Etude théorique et numérique de quelques problèmes d'écoulements et de chaleur hyperbolique

Imane Boussetouan

Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS
Ecole Doctorale Sciences, Ingénierie, Santé : ED SIS 488

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

SAINT-ÉTIENNE

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

Etude théorique et numérique de quelques problèmes d'écoulements et de chaleur hyperbolique

---

par

Imane BOUSSETOUAN

soutenue le 10 Décembre 2012 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	Grzegorz Łukaszewicz	Professeur, Université de Varsovie
	Mircea Sofonea	Professeur, Université de Perpignan
Examinateurs :	Youcef Amirat	Professeur, Université Clermont Ferrand
	Ioan Ionescu	Professeur, Université PARIS 13
	Ionel Ciuperca	Maitre de conférences, ICJ, Lyon
Directeur de thèse :	Mahdi Boukrouche	Professeur, ICJ, Saint-Etienne
Co-directrice de thèse :	Laetitia Paoli	Professeur, ICJ, Saint-Etienne

Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS
Ecole Doctorale Sciences, Ingénierie, Santé : ED SIS 488

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

SAINT-ÉTIENNE

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

Etude théorique et numérique de quelques problèmes d'écoulements et de chaleur hyperbolique

---

par

Imane BOUSSETOUAN

soutenue le 10 Décembre 2012 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	Grzegorz Łukaszewicz	Professeur, Université de Varsovie
	Mircea Sofonea	Professeur, Université de Perpignan
Examinateurs :	Youcef Amirat	Professeur, Université Clermont Ferrand
	Ioan Ionescu	Professeur, Université PARIS 13
	Ionel Ciuperca	Maitre de conférences, ICJ, Lyon
Directeur de thèse :	Mahdi Boukrouche	Professeur, ICJ, Saint-Etienne
Co-directrice de thèse :	Laetitia Paoli	Professeur, ICJ, Saint-Etienne

"To accomplish great things, we must not only act, but also dream ;
not only plan, but also believe."

Anatole France

Remerciements

J'adresse du fond du coeur quelques mots de remerciements et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à ce travail. Que me pardonnent ceux que j'oublie ici.

Mes premières pensées vont à mes directeurs de thèse Monsieur Mahdi Boukrouche et Madame Laetitia Paoli, Professeurs à l'université Jean Monnnet de Saint-Etienne. Ces trois années sous leur direction furent pour moi un vrai enrichissement. Je leur exprime ma profonde gratitude pour m'avoir initiée à la recherche, pour leur disponibilité permanente, leur patience et leur suivi continu. J'ai beaucoup appris à leurs cotés, tant au niveau pédagogique que scientifique. Je les remercie pour leurs précieux conseils et tout le savoir qu'ils m'ont transmis.

Juger un travail de thèse n'est pas chose aisée. Pour cela je remercie Monsieur Grzegorz Lukaszewicz, Professeur à l'université de Varsovie et Monsieur Sofonea Mircea, Professeur à l'université de Perpignan d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter ma thèse. Je les remercie pour l'intêret qu'ils ont accordé à mon travail et pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce manuscrit.

Je témoigne toute ma reconnaissance à Monsieur Youcef Amirat, Professeur à l'université de Clermont Ferrand, Monsieur Ioan Ionescu, Professeur à l'université de Paris 13 et Monsieur Ionel Ciuperca, Maitre de conférences à l'université Claude Bernard, d'avoir accepé de faire partie de mon jury de thèse.

Ce travail de thèse restera pour moi indissociable de l'environnement dans lequel je l'ai effectué. Je souhaite exprimer ma gratitude aux membres du laboraoire de mathématiques de l'université Jean Monnet de Saint-Etienne, professeurs et doctorants sans oublier notre secretaire.

Je remercie particulièrement mes collègues du bureau B105, Ahmed, Nachit, Boulam, Prasenjit, Irina pour leur bonne humeur et leur écoute.

Viennent maintenant ceux qui ont partagé mon quotidien de thésarde. Je commence par ceux qui sont devenus mes plus belles amitiés : Roula et Domenico. Je remercie Roula pour son soutien malgrè les kilomètres qui nous séparent, elle a toujours une pensée pour

moi, Domenico pour sa présence et son humour. Je n'oublierai jamais nos soirées, nos dépressions, nos craintes et l'espoir qu'on avait toujours, de réussir.

Merci à mes amies Wafa, Georgette, Chahrazed, Dalila, Ahlem, Angela, Taline, Hanane...d'avoir toujours été là malgrè le peu de temps que je leur consacre depuis quelques mois. Elles ont rendu ces trois ans agréables à vivre. Ceux qui étaient au passage à Saint-Etienne Faten, Riccardo, Ausilia...

Je ne saurai comment remercier celui qui a donné de la couleur à cette dernière année de thèse, Racim qui m'a supportée sans cesse, qui m'a toujours aidée à aller de l'avant et à surmonter mon stress.

Viennent maintenant ceux que je ne pourrais jamais remercier assez, mes soeurs : Amel (pour toutes nos discussions sur skype, pour sa présence constante), Sabah (pour sa bonne humeur, son soutien et son sourire qui donne envie de se battre pour y arriver), Lamia (ma petite étoile, merci d'être ce que tu es, tu es mon exemple et mon énergie). Je remercie ma deuxième maman (Zahia) pour ses appels, ses encouragements et tout l'amour qu'elle me porte. Je n'oublierai pas mes petits choux Hakou, Khaled et Bobo.

Enfin, rien de tout cela n'aura été accompli sans la présence de deux personnes : Mes parents, je leur dois tout ce que je suis. Je les remercie pour leur amour infini, leur soutien sans faille et leurs douâas. Ils sont la genèse de ce travail et cette thèse leur est dédiée.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Ce travail de thèse a pour but d'étudier des écoulements instationnaires de fluides incompressibles Newtoniens et non isothermes. Le problème est décrit par les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v \right) = div(\sigma) + \rho f \\ \rho a \frac{\partial T}{\partial t} + div(q) = \phi \end{cases}$$

où ρ est la densité du fluide, v sa vitesse, T sa température, a sa capacité thermique et σ est le tenseur des contraintes, q le flux de chaleur, f la force extérieure appliquée au fluide par unité de masse et ϕ est la dissipation d'énergie due au mouvement du fluide. Dans le cas d'un fluide Newtonien

$$\sigma = -pI + 2\mu D(v),$$

où p est la pression du fluide, $D(v) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est le tenseur des taux de déformation et μ est la viscosité du fluide. Si la densité ρ est constante, la loi de conservation de la masse se réduit à

$$div(v) = 0,$$

et on peut supposer sans perte de généralité que $\rho = 1$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v - 2div(\mu D(v)) + \nabla p = f \\ div(v) = 0 \\ a \frac{\partial T}{\partial t} + div(q) = \phi \end{cases}$$

La conduction de la chaleur dans un milieu homogène est habituellement décrite par la loi de Fourier [28] qui relie le flux de chaleur à la température par la relation

$$q = -K\nabla T,$$

où K est la conductivité thermique du matériau. Cette loi conduit à une équation de la chaleur parabolique

$$a\frac{\partial T}{\partial t} - div(K\nabla T) = \phi. \tag{1.1}$$

Dans le cas simplifié où la capacité et la conductivité thermiques sont constantes et $\phi = 0$, avec des conditions aux limites de Dirichlet pour T, le principe du maximum implique que si $T(t_0, x) \geq 0$ avec $T(t_0, x) \not\equiv 0$ alors $T(t, x) > 0$ pour tout $t > 0$ [8], ce qui signifie que la chaleur se propage à une vitesse infinie. Cette propriété, connue sous le nom de "paradoxe de la chaleur" ne correspond pas à la réalité physique notamment dans des situations présentant de forts gradients de température ou des temps d'observation très courts [6, 10, 25, 26, 30, 33, 34, 39, 40, 42, 44, 48, 55, 56].

De nombreuses modifications de la loi de Fourier ont été proposées pour éviter ce défaut [33, 19]. Parmi celles-ci, l'une des plus anciennes et des plus utilisées est due à Cattaneo [18] et consiste à introduire un terme de la forme $b\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$, avec $0 < b << 1$, dans le membre de gauche de l'équation (1.1) conduisant à une équation hyperbolique. Dans le cas simplifié où la capacité thermique est constante égale à 1 et $\phi = 0$ on a alors

$$b\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - div(K\nabla T) = 0 \tag{1.2}$$

ce qui peut se décomposer en

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + div(q) = 0, \\ q + b\frac{\partial q}{\partial t} = -K\nabla T. \end{cases} \tag{1.3}$$

En identifiant $q + b\frac{\partial q}{\partial t}$ à $q(. + b)$, on obtient

$$q(t + b) = -K\nabla T(t),$$

et le terme b peut s'interpréter comme un temps de relaxation dû à une propagation à vitesse finie de la chaleur. La valeur de b est très faible (de l'ordre de 10^{-13} à 10^{-10} seconde

[33]), mais cette modification de la loi de Fourier permet de corriger le "paradoxe de la chaleur" et d'obtenir une meilleure description de la réalité.

Notons que des modifications de même type ont également été proposées par différents auteurs dans la modélisation d'écoulements Newtoniens [45, 49].

Dans ce travail, nous nous intéressons au couplage entre le système de Navier-Stokes donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v - 2div(\mu D(v)) + \nabla p = f \\ div(v) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

et l'équation de la chaleur hyperbolique

$$b\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a\frac{\partial T}{\partial t} - div(K\nabla T) = \phi \tag{1.5}$$

Une première étude pour ce type de problèmes a été réalisée dans [25] pour le cas d'un problème d'extrusion de polymères. Avec un développement asymptotique formel par rapport à l'épaisseur du domaine occupé par le fluide, le problème se simplifie et est décrit par une seule équation pour la température, la vitesse et la pression étant obtenues comme solutions d'un problème indépendant de T.

Dans notre cas, nous considérons le système (1.4)-(1.5) et nous ferons l'hypothèse que la viscosité du fluide dépend de T alors que la capacité thermique et le terme de dissipation dans (1.5) dépendent de v. Nous obtenons ainsi un problème non linéaire parabolique-hyperbolique couplé. De plus, dans le prolongement de résultats obtenus dans [15, 16, 12], nous considérons des conditions aux limites de type Tresca ou Coulomb sur une partie du bord du domaine occupé par le fluide.

Afin d'obtenir un résultat d'existence pour le problème couplé, nous étudions tout d'abord l'équation de la chaleur hyperbolique dans le chapitre 2. Nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité par une méthode de Galerkin puis nous introduisons une discrétisation en temps et nous établissons la convergence des solutions approchées vers la solution du problème original. Dans un deuxième temps nous étudions le système de Navier-Stokes muni des conditions aux limites de type Tresca ou Coulomb. Dans le chapitre 3 nous prouvons l'existence d'une solution via l'étude de la convergence des solutions d'une suite de problèmes régularisés et nous montrons que cette solution est unique sous réserve que la

viscosité du fluide soit suffisamment grande si on se place en dimension 3.
Dans le chapitre 4, nous proposons une discrétisation en temps du problème d'écoulement dans le cas de la condition au limite de type Tresca et nous établissons la convergence des solutions approchées.
Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude du problème couplé dans le cas de conditions aux limites de type Tresca. L'existence d'une solution est obtenue par un argument théorique de point fixe en dimension 2 et également par une méthode de discrétisation en temps qui conduit à résoudre sur chaque sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ un problème découplé pour la vitesse et la pression d'une part et la température d'autre part.

Chapitre 2

Etude de l'équation de la chaleur hyperbolique

2.1 Introduction

Le premier chapitre consiste en l'étude de l'équation de la chaleur hyperbolique qui est le résultat de la combinaison entre la loi de Cattaneo [18] et la loi de conservation de l'énergie dont l'inconnue principale est la température T. Il est partagé en deux parties : la première est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de solution de l'équation de la chaleur hyperbolique (dont la conduction thermique dépend de x et de t) avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann. Après avoir énoncé le problème, on écrit sa formulation variationnelle. Ensuite, on traite l'existence de solutions par la méthode de Galerkin. Enfin, on étudie l'unicité de la solution de ce problème. Dans la seconde partie, on se limite à des conditions de Dirichlet, on approche le problème cité ci-dessus par une technique de discrétisation en temps. On considère un problème auxiliaire dans lequel la conduction thermique ne dépend que de x, puis par la méthode spectrale, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de ce dernier. On achève ce chapitre par l'étude de la convergence des solutions approchées, qui correspondent aux solutions du problème discrétisé en temps, vers la solution du problème hyperbolique initial lorsque le pas de temps tend vers zéro.

2.2 Position du problème

On considère Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, à frontière régulière, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. On commence par énoncer le problème hyperbolique suivant

Problème 2.2.1. *Trouver $T : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\begin{cases} b\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a(x,t)\frac{\partial T}{\partial t} - div(K(x,t)\nabla T) = \phi(x,t) \quad dans \quad \Omega \times [0,\tau] \\ T(x,t) = g_1(t) \quad sur \quad \Gamma_1 \times (0,\tau) \\ (K\nabla T).\nu = g_2(t) \quad sur \quad \Gamma_2 \times (0,\tau) \\ T(0,x) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial t}(0,x) = T_1. \end{cases} \tag{2.1}$$

L'inconnue principiale de ce système est la température T, g_1 et g_2 décrivent les conditions au bord de type Dirichlet-Neumann. Les conditions initiales sont définies dans

$$T_0 \in H^1(\Omega), \quad T_1 \in L^2(\Omega). \tag{2.2}$$

On suppose que

$$\phi \in L^2(0,\tau; L^2(\Omega)) \tag{2.3}$$

$$g_2 \in H^1(0,\tau; L^2(\Gamma_2)), \tag{2.4}$$

et qu'il existe $G \in C^2([0,\tau]; H^1(\Omega))$ tel que

$$G = g_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,\tau].$$

On suppose de plus que

$$T_0 = g_1(0) \text{ sur } \Gamma_1.$$

La matrice de conductivité thermique K est symétrique et satisfait

$$\begin{cases} K_{ij} \in W^{1,\infty}(0,\tau; L^\infty(\Omega)) \\ \exists \alpha^* > 0 : \quad \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha^* |\xi_i|^2, \quad \text{p.p} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{2.5}$$

On notera

$$M = \|\frac{\partial K}{\partial t}\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}, \tag{2.6}$$

$$\alpha_* = \|K\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}. \tag{2.7}$$

La fonction a est telle que

$$a \in L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega)) \quad a' \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega)),$$

et on suppose qu'il existe a_*, a^* deux constantes strictement positives telles que

$$0 < a^* \leq a(x,t) \leq a_*, \quad \text{p.p} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau). \tag{2.8}$$

Notons que b est une constante strictement positive.

2.2.1 La formulation variationnelle

Afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème 2.2.1, on introduit l'espace fonctionnel suivant

$$V = \{\varphi : \quad \varphi \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\}. \tag{2.9}$$

V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$, donc V est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|.\|_V = \left(\|.\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla .\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit $G_0 \in H^1(\Omega)$ et $G_1 \in H^1(\Omega)$ ainsi

$$G(0,x) = G_0$$
$$G'(0,x) = G_1.$$

En utilisant le changement de variable $u = T - G$, le problème 2.2.1 devient

$$\begin{cases} bu'' + a(x,t)u' - div(K(x,t)\nabla(u+G)) = \phi - a(x,t)G' - bG'' \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,\tau] \\ (K(x,t)\nabla(u+G)).\nu = g_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0,\tau] \\ u(0,x) = T_0 - G_0 \\ u'(0,x) = T_1 - G_1. \end{cases}$$

On notera par

$$u(0,x) = u_0(x) \in V. \tag{2.10}$$

$$u'(0,x) = u_1(x) \in L^2(\Omega). \tag{2.11}$$

La formulation faible est donnée par

Problème 2.2.2. *Trouver* $u \in L^2(0,\tau;V)$ *avec* $u' \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$ *et* $u'' \in L^2(0,\tau;V')$ *vérifiant le problème suivant (au sens des distributions)*

$$\begin{aligned} &b < u''(t), w > +(a(x,t)u'(t),w) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w) = (\phi(t),w) + (g_2(t),w)_{\Gamma_2} \\ &-(a(x,t)G'(t),w) - b < G''(t), w > -(K(x,t)\nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2.13}$$

$$u'(0) = u_1, \tag{2.14}$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, $< .,. >$ est le produit de dualité entre V et V', $(.,.)_{\Gamma_2}$ est le produit scalaire dans $L^2(\Gamma_2)$, V' est l'espace dual de V.

Remarque 2.2.1. *On a alors*

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau [b < u''(t), w > +(a(x,t)u'(t),w) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w)]\, dt = \int_0^\tau (\phi(t),w) + (g_2(t),w)_{\Gamma_2}\, dt \\ &- \int_0^\tau [(a(x,t)G'(t),w) + b < G''(t), w > +(K(x,t)\nabla G, \nabla w)]\, dt, \quad \forall w \in L^2(0,\tau;V). \end{aligned}$$

Pour prouver l'existence de solutions du problème (2.2.2), on utilise la méthode de Galerkin qui approche le problème en dimension infinie par un problème en dimension finie. En effet, elle consiste en l'approximation de la solution du problème variationnel par la solution d'un système différentiel ordinaire en temps (on n'aura pas besoin de trouver la solution détaillée du système). Puis, on étudiera les estimations "a priori" sur la solution approchée, celles-ci nous seront utiles dans le passage à la limite. Enfin, on prouvera que la solution approchée tend vers la solution faible du problème 2.2.2 dans des espaces appropriés et que les conditions initiales sont satisfaites.

2.3 Résolution par la méthode de Galerkin

2.3.1 Construction de la solution approchée

Pour passer à un problème en dimension finie, on prend $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de V. On note V_m le sous-espace de V engendré par les vecteurs $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Avec la densité de V dans $L^2(\Omega)$, on choisit les $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de telle sorte qu'ils forment une base orthogonale de V et une base orthonormale dans $L^2(\Omega)$.
Pour tout $m = 1, 2\ldots$, on définit u_m ainsi

$$u_m : \begin{cases} [0,\tau] \to V_m \\ t \to u_m = \sum_{k=1}^m x_k^m(t) w_k, \end{cases} \tag{2.15}$$

et on cherche les coefficients $x_k^m(t)$ $(0 \le t \le \tau,\ k = 1\ldots m)$ vérifiant le système suivant

$$\begin{aligned} &b < u_m''(t), w_j > +(a(x,t)u_m'(t), w_j) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla w_j) = (\phi(t), w_j) \\ &+(g_2(t), w_j)_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t), w_j) - b < G''(t), w_j > -(K(x,t)\nabla G, \nabla w_j), \quad \forall j \in \{1, \ldots m\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u_m(0,x) = u_{0m} \quad \text{dans} \quad V$$

$$u_m'(0,x) = u_{1m} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega),$$

où u_{0m} est la projection orthogonale de u_0 dans V sur l'espace généré par $\{w_1 \ldots w_m\}$ et de même pour u_{1m} dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 2.3.1. *Les fonctions $(x_k)_{k=1,m}$ appartiennent à $H^2(0,\tau;\mathbb{R})$.*

Démonstration. En remplaçant u_m par son expression (2.15), on a :

$$\begin{aligned} &b\sum_{k=1}^m x_k''^m(t)(w_k, w_j) + \sum_{k=1}^m x_k'^m(t)(a(x,t)w_k, w_j) + \sum_{k}^m x_k^m(t)(K(x,t)\nabla w_k, \nabla w_j) = \\ &= (\phi(t), w_j) + (g_2(t), w_j)_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t), w_j) - b < G''(t), w_j > \\ &-(K(x,t)\nabla G(t), \nabla w_j) \quad \forall 1 \le j \le m. \end{aligned}$$

En particulier

$$\lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0 \quad \text{dans} \quad V,$$

$$\lim_{m\to\infty} u_{1m} = u_1 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

On obtient donc le système suivant

$$bA_2X'' + A_1(t)X' + A_3(t)X = F, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} X(0) &= X_0 \\ X'(0) &= X_1, \end{aligned} \tag{2.18}$$

où

$$\begin{aligned}
&X = (x_k^m(t))_{1\le k\le m},\ X_0 = (x_k^m(0))_{1\le k\le m}, X_1 = (x_k^{'m}(0))_{1\le k\le m} \\
&A_1(t) = ((a(x,t)w_k, w_j))_{1\le j,k\le m},\ A_2 = ((w_k, w_j))_{1\le j,k\le m}, \\
&A_3(t) = ((K(x,t)\nabla w_k, \nabla w_j))_{1\le j,k\le m}, \quad X = (x_i)_{1\le i\le m} \\
&F(t) = ((\phi(t), w_j) + (g_2(t), w_j)_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t), w_j) - b < G''(t), w_j > \\
&-(K(x,t)\nabla G, \nabla w_j))_{1\le j\le m}
\end{aligned}$$

Pour prouver que le système différentiel ordinaire (2.17) admet une solution, on effectue le changement de variables suivant

$$Y = \begin{pmatrix} X' \\ X \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} X'' \\ X' \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} bA_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Y' = \begin{pmatrix} F(t) - A_1(t)X' - A_3(t)X \\ X' \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{pmatrix} bA_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Y' = \begin{pmatrix} -A_1(t) & -A_3(t) \\ I & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note par

$$B_1 = \begin{pmatrix} bA_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} -A_1(t) & -A_3(t) \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice B_1 est symétrique et définie positive ($(w_i)_{1\le i\le m}$ sont linéairement indépendants), alors la matrice B_1 est non-singulière, donc en inversant on trouve

$$\begin{aligned} Y' &= B_1^{-1}B_2(t)Y + B_1^{-1}\mathcal{F}(t) \\ &= \mathcal{A}(t)Y + \mathcal{B}(t) = \mathcal{G}(t, Y) \end{aligned}$$

où $\mathcal{A} \in C\left([0,\tau];\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R}^{2m})\right)$ et $\mathcal{G} \in L^2(0,\tau;\mathbb{R}^{2m})$.

Par conséquent, en s'appuyant sur la théorie classique des E.D.O, le système d'équations différentielles ordinaires (2.17)-(2.18) admet une unique solution dans l'intervalle $[0,\tau]$, $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ appartenant à $H^2(0,\tau;\mathbb{R})$. □

2.3.2 Les estimations "a priori" :

Proposition 2.3.1. *La solution approchée u_m vérifie les estimations suivantes pour une certaine constante $C>0$ indépendante de m :*

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,\tau;V)} \leq C \tag{2.19}$$

$$\|u'_m\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{2.20}$$

Démonstration. En multipliant l'équation (2.16) par $x'^m_k(t)$ et en sommant sur $k = 1,2,\dots m$; on obtient :

$$b\left\langle u''_m(t), \sum_{k=1}^m x'^m_k(t)w_k\right\rangle + \left(a(x,t)u'_m(t), \sum_{k=1}^m x'^m_k(t)w_k\right) + \left(K(x,t)\nabla u_m(t), \sum_{k=1}^m x'^m_k(t)\nabla w_k\right)$$
$$= \left(\phi(t), \sum_{k=1}^m x'^m_k(t)w_k\right) + \left(g_2(t), \sum_{k=1}^m x'^m_k w_k\right)_{\Gamma_2} - \left(a(x,t)G'(t), \sum_{k=1}^m x'^m_k w_k\right)$$
$$-b\left\langle G''(t), \sum_{k=1}^m x'^m_k w_k\right\rangle - \left(K(x,t)\nabla G, \sum_{k=1}^m x'^m_k(t)\nabla w_j\right),$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} &b\left\langle u''_m(t), u'_m(t)\right\rangle + (a(x,t)u'_m(t), u'_m(t)) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = (\phi(t), u'_m(t)) \\ &+ (g_2(t), u'_m(t))_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t), u'_m(t)) - b\left\langle G''(t), u'_m(t)\right\rangle - (K(x,t)\nabla G, \nabla u'_m(t)). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Puisque

$$\left\langle u''_m(t), u'_m(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{b}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) \leq (\phi(t), u'_m(t)) \\ &+ (g_2(t), u'_m(t))_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t), u'_m(t)) - b\left\langle G''(t), u'_m(t)\right\rangle - (K(x,t)\nabla G, \nabla u'_m(t)). \end{aligned}$$

Comme K dépend de x et de t, on a

$$(K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial t}\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)\right) \\
&\leq \|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + (g_2(t), u'_m(t))_{\Gamma_2} + a_*\|G'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+b\|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial t}\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)\right) - (K(x,t)\nabla G, \nabla u'_m(t)).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Après intégration entre $(0,s)$ avec $0 < s < \tau$ et en utilisant (2.6), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|u'_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\int_0^s \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K(x,s)\nabla u_m(s), \nabla u_m(s)\right) \leq \frac{b}{2}\|u'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{1}{2}\left(K(x,0)\nabla u_m(0), \nabla u_m(0)\right) + \int_0^s \|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^s (g_2(t), u'_m(t))_{\Gamma_2}\,dt \\
&+a_*\int_0^s \|G'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + b\int_0^s \|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&+\frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt - \int_0^s (K(x,t)\nabla G, \nabla u'_m(t))\,dt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

En utilisant l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
&\int_0^s\int_{\Gamma_2} g_2(t)u'_m(t)\,dx\,dt = -\int_0^s\int_{\Gamma_2} g'_2(t)u_m(t)\,dx\,dt + \left[\int_{\Gamma_2} g_2(t)u_m(t)\,dx\right]_0^s \\
&= -\int_0^s\int_{\Gamma_2} g'_2(t)u_m(t)\,dx\,dt + \int_{\Gamma_2} g_2(s)u_m(s)\,dx - \int_{\Gamma_2} g_2(0)u_m(0)\,dx.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \left(K(x,t)\nabla G, \nabla u'_m(t)\right)\,dt = -\int_0^s \left(\frac{\partial K}{\partial t}\nabla G, \nabla u_m\right)\,dt - \int_0^s \left(K(x,t)\nabla G', \nabla u_m\right)\,dt \\
&+\Big[(K(x,t)\nabla G, \nabla u_m)\Big]_0^s = -\int_0^s \left(\frac{\partial K}{\partial t}\nabla G, \nabla u_m(t)\right)\,dt - \int_0^s \left(K(x,t)\nabla G', \nabla u_m(t)\right)\,dt \\
&+\left(K(x,s)\nabla G(s), \nabla u_m(s)\right) - \left(K(x,0)\nabla G(0), \nabla u_m(0)\right).
\end{aligned}$$

En substituant dans l'inéquation (2.23) et en utilisant (2.7) et (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|u_m'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\int_0^s \|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{b}{2}\|u_m'(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{\alpha_*}{2}\|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}\\
&+\|g_2(0)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(0)\|_{L^2(\Gamma_2)} + \int_0^s \|g_2'(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}\,dt\\
&+a_*\int_0^s \|G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + b\int_0^s \|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+\frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + M\int_0^s \|\nabla G(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+\alpha_*\int_0^s \|\nabla G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \alpha_*\|\nabla G(s)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}\\
&+\alpha_*\|\nabla G(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Par le théorème de trace, on sait qu'il existe une constante $\gamma^2 \ge 0$ telle que

$$\|\Psi\|_{L^2(\Gamma_2)} \le \gamma^2\|\Psi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega). \tag{2.25}$$

En utilisant (2.25), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|u_m'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\int_0^s \|u_m'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{b}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha_*}{2}\|u_0\|^2_V\\
&+\int_0^s \|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \gamma^2\|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(s)\|_V + \gamma^2\|g_2(0)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_0\|_V\\
&+\gamma^2\int_0^s \|g_2'(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(t)\|_V\,dt + a_*\int_0^s \|G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+b\int_0^s \|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+M\int_0^s \|\nabla G(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \alpha_*\int_0^s \|\nabla G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+\alpha_*\|\nabla G(s)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha_*\|\nabla G(0)\|_{L^2(\Omega)}\|u_0\|_V.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

En appliquant l'inégalité de Young :

$$\beta\Lambda \le \frac{\delta}{2}\beta^2 + \frac{1}{2\delta}\Lambda^2, \quad \forall \beta, \Lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta > 0,$$

on aura les estimations suivantes :

$$\|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{a^*}{2}\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2a^*}\|\phi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

$$a_*\|G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{a^*}{2}\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a_*^2}{2a^*}\|G'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$b\|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{a^*}{2}\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b^2}{2a^*}\|G''(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

En remplaçant ces inégalités dans (2.26), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|u'_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\int_0^s \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{b}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha_*}{2}\|u_0\|^2_V \\
&+\frac{1}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \gamma^2\|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(s)\|_V + \gamma^2\|g_2(0)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_0\|_V \\
&+\gamma^2\int_0^s \|g'_2(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(t)\|_V\,dt + \frac{a_*^2}{2a^*}\|G'\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \frac{b^2}{2a^*}\|G''\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \\
&+\frac{3a^*}{2}\int_0^s \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + M\int_0^s \|\nabla G(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&+\alpha_*\int_0^s \|\nabla G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \alpha_*\|\nabla G(s)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+\alpha_*\|\nabla G(0)\|_{L^2(\Omega)}\|u_0\|_V.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

En utilisant (2.3) et la définition de G, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|u'_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 + \frac{a^*}{2}\int_0^s \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \gamma^2\|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(s)\|_V \\
&+\gamma^2\int_0^s \|g'_2(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(t)\|_V\,dt + \frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&+M\int_0^s \|\nabla G(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \alpha_*\int_0^s \|\nabla G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&+\alpha_*\|\nabla G(s)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

où

$$\begin{aligned}
C_1 = {}&\frac{b}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha_*}{2}\|u_0\|^2_V + \frac{1}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \gamma^2\|g_2(0)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_0\|_V \\
&+\frac{a_*^*}{2a^*}\|G'\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \frac{b^2}{2a^*}\|G''\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \alpha_*\|\nabla G(0)\|_{L^2(\Omega)}\|u_0\|_V.
\end{aligned}$$

En utilisant encore l'inégalité de Young :

$$\gamma^2\int_0^s \|g'_2(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(t)\|_V\,dt \leq \frac{\gamma^4}{2M}\int_0^s \|g'_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,dt + \frac{M}{2}\int_0^s \|u_m(t)\|^2_V\,dt,$$

or

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \|u_m(t)\|^2_V\,dt = \int_0^s \|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&= \int_0^s \|\int_0^t u'_m(\sigma)\,d\sigma + u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq 2\int_0^s \left(t\int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\sigma\right)dt + 2\int_0^s \|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq s^2\int_0^s \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + 2s\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt
\end{aligned}$$

et

$$\|u_m(s)\|_V^2 \leq 2s\int_0^s \|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt + 2\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$M\int_0^s \|\nabla G(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla G(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt + \frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt$$

$$\alpha_*\int_0^s \|\nabla G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \frac{\alpha_*^2}{2M}\int_0^s \|\nabla G'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt + \frac{M}{2}\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt$$

et aussi

$$\gamma^2\|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}\|u_m(s)\|_V \leq \frac{\alpha^*}{8}\|u_m(s)\|_V^2 + \frac{2\gamma^4}{\alpha^*}\|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2,$$

$$\alpha_*\|\nabla G(s)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\alpha_*^2}{\alpha^*}\|\nabla G(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^*}{8}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En substituant dans le second membre de (2.28), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|u_m'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^*}{4}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 + \left(\frac{a^*}{2} + \frac{\alpha^* s}{4} + \frac{s^2 M}{2}\right)\int_0^s \|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt \\
&+(Ms + \frac{\alpha^*}{4})\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^4}{2M}\|g_2'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Gamma_2))}^2 + \frac{2\gamma^4}{\alpha^*}\|g_2(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + \frac{2\alpha_*^2}{\alpha^*}\|\nabla G(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\frac{\alpha_*^2}{2M}\|\nabla G'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}^2 + \frac{M}{2}\|\nabla G\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}^2 + 2M\int_0^\tau \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt.
\end{aligned}$$

En prenant

$$\begin{aligned}
C_2 &= C_1 + (M\tau + \frac{\alpha^*}{4})\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^4}{2M}\|g_2'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Gamma_2))}^2 + \frac{2\gamma^4}{\alpha^*}\|g_2\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Gamma_2))}^2 \\
&+ \frac{2\alpha_*^2}{\alpha^*}\|\nabla G\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\alpha_*^2}{2M}\|\nabla G'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}^2 + \frac{M}{2}\|\nabla G\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}^2,
\end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{2a^* + 2\tau^2 M + \alpha^*\tau}{4},$$

ceci implique :

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|u_m'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^*}{4}\|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 + C_3\int_0^s \|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt \\
&+2M\int_0^s \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt.
\end{aligned}$$

Alors, avec

$$C' = \min(\frac{b}{2}, \frac{\alpha^*}{4}), C'' = \max(C_3, 2M),$$

on déduit

$$C'\left(\|u_m'(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\leq C_2+C''\int_0^s\left(\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt. \tag{2.29}$$

En appliquant le lemme de Grönwall dans (2.29), on a :

$$\|u_m'(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq \frac{C_2}{C'}+\frac{C''}{C'}\int_0^s\frac{C_2}{C'}\exp\left(\frac{C''}{C'}(s-t)\right)dt,$$

alors

$$\|u_m'(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq \frac{C_2}{C'}\exp\left(\frac{C''}{C'}s\right),$$

on obtient les estimations suivantes

$$\|u_m'\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))}\leq C \tag{2.30}$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))}\leq C. \tag{2.31}$$

avec

$$C=\frac{C_2}{C'}\exp\left(\frac{C''}{C'}\tau\right).$$

□

2.3.3 Le passage à la limite

Proposition 2.3.2. *Il existe une sous-suite de $(u_m)_{m\geq1}$, notée encore $(u_m)_{m\geq1}$, telle que les convergences suivantes ont lieu :*

$$\begin{aligned} &u_m \rightharpoonup u \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;V)\\ &u_m \rightharpoonup u \quad \textit{faiblement* dans} \quad L^\infty(0,\tau;V)\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} &u_m' \rightharpoonup u' \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;L^2(\Omega))\\ &u_m' \rightharpoonup u' \quad \textit{faiblement* dans} \quad L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega)),\end{aligned} \tag{2.33}$$

et

$$u_m\rightarrow u \quad \textit{fortement} \quad \textit{dans} \quad C^0([0,\tau];L^2(\Omega)).$$

De plus la limite u est solution de (2.12)-(2.14).

Démonstration. Des estimations "a priori" obtenues dans la proposition 2.3.1, on déduit que $(\nabla u_m)_{m\geq 1}$ et $(u'_m)_{m\geq 1}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))\cap L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$ et $L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))\cap L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$.

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite de $(u_m)_{m\geq 1}$ (notée encore $(u_m)_{m\geq 1}$) vérifiant les convergences faibles (2.32) et (2.33).
En utilisant le lemme de Simon [52], on trouve

$$u_m \to u \quad \text{fortement} \quad \text{dans} \quad C^0([0,\tau];L^2(\Omega)).$$

Montrons maintenant que u est solution de (2.12)-(2.14).

Soit $w\in V$, il existe une suite de la forme :

$$w_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^m w_j,$$

telle que $w_m \to w$ dans V. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,\tau)$

$$w_m\varphi(t) \to w\varphi(t) \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;V),$$

et

$$w_m\varphi'(t) \to w\varphi'(t) \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;V).$$

En multipliant (2.16) par $\varphi(t)\alpha_j^m$, et en sommant de $j=1,m$ pour $m\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&b < u''_m(t), \varphi(t)w_m > +(a(x,t)u'_m(t),\varphi(t)w_m) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla(\varphi(t)w_m))\\
&= (\phi(t),\varphi(t)w_m) + (g_2(t),\varphi(t)w_m)_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t),\varphi(t)w_m) - b < G''(t),\varphi(t)w_m >\\
&-(K(x,t)\nabla G, \nabla(\varphi(t)w_m)).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

En intégrant entre $(0,\tau)$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \Big(- b(u'_m(t),\varphi'(t)w_m) + (a(x,t)u'_m(t),\varphi(t)w_m) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla(\varphi(t)w_m))\Big)\, dt\\
&= \int_0^\tau \Big((\phi(t),\varphi(t)w_m) + \int_0^\tau \Big((g_2(t),\varphi(t)w_m)_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t),\varphi(t)w_m)\Big)\, dt\\
&- \int_0^\tau \Big(b < G''(t),\varphi(t)w_m > -(K(x,t)\nabla G, \nabla(\varphi(t)w_m))\Big)\, dt.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Avec la convergence (2.32), on a pour $m \to +\infty$

$$\int_0^\tau (K(x,t)\nabla u_m, \nabla w_m)\varphi\, dt \to \int_0^\tau (K(x,t)\nabla u, \nabla w)\varphi\, dt.$$

En utilisant les convergences (2.32)-(2.33), on passe à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \Big(- b(u'(t), \varphi'(t)w) + (a(x,t)u'(t), \varphi(t)w) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla(\varphi(t)w))\Big)\, dt \\
&= \int_0^\tau \Big((\phi(t), \varphi(t)w) + (g_2(t), \varphi(t)w)_{\Gamma_2} - (a(x,t)G'(t), \varphi(t)w) - b < G''(t), \varphi(t)w > \Big)\, dt \\
&- \int_0^\tau \big(K(x,t)\nabla G, \nabla(\varphi(t)w)\big)\, dt.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Ceci peut s'écrire autrement :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \Big(- b(u'(t), w)\varphi'(t) + (a(x,t)u'(t), w)\varphi(t) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w)\varphi(t)\Big)\, dt \\
&= \int_0^\tau \Big((\phi(t), w)\varphi(t) + (g_2(t), w)_{\Gamma_2}\varphi(t) - (a(x,t)G'(t), w)\varphi(t) - b < G''(t), w > \varphi(t)\Big)\, dt \\
&- \int_0^\tau ((K(x,t)\nabla G, \nabla w)\varphi(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

On en déduit que (2.12) a bien lieu.

En réintégrant par parties dans (2.37), on obtient pour $\varphi \in \mathcal{D}(0,\tau)$

$$\begin{aligned}
&b\int_0^\tau < u''(t), w\varphi(t) > \, dt = -\int_0^\tau (a(x,t)u'(t), w)\varphi(t) - (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w)\varphi(t)\, dt \\
&+ \int_0^\tau \Big((\phi(t), w)\varphi(t) + (g_2(t), w)_{\Gamma_2}\varphi(t) - (a(x,t)G'(t), w)\varphi(t) - b < G''(t), w > \varphi(t)\Big)\, dt \\
&- \int_0^\tau (K(x,t)\nabla G, \nabla w)\varphi(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Avec les estimations de la proposition 2.3.1, on obtient

$$\left| \int_0^\tau < u''(t), w\varphi(t) > \, dt \right| \leq C\|\varphi \otimes w\|_{L^2(0,\tau;V)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,\tau). \tag{2.39}$$

La densité de $\mathcal{D}(0,\tau)$ dans $L^2(0,\tau)$ implique que (2.39) reste vraie pour tout $\varphi \in L^2(0,\tau)$. D'où $u'' \in L^2(0,\tau;V')$.

Il reste à vérifier que les conditions initiales sont satisfaites c'est à dire

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

En utilisant le lemme de Simon, on a obtenu la convergence forte suivante

$$u_m \to u \quad \text{dans} \quad C([0,\tau]; L^2(\Omega)),$$

on en déduit que

$$u_m(0) \to u(0) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Or, on a

$$\lim_{m\to+\infty} u_m(0) = u_0 \quad \text{dans} \quad V \quad \text{et donc dans} \quad L^2(\Omega).$$

Par unicité de la limite, on trouve

$$u(0) = u_0.$$

Pour prouver que $u'(0) = u_1$, on choisit une fonction régulière $\varphi \in C^\infty([0,\tau];\mathbb{R})$ telle que $\varphi(\tau) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \Big(b < u''(t), w > \varphi(t) + (a(x,t)u'(t), w)\varphi(t) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w)\varphi(t)\Big)\, dt = \\
&= \int_0^\tau \Big((\phi(t), w)\varphi(t) + (g_2(t), w)_{\Gamma_2}\varphi(t) - (a(x,t)G'(t), w)\varphi(t) - b < G''(t), w > \varphi(t)\Big)\, dt \\
&- \int_0^\tau (K(x,t)\nabla G, \nabla w)\varphi(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Comme $u'' \in L^2(0,\tau;V')$, on intégre par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \Big(-b(u'(t), w)\varphi'(t) + (a(x,t)u'(t), w)\varphi(t) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w)\varphi(t)\Big)\, dt \\
&= \int_0^\tau \Big((\phi(t), w)\varphi(t) + (g_2(t), w)_{\Gamma_2}\varphi(t) - (a(x,t)G'(t), w)\varphi(t) - b < G''(t), w > \varphi(t)\Big)\, dt \\
&- \int_0^\tau (K(x,t)\nabla G, \nabla w)\varphi(t)\, dt\, dt + b < u'(0), w > \varphi(0).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

En intégrant par parties dans (2.34), on aura :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \Big(-b(u_m'(t), w_m)\varphi'(t) + (a(x,t)u_m'(t), w_m)\varphi(t) + (K(x,t)\nabla u_m(t), \nabla w_m)\varphi(t)\Big)\, dt \\
&= \int_0^\tau \Big((\phi(t), w_m)\varphi(t) + (g_2(t), w_m)_{\Gamma_2}\varphi(t) - (a(x,t)G'(t), w_m)\varphi(t) - b < G''(t), w_m > \varphi(t)\Big)\, dt \\
&- \int_0^\tau (K(x,t)\nabla G, \nabla w_m)\varphi(t)\, dt + b(u_m'(0), w_m)\varphi(0),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$, on trouve

$$\int_0^\tau \Big(- b(u'(t), w)\varphi'(t) + (a(x,t)u'(t), w)\varphi(t) + (K(x,t)\nabla u(t), \nabla w)\varphi(t)\Big)\, dt$$
$$= \int_0^\tau \Big((\phi(t), w)\varphi(t) + (g_2(t), w)_{\Gamma_2}\varphi(t) - (a(x,t)G'(t), w)\varphi(t) - b < G''(t), w > \varphi(t)\Big)\, dt$$
$$- \int_0^\tau (K(x,t)\nabla G, \nabla w)\varphi(t)\, dt + b(u_1, w)\varphi(0).$$

Donc

$$< u_1 - u'(0), w >= 0, \quad \forall w \in V. \tag{2.42}$$

Alors

$$u_1 - u'(0) = 0_{V'},$$

d'où

$$u'(0) = u_1 \quad \text{dans} \quad V'.$$

□

2.3.4 Unicité de la solution

Lemme 2.3.2. *La solution du problème 2.2.2 est unique.*

Démonstration. Supposons que le problème 2.2.2 admet deux solutions u_1 et u_2, donc elles vérifient au sens des distributions :

$$b < u_1''(t), w > +(a(x,t)u_1'(t), w) + (K(x,t)\nabla u_1(t), \nabla w) = (\phi(t), w) + (g_2(t), w)_{\Gamma_2}$$
$$-(a(x,t)G'(t), w) - b < G''(t), w > -(K(x,t)\nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V$$

$$b < u_2''(t), w > +(a(x,t)u_2'(t), w) + (K(x,t)\nabla u_2(t), \nabla w) = (\phi(t), w) + (g_2(t), w)_{\Gamma_2}$$
$$-(a(x,t)G'(t), w) - b < G''(t), w > -(K(x,t)\nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V.$$

En retranchant, et en notant $u = u_1 - u_2$, on aura pour $u \in L^2(0,\tau; V)$, $u' \in L^2(0,\tau; L^2(\Omega))$ et $u'' \in L^2(0,\tau; V')$

$$(a(x,t)u'(t), w) + b < u''(t), w > +(K(x,t)\nabla u(t), \nabla w) = 0 \quad \forall w \in V, \tag{2.43}$$

et u satisfait les conditions initiales suivantes

$$u(0) = 0$$
$$u'(0) = 0,$$

On fixe $0 \leq s \leq \tau$, et on donne

$$\zeta(t) = \begin{cases} \int_t^s u(\sigma)\,d\sigma & 0 \leq t \leq s \\ 0 \quad s \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

On a alors $\zeta \in W^{1,2}(0,\tau;V)$, donc :

$$\int_0^s (b < u'', \zeta > +(a(x,t)u', \zeta) + (K(x,t)\nabla u, \nabla\zeta))\ dt = 0,$$

Comme $a \in L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))$, $a' \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega))$, $\zeta' \in L^2(0,\tau;V)$ et $u'(0) = \zeta(s) = 0$, en intégrant par parties on trouve

$$\int_0^s -b(u',\zeta') - (a(x,t)u,\zeta') - (a'(x,t)u,\zeta) + (K(x,t)\nabla u, \nabla\zeta)\,dt = 0.$$

Comme $\zeta' = -u$ quand $0 < t < s$, on obtient

$$\int_0^s b(u',u) + (a(x,t)\zeta',\zeta') - (K(x,t)\nabla\zeta', \nabla\zeta)\,dt = \int_0^s (a'u,\zeta)\,dt.$$

Puisque $\|\zeta'\|^2_{L^2(0,s;L^2(\Omega))} \geq 0$ et $a(x,t) \geq a^* > 0$, on aura

$$\int_0^s (b(u',u) - (K(x,t)\nabla\zeta',\nabla\zeta))\ dt \leq \int_0^s \|a'\|_{L^4(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\zeta(t)\|_{L^4(\Omega)}\,dt.$$

Puisque $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, on a

$$\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}(K(x,t)\nabla\zeta,\nabla\zeta)\right)\ dt \leq \int_0^s \frac{\partial K}{\partial t}(\nabla\zeta,\nabla\zeta)\,dt + \\ +C^2\int_0^s \|a'\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\zeta(t)\|_V\,dt.$$

où C est la constante d'injection.

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve

$$\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}(K(x,t)\nabla\zeta,\nabla\zeta)\right)\ dt \leq \int_0^s \frac{\partial K}{\partial t}(\nabla\zeta,\nabla\zeta)\,dt \\ +\frac{C^2}{4}\int_0^s \|a'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + C^2\int_0^s \|\zeta\|^2_V\,dt.$$

En utilisant (2.5) et (2.6), on a

$$\frac{b}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla\zeta(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (M+C^2)\int_0^s \|\zeta(t)\|^2_V\,dt + \frac{C^2}{4}\int_0^s \|a'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

On définit $w(t) = \int_0^t u(\sigma)\,d\sigma$ pour tout $t \in [0,\tau]$. On aura

$$\frac{b}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (M+C^2)\int_0^s \|w(t)-w(s)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt$$
$$+\frac{C^2}{4}\int_0^s \|a'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Or

$$\int_0^s \|w(t)-w(s)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt = \int_0^s \|w(t)-w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^s \|\nabla(w(t)-w(s))\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$\leq 2\int_0^s \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + 2\int_0^s \|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + 2\int_0^s \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + 2\int_0^s \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$\leq 2\int_0^s \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + 2s\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^s \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + 2s\|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

de plus

$$\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\int_0^s u(\sigma)\,d\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(\int_0^s \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}\,d\sigma\right)^2 \leq s\int_0^s \|u(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\sigma,$$

$$2\int_0^s \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq s^2\int_0^s \|u(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\sigma.$$

Alors

$$\frac{b}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\alpha^*}{2} - 2(M+C^2)s\right)\|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2(M+C^2)\int_0^s \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$+3s^2(M+C^2)\int_0^s \|u(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\sigma + \frac{C^2}{4}\int_0^s \|a'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

On choisit $s_0 > 0$ tel que :

$$\frac{\alpha^*}{2} - 2(M+C^2)s_0 \geq \frac{1}{2},$$

alors pour tout $s \in [0,s_0]$, on aura

$$\frac{b}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2(M+C^2)\int_0^s \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$+3s_0^2(M+C^2)\int_0^s \|u(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\sigma + \frac{C^2}{4}\int_0^s \|a'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

On note $C_1 = \max(3s_0^2(M+C^2), \frac{C^2}{4})$, on obtient

$$\frac{b}{2}\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2(M+C^2)\int_0^s \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$+C_1\int_0^s (1+\|a'(t)\|^2_{H^1(\Omega)})\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Notons $C_2 = \frac{\max\left(2(M+C^2), C_1\right)}{\min(\frac{b}{2}, \frac{1}{2})}$, on trouve

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(s)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \int_0^s (1 + \|a'(t)\|^2_{H^1(\Omega)}) \left(\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \right) dt.$$

En utilisant le lemme de Grönwall, on obtient

$$\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(s)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq 0, \quad \forall s \in [0, s_0].$$

On en déduit l'unicité de la solution $u = 0$, donc $u_1 = u_2$ sur $[0, s_0]$. On applique le même raisonnement dans chaque intervalle $[s_0, 2s_0]$, $[2s_0, 3s_0]$,...etc afin d'aboutir au résultat. $\square$

2.4 Résolution approchée par discrétisation en temps

Dans cette section, on étudie d'abord l'existence et l'unicité de la solution d'un problème auxiliaire : la conductivité thermique (qu'on notera $\widetilde{K}$) ne dépend que de x et on se restreint au cas où la partie de la frontière Γ_2 est vide. On utilise la méthode spectrale décrite dans [46] dans le but d'avoir des régularités sur la solution qui nous permettront de savoir ce qui se passe sur le bord de chaque sous intervalle de temps. Par la suite, on approche le problème 2.2.1 par une technique de discrétisation en temps et on traite l'existence et l'unicité de la solution approchée de manière analogue à celle du problème auxiliaire. On établit ensuite des estimations sur la solution du problème discrétisé qui nous permettront de montrer la convergence de celle-ci vers la solution du problème variationnel initial.

2.4.1 Etude d'un premier problème auxiliaire par la méthode spectrale

On introduit l'espace fonctionnel suivant

$$V = \{\varphi : \quad \varphi \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}. \tag{2.44}$$

On considère le problème hyperbolique suivant

Problème 2.4.1. *Trouver $\widetilde{u} \in C^0([\tau_0, \tau_1]; V) \cap C^1([\tau_0, \tau_1]; L^2(\Omega))$ solution de*

$$\begin{cases} b\widetilde{u}''(t) - div(\widetilde{K}(x)\nabla\widetilde{u}(t)) = \widetilde{F}(t) \\ \widetilde{u} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \\ \widetilde{u}(\tau_0, x) = \widetilde{u}_0 \\ \dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}(\tau_0, x) = \widetilde{u}_1. \end{cases} \tag{2.45}$$

où $\widetilde{u}_0 \in V$, $\widetilde{u}_1 \in L^2(\Omega)$, $\widetilde{F} \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega))$ et $\widetilde{K}$ est symétrique et satisfait

$$\begin{cases} \widetilde{K}_{ij} \in L^\infty(\Omega) \\ \exists \alpha^* > 0 : \quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \widetilde{K}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha^* \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad \text{p.p} \quad x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{2.46}$$

Existence d'une base hilbertienne

On va montrer que les fonctions propres de l'opérateur $-div(\widetilde{K}\nabla.)$ forment une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. On s'intéresse au problème spectral suivant

$$\begin{cases} -div(\widetilde{K}\nabla\widetilde{w}) = \lambda\widetilde{w} \\ \widetilde{w} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.47}$$

où λ est une valeur propre associée au vecteur propre $\widetilde{w}$. On note

$$a(\widetilde{w}, \widetilde{u}) = (\widetilde{K}\nabla\widetilde{w}, \nabla\widetilde{u}) \quad \forall\widetilde{u} \in V,$$

et on réécrit (2.47) sous la forme

$$a(\widetilde{w}, \widetilde{u}) = \lambda(\widetilde{w}, \widetilde{u}) \quad \forall\widetilde{u} \in V.$$

Comme $\widetilde{K}(x)$ vérifie l'hypothèse (2.46), la forme symétrique bilinéaire a est continue et coercive sur V car :

$$a(\widetilde{w}, \widetilde{w}) \geq \alpha^* C_{PF}\|\widetilde{w}\|_V^2, \quad \forall\widetilde{w} \in V,$$

où C_{PF} est la constante de Poincaré-Friedrichs. Pour tout $F \in L^2(\Omega)$, on définit $ZF \in V$ comme l'unique solution du problème

$$a(ZF, \widetilde{u}) = (F, \widetilde{u}), \quad \forall\widetilde{u} \in V. \tag{2.48}$$

Puisque $F \in L^2(\Omega)$ alors $\widetilde{u} \mapsto (F, \widetilde{u})$ est continue sur V (car l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est continue). Alors, d'après le théorème de Lax-Milgram le problème (2.48) admet une unique solution $ZF \in V$. On définit ainsi une application $Z : L^2(\Omega) \to V$. De la continuité et la linéarité de $\widetilde{u} \mapsto (F, \widetilde{u})$, on déduit que l'application Z est linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans V. Le problème spectral consiste alors à résoudre l'équation :

$$\widetilde{w} = \lambda Z\widetilde{w}.$$

Proposition 2.4.1. *On a les propriétés suivantes :*

- *l'opérateur Z est compact de V dans V,*
- *l'opérateur Z est :*

  1. *symétrique : $\forall\widetilde{u}, \widetilde{w} \in V, a(Z\widetilde{w}, \widetilde{u}) = a(\widetilde{w}, Z\widetilde{u})$,*

2. *positif :* $\forall \widetilde{w} \in V, \widetilde{w} \neq 0; a(Z\widetilde{w}, \widetilde{w}) > 0$.

Démonstration. – (a) Puisque l'injection canonique de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on déduit que chaque borné de V est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. Puisque Z est continu et linéaire de $L^2(\Omega)$ dans V, il transforme chaque partie relativement compacte de $L^2(\Omega)$ en une partie relativement compacte de V d'où la compacité de Z.

– (b) la forme a est symétrique, donc

$$a(Z\widetilde{w}, \widetilde{u}) = (\widetilde{w}, \widetilde{u}) = (\widetilde{u}, \widetilde{w}) = a(Z\widetilde{u}, \widetilde{w}) = a(\widetilde{w}, Z\widetilde{u}), \quad \forall \widetilde{u}, \widetilde{w} \in V.$$

De plus si $\widetilde{w} \in V$ et $\widetilde{w} \neq 0$

$$a(Z\widetilde{w}, \widetilde{w}) = (\widetilde{w}, \widetilde{w}) = \|\widetilde{w}\|^2_{L^2(\Omega)} > 0.$$

□

Avec la proposition 2.4.1, on a

Théorème 2.4.1. *Les valeurs propres de l'opérateur $-div(\widetilde{K}\nabla.)$ forment une suite croissante tendant vers $+\infty$*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots$$

et il existe aussi une base hilbertienne orthonormale de $L^2(\Omega)$ formée des vecteurs propres $(w_m)_{m\geq 1}$. De plus, la suite $(\widetilde{w}_m)_{m\geq 1} = (\lambda_m^{-\frac{1}{2}} w_m)_{m\geq 1}$ forme une base hilbertienne orthonormale de V pour le produit scalaire $a(.,.)$

$$a(\widetilde{w}_m, \widetilde{u}) = \lambda_m(\widetilde{w}_m, \widetilde{u}), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. On note H l'espace V muni du produit scalaire $a(.,.)$, les normes de H et V sont équivalentes. Si $Z \in \mathcal{L}(H, H)$ est un opérateur compact symétrique et positif dans un espace de Hilbert H de dimension infinie [46], les valeurs propres μ_m de Z forment une suite décroissante tendant vers 0, et il existe une base hilbertienne orthonormale de H formée des vecteurs propres $(\widetilde{w}_m)_{m\geq 1}$ tels que

$$Z\widetilde{w}_m = \mu_m \widetilde{w}_m$$

De ce résultat, on déduit que les nombres réels donnés par

$$\lambda_m = \frac{1}{\mu_m}$$

forment une suite croissante tendant vers $+\infty$. Donc

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq ...$$

et pour tout $\widetilde{u} \in V$ on a

$$\begin{aligned} a(\widetilde{w}_m, \widetilde{u}) &= a(\frac{Z\widetilde{w}_m}{\mu_m}, \widetilde{u}) = a\left(\lambda_m Z\widetilde{w}_m, \widetilde{u}\right) \\ &= \lambda_m a(Z\widetilde{w}_m, \widetilde{u}) = \lambda_m(\widetilde{w}_m, \widetilde{u}). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Donc, $(\widetilde{w}_m)_{m\geq 1}$ est une suite de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_m)_{m\geq 1}$, et forme une base hilbertienne orthonormale pour le produit $a(.,.)$. Vérifions que $(w_m)_{m\geq 1} = (\sqrt{\lambda_m}\widetilde{w}_m)_{m\geq 1}$ est une base hilbertienne orthonormale de $L^2(\Omega)$. On a

$$(w_m, w_n) = \sqrt{\lambda_m \lambda_n}(\widetilde{w}_m, \widetilde{w}_n).$$

D'après (2.49), on a

$$(w_m, w_n) = \frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\lambda_m \lambda_n} a(\widetilde{w}_m, \widetilde{w}_n) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_m}} a(\widetilde{w}_m, \widetilde{w}_n).$$

Comme $(\widetilde{w}_m)_{m\geq 1}$ est une base hilbertienne orthonormale pour le produit scalaire $a(.,.)$, alors $(w_m, w_n) = \delta_{mn}$, où δ_{mn} est le symbole de Krönecker. De la densité de H dans $L^2(\Omega)$, on déduit que $(w_m)_{m\geq}$ est une base orthonormale de $L^2(\Omega)$. □

Il sera commode de poser

$$\xi_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{b}}, \text{ pour tout } m \geq 1.$$

La formulation variationnelle du problème auxiliaire est donnée ainsi :

Problème 2.4.2. *Trouver $\widetilde{u} \in C^0([\tau_0, \tau_1]; V) \cap C^1([\tau_0, \tau_1]; L^2(\Omega))$ vérifiant au sens des distributions*

$$b < \widetilde{u}''(t), w > +(\widetilde{K}(x)\nabla\widetilde{u}(t), \nabla w) = (\widetilde{F}(t), w), \quad \forall w \in V \tag{2.50}$$

$$\widetilde{u}(\tau_0) = \widetilde{u}_0 \tag{2.51}$$

$$\widetilde{u}'(\tau_0) = \widetilde{u}_1. \tag{2.52}$$

Théorème 2.4.2. *La solution du problème auxiliaire existe et est unique.*

Démonstration. La démonstration se fait en plusieurs étapes, tout d'abord :

Etape 1 : Construction d'une solution approchée (méthode de Galerkin) On introduit le sous-espace V_m de V engendré par les m premiers vecteurs propres de la base $(w_i)_{i\geq 1}$, on cherche une fonction $\widetilde{u}_m(t,x) = \sum_{k=1}^{m} x_k^m(t) w_k(x)$ solution du système différentiel suivant

$$\begin{cases} b < \widetilde{u}''_m(t), w > + a(\widetilde{u}_m, w) = (\widetilde{F}(t), w), \quad \forall w \in V_m \\ \widetilde{u}_m(\tau_0) = \widetilde{u}_{0,m}, \quad \widetilde{u}'_m(\tau_0) = \widetilde{u}_{1,m}, \end{cases} \tag{2.53}$$

où $< .,. >$ représente le produit de dualité entre V et V', $\widetilde{u}_{0,m}$ est la projection orthogonale de $\widetilde{u}_0$ sur V_m pour le produit scalaire $a(.,.)$ et $\widetilde{u}_{1,m}$ est la projection orthogonale de $\widetilde{u}_1$ sur V_m pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.
On a

$$\widetilde{u}_{0,m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widetilde{w}_i$$

où $(\widetilde{w}_i)_{i\geq 1} = (\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}})_{i\geq 1}$ est une base orthonormale de V pour $a(.,.)$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq m}$ tel que

$$a(\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a(\widetilde{w}_i, \widetilde{w}_j) \quad 1 \leq j \leq m.$$

Alors

$$\alpha_j = a(\widetilde{u}_0, \widetilde{w}_j) = a(\widetilde{u}_0, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}) \quad 1 \leq j \leq m.$$

On a

$$\widetilde{u}_{0,m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda_i}} w_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i} a(\widetilde{u}_0, w_i),$$

d'où

$$x_i^m(\tau_0) = \frac{1}{\lambda_i} a(\widetilde{u}_0, w_i) \;\; 1 \leq i \leq m.$$

Comme $(w_i)_{i\geq 1}$ est une base orthonormale de $L^2(\Omega)$, on a de même

$$(x_i^m)'(\tau_0) = (\widetilde{u}_1, w_i) \;\; 1 \leq i \leq m.$$

En remplaçant $\widetilde{u}_m$ par son expression dans l'équation (2.53), on trouve

$$\begin{cases} b x''^m_k(t) + \lambda_k x_k^m(t) = (\widetilde{F}(t), w_k) \\ x_k^m(\tau_0) = \frac{1}{\lambda_k} a(\widetilde{u}_0, w_k), \quad (x_k^m)'(\tau_0) = (\widetilde{u}_1, w_k), \quad \text{pour tout} \quad k \in 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Alors la solution est

$$x_k^m(t) = x_k^m(\tau_0)\cos(\xi_k(t-\tau_0)) + \frac{(\widetilde{u}_1, w_k)}{\xi_k}\sin(\xi_k(t-\tau_0))$$
$$+ \left(\cos(\xi_k t)\int_{\tau_0}^t \frac{-\sin(\xi_k s)(\frac{\widetilde{F}(s)}{b}, w_k)}{\xi_k}\,ds + \sin(\xi_k t)\int_{\tau_0}^t \frac{\cos(\xi_k s)(\frac{\widetilde{F}(s)}{b}, w_k)}{\xi_k}\,ds\right)$$

c'est-à-dire

$$x_k^m(t) = x_k^m(\tau_0)\cos(\xi_k(t-\tau_0)) + \frac{(\widetilde{u}_1, w_k)}{\xi_k}\sin(\xi_k(t-\tau_0))$$
$$+\frac{1}{\xi_k}\int_{\tau_0}^t \sin(\xi_k(t-s))\left(\frac{\widetilde{F}(s)}{b}, w_k\right)ds, \quad \forall t\in[\tau_0,\tau_1], \quad \text{pour tout} \quad k\in 1,\dots,m. \tag{2.54}$$

On note $Q(\xi)$ la matrice orthogonale suivante

$$Q(\xi) = \begin{pmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout $t\in[\tau_0,\tau_1]$ et $k\in 1,\dots,m$, on a

$$\begin{pmatrix} \xi_k x_k^m(t) \\ x_k'^m(t) \end{pmatrix} = Q(\xi_k(t-\tau_0))\begin{pmatrix} \xi_k x_k^m(\tau_0) \\ (\widetilde{u}_1, w_k) \end{pmatrix} + \int_{\tau_0}^t Q(\xi_k(t-s))\begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{\widetilde{F}(s)}{b}, w_k) \end{pmatrix} ds.$$

Donc, la solution du problème (2.53) existe et est unique. De plus $\widetilde{u}_m \in C^1([\tau_0,\tau_1];V_m)$ et $\widetilde{u}_m'' \in L^2(\tau_0,\tau_1;V_m)$.

<u>Etape 2 : $(\widetilde{u}_m)_{m\geq 1}$ est une suite de Cauchy</u> On note

$$W = C^0([\tau_0,\tau_1];V)\cap C^1([\tau_0,\tau_1];L^2(\Omega))$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_W = \left(\sup_{t\in[\tau_0,\tau_1]} a(\varphi(t),\varphi(t)) + b\sup_{t\in[\tau_0,\tau_1]}\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons montrer que $(\widetilde{u}_m)_{m\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans les espaces $C^0([\tau_0,\tau_1];V)$ et $C^1([\tau_0,\tau_1];L^2(\Omega))$. Si m et p sont deux entiers tels que $p>m\geq 1$, on a

$$a(\widetilde{u}_p-\widetilde{u}_m, \widetilde{u}_p-\widetilde{u}_m) + b\|\frac{d}{dt}(\widetilde{u}_p-\widetilde{u}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} = b\sum_{i=m+1}^{p}\left(\xi_i^2|x_i|^2+|x_i'|^2\right), \quad \forall t\in[\tau_0,\tau_1].$$

Comme la matrice Q est orthogonale, on obtient

$$\left(\xi_i^2|x_i(t)|^2+|x_i'(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\xi_i^2(x_i^m(\tau_0))^2+(\widetilde{u}_1,w_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{b}\int_{\tau_0}^t|(\widetilde{F}(s),w_i)|\,ds,\ \forall t\in[\tau_0,\tau_1]$$

alors

$$\lambda_i|x_i(t)|^2+b|x_i'(t)|^2\leq 2\left(\lambda_i(x_i^m(\tau_0))^2+b(\widetilde{u}_1,w_i)^2+\frac{1}{b}\left(\int_{\tau_0}^t|(\widetilde{F}(s),w_i)|\,ds\right)^2\right)$$
$$\leq 2\left(\lambda_i(x_i^m(\tau_0))^2+b(\widetilde{u}_1,w_i)^2+\frac{t-\tau_0}{b}\int_{\tau_0}^t(\widetilde{F}(s),w_i)^2\,ds\right),\quad\forall t\in[\tau_0,\tau_1],\quad\forall i\in 1,\ldots,m.$$

On sait que $\widetilde{u}_0\in V$, $\widetilde{u}_1\in L^2(\Omega)$, $\widetilde{F}\in L^2(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))$, $(w_i)_{i\geq1}$ forment une base hilbertienne orthonormale pour le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $(\widetilde{w}_i)_{i\geq1}=(\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}})_{i\geq1}$ forment une base hilbertienne orthonormale pour $a(.,.)$. De plus

$$\|\widetilde{u}_0\|_H^2=a(\widetilde{u}_0,\widetilde{u}_0)=\sum_{i\geq1}(a(\widetilde{u}_0,\widetilde{w}_i))^2,$$

alors

$$\lim_{m,p\to+\infty}\sum_{i=m+1}^p\lambda_i(x_i^m(\tau_0))^2=\lim_{m,p\to+\infty}\sum_{i=m+1}^p\frac{1}{\lambda_i}(a(\widetilde{u}_0,w_i))^2=\lim_{m,p\to+\infty}\sum_{i=m+1}^p(a(\widetilde{u}_0,\widetilde{w}_i))^2=0,$$

et

$$\lim_{m,p\to+\infty}\sum_{i=m+1}^p(\widetilde{u}_1,w_i)^2=0,\qquad\lim_{m,p\to+\infty}\sum_{i=m+1}^p\int_{\tau_0}^t(\widetilde{F}(s),w_i)^2\,ds=0.$$

On en déduit que

$$\lim_{m,p\to+\infty}\sum_{i=m+1}^p\left(\lambda_i(x_i^m(\tau_0))^2+b(\widetilde{u}_1,w_i)^2+\frac{\tau_1-\tau_0}{b}\int_{\tau_0}^{\tau_1}(\widetilde{F}(s),w_i)^2\,ds\right)=0.$$

donc

$$\lim_{m,p\to+\infty}\|u_p-u_m\|_W=0.$$

Ainsi, on déduit que la suite $(\widetilde{u}_m)_{m\geq1}$ est de Cauchy dans les espaces $C^0([\tau_0,\tau_1];V)$ et $C^1([\tau_0,\tau_1];L^2(\Omega))$.

Etape 3 : Passage à la limite Puisque les espaces $C^0([\tau_0,\tau_1];V)$ et $C^1([\tau_0,\tau_1];L^2(\Omega))$ sont complets, la suite $(\widetilde{u}_m)_{m\geq1}$ converge dans chacun des espaces. On déduit que

$$\widetilde{u}_m\to\widetilde{u}\quad\text{dans}\quad C^0([\tau_0,\tau_1];V)\cap C^1([\tau_0,\tau_1];L^2(\Omega)).\tag{2.55}$$

Pour vérifier que $\widetilde{u}$ est la solution du problème variationnel (2.50), on prend $w \in V$ alors il existe une suite de la forme

$$w_m = \sum_{j=1}^{m} \beta_j^m w_j,$$

telle que $w_m \to w$ dans V. Alors pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1)$, on a

$$w_m \psi \to w\psi \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; V).$$

En multipliant (2.53) par $\psi(t)\beta_j^m$ et en sommant de $j = 1, \ldots, m$, on obtient

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} b < \widetilde{u}''_m(t), w_m > \psi(t)\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau_1} a(\widetilde{u}_m(t), w_m)\psi(t)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\widetilde{F}(t), w_m)\psi(t)\, dt.$$

En utilisant l'intégration par parties deux fois, on obtient

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} b(\widetilde{u}_m(t), w_m)\frac{d^2\psi}{dt^2}\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau_1} a(\widetilde{u}_m(t), w_m)\psi(t)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\widetilde{F}(t), w_m)\psi(t)\, dt,$$

en passant à la limite quand $m \to \infty$, on aura

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} b(\widetilde{u}(t), w)\frac{d^2\psi}{dt^2}\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau_1} a(\widetilde{u}(t), w)\psi(t)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\widetilde{F}(t), w)\psi(t)\, dt,$$

d'où

$$b < \widetilde{u}''(t), w > +a(\widetilde{u}(t), w) = (\widetilde{F}(t), w), \quad \forall w \in V \text{ au sens des distributions.}$$

Pour vérifier si les conditions initiales sont satisfaites, on a avec (2.55)

$$\widetilde{u}_m(\tau_0) \to \widetilde{u}(\tau_0) \quad \text{dans} \quad V, \quad \frac{d\widetilde{u}_m}{dt}(\tau_0) \to \frac{du}{dt}(\tau_0) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega),$$

mais on a avec (2.53)

$$\widetilde{u}_m(\tau_0) = \widetilde{u}_{0m} \to \widetilde{u}_0 \quad \text{dans} \quad V, \quad \frac{d\widetilde{u}_m}{dt}(\tau_0) = \widetilde{u}_{1m} \to \widetilde{u}_1 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega),$$

d'où

$$\widetilde{u}(\tau_0) = \widetilde{u}_0, \quad \widetilde{u}'(\tau_0) = \widetilde{u}_1.$$

Remarque 2.4.1. *Comme $\widetilde{F} \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$ et $\widetilde{u} \in C^0(0, \tau; V)$ alors on déduit que $\widetilde{u}'' \in L^2(0, \tau; V')$.*

Etape 4 : Unicité de la solution Pour démontrer l'unicité de la solution du problème auxiliaire, on suppose qu'il existe deux solutions $\widetilde{u}^1$ et $\widetilde{u}^2$, alors elles vérifient

$$b < (\widetilde{u}^1)''(t), w > +a(\widetilde{u}^1, w) = (\widetilde{F}(t), w), \quad \forall w \in V$$
$$b < (\widetilde{u}^2)''(t), w > +a(\widetilde{u}^2, w) = (\widetilde{F}(t), w), \quad \forall w \in V,$$

en soustrayant, on obtient

$$b < (\widetilde{u}^1)''(t) - (\widetilde{u}^2)''(t), w > +a(\widetilde{u}^1(t) - \widetilde{u}^2(t), w) = 0, \quad \forall w \in V. \tag{2.56}$$

En posant $u = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$, on a $u \in L^2(0, \tau; V)$, $u' \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$, $u'' \in L^2(0, \tau; V')$. En remplaçant $a(x,t)$ par 0 et $K(x,t)$ par $\widetilde{K}(x)$ dans (2.43), on déduit l'unicité de la solution du problème auxiliaire de l'unicité du problème initial (section 2.3.4, lemme 2.3.2). $\square$

Estimation de l'énergie

On définit l'opérateur $\Lambda : V \to L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \widetilde{u} \in V : \quad \Lambda \widetilde{u} = \sum_{i \geq 1} \sqrt{b} \xi_i (\widetilde{u}, w_i) w_i.$$

La série $\Lambda \widetilde{u}$ est convergente car $(\Lambda \widetilde{u})_m = \sum_{i=1}^m \sqrt{b} \xi_i (\widetilde{u}, w_i) w_i$ est une suite de Cauchy :

$$\lim_{m,p \to \infty} \sum_{i=m+1}^{p} \sqrt{b} \xi_i (\widetilde{u}, w_i) w_i = \lim_{m,p \to \infty} \sum_{i=m+1}^{p} (a(\widetilde{u}, \widetilde{w}_i))^2 = \lim_{m,p \to \infty} \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i (\widetilde{u}, w_i)^2.$$

De plus

$$a(u, \widetilde{u}) = (\Lambda u, \Lambda \widetilde{u}) \quad \forall u \in V, \quad \forall \widetilde{u} \in V.$$

L'application Λ est linéaire et continue de V dans $L^2(\Omega)$ car

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V : \quad \Lambda(u+v) &= \lim_{m \to \infty} (\Lambda(u+v))_m = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{b} \xi_i (u+v, w_i) w_i \\ &= \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{b} \xi_i (u, w_i) w_i + \lim_{m \to \infty} \sum_{i \geq 1} \sqrt{b} \xi_i (v, w_i) w_i \\ &= \Lambda u + \Lambda v, \end{aligned}$$

et

$$\|\Lambda u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\Lambda u, \Lambda u) = a(u,u) \leq C \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

On définit l'opérateur $G(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$, tel que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\forall \widetilde{u} = \begin{pmatrix} \widetilde{u}_1 \\ \widetilde{u}_2 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad G(t)\widetilde{u} = \sum_{i \geq 1} Q(\xi_i t) \begin{pmatrix} (\widetilde{u}_1, w_i) \\ (\widetilde{u}_2, w_i) \end{pmatrix} w_i.$$

De l'orthogonalité de la matrice Q, on obtient

$$\|G(t-\tau_0)\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \{\sum_{i\geq 1}((\widetilde{u}_1, w_i)^2 + (\widetilde{u}_2, w_i)^2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

La solution obtenue dans (2.54) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}}\Lambda\widetilde{u}(t) \\ \frac{d\widetilde{u}}{dt} \end{pmatrix} = G(t-\tau_0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}}\Lambda\widetilde{u}_0 \\ \widetilde{u}_1 \end{pmatrix} + \int_0^t G(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\widetilde{F}(s)}{b} \end{pmatrix} ds.$$

Alors on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &\left(a(\widetilde{u}(t), \widetilde{u}(t)) + b\|\frac{d\widetilde{u}}{dt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\Lambda\widetilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|\frac{d\widetilde{u}}{dt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\|\Lambda\widetilde{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|\widetilde{u}_1\|\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_{\tau_0}^t \|\widetilde{F}(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds, \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_1]. \end{aligned} \tag{2.57}$$

D'où

$$\|\widetilde{u}\|_W \leq \left(\|\Lambda\widetilde{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|\widetilde{u}_1\|\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\widetilde{F}(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds.$$

2.4.2 Existence et unicité d'un deuxième problème auxiliaire

On s'intéresse au problème

Problème 2.4.3. *Trouver $\widetilde{u} \in W$ solution de*

$$\begin{cases} b\widetilde{u}'' + a(x,t)\widetilde{u}' - div(\widetilde{K}(x)\nabla\widetilde{u}) = \widetilde{G} \\ \widetilde{u} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \\ \widetilde{u}(\tau_0) = \widetilde{u}_0, \quad \widetilde{u}'(\tau_0) = \widetilde{u}_1 \end{cases}$$

où $a \in L^\infty(0,\tau; L^\infty(\Omega))$, $\widetilde{K} \in L^\infty(\Omega)$, $\widetilde{G} \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega))$, $\widetilde{u}_0 \in V$ et $\widetilde{u}_1 \in L^2(\Omega)$. On va utiliser un théorème de point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

On définit l'application suivante :

$$\Sigma : \begin{cases} W \to W \\ u \longmapsto \widetilde{u}, \end{cases} \tag{2.58}$$

où $\widetilde{u}$ est solution de :

$$\begin{cases} b\widetilde{u}'' - div(\widetilde{K}(x)\nabla\widetilde{u}) = \widetilde{G} - a(x,t)u' \\ \widetilde{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \widetilde{u}(\tau_0, x) = \widetilde{u}_0, \quad \widetilde{u}'(\tau_0, x) = \widetilde{u}_1 \end{cases}$$

On retrouve le premier problème auxiliaire avec un second membre donné par $(\widetilde{G} - a(x,t)u') \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega))$.

Lemme 2.4.1. *L'application Σ admet un unique point fixe pour tout τ_0, τ_1 tels que $\tau_1 - \tau_0 \in]0, h_*[$ avec*

$$\frac{h_* \|a\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}}{b} \leq 1. \tag{2.59}$$

.

Démonstration. On utilise le théorème du point fixe de Banach. Soient u_1, u_2 deux éléments de W et $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{u}_2$ tels que

$$\begin{cases} b\widetilde{u}_1'' - div(\widetilde{K}\nabla\widetilde{u}_1) = \widetilde{G} - a(x,t)u_1' \\ \widetilde{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \widetilde{u}_1(\tau_0, x) = \widetilde{u}_0, \quad \widetilde{u}_1'(\tau_0, x) = \widetilde{u}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\widetilde{u}_2'' - div(\widetilde{K}\nabla\widetilde{u}_2) = \widetilde{G} - a(x,t)u_2' \\ \widetilde{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \widetilde{u}_2(\tau_0, x) = \widetilde{u}_0, \quad \widetilde{u}_2'(\tau_0, x) = \widetilde{u}_1. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient

$$b(\widetilde{u}_1'' - \widetilde{u}_2'') - div(\widetilde{K}\nabla(\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2)) = -a(x,t)(u_1' - u_2').$$

Avec l'estimation de l'énergie (2.57), en prenant le second membre $\widetilde{F} = -a(x,t)(u_1' - u_2')$, on obtient

$$\|\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2\|_W \leq \frac{1}{\sqrt{b}} \|a\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1;L^\infty(\Omega))} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|u_1'(s) - u_2'(s)\|_{L^2(\Omega)} \, ds.$$

Alors

$$\|\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2\|_W \leq \frac{(\tau_1 - \tau_0)}{\sqrt{b}} \|a\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1;L^\infty(\Omega))} \|u_1' - u_2'\|_{C^0([\tau_0,\tau_1];L^2(\Omega))},$$

d'où

$$\|\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2\|_W \leq \frac{(\tau_1 - \tau_0)}{b} \|a\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1;L^\infty(\Omega))} \|u_1 - u_2\|_W.$$

Donc Σ est lipschtzienne. De l'hypothèse (2.59) avec $\tau_1 - \tau_0 \leq]0, h_*[$, on déduit que Σ admet un unique point fixe dans W noté u. $\square$

2.4.3 Existence et unicité de la solution du problème discrétisé

Problème discrétisé en temps

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on décompose l'intervalle de temps $[0, \tau]$ en N sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$, où $n = 0, \dots, N-1$. On définit le pas de temps $h = \frac{\tau}{N}$.
On se place dans les mêmes hypothèses que dans la section 2.2, c'est-à-dire , ϕ, u_0 et u_1 données respectivement dans les espaces $L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$, V et $L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(0, \tau; L^\infty(\Omega))$, $a' \in L^2(0, \tau; H^1(\Omega))$. Dans la section 2.2, on suppose que K est symétrique, et vérifie l'hypothèse (2.5). Dans cette section, on prend K et G plus réguliers c'est-à-dire $K \in W^{1,\infty}(0, \tau; W^{1,\infty}(\Omega))$ et $G \in C^2([0, \tau]; H^2(\Omega))$, on définit $K_n = K_n(x) = K(x, t_n)$ pour tout $n \in 0, \dots, N-1$ et pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$ et $x \in \Omega$.
La formulation variationnelle du problème discrétisé est donnée ainsi pour tout $n \in 0, \dots, N-1$:
trouver $u_h^n \in C^0([t_n, t_{n+1}]; V) \cap C^1([t_n, t_{n+1}]; L^2(\Omega))$ avec $(u_h^n)'' \in L^2(t_n, t_{n+1}; V')$ solution de

$$\mathbf{P_h^n} \begin{cases} b < (u_h^n)'', w > +(a(x,t)(u_h^n)', w) + (K_n \nabla u_h^n, \nabla w) = (\phi(t), w) - (a(x,t)G'(t), w) \\ -b < G''(t), w > -(K_n \nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \\ u_h^n(t_n, x) = u_0^n(x) \\ (u_h^n)'(t_n, x) = u_1^n(x) \end{cases} \tag{2.60}$$

où $u_0^n \in V$ et $u_1^n \in L^2(\Omega)$ seront précisés ultérieurement. Ce problème est identique au problème auxiliaire, où l'intervalle $[\tau_0, \tau_1]$ correspond au sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ ici et $\widetilde{G}$

correspond au second membre donné par $\phi - aG' - bG'' + div(K_n \nabla G)$ où K_n est une matrice symétrique 3×3 qui ne dépend pas du temps, et qui satisfait les mêmes hypothèses (2.46) que $\widetilde{K}$.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (2.60) se démontre alors d'une façon analogue à celle du problème auxiliaire (à l'aide du théorème de point fixe de Banach). On suppose désormais que $h \in]0, h_*[$, avec le lemme 2.4.1 et comme $t_{n+1} - t_n = h$ par définition, on déduit que le problème (2.60) admet une unique solution.

D'après les résultats de la section précédente, on sait que

$$u_h^n \in C^0([t_n, t_{n+1}]; V) \cap C^1([t_n, t_{n+1}]; L^2(\Omega)),$$

on définit alors les conditions initiales par récurrence sur n avec

$$u_0^0(x) = u_0, \quad u_1^0(x) = u_1$$

et

$$u_0^{n+1}(x) = u_h^n(x, t_{n+1}) \in V \quad \forall n \in 0, \ldots, N-2$$

$$u_1^{n+1}(x) = (u_h^n)'(x, t_{n+1}) \in L^2(\Omega) \quad \forall n \in 0, \ldots, N-2$$

On "raccorde" ainsi les problèmes discrétisés sur les sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ et on définit $u_h : \Omega \times [0, \tau] \to \mathbb{R}$ par

$$u_h(x, t) = u_h^n(x, t) \text{ pour tout } x \in \Omega, \ t \in [t_n, t_{n+1}].$$

On a donc $u_h \in C^0([0, \tau]; V) \cap C^1([0, \tau]; L^2(\Omega))$ et $u_h'' \in L^2(0, \tau; V')$ solution de

$$\mathbf{P_h} \begin{cases} b < (u_h)'', w > +(a(x,t)(u_h)', w) + (K_h \nabla u_h, \nabla w) = (\phi(t), w) - (a(x,t)G'(t), w) \\ -b < G''(t), w > -(K_h \nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \\ u_h^n(0, x) = u_0(x) \\ (u_h^n)'(0, x) = u_1(x), \end{cases} \tag{2.61}$$

où

$$K_h(x, t) = K(x, t_n) \quad \text{si} \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad x \in \Omega.$$

2.4.4 Etude de la convergence des solutions approchées

Lemme 2.4.2. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que*

$$\|\nabla u_h\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C \tag{2.62}$$

$$\|u_h'\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{2.63}$$

Démonstration. Reprenons la démonstration des estimations a priori de la première section à partir de (2.21), dans le cas où Γ_2 est vide et $K(x,s)$ est remplacé par $K_n(x)$: en prenant $u_{hm}^n(t_n)$ comme la projection orthogonale de $u_h^n(t_n)$ sur V_m et $(u_{hm}^n)'(t_n)$ comme la projection orthogonale de $u_h^n(t_n)$ sur V_m pour le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, on obtient donc

$$\begin{aligned}
&b < (u_{hm}^n)'(t), (u_{hm}^n)'(t) > +(a(x,t)(u_{hm}^n)', (u_{hm}^n)'(t)) + (K_n \nabla u_{hm}^n, \nabla (u_{hm}^n)'(t)) \\
&= (\phi(t), (u_{hm}^n)'(t)) - (a(x,t)G'(t), (u_{hm}^n)'(t)) - b < G''(t), (u_{hm}^n)'(t) > \\
&-(K_n \nabla G(t), \nabla (u_{hm}^n)'(t)).
\end{aligned}$$

Comme $a(x,t) > a^*$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|(u_{hm}^n)'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\|(u_{hm}^n)'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (K_n \nabla (u_{hm}^n(t) + G(t)), \nabla (u_{hm}^n + G)'(t)) \\
&\leq (\phi(t), (u_{hm}^n)'(t)) - (a(x,t)G'(t), (u_{hm}^n)'(t)) - b < G''(t), (u_{hm}^n)'(t) > \\
&+(K_n \nabla (u_{hm}^n(t) + G(t)), \nabla G'(t))
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|(u_{hm}^n)'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\|(u_{hm}^n)'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(K_n \nabla (u_{hm}^n(t) + G(t)), \nabla (u_{hm}^n(t) + G(t))\right) \\
&\leq \|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u_{hm}^n)'(t)\|_{L^2(\Omega)} + a_*\|G'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|(u_{hm}^n)'(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+b\|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u_{hm}^n)'(t)\|_{L^2(\Omega)} + (K_n \nabla (u_{hm}^n(t) + G(t)), \nabla G'(t)).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

En intégrant de t_n à s où $s \in [t_n, t_{n+1}]$, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|(u_{hm}^n)'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + a^*\int_{t_n}^s \|(u_{hm}^n)'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K_n \nabla (u_{hm}^n(s) + G(s)), \nabla (u_{hm}^n(s) + G(s))\right) \\
&\leq \frac{b}{2}\|(u_{hm}^n)'(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{t_n}^s \|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u_{hm}^n)'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&+a_*\int_{t_n}^s \|G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u_{hm}^n)'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + b\int_{t_n}^s \|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u_{hm}^n)'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&+\frac{1}{2}\left(K_n \nabla (u_{hm}^n(t_n) + G(t_n)), \nabla (u_{hm}^n(t_n) + G(t_n))\right) + \int_{t_n}^s (K_n \nabla (u_{hm}^n + G(t)), \nabla G'(t))\,dt.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

En appliquant l'inégalité de Young, on obtient les estimations suivantes :

$$\|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u^n_{hm})'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{a^*}{6}\|(u^n_{hm})'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3}{2a^*}\|\phi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.66}$$

$$a_*\|G'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u^n_{hm})'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{a^*}{6}\|(u^n_{hm})'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3a_*^2}{2a^*}\|G'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.67}$$

$$b\|G''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|(u^n_{hm})'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{a^*}{6}\|(u^n_{hm})'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3b^2}{2a^*}\|G''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.68}$$

En rassemblant tous ces termes, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|(u^n_{hm})'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\int_{t_n}^s \|(u^n_{hm})'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u^n_{hm}(s)+G(s)), \nabla(u^n_{hm}(s)+G(s))\right)\\
&\leq \frac{b}{2}\|(u^n_{hm})'(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + \frac{3a_*^2}{2a^*}\|G'\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + \frac{3b^2}{2a^*}\|G''\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\\
&+\frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u^n_{hm}+G(t_n))(t_n), \nabla(u^n_{hm}+G)(t_n)\right) + \frac{\alpha_*^2}{2}\|\nabla G'\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\\
&+\frac{1}{2}\int_{t_n}^s \|\nabla(u^n_{hm}(t)+G(t))\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|(u^n_{hm})'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\|(u^n_{hm})'\|^2_{L^2(t_n,s;L^2(\Omega))} + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla(u^n_{hm}(s)+G(s))\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{b}{2}\|(u^n_{hm})'(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{3}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + \frac{3a_*^2}{2a^*}\|G'\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + \frac{3b^2}{2a^*}\|G''\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\\
&+\frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u^n_{hm}(t_n)+G(t_n)), \nabla(u^n_{hm}(t_n)+G(t_n))\right) + \frac{\alpha_*^2}{2}\|\nabla G'\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\\
&+\frac{1}{2}\int_{t_n}^s \|\nabla(u^n_{hm}(t)+G(t))\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Comme $G \in C^2([0,\tau]; H^1(\Omega))$, donc

$$\begin{aligned}
&\frac{3a_*^2}{2a^*}\|G'\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + \frac{3b^2}{2a^*}\|G''\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + \frac{\alpha_*^2}{2}\|\nabla G'\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\\
&\leq |t_{n+1}-t_n|\left(\frac{3a_*^2}{2a^*}\|G'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))} + \frac{3b^2}{2a^*}\|G''\|^2_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))} + \frac{\alpha_*^2}{2}\|\nabla G'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))}\right)\\
&\leq C.h,
\end{aligned}$$

où $C = \frac{3a_*^2}{2a^*}\|G'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))} + \frac{3b^2}{2a^*}\|G''\|^2_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))} + \frac{\alpha_*^2}{2}\|\nabla G'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))}$. On pose

$$z^m_n = \frac{b}{2}\|(u^n_{hm})'(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u^n_{hm}(t_n)+G(t_n)), \nabla(u^n_{hm}(t_n)+G(t_n))\right)$$

et

$$y_n^m = z_n^m + \frac{3}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + Ch \quad \text{pour tout} \quad n \in 0,\dots,N-1.$$

En utilisant l'inégalité de Grönwall dans (2.70), on trouve

$$\|\nabla(u_{hm}^n(s) + G(s))\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{2}{\alpha^*} y_n^m exp(\frac{(s-t_n)}{\alpha^*}), \quad \forall s \in [t_n, t_{n+1}].$$

En reportant dans (2.69), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|(u_{hm}^n)'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\int_{t_n}^{s} \|(u_{hm}^n)'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_{hm}^n + G)(s), \nabla(u_{hm}^n + G)(s)\right)\\
&\le \frac{b}{2}\|(u_{hm}^n)'(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + Ch\\
&+\frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_{hm}^n(t_n) + G(t_n)), \nabla(u_{hm}^n(t_n) + G(t_n))\right) + y_n^m\left(\exp(\frac{s-t_n}{\alpha^*}) - 1\right).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

En tenant compte des hypothèses sur $u_{hm}^n(t_n)$ et $(u_{hm}^n)'(t_n)$, on passe à la limite quand $m \to \infty$, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|(u_h^n)'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\int_{t_n}^{s} \|(u_h^n)'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_h^n + G)(s), \nabla(u_h^n + G)(s)\right)\\
&\le y_n\left(\exp(\frac{s-t_n}{\alpha^*})\right) \quad \text{pp} \quad s \in [t_n, t_{n+1}],
\end{aligned} \tag{2.72}$$

où

$$y_n = z_n + \frac{3}{2a^*}\|\phi_n\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + Ch \quad \text{pour tout} \quad n \in 0,\dots,N-1$$

et

$$z_n = \frac{b}{2}\|(u_h^n)'(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_h^n(t_n) + G(t_n)), \nabla(u_h^n(t_n) + G(t_n))\right).$$

Comme $u_h^n \in \mathcal{C}^0([t_n, t_{n+1}]; V) \cap \mathcal{C}^1([t_n, t_{n+1}]; L^2(\Omega))$, alors (2.72) est vraie partout. En prenant $s = t_{n+1}$ dans (2.72), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|(u_h^n)'(t_{n+1})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(u_h^n)'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_h^n + G)(t_{n+1}), \nabla(u_h^n + G)(t_{n+1})\right)\\
&\le y_n\left(\exp(\frac{t_{n+1}-t_n}{\alpha^*})\right).
\end{aligned} \tag{2.73}$$

On a

$$\begin{aligned}
z_{n+1} \le\ &\frac{1}{2}\left((K_{n+1} - K_n)\nabla(u_h^n(t_{n+1}) + G(t_{n+1})), \nabla(u_h^n(t_{n+1}) + G(t_{n+1}))\right)\\
&+\left(Ch + \frac{3}{2a^*}\|\phi_n\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\right)\exp(\frac{t_{n+1}-t_n}{\alpha^*}) + z_n\exp(\frac{t_{n+1}-t_n}{\alpha^*}),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} z_{n+1} &\leq \frac{1}{2}\|\frac{\partial K}{\partial t}\|_{L^\infty(t_n,t_{n+1};L^\infty(\Omega))}h\|\nabla(u_h^n(t_{n+1})+G(t_{n+1}))\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left(Ch + \frac{3}{2a^*}\|\phi_n\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\right)\exp(\frac{h}{\alpha^*}) + z_n\exp(\frac{h}{\alpha^*}), \end{aligned}$$

Notons $\widetilde{M} = \frac{1}{\alpha^*}\|\frac{\partial K}{\partial t}\|_{L^\infty(t_n,t_{n+1};L^\infty(\Omega))}$, on obtient

$$z_{n+1}(1-\frac{\widetilde{M}h}{2}) \leq \left(Ch + \frac{3}{2a^*}\|\phi_n\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\right)\exp(\frac{h}{\alpha^*}) + z_n\exp(\frac{h}{\alpha^*}). \tag{2.74}$$

Il existe $\widetilde{C} > 0$ et $\hat{h} \in]0, h_*[$ tel que

$$1 - \frac{\widetilde{M}h}{2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\exp(\frac{h}{\alpha^*})}{1-\frac{\widetilde{M}h}{2}} \leq 1 + \widetilde{C}h \quad \forall h \in [0, \hat{h}].$$

On suppose désormais que $h \in]0, \hat{h}]$. En divisant (2.74) par $1 - \frac{\widetilde{M}h}{2}$, on obtient

$$z_{n+1} \leq z_n(1+\widetilde{C}h) + \left(Ch + \frac{3}{2a^*}\|\phi_n\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\right)(1+\widetilde{C}h).$$

En utilisant le lemme de Grönwall discret [51] avec $(1+\widetilde{C}h) \leq \exp(\widetilde{C}h)$, on a

$$z_n \leq z_0\exp(\widetilde{C}hn) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(Ch + \frac{3}{2a^*}\|\phi_k\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega))}\right)\exp(\widetilde{C}h(n-k)).$$

Comme $nh \leq \tau$, on a

$$z_n \leq z_0\exp(\widetilde{C}\tau) + \exp(\widetilde{C}\tau)\left(C\tau + \frac{3}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\right).$$

Alors

$$y_n \leq z_0\exp(\widetilde{C}\tau) + (\exp(\widetilde{C}\tau)+1)\left(\frac{3}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + C\tau\right).$$

où

$$z_0 = \frac{b}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}(K(0,x)\nabla(u_0+G(0)), \nabla(u_0+G(0))).$$

En revenant à (2.72), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{b}{2}\|(u_h^n)'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\int_{t_n}^s \|(u_h^n)'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_h^n+G)(s), \nabla(u_h^n+G)(s)\right) \\ &\leq \left(z_0\exp(\widetilde{C}\tau) + (\exp(\widetilde{C}\tau)+1)\left(\frac{3}{2a^*}\|\phi\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + C\tau\right)\right)\exp(\frac{\hat{h}}{\alpha^*}), \quad \forall s \in [t_n, t_{n+1}] \\ &\forall n \in 0, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{2.75}$$

De là, on déduit

$$\|u_h'\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C$$
$$\|u_h\|_{L^\infty(0,\tau;V)} \leq C,$$

où C est une constante indépendante de h.

□

2.4.5 Le passage à la limite sur h

Des estimations indépendantes de h, on déduit que u_h est bornée dans $L^2(0,\tau;V)$. Alors, il existe une sous suite notée encore $(u_h)_{h>0}$ qui vérifie la convergence suivante quand $h \to 0$:

$$u_h \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;V) \quad \text{et faible* dans} \quad L^\infty(0,\tau;V). \tag{2.76}$$

De même pour u_h', il existe une sous suite notée encore $(u_h')_{h>0}$ vérifiant la convergence suivante quand $h \to 0$:

$$u_h' \rightharpoonup u' \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;L^2(\Omega)) \quad \text{et faible* dans} \quad L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega)). \tag{2.77}$$

Avec le lemme d'Aubin, on a

$$u_h \to u \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;L^2(\Omega)). \tag{2.78}$$

On s'intéresse maintenant au passage à la limite quand $h \to 0$ dans le problème $\mathbf{P_h}$:
En multipliant l'équation du problème $\mathbf{P_h}$ par $\varphi \in \mathcal{D}(0,\tau)$, et en intégrant entre $(0,\tau)$ on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \Big(- b(u_h'(t), \varphi'(t)w) + (a(x,t)u_h'(t), \varphi(t)w) + (K_h \nabla u_h(t), \nabla(\varphi(t)w))\Big)\, dt \\
&= \int_0^\tau \Big((\phi(t), \varphi(t)w) - (a(x,t)G'(t), \varphi(t)w)\Big)\, dt \\
&- \int_0^\tau \Big(b < G''(t), \varphi(t)w > -(K_h \nabla G, \nabla(\varphi(t)w))\Big)\, dt.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Pour passer à la limite dans le terme $(K_h \nabla u_h, \nabla w)\varphi$. On utilise le lemme suivant

Lemme 2.4.3. *Quand $h \to 0$, on a*

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(K_h\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)-(K(x,t)\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)\,dt|\to 0$$

Démonstration. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,\tau)$ et $w \in V$

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(K_h\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)-(K(x,t)\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)\,dt|\\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}|\left((K_h(x,t)-K(x,t))\nabla u_h,\nabla w\right)||\varphi(t)|\,dt\\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|K_h(x,t)-K(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi(t)|\,dt\\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\frac{\partial K}{\partial t}\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}|t_n-t|\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(K_n\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)-(K(x,t)\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)\,dt|\\
&\leq Mh\int_0^\tau \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Donc quand $h \to 0$, on a

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(K_h\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)-(K(x,t)\nabla u_h,\nabla w)\varphi(t)\,dt|\to 0$$

□

Avec des calculs analogues, on passe à la limite dans le terme $(K_n\nabla G,\nabla w)$, on obtient quand $h \to 0$

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(K_n\nabla G,\nabla w)\varphi(t)-(K(x,t)\nabla G,\nabla w)\varphi(t)\,dt|\to 0.$$

En utilisant le lemme de Simon, on obtient la convergence forte suivante

$$u_h \to u \quad \text{dans} \quad C([0,\tau];L^2(\Omega)),$$

on en déduit que

$$u_h(0) \to u(0) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Or, $u_h(0) = u_0$ alors

$$u(0) = u_0.$$

Pour prouver que $u'(0) = u_1$, on choisit une fonction régulière $\varphi \in C^\infty([0,\tau];\mathbb{R})$ telle que $\varphi(\tau) = 0$, et comme dans la preuve faite dans les pages 18-20, on obtient

$$u'(0) = u_1 \quad \text{dans} \quad V'.$$

On déduit que u la limite de u_h quand $h \to 0$ est la solution du problème

Problème 2.4.4. *Trouver $u \in L^2(0,\tau;V)$, $u' \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$ et $u'' \in L^2(0,\tau;V')$ solution de*

$$\begin{cases} b < u'', w > +(a(x,t)u', w) + (K(x,t)\nabla u, \nabla w) = (\phi(t), w) - (a(x,t)G'(t), w) \\ -b < G''(t), w > -(K(x,t)\nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u'(0,x) = u_1(x). \end{cases} \tag{2.80}$$

Chapitre 3

Problème d'écoulement

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on traite un problème non-stationnaire d'écoulement de fluide, Newtonien, incompressible et non-isotherme (la viscosité du fluide dépend de la température). L'écoulement est gouverné par l'équation de Navier-Stokes munie des conditions aux limites non-linéaires (la loi de Coulomb). On commence par linéariser la condition aux limites et ainsi étudier le problème muni de la condition de Tresca, on approche ainsi l'inéquation variationnelle obtenue par une équation variationnelle dont on démontre l'existence de solutions par la méthode de Galerkin en utilisant une pénalisation de la divergence de la vitesse. Ensuite, on va étudier l'unicité de la solution du problème de Tresca en dimension 2 d'espace. L'unicité en dimension 3 d'espace nécessite plus de régularités sur les données ainsi qu'une condition sur la viscosité. Ces régularités sont aussi nécessaires pour l'existence de solutions du problème muni de la loi de Coulomb. Ce chapitre se termine par la recherche d'un fixe de Schauder qui permet d'assurer sous les hypothèses de régularités supplémentaires sur les données l'existence et l'unicité du problème variationnel considéré.

3.2 Généralités sur les fluides

Les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont définies respectivement [43] par le système :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, \tau[, \tag{3.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v \right) = div(\sigma) + \rho f \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, \tau[, \tag{3.2}$$

où $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est le tenseur des contraintes, et $D(v)$ est le tenseur des taux de déformation de composantes :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Les fonctions inconnues sont v :$]0, \tau[\times \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui représente la vitesse du fluide considéré , ρ :$]0, \tau[\times \Omega \to \mathbb{R}$ représente sa densité, et e :$]0, \tau[\times \Omega \to \mathbb{R}$ représente son énergie spécifique. Les données sont $f : [0, \tau] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui représente les forces extérieures.

On rappelle les notations usuelles :

$$\sigma : D(v) = \sum_{i,i=1}^{n} \sigma_{ij} d_{ij}(v), \quad div(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Le terme $\sigma : D(v)$ représente l'énergie générée par la déformation du milieu continu sous l'action des forces extérieures, dit terme de dissipation. Si la densité ρ est constante, le fluide est alors dit *incompressible*, c'est à dire sa masse spécifique varie faiblement avec la pression ou la température. La loi de conservation de la masse (3.1) devient

$$div(v) = 0. \tag{3.3}$$

On suppose également que le tenseur des contraintes σ est symétrique [20] :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

le cas contraire conduit à l'étude des fluides dits *micropolaires* [23, 41] Le tenseur de contraintes est donné ainsi (voir par exemple [25]) :

$$\sigma = -pI + k(T)\dot{\gamma}^{r-1} D(v) \tag{3.4}$$

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{D(v)D(v)}, \quad \mu(T) = \frac{k(T)}{2}\dot{\gamma}^{r-1}, \tag{3.5}$$

où

- I est la matrice identité dans $\mathbb{R}^n$,
- k est la conduction thermique,
- μ est la viscosité du fluide.

Pour $r > 1$, le fluide est *non-Newtonien*, si $r = 1$, on dit que le fluide est *Newtonien*.

Dans le cas où la viscosité μ est constante, on pose [27]

$$x' = \frac{x}{L_*}, t' = \frac{t}{t_*}, p' = \frac{p}{p_*}, v' = \frac{v}{v_*}, f' = \frac{f}{f_*},$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{U_*}{t_*}\frac{\partial v'}{\partial t'}, \nabla_x = \frac{1}{L_*}\nabla_{x'}$$

où v_* est la vitesse moyenne du fluide en écoulement dans un tube de diamètre L_*.

En remplaçant dans σ_{ij} on a

$$\sigma_{ij}(v,p) = -p_* p'\delta_{ij} + 2\mu\frac{v_*}{L_*}d'_{ij}(v')$$

où

$$2d'_{ij}(v') = \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x'_i}$$

et δ_{ij} est le symbole de Krönecker, alors (3.2) devient

$$\rho\frac{v_*}{t_*}\frac{\partial v'}{\partial t'} + \rho\frac{v_*^2}{L_*}(v'.\nabla_{x'})v' = -\frac{p_*}{L_*}\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{\mu v_*}{L_*^2}\Delta_{x'}(v') + \rho f_* f' \tag{3.6}$$

en remplaçant

$$p_* = \frac{\mu v_*}{L_*}, \ t_* = \frac{L_*}{v_*} \text{ et } f_* = \frac{\bar{\mu} v_*}{\rho L_*^2}$$

dans (3.6) et en multipliant les deux cotés par $\frac{L_*}{\rho v_*^2}$, on obtient

$$\frac{\rho v_* L_*}{\mu}\left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + (v'.\nabla_{x'})v'\right) = -\nabla p' + \Delta_{x'}(v') + f'. \tag{3.7}$$

Notons Re le nombre dit de Reynolds (voir par exemple [27, 54])

$$Re = \frac{\rho v_* L_*}{\mu}$$

on pose maintenant $x' = x$, $t' = t$, $v' = v$, $p' = p$ et $f' = f$ dans (3.7), on obtient

$$Re\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v\right) = -\nabla p + \Delta v + f \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,\tau[. \tag{3.8}$$

Le système (3.8)-(3.3) est dit de *Navier-Stokes*. Lorsque la viscosité est une constante positive, le fluide est dit visqueux. Lorsque la température est constante et $\mu = 0$ le fluide est dit parfait, le système est dit dans ce dernier cas *d'Euler*. Le terme $(v.\nabla v)$ est appelé terme convectif ou terme de transport, et le terme Δv représente la diffusion de l'implusion dans le fluide dit aussi le terme de viscosité. Quand le terme de convection est nul, (3.8) est appelé système de *Stokes*.

On dit qu'un écoulement est *laminaire* lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est *turbulent* lorsque le déplacement est irrégulier et que les fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement.
On constate [27, 1] que la transition vers la turbulence s'effectue lorsque le nombre de Reynolds Re varie entre 2100 et 2500, pour $Re < 2000$, l'écoulement reste *laminaire*.

On dit qu'un écoulement est *stationnaire* si toutes les variables décrivant le mouvement (la pression p, la vitesse v, la densité ρ et l'énergie e) sont indépendantes du temps. un écoulement est dit *non stationnaire* si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps.

On dit qu'un fluide est *isotherme* si sa viscosité dépend de sa température T, dans le cas inverse, le fluide est dit *non isotherme*.

On suppose que le fluide est incompressible et homogène, alors la densité est constante en temps et en espace (on prend $\rho = 1$). On suppose de plus que le fluide est Newtonien non-isotherme c'est à dire k dépend de la température T qu'on supposera donnée dans ce chapitre. D'où

$$\sigma = -pI + 2\mu(T)D(v) \tag{3.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu(T)d_{ij}(v)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

La viscosité d'un fluide définit son état dont les molécules sont freinées dans leur dépacement par des intéractions ou des associations moléculaires plus ou moins intenses, elle dépend de la température [4, 35]. Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.

3.3 Position du problème

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$, on considère le domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad x' \in \omega, \quad 0 < x_n < h(x')\},$$

où $n = 2, 3$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$. La frontière de Ω est consituée de trois parties $\omega = \{(x', x_n) \in \overline{\Omega} : x_n = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x', x_n) \in \overline{\Omega} : x_n = h(x')\}$ et Γ_L la partie latérale de $\partial\Omega$ telles que $\partial\Omega = \Gamma = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma_L} \cup \overline{\Gamma_1}$. On suppose que h est une fonction continue et vérifiant $0 < h_{min} < h(x') < h_{max}$ pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude du système suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v - 2div\left(\mu(T)D(v)\right) + \nabla p = f \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0, \tau[, \tag{3.10}$$

muni de la condition d'incompressibilité

$$div(v) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0, \tau[, \tag{3.11}$$

et de la condition initiale

$$v(0, x) = v_0(x) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega. \tag{3.12}$$

Pour que le problème soit complet, on rajoute au système (3.10)-(3.12) les conditions au bord données par :

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \tag{3.13}$$

$$v = g\zeta \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \tag{3.14}$$

g est une fonction indépendante de t et ζ dépend seulement de t. La composante normale de la vitesse sur ω est nulle

$$v_\nu = v \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{3.15}$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ est le vecteur unitaire normal à Γ exterieur à Ω, alors que la composante de la vitesse tangentielle sur ω satisfait la loi de frottement de Coulomb [20], [21],

$$\begin{aligned} &|\sigma_{\mathcal{T}}| < k|\sigma_\nu| \Rightarrow v_{\mathcal{T}} = s\zeta \\ &|\sigma_{\mathcal{T}}| = k|\sigma_\nu| \Rightarrow \exists\lambda \geq 0 \quad \text{tel que} \quad v_{\mathcal{T}} = s\zeta - \lambda\sigma_{\mathcal{T}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

on notera de la même façon la valeur absolue de σ_ν et la norme dans $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\sigma_{\mathcal{T}}$, k est le coefficient de frottement et s est la vitesse du cisaillement du bord ω. On donne respectivement les vitesses normale et tangentielle sur ω, et les composantes du tenseur de contraintes normales et tangentielles :

$$v_\nu(t) = v(t) \cdot \nu = v_i\nu_i \quad ; \quad v_{\mathcal{T}}(t) = v_i(t) - v_\nu(t)\nu_i \tag{3.17}$$

$$\sigma_\nu = (\sigma \cdot \nu) \cdot \nu = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j \quad ; \quad \sigma_{\mathcal{T}_i} = \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_\nu\nu_i. \tag{3.18}$$

On utilise ici et dans toute la suite *la convention de sommation d'Einstein* qui consiste à supprimer la somme sur les indices répétés.

Lemme 3.3.1. *La relation (3.16) est équivalente à la relation suivante :*

$$(v - s\zeta)\sigma_{\mathcal{T}} + k|\sigma_\nu||v - s\zeta| = 0 \quad sur \quad \omega. \tag{3.19}$$

Démonstration. Sur ω, on a

$$v = v_{\mathcal{T}} + v_\nu \cdot \nu = v_{\mathcal{T}}.$$

On suppose que (3.16) est vraie, pour $|\sigma_{\mathcal{T}}| < k|\sigma_\nu|$ on a $v_{\mathcal{T}} = s\zeta$, donc la relation (3.19) est satisfaite. Pour $|\sigma_{\mathcal{T}}| = k|\sigma_\nu|$ alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $v_{\mathcal{T}} = s\zeta - \lambda\sigma_{\mathcal{T}}$, donc

$$(v - s\zeta)\sigma_{\mathcal{T}} + k|\sigma_\nu||v - s\zeta| = -\lambda\sigma_{\mathcal{T}}\sigma_{\mathcal{T}} + |\sigma_{\mathcal{T}}|| - \lambda\sigma_{\mathcal{T}}| = 0.$$

Inversement, on suppose que (3.19) a lieu

-Si $|\sigma_{\mathcal{T}}| = k|\sigma_\nu|$, alors

$$(v - s\zeta)\sigma_{\mathcal{T}} + k|\sigma_\nu||v - s\zeta| = (v - s\zeta)\sigma_{\mathcal{T}} + |\sigma_{\mathcal{T}}||v - s\zeta| = 0,$$

donc, il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$v - s\zeta = -\lambda \sigma_{\mathcal{T}}.$$

-Si $|\sigma_{\mathcal{T}}| < k|\sigma_\nu|$, alors

$$\begin{aligned} 0 = (v - s\zeta)\sigma_{\mathcal{T}} + k|\sigma_\nu||v - s\zeta| &\geq -|v - s\zeta||\sigma_{\mathcal{T}}| + k|\sigma_\nu||v - s\zeta| \\ &\geq |v - s\zeta|(k|\sigma_\nu| - |\sigma_{\mathcal{T}}|) \end{aligned}$$

$$v = s\zeta,$$

d'où l'équivalence entre (3.16) et (3.19). □

3.3.1 La formulation variationnelle

Notons :

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left(H^1(\Omega)\right)^n, \ \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n, \ \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^n, \ \mathbf{H}^2(\Omega) = \left(H^2(\Omega)\right)^n.$$

On suppose que

$$f \in L^2(0, \tau; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad v_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad T \in L^2(0, \tau; H^1(\Omega)) \tag{3.20}$$

et la viscosité μ est une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et satisfait pour μ^*, μ_* deux constantes strictement positives :

$$\mu^* \leq \mu(X) \leq \mu_* \quad \forall X \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

On suppose de plus

$$\int_{\Gamma_L} g.\nu \, d\sigma = 0 \tag{3.22}$$

$$\zeta \in \mathcal{C}^\infty(0, \tau), \quad \zeta(0) = 1 \tag{3.23}$$

$$g \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_L), \quad \text{et} \quad s \in H^{\frac{3}{2}}(\omega). \tag{3.24}$$

Comme $s.\nu = 0$ sur ω, de (3.22) et de [32] lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned} &\exists G_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \text{tel que} \quad div\, G_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad G_0 = g(x) \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \\ &G_{0\mathcal{T}} = s \quad \text{sur} \quad \omega, \quad G_0.\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega, \quad G_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{aligned} \tag{3.25}$$

De (3.24), on déduit que $G_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$. de plus

$$v_0 = G_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L.$$

On considère les convexes $\mathcal{V}$ de $\mathbf{H}^1(\Omega)$

$$\mathcal{V} = \left\{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \varphi = 0 \quad \text{sur}\, \Gamma_1, \quad \varphi = G_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \varphi \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\right\},$$

$$\mathcal{V}_{div} = \{\varphi \in \mathcal{V} : \quad div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

et les espaces fonctionnels suivants

$$\mathcal{V}_0 = \left\{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L \cup \Gamma_1, \varphi \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\right\},$$

$$\mathcal{V}_{0div} = \{\varphi \in \mathcal{V} : \quad div\, \varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx = 0\right\}.$$

L'espace fonctionnel $\mathcal{V}_0$ est muni de la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et $L_0^2(\Omega)$ de la norme de $L^2(\Omega)$. Notons $Z = \mathbf{H}^1_{0div}$ muni de la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et Z' son dual. $\mathcal{V}_0'$ est l'espace dual de $\mathcal{V}_0$. On définit les applications suivantes

$$\begin{aligned} a : \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (u, v) \quad &\mapsto \quad a(u, v) = 2\int_\Omega \mu(T) d_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx' dx_n = \int_\Omega \mu(T) d_{ij}(u) d_{ij}(v)\, dx' dx_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b : \quad \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (u, v, w) \quad &\mapsto \quad b(u, v, w) = \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\, dx'\, dx_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j : \quad \mathcal{V}_0 \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ u \quad &\mapsto \quad j(T; u, p) = \int_\omega kS(\sigma_\nu)|u|\, d\, x', \end{aligned}$$

où σ_ν dépend de T, v et p de la manière suivante

$$\sigma_\nu(T; v, p) = -p + 2\mu(T)\frac{\partial v}{\partial x_n} \quad \text{sur} \quad \omega.$$

Comme $v \in L^2(0, \tau; \mathcal{V}_0)$ donc $\frac{\partial v}{\partial x_n} \in L^2(0, \tau; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Or la trace d'élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sur le bord n'a pas de sens, suivant [21] on utilise la régularisation de $|\sigma_\nu(v, p)|$ définie de $H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$ dans $L^2_+(\omega)$ par

$$\forall \delta \in H^{-\frac{1}{2}}(\omega), \quad S(\delta)(x) = \left| < \delta, \varphi_x >_{H^{-\frac{1}{2}}(\omega), H^{\frac{1}{2}}_{00}} \right| \quad \forall x \in \omega,$$

où $y \mapsto \varphi_x(y) = \varphi(x - y)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans ω. $H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$ est l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\omega) = \{\varphi|_\omega : \varphi \in H^1(\Omega), \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L\}$. $L^2_+(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions positives de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

De (3.21), la forme bilinéaire a est continue

$$|a(T; u, v)| \leq \mu_* \|u\|_{\mathcal{V}_0} \|v\|_{\mathcal{V}_0} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_0, \quad \forall T \in L^2(0, \tau; H^1(\Omega))$$

et coercive car $\exists \alpha > 0$ qui dépend de μ^*, tel que

$$a(T; v, v) \geq \alpha \|v\|^2_{\mathcal{V}_0} \quad \forall v \in \mathcal{V}_0, \quad \forall T \in L^2(0, \tau; H^1(\Omega)).$$

Proposition 3.3.1. *Pour tout $u, v, w \in \mathcal{V}_{0div}$, la forme trilinéaire b vérifie les propriétés suivantes :*

$$b(u, v, v) = 0, \tag{3.26}$$

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0, \tag{3.27}$$

$$|b(u, v, w)| \leq K^2 \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}}. \tag{3.28}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_i \partial_i v_j v_j \, dx &= -\int_\Omega v_j \partial_i (u_i v_j) \, dx + \int_\Gamma u_i \cdot (v_j)^2 \cdot \nu_i \, ds \\
&= -\int_\Omega (v_j)^2 \partial_i u_i \, dx - \int_\Omega v_j u_i \partial_i v_j \, dx + \int_\Gamma u_i \cdot (v_j)^2 \cdot \nu_i \, ds \\
&= -\int_\Omega (v_j)^2 div(u) \, dx - \int_\Omega v_j u_i \partial_i v_j \, dx,
\end{aligned}$$

d'après la condition d'incompressiblité, on a

$$b(u,v,v) = -b(u,v,v),$$

d'où (3.26). Pour prouver (3.27), il suffit de remplacer v par $v+w$, on aura

$$\begin{aligned} 0 = b(u, v+w, v+w) &= b(u,v,v+w) + b(u,w,v+w) \\ &= b(u,v,v) + b(u,v,w) + b(u,w,v) + b(u,w,w), \end{aligned}$$

de (3.26), il reste

$$b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0,$$

d'où (3.27). Pour (3.28), de l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$, il existe une constante $K > 0$. Avec l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx &\leq \|u\|_{\mathbf{L}^4(\Omega))} \| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &\leq K^2 \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

□

Dans ce qui suit, on notera

$$\widetilde{v} = v - G_0 \zeta.$$

Proposition 3.3.2. *La formulation variationnelle du problème fort (3.10)-(3.16) conduit au problème* (**PC**) *suivant :*

Problème de Coulomb (PC) *: Pour* $G_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\zeta \in \mathcal{C}^\infty([0,\tau])$, $\widetilde{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *et* $f \in L^2(0,\tau; \mathbf{L}^2(\Omega))$, *on cherche*

$$\widetilde{v} \in L^2(0,\tau; \mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau; L^2(\Omega)), \quad \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0,\tau; Z'), \quad p \in H^{-1}(0,\tau; L^2_0(\Omega))$$

vérifiant l'inégalité variationnelle suivante au sens des distributions

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}, \varphi), \chi \right\rangle + \int_0^\tau \Big[b(\widetilde{v}, \widetilde{v}, \varphi\chi) - (p, div(\varphi\chi)) + a(T; \widetilde{v}, \varphi\chi) + j(T; \varphi\chi + \widetilde{v}, p) \Big] dt \\ &- \int_0^\tau j(T; \widetilde{v}, p)\, dt \geq \int_0^\tau \Big[(f, \varphi\chi) - \zeta a(T; G_0, \varphi\chi) - \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi \right) - \zeta\, b(G_0, \widetilde{v} + G_0\zeta, \varphi\chi) \Big] dt \\ &- \int_0^\tau \zeta\, b(\widetilde{v}, G_0, \varphi\chi)\, dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,\tau) \end{aligned} \tag{3.30}$$

et la condition initiale

$$\widetilde{v}(0,x) = \widetilde{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.31}$$

où $< .,. >$ représente le crochet de dualité entre $\mathcal{D}(0,\tau)$ et $\mathcal{D}'(0,\tau)$.

Démonstration. Soient $\varphi \in \mathcal{V}_0$, $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$. On multiplie l'équation (3.2) par $\varphi\chi$, et on intègre sur Ω, puis de 0 à τ. En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v.\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,dx\,dt = -\int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i\chi)\,dx\,dt \\ + \int_0^\tau \int_\Gamma \sigma_{ij}\nu_j(\varphi_i\chi)\,d\sigma + \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,dx\,dt\end{aligned} \tag{3.32}$$

D'après les conditions aux limites (3.13)-(3.15), on a

$$\int_\Gamma \sigma_{ij}\nu_j(\varphi_i\chi)\,d\sigma = \int_\omega \sigma_{ij}\nu_j.(\varphi_i\chi)\,dx'.$$

Or $\sigma_{ij}\nu_j = \sigma_{\mathcal{T}_i} + \sigma_\nu\nu_i$, et $\varphi\chi\nu_i = 0$ sur ω donc

$$\int_\omega \sigma_{ij}\nu_j(\varphi_i\chi)\,dx' = \int_\omega (\varphi_i\chi)\left(\sigma_{\mathcal{T}_i} + \sigma_\nu\nu_i\right)\,dx' = \int_\omega \varphi_i\chi\sigma_{\mathcal{T}_i}\,dx'.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v.\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i\chi)\,dx\,dt \\ -\int_0^\tau \int_\omega \sigma_{\mathcal{T}}(\varphi_i\chi)\,dx'\,dt = \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

On rajoute et on retranche du premier membre de l'équation ci-dessus, le terme suivant

$$\int_0^\tau \int_\omega kS(\sigma_\nu)\left(|\varphi_i\chi + v - s\zeta| - |v - s\zeta|\right)\,dx'\,dt$$

on aura

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v.\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,dx\,dt + \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_j}\,dx\,dt \\ &+ \int_0^\tau \int_\omega kS(\sigma_\nu)\left(|\varphi_i\chi + v - s\zeta| - |v - s\zeta|\right)\,dx'\,dt - \int_0^\tau \sum_{j=1}^n \int_\omega \sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi)\,dx'\,dt \\ &- \int_0^\tau \int_\omega kS(\sigma_\nu)\left(|\varphi_i\chi + v - s\zeta| - |v - s\zeta|\right)\,dx'\,dt = \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Posons

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\omega \sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi)\,dx' + \int_\omega kS(\sigma_\nu)\left(|\varphi_i\chi + v - s\zeta| - |v - s\zeta|\right)\,dx \\
&= \int_\omega \left[\sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi + v - s\zeta) - \sigma_{\mathcal{T}_i}(v - s\zeta) + kS(\sigma_\nu)|\varphi_i\chi + v - s\zeta| - kS(\sigma_\nu)|v - s\zeta|\right]\,dx.
\end{aligned}
$$

En utilisant le lemme 3.3.1,on aura

$$
A = \int_\omega \sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi + v - s\zeta) + kS(\sigma_\nu)|\varphi_i\chi + v - s\zeta|\,dx',
$$

mais

$$
\sigma_{\mathcal{T}_i}(\varphi_i\chi + v - s\zeta) \geq -\|\sigma_{\mathcal{T}}\||\varphi_i\chi + v - s\zeta| \geq -kS(\sigma_\nu)|\varphi_i\chi + v - s\zeta|, \quad \text{sur} \quad \omega,
$$

donc $A \geq 0$, on aura alors

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v.\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_j}\,dx\,dt \\
&+ \int_0^\tau \int_\omega kS(\sigma_\nu)\left(|\varphi_i\chi + v - s\zeta| - |v - s\zeta|\right)\,dx\,dt \geq \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

En remplaçant σ_{ij} par son expression, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v.\nabla)v_i\right)(\varphi_i\chi)\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_\Omega (2\mu(T)d_{ij}(v))\,\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_j}\,dx\,dt - \int_0^\tau \int_\Omega p\frac{\partial(\varphi_i\chi)}{\partial x_i}\,dx\,dt \\
&+ \int_0^\tau \int_\omega kS(\sigma_\nu)\left(|\varphi_i\chi + v - s\zeta| - |v - s\zeta|\right)\,dx\,dt \geq \int_0^\tau \int_\Omega f_i(\varphi_i\chi)\,dx\,dt,
\end{aligned}
$$

en remplaçant v par $\widetilde{v} + G_0\zeta$ et en tenant compte du fait que $G_0 = s$ sur ω, on obtient (3.30). □

Problème de Tresca

Afin de simplifier l'étude du problème (**PC**), on va étudier dans un premier lieu le problème muni de la loi de Tresca donné par

Problème de Tresca (PT) : Pour $f \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\widetilde{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $G_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{C}^\infty([0,\tau])$, on cherche $\widetilde{v} \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $p \in H^{-1}(0,\tau;L^2_0(\Omega))$ solution de

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v},\varphi\right),\chi\right\rangle + \int_0^\tau \left[b(\widetilde{v},\widetilde{v},\varphi\chi) - (p, div(\varphi\chi)) + a(T;\widetilde{v},\varphi\chi)\right]dt \\
&+ \int_0^\tau \left[\psi(\varphi\chi + \widetilde{v}) - \psi(\widetilde{v})\right]dt \geq \int_0^\tau (\widetilde{f},\varphi\chi)\,dt, \quad \forall\varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

et la condition initiale

$$\widetilde{v}(0,x) = \widetilde{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.34}$$

où

$$\psi(\widetilde{v}) = \int_\omega l|\widetilde{v}|\, dx'$$

et

$$(\widetilde{f},\theta) = (f,\theta) - \zeta a(T;G_0,\theta) - \left(G_0\frac{\partial\zeta}{\partial t},\theta\right) - \zeta\, b(G_0,\widetilde{v}+G_0\zeta,\theta) - \ \zeta\, b(\widetilde{v},G_0,\theta). \tag{3.35}$$

3.4 Problème pénalisé $(\mathbf{P}_\varepsilon^\delta)$

Pour $\varepsilon > 0$, on introduit la fonctionnelle ψ_ε définie ainsi pour $l \in L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))$ tel que

$$\exists L > 0 : \quad l(t,x) \leq L, \quad \forall (t,x) \in [0,\tau]\times\omega$$

$$\psi_\varepsilon(\widetilde{v}) = \int_\omega l\sqrt{\varepsilon^2+|\widetilde{v}|^2}\, dx' \quad \widetilde{v} \in \mathcal{V}_0,$$

qui est différentiable au sens de Gâteaux sur $\mathcal{V}_0$, de différentielle ψ'_ε définie par

$$< \psi'_\varepsilon(w), v >= \int_\omega l\frac{vw}{\sqrt{\varepsilon^2+|w|^2}}\, dx'.$$

Suivant [37], on utilise la méthode de pénalisation. On introduit le problème variationnel approché suivant

Problème$(\mathbf{P}_\varepsilon^\delta)$ Soient $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\widetilde{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$ données. Trouver $\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)\cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)' \in L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z')$ solution de

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\varphi\right),\chi\right\rangle + \int_0^\tau \left[b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\varphi\chi) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta),\varphi\chi\right) + a(T;\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\varphi\chi)\right] dt\\ &+\int_0^\tau \left[\frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta),\chi div\,\varphi\right) + \left\langle\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta),\varphi\chi\right\rangle\right] dt = \int_0^\tau (\widetilde{f},\varphi\chi)\, dt,\ \forall\varphi\in\mathcal{V}_0,\ \forall\chi\in\mathcal{D}(0,\tau)\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta(0,x) = \widetilde{v}_\varepsilon^{0\delta}(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.37}$$

où $\widetilde{f}$ est donné par (3.35).

On suppose qu'il existe une sous suite notée $(\widetilde{v}_\varepsilon^{0\delta})$ telle que

$$\lim_{\delta\to 0} \widetilde{v}_\varepsilon^{0\delta} = \widetilde{v}_\varepsilon^0 \quad \text{et} \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{v}_\varepsilon^0 = \widetilde{v}_0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\Omega). \tag{3.38}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \, dx &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \nabla(\widetilde{v}_\varepsilon^{\delta^2})\, dx + \int_{\partial\Omega} (\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)^2 \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \cdot \nu \\ &= -\int_\Omega \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \nabla(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \, dx, \quad \forall \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \in \mathcal{V}_0,\end{aligned}$$

alors

$$b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta) + \frac{1}{2}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \widetilde{v}_\varepsilon^\delta) = 0, \quad \forall \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \in \mathcal{V}_0. \tag{3.39}$$

3.4.1 Méthode de Galerkin

On va démontrer l'existence de solutions du problème variationnel approché (3.36)-(3.37) en utilisant la méthode de Galerkin [54]. $\mathcal{V}_0$ étant séparable, il existe une partie dénombrable et dense dans $\mathcal{V}_0$. On note $\mathcal{V}_m$ le sous-espace de $\mathcal{V}_0$ engendré par les vecteurs $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. On peut construire une famille $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, orthogonale dans $\mathcal{V}_0$ et orthonormale pour le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

On pose

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta(t,x) = \sum_{j=1}^m g_{\varepsilon j}^\delta(t) w_j(x), \quad t \in (0,\tau) \tag{3.40}$$

et

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta(0,x) = \widetilde{v}_{\varepsilon m}^{0\delta}(x) \tag{3.41}$$

et on considère le problème suivant

Probème($\mathbf{P}_{\varepsilon\mathbf{m}}^\delta$) Pour $1 \le k \le m$, $\forall t \in [0,\tau]$, on a

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta}{\partial t}, w_k\right) + b(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, w_k) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), w_k\right) + a(T; \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta; w_k) \\ &+\frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), div\, w_k\right) + \left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), w_k\right\rangle = (\widetilde{f}, w_k).\end{aligned} \tag{3.42}$$

de (3.40)-(3.41), on a

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}(0) = \widetilde{v}_{\varepsilon m}^{0\delta}. \tag{3.43}$$

où $\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{0\delta}$ est la projection orthogonale de $\widetilde{v}_{\varepsilon}^{0\delta}$ dans $L^2(\Omega)$ sur l'espace généré par $\{w_1 \dots w_m\}$. Notons

$$(F, w_k) \;=\; (f, w_k) - \left[\left(G_0\frac{\partial \zeta}{\partial t}, w_k\right) + \zeta b(G_0, G_0\chi, w_k)\right] - \zeta a(T; G_0, w_k)$$

En remplaçant $\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}$ par son expression (3.40) dans l'équation variationnelle (3.42), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}(g_{\varepsilon j}^{\delta})' w_j, w_k\right) + a\left(T; \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, w_k\right) + b\left(\sum_{i=1}^{m} g_{\varepsilon i}^{\delta} w_i, \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, w_k\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} g_{\varepsilon i}^{\delta} w_i (div(\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j)), w_k\right) + \frac{1}{\delta}\left(div(\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j), div w_k\right)\\
&+\left\langle \psi_\varepsilon'\left(\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j\right), w_k\right\rangle = (F, w_k) - b\left(G_0\zeta, \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, w_k\right)\\
&- b\left(\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, G_0\zeta, w_k\right), \quad 1 \le k \le m,
\end{aligned}$$

et de l'orthonormalité des (w_j) dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
&(g_{\varepsilon k}^{\delta})' + \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} a(T, w_j, w_k) + \sum_{i,j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} g_{\varepsilon i}^{\delta}(t) b(w_i, w_j, w_k)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} g_{\varepsilon i}^{\delta} g_{\varepsilon j}^{\delta}(w_i div(w_j), w_k) + \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta}(div\, w_j, div\, w_k)\\
&+\left\langle \psi_\varepsilon'\left(\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j\right), w_k\right\rangle = (F, w_k) - \sum_{j=1}^{m} b(G_0\zeta, g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, w_k)\\
&-\sum_{j=1}^{m} b(g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, G_0\zeta, w_k), \quad 1 \le k \le m.
\end{aligned}$$

En posant $A_{j,k}(T) = a(T, w_j, w_k)$, $B_{i,j,k} = b(w_i, w_j, w_k)$, $F_k = (F, w_k)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(g_{\varepsilon k}^{\delta})' + \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} A_{jk}(T) + \sum_{i,j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} g_{\varepsilon i}^{\delta} B_{i,j,k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} g_{\varepsilon i}^{\delta} g_{\varepsilon j}^{\delta}(w_i div(w_j), w_k)\\
&+\frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta}(div\, w_j, div\, w_k) + \left\langle \psi_\varepsilon'(\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j), w_k\right\rangle = F_k\\
&-\sum_{j=1}^{m} b(G_0\zeta, g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, w_k) - \sum_{j=1}^{m} b(g_{\varepsilon j}^{\delta} w_j, G_0\zeta, w_k),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

puis avec

$$\mathcal{G}_k(t, g^\delta_\varepsilon(t)) = F_k - \sum_{j=1}^m g^\delta_{\varepsilon j} A_{j,k}(T) - \sum_{i,j=1}^m g^\delta_{\varepsilon j}(t) g^\delta_{\varepsilon i} B_{i,j,k} - \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^m g^\delta_{\varepsilon j}(div\, w_j, div\, w_k)$$
$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g^\delta_{\varepsilon i} g^\delta_{\varepsilon j}(w_i div(w_j), w_k) - \left\langle \psi'_\varepsilon(\sum_{j=1}^m g^\delta_{\varepsilon j} w_j), w_k \right\rangle$$
$$-\sum_{j=1}^m b(G_0\chi, g^\delta_{\varepsilon j} w_j, w_k) - \sum_{j=1}^m b(g^\delta_{\varepsilon j} w_j, G_0\zeta, w_k),$$

où $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_k)_{1 \leq k \leq m}$, l'équation différentielle (3.44) s'écrit

$$\begin{aligned} &(g^\delta_\varepsilon)' = \mathcal{G}(t, g^\delta_\varepsilon) \\ &g^\delta_\varepsilon(0) = g^{0\delta}_\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Du théorème de Cauchy, le système différentiel (3.45) admet une unique solution $g^\delta_{\varepsilon j}$ dans $H^1(0, \tau_m)$ où $\tau_m \leq \tau$, ce qui implique l'existence locale en temps d'une solution $\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}$ au problème (3.42). Dans le lemme suivant, des estimations à priori indépendantes de m, de ε et de δ seront établies, ce qui nous permet de prolonger cette solution à l'intervalle $[0, \tau]$.

Lemme 3.4.1. *Pour tout $f \in L^2(0, \tau; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $\widetilde{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $G_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ et vérifiant (3.25) et $\zeta \in \mathcal{C}^\infty([0, \tau])$, la solution du problème $(\mathbf{P}^\delta_{\varepsilon m})$ vérifie les estimations suivantes :*

$$\sup_{t \in [0,\tau]} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C, \tag{3.46}$$

$$\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} \leq C, \tag{3.47}$$

$$\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}, \tag{3.48}$$

où C est une constante indépendante de ε, de m et de δ.

Démonstration. En multipliant l'équation (3.42) par $g^\delta_{\varepsilon j}(t)$ et en sommant pour j allant de 1 à m, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) \\ &+\frac{1}{\delta}\left(div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + \left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right\rangle = (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}). \end{aligned} \tag{3.49}$$

$\widetilde{f}$ est donné dans (3.35).

Puisque $l \in L^2(0,\tau; L^2_+(\omega))$, on a

$$\left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} \right\rangle \;=\; \int_\omega \frac{l(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2}} \geq 0, \quad \forall t \in [0,\tau].$$

On en déduit ainsi que de (3.39)

$$\left(\frac{\partial \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right) \leq (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}).$$

En utilisant la coercivité de a, on a

$$\left(\frac{\partial \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + \alpha \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}).$$

Rappelons que

$$\begin{aligned}(\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) = (f, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)) - \zeta\, a(\widetilde{T}; G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\right)\\ -\zeta b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \zeta b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)) - \zeta^2 b(G_0, G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\end{aligned}$$

Comme $div\, G_0 = 0$ dans Ω avec la même preuve que dans (3.26), le terme $b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})$ s'annule. Notons dans ce qui suit K la constante d'injection continue de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young dans tous les termes de $(\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})$, on obtient respectivement

$$\begin{aligned}\left|(f, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right| &\leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &\leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta\, a(\widetilde{T}; G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right| &\leq \mu_* |\zeta| \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\ &\leq \frac{\alpha}{4}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} |\zeta|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right)\right| &\leq \left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &\leq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta b(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}, G_0, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t))\right| &\leq |\zeta| \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\alpha}{4}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{K^4}{\alpha}|\zeta|^2 \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^2\left|b(G_0, G_0, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\right| &\leq |\zeta^2| G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{K^4}{2}|\zeta|^4 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

En rassemblant ces termes, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2 \\ &+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{3}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{K^4}{\alpha}|\zeta|^2\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+\frac{K^4}{2}|\zeta|^4\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

En intégrant de 0 à s, où $s < \tau$ on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_0^s \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_0^s \|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+\frac{1}{2}\int_0^s \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^s |\zeta|^2\,dt + \frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_0^s \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 dt + \frac{3}{2}\int_{\tau_0}^s \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt \\ &+\frac{K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^s |\zeta|^2\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{K^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\int_0^s |\zeta|^4\,dt.\end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \frac{\alpha}{2}\int_0^s \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_0^s \|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \\ &\leq C_1 + C_2\int_0^s \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt,\end{aligned} \tag{3.51}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes indépendantes de m, de ε et de δ

$$\begin{aligned}C_1 = \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{0\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \frac{1}{2}\int_0^\tau \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_0^\tau \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 dt \\ &+\frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^\tau |\zeta|^2\,dt + \frac{K^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\int_0^\tau |\zeta|^4\,dt\end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{3}{2} + \frac{K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2_{L^\infty(0,\tau)}.$$

En utilisant le lemme de Grönwall, on a

$$\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2C_1\exp\left(2sC_2\right). \tag{3.52}$$

En prenant le sup sur $s \in [0,\tau]$, et en notant par C différentes contantes indépendantes de ε, de m et de δ, on obtient (3.46). En reprenant (3.46) dans (3.51) , on obtient (3.47) et (3.48). $\square$

Remarque 3.4.1. *Des estimations obtenues, $\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta$ est bornée sur tout l'intervalle $[0,\tau]$, donc $\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta$ est solution au problème $(\mathbf{P}_{\varepsilon\mathbf{m}}^\delta)$ sur l'intervalle $[0,\tau]$.*

Dans le lemme suivant, on établit une estimation de la dérivée de la vitesse qui nous permettra avec le lemme d'Aubin d'établir le problème limite.

Lemme 3.4.2. *Sous les hypothèses du lemme 3.4.1, la dérivée en temps de $v_{\varepsilon m}^\delta$ vérifie l'estimation suivante*

$$\|(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)'\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;\mathcal{V}_0')} \leq C_\delta, \tag{3.53}$$

où C est une constante indépendante de m et de ε.

Démonstration. On définit φ_m comme la projection orthogonale de φ sur l'espace engendré par $\{w_1,\dots,w_m\}$. On a

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^m \beta_k w_k,\ \ \beta_k \in \mathbb{R},$$

et $\varphi_m \to \varphi$ fortement dans $\mathcal{V}_0$.

En multipliant l'équation (3.42) par β_k et en sommant de $k = 1 \dots m$. Puis en passant à la limite sur m, on obtient

$$\begin{aligned}&\big((\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)',\varphi_m\big) = (\widetilde{f},\varphi_m) - a(T;\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta,\varphi_m) - b(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta,\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta,\varphi_m) - \frac{1}{2}(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta div\, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta,\varphi_m)\\ &-\frac{1}{\delta}(div \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, div \varphi_m) - < \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta),\varphi_m >,\end{aligned} \tag{3.54}$$

après majorations dans le second membre, on obtient

$$\begin{aligned}&\big|\big((\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)',\varphi_m\big)\big| \leq \mu_*\|\nabla\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\|\nabla\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)}\\ &+\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\|div\, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} + \frac{1}{\delta}\|div\, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta\|_{L^2(\Omega)}\|div\, \varphi_m\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|l\|_{L^2_+(\omega)}\|\varphi_m\|_{L^2(\omega)} + |(\widetilde{f},\varphi_m)|.\end{aligned} \tag{3.55}$$

En majorant le terme $|(\widetilde{f},\varphi)|$, on obtient

$$\begin{aligned}&|(\widetilde{f},\varphi_m)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mu_*|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &+|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta + \nabla G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + |\zeta|\|\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

En utilisant l'inégalité classique [47]

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq c\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^6(\Omega)}, \forall u \in L^6(\Omega)$$

et l'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^6(\Omega)$, il existe une constante c telle que

$$\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \leq \left(c\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Comme $(w_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne orthogonale dans $L^2(\Omega)$ et comme φ_m est la projection orthogonale pour le produit scalaire $\mathbf{H}^1(\Omega)$ de φ sur $\{w_1,\ldots,w_m\}$, on a

$$\left((\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})',\varphi_m\right) = \left((\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})',\varphi\right) \quad \text{et} \quad \|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\left((\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})',\varphi\right)\right| \leq \mu_*\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\|\varphi\|_{\mathcal{V}_0} + \frac{3}{2}\left(c\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{V}_0}\\
&+\frac{1}{\delta}\|div\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathcal{V}_0} + C(\Omega)\|l\|_{L^2(\omega)}\|\varphi\|_{\mathcal{V}_0}\\
&+\left(\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mu_*|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{V}_0}\\
&+\left(K^2|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m} + G_0\zeta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + K^2|\zeta|\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{V}_0},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(t)\|_{\mathcal{V}_0'} \leq \mu_*\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} + \left(c\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right) + \frac{1}{\delta}\|div\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\
&+C(\Omega)\|l\|_{L^2(\omega)} + \|f\|^2_{\mathbf{L}}(\Omega) + \mu_*|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + K^2|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m} + G_0\zeta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\
&+K^2|\zeta|\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Après intégration de 0 à τ, on traite le terme trilinéaire (le deuxième terme après l'inégalité),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau}\left[\left(c\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)\right]^{\frac{4}{3}}dt &= c^{\frac{4}{3}}\int_0^{\tau}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{2}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt\\
&\leq c^{\frac{4}{3}}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^{\frac{2}{3}}_{L^{\infty}(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

On trouve des estimations du lemme 3.4.1, qu'il existe une constante $C_\delta > 0$ indépendante de ε et de m telle que

$$\int_0^{\tau}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0'}\,dt \leq C_\delta,$$

l'estimation (3.53) en découle. $\square$

Nous utiliserons maintenant les estimations du lemme 3.4.1 ainsi que le lemme d'Aubin pour déduire le problème limite lorsque $m \to \infty$.

Théorème 3.4.1. *Sous les hypothèses du lemme 3.4.1, il existe une sous suite notée encore* $(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)_{m\geq 1}$ *dont la limite, quand* $m \to \infty$*, est solution du problème approché* $(\mathbf{P}_\varepsilon^\delta)$.

Démonstration. Des estimations a priori (3.46)-(3.47) du lemme 3.4.1, on déduit que $\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta$ est bornée dans $L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0) \cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$, donc il existe une sous suite de $(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)_{m\geq 1}$ notée encore $(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)_{m\geq 1}$ vérifiant

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta \rightharpoonup \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0) \tag{3.57}$$

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta \rightharpoonup \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \quad \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)) \tag{3.58}$$

$$div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta) \rightharpoonup div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;L^2(\Omega)). \tag{3.59}$$

De l'estimation (3.53) du lemme 3.4.2, $(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)'$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;\mathcal{V}_0')$, donc il existe une sous suite de $((\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)')_{m\geq 1}$ notée encore $((\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)')_{m\geq 1}$ vérifiant

$$(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta)' \rightharpoonup (\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)' \quad \text{faiblement dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;\mathcal{V}_0'), \tag{3.60}$$

en utilisant le lemme d'Aubin et les convergences (3.57) et (3.60), avec $X_0 = \mathcal{V}_0$, $X = \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $X_1 = \mathcal{V}_0'$ on obtient

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta \to \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{3.61}$$

On peut encore utiliser le lemme d'Aubin avec $X_0 = \mathcal{V}_0$, $X = \mathbf{H}^s(\Omega)$ et $X_1 = \mathcal{V}_0'$ où $\frac{1}{2} < s < 1$, car l'injection de X_0 dans X est compacte de [38] page 110. On obtient

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta \to \widetilde{v}_\varepsilon^\delta \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{H}^s(\Omega)). \tag{3.62}$$

Du théorème de la trace [38], il existe une application $\widetilde{\gamma}_0 \in \mathcal{L}(H^s(\Omega), H^{s-\frac{1}{2}}(\omega))$. Comme $s - \frac{1}{2} > 0$ alors

$$H^{s-\frac{1}{2}}(\omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^0(\omega) = \mathbf{L}^2(\omega).$$

De (3.62), on a

$$\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m} \to \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega)). \tag{3.63}$$

En appliquant le lemme de Simon, on a la convergence suivante

$$\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m} \to \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon} \quad \text{fortement dans} \quad \mathcal{C}^0(0,\tau;H), \tag{3.64}$$

où H est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset \mathcal{V}_0'$ et l'injection de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H est compacte.

On a pour tout $\phi \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\tau < \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}), \phi > \, dt\right| &= \left|\int_0^\tau \int_\omega \frac{l(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\phi}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}|^2}}\, dx\, dt\right| \\ &\leq \int_0^\tau \int_\omega \frac{|l(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\phi|}{\varepsilon}\, dx\, dt\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\tau < \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}), \phi > \, dt\right| &\leq \frac{L}{\varepsilon}\int_0^\tau \int_\omega |\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}||\phi|\, dx\, dt \\ &\leq \frac{L}{\varepsilon}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))}\|\phi\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))}\end{aligned}$$

de l'estimation (3.47), on obtient

$$\left|\int_0^\tau < \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}), \phi > \, dt\right| \leq C\|\phi\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}$$

donc

$$\|\psi_\varepsilon'(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0')} \leq C,$$

où C est une constante indépendante de m et de δ. Donc, il existe une limite notée $\mathcal{L} \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0')$ telle que

$$\psi_\varepsilon'(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}) \rightharpoonup \mathcal{L} \quad \text{dans} \quad L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0').$$

On prend $\varphi \in \mathcal{V}_0$, il existe une sous suite $(\alpha_j^m)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k^m w_k$$

converge fortement vers φ dans $\mathcal{V}_0$. Alors pour tout $\chi \in \mathcal{D}(]0,\tau[)$ on a, en multipliant (3.42) par $\alpha_k^m \chi$ et en sommant de $k = 1 \dots m$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta}{\partial t}, \varphi_m \chi\right) + b(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \varphi_m \chi) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), \varphi_m \chi\right)\\ &+a(T; \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \varphi_m \chi) + \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), div\, \varphi_m \chi\right) + \left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), \varphi_m \chi\right\rangle = (\widetilde{f}, \varphi_m \chi),\end{aligned} \tag{3.65}$$

où

$$\begin{aligned}(\widetilde{f}, \varphi_m \chi) &= (f, \varphi_m \chi) - \zeta a(T; G_0, \varphi_m \chi) - \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi_m \chi\right) - \zeta\, b(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, G_0, \varphi_m \chi)\\ &- \zeta b(G_0, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta + G_0 \zeta, \varphi_m \chi).\end{aligned}$$

En intégrant (3.65) de 0 à τ on a

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \left[-\left(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \varphi_m \chi'\right) + b(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \varphi_m \chi) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), \varphi_m \chi\right)\right] dt\\ &+ \int_0^\tau \left[a(T; \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta, \varphi_m \chi) + \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), div\,(\varphi_m)\chi\right) + \left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta), \varphi_m \chi\right\rangle\right] dt = \int_0^\tau (\widetilde{f}, \varphi_m \chi)\, dt.\end{aligned} \tag{3.66}$$

En passant à la limite quand $m \to \infty$ avec les convergences faibles et fortes obtenues, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \left[-\left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi \chi'\right) + b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi \chi) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi \chi\right)\right] dt\\ &+ \int_0^\tau a(T; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi \chi) + \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \chi div\, \varphi\right) + \langle \mathcal{L}, \varphi \chi\rangle\ dt = \int_0^\tau (\widetilde{f}, \varphi \chi)\, dt,\end{aligned} \tag{3.67}$$

où

$$\begin{aligned}(\widetilde{f}, \varphi \chi) &= (f, \varphi \chi) - \zeta a(T; G_0, \varphi \chi) - \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi \chi\right) - \zeta\, b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, G_0, \varphi \chi)\\ &- \zeta b(G_0, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0 \zeta, \varphi \chi).\end{aligned}$$

Donc, on a pour tout $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$

$$\begin{aligned}&\left\langle (\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi), \chi\right\rangle + \int_0^\tau \left[b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi \chi) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi \chi\right)\right] dt\\ &+ \int_0^\tau \left[a(T; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi) + \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), div\, \varphi\right) + \langle \mathcal{L}, \varphi\rangle\right] \chi\, dt = \int_0^\tau (\widetilde{f}, \varphi)\chi\, dt.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Reste à identifier $\mathcal{L}$, or d'après la monotonie de ψ_ε', on a

$$X_m = \int_0^\tau < \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta) - \psi_\varepsilon'(\phi), \widetilde{v}_{\varepsilon m}^\delta - \phi >\ dt \geq 0 \quad \forall \phi \in L^2(0,\tau; \mathcal{V}_0), \tag{3.69}$$

or

$$X_m = \int_0^\tau < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} > - < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \phi > - < \psi'_\varepsilon(\phi), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} - \phi > \, dt,$$

et de (3.49),

$$\begin{aligned} &< \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} >= -((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - a(T; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \, b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) \\ &-\frac{1}{2}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \frac{1}{\delta}(div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}). \end{aligned}$$

En remplaçant dans X_m et en utilisant (3.39), on trouve

$$\begin{aligned} X_m = &-\int_0^\tau \left[((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + a(T; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{\delta}(div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right] dt \\ &+\int_0^\tau (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\, dt - \int_0^\tau < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \phi > \, dt - \int_0^\tau < \psi'_\varepsilon(\phi), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} - \phi > \, dt, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} X_m = &-\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^\tau a(T; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\, dt - \frac{1}{\delta}\int_0^\tau (div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\, dt \\ &+\int_0^\tau (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\, dt + \frac{1}{2}\|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^\tau < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \phi > \, dt - \int_0^\tau < \psi'_\varepsilon(\phi), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} - \phi > \, dt, \end{aligned}$$

comme $\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(\tau) \rightharpoonup v^\delta_\varepsilon(\tau)$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\limsup_{m\to\infty} (-\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) \leq -\|v^\delta_\varepsilon(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

alors, en utilisant (3.57)-(3.63)

$$\begin{aligned} &0 \leq \limsup_{m\to\infty} X_m \leq -\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^\delta_\varepsilon(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^\tau a(T, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon)\, dt - \frac{1}{\delta}\|div\, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ &+\int_0^\tau (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon)\, dt + \frac{1}{2}\|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^\tau < \mathcal{L}, \phi > \, dt - \int_0^\tau < \psi'_\varepsilon(\phi), \widetilde{v}^\delta_\varepsilon - \phi > \, dt. \end{aligned} \tag{3.70}$$

En prenant $\varphi\chi = \widetilde{v}^\delta_\varepsilon$ dans (3.67), on obtient avec (3.39)

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^\delta_\varepsilon(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^\tau a(T; \widetilde{v}^\delta_\varepsilon, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon)\, dt - \frac{1}{\delta}\int_0^\tau (div\, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon, div\, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon)\, dt \\ &+\int_0^\tau (\widetilde{f}, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon)\, dt = \int_0^\tau < \mathcal{L}, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon > \, dt, \end{aligned}$$

en remplaçant dans (3.70), on trouve

$$\int_0^\tau < \mathcal{L} - \psi'_\varepsilon(\phi), \widetilde{v}^\delta_\varepsilon - \phi > \, dt \geq 0 \quad \forall \phi \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0). \tag{3.71}$$

Soit $\theta \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)$ et soit un réel $\beta > 0$, en posant dans (3.71) $\phi = \widetilde{v}^\delta_\varepsilon(t) \pm \beta\theta$, on aura

$$\int_0^\tau < \mathcal{L} - \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon \pm \beta\theta), \pm\beta\theta > \, dt \geq 0. \tag{3.72}$$

En divisant les deux cotés de (3.72) par β et en passant à la limite quand $\beta \to 0$, d'où on obtient

$$\int_0^\tau < \mathcal{L} - \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \theta > \, dt = 0, \tag{3.73}$$

donc

$$\mathcal{L} = \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta).$$

en remplaçant dans (3.68) et de (3.64), on a

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta(0) = \widetilde{v}_\varepsilon^{0\delta}.$$

On en déduit que $\widetilde{v}_\varepsilon^\delta$ est solution du problème $(\mathbf{P}_\varepsilon^\delta)$. □

3.4.2 Recherche de la pression limite

Dans la sous section qui suit, on s'intéresse au passage à la limite dans le problème $(\mathbf{P}_\varepsilon^\delta)$, lorsque δ tend vers 0, afin de récupérer la pression p_ε dans son espace approprié.

Lemme 3.4.3. *Soit $g \in L_0^2(\Omega)$, il existe une application $P \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$ vérifiant*

$$div(P(g)) = g.$$

Démonstration. Voir [37] □

Lemme 3.4.4. *Sous les hypothèses du lemme 3.4.1, en notant avec [37]*

$$p_\varepsilon^\delta = -\frac{1}{\delta} div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta). \tag{3.74}$$

où $\widetilde{v}_\varepsilon^\delta$ est solution du problème pénalisé $(\mathbf{P}_\varepsilon^\delta)$, on a que p_ε^δ est borné dans $H^{-1}(0,\tau; L^2(\Omega))$.

Démonstration. De la formulation variationnelle (3.36) avec (3.74), on a

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi), \chi \right\rangle + \int_0^\tau \left[b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) + \frac{1}{2}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi\chi) + a(T; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) \right] dt \\ &+ \int_0^\tau < \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi\chi > \, dt = \int_0^\tau \left[(p_\varepsilon^\delta, \chi div\varphi) + (\widetilde{f}, \varphi\chi) \right] dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,\tau). \end{aligned} \tag{3.75}$$

Considérons maintenant $w \in H_0^1(0,\tau; L_0^2(\Omega))$ donc

$$\int_\Omega w(x,t)\, dx = 0. \tag{3.76}$$

On définit

$$\eta(t) = Pw(t).$$

En utilisant le lemme 3.4.3, on obtient que

$$div(\eta(t)) = w(t). \tag{3.77}$$

Du théorème de Haim Brezis [8] P.129, il existe une constante C positive telle que

$$\|u\|_{L^\infty(]0,\tau[)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(]0,\tau[)}, \quad \forall u \in W^{1,p}([0,\tau[), \quad \forall p \in [1,+\infty[$$

donc

$$\|w\|_{L^\infty(0,\tau;L_0^2(\Omega))} \leq C\|w\|_{W^{1,p}(0,\tau;L_0^2(\Omega))}$$

alors en prenant $p = 2$, on déduit que $w \in L^\infty(0,\tau;L_0^2(\Omega))$, $Pw(t) \in H_0^1(\Omega)$, d'où

$$\eta \in L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega)),\ \frac{\partial\eta}{\partial t} \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega))$$

en notant E l'espace suivant :

$$E = \{\eta \in L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega)),\ \frac{\partial\eta}{\partial t} \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega))\}. \tag{3.78}$$

En prenant dans (3.75), $\varphi\chi = \eta$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w)\,dt = \int_0^\tau (\frac{\partial\widetilde{v}_\varepsilon^\delta}{\partial t},\eta)\,dt + \int_0^\tau a(T;\widetilde{v}_\varepsilon^\delta(t),\eta)\,dt + \int_0^\tau b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta(t),\widetilde{v}_\varepsilon^\delta(t),\eta)\\&+\frac{1}{2}\int_0^\tau (\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)(t),\eta)\,dt - \int_0^\tau (\widetilde{f},\eta)\,dt.\end{aligned} \tag{3.79}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^\tau (\frac{\partial\widetilde{v}_\varepsilon^\delta}{\partial t},\eta)\,dt &= -\int_0^\tau (\frac{\partial\eta}{\partial t},\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\,dt + \left[(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\eta)\right]_0^\tau\\&= -\int_0^\tau (\frac{\partial\eta}{\partial t},\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\,dt + \left[(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,Pw)\right]_0^\tau,\end{aligned}$$

comme $w \in H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega))$ alors $Pw = 0$ en $t = 0$ et $t = \tau$, on obtient alors

$$\int_0^\tau (\frac{\partial\widetilde{v}_\varepsilon^\delta}{\partial t},\eta)\,dt = -\int_0^\tau (\frac{\partial\eta}{\partial t},\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\,dt. \tag{3.80}$$

De (3.79) et en utilisant (3.80), on obtient

$$\left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w)\,dt\right| \leq \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \mu_*\sqrt{\tau}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))}$$
$$+c\left|\int_0^\tau b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\eta)+\frac{1}{2}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta),\eta)\,dt\right| + \sqrt{\tau}\|f\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}$$
$$+\|G_0\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\|_{L^1(0,\tau)}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} + \mu_*\|G_0\|_{H^1(\Omega)}\|\zeta\|_{L^1(0,\tau)}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))}$$
$$+\|G_0\|_{H^1(\Omega)}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0\zeta\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))}\|\zeta\|_{L^2(0,\tau)}$$
$$+\|G_0\|_{H^1(\Omega)}\|\zeta\|_{L^2(0,\tau)}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))}.$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\tau b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\eta)\,dt\right| &\leq \int_0^\tau \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\eta\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\\ &\leq K\int_0^\tau \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{V_0}\|\eta\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

donc

$$\left|\int_0^\tau b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\widetilde{v}_\varepsilon^\delta,\eta)+\frac{1}{2}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta),\eta)\,dt\right| \leq K\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega))}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))}$$
$$+\frac{K}{2}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))}$$
$$\leq C_4\left(\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))}\right),$$

où

$$K\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega))} + \frac{K}{2}\|div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C_4.$$

En utilisant la continuité de l'application P, on a

$$\|\eta\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))} = \|Pw\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega))} \leq C\|w\|_{H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega))},$$

des estimations (3.46)-(3.47), on obtient

$$\left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w)\,dt\right| \leq C\|w\|_{H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega))},\ \ w\in H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega)). \tag{3.81}$$

En intégrant (3.74) sur Ω et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega p_\varepsilon^\delta\,dx = -\frac{1}{\delta}\int_{\partial\Omega}\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\nu\,ds$$

de (3.13)-(3.15) et (3.22), on a

$$\int_\Omega p_\varepsilon^\delta(x,t)\,dx = 0. \tag{3.82}$$

D'autre part pour tout $w \in H_0^1(0,\tau;L^2(\Omega))$, on peut appliquer (3.81) en prenant

$$\widetilde{w} = w - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega w\,dx \quad \text{car} \quad \widetilde{w} \in H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega)). \tag{3.83}$$

En remplaçant w par $\widetilde{w}$ dans (3.81), on a

$$\left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, \widetilde{w})\,dt\right| \leq C\|\widetilde{w}\|_{H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega))}, \quad \widetilde{w} \in H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega)),$$

or

$$\left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega w\,dx)\,dt\right| = \left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w)\,dt - \frac{1}{mes\Omega}\int_0^\tau \left(\int_\Omega p_\varepsilon^\delta\,dx\right)\left(\int_\Omega w\,dx\right)\,dt\right|.$$

En utilisant (3.82), on obtient

$$\left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega w\,dx)\,dt\right| = \left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w)\,dt\right| \leq C\|\widetilde{w}\|_{H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega))},$$

mais

$$\|\widetilde{w}\|_{H_0^1(0,\tau;L_0^2(\Omega))} \leq \|w\|_{H_0^1(0,\tau;L^2(\Omega))}.$$

Donc

$$\left|\int_0^\tau (p_\varepsilon^\delta, w)\,dt\right| \leq C\|w\|_{H_0^1(0,\tau;L^2(\Omega))}, \quad \forall w \in H_0^1(0,\tau;L^2(\Omega)). \tag{3.84}$$

De (3.84), on déduit que p_ε^δ est bornée dans $H^{-1}(0,\tau;L^2(\Omega))$. □

3.4.3 La limite du problème $(\mathbf{P}_\varepsilon^\delta)$ $(\delta \to 0)$

De (3.82) on conclut que $p_\varepsilon^\delta \in H^{-1}(0,\tau;L_0^2(\Omega))$. Alors il existe une sous suite notée encore p_ε^δ vérifiant

$$p_\varepsilon^\delta \rightharpoonup p_\varepsilon, \quad \text{faiblement dans} \quad H^{-1}(0,\tau;L_0^2(\Omega)).$$

On déduit des estimations (3.46)-(3.47) que $\widetilde{v}_\varepsilon^\delta$ est bornée dans $L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)$ et dans $L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$ indépendamment de δ, donc il existe une sous suite notée $\widetilde{v}_\varepsilon^\delta$ vérifiant les convergences faibles suivantes quand $\delta \to 0$

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \rightharpoonup \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)$$

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \rightharpoonup \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)).$$

De plus de (3.48) $div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)$ est bornée par δ dans $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$, donc il existe une sous suite notée $div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)$ telle que

$$div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta) \to 0 \quad \text{quand} \quad \delta \to 0.$$

En revenant à (3.36) et en prenant $\varphi \in Z$ et en poursuivant avec les mêmes majorations faites dans la preuve du lemme 3.4.2, on obtient

$$\|(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)'\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z')} \leq C, \tag{3.85}$$

où C est une constante indépendante de δ et de ε.
On en déduit que $(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)'$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z')$, donc il existe une sous suite notée $(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)'$ vérifiant les convergences faibles suivantes :

$$(v_\varepsilon^\delta)' \rightharpoonup v_\varepsilon' \quad \text{faiblement dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z').$$

En utilisant le lemme d'Aubin, on obtient la convergence forte suivante

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \to \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)),$$

en passant à la limite pour $\delta \to 0$ dans (3.75) après intégration par parties en temps, on obtient qu'il existe $\widetilde{v}_\varepsilon$ et p_ε solutions du problème variationnel suivant
Problème $(\mathbf{P}_\varepsilon)$Trouver $\widetilde{v}_\varepsilon \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\widetilde{v}_\varepsilon' \in L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z')$ et $p_\varepsilon \in H^{-1}(0,\tau;L_0^2(\Omega))$ vérifiant l'équation variationnelle

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi),\chi\right\rangle + \int_0^\tau \Big[b(\widetilde{v}_\varepsilon,\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi) + a(T;\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi) + < \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_\varepsilon),\varphi\chi > \Big]\, dt \\ &= \int_0^\tau \Big[(p_\varepsilon, div(\varphi\chi)) + (\widetilde{f},\varphi\chi)\Big]\, dt, \quad \forall\varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)\end{aligned} \tag{3.86}$$

avec (3.38), on obtient la condition initiale

$$\widetilde{v}_\varepsilon(0,x) = \widetilde{v}_0(x). \tag{3.87}$$

3.5 Résolution du problème global (PT)

Dans la sous section suivante, on s'intérèsse au passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans le problème $(\mathbf{P}_\varepsilon)$. On obtiendra l'existence d'une solution au problème **PT** muni de la loi de Tresca. On étudiera par la suite l'unicité de cette solution en dimension 2 en premier puis en dimension 3 à l'aide de régularités supplémentaires.

3.5.1 Limite du problème $(\mathbf{P}_\varepsilon)$

Théorème 3.5.1. *Sous les mêmes hypothèses du lemme 3.4.1, il existe* $\widetilde{v} \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *et* $p \in H^{-1}(0,\tau;L_0^2(\Omega))$ *solution du problème* $(\mathbf{PT})$.

Démonstration. Notons que les estimations obtenues dans les lemmes 3.4.1 et 3.4.2 sont indépendantes de ε et de m et sous les mêmes hypothèses du lemme 3.4.1. Des estimations (3.46)-(3.47) indépendantes de ε, on en déduit que $\widetilde{v}_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)$, et $L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$, donc il existe une sous suite de $(\widetilde{v}_\varepsilon)_{m\geq 1}$, notée $(\widetilde{v}_\varepsilon)_{m\geq 1}$ et qui vérifie

$$\widetilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{v} \quad \text{dans} \quad L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0), \quad \text{et faible* dans} \quad L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{3.88}$$

De l'estimation (3.85), $\widetilde{v}'_\varepsilon$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z')$ indépendamment de ε, alors il existe une sous suite de $(\widetilde{v}'_\varepsilon)_{m\geq 1}$, notée $(\widetilde{v}'_\varepsilon)_{m\geq 1}$ et qui vérifie la convergence suivante

$$\widetilde{v}'_\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{v}' \quad \text{dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z'). \tag{3.89}$$

En utilisant l'argument de compacité d'Aubin, il existe une sous suite notée encore $(\widetilde{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que

$$\widetilde{v}_\varepsilon \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)) \tag{3.90}$$

en utilisant le même raisonnement pour avoir (3.63), on a aussi

$$\widetilde{v}_\varepsilon \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega)). \tag{3.91}$$

On a

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi),\chi \right\rangle + \int_0^\tau \Big[a(T;\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi) + b(\widetilde{v}_\varepsilon,\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi) \Big]\,dt \\ &+ \int_0^\tau \Big[< \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon),\varphi\chi > -(p_\varepsilon, div(\varphi)\chi) \Big]\,dt = \int_0^\tau (\widetilde{f},\varphi\chi)\,dt, \end{aligned} \tag{3.92}$$

Comme ψ_ε est convexe, de la définition du sous différentiel de ψ_ε en $\widetilde{v}_\varepsilon(t)$, on a

$$\psi_\varepsilon(\varphi\chi + \widetilde{v}_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon) \geq < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon),\varphi\chi >,$$

alors, (3.92) devient

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\right),\chi\right\rangle + \int_0^\tau \Big[a(T;\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)+b(\widetilde{v}_\varepsilon,\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)\Big]\,dt\\ &+\int_0^\tau \Big[\psi_\varepsilon(\varphi\chi+\widetilde{v}_\varepsilon)-\psi_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon)-(p_\varepsilon,div(\varphi\chi))\Big]\,dt \geq \int_0^\tau (\widetilde{f},\varphi\chi)\,dt.\end{aligned} \tag{3.93}$$

En utilisant l'intégration par parties en temps sur le premier terme, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau -(\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi')+a(T;\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)+b(\widetilde{v}_\varepsilon,\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)+\psi_\varepsilon(\varphi\chi+\widetilde{v}_\varepsilon)\,dt-\int_0^\tau (p_\varepsilon,div(\varphi\chi))\,dt\\ &\geq \int_0^\tau (\widetilde{f},\varphi\chi)+\psi_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon)\,dt.\end{aligned} \tag{3.94}$$

ψ' est semi-continue inférieurement et en utilisant la convergence forte (3.91), on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau \psi_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon)\,dt \geq \int_0^\tau \psi(\widetilde{v})\,dt, \tag{3.95}$$

Pour passer à la limite sur le terme $\psi_\varepsilon(\varphi\chi+\widetilde{v}_\varepsilon)$, on utilise le fait que la convergence forte dans $L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))$ implique que, $\widetilde{v}_\varepsilon$ converge vers $\widetilde{v}$ presque partout dans $]\tau_0,\tau_1[\times\omega$ et vérifie une condition de domination [8].

En utilisant (3.88)-(3.90), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau -(\widetilde{v},\varphi\chi')+a(T;\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)+b(\widetilde{v},\widetilde{v},\varphi\chi)\,dt\\ &+\int_0^\tau \psi(\varphi\chi+\widetilde{v})-\psi(\widetilde{v})-(p,div(\varphi\chi))\,dt \geq \int_0^\tau (\widetilde{f},\varphi\chi)\,dt,\end{aligned} \tag{3.96}$$

en utilisant encore l'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v},\varphi\right),\chi\right\rangle + \int_0^\tau a(T;\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi)+b(\widetilde{v},\widetilde{v},\varphi\chi)\psi(\varphi\chi+\widetilde{v})-\psi(\widetilde{v})\,dt\\ &-\int_0^\tau (p,div(\varphi)\chi)\,dt \geq \int_0^\tau (\widetilde{f},\varphi\chi)\,dt, \quad \forall\varphi\in\mathcal{V}_0, \quad \chi\in\mathcal{D}(0,\tau).\end{aligned} \tag{3.97}$$

De plus avec (3.38), on obtient

$$\widetilde{v}(0)=\widetilde{v}_0.$$

Avec la limite $(\widetilde{v},p)$ est solution du problème muni de la loi de Tresca (3.33)-(3.34). $\square$

3.5.2 Unicité de la solution du problème limite en dimension 2

Théorème 3.5.2. *Sous les hypothèses du théorème* **3.4.1**, *la solution* $(\widetilde{v}, p)$ *du problème (3.33)-(3.34) est unique en dimension* 2.

Démonstration. On suppose que le problème (3.33)-(3.34) admet 2 solutions $\widetilde{v}_1$ et $\widetilde{v}_2$. Alors, elles vérifient les 2 inéquations suivantes :

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v}_1, \varphi\right), \chi \right\rangle + \int_0^\tau b(\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_1, \varphi\chi) - (p, div(\varphi\chi)) + a(T; \widetilde{v}_1, \varphi\chi)\, dt \\ &+ \int_0^\tau \psi(\varphi\chi + \widetilde{v}_1) - \psi(\widetilde{v}_1)\, dt \geq \int_0^\tau (\widetilde{f}, \varphi\chi)\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,\tau)\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v}_2, \varphi\right), \chi \right\rangle + \int_0^\tau b(\widetilde{v}_2, \widetilde{v}_2, \varphi\chi) - (p, div(\varphi\chi)) + a(T; \widetilde{v}_2, \varphi\chi)\, dt \\ &+ \int_0^\tau \psi(\varphi\chi + \widetilde{v}_2) - \psi(\widetilde{v}_2)\, dt \geq \int_0^\tau (\widetilde{f}, \varphi\chi)\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,\tau).\end{aligned} \tag{3.99}$$

En prenant $\varphi\chi = \widetilde{v}_2 - \widetilde{v}_1$ dans la première inéquation et $\varphi\chi = \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2$ dans la seconde, puis en additionnant les deux inéquations, on aura :

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\right) + a(T; \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) + b(\widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)\, dt \\ &\leq \int_0^\tau b(\widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)\, dt,\end{aligned}$$

en utilisant la coercivité de a, on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(\tau) - \widetilde{v}_2(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha \int_0^\tau \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\, dt + \int_0^\tau b(\widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)\, dt \\ &\leq \int_0^\tau b(\widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)\, dt + \frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(0) - \widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Or

$$\begin{aligned}&b(\widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) = b(\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) + b(\widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) \\ &= b(\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) + b(\widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) + b(\widetilde{v}_2, \widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) \\ &= b(\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) + b(\widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2).\end{aligned}$$

Alors

$$b(\widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) - b(\widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_2 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) = b(\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2). \tag{3.101}$$

En remplaçant dans (3.100) et en majorant on obtient

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(\tau)-\widetilde{v}_2(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\alpha\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt\leq\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla(\widetilde{v}_1+G_0\zeta)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(0)-\widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

En utilisant l'inégalité de Ladyzhenskaya (voir par exemple [12])

$$\|\widetilde{v}\|_{L^4(\Omega)}\leq c\|\widetilde{v}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\widetilde{v}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{V}_0},\quad\forall\widetilde{v}\in\mathcal{V}_0,$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\alpha\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt\leq c^2\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|_{\mathcal{V}_0}\|\nabla(\widetilde{v}_1+G_0\zeta)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(0)-\widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

en utilisant l'inégalité de Young, on a

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt\leq\frac{c^4}{2\alpha}\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla(\widetilde{v}_1+G_0\zeta)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(0)-\widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Avec l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\frac{\alpha}{C_P^2}\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt\leq\frac{c^4}{\alpha}\int_0^\tau\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla(\widetilde{v}_1+G_0\zeta)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\|\widetilde{v}_1(0)-\widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\tag{3.102}$$

par le lemme de Grönwall, on a

$$\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leq\|\widetilde{v}_1(0)-\widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\exp\left(-\int_0^\tau\left[\frac{\alpha}{C_P^2}-\frac{c^4}{\alpha}\|\nabla(\widetilde{v}_1+G_0\zeta)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right]ds\right).$$

Or $\|\widetilde{v}_1(0)-\widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}=0$, ceci prouve l'unicité de la solution du problème limite (3.33)-(3.34) ainsi que l'application $\widetilde{v}(0)\mapsto\widetilde{v}(t)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. □

3.6 Régularités supplémentaires

Le but de cette partie est d'établir l'estimation (3.113) qui est suffisante ici pour déduire l'unicité en dimension 3 d'espace et pour l'existence même des solutions du problème (**PC**) (voir 3.132) et qui nécessite des hypothèses plus fortes sur ses données. Pour cela, nous établissons d'abord dans les deux lemmes suivants de nouvelles estimations de la solution $\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}$ et sa dérivée.

Dans cette section, on choisit $\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon}(0) = \widetilde{v}_0$ et $\widetilde{v}^{0}_{m} \in Vect\{w_1, \dots, w_m\}$ tel que $\widetilde{v}^{0}_{m}$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers $\widetilde{v}_0$ ou comme le premier vecteur d'une base hilbertienne de $\mathcal{V}_0$ et orthogonale dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 3.6.1. *Soient f, μ, T et v_0 les données du problème* (**PC**). *On suppose que $f' \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\mu' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\nabla T(0) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$, $v_0 = s$ sur ω et $\widetilde{v}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{V}_{0div}$. Alors toute solution $\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}$ du problème pénalisé* ($\mathbf{P}^{\delta}_{\varepsilon \mathbf{m}}$) *vérifie l'estimation suivante :*

$$\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C, \tag{3.103}$$

où C est une constante indépendante de m, δ et de ε.

Démonstration. De l'équation (3.42) du problème ($\mathbf{P}^{\delta}_{\varepsilon \mathbf{m}}$), en prenant $t = 0$ et comme $\zeta(0) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\big((\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0), w_k\big) + b(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), w_k) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0) div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)), w_k\right) + a(T(0); \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), w_k)\\ &+\frac{1}{\delta}(div\, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), div\, w_k) + \left\langle \psi'_{\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)), w_k\right\rangle = (\widetilde{f}(0), w_k).\end{aligned} \tag{3.104}$$

En multipliant (3.104) par $(g^{\delta}_{\varepsilon k})'(0)$ et en sommant de $k = 1, \dots, m$, on obtient

$$\begin{aligned}&\big((\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\big) + b(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0) div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\right)\\ &+a(T(0); \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)) + \frac{1}{\delta}(div\, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)) + \left\langle \psi'_{\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\right\rangle\\ &= (\widetilde{f}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0))\end{aligned} \tag{3.105}$$

or

$$\begin{aligned}a(T(0); \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)) &= 2\int_{\Omega} \mu(T(0)) d_{ij}\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0) \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\, dx\\ &= -2\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu(T(0))\right) d_{ij}\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\, dx - 2\int_{\Omega} \mu(T(0))\Delta(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0))(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\, dx,\end{aligned}$$

en remplaçant dans (3.105) et en tenant compte du fait que $\widetilde{v}_0 \in \mathcal{V}_{0div}$, on a

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= (\widetilde{f}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)) + 2(\mu(T(0))\Delta\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0))\\ &+2(\nabla\mu(T(0))\nabla\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)) - b(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0))\\ &- \left\langle \psi'_{\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)), (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\right\rangle.\end{aligned}$$

On a

$$\left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\right\rangle = \int_\omega l(0)\frac{\widetilde{v}_0(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)}{\sqrt{\varepsilon^2+|\widetilde{v}_0|^2}}\,dx',$$

comme $v_0 = s$ sur ω alors

$$\widetilde{v}_0 = v_0 - G_0 = 0 \text{ sur } \omega$$

d'où

$$\left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\right\rangle = 0.$$

En majorant les termes du second membre, on a

$$\begin{aligned}\left|(\mu(T(0))\Delta\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0))\right| &\leq \mu_*\|\Delta\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &\leq \mu_*\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{H^2(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

et comme $\nabla(\mu(T(0))) = \mu'(T(0))\nabla T(0)$ alors

$$\left|(\nabla\mu(T(0))\nabla\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0))\right| \leq \|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla T(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}\left|b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0))\right| &\leq \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &\leq K^2\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Des majorations obtenues ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}&\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|f(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\mu_*\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 2K\|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla(T(0))\|_{(\mathbf{L}^4(\Omega))}\|\nabla\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0}\\ &+K^2\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \|G_0\|_{L^2(\Omega)}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}(0)\right| + 2\mu_*\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\\ &+2K\|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla(T(0))\|_{(\mathbf{L}^4(\Omega))}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + K^2\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0} + K^2\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\mathbf{G}_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\\ &+K^2\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0}\|G_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\end{aligned},$$

comme $\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0) = \widetilde{v}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathcal{V}_{0div}$ et $\nabla T(0) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$, en posant

$$\begin{aligned}&d_1 = \|f(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\mu_*\|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 2K\|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla(T(0))\|_{(\mathbf{L}^4(\Omega))}\|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + K^2\|\widetilde{v}_0\|_{\mathcal{V}_0}\|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\\ &+\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}(0)\right| + 2K\|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\nabla(T(0))\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|G_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + K^2\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}_0\|_{\mathcal{V}_0}\\ &+K^2\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + K^2\|\widetilde{v}_0\|_{\mathcal{V}_0}\|G_0\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.106}$$

On déduit

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq d_1, \tag{3.107}$$

d'où (3.103). □

On pose maintenant

$$\begin{aligned}
d_3 &= 2\|f(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\tau\|f'\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \frac{2\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2 + \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+ \left(3 + \frac{2K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right) C_1 \exp(C_2\tau) \qquad (3.108) \\
&+ 2\sqrt{C_1}\exp(\frac{C_2\tau}{2}) \left(d_1^2 \exp(\int_0^\tau \hat{C}_2(s)\,ds) + \int_0^\tau \hat{C}_1(s)\exp(\int_0^s \hat{C}_2(t)\,dt)\,ds\right),
\end{aligned}$$

et

$$d_3 < \frac{\alpha^3}{4K^4c^2}. \qquad (3.109)$$

Lemme 3.6.2. *Supposons que les hypothèses du lemme 3.6.1 et (3.109) sont satisfaires, supposons de plus que* $T' \in L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))$ *et que* $l' \in L^2(0,\tau;L^2(\omega))$*, alors*

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} \leq C \qquad (3.110)$$

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C, \qquad (3.111)$$

$$\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C\delta, \qquad (3.112)$$

de plus,

$$\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,\tau;\mathcal{V}_0)} \leq C, \qquad (3.113)$$

où C *est une constante indépendante de* m*, de* δ *et de* ε*.*

Démonstration. En dérivant par rapport à t les deux cotés de l'équation (3.42) du problème pénalisé, on a

$$\begin{aligned}
&\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'', w_k\right) + a(T;(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})';w_k) + \int_\Omega \mu'(T)T'd_{ij}\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}d_{ij}w_k\,dx + b((v^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, w_k) \\
&+\left[b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', w_k) + \frac{1}{2}\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), w_k\right) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), w_k\right)\right] \\
&+\frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', div\,w_k\right) + \left\langle \left(\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right)', w_k\right\rangle = (\widetilde{f}', w_k),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{f}', w_k) = (f', w_k) - \zeta''(G_0, w_k) - \zeta' a(T;G_0,w_k) - \zeta\int_\Omega \mu'(T)T'd_{ij}G_0d_{ij}w_k\,dx \\
&-\zeta' b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} + G_0\zeta, w_k) - \zeta b(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' + G_0\zeta', w_k) + \zeta' b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, w_k) \\
&+\zeta b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', G_0, w_k).
\end{aligned}$$

En multipliant par $(g^\delta_{\varepsilon j})'(t)$ et en sommant de $j = 1 \ldots m$, on a

$$\begin{aligned}
&\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) + a(T; (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') + \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', div(v^\delta_{\varepsilon m})'\right) + \left\langle \left(\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right)', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right\rangle \\
&= -b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \frac{1}{2}\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) - \int_\Omega \mu'(T)T' d_{ij}\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} d_{ij}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\, dx \\
&-b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) + (\widetilde{f}', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})').
\end{aligned}$$

Or par intégration par parties, on a

$$b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') + \frac{1}{2}\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) = 0.$$

De la monotonie de ψ', on a

$$\left\langle \psi'(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t+h)) - \psi'(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t+h) - \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\right\rangle \geq 0$$

alors

$$\left\langle \frac{\psi'(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t+h)) - \psi'(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t))}{h}, \frac{\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t+h) - \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)}{h}\right\rangle \geq 0$$

en passant à la limite quand $h \to 0$, on obtient

$$\int_\omega l \left(\frac{\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2}}\right)' (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\, dx' \geq \int_\omega l\varepsilon^2 \frac{|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'|^2}{(\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx' \geq 0.$$

Mais

$$\left\langle \left(\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right)', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right\rangle = \int_\omega l \left(\frac{\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2}}\right)' (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\, dx' + \int_\omega l' \frac{\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2}}\, dx'.$$

On obtient donc en utilisant la coercivité de a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq -\int_\Omega \mu'(T)T'(t) d_{ij}\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} d_{ij}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\, dx \\
&-b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(t), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) - (\widetilde{f}', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&-\int_\Omega \mu'(T)T' d_{ij} G_0 \zeta d_{ij}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\, dx - \int_\omega l' \frac{\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2}}\, dx'
\end{aligned} \tag{3.114}$$

où

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{f}', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') = -\zeta' a(T; G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta' b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta b(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&-\zeta' b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') + (f', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&-\zeta''\left(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) - 2\zeta\zeta' b(G_0, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})').
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Le terme $b(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')$ s'annule car $div\, G_0 = 0$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz puis celle de Young dans le second membre de (3.114), on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \mu'(T)T'(t) d_{ij}\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} d_{ij}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\, dx \right| &\leq \|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|T'\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sup_{t\in[0,\tau]} \|T'\|_{L^\infty(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0} \\
&\leq C_3 \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0} \\
&\leq \frac{3C_3^2}{\alpha} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{\alpha}{12} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0},
\end{aligned}$$

où

$$C_3 = \|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|T'\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}, \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
&\left| b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) \right| \\
&\qquad \leq c \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\
&\qquad \leq c\, K^2 \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \zeta' a(T; G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \right| &\leq \mu_* |\zeta'| \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0} \\
&\leq \frac{\alpha}{12} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{3\mu_*^2}{\alpha} |\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \mu'(T)T'\zeta d_{ij}G_0 d_{ij}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\, dx \right| &\leq \|\mu'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|T'\|_{L^\infty(\Omega)} \|G_0\zeta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0} \\
&\leq \frac{\alpha}{12} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{3C_3^2}{\alpha} |\zeta|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \zeta' b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \right| &\leq |\zeta'| \|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\
&\leq \frac{\alpha}{12} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{3K^4}{\alpha} |\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \zeta' b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \right| &\leq |\zeta'| \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{4} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + K^4 |\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta b((\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})', G_0, (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})')\right| &\leq |\zeta| \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\alpha}{12}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{3K^4}{\alpha}|\zeta|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|(f', (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})')\right| &\leq \|f'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|f'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta'' \left(G_0, (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\right)\right| &\leq |\zeta''| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq |\zeta''|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|2\zeta\zeta' b(G_0, G_0, (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})')\right| &\leq 2|\zeta||\zeta'| \|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq 4K^2|\zeta|^2|\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\omega} l' \frac{\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}|^2}}\, dx' &\leq \|l'\|_{L^2(\omega)} \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{L^2(\omega)} \leq C(\Omega)\|l'\|_{L^2(\omega)} \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0} \\ &\leq \frac{\alpha}{12}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{3C(\Omega)^2}{\alpha}\|l'\|^2_{L^2(\omega)}.\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'inégalité (3.114), on aura

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\frac{\alpha}{2} - c\, K^2 \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\right) \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \\ &\left(\frac{3C_3^2}{\alpha} + \frac{3K^4}{\alpha}|\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + K^4|\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\right) \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{3C(\Omega)^2}{\alpha}\|l'\|^2_{L^2(\omega)} \\ &+ \left(\frac{3K^4}{\alpha}|\zeta|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 1\right) \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|f'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\zeta''|^2 \\ &+ \frac{3\mu_*^2}{\alpha}|\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{3C_3^2}{\alpha}|\zeta|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + 4K^2|\zeta|^2|\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.117}$$

Afin de démontrer que

$$\left(\frac{\alpha}{2} - c\, K^2 \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\right) \geq 0,$$

on utilise l'idée illustrée dans [54], page 304.

En effet, on a de (3.50) du lemme 3.4.1,

$$\begin{aligned}&\alpha\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{2}{\delta}\|div\, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{2\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2 \\ &+ \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 3\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{2K^4}{\alpha}|\zeta|^2 \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+ K^4|\zeta^4| \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} - 2((v^{\delta}_{\varepsilon m})'(t), v^{\delta}_{\varepsilon m}(t)),\end{aligned} \tag{3.118}$$

en utilisant l'estimation (3.52), on a

$$\begin{aligned}
&\alpha\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathcal{V}_0}+\frac{2}{\delta}\|div\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\le\|f(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\frac{2\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\
&+\left(3+\frac{2K^4}{\alpha}|\zeta|^2\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)C_1\exp(C_2\tau)+K^4|\zeta^4|\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\\
&2\|(v^{\delta}_{\varepsilon m})'(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\sqrt{C_1}\exp(\frac{C_2\tau}{2}).
\end{aligned}\tag{3.119}$$

Pour $t=0$, on a $\zeta(0)=1$

$$\begin{aligned}
&\alpha\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)\|^2_{\mathcal{V}_0}+\frac{2}{\delta}\|div\,\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\le\|f(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\frac{2\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}+|\zeta'(0)|^2\|G_0\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left(3+\frac{2K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)C_1\exp(C_2\tau)+2\,d_1\sqrt{C_1}\exp(\frac{C_2\tau}{2}).
\end{aligned}\tag{3.120}$$

posons maintenant

$$\begin{aligned}
d_2 &= \|f(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+|\zeta'(0)|^2\|G_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{2\mu_*^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{\alpha}\\
&+\left(3+\frac{2K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)C_1\exp(C_2\tau)+2\,d_1\sqrt{C_1}\exp(\frac{C_2\tau}{2}),
\end{aligned}$$

on vérifie avec (3.108) que $d_2\le d_3$ et de (3.109), on obtient

$$\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0}\le\frac{\alpha}{2\,c\,K^2}.$$

De la continuité de l'application norme, il découle que $\alpha-c\,K^2\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0}$ reste strictement positive dans un certain intervalle de temps autour de l'origine 0. On note par τ_m le premier temps $t\le\tau$, tel que

$$\alpha-2\,c\,K^2\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(\tau_m)\|_{\mathcal{V}_0}=0$$

si $\tau_m=\tau$, alors

$$\alpha-2\,c\,K^2\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(\tau_m)\|_{\mathcal{V}_0}\ge 0\quad\text{pour tout}\quad 0\le t\le\tau_m.$$

De (3.117), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\le\left(\frac{3C_3^2}{\alpha}+\frac{3K^4}{\alpha}|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}+K^4|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\right)\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\\
&+\frac{3C(\Omega)^2}{\alpha}\|l'\|^2_{L^2(\omega)}+\left(\frac{3K^4}{\alpha}|\zeta|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}+1\right)\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\|f'\|^2_{L^2(\Omega)}+\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\zeta''|^2\\
&+\frac{3\mu_*^2}{\alpha}|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}+\frac{3C_3^2}{\alpha}|\zeta|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}+4K^2|\zeta|^2|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)},\ \forall t\in[0,\tau_m].
\end{aligned}\tag{3.121}$$

En posant

$$\frac{1}{2}\hat{C}_1(t) = \left(\frac{3C_3^2}{\alpha} + \frac{3K^4}{\alpha}|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + K^4|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\right)\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \|f'\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\zeta''|^2 + \frac{3\mu_*^2}{\alpha}|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{3C_3^2}{\alpha}|\zeta|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$
$$+\frac{3C(\Omega)^2}{\alpha}\|l'\|^2_{L^2(\omega)} + 4K^2|\zeta|^2|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

$$\frac{1}{2}\hat{C}_2(t) = \frac{3K^4}{\alpha}|\zeta|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 1$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \hat{C}_1(t) + \hat{C}_2(t)\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{3.122}$$

En appliquant le lemme de Grönwall, on a

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\exp(\int_0^t \hat{C}_2(s)\,ds) + \int_0^t \hat{C}_1(s)\exp(\int_0^s \hat{C}_2(t)\,dt)\,ds$$

alors avec (3.106)

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq d_1^2\exp(\int_0^\tau \hat{C}_2(s)\,ds) + \int_0^\tau \hat{C}_1(s)\exp(\int_0^s \hat{C}_2(t)\,dt)\,ds.$$

En remplaçant dans (3.119), on a

$$\begin{aligned}\alpha\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathcal{V}_0} &\leq \|f(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{2\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2 + \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+ \left(3 + \frac{2K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)C_1\exp(C_2\tau) \\ &+ 2\sqrt{C_1}\exp(\frac{C_2\tau}{2})\left(d_1^2\exp(\int_0^\tau \hat{C}_2(s)\,ds) + \int_0^\tau \hat{C}_1(s)\exp(\int_0^s \hat{C}_2(t)\,dt)\,ds\right).\end{aligned} \tag{3.123}$$

Comme $f' \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$, on peut écrire $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,ds$. On obtient donc

$$\|f(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2\|f(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\tau\|f'\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}.$$

En reportant dans (3.123), on trouve que

$$\alpha\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathcal{V}_0} \leq d_3, \quad 0 \leq t \leq \tau_m.$$

De là, on a

$$\frac{\alpha}{2} - K^2\,c\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathcal{V}_0} \geq \frac{\alpha}{2} - K^2\,c\sqrt{\frac{d_3}{\alpha}}, \quad 0 \leq t \leq \tau_m,$$

et de l'hypothèse (3.109), on a

$$\frac{\alpha}{2} - K^2 c \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathcal{V}_0} > 0, \quad 0 \leq t \leq \tau_m.$$

En intégrant (3.117) de 0 à $s \leq \tau_m$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\frac{\alpha}{2} - K^2\, c\sqrt{\frac{d_3}{\alpha}}\right)\int_0^s \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0}\, dt + \frac{1}{\delta}\int_0^s \|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\
&\leq \frac{1}{2}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\frac{3C_3^2}{\alpha} + \frac{3K^4}{\alpha}|\zeta'|^2_{L^\infty(0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)\int_0^s \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\, dt \\
&+K^4|\zeta'|^2_{L^\infty(0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\int_0^s \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\, dt + \left(\frac{3K^4}{\alpha}|\zeta|^2_{L^\infty(0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 1\right)\int_0^s \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\
&+\frac{3C(\Omega)^2}{\alpha}\|l'\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\omega))} + \int_0^s \|f'\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\zeta''|^2_{L^2(0,s)} + \frac{3\mu_*^2}{\alpha}|\zeta'|^2_{L^2(0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&+\frac{3C_3^2}{\alpha}|\zeta|^2_{L^2(0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + 4K^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^s |\zeta|^2|\zeta'|^2\, dt.
\end{aligned} \tag{3.124}$$

En rappelant (3.106), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad &+ \quad \left(\frac{\alpha}{2} - K^2\, c\sqrt{\frac{d_3}{\alpha}}\right)\int_0^s \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0}\, dt + \frac{1}{\delta}\int_0^s \|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\
&\leq \quad C' + \int_0^s \|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt,
\end{aligned} \tag{3.125}$$

où

$$\begin{aligned}
C' \quad &= \quad \frac{1}{2}d_1^1 + \left(\frac{3C_3^2}{\alpha} + \frac{2K^4}{\alpha}|\zeta'|^2_{L^\infty(0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + K^4|\zeta'|^2_{L^\infty(0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\right)\int_0^s \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\, dt \\
&+ \quad \frac{3C(\Omega)^2}{\alpha}\|l'\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\omega))} + \int_0^\tau \|f'\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\zeta''|^2_{L^2(0,\tau)} + \frac{3\mu_*^2}{\alpha}|\zeta'|^2_{L^2(0,\tau)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&+ \quad \frac{3C_3^2}{\alpha}|\zeta|^2_{L^2(0,\tau)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + 4K^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^\tau |\zeta|^2|\zeta'|^2\, dt.
\end{aligned}$$

$$C'' = \frac{3K^4}{\alpha}|\zeta|^2_{L^\infty(0,\tau)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 1.$$

En utilisant le lemme de Grönwall, on trouve

$$\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(s)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2C' \exp(2C''s), \quad \forall s \in [0, \tau]$$

d'où (3.111), en en revenant dans (3.125), on obtient (3.110) et (3.112). De plus on a

$$\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(s) - \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(0) = \int_0^s (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(t)\, dt,$$

comme $\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0) \in \mathcal{V}_0$, on a

$$\begin{aligned}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(s)\|_{\mathcal{V}_0} &\leq \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0) + \int_0^s (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(t)\,dt\|_{\mathcal{V}_0} \\ &\leq \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(0)\|_{\mathcal{V}_0} + \|\int_0^s (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(t)\,dt\|_{\mathcal{V}_0},\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{s\in[0,\tau]} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(s)\|_{\mathcal{V}_0} \leq \|v_0\|_{\mathcal{V}_0} + \int_0^\tau \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(t)\|_{\mathcal{V}_0}\,dt,$$

de (3.110), il existe une constante notée encore C telle que (3.113) soit vraie. $\square$

3.6.1 Unicité de la solution pour une viscosité suffisamment grande

L'unicité de la solution du problème de Navier-Stokes muni de la loi de Tresca n'est pas assurée dans un domaine Ω quelconque de $\mathbb{R}^3$ [27, 37, 54], ni pour un nombre de reynolds trop grand c'est à dire ni pour une viscosité trop petite.

Théorème 3.6.1. *Pour $f \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$, $\widetilde{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $G_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{C}^\infty([0,\tau])$ il existe μ_0 tel que pour tout $\mu \geq \mu_0 > 0$, la solution $(\widetilde{v},p)$ du problème limite (3.33)-(3.34) est unique pour $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.*

Démonstration. En reprenant la même démonstration du théorème 3.5.2, on obtient aussi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(s) - \widetilde{v}_2(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(0) - \widetilde{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha \int_0^s \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt \\ &+ \int_0^s b(\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_1 + G_0\zeta, \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)\,dt \leq 0.\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{v}_1(0) = \widetilde{v}_2(0) = \widetilde{v}_0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(s) - \widetilde{v}_2(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha \int_0^s \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt \leq \int_0^s \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla(\widetilde{v}_1 + G_0\zeta)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt. \tag{3.126}$$

En utilisant l'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(s) - \widetilde{v}_2(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha \int_0^s \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt \leq K^2 \int_0^s \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0} \|\nabla(\widetilde{v}_1 + G_0\zeta)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt. \tag{3.127}$$

En utilisant l'estimation (3.111), on a

$$\|\nabla(\widetilde{v} + G_0\zeta)\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C,$$

on a

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_1(s) - \widetilde{v}_2(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\alpha - CK^2\right)\int_0^s \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|^2_{\mathcal{V}_0}\, dt \leq\leq 0.$$

Pour que le second terme de l'inéquation soit positif, il faut que

$$\alpha > CK^2. \tag{3.128}$$

Comme α dépend de μ. Pour tout $\mu \geq \mu_0$ (viscosité suffisamment grande), on a en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} = 0.$$

□

Nous venons de démontrer l'existence et l'unicité (pour $\mu \geq \mu_0$) de la solution $(\widetilde{v}, p)$ au problème muni de la loi de Tresca en dimension 3.

3.7 Existence de solutions du problème (PC)

La deuxième partie de la démonstration de l'existence de solutions du problème (**PC**) (muni de la loi de Coulomb), est basée sur l'existence d'un point fixe de l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} L^2(0,\tau; H_+^{\frac{1}{2}}(\omega)) & \longrightarrow & L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \times H^{-1}(0,\tau; L_0^2(\Omega)) \longrightarrow L^2(0,\tau; H_+^{\frac{1}{2}}(\omega)) \\ l & \longmapsto & (\widetilde{v}_l, p_l) \longmapsto \Sigma(l) = kS(\sigma_\nu(v_l, p_l)), \end{array}$$

où $(\widetilde{v}_l, p_l)$ sont solution du problème variationnel (3.33)-(3.34). De l'unicité de la solution $(\widetilde{v}_l, p_l)$ du problème (3.33)-(3.34), l'application Σ est bien définie.

Proposition 3.7.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.6.1 et du lemme 3.6.1, pour tout l_1, l_2 dans $L^2(0,\tau; H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))$, on a*

$$\|\widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div})} \leq C\|l_1 - l_2\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))}. \tag{3.129}$$

où C est une constante positive indépendante de l_1 et l_2.

Démonstration. Soient l_1, l_2 deux éléments de $L^2(0,\tau; H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))$, et $\widetilde{v}_{l_1}, \widetilde{v}_{l_2}$ les éléments associés vérifiant le problème (3.33)-(3.34), on a

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_{l_1}, \varphi), \chi \right\rangle + \int_0^\tau \Big[a(T; \widetilde{v}_{l_1}, \varphi\chi) + b(\widetilde{v}_{l_1}, \widetilde{v}_{l_1}, \varphi\chi) - (p_{l_1}, div\, \varphi\chi)\Big]\, dt \\ &+ \int_0^\tau \Big[\psi_{l_1}(\varphi\chi + \widetilde{v}_{l_1}) - \psi_{l_1}(\widetilde{v}_1) - (\widetilde{f}, \varphi\chi)\Big]\, dt \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,\tau)\end{aligned} \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_{l_2}, \varphi), \chi \right\rangle + \int_0^\tau \Big[a(T; \widetilde{v}_{l_2}, \varphi\chi) + b(\widetilde{v}_{l_2}, \widetilde{v}_{l_2}, \varphi\chi) - (p_{l_2}, div\, \varphi\chi)\Big]\, dt \\ &+ \int_0^\tau \Big[\psi_{l_2}(\varphi\chi + \widetilde{v}_{l_2}) - \psi_{l_2}(\widetilde{v}_{l_2}) - (\widetilde{f}, \varphi\chi)\Big]\, dt \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,\tau).\end{aligned} \tag{3.131}$$

En prenant $\varphi\chi = \widetilde{v}_{l_2} - \widetilde{v}_{l_1}$ dans (3.130) et $\varphi\chi = \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}$ dans (3.131) et en utilisant le fait que $\widetilde{v}_{l_1}, \widetilde{v}_{l_2} \in \mathcal{V}_{0div}$, on aura

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \left(\frac{\partial \widetilde{v}_{l_1}}{\partial t}, \widetilde{v}_{l_2} - \widetilde{v}_{l_1}\right) + a(T; \widetilde{v}_{l_1}, \widetilde{v}_{l_2} - \widetilde{v}_{l_1}) + b(\widetilde{v}_{l_1}, \widetilde{v}_{l_1}, \widetilde{v}_{l_2} - \widetilde{v}_{l_1})\, dt \\ &+ \int_0^\tau \psi_{l_1}(\widetilde{v}_{l_2}) - \psi_{l_1}(\widetilde{v}_1) - (\widetilde{f}, \widetilde{v}_{l_2} - \widetilde{v}_1)\, dt \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \left(\frac{\partial \widetilde{v}_{l_2}}{\partial t}, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}\right) + a(T; \widetilde{v}_{l_2}, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}) + b(\widetilde{v}_{l_2}, \widetilde{v}_{l_2}, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2})\, dt \\ &+ \int_0^\tau \psi_{l_2}(\widetilde{v}_{l_1}) - \psi_{l_2}(\widetilde{v}_2) - (\widetilde{f}, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_2)\, dt \geq 0.\end{aligned}$$

En additionnant les deux inéquations, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \left(\frac{\partial \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}}{\partial t}, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}\right) + a(T; \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}) + b(\widetilde{v}_{l_2} + G_0\zeta, \widetilde{v}_{l_2} + G_0\zeta, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2})\, dt \\ &- \int_0^\tau b(\widetilde{v}_{l_1} + G_0\zeta, \widetilde{v}_{l} + G_0\zeta, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2})\, dt \leq \int_0^\tau \psi_{l_1}(\widetilde{v}_{l_2}) - \psi_{l_1}(\widetilde{v}_{l_1}) + \psi_{l_2}(\widetilde{v}_{l_1}) - \psi_{l_2}(\widetilde{v}_{l_2})\, dt.\end{aligned}$$

Alors, en utilisant la coercivité de a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_{l_1}(\tau) - \widetilde{v}_{l_2}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha \int_0^\tau \|\widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}\|^2_{\mathcal{V}_{0div}}\, dt \leq \int_0^\tau \int_\omega (l_1 - l_2)\left(|\widetilde{v}_{l_2}| - |\widetilde{v}_{l_1}|\right)\, dx'\, dt \\ &- \int_0^\tau b(\widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}, \widetilde{v}_{l_1} + G_0\zeta, \widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2})\, dt,\end{aligned}$$

en utilisant la continuité de b (3.28), on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_{l_1}(\tau) - \widetilde{v}_{l_2}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha \int_0^\tau \|\widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}\|^2_{\mathcal{V}_{0div}}\, dt \leq \int_0^\tau \int_\omega (l_1 - l_2)\left(|\widetilde{v}_{l_2}| - |\widetilde{v}_{l_1}|\right)\, dx'\, dt \\ &+ K^2 \int_0^\tau \|\widetilde{v}_{l_1} - \widetilde{v}_{l_2}\|^2_{\mathcal{V}_{0div}} \|\widetilde{v}_{l_1} + G_0\zeta\|_{\mathcal{V}_{div}}\, dt,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_{l_1}(\tau)-\widetilde{v}_{l_2}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\alpha\int_0^\tau\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|^2_{\mathcal{V}_{div}}\,dt\leq\int_0^\tau\int_\omega(l_1-l_2)\,(|\widetilde{v}_{l_2}|-|\widetilde{v}_{l_1}|)\;dx'\,dt$$
$$+K^2\int_0^\tau\|\widetilde{v}_{l_1}+G_0\zeta\|_{\mathcal{V}_{div}}\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|^2_{\mathcal{V}_{0div}}\,dt,$$

en utilisant l'inégalité $\||a|-|b|\|\leq|a-b|$, la continuité de l'application trace sur ω et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\omega(l_1-l_2)\,(|\widetilde{v}_{l_2}|-|\widetilde{v}_{l_1}|)\;dx' &\leq C(\Omega)\|l_1-l_2\|_{\mathbf{L}^2(\omega)}\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|_{\mathcal{V}_{0div}}\\ &\leq C(\Omega)\|l_1-l_2\|_{H_+^{\frac{1}{2}}(\omega)}\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|_{\mathcal{V}_{0div}}\end{aligned}$$

de l'injection de $H_+^{\frac{1}{2}}(\omega)$ dans $L_+^2(\omega)$, il existe une constante dont le produit avec $C(\Omega)$ est noté encore $C(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_{l_1}(\tau)-\widetilde{v}_{l_2}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\alpha\int_0^\tau\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|^2_{\mathcal{V}_{0div}}\,dt\leq C(\Omega)\int_0^\tau\|l_1-l_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\omega)}\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|_{\mathcal{V}_{0div}}\,dt$$
$$+K^2\int_0^\tau\|\widetilde{v}_{l_1}+G_0\zeta\|_{\mathcal{V}_{div}}\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|^2_{\mathcal{V}_{0div}}\,dt. \tag{3.132}$$

En utilisant l'estimation (3.113), on a

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_{l_1}(\tau)-\widetilde{v}_{l_2}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+(\alpha-K^2\|\widetilde{v}_{l_1}+G_0\zeta\|_{L^\infty(0,\tau;\mathcal{V}_{div})})\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|^2_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div})}\leq$$
$$\leq C(\Omega)\int_0^\tau\|l_1-l_2\|_{H_+^{\frac{1}{2}}(\omega)}\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|_{\mathcal{V}_{0div}}\,dt$$

de (3.128), il existe $C'>0$ tel que

$$\alpha-K^2\|\widetilde{v}_{l_1}+G_0\zeta\|_{L^\infty(0,\tau;\mathcal{V}_{div})}>C'>0.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}_{l_1}(\tau)-\widetilde{v}_{l_2}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+C'\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|^2_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div})}\leq$$
$$\leq C(\Omega)\|l_1-l_2\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))}\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div})},$$

alors

$$\|\widetilde{v}_{l_1}-\widetilde{v}_{l_2}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div})}\leq\frac{C(\Omega)}{C'}\|l_1-l_2\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))}. \tag{3.133}$$

D'où (3.129). □

Lemme 3.7.1. *On suppose qu'on a*

$$\|v\|_F \leq A\|u\|_E + B, \ \forall u \in E,$$

où A et B sont deux constantes réelles positives et E et F sont deux espaces normés. Alors on a

$$\|v\|_F \leq (A+B)\|u\|_E, \ \forall u \in E.$$

Démonstration. On distingue deux cas

- Si $\|u\|_E \leq 1$ alors $A\|u\|_E + B \leq A + B$
- Si $\|u\|_E > 1$ alors $A\|u\|_E + B = \|u\|_E(A + \frac{B}{\|u\|_E}) \leq (A+B)\|u\|_E$.

Alors pour tout $\|u\|_E \in E$, on a $A\|u\|_E + B \leq (A+B)\|u\|_E$. □

Théorème 3.7.1. *Sous les hypothèses de la proposition 3.7.1, le problème* (**PC**) *admet au moins une solution.*

Démonstration. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on va démontrer que l'application Σ admet un point fixe.
Pour celà, on cherche d'abord $c > 0$ tel que $\Sigma(B) \subset B$ où

$$B = \{l \in L^2(0,\tau; H_0^{\frac{1}{2}}(\omega)) \quad : \quad \|l\|_{L^2(0,\tau;H^{\frac{1}{2}}(\omega))} \leq c\}.$$

On a de la définition de Σ

$$\begin{aligned}
\|\Sigma(l)\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))} &\leq k\|S(\sigma_\nu(v_l,p_l))\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))} \\
&\leq c_1 k\|\sigma_\nu(v_l,p_l)\|_{L^2(0,\tau;H^{-\frac{1}{2}}(\omega))}
\end{aligned} \tag{3.134}$$

où c_1 est la norme de l'application continue et linéaire S définie de $H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\omega)$.
On cherche maintenant à majorer $\|\sigma_\nu(v_l,p_l)\|_{L^2(0,\tau;H^{-\frac{1}{2}}(\omega))}$. En effet en prenant dans (3.32) $\varphi_i\chi = \psi \in L^2(0,\tau; \mathcal{V}_{0div})$, on obtient

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v.\nabla)v_i\right)\psi\, dx\, dt = -\int_0^\tau \left[\int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\, dx + \int_\omega \sigma_{ij}\nu_j\psi\, d\sigma + \int_\Omega f_i\psi\, dx\right] dt \tag{3.135}$$

alors, en remplaçant dans l'intégrale sur Ω, σ_{ij} par sa valeur (3.9), on a

$$\int_\omega \sigma_{ij}\nu_j\psi\, dx' = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}, \psi\right) + b((v,v,\psi) + a(T;v,\psi) - (f,\psi).$$

En utilisant (3.29), on trouve

$$\left|\int_0^\tau \int_\omega \sigma_{ij}\nu_j\psi\, dx'\, dt\right| \leq \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\|\psi\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}$$
$$+K^2\|v\|_{L^\infty(0,\tau;\mathcal{V})}\|v\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V})}\|\psi\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))} + 2\mu_*\|v\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V})}\|\psi\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))}$$
$$+\|f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\|\psi\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}$$

alors de l'estimation (3.113), on a pour une constante C indépendante de ε, de m et de δ

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\|_{\mathcal{V}_0} \leq C$$

donc

$$\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t) \rightharpoonup \widetilde{v}(t) \ \text{ dans } \ \mathcal{V}_0 \ \forall t \in [0,\tau],$$

du théorème de Banach-Steinhaus, on déduit que

$$\|\widetilde{v}(t)\|_{\mathcal{V}_0} \leq \liminf \|\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\|_{\mathcal{V}_0},$$

en prenant le sup de $t \in [0,\tau]$ et en remplaçant $\widetilde{v}$ par $v - G_0\zeta$, on a

$$\|v\|_{L^\infty(0,\tau;\mathcal{V})} \leq C.$$

Il existe alors c' une constante qui dépend aussi K et de μ_* tel que

$$\left|\int_0^\tau \int_\omega \sigma_{ij}\nu_j(\psi)\, dx'\, dt\right| \leq \left(\|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + c'\|v\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V})} + \|f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\right)\|\psi\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega))}$$

d'où

$$\|\sigma_{ij}\nu_j\|_{L^2(0,\tau;H^{-\frac{1}{2}}(\omega))} \leq \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + c'\|v\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V})} + \|f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}$$

alors en utilisant l'estimation (3.111), on en déduit que

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C$$

donc

$$(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' \rightharpoonup (\widetilde{v})' \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$$

alors quand $m \to \infty$, δ et ε tendent vers 0 respectivement, on a

$$\|(\widetilde{v})'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}$$

ainsi

$$\|(\widetilde{v})'\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C,$$

du lemme 3.7.1 avec $c_2 = c_1 + C + \|f\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}$, on a

$$\|\sigma_{ij}\nu_j\|_{L^2(0,\tau;H^{-\frac{1}{2}}(\omega))} \leq c_2\|v\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V})}.$$

De plus $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, on a alors

$$\|\sigma_\nu\|_{L^2(0,\tau;H^{-\frac{1}{2}}(\omega))} \leq c_2\|v\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V})}. \tag{3.136}$$

De (3.134) et (3.136), on obtient

$$\|\Sigma(l)\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))} \leq c_1c_2k\|v_l\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{div})}.$$

Et de l'estimation (3.47), on déduit

$$\|\Sigma(l)\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))} \leq c_1c_2Ck.$$

Notons $c = c_1c_2Ck$ le rayon de la boule B, donc l'application Σ est définie de B dans lui-même.

Montrons maintenant que Σ est lipschitzienne, en effet

$$\begin{aligned}\|\Sigma(l_1) - \Sigma(l_2)\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))} &\leq k\|S(\sigma_\nu(v_{l_1})) - S(\sigma_\nu(v_{l_2}))\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))}\\ &\leq c_1c_2k\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{div})},\end{aligned}$$

or de la proposition précédente, on a

$$\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{div})} \leq \frac{C(\Omega)}{C'}\|l_1 - l_2\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))},$$

alors

$$\|\Sigma(l_1) - \Sigma(l_2)\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))} \leq c_1c_2k\frac{C(\Omega)}{C'}\|l_1 - l_2\|_{L^2(0,\tau;H_+^{\frac{1}{2}}(\omega))},$$

de là, on déduit que l'application Σ est lipschitzienne. Du théorème de Schauder, l'application Σ admet au moins un point fixe. C'est à dire que le paramètre l du problème variationnel (3.33)-(3.34) devient $kS(\sigma_\nu(v_l, p_l))$, alors (v_l, p_l) est solution du problème **(P)**. □

Remarque 3.7.1. *Le théorème 3.6.1 s'applique aussi bien au problème* **(PC)**. *On obtient donc l'unicité de la solution* $(v, p) \in L^2(0, \tau; \mathcal{V}_{div}) \cap L^\infty(0, \tau; L^2(\Omega)) \times H^{-1}(0, \tau; L^2_0(\Omega))$ *du problème* **(PC)** *sous la condition* $\mu \geq \mu^*$.

Remarque 3.7.2. *On pouvait aussi utiliser le théorème du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité de solution. Ce théorème nécessite le fait que l'application* Σ *soit contractante, en prenant*

$$k_* = \frac{C'}{c_1 c_2 C(\Omega)}, \tag{3.137}$$

alors pour

$$0 \leq k < k_*,$$

l'application Σ *admet une solution unique.*

Chapitre 4

Etude numérique du problème d'écoulement

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème d'écoulement newtonien, non-isotherme, incompressible muni de la loi de Tresca par une technique de discrétisation en temps. Dans un premier lieu, on introduira un problème auxiliaire muni de la loi de Tresca et on traitera l'existence de solutions par la méthode de Galerkin d'une manière analogue à celle du chapitre précédent. On cherchera des estimations sur la vitesse, sa dérivée ainsi que la pression qui soient indépendantes du pas de temps afin de pouvoir passer à la limite. Ensuite, on se restreindra à un cas particulier (en dimension 2) et on cherchera des estimations sur la dérivée de la vitesse. Dans la dernière section, on s'intéressera à la discrétisation en temps du problème (**PT**) du chapitre précédent. On étudiera le problème en dimension 2 puis en dimension 3. Enfin, on discutera la convergence entre la solution du problème discrétisé et celle du problème (**PT**).

4.2 Etude d'un problème auxiliaire

Dans ce chapitre, Ω désignera le domaine considéré dans le chapitre précédent

$$\Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad x' \in \omega, \quad 0 < x_n < h(x')\} .$$

où $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nous rappellons que la frontière de Ω est consituée de trois parties

$$\partial\Omega = \Gamma = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma_L} \cup \overline{\Gamma_1},$$

où $\overline{\omega} = \{(x', x_n) \in \overline{\Omega} : x_n = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x', x_n) \in \overline{\Omega} : x_n = h(x')\}$ et Γ_L la partie latérale de $\partial\Omega$. On suppose que h est une fonction continue et vérifiant $0 < h_{min} < h(x') < h_{max}$ pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Nous considérons l'écoulement non-stationnaire, non-isotherme, incompressible d'un fluide newtonien. Cet écoulement est gouverné par l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v - 2div\left(\mu(\widetilde{T})D(v)\right) + \nabla p = f(t) \quad \text{dans} \quad \Omega\times]\tau_0, \tau_1[, \tag{4.1}$$

munie de la condition d'incompressibilité

$$div(v) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times]\tau_0, \tau_1[, \tag{4.2}$$

et de la condition initiale

$$v(\tau_0, x) = v_0(x) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega. \tag{4.3}$$

Dans ce qui suit, on utilise la convention de sommation sur les indices répétés. La viscosité μ est une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et il existe μ^*, μ_* deux constantes strictement positives telles que :

$$\mu^* \leq \mu(X) \leq \mu_* \quad \forall X \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

De plus, μ est lipschitzienne de rapport C_μ. Nous décrirons ci-dessous les conditions aux limites

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \tag{4.5}$$

$$v = g\zeta \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \tag{4.6}$$

où g est une fonction indépendante de t et $\zeta \in \mathcal{C}^{\infty}([\tau_0, \tau_1])$. On suppose que

$$g \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_L), \quad \text{et} \quad s \in H^{\frac{3}{2}}(\omega) \tag{4.7}$$

avec

$$\int_{\Gamma_L} g.\nu \, d\sigma = 0, \tag{4.8}$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ est le vecteur unitaire normal à Γ extérieur à Ω. La composante normale de la vitesse sur ω est nulle

$$v_\nu = v \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega. \tag{4.9}$$

Sur ω la composante tangentielle de la vitesse satisfait la loi de Tresca, où $\widetilde{l}$ est le seuil de frottement

$$\begin{aligned} &\|\sigma_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{R}^{n-1}} < \widetilde{l} \Rightarrow v_{\mathcal{T}} = s\zeta \\ &\|\sigma_{\mathcal{T}}\|_{\mathbb{R}^{n-1}} = \widetilde{l} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{tel que} \quad v_{\mathcal{T}} = s\zeta - \lambda \sigma_{\mathcal{T}}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Il existe $G_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ tel que (voir page 51)

$$\begin{aligned} &div\, G_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad G_0 = g(x) \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \quad G_{0_{\mathcal{T}}} = s \quad \text{sur} \quad \omega, \\ &G_0.\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega, \quad G_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{aligned}$$

On rappelle les convexes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_{div}$ de $\mathbf{H}^1(\Omega)$

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \varphi = G_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \varphi \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \right\},$$

$$\mathcal{V}_{div} = \{ \varphi \in \mathcal{V} : \quad div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \},$$

et les espaces fonctionnels suivants

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L \cup \Gamma_1, \varphi \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \right\},$$

$$\mathcal{V}_{0div} = \{ \varphi \in \mathcal{V} : \quad div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q \, dx = 0 \right\}.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{V}_0$ est muni de la norme $H^1(\Omega)$

$$\|.\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|.\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla .\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $L^2_0(\Omega)$ est muni de la norme $L^2(\Omega)$. On définit les applications suivantes

$$\begin{aligned} a : \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto a(\widetilde{T}; u, v) = \int_\Omega \mu(\widetilde{T}) d_{ij}(u) d_{ij}(v)\, dx' dx_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b : \quad \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 &\to \mathbb{R} \\ (u,v,w) &\mapsto b(u,v,w) = \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx'\, dx_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathcal{V}_0 &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \psi(v) = \int_\omega \widetilde{l} |v| \, d\,x', \end{aligned}$$

où $\widetilde{T}$ est la température et $d_{ij}(u)$ est le tenseur de déformation

$$(d_{ij}(u))_{1 \le i,j \le n} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

Avec (4.4), on obtient que la forme bilinéaire a est continue

$$|a(\widetilde{T}; u, v)| \le \mu_* \|u\|_{\mathcal{V}_0} \|v\|_{\mathcal{V}_0} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_0,$$

et coercive car il existe une constante $\alpha > 0$ qui dépend de μ^* et de la constante de Korn, tel que

$$a(\widetilde{T}; v, v) \ge \alpha \|v\|^2_{\mathcal{V}_0} \quad \forall v \in \mathcal{V}_0.$$

La forme trilinéaire b vérifie pour tout $u, v, w \in \mathcal{V}_{0div}$

$$b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0, \tag{4.11}$$

et pour $u \in \mathcal{V}_{0div}$ et $v \in \mathcal{V}_0$, on a

$$b(u,v,v) = 0.$$

La formulation variationnelle est donnée ainsi

Problème 4.2.1. *Trouver* $\widetilde{v} \in L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))$ *et* $p \in H^{-1}(\tau_0, \tau_1; L^2_0(\Omega))$ *telles que*

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}, \varphi), \chi \right\rangle + \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[b(\widetilde{v}, \widetilde{v}, \varphi\chi) - (p(t), div(\varphi\chi)) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}, \varphi\chi) \Big] \, dt \\ + \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[\psi(\varphi\chi + \widetilde{v}) - \psi(\widetilde{v}) \Big] \, dt \geq \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[(f, \varphi\chi) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \varphi\chi) - \left(G_0 \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi \right) \Big] \, dt \\ - \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[\zeta \, b(G_0, \widetilde{v} + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta \, b(\widetilde{v}, G_0, \varphi\chi) \Big] \, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \ \forall \chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1) \\ \widetilde{v}(\tau_0, x) = \widetilde{v}_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.12}$$

où $(.,.)$ représente le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, $\widetilde{v}_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega))$, $\widetilde{T} \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega))$ et $\widetilde{l} \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2_+(\omega))$. Notons $Z = H^1_{0div}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $H^1_0(\Omega)$ à divergence nulle muni de la norme de $H^1(\Omega)$ et Z' son dual. Pour passer d'une inéquation variationnelle à une équation variationnelle, on régularise la condition aux limites sur ω en introduisant

$$\psi_\varepsilon(v) = \int_\omega \widetilde{l} \sqrt{\varepsilon^2 + |v|^2} \, dx', \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_0,$$

qui est différentiable au sens de Gâteaux sur $\mathcal{V}_0$, de différentielle ψ'_ε définie par

$$< \psi'_\varepsilon(w), v > = \int_\omega \widetilde{l} \frac{(v, w)}{\sqrt{\varepsilon^2 + |w|^2}} \, dx', \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_0.$$

Afin de démontrer l'existence de solutions par la méthode de Galerkin, on introduit de plus une pénalisation de la divergence de $\widetilde{v}$ de paramètre δ [37]. Alors, le problème (4.12) devient

Problème 4.2.2. *Soient* $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$.
Trouver $\widetilde{v}^\delta_\varepsilon \in L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0) \cap L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))$ *et* $(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon)' \in L^{\frac{4}{3}}(\tau_0, \tau_1; Z')$ *solution de*

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon, \varphi), \chi \right\rangle + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[b(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon, \varphi\chi) + \frac{1}{2} \left(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon div(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon), \varphi\chi \right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}^\delta_\varepsilon, \varphi\chi) \Big] \, dt \\ &+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[\frac{1}{\delta} \left(div(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon), \chi div \, \varphi \right) + \left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon), \varphi\chi \right\rangle \Big] \, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[(f, \varphi\chi) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \varphi\chi) \Big] \, dt \\ &- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[\left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi \right) + \zeta \, b(G_0, \widetilde{v}^\delta_\varepsilon + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta \, b(\widetilde{v}^\delta_\varepsilon, G_0, \varphi\chi) \Big] \, dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \ \forall \chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1) \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\widetilde{v}^\delta_\varepsilon(\tau_0, x) = \widetilde{v}_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.14}$$

4.2.1 Méthode de Galerkin

Si $\widetilde{v}_0 \neq 0$ et $\widetilde{v}_0 \in \mathcal{V}_0$, on considère $\overline{V} = \{w \in \mathcal{V}_0, \quad (\widetilde{v}_0, w) = 0\}$, il s'agit d'un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Il existe donc $(v_i)_{i\geq 1}$ une base hilbertienne orthonormale de $\overline{V}$ pour la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ telle que $(v_i)_{i\geq 1}$ est une famille orthogonale dans $L^2(\Omega)$. De plus pour tout $w \in \mathcal{V}_0$ on peut définir

$$\widetilde{w} = w - (w, \widetilde{v}_0)\frac{\widetilde{v}_0}{\|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} \in \overline{V}.$$

Donc la famille $(\widetilde{v}_0, v_1, \ldots, v_m)$ est une base hilbertienne de $\mathcal{V}_0$ muni de la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. De plus, puisque $\mathcal{V}_0$ est dense dans $L^2(\Omega)$, la famille $(\widetilde{v}_0, v_1, \ldots, v_m)$ est une base hilbertienne orthogonale de $L^2(\Omega)$.
On définit alors $w_1 = \widetilde{v}_0$, $w_{j+1} = v_j$ pour tout $j \geq 1$, de sorte que $(w_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{V}_0$ pour la norme $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et une base hilbertienne orthogonale de $L^2(\Omega)$. Si $\widetilde{v}_0 = 0$ ou si $\widetilde{v}_0 \notin \mathcal{V}_0$, puisque $\mathcal{V}_0$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$, il admet une base hilbertienne $(w_j)_{j\geq 1}$ orthonormale dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et orthogonale dans $L^2(\Omega)$. Pour tout $m \geq 1$, on choisit $\widetilde{v}^0_m \in Vect\{w_1, \ldots, w_m\}$ tel que $\widetilde{v}^0_m$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers $\widetilde{v}_0$. On introduit $\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}$ ainsi

$$\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t,x) = \sum_{j=1}^{m} g^\delta_{\varepsilon j}(t) w_j(x),$$

telle que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, w_k\right) + b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, w_k) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), w_k\right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, w_k) \\
&+\frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), div\, w_k\right) + \left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), w_k\right\rangle = (f, w_k) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, w_k) \\
&-\left(G_0\frac{\partial \zeta}{\partial t}, w_k\right) - \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} + G_0\zeta, w_k) - \zeta b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, w_k) \quad 1 \leq k \leq m.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(\tau_0) = \widetilde{v}^0_m. \tag{4.16}$$

En remplaçant $\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}$ par sa valeur dans (4.15), on obtient une équation différentielle non linéaire. Du théorème de Cauchy, on déduit que le système admet une solution unique maximale dans $H^1(\tau_0, \tau_m)$. Les estimations qui vont suivre nous permettront de prolonger la solution dans tout l'intervalle $[\tau_0, \tau_1]$.

Lemme 4.2.1. *Pour tout* $f \in L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $G_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, $\zeta \in \mathcal{C}^\infty([\tau_0,\tau_1])$, $\widetilde{v}_0 \in L^2(\Omega)$ *et* $\widetilde{l} \in L^2(\tau_0,\tau_1;L^2_+(\omega))$ *la solution du système (4.15)-(4.16) vérifie les estimations suivantes :*

$$\sup_{t\in[\tau_0,\tau_1]} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C, \tag{4.17}$$

$$\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} \leq C, \tag{4.18}$$

$$\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}, \tag{4.19}$$

où C *est une constante indépendante de* ε, *de* m, *et de* δ.

Démonstration. En multipliant l'équation (4.15) par $g^\delta_{\varepsilon j}(t)$ et en sommant pour j allant de 1 à m, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\\
&+\frac{1}{\delta}\left(div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + \left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right\rangle = (f, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\\
&-\frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) - \zeta b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} + G_0\zeta, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \zeta b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Remarquons que

$$b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) = 0.$$

Puisque $\widetilde{l} \in L^2(\tau_0,\tau_1;L^2_+(\omega))$, on a

$$\left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right\rangle = \int_\omega \widetilde{l}\frac{|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2}}\, dx' \geq 0, \quad \forall t \in [\tau_0,\tau_1].$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) + \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right)\\
&\leq (f, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) - \zeta b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\\
&-\zeta b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \zeta^2 b(G_0, G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}).
\end{aligned}$$

En utilisant la coercivité de a, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}}{\partial t}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) + \alpha\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leq (f, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\right) - \zeta b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\\
&- \zeta b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - \zeta^2 b(G_0, G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}).
\end{aligned}$$

Comme $div\, G_0 = 0$, le terme $b(G_0, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})$ s'annule. Notons K la constante d'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young dans tous les termes du second membre, on obtient respectivement

$$\begin{aligned}
\left|(f, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\right| &\leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|f(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
\left|\zeta\, a(\widetilde{T}; G_0, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\right| &\leq \mu_* |\zeta| \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{\alpha}{4}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2 \\
\left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(G_0, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\right)\right| &\leq \left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
\left|\zeta b(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}, G_0, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\right| &\leq |\zeta| \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\alpha}{4}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{K^4}{\alpha}|\zeta|^2 \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
\left|\,\zeta^2 b(G_0, G_0, \widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\right| &\leq |\zeta^2| G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{K^4}{2}|\zeta|^4 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En rassemblant ces termes, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2 \\
&+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{3}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{K^4}{\alpha}|\zeta|^2 \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+\frac{K^4}{2}|\zeta^4| \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

En intégrant de τ_0 à s, où $\tau_0 < s < \tau_1$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_{\tau_0}^{s}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_{\tau_0}^{s}\|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(\tau_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{s}\|f(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{\tau_0}^{s}|\zeta|^2\,dt + \frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_{\tau_0}^{s}\left|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|^2\,dt \\
&+\frac{3}{2}\int_{\tau_0}^{s}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{\tau_0}^{s}|\zeta|^2\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt \\
&+\frac{K^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\int_{\tau_0}^{s}|\zeta|^4\,dt.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

On trouve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\int_{\tau_0}^{s}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt+\frac{1}{\delta}\int_{\tau_0}^{s}\|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\&\leq\overline{C}^m_1+\overline{C}_2\int_{\tau_0}^{s}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt,\end{aligned}\tag{4.23}$$

où

$$\overline{C}^m_1=\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^0_m\|^2_{L^2(\Omega)}+C_1$$

$$\begin{aligned}C_1=&\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt+\frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\tau_1-\tau_0|\|\zeta\|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\\&+\frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\tau_1-\tau_0|\left\|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}+\frac{K^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}|\tau_1-\tau_0|\|\zeta\|^4_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\end{aligned}$$

$$\overline{C}_2=\frac{3}{2}+\frac{K^4}{\alpha}\|\zeta\|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

En utilisant le lemme de Grönwall, on a

$$\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq 2\overline{C}^m_1\exp\left(2\overline{C}_2(s-\tau_0)\right),\quad\forall s\in[\tau_0,\tau_1].\tag{4.24}$$

Puisque $(\widetilde{v}^0_m)_{m\geq 1}$ converge fortement vers $\widetilde{v}_0$ dans $L^2(\Omega)$, $\overline{C}^m_1$ est bornée indépendamment de m et il existe $\overline{C}_1$ tel que $\overline{C}^m_1\leq\overline{C}_1$ pour tout $m\geq 1$. En prenant le sup sur $s\in[\tau_0,\tau_1]$, on trouve (4.17). En reprenant dans (4.23), on obtient

$$\int_{\tau_0}^{s}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt\leq\frac{2\overline{C}_1}{\alpha}\exp\left(2\overline{C}_2(s-\tau_0)\right),\quad\forall s\in[\tau_0,\tau_1]\tag{4.25}$$

$$\int_{\tau_0}^{s}\|div(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\leq\delta\overline{C}_1\exp\left(2\overline{C}_2(s-\tau_0)\right),\quad\forall s\in[\tau_0,\tau_1]$$

d'où (4.18) et (4.19). □

Pour pourvoir passer à la limite, on a besoin de régularité sur la dérivée de la vitesse $\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}$.

Lemme 4.2.2. *Sous les hypothèses du lemme 4.2.1, la dérivée en temps de $v^{\delta}_{\varepsilon m}$ vérifie l'estimation suivante*

$$\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'\|_{L^{\frac{4}{3}}(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0')}\leq C_\delta,\tag{4.26}$$

où C est une constante indépendante de m et de ε.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{V}_0$. Si $\widetilde{v}_0 \neq 0$ et $\widetilde{v}_0 \in \mathcal{V}_0$, on définit $\widetilde{\varphi} = \varphi - (\varphi, \widetilde{v}_0)\frac{\widetilde{v}_0}{\|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}$ et $\widetilde{\varphi}_p$ $p \geq 2$ comme la projection orthogonale de $\widetilde{\varphi}$ sur l'espace engendré par $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Pour tout $p \geq 2$, on pose

$$\varphi_p = \widetilde{\varphi}_p + (\varphi, \widetilde{v}_0)\frac{\widetilde{v}_0}{\|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}.$$

Si $\widetilde{v}_0 = 0$ ou $\widetilde{v}_0 \notin \mathcal{V}_0$, on définit φ_p comme la projection orthogonale de φ sur l'espace engendré par $\{w_1, \ldots, w_p\}$. Dans les deux cas, on a

$$\varphi_p = \sum_{k=1}^{p} \beta_k w_k, \ \ \beta_k \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } p \geq 2,$$

et $\varphi_p \to \varphi$ fortement dans $\mathcal{V}_0$.

On multiplie l'équation (4.15) par β_k et on somme de $k = 1 \ldots m$, $m \geq 2$. On obtient

$$\begin{aligned} &\big((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \varphi_m\big) = -a(\widetilde{T}; \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m) - b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m) - \frac{1}{2}(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, \varphi_m) \\ &-\frac{1}{\delta}(div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, div\varphi_m) - < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), \varphi_m > +(f, \varphi_m) - \zeta\, a(\widetilde{T}; G_0, \varphi_m) \\ &-\left(G_0\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi_m\right) - \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} + G_0\zeta, \varphi_m) - \zeta\, b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, \varphi_m). \end{aligned} \tag{4.27}$$

En majorant les termes du second membre, on a

$$\begin{aligned} &|\big((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \varphi_m\big)| \leq \mu_*\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} + \frac{3}{2}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\|\nabla\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \\ &+\frac{1}{\delta}\|div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^2(\Omega)}\|div\varphi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\widetilde{l}\|_{L^2(\omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\omega)} + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+\mu_*|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} + \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\frac{\partial\zeta}{\partial t}|\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &+|\zeta|^2\|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + |\zeta|\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev [36] (c est une constante qui ne dépend que de Ω)

$$\|u\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \leq c\|u\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^6(\Omega)}, \forall u \in \mathbf{L}^6(\Omega)$$

et les injections de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^6(\Omega)$ et de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} &|\big((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \varphi_m\big)| \leq \mu_*\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} + \left(c_1\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{V}_0}\right)\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} \\ &+\frac{1}{\delta}\|div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} + C(\Omega)\|\widetilde{l}\|_{L^2(\omega)}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+\mu_*|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} + \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\frac{\partial\zeta}{\partial t}|\|\varphi_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+2K^2|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0} + K^2|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\varphi_m\|_{\mathcal{V}_0}, \end{aligned}$$

où $C(\Omega)$ est la constante de l'application trace et $c_1 = \frac{3}{2}c\widetilde{K}$ où $\widetilde{K}$ est la constante d'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^6(\Omega)$. Comme $(w_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne orthogonale dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \varphi_m\right) = \left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \varphi\right).$$

D'autre part si $\widetilde{v}_0 \neq 0$ et $\widetilde{v}_0 \in \mathcal{V}_0$, on a

$$\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \|\widetilde{\varphi}_m + (\varphi, \widetilde{v}_0)\frac{\widetilde{v}_0}{\|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \text{pour tout} \quad m \geq 2.$$

Comme $\widetilde{\varphi}_m$ est la projection orthogonale pour le produit scalaire $\mathbf{H}^1(\Omega)$ de $\widetilde{\varphi}$ sur $\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$, on obtient

$$\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\left(1 + \frac{2\|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{\|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}\right).$$

Si $\widetilde{v}_0 = 0$ ou si $\widetilde{v}_0 \notin \mathcal{V}_0$ alors $\|\varphi_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ car φ_m est la projection orthogonale de φ pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sur $\{v_1, \ldots, v_m\}$.
Posons $C_2 = 1 + \frac{2\|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{\|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}$ si $\widetilde{v}_0 \neq 0$ et $\widetilde{v}_0 \in \mathcal{V}_0$ et $C_2 = 1$ sinon. On obtient alors

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0'} \leq C_2 \Bigg[&\mu_* \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} + \left(c_1 \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right) + \frac{1}{\delta}\|div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C(\Omega)\|\widetilde{l}\|_{\mathbf{L}^2(\omega)} + \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mu_*|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\frac{\partial \zeta}{\partial t}| \\ &+ 2K^2|\zeta|\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathcal{V}_0} + K^2|\zeta|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\Bigg].\end{aligned}$$

En intégrant de τ_0 à τ_1 et en utilisant

$$(a+b)^{\frac{4}{3}} \leq 2^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}) \quad a, b \geq 0$$

on a pour une constante C indépendante de m, de δ et de ε telle que

$$\begin{aligned}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0'}\, dt \leq\ & C\mu_*^{\frac{4}{3}} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0}\, dt + Cc_1^{\frac{4}{3}} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{2}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\ &+ \frac{C}{\delta^{\frac{4}{3}}} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|div\, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{4}{3}}_{L^2(\Omega)}\, dt + C(\Omega)^{\frac{4}{3}} C \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\widetilde{l}\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\omega)}\, dt + C\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|f\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\ &+ C\mu_*^{\frac{4}{3}} \|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \int_{\tau_0}^{\tau_1} |\zeta|^{\frac{4}{3}}\, dt + C\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \int_{\tau_0}^{\tau_1} |\frac{\partial \zeta}{\partial t}|^{\frac{4}{3}}\, dt \\ &+ 2CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \int_{\tau_0}^{\tau_1} |\zeta|^{\frac{4}{3}} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0}\, dt + CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{8}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\zeta\|^{\frac{8}{3}}\, dt.\end{aligned} \tag{4.28}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder ($p = \frac{3}{2}, q = 3$), on a

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta})'\|_{\mathcal{V}_0'}^{\frac{4}{3}} \, dt \leq \mu_*^{\frac{4}{3}} C|\tau_1 - \tau_0|^{\frac{1}{3}} \|\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)}^{\frac{4}{3}} + Cc_1^{\frac{4}{3}} \|\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{2}{3}} \|\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)}^{2}$$
$$+ \frac{C}{\delta^{\frac{4}{3}}} |\tau_1 - \tau_0|^{\frac{1}{3}} \|div\, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))}^{\frac{4}{3}} + C(\Omega)^{\frac{4}{3}} C|\tau_1 - \tau_0|^{\frac{1}{3}} \|\widetilde{l}\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\omega))}^{\frac{4}{3}}$$
$$+ C|\tau_1 - \tau_0|^{\frac{1}{3}} \|f\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{4}{3}} + C\mu_*^{\frac{4}{3}} \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{4}{3}} |\tau_1 - \tau_0| \|\zeta\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}^{\frac{4}{3}}$$
$$+ C\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{4}{3}} |\tau_1 - \tau_0| \|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}^{\frac{4}{3}} + 2CK^{\frac{8}{3}} \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{4}{3}} |\tau_1 - \tau_0|^{\frac{1}{3}} \|\zeta\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}^{\frac{4}{3}} \|\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)}^{\frac{4}{3}}$$
$$+ CK^{\frac{8}{3}} \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{8}{3}} |\tau_1 - \tau_0| \|\zeta\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}^{\frac{8}{3}}.$$

Comme $\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}$ est borné dans $L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0) \cap L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))$ indépendamment de m, de ε et de δ, on trouve

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta})'\|_{\mathcal{V}_0'}^{\frac{4}{3}} \, dt \leq C_\delta,$$

où C est une constante indépendante de m et de ε. D'où (4.26). □

Passage à la limite sur m On s'intéresse maintenant au passage à la limite quand $m \to \infty$. Des estimations a priori obtenues dans les lemmes 4.2.1 et 4.2.2, on déduit qu'il existe une sous suite notée $(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta})$ vérifiant les convergences suivantes

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta} \rightharpoonup \widetilde{v}_{\varepsilon}^{\delta} \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0) \tag{4.29}$$

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta} \rightharpoonup \widetilde{v}_{\varepsilon}^{\delta} \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega)) \tag{4.30}$$

$$div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}) \rightharpoonup div(\widetilde{v}_{\varepsilon}^{\delta}) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega)). \tag{4.31}$$

$$(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta})' \rightharpoonup (\widetilde{v}_{\varepsilon}^{\delta})' \quad \text{faiblement dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0'). \tag{4.32}$$

En appliquant le lemme d'Aubin, on a les convergences fortes suivantes

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta} \to \widetilde{v}_{\varepsilon}^{\delta} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^4(\Omega)) \tag{4.33}$$

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta} \to \widetilde{v}_{\varepsilon}^{\delta} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\omega)). \tag{4.34}$$

En utilisant le lemme de Simon entre (4.30) et (4.32), on a

$$\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta} \to \widetilde{v}_{\varepsilon}^{\delta} \quad \text{fortement dans} \quad \mathcal{C}^0([\tau_0, \tau_1]; H), \tag{4.35}$$

où H est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset \mathcal{V}_0'$, avec injection compacte de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H.

Soit $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et $(\varphi_m)_{m\geq 2}$ la suite construite comme dans le lemme 2.4.2, on a

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{m} \beta_k w_k, \quad \text{pour tout } m \geq 2$$

et $\varphi_m \to \varphi$ fortement dans $\mathcal{V}_0$.

En multipliant (4.15) par $\beta_k \chi$ et en sommant de $k = 1$ à m, on obtient après intégration entre τ_0 et τ_1

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}}{\partial t}, \varphi_m \chi \right) + b(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}, \varphi_m \chi) + \frac{1}{2} \left(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta} div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}), \varphi_m \chi \right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}, \varphi_m \chi) \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{1}{\delta} \left(div(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}), \chi \, div \, \varphi_m \right) \, dt + \left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}), \varphi_m \chi \right\rangle \right] dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f, \varphi_m \chi) \, dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\zeta a(\widetilde{T}; G_0, \varphi_m \chi) + \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi_m \chi \right) + \zeta \, b(G_0, \widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta} + G_0 \zeta, \varphi_m \chi) \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \zeta b(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}, G_0, \varphi_m \chi) \, dt, \; \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \; \forall m \geq 2, \; \forall \chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

A l'aide des convergences, on peut passer à la limite sur tous les termes quand $m \to \infty$. Dans le premier terme, on utilise l'intégration par parties puis on passe à la limite, pour le terme $\left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_{\varepsilon m}^{\delta}), w_k \right\rangle$, on utilise la technique illustrée dans le chapitre précédent page (67-68). On obtient que $\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \in L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0) \cap L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))$ est solution de

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi), \chi \right\rangle + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi \chi) + \frac{1}{2} \left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi \chi \right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi \chi) \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{1}{\delta} \left(div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \chi \, div \, \varphi \right) \, dt + \left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi \chi \right\rangle \right] dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} Big[(f, \varphi \chi) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \varphi \chi) \right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi \chi \right) + \zeta \, b(G_0, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0 \zeta, \varphi \chi) + \zeta b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, G_0, \varphi \chi) \right] dt, \; \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \; \forall \chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Avec (4.35), on obtient

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta(\tau_0) = \widetilde{v}_0.$$

Du lemme 4.2.1, on déduit

$$\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C \tag{4.38}$$

$$\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0)} \leq C \tag{4.39}$$

$$\|div\, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}, \tag{4.40}$$

où C est une constante indépendante de δ et de ε.

On considère maintenant $\varphi \in Z$ dans (4.37), et en tenant compte du fait que $div\varphi = 0$ et $\varphi = 0$ sur ω pour tout $\varphi \in Z$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_0}^{\tau_1} \big((\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)', \varphi\chi\big)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[-a(\widetilde{T}; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) - b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) - \frac{1}{2}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div\, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi)\right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[(f, \varphi\chi) - \zeta\, a(\widetilde{T}; G_0, \varphi\chi) - \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi\right) - \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0\zeta, \varphi\chi)\right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \zeta\, b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, G_0, \varphi\chi)\, dt, \quad \forall\varphi \in Z, \quad \forall\chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

En poursuivant les majorations comme dans la preuve du lemme 4.2.2, on obtient

$$\|(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)'\|_{L^{\frac{4}{3}}(\tau_0,\tau_1;Z')} \leq C \tag{4.42}$$

où C est une constante indépendante de δ et de ε.

On définit

$$p_\varepsilon^\delta = -\frac{1}{\delta} div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta) \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega)).$$

Lemme 4.2.3. *Sous les hypothèses du lemme 4.2.1, on a*

$$\|p_\varepsilon^\delta\|_{H^{-1}(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))} \leq C,$$

où Cest une constante indépendante de δ et de ε.

Démonstration. En remplaçant dans (4.37), on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi), \chi \right\rangle + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi\chi\right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi)\right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(p_\varepsilon^\delta, \chi\, div\, \varphi\right) - \left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi\chi \right\rangle \right] dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[(f, \varphi\chi) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \varphi\chi)\right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi\right) + \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, G_0, \varphi\chi)\right] dt,\ \forall\varphi \in \mathcal{V}_0,\ \forall\chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

En utilisant l'intégration par parties dans le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[- \left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi'\right) + b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi\chi\right) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi)\right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(p_\varepsilon^\delta, \chi\, div\, \varphi\right) - \left\langle \psi_\varepsilon'(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi\chi \right\rangle\right] dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[(f, \varphi\chi) - \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \varphi\chi)\right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi\right) + \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, G_0, \varphi\chi)\right] dt.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

On considère $w \in L_0^2(\Omega)$, alors il existe $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que [37]

$$\varphi = Pw, \quad div(\varphi) = w,$$

où P est un opérateur linéaire continu de $L_0^2(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Dans (4.44), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_0}^{\tau_1} (p_\varepsilon^\delta, w\chi)\, dt &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[-(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi \frac{\partial \chi}{\partial t}) + b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) + \frac{1}{2}(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta), \varphi\chi) \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[a(\widetilde{T}; \widetilde{v}_\varepsilon^\delta, \varphi\chi) - (f, \varphi\chi) + \zeta a(\widetilde{T}; G_0, \varphi\chi) + \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi \right) \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\zeta b(G_0, \widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta b(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta, G_0, \varphi\chi) \right] dt.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

En majorant dans le second membre de (4.45), on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\tau_0}^{\tau_1} (p_\varepsilon^\delta, w\chi)\, dt \right| &\le \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |\frac{\partial \chi}{\partial t}| \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mu_* |\chi| \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathcal{V}_0} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[|\chi| \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \frac{1}{2} |\chi| \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[|\chi| \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mu_* |\chi| |\zeta| \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + |\chi| |\frac{\partial \zeta}{\partial t}| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right] dt \\
&+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[|\chi| |\zeta| \|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta + G_0\zeta)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + |\chi| |\zeta| \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \right] dt.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

En utilisant l'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\tau_0}^{\tau_1} (p_\varepsilon^\delta, w\chi)\, dt \right| &\le \|\frac{\partial \chi}{\partial t}\|_{L^2(\tau_0,\tau_1)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \mu_* \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} \|\chi\|_{L^2(\tau_0,\tau_1)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&+ \frac{3K^2}{2} \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|^2_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} \|\chi\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\chi\|_{L^2(\tau_0,\tau_1)} \\
&+ \mu_* \|\zeta\|_{L^1(\tau_0,\tau_1)} \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\chi\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} + \|\frac{\partial \zeta}{\partial t}\|_{L^1(\tau_0,\tau_1)} \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\chi\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+ 2K^2 \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\zeta\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} \|\chi\|_{L^2(\tau_0,\tau_1)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&+ K^2 \|\zeta\|^2_{L^2(\tau_0,\tau_1)} \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\chi\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

En utilisant le fait que

$$\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \|Pw\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le \|P\|_{\mathcal{L}(L_0^2, \mathbf{H}_0^1)} \|w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

ainsi que l'injection de $H^1(\tau_0, \tau_1)$ dans $L^\infty(\tau_0, \tau_1)$, on obtient

$$\left| \int_{\tau_0}^{\tau_1} (p_\varepsilon^\delta, w\chi)\, dt \right| \le \|P\|_{\mathcal{L}(L_0^2, \mathbf{H}_0^1)} \overline{C}_3 \|w\chi\|_{H^1(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))}, \ \forall w \in L^2(\Omega), \ \forall \chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1) \tag{4.48}$$

avec

$$\overline{C}_3 = \|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \mu_*\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} + \frac{3K^2C}{2}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|^2_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} + \|f\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))}$$
$$+\mu_*C|\tau_1-\tau_0|\|\zeta\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C|\tau_1-\tau_0|\|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$
$$+2K^2\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\zeta\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\|\widetilde{v}_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} + K^2C|\tau_1-\tau_0|\|\zeta\|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

où C la constante d'injection de $H^1(\tau_0,\tau_1)$ dans $L^\infty(\tau_0,\tau_1)$. De plus

$$\int_\Omega p_\varepsilon^\delta\,dx = 0, \tag{4.49}$$

et pour tout $w \in L^2(\Omega)$, on peut appliquer (4.48) en prenant

$$\widetilde{w} = w - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega w\,dx \quad \text{car} \quad \widetilde{w} \in L_0^2(\Omega). \tag{4.50}$$

En remplaçant w par $\widetilde{w}$ dans (4.48), on a

$$\left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p_\varepsilon^\delta,\widetilde{w}\chi)\,dt\right| \le \|P\|_{\mathcal{L}(L_0^2,\mathbf{H}_0^1)}\overline{C}_3\|\widetilde{w}\chi\|_{H_0^1(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))},\ \forall w\in L^2(\Omega),\quad \forall\chi\in\mathcal{D}(\tau_0,\tau_1).$$

Or

$$\left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p_\varepsilon^\delta, w - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega w\,dx)\chi\,dt\right| = \left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p_\varepsilon^\delta, w\chi)\,dt - \frac{1}{mes\Omega}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\int_\Omega p_\varepsilon^\delta\,dx\right)\left(\int_\Omega w\,dx\right)\chi\,dt\right|.$$

En utilisant (4.49), on obtient

$$\left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p_\varepsilon^\delta,\left(w - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega w\,dx\right)\chi\,dt\right| = \left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p_\varepsilon^\delta,w\chi)\,dt\right| \le \|P\|_{\mathcal{L}(L_0^2,\mathbf{H}_0^1)}\overline{C}_3\|\widetilde{w}\chi\|_{H_0^1(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))}$$

mais

$$\|\widetilde{w}\|_{L^2(\Omega)} \le \|w\|_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$\left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p_\varepsilon^\delta,w\chi)\,dt\right| \le \|P\|_{\mathcal{L}(L_0^2,\mathbf{H}_0^1)}\overline{C}_3\|w\chi\|_{H_0^1(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))},\ \forall w\in\mathbf{L}^2(\Omega),\ \forall\chi\in\mathcal{D}(\tau_0,\tau_1). \tag{4.51}$$

Avec les estimations (4.38)-(4.39) on peut alors conclure. □

Passage à la limite $\delta \to 0$ Avec le lemme 4.2.3, on obtient qu'il existe une sous suite notée p_ε^δ vérifiant quand δ tend vers 0 la convergence suivante

$$p_\varepsilon^\delta \rightharpoonup p_\varepsilon \quad \text{faiblement dans} \quad H^{-1}(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega)). \tag{4.52}$$

Avec les estimations (4.38)-(4.40) et (4.42), il existe une sous suite notée v_ε^δ vérifiant les convergences suivantes quand $\delta \to 0$

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \rightharpoonup \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0) \tag{4.53}$$

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \rightharpoonup \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega)) \tag{4.54}$$

$$div(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta) \to 0 \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega)), \tag{4.55}$$

et

$$(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)' \rightharpoonup (\widetilde{v}_\varepsilon)' \quad \text{faiblement dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(\tau_0, \tau_1; Z'). \tag{4.56}$$

Alors

$$div\, \widetilde{v}_\varepsilon = 0.$$

Avec le lemme d'Aubin, on a également

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \to \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^4(\Omega)) \tag{4.57}$$

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \to \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\omega)).$$

On pourra ainsi passer à la limite quand $\delta \to 0$ dans (4.37) : on a $\widetilde{v}_\varepsilon \in L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $\widetilde{v}'_\varepsilon \in L^{\frac{4}{3}}(\tau_0, \tau_1; Z')$ et $p_\epsilon \in H^{-1}(\tau_0, \tau_1; L_0^2(\Omega))$ solution de

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\widetilde{v}_\varepsilon, \varphi), \chi \right\rangle + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[b(\widetilde{v}_\varepsilon, \widetilde{v}_\varepsilon, \varphi\chi) + a(\widetilde{T}; \widetilde{v}_\varepsilon, \varphi\chi) + < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon), \varphi\chi > \Big]\, dt \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[(p_\varepsilon, \chi div(\varphi)) + (f, \varphi\chi) - \zeta\, a(\widetilde{T}; G_0, \varphi\chi) - \frac{\partial \zeta}{\partial t}(G_0, \varphi\chi) \Big]\, dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Big[\zeta\, b(G_0, \widetilde{v}_\varepsilon + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v}_\varepsilon(t), G_0, \varphi\chi) \Big]\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\tau_0, \tau_1).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Avec le lemme de Simon, on a

$$\widetilde{v}_\varepsilon^\delta \to \widetilde{v}_\varepsilon \quad \text{fortement dans} \quad \mathcal{C}^0([\tau_0, \tau_1]; H),$$

où H est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset Z'$ avec l'injection compacte de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H. Donc

$$\widetilde{v}_\varepsilon(\tau_0, x) = \widetilde{v}_0(x). \tag{4.59}$$

<u>Passage à la limite $\varepsilon \to 0$</u> Rappelons que les estimations obtenues (4.38)-(4.40) et (4.42) sont indépendantes de ε, on déduit qu'il existe une sous suite notée $(\widetilde{v}_\varepsilon)$ vérifiant quand ε tend vers 0

$$\widetilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{v} \quad \text{dans} \quad L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0), \quad \text{et faible* dans} \quad L^\infty(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{4.60}$$

$$\widetilde{v}'_\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{v}' \quad \text{dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(\tau_0,\tau_1;Z'). \tag{4.61}$$

Avec l'argument de compacité d'Aubin, on a

$$\widetilde{v}_\varepsilon \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^4(\Omega)) \tag{4.62}$$

$$\widetilde{v}_\varepsilon \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\omega)). \tag{4.63}$$

Avec le lemme de Simon, on a

$$\widetilde{v}_\varepsilon \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad \mathcal{C}^0([\tau_0,\tau_1];H).$$

Avec le lemme 4.2.3 (la constante C est indépendante de ε et de δ), on déduit qu'il existe une sous suite notée p_ε vérifiant

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \quad \text{faiblement dans} \quad H^{-1}(\tau_0,\tau_1;L^2_0(\Omega)). \tag{4.64}$$

Comme ψ_ε est convexe, on a

$$\psi_\varepsilon(\varphi\chi + \widetilde{v}_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon) \geq < \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon), \varphi\chi >,$$

et en remplaçant dans (4.58) on obtient l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi),\chi \right\rangle + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[b(\widetilde{v}_\varepsilon,\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi) + a(\widetilde{T};\widetilde{v}_\varepsilon,\varphi\chi) + \psi_\varepsilon(\varphi\chi+\widetilde{v}_\varepsilon) \right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\psi_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon) + (p_\varepsilon, \chi\, div\varphi) \right] dt \geq \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[(f,\varphi\chi) - \zeta\, a(\widetilde{T};G_0,\varphi\chi) \right] dt \\
&- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}(G_0,\varphi\chi) + \zeta\, b(G_0,\widetilde{v}_\varepsilon + G_0\zeta,\varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v}_\varepsilon,G_0,\varphi\chi) \right] dt.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

On passe à la limite dans tous les termes de cette inéquation quand ε tend vers 0 à l'aide des convergences faibles et fortes obtenues. Pour passer à la limite sur les termes de bord,

on utilise le fait que la convergence forte (4.63) implique que quitte à extraire à nouveau une sous-suite, $\widetilde{v}_\varepsilon$ converge vers $\widetilde{v}$ presque partout dans $]\tau_0, \tau_1[\times\omega$ et vérifie une condition de domination [8]. On peut alors passer à la limite dans les termes $\psi_\varepsilon(\varphi\chi + \widetilde{v}_\varepsilon)$ et $\psi_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon)$ avec le théorème de Lebesgue.
On déduit que $\widetilde{v}$ et p sont solutions du problème 4.2.1. L'unicité de cette solution est assurée en dimension 2. En dimension 3, la solution est unique pour une viscosité suffisamment grande (voir page 87).

4.2.2 Cas particulier (dimension 2)

Dans cette section, on se restreint au cas de la dimension 2, avec $\widetilde{T}$ et $\widetilde{l}$ indépendants du temps et on cherche ainsi plus de régularités à la solution obtenue. On les énonce dans le lemme suivant

Lemme 4.2.4. *Supposons que les hypothèses du lemme 4.2.1 sont satisfaites, supposons de plus que $f' \in L^2(0, \tau; \mathbf{L}^2(\Omega))$ et qu'il existe une constante C_{τ_0} tel que $\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(\tau_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\tau_0}$ avec C_{τ_0} une constante indépendante de ε, de m et de δ. Alors*

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} \leq C \tag{4.66}$$

$$\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^\infty(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C, \tag{4.67}$$

$$\|div\,(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{L^2(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}, \tag{4.68}$$

où C est une constante indépendante de ε, de m et de δ.

Démonstration. Comme $f' \in L^2(0, \tau; \mathbf{L}^2(\Omega))$ alors $f \in H^1(0, \tau; \mathbf{L}^2(\Omega))$ donc $g^\delta_{\varepsilon j} \in H^2(\tau_0, \tau_m)$.
En dérivant par rapport à t l'équation (4.15) du problème pénalisé, on a

$$\begin{aligned}
&\big((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'', w_k\big) + b((v^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, w_k) + b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', w_k) + \frac{1}{2}\big((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), w_k\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), w_k\big) + a(\widetilde{T}; (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', w_k) + \frac{1}{\delta}\big(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', div\, w_k\big)\\
&+\left\langle \big(\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\big)', w_k \right\rangle = (f', w_k) - \zeta' a(\widetilde{T}; G_0, w_k) - \zeta''\,(G_0, w_k) - \zeta' b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} + G_0\zeta, w_k)\\
&-\zeta b(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' + G_0\zeta', w_k) - \zeta' b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, w_k) - \zeta b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', G_0, w_k), \quad \forall 1 \leq k \leq m.
\end{aligned}$$

En multipliant par $(g^\delta_{\varepsilon j})'(t)$ et en sommant de $j = 1, \dots, m$, on a

$$\begin{aligned}
&\big((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\big) + b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') + b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&+\frac{1}{2}\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) + a(\widetilde{T}; (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&+\frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', div(v^\delta_{\varepsilon m})'\right) + \left\langle \left(\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right)', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right\rangle = (f', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta' a(\widetilde{T}; G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&-\zeta''\left(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) - \zeta' b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} + G_0\zeta, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta b(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' + G_0\zeta', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&-\zeta' b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})').
\end{aligned}$$

Or par intégration par parties, on a

$$b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') + \frac{1}{2}\left((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})' div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) = 0.$$

Comme $\widetilde{l}$ ne dépend pas de t, on a

$$\left\langle \left(\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right)', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right\rangle \geq \int_\omega \widetilde{l}\varepsilon^2 \frac{|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'|^2}{(\varepsilon^2 + |\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}|^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx',$$

alors

$$\left\langle \left(\psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\right)', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right\rangle \geq 0.$$

On obtient donc en utilisant la coercivité de a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq -b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&-\frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) + (f', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta' a(\widetilde{T}; G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta''\left(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right) \\
&-\zeta' b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta b(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - \zeta' b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') \\
&-\zeta b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') - 2\zeta\zeta' b(G_0, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})').
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Remarquons que le terme $b(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')$ est nul car $div\, G_0 = 0$. De plus

$$b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})') = -b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}) - (div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})').$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
&\left| b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right)\right| \\
&\leq \frac{3}{2}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'injection de Sobolev (valable en dimension 2) [36]

$$\|v\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq c\|v\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

où c est une constante qui dépend uniquement de Ω, en posant $c_1 = \frac{3}{2}c$, on obtient

$$\begin{aligned}&\left| b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right)\right| \\ &\leq c_1 \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{V}_0} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}.\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Young $(p, q) = (\frac{4}{3}, 4)$, on trouve

$$\begin{aligned}&\left| b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}(t)) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m} div((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'), (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right)\right| \\ &\leq \frac{\alpha}{8}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{c_1^4}{4}\left(\frac{6}{\alpha}\right)^3 \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^4_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En continuant à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young dans le second membre de (4.69), on a

$$\begin{aligned}\left|(f', (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\right| &\leq \|f'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|f'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta' a(\widetilde{T}; G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\right| &\leq \mu_* |\zeta'| \|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0} \\ &\leq \frac{\alpha}{8}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{2\mu_*^2}{\alpha}|\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta''\left(G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\right)\right| &\leq |\zeta''| \|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq |\zeta''|^2 \| \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta' b(G_0, \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\right| &\leq |\zeta'| \|G_0\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{\alpha}{8}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{2K^4}{\alpha}|\zeta'|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta' b(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\right| &\leq |\zeta'| \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq K^4 |\zeta'|^2 \|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{4}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta b((\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})', G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\right| &\leq |\zeta| (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq K^2 |\zeta| \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathcal{V}_0} \|\nabla G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\alpha}{8}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{2K^4}{\alpha}|\zeta|^2 \|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|2\zeta\zeta' b(G_0, G_0, (\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})')\right| &\leq 2|\zeta||\zeta'|\|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq 4K^2|\zeta|^2|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En rassemblant tous ces termes, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{1}{\delta}\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c_1^4}{4}\left(\frac{6}{\alpha}\right)^3\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^4_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+\|f'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{2\mu_*^2}{\alpha}|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + |\zeta''|^2\|\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{2K^4}{\alpha}|\zeta'|^2\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0} \\ &+K^4|\zeta'|^2\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\|\nabla G_0\|^2_{H^1(\Omega)} + 4K^2|\zeta|^2|\zeta'|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &+\left(\frac{2K^4}{\alpha}|\zeta|^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 1\right)\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.70}$$

En intégrant de τ_0 à s où $s \in]\tau_0, \tau_1[$, on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_{\tau_0}^s\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_{\tau_0}^s\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \frac{1}{2}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(\tau_0))\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+\frac{c_1^4}{4}\left(\frac{6}{\alpha}\right)^3\int_{\tau_0}^s\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^4_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \int_{\tau_0}^s\|f'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{2\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{\tau_0}^s|\zeta'|^2\,dt \\ &+\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_{\tau_0}^s|\zeta''|^2\,dt + \frac{2K^4}{\alpha}\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{\tau_0}^s|\zeta'|^2\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt \\ &+K^4\|\nabla G_0\|^2_{H^1(\Omega)}\int_{\tau_0}^s|\zeta'|^2\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + 4K^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{\tau_0}^s|\zeta|^2|\zeta'|^2\,dt \\ &+\left(\frac{2K^4}{\alpha}|\zeta|^2_{L^\infty(\tau_0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 1\right)\int_{\tau_0}^s\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt.\end{aligned} \tag{4.71}$$

On a

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^4_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\,dt \leq c\int_{\tau_0}^{\tau_1}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathcal{V}_0}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt,$$

comme $\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}$ est borné dans $L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0)$ indépendamment de m, de ε et de δ alors, on a

$$\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m}\|_{L^4(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^4(\Omega))} \leq C,$$

où C est une constante indépendante de m, ε et de δ.

En revenant à (4.71), on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_{\tau_0}^s\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_{\tau_0}^s\|div(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \widetilde{C}_2 \\ &+\frac{c_1^4}{4}\left(\frac{6}{\alpha}\right)^3\int_{\tau_0}^s\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})\|^4_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \left(\frac{2K^4}{\alpha}|\zeta|^2_{L^\infty(\tau_0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 1\right)\int_{\tau_0}^s\|(\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon m})'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt\end{aligned} \tag{4.72}$$

où

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_2 &= \frac{1}{2}\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(\tau_0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|f'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\tau_1-\tau_0||\zeta''|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} \\
&+\frac{2\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\tau_1-\tau_0||\zeta'|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} + \frac{2K^4}{\alpha}\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta'|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} \\
&+K^4\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta'|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)} + 4K^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\zeta|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}|\zeta'|^2_{L^2(\tau_0,\tau_1)}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

En remplaçant $\|\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m}\|^2_{L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)}$ par sa valeur obtenue dans (4.25), on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_2 &\le \frac{C_{\tau_0}}{2} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \|f'\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\tau_1-\tau_0||\zeta''|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)} \\
&+\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|\tau_1-\tau_0||\zeta'|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\left(\frac{2\mu_*^2}{\alpha} + 4K^2\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}|\zeta|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\right) \\
&+|\zeta'|^2_{L^\infty(\tau_0,\tau_1)}\left(\frac{2}{\alpha}\overline{C}_1\exp\left(2\overline{C}_2(\tau_1-\tau_0)\right)\right)\left(K^4\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \frac{2K^4}{\alpha}\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

En utilisant le lemme de Grönwall dans (4.72), on obtient

$$\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'(s)\|_{L^2(\Omega)} \le 2\widetilde{C}_2\exp\left(\int_{\tau_0}^{s}\left(\frac{c_1^4}{2}\left(\frac{6}{\alpha}\right)^3\|(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})\|^4_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \frac{4K^4}{\alpha}|\zeta|^2_{L^\infty(\tau_0,s)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + 2\right)dt\right).$$

En prenant le sup de $s\in[\tau_0,\tau_1]$, on trouve (4.67). Puis, (4.66) et (4.68). □

Dans le lemme 4.2.4 on a obtenu des estimations indépendantes de m, on en déduit qu'il existe une sous suite notée $(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})'$ vérifiant quand $m\to\infty$ les convergences suivantes

$$(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})' \rightharpoonup (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon})' \quad \text{faible* dans} \quad L^\infty(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))$$

$$(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})' \rightharpoonup (\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon})' \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)$$

$$div\,(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon m})' \rightharpoonup div\,(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon})' \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0,\tau_1;L^2(\Omega)).$$

Les estimations du lemme 4.2.4 sont aussi indépendantes de δ, on en déduit que $(\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon})'$ est borné dans $L^\infty(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))\cap L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0)$ indépendamment de ε et de δ. De plus, on a obtenu que $\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon}$ est borné dans $L^\infty(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))\cap L^2(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0))$ indépendamment de ε et de δ alors $\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon}$ est borné dans $W^{1,\infty}(\tau_0,\tau_1;\mathbf{L}^2(\Omega))\cap H^1(\tau_0,\tau_1;\mathcal{V}_0))$ indépendamment de ε et de δ. D'où $\widetilde{v}^{\delta}_{\varepsilon}$ est borné dans $\mathcal{C}^0([\tau_0,\tau_1];\mathcal{V}_0)$ indépendamment de ε et de δ.

En revenant dans (4.43), en gardant le premier terme de l'égalité (on n'utilise pas l'intégration par parties) et en utilisant les estimations obtenues dans (4.46), pour les autres termes, on obtient une régularité supplémentaire pour la pression en dimension 2 :

$$\|p_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C,$$

où C est une constante indépendante de ε et de δ. Alors il existe deux sous suites notées $\widetilde{v}_\varepsilon^\delta$ et p_ε^δ vérifiant les convergences suivantes quand $\delta \to 0$

$$(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)' \rightharpoonup (\widetilde{v}_\varepsilon)' \quad \text{faible* dans} \quad L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))$$

$$(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)' \rightharpoonup (\widetilde{v}_\varepsilon)' \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0)$$

$$div\,(\widetilde{v}_\varepsilon^\delta)' \to 0 \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega)).$$

$$p_\varepsilon^\delta \rightharpoonup p_\varepsilon \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega)).$$

Enfin pour $\varepsilon \to 0$, il existe deux sous suite notées $(\widetilde{v}_\varepsilon)'$ et p_ε vérifiant

$$(\widetilde{v}_\varepsilon)' \rightharpoonup (\widetilde{v})' \quad \text{faible* dans} \quad L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega))$$

$$(\widetilde{v}_\varepsilon)' \rightharpoonup (\widetilde{v})' \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0).$$

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega)).$$

De là, on déduit que $\widetilde{v}' \in L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0)$. De plus, on a obtenu que $\widetilde{v} \in L^\infty(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0))$ alors $\widetilde{v} \in W^{1,\infty}(\tau_0, \tau_1; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap H^1(\tau_0, \tau_1; \mathcal{V}_0))$. D'où

$$\widetilde{v} \in \mathcal{C}^0([\tau_0, \tau_1]; \mathcal{V}_0) \text{ et } p \in L^2(\tau_0, \tau_1; L^2(\Omega)).$$

4.3 Discrétisation en temps

Dans cette section, on s'intéresse à la discrétisation en temps du problème d'écoulement muni de la loi de Tresca qu'on a noté (**PT**) dans le chapitre précédent. On le rappelle ci-dessous

Problème (PT) Pour $f \in L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $l \in L^2(0,\tau;L^2_+(\omega))$, $\widetilde{v}_0 \in L^2(\Omega)$, $G_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{C}^\infty([0,\tau])$, trouver $\widetilde{v} \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $p \in H^{-1}(0,\tau;L^2_0(\Omega))$ solution de

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v},\varphi\right),\chi \right\rangle + \displaystyle\int_0^\tau \Big[b(\widetilde{v},\widetilde{v},\varphi\chi) - (p, div(\varphi\chi)) + a(T;\widetilde{v},\varphi\chi)\Big]\, dt \\ + \displaystyle\int_0^\tau \Big[\psi(\varphi\chi+\widetilde{v}) - \psi(\widetilde{v})\Big]\, dt \geq \int_0^\tau \Big[(f,\varphi\chi) - \zeta a(T;G_0,\varphi\chi) - (G_0\dfrac{\partial\zeta}{\partial t},\varphi\chi)\Big]\, dt \\ - \displaystyle\int_0^\tau \Big[\zeta\, b(G_0,\widetilde{v}+G_0\zeta,\varphi\chi) - \zeta\, b(\widetilde{v},G_0,\varphi\chi)\Big]\, dt, \quad \forall\varphi\in\mathcal{V}_0, \quad \forall\chi\in\mathcal{D}(0,\tau) \\ \widetilde{v}(0,x) = \widetilde{v}_0(x), \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{4.75}$$

où

$$\psi(w) = \int_\omega l|w|\, dx', \quad \forall w\in\mathcal{V}_0.$$

L'existence de solutions de ce problème a été démontrée et détaillée dans le chapitre précédent, l'unicité de la solution est assurée en dimension 2 et pour une grande viscosité en dimension 3. Afin d'étudier ce problème par la technique de discrétisation en temps, on va considérer le cas de la dimension 2 puis celui de la dimension 3.
On décompose l'intervalle de temps $[0,\tau]$ en N sous intervalles $[t_n,t_{n+1}]$, où h est le pas de temps $h=\frac{\tau}{N}$ et $N\in\mathbb{N}^*$.
On note pour $T\in W^{1,\infty}(0,\tau;L^2(\Omega))$

$$\mu(T_n) = \mu(T(x,t_n)), \quad \forall x\in\Omega, \quad \forall n=0,\ldots,N-1.$$

4.3.1 Loi de Tresca en dimension 2

On suppose désormais $l\in H^1(0,\tau;L^2_+(\omega))$ et $f\in H^1(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$. En discrétisant le terme du bord, on aura dans chaque sous intervalle $[t_n,t_{n+1}]$

$$\psi_n(v) = \int_\omega l_n|v|\, dx' \quad \text{où} \quad l_n = l(x,t_n).$$

Alors le problème discrétisé s'écrit ainsi pour tout $n\in 0,\ldots,N-1$:
Trouver $\widetilde{v}^n_h \in L^2(t_n,t_{n+1};\mathcal{V}_{0div})\cap L^\infty(t_n,t_{n+1};\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $p^n_h\in H^{-1}(t_n,t_{n+1};L^2_0(\Omega))$ solution

de

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{\partial}{\partial t} (\widetilde{v}_h^n, \varphi), \chi \right\rangle + \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[b(\widetilde{v}_h^n, \widetilde{v}_h^n, \varphi\chi) - (p_h^n, div(\varphi\chi)) + a(T_n; \widetilde{v}_h^n, \varphi\chi) \Big] dt \\ + \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[\psi_n(\varphi\chi + \widetilde{v}_h^n) - \psi_n(\widetilde{v}_h^n) \Big] dt \geq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[(f, \varphi\chi) - \zeta a(T_n; G_0, \varphi\chi) - (G_0 \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi) \Big] dt \\ - \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[\zeta\, b(G_0, \widetilde{v}_h^n + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v}_h^n, G_0, \varphi\chi) \Big] dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(t_n, t_{n+1}) \\ \widetilde{v}_h^n(t_n, x) = \widetilde{v}_0^n(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.76}$$

où $\widetilde{v}_0^n \in L^2(\Omega)$ sera précisé ultérieurement. Ce problème discrétisé muni de la loi de Tresca est identique au cas particulier du problème auxiliaire (dimension 2), où l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_1]$ correspond au sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, T_n et l_n ne dépendent pas du temps et correspondent alors respectivement à $\widetilde{T}$ et à $\widetilde{l}$.

Si on a $\widetilde{v}_0 \in \mathcal{V}_{0div} \cap H^2(\Omega)$, $\nabla \widetilde{v}_0 \in L^4(\Omega)$, $\nabla T(0) \in L^4(\Omega)$ et $v_0 = s$ sur ω alors on peut choisir $\widetilde{v}_0^n$ par récurrence sur n de telle sorte que $(\widetilde{v}_{m\varepsilon h}^{\delta n})'(t_n)$ vérifie les hypothèses du lemme 4.2.4 pour tout $n \in 0, \dots, N-1$. On obtient donc $\widetilde{v}_h^n \in L^2(t_n, t_{n+1}; \mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(t_n, t_{n+1}; \mathbf{L}^2(\Omega))$ et $(\widetilde{v}_h^n)' \in L^2(t_n, t_{n+1}; \mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(t_n, t_{n+1}; \mathbf{L}^2(\Omega))$ alors

$$\widetilde{v}_h^n \in H^1(t_n, t_{n+1}; \mathcal{V}_{0div}) \cap W^{1,\infty}(t_n, t_{n+1}; \mathbf{L}^2(\Omega)).$$

De plus

$$p_h^n \in L^2(t_n, t_{n+1}; L_0^2(\Omega)).$$

Plus précidément, on définit $\widetilde{v}_0^n$ pour $n = 0$ par

$$\widetilde{v}_0^0(x) = \widetilde{v}_0(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega.$$

Donc avec le lemme 3.5.1 du chapitre 3, on a $\|(\widetilde{v}_{\varepsilon mh}^{\delta n})'(0)\|_{L^2(\Omega)}$ borné indépendamment de m, de ε et de δ. On définit ensuite

$$\widetilde{v}_0^1(x) = \widetilde{v}_h^0(x, t_1) \in L^2(\Omega).$$

Vérifions que $\|(\widetilde{v}_{\varepsilon mh}^{\delta 1})'(t_1^+)\|_{L^2(\Omega)}$ est borné dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de m, de δ et de ε. On peut remarquer que

$$(\widetilde{v}_{\varepsilon mh}^{\delta 1})'(t_1^+) \neq (\widetilde{v}_{\varepsilon mh}^{\delta 0})'(t_1^-)$$

à cause du saut sur le coefficient de la viscosité égale à $\mu(T_0)$ sur $[t_0, t_1]$ et à $\mu(T_1)$ sur $[t_1, t_2]$ ainsi que du saut sur le seuil de la condition de Tresca. Comme $(\widetilde{v}_0, v_1, \ldots, v_m)$ est une famille orthogonale de $L^2(\Omega)$, on a

$$\|(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh})'(t_1^+)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}}{\partial t}(t_1^+), v_k\right)^2 \|v_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}}{\partial t}(t_1^+), \widetilde{v}_0\right)^2 \|\widetilde{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)} \; \forall m \geq 2$$

car $(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh})'(t_1^+) \in Vect(\widetilde{v}_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) = Vect(w_1, \ldots, w_m)$ (voir page 104).
En prenant $\tau_0 = t_1$ dans (4.15), on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1^+)}{\partial t}, v_k\right) = -b(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), v_k) - \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1) div(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1)), v_k\right) \\
&-a(\widetilde{T}_1; \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), v_k) - \frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1)), div\, v_k\right) - \left\langle \psi'_{1\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1)), v_k\right\rangle + (f, v_k) \\
&-\zeta a(\widetilde{T}_1; G_0, v_k) - \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, v_k\right) - \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1) + G_0, v_k) - \zeta b(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), G_0, v_k) \\
&= \left(\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1^-)}{\partial t}, v_k\right) + a(\widetilde{T}_0; \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1), v_k) - a(\widetilde{T}_1; \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1), v_k) + \zeta a(\widetilde{T}_0; G_0, v_k) \\
&-\zeta\, a(\widetilde{T}_1; G_0, v_k) + \left\langle \psi'_{0\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), v_k\right\rangle - \left\langle \psi'_{1\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), v_k\right\rangle \text{ pour tout } 1 \leq k \leq m-1,
\end{aligned}$$

et comme $div\widetilde{v}_0 = 0$ et $\widetilde{v}_0 = 0$ sur ω, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1^+)}{\partial t}, \widetilde{v}_0\right) = -b(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), \widetilde{v}_0) - \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1) div(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1)), \widetilde{v}_0\right) \\
&-a(\widetilde{T}_1; \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), \widetilde{v}_0) + (f, \widetilde{v}_0) - \zeta a(\widetilde{T}_1; G_0, \widetilde{v}_0) - \left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \widetilde{v}_0\right) - \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1) + G_0, \widetilde{v}_0) \\
&-\zeta b(\widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon mh}(t_1), G_0, \widetilde{v}_0) = \left(\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1^-)}{\partial t}, \widetilde{v}_0\right) + a(\widetilde{T}_0; \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1), \widetilde{v}_0) - a(\widetilde{T}_1; \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1), \widetilde{v}_0) \\
&+\zeta a(\widetilde{T}_0; G_0, \widetilde{v}_0) - \zeta\, a(\widetilde{T}_1; G_0, \widetilde{v}_0) + \left\langle \psi'_{0\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), \widetilde{v}_0\right\rangle - \left\langle \psi'_{1\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), \widetilde{v}_0\right\rangle.
\end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned}
&\varphi \mapsto \int_\Omega (\mu(\widetilde{T}_0) - \mu(\widetilde{T}_1)) \nabla(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1) + G_0 \zeta(t_1)) \nabla \varphi \, dx + \left\langle \psi'_{0\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), \varphi\right\rangle \\
&- \left\langle \psi'_{1\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), \varphi\right\rangle
\end{aligned}$$

est linéaire continue sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Donc il existe $F_m \in (\mathbf{H}^1(\Omega))'$ tel que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\mu(\widetilde{T}_0) - \mu(\widetilde{T}_1)) \nabla(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1) + G_0 \zeta(t_1)) \nabla \varphi \, dx + \left\langle \psi'_{0\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), \varphi\right\rangle \\
&- \left\langle \psi'_{1\varepsilon}(\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1)), \varphi\right\rangle = \int_\Omega F_m \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega),
\end{aligned}$$

et

$$\|F_m\|_{(\mathbf{H}^1)'} \leq \|\mu(\widetilde{T}_0) - \mu(\widetilde{T}_1)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon mh}(t_1) + G_0 \zeta(t_1)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C(\Omega)\|l_1 - l_0\|_{\mathbf{L}^2(\omega)}$$

Puisque $F_m \in (\mathbf{H}^1(\Omega))'$, alors le problème elliptique : Trouver $\widetilde{w}_m \in \overline{V}$ tel que

$$\int_\Omega \widetilde{w}_m \varphi \, dx + \int_\Omega \nabla \widetilde{w}_m \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega F_m \varphi \, dx =< F_m, \varphi >_{(\mathbf{H}^1(\Omega))', \mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \overline{V},$$

admet une unique solution $\widetilde{w}_m \in \overline{V}$ telle que

$$\|\widetilde{w}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|F_m\|_{(\mathbf{H}^1(\Omega))'}.$$

Alors, en notant $((.,.))$ le produit scalaire de $\mathbf{H}^1(\Omega)$

$$\sum_{k=1}^{m-1} < F_m, v_k >^2_{(\mathbf{H}^1(\Omega))', \mathbf{H}^1(\Omega)} \|v_k\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{m-1} ((\widetilde{w}_m, v_k))^2 \|v_k\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\widetilde{w}_m\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$
$$< F_m, \widetilde{v}_0 >^2_{(\mathbf{H}^1(\Omega))', \mathbf{H}^1(\Omega)} \|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|F_m\|_{(\mathbf{H}^1(\Omega))'} \|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\widetilde{v}_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

car $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base hilbertienne orthonormale de $\overline{V}$ pour la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Donc

$$\|\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon m h}}{\partial t}(t_1^+)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2\|\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon m h}}{\partial t}(t_1^-)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(2 + 2\|\widetilde{v}_0\|^4_{H^1(\Omega)}\right) \|F_m\|^2_{(\mathbf{H}^1(\Omega))'}.$$

On obtient

$$\|\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 1}_{\varepsilon m h}}{\partial t}(t_1^+)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2\|\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon m h}}{\partial t}(t_1^-)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 4\|\mu(\widetilde{T}_0) - \mu(\widetilde{T}_1)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon m h}(t_1) + G_0 \zeta(t_1)\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$
$$+4\|\widetilde{v}_0\|^4_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mu(\widetilde{T}_0) - \mu(\widetilde{T}_1)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\widetilde{v}^{\delta 0}_{\varepsilon m h}(t_1) + G_0 \zeta(t_1)\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$
$$+ \left(4 + 4\|\widetilde{v}_0\|^4_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right) C(\Omega)^2 \|l_1 - l_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\omega)}.$$

Des estimations du lemme 4.2.4, ceci reste borné indépendamment de m, de ε et de δ. On construit donc de cette façon $\widetilde{v}_h^1$ sur $[t_1, t_2]$. En choisissant $\widetilde{v}_0^n = \widetilde{v}_h^{n-1}(t_n)$ pour tout $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, on construit ainsi $\widetilde{v}_h^n$ dans chaque sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

On "raccorde" les problèmes discrétisés sur les sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ et on définit $\widetilde{v}_h : \Omega \times [0, \tau] \to \mathbb{R}$ par

$$\widetilde{v}_h(x,t) = \widetilde{v}_h^n(x,t) \text{ pour tout } x \in \Omega, \ t \in [t_n, t_{n+1}], \ n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Posons

$$T_h(x,t) = T(x, t_n) \quad \text{si} \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad x \in \Omega, \ n \in \{0, \ldots, N-1\}$$

et

$$\psi_h(w) = \int_\omega l_h |w| \, dx \quad \text{avec} \quad l_h(x,t) = l(x, t_n) \, \text{si} \, t \in [t_n, t_{n+1}], \quad x \in \Omega, \ n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

On obtient $\widetilde{v}_h \in \mathcal{C}^0(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap W^{1,\infty}(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $p_h \in L^2(0,\tau;L^2_0(\Omega))$ solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \left\langle \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v}_h,\varphi\right),\chi\right\rangle + \displaystyle\int_0^\tau \Big[b(\widetilde{v}_h,\widetilde{v}_h,\varphi\chi) - (p_h, div(\varphi\chi)) + a(T_h;\widetilde{v}_h,\varphi\chi)\Big]\,dt \\ + \displaystyle\int_0^\tau \Big[\psi_h(\varphi\chi+\widetilde{v}_h) - \psi_h(\widetilde{v}_h)\Big]\,dt \geq \int_0^\tau \Big[(f,\varphi\chi) - \zeta a(T_h;G_0,\varphi\chi) - (G_0\dfrac{\partial\zeta}{\partial t},\varphi\chi)\Big]\,dt \\ - \displaystyle\int_0^\tau \Big[\zeta\, b(G_0,\widetilde{v}_h + G_0\zeta,\varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v}_h,G_0,\varphi\chi)\Big]\,dt, \quad \forall\varphi\in\mathcal{V}_0, \quad \forall\chi\in\mathcal{D}(0,\tau) \\ \widetilde{v}_h(0,x) = \widetilde{v}_0(x), \quad x\in\Omega. \end{array}\right. \tag{4.77}$$

On cherche maintenant à étudier la convergence entre la solution du problème discrétisé et celle du problème (**PT**). On commence par établir des estimations indépendantes de h. On a, à partir de la première section, que les estimations des lemmes 4.2.1,4.2.2 et 4.2.4 sont indépendantes de m, δ, ε.

Lemme 4.3.1. *Sous les conditions du lemme 4.2.1, on a*

$$\|\widetilde{v}_h\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C \tag{4.78}$$

$$\|\widetilde{v}_h\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} \leq C \tag{4.79}$$

$$\|(\widetilde{v}_h)'\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z')} \leq C \tag{4.80}$$

$$\|p_h\|_{H^{-1}(0,\tau;L^2_0(\Omega))} \leq C, \tag{4.81}$$

où C est une constante indépendante de h.

Démonstration. En reprenant la même démonstration qu'au lemme 4.2.1, avec (4.24) en remplaçant τ_0 par t_n et τ_1 par t_{n+1}, on a

$$\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(s)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2\left(\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(t_n)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C_1^n\right)\exp\left(2\overline{C}_2^n(s-t_n)\right). \tag{4.82}$$

où

$$C_1^n = \frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}|t_{n+1}-t_n|\|\zeta\|^2_{L^\infty(t_n,t_{n+1})}$$
$$+\frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|t_{n+1}-t_n|\left\|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(t_n,t_{n+1})} + \frac{K^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}|t_{n+1}-t_n|\|\zeta\|^4_{L^\infty(t_n,t_{n+1})}$$

$$\overline{C}_2^n = \frac{3}{2} + \frac{K^4}{\alpha}\|\zeta\|_{L^\infty(t_n,t_{n+1})}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Mais $\overline{C}_2^n \leq \overline{C}_2$ tel que

$$\overline{C}_2 = \frac{3}{2} + \frac{K^4}{\alpha}\|\zeta\|_{L^\infty(0,\tau)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Notons $y_n = \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)}$, alors

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\leq (y_n + 2C_1^n)\exp\left(2\overline{C}_2 h\right) \\ &\leq y_n \exp\left(2\overline{C}_2 h\right) + z_n, \end{aligned}$$

où

$$z_n = 2C_1^n \exp\left(2\overline{C}_2 h\right).$$

En utilisant le lemme de Grönwall discret, on a

$$\begin{aligned} y_n &\leq y_0 \exp\left(2\overline{C}_2 hn\right) + \sum_{k=0}^{n-1} z_k \exp\left(2\overline{C}_2 h(n-k-1)\right) \\ &\leq (y_0 + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_1^k)\exp(2\overline{C}_2 hn). \end{aligned} \tag{4.83}$$

où $y_0 = \|\widetilde{v}^0_m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\widetilde{v}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ et

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_1^k = \frac{1}{2}\int_0^\tau \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + hn\frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\zeta\|^2_{L^\infty(0,\tau)}$$
$$+hn\frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,\tau)} + \frac{hnK^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\|\zeta\|^4_{L^\infty(0,\tau)}.$$

Comme $\overline{C}_2$ est indépendante de n et de h et $nh \leq \tau$, alors (4.78) est établie. De plus

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq Ch, \tag{4.84}$$

où C est une constante indépendante de n et de h.

En remplaçant τ_0 par t_n et τ_1 par t_{n+1} dans (4.22), on a

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(t_{n+1})\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|div(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh})\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(t_n)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}}|\zeta|^2\,dt + \frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 dt$$
$$+\frac{3}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}}|\zeta|^2\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\frac{K^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}}|\zeta|^4\,dt. \tag{4.85}$$

En faisant la somme de $n = 0$ à $N-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_0^\tau \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_0^\tau \|div(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh})\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \le \frac{1}{2}\|\widetilde{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{\mu_*^2}{\alpha}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^\tau |\zeta|^2\,dt + \frac{1}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_0^\tau \left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2\,dt\\
&+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \frac{K^4}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\zeta|^2\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt\\
&+\frac{K^4}{2}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\int_0^\tau |\zeta|^4\,dt.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

De l'estimation (4.84), on obtient (4.79). En revenant à (4.37), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h})'\|^{\frac{4}{3}}_{Z'}\,dt \le C\mu_*^{\frac{4}{3}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0}\,dt + Cc_1^{\frac{4}{3}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+C\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + C\mu_*^{\frac{4}{3}}\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\zeta|^{\frac{4}{3}}\,dt + C\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\frac{\partial\zeta}{\partial t}|^{\frac{4}{3}}\,dt\\
&+2CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\zeta|^{\frac{4}{3}}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0}\,dt + CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{8}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\zeta\|^{\frac{8}{3}}\,dt.
\end{aligned}$$

En sommant de $n = 0, \ldots, N-1$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \|(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h})'\|^{\frac{4}{3}}_{Z'}\,dt \le C\mu_*^{\frac{4}{3}}\int_0^\tau \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0}\,dt + Cc_1^{\frac{4}{3}}\int_0^\tau \|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\,\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+C\int_0^\tau \|f\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + C\mu_*^{\frac{4}{3}}\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^\tau |\zeta|^{\frac{4}{3}}\,dt + C\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\int_0^\tau |\frac{\partial\zeta}{\partial t}|^{\frac{4}{3}}\,dt\\
&+2CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^\tau |\zeta|^{\frac{4}{3}}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{4}{3}}_{\mathcal{V}_0}\,dt + CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{8}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\int_0^\tau \|\zeta\|^{\frac{8}{3}}\,dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder ($p = \frac{3}{2}, q = 3$), on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \|(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h})'\|^{\frac{4}{3}}_{Z'}\,dt \le \mu_*^{\frac{4}{3}}C\tau^{\frac{1}{3}}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{4}{3}}_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} + Cc_1^{\frac{4}{3}}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^2_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\\
&+ + C\tau^{\frac{1}{3}}\|f\|^{\frac{4}{3}}_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + C\mu_*^{\frac{4}{3}}\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\tau\|\zeta\|^{\frac{4}{3}}_{L^\infty(0,\tau)} + C\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\tau\|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\|^{\frac{4}{3}}_{L^\infty(0,\tau)}\\
&+2CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{4}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\tau^{\frac{1}{3}}\|\zeta\|^{\frac{4}{3}}_{L^\infty(0,\tau)}\|\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon h}\|^{\frac{4}{3}}_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} + CK^{\frac{8}{3}}\|G_0\|^{\frac{8}{3}}_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\tau\|\zeta\|^{\frac{8}{3}}_{L^\infty(0,\tau 1)}.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.83) et (4.84), on obtient (4.80). En remplaçant τ_0 par t_n et τ_1 par t_{n+1} dans (4.43), et en sommant de $n = 0, \ldots, N-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\tau (p^\delta_{\varepsilon h}, w\chi)\,dt\right| \le \|\frac{\partial\chi}{\partial t}\|_{L^2(0,\tau)}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon h}\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \mu_*\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon h}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\chi\|_{L^2(0,\tau)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\
&+\frac{3K^2}{2}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon h}\|^2_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\chi\|_{L^\infty(0,\tau)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\chi\|_{L^2(0,\tau)}\\
&+\mu_*\|\zeta\|_{L^1(0,\tau)}\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\chi\|_{L^\infty(0,\tau)} + \|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\|_{L^1(0,\tau)}\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\chi\|_{L^\infty(0,\tau)}\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\
&+2K^2\|G_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\zeta\|_{L^\infty(0,\tau)}\|\widetilde{v}^\delta_{\varepsilon h}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\chi\|_{L^2(0,\tau)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\
&+K^2\|\zeta\|^2_{L^2(0,\tau)}\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\chi\|_{L^\infty(0,\tau)}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},\ \forall w \in L^2_0(\Omega),\ \forall\chi \in \mathcal{D}(0,\tau),\ \varphi = Pw.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

En utilisant (4.83) et (4.84), on obtient (4.81) □

Convergence de la solution du problème discrétisé

Des estimations indépendantes de h, on déduit qu'il existe une sous-suite notés $(v_h)_{h>0}$ vérifiant les convergences faibles suivantes quand h tend vers 0

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_h \rightharpoonup \widetilde{v} \quad & \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0) \\ \widetilde{v}_h \rightharpoonup \widetilde{v} \quad & \text{faible* dans} \quad L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega)) \\ \widetilde{v}'_h \rightharpoonup \widetilde{v}' \quad & \text{faiblement dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z'). \end{aligned}$$

Avec le lemme d'Aubin, on a

$$\widetilde{v}_h \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega)) \tag{4.88}$$

$$\widetilde{v}_h \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega)). \tag{4.89}$$

De plus, il existe une sous suite notée p_h vérifiant

$$p_h \rightharpoonup p \quad \text{faiblement dans} \quad H^{-1}(0,\tau;L^2_0(\Omega)).$$

Avec le lemme de Simon, on a

$$\widetilde{v}_h \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad \mathcal{C}^0([0,\tau];H), \tag{4.90}$$

avec H un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset Z'$ et l'injection de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H est compacte.

A l'aide de ces convergences, on peut passer à la limite quand $h \to 0$ avec les mêmes techniques que précemment dans tous les termes du problème approché à l'exception des termes $a(T_h;\widetilde{v}_h + G_0\zeta, \varphi\chi)$ et $\psi_h(\varphi\chi + \widetilde{v})$. Pour passer à la limite dans ces deux termes, on énonce le le lemme suivant

Lemme 4.3.2. *Quand $h \to 0$, on a*

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(T_h;\widetilde{v}_h + G_0\zeta,\varphi\chi) - a(T;\widetilde{v}_h + G_0\zeta,\varphi\chi)\,dt\right| \to 0$$

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi_h(\widetilde{v}_h+\varphi\chi)-\psi(\widetilde{v}+\varphi\chi)\,dt|\to 0, \tag{4.91}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_0$ et $\chi \in \mathcal{D}(0,\tau)$.

Démonstration. Commençons par passer à la limite dans le terme $a(T_h, \widetilde{v}_h+G_0\zeta, \varphi\chi)$. On a pour tout $\chi \in D(0,\tau)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(T_h;\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)\chi - a(T;\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)\chi\,dt|\\
&\le \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |a(T_n;\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)-a(T,\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)||\chi|\,dt\\
&\le \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mu(T_n)-\mu(T)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\widetilde{v}_h+G_0\zeta)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt\\
&\le C_\mu\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|T_n-T\|_{L^2(\Omega)}\|\widetilde{v}_h+G_0\zeta\|_{\mathcal{V}}\|\nabla\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt\\
&\le C_\mu\|\frac{\partial T}{\partial t}\|_{L^\infty(0,\tau:L^2(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |t_n-t|\|\widetilde{v}_h+G_0\zeta\|_{\mathcal{V}}|\chi|\,dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(T_h;\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)\chi - a(T;\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)\chi\,dt|\\
&\le Ch\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^\tau \|\widetilde{v}_h+G_0\zeta\|_{\mathcal{V}}|\chi|\,dt,
\end{aligned}$$

où $C = C_\mu\|\frac{\partial T}{\partial t}\|_{L^\infty(0,\tau:L^2(\Omega))}$.

Et quand $h\to 0$, on a

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(T_h\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)\chi - a(T;\widetilde{v}_h+G_0\zeta,\varphi)\chi\,dt|\to 0$$

De même, pour passer à la limite dans le terme $\psi_h(\widetilde{v}_h+\varphi\chi)$, on a

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi_h(\widetilde{v}_h+\varphi\chi)-\psi(\widetilde{v}+\varphi\chi)\,dt|\\
&\le \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_\omega |l_n-l||\widetilde{v}_h+\varphi\chi|\,dx_2\,dt + \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_\omega l|\widetilde{v}_h-\widetilde{v}|\,dx_2\,dt\\
&\le h\|l'\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))}\|\widetilde{v}_h+G_0\zeta\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))} + \|l\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))}\|\widetilde{v}_h-\widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))}.
\end{aligned}$$

Alors en utilisant la convergence forte (4.89), quand $h\to 0$

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi_h(\widetilde{v}_h+\varphi\zeta)-\psi(\widetilde{v}+G_0\zeta)\,dt|\to 0.$$

□

Comme $\widetilde{v}_h(0) = \widetilde{v}_0$, avec (4.90) on obtient

$$\widetilde{v}(0,x) = \widetilde{v}_0(x).$$

La limite de $\widetilde{v}_h$ quand $h \to 0$ est solution du problème (**PT**).

4.3.2 Loi de Tresca en dimension 3

Danc cette partie, on s'intéresse au même problème que précédemment mais en dimension 3. On suppose que $l \in L^2(0,\tau; L^2_+(\omega))$. En dimension 3, le lemme 4.2.4 n'est pas établi alors on ne peut pas définir la condition initiale dans chaque sous intervalle comme dans le premier problème. Dans ce cas, on discrétise le problème approché par la méthode de Galerkin. Soit $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $m \geq 1$, alors pour tout $n \in 0, \ldots, N-1$

Problème 4.3.1. *Trouver* $\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh} \in L^2(t_n, t_{n+1}; \mathcal{V}_0) \cap L^\infty(t_n, t_{n+1}; \mathbf{L}^2(\Omega))$ *tel que*

$$\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(t,x) = \sum_{k=1}^{m} g^{\delta n}_{\varepsilon jh}(t) w_k(x)$$

solution de

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}}{\partial t}, w_k\right) + b(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}, \widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}, w_k) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh} div(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}), w_k\right) + a(\widetilde{T}_h; \widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}, w_k) \\
&+\frac{1}{\delta}\left(div(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}), div\, w_k\right) + \left\langle \psi'_\varepsilon(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}), w_k\right\rangle = (f, w_k) - \zeta a(\widetilde{T}_h; G_0, w_k) \\
&-\left(G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, w_k\right) - \zeta\, b(G_0, \widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh} + G_0\zeta, w_k) - \zeta b(\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}, G_0, w_k).
\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(t_n) = \widetilde{v}^{n}_{mh0}. \tag{4.93}$$

On choisit $\widetilde{v}^0_{mh0} \in L^2(\Omega)$

$$\widetilde{v}^0_{mh0} = \widetilde{v}^0_m$$

où $\widetilde{v}^0_m$ est la projection orthogonale de $\widetilde{v}_0$ dans $L^2(\Omega)$ sur l'espace généré par $\{w_1, \ldots, w_m\}$. On définit aussi

$$\widetilde{v}^{n+1}_{mh0} = \widetilde{v}^{\delta n}_{\varepsilon mh}(t_{n+1}) \quad \text{pour tout} \quad n \in \{0, \ldots, N-2\}$$

Dans chaque sous intervalle, ce problème est identique au problème auxiliaire, $\widetilde{l}$ correspond à l dans chaque sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ pour $n = 0, \ldots, N-1$. On étudie l'existence de solutions par la méthode de Galerkin dans chaque sous intervalle.
On passe à la limite quand $m \to \infty$ puis quand $\delta \to 0$ et enfin quand $\varepsilon \to 0$ à l'aide des convergences obtenues comme dans la première section. Donc le passage à la limite sur h se fait exactement de la même façon que dans le premier cas, à l'exception du terme de bord qu'on donne ici

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi(\widetilde{v}_h) - \psi(\widetilde{v})\, dt| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\omega l|\widetilde{v}_h - \widetilde{v}|\, dx_3\, dt \\
&\leq \int_0^\tau \int_\omega l|\widetilde{v}_h - \widetilde{v}|\, dx_3\, dt \leq \|l\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))} \|\widetilde{v}_h - \widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))}
\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{v}_h \to \widetilde{v}$ fortement dans $L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega))$, on déduit que quand $h \to 0$

$$|\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi(\widetilde{v}_h) - \psi(\widetilde{v})\, dt| \to 0.$$

Donc, quand $h \to 0$ la limite $\widetilde{v}$ est solution du problème (**PT**).

Chapitre 5

Etude théorique et numérique du problème couplé

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie d'une manière théorique puis numérique un problème couplé (vitesse-pression-température). Ce problème comporte les deux équations qui ont été traitées dans les chapitres 2 et 3 à savoir, l'équation de la chaleur hyperbolique et l'équation de Navier-Stokes munie de la loi de Tresca en dimension 2. Dans la première partie du chapitre on traite l'existence de solutions par le théorème de point fixe de Schauder. Dans la seconde, on étudie le problème par la technique de discrétisation en temps. On cherchera des estimations indépendantes du pas de temps h puis on détermine la limite de la solution du problème discrétisé quand h tend vers zéro.

5.2 Etude théorique

5.2.1 Position du problème couplé

On rappelle les convexes et espaces fonctionnels des chapitres précédents, V, $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_{div}$ et $L^2_0(\Omega)$

$$V = \{\varphi : \quad \varphi \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}.$$

$$\mathcal{V} = \left\{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \varphi = G_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \varphi \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\right\},$$

$$\mathcal{V}_{div} = \{\varphi \in \mathcal{V} : \quad div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

$$\mathcal{V}_0 = \left\{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L \cup \Gamma_1, \varphi \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\right\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx = 0\right\}.$$

Notons $E(0,\tau)$ l'espace des fonctions

$$E(0,\tau) = \left\{u \in L^2(0,\tau;V) \quad \text{tel que} \quad u' \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega)), \quad u'' \in L^2(0,\tau;V')\right\}.$$

On reprend les mêmes hypothèses qu'au chapitre 2

$$u_0 \in V, \quad u_1 \in L^2(\Omega) \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} K_{ij} \in W^{1,\infty}(0,\tau;L^\infty(\Omega)) \\ \exists \alpha^* > 0 : \quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} K_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha^* \sum_{i=1}^{2} |\xi_i|^2, \quad \text{p.p} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{5.2}$$

Rappelons les notations du chapitre 2

$$M = \|\frac{\partial K}{\partial t}\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}, \tag{5.3}$$

$$\alpha_* = \|K\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(\Omega))}. \tag{5.4}$$

La fonction $\widetilde{a}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport C_a et on suppose qu'il existe a_*, a^* deux constantes strictement positives telles que

$$0 < a^* \leq \widetilde{a}(X) \leq a_*, \quad \forall X \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

$\widetilde{b}$ est une constante strictement positive et la fonction ϕ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport C_ϕ.

Les hypothèses du chapitre 3 sont données par

$$f \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega)), \quad G_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega), \quad \widetilde{v}_0 \in L^2(\Omega), \quad \zeta \in \mathcal{C}^\infty([0,\tau]). \tag{5.6}$$

On suppose de plus que $\nabla G_0 \in L^\infty(\Omega)$. La fonction μ est de classe $\mathcal{C}^1$ et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport C_μ et on suppose qu'il existe μ_*, μ^* deux constantes strictement positives telles que

$$0 < \mu^* \leq \mu(X) \leq \mu_*, \quad \forall X \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

La formulation variationnelle du problème couplé est donnée par

Problème 5.2.1. *On cherche le triplet (vitesse-pression-température) où* $\widetilde{v} \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $p \in H^{-1}(0,\tau;L^2_0(\Omega))$ *et* $u \in E(0,\tau)$ *solutions de l'inéquation variationnelle*

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v},\varphi),\chi \right\rangle + \int_0^\tau \Big[b(\widetilde{v},\widetilde{v},\varphi\chi) - (p, div(\varphi\chi)) + a(u;\widetilde{v},\varphi\chi) \Big]\, dt \\
&+ \int_0^\tau \Big[\psi(\varphi\chi + \widetilde{v}) - \psi(\widetilde{v}) \Big]\, dt \geq \int_0^\tau \Big[(f,\varphi\chi) - \zeta a(u;G_0,\varphi\chi) - (G_0\frac{\partial \zeta}{\partial t},\varphi\chi) \Big]\, dt \\
&- \int_0^\tau \Big[\zeta\, b(G_0,\widetilde{v} + G_0\zeta,\varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v},G_0,\varphi\chi) \Big]\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0,\tau)
\end{aligned}$$

couplée avec l'équation variationnelle

$$\begin{aligned}
&\widetilde{b} < u'', w > + (\widetilde{a}(\widetilde{v})u', w) + (K(x,t)\nabla u, \nabla w) = (\phi(\widetilde{v}), w) - (\widetilde{a}(\widetilde{v})G', w) \\
&-\widetilde{b} < G'', w > - (K(x,t)\nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \quad \textit{au sens des distributions}
\end{aligned}$$

et vérifiant les conditions initiales

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}(0) &= \widetilde{v}_0 \\
u(0) &= u_0 \\
\frac{\partial u}{\partial t}(0) &= u_1
\end{aligned}$$

où

$$a(u;v,w) = \int_\Omega \mu(u+G) d_{ij}(v) d_{ij}(w)\, dx_1\, dx_2$$

$$b(u,v,w) = \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\, dx_1\, dx_2,$$

$$\psi(v) = \int_\omega l|v|\, d\, x_1,$$

avec $G \in \mathcal{C}^2([0,\tau];H^1(\Omega))$ donnée au chapitre 2 et $l \in H^1(0,\tau;L^2_+(\omega))$, $< .,. >$ désigne le produit de dualité entre V et V'.

5.2.2 Existence et unicité des solutions faibles

Théorème 5.2.1. *Sous les hypothèses (5.1)-(5.6), le problème couplé 5.2.1 admet au moins une solution.*

Démonstration. L'existence de solutions du problème couplé 5.2.1 se démontre par l'application du théorème de point fixe de Schauder. On introduit alors l'application Λ définie par :

$$\begin{aligned} \Lambda : L^2(0,\tau; L^2(\Omega)) &\rightarrow L^2(0,\tau; L^2(\Omega)) \\ \theta &\mapsto u, \end{aligned}$$

Pour tout $\theta \in L^2(0,\tau;V) \subset L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$, on a (voir les théorèmes 3.5.1 et 3.5.2) l'existence et l'unicité de $\widetilde{v}_\theta \in L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))$ solution du problème

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v},\varphi), \chi \right\rangle + \int_0^\tau b(\widetilde{v},\widetilde{v},\varphi\chi) + a(\theta;\widetilde{v},\varphi\chi) + \psi(\varphi\chi+\widetilde{v}) - \psi(\widetilde{v}) \geq (f,\varphi\chi) - \zeta a(\theta;G_0,\varphi\chi)\,dt \\ &- \int_0^\tau (G_0\frac{\partial\zeta}{\partial t},\varphi\chi) + \zeta\, b(G_0,\widetilde{v}+G_0\zeta,\varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v},G_0,\varphi\chi)\,dt, \quad \forall\varphi\in\mathcal{V}_{0div}, \quad \forall\chi\in\mathcal{D}(0,\tau) \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\widetilde{v}(0) = \widetilde{v}_0.$$

Pour ce $\widetilde{v}_\theta$ unique, on a (voir le théorème 2.3.2) l'existence et l'unicité de $u \in E$ solution du problème

$$\begin{aligned} &\widetilde{b} < u'', w > + (\widetilde{a}(\widetilde{v})u', w) + (K(x,t)\nabla u, \nabla w) = (\phi(\widetilde{v}), w) - (\widetilde{a}(\widetilde{v})G', w) \\ &-\widetilde{b} < G'', w > + (g_2, w)_{\Gamma_2} - (K(x,t)\nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0) &= u_1. \end{aligned}$$

Ceci défini bien l'application Λ. Montons la continuité de Λ :

Des estimations a priori du chapitre 2, on reprend la même preuve en utilisant le fait que ϕ est lipschitzienne,

$$|\phi(X)| \leq |\phi(0)| + C_\phi |X|, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2$$

alors

$$\int_\Omega |\phi(\widetilde{v})|^2\,dx \leq 2|\Omega||\phi(0)|^2 + 2C_\phi^2 \int_\Omega |\widetilde{v}|^2\,dx.$$

En poursuivant la preuve comme dans(2.31) (pages 16-20), on a

$$\|\nabla u\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \quad \leq \quad a\|\widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} + b \tag{5.10}$$

avec le lemme 3.7.1, on obtient

$$\|\nabla u\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \quad \leq \quad (a+b)\|\widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}, \tag{5.11}$$

où a et b sont deux constantes qui ne dépendent que de a_*, a^*, M, α^*, $\|G\|_{C^2(0,\tau;H^1(\Omega))}$, $\|u_0\|_V$, $\|u_1\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|g_2\|_{L^2(\Gamma_2)}$.

D'autre part de l'inéquation variationnelle (5.8), en prenant $\varphi\chi = -2\widetilde{v}$, on obtient

$$\begin{aligned} &2\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v},\varphi\right), \chi \right\rangle + 2b(\widetilde{v},\widetilde{v},\widetilde{v}) + 2a(\theta;\widetilde{v},\widetilde{v}) - \psi(-\widetilde{v}) + \psi(\widetilde{v}) \leq 2\left(f,\widetilde{v}\right) \\ &-2\zeta a(\theta;G_0,\widetilde{v}) - 2(G_0\frac{\partial\zeta}{\partial t},\widetilde{v}) - 2\zeta\, b(G_0,\widetilde{v}+G_0\zeta,\widetilde{v}) - 2\,\zeta\, b(\widetilde{v},G_0,\widetilde{v}), \end{aligned} \tag{5.12}$$

or $b(\widetilde{v},\widetilde{v},\widetilde{v}) = 0$ car $div\,\widetilde{v} = 0$ dans Ω, $b(G_0,\widetilde{v},\widetilde{v}) = 0$ car $div\,G_0 = 0$ et $\psi(-\widetilde{v}) = \psi(\widetilde{v})$, il reste donc

$$\begin{aligned} &2\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t},\widetilde{v}\right) + 2a(\theta;\widetilde{v},\widetilde{v}) \leq 2\left(f,\widetilde{v}\right) - 2\zeta a(\theta;G_0,\widetilde{v}) \\ &-2(G_0\frac{\partial\zeta}{\partial t},\widetilde{v}) - 2\zeta^2\, b(G_0,G_0,\widetilde{v}) - 2\,\zeta\, b(\widetilde{v},G_0,\widetilde{v}). \end{aligned} \tag{5.13}$$

En utilisant la coercivité de a et en majorant dans le second membre, on a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\|\widetilde{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\alpha\|\widetilde{v}\|^2_{\mathcal{V}_0} \leq 2\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2|\zeta||a(\theta;G_0,\widetilde{v})| \\ &+2\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\frac{\partial\zeta}{\partial t}|\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2|\zeta|^2\|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+2|\zeta|\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young, on obtient

$$\begin{aligned} &2\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\|G_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\frac{\partial\zeta}{\partial t}|\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\qquad \leq 2\|\widetilde{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|\frac{\partial\zeta}{\partial t}|^2 \end{aligned}$$

$$2|\zeta|^2\|G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\widetilde{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |\zeta|^4K^4\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

$$2|\zeta|\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla G_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{2}\|\widetilde{v}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{2K^4}{\alpha}|\zeta|^2\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\widetilde{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Comme μ est lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned} 2|\chi|\left|\int_\Omega \mu(\theta)d_{ij}G_0 d_{ij}\widetilde{v}\,dx\right| &\leq 2|\chi|\int_\Omega |\mu(\theta)||d_{ij}G_0||d_{ij}\widetilde{v}|\,dx \\ &\leq 2|\chi|(|\mu(0)| + C_\mu|\theta|)\int_\Omega |d_{ij}G_0||d_{ij}\widetilde{v}|\,dx \\ &\leq \frac{\alpha}{2}\|\widetilde{v}\|^2_{\mathcal{V}_0} + \frac{2C^2}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\chi|^2\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C est une constante qui dépend de C_μ et de $|\mu(0)|$. En intégrant (5.14) de 0 à τ, on obtient

$$\|\widetilde{v}(\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \alpha\int_0^\tau \|\widetilde{v}\|^2_{\mathcal{V}_0}\,dt \leq C_1 + C_2\|\theta\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}, \tag{5.15}$$

où

$$C_1 = \|f\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \|G_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\|^2_{L^2(0,\tau)} + \left(\frac{2K^4}{\alpha}\|\zeta\|^2_{L^\infty(0,\tau)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + 3\right)\|\widetilde{v}\|^2_{L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))}$$
$$+\|\zeta\|^4_{L^4(0,\tau)}K^4\|G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\nabla G_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

$C_2 = \frac{2C^2}{\alpha}\|\nabla G_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\chi|^2_{L^\infty(0,\tau)}$. Donc

$$\|\widetilde{v}\|^2_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} \leq \sqrt{C_1 + C_2}\|\theta\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}.$$

De (5.11) et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs,il existe une constante $C_{PF} >$ tel que

$$\|u\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C_{PF}\|\nabla u\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C_{PF}C\|\theta\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}.$$

Ceci montre que l'application Λ est continue de $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$ dans $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$. Enfin de la compacité de $L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)$ dans $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$, on obtient que Λ est compacte de $L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)$ dans lui même. Donc du théorème du point fixe de Schauder, Λ admet un point fixe $u = \Lambda(\theta)$ tel que $(u,v) \in E \times L^2(0,\tau;\mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))$ solution du problème couplé 5.2.1. □

5.3 Etude numérique

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On décompose l'intervalle de temps $[0,\tau]$ en N sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$. Le pas de temps sera noté $h = \frac{\tau}{N}$. La discrétisation en temps du problème couplé est donnée pour tout $n \in \{0,\dots,N-1\}$ par

Problème 5.3.1. *Trouver* $\widetilde{v}_h^n \in L^2(t_n, t_{n+1}; \mathcal{V}_{0div}) \cap L^\infty(t_n, t_{n+1}; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $p_h^n \in H^{-1}(t_n, t_{n+1}; L_0^2(\Omega))$ *et* $u_h^n \in E(t_n, t_{n+1})$ *solutions de*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v}_h^n, \varphi\right), \chi \right\rangle + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[b(\widetilde{v}_h^n, \widetilde{v}_h^n, \varphi\chi) - (p_h^n, div(\varphi\chi)) + a(u_n; \widetilde{v}_h^n, \varphi\chi) + \psi_n(\varphi\chi + \widetilde{v}_h^n) \Big]\, dt$$
$$- \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi_n(\widetilde{v}_h^n)\, dt \geq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[(f, \varphi\chi) - \zeta a(T_n; G_0, \varphi\chi) - (G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi) \Big]\, dt$$
$$- \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[\zeta\, b(G_0, \widetilde{v}_h^n + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v}_h^n, G_0, \varphi\chi) \Big]\, dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \ \forall \chi \in \mathcal{D}(t_n, t_{n+1})$$

$$\widetilde{b} < (u_h^n)''(t), w > + (\widetilde{a}_n (u_h^n)'(t), w) + (K_n \nabla u_h^n(t), \nabla w) = (\phi_n, w) - (\widetilde{a}_n G'(t), w)$$
$$-\widetilde{b} < G''(t), w > -(K_n \nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \quad \text{au sens des distributions}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_h^n(t_n, x) &= \widetilde{v}_0^n(x) \\ u_h^n(t_n, x) &= u_0^n(x) \\ \frac{\partial u_h^n}{\partial t}(t_n, x) &= u_1^n(x), \end{aligned}$$

où $\widetilde{a}_n \in L^\infty(t_n, t_{n+1}; L^\infty(\Omega))$, $\phi_n \in L^2(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega))$. Les conditions initiales sont données dans les espaces suivants : $\widetilde{v}_0^n \in L^2(\Omega)$, $u_0^n \in V$ et $u_1^n \in L^2(\Omega)$. De plus, on a

$$K_n = K(x, t_n), \quad n = 0, \ldots, N-1, \quad x \in \Omega$$

$$\mu(u_n) = \mu(u_0^n + G(x, t_n)), \quad n = 0, \ldots, N-1 \quad x \in \Omega$$
$$\psi_n(w) = \int_\omega l_n |w|\, dx_1, \quad l_n = l(x, t_n) \quad x \in \Omega.$$

Ce problème est composé des deux problèmes (indépendants l'un de l'autre) étudiés dans les chapitres 3, 4 et 2 respectivement où l'existence et l'unicité de la solution des deux problèmes a été établie. De plus, on a obtenu dans le chapitre 2 que la solution $u_h^n \in \mathcal{C}^0([t_n, t_{n+1}]; V) \cap \mathcal{C}^1([t_n, t_{n+1}]; L^2(\Omega))$. De même, au chapitre 4, en dimension 2 on a obtenu des régularités supplémentaires sur la dérivée de la vitesse : sous les hypothèses du lemme 4.2.4, $\widetilde{v}_h^n \in H^1(t_n, t_{n+1}; \mathcal{V}_{0div}) \cap W^{1,\infty}(t_n, t_{n+1}; \mathbf{L}^2(\Omega))$ et $p_h^n \in L^2(t_n, t_{n+1}; L_0^2(\Omega))$, ce qui implique que la solution est continue.

On définit alors les conditions initiales, $\widetilde{a}_n$ et ϕ_n par récurrence sur n avec

$$u_0^0(x) = u_0, \quad u_1^0(x) = u_1, \quad \widetilde{v}_0^0(x) = \widetilde{v}_0(x)$$

$$\widetilde{a}_0 = \widetilde{a}(\widetilde{v}_0), \quad \phi_0 = \phi(\widetilde{v}_0)$$

et

$$u_0^{n+1}(x) = u_h^n(x, t_{n+1}) \in V, \quad n \in 0, \dots, N-2$$

$$u_1^{n+1}(x) = (u_h^n)'(x, t_{n+1}) \in L^2(\Omega), \quad n \in 0, \dots, N-2$$

$$\widetilde{v}_0^{n+1}(x) = \widetilde{v}_h^n(x, t_{n+1}) \in L^2(\Omega), \quad n \in 0, \dots, N-2,$$

et on définit $\widetilde{a}_n$ et ϕ_n par

$$\widetilde{a}_{n+1} = \widetilde{a}(\widetilde{v}_h^n(t-h, x)) \text{ pour tout } t \in [t_{n+1}, t_{n+2}],\ x \in \Omega,\ n = 0, \dots, N-2,$$

$$\phi_{n+1} = \phi(\widetilde{v}_h^n(t-h, x)) \text{ pour tout } t \in [t_{n+1}, t_{n+2}],\ x \in \Omega,\ n = 0, \dots, N-2.$$

On "raccorde" ainsi les problèmes discrétisés sur les sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ et on définit $\widetilde{v}_h : \Omega \times [0, \tau] \to \mathbb{R}$ et $u_h : \Omega \times [0, \tau] \to \mathbb{R}$, par

$$\widetilde{v}_h(x, t) = \widetilde{v}_h^n(x, t) \text{ pour tout } x \in \Omega,\ t \in [t_n, t_{n+1}],\ n = 0, \dots, N-1,$$

$$u_h(x, t) = u_h^n(x, t) \text{ pour tout } x \in \Omega,\ t \in [t_n, t_{n+1}],\ n = 0, \dots, N-1.$$

On obtient que $\widetilde{v}_h \in \mathcal{C}^0([0, \tau]; \mathcal{V}_{0div}) \cap W^{1,\infty}(0, \tau; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $p_h \in L^2(0, \tau; L_0^2(\Omega))$ et $u_h \in C^0([0, \tau]; V) \cap C^1([0, \tau]; L^2(\Omega))$ sont solutions de

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\widetilde{v}_h, \varphi), \chi \right\rangle + \int_0^\tau \Big[b(\widetilde{v}_h, \widetilde{v}_h, \varphi\chi) - (p_h, div(\varphi\chi)) + a(\overline{u}_h; \widetilde{v}_h, \varphi\chi) + \psi_h(\varphi\chi + \widetilde{v}_h) \Big] dt \\
&- \int_0^\tau \psi_h(\widetilde{v}_h)\, dt \geq \int_0^\tau \Big[(f, \varphi\chi) - \zeta a(\overline{u}_h; G_0, \varphi\chi) - (G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \varphi\chi) \Big] dt \\
&- \int_0^\tau \Big[\zeta\, b(G_0, \widetilde{v}_h + G_0\zeta, \varphi\chi) + \zeta\, b(\widetilde{v}_h, G_0, \varphi\chi) \Big] dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}_0, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(0, \tau)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{b} < u_h''(t), w > + (\widetilde{a}_h u_h'(t), w) + (K_h \nabla u_h(t), \nabla w) = (\phi_h, w) - (\widetilde{a}_h G'(t), w) \\
&- \widetilde{b} < G''(t), w > - (K_h \nabla G, \nabla w), \quad \forall w \in V \text{ au sens des distributions}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}_h(0, x) &= \widetilde{v}_0(x) \\
u_h(0, x) &= u_0(x) \\
\frac{\partial u_h}{\partial t}(0, x) &= u_1(x),
\end{aligned}$$

où $\overline{u}_h$, ψ_h, K_h, $\widetilde{a}_h$ et ϕ_h sont définis par

$$\overline{u}_h(x,t) = u_h(x,t_n) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_n, t_{n+1}],\ x \in \Omega,\ n = 0, \ldots, N-1,$$

$$\psi_h(w) = \int_\omega l_h |w|\, dx_1,\ l_h(x,t) = l(x,t_n) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_n, t_{n+1}],\ x \in \Omega,\ n = 0, \ldots, N-1,$$

$$K_h(x,t) = K(x,t_n) \quad \text{si} \quad t \in [t_n, t_{n+1}],\ x \in \omega,\ n = 0, \ldots, N-1,$$

$$\widetilde{a}_h(x,t) = \widetilde{a}_n(x) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_n, t_{n+1}],\ x \in \Omega,\ n = 0, \ldots, N-1$$

$$\phi_h(x,t) = \phi_n \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_n, t_{n+1}],\ x \in \Omega,\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse au passage à la limite quand h tend vers zéro. Pour ce faire, on commence par établir des estimations indépendantes de h.

Lemme 5.3.1. *Sous les hypothèses (5.1)-(5.6), on a les estimations suivantes*

$$\|\widetilde{v}_h\|_{L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C \tag{5.18}$$

$$\|\widetilde{v}_h\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)} \leq C \tag{5.19}$$

$$\|\widetilde{v}_h'\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z')} \leq C \tag{5.20}$$

$$\|p_h\|_{H^{-1}(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C, \tag{5.21}$$

où C est une constante indépendante de h.

Démonstration. Les majorations (5.18)-(5.21) découlent des estimations (4.78)-(4.81), indépendantes de h et de la température, intervenant dans le coefficient de la viscosité, établies au chapitre 4. □

Lemme 5.3.2. *Sous les hypothèses (5.1)-(5.6), on a*

$$\|u_h'\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} \leq C \tag{5.22}$$

$$\|u_h\|_{L^\infty(0,\tau;V)} \leq C, \tag{5.23}$$

où C est une constante indépendante de h.

Démonstration. En reprenant la démonstration des estimations obtenues au lemme 2.4.2 du chapitre 2, on a avec (2.72)

$$\begin{aligned}&\frac{\widetilde{b}}{2}\|(u_h^n)'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\int_{t_n}^{s}\|(u_h^n)'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_h^n+G)(s),\nabla(u_h^n+G)(s)\right)\\&\le y_n\left(\exp(\frac{s-t_n}{\alpha^*})\right)\quad\text{pour tout}\quad s\in[t_n,t_{n+1}],\end{aligned}\tag{5.24}$$

avec

$$y_n = z_n + \frac{3}{2a^*}\|\phi_n\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + Ch\quad\text{pour tout}\quad n\in 0,\dots,N-1$$

et

$$z_n = \frac{\widetilde{b}}{2}\|(u_h^n)'(t_n)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left(K_n\nabla(u_h^n(t_n)+G(t_n)),\nabla(u_h^n(t_n)+G(t_n))\right).$$

De plus pour tout $h\in]0,\hat{h}]$

$$y_n \le z_0\exp(\widetilde{C}\tau) + (\exp(\widetilde{C}\tau)+1)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2a^*}\|\phi_k\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega))} + Ch\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\|\phi_k\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega))} &= \sum_{k=0}^{n-2}\|\phi(\widetilde{v}_h^k)\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega))} + h\|\phi(\widetilde{v}_0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\le \int_0^{\tau}\|\phi(\widetilde{v}_h)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + h\|\phi(\widetilde{v}_0)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Comme ϕ est lipschitzienne, on a

$$|\phi(X)|\le|\phi(0)| + C_\phi|X|,\quad \forall X\in\mathbb{R}^2,$$

alors

$$\int_0^{\tau}\int_\Omega|\phi(\widetilde{v}_h)|^2\,dx\,dt \le 2\tau|\Omega||\phi(0)|^2 + 2C_\phi^2\int_0^{\tau}\int_\Omega|\widetilde{v}_h|^2\,dx\,dt.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\|\phi_k\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega))} \le 2(\tau+h)|\Omega||\phi(0)|^2 + 2C_\phi^2\int_0^{\tau}\|\widetilde{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + 2C_\phi^2 h\|\widetilde{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\le 2(\tau+\hat{h})|\Omega||\phi(0)|^2 + 2C_\phi^2\|\widetilde{v}_h\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + 2C_\phi^2\hat{h}\|\widetilde{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Notons $\hat{C} = \frac{3}{a^*}\left[(\tau+\hat{h})|\Omega||\phi(0)|^2 + C_\phi^2\hat{h}\|\widetilde{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right]$, c'est une constante indépendante de h et on a

$$y_n \le z_0\exp(\widetilde{C}\tau) + (\exp(\widetilde{C}\tau)+1)\left(\hat{C} + \frac{3C_\phi^2}{a^*}\|\widetilde{v}_h\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + C\tau\right),$$

où

$$z_0 = \frac{b}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}(K(0,x)\nabla(u_0 + G(0)), \nabla(u_0 + G(0))).$$

On trouve enfin

$$\begin{aligned}&\frac{\widetilde{b}}{2}\|(u_h^n)'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^*}{2}\int_{t_n}^{s} \|(u_h^n)'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^*}{2}\|\nabla(u_h^n + G)(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(z_0 \exp(\widetilde{C}\tau) + (\exp(\widetilde{C}\tau)+1)\left(\hat{C} + \frac{3C_\phi^2}{a^*}\|\widetilde{v}_h\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + C\tau\right)\right)\exp(\frac{\hat{h}}{\alpha^*}), \\ &\quad \forall s \in [t_n, t_{n+1}], \forall n \in 0,\ldots,N-1.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Avec le lemme précédent, on obtient (5.22) et (5.23). □

Des estimations (5.22) et (5.23) indépendantes de h, on déduit qu'il existe une sous suite notée $(u_h)_{h>0}$ vérifiant les convergences suivantes quand $h \to 0$:

$$u_h \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;V) \quad \text{et faible* dans} \quad L^\infty(0,\tau;V) \tag{5.26}$$

$$u_h' \rightharpoonup u' \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;L^2(\Omega)) \quad \text{et faible* dans} \quad L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega)). \tag{5.27}$$

De plus, des estimations (5.18)-(5.20), on déduit qu'il existe une sous suite notée $(\widetilde{v}_h)_{h>0}$ vérifiant les convergences suivantes quand $h \to 0$

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_h \rightharpoonup \widetilde{v} &\quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)\\ \widetilde{v}_h \rightharpoonup \widetilde{v} &\quad \text{faible* dans} \quad L^\infty(0,\tau;\mathbf{L}^2(\Omega))\\ \widetilde{v}_h' \rightharpoonup \widetilde{v}' &\quad \text{faiblement dans} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,\tau;Z'),\end{aligned}$$

et avec l'estimation (5.21), on déduit qu'il existe une sous suite notée $(p_h)_{h>0}$ vérifiant la convergence suivante

$$p_h \rightharpoonup p \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,\tau;L^2(\Omega)).$$

Avec le lemme d'Aubin, on obtient les convergences fortes suivantes

$$u_h \to u \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;L^2(\Omega)) \tag{5.28}$$

$$\widetilde{v}_h \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^4(\Omega)) \tag{5.29}$$

$$\widetilde{v}_h \to \widetilde{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,\tau;\mathbf{L}^2(\omega)). \tag{5.30}$$

Avec le lemme de Simon, on a

$$u_h \to u \quad \text{fortement dans} \quad \mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega)) \tag{5.31}$$

$$v_h \to v \quad \text{fortement dans} \quad \mathcal{C}^0([0,\tau];H), \tag{5.32}$$

où H est un espace de Banach tel que $\mathbf{L}^2(\Omega) \subset H \subset Z'$ et l'injection de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans H est compacte.

On peut passer à la limite dans (5.16) et (5.17) avec les techniques employées dans les chapitres 4 et 2 à l'exception des termes de couplage $a(\overline{u}_h, \widetilde{v}_h + G_0\zeta, \varphi\chi)$, $(\widetilde{a}_h(u_h' + G'), w)$ et (ϕ_h, w).

Commençons par déterminer la limite du terme $a(\overline{u}_h, \widetilde{v}_h + G_0\zeta, \varphi\chi)$. On a pour tout $\chi \in D(0,\tau)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\overline{u}_h;\widetilde{v}_h + G_0\zeta,\varphi)\chi - a(\overline{u};\widetilde{v}_h + G_0\zeta,\varphi)\chi\,dt| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |a(\overline{u}_h;\widetilde{v}_h + G_0\zeta,\varphi) - a(u,\widetilde{v}_h + G_0\zeta,\varphi)||\chi|\,dt \\
&\leq \int_0^{\tau} \|\mu(\overline{u}_h) - \mu(u)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\widetilde{v}_h + G_0\zeta)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt \\
&\leq C_\mu \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_h(t_n) - u\|_{L^2(\Omega)}\|\widetilde{v}_h + G_0\zeta\|_{\mathcal{V}}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|u_h(t_n) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_h(t_n) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_h(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\int_{t_n}^{t} \frac{\partial u_h}{\partial t}(s)\,ds\|_{L^2(\Omega)} + \|u_h - u\|_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))} \\
&\leq \int_{t_n}^{t} \|\frac{\partial u_h}{\partial t}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds + \|u_h - u\|_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))} \\
&\leq \sqrt{t - t_n}\|\frac{\partial u_h}{\partial t}\|_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))} + \|u_h - u\|_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_h(t_n)-u\|_{L^2(\Omega)}\|\widetilde{v}_h\|_{\mathcal{V}_0}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt$$
$$\leq\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\sqrt{t-t_n}\|\frac{\partial u_h}{\partial t}\|_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}\|\widetilde{v}_h\|_{\mathcal{V}_0}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt$$
$$+\|u_h-u\|_{\mathcal{C}^0(0,\tau;L^2(\Omega))}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widetilde{v}_h\|_{\mathcal{V}_0}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt$$
$$\leq\left(\sqrt{h}\|\frac{\partial u_h}{\partial t}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}+\|u_h-u\|_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))}\right)\int_0^\tau\|\widetilde{v}_h\|_{\mathcal{V}_0}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}|\chi|\,dt$$
$$\leq\left(\sqrt{h}\|\frac{\partial u_h}{\partial t}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}+\|u_h-u\|_{\mathcal{C}^0([0,\tau];L^2(\Omega))}\right)\|\widetilde{v}_h\|_{L^2(0,\tau;\mathcal{V}_0)}\|\chi\|_{L^2(0,\tau)}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Alors de la convergence forte (5.31), on obtient

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}a(\overline{u}_h(t_n);\widetilde{v}_h,\varphi)\chi-a(u;\widetilde{v}_h,\varphi)\chi\,dt|\to 0.$$

On étudie maintenant la limite du terme (ϕ_h,w). On a pour tout $w\in V$ et $\varphi\in\mathcal{D}(0,\tau)$

$$|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(\phi_h,w)\varphi-(\phi(\widetilde{v}),w)\varphi\,dt|\leq\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}|(\phi_h-\phi(\widetilde{v}),w)||\varphi|\,dt$$
$$\leq\sum_{n=1}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\phi(\widetilde{v}_h(t-h))-\phi(\widetilde{v})\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi|\,dt+\int_0^h\|\phi(\widetilde{v}_0)-\phi(\widetilde{v})\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi|\,dt$$
$$\leq C_\phi\sum_{n=1}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widetilde{v}_h(t-h)-\widetilde{v}\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi|\,dt+C_\phi\int_0^h\|\widetilde{v}_0-\widetilde{v}\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|\,dt$$
$$\leq C_\phi\sum_{n=1}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widetilde{v}_h(t-h)-\widetilde{v}\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi|\,dt$$
$$+C_\phi\sqrt{h}\|\widetilde{v}_0-\widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^\infty(0,\tau)}.$$

Posons

$$\begin{cases} w_h=\widetilde{v}(t-h) & \text{si}\quad t\in[h,\tau]\\ w_h=\widetilde{v}_0 & \text{si}\quad t\in[0,h].\end{cases}$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widetilde{v}_h(t-h)-\widetilde{v}\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi|\,dt$$
$$\leq\sum_{n=1}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widetilde{v}_h(t-h)-w_h(t)\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}|\varphi|\,dt+\|w_h-\widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(0,\tau)}$$
$$\leq\sqrt{\tau}\|\widetilde{v}_h-\widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^\infty(0,\tau)}+\|w_h-\widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))}\|w\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(0,\tau)}.$$

Or

$$\int_0^\tau \|w_h\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt = \int_0^h \|\widetilde{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^{\tau-h} \|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$= \int_0^\tau \|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + h\|\widetilde{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_{\tau-h}^\tau \|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$

et

$$0 \leq \int_{\tau-h}^\tau \|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \sqrt{h}\|\widetilde{v}\|^2_{L^2(0,\tau;L^4(\Omega))}.$$

On en déduit que quand $h \to 0$,

$$\int_0^\tau \|w_h\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \to \int_0^\tau \|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \tag{5.33}$$

Donc il existe $w \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$ tel que

$$w_h \rightharpoonup w \ \text{ faiblement dans } \ L^2(0,\tau;L^2(\Omega)).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\xi \in \mathcal{D}(0,\tau)$

$$\int_0^\tau w_h\varphi\xi\,dx\,dt = \int_0^h \int_\Omega \widetilde{v}_0\varphi\xi\,dx\,dt + \int_0^{\tau-h} \widetilde{v}(t,x)\varphi\xi(t-h)\,dx\,dt$$
$$= \int_0^h \int_\Omega \widetilde{v}_0\varphi\xi\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_\Omega \widetilde{v}(t,x)\varphi\xi(t)\,dx\,dt$$
$$-\int_{\tau-h}^\tau \int_\Omega \widetilde{v}(t,x)\varphi\xi(t)\,dx\,dt + \int_0^{\tau-h} \int_\Omega \widetilde{v}(t,x)\varphi(\xi(t-h)-\xi(t))\,dx\,dt.$$

Or

$$\int_{\tau-h}^\tau \int_\Omega \widetilde{v}(t,x)\varphi\xi(t)\,dx\,dt + \int_0^{\tau-h} \int_\Omega \widetilde{v}(t,x)\varphi(\xi(t-h)-\xi(t))\,dx\,dt$$
$$\leq \|\xi\|_{L^\infty(0,\tau)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \int_{\tau-h}^\tau \|\widetilde{v}\|_{L^2(\Omega)}\,dt + h\|\xi'\|_{L^\infty(0,\tau)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \int_0^{\tau-h} \|\widetilde{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors quand $h \to 0$, on a

$$\int_0^\tau \int_\Omega w_h\varphi\xi\,dx\,dt \to \int_0^\tau \int_\Omega \widetilde{v}\varphi\xi\,dx\,dt. \tag{5.34}$$

D'où $\widetilde{v} = w$. On a

$$\|w_h - \widetilde{v}\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} = \|w_h\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} + \|\widetilde{v}\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} - 2\int_0^\tau \int_\Omega w_h\widetilde{v}\,dx\,dt,$$

alors de (5.33) et (5.34), on a

$$\|w_h - \widetilde{v}\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \to 2\|\widetilde{v}\|^2_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} - 2\int_0^\tau \int_\Omega \widetilde{v}^2 \, dx \, dt = 0.$$

Donc

$$w_h \to \widetilde{v} \text{ fortement dans } L^2(0,\tau;L^2(\Omega)),$$

et finalement quand $h \to 0$, on a

$$|\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\phi(\widetilde{v}_h), w)\varphi - (\phi(\widetilde{v}), w)\varphi \, dt| \to 0.$$

On passe à la limite dans le terme $(\widetilde{a}_h(u'_h + G'), w)$ de façon analogue. On a pour tout $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(0,\tau)$

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\widetilde{a}_h(u'_h + G'), w)\varphi - (\widetilde{a}(\widetilde{v})(u'_h + G'), w)\varphi \, dt| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |(\widetilde{a}_h(u'_h + G') - \widetilde{a}(\widetilde{v})(u'_h + G'), w)||\varphi| \, dt \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widetilde{a}_h - \widetilde{a}(\widetilde{v})\|_{L^2(\Omega)} \|u'_h + G'\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^\infty(\Omega)} |\varphi| \, dt \\
&\leq C_a \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widetilde{v}_h(t-h) - \widetilde{v}\|_{L^2(\Omega)} \|u'_h + G'\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^\infty(\Omega)} |\varphi| \, dt \\
&+ C_a\sqrt{h}\|\widetilde{v}_0 - \widetilde{v}\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega))} \|u'_h + G'\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))} \|w\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(0,\tau)}.
\end{aligned}$$

Avec les mêmes techniques, on obtient que quand quand $h \to \infty$

$$|\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\widetilde{a}_h(u'_h + G'), w)\varphi - (\widetilde{a}(\widetilde{v})(u'_h + G'), w)\varphi \, dt| \to 0.$$

Avec les convergences (5.31) et (5.32), on a

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \widetilde{v}_0(x) = \widetilde{v}_0.$$

Pour prouver que $u'(0) = u_1$, on choisit une fonction régulière $\varphi \in C^\infty([0,\tau];\mathbb{R})$ telle que $\varphi(\tau) = 0$, et comme dans la preuve faite dans les pages 14-16, on obtient

$$u'(0) = u_1 \quad \text{dans} \quad V'.$$

On déduit que le la limite quand $h \to 0$ du triplet $(\widetilde{v}_h, p_h, u_h)$ est solution du problème 5.2.1.

Conclusion et perspectives

En guise de conclusion, les équations de Navier-Stokes représentent jusqu'à nos jours un des plus grands challenges de l'histoire des mathématiques. En effet, elles sont loin d'avoir livré tous leurs secrets.

Dans ce travail, on a étudié l'existence de solutions en dimension 3 du système de Navier-Stokes, muni de la loi de Tresca ou de Coulomb (ces conditions non linéaires rajoutent une difficulté supplémentaire au problème habituellement étudié). On a démontré de même que, l'unicité en dimension 2 est assurée mais en dimension 3, la preuve a nécessité des régularités supplémentaires ainsi qu'une viscosité suffisamment grande.

Néanmoins, le problème couplé en dimension 3 s'est avéré être un obstacle majeur dans cette thèse, l'unicité de la solution du problème de Tresca ainsi que l'existence de solutions du problème de Coulomb ont été prouvées à l'aide de régularités supplémentaires. Ces dernières ont ainsi été démontrées en présence d'hypothèses fortes sur les données comme $T' \in L^\infty(0, \tau; L^\infty(\Omega))$, ce qui, d'ailleurs, n'est pas cohérent avec les résultats obtenus au chapitre 2.

Dans les chapitres 2 et 4, on a considéré l'étude par discrétisation en temps du problème de la chaleur et du problème de Tresca en dimension 3. La discrétisation en temps du problème couplé en dimension 3 donne deux problèmes complètement indépendants l'un de l'autre, c'est à dire que, contrairement à l'obstacle rencontré dans l'étude théorique par le point fixe de Schauder, la méthode numérique résoudra le problème de la dimension. De fait, l'étude du problème couplé par discrétisation en temps en dimension 3 sera une alternative très importante.

Pour les perspectives à court terme, on fera, d'abord, des simulations numériques. Ensuite, on cherchera des estimations indépendantes de b du problème de la chaleur hyperbolique afin d'étudier la convergence de ce dernier vers l'équation de la chaleur parabolique.

Les perspectives à long terme, quant à elles, seront l'occasion d'effectuer une étude assymptotique en espace des problèmes traités, ainsi que de refaire l'étude du chapitre 2 en gardant le terme $v\nabla T$, négligé dans notre équation. Dans cette même lignée, il sera envisageable de transformer le couplage en prenant une capacité thermique constante et une conduction thermique dépendante de la vitesse. Enfin, considérer un fluide non Newtonien serait intéressant d'un point de vue physique.

Annexe

Outils mathématiques

1 Opérateurs compacts et bases hilbertiennes

Définition .1.1. *[8] Soient E et F deux espaces de Banach, on dit qu'un opérateur $Z \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $Z(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte de F. En d'autres termes, Z est un opérateur compact si, pour toute suite bornée (x_n) dans E, la suite (Zx_n) contient une sous-suite convergente.*

Lemme .1.1 (d'Aubin)**.** *[27] Soient X_0, X, X_1 trois espaces de Banach, on suppose que X_0 et X_1 sont reflexifs, l'injection $X_0 \subset X$ est compacte, et l'injection $X \subset X_1$ est continue. Soit $T > 0$ et $p_0, p_1 > 1$. On considère l'espace suivant*

$$\mathcal{Y} = \{v \in L^{p_0}(0,T;X_0); v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;X_1)\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;X_1)}.$$

Alors, l'injection de $\mathcal{Y}$ dans $L^{p_0}(0,T;X)$ est compacte.

Lemme .1.2 (de Simon)**.** *[52] Soient X_0, X, X_1 trois espaces de Banach tels que, l'injection de $X_0 \subset X$ est compacte. Si F est borné dans $L^p(0,T;X_0)$ où $1 < p < \infty$, et $\frac{\partial F}{\partial t}$ est borné dans $L^1(0,T;X_1)$. Alors F est relativement compact dans $L^p(0,T;X)$.*
Si F est borné dans $L^\infty(0,T;X_0)$ et $\frac{\partial F}{\partial t}$ est borné dans $L^r(0,T;X_1)$ où $r > 1$, alors F est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,T];X)$.

Théorème .1.1. *(Théorème de point fixe de Schauder)[31]*
Soit X un espace de Banach et M un ensemble fermé convexe et non vide de X. Soit T une application continue de M dans M telle que $T(M)$ est relativement compact. Alors, T a un point fixe dans M.

Définition .1.2. *[8] Soit H un espace de Hilbert et $(,.,)$ est le produit scalaire, on appelle* base hilbertienne *une suite (e_n) d'éléments de H tels que*

1. $|e_n| = 1\ \forall n$, $(e_m, e_n) = 0\ \forall m, n, m \neq n$
2. *L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H.*

Théorème .1.2. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Théorème .1.3. *On suppose que H est séparable. Soit Z un opérateur autoadjoint compact.*
Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de Z.

2 Inégalités de Sobolev

Lemme .2.1. *(Inégalité de Korn)[38] Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C_K > 0$ (appelée constante de Korn) telle que pour tout $u \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^d$, on a*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_K \|D(u)\|_{L^2(\Omega)},$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformations.

Lemme .2.2. *Il existe une constante c qui ne dépend que de Ω telle que*

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq c\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^6(\Omega)}, \quad \forall u \in L^6(\Omega)$$

Lemme .2.3. *[8] Soient $1 \leq q \leq p < \infty$. Alors*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)}\|u\|^{a}_{W^{1,n}}, \quad \forall u \in W^{1,n}(\Omega) \quad avec \quad a = 1 - \frac{q}{p}$$

le cas le plus fréquemment utilisé $n = 2$, $p = 4$, $q = 2$ et $a = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

3 Opérateurs monotones

Définition .3.1. *Soit E est un espace de Banach réflexif et séparable, et $A : E \to \mathcal{P}(E)$. On dit que*

1. *A est monotone si*

$$\forall u, v \in E,\ \forall u', v' \in \mathcal{P}(E),\ < u' - v', u - v >\geq 0$$

2. *A est strictement monotone si de plus $< u' - v', u - v >= 0$ implique $u = v$.*

Définition .3.2. *Soient X un espace topologique, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$ un point. La fonction f est semi-continue inférieurement (sci) en a si*

$$f(a) \leq \liminf_{x \to a} f(x)$$

Définition .3.3. *On désigne par H un espace de Hilbert réel, U une partie convexe non vide de H et J une fonction convexe de U à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x un point de U. Le sous-différentiel de J en u, noté $\partial J(u)$, est défini par*

$$\partial J(u) = \{P \in H'; \forall v \in U : \quad J(v) \geq J(u) + < P, v - u >\}.$$

Intuitivement, le sous-différentiel est formé par toutes les directions des hyperplans qui passent par le point $(u; J(u))$ et restent "sous" le graphe de la fonction J.

Remarque .3.1. *Si de plus, J est différentiable en u alors $\partial J(u) = \{\nabla J(u)\}$.*

Proposition .3.1. *[9] Si J est convexe et semi continue inférieurement, ∂J est un opérateur monotone.*

Bibliographie

[1] **H. Abboud.** *Schémas à deux grilles pour la résolution du problème de Navier-Stokes instationnaire incompressible*, Thèse de doctorat à l'université Pierre et Marie Curie-Paris 6, Laboratoire Jacques Louis Lions, 2006.

[2] **G. Allaire.** *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, ISBN : 2-7302-1255-8, 2005

[3] **A. Assemien, G. Bayada.** *Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow*, Asymptotic Analysis 9, 177 North Holland, 1994.

[4] **B.K. Batchelor.** *An introduction to the fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1988.

[5] **G. Bayada, K. Lhalouani.** *Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer*, Analysis vol. 25, N°3.4 pp. 329-362, 2001.

[6] **H. Bellout, A. Friedman.** *Blow-up Estimates for Nonlinear Hyperbolic Heat equation*, IMA Prepints Series 356, 1987.

[7] **A. Bensoussan, J.L. Lions.** *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod, 1978

[8] **H. Brezis.** *Analyse fonctionnelle théorie et application*, Dunod, Paris 1999.

[9] **H. Brezis.** *Opérateurs maximaux, monotones et demi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Elsevier, 1973.

[10] **Y. Brenier, R. Natalini, M. Puel.** *On a relaxation approximation of the incompressible Navier-Stokes equations*, Proc Amer Math Soc 132,pp 1021-1028, 2004.

[11] **M. Boukrouche, El Mir.** *On the Navier-Stokes system in a thin film with Tresca free boundary condition and its asymptotic behavior*, Bull. Maths. Soc. Sc. Maths. Rounamie Tome 48(96) N°2 pp. 139-163, 2005.

[12] **M. Boukrouche, G. Lukaszewicz.** *On the existence of pulibac attractor for a two-Dimensional shear flow with Tresca's boundary condition*, Parabolic and Navier-Stokes equations Banach center publications, Vol 81, Institute of mathematics, Polish academy of sciences, pp. 81-93, Warszawa 2008.

[13] **M. Boukrouche, G. Lukaszewicz.** *Asymtotic analysis of a thin film lubrication problem with Coulomb fluid-solid interface law*, Int J Eng Sci, Vol 41 pp.521-537, 2003.

[14] **M. Boukrouche, L. Paoli.** *Asymptotic analysis of a micropolar fluid flow in a thin domain with a free and rough boundary*, SIAM J.Math, Vol. 44, No. 2, pp. 1211-1256, 2012.

[15] **M. Boukrouche, F. Saidi.** *Non isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law, part I*, Nonlinear Analysis Real Worlds App, Vol 7, N°5 pp. 1145-1166, 2006.

[16] **M. Boukrouche, F. Saidi.** *Non isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law, part II Asymptotic behaviour of weak solutions*, Nonlinear Analysis Real Worlds App, Vol 9, N°4 pp. 1680-1701, 2008.

[17] **F. Boyer, P. Fabrie.** *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Springer, 2000.

[18] **C. Cattaneo.** *Sulla Conduzione del Calore*, Atti del Seminario Matematico e Fisico Dellà Universita di Modena, Vol 3, pp. 83-101, 1948.

[19] **D.S. Chandrasekharaiah.** *Hyperbolic thermoelasticity : a review of recent literature*, Appl Mech rev, N°51 pp. 705-729, 1998.

[20] **G. Duvaut, J.L. Lions.** *Les inéquations en mécanique et physique*, Dunod, 1972.

[21] **G. Duvaut.** *Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb*, CRAS Paris, 1980.

[22] **U. Eisele.** *Introduction to Polymer Physics*, Springer-Verlag 1990.

[23] **A-C. Eringen.** *Theory of micropolar fluids*, J-Maths N°16 pp. 1-16, 1966.

[24] **L.C. Evans.** *Partial Differential Equations*, Graduate studies in mathematics, Vol 19, 1949.

[25] **M. Fang, R.P. Gilbert.** *Non-isothermal, Non-Newtonien Hele Shaw flows within Cattaneo's heat flux law* , Mathematical and Computer Modelling, N°46 pp. 765-775, 2007.

[26] **J.I. Frankel, B. Vick, M.N. Özisik.** *General formulation and analysis of hyperbolic heat conduction in composite media*, Internat J Heat Mass Trans N°30, pp. 1293-1305, 1987.

[27] **C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam.** *Navier-Stokes Equations and turbulence*, Cambridge university Press, 2001.

[28] **J. Fourier.** *Théorie analytique de la chaleur*, ed. Firmin Didot, Paris, 1822. Réedition Jacques Gabay, Sceaux, 1988.

[29] **G.P. Galdi** : *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Steady-state problems. Second edition*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2011.

[30] **P. Galerko.** *Extended thermodynamical analysis of a motion of the solid-liquid interface in a rapidly solidifying alloy* , Phys Rev B65, 144103 (11 pages), 2002.

[31] **D. Gilbarg NS. Trudinger.** *Elliptic Partial Differential Equations of second Order*, A series of comprehensive studies in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[32] **V. Girault, P.A Raviart.** *Finite Elemnent Approximation of the Navier Stokes Equations*, Springer-Verlag, 1979.

[33] **D.D. Joseph, L. Preziosi.** *Heat waves*, Rev. Modern physics, Vol 61, pp. 41-73, 1989.

[34] **D. Jou, J. Casas-Vâsquez, G. Lebon.** *Extended irreversible thermodynamics revisited*, Mathematical and Computer Modelling, Rep Progr Phys N°62 pp. 1035-1142, 1998.

[35] **L. Landau, E. Lifshitz.** *Mécanique des fluides, physique théorique, tome 6*,Editions MIR Moscow, 1971.

[36] **J.L. Lions.** *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[37] **J.L. Lions.** *Some problems connected with Navier-Stokes equations*, Lima, July 1978.

[38] **J.L. Lions, E. Magenes.** *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, 1972.

[39] **K.C. Liu.** *Analysis of dual-phase-lag thermal behaviour in layered films with teperature-dependant interface thermal resistance*, J Phys D-Appl Phys N°38 pp. 3722-3732, 2005.

[40] **W.B. Lor, H.S. Chu.** *Effects of interface thermal resistance on heat transfer in a composite medium using the thermal wave model*, Internat J Heat Mass Trans, N°43 pp. 653-663, 2000.

[41] **G. Lukaszewicz.** *Micropolar fluids, Theory and applications* Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1999.

[42] **R.A. MacDonald, D.H. Stai.** *Molecular dynamical calculations of energy transport in crystalline solids*,Phys Rep N°46 pp. 1-41, 1978.

[43] **A. Majda.** *Compressible Fluid flow and Systems of conservation laws in several space variables*, Applied Mathematical Siences 53, Springer-Verlag, 1984.

[44] **P. Marcati, B. Rubino.** *Hyperbolic to parabolic relaxation theory for quasi-linear first order systems*, J. Differential Equations, 162, N°2 pp. 359-399, 2000.

[45] **M. Paicu, G. Raugel.** *Une perturbation hyperbolique des équations de Navier-Stokes*, ESAIM Procedingd, Vol 21 pp. 65-8, 2007.

[46] **P.A. Raviart, J.M. Thomas.** *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 2004.

[47] **James C. Robinson.** *An introduction to the classical theory of the Navier-Stokes equations*, Mathematics Institute, University of Warwick, UK.

[48] **H.G. Rotstein, S. Brandon, A. Novick-Cohen, A. Nepomnyashchy.** *Phase field equations with memory, The hyperbolic case*, SIAM J Appl Math N°62 pp. 264-282, 2001.

[49] **J. Saal.** *Global solutions to hyperbolic Navier-Stokes equations*, Evolution Equations and Control Theory, Vol 1, N°1 pp. 217-234, 2010.

[50] **F. Saidi.** *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides Newtoniens non-idothermes et incompressibles avec des conditionsau bord non linéaires. Etude mathématique et numérique*, thèse de doctorat à l'université Jean Monnet de Saint-etienne, 2005.

[51] **M. Schatzman.** *Analyse numérique, une approche mathématique*, Dunod, 2001.

[52] **J. Simon.** *Compact sets in the space* $L^p(0, T; B)$, Annali di mathematica pura et applica IV, Vol CXLVI, pp. 65-95, 1987.

[53] **S. Subbiah, D. L Trafford, S. I Guceri.** *Nonisothermal flow of polymers into two dimentsional, thin cavity molds : a numerical grid generation approch*, Int heat Mass Transfer 32, pp. 415-434, 1989.

[54] **R. Temam.** *Navier-Stokes Equations, theory and numerical analysis*, Elsevier Science Publishers B.V, 1984.

[55] **C.S. Tsai, Y.C. Lin, C.I. Hung.** *A study on the non-Fourier effects in spherical media due to sudden temperature changes on the surfaces*, Heat Mass Trans N°41 pp. 709-716, N°46 pp. 709-716, 2005.

[56] **S. Volz, M. Lallemand, J.B. Saulnier.** *Analyse de la conduction de la chaleur aux temps ultras-courts dans un solide par la thermodynamique irréversible étendue et la dynamique moléculaire*, Revue Générale de Thermique, Vol 36, N°11, pp. 826-835, 1997.