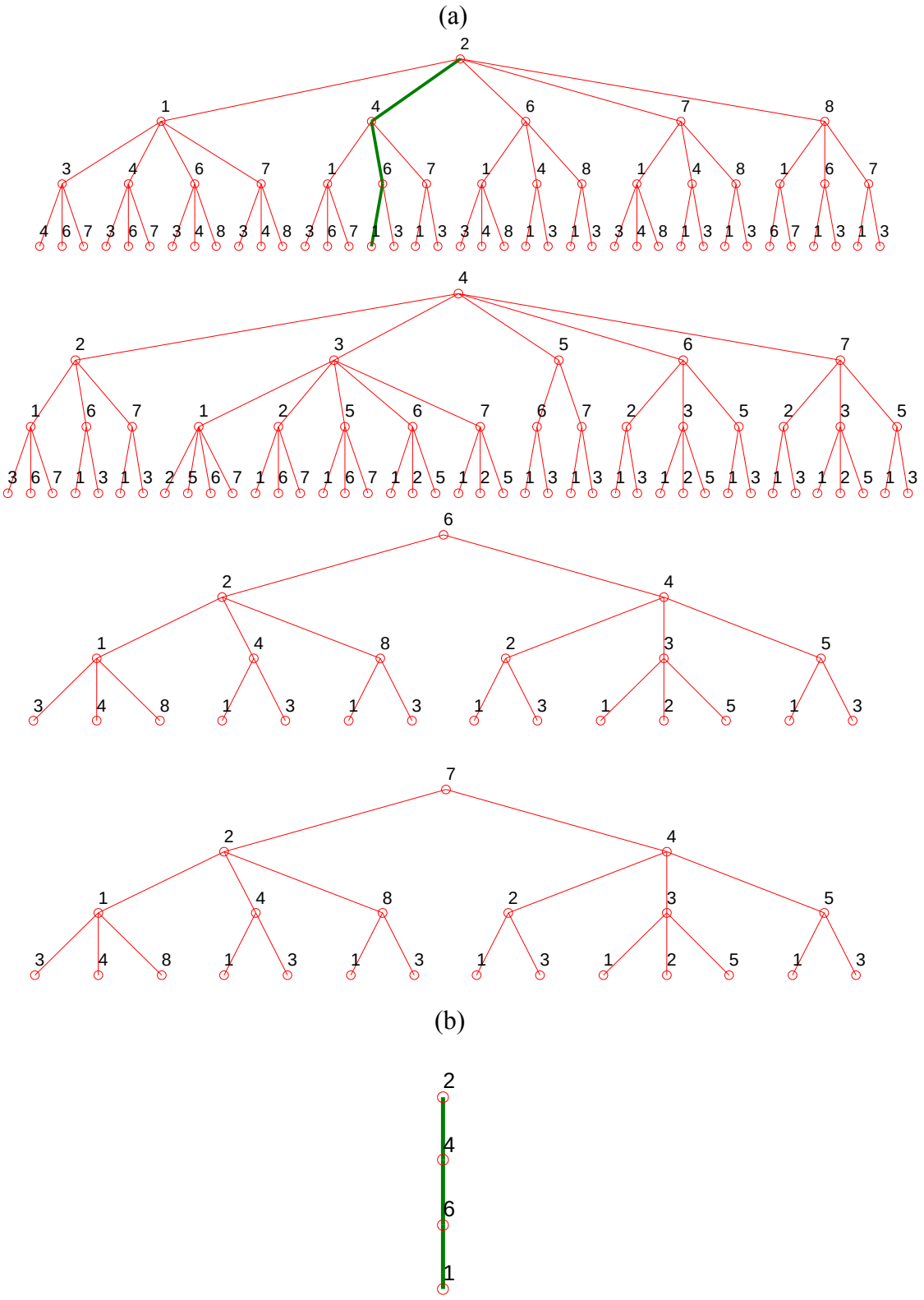
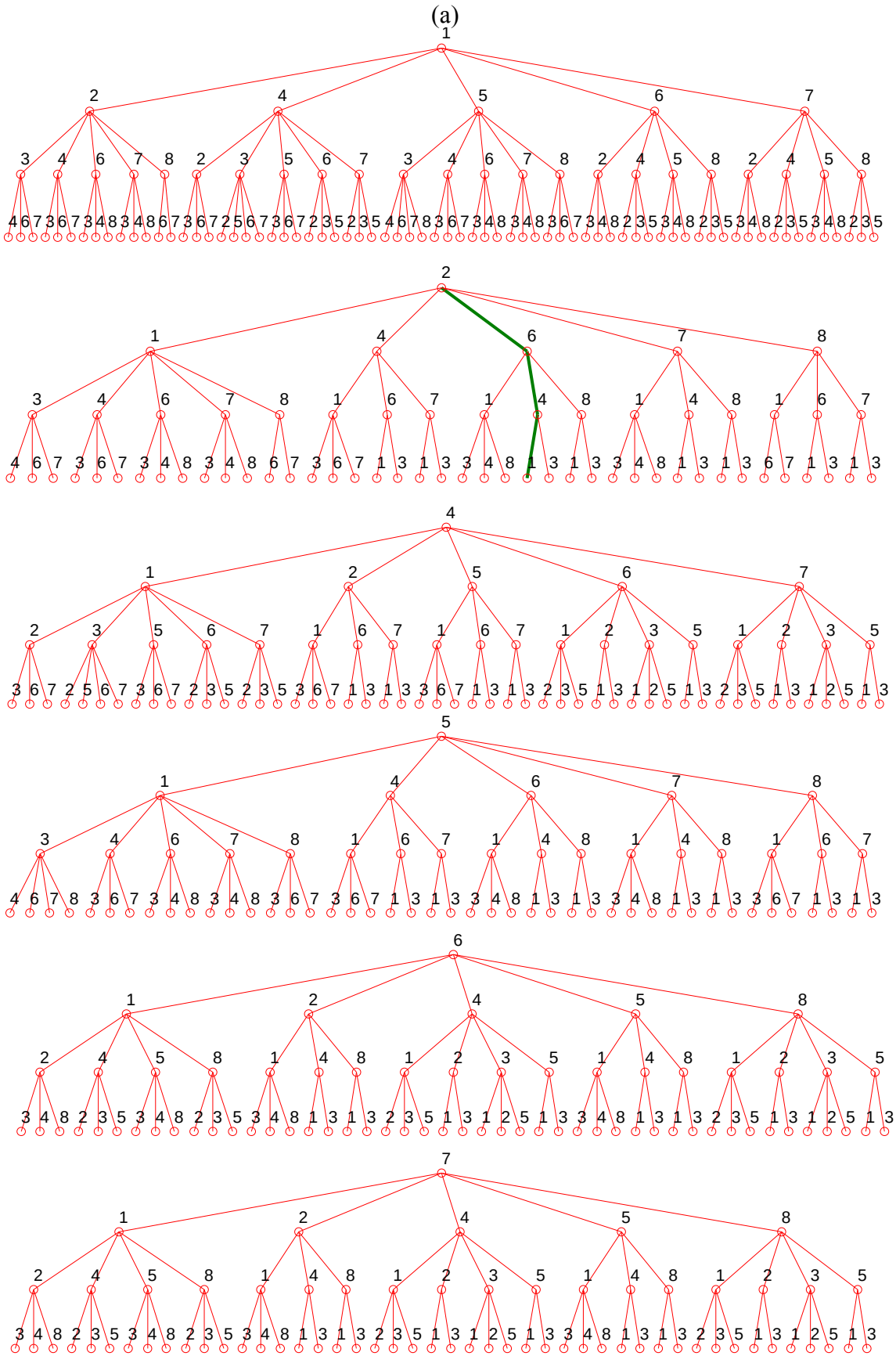


Figure 4.36. Arbres de défaillance des méthodes (a) du β-unzipping et (b) du β-unzipping avec bornage pour la configuration de vent II (région 2).


(a)

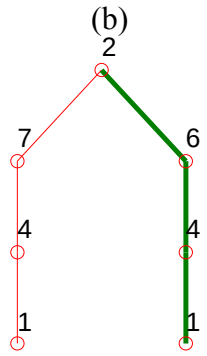


Figure 4.37. Arbres de défaillance des méthodes (a) du β-unzipping et (b) du β-unzipping avec bornage pour la configuration de vent III (région 2).

La Figure 4.38 représente les 27 indices de robustesse obtenus pour chaque cas de charge prenant en considération les trois configurations de vent possibles. Il est noté que la configuration I engendre le plus petit indice de robustesse, contrairement à la configuration III qui est associé au plus grand indice de robustesse.

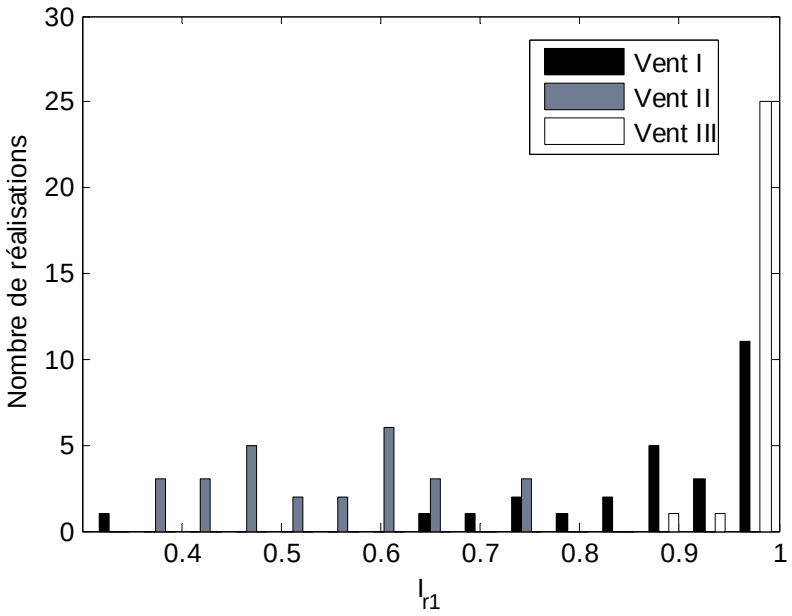


Figure 4.38. Indices de robustesse pour l'ensemble des cas de charge et des configurations de vent (région 2).

D'une manière générale, les indices de robustesse obtenus avec la configuration II du vent sont inférieurs à ceux associés avec les configurations I et III (Figure 4.38). Les cas de charge considérant la configuration II de l'action du vent sont donc dans l'ensemble les plus critiques.

Finalement, les Figures 4.39 à 4.41 représentent les indices de robustesse obtenus pour les trois configurations de vent considérées, en fonction des coefficients de G, S et W. On remarque que lorsque le coefficient α_G vaut 1 ou 1,35, l'indice de robustesse augmente avec α_W. Concrètement, plus les effets du vent au soulèvement sont forts pour équilibrer les charges permanentes, plus la structure est robuste (ce qui se traduit par une augmentation de l'indice de

robustesse dans certains des cas observés). Lorsque α_G vaut 1,175, on remarque que la même conclusion que précédemment peut être tirée sauf pour le cas particulier où $\alpha_S = 1$ et $\alpha_W = 0,9$.

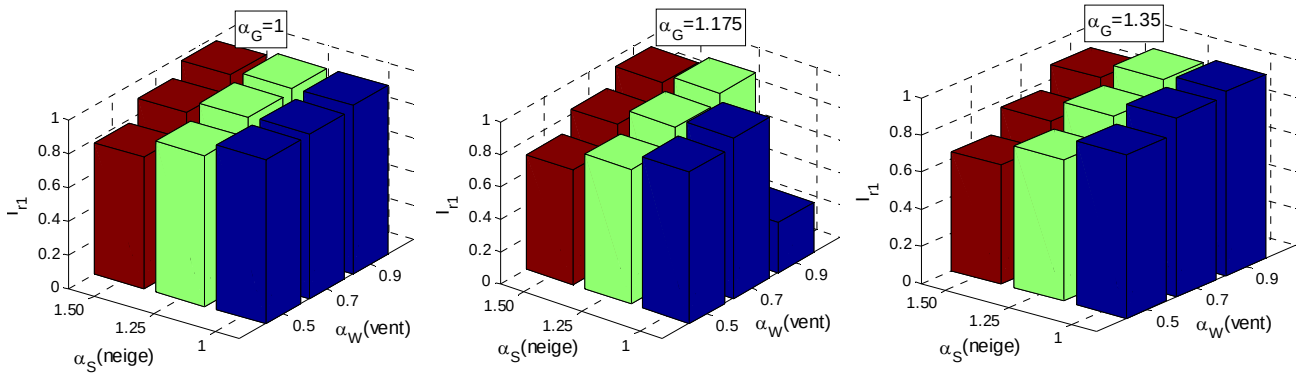


Figure 4.39. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent I (région 2).

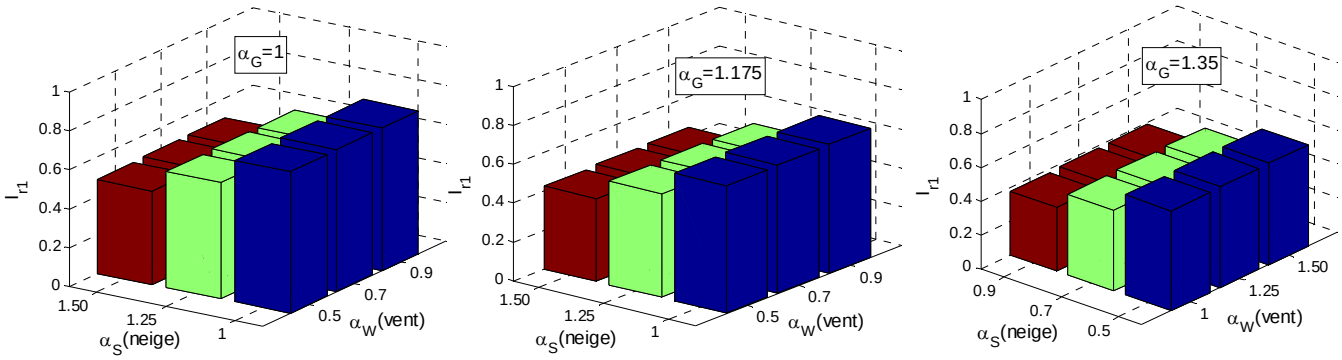


Figure 4.40. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent II (région 2).

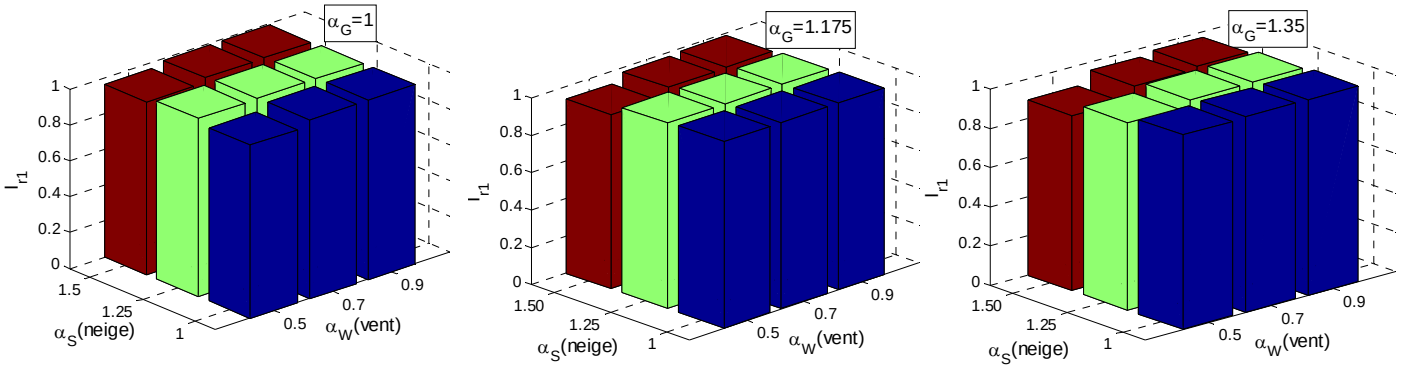


Figure 4.41. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent III (région 2).

4.3.4.3 Localisation du bâtiment dans la région 1

Dans le but d'évaluer la robustesse structurale de l'ouvrage étudié sous diverses sollicitations de pression dynamique du vent, une deuxième analyse est effectuée en supposant que le bâtiment est situé dans la région 1. Les actions à considérer sont indiquées dans le Tableau 4.33.

Charges permanentes G (daN/m^2)	Neige S (daN/m^2)	Vent W (daN/m^2)
25	45	50

Tableau 4.33. Actions à considérer pour le bâtiment situé dans la région 1.

Les trois configurations de l'action du vent définies dans le paragraphe 4.3.4.2.1 sont de nouveau considérées et les sollicitations correspondantes sont reportées dans le Tableau 4.34.

	Configuration vent I (daN/ml)	Configuration vent II (daN/ml)	Configuration vent III (daN/ml)
W_1	134,4	336	187,2
W_2	268,8	67,2	187,2
W_3	268,8	67,2	187,2

Tableau 4.34. Sollicitations à considérer pour l'action du vent dans la région 1.

Une analyse similaire à celle effectuée avec la région 2 est réalisée en tenant compte d'une nouvelle valeur de la pression dynamique de base. Les résultats obtenus avec la méthode des branches et bornes sont regroupés dans le Tableau 4.35.

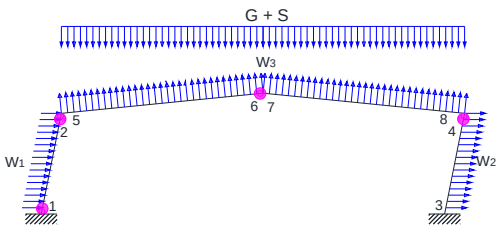
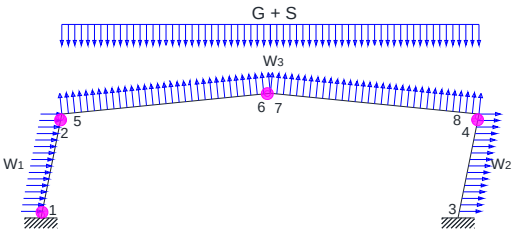
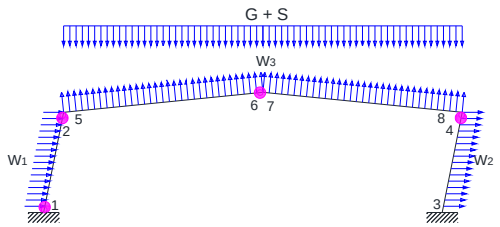
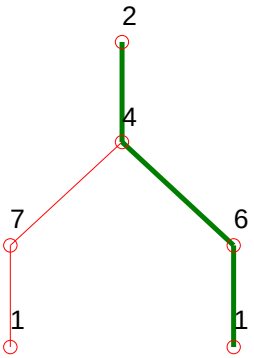
Configuration du vent	Chemin de défaillance le plus probable – extrémum des valeurs de l'indice de robustesse		Mécanisme le plus probable correspondant
I	2→4→6→1		 Mécanisme 2
	$\min(I_{r,1}) = 0,55$	$\max(I_{r,1}) = 0,99$	
II	2→4→6→1		 Mécanisme 2
	$\min(I_{r,1}) = 0,37$	$\max(I_{r,1}) = 0,73$	
III	2→7→4→1		 Mécanisme 2
	$\min(I_{r,1}) = 0,83$	$\max(I_{r,1}) \to 1$	

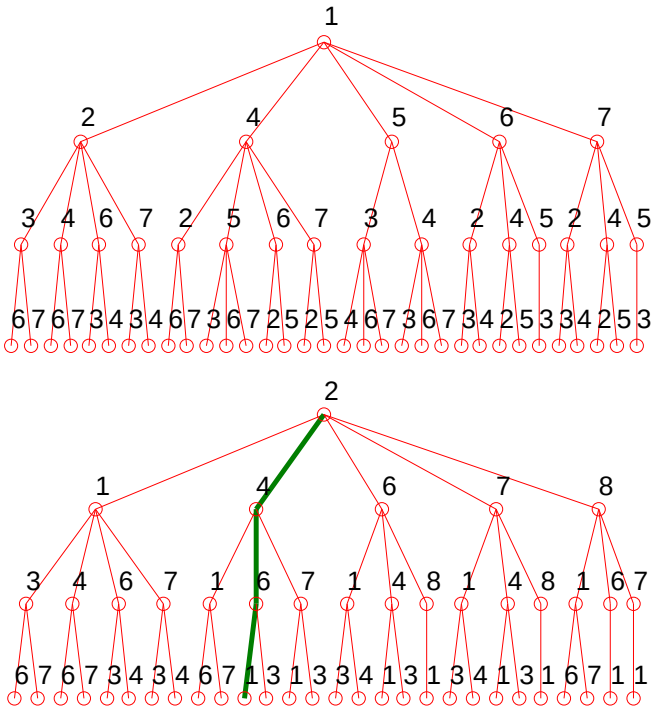
Tableau 4.35. Indices de robustesse minimum et maximum pour l'ensemble configurations de vent et des cas de charge (région 1).

Le Tableau 4.35 montre qu'en supposant le bâtiment dans la région 1, on obtient globalement des valeurs des extrema des indices de robustesse plus petits que ceux obtenus dans la précédente analyse, sauf pour la configuration du vent I qui présente un indice de robustesse supérieur (Tableau 4. 32). Les arbres de défaillance correspondant aux combinaisons d'actions engendrant les plus faibles indices de robustesse, obtenus avec les méthodes des branches et bornes, du β-unzipping et du β-unzipping avec bornage sont représentés dans les Figures 4.42 à 4.44 pour les trois configurations de vent possibles.

(a)



(b)



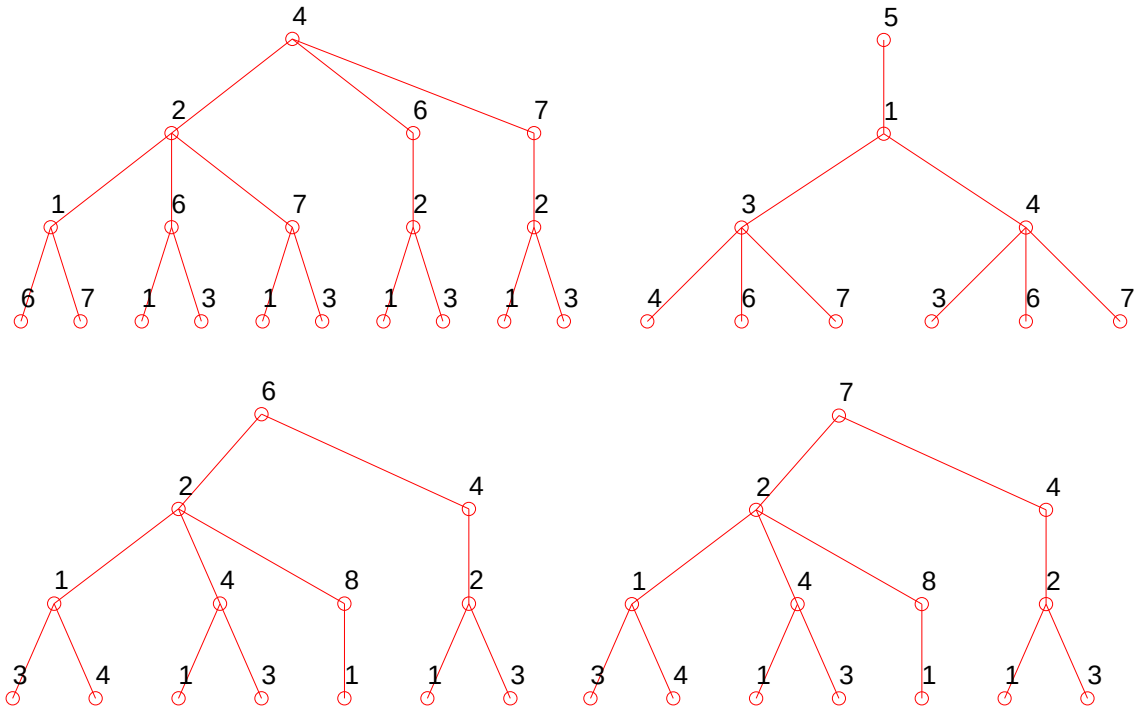
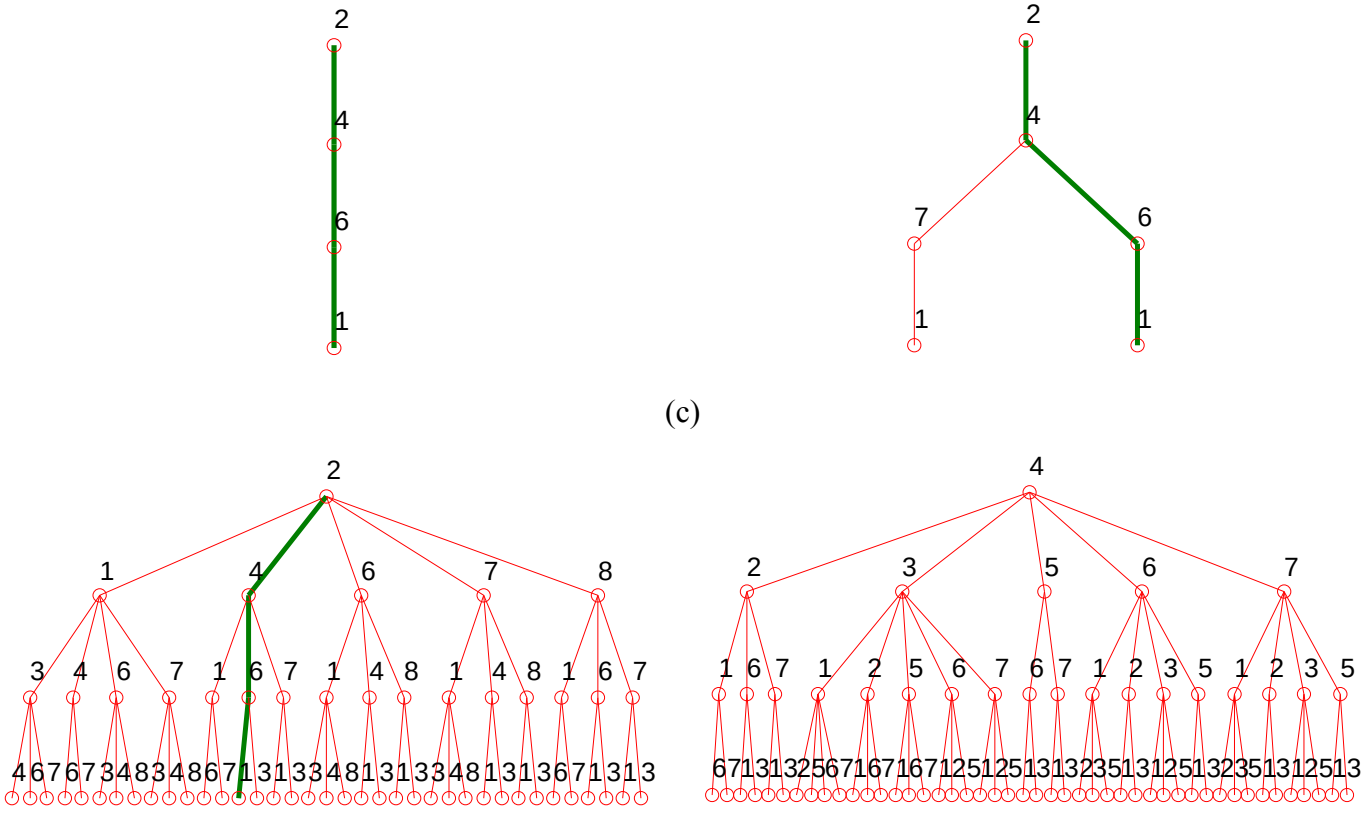


Figure 4.42. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes et du β-unzipping avec bornage (b) du β-unzipping pour la configuration de vent I (région 1).

(a) (b)



(c)

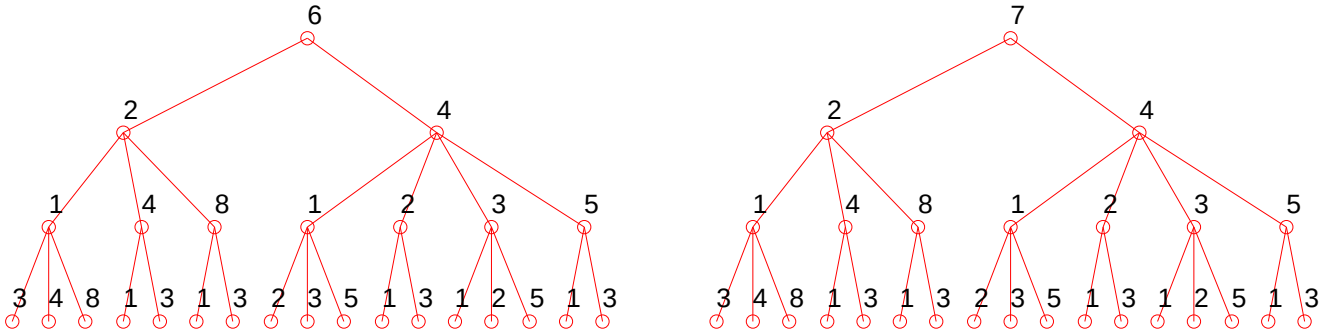


Figure 4.43. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping pour la configuration de vent II (région 1).

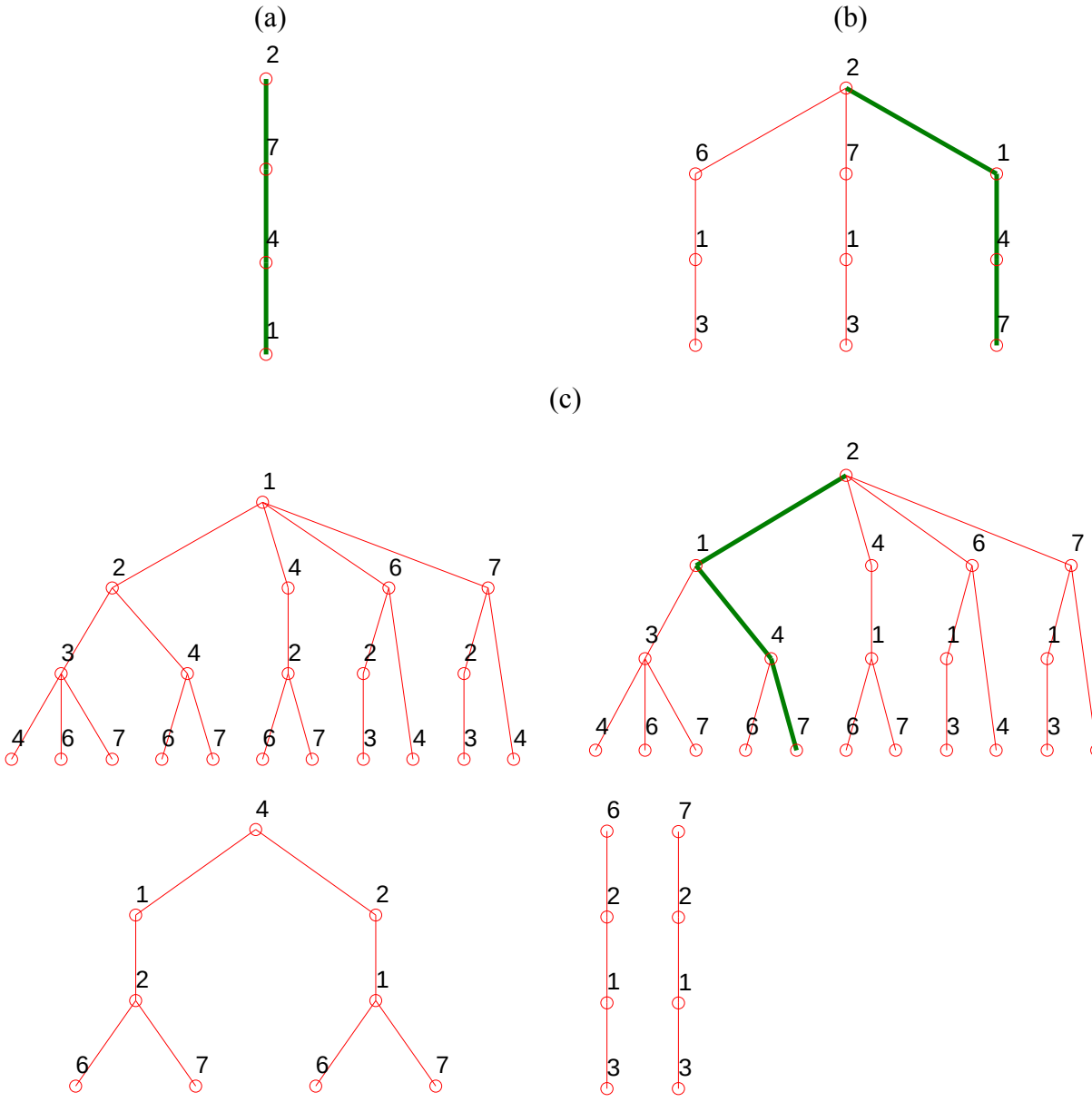


Figure 4.44. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping pour la configuration de vent III (région 1).

Comme pour la région 2 (paragraphe 4.3.4.2), un histogramme des différentes valeurs de l'indice de robustesse est présenté à la Figure 4.45. Il est noté que la configuration III de l'action du vent entraîne des valeurs de l'indice de robustesse beaucoup plus grandes que les deux autres.

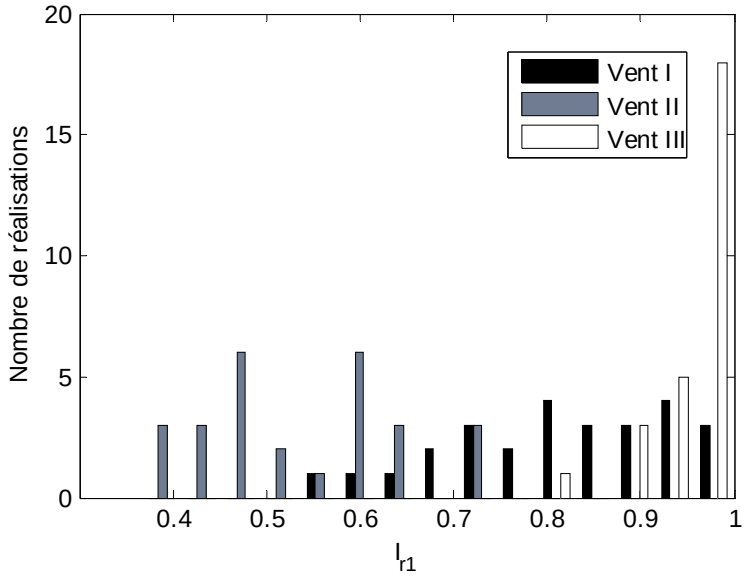


Figure 4.45. Indices de robustesse pour l'ensemble des cas de charge et des configurations de vent (région 1).

Une analyse de la variation de l'indice de robustesse en fonction de la valeur moyenne des paramètres de G, S et W est proposée, au travers de la variation des coefficients de charge α_G, α_S et α_W. Les résultats obtenus sont reportés dans les Figures 4.46 à 4.48.

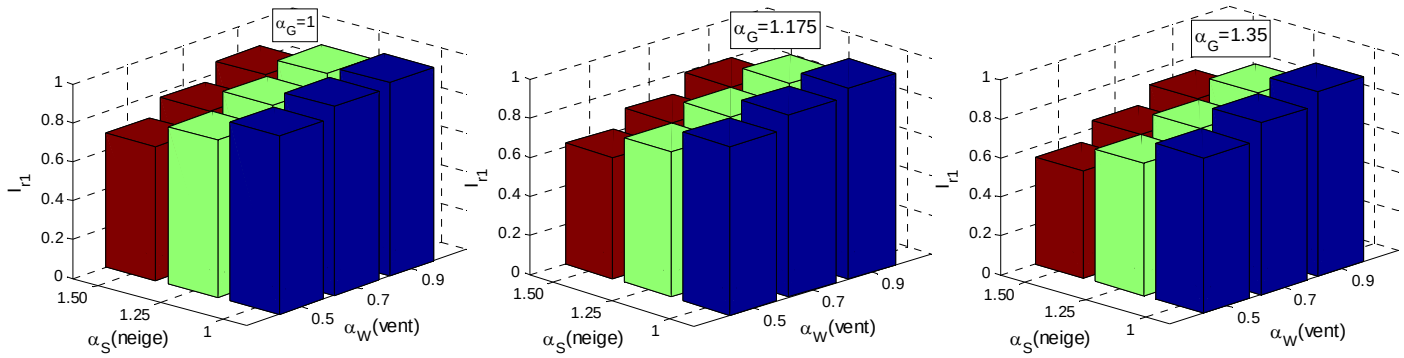


Figure 4.46. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent I (région 1).

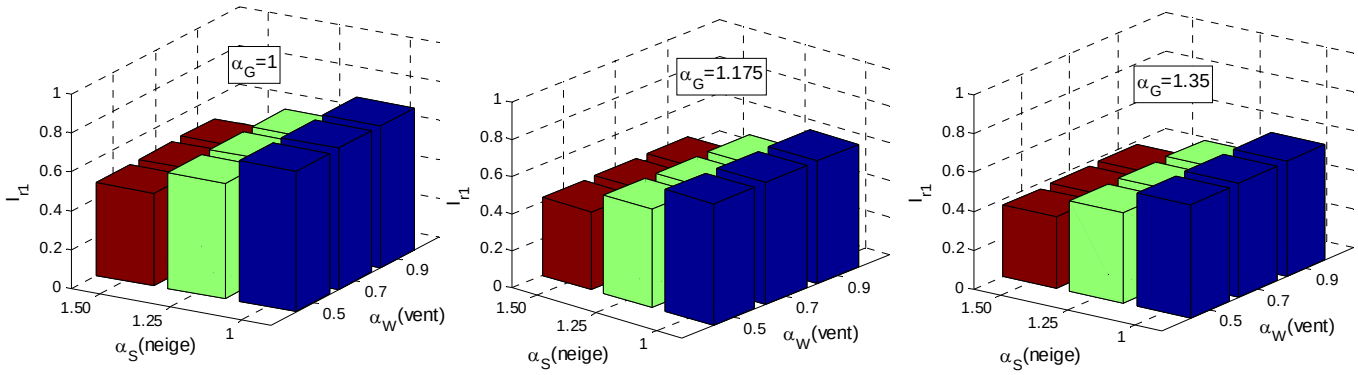


Figure 4.47. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent II (région 1).

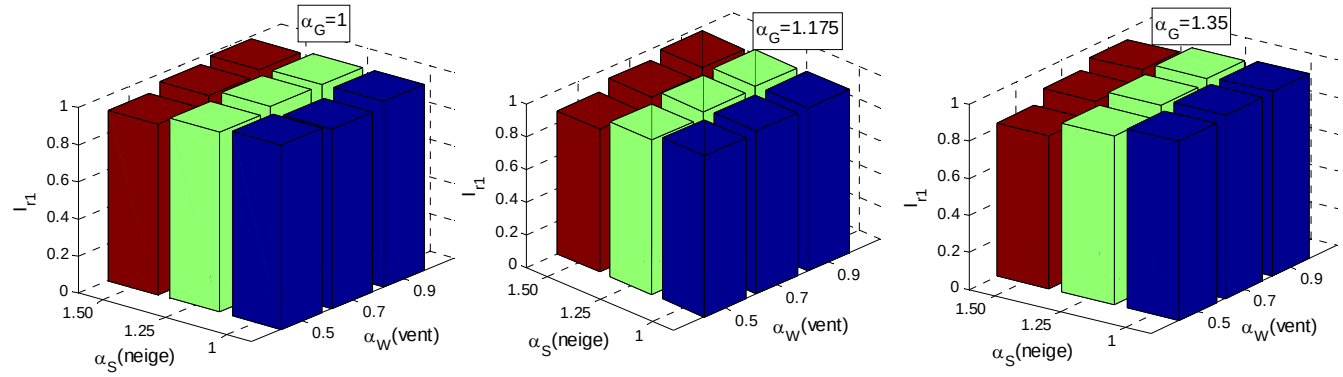


Figure 4.48. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent III (région 1).

Les Figures 4.46 à 4.48 montrent que la configuration II de l'action du vent est la plus défavorable car elle conduit aux plus petites valeurs de l'indice de robustesse. La configuration III de l'action du vent est celle qui procure des valeurs les plus élevées de l'indice de robustesse. Ces constatations sont homologues à celles observées lors de l'analyse considérant la région 2 de la classification neige et vent (cf. paragraphe 4.3.4.2.2).

4.3.4.4 Localisation du bâtiment dans la région 3

La localisation du bâtiment dans la région 3 est finalement considérée. Les actions à prendre en compte sont reportées dans le Tableau 4.36.

Charges permanentes G (daN/m^2)	Neige S (daN/m^2)	Vent W (daN/m^2)
25	45	90

Tableau 4.36. Actions à considérer lorsque le bâtiment est situé dans la région 3.

Les sollicitations correspondantes à l'action du vent sont reportées dans le Tableau 4.37.

	Configuration vent I (daN/ml)	Configuration vent II (daN/ml)	Configuration vent III (daN/ml)
W_1	241,92	604,8	336,96
W_2	483,84	120,96	336,96
W_3	483,84	120,96	336,96

Tableau 4.37. Sollicitations à considérer pour l'action du vent dans la région 3.

Une analyse similaire à celles effectuées pour les cas considérés de la région 1 et de la région 2 est réalisée en tenant compte d'une nouvelle valeur de la pression dynamique de base. Les résultats obtenus avec l'algorithme des branches et bornes sont reportés dans le Tableau 4.38.

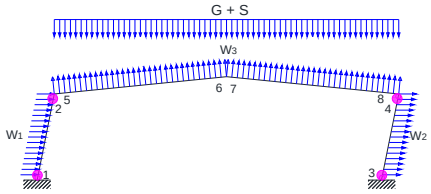
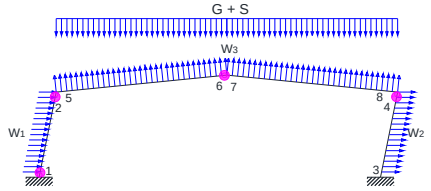
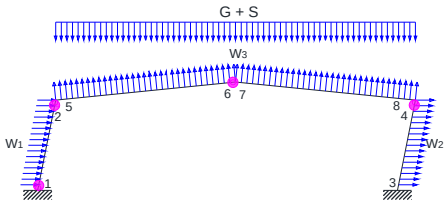
Configuration du vent	Chemin de défaillance le plus probable – extrémum des valeurs de l'indice de robustesse		Mécanisme le plus probable correspondant
I	$2\rightarrow1\rightarrow3\rightarrow4$		 Mécanisme 1
	$\min(I_{r,1}) = 0,31$	$\max(I_{r,1}) \rightarrow 1$	
II	$2\rightarrow4\rightarrow7\rightarrow1$		 Mécanisme 2
	$\min(I_{r,1}) = 0,38$	$\max(I_{r,1}) = 0,74$	
III	$2\rightarrow7\rightarrow1\rightarrow4$		 Mécanisme 2
	$\min(I_{r,1}) = 0,94$	$\max(I_{r,1}) \rightarrow 1$	

Tableau 4.38. Indices de robustesse minimum et maximum pour l'ensemble configurations de vent et des cas de charge (région 3).

Une comparaison des Tableau 4. 32 et Tableau 4.38 montre qu'en considérant les régions 2 et 3, les mêmes mécanismes de défaillance sont obtenus pour chaque configuration de l'action du vent. Les arbres de défaillance obtenus avec les trois méthodes des branches et bornes, du β-unzipping avec bornage et du β-unzipping sont illustrés dans les Figures 4.49 à 4.51, respectivement.

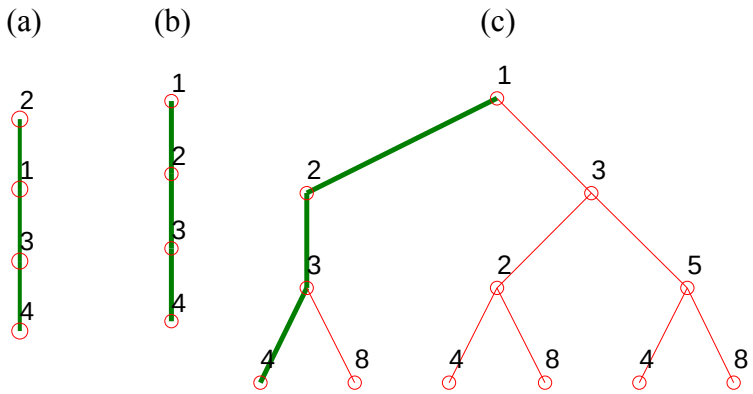
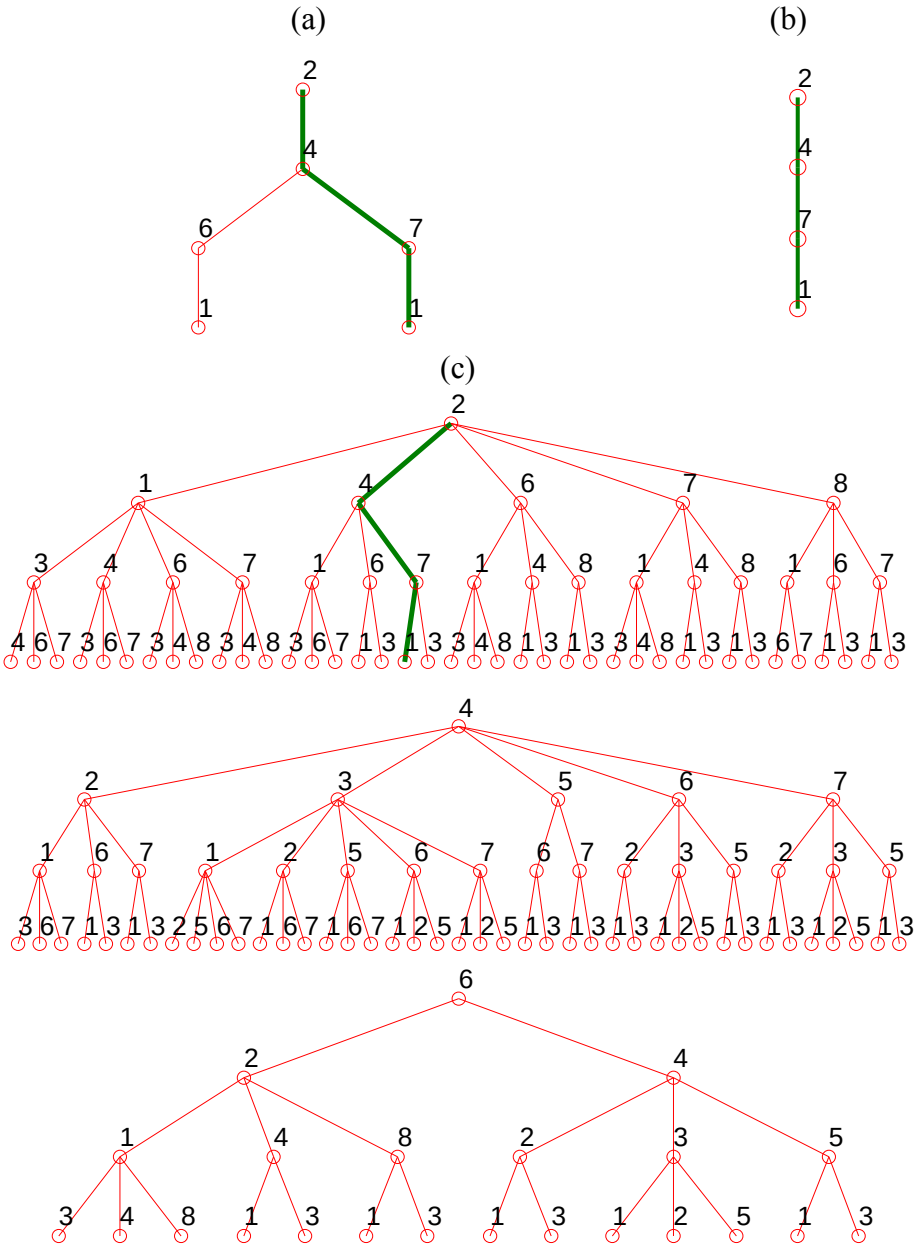


Figure 4.49. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping pour la configuration de vent I (région 3).



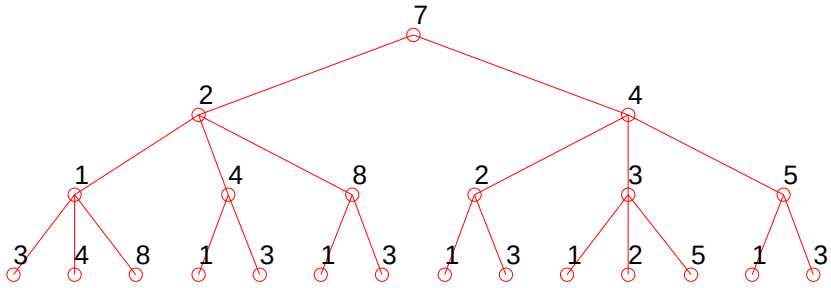


Figure 4.50. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping pour la configuration de vent II (région 3).

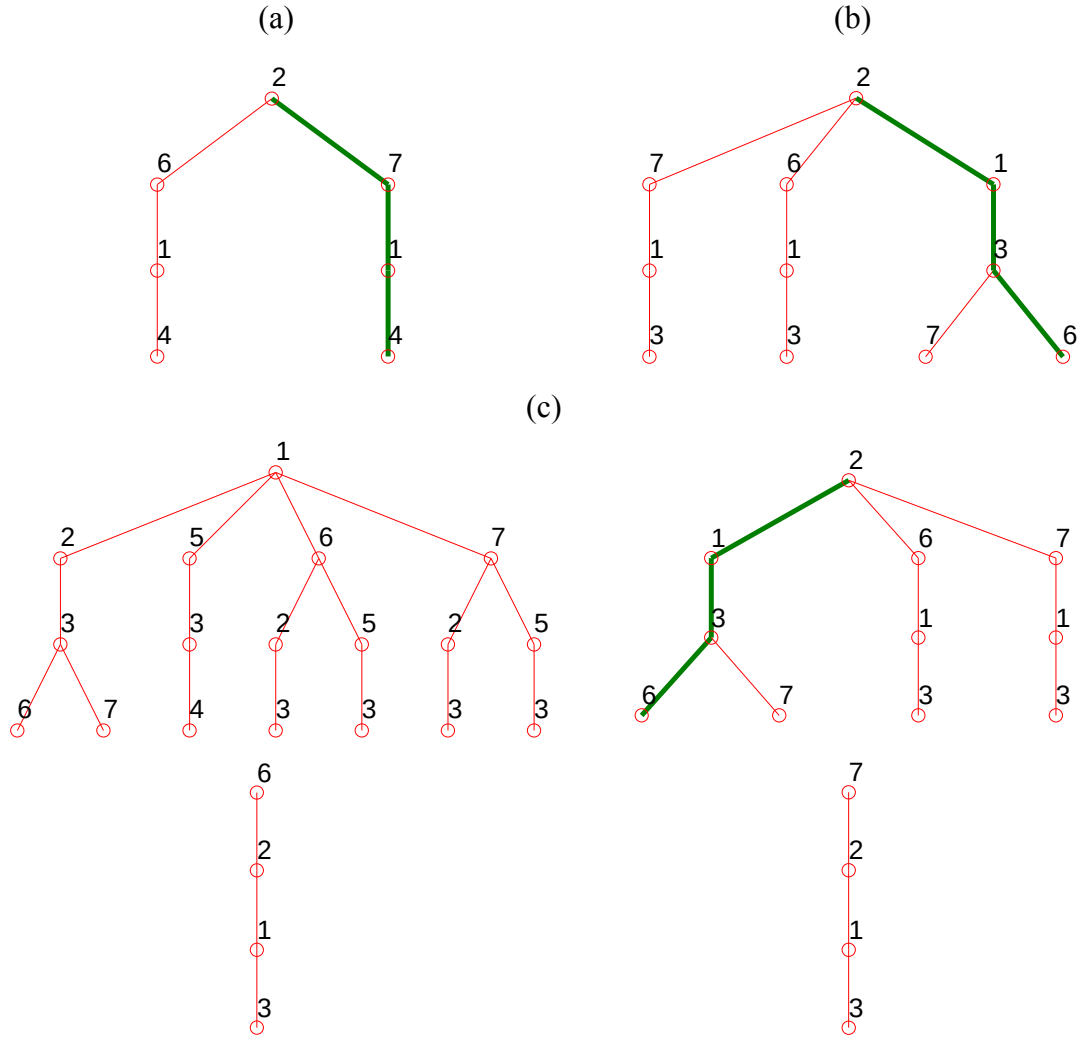


Figure 4.51. Arbres de défaillance des méthodes (a) des branches et bornes (b) du β-unzipping avec bornage et (c) du β-unzipping pour la configuration de vent III (région 3).

Les indices de robustesse obtenus sont représentés comme précédemment avec un histogramme (Figure 4.52). On remarque qu'en considérant le bâtiment situé dans la région 3, les configurations I et III de l'action du vent sont celles qui génèrent globalement des indices de robustesse les plus élevés. La configuration II de l'action du vent est comme pour les deux analyses précédentes la plus défavorable.

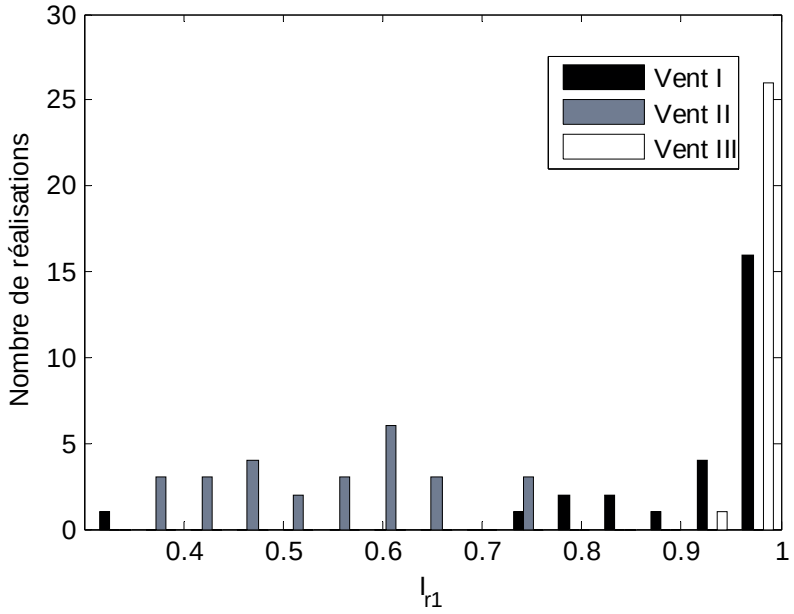


Figure 4.52. Indices de robustesse pour l'ensemble des cas de charge et des configurations de vent (région 3).

Une analyse de l'influence des valeurs moyenne des charges permanentes, de l'action de vent et de l'action de la neige sur l'indice de robustesse est finalement réalisée. Les résultats obtenus sont reportés dans les Figures 4.53 à 4.55. La configuration II de l'action du vent est celle qui donne lieu aux indices de robustesse les plus faibles.

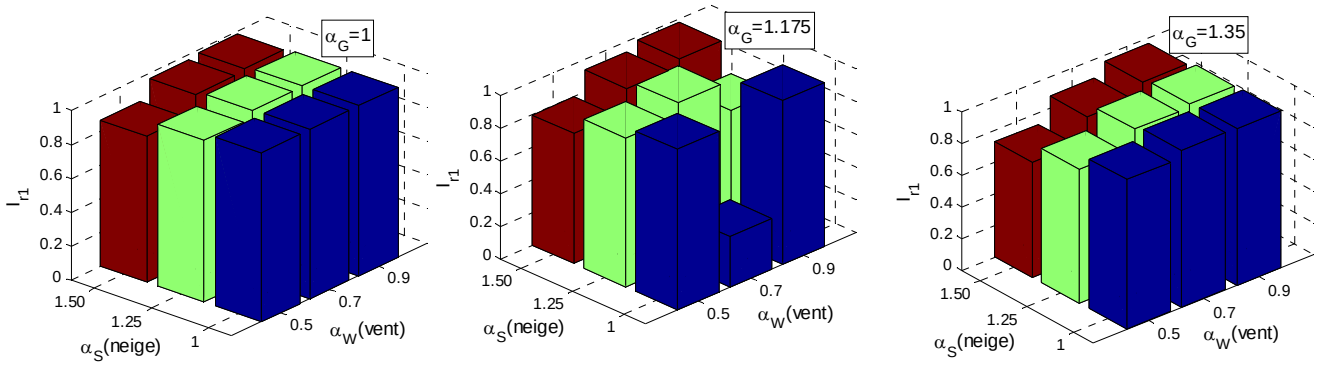


Figure 4.53. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent I (région 3).

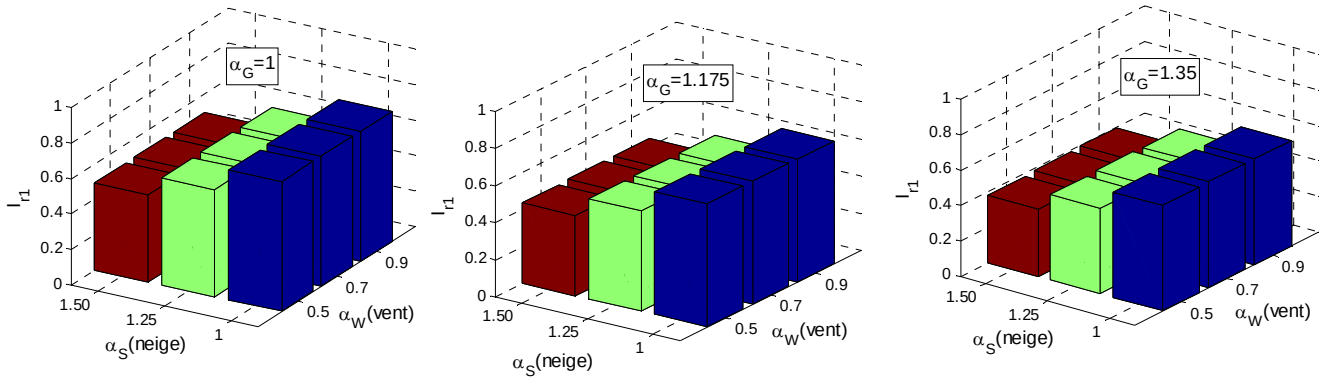


Figure 4.54. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent II (région 3).

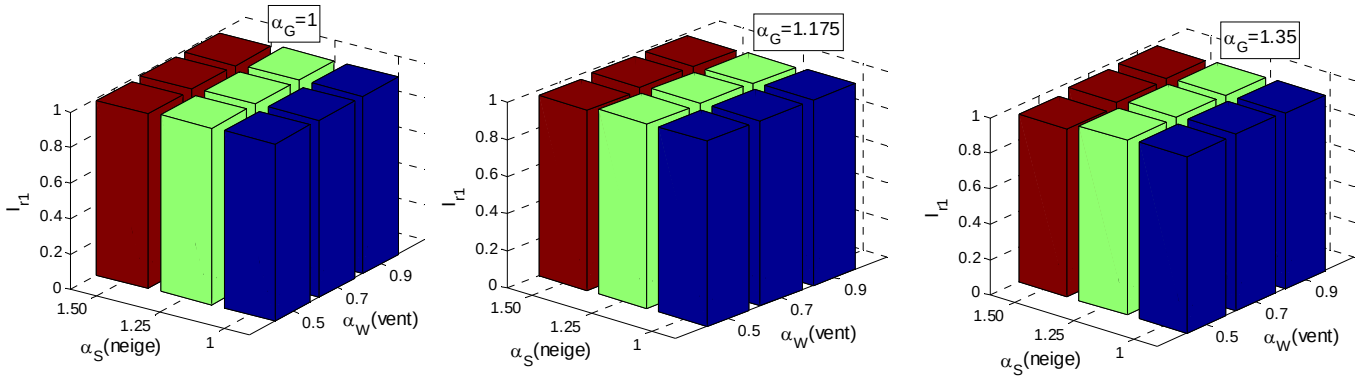


Figure 4.55. Variation de l'indice de robustesse en fonction des coefficients de chargement pour la configuration du vent III (région 3).

L'analyse de la robustesse structurale de la structure étudiée, en considérant les charges permanentes et les actions climatiques variables de type neige et vent, porte à conclure que si la configuration vent I peut engendrer le plus petit indice de robustesse, la configuration II de l'action du vent est d'une manière générale la plus défavorable. De plus, on remarque que les charges permanentes et l'action de la neige (au travers des coefficients α_G et α_S) influencent moins les valeurs des indices de robustesse que l'action du vent qui est prépondérante (α_W) dans les cas d'étude considérés.

4.3.4.5 Application à une analyse de risque

La démarche d'évaluation de la robustesse structurale gagne en intérêt si elle peut être exploitée dans un processus de décision. Dans ce paragraphe, son utilisation est envisagée dans le cadre d'une analyse de risque, l'intérêt étant de tenir compte des multiples conséquences directes et indirectes pouvant être due à une action accidentelle (Faber et al. 2006, Baker et al. 2008). C'est dans ce contexte que plusieurs méthodes d'évaluation de la robustesse structurale dans une démarche d'analyse de risque ont été proposées. Baker et al. (2006) ont notamment proposé un plan global basé sur la théorie de l'analyse décisionnelle pour l'évaluation de la robustesse structurale.

4.3.4.5.1 Objectifs d'une analyse de risque

Pour un parc d'ouvrages, l'intérêt d'une analyse de risque est de hiérarchiser les stratégies d'inspection/maintenance des différents ouvrages. Pour un ouvrage particulier, une analyse de risque permet de hiérarchiser les stratégies d'inspection/maintenance des différents éléments. Pour le cas particulier du hangar étudié dans le paragraphe 4.3.4.1, l'objectif est :

- d'identifier les zones à risque élevé,
- de classer les zones en termes de risque.

4.3.4.5.2 Démarche utilisée

Une analyse de risque simplifiée pour l'évolution des actions climatiques a été effectuée sur l'exemple considéré dans cette section en suivant les différentes étapes suivantes (Sétra 2010):

- l'identification et évaluation simplifiée des aléas,
- l'évaluation simplifiée de la vulnérabilité aux aléas,
- l'évaluation simplifiée de l'importance des conséquences,
- l'évaluation du risque à l'aide de matrices de risque.

L'objectif dans ce paragraphe est d'utiliser les concepts de robustesse dans le cadre d'une analyse de risque dont le formalisme est celui mis en place par le Sétra (2010)

Trois catégories d'aléas sont considérées qui correspondent aux combinaisons d'actions des régions 1, 2 et 3 illustrées dans les Tableaux 4.33, 4.28 et 4.36. Une classification de l'aléa en trois catégories est donc utilisée (Tableau 4.39).

Catégorie de l'aléa	Aléa
Aléa faible	Aléa1 : Pression dynamique du vent, 50 daN/m^2
Aléa moyen	Aléa2 : Pression dynamique du vent, 70 daN/m^2
Aléa élevé	Aléa3 : Pression dynamique du vent, 90 daN/m^2

Tableau 4.39. Evaluation simplifiée de l'aléa, classification en trois catégories.

Dans cette étude, l'estimation de la robustesse est utilisée pour quantifier la notion de vulnérabilité aux aléas. Dans ce paragraphe, la vulnérabilité est définie comme un croisement entre une vulnérabilité locale et une vulnérabilité globale. La définition de la robustesse introduite dans cette thèse est donc bien adaptée pour quantifier le niveau de vulnérabilité aux aléas puisque le croisement entre les vulnérabilités locale et glable est directement l'indice de robustesse calculé. L'analyse est menée dans la suite de ce paragraphe en considérant l'indice $I_{r,1}$, une valeur de $I_{r,1}$ plus grande que 0,6 désignant une robustesse élevée (vulnérabilité faible), une valeur de $I_{r,1}$ comprise entre 0,2 et 0,6 désignant une robustesse moyenne (vulnérabilité

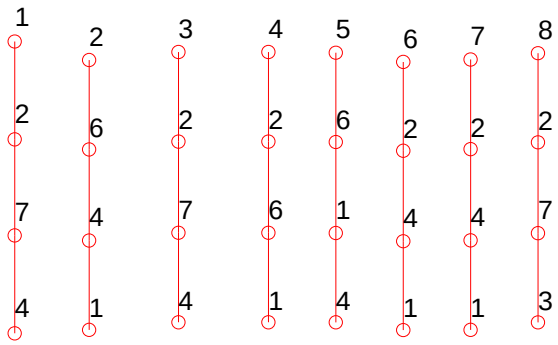
moyenne) et finalement une valeur de $I_{r,1}$ plus petite que 0,2 désignant une robustesse faible (vulnérabilité élevée). Le Tableau 4. 40 représente l'évaluation simplifiée de la robustesse aux aléas par cette classification en trois catégories.

Vulnérabilité	Vulnérabilité faible	Vulnérabilité moyenne	Vulnérabilité élevée
Robustesse	Robustesse élevée $I_{r,1} > 0,6$	Robustesse moyenne $0,2 \le I_{r,1} \le 0,6$	Robustesse faible $I_{r,1} < 0,2$

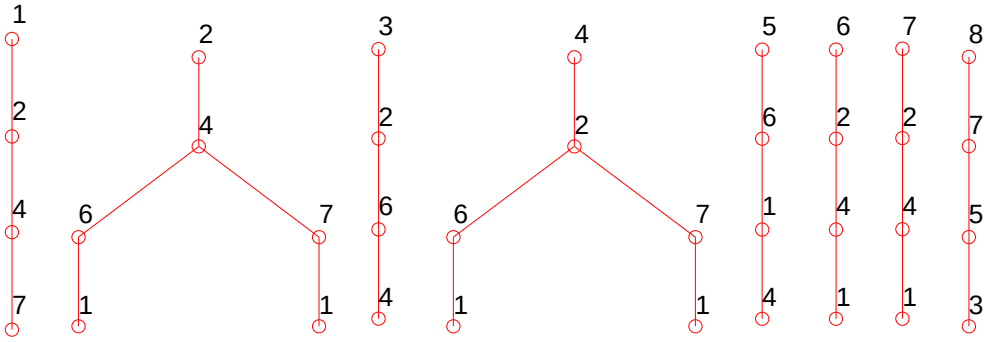
Tableau 4. 40. Evaluation simplifiée de la robustesse, classification en trois catégories.

En considérant tous les éléments potentiels de défaillance, les chemins de défaillance les plus probables issus de la défaillance de chaque élément pris individuellement sont identifiés à l'aide de la méthode des branches et bornes (Figures 4.56 à 4.58). Les indices de robustesse $I_{r,1}$ calculés en considérant chaque aléa sont reportés dans les Tableaux 4.41 à 4.43, de même que l'évaluation simplifiée de la robustesse aux aléas en tenant compte du Tableau 4. 40. Il est noté que cette étude est réalisée pour des valeurs de coefficients de charge, α_G=1,35, α_S=1,50 et α_W=0,9.

(a)



(b)



(c)

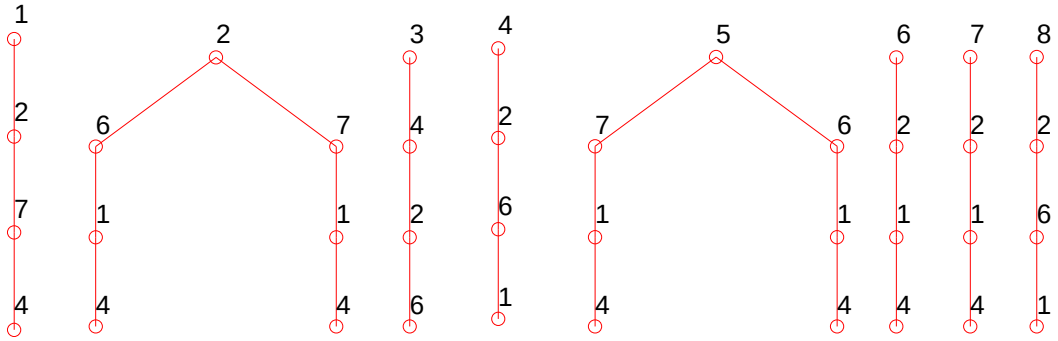


Figure 4.56. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes considérant les configurations de vent (a) I, (b) II et (c) III (aléa 1).

(a)

(b)

(c)

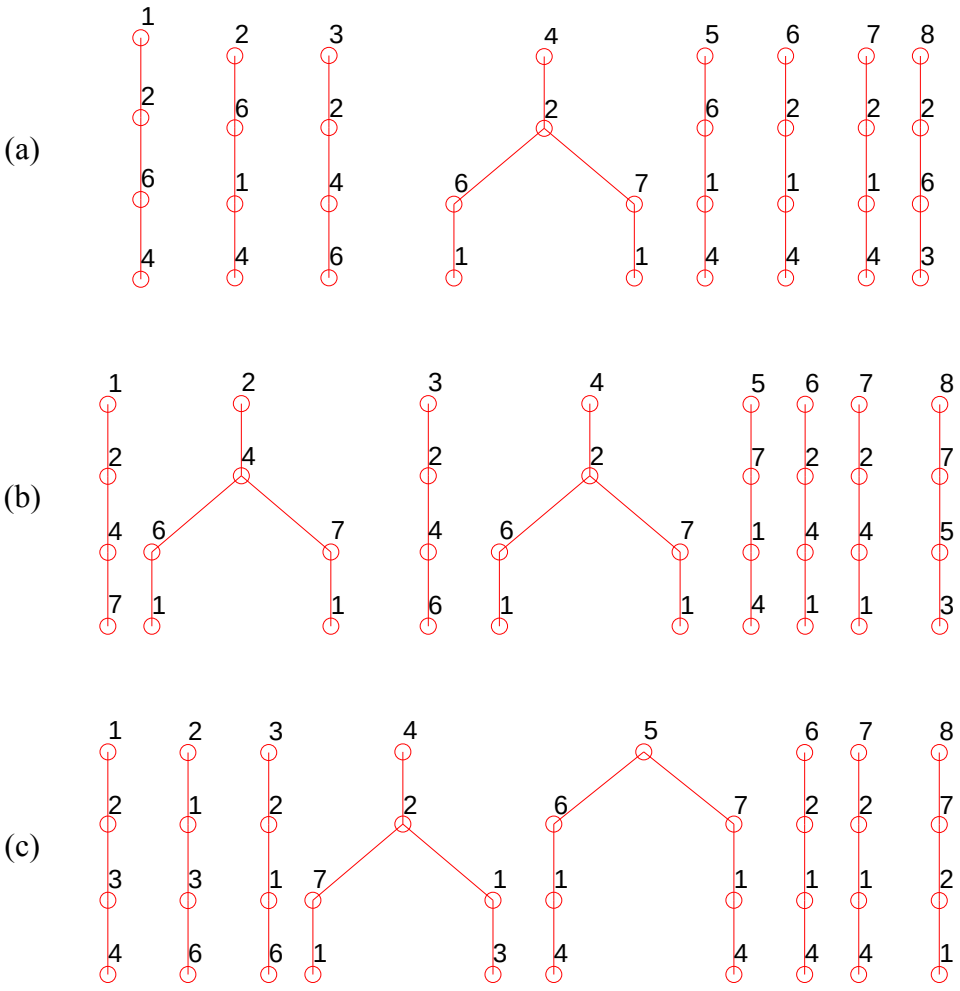


Figure 4.57. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes considérant les configurations de vent (a) I, (b) II et (c) III (aléa 2).

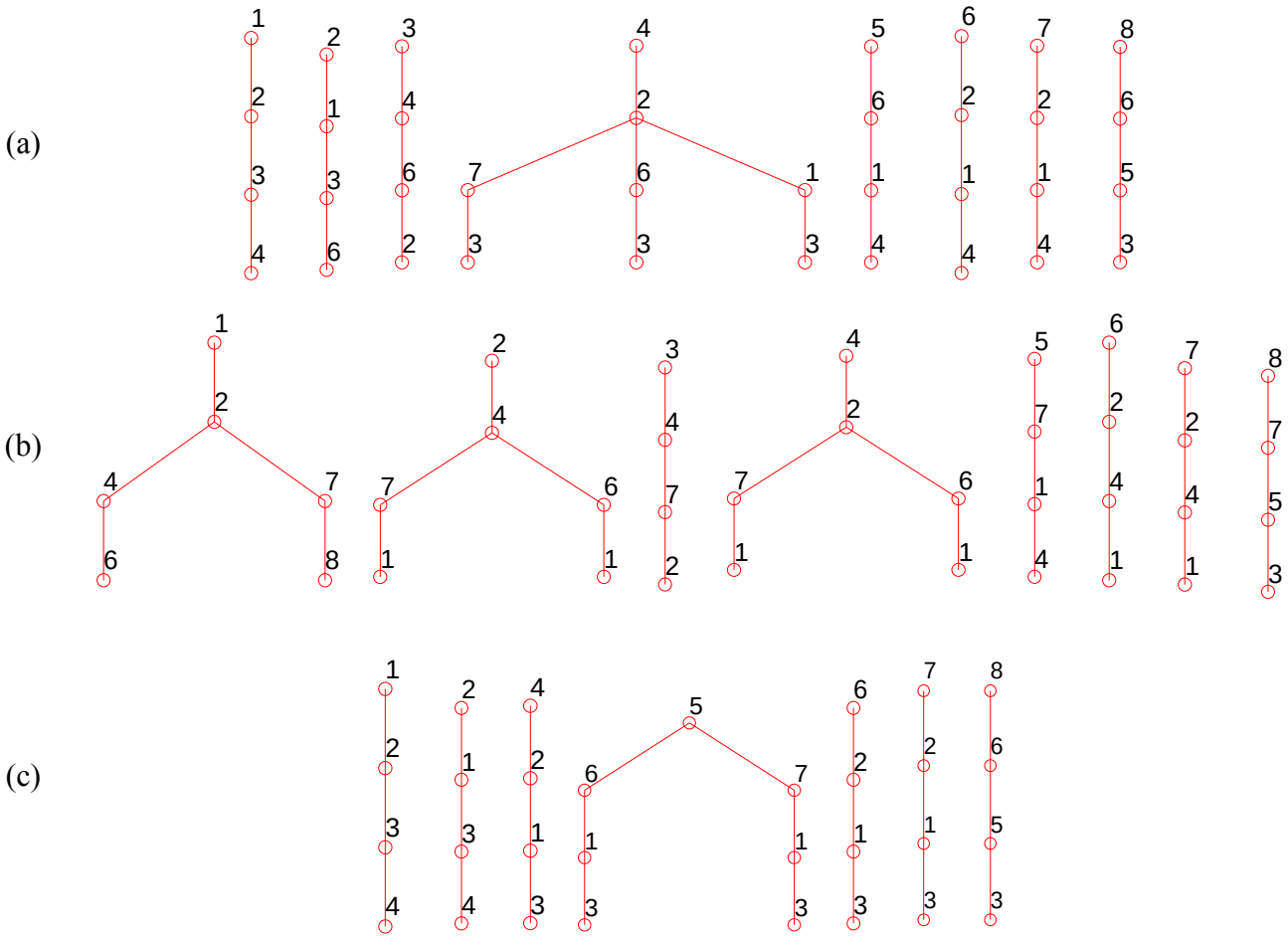


Figure 4.58. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes considérant les configurations de vent (a) I, (b) II et (c) III (aléa 3).

		Emplacements de la défaillance locale							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Vent I	$I_{r,1}$	0,08	0,73	$7{,}7.10^{-5}$	0,23	0,03	0,11	0,11	$1{,}25.10^{-4}$
Vent II	$I_{r,1}$	$2{,}60.10^{-3}$	0,38	$2{,}12.10^{-6}$	0,21	$1{,}50.10^{-3}$	0,02	0,02	$0{,}9.10^{-3}$
Vent III	$I_{r,1}$	0,30	0,94	$2{,}9.10^{-3}$	0,43	0,18	0,36	0,36	$1{,}4.10^{-3}$

Tableau 4.41. Evaluation simplifiée de la robustesse pour l'aléa 1.

		Emplacements de la défaillance locale							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Vent I	$I_{r,1}$	0,31	0,88	$0{,}1.10^{-3}$	0,34	0,14	0,30	0,30	$0{,}2.10^{-3}$
Vent II	$I_{r,1}$	$2{,}4.10^{-3}$	0,39	$1{,}79.10^{-6}$	0,25	$0{,}2.10^{-2}$	0,02	0,02	$0{,}9.10^{-3}$
Vent III	$I_{r,1}$	0,50	0,97	$0{,}9\times10^{-3}$	0,55	052	0,57	0,57	$7{,}7.10^{-3}$

Tableau 4.42. Evaluation simplifiée de la robustesse pour l'aléa 2.

		Emplacements de la défaillance locale							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Vent I	$I_{r,1}$	0,50	0,96	$3,6.10^{-3}$	0,60	0,49	0,61	0,61	$3,1.10^{-3}$
Vent II	$I_{r,1}$	$0,2.10^{-3}$	0,39	$5,95.10^{-7}$	0,31	$2,3.10^{-3}$	0,04	0,04	$0,9.10^{-3}$
Vent III	$I_{r,1}$	0,51	0,98	-	0,62	0,79	0,83	0,83	0,03

Tableau 4. 43. Evaluation simplifiée de la robustesse pour l'aléa 3.

L'évaluation des aléas (Tableau 4.39) et de la robustesse aux aléas étant effectuée (Tableau 4. 40), le niveau de criticité peut être évalué en croisant *aléa* et *robustesse* conformément au Tableau 4.44.

	Robustesse élevée	Robustesse moyenne	Robustesse faible
Niveau d'aléa faible	Criticité faible	Criticité faible	Criticité moyenne
Niveau d'aléa moyen	Criticité faible	Criticité moyenne	Criticité élevée
Niveau d'aléa élevé	Criticité moyenne	Criticité élevée	Criticité élevée

Tableau 4.44. Croisement Aléa × Robustesse = Criticité (Sétra 2010).

Les matrices de criticité sont finalement représentées dans les Tableau 4.45, 4.46, et 4.47 pour les aléas 1, 2 et 3, respectivement.

Emplacements de la défaillance locale	1	2	3	4	5	6	7	8
Aléa 1								

Tableau 4.45. Matrice de criticité (aléa 1).

Emplacements de la défaillance locale	1	2	3	4	5	6	7	8
Aléa 2								

Tableau 4.46. Matrice de criticité (aléa 2).

Emplacements de la défaillance locale	1	2	3	4	5	6	7	8
Aléa 3								

Tableau 4.47. Matrice de criticité (aléa 3).

Les matrices de criticité des Tableaux 4.45 à 4.47 permettent notamment de conclure que la structure étudiée soumise à l'action du vent sous l'aléa 3 présente un niveau de criticité élevé. Soumise à l'action du vent selon l'aléa 1, elle présente un niveau de criticité moyen sauf dans les cas où la défaillance s'initie aux nœuds 2 ou 4 (Figure 4.33) pour lesquels le niveau de criticité est faible. La structure soumise à l'action du vent suivant l'aléa 2 présente un niveau de criticité élevé, sauf dans le cas où la défaillance locale est située aux nœuds 2 et 4 (mode de défaillance).

Pour compléter l'analyse de risque, une évaluation simplifiée des conséquences induites en fonction du coût des aéronefs abrités dans le hangar est représentée dans le Tableau 4.48.

Catégorie de conséquences	Conséquences
Conséquence faible	Valeur des aéronefs <300000€
Conséquence moyenne	300000€ < Valeur des aéronefs <1000000€
Conséquence élevée	Valeur des aéronefs >1000000€

Tableau 4.48. Evaluation simplifiée des conséquences.La matrice de risque résultant du croisement entre la matrice de criticité et la matrice de conséquence est représentée dans le Tableau 4.49.

	Conséquence faible	Conséquence moyenne	Conséquence élevée
Criticité faible	Risque faible	Risque faible	Risque moyen
Criticité moyen	Risque faible	Risque moyen	Risque élevé
Criticité élevé	Risque moyen	Risque élevé	Risque élevé

Tableau 4.49. Croisement Criticité × Conséquence = Risque.

Lorsque le bâtiment abritant des aéronefs d'une valeur supérieure à 1 000 000 € est soumis à l'aléa 1, la matrice de risque correspondante est représentée dans le Tableau 4.50. On conclut que le hangar soumis à l'aléa 1 avec des conséquences élevées conduit à un niveau de risque élevé à l'exception des cas où la défaillance concerne les modes 2 ou 4 et pour lesquels le niveau de risque est moyen.

Emplacements de la Défaillance locale	1	2	3	4	5	6	7	8
Risque								

Tableau 4.50. Matrice de risque (aléa 1)

Lorsque le hangar est soumis à l'aléa 2 avec des conséquences faibles on conclut à un niveau moyen de risque à l'exception des cas où la défaillance concerne les modes 2 ou 4 où le niveau de risque est faible.

Emplacements de la Défaillance locale	1	2	3	4	5	6	7	8
Risque								

Tableau 4.51. Matrice de risque (aléa 2)

4.3.4.5.3 Synthèse

La démarche d'analyse de risque appliquée à l'étude d'un hangar sous sollicitation climatique a permis d'identifier des zones structurales avec un niveau de risque élevé. Pour un ouvrage particulier, ce type d'étude peut être utilisé comme outil d'aide à la décision afin de hiérarchiser les stratégies d'inspection/maintenance des différents éléments d'une structure.

4.4 APPLICATION A L'ETUDE D'UNE POUTRE PRECONTRAINTE

L'objectif de ce paragraphe est de tester la démarche de quantification de la robustesse sur une structure sensible vis-à-vis de la redondance limitée qu'elle propose. L'ouvrage considéré

appartient à la famille de ponts à poutres précontraintes de type VIPP (Viaducs à travées Indépendantes à Poutres Préfabriquées précontraintes par post-tension).

Ce type de tablier est constitué de poutres longitudinales de hauteur constante, solidarisées entre elles par des entretoises et un hourdis de faible épaisseur supportant la chaussée (Figure 4.59). La particularité de ce tablier réside dans le fait que les poutres sont préfabriquées sur site (aire de préfabrication) avant d'être posées sur appuis définitifs, puis reliées par les entretoises et le hourdis (coulés en place). La précontrainte longitudinale des poutres est mise en tension en plusieurs phases : sur les poutres seules sur l'aire de préfabrication puis après coulage des entretoises et du hourdis, en position définitive.

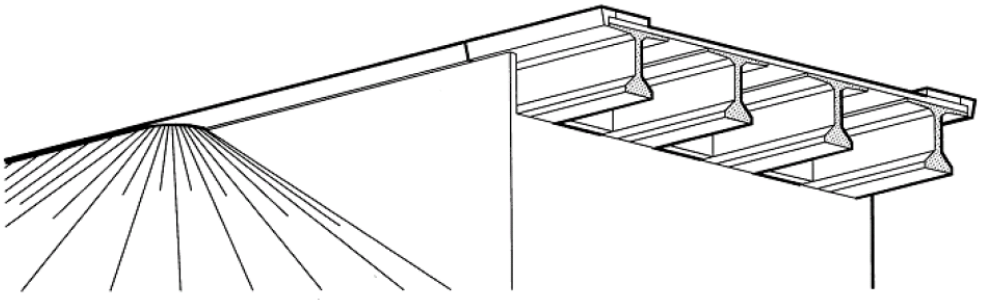


Figure 4.59. Représentation des ouvrages de type VIPP.

4.4.1 Description du cas d'étude

Le cas d'étude est une des poutres du VIPP de Merlebach (Cremona 2007), ouvrage ayant été construit en 1968 et permettant à l'autoroute A320 de franchir des voies ferrées, et la rivière « Roselle » à Freyming – Merlebach. Cet ouvrage (Figure 4.60), mis sous haute surveillance en 2001 a finalement été démoli puis remplacé par un ouvrage mixte acier béton en 2005. Long de 0,2 km, il comportait deux tabliers constitués de six travées isostatiques d'une longueur de 32,50 m. Les travées de chaque tablier comportaient chacune cinq poutres (de hauteur de 2,10 m) espacées de 3,15 m et reliées entre elles par un hourdis de 1,65 m de large et de 0,18 m d'épaisseur. La précontrainte longitudinale dans les poutres était caractérisée par 10 câbles STUP 12Ø8 (Figure 4.61), dont les six premiers étaient ancrés à l'about (Tessier et al. 2005, Cremona 2007, Mohammadkhani-shali 2007).
Ce paragraphe considère une des poutres de VIPP. Pour ce type de structure, plusieurs types d'analyse de la robustesse ont été envisagés. Deux exemples sont détaillés ci-après :

- l'étude de la propagation d'une défaillance localisée sur une poutre à une défaillance plus globale de cette même poutre,

- l'étude de la propagation d'une défaillance locale sur une poutre à une ou plusieurs autre(s) poutre(s).

Il est noté que seul le premier cas a été considéré dans le cadre de cette analyse. Plus particulièrement, la défaillance locale est supposée être une hauteur de zone fissurée dans le

talon de la poutre, dépassant un seuil critique et la défaillance globale est supposée être un volume total de béton fissuré.



Figure 4.60. Viaduc de Merlebach.

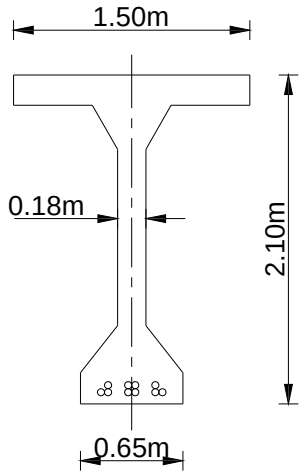


Figure 4.61. Section d'une poutre.

4.4.2 Modélisation structurale

La poutre considérée repose sur deux appuis simples et est soumise à une charge ponctuelle P. La modélisation de cette structure est réalisée à l'aide du logiciel SETRA-ST1© (Figure 4.62) qui est un logiciel de calcul de structures à barres. Cette étude reprend la modélisation de la poutre VIPP développée dans le cadre d'une étude antérieure sur l'ouvrage du VIPP de Merlebach (Cremona 2007) ayant eu pour objectif de prendre en compte la fissuration dans le calcul d'une poutre isostatique en béton précontraint et de mieux appréhender les déformations de la poutre fonctionnant en mode dégradé. La modélisation de la poutre est effectuée de telle sorte qu'elle soit constituée de trois zones, les deux zones d'extrémité d'une longueur de 15.25 m constituées chacune d'une barre, et la zone centrale de 2 m, constituée de 20 barres (Figure

4.62b). La zone d'étude est située à mi-travée dans la zone centrale et comporte sept sections numérotées de 1 à 7 (Figure 4.62c).

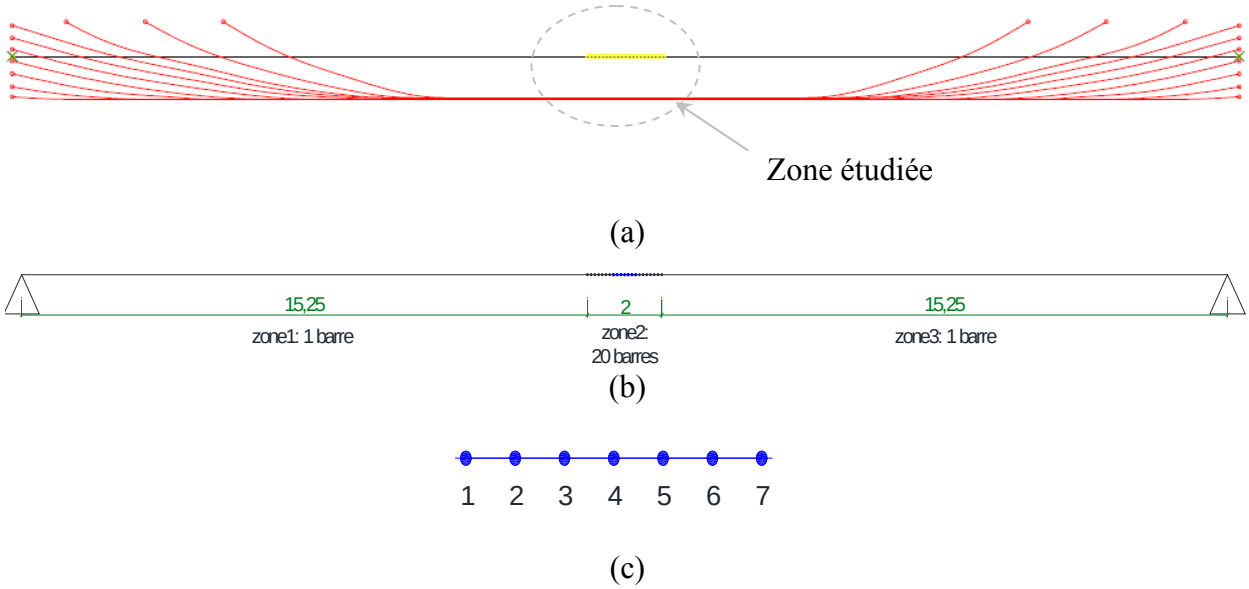


Figure 4.62. (a) Modélisation de la poutre étudiée, (b) zone du modèle, et (c) zone étudiée.

La modélisation sous ST1 de la poutre étudiée est représentée dans la Figure 4.62a. Cette modélisation représente les câbles de précontrainte en rouge, la fibre neutre de la poutre en noire, et la zone étudiée en jaune et détaillée à la Figure 4.62c. En ce qui concerne les caractéristiques de la précontrainte, la diminution de section des câbles ainsi que la diminution de la tension des câbles de précontrainte ont été prises en compte uniquement par une diminution de la tension dans les câbles. Cette valeur de tension est supposée intégrer les pertes de précontrainte instantanées et différées ainsi que les éventuelles pertes de section des câbles.

4.4.3 Modélisation de la défaillance locale

Plusieurs cas de défaillance locale ont été envisagés pour l'exemple de la poutre Merlebach. La défaillance pour ce type de structure peut par exemple être définie par :

- une décompression du béton en fibre inférieure à mi-travée,

- une flèche critique à mi-travée,

- une tension critique dans les câbles de précontrainte,

- la perte d'un toron,

- le cisaillement critique de l'âme à proximité des appuis.

Le cas qui a été retenu est finalement d'analyser la propagation d'une fissuration dans la poutre précontrainte. Lorsqu'une section est défaillante (hauteur fissurée en fibre inférieure supérieure à une hauteur de fissure critique), la géométrie de la poutre est modifiée au droit de cette section en réduisant la hauteur du talon d'une épaisseur forfaitaire en partie inférieure de celui-ci, ce qui se caractérise par une élévation de la position du centre de gravité de la section. La hauteur de

fissure est calculée en chaque section en fibre inférieure comme étant la hauteur de poutre pour laquelle le béton est fissuré. Ce dernier étant considéré comme fissuré lorsque sa contrainte de traction dépasse la contrainte de traction limite $\sigma_{trac} = f_{ctm}$ (Figure 4.63). Le Tableau 4.52 présente l'impact d'une défaillance locale correspondant à une hauteur de zone fissurée supérieure ou égale à 35 cm dans le talon.

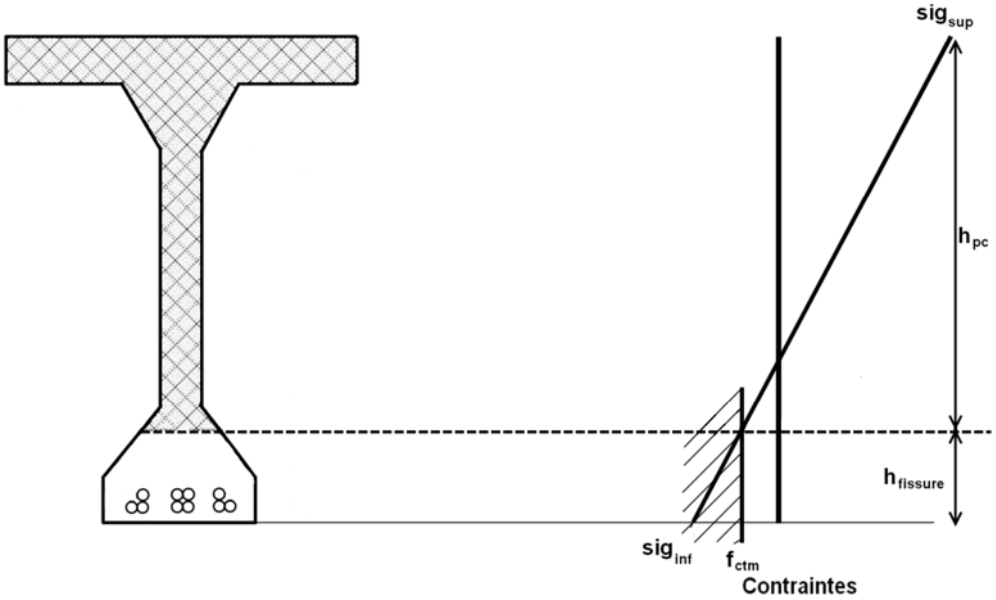


Figure 4.63. Modélisation de la hauteur fissurée.

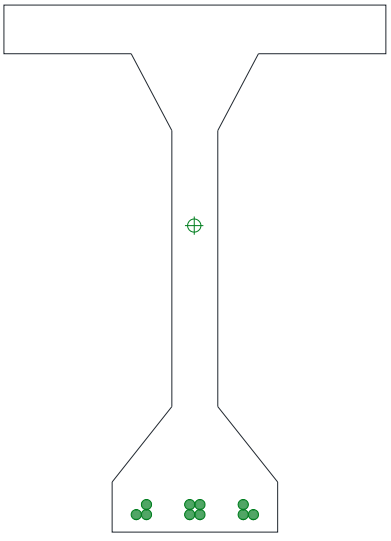
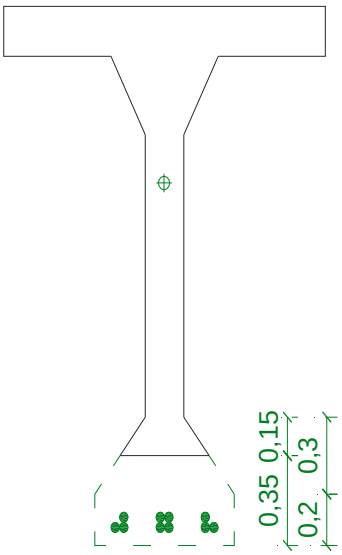
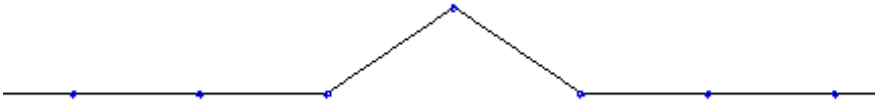
	Section intacte	Section avec défaillance locale
Section de poutre		
Section (m^2)	0,86	0,65
Périmètre (m)	7,52	6,10
Position du centre de gravité	(0 , 0)	(0 , 0,34)

Tableau 4.52. Définition de la défaillance locale.

L'apparition d'une défaillance au droit d'une section entraîne donc une nouvelle analyse de la structure avec un recalcul des caractéristiques des sections défaillantes. La Figure 4.64

représente les positions des centres de gravité de chaque section le long d'une poutre lorsque une ou plusieurs section(s) est(sont) défaillante(s).

(a) Une section défaillante



(b) Deux sections défaillantes consécutives



(c) Deux sections défaillantes non consécutives



Figure 4.64. Position des centres de gravité par rapport à la fibre moyenne.

4.4.4 Modélisation de la défaillance globale

La défaillance globale considérée correspond dans cette étude à l'atteinte ou au dépassement du volume critique de béton fissuré calculé sur les différentes sections étudiées. Le volume de béton fissuré calculé sur les sept sections étudiées dans la Figure 4.62 s'exprime par :

$$V_{fissure} = e_{section} \times l_{talon} \times \sum_{i=1}^{7} hi_{fissure} \tag{4.15}$$

où $e_{section} = 0{,}10$ m est l'espacement entre les sections étudiées, l_{talon} la largeur du talon et $hi_{fissure}$ la hauteur de fissure calculée à la section i (Figure 4.65).

(a) largeur du talon (b) espacement des sections

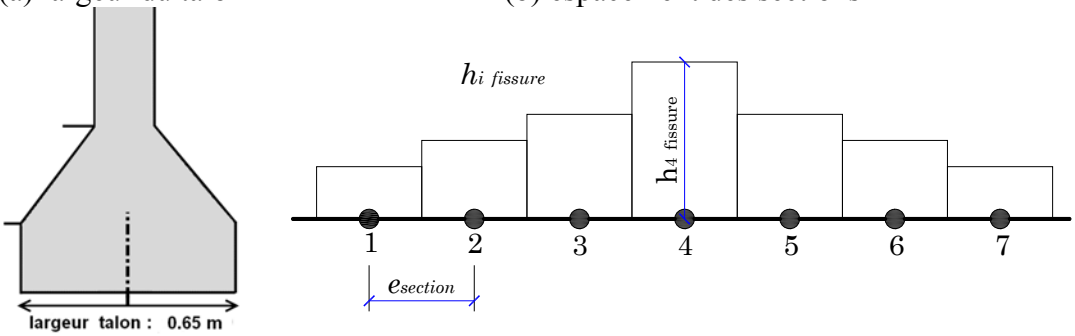


Figure 4.65. Caractéristiques prises en compte dans le calcul du volume de béton fissuré.

Dans le cas d'une charge ponctuelle appliquée à mi-travée, la Figure 4.66 représente la variation du volume de béton fissuré avec le nombre de nœuds défaillants. Le volume fissuré dans la zone étudiée et le volume total fissuré sont représentés en les calculant de manière déterministe avec les caractéristiques et propriétés des matériaux suivantes : $f_{ck} = 25$ MPa pour la contrainte limite

de compression du béton, σ_{trac} = 4,8 MPa pour la contrainte limite de traction du béton, ρ=25 kN/m^3 pour la densité du béton, E_{beton}=36 000MPa pour le module d'Young du béton, $S_{câbles}$=0,0006032m^2 pour la section des câbles de précontrainte (équivalente à 12Ø8), $\sigma_{câbles}$=750 MPa pour la tension dans les câbles de précontrainte et $E_{câbles}$ = 210 000MPa pour le module d'Young du matériau des câbles.

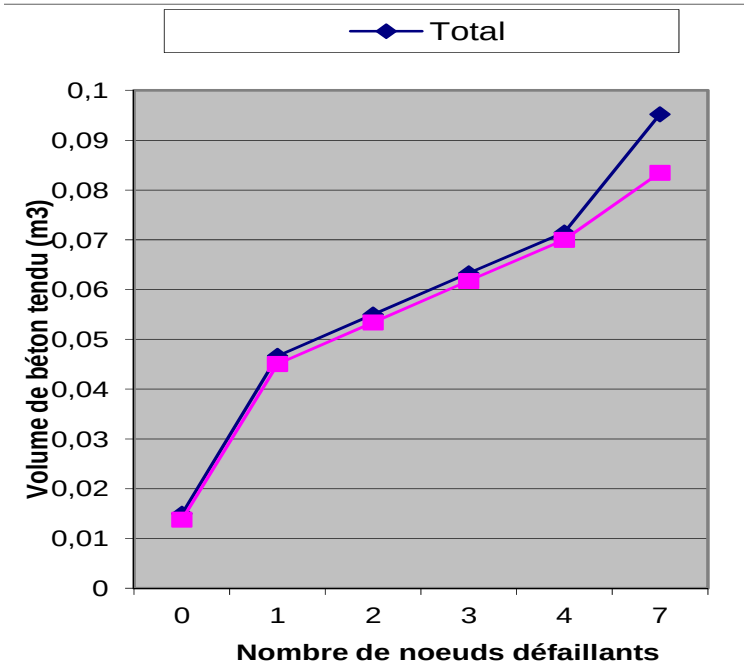


Figure 4.66. Variation du volume de béton tendu avec le nombre de nœuds défaillants.

On remarque que le volume de béton tendu croit avec le nombre de nœuds (sections) défaillants. Le volume de béton tendu dans la zone étudiée reste inférieur au volume total de béton tendu, tout en étant suffisamment proche de ce dernier jusqu'à quatre nœuds défaillants.

4.4.5 Etude de la robustesse structurale

Comme mentionné dans le paragraphe 4.4.3, l'état limite correspondant à une défaillance locale est l'atteinte de la hauteur de fissure critique dans une des sections étudiées. La méthode des branches et bornes a été utilisée pour identifier les chemins de défaillance les plus probables allant de la défaillance locale au dysfonctionnement globalisé. Une étude a été menée telle que les statistiques des variables aléatoires indépendantes sont représentées dans le Tableau 4.53 dans lequel σ_{trac}^{h} représente la limite en traction du béton hors zone étudiée et σ_{trac}^{i} la limite en traction du béton pour la section i considérée. Trois cas ont été considérés dans le Tableau 4.54 : le premier avec la charge ponctuelle P appliquée au droit de la section 3 (Figure 4.62c), le deuxième avec la charge P agissant sur la section 4 et le dernier avec la charge P agissant sur la section 5. Les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 4.54 et les arbres de défaillance correspondants sont illustrés dans la Figure 4.67.

Variables	Loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
P	Normale	0,79 MN	5%
ρ		25 kN/m^3	5%
σ_{cables}	Lognormale	750 Mpa	9%
σ_{trac}^{h}		4,8 Mpa	20%
σ_{trac}^{1}		4,8 Mpa	20%
σ_{trac}^{2}		4,8 Mpa	20%
σ_{trac}^{3}		4,8 Mpa	20%
σ_{trac}^{4}		4,8 Mpa	20%
σ_{trac}^{5}		4,8 Mpa	20%
σ_{trac}^{6}		4,8 Mpa	20%
σ_{trac}^{7}		4,8 Mpa	20%
$h_{fissure,critique}$		0,35 m	3%

Tableau 4.53. Statistiques des variables aléatoires.

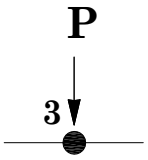
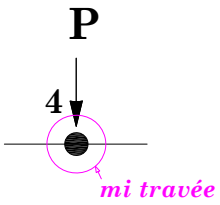
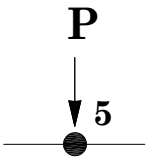
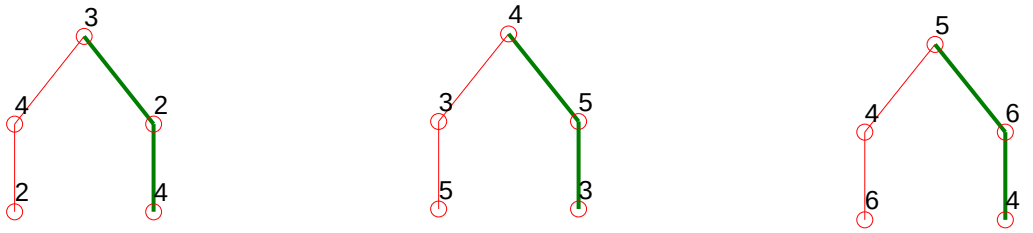
		Cas de charge considérés		
		I: Charge appliquée à la section 3 	II: Charge appliquée à la section 4 (mi travée) 	III: Charge appliquée à la section 5 
Probabilité de défaillance	noeuds			
	1	$P_f = 3,26\times10^{-2}$	$P_f \to 0$	$P_f \to 0$
	2	$P_f = 3,63\times10^{-2}$	$P_f = 3,27\times10^{-2}$	$P_f \to 0$
	3	$P_f = 4,03\times10^{-2}$	$P_f = 3,64\times10^{-2}$	$P_f = 3,28\times10^{-2}$
	4	$P_f = 3,64\times10^{-2}$	$P_f = 4,04\times10^{-2}$	$P_f = 3,64\times10^{-2}$
	5	$P_f = 3,28\times10^{-2}$	$P_f = 3,64\times10^{-2}$	$P_f = 4,03\times10^{-2}$
	6	$P_f \to 0$	$P_f = 3,27\times10^{-2}$	$P_f = 3,63\times10^{-2}$
	7	$P_f \to 0$	$P_f \to 0$	$P_f = 3,26\times10^{-2}$
$I_{r,1}$		0,19	0,19	0,19
$I_{r,2}$ ($a = 100$)		0,01	0,01	0,01
Chemin le plus probable		3→2→4	4→5→3	5→6→4
Probabilité d'occurrence du chemin le plus probable		$P_f = 3,28\times10^{-2}$	$P_f = 3,29\times10^{-2}$	$P_f = 3,28\times10^{-2}$

Tableau 4.54. Résultats obtenus.



(a) (b) (c)

Figure 4.67. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes pour les profils de charge (a) I, (b) II, et (c) III.

L'analyse des résultats obtenus (Tableau 4.54, Figure 4.67) montre que lorsqu'une section est défaillante (fissurée), ce sont les sections immédiatement voisines qui sont défaillantes à leur tour, ce qui est un résultat cohérent car il y a une concentration de contraintes au voisinage d'une section fissurée. On remarque que les mêmes probabilités locale et globale et donc le même indice de robustesse est obtenu lorsque la charge est appliquée sur les sections 3 ou 5 de la poutre (Figure 4.62c), qui sont des sections symétriques par rapport à la mi-travée. Par ailleurs, les probabilités de défaillance globales sont très proches pour les trois cas considérés. Sous l'effet de la charge ponctuelle P, les chemins de défaillance les plus probables ont des probabilités d'occurrence, et donc des indices de robustesse très proches.

Dans le but d'analyser l'impact de la modélisation des paramètres de calcul sur l'indice de robustesse, de nouvelles analyses structurales ont été menées avec la structure modélisée telle que précédemment (la zone étudiée est celle représentée à la Figure 4.62c). L'état limite considéré pour déterminer la défaillance locale est toujours l'atteinte de la hauteur de fissure critique dans une des sections étudiées. Plus précisément, la défaillance locale dans ce cas est l'apparition d'une zone de béton fissurée d'au moins 10 cm de hauteur tel que modélisée à la Figure 4.68 ($h_{fissure,critique} = 0{,}10\,\text{m}$). La valeur moyenne de la tension dans les câbles de précontrainte σ_{cables} est par ailleurs prise égale à 800 Mpa.

Dans un premier temps, les douze variables aléatoires du Tableau 4.55 sont considérées. Dans un deuxième temps, seulement cinq variables aléatoires sont considérées, les statistiques de ces variables étant détaillées dans le Tableau 4.56. L'étude avec cinq variables aléatoires correspond en fait à considérer une seule contrainte limite de traction du béton dans les sept sections de la Figure 4.62c.

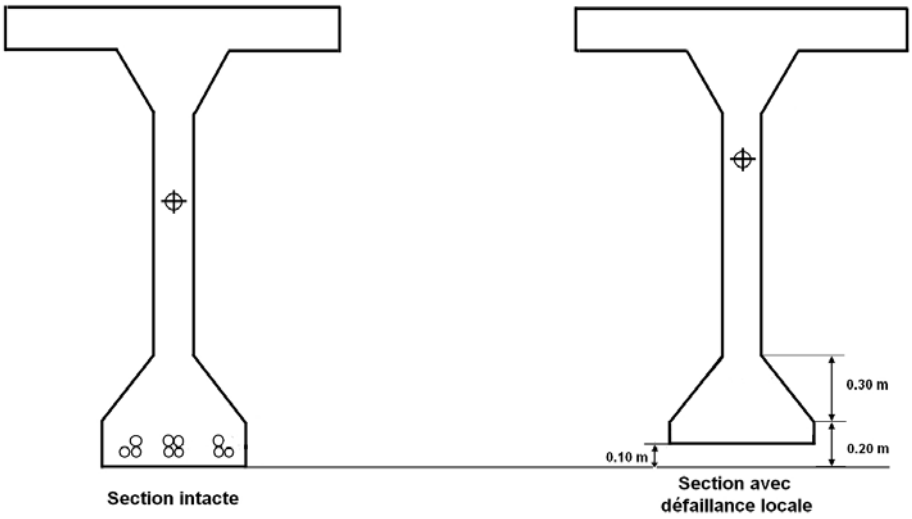


Figure 4.68. Définition de la défaillance locale.

Variables	Loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
P	Normale	0,79 MN	5%
ρ		2,5 t/m^3	5%
σ_{cables}	Lognormale	800 Mpa	9%
σ_{trac}^{h}		3,27 Mpa	20%
σ_{trac}^{1}		3,27 Mpa	20%
σ_{trac}^{2}		3,27 Mpa	20%
σ_{trac}^{3}		3,27 Mpa	20%
σ_{trac}^{4}		3,27 Mpa	20%
σ_{trac}^{5}		3,27 Mpa	20%
σ_{trac}^{6}		3,27 Mpa	20%
σ_{trac}^{7}		3,27 Mpa	20%
$h_{fissure_critique}$		0,10 m	3%

Tableau 4.55. Statistiques des variables aléatoires considérées (cas 1).

Variables	Loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
P	Normale	0,79 MN	5%
ρ		2,5 t/m^3	5%
σ_{cables}	Lognormale	800 Mpa	9%
σ_{trac}		3,27 Mpa	20%
$h_{fissure_critique}$		0,10 m	3%

Tableau 4.56. Statistiques des variables aléatoires considérées (cas 2).

Les résultats obtenus sont représentés dans le Tableau 4.57.

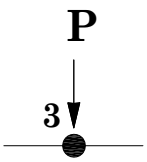
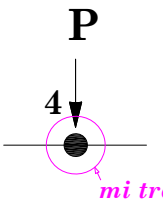
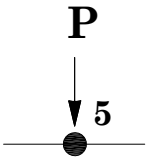
		Cas de charge considérés		
		I: Charge appliquée à la section 3 	II: Charge appliquée à la section 4 (mi travée) 	III: Charge appliquée à la section 5 
$I_{r,1}$	5 v.a	0,02	0,06	0,02
	12 v.a	0,18	0,18	0,18
$I_{r,2}$ $(a=100)$	5 v.a	0,01	0,01	0,01
	12 v.a	0,01	0,01	0,01
Chemins de défaillance le plus probable identifiés	5 v.a	4→2	6→4	4→6
	12 v.a	4→2	5→3	6→4
Probabilité d'occurrence du chemin le plus probable	5 v.a	$P_f = 4,24\times10^{-1}$	$P_f = 3.88\times10^{-1}$	$P_f = 4,24\times10^{-1}$
	12 v.a	$P_f = 3.55\times10^{-1}$	$P_f = 3.55\times10^{-1}$	$P_f = 3.54\times10^{-1}$

Tableau 4.57. Résultats obtenus.

Les arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes correspondant au cas avec douze variables aléatoires sont représentés dans les Figures 4.69 à 4.71 pour l'application de la force aux nœuds 3, 4 et 5, respectivement.

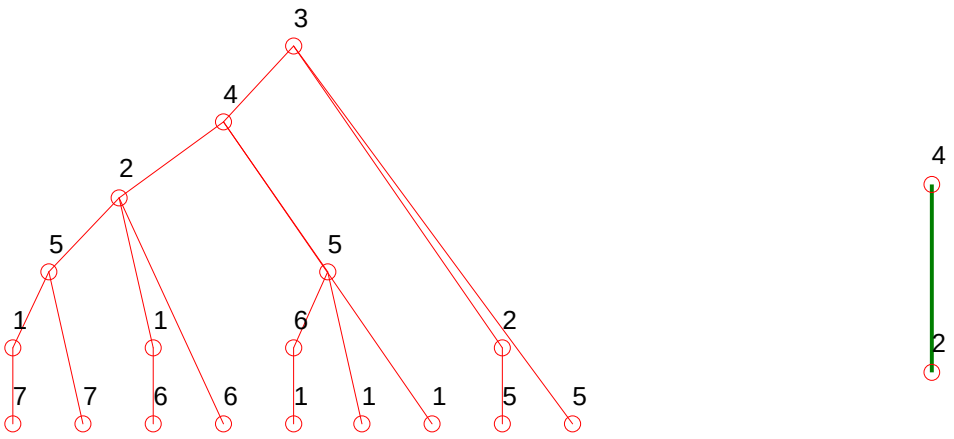


Figure 4.69. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes pour la charge appliquée en 3 (cas 1).

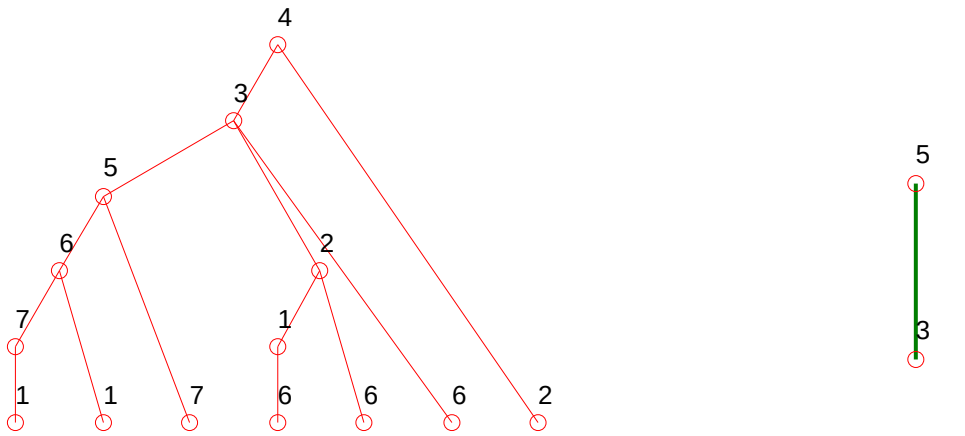


Figure 4.70. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes pour la charge appliquée en 4 (cas 1).

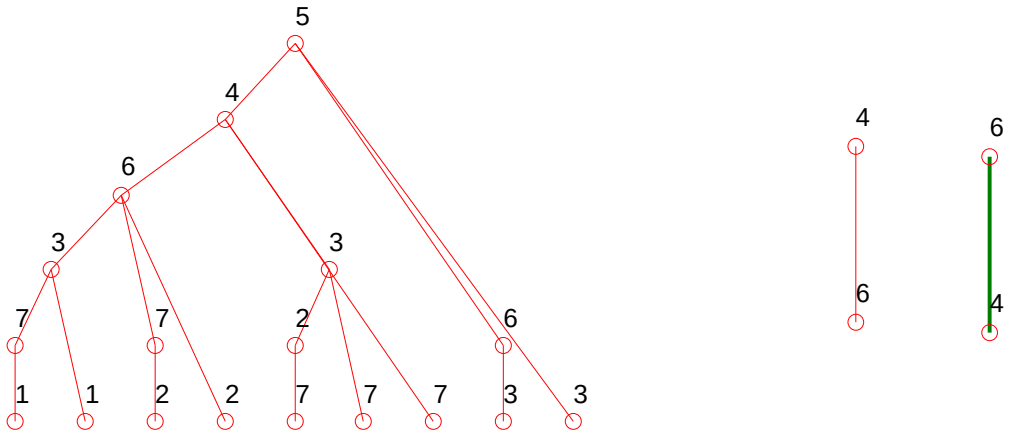


Figure 4.71. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes pour la charge appliquée en 5 (cas 1).

Les arbres de défaillance identifiés par la méthode des branches et bornes pour le cas avec cinq variables aléatoires sont représentés dans les Figures 4.72 à 4.74 pour l'application de la force aux nœuds 3, 4 et 5, respectivement.

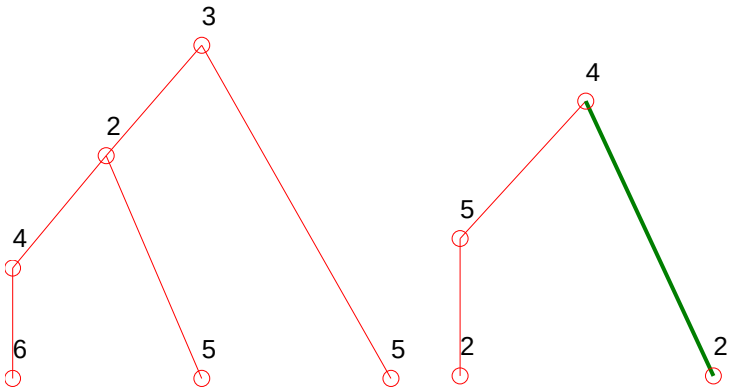


Figure 4.72. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes pour la charge appliquée en 3 (cas 2).

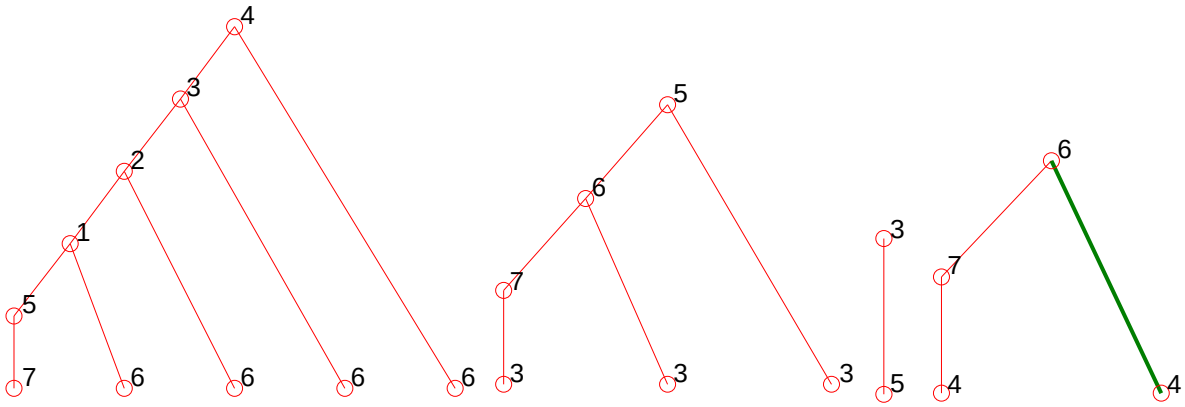


Figure 4.73. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes pour la charge appliquée en 4 (cas 2).

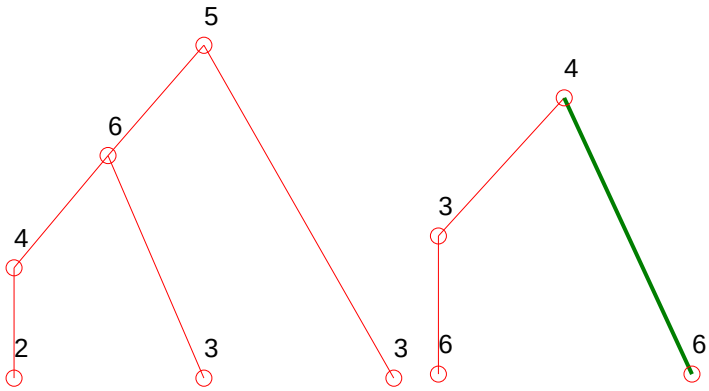


Figure 4.74. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes pour la charge appliquée en 4 (cas 2).

Il est observé que si une seule variable est utilisée pour caractériser la contrainte limite en traction du béton, les indices de robustesse obtenus sont plus faibles que ceux avec une variable de contrainte limite en traction par section. On obtient par exemple un indice de robustesse $I_{r,1} = 1,21$ dans le premier cas, lorsque P est appliquée à mi-travée, contre un indice $I_{r,1} = 1,06$ dans le deuxième cas.

Afin d'illustrer les résultats obtenus ci-dessus, une étude de la fissuration au point de fonctionnement (cf. Paragraphe B.3.4.3) est réalisée, lorsque la charge P est centrée, et pour le cas où l'on a une variable de contrainte limite en traction par section dans la zone étudiée (cas1 avec 12 variables aléatoires, cf. Figure 4.70). Les résultats obtenus sont reportés dans les Tableaux 4.58 et 4.59.

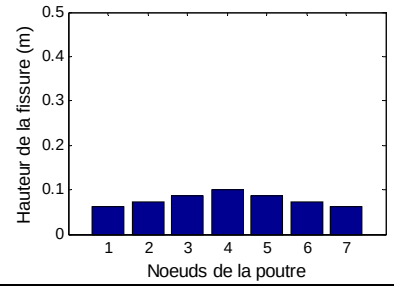
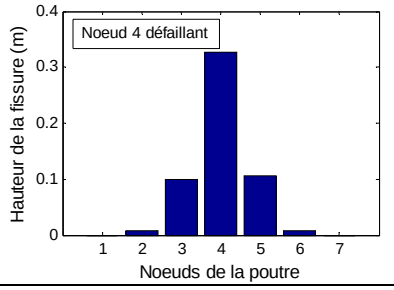
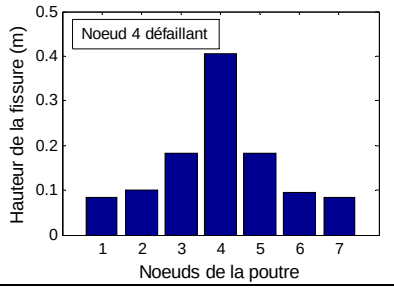
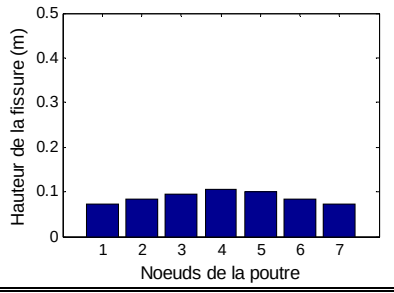
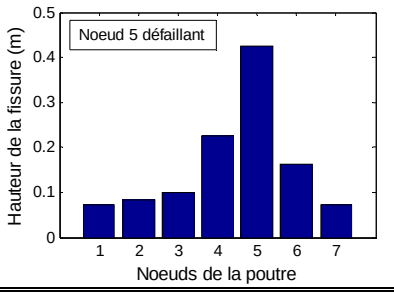
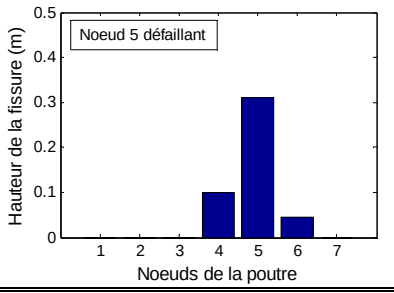
4	4→3	4→2
		
5	5→3	5→4
		

Tableau 4.58. Etats de fissuration obtenus lors du parcours de l'arbre d'évènement (Figure 4.70).

Nœuds étudiés / Chemins de défaillance	Volume globale fissuré (m^3)	Probabilité de défaillance	Atteinte du critère global de défaillance ?
4	0,045	$4{,}50.10^{-1}$	Non
4→3	0,030	$4{,}27.10^{-1}$	Non
4→2	0,075	$3{,}52.10^{-1}$	Oui
5	0,052	$4{,}31.10^{-1}$	Non
5→3	0,076	$3{,}55.10^{-1}$	Oui
5→4	0,020	$4{,}27.10^{-1}$	Non

Tableau 4.59. Caractéristiques liées aux états de fissuration du Tableau 4.58 lors du parcours de l'arbre d'évènement (Figure 4.70).

Les tableaux 4.58 et 4.59 montrent qu'au commencement du parcours d'arbre d'évènements, le nœud 4 est sélectionné, car ayant une probabilité de défaillance plus grande que celle liée au nœud 5. La comparaison des chemins 4→2 et 4→3 permet d'observer que le critère global n'est pas ou est atteint lors du parcours de l'arbre. Il est noté que le chemin de défaillance complet le plus probable est le chemin 5→3 (le critère global n'étant pas atteint pour le chemin 5→4). Une autre analyse est menée dans le but d'étudier la corrélation entre les différents états limites dans le chemin de défaillance. L'étude est menée en considérant uniquement le cas où la charge ponctuelle P est appliquée à la mi-travée (nœud 4), avec les variables aléatoires du Tableau 4.56, et en supposant les états limites indépendants ou corrélés. Les résultats obtenus sont détaillés dans le Tableau 4.60, et les arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes (correspondant au cas où les états limites sont indépendants) sont représentés dans la Figure 4.75. Il est noté que l'arbre obtenu avec des états limites corrélés est celui de la Figure 4.73. Le Tableau 4.60 montre qu'en considérant un état limite indépendant, on obtient un indice de

robustesse plus élevé. Il est surtout intéressant de constater que le chemin le plus probable n'est pas le même pour les deux cas considérés.

	Etats limites considérés	
	Corrélés	indépendants
$I_{r,1}$	0,06	0,56
$I_{r,2}$ $(a=100)$	0,01	0,02
Chemins de défaillance le plus probable identifiés	6→4	3→5
Probabilité d'occurrence du chemin le plus probable	$P_f = 3.88\times10^{-1}$	$P_f = 1{,}88\times10^{-1}$

Tableau 4.60. Résultats obtenus.

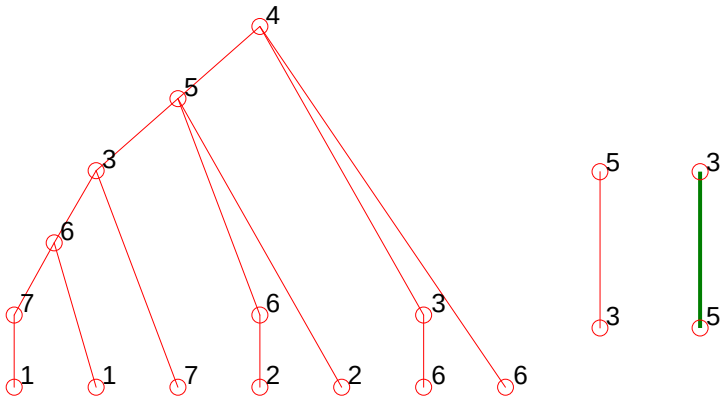


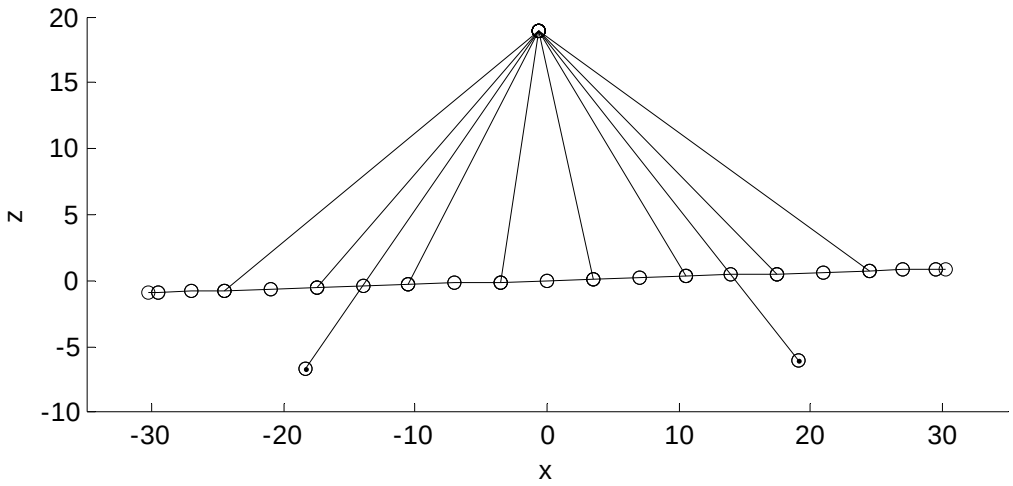
Figure 4.75. Arbres de défaillance de la méthode des branches et bornes.

4.5 APPLICATION A L'ETUDE D'UN PONT A HAUBANS

4.5.1 Description de l'ouvrage étudié

La structure étudiée est un modèle numérique de pont haubané (Sétra 2011). Ce pont a une longueur de 60,60 m et comprend huit haubans (câbles obliques) partant de pylônes centraux et supportant tout le poids du tablier. Ce pont est modélisé dans la Figure 4.76.

(a)



(b)

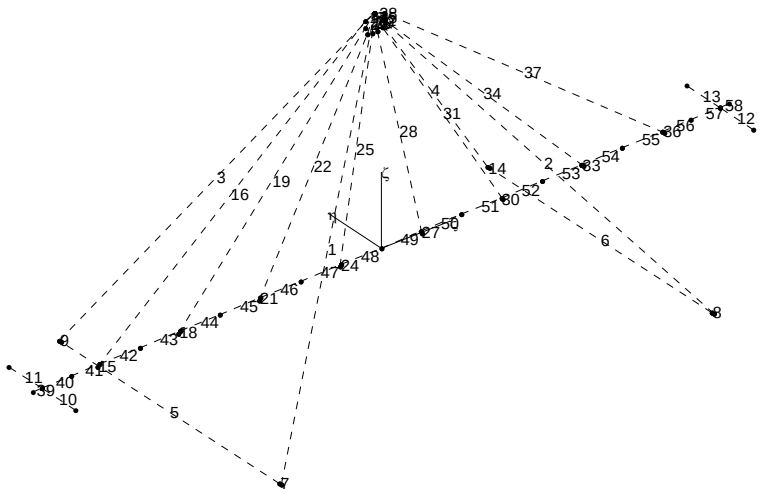


Figure 4.76. Modélisations par éléments poutres en (a) 2D et (b) 3D du pont haubané.

Le code de calcul utilisé pour les modélisations et les calculs de cette étude est CALFEM© qui est un code structures à poutre développé sous Matlab© (Lund University 1999). Dans l'objectif de simplifier l'analyse structurale, le matériau constitutif des haubans est supposé suivre une loi de comportement élastique fragile, et les autres éléments du pont sont supposés suivre une loi de comportement élastique parfaitement plastique. Les constantes des matériaux utilisés sont répertoriées dans le Tableau 4.61.

	E (MPa)	ν	ρ (t/m^3)	α
Eléments de tablier, les abouts, les pieds de pylône	$1{,}2.10^6$	0,2	2,5	$1{,}0.10^{-5}$
Eléments de pylônes	20.10^6	0,3	-	$1{,}0.10^{-5}$
Haubans	$19{,}4.10^6$	0,3	8,5	$1{,}1.10^{-5}$

Tableau 4.61. Constantes des matériaux.

Dans le Tableau 4.61, E désigne le module d'Young du matériau, ν le coefficient de Poisson, ρ la masse volumique et α le coefficient de dilatation thermique. Les caractéristiques mécaniques des sections sont répertoriées dans le Tableau 4.62.

	S_X (m^2)	S_Y (m^2)	S_Z (m^2)	i_x (m^4)	i_y (m^4)	i_z (m^4)	v_y (m)	w_y (m)	v_z (m)	w_z (m)
Eléments de tablier	5,92	4	1,5	0,66	0,571	55,74	6,75	6,75	0,99	0,36
Haubans	$3{,}3.10^{-3}$	-	-	$1{,}0.10^{-6}$	$1{,}0.10^{-6}$	$1{,}0.10^{-6}$	0,1	0,1	0,1	0,1
Eléments de pylônes	0,08	-	-	$1{,}53.10^{-2}$	$7{,}66.10^{-3}$	$7{,}66.10^{-3}$	0,5	0,5	0,5	0,5
les pieds de pylône	0,96	-	-	0,03	0,02	10	0,5	0,5	0,5	0,5
les abouts	2,55	-	1,7	0,65	0,37	10	0,4	0,4	0,58	0,72

Tableau 4.62. Caractéristiques géométriques des sections.

Dans le Tableau 4.62, S_X désigne la section droite, S_Y la section réduite d'effort tranchant d'axe (O, y), S_Z la section réduite d'effort tranchant d'axe (O, z), i_x l'inertie de torsion, i_y inertie de flexion d'axe (O, y), i_z inertie de flexion d'axe (O, z), v_y ordonné de la fibre supérieure d'axe (O, y), w_y valeur absolue de v_y, v_z ordonné de la fibre supérieure d'axe (O, z) et w_z la valeur absolue de v_z. La structure est encastrée au niveau des abouts et en pieds des pylônes. Elle est soumise à onze charges ponctuelles verticales telles que représentées dans la Figure 4.77

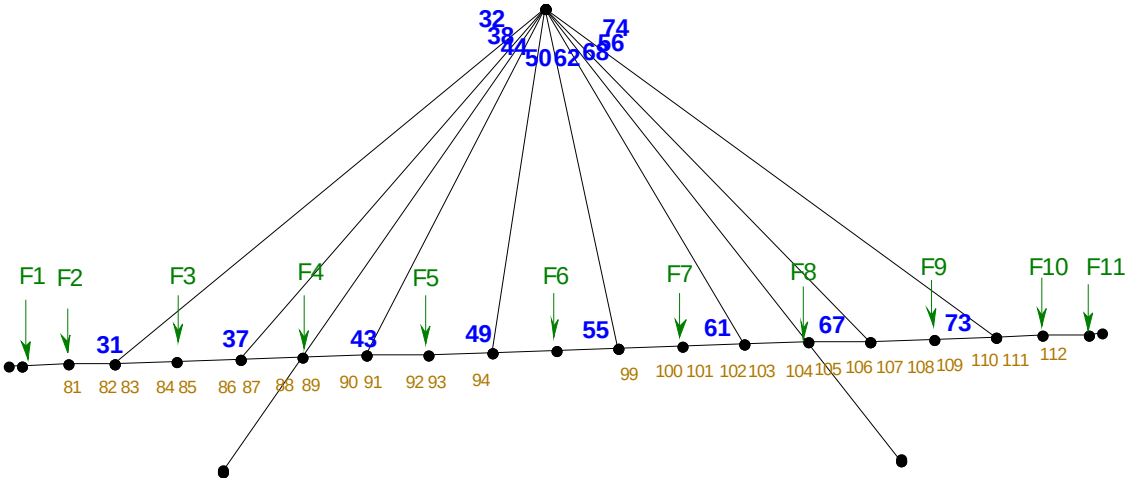


Figure 4.77. Modèle de chargement étudié.

4.5.2 Modélisation de la défaillance

Dans cette étude, la défaillance d'un ou plusieurs hauban(s) ainsi que la plastification d'une section du tablier sont envisagées. La défaillance locale est considérée comme étant une tension excessive dans les câbles ou l'apparition d'une rotule plastique dans une des sections du tablier modélisées à la Figure 4.77. Lorsqu'un hauban est défaillant, il est supprimé du modèle structural et la structure est de nouveau analysée pour identifier l'élément défaillant suivant. Lorsqu'une section du tablier est défaillante (apparition d'une rotule plastique), la matrice globale de rigidité est modifiée et des efforts nodaux équivalents sont appliqués aux nœuds correspondants (paragraphe 3.3.2). La défaillance globale est finalement définie comme étant une flèche à mi travée supérieure de 10% à la valeur de la flèche initiale à mi travée.

4.5.3 Analyse des efforts dans les sections

En considérant des valeurs de chargement $F_1=4\times F$, $F_2=4\times F$, $F_3=4\times F$, $F_4=F_5=F_6=F_7=F_8=F_9=F_{10}=F$ et $F_{11}=3\times F$ tel que F=500kN, les diagrammes des efforts de sections sont représentés dans les Figures 4.78 et 4.79.

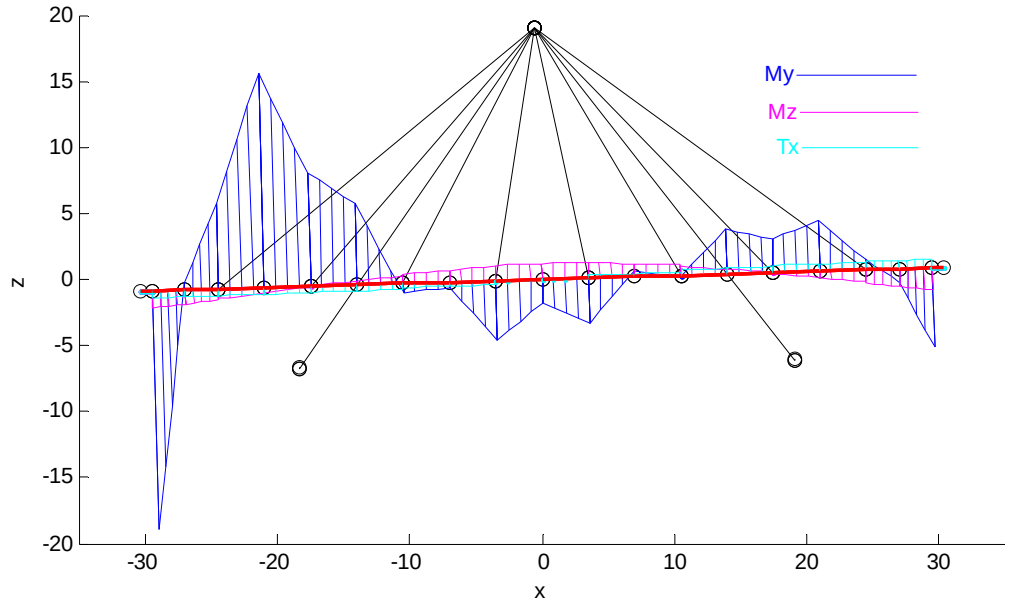


Figure 4.78. Diagrammes des moments fléchissant M_y, M_z et du moment de torsion T_x.

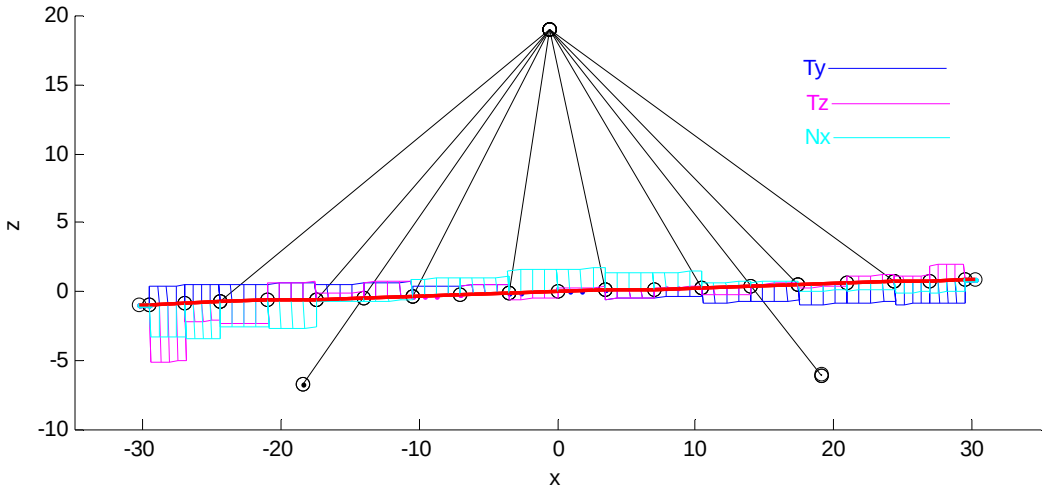


Figure 4.79. Diagrammes des efforts tranchants T_y, T_z et de l'effort axial N_x.

La Figure 4.78 montre que le moment fléchissant M_y par rapport à l'axe (O, y) est prédominant. En conséquence dans l'écriture de l'état limite pour les éléments du tablier, le paramètre de résistance est le moment plastique résistant par rapport à l'axe (O, y) et le paramètre de sollicitation est le moment calculé par rapport à l'axe (O, y).

4.5.4 Application à l'étude de la robustesse structurale

Les statistiques des variables aléatoires considérées sont représentées dans le Tableau 4.63 dans lequel M_1 désigne le moment résistant plastique des éléments du tablier, M_2 le moment résistant plastique des haubans, M_3 le moment résistant plastique des pylônes, M_4 le moment résistant plastique de la base des pylônes, M_5 le moment résistant plastique des abouts, M_6 le

moment résistant plastique des excentricités, situés au niveau des appuis de pylônes et M_7 le moment résistant plastique des excentricités des haubans (ces excentricités sont supposées être infiniment rigides). Ces statistiques se basent sur les valeurs utilisées dans le rapport du Sétra (2011).

Variables	Loi	Moyenne (μ)	Coefficient de variation (CDV)
M_1	Normale	$6{,}6062.10^8$ Nm	5%
M_2		3500 Nm	5%
M_3		4596000 Nm	5%
M_4		$1{,}6.10^9$ Nm	5%
M_5		2.10^9 Nm	5%
M_6		4596000 Nm	5%
M_7		3500 Nm	5%
F_1		2000.10^3 N	30%
F_2		2000.10^3 N	30%
F_3		2000.10^3 N	30%
F_4		500.10^3 N	30%
F_5		500.10^3 N	30%
F_6		500.10^3 N	30%
F_7		500.10^3 N	30%
F_8		500.10^3 N	30%
F_9		500.10^3 N	30%
F_{10}		500.10^3 N	30%
F_{11}		1500.10^3 N	30%

Tableau 4.63. Statistiques des variables aléatoires utilisées.

La méthode des branches et bornes est utilisée pour l'identification du chemin de défaillance dominant en vue d'une caractérisation de la robustesse structurale. Les résultats obtenus sont fournis dans le Tableau 4.64 et montrent que les indices $I_{r,1}$ et $I_{r,2}$ sont très proches de 1,0 (robustesse élevée). Les chemins de défaillance dominants sont finalement montrés dans la Figure 4.80. Il est observé que le chemin le plus probable obtenu est la rupture des haubans numéro 22 et 28 (Figure 4.76), constitués respectivement des nœuds 43 et 55 (Figure 4.77).

$I_{r,1}$	1,00
$I_{r,2}$ ($a = 100$)	0,99
Chemins de défaillance le plus probable identifiés	43→55
Probabilité d'occurrence du chemin le plus probable	$P_f = 1{,}01 \times 10^{-8}$

Tableau 4.64. Résultats obtenus.

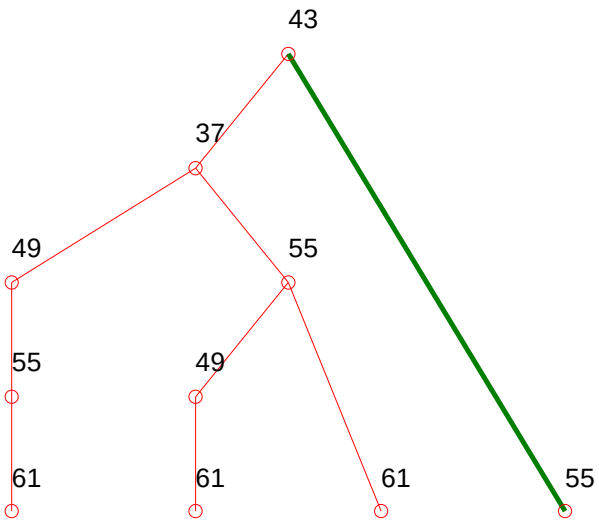


Figure 4.80. Arbre de défaillance de la méthode des branches et bornes.

4.6 SYNTHESE

Pour évaluer l'efficacité des indices de robustesse proposés, des simulations numériques ont été effectuées dans ce chapitre sur différents cas d'étude. Plusieurs exemples ont été considérés afin d'évaluer leur robustesse structurale et de comparer les différentes méthodes présentées dans le Chapitre 3. Les résultats montrent que la redondance est un facteur clé dans la conception pour assurer la robustesse structurale et pour lutter contre les défaillances progressives. Frangopol & Curley (1987) ont montré que la redondance structurale dépendait de plusieurs facteurs tels que la géométrie de la structure, la taille des éléments, les propriétés des matériaux, les actions sollicitantes, etc. Les résultats présentés dans ce chapitre confirment l'influence de ces facteurs sur la robustesse structurale. Bien que la redondance structurale ne soit pas le seul facteur clé pour assurer la robustesse structurale, il est très important de la considérer pour prévenir la propagation d'une défaillance dans la structure. La démarche proposée a également permis de placer l'étude de la robustesse d'une structure dans le cadre d'une analyse de risque. Une telle analyse doit permettre au final d'identifier les risques et d'orienter les décisions et les choix pour les maîtriser, les réduire, voire les éviter. Comment évaluer les ouvrages vis-à-vis d'un risque donné, comment remettre à niveau un lot d'ouvrages vis-à-vis d'une risque donné, comment hiérarchiser les actions de maintenance, comment définir une stratégie de surveillance d'un lot d'ouvrages spécifiques (périodicité, données à recueillir, etc.) sont autant de questions qui sont abordées dans le cadre d'une analyse de risque et pour laquelle les concepts de robustesse peuvent apporter des éléments d'information pertinents. Enfin, la démarche a été appliquée dans le cas où les états limites considérés sont des états limites de service (paragraphes 4.4 et 4.5), ce qui montre que la méthodologie proposée n'est pas restreinte à des problèmes où la stabilité de la structure est remise en cause, mais au contraire peut s'appliquer de manière très générale à différents types de défaillances dès lors que les concepts de défaillances locales et globales peuvent être caractérisés et modélisés.

CHAPITRE 5

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES GENERALES

La communauté scientifique internationale a pris conscience ces dernières décennies de l'importance de la robustesse structurale des ouvrages du génie civil. Un des problèmes majeurs en ce qui concerne son incorporation dans les méthodes actuelles de conception et de gestion est de pouvoir la quantifier. Ce mémoire de thèse propose un cadre probabiliste pour caractériser la robustesse structurale et prendre en compte les différents types d'incertitudes pouvant être rencontrées dans une analyse structurale. Cette conclusion établit un bilan des travaux effectués et suggère des perspectives pour l'approfondissement des recherches. Le mémoire a été divisé en trois grandes parties :

- la première partie établit un état de l'art des travaux qui ont déjà été effectués dans le domaine de la robustesse et de la vulnérabilité structurale. Il apparaît que le concept de robustesse structurale n'est pas explicitement pris en compte lors du dimensionnement des ouvrages du génie civil. Concrètement, la défaillance d'un élément de structure (défaillance locale) entraîne généralement une redistribution des efforts internes dans les autres membres de la structure (dans le cas de structures redondantes). Ces éléments structuraux peuvent à leur tour être défaillants si l'intensité des efforts redistribués est trop élevée. On peut alors assister à une propagation d'une série de défaillances à travers l'ensemble du système entraînant au final une défaillance globale. D'après les Eurocodes EN 1990 et EN 1991-1-7, ce type de défaillance en chaîne disproportionnée par rapport à la cause initiale peut être évité en concevant et en construisant des structures robustes. Pour autant, les règlements sont assez muets sur la manière d'apprécier le degré de robustesse des ouvrages ainsi que sur la façon de considérer les incertitudes dans l'analyse menée. Un objectif majeur est donc de proposer des méthodologies permettant l'identification d'un dysfonctionnement global partant d'un dysfonctionnement local pour quantifier l'impact d'une défaillance relativement locale sur des conséquences

structurales majeures. De nombreux indices de robustesse existent dans la littérature, ainsi que les stratégies et méthodes pour estimer un niveau de robustesse structurale. La plupart de ces indices supposent la localisation d'un dommage en un point de la structure et comparent la performance de la structure endommagée à celle de la structure avant l'endommagement. Ce mémoire propose de quantifier la robustesse structurale sur la base d'un écart entre la probabilité de réalisation d'un dysfonctionnement local et la probabilité d'occurrence d'un dysfonctionnement global. Dans un cadre probabiliste, chaque élément de l'ouvrage est défini par une probabilité de défaillance et il est ainsi possible de caractériser la vulnérabilité structurale au niveau local. Le but est alors d'estimer la probabilité de réalisation d'un dysfonctionnement global et de comparer cette valeur à la probabilité de défaillance locale. La robustesse est donc définie dans cette thèse comme une mesure de l'étendue entre les probabilités de scenarii de défaillances locales et globales ;

– la deuxième partie présente deux approches possibles pour caractériser un dysfonctionnement global : une approche « par l'intérieur » déterminant le cheminement de la défaillance dans la structure, et une approche par l'extérieur supposant l'occurrence de la défaillance de manière simultanée en plusieurs points définis au préalable. Concernant l'approche par l'intérieur, la défaillance d'un élément n'entraîne pas nécessairement la défaillance globale de l'ouvrage (dans le cas d'ouvrages hyperstatiques fortement redondants). La prise en compte de tous les chemins de défaillance peut alors s'avérer délicate d'un point de vue numérique. Trois méthodes ont été introduites pour déterminer les chemins de défaillance avec des probabilités d'occurrence élevées : la méthode des branches et bornes, la méthode du β-unzipping et la méthode du β-unzipping avec bornage. L'approche « par l'extérieur » consiste elle à identifier des mécanismes dominants sans parcourir un arbre d'évènement (et donc sans s'intéresser à l'ordre avec lequel la défaillance survient). La défaillance est donc recherchée de manière globale sans déterminer la chronologie dans la formation du dysfonctionnement global. Le choix d'une de ces deux familles de méthodes dépend en grande partie de l'échelle de modélisation à laquelle l'utilisateur se place. Une approche « par l'intérieur » nécessite d'identifier des relations entre les différents composants pour pouvoir modéliser le report des charges lors des différentes apparitions de défaillances. Cette étape peut s'avérer délicate si la modélisation même de la structure ne permet pas de discrétiser cette étape de prise en compte de la défaillance. Dans ce dernier cas, une approche « par l'extérieur » permet d'apporter des éléments de réflexion, même s'il est peu probable dans la pratique que la défaillance ait lieu en un grand nombre de points différents de la structure. Dans les deux cas, les deux familles de méthodes permettent d'identifier des mécanismes de défaillance à l'échelle globale de la structure et de quantifier leur probabilité

d'occurrence. Il devient alors possible de quantifier un écart entre défaillances locales et globales et de caractériser la notion de robustesse structurale ;

- la troisième partie propose une application de la démarche à plusieurs cas d'étude permettant de comparer les différentes approches sur un certain nombre de cas d'application. Dans un premier temps, des états limites ultimes, liés à une perte de stabilité et la formation d'un mécanisme, sont considérés. L'influence des propriétés des matériaux, de la géométrie de la structure, de l'intensité des actions sollicitantes et des conditions aux limites est étudiée. La démarche est également replacée dans le contexte d'une analyse de risque, couplant des notions d'aléas, de vulnérabilité, et de criticité. Finalement, la considération d'une poutre précontrainte VIPP (viaduc à travées indépendantes à poutres précontraintes) ainsi que d'un pont haubané permet de montrer comment la démarche peut être appliquée sur des structures courantes du génie civil lorsque des états limites de service sont considérés.

Il est noté que les différentes méthodes d'identification de dysfonctionnements globaux ont été implémentées sous Matlab© et que les programmes correspondants font appel à la fois à des codes de calcul de structures parmi lesquels CALFEM© (Lund University 1999) ou encore le code de calcul des structures à barres ST1-SETRA©, et à la boite à outils fiabilité Reliabtbx 1.5 développée à l'IFSTTAR et au Sétra sous environnement Matlab©.

Au terme de cette étude, on peut constater qu'une approche générale prenant en compte les incertitudes a été proposée pour la qualification et la quantification de la robustesse structurale. Cette démarche s'appuie sur l'étude d'une série de propagation de défaillance dans l'ouvrage afin d'identifier les dysfonctionnements globaux les plus probables et d'en déduire un écart entre la probabilité d'occurrence d'un dommage local et la celle d'un dommage global. Un enjeu fort est de pouvoir utiliser les concepts développés afin d'aider à optimiser le dimensionnement des ouvrages. L'application de la méthode proposée pour évaluer la robustesse des ouvrages existants représente également un objectif majeur.

Ce travail de thèse constitue une ébauche d'analyse de la robustesse et de la vulnérabilité structurale dans un cadre probabiliste. Il est évident qu'au cours de cette thèse, tous les problèmes n'ont pu être abordés. Beaucoup reste encore à faire notamment sur la modélisation des actions accidentelles à l'origine d'une défaillance localisée, et l'intégration d'une telle approche dans un cadre réglementaire. En effet, les méthodes actuelles de dimensionnement des ouvrages offrent aux ingénieurs un cadre suffisant et approprié pour concevoir des structures courantes qui se comportent correctement sous des chargements identifiés avec un niveau de fiabilité donné. Les règlements de conception et d'évaluation sont donc les principaux moyens par lesquels la société s'assure de la sécurité des constructions. Pour la plupart, ils prescrivent ce qui doit être fait, quelles charges devraient être utilisées, quels coefficients de sécurité doivent être introduits. Mais, les défaillances sont souvent la conséquence de bien d'autres causes, comme les erreurs

humaines (de conception ou de construction), les actions accidentelles, ou les dégradations non détectées… Ceci fait parfois qu'une défaillance localisée peut se traduire par des conséquences majeures. Dans ce contexte, il est primordial de généraliser les concepts développés dans cette thèse vers une démarche d'analyse de risques (à la manière de l'étude proposée dans le Chapitre 4 de cette thèse) et d'identifier les scénarios de dysfonctionnement (ou d'accidents) en relation avec l'identification des mécanismes de dégradation et des modes de défaillance potentiels des ouvrages.

Par ailleurs, l'application de cette méthode pour caractériser la robustesse des ouvrages sur leur cycle de vie représente un enjeu majeur. A l'échelle du cycle de vie des infrastructures, il est difficile d'estimer avec précision le niveau de risque auquel une structure est soumise. Par ailleurs, les fonctions d'une structure ne sont pas nécessairement constantes dans le temps. Les fonctions initiales, c'est-à-dire celles qui ont motivé la construction de l'ouvrage, peuvent être modifiées soit volontairement à cause d'un changement voulu des fonctions ou d'une extension de la durée de vie, soit involontairement à cause d'actions externes ou de dégradations. Evaluer l'évolution d'un niveau de robustesse structurale (et l'actualiser si des nouvelles informations sont accessibles) représente donc un enjeu majeur vis-à-vis de la gestion des ouvrages sur leur durée de vie en service.

Enfin, la forte croissance des réseaux d'infrastructures de génie civil met en évidence la nécessité de considérer la maîtrise des risques structuraux à l'échelle des réseaux d'infrastructures, notamment à travers la notion de résilience, c'est-à-dire le fonctionnement d'un réseau avec des mécanismes de redondance fiables, que ce soit au sein même de l'ouvrage ou grâce à l'interfonctionnement avec les autres éléments du réseau d'infrastructures, de sorte que tous les dispositifs du réseau puissent être utilisés de manière satisfaisante. Les outils proposés dans cette thèse pour la quantification de la robustesse structurale peuvent être envisagés de manière plus globale pour l'évaluation technico-socio-économique et l'aide à la décision à l'échelle des réseaux d'infrastructures.

BIBLIOGRAPHIE

Abdo, T. & Rackwitz, R. (1990). A new beta-point algorithm for large time-invariant and time-variant reliability problems. Reliability and Optimization of Structures: pp. 1-11 3rd WG 7.5 IFIP conference.

Agarwal, J. Blockley, D. & Woodman, N. (2001). Vulnerability of 3-dimensional trusses. *Journal of structural safety*, Elsevier. Vol 23, pp 203-220.

Agarwal, J. Blockley, D. & Woodman, N. (2003). Vulnerability of structural systems. *Journal of structural safety*, Elsevier. Vol 25, pp 263-286.

Agarwal, J. England, J. & Blockley, D. (2005). Vulnerability analysis of structures. JCSS and IABSE Workshop on Robustness of Structures.

Anitori, G., Casas, J.R. & Ghosn, M. (2011). Evaluation of bridge redundancy under lateral loads. IABMAS 2012, Stresa, Italy, 8-12 July 2012.

ArcelorMittal (2012) Poutrelles I européennes, www.arcelormittal.com

ASCE 7-02 (2005). Minimum design loads for buildings and other structures, American Society of Civil Engineers, 01 december 2002, 352 pages. Reston, VA, U.S.A.

Règles B.A.E.L 91 modifiées 99 – 'Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états-limites'. Ed. Eyrolles, 3ª édition, 2000.

BA-Cortex, le calcul de structures en béton selon les eurocodes, *site édité par AUGC, CERPET, EFB*, [en ligne], http://www.ba-cortex.com (page consulté le 10 janvier 2012).

Baker, J.W. Schubert, M. & Faber, M.H. (2008). On the assessment of robustness. *Elsevier, Structural Safety* 30(3) : 253-267.

Baker, J. W. (2008)."Robustness of structures “COST Action TU0601, 1st workshop, February 4-5, 2008, ETH Zurich, Zurich.

Baker JW, Schubert, M. and Faber MH. (2005). On the Assessment of Robustness. Submitted for possible publication in the Journal of Structural Safety, January,2006.

Bennett, R.M. & Ang, A.H-S. (1983). "General Structural System Reliability Analysis." Recent Advances in Engineering Mechanics and Their Impact on Civil Engineering Practice. Proceedings of the Fourth Engineering Mechanics Division Specialty Conference, ASCE, 839-842.

Bhattacharya, B. Qiang, L. & Zhong J. (2008). Reliability of redundant ductile structures with uncertain system failure criteria. India academy of science. Vol. 34, Part 6, pp. 903–921, December 2009. France.

Biondini, F. (2009). A Measure of Lifetime Structural Robustness. *Don’t Mess with Structural Engineers – Expanding our role; ASCE proceeding international structure Congress.* Austin, April 30 - May 2, 2009. Texas.

Biondini, F. Frangopol, D.M. & Restelli, S. (2008). On Structural Robustness, Redundancy and Static Indeterminacy. ASCE Structures Congress 2008. Vancouver, April 24-26. Canada.

Biondini, F. & Frangopol (2012). Lifetime structural robustness of concrete bridge piers under corrosion, IABMAS 2012, Stresa, Italy, 8-12 July 2012.

Biondini, F. & Restelli, S. (2008). Damage propagation and structural robustness. In Biondini & Frangopol (eds), *Life-Cycle Civil Engineering* . Taylor & Francis Group, London.

Boniface, B. (2010). ‘Modélisation thermo-mécanique et fiabilité des échangeurs réacteurs en carbure de silicium, Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2010.

Bouillard, P. (2011). ‘Flexion plastique’, Cours de mécanique des structures, Université libre de Bruxelles.

Brando, F. Testa, R.B. & Bontempi, F. (2010). Multilevel structural analysis for robustness assessment of a steel truss bridge. *Bridge Maintenance, Safety, Management and Life-Cycle Optimization; IABMAS’10, 5th Intern. Conf., Philadelphia, 11-15 July 2010*. USA.

Breitung, K., (1984)*‘Asymptotic approximations for multinormal integrals’*, Engineering Mechanics, ASCE, 110(3), pp. 357-366, 1984.

Briscoe, T. (1997). Robust Parsing, Survey of the State of the Art in Human Language Technology, G.B. Varile and A. Zampolli, Editors., Cambridge University Press: Cambridge; New York; Pisa, Italy. 513p.

Broyden, C. G. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 2 : the new algorithm. Journal of the institute of Mathematics and its Applications, 6 :222{231, 1970. 15

Callaway, D.S., Newman, M.E.J., Strogatz, S.H. & Watts, D.J. (2000). Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs". Physical Review Letters; 85:5468-5471.

Cannaméla, C., (2007). 'Apport des methods probabilistes dans la simulation du comportement sous irradiation du combustible à particules', Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris VII, 2007.

Canisius, T.D.G. Sorensen, J.D. & Baker, J.W. (2007). Robustness of structural systems – a new focus for the Joint Committee on Structural Safety (JCSS). In Kanda, Takada & Furuta (eds). *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*. London.

Cavaco E.S., Neves, L.A.C. & Casas, J.R. (2011). A reliability-based measure of robustness for concrete structures subjected to corrosion. ICASP 2011, Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering – Faber, Köhler & Nishijima (eds), Zürich, Switzerland, 1-4 August 2011.

Chen, M., Mathur, A.P. and V.J. Rego (1995). "Effect of Testing Techniques on Software Reliability Estimates Obtained Using a Time-Domain Model," IEEE Transactions on Reliability 44, 1, 97–103.

Cornell, G A. (1969) A Probability Based Structural Code. J. of American Concrete Institute 66(12): 974-985.

Cremona, C. (1994). "Approche probabiliste de la fiabilité des ponts", Journées nationales "Applications des statistiques et probabilités en analyse des matériaux et des ouvrages", édité par A. Mébarki, J.P. Muzeau, M. Lemaire, pp. 81-92

Cremona, C. (1995). 'Applications de la théorie de la fiabilité à la sécurité d'éléments structuraux d'ouvrages d'art', Etudes et recherches des laboratoires des ponts et chaussées, 1995.

Cremona, C. (1997a). Analyse de la fiabilité des structures'Collection Emploi des Eléments Finis en Génie Civil', Hermès, Chapitre 6, Vol.2, 1997.

Cremona, C. (1997b). Probability-based optimization of inspection plannings for steel bridges, IABSE Workshop: Evaluation of existing steel and composite bridges, Lausanne, Suisse, 1997.

Cremona, C. (2001). Probability-based maintenance concepts for bridge management, International Conference on Structural Safety And Reliability ICOSSAR'01, Newport Beach, 2001.

Cremona, C. (2003). 'Application des notions de fiabilité à la gestion des ouvrages existants', Association Française de Génie Civil. Presse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. 2003.

Cremona, C. (2004). 'Aptitude au service des ouvrages', rapport de synthèse de l'opération de recherche, LCPC, Octobre 2004.

Cremona, C. (2005). 'Sécurité structurale des ouvrages, Module maintenance, pathologie et réparation des constructions', Master génie civil européen, ENPC, 2005.

Cremona, C. et al. (2005). 'Evaluation et prédiction de la fiabilité des structures', IPSI, Journée d'étude, Octobre 2005.

Cremona, C. et al. (2007). 'Benchmark des poutres de La Rance, Modélisation déterministe et probabiliste du comportement mécanique simplifié des corps d'épreuve', Revue Française de Génie Civil, Vol. 11, 2007.

Cremona, C. (2007). 'Suivi du comportement mécanique d'une poutre de VIPP sous chargement, le cas du VIPP de Merlebach', LCPC, Février 2007.

Cremona, C., Mohammadkhani-Shali, S., Richard B., Marcotte, C. & Tonnoir, B. (2008). Probabilistic analysis of the structural behaviour of a bridge prestressed concrete beam, 4th International Conference on Bridge maintenance, Safety and Management (IABMAS 08), Seoul, Korea.

Cremona, C. (2011). *'structural performance: Probability-based assessment'*, Wiley & Sons, inc. 2011.

Davalle, E. (2009). 'Flexion plastique plane', Cours de mécanique des structures I, laboratoire LSMS, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Devictor, N. (1996). Fiabilité et mécanique : méthodes FORM / SORM et couplages avec des codes d'éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives. Thèse.

Dey, A. & Mahadevan, S. (1998). "Ductile structural system reliability analysis using adaptative importance sampling". Journal of structural safety, Vol. 20, pp. 137–154, 1998.

Diamantidis, D. (2009). “Structural Reliability and Robustness in the Eurocodes”, ICAMB Conference, Vellore, India, December 2009.

Dimitri, V. & Elena, G. (2005). Robustness of frame structures. JCSS and IABSE Workshop on Robustness of Structures.

Ditlevsen, O. (1979). Narrow reliability bounds for structural systems. *Mechanics based design of structures and machines* . Taylor & Francis 7(4), 453–472.

Ditlevsen, O. & Bjerager, P. (1984). "Reliability of highly redundant plastic structures." J Engrg. Mech., ASCE, 110(5), 671-693.

Ditlevsen, O. & Madsen, H.O. (1996). Structural Reliability Methods. Wiley, Chichester, 1996.

Duprat, F. & Schoefs, F. (2009). Analyse de risques – Identification et estimation: outils quantitatifs d’estimation de risques. Cours enseignement supérieur. Université de Bordeaux. France.

Ellingwood, B. & Leyendecker, E.V. (1978). Approaches for design against progressive collapse. ASCE Journal of the Structural Division 104(3): 413–423.

Ellingwood, B. R. (2006). "Mitigating Risk from Abnormal Loads and Progressive Collapse." Journal of Performance of Constructed Facilities, 20(4), 315-323.

Ellingwood, B.R. (2007). Strategies for mitigating risk to buildings from abnormal load events. Int. J. of Risk Assessment and Mgt 7(6/7), 828–845.

Ellingwood, B.R. (2011). Achieving robustness and mitigating risk of disproportionate collapse in building, ICASP 2011, Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering – Faber, Köhler & Nishijima (eds), Zürich, Switzerland, 1-4 August 2011.

England, J. Agarwal, J. & Blockley, D. (2008). The vulnerability of structures to unforeseen events. *Journal of computers & structures*, ScienceDirect. Vol 86, pp 1042-1051.

EN 1990. (2002). Basis of Structural design. *Eurocode 0: CEN 2002* .

EN 1991-1-7. (2006). Actions on Structures: Part 1-7: Accidental Actions. *Eurocode 1: CEN 2006*.

Errard, D. (2005). Roissy 2E, Un effondrement aux causes très complexes. "*Le Moniteur des Travaux Publics et du Bâtiment", 11 février 2005*, n. 5281.

Faber, M.H. & Stewart, M.G. (2001). Risk analysis for civil engineering facilities: overview and discussion. JCSS (Joint Committee on Structural Safety), 2001.

Faber, M.H. Maes, M.A. Straub, D. & Baker, J. (2006). On the Quantification of robustness of Structures. *Offshore Mechanics and Arctic Engineering; Proc. Intern. Conf., Hamburg, 4-9 June 2006* . Germany.

Faber, M. H. Maes, M. A. Baker, J. W. Vrouwenvelder, T. & Takada, T. (2007). Principles of risk assessment of engineered systems. Applications of statistics and probability in civil engineering. Taylor & Francis Group, London.

Faber, M. H., Vrouwenvelder, T., SØrensen, J.D., Chryssanthopoulos, M.K. & Narasimhan, H. (2011). Robustness of structures—a report on a joint European project. ICASP 2011, Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering – Faber, Köhler & Nishijima (eds), Zürich, Switzerland, 1-4 August 2011.

Fahsi, A., (2009). 'Application des techniques de fiabilité pour l'estimation des incertitudes des résultats de simulations numériques en hydrodynamique des rivières', Mémoire de maîtrise en génie mécanique, Université du Québec, 2009.

Fink, G. Steiger, R. & Kohler, J. (2009). Definition of robustness and related terms. Joint Workshop of COST Actions TU0601 and E55, September 2009, Ljubljana, Slovenia.

Fletcher, R. (1970) A new approach to variable metric algorithms. Computer Journal, 13 :317-322, 1970.

Frangopol, D.M. & Curley, J.P. (1987). Effects of damage and redundancy on structural reliability, ASCE Journal of Structural Engineering, 113(7), 1533–1549.

Fu, G. & Frangopol, D.M. (1990). Balancing weight, system reliability and redundancy in a multiobjective optimization framework, Structural Safety, 7(2–4), 165–175.

Frangopol, D.M. & Nakib, R. (1991). Redundancy in Highway Bridges. *Engineering Journal*. AISC.org.

Foley, C. M. Martin, K. & Schneeman, C. (2007). Robustness in structural steel framing systems. Marquette University, January 19, 2007.

Freelem, (2012) Logiciel de calcul de structures en ligne, http://www.freelem.com.

Goldfarb, D. (1970). A family of variable metric updates derived by variational means.Mathematics of Computation, 24 :23-26, 1970.

Grimmelt, M.J. & Schueller, G. I. (1983). A method to determine reliability of structures and combined loading. In G. Augusti et. al., editor, Proceedings of the Fourth International Conference on Applied of Statistics and Probabilistics in Soil & Structural Engineering (ICASP-4), pages 261-271. Pitagora Editrice, Bologna, 1983.

Guedes, J. Pigon, P. & Pinto, A.V. (1994). A fibre Timoshenko beam element in Cast3M 2000. *JRC special publication N°I.94.31, Ispra, July 1994.*

Guedes, J. (1997). Seismic behaviour of reinforced concrete bridges. Modelling, numerical analysis and experimental assessment. *PhD thesis, Universidade do Porto, JRC, Ispra, October 1997.*

Gulvanessian, H. & Vrouwenvelder, T. (2006). Robustness and the Eurocodes . *Structural Engineering International. SEI Editorial Board.*

Guo-Qiang, L. & Jin-Jun, L. (2002). A semi-analytical simulation method for reliability assessments of structural systems. Reliability Engineering and System Safety, 78 (2002) 275–281.

Haberland, M. (2007). Progressive collapse and robustness. Structural Analysis and Steel structures Institute, Diploma thesis, 2007.

Haberland, M. & Starossek, U. (2010). Terminology for treating disproportionate collapse. IABMAS2010, The fifth international conference on bridge maintenance, safety and management, july 2010, Philadelphia, USA.

Hasofer, A.M. & Lind, N.C. (1974). An Exact and Invariant First Order Reliability Format. ASCE, Journ. Eng. Mech. Div, 1974, pp. 111-121.

Hirt, M. A., Bez, R. & Nussbaumer, A. (2006). 'Construction métallique: Notions fondamentales et méthodes de dimensionnement ', PPUR, March 1994.

Hohenbichler, M. et al. (1988). 'Improvement of second-order reliability estimation by importance sampling', Engineering Mechanics, ASCE, 114(12), pp. 2195-2199, 1988.

Huber, P.J. (1996). Robust Statistical Procedures; 2nd ed. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics; 68. Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, 67 p.

JCSS (2001). Probabilistic Model Code. The Joint Committee on Structural Safety,. www.jcss.ethz.ch.

JCSS (2008). Risk Assessment in Engineering. Internet Publication: http://www.jcss.ethz.ch/publications/JCSS_RiskAssessment.pdf.

Jessen Nielsen, J., (2009). 'Probabilistic analysis of the robustness of earthquake resistant steel structure, Master thesis, Aalborg University, 2009.

Kagho, N. Orcesi, A. & Cremona, C. (2011). Robustness analysis of structural systems considering accidental actions. ICASP11, Zurich, 2011.

Kagho, N. Orcesi, A. & Cremona, C. (2011). Quantification de la robustesse des ouvrages – approche fiabiliste. GC'2011, Cachan, 2011.

Kagho, N. Orcesi, A. & Cremona, C. (2012). A probabilistic approach for the quantification of structural robustness. IABMAS2012, Stresa, 2012.

Kachanov, L.M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. Izvestiya Akademii Nauk SSR Otd Tekh, 8:26-31, 1958.

Kaisheng, C. Zhang, S. & Huang, W. (1996). Artificial Intelligence β-Unzipping Method in Structural System Reliability Analysis. *Pergamon: Computers & Structures* . 60(4) : 619-626.

Kaminetzky, D. (1991). Design and construction failures—lessons from forensic investigations. New York: McGraw-Hill; 1991.

Kanchanalai, T. (1977). the design and behavior of beam-columns in unbraced steel frames, American Iron and Steel Institute Project No. 189, Rep. No. 2, Civil Engineering/Structural Research Laboratory, Univ. of Texas, Austin, Tex.

Karamchandani, A. & Cornell, C. A. (1992). " Reliability analysis of truss structures with multistates elements II". Journal of structural engineering, Vol. 118, No. 4, April, 1992.

Kemp, A.R. (2002). A mixed flexibility approach for simplifying elastic and inelastic structural analysis of frames, Journal of Constructional Steel Research, Elsevier, 58(10), 1297-1313.

Knoll, F. & Vogel, T. (2008). Design for Robustness. *Structural Engineering Documents: IABSE, AIPC, IVBH.* Zurich.

Kouvelis, P. & Yu, G. (1997). Robust Discrete Optimization and Its Applications. Non-convex Optimization and Its Applications; V14. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, 356 p.

Langlois, A.M. Bastien, J. & Jolin, M. (2010). Etude de la fiabilité structurale de ponts en béton armé. M.Sc. Université Laval. Québec, Canada.

Langlois, A.M. (2010)."Influence de l'endommagement sur la fiabilité structurale de ponts en béton armé: études de cas" M.Sc., Université Laval, 227 p.

Lemaître J. & Chaboche J.L. (1985). Mécanique des Matériaux Solides. *Dunod*, 1985.

Lemaire, M., (1997). 'Reliability and mechanical design', *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 55, pp. 163-170, 1997.

Lemaire, M., (1998). 'Eléments finis et fiabilité : un mariage à la mode', Fiabilité des matériaux et des structures, 2º Conférence Nationale – JN-FIAB'98.

Lemaire, M. (2005). Fiabilité des structures, couplage mécano-fiabiliste statique. Collection Géni Civil. Edition Lavoisier, Hermes Science.

Lind, N. C. (1995). "A measure of vulnerability and damage tolerance." *Reliability Engineering & System Safety*, 48(1), 1-6.

Lind, N. C. (1996). "Vulnerability of damage-accumulating systems." *Reliability Engineering & System Safety*, 53(2), 217-219.

Lu, Z. Yu, Y. Woodman, N. J. & Blockley, D. I. (1999). A theory of structural vulnerability. *Structural Engineer*. Vol. 77, no. 18, pp. 17-24. 21 Sept. 1999

Lund University (1999). CALFEM - A finite element toolbox to MATLAB Version 3.3

Madsen, H.O. Krenk, S. & Lind, N.C. (1986). Methods of structural safety. *Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, Inc.*

Maes, M. A. Fritzons, K. E. & Glowienka, S. (2005). Risk-based indicators of structural system robustness. JCSS and IABSE workshop on robustness of structures.

Main, J.A., Bao, Y., Sadek, F. & Lew, H.S. (2011). Experimental and computational assessment of robustness of steel and reinforced concrete framed buildings. ICASP 2011, Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering – Faber, Köhler & Nishijima (eds), Zürich, Switzerland, 1-4 August 2011.

Marigo, J.J. (1981). Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. Comptes Rendus Mécanique, 292, 1981.

Marjanishvili S.M. (2011). A threat independent approach to evaluating the robustness of structures. ICASP 2011, Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering – Faber, Köhler & Nishijima (eds), Zürich, Switzerland, 1-4 August 2011.

Melchers, R.E., (1990). *'Radial importance sampling for structural reliability'*, Engineering Mechanics, ASCE, 116(1), pp. 189-203, 1990.

Melchers, R.E. (1999). Structural Reliability Analysis and Prediction. *(Second Edition) John Wiley & Sons*. Chichester.

Mestat, P. (1997). " Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique : Conseils et recommandations." Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées 212, réf. 4161 - PP. 39-64.

Meyer, B (1997). Object-Oriented Software Construction; 2nd edn. Prentice Hall PTR, 1254 p.

Micol, A., (2007). 'Approche probabiliste dans la conception des modules de puissance', Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2007.

Mihaela, O. I. Romînu, S. Ţăranu, N. Radu, B. & Cătălin, B. (2008). Understanding Failures, an Useful Tool in Structural Robustness Evaluation. *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy, Constructions, Architecture Section.*

Mohammadkhani-Shali, S., (2007). ' Contribution a l'étude de la redondance dans les ponts : analyses des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse', Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.

Mohammadkhani-Shali, S. & Cremona, C. (2007a). Damage effects on system redundancy for existing reinforced concrete bridges using response surface methods, 2007 ESREL Conference, University of Stavanger, Norway, June 25-27 2007.

Mohammadkhani-Shali, S. & Cremona, C. (2007b). Non linear finite element reliability analysis for prestressed concrete beams, 2007 ESREL Conference, University of Stavanger, Norway, June 25-27 2007.

Moulin, S., (2009). 'Réalisation d'une étude de génie civil sous chargement sismique', manuel d'utilisation : Code_Aster, EDF, 2009.

Murotsu, Y. Kishi, M. Okada, H. Ikeda, Y. & Matsuzaki, S. (1987). Probabilistic Collapse Analysis of Offshore Struc ture. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering.* 109.

Murotsu, Y. & Yoshisada. (1984). Combinatorial Properties of Identifying Dominant Failure Paths in Structural Systems. Bulletin of University of Osaka Prefecture. Series A, Engineering and natural sciences . 32(2), p. 107-116.

Murotsu, Y. Okada, H. Yonezawa, M. Martin, G. & Taguchi, K. (1982). Automatic Generation of Stochastically Dominant Modes of Structural Failure in a Frame Structure. *Bulletin of University of Osaka Prefecture. Series A, Engineering and natural sciences* . 30(2) : 85-101.

Murotsu, Y. Okada, H. Niwa, K. & Miwa, S. (1979). A New Method for Evaluating Lower and Upper Bounds of Failure Probability in Redundant Truss Structures. *Bulletin of University of Osaka Prefecture. Series A, Engineering and natural sciences* . 28(1) : 79-91.

Murotsu, Y. Okada, H. & Hibi, S. (1995). A System for Collapse and Reliability Analysis of Ship Structures using a Spatial Element Model. *Elsevier Science limited. Marine Structures.* : 133-149.

Nafday, A.M., Corotis, R.B. & Cohort, J.L. (1987). Failure Mode Identification for Structural Frames, Journal of Structural Engineering, ASCE, 113(7), 1415-1432.

Nair R. & Shankar, P. (2004). Progressive Collapse Basics. *Modern Steel Construction*. *American Institute of Steel Construction (AISC).* 30-34.

Nataf, A.(1962). Determination des distribution dont les marges sont données. Comptes redus de l'Academie des Sciences, Vol. 225, 1962, pp. 42-43.

NBCC, (1995). National Building Code of Canada. 1995.

National Transportation Safety Board (NTSB). (2008). Collapse of I-35W Highway Bridge, Minneapolis, Minnesota. *Highway Accident Report NTSB/HAR-08/03. Washington, DC, November 14*. USA.

Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. The ComputerJournal, 7(4):308{313, January 1965.

NV 65 (2000). Règles définissant les effets de la neige et du vent sur les constructions et annexes. Avril 2000.

Nguyen, X. S. (2007). ‘ Algorithmes probabilistes appliqués à la durabilité et à la mécanique des ouvrages de génie civil’, Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2007.

Office of the Deputy Prime Minister (ODPM) (2004). The Building Regulations 2000. Structure. Approved Document A, Westminster, London.

Okada, H. Matsuzaki, S. & Murotsu, Y. (1984). Safety Margins for Reliability Analysis of Frame Structures. *Bulletin of University of Osaka Prefecture. Series A, Engineering and natural sciences* . 32(2) : 155-163.

Oudin, H. (2009). " Introduction à la plasticité" Ecole Centrale de Nantes.

Park, S. Choi, S. Sikorsky, C. & Stubbs, N. (2004). Efficient method for calculation of system reliability of a complex structure. *Elsevier, International Journal of Solids and Structures* 41(18-19): 5035-5050.

Pearson C. & Delatte N. (2005). Ronan point apartment tower collapse and its effect on building codes. Journal of performance of constructed facilities, ASCE, may 2005.

Rackwitz, R. & Fiessler B. (1978). *‘Structural reliability under combined random load sequences’,* Computers and Structures, Vol. 9, pp. 489-494, 1978.

Rashedi, R., & Moses, F. (1988). "Identification of failure modes in system reliability."J.Struct. Engrg., ASCE, 114(2), 292-313.

Ríos Insua D. & Ruggeri, F. (2000). Robust Bayesian analysis, lecture notes in statistics. New York: Springer Verlag.

Saydam D. & Frangopol, D.M. (2011). Time-dependent performance indicators of damaged bridge superstructures, Engineering Structures, 33(9), 2458-2471.

Sétra (2010). Maîtrise des risques : Application aux ouvrages d’art, guide méthodologique. Janvier 2010.

Sétra (2011). ST1 : logiciel de Calcul de structures, version 22, octobre 2011.

Shanno, D. F. (1970) Conditioning of quasi-newton methods for function minimization. Mathematics of Computation, 24 :647-656, 1970.

Slotine, J.J.E. & Li, W: (1991) Applied Nonlinear Control. Prentice Hall: Englewood Cliffs, N.J., 459 p.

Smith, J. W. (2006). Structural Robustness Analysis and the fast fracture analogy. *Structural Engineering International.*

Sorensen, J. D. (2004). Structural Reliability Theory and Risk Analysis, *Aalborg, 2004*. Danmark.

Sorensen, J. D. Thoft-Christensen, P. & Sigurdsson, G. (2005). Development of applicable methods for evaluating the safety of offshore structures, part2, Aalborg, 2005. Danmark.

Sorensen, J. D. Rizzuto, E. & Faber, M. H. (2009). Robustness – theoretical framework. Joint Workshop of COST Actions TU0601 and E55, September 2009, Ljubljana, Slovenia.

Sørensen J. D. (2011). Framework for robustness assessment of timber structures, *Engineering Structures*, Elsevier, 33(11), 3087-3092.

Starossek, U. (2007). Progressive Collapse of Structures: Nomenclature and Procedures. *Structural Engineering International*.

Starossek, U. & Haberland, M. (2008a). Approaches to measures of structural robustness. *Bridge Maintenance, Safety and Management; IABMAS'08, 4th Intern. Conf., Seoul, 13-17 July 2008*. Korea.

Starossek, U. & Haberland, M. (2008b). Measures of structural robustness-requirements and applications.ASCE SEI 2008 structures congress-crossing borders. Vancouver, April 24-26, 2008. Canada.

Sudret, B. and Der Kiureghian, A. (2000). Stochastic finite elements and reliability : A state-of-the-art report. Technical Report no UCB/SEMM-2000/08, University of California, Berkeley. 173 pages.

Tessier, C. Gaillet, L. Bruhat, D. Michel, R. Noblet, S. & Barbier, V. (2005). Les moyens d'auscultation et de surveillance : Applications au viaduc de Merlebach. Journées CABLES2005, Nantes, 2005.

Thoft-Christensen, P. and Baker, M.J. (1982). Structural Reliability Theory and Its Applications. Springer Verlag, 1982.

Thoft-Christensen, P. & Baker, M.J. (1984). Structural reliability theory and its applications. Springer verlag 1984.

Thoft-Christensen, P. & Murotsu, Y. (1986). Application of structural Systems Reliability Theory. *Springer-Verlag* , Berlin.

Ulm, F.J., (1994). 'Un modèle d'endommagement plastique : application aux bétons de structure', Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur de l'ENPC, Janvier 1994.

Vlassis, A. G. (2007). Progressive Collapse Assessment of tall Buildings. Ph.D thesis. University of London.

Watwood, V.B. (1979). Mecanism generation for limit analysis of frames, J. Struct. Div., ASCE, ST1, 109(1979)1-15.

Ziemian, R.D. & McGuire, W. (2002). Modified Tangent Modulus Approach, A Contribution to Plastic Hinge Analysis , *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 128(10), 1301-1307.

ANNEXE A

EXEMPLES DE DEFAILLANCES STRUCTURALES

Comprendre et connaître les raisons des défaillances structurales est un enjeu majeur pour la construction d'ouvrages plus sûrs. L'étude des défaillances apporte un éclairage sur la robustesse. Les causes des défaillances peuvent également être identifiées et les stratégies à mettre en œuvre pour les réduire peuvent être proposées.

A.1 Exemples de défaillances d'ouvrages

A.1.1 La tour de Ronan Point

L'effondrement progressif de la tour de Ronan point (figure A.1) est une défaillance de bâtiment célèbre. Le Ronan point était un immeuble d'habitations de 22 étages situé à Newham, ville située à l'est de Londres. Il fût construit entre 1966 et 1968. C'était un immeuble de 64 m de hauteur et d'une superficie de 24,4 ×18,3 m^2. Son système structural était constitué de panneaux en béton précontraint, chaque plancher étant directement supporté par les murs de l'étage inférieur. Le mur et le système de plancher de chaque étage étaient assemblés à l'aide de liaisons boulonnées, tandis que les joints étaient remplis de mortier sec et compacté.

Le 16 mai 1968, une explosion de gaz causée par un locataire du 18ème étage a endommagé un mur porteur extérieur en angle du bâtiment. La perte de support à cet étage a entraîné l'effondrement des étages supérieurs, qui ont entraîné à leur tour l'effondrement des étages inférieurs par gravité. En effet, le poids des étages affaissés était suffisant pour dépasser la capacité portante des planchers des étages inférieurs. L'angle sud-est de l'édifice s'est alors totalement effondré jusqu'au niveau sol causant la mort de quatre habitants.

L'effondrement de la tour de Ronan point n'est certainement pas l'un des plus grands désastres, mais il est celui qui a attiré l'attention des ingénieurs sur la problématique de l'effondrement progressif, disproportionné et sur le notion de robustesse structurale, en raison de l'ampleur disproportionnée des dommages par rapport à l'évènement déclencheur. Les

causes de l'effondrement ont été attribuées au manque de redondance et de résistance locale (Pearson & Delatte 2005, Vlassis 2007), en absence de chemin alternatif de chargement pour reprendre les charges gravitaires.



Figure A.1. Effondrement de la tour de Ronan point suite à une explosion de gaz (Wikipedia**).**

A.1.2 Le pont du Mississippi

Le pont du Mississipi est un pont en arc à huit voies situé à Minneapolis, franchissant le fleuve Mississippi et supportant l'interstate 35-ouest. Sa construction débuta en 1964, il fût ouvert à la circulation en 1967. Long de 580 m, la structure porteuse comportait 14 travées constituées de poutres en treillis de type Pratt en acier. Sa conception a permis de le surnommer « fracture critical » puisque la défaillance d'un certain nombre de ses éléments entraînerait son effondrement total. En effet, ce type de pont n'est pas potentiellement dangereux aussi longtemps que chaque élément de structure est conçu pour résister aux charges prévues, ce qui implique d'assurer une très faible vulnérabilité vis-à-vis de celles-ci.

C'était un pont très fréquenté avec un trafic journalier de 144000 véhicules. Le pont avait une fréquence d'inspection biennale jusqu'en 1993, date à partir de laquelle l'inspection est devenue annuelle. Des anomalies avaient été reportées dans les rapports d'inspection des années 2005 à 2007 (fissuration, corrosion, anomalies de soudure), et des réparations avaient été entreprises (NTSB 2008).

Le 1er aout 2007 au soir en pleine heure de pointe le pont s'est soudainement effondré tuant 13 personnes et blessant 145 autres (Figure A.2a). Un rapport intermédiaire du NTSB (National Transportation Safety Board) de Janvier 2008 faisait état d'une erreur de conception comme cause probable de l'effondrement, avec 16 goussets fissurés dont les premiers appartenaient à la poutre principale (Figures A.2(b-c)). Ce rapport affirmait que la présence de charges additionnelles sur le pont au moment de l'effondrement avait contribué à la catastrophe. Les goussets, éléments qui servent à relier les poutres (ou barres) en acier dans les structures en treillis ont été conçus et réalisés avec une épaisseur égale à la moitié de l'épaisseur désirée. Cet effondrement illustre bien un cas de défaillance disproportionnée, en absence de redondance suffisante.

(a)



(b)



(c)



Figure A2. (a) Pont du Mississippi après son effondrement, (b) Photo de juin 2003 montrant des goussets déformés (NTSB 2008), (c) Rupture dans un gousset qui a joué un rôle clé dans l'effondrement du pont Interstate 35W (NTSB 2008).

A.2 Causes des défaillances structurales

Les défaillances d'ouvrages sont généralement dues à des erreurs humaines. Kaminetsky (1991) distingue trois catégories d'erreurs humaines :

- les erreurs dues à l'ignorance,
- les erreurs dues à la négligence,
- les erreurs commises par intention.

La Figure A.3 illustre la répartition des causes de défaillance et les erreurs. On remarque que l'ignorance et le manque de connaissances (connaissances incomplètes ou insuffisantes) constituent les deux premières causes de défaillance d'ouvrages. En troisième position vient la sous-estimation des effets qui est une erreur humaine d'intention.

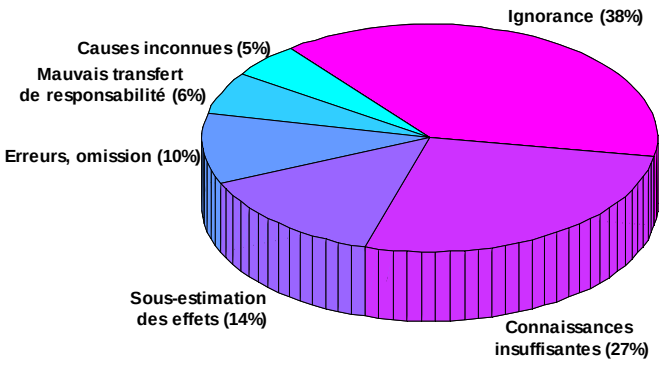


Figure A.3. Répartition des causes des défaillances et des erreurs (Kaminetzsky 1991, Faber 2001, Mihaela et al. 2009).

Il convient de souligner que les défaillances dues à des erreurs humaines ne peuvent pas être réduites par une augmentation des coefficients de sécurité ou une amélioration des niveaux de sécurité dans les cadres réglementaires actuels. Il parait de même impossible d'éliminer complètement le risque dû aux erreurs humaines (Mihaela et al. 2009). La Figure A.4 illustre les approches possibles pour éviter ces erreurs. Les contrôles supplémentaires contribuent largement à réduire le risque d'erreurs humaines. Les missions de contrôle et d'expertise sont donc à encourager. On remarque aussi qu'un entretien normal contribue lui également à réduire le risque mais qu'une petite partie des erreurs est inévitable.

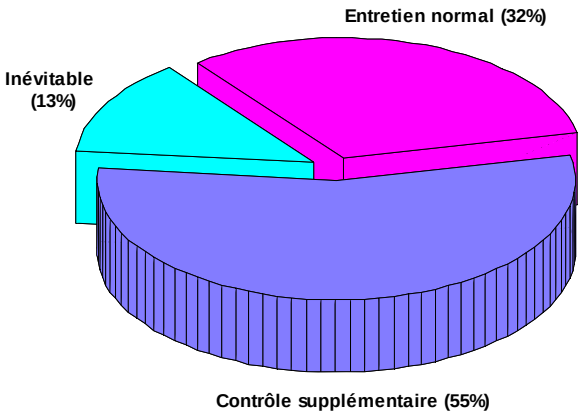


Figure A.4. Répartition relative des mesures de traitement du risque (Kaminetzsky 1991, Faber 2001, Mihaela et al. 2009).

ANNEXE B

NOTION DE FIABILITE STRUCTURALE

B.1. INTRODUCTION

Le dimensionnement et la conception des ouvrages nécessitent de quantifier et prendre en compte de manière appropriée d'une part les charges appliquées et/ou les influences du système extérieur sur l'ouvrage, et d'autre part la résistance des éléments constitutifs de l'ouvrage. Le terme « résistance » fait référence à des propriétés caractéristiques ou à la capacité d'un système structural (ou de ses composants) à soutenir des charges. Les paramètres de charges et de résistances ont été supposés déterministes pendant de nombreuses années. Dans ce cadre, la résistance R d'un élément était déterminée de sorte que son rapport à la charge appliquée S reste supérieur à une valeur appelée facteur de sécurité $\frac{R}{S} \geq f_s$. Ce facteur de sécurité était alors employé pour estimer le niveau de fiabilité de la structure. La seule vérification de ce critère est rapidement apparue insuffisante due entre autres à la variabilité des paramètres et des propriétés mécaniques et géométriques de la structure, et aux fluctuations de chargements. Pour tenir compte des différents types d'incertitudes dans l'analyse structurale, il est adapté d'utiliser des modèles probabilistes pour représenter les paramètres de résistance et de sollicitations. C'est dans cette optique que la théorie de la fiabilité propose un cadre dans lequel l'ensemble des facteurs influençant l'écart (marge de sécurité) entre les paramètres de résistance et de sollicitations, sont analysés de manière probabiliste en tenant compte de leur variabilité et de leur fonction de probabilité (Langlois et al. 2011, Duprat & Schoefs 2009, Harikrishna 2007, Sorensen 2004).

La fiabilité d'une structure peut être estimée à deux niveaux: au niveau des différents éléments constitutifs et au niveau du système dans sa globalité. L'estimation de la fiabilité d'une structure au niveau des éléments prend en compte des critères de performance individuelle. A l'échelle du système, un grand nombre de critères de performance doivent être considérés.

B.2. ORIGINE DES INCERTITUDES

En analyse probabiliste, les incertitudes sont prises en compte pour calculer la probabilité de défaillance du système (Figure B.1).

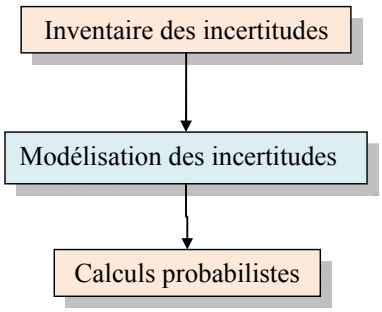


Figure B.1. Démarche utilisée pour la prise en compte des incertitudes.

Ces incertitudes sont de natures variées (les fluctuations de chargements, la variabilité des propriétés mécaniques des matériaux, les incertitudes et imperfections des modèles d'analyse…) et d'origines multiples (environnementale, géométrique, mécanique, géotechnique et du fait du caractère imparfait des modèles théoriques). On peut les rassembler en cinq sous groupes :

- **les incertitudes physiques** : elles sont liées au caractère naturellement aléatoire d'une quantité, par exemple les données mécaniques caractérisant une structure ;
- **les incertitudes de mesure** : ce sont les incertitudes causées par des mesures imprécises, par exemple des quantités géométriques ;
- **les incertitudes statistiques** : elles sont dues au mauvais échantillonnage des quantités observées ;
- **les incertitudes des modèles** : elles sont liées à la connaissance imparfaite ou à l'idéalisation des modèles mathématiques utilisés (Figure B.2), ou à l'incertitude liée au choix de la fonction de répartition de la loi de probabilité pour les variables aléatoires ou stochastiques. On peut citer par exemple la modélisation des effets du vent sur la structure, ainsi que la réponse et le comportement de cette dernière ;
- **les variations aléatoires spatiales et temporelles** : il s'agit des variations dans le temps et dans l'espace des éléments de l'environnement tels que le vent, la houle, la neige, les courants…

Ces incertitudes peuvent être regroupées en deux grandes catégories : aléatoires et épistémiques. Les incertitudes aléatoires proviennent de la variation naturelle d'un phénomène (variabilité de l'intensité d'un séisme) et ne peuvent être ni réduites ni éliminées. Elles peuvent être quantifiées à l'aide d'analyses statistiques lorsque les informations et données disponibles sont suffisantes.

Les incertitudes épistémiques sont causées par un manque de connaissances (connaissances limitées, imprécises ou incomplètes). Elles peuvent aussi être dues à l'incertitude sur les modèles, pouvant provenir aussi bien du choix du modèle que du caractère imparfait de celui-ci (par exemple la formulation mécanique de l'apparition d'une rotule plastique). Contrairement

aux incertitudes aléatoires, les incertitudes épistémiques peuvent être réduites en améliorant les modèles et méthodes d'analyse (Duprat & Schoefs 2009, Nielsen 2009, Sorensen 2004).

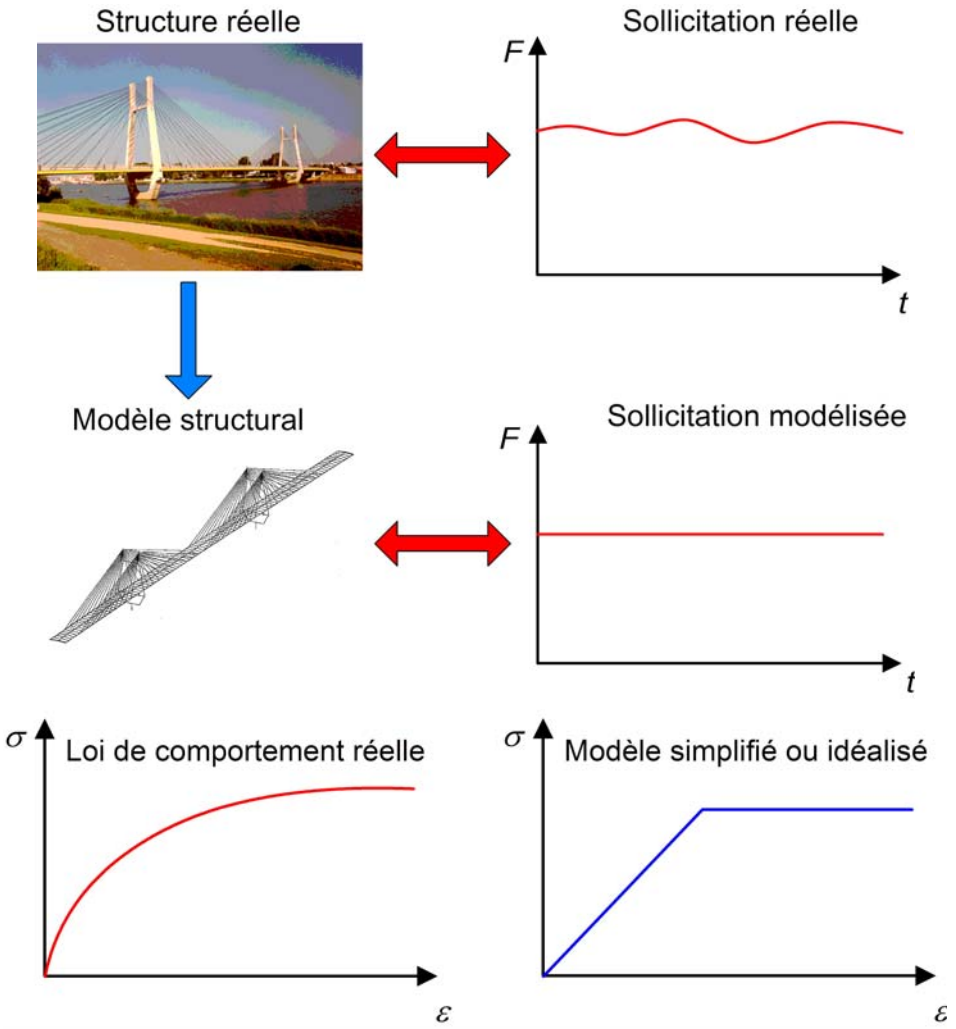


Figure B.2. Incertitudes dans une analyse structurale.

Ces deux catégories d'incertitudes peuvent être considérées dans le cadre de la théorie de la fiabilité. Dans ce mémoire, les données sujettes à des incertitudes constitueront des variables aléatoires.

La modélisation probabiliste des paramètres de résistance et de sollicitations passe par :

- la spécification des variables aléatoires utilisées pour représenter les incertitudes relatives à ces paramètres,
- le choix approprié d'une distribution pour représenter les variables aléatoires,
- l'affectation des paramètres caractéristiques de la distribution sélectionnée.

B.3 FIABILITE DES COMPOSANTS OU ELEMENTS

B.3.1 Contexte et définitions

Le dimensionnement des ouvrages du génie civil se fait généralement élément par élément. Dans le cas d'une structure à ossature, les poutres, les colonnes, les connexions… sont conçues et dimensionnées individuellement. Chaque élément est conçu de sorte qu'il respecte un niveau de sécurité souhaité. Par exemple, les poteaux sont dimensionnés pour une résistance au flambement et au déversement, aussi bien que pour d'autres modes potentiels de défaillance. La sécurité vis-à-vis de ces modes de défaillance variés est essentielle (Bennett & Ang 1983). Grimmelts & Schueller (1982) ont par ailleurs montré que l'écart entre les différentes méthodes d'analyse de la fiabilité structurale était principalement dû aux erreurs dans le calcul de la probabilité de défaillance des éléments individuels de la structure. Par conséquent, le calcul de la fiabilité du composant est déterminant dans le calcul de la fiabilité du système.

L'analyse de la fiabilité d'un élément de structure nécessite de se fixer un critère qui permet de séparer le domaine de défaillance, de son complémentaire : le domaine de sécurité. Pour préciser ces deux espaces, il faut définir le **mode de défaillance de l'élément**. Dans la pratique, celui-ci peut être un déplacement ou une contrainte supérieure à une valeur de référence, ou plus simplement une sollicitation supérieure à un paramètre de résistance. Cela passe par la définition d'un **état limite**, puisque le mode de défaillance s'exprime en termes d'écart entre un état acceptable et un état à éviter. Par exemple, pour une poutre en béton armé, on peut envisager les modes suivants : la plastification des armatures, la fissuration du béton, le déversement d'une poutre… (Cremona 2005, Duprat & Schoefs 2009).

Le choix du mode de défaillance se traduit par une **surface d'état limite** qui constitue **la frontière** entre le domaine des états acceptables, appelé **domaine de sécurité** et le domaine des états à éviter, appelé **domaine de défaillance, comme indiqué ci-après** :

$$M = \mathcal{R}\left(\{Y\}\right) - \mathcal{S}\left(\{Y\}\right) = g\left(\{Y\}\right) \tag{B.1}$$

où $\{Y\} = \left(Y_1, \cdots, Y_n\right)^t$ est un vecteur de variables aléatoires décrivant les caractéristiques de résistance et de chargement mais aussi son modèle de défaillance. $\mathcal{S}\left(\{Y\}\right)$ représente le terme de sollicitation et $\mathcal{R}\left(\{Y\}\right)$ le terme de résistance. En pratique, les variables de résistance interviennent seulement dans le terme de résistance, tandis que les variables de chargement apparaissent dans le terme de sollicitation. M est également une variable aléatoire et est appelée **marge de sécurité**. Lorsque $M > 0$, la structure fonctionne dans le domaine de sécurité. Lorsque $M < 0$, elle est dans le domaine de défaillance. L'équation $M = 0$ définit la surface d'état limite.

La fonction $g\left(\{Y\}\right)$ représente les valeurs prises par la marge de sécurité M. Cette fonction est appelée **fonction d'état limite**. Elle vérifie les critères suivants :

- $g\left(\{Y\}\right) > 0$ dans le **domaine de sécurité,**
- $g\left(\{Y\}\right) < 0$ dans le **domaine de défaillance,**
- $g\left(\{Y\}\right) = 0$ sur la **surface de défaillance.**

B.3.2 Probabilité de défaillance

La probabilité de défaillance P_f est la probabilité que la structure soit dans le domaine de défaillance, c'est-à-dire la probabilité que la marge de sécurité ou la fonction d'état limite prenne une valeur négative. Cette probabilité est donc bornée par 0 et 1 et est définie comme suit :

$$P_f = P\left(g\left(\{Y\}\right) < 0\right) = \int_{g\left(\{Y\}\right)<0} f_Y\ (y)\, dy_1 dy_2 \cdots dy_n \tag{B.2}$$

où $f_{\{Y\}}\left(\{y\}\right)$ est la densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire $\{Y\}$. Lorsque les n variables aléatoires Y_i sont indépendantes, l'expression de la densité conjointe se ramène au produit des densités marginales f_{Y_i} de chaque variable:

$$f_{\{Y\}}\left(\{Y\}\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}\left(y_i\right) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2) \cdots f_{Y_n}(y_n) \tag{B.3}$$

L'intégration de la fonction de densité conjointe de probabilité n'est généralement pas envisageable car trop complexe. Plusieurs méthodes permettent d'estimer la probabilité de défaillance. Elles sont de deux types : les premières sont basées sur la notion d'indice de fiabilité et les autres sur des techniques directes de simulation.

B.3.3. Niveau d'estimation de la fiabilité

Les méthodes d'analyse de la fiabilité structurale sont classées en cinq niveaux. Les méthodes de **niveau 0** sont des approches purement déterministes. La sécurité est caractérisée par un facteur de sécurité établi sans tenir compte de la variabilité des paramètres. Les méthodes de **niveau I** utilisent des valeurs spécifiques des variables. Chaque variable aléatoire est représentée par des valeurs caractéristiques (fractiles, moyennes…). Cette approche dite semi-probabiliste consiste alors à appliquer des coefficients partiels (de sécurité) aux différentes valeurs caractéristiques.

Les méthodes de **niveau II** consistent à caractériser de manière probabiliste les différentes variables de calcul. La fiabilité est alors mesurée par un indice de fiabilité qui permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance. Les méthodes de **niveau III** sont des démarches plus fines qui visent à estimer directement la probabilité de défaillance en calculant numériquement l'expression (B.2). Les méthodes de Monte-Carlo sont le plus souvent utilisées. Les méthodes de **niveau IV** font appel aux principes et concepts de la théorie de la décision (Nguyen 2007).

Toutes ces méthodes de fiabilité peuvent être considérées suivant l'importance du problème analysé. Par exemple, les méthodes de niveau I s'appliquent pour l'étude rapide de la fiabilité de structures simples quand les méthodes de niveau IV s'emploient généralement pour l'analyse de systèmes plus complexes (centrales nucléaires). L'évaluation de la fiabilité des plates-formes offshore relève théoriquement du niveau III (Cremona 2005, Nguyen 2007, Duprat et Schoefs 2009). Les méthodes de niveau 0 et I n'entrent pas dans le cadre de l'approche probabiliste de la fiabilité structurale. Les méthodes de niveaux II sont présentées dans la suite de cette annexe, car utilisées dans les études sur la robustesse menées dans les chapitres de cette thèse.

B.3.4 Méthodes de niveau II

Ces méthodes sont basées sur la notion d'indice de fiabilité β. L'indice de fiabilité est une mesure de la fiabilité qui permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance. Un indice de fiabilité élevé indique une probabilité de défaillance faible. Dans les algorithmes d'évaluation de l'indice de fiabilité, un changement de variables est généralement effectué, ce qui conduit à reformuler la fonction d'état limite $g(\{Y\})$ dans un nouvel espace que l'on nomme espace normalisé ou normé. Pour cela on fait appel à des transformations isoprobabilistes (qui concervent les probabilités).

B.3.4.1 Transformations isoprobabilistes

Une transformation isoprobabilite $\mathcal{T}(.)$ permet de passer de l'espace des variables physiques à un espace normé composé uniquement de variables normales centrées réduites indépendantes, car il est plus simple de manipuler des variables gaussiennes de moyennes nulles, d'écart-types unitaires et indépendantes que des variables physiques hétérogènes (Ditlevsen & Madsen 1996). Cette transformation dépend de $\{Y\}$ et doit être bijective :

$$\{Y\} = (Y_1, \cdots, Y_n)^T \underset{\mathcal{T}^{-1}}{\overset{\mathcal{T}}{\rightleftarrows}} U = (U_1, \cdots, U_n) \tag{B.4}$$

$$u_i = \mathcal{T}(y_i) \tag{B.5}$$

$$G(u_i) = g(y_i) = g\left(\mathcal{T}^{-1}(u_i)\right) \tag{B.6}$$

où $\{U\}$ est le vecteur transformée de $\{Y\}$ dans l'espace normé. U_i est la variable aléatoire normale centrée réduite représentant Y_i dans l'espace normé, et u_i une réalisation de cette variable. $G(.)$ est la nouvelle fonction d'état limite dans l'espace normé. Il existe plusieurs types de transformations isoprobabilistes (conservant la valeur de la probabilité en chacun des points de l'espace).

Dans toute transformation isoprobabiliste, l'information probabiliste est préservée suivant l'équation :

$$F_{Y_i}(y_i) = \Phi(u_i) \tag{B.7}$$

où F_{Y_i} est la fonction de répartition de la variable Y_i et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (Figure B.3). Le fonctionnement des transformations isoprobabilistes est illustré dans la Figure B.3.

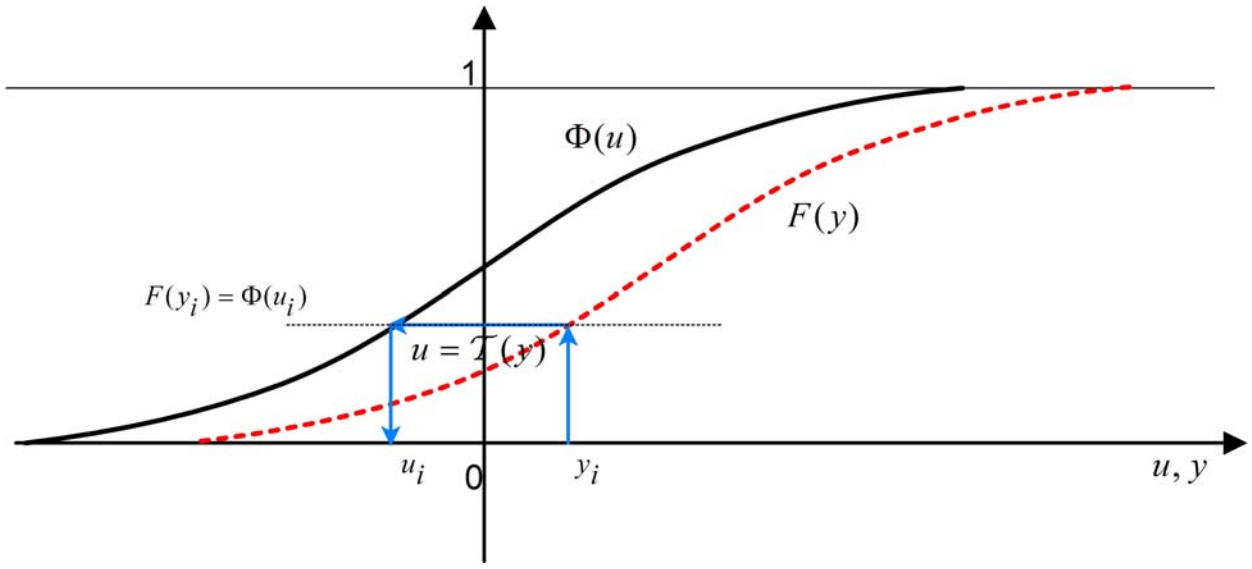


Figure B.3. Représentation du principe de transformation isoprobabiliste définie par $\mathcal{T}$.

Plusieurs méthodes existent : celle utilisée dans cette thèse est la transformée de Nataf qui a été implantée dans la boîte à outils ReliabTbx 1.5 (développée à l'IFSTTAR et au Sétra).

La transformation de Nataf a la particularité de pouvoir être utilisée pour n'importe quel ensemble de variables aléatoires $\{Y\}$ pour lesquelles les fonctions de répartition des lois marginales $F_{Y_i}(y_i)$ sont connues. Elle est donc celle qui s'adapte au plus grand nombre de cas. Concernant l'interdépendance des variables, la loi conjointe des variables physiques n'est pas requise, seule la matrice de corrélation $R = [\rho_{ij}]$ étant nécessaire pour la transformation de Nataf (1962).

Dans un premier temps, la transformation de Nataf consiste à passer les variables de l'espace physique dans un espace intermédiaire normé composé de variables normales centrées réduites corrélées :

$$\hat{u} = \Phi^{-1}\left(F_{Y_i}(y_i)\right) \tag{B.8}$$

où $\hat{u}$ représente le vecteur des réalisations des variables intermédiaires $\widehat{U}_i$.

Dans un deuxième temps, les variables intermédiaires $\widehat{U}_i$ sont décorrélées. La densité conjointe de probabilité $f_{\{Y\}}(\{y\})$ peut s'écrire :

$$f_{\{Y\}}\left(\{y\}\right)=\varphi_n\left(\left\{\widehat{U}\right\},\left[\widehat{R}\right]\right)f_{Y_1}(y_1)\cdots f_{Y_n}(y_n)/\ \left(\varphi(\hat{u}_1)\cdots\varphi(\hat{u}_n)\right) \tag{B.9}$$

où $\left[\widehat{R}\right]=[\widehat{\rho}_{ij}]$ est la matrice de corrélation des variables $\widehat{U}_i$, $f_{Y_i}(y_i)$ est la densité marginale de probabilité, φ la densité de la loi normale centrée réduite et φ_n la densité de la loi multinormale centrée réduite de dimension n et de corrélation $\left[\widehat{R}\right]$. La transformation $\mathcal{T}$ s'écrit alors :

$$u_i=\mathcal{T}_i(y)=\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}\ \Phi^{-1}\left(F_{Y_j}(y_j)\right) \tag{B.10}$$

avec Γ_{ij} qui représentent les termes de l'inverse de la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de $\left[\widehat{R}\right]$.

Le calcul des coefficients de corrélation $\widehat{\rho}_{ij}$ est réalisé par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\rho_{ij}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{y_j-\mu_j}{\sigma_j}\right)f_{Y_i,Y_j}(y_i,y_j)dy_i dy_j\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{F_{Y_i}^{-1}\left(\Phi^{-1}(\hat{u}_i)\right)-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{F_{Y_j}^{-1}\left(\Phi^{-1}(\hat{u}_j)\right)-\mu_j}{\sigma_j}\right)\varphi_2(\hat{u}_i,\hat{u}_j,\widehat{\rho}_{ij})d\hat{u}_i\ d\hat{u}_j\end{aligned} \tag{B.11}$$

où μ_i et σ_i sont la moyenne et l'ecart-type de la variable Y_i respectivement, et φ_2 est la fonction densité de la loi binormale centrée réduite corrélée.

L'estimation des coefficients de corrélations $\widehat{\rho}_{ij}$ par la relation (B.11) peut s'avérer délicate car les lois marginales doivent être continues et strictement positives, et la valeur de $\widehat{\rho}_{ij}$ doit appartenir à l'intervalle $[-1;1]$, ce qui n'est pas toujours le cas (Lemaire 2005). C'est la raison pour laquelle, dans la littérature on trouve des relations semi-empiriques dépendant des lois marginales qui lient $\widehat{\rho}_{ij}$ à ρ_{ij} par leur rapport $f_\rho=\widehat{\rho}_{ij}/\rho_{ij}$ (Lemaire 2005, Boniface 2010).

B.3.4.2 Indices de fiabilité

L'indice de fiabilité noté β est la mesure la plus utilisée pour évaluer la fiabilité structurale. La détermination de l'indice de fiabilité nécessite la prise en compte de la fonction d'état limite $g\left(\{Y\}\right)$ et de le coupler à l'algorithme probabiliste.

Rjanitzyne (1959) et Cornell (1969) sont les premiers à avoir proposé un indice de fiabilité β_{RC} à partir de la moyenne ou (l'espérance) et de l'écart-type par l'expression suivante :

$$\beta_{RC}=\frac{E[g\left(\{Y\}\right)]}{\Sigma[g\left(\{Y\}\right)]} \tag{B.12}$$

où $g(\{Y\})$ est la fonction d'état limite, $E[g(\{Y\})]$ l'espérance mathématique de $g(\{Y\})$ et $\Sigma[g(\{Y\})]$ l'écart-type de $g(\{Y\})$.

Pour une fonction d'état limite non linéaire, Cornell suggère un développement de Taylor au premier ordre autour du point des valeurs moyennes pour estimer les termes $E[g(\{Y\})]$ et $\Sigma[g(\{Y\})]$. De ce fait l'indice de fiabilité β_{RC} présente l'avantage de ne nécessiter que la connaissance des deux premiers moments des variables aléatoires, qui constitue néanmoins une information probabiliste incomplète. De plus, on constate que pour deux expressions différentes d'un même état limite, par exemple linéaire avec deux variables aléatoires, $g = R - S = 0$ et $g = \frac{R}{S} = 1$, β_{RC} prend des valeurs différentes alors que la probabilité de défaillance reste identique (Nguyen 2007).

Pour palier à cette absence d'invariance de l'indice de Cornell β_{RC} suivant l'expression mathématique de l'état limite, Hasofer & Lind (1974) ont proposé un indice nommé indice de fiabilité d'Hasofer-Lind β_{HL} basé sur l'interprétation géométrique de β_{RC}. Il est la mesure de fiabilité recommandée par les codes de conception et a la particularité d'être invariant quant à la formulation de l'état limite. Il est défini dans l'espace gaussien (ou espace normé) présenté brièvement dans la section (B.3.4.1) et est la plus petite distance au sens euclidien de l'origine du repère à la surface de défaillance dans l'espace normé. Il s'exprime par :

$$\beta_{HL} = \min_{G(\{U\})=0} \sqrt{\{U\}^T \{U\}} \tag{B.13}$$

où $G(.)$ est la surface d'état limite dans l'espace normé. Le ou les point(s) correspondant(s) à β_{HL} dans l'espace normé est(sont) appelé(s) points de fonctionnement ou point(s) de conception et noté(s) P^* ($\beta_{HL} = \|OP^*\|$). Il s'agit de point(s) appartenant à la surface de ruine pour lequel(lesquels) la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires est la plus élevée.

Dans les cas où la fonction d'état limite est un hyperplan, l'indice d'Hasofer-Lind est égal à l'indice de Rjanitzyne-Cornell (1959, 1969).

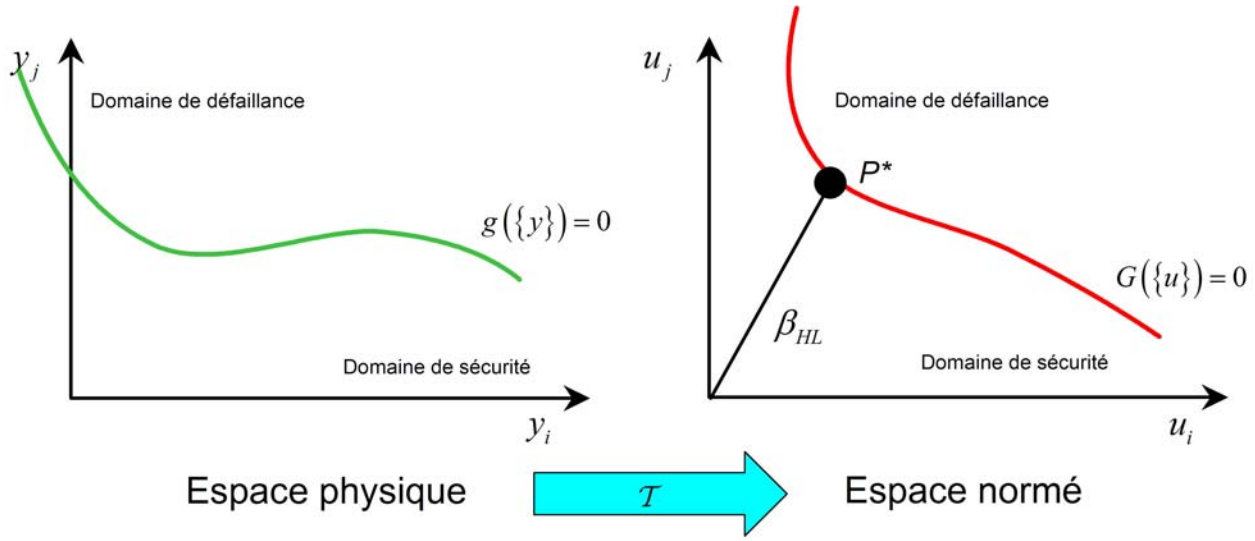


Figure B.4. Définition de la surface d'état limite (G) et de l'indice de fiabilité β_{HL}.

B.3.4.3 Recherche des points de conception pour la détermination de β_{HL}

La recherche du point de conception P^* est essentielle dans une étude en fiabilité. Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte dans l'espace normé. Concrètement, il s'agit de trouver P^* tel que $\|\{U\}\| = \sqrt{\{U\}^T \{U\}}$ soit le plus petit possible (minimisation de la distance OP^*) tout en s'assurant que la contrainte $G(\{U\}) = 0$ soit satisfaite.

Pour résoudre un tel problème, on peut procéder analytiquement ou numériquement. Les méthodes analytiques s'avèrent impraticables pour des cas complexes comme dans la majeure partie des cas. Les méthodes numériques et en particulier les algorithmes d'optimisation sont les plus utilisées. Il existe différents algorithmes pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contrainte :

- les méthodes d'ordre 0 telles que les méthodes de dichotomie, du simplexe ou de Nelder & Mead (1965). Ces méthodes ne sont utilisées que dans les cas où les dérivées partielles de la fonction, et a fortiori les dérivées secondes, ne sont pas accessibles ;
- les méthodes d'ordre 1 où la convergence dépend de la détermination des gradients de la fonction d'état limite comme par exemple la méthode du gradient projeté et son adaptation au problème de fiabilité, la méthode de Rackwitz & Fiessler (1978) ;
- les algorithmes d'ordre 2, tels que la méthode de Newton et les méthodes du type SQP (Sequential Quadratic Programming). Ces méthodes requièrent l'évaluation des dérivées première et seconde de la fonction d'état limite et l'estimation de la matrice hessienne (matrice carrée composée des dérivées partielles secondes). La méthode d'Abdo et Rackwitz (1990) en est un exemple où la matrice hessienne est approchée sans être calculée. Cette méthode est une variante de l'algorithme de Rackwitz & Fiessler (1978). Elle en possède donc les mêmes propriétés, mais elle est globalement convergente ;

- les méthodes hybrides qui sont intermédiaires entre les méthodes d'ordre 1 et 2 dans le sens ou elles utilisent le gradient et une estimation du Hessien. Ce dernier est approché dans un premier temps, puis converge avec les itérations. Parmi ces méthodes on note la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) (Broyden 1970, Fletcher 1970, Goldfarb 1970, Shanno 1970), ou encore l'algorithme d'Abdo & Rackwitz (Abdo & Rackwitz 1990).

Ces algorithmes ont été présentés explicitement et comparés par Devictor (1996) et Sudret & Der Kiureghian (2000). L'un des algorithmes le plus efficace et le plus utilisé est l'algorithme itératif de Rackwitz-Fiessler (Rackwitz & Fiessler 1979) utilisé dans cette thèse.

L'algorithme itératif de Rackwitz-Fiessler (1978) fut initialement développé par Hasofer et Lind (Hasofer 1974) pour la recherche du point de conception dans le cas de variables aléatoires normales. Puis il a été étendu aux variables non normales par Rackwitz & Fiessler (1979).

L'algorithme de Rackwitz-Fiessler est une adaptation de la méthode du gradient projeté au problème d'optimisation en fiabilité mécanique. L'algorithme est mis en oeuvre dans l'espace des variables réduites. On part d'un point quelconque $\{u\}_{(0)}$, par exemple l'origine qui est aussi le point moyen dans l'espace normé, et on linéarise la fonction d'état limite $G(\{u\})$ en ce point. On recherche alors le point $\{u\}_{(1)}$ de cette surface le plus proche de l'origine, et la procédure est ensuite itérée au point $\{u\}_{(1)}$.

Le point de fonctionnement $\{u^*\}$ est donc déterminé comme la limite d'une suite de points $\{u\}_{(0)}, \{u\}_{(1)} \cdots \{u\}_{(k)}$. Le vecteur orthonormal $\{\alpha\}_{(k)}$ des cosinus directeurs à la k-ième itération est donné par l'expression :

$$\alpha_{i,(k)} = \frac{\left.\dfrac{\partial G(\{u\})}{\partial u_i}\right|_{\{u\}_{(k)}}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\dfrac{\partial G(\{u\})}{\partial u_i}\right|_{\{u\}_{(k)}}\right)^2}} \tag{B.14}$$

La distance à l'origine de l'hyperplan tangent à $G(\{u\})$ en $\{u\}_{(k)}$ est donnée par :

$$\beta_{(k)} = \frac{G\left(\{u\}_{(k)}\right) - \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial G\left(\{u\}\right)}{\partial u_i}\right|_{\{u\}_{(k)}} u_{i,(k)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial G\left(\{u\}\right)}{\partial u_i}\right|_{\{u\}_{(k)}} \right)^2}} \tag{B.15}$$

ce qui permet de déterminer simplement le point $\{u\}_{(k+1)}$:

$$\{u\}_{(k+1)} = -\beta_{(k)} \{\alpha\}_{(k)} \tag{B.16}$$

La marge de sécurité M correspondant à l'hyperplan tangent est obtenu en linéarisant la fonction d'état limite au point correspondant à β :

$$M = \beta - \{\alpha\}^T \{U\} \tag{B.17}$$

Les critères d'arrêt des itérations sont généralement la proximité de deux points successifs et la valeur de $G\left(\{u^*\}\right)$ qui doit théoriquement être nulle si le point obtenu est bien situé sur la surface d'état limite. Pour éviter d'obtenir une valeur de β_{HL} correspondant à un minimum local de la fonction $G\left(\{u\}\right)$, il peut être nécessaire de recourir à plusieurs points initiaux dans la séquence, conduisant à plusieurs valeurs de l'indice de fiabilité $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$, puis de définir β_{HL} par :

$$\beta_{HL} = \min\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\} \tag{B.18}$$

B.3.4.4 Méthode FORM

La méthode FORM (First Order Reliability Method) (Breitung 1984, Madsen et al. 1986, Ditlevsen 1996) permet d'approximer la surface d'état limite par un hyperplan au point de conception.

Elle consiste à approcher la surface de défaillance par un hyperplan tangent à cette surface au point de conception (Madsen et al. 1986, Ditlevsen et al. 1996) (Figure B.5). Quand la surface de défaillance devient linéaire et que les variables de base sont gaussiennes, une estimation de la probabilité de défaillance est alors obtenue par :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \tag{B.19}$$

L'approximation de la probabilité de défaillance est d'autant plus juste que la surface d'état limite est proche d'un hyperplan et/ou que l'indice de fiabilité β est grand.

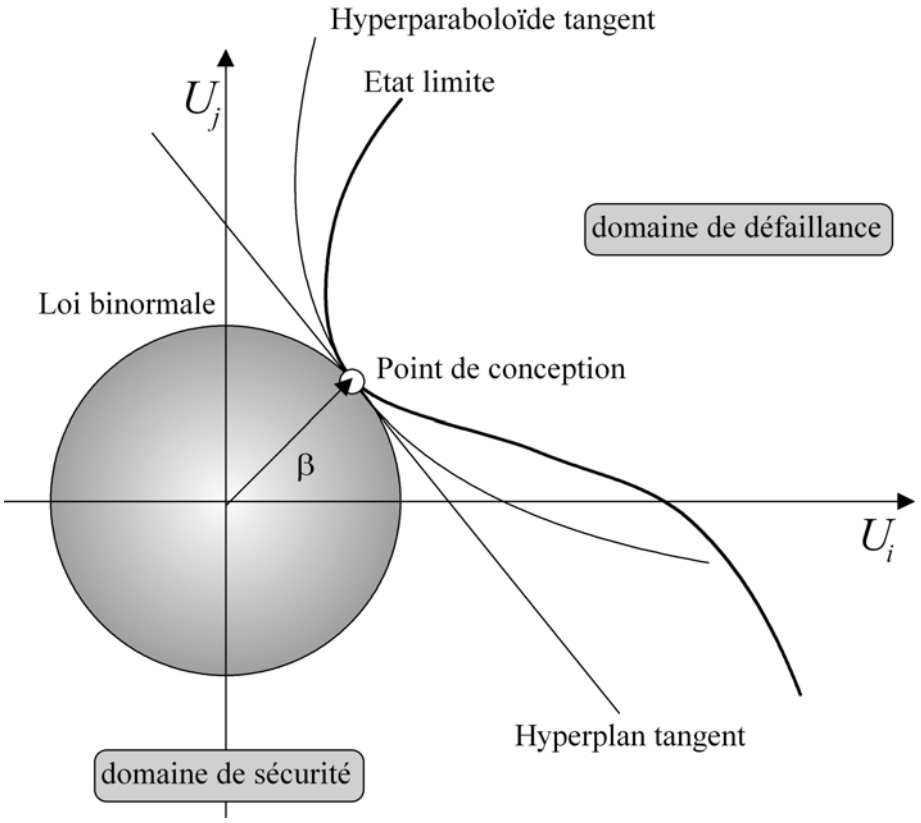


Figure B.5. Illustration de l'approximation FORM.

Pour augmenter la précision de l'Equation (B.19), la méthode SORM (Second Order Reliability Method) a été proposée. Elle consiste à approcher au point de conception, la surface d'état limite par une surface quadratique dont le contenu probabiliste est analytiquement connu (Figure B.5). L'approximation SORM prend la forme d'un hyperparaboloïde tangent au point de conception. Cette méthode n'a cependant pas été utilisée dans les calculs de cette thèse.

B.4 FIABILITE DES SYSTEMES

L'évaluation de la robustesse structurale nécessite une analyse au niveau du système (Canisius et al. 2007). Cette assertion s'appuie sur le fait que pour des structures hyperstatiques et redondantes, la défaillance d'un élément de structure n'entraîne pas forcément la ruine de l'ouvrage. Dans le cas des structures offshore par exemple, lorsqu'une plate-forme subit un endommagement (rupture d'une barre), toute la structure 3D est mobilisée pour redistribuer les efforts et résister. C'est l'« effet de système lié à l'hyperstaticité géométrique et aux chemins alternatifs de chargement » (Duprat et Schoefs 2009). Dans ce contexte, la théorie de la fiabilité structurale trouve ici toute son utilité (Thoft-Christensen & Murotsu 1986).

Cremona (2005, 2011) définit un système comme étant un ensemble de modes de défaillance. Les modes de défaillance peuvent être combinés de différentes façons pour former un mécanisme de ruine. Les principales combinaisons sont:

- un système en série ou combinaison série,

- un système en parallèle ou combinaison parallèle,
- un système mixte ou hybride ou quelconque (combinaison série de combinaisons parallèles, combinaison parallèle de combinaisons séries).

B.4.1 Evaluation de la fiabilité des systèmes en série

La défaillance d'un système en série intervient dès lors qu'un seul mode de défaillance est effectivement atteint. La probabilité de défaillance $P_f^{série}$ d'un système en série est alors la probabilité de l'union des événements de défaillance :

$$P_f^{série} = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\left(M_i \le 0\right)\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\left(g_i\left(\{Y\}\right) < 0\right)\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\left(G_i\left(\{U\}\right) < 0\right)\right) \tag{B.20}$$

où $M_i = g_i\left(\{Y\}\right)$ est la marge de sécurité du mode de défaillance i, et m le nombre de modes de défaillance. En linéarisant les m fonctions d'état limite autour de leur points de fonctionnement respectifs, l'approximation FORM pour la probabilité de défaillance $P_f^{série}$ d'un système en série s'écrit :

$$P_f^{série} \approx \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\left(-\{\alpha\}_i^T\{U\} \le -\beta_i\right)\right) \tag{B.21}$$

En utilisant les lois de Morgan (Sorensen 2004), l'Equation (B.21) se réécrit :

$$P_f^{série} \approx 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\left(-\{\alpha\}_i^t\{U\} > -\beta_i\right)\right) = 1 - \Phi_m(\{\boldsymbol{\beta}\};[\boldsymbol{\rho}]) \tag{B.22}$$

où Φ_m est la fonction de répartition de la loi multinormale de dimension m, $\{\boldsymbol{\beta}\}$ le vecteur composé des m indices de fiabilité, $\{\boldsymbol{\rho}\}$ est la matrice de corrélation de dimension $m \times m$ entre les diverses marges de sécurités linéarisées. Le coefficient de corrélation ρ_{ij} entre deux marges de sécurité linéarisées se calcule grâce aux vecteurs des cosinus directeurs $\rho_{ij} = \{\alpha\}_i^T\{\alpha\}_j$. L'indice de fiabilité d'un système en série s'exprime par :

$$\beta^{série} \approx -\Phi^{-1}(P_f^{série}) \tag{B.23}$$

B.4.1.1 Calcul de la fonction de répartition de la loi multinormale Φ_m

Le terme $\Phi_m(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho})$ de l'équation (B.22) s'exprime par :

$$\Phi_m(\{\boldsymbol{\beta}\};[\boldsymbol{\rho}]) = \int_{-\infty}^{\beta_1}\int_{-\infty}^{\beta_2}\ldots\int_{-\infty}^{\beta_m}\varphi_m\left(X;[\rho]\right)dx_1dx_2\cdots dx_m \tag{B.24}$$

où φ_m est la fonction densité de la loi normale de dimension m :

$$\varphi_m\left(\{\boldsymbol{X}\};[\boldsymbol{\rho}]\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sqrt{\det([\boldsymbol{\rho}])}}e^{\left(-\frac{1}{2}\{x\}^T[\boldsymbol{\rho}]^{-1}\{x\}\right)} \tag{B.25}$$

L'intégrale de l'Equation B.24 est généralement difficile à calculer analytiquement. Des méthodes de substitution comme la méthode d'approximation asymptotique et les méthodes de bornage de la fiabilité du système sont alors utilisées (Sorensen 2004). Ces approximations ont généralement des coûts de mise en œuvre très inférieurs à ceux des méthodes de simulations (Cremona 2005). Le calcul en fiabilité est donc grandement simplifié.

B.4.1.2 Bornes de la probabilité de défaillance d'un système en série

Bornes du premier ordre ou bornes simples

Elles sont définies comme suit :

$$\underbrace{\max_{i=1}^{m}\left\{\mathrm{P}(M_i\le 0)\right\}}_{parfaitement\ \ correlés}\le P_f^{série}\le\underbrace{1-\prod_{i=1}^{m}(1-\mathrm{P}(M_i\le 0))}_{décorrélés}\approx\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{P}(M_i\le 0)) \tag{B.26}$$

où la borne inférieure correspond à la valeur exacte de $P_f^{série}$ dans le cas où tous les éléments du système en série sont parfaitement corrélés ($\rho_{ij}=1$), et la borne supérieure correspond au cas où les éléments du système en série sont indépendants ($\rho_{ij}=0\,|\,i\neq j$). En termes d'indice de fiabilité la relation (B.26) s'écrit :

$$-\Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\Phi(-\beta_i)\right)\le\beta^{série}\le\min_{i=1}^{m}\{\beta_i\} \tag{B.27}$$

On constate que l'estimation de la fiabilité du système avec ces bornes est fortement influencée par le mode de défaillance ayant le plus faible indice de fiabilité. Moins la fiabilité de ce dernier domine celle des autres modes de défaillance, plus les bornes sont larges (Sorensen 2004).

Bornes du second ordre ou Bornes de Ditlevsen

Les bornes de Ditlevsen sont une meilleure estimation de la probabilité de défaillance du système sont définies comme suit :

$$\mathrm{P}(M_1\le 0)+\sum_{i=2}^{m}\max\left\{P(M_i\le 0)-\sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{P}(M_i\le 0\cap M_j\le 0),0\right\}\le P_f^{série} \tag{B.28}$$

$$P_f^{série}\le\sum_{i=1}^{m}\mathrm{P}(M_i\le 0)-\sum_{i=2}^{m}\max_{j<i}\left\{\mathrm{P}(M_i\le 0\cap M_j\le 0)\right\} \tag{B.29}$$

En terme d'indice de fiabilité approximé avec la méthode FORM, les relations B.28 et B.29 deviennent respectivement :

$$\Phi\left(-\beta_1\right)+\sum_{i=2}^{m}\max\left\{\Phi\left(-\beta_i\right)-\sum_{j=1}^{i-1}\Phi_2\left(-\beta_i,-\beta_j;\rho_{ij}\right),0\right\}\le\Phi\left(-\beta^{série}\right) \tag{B.30}$$

$$\Phi\left(-\beta^{série}\right)\le\sum_{i=1}^{m}\Phi\left(-\beta_i\right)-\sum_{i=2}^{m}\max_{j<i}\left\{\Phi_2\left(-\beta_i,-\beta_j;\rho_{ij}\right)\right\} \tag{B.31}$$

Ces bornes font intervenir les probabilités des intersections de deux évènements contrairement aux bornes simples. On remarque que la numérotation des modes de défaillance influence les bornes de Ditlevsen. Dans la littérature, il est suggéré de numéroter les modes de défaillance par ordre décroissant des probabilité de défaillance (Sorensen 2004). Ces bornes sont nettement plus précises que les bornes simples. Cependant, elle nécessite l'estimation des probabilités conjointes $\Phi_2\left(-\beta_i,-\beta_j;\rho_{ij}\right)$. Le calcul de $\Phi_2\left(-\beta_i,-\beta_j;\rho_{ij}\right)$ peut se faire numériquement par intégration ; il s'agit principalement des méthodes d'approximation asymptotique avancée telles que les approximations de Hohenbichler (1984) et de Gollwitzer et Rackwitz (1986) qui sont les plus utilisées.

B.4.2 Evaluation de la fiabilité des systèmes en parallèle

La défaillance d'un système en parallèle intervient lorsque tous les modes de défaillance qui le constituent sont effectivement atteints. La probabilité de défaillance du système P_f, est alors la probabilité des intersections des événements de défaillance :

$$P_f^{parallèle}=\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\left(M_i\le 0\right)\right)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\left(g_i\left(\{Y\}\right)\le 0\right)\right)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\left(G_i\left(\{U\}\right)\le 0\right)\right) \tag{B.32}$$

De manière analogue au système en série, il vient :

$$P_f^{parallèle}\approx\Phi_m\left(-\{\boldsymbol{\beta}\};[\boldsymbol{\rho}]\right) \tag{B.33}$$

On peut donc définir l'indice de fiabilité généralisé $\beta^{parallèle}$ d'un système en parallèle :

$$\beta^{parallèle}=-\Phi^{-1}\left(P_f^{parallèle}\right) \tag{B.34}$$

Bornes du premier ordre ou bornes simples

La probabilité de défaillance $P_f^{parallèle}$ d'un système en parallèle est bornée par :

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{m}\mathrm{P}\left(M_i\le 0\right)}_{décorrélés}\le P_f^{parallèle}\le\underbrace{\min_{i=1}^{m}\left\{\mathrm{P}\left(M_i\le 0\right)\right\}}_{parfaitement\ \ corrélés} \tag{B.35}$$

La borne supérieure correspond à la valeur exacte de $P_f^{parallèle}$ lorsque tous les modes de défaillance du système en parallèle sont parfaitement corrélés ($\rho_{ij}=1$) et la borne inférieure

correspond à la valeur exacte de $P_f^{parallèle}$ lorsque tous les modes de défaillance sont décorrélés (i.e., $\rho_{ij} = 0 \mid i \neq j$). Les bornes simples sont souvent trop larges pour être d'un grand intérêt.

Des bornes de ditlevsen ont été proposées pour un système en série. Cependant, elles peuvent être modifiées pour être applicables dans le cas d'un système en parallèle. En effet, d'après les équations (B.22) et (B.33) on a :

$$\begin{cases} P_f^{série} = 1 - \Phi_m\left(\{\boldsymbol{\beta}\};[\boldsymbol{\rho}]\right) \\ P_f^{parallèle} = \Phi_m\left(-\{\boldsymbol{\beta}\};[\boldsymbol{\rho}]\right) \end{cases} \tag{B.36}$$

Si les bornes inférieures et supérieures de Ditlevsen d'un système en série sont notées $BI(P_f)$ et $BS(P_f)$ respectivement, alors, il vient :

$$1 - BS(P_{f(M)}^{série}) \leq P_f^{parallèle} \leq 1 - BI(P_{f(M)}^{série}) \tag{B.37}$$