Applications de la théorie géométrique des invariants à la géométrie diophantienne

Marco Maculan

UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, UMR 8628

THÈSE
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
Spécialité : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement par
Marco MACULAN
le vendredi 7 décembre 2012

Applications de la théorie géométrique des invariants à la géométrie diophantienne

---

Composition du jury

M. BOST Jean-Benoît	Directeur de thèse
M. CHAMBERT-LOIR Antoine	Examinateur
M. GASBARRI Carlo	Rapporteur
M. NAKAMAYE Michael	Examinateur
M. RÖSSLER Damian	Rapporteur

Applications de la théorie géométrique des invariants à la géométrie diophantienne

Marco Maculan

Marco Maculan
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Faculté des Sciences d'Orsay
Université Paris-Sud 11
F-91405 Orsay Cedex

courriel électronique : marco.maculan@math.u-psud.fr

Remerciements

J'ai eu la chance d'avoir Jean-Benoît Bost comme directeur de thèse. D'un coté j'ai pu profiter de sa vaste culture mathématique et de sa compréhension profonde des sujets plus différents ; de l'autre il m'a appris une vision esthétique et en même temps concrète des mathématiques. J'ai été constamment encouragé — surtout durant mes nombreuses phases de doute — par le temps qui m'a été consacré et par les conseils qui m'ont rejoint même quand plusieurs heures de décalage horaire me séparaient du bois d'Orsay. Il m'est aussi impossible d'estimer le nombre de commentaires précieux qu'il a apporté à mes textes, et qui m'ont permit de les améliorer soit d'un point de vue mathématique que grammatical (je garde encore sa conjugaison du conditionnel du verbe manger). Je lui exprime toute ma gratitude.

Je tiens à remercier ensuite Carlo Gasbarri et Damian Rössler qui ont accompli la pénible tâche de relecture et d'écriture d'un rapport de cette thèse. Non seulement ils ont dû faire face à un volume considérable de pages, mais ils l'ont fait soigneusement et dans un très bref délai.

Il est un plaisir pour moi que Michael Nakamaye soit présent dans aujourd'hui. Ceci est peut être la meilleure manière de le remercier de la disponibilité avec laquelle il a partagé avec moi ses idées et son temps pendant un moment crucial de mon doctorat. Je ne le souligne pas assez : son enthousiasme a été fondamental.

Je suis également heureux que Antoine Chambert-Loir ait accepté d'être faire partie de mon jury. Le cours qu'il a donné à l'école d'été à Rennes en 2009 m'a été de grande inspiration, alors que je faisait mes premiers pas dans la géométrie d'Arakelov (je continue d'ailleurs à l'apprendre sur ses notes). Je tiens aussi à le remercier pour l'intérêt qu'il a montré pour mon travail et pour les discussions que l'on a pu avoir à propos.

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, de l'École Doctorale de Mathématiques de la Région Paris-Sud et en bénéficiant de l'ambiance apaisante de la bibliothèque Jacques Hadamard. Je remercie David Harari, directeur de l'École Doctorale, aussi pour m'avoir introduit aux schémas à travers son cours de géométrie algébrique. Je suis gré aussi à toutes les personnes qui m'ont permit de travailler avec sérénité, à partir de Valérie Lavigne, et qui ont bien dû endurer à mon irréparable allergie à la bureaucratie.

Introduction

Présentation générale

Cette thèse a pour objet de développer des applications à la géométrie diophantienne de la théorie géométrique des invariants, en utilisant le langage de la géométrie d'Arakelov.

Dans sa forme la plus simple, l'approximation diophantienne étudie comment les nombres rationnels approchent les nombres réels. Lagrange montra en 1768, grâce aux fractions continues, que pour tout nombre naturel n qui n'est pas un carré, l'*équation « de Pell »* pour n admet des solutions entières non triviales, c'est-à-dire qu'il existe un couple (p,q) de nombres entiers strictement positifs vérifiant

$$p^2 - nq^2 = 1.$$

Ses méthodes permettent aussi de montrer le résultat suivant :

Théorème 0.1. *Soit θ un nombre réel. Il existe une infinité de nombres rationnels p/q, avec $p,q \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux et $q \geq 1$, tels que*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Une première preuve élémentaire de cette majoration fut ensuite donnée par Dirichlet, grâce à son *Schubfachprinzip*, littéralement « Principe des tiroirs ». L'existence d'une solution non triviale à l'équation de Pell peut être vue comme un cas particulier du *Théorème des unités* de Dirichlet en théorie des nombres, appliqué au corps de nombres $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$.

L'histoire des minorations des distances $|\theta - p/q|$ des nombres rationnels aux nombres algébriques est bien plus récente et elle a commencé avec Liouville en 1844 [Lio44, Lio51], intéressé par des questions de transcendance :

Théorème 0.2. *Soit $\theta \in \mathbf{R}$ un nombre algébrique de degré $d \geq 2$. Il existe un nombre réel $c = c(\theta) > 0$ tel que, pour tout nombre rationnel p/q, avec $p,q \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux et $q \geq 1$, on ait :*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}.$$

Remarquons que la constante c qui apparaît dans l'énoncé est calculable. De plus, pour $d = 2$, d'après le Théorème 0.1, cet énoncé est optimal.

Un des défis des mathématiques de la première moitié du vingtième siècle fut de remplacer l'exposant d dans l'énoncé du Théorème de Liouville par un exposant κ le plus petit possible. Plus précisément, depuis Thue, on s'intéresse à un énoncé de la forme suivante, où κ désigne un nombre réel strictement positif :

Théorème 0.3. *Soit* $\theta \in \mathbf{R}$ *un nombre algébrique de degré* d*. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il n'y a qu'un nombre fini de nombres rationnels* p/q*, avec* $p, q \in \mathbf{Z}$ *premiers entre eux et* $q \geq 1$*, tels que*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{\kappa+\varepsilon}}.$$

Comme le découvrit Thue, une inégalité de ce type avec un exposant $\kappa < d$ a des conséquences diophantiennes remarquables. Par exemple, Thue montra que l'équation (ainsi que d'autres de cette forme)

$$x^3 - 2y^3 = 1$$

n'a qu'un nombre fini de solutions entières. Ce résultat mit en lumière le lien entre l'approximation diophantienne et l'étude des points entiers des courbes algébriques.

En revenant au Théorème 0.3, il fallut plusieurs décennies avant de parvenir à la meilleure inégalité possible. Voici la chronologie des progrès :

$\kappa = 1 + \dfrac{d}{2}$	Thue, 1909
$\kappa = \min\left\{\dfrac{d}{i} + i - 1 : i = 1, \ldots, d\right\}$	Siegel, 1921
$\kappa = \sqrt{2d}$	Dyson, Gel'fond (de manière indépendante), 1947
$\kappa = 2$	Roth, 1955

Bien entendu, des énoncés plus forts peuvent encore être conjecturés, comme l'a fait par exemple Lang :

Conjecture 0.4. *Soit* $\theta \in \mathbf{R}$ *un nombre algébrique de degré* $d \geq 2$*. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un nombre fini de nombres rationnels* p/q*, avec* $p, q \in \mathbf{Z}$ *premiers entre eux et* $q \geq 1$*, tels que*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}.$$

Ces résultats, contrairement à celui de Liouville, ne sont pas effectifs : si $\varepsilon > 0$ et p/q est un nombre rationnel tel que

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{|q|^{2+\varepsilon}},$$

une majoration, ne dépendant que de θ, de la taille de p et q reste inconnue. Néanmoins, Davenport et Roth montrèrent que les techniques de Roth permettent de donner une borne effective du nombre de tels rationnels.

La preuve de Thue fut le modèle de toutes les améliorations successives du Théorème 0.3 (et reste le modèle de la plupart des démonstrations d'approximation diophantienne jusqu'à présent). L'idée fondamentale de Thue est de passer d'une seule approximation à la considération de paires d'approximations. Nous donnons une esquisse des étapes principales de la démonstration :

1. trouver un polynôme f, dit « auxiliaire », en deux variables à coefficients entiers, s'annulant beaucoup au point algébrique (θ, θ) et tel que la taille des coefficients soit suffisamment petite ;
2. *lemme des zéros* : montrer que le polynôme f ne peut pas s'annuler beaucoup en un point rationnel (x, y), *i.e.* prouver qu'une certaine dérivée g d'ordre suffisamment petit ne s'annule pas en (x, y) ;

3. *minoration arithmétique* : puisque g ne s'annule pas en (x, y) et qu'un nombre entier non nul a une valeur absolue ≥ 1, $|g(x, y)|$ est minoré en fonction des dénominateurs de x et y (élevés respectivement à moins le degré de g dans la première et la deuxième variable) ;
4. *majoration analytique* : développer g autour de (θ, θ) et majorer en faisant apparaître la distance entre θ et x, et entre θ et y ;
5. en supposant qu'il existe une infinité de nombres rationnels satisfaisant
$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{|q|^{\kappa+\varepsilon}},$$
combiner la minoration arithmétique et la majoration analytique pour obtenir une contradiction.

Plus précisément, Thue cherche un polynôme en deux variables de la forme
$$f(x, y) = p(x) + yq(x),$$
avec une grande multiplicité le long la première variable. Le lemme des zéros est ensuite basé sur des informations arithmétiques simples concernant le Wronskien
$$w(x) = \det\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ p'(x) & q'(x)\end{pmatrix}.$$

En poursuivant le travail de Thue, Siegel démontra dans sa thèse en 1921 le Théorème 0.3 avec
$$\kappa = \min\left\{\frac{d}{i} + i - 1 : i = 1, \ldots, d\right\} \leq 2\sqrt{d}.$$
Comme Thue, Siegel considère un polynôme auxiliaire $f(x, y)$ avec une grande multiplicité en la première variable et le Lemme des zéros se ramène encore à des propriétés arithmétiques des Wronskiens. Son résultat combiné avec le Théorème de Mordell-Weil lui permit de montrer la finitude des points à coefficients entiers d'une courbe affine de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative.

En 1947, Dyson [Dys47] et Gel'fond [Gel49, Gel60] obtinrent, de manière indépendante, le meilleur résultat possible (par une généralisation de ces techniques) en dimension 2, *i.e.* sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Ils apportent au moins deux nouveautés importantes. La première est la condition d'annulation du polynôme $f(x, y)$: ils ne se restreignent plus à demander une grande multiplicité en la première variable, mais ils utilisent une condition d'annulation qui fait intervenir les deux variables. L'*indice*, concept crucial dans la suite, fit ainsi son apparition implicite. La deuxième nouveauté est présente dans le travail de Dyson et concerne le Lemme des zéros : contrairement aux versions précédentes, Dyson prouve son résultat sur le corps $\mathbf{C}$ et non sur un corps de nombres. Ses arguments, basés encore sur les propriétés des Wronskiens généralisés, évitent toute considération de nature arithmétique. Pour cette raison, on se réfère à la version de Dyson du Lemme des zéros simplement par Lemme de Dyson et on dit qu'il est de caractère géométrique.

Comme Dyson l'indiquait à la fin de son article, la difficulté de prouver le Théorème 0.3 avec $\kappa = 2$ par une généralisation de ces méthodes était dans la preuve du Lemme des zéros pour un polynôme en n variables, c'est-à-dire sur un produit de n copies de $\mathbf{P}^1$ avec n arbitraire. En 1955, Roth [Rot55] réussit à atteindre ce but en démontrant une version arithmétique d'un tel lemme des zéros (le « Lemme de Roth »).

En 1971, Schmidt [Sch71a, Sch71b] démontra une vaste généralisation du Théorème de Roth, appelée le *Théorème du sous-espace*. Il affirme que si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des formes linéaires en n variables à coefficients algébriques et linéairement indépendantes, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces de $\mathbf{Q}^n$ qui contiennent un point entier x tel que

$$|\varphi_1(x)\cdots\varphi_n(x)| < \|x\|^{-\varepsilon},$$

où $\|x\|$ désigne le maximum des coordonnées de x. Le point crucial est un Lemme des zéros arithmétique sur le produit de n copies d'un espace projectif de dimension quelconque : une version géométrique de ce dernier reste encore aujourd'hui une des questions ouvertes du sujet.

En 1982, Bombieri [Bom82] porta une nouvelle attention au Lemme de Dyson en montrant qu'il permettait de prouver des résultats effectifs en approximation diophantienne accessibles avant seulement par les techniques de Baker. Il posa ainsi le problème d'une généralisation à plusieurs variables.

Cependant, en 1983, Faltings [Fal83, Fal84] réussit à prouver la conjecture de Mordell : elle affirme qu'une courbe C de genre ≥ 2 définie sur un corps de nombres K n'a qu'un nombre fini de points rationnels $\mathrm{C}(\mathrm{K})$. Elle implique en particulier le Théorème de Siegel sur les points entiers des courbes algébriques. Toutefois, les méthodes employées par Faltings dans sa preuve étaient très différentes des méthodes classiques de l'approximation diophantienne : il combinait des outils des espaces de modules des variétés abéliennes et une approche à la Arakelov (la « hauteur de Faltings »).

Viola [Vio85] démontra une version du Lemme de Dyson en dimension 2 en remplaçant les arguments des Wronskiens par une analyse des singularités des courbes dans le plan projectif complexe.

En 1984, Esnault et Viewheg [EV84], motivés par une lettre de Bombieri, publièrent une démonstration du Lemme de Dyson en n variables, *i.e.* sur le produit de n copies de $\mathbf{P}^1$. Leur preuve reposait sur la positivité de certains faisceaux sur des éclatements (et les théorèmes d'annulation cohomologique conséquents) et des constructions de revêtements. Cet article stimula et influença le sujet jusqu'à présent.

Les années '80 se terminèrent avec la contribution de Vojta au sujet.

Tout d'abord, il redémontra [Voj89a] le Lemme de Dyson en dimension 2 grâce à la théorie de l'intersection sur les surfaces : l'argument se généralisait sans changements à la situation où $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est remplacé par un produit de deux courbes de genre arbitraire. Cette version lui permit ensuite [Voj89b] de donner une démonstration de la Conjecture de Mordell fondée sur les outils de l'approximation diophantienne : ce fut le couronnement des idées remontant à Thue et Siegel. Cette preuve fut aussi une des premières applications du Théorème de Riemann-Roch arithmétique de Gillet-Soulé.

Le dictionnaire entre approximation diophantienne et théorie de Nevanlinna qui Vojta développa pendant sa thèse suggérait que le Théorème de Roth et la Conjecture de Mordell devaient avoir une preuve commune : Vojta [Voj92] le démontra en 1992, en soulignant encore une fois le fort lien entre ces deux questions.

En 1990, Bombieri [Bom90] remplaça dans la preuve de Vojta l'emploi du Théorème de Riemann-Roch arithmétique par des arguments plus élémentaires. En 1991 et 1993 [Fal91, Fal94], en s'appuyant sur ces idées, Faltings prouva une conjecture de Lang étendant la conjecture de Mordell.

En développant ces méthodes, Faltings et Wüstholz ont pu donner une preuve du théorème du sous-espace de Schmidt sensiblement différente de la preuve originale [FW94]. Signalons que les arguments qui remplacent les lemmes de zéros font intervenir, comme chez Roth et Schmidt, des considérations arithmétiques. Signalons aussi que dans les démonstrations de [FW94] apparaissent des notions de semi-stabilité, associées à des espaces vectoriels filtrées (cf. aussi [Fal95]). L'intervention de la semi-stabilité dans ces travaux apparaît de nature très différente de son rôle dans ce mémoire, où c'est la semi-stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants, telle qu'elle a été développée originellement par Mumford [GIT].

Inspiré par le *Théorème du produit* introduit par Faltings dans le premier de ces deux travaux, Nakamaye [Nak95] prouva dans sa thèse, en 1995, la généralisation du Lemme de Dyson à un produit fini de courbes de genre arbitraire. En 1999 [Nak99], enfin, il réussit à s'affranchir des arguments cohomologiques d'Esnault et Viewheg, en n'utilisant dans sa démonstration que des considérations « élémentaires » de théorie de l'intersection.

En 1992, Burnol [Bur92] commença l'étude de la théorie géométrique des invariants dans le cadre de la géométrie d'Arakelov. En développant des analogues p-adiques des résultats de Kempf-Ness [KN79], il introduisit une hauteur sur le quotient (des points semi-stables) d'un espace projectif par un groupe réductif.

En 1994, Zhang [Zha94] poursuivit le travail de Burnol, en utilisant l'existence de sections globales de petite taille (voir [Zha95] et [Bos04, Theorem A.1]) pour montrer la semi-positivité de la métrique sur le quotient.

Inspiré par un travail de Cornalba et Harris qui, à leur tour, étendaient des résultats précédents de Mumford et Viewheg, Bost [Bos94] étudia des conséquences de la semi-stabilité (du point de Chow) des cycles en géométrie d'Arakelov. Il compléta ce travail en introduisant une hauteur « naturelle » pour les variétés stables (au sens de la théorie géométrique des invariants) et en la comparant, dans le cas des variétés abéliennes, avec la hauteur de Faltings [Bos96a].

En 2000, Gasbarri [Gas00], en isolant un argument de Bost, démontra une minoration de la hauteur d'un point semi-stable dans une représentation unitaire. Le but était d'introduire et minorer la hauteur sur l'espace de modules des fibrés vectoriels sur un courbe [Gas97, Gas03]. En termes d'approximation diophantienne, cette minoration correspond à la *minoration arithmétique* présente dans le schéma classique de démonstration.

Une version explicite de ce type de minoration permit à Chen de donner une minoration de la pente du produit tensoriel des fibrés vectoriels hermitiens sur un anneau des entiers [Che09].

Dans cette thèse nous nous proposons d'un côté d'étudier de manière systématique la théorie géométrique des invariants dans le cadre de la géométrique d'Arakelov ; de l'autre, comme suggère l'introduction de [Bos94], de montrer que ces résultats permettent une nouvelle approche géométrique (distincte aussi de la méthode des pentes de [Bos96b]) aux résultats d'approximation diophantienne, tels que le Théorème de Roth et ses généralisations par Lang, Wirsing et Vojta. Nous renvoyons au récent ouvrage par Bombieri et Gubler [BG06] pour une exposition « classique » de ces résultats.

*

* *

Nous décrivons maintenant le contenu des chapitres successifs de ce mémoire.

0.0.1. — Le premier chapitre est une collection de résultats déjà connus ; nous en profitons pour fixer des conventions et des notations que nous gardons dans la suite du texte. Le lecteur est à invité à ne s'y reporter qu'en cas de besoin.

0.0.2. — Le deuxième chapitre est consacré à la *théorie géométrique des invariants sur un corps k complet pour une valeur absolue*. Si k est le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ (muni d'une valeur absolue archimédienne), nous précisons des résultats dus à Kempf et Ness [KN79] et à Zhang [Zha94]. Dans le cas non archimédien, nous complétons le travail de Burnol [Bur92], en nous affranchissant de l'hypothèse de compacité locale du corps au moyen des espaces analytiques au sens de Berkovich.

Nous nous limitons tout d'abord au cas $k = \mathbf{C}$. Considérons un schéma projectif complexe X muni de l'action d'un groupe réductif complexe (connexe) G et d'un faisceau inversible ample G-linéarisé L. Désignons par X^{ss} l'ouvert des points semi-stables et par

$$\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \mathrm{Y} := \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d})^{\mathrm{G}}\right)$$

la projection sur le quotient (au sens de la théorie géométrique des invariants). Pour tout entier $D > 0$ assez divisible, il existe par construction un faisceau inversible ample M_D sur le schéma projectif Y et un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur X^{ss},

$$\varphi_D : \pi^* M_D \longrightarrow L|_{X^{ss}}^{\otimes D},$$

compatible à l'action de G.

Supposons de plus que le faisceau inversible L soit muni d'une métrique continue $\|\cdot\|_L$ (sur le sous-espace analytique réduit). Pour tout point $y \in Y(\mathbf{C})$ et toute section $s \in y^* M_D$, posons

$$\|s\|_{M_D} := \sup_{\pi(x)=y} \|\varphi_D(\pi^* s)\|_{L^{\otimes D}}.$$

La métrique $\|\cdot\|_{M_D}$ ainsi définie sur le faisceau inversible M_D est — d'après une observation de Mumford [GIT, Appedix to Chapter 2, §C], Guillemin et Sternberg [GS82a, GS82b, GS84] fondée sur le travail de Kempf et Ness [KN79] — le concept qui est à la base du lien entre la théorie géométrique des invariants des variétés kähleriennes et l'application moment en géométrie symplectique. On renvoye au chapitre 8 de [GIT] pour une présentation détaillée de ces aspets.

En imitant les techniques de Kempf et Ness, nous obtenons :

Théorème 0.5. *Supposons que la métrique* $\|\cdot\|_L$ *soit semi-positive*[1] *et invariante sous l'action d'un sous-groupe compact maximal de* $G(\mathbf{C})$. *La métrique* $\|\cdot\|_{M_D}$ *ainsi définie est alors continue.*

Si la métrique $\|\cdot\|_L$ est la restriction d'une métrique de Fubini-Study, ce théorème est une conséquence directe des résultats de Kempf et Ness : toutefois, il ne nous semble pas clair qu'un argument d'approximation soit suffisant pour le démontrer en général. En étant assurée la continuité, un argument de Zhang [Zha94, Theorem 2.2] démontre la semi-positivité de la métrique $\|\cdot\|_{M_D}$.

0.0.3. — Nous introduisons ensuite la notion de *mesure d'instabilité*. Considérons un point semistable $x \in X^{ss}(\mathbf{C})$, $y = \pi(x)$ son image dans le quotient et une section non nulle $s \in y^* M_D$. Posons

$$\mu(x) := \frac{1}{D} \log \frac{\|\pi^* s\|_{L^{\otimes D}}(x)}{\|s\|_{M_D}(y)}.$$

Puisque le morphisme π est G-invariant, pour toute section non nulle $t \in x^* L$, on a :

$$\mu(x) \leq \log \inf_{g \in G(\mathbf{C})} \frac{\|t\|_L(x)}{\|g \cdot t\|_L(g \cdot x)}. \tag{0.0.1}$$

Théorème 0.6. *La fonction* μ, *prolongée sur* $X - X^{ss}$ *par la valeur* $-\infty$, *est une fonction continue de* $X(\mathbf{C})$ *vers* $[-\infty, 0]$. *En outre, pour toute section non nulle* $t \in x^* L$, *on a :*

$$\mu(x) = \log \inf_{g \in G(\mathbf{C})} \frac{\|t\|_L(x)}{\|g \cdot t\|_L(g \cdot x)}.$$

Précisons que, en ce qui concerne les applications arithmétiques que nous présentons au dernier chapitre, le seul résultat indispensable sera la continuité de la métrique $\|\cdot\|_{M_D}$ et l'inégalité (0.0.1).

0.0.4. — Nous étudions aussi des analogues non archimédiens de ces résultats. Considérons un corps local k et son anneau des entiers k°. Soit $\mathscr{X}$ un k°-schéma propre et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur $\mathscr{X}$.

1. *i.e.*, telle que pour toute section s du faisceau inversible L sur un ouvert U de $X(\mathbf{C})$, la fonction $-\log\|s\|$ soit plurisousharmonique sur U.

Notons X la fibre générique de $\mathscr{X}$ et L la restriction de $\mathscr{L}$ à X. Le modèle entier $\mathscr{L}$ de L induit une métrique continue $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ sur le faisceau inversible L^{an} sur l'espace analytique au sens de Berkovich X^{an} [2].

Supposons maintenant que le faisceau inversible $\mathscr{L}$ soit ample et qu'un k°-groupe réductif [3] $\mathscr{G}$ agit sur le k°-schéma $\mathscr{X}$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathscr{L}$. D'après un théorème de Seshadri [Ses77, II.4, Theorem 4], la k°-algèbre graduée $\bigoplus_{d\geq 0}\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes d})^{\mathscr{G}}$ des $\mathscr{G}$-invariants de $\bigoplus_{d\geq 0}\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes d})$ est une k°-algèbre de type fini. Le k°-schéma projectif

$$\mathscr{Y} := \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0}\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes d})^{\mathscr{G}}\right)$$

est le quotient catégorique par le k°-schéma en groupes $\mathscr{G}$ de l'ouvert $\mathscr{X}^{\mathrm{ss}}$ des points semi-stables du schéma $\mathscr{X}$ (par rapport à l'action du k°-groupe réductif $\mathscr{G}$ et au faisceau inversible $\mathscr{L}$). On note $\pi : \mathscr{X}^{\mathrm{ss}} \to \mathscr{Y}$ le morphisme quotient. Pour tout nombre entier $\mathrm{D} > 0$ assez divisible, il existe par construction un faisceau inversible ample $\mathscr{M}_{\mathrm{D}}$ sur le schéma $\mathscr{Y}$ et un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur $\mathscr{X}^{\mathrm{ss}}$,

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \pi^*\mathscr{M}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathscr{L}|_{\mathscr{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}},$$

compatible à l'action du k°-groupe réductif $\mathscr{G}$.

Désignons par Y la fibre générique du k°-schéma $\mathscr{Y}$ et par M_{D} la restriction du faisceau inversible $\mathscr{M}_{\mathrm{D}}$ à Y. On peut munir le faisceau inversible M_{D} soit de la métrique $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_{\mathrm{D}}}$ induite par le modèle entier $\mathscr{M}_{\mathrm{D}}$ soit, de manière analogue au cas complexe, de la métrique $\|\cdot\|_{\mathrm{M}_{\mathrm{D}}}$ définie pour tout point $y \in \mathrm{Y}^{\mathrm{an}}$ et toute section $s \in y^*\mathrm{M}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}}$ par

$$\|s\|_{\mathrm{M}_{\mathrm{D}}}(y) := \sup_{\pi(x)=y} \|\pi^* s\|_{\mathscr{L}}(x).$$

Un argument de Burnol [Bur92, Proposition 1] montre que ces deux métriques coïncident. En particulier, la métrique $\|\cdot\|_{\mathrm{M}_{\mathrm{D}}}$ est continue.

En procédant comme dans le cas archimédien, nous introduisons la mesure d'instabilité. Considérons un point semi-stable $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$, $y = \pi(x)$ son image dans le quotient et une section non nulle $s \in y^*\mathrm{M}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}}$. Posons

$$\mu(x) := \frac{1}{\mathrm{D}}\log\frac{\|\pi^* s\|_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}(x)}{\|s\|_{\mathrm{M}_{\mathrm{D}}}(y)}.$$

Puisque le morphisme π est G-invariant, pour toute section non nulle $t \in x^*\mathrm{L}^{\mathrm{an}}$, on a :

$$\mu(x) \leq \log \inf_{g\in \mathrm{G}(\overline{k})} \frac{\|t\|_{\mathrm{L}}(x)}{\|g\cdot t\|_{\mathrm{L}}(g\cdot x)}. \tag{0.0.2}$$

Nous montrons que les techniques de Kempf et Ness s'adaptent aussi au contexte non archimédien et permettent de prouver :

2. La métrique $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ est définie comme suit. Tout point $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ induit un morphisme de k-schémas $\varepsilon_x : \operatorname{Spec}\widehat{\kappa}(x) \to \mathrm{X}$, où $\widehat{\kappa}(x)$ désigne le corps résiduel complété de x. La fibre en x du faisceau inversible L^{an} s'identifie naturellement l'image inverse $\varepsilon_x^*\mathrm{L}$ de L par ε_x. Par le critère valutatif de propreté, le morphisme ε_x s'étend de manière unique un morphisme de k°-schémas $\varepsilon_x^\circ : \operatorname{Spec}\widehat{\kappa}(x)^\circ \to \mathscr{X}$. Soit s une section inversible de $\mathscr{L}$ définie au voisinage de l'image du morphisme ε_x°. Pour tout $t \in x^*\mathrm{L}^{\mathrm{an}}$ il existe un unique $\lambda \in \widehat{\kappa}(x)^\times$ tel que $t = \lambda s$ et on pose

$$\|t\|_{\mathscr{L}}(x) := |\lambda|.$$

3. Soit S un schéma. Un S-schéma en groupes G est *réductif* (ou, G est un S-*groupe réductif*) s'il vérifie les conditions suivantes :

i. G est affine, lisse et de type fini sur S ;

ii. pour tout $s \in \mathrm{S}$, le $\overline{s}$-schéma en groupes $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\overline{s}$ est connexe et réductif ($\overline{s}$ est le spectre d'une clôture algébrique du corps résiduel $\kappa(s)$).

Théorème 0.7. *La fonction* μ, *prolongée sur* $X - X^{ss}$ *par la valeur* $-\infty$, *est une fonction continue de* X^{an} *vers* $[-\infty, 0]$. *En outre, pour toute section non nulle* $t \in x^* L$, *on a :*

$$\mu(x) = \log \inf_{g \in G(\overline{k})} \frac{\|t\|_L(x)}{\|g \cdot t\|_L(g \cdot x)}.$$

Encore, en ce qui concerne les applications arithmétiques que nous présentons au dernier chapitre, le seul résultat indispensable sera l'identité entre les métriques $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_D}$ et $\|\cdot\|_{M_D}$ et l'inégalité (0.0.2).

0.0.5. — Le troisième chapitre étudie la *théorie géométrique des invariants sur un corps global*, notamment des propriétés de la hauteur sur le quotient.

Nous nous bornons ici au cas d'un corps de nombres K. Soit $\mathfrak{o}_K$ son anneau des entiers. Considérons un $\mathfrak{o}_K$-schéma projectif et plat $\mathscr{X}$ muni d'une action d'un $\mathfrak{o}_K$-groupe réductif $\mathscr{G}$ (voir la note 3), et un faisceau inversible ample $\mathscr{G}$-linéarisé $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}$. Pour compléter la donnée « arakélovienne » considérons, pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbf{C}$, une métrique $\|\cdot\|_\sigma$ sur le faisceau inversible $\mathscr{L}_\sigma$, continue, semi-positive et invariante sous l'action d'un sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}_\sigma$ du groupe de Lie complexe $\mathscr{G}_\sigma(\mathbf{C})$. Supposons de plus que ces données soient compatibles à la conjugaison complexe. Autrement dit, le faisceau inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ est un fibré en droites équivariant au sens de Chambert-Loir et Tschinkel [CLT01].

D'après un théorème de Seshadri [Ses77, II.4, Theorem 4], la $\mathfrak{o}_K$-algèbre graduée $\bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes d})^{\mathscr{G}}$ des $\mathscr{G}$-invariants de $\bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes d})$ est une $\mathfrak{o}_K$-algèbre de type fini. Le $\mathfrak{o}_K$-schéma projectif

$$\mathscr{Y} := \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes d})^{\mathscr{G}}\right)$$

est le quotient catégorique par le $\mathfrak{o}_K$-schéma en groupes $\mathscr{G}$ de l'ouvert $\mathscr{X}^{ss}$ des points semi-stables du schéma $\mathscr{X}$ (par rapport à l'action du $\mathfrak{o}_K$-groupe réductif $\mathscr{G}$ et au faisceau inversible $\mathscr{L}$). On note $\pi : \mathscr{X}^{ss} \to \mathscr{Y}$ le morphisme quotient. Pour tout nombre entier $D > 0$ assez divisible, il existe par construction un faisceau inversible ample $\mathscr{M}_D$ sur le schéma $\mathscr{Y}$ et un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur $\mathscr{X}^{ss}$,

$$\varphi_D : \pi^* \mathscr{M}_D \longrightarrow \mathscr{L}|_{\mathscr{X}^{ss}}^{\otimes D},$$

compatible à l'action du $\mathfrak{o}_K$-groupe réductif $\mathscr{G}$. Pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbf{C}$, munissons le faisceau inversible $\mathscr{M}_D$ de la métrique étudiée au chapitre 2 (voir 0.0.2) : si $y \in \mathscr{Y}_\sigma(\mathbf{C})$ est un point et $s \in y^* \mathscr{L}_\sigma$ est une section sur y, posons

$$\|s\|_{\mathscr{M}_D,\sigma}(y) := \sup_{\pi(x)=y} \|\pi^* s\|_{\mathscr{L}^{\otimes D},\sigma}(x).$$

Pour toute place non archimédienne v, désignons par $\|\cdot\|_{\mathscr{L},v}$ (resp. $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_D,v}$) la métrique induite par le modèle entier $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{M}_D$).

Revenons à une place quelconque v et désignons par K_v la complétion de K par rapport à v. Pour tout $\overline{K}_v$-point semi-stable du $\mathfrak{o}_K$-schéma $\mathscr{X}$, considérons la mesure d'instabilité,

$$\mu_v(x) = \frac{1}{D} \log \frac{\|\pi^* s\|_{\mathscr{L}^{\otimes D},v}(x)}{\|s\|_{\mathscr{M}_D,v}(\pi(x))},$$

où $s \in \pi(x)^* \mathscr{M}_D$ est une section non nulle. C'est un élément de $]-\infty, 0]$. Le résultat suivant généralise [Bur92, Proposition 5] :

Théorème 0.8. *Pour tout $\overline{\mathbf{Q}}$-point semi-stable x du $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$-schéma $\mathscr{X}$, la mesure d'instabilité $\mu_v(x)$ est nulle pour presque toute place $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}(x)}$ et on a :*

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) + \frac{1}{[\mathrm{K}(x):\mathrm{K}]} \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}(x)}} \mu_v(x) = \frac{1}{\mathrm{D}} h_{\overline{\mathscr{M}}_{\mathrm{D}}}(\pi(x)).$$

Comme $\mathscr{M}_{\mathrm{D}}$ est ample sur $\mathscr{Y}$ et les métriques sur $\mathscr{M}_{\mathrm{D}}$ sont continues, $h_{\overline{\mathscr{M}}_{\mathrm{D}}}$ est minoré sur le $\overline{\mathbf{Q}}$-points de $\mathscr{Y}$, et l'on peut définir le nombre réel

$$h_{\min}\big((\mathscr{X}, \overline{\mathscr{L}}) /\!/ \mathscr{G}\big) := \frac{1}{\mathrm{D}} \inf_{y \in \mathscr{Y}(\overline{\mathbf{Q}})} h_{\overline{\mathscr{M}}_{\mathrm{D}}}(y)$$

(qui est clairement indépendant du choix de D). Dans la suite, nous utiliserons le Théorème 0.8 par l'intermédiaire du Corollaire suivant :

Corollaire 0.9. *Pour tout $\overline{\mathbf{Q}}$-point semi-stable x du $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$-schéma $\mathscr{X}$, on a :*

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) + \frac{1}{[\mathrm{K}(x):\mathrm{K}]} \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}(x)}} \mu_v(x) \geq h_{\min}\big((\mathscr{X}, \overline{\mathscr{L}}) /\!/ \mathscr{G}\big).$$

La valeur précise de $h_{\min}((\mathscr{X}, \overline{\mathscr{L}}) /\!/ \mathscr{G})$ paraît difficile à calculer. Nous nous contenterons de la borner grâce à la théorie classique des invariants lorsque $\mathscr{G}$ est un produit de groupes linéaires. Nous présentons cette minoration dans le numéro suivant, où nous faisons aussi le lien avec les résultats de Bost et Gasbarri cités précédemment.

0.0.6. — Considérons un nombre entier $n \geq 1$, un n-uplet de nombres entiers positifs $d = (d_1, \ldots, d_n)$ et le $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$-groupe réductif

$$\mathbf{GL}(d)_{\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}} := \mathbf{GL}(d_1)_{\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}} \times \cdots \times \mathbf{GL}(d_n)_{\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}}.$$

Nous nous donnons un fibré hermitien $\overline{\mathscr{F}}$ sur $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$ et une représentation unitaire

$$\rho : \mathbf{GL}(d)_{\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}} \longrightarrow \mathbf{GL}(\overline{\mathscr{F}}),$$

c'est-à-dire un morphisme de $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$-schémas en groupes tel que, pour tout plongement $\sigma : \mathrm{K} \to \mathbf{C}$, l'image du sous-groupe compact

$$\mathbf{U}(d) := \mathbf{U}(d_1) \times \cdots \times \mathbf{U}(d_n) \subset \mathbf{GL}(d)_{\sigma}(\mathbf{C})$$

soit contenue dans le sous-groupe unitaire par rapport à la norme hermitienne $\|\cdot\|_{\mathscr{F},\sigma}$.

Pour tout n-uplet $\overline{\mathscr{E}} = (\overline{\mathscr{E}}_1, \ldots, \overline{\mathscr{E}}_n)$ de fibrés hermitiens sur $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$, avec $\overline{\mathscr{E}}_i$ de rang d_i, nous construisons « en tordant » par la représentation ρ un fibré hermitien $\overline{\mathscr{F}}_{\overline{\mathscr{E}}}$ sur $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$ muni d'une représentation unitaire

$$\rho_{\overline{\mathscr{E}}} : \mathbf{GL}(\overline{\mathscr{E}}) := \mathbf{GL}(\overline{\mathscr{E}}_1) \times \cdots \times \mathbf{GL}(\overline{\mathscr{E}}_n) \longrightarrow \mathbf{GL}(\overline{\mathscr{F}}_{\overline{\mathscr{E}}}).$$

Désignons par $\mathscr{X}_{\overline{\mathscr{E}}}$ l'espace projectif $\mathbf{P}(\overline{\mathscr{F}}_{\overline{\mathscr{E}}})$ et par $\mathscr{Y}_{\overline{\mathscr{E}}}$ le quotient des points semi-stables $\mathscr{X}_{\overline{\mathscr{E}}}^{\mathrm{ss}}$ pour l'action du $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$-schéma en groupes

$$\mathbf{SL}(\overline{\mathscr{E}}) := \mathbf{SL}(\overline{\mathscr{E}}_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}(\overline{\mathscr{E}}_n).$$

Pour tout $\mathrm{D} > 0$ assez divisible, considérons le faisceau inversible hermitiens $\overline{\mathscr{M}}_{\overline{\mathscr{E}},\mathrm{D}}$ sur le quotient $\mathscr{Y}_{\overline{\mathscr{E}}}$ donné par construction.

Supposons que la représentation $\rho : \mathbf{GL}(d)_{\mathfrak{o}_K} \longrightarrow \mathbf{GL}(\overline{\mathscr{F}})$ soit homogène de poids $m = (m_1, \ldots, m_n)$.[4] Les quotients $\mathscr{Y}_{\overline{\mathscr{E}}}$ et $\mathscr{Y}$ sont alors canoniquement isomorphes. Si $\Psi_{\overline{\mathscr{E}}}$ désigne cet isomorphisme canonique, pour tout nombre entier $D > 0$ assez divisible, nous disposons d'un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles hermitiens sur $\mathscr{Y}_{\overline{\mathscr{E}}}$,

$$\psi_{\overline{\mathscr{E}}} : \overline{\mathscr{M}}_{\overline{\mathscr{E}},D} \longrightarrow \Psi^*_{\overline{\mathscr{E}}} \overline{\mathscr{M}}_D \otimes \beta^*_{\overline{\mathscr{E}}} \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \det(\overline{\mathscr{E}}_i)^{\otimes m_i D/d_i} \right),$$

où $\beta_{\overline{\mathscr{E}}} : \mathscr{Y}_{\overline{\mathscr{E}}} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_K$ est le morphisme structural. Les isomorphismes $\Psi_{\overline{\mathscr{E}}}$ et $\psi_{\overline{\mathscr{E}}}$ jouent un rôle implicite mais cruciale dans les minorations par Bost et Gasbarri de la hauteur des points semi-stables. En effet, si y est un $\overline{\mathbf{Q}}$-point du $\mathfrak{o}_K$-schéma $\mathscr{Y}_{\overline{\mathscr{E}}}$, nous avons

$$h_{\overline{\mathscr{M}}_{\overline{\mathscr{E}},D}}(y) = h_{\overline{\mathscr{M}}_D}(\Psi_{\overline{\mathscr{E}}}(y)) + D \sum_{i=1}^{n} m_i \,\widehat{\mu}_K(\overline{\mathscr{E}}_i).$$

Une conséquence évidente de l'existence de l'isomorphisme $\psi_{\overline{\mathscr{E}}}$ est :

Théorème 0.10. *Supposons que la représentation ρ soit homogène de poids $m = (m_1, \ldots, m_n)$. Alors :*
- *pour tout n-uplet $\overline{\mathscr{E}} = (\overline{\mathscr{E}}_1, \ldots, \overline{\mathscr{E}}_n)$ de $\mathfrak{o}_K$-fibrés hermitiens, avec $\operatorname{rk} \overline{\mathscr{E}}_i = d_i$ $(i = 1, \ldots, n)$,*
- *pour tout $\overline{\mathbf{Q}}$-point y du $\mathfrak{o}_K$-schéma $\mathscr{Y}_{\overline{\mathscr{E}}}$,*
- *pour tout nombre entier $D > 0$ assez divisible,*

l'inégalité suivante est satisfaite :

$$h_{\mathscr{M}_{\overline{\mathscr{E}},D}}(y) \geq D \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \,\widehat{\mu}_K(\overline{\mathscr{E}}_i) + h_{\min}\big((\mathbf{P}(\mathscr{F}_{\mathscr{E}}), \mathscr{O}_{\overline{\mathscr{F}}_{\overline{\mathscr{E}}}}(1)) /\!/ \mathbf{SL}(\mathscr{E})\big) \right).$$

Ce résultat est une généralisation de la première partie du Theorem 1 dans [Gas00]. En effet, pour tout $\overline{\mathbf{Q}}$-point semi-stable x du $\mathfrak{o}_K$-schéma $\mathscr{X}_{\overline{\mathscr{E}}}$, nous obtenons

$$h_{\overline{\mathscr{F}}_{\overline{\mathscr{E}}}}(x) \geq \frac{1}{D} h_{\mathscr{M}_{\overline{\mathscr{E}},D}}(\pi(x)) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \,\widehat{\mu}_K(\overline{\mathscr{E}}_i) + h_{\min}\big((\mathbf{P}(\mathscr{F}_{\mathscr{E}}), \mathscr{O}_{\overline{\mathscr{F}}_{\overline{\mathscr{E}}}}(1)) /\!/ \mathbf{SL}(\mathscr{E})\big).$$

Le premier théorème de la théorie classique des invariants permet, comme annoncé plus haut, de donner une borne explicite pour la constante $h_{\min}((\mathbf{P}(\mathscr{F}_{\mathscr{E}}), \mathscr{O}_{\overline{\mathscr{F}}_{\overline{\mathscr{E}}}}(1)) /\!/ \mathbf{SL}(\mathscr{E}))$.

Si $\overline{\mathscr{E}}$ est un $\mathfrak{o}_K$-module et m un nombre entier négatif on pose $\overline{\mathscr{E}}^{\otimes m} = \overline{\mathscr{E}}^{\vee \otimes |m|}$.

Théorème 0.11. *Soient $m_1, \ldots, m_n$ des nombres entiers et*

$$\varphi : \left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{o}_K}^{\oplus d_1}\right)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{o}_K}^{\oplus d_n}\right)^{\otimes m_n} \longrightarrow \overline{\mathscr{F}},$$

un homomorphisme de $\mathfrak{o}_K$-fibrés hermitiens[5]*, $\mathbf{GL}(d)_{\mathfrak{o}_K}$-équivariant et génériquement surjectif ($\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{o}_K}$ le fibré hermitien trivial sur $\mathfrak{o}_K$). Alors :*

$$h_{\min}\big((\mathbf{P}(\mathscr{F}), \mathscr{O}_{\overline{\mathscr{F}}}(1)) /\!/ \mathbf{SL}(d)\big) \geq -\sum_{i=1}^{n} |m_i| \frac{[K : \mathbf{Q}]}{2} \log d_i.$$

4. *i.e.*, pour tout $\mathfrak{o}_K$-schéma T, et pour tous $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{G}_m(T)$, nous avons

$$\rho(t_1 \cdot \mathrm{id}, \ldots, t_n \cdot \mathrm{id}) = t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \cdot \mathrm{id}.$$

5. si $\overline{\mathscr{E}}$, $\overline{\mathscr{F}}$ sont des $\mathfrak{o}_K$-fibrés hermitiens, un homomorphisme de $\mathfrak{o}_K$-fibrés hermitiens $\varphi : \overline{\mathscr{E}} \to \overline{\mathscr{F}}$ est un homomorphisme de $\mathfrak{o}_K$-modules $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ tel que, pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbf{C}$ et pour tout $v \in \mathscr{E}_\sigma$, nous avons $\|\varphi(v)\|_{\mathscr{F},\sigma} \leq \|v\|_{\mathscr{E},\sigma}$.

Dans [Che09], Chen considère une représentation du $\mathfrak{o}_K$-groupe réductif $\mathbf{GL}(d)_{\mathfrak{o}_K}$ de la forme

$$\overline{\mathscr{F}} := \left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{o}_K}^{\oplus d_1}\right)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{o}_K}^{\oplus d_n}\right)^{\otimes m_n},$$

où $m = (m_1, \ldots, m_n)$ est un n-uplet de nombres entiers négatifs [6]. Dans la preuve du Théorème 4.2 dans *loc.cit.*, il démontre de manière implicite le Théorème 0.11 avec les mêmes techniques que nous présentons ici.

0.0.7. — Voyons comme le Théorème 0.11 s'applique en pratique en considérant, par exemple, la situation étudiée par Bost dans [Bos94]. Soient K un corps de nombres, $\overline{\mathscr{E}}$ un $\mathfrak{o}_K$-fibré hermitien et $E := \mathscr{E} \otimes K$. Soit $\mathscr{Z}$ un cycle effectif de dimension d dans $\mathbf{P}(\mathscr{E}^\vee)$ [7] et Z sa fibre générique dans $\mathbf{P}(E^\vee)$. Si $\delta = \deg Z$, on pose

$$F_{d,\delta}(\mathscr{E}) := (\mathrm{Sym}^d \mathscr{E})^{\otimes \delta}.$$

Le $\mathfrak{o}_K$-module $F_{d,\delta}(\mathscr{E})$ est muni de la structure de $\mathfrak{o}_K$-fibré hermitien en prenant, pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbf{C}$, la norme hermitienne quotient sur $F_{d,\delta}(\mathscr{E})_\sigma$ donnée par l'homomorphisme surjectif

$$\mathscr{E}_\sigma^{\otimes d\delta} \longrightarrow F_{d,\delta}(\mathscr{E})_\sigma.$$

Avec ces définitions, nous avons un homomorphisme surjectif et $\mathbf{SL}(\mathscr{E})$-équivariant de $\mathfrak{o}_K$-fibrés hermitiens

$$\overline{\mathscr{E}}^{\otimes d\delta} \longrightarrow F_{d,\delta}(\overline{\mathscr{E}}).$$

Posons $N := \mathrm{rk}\,\mathscr{E}$ et désignons par ρ la représentation homogène de poids $d\delta$,

$$\rho : \mathbf{GL}(N)_{\mathfrak{o}_K} \longrightarrow \mathbf{GL}\left(F_{d,\delta}\left(\mathscr{O}_{\mathfrak{o}_K}^{\oplus N}\right)\right).$$

L'action de $\mathbf{SL}(\mathscr{E})$ sur $F_{d,\delta}(\overline{\mathscr{E}})$ est induite par la représentation $\rho_{\overline{\mathscr{E}}}$ déduite de ρ et l'homomorphisme surjectif et $\mathbf{GL}(N)_{\mathfrak{o}_K}$-équivariant de $\mathfrak{o}_K$-fibrés hermitiens,

$$\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{o}_K}^{\oplus N} \longrightarrow F_{d,\delta}\left(\overline{\mathscr{O}}_{\mathfrak{o}_K}^{\oplus N}\right)$$

nous permet d'appliquer le Théorème 0.11.

Supposons que le point de Chow du cycle Z, qui est un K-point $[\Phi_Z]$ du $\mathfrak{o}_K$-schéma $\mathbf{P}(F_{d,\delta}(\mathscr{E}))$, soit semi-stable sous l'action du $\mathfrak{o}_K$-groupe réductif $\mathbf{SL}(\mathscr{E})$. Le Théorème 0.11 donne la minoration suivante :

$$h_{F_{d,\delta}(\overline{\mathscr{E}})}([\Phi_Z]) \geq d\delta\left(\widehat{\mu}_K(\overline{\mathscr{E}}) - \frac{[K:\mathbf{Q}]}{2}\log \mathrm{rk}\,\mathscr{E}\right).$$

6. Plus précisément, Chen se donne, avec ses notations, un nombre entier $n \geq 1$, des K-espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_n$ de dimension finie sur K, $\mathscr{A} \subset \mathbf{N}^n$ une partie finie et il considère la représentation

$$W = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{A}} V_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \cdots \otimes V_n^{\otimes \alpha_n}$$

du K-groupe réductif $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(V_1) \times \cdots \times \mathbf{GL}(V_n)$. Il se donne ensuite un n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ de nombres entiers strictement positifs où, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $r_i = \dim_K V_i$ divise b_i. Si L désigne le K-espace vectoriel $L = (\det V_1)^{\otimes b_1/r_1} \otimes \cdots \otimes (\det V_n)^{\otimes b_n/r_n}$, il s'intéresse aux points semi-stables de l'espace projectif $\mathbf{P}(W^\vee)$ sous l'action du K-schéma en groupes $\mathbf{G}$ et par rapport au faisceau inversible $\mathscr{O}_{W^\vee}(m) \otimes \pi^* L$, où $\pi : \mathbf{P}(W^\vee) \to \mathrm{Spec}\, K$ désigne le morphisme structural et $m \geq 1$ un nombre entier strictement positif. Si un tel point semi-stable existe, alors il existe $\alpha_0 \in \mathscr{A}$ tel que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $m\alpha_{0i} = b_i$. Quitte à considérer la projection

$$\mathrm{pr}_{\alpha_0} : \mathbf{P}(W^\vee) \to \mathbf{P}\left(V_1^{\vee \otimes \alpha_{01}} \otimes \cdots \otimes V_n^{\vee \otimes \alpha_{0n}}\right),$$

on se ramène en vertu du Théorème 0.10 à minorer la hauteur des points semi-stables de la représentation $\overline{\mathscr{F}}$ indiquée dans le texte avec $m_i = -b_i/m$ et sous l'action du $\mathfrak{o}_K$-groupe réductif $\mathbf{SL}(r_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}(r_n)$.

7. Le dual qui apparaît est à cause de la convention de Grothendieck pour l'espace projectif, qui n'est pas adoptée dans [Bos94] mais qui l'est ici.

D'autre part, si nous considérons la hauteur du cycle $\mathcal{Z}$ par rapport au faisceau inversible hermitien $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1)$,

$$h_{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1)}(\mathcal{Z}) := \widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1))^d \mid \mathcal{Z}\right),$$

nous avons la comparaison suivante [*loc.cit.*, Proposition 1.3] :

$$\left|h_{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1)}(\mathcal{Z}) - h_{\mathrm{F}_{d,\delta}(\overline{\mathcal{E}})}([\Phi_{\mathrm{Z}}])\right| \leq d\delta\frac{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}{2}\log\operatorname{rk}\mathcal{E}.$$

Nous trouvons ainsi une version explicite du Theorem I dans *loc.cit.* :

Théorème 0.12. *Soit $\mathcal{Z}$ un cycle effectif de dimension $d \geq 1$ sur $\mathbf{P}(\mathcal{E}^{\vee})$. On suppose que sa fibre générique $\mathcal{Z}_{\mathrm{K}}$ soit non nulle et que son point de Chow soit semi-stable sous l'action du* K*-schéma en groupes* $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. *L'inégalité suivante est alors satisfaite :*

$$h_{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1)}(\mathcal{Z}) \geq d\deg_{\mathrm{K}}(\mathcal{Z}_{\mathrm{K}})\left(\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\overline{\mathcal{E}}) - [\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\log\operatorname{rk}\mathcal{E}\right).$$

0.0.8. — Le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'application des résultats des chapitres précédents au Théorème de Thue-Siegel-Roth.

Soient K un corps de nombres et $\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}$ son anneau des entiers. Pour toute place $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$, notons d_v la distance sur $\mathbf{P}^{1,\mathrm{an}}_v$: si $x = (x_0, x_1)$, $y = (y_0, y_1)$ sont des K_v-points non nuls de $\mathbf{A}^2$, elle est définie par

$$d_v([x],[y]) := \frac{|x_0y_1 - x_1y_0|_v}{\|x\|_v\|y\|_v},$$

où $\|\cdot\|_v$ est la norme induite à la place v par le fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}}^{\oplus 2}_{\mathfrak{o}_{\mathrm{K}}}$. Si x est un K-point de $\mathbf{P}^1$ et θ est un point de $\mathbf{P}^1$ défini sur une extension finie de K, désignons par $d_v(\theta, x)$ le minimum des distances entre x et les conjugués de θ.

Nous appliquons le Corollaire 0.9 et le Théorème 0.11 pour donner une démonstration de l'énoncé suivant, qui constitue une généralisation de [Bom82, Theorem IV.2] où on considère $n = 2$, et qui est implicitement contenu dans les preuves classiques du Théorème de Roth et ses généralisations (cf. [BG06, chapitre 6]) :

Théorème 0.13 (Minoration effective fondamentale)**.** *Soit* K' *une extension finie de* K *de degré* $d = [\mathrm{K}':\mathrm{K}] \geq 2$. *Il existe des nombres réels* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3 > 0$ *et, pour tout nombre entier* $n \geq 1$ *et tout nombre réel* $0 < \delta < 1/(2\cdot n!)$, *un nombre réel* $\lambda_d(n,\delta) > 0$ *satisfaisant à la propriété suivante :*

– *pour tous* K'*-points* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *de* $\mathbf{P}^1$ *qui engendrent le corps* K',
– *pour tous* K*-points* $x_1, \ldots, x_n$ *de* $\mathbf{P}^1$,
– *pour tout* n*-uplet* $r = (r_1, \ldots, r_n)$ *de nombres réels strictement positifs tels que, pour tout* $i = 1, \ldots, n$, $r_i \geq \lambda_d(n,\delta) r_{i+1}$,

nous avons

$$t_d(n,\delta)\left(\sum_{v\in\mathrm{V}_{\mathrm{K}}}\min_{i=1,\ldots,n}\left\{-r_i\log d_v(\theta_i, x_i)\right\}\right) \leq \left(1 + \mathrm{C}_1\sqrt[n]{\delta}\right)\sum_{i=1}^n r_i h(x_i) + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^n r_i\,(\mathrm{C}_2 h(\theta_i) + \mathrm{C}_3),$$

où $t_d(n,-) : [0, 1/(2\cdot n!)[\to \mathbf{R}_+$ *est une fonction continue et où*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{t_d(n,0)} = 2.$$

Remarquons que les constantes C_1, C_2 et C_3 sont effectives, même explicites. Nous tenons aussi à dire que l'égalité

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{t_d(n,0)} = 2,$$

cruciale déjà dans le travail de Roth, s'agit d'un phénomène de concentration de la mesure. Le Théorème 0.13 est la minoration effective fondamentale dans la démonstration de la version suivante du « Théorème de Roth avec cibles mobiles » (voir [Voj96, Theorem 1]) :

Théorème 0.14. *Soient* K *un corps de nombres,* K′ *une extension finie du corps* K *de degré* ≥ 2 *et* $F \subset V_K$ *un sous-ensemble fini. Pour tout nombre réel* $\kappa > 2$*, il n'existe pas de suite de couples* $\{(\theta_i, x_i) : i \geq 1\}$*, telle que*

- *pour tout* i*,* θ_i *est un* K′*-point de* $\mathbf{P}^1$ *qui n'est pas* K*-rationnel ;*
- *pour tout* i*,* x_i *est un* K*-point de* $\mathbf{P}^1$ *;*
- $h(\theta_i) = o(h(x_i))$ *pour* $i \to \infty$ *;*
- *pour tout* $i \geq 1$*, on a :*

$$-\sum_{v\in F} \log d_v(\theta_i, x_i) \geq \kappa \cdot h(x_i).$$

La version de Vojta de ce résultat qui paraît dans [Voj96] est plus générale de celle que nous présentons ici car l'on peut choisir des « cibles » différentes à chaque place appartenante à F. Des modifications faciles de nos arguments permettent d'obtenir le même résultat : nous préférons de ne pas les faire pour rendre plus claire l'exposition.

La version de Wirsing de ce résultat est aussi plus générale, car les cibles θ_i peuvent appartenir à n'importe quelle extension de degré $d \geq 2$ du corps K (voir [RV97, Theorem 4.1]). Dans ce cas, nous ignorons si une modification de nos méthodes peut conduire à un résultat du même type.

En prenant les θ_i tous égaux entre eux, nous retrouvons la version suivante du Théorème de Thue-Siegel-Roth :

Théorème 0.15. *Soient* K *un corps de nombres,* K′ *une extension finie du corps* K *de degré* ≥ 2 *et* $F \subset V_K$ *un sous-ensemble fini. Pour tout nombre réel* $\kappa > 2$*, il n'existe qu'un nombre fini de* K*-points* x *de* $\mathbf{P}^1$ *tels que*

$$-\sum_{v\in F} \log d_v(\theta, x_i) \geq \kappa \cdot h(x_i).$$

Remarquons que dans notre approche démontrer un tel Théorème avec un ensemble fini de places F quelconque ne demande aucun travail supplémentaire par rapport au cas « classique » où F est constitué d'une unique place archimédienne.

Encore, la version montrée par Lang du Théorème de Roth (voir [BG06, Theorem 6.2.3]) est plus générale de celle que l'on présente ici pour la même raison d'avant, c'est-à-dire, parce que l'on peut choisir des cibles différentes à chaque place appartenante à F. Une modification de notre approche, à laquelle nous avons fait illusion plus haut, permet d'obtenir la version de Lang.

0.0.9. — Esquissons comment le Théorème 0.13 entraîne le Théorème 0.14. Pour simplifier, supposons ici que le sous-ensemble F soit réduit à une seule place v. Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre réel $\kappa > 2$ et une suite (x_i, θ_i), $i \geq 1$, comme dans l'énoncé du Théorème 0.14. Quitte à extraire une sous-suite et à remplacer K′ par une sous-extension de K, nous pouvons supposer que tous les θ_i engendrent K′. Fixons un nombre entier $n \geq 1$ et un nombre réel $0 < \delta < 1/(2 \cdot n!)$. Le Théorème 0.13, appliqué aux couples (θ_i, x_i), $i = 1, \ldots, n$, donne :

$$t_d(n,\delta) \min_{i=1,\ldots,n} \left\{-r_i \log d_v(\theta_i, x_i)\right\} \leq \left(1 + C_1 \sqrt[n]{\delta}\right) \sum_{i=1}^{n} r_i h(x_i) + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} r_i \left(C_2 h(\theta_i) + C_3\right),$$

Pour tout nombre entier $i \geq 1$, nous avons supposé

$$-\log d_v(\theta_i, x_i) \geq \kappa \cdot h(x_i),$$

et donc

$$\kappa t_d(n,\delta) \min_{i=1,\dots,n} \{r_i h(x_i)\} \leq \left(1 + C_1 \sqrt[n]{\delta}\right) \sum_{i=1}^{n} r_i h(x_i) + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} r_i \left(C_2 h(\theta_i) + C_3\right),$$

Quitte à passer à une sous-suite des (θ_i, x_i), nous pouvons supposer, pour tout $i = 1, \dots, n-1$,

$$h(x_i)\lambda_d(n,\delta) \leq h(x_{i+1}),$$

et, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$h(\theta_i) \leq \sqrt[n]{\delta} h(x_i).$$

Cela permet de prendre $r_1, \dots, r_n$ tels que, pour tout i, j,

$$r_i h(x_i) = r_j h(x_j).$$

De cette manière, et en divisant par $r_1 h(x_1)$, nous obtenons l'inégalité

$$\kappa t_d(n,\delta) \leq \left(1 + (C_1 + C_2) \sqrt[n]{\delta}\right) n + \frac{r_1 + \cdots + r_n}{\delta} \frac{1}{r_1 h(x_1)} C_3.$$

Puisque le nombre réel $r_1 h(x_1)$ peut être supposé arbitrairement grand, nous obtenons, pour tout $n \geq 1$ et tout $0 < \delta < 1/(2 \cdot n!)$,

$$t_d(n,\delta)\kappa \leq \left(1 + (C_1 + C_2) \sqrt[n]{\delta}\right) n + \delta.$$

En laissant δ tendre vers 0, pour tout $n \geq 1$, nous avons l'inégalité

$$t_d(n,0)\kappa \leq n$$

et, en laissant n tendre vers l'infini, nous concluons

$$\kappa \leq 2 = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{t_d(n,0)},$$

en contradiction avec l'hypothèse $\kappa > 2$.

0.0.10. — Nous terminons avec quelques mots sur la démonstration du Théorème 0.13. Dans les grandes lignes, la stratégie est la suivante :

1. Démontrer la semi-stabilité d'un certain K-point P d'un K-schéma X par rapport à l'action d'un K-groupe réductif G et à faisceau inversible G-linéarisé L (que nous précisons ensuite) ; nous montrons que cette semi-stabilité découle du Lemme de Dyson en plusieurs variables de Esnault-Viewheg-Nakamaye.

   Cette semi-stabilité constitue, semble-t-il, un résultat sensiblement plus faible que ce lemme des zéros, et nous espérons qu'il est possible d'en donner une démonstration directe et plus simple.
2. Interpréter l'inégalité donnée par le Corollaire 0.9. Cela se fait en plusieurs étapes indépendantes :
   - Appliquer la minoration de $h_{\min}\big((\mathscr{X}, \overline{\mathscr{L}})/\!/\mathscr{G}\big)$ donnée par le Théorème 0.11 ;
   - Majorer la hauteur du point P, par des estimées élémentaires de degrés d'Arakelov (sans construire donc aucune section de petite hauteur particulière) ;
   - Majorer les mesures d'instabilité du point P en termes des distances $d_v(\theta_i, x_i)$; cela découle de calculs élémentaires, utilisant l'inégalité (0.0.1) (ou plutôt son analogue sur $\overline{K}_v$) et en introduisant un élément convenable g_v de $G(\overline{K}_v)$.

Remarquons que le schéma de démonstration classique retrouve ses étapes dans le schéma de démonstration présenté ici :

Construction du polynôme auxiliaire et Lemme de Siegel	Majoration de la hauteur du point et inégalité des pentes
Lemme des zéros	Semi-stabilité
Minoration « arithmétique »	Minoration de la hauteur sur le quotient
Majoration « analytique »	Majoration de la mesure d'instabilité

Une partie critique de la preuve, de manière analogue au lemme des zéros dans l'approche classique, est la démonstration de la semi-stabilité du point. Nous en donnons quelques détails.

0.0.11. — Tout d'abord rappelons la notion d'indice et, pour ce faire, supposons pour l'instant d'être sur $\mathbf{C}$.[8] Soient $n \geq 1$ un nombre entier et désignons par $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}^1$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 \times \cdots \times \mathbf{P}^1.$$

Pour tout n-uplet $r = (r_1, \ldots, r_n)$ de nombres entiers strictement positifs, considérons le faisceau inversible sur $\mathbf{P}$,

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r) = \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(r_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{pr}_n^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(r_n).$$

Définition 0.16. Soient $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un $\mathbf{C}$-point de $\mathbf{P}$ et s une section globale de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$.

Si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, t_i est un paramètre local autour de $x_i \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et s_0 est une section inversible de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ définie au voisinage de x, le germe de fonction s/s_0 se développe en série de puissances

$$\frac{s}{s_0} = \sum_{\ell \in \mathbf{N}^n} \alpha_\ell t_1^{\ell_1} \cdots t_n^{\ell_n},$$

avec $\alpha_\ell \in \mathbf{C}$. Si $s \neq 0$, l'*indice* de la section s au point x est le nombre rationnel

$$\mathrm{ind}(s, x) = \min \left\{ \frac{\ell_1}{r_1} + \cdots + \frac{\ell_1}{r_n} : \alpha_\ell \neq 0 \right\};$$

sinon $\mathrm{ind}(s, x) = +\infty$.

Cette définition ne dépend pas de la trivialisation choisie.

0.0.12. — Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout nombre entier $r \geq 0$ on note $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$ la *grassmanienne d'indice* r, c'est-à-dire le k-schéma qui représente le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Grass}}_r(\mathrm{E}) : \quad & \{ k\text{-schémas} \} \longrightarrow \{ \text{ensembles} \} \\ & (f : \mathrm{X} \to \operatorname{Spec} k) \longmapsto \left\{ (\mathrm{F}, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{F} \text{ localement libre de rang } r, \\ \varphi : f^* \mathrm{E} \to \mathrm{F} \text{ epimorphisme} \end{array} \right\} \Big/ \sim . \end{aligned}$$

On note ϖ le plongement de Plücker, *i.e.* l'immersion fermée induite par la puissance extérieure r-ième,

$$\varpi : \mathbf{Grass}_r(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{P}\big(\textstyle\bigwedge^r \mathrm{E}\big).$$

8. N'importe quel corps algébriquement clos conviendrait également.

Supposons qu'un k-schéma en groupes G agit linéairement sur le k-espace vectoriel E. Le k-schéma en groupes G agit alors de manière naturelle sur la grassmanienne $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$, sur le k-espace projectif $\mathbf{P}(\bigwedge^r \mathrm{E})$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\bigwedge^r \mathrm{E}}(1)$. Le plongement de Plücker ϖ est un morphisme G-équivariant et on dit que le faisceau inversible G-linéairisé $\varpi^*\mathscr{O}_{\bigwedge^r \mathrm{E}}(1)$ est la polarisation (G-équivariante) associée au plongement du Plücker.

0.0.13. — Décrivons la situation de théorie géométrique des invariants à laquelle nous appliquons le Corollaire 0.9 et le Théorème 0.11 pour obtenir le Théorème 0.13. Nous partons des données de ce Théorème, à savoir :

- K un corps de nombres ;
- K' une extension finie du corps K de degré $d = [\mathrm{K}' : \mathrm{K}] \geq 2$;
- $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un K'-point de $\mathbf{P}$ tel que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, le K'-point θ_i de $\mathbf{P}^1$ engendre le corps K' ;
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un K-point de $\mathbf{P}$;
- $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs.

Nous nous donnons des nombres réels $t_\theta, t_x \geq 0$ et considérons les deux sous-espaces des sections globales de $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ suivants :

$$\mathrm{N}(\theta, t_\theta \,|\, r) = \left\{s \in \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) : \mathrm{ind}(s, \theta) \geq t_\theta\right\},$$
$$\mathrm{N}(x, t_x \,|\, r) = \{s \in \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) : \mathrm{ind}(s, x) \geq t_x\}.$$

Si $\nu(\theta, t_\theta \,|\, r)$ et $\nu(x, t_x \,|\, r)$ désignent leurs dimensions respectives, les sous-espaces $\mathrm{N}(\theta, t_\theta \,|\, r)$, $\mathrm{N}(x, t_x \,|\, r)$ définissent des K-points de grassmaniennes

$$[\mathrm{N}(\theta, t_\theta \,|\, r)] \in \mathbf{Grass}_{\nu(\theta, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)(\mathrm{K}),$$
$$[\mathrm{N}(x, t_x \,|\, r)] \in \mathbf{Grass}_{\nu(x, t_x \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)(\mathrm{K}).$$

0.0.14. — Le K-groupe réductif $\mathbf{SL}_2$ agit sur la droite projective $\mathbf{P}^1$ et le produit de n copies de $\mathbf{SL}_2$,

$$\mathbf{SL}_2^n = \mathbf{SL}_2 \times \cdots \times \mathbf{SL}_2,$$

agit composante par composante sur $\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 \times \cdots \times \mathbf{P}^1$. Le K-groupe réductif $\mathbf{SL}_2^n$ agit alors de manière naturelle sur les sections globales du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$,

$$\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) = \mathrm{Sym}^{r_1}\left(\mathrm{K}^{\oplus 2}\right) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{r_n}\left(\mathrm{K}^{\oplus 2}\right),$$

et donc sur les grassmaniennes $\mathbf{Grass}_{\nu(\theta, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)$ et $\mathbf{Grass}_{\nu(x, t_x \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)$. On considère sur ces grassmaniennes les polarisations $\mathbf{SL}_2^n$-équivariantes induites par les plongement de Plücker respectifs.

0.0.15. — En résumant, avec les notations introduites dans 0.0.10, nous nous intéressons à

$$\mathrm{P} = ([\mathrm{N}(\theta, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}(x, t_x \,|\, r)]),$$
$$\mathrm{X} = \mathbf{Grass}_{\nu(\theta, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \times \mathbf{Grass}_{\nu(x, t_x \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee),$$
$$\mathrm{G} = \mathbf{SL}_2^n = \mathbf{SL}_2 \times \cdots \times \mathbf{SL}_2,$$
$$\mathrm{L} = \text{polarisation déduite des plongements de Plücker.}$$

L'action de G sur X est déduite par l'action de $\mathrm{G} = \mathbf{SL}_2^n$ composante par composante sur $\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 \times \cdots \times \mathbf{P}^1$ et la G-linéarisation de L est celle naturelle donnée par les plongements de Plücker.

0.0.16. — Introduisons enfin les quantités combinatoires qui apparaissent dans l'étude. Pour tout nombre réel $t \geq 0$, considérons

$$\begin{aligned} \blacktriangledown(t) &= \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in [0,1]^n : \zeta_1 + \cdots + \zeta_n \geq t\}, \\ \blacktriangle(t) = [0,1]^n - \blacktriangledown(t) &= \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in [0,1]^n : \zeta_1 + \cdots + \zeta_n < t\}. \end{aligned}$$

Le volume $\operatorname{vol} \blacktriangle(t)$ de $\blacktriangle(t)$ est une fonction qui est strictement croissante sur $[0, n]$ et qui vaut 0 en 0 et 1 sur $[n, +\infty[$. Pour tout nombre entier $d \geq 1$ et pour tout n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres entiers strictement positifs, posons

$$\varepsilon_d(r) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{\frac{r_j}{r_i}\right\} (d-1)\right) - 1.$$

Enfin, lorsque $1 + \varepsilon_d(r) - d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_\theta) \in [0,1]$, considérons l'unique nombre réel $u_d(r, t_\theta) \in [0, n]$ tel que

$$\operatorname{vol} \blacktriangle(u_d(r, t_\theta)) = 1 + \varepsilon_d(r) - d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_\theta).$$

Théorème 0.17. *Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs et $t_\theta, t_x \geq 0$ des nombres réels tels que $1 + \varepsilon_d(r) - d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_\theta) \in [0,1]$. Si l'inégalité*

$$\left| \operatorname{vol} \blacktriangledown(t_x) - 2 \int_{\blacktriangledown(t_x)} \zeta_1 \, d\lambda \right| < \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown(u_d(r, t_\theta)) - 2 \int_{\blacktriangledown(u_d(r,t_\theta))} \zeta_1 \, d\lambda \right| - \varepsilon_d(r)$$

est satisfaite, alors il existe un nombre entier $\mathrm{R} = \mathrm{R}(n, d, r, t_\theta, t_x) > 0$ tel que, pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}$, le K-point du produit $\mathbf{Grass}_{\nu(\theta, t_\theta \mid r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathcal{O}_\mathbf{P}(r))^\vee) \times \mathbf{Grass}_{\nu(x, t_x \mid r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathcal{O}_\mathbf{P}(r))^\vee)$,

$$([\mathrm{N}(\theta, \rho t_\theta \mid \rho r)], [\mathrm{N}(x, \rho t_x \mid \rho r)])$$

est semi-stable sous l'action du K-groupe réductif $\mathbf{SL}_2^n$, par rapport à la polarisation donnée par les plongements de Plücker.

0.0.17. — Nous prouvons le Théorème 0.17 grâce à la version de Kempf-Rousseau du critère numérique de Hilbert-Mumford [Kem78, Rou78] : elle nous permet de ne considérer que des sous-groupes à un paramètre définis sur K. Ceci est l'unique information « arithmétique » que l'on utilise dans la démonstration de ce résultat : aucune considération sur les hauteurs n'est nécessaire.

Si y est un K-point de $\mathbf{P}$ et $u \geq 0$ est un nombre réel, le « coefficient d'instabilité » du point $[\mathrm{N}(y, u \mid r)]$ de la grassmanienne associé au sous-espace

$$\mathrm{N}(y, u \mid r) := \left\{ s \in \Gamma(\mathbf{P}, \mathcal{O}_\mathbf{P}(r)) : \operatorname{ind}(s, y) \geq u \right\}$$

se calcule facilement grâce à la connaissance d'une base explicite de cet espace vectoriel. Le calcul du coefficient d'instabilité du point $[\mathrm{N}(x, t_x \mid r)]$ ne présente donc aucune difficulté.

En ce qui concerne le point $[\mathrm{N}(\theta, t_\theta \mid r)]$, considérons les points $\theta_1 = \theta, \dots, \theta_d$ conjugués à θ, définis dans une clôture algébrique $\overline{\mathrm{K}}$ de K. Le Lemme de Dyson en plusieurs variables (dans la version démontrée par Nakamaye dans [Nak99] [9]), affirme que si $s \in \mathrm{N}(\theta, t_\theta \mid r)$ est un élément non nul, pour tout $\overline{\mathrm{K}}$-point y de $\mathbf{P}$ tel que pour tout $\alpha = 1, \dots, d$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ on a

$$\operatorname{pr}_i(y) \neq \operatorname{pr}_i(\theta_\alpha),$$

9. La version d'Esnault-Viewheg [EV84] conviendrait également. Il suffit de définir $\varepsilon_d(r)$ par

$$\varepsilon_d(r) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 + (d-1) \sum_{j=i+1}^{n} \frac{r_j}{r_i}\right) - 1.$$

alors

$$d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_\theta) + \operatorname{vol} \blacktriangle(\operatorname{ind}(s, t_\theta)) \leq 1 + \varepsilon_d(r).$$

En particulier, si $1 + \varepsilon_d(r) - d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_\theta) \in [0, 1]$, par définition de $u_d(r, t_\theta)$ on a

$$\operatorname{vol} \blacktriangle(\operatorname{ind}(s, t_\theta)) \leq 1 + \varepsilon_d(r) - d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_\theta) = \operatorname{vol} \blacktriangle(u_d(r, t_\theta))$$

et donc $\operatorname{ind}(s, t_\theta) \leq u_d(r, t_\theta)$. Autrement dit, pour tout nombre réel $u > u_d(r, t_\theta)$ on a

$$\mathrm{N}(\theta, t_\theta \,|\, r) \cap \mathrm{N}(y, u \,|\, r) = \{0\}.$$

Grâce à un choix convenable d'un K-point y de $\mathbf{P}$ et à une version précisée de la semi-stabilité d'un couple de sous-espaces supplémentaires, nous ramenons la majoration du coefficient d'instabilité du point $[\mathrm{N}(\theta, t_\theta \,|\, r)]$ à la majoration du coefficient d'instabilité de $[\mathrm{N}(y, u \,|\, r)]$. Ce dernier, comme dit plus haut, se calcule de manière élémentaire.

Table des matières

Chapitre I

Généralités

1 Conventions

1.1 Généralités sur les espaces annelés

Définition 1.1. Un *espace annelé* est un couple $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$ formé d'un espace topologique $|X|$ et d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$.

Un espace annelé est dit *localement annelé* si pour tout point $x \in |X|$, l'anneau

$$\mathscr{O}_{X,x} := \varinjlim_{x \in U} \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$$

est un anneau local (la limite étant prise sur le système inductif des voisinages ouverts du point x).

Si $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$ est un espace annelé, par abus de notation, on désignera souvent par X l'espace topologique $|X|$. Si X est un espace localement annelé et x est un point de X, on désignera par $\mathfrak{m}_{X,x}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ et par $\kappa(x) = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ son corps résiduel.

Définition 1.2. Soient $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$, $Y = (|Y|, \mathscr{O}_Y)$ des espaces annelés. Un *morphisme d'espaces annelés* $f : X \to Y$ est un couple $(|f|, f^\sharp)$ formé d'une application continue d'espaces topologiques $|f| : |X| \to |Y|$ et un d'homomorphisme de faisceaux d'anneaux $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to |f|_* \mathscr{O}_X$.

Soient $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$, $Y = (|Y|, \mathscr{O}_Y)$ des espaces annelés. Un morphisme d'espaces annelés $f : X \to Y$ est un *morphisme d'espaces localement annelés* si pour tout $x \in X$, l'homomorphisme d'anneaux

$$f_x^\sharp : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x}$$

est un homomorphisme local, *i.e.* $(f_x^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) = \mathfrak{m}_{Y,f(x)}$.

Si X et Y sont des espaces localement annelés, on note $\mathrm{Mor}_{\mathrm{locan}}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes d'espaces localement annelés.

Définition 1.3. Soient X, Y des espaces annelés. Un morphisme $f : Y \to X$ d'espaces annelés est une *immersion* si

i. l'image $f(Y)$ est une partie localement fermée de l'espace topologique X ;
ii. si $U = X - (\overline{f(Y)} - f(Y))$ est le plus grand ouvert de l'espace topologique X dans lequel l'image $f(Y)$ est fermée, l'homomorphisme de faisceau d'anneaux $f^\sharp : \mathscr{O}_U \to f_* \mathscr{O}_Y$ est surjectif.

Une immersion $f : Y \to X$ est dite *fermée* (resp. *ouverte*) si l'image $f(Y)$ est une partie fermée (resp. ouverte) de l'espace topologique X.

1.2 Généralités sur les faisceaux de modules

Soit $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé. Un faisceau F de $\mathscr{O}_X$-modules est dit *de type fini* (resp. *de présentation finie*) s'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ de X et, pour tout $i \in I$, une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules,

$$\mathscr{O}_{X_i}^{n_i} \longrightarrow F|_{X_i} \longrightarrow 0, \qquad \left(\text{resp. } \mathscr{O}_{X_i}^{m_i} \longrightarrow \mathscr{O}_{X_i}^{n_i} \longrightarrow F|_{X_i} \longrightarrow 0\right)$$

où m_i et n_i sont des nombres entiers positifs.

Un faisceau F de $\mathscr{O}_X$-modules est dit *cohérent* s'il est de type fini et si pour tout ouvert $U \subset X$ et pour tout homomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules

$$\varphi : \mathscr{O}_U^n \longrightarrow F,$$

le noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ est un faisceau de $\mathscr{O}_U$-modules de type fini.

Proposition 1.4 ([Ser55, 13, Théorème 1])**.** *Soit* X *un espace annelé. Si le faisceau structural* $\mathscr{O}_X$ *est cohérent, un faisceau de* $\mathscr{O}_X$*-modules* F *est de présentation finie si et seulement s'il est cohérent.*

Définition 1.5. Une immersion $f : Y \to X$ est dite *de présentation finie* si le noyau de l'homomorphisme de faisceau $f^\sharp : \mathscr{O}_U \to f_*\mathscr{O}_Y$ est un faisceau de $\mathscr{O}_U$-modules de type fini, où U est le plus grand ouvert de l'espace topologique X dans lequel l'image $f(Y)$ est fermée.

2 Morphismes rationnels

Dans ce numéro on résume des faits contenus dans [EGA 2, §2-§4,§8] sur les spectres homogènes (relatifs) d'algèbres graduées et leur morphismes.

2.1 Cônes affines

Soit S un schéma noethérien.

Définition 2.1. Un S-*cône affine* est le spectre relatif d'un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$-algèbres graduées à degrés positifs, et de type fini en tant que faisceau de $\mathscr{O}_S$-algèbres.

Si $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ est un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$-algèbres graduées à degrés positifs et de type fini, le faisceau cohérent d'idéaux de A,

$$A_+ := \bigoplus_{d \geq 1} A_d,$$

est homogène. Si $\widehat{X} = \mathbf{Spec}_S\, A$ le S-cône affine défini par A, la *section nulle* est le sous-schéma fermé

$$\mathbf{O}_{\widehat{X}} := V(A_+) = \mathbf{Spec}_S\, A/A_+.$$

Pour tout entier δ, soit $A(\delta)$ le A-module gradué

$$A(\delta) = \bigoplus_{d \geq 0} A_{d+\delta}.$$

Proposition 2.2. *Soient* $\mathrm{A} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{A}_d$ *est un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_\mathrm{S}$*-algèbres graduées à degrés positifs et de type fini, et* $\mathrm{X} = \mathbf{Proj}_\mathrm{S}\,\mathrm{A}$. *Soit* δ *un nombre entier.*

Le faisceau cohérent de $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-modules* $\mathcal{O}_\mathrm{X}(\delta)$ *associé au* A*-module gradué* $\mathrm{A}(\delta)$ *est inversible si et seulement si, lorsque les éléments* a *parcourent* A_δ*, les ouverts* $\mathrm{D}_+(a)$ *recouvrent* X.

Définition 2.3. Soient X un S-schéma projectif, $\alpha : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ son morphisme structural et L un faisceau inversible α-ample sur X. Le *cône affine de* X *par rapport à* L, noté $\widehat{\mathrm{X}}_\mathrm{L}$, est le spectre relatif du faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_\mathrm{S}$-algèbres graduées à degrés positifs

$$\mathrm{A} := \bigoplus_{d\geq 0} \alpha_*(\mathrm{L}^{\otimes d}).$$

Proposition 2.4. *Soient* X *un* S*-schéma projectif,* $\alpha : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *son morphisme structural,* L *un faisceau inversible* α*-ample sur* X *et*

$$\mathrm{A} := \bigoplus_{d\geq 0} \alpha_*(\mathrm{L}^{\otimes d}).$$

L'homomorphisme canonique de faisceaux de $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-algèbres*

$$\alpha^*\mathrm{A} \longrightarrow \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{L}^{\otimes d},$$

induit un isomorphisme $\theta : \mathrm{X} \to \mathbf{Proj}_\mathrm{S}\,\mathrm{A}$.

De plus, si L *est engendré par ses sections globales relativement à* α, *i.e. si l'homomorphisme d'adjonction* $\alpha^*\alpha_*\mathrm{L} \to \mathrm{L}$ *est surjectif, alors :*

i. le faisceau inversible $\mathcal{O}_\mathrm{X}(1)$ *associé au* A*-module gradué* $\mathrm{A}(1)$ *est canoniquement isomorphe au faisceau inversible* L *;*

ii. le morphisme naturel de S*-schémas* $\mathbf{V}(\mathrm{L}) \to \widehat{\mathrm{X}}$ *induit un isomorphisme de* S*-schémas*

$$\mathbf{V}(\mathrm{L}) - e(\mathrm{X}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{X}} - \mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{X}}}$$

($e : \mathrm{X} \to \mathbf{V}(\mathrm{L})$ *la section nulle).*

2.2 Morphismes entre cônes affines

Soit S un schéma noethérien.

2.2.1. Morphismes d'algèbres graduées et construction du spectre homogène. — Soient A et B des $\mathcal{O}_\mathrm{S}$-algèbres quasi-cohérentes graduées à degrés positifs de type fini et soient respectivement X et Y leurs spectres homogènes relatifs $\mathbf{Proj}_\mathrm{S}\,\mathrm{A}$ et $\mathbf{Proj}_\mathrm{S}\,\mathrm{B}$ sur S.

Soit $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ un homomorphisme homogène de degré $\mathrm{D} > 0$ de $\mathcal{O}_\mathrm{S}$-algèbres graduées, *i.e.* un homomorphisme de $\mathcal{O}_\mathrm{S}$-algèbres tel que pour tout entier positif d l'image de B_d par φ soit contenue dans $\mathrm{A}_{\mathrm{D}d}$. Le faisceau d'idéaux de A

$$\mathrm{I} := \varphi(\mathrm{B}_+)\cdot\mathrm{A}$$

engendré par $\varphi(\mathrm{B}_+)$ est homogène. Si on désigne par U l'ouvert complémentaire du sous-schéma fermé $\mathrm{Z} := \mathrm{V}_+(\mathrm{I})$ dans X, l'homomorphisme φ induit un morphisme de S-schémas

$$f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{Y}.$$

Le morphisme f ainsi défini est affine : en effet, pour toute section homogène b de B, son image $\varphi(b)$ est une section homogène de A et l'image réciproque par f de l'ouvert affine $\mathrm{D}_+(b) = \mathbf{Spec}_\mathrm{S}\,\mathrm{B}_{(b)}$ est l'ouvert affine $\mathrm{D}_+(\varphi(b)) = \mathbf{Spec}_\mathrm{S}\,\mathrm{A}_{(\varphi(b))}$,

$$f^{-1}\mathrm{D}_+(b) = \mathrm{D}_+(\varphi(b))$$

(ici $B_{(b)}$ et $A_{(\varphi(b))}$ désignent la composante de degré 0 respectivement des faisceaux de $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées B_b et $A_{\varphi(b)}$).

Définition 2.5. Si le morphisme f est surjectif on dit que U est l'*ouvert de projection* et Z est le *centre de projection.*

On dit qu'un point de U est *projetable* et un point de Z est *non projetable.*

Soit δ un entier positif tel que les ouverts de la forme $D_+(a)$ et $D_+(b)$ recouvrent respectivement X et Y lorsque a parcourt l'ensemble A_δ et b l'ensemble B_δ. Les faisceaux cohérents $\mathcal{O}_X(\delta)$ et $\mathcal{O}_Y(\delta)$ sont alors inversibles. L'homomorphisme φ induit un isomorphisme de faisceaux inversibles

$$f^*\mathcal{O}_Y(\delta) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\delta)|_U^{\otimes D}.$$

2.2.2. Compatibilité au changement de base. — Soient S′ un schéma noethérien et $\tau : S' \to S$ un morphisme de schémas. Les objets avec une apostrophe désigneront les objets déduits par changement de base par rapport à τ : par exemple, on aura $X' := X \times_S S'$, $A' := \tau^* A$ et $\varphi' : A' \to B'$.

Proposition 2.6. *Les constructions de l'ouvert de projection et du centre de projection sont compatibles au changement de base, i.e.*

$$U' := U \times_S S' \quad \textit{et} \quad Z' := Z \times_S S'$$

sont respectivement l'ouvert de projection et le centre de la projection associés à l'homomorphisme φ'.

2.2.3. Morphismes d'algèbres graduées et cônes affines. — Soient X, Y des S-schémas projectifs et $\alpha : X \to S$, $\beta : Y \to S$ leurs morphismes structuraux. Soient L, M des faisceaux inversibles respectivement sur X et Y amples par rapport aux morphismes structuraux respectifs, et

$$A := \bigoplus_{d\geq 0} \alpha_*(L^{\otimes d})$$
$$B := \bigoplus_{d\geq 0} \beta_*(M^{\otimes d}).$$

Les spectres homogènes relatifs $\mathbf{Proj}_S\, A$ et $\mathbf{Proj}_S\, B$ de A et B sur S s'identifient aux S-schémas X et Y.

Soit $\varphi : B \to A$ un homomorphisme homogène de degré $D > 0$ de $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées. Soit Z le sous-schéma fermé de X décrit par l'idéal homogène $\varphi(B_+)\cdot A$ et soit U l'ouvert complémentaire dans X. L'homomorphisme φ induit un morphisme de schémas $f : U \to Y$ et un isomorphisme de faisceaux inversibles

$$f^* M \longrightarrow L|_U^{\otimes D}. \tag{2.2.1}$$

Soient $\widehat{X}_D$ le cône affine de X par rapport au faisceau inversible $L^{\otimes D}$, *i.e.* le spectre relatif $\mathbf{Spec}_S\, A_D$ du faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées

$$A_D := \bigoplus_{d\geq 0} \alpha_*(L^{\otimes Dd}),$$

et $\widehat{Y}_M := \mathbf{Spec}_S\, B$ le cône affine de Y par rapport à M.

L'homomorphisme φ se factorise de manière unique par un homomorphisme homogène de degré 1 de $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées $\varphi_D : B \to A_D$. Ce dernier induit un morphisme de S-schémas affines

$$\widehat{f} : \widehat{X}_D \longrightarrow \widehat{Y}.$$

On suppose que L et M sont engendrés par leurs sections globales : les morphismes canoniques

$$\theta : \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}, \qquad \omega : \mathbf{V}(\mathrm{M}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Y}}$$

sont alors propres et ils induisent un isomorphisme en dehors de la section nulle. En outre, il suit de l'isomorphisme (2.2.1) que les diagrammes $(\star)$ et $(\star\star)$ ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} - \widehat{f}^{-1}(\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{Y}}}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, phantom, "(\star)"] & \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} \arrow[dr, phantom, "(\star\star)"] & \widehat{f}^{-1}(\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{Y}}}) - \mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}} \arrow[l, hook'] \\ \mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{U}}^{\otimes \mathrm{D}}) - e(\mathrm{U}) \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, hook] & \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}) \arrow[u, "\theta"] & \mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{Z}}^{\otimes \mathrm{D}}) - e(\mathrm{Z}) \arrow[u, "\theta"] \arrow[l, hook'] \end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

sont cartésiens.

3 Théorie géométrique des invariants relative

Dans cette section on présente d'abord les notions fondamentales concernant les actions de schémas en groupes, introduites en [GIT, §1.1,§1.3] et puis étudiés en profondeur en [SGA 3, Exposé I]. On introduit ensuite la notion de schéma en groupes réductifs en suivant [SGA 3] et [Dem65, Exposés XIX – XXVI]. On conclut en rappelant les résultats d'existence du quotient au sens de la théorie géométrique des invariants : pour la situation sur un corps ils peuvent être trouvés dans [GIT, §1.2, §1.4], pour la situation relative dans [Ses77].

3.1 Définitions catégoriques

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie de produits fibrés et soit S un objet de $\mathscr{C}$. On désigne par $\mathscr{C}/\mathrm{S}$ la catégorie des S-objets dans $\mathscr{C}$.

Définition 3.1. Un S*-objet en groupes* dans $\mathscr{C}$ est un S-objet G ($\alpha : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural), muni de $\mathscr{C}$-morphismes de S-objets

$$\begin{aligned} m : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} && \text{(multiplication)} \\ e : \mathrm{S} &\longrightarrow \mathrm{G} && \text{(unité)} \\ \mathrm{inv} : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} && \text{(inverse)} \end{aligned}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

– *associativité* : le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1 \times m"] \arrow[d, "m \times \mathrm{pr}_3"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[d, "m"] \\ \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "m"] & \mathrm{G} \end{tikzcd}$$

– les deux applications composées

$$\mathrm{G} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S} \xrightarrow{m \times e} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \xrightarrow{m} \mathrm{G}$$

$$\mathrm{G} = \mathrm{S} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \xrightarrow{e \times m} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \xrightarrow{m} \mathrm{G}$$

coïncident avec l'identité id_{G} de G ;

– si $\Delta : G \to G \times_S G$ désigne le morphisme diagonal, les deux applications composées

$$G \xrightarrow{\Delta} G \times_S G \xrightarrow{\mathrm{id} \times \mathrm{inv}} G \times_S G \xrightarrow{m} G$$

$$G \xrightarrow{\Delta} G \times_S G \xrightarrow{\mathrm{inv} \times \mathrm{id}} G \times_S G \xrightarrow{m} G$$

coïncident avec l'application composée

$$G \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{e} G\ .$$

Si G est un S-objet dans $\mathscr{C}$ et

$$\underline{G} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/S}(-, G) : \{\ \text{S-objets dans } \mathscr{C}\ \} \longrightarrow \{\ \text{ensembles}\ \}$$

le foncteur des points, se donner une structure de S-objet en groupes à G équivaut à se donner une factorisation du foncteur $\underline{G}$ à travers la catégorie des groupes. Si G est un S-objets en groupes, on désignera encore par $\underline{G}$ le foncteur en groupes qu'il représente.

Définition 3.2. Soit G un S-objet en groupes dans $\mathscr{C}$. Une *action* dans la catégorie $\mathscr{C}$ de G sur un S-objet X est un $\mathscr{C}$-morphisme de S-objets

$$\sigma : G \times_S X \longrightarrow X$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

– *associativité* : le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S X \arrow[r, "\mathrm{pr}_1 \times \sigma"] \arrow[d, "m \times \mathrm{pr}_3"'] & G \times_S X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

– l'application composée

$$X = S \times_S X \xrightarrow{e \times \mathrm{id}} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$$

coïncide avec l'identité id_X de X.

On dit que l'action de G sur X est *triviale* si le morphisme σ est la deuxième projection.

Si G est un S-objet en groupes et X un S-objet dans $\mathscr{C}$, se donner une action dans la catégorie $\mathscr{C}$ de G sur X équivaut à se donner une action du foncteur en groupes $\underline{G}$ sur le foncteur $\underline{X}$: cette dernière signifie, pour tout S-objet T dans $\mathscr{C}$, se donner une action fonctorielle en T du groupe $\underline{G}(T)$ sur l'ensemble $\underline{X}(T)$.

Définition 3.3. Soit G un S-objet en groupes dans $\mathscr{C}$. Soient X, X′ des S-objets dans $\mathscr{C}$ respectivement munis d'une action σ, σ' dans la catégorie $\mathscr{C}$ de G. Un $\mathscr{C}$-morphisme de S-objets $f : X \to X'$ est dit G-*équivariant* si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G \times_S X' \arrow[r, "\sigma'"] & X' \end{tikzcd}$$

Si l'action σ' est triviale, un $\mathscr{C}$-morphisme G-équivariant $f : X \to X'$ est dit G-*invariant*.

Si X, X′ sont des S-objets dans $\mathscr{C}$ respectivement munis d'une action de G, se donner un $\mathscr{C}$-morphisme G-équivariant $f : X \to X'$ revient à se donner un morphisme de foncteurs $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{X}'$ tel que, pour tout S-objet T dans $\mathscr{C}$, l'application

$$\underline{f}(T) : \underline{X}(T) \to \underline{X}'(T)$$

est $\underline{G}(T)$-équivariante.

Définition 3.4. Soit X un S-objet dans $\mathscr{C}$ muni d'une action σ d'un S-objet en groupes dans $\mathscr{C}$. Un couple (Y, π) formé d'un S-objet Y dans $\mathscr{C}$ et d'un $\mathscr{C}$-morphisme G-invariant de S-objets $\pi : X \to Y$ (Y muni de l'action triviale) est un *quotient catégorique* s'il satisfait à la propriété universelle suivante :

> *pour tout couple* (Y', π') *formé d'un* S*-objet* Y′ *dans* $\mathscr{C}$ *et d'un* $\mathscr{C}$*-morphisme* G*-invariant de* S*-objets* $\pi' : X \to Y'$ *(*Y′ *muni de l'action triviale), il existe un unique* $\mathscr{C}$*-morphisme de* S*-objets* $\theta : X \to X'$ *tel que* $\pi' = \theta \circ \pi$.

Si un quotient catégorique existe, il est unique à un unique isomorphisme près.

3.2 Invariants

Soient S un schéma et F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$-modules. Les lois de somme et de multiplication par les scalaires définissent des morphismes de X-schémas

$$s : \mathbf{V}(F) \times_S \mathbf{V}(F) \longrightarrow \mathbf{V}(F) \qquad \text{(somme)}$$
$$h : \mathbf{V}(F) \times_S \mathbf{A}^1_S \longrightarrow \mathbf{V}(F) \qquad \text{(homothétie)}$$

Définition 3.5. Soient G un S-schéma en groupes et F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$-modules. Une action $\sigma : G \times \mathbf{V}(F)$ de G sur le S-schéma $\mathbf{V}(F)$ est dite *linéaire* si elle satisfait aux propriétés suivantes :

– *compatibilité à la somme* : le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(g, v, w) \arrow[r, mapsto] & (g \cdot v, g \cdot w) \\
G \times_S \mathbf{V}(F) \times_S \mathbf{V}(F) \arrow[r, "\sigma_F"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times s"'] & \mathbf{V}(F) \times_S \mathbf{V}(F) \arrow[d, "s"] \\
G \times_S \mathbf{V}(F) \arrow[r, "\sigma_F"] & \mathbf{V}(F)
\end{tikzcd}$$

est commutatif ;

– *homogénéité* : le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
G \times_S \mathbf{V}(F) \times_S \mathbf{A}^1_S \arrow[r, "\sigma_F \times \mathrm{id}_{\mathbf{A}^1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times h"'] & \mathbf{V}(F) \times_S \mathbf{A}^1_S \arrow[d, "h"] \\
G \times_S \mathbf{V}(F) \arrow[r, "\sigma_F"] & \mathbf{V}(F)
\end{tikzcd}$$

Soient $\gamma : G \to S$ un S-schéma en groupes et F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$-modules. Pour $i = 1, 2$ soit $\mathrm{pr}_i : G \times G \to G$ la projection sur le i-ième facteur. Se donner une action linéaire de G sur F équivaut à se donner un isomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_G$-modules, dit G-*linéarisation*,

$$\varphi : \gamma^* F \longrightarrow \gamma^* F$$

tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_2^*\,\gamma^*\mathrm{F} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2^*\,\varphi"] \arrow[d, equal] & \mathrm{pr}_2^*\,\gamma^*\mathrm{F} \arrow[r, equal] & \mathrm{pr}_1^*\,\gamma^*\mathrm{F} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1^*\,\varphi"] \\
\mu^*\gamma^*\mathrm{F} \arrow[r, "\mu^*\varphi"] & \mu^*\gamma^*\mathrm{F} \arrow[r, equal] & \mathrm{pr}_1^*\,\gamma^*\mathrm{F}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Soit F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules muni d'une action linéaire d'un S-schéma en groupes G. Pour tout S-schéma $\tau : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ le groupe $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ agit linéairement sur le $\Gamma(\mathrm{S}',\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$-module des sections globales $\Gamma(\mathrm{S}',\tau^*\mathrm{F})$ de F sur S′ et cette action est fonctorielle en S′. D'autre part, toute telle action linéaire fonctorielle du foncteur des points de G sur les foncteur des sections globales de F provient d'une (unique) action linéaire du S-schéma en groupes G sur le faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules F. Pour plus de détails sur l'interpretation fonctorielle des action linéaire on renvoie à [SGA 3, Exposé I, sec. 4-5].

Définition 3.6 ([SGA 3, Exposé I, Remarque 4.7.1.2])**.** Soit F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules muni d'une action linéaire d'un S-schéma en groupes G. Le *sous-faisceau des invariants* F^{G} est défini comme suit : pour tout ouvert de S, on pose

$$\Gamma(\mathrm{U},\mathrm{F}^{\mathrm{G}}) := \{t \in \Gamma(\mathrm{U},\mathrm{F}) : g\cdot t_{\mathrm{S}'} = t_{\mathrm{S}'} \text{ pour tout } \tau : \mathrm{S}' \to \mathrm{U}, g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')\},$$

où $t_{\mathrm{S}'}$ désigne la section de $\tau^*\mathrm{F}$ sur S′ déduite par changement de base.

Soit $\gamma : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ un S-schéma en groupes affine. On désigne par $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}]$ le faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\gamma_*\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$. Se donner une action linéaire de G sur un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-moduels F revient à se donner un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\sigma^\sharp : \mathrm{F} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \otimes \mathrm{F}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

– le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F} \arrow[r, "\sigma^\sharp"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \otimes \mathrm{F} \arrow[d, "m^\sharp\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \otimes \mathrm{F} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\sigma^\sharp"] & \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \otimes \mathrm{F}
\end{tikzcd}$$

est commutatif ($m^\sharp : \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}]$ l'homomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres définissant la loi de multiplication de G) ;

– l'application composée

$$\mathrm{F} \xrightarrow{\sigma^\sharp} \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \otimes \mathrm{F} \xrightarrow{e^\sharp\otimes\mathrm{id}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes \mathrm{F} = \mathrm{F}$$

est l'identité id_{F} de F ($e^\sharp : \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ l'homomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres définissant l'identité de G).

Soit F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$-modules muni d'une action linéaire de G définie par un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-modules $\sigma^\sharp : F \to \mathscr{O}_S[G] \otimes F$. On désigne par $q^\sharp : F \to \mathscr{O}_S[G] \otimes F$ l'homomorphisme canonique de faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules. Le sous-faisceau des invariants F^G s'identifie canoniquement au noyau de l'homomorphisme $\sigma^\sharp - q^\sharp$,

$$F^G = \mathrm{Ker}(\sigma^\sharp - q^\sharp).$$

Proposition 3.7. *Soient* G *un* S*-schéma en groupes affine et* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$*-modules muni d'une action linéaire de* G*. Soit* $\pi : S' \to S$ *un morphisme de schémas.*

Le faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$*-modules* $F' := \pi^* F$ *est naturellement muni d'une action linéaire du* S'*-schéma en groupes affine* $G' := G \times_S S'$ *donnée par l'homomorphisme de faisceaux de* $\mathscr{O}_{S'}$*-modules*

$$\pi^*\sigma^\sharp : F' = \pi^* F \longrightarrow F' \otimes_{\mathscr{O}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}[G'] = \pi^*\left(F \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_S[G]\right).$$

L'homomorphisme $\pi^*\left(F^G\right) \to \pi^* F$ *déduit de l'inclusion canonique* $F^G \to F$ *se factorise de manière unique, par propriété universelle du noyau, à travers un homomorphisme de* $\mathscr{O}_{S'}$*-modules*

$$\varepsilon : \pi^*\left(F^G\right) \longrightarrow F'^{G'}.$$

Si le morphisme π *est plat, alors l'homomorphisme canonique* ε *est un isomorphisme.*

3.3 Actions équivariantes

Soit S un schéma, X un S-schéma et F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$-modules. Les lois de somme et de multiplication par les scalaires définissent des morphismes de X-schémas

$$s : \mathbf{V}(F) \times_X \mathbf{V}(F) \longrightarrow \mathbf{V}(F) \qquad \text{(somme)}$$
$$h : \mathbf{V}(F) \times_X \mathbf{A}^1_X \longrightarrow \mathbf{V}(F) \qquad \text{(homothétie)}$$

Définition 3.8. Soient X un S-schéma d'une action σ d'un S-schéma en groupes G et F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$-modules.

Une *action équivariante* du S-schéma en groupes G sur le faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$-modules F est une action linéaire σ_F de G sur F telle que le morphisme canonique $\mathbf{V}(F) \to X$ soit G-équivariant.

Soient X un S-schéma d'une action σ d'un S-schéma en groupes $\gamma : G \to S$ et F un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$-modules. On désigne par $\mathrm{pr}_X : G \times_S G \times_S G \to X$ la projection sur X et par $\mathrm{pr}_{23} : G \times_S \times_S \times X \to G \times_S X$ la projection sur le deuxième et troisième facteur. Se donner une action équivariante de G sur X équivaut à se donner un isomorphisme de $\mathscr{O}_{G\times_S X}$-modules, dit G-*linéarisation*,

$$\varphi : \mathrm{pr}_X^* F \longrightarrow \sigma^* F$$

tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_{23}^*\mathrm{pr}_X^* F \arrow[r, "\mathrm{pr}_{23}^*\varphi"] \arrow[d, equal] & \mathrm{pr}_{23}^*\sigma^* F \arrow[r, equal] & (\mathrm{id}_G \times \sigma)^*\mathrm{pr}_X^* F \arrow[d, "(\mathrm{id}\times\sigma)^*\varphi"] \\
(\mu \times \mathrm{id}_X)^*\mathrm{pr}_X^* F \arrow[r, "(\mu\times\mathrm{id}_X)^*\varphi"] & (\mu \times \mathrm{id}_X)^*\sigma^* F \arrow[r, equal] & (\mathrm{id}_G \times \sigma)^*\sigma^* F
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (voir [SGA 3, Exposé I, Remarque 6.5.3]).

Proposition 3.9 ([SGA 3, Exposé I, 6.6])**.** *Soit* X *un* S*-schéma séparé et quasi-compact muni de l'action d'un* S*-schéma en groupes plat* G*. Soit* F *un faisceau quasi-cohérent muni d'une action équivariante de* G*.*

Si $\alpha : X \to S$ *désigne le morphisme structural de* X*, le faisceau quasi-cohérent* $p_* F$ *est muni d'une action linéaire de* G *et l'homomorphisme d'adjonction* $p^* p_* F \to F$ *est* G*-équivariant.*

3.4 Groupes réductifs

Définition 3.10. Soit k un corps algébriquement clos. Un k-schéma en groupes G est dit *réductif* s'il est de type fini, affine, lisse, connexe et ne possède pas de sous-groupe distingué lisse connexe et unipotent distinct de son sous-groupe unité.

Définition 3.11 ([SGA 3, Exposé XIX, Définition 2.7])**.** Soit S un schéma. Un S-schéma en groupes G est *réductif* (ou, G est un S*-groupe réductif*) s'il vérifie les conditions suivantes :

i. G est affine et lisse (donc plat et de type fini) sur S ;
ii. pour tout $s \in S$, le $\overline{s}$-schéma en groupes $G_{\overline{s}}$ est connexe et réductif (où $\overline{s}$ désigne le spectre d'une clôture algébrique du corps résiduel $\kappa(s)$).

Un exemple de groupe réductif sur un schéma S sont les tores. Un S-schéma en groupes T est un *tore* s'il existe un recouvrement étale $S' \to S$ tel que le S'-schéma en groupes $T \times_S S'$ soit isomorphe en tant que S'-schéma en groupes à un produit fini de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_{m,S'}$. On dit qu'un tore est *déployé* si on peut prendre $S' = S$.

Soit G un S-schéma en groupes. Un sous-S-schéma en groupes T est dit *tore maximal* s'il est un tore et, pour tout $s \in S$, le sous-$\overline{s}$-schéma en groupes $T_{\overline{s}}$ est un tore maximal de $G_{\overline{s}}$ (où $\overline{s}$ désigne le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$).

On dit qu'un S-groupe réductif est *déployé* s'il contient un tore maximal déployé. À tout S-groupe réductif G on associe une *donnée radicielle* et le résultat principal de [Dem65] est la généralisation suivante du Théorème de classification de Chevalley : pour tout schéma non vide S, les classes d'isomorphisme de S-groupes réductifs déployés sont en correspondance biunivoque avec les classes d'isomorphisme de données radicielles. En particulier, tout S-groupe réductif déployé provient par changement de base d'un **Z**-groupe réductif déployé.

3.5 Quotients : le cas affine

Définition 3.12 ([EGA 4, chap. 0, Définition 23.1.1])**.** On dit qu'un anneau intègre A est *japonais* si, pour tout extension finie K' de son corps des fractions K, la fermeture intégrale A' de A dans K' est un A-module de type fini (autrement dit, une A-algèbre finie). On dit qu'anneau A est *universellement japonais* si toute A-algèbre de type fini est japonais.

On dit qu'un schéma intègre S est *japonais* (resp. *universellement japonais*) s'il existe un recouvrement ouvert fini $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ par des schémas affines $S_i = \operatorname{Spec} A_i$ où pour tout $i = 1, \dots, n$ l'anneau A_i est japonais (resp. universellement japonais).

Il est clair que tout corps est un anneau universellement japonais. Tout anneau de Dedekind de corps des fractions de caractéristique nulle est un anneau universellement japonais (en particulier **Z**, $\mathbf{Z}_p$).

Théorème 3.13 ([Ses77, II.4, Theorem 3])**.** *Soit* S *un schéma noethérien. Soient* $X = \mathbf{Spec}_S A$ *un* S*-schéma affine muni d'une action du* S*-groupe réductif* G *et*

$$\pi : X \longrightarrow Y := \mathbf{Spec}_S A^G$$

le morphisme de S*-schémas déduit de l'inclusion* $A^G \subset A$. *On suppose qu'il existe un* $\mathcal{O}_S$*-module localement libre de rang fini* E *muni d'une action linéaire de* G *et* $\iota : X \to \mathbf{V}(E)$ *une immersion fermée* G*-équivariante. Alors,*

i. *le morphisme est* G*-invariant et surjectif ;*
ii. *le morphisme* π *est affine ;*
iii. *si* $Z \subset X$ *est une partie fermée* G*-stable, son image* $\pi(Z)$ *est une partie fermée de* Y *;*
iv. *soit* $\overline{s} : \operatorname{Spec} K \to S$ *un point géométrique de* S *(*K *corps algébriquement clos) ; pour tous* K*-points* $x, x' \in X_{\overline{s}}(K)$*, on a alors :*

$$\pi(x) = \pi(x') \text{ si et seulement si } \overline{G_{\overline{s}} \cdot x} \cap \overline{G_{\overline{s}} \cdot x'} \neq \emptyset,$$

l'adhérence des orbites étant prise dans $X_{\overline{s}}$ *;*
v. *l'homomorphisme de faisceaux* $\pi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to \pi_*\mathcal{O}_X$ *se restreint à un isomorphisme*

$$\pi^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow (\pi_*\mathcal{O}_X)^G;$$

vi. *si le schéma* S *est de type fini sur un schéma universellement japonais, alors* Y *est de type fini sur* S *;*
vii. *le couple* (Y, π) *est un quotient catégorique du* S*-schéma* X *par le* S*-schéma en groupes* G.

3.6 Quotients : le cas projectif

3.6.1. Points semi-stables. — Soit S un schéma noethérien. Soient X un S-schéma projectif et plat muni de l'action d'un S-schéma en groupes affine et plat G. Soit L un faisceau inversible sur X muni d'une action équivariante du S-schéma en groupes G.

Si $\alpha : X \to S$ désigne le morphisme structural de X, d'après la Proposition 3.9, pour tout $d \geq 1$ le S-schéma en groupes G agit sur le faisceau cohérent de $\mathcal{O}_S$-modules $\alpha_*(L^{\otimes d})$. En tant que sous-faisceau d'un faisceau cohérent, le faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$-modules $[\alpha_*(L^{\otimes d})]^G$, formé des invariants de $\alpha_*(L^{\otimes d})$, est cohérent. Pour tout entier $d \geq 1$, on considère l'ouvert $X^{ss}_d(L)$ défini par la surjectivité de l'application composée

$$\alpha^*[\alpha_*(L^{\otimes d})]^G \longrightarrow \alpha^*\alpha_*(L^{\otimes d}) \longrightarrow L^{\otimes d},$$

(la première flèche est induite par l'inclusion canonique de $[\alpha_*(L^{\otimes d})]^G$ dans $\alpha_*(L^{\otimes d})$ et la deuxième est obtenue par adjonction).

Définition 3.14. On appelle

$$X^{ss}(L) := \bigcup_{d \geq 0} X^{ss}_d(L)$$

l'*ouvert des points semi-stables de* X (par rapport au faisceau inversible L et à l'action de G).

Un point $x \in X$ est dit *semi-stable* (par rapport au faisceau inversible L et à l'action de G) s'il appartient à $X^{ss}(L)$.

Proposition 3.15. *Pour tout morphisme de schémas noethériens* $\tau : S' \to S$ *le* S′*-schéma* X′ *qui s'en déduit par changement de base*

$$\begin{tikzcd} X' := X \times_S S' \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "\alpha'"'] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ S' \arrow[r, "\tau"] & S \end{tikzcd}$$

est muni naturellement d'une action du S'*-schéma un groupes* $G' := G \times_S S'$ *et le faisceau inversible* $\tau_X^* L$ *sur* X' *est et muni d'une action équivariante de* G' *naturelle ; on a alors :*

$$\tau_X^{-1}(X^{ss}(L)) \subset (X')^{ss}(\tau_X^* L).$$

Si, de plus, τ *est un morphisme plat, alors*

$$\tau_X^{-1}(X^{ss}(L)) = (X')^{ss}(\tau_X^* L).$$

On considère le faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$-algèbres

$$A := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d}).$$

L'inclusion $A^G \subset A$ induit un morphisme de S-schémas

$$\pi : X^{ss}(L) \longrightarrow Y := \mathbf{Proj}_S(A^G).$$

3.6.2. Quotient des points semi-stables. — On revient aux notations du paragraphe 3.6.1.

Théorème 3.16 ([Ses77, II.1, Proposition 7])**.** *Soit* S *un schéma noethérien. Soient* $\alpha : X \to S$ *un* S*-schéma projectif et plat muni de l'action d'un* S*-schéma en groupes réductif* G*. Soit* L *un faisceau inversible* α*-ample sur* X *muni d'une action équivariante du* S*-schéma en groupes réductif* G*.*

Pour tout morphisme de schémas noethériens $\tau : S' \to S$ *le* S'*-schéma* X' *qui s'en déduit par changement de base*

$$\begin{array}{ccc} X' := X \times_S S' & \xrightarrow{\tau_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ S' & \xrightarrow{\tau} & S \end{array}$$

est muni naturellement d'une action du S'*-groupe réductif* $G' := G \times_S S'$ *et le faisceau inversible* $\tau_X^* L$ *sur* X' *est* α'*-ample et muni d'une action équivariante naturelle de* G' *; on a alors :*

$$\tau_X^{-1}(X^{ss}(L)) = (X')^{ss}(\tau_X^* L).$$

Théorème 3.17 ([Ses77, II.4, Theorem 4])**.** *Soit* S *un schéma noethérien. Soient* $\alpha : X \to S$ *un* S*-schéma projectif et plat muni de l'action d'un* S*-schéma en groupes réductif* G*. Soit* L *un faisceau inversible* α*-ample sur* X *muni d'une action équivariante du* S*-schéma en groupes réductif* G*. On désigne par* $X^{ss}(L)$ *l'ouvert des points semi-stables de* X*. Le couple* (Y, π) *formé du* S*-schéma*

$$Y := \mathbf{Proj}_S\left(\bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d})^G\right)$$

et du morphisme $\pi : X^{ss}(L) \to Y$ *induit par l'inclusion de faisceaux de* $\mathcal{O}_S$*-algèbres graduées*

$$\bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d})^G \subset \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d})$$

satisfait aux propriétés suivantes :

i. le morphisme est G*-invariant et surjectif ;*

ii. le morphisme π *est affine ;*

iii. *si* $Z \subset X$ *est une partie fermée* G*-stable, son image* $\pi(Z)$ *est une partie fermée de* Y *;*

iv. *soit* $\overline{s} : \operatorname{Spec} K \to S$ *un point géométrique de* S *(*K *corps algébriquement clos) ; pour tout* K*-point* $x, x' \in X^{ss}(L)_{\overline{s}}(K)$*, on a alors :*

$$\pi(x) = \pi(x') \text{ si et seulement si } \overline{G_{\overline{s}} \cdot x} \cap \overline{G_{\overline{s}} \cdot x'} \neq \emptyset,$$

l'adhérence des orbites étant prise dans $X^{ss}(L)_{\overline{s}}$ *;*

v. *l'homomorphisme de faisceaux* $\pi^\sharp : \mathscr{O}_Y \to \pi_* \mathscr{O}_{X^{ss}(L)}$ *se restreint à un isomorphisme*

$$\pi^\sharp : \mathscr{O}_Y \longrightarrow (\pi_* \mathscr{O}_{X^{ss}(L)})^G;$$

vi. *si le schéma* S *est de type fini sur un schéma universellement japonais, alors* Y *est de type fini sur* S *(donc projectif) ;*

vii. *le couple* (Y, π) *est un quotient catégorique du* S*-schéma* $X^{ss}(L)$ *par le* S*-schéma en groupes* G*.*

Si le schéma S est de type fini sur un schéma universellement japonais, alors le schéma Y est projectif et pour tout nombre entier $D \geq 1$ assez divisible il existe un faisceau inversible β-ample (où $\beta : Y \to S$ désigne le morphisme structural) et un isomorphisme de faisceau inversibles sur $X^{ss}(L)$,

$$\varphi_D : \pi^* M_D \longrightarrow L|_{X^{ss}(L)}^{\otimes D}$$

compatible à l'action de G. Les sections globales du faisceau inversible M_D s'identifient à travers l'isomorphisme φ_D au sections globales G-invariantes de $L^{\otimes D}$. On considère les faisceaux de $\mathscr{O}_S$-algèbres graduées

$$A := \bigoplus_{d \geq 1} \alpha_* (L^{\otimes dD})$$
$$B := \bigoplus_{d \geq 1} \beta_* (M_D^{\otimes d}).$$

Les S-schémas X et Y s'identifient aux spectres relatifs homogènes de A et B et le morphisme quotient π correspond à l'homomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_S$-algèbres graduées induit par φ_D,

$$B \longrightarrow A^G \subset A.$$

Le morphisme π est alors une projection au sens de la section 2.2 et un point $x \in X$ est π-projetable (resp. non π-projetable) si et seulement s'il est semi-stable (resp. unstable) sous l'action de G et par rapport au faisceau inversible L.

4 Critère numérique de semi-stabilité

On revient ici sur des considérations élémentaires autour du critère numérique de semi-stabilité. On analyse la semi-stabilité d'une couple de sous-espaces d'un espace vectoriel donné : on utilisera ces considérations dans l'étude de la semi-stabilité des configurations des points liés au Théorème de Roth. Ce matériel peut être trouvé dans la plus part des textes sur la théorie géométrique des invariants : on tient quand même à citer [GIT], [New78], [Kem78] et [Rou78].

4.1 Point limite

Soit k un corps.

4.1.1. Défintion. — Soit X un k-schéma propre muni d'une action λ du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soit x un k-point du k-schéma X. On considère le morphisme de k-schémas

$$\begin{aligned} \lambda_x : \ \mathbf{G}_m &\longrightarrow \mathrm{X} \\ \tau &\longmapsto \lambda(\tau)\cdot x \end{aligned}$$

Par le critère valuatif de proprété le morphisme λ_x s'étend de manière unique à un morphisme de k-schémas

$$\overline{\lambda}_x : \mathbf{A}^1 \longrightarrow \mathrm{X}$$

équivariant par l'action naturelle de $\mathbf{G}_m$ sur $\mathbf{A}^1$.

Définition 4.1. Le *point limite de x sous l'action λ de* $\mathbf{G}_m$ est le k-point

$$\lim_{\tau\to 0} \lambda(\tau)\cdot x := \overline{\lambda}_x(0)$$

du k-schéma X.

Puisque le morphisme $\overline{\lambda}_x$ est $\mathbf{G}_m$-équivariant, le point limite $\lim_{\tau\to 0}\lambda(\tau)\cdot x$ est un k-point fixe sous l'action du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$.

4.1.2. Fonctorialité. — Soient X,X' des k-schémas propres munis respectivement d'une action λ,λ' du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soit $f:\mathrm{X}\to\mathrm{X}'$ un morphisme de k-schémas $\mathbf{G}_m$-équivariant.

Proposition 4.2 (Fonctorialité)**.** *Avec ces notations, pour tout k-point x du k-schéma* X *on a :*

$$\lim_{\tau\to 0}\lambda'(\tau)\cdot f(x) = f\left(\lim_{\tau\to 0}\lambda(\tau)\cdot x\right).$$

4.1.3. Produit. — Soient X,X' des k-schémas propres munis respectivement d'une action λ,λ' du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soient $p:\mathrm{X}\times\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$, $p':\mathrm{X}\times\mathrm{X}'\to\mathrm{X}'$ les deux projections. Le k-schéma produit $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'$ est propre et il est muni d'une action naturelle $\lambda\times\lambda'$ du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ par rapport à laquelle les projections p,p' sont des morphismes $\mathbf{G}_m$-équivariants.

Proposition 4.3 (Compatibilité au produit)**.** *Avec ces notations, pour tout k-point (x,x') du k-schéma* $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'$ *on a :*

$$\lim_{\tau\to 0}(\lambda\times\lambda')(\tau)\cdot(x,x') = \left(\lim_{\tau\to 0}\lambda(\tau)\cdot x, \lim_{\tau\to 0}\lambda'(\tau)\cdot x'\right)$$

4.1.4. Extension des scalaires. — Soit X un k-schéma propre muni de l'action λ du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soit K une extension du corps k. Le K-schéma $\mathrm{X}_\mathrm{K} := \mathrm{X}\times_k \mathrm{K}$ déduit du k-schéma X par extension des scalaires est naturellement muni d'une action λ_K du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,\mathrm{K}}$. Pour tout k-point x du k-schéma X, on désigne par x_K le K-point du K-schéma X_K qui s'en déduit par extension des scalaires.

Proposition 4.4 (Compatibilité aux extensions des scalaires)**.** *Avec ces notations, pour tout k-point du k-schéma* X*, on a :*

$$\lim_{\tau\to 0}\lambda_\mathrm{K}(\tau)\cdot x_\mathrm{K} = \left(\lim_{\tau\to 0}\lambda(\tau)\cdot x\right)_\mathrm{K}.$$

4.2 Coefficient d'instabilité

Soit k un corps.

4.2.1. Définition. — Soit X un schéma propre sur k muni d'une action λ du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soit L un faisceau inversible sur X muni d'une action équivariante de $\mathbf{G}_m$. Si x est un k-point du k-schéma X, le point limite

$$x_0 := \lim_{\tau\to 0} \lambda(\tau)\cdot x$$

est un k-point du k-schéma X fixe sous l'action du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. L'action du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur la fibre $x_0^*\mathrm{L}$ en x_0 du faisceau inversible L est linéaire ; il existe, donc, un nombre $r \in \mathbf{Z}$ cette action est définie par le morphisme de k-schémas

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m \times \mathbf{V}(x_0^*\mathrm{L}) &\longrightarrow \mathbf{V}(x_0^*\mathrm{L}) \\ (\tau, s) &\longmapsto \tau^r s \end{aligned}$$

Définition 4.5. Le *coéfficient d'instabilité du point* x *par l'action* λ *par rapport au faisceau inversible* L est le nombre entier

$$\mu_\mathrm{L}(\lambda, x) := r.$$

Remarque 4.6. Le choix du signe dans cette définition est opposé au choix dans [GIT, Definition 2.2].

Proposition 4.7. *Soit* x *un* k*-point du* k*-schéma* X. *Avec les notations introduites avant, on a :*

$$\mu_\mathrm{L}\left(\lambda, \lim_{\tau\to 0} \lambda(\tau)\cdot x\right) = \mu_\mathrm{L}(\lambda, x).$$

4.2.2. Fonctorialité. — Soient X, X' des k-schémas propres munis respectivement d'une action λ, λ' du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ un morphisme de k-schémas $\mathbf{G}_m$-équivariant.

Soit L' un faisceau inversible sur le k-schéma X' muni d'une action équivariante du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Le faisceau inversible sur X,

$$\mathrm{L} := f^*\mathrm{L}',$$

est naturellement muni d'une action équivariante du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$.

Proposition 4.8 (Fonctorialité)**.** *Pour tout* k*-point* x *du* k*-schéma* X *on a*

$$\mu_{\mathrm{L}'}(\lambda', f(x)) = \mu_\mathrm{L}(\lambda, x).$$

4.2.3. Compatibilité au produit. — Soient X, X' des k-schémas propres munis respectivement d'une action λ, λ' du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soient $p : \mathrm{X}\times\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, $p' : \mathrm{X}\times\mathrm{X}' \to \mathrm{X}'$ les deux projections. Le produit $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'$ est propre et il est muni d'une action naturelle $\lambda\times\lambda'$ de $\mathbf{G}_m$ par rapport à laquelle les projections p, p' sont des morphismes $\mathbf{G}_m$-équivariants.

Soient L, L' des faisceaux inversibles respectivement sur X et X' munis d'une action équivariante de $\mathbf{G}_m$. Le faisceau inversible sur le produit $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'$,

$$\mathrm{L}\boxtimes\mathrm{L}' := p^*\mathrm{L}\otimes p'^*\mathrm{L}'$$

est naturellement muni d'une action de $\mathbf{G}_m$, équivariante par rapport à l'action $\lambda\times\lambda'$ sur le produit $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'$.

Proposition 4.9 (Compatibilité au produit). *Pour tout k-point (x, x') de $X \times X'$ on a*

$$\mu_{L\boxtimes L'}(\lambda \times \lambda', (x, x')) = \mu_L(\lambda, x) + \mu_{L'}(\lambda', x').$$

4.2.4. Invariance par extension des scalaires. — Soit X un k-schéma propre muni de l'action du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Soit K une extension du corps k. Le K-schéma $X_K := X \times_k K$ déduit du k-schéma X par extension des scalaires est naturellement muni d'une action λ_K du K-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,K}$. On désigne par $\varpi_K : X_K \to X$ le morphisme d'extension des scalaires.

Soit L un faisceau inversible sur le k-schéma X muni d'une action équivariante du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Le faisceau inversible

$$L_K := \varpi_K^* L$$

sur le K-schéma est, alors, naturellement muni d'une action équivariante du K-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,K}$

Proposition 4.10 (Invariance par extension des scalaires). *Soient x un k-point du k-schéma X et x_K le K-point du K-schéma X_K qui s'en déduit par extension des scalaires. Alors,*

$$\mu_{L_K}(\lambda_K, x_K) = \mu_L(\lambda, x).$$

4.3 Énoncé du critère numérique

4.3.1. — Soit X un schéma projectif sur k muni d'une action d'un k-groupe réductif G. Soit L un faisceau inversible L muni d'une action équivariante du k-groupe réductif G.

Pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$, on désigne encore par λ l'action du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur X induite par celle de G.

Théorème 4.11 (Critère numérique de Hilbert-Mumford, [GIT, Theorem 2.1]). *Soient k un corps algébriquement clos, X un schéma projectif sur k muni d'une action d'un k-groupe réductif G et L un faisceau inversible ample muni d'une action équivariante de G.*

Un k-point x du k-schéma X est semi-stable si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$ on a

$$\mu_L(\lambda, x) \leq 0.$$

Théorème 4.12 (Critère numérique de Kempf-Rousseau, [Kem78, Theorem 4.2]). *Soient k un corps parfait, X un schéma projectif sur k muni d'une action d'un k-groupe réductif G et L un faisceau inversible ample muni d'une action équivariante de G.*

Un k-point x du k-schéma X est semi-stable si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$ on a

$$\mu_L(\lambda, x) \leq 0.$$

4.4 Exemples

4.4.1. Espace projectif. — Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $\mathbf{P}(E)$ l'espace projectif des quotients localement libres de rang 1 de E.

Se donner une action de $\mathbf{G}_m$ sur $\mathbf{P}(E)$ et une action équivariante sur le faisceau inversible $\mathcal{O}_E(1)$ est équivalent à se donner une action linéaire λ du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur $\mathbf{V}(E)$. Une telle action est définie par un homomorphisme de k-espaces vectoriels

$$\lambda^\sharp : E \longrightarrow E \otimes k[\tau, \tau^{-1}] = \bigoplus_{b \in \mathbf{Z}} E \cdot \tau^b.$$

Pour tout nombre entier b, on considère le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{E}_b = \{v \in \mathrm{E} : \lambda^\sharp(v) \in \mathrm{E}\cdot\tau^b\}.$$

Proposition 4.13 ([GIT, Proposition 2.3]). *Pour tout k-point x du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$, on a :*

$$\mu_{\mathscr{O}(1)}(\lambda,[x]) = \min\{b \in \mathbf{Z} : x : \mathrm{E}_b \to k \text{ est surjectif}\}.$$

4.4.2. Grassmaniennes. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit λ une action linéaire du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur le k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$. Elle est définie par un homomorphisme de k-espaces vectoriels

$$\lambda^\sharp : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}\otimes k[\tau,\tau^{-1}] = \bigoplus_{b\in\mathbf{Z}} \mathrm{E}\cdot\tau^b.$$

Pour tout nombre entier b, on considère le sous-espace vectoriel du k-espace vectoriel E,

$$\mathrm{E}_b = \{v \in \mathrm{E} : \lambda^\sharp(v) \in \mathrm{E}\cdot\tau^b\}.$$

Le k-espace vectoriel dual $\mathrm{E}_b^\vee$ s'identifie avec le sous-espace vectoriel du k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$ formé par les éléments $x : \mathrm{E} \to k$ tels que

$$\lambda(\tau)\cdot x = \tau^b \cdot x.$$

Pour tout nombre entier b, on considère le sous-espace vectoriel du k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$,

$$\mathrm{E}^\vee[b] := \bigoplus_{b'\geq b} \mathrm{E}_{b'}^\vee.$$

Les k-espaces vectoriels $\mathrm{E}^\vee[b]$, pour b qui varie dans $\mathbf{Z}$, définissent une filtration décroissante du k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$.

Soient $r \geq 0$ un nombre entier et $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$ la grassmanienne des quotients localement libres de rang r de E. Un k-point du k-schéma $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$ correspond à une classe d'équivalence d'homomorphismes surjectifs de k-espaces vectoriels $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, où F est de dimension r.

L'action linéaire λ du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur le k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ induit une action naturelle du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur la grassmanienne $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$. Elle induit aussi, par puissance extérieure, une action sur le k-espace projectif $\mathbf{P}(\bigwedge^r \mathrm{E})$ et une action équivariante sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\bigwedge^r\mathrm{E}}(1)$ et le plongement de Plücker

$$\varpi : \mathbf{Grass}_r(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{P}\Big(\bigwedge^r \mathrm{E}\Big)$$

est $\mathbf{G}_m$-équivariant. Le faisceau inversible sur le k-schéma $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$,

$$\mathrm{L} := \varpi^*\mathscr{O}_{\bigwedge^r\mathrm{E}}(1),$$

est naturellement muni d'une action équivariante du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$.

Soient F un k-espace vectoriel de dimension r et $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un homomorphisme surjectif de k-espaces vectoriels. L'homomorphisme dual $\varphi^\vee : \mathrm{F}^\vee \to \mathrm{E}^\vee$ est injectif et il identifie le k-espace vectoriel $\mathrm{F}^\vee$ avec un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}^\vee$: dans la suite on sous-entendra cette identification. Pour tout nombre entier b, on pose

$$\mathrm{F}^\vee[b] := \mathrm{F}^\vee \cap \mathrm{E}^\vee[b].$$

Proposition 4.14 ([GIT, 4.4]). *Soient* F *un k-espace vectoriel de dimension r et $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un homomorphisme surjectif. Soit $[\varphi]$ le k-point du k-schéma $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$ défini par sa classe d'équivalence.*

Alors, avec les notations introduites avant, on a :

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{L}}(\lambda,[\varphi]) &= \sum_{b\in\mathbf{Z}} b(\dim_k \mathrm{F}^\vee[b] - \dim_k \mathrm{F}^\vee[b+1])\\ &= b_{\min}\dim_k \mathrm{F} + \sum_{b=b_{\min}+1}^{b_{\max}} \dim_k \mathrm{F}^\vee[b].\end{aligned}$$

Corollaire 4.15. *Soient* F *un k-espace vectoriel de dimension r et* $\varphi : \mathrm{E}\to\mathrm{F}$ *un homomorphisme surjectif. Soit* $[\varphi]$ *le k-point du k-schéma* $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$ *défini par sa classe d'équivalence.*

Soit $v_1,\dots,v_r$ une base du k-espace vectoriel $\mathrm{F}^\vee$. *Pour tout $i = 1,\dots,n$, on désigne par $[v_i]$ le k-point de l'espace projectif* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *défini par la classe d'équivalence du vecteur v_i.*

Avec les notations introduites avant, on a :

$$\mu_{\mathrm{L}}(\lambda,[\varphi]) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(1)}(\lambda,[v_i]).$$

Si $\mathrm{F}=\mathrm{E}$ et $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, on désigne par $[\mathrm{E}]$ le k-point de la grassmanienne $\mathbf{Grass}_{\dim \mathrm{E}}(\mathrm{E})$ associé.

Corollaire 4.16. *Avec les notations introduites avant, on a :*

$$\mu_{\mathrm{L}}(\lambda,[\mathrm{E}]) = \sum_{b\in\mathbf{Z}} b(\dim_k \mathrm{E}^\vee[b] - \dim_k \mathrm{E}^\vee[b+1]).$$

De plus, $\mu_{\mathrm{L}}(\lambda,[\mathrm{E}]) = 0$ *si et seulement si le détérminant de la représentation* $\mathbf{G}_m \to \mathbf{GL}(\mathrm{E}^\vee)$ *est triviale.*

Corollaire 4.17. *Soient* F *un k-espace vectoriel de dimension r et* $\varphi : \mathrm{E}\to\mathrm{F}$ *un homomorphisme surjectif. Soit* $[\varphi]$ *le k-point du k-schéma* $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{E})$ *défini par sa classe d'équivalence.*

Avec les notations introduites avant, on a :

$$\mu_{\mathrm{L}}(\lambda,[\mathrm{F}]) \le b_{\min}(\dim_k \mathrm{F} - \dim_k \mathrm{E}) + \mu_{\mathrm{L}}(\lambda,[\mathrm{E}]).$$

4.4.3. Couples de sous-espaces. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit λ une action linéaire du k-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur le k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$.

Pour $i = 1,2$, soient F_i un k-espace vectoriel de dimension r_i, $\varphi_i : \mathrm{E}\to\mathrm{F}_i$ un homomorphisme surjectif et $[\mathrm{F}_i^\vee]$ le k-point de la grassmanienne $\mathbf{Grass}_{r_i}(\mathrm{E})$ défini par sa classe d'équivalence. L'homomorphisme dual $\varphi_i : \mathrm{F}_i^\vee \to \mathrm{E}^\vee$ est injectif et identifient le k-espace vectoriel $\mathrm{F}_i^\vee$ avec un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}^\vee$: dans la suite on sous-entend toujours cette identification.

Proposition 4.18. *Pour $i = 1,2$ soit* $\varphi_i : \mathrm{E}\to\mathrm{F}_i$ *un homomorphisme surjectif de k-espaces vectoriels. Alors, avec les notations introduites avant on a :*

$$\mu(\lambda,[\mathrm{F}_1^\vee]) + \mu(\lambda,[\mathrm{F}_2^\vee]) \le \mu(\lambda,[\mathrm{F}_1^\vee+\mathrm{F}_2^\vee]) + \mu(\lambda,[\mathrm{F}_1^\vee\cap\mathrm{F}_2^\vee]),$$

où les coefficients d'instabilité sont relatifs aux plongements de Plücker respectifs.

Démonstration. L'action linéaire λ est définie par un homomorphisme de k-espaces vectoriels

$$\lambda^\sharp : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}\otimes k[\tau,\tau^{-1}] = \bigoplus_{b\in\mathbf{Z}} \mathrm{E}\cdot\tau^b.$$

Pour tout nombre entier b, on considère le sous-espace vectoriel su k-espace vectoriel E,

$$\mathrm{E}_b := \{v\in\mathrm{E} : \lambda^\sharp(v)\in \mathrm{E}\cdot\tau^b\}.$$

Soit $b_{\max}$ (resp. $b_{\min}$) le plus grand (resp. le plus petit) nombre entier b tel que $E_b \neq 0$. Pour tout nombre entier b on pose :

$$\begin{aligned} E^\vee[b] &:= \bigoplus_{b' \geq b} E^\vee_{b'} \\ F_1^\vee[b] &:= F_1^\vee \cap E^\vee[b] \\ F_2^\vee[b] &:= F_2^\vee \cap E^\vee[b] \\ (F_1^\vee + F_2^\vee)[b] &:= (F_1^\vee + F_2^\vee) \cap E^\vee[b] \\ (F_1^\vee \cap F_2^\vee)[b] &:= (F_1^\vee \cap F_2^\vee) \cap E^\vee[b] = F_1^\vee[b] \cap F_2^\vee[b]. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 4.14 on a :

$$\mu(\lambda, [F_1^\vee]) + \mu(\lambda, [F_2^\vee]) = b_{\min}\left(\dim_k F_1^\vee + \dim_k F_2^\vee\right) + \sum_{b=b_{\min}+1}^{b_{\max}} \dim_k F_1^\vee[b] + \dim_k F_2^\vee[b] \tag{4.4.1}$$

Par la formule des dimensions on a :

$$\dim_k F_1^\vee + \dim_k F_2^\vee = \dim_k(F_1^\vee + F_2^\vee) + \dim_k(F_1^\vee \cap F_2^\vee) \tag{4.4.2}$$

Pour tout nombre entier b le k-espace vectoriel $F_1^\vee[b] + F_2^\vee[b]$ est contenu dans le k-espace vectoriel $(F_1^\vee + F_2^\vee)[b]$. En particulier,

$$\begin{aligned} \dim_k F_1^\vee[b] + \dim_k F_2^\vee[b] &= \dim_k(F_1^\vee[b] + F_2^\vee[b]) + \dim_k(F_1^\vee[b] \cap F_2^\vee[b]) \\ &\leq \dim_k(F_1^\vee + F_2^\vee)[b] + \dim_k(F_1^\vee \cap F_2^\vee)[b] \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

En utilisant (4.4.2) et (4.4.3) dans (4.4.1), on obtient :

$$\begin{aligned} &\mu(\lambda, [F_1^\vee]) + \mu(\lambda, [F_2^\vee]) \\ &\quad \leq b_{\min}\left(\dim_k(F_1^\vee + F_2^\vee) + \dim_k(F_1^\vee \cap F_2^\vee)\right) + \sum_{b=b_{\min}+1}^{b_{\max}} \dim_k(F_1^\vee + F_2^\vee)[b] + \dim_k(F_1^\vee \cap F_2^\vee)[b] \\ &\quad = \mu(\lambda, [F_1^\vee + F_2^\vee]) + \mu(\lambda, [F_1^\vee \cap F_2^\vee]), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Corollaire 4.19. *Avec les notations introduites avant, si on suppose de plus* $F_1^\vee \cap F_2^\vee = 0$*, on a :*

$$\mu(\lambda, [F_1^\vee]) + \mu(\lambda, [F_2^\vee]) \leq b_{\min}\Big(\dim_k F_1 + \dim_k F_2 - \dim_k E\Big) + \mu(\lambda, [E]),$$

où les coefficients d'instabilité sont relatifs aux plongements de Plücker respectifs.

Démonstration. D'après la Proposition 4.18 on a

$$\mu(\lambda, [F_1^\vee]) + \mu(\lambda, [F_2^\vee]) \leq \mu(\lambda, 0) + \mu(\lambda, [F_1^\vee + F_2^\vee]) = \mu(\lambda, [F_1^\vee + F_2^\vee]).$$

Puisque $F_1^\vee + F_2^\vee$ est contenu dans $E^\vee$, en vertu de la Proposition 4.14 on a :

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [F_1^\vee + F_2^\vee]) &= b_{\min} \dim_k\left(F_1^\vee + F_2^\vee\right) + \sum_{b=b_{\min}+1}^{b_{\max}} \dim_k\left(F_1^\vee[b] + F_2^\vee[b]\right) \\ &\leq b_{\min} \dim_k\left(F_1^\vee + F_2^\vee\right) + \sum_{b=b_{\min}+1}^{b_{\max}} \dim_k E^\vee[b] \\ &= b_{\min} \dim_k\left(F_1^\vee + F_2^\vee - \dim_k E\right) + \left(b_{\min} \dim_k E + \sum_{b=b_{\min}+1}^{b_{\max}} \dim_k E^\vee[b]\right) \\ &= b_{\min} \dim_k\left(F_1^\vee + F_2^\vee - \dim_k E\right) + \mu(\lambda, [E]), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

5 Espaces analytiques

5.1 Espaces analytiques archimédiens

Dans cette section on rappelle la notion d'espace analytique complexe et on introduit celle d'espace analytique réel. Une référence pour le cas complexe est la suite d'exposés au Séminaire Cartan faite par Grothendieck, notamment [Gro61b], [Gro61c] et [Gro61d]. L'influence de cette dernière sur la présentation des espaces analytiques réels qu'on donne ici est évidente.

5.1.1. Quotient d'un espace annelé par un groupe. — Soit $X = (|X|, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé muni de l'action d'un groupe G, *i.e.*, d'un homomorphisme de groupes

$$\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{espan}}(X),$$

où $\mathrm{Aut}_{\mathrm{espan}}(X)$ est le groupe des automorphismes de X en tant qu'espace annelé.

On définit l'espace annelé quotient de X par G, noté X/G, comme suit. Soit $|X|/G$ l'espace topologique quotient et $\pi : |X| \to |X|/G$ la projection sur le quotient. Si $U \subset |X|/G$ est un ouvert, son image inverse $\pi^{-1}(U) \subset |X|$ est un ouvert stable sous l'action de G. Le groupe G agit alors sur l'anneau $\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$ et on pose

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_{X/G}) := \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)^G.$$

Si X est un espace localement annelé, alors X/G l'est aussi.

L'espace (localement) annelé ainsi défini est le quotient catégorique de X par G dans la catégorie des espaces (localement) annelés.

5.1.2. Espace affine analytique. — Soit $n \geq 0$ un nombre entier. L'*espace affine analytique complexe* de dimension n, noté $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$, est l'espace localement annelé en $\mathbf{C}$-algèbres formé de l'espace topologique $\mathbf{C}^n$ muni du faisceau des fonctions holomorphes $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$.

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) = \{\mathrm{id}, \tau\}$ agit sur $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$ en tant qu'espace localement annelé et $\mathbf{R}$-algèbres : si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, on pose

$$\tau(z) := (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}),$$

et, si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}^n$, on considère la fonction holormorphe sur l'ouvert $\tau(U)$ définie par

$$\tau(f) : z \mapsto \overline{f(\tau(z))} = \overline{f(\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})}.$$

L'*espace affine analytique réel* de dimension n, noté $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$, est l'espace localement annelé en $\mathbf{R}$-algèbres quotient de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$ par $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$,

$$\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}} := \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}} / \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}).$$

5.1.3. Définitions. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne. En tant que corps complet il est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou à $\mathbf{C}$. Dans la suite on sous-entendra un tel isomorphisme.

Définition 5.1. Un *k-espace analytique* est un espace localement annelé en k-algèbres tel qu'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ de X tel que pour tout $i \in I$ il existe un nombre entier positif n_i et une immersion de présentation finie d'espaces localement annelés en k-algèbres $\varepsilon_i : X_i \to \mathbf{A}^{n_i}_k$.

Exemple 5.2. Si X est un k-espace analytique, alors tout ouvert U de l'espace topologique sous-jacent $|X|$ est naturellement muni d'une structure de k-espace analytique en prenant la restriction de $\mathscr{O}_X$ à U comme faisceau structural.

Exemple 5.3. Soient X un k-espace analytique et I un faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_X$ de type fini. Le support du faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{O}_X/I$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_X/I) &= \{x \in X : x^*(\mathscr{O}_X/I) \neq 0\}\\ &= \{x \in X : x^* I \neq x^* \mathscr{O}_X\},\end{aligned}$$

est une partie fermée de X. On le munit de la structure de k-espace analytique en prenant la restriction de $\mathscr{O}_X/I$ à $\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_X/I)$ comme faisceau structural.

Définition 5.4. Soient X, Y des k-espaces analytiques. Un *morphisme de k-espaces analytiques* $f : X \to Y$ est un morphisme d'espaces localement annelés en k-algèbres.

L'ensemble des morphismes de k-espaces analytiques $f : X \to Y$ est noté $\mathrm{Mor}_{k\text{-an}}(X, Y)$.

Remarque 5.5. Si $k = \mathbf{C}$, on retrouve les notions usuelles de $\mathbf{C}$-espaces analytiques et de morphismes entre eux.

Si $k = \mathbf{R}$, la catégorie qu'on obtient est équivalente à la catégorie des couples (X, ι_X) formés d'un $\mathbf{C}$-espace analytique et d'une involution anti-holomorphe $\iota_X : X \to X$ (voir Remarque 5.20).

5.1.4. Structure locale des espaces analytiques complexes. — Si $k = \mathbf{C}$ il s'agit de faits classiques, dont une référence peut être [Car52, exposé 11] et [Car54, exposé 6].

Théorème 5.6. *Soit* X *un k-espace analytique. Alors :*

i. pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est noethérien ;

ii. le faisceau $\mathscr{O}_X$ est cohérent en tant que faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules.

5.1.5. Structure locale des espaces analytiques réels. — Dans ce numéro on montre comme la description locale de l'espace affine analytique réel se déduit par descente de Galois de celle de l'espace affine analytique complexe. Dans [Poi12] on peut trouver une preuve directe de ces faits (Théorèmes 8.17 et 10.9).

Soient $n \geq 1$ un nombre entier et un ouvert $U \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ stable sous la conjugaison complexe. On note $\varpi : \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ le morphisme quotient. L'ouvert $\varpi^{-1}U \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$ est stable sous la conjugaison complexe et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ agit sur les sections sur $\varpi^{-1}U$ du faisceau structural $\Gamma(\varpi^{-1}U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}})$ en associant à toute fonction holomorphe f la fonction holomorphe

$$\tau(f) : z \mapsto \overline{f(\tau(z))} = \overline{f(\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})}.$$

Par définition, les sections sur U du faisceau structural de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ s'identifient aux sections invariantes sous l'action de Galois,

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}}) := \Gamma(\varpi^{-1}U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}})^{\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})}.$$

Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $\varpi^{-1}U$: elle s'écrit de manière unique alors sous la forme $f = u + \boldsymbol{i} v$ où

$$u := \frac{f + \tau(f)}{2}, \qquad v := \frac{1}{\boldsymbol{i}} \frac{f - \tau(f)}{2},$$

(où $\boldsymbol{i}$ est une racine carrée de -1) sont des fonctions holomorphes invariantes sous l'action de Galois, c'est-à-dire, des éléments de $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}})$. Ceci montre que pour tout ouvert $U \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ l'homomorphisme canonique de $\mathbf{C}$-algèbres

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow \Gamma(\varpi^{-1}U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}})$$

est un isomorphisme. En particulier, la $\mathbf{C}$-algèbre $\Gamma(\varpi^{-1}\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}})$ est un $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}})$ module libre de rang 2 et le morphisme d'espaces localement annelé en $\mathbf{R}$-algèbres $\varpi : \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ est un morphisme fini et fidèlement plat.

Soit $x \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ un point. On considère les germes des fonctions holomorphes autour de la fibre du morphisme ϖ en le point x,

$$\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)} := \varinjlim_{\varpi^{-1}(x)\subset \mathrm{U}} \Gamma(\mathrm{U},\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}).$$

L'inclusion canonique $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}},x} \to \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}},x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)}.$$

Proposition 5.7. *Pour tout point $x \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}},x}$ est noethérien.*

Démonstration. On remarque d'abord que la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)}$ est noethérienne. La fibre $\varpi^{-1}(x)$ est en fait constitué d'un ou deux points de l'espace affine anlytique complexe et on a

$$\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)} = \prod_{\varpi(y)=x} \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},y}.$$

En tant que produit fini d'anneaux noethériens, l'anneau $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)}$ est noethérien. Soit I un idéal de l'anneau $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}},x}$. L'idéal $\mathrm{I} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ de l'anneau $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)}$ est de type fini : il existe donc $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{I}$ qui l'engendrent. Pour tout $f \in \mathrm{I}$ il existe $a_1,\dots,a_n \in \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)}$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

D'autre part, comme f et les f_i sont fixes sous l'action de Galois, on a

$$\begin{aligned} f = \frac{f+\tau(f)}{2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i f_i + \tau(a_i f_i)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i f_i + \tau(a_i) f_i}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i + \tau(a_i)}{2}\right) f_i. \end{aligned}$$

Pour tout $i = 1,\dots,n$ la fonction

$$b_i := \frac{a_i + \tau(a_i)}{2}$$

est fixe sous l'action de Galois et elle appartient donc à $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}},x}$. Les fonctions $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{I}$ engendrent alors l'idéal I dans $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}},x}$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 5.8. *Soit* X *un* $\mathbf{R}$*-espace analytique. Alors pour tout $x \in \mathrm{X}$ l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est noethérien.*

Soient $\mathrm{U} \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ un ouvert, $\mathrm{U}_{\mathbf{C}} := \varpi^{-1}\mathrm{U}$ et F un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules. L'image inverse $\varpi^*\mathrm{F}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\mathbf{C}}}$-modules et il est muni d'une action équivariante du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. Pour tout point $x \in \mathrm{U}$, les germes des sections de $\varpi^*\mathrm{F}$ autour de la fibre $\varpi^{-1}(x)$,

$$\left(\varpi^*\mathrm{F}\right)_{\varpi^{-1}(x)} := \varinjlim_{\varpi^{-1}(x)\subset \mathrm{V}} \Gamma(\mathrm{V},\varpi^*\mathrm{F})$$

sont alors munies d'une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ et l'homomorphisme injectif $\mathrm{F}_x \to (\varpi^*\mathrm{F})_{\varpi^{-1}(x)}$ induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\mathbf{C}},\varpi^{-1}(x)}$-modules

$$\mathrm{F}_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow (\varpi^*\mathrm{F})_{\varpi^{-1}(x)}.$$

En particulier l'homomorphisme naturel de faisceaux de $\varpi^{-1}\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules, $\varpi^{-1}\mathrm{F} \to \varpi^{*}\mathrm{F}$, induit un isomorphisme canonique de faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\mathbf{C}}}$-modules,

$$\varpi^{-1}\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow \varpi^{*}\mathrm{F}.$$

D'autre part, le groupe de Galois agit sur le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules $\varpi_{*}\varpi^{*}\mathrm{F}$ et l'homomorphisme d'adjonction $\mathrm{F} \to \varpi_{*}\varpi^{*}\mathrm{F}$ induit un isomorphisme de faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules

$$\theta : \mathrm{F} \longrightarrow \left(\varpi_{*}\varpi^{*}\mathrm{F}\right)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})}. \tag{5.1.1}$$

Proposition 5.9. *Soient* $\mathrm{U} \subset \mathbf{A}^{n}_{\mathbf{R}}$ *un ouvert et* $\mathrm{U}_{\mathbf{C}} := \varpi^{-1}\mathrm{U}$. *Un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$*-modules* F *si et seulement si le faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\mathbf{C}}}$*-modules* $\varpi^{*}\mathrm{F}$ *l'est.*

Démonstration. Comme le foncteur image inverse est exact à droite, si F est de type fini, $\varpi^{*}\mathrm{F}$ l'est aussi. On suppose donc que l'image inverse $\varpi^{*}\mathrm{F}$ soit de type fini. Soit x un point de $\mathbf{A}^{n}_{\mathbf{R}}$. Il s'agit de trouver un voisinage ouvert U de x et un nombre fini de sections $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{F})$ qui engendrent $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}}$.

On prouve d'abord qu'il existe un voisinage V de la fibre $\varpi^{-1}(x)$ stable sous la conjugaison complexe et tel que $\varpi^{*}\mathrm{F}$ soit engendré un nombre fini de sections sur V. Si la fibre $\varpi^{-1}(x)$ de ϖ en x est constitué d'un seul point y il suffit d'appliquer l'hypothèse de finitude au voisinage de y et de le restreindre pour le rendre stable sous l'action de Galois. Si la fibre $\varpi^{-1}(x)$ est formée de deux points distincts y_1, y_2 on considère pour $i = 1, 2$ un voisinage V_i de y_i tel que $\varpi^{*}\mathrm{F}|_{\mathrm{V}_i}$ soit engendré par un nombre fini de sections sur V_i. Puisque l'espace topologique $\varpi^{-1}(\mathrm{U})$ est séparé, on peut supposer que V_1 et V_2 ne se rencontrent pas. De plus, quitte à les restreindre, on peut aussi supposer que l'ouvert

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \sqcup \mathrm{V}_2$$

soit stable sous l'action de Galois. Les sections de $\varpi^{*}\mathrm{F}$ sur V s'identifient à la somme directe des sections sur V_1 et V_2 : l'ouvert V donc convient.

Soit donc V un tel voisinage et soient $s_1, \dots, s_r$ des sections de $\varpi^{*}\mathrm{F}$ sur V. Comme V est stable sous la conjugaison complexe, les sections de $\varpi^{*}\mathrm{F}$ sur V s'identifient à travers l'injection canonique

$$\Gamma(\varpi(\mathrm{V}), \mathrm{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{V}, \varpi^{*}\mathrm{F}),$$

à $\Gamma(\varpi(\mathrm{V}), \mathrm{F}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$: on peut donc supposer que les sections $s_1, \dots, s_r$ soient fixes sous l'action de Galois, *i.e.*, elles soient des sections de F sur $\varpi(\mathrm{V})$. Les sections $s_1, \dots, s_n$ engendrent alors $\mathrm{F}|_{\varpi(\mathrm{V})}$.

En effet soit $x' \in \varpi(\mathrm{V})$ et $s \in \mathrm{F}_{x'}$ un germe de section de F au voisinage de x'. En mimant l'argument d'avant, on peut trouver un voisinage W de la fibre $\varpi^{x'}$ stable sous la conjugaison complexe et des sections $f_1, \dots, f_r$ du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\mathbf{C}}}$ telles que

$$s = \sum_{i=1}^{r} f_i s_i.$$

Comme les sections s et s_i sont fixes sous l'action de Galois, on a :

$$\begin{aligned} s = \frac{f + \tau(s)}{2} &= \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i s_i + \tau(f_i s_i)}{2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i s_i + \tau(f_i) s_i}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{f_i + \tau(f_i)}{2}\right) s_i. \end{aligned}$$

Pour tout $i = 1, \dots, r$ la section du faisceau structural

$$g_i := \frac{f_i + \tau(f_i)}{2}$$

est fixe sous l'action de Galois et elle appartient donc à $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}})$. Les sections $s_1,\ldots,s_r$ engendrent alors la tige $\mathrm{F}_{x'}$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 5.10. *Pour tout* $\mathbf{R}$*-espace analytique* X*, le faisceau structural* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$ *est cohérent en tant que faisceau de* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-modules.*

Remarque 5.11. Soient $\mathrm{U}\subset\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ un ouvert, I un faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_\mathrm{U}$ de type fini et $\mathrm{Z}=\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_\mathrm{U}/\mathrm{I})$ le sous-$\mathbf{R}$-espace analytique fermé définit par le faisceau d'idéaux I. Puisque le morphisme d'espaces localement annelé $\varpi:\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}\to\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ est plat, le foncteur image inverse est exact et le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\mathbf{C}}$-modules $\mathrm{I}_\mathbf{C}:=\varpi^*\mathrm{I}$ (où $\mathrm{U}_\mathbf{C}:=\varpi^{-1}\mathrm{U}$) est un faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\mathbf{C}}$ de type fini. On note $\mathrm{Z}_\mathbf{C}:=\mathrm{Supp}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\mathbf{C}}/\mathrm{I}_\mathbf{C}$ le sous-$\mathbf{C}$-espace analytique fermé de $\mathrm{U}_\mathbf{C}$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathrm{I}_\mathbf{C}$.

Par platitude de ϖ, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\mathbf{C}}/\mathrm{I}_\mathbf{C}=\varpi^*(\mathscr{O}_\mathrm{U}/\mathrm{I})$. Il suit de l'isomorphisme (5.1.1) que le morphisme d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres $\varpi:\mathrm{Z}_\mathbf{C}\to\mathrm{Z}$ descend en un isomorphisme

$$\mathrm{Z}_\mathbf{C}/\,\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})\longrightarrow\mathrm{Z},$$

où le quotient est pris au sens de quotient catégorique dans la catégorie des espaces localement annelés (voir paragraphe 5.1.1).

5.1.6. Détérmination des morphismes à valeurs dans $\mathbf{A}^n_k$. — Soit X un $\mathbf{C}$-espace analytique. La composition avec le morphisme naturel d'espaces localement annelés en $\mathbf{C}$-algèbres $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}\to\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t_1,\ldots,t_n]$ définit une application

$$\varphi_\mathbf{C}:\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}\text{-an}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}})\longrightarrow\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}\text{-locan}}(\mathrm{X},\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t_1,\ldots,t_n])=\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X})^n.$$

Théorème 5.12 ([Gro61c, Théorème 1.1])**.** *Soit* X *un* $\mathbf{C}$*-espace analytique. L'application*

$$\varphi_\mathbf{C}:\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}\text{-an}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}})\longrightarrow\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X})^n$$

est une bijection.

Soient k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne et X un k-espace analytique. Comme avant, la composition avec le morphisme naturel d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}\to\mathrm{Spec}\,\mathbf{R}[t_1,\ldots,t_n]$ définit une application

$$\varphi_\mathbf{R}:\mathrm{Mor}_{\mathbf{R}\text{-locan}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}})\longrightarrow\mathrm{Mor}_{\mathbf{R}\text{-locan}}(\mathrm{X},\mathrm{Spec}\,\mathbf{R}[t_1,\ldots,t_n])=\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X})^n.$$

Théorème 5.13. *Soient k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne et* X *un k-espace analytique. L'application*

$$\varphi_\mathbf{R}:\mathrm{Mor}_{\mathbf{R}\text{-an}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}})\longrightarrow\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X})^n$$

est une bijection.

Démonstration. On suppose d'abord que k soit le corps des complexes $\mathbf{C}$ et que X soit un $\mathbf{C}$-espace analytique. La composition avec le morphisme d'espaces annelés en $\mathbf{R}$-algèbres $\varpi_\mathbf{C}:\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}\to\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ définit une application

$$\theta:\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}\text{-an}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}})\longrightarrow\mathrm{Mor}_{\mathbf{R}\text{-locan}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}),$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}\text{-an}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\ \theta\ } & \mathrm{Mor}_{\mathbf{R}\text{-locan}}(\mathrm{X},\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}})\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_\mathbf{C}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_\mathbf{R}}\\ \Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X}) & = & \Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X})\end{array}$$

est commutatif. L'application $\varphi_{\mathbf{C}}$ étant bijective en vertu du Théorème 5.12, l'application $\varphi_{\mathbf{R}}$ est surjective : il s'agit donc d'en prouver l'injectivité. Il suffit de montrer que tout morphisme d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres $f : X \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ se factorise de manière unique à travers un morphisme de $\mathbf{C}$-espaces analytiques $f_{\mathbf{C}} : X \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$.

Soit $x \in X$. Par définition de morphisme d'espaces localement annelés, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}}) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \arrow[d] \\
\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}, f(x)} \arrow[r, "f^\sharp_x"] \arrow[d] & \mathscr{O}_{X,x} \arrow[d] \\
\kappa(f(x)) \arrow[r, "f^\sharp(x)"] & \kappa(x) = \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Au niveau ensembliste, l'application f est uniquement déterminée par l'image des sections t_i dans $\mathbf{C}$ à travers l'homomorphisme $f^\sharp(x)$. L'application $f_{\mathbf{C}}$ est alors définie par

$$f_{\mathbf{C}}(x) = (f^\sharp(x)(t_1), \dots, f^\sharp(x)(t_n))$$

et, comme $f = \varpi_{\mathbf{C}} \circ f_{\mathbf{C}}$, elle est automatiquement continue. De plus, pour tout ouvert $U \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$, il n'existe qu'un seul homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$f^\sharp_{U,\mathbf{C}} : \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}}) \arrow[r, "f^\sharp_U"] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \arrow[d, equal] \\
\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \arrow[r, "f^\sharp_{U,\mathbf{C}}"] & \Gamma(X, \mathscr{O}_X)
\end{tikzcd}$$

En vertu de l'isomorphisme canonique de faisceaux de $\mathbf{C}$-algèbres $\varpi^{-1}\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}}$, on conclut qu'il n'existe qu'un unique morphisme d'espaces localement annelés en $\mathbf{C}$-algèbres $f_{\mathbf{C}} : X \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$ tel que $f = \varpi_{\mathbf{C}} \circ f_{\mathbf{C}}$.

On suppose désormais que X soit un $\mathbf{R}$-espace analytique et on va démontrer que l'application $\varphi_{\mathbf{R}}$ est bijective. La question étant locale sur X on peut supposer d'avoir une immersion de $\mathbf{R}$-espaces analytiques $\varepsilon : X \to \mathbf{A}^m_{\mathbf{R}}$. Soit U le plus grand ouvert de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ où l'image de ε est fermée et I le noyau de l'homomorphisme de faisceaux de $\mathbf{R}$-algèbres $\varepsilon^\sharp : \mathscr{O}_U \to \varepsilon_*\mathscr{O}_X$. On note encore $\varpi_{\mathbf{C}} : \mathbf{A}^m_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^m_{\mathbf{R}}$ le morphisme d'extension des scalaires et on considère l'ouvert $U_{\mathbf{C}} := \varpi_{\mathbf{C}}^{-1} U \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$ et le faisceau $I_{\mathbf{C}} := \varpi_{\mathbf{C}}^* I$ d'idéaux de $\mathscr{O}_{U_{\mathbf{C}}}$ de type fini. On considère le sous-$\mathbf{C}$-epsace analytique fermé $X_{\mathbf{C}} = \mathrm{Supp}\mathscr{O}_{U_{\mathbf{C}}}/I_{\mathbf{C}}$ définit par le faisceau d'idéaux $I_{\mathbf{C}}$. Le morphisme $\varpi_{\mathbf{C}}$ induit un isomorphisme d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres

$$X_{\mathbf{C}} / \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow X$$

où le quotient est pris au sens de quotient catégorique dans la catégorie des espaces localement annelés (voir Remarque 5.11). Se donner un morphisme de $\mathbf{R}$-espaces analytiques $f : X \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ revient ainsi à se donner un morphisme $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$-équivariant de $\mathbf{C}$-espaces analytiques $f_{\mathbf{C}} : \mathrm{X}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire, en vertu du Théorème 5.12, un n-uplet $(f_1, \dots, f_n)$ de sections globales de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathbf{C}}}$ fixes sous l'action du groupe de Galois. D'après de l'isomorphisme canonique

$$\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \Gamma(\mathrm{X}_{\mathbf{C}}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathbf{C}}})^{\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})},$$

cela revient à un n-uplet $(f_1, \dots, f_n)$ de sections globales de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Cela termine la preuve. □

5.1.7. Produit fibré. — Soient X, Y et S des k-espaces analytiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ des morphismes de k-espaces analytiques. Un *produit fibré* de X et Y sur S est un k-espace analytique Z muni de morphismes de k-espaces analytiques $p : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$, $q : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ tels que $f \circ p = g \circ q$ satisfaisant à la propriété universelle suivante :

> *pour tout k-espace analytique Z' muni de morphismes de k-espaces analytiques $p' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{X}$, $q' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Y}$ tels que $f \circ p' = g \circ q'$ il existe un unique morphisme de k-espaces analytiques $(p', q') : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Z}$ tel que $p' = p \circ (p', q')$ et $q' = q \circ (p', q')$.*

Théorème 5.14. *Soient* X, Y *et* S *des k-espaces analytiques, et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ des morphismes k-espaces analytiques. Alors, le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ existe.*

Lemme 5.15. *Soient* X *et* Y *des k-espaces analytiques et soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de k-espaces analytiques. Soient X' un k-espace analytique et $\varepsilon : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ une immersion de présentation finie de k-espace analytique.*

Alors le produit fibré $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ existe, le morphisme de k-espaces analytiques $\varepsilon \times \mathrm{id} : \mathrm{X}' \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ est une immersion de présentation finie et elle est ouverte, resp. fermée, lorsque ε l'est.

Démonstration. On suppose que ε soit une immersion ouverte. Le produit $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ est alors donné par le sous-espace analytique ouvert $f^{-1}(\mathrm{X}')$ de Y.

On suppose que ε soit une immersion fermée de présentation finie. Soit I le noyau de l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\varepsilon^\sharp : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to \varepsilon_* \mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$. L'image de l'homomorphisme canonique $f^*\mathrm{I} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ est un faisceaux J d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ de type fini. Le produit $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ est le sous-espace analytique fermé de Y décrit par l'idéal J.

Le cas d'une immersion en général suit de la combinaison des deux cas précédents. □

Lemme 5.16. *Soient X_1, X_2 des k-espaces analytiques. Pour tout $i = 1, 2$, soit X'_i un k-espace analytique et $\varepsilon_i : \mathrm{X}'_i \to \mathrm{X}_i$ une immersion de présentation finie de k-espaces analytiques.*

Si le produit $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ existe, alors le produit $\mathrm{X}'_1 \times \mathrm{X}'_2$ existe, le morphisme de k-espaces analytiques $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 : \mathrm{X}'_1 \times \mathrm{X}'_2 \to \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ est une immersion de présentation finie et elle est ouverte, resp. fermée, lorsque ε_1 et ε_2 le sont.

Démonstration. On pose $\mathrm{Y} := \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$. D'après le lemme précédent, pour tout $i = 1, 2$, le produit fibré $\mathrm{Y}_i = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}_i} \mathrm{X}'_i$ existe et $\eta_i = \mathrm{id} \times \varepsilon_i : \mathrm{Y}_i \to \mathrm{Y}$ est une immersion de présentation finie. Par le lemme précédent, le produit fibré $\mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}_2 = \mathrm{X}'_1 \times \mathrm{X}'_2$ existe et le morphisme

$$\eta_1 \times \eta_2 : \mathrm{X}'_1 \times \mathrm{X}'_2 = \mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}_2 \to \mathrm{Y} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$$

coïncide avec le morphisme $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$. □

Lemme 5.17. *Soient* X *et* Y *des k-espaces analytiques. Soient $\{\mathrm{X}_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de* X *et $\{\mathrm{Y}_j\}_{j \in \mathrm{J}}$ un recouvrement ouvert de* Y. *Si, pour tout $i \in \mathrm{I}$ et pour tout $j \in \mathrm{J}$, le produit $\mathrm{X}_i \times \mathrm{Y}_j$ existe, alors $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ existe.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathrm{I}$ et $j \in \mathrm{J}$ soit $\mathrm{Z}_{ij} = \mathrm{X}_i \times \mathrm{Y}_j$. Pour tous $i, i' \in \mathrm{I}$ et pour tous $j, j' \in \mathrm{J}$, en vertu du lemme précédent, le produit

$$\mathrm{Z}_{ij,i'j'} = (\mathrm{X}_i \cap \mathrm{X}_{i'}) \times (\mathrm{Y}_j \cap \mathrm{Y}_{j'})$$

existe et s'identifie à un ouvert de Z_{ij} et $\mathrm{Z}_{i'j'}$. Ces isomorphismes permettent de recoller les Z_{ij} en un espace analytique Z, muni de deux projections $p : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$, $q : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$. On vérifie aussitôt que Z est un produit de X et Y. □

Soient X, Y des k-espaces analytiques. Pour prouver que $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ existe on peut se ramener, grâce aux lemmes précédents, au cas où $\mathrm{X} = \mathbf{A}_k^m$ et $\mathrm{Y} = \mathbf{A}_k^n$: par la propriété universelle de l'espace affine, le produit de $\mathbf{A}_k^m$ et $\mathbf{A}^n : k$ est $\mathbf{A}_k^{m+n}$.

Soient $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ des morphismes de k-espaces analytiques. Le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ s'identifie au produit fibré

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \times_{\mathrm{S}\times\mathrm{S}} \mathrm{S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S} \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \arrow[r, "f \times g"] & \mathrm{S} \times \mathrm{S}
\end{tikzcd}$$

On conclu grâce au lemme suivant :

Lemme 5.18. *Soit* S *un k-espace analytique. Alors le morphisme diagonal* $\Delta_{\mathrm{S}} : \mathrm{S} \to \mathrm{S} \times \mathrm{S}$ *est une immersion de présentation finie.*

Démonstration. D'après les lemmes précédents, on peut supposer $\mathrm{S} = \mathbf{A}_k^n$. Dans ce cas $\mathrm{S} \times \mathrm{S} = \mathbf{A}_k^{2n}$ et, si $t_1, \ldots, t_{2n}$ sont les coordonnées de $\mathbf{A}_k^{2n}$, le morphisme diagonal s'identifie à l'immersion du sous-espace analytique fermé décrit par l'idéal engendré par les éléments $t_{i+n} - t_i$ avec $i = 1, \ldots, n$. □

5.1.8. Complexification. —

Théorème 5.19. *Soit* X *un* **R**-*espace analytique. Le foncteur*

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{X}}_{\mathbf{C}} : \ \{\, \mathbf{C}\text{-espaces analytiques} \,\} &\longrightarrow \{\, \text{ensembles} \,\} \\
\mathrm{Y} &\longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathbf{R}\text{-locan}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})
\end{aligned}$$

est représentable par un **C**-*espace analytique* $\mathrm{X}_{\mathbf{C}}$ *muni d'un morphisme fini, fidèlement plat d'espaces localement annelés en* **R**-*algèbres* $\varpi_{\mathbf{C}} : \mathrm{X}_{\mathbf{C}} \to \mathrm{X}$.

De plus, le **C**-*espace analytique* $\mathrm{X}_{\mathbf{C}}$ *est muni d'une action du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ *et le morphisme* $\varpi_{\mathbf{C}}$ *induit un isomorphisme d'espaces localement annelés en* **R**-*algèbres*

$$\mathrm{X}_{\mathbf{C}} / \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{X}.$$

Remarque 5.20. En particulier, se donner un morphisme de **R**-espaces analytiques $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est équivalent à se donner un morphisme $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$-équivariant de **C**-espaces analytiques $f_{\mathbf{C}} : \mathrm{X}_{\mathbf{C}} \to \mathrm{Y}_{\mathbf{C}}$.

On se ramène à le prouver quand $\mathrm{X} = \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^n$ comme suit.

Lemme 5.21. *Soient* X, Y *des* **R**-*espaces analytiques et* $\varepsilon : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *une immersion de* **R**-*espaces analytiques. Si le* **R**-*espace analytique* X *vérifie la conclusion du Théorème 5.19, alors* Y *la vérifie.*

Démonstration. Soit $\varpi_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} \to X$ le morphisme d'espaces localement en $\mathbf{R}$-algèbres induit par la complexification de X. Si ε est une immersion ouverte, la complexification de $Y_{\mathbf{C}}$ est l'image inverse $\varpi_{\mathbf{C}}^{-1}Y$ de Y par $\varpi_{\mathbf{C}}$.

Si ε soit une immersion fermée de $\mathbf{R}$-espaces analytiques, soit I le noyau de l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\varepsilon^{\sharp} : \mathscr{O}_X \to \varepsilon_* \mathscr{O}_Y$. Le morphisme $\varpi_{\mathbf{C}}$ étant plat, l'image réciproque $I_{\mathbf{C}} := \varpi_{\mathbf{C}}^*$ du faisceau d'idéaux I est un faisceaux $I_{\mathbf{C}}$ d'idéaux de $\mathscr{O}_{X_{\mathbf{C}}}$ de type fini. La complexification de Y est alors le sous-espace analytique fermé de $X_{\mathbf{C}}$ défini par $I_{\mathbf{C}}$. L'assertion sur le quotient découle de la Remarque 5.11.

Le cas d'une immersion quelconque suit de la combinaison des deux cas précédents. □

Lemme 5.22. *Soient* X *un* $\mathbf{R}$*-espace analytique et* $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ *un recouvrement ouvert de* X. *Si pour tout* $i \in I$, *le* $\mathbf{R}$*-espace analytique* X_i *vérifie la conclusion du Théorème 5.19, le* $\mathbf{R}$*-espace analytique* X *la vérifie aussi.*

Démonstration. Pour tous $i, j \in I$ et $j \in J$ soit $X_{ij} = X_i \cap X_j$. En vertu du Lemme précédent, pour tous $i, j \in I$, l'ouvert X_{ij} de X_i vérifie la conclusion du Théorème 5.19 et la complexification de X_{ij} s'identifie à un ouvert de $(X_i)_{\mathbf{C}}$. On obtient ainsi, pour tous $i, j \in I$, un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces analytiques $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$-équivariant

$$\theta_{ij} : \big(X_{ij}\big)_{\mathbf{C}} \longrightarrow \big(X_{ji}\big)_{\mathbf{C}}.$$

Les $\mathbf{C}$-espaces analytique $(X_i)_{\mathbf{C}}$ se recollent le long les isomorphismes θ_{ij} en un $\mathbf{C}$-espace analytique $X_{\mathbf{C}}$. Par propriété universelle du recollement, le $\mathbf{C}$-space analytique $X_{\mathbf{C}}$ est une complexification de X. L'assertion sur l'action du groupe de Galois suit de la $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$-équivariance des isomorphismes θ_{ij}. □

On est donc ramené à prouver le Théorème 5.19 pour l'espace affine $X = \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$. Dans ce cas $X_{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$ et le Théorème 5.19 est une conséquence du Théorème 5.13.

Proposition 5.23. *Soient* X, Y *et* S *des* $\mathbf{R}$*-espaces analytiques et* $f : X \to S$, $g : Y \to S$ *des morphismes de* $\mathbf{R}$*-espaces analytiques. Alors, le morphisme naturel de* $\mathbf{C}$*-espaces analytiques*

$$(X \times_S Y)_{\mathbf{C}} \longrightarrow X_{\mathbf{C}} \times_{S_{\mathbf{C}}} Y_{\mathbf{C}}$$

est un isomorphisme.

5.1.9. Analytification. —

Théorème 5.24. *Soit* X *un schéma localement de type fini sur* k. *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \underline{X}^{\mathrm{an}} : \{k\text{-espaces analytiques}\} &\longrightarrow \{\text{ensembles}\} \\ Y &\longmapsto \mathrm{Mor}_{k\text{-locan}}(Y, X) \end{aligned}$$

est représentable par un k*-espace analytique* X^{an} *muni d'un morphisme d'espace localement annelés en* k*-algèbres* $\theta_X : X^{\mathrm{an}} \to X$.

On se ramène à le prouver pour $X = \mathbf{A}^n_k$.

Lemme 5.25. *Soient* X, Y *des* k*-schémas localement de type fini et* $\varepsilon : Y \to X$ *une immersion. Si le foncteur* $\underline{X}^{\mathrm{an}}$ *est représentable, alors le foncteur* $\underline{Y}^{\mathrm{an}}$ *est aussi représentable.*

Démonstration. Soit $\theta_X : X^{an} \to X$ le morphisme d'espaces localement en k-algèbres induit par l'analytification de X. Si ε est une immersion ouverte, l'analytification de Y est l'image inverse $\theta_X^{-1}Y$ de Y par θ_X.

Si ε soit une immersion fermée de k-schémas, soit I faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ qui définit Y. L'image de l'homomorphisme canonique $\theta_X^* I \to \mathcal{O}_{X^{an}}$ est un faisceaux I^{an} d'idéaux de $\mathcal{O}_{X^{an}}$ de type fini. L'analytification de Y est alors le sous-k-espace analytique fermé de X^{an} défini par I^{an}.

Le cas d'une immersion quelconque suit de la combinaison des deux cas précédents. □

Lemme 5.26. *Soient* X *un k-schéma localement de type fini et* $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ *un recouvrement ouvert de* X. *Si pour tout $i \in I$, le foncteur $\underline{X}_i^{an}$ est représentable, alors le foncteur $\underline{X}^{an}$ l'est aussi.*

Démonstration. Pour tous $i, j \in I$ et $j \in J$ soit $X_{ij} = X_i \cap X_j$. En vertu du Lemme précédent, pour tous $i, j \in I$, le foncteur $\underline{X}_{ij}^{an}$ est représentablepar un ouvert de $(X_i)^{an}$. On obtient ainsi, pour tous $i, j \in I$, un isomorphisme de k-espaces analytiques

$$\varphi_{ij} : \left(X_{ij}\right)^{an} \longrightarrow \left(X_{ji}\right)^{an}.$$

Les k-espaces analytique $(X_i)^{an}$ se recollent le long les isomorphismes φ_{ij} en un k-espace analytique X^{an}. Par propriété universelle du recollement, le k-space analytique X^{an} représente le foncteur $\underline{X}^{an}$. □

On est donc ramené à prouver le Théorème 5.24 pour l'espace affine $X = \mathbf{A}_k^n$. Dans ce cas $X^{an} = \mathbf{A}_k^{n,an}$ et le Théorème 5.24 est une conséquence du Théorème 5.12 pour $k = \mathbf{C}$ et du Théorème 5.13 pour $k = \mathbf{R}$.

Proposition 5.27. *Soient* X, Y *et* S *des k-schémas localement de type fini et $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphisme de k-schémas. Alors, le morphisme naturel de k-espaces analytiques*

$$(X \times_S Y)^{an} \longrightarrow X^{an} \times_{S^{an}} Y^{an}$$

est un isomorphisme.

Proposition 5.28 (Compatibilité aux extensions des scalaires)**.** *Soit* X *un* **R***-schéma localement de type fini. Le* **C***-schéma* $X_{\mathbf{C}}$ *qui s'en déduit par extension des scalaires est localement de type fini et le morphisme naturel de* **C***-espaces analytiques*

$$\left(X^{an}\right)_{\mathbf{C}} \longrightarrow (X_{\mathbf{C}})^{an}$$

est un isomorphisme.

Proposition 5.29 (Adhérence analytique d'une partie constructible)**.** *Soient* X *un k-schéma localement de type fini et* $\theta_X : X^{an} \to X$ *le morphisme de k-espaces analytiques induit par analytification. Alors, pour toute partie constructible* $Z \subset |X|$, *l'inclusion naturelle*

$$\theta_X^1(\overline{Z}) \subset \overline{\theta_X^1(Z)}$$

est une égalité.

Démonstration. Si $k = \mathbf{C}$ c'est [SGA 1, Exposé XII]. Puisque le foncteur d'analytification est compatible à la complexification, le cas réel se déduit du cas complexe car le morphisme d'extension des scalaires $\varpi_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}}^{an} \to X^{an}$ est propre au sens topologique. □

5.2 Espaces analytiques non archimédiens

Dans ce numéro on présente la notion de Berkovich d'espace analytique sur un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne. Elle est étudiée en détail en [Ber90] et [Ber93].

5.2.1. Anneaux de Banach et leur spectre. — Un *anneau de Banach* est un anneau muni d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|_{\mathrm{A}}$ pour laquelle il est complet. Son spectre est l'ensemble

$$\mathscr{M}(\mathrm{A}) = \{x : \mathrm{A} \to \mathbf{R}_+ \text{ semi-norme multiplicative} : x(f) \leq \|f\|_{\mathrm{A}} \ \forall f \in \mathrm{A}\}.$$

On le munit de la topologie la moins fine pour laquelle, lorsque f varie dans A, les applications $|f| : \mathscr{M}(\mathrm{A}) \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto x(f)$ sont continues. Si $\mathrm{A} \neq 0$, le spectre $\mathscr{M}(\mathrm{A})$ est un espace topologique non vide, séparé et compact [Ber90, Theorem 1.2.1].

Si A, B sont des anneaux de Banach, un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est dit *borné* s'il existe un nombre réel $\mathrm{C} > 0$ tel que, pour tout $f \in \mathrm{A}$ on ait

$$\|\varphi(f)\|_{\mathrm{B}} \leq \mathrm{C}\|f\|_{\mathrm{A}}.$$

Si $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un homomorphisme borné d'anneaux de Banach, la composition avec φ induit une application continue

$$\mathscr{M}(\varphi) : \mathscr{M}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{A}).$$

Soit k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne.

5.2.2. Algèbres affinoïdes. — Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs. On désigne par $k\{r_1^{-1} t_1, \dots, r_n^{-1} t_n\}$ la k-algèbre de Banach obtenue en complétant la k-algèbre des polynômes $k[t_1, \dots, t_n]$ par rapport à la norme

$$f = \sum_{\ell \in \mathbf{N}^n} a_\ell t_1^{\ell_1} \cdots t_n^{\ell_n} \mapsto \|f\|_r := \max_{\ell \in \mathbf{N}^n} |a_\ell| r_1^{\ell_1} \cdots r_n^{\ell_n}.$$

Une k-algèbre de Banach est dite *affinoïde* s'il existe un nombre entier $n \geq 1$, un n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres réels strictement positifs et un homomorphisme surjectif et continu de k-algèbres de Banach

$$\varphi : k\{r_1^{-1} t_1, \dots, r_n^{-1} t_n\} \longrightarrow \mathrm{A}$$

tels que la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{A}}$ de A soit équivalente à la norme quotient par l'homomorphisme φ,

$$g \in \mathrm{A} \mapsto \inf_{\varphi(f) = g} \|f\|_r.$$

Une k-algèbre affinoïde A est dite *strictement affinoïde* si un tel homomorphisme peut être choisi avec $r_i = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Puisque la k-algèbre $k\{r_1^{-1} t_1, \dots, r_n^{-1} t_n\}$ est noethérienne, une k-algèbre affinoïde est toujours noethérienne.

5.2.3. Espaces affinoïdes. — Soient A une k-algèbre affinoïde et $\mathrm{X} = \mathscr{M}(\mathrm{A})$ son spectre. Un *domaine affinoïde* de X est une partie $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ telle qu'il existe une k-algèbre affinoïde $\mathrm{A_V}$ et un homomorphisme borné de k-algèbres de Banach $\rho_{\mathrm{V}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A_V}$ satisfaisant à la propriété universelle suivante :

> *pour toute k-algèbre affinoïde* B *et pour tout homomorphisme borné de k-algèbres de Banach* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *tel que l'image de l'application induite* $\mathscr{M}(\mathrm{B}) \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$ *soit contenue dans* V, *il existe un unique homomorphisme de k-algèbres de Banach* $\varphi_{\mathrm{V}} : \mathrm{A_V} \to \mathrm{B}$ *tel que* $\varphi = \varphi_{\mathrm{V}} \circ \rho_{\mathrm{V}}$.

La k-algèbre affinoïde A_V est déterminée à un unique isomorphisme près par cette propriété et l'application naturelle $\mathscr{M}(A_V) \to V$ est un homéomorphisme.

La famille des domaines affinoïdes est stable par intersections finies et le Théorème d'Acyclicité de Tate [Ber90, Proposition 2.2.5] affirme que l'association $A \rightsquigarrow A_V$ est un faisceau sur le site des domaines affinoïdes.

Soit x un point du spectre X. L'anneau

$$\mathscr{O}_{X,x} := \varinjlim_{\substack{x\in V \\ \text{domaine} \\ \text{affinoïde}}} A_V$$

est un anneau local et noethérien [Ber93, Theorem 2.1.4]. La semi-norme multiplicative sur A qui définit le point x se prolonge à une semi-norme multiplicative sur $\mathscr{O}_{X,x}$ et on a

$$\mathfrak{m}_{X,x} = \{f \in \mathscr{O}_{X,x} : |f(x)| = 0\}.$$

Cette semi-norme induit une valeur absolue sur le *corps résiduel* en x, $\kappa(x) = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$. Sa complétion est appelée *corps résiduel complété* en x et notée $\widehat{\kappa}(x)$ (contrairement à la convention usuelle $\mathscr{H}(x)$).

5.2.4. Espaces analytiques. — Les k-espaces affinoïdes sont les briques des k-espaces analytiques. Puisque leur espace topologique sous-jacent est séparé et compact, leur recollement est plus délicat que dans le cas des schémas.

Définition 5.30. Soit X un espace topologique. Un *quasi-réseau* est une collection de parties de X vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in X$, il existe $V_1, \dots, V_n$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$, $x \in V_i$ et $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ est un voisinage de x.

Un quasi-réseau est dit *réseau* si pour tous $V, V' \in \tau$, la collection

$$\tau|_{V\cap V'} = \{W \in \tau : W \subset V \cap V'\}$$

est un quasi-réseau sur $V \cap V'$ (muni de la topologie induite par X).

Définition 5.31. Soit X un espace topologique localement séparé. Un *k-atlas affinoïde* sur X est un triplet (τ, A, ε) formé d'un réseau τ de parties compactes de X, d'un foncteur

$$A : \tau \longrightarrow \{\ k\text{-algèbres affinoïdes}\ \}$$

et d'une collection $\varepsilon = \{\varepsilon(V)\}_{V\in\tau}$ d'homéomorphismes $\varepsilon(V) : \mathscr{M}(A(V)) \to V$, vérifiant la propriété suivante : pour tous $W, V \in \tau$ avec $W \subset V$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}(A(W)) \arrow[r, "\varepsilon(W)"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathscr{M}(A(V)) \arrow[r, "\varepsilon(V)"] & V \end{tikzcd}$$

est commutatif, W s'identifie à un domaine affinoïde de V et A(W) à la k-algèbre affinoïde $A(V)_W$ associée à W comme domaine affinoïde de V.

Un k-atlas affinoïde (τ, A, ε) est dit *maximal* s'il satisfait, de plus, aux propriétés suivantes :

i. si $V \in \tau_X$ et $W \subset V$ est un domaine affinoïde, alors $W \in \tau_X$;

ii. si $V \subset X$ est un partie recouverte par $V_1, \dots, V_n \in \tau_X$ tels que
   – pour tout i, j, $V_i \cap V_j$ appartient à τ_X, l'homomorphisme borné de k-algèbres de Banach
$$A_X(V_i)\widehat{\otimes}_k A_X(V_j) \longrightarrow A_X(V_i \cap V_j)$$
   est surjectif et la norme sur $A_X(V_i \cap V_j)$ est équivalente à la norme quotient,
   – l'égalisateur $A_X(V)$ des flèches (dans la catégorie des k-algèbres de Banach)
$$\prod_{i=1}^{n} A_X(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^{n} A_X(V_i \cap V_j)$$
   est une k-algèbre affinoïde,
   – l'application continue naturelle $V \to \mathscr{M}(A_X(V))$ est un homéomorphisme, et pour tout $i = 1, \dots, n$, V_i s'identifie à un domaine affinoïde de V et $A_X(V_i)$ à la k-algèbre affinoïde associé à V_i comme domaine affinoïde de V,

   alors V appartient à τ_X.

Dans [Ber93, 1.2] (notamment les Propositions 1.2.6 et 1.2.13) Berkovich démontre qu'à partir d'un k-atlas affinoïde (τ, A, ε) on peut toujours construire un k-atlas affinoïde maximal $(\widehat{A}, \widehat{\tau}, \widehat{\varepsilon})$ « qui le contient », *i.e.*, muni d'un morphisme de k-atlas affinoïdes
$$(\widehat{A}, \widehat{\tau}, \widehat{\varepsilon}) \longrightarrow (A, \tau, \varepsilon).$$
L'adjectif maximal est dû au fait que le k-atlas affinoïde $(\widehat{A}, \widehat{\tau}, \widehat{\varepsilon})$ est stable sous cette construction, c'est-à-dire
$$(\widehat{\widehat{A}}, \widehat{\widehat{\tau}}, \widehat{\widehat{\varepsilon}}) = (\widehat{A}, \widehat{\tau}, \widehat{\varepsilon}).$$

Définition 5.32. Un *k-espace analytique* X est la donnée d'un espace topologique localement séparé $|X|$ et d'un k-atlas affinoïde maximal $(\tau_X, A_X, \varepsilon_X)$ tel que pour tout $x \in X$, la collection
$$\tau_x := \{V \in \tau_X : V \text{ voisinage de } x\}$$
est une base de voisinages de x.

Remarque 5.33. Cette définition correspond à la définition dans [Ber93] de *bon* k-espace analytique muni de son k-atlas affinoïde maximal. Dans cette thèse on ne se servira pas de la notion de k-espace analytique non bon.

Exemple 5.34. Si A est une k-algèbre affinoïde, on lui associe un k-espace analytique, dit encore *spectre* et noté $\mathscr{M}(A)$, comme suit :
$$\begin{aligned} |X| &= \mathscr{M}(A) \\ \tau_X &= \{V \subset |X| : V \text{ domaine affinoïde}\} \\ A_X(V) &= A_V = k\text{-algèbre affinoïde associée au domaine affinoïde } V \\ \varepsilon_X(V) &= \text{homéomorphisme canonique } \mathscr{M}(A_V) \to V. \end{aligned}$$
Il faut d'abord montrer que τ_X est un réseau sur X. On sait que les voisinages affinoïdes d'un point $x \in X$ forment une base de voisinages de x. Si V, V' sont des domaines affinoïdes de X et $x \in V \cap V'$, on considère un voisinage affinoïde W de x : la partie $V \cap V' \cap W$ est un domaine affinoïde de X et un voisinage de x dans $V \cap V'$ (par rapport à la topologie induite).

Par définition le triplet $(\tau_X, A_X, \varepsilon_X)$ est un atlas k-affinoïde sur X. Si V, V' sont des domaines affinoïdes, alors $V \cap V'$ est un domaine affinoïde, l'homomorphisme borné de k-algèbres de Banach

$$A_X(V)\widehat{\otimes}_k A_X(V') \longrightarrow A_X(V \cap V')$$

est surjectif et la norme de $A_X(V \cap V')$ est équivalente à la norme quotient. Il reste à vérifier que si $V_1, \dots, V_n$ sont des domaines affinoïdes de X et l'égalisateur des flèches

$$\prod_{i=1}^{n} A_X(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^{n} A_X(V_i \cap V_j)$$

est une k-algèbre affinoïde, alors $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$ est un domaine affinoïde. C'est une conséquence du Théorème d'Acyclicité de Tate : une référence est par exemple [Ber90, Corollary 2.2.6, iii.].

Exemple 5.35. Si X est un k-espace analytique, toute partie ouverte U de $|X|$ est munie d'une structure de k-espace analytique, en posant :

$$\begin{aligned} |U| &= U \\ \tau_U &= \{V \in \tau_X : V \subset U\} \\ A_U(V) &= A_U(V) \\ \varepsilon_U(V) &= \varepsilon_X(V). \end{aligned}$$

Les propriétés dans la définition de k-espace analytique sont automatiquement vérifiées.

5.2.5. Morphismes d'espaces analytiques. — Soient X, Y des k-espaces analytiques.

Définition 5.36. Un *morphisme de k-espaces analytiques* $f : X \to Y$ est un couple $(|f|, f^\sharp)$ formé d'une application continue $|f| : |X| \to |Y|$ et d'une collection d'homomorphismes bornés de k-algèbres de Banach

$$f^\sharp = \left\{ f^\sharp_{WV} : A_Y(W) \longrightarrow A_X(V) : V \in \tau_X, W \in \tau_Y \text{ tels que } |f|(V) \subset W \right\}$$

satisfaisant à la propriété suivante : pour tous $V, V' \in \tau_X$, pour tous $W, W' \in \tau_Y$ avec $V \subset V'$, $W \subset W'$, $|f|(V) \subset W$ et $|f|(V') \subset W'$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_Y(W') \arrow[r, "f^\sharp_{W'V'}"] \arrow[d] & A_X(V') \arrow[d] \\ A_Y(W) \arrow[r, "f^\sharp_{WV}"] & A_X(V) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

L'ensemble des morphismes de k-espaces analytiques $f : X \to Y$ est noté $\mathrm{Mor}_{k\text{-an}}(X, Y)$. Avec cette définition, les k-espaces analytiques forment une catégorie : elle est équivalente à la sous-catégorie pleine des k-espaces analytiques formée par les *bons* k-espaces analytiques au sens de [Ber93] (voir *loc. cit.*, Proposition 1.2.15 et 1.2.17) et à la catégorie des k-espaces analytiques au sens de [Ber90] (voir [Ber93, 1.5]).

La construction du spectre d'une k-algèbre affinoïde est fonctorielle et le foncteur $\mathscr{M} : A \mapsto \mathscr{M}(A)$ est pleinement fidèle.

La catégorie des k-espaces analytiques est munie de produit fibré.

5.2.6. Espace localement annelé associé et faisceaux cohérents. — Soit X un k-espace analytique. Le foncteur A_X est un faisceau sur le site τ_X et on considère le *faisceau structural* $\mathcal{O}_X$ sur l'espace topologique $|X|$ en posant, pour tout ouvert $U \subset |X|$,

$$\mathcal{O}_X(U) := \varprojlim_{\substack{V \subset U \\ V \in \tau_X}} A_X(V).$$

Le couple $(|X|, \mathcal{O}_X)$ est un espace localement annelé en k-algèbres. Le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est cohérent (en tant que $\mathcal{O}_X$-module) et, pour tout point $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien. En particulier, les concepts de faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules de présentation finie et de faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules coïncident.

Dans la suite, avec un abus de notation, on utilisera la même lettre pour désigner un k-espace analytique et l'espace localement annelé en k-algèbres associé.

5.2.7. Propriétés topologiques. — Puisque les k-espaces affinoïdes sont compacts et tout point d'un k-espace analytique admet une base de voisinages formée par des k-espaces affinoïdes, les espaces topologiques sous-jacents aux k-espaces analytiques sont localement compacts.

Même si en général les k-espaces analytiques sont loin d'être localement métrizables, Poineau [Poi11] a montré que toute partie compacte est séquentiellement compacte, *i.e.*, toute suite dans une partie compacte contient une sous-suite convergente.

En outre, les k-espaces analytiques admettent une base de la topologie formée par des ouverts localement compacts paracompacts et connexes par arcs [Ber93, 1.2.4].

5.2.8. Extension des scalaires. — Soit K une extension analytique de k, *i.e.* un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|_K$ muni d'un plongement isométrique $k \to K$. Si A est une k-algèbre affinoïde, la K-algèbre de Banach $A_K := A\widehat{\otimes}_k K$ est une K-algèbre affinoïde. L'inclusion canonique $A \to A_K$ induit une application continue et *surjective*

$$|\varpi_K| : |\mathcal{M}(A_K)| \longrightarrow |\mathcal{M}(A)|.$$

De plus, si $V \subset \mathcal{M}(A)$ est un domaine affinoïde, $V_K := \varpi_K^{-1}(V)$ est un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(A_K)$ et on a un isomorphisme canonique $A_V \widehat{\otimes}_k K \to (A_K)_{V_K}$. En particulier, on obtient un morphisme d'espaces localement annelés en k-algèbres $\varpi_K : \mathcal{M}(A_K) \to \mathcal{M}(A)$.

Si X est un k-espace analytique, cette construction se recolle et donne un K-espace analytique X_K muni d'un morphisme d'espaces localement annelés en k-algèbres

$$\varpi_{X,K} : X_K \longrightarrow X.$$

L'application $\varpi_{X,K}$ est surjective et propre au sens topologique ; puisque les espaces topologique sous-jacents aux espaces analytiques sont localement compacts, $\varpi_{X,K}$ est une application fermée.

La construction de l'extension des scalaires est fonctorielle et compatible à des extensions des scalaires successives.

5.2.9. Fibres. — Soit X un k-espace analytique, $x \in X$ un point et $\widehat{\kappa}(x)$ son corps résiduel complété. Le point x induit un morphisme de $\widehat{\kappa}(x)$-espaces analyttiques

$$\varepsilon_x : \mathcal{M}(\widehat{\kappa}(x)) \longrightarrow X_{\widehat{\kappa}(x)}.$$

Si F est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules, sa *fibre en x*, notée x^*F, est le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel de dimension finie $\varepsilon_x^* F$.

Soient Y un k-espace analytique et $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de k-espaces analytique. La *fibre en x de f*, notée Y_x, est le $\widehat{\kappa}(x)$-espace analytique

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}_x := \mathrm{Y}_{\widehat{\kappa}(x)} \times_{\mathrm{X}_{\widehat{\kappa}(x)}} \{x\} \arrow[r] \arrow[d] & \{x\} \arrow[d, "\varepsilon_x"] \\ \mathrm{Y}_{\widehat{\kappa}(x)} \arrow[r, "f_{\widehat{\kappa}(x)}"] & \mathrm{X}_{\widehat{\kappa}(x)} \end{tikzcd}$$

Le morphisme d'extension des scalaires $\varpi_{\mathrm{Y},\widehat{\kappa}(x)} : \mathrm{Y}_{\widehat{\kappa}(x)} \to \mathrm{Y}$ se restreint à un *homéomorphisme*

$$\mathrm{Y}_x \to f^{-1}(x).$$

5.2.10. Analytification. —

Théorème 5.37. *Soit* X *un k-schéma localement de type fini. Le foncteur*

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{X}}^{\mathrm{an}} : \{k\text{-espaces analytiques}\} &\longrightarrow \{\text{ensembles}\} \\ \mathrm{Y} &\longmapsto \mathrm{Mor}_{k\text{-locan}}(\mathrm{Y},\mathrm{X}) \end{aligned}$$

est représentable par un k-espace analytique X^{an} *muni d'un morphisme d'espace localement annelés en k-algèbres* $\theta_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \to \mathrm{X}$.

Si $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$ est affine, l'espace topologique sous-jacent à X^{an} est l'ensemble

$$\{x : \mathrm{A} \to \mathbf{R}_+ \text{ semi-norme multiplicative} : x|_k = |\cdot|_k\}$$

muni de la topologie la moins fine pour laquelle, lorsque f varie dans A, les applications $|f| : \mathscr{M}(\mathrm{A}) \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto x(f)$ sont continues.

Proposition 5.38. *Soient* X, Y *et* S *des k-schémas localement de type fini et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ des morphisme de k-schémas. Alors, le morphisme naturel de k-espaces analytiques*

$$(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \times_{\mathrm{S}^{\mathrm{an}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{an}}$$

est un isomorphisme.

Proposition 5.39 (Compatibilité aux extensions des scalaires)**.** *Soient* X *un k-schéma localement de type fini et* K *une extension analytique de k. Le* K*-schéma* X_{K} *qui s'en déduit par extension des scalaires est localement de type fini et le morphisme naturel de* K*-espaces analytiques*

$$\left(\mathrm{X}^{\mathrm{an}}\right)_{\mathrm{K}} \longrightarrow (\mathrm{X}_{\mathrm{K}})^{\mathrm{an}}$$

est un isomorphisme.

Proposition 5.40 (Adhérence analytique d'une partie constructible)**.** *Soient* X *un k-schéma localement de type fini et* $\theta_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \to \mathrm{X}$ *le morphisme de k-espaces analytiques induit par analytification. Alors, pour toute partie constructible* $\mathrm{Z} \subset |\mathrm{X}|$*, l'inclusion naturelle*

$$\theta_{\mathrm{X}}^{1}(\overline{\mathrm{Z}}) \subset \overline{\theta_{\mathrm{X}}^{1}(\mathrm{Z})}$$

est une égalité.

5.2.11. Espace affinoïde associé à un modèle entier. — Soit k° l'anneau des entiers de k, *i.e.*, l'ensemble des éléments de valeur absolue ≤ 1. Soient $\mathfrak{A}$ un k°-algèbre plate et de présentation finie et $\mathrm{A} := \mathfrak{A} \otimes k$. Pour tout $f \in \mathrm{A}$, on pose

$$\|f\|_{\mathfrak{A}} = \inf\{|\lambda| : \lambda \in k^\times, f/\lambda \in \mathfrak{A}\}.$$

L'application $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$ ainsi définie est une semi-norme sur A et la complétion $\widehat{\mathrm{A}}$ de A par rapport à $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$ est une k-algèbre affinoïde. Soient $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ et X^{an} le k-espace analytique obtenu par analytification de X. On dit que le domaine affinoïde

$$\mathscr{M}(\widehat{\mathrm{A}}) = \{x : \widehat{\mathrm{A}} \to \mathbf{R}_+ \text{ semi-norme multiplicative} : x(f) \leq \|f\|_{\mathfrak{A}}\ \forall f \in \widehat{\mathrm{A}}\} \subset \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$$

est l'*espace affinoïde associé au k°-schéma affine* $\mathfrak{X} = \operatorname{Spec} \mathfrak{A}$.

Remarque 5.41. Une telle construction peut se généraliser, par recollement, aux k°-schémas plats et de présentation finie. L'espace que l'on obtient *n'est pas* forcément un k-espace analytique à notre sens : en effet, il peut se passer qu'il existe des points n'admettant pas de voisinages affinoïdes.

Un exemple de ce phénomène s'obtient en considérant la droite affine sur k° avec l'origine doublée, c'est-à-dire, le recollement de deux copies de $\mathbf{A}^1_{k^\circ} = \operatorname{Spec} k^\circ[t]$ le long l'ouvert $\operatorname{Spec} k^\circ[t, t^{-1}]$ (l'isomorphisme de transition étant l'identité). Le k-espace analytique qui s'en déduit est le recollement de deux copies du disque $\mathbf{D} = \{|t(x)| \leq 1\}$ le long la partie $\{|t(x)| = 1\}$: on peut vérifier que le point de Gauss, *i.e.*, le point défini par la semi-norme

$$\sum a_i t^i \mapsto \max |a_i|,$$

n'admet pas de voisinages affinoïdes.

5.3 Définition de fonctions sur l'espace topologique sous-jacent

Soit k un corps complet pour une valeur absolue.

Définition 5.42. Un *système cofinal d'extensions analytiques de k* est une sous-catégorie pleine $\mathscr{E}$ de la catégorie des extensions analytiques $(\mathrm{ExtAn})_{/k}$ de k ayant la propriété suivante : pour tout extension analytique K de k il existe une extension analytique K' de k appartenant à $\mathscr{E}$ et muni d'un plongement isométrique de k-algèbres de Banach $\mathrm{K} \to \mathrm{K}'$.

Exemple 5.43. Si K est une extension analytique de k, le foncteur oubli $(\mathrm{ExtAn})_{/\mathrm{K}} \to (\mathrm{ExtAn})_{/k}$ est fidèle et la sous-catégorie pleine engendré par son image est un système cofinal d'extensions analytiques de k. Autrement dit, pour toute extension analytique k' de k il existe une extension analytique K' de K (et donc de k) et un plongement isométrique de k-algèbres de Banach $k' \to \mathrm{K}'$. Ceci sera l'unique exemple de système cofinal d'extensions analytiques qu'on rencontrera dans ce texte.

Remarque 5.44. Si $\mathscr{E}$ est un système cofinal d'extension analytique, alors il est filtrant, c'est-à-dire, pour tout $\mathrm{K}, \mathrm{K}' \in \mathscr{E}$ il existe $\Omega \in \mathscr{E}$ qui les contient. En effet, il existe sûrement une extension analytique L de k qui contient K et K' : il suffit donc de prendre $\Omega \in \mathscr{E}$ qui contient L.

Définition 5.45. Soient X un k-espace analytique et K une extension analytique de k. Un K-*point* du k-espace analytique X est un morphisme de K-espace analytiques $x : \mathscr{M}(\mathrm{K}) \to \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ où X_{K} est le K-espace analytique déduit de X par extension des scalaires.

L'ensemble des K-points du k-espace analytique X est noté $\mathrm{X}(\mathrm{K})$.

Soient X un k-espace analytique, Y un ensemble et $f : |\mathrm{X}| \to \mathrm{Y}$ une application quelconque. Pour toute extension analytique K, on dit que l'application composée

$$f(\mathrm{K}) : \ \mathrm{X}(\mathrm{K}) \longrightarrow |\mathrm{X}_\mathrm{K}| \xrightarrow{|\varpi_\mathrm{K}|} |\mathrm{X}| \xrightarrow{f} \mathrm{E}$$

est l'application induite par f sur les K-points de X (où $\varpi_\mathrm{K} : \mathrm{X}_\mathrm{K} \to \mathrm{X}$ est le morphisme d'extension des scalaires). En outre, si $\mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ sont des extensions analytiques emboîtés de k, le diagramme d'ensemble

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}(\mathrm{K}) \arrow[r, "f(\mathrm{K})"] \arrow[d] & \mathrm{Y} \arrow[d, equal] \\ \mathrm{X}(\mathrm{K}') \arrow[r, "f(\mathrm{K}')"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Autrement dit, l'application f induit un morphisme de foncteurs $\underline{f} : \underline{\mathrm{X}} \to \underline{\mathrm{Y}}$ où $\underline{\mathrm{X}}$ est le foncteur des points de X et $\underline{\mathrm{Y}}$ est le foncteur constant de valeur Y sur $(\mathrm{ExtAn})_{/k}$.

Proposition 5.46. *Soient* X *un k-espace analytique,* Y *un ensemble et $\mathscr{E}$ un système cofinal d'extensions analytiques de k. On considère une collection d'applications $\{f(\mathrm{K}) : \mathrm{X}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Y} : \mathrm{K} \in \mathscr{E}\}$ telle que pour toutes extensions analytiques emboîtés* $\mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ *le diagramme d'ensembles qui s'en déduit*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}(\mathrm{K}) \arrow[r, "f(\mathrm{K})"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(\star)"] & \mathrm{Y} \arrow[d, equal] \\ \mathrm{X}(\mathrm{K}') \arrow[r, "f(\mathrm{K}')"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Autrement dit, on se donne un morphisme de foncteurs $\underline{f} : \underline{\mathrm{X}} \to \underline{\mathrm{Y}}$ où $\underline{\mathrm{X}}$ est le foncteur des points de X *restreint à $\mathscr{E}$ et $\underline{\mathrm{Y}}$ est le foncteur constant de valeur* Y *sur $\underline{\mathscr{E}}$.*

Il existe alors une unique application $f : |\mathrm{X}| \to \mathrm{Y}$ telle que pour toute extension analytique $\mathrm{K} \in \mathscr{E}$ l'application induite sur le K*-points de* X *coïncide avec* $f(\mathrm{K})$.

Si $k = \mathbf{C}$ (muni d'une valeur absolue archimédienne) cet énoncé triviale : l'inclusion canonique $\mathrm{X}(\mathbf{C}) \to |\mathrm{X}|$ est en fait une bijection. Si $k = \mathbf{R}$ cet énoncé affirme que pour se donner une fonction f : $|\mathrm{X}| \to \mathrm{Y}$ il faut et il suffit se donner une fonction $f : \mathrm{X}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Y}$ invariante sous la conjugaison complexe.

Démonstration. Pour tout point $x \in |\mathrm{X}|$ il existe par cofinalité du système $\mathscr{E}$ une extension analytique $\mathrm{K} \in \mathscr{E}$ du corps résiduel complété $\widehat{\kappa}(x)$. Soit x_K le K-point du k-espace analytique X associé. On pose alors :

$$f(x) := f(\mathrm{K})(x_\mathrm{K}).$$

On montre que cette définition ne dépend pas de l'extension K choisie. Soient $\mathrm{K}' \in \mathscr{E}$ une extension analytique de k contenant le corps résiduel complété $\widehat{\kappa}(x)$. Comme un système cofinal est filtrant (Remarque 5.44) il existe une extension analyique $\Omega \in \mathscr{E}$ de k qui contient K et K′. Soit x_K (resp. $x_{\mathrm{K}'}$, resp. x_Ω) le K-point (resp. K′-point, resp. Ω-point) du k-espace analytique X associé. Par commutativité du diagramme ($\star$) on a alors :

$$f(\mathrm{K}')(x_{\mathrm{K}'}) = f(\Omega)(x_\Omega) = f(\mathrm{K})(x_\mathrm{K}),$$

ce qui montre que $f(x)$ ne dépend pas de l'extension choisie. Par définition de f, l'application que f induit sur les K-points coïncide avec $f(\mathrm{K})$. □

6 Actions d'espaces analytiques en groupes

Dans ce numéro on introduit des notions liés à l'étude des espaces analytiques en groupes sur un corps k complet pour une valeur absolue. Si k est corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, il s'agit des notions usuelles. Une exposition de ces concepts est présente dans [Ber90, Chapitre 5].

6.1 Orbites, parties stables et saturées

6.1.1. Définitions. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$.

Définition 6.1. Soit G un k-espace analytique en groupes. Une partie $\mathrm{H} \subset |\mathrm{G}|$ de l'espace topologique sous-jacent à G est dite un *sous-groupe* si elle stable sous les opérations de G. Plus précisément, on a :

– $m\left(\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathrm{H}) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(\mathrm{H})\right) \subset \mathrm{H}$;
– $e \in \mathrm{H}$;
– $\mathrm{inv}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$.

Proposition 6.2. *Soit* G *un* k*-espace analytique en groupes. Une partie* $\mathrm{H} \subset |\mathrm{G}|$ *est un sous-groupe si et seulement pour toute extension analytique* K *de* k*,* $\mathrm{H}(\mathrm{K})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{G}(\mathrm{K})$*.*

Soit X un k-espace analytique muni de l'action d'un k-espace analytique un groupes G. Soient

$$\sigma : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

le morphisme de k-espaces analytiques définissant l'action de G sur X et $\mathrm{pr}_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$, $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}} : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ les deux projections.

Soit $\mathrm{H} \subset |\mathrm{G}|$ un sous-groupe du k-espace analytique G.

Définition 6.3. Soit $\mathrm{F} \subset |\mathrm{X}|$ une partie de l'espace topologique sous-jacent au k-espace analytique X. L'*orbite de* F *(sous l'action de* H*)* est la partie

$$\mathrm{H} \cdot \mathrm{F} := \sigma\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{H}) \cap \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{F})\right) \subset |\mathrm{X}|.$$

La partie F est dite H*-stable* (ou *stable sous l'action de* H) si $\mathrm{H} \cdot \mathrm{F} = \mathrm{F}$. Si la partie F est un singleton $\{x\}$, on désigne son orbite par $\mathrm{G} \cdot x$ et on l'appelle l'orbite du point x.

6.1.2. Extension des scalaires. — Soit K une extension analytique de k. Soient

$$\varpi_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} := \mathrm{X} \times_k \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{X}, \qquad \varpi_{\mathrm{G}} : \mathrm{G}_{\mathrm{K}} := \mathrm{G} \times_k \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{G}$$

les morphismes d'extension des scalaires. Le morphisme $\sigma_{\mathrm{K}} : \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \times \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$, déduit par extension des scalaires, définit une action du K-espace analytique en groupes G_{K} sur le K-espace analytique X_{K}. Avec les notations introduites, on le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_{\mathrm{K}} \times \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \arrow[r, "\sigma_{\mathrm{K}}"] \arrow[d, "\varpi_{\mathrm{G}} \times \varpi_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \arrow[d, "\varpi_{\mathrm{X}}"] \\
\mathrm{G} \times \mathrm{X} \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

On désigne par H_{K} le sous-groupe $\varpi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{H})$ du K-espace analytique en groupes G_{K}.

Proposition 6.4. *Soit* $F \subset |X|$ *une partie de l'espace topologique sous-jacent au k-espace analytique* X. *Alors,*

i. $H_K \cdot \varpi_X^{-1}(F) = \varpi_X^{-1}(H \cdot F)$ *;*

ii. *la partie* F *est* H*-stable si et seulement si* $\varpi_X^{-1}(F)$ *est* H_K*-stable ;*

iii. $H \cdot \varpi_X(F) = \varpi_X(H_K \cdot F)$.

6.1.3. Compatbilité à l'analytification. — Soit X un k-schéma de type fini muni de l'action d'un k-schéma en groupes G de type fini. Soient X^{an} (resp. G^{an}) le k-espace analytique obtenu par analytification de X (resp. G) et

$$\theta_X : X^{an} \longrightarrow X, \qquad (\text{resp. } \theta_G : G^{an} \longrightarrow G)$$

le morphisme d'espaces localement annelés en k-algèbres induit par le foncteur d'analytification. Le k-espace analytique en groupes G^{an} agit naturellement sur le k-espace analytique X.

Proposition 6.5. *Soit x un point fermé du k-schéma* X. *Soit* $G \cdot x \subset X$ *l'orbite du point x sous l'action du k-schéma en groupes* G. *Alors,*

i. $G^{an} \cdot x = (G \cdot x)^{an} := \theta_X^{-1}(G \cdot x)$ *;*

ii. *l'orbite* $G \cdot x$ *est fermée si et seulement si l'orbite* $G^{an} \cdot x$ *est fermée ;*

iii. *l'adhérence de l'orbite de x,* $\overline{G^{an} \cdot x}$*, contient une orbite fermée.*

6.2 Bon quotient topologique par une relation d'équivalence

6.2.1. Définitions et propriétés fondamentales. — Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Si x est un point de x, la partie $\mathscr{R}x := \{x' : x'\mathscr{R}x\}$ de X sera appelé l'*orbite de x par $\mathscr{R}$*.

Définition 6.6. Une partie F de X est dite *$\mathscr{R}$-stable* (ou *stable par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$*) si pour tout $x \in F$ son orbite $\mathscr{R}x$ est contenue dans F.

Une partie F de X est dite *$\mathscr{R}$-saturée* (ou *saturée par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$*) si pour tout $x \in F$, l'adhérence de son orbite $\overline{\mathscr{R}x}$ est contenue dans F.

Une partie $\mathscr{R}$-saturée est $\mathscr{R}$-stable ; si F est une partie fermée $\mathscr{R}$-stable alors elle est $\mathscr{R}$-saturée.

Définition 6.7. Si Y est un espace topologique, on dit qu'une application continue $f : X \to Y$ est *$\mathscr{R}$-invariante* si $f(x) = f(x')$ pour tout $x, x' \in X$ tel que $x\mathscr{R}x'$.

Définition 6.8. Un espace topologique X *satisfait à l'axiom de séparation* T_1 (ou il est un espace topologique T_1) si tout point de X est fermé.

Proposition 6.9. *Soit* X *un espace topologique* T_1 *muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$. Si* Y *est un espace topologique* T_1 *et* $\pi : X \to Y$ *est une application continue et $\mathscr{R}$-invariante, on a les faits suivants :*

i. *pour tout* $x \in X$ *et* $x' \in \overline{\mathscr{R}x}$*, on a* $\pi(x') = \pi(x)$ *;*

ii. *si* F *est une partie de* Y*, alors* $\pi^{-1}(F)$ *est $\mathscr{R}$-saturée.*

Définition 6.10. Soit X un espace topologique T_1 muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$. Un couple (Y, π) formé par un espace topologique Y qui satisfait l'axiom de séparation T_1 et une application continue π et $\mathscr{R}$-invariante $\pi : X \to Y$ est un *bon quotient de* X *par $\mathscr{R}$* s'il satisfait aux propriétés suivantes :

BQ1. π est surjective et $\mathscr{R}$-invariante ;
BQ2. si x, x' sont des points de X, alors $\pi(x) = \pi(x')$ si seulement si $\overline{\mathscr{R}x} \cap \overline{\mathscr{R}x'} \neq \emptyset$;
BQ3. si F est une partie fermée $\mathscr{R}$-stable, son image $\pi(\mathrm{F})$ par π est fermée dans Y.

Proposition 6.11. *Soit* X *un espace topologique* T_1 *muni d'une relation d'équivalence* $\mathscr{R}$*. Un bon quotient* (Y, π) *de* X *par* $\mathscr{R}$ *satisfait aux propriétés suivantes :*

i. pour tout $x \in \mathrm{X}$ *il existe au plus une orbite fermée contenue dans* $\overline{\mathscr{R}x}$ *;*
ii. si F, F' *sont des parties* $\mathscr{R}$*-saturées,* $\pi(\mathrm{F}) \cap \pi(\mathrm{F}') \neq \emptyset$ *si et seulement si* $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}' \neq \emptyset$ *;*
iii. une partie V *de* Y *est ouverte si seulement si* $\pi^{-1}(\mathrm{V})$ *est ouverte dans* X *;*
iv. une partie ouverte U *de* X *est* $\mathscr{R}$*-saturée si et seulement si* $\mathrm{U} = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{U}))$ *; en particulier, l'image de* U *par* π *est ouverte dans* Y*.*

Démonstration. Soient $y, y' \in \overline{\mathscr{R}x}$ des points d'orbite fermée. D'après la Proposition 6.9 on a $\pi(y) = \pi(y')$. Par la propriété **BQ2** on a

$$\mathscr{R}y \cap \mathscr{R}y' = \overline{\mathscr{R}y} \cap \overline{\mathscr{R}y'} \neq \emptyset,$$

ce qui entraine $\mathscr{R}y = \mathscr{R}y'$.

Pour (ii), soient $\mathrm{F}, \mathrm{F}' \subset \mathrm{X}$ des parties $\mathscr{R}$-saturées. Si F, F' se rencontrent, leurs images se rencontrent aussi. Si $\pi(\mathrm{F}), \pi(\mathrm{F})'$ se recontrent il existe $x \in \mathrm{F}$ et $x' \in \mathrm{F}'$ tels que $\pi(x) = \pi(x')$: par la propriété **BQ2**, on a

$$\overline{\mathscr{R}x} \cap \overline{\mathscr{R}x'} \neq \emptyset.$$

Puisque F (resp. F′) est saturée par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$, l'adhérence de l'orbite $\overline{\mathscr{R}x}$ (resp. $\overline{\mathscr{R}x'}$) est contenue dans F (resp F′). En particulier,

$$\emptyset \neq \overline{\mathscr{R}x} \cap \overline{\mathscr{R}x'} \subset \mathrm{F} \cap \mathrm{F}'.$$

Pour (iii), si $\mathrm{V} \subset \mathrm{Y}$ est une partie ouverte, son image réciproque est ouverte par continuité de π. On suppose que $\pi^{-1}(\mathrm{V})$ soit une partie ouverte. D'après la Proposition 6.9 elle est $\mathscr{R}$-saturée. La partie complémentaire $\mathrm{F} = \mathrm{X} - \pi^{-1}(\mathrm{U})$ est une partie fermée et $\mathscr{R}$-stable. Par la propriété **BQ3**, son image $\pi(\mathrm{F})$ est fermée dans Y. Puisque π est surjective, on a $\mathrm{V} = \mathrm{Y} - \pi(\mathrm{F})$ et donc V est une partie ouverte.

Pour (iv), si $\mathrm{U} = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{U}))$, d'après la Proposition 6.9 la partie U est $\mathscr{R}$-saturée. On suppose que U soit $\mathscr{R}$-saturée. Le complémentaire $\mathrm{F} = \mathrm{X} - \mathrm{U}$ est une partie fermée $\mathscr{R}$-stable, donc $\mathscr{R}$-saturée. Puisque π est surjectif, on a

$$\pi(\mathrm{U}) \cup \pi(\mathrm{F}) = \mathrm{Y}$$

Comme U et F ne se rencontrent pas, par (ii) on a

$$\pi(\mathrm{U}) \cap \pi(\mathrm{F}) = \emptyset.$$

On a donc $\mathrm{U} = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{U}))$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 6.12. *Soit* X *un espace topologique* T_1 *muni d'une relation d'équivalence* $\mathscr{R}$*. Un bon quotient* (Y, π) *de* X *par* $\mathscr{R}$ *est le quotient catégorique de* X *par* $\mathscr{R}$ *dans la catégorie des espaces topologiques* T_1*, c'est-à-dire qu'il satisfait à la propriété universelle suivante :*

> *pour tout couple* (Y', π') *formé par un espace topologique* Y′ *qui satisfait à l'axiom de séparation* T_1 *et une application continue* $\pi' : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ *et* $\mathscr{R}$*-invariante, il existe une unique application continue* $\theta : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ *tel que* $\pi' = \theta \circ \pi$*.*

Démonstration. Soit Y' un espace topologique T_1 et $f : X \to Y'$ une application continue $\mathscr{R}$-invariante. Il s'agit de définir une application continue $\theta : Y \to Y'$ telle que $f = \theta \circ \pi$. Soient $x \in X$ et $y = \pi(x) \in Y$. On pose :

$$\theta(y) := f(x).$$

On vérifie que l'application θ est ainsi bien définie. Soit $x' \in X$ est tel que $\pi(x') = \pi(x)$. Par la propriété **BQ2** les adhérences de leurs orbites se rencontrent et la Proposition 6.9 entraîne $f(x) = f(x')$. Ceci implique, en particulier,

$$f = \theta \circ \pi.$$

On démontre la continuité de θ. Soit $V \subset Y'$ une partie ouverte. Son image réciproque $f^{-1}(V) \subset X$ est une partie ouverte et, par la Proposition 6.9, $\mathscr{R}$-saturée. Puisque $f = \theta \circ \pi$, on a

$$\pi(f^{-1}(V)) = \theta^{-1}(V)$$

et conclut grâce à la Proposition 6.11 que la partie $\theta^{-1}(V)$ est ouverte. □

Corollaire 6.13. *Soit* X *un espace topologique* T_1 *muni d'une relation d'équivalence* $\mathscr{R}$. *On suppose que l'orbite* $\mathscr{R}x$ *de tout point* $x \in X$ *soit fermée.*

Le quotient $X/\mathscr{R}$ *de* X *par* $\mathscr{R}$ *en tant qu'espace topologique est un bon quotient de* X *par* $\mathscr{R}$.

Démonstration. Le quotient $X/\mathscr{R}$ de X par $\mathscr{R}$ en tant qu'espace topologique est défini comme suit : si $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ est la projection de X sur l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$, une partie $V \subset X/\mathscr{R}$ est par définition ouverte si $\pi^{-1}(V) \subset X$ est ouverte.

On va vérifier les propriétés dans la définition de bon quotient. En ce qui concerne la propriété **BQ1**, l'application π est évidemment $\mathscr{R}$-invariante et surjective.

Comme toutes les orbites sont fermées, la propriété **BQ2** est équivalente à dire que si $x, x' \in X$ alors $\pi(x)$, $\pi(x')$ coïncident si et seulement si leurs orbites coïncident.

Pour la propriété **BQ3**, si $F \subset X$ est une partie fermée $\mathscr{R}$-stable, alors son complémentaire $U = X - F$ est une partie ouverte telle que $U = \pi^{-1}(\pi(U))$. En particulier $\pi(F) = Y - \pi(U)$ est fermé. □

Proposition 6.14. *Soit* X *un espace topologique* T_1 *muni d'un relation d'équivalence* $\mathscr{R}$. *Soit* $F \subset X$ *une partie fermée* $\mathscr{R}$*-stable. Si* (Y, π) *est un bon quotient de* X *par* $\mathscr{R}$*, alors* $(\pi(F), \pi|_F)$ *est un bon quotient de* F *par* $\mathscr{R}$.

Démonstration. On va vérifier les conditions dans la définition de bon quotient. La propriété **BQ1** est automatiquement satisfaite.

Pour la propriété **BQ2** soient $x, x' \in F$: la partie F étant fermée et $\mathscr{R}$-stable, elle est $\mathscr{R}$-saturée. Les adhérences de $\mathscr{R}x$, $\mathscr{R}x'$ sont donc contenues dans F. En particulier, elles se rencontrent dans F si et seulement si se rencontrent dans X.

Pour la propriété **BQ3**, si F' est une partie fermée $\mathscr{R}$-stable de F, elle est une partie fermée et $\mathscr{R}$-stable de X. Son image $\pi(F')$ est fermée dans Y et donc dans $\pi(F)$. □

6.2.2. Application aux quotients des schémas de type fini sur un corps. — Soient k un corps et $X = \operatorname{Spec} A$ un k-schéma affine muni de l'action d'un k-schéma en groupes de type fini G. On désigne par $|X|_0$ le sous-espace topologique de $|X|$ formé par les points fermés de X. Par définition, l'espace topologique $|X|_0$ satisfait à l'axiome de séparation T_1.

On considère la relation d'équivalence suivante sur X : si $x, y \in X$,

$$x \,\mathscr{R}_G\, y \Longleftrightarrow G \cdot x = G \cdot y.$$

On suppose que le k-schéma en groupes G soit réductif. Soient $Y = \operatorname{Spec} A^G$ le quotient de X par G et $\pi : X \to G$ le morphisme quotient. Le propriétés suivantes sont alors satisfaites :

i. le morphisme $\pi : X \to Y$ est G-invariant et surjectif;
ii. pour tous points fermés $x, x' \in X$, on a :

$$\pi(x) = \pi(x') \text{ si et seulement si } \overline{G\cdot x} \cap \overline{G\cdot x'} \neq \emptyset;$$

iii. si $F \subset X$ est une partie fermée G-stable, l'image $\pi(F)$ est fermée dans Y.

Ceci entraîne que le sous-espace topologique $|Y|_0$ de $|Y|$ formé par les points fermés de Y est le bon quotient topologique de $|X|_0$ par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$.

Proposition 6.15. *Soient k un corps et* $X = \operatorname{Spec} A$ *un k-schéma affine muni de l'action d'un k-groupe réductif* G. *Soit* $Z = \operatorname{Spec}(A/I) \subset X$ *un sous-schéma fermé* G*-stable. Le morphisme canonique de k-schémas*

$$\varepsilon : Z/G := \operatorname{Spec}(A/I)^G \longrightarrow X/G := \operatorname{Spec} A^G$$

induit une immersion fermée des espaces topologiques sous-jacents.

Remarque 6.16. Si la caractéristique de k est nulle, le morphisme $\varepsilon : Z/G \to X/G$ est une immersion fermée de k-schémas. En fait, l'existence et la fonctorialité de la projection sur les invariants (*i.e.* l'opérateur de Reynolds) entraîne que la construction des invariants est un foncteur exact sur la catégorie des représentations de G.

En caractéristique $p > 0$, on a seulement le fait suivant : si $f \in (A/I)^G$ il existe $n \geq 1$ tel que f^{p^n} appartient à A^G/I^G. En prenant un ensemble fini de générateurs de $(A/I)^G$ en tant que k-algèbre, on peut trouver une puissance q de p qui convient pour tout élément de $(A/I)^G$. L'homomorphisme composé de k-algèbres

$$A^G \longrightarrow (A/I)^G \xrightarrow{-^q} (A/I)^G$$

est alors surjectif et il induit une immersion fermée

$$Z/G \xrightarrow{F_q} Z/G \xrightarrow{\varepsilon} X/G) \ ,$$

(où $F_q : Z/G \to Z/G$ est le morphisme de k-schémas induit par $-^q : (A/I)^G \to (A/I)^G$). Puisque le morphisme F_q induit un homéomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents, le morphisme ε induit une immersion fermée des espaces topologiques sous-jacents.

Démonstration. En général, si S est un k-schéma et $|S|_0$ le sous-espace topologique de $|S|$ formé par ses points fermés, une partie $F \subset |X|$ est fermée (resp. ouverte) si et seulement si $F \subset |S|_0$ est fermée (resp. ouverte) dans $|S|_0$.

Pour montrer que $\varepsilon : Z/G \to X/G$ induit une immersion fermée des espaces topologiques sous-jacents, on peut se borner à démontrer qu'elle induit une immersion fermée au niveau des points fermés

$$\varepsilon_0 : |Z/G|_0 \longrightarrow |X/G|_0$$

(le 0 en indice désigne comme avant le sous-espace topologique formé par les points fermés). Puisque $|X/G|_0$ et $|Z/G|_0$ sont les bons quotients topologiques respectivement de $|X|_0$ et $|Z|_0$ par la relation $\mathscr{R}_G$, ceci est affirmé par la Proposition 6.14. □

6.2.3. Bon quotient topologique pour l'action d'un espace analytique en groupes. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue. Soit X un k-espace analytique en groupes muni de l'action d'un k-espace analytique en groupes G.

Soit $H \subset |G|$ un sous-groupe de G. On considère la relation d'équivalence sur X définie de la manière suivante : si $x, y \in X$,

$$x \mathscr{R}_H y \Longleftrightarrow H \cdot x = H \cdot y.$$

Si Y est un bon quotient de X par la relation d'équivalence $\mathscr{R}_H$, on dira simplement que X est le bon quotient de X par H et on le désigne par X/H ou |X|/|H| pour souligner qu'il s'agit d'un quotient au niveau topologique.

Si le sous-groupe H est compact, les orbites sous l'action de H sont fermés. En vertu du Corollaire 6.13, le bon quotient X/H coïncide avec le quotient catégorique par la relation d'équivalence $\mathscr{R}_H$ (dans la catégorie des espaces topologiques).

En général, si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur un espace localement compact telle que la $\mathscr{R}$-saturation (*i.e.* la plus petite par $\mathscr{R}$-saturée contenant une partie donnée) d'une partie compacte est compacte, alors le quotient catégorique $X/\mathscr{R}$ (dans la catégorie des espaces topologiques) est localement compact et la projection sur le quotient $X/\mathscr{R}$ est une application propre au sens topologiqiue.

Par conséquent, l'espace topologique |X| étant localement compact, l'espace topologique X/H l'est aussi. Si l'espace topologique |X| est de plus séparé, il en est de même pour X/H.

7 Foncteurs représentables élémentaires

Dans cette section on discute la représentabilité de certains foncteurs élémentaires, comme le fibré vectoriel associé à un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules, le fibré projectif, les grassmaniennes... On se place d'abord dans la catégorie des schémas et ensuite dans la catégorie des espaces analytiques au sens de la section 5. Dans le cadre de la géométrie algébrique on en profite pour fixer des conventions (notamment celle de Grothendieck sur les fibrés vectoriels et projectifs, qui est adoptée dans ce texte) et pour squisser comment la représentabilité de ces foncteurs s'étend en fait à la catégorie des espaces localement annelés. Ceci n'est pas accompli pour un simple désir d'abstraction, mais pour faciliter la comparaison entre les objets algébriques et analytiques construits.

Pour les schémas, ces questions sont traitées en détail dans [EGA 2, §4] et dans [SGA 3, Exposé I]. Pour les espaces analytiques, on suit [Gro61d].

7.1 Géométrie algébrique

Remarque 7.1. Soient X un espace localement annelé et A un anneau. L'application naturelle

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{locan}}(X, \mathrm{Spec}\, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \Gamma(X, \mathscr{O}_X))$$

est une bijection. En effet, et de manière équivalente, il existe un morphisme d'espaces localement annelés $\pi_X : X \to \mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ avec la propriété universelle suivante :

> *pour tout anneau* A *et pour tout morphisme d'espaces localement annelés* $f : X \to \mathrm{Spec}\, A$*, il existe un unique morphisme d'espaces localement annelés* $f' : \mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Spec}\, A$ *tel que* $f = f' \circ \pi_X$.

Le morphisme π_X est défini de la manière suivante. Au niveau ensembliste, l'idéal premier $\pi_X(x) \in \mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ est le noyau de l'homomorpisme d'évaluation $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \kappa(x)$. Si $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, l'image inverse par π_X de l'ouvert principal $D(f) \subset \mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ est la partie ouverte $X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Ceci entraîne que l'application π_X est continue et l'homomorphisme de restriction $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(X_f, \mathscr{O}_X)$ se factorise de manière unique à travers un homomorphisme $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)_f \to \Gamma(X_f, \mathscr{O}_X)$. Puisque les ouverts principaux de $\mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ forment une base de sa topologie, on obtient un homomorphisme

de faisceaux d'anneaux
$$\pi_X^\sharp : \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}\,\Gamma(X,\mathscr{O}_X)} \longrightarrow \pi_{X*}\mathscr{O}_X.$$

Remarque 7.2. Soient A un anneau et $X = \mathrm{Spec}\,A$ son spectre. Soient M un A-module et F un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules. L'application naturelle
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X\text{-mod}}(\widetilde{M}, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M, \Gamma(X,F))$$
est une bijection. En effet, et de manière équivalente, il existe un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-modules $\varepsilon_F : \Gamma(X,F)^\sim \to F$ avec la propriété universelle suivante :

> *pour tout* A*-module* M *et tout homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$*-modules* $\varphi : \widetilde{M} \to F$*, il existe un unique homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$*-modules* $\varphi' : \widetilde{M} \to \Gamma(X,F)^\sim$ *tel que* $\varphi = \varepsilon_F \circ \varphi'$.

L'homomorphisme ε_F est défini de la manière suivante. Pour tout $f \in A$, l'homomorphisme de restriction $\Gamma(X,F) \to \Gamma(D(f),F)$ se factorise de manière unique à travers un homomorpisme de A_f-modules
$$\Gamma(D(f), \Gamma(X,F)^\sim) := \Gamma(X,F) \otimes_A A_f \longrightarrow \Gamma(D(f), F).$$
Puisque les ouverts principaux de X forment une base de sa topologie, on obtient un homomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules $\varepsilon_F : \Gamma(X,F)^\sim \to F$.

7.1.1. Spectre relatif. — Soit X un un schéma. Pour tout faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres A, on considère le foncteur
$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Spec}}_X(A) : \left\{\begin{matrix}\text{X-espaces}\\ \text{localement annelés}\end{matrix}\right\} &\longrightarrow \{\,\text{ensembles}\,\} \\ (Y,f) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y\text{-alg}}(f^*A, \mathscr{O}_Y) \end{aligned}$$

Proposition 7.3. *Soit* A *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$*-algèbres. Le foncteur* $\underline{\mathrm{Spec}}_X(A)$ *est représentable par un* X*-schéma* $\mathbf{Spec}_X(A)$.

Démonstration. La question étant locale sur X on peut le supposer affine. Dans ce cas, d'après les Remarques 7.1 et 7.2, on a les bijections fonctorielles suivantes :
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y\text{-alg}}(f^*A, \mathscr{O}_Y) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X\text{-alg}}(A, f_*\mathscr{O}_Y) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X\text{-alg}}(A, \Gamma(Y,\mathscr{O}_Y)^\sim) \\ &= \mathrm{Hom}_{\Gamma(X,\mathscr{O}_X)\text{-alg}}(\Gamma(X,A), \Gamma(Y,\mathscr{O}_Y)) \\ &= \mathrm{Mor}_{X\text{-sch}}(\mathrm{Spec}\,\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y), \mathrm{Spec}\,\Gamma(X,A)) \\ &= \mathrm{Mor}_{X\text{-locan}}(Y, \mathrm{Spec}\,\Gamma(X,A)). \end{aligned}$$
Le foncteur $\underline{\mathrm{Spec}}_X(A)$ est donc représenté par le X-schéma $\mathrm{Spec}\,\Gamma(X,A)$. □

7.1.2. Fibrés vectoriels. — Soit X un schéma. Pour tout faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules F, on considère le foncteur :
$$\begin{aligned} \underline{V}(F) : \left\{\begin{matrix}\text{X-espaces}\\ \text{localement annelés}\end{matrix}\right\} &\longrightarrow \{\,\text{groupes abéliens}\,\} \\ (Y,f) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y\text{-mod}}(f^*F, \mathscr{O}_Y) \end{aligned}$$

Proposition 7.4. *Soient* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_X$*-modules et* $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X} F$ *désigne la* $\mathcal{O}_X$*-algèbre des puissances symétriques de* F*. Le foncteur* $\underline{V}(F)$ *est représenté par le* X*-schéma*

$$\mathbf{V}(F) = \mathbf{Spec}_X \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X} F.$$

Le X-schéma $\mathbf{V}(F)$ est appelé *fibré vectoriel associé à* F.

Proposition 7.5 (Compatibilité aux changements de base)**.** *Soient* X' *un schéma et* $f : X' \to X$ *un morphisme de schémas. Soit* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_X$*-modules. Le morphisme naturel de* X'*-schémas*

$$\mathbf{V}(f^*F) \longrightarrow \mathbf{V}(F) \times_X X'$$

est un isomorphisme.

7.1.3. Schéma des morphismes linéaires. — Soit X un schéma. Pour tous faisceaux des $\mathcal{O}_X$-modules E, F, on considère le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{Hom}}_X(F,E) : \left\{ \begin{array}{c} \text{X-espaces} \\ \text{localement annelés} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \{\,\text{groupes abéliens}\,\} \\ (Y, f) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-mod}}(f^*F, f^*E) \end{array}$$

Proposition 7.6. *Soient* E *un faisceau de* $\mathcal{O}_X$*-modules localement libre de rang fini et* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_X$*-modules.*

Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,E)$ *est représente par le* X*-schéma* $\mathbf{Hom}_X(F,E) := \mathbf{V}(E^\vee \otimes F)$.

Proposition 7.7. *Soit* E *un faisceau de* $\mathcal{O}_X$ *localement libre de rang* r*. Le foncteur en groupes*

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{GL}}(E) : \left\{ \begin{array}{c} \text{X-espaces} \\ \text{localement annelés} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \{\,\text{groupes}\,\} \\ (Y, f) & \longmapsto & \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_Y\text{-mod}}(f^*E, f^*E) \end{array}$$

est représenté par un X*-schéma en groupes* $\mathbf{GL}(E)$.

7.1.4. Fibrés projectifs et grassmaniennes. — Soit X un schéma. Pour tout faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules F et tout nombre entier $r \geq 0$, on considère le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{Grass}}_r(F) : \left\{ \begin{array}{c} \text{X-espaces} \\ \text{localement annelés} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \{\,\text{ensembles}\,\} \\ (Y, f) & \longmapsto & \left\{ (E, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{E localement libre de rang } r, \\ \varphi : f^*F \to E \text{ epimorphisme} \end{array} \right\} \Big/ \sim \end{array}$$

Proposition 7.8. *Soit* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_X$*-modules et* r *un nombre entier positif.*

Le foncteur $\underline{\mathrm{Grass}}_r(F)$ *est représentable par un* X*-schéma* $\mathbf{Grass}_r(F)$*, dit grassmanienne d'indice* r *de* F*.*

Démonstration. La question étant locale sur X, on peut supposer que le faisceau quasi-cohérent F est engendré par une famille de sections $\{s_i\}_{i\in I}$. Pour tout X-espace localement annelé (Y, f) et toute partie $H \subset I$ à n éléments, on considère l'homomorphisme défini par les s_i avec $i \in H$,

$$\varphi_{H,Y} : \mathcal{O}_Y^n \longrightarrow f^*F.$$

Pour chacune de ces parties H de I, on définit une partie $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ de $\underline{\mathrm{Grass}}_r(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ par la condition suivante : $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ est formée des quotients E de $f^*\mathrm{F}$ localement libres de rang n, tels que l'homomorphisme composé

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{H,Y}}} f^*\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$$

soit surjectif, et donc un isomorphisme. La partie $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes $\psi : f^*\mathrm{F} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n$ tels que $\psi \circ \varphi_{\mathrm{H,Y}} = \mathrm{id}_{f^*\mathrm{F}}$. En d'autres termes, si on définit les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(f^*\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n) \\ \alpha_{\mathrm{H}} : \psi &\longmapsto \psi \circ \varphi_{\mathrm{H,Y}} \\ \beta : \psi &\longmapsto \mathrm{id} \end{aligned}$$

la partie $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ s'identifie à l'égalisateur des applications $\alpha_{\mathrm{H}}, \beta$. D'après la Proposition 7.6, le foncteur $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})$ est représentable (dans ce cadre plus général) par l'égalisateur $\mathbf{Grass}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})$ des morphismes de X-schémas

$$\alpha_{\mathrm{H}}, \beta : \mathbf{Hom}(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n)$$

induits par $\alpha_{\mathrm{H}}, \beta$. Le reste de la preuve suit sans changements. □

Proposition 7.9 (Compatibilité aux changements de base)**.** *Soient* X' *un schéma et* $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *un morphisme de schémas. Soient* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules et* $r \geq 0$ *un nombre entier. Le morphisme naturel de* X'*-schémas*

$$\mathbf{Grass}_r(f^*\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{Grass}_r(\mathrm{F}) \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$$

est un isomorphisme.

Proposition 7.10. *Soient* F, F' *des faisceaux quasi-cohérents de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules. Le morphisme de Segre*

$$\sigma_{\mathrm{F,F}'} : \mathbf{P}(\mathrm{F}) \times_{\mathrm{X}} \mathbf{P}(\mathrm{F}') \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{F}')$$

est une immersion fermée.

Proposition 7.11. *Soit* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules et* $r \geq 0$ *un nombre entier. Le morphisme de Plücker*

$$\varpi_{\mathrm{F}} : \mathbf{Grass}_r(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{P}\big(\textstyle\bigwedge^r \mathrm{F}\big)$$

est une immersion fermée.

7.2 Géométrie analytique

Soient k un corps complet pour une valeur absolue et X un k-espace analytique. Pour toute extension analytique K du corps k, on désigne par X_{K} le K-espace analytique déduit de X par extension des scalaires et par

$$\varpi_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \longrightarrow \mathrm{X}$$

le morphisme d'extension des scalaires.

Définition 7.12. Un *espace analytique sur* X est un triplet $(\mathrm{K}, \mathrm{Y}, f)$ formé d'une extension analytique K du corps k, d'un K-espace analytique Y et d'un morphisme $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ de K-espaces analytiques.

Soient $(\mathrm{K}, \mathrm{Y}, f)$ et $(\mathrm{K}', \mathrm{Y}', f')$ des K-espaces analytiques. Un *morphisme d'espaces analytiques sur* X,

$$(\varepsilon, g) : (\mathrm{K}', \mathrm{Y}', f') \longrightarrow (\mathrm{K}, \mathrm{Y}, f)$$

est un couple formé d'une injection isométrique $\varepsilon : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ de k-algèbres de Banach et d'un morphisme de K'-espaces analytiques $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}_{\mathrm{K}'}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{Y}_{\mathrm{K}'} \arrow[d, "f'_{\mathrm{K}'}"] \\ \mathrm{X}_{\mathrm{K}'} \arrow[r, equal] & \mathrm{X}_{\mathrm{K}'} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

7.2.1. Fibrés vectoriels. — Soient X un k-espace analytique. Pour tout faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules F, on considère le foncteur :

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{V}}(\mathrm{F}) : \quad \{\text{espaces analytiques sur X}\} &\longrightarrow \{k\text{-espaces vectoriels}\} \\ (\mathrm{K}, \mathrm{Y}, f) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \end{aligned}$$

Proposition 7.13. *Soit* F *un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules de présentation finie. Le foncteur* $\underline{\mathrm{V}}(\mathrm{F})$ *est représentable par un* k*-espace analytique sur* X*,* $\mathbf{V}(\mathrm{F})$*, dit fibré vectoriel associé à* F*.*

Démonstration. En suivant [Gro61d, Proposition 1.1], on suppose d'abord que F soit le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n$. Dans ce cas, on a les bijections fonctorielles en Y,

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})^n \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})^n.$$

Pour (K, Y) variable dans la catégorie des espaces analytiques sur k, le foncteur exprimé par le terme à droite est représentable par l'espace $\mathbf{A}_k^n$; donc, pour $(\mathrm{K}, \mathrm{Y}, f)$ variable dans la catégorie des espaces analytiques sur X, ce même foncteur est représentable par le k-espace analytique sur X,

$$\mathbf{A}_{\mathrm{X}}^n := \mathbf{A}_k^n \times \mathrm{X}.$$

On revient au cas d'un faisceau quelconque de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules de présentation finie F. La question étant locale sur le k-espace analytique X, on peut supposer qu'il existe une suite extacte

$$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}^m \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n \xrightarrow{\ \psi\ } \mathrm{F}$$

où $m, n \geq 0$ sont des nombres entiers. Pour tout espace analytique sur X, $(\mathrm{K}, \mathrm{X}, f)$, on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^m, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \ .$$

Cela montre que le foncteur $\underline{\mathrm{V}}(\mathrm{F})$ est représentable par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_k^n \times_{\mathbf{A}_k^m} \mathrm{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d, "e"] \\ \mathbf{A}_k^n \arrow[r, "f"] & \mathbf{A}_k^m \end{tikzcd}$$

où f est le morphisme induit par l'homomorphisme φ et e est la section nulle. □

Proposition 7.14 (Compatibilité aux changements de base)**.** *Soient* $(\mathrm{K},\mathrm{Y},f)$ *un espace analytique sur* X *et* F *un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules de présentation finie. Le morphisme naturel de* K*-espaces analytiques*

$$\mathbf{V}(f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\mathrm{K}} \times_{\mathrm{X}_{\mathrm{K}}} \mathrm{Y}$$

est un isomorphisme.

Corollaire 7.15 (Compatibilité à l'extension des scalaires)**.** *Soient* K *une extension analytique du corps* k *et* F *un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules de présentation finie. Le morphisme naturel de* K*-espaces analytiques*

$$\mathbf{V}(\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\mathrm{K}}$$

est un isomorphisme.

Corollaire 7.16 (Compatibilité à la construction des fibres)**.** *Soient* X *un* k*-espace analytique et* K *une extension analytique du corps* k*. Pour tout faisceau* F *de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules de présentation finie, le morphisme naturel de* K*-espaces analytiques*

$$\mathbf{V}(x^*\mathrm{F}) \to \mathbf{V}(\mathrm{F})_x$$

est un isomorphisme.

Proposition 7.17 (Compatibilité à l'analytification)**.** *Soient* X *un* k*-schéma localement de type fini et* F *un faisceau cohérent de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules. Le morphisme naturel de* k*-espaces analytiques*

$$\mathbf{V}(\mathrm{F}^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F})^{\mathrm{an}}.$$

est un isomorphisme.

7.2.2. Espace analytique des morphismes linéaires. — Soit X un k-espace analytique. Pour tous faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules E, F, on considère le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F},\mathrm{E}) : \ \{\text{espaces analytiques sur X}\} &\longrightarrow \{\text{groupes abéliens}\} \\ (\mathrm{K},\mathrm{Y},f) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}, f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{E}) \end{aligned}$$

Proposition 7.18. *Soient* E *un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules localement libre de rang fini et* F *un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules de présentation finie.*

Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ *est représenté par le* k*-espace analytique* $\mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee \otimes \mathrm{F})$.

Proposition 7.19. *Soit* E *un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ *localement libre de rang* r*. Le foncteur en groupes*

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{GL}}(\mathrm{E}) : \ \{\text{espaces analytiques sur X}\} &\longrightarrow \{\text{groupes}\} \\ (\mathrm{K},\mathrm{Y},f) &\longmapsto \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{E}, f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{E}) \end{aligned}$$

est représenté par le k*-espace analytique sur* X *en groupes* $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$.

7.2.3. Fibrés projectifs et grassmaniennes. — Soit X un k-espace analytique. Pour tout faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules F et tout nombre entier $r \geq 0$, on considère le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Grass}}_r(\mathrm{F}) : \ \{\text{espaces analytiques sur X}\} &\longrightarrow \{\text{ensembles}\} \\ (\mathrm{K},\mathrm{Y},f) &\longmapsto \left\{(\mathrm{E},\varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{E} \text{ localement libre de rang } r, \\ \varphi : f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F} \to \mathrm{E} \text{ epimorphisme} \end{array}\right\} \Big/ \sim \end{aligned}$$

Proposition 7.20. *Soit* F *un faisceau de* $\mathscr{O}_X$*-modules de présentation finie et* r *un nombre entier positif.*

Le foncteur $\underline{\mathrm{Grass}}_r(\mathrm{F})$ *est représentable par un* k*-espace analytique sur* X, $\mathbf{Grass}_r(\mathrm{F})$*, dit grassmanienne d'indice* r *de* F.

Démonstration. La question étant locale sur X, on peut supposer que le faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules F est engendré par une famille de sections $\{s_i\}_{i\in \mathrm{I}}$. Pour tout espace analytique sur X, $(\mathrm{K}, \mathrm{Y}, f)$, et toute partie $\mathrm{H} \subset \mathrm{I}$ à n éléments, on considère l'homomorphisme défini par les s_i avec $i \in \mathrm{H}$,

$$\varphi_{\mathrm{H},\mathrm{Y}} : \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n \longrightarrow f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}.$$

Pour chacune de ces parties H de I, on définit une partie $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ de $\underline{\mathrm{Grass}}_r(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ par la condition suivante : $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ est formée des quotients E de $f^*\mathrm{F}$ localement libres de rang r, tels que l'homomorphisme composé

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{H},\mathrm{Y}}} f^*\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$$

soit surjectif, et donc un isomorphisme. La partie $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes $\psi : f^*\mathrm{F} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n$ tels que $\psi \circ \varphi_{\mathrm{H},\mathrm{Y}} = \mathrm{id}_{f^*\mathrm{F}}$. En d'autres termes, si on définit les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(f^*\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-mod}}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n) \\ \alpha_{\mathrm{H}} : \psi &\longmapsto \psi \circ \varphi_{\mathrm{H},\mathrm{Y}} \\ \beta : \psi &\longmapsto \mathrm{id} \end{aligned}$$

la partie $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})(\mathrm{Y})$ s'identifie à l'égalisateur des applications $\alpha_{\mathrm{H}}, \beta$. D'après la Proposition 7.6, le foncteur $\underline{\mathrm{Grass}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})$ est représentable (dans ce cadre plus général) par l'égalisateur $\mathbf{Grass}_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})$ des morphismes de k-espaces analytiques sur X,

$$\alpha_{\mathrm{H}}, \beta : \mathbf{Hom}(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^n)$$

induits par $\alpha_{\mathrm{H}}, \beta$. Par des arguments standard de recollement, on se ramène à démontrer les deux faits suivants :

- Soit $(\mathrm{K}, \mathrm{Y}, f)$ un espace analytique sur X. Étant donné un quotient localement libre de rang r de $f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}$, l'ensemble des points $y \in \mathrm{Y}$ tel que l'homomorphisme $\widehat{\kappa}(y)^r \to x^*\mathrm{F}$ déduit de l'homomorphisme composé
$$\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^n \longrightarrow f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$$
soit surjectif, est ouvert, et égal à T seulement si le-dit composé lui-même est surjectif.
- Avec les notations précédentes, la réunion des U_{H} est Y.

Le premier est une conséquence du lemme de Nakayama ; le deuxième est vrai car les sections $\{s_i\}$ engendrent $f^*\varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}$. Cela achève la preuve. □

Proposition 7.21. *Soient* F, F' *des faisceaux de* $\mathscr{O}_X$*-modules de présentation finie. Le morphisme de Segre*

$$\sigma_{\mathrm{F},\mathrm{F}'} : \mathbf{P}(\mathrm{F}) \times_{\mathrm{X}} \mathbf{P}(\mathrm{F}') \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{F}')$$

est une immersion fermée.

Proposition 7.22. *Soient* F *un faisceau* $\mathscr{O}_X$*-modules de présentation finie et* r *un nombre entier positif. Le morphisme de Plücker*

$$\pi_{\mathrm{F}} : \mathbf{Grass}_r(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{P}\big(\textstyle\bigwedge^r \mathrm{F}\big)$$

est une immersion fermée.

Proposition 7.23 (Compatibilité aux changements de base)**.** *Soit* $(\mathrm{K}, \mathrm{X}', f)$ *un espace analytique sur* X*. Soient* F *un faisceau de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules de présentation finie et* r *un nombre entier positif. Le morphisme naturel de* K*-espaces analytique sur* X*,*

$$\mathbf{Grass}_r(f^*\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{Grass}_r(\mathrm{F}) \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}',$$

est un isomorphisme.

8 Normes géométriques

Dans cette section on présente une notion de norme sur un espace vectoriel E de dimension finie adaptée aux espaces analytiques. Si k est le corps de nombres complexes **C** on retrouve la notion de norme sur $\mathrm{E}^\vee$; si k est le corps de nombres réels on trouve la notion de norme sur $\mathrm{E}^\vee \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ invariante sous l'action de Galois. Dans le cas non archimédien cette notion permet d'éviter des difficultés qui apparaissent quand le corps n'est pas localement compact : l'étude est inspirée par [GI63] et [RTW11, §1.2].

8.1 Normes géométriques sur les espaces vectoriels

8.1.1. Définition et propriétés fondamentales. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie. Les lois de somme et de multiplication par les scalaires définissent des morphismes de k-espaces analytiques

$$\begin{aligned} s &: \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}) && \text{(somme)} \\ h &: \mathbf{A}^1 \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}) && \text{(homothétie)} \end{aligned}$$

On désigne par t la cordonnée sur $\mathbf{A}^1_k$.

Définition 8.1. Une *norme géométrique* sur E est une application $p : |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \to \mathbf{R}_+$ satisfaisant aux conditions suivantes :

i. *homogénéité* : le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} {|\mathbf{A}^1 \times \mathbf{V}(\mathrm{E})|} \arrow[r, "m"] \arrow[d] & {|\mathbf{V}(\mathrm{E})|} \arrow[dd, "p"] \\ {|\mathbf{A}^1| \times |\mathbf{V}(\mathrm{E})|} \arrow[d, "|t| \times p"'] & \\ \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \arrow[r, "\mu"] & \mathbf{R}_+ \end{tikzcd}$$

   est commutatif (où μ désigne la multiplication de nombres réels) ;

ii. *sous-additivité ou inégalité triangulaire* : si on considère le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
{|\mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E})|} \arrow[r, "a"] \arrow[d] & {|\mathbf{V}(\mathrm{E})|} \arrow[dd, "p"] \\
{|\mathbf{V}(\mathrm{E})| \times |\mathbf{V}(\mathrm{E})|} \arrow[d, "p\times p"'] & \\
\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \arrow[r, "\alpha"] & \mathbf{R}_+
\end{tikzcd}$$

où α désigne l'addition de nombres réels, alors on a

$$p \circ a \leq \alpha \circ (p \times p);$$

iii. pour tout $x \in |\mathbf{V}(\mathrm{E})|$, si $p(x) = 0$, alors $x = 0$.

On dit qu'une norme géométrique sur un k-espace vectoriel E est continue si elle l'est en tant que fonctions su l'espace topologique $|\mathbf{V}(\mathrm{E})|$.

Proposition 8.2. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie. Une application $p : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{R}_+$ est une norme géométrique si et seulement si pour toute extension analytique* K *de k, l'application composée*

$$\|\cdot\|_{\mathrm{Hom}_k(\mathrm{E},\mathrm{K})} : \mathrm{Hom}_k(\mathrm{E},\mathrm{K}) \longrightarrow |\mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}| \longrightarrow |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{R}_+$$

est une norme sur le K*-espace vectoriel* $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{E},\mathrm{K})$.

Corollaire 8.3. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p. Pour toute extension analytique* K *de k, l'application composée*

$$p_{\mathrm{K}} : |\mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}| \longrightarrow |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{R}_+$$

est une norme géométrique sur le K*-espace vectoriel* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{K}$*, qu'on appellera la norme géométrique déduite par extension des scalaires de k à* K*.*

Exemple 8.4 (Normes géométriques ℓ^q)**.** Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie n, $t_1, \dots, t_n$ une base de E et $q \geq 1$ un nombre réel. En vertu de la Proposition 8.2 la fonction

$$\begin{aligned} p_{\ell^q} : \mathbf{V}(\mathrm{E}) &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt[q]{|t_1(x)|^q + \cdots + |t_n(x)|^q} \end{aligned}$$

est une norme géométrique continue sur le k-espace vectoriel E. Il en est de même pour la fonction

$$\begin{aligned} p_{\ell^\infty} : \mathbf{V}(\mathrm{E}) &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\longmapsto \max\{|t_1(x)|, \dots, |t_n(x)|\}. \end{aligned}$$

Proposition 8.5. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie. Si p, q sont des normes géométriques sur l'espace vectoriel* E*, il existe des nombres réels $c, \mathrm{C} > 0$ tels que*

$$cq \leq p \leq \mathrm{C}q.$$

Démonstration. On peut supposer que la norme géométrique q soit une norme géométrique ℓ^∞, c'est-à-dire, de la forme

$$q = \max\{|t_1|, \ldots, |t_n|\}$$

où $t_1, \ldots, t_n$ est une base du k-espace vectoriel E. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base de $\mathrm{E}^\vee$ duale à $t_1, \ldots, t_n$, *i.e.*, la base formée par les éléments de la forme $e_i(t_j) = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le delta de Kronecker). Soient $x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})$, K une extension analytique de k qui contient son corps résiduel complété et x_K le K-point du K-espace analytique $\mathbf{V}(\mathrm{E})_\mathrm{K}$ qui s'en déduit. En tant qu'élément du K-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee \otimes_k \mathrm{K}$, le point x_K s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_{i\mathrm{K}}$$

où $e_{i\mathrm{K}} = e_i \otimes 1 \in \mathrm{E}^\vee \otimes_k \mathrm{K}$ et les x_i sont des éléments de K. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} p(x) = p_\mathrm{K}(x_\mathrm{K}) &= p_\mathrm{K}\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|_\mathrm{K} p_\mathrm{K}(e_{i\mathrm{K}}) = \sum_{i=1}^n |x_i|_\mathrm{K} p(e_i) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n p(e_i)\right) \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i|_\mathrm{K}\} = \left(\sum_{i=1}^n p(e_i)\right) q(x). \end{aligned}$$

On peut ainsi prendre $\mathrm{C} = \sum_{i=1}^n p(e_i)$.

En suite, on suppose par l'absurde qu'il n'existe pas de nombre réel $c > 0$ tel que $p \geq cq$. Il existe alors une suite de points non nuls $\{x_i : i \geq 1\}$ de $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ telle que pour tout nombre entier $i \geq 1$ on ait

$$p(x_i) < \frac{1}{i} q(x_i). \tag{8.1.1}$$

On peut construire par induction sur i une suite d'extensions analytiques emboîtées $\{\mathrm{K}_i\}$, *i.e.* munies de plongements isométriques $\mathrm{K}_i \to \mathrm{K}_{i+1}$, telle que K_i contient les corps résiduels des points $x_1, \ldots, x_i$. Le corps

$$\varinjlim_{i \geq 1} \mathrm{K}_i$$

est naturellement muni d'une valeur absolue faisant des inclusions des K_i des isométries. La complétion K par rapport à cette valeur absolue est une extension analytique de k contenant tous les corps résiduels des points x_i. Pour tout $i \geq 1$, on note $x_{i\mathrm{K}}$ le K-point du K-espace analytique $\mathbf{V}(\mathrm{E})_\mathrm{K}$ correspondant.

On considère les normes sur le K-espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{E}^\vee \otimes_k \mathrm{K}$,

$$p(\mathrm{K}), q(\mathrm{K}) : \mathrm{E}^\vee \otimes_k \mathrm{K} = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{E}, \mathrm{K}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{R}_+.$$

Puisque $\mathrm{E}^\vee \otimes_k \mathrm{K}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie sur le corps complet K, il existe un nombre réel $c(\mathrm{K}) > 0$ tel que $p(\mathrm{K}) \geq c(\mathrm{K}) q(\mathrm{K})$. En particulier, pour tout nombre entier $i \geq 1$ on a

$$p(x_i) = p(\mathrm{K})(x_{i\mathrm{K}}) \geq c(\mathrm{K}) q(x_{i\mathrm{K}}) = c(\mathrm{K}) q(x_i),$$

ce qui contredit (8.1.1). □

Corollaire 8.6. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique continue p. Pour tout nombre réel $r \geq 0$, l'adhérence de la partie*

$$\{x \in \mathbf{V}(\mathrm{E}) : p(x) \leq r\}$$

est compacte dans $\mathbf{V}(\mathrm{E})$.

8.1.2. Norme associée à une norme géométrique. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique $p : |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \to \mathbf{R}_+$. Pour tout $t \in \mathrm{E}$, en vertu de la Proposition 8.5 la fonction $|t|/p$ est borné supérieurement et inférieurement par des nombres réels. On pose alors

$$\|t\|_p := \sup_{0 \neq x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})} \frac{|t(x)|}{p(x)}.$$

L'application ainsi définie est une norme sur le k-espace vectoriel E et on l'appelle la *norme associée à la norme géométrique* p. Si la norme géométrique p est claire dans le contexte, on désigne la norme $\|\cdot\|_p$ simplement par $\|\cdot\|$.

8.1.3. Quotients. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p. Soit $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un homomorphisme surjectif de k-espaces vectoriels. L'homomorphisme π induit une immersion fermée

$$\varepsilon : \mathbf{V}(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}).$$

Définition 8.7. La *norme géométrique quotient* sur F déduite de p et π est l'application composée

$$\mathbf{V}(\mathrm{F}) \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathbf{V}(\mathrm{E}) \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{R}_+ \ .$$

8.1.4. Sous-espaces. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p. Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'inclusion ε de F dans E induit un morphisme surjectif de k-espaces analytiques

$$\pi : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F}).$$

Proposition 8.8. *Avec les notations introduites avant, l'application*

$$\begin{array}{rccc} p|_{\mathrm{F}} := \pi_{\downarrow} p : & \mathbf{V}(\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ & y & \longmapsto & \inf\limits_{\pi(x)=y} p(x) \end{array}$$

est une norme géométrique sur le k-espace vectoriel F, *dite la restriction de la norme géométrique p au sous-espace* F. *Si de plus p est continue, alors $p|_{\mathrm{F}}$ l'est aussi.*

L'opération de soustraction de E induit un morphisme de k-espaces analytiques

$$s : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}).$$

Définition 8.9. Soient $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{V}(\mathrm{E})$ les deux projections. Pour toutes parties $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \subset \mathbf{V}(\mathrm{E})$ on pose

$$d_p(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) := \inf\big\{p(s(x)) : \mathrm{pr}_i(x) \in \mathrm{X}_i \text{ pour } i = 1, 2\big\}.$$

Proposition 8.10. *Soient* E *un k-espace vectoriel muni d'une norme géométrique continue et* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *un sous-k-espace vectoriel.*

Si $p|_{\mathrm{F}}$ désigne la restriction de la norme géométrique p au sous-espace F, *pour tout point $y \in \mathbf{V}(\mathrm{F})^{\mathrm{an}}$ on a*

$$p|_{\mathrm{F}}(y) = d_p\left(\pi^{-1}(y), \mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})^{\mathrm{an}}\right).$$

Démonstration. Pour prouver l'égalité

$$p|_{\mathrm{F}}(y) = d_p\left(\pi^{-1}(y), \mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})^{\mathrm{an}}\right),$$

il suffit de montrer qu'on a

$$s\big(\mathrm{pr}_1^{-1}\pi^{-1}(y)\cap \mathrm{pr}_2^{-1}\mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})\big)=\pi^{-1}(y).$$

En effet, si cela est vrai, les nombres réels $p|_{\mathrm{F}}(y)$ et $d_p\left(\pi^{-1}(y),\mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})^{\mathrm{an}}\right)$ sont le minimum de la fonction p sur la même partie de E. On remarque d'abord que, comme $\mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})$ contient le point 0, il suffit de montrer l'inclusion

$$s\big(\mathrm{pr}_1^{-1}\pi^{-1}(y)\cap \mathrm{pr}_2^{-1}\mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})\big)\subset\pi^{-1}(y).$$

Quitte à prendre une extension analytique de k qui contient le corps résiduel de y, on peut supposer que y soit un k-point. Dans ce cas on a

$$\mathrm{pr}_1^{-1}\pi^{-1}(y)\cap \mathrm{pr}_2^{-1}\mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})=\pi^{-1}(y)\times_k\mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F}).$$

Pour toute extension analytique K de k, pour K-point x de $\pi^{-1}(y)$ et pour tout K-point v de $\mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})$ on a alors

$$\pi(x-v)=\pi(x)-\pi(v)=\pi(x)=y.$$

Cela termine la preuve. □

8.1.5. Norme géométrique d'opérateur. — Soient E, F des k-espaces vectoriels de dimension finie muni respectivement de normes géométriques $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$.

On munit le k-espace vectoriel Hom(F, E) d'une norme géométrique $p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F)}}$ comme suit. Soient

$$\varphi\in\mathbf{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})=\mathbf{V}(\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{E}))$$

et K une extension analytique de k qui contient le corps résiduel complété de φ. Soient $\varphi_{\mathrm{K}}:\mathrm{E}_{\mathrm{K}}\to\mathrm{F}_{\mathrm{K}}$ l'homomorphisme de K-espaces vectoriels associé et $\varphi^\vee_{\mathrm{K}}:\mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{K}})\to\mathbf{V}(\mathrm{E}_{\mathrm{K}})$ le morphisme de K-espaces analytiques qui lui correspond.

En vertu de la Proposition 8.5 la fonction sur $\mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{K}})-\{0\}$,

$$x\longmapsto\frac{p_{\mathrm{E,K}}(\varphi^\vee(x))}{p_{\mathrm{F,K}}(x)}$$

est bornée et on pose

$$p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F)}}(\mathrm{K})(\varphi):=\sup_{0\neq x\in\mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{K}})}\frac{p_{\mathrm{E,K}}(\varphi^\vee(x))}{p_{\mathrm{F,K}}(x)}.$$

Il découle de la surjectivité du morphisme d'extension des scalaires que si K′ est une extension analytique de K on a

$$p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F)}}(\mathrm{K}')(\varphi)=p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F)}}(\mathrm{K})(\varphi).$$

En vertu de la Proposition 5.46 cela définit donc une fonction $p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F)}}$ sur $\mathbf{V}(\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}))$ et en vertu de la Proposition 8.2 la fonction $p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F)}}$ est une norme géométrique.

8.2 Normes géométriques hermitiennes

8.2.1. Définition et propriétés. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne $|\cdot|$. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie. Les lois de somme et de multiplication par les scalaires définissent des morphismes de k-espaces analytiques

$$s:\mathbf{V}(\mathrm{E})\times\mathbf{V}(\mathrm{E})\longrightarrow\mathbf{V}(\mathrm{E})\qquad\text{(somme)}$$

$$h:\mathbf{A}^1\times\mathbf{V}(\mathrm{E})\longrightarrow\mathbf{V}(\mathrm{E})\qquad\text{(homothétie)}$$

On désigne par $\alpha:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ l'addition de nombres réels positifs.

Définition 8.11. Une norme géométrique $p : |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \to \mathbf{R}_+$ sur le k-espace vectoriel E est dite *hermitienne* si elle satisfait la loi du parallélogramme

$$2\alpha \circ (p \times p) = \alpha \circ (a \times s),$$

i.e. le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
|\mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E})| \arrow[r, "a \times s"] \arrow[d] & |\mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E})| \arrow[d] \\
|\mathbf{V}(\mathrm{E})| \times |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \arrow[d, "p \times p"'] & |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \times |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \arrow[d, "p \times p"] \\
\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \arrow[d, "2\alpha"'] & \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbf{R}_+ \arrow[r, equal] & \mathbf{R}_+
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Si $k = \mathbf{C}$, se donner une norme géométrique hermitienne sur E revient à se donner une norme hermitienne sur $\mathrm{E}^\vee$ (et, donc, une forme sesquilinéaire $\boldsymbol{h}_{\mathrm{E}^\vee}$ sur $\mathrm{E}^\vee$).

Si $k = \mathbf{R}$, se donner une norme géométrique hermitienne sur E revient à se donner une norme hermitienne sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee \otimes \mathbf{C}$ invariante sous l'action de Galois (et, donc, une forme sesquilinéaire $\boldsymbol{h}_{\mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}$ sur $\mathrm{E}^\vee \otimes \mathbf{C}$ compatible à la conjugaison complexe). Puisque la forme sesquilinéaire $\boldsymbol{h}_{\mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}$ est entièrement détérminée par sa restriction à $\mathrm{E}^\vee$, se donner une norme géométrique hermitienne sur E revient à se donner une norme euclidienne sur $\mathrm{E}^\vee$.

Proposition 8.12 (Orthonormalisation)**.** *Soient* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique hermitienne p.*

Il existe une base $t_1, \dots, t_n$ du k-espace vectoriel E *telle que*

$$p(x) = \sqrt{|t_1(x)|^2 + \cdots + |t_n(x)|^2}$$

pour tout $x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})$.

8.2.2. Somme directe. — Soient E, F des k-espaces vectoriels de dimension finie muni respectivement de normes géométriques hermitiennes $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$. Soient

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{E}} : \mathbf{V}(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E})$$
$$\mathrm{pr}_{\mathrm{F}} : \mathbf{V}(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F})$$

les deux projections canoniques.

Proposition 8.13. *L'application $p_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}} : \mathbf{V}(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}) \to \mathbf{R}_+$, définie par*

$$p_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}}(x) := \sqrt{p_{\mathrm{E}}(\mathrm{pr}_{\mathrm{E}}(x))^2 + p_{\mathrm{F}}(\mathrm{pr}_{\mathrm{F}}(x))^2}$$

est une norme géométrique hermitienne sur $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ *dite somme directe des normes géométriques hermitienne p_{E}, p_{F}.*

8.2.3. Produit tensoriel. — Soient E, F des k-espaces vectoriels de dimension finie muni respectivement de normes géométriques hermitiennes $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$. Soient $\boldsymbol{h}_{\mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}$, $\boldsymbol{h}_{\mathrm{F}^\vee,\mathbf{C}}$ les formes sesquilinéaires sur $\mathrm{E}^\vee \otimes \mathbf{C}$, $\mathrm{F}^\vee \otimes \mathbf{C}$ associées.

Proposition 8.14. *Il existe une (unique) forme sesquilinéaire $\boldsymbol{h}_{(\mathrm{E}\otimes\mathrm{F})^\vee,\mathbf{C}}$ sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $(\mathrm{E} \otimes \mathrm{F})^\vee \otimes \mathbf{C}$ telle que, pour tous $v, v' \in \mathrm{E}^\vee \otimes \mathbf{C}$ et tous $w, w' \in \mathrm{F}^\vee \otimes \mathbf{C}$, on a :*

$$\boldsymbol{h}_{(\mathrm{E}\otimes\mathrm{F})^\vee,\mathbf{C}}(v \otimes w, v' \otimes w') := \boldsymbol{h}_{\mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}(v, v')\boldsymbol{h}_{\mathrm{F}^\vee,\mathbf{C}}(w, w').$$

De plus, si $k = \mathbf{R}$, cette forme sesquilinéaire est compatible à la conjugaison complexe.

La norme géométrique hermitienne $p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ associée à la forme sesquilinéaire $\boldsymbol{h}_{(\mathrm{E}\otimes\mathrm{F})^\vee,\mathbf{C}}$ est dite *produit tensoriel des normes géométriques hermitiennes p_{E}, p_{F}.*

8.2.4. Produit symétrique. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique hermitienne p_{E}. Pour tout nombre entier $r \geq 0$, on munit le k-espace vectoriel $\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}$ de la norme géométrique $p_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}}$ induite par l'homomorphisme surjectif

$$\mathrm{E}^{\otimes r} \longrightarrow \mathrm{Sym}^r \mathrm{E}.$$

Proposition 8.15 (Sous-multiplicativité)**.** *Soient $r, s \geq 0$ des nombres entiers. Pour tous $f \in \mathrm{Sym}^r \mathrm{E}$, $g \in \mathrm{Sym}^s \mathrm{E}$ on a :*

$$\|fg\|_{\mathrm{Sym}^{r+s} \mathrm{E}} \leq \|f\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} \cdot \|g\|_{\mathrm{Sym}^s \mathrm{E}}.$$

Proposition 8.16. *Soit $e_1, \dots, e_n \in \mathrm{E}$ une base orthonormale de E. Pour tout n-uplet $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ de nombres entiers positifs tels que $\ell_1 + \cdots + \ell_n = r$, on a :*

$$\|e_1^{\ell_1} \cdots e_n^{\ell_n}\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} = \binom{r}{\ell_1, \dots, \ell_n}^{-1/2} := \left(\frac{r!}{\ell_1! \cdots \ell_n!}\right)^{-1/2}$$

8.2.5. Produit extérieur. — Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique hermitienne p_{E} et $\boldsymbol{h}_{\mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}$ la forme sésquilineaire sur $\mathrm{E}^\vee \otimes \mathbf{C}$ associée. Soit $r \in [1, \dim \mathrm{E}]$ un nombre entier.

Pour tous $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_r \in \bigwedge^r \mathrm{E}^\vee \otimes \mathbf{C}$ on pose :

$$\boldsymbol{h}_{\bigwedge^r \mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) = \det(\boldsymbol{h}_{\mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}(v_i, w_j) : i, j = 1, \dots, n).$$

On définit ainsi une forme sesquilinéaire $\boldsymbol{h}_{\wedge^r \mathrm{E}^\vee,\mathbf{C}}$ sur $\bigwedge^r \mathrm{E}^\vee \otimes \mathbf{C}$. De plus, si $k = \mathbf{R}$, elle est compatible à la conjugaison complexe. La norme géométrique hermitienne correspondante $p_{\bigwedge^r \mathrm{E}}$ sera appelée *puissance extérieure r-ème de la norme géométrique hermitienne p_{E}.*

Proposition 8.17. *Soit $\overline{p}_{\mathrm{E}}$ la norme géométrique quotient sur le k-espace vectoriel $\bigwedge^r \mathrm{E}$ induite par l'homomorphisme surjectif canonique*

$$\mathrm{E}^{\otimes r} \longrightarrow \textstyle\bigwedge^r \mathrm{E}.$$

Alors,

$$\|\cdot\|_{p_{\bigwedge^r \mathrm{E}}} = \sqrt{r}\|\cdot\|_{\overline{p}_{\mathrm{E}}}.$$

Proposition 8.18 (Inégalité de Hadamard)**.** *Si $v_1, \dots, v_r \in \mathrm{E}$ sont des vecteurs linéairement indépendants, on a :*

$$\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\|_{\bigwedge^r \mathrm{E}} \leq \|v_1\|_{\mathrm{E}} \cdots \|v_n\|_{\mathrm{E}}.$$

8.3 Normes géométriques non archimédiennes

8.3.1. Définition et propriétés. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne $|\cdot|$. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie. La loi de somme définit un morphisme de k-espaces analytiques

$$s : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}).$$

Définition 8.19. Une norme géométrique $p : |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \to \mathbf{R}_+$ sur le k-espace vectoriel E est dite *non archimédienne* si elle est *continue* et satisfait à l'inégalité triangulaire non archimédienne, *i.e.* si on considère le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
|\mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E})| \arrow[r, "s"] \arrow[d] & |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \arrow[dd, "p"] \\
|\mathbf{V}(\mathrm{E})| \times |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \arrow[d, "p\times p"'] & \\
\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \arrow[r, "\max"] & \mathbf{R}_+
\end{tikzcd}$$

où max désigne le maximum d'un couple de nombres réels, alors on a

$$p \circ s \leq \max \circ (p \times p).$$

Exemple 8.20 (Norme provenante d'un modèle entier)**.** Soient k° l'anneau des entiers de k, $\mathfrak{E}$ un k°-module libre de rang fini et $\mathrm{E} := \mathfrak{E} \otimes_{k^\circ} k$. La fonction

$$\begin{aligned} p_{\mathfrak{E}} :\ \mathbf{V}(\mathrm{E}) &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\longmapsto \max_{t \in \mathfrak{E}} |t(x)| \end{aligned}$$

est alors une norme géométrique continue non archimédienne sur le k-espace vectoriel E. On dira que $p_{\mathfrak{E}}$ est la *norme géométrique provenant du modèle entier* $\mathfrak{E}$. Comme l'affirme le Théorème suivant, quitte à étendre les scalaires, toutes les normes géométriques non archimédiennes sont de cette forme.

Théorème 8.21. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique non archimédienne p.*

Il existe une extension analytique K *de k et un sous-*K°*-module* $\mathfrak{E} \subset \mathrm{E} \otimes_k \mathrm{K}$ *libre de rang fini tels que*

i. l'homomorphisme naturel $\mathfrak{E} \otimes_{\mathrm{K}^\circ} \mathrm{K} \to \mathrm{E} \otimes_k \mathrm{K}$ *est un isomorphisme ;*

ii. l'application composée

$$p_{\mathrm{K}} :\ |\mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}| \longrightarrow |\mathbf{V}(\mathrm{E})| \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{R}_+$$

est la norme géométrique associée au modèle entier $\mathfrak{E}$*.*

La preuve qui suit est une adaptation de celle de la Proposition 1.1 de [GI63].

Démonstration. On prouve l'énoncé par récurrence sur la dimension n du k-espace vectoriel E. On suppose d'abord $n = 1$ et on considère un élément non nul $t \in \mathrm{E}$. Les applications $|t|$ et p sont homogènes et leur rapport $|t|/p$ sur $\mathbf{V}(\mathrm{E}) - \{0\}$ est identiquement égal à un nombre réel $\rho > 0$. Soient K une extension analytique de k telle que ρ appartienne au groupe des valeur $|K^\times|$ et $\lambda \in K$ un élément de valeur absolue ρ. Le sous-K°-module $\mathfrak{E}$ de $E \otimes_k K$ engendré par t/λ convient.

On suppose ensuite $n \geq 2$ et que l'énoncé soit vrai en dimension $n-1$. Soit $t \in E$ un élément non nul. Si on considère la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\ t\ } E \longrightarrow F = E/(k \cdot t) \longrightarrow 0\ ,$$

la restriction p_F de la norme géométrique p à $\mathbf{V}(F)$ par l'immersion fermée $\mathbf{V}(F) \to \mathbf{V}(E)$ définit une norme géométrique continue et non archimédienne sur l'espace vectoriel F. Par hypothèse de récurrence il existe une extension analytique K de k et une base $t_1, \dots, t_{n-1}$ du K-espace vectoriel $F_K := F \otimes_k K$ telle que pour tout élément w de $\mathbf{V}(F_K)$ on ait

$$p_{F,K}(w) = \max\{r_1 |t_1(w)|, \dots, r_{n-1} |t_{n-1}(w)|\}.$$

Les applications $|t|$ et p_K sont continues sur l'espace topologique $|\mathbf{V}(E)_K|$. De plus, comme les applications $|t|, p_K$ sont homogènes, leur rapport $|t|/p_K$ descend en une fonction continue sur l'espace projectif $\mathbf{P}(E)_K$. Ce dernier étant compact, l'application $|t|/p$ atteint un maximum global strictement positif dans un point $x \in \mathbf{P}(E)_K$.

Quitte à étendre K on supposer que le point x soit défini sur K. Soit v_n un K-point non nul du K-espace analytique $\mathbf{V}(E)$, *i.e.* un élément non nul $v_n \in E_K := E^\vee \otimes_k K$, représentant le point x. Quitte à étendre encore K on peut supposer que le nombre réel

$$\frac{|t(v_n)|}{p_K(v_n)}$$

appartient au groupes des valeurs de K, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| p_K(v_n) = |t(v_n)|$. On pose :

$$u_n := t_n/\lambda.$$

Soit $v_1, \dots, v_{n-1}$ la base du K-espace vectoriel $F_K^\vee$ duale à la base $t_1, \dots, t_{n-1}$ du K-espace vectoriel F_K. Si on identifie $v_1, \dots, v_{n-1}$ avec leurs images dans $E_K^\vee$, les éléments $v_1, \dots, v_n$ forment une base du K-espace vectoriel $E_K^\vee$. Pour tout $i = 1, \dots, n-1$, soit u_i l'élément du K-espace vectoriel E_K décrit par les conditions

$$u_i(v_\alpha) = \delta_{i\alpha} \qquad (\alpha = 1, \dots, n),$$

où $\delta_{i\alpha}$ désigne le delta de Kronecker. Les éléments $u_1, \dots, u_n$ forment alors une base du K-espace vectoriel E_K. Pour tout $i = 1, \dots, n$ l'image de u_i dans F_K coïncide avec t_i. On va montrer que le sous-K°-module libre $\mathfrak{E} \subset E_K$ engendré par les u_i convient.

Soit L une extension analytique de K et w un L-point du K-espace analytique $\mathbf{V}(E_K)$. Le point w s'écrit en tant qu'élément du L-espace vectoriel $E_L^\vee := E^\vee \otimes_k L$ sous la forme

$$w = u_n(w) \frac{v_n}{u_n(v_n)} + w'.$$

Par définition $u_n(w') = 0$, c'est-à-dire, le L-point w' appartient au sous-K-espace analytique $\mathbf{V}(F_K)$. Par hypothèse de récurrence, on a alors

$$p_K(w') = \max\{|u_1(w)|, \dots, |u_{n-1}(w)|\}. \tag{8.3.1}$$

Puisque la norme géométrique p_K est non archimédienne, on a

$$\begin{aligned} p_K(w) &\leq \max\left\{|u_n(w)| \frac{p_K(v_n)}{|u_n(v_n)|}, p_K(w')\right\} \\ &= \max\left\{|u_n(w)|, p_K(w)\right\}, \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

car par définition de u_n on a $p_{\mathrm{K}}(v_n) = |u_n(v_n)|$. D'autre part, la fonction $|t|/p_{\mathrm{K}}$ sur $\mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}} - \{0\}$ atteint son maximum en le point v_n. Par conséquent,

$$p_{\mathrm{K}}(w) \geq |u_n(w)|. \tag{8.3.3}$$

En vertu de (8.3.1), (8.3.2) et (8.3.2) on a l'égalité

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{K}}(w) &= \max\{|u_n(w)|, p_{\mathrm{K}}(w')\} \\ &= \max\{|u_n(w)|, |u_1(w)|, \dots, |u_{n-1}(w)|\}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

8.3.2. Sommes directes. — Soient E, F des k-espaces vectoriels de dimension finie muni respectivement de normes géométriques non archimédiennes $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$. Soient

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{E}} : \mathbf{V}(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E})$$
$$\mathrm{pr}_{\mathrm{F}} : \mathbf{V}(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F})$$

les deux projections canoniques.

Proposition 8.22. *L'application $p_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}} : \mathbf{V}(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}) \to \mathbf{R}_+$, définie par*

$$p_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}}(x) := \max\{p_{\mathrm{E}}(\mathrm{pr}_{\mathrm{E}}(x)), p_{\mathrm{F}}(\mathrm{pr}_{\mathrm{F}}(x))\}$$

est une norme géométrique non archimédienne sur E ⊕ F *dite somme directe des normes géométriques non archimédiennes p_{E}, p_{F}.*

Si les normes géométriques $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$ proviennent respectivement des modèles entiers $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, la norme géométrique $p_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}}$ provient du modèle entier $\mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F}$.

8.3.3. Homomorphismes. — Soient E, F des k-espaces vectoriels de dimension finie muni respectivement de normes géométriques non archimédiennes $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$. La norme géométrique d'opérateur $p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F)}}$ introduite au paragraphe 8.1.5 est alors une norme géométrique non archimédienne et on la note simplement $p_{\mathrm{Hom(E,F)}}$.

Pour vérifier que c'est une norme géométrique non archimédienne, on peut le faire sur une extension analytique de K de k car la définition la norme géométrique d'opérateur est compatible à l'extension des scalaires. En vertu du Théorème 8.21 il existe une extension analytique K de k et des sous-K°-modules libres $\mathfrak{E} \subset \mathrm{E}$, $\mathfrak{F} \subset \mathrm{F}$ de fibre générique respectivement E et F et tels que les normes géométriques $p_{\mathrm{E,K}}$, $p_{\mathrm{F,K}}$ proviennent des modèles entiers $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$. La norme géométrique $p^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom(E,F),K}}$ est alors la norme géométrique associée au K°-module $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^\circ}(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ et elle est donc non archimédienne.

En particulier, si les normes géométriques $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$ proviennent respectivement des modèles entiers $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, la norme géométrique $p_{\mathrm{Hom(E,F)}}$ provient du modèle entier $\mathrm{Hom}_{k^\circ}(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$.

8.3.4. Produit tensoriel. — Soient E, F des k-espaces vectoriels de dimension finie munis respectivement de normes géométriques non archimédiennes $p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{F}}$. On va définir une norme géométrique non archimédienne sur le k-espace vectoriel $\mathrm{E} \otimes_k \mathrm{F}$.

Soient $\beta \in \mathbf{V}(\mathrm{E} \otimes_k \mathrm{F})$, K une extension analytique de k contenant le corps résiduel complété de β et β_{K} le K-point du K-espace analytique $\mathbf{V}(\mathrm{E} \otimes \mathrm{F})_{\mathrm{K}}$ associé. Le K-point β_{K} correspond à une application K-bilinéaire

$$\beta_{\mathrm{K}} : \mathrm{E}_{\mathrm{K}} \oplus \mathrm{F}_{\mathrm{K}} \longrightarrow \mathrm{K},$$

qui à son tour induit un morphisme de K-espaces analytiques $\mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee)_\mathrm{K} \times_\mathrm{K} \mathbf{V}(\mathrm{F}^\vee)_\mathrm{K} \to \mathbf{A}^1_\mathrm{K}$ qu'on désigne encore par β_K. Soient

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{E}^\vee} : \mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee)_\mathrm{K} \times_\mathrm{K} \mathbf{V}(\mathrm{F}^\vee)_\mathrm{K} \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee)_\mathrm{K},$$
$$\mathrm{pr}_{\mathrm{F}^\vee} : \mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee)_\mathrm{K} \times_\mathrm{K} \mathbf{V}(\mathrm{F}^\vee)_\mathrm{K} \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F}^\vee)_\mathrm{K},$$

les deux projections. Avec ces notations on pose

$$p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}(\mathrm{K})(\beta) := \sup\left\{\frac{|\beta_\mathrm{K}(x)|}{p_{\mathrm{E}^\vee,\mathrm{K}}(\mathrm{pr}_{\mathrm{E}^\vee}(x)) \cdot p_{\mathrm{F}^\vee,\mathrm{K}}(\mathrm{pr}_\mathrm{F}(x))} : x \in \mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee)_\mathrm{K} \times_\mathrm{K} \mathbf{V}(\mathrm{F}^\vee)_\mathrm{K} \text{ tel que } \mathrm{pr}_{\mathrm{E}^\vee}(x), \mathrm{pr}_{\mathrm{F}^\vee}(x) \neq 0\right\}$$

Il découle de la surjectivité du morphisme d'extension des scalaires que si K′ est une extension analytique de K on a

$$p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}(\mathrm{K}')(\beta) = p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}(\mathrm{K})(\beta).$$

En vertu de la Proposition 5.46 cela définit donc une fonction $p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ sur $\mathbf{V}(\mathrm{E} \otimes_k \mathrm{F})$ et en vertu de la Proposition 8.2 la fonction $p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ est une norme géométrique.

De plus, si les normes géométriques p_E, p_F proviennent respectivement de modèles entiers $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, alors la norme géométrique $p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ coïncide avec la norme géométrique provenant du modèle entier $\mathfrak{E} \otimes_{k^\circ} \mathfrak{F}$. À l'aide du Théorème 8.21 ceci montre que, en revenant à des normes géométriques non archimédiennes quelconques p_E et p_F, alors la norme géométrique $p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ est non archimédienne.

8.3.5. Produit symétrique. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique hermitienne p_E. Pour tout nombre entier $r \geq 0$, on munit le k-espace vectoriel $\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}$ de la norme géométrique $p_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}}$ induite par l'homomorphisme surjectif

$$\mathrm{E}^{\otimes r} \longrightarrow \mathrm{Sym}^r \mathrm{E}.$$

Proposition 8.23 (Sous-multiplicativité). *Soient $r, s \geq 0$ des nombres entiers. Pour tous $f \in \mathrm{Sym}^r \mathrm{E}^\vee$, $g \in \mathrm{Sym}^s \mathrm{E}^\vee$ on a :*

$$\|fg\|_{\mathrm{Sym}^{r+s}\mathrm{E}} \leq \|f\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} \cdot \|g\|_{\mathrm{Sym}^s \mathrm{E}}.$$

Si la normes géométrique p_E provient d'un modèle entier $\mathfrak{E}$, la norme géométrique $p_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}}$ provient du modèle entier $\mathrm{Sym}^r \mathfrak{E}$.

8.3.6. Produit extérieur. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique hermitienne p_E. Pour tout nombre entier $r \in [1, \dim \mathrm{E}]$, on munit le k-espace vectoriel $\bigwedge^r \mathrm{E}$ de la norme géométrique $p_{\bigwedge^r \mathrm{E}}$ induite par l'homomorphisme surjectif canonique

$$\mathrm{E}^{\otimes r} \longrightarrow \textstyle\bigwedge^r \mathrm{E}.$$

Proposition 8.24 (Inégalité de Hadamard). *Pour tous $v_1, \ldots, v_r \in \mathrm{E}$, on a :*

$$\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\|_{\bigwedge^r \mathrm{E}} \leq \|v_1\|_\mathrm{E} \cdots \|v_n\|_\mathrm{E}.$$

Si la norme géométrique p_E provient d'un modèle entier $\mathfrak{E}$, la norme géométrique $p_{\bigwedge^r \mathrm{E}}$ provient du modèle entier $\bigwedge^r \mathfrak{E}$.

8.3.7. Compatibilités. — Toutes les compatibilités valables pour les constructions tensorielles sur les k°-modules plats et de type fini (c'est-à-dire libres de rang fini) sont aussi valables pour les k-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une norme géométrique non archimédienne. En guise d'exemple, pour $i = 1,2,3$, on considère un k-espace vectoriel de dimension finie E_i muni d'une norme géométrique non archimédienne p_{E_i}. Alors, l'isomorphisme canonique

$$(E_1 \otimes_k E_2) \otimes_k E_3 \longrightarrow E_1 \otimes_k (E_2 \otimes_k E_3)$$

est isométrique. Autrement dit, en sous-entendant l'isomorphisme ci-dessus, on a l'égalité

$$p_{(E_1\otimes_k E_2)\otimes_k E_3} = p_{E_1\otimes_k(E_2\otimes_k E_3)}. \tag{8.3.4}$$

En effet, la construction de la norme géométrique du produit tensoriel est compatible à l'extension des scalaires. En vertu du Théorème 8.21 on peut donc supposer que pour tout $i = 1,2,3$ la norme géométrique p_{E_i} provient d'un modèle entier $\mathfrak{E}_i$. L'égalité (8.3.4) provient alors de l'isomorphisme canonique de k°-modules

$$(\mathfrak{E}_1 \otimes_{k^\circ} \mathfrak{E}_2) \otimes_{k^\circ} \mathfrak{E}_3 \longrightarrow \mathfrak{E}_1 \otimes_{k^\circ} (\mathfrak{E}_2 \otimes_{k^\circ} \mathfrak{E}_3).$$

8.4 Invariance par sous-groupes compacts

8.4.1. Définitions. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$. Soit X un k-espace analytique muni d'une l'action d'un k-groupe analytique G. Soient $\sigma, \mathrm{pr}_X : G \times X \to X$ respectivment le morphisme de k-espaces analytiques définissant l'action de G et la projection sur X, et soit $\mathrm{pr}_G : G \times X \to G$ la projection sur G.

Définition 8.25. Soit $F \subset |G|$ une partie et Y un ensemble. On dit qu'une fonction $u : |X| \to Y$ est F-*invariante* (ou *invariante sous l'action de* F) si les applications composées $\sigma^* u, \mathrm{pr}_X^* u : |G \times X| \to Y$ coïncident sur $\mathrm{pr}_G^{-1}(F)$,

$$\sigma^* u\big|_{\mathrm{pr}_G^{-1}(F)} = \mathrm{pr}_X^* u\big|_{\mathrm{pr}_G^{-1}(F)}.$$

Si $F = \{g\}$ est un singleton on dira que u est g-invariante au lieu de $\{g\}$-invariante.

Pour toute partie $F \subset |G|$, au niveau ensembliste la partie $\mathrm{pr}_G^{-1}(F)$ est la réunion disjointe des parties $\mathrm{pr}_G^{-1}(g)$ avec $g \in F$. En particulier, une fonction $u : |X| \to Y$ est F-invariante si et seulement elle est g-invariante pour tout $g \in F$.

Définition 8.26. Soient Y un ensemble et $u : |X| \to Y$ une application. Le *stabilisateur de u dans* G est la partie

$$\mathrm{Stab}_G(u) := \{g \in G : u \text{ est } g\text{-invariante}\} \subset |G|.$$

Soient $g \in G$, K une extension de son corps résiduel complété $\widehat{\kappa}(g)$ et g_K le K-point du K-espace analytique G_K associé. Si $\sigma_{g_K} : X_K \to X_K$ désigne l'isomorphisme induit par l'action de g_K, alors le point g appartient à $\mathrm{Stab}_G(u)$ si et seulement si

$$\varpi_K^* u = \sigma_{g_K}^* \varpi_K^* u,$$

où $\varpi_K : X_K \to X$ est le morphisme d'extension des scalaires.

Proposition 8.27. *Soient* X *un* k*-espace analytique muni d'une l'action d'un* k*-groupe analytique* G. *Soient* Y *un ensemble et* $u : |X| \to Y$ *une application. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i. la partie $\mathrm{Stab}_G(u) \subset |G|$ *est un sous-groupe ;*

ii. compatibilité aux extension des scalaires : si K *est une extension analytique de k, le* K*-groupe analytique* G_K *agit naturellement sur le* K*-espace analytique* X_K *et on a*

$$\mathrm{Stab}_{G,K}(\varpi_{X,K}^{*}u) = \varpi_{G,K}^{-1}\,\mathrm{Stab}_G(u)$$

où $\varpi_{G,K} : G_K \to G$ *et* $\varpi_{X,K} : X_K \to X$ *sont les morphismes d'extension des scalaires.*

Définition 8.28. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p. Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose que la norme géométrique p soit hermitienne (resp. non archimédienne).

Le k-groupe analytique $\mathbf{GL}(E)$ agit naturellement sur E. Le sous-groupe $\mathrm{Stab}_{\mathbf{GL}(E)}(p)$ de $|\mathbf{GL}(E)|$ est appelé le *sous-groupe unitaire par rapport à p* et noté $\mathbf{U}(p)$.

Proposition 8.29. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p. Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose que la norme géométrique p soit hermitienne (resp. non archimédienne). Alors, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i. compatibilité aux extensions des scalaires : si K *est une extension analytique de k et* p_K *la norme géométrique sur le* K*-espace vectoriel* $E_: = E \otimes_k K$ *déduite par extension des scalaires, on a*

$$\mathbf{U}(p_K) = \varpi_K^{-1}\mathbf{U}(p),$$

où $\varpi_K : GL(E)_K \to \mathbf{GL}(E)$ *est le morphisme d'extension des scalaires ;*

ii. si la valeur absolue de k est non archimédienne et la norme géométrique p provient d'un sous-k°-module $\mathfrak{E} \subset E$ *tel que* $\mathfrak{E} \otimes_{k^\circ} k = E$*, alors le groupe unitaire* $\mathbf{U}(p)$ *est le k-groupe affinoïde associé au k°-schéma en groupes* $\mathbf{GL}(\mathfrak{E})$ *;*

iii. le sous-groupe unitaire $\mathbf{U}(p) \subset |\mathbf{GL}(E)|$ *est compact.*

Démonstration. Le point (i) est un cas particulier de la compatibilité aux extension des scalaires du stabilisateur (Proposition 8.27).

Pour (ii), soient g un point de $\mathbf{GL}(E)$, $K = \widehat{\kappa}(x)$ son corps résiduel complété et $g_K : E \otimes_k K \to E \otimes_k K$ l'isomorphisme de K-espaces vectoriels associé. Le K°-module $\mathfrak{E}_{k^\circ} \otimes K^\circ$ s'identifie au sous-K°-module de $E \otimes_k K$ formé par les éléments t tels que

$$|t(x)| \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbf{V}(E \otimes_k K) \text{ tel que } p_K(x) \leq 1$$

(où p_K est la norme géométrique sur $E \otimes_k K$ déduite par extension des scalaires). Le point g appartient alors au sous-groupe unitaire $\mathbf{U}(p)$ si et seulement si l'isomorphisme g_K se restreint à un isomorphisme $\mathfrak{E} \otimes_{k^\circ} K^\circ \to \mathfrak{E} \otimes_{k^\circ} K^\circ$, c'est-à-dire, il définit un K°-point du k°-schéma $\mathbf{GL}(\mathfrak{E})$.

Pour (iii), si la valeur absolue de k est archimédienne, le résultat est connu par $k = \mathbf{C}$ et dans le cas $k = \mathbf{R}$ se déduit du cas complexe par propreté topologique du morphisme d'extension des scalaires.

Si la valeur absolue est non archimédienne, en vertu du Théorème 8.21, il existe une extension analytique K de k telle que la norme géométrique p_K sur $E_K := E \otimes_k K$ provient d'un sous-K°-module libre $\mathfrak{E} \subset E$ qui engendre E_K. Le sous-groupe unitaire $\mathbf{U}(p_K)$ coïncide alors avec le sous-groupe affinoïde de $\mathbf{GL}(E)$ déduit du K°-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathfrak{E})$. En particulier $\mathbf{U}(p_K)$ est compact et par propreté topologique du morphisme d'extension des scalaires $\varpi_K : \mathbf{GL}(E)_K \to \mathbf{GL}(E)$, le sous-groupe $\mathbf{U}(p)$ est aussi compact. □

8.4.2. Cas archimédien. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne. On rappelle tout d'abord que si G est un groupe topologique compact, il existe une unique mesure sur G, dite *mesure de Haar* et notée μ_G, invariante par multiplication à gauche (et donc à droite) et de masse totale 1.

Proposition 8.30. *Soient* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire d'un k-groupe analytique* G. *Alors pour tout sous-groupe compact* $\mathrm{H} \subset |\mathrm{G}|$, *il existe une norme géométrique hermitienne* H*-invariante sur* E.

Démonstration. On suppose d'abord $k = \mathbf{C}$. Dans ce cas les points de l'espace topologique sous-jacent au **C**-espace analytique G coïncident avec les **C**-points de G. En particulier, $|\mathrm{G}|$ est un groupe topologique localement compact et le sous-groupe H est un groupe topologique compact. Pour toute norme géométrique hermitienne p sur E, la fonction

$$\int_{\mathrm{H}} p \, d\mu_{\mathrm{H}} : \quad x \mapsto \int_{\mathrm{H}} p(g \cdot x) \, d\mu_{\mathrm{H}}(g)$$

est une norme hermitienne H-invariante.

Si $k = \mathbf{R}$, soient $\mathrm{G}_{\mathbf{C}}$ le **C**-groupe analytique qui se déduit par extension des scalaire et $\varpi : \mathrm{G}_{\mathbf{C}} \to \mathrm{G}$ le morphisme d'extension des scalaires. L'image inverse $\mathrm{H}_{\mathbf{C}} := \varpi^{-1}(\mathrm{H})$ de H dans $\mathrm{G}_{\mathbf{C}}$ est un sous-groupe compact du groupe topologique $|\mathrm{G}_{\mathbf{C}}|$. Soit p une norme géométrique hermitienne sur E et $p_{\mathbf{C}}$ la norme géométrique hermitienne sur $\mathrm{E}_{\mathbf{C}} := \mathrm{E} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ qui se déduit par extension de scalaires. La fonction

$$\int_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} p_{\mathbf{C}} \, d\mu_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} : \quad x \mapsto \int_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} p_{\mathbf{C}}(g \cdot x) \, d\mu_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}}(g)$$

est une norme hermitienne $\mathrm{H}_{\mathbf{C}}$-invariante sur E. De plus, puisque $\mathrm{H}_{\mathbf{C}}$ est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$, pour tout $x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathbf{C}}$ on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} p_{\mathbf{C}}(g \cdot \overline{x}) \, d\mu_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}}(g) &= \int_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} p_{\mathbf{C}}(\overline{g} \cdot \overline{x}) \, d\mu_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}}(\overline{g}) \\ &= \int_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} p_{\mathbf{C}}(\overline{g \cdot x}) \, d\mu_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}}(g) \\ &= \int_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} p_{\mathbf{C}}(g \cdot x) \, d\mu_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}}(g).\end{aligned}$$

Autrement dit, la norme géométrique hermitienne $\int_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}} p_{\mathbf{C}} \, d\mu_{\mathrm{H}_{\mathbf{C}}}$ est invariante sous l'action de Galois et elle descend donc en une norme géométrique hermitienne sur E. □

Corollaire 8.31. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie. Alors,*

i. maximalité : les sous-groupes unitaires par rapport à une norme géométrique hermitienne sur E *sont maximales (par rapport à l'inclusion) parmis le sous-groupes compactes de* $|\mathbf{GL}(\mathrm{E})|$ *;*

ii. conjugaison : si p, q sont des normes géométriques hermitiennes sur E, *il existe un k-point g de* $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ *tel que*

$$\mathbf{U}(q) = g\mathbf{U}(p)g^{-1}.$$

8.4.3. Cas non archimédien. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne.

Proposition 8.32. *Soient* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire d'un k-groupe analytique* G. *Alors pour tout sous-groupe compact* $\mathrm{H} \subset |\mathrm{G}|$, *il existe une norme géométrique non archimédienne* H*-invariante sur* E.

Démonstration. Soient $\sigma : \mathrm{G} \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{V}(\mathrm{E})$ le morphisme de k-espaces analytiques définissant l'action de G sur E et $\mathrm{pr}_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathrm{G}$ la projection sur G. Puisque l'application continue canonique

$$|\mathrm{G} \times \mathbf{V}(\mathrm{E})| \longrightarrow |\mathrm{G}| \times |\mathbf{V}(\mathrm{E})|$$

est propre au sens topologique, la restriction de σ à $\mathrm{pr}_G^{-1}\mathrm{H}$,

$$\sigma_{\mathrm{H}} : |\,\mathrm{pr}_G^{-1}\mathrm{H}| \longrightarrow |\mathbf{V}(\mathrm{E})|$$

est une application continue et propre au sens topologique entre espaces topologiques localement compacts. Soient p une norme géométrique non archimédienne sur E et $\mathrm{pr}_{\mathrm{E}} : \mathrm{G}\times\mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{V}(\mathrm{E})$ la projection sur $\mathbf{V}(\mathrm{E})$. Pour tout $x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})$ on pose

$$p^{\mathrm{H}}(x) := \sigma_{\mathrm{H}\uparrow}\,\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^{*}\,p(x) = \sup\left\{p(\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}(y)) : y \in \mathrm{pr}_G^{-1}\mathrm{H}, \sigma(y) = x\right\}.$$

Par compacité de H et continuité de p, la fonction p^{H} que l'on obtient est à valeurs réels. On va montrer que p^{H} est une norme géométrique non archimédienne continue.

On remarque tout d'abord que pour tout x il existe une extension analytique K de son corps résiduel complété $\widehat{\kappa}(x)$ et un K-point h du K-espace analytique G_{K} appartenant à H_{K} tel que

$$p^{\mathrm{H}}(x) = p_{\mathrm{K}}(h\cdot x)$$

(où p_{K} est la norme géométrique déduite par extension des scalaires). Puisque l'action de G sur E est linéaire, ceci entraîne que la fonction p^{H} est une norme géométrique non archimédienne. Il reste à démontrer la continuité, ce qui achevé dans le Lemme qui suit la preuve (à appliquer avec $\mathrm{X} = \mathrm{pr}_G^{-1}\mathrm{H}$, $\mathrm{Y} = |\mathbf{V}(\mathrm{E})|$ et $u = \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^{*}\,p$, en rappelant qu'une application continue et propre au sens topologique entre espaces localement compacts est fermée). □

Lemme 8.33. *Soient* X, Y *des espaces topologiques,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application continue surjective fermée et* $u : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ *une fonction semi-continue supérieurement (resp. continue). Alors, la fonction*

$$\begin{aligned} f_\uparrow u : \mathrm{Y} &\longrightarrow \mathbf{R}\\ y &\longmapsto \sup_{f(x)=y} u(x)\end{aligned}$$

est semi-continue supérieurement (resp. continue).

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout nombre réel $\alpha \in \mathbf{R}$, la partie

$$\mathrm{F}_\alpha := \{y \in \mathrm{Y} : f_\uparrow u(y) \geq \alpha\}$$

est fermée. D'autre part F_α est l'image de la partie

$$\mathrm{E}_\alpha := \{x \in \mathrm{X} : u(x) \geq \alpha\}.$$

Par semi-continuité supérieure de α, la partie E_α est fermée et donc son image $f(\mathrm{E}_\alpha) = \mathrm{F}_\alpha$ est fermée. On suppose désormais que la fonction u soit continue. On considère la partie des points maximaux sur les fibres de f,

$$\mathrm{X}^{\max} := \{x \in \mathrm{X} : f^{*} f_\uparrow u(x) = u(x)\}.$$

Un point $x \in \mathrm{X}$ appartient à $\mathrm{X}^{\max}$ si et seulement si

$$f^{*} f_\uparrow u(x) - u(x) \geq 0.$$

Comme la fonction $f^{*} f_\uparrow u$ est semi-continue supérieurement et la fonction u est continue, la fonction $f^{*} f_\uparrow u - u$ est semi-continue supérieurement. En particulier, la partie des points maximaux $\mathrm{X}^{\max}$ est fermée dans X. La restriction de f à $X^{\max}$, $f : X^{\max} \to Y$, est alors fermée et, par définition de point maximal, on a le diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "f_{\dagger} u"] \\ X^{\max} \arrow[u, hook] \arrow[r, "u"] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

Pour toute partie Y de $\mathbf{R}$, l'image réciproque de Y par $f_{\dagger} u$ est alors fermée si et seulement si l'image réciproque de Y par u est fermée. La fonction $f_{\dagger} u$ est donc continue. □

Corollaire 8.34. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie. Alors,*

i. maximalité : les sous-groupes unitaires par rapport à une norme géométrique non archimédienne continue sur E *sont maximales (par rapport à l'inclusion) parmis le sous-groupes compactes de* $|\mathbf{GL}(\mathrm{E})|$ *;*

ii. conjugaison : si p, q sont des normes géométriques hermitiennes sur E*, il existe une extension analytique de* K *et un* K*-point g du* K*-groupe analytique* $\mathbf{GL}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}$ *tel que*

$$\mathbf{U}(q_{\mathrm{K}}) = g\mathbf{U}(p_{\mathrm{K}})g^{-1}.$$

8.5 Espace des normes géométriques

8.5.1. Définition. — Soient k un corps complet pour une valeur absolue et E un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 8.35. Si la valeur absolue est archimédienne (resp. non archimédienne), on désigne par $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ l'ensemble des normes géométriques hermitiennes (resp. non archimédiennes) sur E.

L'ensemble $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ est naturellement muni d'une distance comme suit. Si $p, q \in \mathscr{N}(\mathrm{E})$, leur rapport p/q sur $\mathbf{V}(\mathrm{E}) - \{0\}$ descend en une fonction continue sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ strictement positive partout. On pose

$$d_{\mathscr{N}(\mathrm{E})}(p, q) := \sup_{\mathbf{P}(\mathrm{E})} \left|\log \frac{p}{q}\right|.$$

Proposition 8.36. *L'espace topologique $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ est complet pour la distance $d_{\mathscr{N}(\mathrm{E})}$.*

Démonstration. On note $\mathrm{C}^0(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues à valeurs réels sur l'espace topologique compact $|\mathbf{P}(\mathrm{E})|$ muni de la topologique de la convergence uniforme. Pour tout $p \in \mathscr{N}(\mathrm{E})$, l'application

$$\begin{aligned} \varepsilon_p : \mathscr{N}(\mathrm{E}) &\longrightarrow \mathrm{C}^0(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathbf{R}) \\ q &\longmapsto \log \frac{q}{p} \end{aligned}$$

est une isométrie par définition de la distance $d_{\mathscr{N}(\mathrm{E})}$. Puisque l'ensemble des normes géométriques sur un k-espace vectoriel de dimension finie est fermé par convergence ponctuelle, l'image par ε_p par l'espace topologique $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ est fermée dans $\mathrm{C}^0(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathbf{R})$. En particulier, l'espace topologique $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ est complet. □

8.5.2. Action de groupe linéaire sur l'espace des normes géométriques. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit p une norme géométrique sur E. Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne), on suppose que la norme géométrique p soit hermitienne (resp. non archimédienne).

Soient $g \in |\mathbf{GL}(\mathrm{E})|$, K une extension analytique du corps résiduel complété de g et $g_{\mathrm{K}} : \mathrm{E}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{E}_{\mathrm{K}}$ l'isomorphisme de K-espaces vectoriels associé. On note $g_{\mathrm{K}}^{\vee} : \mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}$ le morphisme de K-espaces analytiques associés : si on laisse agir à gauche $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ sur $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ à travers la représentation duale, pour tout $x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}$ on a

$$g_{\mathrm{K}}^{\vee}(x) = g_{\mathrm{K}}^{-1} \cdot x.$$

Pour tout K-point x du K-espace analytique $\mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}$ on pose :

$$p_g(\mathrm{K})(x) := p(\mathrm{K})(g_{\mathrm{K}}^{\vee}(x))$$

Comme la norme géométrique p est définie sur $\mathbf{V}(\mathrm{E})$, si K′ est une extension analytique de k contenant K, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}(\mathrm{E})(\mathrm{K}) \arrow[r, "p_g(\mathrm{K})"] \arrow[d] & \mathbf{R}_+ \arrow[d, equal] \\ \mathbf{V}(\mathrm{E})(\mathrm{K}') \arrow[r, "p_g(\mathrm{K}')"] & \mathbf{R}_+ \end{tikzcd}$$

est commutatif. D'après la Proposition 5.46 la collection d'application $\{p_g(\mathrm{K}) : \mathrm{K} \in (\mathrm{ExtAn})_{/\widehat{\kappa}(x)}\}$ provient d'une (unique) application $p_g : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{R}_+$. De plus, si K est une extension analytique du corps résiduels complété $\widehat{\kappa}(g)$ de g, pour tout $x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}$ on a

$$(p_g)_{\mathrm{K}}(x) = p_{\mathrm{K}}(g_{\mathrm{K}}^{\vee}(x)).$$

En particulier, p_g est une norme hermitienne (resp. non archimédienne). On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \sigma : |\mathbf{GL}(\mathrm{E})| \times \mathscr{N}(\mathrm{E}) &\longrightarrow \mathscr{N}(\mathrm{E}) \\ (g, p) &\longmapsto \sigma(g,p) := p_g \end{aligned}$$

Soient p, q des normes géométriques continues sur E. Soient $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ un homomorphisme de k-espaces vectoriel et $f : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{V}(\mathrm{E})$ le morphisme de k-espaces analytique qui s'en déduit. On pose

$$\|\varphi\|_{p,q} := \sup_{x \neq 0} \frac{q(f(x))}{p(x)}.$$

Proposition 8.37. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie. L'application*

$$\begin{aligned} \sigma : |\mathbf{GL}(\mathrm{E})| \times \mathscr{N}(\mathrm{E}) &\longrightarrow \mathscr{N}(\mathrm{E}) \\ (g, p) &\longmapsto \sigma(g,p) := p_g \end{aligned}$$

satisfait aux propriétés suivantes :

i. *compatibilité aux extensions des scalaires : pour tout $(g,p) \in |\mathbf{GL}(\mathrm{E})| \times \mathscr{N}(\mathrm{E})$ et toute extension analytique* K *de k contenant le corps résiduel $\widehat{\kappa}(g)$ de g, on a*

$$\sigma_{\mathrm{K}}(g_{\mathrm{K}}, p_{\mathrm{K}}) = \sigma(g,p)_{\mathrm{K}},$$

où $\sigma_{\mathrm{K}} : |\mathbf{GL}(\mathrm{E}_{\mathrm{K}})| \times \mathscr{N}(\mathrm{E}_{\mathrm{K}}) \to \mathscr{N}(\mathrm{E}_{\mathrm{K}})$ est l'application relative à E_{K}, g_{K} est le K*-point associé à g du* K*-espace analytique $\mathbf{GL}(\mathrm{E}_{\mathrm{K}})$ et p_{K} la norme géométrique sur E_{K} déduite par extension des scalaires ;*

ii. pour tous $(g,p),(h,q) \in |\mathbf{GL}(\mathrm{E})| \times \mathcal{N}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{N}(\mathrm{E})}(\sigma(g,p),\sigma(h,q)) &= \log\max\left\{\| \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \|_{q_h,p_g}, \| \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \|_{p_g,q_h}\right\} \\ &= \log\max\left\{\|g\|_{q_h,p}, \|g^{-1}\|_{p,q_h}\right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. En vertu de la Proposition 5.46, le point (i) est vrai par définition de p_g. En vertu du point précédent on peut se ramener quand g,h sont des k-points de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$. Par définition on a

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{N}(\mathrm{E})}(\sigma(g,p),\sigma(h,q)) &= \sup_{x\neq 0}\log\left|\frac{p_g(x)}{q_h(x)}\right| \\ &= \log\max\left\{\sup_{x\neq 0}\frac{p_g(x)}{q_h(x)}, \sup_{x\neq 0}\frac{q_h(x)}{p_g(x)}\right\} = \log\max\left\{\| \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \|_{q_h,p_g}, \| \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \|_{p_g,q_h}\right\} \\ &= \log\max\left\{\sup_{x\neq 0}\frac{p(g^\vee(x))}{q_h(x)}, \sup_{x\neq 0}\frac{q_h(x)}{p(g^\vee(x))}\right\} \\ &= \log\max\left\{\sup_{x\neq 0}\frac{p(g^\vee(x))}{q_h(x)}, \sup_{x\neq 0}\frac{q_h(g^{\vee-1}(x))}{p(x)}\right\} \\ &= \log\max\left\{\|g\|_{q_h,p}, \|g^{-1}\|_{p,q_h}\right\}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Proposition 8.38. *Soit* E *un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p. Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne), on suppose que la norme géométrique p soit hermitienne (resp. non archimédienne). L'application*

$$\begin{aligned} \sigma_p : |\mathbf{GL}(\mathrm{E})| &\longrightarrow \mathcal{N}(\mathrm{E}) \\ g &\longmapsto \sigma(g,p) \end{aligned}$$

est continue et elle descend en un homéomorphisme

$$\widetilde{\sigma}_p : |\mathbf{GL}(\mathrm{E})|/|\mathbf{U}(p)| \longrightarrow \mathcal{N}(\mathrm{E}),$$

lorsque $\mathbf{U}(p)$ *agit par multiplication à gauche sur* $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$*. En particulier, l'espace topologique* $\mathcal{N}(\mathrm{E})$ *est localement compact.*

Démonstration. Soient $g \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$ et $q \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$. D'après le point (ii) de la Proposition précédente 8.37 on a

$$d_{\mathcal{N}(\mathrm{E})}(\sigma(g,p),q) = \log\max\left\{\|g^{-1}\|_{p,q}, \|g\|_{q,p}\right\}.$$

En particulier, si pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la boule de rayon ε centré en q,

$$\mathrm{B}(q,\varepsilon) := \left\{q' \in \mathcal{N}(\mathrm{E}) : d_{\mathcal{N}(\mathrm{E})}(q,q') < \varepsilon\right\},$$

son image réciproque par σ_p est

$$\sigma_p^{-1}\mathrm{B}(q,\varepsilon) = \left\{g \in |\mathbf{GL}(\mathrm{E})| : \log\max\left\{\|g^{-1}\|_{p,q}, \|g\|_{q,p}\right\} < \varepsilon\right\}.$$

Puisque la norme géométrique $\|\cdot\|_{q,p}$ et l'application $\mathrm{inv} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ définissant la loi d'inverse de G sont continues, $\sigma_p^{-1}\mathrm{B}(q,\varepsilon)$ est ouvert. L'application σ_p est donc continue.

On montre que σ_p est surjective. Soit $q \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$. D'après le Théorème 8.21 il existe une extension analytique K de k et des sous-K°-modules libres $\mathfrak{E}_p, \mathfrak{E}_q \subset \mathrm{E}$ engendrant E comme K-espace vectoriel, tels que les normes géométriques p,q soient respectivement déduites de $\mathfrak{E}_p$, $\mathfrak{E}_q$. Soit $g : \mathfrak{E}_p \to \mathfrak{E}_q$ un isomorphisme de K°-modules. On note encore g l'isomorphisme de K-espaces vectoriels $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$ correspondant. On a ainsi,

$$q_{\mathrm{K}} = p_{\mathrm{K}} \circ g^\vee$$

où $p_{\mathrm{K}}, q_{\mathrm{K}}$ sont les normes géométriques déduites par extension des scalaires et $g^\vee : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{V}(\mathrm{E})$ le morphisme de K-espaces analytique associé à g. Le point de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ définit par g est alors un antécédent de q par σ_p.

L'espace topologique $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ est localement compact. En effet, si pour tout $q \in \mathscr{N}(\mathrm{E})$ et pour tout $\varepsilon \geq 0$ on considère le disque de rayon ε centré en q,

$$\mathrm{D}(q,\varepsilon) := \left\{q' \in \mathscr{N}(\mathrm{E}) : d_{\mathscr{N}(\mathrm{E})}(q,q') \leq \varepsilon\right\},$$

son image réciproque par σ_p est

$$\sigma_p^{-1}\mathrm{D}(q,\varepsilon) = \left\{g \in |\mathbf{GL}(\mathrm{E})| : \log\max\left\{\|g^{-1}\|_{p,q}, \|g\|_{q,p}\right\} \leq \varepsilon\right\}.$$

Comme $\mathrm{D}(q,\varepsilon)$ est fermée dans $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ et σ_p est continue, alors $\sigma_p^{-1}\mathrm{D}(q,\varepsilon)$ est fermée dans $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$. De plus, si on considère l'immersion fermée

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}(\mathrm{E}) &\longrightarrow \mathbf{End}(\mathrm{E}) \times \mathbf{End}(\mathrm{E}) \\ g &\longmapsto (g^{-1}, g), \end{aligned}$$

l'image de $\sigma_p^{-1}\mathrm{D}(q,\varepsilon)$ est contenue dans la partie compacte

$$\left\{x \in \mathbf{End}(\mathrm{E}) \times \mathbf{End}(\mathrm{E}) : \log\max\left\{\|\mathrm{pr}_1(x)\|_{p,q}, \|\mathrm{pr}_2(x)\|_{q,p}\right\} \leq \varepsilon\right\}$$

et donc elle est compacte. Enfin, comme σ_p est surjective, l'image de $\sigma_p^{-1}\mathrm{D}(q,\varepsilon)$ par σ_p coïncide avec $\mathrm{D}(q,\varepsilon)$: étant l'image d'un compact par une application continue, $\mathrm{D}(q,\varepsilon)$ est compact. L'espace topologique $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ est donc localement compact et l'application σ_p est propre au sens topologique.

On montre que l'application σ_p descend en une application $\tilde{\sigma}_p : |\mathbf{GL}(\mathrm{E})|/|\mathbf{U}_p| \to \mathscr{N}(\mathrm{E})$ (le quotient étant pris pour la multiplication à gauche de $\mathbf{U}(p)$) et que $\tilde{\sigma}_p$. Soient $g \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$ et $g' \in \mathbf{U}(p) \cdot g$: il existe une extension analytique K de k contenant les corps résiduels complétés de g, g' et un K-point u de $\mathbf{U}(p)$ tel que

$$g'_{\mathrm{K}} = g_{\mathrm{K}} u$$

où $g_{\mathrm{K}}, g'_{\mathrm{K}}$ sont les K-points de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}}$ associés à g, g'. D'après le point (i) de la Proposition 8.37 on a

$$\begin{aligned} \sigma_p(g')_{\mathrm{K}} &= \sigma(g', p)_{\mathrm{K}} = \sigma_{\mathrm{K}}(g'_{\mathrm{K}}, p_{\mathrm{K}}) \\ &= \sigma(g_{\mathrm{K}} u, p_{\mathrm{K}}) = p_{\mathrm{K}} \circ u^\vee \circ g_{\mathrm{K}}^\vee \\ &= p_{\mathrm{K}} \circ g_{\mathrm{K}}^\vee = \sigma(g_{\mathrm{K}}, p_{\mathrm{K}}) \\ &= \sigma_p(g)_{\mathrm{K}}. \end{aligned}$$

et donc $\sigma_p(g') = \sigma_p(g)$.

Enfin, il reste à montrer que l'application induite $\tilde{\sigma}_p$ est injective. Soient $g, g' \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$ tels que $\sigma_p(g) = \sigma_p(g')$. Soit K une extension analytique de k contenant les corps résiduel complété de g, g'. En vertu point (i) de la Proposition 8.37 on a

$$p_{\mathrm{K}} \circ g_{\mathrm{K}}^\vee = p_{\mathrm{K}} \circ g_{\mathrm{K}}'^\vee$$

et donc $g_{\mathrm{K}}^{-1} \circ g'_{\mathrm{K}}$ appartient à $\mathbf{U}(p)$, *i.e.*, g' appartient à $\mathbf{U}(p) \cdot g$.

On peut maintenant conclure : l'application $\tilde{\sigma}_p$ est une bijection continue et σ_p est une application continue et propre au sens topologique entre espaces topologiques localements compacts. Elle est donc fermée, et il en est de même pour $\tilde{\sigma}_p$. □

8.6 Comparaison avec la notion de norme pour les corps localement compacts

On suppose que le corps k soit localement compact comme espace topologique. Si la valeur absolue est archimédienne c'est toujours le cas ; si la valeur absolue de k est non archimédienne, le corps k est localement compact si et seulement si son corps résiduel $\widetilde{k}$ est un corps fini.

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne) on considère l'ensemble $\mathscr{N}(\mathrm{E},k)$ des normes archimédiennes (resp. non archimédiennes) sur le k-espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{V}(\mathrm{E})(k) = \mathrm{E}^\vee$.

Comme k est localement compact, l'espace topologique $\mathbf{P}(\mathrm{E})(k)$ (la topologie étant induite par l'inclusion canonique de $\mathbf{P}(\mathrm{E})(k)$ dans $\mathbf{P}(\mathrm{E})$) est compact. Si $p,q \in \mathscr{N}(\mathrm{E},k)$, leur rapport p/q descend en une fonction continue sur l'espace topologique $\mathbf{P}(\mathrm{E})(k)$ et on pose

$$d_{\mathscr{N}(\mathrm{E},k)}(p,q) := \sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{E})(k)} \left|\log\frac{p(x)}{q(x)}\right|.$$

L'application $d_{\mathscr{N}(\mathrm{E},k)}$ définit une distance et on munit l'ensemble $\mathscr{N}(\mathrm{E},k)$ de la topologique induite par cette distance. Le Théorème de Ascoli-Arzelà montre que l'espace topologique $\mathscr{N}(\mathrm{E},k)$ est localement compact.

Soit p une norme géométrique sur le k-espace vectoriel E. Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose qu'elle soit hermitienne (resp. non archimédienne). Pour toute extension finie k' de k, l'application que p induit sur le k'-points de $\mathbf{V}(\mathrm{E})$,

$$p(k') : \mathbf{V}(\mathrm{E})(k') = \mathrm{E}^\vee \otimes_k k' \longrightarrow \mathbf{R}_+,$$

est une norme hermitienne (resp. non archimédienne). Elle est de plus invariante sous l'action du groupe $\mathrm{Aut}_k(k')$ des automorphismes de k' en tant que k-algèbre. On définit ainsi une application

$$\rho(k') : \mathscr{N}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathscr{N}(\mathrm{E},k')^{\mathrm{Aut}_k(k')}.$$

Pour tout $p,q\in\mathscr{N}(\mathrm{E})$, comme $\mathbf{P}(\mathrm{E})(k') \subset \mathbf{P}(\mathrm{E})'_k$, on a

$$d_{\mathscr{N}(\mathrm{E},k')}(p(k'),q(k')) \le d_{\mathscr{N}(\mathrm{E})}(p,q).$$

En particulier, l'application $\rho(k')$ est continue et propre au sens topologique. Comme les espaces topologiques $\mathscr{N}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{N}(\mathrm{E},k')$ sont localement compacts, elle est donc fermée.

Si la valeur absolue de k est archimédienne, l'application $\rho(k)$ est une bijection et donc un homéomorphisme (même une isométrie). Si la valeur absolue est non archimédienne et la dimension du k-espace vectoriel E est plus grande ou égale à 2, $\rho(k)$ n'est jamais une bijection. Cela est lié au fait suivant. Soit k' une extension finie galoisienne du corps k : si l'extension k' est assez ramifiée, les points de l'immeuble de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ — ou en général d'un k-groupe réductif — sur k' fixes sous l'action de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k'/k)$ contiennent strictement les points de l'immeuble de sur k. En on montrera un exemple élémentaire pour $k = \mathbf{Q}_2$.

On suppose dorénavant que la valeur absolue de k soit non archimédienne. Soit p une norme non archimédienne sur le k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$. En vertu de [GI63, Proposition 1.1] il existe une base $t_1,\dots,t_n$ du k-espace vectoriel E et des nombres réels strictement positifs $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tels que, pour tout $x\in\mathrm{E}^\vee$ on ait

$$p(x) = \max\{\alpha_1|t_1(x)|,\dots,\alpha_n|t_n(x)|\}.$$

La norme p s'étend alors en une norme géométrique $\widehat{p}$ sur le k-espace vectoriel E en posant, pour tout $x\in\mathbf{V}(\mathrm{E})$,

$$\widehat{p}(x) := \max\{\alpha_1|t_1(x)|,\dots,\alpha_n|t_n(x)|\}.$$

La définition de $\widehat{p}$ ne dépend pas du choix des nombres réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ et de la base $t_1,\dots,t_n$ tels que $p = \max\{\alpha_1|t_1|,\dots,\alpha_n|t_n|\}$.

Proposition 8.39. *L'application*

$$\sigma(k) : \mathcal{N}(\mathrm{E}, k) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathrm{E})$$

ainsi définie est une section de $\rho(k)$*, i.e.,* $\rho(k) \circ \sigma(k) = \mathrm{id}$*. En outre, elle est une isométrie qu'identifie* $\mathcal{N}(\mathrm{E}, k)$ *avec un sous-espace fermé de l'espace topologique* $\mathcal{N}(\mathrm{E})$*.*

Démonstration. Il est clair par définition que $\rho(k)\circ\sigma(k) = \mathrm{id}$. Il s'agit donc de vérifier que l'application $\sigma(k)$ est une isométrie. Soient p, q des normes sur le k-espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{E})(k)$. D'après [GI63, Proposition 1.3] il existe une base $t_1, \dots, t_n$ du k-espace vectoriel E et des nombres réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ tels que

$$p = \max\{\alpha_1|t_1|, \dots, \alpha_n|t_n|\}$$
$$q = \max\{\beta_1|t_1|, \dots, \beta_n|t_n|\}$$

En vertu de [GI63, Proposition 2.1] on a alors

$$d_{\mathcal{N}(\mathrm{E},k)}(p, q) = \log \max_{i=1,\dots,n} \left\{\frac{\alpha_i}{\beta_i}, \frac{\beta_i}{\alpha_i}\right\}.$$

Le même calcul, fait sur toute extension analytique de k, montre que

$$d_{\mathcal{N}(\mathrm{E})}(\widehat{p}, \widehat{q}) = \log \max_{i=1,\dots,n} \left\{\frac{\alpha_i}{\beta_i}, \frac{\beta_i}{\alpha_i}\right\},$$

ce qui termine la preuve. □

Pour toute extension finie k' de k on obtient donc une application d'extension des scalaires

$$\rho(k') \circ \sigma(k) : \mathcal{N}(\mathrm{E}, k) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathrm{E}, k')^{\mathrm{Aut}(k'/k)}.$$

Il s'agit d'une application isométrique et donc continue, propre au sens topologique et injective. Il n'est pas vrai en général qu'elle est surjective : au contraire, lorsque l'extension k' est assez ramifiée, elle ne l'est jamais.

Exemple 8.40. Cet exemple est inspiré par [RTW11, Example 5.2]. On considère le corps des nombres 2-adiques $k = \mathbf{Q}_2$ muni de l'unique valeur absolue $|\cdot|$ telle que $|2| = 1/2$. Soient E un $\mathbf{Q}_2$-espace vectoriel de dimension 2 et $k' = \mathbf{Q}_2(\theta)$ avec $\theta^2 = 2$.

Soient t_1, t_2 une base du $\mathbf{Q}_2$-espace vectoriel E et $\alpha \in]\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ un nombre réel. On considère la norme non archimédienne p sur le k'-espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{E})(k')$ définie par

$$p(x) := \max\{|t_1(x)|, \alpha|t_2(x) - \theta t_1(x)|\}.$$

La norme p est invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k'/\mathbf{Q}_2) = \{\mathrm{id}, \tau\}$. En effet, l'élément τ agit envoyant θ en $-\theta$, et :

- si $|t_1(x)| \geq \alpha|t_2(x) - \theta t_1(x)|$, alors $p(\tau(x)) = |t_1(x)| = p(x)$;
- si par contre on a $|t_1(x)| < \alpha|t_2(x) - \theta t_1(x)|$, alors il s'agit de montrer qu'on a

  $$|t_2(x) - \theta t_1(x)| = |t_2(x) + \theta t_1(x)|.$$

  D'autre part, on a

  $$|t_2(x) + \theta t_1(x)| = |(t_2(x) - \theta t_1(x)) + 2\theta t_1(x)| = |t_2(x) - \theta t_1(x)|$$

  car par hypothèse on a :

  $$|2\theta t_1(x)| < \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}|t_2(x) - \theta t_1(x)| \leq |t_2(x) - \theta t_1(x)|.$$

On montre qu'elle ne provient pas par extension des scalaires d'une norme non archimédienne sur le k-espace vectoriel E. Plus précisément on va voir que la restriction de la norme p au k-espace vectoriel E est la norme non archimédienne

$$q(x) := p|_{\mathrm{E}^\vee}(x) = \max\{\alpha|\theta||t_1(x)|, \alpha|t_2(x)|\}. \tag{8.6.1}$$

On suppose pour l'instant de l'avoir montré et on note $q_{k'}$ la norme sur le k'-espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{E})(k')$ déduite de q par extension des scalaires. Soit e_1, e_2 la base du k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$ duale à la base t_1, t_2. On considère l'élément de $\mathbf{V}(\mathrm{E})(k')$,

$$x = e_1 + \theta e_2.$$

On a alors

$$q_{k'}(x) = \max\{\alpha|\theta|, |\theta|\} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} > 1 = \max\{1, 0\} = p(x)$$

et donc p n'est pas la norme déduite de q par extension des scalaires à k'.

On passe à montrer (8.6.1). Pour le faire on va suivre la procédure dans la démonstration du Théorème 8.21 (et donc de [GI63, Proposition 1.1]). Les fonctions $q := p|_{\mathrm{E}^\vee}$ et $|t_2|$ sont des fonctions homogènes sur le k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$ et leur rapport $|t_2|/p$ descend donc en une fonction continue

$$|t_2|/q : \mathbf{P}(\mathrm{E})(k) \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

La fonction $|t_2|/p$ atteint son maximum en le point $[e_2]$ défini par la classe d'équivalence de e_2 : il s'agit de montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}_2$ on a

$$\frac{1}{\max\{|\lambda|, \alpha|1-\theta\lambda|\}} \leq \frac{1}{\alpha} = \frac{|t_2(e_2)|}{q(e_2)},$$

et donc, de manière équivalente,

$$\max\{|\lambda|, \alpha|1-\theta\lambda|\} \geq \alpha.$$

Si $|\lambda| \geq \alpha$, c'est vrai. Si $|\lambda| < \alpha$ et $|\theta\lambda| \neq 1$ alors

$$|1-\theta\lambda| = \max\{1, |\theta\lambda|\} \geq 1$$

et $\alpha|1-\theta\lambda| \geq \alpha$. D'autre part, on a toujours $|\lambda| \neq |\theta|^{-1} = \sqrt{2}$ car par hypothèse λ appartient à $\mathbf{Q}_2$.

Tout élément $v \in \mathrm{E}^\vee$ s'écrit sous la forme $v = t_1(v)e_2 + t_2(v)e_2$. Puisque la norme géométrique q est non archimédienne, on a

$$q(v) \leq \max\left\{|t_1(v)|q(e_1), |t_2(v)|q(e_2)\right\} = \max\{\alpha|\theta||t_1(x)|, \alpha|t_2(x)|\}.$$

D'autre part, la fonction $|t_2|/q$ atteint son maximum en le point e_2. Par conséquent,

$$q(v) \geq \alpha|t_2(v)|$$

et donc

$$q(v) = \max\{\alpha|\theta||t_1(x)|, \alpha|t_2(x)|\},$$

ce qui termine la démonstration de (8.6.1).

Soient k' une extension finie galoisienne du corps k et p une norme non archimédienne sur le k'-espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{E})(k')$ invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k'/k)$. La construction faite avant donne alors une norme géométrique non archimédienne $\widehat{p}$ sur le k'-espace vectoriel $\mathrm{E} \otimes_k k'$. De plus, elle est invariante sous l'action de Galois et elle descend donc en une norme géométrique non archimédienne sur le k-espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ que l'on note encore $\widehat{p}$.

On définit ainsi pour toute extension finie galoisienne k' de k une application isométrique

$$\sigma(k') : \mathscr{N}(\mathrm{E}, k')^{\mathrm{Gal}(k'/k)} \longrightarrow \mathscr{N}(\mathrm{E})$$

telle que $\sigma(k') \circ \rho(k') = \mathrm{id}$. En particulier, si la dimension de E est plus grand ou égale à 2, l'application

$$\rho(k) : \mathscr{N}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathscr{N}(\mathrm{E}, k)$$

n'est pas une bijection.

8.7 Distance sur l'espace projectif

8.7.1. Définition et propriétés élémentaires. — Soient k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$, et E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p_{E}. Si la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose que la norme géométrique p_{E} soit hermitienne (resp. non archimédienne).

L'application bilinéaire alternante canonique $\mathrm{E}^\vee \oplus \mathrm{E}^\vee \longrightarrow \bigwedge^2 \mathrm{E}^\vee$ induit un morphisme de k-espaces analytiques

$$\beta : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}\big(\textstyle\bigwedge^2 \mathrm{E}\big).$$

Soient $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E})$ les deux projections. Soit $p_{\bigwedge^2 \mathrm{E}}$ la norme géométrique sur le k-espace vectoriel $\bigwedge^2 \mathrm{E}$ induite par p_{E} par produit extérieur. L'application continue

$$\frac{\beta^* p_{\bigwedge^2 \mathrm{E}}}{\mathrm{pr}_1^* p_{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{pr}_2^* p_{\mathrm{E}}} : |\mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E})| \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

descend en une application continue

$$d_{p_{\mathrm{E}}} : |\mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \mathbf{P}(\mathrm{E})| \longrightarrow \mathbf{R}_+,$$

qu'on appelle la *distance sur* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *induite par* p_{E}.

Proposition 8.41. *La distance* $d_{p_{\mathrm{E}}}$ *est une fonction continue sur l'espace topologique* $|\mathbf{P}(\mathrm{E}) \times_k \mathbf{P}(\mathrm{E})|$*. De plus,*

i. pour tout point $x \in |\mathbf{P}(\mathrm{E}) \times_k \mathbf{P}(\mathrm{E})|$ *on a* $0 \leq d_{p_{\mathrm{E}}}(x) \leq 1$*,*

ii. pour tout extension analytique K *de* k *la fonction induite par* $d_{p_{\mathrm{E}}}$ *sur les* K*-points du* k*-espace analytique* $\mathbf{P}(\mathrm{E}) \times_k \mathbf{P}(\mathrm{E})$*,*

$$d_{p_{\mathrm{E}}}(\mathrm{K}) : \mathbf{P}(\mathrm{E})(\mathrm{K}) \times \mathbf{P}(\mathrm{E})(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

est une distance sur l'espace topologique $\mathbf{P}(\mathrm{E})(\mathrm{K})$*.*

Démonstration. La continuité et le point (i) découlent directement de la définition. Le point (ii) peut être trouvé dans [BG06, Proposition 2.8.18]. □

8.7.2. Distance sur la droite projective. — On suppose de plus que le k-espace vectoriel E soit de dimension 2. Soient K une extension analytique de k et $p_{\mathrm{E,K}}$ la norme géométrique sur le K-espace vectoriel $\mathrm{E} \otimes \mathrm{K}$ obtenue par extension des scalaires, *i.e.* l'application composée

$$p_{\mathrm{E,K}} : \ \mathbf{V}(\mathrm{E})_{\mathrm{K}} \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}) \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{R}_+.$$

On suppose qu'il existe une base t_0, t_1 du K-espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{E}\otimes\mathrm{K})$ telle que

$$p_{\mathrm{E,K}}(x) = \begin{cases} \sqrt{|t_0(x)|^2 + |t_1(x)|^2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne} \\ \max\{|t_0(x)|, |t_1(x)|\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbf{V}(\mathrm{E})$. Soit e_0, e_1 la base duale à la base t_0, t_1, c'est-à-dire la base e_0, e_1 du K-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee \otimes \mathrm{K}$ telle que $t_i(e_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) pour tout $i, j = 0, 1$.

Soient x, y des K-points du K-espace analytique $\mathbf{P}(\mathrm{E})_\mathrm{K}$ et soient

$$\widehat{x} = x_0 e_0 + x_1 e_1, \qquad \widehat{y} = y_0 e_0 + y_1 e_1$$

des K-point non nuls dans $\mathbf{V}(\mathrm{E})_\mathrm{K}$ représentant x, y. Avec ces notations, on a

$$d_{p_\mathrm{E}}(\mathrm{K})(x, y) = \frac{|x_0 y_1 - x_1 y_0|}{p_{\mathrm{E,K}}(\widehat{x})\, p_{\mathrm{E,K}}(\widehat{y})}.$$

8.7.3. Élements du groupe linéaire qui mesurent la distance entre deux points. — Soient k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$, et E un k-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une norme géométrique p_E. Si la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose que la norme géométrique p_E soit hermitienne (resp. non archimédienne). On suppose qu'il existe une base t_0, t_1 du k-espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ telle que

$$p_{\mathrm{E},k} = \begin{cases} \sqrt{|t_0|^2 + |t_1|^2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne} \\ \max\{|t_0|, |t_1|\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8.7.1}$$

Soit e_0, e_1 la base duale à la base t_0, t_1, c'est-à-dire la base e_0, e_1 du k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$ telle que $t_i(e_j) = \delta_{ij}$ (delta de kronecker) pour tout $i, j = 0, 1$.

Soient x, y deux k-points distincts du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et

$$\widehat{x} = x_0 e_0 + x_1 e_1, \qquad \widehat{y} = y_0 e_0 + y_1 e_1$$

des k-points non nuls dans $\mathbf{V}(\mathrm{E})$, représentant respectivement x, y, tels que

$$p_\mathrm{E}(\widehat{x}) = 1, \qquad p_\mathrm{E}(\widehat{y}) = 1.$$

On considère le k-point $g = g(\widehat{x}, \widehat{y})$ du k-schéma $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ défini par la condition :

$$\begin{cases} g(t_0) = x_0 t_0 + y_0 t_1 \\ g(t_1) = x_1 t_0 + y_1 t_1 \end{cases} \tag{8.7.2}$$

Si on considère la transfomartion induite par g sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ (à travers la représentation duale), on a :

$$\begin{cases} g \cdot \widehat{x} = e_0 \\ g \cdot \widehat{y} = e_1. \end{cases} \tag{8.7.3}$$

Par définition on a $\det g = x_0 y_1 - x_1 y_0$, et donc

$$|\det g| = d_{p_\mathrm{E}}(x, y).$$

Proposition 8.42. *Soient z un k-point du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, $\widehat{z} = z_0 e_0 + e_1 z_1$ un k-point non nul du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ représentant z et $\mathrm{T} = z_0 t_1 - z_1 t_0$. On a :*

$$g(\mathrm{T}) = (z_0 x_1 - z_1 x_0)\, t_0 + (z_0 y_1 - z_1 y_0)\, t_1.$$

Par conséquent :

– *si la valeur absolue $|\cdot|$ de k est archimédienne on a :*

$$\begin{aligned}\log \|g(\mathrm{T})\|_{\mathrm{E}} &= \frac{1}{2}\log\Big(d_{p_{\mathrm{E}}}(x,z)^2 + \log d_{p_{\mathrm{E}}}(y,z)^2\Big) + \log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}}\\ &\leq \log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}} + \log\sqrt{2};\end{aligned}$$

– *si la valeur absolue $|\cdot|$ de k est non archimédienne on a :*

$$\begin{aligned}\log \|g(\mathrm{T})\|_{\mathrm{E}} &= \max\big\{\log d_{p_{\mathrm{E}}}(x,z), \log d_{p_{\mathrm{E}}}(y,z)\big\} + \log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}}\\ &\leq \log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}}.\end{aligned}$$

8.8 Normes géométriques sur les faisceaux cohérents

8.8.1. Définitions. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$.

Définition 8.43. Soient X un k-espace analytique et F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules. Une *norme géométrique* sur F est une application $u : \mathbf{V}(\mathrm{F}) \to \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, l'application composée

$$x^* u :\ \mathbf{V}(x^*\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{F}) \xrightarrow{\ u\ } \mathbf{R}_+$$

est une norme géométrique sur le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel de dimension finie $x^*\mathrm{F}$.

Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne) on dit qu'une norme géométrique u sur F est *hermitienne* (resp. *non archimédienne*) si pour tout $x \in \mathrm{X}$ la norme géométrique $x^* u$ l'est.

On dit qu'une norme géométrique sur un faisceaux cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules F est continue si elle l'est en tant que fonctions sur l'espace topologique $|\mathbf{V}(\mathrm{F})|$.

8.8.2. Construction fibre à fibre. — Soient X un k-espace analytique et F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules. Se donner une norme géométrique sur F revient à se donner, pour tout $x \in \mathrm{X}$, une norme géométrique sur le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel $x^*\mathrm{F}$.

Proposition 8.44. *Soient* X *un k-espace analytique et* F *un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules. Une norme géométrique u sur* F *est continue si et seulement si pour tout k-espace analytique* Y *et tout morphisme de k-espaces analytiques $s : \mathrm{Y} \to \mathbf{V}(\mathrm{F})$, l'application composée*

$$s^* u :\ \mathrm{Y} \xrightarrow{\ s\ } \mathbf{V}(\mathrm{F}) \xrightarrow{\ u\ } \mathbf{R}_+$$

est continue.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire : on va voir qu'elle est aussi suffisante. Si F est un faisceau inversible, la question étant locale sur X, on peut supposer que F ait une section globale partout non nulle s, *i.e.*, qu'il soit isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Si $\pi : \mathbf{V}(\mathrm{F}) \to \mathrm{X}$ désigne le morphisme structural de $\mathbf{V}(\mathrm{F})$, alors pour tout $t \in \mathbf{V}(\mathrm{F})$ on a

$$u(t) = |s(t)| \cdot s^* u(\pi(t)).$$

En particulier u est continue.

On revient au cas d'un faisceau cohérent quelconque. On considère le fibré projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F})$ et F et le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)$ associé. Le morphisme de k-espaces analytique $\theta : \mathbf{V}(\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)) \to \mathbf{V}(\mathrm{F})$ est propre et il induit donc une application propre au sens topologique entre espaces localement compacts

$$\theta : |\mathbf{V}(\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1))| \longrightarrow |\mathbf{V}(\mathrm{F})|.$$

L'application θ est alors fermée, et la norme géométrique u est continue si et seulement si la norme géométrique $\theta^* u$ sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)$ est continue. On est donc ramené au cas d'un faisceau inversible, ce qui achève la preuve. □

8.8.3. Métrique sur les sections. — Soient X un k-espace analytique et F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules muni d'une norme géométrique u. Soient $x \in \mathrm{X}$ un point et $s \in x^*\mathrm{F}$ une section sur x. En vertu de la Proposition 8.5, on a

$$\|s\|_u(x) := \sup_{0 \neq t \in \mathbf{V}(x^*\mathrm{F})} \frac{|s(t)|}{u(t)} < +\infty$$

et l'application $\|\cdot\|_u(x) : x^*\mathrm{F} \to \mathbf{R}_+$ ainsi définie est une norme sur le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel $x^*\mathrm{F}$.

Définition 8.45. Soient X un k-espace analytique et F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules muni d'une métrique u. La collection de normes

$$\|\cdot\|_u := \{\|\cdot\|_u(x) : x \in \mathrm{X}\}$$

est appelée *métrique sur les sections de* F.

8.8.4. Changement de base. — Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de k-espaces analytiques. Soit F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules muni d'une norme géométrique u.

Définition 8.46. La *norme géométrique de changement de base* est la norme géométrique sur le faisceau cohérent $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-modules $f^*\mathrm{F}$ définie par l'application composée

$$f[\mathrm{F}]^* u : \ \mathbf{V}(f^*\mathrm{F}) = \mathbf{V}(\mathrm{F}) \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} \xrightarrow{f[\mathrm{F}]} \mathbf{V}(\mathrm{F}) \xrightarrow{u} \mathbf{R}_+ \ .$$

8.8.5. Extension des scalaires. — Soient X un k-espace analytique et F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules. Soient K une extension analytique de k, X_{K} le K-espace analytique déduit par extension des scalaires, $\varpi_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}$ le morphisme d'extension des scalaires et $\mathrm{F}_{\mathrm{K}} := \varpi_{\mathrm{K}}^*\mathrm{F}$.

Définition 8.47. La *norme géométrique d'extension des scalaires* est la norme géométrique sur le faisceau cohérent $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{K}}}$-modules F_{K} définie par l'application composée

$$\varpi_{\mathrm{K}}[\mathrm{F}]^* u : \ \mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{K}}) = \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\mathrm{K}} \xrightarrow{\varpi_{\mathrm{K}}[\mathrm{F}]} \mathbf{V}(\mathrm{F}) \xrightarrow{u} \mathbf{R}_+ \ .$$

8.8.6. Métrique de Fubini-Study. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p. On considère le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(1)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{E})$. L'application canonique

$$\theta : \mathbf{V}(\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(1)) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E})$$

est un morphisme propre et il induit un isomorphisme en dehors de la section nulle. L'application

$$u_p : \ \mathbf{V}(\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(1)) \xrightarrow{\theta} \mathbf{V}(\mathrm{E}) \xrightarrow{p} \mathbf{R}_+$$

est une norme géométrique continue sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(1)$. Si $k = \mathbf{C}$ (muni d'une valeur absolue archimédienne) et la norme géométrique p est hermitienne, la métrique sur les sections de $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(1)$, $\|\cdot\|_p$, est la métrique de Fubini-Study.

8.8.7. Quotients. — Soit X un k-espace analytique et E un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules muni d'une norme géométrique u. Soient F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules et

$$\pi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$$

un homomorphisme surjectif de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules. L'homomorphisme π induit une immersion fermée

$$\varepsilon : \mathbf{V}(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}).$$

Définition 8.48. La *norme géométrique quotient* sur F est l'application composée

$$\mathbf{V}(\mathrm{F}) \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathbf{V}(\mathrm{E}) \xrightarrow{\ u\ } \mathbf{R}_+$$

Si la norme géométrique u est continue, la norme géométrique u l'est aussi.

8.8.8. Dual. — Soient X un k-espace analytique et E un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules localement libre de rang fini muni d'une norme géométrique u_{E}. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, l'application composée

$$x^* u_{\mathrm{E}} : \ \mathbf{V}(x^*\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E}) \xrightarrow{\ u_{\mathrm{E}}\ } \mathbf{R}_+$$

est une norme géométrique. On considère la norme géométrique duale sur le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel $x^*\mathrm{E}^\vee$,

$$x^* u_{\mathrm{E}^\vee} : \mathbf{V}(x^*\mathrm{E}^\vee) \longrightarrow \mathbf{R}_+.$$

Puisque, pour tout point $x \in \mathrm{X}$, la fibre en x de $\mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee)$ s'identifie naturellement à $\mathbf{V}(x^*\mathrm{E}^\vee)$, la collection des normes géométriques $x^* u_{\mathrm{E}^\vee}$ définit une norme géométrique $u_{\mathrm{E}^\vee}$ sur $\mathrm{E}^\vee$.

Proposition 8.49. *Si la norme géométrique u_{E} sur* E *est continue, la norme géométrique $u_{\mathrm{E}^\vee}$ sur* $\mathrm{E}^\vee$ *l'est aussi.*

Démonstration. On va appliquer la Proposition 8.44. Étant construite fibre à fibre, la norme géométrique duale est compatible aux changements de base. On se ramène ainsi à montrer que pour tout X-morphisme $s : \mathrm{X} \to \mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee)$, *i.e.*, pour toute section globale $s \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{E})$, l'application

$$s^* u_{\mathrm{E}^\vee} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

est continue. Par définition, pour tout point $x \in \mathrm{X}$, on a

$$s^* u_{\mathrm{E}}(x) = \sup_{0 \neq t \in \mathbf{V}(x^*\mathrm{E})} \frac{|s(t)|}{u_{\mathrm{E}}(t)}.$$

Les fonctions $|s|$, u_{E} sont continues et homogènes sur $\mathbf{V}(\mathrm{E})$: leur rapport descend donc en une fonction continue $|s|/u_{\mathrm{E}}$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$. Si $\pi : \mathbf{P}(\mathrm{E}) \to \mathrm{X}$ désigne le morphisme structural, la fonction $s^* u_{\mathrm{E}^\vee}$ est l'application des maxima de $|s|/u_{\mathrm{E}}$ le long les fibres de π, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a

$$s^* u_{\mathrm{E}^\vee} x = \pi_\uparrow(|s|/u_{\mathrm{E}})(x) := \sup_{\pi(t)=x} \frac{|s|}{u_{\mathrm{E}}}(t).$$

Le morphisme π induit une application propre au sens topologique entre les espaces topologiques sous-jacents. Comme ils sont localement compacts, π est alors une application fermée et on achève la preuve en vertu du Lemme 8.33. □

8.8.9. Sous-espaces. — Soient X un k-espace analytique et E un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules localement libre de rang fini muni d'une norme géométrique u_E. Soit F un sous-faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules de E localement libre (de rang fini). Pour tout point $x \in X$ l'application naturelle qui s'en déduit de l'inclusion de F dans E,

$$x^*F \longrightarrow x^*E,$$

est injective et elle identifie x^*F avec un sous-$\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel de dimension finie de x^*E. On considère pour tout $x \in X$ la norme géométrique $u_{F,x}$ qui s'obtient par restriction à x^*F de la norme géométrique x^*u_E sur le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel x^*E. La collection de normes géométriques $u_{F,x}$ définit une norme géométrique u_F sur F qu'on appelle la restriction de u_E à F.

La norme géométrique duale $u_{F^\vee}$ est la norme géométrique quotient de $u_{E^\vee}$, *i.e.*, l'application composée

$$u_{F^\vee} : \mathbf{V}(F^\vee) \longrightarrow \mathbf{V}(E^\vee) \xrightarrow{u_{E^\vee}} \mathbf{R}_+ .$$

Il en découle que si la norme géométrique u_E est continue, la norme géométrique u_F l'est aussi.

8.8.10. Constructions. — On suppose que la valeur absolue de k soit archimédienne (resp. non archimédienne). Les constructions présentées dans la section 8.2 (resp. section 8.3) (somme directe, produit tensoriel, ...) se généralisent aux métriques sur les faisceaux cohérents en les construisant « fibre à fibre », c'est-à-dire grâce à l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{V}(x^*F) = \mathbf{V}(F)_x$$

pour tout $x \in X$. Par exemple, soient E, F des faisceaux cohérents de $\mathscr{O}_X$-modules munis respectivement de métriques hermitiennes (resp. non archimédiennes) u_E et u_F. Pour tout $x \in X$, on considère les normes géométriques

$$u_{x^*E} : \mathbf{V}(x^*E) \longrightarrow \mathbf{V}(E) \xrightarrow{u_E} \mathbf{R}_+$$

$$u_{x^*F} : \mathbf{V}(x^*F) \longrightarrow \mathbf{V}(F) \xrightarrow{u_F} \mathbf{R}_+$$

On munit le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel $x^*(E \otimes F)$ de la norme géométrique hermitienne (resp. non archimédienne) $u_{x^*E \otimes x^*F}$ obtenue par produit tensoriel des normes géométriques hermitiennes (resp. non archimédiennes) u_{x^*E}, u_{x^*F}.

Il est clair par définition que si la norme géométrique déduite par somme directe de normes géométriques continues est continue.

Proposition 8.50. *Soient* E, F *des faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules localement libres de rang fini muni respectivement de norme géométrique continues u_E, u_F. Si la valeur absolue est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose que les normes géométrique u_E, u_F soient hermitiennes (resp. non archimédiennes).*

Alors, la norme géométrique $u_{E\otimes F}$ déduite fibre à fibre par produit tensoriel des normes géométriques u_E, u_F est continue.

En particulier, les normes géométriques déduites par puissance extérieure et puissance symétrique de normes géométriques continues sont continues.

Démonstration. Si valeur absolue de k est archimédienne, on peut supposer $k = \mathbf{C}$. Dans ce cas, la norme géométrique $u_{E\otimes F}$ est définie par la forme sesquilinéaire qui associe pour tout point $x \in X$, pour tous $s, s' \in \mathbf{V}(x^*E)$ et pour tous $t, t' \in \mathbf{V}(x^*F)$ le nombre complexe

$$\boldsymbol{h}_{E\otimes F,x}(s \otimes t, s' \otimes t') = \boldsymbol{h}_{E,x}(s, s')\boldsymbol{h}_{F,x}(t, t').$$

La forme sesquilinéaire $\boldsymbol{h}_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ est ainsi continue et donc la norme géométrique $u_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ l'est.

On suppose que la valeur absolue de k soit non archimédienne. On va appliquer la Proposition 8.44. Étant construite fibre à fibre, la norme géométrique déduite par produit tensoriel des normes géométriques u_{E}, u_{F} est compatible aux changements de base. On se ramène ainsi à montrer que pour tout X-morphisme $\beta : \mathrm{X} \to \mathbf{V}(\mathrm{E}\otimes\mathrm{F})$, *i.e.*, pour toute section globale $\beta \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{E}^\vee \otimes \mathrm{F}^\vee)$, l'application

$$\beta^* u_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

est continue. La section β induite une application bilinéaire

$$\beta : \mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee) \times_{\mathrm{X}} \mathbf{V}(\mathrm{F}^\vee) \longrightarrow \mathbf{A}^1_{\mathrm{X}}$$

et par définition, pour tout point $x \in \mathrm{X}$, on a

$$\beta^* u_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}(x) := \sup\left\{ \frac{|\beta(t)|}{u_{\mathrm{E}^\vee}(\mathrm{pr}_{\mathrm{E}^\vee}(t)) \cdot u_{\mathrm{F}^\vee}(\mathrm{pr}_{\mathrm{F}}(t))} : t \in \mathbf{V}(x^*\mathrm{E}^\vee) \times \mathbf{V}(x^*\mathrm{F}^\vee) \text{ tel que } \mathrm{pr}_{\mathrm{E}^\vee}(t), \mathrm{pr}_{\mathrm{F}^\vee}(t) \neq 0 \right\}.$$

Soit $\pi : \mathbf{P}(\mathrm{E}^\vee) \times_{\mathrm{X}} \mathbf{P}(\mathrm{F}^\vee) \to \mathrm{X}$ le morphisme structural. Les fonctions $|\beta|$ et

$$u_{\mathrm{E}^\vee} \boxtimes u_{\mathrm{F}^\vee} := \left(\mathrm{pr}^*_{\mathrm{E}^\vee} u_{\mathrm{E}^\vee}\right) \cdot \left(\mathrm{pr}^*_{\mathrm{F}^\vee} u_{\mathrm{F}^\vee}\right)$$

sont continues et bi-homogènes sur $\mathbf{V}(\mathrm{E}^\vee) \times_{\mathrm{X}} \mathbf{V}(\mathrm{F}^\vee)$. Leur rapport descend donc en une fonction continue

$$|\beta| / (u_{\mathrm{E}^\vee} \boxtimes u_{\mathrm{F}^\vee}) : \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times_{\mathrm{X}} \mathbf{P}(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

et la fonction $\beta^* u_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}$ est par définition l'application des maxima de $|\beta| / (u_{\mathrm{E}^\vee} \boxtimes u_{\mathrm{F}^\vee})$ le long les fibres de π, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a

$$\beta^* u_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}}(x) = \pi_\uparrow \left(|\beta| / (u_{\mathrm{E}^\vee} \boxtimes u_{\mathrm{F}^\vee})\right)(x) = \sup_{\pi(t)=x} \frac{|\beta|}{u_{\mathrm{E}^\vee} \boxtimes u_{\mathrm{F}^\vee}}(t).$$

Le morphisme π induit une application propre au sens topologique entre les espaces topologiques sous-jacents. Comme ils sont localement compacts, π est alors une application fermée et on achève la preuve en vertu du Lemme 8.33. □

8.8.11. Métrique provenante d'un modèle entier. — On suppose que la valeur absolue de k soit non archimédienne. Soient $\mathfrak{X}$ un k°-schéma propre et plat, et $\mathfrak{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules de présentation finie plat sur k°. Soient X l'analytification de la fibre générique de $\mathfrak{X}$ et F le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules associé à $\mathfrak{F}$.

Soient $x \in \mathrm{X}$ et $\mathrm{K} = \widehat{\kappa}(x)$ son corps résiduel complété. Puisque $\mathfrak{X}$ est propre sur k°, par critère valuatif de propreté, il existe un unique morphisme de k°-schémas

$$\mathfrak{x} : \operatorname{Spec} \mathrm{K}^\circ \longrightarrow \mathfrak{X}$$

qui prolonge le point x. Le K°-module $\mathfrak{x}^*\mathfrak{F}$ est plat et de présentation finie : en particulier, il s'identifie avec un sous-K°-module de $x^*\mathrm{F}$ et on a

$$\mathfrak{x}^*\mathfrak{F} \otimes \mathrm{K} = x^*\mathrm{F}.$$

On considère la norme géométrique sur le K-espace vectoriel $x^*\mathrm{F}$,

$$\begin{array}{rccc} u_{\mathfrak{F},x} : & \mathbf{V}(x^*\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ & t & \longmapsto & \sup\limits_{s \in \mathfrak{x}^*\mathfrak{F}} |s(t)|. \end{array}$$

On désigne par $\pi : \mathbf{V}(\mathrm{F}) \to \mathrm{X}$ le morphisme structural.

Proposition 8.51. *L'application*

$$\begin{aligned} u_{\mathfrak{F}}: \quad \mathbf{V}(\mathrm{F}) &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ t &\longmapsto u_{\mathfrak{F},\pi(t)}(t) \end{aligned}$$

est une norme géométrique continue et non archimédienne sur le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules F. *On dira que $u_{\mathfrak{F}}$ est la norme géométrique associée au modèle entier $\mathfrak{F}$.*

9 Groupes réductifs sur un corps complet

9.1 Cas archimédien

Soit k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne.

9.1.1. Sous-groupes compacts et projections sur les invariants. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue (pour la topologie usuelle sur E) d'un groupe topologique compact G. On note μ la mesure de Haar sur G de masse totale 1.

Le groupe G agit sur l'espace vectoriel dual $\mathrm{E}^\vee$ de E et, pour toute application linéaire $\varphi : \mathrm{E} \to k$, la forme linéaire

$$\int_{\mathrm{G}} \varphi \, d\mu : v \mapsto \int_{\mathrm{G}} \varphi(g^{-1} \cdot v)\, d\mu(g)$$

est G-invariante. On définit ainsi une section k-linéaire G-invariante de l'inclusion $(\mathrm{E}^\vee)^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{E}^\vee$. Si l'on identifie E avec $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ et on applique cette construction à $\mathrm{E}^\vee$, on obtient une section k-linéaire et G-invariante de l'inclusion $\mathrm{E}^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{E}$,

$$\pi_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^{\mathrm{G}}$$

dite *projection sur les invariants* ou *opérateur de Reynolds*.

Par définition, la construction de la projection sur les invariants est fonctorielle : si E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie muni d'une action linéaire de G et $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est un homomorphisme G-équivariant de k-espaces vectoriels, alors $\varphi(\mathrm{E}^{\mathrm{G}}) \subset \mathrm{F}^{\mathrm{G}}$ et le diagramme de k-espaces vectoriels

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{E}}"'] & \mathrm{F} \arrow[d, "\pi_{\mathrm{F}}"] \\ \mathrm{E}^{\mathrm{G}} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{F}^{\mathrm{G}} \end{tikzcd}$$

est commutatif. En particulier, ceci montre que le foncteur des invariants est exact sur la catégorie des représentations de G.

9.1.2. Groupes réductifs et sous-groupes compacts. — En général, pour tout corps k de caractéristique nulle, un k-schéma en groupes affine et de type fini G est réductif si et seulement si pour toute représentation E de G, le sous-espace des invariants E^{G} admet un (unique) supplémentaire G-stable. Ou, en d'autres termes, il existe une projection G-équivariante sur le sous-espace des invariants.

Soit G un **C**-schéma en groupes affine et de type fini. Les considérations du paragraphe qui précède montrent que si le groupe de Lie complexe G(**C**) contient un sous-groupe compact Zariski-dense **U**, alors G est réductif.

Cette approche pour l'étude des invariants — nommé « unitarian trick » par Weyl — remonte à Hurwitz pour le groupe linéaire et à Weyl pour les groupes semi-simples, ce dernier en s'appuyant sur la classification des algèbres de Lie semi-simples par Cartan. En combinant ces techniques avec le

Théorème de Chevalley sur la relation entre groupes semi-simples et groupes de Lie réels compacts, on obtient :

Théorème 9.1. *Un* $\mathbf{C}$*-schéma en groupes affine et de type fini* G *est réductif si et seulement s'il existe un sous-groupe compact Zariski-dense* $\mathbf{U}$ *de* G^{an}*.*

De plus, si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée, on a :

i. un sous-groupe compact de G^{an} *est Zariski-dense si et seulement s'il est maximal (par rapport à l'inclusion) parmis le sous-groupes compacts de* G^{an} *;*

ii. tout sous-groupe compact de G^{an} *est contenu dans un sous-groupe compact maximal ;*

iii. les sous-groupes compacts maximaux de G^{an} *sont tous conjugués ;*

iv. pour tout sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}$ *de* G^{an} *il existe un* $\mathbf{R}$*-groupe réductif (anisotropique)* U *tel que* $U \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ *est isomorphe à* G *en tant que* $\mathbf{C}$*-schéma en groupes et* $U(\mathbf{R})$ *s'identifie à* $\mathbf{U}$ *par cet isomorphisme.*

La Proposition suivante montre qu'il en est de même pour le cas réel.

Proposition 9.2. *Un* $\mathbf{R}$*-schéma en groupes affine de type fini* G *est réductif si et seulement s'il existe un sous-groupe compact Zariski-dense* $\mathbf{U}$ *de* G^{an}*.*

Démonstration. On suppose d'abord que G^{an} contient un sous-groupe compact Zariski-dense $\mathbf{U}$. Puisque le morphisme d'extension des scalaires $\varpi_{\mathbf{C}} : G^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}} \to G^{\mathrm{an}}$ est une application ouverte et propre au sens topologique, l'image inverse $\mathbf{U}_{\mathbf{C}} := \varpi_{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{U}$ est un sous-groupe compact et Zariski-dense de $G^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$. En particulier, $G_{\mathbf{C}}$ est réductif et donc G l'est.

Soit G un $\mathbf{R}$-groupe réductif. Il s'agit de montrer qu'il existe un sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}$ de $G^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$ qui est stable sous la conjugaison complexe.

On suppose d'abord que G soit un tore T : dans ce cas le groupe de Lie complexe $T(\mathbf{C})$ ne contient qu'un unique sous-groupe compact maximal, qui est donc stable sous la conjugaison complexe.

On suppose ensuite que le $\mathbf{R}$-groupe réductif G soit semi-simple. L'ensemble de ses points réels $G(\mathbf{R})$ est naturellement muni de la structure de groupe de Lie réel. De plus, $G(\mathbf{R})$ contient un sous-groupe compact maximal K (pour la topologie réelle) qui est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie réel.

Le groupe de Lie K agit à travers la représentation adjointe de sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$: l'algèbre de Lie de K, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$, s'identifie avec le sous-espace des invariants $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^K$ de $\mathfrak{g}$ par K. Puisque K est compact, l'intégration sur K induit une projection K-équivariante $\mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ et son noyau $\mathfrak{p}$ est l'unique sous-$\mathbf{R}$-espace vectoriel K-stable de $\mathfrak{g}$ supplémentaire à $\mathfrak{k}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Comme on a supposé G semi-simple, la forme de Killing κ sur $\mathfrak{g}$ est non dégénérée. Par maximalité de K, on a que κ est définie négative sur $\mathfrak{k}$ et définie positive sur $\mathfrak{p}$.

Le groupe de Lie complexe $G^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}} = G(\mathbf{C})$ s'identifie à la complexification de $G(\mathbf{R})$. La forme de Killing, étant une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire, est définie négative sur la sous-$\mathbf{R}$-algèbre de Lie

$$\mathfrak{u} := \mathfrak{k} \oplus \boldsymbol{i}\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C},$$

et elle est définie positive sur le sous-$\mathbf{R}$-espace supplémentaire $\boldsymbol{i}\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Par conséquent, le sous-groupe de Lie réel $\mathbf{U}_{\mathbf{C}}$ qui correspond à la sous-$\mathbf{R}$-algèbre $\mathfrak{u}$ est un sous-groupe compact maximal de $G^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}$, et d'après le Théorème 9.1 précédent il est Zariski-dense.

La sous-$\mathbf{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ est évidemment stable sous l'action de la conjugaison complexe sur $\mathfrak{g}$ et il en est donc de même pour le sous-groupe de Lie compact associé $\mathbf{U_C} \subset G(\mathbf{C})$: ce dernier descend donc en un sous-groupe compact Zariski-dense $\mathbf{U}$ de G^{an}.

Le cas d'un groupe réductif G quelconque découle maintenant de la combinaison des deux cas précédents. On considère le sous-groupe dérivé G' de G et Z le centre de G : comme G est réductif, le premier est un groupe algébrique semi-simple, l'autre est un tore [Bor91, §14.2]. De plus, l'application naturelle induite par les inclusions,

$$\pi : G' \times Z \longrightarrow G,$$

est un morphisme surjectif et son noyau est fini. Par quant montré plus haut, le $\mathbf{R}$-groupe analytique $G'^{an} \times Z^{an}$ admet un sous-groupe compact Zariski-dense : son image par π est donc un sous-groupe compact Zariski-dense de G^{an}. □

9.2 Cas non archimédien

Dans ce numéro on montre que la situation non archimédienne est analogue à celle archimédienne en rassemblant des résultats présents dans la littérature, notamment [BT72], [BT84], [Ber90, §5], [Sat63], [Rou77] et [RTW10].

Soit k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$.

Définition 9.3. Soit G un k-espace analytique en groupes. Un sous-groupe $H \subset |G|$ est dit *compact maximal* s'il est compact et, pour toute extension analytique K de k, le sous-groupe compact $H_K \subset |G_K|$ est maximal (par rapport à l'inclusion) parmis les sous-groupes compacts de $|G_K|$.

Proposition 9.4. *Soit* G *un k-schéma en groupes affine et lisse. S'il existe un sous-groupe compact maximal de* $|G^{an}|$, *alors* G *est un k-groupe réductif.*

On adapte ici la preuve de la Proposition 1.2 dans [Sat63].

Démonstration. On suppose que le k-schéma en groupes G ne soit pas réductif, autrement dit qu'il existe un sous-groupe N distingué lisse connexe et unipotent distinct de son sous-groupe unité (voir Définition 3.10). Soit Z le centre du sous-groupe N : quitte à passer à une extension finie de k, il existe un nombre entier $n \geq 1$ et un isomorphisme de k-schémas en groupes

$$\theta : Z \longrightarrow \mathbf{A}^n_k.$$

Lorsque le groupe algébrique G opère sur lui-même par conjugaison, il agit linéairement sur $\mathbf{A}^n_k$ à travers l'isomorphisme φ.

On suppose que le k-espace analytique en groupes G^{an} admet un sous-groupe compact maximal $\mathbf{U} \subset |G^{an}|$. En vertu de la Proposition 8.32 il existe une norme géométrique non archimédienne continue p sur le k-espace vectoriel k^n invariante sous l'action du sous-groupe compact $\mathbf{U}$. Pour tout nombre réel $r > 0$, le disque de rayon r par rapport à p,

$$\mathbf{D}_p(r) = \{x \in \mathbf{A}^{n,an}_k : p(x) \leq r\}$$

est un sous-groupe compact (pour la somme) de $\mathbf{A}^{n,an}_k$. Soit $Z(r)$ l'image réciproque par l'isomorphisme θ du sous-groupe compact $\mathbf{D}_p(r)$.

Puisque la norme géométrique p est invariante sous l'action du sous-groupe $\mathbf{U}$, le sous-groupe $Z(r)$ est normal respectivement à $\mathbf{U}$. Ceci signifie la chose suivante. Soient

$$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \tau : G^{an} \times G^{an} \longrightarrow G^{an}$$

respectivement la première et la deuxième projection, et le morphisme définissant l'action de G sur lui-même par conjugaison. Alors l'image par τ de la partie

$$\big(\mathrm{pr}_1^{-1}\mathbf{U}\big)\cap\big(\mathrm{pr}_2^{-1}\mathrm{Z}(r)\big)\subset|\mathrm{G}^{\mathrm{an}}\times\mathrm{G}^{\mathrm{an}}|$$

est contenue dans $\mathrm{Z}(r)$ (et donc égale). Soit $m:\mathrm{G}^{\mathrm{an}}\times\mathrm{G}^{\mathrm{an}}\to\mathrm{G}^{\mathrm{an}}$ le morphisme définissant la loi de groupe de G^{an}. Comme dans le cas de groupes classiques, l'image par m de la partie

$$\big(\mathrm{pr}_1^{-1}\mathbf{U}\big)\cap\big(\mathrm{pr}_2^{-1}\mathrm{Z}(r)\big)\subset|\mathrm{G}^{\mathrm{an}}\times\mathrm{G}^{\mathrm{an}}|$$

est le sous-groupe $\mathbf{U}\cdot\mathrm{Z}(r)$ de $|\mathrm{G}^{\mathrm{an}}|$ engendré par $\mathbf{U}$ et $\mathrm{Z}(r)$, c'est-à-dire, le plus petit sous-groupe de $|\mathrm{G}^{\mathrm{an}}|$ contenant $\mathbf{U}$ et $\mathrm{Z}(r)$. Puisque les sous-groupes $\mathbf{U}$ et $\mathrm{Z}(r)$ sont compacts, alors le sous-groupe $\mathbf{U}\cdot\mathrm{Z}(r)$ l'est aussi. De plus, $\mathbf{U}$ est contenu dans $\mathbf{U}\cdot\mathrm{Z}(r)$: par hypothèse de maximalité, pour tout $r>0$ on a alors

$$\mathbf{U}\cdot\mathrm{Z}(r)=\mathbf{U}.$$

En particulier

$$\mathrm{Z}^{\mathrm{an}}=\bigcup_{r>0}\mathrm{Z}(r)$$

est contenu dans $\mathbf{U}$ et il est donc compact. Ceci entraîne que $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ est compact, en contradiction avec $n\geq 1$. □

9.2.1. Immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif déployé. — On suppose que la valeur absolue de k ne soit pas triviale et considère son anneau des entiers k°.

Soit $\mathfrak{G}$ un k°-groupe réductif déployé, c'est-à-dire qu'il existe un k°-tore maximal $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{G}$ isomorphe en tant que k°-schéma en groupes à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_{m,k^\circ}$. Soient donc $\mathfrak{T}$ un tel k°-tore maximal,

$$\mathrm{X}^*(\mathfrak{T}):=\mathrm{Mor}_{k^\circ-\mathrm{gr}}(\mathfrak{T},\mathbf{G}_{m,k^\circ})$$

le groupe des caractères de $\mathfrak{T}$ et $\Phi=\Phi(\mathfrak{T},\mathfrak{G})$ l'ensemble correspondant de racines. Pour toute racine $\alpha\in\Phi$, le sous-k°-schéma en groupes $\mathfrak{U}_\alpha$ est le sous-k°-schéma en groupes de $\mathfrak{G}$ qui a pour algèbre de Lie l'espace propre correspondant au caractère α ou 2α. Pour tout racine $\alpha\in\Phi$ on fixe un isomorphisme

$$\varphi_\alpha:\mathfrak{U}_\alpha\longrightarrow\mathbf{A}^1_{k^\circ}.$$

On choisit un système de racines positives Φ_+ et on pose $\Phi_-=-\Phi_+$. On fixe aussi un ordre total sur Φ_+ et Φ_-. Le morphisme induit par la multplication de $\mathfrak{G}$,

$$\prod_{\alpha\in\Phi_-}\mathfrak{U}_\alpha\times_{k^\circ}\mathfrak{T}\times_{k^\circ}\prod_{\alpha\in\Phi_+}\mathfrak{U}_\alpha\longrightarrow\mathfrak{G}$$

est une immersion ouverte. Son image Ω, la « grosse cellule »de $\mathfrak{G}$, ne dépend pas de l'ordre choisi sur Φ_+ et Φ_-. Si $\mathfrak{N}=\mathrm{Norm}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})$ est le normalisateur de $\mathfrak{T}$ dans $\mathfrak{G}$, le groupe de Weyl W de la donnée radicielle Φ s'identifie au quotient $\mathfrak{N}(k^\circ)/\mathfrak{T}(k^\circ)$. Pour tout $w\in\mathrm{W}$ soit n_w un représentant de w dans $\mathfrak{N}(k^\circ)$. On a alors

$$\mathfrak{G}=\bigcup_{w\in\mathrm{W}}\Omega\cdot n_w. \tag{9.2.1}$$

On note en majuscule d'imprimerie les objets déduit par extension des scalaires à k des objets en lettres gothiques (*e.g.*, $\mathrm{G}=\mathfrak{G}\times_{k^\circ}k$).

On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathrm{V}(\mathrm{T})=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\text{-mod}}(\mathrm{X}^*(\mathrm{T}),\mathbf{R})$, où $\mathrm{X}^*(\mathrm{T})$ est le groupe des caractères de T (et il s'identifie à $\mathrm{X}^*(\mathfrak{T})$). Pour tout point $t\in\mathrm{T}^{\mathrm{an}}$ on considère l'homomorphisme de groupes abéliens

$$\begin{aligned}\nu(t):\ \mathrm{X}^*(\mathrm{T})&\longrightarrow\mathbf{R}\\ \chi&\longmapsto\log|\chi(t)|\end{aligned}$$

L'application $\nu : \mathrm{T}^{\mathrm{an}} \to \mathrm{V}$ induit un homomorphisme de groupes abéliens $\nu : \mathrm{T}(k) \to \mathrm{V}(\mathrm{T})$. Soit $\mathrm{A}(\mathrm{T},k)$ l'espace affine (au sens naïf) d'espace vectoriel sous-jacent $\mathrm{V}(\mathrm{T})$. Comme le groupe de Weyl W opère par transformations linéaires sur $\mathrm{V}(\mathrm{T})$, l'homomorphisme ν induit une action de $\mathrm{N}(k) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(k)$ sur $\mathrm{A}(\mathrm{T},k)$ par transformations affines : si $n \in \mathrm{N}(k)$ s'écrit sous la forme tn_w avec $t \in \mathrm{T}(k)$ et $w \in \mathrm{W}$, pour tout $x \in \mathrm{A}(\mathrm{T},k)$ on pose
$$\nu(n)\cdot x = w\cdot x + \nu(t).$$
On note encore ν l'homomorphisme de groupes $\nu : \mathrm{N}(k) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(\mathrm{A}(\mathrm{T},k))$ définissant cette action.

Pour toute racine $\alpha \in \Phi$ et pour tout nombre réel ρ on considère le sous-groupe des k-points de $\mathrm{U}_\alpha := \mathfrak{U}_\alpha \times_{k^\circ} k$,
$$\mathrm{U}_\alpha(k)_\rho := \{u \in \mathrm{U}_\alpha(k) : \log|\varphi_\alpha(u)| \leq \rho\}.$$
Les sous-groupes $\mathrm{U}_\alpha(k)_\rho$ forment une filtration croissante du groupe $\mathrm{U}_\alpha(k)$. Pour tout point $x \in \mathrm{A}(\mathrm{T},k)$ et pour toute racine $\alpha \in \Phi \subset \mathrm{X}^*(\mathrm{T})$, $\alpha(x)$ est un nombre réel et on pose $\mathrm{U}_{\alpha,x} := \mathrm{U}_{\alpha,\alpha(x)}$.

Pour tout point $x \in \mathrm{A}(\mathrm{T},k)$ on considère le sous-groupe P_x de $\mathrm{G}(k)$ engendré par $\mathrm{Ker}(\nu|_{\mathrm{T}(k)})$ et par les sous-groupes $\mathrm{U}_{\alpha,x}$ lorsque α varie dans Φ. Si $\mathrm{N}(k)_x$ désigne le stabilisateur du point x dans $\mathrm{N}(k) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(k)$, on considère le sous-groupe
$$\widehat{\mathrm{P}}_x := \mathrm{P}_x \cdot \mathrm{N}(k)_x.$$

Définition 9.5. L'*immeuble de Bruhat-Tits* $\mathscr{B}(\mathfrak{G},k)$ de G sur k (par rapport à la donnée radicielle valuée induite par $\mathfrak{G}$) est le quotient de l'ensemble $\mathrm{G}(k) \times \mathrm{A}(\mathrm{T},k)$ par la relation d'équivalence
$$(g,x) \sim (h,y) \text{ si et seulement s'il existe } n \in \mathrm{N}(k) \text{ tel que } y = \nu(n)\cdot x \text{ et } g^{-1}hn \in \widehat{\mathrm{P}}_x.$$

Pour tout point $(g,x) \in \mathrm{G}(k) \times \mathrm{A}(\mathrm{T},k)$ on désigne par $[g,x]$ sa classe dans $\mathscr{B}(\mathfrak{G},k)$. L'immeuble $\mathscr{B}(\mathfrak{G},k)$ est naturellement muni d'une l'action de $\mathrm{G}(k)$ définie par $h\cdot[g,x] = [hg,x]$ et par définition le stabilisateur du point $[1_{\mathrm{G}(k)},x]$ coïncide avec le sous-groupe $\widehat{\mathrm{P}}_x$.

Proposition 9.6. *Le stabilisateur* $\widehat{\mathrm{P}}_0$ *du point* $[1_{\mathrm{G}(k)},0]$ *coïncide avec le sous-groupe* $\mathfrak{G}(k^\circ)$.

Démonstration. Par définition le sous-groupe P_0 est le sous-groupe engendré par $\mathrm{Ker}(\nu|_{\mathrm{T}(k)}) = \mathfrak{T}(k^\circ)$ et les sous-groupes
$$\begin{aligned}\mathrm{U}_{\alpha,0} &= \mathrm{U}_\alpha(k)_{\alpha(0)} = \mathrm{U}_\alpha(k)_0\\ &= \{u \in \mathrm{U}_\alpha(k) : \log|\varphi_\alpha(u)| \leq 0\}\\ &= \mathfrak{U}_\alpha(k^\circ).\end{aligned}$$
En particulier P_0 est contenu dans $\mathfrak{G}(k^\circ)$. Ensuite, un point $n = tn_w \in \mathrm{N}(k)$ avec $t \in \mathrm{T}(k)$ et $w \in \mathrm{W}$ stabilise le point 0 si et seulement si
$$0 = \nu(n)\cdot 0 := w\cdot 0 + \nu(t) = \nu(t)$$
ce qui a lieu si et seulement si $\log|\chi(t)| = 0$ pour tout $\chi \in \mathrm{X}^*(\mathrm{T})$. Cela revient à dire que t appartient à $\mathfrak{T}(k^\circ)$. Le groupe $\mathrm{N}(k)_0$ est donc contenu dans $\mathfrak{G}(k^\circ)$. Puisque $\widehat{\mathrm{P}}_0$ est par définition engendré par P_0 et $\mathrm{N}(k)_0$, il est contenu dans $\mathfrak{G}(k^\circ)$. D'autre part, l'égalité (9.2.1) entraîne
$$\mathfrak{G}(k^\circ) = \bigcup_{w\in\mathrm{W}} \Omega(k^\circ)\cdot n_w,$$
et comme Ω est par définition l'image de l'immersion ouverte
$$\prod_{\alpha\in\Phi_-} \mathfrak{U}_\alpha \times_{k^\circ} \mathfrak{T} \times_{k^\circ} \prod_{\alpha\in\Phi_+} \mathfrak{U}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{G},$$
cela achève la preuve. □

On rappelle qu'une partie $F \subset G(k)$ est dite bornée si elle est relativement compacte dans G^{an}, *i.e.*, son adhérence dans G^{an} est compacte. Pour tout $x \in \mathscr{B}(G,k)$ le stabilisateur $G_x := \mathrm{Stab}_{G(k)}(x) = \widehat{P}_x$ est borné. De plus, en vertu de [BT72, Proposition 8.2.1], les sous-groupes $\widehat{P}_x$ sont maximaux (par rapport à l'inclusion) parmis les sous-groupes bornés. De plus, si le corps k est maximalement complet la Proposition 8.2.1 combinée avec la Proposition 7.5.4 dans *loc. cit.* permet d'affirmer que tout sous-groupe borné maximal est de la forme $\widehat{P}_x$ et tout sous-groupe borné est contenu dans un sous-groupe borné maximal.

Soit K une extension analytique du corps k. Le K°-schéma en groupes $\mathfrak{G} \times_{k^\circ} K^\circ$ est un K°-groupe réductif et le sous-K°-tore $\mathfrak{T} \times_{k^\circ} K^\circ$ est maximal et déployé. On peut alors considérer l'immeuble de $G_K := G \times_k K$ sur K (par rapport à la donnée radicielle valuée induite par $\mathfrak{G} \times_{k^\circ} K^\circ$)

$$\mathscr{B}(\mathfrak{G}, K) := \mathscr{B}(\mathfrak{G} \times_{k^\circ} K^\circ, K).$$

L'application naturelle $G(k) \times A(T,k) \to G(K) \times A(T_K, K)$ est compatible aux relations d'équivalence sur ces ensembles. On obtient ainsi une application injective $G(k)$-équivariante :

$$\iota_K : \mathscr{B}(\mathfrak{G}, k) \to \mathscr{B}(\mathfrak{G}, K).$$

9.2.2. Existence d'un sous-groupe compact maximal. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne quelconque.

Proposition 9.7. *Soit $\mathfrak{G}$ un k°-groupe réductif (non forcément déployé) et* $G := \mathfrak{G} \times_{k^\circ} k$. *Alors, le sous-groupe affinoïde* $\mathbf{U}(\mathfrak{G}) \subset |G^{an}|$ *associé à $\mathfrak{G}$ est maximal.*

Démonstration. Tout d'abord, quitte à étendre k on peut supposer que sa valeur absolue soit non triviale. Soit K une extension analytique de k et H un sous-groupe compact de $|G_K^{an}|$ contenant $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K = \mathbf{U}(\mathfrak{G} \times_{k^\circ} K^\circ)$: il s'agit de montrer que H et $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K$ coïncident.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : G_K \to \mathbf{GL}(E)$ une représentation fidèle. D'après la Proposition 8.32 il existe une norme géométrique non archimédienne p sur E_K invariante sous l'action de H. En particulier

$$H' := \rho^{-1}\mathbf{U}(p)$$

est un sous-groupe compact de G_K^{an} contenant H. On est donc ramené à prouver que H' et $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K$ coïncident.

Quitte à étendre K on peut supposer que la norme géométrique p provient d'un sous-K°-module libre de $\mathfrak{E}$ tel que $\mathfrak{E} \otimes_{K^\circ} K$ soit isomorphe à E. Le sous-groupe $\mathbf{U}(p)$ est alors le sous-groupe strictement affinoïde associé K°-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathfrak{E})$. Le sous-groupe H' est alors aussi strictement affinoïde. En particulier, les points $x \in H'$ de corps résiduel complété de degré fini sur K sont denses dans H'.

Quitte à étendre à nouveau K, on peut supposer qu'il soit algébriquement clos et que le K°-groupe réductif $\mathfrak{G} \times_{k^\circ} K^\circ$ soit déployé. On considère l'immeuble $\mathscr{B}(\mathfrak{G}, K)$ de G sur K. D'après la Proposition 9.6 les K-points de $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K$, c'est-à-dire, les K°-point du k°-schéma $\mathfrak{G}$, sont le stabilisateur $\widehat{P}_0$ du point $[1_{G(K)}, 0] \in \mathscr{B}(\mathfrak{G}, K)$. En vertu de résultat du Bruhat-Tits cité avant ([BT72, Proposition 8.2.1]), $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K(K)$ est donc un sous-groupe borné maximal de G(K).

Puisque le sous-groupe H' est compact, le groupe de ses K-points $H'(K)$ est borné dans G(K). Par maximalité de $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K(K)$, on a alors

$$\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K(K) = H'(K).$$

Comme H' (resp. $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K$) est strictement affinoïdes, ses K-points sont denses dans H' (resp. $\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K$). L'égalité précédente passe donc aux adhérences dans G_K^{an},

$$\mathbf{U}(\mathfrak{G}) = \overline{\mathbf{U}(\mathfrak{G})_K(K)} = \overline{H'(K)} = H',$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 9.8. *Soit* G *un k-groupe réductif. Alors,*

– *si la valeur absolue de k est non triviale et le k-groupe réductif* G *est déployé, il existe un sous-groupe compact maximal de* $|G^{an}|$ *;*
– *si la valeur absolue de k est triviale, le sous-groupe compact* $\mathbf{U}(G) \subset |G^{an}|$ *associé à* G *en tant que k°-schéma en groupes est maximal.*

En particulier, il existe une extension finie k' de k et un sous-groupe compact maximal de $|G^{an}_{k'}|$.

Démonstration. Si la valeur absolue est triviale, c'est quant affirme la Proposition 9.7. Si la valeur absolue est non triviale, il existe une extension finie k' de k, un $\mathbf{Z}$-groupe réductif déployé $\mathfrak{G}$ et un isomorphisme de k'-schéma en groupes

$$G \times_k k' \longrightarrow \mathfrak{G} \times_{\mathbf{Z}} k'.$$

Il suffit d'appliquer la Proposition précédente 9.7 au k'°-schéma réductif $\mathfrak{G} \times_Z k'^\circ$. □

Théorème 9.9. *Un k-schéma en groupes affine et lisse (donc de type fini)* G *est réductif si et seulement s'il existe une extension finie k' de k et un sous-groupe compact maximal de* $|G^{an}_{k'}|$.

Démonstration. Il s'agit de la Proposition 9.4 et du Corollaire précédent. □

9.2.3. Description des sous-groupes compacts maximaux. —

Proposition 9.10. *Soit* G *un k-groupe réductif. Alors,*

i. pour tout sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}$ *de* $|G^{an}|$, *il existe une extension analytique* K *de k telle que* $\mathbf{U}_K$ *est un sous-groupe (strictement) affinoïde ;*

ii. pour tous sous-groupes compacts maximaux $\mathbf{U}, \mathbf{U}'$ *de* $|G^{an}|$ *il existe une extension analytique* K *de k et un* K*-point du k-schéma* G *tel que*

$$\mathbf{U}'_K = g\mathbf{U}_K g^{-1};$$

iii. pour tout sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}$ *de* $|G^{an}|$ *il existe une extension analytique* K *de k et un* K°*-groupe réductif* $\mathfrak{G}$ *tel que* $\mathbf{U}_K$ *est le sous-groupe affinoïde de* $|G^{an}_K|$ *associé à* $\mathfrak{G}$ *;*

iv. pour tout sous-groupe compact $H \subset |G^{an}|$ *il existe une extension analytique* K *de k et un sous-groupe compact maximal* $\mathbf{U} \subset |G^{an}_K|$ *contenant* H_K.

Démonstration. Pour (i), soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : G \to \mathbf{GL}(E)$ une représentation fidèle. D'après la Proposition 8.32 il existe une norme géométrique non archimédienne p sur E invariante sous l'action de $\mathbf{U}$. Le sous-groupe compact

$$H := \rho^{-1}\mathbf{U}(p)$$

contient le sous-groupe $\mathbf{U}$ et donc par maximalité de $\mathbf{U}$ ils coïncident. Il existe une extension analytique K de k et un sous-K°-module libre $\mathfrak{E}$ de E tel que $\mathfrak{E} \otimes_{K^\circ} K$ soit isomorphe à E et la norme géométrique p_K provienne de $\mathfrak{E}$. Le sous-groupe $\mathbf{U}(p)_K$ est alors le sous-groupe (strictement) affinoïde associé au K°-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathfrak{E})$. Le sous-groupe $H_K = \mathbf{U}_K$ est donc (strictement) affinoïde.

Pour (ii) soit K une extension analytique de k telle que $\mathbf{U}_K$ et $\mathbf{U}'_K$ soient strictement affinoïdes. Quitte à étendre K on peut supposer que sa valeur absolue absolue $|\cdot|_K :\to \mathbf{R}_+$ soit surjective. Alors, en vertu de [BT72, 8.2.2] tous les sous-groupes bornés maximaux sont conjugués. Les sous-groupes $\mathbf{U}_K(K)$ et $\mathbf{U}'_K(K)$ sont bornés et maximaux : il existe donc $g \in G(K)$ tel que

$$\mathbf{U}'_K(K) = g\mathbf{U}_K(K)g^{-1}.$$

Puisque les K-points de $\mathbf{U}_{\mathrm{K}}$ (resp $\mathbf{U}'_{\mathrm{K}}$) sont denses dans $\mathbf{U}_{\mathrm{K}}$ (resp. $\mathbf{U}'_{\mathrm{K}}$) cette égalité passe aux adhérences,

$$\mathbf{U}'_{\mathrm{K}} = \overline{\mathbf{U}'_{\mathrm{K}}(\mathrm{K})} = g\overline{\mathbf{U}_{\mathrm{K}}(\mathrm{K})}g^{-1} = g\mathbf{U}_{\mathrm{K}}g^{-1},$$

ce qui achève la preuve.

Pour (iii), soit K une extension analytique de k et $\mathfrak{G}$ un K°-schéma réductif tel que $\mathfrak{G} \times_{\mathrm{K}^\circ} \mathrm{K}$ soit isomorphe à G_{K} en tant que K-schéma en groupes. Soit $\mathbf{U}(\mathfrak{G})$ le sous-groupe compact maximal associé au K°-schéma réductif $\mathfrak{G} = \operatorname{Spec} \mathrm{K}^\circ[\mathfrak{G}]$. Quitte à étendre K, on peut supposer que $\mathbf{U}_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{U}(\mathfrak{G})$ soient conjugués par un K-point g. Si K[G] désigne la K-algèbre des fonctions de G_{K}, alors $\mathbf{U}_{\mathrm{K}}$ provient du K°-groupe réductif défini par la K°-algèbre

$$\mathrm{K}^\circ[\mathbf{U}] := \{f \in \mathrm{K}[\mathrm{G}] : |f(u)| \leq 1 \text{ pour tout } u \in \mathbf{U}_{\mathrm{K}}\}.$$

En effet, elle est l'image de la K°-algèbre $\mathrm{K}^\circ[\mathfrak{G}]$ par l'automorphisme $\mathrm{K}[\mathrm{G}] \to \mathrm{K}[\mathrm{G}]$ défini par la conjugaison par g.

Pour (iv), soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{E})$ une représentation fidèle. D'après la Proposition 8.32 il existe une norme géométrique non archimédienne p sur E invariante sous l'action de H. En particulier

$$\mathrm{H}' := \rho^{-1}\mathbf{U}(p)$$

est un sous-groupe compact de G^{an} contenant H. Soit K une extension analytique de k algèbriquement close, maximalement complète, de valeur absolue surjective et telle qu'il existe un sous-K°-module libre $\mathfrak{E}$ de E tel que $\mathfrak{E} \otimes_{\mathrm{K}^\circ} \mathrm{K}$ soit isomorphe à E et la norme géométrique p_{K} provienne de $\mathfrak{E}$. Le sous-groupe H'_{K} est alors strictement affinoïde et ses K-points $\mathrm{H}'_{\mathrm{K}}(\mathrm{K})$ dans denses dans H'_{K}. En vertu de [BT72, Proposition 8.2.1] le sous-groupe $\mathrm{H}'_{\mathrm{K}}(\mathrm{K})$ est contenu dans un sous-groupe borné maximal $\widehat{\mathrm{P}}_x$. L'adhérence de ce dernier est un sous-groupe compact maximal de $|\mathrm{G}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{K}}|$.

En effet, le K-groupe réductif G_{K} est déployé et il provient d'un K°-groupe réductif $\mathfrak{G}$. Les K°-points de $\mathfrak{G}$ forment un sous-groupe borné maximal de G(K). Comme on a supposé K de valeur absolue surjective, $\widehat{\mathrm{P}}_x$ et $\mathfrak{G}(\mathrm{K}^\circ)$ sont conjugués. Puisque l'adhérence de $\mathfrak{G}(\mathrm{K}^\circ)$ est un sous-groupe compact maximal, l'adhérence de $\widehat{\mathrm{P}}_x$ l'est aussi. Cela achève la preuve. □

10 Fonctions plurisousharmoniques

10.1 Fonctions sousharmoniques archimédiennes

On revient ici sur la notion de fonction sousharmonique sur la droite affine complexe dont une référence est [Dem]. Soient $x \in \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ et $r \geq 0$ un nombre réel : on désigne par $\mathbf{D}(x,r)$ le disque centré en x de rayon r,

$$\mathbf{D}(x,r) := \{x' \in |\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}| : |t(x) - t(x')| \leq r\}.$$

Définition 10.1. Soient $x \in \mathbf{A}^1$ et $r \geq 0$ un nombre réel. Une application $h : \mathbf{D}(x,r) \to \mathbf{R}$ est dite *harmonique* si elle est continue et satisfait à la condition suivante : pour tout point x' et pour tout nombre réel positif r' tel que $\mathbf{D}(x',r')$ soit contenu dans $\mathbf{D}(x,r)$, on a

$$h(x') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x' + r'\exp(i\theta))\, d\theta.$$

Définition 10.2. Soit $\Omega \subset \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ un ouvert. Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est dite *sousharmonique* si elle est semi-continue supérieurement et satisfait la condition suivante : pour tout point x, pour tout nombre réel $r \geq 0$ tel que $\mathbf{D}(x,r) \subset \Omega$, et pour toute fonction harmonique $h \in \mathrm{H}_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{D}(x,r))$, on a

$$\left(u|_{\partial\mathbf{D}(x,r)} \leq h|_{\partial\mathbf{D}(x,r)}\right) \Longrightarrow \left(u|_{\mathbf{D}(x,r)} \leq h|_{\mathbf{D}(x,r)}\right).$$

On désigne par $\mathrm{Sh}_{\mathbf{A}^1}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions sousharmoniques sur Ω. Les fonctions sousharmoniques satisfont aux propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathrm{Sh}_{\mathbf{A}^1}(\Omega)$ des fonctions sousharmoniques sur Ω est un cône réel stable par max : pour toutes fonctions sousharmoniques $u, v : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ et tous nombres réels positifs α, β, les applications $\alpha u + \beta v$ et $\max\{u, v\}$ sont sousharmoniques sur Ω.

- *Principe du maximum* : Soient $\Omega \subset \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ un ouvert connexe et $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ une fonction sousharmonique. Si la fonction u admet un maximum global en un point $x \in \Omega$, elle est constante.

- *Localité* : Les fonctions sousharmoniques forment un faisceau $\mathrm{Sh}_{\mathbf{A}^1}$ sur $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$.

- *Fonctorialité* : Soit $f : \Omega' \to \Omega$ un morphisme analytique entre ouverts de $\mathbf{A}^1$. Si $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est une fonction sousharmonique sur l'ouvert Ω, l'application composée
$$f^* u = u \circ f : \Omega' \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$
est une fonction sousharmonique sur l'ouvert Ω'.

- *Logarithme du module d'une fonction analytique* : Soit $\Omega \subset \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ un ouvert. Si f est une fonction analytique sur Ω, *i.e.* une section globale du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^1}$, l'application
$$\log|f| : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$
est une fonction sousharmonique sur Ω.

Définition 10.3. Soit k un corps complet pour une valeur absolue archimédienne. Une *k-courbe analytique* est un k-espace analytique purement de dimension 1.

Définition 10.4. Soit X une $\mathbf{C}$-courbe analytique lisse. Une application $u : |\mathrm{X}| \to [-\infty, +\infty[$ est dite *sousharmonique* s'il existe un recouvrement ouvert $\mathrm{X} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ de X, et, pour tout $i \in \mathrm{I}$, une immersion ouverte $\varepsilon_i : \mathrm{X}_i \to \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$, tels que $u|_{\mathrm{X}_i}$ soit sousharmonique.

Définition 10.5. Soit X une $\mathbf{R}$-courbe analytique lisse. Une application $u : |\mathrm{X}| \to [-\infty, +\infty[$ est dite *sousharmonique* si l'application composée
$$\varpi_{\mathrm{X}}^* u : \ \mathrm{X}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\varpi_{\mathrm{X}}} \mathrm{X} \xrightarrow{u} [-\infty, +\infty[$$
est sousharmonique sur $\mathrm{X}_{\mathbf{C}}$.

Les fonctions sousharmoniques sur une k-courbe analytique lisse satisfont aux mêmes propriétés que les fonctions sousharmoniques sur $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$.

10.2 Fonctions sousharmoniques non archimédiennes

On présente ici la notion de fonction sousharmonique sur une courbe lisse non archimédienne introduite par Thuillier dans sa thèse [Thu05]. Des autres notions de fonctions sousharmoniques dans ce contexte ont été introduites par Rumely [Rum89, Rum93], Rumely et Baker [BR10], Kani [Kan89], Favre et Jonsson [FJ04]. La comparaison entre ces notions et la notion d'Thuillier peut être trouvée dans [Thu05, Chapitre 5].

Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$ non archimédienne et *non triviale*.

10.2.1. Courbes simplement semi-stables. — Soit k° l'anneau des entiers de k. On considère la k°-algèbre des séries formelles restreintes en une variable

$$k^\circ\{t\} := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i : \lim_{i\to\infty} a_i \to 0 \right\} = \varprojlim_{n\geq 1} (k^\circ/\lambda^i)[t],$$

où $\lambda \in k^\circ$ est un élément de valeur absolue < 1. Il s'agit d'une k°-algèbre topologique plate et on désigne par $\mathfrak{S}$ son spectre formel $\mathrm{Spf}\, k^\circ\{t\}$. La fibre générique k°-schéma formel affine $\mathfrak{S}$ est le disque unitaire $\mathbf{D}$ dans la droite affine analytique $\mathbf{A}^1_k$,

$$\mathbf{D} = \{x \in \mathbf{A}^1_k : |t(x)| \leq 1\}.$$

Pour tout élément non nul $a \in k^\circ$ on considère la k°-algèbre topologique plate et topologiquement de présentation finie

$$k^\circ\{t\}_{\{a\}} := k^\circ\{t, u\}/(tu - a),$$

et on désigne par $\mathfrak{S}_{\{a\}}$ son spectre formel. La fibre générique du k°-schéma formel affine $\mathfrak{S}_{\{a\}}$ est la couronne $\mathbf{C}(|a|, 1)$ centrée en 0 de rayon intérieur $|a|$ et de rayon extérieur 1,

$$\mathbf{C}(|a|, 1) = \{x \in \mathbf{A}^1_k : |a| \leq |t(x)| \leq 1\}.$$

Soit $\widetilde{k}$ le corps résiduel du corps k. La fibre spéciale de $\mathfrak{S}_{\{a\}}$,

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_{\{a\}} = \mathrm{Spec}\left(k^\circ\{t\}_{\{a\}} \otimes_{k^\circ} \widetilde{k}\right)$$

est isomorphe à $\mathbf{G}_{m,\widetilde{k}}$ si $|a| = 1$ et, si $|a| < 1$, à la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,\widetilde{k} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & \mathbf{A}^1_{\widetilde{k}} \\ \mathbf{A}^1_{\widetilde{k}} & \end{tikzcd}$$

Définition 10.6. Une k°-*courbe formelle* est un k°-schéma formel localement de présentation finie, séparé, plat et purement de dimension 1.

Une k°-courbe formelle $\mathfrak{X}$ est *simplement semi-stable* si pour tout point $x \in \mathfrak{X}$ il existe un voisinage $\mathfrak{U}_x$, un élément non nul $a_x \in k^\circ$ et un morphisme étale de k°-schémas formels $p_x : \mathfrak{U}_x \to \mathfrak{S}_{\{a_x\}}$.

Une k°-courbe formelle $\mathfrak{X}$ est simplement semi-stable si et seulement si sa fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ est lisse et sa fibre spéciale $\widetilde{\mathfrak{X}}$ est une $\widetilde{k}$-courbe (localement algébrique) dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires et dont composantes irréductibles sont lisses.

10.2.2. Graphes localement métrisés. — Un *graphe localement métrisé* est un espace topologique S satisfaisant aux propriétés suivantes :

i. S est un espace topologique séparé, localement métrisé et ses composantes connexes sont dénombrables à l'infini ;
ii. tout point d'accumulation x admet un système fondamental de voisinages de la forme $\mathrm{V}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{V}_n$ où $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n$ sont des parties compactes contenant x et isométriques à des segments de $\mathbf{R}$.

Si S est un graphe localement métrisé, on dit qu'une fonction $f : \mathrm{S} \to \mathbf{R}$ est *affine par morceaux* s'il existe, pour tout point d'accumulation $x \in \mathrm{S}$, des parties compactes $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n$ de S contenant x et telles que $\mathrm{V}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{V}_n$ soit un voisinage de x, des plongements isométriques $\varepsilon_i : \mathrm{V}_i \to \mathbf{R}$ et des fonctions affines $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $f|_{\mathrm{V}_i} = \varepsilon_i^* f_i$ et leurs dérivées sont des nombres *entiers*.

10.2.3. Retraction sur le graphe dual. — Soit k un corps quelconque. Le *graphe dual* d'une k-courbe X (*i.e.* un k-schéma localement de type fini, séparé et purement de dimension 1) est le graphe qui a pour sommets les composantes irréductibles de X et pour arêtes passant par un sommet les points singuliers appartenant à la composante irréductible correspondant au sommet.

On revient à un corps k complet pour une valeur absolue non archimédienne. Pour toute k°-courbe formelle simplement semi-stable $\mathfrak{X}$ on note $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ le graphe dual de la fibre spéciale $\widetilde{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$, qui est une $\widetilde{k}$-courbe nodale.

Théorème 10.7 ([Thu05, Théorème 2.2.10, Proposition 2.2.24])**.** *Il existe, pour toute k°-courbe formelle simplement semi-stable $\mathfrak{X}$, une structure de graphe localement métrisé sur* $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ *et un couple* $(\iota_{\mathfrak{X}}, \tau_{\mathfrak{X}})$ *formé d'applications continues* $\iota_{\mathfrak{X}} : \mathrm{S}(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X}_\eta$, $\tau_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_\eta \to \mathrm{S}(\mathfrak{X})$ *telles que :*

i. $\iota_{\mathfrak{X}}$ *réalise un homémorphisme de* $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ *avec une partie fermée de* $\mathfrak{X}_\eta$ *;*

ii. $\tau_{\mathfrak{X}}$ *est une retraction sur* $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$*, i.e.,* $\tau_{\mathfrak{X}} \circ \iota_{\mathfrak{X}} = \mathrm{id}_{\mathrm{S}(\mathfrak{X})}$ *;*

iii. pour toute fonction analytique inversible $f \in \Gamma(\mathfrak{X}_\eta, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_\eta})^\times$*, l'application* $\iota_{\mathfrak{X}}^* \log|f|$ *est une fonction affine par morceaux sur* $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$*.*

Le graphe dual, muni de cette structure de graphe localement métrisé, est appelé le *squelette* de la k°-courbe formelle simplement semi-stable $\mathfrak{X}$. La construction du squelette et du couple $(\iota_{\mathfrak{X}}, \tau_{\mathfrak{X}})$ est fonctorielle pour les morphismes étales [Thu05, Théorème 2.2.10] et vérifie une condition de fonctorialité faible pour les morphismes quelconque [Thu05, Propositions 2.2.26-27].

L'exemple crucial est fourni par les courbes $\mathfrak{S}_{\{a\}}$, $a \in k^\circ$ non nul. Dans ce cas, le squelette $\mathrm{S}(\mathfrak{S}_{\{a\}})$ s'identifie à

$$\{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 : \xi \geq 0, \eta \geq 0 \text{ et } \xi + \eta = -\log|a|\},$$

et, en sous-entendant cette identification, la retraction τ_a est donnée par

$$\begin{aligned} \tau_{\mathfrak{X}} : \ \mathbf{C}(|a|, 1) &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (\log|a| - \log|t(x)|, -\log|t(x)|) \end{aligned}$$

est le plongement $\iota_{\mathfrak{X}} : \mathrm{S}(\mathfrak{S}_{\{a\}}) \to \mathbf{C}(|a|, 1)$ est l'application qui associe à tout (ξ, η) le point de Gauss du disque centré en 0 de rayon $\exp(-\xi)$.

10.2.4. Fonctions harmoniques sur le graphe dual. — Soit $\mathfrak{X}$ une k°-courbe formelle simplement semi-stable. Le graphe dual $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ est muni d'un *poids* en donnant à toute arête le poids $[\kappa(\xi) : \widetilde{k}]$, où $\xi \in \widetilde{\mathfrak{X}}$ est le point singulier correspondant à l'arête et $\kappa(\xi)$ le corps résiduel de ξ. Grâce à la structure de graphe localement métrisé donnée par le Théorème 10.7, on définit la notion de fonction *harmonique* pour les fonctions affines par morceaux comme suit.

Soit $x \in \mathrm{S}(\mathfrak{X})$ un point d'accumulation. Il existe des parties compactes connexes $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ et, pour tout $i = 1, \ldots, n$, un plongement isométrique $\varepsilon_i : \mathrm{V}_i \to \mathbf{R}$ tels que :
– $\mathrm{V} := \mathrm{V}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{V}_n$ est un voisinage de x ;
– $\varepsilon_i(x)$ appartient à la frontière de l'intervalle $\varepsilon_i(\mathrm{V}_i)$;
– pour tout $i \neq j$ on a $\mathrm{V}_i \cap \mathrm{V}_j = \{x\}$.

L'ensemble des composantes connexes $\pi_0(\mathrm{V} - \{x\})$ ne dépend pas du choix du voisinage connexe V assez petit de x et on le note $\mathrm{T}_x\mathrm{S}$. On dit que x appartient au bord de S si la cardinalité de $\mathrm{T}_x\mathrm{S}$ est 1. Pour tout $i = 1, \ldots, n$ il existe une unique fonction affine t_i sur $\mathbf{R}$ telle que sa dérivée soit de valeur absolue 1, elle soit positive sur $\varepsilon_i(\mathrm{V}_i)$ et $t_i(\varepsilon_i) = 0$.

Soit f une fonction affine par morceaux sur $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$. Quitte à restreindre les V_i on peut supposer qu'il existe pour tout $i = 1, \ldots, n$ une fonction affine $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que la dérivée de f_i est un nombre entier et $f|_{\mathrm{V}_i} = \varepsilon_i^* f_i$. Il existe un unique nombre réel $\lambda_i(f)$ tel que $f_i = f_i(\varepsilon_i(x)) + \lambda_i(f) t_i$.

Définition 10.8. Avec les notations précédentes, on dit que la fonction affine par morceaux f est *harmonique* en le point x si

$$\sum_{i=1}^{n}[\kappa(\xi_i):k]\lambda_i(f)=0, \tag{10.2.1}$$

où, pour tout $i=1,\dots,n$, ξ_i est le point singulier de $\widetilde{\mathfrak{X}}$ qui correspond à l'arête de $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ qui contient V_i.

On remarque que la condition (10.2.1) est toujours satisfaite lorsque x est un point à l'intérieur à d'une arête et que, si x est un point dans le bord, elle est satisfaite seulement par les fonctions qui sont identiquement nulles au voisinage de x.

Définition 10.9. Une fonction *harmonique* est une fonction affine par morceaux $f:\mathrm{S}(\mathfrak{X})\to\mathbf{R}$ qui est harmonique en tout point d'accumulation $x\in\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ qui n'appartient pas au bord de $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$.

L'ensemble des fonctions harmoniques sur $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ est noté $\mathrm{H}(\mathrm{S}(\mathfrak{X}))$.

10.2.5. Fonctions harmoniques. —

Définition 10.10 ([Thu05, 2.1.3])**.** Une *k-courbe (strictement) analytique* est un k-espace (strictement) analytique paracompact purement de dimension 1 et sans bord.

Soient X une k-courbe strictement analytique *lisse* et $\mathrm{V}\subset\mathrm{X}$ un k-domaine strictement affinoïde. En vertu du Théorème de reduction semi-stable, il existe une extension finie séparable k' de k et une k'°-courbe formelle simplement semi-stable $\mathfrak{V}$ telle que le k'-domaine affinoïde soit isomorphe à la fibre générique de $\mathfrak{V}$ [Thu05, Théorème 2.3.8].

Soit $\mathrm{S}(\mathfrak{V})$ le squelette de $\mathfrak{V}$ et $\tau_{\mathfrak{V}}:\mathfrak{V}_\eta\to\mathrm{S}(\mathfrak{V})$ la retraction donnée par le Théorème 10.7. On pose

$$\mathrm{H}_{\mathrm{X}}(\mathrm{V}):=\tau^*\mathrm{H}(\mathrm{S}(\mathfrak{V})).$$

Une fonction $f:\mathrm{V}\to\mathbf{R}$ est dite *harmonique* si elle appartient à $\mathrm{H}_{\mathrm{X}}(\mathrm{V})$. Cette définition ne dépend pas de l'extension k' ni de la k'°-courbe semi-stable $\mathfrak{V}$ choisie [Thu05, Lemme 2.3.4].

L'association $\mathrm{V}\rightsquigarrow\mathrm{H}_{\mathrm{X}}(\mathrm{V})$ donne lieu à un préfaisceau sur le site des domaines affinoïdes de X, qui *n'est pas* un faisceau (voir [Thu05, Remarque 2.3.11]). Par contre, si pour tout ouvert $\Omega\subset|\mathrm{X}|$ on pose

$$\mathrm{H}_{\mathrm{X}}(\Omega):=\varprojlim_{\substack{\mathrm{V}\subset\Omega\\ \text{domaine}\\ \text{affinoïde}}}\mathrm{H}_{\mathrm{X}}(\mathrm{V})$$

on obtient un sous-faisceau des fonctions continues à valeurs réels sur $|\mathrm{X}|$ [Thu05, Corollaire 2.3.15].

Les fonctions harmoniques satisfont aux propriétés suivantes :

– *Fonctorialité* [Thu05, Proposition 2.3.19] : Soit $f:\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$ un morphisme de k-espaces analytiques entre k-courbes strictement analytiques lisses. Si $h:\mathrm{X}\to\mathbf{R}$ est une fonction harmonique sur X, l'application composée
$$f^*h=h\circ f:\mathrm{X}'\longrightarrow\mathbf{R}$$
est une fonction sousharmonique sur X'.

– *Extension des scalaires* [Thu05, Corollaire 2.3.18] : Soit X une k-courbe strictement analytique lisse. Pour toute extension analytique K de k, le K-espace analytique X_{K} qui s'en déduit par extension des scalaires à K est une k-courbe strictement analytique lisse.

Si $h : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ est une application harmonique sur X, l'application composée

$$\varpi^* h : \mathrm{X}_\mathrm{K} \xrightarrow{\varpi} \mathrm{X} \xrightarrow{h} [-\infty, +\infty[\ ,$$

où $\varpi : \mathrm{X}_\mathrm{K} \to \mathrm{X}$ est le morphisme d'extension des scalaires, est une fonction harmonique sur X_K.

– *Logarithme du module d'une fonction analytique* [Thu05, Proposition 2.3.20] : Soit X une k-courbe strictement analytique lisse. Si f est une fonction analytique inversible sur X, *i.e.* une section globale du faisceau $\mathscr{O}_\mathrm{X}^\times$, alors l'application

$$\log|f| : \mathrm{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$

est une fonction harmonique sur X.

– *Principe du maximum et du minimum* [Thu05, Proposition 3.1.1] : Soient X un k-courbe analytique lisse et connexe. Si une fonction harmonique h admet un extremum local sur X elle est constante.

– *Principe de Harnack* [Thu05, Proposition 3.1.2] : Soient X un k-courbe analytique lisse et connexe. Soit $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts de X telle que tout point de X admet un voisinage contenu dans presque tous les Ω_n. Quelle que soit la suite croissante de fonctions $h_n \in \mathrm{H}_\mathrm{X}(\Omega_n)$, l'alternative est la suivante :
  – soit $\{h_n\}$ converge uniformément sur toute partie compacte de X vers $+\infty$,
  – soit $\{h_n\}$ converge uniformément sur toute partie compacte de X vers une fonction harmonique h sur X.

Remarque 10.11. Il *n'est pas vrai* en général que toute fonction harmonique h sur une k-courbe strictement analytique lisse X est localement le logarithme du module d'une fonction analytique inversible. Ceci est néanmoins le cas si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée [Thu05, Théorème 2.3.21] :
– le corps résiduel k' de k est algébrique sur un corps fini ;
– si $\overline{k}$ est la complétion d'un clôture algébrique de k, la courbe $\mathrm{X}_{\overline{k}}$ est localement isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$.

10.2.6. Fonctions sousharmoniques. —

Définition 10.12 ([Thu05, Définition 3.1.5])**.** Soit X une k-courbe strictement analytique lisse. Une fonction $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est dite *sousharmonique* si elle est semi-continue supérieurement et si elle satisfait à la condition suivante : pour tout domaine strictement k-affinoïde $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ et pour toute fonction harmonique $h \in \mathrm{H}_\mathrm{X}(\mathrm{V})$, on a

$$(u|_{\partial \mathrm{V}} \leq h|_{\partial \mathrm{V}}) \Longrightarrow (u|_\mathrm{V} \leq h|_\mathrm{V}).$$

Remarque 10.13. À la différence de [Thu05], ici la fonction identiquement égale à $-\infty$ est sousharmonique.

Les fonctions sousharmoniques satisfont aux propriétés suivantes :

– [Thu05, Proposition 3.1.8] : Soient X une k-courbe strictement analytique et $\Omega \subset \mathrm{X}$ un ouvert. L'ensemble $\mathrm{Sh}_\mathrm{X}(\Omega)$ des fonctions sousharmoniques sur Ω est un cône réel stable par max : pour toutes fonctions sousharmoniques $u, v : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ et tous nombres réels positifs α, β, les applications $\alpha u + \beta v$ et $\max\{u, v\}$ sont sousharmoniques sur Ω.

- *Principe du maximum* [Thu05, Proposition 3.1.11] : Soient X une k-courbe strictement analytique lisse et connexe et $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ une fonction sousharmonique sur X. Si u admet un maximum global en un point $x \in \mathrm{X}$, elle est constante.

- *Localité* [Thu05, Corollaire 3.1.13] : Soit X une k-courbe strictement analytique lisse. Les fonctions sousharmoniques forment un faisceau Sh_{X} sur X.

- *Fonctorialité* [Thu05, Proposition 3.1.14] : Soit $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ un morphisme de k-espaces analytiques entre k-courbes strictement analytiques lisses. Si $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est une fonction sousharmonique sur X, l'application composée
$$f^* u = u \circ f : \mathrm{X}' \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$
est une fonction sousharmonique sur X'.

- *Extension des scalaires* [Thu05, Corollaire 3.4.5] : Soit X une k-courbe strictement analytique lisse. Pour toute extension analytique K de k, le K-espace analytique X_{K} qui s'en déduit par extension des scalaires à K est une K-courbe strictement analytique lisse.
Si $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est une application sousharmonique sur X, l'application composée
$$\varpi^* u : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \xrightarrow{\varpi} \mathrm{X} \xrightarrow{u} [-\infty, +\infty[\ ,$$
où $\varpi : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}$ est le morphisme d'extension des scalaires, est une fonction sousharmonique sur X_{K}.

- *Logarithme du module d'une fonction analytique* [Thu05, Proposition 3.1.6] : Soit X une k-courbe strictement analytique lisse. Si f est une fonction analytique sur X, *i.e.* une section globale du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, alors l'application
$$\log|f| : \mathrm{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$
est une fonction sousharmonique sur X.

Soit k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$ quelconque.

Définition 10.14. Soit X une k-courbe analytique lisse. Une application $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est dite *sousharmonique* si elle est semi-continue supérieurement et si la condition suivante est vérifiée : pour une (et donc pour toute) extension analytique non trivialement valuée K de k telle que X_{K} soit une K-courbe strictement analytique, l'application composée
$$u_{\mathrm{K}} : \ \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \xrightarrow{\varpi_{\mathrm{K}}} \mathrm{X} \xrightarrow{u} [-\infty, +\infty[$$
est sousharmonique sur la K-courbe strictement analytique lisse X_{K}.

10.3 Fonctions plurisousharmoniques

Dans cette section on introduit la notion de fonction plurisousharmonique sur un espace analytique sur un corps complet quelconque. Dans le cas complexe il s'agit de la notion introduite par Grauert et Remmert [GR56] qui, en vertu d'un résultat de Fornæss-Narasimhan [FN80, Theorem 5.3.1], est équivalente à la notion précédemment introduite par Lelong [Lel42] et Oka [Oka42] ; dans le cas non archimédien des notions de fonction plurisousharmonique ont été introduites par Chambert-Loir et Ducros [CLD12] et par Boucksom, Favre et Jonnson [BFJ12].

Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$.

Définition 10.15. Soit X un k-espace analytique. Une fonction $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est dite *plurisousharmonique* si elle est semi-continue supérieurement et la condition suivante est satisfaite : pour toute extension analytique K de k, pour tout K-courbe analytique lisse Y et pour tout morphisme de K-espaces analytiques $\varepsilon : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_\mathrm{K}$, l'application composée

$$\varepsilon^* \varpi_\mathrm{K}^* u : \ \mathrm{Y} \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathrm{X}_\mathrm{K} \xrightarrow{\ \varpi_\mathrm{K}\ } \mathrm{X} \xrightarrow{\ u\ } [-\infty, +\infty[$$

est sousharmonique sur Y (où $\varpi_\mathrm{K} : \mathrm{X}_\mathrm{K} \to \mathrm{X}$ désigne le morphisme d'extension des scalaires).

Une application $h : |\mathrm{X}| \to \mathbf{R}$ est dite *pluriharmonique* si les applications $h, -h$ sont plurisousharmoniques.

Remarque 10.16. Si $k = \mathbf{C}$ on retrouve la notion usuelle de fonction plurisousharmonique. Si $k = \mathbf{R}$ et X est un $\mathbf{R}$-espace analytique, se donner une fonction plurisousharmonique sur X revient à se donner une fonction plurisousharmonique sur la complexification $\mathrm{X}_\mathbf{C}$, invariante par conjugaison.

Les propriété suivantes des fonctions plurisousharmoniques se déduisent directement des propriétés des fonctions sousharmoniques correspondantes.

- *Cohérence de la définition pour les courbes* : Soit X est une k-courbe analytique lisse. Une fonction $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est plurisousharmonique si et seulement si elle est sousharmonique.

- Soit X un k-espace analytique. L'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur X est un cône réel stable par max : pour toutes fonctions plurisousharmoniques $u, v : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ et tous nombres réels positifs α, β, les applications $\alpha u + \beta v$ et $\max\{u, v\}$ sont plurisousharmoniques sur X.

- *Localité* : Soit X un k-espace analytique. Les fonctions sousharmoniques forment un faisceau Psh_X sur $|\mathrm{X}|$.

- *Fonctorialité* : Soient X, X' des k-espaces analytiques et $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ un morphisme de k-espaces analytiques. Si $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est une fonction plurisousharmonique, l'application composée
$$f^* u = u \circ f : \mathrm{X}' \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$
est une fonction plurisousharmonique sur X'.

- *Extension des scalaires* : Soient X un k-espace analytique et K une extension analytique de k. Si $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est une application sousharmonique sur X, l'application composée
$$\varpi^* u : \mathrm{X}_\mathrm{K} \xrightarrow{\ \varpi\ } \mathrm{X} \xrightarrow{\ u\ } [-\infty, +\infty[\ ,$$
où $\varpi : \mathrm{X}_\mathrm{K} \to \mathrm{X}$ est le morphisme d'extension des scalaires, est une fonction sousharmonique sur X_K.

– *Logarithme du module d'une fonction analytique* : Soient X un k-espace analytique et f une fonction analytique sur X, *i.e.*, une section globale du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. La fonction $\log|f|$: $\mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est alors plurisousharmonique sur X.

– *Principe du maximum* : Soient X un k-espace analytique connexe et $u : \mathrm{X}[-\infty, +\infty[$ une fonction plurisousharmonique. Si la valeur absolue de k est non archimédienne, on suppose de plus que X soit sans bord. Si la fonction u admet un maximum global en un point $x \in \mathrm{X}$, elle est constante.

Remarque 10.17. Le principe du maximum se démontre grâce à la connexité locale par chaînes de courbes des k-espaces analytiques.
– Dans le cas complexe, en désingularisant, on peut supposer que l'espace analytique est lisse : la connexité locale par courbes revient donc à la connexité par courbes des boules.
– Dans le cas non archimédien, c'est un théorème de Berkovich [Ber07, Theorem 4.1.1] : c'est là qu'apparaît l'hypothèse sans bord. D'ailleurs, on ne peut pas s'affranchir de cette hypothèse : si $\mathrm{X} = \mathscr{M}(\mathrm{A})$ est un k-espace affinoïde et $f \in \mathrm{A}$ est tel que l'application $|f|$ soit non constante, l'application $\log|f|$ est plurisousharmonique, non constante et elle admet un maximum globale.

On utilisera le principe du maximum seulement pour les fonctions sousharmoniques.

10.4 Propriétés de convexité

10.4.1. Fonctions convexes. — Soit $\Omega \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Une application $u : \Omega \to \mathbf{R}$ est dite *convexe* si pour tout intervalle compact $\mathrm{I} \subset \Omega$ et pour toute application affine $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto at + b$, la condition suivante est satisfaite :

$$(u|_{\partial \mathrm{I}} \le h|_{\partial \mathrm{I}}) \Longrightarrow (u|_{\mathrm{I}} \le h|_{\mathrm{I}}).$$

Une application convexe est automatiquement continue.

Soit $n \ge 1$ un nombre entier. Une application $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est dite *convexe* si elle est continue et pour tout intervalle ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}$ et pour toute application affine

$$\begin{aligned} \varepsilon : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\longmapsto x + tv, \end{aligned}$$

l'application composée $\varepsilon^* u : \Omega \to \mathbf{R}$ est convexe.

10.4.2. Stabilité de la sous-harmonicité par tranformations convexes. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$.

Proposition 10.18. *Soient* X *un k-espace analytique,* $h_1, \dots, h_n : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ *des fonctions pluriharmoniques et* $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *une application convexe. L'application composée*

$$\varphi \circ (h_1, \dots, h_n) : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

est alors plurisousharmonique.

Démonstration. Les hyperplans de support du graphe de φ sont décrits par une famille $\mathrm{L} = \{\ell_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de fonctions affines $\ell_\alpha : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a

$$\varphi(x) = \sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \ell_\alpha(x).$$

Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, comme ℓ_α est affine, l'application composée $\ell_\alpha \circ (h_1, \dots, h_n)$ est pluriharmonique. La fonction $\varphi \circ (h_1, \dots, h_n)$ est donc le supremum d'une famille de fonctions (plurisous)harmoniques.

Étant continue, elle coïncide avec sa régularisation supérieure et on conclut qu'elle est plurisousharmonique. □

Proposition 10.19. *Soient* X *un* k*-espace analytique et* $u_1, \dots, u_n : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ *des fonctions plurisousharmoniques.*

Soit $\varphi : [-\infty, +\infty[^n \to [-\infty, +\infty[$ *une application continue dont la restriction restriction à* $\mathbf{R}^n$ *soit à valeurs réelles, convexe et croissante en chaque variable. L'application composée*

$$\varphi \circ (u_1, \dots, u_n) : \mathrm{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty[^n \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$

est alors plurisousharmonique.

Démonstration. La preuve est la même que celle de la proposition précédente lorsqu'on a remarqué le fait suivant. Soit

$$\ell_\alpha(x) = a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + b_\alpha$$

une fonction affine qui décrit un hyperplan de support du graphe de φ. Puisque la fonction φ est croissante en chaque variable, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $a_{\alpha i} \geq 0$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application composée $\ell_\alpha \circ (u_1, \dots, u_n)$ est alors plurisousharmonique et on peut procéder comme avant. □

Exemple 10.20. Soient X un k-espace analytique, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions analytiques sur X et $\rho_1, \dots, \rho_n$ des nombres réels positifs. Alors, la fonction

$$x \mapsto log\left(|f_1|^{\rho_1} + \cdots + |f_n|^{\rho_n}\right).$$

En particulier le logarithme d'une norme géométrique ℓ^q (Exemple 8.4) sur un k-espace vectoriel de dimension finie est une fonction plurisousharmonique.

Remarque 10.21. Soient X une k-courbe analytique lisse et connexe, et $h : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ une fonction harmonique non constante. L'image $h(\mathrm{X}) \subset \mathbf{R}$ est alors un intervalle ouvert.

En effet, $h(\mathrm{X})$ est un intervalle car X est connexe. Puisque h est non constante, elle n'atteint ni un maximum ni un minimum global : autrement dit, l'intervalle $h(\mathrm{X})$ ne contient pas ses points extrêmes.

Proposition 10.22. *Soient* X *une* k*-courbe analytique lisse et connexe, et* $h : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ *une fonction harmonique non constante.*

Une application $u : h(\mathrm{X}) \to \mathbf{R}$ *est convexe si et seulement si* $u \circ h$ *est sousharmonique et elle n'est pas identiquement égale à* $-\infty$*.*

Démonstration. D'après la Proposition 10.18, il reste à prouver que si $u \circ h$ est sousharmonique, alors u est convexe. Soient $\mathrm{I} \subset h(\mathrm{X})$ un interval compact et $\ell : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto a + tb$ une fonction affine telle que

$$u|_{\partial \mathrm{I}} \leq \ell|_{\partial \mathrm{I}}.$$

On suppose par l'absurde que le maximum de la fonction $u - \ell$ sur I soit strictement positif : le maximum est alors forcément atteint dans l'intérieur Ω de I.

La fonction $(u - \ell) \circ h$ est sousharmonique sur $h^{-1}(\Omega)$ et elle atteint un maximum global. En particulier, elle est constante et strictement positive sur $h^{-1}(\Omega)$: cela contredit l'hypothèse $u|_{\partial \mathrm{I}} \leq \ell|_{\partial \mathrm{I}}$. □

Proposition 10.23. *Soit* $n \geq 1$ *un nombre entier. Soient* $t_1, \dots, t_n$ *des coordonnées sur* $\mathbf{G}_m^n$*. Une application continue* $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *est convexe si et seulement si l'application composée*

$$u \circ (\log|t_1|, \dots, \log|t_n|) : \mathbf{G}_m^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

est une fonction plurisousharmonique.

Démonstration. Pour tout $i = 1,\ldots,n$ la fonction $\log|t_i|$ est pluriharmonique. D'après la Proposition 10.18 il reste à démontrer que si l'application $u\circ(\log|t_1|,\ldots,\log|t_r|)$ est plurisousharmonique, alors u est convexe.

Soit $\Omega\subset\mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $\varepsilon:\Omega\to\mathbf{R}$, $t\mapsto x+tv$ une application affine. Le lemme suivant, qu'on démontrera à la fin de la preuve, permet de supposer $v\in\mathbf{Z}^n$ (et $\Omega=\mathbf{R}$).

Lemme 10.24. *Soit $u:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ une application continue. L'application u est convexe si et seulement si la condition suivante est satisfaite : pour point $x\in\mathbf{R}^n$ et pour tout $v\in\mathbf{Z}^n$, l'application composée*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^n & \xrightarrow{u} & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & x+tv & & \end{array}$$

est une fonction convexe sur $\mathbf{R}$.

Soit $\xi\in\mathbf{G}_m^n$ tel que, pour tout $i=1,\ldots,n$, on ait

$$\log|t_i(\xi)| = x_i.$$

Quitte à étendre les scalaires au corps résiduel complété de ξ, on peut supposer qu'il est définit sur k (la notion de pluri-sous-harmonicité est stable par extension des scalaires). On considère le morphisme de k-espaces analytiques $\lambda:\mathbf{G}_m\to\mathbf{G}_m^n$ défini par

$$\lambda(\tau) = (\tau^{v_1},\ldots,\tau^{v_r})\cdot\xi.$$

Par définition de ξ et λ, pour tout point $\tau\in\mathbf{G}_m$ et pour tout $i=1,\ldots,n$, on a

$$\log|t_i(\lambda(\tau))| = v_i\log|\tau| + x_i.$$

Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_m \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\log|\tau|"'] & \mathbf{G}_m^n \arrow[d, "(\log|t_1|,\ldots,\log|t_n|)"] \\ \mathbf{R} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbf{R}^n \end{tikzcd}$$

La fonction $\log|\tau|$ est harmonique sur $\mathbf{G}_m$ et, par fonctorialité des fonctions plurisousharmoniques, la fonction

$$\Big(u\circ(\log|t_1|,\ldots,\log|t_n|)\Big)\circ\lambda = \Big(u\circ\varepsilon\Big)\circ h$$

est sousharmonique sur $\mathbf{G}_m$. D'après la Proposition 10.22, la fonction $u\circ\varepsilon$ est alors convexe sur $\mathbf{R}$, ce qui termine la preuve. □

Démonstration du Lemme 10.24. Tout d'abord on remarque qu'une fonction continue $u':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est convexe si et seulement si pour intervalle compact $\mathrm{I}\subset\mathbf{R}$ et toute fonction affine h la condition suivante est satisfaite :

$$\big(u'|_{\partial\mathrm{I}} < h|_{\partial\mathrm{I}}\big) \Longrightarrow \big(u'|_{\mathrm{I}} \le h|_{\mathrm{I}}\big).$$

On considère une application affine

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon: & \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ & t & \longmapsto & x+tv, \end{array}$$

un intervalle compact $\mathrm{I} = [t_1, t_2] \subset \Omega$ et une application affine $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\varepsilon^* u|_{\partial \mathrm{I}} < h|_{\partial \mathrm{I}}.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $u(\varepsilon(t_0)) > h(t_0)$. Quitte à appliquer une translation, on peut supposer $t_0 = 0$. Puisque u est continue il existe, pour tout $i = 1, 2$, un voisinage ouvert U_i de $\varepsilon(t_i)$ tel que, pour tout $x' \in \mathrm{U}_i$, on ait

$$u(x) < \ell(t_i).$$

Par densité de $\mathbf{Q}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ il existe $v' \in \mathbf{Q}^n$ tel que, pour tout $i = 1, 2$, le point $x + t_i v'$ appartient à l'ouvert U_i. On remarque que, quitte à appliquer une dilatation par un nombre entier non nul assez divisible, on peut supposer que v' est à coefficients entiers. Si on considère l'application $\varepsilon'(t) = x + tv'$, on a

$$\varepsilon'^* u|_{\partial \mathrm{I}} < h|_{\partial \mathrm{I}}.$$

Puisque $\varepsilon(0) = \varepsilon'(0)$, on a $u(\varepsilon(0)) \leq h(0)$, ce qui contredit l'hypothèse $u(\varepsilon(0)) > h(0)$. □

11 Géométrie d'Arakelov

11.1 Corps globaux

Définition 11.1. Une *place* d'un corps K est une classe d'équivalence de valeurs absolues non triviales.
Si v est une place d'un corps K, on désigne par K_v la complétion de K par rapport à v.

Définition 11.2. On dit qu'un corps K est *global* s'il satisfait à une de ces conditions :
- K est un corps de nombres (dans ce cas on désigne par $\mathfrak{S}_\mathrm{K}$ le spectre de son anneau des entiers $\mathfrak{o}_\mathrm{K}$) ;
- K est le corps de fonctions d'une courbe projective lisse et connexe $\mathfrak{S}_\mathrm{K}$ sur un corps $\mathbf{F}$.

11.1.1. Normalisation d'une place non archimédienne. — Soit K un corps global. Les points fermés du schéma $\mathfrak{S}_\mathrm{K}$ corréspondent bijectivement aux places non archimédiennes de K : dans la suite on sous-entendra toujours cette identification. Si v est une place non archimédienne de K, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathfrak{S}_\mathrm{K}, v}$ en v est un anneau de valuation discrète : soient

$$\mathrm{val}_v : \mathrm{K} \longrightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$$

la valuation normalisée et, pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$

$$|\lambda|_v := \exp(-\mathrm{val}_v(\lambda)).$$

11.1.2. Normalisation d'une place archimédienne. — Soient K un corps de nombres et v une place archimédienne. La complétion K_v s'identifie, en tant que corps complet, à $\mathbf{R}$ ou à $\mathbf{C}$. On considère l'unique valeur absolue $|\cdot|_v : \mathrm{K}_v \to \mathbf{R}_+$ qui étend la valeur absolue

$$\lambda \mapsto \mathrm{sign}(\lambda) \cdot \lambda$$

sur $\mathbf{R}$.

Dorénavant, la complétion K_v de K sera toujours munie de la valeur absolue $|\cdot|_v$.

11.1.3. Degré d'une place dans un corps de fonctions. — Soient K le corps de fonctions d'une courbe projective, lisse et connexe $\mathfrak{S}_K$ et v une place de K. Le corps résiduel $\kappa(v)$ du point fermé de $\mathfrak{S}_K$ associé à la place v est une extension finie du corps $\mathbf{F}$. Le *degré de la place* v est le nombre entier

$$\deg v := [\kappa(v) : \mathbf{F}].$$

11.1.4. Degré d'une place dans un corps de nombres. — Soient K un corps de nombres et v une place de K. Si v est non archimédienne, le corps résiduel $\kappa(v)$ du point fermé de $\mathfrak{S}_K$ associé à la place v est un corps fini. Le *degré de la place* v est le nombre réel

$$\deg v := \log \#\kappa(v).$$

De plus, si la valeur absolue v est p-adique, on a $\deg(v) = [\kappa(v) : \mathbf{F}_p] \cdot \log p$.

Si v est archimédienne, la complétion K_v s'identifie, en tant que corps complet, à $\mathbf{R}$ ou à $\mathbf{C}$. Le *degré de la place* v est le nombre entier

$$\deg v := [K_v : \mathbf{R}].$$

Théorème 11.3 (Formule du produit)**.** *Soient* K *un corps global et* $f \in K^\times$. *Le nombre réel* $\log|f|_v$ *est nul pour presque toute place* v *et on a*

$$\sum_{v \in V_K} \deg(v) \log|f|_v = 0.$$

11.1.5. Extensions finies. — Soient K un corps global et L une extension finie de K.

Définition 11.4. Soient w une place de L et v sa restriction à K. L'*indice de ramification de* w *sur* v est la cardinalité du groupe abélien fini $|L_w^\times|_w / |K_v^\times|_w$,

$$\operatorname{ram}(w, v) := \#\left(\frac{|L_w^\times|_w}{|K_v^\times|_w}\right).$$

Le *dégré résiduel de* w *sur* v est le nombre entier

$$[w : v] := \frac{[L_w : K_v]}{\operatorname{ram}(w, v)}.$$

Proposition 11.5. *Soient* K *un corps global et* L *une extension finie de* K. *Soient* w *une place de* L *et* v *sa restriction à* K. *Alors,*

$$\deg(w) = [w : v] \deg(v)$$

et, pour tout élément $f \in K^\times$*, on a :*

$$\log|f|_w = \operatorname{ram}(w, v) \log|f|_v.$$

Proposition 11.6. *Soient* K *un corps global et* L *une extension finie de* K. *Soit* v *une place de* K. *Alors,*

$$\sum_{w|_K = v} [w : v] \operatorname{ram}(w, v) = [L : K]$$

et, pour tout élément $g \in L^\times$*, on a :*

$$\log|N_{L/K}(g)|_v = \sum_{w|_K = v} [w : v] \log|g|_w,$$

où $N_{L/K}(g)$ *est la norme de* g *dans* K.

En particulier, pour tout élément $f \in \mathrm{K}^\times$, on a :

$$[\mathrm{L}:\mathrm{K}]\log|f|_v = \sum_{w|_\mathrm{K}=v} [w:v]\log|f|_w.$$

11.2 Faisceaux cohérents adéliques

On présente dans cette section une notion de faisceau adélique. Des notions similaires ont été introduites dans [Zha95] et [Gau08].

Soit K un corps global.

Définition 11.7. Soient X un K-schéma propre et F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules. Une *famille adélique de normes géométriques sur* F est une famille de normes géométriques $\boldsymbol{u} = \{u_v : v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}\}$ indicée par V_K satisfaisant aux propriétés suivantes :

- si v est une place archimédienne (resp. non archimédienne) u_v est une métrique continue hermitienne (resp. continue non archimédienne) sur le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_v^{\mathrm{an}}}$-modules $\mathrm{F}_v^{\mathrm{an}}$;
- il existe un ouvert non vide $\mathfrak{U}$ du schéma $\mathfrak{S}_\mathrm{K}$, un $\mathfrak{U}$-schéma propre et plat $\mathfrak{X}$ de fibre générique X, un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules $\mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{F}|_\mathrm{X}$ soit isomorphe à F avec la propriété suivante : pour tout point fermé $v \in \mathfrak{U}$ la norme géométrique u_v est induite par le modèle entier $\mathfrak{F}$.

Définition 11.8. Soit X un K-schéma propre. Un *faisceau cohérent adélique* est un couple $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{u})$ formé d'un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules F et d'une famille adélique de normes géométriques sur F, $\boldsymbol{u}$.

On dira qu'un faisceau cohérent adélique $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{u})$ est *localement libre* si le faisceau cohérent sous-jacent F est localement libre.

11.2.1. Opérations. — Soit X un K-schéma propre. Les opérations valables pour les faisceaux localement libres de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules munis d'une norme géométrique continue (quotient, dual, somme directe, produit tensoriel, ...) se transportent aux faisceaux adéliques sur X en les construisant « place à place ».

Par exemple si $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{u}_\mathrm{E})$, $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{u}_\mathrm{F})$ sont des faisceaux adéliques localement libres sur X, pour toute place $v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}$, on considère la norme géométrique $u_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F},v}$ sur $\mathrm{E}_v \oplus \mathrm{F}_v$ obtenue par somme directe des normes géométriques $u_{\mathrm{E},v}$ et $u_{\mathrm{F},v}$. Puisque la construction de la norme géométrique associée à un modèle entier est compatible à la construction de la somme directe des normes géométriques, la famille de normes géométriques

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}} = \{u_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F},v} : v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}\}$$

est adélique. Le faisceau adélique localement libre $\mathscr{E} \oplus \mathscr{F} = (\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{E}\oplus\mathrm{F}})$ est dit somme directe des faisceaux adéliques $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.

11.2.2. Extension des scalaires. — Soit L une extension finie de K. Soient w une place de L et v sa restriction à K : on désigne par $|\cdot|_{\mathrm{K},w}$ l'unique valeur absolue sur K appartenante à la classe d'équivalence w qui prolonge la valeur absolue $|\cdot|_v$ sur K, *i.e.*

$$|\cdot|_{\mathrm{K},w} = |\cdot|_w^{\mathrm{ram}(w,v)}.$$

Soient X un K-schéma propre et F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules. On désigne par X_L le L-schéma propre qui s'en déduit par extension des scalaires et par F_L le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_\mathrm{L}}$-modules $\varpi_\mathrm{L}^*\mathrm{F}$ ($\varpi_\mathrm{L} : \mathrm{X}_\mathrm{L} \to \mathrm{X}$ le morphisme d'extension des scalaires). Avec ces notations, on a le diagramme cartésien de K-schémas :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}(\mathrm{F}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{L},w}) \arrow[r, "\varpi_{\mathrm{L}}[\mathrm{F}]"] \arrow[d] & \mathbf{V}(\mathrm{F}^{\mathrm{an}}_{v}) \arrow[d] \\ \mathrm{X}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{L},w} \arrow[r, "\varpi_{\mathrm{L}}"] & \mathrm{X}^{\mathrm{an}}_{v} \end{tikzcd}$$

Définition 11.9. Soit $u_v : \mathbf{V}(\mathrm{F}^{\mathrm{an}}_v) \to \mathbf{R}_+$ une norme géométrique continue sur F à la place v. L'*extension de la norme géométrique u_v à place w* est la norme géométrique

$$u_{\mathrm{L},w} := \left(\varpi_{\mathrm{L}}[\mathrm{F}]^* u_v\right)^{1/\mathrm{ram}(w,v)}.$$

Proposition 11.10. *Soient* X *un* K*-schéma propre,* F *un faisceau cohérent de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules et* $\boldsymbol{u} = \{u_v : v \in \mathbf{V}_{\mathrm{K}}\}$ *une famille adélique de normes géométriques sur* F*. Soit* L *une extension finie de* K*. L'extension à* L *de la famille* $\boldsymbol{u}$*,*

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} = \{u_{\mathrm{L},w} : w \in \mathrm{V}_{\mathrm{L}}\}$$

est une famille adélique de normes géométriques sur F_{L}*.*

Définition 11.11. Soient X un K-schéma propre et $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{u})$ un faisceau cohérent adélique sur X. Soit L une extension finie de K. L'*extension des scalaires à* L *de* $\mathscr{F}$ est le faisceau cohérent adélique sur X_{L},

$$\mathscr{F}_{\mathrm{L}} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}).$$

11.3 Degré et pente

Soit K un corps global.

Définition 11.12. Soit $\mathscr{L} = (\mathrm{L}, \boldsymbol{u})$ un faisceau inversible adélique sur Spec K. Le *degré du faisceau inversible adélique* $\mathscr{L}$ est le nombre réel

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{K}} \mathscr{L} := \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log u_v(t),$$

où $t \in \mathbf{V}(\mathrm{L})(\mathrm{K})$ est un élément non nul.

D'après la formule du produit la définition ne dépend pas de l'élément non nul t choisi. Pour toute place $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$ soit $\|\cdot\|_v$ la norme sur L induite par la norme géométrique u_v. Pour tout $s \in \mathrm{L}$ non nul, on a :

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{K}} \mathscr{L} = -\sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log \|s\|_v.$$

Définition 11.13. Soit $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{u})$ un faisceau adélique localement libre sur Spec K. Le *degré de* $\mathscr{E}$ est le nombre réel

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{K}} \mathscr{E} := \widehat{\deg}_{\mathrm{K}} \left(\textstyle\bigwedge^r \mathscr{E}\right),$$

où $r = \mathrm{rk}\,\mathscr{E}$. La *pente de* $\mathscr{E}$ est le nombre réel

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}) := \frac{\widehat{\deg}_{\mathrm{K}} \mathscr{E}}{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}.$$

Proposition 11.14. *Pour tous faisceaux adéliques localements libres $\mathscr{E},\mathscr{F}$ sur* K *on a*

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}) = \operatorname{rk}\mathscr{F}\cdot\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{E} + \operatorname{rk}\mathscr{E}\cdot\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{F}.$$

Démonstration. On supposes d'abord que $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ soient des faisceaux inversibles adéliques. Soient s, t respectivement des K-points non nuls de $\mathbf{V}(\mathrm{E})$, $\mathbf{V}(\mathrm{F})$. Pour toute place v de K, on a alors

$$p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F},v}(s\otimes t) = p_{\mathrm{E},v}(s)\cdot p_{\mathrm{F},v}(t).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}) &= \sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log p_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{F},v}(s\otimes t)\\ &= \sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\big(\log p_{\mathrm{E},v}(s)+\log p_{\mathrm{F},v}(t)\big)\\ &= \sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log p_{\mathrm{E},v}(s)+\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log p_{\mathrm{F},v}(t)\\ &= \widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{E}+\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{F}.\end{aligned}$$

En revenant au cas général, on se ramène au cas où $\mathscr{E},\mathscr{F}$ sont des faisceaux inversibles adéliques grâce a l'isomorphisme canonique de faisceaux adéliques localement libres sur K,

$$\det(\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}) = \det(\mathscr{E})^{\otimes\operatorname{rk}\mathscr{F}}\otimes\det(\mathscr{F})^{\otimes\operatorname{rk}\mathscr{E}}.$$

Cela termine la preuve. □

Proposition 11.15 (Compatibilité à l'extension des scalaires)**.** *Soient* L *une extension finie de* K *et* $\mathscr{E} = (\mathrm{E},\boldsymbol{p})$ *un faisceau cohérent adélique sur* Spec K. *Alors,*

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{L}}\mathscr{E}_{\mathrm{L}} = [\mathrm{L}:\mathrm{K}]\,\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{E}.$$

Démonstration. Puisque la construction du faisceau adélique détérminant, *i.e.*, la construction de la norme géométrique détérminant à toute place, est compatible à l'extension des scalaires, on se ramène à prouver l'énoncé quand $\mathscr{E}$ est un faisceau inversible adélique. Soient s un K-point non nul de $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ et s_{L} le L-point non nul de $\mathbf{V}(\mathrm{E}\otimes_{\mathrm{K}}\mathrm{L})$ qui s'en déduit par extension des scalaires. Pour toute place v de K on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{w\in\mathrm{V_L}\\ w|_{\mathrm{K}}=v}}\deg(w)\log p_{\mathrm{E_L},w}(s_{\mathrm{L}}) &= \sum_{\substack{w\in\mathrm{V_L}\\ w|_{\mathrm{K}}=v}}(\deg(v)[w:v])(\operatorname{ram}(w,v)\cdot\log p_{\mathrm{E},v}(s))\\ &= \sum_{\substack{w\in\mathrm{V_L}\\ w|_{\mathrm{K}}=v}}[w:v]\operatorname{ram}(w,v)\deg(v)\log p_{\mathrm{E},v}(s)\\ &= [\mathrm{L}:\mathrm{K}]\deg(v)\log p_{\mathrm{E},v}(s).\end{aligned}$$

On termine la preuve en prenant la somme sur toute place $v\in\mathrm{V_K}$. □

Définition 11.16. Soit $\mathscr{E}$ un faisceau adélique localement libre sur K. La *pente maximale* de $\mathscr{E}$ est le nombre réel

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{K,max}}(\mathscr{E}) := \sup\left\{\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{F}) : \begin{array}{l}\mathscr{F}\text{ faisceau adélique localement libre sur K,}\\ \varepsilon:\mathscr{F}\to\mathscr{E}\text{ homomorphisme injectif de faisceaux adéliques}\end{array}\right\}$$

Remarque 11.17. Soit $\mathscr{E}$ un faisceau adélique localement libre sur K. Pour calculer la pente maximale de $\mathscr{E}$ on peut se borner à considérer le sous-faisceaux adéliques de $\mathscr{E}$, les faisceaux adéliques $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{F}})$ tels que F est un sous-espace vectoriels de E et la famille adélique de métriques $\boldsymbol{p}_{\mathrm{F}}$ est déduite de celle de $\mathscr{E}$ à travers l'homomorphisme surjectif de K-schémas $\mathbf{V}(\mathrm{E}) \to \mathbf{V}(\mathrm{F})$ qui correspond à l'inclusion $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

Proposition 11.18 (Inégalité des pentes)**.** *Soient* $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})$, $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{F}})$ *des faisceaux adéliques localement libres sur* K*. Pour tout homomorphisme injectif de* K*-espaces vectoriels* $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$*, l'inegalité suivante est satisfaite :*

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{K},\max}(\mathscr{E}) \leq \widehat{\mu}_{\mathrm{K},\max}(\mathscr{F}) + \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log \|\varphi\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v},$$

où $\|\varphi\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v}$ *est la norme d'opérateur de* φ *à la place* v*.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tous faisceaux adéliques localements libres $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ et tout homomorphisme injectif de K-espaces vectoriels $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ on a l'inégalité

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}) \leq \widehat{\mu}_{\mathrm{K},\max}(\mathscr{F}) + \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log \|\varphi\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v}.$$

On suppose d'abord que les faisceaux adéliques $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ soient inversibles. Pour toute place $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$, la norme d'opérateur de φ à la place v est le nombre réel positif

$$\|\varphi\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v} := \sup_{x \in \mathbf{V}(\mathrm{F})^{\mathrm{an}}_v - \{0\}} \frac{p_{\mathrm{E},v}(\varphi^\vee(x))}{p_{\mathrm{F},v}(x)}.$$

Pour tout K-point t de $\mathbf{V}(\mathrm{F})$ tel que $\varphi^\vee(t)$ est non nul, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}_{\mathrm{K}} \mathscr{E} &= \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log p_{\mathrm{E},v}(\varphi^\vee(t)) \\
&\leq \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log\Big(\|\varphi\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v} \cdot p_{\mathrm{F},v}(t)\Big) \\
&= \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log p_{\mathrm{F},v}(t) + \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log \|\varphi\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v} \\
&= \widehat{\deg}_{\mathrm{K}}(\mathscr{F}) + \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log \|\varphi\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v}.
\end{aligned}$$

On suppose ensuite que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ soient des faisceaux adéliques localement libres quelconque. On désigne par $\theta : \mathrm{E} \to \mathrm{Im}\varphi$ l'isomorphisme de K-espaces vectoriels induit par φ. On munit le sous-K-espace vectoriel $\mathrm{Im}\varphi$ de F de la structure de faisceau adélique induite par $\mathscr{F}$ par restriction, *i.e.*, pour toute place v on considère la norme géométrique induite sur $\mathrm{Im}\,\varphi$ par l'homomorphisme surjectif $\mathbf{V}(\mathrm{F}) \to \mathbf{V}(\mathrm{Im}\varphi)$. Soit r le rang de $\mathscr{E}$. En prenant la puissance extérieure r-ième de θ, on obtient un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\textstyle\bigwedge^r \theta : \bigwedge^r \mathrm{E} \longrightarrow \bigwedge^r \mathrm{Im}\varphi.$$

D'après le cas précédent, on a

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{K}} \mathscr{E} \leq \widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\left(\textstyle\bigwedge^r \mathrm{Im}\varphi\right) + \displaystyle\sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \log \|\textstyle\bigwedge^r \theta\|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F}),v}$$

En appliquant l'inégalité de Hadamard en toute place, on a

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\left(\textstyle\bigwedge^r \mathrm{Im}\varphi\right) \leq r\, \widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\left(\mathrm{Im}\varphi\right).$$

Encore par l'inégalité de Hadamard, pour toute place $v \in V_K$ on a :

$$\log \| \bigwedge^r \theta \|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(\bigwedge^r E, \bigwedge^r F), v} \le r \log \| \theta \|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(E,F), v}.$$

De plus, pour toute place v, la norme d'opérateur de φ coïncide avec la norme d'opérateur de θ. On conclut donc

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}_K \mathscr{E} &\le r\, \widehat{\deg}_K \big(\mathrm{Im}\varphi\big) + \sum_{v \in V_K} \deg(v)\, r \log \| \varphi \|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(E,F), v} \\ &\le r\, \widehat{\mu}_{K,\max}(\mathscr{F}) + r \sum_{v \in V_K} \deg(v) \log \| \varphi \|^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Hom}(E,F), v},\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

11.4 Hauteurs

Dans ce numéro on présente des faits élémentaires autour des hauteurs dans le cadre adélique qu'on a introduit. On peut trouver des expositions sur la théorie des hauteurs dans [Lan83], [Ser97], [BG06] et [HS00].

Soit K un corps global.

Définition 11.19. Soit X un K-schéma propre et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible adélique. Pour tout point fermé $x \in X_0$, on pose

$$h_{\mathscr{L}}(x) := \frac{1}{[K(x):K]} \widehat{\deg}_{K(x)}(x^* \mathscr{L}).$$

L'application $h_{\mathscr{L}} : X_0 \to \mathbf{R}_+$ ainsi définie est appelée *hauteur par rapport à* $\mathscr{L}$.

Théorème 11.20 (Machine des hauteurs de Weil)**.** *Soit* X *un* K*-schéma propre. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i. additivité : si $\mathscr{L}, \mathscr{M}$ *sont des faisceaux inversibles adéliques sur* X*,*

$$h_{\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}} = h_{\mathscr{L}} + h_{\mathscr{M}}.$$

ii. fonctorialité : si Y *est un* K*-schéma propre et* $f : Y \to X$ *est un morphisme de* K*-schémas,*

$$h_{f^* \mathscr{L}} = f^* h_{\mathscr{L}} := h_{\mathscr{L}} \circ f.$$

iii. équivalence linéaire : si L *est un faisceau inversible sur* X *et* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ *sont des familles adéliques de normes géométriques sur* L*, il existe un nombre réel* C *tel que*

$$|h_{(L,\boldsymbol{u})} - h_{(L,\boldsymbol{u}')}| \le C.$$

iv. positivité : si $\mathscr{L} = (L, \boldsymbol{u})$ *est un faisceau inversible adélique sur* X*, il existe un nombre réel* c *tel que, pour tout point fermé* $x \in X$ *qui n'est pas un point base stable de* L*, c'est-à-dire, qu'il existe un nombre entier positif* $d \ge 1$ *et une section globale de* $L^{\otimes d}$ *qui ne s'annule pas en* x*, on a*

$$h_{\mathscr{L}}(x) \ge c.$$

Démonstration. L'additivité est une conséquence immédiate de l'additivité du degré (Proposition 11.14) et la fonctorialité découle directement de la définition de l'image réciproque d'une norme géométrique.

On passe à démontrer (iii). Pour toute place $v \in V_K$, la fonction u'_v/u_v sur $\mathbf{V}(L) - e(X)$ (où $e : X \to \mathbf{V}(L)$ désigne la section nulle) descend en une fonction continue sur X_v^{an}. Comme X est propre sur K, l'espace topologique sous-jacent au K_v-espace analytique X_v^{an} est compact. En particulier

$$\delta_v := \sup_{X_v^{an}} \left| \log \frac{u'_v}{u_v} \right| < +\infty.$$

Par définition de famille adélique de normes géométriques il existe un ouvert $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{S}_K$, un $\mathfrak{V}$-schéma propre $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X}'$) et un faisceau inversible $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{X}$ (resp. un faisceau inversible $\mathfrak{L}'$ sur $\mathfrak{X}'$) tel que pour toute place $v \in \mathfrak{V}$ la norme géométrique u_v (resp u'_v) soit induite par le faisceau inversible $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{L}'$). Quitte à restreindre $\mathfrak{V}$ on peut supposer qu'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{V}$-schémas $\theta : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathfrak{X}$, $\varphi : \theta^* \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}$. Autrement dit, pour toute place $v \in \mathfrak{V}$, les normes géométriques u_v, u'_v coïncident et donc $\delta_v = 0$.

Par conséquent, pour tout point fermé $x \in X$ et pour tout point $t \in \mathbf{V}(L) - e(X)$ au-dessus de x de même corps résiduel, on a

$$\begin{aligned}
|h_{(L,\boldsymbol{u})}(x) - h_{(L,\boldsymbol{u}')}(x)| &:= \frac{1}{[K(x):K]} \left| \sum_{v \in V_{K(x)}} \deg(v) \log u_{K(x),v}(t) - \sum_{v \in V_{K(x)}} \deg(v) \log u'_{K(x),v}(t) \right| \\
&= \frac{1}{[K(x):K]} \left| \sum_{v \in V_{K(x)}} \deg(v) \left(\log u_{K(x),v}(t) - \log u'_{K(x),v}(t) \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{[K(x):K]} \sum_{v \in V_{K(x)}} \deg(v) \left| \log u_{K(x),v}(t) - \log u'_{K(x),v}(t) \right| \\
&\leq \sum_{v \in V_K} \deg(v) \delta_v = \sum_{v \notin \mathfrak{V}} \deg(v) \delta_v.
\end{aligned}$$

Puisque il n'y a qu'un nombre fini de places qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{V}$, cela achève la démonstration de (iii).

Pour (iv), quitte à prendre une puissance suffisamment grande de L, on peut supposer qu'il existe des sections globales $s_1, \ldots, s_n$ de L sur X telles que pour tout $x \in X$ qui n'est pas un point base stable de L il existe $i = 1, \ldots, n$ telle que s_i ne s'annule pas en x. En toute place v on désigne par $\| \cdot \|_v$ la métrique sur les sections de L induite par la norme géométrique u_v, Si s_i ne s'annule pas en x, on a

$$\begin{aligned}
h_{\mathscr{L}}(x) &= -\frac{1}{[K(x):K]} \sum_{v \in V_{K(x)}} \deg(v) \log \| s_i \|_{K(x),v}(x) \\
&\geq -\frac{1}{[K(x):K]} \sum_{v \in V_{K(x)}} \deg(v) \log \sup_{X_v^{an}} \| s_i \|_{K(x),v} \\
&= -\sum_{v \in V_K} \deg(v) \log \sup_{X_v^{an}} \| s_i \|_v \\
&\geq \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{v \in V_K} \deg(v) \log \sup_{X_v^{an}} \| s_i \|_v \right\}.
\end{aligned}$$

Pour toute place v l'espace topologique sous-jacent au K_v-espace analytique X_v^{an} est compact car X est propre sur L. Comme la norme géométrique u_v est continue pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a

$$\sup_{X_v^{an}} \| s_i \|_v < +\infty.$$

Cela achève la preuve. □

Théorème 11.21 (Finitude)**.** *Soit* K *un corps de nombres ou un corps de fonctions d'une courbe projective lisse et connexe sur un corps fini. Soit* X *un* K*-schéma propre et* $\mathscr{L} = (\mathrm{L}, \boldsymbol{u})$ *un faisceau inversible adélique sur* X*.*

Si le faisceau inversible L *est ample, pour tous nombres réels* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2 \geq 0$*, l'ensemble*

$$\{x \in \mathrm{X}_0 : [\mathrm{K}(x) : \mathrm{K}] \leq \mathrm{C}_1, h_{\mathscr{L}}(x) \leq \mathrm{C}_2\}$$

est fini.

Démonstration. En vertu du Théorème 11.20.(iii) on se ramène au cas $\mathrm{X} = \mathbf{P}^n_{\mathrm{K}}$ et $\mathrm{L} = \mathscr{O}(1)$ muni, aux places non archimédiennes, des normes géométriques induite par le faisceaux inversible $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^n_{\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}}$ et, (si K est un corps de nombres) aux places archimédiennes, des normes géométriques de Fubini-Study associées à la norme hermitienne standard.

Dans ce cas le résultat est connu et peut être trouvé par exemple dans [HS00, Theorem B.2.3]. □

Chapitre II

Théorie géométrique des invariants sur un corps complet

0 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la théorie géométrique des invariants sur un corps complet pour une valeur absolue quelconque. Dans le cas non archimédien on utilisera le language des espaces analytiques au sens de V. G. Berkovich.

Le but est de construire une métrique continue sur le quotient (au sens de la théorie géométrique des invariants) d'une variété projective polarisée par un faisceau inversible ample muni d'une métrique continue.

Le point crucial dans la preuve de la continuité de la métrique est la comparaison des notions de point minimal sur la fibre et de point minimal sur l'orbite (Théorème 2.9). Pour prouver ce résultat on s'inspire à l'article dans [KN79, Theorem 2] : en effet les techniques de G. Kempf et L. Ness, reformulées dans le cadre des fonctions plurisousharmoniques, s'appliquent aussi bien au cas non archimédien qu'au cas complexe. La relation entre les techniques de Kempf-Ness et les fonctions plurisousharmonique avait déjà notée dans [AL93].

Les mondes archimédiens et non archimédiens se distinguent toutefois sur l'argument d'existence d'un sous-groupe à un paramètre destablisant qui respecte les structures entières : tandis que dans le cas complexe l'existence se démontre grâce à la structure réelle d'un sous-groupe compact maximal, dans le cas non archimédien elle repose sur la proprété du foncteur des sous-groupes paraboliques.

L'étude des minima sur les fibres et sur les orbites se fait en même temps que l'étude de certaines propriétés de l'analytification du quotient et qui sont d'intérêt indépendant (Propositions 2.7 et 2.15).

Le travail de J.-F. Burnol [Bur92] s'insère dans ce cadre en permettant de prouver que la construction de la métrique sur le quotient est compatible à la construction de la métrique associée à un modèle entier (Corollaire 2.21).

1 Minima sur les fibres

1.1 Définition et propriétés générales

Définition 1.1. Soient X, Y des ensembles, et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty]$ des applications. L'application

$$\begin{aligned} f_{\downarrow} u : \mathrm{Y} &\longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ y &\longmapsto \inf_{f(x)=y} u(x) \end{aligned}$$

est appelée l'application des *minima de u sur les fibres du morphisme f*.

Un point $x \in \mathrm{X}$ est *u-minimal sur la fibre de f* si $f^* f_{\downarrow} u(x) = u(x)$, *i.e.*, pour tout $x' \in \mathrm{X}$ tel que $f(x) = f(x')$,

$$u(x) \leq u(x').$$

Le sous-ensemble de X des points u-minimaux sur les fibres de f est désigné par $\mathrm{X}_f^{\min}(u)$.

Si la fonction u est claire du contexte, on dit simplement *point minimal sur la fibre de f* et on désigne par $\mathrm{X}_f^{\min}$ l'ensemble des points minimaux.

Proposition 1.2 (Fonctorialité)**.** *On suppose de s'avoir donné un diagramme commutatif d'ensembles*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Y}' \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

Pour toute fonction $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty]$ on a

$$q^* f_{\downarrow} u \leq f'_{\downarrow} p^* u.$$

Proposition 1.3 (Semi-continuité pour les morphismes ouverts)**.** *Soient* X, Y *des espaces topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue, surjective et ouverte.*

Si $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est une fonction semi-continue supérieurement, $f_{\downarrow} u$ l'est aussi.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la partie

$$\mathrm{V}_\alpha := \{y \in \mathrm{Y} : f_{\downarrow} u(y) < \alpha\} \subset \mathrm{Y}$$

est ouverte. Puisque f est surjective, V_α est l'image de

$$\mathrm{U}_\alpha := \{x \in \mathrm{X} : u(x) < \alpha\} \subset \mathrm{X}.$$

La partie U_α est ouverte par semi-continuité supérieure de u et, comme f est une application ouverte, V_α l'est aussi. □

Proposition 1.4. *Soient* X, Y *des espaces topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application. Soit $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ une fonction continue.*

Si la fonction $f_{\downarrow} u$ est supérieurement semi-continue, l'ensemble des points minimaux $\mathrm{X}_f^{\min}(u)$ est fermé dans X.

Démonstration. Un point $x \in \mathrm{X}$ est u-minimal sur les fibres de f si et seulement si $u(x) = f_{\downarrow} u(f(x))$. Pour autant, on a :

$$\mathrm{X} - \mathrm{X}_f^{\min}(u) = \{x \in \mathrm{X} : f^* f_{\downarrow} u(x) - u(x) < 0\}.$$

Puisque l'application $f_{\downarrow} u$ est supérieurement semi-continue, l'application $f^* f_{\downarrow} u - u$ l'est aussi. La partie $\mathrm{X} - \mathrm{X}_f^{\min}(u)$ est alors ouverte. □

1.2 Morphismes d'espaces analytiques

Soient k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$, X, Y des k-espaces analytiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de k-espaces analytiques.

1.2.1. Extension des scalaires. — Soient K une extension analytique du corps k et $f_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}$ le morphisme de K-espaces analytiques déduit par extension des scalaires. Le diagramme d'espaces localement annelés en k-algèbres

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \arrow[r, "f_{\mathrm{K}}"] \arrow[d, "\varpi_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{Y}_{\mathrm{K}} \arrow[d, "\varpi_{\mathrm{Y}}"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 1.5 (Compatibilité à l'extension des scalaires)**.** *Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de k-espaces analytiques. Soient K une extension analytique du corps k et $f_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}$ le morphisme de K-espaces analytiques déduit par extension des scalaires.*

Si $\varpi_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}$, $\varpi_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{Y}$ désignent les morphismes d'extension des scalaires, on a

$$\varpi_{\mathrm{Y}}^* f_{\downarrow} u = (f_{\mathrm{K}})_{\downarrow} \varpi_{\mathrm{X}}^* u.$$

L'inégalité $\varpi_{\mathrm{Y}}^* f_{\downarrow} u \leq (f_{\mathrm{K}})_{\downarrow} \varpi_{\mathrm{X}}^* u$ suit de la fonctorialité (Proposition 1.2). L'inégalité $\varpi_{\mathrm{Y}}^* f_{\downarrow} u \geq (f_{\mathrm{K}})_{\downarrow} \varpi_{\mathrm{X}}^* u$ est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1.6. *Soient $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de k-espaces analytiques et $x, x' \in \mathrm{X}$ des points tels que $f(x) = f(x')$. Il existe une extension analytique K de k et des K-points $x_{\mathrm{K}}, x'_{\mathrm{K}}$ de X_{K} tels que*

i. le point x_{K} (resp. x'_{K}) s'envoie sur x (resp. x') par le morphisme canonique d'extension des scalaires $\mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}$;

ii. les images de x_{K} et x'_{K} par le morphisme $f_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}$, déduit par extension des scalaires, coïncident.

Dans le cas archimédien, le résultat est trivial pour $k = \mathbf{C}$ et, dans le cas $k = \mathbf{R}$, découle par action de Galois. Il reste à le prouver dans le cas où k est un corps complet pour une valeur absolue non-archimédienne.

Démonstration. Soient V un voisinage affinoïde du point $f(x) = f(x')$ et $\mathrm{A} := \Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$. Il existe des voisinages affinoïdes U et U′ respectivement de x et x' dans X tels que leur image par f soit contenue dans V. On désigne par B et B′ les sections du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ respectivement sur U et U′. Le morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ détermine par restriction des morphisme de k-espaces analytiques $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, $f : \mathrm{U}' \to \mathrm{V}$ et induit donc des homomorphismes de k-algèbres affinoïdes

$$\varphi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}, \quad \varphi' : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}'.$$

On note encore x et x' les morphismes canoniques $\mathrm{B} \to \widehat{\kappa}(x)$, $\mathrm{B}' \to \widehat{\kappa}(x')$. Puisque les images de x et x' coïncident, par définition il existe une extension analytique K de k et des homomorphismes isométriques de k-algèbres de Banach

$$\varepsilon : \widehat{\kappa}(x) \longrightarrow \mathrm{K}, \quad \varepsilon' : \widehat{\kappa}(x') \longrightarrow \mathrm{K}$$

tels que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B} \arrow[r, "x"] & \widehat{\kappa}(x) \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ \mathrm{A} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & & \mathrm{K} \\ & \mathrm{B}' \arrow[r, "x'"] & \widehat{\kappa}(x') \arrow[ur, "\varepsilon'"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Les homomorphismes

$$\varepsilon \circ x : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{K}, \quad \varepsilon \circ x' : \mathrm{B}' \longrightarrow \mathrm{K}$$

définissent, respectivement, des points x_{K}, x'_{K} de X_{K} satisfaisant aux conditions dans l'enoncé. □

1.2.2. Cas des cônes affines. — Soit X un cone affine analytique sur k, *i.e.* le k-espace analytique déduit par analytification du spectre d'une k-algèbre A graduée à degrés positifs et de type fini. L'homomorphisme de k-algèbres

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A} \otimes k[t]$$

qui envoye un élément a de degré d en $a \otimes t^d$ définit un morphisme de k-espaces analytiques

$$h : \mathbf{A}^1 \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

appelé *homothétie* ou *multiplication par les scalaires.*

Définition 1.7. Soit X un cône affine analytique sur k. Une application $u : |\mathrm{X}| \to \mathbf{R}_+$ est dite 1-*homogène* si le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} {|\mathbf{A}^1 \times \mathrm{X}|} \arrow[r] \arrow[d, "|h|"'] & {|\mathbf{A}^1| \times |\mathrm{X}|} \arrow[r, "u \times |\cdot|"] & \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \arrow[d, "\mu"] \\ {|\mathrm{X}|} \arrow[rr, "u"] & & \mathbf{R}_+ \end{tikzcd}$$

est commutatif (μ désigne la multiplication de nombres réels positifs).

Proposition 1.8. *Soient* A, B *des k-algèbres graduées à degrés positifs et de type fini, et* $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *un homomorphisme homogène de degré* $\mathrm{D} > 0$. *Soient* X *et* Y *l'analytification des spectres respectivement de* A *et* B, *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme de k-espaces analytiques induit par* φ.

Soit $u : \mathrm{X} \to \mathbf{R}_+$ *une application semi-continue supérieurement,* 1-*homogène et propre au sens topologique. Si* $\mathrm{X}_f^{\min}(u)$ *est fermé, alors la restriction* $f : \mathrm{X}_f^{\min}(u) \to \mathrm{Y}$ *de* f *à* $\mathrm{X}_f^{\min}(u)$ *est propre au sens topologique.*

Remarque 1.9. Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs. La k-algèbre $k[t_1, \ldots, t_n]_{\boldsymbol{d}}$ des polynômes en n variables de poids $\boldsymbol{d}$ est la k-algèbre $k[t_1, \ldots, t_n]$ munie de l'unique graduation $\deg_{\boldsymbol{d}}$ telle que pour tout $i = 1, \ldots, n$ on ait

$$\deg_{\boldsymbol{d}}(t_i) = d_i.$$

On désigne par $\mathbf{A}^n_{\boldsymbol{d}}$ l'analytification du spectre de cette algèbre graduée.

Soit A une k-algèbre graduée de type fini quelconque et soient a_i sont des générateurs homogènes de A. Si $\deg a_i = d_i$, l'homomorphisme surjectif de k-algèbres

$$\begin{aligned} k[t_1,\ldots,t_n]_{\boldsymbol{d}} &\longrightarrow \mathrm{A} \\ t_i &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

est homogène de degré 1.

Démonstration. Quitte à prendre des générateurs homogènes de la k-algèbre de type fini B on peut supposer $\mathrm{Y} = \mathbf{A}^n_{\boldsymbol{d}}$.

On suppose par l'absurde que la restriction de f à $\mathrm{X}^{\min}_f(u)$ ne soit pas propre au sens topologique. Puisque u est propre au sens topologique il existe suite de points minimaux, $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, tels que leurs images $f(x_i)$ soient contenues dans un compact, et $u(x_i)$ tend vers $+\infty$ lorsque i tend vers infini.

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe une extension analytique K_i telle que le corps résiduel complété $\widehat{\kappa}(x_i)$ de x_i se plonge de manière isométrique dans K_i et telle que $u(x_i)$ appartient au groupe des valeurs $|\mathrm{K}_i^\times|$ de K_i. Soit λ_i un élément de K_i tel que $|\lambda_i| = u(x_i)$ et soit $\widetilde{x}_i$ l'image dans X du K-point

$$\frac{x_i}{\lambda_i}$$

à travers l'application canonique $\mathrm{X}(\mathrm{K}_i) \to \mathrm{X}$.

Par homogénéité de u, les points $\widetilde{x}_i$ sont encore minimaux et $u(\widetilde{x}_i) = 1$. Les points $\widetilde{x}_i$ sont contenus dans la partie compacte $\{x : u(x) = 1\}$ (u est propre au sens topologique). Par compacité séquentielle, on peut supposer que la nouvelle suite $\widetilde{x}_i$ converge vers un point $\widetilde{x}$.

Par construction $u(\widetilde{x}) = 1$ et $\widetilde{x}$ est minimal ($\mathrm{X}^{\min}_f(u)$ est fermé).

Le morphisme f est donnée par des polynômes $f_1,\ldots,f_r$: puisque φ est homogène de degré D, le polynôme f_α est homogène de degré $\mathrm{D}d_\alpha$. Pour tout $i \in \mathbf{N}$ et pour tout $\alpha = 1,\ldots,r$, on a

$$|f_\alpha(\widetilde{x}_i)| = |f_\alpha(x_i/\lambda_i)| = \frac{|f_\alpha(x_i)|}{u(x_i)^{\mathrm{D}d_\alpha}}.$$

Par hypothèse, les points $f(x_i)$ appartiennent à une partie compacte de Y : les nombres réels $|f_\alpha(x_i)|$ sont donc tous majorés par une constante. Comme les $u(x_i)$ tendent vers infini lorsque i tend vers infini, on a

$$f(\widetilde{x}) = \lim_{i\to\infty} f(\widetilde{x}_i) = 0.$$

Cette égalité est absurde : d'un côté on a $u(\widetilde{x}) = 1$ par construction, d'autre côté l'égalité précédente entraîne $u(\widetilde{x}) = 0$ car $\widetilde{x}$ est minimal. □

Corollaire 1.10. *Soient* A, B *des k-algèbres graduées à degrés positifs et de type fini, et* $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *un homomorphisme homogène de degré* $\mathrm{D} > 0$*. Soient* X *et* Y *l'analytification des spectres respectivement de* A *et* B*, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme de k-espaces analytiques induit par* φ*.*

Soit $u : |\mathrm{X}| \to \mathbf{R}_+$ une application semi-continue supérieurement (resp. continue), 1-homogène et propre au sens topologique. Si le morphisme f est surjectif, l'application $f_\downarrow u$ est semi-continue supérieurement (resp. continue) si et seulement si $\mathrm{X}^{\min}_f(u)$ est fermé dans X*.*

Démonstration. Pour brièveté on désigne par $\mathrm{X}^{\min}$ les points minimaux. D'après la Proposition 1.4, si $f_\downarrow u$ est semi-continue supérieurement, alors $\mathrm{X}^{\min}$ est fermé. On suppose donc que $\mathrm{X}^{\min}$ soit fermé dans X. Puisque f est surjective et l'application u est propre, la restriction

$$f : \mathrm{X}^{\min} \longrightarrow \mathrm{Y}$$

de f à $X^{\min}$ est surjective. En outre, par définition de point minimal sur la fibre, le diagramme d'espaces topologiques suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "f_{\downarrow} u"] \\ X^{\min} \arrow[u] \arrow[r, "u"] & \mathbf{R}_+ \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'espace topologique $X^{\min}$ est localement compact car il est sous-espace topologique fermé d'un espace topologique localement compact. D'après la Proposition 1.8 la restriction de f à $X^{\min}$ est propre au sens topologique et donc une application fermée. L'application $f_{\downarrow} u$ est alors semi-continue supérieurement (resp. continue) si et seulement si la restriction de u à $X^{\min}$ l'est. □

1.3 Métrique des minima le long les fibres

1.3.1. Définition et propriétés générales. — Soient k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$, X et Y des k-espaces analytiques et $f : X \to Y$ un morphisme *surjectif* de k-espaces analytiques. Soient F un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_Y$-modules et $f[F]$ la deuxième projection

$$f[F] : \mathbf{V}(f^*F) = X \times_Y \mathbf{V}(F) \longrightarrow \mathbf{V}(F).$$

Le diagramme de k-espaces analytiques

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}(f^*F) \arrow[r, "f{[F]}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{V}(F) \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien et, le morphisme $f : X \to Y$ étant surjectif, le morphisme $f[F]$ l'est aussi.

Définition 1.11. Soit u une norme géométrique sur le faisceau cohérent f^*F. Si $f[F]_{\downarrow} u$ est une norme géométrique sur le faisceau cohérent F, on l'appelle la *métrique des minima le long les fibres de f*.

On suppose que la norme géométrique u soit continue et on considère la métrique sur les sections de f^*F induite par u : elle est la donnée, pour tout point $x \in X$, de la norme sur le $\widehat{\kappa}(x)$-espace vectoriel $x^* f^*F$ suivante :

$$s \in x^* f^* F \mapsto \|s\|_{f^*F}(x) := \sup_{0 \neq t \in \mathbf{V}(x^* f^* F)} \frac{|s(t)|}{u(t)}.$$

On suppose que l'application $f[F]_{\downarrow} u$ soit une norme géométrique sur F. Pour tout point $y \in Y$ et toute section $s \in y^*F$, on pose :

$$\|s\|_F(y) := \sup_{0 \neq t \in \mathbf{V}(y^*F)} \frac{|s(t)|}{f[F]_{\downarrow} u(t)}.$$

Proposition 1.12. *Soient* X *et* Y *des k-espaces analytiques et $f : X \to Y$ un morphisme surjectif de k-espaces analytiques. Soient* F *un faisceau cohérent de $\mathscr{O}_Y$-modules. Pour tout point $y \in Y$ et toute section $s \in y^*F$, on a :*

$$\|s\|_F(y) = \sup_{f(x)=y} \|f^* s\|_{f^*F}(x).$$

Proposition 1.13 (Compatibilité aux puissances tensorielles)**.** *Soient* X *et* Y *des k-espaces analytiques et $f : X \to Y$ un morphisme surjectif de k-espaces analytiques. Soit* L *un faisceau inversible sur* Y *et* $f[L] : \mathbf{V}(f^*L) \to \mathbf{V}(L)$ *le morphisme de changement de base.*

Soit u_L une norme géométrique sur le faisceau inversible f^*L. On suppose que la fonction $f[L]_\downarrow u$ soit une norme géométrique sur L.

Pour tout nombre entier $d \geq 1$, on désigne par $u_{L^{\otimes d}}$ la norme géométrique sur $f^*L^{\otimes d}$ induite par la norme géométrique u_L et par $(f[L]_\downarrow u_L)^{\otimes d}$ la norme géométrique induite par $f[L]_\downarrow u_L$ sur $L^{\otimes d}$. Alors,

$$f[L^{\otimes d}]_\downarrow(u_{L^{\otimes d}}) = (f[L]_\downarrow u)^{\otimes d}.$$

1.3.2. Cas des morphismes rationnels. — Soient X, Y des k-schémas projectifs et L, M des faisceaux inversibles amples respectivement sur X, Y. On considère les k-algèbres graduées de type fini

$$A := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d}),$$
$$B := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(Y, M^{\otimes d}).$$

Les k-schémas X et Y s'identifient canoniquement aux spectres homogènes des k-algèbres graduées A et B. Si le faisceau inversible L (resp. M) est de plus engendré par ses sections globales, il s'identifie au faisceau inversible $\mathscr{O}_X(1)$ (resp. $\mathscr{O}_Y(1)$) associé au A-module gradué A(1) (resp. au B-module gradué B(1)).

Soit $\varphi : B \to A$ un homomorphisme de k-algèbres homogène de degré $D > 0$, c'est-à-dire, tel que pour tout nombre entier $d \geq 0$ on ait $\varphi(B_d) \subset A_{dD}$. L'homomorphisme φ induit un morphisme de k-schémas $f : U \to Y$, où U est l'ouvert complémentaire du sous-schéma fermé de X définit par l'idéal homogène $\varphi(B_+) \cdot A$.

Le morphisme f ainsi défini est affine : en effet, pour tout élément homogène $b \in B$, son image $\varphi(b) \in A$ est un élément homogène et l'image réciproque par f de l'ouvert affine $D_+(b) = \operatorname{Spec} B_{(b)}$ est l'ouvert affine $D_+(\varphi(b)) = \operatorname{Spec} A_{(\varphi(b))}$,

$$f^{-1}D_+(b) = D_+(\varphi(b))$$

(ici $B_{(b)}$ et $A_{(\varphi(b))}$ désignent la composante de degré 0 respectivement des k-algèbres graduées B_b et $A_{\varphi(b)}$).

Pour tout nombre entier $d \geq 1$ assez grand (plus précisément tel que $M^{\otimes d}$ et $L^{\otimes dD}$ soient engendrés par leurs sections globales) l'homomorphisme de k-espaces vectoriels induit par φ,

$$\Gamma(Y, M^{\otimes d}) \longrightarrow \Gamma(X, L^{\otimes dD})$$

induit un isomorphisme de faisceaux inversibles sur U, $\varphi_{dD} : f^*M^{\otimes d} \to L|_U^{\otimes dD}$. Cet isomorphisme est compatible aux puissances tensorielles. En particulier, si $d \geq 1$ est un nombre entier assez grand, l'isomorphisme de faisceaux inversibles sur U,

$$\varphi_D = \varphi_{(d+1)D} \otimes \varphi_{dD}^\vee : f^*M \longrightarrow L|_U^{\otimes D}$$

ne dépend pas du nombre entier d choisi et on note

$$f[M] : \mathbf{V}(L|_U^{\otimes D}) \longrightarrow \mathbf{V}(M)$$

le morphisme de k-schémas qui s'en déduit.

On suppose que le morphisme f soit *surjectif* : le morphisme $f[M]$ est alors également surjectif. Dans ce cas on dit que f est une *projection* (nom qui évoque les exemples des projections linéaires et de la projection sur le quotient), qu'un point dans U est *f-projetable* et qu'un point dans X – U est *non f-projetable.*

Proposition 1.14. *Soient* X, Y *des k-schémas projectifs et* L, M *des faisceaux inversibles amples respectivement sur* X, Y. *Soit*

$$\varphi : \mathrm{B} := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathrm{Y}, \mathrm{M}^{\otimes d}) \longrightarrow \mathrm{A} := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d})$$

un homomorphisme de k-algèbres homogène de degré $\mathrm{D} > 0$. *Soient* $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ *l'ouvert complémentaire du sous-schéma fermé décrit par l'idéal homogène* $\varphi(\mathrm{B}_+)\cdot \mathrm{A}$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme de k-schémas induit.*

On suppose que le morphisme f soit surjectif. Si u_{L} est une norme géométrique continue sur L, *l'application* $f[\mathrm{M}]_{\downarrow} u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$ *est une norme géométrique sur le faisceau inversible* M.

Démonstration. Puisque la construction de la métrique des minima est compatible aux puissances tensorielles (Proposition 1.13), quitte à prendre une puissance suffisamment grande de L et M, on peut supposer que L et M soient très amples. L'homomorphisme φ induit un homomorphisme homogène de degré 1 de k-algèbres graduées

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{D}} := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}d}).$$

Les morphismes canoniques

$$\theta : \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} := \operatorname{Spec} \mathrm{A}_{\mathrm{D}}, \qquad \omega : \mathbf{V}(\mathrm{M}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Y}} := \operatorname{Spec} \mathrm{B}$$

sont alors propres et ils induisent un isomorphisme en dehors de la section nulle. La métrique $u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$ provient par composition par θ d'une fonction $\widehat{u} : |\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}}| \to \mathbf{R}_+$, *i.e.*, $u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}} = \theta^* \widehat{u}$. La fonction $\widehat{u}$ est continue, 1-homogène, propre au sens topologique et non nulle en dehors de la section nulle du cône affine analytique $\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}}$.

L'homomorphisme φ induit un homomorphisme homogène de degré 1 de k-algèbres graduées

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{D}} := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}d}).$$

Si on désigne par $\widehat{f} : \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} \to \widehat{\mathrm{Y}}$ le morphisme de k-schémas associé, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} - \widehat{f}^{-1}(\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{Y}}}) \arrow[r, hook] & \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} \\
\mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{U}}^{\otimes \mathrm{D}}) - e(\mathrm{U}) \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, hook] & \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}) \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

est cartésien (où $\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{Y}}} \subset \widehat{\mathrm{Y}}$ désigne la section nulle du cône affine $\widehat{\mathrm{Y}}$ et $e : \mathrm{X} \to \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})$ la section nulle du faisceau inversible $\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}$). Il en découle que i $t \in \mathbf{V}(\mathrm{M})^{\mathrm{an}}$ est un point en dehors de la section nulle, la fibre $\widehat{f}^{-1}(t)$ est contenue dans $\mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{U}}^{\otimes \mathrm{D}})^{\mathrm{an}} - e(\mathrm{U})^{\mathrm{an}}$. En particulier, on a :

$$f[\mathrm{M}]_{\downarrow} \theta^* \widehat{u}(t) = \omega^* \widehat{f}_{\downarrow} \widehat{u}(t).$$

On est ramené à prouver le fait suivant : si $y \in \widehat{\mathrm{Y}}^{\mathrm{an}}$ est un point en dehors de la section nulle, alors $\widehat{f}_{\downarrow} \widehat{u}(y) \neq 0$. La fibre de $\widehat{f}$ en y est contenue dans $\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}} - \mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}}^{\mathrm{an}}$:

$$\widehat{f}^{-1}(y) \subset \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}} - \mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}}^{\mathrm{an}}.$$

Puisque la fonction $\hat{u}$ est propre au sens topologique, elle atteint son minimum ; comme $\hat{u}$ est non nulle en dehors la section nulle, d'après l'inclusion précédente on a

$$\widehat{f_\downarrow}\,\hat{u}(y) = \inf_{f^{-1}(y)} \hat{u} > 0,$$

ce qui achève la démonstration. □

1.4 Mesure de non-projetabilité

1.4.1. Définition. — On revient aux notations du paragraphe 1.3.2.

Définition 1.15. Soit u_{L} une norme géométrique continue sur L^{an}. Pour tout $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$, on fait la définition suivante :

– si x est un point f-projetable et $s \in \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})^{\mathrm{an}}$ est un point non nul au-dessus de x, on note $t := f[\mathrm{M}](s)$ et on pose :

$$\mu(x) := \frac{1}{\mathrm{D}} \log \frac{f[\mathrm{M}]_\downarrow u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}(t)}{u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}(s)}.$$

La définition ne dépend pas du représentant non nul s choisi.

– si par contre x est non f-projetable, on pose $\mu(x) = -\infty$.

L'application $\mu : \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \to [-\infty, 0]$ ainsi définie est appelée *mesure d'instabilité.*

Proposition 1.16. *Soient* X, Y *des k-schémas projectifs et* L, M *des faisceaux inversibles amples respectivement sur* X *et* Y. *Soit*

$$\varphi : \mathrm{B} := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathrm{Y}, \mathrm{M}^{\otimes d}) \longrightarrow \mathrm{A} := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d})$$

un homomorphisme de k-algèbres homogène de degré $\mathrm{D} > 0$. *Soient* $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ *l'ouvert complémentaire du sous-schéma fermé décrit par l'idéal homogène* $\varphi(\mathrm{B}_+) \cdot \mathrm{A}$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme de k-schémas induit. On suppose que le morphisme f soit surjectif.*

Soit u_{L} *une norme géométrique continue sur* L^{an}. *Soient* $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ *et* $t \in \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})^{\mathrm{an}}$ *un point non nul au dessus de x. Alors :*

i. $\mu(x) = 0$ *si et seulement si le point t est $u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$-minimal sur la fibre de* $f[\mathrm{M}]$ *;*

ii. $\mu(x) = -\infty$ *si et seulement si x est un point non f-projetable ;*

En outre, si la norme géométrique $f[\mathrm{M}]_\downarrow u^{\otimes \mathrm{D}}$ *des minima le long le fibres de f est continue, la mesure d'instabilité* μ *l'est aussi.*

Démonstration. Pour (i), la mesure d'instabilité μ s'annule en x si et seulement si

$$u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}(\hat{x}) = f[\mathrm{M}]^* f[\mathrm{M}]_\downarrow u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}(\hat{x}),$$

ce qui par définition implique que $\hat{x}$ est $u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$-minimal sur la fibre de $f[\mathrm{M}]$.

Pour (ii), si x appartient à Z^{an} on a par définition $\mu(x) = -\infty$. Il reste à vérifier que si x n'appartient pas à Z^{an} alors $\mu(x)$ appartient à $\mathbf{R}$. Puisque la norme géométrique u_{L} est continue, d'après la Proposition 1.14 la fonction $f[\mathrm{M}]_\downarrow u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$ est une norme géométrique sur M. En particulier, si $\hat{x} \in \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})$ est un représentant non nul de x on a

$$f[\mathrm{M}]^* f[\mathrm{M}]_\downarrow u(\hat{x}) > 0$$

et donc $\mu(x) < -\infty$.

Pour la continuité, on procède d'abord comme dans la démonstration de la Proposition 1.14. Puisque la construction de la métrique des minima est compatible aux puissances tensorielles (Proposition 1.13), quitte à prendre une puissance suffisamment grande de L et M, on peut supposer que L et M soient très amples. L'homomorphisme φ induit un homomorphisme homogène de degré 1 de k-algèbres graduées

$$\varphi_D : B \longrightarrow A_D := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes Dd}).$$

Les morphismes canoniques

$$\theta : \mathbf{V}(L^{\otimes D}) \longrightarrow \widehat{X}_D := \operatorname{Spec} A_D, \qquad \omega : \mathbf{V}(M) \longrightarrow \widehat{Y} := \operatorname{Spec} B$$

sont alors propres et ils induisent un isomorphisme en dehors de la section nulle. La métrique $u_{L^{\otimes D}}$ provient par composition par θ d'une fonction $\widehat{u} : |\widehat{X}_D^{an}| \to \mathbf{R}_+$, *i.e.*, $u_{L^{\otimes D}} = \theta^* \widehat{u}$. La fonction $\widehat{u}$ est continue, 1-homogène, propre au sens topologique et non nulle en dehors de la section nulle du cône affine analytique $\widehat{X}_D^{an}$.

L'homomorphisme φ induit un homomorphisme homogène de degré 1 de k-algèbres graduées

$$\varphi_D : B \longrightarrow A_D := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes Dd}).$$

Si on désigne par $\widehat{f} : \widehat{X}_D \to \widehat{Y}$ le morphisme de k-schémas associé, les diagrammes (⋆) et (⋆⋆) ci-dessus

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X}_D - \widehat{f}^{-1}(\mathbf{O}_{\widehat{Y}}) \arrow[r, hook] & \widehat{X}_D & \widehat{f}^{-1}(\mathbf{O}_{\widehat{Y}}) - \mathbf{O}_{\widehat{X}_D} \arrow[l, hook'] \\
\mathbf{V}(L|_U^{\otimes D}) - e(U) \arrow[r, hook] \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, phantom, "(\star)"] & \mathbf{V}(L^{\otimes D}) \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, phantom, "(\star\star)"] & \mathbf{V}(L|_Z^{\otimes D}) - e(Z) \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

sont cartésiens (où $\mathbf{O}_{\widehat{X}_D} \subset \widehat{X}_D$, $\mathbf{O}_{\widehat{Y}} \subset \widehat{Y}$ désigne la section nulle des cônes affines $\widehat{X}_D$ et $\widehat{Y}$, et $e : X \to \mathbf{V}(L^{\otimes D})$ la section nulle du faisceau inversible $L^{\otimes D}$). On en déduit

$$f[M]_\downarrow u_{L^{\otimes D}} = \omega^* \widehat{f}_\downarrow \widehat{u}$$

et donc la métrique des minima sur les fibres de f, $f[M]_\downarrow u_{L^{\otimes D}}$, continue si et seulement si la fonction $\widehat{f}_\downarrow \widehat{u}$ est continue sur $\widehat{Y}^{an}$. Pour tout point $x \in X^{an}$ et tout représentat non nul $\widehat{x} \in \widehat{X}_D^{an}$ de x on a alors

$$\mu(x) = \frac{1}{D} \log \frac{\widehat{f}^* \widehat{f}_\downarrow \widehat{u}(\widehat{x})}{\widehat{u}(\widehat{x})}.$$

Si la fonction $\widehat{f}_\downarrow \widehat{u}$ est continue, alors la mesure d'instabilité μ l'est aussi, ce qui achève la preuve. □

1.5 Exemple : les projections linéaires

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. La k-algèbre des puissances symétriques $A = \operatorname{Sym}_k E$ est une k-algèbre graduée et de type fini. Son spectre homogène s'identifie à l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ à travers un isomorphisme canonique de k-algèbres graduées

$$\operatorname{Sym}_k E \longrightarrow \bigoplus_{d\geq 1} \Gamma(\mathbf{P}(E), \mathcal{O}_E(d)).$$

Dans la suite on sous-entendra cet isomorphisme. Soit F un sous-k-espace vectoriel de E. L'inclusion $F \subset E$ induit un homomorphisme injectif de k-algèbres graduées

$$\varphi : B := \operatorname{Sym}_k F \longrightarrow A := \operatorname{Sym}_k E.$$

L'homomorphisme surjectif $E \to E/F$ induit une immersion fermée $\mathbf{P}(E/F) \to \mathbf{P}(E)$ qu'identifie l'espace projectif $\mathbf{P}(E/F)$ avec le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}(E)$ définit par l'idéal homogène $I := \varphi(B_+)\cdot A$. L'homomorphisme φ induit donc un morphisme surjectif de k-schémas

$$f : U := \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(E/F) \longrightarrow \mathbf{P}(F)$$

dit *projection de centre* E/F. L'homomorphisme de k-algèbre graduée φ induit un isomorphisme de faisceaux inversibles sur U,

$$\varphi_1 : f^*\mathscr{O}_F(1) \longrightarrow \mathscr{O}_E(1)|_U$$

qui, à son tour, définit un morphisme surjectif de k-schémas $f_1 := f[\mathscr{O}_F(1)] : \mathbf{V}(\mathscr{O}_E(1)|_U) \to \mathbf{V}(\mathscr{O}_F(1))$.

On suppose que le k-espace vectoriel E soit muni d'une norme géométrique continue p. Le faisceau inversible $\mathscr{O}_E(1)$ est alors muni de la norme géométrique continue définie par l'application composée

$$u_p : \ \mathbf{V}(\mathscr{O}_E(1))^{an} \xrightarrow{\theta_E} \mathbf{V}(E)^{an} \xrightarrow{p} \mathbf{R}_+ \ .$$

L'homomorphisme φ induit un morphisme surjectif de k-schémas $\widehat{f} : \mathbf{V}(E) \to \mathbf{V}(F)$. Le sous-$k$-espace vectoriel F est alors muni de la norme géométrique induite par p , *i.e.*, l'application des minima sur le fibres $p|_F := \widehat{f}_{\downarrow} p$. Puisque le diagramme de k-schémas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathscr{O}_E(1)|_U) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & \mathbf{V}(\mathscr{O}_F(1)) \arrow[d] \\
\mathbf{V}(E) \arrow[r, "\widehat{f}"] & \mathbf{V}(F)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, il suit que la norme géométrique des minima sur les fibre de f, $f_{1\downarrow} u_p$, coïncide avec la norme géométrique $u_{p|_F}$ sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_F(1)$ associée à la norme géométrique $p|_F$ sur F, *i.e.*, l'application composée

$$u_{p|_F} : \ \mathbf{V}(\mathscr{O}_F(1))^{an} \xrightarrow{\theta_F} \mathbf{V}(F)^{an} \xrightarrow{p|_F} \mathbf{R}_+ \ .$$

En symbols, on a l'égalité

$$f_{1\downarrow} u_p = \theta_F^* p|_F := \theta_F^* \widehat{f}_{\downarrow} p.$$

Si on note μ la mesure d'instabilité sur $\mathbf{P}(E)^{an}$ (par rapport au morphisme f, au faisceau inversible $\mathscr{O}_E(1)$ et à la norme géométrique u_p), pour tout point non nul $x \in \mathbf{V}(E)^{an}$, on a alors

$$\mu([x]) = \log \widehat{f}^* p|_F(x) - \log p(x),$$

où $[x] \in \mathbf{P}(E)^{an}$ désigne le point défini par x.

Soient $s, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathbf{V}(E)^{an} \times \mathbf{V}(E)^{an} \to \mathbf{V}(E)^{an}$ respectivement le morphisme de k-espaces analytiques induit par l'opération de soustraction de E et les deux projections. Si pour toutes parties $X_1, X_2 \subset \mathbf{V}(E)$ on pose

$$d_p(X_1, X_2) := \inf\{p(s(x)) : \mathrm{pr}_i(x) \in X_i \text{ pour } i = 1, 2\}$$

alors en vertu de la Proposition I.8.10 pour tout $y \in \mathbf{V}(F)^{an}$ on a

$$p|_F(y) = d_p\left(\widehat{f}^{-1}(y), \mathbf{V}(E/F)^{an}\right).$$

En particulier, pour tout point non nul $x \in \mathbf{V}(E)^{an}$, on a

$$\mu([x]) = \log \frac{d_p\left(\widehat{f}^{-1}\left(\widehat{f}(x)\right), \mathbf{V}(E/F)^{an}\right)}{p(x)}.$$

En résumant, on a trouvé que :

– la norme géométrique des minima sur les fibres de f est la norme géométrique sur $\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)$ induite par la restriction de la norme géométrique p au sous-espace F :

$$f_{1\downarrow} u_p = \theta_{\mathrm{F}}^* p|_{\mathrm{F}} := \theta_{\mathrm{F}}^* \widehat{f}_{\downarrow} p;$$

– la mesure d'instabilité en un point $x \in \mathbf{P}(\mathrm{E}) - \mathbf{P}(\mathrm{E}/\mathrm{F})$ représente le logarithme de la plus petite distance (mesuré à travers la norme géométrique p) entre la fibre en le point $f(x)$ et le sous-espace $\mathbf{P}(\mathrm{E}/\mathrm{F})$:

$$\mu([x]) = \log \frac{d_p\left(\widehat{f}^{-1}\left(\widehat{f}(\widehat{x})\right), \mathbf{V}(\mathrm{E}/\mathrm{F})^{\mathrm{an}}\right)}{p(\widehat{x})},$$

(où $\widehat{x} \in \mathbf{V}(\mathrm{E})^{\mathrm{an}}$ est un représentant non nul de x).

2 Minima sur les orbites

2.1 Définitions

Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$. Soit X un k-espace analytique muni de l'action d'un k-espace analytique en groupes G.

Définition 2.1. Soit $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty]$ une application. L'application

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{G}} : \mathrm{X} &\longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ x &\longmapsto \inf_{\mathrm{G}\cdot x} u \end{aligned}$$

est appelée l'application des *minima de u sur les orbites de* G.

Un point $x \in \mathrm{X}$ est *u-minimal sur l'orbite* si $u_{\mathrm{G}}(x) = u(x)$, *i.e.*, pour tout $x' \in \mathrm{G}\cdot x$, on a

$$u(x) \leq u(x').$$

L'ensemble des points minimaux sur les orbites de G est noté $\mathrm{X}_{\mathrm{G}}^{\min}(u)$.

Proposition 2.2. *Soit* X *un k-espace analytique muni de l'action d'un k-espace analytique en groupes* G. *Si $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est une application semi-continue supérieurement, pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a :*

$$u_{\mathrm{G}}(x) = \underline{\inf}_{\mathrm{G}\cdot x} u.$$

Proposition 2.3 (Semi-continuité supérieure)**.** *Soit* X *un k-espace analytique muni de l'action d'un k-espace analytique en groupes* G. *On suppose que le k-espace analytique en groupes* G *soit lisse. Si u : $\mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ est une application semi-continue supérieurement, alors u_{G} l'est aussi.*

Démonstration. L'action $\sigma : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ s'écrit comme la composition de l'automorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{G} \times \mathrm{X} &\longrightarrow \mathrm{G} \times \mathrm{X} \\ (g, x) &\longmapsto (g, \sigma(g, x)) \end{aligned}$$

et la deuxième projection $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}} : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. Puisque pr_{X} est un morphisme lisse par hypothèse, le morphisme σ est lisse. En particulier, l'application σ est ouverte à niveau topologique. Puisque $u_{\mathrm{G}} = \sigma_{\downarrow} u$ on conclut grâce à la Proposition 1.3. $\square$

Corollaire 2.4. *Soit* X *un* k*-espace analytique muni de l'action d'un* k*-espace analytique en groupes lisse* G*. Soit* $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$ *une application continue. L'ensemble des points minimaux sur les orbites* $\mathrm{X}_{\mathrm{G}}^{\min}(u)$ *est fermé.*

Démonstration. Un point $x \in \mathrm{X}$ est u-minimal sur l'orbite si et seulement si $u(x) = u_{\mathrm{G}}(x)$. Pour autant, on a :

$$\mathrm{X} - \mathrm{X}_{\mathrm{G}}^{\min}(u) = \{x \in \mathrm{X} : u_{\mathrm{G}}(x) - u(x) < 0\}.$$

D'après la Proposition précédente 2.3, l'application u_{G} est supérieurement semi-continue et donc l'application $u_{\mathrm{G}} - u$ l'est aussi. La partie $\mathrm{X} - \mathrm{X}_{\mathrm{G}}^{\min}(u)$ est alors ouverte. □

Proposition 2.5. *Soit* X *un* k*-espace analytique muni de l'action d'un* k*-espace analytique en groupes* G*. Soient* Y *un* k*-espace analytique et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* G*-invariant de* k*-espaces analytiques. Pour toute application* $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty]$*, on a :*

$$f^* f_{\downarrow} u \leq u_{\mathrm{G}}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{X}$ un point. Puisque f est G-invariant, l'orbite de x est contenue dans la fibre de $f(x)$,

$$f(f^{-1}(x)) \subset \mathrm{G} \cdot x.$$

En particulier on a

$$f^* f_{\downarrow} u(x) = \inf_{f(f^{-1}(x))} u \leq \inf_{\mathrm{G} \cdot x} u = u_{\mathrm{G}}(x),$$

ce qui termine la preuve. □

2.1.1. Extension des scalaires. — Soient K une extension analytique de k, X_{K} le K-espace analytique déduit de X par extension des scalaires et $\varpi_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}$ le morphisme d'extension des scalaires. Le K-espace analytique en groupes G_{K} déduit de G par extension des scalaires agit naturellement sur X_{K}.

Proposition 2.6 (Compatibilité aux extensions des scalaires)**.** *Pour toute application* $u : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty[$*, on a :*

$$\varpi_{\mathrm{K}}^*(u_{\mathrm{G}}) = (\varpi_{\mathrm{K}}^* u)_{\mathrm{G}_{\mathrm{K}}}.$$

Démonstration. Si $\sigma : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ désigne le morphisme définissant l'action de G sur X, on a $u_{\mathrm{G}} = \sigma_{\downarrow} u$. Il s'agit alors d'un cas particulier de la Proposition 1.5. □

2.2 Propriétés ensemblistes de l'analytification du quotient algébrique

Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$. Soit $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ un schéma affine de type fini muni d'une action d'un k-groupe réductif G. La sous-k-algèbre des invariants A^{G} de A est de type fini. L'inclusion $\mathrm{A}^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{A}$ induit un morphisme de k-schémas

$$\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y} := \operatorname{Spec} \mathrm{A}^{\mathrm{G}}$$

dit *morphisme quotient* qui satisfait aux propriétés suivantes :

i. le morphisme $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est G-invariant et surjectif;
ii. pour tous points fermés $x, x' \in \mathrm{X}$, on a :

$$\pi(x) = \pi(x') \text{ si et seulement si } \overline{\mathrm{G} \cdot x} \cap \overline{\mathrm{G} \cdot x'} \neq \emptyset;$$

iii. si $\mathrm{F} \subset \mathrm{X}$ est une partie fermée G-stable, l'image $\pi(\mathrm{F})$ est fermée dans Y ;

iv. l'homomorphisme de faisceaux de k-algèbres $\pi^\sharp : \mathscr{O}_Y \to \pi_*\mathscr{O}_X$ induit un isomorphisme de faisceaux de k-algèbres
$$\pi^\sharp : \mathscr{O}_Y \longrightarrow \pi_*\mathscr{O}_X.$$

En particulier, pour tout point fermé $x \in X$ il existe une unique orbite fermée contenue dans l'adhérence de l'orbite de x. En effet, si y, y' sont deux points d'orbite fermée appartenant à l'adhérence de l'orbite de x, par la propriété (ii) que les images de y, y' par π coïncident avec $\pi(x)$,

$$\pi(y) = \pi(x) = \pi(y').$$

En appliquant à nouveau la propriété (ii), cela entraîne que les adhérences des orbites de y et y' se rencontrent,
$$\overline{G\cdot y} \cap \overline{G\cdot y} \neq \emptyset,$$

mais comme $G\cdot y$ et $G\cdot y'$ sont fermées, elles coïncident.

Proposition 2.7. *Soient* $X = \operatorname{Spec} A$ *un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif* G *et*
$$\pi : X \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} A^G$$

le morphisme quotient. Alors :

i. le morphisme $\pi : X^{an} \to Y^{an}$ *est* G^{an}*-invariant et surjectif ;*

ii. pour tous points $x, x' \in X^{an}$*, on a :*

$$\pi(x) = \pi(x') \text{ si et seulement si } \overline{G^{an}\cdot x} \cap \overline{G^{an}\cdot x'} \neq \emptyset;$$

iii. pour tout point $x \in X^{an}$ *il existe une unique orbite fermée contenue dans l'adhérence de l'orbite de x ;*

iv. pour tous points $x, x' \in X^{an}$, $\pi(x) = \pi(x')$ *si et seulement si l'unique orbite fermée* $G\cdot x_0$ *contenue dans l'adhérence de* $G\cdot x$ *et l'unique orbite fermée* $G\cdot x_0'$ *contenue dans* $G\cdot x'$ *coïncident,*

$$G\cdot x_0 = G\cdot x_0'.$$

Démonstration. Le premier point suit des propriétés générales du foncteur d'analytification. Pour (ii), soient $x, x' \in X^{an}$ des points. On suppose d'abord que les adhérences de leurs orbites se rencontrent. Puisque π est continue et G^{an}-invariante, pour tout point $x \in X^{an}$ on a

$$\overline{G^{an}\cdot x} \subset \pi^{-1}(\pi(x)),$$

d'où suit le résultat.

On suppose ensuite que les images $\pi(x), \pi(x')$ coïncident. D'après le Lemme 1.6 il existe une extension analytique K de k et des K-points x_K, x_K' du K-espace analytique X_K^{an} tels que :

– si $\varpi_X : X_K \to X$ désigne le morphisme d'extension des scalaires, on a :

$$\varpi_X(x_K) = x, \qquad \varpi_X(x_K') = x';$$

– si $\pi_K : X_K \to Y_K$ désigne le morphisme déduit de π par extension des scalaires, on a :

$$\pi(x_K) = \pi(x_K').$$

On ajoute K en indice pour désigner les objets obtenus par extension des scalaires à K (par exemple $G_K = G\times_k K$). La formation des invariants est compatible aux changements de base plats. En particulier le K-schéma Y_K est le bon quotient du K-schéma X_K par le K-schéma en groupes G_K. Soit $\theta : X_K^{an} \to X_K$ le morphisme canonique d'espaces localement annelés en K-algèbres induit par le foncteur d'analytification. Le point x_K (resp. x'_K) est l'image inverse d'un K-point du K-schéma X_K qu'on désigne encore par x_K (resp. x'_K). D'après la Proposition 6.5 on a

$$\theta^{-1}(G_K\cdot x_K) = G_K^{an}\cdot x_K, \qquad \theta^{-1}(G_K\cdot x'_K) = G_K^{an}\cdot x'_K.$$

Puisque les orbites $G_K\cdot x_K$, $G_K\cdot x'_K$ sont des parties constructibles du K-schéma X_K, on a :

$$\theta^{-1}(\overline{G_K\cdot x_K}) = \overline{G_K^{an}\cdot x_K}, \qquad \theta^{-1}(\overline{G_K^{an}\cdot x'_K}) = \overline{G_K\cdot x'_K}. \tag{2.2.1}$$

Par construction on a $\pi_K(x_K) = \pi_K(x'_K)$: d'après le Théorème I.3.17 les adhérences des orbites $G_K\cdot x_K$ et $G_K\cdot x'_K$ se rencontrent. L'égalité précédente (2.2.1) entraîne alors les adhérences des orbites $G_K^{an}\cdot x_K$ et $G_K^{an}\cdot x'_K$ se rencontrent aussi :

$$\overline{G_K^{an}\cdot x_K}\cap\overline{G_K^{an}\cdot x'_K}\neq\emptyset.$$

On peut conclure, en remarquant qu'on a

$$\varpi_K(\overline{G_K^{an}\cdot x_K}) = \overline{G^{an}\cdot x}, \qquad \varpi_K(\overline{G_K^{an}\cdot x_K^{an}}) = \overline{G^{an}\cdot x'}$$

car le morphisme d'extension des scalaires $\varpi_K : X_K \to X$ est une application continue, surjective et propre au sens topologique entre espaces localements compacts.

Pour (iii), soient $y, y' \in \overline{G^{an}\cdot x}$ des points d'orbite fermée. Puisque l'application π est G-invariante, on a $\pi(y) = \pi(y')$. D'après le point précédent (ii), on a

$$(G^{an}\cdot y)\cap(G^{an}\cdot y') = \overline{G^{an}\cdot y}\cap\overline{G^{an}\cdot y'}\neq\emptyset,$$

ce qui entraine $G^{an}\cdot y = G^{an}\cdot y'$.

Pour (iv), soit $G^{an}\cdot x_0$ (resp $G^{an}\cdot x'_0$) l'unique orbite fermée dans l'adhérence de $G^{an}\cdot x$ (resp. $G^{an}\cdot x'$). On suppose d'abord $\pi(x) = \pi(x')$. Puisque le morphisme π est G^{an}-invariant on a $\pi(x) = \pi(x_0)$ et $\pi(x') = \pi(x'_0)$. En particulier, on a $\pi(x_0) = \pi(x'_0)$. D'après (ii) on a

$$G^{an}\cdot x_0\cap G^{an}\cdot x'_0 = \overline{G^{an}\cdot x_0}\cap\overline{G^{an}\cdot x'_0}\neq\emptyset,$$

ce qui entraîne $G^{an}\cdot x_0 = G^{an}\cdot x'_0$. D'autre part, si $G^{an}\cdot x_0 = G^{an}\cdot x'_0$, comme le morphisme π est G^{an}-invariant, on a

$$\pi(x) = \pi(x_0) = \pi(x'_0) = \pi(x')$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 2.8. *Soient* $X = \operatorname{Spec} A$ *un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif* G. *Soit* $Z = \operatorname{Spec}(A/I) \subset X$ *un sous-schéma fermé* G*-stable. Soit*

$$\varepsilon : Z/G := \operatorname{Spec}(A/I)^G \longrightarrow X/\operatorname{Spec} A^G$$

le morphisme canonique de k-schémas induit par l'inclusion de Z *dans* X. *Le morphisme de k-espaces analytique qui s'en déduit,*

$$\varepsilon : (Z/G)^{an} \longrightarrow (X/G)^{an},$$

induit une application injective sur les espaces topologiques sous-jacents.

Démonstration. Soient $x, x' \in Z^{an}$. Puisque Z^{an} est une partie fermée G-stable les adhérences des orbites de x et x' sont contenues dans Z^{an}. En particulier elles se rencontrent dans Z^{an} si et seulement si elles se rencotrent dans X^{an}. Soient $\pi_X : X \to X/G$ et $\pi_Z : Z \to Z/G$ les projections sur les quotients respectives. D'après la Proposition précédente 2.7 cela revient à dire que $\pi_Z(x) = \pi_Z(x')$ si et seulement si $\pi_X(x) = \pi_X(x')$, ce qui achève la preuve. □

2.3 Comparaison des minima sur les orbites et sur les fibres

2.3.1. Enoncé du Théorème. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$. Le but de cette section est de prouver le Théorème suivant :

Théorème 2.9. *Soit* $X = \operatorname{Spec} A$ *un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif* G. *Soient* $Y = \operatorname{Spec} A^G$ *le quotient et* $\pi : X \to Y$ *le morphisme quotient.*

Soit $u : X^{an} \to [-\infty, +\infty[$ *une application plurisousharmonique et invariante par un sous-groupe compact maximal de* G^{an}*. Alors,*

$$\pi^*\pi_\downarrow u = u_G.$$

En particulier, les points u-minimaux sur les fibres de π et les points u-minimaux sur les orbites de G *coïncident,*

$$X_\pi^{\min}(u) = X_G^{\min}(u).$$

Puisque le morphisme π est G^{an}-invariant, d'après la Proposition 2.5 on a l'inégalité $\pi^*\pi_\downarrow u \leq u_G$. Il s'agit donc de démontrer l'inégalité $\pi^*\pi_\downarrow u \geq u_G$. Plus précisément, on va démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.10. *Soit* $X = \operatorname{Spec} A$ *un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif* G. *Soient* $Y = \operatorname{Spec} A^G$ *le quotient et* $\pi : X \to Y$ *le morphisme quotient.*

Soit $u : X^{an} \to [-\infty, +\infty[$ *une application plurisousharmonique et invariante par un sous-groupe compact maximal de* G^{an}*. Soit* $x \in X^{an}$*. Alors :*

i. il existe un point $y \in \overline{G^{an} \cdot x}$ *d'orbite fermée tel que*

$$u(y) \leq u(x);$$

ii. si $G^{an} \cdot x_0$ *est l'unique orbite fermée contenue dans* $\overline{G^{an} \cdot x}$*, on a*

$$u_G(x_0) = \pi^*\pi_\downarrow u(x).$$

Une manière de reformuler ce résultat est dire que le minimum sur la fibre de π en x est atteint sur l'unique orbite fermée contenue dans l'adhérence de $G^{an} \cdot x$.

Le Théorème 2.9 se déduit aisement du Théorème 2.10. On a en fait la chaine d'inégalités suivante :

$$u_G(x) := \inf_{G\cdot x} u = \inf_{\overline{G\cdot x}} u \leq \inf_{G\cdot x_0} u = u_G(x_0) = \pi^*\pi_\downarrow u(x),$$

où la première égalité est vraie par semi-continuité supérieure de u (Propostion 2.2).

Le reste de cette section est consacré à la preuve du Théorème 2.10.

2.3.2. Sous-groupes déstabilisants archimédiens. — Soit G un groupe réductif complexe et $\mathbf{U} \subset G^{an}$ un sous-groupe compact maximale. Il existe un $\mathbf{R}$-groupe réductif U tel que $U \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ soit isomorphe à G et

$$U(\mathbf{R}) = \mathbf{U}.$$

Soit T un tore de G et T^{an} le **C**-espace analytique déduit par analytification : T est défini sur **R** (c'est-à-dire qu'il provient d'un tore de U) si et seulement si $\mathbf{U} \cap T^{an}$ est le sous-groupe compact maximal de T^{an}.

Lemme 2.11 (version archimédienne)**.** *Soient* X *un schéma affine de type fini sur* **C** *muni d'une action d'un* **C**-*groupe réductif* G, $S \subset X$ *un sous-schéma fermé* G-*stable et* **U** *un sous-groupe compact maximal de* G^{an}. *Pour tout* $x \in X(\mathbf{C})$ *dont l'adhérence de l'orbite rencontre* S,

$$\overline{G \cdot x} \cap S \neq \emptyset,$$

il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$ *tel que*

i. la limite $\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$ *existe et appartient à* S *;*

ii. l'image de $\mathbf{U}(1)$ *par* λ *est contenue dans* **U**.

Remarque 2.12. Cet énoncé est implicitement contenu dans [KN79] : il est prouvé quand X est une représentation de G et le sous-schéma S est l'origine. L'énoncé ci-dessus peut être déduit de ce cas particulier en prenant un morphisme G-équivariant $f : X \to \mathbf{V}(E)$ vers une représentation de G tel que

$$f^{-1}(0) = S.$$

Démonstration. D'après [Kem78, Theorem 3.4] il existe un sous-groupe parabolique P de G satisfaisant à la propriété suivante : pour tout tore maximal T contenu dans P il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda_T : \mathbf{G}_m \to T$ tel que la limite

$$\lim_{t\to 0} \lambda_T(t) \cdot x$$

existe dans X et appartient à S. Soit $\overline{P}$ le sous-groupe parabolique conjugué à P pour la structure réelle induite par U. L'intersection $P \cap \overline{P}$ est un sous-groupe défini sur **R** et si T est un tore maximal de $P \cap \overline{P}$, il est aussi défini sur **R**. De plus, un tore maximal contenu dans l'intersection de deux sous-groupes paraboliques est encore maximal. Par définition de P, il existe alors un sous-groupe à un paramètre

$$\lambda : \mathbf{G}_m \longrightarrow T$$

qui satisfait aux propriétés dans l'énoncé. □

2.3.3. Sous-groupes déstabilisants non archimédiens. — Soient k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne et k° son anneau des entiers.

Lemme 2.13 (version non archimédienne)**.** *Soit k un corps algébriquement clos et complet pour une valeur absolue non archimédienne. Soient* X *un schéma affine de type fini sur k muni d'une action d'un k-groupe réductif* G, $S \subset X$ *un sous-schéma fermé* G-*stable et* $\mathfrak{G}$ *un* k°-*groupe réductif de fibre générique* G. *Pour tout* $x \in X(k)$ *dont l'adhérence de l'orbite rencontre* S,

$$\overline{G \cdot x} \cap S \neq \emptyset,$$

il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$, *provenant d'un sous-groupe à un paramètre* $\mathbf{G}_{m,k^\circ} \to \mathfrak{G}$, *tel que la limite*

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t) \cdot x$$

existe et appartient à S.

Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes de type fini. Un *tore maximal* est un sous-S-schéma en groupes T de G qui est un tore et que, pour tout $s \in S$, le sous-$\bar{s}$-schéma en groupes $T_{\bar{s}}$ est un tore maximal de $G_{\bar{s}}$ (où $\bar{s}$ désigne le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$).

Le rang réductif d'un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos est la dimension d'un (et donc tout) tore maximal. Le rang reductif de G est la fonction $\mathrm{rgred}_G : S \to \mathbf{N}$ qui associe à tout point $s \in S$ le rang réductif du $\bar{s}$-groupe réductif $G_{\bar{s}}$ (où $\bar{s}$ est le spectre d'une clôture algébrique du corps résiduel $\kappa(s)$). Si le S-schéma en groupes G est affine et lisse le rang réductif de S est une fonction semi-continue inférieurement [SGA 3, Exposé XII, Théorème 1.7] ; si G est de plus réductif elle est localement constante [SGA 3, Exposé XIX, Corollaire 2.6].

Un sous-S-schéma en groupes P de G est dit *parabolique* s'il est lisse sur S et, pour tout $s \in S$, le $\bar{s}$-schéma quotient $G_{\bar{s}}/P_{\bar{s}}$ est propre (où $\bar{s}$ est le spectre d'une clôture algébrique du corps résiduel $\kappa(s)$). Le foncteur qui associe à tout S-schéma S' l'ensemble des sous-S'-schémas en groupes paraboliques du S'-schéma en groupes $G \times_S S'$ est représentable par un S-schéma Par(G) propre et lisse [SGA 3, Exposé XXVI, Théorème 3.3-Corollaire 3.5].

Sur un corps algébriquement clos un tore maximal d'un sous-groupe parabolique est un tore maximal du groupe réductif entier [Bor91, Corollary 11.3]. Si P est un sous-S-schéma en groupes parabolique de G, le rang réductif de P coïncide donc avec le rang réductif de G.

Démonstration. D'après [Kem78, Theorem 4.2] il existe un sous-groupe parabolique P de G avec la propriété suivante : pour tout tore maximal T contenu dans P il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda_T : \mathbf{G}_m \to T$ tel que la limite
$$\lim_{t \to 0} \lambda_T(t) \cdot x$$
existe dans X et appartient à S.

Puisque le k°-schéma $\mathrm{Par}(\mathfrak{G})$ qui parametrise les sous-groupes paraboliques de $\mathfrak{G}$ est propre sur k°, le sous-groupe parabolique P de G est la fibre générique d'un unique sous-k°-schéma en groupes parabolique $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{G}$.

Pour obtenir l'énoncé il suffit de démontrer que $\mathfrak{P}$ contient un k°-tore maximal $\mathfrak{T}$. En effet, la fibre générique T de $\mathfrak{T}$ est un tore maximal de G contenu dans le sous-groupe parabolique. D'après le résultat de Kempf cité avant, il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to T$ tel que la limite
$$\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot x$$
existe dans X et appartient à S. Puisque k est algébriquement clos, le k°-tore $\mathfrak{T}$ est déployé, *i.e.*, isomorphe en tant que k°-schéma en groupes à $\mathbf{G}^r_{m,k^\circ}$ pour un nombre entier $r \geq 0$. Le sous-groupe à un paramètre λ se relève, donc, à un unique morphisme de k°-schémas en groupes $\lambda : \mathbf{G}_{m,k^\circ} \to \mathfrak{T}$.

L'existence d'un k°-tore maximal $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{P}$ est équivalente d'après [SGA 3, Exposé XII, Théorème 1.7] à la constance (locale) du rang réductif de $\mathfrak{P}$. Puisque $\mathfrak{P}$ est un sous-k°-schéma en groupes parabolique de $\mathfrak{G}$, le rang réductif de $\mathfrak{P}$ coïncide avec le rang réductif de $\mathfrak{G}$; comme $\mathfrak{G}$ est réductif, son rang réductif est constant. Cela termine la preuve. □

2.3.4. Fonctions sousharmoniques sur $\mathbf{A}^1$. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue. On désigne par $\mathbf{A}^1_k$ la droite affine analytique sur k et par t la coordonneé sur $\mathbf{A}^1_k$.

Soit $u : |\mathbf{A}^1_k| \to [-\infty, +\infty[$ une fonction quelconque. La fonction u est $\mathbf{U}(1)$-invariante (par l'action naturelle de $\mathbf{U}(1)$ sur $\mathbf{A}^1_k$) si et seulement s'il existe une fonction $v : [-\infty, +\infty[\longrightarrow [-\infty, +\infty[$ telle que
$$u = v \circ \log|t|.$$

Lemme 2.14. *Soit* $u : |\mathbf{A}^1_k| \to [-\infty, +\infty[$ *une fonction sousharmonique et* $\mathbf{U}(1)$*-invariante. Soit* $v : [-\infty, +\infty[\longrightarrow [-\infty, +\infty[$ *l'unique fonction telle que* $u = v \circ \log|t|$.

Alors, la fonction v est continue et ou bien elle est identiquement égale à $-\infty$ ou bien sa restriction à $\mathbf{R}$ est convexe.

En particulier, v est croissante.

Démonstration. Puisque t est inversible sur $\mathbf{G}_m$, la fonction $\log|t|$ est harmonique sur $\mathbf{G}_m$. D'après la Proposition I.10.22 $u|_{\mathbf{G}_m}$ est sousharmonique si et seulement si $v|_{\mathbf{R}}$ est ou bien identiquement égale à $-\infty$ ou bien convexe.

Il reste à vérifier la continuité en $-\infty$. On remarque tout d'abord que l'application $\log|t| : |\mathbf{A}^1_k| \to [-\infty, +\infty[$ est ouverte. En effet sa restriction à $\mathbf{G}_m$ est ouverte par principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques (voir Remarque I.10.21) ; en outre, l'image par $\log|t|$ d'un disque ouvert centré en 0 est un voisinage ouvert de $-\infty$ dans $[-\infty, +\infty[$. L'application v est donc semi-continue supérieurement et on a

$$v(-\infty) \geq \limsup_{\xi\to-\infty} v(\xi).$$

D'autre part, si par l'absurde cette inégalité est stricte, la restriction de la fonction u à un disque assez petit atteint un maximum global en 0. La fonction u est donc constante sur ce disque et on a

$$v(-\infty) = \limsup_{\xi\to-\infty} v(\xi),$$

en contradiction avec l'hypothèse absurde. □

2.3.5. Fin de la preuve du Théorème 2.10. — Soit $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif G. Soient $\mathrm{Y} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}^{\mathrm{G}}$ le quotient et $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le morphisme quotient.

Soit $u : \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \to [-\infty, +\infty[$ une application plurisousharmonique et invariante par un sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}$ de G^{an}. Il s'agit de prouver que pour tout $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ il existe un point $y \in \overline{\mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot x}$ d'orbite fermée tel que

$$u(y) \leq u(x).$$

Soient K est une extension analytique de k et $x_{\mathrm{K}} \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{K}}$ un point qui s'envoie sur x par le morphisme d'extension des scalaires $\varpi_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$. S'il existe un point $y_{\mathrm{K}} \in \overline{\mathrm{G}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{K}} \cdot x_{\mathrm{K}}}$ d'orbite fermée tel que

$$\varpi^*_{\mathrm{K}} u(y_{\mathrm{K}}) \leq \varpi^*_{\mathrm{K}} u(x_{\mathrm{K}}),$$

alors le point $y = \varpi_{\mathrm{K}}(y_{\mathrm{K}})$ appartient à l'adhérence de l'orbite de x et $u(y) \leq u(x)$. Quitte à remplacer k par une extension analytique, on peut donc faire les hypothèses suivantes :

- si la valeur absolue de k est archimédienne, on peut supposer $k = \mathbf{C}$;
- si la valeur absolue de k est non archimédienne, on peut supposer que k soit algébriquement clos, x soit un k-point du k-espace analytique X^{an} et la fonction u soit invariante par un sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}$ déduit d'un k°-groupe réductif $\mathfrak{G}$ de fibre générique G.

Soit $\mathrm{S} = \mathrm{G}\cdot x_0$ l'unique orbite fermée contenue dans l'adhérence de l'orbite $\mathrm{G}\cdot x$. D'après les Lemmes 2.11 et 2.13 il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathrm{G}$ tel que l'image de $\mathbf{U}(1)$ soit contenue dans $\mathbf{U}$ et tel que la limite

$$y := \lim_{t\to0} \lambda(t) \cdot x$$

existe et appartient à S. Le morphisme de k-schémas $\lambda_x : \mathbf{G}_m \to \mathrm{X}$, $t \mapsto \lambda(t) \cdot x$ s'étend de manière unique en un morphisme de k-schémas $\overline{\lambda}_x : \mathbf{A}^1 \to \mathrm{X}$ tel que

$$\overline{\lambda}_x(0) = y = \lim_{t\to0} \lambda(t) \cdot x.$$

Par fonctorialité des fonctions plurisousharmoniques, l'application $u_x := \overline{\lambda}_x^* u$ sur $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est sousharmonique. Puisque l'image par λ de $\mathbf{U}(1)$ est contenue dans $\mathbf{U}$, la fonction u_x est $\mathbf{U}(1)$-invariante. Il existe alors une fonction $v_x : [-\infty, +\infty[\to [-\infty, +\infty[$ telle que

$$u_x = v_x \circ \log|t|.$$

D'après le Lemme 2.14 la fonction v_x est continue et sa restriction à $\mathbf{R}$ est ou bien identiquement égale à $-\infty$ ou bien convexe. En particulier, v_x est croissante et on a

$$v_x(-\infty) = u(y) \leq v_x(0) = u(x)$$

ce qui achève la preuve de (i).

Pour (ii), on remarque tout d'abord qu'on a la chaine d'inégalités suivante :

$$u_{\mathrm{G}}(x_0) := \inf_{\mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot x_0} u \geq \inf_{\overline{\mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot x}} u = \inf_{\mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot x} u = u_{\mathrm{G}}(x),$$

l'avant-dernière égalité étant vraie par semi-continuité supérieure de u (Propostion 2.2). Puisque le morphisme π est G^{an}-invariant, d'après la Proposition 2.5 on a l'inégalité $u_{\mathrm{G}}(x) \geq \pi^*\pi_{\downarrow} u(x)$. En combinant ces inégalités, on obtient

$$u_{\mathrm{G}}(x_0) \geq \pi^*\pi_{\downarrow} u(x).$$

Il reste à montrer l'inégalité opposée $u_{\mathrm{G}}(x_0) \geq \pi^*\pi_{\downarrow} u(x)$. Soit $x' \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ tel que $\pi(x) = \pi(x')$. D'après la Proposition 2.7, les adhérences des orbites de x, x' se rencontrent et S est l'unique orbite fermée contenue dans l'adhérence de $\mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot x'$. En appliquant (i) au point x', il existe un point $y' \in \mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot x_0$ tel que

$$u(y') \leq u(x').$$

Puisque $u_{\mathrm{G}}(x_0) \leq u(y')$ par définition, on déduit

$$u_{\mathrm{G}}(x_0) \leq \inf_{\pi(x') = \pi(x)} u =: \pi^*\pi_{\downarrow} u,$$

ce qui termine la preuve du Théorème 2.10. ◻

2.4 Topologie analytique du quotient algébrique

Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$.

Proposition 2.15. *Soit* $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ *un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif* G. *Soient* $\mathrm{Y} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}^{\mathrm{G}}$ *le quotient et* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme quotient.*

Si $\mathrm{F} \subset |\mathrm{X}^{\mathrm{an}}|$ *est une partie fermée* G*-stable, l'image* $\pi(\mathrm{F})$ *est fermée dans* $|\mathrm{Y}^{\mathrm{an}}|$.

Démonstration. L'énoncé est stable par extensions analytiques du corps k. Si la valeur absolue de k est archimédienne, on peut supposer $k = \mathbf{C}$ et considérer un sous-groupe compact maximal $\mathbf{U} \subset \mathrm{G}^{\mathrm{an}}$. Si la valeur absolue de k est non-archimédienne on peut supposer que le k-groupe réductif G provient par changement de base d'un groupe réductif $\mathfrak{G}$ sur k° : on considère le sous-groupe affinoïde $\mathbf{U} \subset \mathrm{G}^{\mathrm{an}}$ associé à $\mathfrak{G}$.

On se ramène tout d'abord au cas où X est une représentation de G. Pour ce faire, on considère un k-espace vectoriel E muni d'une action linéaire de G et d'une immersion fermée G-équivariante ε : $\mathrm{X} \to \mathbf{V}(\mathrm{E})$. Le morphisme canoniquet induit entre quotients

$$\eta : \mathrm{X}/\mathrm{G} := \operatorname{Spec} \mathrm{A}^{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E})/\mathrm{G} := \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym} \mathrm{E})^{\mathrm{G}}$$

n'est pas forcément une immersion fermée car la caractéristique de k n'est pas supposée nulle. D'après le Corollaire 2.8 le morphisme de k-espaces analytique induit par η,

$$\eta : (X/G)^{an} \longrightarrow (\mathbf{V}(E)/G)^{an}$$

induit une application continue et injective sur les espaces topologiques sous-jacents. On a le diagramme commutatif suivant d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} |X^{an}| \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi_X"'] & |\mathbf{V}(E)^{an}| \arrow[d, "\pi_{\mathbf{V}(E)}"] \\ |(X/G)^{an}| \arrow[r, "\eta"] & |(\mathbf{V}(E)/G)^{an}| \end{tikzcd}$$

où π_X, $\pi_{\mathbf{V}(E)}$ désignent les morphismes quotients respectifs. Puisque η est injective, pour toute partie $F \subset |X^{an}|$ on a

$$\pi_X(F) = \eta^{-1}(\pi_{\mathbf{V}(E)}(\varepsilon(F))). \tag{2.4.1}$$

On suppose que l'énoncé soit vrai pour $\mathbf{V}(E)$. Si $F \subset |X^{an}|$ est une partie fermée G-stable, $\varepsilon(F)$ est une partie fermée G-stable de $|\mathbf{V}(E)^{an}|$ et son image $\pi_{\mathbf{V}(E)}(F)$ est fermée dans $|(\mathbf{V}(E)/G)^{an}|$. Comme l'application η est continue, l'égalité précédente (2.4.1) entraîne que $\pi_X(F)$ est fermée.

On peut donc supposer que X soit une représentation $\mathbf{V}(E)$ de G. Si la valeur absolue de k est archimédienne (resp. non archimédienne), on considère une norme géométrique hermitienne (resp. non archimédienne) $\mathbf{U}$-invariante $p : |\mathbf{V}(E)^{an}| \to \mathbf{R}_+$. La fonction p est plurisousharmonique, $\mathbf{U}$-invariante et propre au sens topologique. D'après le Théorème 2.9 les points minimaux sur les fibres de π et les points minimaux sur les orbites de G coïncident :

$$\mathbf{V}(E)^{min}_{\pi} = \mathbf{V}(E)^{min}_{G}.$$

On les désigne simplement par $\mathbf{V}(E)^{min}$.

La fonction p étant continue, les points minimaux $\mathbf{V}(E)^{min}_{G}$ forment une partie fermée (Corollaire 2.4). Par la Proposition 1.8 la restriction

$$\pi : \mathbf{V}(E)^{min} = \mathbf{V}(E)^{min}_{\pi} \longrightarrow Y$$

est alors surjective et propre au sens topologique.

En étant une partie fermée d'un espace topologique localement compact, l'espace topologique $\mathbf{V}(E)^{min}$ est localement compact. Comme l'application $\pi : \mathbf{V}(E)^{min} \to Y$ est propre au sens topologique, elle est fermée. Si $F \subset |\mathbf{V}(E)^{an}|$ est une partie fermée G-stable, on a

$$\pi(\mathbf{V}(E)^{min} \cap F) = \pi(F).$$

En fait, pour tout $x \in F$, l'adhérence de son orbite est contenue dans F (car F est G-stable et fermé). Puisque la fonction p est propre, il existe un point minimal x' appartenant à $\overline{G \cdot x}$ et donc $\pi(x') = \pi(x)$.

□

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif G. On considère la relation d'équivalence $\mathscr{R}_G$ sur X^{an} définie comme il suit : si $x, x' \in X^{an}$,

$$x \,\mathscr{R}_H\, x' \Longleftrightarrow H \cdot x = H \cdot x'.$$

Soient $Y = \operatorname{Spec} A^G$ le quotient et $\pi : X \to Y$ le morphisme quotient. D'après les Propositions 2.7 et 2.15, le couple $(|Y^{an}|, \pi)$ est un bon quotient de l'espace topologique $|X^{an}|$ par la relation $\mathscr{R}_G$. En d'autres termes, les propriétés suivantes sont satisfaites :

i. le morphisme $\pi : X^{an} \to Y^{an}$ est G^{an}-invariant et surjectif ;
ii. pour tous points $x, x' \in X^{an}$, on a :

$$\pi(x) = \pi(x') \text{ si et seulement si } \overline{G^{an} \cdot x} \cap \overline{G^{an} \cdot x'} \neq \emptyset;$$

iii. si $F \subset |X^{an}|$ est une partie fermée G-stable, l'image $\pi(F)$ est fermée dans $|Y^{an}|$.

Les propriétés générales du bon quotient topologique s'appliquent (Proposition I.6.11) :
- pour tout $x \in X^{an}$ il existe une unique orbite fermée contenue dans $\overline{G \cdot x}$;
- si F, F' sont des parties G-saturées, $\pi(F) \cap \pi(F') \neq \emptyset$ si et seulement si $F \cap F' \neq \emptyset$;
- une partie V de Y est ouverte si seulement si $\pi^{-1}(V)$ est ouverte dans X ;
- une partie ouverte U de X est G-saturée si et seulement si $U = \pi^{-1}(\pi(U))$; en particulier, l'image de U par π est ouverte dans Y.

Corollaire 2.16. *Soient* $X = \operatorname{Spec} A$ *un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif* G. *Soit* $Z = \operatorname{Spec}(A/I) \subset X$ *un sous-schéma fermé* G*-stable. Soit*

$$\varepsilon : Z/G := \operatorname{Spec}(A/I)^G \longrightarrow X/\operatorname{Spec} A^G$$

le morphisme canonique de k-schémas induit par l'inclusion de Z *dans* X*. Le morphisme de k-espaces analytique qui s'en déduit,*

$$\varepsilon : (Z/G)^{an} \longrightarrow (X/G)^{an},$$

induit une immersion fermée sur les espaces topologiques sous-jacents.

2.5 Continuité des minima sur le quotient

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif G. Soient $Y = \operatorname{Spec} A^G$ le quotient et $\pi : X \to Y$ le morphisme quotient.

Proposition 2.17. *Soit* $X = \operatorname{Spec} A$ *un k-schéma affine de type fini muni de l'action d'un k-groupe réductif* G*. Soient* $Y = \operatorname{Spec} A^G$ *le quotient et* $\pi : X \to Y$ *le morphisme quotient.*

Soit $u : X^{an} \to [-\infty, +\infty[$ *une fonction plurisousharmonique et invariante par un sous-groupe compact maximale de* G^{an}*. La fonction* $\pi_\downarrow u$ *est alors semi-continue supérieurement.*

De plus, si u est continue et propre au sens topologique, on a :

i. la restriction de π *à* $X_\pi^{\min}(u)$ *est surjective et propre au sens topologique ;*
ii. la fonction $\pi_\downarrow u$ *est continue.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ la partie $V_\alpha := \{y \in Y^{an} : \pi_\downarrow u(y) < \alpha\}$ est ouverte dans Y^{an}. Comme u est plurisousharmonique et invariante par un sous-groupe compact maximal, d'après le Théorème 2.9 les fonctions $\pi^*\pi_\downarrow u$ et u_G coïncident. En particulier, on a

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(V_\alpha) &= \{x \in X^{an} : \pi^*\pi_\downarrow u(x) < \alpha\}\\ &= \{x \in X^{an} : u_G(x) < \alpha\}.\end{aligned}$$

Puisque la fonction u_G est semi-continue supérieurement (Proposition 2.3), la partie $U_\alpha := \pi^{-1}(V_\alpha)$ est ouverte. En outre, elle est G-saturée : d'après la Proposition 6.11, $V_\alpha = \pi(U_\alpha)$ est alors ouverte et la fonction $\pi_\downarrow u$ est semi-continue supérieurement.

On suppose que la fonction u soit continue et propre au sens topologique. La fonction $\pi_\downarrow u$ est alors semi-continue supérieurement : si $K \subset Y^{an}$ est une partie compacte, $\pi_\downarrow u$ atteint son maximum sur K et on pose

$$\alpha := \sup_K \pi_\downarrow u < +\infty.$$

L'image réciproque $\pi^{-1}(\mathrm{K})$ de K est fermée et contenue dans la partie $\{x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}} : \pi^*\pi_\downarrow u(x) \le \alpha\}$. Il suffit de prouver que la partie

$$\{x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}} : \pi^*\pi_\downarrow u(x) \le \alpha\} \cap \mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}}$$

est compacte. Par définition de point minimal sur la fibre, les fonctions $\pi^*\pi_\downarrow u$ et u coïncident sur $\mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}}$. Par conséquent, on a

$$\{x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}} : \pi^*\pi_\downarrow u(x) \le \alpha\} \cap \mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}} = \{x \in \mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}} : u(x) \le \alpha\}.$$

D'après le Théorème 2.9, les points minimaux sur les fibres $\mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}}$ et les points minimaux sur les orbites $\mathrm{X}_\mathrm{G}^{\mathrm{min}}$ coïncident. En vertu du Corollaire 2.4, la partie $\mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}}$ est fermée et, comme u est propre au sens topologique,

$$\{x \in \mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}} : u(x) \le \alpha\} = \mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}} \cap \{x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}} : u(x) \le \alpha\}$$

est compact. L'application $\pi : \mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}} \to \mathrm{Y}^{\mathrm{an}}$ est donc propre au sens topologique.

Pour (ii), on remarque que l'espace topologique $\mathrm{X}_\pi^{\mathrm{min}}$ est localement compact, car il est une partie fermée d'un espace topologique localement compact. L'application $\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{min}} \to \mathrm{Y}^{\mathrm{an}}$ est alors fermée et l'égalité

$$u|_{\mathrm{X}^{\mathrm{min}}} = \pi^*\pi_\downarrow u|_{\mathrm{X}^{\mathrm{min}}},$$

entraîne que, si u est continue, $\pi_\downarrow u$ l'est aussi. □

2.6 La norme géométrique sur le quotient

Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$. Soient X un k-schéma projectif et L un faisceau inversible ample sur X. Le k-schéma X s'identifie canoniquement au spectre homogène de la k-algèbre graduée de type fini

$$\mathrm{A} := \bigoplus_{d \ge 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d}).$$

On suppose qu'un k-schéma en groupes réductif G agit sur le k-schéma X et de manière équivariante sur le faisceau inversible L. Soit $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})$ l'ouvert des points semi-stables de X sous l'action de G et par rapport au faisceau inversible L, et

$$\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \mathrm{Y} := \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d \ge 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d})^{\mathrm{G}}\right)$$

le morphisme quotient. Pour tout nombre entier $\mathrm{D} \ge 1$ assez divisible, il existe un faisceau inversible ample M_D sur Y et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})$,

$$\varphi_\mathrm{D} : \pi^*\mathrm{M}_\mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{L}|_{\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})}^{\otimes \mathrm{D}},$$

compatible à l'action de G.

À travers l'isomorphisme φ_D les sections globales du faisceau inversible M_D s'identifient aux sections globales G-invariantes du faisceau inversible $\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}$. En sous-entendant cette identification, le morphisme π est alors le morphisme de k-schémas associé à l'inclusion de k-algèbres graduée

$$\mathrm{B}_\mathrm{D} := \bigoplus_{d \ge 0} \Gamma(\mathrm{Y}, \mathrm{M}_\mathrm{D}^{\otimes d}) \longrightarrow \mathrm{A}_\mathrm{D} := \bigoplus_{d \ge 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}d})$$

Le morphisme π est alors une projection au sens de la section I.2.2 et un point $x \in \mathrm{X}$ est π-projetable (resp. non π-projetable) si et seulement s'il est semi-stable (resp. unstable).

Soit u_{L} une norme géométrique continue sur le faisceau inversible L. On considère la fonction des minima sur les orbites de G définie pour tout $s \in \mathbf{V}(\mathrm{L})_v^{\mathrm{an}}$ par

$$u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{G}}(s) := \inf\{u_{\mathrm{L}}(s') : s' \in \mathrm{G}_v^{\mathrm{an}} \cdot s\}.$$

En termes de métriques sur les sections du faisceau inversible L, pour tout point $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}$ et pour toute section non nulle $s \in x^*\mathrm{L}$, on a

$$\|s\|_{\mathrm{L}}^{\mathrm{G}}(x) = \sup_{x' \in \mathrm{G}_v^{\mathrm{an}} \cdot x} \|s\|_{\mathrm{L}}(x')$$

(ici on a fait un abus du terme métrique car chacun des termes vaut $+\infty$ quand x est unstable).

Soit $\pi[\mathrm{M_D}] : \mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}}) \to \mathbf{V}(\mathrm{M_D})$ le morphisme surjectif de k-schémas induit par l'isomorphisme φ_{D}. On considère la norme géométrique sur les fibres de π,

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{M_D}} : \mathbf{V}(\mathrm{M_D}) &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ t &\longmapsto \inf_{\pi[\mathrm{M_D}](s) = t} u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}, v}(s). \end{aligned}$$

En termes de métriques sur les sections de $\mathrm{M_D}$, pour tout point $y \in \mathrm{Y}_v^{\mathrm{an}}$ et toute section $t \in y^*\mathrm{M_D}$, on a

$$\|t\|_{\mathrm{M_D}, v}(y) := \sup_{\pi(x) = y} \|\pi^* t\|_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}, v}.$$

Puisque le morphisme π est G-invariant, pour tout point $s \in \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})$ au dessus d'un point semi-stable, on a

$$u_{\mathrm{M_D}}(\pi[\mathrm{M_D}](s)) \le u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}^{\mathrm{G}}(s).$$

Soit μ la mesure de non projetabilité (par rapport au morphime π, au faisceau inversible L et à la norme géométrique u_{L}) : dans le contexte de la théorie géométrique des invariants on l'appelera plutôt *mesure d'instabilité*.

Théorème 2.18. *Soit* X *un k-schéma projectif muni de l'action d'un k-groupe réductif* G. *Soit* L *un faisceau inversible ample sur* X *muni d'une action équivariante de* G. *Soient* X^{ss} *l'ouvert des points semi-stables de* X *par rapport à l'action de* G *et*

$$\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \mathrm{Y} := \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d \ge 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d})^{\mathrm{G}}\right)$$

le morphisme quotient. Soient $\mathrm{D} > 0$ *un nombre entier assez divisible,* $\mathrm{M_D}$ *un faisceau inversible ample sur* Y *et*

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \pi^*\mathrm{M_D} \longrightarrow \mathrm{L}|_{\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}}$$

un isomorphisme de faisceaux inversibles sur X^{ss}*.*

Soit u_{L} *une norme géométrique sur* L^{an} *continue, invariante sous l'action d'un sous-groupe compact maximal* $\mathbf{U}$ *de* G^{an} *et plurisousharmonique en tant que fonction sur* $\mathbf{V}(\mathrm{L})$*. Alors :*

i. la norme géométrique des minima sur les fibres $u_{\mathrm{M_D}} := \pi[\mathrm{M_D}]_{\downarrow} u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$ *est continue ;*

ii. pour tout point $s \in \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})$ *au dessus d'un point semi-stable on a*

$$u_{\mathrm{M_D}}(\pi[\mathrm{M_D}](s)) = u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}^{\mathrm{G}}(s);$$

iii. la mesure d'instabilité $\mu : \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \to [-\infty, 0]$ *est continue ;*

iv. pour tout $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ et tout point non nul $t \in \mathbf{V}(\mathrm{L})^{\mathrm{an}}$ au dessus de x, on a :

$$\mu(x) = \log \frac{u_{\mathrm{L}}^{\mathrm{G}}(t)}{u_{\mathrm{L}}(t)} := \inf_{t' \in \mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot t} \log u_{\mathrm{L}}(t') - \log u_{\mathrm{L}}(t).$$

Démonstration. Puisque la construction de la norme géométrique des minima est compatible aux puissances tensorielles (Proposition 1.13), quitte à prendre une puissance suffisamment grande de L et M_{D}, on peut supposer que L et M_{D} soient très amples. On considère les k-algèbres graduées de type fini

$$\mathrm{A}_{\mathrm{D}} := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}d}),$$
$$\mathrm{B} := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathrm{Y}, \mathrm{M}_{\mathrm{D}}^{\otimes d}).$$

L'homomorphisme φ induit un homomorphisme injectif homogène de degré 1 de k-algèbres graduées $\varphi_{\mathrm{D}} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}_{\mathrm{D}}$ qu'identifie B avec la sous-k-algèbre graduée des invariants de A,

$$\mathrm{A}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{G}} = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}d})^{\mathrm{G}}.$$

Dans la suite on sous-entend cette identification. Les morphismes canoniques

$$\theta : \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} := \operatorname{Spec} \mathrm{A}_{\mathrm{D}}, \qquad \omega : \mathbf{V}(\mathrm{M}_{\mathrm{D}}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Y}} := \operatorname{Spec} \mathrm{A}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{G}}$$

sont propres et ils induisent un isomorphisme en dehors de la section nulle. La métrique $u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$ provient par composition par θ d'une fonction $\widehat{u} : |\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}}| \to \mathbf{R}_+$, *i.e.*, $u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}} = \theta^* \widehat{u}$. La fonction $\widehat{u}$ est continue, 1-homogène, propre au sens topologique et non nulle en dehors de la section nulle du cône affine analytique $\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}}$. En outre, la fonction $\log \widehat{u}$ est plurisousharmonique et $\mathbf{U}$-invariante.

Le k-schéma affine $\widehat{\mathrm{Y}}$ est le quotient du k-schéma affine $\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}$ par le groupe réductif G. Si on désigne par $\widehat{\pi} : \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} \to \widehat{\mathrm{Y}}$ le morphisme quotient, *i.e.* le morphisme de k-schémas associé à l'inclusion $\mathrm{A}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{A}_{\mathrm{D}}$, les diagrammes $(\star)$ et $(\star\star)$ ci-dessus

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} - \widehat{f}^{-1}(\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{Y}}}) \arrow[r, hook] & \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}} & \widehat{f}^{-1}(\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{Y}}}) - \mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}} \arrow[l, hook'] \\
\mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{U}}^{\otimes \mathrm{D}}) - e(\mathrm{U}) \arrow[r, hook] \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, phantom, "(\star)"] & \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}) \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, phantom, "(\star\star)"] & \mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{Z}}^{\otimes \mathrm{D}}) - e(\mathrm{Z}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

sont cartésiens (où $\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}} \subset \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}$, $\mathbf{O}_{\widehat{\mathrm{Y}}} \subset \widehat{\mathrm{Y}}$ désignent la section nulle des cônes affines $\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}$ et $\widehat{\mathrm{Y}}$, et $e : \mathrm{X} \to \mathbf{V}(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})$ est la section nulle du faisceau inversible $\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}$). On en déduit

$$\pi[\mathrm{M}]_{\downarrow} u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}} = \omega^* \widehat{\pi}_{\downarrow} \widehat{u}. \tag{2.6.1}$$

La fonction $\widehat{u} : \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}} \to [-\infty, +\infty[$ est continue, propre au sens topologique, plurisousharmonique et $\mathbf{U}$-invariante. En vertu du Théorème 2.9 les fonctions $\widehat{\pi}_{\downarrow} \widehat{u}$ et $\widehat{u}^{\mathrm{G}}$ coïncident, ce qui montre (ii). D'après la Proposition 2.17 la fonction $\widehat{\pi}_{\downarrow} \widehat{u}$ est alors continue. En vertu de l'égalité précédente (2.6.1) la fonction $\pi[\mathrm{M}]_{\downarrow} u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$ est continue. Ceci achève la démonstration de (i).

D'après la Proposition 1.16, le point (iii) est une conséquence de (i).

Pour (iii), pour tout point $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ et tout point non nul $t \in \widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{an}}$ au dessus de x on a

$$\mu(x) = \frac{1}{\mathrm{D}} \log \frac{\widehat{\pi}^* \widehat{\pi}_{\downarrow} \widehat{u}(t)}{\widehat{u}(t)}.$$

D'après le Théorème 2.9 on a

$$\widehat{\pi}^* \widehat{\pi}_\downarrow \widehat{u}(t) = \widehat{u}_{\mathrm{G}}(t) := \inf_{t' \in \mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot t} \widehat{u}(t')$$

ce qui achève la preuve. □

2.6.1. Points minimaux et points résiduellement semi-stables. — On suppose que la valeur absolue de k soit discrète. Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma projectif et plat muni de l'action d'un k°-groupe réductif $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{L}$ un faisceau inversible ample sur $\mathfrak{X}$ muni d'une action équivariante de $\mathfrak{G}$. On désigne par $\mathfrak{X}^{\mathrm{ss}}$ l'ouvert des points semi-stables sous l'action de $\mathfrak{G}$ et par rapport au faisceau inversible $\mathfrak{L}$.

On note en majuscules d'imprimerie la fibre générique des objets en caractère gothique (*e.g.*, $\mathrm{X} := \mathfrak{X} \times_{k^\circ} k$).

Définition 2.19. Soient $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ un point et $\mathrm{K} = \widehat{\kappa}(x)$ son corps résiduel complété. Puisque le k°-schéma $\mathfrak{X}$ est propre, il existe un unique morphisme de k°-schémas

$$\mathfrak{x} : \operatorname{Spec} \mathrm{K}^\circ \longrightarrow \mathfrak{X}$$

qui prolonge le morphisme $\operatorname{Spec} \mathrm{K} \to \mathrm{X}$ induit par x.

On dit que le point x est *residuellement semi-stable* si l'image du morphisme $\mathfrak{x}$ est contenue dans l'ouvert $\mathfrak{X}^{\mathrm{ss}}$.

Un point residuellement semi-stable est par définition semi-stable. De plus, un point $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ est residuellement semi-stable si et seulement si x est semi-stable et sa reduction, *i.e.* la fibre spéciale du morphisme $\mathfrak{x} : \operatorname{Spec} \mathrm{K}^\circ \to \mathfrak{X}$, est un point semi-stable de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$.

Théorème 2.20. *Soit k un corps complet pour une valeur absolue discrète. Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma projectif et plat muni de l'action d'un k°-groupe réductif $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{L}$ un faisceau inversible ample sur $\mathfrak{X}$ muni d'une action équivariante de $\mathfrak{G}$.*

Soit X *la fibre générique du k°-schéma $\mathfrak{X}$ et $u_{\mathfrak{L}}$ la métrique induite par $\mathfrak{L}$ sur le faisceau inversible* $\mathrm{L} := \mathfrak{L}|_{\mathrm{X}}$. *Pour tout $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. x est residuellement semi-stable ;

ii. x est semi-stable et, si $\widehat{x} \in \mathbf{V}(\mathrm{L})^{\mathrm{an}}$ est un représentant non nul de x, le point $\widehat{x}$ est $u_{\mathfrak{L}}$-minimal sur l'orbite de G^{an}.

La preuve s'inspire à celle de la Proposition 2 dans [Bur92].

Démonstration. Quitte à remplacer $\mathfrak{L}$ par une puissance suffisamment grande, on peut supposer qu'il soit très ample. En particulier $\mathfrak{L}$ est engendré par ses sections globales et pour tout $t \in \mathbf{V}(\mathrm{L})^{\mathrm{an}}$ on a

$$u_{\mathfrak{L}}(t) = \max_{s \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})} |s(t)|.$$

Soient $x \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$, $\mathrm{K} = \widehat{\kappa}(x)$ son corps residuel complété et $\mathfrak{x} : \operatorname{Spec} \mathrm{K}^\circ \to \mathfrak{X}$ le morphisme de k°-schémas déduit par critère valuatif de propreté. Soit $\widehat{x} \in \mathbf{V}(\mathrm{L})^{\mathrm{an}}$ un représentant non nul de x : quitte à en prendre un multiple, on peut supposer qu'il soit un K-point et que $u_{\mathfrak{L}}(\widehat{x}) = 1$. Le point $\widehat{x}$ défini alors un K°-point $\widehat{\mathfrak{x}}$ du k°-schéma $\mathbf{V}(\mathfrak{L})$ et le morphisme $\mathfrak{x}$ est la classe d'équivalence $[\widehat{\mathfrak{x}}]$ du morphisme $\widehat{\mathfrak{x}}$.

Il s'agit de montrer que le point x est residuellement semi-stable si et seulement si le point $\widehat{x}$ est $u_{\mathfrak{L}}$-minimal sur l'orbite de G^{an}.

On suppose d'abord que le point x soit residuellement semi-stable. Par définition l'image du morphisme $\mathfrak{x}$ est contenue dans l'ouvert des points semi-stables $\mathfrak{X}^{\mathrm{ss}}$. De manière équivalente, il existe un nombre entier $d \geq 1$ et une section globale $\mathfrak{G}$-invariante de $\mathfrak{L}^{\otimes d}$,

$$f \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}^{\otimes d})^{\mathfrak{G}},$$

telle que $\mathfrak{x}^* f$ soit inversible. Autrement dit $f(\widehat{\mathfrak{x}})$ est inversible dans K°, c'est-à-dire $|f(\widehat{x})| = 1$. Pour tout point $\widehat{x}' \in \mathbf{V}(\mathrm{L})^{\mathrm{an}}$ on a

$$u_{\mathfrak{L}}(\widehat{x}') = \max_{s \in \Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})} |s(\widehat{x}')| = \max_{\substack{s \in \Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L}^{\otimes d})\\ d \geq 1}} |s(\widehat{x}')|^{1/d} \geq |f(\widehat{x}')|^{1/d}. \tag{2.6.2}$$

De plus, si $\widehat{x}'$ appartient à l'orbite de $\widehat{x}$, comme f est G-invariant, on a $|f(\widehat{x}')| = |f(\widehat{x})|$. D'après l'inégalité 2.6.2 pour tout $\widehat{x}' \in \mathrm{G}^{\mathrm{an}} \cdot \widehat{x}$ on a

$$u_{\mathfrak{L}}(\widehat{x}') \geq |f(\widehat{x})|^{1/d} = 1 = u_{\mathfrak{L}}(\widehat{x}).$$

En d'autres termes, le point $\widehat{x}$ est $u_{\mathfrak{L}}$-minimal sur l'orbite de G^{an}.

On suppose ensuite que x soit semi-stable et $\widehat{x}$ soit $u_{\mathfrak{L}}$-minimal sur l'orbite de G^{an}. Par l'absurde on suppose que le point x ne soit pas residuellement semi-stable. Si on désigne par s le point fermé du schéma $\operatorname{Spec} \mathrm{K}^\circ$, alors le point $\mathfrak{x}(s)$ n'est pas semi-stable. D'après le critère numérique de Hilbert-Mumford, quitte à étendre K, il existe un sous-groupe à paramètre

$$\widetilde{\lambda} : \mathbf{G}_{m,\widetilde{\mathrm{K}}} \longrightarrow \mathfrak{G} \times_{k^\circ} \widetilde{\mathrm{K}}$$

du $\widetilde{\mathrm{K}}$-groupe réductif $\mathfrak{G} \times_{k^\circ} \widetilde{\mathrm{K}}$ tel que

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{\lambda}(t) \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}(s) = 0.$$

En vertu de [SGA 3, Exposé XI, Théorème 4.1], le foncteur des sous-groupes de type multiplicatif de $\mathfrak{G}$ est représentable par un k°-schéma lisse. Puisque K° est henselien, d'après le « Lemme de Hensel »[SGA 3, Exposé XI , Corollaire 1.11], le sous-groupe à un paramètre $\widetilde{\lambda}$ se relève à un sous-K°-schéma en groupes de type multiplicatif $\mathfrak{T}$. Quitte à étendre à nouveau K, on peut supposer que le K°-schéma en groupes de type multiplicatif $\mathfrak{T}$ se deploye sur K°, *i.e.* qu'il soit isomorphe à $\mathbf{G}_{m,\mathrm{K}^\circ}$ en tant que K°-schéma en groupes. On obtient ainsi un sous-groupe à un paramètre

$$\lambda : \mathbf{G}_{m,\mathrm{K}^\circ} \longrightarrow \mathfrak{G}$$

de fibre spéciale $\widetilde{\lambda}$ et on considère l'application

$$\begin{aligned} \lambda_{\widehat{x}} : \ \mathbf{G}_{m,\mathrm{K}} &\longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{L}) \times_k \mathrm{K} \\ t &\longmapsto \lambda(t) \cdot \widehat{x} \end{aligned}$$

Puisque le sous-groupe à un paramètre est défini sur K°, la fonction $\log \lambda_{\widehat{x}}^* u_{\mathfrak{L}} : \mathbf{G}_{m,\mathrm{K}}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbf{R}$ est $\mathbf{U}(1)$-invariante. Il existe, donc, une fonction continue (même convexe en vertu de la Proposition I-10.22) v_x : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\log \lambda_{\widehat{x}}^* u_{\mathfrak{L}} = v_{\widehat{x}} \circ \log |t|.$$

Comme $v_{\widehat{x}}(0) = \log u_{\mathfrak{L}}(u) = 0$, il s'agit de montrer que la fonction $v_{\widehat{x}}$ atteint des valeurs strictement négatifs.

Le K°-schéma en groupes $\mathbf{G}_{m,\mathrm{K}^\circ}$ agit à travers λ sur le K°-module libre de rang fini $\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})$. Cette action est définie par un homomorphisme de K°-modules

$$\lambda^\sharp : \Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathrm{K}^\circ[t,t^{-1}] \otimes_{\mathrm{K}^\circ} \Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L}).$$

Si pour tout $m \in \mathbf{Z}$ on considère le sous-K°-module de $\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})$,

$$\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})_m := \{v \in \Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L}) : \lambda^\sharp(v) = t^m \otimes v\},$$

on a
$$\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L}) = \bigoplus_{m\in\mathbf{Z}} \Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})_m.$$
Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, le K°-module $\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})_m$ est sans torsion et de type fini car il est un facteur direct d'un K°-module libre de rang fini. D'après [BGR84, Chapter 1, 1.6, Proposition 2], le K°-module $\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})_m$ est alors libre et de rang fini. En particulier, pour tout $t \in \mathbf{G}_{m,\mathrm{K}}$ on a
$$\lambda_{\hat{x}}^* u_{\mathfrak{L}}(t) := u_{\mathfrak{L}}(t\cdot\hat{x}) = \max_{m\in\mathbf{Z}}\left\{|t|^m u_{\mathfrak{L}}(\hat{x})_m\right\},$$
où
$$u_{\mathfrak{L}}(\hat{x})_m := \max_{s\in\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L})_m} |s(\hat{x})|.$$
Si l'on pose $a_m := \log u_{\mathfrak{L}}(\hat{x})_m$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ on a :
$$v_{\hat{x}}(\xi) = \max_{m\in\mathbf{Z}}\{m\xi + a_m\}.$$
Puisque $u_{\mathfrak{L}}(\hat{x}) = 1$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$ on a $u_{\mathfrak{L}}(\hat{x})_m \le 1$, *i.e.* $a_m \le 0$. De plus, pour tout nombre entier $m \le 0$, cette inégalité est stricte car la fibre spéciale du sous-groupe à un paramètre λ destabilise la fibre spéciale du point $\hat{\mathfrak{x}}$.

En conclusion pour tout nombre réel $\xi < 0$ on a :
- si $m \ge 1$ alors $a_m \le 0$ et $m\xi + a_m < 0$;
- si $m = 0$ alors $a_m < 0$;
- si $m \le -1$ alors $a_m < 0$ et $m\xi + a_m < 0$ si et seulement si $\xi > -a_m/m$. Comme a_m est strictement négatif, $-a_m/m$ est aussi strictement négatif.

La fonction $v_{\hat{x}}$ est donc strictement négative dans l'intervalle
$$\left]\max_{m<0}\{-a_m/m\}, 0\right[$$
ce qui achève la démonstration. □

On suppose de plus que l'anneau k° soit universellement japonais. Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma projectif et plat muni de l'action d'un k°-groupe réductif $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{L}$ un faisceau inversible ample sur $\mathfrak{X}$ muni d'une action équivariante de $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{X}^{\mathrm{ss}}$ l'ouvert des points semi-stables de $\mathfrak{X}$ par sous l'action de $\mathfrak{G}$ et
$$\pi : \mathfrak{X}^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \mathfrak{Y} := \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d\ge 0}\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{L}^{\otimes d})^{\mathfrak{G}}\right)$$
le morphisme quotient. Pour tout nombre entier $\mathrm{D} > 0$ assez divisible, il existe un faisceau inversible ample $\mathfrak{M}_{\mathrm{D}}$ sur $\mathfrak{Y}$ et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{ss}}$,
$$\varphi_{\mathrm{D}} : \pi^*\mathfrak{M}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathfrak{L}|_{\mathfrak{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}},$$
compatible à l'action de $\mathfrak{G}$. Soit u une norme géométrique continue sur le faisceau inversible $\mathfrak{L}$. D'après Proposition 1.14 l'application $\pi[\mathrm{M}_{\mathrm{D}}]_{\downarrow} u_{\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$ est une norme géométrique sur le faisceau inversible $\mathfrak{M}_{\mathrm{D}}$.

On note en majuscules d'imprimerie la fibre générique des objets en caractère gothique (*e.g.*, $\mathrm{X} := \mathfrak{X}\times_{k^\circ} k$). Soit $u_{\mathfrak{L}}$ (resp. $u_{\mathfrak{M}_{\mathrm{D}}}$) la norme géométrique induite par $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{M}_{\mathrm{D}}$) sur le faisceau inversible L (resp. M_{D}). L'isomorphisme φ_{D} induit le diagramme cartésien suivant de k-schémas :
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}}) \arrow[r, "{\pi[\mathrm{M}_{\mathrm{D}}]}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{V}(\mathrm{M}_{\mathrm{D}}) \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{X}^{\mathrm{ss}} \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Y}
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2.21 (Compatibilité de norme géométrique des minima aux modèles entiers)**.** *Soit k un corps complet pour une valeur absolue discrète et tel que l'anneau des entiers k° soit universellement japonais. Alors, avec les notations introduites avant, on a :*

$$\pi[\mathrm{M_D}]_\downarrow u_{\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}} = u_{\mathfrak{M}_\mathrm{D}}.$$

Démonstration. L'inégalité $\pi[\mathrm{M_D}]_\downarrow u_{\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}} \geq u_{\mathfrak{M}_\mathrm{D}}$ suit par fonctorialité de la construction de la norme géométrique associée à un modèle entier. Il reste donc à prouver l'inégalité $\pi[\mathrm{M_D}]_\downarrow u_{\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}} \leq u_{\mathfrak{M}_\mathrm{D}}$. Quitte à remplacer $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}_\mathrm{D}$ par une puissance suffisamment grande, on peut supposer qu'il soient très amples. En particulier, $\mathfrak{M}_\mathrm{D}$ est engendré par ses sections globales et pour tout $t \in \mathbf{V}(\mathrm{M_D})^{\mathrm{an}}$ on a

$$u_{\mathfrak{M}_\mathrm{D}}(t) = \max_{s \in \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{M}_\mathrm{D})} |s(t)|.$$

L'homomorphisme injectif homogène de degré 1 de k°-algèbres graduées

$$\mathfrak{B} := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{M}_\mathrm{D}^{\otimes d}) \longrightarrow \mathfrak{A}_\mathrm{D} = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}^{\otimes d\mathrm{D}})$$

identifie $\mathfrak{B}$ avec la sous-k°-algèbre graduée des invariants de $\mathfrak{A}_\mathrm{D}$,

$$\mathfrak{A}_\mathrm{D} := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}^{\otimes d\mathrm{D}})^{\mathfrak{G}}.$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbf{V}(\mathrm{M_D})^{\mathrm{an}}$ on a

$$u_{\mathfrak{M}_\mathrm{D}}(t) = \max_{s \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}})^{\mathfrak{G}}} |s(t)|. \tag{2.6.3}$$

Soit $t \in \mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{X^{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}})$ un point $u_{\mathfrak{L}}$-minimal sur l'orbite de $\mathrm{G^{an}}$. Quitte à en prendre un multiple on va supposer qu'il soit de norme 1, *i.e.*, $u_{\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}}(t) = 1$. D'après le Théorème précédent 2.20 l'image x de t dans $\mathrm{X^{an}}$ est un point residuellement semi-stable. On suppose par l'absurde qu'on a

$$1 = u_{\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}}(t) > \pi[\mathrm{M_D}]^* u_{\mathfrak{M}_\mathrm{D}}(t).$$

En vertu (2.6.3), ceci revient à dire que pour toute section globale $\mathfrak{G}$-invariante S de $\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}$ on a

$$|s(t)| < 1.$$

Puisque $\mathfrak{M}_\mathrm{D}$ est engendré par ses sections globales, ceci entraîne que le point x n'est pas residuellement semi-stable en contradiction avec l'hypothèse de $u_{\mathfrak{L}^{\otimes \mathrm{D}}}$-minimalité de x sur l'orbite de $\mathrm{G^{an}}$. □

Chapitre III

Théorie géométrique des invariants sur un corps global

0 Introduction

Ce troisième chapitre est consacré à l'étude des certaintes propriétés de la hauteur sur le quotient au sens de la théorie géométrique des invariants.

On commence en fixant le quadre général et en montrant comment les résultats du chapitre précédent s'y insèrent. Le Théorème II.2.18 et le Corollaire II.2.21 permettent notamment de munir d'une structure adélique le faisceau inversible ample donné par construction sur le quotient. La comparaison entre la hauteur que l'on obtient sur le quotient et la hauteur sur la variété de départ est le résultat clé pour les applications à l'approximation diophantienne.

On analyse ensuite le comportement du quotient de la théorie géométrique des invariants sous des transformations par torseurs (les « formes tordues ») qui s'inspirent à des constructions présentes dans [Bog78]. Le résultat principal est un isomorphisme canonique entre formes tordues d'un quotient — cette « indépendance » du quotient (et sa variante adélique) est le résultat sur lequel reposent implicitement les minorations uniformes de J.-B. Bost [Bos94] et C. Gasbarri [Gas00] de la hauteur des points semi-stables. On retrouve ces résultats dans une forme plus générale en étudiant l'exemple des représentations homogènes.

Dans le cas des représentations homogènes, la théorie classique des invariants permet de donner une minoration explicite de la hauteur sur le quotient. Cette borne inférieure joue le rôle de la minoration arithmétique dans le schéma de démonstration classique en approximation diophantienne.

Le chapitre termine en présentant comme exemple l'inégalité de Liouville. Comme dans le cas de l'approximation diophantienne classique, elle présente déjà toutes les étapes de la preuve que l'on rencontre dans la démonstration du Théorème de Roth. Elle pourrait pour autant servir de guide pour la lecture du chapitre suivant.

1 Morphismes rationnels et hauteurs

1.1 Cadre et notation générale sur un corps global

Soient K un corps global et $\mathrm{V_K}$ l'ensemble de ses places. Soient X, Y des K-schémas projectifs et L, M des faisceaux inversibles amples respectivement sur X, Y. On considère les K-algèbres graduées de type fini

$$\begin{aligned} A &:= \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d}), \\ B &:= \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(Y, M^{\otimes d}). \end{aligned}$$

Les K-schémas X et Y s'identifient canoniquement aux spectres homogènes des K-algèbres graduées A et B. Si le faisceau inversible L (resp. M) est de plus engendré par ses sections globales, il s'identifie au faisceau inversible $\mathscr{O}_X(1)$ (resp. $\mathscr{O}_Y(1)$) associé au A-module gradué A(1) (resp. au B-module gradué B(1)).

Soit $\varphi : B \to A$ un homomorphisme de K-algèbres homogène de degré $D > 0$, c'est-à-dire, tel que pour tout nombre entier $d \geq 0$ on ait $\varphi(B_d) \subset A_{dD}$. L'homomorphisme φ induit un morphisme de K-schémas $f : U \to Y$, où U est l'ouvert complémentaire du sous-schéma fermé de X définit par l'idéal homogène $\varphi(B_+)\cdot A$.

Le morphisme f ainsi défini est affine : en effet, pour tout élément homogène $b \in B$, son image $\varphi(b) \in A$ est un élément homogène et l'image réciproque par f de l'ouvert affine $D_+(b) = \operatorname{Spec} B_{(b)}$ est l'ouvert affine $D_+(\varphi(b)) = \operatorname{Spec} A_{(\varphi(b))}$,

$$f^{-1}D_+(b) = D_+(\varphi(b))$$

(ici $B_{(b)}$ et $A_{(\varphi(b))}$ désignent la composante de degré 0 respectivement des K-algèbres graduées B_b et $A_{\varphi(b)}$).

Pour tout nombre entier $d \geq 1$ assez grand (plus précisément tel que $M^{\otimes d}$ et $L^{\otimes dD}$ soient engendrés par leurs sections globales) l'homomorphisme de K-espaces vectoriels induit par φ,

$$\Gamma(Y, M^{\otimes d}) \longrightarrow \Gamma(X, L^{\otimes dD})$$

induit un isomorphisme de faisceaux inversibles sur U, $\varphi_{dD} : f^*M^{\otimes d} \to L|_U^{\otimes dD}$. Cet isomorphisme est compatible aux puissances tensorielles. En particulier, si $d \geq 1$ est un nombre entier assez grand, l'isomorphisme de faisceaux inversibles sur U,

$$\varphi_D = \varphi_{(d+1)D} \otimes \varphi_{dD}^{\vee} : f^*M \longrightarrow L|_U^{\otimes D}$$

ne dépend pas du nombre entier d choisi et on note

$$f[M] : \mathbf{V}(L|_U^{\otimes D}) \longrightarrow \mathbf{V}(M)$$

le morphisme de K-schémas qui s'en déduit.

On suppose que le morphisme f soit *surjectif* : le morphisme $f[M]$ est alors également surjectif. Dans ce cas on dit que f est une *projection* (nom qui évoque les exemples des projections linéaires et de la projection sur le quotient), qu'un point dans U est *f-projetable* et qu'un point dans X – U est *non f-projetable*.

1.2 Rappels des résultats locaux

On revient aux notations générales introduites à la section précédente 1.1. Soient v une place du corps K et $u_{L,v} : \mathbf{V}(L)_v^{an} \to \mathbf{R}_+$ une norme géométrique continue sur le faisceau inversible L. En vertu de la Proposition II.1.14 la fonction des minima sur les fibres de $f[M]$,

$$\begin{aligned} f[M]_{\downarrow} u_{L^{\otimes D},v} :\ \mathbf{V}(M) &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ t &\longmapsto \inf_{f[M](s)=t} u_{L^{\otimes D},v}(s) \end{aligned}$$

est une norme géométrique sur le faisceau inversible M. En termes de métriques sur les sections de M, pour tout point $y \in Y_v^{an}$ et toute section $t \in y^*M$, on a

$$\|t\|_{M,v}(y) := \sup_{f(x)=y} \|f^* t\|_{L^{\otimes D},v}.$$

Dans ce cadre on introduit la notion de mesure de non-projetabilité. Pour tout point $x \in X_v^{an}$ on fait la définition suivante :

– si x est un point f-projetable et $s \in \mathbf{V}(L^{\otimes D})_v^{an}$ est un point non nul au-dessus de x, on note $t := f[M](s)$ et on pose :

$$\mu_v(x) := \frac{1}{D}\log\frac{f[M]_\downarrow u_{L^{\otimes D}}(t)}{u_{L^{\otimes D}}(s)}.$$

La définition ne dépend pas du représentant non nul s choisi.

– si par contre x est non f-projetable, on pose $\mu_v(x) = -\infty$.

L'application ainsi définie $\mu_v : X^{an} \to [-\infty, 0]$ est appelée *mesure de non-projetabilité en la place v* (par rapport au morphime f, au faisceau inversible L et à la norme géométrique u_L). En termes de métriques sur les sections des faisceaux inversibles L, M la définition de mesure de non-projetabilité se reformule de la manière suivante : si x est un point f-projetable, $y := f(x)$ sa projection dans Y et $t \in y^*M$ est une section non nulle, alors

$$\mu_v(x) := \frac{1}{D}\log \inf_{f(x')=f(x)} \frac{\|f^* t\|_{L^{\otimes D},v}(x)}{\|f^* t\|_{L^{\otimes D},v}(x')}.$$

1.3 Application aux hauteurs

Soient K un corps global et V_K l'ensemble de ses places.

Définition 1.1. Soient X un K-schéma propre, $\mathscr{L} = (L, \boldsymbol{u})$ un faisceau inversible adélique sur X et $h_{\mathscr{L}}$ la hauteur sur X par rapport à $\mathscr{L}$. Pour toute partie constructible $Z \subset X$ on pose

$$h_{\min}(Z, \mathscr{L}) = \inf\left\{h_{\mathscr{L}}(x) : x \in Z \text{ point fermé}\right\}.$$

Si $Z \subset Z'$ sont des parties constructibles emboîtées de X, on a clairement $h_{\min}(Z', \mathscr{L}) \le h_{\min}(Z, \mathscr{L})$. Si le faisceau inversible L a un point base stable $x \in X$, c'est-à-dire, pour tout nombre entier $d \ge 1$ et pour toute section globale s du faisceau inversible $L^{\otimes d}$ on a $x^* s = 0$, alors pour toute partie constructible $Z \subset X$ contenant x on a

$$h_{\min}(Z, \mathscr{L}) = -\infty.$$

D'autre part si une partie constructible $Z \subset X$ ne contient aucun point base stable de L (relativement aux sections globales sur X), alors

$$h_{\min}(Z, \mathscr{L}) \in \mathbf{R}.$$

On revient aux notations générales introduites à la section 1.1. On suppose que le faisceaux inversible L soit muni d'une famille adélique de normes géométriques $\boldsymbol{u}_L$ et on note $\mathscr{L} = (L, \boldsymbol{u})$ le faisceau inversible adélique associé. Pour toute place v, on considère la norme géométrique sur M des minima sur les fibres de f,

$$u_{M,v} := f[M]_\downarrow u_{L^{\otimes D},v}$$

En général, la famille adélique de normes géométriques sur le faisceau inverisible M,

$$\boldsymbol{u}_M := \{u_{M,v} : v \in V_K\}$$

n'est pas adélique. En fait, les normes géométriques $u_{\mathrm{M},v}$ ne sont *à priori* pas continues : le Corollaire II.1.10 donne une condition necéssaire et suffisante pour qu'elles le soient. En outre, la construction de la norme géométrique des minima sur les fibres n'est pas *à priori* compatible à la construction des normes géométriques provenants d'un modèle entier : cela est vrai si par exemple le morphisme f est surjectif et plat au niveau des modèles entiers ; dans le cas de la projection sur le quotient c'est le Corollaire II.2.21.

Scholie 1.2. *Soient* X, Y *des* K*-schémas projectifs et* L, M *des faisceaux inversibles amples respectivement sur* X, Y*. On considère les* K*-algèbres graduées de type fini*

$$\mathrm{A} := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d}),$$
$$\mathrm{B} := \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathrm{Y}, \mathrm{M}^{\otimes d}).$$

Soit $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *un homomorphisme de* K*-algèbres graduées homogène de degrè* $\mathrm{D} \geq 1$*. Soient* U *l'ouvert complémentaire du sous-schéma fermé définit par l'idéal homogène* $\varphi(\mathrm{B}_+)\cdot\mathrm{A}$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme de* K*-schémas induit par* φ*.*

On suppose que le morphisme f soit surjectif et que le faisceau inversible L *soit muni d'une structure de faisceau adélique* $\mathscr{L} = (\mathrm{L}, \boldsymbol{u}_\mathrm{L})$*.*

Si la famille de normes géométriques $\boldsymbol{u}_\mathrm{M}$*, formée des normes géométriques des minima sur les fibres de f en toute place, est adélique, alors :*

i. pour tout point fermé f-projetable x on a :

$$\frac{1}{\mathrm{D}} h_{\mathscr{M}}(f(x)) = h_{\mathscr{L}}(x) + \frac{1}{[\mathrm{K}(x):\mathrm{K}]} \sum_{v\in \mathrm{V}_{\mathrm{K}(x)}} \deg(v)\mu_v(x).$$

ii. l'inégalité suivante est vérifiée :

$$h_{\min}(\mathrm{U}, \mathscr{L}) \geq \frac{1}{\mathrm{D}} h_{\min}(\mathrm{Y}, \mathscr{M}) > -\infty.$$

1.4 Exemple : projections linéaires

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-K-espace vectoriel de E. On reprend l'exemple des projections linéaires étudié dans la section II.1.5. L'inclusion $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ induit un homomorphisme injectif de K-algèbres graduées

$$\varphi : \mathrm{B} := \mathrm{Sym}_\mathrm{K}\,\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{A} := \mathrm{Sym}_\mathrm{K}\,\mathrm{E}$$

et un morphisme surjectif de K-schémas

$$f : \mathrm{U} := \mathbf{P}(\mathrm{E}) - \mathbf{P}(\mathrm{E}/\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F})$$

dit *projection de centre* E/F. L'homomorphisme de K-algèbre graduée φ induit un isomorphisme de faisceaux inversibles sur U,

$$\varphi_1 : f^*\mathscr{O}_\mathrm{F}(1) \longrightarrow \mathscr{O}_\mathrm{E}(1)|_\mathrm{U}$$

qui, à son tour, définit un morphisme surjectif de K-schémas $f_1 := f[\mathscr{O}_\mathrm{F}(1)] : \mathbf{V}(\mathscr{O}_\mathrm{E}(1)|_\mathrm{U}) \to \mathbf{V}(\mathscr{O}_\mathrm{F}(1))$.

On suppose que le K-espace vectoriel E soit munit d'une famille adélique de normes géométriques $\boldsymbol{p}$ et note $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p})$ le faisceau adélique localement libré associé. On muni le sous-K-espace vectoriel F de la restriction $\boldsymbol{p}|_\mathrm{F}$ de la famille de normes géométriques $\boldsymbol{p}$ à F, c'est-à-dire, pour toute place v on considère la norme géométrique $p|_{F,v}$ induite par p à travers le morphisme surjectif de K_v-espaces analytiques

$$\widehat{f}:\mathbf{V}(E)_v^{an} \longrightarrow \mathbf{V}(F)_v^{an}.$$

La famille de normes géométriques $\boldsymbol{p}|_F$ est adélique et on note $\mathscr{F} = (F, \boldsymbol{p}|_F)$ le faisceau adélique associé.

Pour toute place v on munit le faisceau inversible $\mathscr{O}_E(1)$ de la norme géométrique associée à la norme géométrique p_v sur E, *i.e.*, de l'application composée

$$u_{p,v}: \mathbf{V}(\mathscr{O}_E(1))_v^{an} \xrightarrow{\theta_E} \mathbf{V}(E)_v^{an} \xrightarrow{p_v} \mathbf{R}_+$$

On désigne par $h_{\mathscr{E}}$ la hauteur sur $\mathbf{P}(E)$ associée. D'après les résultats du cas local (section II.1.5), la norme géométrique $f_{1\downarrow}u_{p,v}$ des minima sur les fibres de f est la norme géométrique sur $\mathscr{O}_F(1)$ induite par la restriction de la norme géométrique p_v au sous-espace F, c'est-à-dire l'application composée

$$u_{p|_{F},v}: \mathbf{V}(\mathscr{O}_F(1))_v^{an} \xrightarrow{\theta_F} \mathbf{V}(F)_v^{an} \xrightarrow{p|_{F,v}} \mathbf{R}_+ .$$

La hauteur $h_{\mathscr{O}_F(1)}$ sur $\mathbf{P}(F)$ associée coïncide alors à la hauteur $h_{\mathscr{F}}$ sur $\mathbf{P}(F)$ associée au faisceau adélique $\mathscr{F}$.

Soient $s, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathbf{V}(E)_v^{an} \times \mathbf{V}(E)_v^{an} \to \mathbf{V}(E)_v^{an}$ respectivement le morphisme de K_v-espaces analytiques induit par l'opération de soustraction de E et les deux projections. Pour toutes parties $X_1, X_2 \subset \mathbf{V}(E)_v^{an}$ on pose

$$d_v(X_1,X_2) := \inf\{p_v(s(x)) : \mathrm{pr}_i(x) \in X_i \text{ pour } i = 1,2\}.$$

On note μ_v la mesure d'instabilité sur $\mathbf{P}(E)$ en la place v (par rapport au morphisme f, au faisceau inversible $\mathscr{O}_E(1)$ et à la norme géométrique $u_{p,v}$). Pour tout point non nul $x \in \mathbf{V}(E)_v^{an}$, on a alors

$$\mu_v([x]) = \log \frac{d_v\left(\widehat{f}^{-1}\left(\widehat{f}(x)\right), \mathbf{V}(E/F)_v^{an}\right)}{p_v(x)},$$

où $[x] \in \mathbf{P}(E)^{an}$ est le point défini par x.

En conclusion, pour tout point fermé f-projetable $x \in \mathbf{P}(E)$, *i.e.*, appartenant à $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(E/F)$, et tout représentant non nul $\widehat{x} \in \mathbf{V}(E)$ (de même corps résiduel de x) on a

$$h_{\mathscr{F}}(f(x)) = h_{\mathscr{E}}(x) + \frac{1}{[K(x):K]} \sum_{v \in V_K} \deg(v) \log \frac{d_v\left(\widehat{f}^{-1}\left(\widehat{f}(\widehat{x})\right), \mathbf{V}(E/F)_v^{an}\right)}{p_v(\widehat{x})}$$

2 Hauteur sur le quotient de la théorie géométrique des invariants

2.1 Cadre et notation générale sur un corps global

Soient K un corps global et V_K l'ensemble de ses places. Soient X un K-schéma projectif et L un faisceau inversible ample sur X. Le K-schéma X s'identifie canoniquement au spectre homogène de la K-algèbre graduée de type fini

$$A := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d}).$$

On suppose qu'un K-schéma en groupes réductif G agit sur le K-schéma X et de manière équivariante sur le faisceau inversible L. Le K-groupe réductif agit alors linéairement sur la K-algèbre A et la sous-K-algèbre des invariants

$$A^G := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d})^G$$

est une K-algèbre graduée de type fini.

Soit X^{ss} l'ouvert des points semi-stables de X sous l'action du K-groupe réductif G et par rapport au faisceau inversible L. L'inclusion $A^G \subset A$ induit un morphisme surjectif G-invariant de K-schémas

$$\pi : X^{ss} \longrightarrow Y$$

dit *morphisme quotient*. Comme la K-algèbre graduée A^G est de type fini, pour tout nombre entier $D \geq 1$ assez divisible il existe un faisceau inversible ample M_D sur Y et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur X^{ss},

$$\varphi_D : \pi^* M_D \longrightarrow L|_{X^{ss}}^{\otimes D},$$

compatible à l'action de G. À travers l'isomorphisme φ_D les sections globales du faisceau inversible M_D s'identifient aux sections globales G-invariantes du faisceau inversible $L^{\otimes D}$. En sous-entendant cette identification, le morphisme π est alors le morphisme de K-schémas associé à l'inclusion de K-algèbres graduée

$$B_D := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(Y, M_D^{\otimes d}) \longrightarrow A_D := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes Dd})$$

Le morphisme π est alors une projection au sens de la section 1.1 et un point $x \in X$ est π-projetable (resp. non π-projetable) si et seulement s'il est semi-stable (resp. unstable).

2.2 Rappels des résultats locaux

On revient aux notations générales introduites à la section précédente 2.1. Soit v une place de K et $u_{L,v}$ une norme géométrique continue sur le faisceau inversible L. On considère la fonction des minima sur les orbites de G définie pour tout $s \in \mathbf{V}(L)_v^{an}$ par

$$u_{L,v}^G(s) := \inf\{u_{L,v}(s') : s' \in G_v^{an} \cdot s\}.$$

En termes de métriques sur les sections du faisceau inversible L, pour tout point $x \in X^{ss}$ et pour toute section non nulle $s \in x^*L$, on a

$$\|s\|_{L,v}^G(x) = \sup_{x' \in G_v^{an} \cdot x} \|s\|_{L,v}(x')$$

(ici on a fait un abus du terme métrique car chacun des termes vaut $+\infty$ quand x est unstable).

Soit $\pi[M] : \mathbf{V}(L|_{X^{ss}}^{\otimes D}) \to \mathbf{V}(M)$ le morphisme surjectif de K-schémas induit par l'isomorphisme φ_D. On considère la norme géométrique sur les fibres de π,

$$u_{M,v} := \pi[M]_{\downarrow} u_{L^{\otimes D},v} : \mathbf{V}(M) \longrightarrow \mathbf{R}_+.$$

Puisque le morphisme π est G-invariant, pour tout point $s \in \mathbf{V}(L^{\otimes D})$ au dessus d'un point semi-stable, on a

$$u_{M,v}(\pi[M](s)) \leq u_{L^{\otimes D},v}^G(s).$$

On suppose que la norme géométrique u_L soit plurisousharmonique en tant que fonction sur $\mathbf{V}(L)$ et qu'elle soit invariante sous l'action d'un sous-groupe compact maximal de G_v^{an}. Le Théorème II.2.18 affirme alors que l'inégalité précédent est une égalité et la norme géométrique $u_{M,v}$ des minima sur les fibres de π est continue.

Soit μ_v la mesure de non projetabilité en la place v (par rapport au morphime π, au faisceau inversible L et à la norme géométrique u_L) : dans le contexte de la théorie géométrique des invariants on l'appelera plutôt *mesure d'instabilité*.

En vertu du Théorème II.2.18 la mesure d'instabilité $\mu_v : |X_v^{an}| \to [-\infty, 0]$ est une fonction continue pour tout point $x \in X_v^{an}$ et tout point non nul $s \in \mathbf{V}(L)_v^{an}$ au dessus de x, on a

$$\mu_v(x) = \log \frac{u_{L,v}^{G}(x)}{u_{L,v}(x)}.$$

En termes de métriques sur les sections du faisceau inversible L, l'égalité précédente se reformule comme il suit : pour tout point $x \in X_v^{an}$ et toute section non nulle $s \in x^* L$ on a

$$\mu_v(x) = \inf_{x' \in G_v^{an} \cdot x} \frac{\|s\|_{L,v}(x)}{\|s\|_{L,v}(x')}.$$

2.3 Application aux hauteurs

On revient aux notations générales introduites à la section 2.1. Soient $\boldsymbol{u}_L$ une famille adélique de normes géométriques sur le faisceau inversible L et $\mathscr{L} = (L, \boldsymbol{u}_L)$ le faisceau inversible adélique correspondant.

On suppose que pour toute place v, la norme géométrique u_v soit plurisousharmonique en tant que fonction sur $\mathbf{V}(L)$ et invariante sous l'action d'un sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}_v$ de G_v^{an}. Pour tout nombre entier $D \geq 1$, d'après le Théorème II.2.18 la norme géométrique des minima sur les fibres de π,

$$u_{M,v} := \pi[M]_{\downarrow} u_{L^{\otimes D},v} : \mathbf{V}(M) \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

est continue. En outre, sa construction est compatible à la construction des normes géométriques provenant d'un modèle entier (Corollaire II.2.21).

On assume que la collection de sous-groupes compacts maximaux $\{\mathbf{U}_v : v \in V_K\}$ soit « adélique », c'est-à-dire, qu'il existe un ouvert non vide $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{S}_K$ et un $\mathfrak{V}$-groupe réductif $\mathfrak{G}$ tel que pour tout point fermé $v \in \mathfrak{V}$ le sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}_v$ soit déduit du K_v°-groupe réductif $\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{V}} K_v^{\circ}$. La famille de normes géométriques sur le faisceau inversible M_D,

$$u_{M,v} := \left\{ u_{M,v} = \pi[M]_{\downarrow} u_{L^{\otimes D},v} : v \in V_K \right\},$$

est alors adélique. On note $\mathscr{M}_D = (M_D, \boldsymbol{u}_{M_D})$ le faisceau inversible adélique associé.

Définition 2.1. Avec les notations introduites avant, on pose

$$h_{\min}((X, \mathscr{L}) /\!/ G) := \frac{1}{D} h_{\min}(Y, \mathscr{M}_D) = \inf \left\{ \frac{1}{D} h_{\mathscr{M}_D}(y) : y \in Y \text{ point fermé} \right\}$$

Puisque la construction de la métrique des minima sur les fibre est compatible aux puissances tensorielles, la définition de $h_{\min}((X, \mathscr{L}) /\!/ G)$ ne dépend pas du nombre entier assez divisible $D \geq 1$ choisi.

Scholie 2.2. *Soient* X *un* K*-schéma projectif muni d'un faisceau inversible ample* L*. Soit* G *un* K*-groupe réductif qui agit sur le* K*-schéma* X *et de manière équivariante sur le faisceau inversible* L*. Soient* $X^{ss}(L)$ *l'ouvert des points semi-stables de* X *sous l'action de* G *et par rapport au faisceau inversible* L *et*

$$\pi : X^{ss}(L) \longrightarrow Y := \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 1} \Gamma(X, L^{\otimes d})^G \right)$$

le morphisme quotient.

Soient $\mathrm{D} \geq 1$ *un nombre entier divisible et* $\mathrm{M_D}$ *un faisceau inversible ample sur* Y *muni d'un isomorphisme de faisceaux inversibles sur* $\mathrm{X^{ss}(L)}$*,*

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \pi^* \mathrm{M_D} \longrightarrow \mathrm{L}|^{\otimes \mathrm{D}}_{\mathrm{X^{ss}(L)}},$$

compatible à l'action de G*.*

Soit $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ *une famille adélique de normes géométriques sur* L *telle que, pour tout* $v \in \mathrm{V_K}$*, la norme géométrique* $u_{\mathrm{L},v}$ *soit plurisousharmonique et invariante sous l'action d'un sous-groupe compact maximal* $\mathbf{U}_v$ *de* $\mathrm{G}_v^{\mathrm{an}}$*. On suppose qu'il existe un ouvert non vide* $\mathfrak{V}$ *de* $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$ *et un* $\mathfrak{V}$*-groupe réductif* $\mathfrak{G}$ *tel que pour tout point fermé* $v \in \mathfrak{V}$ *le sous-groupe compact maximal* $\mathbf{U}_v$ *soit déduit du* K_v°*-groupe réductif* $\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{V}} \mathrm{K}_v^\circ$*.*

Alors, avec les notations introduites avant on a :

i. la famille de normes géométriques sur le faisceau inversible $\mathrm{M_D}$*,*

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{M_D}} = \left\{\pi[\mathrm{M_D}]_{\downarrow} u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}},v} : v \in \mathrm{V_K}\right\}$$

est adélique ;

ii. pour tout point fermé semi-stable $x \in \mathrm{X^{ss}}$ *on a :*

$$h_{\mathscr{L}}(x) + \frac{1}{[\mathrm{K}(x):\mathrm{K}]} \sum_{v \in \mathrm{V_K}} \deg(v) \mu_v(x) = \frac{1}{\mathrm{D}} h_{\mathscr{M}_{\mathrm{D}}}(\pi(x)); \tag{2.3.1}$$

iii. l'inégalité suivante est vérifiée :

$$h_{\min}(\mathrm{X^{ss}(L)}, \mathscr{L}) \geq h_{\min}((\mathrm{X}, \mathscr{L}) /\!/ \mathrm{G}) > -\infty.$$

3 Quotient et torseurs : version géométrique

3.1 Forme tordue par un fibré principal

3.1.1. Torseurs. — Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes.

Définition 3.1. Un G-*torseur* (ou G-*fibré principal*) sur S est un S-schéma T muni d'une action à droite $\alpha : \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{T}$ de G tel que

- le morphisme $(\mathrm{pr_T}, \alpha) : \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ est un isomorphisme ;
- le morphisme structural $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ admet des sections localement pour la topologie de Zariski, *i.e.* il existe un recouvrement ouvert $\mathrm{S} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$ et pour tout $i \in \mathrm{I}$ une section $t_i : \mathrm{S}_i \to \mathrm{G}$ du morphisme structural $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$. On dira que T se trivialise sur un tel recouvrement.

On dira qu'un G-torseur T est trivial si le morphisme structural $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ admet une section globale $\mathrm{S} \to \mathrm{T}$.

Si T est un G-torseur, le morphisme structural $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est surjectif. Si T se trivialise sur un recouvrement ouvert $\mathrm{S} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$ alors, pour tout $i \in \mathrm{I}$, le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i &\longrightarrow \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i \\ g &\longmapsto t_i \cdot g \end{aligned}$$

est un isomorphisme qu'on désigne encore par t_i.

Exemple 3.2 (Torseurs du groupe linéaire)**.** Soit S un schéma et $n \geq 1$ un nombre entier. Pour tout faisceau de $\mathscr{O}_S$-modules E localement libre de rang n, le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Iso}}_S(\mathscr{O}_S^n, \mathrm{E}) : \ \{\text{S-schémas}\} &\longrightarrow \{\text{ensembles}\} \\ \tau : \mathrm{S}' \to \mathrm{S} &\longmapsto \mathrm{Iso}_{\mathscr{O}_{S'}\text{-mod}}(\mathscr{O}_{S'}^n, \tau^*\mathrm{E}) \end{aligned}$$

est représentable par un S-schéma $\mathbf{Iso}_S(\mathscr{O}_S^n, \mathrm{E})$. Le S-schéma en groupes $\mathbf{GL}(n)_S$ agit à droite sur le S-schéma $\mathbf{Iso}_S(\mathscr{O}_S^n, \mathrm{E})$. Par définition de faisceau localement libre de rang n, cette action muni le S-schémas $\mathbf{Iso}_S(\mathscr{O}_S^n, \mathrm{E})$ de la structure de $\mathbf{GL}(n)_S$-torseur.

D'autre part, si T est un $\mathbf{GL}(n)_S$-torseur qui se trivialise sur un recouvrement ouvert $\mathrm{S} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$ par des sections $t_i : \mathrm{S}_i \to \mathrm{T}$, les isomorphismes de faisceaux de $\mathscr{O}_{S_{ij}}$-modules associés

$$t_j^{-1} t_i : \mathscr{O}_{S_{ij}}^n \longrightarrow \mathscr{O}_{S_{ij}}^n$$

satisfont à la condition de cocycle. Les faisceaux de $\mathscr{O}_{S_{ij}}$-modules $\mathscr{O}_{S_{ij}}^n$ se recollent le long des $t_j^{-1} t_i$ en un faisceau de $\mathscr{O}_S$-modules E_T localement libre de rang n muni d'un isomorphisme $\mathbf{GL}(n)_S$-équivariant de S-schémas

$$\mathbf{Iso}_S(\mathscr{O}_S^n, \mathrm{E}_\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{T}.$$

Les classes d'isomorphisme de $\mathbf{GL}(n)_S$-torseurs s'identifient donc aux classes d'isomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_S$-modules localement libres de rang n.

Exemple 3.3 (Torseurs d'un produit de groupes)**.** Soient S un schéma et G, G' des S-schémas en groupes. Si T, T' sont respectivement un torseur de G et G′, alors le S-schémas $\mathrm{T} \times_S \mathrm{T}'$ est naturellement muni d'une action à droite de S-schéma en groupes $\mathrm{G} \times_S \mathrm{G}'$ qui le munit de la structure de $(\mathrm{G} \times_S \mathrm{G}')$-torseur.

D'autre part, si U est un $(\mathrm{G} \times_S \mathrm{G}')$-torseur qui se trivialise sur un recouvrement ouvert $\mathrm{S} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$ par des sections $u_i : \mathrm{S}_i \to \mathrm{U}$, pour tout $i, j \in \mathrm{I}$ l'isomorphisme de $\mathrm{S}_{ij} = (\mathrm{S}_i \cap \mathrm{S}_j)$-schémas

$$u_j^{-1} u_i : \left(\mathrm{G} \times_S \mathrm{S}_{ij}\right) \times_{S_{ij}} \left(\mathrm{G}' \times_S \mathrm{S}_{ij}\right) \longrightarrow \left(\mathrm{G} \times_S \mathrm{S}_{ij}\right) \times_{S_{ij}} \left(\mathrm{G}' \times_S \mathrm{S}_{ij}\right)$$

est donné par la multiplication d'un S_{ij}-point (g_{ij}, g'_{ij}) du S-schéma en groupes $\mathrm{G} \times_S \mathrm{G}'$. Les S_{ij}-points g_{ij} (resp. g'_{ij}) satisfont à la condition de cocycle et les S_i-schémas $\mathrm{G} \times_S \mathrm{S}_i$ (resp. $\mathrm{G}' \times_S \mathrm{S}_i$) se recollent les longs les isomorphismes donnés par la multiplication par g_{ij} (resp. g'_{ij}) en un G-torseur T (resp. un G′-torseur T′) muni d'un morphisme G-équivariant $p : \mathrm{U} \to \mathrm{T}$ (resp. un morphisme G′-équivariant $p' : \mathrm{U} \to \mathrm{T}'$). De plus, le morphisme $(\mathrm{G} \times_S \mathrm{G}')$-équivariant de S-schéma

$$(p, p') : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T} \times_S \mathrm{T}'$$

qui en résulte est un isomorphisme.

Les classes d'isomorphisme de $(\mathrm{G} \times_S \mathrm{G}')$-torseurs s'identifient donc à couples formé par une classe d'isomorphisme de G-torseurs et une classe d'isomorphisme de G′-torseurs.

3.1.2. Définition et existence de la forme tordue. — Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes.

Définition 3.4. Soient T un G-torseur sur S et X un S-schéma muni d'une action à gauche de G. Le S-schéma en groupes G agit à gauche sur le S-schéma $\mathrm{T} \times_S \mathrm{X}$ par

$$g \cdot (t, x) = (t \cdot g^{-1}, g \cdot x).$$

Si le quotient catégorigue de $\mathrm{T} \times_S \mathrm{X}$ par G existe (on verra que c'est toujours le cas) on l'appelle la *forme tordue de* X *par* T et on le note

$$\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_S \mathrm{X}.$$

Proposition 3.5. *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes et* T *un* G*-torseur. Si* X *est un* S*-schéma muni d'une action à gauche de* G*, alors la forme tordue de* X *par* T *existe. En outre, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i. *structure locale : si* $\mathrm{S} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$ *est un recouvrement ouvert sur lequel* T *se trivialise par des sections* t_i*, pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *il existe un unique isomorphisme* $(\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i)$*-invariant de* S_i*-schémas*

$$\theta_i : \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i \longrightarrow \left(\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X}\right) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$$

tel que pour tout $i, j \in \mathrm{I}$ *le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}} (\mathrm{S}_i\cap \mathrm{S}_j) \arrow[r, "\theta_i"] \arrow[d] & \left(\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X}\right) \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{S}_i\cap \mathrm{S}_j) \arrow[d, equal] \\ (t_j^{-1}\circ t_i)\cdot x & \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}} (\mathrm{S}_i\cap \mathrm{S}_j) \arrow[r, "\theta_j"] & \left(\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X}\right) \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{S}_i\cap \mathrm{S}_j) \end{tikzcd}$$

soit commutatif;

ii. *compatibilité aux changements de base : soit* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme de schémas. Le* S'*-schémas* $\mathrm{T}' := \mathrm{T}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *qui se déduit par changement de base est un torseur du* S'*-schémas en groupes* $\mathrm{G}' := \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'$*. Le* S'*-schémas* $\mathrm{X}' := \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ *est naturellement muni d'une action du* S'*-schéma en groupes* G' *et le morphisme naturel de* S'*-schémas*

$$\mathrm{T}' \overset{\mathrm{G}'}{\times}_{\mathrm{S}'} \mathrm{X}' \longrightarrow \left(\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X}\right) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$$

est un isomorphisme.

iii. *fonctorialité : soient* X, Y *des* S*-schémas munis d'une action à gauche de* G *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* G*-équivariant de* S*-schémas ; le morphisme*

$$\mathrm{id}_{\mathrm{T}} \times f : \mathrm{T}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$$

est G*-équivariant et il induit par propriété universelle du quotient catégorique un morphisme de* S*-schémas*

$$\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} f : \mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}.$$

L'association $f \mapsto \mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} f$ *est compatible à la composition.*

iv. *compatibilité aux propriétés locales sur la base : soient* X, Y *des* S*-schémas munis d'une action à gauche de* G *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* G*-équivariant de* S*-schémas ; pour que le morphisme de* S*-schémas* f *soit une immersion ouverte (resp. une immersion fermée, resp. séparé, resp. quasi-compact, resp. localement de type fini, resp. localement de présentation finie, resp. plat, resp. lisse, resp. affine, resp. propre, resp. projectif) il faut et il suffit que le morphisme de* S*-schémas*

$$\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} f : \mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$$

ait la même propriété ;

v. *compatibilité aux produits fibrés : soient* X_1, X_2 *et* Y *des* S*-schémas munis d'une action à gauche de* G *et* $f_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{Y}$, $f_2 : \mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}$ *des morphismes* G*-équivariants de* S*-schémas ; alors, le morphisme naturel*

$$\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \left(\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_2\right) \longrightarrow \left(\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_1\right) \times_{\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}} \left(\mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2\right)$$

déduit des projections $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_1$, $\mathrm{pr}_2 : \mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_2$*, qui sont des morphismes* G*-équivariants, est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ un recouvrement ouvert sur lequel le G-torseur T se trivialise par des sections $t_i : S_i \to T$. Pour tout $i, j \in I$ on note S_{ij} l'intersection des ouverts S_i et S_j et considère l'isomorphisme de S_{ij}-schémas

$$\begin{aligned}\omega_{ij} : \quad X \times_S S_{ij} &\to X \times_S S_{ij}\\ x &\longmapsto (t_j^{-1} t_i)\cdot x.\end{aligned}$$

Les isomorphismes ω_{ij} satisfont à la condition de cocycle : les S_{ij}-schémas $X \times_S S_{ij}$ se recollent donc en un S-schémas X_T muni, pour tout $i \in I$, d'un isomorphisme de S_i-schémas

$$\theta_i : X \times_S S_i \longrightarrow X_T \times_S S_i$$

tels que, pour tout $i, j \in I$, le diagramme de S_{ij}-schémas

$$\begin{tikzcd} X \times_S S_{ij} \arrow[r, "\theta_i"] \arrow[d, "t_j^{-1} t_i"'] & X_T \times_S S_{ij} \arrow[d, equal] \\ X \times_S S_{ij} \arrow[r, "\theta_j"] & X_T \times_S S_{ij} \end{tikzcd}$$

soit commutatif (où on a noté par $t_j^{-1} t_i$ la multiplication par cet élément). On montre que le S-schéma T satisfait à la propriété universelle du quotient catégorique de $T \times_S X$ par T. Il s'agit de construire d'abord un morphisme G-invariant de S-schémas $\pi : T \times_S X \to X_T$. Pour tout $i \in I$ on considère le morphisme composé de S_i-schémas

$$\begin{aligned}\pi_i : \ (T \times_S S_i) \times_{S_i} (X \times_S S_i) &\longrightarrow (G \times_S S_i) \times_{S_i} (X \times_S S_i) \longrightarrow X \times_S S_i\\ (t,x) &\longmapsto (t_i^{-1} t, x) \longmapsto (t_i^{-1} t)\cdot x\end{aligned}$$

Le morphisme π_i est $(G \times_S S_i)$-invariant. Puisque pour tout $i, j \in I$ le diagramme de S_{ij}-schémas

$$\begin{tikzcd} \big(T \times_S S_{ij}\big) \times_{S_{ij}} \big(X \times_S S_{ij}\big) \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, equal] & X \times_S S_{ij} \arrow[d, "t_j^{-1} t_i"] \\ \big(T \times_S S_{ij}\big) \times_{S_{ij}} \big(X \times_S S_{ij}\big) \arrow[r, "\pi_j"] & X \times_S S_{ij} \end{tikzcd}$$

est commutatif, les morphismes π_i se recollent en un morphisme G-invariant de S-schémas $\pi : T \times_S X \to X_T$. Il s'agit ensuit de montrer que le morphisme π est universel par la propriété de G-invariance, c'est-à-dire, que pour tout S-schéma Y et tout morphisme G-invariant de S-schémas $f : T \times_S X \to Y$, il existe un unique morphisme de S-schémas $f' : X_T \to Y$ tel que $f = f' \circ \pi$. Pour tout $i \in I$, le morphisme de S_i-schémas

$$\begin{aligned}\varepsilon_i : \qquad X \times_S S_i &\longrightarrow (T \times_S S_i) \times_{S_i} (X \times_S S_i)\\ x &\longmapsto (t_i, x)\end{aligned}$$

est une section du morphisme π_i. On pose $f'_i := (f \times_S S_i) \circ \varepsilon_i$. Pour tout S_i-schéma S', pour tout S'-point (t,x) du S_i-schéma $(T \times_S S_i) \times_{S_i} (X_\times S_i)$ par G-invariance de f on a

$$\begin{aligned} f(t,x) &= f(t_i(t^{-1}t_i)^{-1}, (t^{-1}t_i)(t^{-1}t_i)^{-1}\cdot x)\\ &= f(t_i, (t^{-1}t_i)^{-1}\cdot x)\\ &= f\big(\varepsilon_i\big((t_i^{-1}t)\cdot x\big)\big)\\ &=: f'_i(\pi_i(t,x)).\end{aligned}$$

Autrement dit, on $f \times_S S_i = f'_i \circ \pi_i$. Puisque le morphisme π_i est surjectif, le morphisme f'_i est l'unique ayant cette propriété. Un calcul similaire montre que pour tout $i, j \in I$ le diagramme de S_{ij}-schémas

$$\begin{tikzcd} X \times_S S_{ij} \arrow[r, "f'_i"] \arrow[d, "t_j^{-1} t_i"'] & Y \times_S S_{ij} \arrow[d, equal] \\ X \times_S S_{ij} \arrow[r, "f'_j"] & Y \times_S S_{ij} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Les morphismes f_i se recollent donc en un morphisme de S-schémas $f : X_T \to Y$ tel que $f = f' \circ \pi$. Ceci achève la preuve de l'existence du quotient et du point (i).

La fonctorialité est une conséquence évidente de la propriété universelle du quotient catégorique. Les autres propriétés découlent aisément de la description locale. □

3.1.3. Forme tordue d'un sous-groupe normal. — Soient G un S-schéma en groupes. Soit H un sous-S-schéma en groupes normal de G et T un G-torseur. L'action par conjugaison de G sur lui-même induit une action de G sur le S-schéma en groupes H. En outre, les morphismes définissant les lois de groupes de H sont G-équivariants. La forme tordue de H par T,

$$H_T := T \overset{G}{\times}_S H,$$

est alors naturellement muni de la structure de S-schéma en groupes. Cela s'applique en particulier quand H = G. Si H un sous-S-schéma en groupes normal de G, la forme tordue de H par T est un sous-S-schéma en groupes normal de G_T.

En guise d'exemple, soient $n \geq 1$ un nombre entier, $G = \mathbf{GL}(n)_S$ et $H = \mathbf{SL}(n)_S$. Pour tout faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules E localement libre de rang n, on a

$$\mathrm{Iso}_S(E, \mathcal{O}_S^n) \overset{\mathbf{GL}(n)}{\times}_S \mathbf{GL}(n)_S = \mathbf{GL}(E),$$
$$\mathrm{Iso}_S(E, \mathcal{O}_S^n) \overset{\mathbf{GL}(n)}{\times}_S \mathbf{SL}(n)_S = \mathbf{SL}(E).$$

3.1.4. Forme tordue d'une action. — Soient X un S-schéma muni d'une action d'un S-schéma en groupes G. Si G agit sur lui-même par conjugaison, le morphisme définissant l'action sur X,

$$\sigma : G \times_S X \longrightarrow X$$

est G-équivariant. Si T est un G-torseurs, et G_T, X_T respectivement la forme tordue de G, X par T, le morphisme de S-schémas qui se déduit de σ,

$$\sigma_T : G_T \times_S X_T \longrightarrow X_T$$

définit une action du S-schéma en groupes G_T sur le S-schéma X_T.

3.1.5. Forme tordue d'un faisceau quasi-cohérent. — Soit X un S-schéma muni d'une action de G et F un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules muni d'une action équivariante de G. Pour tout G-torseur T, soient $\mathrm{pr}_X : T \times_S X \to X$ la projection sur X et

$$\pi_T : T \times_S X \longrightarrow X_T := T \overset{G}{\times}_S X$$

la projection sur le quotient. Puisque la projection sur X est G-équivariant, le faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{T\times_S X}$-modules $\mathrm{pr}_X^* F$ est muni d'une action équivariant du S-schéma en groupes G. Pour tout ouvert $U \subset X_T$, l'image réciproque $\pi_X^{-1}U$ est un ouvert G-stable de $T\times_S X$ et on pose

$$F_T(U) := \Gamma\left(\pi_X^{-1}(U), \mathrm{pr}_X^* F\right)^G.$$

On définit ainsi un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules sur le S-schéma X_T.

Proposition 3.6. *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes et* T *un* G*-torseur. Soit* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_S$*-modules muni d'une action linéaire du* S*-schéma en groupes* G*. Alors, il existe un unique (à un unique isomorphisme près) faisceau de* $\mathcal{O}_{X_T}$*-modules* F_T *muni d'un isomorphisme*

$$T \overset{G}{\times}_S \mathbf{V}(F) \longrightarrow \mathbf{V}(F_T).$$

En outre, les propriétés suivantes sont satisfaites :

i. *structure locale : si* $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ *est un recouvrement ouvert sur lequel* T *se trivialise par des sections* t_i *et pour tout* $i \in I$
$$\theta_i : X\times_S S_i \longrightarrow \left(T \overset{G}{\times}_S X\right)\times_S S_i$$
est l'isomorphisme canonique $(G\times_S S_i)$*-invariant de* S_i*-schémas, il existe un unique isomorphisme* $(G\times_S S_i)$*-invariant de faisceaux cohérents de* $\mathcal{O}_{X\times_S S_i}$*-modules*
$$\varphi_i : \theta_i^* F_T\big|_{(T\overset{G}{\times}_S X)\times_S S_i} \longrightarrow F\big|_{X\times_S S_i}$$
tel que pour tout $i, j \in I$ *le diagramme suivant*
$$\begin{array}{ccccc} x & & \theta_i^* F_T\big|_{(T\overset{G}{\times}_S X)\times_S(S_i\cap S_j)} & \xrightarrow{\varphi_i} & F\big|_{X\times_S(S_i\cap S_j)} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\| \\ (t_j^{-1}\circ t_i)\cdot x & & \theta_j^* F_T\big|_{(T\overset{G}{\times}_S X)\times_S(S_i\cap S_j)} & \xrightarrow{\varphi_j} & F\big|_{X\times_S(S_i\cap S_j)} \end{array}$$
soit commutatif ;

ii. *fonctorialité : soient* E, F *des faisceaux quasi-cohérents munis d'une action équivariante du* S*-schéma en groupes* G *et* $\varphi : E \to F$ *un homomorphisme* G*-équivariant de faisceaux de* $\mathcal{O}_X$*-modules. On note* $f : \mathbf{V}(F) \to \mathbf{V}(E)$ *le morphisme de* S*-schémas qui s'en déduit. Il existe un unique homomorphisme de faisceaux de* $\mathcal{O}_S$*-modules*
$$\varphi_T : E_T \to F_T$$
qui induit le morphismes schémas $f_T : \mathbf{V}(F)_T \to \mathbf{V}(E)_T$ *;*

iii. *compatibilité aux changements de base : soient* Y *un* S*-schéma muni d'une action du* S*-schéma* G *et* $f : Y \to X$ *un morphisme* G*-équivariant de* S*-schémas. On note* Y_T *la forme tordue de* Y *par* T *et* $f_T : Y_T \to X_T$ *le morphisme de* S*-schémas qui s'en déduit. Alors, on a un isomorphisme canonique de faisceau de* $\mathcal{O}_{Y_T}$*-modules*
$$f^* F_T \longrightarrow \left(f^* F\right)_T$$

iv. *compatibilité aux propriétés de finitude : pour que le faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_X$*-modules* F *soit localement libre (resp. de type fini, resp. de présentation finie) il faut et il suffit que le faisceau de* $\mathcal{O}_{X_T}$*-modules* F_T *ait la même propriété ;*

v. *compatibilité aux propriétés locales sur la base : soient* $\alpha : X \to S$, $\alpha_T : X_T \to S$ *les morphismes structuraux. On suppose que le faisceau quasi-cohérent* F *soit inversible et on le note* L.

Pour que L *soit engendré par ses sections globales respectivement à* α, *i.e. l'homomorphisme d'adjonction* $\alpha^*\alpha_*L \to L$ *soit surjectif, (resp.* α*-ample, resp. très* α*-ample) il faut et il suffit que le faisceau inversible* L_T *soit engendré par ses sections globales respectivement à* α_T, *i.e. l'homomorphisme d'adjonction* $\alpha_T^*\alpha_{T*}L_T \to L_T$ *soit surjectif, (resp.* α_T*-ample, resp. très* α_T*-ample).*

vi. *compatibilité aux suites exactes : soient* F_1, F_2, F_3 *des faisceaux quasi-cohérents de* $\mathcal{O}_X$*-modules muni d'une action équivariante de* G *et*

$$F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_3$$

une suite exacte G*-équivariante ; la suite de faisceaux de* $\mathcal{O}_{X_T}$*-modules qui s'en déduit*

$$(F_1)_T \xrightarrow{\varphi_1} (F_2)_T \xrightarrow{\varphi_2} (F_3)_T$$

est alors exacte.

Démonstration. Comme dans la démonstration de la Proposition 3.5 on procède en construisant l'objet localement et en montrant ensuite qu'il satisfait aux propriétés universelles qui le décrivent.

Soient T un G-torseur et $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ un recouvrement ouvert de S sur lequel T se trivialise par des sections t_i. Pour tout $i \in I$ soit $X_i := X \times_S S_i$ et pour tout $i, j \in I$ soient $S_{ij} = S_i \cap S_j$, $X_{ij} := X \times_S S_{ij}$. La multiplication par $t_j^{-1} \circ t_i$ induit un isomorphisme de S_{ij}-schémas

$$\mathbf{V}(F|_{X_{ij}}) \longrightarrow \mathbf{V}(F|_{X_{ij}})$$

qui, par linéarité de l'action équivariante de G, provient d'un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{X_{ij}}$-modules

$$\varphi_{ij} : F|_{X_{ij}} \longrightarrow F|_{X_{ij}}.$$

La collection d'isomorphismes $\{\varphi_{ij}\}$ satisfait à la condition de cocycle. Les faisceaux quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{S_i}$-modules $F|_{S_i}$ se recollent le long les isomorphismes φ_{ij} en un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{X_T}$-modules F'_T. Pour tout $i \in I$, le morphisme de S_i-schémas

$$\begin{aligned} \pi_i : (T \times_S S_i) \times_{S_i} (\mathbf{V}(F) \times_S S_i) &\longrightarrow (G \times_S S_i) \times_{S_i} (\mathbf{V}(F) \times_S S_i) \longrightarrow \mathbf{V}(F) \times_S S_i \\ (t, s) &\longmapsto (t_i^{-1} t, s) \longmapsto (t_i^{-1} t) \cdot s \end{aligned}$$

est $(G \times_S S_i)$-invariant. Les morphismes π_i se recollent en un morphisme G-invariant de S-schémas

$$\pi[F]'_T : T \times_S \mathbf{V}(F) \longrightarrow \mathbf{V}(F'_T),$$

correspondant à un isomorphisme G-équivariant de faisceaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_{T\times_S X}$-modules $\varepsilon : \pi_T^* F'_T \to \mathrm{pr}_X^* F$. En outre, par propriété universelle du quotient catégorique on a un isomorphisme de S-schémas

$$\mathbf{V}(F'_T) \longrightarrow T \overset{G}{\times}_S \mathbf{V}(F).$$

Comme le morphisme π_T est G-invariant, pour tout ouvert $U \subset X_T$ et pour toute section s de F_T sur U, l'image $\varepsilon(\pi_T^* s)$ de s par l'homomorphisme ε définit une section G-invariante du faisceau $\mathrm{pr}_X^* F$ sur l'ouvert $\pi_T^{-1}(U)$, *i.e.*, une section du faisceau F_T sur U. On définit de cette manière un homomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\psi : F'_T \longrightarrow F_T.$$

Il s'agit de montrer qu'il est un isomorphisme. La question étant locale sur S, on peut supposer le torseur T soit trivial. Dans ce cas F'_T et F_T s'identifient naturellement à F et le morphisme ψ est l'identité de F.

La fonctorialité découle de la définition en termes d'invariants et les autres propriétés suivent aisément de la description de la structure locale. □

3.1.6. Forme tordue d'un schéma affine. — Soient G un S-schéma en groups et A un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$-algèbres. Par abus de language on dit que G agit sur A s'il agit sur son spectre relatif $\mathbf{Spec}_S\,A$.

Pour tout G-torseur T, le faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules A_T est naturellement muni d'une structure de faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres induite par celle de A.

Proposition 3.7. *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes et* T *un* G*-torseur. Soit* A *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_S$*-algèbres muni d'une action du* S*-schéma en groupes* G*. Alors, il existe un unique (à un unique isomorphisme près) faisceau de* $\mathcal{O}_S$*-algèbres* A_T *muni d'un isomorphisme de* S*-schémas*

$$T \overset{G}{\times}_S \mathbf{Spec}_S\,A \longrightarrow \mathbf{Spec}_S\,A_T.$$

En outre les propriétés suivantes sont satisfaites :

i. fonctorialité : soient A, B *des faisceaux quasi-cohérents de* $\mathcal{O}_S$*-algèbres munis d'une action du* S*-schéma en groupes* G *et* $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme* G*-équivariant de faisceaux de* $\mathcal{O}_X$*-algèbres. On note* $f : \mathbf{Spec}_S\,B \to \mathbf{Spec}_S\,A$ *le morphisme de* S*-schémas qui s'en déduit. Il existe un unique homomorphisme de faisceaux de* $\mathcal{O}_S$*-modules*

$$\varphi_T : A_T \to B_T$$

qui induit le morphisme de S*-schémas* $f_T : (\mathbf{Spec}_S\,B)_T \to (\mathbf{Spec}_S\,A)_T$ *;*

ii. compatibilité aux changements de base : soient A *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_S$*-algèbres munie d'une action de* G *et* $\tau : S' \to S$ *un* S*-schéma. Le* S'*-schémas* $T' := T \times_S S'$ *qui se déduit par changement de base est un torseur du* S'*-schémas en groupes* $G' := G \times_S S'$*. Le* S'*-schémas* $X' := X \times_S T$ *est naturellement muni d'une action du* S'*-schéma en groupes* G' *et le morphisme naturel de* S'*-schémas*

$$T' \overset{G'}{\times}_{S'} X' \longrightarrow \mathbf{Spec}_S(\tau^* A_T)$$

est un isomorphisme.

iii. compatibilité aux propriétés de finitude : pour que le faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$*-algèbres* A *soit (de type fini, resp. de présentation finie) il faut et il suffit que le faisceau de* $\mathcal{O}_S$*-algèbres* A_T *ait la même propriété.*

3.1.7. Forme tordue d'un schéma projectif. — Soient S un schéma noethérien, $\alpha : X \to S$ un S-schéma projectif et L un faisceau inversible α-ample sur X. Le S-schéma X s'identifie canoniquement au spectre homogène relatif du faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées de type fini

$$A := \bigoplus_{d \geq 0} \alpha_*(L^{\otimes d}).$$

Si de plus L est engendré par ses sections globales, le faisceau inversible L correspond au faisceau inversible $\mathcal{O}_X(1)$ associé au faisceau de A-modules gradués A(1).

Proposition 3.8. *Soient* S *un schéma noethérien,* $\alpha : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un* S*-schéma projectif et* L *un faisceau inversible* α*-ample sur* X*. On suppose qu'un* S*-schéma en groupes séparé, quasi-compact et plat* G *agit sur le* S*-schéma* X *et de manière équivariante sur le faisceau inversible* L*.*

Pour tout G*-torseur* T*, la forme tordue par* T *de l'isomorphisme canonique* $f : \mathrm{X} \to \mathbf{Proj}_{\mathrm{S}}\,\mathrm{A}$ *induit un isomorphisme de* S*-schémas*

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \overset{\mathrm{G}}{\times}_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{Proj}_{\mathrm{S}}\,\mathrm{A}_{\mathrm{T}}.$$

Si de plus le faisceau inversible α*-ample* L *est engendré par ses sections globales, le faisceau inversible* L_{T} *s'identifie au faisceau inversible* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}}(1)$ *associé au faisceau de* A_{T}*-modules graduées* $\mathrm{A}_{\mathrm{T}}(1)$*.*

3.2 Formes tordues des quotients de la théorie géométrique des invariants

3.2.1. Compatibilité des constructions des invariants et des formes tordues. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes affine et H un sous-S-schéma en groupes fermé normal de G. En particulier H est affine sur S.

Soit T un G-torseur. La forme tordue H_{T} de H par T est un sous-S-schéma en groupes affine et normal du S-schéma en groupes affine G_{T} déduit en tordant le S-schéma en groupes G par T.

Proposition 3.9. *Soit* S *un schéma. Soit* G *un* S*-schéma en groupes affine et* H *un sous-*S*-schéma en groupes fermé normal de* G*. Soit* F *un faisceau quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$*-modules (resp. de* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres, de* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres graduées) muni d'une action linéaire de* G*.*

Soit T *un* G*-torseur. La forme tordue* F_{T} *de* F *par* T *est naturellement munie d'une action linéaire du* S*-schéma en groupes* G_{T} *et l'inclusion canonique* $(\mathrm{F}^{\mathrm{H}})_{\mathrm{T}}$ *dans* F_{T} *se factorise de manière unique à travers un isomorphisme de faisceaux de* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$*-modules (resp. de* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres, de* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres graduées)*

$$\left(\mathrm{F}^{\mathrm{H}}\right)_{\mathrm{T}} \longrightarrow \mathrm{F}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}_{\mathrm{T}}}.$$

Démonstration. Soient $\gamma : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural de G et $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}]$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{H}]$) le faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\gamma_*\mathcal{O}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\gamma_*\mathcal{O}_{\mathrm{H}}$). L'action linéaire de G sur F est définie par un homomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\sigma^\sharp : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}].$$

On désigne par $q^\sharp : \mathrm{F} \to \mathrm{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}]$ l'homomorphisme canonique de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules $v \mapsto v \otimes 1$. L'immersion fermée de H dans G correspond à un homomorphisme surjectif de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres

$$\pi : \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{H}]$$

et on désigne par $\sigma^\sharp_{\mathrm{H}}$ (resp. $q^\sharp_{\mathrm{H}}$) la composition de $\sigma^\sharp$ (resp. $q^\sharp$) avec l'homomorphisme

$$\mathrm{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{G}] \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{F}} \otimes \pi} \mathrm{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{H}] .$$

Le faisceau des invariants de F par H s'identifient par définition au noyau de l'homomorphisme $\sigma^\sharp_{\mathrm{H}} - q^\sharp_{\mathrm{H}}$, *i.e.*, la suite de faisceaux $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules suivante est exacte,

$$0 \longrightarrow \mathrm{F}^{\mathrm{H}} \longrightarrow \mathrm{F} \xrightarrow{\sigma^\sharp_{\mathrm{H}} - q^\sharp_{\mathrm{H}}} \mathrm{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{H}] .$$

En outre, les homomorphismes présents dans cette suite sont G-équivariants. La suite de faisceaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_S$-modules que l'on déduit en tordant par T,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (F^H)_T \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_T \arrow[r, "(\sigma_H^\sharp)_T - (q_H^\sharp)_T"] \arrow[d, equal] & (F \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[H])_T \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & (F^H)_T \arrow[r] & F_T \arrow[r, "\sigma_{H_T}^\sharp - q_{H_T}^\sharp"] & F_T \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[H_T]
\end{tikzcd}$$

est encore exacte. En particulier, l'inclusion naturelle de $(F^H)_T$ dans F_T se factorise à travers un isomorphisme

$$(F^H)_T \longrightarrow F_T^{H_T} := \operatorname{Ker}\left(\sigma_{H_T}^\sharp - q_{H_T}^\sharp\right),$$

ce qui achève la preuve. □

3.2.2. Le cas affine. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes affine et A un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$-algèbres. On suppose que le S-schéma en groupes G agit sur le spectre relatif $X = \mathbf{Spec}_S A$ de A. Soit T un G-torseur de G.

On suppose que S soit noethérien et qu'il existe un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules localement libre de rang fini E muni d'une action linéaire de G et une immersione fermée G-équivariante

$$\iota : X \longrightarrow \mathbf{V}(E).$$

La forme tordue E_T de E par T est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules localement libre de rang fini muni d'une action linéaire du S-schéma en groupes G_T. De plus, l'immersion fermée

$$\iota_T : T \overset{G}{\times}_S X := \mathbf{Spec}_S A_T \longrightarrow \mathbf{V}(E_T)$$

est G_T-équivariante.

Si les S-schémas en groupes G, H sont réductifs, alors leurs formes tordues par T, G_T, H_T le sont aussi : en fait, ils sont affines et lisses sur S et leurs fibres géométriques sont isomorphes respectivement à celles de G et H.

Proposition 3.10. *Soit* S *un schéma noethérien. Soit* $X = \mathbf{Spec}_S A$ *un* S*-schéma affine muni d'une action d'un* S*-groupe réductif* G*. Soit* H *un sous-*S*-groupe fermé normal et réductif de* G*.*

On suppose que S *soit noethérien et qu'il existe un faisceau de* $\mathcal{O}_S$*-modules localement libre de rang fini* E *muni d'une action linéaire de* G *et une immersione fermée* G*-équivariante* $\iota : X \to \mathbf{V}(E)$*. On désigne par* X/H *le quotient catégorique* $\mathbf{Spec}_S A^H$ *de* X *par* H *et* $\pi : X \to X/H$ *le morphisme quotient.*

Soient T *un* G*-torseur et* X_T *(resp.* G_T*, resp.* H_T*) la forme tordue de* X *(resp.* G*, resp.* H*) par* T*. Alors,*

$$\Psi_T : T \overset{G}{\times}_S (X/H) \longrightarrow X_T/H_T$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \overset{G}{\times}_S X \arrow[r, equal] \arrow[d, "T \overset{G}{\times}_S \pi"'] & X_T \arrow[d, "\pi_T"] \\
T \overset{G}{\times}_S (X/H) \arrow[r, "\Psi_T"] & X_T/H_T.
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (où $\pi_T : X_T \to X_T/H_T$ *est le morphisme quotient).*

Démonstration. D'après le Théorème I.3.13, le quotient catégorique de X par H (resp. de X_T par H_T) est le spectre relatif de la $\mathscr{O}_S$-algèbres des invariants A^H (resp. $A_T^{H_T}$). Il suffit d'utiliser la compatibilité de la construction des invariants à la construction des formes tordues (Proposition 3.9) pour terminer la preuve. □

3.2.3. Le cas projectif. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes affine, $\alpha : X \to S$ un S-schéma projectif et L un faisceau inversible α-ample. On suppose que le S-schéma en groupes G agit sur le S-schéma en X et de manière équivariante sur le faisceau inversible L. On considère le faisceau de $\mathscr{O}_S$-algèbres graduées

$$A := \bigoplus_{d \geq 0} \alpha_* \left(L^{\otimes d}\right).$$

Soit T un G-torseur. Le S-schéma en groupes G_T agit sur le S-schéma projectif $\alpha_T : X_T \to S$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible α_T-ample L_T.

Proposition 3.11. *Soit S un schéma noethérien. Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes réductif, $\alpha : X \to S$ un S-schéma projectif et L un faisceau inversible α-ample. On suppose que le S-schéma en groupes G agit sur le S-schéma en X et de manière équivariante sur le faisceau inversible L. On désigne par $X^{ss}(L)$ l'ouvert des points semi-stables de X sous l'action de H et par rapport au faisceau inversible L, $\beta : X^{ss}(L)/H \to S$ le quotient catégorique de $X^{ss}(L)$ par H.*

Soient T un G-torseur et $\alpha_T : X_T \to S$ (resp. G_T, resp. H_T, resp. L_T) la forme tordue de X (resp. G, resp. H, resp. L) par T. Alors,

i. le S-schéma en groupes G agit sur l'ouvert des points semi-stables $X^{ss}(L)$ et l'immersion ouverte de

$$X^{ss}(L)_T := T \overset{G}{\times}_S X^{ss}(L)$$

dans X_T identifie $X^{ss}(L)_T$ avec l'ouvert des points semi-stables $X_T^{ss}(L_T)$ de X_T sous l'action de H_T et par rapport au faisceau inversible L_T.

ii. soit $\beta_T : X_T^{ss}(L_T)/H_T \to S$ le quotient catégorique de $X_T^{ss}(L_T)$ par H_T ; il existe un unique isomorphisme de S-schémas

$$\Theta_T : T \overset{G}{\times}_S (X^{ss}(L)/H) \longrightarrow X_T^{ss}(L_T)/H_T$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \overset{G}{\times}_S X^{ss}(L) \arrow[r, equal] \arrow[d, "T \overset{G}{\times}_S \pi"'] & X_T^{ss}(L_T) \arrow[d, "\pi_T"] \\
T \overset{G}{\times}_S (X^{ss}(L)/H) \arrow[r, "\Theta_T"] & X_T^{ss}(L_T)/H_T.
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (où $\pi_T : X_T^{ss}(L_T) \to X_T^{ss}(L_T)/H_T$ est le morphisme quotient).

On suppose de plus que le schéma S soit de type fini sur un schéma universellement japonais. Pour tout nombre entier $D \geq 1$ assez divisible il existe un fasceau inversible β-ample M_D (resp. un faisceau inversible β_T-ample $M_{T,D}$) sur le S-schéma $X^{ss}(L)/H$ (resp. $X_T^{ss}(L_T)/H_T$) et un isomorphisme de faisceau inversibles

$$\varphi_D : \pi^* M_D \longrightarrow L|_{X^{ss}(L)}^{\otimes D} \qquad \left(\text{resp. } \varphi_{T,D} : \pi_T^* M_{T,D} \longrightarrow L_T|_{X_T^{ss}(L_T)}^{\otimes D}\right)$$

Si $(M_D)_T$ désigne le faisceau inversible sur le S-schéma $(X^{ss}(L)/H)_T$ déduit de M_D en le tordant par T, il existe un unique isomorphisme de faisceaux inversibles

$$\theta_T : \Theta_T^* M_{T,D} \longrightarrow (M_D)_T$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\left(T \overset{G}{\times}_S \pi\right)^* \Theta_T^* M_{T,D} \arrow[rr, equal] \arrow[d, "T \overset{G}{\times}_S \pi"'] & & \pi_T^* M_{T,D} \arrow[d, "\varphi_{T,D}"] \\
\left(T \overset{G}{\times}_S \pi\right)^* (M_D)_T \arrow[r, "(\varphi_D)_T"] & \left(L|^{\otimes D}_{X^{ss}(L)}\right)_T \arrow[r, equal] & L_T|^{\otimes D}_{X_T^{ss}(L_T)}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Comme le sous-S-schéma en groupes H de G est normal, le S-schéma en groupes G agit linéairement pour tout nombre entier $d \geq 1$ sur les sections globales H-invariants de $L^{\otimes d}$, $(\alpha_*(L^{\otimes d}))^H$. Le S-schéma en groupes G agit alors sur l'ouvert des points semi-stables $X^{ss}(L)$ de X sous l'action de H. Ensuite, l'égalité

$$X^{ss}(L)_T = X_T^{ss}(L_T)$$

peut être vérifiée localement sur S car les constructions des invariants et des formes tordues sont compatibles aux changements de base (plats). On peut supposer que le torseur T soit triviale, et donc l'énoncé l'est aussi.

Le quotient catégorique de $X^{ss}(L)$ par H (resp. de $X_T^{ss}(L_T)$ par H_T) est donné par le spectre homogène relatif du faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées des invariants

$$A^H := \bigoplus_{d\geq 0} \left(\alpha_*(L^{\otimes d})\right)^H \qquad \left(\text{resp. } A_T^{H_T} := \bigoplus_{d\geq 0} \left(\alpha_{T*}(L_T^{\otimes d})\right)^{H_T}\right).$$

La Propostion 3.9 affirme qu'on a un isomorphisme G_T-équivariant de faisceau de faisceaux $\mathcal{O}_S$-algèbres graduées

$$(A^H)_T \longrightarrow A_T^{H_T}.$$

Le reste de l'énonce suit aisément de cet isomorphisme. □

3.3 Isomorphisme canonique du quotient

Proposition 3.12. *Soit* S *un schéma noethérien. Soient* $\alpha : X \to S$ *un* S*-schéma projectif et plat, et* L *un faisceau inversible* α*-ample sur* X*. Soit* G *un* S*-schéma en groupes séparé, quasi-compact et plat. On suppose que le schéma en groupes* G *agit trivialement sur le* S*-schéma* X *et de manière équivariante sur le faisceau inversible* L.

Alors,

i. il existe un caractère χ_L *de* G*, i.e., un morphisme de* S*-schémas en groupes,* $\chi_L : G \to \mathbf{G}_{m,S}$*, tel que l'action de* G *sur* L *est induite par l'action par homothéties du* S*-groupe multiplicatif* $\mathbf{G}_{m,S}$ *sur* L *à travers le caractère* χ_L*.*

ii. pour tout nombre entier d*, l'action de* G *sur le faisceau inversible* $L^{\otimes d}$ *est induite par le caractère* $\chi_{L^{\otimes d}} := \chi_L^d$ *;*

iii. pour tout G*-torseur* T*, l'action de* G *sur* X *étant triviale, il existe un isomorphisme canonique* $\Psi_T : X \to X_T$ *;*

iv. pout tout G*-torseur* T *et tout nombre entier* d*, on désigne par* $\mathcal{O}_S\left(\chi_{L^{\otimes d}}(T)\right)$ *le faisceau inversible sur* S *associé au* $\mathbf{G}_m$*-torseur*

$$T \overset{G}{\times}_S \mathbf{A}^1_S$$

construit à travers le caractère $\chi_{L^{\otimes d}}$*. Il existe alors un isomorphisme* G*-équivariant de faisceaux inversibles sur* X*,*

$$\Psi_{T,L^{\otimes d}} : \Psi_T^*\left(L_T^{\otimes d}\right) \longrightarrow L^{\otimes d} \otimes_{\mathcal{O}_X} \alpha^*\mathcal{O}_S\left(\chi_{L^{\otimes d}}(T)\right)$$

et le diagramme de faisceau inversibles sur X*,*

$$\begin{tikzcd}
\left(\Psi_T^* L_T\right)^{\otimes d} \arrow[r, "\Psi_{T,L}^{\otimes d}"] \arrow[d, equal] & \left(L \otimes_{\mathcal{O}_X} \alpha^*\mathcal{O}_S\left(\chi_L(T)\right)\right)^{\otimes d} \arrow[d, equal] \\
\Psi_T^*\left(L_T^{\otimes d}\right) \arrow[r, "\Psi_{T,L^{\otimes d}}"] & L^{\otimes d} \otimes_{\mathcal{O}_X} \alpha^*\mathcal{O}_S\left(\chi_{L^{\otimes d}}(T)\right)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. On se ramène à le prouver pour $X = \mathbf{P}(E)$ et $L = \mathcal{O}_E(1)$ (où E est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules localement libre de rang fini).

Supposons d'abord qu'il existe un nombre entier $D_0 \geq 1$ tel que pour tout nombre entier $D \geq D_0$ l'action de G sur $L^{\otimes D}$ soit induite par un caractère $\chi_D : G \to \mathbf{G}_{m,S}$. Soit $D \geq D_0$ un nombre entier. L'isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur X,

$$L^{\otimes D+1} \otimes L^{\vee \otimes D} \longrightarrow L$$

est G-équivariant. Ceci montre que l'action de G sur L est donnée par le caractère $\chi := \chi_{D+1} \cdot \chi_D^{-1}$.

On peut donc supposer que le faisceau inversible L soit très α-ample. L'énoncé étant locale sur la base S, on peut supposer que le schéma $S = \operatorname{Spec} R$ soit affine. Le faisceau inversible L est alors engendré par ses sections globales $\Gamma(X, L)$. On considère la R-algèbre graduée

$$A := \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d}).$$

Le S-schéma X s'identifie canoniquement au spectre homogène Proj A de la R-algèbre graduée A et le faisceau inversible L au faisceau inversible qui se déduit du A-module gradué A(1). Pour toute section globale $s \in \Gamma(X, L)$ la R-algèbre $A_s = A[s^{-1}]$ est naturellement munie d'une graduation. On désigne par $A_{(s)}$ sa composante de degré 0 : elle est engendrée comme sous anneau de A_s par les éléments de la forme

$$\frac{f}{s^{\otimes d}} \qquad d \geq 1,\ f \in \Gamma(X, L^{\otimes d}).$$

Puisque L est engendré par ses sections globales, le S-schéma X est recouvert par les ouvert de la forme $D_+(s) = \operatorname{Spec} A_{(s)}$ avec $s \in \Gamma(X, L)$.

Pour tout nombre entier $d \geq 1$, le S-schéma en groupes G agit linéairement sur le (faisceau quasi-cohérent $\mathcal{O}_S$-modules associé au) R-module $\Gamma(X, L^{\otimes d})$, de manière que l'action linéaire sur la R-algèbre A soit compatible à la multiplication. Le S-schéma en groupes G agit linéairement sur les R-algèbres A_s et $A_{(s)}$. L'hypothèse que l'action de G sur X est triviale se reformule en disant que, pour tout $s \in \Gamma(X, L)$, l'action linéaire de G sur $A_{(s)}$ est triviale.

L'immersion fermée $X \to \mathbf{P}(\Gamma(X, L))$ est G-équivariante. On va montrer que l'action de G sur $\mathbf{P}(\Gamma(X, L))$ est triviale. Pour le faire, de manière analogue à quant dit avant, il s'agit de montrer que pour toute section globale $s \in \Gamma(X, L)$, l'action linéaire du S-schéma en groupes sur la composante de degré 0, $\operatorname{Sym}\Gamma(X, L)_{(s)}$, de la R-algèbre graduée $\operatorname{Sym}\Gamma(X, L)_s = \operatorname{Sym}\Gamma(X, L)[s^{-1}]$ est triviale.

Soit donc s un section globale de L. La R-algèbre graduée $\operatorname{Sym}\Gamma(X,L)_{(s)}$ est engendrée, en tant que sous-anneau de $\operatorname{Sym}\Gamma(X,L)_s$, par les éléments de la forme

$$\frac{f}{s^{\otimes d}} \qquad d \geq 1,\ f \in \operatorname{Sym}^d \Gamma(X,L).$$

Encore mieux, comme tout élément de de $\operatorname{Sym}^d \Gamma(X,L)$ s'écrit comme combinaison linéaire de produits de d éléments de $\Gamma(X,L)$, la R-algèbre graduée $\operatorname{Sym}\Gamma(X,L)_{(s)}$ est engendrée, en tant que sous-anneau de $\operatorname{Sym}\Gamma(X,L)_s$, par les éléments de la forme

$$\frac{t_1 \cdots t_d}{s^{\otimes d}} \qquad d \geq 1,\ t_1,\dots,t_d \in \Gamma(X,L).$$

Si $t_1,\dots,t_d$ sont des sections globales de L, pour tout $i = 1,\dots,n$ l'élément t_i/s appartient à $A_{(s)}$ et il est invariant sous l'action de G. L'élément

$$\frac{t_1 \cdots t_d}{s^{\otimes d}} = \frac{t_1}{s} \cdots \frac{t_d}{s} \in \operatorname{Sym}^d \Gamma(X,L)$$

est donc invariant sous l'action de G. L'action de G sur la R-algèbre $\operatorname{Sym}\Gamma(X,L)_{(s)}$ est donc triviale.

Pour terminer la démonstration du Lemme, il reste à prouver le cas où $X = \mathbf{P}(E)$ et $L = \mathscr{O}_E(1)$, où E est un faisceau de $\mathscr{O}_S$-modules localement libre de rang fini. Il s'agit de montrer que pour tout S-schéma $\tau : S' \to S$ et pour tout automorphisme φ du faisceau de $\mathscr{O}_{S'}$-modules τ^*E, si l'isomorphisme de S'-schémas

$$\mathbf{P}(\tau^* E) \longrightarrow \mathbf{P}(\tau^* E)$$

induit par φ est l'identité, alors il existe $\lambda \in \mathbf{G}_m(S')$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$. Cela est triviale.

Le point (ii) est clair et (iii) est la Proposition 3.8. Pour (iv), soient T un G-torseur et $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ un recouvrement ouvert de S sur lequel T se trivialise par des sections t_i. En vertu de la structure locale de la forme tordue L_T de L par T, il existe pour tout $i \in I$ un isomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_{X \times_S S_i}$-modules

$$\theta_i : L|_{X \times_S S_i} \longrightarrow L_T|_{X \times_S S_i}$$

tel que pour tout i, j le diagramme de faisceaux de $\mathscr{O}_{X \times_S S_{ij}}$-modules (où $S_{ij} = S_i \cap S_j$)

$$\begin{tikzcd}
L|_{X \times_S S_{ij}} \arrow[r, "\theta_i"] \arrow[d, "t_j^{-1} t_i"'] & L_T|_{X \times_S S_{ij}} \arrow[d, equal] \\
L|_{X \times_S S_{ij}} \arrow[r, "\theta_j"] & L_T|_{X \times_S S_{ij}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. L'action de $t_j^{-1} t_i$ est donnée par la multiplication par l'élément inversible

$$\chi_L(t_j^{-1} t_i) \in \Gamma(S_{ij}, \mathscr{O}_S^\times).$$

D'autre part, par la structure locale de la forme tordue $\mathscr{O}_S(\chi_L(T))$ de $\mathscr{O}_S$ par T (à travers le caractère χ_L), il existe pour tout $i \in I$ un isomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_{S_i}$-modules

$$\omega_i : \mathscr{O}_{S_i} \longrightarrow \mathscr{O}_S(\chi_L(T))|_{S_i}$$

tel que pour tout i, j le diagramme de faisceaux de $\mathscr{O}_{S_{ij}}$-modules (où $S_{ij} = S_i \cap S_j$)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{S_{ij}} \arrow[r, "\omega_i"] \arrow[d, "\chi_L(t_j^{-1} t_i)"'] & \mathscr{O}_S(\chi_L(T))|_{S_{ij}} \arrow[d, equal] \\
\mathscr{O}_{S_{ij}} \arrow[r, "\omega_j"] & \mathscr{O}_S(\chi_L(T))|_{S_{ij}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On obtient ainsi le diagramme commutatif de faisceaux de $\mathscr{O}_{X\times_S S_i}$-modules

$$\begin{tikzcd}
L|_{X\times_S S_{ij}} \otimes \alpha^*\mathscr{O}_{S_{ij}} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{id}_L \otimes \alpha^*\chi_L(t_j^{-1} t_i)"'] & L|_{X\times_S S_{ij}} \arrow[r, "\theta_i"] \arrow[d, "t_j^{-1} t_i"'] & L_T|_{X\times_S S_{ij}} \arrow[d, equal] \\
L|_{X\times_S S_{ij}} \otimes \alpha^*\mathscr{O}_{S_{ij}} \arrow[r, equal] & L|_{X\times_S S_{ij}} \arrow[r, "\theta_j"] & L_T|_{X\times_S S_{ij}}
\end{tikzcd}$$

et donc l'isomorphisme $\psi : L \otimes \alpha^*\mathscr{O}_S(\chi_L(T)) \to L_T$ cherché. □

Soient S un schéma noethérien et de type fini sur un schéma universellement japonais, $\alpha : X \to S$ un S-schéma projectif et L un faisceau inversible α-ample sur X. Soient G un S-groupe réductif et H un sous-S-groupe réductif normal de G. On suppose que G agit sur le S-schéma X et de manière équivariante sur L.

Soient $X^{ss}(L)$ l'ouvert des points semi-stables de X sous l'action de H et par rapport au faisceau inversible L,

$$\pi : X^{ss}(L) \longrightarrow X^{ss}(L)/H := \mathbf{Proj}_S\left(\bigoplus_{d\geq 0} \alpha_*(L^{\otimes d})^H\right)$$

le morphisme quotient et $\beta : X^{ss}(L)/H \to S$ le morphisme structural de X/H. Pour tout nombre entier $D \geq 1$ assez divisible, il existe un faisceau inversible β-ample M_D sur $X^{ss}(L)/H$ et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $X^{ss}(L)$,

$$\varphi_D : \pi^* M_D \longrightarrow L|_{X^{ss}(L)}^{\otimes D}$$

compatible à l'action de H. Le S-schéma en groupes G agit sur le S-schéma $X^{ss}(L)/H$ et, pour tout nombre entier $D \geq 1$ assez divisible, de manière équivariante sur le faisceau inversible M_D et l'isomorphisme φ_D est G-équivariant.

Soit T un G-torseur. On désigne par X_T (resp. G_T, resp. H_T, resp. L_T) la forme tordue de X (resp. G, resp. H, resp. L) par T. Le S-schéma en groupes G_T agit sur le S-schéma X_T et de manière équivariante sur le faisceau inverisible L_T. L'ouvert des points semi-stables $X_T^{ss}(L_T)$ de X_T sous l'action de H_T et par rapport au faisceau inversible L_T s'identifie à la forme tordue $X^{ss}(L)_T$ de $X^{ss}(L)$ par T.

Théorème 3.13. *On suppose que l'action du* S*-schéma en groupes* G *sur le quotient* $X^{ss}(L)/H$ *soit triviale. Alors, pour tout* G*-torseur* T *il existe un isomorphisme de* S*-schémas*

$$\Psi_T : X^{ss}(L)/H \longrightarrow X_T^{ss}(L_T)/H_T$$

et, pour tout nombre entier assez divisible $D \geq 1$*, un morphisme de* S*-schémas en groupes* $\chi_D : G \to \mathbf{G}_{m,S}$ *et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur* $X^{ss}(L)/H$*,*

$$\psi_{T,D} : \Psi_T^* M_{T,D} \longrightarrow M_D \otimes \beta^*\mathscr{O}_S(\chi_D(T))$$

tel que, pour tout nombre entier $d \geq 1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\left(\Psi_{\mathrm{T}}^{*}\mathrm{M}_{\mathrm{T,D}}\right)^{\otimes d} \arrow[r, "\psi_{\mathrm{T,D}}^{\otimes d}"] \arrow[d, equal] & \left(\mathrm{M}_{\mathrm{D}} \otimes \beta^{*}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\left(\chi_{\mathrm{D}}(\mathrm{T})\right)\right)^{\otimes d} \arrow[d, equal] \\
\Psi_{\mathrm{T}}^{*}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{T,D}d}\right) \arrow[r, "\psi_{\mathrm{T,D}d}"] & \mathrm{M}_{\mathrm{D}d} \otimes \beta^{*}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\left(\chi_{\mathrm{D}d}(\mathrm{T})\right)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 3.12 à l'action de G sur $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H}$ et M_{D}. □

3.4 Un exemple : les représentations homogènes

3.4.1. Représentations homogènes. — Soit S un schéma. Soient $n \geq 1$ un nombre entier, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs et $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n)$ un n-uplet de faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres, E_i de rang e_i. On considère les S-schémas en groupes :

$$\mathbf{GL}(\mathrm{E}) = \mathbf{GL}(\mathrm{E}_1) \times_{\mathrm{S}} \cdots \times_{\mathrm{S}} \mathbf{GL}(\mathrm{E}_n),$$
$$\mathbf{SL}(\mathrm{E}) = \mathbf{SL}(\mathrm{E}_1) \times_{\mathrm{S}} \cdots \times_{\mathrm{S}} \mathbf{SL}(\mathrm{E}_n).$$

Définition 3.14. Soit F un faisceau non nul de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres de rang fini. Une représentation, *i.e.* un morphisme de S-schémas en groupes, $\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ est *homogène de poids* $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$ si, pour tout S-schéma T et pour tous T-points $t_1, \ldots, t_n$ de $\mathbf{G}_m$, on a :

$$\rho(t_1 \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}_1}, \ldots, t_n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}_n}) = t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{F}}.$$

Exemple 3.15. Soient F un faisceau non nul de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libre de rang fini et $\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ une représentation homogène de poids $m = (m_1, \ldots, m_n)$. Les représentations homogènes sont stables sous constructions tensorielles :

Construction	Représentation	Poids d'homogénéité
dual	$\rho^{\vee} : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F}^{\vee})$	$-m = (-m_1, \ldots, -m_n)$
puissance tensorielle r-ième	$\rho^{\otimes r} : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F}^{\otimes r})$	$rm = (rm_1, \ldots, rm_n)$
puissance symétrique r-ième	$\mathrm{Sym}^r \rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{Sym}^r \mathrm{F})$	$rm = (rm_1, \ldots, rm_n)$
puissance extérieure r-ième	$\bigwedge^r \rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\bigwedge^r \mathrm{F})$	$rm = (rm_1, \ldots, rm_n)$

Exemple 3.16. Soient F, F′ des faisceaux non nuls de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres de rang fini et

$$\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F}), \qquad \rho' : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F}')$$

des représentations homogènes respectivement de poids $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m' = (m'_1, \ldots, m'_n)$. La représentation

$$\rho \otimes \rho' : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{F}'), \qquad \left(\rho \oplus \rho' : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}')\right)$$

qui se déduit par produit tensoriel (resp. par somme directe) est homogène de poids $m + m'$ (resp. est homogène si et seulement si $m = m'$ et si cette condition est satisfaite $\rho \oplus \rho'$ est un représentation homogène de poids $m = m'$).

Proposition 3.17. *Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ un n-uplet de faisceaux de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libres, E_i de rang fini e_i. Soient F un faisceau non nul de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libres de rang fini et*

$$\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) = \mathbf{GL}(\mathrm{E}_1) \times_\mathrm{S} \cdots \times_\mathrm{S} \mathbf{GL}(\mathrm{E}_n) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F})$$

une représentation homogène de poids $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$. Si le faisceau des invariants $\mathrm{F}^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$ de F par le S-schéma en groupes $\mathbf{SL}(\mathrm{E}) = \mathbf{SL}(\mathrm{E}_1) \times_\mathrm{S} \cdots \times_\mathrm{S} \mathbf{SL}(\mathrm{E}_n)$ est non nul, alors :

i. pour tout $i = 1, \dots, n$, le rang de E_i divise m_i ;

ii. pour tout S-schéma T, pour toute section $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$-invariante s de F sur T et pour tout T-point $g = (g_1, \dots, g_n)$ de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$, on a

$$\rho(g) \cdot s = \left(\det(g_1)^{m_1/e_1} \cdots \det(g_n)^{m_n/e_n}\right) s.$$

Par induction sur n on se ramène à le prouver quand $n = 1$. Soient E un faisceau de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libre de rang fini e, F un faisceau non nul de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libre de rang fini et $\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ une représentation homogène de poids m. Comme le sous-S-schéma en groupes $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ est normal, l'action linéaire de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ sur F induit une action linéaire de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ sur le faisceau des invariants $\mathrm{F}^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$ de F par $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ et la représentation correspondante

$$\mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}\left(\mathrm{F}^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}\right)$$

est homogène de poids m et sa restriction à $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ est par définition triviale. On se ramène donc à prouver l'énoncé suivant :

Lemme 3.18. *Soient E un faisceau de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libre de rang fini e, F un faisceau non nul de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libre de rang fini et $\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ une représentation homogène de poids m.*

On suppose que la restriction de ρ au S-schéma en groupes soit triviale, c'est-à-dire, le S-schéma en groupes $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ soit contenu dans le noyau de ρ. Si on note

$$\widetilde{\rho} : \mathbf{G}_m = \mathbf{GL}(\mathrm{E}) / \mathbf{SL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F})$$

la représentation déduite par passage au quotient, on a :

i. le nombre entier $d = \mathrm{rk}\,\mathrm{E}$ divise le nombre entier m ;

ii. la représentation $\widetilde{\rho}$ est homogène de poids m/d, i.e., pour tout S-schéma T et pour tout T-point t du S-schémas en groupes $\mathbf{G}_m$, on a :

$$\widetilde{\rho}(t) = t^{m/d} \cdot \mathrm{id}_\mathrm{F}.$$

En particulier, pour tout S-schéma T et pour tout T-point g du S-schémas en groupes $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$, on a :

$$\rho(g) = \det(g)^{m/d} \cdot \mathrm{id}_\mathrm{F}.$$

Démonstration. Pour tout S-schéma T et pour tout T-point t du S-schéma en groupes $\mathbf{G}_m$, par définition de représentation homogène, on a :

$$\rho(t \cdot \mathrm{id}_\mathrm{E}) = t^m \cdot \mathrm{id}_\mathrm{F}. \tag{3.4.1}$$

Puisqu'on a supposé $\rho = \widetilde{\rho} \circ \det$, d'autre côté on a :

$$\rho(t \cdot \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \widetilde{\rho}(\det(t \cdot \mathrm{id}_\mathrm{E})) = \widetilde{\rho}(t^n). \tag{3.4.2}$$

On considère le morphisme de S-schémas en groupes $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{GL}(\mathrm{E})$, $t \mapsto t \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Les équations 3.4.1 et 3.4.2 se reformulent en disant que le diagramme

$$\begin{tikzcd} t \arrow[d, mapsto] & \mathbf{G}_m \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \arrow[d, "\rho"] \\ t^e & \mathbf{G}_m \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] & \mathbf{GL}(\mathrm{F}) \end{tikzcd} \tag{3.4.3}$$

est commutatif (e est le rang de E).

Quitte à recouvrir le schéma S par des ouverts affines, on peut supposer que le schéma S soit un schéma affine Spec A et que les faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules E, F soient libres.

Soit $v_1, \dots, v_f$ une base du faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libre F (f le rang de F). Soit $v_1^\vee, \dots, v_f^\vee$ la base du faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libre $\mathrm{F}^\vee$ duale à la base $v_1, \dots, v_f$, c'est-à-dire la base définie par $v_i^\vee(v_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker). À travers l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F}) = \mathrm{F}^\vee \otimes \mathrm{F}$ les éléments $x_{ij} = v_j^\vee \otimes v_i$ pour tout $i, j = 1, \dots, f$ définissent une base du faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libre $\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F})$: le faisceau quasi-cohérent en $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F})$ est alors isomorphe au faisceau quasi-cohérent en $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres associé à la A-algèbre $\mathrm{A}[x_{ij} : i, j = 1, \dots, f]$.

Les morphismes $\rho \circ \lambda$ et $\widetilde{\rho}$ correspondent respectivement à des homomorphismes de A-algèbres

$$(\rho \circ \lambda)^\sharp, \ \widetilde{\rho}^\sharp : \mathrm{A}[x_{ij} : i, j = 1, \dots f]\left[\frac{1}{\det(x_{ij})}\right] \longrightarrow \mathrm{A}[t, t^{-1}].$$

Avec ces notations, affirmer que la représentation ρ est homogène de poids m est équivalent à dire que pour tout $i, j = 1, \dots, f$ on a :

$$(\rho \circ \lambda)^\sharp(x_{ij}) = \delta_{ij} t^m. \tag{3.4.4}$$

D'autre part pour tout $i, j = 1, \dots, f$ l'image de l'élément x_{ij} par l'homomorphisme $\widetilde{\rho}^\sharp$ s'écrit sous la forme

$$\widetilde{\rho}^\sharp(x_{ij}) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \alpha_{ijr} t^r, \tag{3.4.5}$$

avec les $\alpha_{ijr} \in \mathrm{A}$. D'après la commutativité du diagramme 3.4.3 et en vertu de 3.4.4 et 3.4.5, pour tout $i, j = 1, \dots, f$ on a :

$$\delta_{ij} t^m = (\rho \circ \lambda)^\sharp(x_{ij}) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \alpha_{ijr} t^{er}.$$

Il existe donc un nombre entier n_0 tel que $m = er_0$, *i.e.*, le rang e de E divise le nombre entier m. De plus, le coéfficient α_{ijr_0} est égal à 1 et, pour tout $r \neq r_0$, le coéfficient α_{ijr} est nul ; en particulier, pour tout $i, j = 1, \dots, f$, on a :

$$\widetilde{\rho}^\sharp(x_{ij}) = t^{m/e} \delta_{ij}.$$

En d'autres termes, la représentation $\widetilde{\rho}$ est homogène de poids m/e, ce qui termine la preuve. □

3.4.2. Application de la construction générale. — Soient S un schéma noethérien, $n \geq 1$ un nombre entier et $e = (e_1, \dots, e_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs. On considère les S-schémas en groupes réductifs

$$\mathrm{G} := \mathbf{GL}(e_1)_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \cdots \times_{\mathrm{S}} \mathbf{GL}(e_n)_{\mathrm{S}}$$
$$\mathrm{H} := \mathbf{SL}(e_1)_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \cdots \times_{\mathrm{S}} \mathbf{SL}(e_n)_{\mathrm{S}}.$$

Soient F un faisceau non nul de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libre de rang fini et $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ un morphisme de S-schémas en groupes. Le S-schéma en groupes G agit sur le S-schéma projectif et plat X =

$\mathbf{P}(\mathrm{F})$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathrm{L} = \mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)$. On considère l'ouvert des points semi-stables $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})$ de X sous l'action du S-groupe réductif H et

$$\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H} := \mathbf{Proj}_{\mathrm{S}}\left(\bigoplus_{d\geq 0}\left(\mathrm{Sym}^{d}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathrm{F}\right)^{\mathrm{H}}\right)$$

le morphisme quotient.

À tout n-uplet $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ de faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres de rang fini, avec $\mathrm{rk}\,\mathrm{E}_i = e_i$ on associe le G-torseurs

$$\mathrm{T}_{\mathrm{E}} := \mathbf{Iso}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E}_1, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{e_1}) \times_{\mathrm{S}} \cdots \times_{\mathrm{S}} \mathbf{Iso}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E}_1, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{e_n}).$$

Par abus de language on parlera de formes tordues par E au lieu de formes tordues par T_{E} et on le désignera avec un E en indice. Avec cette convention, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_{\mathrm{E}} &= \mathbf{GL}(\mathrm{E}_1) \times_{\mathrm{S}} \cdots \times_{\mathrm{S}} \mathbf{GL}(\mathrm{E}_n)_{\mathrm{S}},\\
\mathrm{H}_{\mathrm{E}} &= \mathbf{SL}(\mathrm{E}_1) \times_{\mathrm{S}} \cdots \times_{\mathrm{S}} \mathbf{SL}(\mathrm{E}_n)_{\mathrm{S}},\\
\mathrm{X}_{\mathrm{E}} &= \mathbf{P}(\mathrm{F}_{\mathrm{E}}),\\
\mathrm{L}_{\mathrm{E}} &= \mathscr{O}_{\mathrm{F}_{\mathrm{E}}}(1),
\end{aligned}$$

où F_{E} est la forme de F tordue par E. Le S-schéma en groupes G_{E} agit sur le S-schéma projectif et plat $\mathrm{X}_{\mathrm{E}} = \mathbf{P}(\mathrm{F}_{\mathrm{E}})$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathrm{L}_{\mathrm{E}} = \mathscr{O}_{\mathrm{F}_{\mathrm{E}}}(1)$. On considère l'ouvert des points semi-stables $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}_{\mathrm{E}})$ de X_{E} sous l'action du S-groupe réductif H_{E} et

$$\pi_{\mathrm{E}} : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}_{\mathrm{E}}) \longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L}_{\mathrm{E}})/\mathrm{H}_{\mathrm{E}} := \mathbf{Proj}_{\mathrm{S}}\left(\bigoplus_{d\geq 0}\left(\mathrm{Sym}^{d}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathrm{F}_{\mathrm{E}}\right)^{\mathrm{H}_{\mathrm{E}}}\right)$$

le morphisme quotient.

Théorème 3.19. *On suppose que la représentation* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ *soit homogène de poids* $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$*. Alors, l'action du* S*-schéma en groupes* G *sur le* S*-schéma* $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H}$ *est triviale et pour tout* n*-uplet de faisceaux de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules localement libres de rang fini* $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$, E_i *de rang* e_i*, il existe un isomorphisme de* S*-schémas*

$$\Psi_{\mathrm{E}} : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}_{\mathrm{E}})/\mathrm{H}_{\mathrm{E}}.$$

De plus, si le schéma S *est de type fini sur un schéma universellement japonais, pour tout nombre entier assez divisible* $\mathrm{D} \geq 1$*, il existe un isomorphisme de faisceaux inversibles sur* $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H}$*,*

$$\psi_{\mathrm{E,D}} : \Psi^{*}_{\mathrm{E}}\mathrm{M}_{\mathrm{E,D}} \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{D}} \otimes \beta^{*} \bigotimes_{i=1}^{n} (\det \mathrm{E}_i)^{\otimes m_i \mathrm{D}/e_i}$$

tel que, pour tout nombre entier $d \geq 1$*, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\left(\Psi^{*}_{\mathrm{E}}\mathrm{M}_{\mathrm{E,D}}\right)^{\otimes d} & \xrightarrow{\psi^{\otimes d}_{\mathrm{E,D}}} & \left(\mathrm{M}_{\mathrm{D}} \otimes \beta^{*} \bigotimes_{i=1}^{n} (\det \mathrm{E}_i)^{\otimes m_i \mathrm{D}/e_i}\right)^{\otimes d} \\
\Big\| & & \Big\| \\
\Psi^{*}_{\mathrm{E}}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{E,D}d}\right) & \xrightarrow{\psi_{\mathrm{E,D}d}} & \mathrm{M}^{\otimes d}_{\mathrm{D}} \otimes \beta^{*} \bigotimes_{i=1}^{n} (\det \mathrm{E}_i)^{\otimes m_i \mathrm{D}d/e_i}
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Pour tout nombre entier $d \geq 1$, la représentation qui induit l'action linéaire du S-schéma en groupes G sur les sections globales du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}(d)$, $\mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{Sym}^d \mathrm{F})$, est homomogène de poids dm. D'après la Proposition 3.17, si le faisceau des invariants $(\mathrm{Sym}^d \mathrm{F})^{\mathrm{H}}$ est non nul, alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ le rang e_i de E_i divise le nombre entier dm_i et G agit par homothéties sur $(\mathrm{Sym}^d \mathrm{F})^{\mathrm{H}}$ à travers le caractère

$$\chi_d : (g_1, \ldots, g_n) \mapsto \det(g_1)^{dm_1/e_1} \cdots \det(g_n)^{dm_n/e_n}.$$

Pour autant, l'action du G sur le quotient

$$\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H} := \mathbf{Proj}_{\mathrm{S}} \left(\bigoplus_{d \geq 0} \left(\mathrm{Sym}^d \mathrm{F}\right)^{\mathrm{H}} \right)$$

est triviale. Il suffit d'appliquer le Théorème 3.13 pour obtenir l'isomorphisme canonique

$$\Psi_{\mathrm{E}} : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}_{\mathrm{E}})/\mathrm{H}_{\mathrm{E}}.$$

On suppose désormais que le schéma S soit de type fini sur un schéma universellement japonais. Soient $\mathrm{D} \geq 1$ un nombre entier assez divisible et M_{D} un faisceau inversible β-ample sur $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H}$. D'après le Théorème 3.13, on peut supposer que M_{D} soit engendré par ses sections globales respectivement à β : il s'agit donc de calculer le caractère à travers lequel le S-schéma en groupes G agit sur les sections globales $\beta_* \mathrm{M}_{\mathrm{D}}$. Ces dernières s'identifient à travers l'isomorphisme φ_{D} au faisceau des invariants

$$\left(\alpha_*(\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})\right)^{\mathrm{H}} = (\mathrm{Sym}^d \mathrm{F})^{\mathrm{H}}.$$

Comme rappelé avant, en vertu de la Proposition 3.17 le S-schéma en groupes G agit par homothéties sur $(\mathrm{Sym}^d \mathrm{F})^{\mathrm{H}}$ à travers le caractère

$$\chi_{\mathrm{D}} : (g_1, \ldots, g_n) \mapsto \det(g_1)^{\mathrm{D}m_1/e_1} \cdots \det(g_n)^{\mathrm{D}m_n/e_n}.$$

Si $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n)$ est un n-uplet de faisceau de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres, E_i de rang e_i, alors le faisceau inversible $\mathcal{O}(\chi_{\mathrm{D}}(\mathrm{E}))$ s'identifie comme $\mathbf{G}_{m,\mathrm{S}}$ torseur au faisceau inversible

$$\bigotimes_{i=1}^{n} (\det \mathrm{E}_i)^{\otimes m_i \mathrm{D}d/e_i},$$

ce qui achève la preuve. □

4 Quotient et torseurs : version adélique

4.1 Formes tordues par un fibré principal adélique

Les notions présentées dans ce numéros ont été introduites aussi par Chambert-Loir et Tschinkel (cf. [CLT01]).

4.1.1. Groupes adéliques. — Soient K un corps global et V_{K} l'ensemble de ses places.

Définition 4.1. Un K-*groupe adélique* $\mathscr{G} = (\mathrm{G}, \mathbf{U})$ est un couple formé par un K-schéma en groupes G de type fini et d'une collection $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_v : v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}\}$ de sous-groupes compactes $\mathbf{U}_v$ de $|\mathrm{G}_v^{\mathrm{an}}|$ satisfaisant la propriété suivante : il existe un ouvert non vide $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$ et un $\mathfrak{V}$-schéma en groupes $\mathfrak{G}$ plat et de type fini de fibre générique G tel que, pour tout point fermé $v \in \mathfrak{V}$, le sous-groupe $\mathbf{U}_v$ est déduit du K_v°-schéma en groupes $\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{V}} \mathrm{Spec}\, \mathrm{K}_v^{\circ}$.

Exemple 4.2 (Groupes adéliques provenant d'un modèle entier)**.** Soient $\mathfrak{G}$ un $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$-schéma en groupes de type fini et $\mathrm{G} := \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}} \mathrm{K}$ sa fibre génèrique. Pour toute place non archimédienne v de K, soit $\mathbf{U}_v$ le sous-groupe compact du K_v-groupe analytique $\mathrm{G}_v^{\mathrm{an}}$ associé au K_v°-schéma en groupes $\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}} \mathrm{K}_v^\circ$. Si K est un corps de fonctions, le couple $(\mathrm{G}, \mathbf{U})$ avec $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_v\}_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}}$ est K-groupe adélique.

Si K est un corps de nombres et, de plus, pour toute place archimédienne v on pose $\mathbf{U}_v = \{\mathrm{id}_{\mathrm{G}}\}$, alors le couple $(\mathrm{G}, \mathbf{U})$ avec $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_v\}_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}}$ est un K-groupe adélique.

On dit que le K-groupe adélique $\mathscr{G}$ est le K-groupe adélique associé au $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$-schéma en groupes $\mathfrak{G}$.

Exemple 4.3 (Groupe adélique des isomorphismes d'un faisceau adélique)**.** Soit $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p})$ un faisceau adélique localement libre sur K. Pour toute place $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$ on considère le sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}(p_v)$ de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}$ unitaire par rapport à la norme géométrique p_v.

Par définition de faisceau adélique il existe un ouvert non vide $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$ et un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{V}}$-modules localement libre de rang fini $\mathfrak{E}$ tel que, pour tout $v \in \mathfrak{V}$, la norme géométrique p_v est induite par le K_v°-module $\mathfrak{E} \otimes \mathrm{K}_v^\circ$. Pour autant, pour tout $v \in \mathfrak{V}$, le sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}(p_v)$ est le sous-groupe affinoïde de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}$ associé au K_v°-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathfrak{E}) \times_{\mathfrak{V}} \mathrm{K}_v^\circ$.

Le couple $\mathbf{GL}(\mathscr{E}) = (\mathbf{GL}(\mathrm{E}), \mathbf{U}(\mathscr{E}))$ où $\mathbf{U}(\mathscr{E}) = \{\mathbf{U}(p_v)\}_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}}$ est un K-groupe adélique. On dira que $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ est le K*-groupe adélique des isomorphismes linéaires du faisceau adélique* $\mathscr{E}$.

Exemple 4.4 (Structure adélique d'un sous-groupe)**.** Soit $\mathscr{G} = (\mathrm{G}, \mathbf{U}_{\mathrm{G}})$ un K-groupe adélique et $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ un sous-K-schéma en groupes (fermé). Pour tout $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$, le sous-groupe de $\mathrm{H}_v^{\mathrm{an}}$,

$$\mathbf{U}_{\mathrm{H},v} = \mathbf{U}_{\mathrm{G},v} \cap \mathrm{H}_v^{\mathrm{an}},$$

est compact. Le couple $\mathscr{H} = (\mathrm{H}, \mathbf{U}_{\mathrm{H}})$ est un K-groupe adélique et on dira que $\mathscr{H}$ est la structure de K-groupe adélique sur H induite par le K-groupe adélique $\mathscr{G}$.

4.1.2. Torseurs adéliques. —

Définition 4.5. Soit $\mathscr{G} = (\mathrm{G}, \mathbf{U}_{\mathrm{G}})$ un K-groupe adélique. Un $\mathscr{G}$*-torseur adélique* $\mathscr{T}$ est un couple $(\mathrm{T}, \mathbf{U}_{\mathrm{T}})$ formé d'un G-torseur et d'une collection $\mathbf{U}_{\mathrm{T}} = \{\mathbf{U}_{\mathrm{T},v} : v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}\}$ de parties compactes non vides $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v} \subset \mathrm{G}_v^{\mathrm{an}}$ telles que pour tout $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$ on ait :

i. si $\alpha : \mathrm{T} \times \mathrm{G} \to \mathrm{T}$ désigne l'action du K-schéma en groupes G sur le torseur T, l'image de la partie

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{T}}^{-1} \mathbf{U}_{\mathrm{T},v} \cap \mathrm{pr}_{\mathrm{G}}^{-1} \mathbf{U}_{\mathrm{G},v} \subset |\mathrm{T}_v^{\mathrm{an}} \times \mathrm{G}_v^{\mathrm{an}}|$$

est contenue dans $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$;

ii. l'isomorphisme de K-schémas $(\mathrm{pr}_{\mathrm{T}}, \alpha) : \mathrm{T} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{T} \times \mathrm{T}$ se restreint à un homéomorphisme

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{T}}^{-1} \mathbf{U}_{\mathrm{T},v} \cap \mathrm{pr}_{\mathrm{G}}^{-1} \mathbf{U}_{\mathrm{G},v} \longrightarrow \mathrm{pr}_1^{-1} \mathbf{U}_{\mathrm{T},v} \cap \mathrm{pr}_2^{-1} \mathbf{U}_{\mathrm{T},v};$$

iii. il existe un ouvert non vide $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$, un $\mathfrak{V}$-schéma en groupes $\mathfrak{G}$ plat et de type fini de fibre générique G, un $\mathfrak{G}$-torseurs $\mathfrak{T}$ de fibre générique T tel que, pour tout point fermé $v \in \mathfrak{V}$, le sous-groupe $\mathbf{U}_v$ est déduit du K_v°-schéma en groupes $\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{V}} \mathrm{Spec}\, \mathrm{K}_v^\circ$ et la partie compacte $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ est déduite du K_v°-schéma $\mathfrak{T} \times_{\mathfrak{V}} \mathrm{Spec}\, \mathrm{K}_v^\circ$.

Si le K-schéma en groupes G est réduit (c'est toujours le cas si K est de caractéristique nulle) la condition (iii) est équivalente à la condition (*à priori* plus faible) : il existe un ouvert non vide $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$, un K°-schéma plat de type fini $\mathfrak{T}$ de fibre générique T tel que, pour tout point fermé $v \in \mathfrak{V}$, la partie compacte $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ est déduite du K_v°-schéma $\mathfrak{T} \times_{\mathfrak{V}} \mathrm{Spec}\, \mathrm{K}_v^\circ$.

Exemple 4.6 (Torseurs adéliques provenant d'un modèle entier)**.** Soient $\mathfrak{G}$ un $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$-schéma en groupes plat de type fini et $\mathfrak{T}$ un $\mathfrak{G}$-torseur. Soit $\mathscr{G}$ le K-groupe adélique associé au $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}$-schéma en groupes $\mathfrak{G}$ (voir Exemple 4.2).

Pour toute place non archimédienne v de $\mathrm{V_K}$ on considère le sous-K_v-espace analytique compact $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ induit par le K_v°-schéma $\mathfrak{T} \times_{\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}} \mathrm{K}_v^{\circ}$. Puisque ce dernier est un torseur du K_v°-schéma en groupes $\mathfrak{G} \times_{\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}} \mathrm{K}_v^{\circ}$, la partie compacte $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ satisfait aux conditions dans la définition de torseur adélique.

Pour autant, si K est un corps de fonctions, la collection $\mathbf{U}_{\mathrm{T}} = \{\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}\}$ munit le K-schéma T d'une structure de $\mathscr{G}$-torseur adélique.

Si par contre K est un corps de nombres, our toute place archimédienne v de K on choisit un point $t_v \in \mathrm{T}_v^{\mathrm{an}}$ et on pose $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v} = \{t_v\}$. La collection $\mathbf{U}_{\mathrm{T}} = \{\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}\}$ munit le K-schéma T d'une structure de $\mathscr{G}$-torseur adélique qui dépend clairement aussi du choix des points t_v.

Exemple 4.7 (Faisceaux adéliques sur K comme $\mathbf{GL}(n)$-torseurs)**.** Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Pour toute place $v \in \mathrm{V_K}$, on considère la norme géométrique sur $\mathrm{K}t_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{K}t_n$,

$$p_{n,v} = \begin{cases} \sqrt{|t_1|^2 + \cdots + |t_n|^2} & \text{si } v \text{ est archimédienne} \\ \max\{|t_1|, \ldots, |t_n|\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\mathbf{U}(n)$ le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{GL}(n)_v^{\mathrm{an}}$ unitaire par rapport à la norme géométrique $p_{n,v}$. En d'autres termes, on considère le K-groupe adélique $\mathscr{G} = (\mathbf{GL}(n)_{\mathrm{K}}, \mathbf{U}(n))$ associé au faisceau adélique « libre » $(\mathrm{K}^n, \boldsymbol{p}_n)$, où $\boldsymbol{p}_n = \{p_{n,v}\}_{v \in \mathrm{V_K}}$.

Soit $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})$ un faisceau adélique localement libre de rang n sur K. On considère le torseur $\mathrm{T} = \mathbf{Iso}(\mathrm{E}, \mathrm{K}^n)$ du K-schéma en groupes $\mathrm{G} = \mathbf{GL}(n)_{\mathrm{K}}$.

Soient v une place de K, $t \in \mathbf{Iso}(\mathrm{E}, \mathrm{K}^n)_v^{\mathrm{an}}$, Ω une extension analytique de K_v qui contient le corps résiduel du point t et t_Ω le Ω-point du Ω-espace analytique $\mathbf{Iso}(\mathrm{E}, \mathrm{K}^n)_\Omega^{\mathrm{an}}$ associé. Le Ω-point t_Ω correspond à un isomorphisme de Ω-espaces vectoriels

$$t_\Omega : \mathrm{E}_\Omega \longrightarrow \Omega^n.$$

On dit que le point t est *unitaire* si le morphisme de Ω-espaces analytiques

$$t_\Omega^\vee : \mathbf{A}_\Omega^{n,\mathrm{an}} \to \mathbf{V}(\mathrm{E})_\Omega^{\mathrm{an}}$$

est tel que

$$p_{\mathrm{E},v,\Omega} \circ t_\Omega^\vee = p_{n,v,\Omega}.$$

On considère la partie du K_v-espace analytique $\mathbf{Iso}(\mathrm{E}, \mathrm{K}^n)_v^{\mathrm{an}}$,

$$\mathbf{U}_{\mathrm{T},v} := \mathbf{Iso}(\mathscr{E}, \mathrm{K}^n)_v = \left\{t \in \mathbf{Iso}(\mathrm{E}, \mathrm{K}^n)_v^{\mathrm{an}} : t \text{ unitaire}\right\}.$$

On suppose que la place v soit archimédienne et, quitte à étendre les scalaires, $k = \mathbf{C}$. La partie $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ s'identifie à l'ensemble des isomorphismes de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels isométriques $t : \mathrm{E} \to \mathbf{C}^n$, où $\mathbf{C}^n$ est muni de la norme géométrique hermitienne standard. En particulier, la partie $\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ est compacte et les conditions (i), (ii) dans la définition de torseur adéliques sont vérifiées.

On suppose que la place v soit non archimédienne. Il existe une extension analytique Ω de K_v et un sous-Ω°-module $\mathfrak{E} \subset \mathrm{E}_\Omega$ de fibre générique E_Ω qui induit la norme géométrique non archimédienne $p_{\mathrm{E},v,\Omega}$. Si $\varpi_\Omega : \mathrm{T}_\Omega^{\mathrm{an}} \to \mathrm{T}_v^{\mathrm{an}}$ désigne le morphisme d'extension des scalaires, alors la partie $\varpi_\Omega^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ du Ω-espace analytique $\mathrm{T}_\Omega^{\mathrm{an}}$ s'identifie au domaine affinoïde associé au Ω°-schéma affine de type fini $\mathbf{Iso}_{\Omega^\circ}(\mathfrak{E}, \Omega^{\circ,n})$. Puisque ce dernier est un torseur du Ω°-schéma en groupes $\mathbf{GL}(n)_{\Omega^\circ}$, les conditions (i), (ii) dans la définition de torseur adéliques sont vérifiées.

De plus, cette compatibilité à la construction des espaces analytiques associés aux modèles entiers assure que la condition (iii) soit aussi vérifiée. La collection de parties $\mathbf{U}_{\mathrm{T}} = \{\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}\}$ munit le $\mathbf{GL}(n)_{\mathrm{K}}$-torseur $\mathbf{Iso}(\mathrm{E},\mathrm{K}^n)$ d'une structure de $(\mathbf{GL}(n)_{\mathrm{K}},\mathbf{U}(n))$-torseur adélique qu'on notera $\mathbf{Iso}(\mathscr{E},\mathrm{K}^n)$.

4.1.3. Forme tordue d'un faisceau adélique localement libre. — Soit $\mathscr{G} = (\mathrm{G},\mathbf{U})$ un K-groupe adélique. Soient X un K-schéma propre et $\mathscr{F} = (\mathrm{F},\boldsymbol{p})$ un faisceau cohérent adélique sur X. On suppose que le K-schéma en groupes G agit sur le K-schéma X et manière équivariante sur F, et que, pour toute place $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$, la norme géométrique p_v sur le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules F soit invariante sous l'action du sous-groupe compact $\mathbf{U}_v$.

Soit $\mathscr{T} = (\mathrm{T},\mathbf{U}_{\mathrm{T}})$ un $\mathscr{G}$-torseur adélique. Soient X_{T} la forme tordue du K-schéma propre X par le G-torseur X et F_{T} le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}}$-modules déduit en tordant F par T. On va munir F_{T} d'une structure adélique comme il suit.

Comme Spec K est un point, le G-torseur T est triviale, *i.e*, il existe une section $t : \operatorname{Spec}\mathrm{K} \to \mathrm{T}$. On note encore $t : \mathrm{G} \to \mathrm{T}$ l'isomorphisme induit par la multiplication par t. La section t induit un isomorphisme de K-schémas $\theta_t : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}$ et un isomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{T}}}$-modules

$$\varphi_t : \theta_t^*\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}_{\mathrm{T}}.$$

On note $f_t : \mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}}) \to \mathbf{V}(\mathrm{F})$ l'isomorphisme de K-schémas induit par l'isomorphisme φ_t.

Pour toute place v de K on considère la partie compacte $t^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}$ du K_v-groupe analytique $\mathrm{G}_v^{\mathrm{an}}$. Par définition de $\mathscr{G}$-torseur adélique il existe une extension analytique Ω de K_v et un Ω-point du Ω-espace analytique $\mathrm{G}_\Omega^{\mathrm{an}}$ tel que

$$\big(t^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}\big)_\Omega \cdot g = \big(\mathbf{U}_{\mathrm{G},v}\big)_\Omega .$$

On considère la norme géométrique sur le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{(\mathrm{X}_{\mathrm{T}})_\Omega}$-modules $(\mathrm{F}_{\mathrm{T}})_\Omega$ définie par l'application composée

$$p_{\mathscr{T},v}(\Omega) : \ \mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}})_\Omega^{\mathrm{an}} \xrightarrow{(f_t)_\Omega} \mathbf{V}(\mathrm{F})_\Omega^{\mathrm{an}} \xrightarrow{g\cdot -} \mathbf{V}(\mathrm{F})_\Omega^{\mathrm{an}} \xrightarrow{p_{v,\Omega}} \mathbf{R}_+.$$

Soient Ω' une extension analytique de K_v qui contient Ω, $t' : \operatorname{Spec}\mathrm{K} \to \mathrm{T}$ une section de T et g' un Ω'-point du Ω'-groupe analytique $\mathrm{G}_{\Omega'}^{\mathrm{an}}$ tel que

$$\big(t'^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{T},v}\big)_{\Omega'} \cdot g' = \big(\mathbf{U}_{\mathrm{G},v}\big)_{\Omega'} .$$

Soit $f_{t'} : \mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}}) \to \mathbf{V}(\mathrm{F})$ l'isomorphisme de K-schémas induit par la section t'. On considère l'unique Ω'-point u du Ω'-groupe analytique $\mathrm{G}_{\Omega'}^{\mathrm{an}}$ tel que le diagramme suivant $(\star)$ soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}})_{\Omega'} \arrow[r, "(f_{t'})_{\Omega'}"] \arrow[d, equal] & \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\Omega'} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, phantom, "(\star)"] & \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\Omega'} \arrow[d, "u"] \\
\mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}})_{\Omega'} \arrow[r, "(f_t)_{\Omega'}"] & \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\Omega'} \arrow[r, "g'_\Omega"] & \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\Omega'}
\end{tikzcd}$$

Le point u appartient donc au sous-groupe compact $\mathbf{U}_{v,\Omega'}$ de $\mathrm{G}_{\Omega'}^{\mathrm{an}}$. Si on considère la norme géométrique sur le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{(\mathrm{X}_{\mathrm{T}})_{\Omega'}}$-modules $(\mathrm{F}_{\mathrm{T}})_{\Omega'}$ définie par l'application composée

$$p_{\mathscr{T},v}(\Omega') : \ \mathbf{V}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}})_\Omega^{\mathrm{an}} \xrightarrow{(f_{t'})_{\Omega'}} \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\Omega'}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{g'\cdot -} \mathbf{V}(\mathrm{F})_{\Omega'}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{p_{v,\Omega'}} \mathbf{R}_+$$

on a alors

$$p_{\mathscr{T},v}(\Omega') = \varpi_{\Omega'}^* p_{\mathscr{T},v}(\Omega).$$

En vertu de la Proposition I.5.46 la norme géométrique continue $p_{\mathscr{T},v}(\Omega)$ descend en une norme géométrique continue sur le faisceau cohérent de $\mathscr{O}_{X_T}$-modules F_T. De plus, elle ne dépend pas de la section t, de l'extension analytique Ω et du Ω-point g choisis.

En outre, la famille de normes géométriques $\boldsymbol{p}_{\mathscr{T}} = \{p_{\mathscr{T},v}, v \in V_K\}$ est adélique et on note $\mathscr{F}_{\mathscr{T}} = (F_T, \boldsymbol{p}_{\mathscr{T}})$ le faisceau cohérent adélique associé.

Définition 4.8. Le faisceau cohérent adélique $\mathscr{F}_{\mathscr{T}} = (F, \boldsymbol{p}_{\mathscr{T}})$ est appelé la *forme tordue de $\mathscr{F}$ par $\mathscr{T}$*.

4.1.4. Forme tordue d'un sous-groupe normal. — Soient $\mathscr{G} = (G, \mathbf{U}_G)$ un K-groupe adélique. Un sous-K-groupe adélique *normal* de $\mathscr{G}$ est la donnée d'un K-groupe adélique $\mathscr{H} = (H, \mathbf{U}_H)$ formé d'un sous-K-schéma en groupes normal H de G et, si $\tau : G \times H \to H$ désigne l'action par conjugaison de G sur H, pour toute place $v \in V_K$ d'un sous-groupe compact $\mathbf{U}_{H,v}$ de H_v^{an} tel que l'image par τ de la partie

$$\mathrm{pr}_G^{-1}\,\mathbf{U}_{G,v} \cap \mathrm{pr}_H^{-1}\,\mathbf{U}_{H,v}$$

soit contenue dans $\mathbf{U}_{H,v}$.

Soit $\mathscr{T} = (T, \mathbf{U}_{T,v})$ un $\mathscr{G}$-torseur adélique. On construit la forme tordue $\mathscr{H}_{\mathscr{T}}$ du sous-K-groupe adélique $\mathscr{H}$ comme il suit. Soient $t : \operatorname{Spec} K \to H$ une section du G-torseur T : on désigne encore par t l'isomorphisme de K-schémas $G \to T$ que l'obtient en prenant la multiplication par t. Soit $f_t : H_T \to H$ l'isomorphisme de K-schémas en groupes induit par la section t.

Soit v une place de K. On considère la partie compacte $t^{-1}\mathbf{U}_{T,v}$ du K_v-groupe analytique G_v^{an}. Par définition de $\mathscr{G}$-torseur adélique il existe une extension analytique Ω de K_v et un Ω-point du Ω-espace analytique G_Ω^{an} tel que

$$\left(t^{-1}\mathbf{U}_{T,v}\right)_\Omega \cdot g = \left(\mathbf{U}_{G,v}\right)_\Omega.$$

La partie

$$\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v}(\Omega) := f_t^{-1}\left(g \cdot \left(\mathbf{U}_{H,v}\right)_\Omega \cdot g^{-1}\right)$$

est un sous-groupe du Ω-groupe analytique $H_{T,\Omega}^{an}$.

Soient Ω' une extension analytique de K_v qui contient Ω, $t' : \operatorname{Spec} K \to T$ une section de T et g' un Ω'-point du Ω'-groupe analytique $G_{\Omega'}^{an}$ tel que

$$\left(t'^{-1}\mathbf{U}_{T,v}\right)_{\Omega'} \cdot g' = \left(\mathbf{U}_{G,v}\right)_{\Omega'}.$$

Si $f_{t'} : H_T \to H$ est l'isomorphisme de K-schémas en groupes induit par la section t', on considère le sous-groupe du Ω'-groupe analytique $G_{\Omega'}^{an}$,

$$\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v}(\Omega') := f_{t'}^{-1}\left(g' \cdot \left(\mathbf{U}_{H,v}\right)_{\Omega'} \cdot g'^{-1}\right).$$

Si $\varpi_{\Omega'} : G_{\Omega'}^{an} \to G_\Omega^{an}$ désigne le morphisme d'extension des scalaires, alors on a

$$\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v}(\Omega') = \varpi_{\Omega'}^{-1}\left(\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v}(\Omega)\right).$$

Le sous-groupe $\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v}(\Omega)$ descend donc en un sous-groupe $\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v}$ du K_v-groupe analytique $H_{T,v}^{an}$ qui ne dépend pas du choix de l'extension Ω, de la section t et du point g_Ω. La collection de sous-groupes compacts

$$\mathbf{U}_{H,\mathscr{T}} = \left\{\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v} : v \in V_K\right\}$$

munit le K-schéma en groupes H_T d'une structure de K-groupe adélique qu'on notera $\mathscr{H}_{\mathscr{T}}$: on dira qu'elle est la forme tordue de $\mathscr{H}$ par $\mathscr{T}$.

4.2 Forme tordue de la norme géométrique des minima sur les orbites

Soit K un corps globale et V_K l'ensemble de ses places.

Définition 4.9. Un K-groupe adélique $\mathscr{G} = (G, \mathbf{U}_G)$ est dit *réductif* si le K-schéma en groupes G est réductif et, pour toute place v, le sous-groupe compact $\mathbf{U}_{G,v}$ est maximal.

Soient X un K-schéma projectif et $\mathscr{L} = (L, \boldsymbol{u}_L)$ un faisceau inversible adélique sur X et on suppose que le faisceau inversible L soit ample et, pour tout $v \in V_K$, la norme géométrique u_v soit plurisousharmonique.

Soit $\mathscr{G} = (G, \mathbf{U}_G)$ un K-groupe réductif adélique et H un sous-K-schéma en groupes réductif normal. Pour toute place v, le sous-groupe compact

$$\mathbf{U}_{H,v} := \mathbf{U}_{G,v} \cap G_v^{an}$$

est un sous-groupe compact maximal de H_v^{an} : en effet, tous le sous-groupes compacts maximaux sont conjugués et H est normal dans G. On note $\mathscr{H} = (H, \mathbf{U}_H)$ le K-groupe adélique qu'on obtient ainsi.

On suppose que le K-groupe réductif G agit sur le K-schéma X et de manière équivariante sur le faisceau inversible L. En outre, on suppose que pour toute place v la norme géométrique u_v soit invariante sous l'action du sous-groupe compact $\mathbf{U}_{G,v}$.

Soient $X^{ss}(L)$ l'ouvert des points semi-stables de X sous l'action de H et par rapport au faisceau inversible L,

$$\pi : X^{ss}(L) \longrightarrow X^{ss}(L)/H := \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d})^H\right)$$

le morphisme quotient. Pour tout nombre entier $D \geq 1$ assez divisible, il existe un faisceau inversible ample M_D sur $X^{ss}(L)/H$ et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $X^{ss}(L)$,

$$\varphi_D : \pi^* M_D \longrightarrow L|_{X^{ss}(L)}^{\otimes D}$$

compatible à l'action de H. Le K-schéma en groupes G agit sur le K-schéma $X^{ss}(L)/H$ et, pour tout nombre entier $D \geq 1$ assez divisible, de manière équivariante sur le faisceau inversible M_D et l'isomorphisme φ_D est G-équivariant. L'isomorphisme φ_D induit un morphisme surjectif de K-schémas

$$\pi[M_D] : \mathbf{V}(L|_{X^{ss}(L)}^{\otimes D}) \longrightarrow \mathbf{V}(M_D).$$

La famille de normes géométriques sur le faisceau inversible M_D

$$\boldsymbol{u}_{M_D} := \pi[M_D]_\downarrow \boldsymbol{u}_{L^{\otimes D}} = \left\{\pi[M_D]_\downarrow u_{L^{\otimes D}, v} : v \in V_K\right\}$$

est adélique (Scholie 2.2). Le faisceau inversible adélique $(M_D, \boldsymbol{u}_{M_D})$ est noté $\mathscr{M}_D$.

Soit $\mathscr{T} = (T, \mathbf{U}_T)$ un $\mathscr{G}$-torseur adélique. On note X_T (reps. G_T, resp. H_T, resp. L_T) la forme tordue de X (resp. G, resp. H, resp. L) par T. Le K-schéma en groupes réductif G_T agit sur le K-schéma X_T et de manière équivariante sur le faisceau inversible L_T. L'ouvert des points semi-stables $X_T^{ss}(L_T)$ de X_T sous l'action de H_T et par rapport au faisceau inversible L_T est stable sous l'action du K-groupe réductif G_T. Le K-schéma en groupes G_T agit sur le quotient $X^{ss}(L)/H$ et, en vertu de la Proposition 3.11, on a un isomorphisme canonique de K-schémas

$$\Theta_T : T \overset{G}{\times}_S (X^{ss}(L)/H) \longrightarrow X_T^{ss}(L_T)/H_T.$$

tel que le diagramme suivant de K-schémas

$$\begin{tikzcd}
T \overset{G}{\times}_S X^{ss}(L) \arrow[r, equal] \arrow[d, "T\overset{G}{\times}_S \pi"'] & X^{ss}_T(L_T) \arrow[d, "\pi_T"] \\
T \overset{G}{\times}_S (X^{ss}(L)/H) \arrow[r, "\Theta_T"] & X^{ss}_T(L_T)/H_T
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (où π, π_T désignent les morphismes quotient). Pour tout nombre entier assez divisible $D \geq 1$, il existe un faisceau inversible $M_{T,D}$ et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $X^{ss}_T(L_T)$,

$$\varphi_{T,D} : \pi_T^* M_{T,D} \longrightarrow L_T|^{\otimes D}_{X^{ss}_T(L_T)}.$$

L'isomorphisme $\varphi_{T,D}$ induit un morphisme surjectif de K-schémas

$$\pi_T[M_{T,D}] : \mathbf{V}(L_T|^{\otimes D}_{X^{ss}_T(L_T)}) \longrightarrow \mathbf{V}(M_{T,D}).$$

On considère la forme tordue $\mathscr{G}_{\mathscr{T}} = (G_T, \mathbf{U}_{G,\mathscr{T}})$ (resp. $\mathscr{H}_{\mathscr{T}} = (H_T, \mathbf{U}_{H,\mathscr{T}})$, resp. $\mathscr{L}_{\mathscr{T}} = (L_T, \boldsymbol{u}_{\mathscr{T}})$) de $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{H}$, resp. $\mathscr{L}$) par le $\mathscr{G}$-torseur adélique $\mathscr{T}$. Pour toute place $v \in V_K$, la norme géométrique $u_{\mathscr{T},v}$ est une fonction plurisousharmonique $\mathbf{U}_{H,\mathscr{T},v}$-invariante. La famille de normes géométriques sur le faisceau inversible $M_{T,D}$,

$$\pi_T[M_{T,D}]_\downarrow \boldsymbol{u}_{L^{\otimes D},\mathscr{T}} := \left\{\pi_T[M_{T,D}]_\downarrow u_{L^{\otimes D},\mathscr{T},v} : v \in V_K\right\}$$

est pour autant adélique (Scholie 2.2) et le faisceau inversible adélique associé $(M_{T,D}, \pi_T[M_{T,D}]_\downarrow \boldsymbol{u}_{L^{\otimes D}})$ est noté $\mathscr{M}_{\mathscr{T},D}$.

D'autre part, le K-schéma en groupes G agit sur le quotient $X^{ss}(L)/H$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible M_D. Pour toute place $v \in V_K$ la norme géométrique $\boldsymbol{u}_{M_D}$ sur M_D est invariante sous l'action du sous-groupe compact $\mathbf{U}_{G,v}$. On considère la forme tordue

$$(\mathscr{M}_D)_T = \big((M_D)_T, \big(\boldsymbol{u}_{M_D}\big)_{\mathscr{T}}\big)$$

du faisceau inversible adélique $\mathscr{M}_D$ par le $\mathscr{G}$-torseur adélique $\mathscr{T}$.

Proposition 4.10. *Soit $\mathscr{T}$ un $\mathscr{G}$-torseur. L'isomorphisme canonique de faisceaux inversibles donné par la Proposition 3.11,*

$$\theta_T : \Theta_T^* M_{T,D} \longrightarrow (M_D)_T$$

induit un isomorphisme de faisceaux inversibles adéliques

$$\theta_T : \Theta_T^* \mathscr{M}_{\mathscr{T},D} \longrightarrow (\mathscr{M}_D)_{\mathscr{T}}.$$

Démonstration. L'isomorphisme canonique $\theta_T : \theta_T : \Theta_T^* \mathscr{M}_{\mathscr{T},D} \longrightarrow (\mathscr{M}_D)_{\mathscr{T}}$ induit le diagramme commutatif G_T-équivariant de K-schémas suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}\Big(L_T|^{\otimes D}_{X^{ss}_T(L_T)}\Big) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi_T[M_{T,D}]"'] & \mathbf{V}\Big(L_T|^{\otimes D}_{X^{ss}_T(L_T)}\Big) \arrow[d, "\pi[M_D]_T"] \\
\mathbf{V}(M_{T,D}) \arrow[r, "\theta_T"] & \mathbf{V}((M_D)_T).
\end{tikzcd} \tag{4.2.1}$$

Soient $t : \operatorname{Spec} K \to T$ une section du G-torseur T et $\alpha_t : \mathbf{V}(L_T^{\otimes D}) \to \mathbf{V}(L^{\otimes D})$, $\beta_t : \mathbf{V}((M_D)_T) \to \mathbf{V}(M_D)$ les isomorphismes de K-schémas induits par la section t. Le diagramme de K-schémas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}\left(L_T|^{\otimes D}_{X_T^{ss}(L_T)}\right) \arrow[r, "\alpha_t"] \arrow[d, "\pi[M_D]_T"'] & \mathbf{V}\left(L|^{\otimes D}_{X^{ss}(L)}\right) \arrow[d, "\pi[M_D]"] \\ \mathbf{V}((M_D)_T) \arrow[r, "\beta_t"] & \mathbf{V}(M_D) \end{tikzcd}$$

Soit v une place de K. Puisque la construction de la métrique des minima est compatible aux extension des scalaires (Proposition II.1.5), quitte à passer à une extension analytique de K_v suffisamment grande, on peut supposer qu'il existe un K_v-point g du K-schéma G tel que

$$\left(t^{-1}\mathbf{U}_{T,v}\right) \cdot g = \mathbf{U}_{G,v}.$$

La norme géométrique $u_{L^{\otimes D},\mathcal{T},v}$ sur le faisceau inversible L_T est alors l'application composée

$$\mathbf{V}(L_T^{\otimes D})_v^{an} \xrightarrow{\alpha_t} \mathbf{V}(L^{\otimes D})_v^{an} \xrightarrow{g} \mathbf{V}(L^{\otimes D})_v^{an} \xrightarrow{u_{L^{\otimes D},v}} \mathbf{R}_+ \ .$$

D'autre part, la norme géométrique $\left(u_{M_D,v}\right)_{\mathcal{T}}$ sur le faisceau inversible $(M_D)_T$ est l'application composée

$$\mathbf{V}((M_D)_T)_v^{an} \xrightarrow{\beta_t} \mathbf{V}(M_D)_v^{an} \xrightarrow{g} \mathbf{V}(M_D)_v^{an} \xrightarrow{u_{M_D,v}} \mathbf{R}_+ \ ,$$

où par définition on a $u_{M_D,v} = \pi[M_D]_\downarrow u_{L^{\otimes D},v}$. Puisque l'isomorphisme φ_D est G-équivariant, le diagramme de K_v-espaces analytiques

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}\left(L|^{\otimes D}_{X^{ss}(L)}\right)_v^{an} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi[M_D]"'] & \mathbf{V}\left(L|^{\otimes D}_{X^{ss}(L)}\right)_v^{an} \arrow[d, "\pi[M_D]"] \\ \mathbf{V}(M_D)_v^{an} \arrow[r, "g"] & \mathbf{V}(M_D)_v^{an} \end{tikzcd}$$

est commutatif. On a donc la chaine d'égalités

$$\begin{aligned} \left(u_{M_D,v}\right)_{\mathcal{T}} &= \beta_t^* g^* u_{M_D,v} \\ &= \beta_t^* g^* \pi[M_D]_\downarrow u_{L^{\otimes D},v} \\ &= \beta_t^* \pi[M_D]_\downarrow g^* u_{L^{\otimes D},v} \\ &= \beta_t^* \pi[M_D]_\downarrow \left(u_{L^{\otimes D},v}\right)_{\mathcal{T}}, \end{aligned}$$

ce qui, en vertu du diagramme commutatif (4.2.1), termine la preuve. □

4.3 Isomorphisme canonique du quotient

Soit $\mathcal{G} = (G, \mathbf{U}_G)$ un K-groupe adélique et $\chi : G \to \mathbf{G}_m$ un caractère, *i.e.*, un morphisme de K-schémas en groupes. Le K-schéma en groupes G agit linéairement sur le K-espace vectoriel K à travers le caractère χ. Pour tout place $v \in V_K$, soit $p_v : \mathbf{A}_v^{1,an} \to \mathbf{R}_+$ l'unique norme géométrique telle que p_v telle que $p_v(1) = 1$: elle est invariante sous l'action du sous-groupe compact $\mathbf{U}_{G,v}$. Alors, pour tout $\mathcal{G}$-torseur adélique $\mathcal{T}$ on note $\mathcal{O}_K(\chi(\mathcal{T}))$ le faisceau inversible adélique associé.

On revient aux notations de la section précédente 4.2.

Théorème 4.11. *On suppose que l'action du* K*-schéma en groupes* G *sur le quotient* $X^{ss}(L)/H$ *soit triviale. Avec les notations introduites avant, pour tout nombre entier assez divisible* $D \geq 1$*, il existe alors un morphisme de* K*-schémas en groupes* $\chi_D : G \to \mathbf{G}_m$ *et, pour tout* $\mathscr{G}$*-torseur* $\mathscr{T}$*, un isomorphisme de faisceaux inversibles sur* $X^{ss}(L)/H$*,*

$$\psi_{\mathscr{T},D} : \Theta_T^* \mathscr{M}_{\mathscr{T},D} \longrightarrow \mathscr{M}_D \otimes \beta^* \mathscr{O}_K(\chi_D(\mathscr{T})),$$

tel que, pour tout nombre entier $d \geq 1$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \left(\Theta_T^* \mathscr{M}_{\mathscr{T},D}\right)^{\otimes d} \arrow[r, "\psi_{\mathscr{T},D}^{\otimes d}"] \arrow[d, equal] & \left(\mathscr{M}_D \otimes \beta^* \mathscr{O}_K\left(\chi_D(\mathscr{T})\right)\right)^{\otimes d} \arrow[d, equal] \\ \Theta_T^* \mathscr{M}_{\mathscr{T},Dd} \arrow[r, "\psi_{\mathscr{T},Dd}"] & \mathscr{M}_{Dd} \otimes \beta^* \mathscr{O}_K\left(\chi_{Dd}(\mathscr{T})\right) \end{tikzcd}$$

est commutatif. En particulier, on a

$$h_{\min}((X_T, \mathscr{L}_{\mathscr{T}})/\!/H_T) = h_{\min}((X, \mathscr{L})/\!/H) + \frac{1}{D}\,\widehat{\deg}_K \mathscr{O}_K\left(\chi_{Dd}(\mathscr{T})\right).$$

Démonstration. En vertu de la Proposition 4.10 il s'agit d'interpréter la forme tordue $\left(\boldsymbol{u}_{M_D}\right)_{\mathscr{T}}$ de la norme géométrique $\boldsymbol{u}_{M_D}$ par le $\mathscr{G}$-torseur adélique $\mathscr{T}$.

Soient $t : \operatorname{Spec} K \to T$ une section du G-torseur T, $\alpha_t : \mathbf{V}((M_D)_T) \to \mathbf{V}(M_D)$ l'isomorphisme de K-schémas induits par la section t et v une place de K. Quitte à passer à une extension analytique de K_v suffisamment grande, on peut supposer qu'il existe un K_v-point g du K-schéma G tel que

$$\left(t^{-1}\mathbf{U}_{T,v}\right) \cdot g = \mathbf{U}_{G,v}.$$

La norme géométrique $\left(u_{M_D,v}\right)_{\mathscr{T}}$ sur le faisceau inversible $(M_D)_T$ est l'application composée

$$\mathbf{V}((M_D)_T)_v^{an} \xrightarrow{\alpha_t} \mathbf{V}(M_D)_v^{an} \xrightarrow{g} \mathbf{V}(M_D)_v^{an} \xrightarrow{u_{M_D,v}} \mathbf{R}_+ .$$

On identifie le quotient $\mathbf{G}_{m,v}^{an}/\mathbf{U}(1)$ avec $\mathbf{R}_+^\times$ à travers la valeur absolue de K_v et on note $|\chi_D(\mathscr{T})|_v$ l'image de $\chi_D(g) \in \mathbf{G}_{m,v}^{an}$ à travers le morphisme quotient $\mathbf{G}_{m,v}^{an} \to \mathbf{R}_+^\times$. Puisque le K-schéma en groupes G agit par homothéties sur le faisceau inversible M_D à travers le caractère χ_D, on a l'égalité

$$g^* u_{M_D,v} = |\chi_D(\mathscr{T})|_v \cdot u_{M_D,v}.$$

D'autre part, le faisceau inversible adélique $\mathscr{O}_K(\chi_D(\mathscr{T}))$ s'identifie au K-espace vectoriel K muni, en toute place v, de l'unique norme géométrique qui vaut $|\chi_D(\mathscr{T})|_v$ en 1. La faisceau inversible adélique $\mathscr{M}_D \otimes \beta^* \mathscr{O}_K(\chi_D(\mathscr{T}))$ s'identifie donc au faisceau inversible M_D muni, en toute place $v \in V_K$, de la norme géométrique $|\chi_D(\mathscr{T})|_v \cdot u_{M_D,v}$. Cela achève la preuve. □

4.4 Un exemple : représentations homogènes

Soient K un corps global et V_K l'ensemble de ses places. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs. On considère les K-schémas en groupes réductifs

$$G := \mathbf{GL}(e_1)_K \times_K \cdots \times_K \mathbf{GL}(e_n)_K$$
$$H := \mathbf{SL}(e_1)_K \times_K \cdots \times_K \mathbf{SL}(e_n)_K.$$

Pour toute place v et pour tout $i = 1,\dots,n$, on considère le sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}(e_i)_v$ de $\mathbf{GL}(e_i)_v^{\mathrm{an}}$. Le sous-groupe compact de $\mathrm{G}_v^{\mathrm{an}}$,

$$\mathbf{U}(e)_v := \mathrm{pr}_1^{-1}\mathbf{U}(e_1) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_n^{-1}\mathbf{U}(e_n)$$

est alors maximal. On note $\mathbf{U}(e)$ la famille $\{\mathbf{U}(e)_v : v \in \mathrm{V_K}\}$ et $\mathscr{G}$ le K-groupe réductif adélique $(\mathrm{G}, \mathbf{U}(e))$. On munit le K-groupe réductif H de la structure de K-groupe réductif adélique en considérant, en toute place v, le sous-groupe compact maximal

$$\mathbf{SU}(e) := \mathbf{U}(e) \cap \mathrm{H}_v^{\mathrm{an}}.$$

Soient $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{F}})$ un faisceau adélique localement libre sur K et $\rho : \mathscr{G} \to \mathbf{GL}(\mathscr{F})$ un morphisme de K-groupes adélique, c'est-à-dire, un morphisme de K-schémas en groupes $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ tel que, pour toute place $v \in \mathrm{V_K}$, l'image du sous-groupe compact $\mathbf{U}(e)_v$ soit contenue dans le sous-groupe compact $\mathbf{U}(p_{\mathrm{F},v})$ unitaire par rapport à la norme géométrique $p_{\mathrm{F},v}$:

$$\rho(\mathbf{U}(e)_v) \subset \mathbf{U}(p_{\mathrm{F},v}).$$

Le K-schéma en groupes G agit sur le K-schéma projectif $\mathrm{X} = \mathbf{P}(\mathrm{F})$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathrm{L} = \mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)$. On considère l'ouvert des points semi-stables $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})$ de X sous l'action du K-groupe réductif H et

$$\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H} := \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0}\left(\mathrm{Sym}_{\mathrm{K}}^d \mathrm{F}\right)^{\mathrm{H}}\right)$$

le morphisme quotient.

Soit $\mathscr{E} = (\mathscr{E}_1,\dots,\mathscr{E}_n)$ un n-uplet de faisceaux adéliques localement libres sur K, avec $\mathrm{rk}\,\mathscr{E}_i = e_i$. En revenant aux notations de l'exemple 4.7 Pour tout $i = 1,\dots,n$ et pour toute place $v \in \mathrm{V_K}$ on considère la partie compacte de $\mathbf{GL}(\mathrm{E}_i)_v^{\mathrm{an}}$,

$$\mathbf{Iso}(\mathscr{E}_i, \mathrm{K}^{e_i})_v = \left\{ t \in \mathbf{Iso}(\mathrm{E}, \mathrm{K}^{e_i})_v^{\mathrm{an}} : t \text{ unitaire} \right\}.$$

Pour toute place $v \in \mathrm{V_K}$ on pose

$$\mathbf{Iso}(\mathscr{E}, \mathrm{K}^e)_v = \mathrm{pr}_1^{-1}\mathbf{Iso}(\mathscr{E}_1, \mathrm{K}^{e_1})_v \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_n^{-1}\mathbf{Iso}(\mathscr{E}_n, \mathrm{K}^{e_n})_v.$$

La collection $\mathrm{Iso}(\mathscr{E}, \mathrm{K}^e) = \{\mathbf{Iso}(\mathscr{E}, \mathrm{K}^e)_v : v \in \mathrm{V_K}\}$ munit le G-torseur

$$\mathbf{Iso}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E}, \mathrm{K}^e) := \mathbf{Iso}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E}_1, \mathrm{K}^{e_1}) \times_{\mathrm{K}} \cdots \times_{\mathrm{K}} \mathbf{Iso}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E}_n, \mathrm{K}^{e_n})$$

d'une structure de $\mathscr{G}$-torseur adélique qu'on désignera par $\mathscr{T}_{\mathscr{E}}$. Par abus de language on parlera de formes tordues par $\mathscr{E}$ au lieu de formes tordues par $\mathscr{T}_{\mathscr{E}}$ et on les désignera avec un $\mathscr{E}$ en indice. Avec cette convention, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{\mathscr{E}} &= \mathbf{GL}(\mathscr{E}_1) \times_{\mathrm{K}} \cdots \times_{\mathrm{K}} \mathbf{GL}(\mathscr{E}_n)_{\mathrm{K}}, \\
\mathscr{H}_{\mathscr{E}} &= \mathbf{SL}(\mathscr{E}_1) \times_{\mathrm{K}} \cdots \times_{\mathrm{K}} \mathbf{SL}(\mathscr{E}_n)_{\mathrm{K}}, \\
\mathscr{L}_{\mathscr{E}} &= \mathscr{O}_{\mathrm{F_E}}(1),
\end{aligned}$$

où $\mathrm{F_E}$ est la forme de F tordue par E. Le S-schéma en groupes $\mathrm{G_E}$ agit sur le S-schéma projectif et plat $\mathrm{X_E} = \mathbf{P}(\mathrm{F_E})$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathrm{L_E} = \mathscr{O}_{\mathrm{F_E}}(1)$. On considère l'ouvert des points semi-stables $\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L_E})$ de $\mathrm{X_E}$ sous l'action du S-groupe réductif $\mathrm{H_E}$ et

$$\pi_{\mathrm{E}} : \mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L_E}) \longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L_E})/\mathrm{H_E} := \mathbf{Proj}_{\mathrm{S}}\left(\bigoplus_{d \geq 0}\left(\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}^d \mathrm{F_E}\right)^{\mathrm{H_E}}\right)$$

le morphisme quotient. En appliquant la Proposition 4.11 on obtient le résultat suivant (comparer avec [Gas00, Theorem 1], [Bos94, Theorem I, Theorem III]).

Théorème 4.12. *On suppose que la représentation* $\rho : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ *soit homogène de poids* $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$*. Alors, pour tout nombre entier assez divisible* $\mathrm{D} \geq 1$*, il existe un isomorphisme de faisceaux inversibles sur* $\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{L})/\mathrm{H}$*,*

$$\psi_{\mathscr{E},\mathrm{D}} : \mathscr{M}_{\mathscr{E},\mathrm{D}} \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathrm{D}} \otimes \beta^* \bigotimes_{i=1}^{n} (\det \mathscr{E}_i)^{\otimes m_i \mathrm{D}/e_i}$$

tel que, pour tout nombre entier $d \geq 1$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathscr{M}_{\mathscr{E},\mathrm{D}}\right)^{\otimes d} \arrow[r, "\psi^{\otimes d}_{\mathscr{E},\mathrm{D}}"] \arrow[d, equal] & \left(\mathscr{M}_{\mathrm{D}} \otimes \beta^* \bigotimes_{i=1}^{n} (\det \mathscr{E}_i)^{\otimes m_i \mathrm{D}/e_i}\right)^{\otimes d} \arrow[d, equal] \\
\mathscr{M}_{\mathscr{E},\mathrm{D}d} \arrow[r, "\psi_{\mathscr{E},\mathrm{D}d}"] & \mathscr{M}_{\mathrm{D}d} \otimes \beta^* \bigotimes_{i=1}^{n} (\det \mathscr{E}_i)^{\otimes m_i \mathrm{D}d/e_i}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En particulier on a

$$h_{\min}\big((\mathbf{P}(\mathrm{F}), \mathscr{O}_{\mathscr{F}_{\mathscr{E}}}(1))/\!/\mathrm{H}\big) = h_{\min}\big((\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{F}}(1))/\!/\mathrm{H}\big) + \sum_{i=1}^{n} m_i\, \widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}_i).$$

5 Borne inférieure sur $h_{\min}((\mathrm{X},\mathscr{L})/\!/\mathrm{G})$

5.1 Rappels de théorie classique des invariants

5.1.1. Le premier théorème de la théorie des invariants. — Soit k un corps de caractéristique nulle. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ un n-uplet de k-espaces vectoriels, E_i de dimension finie $e_i \geq 1$. On considère les k-groupes réductifs :

$$\mathbf{GL}(\mathrm{E}) = \mathbf{GL}(\mathrm{E}_1) \times \cdots \times \mathbf{GL}(\mathrm{E}_n),$$
$$\mathbf{SL}(\mathrm{E}) = \mathbf{SL}(\mathrm{E}_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}(\mathrm{E}_n).$$

Si V est un k-espace vectoriel et m un nombre entier négatif on pose $\mathrm{V}^{\otimes m} := \mathrm{V}^{\vee \otimes |m|}$.

Soit $m = (m_1, \dots, m_n)$ un n-uplet de nombres entiers. Le k-groupe réductif $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ agit composante par composante sur le k-espace vectoriel

$$\mathrm{F}_m := \mathrm{End}\big(\mathrm{E}_1^{\otimes m_1}\big) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}\big(\mathrm{E}_n^{\otimes m_n}\big)$$

et la représentation $\mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F}_m)$ qui définit cette action est homogène de poids $(0, \dots, 0)$. En vertu de la Proposition 3.17 les éléments invariants par $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ et $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ coïncident :

$$\mathrm{F}_m^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})} = \mathrm{F}_m^{\mathbf{GL}(\mathrm{E})}.$$

Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit $\mathfrak{S}_{|m_i|}$ le groupe des permutations sur $|m_i|$ éléments [1] et, pour toute permutation $\sigma_i \in \mathfrak{S}_{|m_i|}$, soit $\varepsilon_{\sigma_i} : \mathrm{E}^{\otimes m_i} \to \mathrm{E}^{\otimes m_i}$ l'automorphisme du k-espace vectoriel qui permute les facteurs de E^{m_i} par σ_i. L'automorphisme ε_{σ_i}, en tant qu'élément de $\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m_i})$, est invariant sous l'action du $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$. Autrement dit, l'image de l'homomorphisme de k-algèbres non commutatives

$$\varepsilon : k[\mathfrak{S}_{|m_1|}] \otimes \cdots \otimes k[\mathfrak{S}_{|m_n|}] \longrightarrow \mathrm{F}_m := \mathrm{End}\big(\mathrm{E}_1^{\otimes m_1}\big) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}\big(\mathrm{E}_n^{\otimes m_n}\big)$$

défini par $\varepsilon(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n) := \varepsilon_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{\sigma_n}$, est contenue dans le sous-espaces des invariants par $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ (ou également $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$).

1. Ici l'ensemble des permutations sur 0 éléments est le groupe $\{\mathrm{id}\}$.

Proposition 5.1 (Premier Théorème de la théorie des invariants pour $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$)**.** *Soient k un corps de caractéristique nulle, $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ un n-uplet de k-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $m = (m_1, \dots, m_n)$ un n-uplet de nombres entiers. Alors, le k-groupe réductif*

$$\mathbf{SL}(\mathrm{E}) = \mathbf{SL}(\mathrm{E}_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}(\mathrm{E}_n)$$

agit composante par composante sur le k-espace vectoriel

$$\mathrm{F}_m := \mathrm{End}\left(\mathrm{E}_1^{\otimes m_1}\right) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}\left(\mathrm{E}_n^{\otimes m_n}\right)$$

et le sous-espace des invariants $\mathrm{F}_m^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$ coïncide avec l'image de l'application naturelle

$$\varepsilon : k[\mathfrak{S}_{|m_1|}] \otimes \cdots \otimes k[\mathfrak{S}_{|m_n|}] \longrightarrow \mathrm{F}_m := \mathrm{End}\left(\mathrm{E}_1^{\otimes m_1}\right) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}\left(\mathrm{E}_n^{\otimes m_n}\right).$$

5.1.2. Application aux représentations homogènes. — Soit k un corps de caractéristique nulle. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ un n-uplet de k-espaces vectoriels, E_i de dimension finie $e_i \geq 1$. On considère les k-schémas en groupes :

$$\mathbf{GL}(\mathrm{E}) = \mathbf{GL}(\mathrm{E}_1) \times \cdots \times \mathbf{GL}(\mathrm{E}_n),$$
$$\mathbf{SL}(\mathrm{E}) = \mathbf{SL}(\mathrm{E}_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}(\mathrm{E}_n).$$

Proposition 5.2. *Soient F un k-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ une représentation. Soient $m = (m_1, \dots, m_n)$ un n-uplet de nombres entiers et*

$$\varphi : \mathrm{E}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}_n^{\otimes m_n} \longrightarrow \mathrm{F}$$

un homomorphisme surjectif et $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$-équivariant de k-espaces vectoriels. Alors, la représentation ρ est homogène de poids m et si le sous-espace des invariants $\mathrm{F}^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$ est non nul, on a :

i. pour tout $i = 1, \dots, n$, $e_i = \dim_k \mathrm{E}_i$ divise m_i ;

ii. le sous-espace des invariants $\mathrm{F}^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$ coïncide avec l'image de l'homomorphisme composé

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \left(k[\mathfrak{S}_{|m_i|}] \otimes \det(\mathrm{E}_i)^{\otimes m_i / e_i}\right) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}} \bigotimes_{i=1}^{n} \left(\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m_i}) \otimes \det(\mathrm{E})^{\otimes m_i / e_i}\right) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{E}^{\otimes m_i} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{F}.$$

Démonstration. Le point (i) est une conséquence de la Proposition 3.17.

Pour (ii) on rappelle d'abord que si k est un corps de caractéristique nulle et G un k-groupe réductif, alors la construction des invariants par G est un foncteur exact sur la catégorie des représentations de G. En effet la fonctorialité de la projection sur les invariants (c'est-à-dire, l'opérateur de Reynolds), permet de montrer que si V, W sont des k-espaces vectoriels muni d'une action linéaire de G et $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un homomorphisme surjectif et G-équivariant, alors l'homomorphisme induit sur les invariants

$$\pi : \mathrm{V}^{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{W}^{\mathrm{G}}$$

est surjectif. Comme par hypothèse l'homomorphisme

$$\varphi : \mathrm{E}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}_n^{\otimes m_n} \longrightarrow \mathrm{F}$$

est surjectif et $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$-équivariant, on se ramène à montrer l'énoncé pour $\mathrm{F} = \mathrm{E}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}_n^{\otimes m_n}$ et $\varphi = \mathrm{id}$. D'autre part, l'homomorphisme de k-espaces vectoriels

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \left(\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m_i}) \otimes \det(\mathrm{E})^{\otimes m_i / e_i}\right) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{E}^{\otimes m_i}$$

est aussi surjectif et $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$-équivariant. Il reste donc à démontrer que le sous-espace des invariants

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m_i})\otimes\det(\mathrm{E})^{\otimes m_i/e_i}\right)^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$$

coïncide avec l'image de l'homomorphisme naturel

$$\bigotimes_{i=1}^{n}\left(k[\mathfrak{S}_{|m_i|}]\otimes\det(\mathrm{E}_i)^{\otimes m_i/e_i}\right)\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^{n}\left(\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m_i})\otimes\det(\mathrm{E})^{\otimes m_i/e_i}\right).$$

Puisque, pour tout $i=1,\dots,n$, le k-groupe réductif $\mathbf{SL}(\mathrm{E}_i)$ agit trivialement sur k-espace vectoriel $\det(\mathrm{E}_i)$, ceci est le contenu du Premier Théorème de la théorie classique des invariants 5.1. □

5.2 Minoration de la constante pour les représentations homogènes

5.2.1. Calcul local. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme géométrique p_{E}. Si la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne (resp. non archimédienne), on supposera que la norme géométrique p_{E} soit hermitienne (resp. non archimédienne).

Proposition 5.3. *Soient m un nombre entier et $\sigma\in\mathfrak{S}_{|m|}$ une permutation. L'isomorphisme $\varepsilon_\sigma:\mathrm{E}^{\otimes m}\to\mathrm{E}^{\otimes m}$, obtenu en permutant le facteurs par σ, est isométrique par rapport à la norme géométrique $p_{\mathrm{E}^{\otimes m}}$. Par conséquent, on a*

$$\log\|\varepsilon_\sigma\|_{\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m})}=\begin{cases}\frac{|m|}{2}\log\dim_k\mathrm{E} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord, en vertu de l'isomorphisme canonique $\mathfrak{S}_{|m|}$-équivariant et isométrique $\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m})\to\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\vee\otimes m})$, on peut supposer que le nombre entier m soit positif.

Si la valeur absolue de k est non archimédienne, quitte à remplacer k par une extension analytique, on peut supposer que la norme géométrique p_{E} provient d'un sous-k°-module libre $\mathfrak{E}$ de E tel que $\mathfrak{E}\otimes_{k^\circ}k=\mathrm{E}$. L'isomorphisme de k-espaces vectoriels $\varepsilon_\sigma:\mathrm{E}^{\otimes m}\to\mathrm{E}^{\otimes m}$ se relève un isomorphisme de k°-modules $\varepsilon_\sigma:\mathfrak{E}^{\otimes m}\to\mathfrak{E}^{\otimes m}$. La norme $\|\varepsilon_\sigma\|_{\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m})}$, qui dans le cas non archimédien coïncide avec la norme d'opérateur de ε_σ est alors égale à 1.

Si la valeur absolue de k est archimédienne, soit $e_1,\dots,e_n$ une base orthonormale du k-espace vectoriel E. On a alors

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_\sigma\|^2_{\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m})}&=\sum_{\mathrm{I}\in\{1,\dots,n\}^m}\|\varepsilon_\sigma(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m})\|^2_{\mathrm{E}^{\otimes m}}\\&=\sum_{\mathrm{I}\in\{1,\dots,n\}^m}\|e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m}\|^2_{\mathrm{E}^{\otimes m}}\\&=\#\{1,\dots,n\}^m=n^m,\end{aligned}$$

et donc $\|\varepsilon_\sigma\|_{\mathrm{End}(\mathrm{E}^{\otimes m})}=(\dim_k\mathrm{E})^{m/2}$, ce qui achève la preuve. □

5.2.2. Calcul global. — Soit K un corps global. Soient $n\geq 1$ un nombre entier et $\mathscr{E}=(\mathscr{E}_1,\dots,\mathscr{E}_n)$ un n-uplet de faisceaux adéliques localement libres sur Spec K, avec $\mathscr{E}_i=(\mathrm{E}_i,\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}_i})$ de rang fini $e_i\geq 1$. On considère les K-schémas en groupes :

$$\mathbf{GL}(\mathrm{E})=\mathbf{GL}(\mathrm{E}_1)\times\cdots\times\mathbf{GL}(\mathrm{E}_n),$$
$$\mathbf{SL}(\mathrm{E})=\mathbf{SL}(\mathrm{E}_1)\times\cdots\times\mathbf{SL}(\mathrm{E}_n).$$

Soient $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{F}})$ un faisceau cohérent adélique sur $\operatorname{Spec} \mathrm{K}$ et $\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ une représentation unitaire à toute place. Le K-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ agit sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F})$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)$. On désigne par $\mathbf{P}(\mathrm{F})^{\mathrm{ss}}$ l'ouvert des points semi-stables et par

$$\pi : \mathbf{P}(\mathrm{F})^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \mathrm{Y} := \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} (\operatorname{Sym}^d \mathrm{F})^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}\right)$$

le morphisme quotient. Pour tout nombre entier $\mathrm{D} > 0$ assez divisible, il existe un faisceau inversible ample M_{D} sur Y et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathbf{P}(\mathrm{F})^{\mathrm{ss}}$,

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \pi^* \mathrm{M}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{F}}(\mathrm{D})|_{\mathbf{P}(\mathrm{F})^{\mathrm{ss}}}$$

compatible à l'action de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. On désigne par $\mathscr{M}_{\mathrm{D}}$ le faisceau inversible adélique obtenu en considerant, à toute place v, la métrique des minima sur les fibres de $\pi[\mathrm{M}_{\mathrm{D}}]$ de la métrique sur $\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(1)$ induite par la norme q_v.

Théorème 5.4. *Soient* $\mathscr{F} = (\mathrm{F}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{F}})$ *un faisceau cohérent adélique sur* $\operatorname{Spec} \mathrm{K}$ *et* $\rho : \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ *une représentation unitaire à toute place. Soient* $m = (m_1, \ldots, m_n)$ *un* n*-uplet de nombres entiers et*

$$\psi : \mathscr{E}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{E}_n^{\otimes m_n} \longrightarrow \mathscr{F}$$

un homomorphisme de faisceaux cohérents adéliques tel que l'homomorphisme de K*-espaces vectoriels sous-jacent*

$$\psi : \mathrm{E}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}_n^{\otimes m_n} \longrightarrow \mathrm{F}$$

soit surjectif et $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$*-équivariant. Alors on a*

$$h_{\min}\big((\mathbf{P}(\mathrm{F}), \mathscr{O}_{\mathscr{F}}(1)) /\!/ \mathbf{SL}(\mathrm{E})\big) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}_i) - |m_i| \frac{[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]}{2} \log e_i \qquad \text{(K corps de nombres)}$$

$$h_{\min}\big((\mathbf{P}(\mathrm{F}), \mathscr{O}_{\mathscr{F}}(1)) /\!/ \mathbf{SL}(\mathrm{E})\big) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}_i) \qquad \text{(K corps de fonctions)}$$

Démonstration. Puisque l'homomorphisme ψ est G-équivariant, la représentation $\mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F})$ qui définit l'action de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{F})$ est homogène de poids $m = (m_1, \ldots, m_n)$. On pourrait pour autant utiliser les constructions de la section 4 pour se ramener au cas où les faisceaux adéliques localement libres $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ sont les faisceaux adéliques « libres » $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}^{\oplus e_1}, \ldots, \mathscr{O}_{\mathrm{K}}^{\oplus e_n}$. Toutefois, le fait que les faisceaux adéliques localement libres $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ ne soient pas les faisceaux triviales ne comporte aucune difficulté supplémentaire dans le calcul et on préfère ici de le faire directement.

Soient $\mathrm{D} \geq 1$ un nombre entier assez divisible tel qu'il existe un faisceau inversible M_{D} sur Y ample et engendré par ses sections globales (même très ample, si l'on veut) et un isomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathbf{P}(\mathrm{F})^{\mathrm{ss}}$,

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \pi^* \mathrm{M}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathscr{O}(\mathrm{D})|_{\mathbf{P}(\mathrm{F})^{\mathrm{ss}}},$$

compatible à l'action de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. Les sections globales du faisceau inversibles M_{D} s'identifient à travers l'isomorphisme φ_{D} au sous-espace des sections globales $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$-invariantes du faisceaux inversibles $\mathscr{O}(\mathrm{D})$,

$$\Gamma(\mathrm{Y}, \mathrm{M}_{\mathrm{D}}) = \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{F}), \mathscr{O}(\mathrm{D}))^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})} = \big(\operatorname{Sym}^{\mathrm{D}} \mathrm{F}\big)^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$$

L'homomorphisme de faisceau adéliques localements libres

$$\mathscr{E}_1^{\otimes \mathrm{D} m_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{E}_n^{\otimes \mathrm{D} m_n} \longrightarrow \operatorname{Sym}^{\mathrm{D}}\big(\mathscr{E}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{E}_n^{\otimes m_n}\big) \xrightarrow{\operatorname{Sym}^{\mathrm{D}} \psi} \operatorname{Sym}^{\mathrm{D}} \mathscr{F}$$

est tel que l'homomorphisme de K-espaces vectoriels sous-jacent

$$\mathrm{E}_1^{\otimes \mathrm{D}m_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}_n^{\otimes \mathrm{D}m_n} \longrightarrow \mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\left(\mathrm{E}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}_n^{\otimes m_n}\right) \xrightarrow{\mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\psi} \mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}$$

est surjectif et $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$-équivariant. La Proposition 5.2 entraîne alors que le sous-espaces des invariants $(\mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\,\mathrm{F})^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$ du k-espace vectoriel $\mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}$ par le k-groupe réducitf $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ coïncide avec l'image de l'homomorphisme

$$\bigotimes_{i=1}^n \left(k[\mathfrak{S}_{\mathrm{D}m_i}] \otimes \det(\mathrm{E}_i)^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right) \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}} \bigotimes_{i=1}^n \left(\mathrm{End}\left(\mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i}\right) \otimes \det(\mathrm{E})^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n \mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}.$$

Pour tout $i = 1,\ldots,n$ et pour tout $\sigma_i \in \mathfrak{S}_{\mathrm{D}m_i}$ soit ε_{σ_i} l'automorphisme du k-espace $\mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i}$ qui permute les facteurs par σ_i. Alors, pour tout $w \in \det(\mathrm{E})$ non nul, le sous-espace des invariants

$$\Gamma(\mathrm{Y},\mathrm{M}_{\mathrm{D}}) = (\mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\,\mathrm{F})^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$$

est engendré par l'image dans $\mathrm{Sym}^{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}$ des éléments de la forme

$$\bigotimes_{i=1}^n \left(\varepsilon_{\sigma_i} \otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right)$$

avec $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \mathfrak{S}_{\mathrm{D}m_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mathrm{D}m_n}$.

Pour toute famille génératrice B des sections globales $\Gamma(\mathrm{Y},\mathrm{M}_{\mathrm{D}}) = \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{F}),\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}})^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}$ par définition de norme géométrique des minima, on a :

$$\begin{aligned} h_{\min}\left((\mathbf{P}(\mathrm{F}),\mathscr{O}_{\mathscr{F}}(1))/\!/\mathbf{SL}(\mathrm{E})\right) &\geq -\frac{1}{\mathrm{D}}\max_{s\in\mathrm{B}}\left\{\sum_{v\in\mathrm{V}_{\mathrm{K}}}\deg(v)\left(\sup_{y\in\mathrm{Y}_v^{\mathrm{an}}}\log\|s\|_{\mathrm{M}_{\mathrm{D}},v}(y)\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{D}}\max_{s\in\mathrm{B}}\left\{\sum_{v\in\mathrm{V}_{\mathrm{K}}}\deg(v)\left(\sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{F})_v^{\mathrm{an}}}\log\|s\|_{\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(\mathrm{D}),v}(x)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Comme l'homomorphisme ψ diminue les normes (par définition d'homomorphisme de faisceaux adéliques), pour tout $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ et pour toute place v, on a

$$\sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{F})_v^{\mathrm{an}}}\log\left\|\psi\left(\bigotimes_{i=1}^n\left(\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right)\right)\right\|_{\mathscr{O}_{\mathrm{F}}(\mathrm{D}),v}(x) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i})_v^{\mathrm{an}}}\log\left\|\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right\|_{\mathscr{O}(1),v}(x), \tag{5.2.2}$$

Pour tout $i = 1,\ldots,n$ et pour toute place v on a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i})_v^{\mathrm{an}}}\log\|\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\|_{\mathscr{O}(1),v}(x) &\leq \log\|\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\|_{\mathrm{End}(\mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i})\otimes\det(\mathrm{E})^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}} \\ &= \log\|\varepsilon_{\sigma_i}\|_{\mathrm{End}(\mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i})} + \frac{\mathrm{D}m_i}{e_i}\log\|w\|_{\det(\mathrm{E}),v}. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 5.3 on a :

$$\log\|\varepsilon_{\sigma_i}\|_{\mathrm{End}(\mathrm{E}_i^{\otimes \mathrm{D}m_i})} = \begin{cases} \frac{\mathrm{D}|m_i|}{2}\log e_i & \text{si } v \text{ est archimédienne} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si v est une place archimédienne on a :

$$\sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{F})_v^{\mathrm{an}}} \log\left\|\psi\left(\bigotimes_{i=1}^n \left(\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right)\right)\right\|_{\mathscr{O}_\mathrm{F}(\mathrm{D}),v}(x) \le \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{D}|m_i|}{2}\log e_i + \frac{\mathrm{D}m_i}{e_i}\log\|w\|_{\det(\mathrm{E}),v}\,;$$

si par contre v est une place non archimédienne on a :

$$\sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{F})_v^{\mathrm{an}}} \log\left\|\psi\left(\bigotimes_{i=1}^n \left(\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right)\right)\right\|_{\mathscr{O}_\mathrm{F}(\mathrm{D}),v}(x) \le \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{D}m_i}{e_i}\log\|w\|_{\det(\mathrm{E}),v}\,.$$

On suppose dorénavant que K soit un corps de nombres : le cas d'un corps de fonctions se fait de même manière, et il est plus facile à cause de l'absence de places archimédiennes. Si on prend comme famille génératrice

$$\mathrm{B} = \left\{\psi\left(\bigotimes_{i=1}^n \left(\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right)\right) : (\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in \mathfrak{S}_{\mathrm{D}m_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\mathrm{D}m_n}\right\}$$

dans (5.2.1), en vertu de (5.2.2) on a

$$\begin{aligned}
&h_{\min}\big((\mathbf{P}(\mathrm{F}),\mathscr{O}_{\mathscr{F}}(1))/\!/\mathbf{SL}(\mathrm{E})\big)\\
&\qquad \ge -\frac{1}{\mathrm{D}}\max_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}\left\{\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\left(\sup_{x\in\mathbf{P}(\mathrm{F})_v^{\mathrm{an}}}\log\left\|\psi\left(\bigotimes_{i=1}^n \left(\varepsilon_{\sigma_i}\otimes w^{\otimes \mathrm{D}m_i/e_i}\right)\right)\right\|_{\mathscr{O}_\mathrm{F}(\mathrm{D}),v}(x)\right)\right\}\\
&\qquad \ge -\frac{1}{\mathrm{D}}\max_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}\left\{\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{D}m_i}{e_i}\log\|w\|_{\det(\mathrm{E}),v} + \sum_{i=1}^n[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\frac{\mathrm{D}|m_i|}{2}\log e_i\right\}\\
&\qquad = \sum_{i=1}^n\frac{m_i}{e_i}\widehat{\deg}_\mathrm{K}(\mathscr{E}_i) + \sum_{i=1}^n[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\frac{|m_i|}{2}\log e_i\\
&\qquad = \sum_{i=1}^n m_i\,\widehat{\mu}_\mathrm{K}(\mathscr{E}_i) + |m_i|\frac{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}{2}\log e_i,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

6 Un exemple : l'inégalité de Liouville

6.1 Introduction

6.1.1. — Dans ce numéro on montre l'inégalité de Liouville comme premier exemple d'application à l'approximation diophantienne des constructions de théorie géométrique des invariants faites avant.

Dans sa version classique l'inégalité de Liouville affirme que, étant donné un nombre réel θ algébrique de degré $d \ge 2$ sur $\mathbf{Q}$, il existe un nombre réel $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\theta)$ tel que, pour tout nombre rationnel x, on a

$$|x-\theta| \ge \frac{\mathrm{C}}{q^d},$$

où $x = p/q$ avec $p, q \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux et $q \ge 1$. Pour la prouver on considère le polynôme minimal de f sur $\mathbf{Q}$: comme il ne s'annule pas en x on a

$$|f(x)| = |f(p/q)| \ge \frac{1}{q^d}.$$

D'autre part, l'inégalité n'est intéressante que pour les nombres rationnels proches de θ. En développant f autour de θ on obtient qu'il existe un nombre réel C_0 ne dépendant que de de f, tel que pour tout $y \in \mathbf{R}$ tel $|y-\theta| \le 1$, on ait

$$|f(y)| \le |y-\theta| C_0.$$

Les deux inégalités précédentes, entraînent pour tout nombre rationnel x tel que $|x-\theta| \le 1$, qu'on a

$$|x-\theta| \ge |f(x)| C_0^{-1} \ge \frac{C_0^{-1}}{q^d}.$$

Dans la version de la preuve, étant donnés un nombre algébrique $\theta \in \overline{\mathbf{Q}}$ de degré d et un nombre rationnel $x \in \mathbf{Q}$, on considère les cycles effectifs sur $\mathbf{P}^1_{\overline{\mathbf{Q}}}$ suivants :

$$Z_x := d[x],$$
$$Z_{\boldsymbol{\theta}} := [\theta_1] + \cdots + [\theta_d],$$

où $\theta_1 = \theta, \ldots, \theta_d$ sont les points conjugués à θ. Le couple de cycles $(Z_x, Z_{\boldsymbol{\theta}})$ est semi-stable (dans un sens qui sera précisé ensuite) parce que dans le cycle $Z_x + Z_{\boldsymbol{\theta}}$ aucun point est de multiplicité plus grande de la moitié du degré de $Z_x + Z_{\boldsymbol{\theta}}$.

6.1.2. —Soient K un corps global de caractéristique nulle et $\mathscr{E} = (E, \boldsymbol{p}_E)$ un faisceau adélique localement libre de rang 2. Pour toute place v de K on note d_v la distance sur la droite projective $\mathbf{P}(E)_v^{an}$ induite par la norme géométrique $p_{E,v}$.

Soient K′ une extension finie de degré $d \ge 2$ et θ un K′-point du K-schéma $\mathbf{P}(E)$. Soient v une place de K, Ω une extension analytique algèbriquement close de K_v et $d_{v,\Omega}$ la distance induite par la norme géométrique $p_{E,\Omega}$ déduite par extension des scalaires à Ω. Pour tout K-point x du K-schéma $\mathbf{P}(E)$ on pose :

$$d_v(\theta, x) := \min_{\sigma : K' \to \Omega} d_{v,\Omega}(\sigma(\Omega), x),$$

où $\sigma : K' \to \Omega$ est un homomorphisme de K-algèbres. Évidemment cette définition ne dépend pas du choix de l'extension Ω.

Théorème 6.1. *Soient* K *un corps global de caractéristique nulle,* K′ *une extension finie de* K *de degré* $d \ge 2$ *et* $\mathscr{E} = (E, \boldsymbol{p}_E)$ *un faisceau adélique localement libre de rang* 2.

Alors, pour tout K′*-point* θ *et tout* K*-point* x *du* K*-schéma* $\mathbf{P}(E)$ *on a :*

$$-\sum_{v \in V_K} \deg(v) \log d_v(\theta, x) \le d\, h_{\mathscr{E}}(x) + d\left(h_{\mathscr{E}}(\theta) + \widehat{\deg}_K(\mathscr{E}) + 4[K:\mathbf{Q}]\right)$$

6.2 Coefficient d'instabilité d'un diviseur effectif sur la droite projective

Soient k un corps algébriquement clos et E un k-espace vectoriel de dimension 2. Soient Z un diviseur effectif de la droite projective $\mathbf{P}(E)$ et $r = \deg Z$ son degré. L'homomorphisme d'évaluation sur Z,

$$\eta_Z : \Gamma(\mathbf{P}(E), \mathscr{O}_E(r)) \longrightarrow \Gamma(Z, \mathscr{O}_E(r))$$

est surjectif et son noyau N_Z est de dimension 1. Il définit donc un k-point $[N_Z]$ de l'espace projectif $\mathbf{P}(F_r)$, où

$$F_r := \Gamma(\mathbf{P}(E), \mathscr{O}_E(r))^\vee.$$

Le k-groupe réductif $\mathbf{SL}(E)$ agit naturellement sur l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathscr{O}(r)$. À travers la représentation $\mathbf{GL}(E) \to \mathbf{GL}(F_r)$, il agit donc sur l'espace projectif $\mathbf{P}(F_r)$ et de manière équivariante sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_{F_r}(1)$.

Proposition 6.2. *Soit* $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{SL}(\mathrm{E})$ *un sous-groupe à un paramètre de* $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. *Soient* $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1$ *une base du* k*-espace vectoriel* E *et* $m \geq 0$ *un nombre entier tels que*

$$\begin{cases} \lambda(\tau)\cdot \mathrm{T}_0 = \tau^m \mathrm{T}_0 \\ \lambda(\tau)\cdot \mathrm{T}_1 = \tau^{-m}\mathrm{T}_1. \end{cases}$$

Si x_0 *désigne l'unique* k*-point de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *tel que* $x_0^*\mathrm{T}_0 = 0$, *le coefficient d'instabilité* $\mu(\lambda, [\mathrm{N_Z}])$ *par rapport au faisceau inversible* $\mathcal{O}_{\mathrm{F}_r}(1)$ *est alors*

$$\mu(\lambda, [\mathrm{N_Z}]) = m(2\,\mathrm{mult}_{x_0}(\mathrm{Z}) - \deg \mathrm{Z}).$$

Démonstration. Sia f un élément non nul (et donc un générateur) du k-espace vectoriel $\mathrm{N_Z}$. Si r désigne la multiplicité de x_0 dans Z, le polynôme homogène f s'écrit sous la forme $f = \mathrm{T}_0^s g$ où g est un polynôme homogène de degré $r-s$, *i.e.*, une section globale du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(r-s)$, qui ne s'annule pas en x_0. Quitte à prendre un multiple non nul de f, on peut supposer qu'il existe $\xi_1, \ldots, \xi_{r-s} \in k$ tels que

$$g = \prod_{i=1}^{r-s} (\mathrm{T}_1 - \xi_i \mathrm{T}_0).$$

Pour autant, on a

$$\begin{aligned} \lambda(\tau)\cdot f &= \tau^{ms}\mathrm{T}_0^m \cdot \prod_{i=1}^{r-s}(\tau^{-m}\mathrm{T}_1 - \xi_i \tau^m \mathrm{T}_0) \\ &= \tau^{ms-m(r-s)}\mathrm{T}_0^m \cdot \prod_{i=1}^{r-s}(\mathrm{T}_1 - \xi_i\tau^{2m}\mathrm{T}_0). \end{aligned}$$

Comme le nombre entier m est positif, on a $\mu(\lambda, [\mathrm{N_Z}]) = m(2s-r)$, ce qui achève la preuve. □

En appliquant le critère numérique de Hilbert-Mumford (Théorème I.4.11) on obtient :

Proposition 6.3. *Le diviseur effectif* Z *est semi-stable, c'est-à-dire, le point* $[\mathrm{N_Z}]$ *est semi-stable si et seulement si, pour tout* k*-point* x *de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, *on a :*

$$\mathrm{mult}_x(\mathrm{Z}) \leq \frac{\deg \mathrm{Z}}{2}.$$

Proposition 6.4. *Soient* $n \geq 1$ *un nombre entier et* $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$ *un* n*-uplet de diviseurs effectifs sur* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, Z_i *de degré* r_i. *Il y a équivalence entre :*

i. *le* n*-uplet* $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$ *est semi-stable, c'est-à-dire, le point*

$$([\mathrm{N}_{\mathrm{Z}_1}], \ldots, [\mathrm{N}_{\mathrm{Z}_n}]) \in \mathbf{P}(\mathrm{F}_{d_1}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{F}_{d_n})$$

est semi-stable sous l'action de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$;

ii. *le diviseur effectif* $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{Z}_n$ *est semi-stable sous l'action de* $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$;

iii. *pour tout* k*-point* x *de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{mult}_x(\mathrm{Z}_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\deg \mathrm{Z}_i}{2}.$$

6.3 Enoncé du théorème de semi-stabilité

Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension 2. Soient x un k-point de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et θ un point fermé de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ tel que son corps résiduel $\kappa(\theta)$ soit une extension séparable de k de degré $d = [\kappa(\theta) : k] \geq 2$.

6.3.1. Diviseur en le point rationnel. — On considère le diviseur effectif $\mathrm{Z}_x = dx$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, l'homomorphisme d'évaluation sur Z_x,

$$\eta_x : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_x, \mathscr{O}(d))$$

et son noyau N_x. Puisque il est de dimension 1, il définit un k-point $[\mathrm{N}_x]$ de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$, où

$$\mathrm{F}_d := \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d))^{\vee}.$$

6.3.2. Diviseur en le point algébrique. — Soit k^{sep} une clôture séparable de k contenante $\kappa(\theta)$ et $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_d$ les points conjugués à θ. Le diviseur effectif $\theta_1 + \cdots + \theta_d$ de $\mathbf{P}(\mathrm{E} \otimes k^{\mathrm{sep}})$ descend en le diviseur effectif $\mathrm{Z}_{\boldsymbol{\theta}} = \{\theta\}$ dans $\mathbf{P}(\mathrm{E})$. On considère l'homomorphisme d'évaluation sur $\mathrm{Z}_{\boldsymbol{\theta}}$,

$$\eta_{\boldsymbol{\theta}} : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_{\boldsymbol{\theta}}, \mathscr{O}(d))$$

et son noyau $\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}$. Puisque il est de dimension 1, il définit un k-point $[\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]$ de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$.

Proposition 6.5. *Soient k un corps et* E *un k-espace vectoriel de dimension* 2*. Soient x un k-point de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *et* θ *un point fermé de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *tel que son corps résiduel* $\kappa(\theta)$ *soit une extension séparable de k de degré* $d = [\kappa(\theta) : k] \geq 2$*. Soient* Z_x *le diviseur effectif dx, et* N_x, $\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}$ *les noyaux respectivement des flèches d'évaluation*

$$\eta_x : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_x, \mathscr{O}(d)),$$
$$\eta_{\boldsymbol{\theta}} : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_{\boldsymbol{\theta}}, \mathscr{O}(d)).$$

Alors, avec les notations introduites avant, le k-point $([\mathrm{N}_x], [\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]) \in \mathbf{P}(\mathrm{F}_d) \times \mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$ *est semi-stable par rapport à l'action du k-groupe réductif* $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$.

6.4 Majoration de la hauteur

6.4.1. Majoration de la hauteur du point rationnel. — Soient K un corps global, $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})$ un faisceau adélique localement libre de rang 2 et x un K-point de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$. On considère le diviseur effectif $\mathrm{Z}_x = dx$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, et N_x le noyau de l'homomorphisme d'évaluation sur Z_x,

$$\eta_x : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_x, \mathscr{O}(d)).$$

Puisque N_x est un k-espace vectoriel de dimension 1, il définit un k-point $[\mathrm{N}_x]$ de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$, où

$$\mathrm{F}_d := \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d))^{\vee}.$$

On considère le faisceau arakelovien localement libre $\mathscr{F}_d = \mathrm{Sym}^d \mathscr{E}^{\vee}$. Le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{F}_d}(1)$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$ est naturellement muni d'une structure de faisceau inversible adélique déduite de $\mathscr{F}_d$. On note $h_{\mathscr{F}}$ la hauteur de sur $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$ par rapport au faisceau inversible adélique $\mathscr{O}_{\mathscr{F}_d}(1)$.

Proposition 6.6. *Soient* K *un corps global et* $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})$ *un faisceau adélique localement libre de rang* 2*. Soient x un* K*-point de l'espace projectif* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, Z_x *le diviseur effectif dx sur* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$*, et* N_x *le noyau de l'homomorphisme d'évaluation des sections globales de* $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)$ *sur* Z_x.

Alors, avec les notations introduites avant, on a :

$$h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_x]) \leq d h_{\mathscr{E}}(x).$$

Démonstration. Soit T_x un élément du K-espace vectoriel E tel que $x^*\mathrm{T}_x = 0$. Le noyau N_x est alors le sous-K-espace vectoriel de $\mathrm{Sym}^d\mathrm{E}$ engendré par T_x^d. Pour toute place v, par sous-multiplicativité de la norme des puissances symétriques, on a

$$\|\mathrm{T}_x^d\|_{\mathrm{Sym}^d\mathrm{E},v} \leq \|\mathrm{T}_x\|_{\mathrm{E},v}^d.$$

En prenant le logarithme de cette expression et en sommant sur toutes les places, on a

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_x]) &= \sum_{v\in\mathrm{V_K}} \deg(v)\log\|\mathrm{T}_x^d\|_{\mathrm{Sym}^d\mathrm{E},v} \\ &\leq d\sum_{v\in\mathrm{V_K}} \deg(v)\log\|\mathrm{T}_x\|_{\mathrm{E},v} \\ &= d h_{\mathscr{E}}(x), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

6.4.2. Majoration de la hauteur du point algébrique. — Soient K un corps global et $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p}_\mathrm{E})$ un faisceau adélique localement libre de rang 2. On revient aux notations de 6.3.2. On considère le faisceau arakelovien localement libre

$$\mathscr{F}_d = \mathrm{Sym}^d\mathscr{E}^\vee.$$

Proposition 6.7. *Avec les notations introduites avant, on a :*

$$h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]) \leq d h_{\mathscr{E}}(\theta).$$

Démonstration. Soit L une extension finie qui contient K′ sur la quelle toute les points conjugués $\theta_1,\dots,\theta_d$ sont définis. Pour tout $\alpha = 1,\dots,d$ soit T_α un élément non nul du L-espace vectoriel $\mathrm{E}\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L}$ tel que $\theta_\alpha^*\mathrm{T}_\alpha = 0$. Le L-espace vectoriel $\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L}$ s'identifie au sous-L-espace vectoriel de $\mathrm{Sym}^d\mathrm{E}\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L}$ engendré par l'élément $\mathrm{T}_1\cdots\mathrm{T}_d$.

Pour toute place w de L, par sous-multiplicativité de la norme des puissances symétriques, on a

$$\|\mathrm{T}_1\cdots\mathrm{T}_d\|_{\mathrm{Sym}^d\mathrm{E}\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L},w} \leq \|\mathrm{T}_1\|_{\mathrm{E},w}\cdots\|\mathrm{T}_d\|_{\mathrm{E},w}.$$

En prenant le logarithme de cette expression et en sommant sur toutes les places de L, on a

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{F}_d\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L}}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L}]) &= \sum_{w\in\mathrm{V_L}} \deg(w)\log\|\mathrm{T}_1\cdots\mathrm{T}_d\|_{\mathrm{Sym}^d\mathrm{E}\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L},w} \\ &\leq \sum_{w\in\mathrm{V_L}} \deg(w)\log\|\mathrm{T}_1\|_{\mathrm{E},w} + \cdots + \log\|\mathrm{T}_d\|_{\mathrm{E},w} \\ &= h_{\mathscr{E}_\mathrm{L}}(\theta_1) + \cdots + h_{\mathscr{E}_\mathrm{L}}(\theta_d) \end{aligned}$$

et, par invariance de la hauteur sous l'action du groupe de Galois, on a

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]) &= \frac{1}{[\mathrm{L}:\mathrm{K}]} h_{\mathscr{F}_d\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L}}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}\otimes_\mathrm{K}\mathrm{L}]) \\ &\leq \frac{1}{[\mathrm{L}:\mathrm{K}]}\big(h_{\mathscr{E}_\mathrm{L}}(\theta_1) + \cdots + h_{\mathscr{E}_\mathrm{L}}(\theta_d)\big) \\ &= d h_{\mathscr{E}}(\theta), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

6.5 Majoration de la mesure d'instabilité

6.5.1. — Soient k un corps algébriquement clos et complet pour une valeur absolue $|\cdot|$, et E un k-espace vectoriel de dimension 2. Soient Z un diviseur effectif de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et $r = \deg \mathrm{Z}$ son degré. L'homomorphisme d'évaluation sur Z,

$$\eta_{\mathrm{Z}} : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(r))$$

est surjectif et son noyau $\mathrm{N_Z}$ est de dimension 1. Il définit donc un k-point $[\mathrm{N_Z}]$ de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_r)$, où

$$\mathrm{F}_r := \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(r))^{\vee}.$$

6.5.2. — Soit p_{E} une norme géométrique sur le k-espace vectoriel E. Si la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose que la norme géométrique p_{E} soit hermitienne (resp. non archimédienne). On suppose qu'il existe une base t_0, t_1 du k-espace vectoriel E tel que

$$p_{\mathrm{E}} = \begin{cases} \sqrt{|t_0|^2 + |t_1|^2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne} \\ \max\{|t_0|, |t_1|\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.5.1}$$

Soit e_0, e_1 la base duale à la base t_0, t_1, c'est-à-dire la base e_0, e_1 du K-espace vectoriel $\mathrm{E}^{\vee}$ telle que $t_i(e_j) = r_{ij}$ (delta de Kronecker) pour tout $i, j = 0, 1$.

6.5.3. Distance sur la droite projective. — L'application bilinéaire alternante canonique $\mathrm{E}^{\vee} \oplus \mathrm{E}^{\vee} \to \bigwedge^2 \mathrm{E}^{\vee}$ induit un morphisme de k-espaces analytiques

$$\beta : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}\big(\textstyle\bigwedge^2 \mathrm{E}\big).$$

Soient $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathrm{E})$ les deux projections. Soit $p_{\bigwedge^2 \mathrm{E}}$ la norme géométrique sur le k-espace vectoriel $\bigwedge^2 \mathrm{E}$ induite par p_{E} par produit extérieur. L'application continue

$$\frac{\beta^* p_{\bigwedge^2 \mathrm{E}}}{\mathrm{pr}_1^* p_{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{pr}_2^* p_{\mathrm{E}}} : |\mathbf{V}(\mathrm{E}) \times \mathbf{V}(\mathrm{E})| \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

descend en une application continue

$$d_p : |\mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \mathbf{P}(\mathrm{E})| \longrightarrow \mathbf{R}_+,$$

qu'on appelle la *distance sur* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *induite par la norme géométrique* p_{E}. Soient x, y des K-points du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et

$$\widehat{x} = x_0 e_0 + x_1 e_1, \qquad \widehat{y} = y_0 e_0 + y_1 e_1$$

des k-points non nuls du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ représentant x, y. Alors, on a

$$d_p(x, y) = \frac{|x_0 y_1 - x_1 y_0|}{p_{\mathrm{E}}(x) p_{\mathrm{E}}(y)}.$$

6.5.4. Mesure d'instabilité relative à un élément du groupe linéaire. — Le k-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ agit sur le k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}(1)$ est naturellement muni d'une action équivariante. Le k-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ agit, alors, sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$.

Soit $f \in \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(r))$ un générateur du noyau $\mathrm{N_Z}$, *i.e.*, un k-point non nul de $\mathbf{V}(\mathrm{F}_d)$ représentant le point $[\mathrm{N_Z}]$. Si g est un k-point du k-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$, on pose

$$\mu(g, [\mathrm{N_Z}]) := \log \frac{\|g \cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}}}{\|f\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}}}. \tag{6.5.2}$$

Évidemment, cette définition ne dépend pas de l'élément non nul $f \in \mathrm{N_Z}$ choisi.

6.5.5. Élements du groupe linéaire qui mesurent la distance d'un point fixé. — Soient x, y deux K-points distincts du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et

$$\widehat{x} = x_0 e_0 + x_1 e_1, \qquad \widehat{y} = y_0 e_0 + y_1 e_1$$

des K-points non nuls dans $\mathbf{V}(\mathrm{E})$, représentant respectivement x, y, tels que

$$p_{\mathrm{E}}(\widehat{x}) = 1, \qquad p_{\mathrm{E}}(\widehat{y}) = 1.$$

On considère le K-point $g = g(\widehat{x}, \widehat{y})$ du k-schéma $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ défini par la condition :

$$\begin{cases} g(t_0) = x_0 t_0 + y_0 t_1 \\ g(t_1) = x_1 t_0 + y_1 t_1 \end{cases}$$

Si on considère la transfomartion induite par g sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ (à travers la représentation duale), on a :

$$\begin{cases} g \cdot \widehat{x} = e_0 \\ g \cdot \widehat{y}_i = e_1. \end{cases}$$

On rappelle ici des propriétés démontrées dans la section I.8.7. Tout d'abord, par définition on a $\det g = x_0 y_{i1} - x_1 y_{i0}$ et donc

$$|\det g| = d_p(x, y_i). \tag{6.5.3}$$

Soient z un k-point du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, $\widehat{z} = z_0 e_0 + z_1 e_1$ un k-point non nul du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ représentant z et $\mathrm{T} = z_0 t_1 - z_1 t_0$. On a :

$$g(\mathrm{T}) = (z_0 x_1 - z_1 x_0) t_0 + (z_0 y_{i1} - z_1 y_{i0}) t_1.$$

Par conséquent :

– si la valeur absolue $|\cdot|$ de k est archimédienne on a :

$$\begin{aligned} \log \| g(\mathrm{T}) \|_{\mathrm{E}} &= \frac{1}{2} \log\Big(d_p(x,z)^2 + \log d_p(y_i, z)^2 \Big) + \log \| \mathrm{T} \|_{\mathrm{E}} \\ &\le \log \| \mathrm{T} \|_{\mathrm{E}} + \log \sqrt{2}; \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

– si la valeur absolue $|\cdot|$ de k est non archimédienne on a :

$$\begin{aligned} \log \| g(\mathrm{T}) \|_{\mathrm{E}} &= \max\big\{ \log d_p(x,z), \log d_p(y_i, z) \big\} + \log \| \mathrm{T} \|_{\mathrm{E}} \\ &\le \log \| \mathrm{T} \|_{\mathrm{E}}. \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Soit $\delta \in k$ une racine carrée du détérminant $\det g$ (k est supposé algébriquement clos). On considère le k-point $\widetilde{g} := g/\delta$ du k-schéma en groupes $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$.

Les résultats qui suivent sont des analogues du « Lemme de Schwarz » dans ce contexte. Il s'agit de cas particuliers des Propositions IV.5.1 et IV.5.2 : il suffit de prendre $n = 1$ et comme et $a = 1$, c'est-à-dire le cas où l'indice est la multiplicité.

Proposition 6.8 (version non archimédienne)**.** *On suppose que la valeur absolue de k soit non archimédienne. Avec les notations introduites avant, on a :*

$$\mu(\widetilde{g}, [\mathrm{N_Z}]) \le \left(\mathrm{mult}_x(\mathrm{Z}) - \frac{\deg \mathrm{Z}}{2} \right) \log d(x, y).$$

Proposition 6.9 (version archimédienne)**.** *On suppose que la valeur absolue de k soit archimédienne. Avec les notations introduites avant, on a :*

$$\mu(\widetilde{g},[\mathrm{N_Z}]) \le \left(\mathrm{mult}_x(\mathrm{Z}) - \frac{\deg \mathrm{Z}}{2}\right)\log d(x,y) + r + \frac{1}{2}\log(r+1).$$

Démonstration de la version non archimédienne. Soit $\mathfrak{E}$ le k°-module qui induit la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$, *i.e.*, le sous-k°-module de E engendré par les éléments t_0, t_1. Comme on a supposé le point $\widehat{x}$ de norme 1, l'élément

$$\mathrm{T}_1 = x_0 t_1 - x_1 t_0$$

appartient à $\mathfrak{E}$ et il est aussi de norme 1. Soit donc $\mathrm{T}_0 \in \mathfrak{E}$ tel que les éléments T_0, T_1 forment une base du k°-module $\mathfrak{E}$. Les éléments de la forme $\mathrm{T}(\ell) = \mathrm{T}_0^{r-\ell}\mathrm{T}_1^{\ell}$ avec $\ell = 0,\dots,r)$ forment alors une base du k°-module $\mathrm{Sym}^r\,\mathfrak{E}$. En particulier, pour tout $\alpha_0,\dots,\alpha_r \in k$, on a

$$\left\|\sum_{\ell=0}^{r}\alpha_\ell \mathrm{T}(\ell)\right\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} = \max_{\ell=0,\dots,r}|\alpha_\ell|.$$

Soit f un élement non nul (et donc un générateur) du k-espace vectoriel $\mathrm{N_Z}$ tel que $\|f\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}} = 1$. En vertu de (6.5.2) on a

$$\mu(\widetilde{g},[\mathrm{N_Z}]) = \log\|\widetilde{g}\cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}}. \tag{6.5.6}$$

En outre, puisque la représentation $\mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{Sym}^r\,\mathrm{E})$ est homogène de degré d, en vertu de (6.5.3) on a

$$\begin{aligned}\log\|\widetilde{g}\cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}} &= \log\|g\cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}} - \frac{d}{2}\log|\delta| \\ &= \log\|g\cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}} - \frac{d}{2}\log d(x,y).\end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Soit m_x la multiplicité du point x dans le diviseur effectif Z. Le polynôme f s'écrit alors sous la forme

$$f = \sum_{\ell=m_x}^{r}\alpha_\ell \mathrm{T}(\ell)$$

où, pour tout $\ell = m_x,\dots,d$, α_ℓ est un élément non nul de k. Comme on a dit avant, on a

$$\|f\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}} = \max_{\ell=m_x,\dots,d}|\alpha_\ell| = 0.$$

Par définition de l'élément g on a $g\cdot\mathrm{T}_1 = g\cdot(x_0t_1 - x_1t_0) = (x_0y_1 - x_1y_0)t_1$ et, comme $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ sont de norme 1, on obtient

$$\log\|g\cdot\mathrm{T}_1\|_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\log d(x,y).$$

De plus, d'après (6.5.5) l'isomorphisme g diminue la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et donc on a $\|g\cdot\mathrm{T}_0\|_{\mathrm{E}} \le \|\mathrm{T}_0\| = 1$. En résumant, on a :

$$\begin{aligned}\log\|g\cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}} &= \log\left\|\sum_{\ell=0}^{d}\alpha_\ell(g\cdot\mathrm{T}(\ell))\right\|_{\mathrm{Sym}^r\mathrm{E}} \\ &\le \max_{\ell=0,\dots,d}\left\{\log|\alpha_\ell| + \log\left\|g\left(\mathrm{T}_0^{r-\ell}\mathrm{T}_1^{\ell}\right)\right\|_{\mathrm{E}}\right\} \\ &\le \max_{\ell=0,\dots,d}\left\{\log|\alpha_\ell| + (r-\ell)\log\|g\cdot\mathrm{T}_0\|_{\mathrm{E}} + \ell\log\|g\cdot\mathrm{T}_1\|_{\mathrm{E}}\right\} \\ &\le \max_{\ell=0,\dots,d}\left\{\frac{\ell}{2}\log d(x,y)\right\} \\ &\le \frac{m_x}{2}\log d(x,y),\end{aligned}$$

ce qui en vertu de (6.5.6) et (6.5.7) termine la preuve. □

Démonstration de la version archimédienne. Comme on a supposé le point $\widehat{x}$ de norme 1, l'élément

$$T_1 = x_0 t_1 - x_1 t_0$$

est aussi de norme 1. Soit donc $T_0 \in E$ tel que les éléments T_0, T_1 forment une base orthonormale de E. Les éléments de la forme $T(\ell) = T_0^{r-\ell} T_1^{\ell}$ avec $\ell = 0, \dots, r$) forment alors une base du orthogonale du k-espace vectoriel $\mathrm{Sym}^r E$ et pour tout $\ell = 0, \dots, r$ on a

$$\|T(\ell)\|_{\mathrm{Sym}^r E} = \binom{r}{\ell}^{-1/2}.$$

En particulier, pour tout $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in k$, on a

$$\left\| \sum_{\ell=0}^{r} \alpha_\ell T(\ell) \right\|^2_{\mathrm{Sym}^r E} = \sum_{\ell=0}^{d} |\alpha_\ell|^2 \binom{r}{\ell}^{-1}.$$

Soit f un élement non nul (et donc un générateur) du k-espace vectoriel N_Z tel que $\|f\|_{\mathrm{Sym}^r E} = 1$. En vertu de (6.5.2) on a

$$\mu(\widetilde{g}, [N_Z]) = \log \|\widetilde{g} \cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r E}. \tag{6.5.8}$$

En outre, puisque la représentation $\mathbf{GL}(E) \to \mathbf{GL}(\mathrm{Sym}^r E)$ est homogène de degré d, en vertu de (6.5.3) on a

$$\begin{aligned} \log \|\widetilde{g} \cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r E} &= \log \|g \cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r E} - \frac{d}{2} \log |\delta| \\ &= \log \|g \cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r E} - \frac{d}{2} \log d(x, y). \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

Soit m_x la multiplicité du point x dans le diviseur effectif Z. Le polynôme f s'écrit alors sous la forme

$$f = \sum_{\ell = m_x}^{r} \alpha_\ell T(\ell)$$

où, pour tout $\ell = m_x, \dots, d$, α_ℓ est un élément non nul de k. Comme on a dit avant, on a

$$\|f\|_{\mathrm{Sym}^r E} = \sum_{\ell=0}^{r} |\alpha_\ell|^2 \binom{r}{\ell}^{-1} = 1. \tag{6.5.10}$$

Par définition de l'élément g on a $g \cdot T_1 = g \cdot (x_0 t_1 - x_1 t_0) = (x_0 y_1 - x_1 y_0) t_1$ et, comme $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ sont de norme 1, on obtient

$$\log \|g \cdot T_1\|_E = \frac{1}{2} \log d(x, y).$$

De plus, en vertu de (6.5.4) on a :

$$\|g \cdot T_0\|_E \leq \sqrt{2} \|T_0\|_E \leq \sqrt{2}.$$

En résumant, on a :

$$\begin{aligned}
\|g\cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} &= \left\| \sum_{\ell=m_x}^{r} \alpha_\ell (g\cdot \mathrm{T}(\ell)) \right\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} \\
&\leq \sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell| \left\| g\left(\mathrm{T}_0^{r-\ell}\mathrm{T}_1^{\ell}\right)\right\|_{\mathrm{E}} \\
&\leq \sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell| \|g\cdot \mathrm{T}_0\|_{\mathrm{E}}^{r-\ell} \|g\cdot \mathrm{T}_1\|_{\mathrm{E}}^{\ell} \\
&\leq \sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell| \sqrt{2}^{r-\ell} d(x,y)^{\ell/2} \\
&\leq d(x,y)^{m_x/2}\left(\sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell| \sqrt{2}^{r-\ell}\right). \qquad (6.5.11)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell| \sqrt{2}^{r-\ell} \leq \sqrt{\dim_k \mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} \left(\sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell|^2 2^{r-\ell}\right)^{1/2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell|^2 2^{r-\ell} &= \sum_{\ell=m_x}^{r} |\alpha_\ell|^2 \binom{r}{\ell}\binom{r}{\ell}^{-1} 2^{r-\ell} \\
&\leq \max_{\ell=m_x,\dots,r}\left\{\binom{r}{\ell}2^{r-\ell}\right\}\left(\sum_{\ell=0}^{r}|\alpha_\ell|^2\binom{r}{\ell}^{-1}\right) \\
&= \max_{\ell=m_x,\dots,r}\left\{\binom{r}{\ell}2^{r-\ell}\right\}, \qquad (6.5.12)
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie par (6.5.10). En combinant (6.5.12) et (6.5.11),

$$\log\|g\cdot f\|_{\mathrm{Sym}^r \mathrm{E}} \leq \frac{m_x}{2}\log d(x,y) + \frac{1}{2}\max_{\ell=m_x,\dots,r}\left\{\log\binom{r}{\ell} + (r-\ell)\log 2\right\} + \frac{1}{2}\log(r+1).$$

On termine la preuve, en remarquant grâce à l'approximation de Stirling :

$$\begin{aligned}
\max_{\ell=m_x,\dots,r}\left\{\log\binom{r}{\ell} + (r-\ell)\log 2\right\} &\leq \max_{\ell=m_x,\dots,r}\left\{\log\binom{r}{\ell}\right\} + r\log 2 \\
&\leq \log\binom{r}{\lfloor r/2\rfloor} + r\log 2 \\
&\leq \frac{r}{2}(1+\log 2) + r\log 2 \\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\log 2\right) r \\
&\leq 2r,
\end{aligned}$$

car $\log 2 \leq 1$. □

6.6 Preuve du Théorème 6.1

6.6.1. Notation. — Soit x un K-point de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{E})$. Si on considère le diviseur effectif $\mathrm{Z}_x = dx$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, le noyau N_x de l'homomorphisme d'évaluation

$$\eta_x : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_x, \mathscr{O}(d))$$

est de dimension 1. On note $[\mathrm{N}_x]$ le k-point associé dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$ où $\mathrm{F}_d = \mathrm{Sym}^d \mathrm{E}^\vee$.

On considère le diviseur effectif $\mathrm{Z}_{\boldsymbol{\theta}} = \theta$ de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, ou, si $\theta_1, \ldots, \theta_d$ désignent les point conjugués à θ sur un clôture algébrique $\overline{\mathrm{K}}$ de K, le diviseur effectif de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ déduit par descente de Galois du diviseur effectif $\theta_1 + \cdots + \theta_d$ dans $\mathbf{P}(\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}})$. Le noyau $\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}$ de l'homomorphisme d'évaluation

$$\eta_{\boldsymbol{\theta}} : \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{E}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_{\boldsymbol{\theta}}, \mathscr{O}(d))$$

est de dimension 1 et on désigne par $[\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]$ le k-point associé dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$ où comme avant $\mathrm{F}_d = \mathrm{Sym}^d \mathrm{E}^\vee$.

Le K-groupe réductif $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ agit à travers la représentation

$$\mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{Sym}^d \mathrm{E} \otimes \mathrm{Sym}^d \mathrm{E})$$

sur le produit d'espaces projectifs $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d) \times_{\mathrm{K}} \mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$. La Proposition 6.5 affirme que le point $([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x])$ est semi-stable sous l'action du K-groupe réductif $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ et par rapport à la polarisation induite par le plongement de Segre

$$\mathbf{P}(\mathrm{F}_d) \times_{\mathrm{K}} \mathbf{P}(\mathrm{F}_d) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_d \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{F}_d).$$

Si l'on veut, le point $([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x])$ est semi-stable parce que tout point du diviseur effectif de $\mathbf{P}(\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}})$,

$$\overline{\mathrm{Z}} := dx + \theta_1 + \cdots + \theta_d,$$

est de multiplicité plus petite ou égale à la moitié du degré de $\overline{\mathrm{Z}}$ (voir Propositions 6.3 et 6.4).

Dorénavant on sous-entendra le plongement de Segre de $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d) \times \mathbf{P}(\mathrm{F}_d)$ dans $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d \otimes \mathrm{F}_d)$ et confondra le point $([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x])$ avec son image dans $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d \otimes \mathrm{F}_d)$. On pose

$$\mathrm{X} := \mathbf{P}(\mathrm{F}_d \otimes \mathrm{F}_d)$$
$$\mathrm{L} := \mathscr{O}_{\mathrm{F}_d \otimes \mathrm{F}_d}(1)$$

et on considère l'ouvert des points semi-stables X^{ss} de X sous l'action de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ et par rapport au faisceau inversible L. Soit

$$\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \mathrm{Y} := \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{L}^{\otimes d})^{\mathbf{SL}(\mathrm{E})}\right)$$

le morphisme quotient. Pour tout nombre entier $\mathrm{D} \geq 1$ assez divisible, il existe un faisceau inversible ample M_{D} sur Y et un isomorphisme de faisceau inversibles sur X^{ss},

$$\varphi_{\mathrm{D}} : \pi^* \mathrm{M}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathrm{L}|_{\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}}$$

L'isomorphisme φ_{D} induit le diagramme cartésien suivant de K-schémas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathrm{L}|_{\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}}) \arrow[r, "\pi{[\mathrm{M}_{\mathrm{D}}]}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{V}(\mathrm{M}_{\mathrm{D}}) \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{X}^{\mathrm{ss}} \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Y}
\end{tikzcd}$$

On munit le faisceau inversible $\mathrm{M_D}$ d'une famille adélique de normes géométriques $\boldsymbol{u}_{\mathrm{M_D}}$ comme il suit. On considère d'abord le faisceau adélique localement libre

$$\mathscr{F}_d \otimes \mathscr{F}_d := \mathrm{Sym}^d \mathscr{E}^\vee \otimes \mathrm{Sym}^d \mathscr{E}^\vee.$$

Le faisceau inversible $\mathrm{L} = \mathscr{O}(1)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_d \otimes \mathrm{F}_d)$ est alors canoniquement muni d'une structure de faisceau inversible adélique que l'on désigne par $\mathscr{L} = (\mathrm{L}, \boldsymbol{u}_\mathrm{L})$. Pour toute place v de K, la norme géométrique $u_{\mathrm{L},v}$ est plurisousharmonique. En outre, si $\mathbf{U}(p_{\mathrm{E},v})$ désigne le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}$ unitaire par rapport à la norme géométrique $p_{\mathrm{E},v}$ sur E, la norme géométrique $u_{\mathrm{L},v}$ est invariante sous l'action de $\mathbf{U}(p_{\mathrm{E},v})$. Pour tout nombre entier assez divisible $\mathrm{D} \geq 1$, le Scholie 2.2 affirme alors que la famille de métriques

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{M_D}} := \pi[\mathrm{M_D}]_\downarrow \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}}} = \left\{\pi[\mathrm{M_D}]_\downarrow u_{\mathrm{L}^{\otimes \mathrm{D}},v} : v \in \mathrm{V_K}\right\}$$

est adélique et on note $\mathscr{M}_\mathrm{D}$ le faisceau inversible adélique $(\mathrm{M_D}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{M_D}})$.

6.6.2. Minoration de la hauteur sur le quotient du point $\pi([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}],[\mathrm{N}_x])$**.** — La représentation $\mathbf{GL}(\mathrm{E}) \to \mathbf{GL}(\mathrm{F}_d \otimes \mathrm{F}_d)$ qui définit l'action du K-groupe réductif $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ sur le K-schéma X est homogène de degré $-2d$. De plus, l'homomorphisme de faisceau adéliques localement libres

$$\mathscr{E}^{\vee \otimes 2d} \longrightarrow \mathrm{Sym}^d \mathscr{E}^\vee \otimes \mathrm{Sym}^d \mathscr{E}^\vee$$

est tel que l'homomorphisme de K-espaces vectoriels sous-jacents

$$\mathrm{E}^{\vee \otimes 2d} \longrightarrow \mathrm{Sym}^d \mathrm{E}^\vee \otimes \mathrm{Sym}^d \mathrm{E}^\vee$$

est surjectif et $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$-équivariant. Si le corps global K est un corps de nombres le Théorème 5.4 donne

$$\begin{aligned} h_{\min}\big((\mathrm{X},\mathscr{L})/\!/\mathbf{SL}(\mathrm{E})\big) &\geq 2d\left(\widehat{\mu}_\mathrm{K}(\mathscr{E}^\vee) - \frac{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}{2}\log 2\right) \\ &= -d\left(\widehat{\deg}_\mathrm{K}(\mathscr{E}) + [\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\log 2\right); \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

si le corps global K est un corps de fonctions le Théorème 5.4 donne

$$h_{\min}\big((\mathrm{X},\mathscr{L})/\!/\mathbf{SL}(\mathrm{E})\big) \geq 2d\widehat{\mu}_\mathrm{K}(\mathscr{E}^\vee) = -d\,\widehat{\deg}_\mathrm{K}(\mathscr{E}). \tag{6.6.2}$$

6.6.3. Majoration de la hauteur du point $([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}],[\mathrm{N}_x])$**.** — Comme on l'a remarqué avant, on a

$$h_\mathscr{L}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}],[\mathrm{N}_x]) = h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]) + h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_x]).$$

On peut alors appliquer les Propositions 6.6 et 6.7 et obtenir

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_x]) &\leq d h_\mathscr{E}(x), \\ h_{\mathscr{F}_d}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]) &\leq d h_\mathscr{E}(\theta) \end{aligned}$$

et conclure

$$h_\mathscr{L}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}],[\mathrm{N}_x]) \leq d h_\mathscr{E}(\theta) + d h_\mathscr{E}(x). \tag{6.6.3}$$

6.6.4. Majoration de la mesure d'instabilité du point $([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}],[\mathrm{N}_x])$**.** — Soient v une place du corps K et μ_v la mesure d'instabilité en place v. Pour toute extension analytique Ω de K_v et tout Ω-point du K-groupe réductif **SL**(E) on pose :

$$\begin{aligned}
\mu_v(g,[\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}]) &:= \log \frac{\|g\cdot f_{\boldsymbol\theta}\|_{\mathrm{Sym}^d \mathrm{E}}}{\|f_{\boldsymbol\theta}\|_{\mathrm{Sym}^d \mathrm{E}}}\\
\mu_v(g,[\mathrm{N}_x]) &:= \log \frac{\|g\cdot f_x\|_{\mathrm{Sym}^d \mathrm{E}}}{\|f_x\|_{\mathrm{Sym}^d \mathrm{E}}}\\
\mu_v(g,([\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}],[\mathrm{N}_x])) &:= \log \frac{\|g\cdot (f_{\boldsymbol\theta}\otimes f_x)\|_{\mathrm{Sym}^d \mathrm{E}\otimes \mathrm{Sym}^d \mathrm{E}}}{\|f_{\boldsymbol\theta}\otimes f_x\|_{\mathrm{Sym}^d \mathrm{E}\otimes \mathrm{Sym}^d \mathrm{E}}} = \mu_v(g,[\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}])+\mu_v(g,[\mathrm{N}_x]),
\end{aligned}$$

où $f_{\boldsymbol\theta}$ (resp. f_x) est un générateur du K-espace vectoriel $\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}$ (resp. N_x), c'est-à-dire, un représentant non nul dans $\mathbf{V}(\mathrm{F}_d)$ du point $[\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}]$ (resp. $[\mathrm{N}_x]$). Évidemment, cette définition ne dépend pas du générateur choisi. Par définition de mesure d'instabilité on a

$$\begin{aligned}
\mu_v([\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}],[\mathrm{N}_x]) &= \inf_{g\in \mathbf{SL}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}} \Big\{\mu_v(g,([\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}],[\mathrm{N}_x]))\Big\}\\
&= \inf_{g\in \mathbf{SL}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}} \Big\{\mu_v(g,[\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}])+\mu_v(g,[\mathrm{N}_x])\Big\} \qquad (6.6.4)
\end{aligned}$$

On désigne par d_v la distance sur la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}$ induite par la norme géométrique $p = p_{\mathrm{E},v}$. On considère une extension analytique et algébriquement close Ω du corps K_v telle que la norme géométrique p_Ω sur Ω-espace vectoriel $\mathrm{E}_\Omega := \mathrm{E}\otimes_{\mathrm{K}_v}\Omega$ déduite par extension des scalaires se diagonalise, *i.e.*, il existe une base t_0, t_1 de E_Ω telle que

$$p_\Omega = \begin{cases} \sqrt{|t_0|^2+|t_1|^2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne}\\ \max\{|t_0|,|t_1|\} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Soit e_0, e_1 la base duale à la base t_0, t_1, c'est-à-dire la base e_0, e_1 du K-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$ telle que $t_i(e_j) = r_{ij}$ (delta de Kronecker) pour tout $i, j = 0, 1$.

Soit $\widehat{x} = x_0e_0 + x_1e_1$ un Ω-point non nul du K-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ représentant le point x tel que $p_\Omega(\widehat{x}) = 1$. Soient $\theta_1,\ldots,\theta_d$ les Ω-points de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{E}_\Omega)$ conjugués au point Ω. Pour tout $\alpha = 1,\ldots,d$ soit

$$\widehat{\theta}_\alpha = \theta_{\alpha 0}e_0 + \theta_{\alpha 1}e_1$$

un Ω-point non nul du Ω-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E}_\Omega)$ représentant le point θ_α tel que $p_\Omega(\widehat{\theta}_\alpha) = 1$. Pour tout $\alpha = 1,\ldots,d$, on considère le Ω-point g_α du k-schéma $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ défini par la condition :

$$\begin{cases} g(t_0) = \theta_{\alpha 0}t_0 + x_0t_1\\ g(t_1) = \theta_{\alpha 1}t_0 + x_1t_1\end{cases}$$

Soit $\delta_\alpha\in\Omega$ une racine carrée du déterminant $\det g_\alpha$ (Ω est supposé algébriquement clos). On considère le Ω-point $\widetilde{g}_\alpha := g_\alpha/\delta$ du K-schéma en groupes $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. En reprenant (6.6.4) on a :

$$\begin{aligned}
\mu_v([\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}],[\mathrm{N}_x]) &= \inf_{g\in \mathbf{SL}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}} \Big\{\mu_v(g,([\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}],[\mathrm{N}_x]))\Big\}\\
&\le \min_{\alpha=1,\ldots,d} \Big\{\mu_v(\widetilde{g}_\alpha,([\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}],[\mathrm{N}_x]))\Big\}\\
&= \min_{\alpha=1,\ldots,d} \Big\{\mu_v(\widetilde{g}_\alpha,[\mathrm{N}_{\boldsymbol\theta}])+\mu_v(\widetilde{g}_\alpha,[\mathrm{N}_x])\Big\}
\end{aligned}$$

Si la place v est non archimédienne en vertu de la Propositon 6.8, pour tout $\alpha = 1, \ldots, d$, on a :

$$\mu_v(\widetilde{g}_\alpha, [\mathrm{N}_x]) \leq \left(d - \frac{d}{2}\right) \log d_v(\theta_\alpha, x) = \frac{d}{2} \log d_v(\theta_\alpha, x)$$
$$\mu_v(\widetilde{g}_\alpha, [\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]) \leq \left(1 - \frac{d}{2}\right) \log d_v(\theta_\alpha, x)$$

et donc

$$\mu_v([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x]) \leq \min_{\alpha=1,\ldots,d} \left\{\log d_v(\theta_\alpha, x)\right\}. \tag{6.6.5}$$

Si la place v est archimédienne en vertu de la Propositon 6.9, pour tout $\alpha = 1, \ldots, d$, on a :

$$\mu_v(\widetilde{g}_\alpha, [\mathrm{N}_x]) \leq \left(d - \frac{d}{2}\right) \log d_v(\theta_\alpha, x) + d + \frac{1}{2}\log(d+1) = \frac{d}{2} \log d_v(\theta_\alpha, x) + d + \frac{1}{2}\log(d+1)$$
$$\mu_v(\widetilde{g}_\alpha, [\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}]) \leq \left(1 - \frac{d}{2}\right) \log d_v(\theta_\alpha, x) + d + \frac{1}{2}\log(d+1)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mu_v([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x]) &\leq \min_{\alpha=1,\ldots,d} \left\{\log d_v(\theta_\alpha, x)\right\} + 2d + \log(d+1) \\ &\leq \min_{\alpha=1,\ldots,d} \left\{\log d_v(\theta_\alpha, x)\right\} + 3d. \end{aligned}\tag{6.6.6}$$

6.6.5. Conclusion. — On termine la démonstration seulement dans le cas de corps de nombres, le cas de corps de fonctions étant similaire et moins compliqué à cause de l'absence de places archimédiennes. Pour tout nombre entier assez divisible $\mathrm{D} \geq 1$, en vertu de (6.6.1) on a

$$\frac{1}{\mathrm{D}} h_{\mathscr{M}_\mathrm{D}}(\pi([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x])) \geq -d\left(\widehat{\deg}_\mathrm{K}(\mathscr{E}) + [\mathrm{K} : \mathbf{Q}] \log 2\right).$$

D'autre part, si pour toute place v on désigne par μ_v la mesure d'instabilité en la place v, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{D}} h_{\mathscr{M}_\mathrm{D}}(\pi([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x])) = h_{\mathscr{L}}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x]) + \sum_{v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}} \deg(v) \mu_v([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x])$$

En vertu de (6.6.3), (6.6.5) et (6.6.6) on a :

$$\begin{aligned}&h_{\mathscr{L}}([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x]) + \sum_{v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}} \deg(v) \mu_v([\mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta}}], [\mathrm{N}_x]) \\ &\qquad \leq d h_{\mathscr{E}}(\theta) + d h_{\mathscr{E}}(x) + \sum_{v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}} \deg(v) \min_{\alpha=1,\ldots,d} \left\{\log d_v(\theta_\alpha, x)\right\} + 3d[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]\end{aligned}$$

On peut donc conclure

$$\begin{aligned}-\sum_{v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}} \deg(v) \min_{\alpha=1,\ldots,d} \left\{\log d_v(\theta_\alpha, x)\right\} &\leq d h_{\mathscr{E}}(\theta) + d h_{\mathscr{E}}(x) + 3d[\mathrm{K} : \mathbf{Q}] + d\left(\widehat{\deg}_\mathrm{K}(\mathscr{E}) + [\mathrm{K} : \mathbf{Q}] \log 2\right) \\ &\leq d h_{\mathscr{E}}(x) + d\left(h_{\mathscr{E}}(\theta) + \widehat{\deg}_\mathrm{K}(\mathscr{E}) + 4[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]\right),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du Théorème 6.1.

Chapitre IV

Application au Théorème de Roth et à ses généralisations

0 Introduction

0.1 Énoncé et preuve classique

0.1.1. Énoncé classique. — Ce chapitre est consacré à l'application des résultats des chapitres précédents au Théorème de Roth et à ses généralisations, comme on l'a fait dans le chapitre III pour l'inégalité de Liouville. Dans sa forme classique le Théorème de Roth affirme que pour tout nombre algébrique $\theta \in \mathbf{C}$ de degré $d \geq 2$ sur $\mathbf{Q}$ et pour tout nombre réel $\kappa > 2$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels x tels que

$$|\theta - x| < \frac{1}{q^{\kappa}}, \tag{0.1.1}$$

où $x = p/q$ avec p, q des nombres entiers premiers entre eux et $q \geq 1$. L'énoncé n'est pas effectif, dans le sens où on ne connait pas une borne ne dépendant que de θ des dénominateurs des nombres rationnels $x = p/q$ satisfaisant (0.1.1).

0.1.2. La « minoration effective fondamentale ». — Néanmoins, dans la preuve du Théorème de Roth il y a une étape intermédiaire effective qui n'est pas toujours mise en lumière, quoique, dans le cas $n = 2$, elle apparaisse de manière centrale dans l'article de Bombieri [Bom82]. Pour l'énoncer on va introduire quelques notations. Pour tout nombre entier $n \geq 1$ et tout nombre réel $t \geq 0$ on considère

$$\blacktriangle_n(t) = \left\{\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in [0,1]^n : \zeta_1 + \cdots + \zeta_n < t\right\}.$$

Pour tout nombre réel $\delta \in [0,1]$, on note $t_d(n,\delta)$ l'unique nombre réel appartenant à $[0,n]$ tel que

$$1 - d \operatorname{vol} \blacktriangle_n(t_d(n,\delta)) = \delta.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme hermitienne standard sur $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}T_0 \oplus \mathbf{C}T_1$ et on munit le faisceau inversible $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^1$ de la métrique de Fubini-Study associée. Pour tout $\overline{\mathbf{Q}}$-point x de $\mathbf{P}^1$ on note $h(x)$ la hauteur de x par rapport à cette métrique. On considère la distance projective sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ définie par

$$d((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) := \frac{|x_0 y_1 - x_1 y_0|}{\|(x_0, x_1)\| \|(y_0, y_1)\|}.$$

On identifie la droite affine $\mathbf{A}^1$ avec l'ouvert $\mathrm{T}_0 \neq 0$ de $\mathbf{P}^1$ et si $x, y \in \mathbf{C}$ sont des nombres complexes on pose

$$d(x,y) := d((1:x),(1:y)) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}.$$

On peut maintenant énoncer la « minoration effective fondamentale ». Il s'agit d'une minoration de hauteurs de points rationnels $(x_1,\dots,x_n)$ en termes de leur distance archimédienne $d(\theta,x_i)$ à un nombre algébrique θ. Cette minoration fait intervenir des paramètres entiers auxiliaires $(r_1,\dots,r_n)$, de nature « géométrique » (il s'interpréteront dans la preuve comme les multidegrés d'un fibré en droite ample sur $(\mathbf{P}^1)^n$).

Théorème 0.1. *Soit* $\theta \in \mathbf{C}$ *un nombre algébrique de degré* $d \geq 2$. *Il existe des nombres réels* $\mathrm{C}(\theta)$ *et, pour tout nombre entier* $n \geq 1$ *et tout nombre réel* $0 < \delta < 1/n$, *un nombre réel* $\lambda(d,\delta)$ *tel que :*

- *pour tout* n*-uplet de nombres réels strictement positifs* $r = (r_1,\dots,r_n)$ *tels que pour tout* $i = 1,\dots,n-1$ *on ait* $r_i > \lambda(d,\delta) r_{i+1}$,
- *pour tous* $\mathbf{Q}$*-points* $x_1,\dots,x_n$ *de* $\mathbf{P}^1$,

on a

$$\bigl(t_d(n)-3\delta\bigr)\min_{i=1,\dots,n}\bigl\{-r_i \log d(\theta,x_i)\bigr\} \leq \sum_{i=1}^{n} r_i h(x_i) + \frac{r_1+\cdots+r_n}{\delta}\mathrm{C}(\theta).$$

La constante $\mathrm{C}(\theta)$ qui apparaît ici est effective, même explicite. Le Théorème de Roth se déduit de ce résultat grâce à un raisonnement par l'absurde qui apparaît déjà dans les travaux antérieurs de Thue, Siegel, Dyson et Roth. Rappelons brièvement ce raisonnement.

On suppose qu'il existe un nombre réel $\kappa > 2$ et une infinité de nombres rationnels x tels que

$$\log d(\theta,x) < -\kappa h(x). \tag{0.1.2}$$

Soit $n \geq 2$ un nombre entier, $0 < \delta < 1/n$ un nombre réel et $r = (r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs tels que $r_i \geq \lambda(d,\delta) r_{i+1}$ pour tout $i = 1,\dots,n$. Soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres rationnels vérifiant (0.1.2). En appliquant le Théorème 0.1 aux points $x_1,\dots,x_n$ on obtient

$$\kappa\bigl(t_d(n)-3\delta\bigr)\min_{i=1,\dots,n}\{r_i h(x_i)\} \leq \kappa\bigl(t_d(n)-3\delta\bigr)\min_{i=1,\dots,n}\bigl\{-r_i\log d(\theta,x_i)\bigr\} \leq \sum_{i=1}^{n} r_i h(x_i) + \frac{r_1+\cdots+r_n}{\delta}\mathrm{C}(\theta). \tag{0.1.3}$$

Comme il y a une infinité de nombres rationnels satisfaisant à (0.1.2) on peut supposer que le rapport entre leurs hauteurs soit assez grand et prendre pour tout i, j,

$$r_i h(x_i) = r_j h(x_j).$$

En divisant l'inégalité précédente (0.1.3) par $r_1 h(x_1)$ elle devient

$$\begin{aligned}\kappa\bigl(t_d(n)-3\delta\bigr) &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{r_i h(x_i)}{r_1 h(x_1)} + \frac{r_1+\cdots+r_n}{r_1}\frac{\mathrm{C}(\theta)}{\delta h(x_1)}\\ &= n + \frac{r_1+\cdots+r_n}{r_1}\frac{\mathrm{C}(\theta)}{\delta h(x_1)}.\end{aligned}$$

Encore à cause de la non finitude des points rationnels vérifiant (0.1.2) on peut supposer

$$\frac{r_1+\cdots+r_n}{r_1}\frac{\mathrm{C}(\theta)}{\delta h(x_1)} < \delta.$$

On obtient, pour tout nombre entier $n \geq 2$ et pour tout nombre réel $0 < \delta < 1/n$, l'inégalité

$$\kappa\bigl(t_d(n)-3\delta\bigr) \leq n+\delta$$

et, en laissant tendre δ vers 0, on obtient $\kappa t_d(n) \leq n$, ce contredit l'hypothèse $\kappa > 2$ car

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{t_d(n)}{n} = \frac{1}{2},$$

comme on le montre dans le lemme suivant :

Lemme 0.2. *Pour tout nombre réel* $\varepsilon \in [0, 1/2]$ *et tout nombre entier* $n \geq 1$ *on a :*

$$\mathrm{vol}\,\blacktriangle_n\left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n\right) \leq \exp(-6n\varepsilon^2).$$

En particulier, pour tous nombres $n, d \geq 1$ *on a*

$$t_d(n) := t_d(n, 0) \geq \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n \log d}{6}}.$$

Démonstration. En suivant [BG06, Lemma 6.3.5] on considère la fonction $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par la condition

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque pour tout $\lambda > 0$ on a $\chi(x) \leq \exp(-\lambda x)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\,\blacktriangle_n\left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n\right) &= \int_{[-1/2,1/2]^n} \chi(\zeta_1 + \cdots + \zeta_n + n\varepsilon)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\
&\leq \int_{[-1/2,1/2]^n} \exp(-\lambda(\zeta_1 + \cdots + \zeta_n + n\varepsilon))\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\
&= \int_{[-1/2,1/2]^n} \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda(\zeta_i + \varepsilon))\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\
&= \left(\int_{[-1/2,1/2]} \exp(-\lambda(\zeta + \varepsilon))\, d\zeta\right)^n \\
&= \exp(-n\varphi(\lambda)),
\end{aligned}$$

où

$$\varphi(\lambda) := \varepsilon\lambda - \log\left(\frac{\sinh(\lambda/2)}{\lambda/2}\right).$$

D'autre part, pour tout $x \geq 0$ on a

$$\frac{\sinh(x)}{x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r}}{(2r+1)!} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{6 \cdot r!} = \exp\left(\frac{x^2}{6}\right),$$

ce qui entraîne

$$\log\left(\frac{\sinh(\lambda/2)}{\lambda/2}\right) \leq \frac{\lambda^2}{24}.$$

Il suffit donc de prendre $\lambda = 12\varepsilon$. Pour la deuxième assertion on pose

$$\varepsilon := \frac{1}{2} - \frac{t_d(n)}{n}.$$

En vertu du premier point on a alors

$$0 = 1 - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_n(t_d(n)) \geq 1 - d \exp(-6n\varepsilon^2),$$

d'où

$$\frac{1}{2} - \frac{t_d(n)}{n} = \varepsilon \leq \sqrt{\frac{n \log d}{6}},$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 0.3. Le lemme précédent est une version précisée d'un phénomène de concentration de la mesure, remarqué en premier lieu par Borel autour du 1914 (voir à ce propos [Mil88]). On considère le cube $\mathrm{C}^n = [-1,1]^n$ dans $\mathbf{R}^n$ muni de la distance euclidienne standard d et l'application linéaire $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x_1 + \cdots + x_n.$$

Le noyau de f s'identifie au sous-espace orthogonal au vecteur $(1,\dots,1)$, $\operatorname{Ker} f = (1,\dots,1)^{\perp}$. Il existe alors des nombres réel $c, \mathrm{C} > 0$ tels que pour tout nombre réel $\varepsilon \geq 0$ on ait

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} \operatorname{vol}\left\{x \in \mathrm{C}^n : d(x, \operatorname{Ker} f) \geq \varepsilon\sqrt{n}\right\} = \mathrm{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right| > \varepsilon : \begin{array}{l}\xi_1,\dots,\xi_n \text{ variables aléatoires indépendantes} \\ \text{uniformément distribuées sur } [-1,1]\end{array}\right\} \\ \leq \mathrm{C} \exp(-cn\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Dans les numéros qui suivent, on rappelle le schéma de démonstration classique de la minoration effective fondamentale.

0.1.3. Indice. — On commence en rappelant la notion d'indice : pour ce faire on travaille pour l'instant sur le corps de nombres complexes $\mathbf{C}$. Soit $n \geq 1$ un nombre entier : on considère le produit de n copies de la droite projective complexe $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \times \cdots \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}.$$

Pour tout n-uplet de nombres entiers $r = (r_1,\dots,r_n)$ on considère le faisceau inversible sur $\mathbf{P}$,

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r) = \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(r_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{pr}_n^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(r_n).$$

Définition 0.4. Soient $x = (x_1,\dots,x_n)$ un $\mathbf{C}$-point du $\mathbf{C}$-schéma $\mathbf{P}$, $r = (r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs et s une section globale du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$. Pour tout $i = 1,\dots,n$ soit t_i un paramètre local autour du point $x_i \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ et s_0 une section inversible de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ définie au voisinage de x. Le germe de fonction s/s_0 se développe en série de puissances

$$s/s_0 = \sum_{\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n)} a_\ell t_1^{\ell_1} \cdots t_n^{\ell_n}$$

avec les $a_\ell \in \mathbf{C}$. Si la section s est non nulle, son indice en x est le nombre rationnel

$$\operatorname{ind}(s,x) := \min\left\{\frac{\ell_1}{r_1} + \cdots + \frac{\ell_n}{r_n} : a_\ell \neq 0\right\};$$

si la section s est nulle on pose $\operatorname{ind}(s,x) = +\infty$.

0.1.4. Construction du polynôme auxiliaire. — Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}$. Soit $r = (r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entiers. Le faisceau inversible

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r) = \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(r_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{pr}_n^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(r_n)$$

est naturellement muni d'une métrique $\|\cdot\|_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)}$ à partir de la métrique de Fubini-Study sur le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Pour toute section globale s de $\Gamma(\mathbf{P}(\mathbf{C}),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ on pose

$$\|s\|_{\sup} = \sup_{x\in\mathbf{P}(\mathbf{C})} \|s\|_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)}(x).$$

Proposition 0.5. *Soit $\theta \in \mathbf{C}$ un nombre algébrique de degré $d \geq 2$. Il existe un nombre réel $\mathrm{C}_1(\theta)$ tel que pour tout nombre réel $t \in [0,n]$ tel que*

$$1 - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_n(t) > 0$$

et pour tout n-uplet de nombres entiers strictement positifs $r = (r_1,\dots,r_n)$, il existe un nombre entier $\rho \geq 1$ et une section globale non nulle à coefficient entiers $s \in \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(\rho r))$ telle que :

– *l'indice de s en le point $\Delta(\theta) = (\theta,\dots,\theta)$ est plus grand ou égal à t,*

$$\mathrm{ind}(s,\Delta(\theta)) \geq t;$$

– *l'inégalité suivante est satisaite :*

$$\log\|s\|_{\sup} \leq \frac{r_1+\cdots+r_n}{1-d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_n(t)}\mathrm{C}_1(\theta)$$

Pour démontrer cette Proposition on applique le Lemme de Siegel à la flèche d'évaluation des sections globales $\Gamma(\mathbf{P}_{\mathbf{Q}},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ sur le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}$ définit par les sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ d'indice $\geq t$.

0.1.5. Majoration analytique. — On se place dans le contexte local (archimédien), c'est-à-dire, on considère le produit $\mathbf{P}$ de la droite projective complexe $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$. Pour tout n-uplet de nombres entiers $r = (r_1,\dots,r_n)$ on munit comme avant le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ de la métrique induite par la métrique de Fubini-Study sur $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$.

Proposition 0.6. *Il existe un nombre réel C_2 tel que :*

– *pour tout n-uplet de nombres entiers strictement positifs $r = (r_1,\dots,r_n)$,*
– *pour toute section globale non nulle s du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}$,*
– *pour tous $\mathbf{C}$-points $y = (y_1,\dots,y_n)$, $z = (z_1,\dots,z_n)$ du $\mathbf{Z}$-schéma $\mathbf{P}$,*

on a :

$$\log\|s\|_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)}(z) \leq \mathrm{ind}(s,y)\max_{i=1,\dots,n}\left\{r_i\log d(y_i,z_i)\right\} + (r_1+\cdots+r_n)(\log\|s\|_{\sup}+\mathrm{C}_2).$$

Cette Proposition joue le rôle du « Lemme de Schwarz » dans ce contexte. Elle se prouve en développant la section s en série de puissance autour de y et l'évaluant en z.

0.1.6. Minoration arithmétique. — On conclut les résultats préparatoires en revenant sur $\mathbf{Z}$, *i.e.*, considérant le produit $\mathbf{P}$ de la droite projective $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}$.

Proposition 0.7. *Soient $r = (r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entier strictement positifs, s une section globale entière non nulle de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le $\mathbf{Z}$-schéma $\mathbf{P}$ et $x = (x_1,\dots,x_n)$ un $\mathbf{Q}$-point de $\mathbf{P}$. Si la section s ne s'annule pas en x, alors on a*

$$\log\|s\|(x) \geq -\sum_{i=1}^n r_i h(x_i).$$

Ceci découle du fait que la section s ne s'annule pas en le point x et qu'un nombre entier non nul a une valeur absolue ≥ 1.

0.1.7. Application du « Lemme des zéros ». — Soient $\delta \in [0,1]$ un nombre réel et $n \geq 2$ un nombre entier ≥ 2. On considère l'unique nombre réel $t_d(n,\delta) \in [0,n]$ tel que

$$1 - d \operatorname{vol} \blacktriangle_n(t_d(n,\delta)) = \delta.$$

Soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs. Par un argument d'approximation on peut supposer que $r_1, \dots, r_n$ soient des nombres rationnels. Par homogénéité on peut donc supposer qu'ils soient des nombres entiers.

En vertu de la Proposition 0.5 il existe un nombre réel $C_1(\theta)$ ne dépendant que de θ, un nombre entier $\rho \geq 1$ et une section globale non nulle à coefficients entiers s du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\rho r)$ telle que l'indice de s en le point $\Delta(\theta) = (\theta, \dots, \theta)$ est plus grand ou égal à t,

$$\operatorname{ind}(s, \Delta(\theta)) \geq t;$$

et l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\log \|s\|_{\sup} \leq (r_1 + \cdots + r_n) C_1(\theta).$$

L'énoncé du Théorème 0.1 est homogène en r : quitte à multiplier le n-uplet r par le nombre entier ρ, on peut supposer que ρ soit égal à 1.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un $\mathbf{Q}$-point du schéma $\mathbf{P}$. La section s peut *à priori* s'annuler en x. Le point crucial de la preuve du Théorème de Roth est contrôler l'ordre d'annulation de s en x. La version originelle de Roth se base sur un argument arithmétique. Ici on se sert d'un outil complètement géométrique, c'est-à-dire, la version en dimension supérieure du « Lemme de Dyson » due en premier temps à Esnault et Viewheg [EV84, Theorem 0.4] et ensuite à Nakamaye [Nak99, Theorem 0.3].

Théorème 0.8 (Lemme de Dyson à n variables)**.** *Soit* $N \geq 1$ *un nombre entier et, pour tout* $\alpha = 1, \dots, N$, *soit* $y(\alpha)$ *un* $\mathbf{C}$*-point de* $\mathbf{P}$*. Soient* $r = (r_1, \dots, r_n)$ *un* n*-uplet de nombres entiers strictement positifs et* s *une section globale non nulle du faisceau inversible* $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$.

Si les projections des points $y_1, \dots, y_N$ *soient à deux à deux distinctes, i.e. pour tout* $i = 1, \dots, n$ *et pour* $\alpha \neq \beta$ *on a*

$$\operatorname{pr}_i(y(\alpha)) \neq \operatorname{pr}_i(y(\beta)),$$

alors

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{vol} \blacktriangle_n(\operatorname{ind}(s, y(\alpha))) \leq 1 + \varepsilon_N(r),$$

où

$$\varepsilon(r) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{\frac{r_j}{r_i}\right\} \max\{0, N-2\}\right) - 1.$$

Soient $\theta(1) = \theta, \theta(2), \dots, \theta(d)$ les points conjugués du point θ. On applique le « Lemme de Dyson à n variables » à la section s avec $N = d+1$, et avec

$$y(\alpha) = \Delta(\theta(\alpha)) = (\theta(\alpha), \dots, \theta(\alpha))$$

pour $\alpha = 1, \dots, d$ et $y_{d+1} = x = (x_1, \dots, x_n)$. La section s étant définie sur $\mathbf{Q}$ (même sur $\mathbf{Z}$) est d'indice $\geq t_d(n,\delta)$ sur tout point conjugué $\theta(\alpha)$. Si on note t_x l'indice de s en x le « Lemme de Dyson à n variables » entraîne

$$d \operatorname{vol} \blacktriangle_n(t_d(n,\delta)) + \operatorname{vol} \blacktriangle_n(t_x) \leq 1 + \varepsilon(r)$$

et, comme par définition on a $1 - d \operatorname{vol} \blacktriangle_n(t_d(n,\delta)) = \delta$, alors

$$\operatorname{vol} \blacktriangle_n(t_x) \leq \delta + \varepsilon(r).$$

On considère un n-uplet de nombres entiers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ tels que

$$\frac{\ell_1}{r_1} + \dots + \frac{\ell_n}{r_n} \geq t_x \qquad \text{et} \qquad \frac{\ell_1 - 1}{r_1} + \dots + \frac{\ell_n - 1}{r_n} < t_x.$$

La section s correspond à un polynôme f en n variables $\xi_1, \dots, \xi_n$ de multi-degré $\leq (r_1, \dots, r_n)$. On pose :

$$\widetilde{f} := \frac{1}{\ell_1!} \cdots \frac{1}{\ell_n!} \cdot \frac{\partial^{\ell_1} \cdots \partial^{\ell^n}}{\partial \xi_1^{\ell_1} \cdots \partial \xi_n^{\ell_n}} f.$$

Le polynôme $\widetilde{f}$ est à coefficients entiers et de multi-degré $\leq \widetilde{r} = (r_1 - \ell_1, \dots, r_n - \ell_n)$: il lui correspond une section globale $\widetilde{s}$ à coefficients entiers du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(\widetilde{r})$ et en vertu des inégalités de Cauchy on a :

$$\log \|\widetilde{s}\|_{\sup} \leq \log \|s\|_{\sup} + \frac{1}{2}(r_1 + \dots + r_n) \log n.$$

On considère la section globale du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$,

$$s' = \widetilde{s} \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_i^* \mathrm{T}_0^{\ell_i}.$$

On a évidemment $\|\widetilde{s}\|_{\sup} = \|s'\|_{\sup}$ et l'indice de s' en le point $\Delta(\theta)$ vaut

$$\mathrm{ind}(s', \Delta(\theta)) = \mathrm{ind}(s, \Delta(\theta)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i}{r_i} = t_d(n, \delta) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i}{r_i}.$$

La Proposition 0.6 appliquée à la section globale s' du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ et aux points $y = \Delta(\theta)$ et $z = x$ entraîne qu'il existe un nombre réel C_2 tel que

$$\begin{aligned}
\log \|s'\|(x) &\leq \left(t_n(d) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i}{r_i} \right) \max_{i=1,\dots,n} \{ r_i \log d(\theta, x_i) \} + (r_1 + \dots + r_n)(\log \|s'\|_{\sup} + \mathrm{C}_2) \\
&\leq \left(t_n(d) - t_x - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \right) \max_{i=1,\dots,n} \{ r_i \log d(\theta, x_i) \} + (r_1 + \dots + r_n) \left(\log \|s\|_{\sup} + \frac{1}{2} \log n + \mathrm{C}_2 \right) \\
&\leq \left(t_n(d) - \delta - \varepsilon(r) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \right) \max_{i=1,\dots,n} \{ r_i \log d(\theta, x_i) \} + (r_1 + \dots + r_n) \left(\frac{1}{\delta} \mathrm{C}_1(\theta) + \frac{1}{2} \log n + \mathrm{C}_2 \right).
\end{aligned}$$

Le nombre réel $\varepsilon(r)$ est petit quand les rapports successifs r_i / r_{i+1} sont assez grands. Il existe donc un nombre réel $\lambda(d, \delta)$ tel que pour tout n-uplet de nombres réels r satisfaisant $r_i \geq \lambda(d, \delta)$ pour $i = 1, \dots, n$, alors $\varepsilon(r) \leq \delta$. D'autre part si $r_i \geq 1/(n\delta)$ on a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \leq \delta.$$

Avec ces hypothèses et en supposant de plus $(\log n)/2 \leq 1/\delta$, on a

$$\log \|s'\|(x) \leq (t_n(d) - 3\delta) \max_{i=1,\dots,n} \{ r_i \log d(\theta, x_i) \} + \frac{r_1 + \dots + r_n}{\delta} \mathrm{C}_3(\theta),$$

où on peut prendre $\mathrm{C}_3(\theta) = \mathrm{C}_1(\theta) + \mathrm{C}_2 + 1$.

D'autre part, la section s ne s'annule pas en x et d'après la Proposition 0.7 on a

$$\log \|s'\|(x) \geq - \sum_{i=1}^{n} (r_i - \ell_i) h(x_i) \geq - \sum_{i=1}^{n} r_i h(x_i).$$

On obtient

$$-\sum_{i=1}^{n} r_i h(x_i) \leq \log \|s'\|(x) \leq (t_n(d)-3\delta) \max_{i=1,\dots,n} \left\{ r_i \log d(\theta, x_i) \right\} + \frac{r_1+\cdots+r_n}{\delta} \mathrm{C}_3(\theta),$$

et on conclut en changeant de signe.

0.2 La minoration effective fondamentale et la théorie géométrique des invariants

Le but de ce chapitre est de prouver la version suivante de la minoration effective fondamentale contenue dans la démonstration du Théorème de Roth (cf. Théorème 6.3).

Ce résultat est contenu de manière implicite dans la démonstration de Vojta du « Théorème de Roth avec cibles mobiles » [Voj96, Theorem 1].

Théorème 0.9. *Soient* K *un corps global de caractéristique nulle et* $\mathrm{V_K}$ *l'ensemble de ses places. Soient* K' *une extension finie du corps* K *de degré* $d = [\mathrm{K}' : \mathrm{K}] \geq 2$, $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p})$ *un faisceau adélique localement libre de rang* 2 *sur* K. *Il existe un nombre réel* $\mathrm{C}(d, \mathscr{E})$ *avec la propriété suivante :*

- *pour tout nombre entier* $n \geq 1$,
- *pour tous* K'*-points* $\theta_1, \dots, \theta_n$ *de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *tel que, pour tout* $i = 1, \dots, n$, θ_i *engendre le corps* K',
- *pour tous* K*-points* $x_1, \dots, x_n$ *de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,
- *pour tout nombre réel* $0 < \delta \leq 1/(2 \cdot n!)$,
- *pour tout* n*-uplet* $r = (r_1, \dots, r_n)$ *de nombres réels strictement positifs tel que*

$$\varepsilon_d(r) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{r_j}{r_i} \right\} (d-1) \right) < \delta^2,$$

on a :

$$t_d(n,\delta) \left(\sum_{v \in \mathrm{V_K}} \deg(v) \min_{i=1,\dots,n} \left\{ -r_i \log d_v(\theta_i, x_i) \right\} \right) \\ \leq \left(1 + 3d \sqrt[n]{\delta} \right) \sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \frac{2d}{\delta} \sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) + \frac{r_1+\cdots+r_n}{\delta} \mathrm{C}(d, \mathscr{E}),$$

Ici $h_{\mathscr{E}}$ désigne la hauteur sur la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ induite par le faisceau adélique $\mathscr{E}$, pour toute place $v \in \mathrm{V}_v$, d_v désigne la distance sur la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_v)$ induite par la norme géométrique p_v (voir I.8.7) et le nombre réel $t_d(n,\delta)$ est définit comme il suit. Pour tout nombre entier $n \geq 1$ et pour tout nombre réel $t \geq 0$ on considère la partie

$$\blacktriangle_n(t) = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in [0,1]^n : \zeta_1 + \cdots + \zeta_n < t \right\}.$$

Pour tout nombre réel $\delta \in [0,1]$, on note $t_d(n,\delta)$ l'unique nombre réel appartentant à $[0,n]$ tel que

$$1 - d \operatorname{vol} \blacktriangle_n(t_d(n,\delta)) = \delta.$$

Remarque 0.10. Le nombre réel $\mathrm{C}(d, \mathscr{E})$ est effectif, même explicite.

Le Théorème 0.13 dans l'introduction de ce mémoire se déduit en prenant $\mathscr{E}$ égal au faisceau adélique associé au fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathscr{O}}_{o_{\mathrm{K}}}^{\oplus 2}$: en effet, pour tout nombre entier $d \geq 1$ et tout nombre réel $\delta > 0$, il existe un nombre réel $\lambda_d(n,\delta) > 0$ tel que pour tout n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres réels strictement positifs satisfaisant $r_i > \lambda_d(n,\delta) r_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n$, on a

$$\varepsilon_d(r) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{r_j}{r_i} \right\} (d-1) \right) < \delta^2.$$

Le Théorème 0.9 permet de prouver la version suivante du « Théorème de Roth avec cibles mobiles » :

Théorème 0.11. *Soient* K *un corps de nombres,* $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p})$ *un faisceau adélique localement libre de rang* 2 *sur* K, K' *une extension finie du corps* K *de degré* ≥ 2 *et* $\mathrm{F} \subset \mathrm{V}_{\mathrm{K}}$ *un sous-ensemble fini.*

Pour tout nombre réel $\kappa > 2$, *il n'existe pas une suite de couples* $\{(\theta_i, x_i) : i \geq 1\}$, *tels que*

– *pour tout* i, θ_i *est un* K'*-point de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *qui n'est pas* K*-rationnel ;*

– *pour tout* i, x_i *est un* K*-point de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *;*

– $h_{\mathscr{E}}(\theta_i) = o(h_{\mathscr{E}}(x_i))$ *pour* $i \to \infty$ *;*

– *pour tout* $i \geq 1$,

on a :

$$-\sum_{v \in \mathrm{F}} \deg(v) \log d_v(\theta_i, x_i) \geq \kappa \cdot h_{\mathscr{E}}(x_i).$$

La version de Vojta de ce résultat qui paraît dans [Voj96] est plus générale de celle que nous présentons ici car l'on peut choisir des « cibles » différentes à chaque place appartenante à F. Des modifications faciles de nos arguments permettent d'obtenir le même résultat : nous préférons de ne pas les faire pour rendre plus claire l'exposition.

La version de Wirsing de ce résultat est aussi plus générale, car les cibles θ_i peuvent appartenir à n'importe quelle extension de degré $d \geq 2$ du corps K (voir [RV97, Theorem 4.1]). Dans ce cas, nous ignorons si une modification de nos méthodes peut conduire à un résultat du même type.

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe une telle suite $\{(\theta_i, x_i) : i \geq 1\}$. Quitte à passer à une sous-suite et à une sous-extension de K', on peut supposer que tous les points θ_i engendrent K'.

Par un raisonnement élémentaire, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et pour toute place $v \in \mathrm{F}$ il existe un nombre réel positif $\lambda(\varepsilon, v)$ tel que pour tout $i \geq 1$ on ait

$$-\log d_v(x_i, \theta_i) \geq \lambda(\varepsilon, v) \left(-\sum_{v \in \mathrm{F}} \deg(v) \log d_v(\theta_i, x_i) \right)$$

et

$$\sum_{v \in \mathrm{F}} \deg(v) \lambda(\varepsilon, v) \geq 1 - \varepsilon.$$

Soit $n \geq 1$ un nombre entier. En appliquant le Théorème 0.9 aux points $(\theta_1, x_1), \ldots, (\theta_n, x_n)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left(1 + 3d \sqrt[n]{\delta}\right) \sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \frac{2d}{\delta} \sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) + \frac{r_1 + \cdots + r_n}{\delta} \mathrm{C}(d, \mathscr{E}) \\
&\geq t_d(n, \delta) \left(\sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \min_{i=1,\ldots,n} \left\{ -r_i \log d_v(\theta, x_i) \right\} \right) \\
&\geq t_d(n, \delta) \left(\sum_{v \in \mathrm{F}} \deg(v) \lambda(\varepsilon, v) \min_{i=1,\ldots,n} \left\{ -r_i \cdot \sum_{v \in \mathrm{F}} \deg(v) \log d_v(\theta_i, x_i) \right\} \right) \\
&\geq t_d(n, \delta)(1 - \varepsilon) \min_{i=1,\ldots,n} \left\{ -r_i \cdot \sum_{v \in \mathrm{F}} \deg(v) \log d_v(\theta_i, x_i) \right\}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, pour tout $i \geq 1$ on a

$$-\sum_{v \in \mathrm{F}} \deg(v) \log d_v(\theta_i, x_i) \geq \kappa \cdot h_{\mathscr{E}}(x_i),$$

et donc

$$t_d(n,\delta)(1-\varepsilon)\kappa \min_{i=1,\dots,n}\{r_i h_{\mathscr{E}}(x_i)\} \le \left(1+3d\sqrt[n]{\delta}\right)\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \frac{2d}{\delta}\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) + \frac{r_1+\cdots+r_n}{\delta}\mathrm{C}(d,\mathscr{E}).$$

Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que les rapports $h_{\mathscr{E}}(x_{i+1})/h_{\mathscr{E}}(x_i)$ soient assez grands pour pouvoir prendre $r_1,\dots,r_n$ tels que pour tout i, j on ait

$$r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) = r_j h_{\mathscr{E}}(x_j).$$

En divisant par $r_1 h_{\mathscr{E}}(x_1) = \min r_i h_{\mathscr{E}}(x_i)$, l'inégalité précédente devient alors

$$t_d(n,\delta)(1-\varepsilon)\kappa \le \left(1+3d\sqrt[n]{\delta}\right)n + \frac{2d}{\delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_{\mathscr{E}}(\theta_i)}{h_{\mathscr{E}}(x_i)} + \frac{r_1+\cdots+r_n}{r_1}\,\frac{\mathrm{C}(d,\mathscr{E})}{\delta h_{\mathscr{E}}(x_1)}.$$

Encore quitte à passer à sous-suite on peut supposer que pour tout $i \ge 1$ on ait

$$h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \le \left(\sqrt[n]{\delta}\right)^{n+1} h_{\mathscr{E}}(x_i)$$

et

$$\frac{r_1+\cdots+r_n}{r_1}\,\frac{\mathrm{C}(d,\mathscr{E})}{\delta h_{\mathscr{E}}(x_1)} \le \delta.$$

On obtient alors

$$t_d(n,\delta)(1-\varepsilon)\kappa \le \left(1+5d\sqrt[n]{\delta}\right)n + \delta$$

et en laissant δ, ε tendre vers 0, pour tout nombre entier $n \ge 2$ on a l'inégalité

$$t_d(n,0)\kappa \le n.$$

Ceci est une contradiction parce que en vertu du Lemme 0.2 on a

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{t_d(n,0)}{n} = \frac{1}{2}$$

et donc $\kappa \le 2$, contre l'hypothèse $\kappa > 2$. □

Le chapitre s'ouvre avec un formulaire sur de simples grandeurs combinatoires qu'on verra apparaître dans la suite. On en profite pour démontrer l'uniformité des approximations de certaines cardinalités par des volumes et de certaines sommes par des intégrales.

On introduit ensuite les notions et les résultats concernant l'indice d'un polynôme en un point. Notamment on énonce sans démonstration le « Lemme de Dyson à n variables » qui Nakamaye démontre dans [Nak99] : la version de Esnault et Viewheg présente dans [EV84] conviendrait également.

Dans la troisième section on étudie la semi-stabilité d'un couple de flèches d'évaluation sur des schémas définis par des conditions d'indice : l'un supporté en un point rationnel (l'« approximation rationelle »), l'autre en un point algébrique (le nombre algébrique à approximer). Le coefficient d'instabilité du premier (Proposition 3.2) se calcule grâce à la connaissance explicite d'une base du noyau (Proposition 2.7). Le coefficient d'instabilité du deuxième est borné supérieurement (Proposition 3.4) en se ramenant au cas précédent au moyen du Lemme de Dyson à n variables et de la semi-stabilité d'un couple de sous-espaces supplémentaires (dans la forme légèrement plus générale donnée par le Corollaire I.4.19). Le résultat de semi-stabilité, qui est le point crucial pour pouvoir appliquer les constructions du Chapitre III comme dans le cas de l'inégalité de Liouville, est une simple combinaison de ces deux cas.

Il ne s'agit pas d'un résultat purement géométrique, *i.e.*, sur un corps algébriquement clos : on utilisera la version de Kempf-Rousseau du critère numérique de semi-stabilité (Théorème I.4.12) pour se ramener à ne considérer que de sous-groupes à un paramètre définis sur le corps de base. Cette réduction (que nous croyons qu'il soit possible d'éviter) ne fait de toute manière pas intervenir aucune contrainte sur les hauteurs des points.

La semi-stabilité étant assurée, on s'occupe d'interpréter l'égalité du Scholie III.2.2 dans ce cas. Ici encore d'abord la hauteur des noyaux comme points de grassmaniennes. Encore, la hauteur le noyau de la flèche d'évaluation en le point rationnel se borne aisément en connaissant une base explicite du noyau. La hauteur de la flèche d'évaluation en le point algébrique est majorée à travers l'inégalité des pentes.

Pour estimer les mesures d'instabilité, on choisit un point du groupe (sous l'action du quel le couple de noyaux est semi-stable) qui joue le rôle de l'évaluation en un point. Les inégalités qu'on obtient ainsi faisant sont les avatars du Lemme de Schwarz dans ce contexte (voir à ce propos les Propositions 5.1-5.2).

Ayant achevé toutes les étapes intermédiaires, il ne reste que mettre tout ensemble (Corollaire 6.2), utilisant aussi la minoration de la hauteur sur le quotient (Théorème III.5.4). On le fera dans tous les cas où on est capable de démontrer la semi-stabilité pour obtenir le Théorème 0.9 énoncé plus haut en « portant à la limite de la semi-stabilité » le choix des indices en les points algébrique et rationnel.

1 Un formulaire

1.1 Cubes et triangles

1.1.1. Définitions. — Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Si $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ et $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ sont des n-uplets de nombres réels on désigne par $\eta \cdot \zeta$ leur produit scalaire :

$$\eta \cdot \zeta = \eta_1 \zeta_1 + \cdots + \eta_n \zeta_n.$$

Pour tout n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres réels positifs, on considère le cube dans $\mathbf{R}^n$ de côtés de longueur $r_1, \dots, r_n$:

$$\blacksquare(r) := \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{R}^n : 0 \leq \zeta_i \leq r_i \ \forall i \right\} = \prod_{i=1}^{n} [0, r_i]$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs. Si t est un nombre réel positif, on pose

$$\begin{aligned} \blacktriangle_a(r, t) &:= \{ \zeta \in \blacksquare(r) : a \cdot \zeta < t \} \\ \blacktriangledown_a(r, t) &:= \blacksquare(r) - \blacktriangle_a(r, t) = \{ \zeta \in \blacksquare(r) : a \cdot \zeta \geq t \}. \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, si r est un n-uplet de nombres strictement positifs et si, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $a_i = 1/r_i$ alors on omettra l'indice a ; si, de plus, on a $a = r = (1, \dots, 1)$ on écrira simplement $\blacktriangle(t)$ et $\blacktriangledown(t)$. On ajoutera $\mathbf{N}$ en indice pour indiquer l'intersection de ces ensembles avec $\mathbf{N}^n$; par exemple on écrira :

$$\blacksquare(r)_{\mathbf{N}} := \blacksquare(r) \cap \mathbf{N}^n.$$

1.1.2. Homothétie. — Pour tout nombre réel ρ, on désigne par $\rho \cdot - : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \zeta \mapsto \rho\zeta$ l'homothétie de facteur ρ. Si $\rho > 0$, l'homothétie de facteur ρ identifie la partie $\blacksquare(r)$ (resp. $\blacktriangle_a(r, t)$, resp $\blacktriangledown_a(r, t)$) avec la partie $\blacksquare(\rho r)$ (resp. $\blacktriangle_a(\rho r, \rho t)$, resp $\blacktriangledown_a(\rho r, \rho t)$). Par contre, dans le cas des intersections avec $\mathbf{N}^n$ on a seulement les inclusions suivantes (qui peuvent être strictes même si ρ est un nombre entier) :

$$\lfloor\rho\rfloor\cdot(\blacksquare(r)_{\mathbf{N}})\subset\blacksquare(\rho r)_{\mathbf{N}}$$
$$\lfloor\rho\rfloor\cdot(\blacktriangle_a(r,t)_{\mathbf{N}})\subset\blacktriangle_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}$$
$$\lceil\rho\rceil\cdot(\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}})\subset\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}.$$

Dans [EV84, Lemma 1.9], Esnault et Viewheg donnent des conditions combinatoires suffisantes pour que ces inclusions soient des égalités pour tout nombre entier $\rho\geq 1$: ici on n'en aura pas besoin.

1.1.3. Symétrie. — La symétrie centrale σ de $\mathbf{R}^n$ autour du point $r/2=(r_1/2,\dots,r_n/2)$,

$$\sigma(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=(r_1-\zeta_1,\dots,r_n-\zeta_n)$$

définit un automorphisme du cube $\blacksquare(r)$ et on a :

$$\sigma(\blacktriangledown_a(r,t))=\overline{\blacktriangle_a(r,a\cdot r-t)} \tag{1.1.1}$$
$$\overline{\sigma(\blacktriangle_a(r,t))}=\blacktriangledown_a(r,a\cdot r-t). \tag{1.1.2}$$

Si r est un n-uplet de nombres entiers, la symétrie σ induit une permutation du « cube » $\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$ et on a

$$\sigma(\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}})=\overline{\blacktriangle_a(r,a\cdot r-t)}\cap\mathbf{N}^n$$
$$\overline{\sigma(\blacktriangle_a(r,t))}\cap\mathbf{N}^n=\blacktriangledown_a(r,a\cdot r-t)_{\mathbf{N}}.$$

1.2 Volumes

1.2.1. Volumes. — On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ et par vol K le volume d'une partie mesurable $K\subset\mathbf{R}^n$. Pour tout n-uplet $r=(r_1,\dots,r_n)$ et $a=(a_1,\dots,a_n)$ de nombres réels *strictement* positifs, l'application

$$\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,-):[0,a\cdot r]\longrightarrow\mathbf{R}_+$$

est à valeurs dans $[0,\operatorname{vol}\blacksquare(r)]$, continue et strictement croissante : elle induit, en particulier, un homéomorphisme de l'intervalle $[0,a\cdot r]$ avec l'intervalle $[0,\operatorname{vol}\blacksquare(r)]$. Par définition on a pour tout $t\in[0,a\cdot r]$:

$$\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,t)=\operatorname{vol}\blacksquare(r)-\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(r,t). \tag{1.2.1}$$

L'application $\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(r,-)$ est donc un homéomorphisme strictement décroissant de l'intervalle $[0,a\cdot r]$ sur l'intervalle $[0,\operatorname{vol}\blacksquare(r)]$.

1.2.2. Homothétie. — Pour tout nombre réel $\rho>0$ on a :

$$\operatorname{vol}\blacktriangle_a(\rho r,\rho t)=\rho^n\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,t) \tag{1.2.2}$$
$$\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)=\rho^n\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(r,t). \tag{1.2.3}$$

1.2.3. Symétrie. — D'après (1.1.1) et (1.1.2) on a :

$$\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(r,t)=\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,a\cdot r-t) \tag{1.2.4}$$
$$\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,t)=\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(r,a\cdot r-t). \tag{1.2.5}$$

1.2.4. Formules asymptotiques. — Pour tout n-uplet $r=(r_1,\dots,r_n)$ de nombres réels strictement positifs, on a

$$\#\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}=\prod_{i=1}^{n}(\lfloor r_i\rfloor+1).$$

En particulier, on a :

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\#\blacksquare(\rho r)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} = \mathrm{vol}\,\blacksquare(r). \tag{1.2.6}$$

Pour tout point $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{R}^n$ on pose $\lceil\zeta\rceil := (\lceil\zeta_1\rceil, \dots, \lceil\zeta_n\rceil)$. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}^n$ on définit

$$\blacksquare^{\ell} = \{\zeta \in \mathbf{R}^n : \lceil\zeta\rceil = \ell\}.$$

Pour tous n-uplets $r = (r_1, \dots, r_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ de nombres réels strictement positifs et pour tout nombre réel $t \geq 0$, on considère la partie de $\mathbf{R}^n$,

$$\lfloor\blacktriangledown\rfloor_a(r,t) := \{\zeta \in \mathbf{R}^n : \lceil\zeta\rceil \in \blacktriangledown_a(r,t)\}.$$

Par définition on a $\lfloor\blacktriangledown\rfloor_a(r,t) \cap \mathbf{N}^n = \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$ et donc

$$\lfloor\blacktriangledown\rfloor_a(r,t) = \bigcup_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \blacksquare^{\ell}.$$

En particulier, on a

$$\mathrm{vol}\lfloor\blacktriangledown\rfloor_a(r,t) = \#\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}.$$

Si on désigne par $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la translation $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \mapsto (\zeta_1 - 1, \dots, \zeta_n - 1)$, on a les inclusions suivantes :

$$\blacktriangledown_a(r,t) \subset \lfloor\blacktriangledown\rfloor_a(r,t) \subset \tau(\blacktriangledown_a(r+(1,\dots,1),t)) = \left\{\zeta \in \prod_{i=1}^{n}[-1, r_i] : a\cdot\zeta \geq t - |a|\right\}$$

En passant aux volumes on obtient :

Proposition 1.1. *Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ des n-uplets de nombres réels strictement positifs et $t \geq 0$ un nombre réel. Alors,*

$$\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,t) \leq \#\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}} \leq \mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r+(1,\dots,1),t).$$

Pour tout nombre entier $\rho \geq 1$, on a

$$\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(\rho r + (1,\dots,1), \rho t) \leq \mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(\rho r, \rho t) + \mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r + (1,\dots,1)) - \mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r)$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\#\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} &\leq \frac{\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(\rho r + (1,\dots,1),\rho t)}{\rho^n}\\ &\leq \frac{\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t) + \mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r+(1,\dots,1)) - \mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r)}{\rho^n}\\ &= \mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,t) + \frac{\mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r+(1,\dots,1)) - \mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r)}{\rho^n}.\end{aligned}$$

Corollaire 1.2. *Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ des n-uplets de nombres réels strictement positifs, $\delta > 0$ un nombre réel, $t \geq 0$ un nombre réel. Pour tout nombre entier $\rho \geq 1$ tel que*

$$\frac{\mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r+(1,\dots,1)) - \mathrm{vol}\,\blacksquare(\rho r)}{\rho^n} \leq \delta,$$

on a

$$\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,t) \leq \frac{\#\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} \leq \mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,t) + \delta.$$

En particulier :

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\# \blacktriangle_a(\rho r, \rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} = \mathrm{vol}\, \blacktriangle_a(r,t) \tag{1.2.7}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\# \blacktriangledown_a(\rho r, \rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} = \mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(r,t). \tag{1.2.8}$$

1.2.5. Formules explicites. — Si, pour tout $i = 1, \dots, n$, $a_i = 1/r_i$, on peut expliciter les volumes de $\blacktriangle(r,t)$ et $\blacktriangledown(r,t)$. En fait, si $t \in [0,n]$ est un nombre réel on a :

$$\mathrm{vol}\, \blacktriangle(t) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor} \binom{n}{i} (-1)^i (t-i)^n.$$

Cette formule se démontre par récurrence sur n grâce à la formule d'inclusion et exclusion : on ne donne pas les détails de la preuve, comme on n'utilisera cette formule que dans les cas particuliers explicités ci-dessous. Si $t \in [0,1]$ on a :

$$\mathrm{vol}\, \blacktriangle(r,t) = \frac{t^n}{n!} \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) \tag{1.2.9}$$

$$\mathrm{vol}\, \blacktriangledown(r,t) = \left(1 - \frac{t^n}{n!}\right) \mathrm{vol}\, \blacksquare(r). \tag{1.2.10}$$

En tenant compte de (1.2.4) et (1.2.5), pour $t \in [n-1, n]$ on a :

$$\mathrm{vol}\, \blacktriangle(r,t) = \left(1 - \frac{(n-t)^n}{n!}\right) \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) \tag{1.2.11}$$

$$\mathrm{vol}\, \blacktriangledown(r,t) = \frac{(n-t)^n}{n!} \mathrm{vol}\, \blacksquare(r). \tag{1.2.12}$$

1.3 Intégrales

1.3.1. Certains intégrales. — Soit $i = 1, \dots, n$. Pour tout n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ et $a = (a_1, \dots, a_n)$ de nombres réels *strictement* positifs, l'application

$$\begin{aligned} [0, a \cdot r] &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ t &\longmapsto \int_{\blacktriangle_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda \end{aligned}$$

est continue et strictement croissante : elle définit donc un homéomorphisme de l'intervalle $[0, a\cdot r]$ avec l'intervalle $[0, \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) r_i/2]$. Pour tout nombre réel $t \in [0, a \cdot r]$ on a :

$$\int_{\blacktriangle_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = \int_{\blacksquare(r)} \zeta_i \, d\lambda - \int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = \frac{1}{2} \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) r_i - \int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda. \tag{1.3.1}$$

1.3.2. Homothétie. — Pour tout nombre réel $\rho \geq 0$ on a :

$$\int_{\blacktriangle_a(\rho r, \rho t)} \zeta_i d\lambda = \rho^{n+1} \left(\int_{\blacktriangle_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda \right) \tag{1.3.2}$$

$$\int_{\blacktriangledown_a(\rho r, \rho t)} \zeta_i d\lambda = \rho^{n+1} \left(\int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda \right) \tag{1.3.3}$$

1.3.3. Symétrie. — Par la formule de changement de variable, on a :

$$\int_{\blacktriangle_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = r_i \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, a\cdot r - t) - \int_{\blacktriangledown_a(r,a\cdot r-t)} \zeta_i \, d\lambda. \tag{1.3.4}$$

$$\int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = r_i \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, a\cdot r - t) - \int_{\blacktriangle_a(r,a\cdot r-t)} \zeta_i \, d\lambda. \tag{1.3.5}$$

1.3.4. Formules asymptotiques. — Pour tout n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres réels strictement positifs et pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$\sum_{\ell \in \blacksquare(r)_{\mathbf{N}}} \ell_i = \frac{\lfloor r_i \rfloor}{2} \# \blacksquare(r)_{\mathbf{N}}.$$

En particulier,

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left[\sum_{\ell \in \blacksquare(\rho r)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] = \frac{r_i}{2} \operatorname{vol} \blacksquare(r) = \int_{\blacksquare(r)} \zeta_i \, d\lambda.$$

On revient aux notations introduites au paragraphe 1.2.4. Pour tout $i = 1, \dots, n$ on a

$$\int_{\blacksquare^\ell} \left(\zeta_i + \frac{1}{2}\right) d\lambda = \int_{\blacksquare^\ell} \zeta_i \, d\lambda + \frac{1}{2} = \ell_i,$$

et donc

$$\int_{\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)} \left(\zeta_i + \frac{1}{2}\right) d\lambda = \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \int_{\blacksquare^\ell} \left(\zeta_i + \frac{1}{2}\right) d\lambda = \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i.$$

Proposition 1.3. *Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ des n-uplets de nombres réels strictement positifs, $t \geq 0$ un nombre réel et $i = 1, \dots, n$. Alors,*

$$\int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda - \left(\frac{1}{2} \# \blacktriangledown_a(r,t) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t)\right) \leq \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \leq \int_{\blacktriangledown_a(r+(1,\dots,1),t)} \zeta_i \, d\lambda.$$

Démonstration. La fonction $\zeta_i + 1$ est positive sur $\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)$. Puisque $\blacktriangledown_a(r,t)$ est contenu dans $\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda &= \int_{\blacktriangledown_a(r,t)} (\zeta_i + 1) \, d\lambda - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t) \\
&\leq \int_{\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)} (\zeta_i + 1) \, d\lambda - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t) \\
&= \int_{\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)} \left(\zeta_i + \frac{1}{2}\right) d\lambda + \frac{1}{2} \operatorname{vol} \lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t) \\
&= \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i + \frac{1}{2} \# \blacktriangledown_a(r,t) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t).
\end{aligned}$$

Si comme précédemment on désigne par $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la translation $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \mapsto (\zeta_1 - 1, \dots, \zeta_n - 1)$, on a

$$\int_{\blacktriangledown_a(r+(1,\dots,1),t)} \zeta_i \, d\lambda = \int_{\tau(\blacktriangledown_a(r+(1,\dots,1),t))} (\zeta_i + 1) \, d\lambda.$$

Comme la fonction $\zeta_i + 1$ est positive sur $\tau(\blacktriangledown_a(r + (1, \dots, 1), t))$ et que $\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)$ est contenu dans $\tau(\blacktriangledown_a(r + (1, \dots, 1), t))$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i &= \int_{\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)} \left(\zeta_i + \frac{1}{2}\right) d\lambda \leq \int_{\lfloor \blacktriangledown \rfloor_a(r,t)} (\zeta_i + 1) \, d\lambda \\
&\leq \int_{\tau(\blacktriangledown_a(r+(1,\dots,1),t))} (\zeta_i + 1) \, d\lambda = \int_{\blacktriangledown_a(r+(1,\dots,1),t)} \zeta_i \, d\lambda,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 1.4. *Soient $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ des n-uplets de nombres réels strictement positifs, $\delta > 0$ un nombre réel, $t \geq 0$ un nombre réel et $i = 1, \ldots, n$. Pour tout nombre entier $\rho \geq 1$ tel que $\rho r_i \geq \operatorname{vol} \blacksquare(r) + \delta$ et*

$$\frac{\operatorname{vol}\blacksquare(\rho r + (1, \ldots, 1)) - \operatorname{vol}\blacksquare(\rho r)}{\rho^n} \leq \delta,$$

on a

$$\int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda - \delta \leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \leq \int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda + r_i \delta.$$

Démonstration. En effet, d'après le Corollaire 1.2 on a

$$\frac{\#\blacktriangledown_a(\rho r, \rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} \leq \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t) + \delta$$

et en vertu de la Proposition 1.3 précédente on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda &= \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{\blacktriangledown_a(\rho r, \rho t)} \zeta_i \, d\lambda \\
&\leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right) + \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\frac{1}{2} \#\blacktriangledown_a(r,t) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t) \right) \\
&\leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right) + \frac{1}{\rho} (\operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t) + \delta) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r,t) \\
&\leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right) + \delta.
\end{aligned}$$

Encore grâce à la Proposition 1.3, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right) &\leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{\blacktriangledown_a(\rho r + (1,\ldots,1), \rho t)} \zeta_i \, d\lambda \\
&\leq \int_{\blacktriangledown_a(r + (1,\ldots,1), t)} \zeta_i \, d\lambda + \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\int_{\blacksquare(\rho r + (1,\ldots,1))} \zeta_i \, d\lambda - \int_{\blacksquare(\rho r)} \zeta_i \, d\lambda \right)
\end{aligned}$$

et puisqu'on a supposé $\rho r_i \geq \operatorname{vol}\blacksquare(r) + \delta$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\int_{\blacksquare(\rho r + (1,\ldots,1))} \zeta_i \, d\lambda - \int_{\blacksquare(\rho r)} \zeta_i \, d\lambda \right) \\
&\qquad \leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\frac{\rho r_i + 1}{2} \operatorname{vol}\blacksquare(\rho r + (1, \ldots, 1)) - \frac{\rho r_i}{2} \operatorname{vol}\blacksquare(\rho r) \right) \\
&\qquad \leq \frac{r_i}{2} \frac{1}{\rho^n} \left(\operatorname{vol}\blacksquare(\rho r + (1, \ldots, 1)) - \operatorname{vol}\blacksquare(\rho r) \right) + \frac{1}{2\rho^{n+1}} \operatorname{vol}\blacksquare(\rho r + (1, \ldots, 1)) \\
&\qquad \leq \frac{r_i}{2} \delta + \frac{1}{2\rho} (\operatorname{vol}\blacksquare(r) + \delta) \leq r_i \delta,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 1.5. *Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $\delta > 0$ un nombre réel. Il existe un nombre réel $\mathrm{R}(r, \delta) > 0$ tel que pour tout n-uplet de nombres réels strictement positifs $a = (a_1, \dots, a_n)$, pour tout nombre réel $t \geq 0$, pour tout nombre réel $\rho \geq \mathrm{R}(r, \delta)$ on a*

$$\mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(r, t) \leq \frac{\# \blacktriangledown_a(\rho r, \rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} \leq \mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(r, t) + \delta,$$

et pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$\int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda - \delta \leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \leq \int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda + r_i \delta.$$

Pour tout nombre réel positif t, on a :

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangle_a(\rho r, \rho t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] = \int_{\blacktriangle_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda \tag{1.3.6}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(\rho r, \rho t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] = \int_{\blacktriangledown_a(r,t)} \zeta_i \, d\lambda. \tag{1.3.7}$$

1.3.5. Formules explicites. — Si, pour tout $i = 1, \dots, n$, $a_i = 1/r_i$, on peut expliciter les valeurs de ces intégrales dans certains cas. En fait, pour tout nombre réel $t \in [0, 1]$ on a :

$$\int_{\blacktriangle(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) r_i \tag{1.3.8}$$

$$\int_{\blacktriangledown(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = \left(\frac{1}{2} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right) \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) r_i. \tag{1.3.9}$$

En tenant compte de (1.3.4) et (1.3.5), si $t \in [n-1, n]$ on a :

$$\int_{\blacktriangle(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = \left[\frac{1}{2} - \frac{(n-t)^n}{n!} \left(1 - \frac{n-t}{n+1} \right) \right] \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) r_i \tag{1.3.10}$$

$$\int_{\blacktriangledown(r,t)} \zeta_i \, d\lambda = \left[\frac{(n-t)^n}{n!} \left(1 - \frac{n-t}{n+1} \right) \right] \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) r_i. \tag{1.3.11}$$

2 Conditions d'indice

2.1 Indice d'une série formelle

2.1.1. Définition. — Soient k un corps et $n \geq 1$ un nombre entier. On considère la k-algèbre des séries formelles en n variables

$$k[\![t_1, \dots, t_n]\!].$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs.

Définition 2.1. Soit $f = \sum_{\ell \in \mathbf{N}^n} \alpha_\ell t^\ell$ une série formelle en n variables dans $k[\![t_1, \dots, t_n]\!]$. L'*indice de f par rapport au poids a* est

$$\mathrm{ind}_a(f) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f = 0 \\ \min\left\{ a \cdot \ell = a_1 \ell_1 + \dots + a_n \ell_n : \alpha_\ell \neq 0 \right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $\mathrm{ind}_a : k[\![t_1, \dots, t_n]\!] \longrightarrow [0, +\infty]$ ainsi définie sera appelée l'*indice de poids a*.

Proposition 2.2. *L'indice de poids a est une valuation sur la k-algèbre $k[\![t_1,\dots,t_n]\!]$.*

2.1.2. Indice d'une section d'un faisceau inversible. — Soient k un corps et E un espace vectoriel de dimension 2 sur k. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{E}).$$

Soit $x = (x_1,\dots,x_n)$ un k-point de $\mathbf{P}$ et, pour tout $i = 1,\dots,n$, soit ζ_i une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E}),x_i}$. L'homomorphisme de k-algèbres

$$\begin{aligned} k[t_1,\dots,t_n] &\longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P},x} \\ t_i &\longmapsto \mathrm{pr}_i^* \zeta_i \end{aligned}$$

se prolonge en un isomorphisme de k-algèbres locales et complètes $k[\![t_1,\dots,t_n]\!] \longrightarrow \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbf{P},x}$.

Soient $a = (a_1,\dots,a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et ind_a l'indice de poids a sur la k-algèbre des séries formelles en n variables. L'application composée

$$\mathrm{ind}_a(-,x) : \ \widehat{\mathscr{O}}_{\mathbf{P},x} \longrightarrow k[\![t_1,\dots,t_n]\!] \xrightarrow{\ \mathrm{ind}_a\ } [0,+\infty]$$

où la première flèche est l'inverse de l'isomorphisme défini avant, est une valuation sur $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathbf{P},x}$. L'application $\mathrm{ind}_a(-,x)$ ne dépend pas des uniformisantes t_i choisies.

Définition 2.3. Soient L un faisceau inversible sur $\mathbf{P}$ et θ une trivialisation de L autour de x, *i.e.*, un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathbf{P},x}$-modules

$$\theta : \mathrm{L}_x := \varinjlim_{x\in \mathrm{U}} \Gamma(\mathrm{U},\mathrm{L}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P},x}.$$

Soient s une section de L définie dans un voisinage ouvert de x et $s_x \in \mathrm{L}_x$ son germe en x. L'*indice de poids a en x* de la section s est

$$\mathrm{ind}_a(s,x) := \mathrm{ind}_a(\theta(s_x),x).$$

L'application $\mathrm{ind}_a(-,x) : \mathrm{L}_x \to [0,+\infty]$ ainsi définie ne dépend pas de la trivialisation θ choisie.

2.2 Sous-schémas décrits par des conditions d'indice

On reprend les notations du paragraphe précédent 2.1.2. Soient $x = (x_1,\dots,x_n)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$, $a = (a_1,\dots,a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $t \geq 0$ un nombre réel. On considère l'idéal de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathbf{P},x}$,

$$\mathrm{I} = \{f \in \mathscr{O}_{\mathbf{P},x} : \mathrm{ind}_a(f,x) \geq t\}.$$

On note $\mathrm{I}_a(x,t)$ le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}$, égal à $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}$ sur $\mathbf{P} - \{x\}$ et tel que $\mathrm{I}_a(x,t)_x = \mathrm{I}$. Si U est un ouvert de $\mathbf{P}$, les sections du faisceau $\mathrm{I}_a(x,t)$ sur l'ouvert U se décrivent de la manière suivante :

$$\Gamma(\mathrm{U},\mathrm{I}_a(x,t)) = \begin{cases} \{f \in \Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}) : \mathrm{ind}_a(f,x) \geq t\} & \text{si } x \in \mathrm{U} \\ \Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On désigne par $\mathrm{Z}_a(x,t)$ le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}$ associé au faisceau d'idéaux $\mathrm{I}_a(x,t)$.

Définition 2.4. Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$ le faisceau inversible sur $\mathbf{P}$,

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r_1, \dots, r_n) := \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(r_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{pr}_n^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(r_n).$$

On désigne par $\mathrm{I}_a(x, t \,|\, r)$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ engendré par les sections globales

$$\Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(x, t) \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)).$$

En d'autres termes, on considère l'unique sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules $\mathrm{I}_a(x, t \,|\, r) \subset \mathrm{I}_a(x, t)$ tel que le faisceau $\mathrm{I}_a(x, t \,|\, r) \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$ soit engendré par ses sections globales et on ait

$$\Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(x, t \,|\, r) \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)) = \Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(x, t) \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)).$$

On remarquera que si pour tout $i = 1, \dots, n$, $a_i r_i \geq t$, les faisceaux $\mathrm{I}_a(x, t \,|\, r)$ et $\mathrm{I}_a(x, t)$ coïncident.

Proposition 2.5 (Compatibilité aux puissances)**.** *Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs, $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs et $t \geq 0$ un nombre réel. Alors, pour tout nombre entier $\rho \geq 1$ on a*

$$\mathrm{I}_a(x, t \,|\, r)^{\rho} \subset \mathrm{I}_a(x, \rho t \,|\, \rho r).$$

Remarque 2.6. Dans [EV84, Lemma 1.9], Esnault et Viewheg donnent des conditions combinatoires suffisantes pour que l'inclusion de la Proposition précédente soit une égalité pour tout ρ. Ici on n'aura besoin que de l'inclusion précédente.

Proposition 2.7 (Détermination d'une base des sections globales, [EV84, 2.3])**.** *Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs, $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs et $t \geq 0$ un nombre réel. Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit $\mathrm{T}_{i0}, \mathrm{T}_{i1}$ une base du k-espace vectoriel E telle que*

$$x_i^* \mathrm{T}_{i0} \neq 0 \quad \textit{et} \quad x_i^* \mathrm{T}_{i1} = 0.$$

Alors, une base du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(x, t) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))$ est donnée par les éléments de la forme

$$\mathrm{T}(\ell) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{T}_{i0}^{r_i - \ell_i} \mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}$$

avec $\ell \in \blacktriangledown_a(r, t)_{\mathbf{N}}$.

Démonstration. Pour tout i la section globale T_{i0} du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(1)$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ ne s'annule pas en le point x_i. De plus, l'image du germe en x de la section globale T_{i1}, à travers la trivialisation

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(1)_{x_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E}), x_i}$$

induite par T_{i0} autour de x, est une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E}), x}$. En particulier, si

$$f = \sum_{\ell \in \blacksquare(r)_{\mathbf{N}}} \alpha_{\ell} \mathrm{T}(\ell)$$

est une section globale non nulle du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur $\mathbf{P}$, on a

$$\mathrm{ind}_a(f, x) = \min\left\{a \cdot \ell : \alpha_{\ell} \neq 0\right\}.$$

L'indice de f en x par rapport au poids a est $\geq t$ si et seulement si f est de la forme

$$f = \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t)_{\mathbf{N}}} \alpha_{\ell} \mathrm{T}(\ell),$$

ce qui achève la preuve. $\square$

2.3 Le Lemme de Dyson à n variables d'Esnault-Viewheg et Nakamaye

2.3.1. Énoncé du Lemme de Dyson à n variables. — Soient k un corps de caractéristique nulle et E un k-espace vectoriel de dimension 2. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{E}).$$

Soit $\mathrm{N} \geq 1$ un nombre entier. Pour tout $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N}$, soient $x(\alpha)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$ et $t(\alpha) \geq 0$ un nombre réel. On pose $\boldsymbol{x} = (x(1), \ldots, x(\mathrm{N}))$ et $\boldsymbol{t} = (t(1), \ldots, t(\mathrm{N}))$.

Soient $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs. Pour tout $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N}$ on considère le faisceau cohérent $\mathrm{I}_a(x(\alpha), t(\alpha) \,|\, r)$ d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}$. On pose :

$$\mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) = \bigcap_{\alpha=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}_a(x(\alpha), t(\alpha) \,|\, r).$$

Théorème 2.8 (Lemme de Dyson à n variables, [EV84, Theorem 0.4], [Nak99, Theorem 0.3])**.** *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *un nombre entier. Pour tout* $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N}$*, soient* $x(\alpha)$ *un* k*-point du* k*-schéma* $\mathbf{P}$ *et* $t(\alpha) \geq 0$ *un nombre réel. Soient* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *un* n*-uplet de nombres réels strictement positifs et* $r = (r_1, \ldots, r_n)$ *un* n*-uplet de nombres entiers strictement positifs.*

On suppose que les projections des points $x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}}$ *soient à deux à deux distinctes, i.e. que pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *et pour* $\alpha \neq \beta$ *on ait :*

$$\mathrm{pr}_i(x(\alpha)) \neq \mathrm{pr}_i(x(\beta)).$$

S'il existe un nombre entier $\rho \geq 1$ *tel que* $\Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \neq \{0\}$*, alors*

$$\sum_{\alpha=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, t(\alpha)) \leq \mathrm{vol}\,\blacksquare(r)\,(1 + \varepsilon_{\mathrm{N}}(r)),$$

où

$$\varepsilon_{\mathrm{N}}(r) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{\frac{r_j}{r_i}\right\} \max\{0, \mathrm{N}-2\}\right) - 1.$$

2.3.2. Application à la dimension des noyaux des flèches d'évaluation. — On revient aux notations du paragraphe précédent 2.3.1.

Proposition 2.9. *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *un nombre entier. Pour tout* $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N}$*, soient* $x(\alpha)$ *un* k*-point du* k*-schéma* $\mathbf{P}$ *et* $t(\alpha) \geq 0$ *un nombre réel. Soient* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *un* n*-uplet de nombres réels strictement positifs et* $r = (r_1, \ldots, r_n)$ *un* n*-uplet de nombres entiers strictement positifs.*

Alors, avec les notations introduites plus haut, on a :

$$\dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \geq \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) - \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{N}} \#\blacktriangle_a(r, t(\alpha))_{\mathbf{N}}.$$

Démonstration. On désigne par $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ le sous-schéma fermé défini par le faisceau d'idéaux $\mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$. Le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ est la reunion disjointe des sous-schéma fermés $\mathrm{Z}_a(x(\alpha), t(\alpha))$ pour $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N}$,

$$\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \bigsqcup_{\alpha=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{Z}_a(x(\alpha), t(\alpha)).$$

Soit $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs. Les sections globales du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ sont la somme directe des sections globales du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur les sous-schémas fermés $Z_a(x(\alpha), t(\alpha))$:

$$\Gamma(Z_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) = \bigoplus_{\alpha=1}^{d} \Gamma(Z_a(x(\alpha),t(\alpha)),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

En passant aux dimensions, cette décomposition entraîne :

$$\begin{aligned}\dim_k \Gamma(Z_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) &= \dim_k \Gamma(Z_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))\\ &= \sum_{\alpha=1}^{d} \dim_k \Gamma(Z_a(x(\alpha),t(\alpha)),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))\\ &= \sum_{\alpha=1}^{d} \#\blacktriangle_a(r,t(\alpha))_{\mathbf{N}} \qquad (2.3.1)\end{aligned}$$

L'homomorphisme d'évaluation sur le sous-schéma $Z_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$,

$$\eta_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r) : \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(Z_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

n'est bien sûr pas toujours surjectif. Néanmoins, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r) &:= \dim_k \operatorname{Ker} \eta_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)\\ &= \dim_k \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) - \dim_k \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)\\ &\geq \dim_k \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) - \dim_k \Gamma(Z_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)). \qquad (2.3.2)\end{aligned}$$

En combinant (2.3.1) et (2.3.2) on obtient :

$$\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r) \geq \dim_k \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) - \sum_{\alpha=1}^{d} \#\blacktriangle_a(r,t(\alpha))_{\mathbf{N}},$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Proposition 2.10. *Soit* $N \geq 1$ *un nombre entier. Pour tout* $\alpha = 1,\ldots,N$*, soient* $x(\alpha)$ *un* k*-point du* k*-schéma* $\mathbf{P}$ *et* $t(\alpha) \geq 0$ *un nombre réel. Soient* $a = (a_1,\ldots,a_n)$ *un* n*-uplet de nombres réels strictement positifs et* $r = (r_1,\ldots,r_n)$ *un* n*-uplet de nombres entiers strictement positifs tels que*

$$\operatorname{vol}\blacksquare(r)(1+\varepsilon_{N+1}(r)) - \sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,t(\alpha)) \in [0,1].$$

On suppose que les projections des points $x_1,\ldots,x_N$ *soient à deux à deux distinctes, i.e. que pour tout* $i = 1,\ldots,n$ *et pour* $\alpha \neq \beta$ *on ait :*

$$\operatorname{pr}_i(x(\alpha)) \neq \operatorname{pr}_i(x(\beta)).$$

Soit $u_a(r,\boldsymbol{t}) \in [0,n]$ *l'unique nombre réel tel que*

$$\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,u_a(r,\boldsymbol{t})) = \operatorname{vol}\blacksquare(r)\,(1+\varepsilon_{N+1}(r)) - \sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,t(\alpha)).$$

Alors, pour tout nombre réel $u > u_a(r,\boldsymbol{t})$*, on a :*

$$\dim_k \Gamma(\mathbf{P}, I_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)\cdot\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \leq \#\blacktriangle_a(r,u)_{\mathbf{N}}.$$

Démonstration. Soit y un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$ tel que, pour tout $\alpha = 1, \dots, d$ et pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait
$$\mathrm{pr}_i(y) \neq \mathrm{pr}_i(x(\alpha)).$$
Soient $\mathrm{Z}_a(y,u)$ le sous-schéma fermé du k-schéma $\mathbf{P}$ d'indice u en le point y par rapport au poids a et $\mathrm{I}_a(y,u)$ le faisceau d'idéaux qui le définit. On se ramène à prouver que le faisceau cohérent
$$\left(\mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) \cap \mathrm{I}_a(y,u)\right) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$$
n'admet aucune section globale non nulle. En effet, en supposant de l'avoir montré, on a
$$\{0\} = \Gamma\left(\mathbf{P}, \left(\mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) \cap \mathrm{I}_a(y,u)\right) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)\right) = \Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \cap \Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(y,u) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$
et donc
$$\begin{aligned}\dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) &\leq \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) - \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathrm{I}_a(y,u) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \\ &\leq \dim_k \Gamma(\mathrm{Z}_a(r,u), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \\ &= \# \blacktriangle_a(r,u)_{\mathbf{N}}.\end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que le faisceau cohérent $\left(\mathrm{I}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) \cap \mathrm{I}_a(y,u)\right) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ admet une section globale non nulle. On peut alors appliquer le « Lemme de Dyson à n variables » (Théorème 2.8 ci-dessus) aux points $x_1, \dots, x_{\mathrm{N}}$ et y. On obtient
$$\sum_{\alpha=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{vol}\, \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) + \mathrm{vol}\, \blacktriangle_a(r,u) \leq \mathrm{vol}\, \blacksquare(r)\,(1 + \varepsilon_{\mathrm{N}+1}(r)), \tag{2.3.3}$$
où
$$\varepsilon_{\mathrm{N}+1}(r) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{\frac{r_j}{r_i}\right\} \max\{0, \mathrm{N}-1\}\right) - 1.$$
L'inégalité (2.3.3) se récrit sous la forme
$$\mathrm{vol}\, \blacktriangle_a(r,u) \leq \mathrm{vol}\, \blacksquare(r)\,(1 + \varepsilon_{\mathrm{N}+1}(r)) - \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{vol}\, \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) = \mathrm{vol}\, \blacktriangle_a(r, u_a(r, \boldsymbol{t})),$$
ce qui entraîne $u \leq u_a(r, \boldsymbol{t})$, en contradiction avec l'hypothèse $u > u_a(r, \boldsymbol{t})$. □

3 Semi-stabilité d'une configuration de points définie par des conditions d'indice

3.1 Coefficient d'instabilité d'un sous-schéma défini par des conditions d'indice

3.1.1. Définitions. — Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension 2. Soit $n \geq 1$ un nombre entier ; on considère le produit $\mathbf{P}$ de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$:
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{E}).$$
Soit $d \geq 1$ un nombre entier et, pour tout $\alpha = 1, \dots, d$, soient $x(\alpha)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$ et $t(\alpha) \geq 0$ un nombre réel. On pose $\boldsymbol{x} = (x(1), \dots, x(d))$ et $\boldsymbol{t} = (t(1), \dots, t(d))$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs. Pour tout $\alpha = 1, \dots, d$ on considère le sous-schéma $\mathrm{Z}_a(x(\alpha), t(\alpha))$ d'indice $t(\alpha)$ au point $x(\alpha)$ par rapport au poids a. On pose :
$$\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \bigsqcup_{\alpha=1}^{n} \mathrm{Z}_a(x(\alpha), t(\alpha)).$$

Soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs. On considère le faisceau inversible

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r) = \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(r_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{pr}_n^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(r_n)$$

sur $\mathbf{P}$, où, pour tout $\alpha = 1, \dots, n$, $\mathrm{pr}(\alpha) : \mathbf{P} \to \mathbf{P}(\mathrm{E})$ désigne la α-ième projection.

On considère l'homomorphisme d'évaluation $\eta_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ des sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$:

$$\eta_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) : \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

On désigne par $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ son noyau et par $\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$. On considère le k-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]$ associé à $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}).$$

Soient

$$\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) := \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}$$

et

$$\varpi_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) : \mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r))$$

le plongement de Plücker.

Le k-groupe réductif $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ agit naturellement sur la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et sur le faisceau inversible $\mathscr{O}(1)$ de manière équivariante. Le produit de n copies du k-groupe réductif $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{S} = \mathbf{SL}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{SL}(\mathrm{E}),$$

agit composante par composante sur le k-schéma projectif $\mathbf{P}$. Le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ est naturellement muni d'une action équivariante de $\mathbf{S}$. Le k-groupe réductif $\mathbf{S}$ agit alors sur la grassmanienne $\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee})$ et sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r))$ et le plongement de Plücker $\varpi_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ est équivariant.

On va étudier la semi-stabilité du point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]$ par rapport à la restriction du faisceau inversible $\mathscr{O}(1)$ sur la grassmanienne $\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee})$. Si $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$ est un sous-groupe à un paramètre, on note $\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)])$ le coefficient d'instabilité du point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]$ par rapport à λ et à la polarisation induite par le plongement de Plücker (voir I.4.4.2).

Définition 3.1. Avec les conventions et les notations introduites avant, pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$, on pose

$$\widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) := \limsup_{\rho \to +\infty} \frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r)])}{\rho^{n+1}}.$$

3.1.2. Cas d'un seul point. — On suppose $d = 1$. Dans ce numéro, en négligeant les indices de $x(1)$, $t(1)$, on écrira simplement x, t. Pour tout $i = 1, \dots, n$ on note x_i la i-ième projection $\mathrm{pr}_i(x)$ du point x.

Soit $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$ un sous-groupe à un paramètre de $\mathbf{S}$: il correspond à la donnée pour tout $i = 1, \dots, n$ d'un sous-groupe à un paramètre $\lambda_i : \mathbf{G}_m \to \mathbf{SL}(\mathrm{E})$ de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. Pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe une base $\mathrm{T}_{i0}, \mathrm{T}_{i1}$ du k-espace vectoriel E telle que

$$\lambda_i(\tau) \cdot \mathrm{T}_{i0} = \tau^{m_i} \mathrm{T}_{i0},$$
$$\lambda_i(\tau) \cdot \mathrm{T}_{i1} = \tau^{-m_i} \mathrm{T}_{i1}$$

où $m_i \geq 0$ est un nombre entier. Pour tout $i = 1, \dots, n$ soit x_i la i-ième projection du point x. On pose :

$$\chi_x(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i^* \mathrm{T}_{i0} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 3.2. *Soient $n \geq 1$ un nombre entier, x un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers positifs, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $t \geq 0$ un nombre réel.*

Avec les notations introduites avant, pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$, on a :

$$\begin{aligned}\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, t \mid r)]) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)} (-1)^{\chi_x(i)} m_i (r_i - 2\ell_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\chi_x(i)} m_i \left(\# \blacktriangledown_a(r, t)_{\mathbf{N}} \cdot r_i - 2 \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right).\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $i = 1, \ldots, n$ tel que $\chi_x(i) = 0$: puisque la section globale T_{i0} ne s'annule pas en le point x, il existe $\xi_i \in k$ tel que la section globale $\mathrm{T}_{i1} - \xi_i \mathrm{T}_{i0}$ s'annule en le point x_i. Pour tout n-uplet $\ell \in \blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$, on pose :

$$\mathrm{T}(\ell) := \left[\bigotimes_{\chi_x(i)=1} \mathrm{T}_{i1}^{r_i - \ell_i} \mathrm{T}_{i0}^{\ell_i} \right] \otimes \left[\bigotimes_{\chi_x(i)=0} \mathrm{T}_{i0}^{r_i - \ell_i} (\mathrm{T}_{i1} - \xi_i \mathrm{T}_{i0})^{\ell_i} \right].$$

D'après la Proposition 2.7 les éléments $\mathrm{T}(\ell)$, lorsque ℓ parcourt l'ensemble $\blacktriangledown_a(r, t)_{\mathbf{N}}$, forment une base du k-espace vectoriel $\mathrm{N}_a(x, t \mid r)$. En vertu de la Proposition I.4.15 on a :

$$\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, t \mid r)]) = \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \mu(\lambda, [\mathrm{T}(\ell)]), \tag{3.1.1}$$

où $[\mathrm{T}(\ell)]$ est le k-point du k-schéma $\mathbf{P}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)$ défini par la classe d'équivalence de $\mathrm{T}(\ell)$. Pour tout n-uplet de nombres entiers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda(\tau) \cdot \mathrm{T}(\ell) &= \left(\bigotimes_{\chi_x(i)=1} (\tau^{-m_i} \mathrm{T}_{i1})^{r_i - \ell_i} (\tau^{m_i} \mathrm{T}_{i0})^{\ell_i} \right) \otimes \left(\bigotimes_{\chi_x(i)=0} (\tau^{m_i} \mathrm{T}_{i0})^{r_i - \ell_i} (\tau^{-m_i} \mathrm{T}_{i1} - \xi_i \tau^{m_i} \mathrm{T}_{i0})^{\ell_i} \right) \\ &= \tau^{\mu_\ell} \left(\bigotimes_{\chi_x(i)=1} \mathrm{T}_{i1}^{r_i - \ell_i} \mathrm{T}_{i0}^{\ell_i} \right) \otimes \left(\bigotimes_{\chi_x(i)=0} \mathrm{T}_{i0}^{r_i - \ell_i} (\mathrm{T}_{i1} - \xi_i \tau^{2m_i} \mathrm{T}_{i0})^{\ell_i} \right),\end{aligned}$$

où

$$\mu_\ell = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\chi_x(i)} m_i (r_i - 2\ell_i). \tag{3.1.2}$$

Puisque, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $m_i \geq 0$, on a $\mu(\lambda, [\mathrm{T}(\ell)]) = \mu_\ell$, ce qui en vertu des égalités (3.1.1) et (3.1.2) termine la preuve. □

Corollaire 3.3. *Soient $n \geq 1$ un nombre entier, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs.*

Pour tout nombre réel $\delta > 0$, il existe un nombre entier $\mathrm{R} = \mathrm{R}(n, r, a, \delta) \geq 1$ satisfaisant à la propriété suivante :

- *pour tout k-point x du k-schéma $\mathbf{P}$,*
- *pour tout nombre réel $t \geq 0$,*
- *pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$,*
- *pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}$,*

avec les notations introduites avant, on a :

$$\left| \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, t \mid r)]) - \frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, \rho t \mid \rho r)])}{\rho^{n+1}} \right| \leq \delta(r \cdot m).$$

En particulier :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(\lambda,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) &:= \limsup_{\rho\to\infty}\frac{\mu(\lambda,[\mathrm{N}_a(x,\rho t\,|\,\rho r)])}{\rho^{n+1}}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\chi_x(i)}m_i\left(\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(r,t)\cdot r_i-2\int_{\blacktriangledown_a(r,t)}\zeta_i\,d\lambda\right)\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la Proposition 3.2 précédente, pour tout nombre entier $\rho\geq 1$, on a :

$$\mu(\lambda,[\mathrm{N}_a(x,\rho t\,|\,\rho r)])=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\chi_x(i)}m_i\left(\#\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}\cdot\rho r_i-2\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}}\ell_i\right).$$

En divisant par ρ^{n+1} on obtient :

$$\frac{\mu(\lambda,[\mathrm{N}_a(x,\rho t\,|\,\rho r)])}{\rho^{n+1}}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\chi_x(i)}m_i\left(\frac{\#\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n}\cdot r_i-\frac{2}{\rho^{n+1}}\left[\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}}\ell_i\right]\right).\tag{3.1.3}$$

En vertu du Corollaire 1.5, pour tout réel $\delta>0$, il existe un nombre entier $\mathrm{R}=\mathrm{R}(n,r,a,\delta)>0$, indépendant du nombre réel t, du sous-groupe à un paramètre λ et du k-point x, tel que pour tous nombres entiers $\rho,\rho'\geq\mathrm{R}$ on a :

$$\left|\operatorname{vol}\blacktriangledown_a(r,t)-\frac{\#\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}}{\rho^n}\right|\leq\frac{\delta}{2}\tag{3.1.4}$$

et pour tout $i=1,\ldots,n$ on a :

$$\left|\int_{\blacktriangledown_a(r,t)}\zeta_i\,d\lambda-\frac{1}{\rho^{n+1}}\left(\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t)_{\mathbf{N}}}\ell_i\right)\right|\leq\frac{\delta}{2}r_i.\tag{3.1.5}$$

On termine la preuve en vertu de (3.1.3), (3.1.4) et (3.1.5). □

3.1.3. Coefficient d'instabilité d'un sous-schéma defini par des conditions d'indice : cas de plusieurs points. — On suppose dans ce numéro $d\geq 2$. Soit $\lambda:\mathbf{G}_m\to\mathbf{S}$ un sous-groupe à un paramètre de $\mathbf{S}$: il correspond à la donnée pour tout $i=1,\ldots,n$ d'un sous-groupe à un paramètre $\lambda_i:\mathbf{G}_m\to\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. Pour tout $i=1,\ldots,n$ il existe une base $\mathrm{T}_{i0},\mathrm{T}_{i1}$ du k-espace vectoriel E telle que

$$\lambda_i(\tau)\cdot\mathrm{T}_{i0}=\tau^{m_i}\mathrm{T}_{i0}$$
$$\lambda_i(\tau)\cdot\mathrm{T}_{i1}=\tau^{-m_i}\mathrm{T}_{i1}$$

où $m_i\geq 0$ est un nombre entier. On pose

$$\varepsilon_d(r):=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\max_{i+1\leq j\leq n}\left\{\frac{r_j}{r_i}\right\}(d-1)\right)-1.$$

et pour tout nombres réels $t(1),\ldots,t(d)\geq 0$ tels que

$$\operatorname{vol}\blacksquare(r)(1+\varepsilon_d(r))-\sum_{\alpha=1}^{d}\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,t(\alpha))\in[0,1],$$

on considère l'unique nombre réel $u_a(r,\boldsymbol{t})\geq 0$ tel que

$$\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,u_a(r,\boldsymbol{t}))=\operatorname{vol}\blacksquare(r)(1+\varepsilon_d(r))-\sum_{\alpha=1}^{d}\operatorname{vol}\blacktriangle_a(r,t(\alpha)).$$

Proposition 3.4. *On suppose que la caractéristique de k soit nulle. Soient $n, d \geq 1$ des nombres entiers, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers positifs, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs tels que*

$$\mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(1+\varepsilon_d(r)) - \sum_{\alpha=1}^{d} \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, t(\alpha)) \in [0,1].$$

Pour tout $\alpha = 1, \ldots, d$, soient $x(\alpha)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$ et $t(\alpha) \geq 0$ un nombre réel. On suppose que les projections des points $x(1), \ldots, x(d)$ soient à deux à deux distinctes, i.e., pour tout $i = 1, \ldots, n$ et pour $\alpha \neq \beta$ on ait :

$$\mathrm{pr}_i(x(\alpha)) \neq \mathrm{pr}_i(x(\beta)).$$

Soit y un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$ tel que, pour tout $\alpha = 1, \ldots, d$ et tout $i = 1, \ldots, n$, on ait

$$\mathrm{pr}_i(y) \neq \mathrm{pr}_i(x(\alpha)).$$

Avec les notations introduites avant, pour tout nombre réel $u > u_a(r, \boldsymbol{t})$, on a :

i. l'intersection des sous-espaces $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ et $\mathrm{N}_a(y, u \,|\, r)$ est nulle ;

ii. pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$, on a :

$$\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) + \mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, u \,|\, r)]) \leq (r \cdot m)\Big[\dim \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) - (\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) + \nu_a(y, u \,|\, r))\Big].$$

Démonstration. On montre d'abord que l'intersection des sous-espaces vectoriels $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ et $\mathrm{N}_a(y, u \,|\, r)$ est nulle. Supposons par l'absurde qu'il existe un élément non nul

$$f \in \mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) \cap \mathrm{N}_a(y, u \,|\, r).$$

On applique le Lemme de Dyson à n variables (Théorème 2.8) aux points $x(1), \ldots, x(d), y$ (avec $\mathrm{N} = d+1$) :

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, t(\alpha)) + \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, u) \leq \mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(1+\varepsilon_d(r)),$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, u) &\leq \mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(1+\varepsilon_d(r)) - \sum_{\alpha=1}^{d} \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, t(\alpha)) \\ &= \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, u_a(r, \boldsymbol{t})). \end{aligned}$$

Puisque la fonction $\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, -)$ est strictement croissante, la dernière inégalité implique $u \leq u_a(r, \boldsymbol{t})$, en contradiction avec l'hypothèse $u > u_a(r, \boldsymbol{t})$.

On va utiliser le fait que l'intersection des sous-espaces $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$ et $\mathrm{N}_a(y, u \,|\, r)$ est nulle pour pouvoir appliquer le Corollaire I.4.19.

En reprenant les notations du dit Corollaire, pour tout nombre entier $b \in \mathbf{Z}$, on considère le sous-espace $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))_b \subset \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ formé par les éléments f tels que $\tau \cdot f = \tau^b f$. Autrement dit, une base du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))_b$ est donnée par les monômes

$$\mathrm{T}(\ell) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{T}_{i0}^{r_i - \ell_i} \mathrm{T}_{i1}^{\ell_i},$$

où $\ell \in \blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$ est un n-uplet de nombres entiers tels que $(r - 2\ell) \cdot m = b$. Puisque les nombres entiers $m_1, \ldots, m_n$ ont été supposés positifs et comme ℓ appartient à $\blacksquare(r)$, le k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))_b$ est non nul si et seulement si

$$-r \cdot m \leq b \leq r \cdot m,$$

où les cas extrêmes sont respectivement donnés par la droite engendrée par $\mathrm{T}(r) = \mathrm{T}_{11}^{r_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{T}_{n1}^{r_n}$ et la par droite engedrée par $\mathrm{T}(0) = \mathrm{T}_{10}^{r_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{T}_{n0}^{r_n}$. Avec les notations du Corollaire I.4.19 on a alors :

$$b_{\min} = -r \cdot m.$$

Par conséquent, en appliquant on obtient :

$$\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) + \mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, u \,|\, r)]) \leq m_{\min}\Big(\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) + \nu_a(y, u \,|\, r) - \dim \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))\Big) \\ + \mu(\lambda, [\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}]).$$

Le sous-groupe à un paramètre λ est un sous-groupe à un paramètre du k-groupe algébrique $\mathbf{S} = \mathbf{SL}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{SL}(\mathrm{E})$: le déterminant de la représentation induite sur $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ est donc triviale. En particulier le coefficient d'instabilité $\mu(\lambda, [\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}])$, qui n'est rien d'autre que le poids de la représentation

$$\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{GL}(\det \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}),$$

est nul, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 3.5. *On suppose que la caractéristique de k soit nulle. Soient $n, d \geq 1$ des nombres entiers, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs tels que*

$$\operatorname{vol} \blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - \sum_{\alpha=1}^{d} \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) \in [0, 1].$$

Pour tout nombre réel $\delta > 0$, il existe un nombre entier $\mathrm{R} = \mathrm{R}(n, d, r, a, \delta) > 0$ satisfaisant à la propriété suivante :

- *pour tous nombres réels $t(\alpha) \geq 0$ ($\alpha = 1, \ldots, d$),*
- *pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}$,*
- *pour tous k-points $x(1), \ldots, x(d), y$ du k-schéma $\mathbf{P}$ tels que pour tout $i = 1, \ldots, n$ et pour $\alpha \neq \beta$ on ait*
$$\mathrm{pr}_i(y) \neq \mathrm{pr}_i(x(\alpha)) \neq \mathrm{pr}_i(x(\beta)),$$
- *pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$,*

avec les notations introduites avant, on a :

$$\frac{\mu(\lambda, \mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho \boldsymbol{t} \,|\, \rho r))}{\rho^{n+1}} \leq (\varepsilon_d(r) + \delta)(r \cdot m) \operatorname{vol} \blacksquare(r) - \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, u_a(r, \boldsymbol{t}) \,|\, r)]).$$

En particulier,

$$\widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) := \limsup_{\rho \to \infty} \frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho \boldsymbol{t} \,|\, \rho r]))}{\rho^{n+1}} \\ \leq (r \cdot m) \varepsilon_d(r) \operatorname{vol} \blacksquare(r) - \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, u_a(r, \boldsymbol{t}) \,|\, r)]).$$

Démonstration. Soit $u > u_a(r, \boldsymbol{t})$ un nombre réel. D'après la Proposition 3.4 précédente, pour tout nombre entier $\rho > 0$ on a :

$$\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho \boldsymbol{t} \,|\, \rho r)]) + \mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, \rho u \,|\, \rho r)]) \\ \leq \rho(r \cdot m)\Big[\dim \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(\rho r)) - (\nu_a(\boldsymbol{x}, \rho \boldsymbol{t} \,|\, \rho r) + \nu_a(y, \rho u \,|\, \rho r))\Big]. \quad (3.1.6)$$

En vertu de la Proposition 2.9 pour tout nombre entier $\rho > 0$ on a :

$$\nu_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) \geq \dim \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(\rho r)) - \sum_{\alpha=1}^{d} \# \blacktriangle_a(\rho r, \rho t(\alpha))_{\mathbf{N}}.$$

et donc

$$\dim \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(\rho r)) - (\nu_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r) + \nu_a(y, \rho u \,|\, \rho r)) \leq \sum_{\alpha=1}^{d} \# \blacktriangle_a(\rho r, \rho t(\alpha))_{\mathbf{N}} - \nu_a(y, \rho u \,|\, \rho r) \tag{3.1.7}$$

En utilisant cette inégalité dans (3.1.6) on obtient :

$$\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r)]) + \mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, \rho u \,|\, \rho r)]) \leq \rho(r \cdot m) \left[\sum_{\alpha=1}^{d} \# \blacktriangle_a(\rho r, \rho t(\alpha))_{\mathbf{N}} - \nu_a(y, \rho u \,|\, \rho r) \right].$$

En divisant la dernière inégalité par ρ^{n+1}, on obtient :

$$\frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r)])}{\rho^{n+1}} \leq (r \cdot m) \left[\sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\# \blacktriangle_a(\rho r, \rho t(\alpha))_{\mathbf{N}}}{\rho^n} - \frac{\nu_a(y, \rho u \,|\, \rho r)}{\rho^n} \right] - \frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, \rho u \,|\, \rho r)])}{\rho^{n+1}}.$$

En vertu du Corollaire 1.5 pour tout $\delta > 0$, il existe un nombre entier $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_0(n, r, a, \delta) > 0$, indépendant du sous-groupe à un paramètre λ et des k-points $x(1), \ldots, x(d), y$, tel que, pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}_0$, on a :

$$\left| \left(\sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\# \blacktriangle_a(r, t(\alpha))_{\mathbf{N}}}{\rho^n} - \frac{\nu_a(y, \rho u \,|\, \rho r)}{\rho^n} \right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{d} \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u) \right) \right| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{3.1.8}$$

D'après la Proposition 3.3 il existe un nombre entier $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_1(n, r, a, u, \delta)$, indépendant du sous-groupe à un paramètre λ et du k-point y, tel que pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}_1$, on a :

$$\left| \frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, \rho u \,|\, \rho r)])}{\rho^{n+1}} - \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, u \,|\, r)]) \right| \leq \frac{\delta}{2}(r \cdot m). \tag{3.1.9}$$

En utilisant (3.1.8), (3.1.9) dans (3.1.3), pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1$ on obtient :

$$\frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r)])}{\rho^{n+1}} \leq (r \cdot m) \left[\sum_{\alpha=1}^{d} \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u) \right] - \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, u \,|\, r)]) + \delta(r \cdot m).$$

Le terme de droite de cette inégalité est une fonction continue en u : on peut laisser tendre u à $u_a(r, \boldsymbol{t})$ et obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho\boldsymbol{t} \,|\, \rho r)])}{\rho^{n+1}} \leq (r \cdot m) & \left[\sum_{\alpha=1}^{d} \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u_a(r, \boldsymbol{t})) \right] \\ & - \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(y, u_a(r, \boldsymbol{t}) \,|\, r)]) + \delta(r \cdot m). \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Par définition $u_a(r, \boldsymbol{t})$ est l'unique nombre réel appartenant à $[0, a \cdot r]$ tel que

$$\operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, u_a(r, \boldsymbol{t})) = \operatorname{vol} \blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - \sum_{\alpha=1}^{d} \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t(\alpha)).$$

En vertu de cette expression, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{d} \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) - \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u_a(r, \boldsymbol{t})) &= \left[\sum_{\alpha=1}^{d} \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t(\alpha)) + \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, u_a(r, \boldsymbol{t})) \right] - \operatorname{vol} \blacksquare(r) \\ &= \operatorname{vol} \blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - \operatorname{vol} \blacksquare(r) \\ &= \operatorname{vol} \blacksquare(r) \varepsilon_d(r). \end{aligned}$$

On termine la preuve en utilisant la dernière égalité dans (3.1.10). □

3.2 Énoncé du théorème de semi-stabilité

Soient k un corps de caractéristique nulle et E un k-espace vectoriel de dimension 2. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{E}).$$

Soient k' une extension finie de k de degré $d = [k' : k] \geq 2$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ un k'-point de $\mathbf{P}$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, n$, le point θ_i engendre le corps k'. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un k-point de $\mathbf{P}$.

3.2.1. Sous-schéma d'indice en le point rationnel. — Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $t_x \geq 0$ un nombre réel.

On considère le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(x, t_x) \subset \mathbf{P}$ d'indice t_x en x par rapport au poids a, et

$$\eta_a(x, t_x \,|\, r) : \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(x, t_x), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

l'homomorphisme d'évaluation des sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}(x, t_x)$. On désigne par $\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)$ son noyau et par $\nu_a(x, t_x \,|\, r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)$. On considère le k-point $[\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]$ associé au noyau $\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(x, t_x \,|\, r)$ du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(x, t_x \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee).$$

Soit

$$\varpi_a(x, t_x \,|\, r) : \mathbf{Grass}_{\nu_a(x, u \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(x, t_x \,|\, r))$$

le plongement de Plücker, où

$$\mathrm{F}_a(x, t_x \,|\, r) := \bigwedge^{\nu_a(x, t_x \,|\, r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee.$$

3.2.2. Sous-schéma d'indice en le point algébrique. — Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k contenante k' et $\theta(1) = \theta, \theta(2), \dots, \theta(d)$ les $\overline{k}$-points de $\mathbf{P}$ conjugués à θ.

Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement posititfs et $t_\theta \geq 0$ un nombre réel.

Pour tout $\alpha = 1, \dots, d$ on considère le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha), t_\theta) \subset \overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times_k \overline{k}$ d'indice t_θ en le point $\theta(\alpha)$ par rapport au poids a. Le sous-schéma fermé

$$\bigsqcup_{\alpha=1}^{d} \mathrm{Z}_a(\theta(\alpha), t_\theta)$$

est stable sous l'action du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et il descend en un sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta)$ de $\mathbf{P}$. On considère l'homomorphisme d'évaluation $\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ des sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta)$:

$$\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) : \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

On désigne par $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ son noyau et par $\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$. On considère le k-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]$ associé à $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee).$$

Soient

$$\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) := \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$$

et

$$\varpi_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) : \mathbf{Grass}_{v_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r))$$

le plongement de Plücker.

3.2.3. Semi-stabilité. — Pour tout n-uplet de nombres réels strictement positifs $r = (r_1, \dots, r_n)$ soit

$$\varepsilon_d(r) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \le j \le n} \left\{\frac{r_j}{r_i}\right\}(d-1)\right).$$

Pour tout n-uplet de nombres réels strictement positifs $r = (r_1, \dots, r_n)$, pour tout n-uplet $a = (a_1, \dots, a_n)$ de nombres réels strictement positifs et pour tout nombre réel $t \in [0, n]$ tels que

$$\mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, t) \in [0, 1],$$

on considère l'unique nombre réel $u_a(r, t) \in [0, a \cdot r]$ tel que

$$\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, u_a(r, t)) = \mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, t).$$

On remarque que pour tout nombre entier $\rho > 0$ on a $\varepsilon_d(\rho r) = \varepsilon_d(r)$ et $u_a(\rho r, t) = \rho u_a(r, t)$.

Théorème 3.6. *Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $t_\theta, t_x \ge 0$ des nombres réels. On suppose*

$$\mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, t_\theta) \in]0, 1],$$

et que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait :

$$\left|\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r, t_x) r_i - 2\int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda\right| < \left|\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) r_i - 2\int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda\right| - \varepsilon_d(r)\,\mathrm{vol}\,\blacksquare(r) r_i. \quad (3.2.1)$$

Alors, il existe un nombre entier $\mathrm{R} = \mathrm{R}(n, d, r, a, t_\theta, t_x) > 0$ tel que, pour tout nombre entier $\rho \ge \mathrm{R}$, le k-point

$$([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \,|\, \rho r)], [\mathrm{N}_a(x, \rho t_x \,|\, \rho r)])$$

est semi-stable sous l'action du k-groupe réductif $\mathbf{S}$.

Remarque 3.7. Pour prouver la semi-stabilité on utilisera le critère numérique de Hilbert-Mumford I.4.11. Le corps k étant parfait et les point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \rho t \,|\, \rho r)]$, $[\mathrm{N}_a(y, \rho u \,|\, \rho r)]$ étant définis sur k, on peut se borner, d'après le Théorème I.4.12, à considérer seulement des sous-groupes à un paramètre définis sur le corps k.

Démonstration. Soit $\lambda : \mathbf{G}_m \to \mathbf{S}$ un sous-groupe à un paramètre (défini sur k) du k-groupe réductif $\mathbf{S}$. Le sous-groupe à un paramètre λ correspond à la donnée pour tout $i = 1, \dots, n$ d'un sous-groupe à un paramètre $\lambda_i : \mathbf{G}_m \to \mathbf{SL}(\mathrm{E})$ de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. Pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe une base $\mathrm{T}_{i0}, \mathrm{T}_{i1}$ du k-espace vectoriel E telle que

$$\lambda_i(\tau) \cdot \mathrm{T}_{i0} = \tau^{m_i} \cdot \mathrm{T}_{i0}$$
$$\lambda_i(\tau) \cdot \mathrm{T}_{i1} = \tau^{-m_i} \cdot \mathrm{T}_{i1}$$

où m_i est un nombre entier positif. D'après la Proposition I.4.9, pour tout nombre entier $\rho > 0$ on a

$$\mu(\lambda, ([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \,|\, \rho r)], [\mathrm{N}_a(x, \rho t_x \,|\, \rho r)])) = \mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \,|\, \rho r)]) + \mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, \rho t_x \,|\, \rho r)]). \tag{3.2.2}$$

On va étudier les deux termes $\mu(\lambda, [\mathrm{N}(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \,|\, \rho r)])$ et $\mu(\lambda, [\mathrm{N}(x, \rho t_x \,|\, \rho r)])$ séparément.

Point algébrique. Pour tout $i = 1, \dots, n$ soit z_i le k-point du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ tel que :

$$\begin{cases} z_i^* \mathrm{T}_{i0} = 0 & \text{si } \mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) r_i - 2 \displaystyle\int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \leq 0 \\ z_i^* \mathrm{T}_{i1} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque les points $\theta(\alpha)$ *ne sont pas* k-rationnels, pour tout $\alpha = 1, \dots, d$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ les sections T_{i0} et T_{i1} ne s'annulent pas en $\mathrm{pr}_i(\theta(\alpha))$: en particulier $\mathrm{pr}_i(\theta(\alpha)) \neq z_i$. Comme pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout $\alpha = 1, \dots, d$, le point $\mathrm{pr}_i(\theta(\alpha))$ engendre le corps k', pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout $\alpha \neq \beta$ on a

$$\mathrm{pr}_i(\theta(\alpha)) \neq \mathrm{pr}_i(\theta(\beta)).$$

On peut alors appliquer le Corollaire 3.5 et obtenir que, pour tout $\delta > 0$, il existe un nombre entier $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_0(n, d, a, r, \delta) > 0$ tel que, pour tout nombre réel $t_\theta \geq 0$, pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}_0$ et pour tout sous-groupe à un paramètre λ de $\mathbf{S}$, on a :

$$\frac{\mu(\lambda, \mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \,|\, \rho r))}{\rho^{n+1}} \leq \left(\varepsilon_d(r) + \frac{\delta}{2} \right) (r \cdot m) \, \mathrm{vol}\, \blacksquare(r) - \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(z, u_a(r, t_\theta) \,|\, r)]). \tag{3.2.3}$$

D'après le Corollaire 3.3, on a :

$$\widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(z, u_a(r, t_\theta) \,|\, r)]) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\chi_z(i)} m_i \left(\mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right), \tag{3.2.4}$$

où

$$\chi_z(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_i^* \mathrm{T}_{i0} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition de z on a :

$$(-1)^{\chi_z(i)} = \mathrm{sign} \left(\mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(u_a(r, t_\theta)) - 2 \int_{\blacktriangledown_a(u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right).$$

et donc :

$$\widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(z, u_a(r, t_\theta) \,|\, r)]) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left| \mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right|. \tag{3.2.5}$$

Point rationnel. D'après le Corollaire 3.3, pour tout $\delta > 0$ il existe un nombre entier $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_1(n, a, r, \delta) > 0$ tel que, pour tout nombre réel $t_x \geq 0$, pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}_1$ et pour tout sous-groupe à un paramètre λ de $\mathbf{S}$, on a :

$$\left| \frac{\mu(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, \rho t_x \,|\, \rho r)])}{\rho^{n+1}} - \widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \right| \leq \frac{\delta}{2} (r \cdot m) \, \mathrm{vol}\, \blacksquare(r), \tag{3.2.6}$$

où

$$\widetilde{\mu}(\lambda, [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\chi_x(i)} m_i \left(\mathrm{vol}\, \blacktriangledown_a(r, t_x) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right), \tag{3.2.7}$$

avec

$$\chi_x(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i^* \mathrm{T}_{i0} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Conclusion. D'après (3.2.2) - (3.2.7), pour tout nombre réel $\delta > 0$ et tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\lambda, ([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \mid \rho r)], [\mathrm{N}_a(x, \rho t_x \mid \rho r)]))}{\rho^{n+1}} &\leq (\delta + \varepsilon_d(r))(r \cdot m) \operatorname{vol} \blacksquare(r) \\ &- \sum_{i=1}^n m_i \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right| \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\chi_x(i)} m_i \left(\operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t_x) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right). \end{aligned}$$

Puisque les entiers m_i sont tous positifs on a :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{\chi_x(i)} m_i \left(\operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t_x) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right) \leq \sum_{i=1}^n m_i \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t_x) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right|$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\lambda, ([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \mid \rho r)], [\mathrm{N}_a(x, \rho t_x \mid \rho r)]))}{\rho^{n+1}} &\leq \sum_{i=1}^n m_i \Bigg((\varepsilon_d(r) + \delta) r_i \operatorname{vol} \blacksquare(r) \\ &+ \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t_x) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right| - \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right| \Bigg). \end{aligned}$$

Par hypothèse, pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a :

$$\left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t_x) r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right| < \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right| - \varepsilon(r) \operatorname{vol} \blacksquare(r) r_i,$$

Il existe un nombre réel $\delta_0 = \delta_0(n, d, r, a, t_\theta, t_x) > 0$ tel que, pour tout $\delta \leq \delta_0$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a :

$$\left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t_x) r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right| < \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right| - (\varepsilon(r) + \delta) \operatorname{vol} \blacksquare(r) r_i.$$

Puisque les entiers m_i sont positifs, en multipliant (3.2.1) par m_i et en prenant la somme sur i, pour tout $\delta \leq \delta_0$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \Bigg(r_i (\varepsilon_d(r) + \delta) \operatorname{vol} \blacksquare(r) + \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, t_x) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, t_x)} \zeta_i \, d\lambda \right| \\ - \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta)) \cdot r_i - 2 \int_{\blacktriangledown_a(r, u_a(r, t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda \right| \Bigg) < 0. \end{aligned}$$

Cela entraîne que

$$\mathrm{R}(n, d, r, a, t_\theta, t_x) := \max\{\mathrm{R}_0(n, d, r, a, \delta_0), \mathrm{R}_1(n, r, a, \delta_0)\},$$

convient et achève la preuve. □

4 Estimations de hauteurs

4.1 Sous-schéma d'indice supporté en un point

Soient K un corps global et $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})$ un un faisceau adélique localement libre de rang 2. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{E}).$$

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un K-point du K-schéma $\mathbf{P}$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $t_x \geq 0$ un nombre réel. On considère le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(x, t_x) \subset \mathbf{P}$ d'indice t_x en x par rapport au poids a, et

$$\eta_a(x, t_x \mid r) : \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(x, t_x), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

l'homomorphisme d'évaluation des sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}(x, t_x)$. On désigne par $\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)$ son noyau et par $\nu_a(x, t_x \mid r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)$. On considère le K-point $[\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]$ associé au noyau $\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(x, t_x \mid r)$ du K-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(x, t_x \mid r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee).$$

Soit

$$\varpi_a(x, t_x \mid r) : \mathbf{Grass}_{\nu_a(x, u \mid r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r))$$

le plongement de Plücker, où

$$\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r) := \bigwedge^{\nu_a(x, t_x \mid r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee.$$

Dans la suite on sous-entend le plongement de Plücker et on ne précise pas quand on considère le point K-point $[\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]$ comme point de la grassmanienne ou de l'espace projectif où elle est plongée.

Le faisceau adélique localement libre

$$\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r) = \bigwedge^{\nu_a(x, t_x \mid r)} \left(\mathrm{Sym}^{r_1} \mathscr{E} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{r_n} \mathscr{E}\right)^\vee$$

munit le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r)}(1)$ d'une structure de faisceau inversible adélique que l'on note $\mathscr{O}_{\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r)}(1)$. On désigne par $h_{\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r)}$ la hauteur sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r))$ associée au faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r)}(1)$.

On désigne par $\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})$ le deuxième minimum successif du faisceau cohérent adélique $\mathscr{E}$, *i.e.*, le plus petit nombre réel λ tel qu'il existe deux éléments $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1 \in \mathrm{E}$ linéairement indépendantes où, pour $i = 0, 1$, la hauteur du K-point $[\mathrm{T}_i]$ de $\mathbf{P}(\mathrm{E}^\vee)$ associé, $h_{\mathscr{E}^\vee}([\mathrm{T}_i])$, est plus petite de λ.

On remarquera que si $\mathscr{E}$ est le faisceau cohérent adélique trivial de rang 2, alors $\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})$ est nul.

Proposition 4.1. *Avec les notations introduites, on a :*

$$h_{\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r)}([\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] h_{\mathscr{E}}(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} r_i - \ell_i \right] \widehat{\lambda}_2(\mathscr{E}).$$

Démonstration. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, soient T_{i1} un élément non nul du K-espace vectoriel E qui s'annule en x_i et T_{i0} un élément de E, linéairement indépendant de T_{i1}, tel que $h_{\mathscr{E}^\vee}(\mathrm{T}_{i0}) \leq \widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})$. En vertu de la Proposition 2.7, une base du K-espace vectoriel $\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)$ est donnée par les éléments de $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ de la forme

$$\mathrm{T}(\ell) := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}$$

avec $\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n) \in \blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}$. On munit le K-espace vectoriel $\mathrm{N}_a(x,t_x\,|\,r)$ de la structure de faisceau adélique localement libre déduite par l'inclusion dans $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ par celle de

$$\mathrm{Sym}^{r_1}\mathscr{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathscr{E}.$$

On note $\mathscr{N}_a(x,t_x\,|\,r)$ le faisceau adélique localement libre qui en résulte. En appliquant en toute place l'inégalité d'Hadamard on a :

$$\begin{aligned}
h_{\mathscr{F}_a(x,t_x\,|\,r)}([\mathrm{N}_a(x,t_x\,|\,r)]) &= -\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{N}_a(x,t_x\,|\,r)\\
&= \sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log\left\|\bigwedge_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}}\mathrm{T}(\ell)\right\|\\
&\leq \sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\left(\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}}\log\|\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)),v}\right)\\
&= \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}}\left(\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log\|\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)),v}\right)\\
&= \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}} h_{\mathrm{Sym}^{r_1}\mathscr{E}^\vee\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathscr{E}^\vee}(\mathrm{T}(\ell)).
\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Soit v une place du corps K. Pour tout $\ell\in\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$ on a

$$\begin{aligned}
\log\|\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)),v} &= \sum_{i=1}^{n}\log\|\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}\|_{\mathrm{Sym}^{r_i}\mathrm{E},v}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\log\|\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E},v}+\ell_i\log\|\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E},v},
\end{aligned}$$

la deuxième inégalité étant vraie par sous-multiplicativité (Propositions I.8.15 et I.8.23). En prenant la somme sur toute place v, pour tout $\ell\in\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
h_{\mathrm{Sym}^{r_1}\mathscr{E}^\vee\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathscr{E}^\vee}(\mathrm{T}(\ell)) &\leq \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)h_{\mathscr{E}^\vee}([\mathrm{T}_{i0}])+\ell_i h_{\mathscr{E}^\vee}([\mathrm{T}_{i1}])\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})+\ell_i h_{\mathscr{E}}(x_i),
\end{aligned}$$

ce qui, en vertu de (4.1.1), termine la preuve. □

4.2 Sous-schéma d'indice supporté en le point algébrique

Soient K un corps global et $\mathscr{E}=(\mathrm{E},\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})$ un un faisceau adélique localement libre de rang 2. Soient $n\geq 1$ un nombre entier et $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathrm{E})\times\cdots\times\mathbf{P}(\mathrm{E}).$$

Soient K′ une extension finie séparable de K de degré $d=[\mathrm{K}':\mathrm{K}]\geq 2$ et $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_n)$ un K′-point du K-schéma $\mathbf{P}$ tel que, pour tout $i=1,\dots,n$, le point θ_i engendre le corps K′. Soient $\overline{\mathrm{K}}$ une clôture séparable de K contenant K′ et $\theta(1)=\theta,\theta(2),\dots,\theta(d)$ les $\overline{\mathrm{K}}$-points du K-schéma $\mathbf{P}$ conjugués à θ.

Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $t_\theta \geq 0$ un nombre réel. Pour tout $\alpha = 1, \dots, d$ on considère le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha), t_\theta) \subset \overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}$ d'indice t_θ en le point $\theta(\alpha)$ par rapport au poids a. Le sous-schéma fermé

$$\bigsqcup_{\alpha=1}^{d} \mathrm{Z}_a(\theta(\alpha), t_\theta)$$

est stable sous l'action du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ et il descend en un sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta)$ de $\mathbf{P}$. On considère l'homomorphisme d'évaluation $\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ des sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta)$:

$$\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) : \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

On désigne par $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ son noyau et par $\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$. On considère le K-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]$ associé à $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ du K-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee).$$

Soient

$$\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) := \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$$

et

$$\varpi_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) : \mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r))$$

le plongement de Plücker. Dans la suite on sous-entend le plongement de Plücker et on ne précise pas quand on considère le point K-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]$ comme point de la grassmanienne ou de l'espace projectif où elle est plongée.

Le faisceau adélique localement libre

$$\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) = \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)} \left(\mathrm{Sym}^{r_1} \mathscr{E} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{r_n} \mathscr{E}\right)^\vee$$

munit le faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(1)$ d'une structure de faisceau inversible adélique que l'on note $\mathscr{O}_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(1)$. On désigne par $h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}$ la hauteur sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r))$ associée au faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(1)$.

On désigne par $\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})$ (resp. $\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})$) le premier (resp. le deuxième) minimum successif du faisceau cohérent adélique $\mathscr{E}$, *i.e.*, le plus petit nombre réel λ tel qu'il existe un élément non nul T (resp. deux éléments $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1$ linéairement indépendants) de E où les points associés dans $\mathbf{P}(\mathrm{E}^\vee)$ soient de hauteur plus petite que λ.

On remarquera que si $\mathscr{E}$ est le faisceau cohérent adélique trivial de rang 2, alors $\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})$ et $\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})$ sont nuls.

Proposition 4.2. *Avec les notations introduites avant, si* K *est un corps de fonctions on a :*

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]) \leq d \dim_k \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) &\left(\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \right) \\ &- \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1 + \cdots + r_n)(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E}) + \widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})) \\ &+ \dim_{\mathrm{K}} \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)(r_1 + \cdots + r_n) d \left(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E}) + 2\,\widehat{\mu}(\mathscr{E})\right). \end{aligned}$$

Si par contre K *est un corps de nombres on a :*

$$\begin{aligned}h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)]) \leq d\dim_k \operatorname{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\left(\sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i)\right)\\ -\dim_{\mathrm{K}}\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1+\cdots+r_n)(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E}))\\ +\dim_{\mathrm{K}}\operatorname{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)(r_1+\cdots+r_n)d\big(5[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]+\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+2\,\widehat{\mu}(\mathscr{E})\big).\end{aligned}$$

Démonstration. Soit T_0 un élément non nul de E tel que $h_{\mathscr{E}}([\mathrm{T}_0]) = \widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})$. Soit L une extension finie galoisienne de K qui contient K′. Soient $\theta(1) = \theta, \theta(2), \dots, \theta(d)$ les L-points du K-schéma **P** conjugués au point θ. Les sections globales du faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta)$ se decomposent comme somme directe des section globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schémas fermés $\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha),t_\theta)$, $\alpha = 1,\dots,d$:

$$\Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))\otimes_{\mathrm{K}}\mathrm{L} = \bigoplus_{\alpha=1}^d \Gamma(\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha),t_\theta),\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{\mathrm{L}}}(r)),$$

où $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}$ est L-schéma déduit du K-schéma **P** déduit par extension des scalaires à L.

Pour tout $\alpha = 1,\dots,d$ et $i = 1,\dots,n$, soit $\mathrm{T}_{\alpha i}$ un élément non nul du L-espace vectoriel $\mathrm{E}\otimes_{\mathrm{K}}\mathrm{L}$ qui s'annule en le point $\theta(\alpha)_i$. Pour tout $\alpha = 1,\dots,d$ une base du L-espace vectoriel $\Gamma(\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha),t_\theta),\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{\mathrm{L}}}(r))$ est donnée par les éléments de la forme $\theta(\alpha)^*\mathrm{T}_\alpha(\ell)$, avec $\ell\in\blacktriangle_a(r,t_\theta)_{\mathbf{N}}$ et

$$\mathrm{T}_\alpha(\ell) := \bigotimes_{i=1}^n \mathrm{T}_0^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{\alpha i}^{\ell_i}.$$

On munit le L-espace vectoriel $\Gamma(\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha),t_\theta),\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{\mathrm{L}}}(r))$ de la structure de faisceau adélique libre de base $\mathrm{T}_\alpha(\ell)$, $\ell\in\blacktriangle_a(r,t_\theta)_{\mathbf{N}}$. De manière explicite,

- si v est une place archimédienne de L, on considère la norme hermitienne qui a les $\mathrm{T}_\alpha(\ell)$ comme base orthonormale ;
- si v est une place non archimédienne on considère la norme non archimédienne induite par le sous-L_v°-module engendré par les $\mathrm{T}_\alpha(\ell)$.

On désignera le faisceau adélique qui en résulte par $\mathscr{H}(\alpha)$. Le L-espace vectoriel $\Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))\otimes_{\mathrm{K}}\mathrm{L}$ est alors muni de la structure de faisceau adélique libre déduite par somme directe des $\mathscr{H}(\alpha)$,

$$\mathscr{H} := \bigoplus_{\alpha=1}^d \mathscr{H}(\alpha).$$

On désigne par $\mathscr{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)$ le faisceau adélique localement libre définit en munissant le K-espace vectoriel $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)$ de la structure de faisceau adélique localement libre déduite par restriction de celle de

$$\operatorname{Sym}^{r_1}\mathscr{E}\otimes\cdots\otimes\operatorname{Sym}^{r_n}\mathscr{E}.$$

Avec ces conventions on a alors

$$h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)]) = -\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r).$$

La suite de K-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \xrightarrow{\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)} \Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

est par définition exacte. On munit le K-espace vectoriel $\operatorname{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)$ de la structure de « coimage » de faisceaux adéliques, *i.e.*, des normes induites par l'homomorphisme surjectif

$$\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r) : \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \operatorname{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)$$

et on désigne par $\mathscr{H}'$ le faisceau cohérent adélique qui en résulte. Par additivité du degré pour les suites exactes courtes, on a

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\left(\mathrm{Sym}^{r_1}\mathscr{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathscr{E}\right)=\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)+\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{H}'.$$

D'autre part, l'inégalité des pentes appliquée à l'inclusion de L-espaces vectoriels

$$\varepsilon:\mathrm{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\otimes_{\mathrm{K}}\mathrm{L}\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta),\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))\otimes_{\mathrm{K}}\mathrm{L}$$

donne

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{L}}(\mathscr{H}'_{\mathrm{L}})\leq\widehat{\mu}_{\mathrm{L,max}}(\mathscr{H})+\sum_{v\in\mathrm{V_L}}\deg(v)\log\|\varepsilon\|_v$$

où, pour toute place v, $\|\varepsilon\|_v$ est la norme d'opérateur de ε à la place v. Puisque $\mathscr{H}$ est par définition triviale, on a

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{L,max}}(\mathscr{H})=0.$$

De plus, pour toute place v, la norme d'opérateur de ε coïncide avec la norme d'opérateur de $\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)$. L'inégalité précédente devient, alors,

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{L}}(\mathscr{H}'_{\mathrm{L}})\leq\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\cdot\sum_{v\in\mathrm{V_L}}\deg(v)\log\|\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\|_v$$

et donc

$$\begin{aligned}h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)}&([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)])\\&=\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{H}'-\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\left(\mathrm{Sym}^{r_1}\mathscr{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathscr{E}\right)\\&\leq\frac{1}{[\mathrm{L}:\mathrm{K}]}\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\cdot\sum_{v\in\mathrm{V_L}}\deg(v)\log\|\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\|_v-\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\left(\mathrm{Sym}^{r_1}\mathscr{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathscr{E}\right).\end{aligned}$$

En appliquant la sous-multiplicativité de la norme sur les puissances symétriques, on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\left(\mathrm{Sym}^{r_1}\mathscr{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathscr{E}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{Sym}^{r_j}\mathrm{E}\right)\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}(\mathrm{Sym}^{r_i}\mathscr{E})\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}(r_j+1)\right)\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}(\mathrm{Sym}^{r_i}\mathscr{E})\\&\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}(r_j+1)\right)\frac{r_i(r_i+1)}{2}\left(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})\right)\\&=\left(\prod_{i=1}^{n}(r_i+1)\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{2}\left(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})\right)\\&=\frac{1}{2}\dim_{\mathrm{K}}\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1+\cdots+r_n)\left(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})\right).\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)])\leq{}&\frac{1}{[\mathrm{L}:\mathrm{K}]}\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{Im}\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\cdot\sum_{v\in\mathrm{V_L}}\deg(v)\log\|\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\|_v\\&-\frac{1}{2}\dim_{\mathrm{K}}\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1+\cdots+r_n)\left(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})\right)\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

Il s'agit donc de borner la taille $\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ en toute place v. Pour tout $\alpha = 1, \dots, d$, on note

$$\pi(\alpha) : \Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{L} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha), t_\theta), \mathscr{O}_{\mathbf{P}_{\mathrm{L}}}(r)),$$

la projection sur α-ième facteur. Si on pose $\eta(\alpha) := \pi(\alpha) \circ \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ on a :

$$\|\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\|_v = \max_{\alpha=1,\dots,d} \|\eta(\alpha)\|_v \qquad (v \text{ non archimédienne})$$
$$\|\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\|_v \leq \sqrt{d} \max_{\alpha=1,\dots,d} \|\eta(\alpha)\|_v \qquad (v \text{ archimédienne}).$$

On remarque que la calcul étant maintenant local, on peut passer à des extensions analytiques de L_v. Soit Ω une extension analytique de L_v telle qu'il existe une base t_0, t_1 du Ω-espace vectoriel $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega$ telle que la norme géométrique $p_{\mathrm{E},v}$ se diagonalise sur Ω, *i.e.*

$$p_{\mathrm{E},v} = \begin{cases} \sqrt{|t_0|_v^2 + |t_1|_v^2} & \text{si } v \text{ est archimédienne} \\ \max\{|t_0|_v, |t_1|_v\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $\alpha = 1, \dots, d$ et tout $i = 1, \dots, n$ on considère l'automorphisme $\varphi_{\alpha i}$ du Ω-espace vectoriel $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega$ défini par

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha i}(t_0) = \mathrm{T}_0 \\ \varphi_{\alpha i}(t_1) = \mathrm{T}_{\alpha i}. \end{cases}$$

On note $\varphi(\alpha)$ l'automorphisme du Ω-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \otimes_{\mathrm{K}} \Omega$,

$$\varphi_a = \mathrm{Sym}^{r_1} \varphi_{\alpha 1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{r_n} \varphi_{\alpha n}.$$

Avec ces définitions on a $\|\eta(\alpha) \circ \varphi_\alpha\|_v \leq 1$ et donc $\|\eta(\alpha)\|_v \leq \|\varphi_\alpha^{-1}\|_v$. Soient d_v la distance projective sur $\mathbf{P}(\mathrm{E} \otimes \Omega)$ induite par la norme géométrique p_{E} et x_0 le point de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ où la section T_0 s'annule. En vertu de la Proposition I.8.42 on a

$$\log \|\varphi(\alpha)^{-1}\|_v \leq -\sum_{i=1}^{n} r_i \left(\log d_v(x_0, \theta(\alpha)_i) + \log \|\mathrm{T}_0\|_v\right) \qquad (v \text{ non archimédienne})$$
$$\log \|\varphi(\alpha)^{-1}\|_v \leq -\sum_{i=1}^{n} r_i \left(\log d_v(x_0, \theta(\alpha)_i) + \log \|\mathrm{T}_0\|_v - \log \sqrt{2}\right) \qquad (v \text{ archimédienne}).$$

On termine la preuve seulement dans le cas des corps de nombres, le cas des corps de fonctions étant similaire et plus facile à cause de l'absence des places archimédiennes. Pour tout $\alpha = 1, \dots, d$, l'inégalité de Liouville III.6.1 donne

$$-\sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{L}}} \deg(v) \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_0) \leq d h_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}}(x_0) + d h_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}}(\theta(\alpha)_i) + 2d\, \widehat{\mu}_{\mathrm{L}}(\mathscr{E}_{\mathrm{L}}) + 4d[\mathrm{L} : \mathbf{Q}].$$

Par conséquent en prenant la somme sur toutes les places v de L on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in V_L} \deg(v)\log\|\eta(\alpha)\|_v \\
&\qquad \le \sum_{v\in V_L} \deg(v)\log\|\varphi(\alpha)^{-1}\|_v \\
&\qquad \le -\sum_{i=1}^n r_i \left(\sum_{v\in V_L} \deg(v)\left(\log d_v(x_0,\theta(\alpha)_i)+\log\|T_0\|_v\right)+[L:\mathbf{Q}]\log\sqrt{2}\right) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^n r_i \left([L:\mathbf{Q}]\log\sqrt{2}-h_{\mathscr{E}_L}(x_0)-\sum_{v\in V_L}\deg(v)\log d_v(x_0,\theta(\alpha)_i)\right) \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^n r_i \left([L:\mathbf{Q}]\log\sqrt{2}-h_{\mathscr{E}_L}(x_0)+d h_{\mathscr{E}_L}(x_0)+d h_{\mathscr{E}_L}(\theta(\alpha)_i)+2d\,\widehat{\mu}_L(\mathscr{E}_L)+4d[L:\mathbf{Q}]\right) \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^n r_i \left((4d+\log\sqrt{2})[L:\mathbf{Q}]+(d-1)h_{\mathscr{E}_L}(x_0)+d h_{\mathscr{E}_L}(\theta(\alpha)_i)+2d\,\widehat{\mu}_L(\mathscr{E}_L)\right) \\
&\qquad = [L:K]\left(\sum_{i=1}^n r_i\left((4d+\log\sqrt{2})[K:\mathbf{Q}]+(d-1)\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+2d\,\widehat{\mu}(\mathscr{E})\right)+d\sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta(\alpha)_i)\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{[L:K]}\sum_{v\in V_L}\deg(v)\log\|\eta_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)\|_v \\
&\qquad \le \frac{1}{[L:K]}\max_{\alpha=1,\dots,d}\left\{\sum_{v\in V_L}\deg(v)\log\|\eta(\alpha)\|_v\right\}+\frac{[K:\mathbf{Q}]}{2}\log d \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^n r_i\left((4d+\log\sqrt{2})[K:\mathbf{Q}]+(d-1)\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+2d\,\widehat{\mu}(\mathscr{E})\right)+d\sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta(\alpha)_i)+\frac{[K:\mathbf{Q}]}{2}\log d \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^n r_i\left(5[K:\mathbf{Q}]+d\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})+2d\,\widehat{\mu}(\mathscr{E})\right)+d\sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta(\alpha)_i).
\end{aligned}$$

et on termine au moyen de (4.2.1). □

5 Majoration des mesures d'instabilité

5.1 Notations

5.1.1. — Soient k un corps algébriquement clos et complet pour une valeur absolue. Soient E un k-espace vectoriel de dimension 2 et $n \ge 1$ un nombre entier. On considère le produit $\mathbf{P}$ de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(E)$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(E)\times\cdots\times\mathbf{P}(E).$$

Soit $d \ge 1$ un nombre entier et, pour tout $\alpha = 1,\dots,d$, soient $x(\alpha)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$ et $t(\alpha) \ge 0$ un nombre réel. On pose $\boldsymbol{x} = (x(1),\dots,x(d))$ et $\boldsymbol{t} = (t(1),\dots,t(d))$.

Soit $a = (a_1,\dots,a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs. Pour tout $\alpha = 1,\dots,d$ on considère le sous-schéma $Z_a(x(\alpha),t(\alpha))$ d'indice $t(\alpha)$ au point $x(\alpha)$ par rapport au poids a. On pose :

$$Z_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \bigsqcup_{\alpha=1}^n Z_a(x(\alpha),t(\alpha)).$$

Soit $r=(r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs. On considère le faisceau inversible

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)=\mathrm{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(r_1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{pr}_n^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathrm{E})}(r_n)$$

sur $\mathbf{P}$, où, pour tout $i=1,\dots,n$, $\mathrm{pr}_i:\mathbf{P}\to\mathbf{P}(\mathrm{E})$ désigne la i-ième projection. On considère l'homomorphisme d'évaluation $\eta_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$ des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$:

$$\eta_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r):\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

On désigne par $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$ son noyau et par $\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$. On considère le k-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]$ associé à $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$ du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}(\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee).$$

Soient

$$\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r):=\bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$$

et

$$\varpi_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r):\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}(\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)\longrightarrow\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r))$$

le plongement de Plücker.

5.1.2. — Soit p_{E} une norme géométrique sur le k-espace vectoriel E. Si la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne (resp. non archimédienne) on suppose que la norme géométrique p_{E} soit hermitienne (resp. non archimédienne). On suppose qu'il existe une base t_0,t_1 du k-espace vectoriel E tel que

$$p_{\mathrm{E}}=\begin{cases}\sqrt{|t_0|^2+|t_1|^2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne}\\ \max\{|t_0|,|t_1|\} & \text{sinon.}\end{cases}\tag{5.1.1}$$

Soit e_0,e_1 la base duale à la base t_0,t_1, c'est-à-dire la base e_0,e_1 du k-espace vectoriel $\mathrm{E}^\vee$ telle que $t_i(e_j)=\delta_{ij}$ (delta de Kronecker) pour tout $i,j=0,1$.

5.1.3. Distance sur la droite projective. — L'application bilinéaire alternée canonique $\mathrm{E}^\vee\times\mathrm{E}^\vee\to\bigwedge^2\mathrm{E}^\vee$ induit un morphisme de k-espaces analytiques

$$\beta:\mathbf{V}(\mathrm{E})\times\mathbf{V}(\mathrm{E})\longrightarrow\mathbf{V}\big(\textstyle\bigwedge^2\mathrm{E}\big).$$

Soient $\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2:\mathbf{V}(\mathrm{E})\times\mathbf{V}(\mathrm{E})\longrightarrow\mathbf{V}(\mathrm{E})$ les deux projections. Soit $p_{\bigwedge^2\mathrm{E}}$ la norme géométrique sur le k-espace vectoriel $\bigwedge^2\mathrm{E}$ induite par p_{E} par produit extérieur. L'application continue

$$\frac{\beta^*p_{\bigwedge^2\mathrm{E}}}{\mathrm{pr}_1^*p_{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{pr}_2^*p_{\mathrm{E}}}:|\mathbf{V}(\mathrm{E})\times\mathbf{V}(\mathrm{E})|\longrightarrow\mathbf{R}_+$$

descend en une application continue

$$d_p:|\mathbf{P}(\mathrm{E})\times\mathbf{P}(\mathrm{E})|\longrightarrow\mathbf{R}_+,$$

qu'on appelle la *distance sur* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *induite par la norme géométrique* p_{E}. Soient x,y des K-points du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ et

$$\widehat{x}=x_0e_0+x_1e_1,\qquad\widehat{y}=y_0e_0+y_1e_1$$

des k-points non nuls du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ représentant x,y. Alors, on a

$$d_p(x,y)=\frac{|x_0y_1-x_1y_0|}{p_{\mathrm{E}}(x)p_{\mathrm{E}}(y)}.$$

5.1.4. Action du groupe linéaire. — On considère le produit de n copies de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ et le produit de n copies de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{G} = \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{GL}(\mathrm{E}),$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{SL}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{SL}(\mathrm{E}).$$

Le k-schéma en groupes $\mathbf{G}$ agit composante par composante sur le k-schéma $\mathbf{P}$ et le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$ est naturellement muni d'une action équivariante. Le k-schéma en groupes $\mathbf{G}$ agit alors sur la grasmmanienne $\mathbf{Grass}_{\mathrm{V}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}(\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee})$ et sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r))$; de plus, le plongement de Plücker $\varpi_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$ est $\mathbf{G}$-équivariant.

5.1.5. Mesure d'instabilité relative à un élément du groupe linéaire. — Soit $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge$ un k-point non nul du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r))$ qui représente l'image par le plongement de Plücker $\varpi_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$ du k-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]$. Pour tout k-point g du k-schéma en groupes $\mathbf{G}$ on définit la *mesure d'instabilité relative à l'élément g* :

$$\mu(g,[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) := \log \frac{\|g\cdot[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}}{\|[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}}.$$

Évidemment, cette définition ne dépend pas du représentant non nul $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge$ choisi.

5.1.6. Élements du groupes linéaires qui mesurent la distance d'un point fixé. — Soit $y=(y_1,\dots,y_n)$ un k-point du k-schéma $\mathbf{P}$ tel que, pour tout $i=1,\dots,n$, on ait $x_i \neq y_i$. Pour tout $\alpha=1,\dots,d$ et tout $i=1,\dots,n$ soient $\widehat{x}(\alpha)_i$, $\widehat{y}_i$ des k-points non nuls qui représentent respectivement les points $x(\alpha)_i, y_i$, et tels que

$$p_{\mathrm{E}}(\widehat{x}(\alpha)_i)=1, \qquad p_{\mathrm{E}}(\widehat{y}_i)=1.$$

On considère le k-point $g(\alpha)_i = g(\widehat{x}(\alpha)_i,\widehat{y}_i)$ du k-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ défini par

$$\begin{cases} g(\alpha)_i(t_0) = x(\alpha)_{i0}\,t_0 + y_{i0}\,t_1 \\ g(\alpha)_i(t_1) = x(\alpha)_{i1}\,t_0 + y_{i1}\,t_1 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Si on considère la transfomation induite par $g(\alpha)_i$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ (à travers la représentation duale), on a :

$$\begin{cases} g(\alpha)_i\cdot\widehat{x}(\alpha)_i = e_0 \\ g(\alpha)_i\cdot\widehat{y}_i = e_1. \end{cases}$$

On rappelle ici des propriétés démontrées dans la section I.8.7. Tout d'abord, par définition on a

$$\det g(\alpha)_i = x(\alpha)_{i0}\,y_{i1} - x(\alpha)_{i1}\,y_{i0}$$

et donc

$$|\det g(\alpha)_i| = d_p(x(\alpha)_i, y_i). \tag{5.1.3}$$

Soient z un k-point du k-schéma $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, $\widehat{z}=z_0e_0+z_1e_1$ un k-point non nul du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ représentant z et $\mathrm{T}=z_0\,t_1 - z_1\,t_0$. On a :

$$g(\alpha)_i(\mathrm{T}) = (z_0\,x(\alpha)_{i1} - z_1\,x(\alpha)_{i0})\,t_0 + (z_0\,y_{i1} - z_1\,y_{i0})\,t_1.$$

Par conséquent :

– si la valeur absolue $|\cdot|$ de k est archimédienne on a :

$$\begin{aligned}\log\|g(\alpha)_i(\mathrm{T})\|_{\mathrm{E}} &= \frac{1}{2}\log\Big(d_p(x(\alpha)_i,z)^2+\log d_p(y_i,z)^2\Big)+\log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}}\\ &\leq \log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}}+\log\sqrt{2};\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

– si la valeur absolue $|\cdot|$ de k est non archimédienne on a :

$$\begin{aligned}\log\|g(\alpha)_i(\mathrm{T})\|_{\mathrm{E}} &= \max\big\{\log d_p(x(\alpha)_i,z),\log d_p(y_i,z)\big\}+\log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}}\\ &\leq \log\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{E}}.\end{aligned}\tag{5.1.5}$$

Soit $\delta(\alpha)_i\in k$ une racine carrée du déterminant $\det g(\alpha)_i$ (k est supposé algébriquement clos). Pour tout $i=1,\dots,n$, on considère le k-point

$$\widetilde{g}(\alpha)_i := g(\alpha)_i/\delta(\alpha)_i$$

du k-schéma en groupes $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ et on désigne par $\widetilde{g}(\alpha)$ le k-point $(\widetilde{g}(\alpha)_1,\dots,\widetilde{g}(\alpha)_n)$ du k-schéma en groupes $\mathbf{S}$.

5.2 Développement de Taylor et conditions d'indice

On revient aux notations de 5.1 et on suppose $d=1$. Dans ce numéro, en négligeant les indices de $x(1)$, $\widehat{x}(1)$, $t(1)$ et $g(1)$, on écrira simplement x, $\widehat{x}$, t et g. On présente ici un analogue du « Lemme de Schwarz » : étant donnée une section globale f non nulle du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$, les notations fixées avant sont à interpréter avec

$$t=\mathrm{ind}_a(f,x).$$

Proposition 5.1 (version non archimédienne)**.** *Soient $r=(r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs et $a=(a_1,\dots,a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs. Soit f une section globale non nulle du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$.*

Si la valeur absolue $|\cdot|$ est non archimédienne, avec les notations introduites avant, on a :

$$\log\frac{\|g\cdot f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))}}{\|f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))}}\leq \mathrm{ind}_a(f,x)\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\}.$$

Proposition 5.2 (version archimédienne)**.** *Soient $r=(r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs et $a=(a_1,\dots,a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs. Soit f une section globale non nulle du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)$.*

Si la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne, avec les notations introduites avant, on a :

$$\log\frac{\|g\cdot f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))}}{\|f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))}}\leq \mathrm{ind}_a(f,x)\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\}+(r_1+\cdots+r_n)+\frac{1}{2}\log\dim_k\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)).$$

Démonstration de la version non archimédienne. Soit $\mathfrak{E}$ le sous k°-module du k-espace vectoriel E engendré par t_0,t_1. Pour tout $i=1,\dots,n$, soit

$$\mathrm{T}_{i1}=x_{i0}t_1-x_{i1}t_0.$$

Comme on a supposé $\widehat{x}_i$ de norme 1, T_{i1} appartient à $\mathfrak{E}$. Soit $\mathrm{T}_{i0}\in\mathfrak{E}$ tel que $\mathrm{T}_{i0},\mathrm{T}_{i1}$ soit une base du k°-module $\mathfrak{E}$. Pour ℓ qui parcourt l'ensemble $\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$, les éléments

$$\mathrm{T}(\ell):=\bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}$$

forment une base du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ et on a :

$$\left\|\sum \alpha_\ell \mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} = \max\{\|\alpha_\ell\| : \ell \in \blacksquare(r)_{\mathbf{N}}\}.$$

Vu comme élément du k-espace vectoriel $\mathrm{E} = \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}),\mathscr{O}(1))$, la section globale T_{i0} ne s'annule pas sur le point x_i. On désigne par t l'indice $\mathrm{ind}_a(f, x)$ de la section f en le point x. La section f s'écrit, en tant qu'élément du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ sous la forme

$$f = \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}} \alpha_\ell \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}$$

avec $\alpha_\ell \in k$, et on a

$$\|f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} = \max\left\{|\alpha_\ell| : \ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}\right\}. \tag{5.2.1}$$

Pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$, par sous-multiplicativité, on a :

$$\begin{aligned}
\log\left\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} &= \sum_{i=1}^{n}\log\left\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}\right\|_{\mathrm{Sym}^{r_i}\mathrm{E}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} + \ell_i\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}}. \qquad (5.2.2)
\end{aligned}$$

Pour tout $i = 1,\dots,n$, d'après (5.1.5) on a :

$$\begin{aligned}
\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} &\leq \log\|\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} = 0 \qquad (5.2.3)\\
\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}} &= \log d_p(x_i,y_i) + \log\|\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}}\\
&= \log d_p(x_i,y_i) \qquad (5.2.4)
\end{aligned}$$

D'après (5.2.2), (5.2.3) et (5.2.4) pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$ on a :

$$\log\left\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \leq \sum_{i=1}^{n}\ell_i\log d_p(x_i,y_i) \tag{5.2.5}$$

Par définition, un n-uplet $\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n)$ de nombres entiers positifs appartient à $\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$ si et seulement si

$$a\cdot\ell = a_1\ell_1 + \cdots + a_n\ell_n \geq t = \mathrm{ind}_a(f,x).$$

En particulier, pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\ell_i\log d_p(x_i,y_i) &= \sum_{i=1}^{n}a_i\ell_i\left(\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right)\\
&\leq (a\cdot\ell)\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\}\\
&\leq t\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\},
\end{aligned}$$

car le nombre réel $\log d_p(x_i,y_i)$ est toujours négatif. En tenant compte de cette inégalité, d'après (5.2.5) on a :

$$\log\left\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \leq t\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\}$$

Comme la norme $\|\cdot\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}$ est non archimédienne, on obtient :

$$\log\|g\cdot f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} = \log\Big\|\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\alpha_\ell \mathrm{T}(\ell)\Big\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \tag{5.2.6}$$

$$\leq \max_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\Big\{\log|\alpha_\ell| + \log\big\|g\cdot \mathrm{T}(\ell)\big\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}\Big\}$$

$$\leq t\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\} + \log\max\big\{|\alpha_\ell| : \ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}\big\}, \tag{5.2.7}$$

ce qui, en vertu de (5.2.1), termine la preuve. □

Démonstration de la version archimédienne. Pour tout $i = 1,\dots,n$, soit

$$\mathrm{T}_{i1} = x_{i0}t_1 - x_{i1}t_0.$$

Comme on a supposé $\widehat{x}_i$ de norme 1, on a $\|\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}} = 1$. Soit T_{i0} un élément du k-espace vectoriel E tel que $\mathrm{T}_{i0}, \mathrm{T}_{i1}$ soit une base orthonormale. Pour ℓ qui parcourt l'ensemble $\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$, les éléments

$$\mathrm{T}(\ell) := \bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}$$

forment une base orthogonale du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ et on a :

$$\|\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} = \binom{r}{\ell}^{-1/2} = \prod_{i=1}^{n}\binom{r_i}{\ell_i}^{-1/2}.$$

En tant qu'élément du k-espace vectoriel $\mathrm{E} = \Gamma(\mathbf{P}(\mathrm{E}),\mathscr{O}(1))$, la section globale T_{i0} ne s'annule pas en le point x_i. On désigne par t l'indice $\mathrm{ind}_a(f,x)$ de la section f en le point x. La section f s'écrit, en tant qu'élément du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ sous la forme

$$f = \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\alpha_\ell\bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}$$

avec $\alpha_\ell\in k$, et on a :

$$\|f\|^2_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} = \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|^2\|\mathrm{T}(\ell)\|^2_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}$$

$$= \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|^2\binom{r_i}{\ell_i}^{-1}. \tag{5.2.8}$$

Pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$, par sous-multiplicativité, on a :

$$\log\big\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\big\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} = \sum_{i=1}^{n}\log\Big\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}\Big\|_{\mathrm{Sym}^{r_i}\mathrm{E}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} + \ell_i\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}}. \tag{5.2.9}$$

Pour tout $i = 1,\dots,n$, d'après (5.1.4) on a :

$$\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} \leq \log\|\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} + \log\sqrt{2} = \log\sqrt{2} \tag{5.2.10}$$

$$\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}} = \log d_p(x_i,y_i) + \log\|\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}}$$

$$= \log d_p(x_i,y_i) \tag{5.2.11}$$

D'après (5.2.9), (5.2.10) et (5.2.11) pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$ on a :

$$\log\left\|g\cdot \mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \leq \sum_{i=1}^{n} \ell_i \log d_p(x_i,y_i) + \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\log\sqrt{2}. \tag{5.2.12}$$

Par définition, un n-uplet $\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n)$ de nombres entiers positifs appartient à $\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$ si et seulement si

$$a\cdot\ell = a_1\ell_1+\cdots+a_n\ell_n \geq t.$$

En particulier, pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\ell_i\log d_p(x_i,y_i) &= \sum_{i=1}^{n} a_i\ell_i\left(\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right)\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\ell_i\right)\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\}\\ &\leq t\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\},\end{aligned}$$

car le nombre réel $\log d_p(x_i,y_i)$ est toujours négatif. En tenant compte de cette inégalité, d'après (5.2.12) on a :

$$\log\left\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \leq t\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\} + \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\log\sqrt{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\|g\cdot f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} &= \left\|g\cdot\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\alpha_\ell \mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}\\ &\leq \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}\\ &\leq \max_{i=1,\dots,n}\left\{d_p(x_i,y_i)^{1/a_i}\right\}^t\left(\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|\prod_{i=1}^{n}\sqrt{2}^{r_i-\ell_i}\right)\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|\prod_{i=1}^{n}\sqrt{2}^{r_i-\ell_i} \leq \sqrt{\dim_k\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}\left(\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|^2\prod_{i=1}^{n}2^{r_i-\ell_i}\right)^{1/2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|^2\prod_{i=1}^{n}2^{r_i-\ell_i} &= \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|^2\binom{r}{\ell}\binom{r}{\ell}^{-1}\prod_{i=1}^{n}2^{r_i-\ell_i}\\ &\leq \max_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\left\{\binom{r}{\ell}\prod_{i=1}^{n}2^{r_i-\ell_i}\right\}\left(\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}|\alpha_\ell|^2\binom{r}{\ell}^{-1}\right)\\ &= \max_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\left\{\binom{r}{\ell}\prod_{i=1}^{n}2^{r_i-\ell_i}\right\}\|f\|^2_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))},\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

la dernière égalité étant vraie par (5.2.8). En combinant (5.2.13) et (5.2.14),

$$\log\frac{\|g\cdot f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}}{\|f\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}}\leq t\max_{i=1,\dots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x_i,y_i)\right\}+\frac{1}{2}\log\dim_k\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$
$$+\frac{1}{2}\max_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\left\{\log\binom{r}{\ell}+\sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\log 2\right\}$$

On termine la preuve, en remarquant grâce à l'approximation de Stirling :

$$\begin{aligned}\max_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\left\{\log\binom{r}{\ell}+\sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\log 2\right\}&\leq\max_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\left\{\log\binom{r}{\ell}\right\}+\sum_{i=1}^{n}r_i\log 2\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\log\binom{r_i}{\lfloor r_i/2\rfloor}+\sum_{i=1}^{n}r_i\log 2\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{2}(1+\log 2)+\sum_{i=1}^{n}r_i\log 2\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\log 2\right)(r_1+\cdots+r_n)\\&\leq 2(r_1+\cdots+r_n),\end{aligned}$$

car $\log 2\leq 1$. □

5.3 Sous-schéma d'indice supporté en un point

On revient aux notations de 5.1 et on suppose $d=1$. Dans ce numéro, en négligeant les indices de $x(1)$, $\widehat{x}(1)$, $t(1)$, $g(1)$ et $\widetilde{g}(1)$, on écrira simplement x, $\widehat{x}$, t, g et $\widetilde{g}$.

Proposition 5.3 (version non archimédienne)**.** *On suppose que la valeur absolue* $|\cdot|$ *soit non archimédienne. Avec les notations introduites, on a :*

$$\mu(\widetilde{g},[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)])\leq\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\ell_i-\frac{\nu_a(x,t\,|\,r)}{2}r_i\right]\log d_p(x_i,y_i).$$

Proposition 5.4 (version archimédienne)**.** *On suppose que la valeur absolue* $|\cdot|$ *soit archimédienne. Avec les notations introduites avant, on a :*

$$\mu(\widetilde{g},[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)])\leq\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\ell_i-\frac{\nu_a(x,t\,|\,r)}{2}r_i\right]\log d_p(x_i,y_i)+\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}(r_i-\ell_i)\right]\log\sqrt{2}.$$

Démonstration de la version non archimédienne. Soit $[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge$ un k-point non nul du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r)^\vee)$ qui représente l'image par le plongement de Plücker $\varpi_a(x,t\,|\,r)$ du k-point $[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]$. Puisque la représentation $\mathbf{G}\to\mathbf{GL}(\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r))$ est homogène de poids $\nu_a(x,t\,|\,r)(r_1,\dots,r_n)$, on a :

$$\begin{aligned}g\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge&=(\delta_1\widetilde{g}_1,\dots,\delta_n\widetilde{g}_n)\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge\\&=\left(\prod_{i=1}^{n}\delta_i^{\nu_a(x,r\,|\,t)r_i}\right)\widetilde{g}\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge.\end{aligned}$$

En prenant la norme de cette expression on obtient :

$$\begin{aligned}
\mu(\widetilde{g},[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) &:= \log\frac{\|\widetilde{g}\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^{\wedge}\|_{\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r)}}{\|[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^{\wedge}\|_{\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r)}}\\
&= \mu(g,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) + \nu_a(x,r,|\,t)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log|\delta_i|\right)\\
&= \mu(g,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) - \frac{\nu_a(x,r,|\,t)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log|\det g_i|\right).
\end{aligned}$$

Donc, en vertu de (5.1.3), on a :

$$\mu(\widetilde{g},[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) = \mu(g,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) - \frac{\nu_a(x,r,|\,t)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log d_p(x_i,y_i)\right).$$

Soit $\mathfrak{E}$ le sous k°-module du k-espace vectoriel $\mathrm{E}\otimes k$ engendré par t_0, t_1. Pour tout $i = 1,\ldots,n$, soit

$$\mathrm{T}_{i1} = x_{i0}t_1 - x_{i1}t_0.$$

Comme on a supposé $\widehat{x}_i$ de norme 1, T_{i1} appartient à $\mathfrak{E}$. Soit $\mathrm{T}_{i0}\in\mathfrak{E}$ tel que $\mathrm{T}_{i0},\mathrm{T}_{i1}$ soit une base du k°-module $\mathfrak{E}$. Pour tout n-uplet $\ell\in\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$, on pose :

$$\mathrm{T}(\ell) := \bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}.$$

La norme géométrique $p_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}}$ sur le k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}\otimes k$ déduite à partir de p_{E} par construction tensorielles, est celle associé au k°-module libre

$$\mathrm{Sym}^{r_1}\mathfrak{E}^{\vee}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathfrak{E}^{\vee}$$

et les éléments $\mathrm{T}(\ell)$, pour ℓ qui varie dans l'ensemble $\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$, en forment une base. Les éléments $\mathrm{T}(\ell)$ forment, pour ℓ qui varie dans $\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$, forment aussi une base du k-espace vectoriel $\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)$. Par l'inégalité d'Hadamard on a :

$$\mu(g,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) \leq \sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}}\log\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}. \tag{5.3.1}$$

Pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\log\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} &= \log\left\|g\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}\|_{\mathrm{Sym}^{r_i}\mathrm{E}}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} + \ell_i\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}} \qquad (5.3.2)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (5.1.5), pour tout $i = 1,\ldots,n$ on a :

$$\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} \leq \log\|\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} = 0 \tag{5.3.3}$$

$$\begin{aligned}
\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}} &= \log d_p(x_i,y_i) + \log\|\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}}\\
&= \log d_p(x_i,y_i). \qquad (5.3.4)
\end{aligned}$$

En vertu de (5.3.2) on a :

$$\log \|g\cdot \mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \leq \sum_{i=1}^{n} \ell_i \log d_p(x_i, y_i).$$

D'après (5.3.1) on termine la preuve en prenant la somme sur $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$. □

Démonstration de la version archimédienne. Soit $[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge$ un k-point non nul du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r)^\vee)$ qui représente l'image par le plongement de Plücker $\varpi_a(x,t\,|\,r)$ du k-point $[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]$. Puisque la représentation $\mathbf{G}\to\mathbf{GL}(\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r))$ est homogène de poids $\nu_a(x,t\,|\,r)(r_1,\ldots,r_n)$, on a :

$$\begin{aligned} g\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge &= (\delta_1\widetilde{g}_1,\ldots,\delta_n\widetilde{g}_n)\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}\delta_i^{\nu_a(x,r\,|\,t)r_i}\right)\widetilde{g}\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge. \end{aligned}$$

En prenant la norme de cette expression on obtient :

$$\begin{aligned} \mu(\widetilde{g},[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) &:= \log\frac{\|\widetilde{g}\cdot[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r)}}{\|[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(x,t\,|\,r)}} \\ &= \mu(g,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) + \nu_a(x,r,\,|\,t)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log|\delta_i|\right) \\ &= \mu(g,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) - \frac{\nu_a(x,r,\,|\,t)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log|\det g_i|\right). \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (5.1.3), on a :

$$\mu(\widetilde{g},[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) = \mu(g,[\mathrm{N}_a(x,t\,|\,r)]) - \frac{\nu_a(x,r,\,|\,t)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log d_p(x_i,y_i)\right).$$

Pour tout $i=1,\ldots,n$, soit

$$\mathrm{T}_{i1} = x_{i0}t_1 - x_{i1}t_0.$$

Comme on a supposé $\widehat{x}_i$ de norme 1, on a $\|\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}}=1$. Soit T_{i0} un élément du k-espace vectoriel E tel que $\mathrm{T}_{i0},\mathrm{T}_{i1}$ soit une base orthonormale. Pour ℓ qui parcourt l'ensemble $\blacksquare(r)_{\mathbf{N}}$, les éléments

$$\mathrm{T}(\ell) := \bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}$$

forment une base orthogonale du k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$ et on a :

$$\|\mathrm{T}(\ell)\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} = \binom{r}{\ell}^{-1/2} = \prod_{i=1}^{n}\binom{r_i}{\ell_i}^{-1/2}.$$

Pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell\in\blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$, par sous-multiplicativité, on a :

$$\begin{aligned} \log\left\|g\cdot\mathrm{T}(\ell)\right\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} &= \sum_{i=1}^{n}\log\left\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}^{r_i-\ell_i}\mathrm{T}_{i1}^{\ell_i}\right\|_{\mathrm{Sym}^{r_i}\mathrm{E}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(r_i-\ell_i)\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} + \ell_i\log\|g_i\cdot\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}}. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Pour tout $i = 1, \dots, n$, d'après (5.1.4) on a :

$$\log \|g_i \cdot \mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} \leq \log \|\mathrm{T}_{i0}\|_{\mathrm{E}} + \log \sqrt{2} = \log \sqrt{2} \tag{5.3.6}$$

$$\begin{aligned} \log \|g_i \cdot \mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}} &= \log d_p(x_i, y_i) + \log \|\mathrm{T}_{i1}\|_{\mathrm{E}} \\ &= \log d_p(x_i, y_i) \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

D'après (5.3.5), (5.3.6) et (5.3.7) pour tout n-uplet de nombres entiers positifs $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$ on a :

$$\log \left\| g \cdot \mathrm{T}(\ell) \right\|_{\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \leq \sum_{i=1}^{n} \ell_i \log d_p(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{n} (r_i - \ell_i) \log \sqrt{2}. \tag{5.3.8}$$

On termine la preuve en prenant la somme sur $\ell \in \blacktriangledown_a(r,t)_{\mathbf{N}}$. □

5.4 Sous-schéma d'indice supporté en plusieurs points

On revient aux notations de 5.1 et on suppose $d \geq 2$.

Proposition 5.5 (version non archimédienne)**.** *On suppose que la valeur absolue $|\cdot|$ soit non archimédienne. Avec les notations introduites avant, on a :*

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) \leq \nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) \left[t(\alpha) \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_p(x(\alpha)_i, y_i) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \log d_p(x(\alpha)_i, y_i) \right]$$

Proposition 5.6 (version archimédienne)**.** *On suppose que la valeur absolue $|\cdot|$ soit archimédienne. Avec les notations introduites avant, on a :*

$$\begin{aligned} \mu(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) \leq \nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) &\left[t(\alpha) \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_p(x(\alpha)_i, y_i) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \log d_p(x(\alpha)_i, y_i) \right] \\ &+ \nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) \left[(r_1 + \cdots + r_n) + \frac{1}{2} \log \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \right]. \end{aligned}$$

Démonstration de la version non archimédienne. Soit $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]^\wedge$ un k-point non nul du k-schéma $\mathbf{V}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)^\vee)$ qui représente l'image par le plongement de Plücker $\varpi_a(\boldsymbol{x}, t \,|\, r)$ du k-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]$. Puisque la représentation $\mathbf{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r))$ est homogène de poids $\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)(r_1, \dots, r_n)$, on a :

$$\begin{aligned} g(\alpha) \cdot [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]^\wedge &= (\delta_1 \widetilde{g}(\alpha)_1, \dots, \delta_n \widetilde{g}(\alpha)_n) \cdot [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]^\wedge \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \delta(\alpha)_i^{\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) r_i} \right) \widetilde{g}(\alpha) \cdot [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]^\wedge. \end{aligned}$$

En prenant la norme de cette expression on obtient :

$$\begin{aligned} \mu(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) &:= \log \frac{\|\widetilde{g}(\alpha) \cdot [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)}}{\|[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)}} \\ &= \mu(g(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) + \nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r) \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \log |\delta(\alpha)_i| \right) \\ &= \mu(g(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)]) - \frac{\nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \log |\det g(\alpha)_i| \right). \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (5.1.3), on a :

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) = \mu(g(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) - \frac{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \log d_p(x(\alpha)_i, y_i)\right).$$

La norme $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ sur le k-espace vectoriel E provient du sous-k°-module libre $\mathfrak{E}$ engendré par t_0, t_1. La norme $\|\cdot\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))}$ sur le k-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))$ provient alors du sous-k°-module libre

$$\mathrm{Sym}^{r_1}\mathfrak{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathfrak{E}.$$

On considère le sous-k°-module libre du k-espace vectoriel $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$,

$$\mathfrak{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r) = \mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)\cap\left(\mathrm{Sym}^{r_1}\mathfrak{E}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{r_n}\mathfrak{E}\right).$$

Soit $f_1,\ldots,f_{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}$ une base du k°-module $\mathfrak{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$. D'après l'inégalité d'Hadamard on a :

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) \le \sum_{j=1}^{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)} \log\|g(\alpha)\cdot f_j\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))}.$$

Pour tout $j = 1,\ldots,\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$, d'après la Proposition 5.2 on a :

$$\log\|g(\alpha)\cdot f_j\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))} \le t(\alpha)\max_{i=1,\ldots,n}\left\{\frac{1}{a_i}\log d_p(x(\alpha)_i,y_i)\right\} + (r_1+\cdots+r_n) + \frac{1}{2}\log\dim_k\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r)).$$

On termine la preuve en prenant la somme sur j. □

Démonstration de la version archimédienne. Soit $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge$ un k-point non nul de $\mathbf{V}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)^\vee)$ qui représente l'image par le plongement de Plücker $\varpi_a(\boldsymbol{x},t\,|\,r)$ du k-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]$. Puisque la représentation $\mathbf{G}\to\mathbf{GL}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r))$ est homogène de poids $\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)(r_1,\ldots,r_n)$, on a :

$$\begin{aligned} g(\alpha)\cdot[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge &= (\delta_1\widetilde{g}(\alpha)_1,\ldots,\delta_n\widetilde{g}(\alpha)_n)\cdot[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}\delta(\alpha)_i^{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)r_i}\right)\widetilde{g}(\alpha)\cdot[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge. \end{aligned}$$

En prenant la norme de cette expression on obtient :

$$\begin{aligned} \mu(\widetilde{g}(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) &:= \log\frac{\|\widetilde{g}(\alpha)\cdot[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}}{\|[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]^\wedge\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}} \\ &= \mu(g(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) + \nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log|\delta(\alpha)_i|\right) \\ &= \mu(g(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) - \frac{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\log|\det g(\alpha)_i|\right). \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (5.1.3), on a :

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) = \mu(g(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) - \frac{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \log d_p(x(\alpha)_i, y_i)\right).$$

Soit $f_1,\ldots,f_{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)}$ une base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)$. D'après l'inégalité d'Hadamard on a :

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha),[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)]) \le \sum_{j=1}^{\nu_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,|\,r)} \log\|g(\alpha)\cdot f_j\|_{\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(r))}.$$

Pour tout $j = 1, \dots, \nu_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \,|\, r)$, d'après la Proposition 5.2 on a :

$$\log \| g(\alpha) \cdot f_j \|_{\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))} \leq t(\alpha) \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_p(x(\alpha)_i, y_i) \right\} + (r_1 + \cdots + r_n) + \frac{1}{2} \log \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)).$$

On termine la preuve en prenant la somme sur j. □

6 Conclusion

6.1 Application de l'inégalité des hauteurs

Soient K' une extension finie du corps K de degré $[\mathrm{K}' : \mathrm{K}] \geq 2$, $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p})$ un faisceau adélique localement libre de rang 2 sur K. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\mathbf{P}$ le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{E}).$$

Soient K' une extension finie de K de degré $d = [\mathrm{K}' : \mathrm{K}] \geq 2$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ un K'-point de $\mathbf{P}$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, n$, le point θ_i engendre le corps K'. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un K-point de $\mathbf{P}$.

Soient $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs.

Soient $t_x \geq 0$ un nombre réel et $\mathrm{Z}_a(x, t_x) \subset \mathbf{P}$ le sous-schéma fermé d'indice t_x en x par rapport au poids a, et

$$\eta_a(x, t_x \,|\, r) : \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(x, t_x), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

l'homomorphisme d'évaluation des sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}(x, t_x)$. On désigne par $\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)$ son noyau et par $\nu_a(x, t_x \,|\, r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)$. On considère le K-point $[\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]$ associé au noyau $\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(x, t_x \,|\, r)$ du K-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(x, t_x \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee).$$

Soit

$$\varpi_a(x, t_x \,|\, r) : \mathbf{Grass}_{\nu_a(x, t_x \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(x, t_x \,|\, r))$$

le plongement de Plücker, où

$$\mathrm{F}_a(x, t_x \,|\, r) := \bigwedge^{\nu_a(x, t_x \,|\, r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee.$$

Soient $\overline{\mathrm{K}}$ une clôture algébrique de K contenante K' et $\theta(1) = \theta, \theta(2), \dots, \theta(d)$ les $\overline{\mathrm{K}}$-points de $\mathbf{P}$ conjugués à θ. Soient $t_\theta \geq 0$ un nombre réel et, pour tout $\alpha = 1, \dots, d$, $\mathrm{Z}_a(\theta(\alpha), t_\theta) \subset \overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}$ le sous-schéma fermé d'indice t_θ en le point $\theta(\alpha)$ par rapport au poids a. Le sous-schéma fermé

$$\coprod_{\alpha=1}^{d} \mathrm{Z}_a(\theta(\alpha), t_\theta)$$

est stable sous l'action du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ et il descend en un sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta)$ de $\mathbf{P}$. On considère l'homomorphisme d'évaluation $\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ des sections globales de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)$ sur le sous-schéma fermé $\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta)$:

$$\eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) : \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Z}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta), \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$$

On désigne par $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ son noyau et par $\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ la dimension de $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$. On considère le K-point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]$ associé à $\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ de la grassmanienne d'indice $\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)$ du K-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee).$$

Soient

$$\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) := \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee$$

et

$$\varpi_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) : \mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r))$$

le plongement de Plücker.

Pour toute place v de K on désigne par d_v la distance sur la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ induite par la norme géométrique p_v. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on désigne par $d_v(\theta_i, x_i)$ la plus petite distance parmi les distances de x_i et des points conjugués à θ_i.

Théorème 6.1. *Soient* K' *une extension finie du corps* K *de degré* $[\mathrm{K}' : \mathrm{K}] \geq 2$, $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p})$ *un faisceau adélique localement libre de rang* 2 *sur* K. *Il existe un nombre réel* $\mathrm{C}(\mathscr{E})$ *avec la propriété suivante :*

- *pour tout nombre entier* $n \geq 1$,
- *pour tout* K'*-point* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *de* $\mathbf{P}$ *tel que, pour tout* $i = 1, \ldots, n$, θ_i *engendre le corps* K' *;*
- *pour tout* K*-point* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de* $\mathbf{P}$ *;*
- *pour tout* n*-uplet* $r = (r_1, \ldots, r_n)$ *de nombres entiers strictement positifs,*
- *pour tout* n*-uplet* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *de nombres réels strictement positifs,*
- *pour tous nombres réels* $t_\theta, t_x \geq 0$ *tels que le* K*-point* $([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)])$ *soit semi-stable sous l'action du* K*-groupe réductif* $\mathbf{S}$ *sur le produit de grassmaniennes*

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \times_{\mathrm{K}} \mathbf{Grass}_{\nu_a(x, t_x \,|\, r)}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)$$

  et par rapport à polarisation induite par les plongements de Plücker respectifs,

on a :

$$\begin{aligned} t_\theta \cdot \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) & \left(\sum_{v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}} \deg(v) \min_{i=1,\ldots,n} \left\{ -\frac{1}{a_i} \log d_v(\theta_i, x_i) \right\} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \frac{\ell_i}{r_i} - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) + \nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} \right) \sum_{v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}} \deg(v)(-r_i \log d_v(\theta_i, x_i)) \\ & \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \frac{\ell_i}{r_i} \right] r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \dim_{\mathrm{K}} \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) [\mathrm{K}' : \mathrm{K}] \sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \\ & \qquad + (r_1 + \cdots + r_n) \operatorname{vol} \blacksquare(r) \mathrm{C}(\mathscr{E}). \end{aligned}$$

Nous donnons la démonstration du Théorème 6.1 dans la section suivante. On garde les notations introduites avant. Pour tout n-uplet de nombres réels strictement positifs $r = (r_1, \ldots, r_n)$ soit

$$\varepsilon_d(r) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{r_j}{r_i} \right\} (d-1) \right) - 1.$$

Pour tout n-uplet de nombres réels strictement positifs $r = (r_1, \ldots, r_n)$, pour tout n-uplet $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de nombres réels strictement positifs et pour tout nombre réel $t \in [0, a \cdot r]$ tels que

$$\operatorname{vol} \blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - d \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t) \in [0, 1],$$

on considère l'unique nombre réel $u_a(r, t) \in [0, a \cdot r]$ tel que

$$\operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, u_a(r, t)) = \operatorname{vol} \blacksquare(r)(1 + \varepsilon_d(r)) - d \operatorname{vol} \blacktriangle_a(r, t).$$

On remarque que pour tout nombre entier strictement positif ρ on a $\varepsilon_d(\rho r) = \varepsilon_d(r)$ et

$$u_a(\rho r, t) = \rho u_a(r, t).$$

Corollaire 6.2. *Soient* K' *une extension finie du corps* K *de degré* $[\mathrm{K}':\mathrm{K}] \geq 2$, $\mathscr{E} = (\mathrm{E}, \boldsymbol{p})$ *un faisceau adélique localement libre de rang* 2 *sur* K. *Il existe un nombre réel* $\mathrm{C}(\mathscr{E})$ *avec la propriété suivante :*

- *pour tout nombre entier* $n \geq 1$,
- *pour tous* K'*-points* $\theta_1, \dots, \theta_n$ *de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ *tel que, pour tout* $i = 1, \dots, n$, θ_i *engendre le corps* K',
- *pour tous* K*-points* $x_1, \dots, x_n$ *de* $\mathbf{P}(\mathrm{E})$,
- *pour tous* n*-uplet* $r = (r_1, \dots, r_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ *de nombres réels strictement positifs,*
- *pour tous nombres réels* $t_\theta, t_x \geq 0$ *tels les hypothèses du Théorème 3.6 soient satisfaites, i.e., tels que*
$$\mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(1+\varepsilon_d(r)) - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r,t) \in]0,1],$$
et tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$, *on ait*
$$\begin{aligned}\left|\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,t_x) r_i - 2\int_{\blacktriangledown_a(r,t_x)} \zeta_i \, d\lambda\right| \\ < \left|\mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,u_a(r,t_\theta)) r_i - 2\int_{\blacktriangledown_a(r,u_a(r,t_\theta))} \zeta_i \, d\lambda\right| - \varepsilon_d(r)\,\mathrm{vol}\,\blacksquare(r) r_i,\end{aligned}$$

l'inégalité suivante est satisfaite :
$$\begin{aligned}&t_\theta \cdot (\mathrm{vol}\,\blacksquare(r) - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r,t_\theta))\left(\sum_{v \in \mathrm{V_K}} \deg(v) \min_{i=1,\dots,n}\left\{-\frac{1}{a_i}\log d_v(\theta_i, x_i)\right\}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\int_{\blacktriangledown_a(r,t_x)} \frac{\zeta_i}{r_i}\, d\lambda - \frac{\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r, v_a(r,t_\theta)) + \mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,t_x)}{2}\right) \sum_{v\in \mathrm{V_K}} \deg(v)(-r_i \log d_v(\theta_i, x_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\int_{\blacktriangledown_a(r,t_x)} \frac{\zeta_i}{r_i}\, d\lambda\right] r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \mathrm{vol}\,\blacksquare(r)[\mathrm{K}':\mathrm{K}] \sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \\ &\qquad + \mathrm{vol}\,\blacksquare(r)(r_1 + \cdots + r_n)\mathrm{C}(\mathscr{E}).\end{aligned}$$

Démonstration du Corollaire 6.2. Soient $n \geq 1$ un nombre entier. Par un argument d'approximation, on peut supposer que $r_1, \dots, r_n$ soient des nombres rationnels. Ensuite, par homogénéité, on peut supposer qu'ils soient des nombres entiers strictement positifs.

Soient $a = (a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de nombres réels strictement positifs et $t_\theta, t_x \geq 0$ des nombres réels comme dans l'énoncé. D'après le Théorème 3.6 il existe un nombre entier $\mathrm{R} = \mathrm{R}(d, n, r, a, t_\theta, t_x) \geq 1$ tel que pour tout nombre entier $\rho \geq \mathrm{R}$ le K-point
$$([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \,|\, \rho r)], [\mathrm{N}_a(x, \rho t_x \,|\, \rho r)])$$
soit semi-stable sous l'action du k-groupe réductif $\mathbf{S}$ et par rapport au faisceau inversible $\mathscr{O}(1) \boxtimes \mathscr{O}(1)$. D'après le Théorème 6.1 pour un tel nombre entier ρ on a :
$$\begin{aligned}&\rho t_\theta \cdot \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\left(\sum_{v\in \mathrm{V_K}} \deg(v) \min_{i=1,\dots,n}\left\{-\frac{1}{a_i}\log d_v(\theta_i, x_i)\right\}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(\rho r, \rho t_x)_{\mathbf{N}}} \frac{\ell_i}{r_i} - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, \rho t_\theta \,|\, \rho r) + \nu_a(x, \rho t_x \,|\, \rho r)}{2}\right) \sum_{v \in \mathrm{V_K}} \deg(v)(-\rho r_i \log d_v(\theta_i, x_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(\rho r, \rho t_x)_{\mathbf{N}}} \frac{\ell_i}{\rho r_i}\right] \rho r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{Im}\, \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)[\mathrm{K}':\mathrm{K}] \sum_{i=1}^n \rho r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \\ &\qquad + \frac{\rho(r_1 + \cdots + r_n)}{\delta} \mathrm{vol}\,\blacksquare(r)\mathrm{C}(\mathscr{E}),\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

où $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\mathscr{E})$ est un nombre réel qui ne dépend que du faisceau adélique localement libre $\mathscr{E}$. On obtiendra l'énoncé en divisant l'inégalité précédente par ρ^{n+1} et en laissant ρ tendre vers l'infini. On remarque tout d'abord qu'on a :

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^n}\left[\sum_{\ell\in\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t_x)_{\mathbf{N}}} \frac{\ell_i}{\rho r_i}\right] = \int_{\blacktriangledown_a(r,t_x)} \frac{\zeta_i}{r_i}\, d\lambda. \tag{6.1.2}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\nu_a(x,\rho t_x\,|\,\rho r)}{\rho^n} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{\#\blacktriangledown_a(\rho r,\rho t_x)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} \overset{(1.2.8)}{=} \mathrm{vol}\,\blacktriangledown_a(r,t_x). \tag{6.1.3}$$

D'après la Proposition 2.9 on a :

$$\nu_a(\boldsymbol{\theta},\rho t_\theta\,|\,\rho r) \geq \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(\rho r)) - d\,\#\blacktriangle_a(r,\rho t_\theta)_{\mathbf{N}}.$$

En divisant par ρ^n et en prenant la limite inférieure pour ρ qui vers l'infini, par (1.2.6) et (1.2.7), on obtient :

$$\begin{aligned}\liminf_{\rho\to\infty} \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta},\rho t_\theta\,|\,\rho r)}{\rho^n} &\geq \liminf_{\rho\to\infty} \frac{\dim_{\mathrm{K}}\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(\rho r)) - d\,\#\blacktriangle_a(\rho r,\rho t_\theta)_{\mathbf{N}}}{\rho^n}\\ &= \mathrm{vol}\,\blacksquare(r) - d\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r,t_\theta).\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

D'après la Proposition 2.10 pour tout nombre réel $u > u_a(\rho r,\rho t_\theta)$ on a :

$$\nu_a(\boldsymbol{\theta},\rho t_\theta\,|\,\rho r) \leq \#\blacktriangle_a(\rho r,\rho v)_{\mathbf{N}}.$$

En divisant par ρ^n et en prenant la limite supérieure pour ρ qui tend vers l'infini on obtient :

$$\begin{aligned}\limsup_{\rho\to\infty} \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta},\rho t_\theta\,|\,\rho r)}{\rho^n} &\leq \limsup_{\rho\to\infty} \frac{\#\blacktriangle_a(\rho r,\rho u)_{\mathbf{N}}}{\rho^n}\\ &= \limsup_{\rho\to\infty} \frac{\#\blacktriangle_a(\rho r,\rho u)_{\mathbf{N}}}{\rho^n} \overset{(1.2.7)}{=} \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r,u).\end{aligned}$$

En laissant u tendre vers $u_a(r,t_\theta)$, on obtient enfin :

$$\limsup_{\rho\to\infty} \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta},\rho t_\theta\,|\,\rho r)}{\rho^n} \leq \mathrm{vol}\,\blacktriangle_a(r,u_a(r,t_\theta)). \tag{6.1.5}$$

On termine la preuve, en vertu des équations (6.1.2)-(6.1.5), en divisant l'inégalité (6.1.1) par ρ^{n+1} et en laissant ρ tendre vers l'infini. □

6.2 Preuve du Théorème 6.1

6.2.1. Notation. — On revient aux notations introduites dans au début de la section précédent 6.1 et on note X le produit d'espaces projectifs

$$\mathrm{X} := \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)) \times_{\mathrm{K}} \mathbf{P}(\mathrm{F}_a(x,t_x\,|\,r)).$$

Le produit **G** de n copies de **GL**(E) agit naturellement sur X et on désigne par Y le quotient des points semi-stables X^{ss} sous l'action du produit **S** de n copies de **SL**(E). Soit $\pi : \mathrm{X}^{\mathrm{ss}} \to \mathrm{Y}$ le morphisme quotient. Par abus de notation, on considère la grassmanienne

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)}(\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee) \qquad \big(\text{resp. } \mathbf{Grass}_{\nu_a(x,t_x\,|\,r)}(\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^\vee)\big)$$

comme incluse par le plongement de Plücker dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r))$ (resp. $\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r))$). Par conséquent, on ne spécifie pas quand le point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]$ (resp. $[\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]$) est considéré comme point de la grassmanienne ou de l'espace projectif. On désigne par L le faisceau inversible sur X,

$$\mathrm{L} := \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)}(1) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r)}(1).$$

Pour tout nombre entier assez divisible $\mathrm{D} \geq 1$ il existe un faisceau inversible ample M_D sur Y et isomorphisme de faisceaux inversibles sur X^{ss},

$$\varphi_\mathrm{D} : \pi^* \mathrm{M}_\mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{L}|_{\mathrm{X}^{\mathrm{ss}}}^{\otimes \mathrm{D}}$$

compatible à l'action de $\mathbf{G}$. Le faisceau inversible L est naturellement muni d'une structure de faisceaux inversible adélique induite par les faisceaux adéliques localement libres

$$\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) := \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)} \left(\mathrm{Sym}^{r_1} \mathscr{E} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{r_n} \mathscr{E}\right)^\vee$$
$$\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r) := \bigwedge^{\nu_a(x, t_x \mid r)} \left(\mathrm{Sym}^{r_1} \mathscr{E} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{r_n} \mathscr{E}\right)^\vee.$$

Pour toute place v soit p_v la norme géométrique sur E associée au faisceau adélique $\mathscr{E}$. On note $\mathbf{U}(p_v)$ le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})_v^{\mathrm{an}}$ unitaire par rapport à la norme géométrique p_v et on pose

$$\mathbf{U}_v := \mathrm{pr}_1^{-1} \mathbf{U}(p_v) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_n^{-1} \mathbf{U}(p_v) \subset \mathbf{G}_v^{\mathrm{an}}.$$

La norme géométrique en la place v sur le faisceau inversible L est $\mathbf{U}_v$-invariante ; *a fortiori* elle invariante sous l'action du sous-groupe compact maximal $\mathbf{S}_v^{\mathrm{an}} \cap \mathbf{U}_v$ de $\mathbf{S}_v^{\mathrm{an}}$. La norme géométrique des minima sur le faisceau inversible M_D induite à travers l'isomorphisme φ_D est alors continue et sa construction est compatible à la construction de la norme géométrique provenante d'un modèle entier. En munissant en toute place le faisceau inversible M_D de la métrique des minima, on obtient un faisceau inversible adélique $\mathscr{M}_\mathrm{D}$ sur Y.

Pour toute place v on désigne par μ_v la mesure d'instabilité à la place v. Puisque par hypothèse le point $([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)])$ est semi-stable sous l'action du K-groupe réductif $\mathbf{S}$, pour tout nombre entier $\mathrm{D} \geq 1$ assez divisible, d'après le Scholie III.2.2 on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{D}} h_{\mathscr{M}_\mathrm{D}}(\pi([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)])) \\ &\quad = h_{\mathscr{L}}(([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) + \sum_{v \in \mathrm{V}_\mathrm{K}} \deg(v) \mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]). \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

6.2.2. Minoration de la hauteur sur le quotient. — On va appliquer la minoration donnée par le Théorème III.5.4. La composition du plongement de Plücker et du plongement de Segre, donne une immersion fermée $\mathbf{G}$-équivariante du produit de grassmaniennes,

$$\mathbf{Grass}_{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r))}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_\mathbf{P}(r))^\vee) \times_\mathrm{K} \mathbf{Grass}_{\nu_a(x, t_x \mid r))}(\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_\mathbf{P}(r))^\vee),$$

dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \otimes_\mathrm{K} \mathrm{F}_a(x, t_x \mid r))$. La représentation qui définit cette action,

$$\mathbf{G} := \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \times_\mathrm{K} \cdots \times_\mathrm{K} \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \otimes_\mathrm{K} \mathrm{F}_a(x, t_x \mid r))$$

est homogène de poids $-(\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) + \nu_a(x, t_x \mid r))(r_1, \ldots, r_n)$.

On munit le K-espace vectoriel $\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)$ (resp. le K-espace vectoriel $\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r)$) de la structure de faisceau adélique localement libre déduite par celle de $\mathscr{E}^\vee$ à travers l'homomorphisme surjectif de K-espaces vectoriels

$$\psi_{\boldsymbol{\theta}} : \left(\mathrm{E}^{\vee \otimes r_1} \otimes_\mathrm{K} \cdots \otimes_\mathrm{K} \mathrm{E}^{\vee \otimes r_n}\right)^{\otimes \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)} \longrightarrow \mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) := \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_\mathbf{P}(r))^\vee$$

$$\left(\text{resp. } \psi_x : \left(\mathrm{E}^{\vee\otimes r_1} \otimes_{\mathrm{K}} \cdots \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{E}^{\vee\otimes r_n}\right)^{\otimes \nu_a(x,t_x\,|\,r)} \longrightarrow \mathrm{F}_a(x,t_x\,|\,r) := \bigwedge^{\nu_a(x,t_x\,|\,r)} \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}\right)$$

On note $\mathscr{F}'_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r)$ (resp. $\mathscr{F}'_a(x, t_x\,|\,r)$) le faisceau adélique localement libre qui en résulte.

Si v est une place non archimédienne la norme géométrique en la place v du faisceau adélique $\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r)$ (resp. $\mathscr{F}_a(x, t_x\,|\,r)$) et celle du faisceau adélique $\mathscr{F}'_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r)$ (resp. $\mathscr{F}'_a(x, t_x\,|\,r)$) coïncident.

Si par contre v est une place archimédienne de K il y a un facteur de proportionnalité qui intervient. Plus précisément, on désigne par $\|\cdot\|^{\mathrm{quot}}_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r),v}$ (resp. $\|\cdot\|^{\mathrm{quot}}_{\mathrm{F}_a(x,t_x\,|\,r),v}$) la norme hermitienne déduite par l'homomorphisme surjectif

$$\left(\mathrm{E}^{\vee\otimes r_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}^{\vee\otimes r_n}\right)^{\otimes \nu_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)} \longrightarrow \mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r) := \bigwedge^{\nu_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)} \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}$$

$$\left(\text{resp. } \left(\mathrm{E}^{\vee\otimes r_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}^{\vee\otimes r_n}\right)^{\otimes \nu_a(x,t_x\,|\,r)} \longrightarrow \mathrm{F}_a(x,t_x\,|\,r) := \bigwedge^{\nu_a(x,t_x\,|\,r)} \Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}\right)$$

et par $\|\cdot\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r),v}$ (resp. $\|\cdot\|_{\mathrm{F}_a(x,t_x\,|\,r),v}$) la norme hermitienne déduite de la norme hermitienne de $\Gamma(\mathbf{P},\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))^{\vee}$ par produit extérieur. On a alors

$$\|\cdot\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r),v} = \sqrt{\nu_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)!}\,\|\cdot\|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r),v} \tag{6.2.2}$$

$$\left(\text{resp. } \|\cdot\|_{\mathrm{F}_a(x,t_x\,|\,r),v} = \sqrt{\nu_a(x,t_x\,|\,r)!}\,\|\cdot\|_{\mathrm{F}_a(x,t_x\,|\,r),v}\right). \tag{6.2.3}$$

Par quant dit avant, les normes géométriques sur le faisceau inversible L induites par les faisceaux adéliques

$$\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r) \otimes \mathscr{F}_a(x, t_x\,|\,r) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F}'_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r) \otimes \mathscr{F}'_a(x, t_x\,|\,r)$$

coïncident aux places non archimédiennes et elles sont proportionelles aux places archimédiennes. En particulier, si on note $\mathscr{L}'$ le faisceau inversible adélique obtenu en munissant le faisceau inversible L de la structure adélique induite par le faisceau adélique $\mathscr{F}'_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r) \otimes \mathscr{F}'_a(x, t_x\,|\,r)$, en toute place v la norme géométrique sur L est invariante sous l'action du sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}_v$. De plus, l'homomorphisme de faisceaux adéliques localement libres

$$\psi_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \psi_x : \left(\mathscr{E}^{\vee\otimes r_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{E}^{\vee\otimes r_n}\right)^{\otimes(\nu_a(\boldsymbol{\theta},t_\theta\,|\,r)+\nu_a(x,t_x\,|\,r))} \longrightarrow \mathscr{F}'_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r) \otimes \mathscr{F}'_a(x, t_x\,|\,r)$$

est génériquement surjectif et $\mathbf{G}$-équivariant. On peut ainsi appliquer le Théorème III.5.4 et obtenir

$$\begin{aligned} h_{\min}((\mathrm{X},\mathscr{L}')/\!/\mathbf{S}) &:= \frac{1}{\mathrm{D}} \inf\left\{h_{\mathscr{M}'_{\mathrm{D}}}(y) : y \in \mathrm{Y} \text{ point fermé}\right\} \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} (\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r) + \nu_a(x, t_x\,|\,r)) r_i \left(\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}^{\vee}) - \frac{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}{2}\log 2\right) \\ &= -(\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r) + \nu_a(x, t_x\,|\,r))(r_1 + \cdots + r_n)\left(\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}) + \frac{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}{2}\log 2\right), \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

On désigne par $\mathscr{M}'_{\mathrm{D}}$ la structure de faisceau inversible adélique sur le faisceau inversible M_{D} induite par le faisceau inversible adélique $\mathscr{L}'$. En vertu des égalités (6.2.2) et (6.2.3), on a :

$$\begin{aligned} h_{\min}((\mathrm{X},\mathscr{L})/\!/\mathbf{S}) &:= \frac{1}{\mathrm{D}} \inf\left\{h_{\mathscr{M}_{\mathrm{D}}}(y) : y \in \mathrm{Y} \text{ point fermé}\right\} \\ &= h_{\min}((\mathrm{X},\mathscr{L}')/\!/\mathbf{S}) - \frac{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}{2}\left(\log \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta\,|\,r)! + \log \nu_a(x, t_x\,|\,r)!\right). \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

En appliquant l'approximation de Stirling on obtient :

$$\log \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)! \leq \log \sqrt{2\pi \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)} + \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \log \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \tag{6.2.6}$$

$$\log \nu_a(x, t_x \mid r)! \leq \log \sqrt{2\pi \nu_a(x, t_x \mid r)} + \nu_a(x, t_x \mid r) \log \nu_a(x, t_x \mid r) \tag{6.2.7}$$

D'autre part, les nombres entiers $\nu_a(\theta, t_\theta \mid r)$, $\nu_a(x, t_x \mid r)$ sont la dimension des noyaux $\mathrm{N}_a(\theta, t_\theta \mid r)$, $\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)$ et elles sont ainsi bornés par la dimension du K-espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))$:

$$\nu_a(\theta, t_\theta \mid r),\ \nu_a(x, t_x \mid r) \leq \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) = \prod_{i=1}^{n} (r_i + 1).$$

En prenant le logarithme et en reprenant les inégalités données par l'approximation de Stirling (6.2.6) et (6.2.7), on obtient :

$$\log \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)! + \log \nu_a(x, t_x \mid r)! \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \log(r_i + 1) \right) (\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) + \nu_a(x, t_x \mid r) + 1) + \log(2\pi).$$

En vertu de (6.2.4) et (6.2.5) ceci permet de conclure :

$$\begin{aligned} h_{\min}((\mathrm{X}, \mathscr{L}) /\!/ \mathbf{S}) &= h_{\min}((\mathrm{X}, \mathscr{L}') /\!/ \mathbf{S}) - \frac{[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]}{2} \left(\log \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)! + \log \nu_a(x, t_x \mid r)! \right) \\ &\geq -(\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) + \nu_a(x, t_x \mid r))(r_1 + \cdots + r_n) \left(\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}) + \frac{[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]}{2} \log 2 \right) \\ &\quad - \frac{[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \log(r_i + 1) \right) (\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) + \nu_a(x, t_x \mid r) + 1) - \frac{[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]}{2} \log(2\pi) \\ &\geq -(\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) + \nu_a(x, t_x \mid r))(r_1 + \cdots + r_n) \left(\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}) + 3[\mathrm{K} : \mathbf{Q}] \right). \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

6.2.3. Majoration de la hauteur. — Par définition le faisceau adélique $\mathscr{L}$ est le faisceau inversible

$$\mathrm{L} := \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)}(1) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r)}(1)$$

muni des normes géométriques induites par le faisceau adélique $\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \otimes \mathscr{F}_a(x, t_x \mid r)$. Par conséquent on a :

$$h_{\mathscr{L}}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) = h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]) + h_{\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r)}([\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)])$$

et on va majorer les deux termes séparément.

On désigne par $\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E})$ (resp. $\widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})$) le premier (resp. le deuxième) minimum successif du faisceau cohérent adélique $\mathscr{E}$, *i.e.*, le plus petit nombre réel λ tel qu'il existe un élément non nul T (resp. deux éléments $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1$ linéairement indépendants) de E tels que les points associés dans $\mathbf{P}(\mathrm{E}^\vee)$ soient de hauteur plus petite que λ.

En appliquant la Proposition 4.1 au point $[\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]$ on a alors :

$$h_{\mathscr{F}_a(x, t_x \mid r)}([\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] h_{\mathscr{E}}(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} r_i - \ell_i \right] \widehat{\lambda}_2(\mathscr{E}).$$

D'autre part, en appliquant la Proposition 4.2 au point $[\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]$, si K est un corps de fonctions on obtient :

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]) \leq d \dim_k \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) &\left(\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \right) \\ &- \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1 + \cdots + r_n)(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E}) + \widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})) \\ &+ \dim_{\mathrm{K}} \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)(r_1 + \cdots + r_n) d \left(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E}) + 2\, \widehat{\mu}(\mathscr{E}) \right). \end{aligned}$$

Si par contre K est un corps de nombres on a :

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]) \leq d \dim_k \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \left(\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \right) \\ - \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1 + \cdots + r_n)(\widehat{\lambda}_1(\mathscr{E}) + \widehat{\lambda}_2(\mathscr{E})) \\ + \dim_{\mathrm{K}} \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)(r_1 + \cdots + r_n) d \big(5[\mathrm{K}:\mathbf{Q}] + \widehat{\lambda}_1(\mathscr{E}) + 2\,\widehat{\mu}(\mathscr{E})\big). \end{aligned}$$

Dans les deux cas il existe un nombre réel $\mathrm{C}_0(\mathscr{E})$ qui ne dépend que de faisceau adélique localement libre $\mathscr{E}$ tel que

$$\begin{aligned} h_{\mathscr{L}}([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] h_{\mathscr{E}}(x_i) + d \dim_k \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \left(\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \right) \\ + \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1 + \cdots + r_n) \mathrm{C}_0(\mathscr{E}). \quad (6.2.9) \end{aligned}$$

6.2.4. Majoration de la mesure d'instabilité. — Soient v une place de K et p_v la norme géométrique en la place v du faisceau adélique localement libre $\mathscr{E}$. Soient $g \in \mathbf{S}_v^{\mathrm{an}}$, Ω une extension analytique de K_v contenant le corps résiduel complété de g et g_Ω le Ω-point associé du K-schéma en groupes $\mathbf{S}$. Avec ces notations on considère la mesure d'instabilité relative au point g :

$$\begin{aligned} \mu_v(g, [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) &:= \log \frac{\| g_\Omega \cdot [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]^\wedge \|_{\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r), \Omega}}{\| [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]^\wedge \|_{\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r), \Omega}}, \\ \mu_v(g, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]) &:= \log \frac{\| g_\Omega \cdot [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]^\wedge \|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r), \Omega}}{\| [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]^\wedge \|_{\mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r), \Omega}}, \\ \mu_v(g, ([\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)], [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)])) &:= \log \frac{\| g_\Omega \cdot ([\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]^\wedge \otimes [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]^\wedge) \|_{\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r) \otimes \mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r), \Omega}}{\| ([\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]^\wedge \otimes [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]^\wedge) \|_{\mathrm{F}_a(x, t_x \mid r) \otimes \mathrm{F}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r), \Omega}}. \end{aligned}$$

Ces définitions ne dépendent pas du choix de l'extension Ω contenant le corps résiduel complété de g. En outre, on a

$$\mu_v(g, ([\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)], [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)])) = \mu_v(g, [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) + \mu_v(g, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]).$$

Soit g un point du K_v-groupe analytique $\mathbf{S}_v^{\mathrm{an}}$. Par définition de mesure d'instabilité on a alors [1] :

$$\begin{aligned} \mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]) &\leq \inf_{h \in \mathbf{S}_v^{\mathrm{an}}} \mu_v(h, ([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)])) \\ &\leq \mu_v(g, ([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)])) \\ &= \mu_v(g, [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)]) + \mu_v(g, [\mathrm{N}_a(x, t_x \mid r)]). \end{aligned}$$

Soit Ω une extension analytique algébriquement close du corps K_v telle qu'il existe une base t_0, t_1 du Ω-espace vectoriel $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega$ telle que

$$p_v = \begin{cases} \sqrt{|t_0|^2 + |t_1|^2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne} \\ \max\{|t_0|, |t_1|\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

sur $\mathbf{V}(\mathrm{E} \otimes \Omega)^{\mathrm{an}}$. Pour tout $\alpha = 1, \ldots, d$ et tout $i = 1, \ldots, n$ soient $\widehat{\theta}(\alpha)_i$, $\widehat{x}_i$ des Ω-points non nuls de $\mathbf{V}(\mathrm{E})$ représentant respectivement les points $\theta(\alpha)_i, x_i$, et tels que

$$p_{\mathrm{E}}(\widehat{\theta}(\alpha)_i) = 1, \qquad p_{\mathrm{E}}(\widehat{x}_i) = 1.$$

1. Plus précisément, le Théorème II.2.18 affirme que la première inégalité est une égalité.

On considère le Ω-point $g(\alpha)_i = g(\widehat{x}(\alpha)_i, \widehat{y}_i)$ du K-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ défini par

$$\begin{cases} g(\alpha)_i(t_0) = \theta(\alpha)_{i0}\, t_0 + x_{i0}\, t_1 \\ g(\alpha)_i(t_1) = \theta(\alpha)_{i1}\, t_0 + x_{i1}\, t_1 \end{cases} \tag{6.2.10}$$

Soit $\delta(\alpha)_i \in \Omega$ une racine carrée du détérminant $\det g(\alpha)_i$ (Ω est supposé algébriquement clos). Pour tout $i = 1, \dots, n$, on considère le Ω-point $\widetilde{g}(\alpha)_i := g(\alpha)_i / \delta(\alpha)_i$ du K-schéma en groupes $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ et on désigne par $\widetilde{g}(\alpha)$ le Ω-point $(\widetilde{g}(\alpha)_1, \dots, \widetilde{g}(\alpha)_n)$ du K-schéma en groupes $\mathbf{S}$.

$$\begin{aligned} \mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) &\leq \min_{\alpha=1,\dots,d} \left\{ \mu_v(\widetilde{g}(\alpha), ([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)])) \right\} \\ &= \min_{\alpha=1,\dots,d} \left\{ \mu_v(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]) + \mu_v(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \right\} \end{aligned}$$

Places non archimédiennes. Si v est une place non archimédienne, d'après les Propositions 5.3 et 5.5 on a :

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i),$$

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]) \leq \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) \left[t_\theta \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right]$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} &\mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \\ &\qquad \leq \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\, t_\theta \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} \\ &\qquad\quad + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) + \nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i). \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Places non archimédiennes. Si v est une place archimédienne, d'après les Propositions 5.4 et 5.6 on a :

$$\mu(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) + \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} (r_i - \ell_i) \right] \log \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} \mu(\widetilde{g}(\alpha), [\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)]) &\leq \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) \left[t_\theta \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \log d_{p_{\mathrm{E}}}(\theta(\alpha)_i, x_i) \right] \\ &\quad + \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) \left[(r_1 + \cdots + r_n) + \frac{1}{2} \log \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} \mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) &\leq \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\, t_\theta \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r, t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) + \nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \\ &\quad + \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) \left[(r_1 + \cdots + r_n) + \frac{1}{2} \log \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) \right] \end{aligned}$$

et comme

$$\log \dim_k \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r)) = \sum_{i=1}^{n} \log(r_i + 1) \leq r_1 + \cdots + r_n,$$

on conclut

$$\begin{aligned}
\mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \leq \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\, t_\theta \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) + \nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \\
+ \frac{3}{2} \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)(r_1 + \cdots + r_n). \qquad (6.2.12)
\end{aligned}$$

6.2.5. Conclusion. — On termine la preuve seulement dans le cas des corps des nombres, le cas des corps de fonctions étant similaire et plus simple à cause de l'absence des places archimédiennes. On revient en conclusion à l'égalité (6.2.1) donnée par le Scholie III.2.2 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{D}} h_{\mathscr{M}_{\mathrm{D}}}(\pi([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)])) \\
= h_{\mathscr{L}}(([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) + \sum_{v \in \mathrm{V}_{\mathrm{K}}} \deg(v) \mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]).
\end{aligned}$$

La minoration de la hauteur sur le quotient (6.2.8) donne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{D}} h_{\mathscr{M}_{\mathrm{D}}}(\pi([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)])) \geq h_{\min}((\mathrm{X}, \mathscr{L}) /\!/ \mathbf{S}) \\
\geq -(\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) + \nu_a(x, t_x \,|\, r))(r_1 + \cdots + r_n) \left(\widehat{\mu}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E}) + 3[\mathrm{K} : \mathbf{Q}] \right).
\end{aligned}$$

D'autre part la majoration de la hateur (6.2.9) entraîne qu'il existe un nombre réel $\mathrm{C}_0(\mathscr{E})$ qui ne dépend que du faisceau adélique localement libre $\mathscr{E}$ tel que

$$\begin{aligned}
h_{\mathscr{L}}(([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] h_{\mathscr{E}}(x_i) + d \dim_k \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) \left(\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \right) \\
+ \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1 + \cdots + r_n) \mathrm{C}_0(\mathscr{E}).
\end{aligned}$$

Si pour toute place v, on note d_v la distance sur la droite projective $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ induite par la norme p_v du faisceau adélique $\mathscr{E}$, la majoration de la mesure d'instabilité (6.2.11) donne

$$\begin{aligned}
\mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \leq \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\, t_\theta \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) + \nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i).
\end{aligned}$$

si la place v est non archimédienne ; si par contre la place v est archimédienne, la majoration (6.2.12) donne

$$\begin{aligned}
\mu_v([\mathrm{N}_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)], [\mathrm{N}_a(x, t_x \,|\, r)]) \leq \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)\, t_\theta \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r) + \nu_a(x, t_x \,|\, r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \\
+ \frac{3}{2} \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \,|\, r)(r_1 + \cdots + r_n).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on pose $C_1(\mathscr{E}) := C_0(\mathscr{E}) + \frac{3}{2}[K:\mathbf{Q}]$ on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{D} h_{\mathscr{M}_D}(\pi([N_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r)], [N_a(x, t_x \mid r)])) \\
&\qquad \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i \right] h_{\mathscr{E}}(x_i) + d \dim_k \operatorname{Im} \eta_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) \left(\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \right) \\
&\qquad + \nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) t_\theta \left(\sum_{v \in V_K} \deg(v) \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{a_i} \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i) \right\} \right) \\
&\qquad + \sum_{v \in V_K} \deg(v) \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\ell \in \blacktriangledown_a(r,t_x)_{\mathbf{N}}} \ell_i - \frac{\nu_a(\boldsymbol{\theta}, t_\theta \mid r) + \nu_a(x, t_x \mid r)}{2} r_i \right] \log d_v(\theta(\alpha)_i, x_i). \\
&\qquad + \dim_K \Gamma(\mathbf{P}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(r))(r_1 + \cdots + r_n) C_1(\mathscr{E}).
\end{aligned}$$

On termine la preuve du Théorème 6.1 en vertu de la minoration de la hauteur sur le quotient et en prenant $C(\mathscr{E}) := C_1(\mathscr{E}) + 2(\widehat{\mu}_K(\mathscr{E}) + 3[K:\mathbf{Q}])$.

6.3 La minoration effective fondamentale

Pour tout nombre entier $d \geq 1$ et tout n-uplet de nombres réels strictement positifs $r = (r_1, \dots, r_n)$ on pose :

$$\varepsilon_d(r) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \max_{i+1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{r_j}{r_i} \right\} (d-1) \right).$$

Pour tous nombres entiers $n, d \geq 1$ et pour tout nombre réel $\delta \in [0,1]$ on considère l'unique nombre réel $t_d(n, \delta) \in [0, n]$ tel que

$$1 - d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_d(n, \delta)) = \delta. \tag{6.3.1}$$

Puisque la fonction $t \mapsto \operatorname{vol} \blacktriangle(t)$ est un homéomorphisme de l'intervalle $[0,1]$ sur lui-même, la fonction $\delta \mapsto t_d(n, \delta)$ est continue.

Théorème 6.3 (Majoration effective fondamentale)**.** *Soient* K' *une extension finie du corps* K *de degré* $d = [K' : K] \geq 2$, $\mathscr{E} = (E, \boldsymbol{p})$ *un faisceau adélique localement libre de rang* 2 *sur* K. *Il existe un nombre réel* $C([K' : K], \mathscr{E})$ *avec la propriété suivante :*

- *pour tout nombre entier* $n \geq 1$,
- *pour tous* K'*-points* $\theta_1, \dots, \theta_n$ *de* $\mathbf{P}(E)$ *tel que, pour tout* $i = 1, \dots, n$, θ_i *engendre le corps* K',
- *pour tous* K*-points* $x_1, \dots, x_n$ *de* $\mathbf{P}(E)$,
- *pour tout nombre réel* $0 < \delta \leq 1/(2 \cdot n!)$,
- *pour tout* n*-uplet* $r = (r_1, \dots, r_n)$ *de nombres entiers strictement positifs tel que* $\varepsilon_d(r) \leq \delta^2$,

on a :

$$\begin{aligned}
&t_d(n, \delta) \left(\sum_{v \in V_K} \deg(v) \min_{i=1,\dots,n} \left\{ -r_i \log d_v(\theta_i, x_i) \right\} \right) \\
&\qquad \leq \left(1 + 3[K' : K] \sqrt[n]{\delta} \right) \sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \frac{2[K' : K]}{\delta} \sum_{i=1}^{n} r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) + \frac{r_1 + \cdots + r_n}{\delta} C([K' : K], \mathscr{E}),
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On considère le produit de n copies de la droite projective $\mathbf{P}(E)$,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(E) \times_K \cdots \times_K \mathbf{P}(E),$$

le K′-point $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ du K-schéma **P** et le K-point $x = (x_1, \dots, x_n)$ du K-schéma **P**. En revenant aux notations du Corollaire 6.2 on va choisir l'indice t_x en le point rationnel x de manière de pouvoir l'appliquer avec

$$t_\theta = t_d(n, \delta).$$

Pour tout nombre réel $\delta \in [0,1]$ et pour tout n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres entiers strictement positifs tel que $\delta + \varepsilon_d(r) \leq 1$, soit $u_d(n, \delta \,|\, r)$ l'unique nombre réel tel que :

$$\begin{aligned} \operatorname{vol} \blacktriangle(u_d(n,\delta \,|\, r)) &= 1 - d \operatorname{vol} \blacktriangle(t_d(n,\delta)) + \varepsilon_d(r) \\ &= \delta + \varepsilon_d(r). \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

On remarque par définition le nombre réel $u_d(n, \delta \,|\, r)$ est strictement positif, pour tout nombre réel $\rho > 0$, on a $u_d(n, \delta \,|\, \rho r) = u_d(n, \delta \,|\, r)$. Le Lemme suivant, comme tous les autres Lemmes de nature combinatoire qui vont apparaître pendant la démonstration, sera prouvé une fois terminé la démonstration du Théorème 6.3.

Lemme 6.4. *Soient $n \geq 2$ un nombre entier, $0 < \delta \leq 1/(2 \cdot n!)$ un nombre réel et $r = (r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs tel que $\varepsilon_d(r) \leq \delta^2$. Alors, $u_d(n, \delta \,|\, r) \leq 1$ et*

$$2 \int_{\blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r))} \zeta_1 \, d\lambda - \operatorname{vol} \blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r)) - \varepsilon_d(r) > 0.$$

La fonction qui à tout nombre réel $w \in [0, n]$ associe le nombre réel

$$\operatorname{vol} \blacktriangledown(w) - 2 \int_{\blacktriangledown(w)} \zeta_1 \, d\lambda = 2 \int_{\blacktriangle(n-w)} \zeta_1 \, d\lambda - \operatorname{vol} \blacktriangle(n - w)$$

est négative sur les intervalles $[0,1]$ et $[n-1, n]$, elle est nulle en 0 et n, elle vaut $-(n-1)/(n!)$ en 1 et $n-1$ elle est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur l'intervalle $[0,1]$ (resp. sur l'intervalle $[n-1, n]$).

On suppose dorénavant que le nombre réel δ appartient à l'intervalle $]0, 1/(2 \cdot n!)[$ et $r = (r_1, \dots, r_n)$ soit un n-uplet de nombres réels strictement positifs tel que $\varepsilon_d(r) \leq \delta^2$. En vertu du Lemme précédent on a alors $u_d(n, \delta \,|\, r) \leq 1$ et ainsi

$$\operatorname{vol} \blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r)) - 2 \int_{\blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r))} \zeta_1 \, d\lambda \leq 0.$$

L'inégalité $u_d(n, \delta) \leq 1$ entraîne aussi qu'on a :

$$\begin{aligned} &\left| \operatorname{vol} \blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r)) - 2 \int_{\blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r))} \zeta_1 \, d\lambda \right| - \varepsilon_d(r) \\ &\qquad = 2 \int_{\blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r))} \zeta_1 \, d\lambda - \operatorname{vol} \blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r)) - \varepsilon_d(r) \\ &\qquad < -\frac{n-1}{n!}. \end{aligned}$$

En particulier, il existe un unique nombre réel $w \in [n-1, n]$, qu'on note $w_d(n, \delta \,|\, r)$, tel que

$$\left| \operatorname{vol} \blacktriangledown(w) - 2 \int_{\blacktriangledown(w)} \zeta_1 \, d\lambda \right| = \left| \operatorname{vol} \blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r)) - 2 \int_{\blacktriangledown(u_d(n,\delta \,|\, r))} \zeta_1 \, d\lambda \right| - \varepsilon_d(r).$$

Encore en vertu du Lemme précédent, le terme de droite de cette égalité est strictement positif : le nombre réel $w_d(n, \delta \,|\, r)$ est alors strictement plus petit de n,

$$w_d(n, \delta \,|\, r) < n.$$

Pour tout nombre réel $w \in [0, n]$ avec $w > w_d(n, \delta \mid r)$ on a :

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{vol}\blacktriangledown(w) - 2\int_{\blacktriangledown(w)} \zeta_1 \, d\lambda\right| &< \left|\operatorname{vol}\blacktriangledown(w_d(n,\delta \mid r)) - 2\int_{\blacktriangledown(w_d(n,\delta\mid r))} \zeta_1 \, d\lambda\right| \\ &:= \left|\operatorname{vol}\blacktriangledown(u_d(n,\delta \mid r)) - 2\int_{\blacktriangledown(u_d(n,\delta\mid r))} \zeta_1 \, d\lambda\right| - \varepsilon_d(r),\end{aligned}$$

et on peut donc appliquer le Corollaire 6.2 avec

$$\begin{aligned} t_\theta &:= t_d(n,\delta \mid r), \\ t_x &:= w, \\ a &:= \left(\frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_n}\right). \end{aligned}$$

Il existe alors un nombre réel $C(\mathscr{E})$ qui ne dépend que du faisceau adélique localement libre $\mathscr{E}$ tel que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\begin{aligned} t_d(n,\delta)\cdot\Big(\operatorname{vol}\blacksquare(r) - d\operatorname{vol}\blacktriangle(r, t_d(n,\delta))\Big)\left(\sum_{v\in V_K}\deg(v)\min_{i=1,\dots,n}\{-r_i \log d_v(\theta_i, x_i)\}\right) \\ + \sum_{i=1}^n\left(\int_{\blacktriangledown(r,w)} \frac{\zeta_i}{r_i}\, d\lambda - \frac{\operatorname{vol}\blacktriangle(r, u_d(n,\delta\mid r)) + \operatorname{vol}\blacktriangledown(r,w)}{2}\right)\sum_{v\in V_K}\deg(v)(-r_i\log d_v(\theta_i,x_i)) \\ \le \sum_{i=1}^n\left[\int_{\blacktriangledown(r,w)}\frac{\zeta_i}{r_i}\,d\lambda\right] r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \operatorname{vol}\blacksquare(r)[K':K]\sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \\ + \operatorname{vol}\blacksquare(r)(r_1+\dots+r_n)C(\mathscr{E}). \end{aligned}$$

En laissant w tendre vers $w_d(n,\delta)$, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} t_d(n,\delta)\cdot\Big(\operatorname{vol}\blacksquare(r) - d\operatorname{vol}\blacktriangle(r, t_d(n,\delta))\Big)\left(\sum_{v\in V_K}\deg(v)\min_{i=1,\dots,n}\{-r_i \log d_v(\theta_i, x_i)\}\right) \\ + \sum_{i=1}^n\left(\int_{\blacktriangledown(r,w_d(n,\delta\mid r))} \frac{\zeta_i}{r_i}\, d\lambda - \frac{\operatorname{vol}\blacktriangle(r, u_d(n,\delta\mid r)) + \operatorname{vol}\blacktriangledown(r,w_d(n,\delta\mid r))}{2}\right)\sum_{v\in V_K}\deg(v)(-r_i\log d_v(\theta_i,x_i)) \\ \le \sum_{i=1}^n\left[\int_{\blacktriangledown(r,w_d(n,\delta\mid r))}\frac{\zeta_i}{r_i}\,d\lambda\right] r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + \operatorname{vol}\blacksquare(r)[K':K]\sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \\ + \operatorname{vol}\blacksquare(r)(r_1+\dots+r_n)C(\mathscr{E}). \end{aligned}$$

et en divisant par $\operatorname{vol}\blacksquare(r)$ on obtient :

$$\begin{aligned} t_d(n,\delta)\cdot\Big(1 - d\operatorname{vol}\blacktriangle(t_d(n,\delta))\Big)\left(\sum_{v\in V_K}\deg(v)\min_{i=1,\dots,n}\{-r_i \log d_v(\theta_i, x_i)\}\right) \\ + \sum_{i=1}^n\left(\int_{\blacktriangledown(w_d(n,\delta\mid r))} \zeta_i\, d\lambda - \frac{\operatorname{vol}\blacktriangle(u_d(n,\delta\mid r)) + \operatorname{vol}\blacktriangledown(w_d(n,\delta\mid r))}{2}\right)\sum_{v\in V_K}\deg(v)(-r_i\log d_v(\theta_i,x_i)) \\ \le \sum_{i=1}^n\left[\int_{\blacktriangledown(r,w_d(n,\delta\mid r))}\zeta_i\,d\lambda\right] r_i h_{\mathscr{E}}(x_i) + [K':K]\sum_{i=1}^n r_i h_{\mathscr{E}}(\theta_i) \\ + (r_1+\dots+r_n)C(\mathscr{E}). \end{aligned}$$

Par définition de $t_d(n,\delta)$ (équation (6.3.1)) on a $1 - d\operatorname{vol}\blacktriangle(t_d(n,\delta)) = \delta$. Puisque la valeur de l'intégrale

$$\int_{\blacktriangledown(w_d(n,\delta\mid r))} \zeta_i \, d\lambda$$

ne dépend pas de i, par définition de $w_d(n,\delta)$ (équation (6.3.3)), pour tout $i=1,\dots,n$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\blacktriangledown(w_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_i\,d\lambda-\frac{\operatorname{vol}\blacktriangledown(w_d(n,\delta\,|\,r))+\operatorname{vol}\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))}{2}&=-\left(\int_{\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_i\,d\lambda+\frac{\varepsilon_d(r)}{2}\right)\\&=-\left(\int_{\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_1\,d\lambda+\frac{\varepsilon_d(r)}{2}\right).\end{aligned}$$

Avec ces observations, l'inégalité d'avant devient

$$\begin{aligned}t_d(n,\delta)\cdot\delta&\left(\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\min_{i=1,\dots,n}\{-r_i\log d_v(\theta_i,x_i)\}\right)\\&+\left(\int_{\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_1\,d\lambda+\frac{\varepsilon_d(r)}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{v\in\mathrm{V_K}}r_i\deg(v)\log d_v(\theta_i,x_i))\\&\le\left[\int_{\blacktriangledown(r,w_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_1\,d\lambda\right]\sum_{i=1}^{n}r_ih_{\mathscr{E}}(x_i)+[\mathrm{K}':\mathrm{K}]\sum_{i=1}^{n}r_ih_{\mathscr{E}}(\theta_i)+(r_1+\cdots+r_n)\mathrm{C}(\mathscr{E}).\end{aligned}$$

Lemme 6.5. *Soient $n\ge 2$ un nombre entier, $0<\delta\le 1/(2\cdot n!)$ un nombre réel, $r=(r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs tel que $\varepsilon_d(r)\le\delta^2$. Alors on a :*

$$\int_{\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_1\,d\lambda+\frac{\varepsilon_d(r)}{2}\le\delta^{\frac{n+1}{n}}.\tag{6.3.3}$$

Lemme 6.6. *Soient $n\ge 2$ un nombre entier, $0<\delta\le 1/(2\cdot n!)$ un nombre réel, $r=(r_1,\dots,r_n)$ un n-uplet de nombres entiers strictement positifs tel que $\varepsilon_d(r)\le\delta^2$. Alors on a :*

$$\int_{\blacktriangledown(w_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_1\,d\lambda\le\left(1+4\sqrt[n]{\delta}\right)\delta\tag{6.3.4}$$

En vertu de ces deux Lemmes et en divisant par δ, on obtient :

$$\begin{aligned}t_d(n,\delta)&\left(\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\min_{i=1,\dots,n}\{-r_i\log d_v(\theta_i,x_i)\}\right)+\sqrt[n]{\delta}\sum_{i=1}^{n}r_i\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log d_v(\theta_i,x_i))\\&\le\left(1+3\sqrt[n]{\delta}\right)\sum_{i=1}^{n}r_ih_{\mathscr{E}}(x_i)+\frac{[\mathrm{K}':\mathrm{K}]}{\delta}\sum_{i=1}^{n}r_ih_{\mathscr{E}}(\theta_i)+\frac{r_1+\cdots+r_n}{\delta}\mathrm{C}(\mathscr{E}).\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Liouville (Théorème III.6.1) pour tout $i=1,\dots,n$ on a :

$$-\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log d_v(\theta_i,x_i)\le[\mathrm{K}':\mathrm{K}]\left(h_{\mathscr{E}}(x_i)+h_{\mathscr{E}}(\theta_i)+\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E})+4[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\right).$$

Par conséquent,

$$\sqrt[n]{\delta}\left(\sum_{i=1}^{n}-r_i\left(\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\log d_v(\theta_i,x_i))\right)\right)\le\sqrt[n]{\delta}[\mathrm{K}':\mathrm{K}]\sum_{i=1}^{n}r_i\left(h_{\mathscr{E}}(x_i)+h_{\mathscr{E}}(\theta_i)+\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}(\mathscr{E})+4[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\right).$$

Si on pose $\mathrm{C}([\mathrm{K}':\mathrm{K}],\mathscr{E}):=[\mathrm{K}':\mathrm{K}](\widehat{\deg}_{\mathrm{K}}\mathscr{E}+4[\mathrm{K}:\mathbf{Q}])$ on obtient

$$\begin{aligned}t_d(n,\delta)&\left(\sum_{v\in\mathrm{V_K}}\deg(v)\min_{i=1,\dots,n}\{-r_i\log d_v(\theta_i,x_i)\}\right)\\&\le\left(1+(4+[\mathrm{K}':\mathrm{K}])\sqrt[n]{\delta}\right)\sum_{i=1}^{n}r_ih_{\mathscr{E}}(x_i)+2\frac{[\mathrm{K}':\mathrm{K}]}{\delta}\sum_{i=1}^{n}r_ih_{\mathscr{E}}(\theta_i)+\frac{r_1+\cdots+r_n}{\delta}\mathrm{C}([\mathrm{K}':\mathrm{K}],\mathscr{E}),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Démonstration du Lemme 6.4. Pour alléger la notation, dans la suite on écrira u au lieu de $u_d(n,\delta\,|\,r)$. On démontre tout d'abord qu'on a $u \le 1$. En effet, puisqu'on a supposé $\delta \le 1/(2\cdot n!)$ et $\varepsilon_d(r) \le \delta^2$, on a par définition de u (équation (6.3.2)) :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\,\blacktriangle(u) &= \delta + \varepsilon_d(r) \le \delta(1+\delta)\\ &\le \frac{1}{2\cdot n!}\left(1+\frac{1}{2\cdot n!}\right)\\ &\le \frac{1}{n!} = \mathrm{vol}\,\blacktriangle(1).\end{aligned}$$

Comme la fonction vol $\blacktriangle$ est strictement croissante sur $[0,n]$, cette inégalité entraîne $u \le 1$. En particulier, d'après (1.2.9), on a :

$$\mathrm{vol}\,\blacktriangle(u) = \frac{u^n}{n!}$$

ce qui, avec (6.3.2), implique

$$u = \sqrt[n]{n!(\delta + \varepsilon_d(r))}.$$

Puisque $u \le 1$, d'après (1.3.8), on a :

$$\begin{aligned}\int_{\blacktriangle(u)} \zeta_1\, d\lambda &= \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{u}{n+1}\,\frac{u^n}{n!}\\ &= \frac{u}{n+1}\,\mathrm{vol}\,\blacktriangle(u)\end{aligned}$$

et, en vertu de (1.2.5) et (1.3.5),

$$\begin{aligned}2\int_{\blacktriangledown(u)} \zeta_1\, d\lambda - \mathrm{vol}\,\blacktriangledown(u) &= \mathrm{vol}\,\blacktriangle(u) - 2\int_{\blacktriangle(u)} \zeta_1\, d\lambda\\ &= \mathrm{vol}\,\blacktriangle(u)\left(1-\frac{2u}{n+1}\right)\\ &= (\delta+\varepsilon_d(r))\left(1-\frac{2u}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Le nombre réel

$$\begin{aligned}2\int_{\blacktriangledown(u)} \zeta_1\, d\lambda - \mathrm{vol}\,\blacktriangledown(u) - \varepsilon_d(r) &= (\delta+\varepsilon_d(r))\left(1-\frac{2u}{n+1}\right) - \varepsilon_d(r)\\ &= \delta\left(1-\frac{2u}{n+1}\right) - \frac{2u}{n+1}\varepsilon_d(r).\end{aligned}$$

est strictement positif si et seulement si

$$\delta\left(1-\frac{2u}{n+1}\right) > \frac{2u}{n+1}\varepsilon_d(r)$$

Puisque $\varepsilon_d(r) \le \delta^2$, il suffit de montrer :

$$\delta\left(1-\frac{2u}{n+1}\right) > \frac{2u}{n+1}\delta^2.$$

En divisant par δ cela a lieu si et seulement si

$$1 > \frac{2v}{n+1}(1+\delta),$$

c'est-à-dire

$$u < \frac{1}{1+\delta}\,\frac{n+1}{2}.$$

D'autre part, en ayant supposé $\delta \leq 1/(2\cdot n!)$, on a :

$$\frac{1}{1+\delta}\,\frac{n+1}{2} \geq \frac{1}{1+1/(2\cdot n!)}\,\frac{n+1}{2}$$

et il suffit de montrer :

$$\frac{1}{1+1/(2\cdot n!)}\,\frac{n+1}{2} > 1,$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{n+1}{2} > 1 + \frac{1}{2\cdot n!},$$

ou encore à :

$$(n+1)n! = n\cdot n! + n! > 2\cdot n! + 1,$$

ce qui est vrai pour tout nombre entier $n \geq 2$. Cela achève la démonstration. □

Démonstration du Lemme 6.5. Pour alléger la notation, dans la suite on écrira u au lieu de $u_d(n,\delta\,|\,r)$. D'après le Lemme 6.4 on a $u \leq 1$ et donc, par définition de u,

$$u = \sqrt[n]{n!(\delta+\varepsilon_d(r))}.$$

D'après (1.3.8) on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))} \zeta_1\, d\lambda = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{u}{n+1}\operatorname{vol}\blacktriangle(u) \\
&= (\delta+\varepsilon_d(r))\,\frac{\sqrt[n]{n!(\delta+\varepsilon_d(r))}}{n+1} \\
&= (\delta+\varepsilon_d(r))^{\frac{n+1}{n}}\,\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Puisqu'on a supposé $\varepsilon_d(r) \leq \delta^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))} \zeta_1\, d\lambda + \frac{\varepsilon_d(r)}{2} &= (\delta+\varepsilon_d(r))^{\frac{n+1}{n}}\,\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} + \frac{\varepsilon_d(r)}{2} \\
&\leq \delta^{\frac{n+1}{n}}\,(1+\delta)^{\frac{n+1}{n}}\,\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} + \frac{\delta^2}{2} \\
&= \delta^{\frac{n+1}{n}}\left[\left(1+\frac{1}{2\cdot n!}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} + \frac{\delta^{\frac{n-1}{n}}}{2}\right]
\end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer qu'on a :

$$\left(1+\frac{1}{2\cdot n!}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} + \frac{\delta^{\frac{n-1}{n}}}{2} \leq 1.$$

Puisque $n \geq 2$, on a $\delta \leq 1/(2\cdot n!) \leq 1/4$. Il suffit alors de montrer :

$$\left(1+\frac{1}{2\cdot n!}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \leq \frac{3}{4}.$$

En prenant le logarithme, cette inégalité est équivalente à la suivante :

$$\frac{n+1}{n}\log\left(1+\frac{1}{2\cdot n!}\right) \leq \log\left(\frac{3}{4}\right)+\log(n+1)-\frac{1}{n}\log(n!).$$

En multipliant par n on obtient :

$$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{2\cdot n!}\right) \leq n\log\left(\frac{3}{4}\right)+n\log(n+1)-\log(n!). \tag{6.3.5}$$

Le terme de gauche

$$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{2\cdot n!}\right)$$

est décroissant en n, alors que le terme de droite

$$\log\left(\frac{3}{4}\right)n+n\log(n+1)-\log(n!)$$

est croissant en n. Il suffit, enfin, d'établir la validité de (6.3.5) pour $n=2$, *i.e.*, de vérifier que

$$3\log\left(\frac{3}{4}\right) \leq 2\log\left(\frac{3}{4}\right)+2\log 3-\log 2.$$

Cela est vrai car le terme de droite se récrit sous la forme $3\log(3/4)+\log 6$. □

Démonstration du Lemme 6.6. Pour alléger la notation, dans la suite on écrira w et u respectivement au lieu de $w_d(n,\delta\,|\,r)$ et $u_d(n,\delta\,|\,r)$. Puisque $w\in[n-1,n]$ le nombre réel

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\blacktriangledown(w)-2\int_{\blacktriangledown(w)}\zeta_1\,d\lambda &= \frac{(n-w)^n}{n!}-2\frac{(n-w)^n}{n!}\left(1-\frac{n-w}{n+1}\right)\\ &= -\frac{(n-w)^n}{n!}\left(1-2\frac{n-w}{n+1}\right)\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

est négatif. Par définition de w (équation (6.3.3)) on a :

$$\begin{aligned}2\int_{\blacktriangledown(w)}\zeta_1\,d\lambda-\operatorname{vol}\blacktriangledown(w) &= 2\int_{\blacktriangledown(u)}\zeta_1\,d\lambda-\operatorname{vol}\blacktriangledown(u)-\varepsilon_d(r)\\ &= \operatorname{vol}\blacktriangle(u)-2\int_{\blacktriangle(u)}\zeta_1\,d\lambda-\varepsilon_d(r).\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

D'après le Lemme 6.4 on a $u\leq 1$ et donc, par (1.3.8), on a :

$$\int_{\blacktriangle(u_d(n,\delta\,|\,r))}\zeta_1\,d\lambda=\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{u}{n+1}\operatorname{vol}\blacktriangle(u)$$

En utilisant cette égalité dans (6.3.7), par définition de u (équation (6.3.2)), on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\blacktriangle(u)-2\int_{\blacktriangle(u)}\zeta_1\,d\lambda-\varepsilon_d(r) &= (\delta+\varepsilon_d(r))\left(1-\frac{2u}{n+1}\right)-\varepsilon_d(r)\\ &= \delta-\frac{2u}{n+1}(\delta+\varepsilon_d(r))\leq\delta\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

En vertu de (6.3.6), (6.3.7) et (6.3.8) on a :

$$2\int_{\blacktriangledown(w)}\zeta_1\,d\lambda-\operatorname{vol}\blacktriangledown(w)=\frac{(n-w)^n}{n!}\left(1-2\frac{n-w}{n+1}\right)\leq\delta. \tag{6.3.9}$$

Puisque $n-w\le 1$, on a :

$$1-2\frac{n-w}{n+1}\le 1-\frac{2}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$$

et, en revenant à (6.3.9), on obtient :

$$\operatorname{vol}\blacktriangledown(w)=\frac{(n-w)^n}{n!}\le\frac{n+1}{n-1}\delta,$$

ce qui entraîne

$$n-w\le\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\delta}.$$

En utilisant cette inégalité à nouveau dans (6.3.9) on obtient :

$$\operatorname{vol}\blacktriangledown(w)=\frac{(n-w)^n}{n!}\le\left(1-\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\delta}\right)^{-1}\delta. \tag{6.3.10}$$

On a :

$$\left(1-\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\delta}\right)^{-1}=1+\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\delta}\left(1-\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\delta}\right)^{-1}. \tag{6.3.11}$$

Puisque, par hypothèse $\delta\le 1/(2\cdot n!)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\cdot\delta}&\le\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\frac{1}{2\cdot n!}}\\&=\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}}\end{aligned}$$

Pour tout nombre entier $n\ge 2$ on a :

$$\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}}\le\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{6.3.12}$$

En effet, en prenant la puissance n-ième, cette inégalité est équivalente à l'inégalité :

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{n+1}\right)^n\le\frac{2(n-1)}{n+1}=2-\frac{4}{n+1}$$

Un calcul montre que cette dernière inégalité est vraie pour $n=2$; si $n\ge 3$ le terme de gauche est ≤ 1, alors que le terme de droite est ≥ 1. En vertu de (6.3.11) et (6.3.12), (6.3.10) devient :

$$\operatorname{vol}\blacktriangledown(w)=\frac{(n-w)^n}{n!}\le\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n-1}\delta}\right)\delta, \tag{6.3.13}$$

où on a écrit

$$\frac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Pour tout nombre entier $n\ge 2$ on a

$$\frac{2}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n}}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

On obtient :

$$\operatorname{vol} \blacktriangledown(w) = \frac{(n-w)^n}{n!} \leq \left(1 + \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt[n]{\delta}\right)\delta \tag{6.3.14}$$

et on conclut en remarquant

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2 \leq 4,$$

ce qu'il fallait prouver. $\square$

Bibliographie

[AL93] H. Azad et J. J. Loeb, *Plurisubharmonic functions and the Kempf-Ness theorem*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 162–168.

[Ber90] V. G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[Ber93] ———, *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1993), no. 78, 5–161 (1994).

[Ber07] ———, *Integration of one-forms on p-adic analytic spaces*, Annals of Mathematics Studies, vol. 162, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. MR 2263704 (2008a :14035)

[BFJ12] S. Boucksom, C. Favre, et M. Jonsson, *Singular semipositive metrics in non-Archimedean geometry*, `arXiv:1201.0187`, 2012.

[BG06] E. Bombieri et W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, et R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry.

[BGS94] J.-B. Bost, H. Gillet, et C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), no. 4, 903–1027.

[Bog78] F. A. Bogomolov, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 6, 1227–1287, 1439.

[Bom82] E. Bombieri, *On the Thue-Siegel-Dyson theorem*, Acta Math. **148** (1982), 255–296.

[Bom90] ———, *The Mordell conjecture revisited*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **17** (1990), no. 4, 615–640.

[Bor91] A. Borel, *Linear algebraic groups*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Bos94] J.-B. Bost, *Semi-stability and heights of cycles*, Invent. Math. **118** (1994), no. 2, 223–253.

[Bos96a] ———, *Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 1, 21–70.

[Bos96b] ———, *Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz)*, Astérisque (1996), no. 237, Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.

[Bos04] ———, *Germs of analytic varieties in algebraic varieties : canonical metrics and arithmetic algebraization theorems*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, pp. 371–418.

[BR10] M. Baker et R. Rumely, *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 159, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[BT72] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1972), no. 41, 5–251.

[BT84] ———, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1984), no. 60, 197–376.

[Bur92] J.-F. Burnol, *Remarques sur la stabilité en arithmétique*, Internat. Math. Res. Notices (1992), no. 6, 117–127.

[Car52] *Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, Sém. Cartan 1951/52, no. 4, Paris, École Normale Supérieure, 1952.

[Car54] *Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes*, Sém. Cartan 1953/54, no. 6, Paris, École Normale Supérieure, 1954.

[Che09] H. Chen, *Maximal slope of tensor product of Hermitian vector bundles*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), no. 3, 575–603.

[CLD12] A. Chambert-Loir et A. Ducros, *Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich*, `arXiv:1204.6277`, 2012.

[CLT01] A. Chambert-Loir et Y. Tschinkel, *Torseurs arithmétiques et espaces fibrés*, Rational points on algebraic varieties, Progr. Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 37–70.

[CR93] T. Chinburg et R. Rumely, *The capacity pairing*, J. Reine Angew. Math. **434** (1993), 1–44.

[Dem] J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, version du 10 septembre 2009, téléchargeable à `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`.

[Dem65] M. Demazure, *Schémas en groupes réductifs*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 369–413.

[SGA 3] M. Demazure et A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1962-64 - Schémas en groupes - (SGA 3)*, Lecture Notes in Math., vol. 151, Springer, Berlin, 1970.

[Dys47] F. J. Dyson, *The approximation to algebraic numbers by rationals*, Acta Math. **79** (1947), 225–240.

[EV84] H. Esnault et E. Viehweg, *Dyson's lemma for polynomials in several variables (and the theorem of Roth)*, Invent. Math. **78** (1984), no. 3, 445–490.

[Fal83] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366.

[Fal84] ———, *Erratum : "Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern"*, Invent. Math. **75** (1984), no. 2, 381.

[Fal91] ———, *Diophantine approximation on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), no. 3, 549–576.

[Fal94] ———, *The general case of S. Lang's conjecture*, Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991), Perspect. Math., vol. 15, Academic Press, San Diego, CA, 1994, pp. 175–182.

[Fal95] ———, *Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 648–655.

[FJ04] C. Favre et M. Jonsson, *The valuative tree*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[FN80] J. E. Fornæss et R. Narasimhan, *The Levi problem on complex spaces with singularities*, Math. Ann. **248** (1980), no. 1, 47–72.

[FW94] G. Faltings et G. Wüstholz, *Diophantine approximations on projective spaces*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 109–138.

[Gas97] C. Gasbarri, *Hauteurs canoniques sur l'espace de modules des fibrés stables sur une courbe algébrique*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), no. 4, 457–491. MR 1630914 (99e :14029)

[Gas00] ———, *Heights and geometric invariant theory*, Forum Math. **12** (2000), no. 2, 135–153.

[Gas03] ———, *Heights of vector bundles and the fundamental group scheme of a curve*, Duke Math. J. **117** (2003), no. 2, 287–311.

[Gau08] É. Gaudron, *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **119** (2008), 21–95.

[Gel49] A. O. Gel'fond, *The approximation of algebraic numbers by algebraic numbers and the theory of transcendental numbers*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **4** (1949), no. 4(32), 19–49.

[Gel60] ———, *Transcendental and algebraic numbers*, Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron, Dover Publications Inc., New York, 1960.

[GI63] O. Goldman et N. Iwahori, *The space of $\mathfrak{p}$-adic norms*, Acta Math. **109** (1963), 137–177.

[GR56] H. Grauert et R. Remmert, *Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen*, Math. Z. **65** (1956), 175–194.

[EGA 1] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1960), no. 4, 228.

[EGA 2] ______, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 8, 222.

[Gro61b] ______, *Techniques de construction en géométrique analytique : II. Généralités sur les espaces annelés et les espaces analytiques*, Sém. Cartan 1960/61, no. 9, 1961.

[Gro61c] ______, *Techniques de construction en géométrique analytique : III. Produits fibrés d'espaces analytiques*, Sém. Cartan 1960/61, no. 10, 1961.

[Gro61d] ______, *Techniques de construction en géométrique analytique : V. Fibrés vectoriels, fibrés projectifs, fibrés en drapeaux*, Sém. Cartan 1960/61, no. 12, 1961.

[EGA 4] ______, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1964), no. 20, 259.

[SGA 1] ______, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. MR 0354651 (50 #7129)

[GS82a] V. Guillemin et S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 491–513.

[GS82b] ______, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 515–538.

[GS84] ______, *Convexity properties of the moment mapping. II*, Invent. Math. **77** (1984), no. 3, 533–546.

[HS00] M. Hindry et J. H. Silverman, *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction.

[Kan89] E. Kani, *Potential theory on curves*, Théorie des nombres (Quebec, PQ, 1987), de Gruyter, Berlin, 1989, pp. 475–543.

[Kem78] G. Kempf, *Instability in invariant theory*, Ann. of Math. (2) **108** (1978), no. 2, 299–316.

[Kle79] S. L. Kleiman, *Misconceptions about* K_X, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3-4, 203–206 (1980).

[KN79] G. Kempf et L. Ness, *The length of vectors in representation spaces*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 732, Springer, Berlin, 1979, pp. 233–243.

[Lan83] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[Lau91] M. Laurent, *Sur quelques résultats récents de transcendance*, Astérisque (1991), no. 198-200, 209–230 (1992), Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy, 1989).

[Lel42] P. Lelong, *Définition des fonctions plurisousharmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **215** (1942), 398–400.

[Lio44] J. Liouville, *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C. r. Acad. Sci. (Paris) **18** (1844), 883–910.

[Lio51] ______, *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, J. Math. pures appl. (1) **16** (1851), 133–142.

[GIT] D. Mumford, J. Fogarty, et F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Mil88] V. D. Milman, *The heritage of P. Lévy in geometrical functional analysis*, Astérisque (1988), no. 157-158, 273–301, Colloque Paul Lévy sur les Processus Stochastiques (Palaiseau, 1987).

[Nak95] M. Nakamaye, *Dyson's lemma and a theorem of Esnault and Viehweg*, Invent. Math. **121** (1995), no. 2, 355–377.

[Nak99] ______, *Intersection theory and Diophantine approximation*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 1, 135–146.

[New78] P. E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 51, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.

[Oka42] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. Domaines pseudoconvexes*, Tôhoku Math. J. **49** (1942), 15–52.

[Poi11] J. Poineau, *Les espaces de Berkovich sont angéliques*, `arXiv:1105.0250`, 2011.

[Poi12] ______, *Espaces de Berkovich sur* $\mathbf{Z}$ *: étude locale*, `arXiv:1202.0799`, 2012.

[Rot55] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20 ; corrigendum, 168.

[Rou77] G. Rousseau, *Immeubles des groupes réducitifs sur les corps locaux*, U.E.R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay, 1977, Thèse de doctorat, Publications Mathématiques d'Orsay, No. 221-77.68.

[Rou78] ______, *Immeubles sphériques et théorie des invariants*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), no. 5, A247–A250.

[Rou09] ______, *Euclidean buildings*, Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités, Sémin. Congr., vol. 18, Soc. Math. France, Paris, 2009, pp. 77–116.

[RTW09] B. Rémy, A. Thuillier, et A. Werner, *Bruhat-Tits theory from Berkovich' s point of view. II : Satake compactifications of buildings*, `arXiv:0907.3264`, 2009.

[RTW10] ______, *Bruhat-Tits theory from Berkovich's point of view. I. Realizations and compactifications of buildings*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **43** (2010), no. 3, 461–554.

[RTW11] ______, *Bruhat-Tits buildings and analytic geometry*, `arXiv:1110.1362`, 2011.

[Rum89] R. Rumely, *Capacity theory on algebraic curves*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1378, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Rum93] ______, *On the relation between Cantor's capacity and the sectional capacity*, Duke Math. J. **70** (1993), no. 3, 517–574.

[Rum95] ______, *An intersection pairing for curves, with analytic contributions from non-Archimedean places*, Number theory (Halifax, NS, 1994), CMS Conf. Proc., vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 325–357.

[RV97] M. Ru et P. Vojta, *Schmidt's subspace theorem with moving targets*, Invent. Math. **127** (1997), no. 1, 51–65.

[Sat63] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over* $\mathfrak{p}$*-adic fields*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1963), no. 18, 5–69.

[Sch71a] W. M. Schmidt, *Linear forms with algebraic coefficients. I*, J. Number Theory **3** (1971), 253–277.

[Sch71b] ______, *Linearformen mit algebraischen Koeffizienten. II*, Math. Ann. **191** (1971), 1–20.

[Sch76] H. P. Schlickewei, *Linearformen mit algebraischen koeffizienten*, Manuscripta Math. **18** (1976), no. 2, 147–185.

[Sch80] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 785, Springer, Berlin, 1980.

[Sch00] G. W. Schwarz, *Quotients of compact and complex reductive groups*, Théorie des invariants & Géometrie des variétés quotients, Travaux en cours, vol. 61, Hermann et cie., 2000.

[Ser55] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 197–278.

[Ser97] ______, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, third ed., Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997, Translated from the French and edited by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, With a foreword by Brown and Serre.

[Ses77] C. S. Seshadri, *Geometric reductivity over arbitrary base*, Advances in Math. **26** (1977), no. 3, 225–274.

[Sie21] C. Siegel, *Approximation algebraischer Zahlen*, Math. Z. **10** (1921), no. 3-4, 173–213.

[Tem04] M. Temkin, *On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II*, Israel J. Math. **140** (2004), 1–27.

[Thu05] A. Thuillier, *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov*, U.F.R. Mathématiques, Université Rennes 1, 2005, Thèse de doctorat.

[Vio85] C. Viola, *On Dyson's lemma*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **12** (1985), no. 1, 105–135.

[Voj89a] P. Vojta, *Dyson's lemma for products of two curves of arbitrary genus*, Invent. Math. **98** (1989), no. 1, 107–113.

[Voj89b] ______, *Mordell's conjecture over function fields*, Invent. Math. **98** (1989), no. 1, 115–138.

[Voj92] ______, *A generalization of theorems of Faltings and Thue-Siegel-Roth-Wirsing*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 4, 763–804.

[Voj96] ______, *Roth's theorem with moving targets*, Internat. Math. Res. Notices (1996), no. 3, 109–114.

[Wey39] H. Weyl, *Invariants*, Duke Math. J. **5** (1939), 489–502.

[Zha94] S. Zhang, *Geometric Reductivity at Archimedean Places*, Internat. Math. Res. Notices (1994), no. 10, 425–433.

[Zha95] ______, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 1, 187–221.

Applications de la théorie géométrique des invariants à la géométrie diophantienne

Mots clés : Théorie géométrique des invariants, géométrie d'Arakelov, approximation diophantienne, théorie de Kempf-Ness.

Résumé : La théorie géométrique des invariants constitue un domaine central de la géométrie algébrique d'aujourd'hui : développée par Mumford au début des années soixante, elle a conduit à des progrès considérables dans l'étude des variétés projectives, notamment par la construction d'espaces de modules.

Dans les vingt dernières années des interactions entre la théorie géométrique des invariants et la géométrie arithmétique – plus précisément la théorie des hauteurs et la géométrie d'Arakelov – ont été étudiés par divers auteurs (Burnol, Bost, Zhang, Soulé, Gasbarri, Chen).

Dans cette thèse nous nous proposons d'un côté d'étudier de manière systématique la théorie géométrique des invariants dans le cadre de la géométrique d'Arakelov ; de l'autre de montrer que ces résultats permettent une nouvelle approche géométrique (distincte aussi de la méthode des pentes développée par Bost) aux résultats d'approximation diophantienne, tels que le Théorème de Roth et ses généralisations par Lang, Wirsing et Vojta.

Applications of geometric invariant theory to diophantine geometry

Key words : Geometric invariant theory, Arakelov geometry, diophantine approximation, Kempf-Ness theory.

Abstract : Geometric invariant theory is a central subject in nowadays' algebraic geometry : developed by Mumford in the early sixties, it enhanced the knowledge of projective varieties through the construction of moduli spaces.

During the last twenty years, interactions between geometric invariant theory and arithmetic geometric — more precisely, height theory and Arakelov geometry — have been exploited by several authors (Burnol, Bost, Zhang, Soulé, Gasbarri, Chen).

In this thesis we firstly study in a systematic way how geometric invariant theory fits in the framework of Arakelov geometry ; then we show that these results give a new geometric approach to questions in diophantine approximation, proving Roth's Theorem and its recent generalizations by Lang, Wirsing and Vojta.