



HAL
open science

Etude numérique et expérimentale du crissement des systèmes de freinage ferroviaires

Andréa Loyer

► **To cite this version:**

Andréa Loyer. Etude numérique et expérimentale du crissement des systèmes de freinage ferroviaires. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ECDL0008 . tel-00801594v2

HAL Id: tel-00801594

<https://theses.hal.science/tel-00801594v2>

Submitted on 28 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 2012 - 08
Année 2012

Année 2012

THÈSE DE DOCTORAT
de L'École Centrale de Lyon

PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

PAR

Andréa LOYER

**ÉTUDE NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DU CRISSEMENT DES
SYSTÈMES DE FREINAGE FERROVIAIRES**

Présentée et soutenue publiquement le 31 mai 2012, devant le jury d'examen :

| | |
|--|----------------------|
| L. BAILLET, Professeur, Institut ISTerre, Université Joseph Fourier | Rapporteur |
| E. BALMÈS, Professeur, Laboratoire PIMM, École des Arts et Métiers ParisTech | Rapporteur |
| O. CHIELLO, Chargé de recherche, Laboratoire LTE, IFSTTAR | Encadrant de thèse |
| E. JACQUELIN, Professeur, Laboratoire LBMC, Université Claude Bernard Lyon I | Président |
| X. LORANG, Chargé de recherche, Direction I&R, SNCF | Encadrant industriel |
| J.-J. SINOU, Professeur, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon | Directeur de thèse |



École Centrale de Lyon – Direction de la recherche

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'École Centrale de Lyon :

| Nom-Prénom | Corps grade | Laboratoire à défaut département ECL | Établissement |
|--------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------|
| BEROUAL Abderrahmane | professeur | AMPERE | ECL |
| BURET François | professeur | AMPERE | ECL |
| JAFFREZIC-RENAULT Nicole | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| KRÄHENBÜHL Laurent | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| NICOLAS Alain | professeur | AMPERE | ECL |
| NICOLAS Laurent | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| SCORLETTI Gérard | professeur | AMPERE | ECL |
| SIMONET Pascal | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| VOLLAIRE Christian | professeur | AMPERE | ECL |
| | | Nbre Ampère 9 | |
| HELLOUIN Yves | maître de conférences | DER EEA | ECL |
| | | Nbre DER EEA 1 | |
| GUIRALDENQ Pierre | professeur émérite | DER STMS | ECL |
| VINCENT François | professeur | DER STMS | ECL |
| | | Nbre DER STMS 2 | |
| LOHEAC Jean-Pierre | maître de conférences | ICJ | ECL |
| MAÎTRE Jean-François | professeur émérite | ICJ | ECL |
| MARION Martine | professeur | ICJ | ECL |
| MIRONESCU Élisabeth | professeur | ICJ | ECL |
| MOUSSAOUI Mohand | professeur | ICJ | ECL |
| Musy François | maître de conférences | ICJ | ECL |
| ZINE Abdel-Malek | maître de conférences | ICJ | ECL |
| | | Nbre ICJ 7 | |
| DAVID Bertrand | professeur | ICTT | ECL |
| | | Nbre ICTT 1 | |

| Nom-Prénom | Corps grade | Laboratoire à défaut département ECL | Établissement |
|---------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------|
| CALLARD Bertrand | professeur | INL | ECL |
| CLOAREC Jean-Pierre | maître de conférences | INL | ECL |
| GAFFIOT Frédéric | professeur | INL | ECL |
| GAGNAIRE Alain | maître de conférences | INL | ECL |
| GARRIGUES Michel | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| GENDRY Michel | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| GRENET Geneviève | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| HOLLINGER Guy | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| KRAWCZYK Stanislas | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| LETARTRE Xavier | chargé de recherche | INL | CNRS/ECL |
| O'CONNOR Ian | professeur | INL | ECL |
| PHANER-GOUTORBE Magali | professeur | INL | ECL |
| ROSBACH Yves | professeur | INL | ECL |
| SAINT-GIRONS Guillaume | chargé de recherche | INL | CNRS/ECL |
| SEASSAL Christian | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| SOUTEYRAND Eliane | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| TARDY Jacques | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| VIKTOROVITCH Pierre | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| | | Nbre INL 18 | |

| Nom-Prénom | Corps grade | Laboratoire à défaut département ECL | Établissement |
|-------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------|
| BAILLY Christophe | professeur | LMFA | ECL |
| BERTOGLIO Jean-Pierre | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| BLANC-BENON Philippe | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| BOGEY Christophe | chargé de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| CAMBON Claude | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| CARRIÈRE Philippe | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| CHAMPOUSSIN Jean-Claude | professeur émérite | LMFA | ECL |
| COMPTE-BELLOT Geneviève | professeur émérite | LMFA | ECL |
| FERRAND Pascal | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| GALLAND Marie-Annick | professeur | LMFA | ECL |
| GODEFERD Fabien | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| GOROKHOVSKI Mikhail | professeur | LMFA | ECL |
| HENRY Daniel | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| JEANDEL Denis | professeur | LMFA | ECL |
| JUVE Daniel | professeur | LMFA | ECL |
| LE RIBEAULT Catherine | chargé de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| LEBŒUF Francis | professeur | LMFA | ECL |
| PERKINS Richard | professeur | LMFA | ECL |
| ROGER Michel | professeur | LMFA | CNRS/ECL |
| SCOTT Julian | professeur | LMFA | CNRS/ECL |
| SHAO Liang | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| SIMOENS Serge | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| TREBINJAC Isabelle | maître de conférences | LMFA | ECL |
| | | Nbre LMFA 23 | |

| Nom-Prénom | Corps grade | Laboratoire à défaut département ECL | Établissement |
|---------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------|
| BENAYOUN Stéphane | professeur | LTDS | ECL |
| CAMBOU Bernard | professeur | LTDS | ECL |
| COQUILLET Bernard | maître de conférences | LTDS | ECL |
| DANESCU Alexandre | maître de conférences | LTDS | ECL |
| FOUVRY Siegfried | chargé de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| GEORGES Jean-Marie | professeur émérite | LTDS | ECL |
| GUERRET Chrystelle | chargé de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| HERTZ Dominique | past | LTDS | ECL |
| ICHCHOU Mohamed | professeur | LTDS | ECL |
| JEZEQUEL Louis | professeur | LTDS | ECL |
| JUVE Denyse | ingénieur de recherche | LTDS | ECL |
| KAPSA Philippe | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| LE BOT Alain | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| LOUBET Jean-Luc | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| MARTIN Jean-Michel | professeur | LTDS | ECL |
| MATHIA Thomas | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| MAZUYER Denis | professeur | LTDS | ECL |
| PERRET-LIAUDET Joël | maître de conférences | LTDS | ECL |
| SALVIA Michelle | maître de conférences | LTDS | ECL |
| SIDOROFF François | professeur | LTDS | CNRS/ECL |
| SINOUE Jean-Jacques | professeur | LTDS | CNRS/ECL |
| STREMSDOERFER Guy | professeur | LTDS | CNRS/ECL |
| THOUVEREZ Fabrice | professeur | LTDS | ECL |
| TREHEUX Daniel | professeur | LTDS | ECL |
| VINCENS Éric | maître de conférences | LTDS | ECL |
| | Total HDR ECL | Nbre LTDS 25 91 | |

Ce travail de thèse s'est partagé entre les entités suivantes : le groupe Mécanique et Dynamique des Structures du département de Physique Ferroviaire et Confort de la Direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF, l'équipe Dynamique des Structures et des Systèmes du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Structures à l'École Centrale de Lyon et le Laboratoire Transports et Environnement de l'IFSTTAR de Bron. Dans chacune de ces entités, j'ai pu rencontrer des personnes exceptionnelles tant d'un point de vue scientifique et technique que d'un point de vue humain. Je tiens à mettre en avant la grande qualité de l'encadrement scientifique dont j'ai bénéficié au sein de ces différentes structures.

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Jean-Jacques Sinou qui a été un directeur de thèse présent, accessible et toujours de très bon conseil. Il a su à la fois me laisser une certaine liberté dans mes travaux et me rappeler à mes objectifs lorsque cela était nécessaire. Son attachement au travail de qualité, ainsi que ses grandes qualités humaines m'ont très fortement aidé durant ces années. Je souhaite aussi remercier Olivier Chiello pour les discussions scientifiques que nous avons eu, toujours pertinentes et souvent fructueuses, pour sa rigueur et le temps passé à rentrer dans le détail de ce que j'ai pu proposer.

Je remercie également Xavier Lorang qui a partagé sa connaissance du sujet et son expertise et qui m'a rendu aisés les passages entre le monde académique et celui industriel.

Je suis aussi reconnaissant à Étienne Balmès et à Laurent Baillet d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail. Je les remercie pour le temps passé à lire ce mémoire et leurs commentaires pertinents. Je remercie aussi M. Balmès pour les différents échanges enrichissants que nous avons eus au cours du projet AcouFren.

J'adresse aussi un grand merci à tous ceux avec qui j'ai pu partager de bons moments durant ces années et dont le soutien m'a été d'une aide précieuse, que ce soit au cours de discussions autour d'un café, ou lors de soirées et de diverses activités. Merci à Marion, Denis, Olivier, Jérôme, Xavier, David, Stéphane, Jérôme, Isabelle, Louis et tous les autres.

Merci aussi à Mac-Lan pour sa bienveillance, à Florence et Estelle toujours attentives au bien-être de tous, à Sofia, Gilles, Jean-Pierre, Emmanuelle et Si-Hai pour les échanges, les repas, PSF . . . , à Christine et ses stagiaires, à Sadim, Guido, Pauline pour les différentes sorties au ski, les *vie ferrate*, à Franck pour sa bonne humeur, son sens pratique et ses anecdotes techniques. Merci à Sönke, Florent, Virginie, Juan-Carlos, Phuong, Vinicius, Nourredine, Clément, Guillaume et Pierre-Émile pour le quotidien de thésard SNCF que nous avons partagé. Au final, c'est avant tout une question de temps.

Merci aussi à tous mes amis, en particulier ceux avec qui je me suis lancé dans l'aventure de la copropriété, avec un petit havre de paix perdu au milieu du Morvan, où l'on peut oublier les tracas d'une thèse pour discuter de la meilleure solution pour la cheminée, les escaliers, les dalles de béton à couler et le prochain méchoui, merci à Anne, Anthony, Flo, FloFlo, Michel, Minipousse, Ouardane, Sasso, Théa et Zerty. Merci aussi à tous mes amis toujours présents pour les bon moments passés et ceux à venir.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement ma famille. Mes parents, toujours présents et aimants, mon frère solide, présent et qui m'a en quelque sorte montré le chemin, mes sœurs aussi bien évidemment. Un grand merci à Noémie, dont la présence se fait chaque jour un peu plus précieuse et qui a su se montrer patiente, compréhensive et attentionnée.

Résumé : Le crissement est un bruit strident fréquemment produit par les systèmes de freinage de tous les types de modes de transport (automobile, aéronautique, ferroviaire, ...). Dans le domaine ferroviaire, les niveaux acoustiques liés au crissement peuvent dépasser les 110 dB à un mètre du bord du quai. Ceci constitue non seulement un inconfort, mais aussi un risque pour la santé des clients et du personnel en gare. De précédents travaux ont identifié les garnitures de frein comme levier potentiel pour diminuer le crissement. Le projet AcouFren, mené par la SNCF, vise à développer des outils d'aide à la conception et à la spécification de garnitures de frein ferroviaire peu crissantes. Cette thèse s'inscrit dans ce projet et propose une étude numérique et expérimentale du crissement des freins à disque ferroviaires et plus particulièrement de TGV. Elle comporte une partie expérimentale et des développements numériques visant à obtenir des simulations numériques fiables et rapides du crissement.

L'étude expérimentale permet de montrer la richesse des phénomènes de crissement pouvant survenir lors d'un freinage et de montrer les écarts et les ressemblances qu'il peut y avoir entre un freinage d'arrêt et un freinage de maintien. À partir de ces constats, les attentes vis-à-vis de la modélisation numérique proposée sont données : il s'agit de pouvoir reproduire les phénomènes présents dans les freinages de maintien.

Afin d'estimer les niveaux vibratoires, le choix d'une simulation temporelle non-linéaire transitoire et stationnaire est fait. Une fois la modélisation numérique choisie, une méthode de résolution fondée sur un lagrangien augmenté est mise en œuvre. Des paramètres de la méthode optimisés sont proposés et permettent de réduire significativement les coûts de calcul. Le temps nécessaire à des simulations de dynamique non-linéaire transitoire reste toutefois prohibitif sans réduction. Une proposition de réduction de Ritz utilisant les modes complexes du système est proposée. Cette approche est testée sur un modèle académique simple afin de pouvoir quantifier l'effet d'une réduction sur un modèle non-linéaire déstabilisé par le frottement. Si la réduction est possible, de nombreux phénomènes qu'elle induit sont mis en évidence. Les seules bases de réduction permettant une reproduction fidèle du comportement dynamique non-linéaire transitoire et stationnaire du système sont celles comportant l'ensemble des modes complexes dans une gamme de fréquence ainsi que les modes statiques d'interface.

Enfin, la stratégie numérique complète est testée sur un modèle simplifié de frein TGV. La méthode de réduction proposée permet de gagner un facteur 6 en temps de calcul par rapport au modèle non réduit. La confrontation à l'expérience montre un accord satisfaisant avec la simulation : les fréquences émergentes et les niveaux vibratoires sont correctement approchés.

Abstract: Squeal is a shrill noise, frequently produced by brakes of cars, planes, trains and others vehicles, which is often a source of great discomfort. For railway brakes, acoustic levels at 1 m from the train can exceed 110 dB, which is not only unpleasant but also induces a health risk for customers and staff in the station. Previous studies suggested that squeal might be reduced by modifying the brake linings. The AcouFren project, lead by the French railway society SNCF, aims to develop tools for designing and specifying low-squeal brake linings. This thesis, part of this project, develops a numerical and experimental study of railway disc brake squeal, particularly for the french high-speed train (TGV) brakes.

The experimental study shows the complexity of squeal-related phenomena that can occur during braking, and the variations and the similarities between breaking to a full stop and steady braking. Starting from these observations, expectations with regard to the numerical model are stated: it should be able to reproduce the phenomena of the steady braking.

In order to estimate the vibration levels, transient and stationary non-linear dynamics simulations are performed. Once the numerical modelling has been chosen, a solver based on the augmented Lagrangian method is developed. An optimization of the parameters of the method is proposed, which allows significant reduction in computational cost. However, the simulations remain heavily time consuming. This is why a reduction strategy based on the Ritz method and using the complex modes of the system is proposed. The proposed approach is tested on a simple academic model. This allows quantifying the effects of a reduction on a non-linear model destabilized by friction. It is shown that many disturbance phenomena may occur due to the reduction. The only bases of reduction allowing a correct reproduction of the transient and stationary non-linear dynamics of the system are those including all the complex modes in a frequency band as well as the static interface modes.

Lastly, the complete numerical strategy is tested on a simplified model of a TGV brake. Compared to the full model, the proposed reduction method reduces the computational cost by a factor of 6. Comparison between simulation and experiment show that both frequencies and vibration levels are predicted with reasonable agreement.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 5 |
| 1 Présentation du système de freinage TGV | 9 |
| 1.1 Les différents systèmes de freinage sur TGV | 10 |
| 1.2 Caractéristiques du système | 11 |
| 1.2.1 Caractéristiques mécaniques | 11 |
| 1.2.2 Les garnitures | 12 |
| 1.3 Principe de fonctionnement du frein à disque sur TGV | 16 |
| 1.4 Problématique du crissement des freins ferroviaires | 17 |
| 2 Vibrations auto-générées | 19 |
| 2.1 Système à un degré de liberté | 20 |
| 2.2 Mécanismes d'origine tribologique | 21 |
| 2.2.1 Cas du <i>stick-slip</i> | 21 |
| 2.2.2 Cas de l'amortissement négatif | 22 |
| 2.3 <i>Sprag-slip</i> et couplage de modes | 24 |
| 2.3.1 Cas du <i>sprag-slip</i> | 25 |
| 2.3.2 Cas du couplage de modes | 26 |
| 2.4 Effet de l'amortissement dans le couplage de modes | 28 |
| 2.5 Notions sur la stabilité des systèmes non-linéaires | 31 |
| 2.5.1 Stabilité d'un point d'équilibre pour des systèmes linéaires | 31 |
| 2.5.2 Stabilité d'un point d'équilibre pour des systèmes non-linéaires | 33 |
| 2.5.3 Bifurcations de Hopf, section de Poincaré et cycle limite | 36 |
| 2.6 Synthèse | 39 |
| 3 Observation expérimentale du crissement | 41 |
| 3.1 Études expérimentales dans la littérature | 42 |
| 3.2 Définition du protocole d'essais | 46 |
| 3.2.1 Sélection des garnitures prioritaires | 46 |
| 3.2.2 Présentation du banc d'essais de freinage de l'Agence d'Essais Ferroviaire | 48 |
| 3.2.3 Instrumentation | 49 |
| 3.2.4 Caractérisation vibratoire du système couplé | 51 |
| 3.2.5 Description des essais | 52 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3 | Analyse des résultats d'essais | 54 |
| 3.3.1 | Analyse des essais de freinage d'arrêt | 55 |
| 3.3.2 | Analyse des essais de freinage de maintien | 57 |
| 3.3.3 | Synthèse sur les essais de freinages d'arrêt et de maintien | 60 |
| 3.4 | Conclusions sur l'étude expérimentale du crissement | 61 |
| 4 | Contact – Transitoire – Réduction | 63 |
| 4.1 | Modélisation du contact frottant | 64 |
| 4.1.1 | Modélisation du contact unilatéral | 64 |
| 4.1.2 | Modélisation du frottement | 65 |
| 4.2 | Méthodes numériques pour traiter le contact frottant en transitoire | 70 |
| 4.2.1 | Simulations en dynamique non-linéaire transitoire | 71 |
| 4.2.2 | Traitement numérique du contact frottant | 77 |
| 4.3 | Les choix retenus pour la dynamique transitoire | 87 |
| 4.3.1 | Utilisation du lagrangien augmenté incrémental | 88 |
| 4.4 | Analyse de stabilité avec contact de Signorini-Coulomb | 94 |
| 4.4.1 | Calcul de l'équilibre quasi-statique | 94 |
| 4.4.2 | Calcul des modes et valeurs propres complexes du système | 96 |
| 4.5 | Méthodes de réduction modales et approximations non-linéaires | 98 |
| 4.5.1 | Méthode de Ritz | 99 |
| 4.5.2 | Réduction sur les variétés centrales | 100 |
| 4.5.3 | Méthodes d'approximation | 102 |
| 4.5.4 | Choix d'une méthode de réduction | 104 |
| 5 | Validation des méthodes et proposition de réduction | 107 |
| 5.1 | Présentation du cas test | 108 |
| 5.1.1 | Description du modèle étudié | 108 |
| 5.1.2 | Validation des procédures développées | 109 |
| 5.2 | Outils d'analyse des solutions | 111 |
| 5.2.1 | Transformée de Fourier à court terme (STFT) | 111 |
| 5.2.2 | Transformée en ondelettes continue (CWT) | 112 |
| 5.2.3 | M-MAC pic à pic et pic à modes | 113 |
| 5.2.4 | Projection sur les modes complexes | 113 |
| 5.3 | Étude de stabilité du système | 116 |
| 5.4 | Comportement du système de référence | 121 |
| 5.4.1 | Système comportant un unique mode instable | 122 |
| 5.4.2 | Système comportant plusieurs modes instables | 127 |
| 5.4.3 | Cas avec 9 modes instables | 136 |
| 5.4.4 | Conclusion sur le comportement du système | 147 |
| 5.5 | Mise en œuvre d'une réduction efficace | 148 |
| 5.5.1 | Définition de deux types de base de réduite | 148 |
| 5.5.2 | Performances des bases réduites | 152 |
| 5.6 | Conclusion | 167 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Application sur un modèle simplifié de frein TGV | 169 |
| 6.1 | Description du système réel | 170 |
| 6.2 | Choix du modèle aux éléments finis de frein TGV | 171 |
| 6.2.1 | Modélisation du disque et de la cloche | 171 |
| 6.2.2 | Modélisation de la garniture, du porte-garniture et de la timonerie | 172 |
| 6.2.3 | Recalage des paramètres sur FRF | 174 |
| 6.3 | Simulations temporelles sur le modèle simplifié de frein TGV | 181 |
| 6.3.1 | Caractérisation de la stabilité du système | 181 |
| 6.3.2 | Simulation temporelle sur le modèle de référence | 183 |
| 6.3.3 | Accord entre simulation non-linéaire et analyse de stabilité | 185 |
| 6.4 | Choix des quantités observées | 189 |
| 6.5 | Comparaison avec l'expérience | 190 |
| 6.6 | Calcul sur base réduite pour le modèle de frein simplifié | 192 |
| 6.7 | Conclusions sur l'application au cas d'un frein simplifié | 195 |
| 7 | Conclusion et perspectives | 197 |
| 7.1 | Conclusions | 198 |
| 7.2 | Perspectives | 199 |
| 7.2.1 | Objectifs à court terme | 199 |
| 7.2.2 | Objectifs à plus long terme | 199 |
| A | Algorithme de bipolarisation | 201 |
| A.1 | Principe du regroupement | 202 |
| A.1.1 | Problème de référence | 202 |
| A.1.2 | Principe de l'algorithme | 202 |
| A.1.3 | Stratégies d'utilisation | 203 |
| A.1.4 | Matrices de ressemblances | 203 |
| A.2 | Exemple d'utilisation | 204 |
| B | Optimisation des paramètres d'augmentation | 211 |
| B.1 | Rappel des formulation utilisées | 212 |
| B.1.1 | Cadre global | 212 |
| B.1.2 | Optimisation des paramètres d'augmentation | 213 |
| B.1.3 | Paramètres constants | 213 |
| B.1.4 | Alternatives à ce choix de paramètres d'augmentation | 214 |
| B.2 | Notations | 215 |
| | Bibliographie | 217 |

Introduction

Contexte industriel

Le crissement est un bruit strident fréquemment produit par les systèmes de freinage, qu'ils soient destinés à l'automobile, à l'aéronautique, au ferroviaire ou même aux systèmes à deux roues (motos, vélos, ...). Si certaines personnes peuvent avoir un attachement « affectif » au bruit de crissement, la plupart des gens le perçoit comme une gêne importante. C'est cette perception négative qui a conduit de nombreux industriels à chercher des leviers d'actions pour éviter ce phénomène. Dans le milieu ferroviaire en particulier, la problématique est la suivante : il s'agit bien de traiter la gêne occasionnée par le crissement, principalement pour les passagers présents sur le quai lors de l'arrivée d'un train en gare, mais aussi pour les riverains et le personnel présent dans les gares. Des relevés de niveaux acoustiques ont montré que le crissement dû à l'arrivée en gare de certains trains pouvait atteindre 110 dB à un mètre du bord du quai.

La figure 1 montre à gauche l'échelle du bruit et illustre le fait que le crissement des freins de trains est émis à proximité immédiate des voyageurs présents sur le quai. Aujourd'hui, la législation concernant le bruit des transports [37] ne prend pas en compte cette nuisance, mais il est probable que lors d'une prochaine révision, il soit demandé aux exploitants d'acheter du matériel roulant moins bruyant.

C'est dans cette optique que s'inscrit ce travail de thèse : développer des outils d'aide à la spécification et à la conception de freins à disque ferroviaires optimisés vis-à-vis du crissement. Ce travail s'inscrit également dans le cadre du projet de recherche industriel AcouFren, projet subventionné par l'ADEME.



(a) Échelle du bruit (source OFEV) (b) Arrivée d'un TGV en gare de Paris Montparnasse

FIGURE 1 – Gêne occasionnée par l'arrivée d'un train en gare

Le phénomène de crissement

Le crissement est donc caractérisé par un bruit strident émis par un système présentant une interface frottante. Il est très répandu dans les systèmes de freinage. Comme beaucoup de phénomènes acoustiques, le crissement a une origine vibratoire : ce sont des vibrations auto-entretenues des différents constituants du système de freinage qui produisent la nuisance sonore. L'origine de ces vibrations se situe au niveau de l'interface frottante entre le disque et les garnitures. Le crissement est donc un phénomène mettant en jeu plusieurs échelles : une échelle mésoscopique où les surfaces en contact vont générer un effort de frottement, et une échelle macroscopique où l'effort de frottement est susceptible d'engendrer une déstabilisation du système et éventuellement des vibrations auto-entretenues qui animent la structure.

Parmi les bruits non-désirables issus de vibrations auto-entretenues dans les systèmes frottants, on trouve le bourdonnement (*hum*) ou le ronflement (*moan*) et le broutement (*groan*) qui sont des vibrations basse fréquence (souvent inférieures à 500 Hz) où les constituants du frein vibrent en tant que corps rigides, et le crissement (*squeal*) qui est une vibration plus élevée en fréquence (souvent au dessus de 1000 Hz) où les composants vibrent en tant que solides déformables.

Organisation du manuscrit

Le présent travail de thèse propose une étude numérique et expérimentale du crissement des freins à disque ferroviaires et plus particulièrement de TGV. Il s'insère dans le projet de recherche AcouFren, subventionné par l'ADEME. L'orientation donnée vise donc à appréhender l'influence des garnitures de frein sur le crissement. La partie expérimentale de ce travail a pour but de rassembler des données mesurées afin de favoriser la compréhension des mécanismes mis en jeu dans le crissement des freins à disque ferroviaires. La partie numérique propose une modélisation du phénomène, dans la continuité des travaux proposés par Lorang [75] et des approches de réduction de modèle afin de permettre de mener des simulations transitoires sur des modèles aux éléments finis réalistes. Pour ce dernier point, un soin particulier a été apporté à l'observation de l'impact de la réduction sur les résultats numériques obtenus. Ce mémoire se divise en six chapitres.

Le chapitre 1 propose une description des systèmes de freinage présents sur TGV. Avec tout d'abord un inventaire des différents systèmes existants, puis une description des caractéristiques des freins à disque étudiés et des garnitures, pour finir par une présentation complète de la problématique du crissement des freins à disque dans le domaine ferroviaire.

Le chapitre 2 traite des vibrations auto-générées. Il présente les différents mécanismes de déstabilisation d'un système par frottement : l'amortissement négatif et le couplage de modes. L'effet paradoxal de l'amortissement y est aussi abordé. Enfin, les différentes notions générales sur l'étude de la stabilité des systèmes non-linéaires sont introduites.

Le chapitre 3 concerne l'observation expérimentale du crissement. La première partie de ce chapitre

est consacrée à une revue des études expérimentales passées, tandis que la deuxième partie présente le protocole mis au point dans le cadre de cette thèse. Enfin, les résultats de la campagne d'essais effectuée sont analysés, ce qui permet de mettre en évidence certaines caractéristiques du crissement sur le frein TGV.

Différentes modélisations du contact unilatéral et du frottement sont présentées dans la première partie du chapitre 4. Ensuite, des méthodes numériques permettant la simulation du contact frottant en dynamique transitoire sont décrites. Ces deux parties permettent de motiver les choix effectués dans ce travail de thèse. Par la suite, la méthode mise en œuvre pour le calcul de la stabilité du système est expliquée, puis différentes méthodes d'approximation et de réduction pour les systèmes non-linéaires permettant de choisir une méthode appropriée au problème de crissement sont présentées.

Une fois les différentes méthodes sélectionnées et les choix motivés, le chapitre 5 permet de valider les hypothèses retenues sur un cas simple. Après la présentation du cas test considéré, des outils d'analyse des résultats de simulation sont introduits. Le comportement non-linéaire dynamique transitoire et stationnaire du système est ensuite étudié sans réduction pour différentes conditions, ce qui permet l'obtention de simulations de référence et de donner un aperçu de l'ensemble des comportements possibles du système. Enfin des stratégies de réduction sont mises en œuvre sur les mêmes cas que ceux testés sur le modèle de référence, ce qui permet de mettre en évidence la capacité ou l'incapacité de ces méthodes à représenter correctement les solutions de référence.

Le dernier chapitre de ce mémoire présente l'application des outils développés à un modèle aux éléments finis simplifié d'un frein TGV. Dans un premier temps, la modélisation retenue est présentée ainsi que la méthode choisie pour recalibrer le modèle à partir des résultats des essais de caractérisation réalisés lors de la campagne décrite dans le chapitre 3. Une fois le recalage terminé, une simulation est effectuée *sans* réduction. Cette simulation est analysée dans un premier temps par rapport aux caractéristiques du modèle, puis en comparaison avec les essais de crissement. Enfin une simulation *avec* réduction est effectuée, afin de statuer sur la faisabilité de développer des outils fiables d'aide à la spécification et à la conception vis-à-vis du crissement de freins à disques ferroviaires.

Chapitre 1

Présentation du système de freinage TGV

Dans ce chapitre, nous allons proposer une description des systèmes de freinage sur TGV et des différents composants qui les caractérisent.

1.1 Les différents systèmes de freinage sur TGV

Le TGV est équipé de plusieurs systèmes de freinage : les motrices sont équipées de freins électrodynamiques ou rhéostatiques, de freins mécaniques et de freins de parking, tandis que les remorques ne sont équipées généralement que de freins mécaniques. On peut toutefois noter que sur les rames TGV POS utilisées sur la LGV Est-Européenne, les motrices et les deux remorques extrêmes sont équipées d'un système de freinage supplémentaire de type patin électromagnétique. Parmi ces différents systèmes de freinage, seuls ceux mécaniques sont utilisables pour les freinages d'arrêt.

Sur les bogies moteurs, les freins mécaniques sont, suivant les modèles, soit des freins à semelle simple venant s'appuyer directement sur la roue, soit des freins à disque ventilé flasqué sur l'une des roues de chaque essieu. Quant aux bogies porteurs, ils sont équipés de freins à disque. La figure 1.1 montre la répartition des types de bogie sur un TGV.

Ces systèmes de freinage sont avant tout des organes de sécurité, leur conception est donc principalement axée pour répondre aux impératifs inhérents à cette finalité : tenues mécanique et thermique, freinage d'urgence, *etc* ... De plus, le système de freinage est conçu pour avoir une durée de vie assez longue afin de minimiser les coûts liés aux interventions de maintenance.

Sur la figure 1.2 sont présentées une vue d'un essieu porteur (1.2(a)) et celle d'une garniture de frein (1.2(b)). On peut voir que chaque essieu d'un bogie de remorque est équipé de quatre disques de frein. Lors du freinage, une timonerie de frein actionnée par un vérin pneumatique vient serrer contre chaque disque une plaquette avec un matériau de friction. Chaque bogie comporte deux circuits pneumatiques indépendants chacun commandant le freinage sur les quatre disques d'un essieu.

L'utilisation la plus fréquente des freins mécaniques demeure le freinage d'arrêt en gare, susceptible de générer des nuisances sonores importantes dues au crissement des freins. Les niveaux sonores engendrés par le crissement d'un TGV en gare peuvent dépasser les 110 dB à 1 m sur le quai. Ci-après, nous allons détailler le fonctionnement des freins à disque des remorques de TGV.

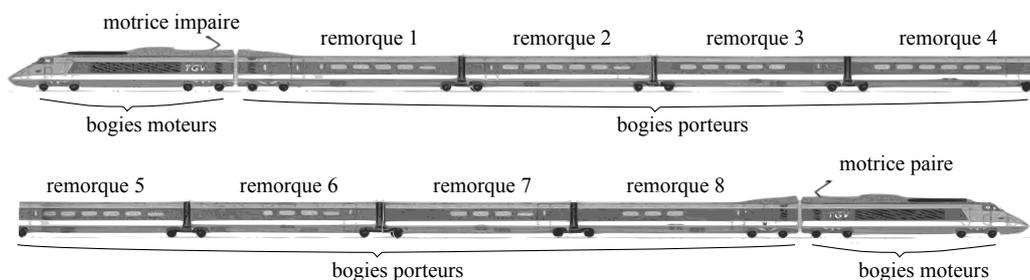


FIGURE 1.1 – Répartition des types de bogie sur une rame TGV

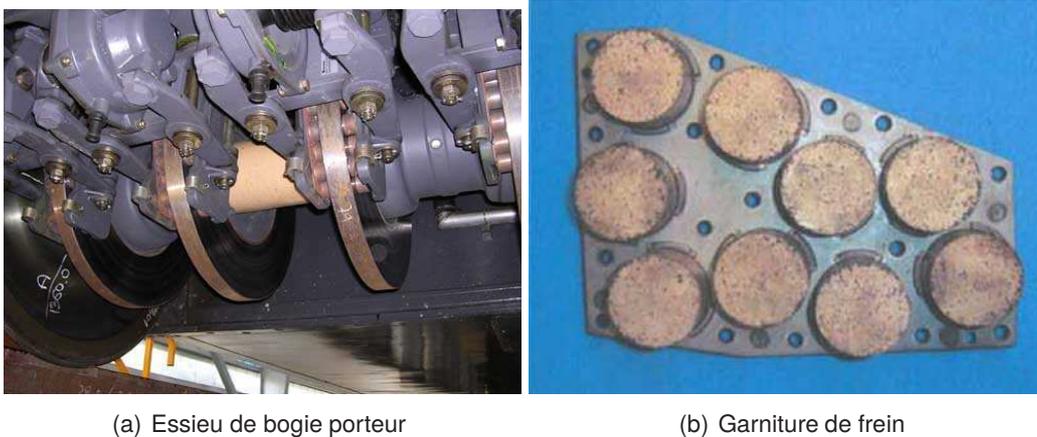


FIGURE 1.2 – Système de freinage sur TGV

1.2 Caractéristiques du système

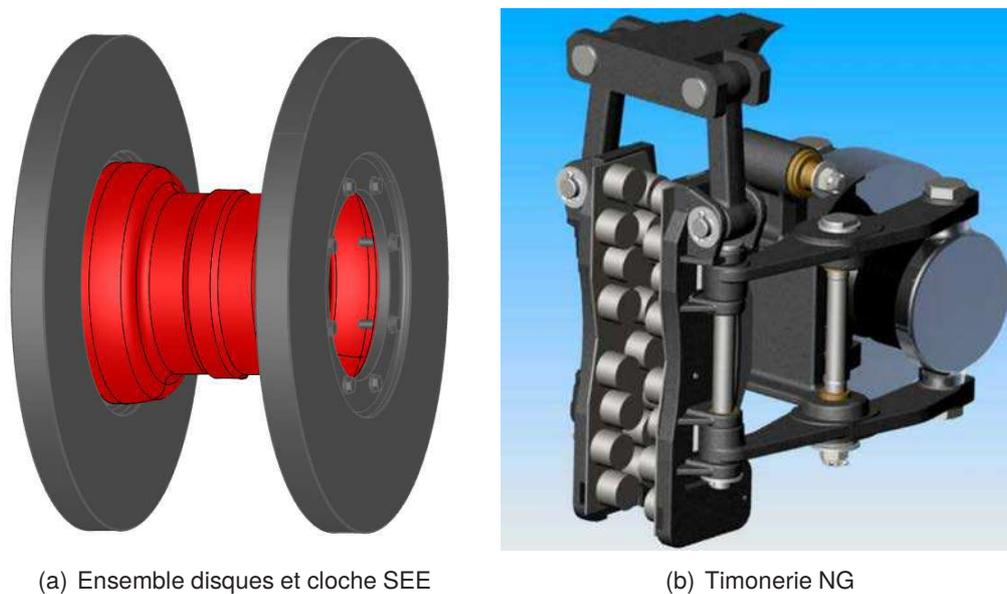
Sur les rames TGV, il existe plusieurs types de disque, de timonerie et de garniture utilisables. Pour les garnitures, cette diversité s'explique non seulement par un souci d'améliorer les performances (longévité, agressivité sur le disque, tenue, *etc* ...) mais aussi par la volonté de maintenir plusieurs fournisseurs pour pérenniser la filière d'approvisionnement. La diversité existante parmi les timoneries provient essentiellement d'un historique de conception des différents modèles de rame TGV. C'est pourquoi le centre d'ingénierie du matériel de la SNCF a procédé à une reconception d'une timonerie unique afin d'améliorer les performances en longévité et de diminuer les coûts de maintenance (homogénéisation des stocks de pièces de rechange, simplification des opérations de changement de pièces, *etc* ...). L'étude que nous menons ici porte sur la relation entre crissement et garniture. De ce fait, il a été choisi de considérer un système disque/timonerie fixé avec différentes garnitures.

Le disque retenu est un disque muni d'une cloche SEE : dans cette architecture, un moyeu (la cloche) est calé sur l'essieu et deux disques y sont fixés. Pour la timonerie, il a été décidé d'utiliser celle ayant été reconçue par la SNCF, désignée timonerie TGV NG. Ce choix est motivé par le fait qu'elle est en cours de déploiement sur le parc TGV actuel.

1.2.1 Caractéristiques mécaniques

1.2.1.1 Le disque de frein et la timonerie

Sur les premiers TGV, les disques de frein étaient en fonte, comme beaucoup de disques dans le domaine ferroviaire. Ce matériau est peu onéreux, possède d'assez bonnes propriétés de capacité et diffusion thermiques et son moulage est maîtrisé par de nombreux fabricants, ce qui permet de garantir une certaine robustesse dans l'approvisionnement. Par la suite, pour permettre la circulation



(a) Ensemble disques et cloche SEE

(b) Timonerie NG

FIGURE 1.3 – Vues CAO d'un frein à disque TGV

à 300 km/h, des disques plus performants et moins sujets aux défauts de fabrication inhérents au moulage de la fonte ont été développés [12]. C'est ainsi qu'ont fait leur apparition sur le parc TGV des disques en acier forgé qui, à poids équivalent, permettent de dissiper 2,5 fois plus d'énergie que les disques en fonte. Le disque de frein retenu dans cette étude est donc un disque plein non-ventilé en acier forgé. Son diamètre extérieur est de 640 mm avec une épaisseur de 45 mm. La liaison entre le disque et la cloche est assurée par l'intermédiaire de 8 vis. Son rôle est de permettre la bonne dilatation thermique du disque lors de freinages énergiques. La CAO de l'assemblage de deux disques sur la cloche SEE peut être observée sur la figure 1.3(a).

La plupart des pièces constituant la timonerie NG sont des pièces en acier forgé. La figure 1.3(b) donne une représentation du mécanisme complet composé de 9 pièces principales.

1.2.2 Les garnitures

Pour chaque disque, on dispose de quatre demi-garnitures. Chaque demi-garniture est constituée de deux parties. La première est le matériau de friction, il est fréquemment disposé sous la forme de plusieurs plots, même si certaines garnitures font exception. Ce matériau est relié à la seconde partie, l'armature, par différents dispositifs suivant le type de garniture. On distingue essentiellement deux types d'architecture pour cette fixation, celle dite à *plots*, où les plots sont encastrés à l'armature, typiquement par brasage comme c'est le cas pour la garniture montrée sur la figure 1.4(a), et les autres, où l'assemblage des plots se fait au travers d'un mécanisme plus ou moins sophistiqué afin d'améliorer le guidage de la face intérieure vers le disque, comme illustré sur la figure 1.4(b).

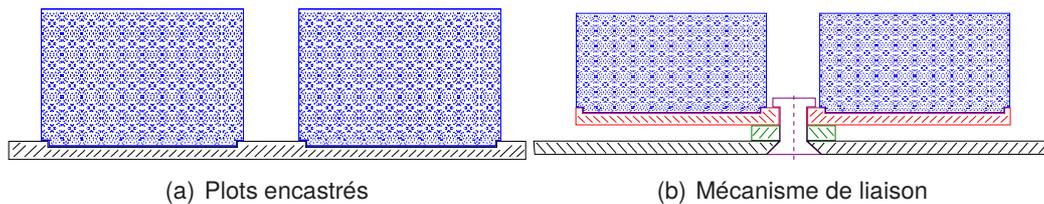


FIGURE 1.4 – Exemples des deux architectures de garniture

Pour des raisons de limitation du bruit de roulement, les freins à semelles ont été éliminés du parc TGV. L'usage exclusif du frein à disque comme frein mécanique sur les rames a fait émerger un besoin spécifique : celui de développer des garnitures peu sensibles à l'humidité. Effectivement, les garnitures généralement utilisées sur les freins à disque des matériels ferroviaires ont tendance à voir leur facteur de frottement fortement diminuer en présence d'humidité. Pour remédier à ce problème, les fabricants de garnitures se sont tournés vers du matériau fritté à base métallique (fer, cuivre ou bronze). Les garnitures métalliques utilisées sur TGV sont beaucoup plus dures que les garnitures composites plus fréquentes ailleurs. Si ce choix a permis de rendre le facteur de frottement moins sensible aux vitesses, aux évolutions de température et à l'humidité, il serait aussi responsable d'une plus grande propension à générer des points chauds sur le disque, ce qui peut conduire à la formation de défauts sur cet organe.

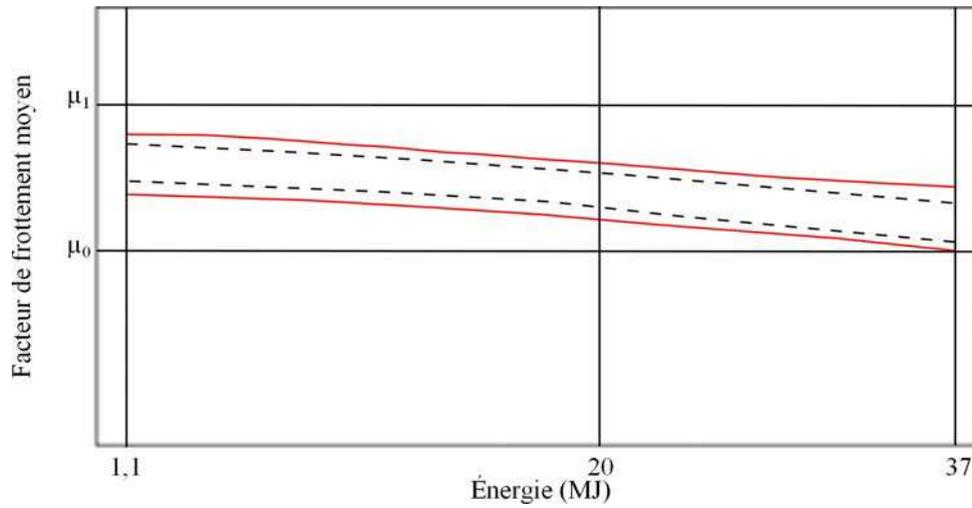
Les caractéristiques du matériau de friction ont un effet important sur les propriétés tribologiques de l'interface disque/garniture et sont un élément-clé pour vérifier les exigences en termes de performance de freinage telles qu'un facteur de frottement minimal à garantir sous diverses conditions (humidité, chaleur, ...). Pour agir sur ces propriétés, les leviers à la disposition des fabricants sont les formulations des mélanges et les caractéristiques du procédé de frittage qu'ils utilisent. Ces différents points font partie des secrets industriels des fabricants, nous n'avons donc pas accès à ces données. Pour la caractérisation mécanique des matériaux de friction des garnitures, nous disposons donc, comme données d'entrée, de mesures expérimentales effectuées par la société Vibratec, qui permettent de remonter aux raideurs dynamiques des plots, et donc d'estimer les paramètres matériau [117–119].

L'interface entre le matériau de friction et l'armature peut aussi être très complexe. On y trouve des assemblages par divers procédés et des surfaces en contact frottant qui, lors d'un freinage, peuvent se retrouver dans une configuration mal connue (zone effective de contact non-déterminée).

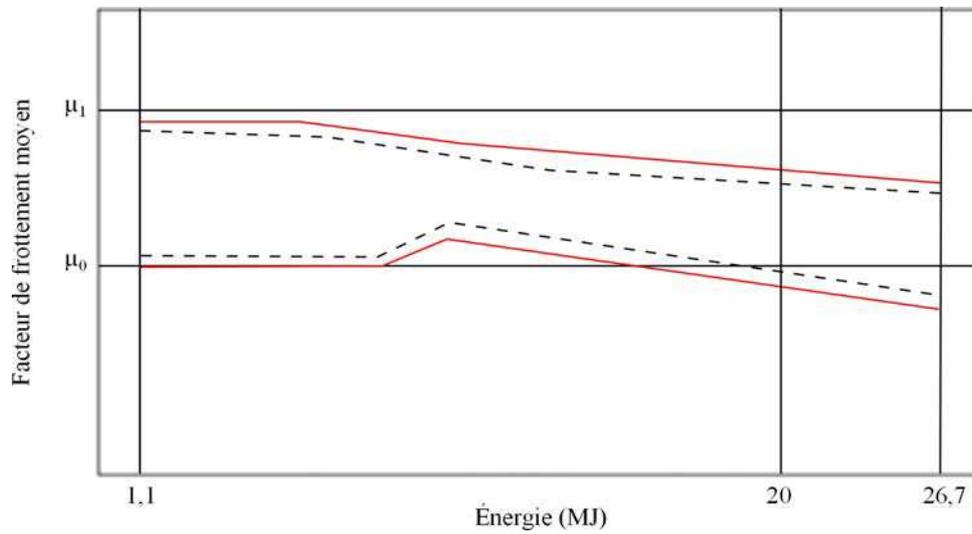
Toutes les garnitures utilisées en service suivent des spécifications imposées en terme de performance. En particulier, d'un point de vue tribologique, les performances spécifiées concernent l'évolution du facteur de frottement moyen au cours du freinage en fonction de l'énergie de freinage, et celle du facteur de frottement instantané en fonction de la vitesse du train (donc de la vitesse de glissement à l'interface disque/garniture). L'allure des courbes de spécification est donnée sur la figure 1.5. Pour son homologation, une garniture doit subir un certain nombre d'essais sur banc sous diverses conditions contrôlées d'humidité, de vitesse et d'effort de freinage. La garniture ne doit jamais dépasser certains seuils (courbes rouges) et doit rester, en moyenne, dans d'autres limites (courbes

en pointillés noir). À titre informatif, le freinage à 1,1 MJ représente une masse de 4,5 t (soit 18 t à l'essieu) à 80 km/h freinée par le disque, tandis qu'un freinage à 26,7 MJ représente une masse de 6 t à 340 km/h.

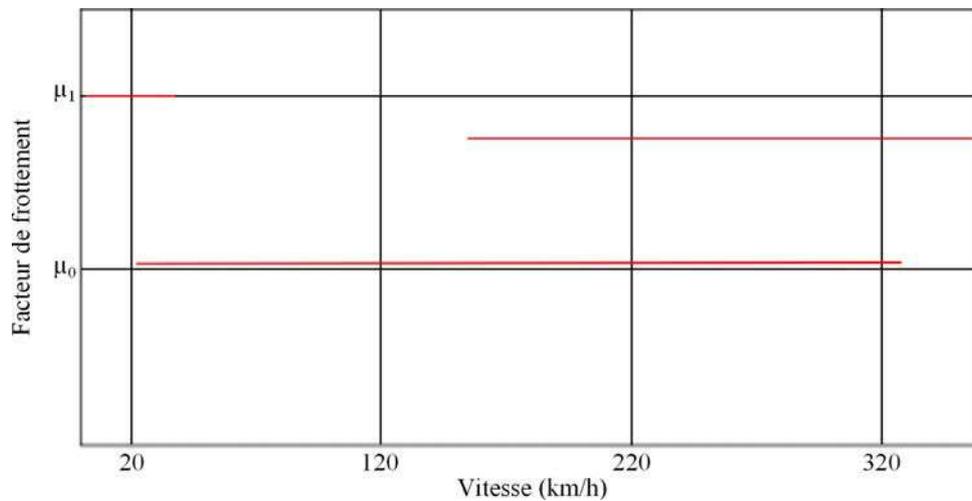
D'autres éléments spécifiés dans le cahier des charges [112] concernent la tenue mécanique des garnitures, la tenue thermique (propriétés non-dégradées jusqu'à 500°C), l'agressivité vis-à-vis du disque et, depuis 2009, un gabarit acoustique à respecter. Il est à noter que parmi les garnitures actuellement utilisées sur TGV, aucune ne respecte ce gabarit.



(a) Évolution du facteur de frottement moyen à sec



(b) Évolution du facteur de frottement moyen sous humidité



(c) Évolution du facteur de frottement avec la vitesse

FIGURE 1.5 – Allure des courbes de spécification du facteur de frottement. — Limites haute et basse, - - limites en moyenne sur l'ensemble des freinages.

1.3 Principe de fonctionnement du frein à disque sur TGV

Tous les disques d'un essieu étant identiques, nous n'en considérons ici qu'un seul. Le système de freinage autour d'un disque est composé de deux garnitures placées dans des porte-garnitures, d'un étrier composé de quatre bras, de deux biellettes et du cylindre de frein. Lorsque la pression augmente dans le cylindre de frein, celui-ci pousse les bras de l'étrier qui est en liaison pivot par rapport au bogie. Les porte-garnitures, en liaisons pivot avec l'étrier, se trouvent alors rapprochés du disque de frein et pressent les garnitures contre ses faces planes. Les garnitures sont montées en liaison glissière avec leur porte-garniture à l'aide d'une queue d'aronde. Les jeux dans cette liaison sont importants et le blocage des garnitures ne se fait que lors des freinages. Les biellettes, en liaison pivot avec le porte-garniture et le bogie, assurent un rôle de guidage du porte-garniture ainsi que la reprise des efforts de freinage. Suivant le sens de rotation du disque, ces biellettes travaillent donc soit en traction, soit en compression. La fonction de guidage du porte-garniture permet d'améliorer le contact garniture/disque en maintenant la garniture assez parallèle au disque. La figure 1.6 montre le schéma cinématique du mécanisme.

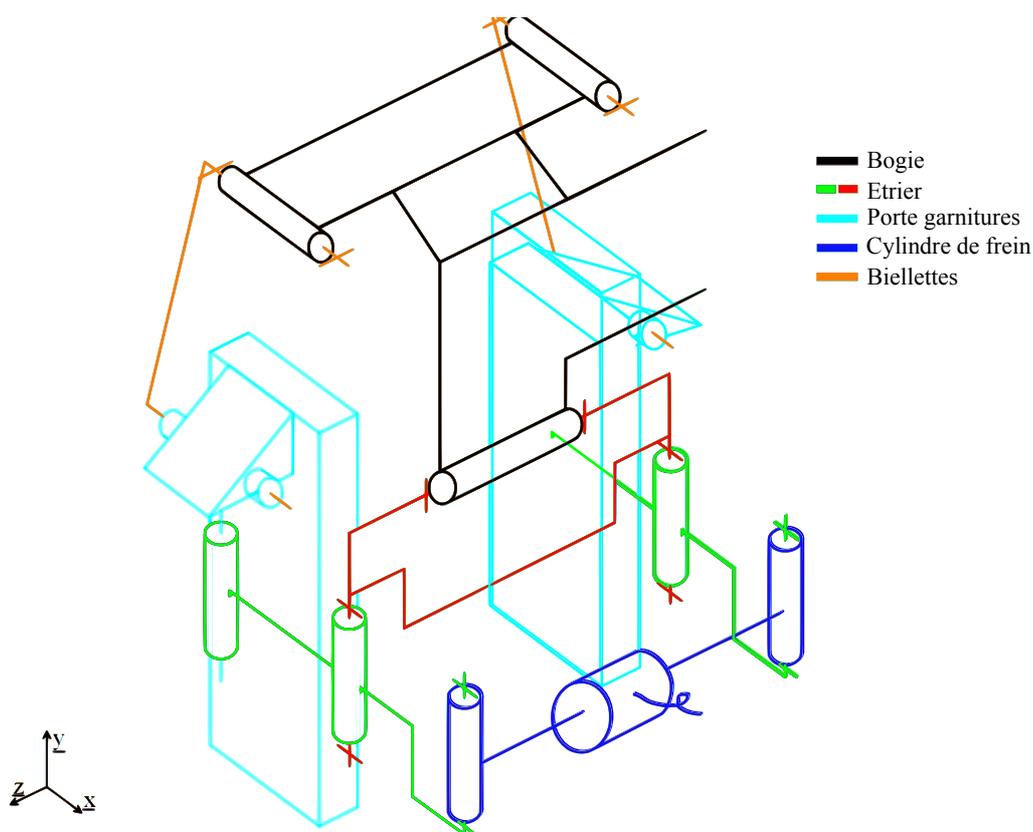


FIGURE 1.6 – Timonerie TGV NG : schéma cinématique

1.4 Problématique du crissement des freins ferroviaires

Contrairement à l'automobile, où le crissement engendre un problème de qualité perçue du véhicule par le client, et donc des retours importants, dans le domaine ferroviaire, les deux points essentiels relatifs au crissement sont d'une part la conformité à une réglementation de plus en plus stricte vis-à-vis du bruit des transports, et d'autre part le souci du confort des clients et des riverains des gares. Sur le volet législatif, les opérateurs ferroviaires sont tenus, lors du renouvellement de leur parc matériel, de le mettre en conformité avec les Spécifications Techniques d'Interopérabilité (STI). Dans le domaine du bruit, il existe la STI Bruit [37] qui impose des limitations pour le matériel roulant.

La réglementation actuelle traite du bruit au démarrage, au passage et en stationnement. Une révision de cette STI est prévue et devrait intégrer des limitations sur les phases de décélération. Le bruit de crissement risque dès lors de devenir un des principaux obstacles à la conformité du matériel roulant aux STI en phase de décélération. Du point de vue du confort, le constat de niveaux sonores très élevés en gare est manifeste. Ces niveaux constituent une gêne aussi bien pour les voyageurs sur les quais, que pour le personnel travaillant en gare. Il existe donc un réel enjeu, tant pour les constructeurs que pour les opérateurs, de se préparer à une maîtrise du phénomène par la spécification du système de freinage.

Pour permettre de réduire le crissement y compris sur le matériel existant, une idée intéressante est d'agir sur le composant garniture du système de freinage : en effet, il s'agit d'un composant consommable dont le changement est facile et relativement fréquent par rapport aux autres éléments de ce système. Dans le cadre du projet CRISFIS [113], certains paramètres garnitures avaient été identifiés comme leviers possibles pour lutter contre le phénomène. En s'appuyant sur l'acquis des projets précédents, la démarche mise en œuvre dans le projet AcouFren, dans lequel s'inscrit ce travail de thèse, consiste à chercher à identifier parmi un panel de garnitures existantes les paramètres les plus influents sur la génération du crissement, et en particulier sur les niveaux sonores enregistrés, puis à mettre en place une démarche de modélisation du phénomène de crissement afin de proposer un outil numérique d'évaluation des champs vibratoires et acoustiques utilisable en phase de conception amont. Enfin, la validité des modèles proposés sera testée en vérifiant que les tendances identifiées expérimentalement sont reproduites numériquement.

Dans le cadre de cette thèse, nous mènerons une étude expérimentale du crissement sur différentes garnitures de frein TGV et nous introduirons une modélisation du phénomène permettant de mener des calculs numériques. À cette fin, il sera nécessaire de mettre en œuvre une méthode de réduction de modèle. Nous nous intéresserons alors à la possibilité de prédire par un modèle suffisamment réduit les niveaux vibratoires au cours d'un crissement, d'une part par rapport à un modèle de référence non-réduit, et d'autre part par rapport aux essais menés sur banc.

Chapitre 2

Vibrations auto-générées

Nous nous intéressons ici aux diverses modélisations expliquant l'apparition de vibrations auto-entretenues induites par frottement sec. Il existe plusieurs mécanismes bien différents pouvant expliquer la génération de vibrations auto-entretenues liées au frottement, et il est très probable que chacun de ces mécanismes joue un rôle dans les systèmes réels. Parmi les premiers mécanismes avancés on trouve ceux d'origine purement tribologique qui sont le *stick-slip* et une déstabilisation du système par amortissement négatif induit par la loi de frottement ; ces mécanismes sont à même d'expliquer des vibrations pour des systèmes quel que soit leur nombre de degré de liberté mais avec des variations de frottement. Une deuxième catégorie de mécanismes est celle d'origine structurelle, elle comprend le *sprag-slip* et le *couplage de modes* qui peuvent expliquer des vibrations avec un frottement constant mais plusieurs degrés de liberté. Ces quatre mécanismes sont les principaux mécanismes que l'on retrouve dans la littérature tels que détaillé par Ibrahim [63, 64], Oden et Martins [93] ou Crolla [26]. Dans un premier temps, nous allons montrer, sur un système mécanique à un degré de liberté, comment l'on étudie la possibilité d'existence de vibrations auto-entretenues, puis nous verrons les deux mécanismes tribologiques et enfin les deux mécanismes structuraux. Par la suite nous donnerons quelques notions sur la stabilité des systèmes.

2.1 Système à un degré de liberté

Nous considérons ici un système mécanique à un degré de liberté constitué d'une masse m reliée à un plan fixe par le biais d'un ressort linéaire de raideur k , d'un amortisseur visqueux linéaire de constante c et d'une liaison non-linéaire exerçant un effort sur la masse de la forme $F = G(x, \dot{x}, t)$, où x représente la position de la masse, \dot{x} sa vitesse et t le temps. Un tel système est illustré par la figure 2.1. La dynamique de ce système est régie par l'équation suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = G(x, \dot{x}, t) \quad (2.1)$$

On prend comme référence pour la position l'équilibre statique du système. On suppose que G est différentiable par rapport à chacune de ses variables au point $(0, 0, t)$. La dynamique des très petites perturbations autour de l'équilibre peut être approchée par la linéarisation de l'équation (2.1), ce qui donne l'équation (2.2) qui est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

$$m\ddot{x} + \left(c - \frac{\partial G(0, 0, t)}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x} + \left(k - \frac{\partial G(0, 0, t)}{\partial x} \right) x = 0 \quad (2.2)$$

Pour un système mécanique, on a toujours $m > 0$, donc en utilisant les résultats de Nayfeh [89] sur la stabilité des systèmes on obtient la condition suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = G(x, \dot{x}, t) \text{ stable} \iff \begin{cases} c > \frac{\partial G(0, 0, t)}{\partial \dot{x}} \\ k > \frac{\partial G(0, 0, t)}{\partial x} \end{cases} \quad (2.3)$$

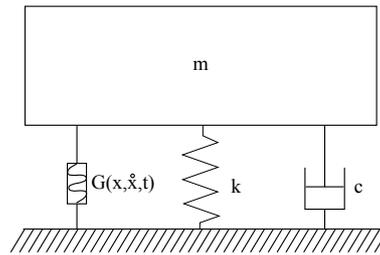


FIGURE 2.1 – Système mécanique non-linéaire à 1 degré de liberté

Si cette condition est vérifiée, les solutions de l'équation (2.2) seront amorties et tendront vers 0 quand le temps tend vers l'infini : le système aura donc tendance à rester autour de sa position d'équilibre et aucune vibration auto-entretenu ne se produira. En revanche, si le système est instable, alors des vibrations de limites non nulles pourront se produire sans excitation extérieure.

2.2 Mécanismes d'origine tribologique

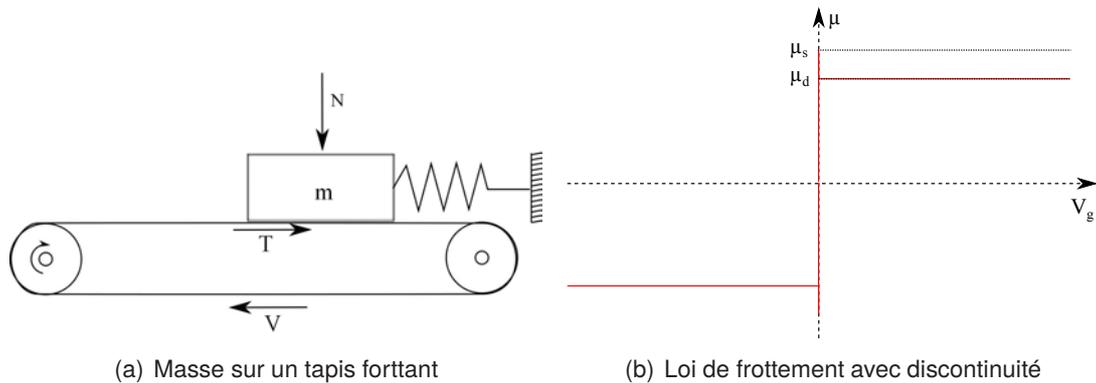
2.2.1 Cas du *stick-slip*

Les premières tentatives pour expliquer les vibrations auto-entretenu existantes dans les systèmes frottants ont privilégié la piste de lois de frottement plus ou moins complexes induisant une instabilité. Parmi ces lois, celles qui exhibent une discontinuité du coefficient de frottement entre l'état adhérent et celui glissant permettent de modéliser un phénomène de *stick-slip* (coller glisser) qui a longtemps été considéré comme l'une des explications des instabilités observées. Ainsi, si l'on considère comme effort non-linéaire l'expression donnée par G_1 (Équation (2.4)) et un amortissement nul, le système peut montrer des oscillations auto-entretenu.

$$\begin{aligned} G_1(x, \dot{x}, t) = G_1(\dot{x}) &= \mu_d N \operatorname{sign}(V - \dot{x}) \text{ si } \dot{x} \neq V \\ |G_1(V)| &\leq \mu_s N \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avec une telle force non-linéaire, le système de la figure 2.1 peut aussi être vu de manière plus expressive comme une masse sur un tapis frottant (figure 2.2(a)) avec la loi de frottement dont le graphe est donné par la figure 2.2(b) en fonction de $V_g = V - \dot{x}$.

Si le système est dans un état où la masse suit le tapis, (*i.e.* $V_g = 0$), et que le ressort est faiblement tendu, alors au fur et à mesure du déplacement de la masse le long du tapis, l'effort de frottement T va croître et atteindre la valeur limite $\mu_s N$. À ce moment, la masse va commencer à glisser le long du tapis, avec un effort de frottement valant $\mu_d N$. La masse pourra retrouver une situation d'adhérence lorsque sa vitesse sera égale à celle du tapis avec un effort exercé par le ressort inférieur à $\mu_s N$.

FIGURE 2.2 – Mécanisme de *stick-slip*

Pour étudier le comportement d'un système soumis à cet effort non-linéaire, nous introduisons l'abscisse d'adhérence x_a qui est telle que $G(V) = kx_a$. Cette abscisse marque le changement de statut de frottement entre adhérence et glissement. On regarde alors les trajectoires que peut avoir ce système dans l'espace des phases (x, \dot{x}) . On suppose l'équilibre quasi-statique du système se fait pour $x = x_e = \mu_d N/k$. Dans l'espace des phases, l'adhérence est décrite par le segment $([-x_a, x_a], V)$. Lorsque V_g est positif, les trajectoires sont des ellipses centrées sur $(x_e, 0)$, et lorsque que V_g est négatif, ce sont des ellipses centrées sur $(-x_e, 0)$. Il est alors possible de distinguer trois cas en fonction des conditions initiales :

- ◆ Si les conditions initiales sont dans l'ellipse limite E_l de centre $(x_e, 0)$ et tangente au segment d'adhérence $([-x_a, x_a], V)$, le système est stable et décrit une ellipse comprise dans E_l
- ◆ Si les conditions sont prises sur le segment $([-x_a, x_a], V)$, le système décrit le segment jusqu'au point (x_a, V) puis part sur une portion d'ellipse centrée sur $(x_e, 0)$ et rejoignant le segment au point $(2x_e - x_a, V)$. Le système décrit alors une trajectoire fermée Γ_l
- ◆ Dans tous les autres cas, le système décrira des portions d'ellipse jusqu'à couper le segment d'adhérence et retrouver le comportement précédent.

Ces trois cas sont illustrés sur la figure 2.3. Pour le premier cas, il est à noter que si les conditions initiales coïncident avec l'équilibre, l'ellipse est naturellement dégénérée en un point : $(x_e, 0)$. De plus, l'existence des oscillations auto-entretenues est conditionnées par l'absence totale d'amortissement. En effet, l'ajout, même infinitésimal, d'amortissement conduirait les ellipses et portions d'ellipse à devenir des spirales convergeant vers leur centre. Ce phénomène conduirait alors la solution au point stationnaire $(x_e, 0)$.

2.2.2 Cas de l'amortissement négatif

En considérant toujours le même système, mais en prenant un effort non-linéaire décrit par G_2 (Équation (2.5)), ce qui revient à prendre une loi de frottement dont le graphe est donné par la figure 2.4, on obtient là aussi un système pouvant osciller de manière auto-entretenue, et ce, en fonction des

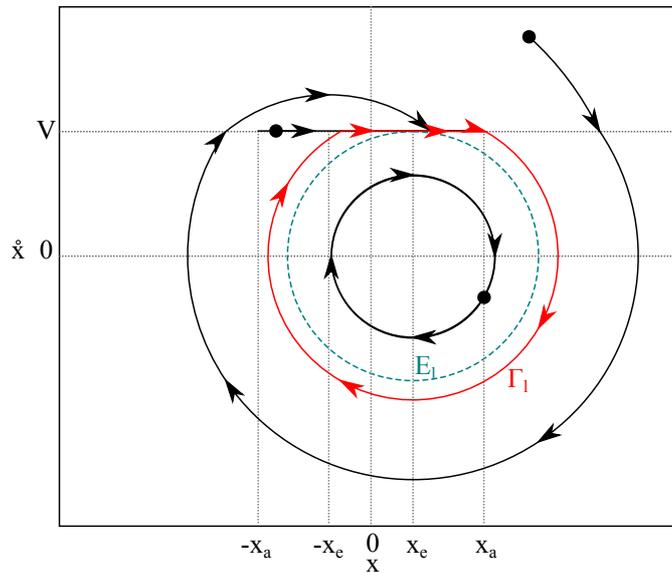


FIGURE 2.3 – Évolution dans l'espace des phases avec un phénomène de *stick-slip*

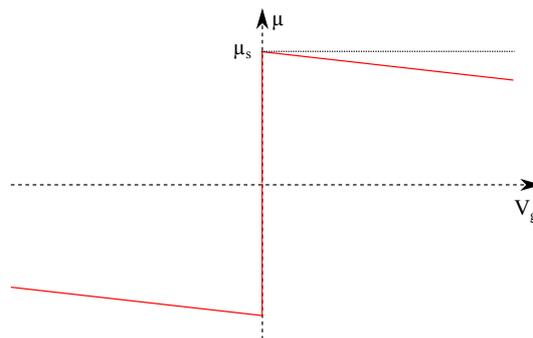


FIGURE 2.4 – Loi de frottement avec décroissance du coefficient

paramètres de la loi de frottement retenue.

$$G_2(x, \dot{x}, t) = G_2(\dot{x}) = \left[\mu_s - \mu_1 \frac{|V - \dot{x}|}{V_1} \right] \text{sign}(V - \dot{x})N \text{ si } \dot{x} \neq V \tag{2.5}$$

$$|G_2(V)| \leq \mu_s N$$

L'application des conditions de stabilités évoquées dans la section précédente prédit un système stable pour $\frac{\mu_1}{V_1} < \frac{c}{N}$. En effet, dans le système linéarisé, la force de frottement avec un coefficient décroissant en fonction de la vitesse se traduit par un amortissement négatif équivalent $\frac{\mu_1}{V_1}N$. Dès lors, il suffit que cet amortissement négatif soit strictement supérieur à l'amortissement naturel du système pour provoquer une instabilité. Dans le cas où le système est instable, le point d'équilibre $S = (x_e, 0)$ est un équilibre instable : si le système commence à s'en écarter, alors sa trajectoire dans l'espace

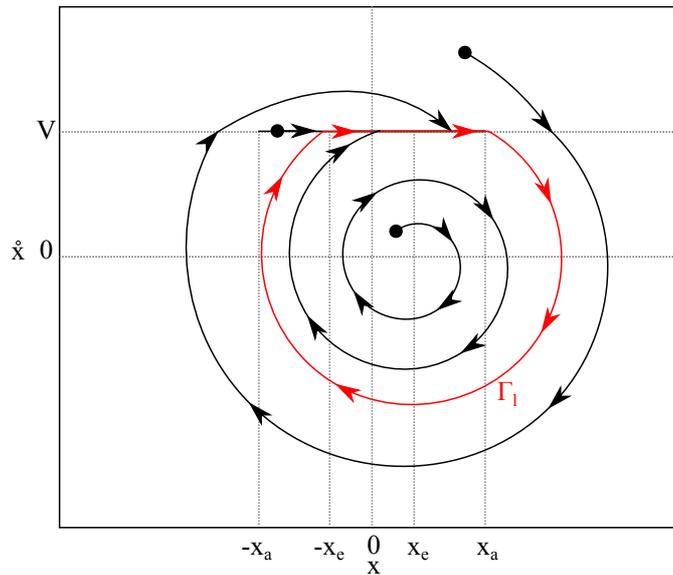


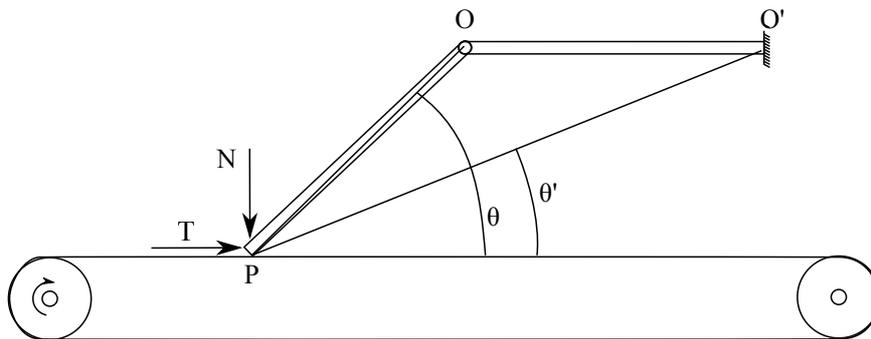
FIGURE 2.5 – Évolution dans l'espace des phases avec amortissement négatif

des phases sera une spirale divergente partant de S . Cette spirale croisera le segment d'adhérence $([-x_a, x_a], V)$ et le comportement sera alors proche de celui observé dans le cas précédent mais avec une portion de spirale divergente décrite plutôt qu'une portion d'ellipse. La figure 2.5 montre les différents types de trajectoires possibles dans l'espace des phases pour le cas instable.

Contrairement au cas précédent, cette instabilité ne repose pas sur l'absence d'amortissement : l'ajout d'un amortissement infinitésimal ne stabilise pas le système. Nous avons utilisé ici une loi avec une décroissance linéaire comme celle utilisée par Paliwal dans [96], mais comme le montre la condition de stabilité, ce qui importe c'est la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement à l'origine.

2.3 *Sprag-slip* et couplage de modes

Les deux mécanismes présentés ici mettent en jeu la géométrie de la structure ou des effets structuraux plus complexes. Le phénomène de *sprag-slip* (arc-boutement glissement) est assez simple à saisir sur de petits systèmes, tandis que le couplage de modes est plus abstrait. Le principe sous-jacent est que les vibrations sont liées à une variation des efforts de contact due à l'évolution de la configuration géométrique du système.

FIGURE 2.6 – Illustration du principe du *sprag-slip*

2.3.1 Cas du *sprag-slip*

Ce mécanisme, permettant d'expliquer les vibrations générées par le frottement a donc été introduit par Spurr en 1962. Le principe, assez simple, est illustré sur la figure 2.6. Une barre rigide horizontale avec une liaison très raide en O' est en liaison pivot parfaite en O avec une deuxième barre rigide dont l'extrémité P repose sur un tapis frottant avec un coefficient de frottement μ . L'effort normal N est appliqué en P , et on note T l'effort tangentiel dû au tapis. En considérant que l'on a un encastrement en O' , l'effort tangentiel s'exprime en fonction de l'angle θ comme suit :

$$T = \frac{\mu N}{1 - \mu \tan(\theta)} \quad (2.6)$$

Lorsque l'angle θ évolue et se rapproche de la valeur $\arctan(1/\mu)$, il devient suffisamment important pour bloquer le mouvement, on entre alors dans la phase d'arc-boutement du mécanisme de *sprag-slip*. Lorsque l'effort devient assez grand, on ne peut plus considérer la liaison en O' comme un encastrement, il est alors plus juste de considérer un pivot parfait en O' et une barre rigide PO' . L'angle intervenant dans l'expression de l'effort tangentiel devient alors l'angle θ' , bien plus faible que l'angle θ , la valeur de l'effort diminue donc brutalement et permet à nouveau le glissement.

Ce type de comportement est aussi modélisable par le système représenté sur la figure 2.1 en prenant l'expression suivante pour la force non-linéaire :

$$G(x, \dot{x}, t) = \mu Kx \quad (2.7)$$

La condition de stabilité du système devient alors $K < \frac{k}{\mu}$. Ces deux moyens permettent d'expliquer des vibrations dans des systèmes sans variation du coefficient de frottement, ce qui est nécessaire pour traduire certaines observations expérimentales. En revanche avec le modèle de Spurr, le système doit être suffisamment simple pour pouvoir exprimer la relation liant l'effort au changement de configuration. Pour des systèmes plus complexes, où une telle relation est difficile à expliciter, l'approche par couplage de modes permet une généralisation du *sprag-slip*.

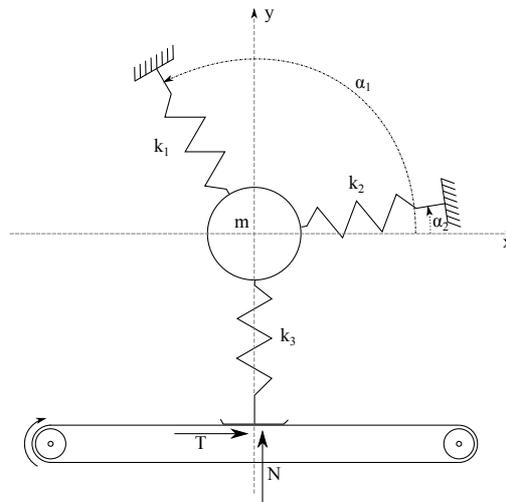


FIGURE 2.7 – Couplage de modes – modèle minimal de Hoffmann

2.3.2 Cas du couplage de modes

D'un point de vue physique, l'instabilité de *sprag-slip* peut être vue comme la coalescence de deux modes d'un système. Cette interprétation nécessite alors de disposer d'un système avec au moins deux degrés de liberté pour obtenir deux modes susceptibles de coalescer. Un modèle simple permettant de mettre en évidence ce phénomène, donné par Hoffmann *et al.* [59], est représenté sur la figure 2.7. Sa dynamique est gouvernée par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} + \mu k_3 \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

où $k_{11} = k_1 \cos^2(\alpha_1) + k_2 \cos^2(\alpha_2)$, $k_{12} = k_1 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) + k_2 \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2)$ et $k_{22} = k_1 \sin^2(\alpha_1) + k_2 \sin^2(\alpha_2) + k_3$. On peut remarquer que le frottement induit une dissymétrie de la matrice de raideur du système. D'un point de vue mathématique, c'est cette dissymétrie qui va apporter l'instabilité en apportant une partie réelle aux valeurs propres du système différentiel.

Les solutions de ce système différentiel sont de la forme $x e^{\lambda t}$ où $\lambda = a + i\omega$ est une racine du polynôme caractéristique du système. Lorsque a est positif, le système est instable.

Les figures 2.8(a) et 2.8(b) montrent la coalescence des deux modes avec l'augmentation du coefficient de frottement pour une masse unitaire et les autres paramètres suivants : $k_1 = 10000$ N/m, $k_2 = 15000$ N/m, $k_3 = 32000$ N/m, $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$ et $\alpha_2 = 0$.

Sur ces figures, on voit les fréquences des deux modes se rapprocher pour devenir égales en $\mu = 0.34$, puis lorsque μ continue d'augmenter, le premier mode voit sa partie réelle croître tandis que le second voit la sienne décroître. On peut voir sur ce système une propriété souvent observée qui est la constance de la somme des parties réelles des deux modes couplés. Ici on a très clairement $\Re(\lambda_1) =$

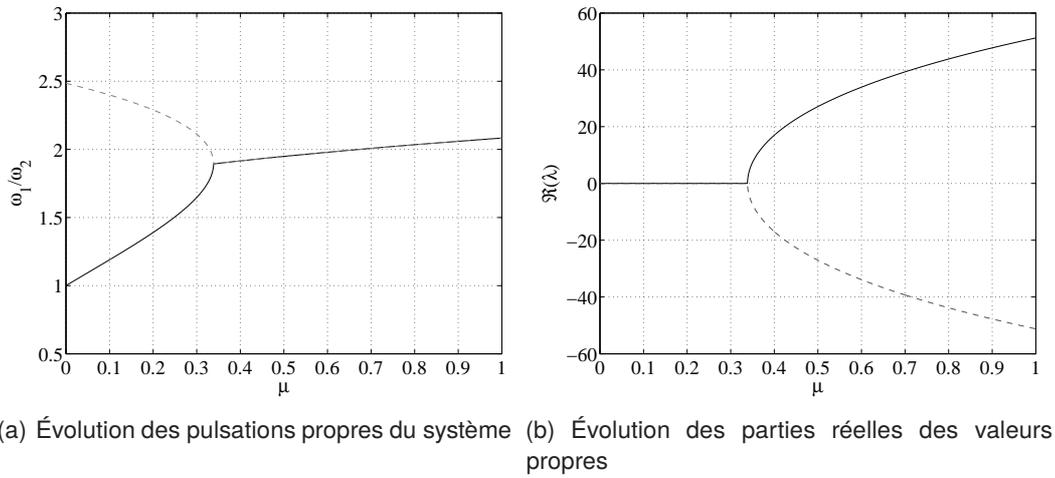


FIGURE 2.8 – Coalescence des deux modes du système

$-\Re(\lambda_2)$ pour toutes les valeurs de μ du fait de l'absence d'amortissement dans le système. L'effet de l'amortissement sera abordé dans la section suivante. Sur ce système, une condition nécessaire pour pouvoir obtenir une déstabilisation par le frottement est un couplage entre les deux degrés de liberté. Ici ce couplage dépend des valeurs choisies pour les angles α_1 et α_2 .

Les mécanismes de *sprag-slip* et de couplage de modes ont montré leur excellent accord avec des expériences telles que celles de Jarvis et Mills [65] sur un système de type poutre sur disque. Au cours de ces expériences, les auteurs ont mis en évidence des instabilités liées à l'inclinaison de la poutre sur le disque sans que des variations de coefficient de frottement suffisantes pour en être la cause soient constatées. De plus, le modèle de Spurr appliqué à cette expérience a donné des résultats prédictifs. Ces mécanismes ont aussi été largement utilisés pour des études sur des systèmes de type pion sur disque [34, 35]

Les mécanismes structuraux et tribologiques introduits sont tout à fait compatibles et peuvent être utilisés dans un même modèle. Ainsi on peut considérer une force $G(x, \dot{x}, t) = \left(\mu_0 - \frac{\mu_1}{V_1} |\dot{x} - V| \right) Kx$, qui cumule l'effet d'un coefficient de frottement décroissant avec la vitesse de glissement du *stick-slip* et celui de l'arc-boutement du *sprag-slip*. Les conditions de stabilité du système soumis à cet effort sont données de manière assez simple par les dérivées partielles de G :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = G(x, \dot{x}, t) \text{ stable} \iff \begin{cases} c > -\frac{Kx_0\mu_1}{V_1} \\ k > K \left[\mu_0 - \frac{\mu_1}{V_1} |\dot{x}_0 - V| \right] \end{cases} \quad (2.9)$$

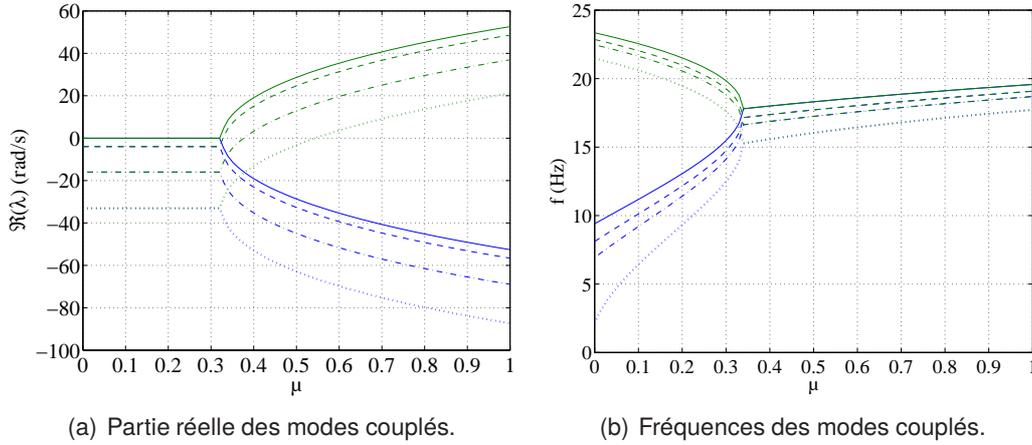


FIGURE 2.9 – Effet d'un amortissement isoréparti sur la stabilité – — : $c = 0$ Po m, - - : $c = 40$ Po m, - · - : $c = 80$ Po m, ... : $c = 115$ Po m

2.4 Effet de l'amortissement dans le couplage de modes

Nous avons vu que l'amortissement pouvait avoir un effet bénéfique sur la stabilité des systèmes dont le mécanisme de déstabilisation est le *stick-slip*. Dans le cas de la loi de frottement discontinue, il stabilise inconditionnellement le système. Dans le cas de la loi à coefficient de frottement décroissant, il compense au minimum l'amortissement négatif induit par la loi et permet la stabilisation du système.

En ce qui concerne le mécanisme de couplage de modes, la stabilisation par ajout d'amortissement est une option intéressante mais qui peut donner des résultats peu intuitifs [20, 55]. Nous allons reprendre ici le même système que celui étudié dans la section précédente, en y ajoutant un amortissement diagonal. L'équation gouvernant le système devient donc :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} + \mu k_3 \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Dans un premier temps, nous observons les conséquences de l'ajout d'un amortissement isoréparti entre les deux degrés de liberté, c'est à dire $c_1 = c_2 = c$. La figure 2.9 montre l'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement μ pour différents amortissements c . On peut constater que l'amortissement isoréparti ne change pas la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle les deux modes se couplent. Par contre, il influence sur la valeur critique pour laquelle une des valeurs propres devient à partie réelle positive.

En revanche, il existe un effet paradoxal de l'amortissement sur l'instabilité par couplage de modes décrit entre autres par Fritz, Chevillot, et Hervé [20, 44, 54] : lorsque l'amortissement n'est pas isoréparti, il peut contribuer à déstabiliser le système.

Pour illustrer ce paradoxe, nous allons maintenant étudier le système pour $c_1 \neq c_2$. Pour ce faire, nous

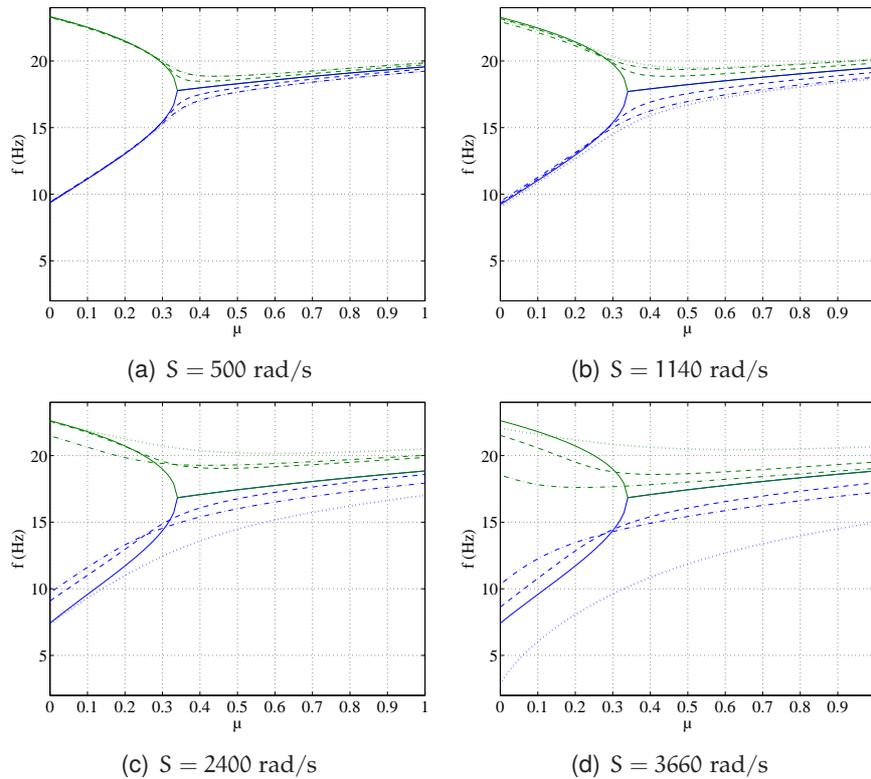


FIGURE 2.10 – Influence de l'amortissement et de sa répartition sur les fréquences propres. — : isorépartition, ... : $c_1/c_2 = 0$, - - : $c_1/c_2 = 3$, - · - : $c_1/c_2 = \infty$

choisissons $c_1 = p c_{\text{tot}}$ et $c_2 = (1 - p) c_{\text{tot}}$ avec p compris entre 0 et 1. Du fait de l'invariance de la somme des parties réelles des modes couplés par rapport à μ , donner la valeur de c_{tot} est équivalent au choix de la quantité $S = -\frac{\Re(\lambda_1) + \Re(\lambda_2)}{2}$. La figure 2.10 montre l'évolution des fréquences des deux modes en fonction du coefficient de frottement pour différentes valeurs de S avec différentes répartition c_1/c_2 , tandis que la figure 2.11 montre celle des parties réelles. On peut observer que la répartition de l'amortissement a un effet très sensible tant sur les fréquences que sur les parties réelles. La répartition de l'amortissement a un effet sur la coalescence : plus la disparité est grande, moins la coalescence est parfaite mais surtout, suivant la répartition, l'instabilité peut survenir beaucoup plus tôt que dans le cas non-amorti. Ainsi, sur la figure 2.11(d), malgré un amortissement très fort, l'instabilité peut se produire pour $\mu = 0, 1$, soit pour une valeur plus de trois fois moins élevée que pour le cas isoréparti ou encore le cas sans amortissement.

La figure 2.12(a) montre en revanche comment la répartition influe sur le domaine de stabilité du système, et ce, pour différentes valeurs de la quantité totale d'amortissement S . Cette figure illustre très bien le paradoxe de déstabilisation par l'amortissement, car effectivement en dessous d'un certain seuil d'amortissement, le domaine de stabilité est réduit. Ces observations mettent en évidence la difficulté de prise en compte de l'amortissement dans les modèles traduisant la déstabilisation des systèmes par coalescence de modes : en effet, la répartition d'amortissement est un paramètre dif-

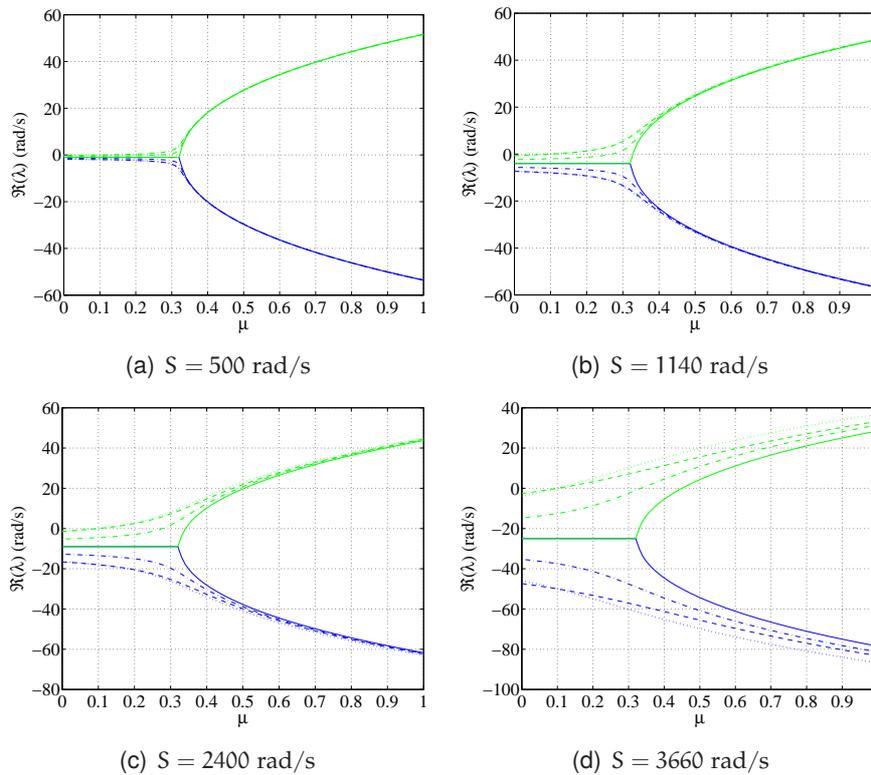


FIGURE 2.11 – Influence de l’amortissement et de sa répartition sur les parties réelles des valeurs propres. — : isorépartition, ... : $c_1/c_2 = 0$, - - : $c_1/c_2 = 3$, · - : $c_1/c_2 = \infty$

facilement maîtrisable dans une structure et peu accessible à la mesure mais qui peut avoir un effet déstabilisant. Le cas d’amortissement le plus favorable n’est pas le cas isoréparti même s’il semble qu’un tel amortissement n’est jamais déstabilisant, on peut en effet voir l’existence d’un ratio optimal de répartition c_1/c_2 dont l’évolution en fonction de c_{tot} est donnée par la figure 2.12(b).

Il est à noter que le comportement de l’instabilité par couplage de modes a été montré ici pour un couplage entre deux modes uniquement. Sur un système plus complexe, le couplage peut mettre en jeu plusieurs modes, les échanges de parties réelles se faisant alors de manière moins prévisible. Le comportement obtenu par ajout d’amortissement est alors susceptible d’être bien moins simple et de mettre en jeu d’autres phénomènes peu intuitifs.

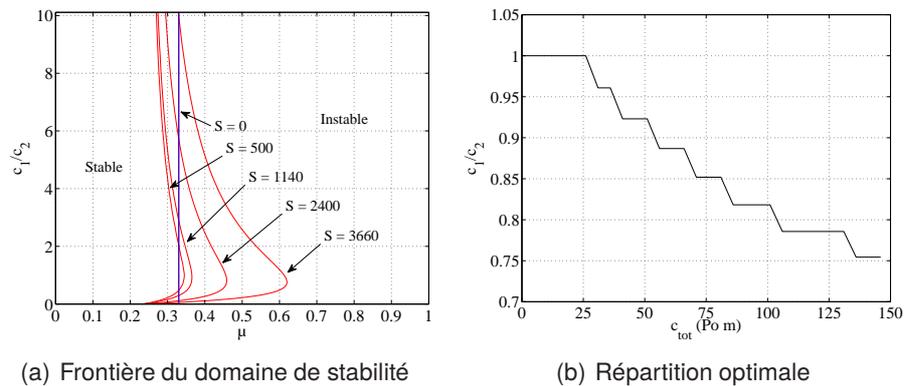


FIGURE 2.12 – Effet de la répartition de l'amortissement sur la stabilité

2.5 Notions sur la stabilité des systèmes non-linéaires

Dans les sections précédentes, nous avons vu comment certains mécanismes étaient à même d'expliquer la génération de vibrations auto-entretenues. De façon plus générale, on peut s'intéresser à la stabilité d'un système dynamique non-linéaire. Pour ce faire, nous allons d'abord poser quelques définitions nécessaires dans le cas de la stabilité des systèmes linéaires, puis nous verrons comment l'extension aux systèmes non-linéaires peut se faire.

2.5.1 Stabilité d'un point d'équilibre pour des systèmes linéaires

Un système mécanique linéaire est en général régi par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du second ordre et peut toujours être mis, en passant en variables d'état, sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) = Ax \quad (2.11)$$

où A est un endomorphisme linéaire de l'espace des variables d'état du système. Dans le cas où les déplacements sont donnés par un nombre fini de degrés de liberté, A est alors une matrice de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et les solutions du système différentiel sont données par $x = x_0 e^{At}$. Dans la suite nous serons toujours dans le cas de dimension finie. La détermination des valeurs propres de A permet de donner le comportement asymptotique des solutions du système :

Théorème 2.5.1.1. Pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, toute solution x de (2.11) vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

Théorème 2.5.1.2. Pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, toute solution x de (2.11) vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| = \infty$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement positive.

On introduit maintenant la définition du *flot* d'un système différentiel. Cette définition sera surtout utile pour le cas non-linéaire, mais son application au cas linéaire permet de bien saisir les concepts.

Définition 2.5.1.1. On appelle *flot* d'un système différentiel $\dot{x} = f(x)$, $x \in \Omega$ l'application qui à (y, τ) associe la valeur en $t = \tau$ de la solution $\Phi(y, t)$ qui vaut y en $t = 0$. On note cette application Φ , elle est définie sur $\Omega \times J$ où $J \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle maximal de définition de la solution.

$$\Phi : \begin{cases} \Omega \times J \rightarrow \Omega \\ (y, t) \mapsto \Phi(y, t) \end{cases} \quad (2.12)$$

On note $\Phi(y, t) = \Phi_t(y)$. Le flot vérifie la propriété suivante : $\Phi_{s+t}(y) = \Phi_s(\Phi_t(y))$. Si $J = \mathbb{R}$, le flot est dit complet.

Si toutes les valeurs propres d'une matrice A de taille $n \times n$ sont à partie réelle non nulle, le flot associé à $\dot{x} = f(x)$ est dit hyperbolique. L'unique point d'équilibre $x_0 = 0$ est dit point d'équilibre hyperbolique. Ce point peut être un puits si toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative, une source si elles sont à partie réelle strictement positive, ou encore un point selle ou col s'il y a des parties réelles de valeurs propres de signes différents.

Pour étudier le type de point d'équilibre hyperbolique du système $\dot{x} = Ax$, on peut utiliser le produit des valeurs propres $a = \det(A)$ et leur somme $b = \text{Trace}(A)$, $x_0 = 0$ est alors :

- ◆ un point selle ou col si $a < 0$;
- ◆ un nœud stable si $a > 0$, $b^2 - 4a \leq 0$ et $b < 0$;
- ◆ un nœud instable si $a > 0$, $b^2 - 4a \leq 0$ et $b > 0$;
- ◆ un foyer stable si $a > 0$, $b^2 - 4a < 0$ et $b < 0$;
- ◆ un foyer stable si $a > 0$, $b^2 - 4a < 0$ et $b > 0$;
- ◆ un centre stable si $a > 0$ $b = 0$.

Dans le cas plus général où A est seulement non singulière, mais à valeurs propres non nulles quelconques, on peut diviser les sous-espaces propres invariants par le flot du système de la façon suivante :

- ◆ le sous-espace stable $E^s = \text{Vect}(\{p_1, p_2, \dots, p_s\})$,
- ◆ le sous-espace instable $E^u = \text{Vect}(\{p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_{s+u}\})$,
- ◆ et le sous-espace centré $E^c = \text{Vect}(\{p_{s+u+1}, p_{s+u+2}, \dots, p_{s+u+c}\})$.

Ici, p_i désigne pour $i \leq s$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie réelle strictement négative, pour $s < i \leq s + u$ ceux associés aux valeurs à parties réelles strictement positives, et pour $s + u < i$ les vecteurs propres associés aux parties réelles nulles.

Théorème 2.5.1.3. Soit Φ un flot hyperbolique du système $\dot{x} = Ax$, avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. \mathbb{R}^n est alors la somme directe des espaces E^s et E^u :

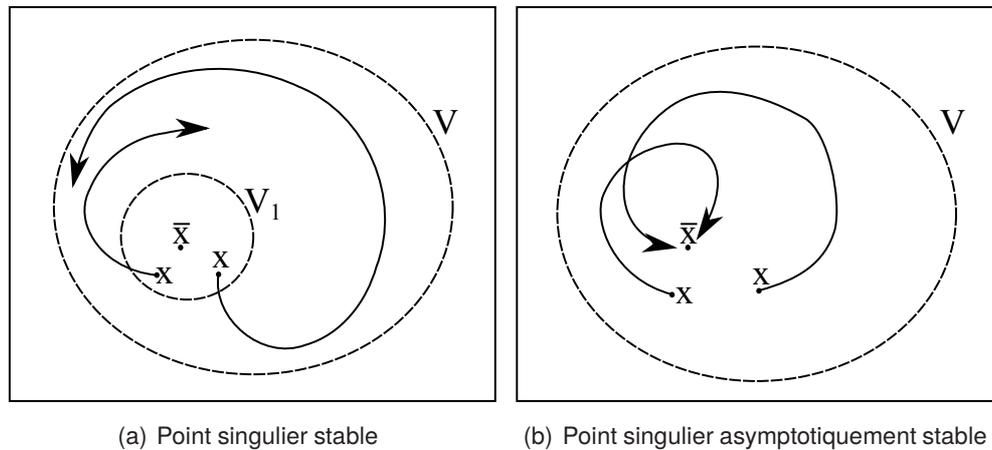


FIGURE 2.13 – Illustration des deux notions de stabilité

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$$

2.5.2 Stabilité d'un point d'équilibre pour des systèmes non-linéaires

Nous nous intéressons maintenant à la stabilité des systèmes non-linéaires. Nous commençons par introduire les notions de point singulier et de stabilité au sens de Lyapunov. On s'intéresse donc à un système régi par l'équation

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.13)$$

où f est une fonction \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n dans lui-même.

Définition 2.5.2.1. *Un point singulier ou encore point d'équilibre, point stationnaire, point fixe ou zéro de f est un point \bar{x} tel que $f(\bar{x}) = 0$.*

On introduit les deux définitions suivantes de la stabilité d'un point singulier :

Définition 2.5.2.2. *Un point singulier \bar{x} est dit stable, si pour tout voisinage V de \bar{x} dans \mathbb{R}^n , il existe un voisinage V_1 de \bar{x} tel que pour tout point x de V_1 , $\Phi_t(x)$ est défini pour tout $t > 0$ et que $\Phi_t(x) \in V$.*

Définition 2.5.2.3. *Un point singulier \bar{x} est dit asymptotiquement stable, s'il existe un voisinage V de \bar{x} dans \mathbb{R}^n , tel que pour tout point x de V , $\Phi_t(x)$ est défini pour tout $t > 0$ et que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = \bar{x}$.*

La stabilité asymptotique caractérise une solution amortie qui retourne à l'équilibre, tandis que la stabilité simple permet l'existence d'oscillations auto-entretenues d'amplitude faible autour du point d'équilibre ; les deux notions sont illustrées sur la figure 2.13.

L'étude de la stabilité pour les systèmes non-linéaires s'appuie sur l'étude du système linéarisé autour d'un point. f étant de classe \mathcal{C}^1 on peut utiliser sa Jacobienne Df qui permet de linéariser l'équation (2.13) en un point singulier \bar{x} comme suit :

$$\dot{\bar{x}} + \dot{\varepsilon} = f(\bar{x}) + Df(\bar{x}) \varepsilon + O(\|\varepsilon\|) \quad (2.14)$$

Ce qui donne le système linéaire suivant en ε :

$$\dot{\varepsilon} = Df(\bar{x}) \varepsilon \quad (2.15)$$

Cette linéarisation permet d'introduire la première méthode de Lyapunov pour déterminer la stabilité des systèmes non-linéaires :

Définition 2.5.2.4. *Soit \bar{x} un point singulier de f . Les valeurs propres de $Df(\bar{x})$ sont appelées exposants caractéristiques de \bar{x} . De plus si tous les exposants caractéristiques de \bar{x} sont à partie réelle non nulle, \bar{x} est dit hyperbolique.*

Théorème 2.5.2.1. Première méthode de Lyapunov

Soit \bar{x} un point singulier non dégénéré de f . Si tous les exposants caractéristiques de \bar{x} sont à partie réelle strictement négative, \bar{x} est un point asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Si au moins l'un des exposants caractéristiques de \bar{x} est à partie réelle strictement positive, alors \bar{x} n'est pas stable au sens de Lyapunov.

Définition 2.5.2.5.

Un point hyperbolique dont tous les exposants caractéristiques sont à partie réelle négative est un point attractif.

Un point hyperbolique dont tous les exposants caractéristiques sont à partie réelle positive est un point repulsif.

Un point hyperbolique qui a des exposants caractéristiques dont les parties réelles sont de signes différents est un point selle.

La stabilité des points hyperboliques est simple à étudier : le point n'est stable que si tous ses exposants caractéristiques sont à partie réelle négative, sinon, il est instable. Pour les points singuliers non hyperboliques, l'étude est plus complexe. On introduit à cette fin les fonctions de Lyapunov, les théorèmes qui leur sont liés et la deuxième méthode de Lyapunov qui en découle.

Pour tout point singulier \bar{x} de f et U un voisinage de ce point. On considère une application V définie de U dans \mathbb{R} et sa dérivée \dot{V} définie par :

$$\dot{V}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \dot{x}_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k(x)$$

Théorème 2.5.2.2. *Si il existe une application V d'un voisinage U d'un point singulier de f dans \mathbb{R} différentiable sur $U \setminus \{\bar{x}\}$ telle que :*

(i) V vérifie dans $U : V(\bar{x}) = 0, x \neq \bar{x} \Rightarrow V(x) > 0$

(ii) V est non croissante le long des trajectoires de (2.13) : $\dot{V} \leq 0$ dans $U \setminus \{\bar{x}\}$

Alors, \bar{x} est stable. De plus, si

(iii) V est strictement décroissante le long des trajectoires de (2.13) : $\dot{V} < 0$ dans $U \setminus \{\bar{x}\}$

Alors, \bar{x} est asymptotiquement stable.

Définition 2.5.2.6. Fonction de Lyapunov et de Lyapunov stricte

Une fonction V vérifiant les propriétés (i) et (ii) est appelée fonction de Lyapunov. Si elle vérifie en plus (iii), on dit qu'il s'agit d'une fonction de Lyapunov stricte.

Définition 2.5.2.7. Fonction de Lyapunov forte

Une fonction V vérifiant les propriétés (i) et $\exists \alpha > 0, \dot{V} \leq -\alpha V$ dans $U \setminus \{\bar{x}\}$ est une fonction de Lyapunov forte.

Théorème 2.5.2.3. *Si un point singulier \bar{x} admet une fonction de Lyapunov forte, alors \bar{x} est un point hyperbolique attractif.*

L'étude de la stabilité des points singuliers d'un système non-linéaire peut se ramener à l'étude du système linéarisé (2.15) à l'aide du théorème de redressement du flot de Hartman-Grobman.

Théorème 2.5.2.4. de Hartman-Grobman

Si \bar{x} est un point singulier hyperbolique, alors il existe un homéomorphisme h défini dans un voisinage U de \bar{x} tel que localement $h \circ \Phi_t$ (où Φ_t est le flot non-linéaire) suit les mêmes trajectoires que le flot linéaire $e^{Df(\bar{x})t}$. L'homéomorphisme préserve les orbites et peut être choisi de façon à préserver la paramétrisation en temps des trajectoires.

On définit les variétés locales stable et instable $E_{loc}^s(\bar{x})$ et $E_{loc}^u(\bar{x})$ comme suit :

$$E_{loc}^s(\bar{x}) = \left\{ x \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = \bar{x}, \text{ et } \Phi_t(x) \in U, \forall t \geq 0 \right\}$$

$$E_{loc}^u(\bar{x}) = \left\{ x \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = \bar{x}, \text{ et } \Phi_t(x) \in U, \forall t \leq 0 \right\}$$

Théorème 2.5.2.5. de la variété stable pour un point singulier

Si \bar{x} est un point singulier hyperbolique de f , alors f est topologiquement équivalent à son linéarisé tangent et l'homéomorphisme correspondant préserve le sens du parcours.

En outre, il existe des variétés stable et instable locales de f en \bar{x} avec $\dim(E_{loc}^s(\bar{x})) = \dim(E^s)$ et $\dim(E_{loc}^u(\bar{x})) = \dim(E^u)$, tangentes en \bar{x} à E^s et E^u respectivement et ayant la même régularité que f .

Dans le cas où le point singulier \bar{x} est non hyperbolique, cette décomposition est insuffisante : il existe une composante suivant la variété centrale E_{loc}^c .

Théorème 2.5.2.6. de la variété centrale

Si \bar{x} est un point singulier de f , et que f est \mathcal{C}^r , alors le champ f admet des variétés locales stable, instable et centrale notées $E_{loc}^s(\bar{x})$, $E_{loc}^u(\bar{x})$ et $E_{loc}^c(\bar{x})$, de classe \mathcal{C}^r , \mathcal{C}^r et \mathcal{C}^{r-1} respectivement et tangentes en \bar{x} à E^s , E^u et E^c .

Les variétés $E_{loc}^s(\bar{x})$ et $E_{loc}^u(\bar{x})$ sont définies de manière unique, tandis que $E_{loc}^c(\bar{x})$ peut ne pas l'être.

De plus, le comportement des trajectoires dans $E_{loc}^s(\bar{x})$ et $E_{loc}^u(\bar{x})$ est donné par le linéarisé tandis que celui des trajectoires dans $E_{loc}^c(\bar{x})$ est donné par les termes non-linéaires de f .

2.5.3 Bifurcations de Hopf, section de Poincaré et cycle limite**2.5.3.1 Cycle limite**

Nous avons vu que les systèmes non-linéaires pouvaient admettre des orbites fermées dans l'espace des phases. En particulier, ces orbites sont intéressantes dans le cadre de l'étude des systèmes autonomes car elles constituent des solutions périodiques traduisant l'existence possible de vibrations auto-entretenues. Nous présentons ici l'extension des notions de stabilité aux orbites périodiques.

Définition 2.5.3.1. cycle limite

On appelle cycle limite ou orbite périodique une trajectoire fermée dans l'espace des phases non réduite à un point.

Définition 2.5.3.2. stabilité d'un cycle limite

Un cycle limite Γ est dit stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{dist}(x, \Gamma) < \eta \Rightarrow \text{dist}(\Phi_t(x), \Gamma) < \varepsilon$

Définition 2.5.3.3. stabilité asymptotique d'un cycle limite

Un cycle limite Γ est asymptotiquement stable s'il est stable et que :

$$\exists \eta > 0, \text{dist}(x, \Gamma) < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi_t(x), \Gamma) = 0$$

Si l'on considère un cycle Γ et un point x proche de Γ , alors la trajectoire $\Phi_t(x)$ peut avoir trois comportements : soit elle s'enroule autour de Γ , dans ce cas Γ est stable ; soit elle se déroule de Γ , dans ce cas, Γ est instable ; enfin il se peut que la trajectoire s'enroule si x est à l'intérieur de Γ et se déroule s'il est à l'extérieur (ou l'inverse), dans ce cas, Γ est dit semi-stable. En pratique, un cycle semi-stable est instable.

2.5.3.2 Bifurcations statiques et bifurcations de Hopf

Nous avons vu comment les méthodes de Lyapunov permettent de statuer sur la stabilité d'un point d'équilibre d'un système. Nous nous intéressons maintenant aux systèmes autonomes gouvernés par une équation dépendant d'un paramètre de contrôle scalaire μ . L'équation différentielle est donc :

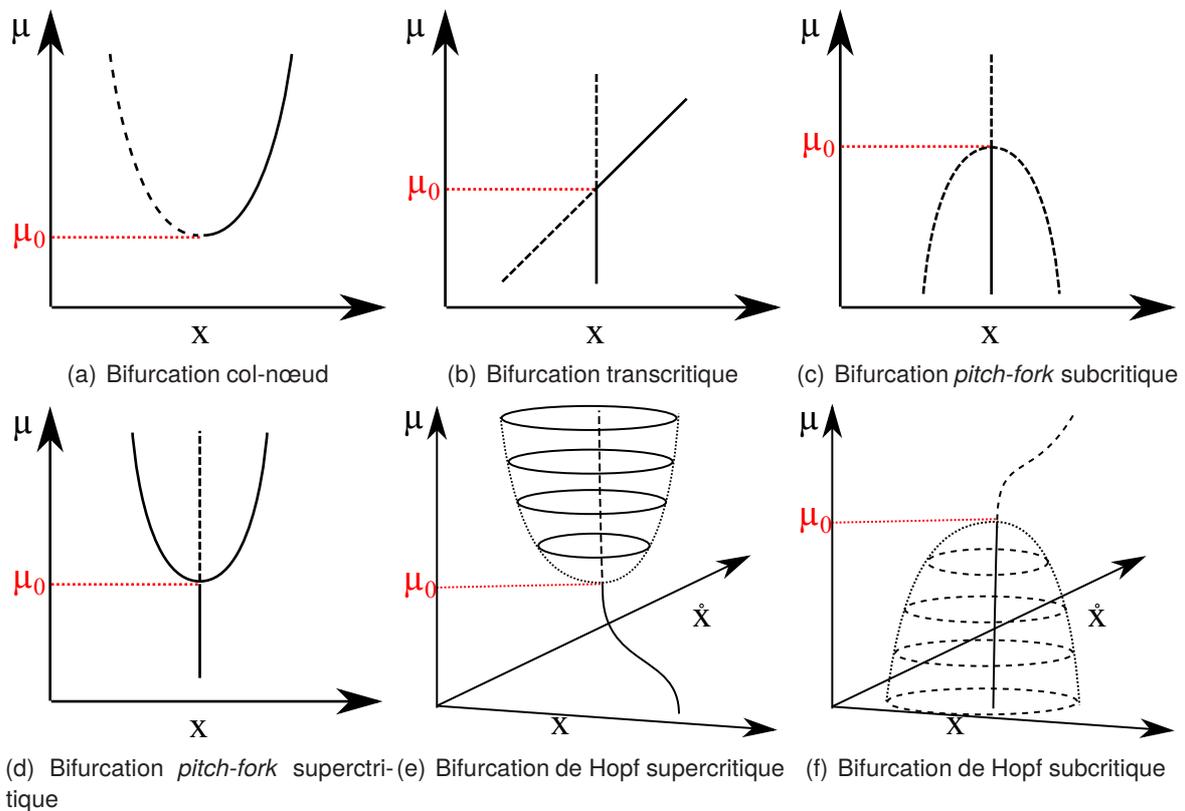


FIGURE 2.14 – Comportement des bifurcations : — solution stable, - - solution instable.

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{2.16}$$

Lors de variations du paramètre μ , il est fréquent que le comportement du système change, un point hyperbolique pouvant perdre son hyperbolicité pour certaines valeurs critiques du paramètre. On appelle ces changements des bifurcations qui sont classées en quatre types :

- ◆ bifurcation col-nœud,
- ◆ bifurcation transcritique,
- ◆ bifurcation *pitch-fork* ou *symmetry-breaking*,
- ◆ bifurcation de Hopf.

Les trois premiers types de bifurcations concernent des croisements de solutions statiques, dont la stabilité change au passage de la valeur critique du paramètre. La bifurcation de Hopf concerne un croisement entre une solution statique et une solution dynamique. Les différents types de bifurcation sont illustrés sur la figure 2.14

Hopf a montré [60] que lorsque le changement en une valeur de paramètre μ_0 se fait suivant certaines

conditions, alors il existe une orbite fermée dans l'espace des phases pour $\mu > \mu_0$.

Définition 2.5.3.4. Bifurcation de Hopf

Soit un système dynamique régi par l'équation (2.16) avec $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Un point (x_0, μ_0) est une bifurcation de Hopf s'il vérifie ces trois conditions :

- ◆ $f(x_0, \mu_0) = 0$,
- ◆ $D_x f(x_0, \mu_0)$ admet une paire de valeurs propres imaginaires pures conjuguées ($\lambda = i\omega, \bar{\lambda} = -i\omega$) et toutes les autres valeurs propres sont à partie réelle non nulle,
- ◆ en (x_0, μ_0) , $\frac{\partial \Re(\lambda(\mu))}{\partial \mu} \neq 0$.

La bifurcation de Hopf se caractérise donc par le changement de nature d'un point singulier hyperbolique en un point non hyperbolique avec l'évolution du paramètre μ autour de la valeur critique μ_0 . Le troisième point que doit vérifier une bifurcation de Hopf est une condition de transversalité de l'axe imaginaire : pour $\mu \neq \mu_0$, on a un point hyperbolique. Au voisinage de la bifurcation, on a donc une nouvelle valeur propre à partie réelle positive, il y a perte de la stabilité asymptotique de l'équilibre statique. Des vibrations auto-entrenues peuvent se développer. Les orbites croissent exponentiellement jusqu'à atteindre une orbite fermée avec la période $T = 2\pi/\omega$. Suivant qu'il existe ou non un équilibre stable pour $\mu > \mu_0$, la bifurcation sera dite supercritique ou subcritique et l'orbite fermée sera une solution stable ou instable. Les figures 2.14(e) et 2.14(f) montrent dans l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ les bifurcations supercritique et subcritique.

2.5.3.3 Section de Poincaré

On considère un cycle limite Γ de période minimale T : $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, x = \Phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$ et un point $p \in \Gamma$. Soient $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$ une base du supplémentaire orthogonal de $f(p)$ et ε un scalaire strictement positif. On introduit la section transversale à Γ au point p de rayon ε :

$$S_\varepsilon = \left\{ x = p + \sum_{i=1}^{n-1} a_i f_i, |a_i| \leq \varepsilon \right\}$$

Soit $\delta > 0$, tel que $\forall x \in S_\delta, \exists ! \tau(x) > 0, \Phi_{\tau(x)}(x) \in S_\varepsilon$. On définit alors l'application de Poincaré :

Définition 2.5.3.5. Application de Poincaré

On appelle application de Poincaré ou application du premier retour Π , l'application de S_δ dans S_ε qui à x associe le premier point de S_ε croisé par la trajectoire $\Phi_t(x)$ pour $t > 0$:

$$\Pi : \begin{cases} S_\delta \rightarrow S_\varepsilon \\ x \mapsto \Phi_{\tau(x)}(x) \end{cases}$$

La stabilité d'un cycle limite peut s'étudier grâce à l'application Π . La figure 2.15 représente une section de Poincaré, on y voit l'image $\Pi(x)$ dans S_ε de x . Si la suite des $\Pi^n(x)$ converge vers p , alors la distance entre la trajectoire $\Phi_t(x)$ et le cycle Γ tend vers 0.

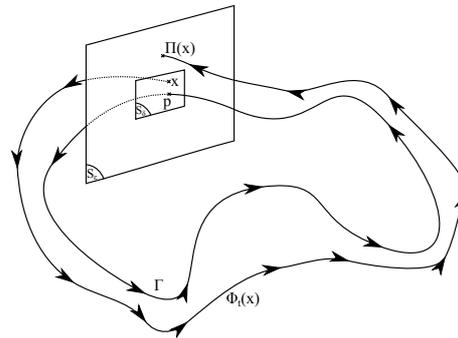


FIGURE 2.15 – Section de Poincaré

Définition 2.5.3.6. On dit que p est un point attractif de Γ si $\Pi(p) = p$ et que toutes les valeurs propres de $D\Pi$ ont un module strictement inférieur à 1.

Propriété 2.5.3.1. Si p est un point attractif pour Π , alors Γ est asymptotiquement stable.

2.6 Synthèse

Nous avons vu dans ce chapitre les principaux mécanismes avancés pour expliquer l'apparition de vibrations auto-entrenues dans les systèmes dynamiques non-linéaires. Les outils permettant d'étudier la stabilité des points singuliers des systèmes non-linéaires autonomes ont été introduits, ainsi que les notions de bifurcations de Hopf et de stabilité d'un cycle limite.

Lors de l'étude du crissement des freins à disque, une approche souvent effectuée est la caractérisation de la stabilité de l'équilibre glissant en fonction d'un certain jeu de paramètres de contrôle, l'objectif étant d'obtenir une conception du système complet présentant un équilibre stable et robuste. En pratique l'obtention d'un équilibre stable sur toute la gamme d'utilisation et la durée de vie d'un tel système est extrêmement difficile. C'est pourquoi dans la suite nous allons voir comment d'une part modéliser le système de freinage afin de rendre compte des différentes instabilités pouvant s'y produire et nous allons présenter diverses méthodes pour tenter de faire un lien entre les paramètres du système et les niveaux vibratoires des oscillations pouvant se développer.

Chapitre 3

Observation expérimentale du crissement

Dans le chapitre précédent, nous avons vu différentes modélisations proposant des mécanismes susceptibles d'expliquer le crissement dans les systèmes de freinage. Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude expérimentale du crissement. Nous passerons en revue les observations expérimentales que l'on peut trouver dans la littérature, puis nous définirons un protocole correspondant aux attentes de notre étude. Nous analyserons ensuite les résultats afin de statuer sur la pertinence des hypothèses de modélisation du crissement pour le problème des freins à disque sur TGV.

3.1 Études expérimentales dans la littérature

Il existe de nombreuses études expérimentales du crissement dans la littérature. Elles ont commencé dès les années 30. Mills [84] puis Fosberry et Holubecki [43] ont étudié le crissement des freins à tambour et à disque en essayant de lier l'occurrence du crissement à une pente négative du coefficient de frottement. D'autres auteurs ont testé l'influence de la géométrie du frein, ainsi Spurr [114] trouve un effet de la position du point de contact par rapport au pivot de la garniture avec une diminution de la propension à crisser lorsque le point de contact est proche du bord de fuite de la garniture. Cette observation a été ensuite confirmée par Jarvis et Mills [65] et fait encore l'objet d'études à l'heure actuelle [40].

À partir des années 1980, les études expérimentales ont aussi porté sur la caractérisation des déformées opérationnelles du système de freinage et en particulier du disque de frein à l'aide notamment des techniques d'interférométrie. Parmi ces études on pourra mentionner celles de Felske [38], Murakami [88] et Ohta [95]. Outre des résultats concordants avec les études précédentes sur la plus grande propension à crisser en présence de coefficients de frottement élevés, ces travaux ont permis de mettre en évidence que le disque a tendance à vibrer suivant des modes de flexion comportant plusieurs diamètres nodaux, et que les garnitures quant à elles, vibrent suivant des modes de flexion. Initialement, les vibrations du disque étaient plutôt identifiées comme des ondes stationnaires dans le repère fixe mais Fieldhouse et Newcomb [41, 42] ont montré par la suite que ces ondes pouvaient être des ondes progressives (cf. figure 3.1) dont la vitesse angulaire ω_t est liée à la fréquence f et à l'ordre n du mode associé. Cette liaison s'exprime selon la formule 3.1 :

$$\omega_t = \frac{2\pi f}{n} \quad (3.1)$$

Les études portant sur les déformées opérationnelles des systèmes crissants ont permis de montrer que les modes du disque étaient pertinents pour représenter ces déformées, soit sous forme d'ondes stationnaires, soit sous forme d'ondes progressives.

Les travaux que nous avons cités jusque là s'intéressent essentiellement à l'aspect vibratoire du crissement. D'autres approches ont plutôt privilégié les aspects tribologiques avec l'étude de l'influence des phénomènes liés aux effets des lois de frottement, du circuit tribologique ou encore de l'usure. Parmi ces travaux, on trouve entre autres ceux de Rhee [100], ou de Bergman [7]. Il en ressort clairement que les conditions d'usure et de frottement jouent un rôle important dans le crissement. Cependant,

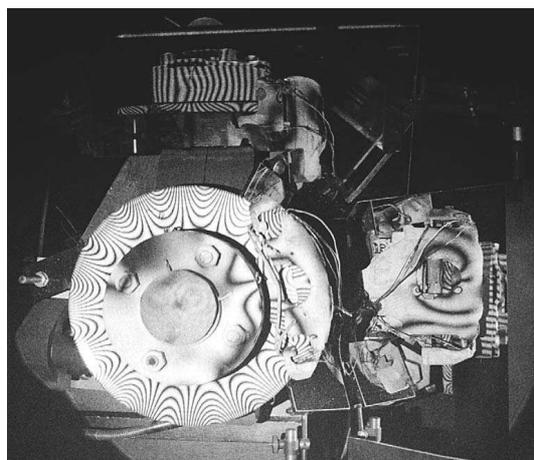
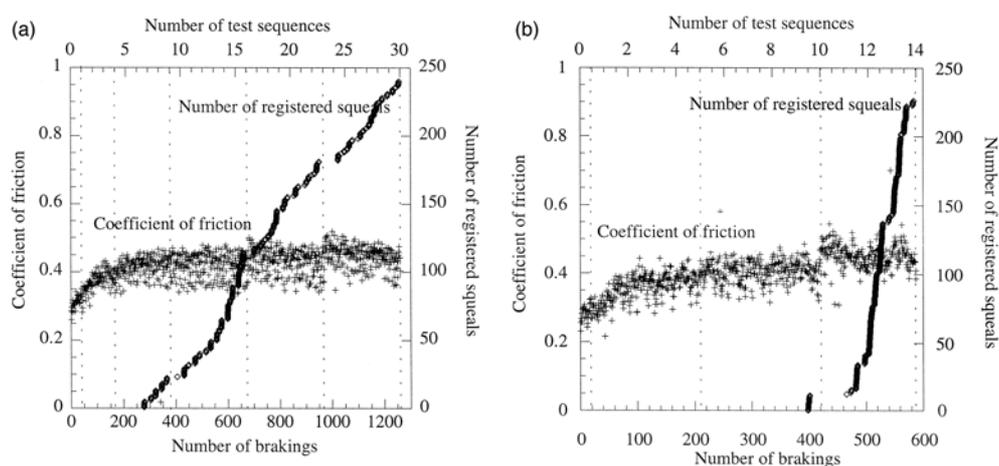


FIGURE 3.1 – Visualisation de la déformée opérationnelle par Fieldhouse et Newcomb

FIGURE 3.2 – Essais de Bergman *et al.* [7] – Mise en évidence d'un coefficient de frottement critique sur deux séries d'essais (a) et (b).

au niveau modélisation, peu d'études mettent en œuvre à la fois des modèles tribologiques évolués et des modèles de dynamique des structures réalistes pour comparer expérience et modélisation. Bergman *et al.*, quant à eux, ont utilisé un frein dérivé d'un frein automobile en ayant fait préalablement subir au disque un grenailage. Ce procédé a pour effet d'abaisser le coefficient de frottement disque-garniture jusqu'à ce que l'usure vienne lisser la surface du disque. Une série de freinages est alors effectuée sur le disque en mesurant l'évolution du coefficient de frottement et les occurrences du crissement (mesures au microphone avec une amplitude stabilisée à plus de 84 dB). Ils ont établi l'existence expérimentale d'un coefficient de frottement critique μ_c en deçà duquel le crissement semble inexistant. La figure 3.2 montre cette relation pour deux tests consécutifs sur leur banc d'essai, avec un μ_c autour de 0,4 pour le frein considéré.

Certaines études visent à obtenir une comparaison entre expérience et simulation sur des systèmes généralement assez simples tels que des systèmes poutres sur poutres [83]. Ces expériences permettent souvent de mettre en avant certains mécanismes dans la génération du crissement.

En 2003, Kinkaid a réalisé une revue bibliographique sur le crissement [69] dans laquelle il conclut que *malgré un siècle de développement de freins à disque, le crissement reste un problème non résolu*.

En ce qui concerne les études expérimentales, il relève qu'elles montrent que :

- ◆ un système de freinage peut crisser selon un certain nombre de fréquences distinctes ;
- ◆ l'amplitude de vibration d'un frein crissant est de l'ordre de quelques microns ;
- ◆ la vibration du disque peut être une onde stationnaire ou une onde progressive ;
- ◆ il n'est pas certain que la connaissance des modes des constituants permettent d'éclairer sur la propension du système complet à crisser ;
- ◆ les fréquences crissantes semblent être un peu plus basses que celles des modes de disque leur correspondant ;
- ◆ l'augmentation du coefficient de frottement favorise le crissement ;
- ◆ il peut y avoir aussi bien du crissement de disque que du crissement de garniture.

Il ressort de ces études que le crissement est un phénomène difficile à appréhender, d'une part car il n'y a pas de consensus sur les mécanismes générateurs, d'autre part du fait de sa forte dépendance à un grand nombre de paramètres difficilement mesurables, ce qui rend les comparaisons modèle-expérience délicates. Afin de traiter ces problèmes, certaines études expérimentales se sont appuyées sur des bancs d'essais munis d'une structure particulière permettant de maîtriser plus finement les conditions de fonctionnement ou encore, de modifier légèrement le comportement dynamique global au moyen de perturbations volontaires. On peut citer notamment Giannini *et al.* [46, 47] qui parviennent à obtenir des expériences ayant un taux de répétabilité élevé ainsi qu'un accord satisfaisant avec le modèle. Pour ces travaux, un banc d'essai intermédiaire entre un banc de type « poutre sur disque » et un banc industriel a été utilisé. Après avoir validé un modèle réduit capable de représenter convenablement la stabilité de leur banc d'essai, ces auteurs ont proposé deux critères de sensibilité au crissement. Le premier se fonde sur le maximum du taux de divergence pour un mode, en fonction des variations de divers paramètres gouvernant la dynamique. Le second caractérise la largeur de bande du couplage de mode entre disque et garniture. C'est-à-dire qu'il mesure, en fonction de la variation de la fréquence d'un mode de plot, la zone fréquentielle dans laquelle ce mode est capable de se coupler avec un mode de disque, pour le déstabiliser. Toujours dans l'optique de s'affranchir de l'aléa apparent des essais de crissement, Butlin et Woodhouse ont réalisé une étude expérimentale statistique du crissement [14, 15] sur un banc de type pion-disque. Lors de leur expérience, ils ont enregistré un grand nombre d'initiations de crissement sur deux types de support pour le pion (l'un symétrique, l'autre dissymétrique), sous diverses conditions de fonctionnement (sens et vitesse de rotation, effort normal, ...) et en appliquant différentes perturbations (ajout de masselottes pour déséquilibrer le système). Le traitement des données acquises montre l'émergence de motifs

dans l'aléa du crissement. Bultin propose aussi un critère de validité d'une prédiction linéaire sur les initiations de crissement en extrayant les taux d'accroissement et les fréquences présentes dans le signal. Si la fréquence est constante et si l'enveloppe croît exponentiellement, alors une étude de stabilité d'un modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre doit permettre de prédire ce crissement.

Dans le domaine ferroviaire, il existe beaucoup moins d'études expérimentales du crissement à proprement parler. On pourra néanmoins citer les travaux de Berndt et Schweiger [8] ou l'étude plus récente faite par Lorang *et al.* sur les freins de TGV [77] dans laquelle des spectres issus de mesures embarquées sur une rame TGV sont comparés aux prédictions d'une analyse de stabilité sur un modèle aux éléments finis de l'ensemble disque/garniture. Dans les travaux de Berndt, une étude expérimentale paramétrique a été menée avec des mesures acoustiques et vibratoires sur les parties fixes. Elles ont ensuite été comparées à une modélisation aux éléments finis dans laquelle le contact était traité comme une raideur paramétrique du fait d'un coefficient de frottement périodique.

Le présent travail de thèse s'inscrit dans le cadre du projet AcouFren qui vise à permettre une meilleure compréhension du crissement dans les systèmes de freinage et à aider les concepteurs et les spécificateurs à obtenir des garnitures peu crissantes. Dans le but de mieux comprendre les liens entre garnitures et crissement, une campagne d'essais sur différentes garnitures a été effectuée. Un panel de huit garnitures a été choisi en concertation avec le Centre d'Ingénierie du Matériel SNCF. Ces huit garnitures seront désignées par : GP1, GP2, GP3, GP4, GP5, GP6, GP7, et GP8. Une première phase, réalisée par la société Vibratéc a consisté à caractériser d'un point de vue vibratoire les différentes pièces constituant la timonerie TGV ainsi que les huit garnitures TGV constituant le panel [117–119]. Une fois cette caractérisation réalisée, une phase d'essais de crissement au banc sur six de ces huit garnitures a été effectuée. L'objectif lors de ces essais était de récupérer un maximum d'information sur le comportement acoustique et vibratoire du système de freinage complet en fonction du type de freinage et de la garniture.

Dans ce qui suit, nous allons décrire le protocole d'essais mis au point pour l'étude des 6 garnitures testées, puis nous proposons d'analyser le comportement vibratoire lors des freinages et l'apparition de crissement associé sur une de ces 6 garnitures : la GP1.

3.2 Définition du protocole d'essais

Pour la campagne d'essais, il a été décidé de mener trois types d'expérience. Le premier, est une caractérisation du système complet en position serrée et sous couple pour les différentes configurations de fonctionnement. Le second est un essai de freinage d'arrêt, freinage le plus représentatif de l'arrêt du train en gare. Il sera appelé essai non-stationnaire. Le troisième type d'essai est un essai de freinage de maintien (ou essai stationnaire). Les paramètres pris en compte pour les conditions de fonctionnement sont : le sens de rotation du disque, l'effort de freinage appliqué et la vitesse de rotation. Un des objectifs de cette campagne est de déterminer si les freinages de maintien sont représentatifs du point de vue du crissement des freinages d'arrêt. En effet, comme nous le verrons par la suite, la modélisation du crissement par éléments finis effectuée dans ce travail correspond à un essai de maintien (vitesse constante). Ainsi, dans le but de réaliser des comparaisons essais/calculs, nous devons dans un premier temps évaluer la représentativité des freinages de maintien par rapport aux essais de freinages d'arrêt. Lors de cette campagne d'essais, des freinages stationnaires sous humidité ont aussi été réalisés. Leur but était de déterminer les coefficients de frottement critiques successifs pour chaque type de garniture. Il s'est avéré que les conditions de frottement dans ces essais ne correspondaient pas à du frottement sec. Ils seront donc mis de côté dans cette étude, considérant qu'ils ne sont pas suffisamment « maîtrisés » pour qu'une analyse des résultats obtenus puisse être proposée.

3.2.1 Sélection des garnitures prioritaires

Dans le projet Acoufren, un panel de huit garnitures de frein TGV a été sélectionné en fonction de leurs caractéristiques et du retour d'expérience capitalisé par la SNCF. Ces garnitures ont toutes été caractérisées par la société Vibratec, mais pour des raisons de disponibilité du banc, il est vite apparu qu'il serait difficile de tester l'ensemble du panel lors de cette première campagne d'essais. En effet, afin de caractériser les garnitures dans des conditions les plus proches du fonctionnement en service, le choix a été fait de procéder à un rodage des garnitures, c'est à dire à un grand nombre de freinages afin d'accoutumer les surfaces de contact. Cette étape est extrêmement longue. C'est pourquoi le nombre de six garnitures testées s'est rapidement imposé comme étant plus réaliste. Il a donc fallu mettre en œuvre un processus de sélection afin de garantir la plus grande diversité possible parmi les six garnitures retenues dans le but de maximiser la richesse des résultats de cette première campagne.

Pour réaliser cette sélection, il faut pouvoir regrouper les garnitures par *ressemblance* en six groupes distincts, de façon à faire apparaître les redondances, c'est-à-dire les garnitures dont les résultats d'essais risquent d'être proches les uns des autres. Si cette opération peut sans aucun doute être effectuée manuellement vu le faible nombre de garnitures considérées, nous avons choisi de tester une méthode de regroupement rationnelle qui pourra se montrer utile par la suite, en particulier lors de l'exploitation des données d'essais. En effet, elle permet d'effectuer des regroupements dans deux espaces : l'espace de conception et l'espace de performance. On pourra ainsi établir des liens entre conception et performance. Pour le moment, nous ne disposons d'aucune donnée sur les per-

formances en crissement des huit garnitures. Nous nous contenterons donc de former les groupes dans l'espace de conception.

Choix d'un jeu de paramètres caractéristiques des garnitures. Avant toute chose, il faut définir quels sont, *a priori*, les paramètres pertinents pour effectuer ces regroupements. Dans notre cas, nous avons choisi d'utiliser les données matériau mesurées par Vibratex sur les matériaux de friction des différentes garnitures, mais aussi certaines caractéristiques géométriques et propriétés des premiers modes mesurés.

Une fois le jeu de paramètres choisi, un algorithme de « clustering » est utilisé. Notre choix s'est porté vers un algorithme intuitif dit de bipolarisation [81]. Il s'agit d'un algorithme itératif hiérarchique mixte par division et regroupement qui identifie à chaque itération des « pôles », qui correspondent aux deux éléments les plus différents, et leur attache des éléments proches pour former un groupe. Le principe est décrit plus en détail en annexe A. Sélectionner les pôles de chacun des groupes obtenus permet de constituer un panel de diversité maximale.

Sur nos huit garnitures, les groupes délimités par cet algorithme, qui correspondent à des regroupements vis-à-vis des paramètres de conception précédemment évoqués, sont :

- ◆ {GP1, GP3},
- ◆ {GP4, GP7},
- ◆ {GP5},
- ◆ {GP8},
- ◆ {GP2},
- ◆ {GP6}.

Avec comme pôles successifs :

- ◆ {GP1, GP7},
- ◆ {GP5, GP8},
- ◆ {GP2, GP6}.

À partir de cette analyse, les garnitures suivantes ont donc été choisies pour la première campagne d'essais : GP1, GP7, GP5, GP8, GP2 et GP6. Les deux autres garnitures seront mesurées ultérieurement. Dans ce manuscrit, nous nous focaliserons sur les résultats d'essais de la garniture GP1.

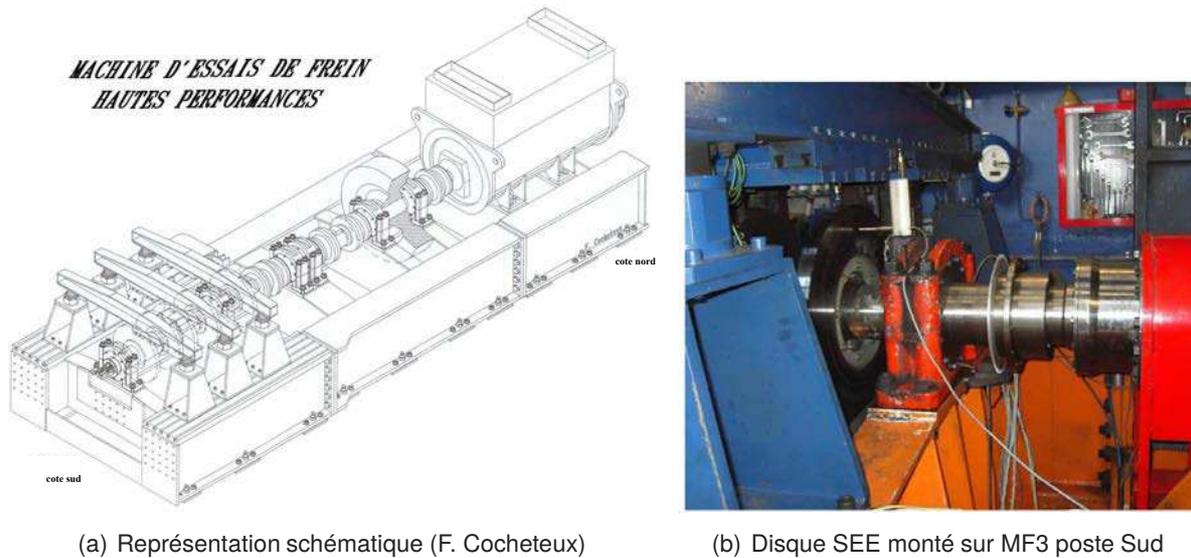


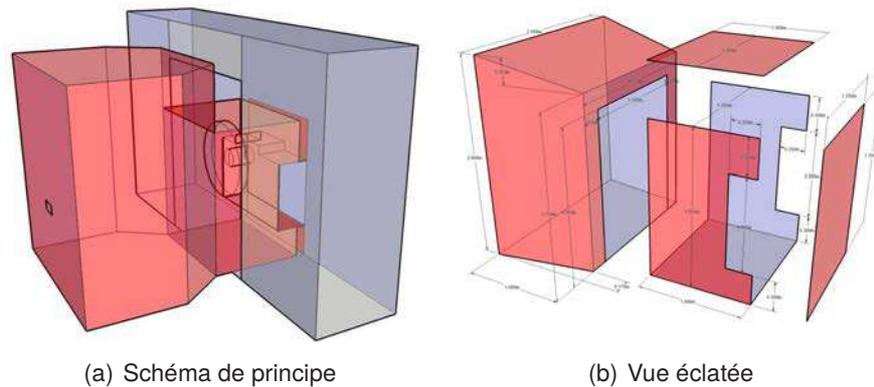
FIGURE 3.3 – Machine de frein MF3 de l'AEF

3.2.2 Présentation du banc d'essais de freinage de l'Agence d'Essais Ferroviaire

Le banc d'essai utilisé est celui du poste Nord de la machine de frein 3 (MF3) de l'AEF représenté sur la figure 3.3. Il s'agit d'un banc de simulation à inertie entraîné par un moteur synchrone d'une puissance de 1,76 MW. La vitesse maximale est de 2900tr/min, ce qui permet de simuler une vitesse de train de 503 km/h pour des roues de 920 mm de diamètre. Le couple nominal est de 14000 Nm jusqu'à 1200 tr/min puis il suit une règle d'équipuissance jusqu'à la vitesse maximale. Le couple de 14000 Nm correspond à la décélération d'une masse de 30 t à raison de 1 m/s^2 avec une roue de 890 mm de diamètre. Le dispositif sur lequel on veut mener l'essai (roue, disque, ...) est calé sur un arbre dont la longueur utile permet de tester simultanément 4 disques type TGV. Afin de dissiper la chaleur produite lors des essais, un dispositif de ventilation permet de souffler de l'air à température ambiante avec un débit de $50 \text{ m}^3/\text{s}$.

Le banc peut fonctionner selon trois modes :

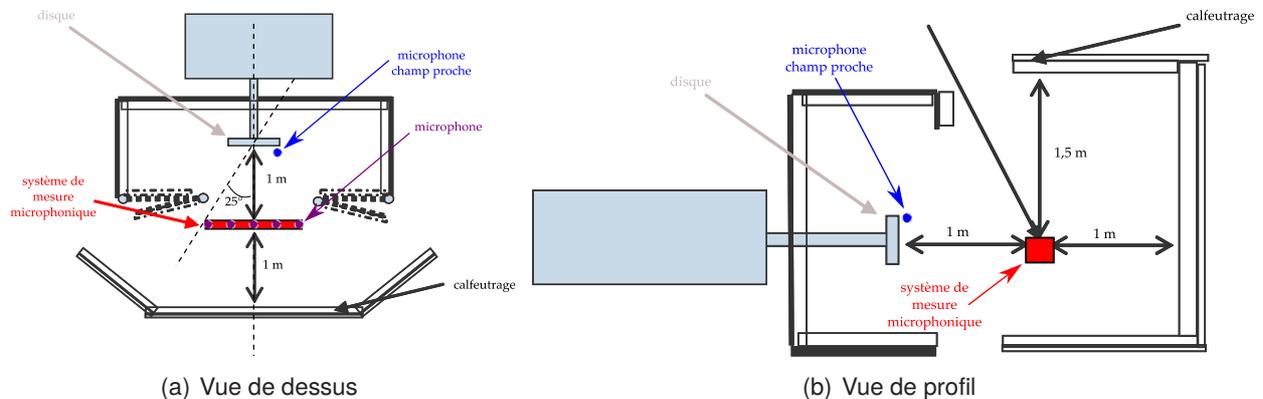
- ◆ le mode *local* ne permet que de faire tourner le moteur principal à vitesse constante. Il sert essentiellement à vérifier le bon fonctionnement des installations de puissance ;
- ◆ le mode *manuel* permet de réaliser grâce au calculateur de simulation les différentes composantes d'un cycle de freinage (montée en vitesse, palier de vitesse, freinage d'arrêt). Ce mode est utilisé lors de la mise au point et pour réaliser des essais unitaires sous contrôle d'un opérateur ;
- ◆ le mode *automatique* est utilisé pour réaliser des essais prédéfinis sur un très grand nombre de cycles. On peut à l'aide d'un logiciel programmer des séquences d'essais et enregistrer les sorties. Ce mode est utilisé dans notre cas pour le rodage des garnitures. C'est aussi le mode qui sert pour les essais de certification.



(a) Schéma de principe

(b) Vue éclatée

FIGURE 3.4 – Calfeutrage pour les mesures acoustiques



(a) Vue de dessus

(b) Vue de profil

FIGURE 3.5 – Disposition des microphones

3.2.3 Instrumentation

Pour réaliser les différentes mesures de cette campagne, l'instrumentation suivante a été déployée. La machine de frein a été équipée de l'unité de frein TGV avec un dispositif de mesure du facteur de frottement, de la vitesse simulée du train et de la force appliquée (effort axial). Une buse d'humidification était aussi présente pour les essais sous humidité.

Pour les mesures acoustiques, une antenne de 5 microphones positionnés à 1 m du disque avec une ouverture de +/- 50° ainsi qu'un microphone en champ proche, situé à 1 cm du disque, légèrement excentré ont été utilisés. Afin de limiter les réflexions liées à l'environnement de hall industriel, un calfeutrage a été mis en place. Malgré celui-ci, les conditions de mesure acoustiques restent assez éloignées des conditions de champ libre. Le calfeutrage est présenté sur la figure 3.4. La disposition des microphones est décrite sur la figure 3.5. Pour permettre le refroidissement du disque en un temps raisonnable, des ouvertures sont pratiquées sur le dessus et le dessous du calfeutrage. Pendant les essais, une pièce de mousse isolante sera glissée sous l'ouverture basse.

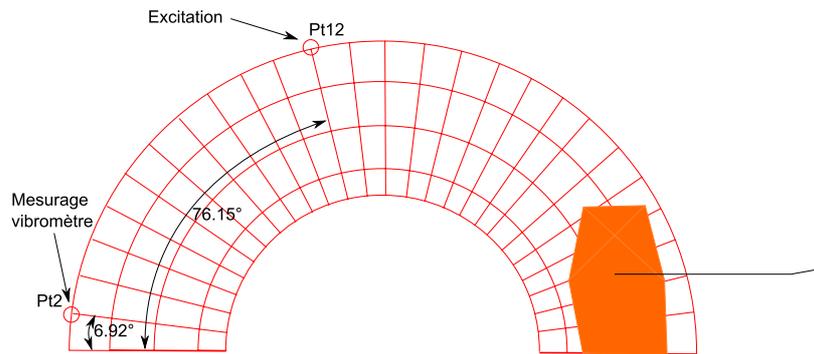


FIGURE 3.6 – Points de mesure et d’excitation pour les FRF sur le disque

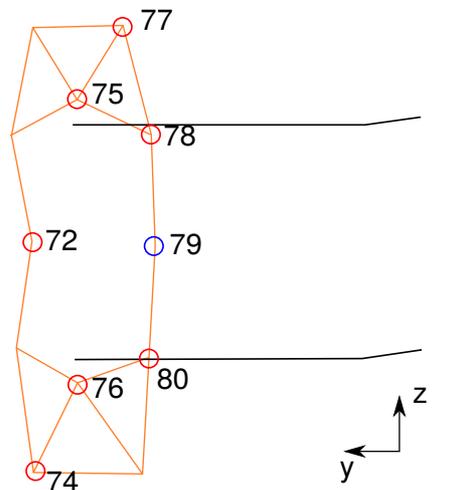


FIGURE 3.7 – Points de mesure porte-garniture droit – en rouge accéléromètres mono-axiaux 16 kHz, en bleu 10 kHz

Pour les mesures vibratoires, nous avons à disposition un vibromètre laser utilisé pour mesurer la vitesse axiale au point Pt2 (figure 3.6) en périphérie du disque. Divers accéléromètres ont été positionnés sur l’ensemble de la structure : pour les parties fixes, 4 points de mesures tri-axiaux et 10 points mono-axiaux avec des accéléromètres capables de monter jusqu’à 10 kHz ainsi que 9 points mono-axiaux capables de monter jusqu’à 16 kHz ont été utilisés. Les ponctuelles d’excitation sur le disque pour la caractérisation du système couplé sont obtenues en utilisant un des accéléromètres 16 kHz prévus pour les garnitures.

Afin de couvrir la gamme de fréquences 0-15 kHz lors de la caractérisation du système couplé, deux marteaux de chocs ont été utilisés, l’un pour les basses fréquences, l’autre pour les hautes fréquences.

La figure 3.8 montre l’installation des microphones (microphone champ proche visible au premier plan) dans le calfeutrage acoustique avant fermeture de ce dernier.

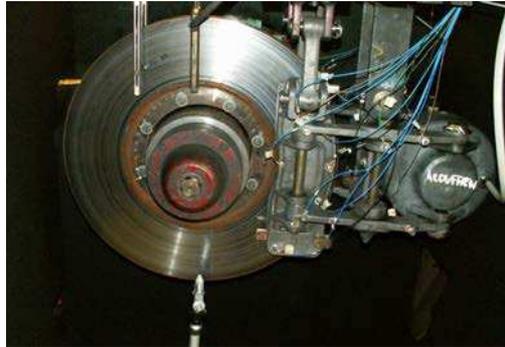


FIGURE 3.8 – Installation des microphones dans le calfeutrage.

3.2.4 Caractérisation vibratoire du système couplé

La caractérisation vibratoire du système complet en position serré et sous couple est une étape importante pour l'étude du crissement en fonction des garnitures. Elle doit permettre de faire un lien entre le comportement modal du système complet avec une garniture donnée dans des conditions de fonctionnement données (effort de serrage et sens de rotation) et les niveaux vibratoires et acoustiques relevés lors des essais de crissement dans les mêmes conditions de fonctionnement. Par ailleurs, cette caractérisation sera aussi utilisée pour recalibrer les modèles éléments finis utilisés pour l'étude numérique du crissement.

La démarche suivie pour déterminer les points de mesure a consisté à privilégier la pose de capteurs dans les directions qui seront *a priori* les plus sollicitées. De plus, la caractérisation des composants menée par la société Vibratec a permis d'éclaircir le positionnement afin d'être capable de capter certaines vibrations correspondants à des modes de flexion de divers éléments. Dans un souci d'optimiser l'utilité des différents capteurs, les deux porte-garnitures n'ont pas été équipés de la même façon. En effet, le porte garniture gauche n'a été équipé que de deux accéléromètres : le comportement de la timonerie complète a été supposé soit symétrique soit antisymétrique, et ces deux capteurs permettent de savoir si le porte-garniture gauche est en phase ou en opposition de phase par rapport à celui droit.

Les capteurs ont donc été principalement disposés suivant la direction axiale sur l'ensemble de la structure. Il s'agit effectivement de la direction suivant laquelle des vibrations sont propices à émettre acoustiquement. Les capteurs montant le plus haut en fréquence ont été disposés au plus près des porte-garnitures. La figure 3.7 montre une représentation du maillage expérimental pour les deux porte-garnitures.

Le disque, composant tournant durant les essais, n'a pas été instrumenté avec des accéléromètres, mais seulement avec un vibromètre laser. Le point de mesure choisi est un point du maillage expérimental utilisé par la société Vibratec lors de la caractérisation des composants. Situé proche de la périphérie du disque (point noté Pt2 sur les schémas 3.6). De même, le point d'excitation du disque – le point Pt12 – pour les acquisitions des FRF du système couplé a été choisi à la périphérie, proche de l'axe perpendiculaire à celui garniture-Pt2. Le léger décalage de ces points par rapport aux diamètres

| essai | sens de rotation | vitesse initiale | effort de serrage |
|-------|------------------|------------------|-------------------|
| 1 | compression | 60 km/h | 15 kN |
| 2 | compression | 25 km/h | 15 kN |
| 3 | compression | 60 km/h | 8 kN |
| 4 | compression | 25 km/h | 8 kN |
| 5 | traction | 60 km/h | 15 kN |
| 6 | traction | 25 km/h | 8 kN |
| 7 | traction | 60 km/h | 8 kN |
| 8 | traction | 25 km/h | 15 kN |

TABLE 3.1 – Conditions de fonctionnement pour les essais non-stationnaires

horizontaux et verticaux est destiné à éviter la présence de nœuds de certains modes de disque au niveau des points de mesure. La figure 3.6 montre l'emplacement des points de mesure sur le disque.

Le point d'excitation sur le porte-garniture pour les FRF, est le point noté Pt74 (figure 3.7). Les FRF ont été déterminées avec un moyennage sur 7 coups de marteau, et une fenêtre rectangulaire. La résolution fréquentielle est de 1 Hz et la plage de fréquence couvre 20-15000 Hz.

La figure 3.9 montre les FRF et cohérences mesurées au point Pt12 pour la garniture GP1 pour deux configurations différentes et deux excitations.

3.2.5 Description des essais

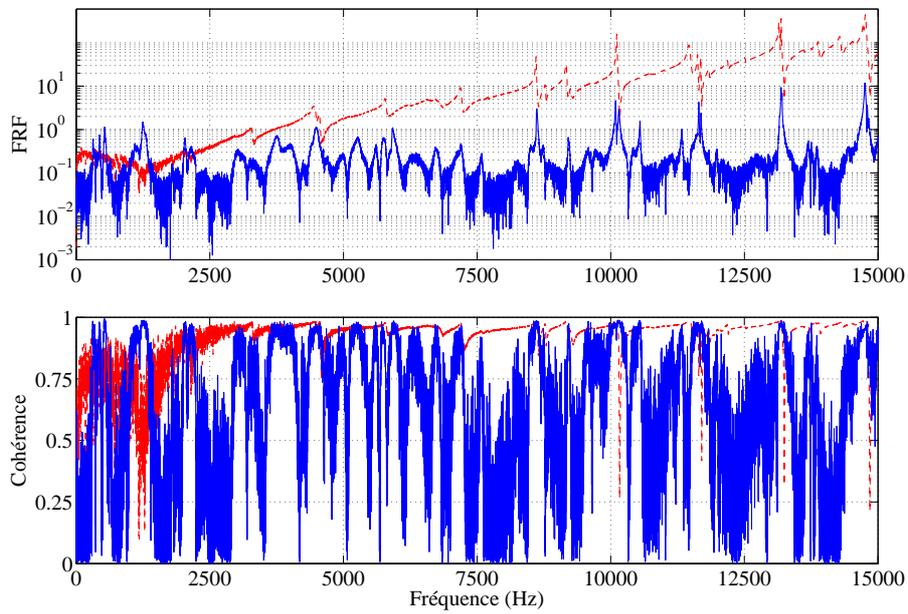
Comme précédemment indiqué, deux types d'essais ont été réalisés : les essais d'arrêt et les essais stationnaires (ou de maintien). Cette campagne d'essais a été réalisée par l'AEF à Vitry sur Seine. Elle s'est déroulée sur un peu plus de trois semaines.

3.2.5.1 Freinages d'arrêt – Essais non stationnaires

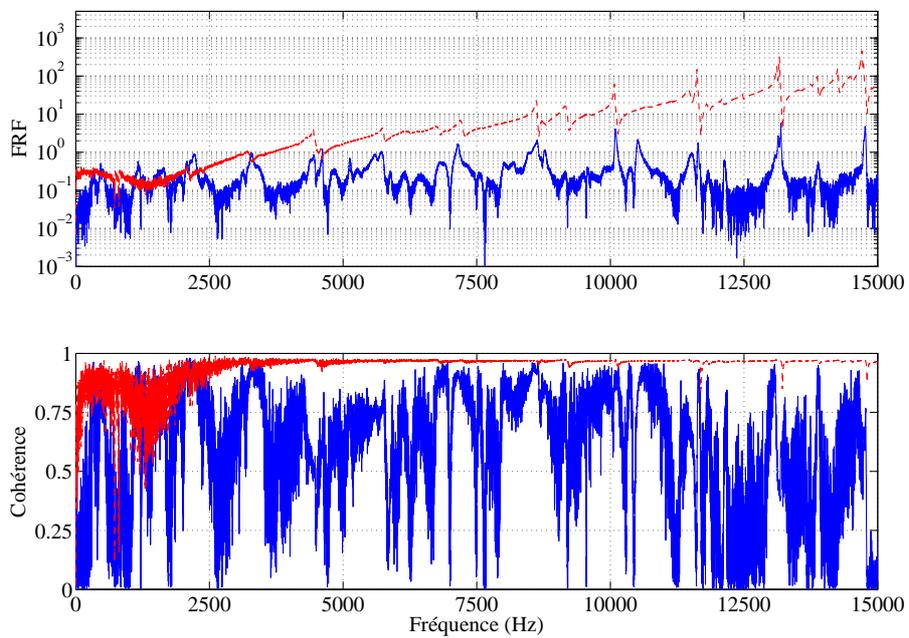
Pour les freinages d'arrêt, pour chaque garniture, deux vitesses et deux efforts ont été retenus. L'essai de freinage d'arrêt consiste à lancer le banc à la vitesse spécifiée, puis à démarrer le freinage à l'effort spécifié jusqu'à l'arrêt complet du volant. Chaque essai est effectué 3 fois pour vérifier sa répétabilité.

Afin d'éviter d'introduire trop de variabilité liée à la température des matériaux en contact, un essai non-stationnaire n'est lancé que si la température du disque est inférieure à 60°C.

Ces essais ont été réalisés pour chaque garniture dans les conditions de fonctionnement données par le tableau 3.1.



(a) 8 kN traction



(b) 15 kN compression

FIGURE 3.9 – FRF et cohérences au point Pt12 : — Excitation Pt74, - - Excitation Pt12 tangentielle

| essai | sens de rotation | vitesse initiale | effort de serrage |
|-------|------------------|------------------|-------------------|
| 1 | compression | 14 km/h | 15 kN |
| 2 | compression | 7 km/h | 15 kN |
| 3 | compression | 14 km/h | 8 kN |
| 4 | compression | 7 km/h | 8 kN |
| 5 | traction | 14 km/h | 15 kN |
| 6 | traction | 7 km/h | 8 kN |
| 7 | traction | 14 km/h | 8 kN |
| 8 | traction | 7 km/h | 15 kN |

TABLE 3.2 – Conditions de fonctionnement pour les essais stationnaires sur la garniture GP1

3.2.5.2 Freinages de maintien – Essais stationnaires

Les freinages de maintien sont des essais au cours desquels on maintient une vitesse de rotation du disque de frein constante pendant le freinage. Ces essais sont sensiblement plus longs que les essais non-stationnaires, et en raison de contraintes de temps d'utilisation des bancs, il a été décidé de se limiter à une seule vitesse au lieu de deux, sauf pour la garniture GP1 qui est la garniture pour laquelle seront menées des comparaisons essais/calculs dans ce travail de thèse.

Les essais stationnaires pour la garniture GP1 ont été effectués dans les conditions de fonctionnement décrites dans le tableau 3.2

La durée d'acquisition pour les essais stationnaires est choisie au cas par cas en observant les sorties temps-fréquence : on essaie d'obtenir une stabilisation des fréquences et des amplitudes.

3.3 Analyse des résultats d'essais

Un premier point qui apparaît lors de l'analyse des essais est la très bonne répétabilité obtenue. La figure 3.10 illustre cette bonne répétabilité sur un des essais de la garniture GP1. On retrouve bien les mêmes raies (autour de 1100 Hz, 1300 Hz, 1500 Hz, 1900 Hz et 2700 Hz) et en particulier on observe la même évolution en fin d'essai de ces fréquences (légère baisse puis remontée qui donne une allure courbée aux raies). D'autre part, le niveau de pression acoustique moyen enregistré est dans les deux cas très voisin : 10,08 Pa pour l'essai 1, 9,47 Pa pour l'essai 2 et 9,73 Pa pour l'essai 3. Cette répétabilité confère aux données expérimentales collectées lors de ces essais un caractère très intéressant car d'une part, elle montre que les essais ont été très bien réalisés, et d'autre part permet d'espérer trouver dans les propriétés des garnitures et des paramètres de fonctionnement des explications aux phénomènes observés.

Dans ce qui suit, nous allons montrer plus en détails quelques résultats expérimentaux sur la garniture GP1 pour des essais de freinage d'arrêt et de maintien. Un tableau illustrant l'ensemble des données expérimentales pour l'apparition de crissement en fonction des conditions de fonctionnement sera

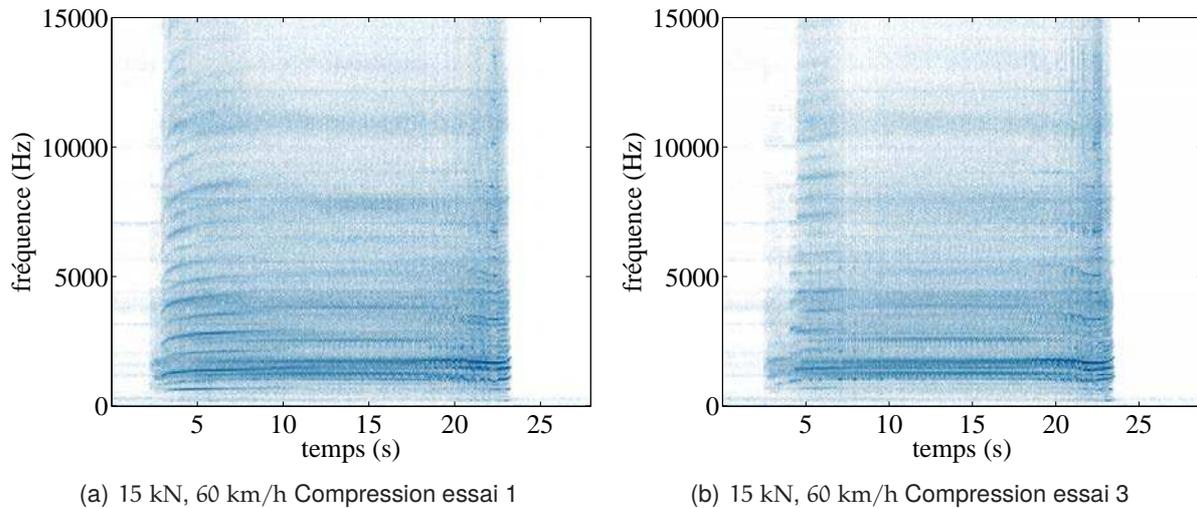


FIGURE 3.10 – Illustration de la répétabilité des essais (garniture GP1) – Microphone champ proche ensuite proposé afin de synthétiser les résultats expérimentaux.

3.3.1 Analyse des essais de freinage d'arrêt

En fonction du type d'essai, on peut remarquer plusieurs comportements différents. Le premier type de comportement est l'apparition d'une instabilité qui perdure tout au long de l'essai, avec éventuellement des évolutions continues en fréquence. Sur la garniture GP1, ce comportement est obtenu pour les freinages d'arrêt à 15 kN. On peut en voir une illustration sur la figure 3.11.

On observe que lors de cet essai, le facteur de frottement évolue en fonction de la vitesse. On observe une évolution du coefficient de frottement μ dont la pente en fonction de la vitesse de la roue, $\frac{d\mu}{dV}$, est constante et négative. Comme il a été montré au chapitre précédent, cette décroissance du coefficient de frottement peut être une explication de l'apparition de l'instabilité. Sur cet essai, il y a une très forte augmentation des fréquences crissantes au cours du temps. Ainsi au début du crissement, on a les fréquences 500 Hz, 1000 Hz, 1790 Hz, 1600 Hz, 2200 Hz, et 3200 Hz qui évoluent respectivement jusqu'à 700 Hz, 1470 Hz, 1920 Hz, 2200 Hz, 2900 Hz et 4400 Hz.

Un deuxième type de comportement est une succession d'instabilités bien marquées et différentes les unes des autres. Par exemple, pour la garniture GP1, on obtient une transition simple entre deux instabilités pour les essais non-stationnaires à 8 kN dont un exemple est donné sur la figure 3.12 où l'on voit clairement une première phase, d'amplitude modérée comprenant essentiellement les fréquences $f_0 = 1400$ Hz et $f_1 = 2100$ Hz suivie, à partir de $t = 10$ s, d'une deuxième phase d'amplitude bien plus grande, avec les fréquences $f_2 = 1300$ Hz, $2f_2 = 2600$ Hz, $f_3 = 1600$ Hz, $2f_3 = 3200$ Hz, $f_4 = 4700$ Hz, $f_5 = 5700$ Hz et $f_6 = 7100$ Hz.

On peut remarquer que lors de la dernière phase, certaines fréquences peuvent être assimilées à des harmoniques ($2f_2$ et $2f_3$), voire à des combinaisons (par exemple $f_5 \approx 2f_2 + 2f_3$ et $f_4 \approx f_2 + 2f_3$)

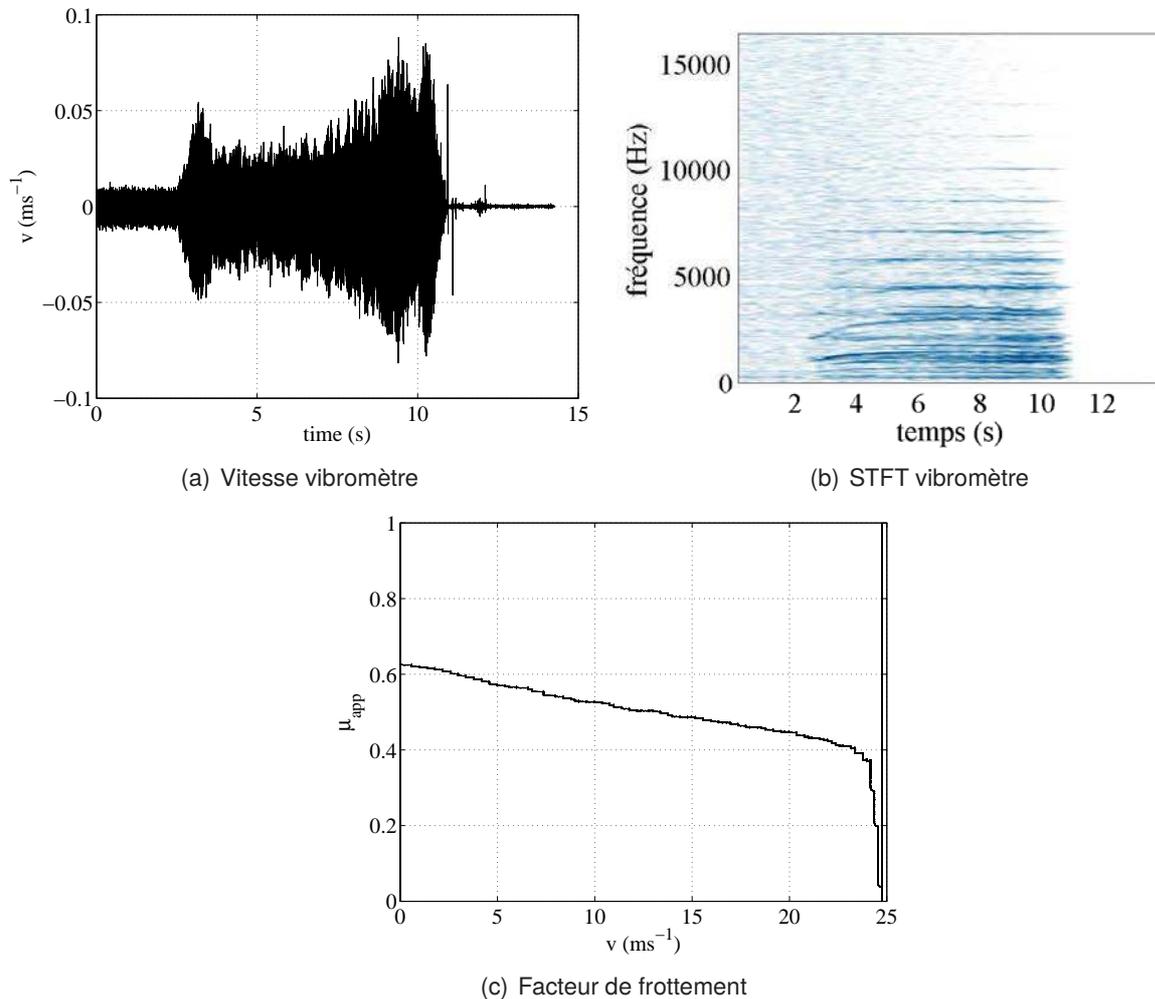


FIGURE 3.11 – Apparition d'une unique instabilité

de fréquences fondamentales. Même s'il demeure difficile de définir les liens possibles entre ces différentes fréquences apparaissant lors du crissement, cela montre la complexité du comportement non-linéaire mis en jeu lors d'un essai de freinage d'arrêt.

Aussi, il n'est pas évident de savoir si la fréquence f_2 est une évolution de la fréquence de l'instabilité à f_0 ou si elle correspond à une nouvelle instabilité qui vient « étouffer » la première. Comme précédemment, une évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de rotation du disque à $\frac{d\mu}{dV}$ constant est observée. Là encore, cela laisse la possibilité d'avoir des phénomènes d'instabilités liées à une évolution du coefficient de frottement.

En conclusion, l'analyse des essais de freinage d'arrêt montre la complexité du phénomène de crissement. Il est manifeste que des phénomènes d'ordre tribologiques se produisent à l'interface de contact, comme l'illustrent les évolutions du coefficient de frottement pour les essais présentés sur les figures 3.11 et 3.12. Ces phénomènes sont susceptibles d'être à l'origine de l'instabilité observée.

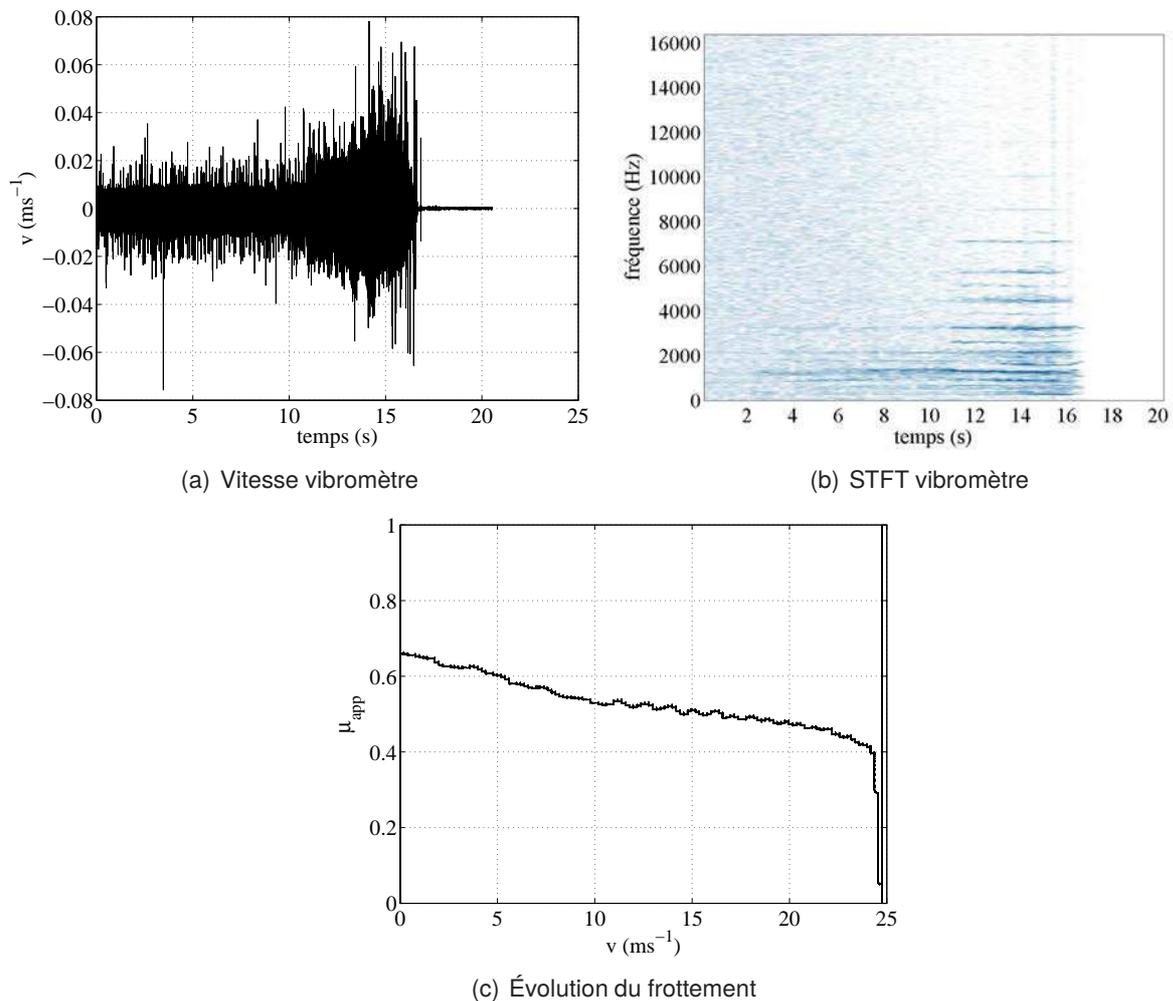


FIGURE 3.12 – GP1 Essai de freinage d'arrêt – 8 kN, 25 km/h, compression

Toutefois, surtout dans les cas où l'effort de serrage est important, la pente du coefficient de frottement en fonction de la vitesse reste faible. On peut donc envisager que le mécanisme de couplage de modes soit aussi présent, voire prépondérant pour l'apparition du crissement.

3.3.2 Analyse des essais de freinage de maintien

Nous nous intéressons maintenant aux freinages de maintien, avec comme objectif principal de savoir s'ils sont représentatifs des freinages d'arrêt. Tout d'abord si l'on s'intéresse au cas 8 kN, 7 km/h, on obtient le comportement présenté sur la figure 3.13. Dans cet essai on observe une évolution presque nulle du coefficient de frottement comme illustré sur la figure 3.13(c). Si ce comportement est fondamentalement différent de ce qui est observé pour les essais non-stationnaires, il traduit le fait que le mécanisme le plus susceptible d'être à l'origine des instabilités dans cet essai est le couplage de modes.

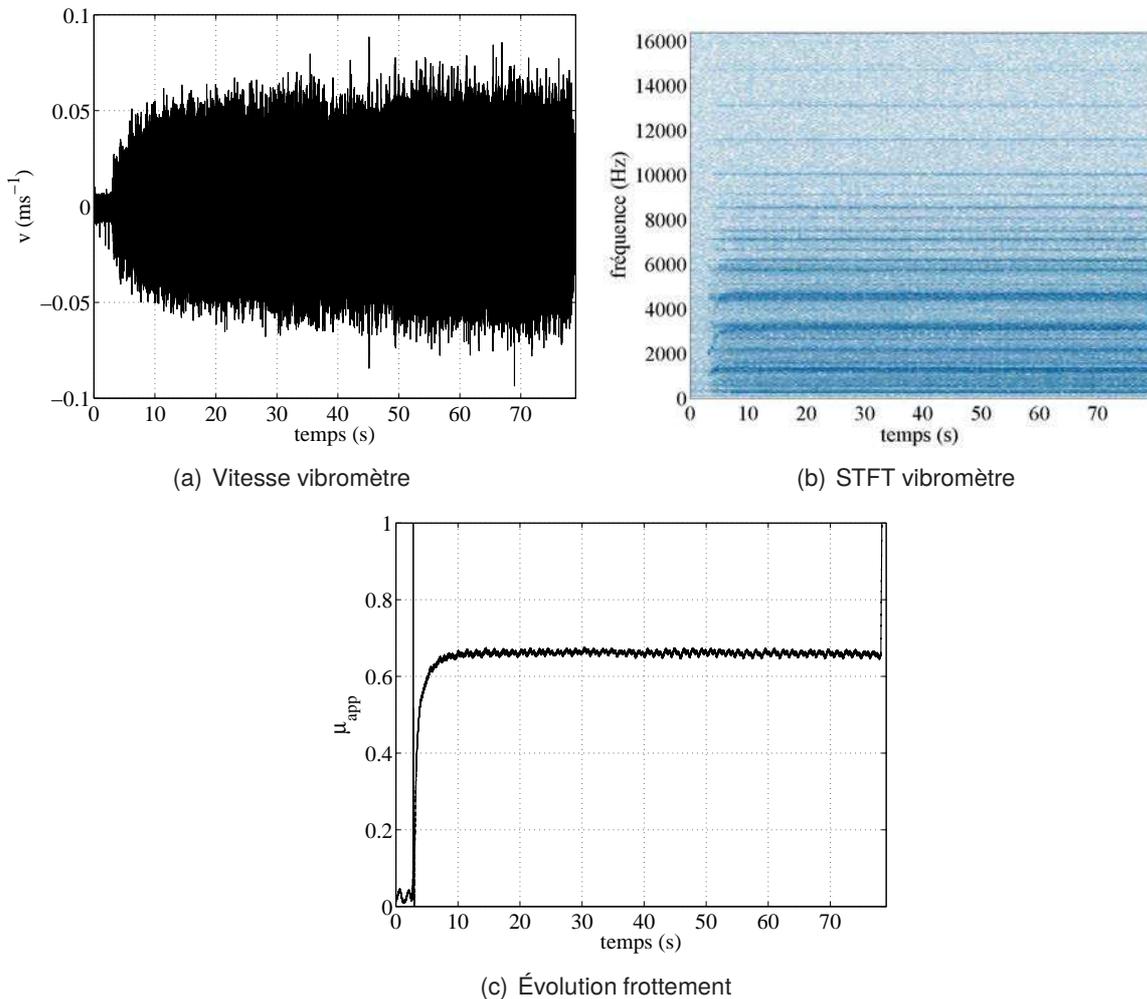


FIGURE 3.13 – GP1 8 kN, 7 km/h – Essai stationnaire

On observe une seule instabilité qui perdure tout au long de l'essai, ce qui est aussi différent de ce que l'on observe sur les essais de freinages d'arrêt (c.f. figure 3.13(b) pour l'essai stationnaire et figure 3.12(b) pour celui non-stationnaire). L'analyse temps-fréquence montre l'apparition des fréquences suivantes : $f_0 = 1300$ Hz, $f_1 = 2100$ Hz, $2f_0$, $f_2 = 3200$ Hz, $f_3 = 4700$ Hz et $f_5 = 5700$ Hz. Il est intéressant de noter, que l'on retrouve les fréquences apparaissant dans l'essai non-stationnaire à 8 kN présenté précédemment sur les figures 3.12. Cela suggère qu'il est possible que les instabilités observées dans l'essai non-stationnaire trouvent leur origine plutôt dans le couplage de modes que dans les mécanismes tribologiques, même si ces derniers ont sans doute une influence sur l'enchaînement des différentes séquences d'apparition du crissement. De plus, cela montre que les essais stationnaires (freinages de maintien) sont susceptibles de reproduire une partie des apparitions de crissement survenant lors des essais non-stationnaires (freinages d'arrêt).

Nous regardons maintenant un essai stationnaire à 15 kN. La vitesse mesurée au vibromètre, son analyse temps-fréquence et l'évolution du coefficient de frottement sont données sur la figure 3.14.

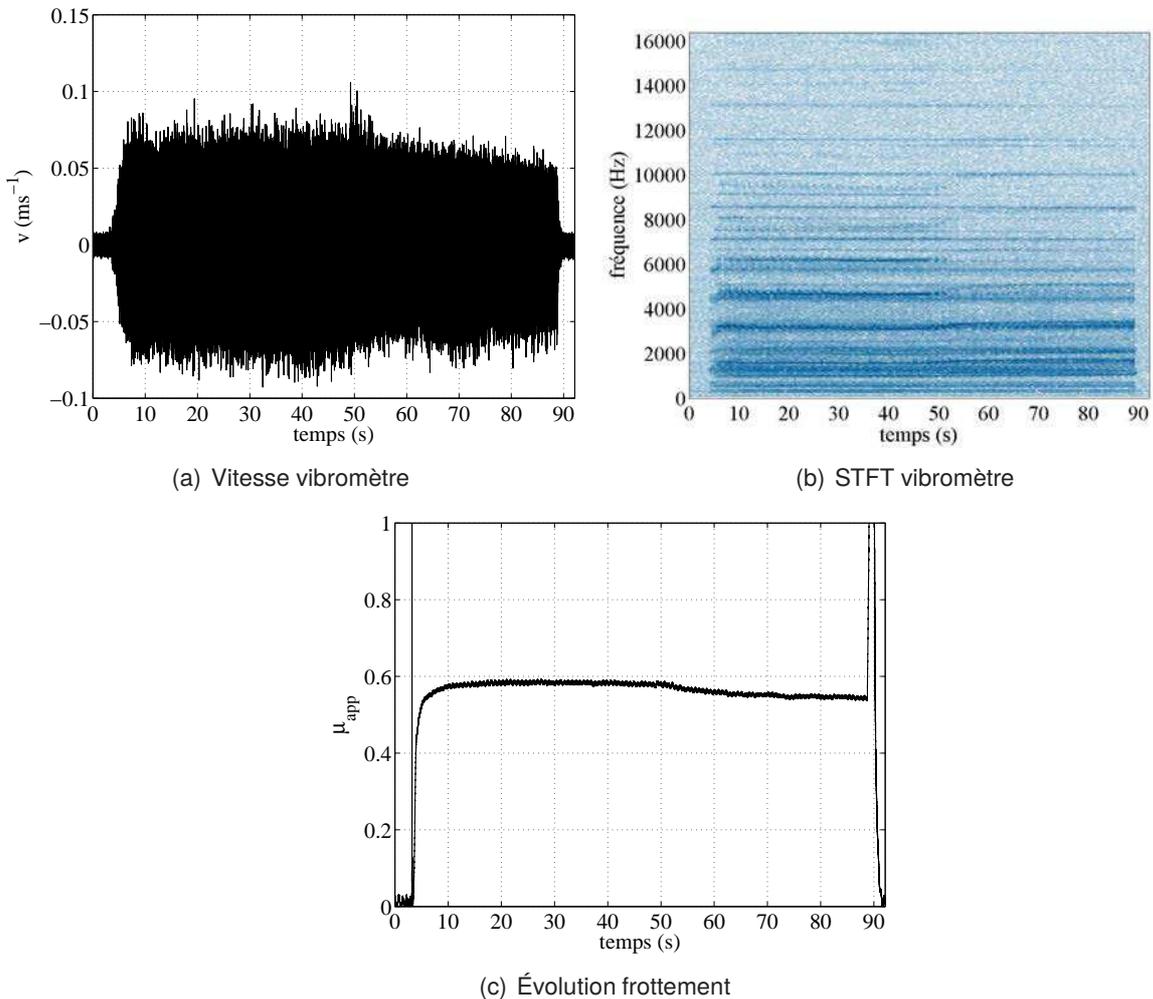


FIGURE 3.14 – GP1 15 kN, 14 km/h – Essai stationnaire

On constate sur cet essai, la présence de deux comportements vibratoires distincts avec une transition obtenue entre deux apparitions de crissement. Les essais stationnaires sont donc capables de reproduire ce type de comportement. Dans une première phase, on trouve les fréquences $f_0 = 1000$ Hz, $f_1 = 1600$ Hz, $f_2 = 2100$ Hz, $3f_1 = 3000$ Hz, $f_3 = 4700$ Hz, $f_5 = 5700$ Hz, $f_6 = 6200$ Hz et $f_7 = 7100$ Hz, puis dans la deuxième phase une instabilité disparaît tandis que l'autre perdure : on perd les raies correspondant aux fréquences $f_3 = 4700$ Hz et $f_6 = 6200$ Hz.

Si l'on regarde l'évolution du facteur de frottement, il semble constant dans chacune de ces phases avec une brusque chute à la transition autour de $t = 50$ s. Étant donné que le facteur de frottement est une quantité macroscopique, il est impossible de savoir si cette chute est liée ici à un effet tribologique qui serait le signe d'une évolution de la loi de frottement locale ou bien d'un effet structural tels que ceux que l'on mettra en évidence dans la suite de ce travail de thèse dans le chapitre 5, section 5.4.

| Configuration | Essai | Fréquence observée (Hz) | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| | | 1200 | 1700 | 2150 | 2500 | 3400 | 3900 | 4600 | 5800 | 7150 | 8500 | 10700 |
| 8 kN | 1 | × | × | × | × | × | × | | | | | |
| 25 km/h | 2 | × | × | × | × | × | × | | | | | |
| Compression | 3 | × | × | × | × | × | | × | | | | |
| 8 kN | 1 | × | × | × | × | × | × | × | × | | | |
| 25 km/h | 2 | × | × | × | × | × | × | | × | × | | |
| Traction | 3 | × | × | × | | × | × | | | | | |
| 8 kN | 1 | × | × | × | × | × | × | × | × | | | × |
| 60 km/h | 2 | × | × | × | × | × | × | | × | × | | |
| Compression | 3 | × | × | × | × | × | | | | | | |
| 8 kN | 1 | × | × | × | | × | × | | | | | |
| 60 km/h | 2 | × | × | | | × | | | | × | × | |
| Traction | 3 | × | × | × | | × | | | | × | × | |
| 15 kN | 1 | × | × | | | × | | × | | | | |
| 25 km/h | 2 | × | × | | | | | | | | | |
| Compression | 3 | × | × | | × | × | | × | | | | |
| 15 kN | 1 | × | × | × | | × | | × | | × | | |
| 25 km/h | 2 | × | × | × | | × | | × | | × | | |
| Traction | 3 | × | × | × | | × | | × | | × | | |
| 15 kN | 1 | × | × | × | | × | | | | | | |
| 60 km/h | 2 | × | × | × | × | × | | × | | × | | |
| Compression | 3 | × | × | | | × | | × | | | | |
| 15 kN | 1 | × | × | × | | | | | | | | |
| 60 km/h | 2 | × | × | × | × | × | | × | | × | | |
| Traction | 3 | × | × | × | × | × | | × | | | | |
| Taux d'apparition (%) | | 100 | 100 | 79 | 54 | 92 | 33 | 38 | 8 | 21 | 8 | 4 |

TABLE 3.3 – Synthèse des apparitions fréquentielles pour les freinages d'arrêt – Garniture GP1

3.3.3 Synthèse sur les essais de freinages d'arrêt et de maintien

À partir de l'analyse de l'ensemble des essais réalisés sur la garniture GP1, il apparaît que le système ne crisse que selon un nombre limité de fréquences, qui sont caractéristiques de la garniture considérée. Afin d'illustrer ce fait et pour permettre une vision synthétique des résultats (occurrence de crissement et fréquence associée) l'ensemble des essais de freinage d'arrêt sont présentés dans le tableau 3.3 pour les différentes conditions de fonctionnement. Ces résultats se retrouvent sur les autres garnitures comme le montre les rapports d'essais réalisés par l'AEF [111].

3.4 Conclusions sur l'étude expérimentale du crissement

La campagne d'essais dont le protocole a été établi au cours de cette thèse a donné des résultats très riches qui ont permis de mieux cerner les phénomènes en jeu dans le crissement des freins de TGV.

Les essais stationnaires (de maintien) ne présentent pas les mêmes types de comportement que les essais non-stationnaires (d'arrêt). Lors des freinages d'arrêt, il semble que l'interface de contact subit une évolution plus marquée que dans les freinages de maintien secs. Il est *a priori* impossible de dire si les mécanismes de déstabilisation à l'origine du crissement dans les freinages d'arrêt sont plutôt de nature tribologique ou structurale. Il semble probable que les deux types de mécanismes coexistent et soient à l'origine de successions plus ou moins complexes d'apparition et de disparition du crissement et des fréquences d'instabilités associées.

En première approximation et afin de pouvoir mener des comparaisons entre les simulations numériques du crissement (qui supposent un état à vitesse constante) et les essais expérimentaux, il paraît raisonnable de supposer que les freinages stationnaires se rapprochent des essais non-stationnaires qui correspondent à la configuration réelle en exploitation. En effet, les niveaux observés ainsi que les fréquences émergentes sont semblables. Cependant, nous devons garder à l'esprit que les essais stationnaires ne permettent pas de reproduire l'ensemble des phénomènes vibratoires (transitions, apparitions/disparitions de fréquences, ...) apparaissant lors des essais de crissement en configuration de freinage d'arrêt.

Du point de vue de la caractérisation du crissement, les essais stationnaires permettent une bonne estimation des fréquences crissantes et des niveaux générés lors d'un freinage d'arrêt. Dans une perspective de simulation temporelle et au vu des méthodes actuelles, il semble difficile d'imaginer reproduire un essai non-stationnaire complet. La première raison à cela est le manque de finesse dans les lois utilisées et la difficulté d'introduire des lois tribologiques pertinentes dans une simulation numérique du crissement. La deuxième raison – probablement plus limitante que la première – est l'ordre de grandeur des durées simulées qui aujourd'hui ne peuvent dépasser la seconde. La plupart des transitions observées ici se déroulent sur des échelles de temps de l'ordre de la seconde et risquent donc d'être impossible à reproduire.

Ainsi, les développements numériques qui sont réalisés dans la suite de ce travail de thèse ont pour principal objectif de reproduire au mieux les phénomènes observés dans le cas des essais stationnaires.

Chapitre 4

Contact et frottement – Transitoire – Réduction non-linéaire

Dans ce chapitre, nous aborderons la modélisation du contact frottant. Nous verrons différentes formulations classiques pour les problèmes de contact frottant, en particulier nous nous intéresserons aux lois de contact unilatéral puis aux lois de frottement. Nous aborderons ensuite la résolution numérique d'un problème de dynamique transitoire avec une interface de contact frottant. Nous exposerons les choix retenus et les développements réalisés dans le cadre de ce travail de thèse. Enfin, nous aborderons diverses méthodes de réduction des systèmes non-linéaires en dynamique transitoire et stationnaire afin d'orienter les choix effectués pour la suite.

4.1 Modélisation du contact frottant

Nous avons vu que le crissement est un phénomène intimement lié au contact frottant. Si la notion de contact frottant peut paraître intuitive, sa modélisation n'est pas tout à fait triviale : en effet, suivant l'échelle à laquelle on se place et l'étendue des phénomènes dont on veut rendre compte, différentes lois plus ou moins complexes ont été développées. Dans tout ce chapitre, nous considérons le frottement d'un solide déformable contre un espace rigide. Dans le cas d'un contact entre deux solides, ces lois restent parfaitement valables en considérant les champs relatifs, la considération ici d'un seul solide sert à simplifier les notations sans restreindre la généralité du problème.

4.1.1 Modélisation du contact unilatéral

Les études du contact unilatéral, sont assez nombreuses en particulier suite aux développements industriels du XIX^e siècle où des problèmes de fatigue par contact ont commencé à faire leur apparition. La modélisation la plus intuitive du contact unilatéral est sans doute celle dite de Signorini [105]. Il s'agit d'une modélisation de contact idéalisée dans laquelle toute interpénétration entre les deux corps en contact est interdite et tout effort exercé entre les deux corps est de type répulsif. Dans cette modélisation, une condition de réciprocité est imposée. Elle consiste à considérer un travail des efforts de contact normaux nul : soit il y a contact, alors le déplacement relatif entre les deux corps est nul et la réaction de contact est non-nulle, soit le déplacement est non-nul, alors l'effort est nul.

Cette formulation se traduit par les inéquations et l'équation données en (4.1).

$$\begin{cases} g_n - g_0 \leq 0 \\ r_n \leq 0 \\ (g_n - g_0) r_n = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où g_n est le déplacement relatif entre les deux corps en contact potentiel, g_0 est un jeu initial et r_n est la réaction de contact normale.

Cette loi est une loi intuitive qui traduit bien l'impression que l'on se fait du contact unilatéral. Cependant, elle a comme inconvénients de ne pas être une loi bi-univoque en effort-déplacement et de

présenter un point anguleux en $(r_n, g_n) = (0, 0)$. D'autres modélisations classiques du contact unilatéral évitent ces difficultés. Elles considèrent généralement que le problème est posé à une échelle plus grossière que celle où la non-pénétration est pertinente et proposent donc des comportements pouvant être vus comme une « moyenne » sur une petite zone. C'est le cas d'une des modélisations les plus connues du contact unilatéral, celle de Hertz [53], portant sur le contact non-conforme entre deux corps élastiques. Fondée sur la solution de Boussinesq de la déformation d'un plan élastique soumis à une force normale ponctuelle, cette théorie permet de donner une forme de la zone de contact entre deux ellipsoïdes ainsi que la répartition de pression. Ce modèle fournit une raideur de contact proportionnelle à la racine du déplacement (4.2) et dépendant des rayons de courbure des surfaces en contact.

$$r_n \propto g_n^{\frac{3}{2}} \quad (4.2)$$

En pratique, les lois de contact Hertiennes sont souvent appliquées de manière globale sur l'ensemble de la zone de contact [32], ou bien avec une méthode dite semi-Hertzienne qui consiste à subdiviser la zone de contact en sous-zones sur lesquelles la raideur de Hertz est recalculée [104].

D'autres lois de contact unilatéral ont été développées. Elles sont le plus souvent bi-univoques et ne présentent pas de point anguleux. Ces lois sont généralement introduites pour réaliser deux objectifs. Le premier est la simplification de la résolution du contact de Signorini par sa régularisation. Dans cette approche, des paramètres de régularisation sont introduits de manière purement arbitraire dans le but de réaliser un compromis entre vérification de la loi de Signorini et coût de résolution du problème. Le deuxième objectif est une modélisation qui se veut plus physique : on considère qu'à moins de se placer à une échelle suffisamment petite, la description géométrique des interfaces en contact ne permet pas d'utiliser le contact idéalisé car, entre autres effets, les aspérités des surfaces peuvent s'écraser sous la pression de contact. Cette considération justifie l'introduction de lois bi-univoques. Le plus souvent, les lois considérées sont de type *exponentielle*.

Une des difficultés majeures lors de l'emploi de lois régulières pour le contact, est de mesurer la raideur de contact de l'interface modélisée. Effectivement, ce sont des raideurs très élevées et la mise en place d'un protocole expérimental fiable et robuste pour les mesurer s'avère être une tâche complexe. L'application de telles méthodes sur un panel varié de garnitures nécessite des moyens qui dépassent le cadre de cette étude.

Le graphe effort-jeu de différentes lois de contact est donné sur la figure 4.1.

4.1.2 Modélisation du frottement

La modélisation du frottement sec a également constitué un sujet d'intérêt depuis de nombreuses années, tout d'abord car en tant que phénomène s'opposant au mouvement, le frottement est assez vite apparu comme facteur dimensionnant pour la puissance des machines, ensuite du fait de son rôle dans l'usure des pièces composant les mécanismes.

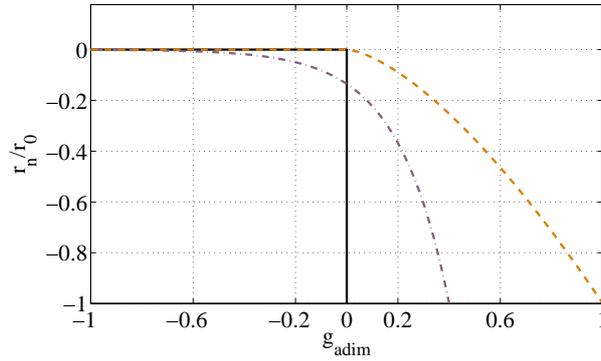


FIGURE 4.1 – Relation pression-déplacement de différentes lois de contact : — Signorini, - - - Exponentielle, - - - Hertz

C'est ainsi que les premiers modèles remontent au XVI^e siècle, avec l'énoncé en 1508 par Léonard de Vinci d'une modélisation du frottement en deux points :

- ◆ la force de frottement est proportionnelle à la charge (*i.e.* la force maintenant les deux corps en contact) ;
- ◆ la force de frottement est indépendante de l'aire de contact.

En 1699 Amontons [4] complète ces deux points avec une troisième loi : la force de frottement est indépendante de la vitesse. La modélisation proposée par Amontons sera confirmée plus tard par Coulomb [29]. Cette loi sera retenue sous le nom de loi de frottement de Coulomb. Le formalisme de Coulomb pour décrire les lois de frottement demeure le plus utilisé de nos jours.

La loi de frottement de Coulomb peut s'exprimer sous la forme donnée par l'équation (4.3) où \dot{w} désigne la vitesse de glissement relative. Lorsque l'on parle de frottement de Coulomb, on fait le plus souvent référence à une loi avec un coefficient μ constant ou bivalué, avec une valeur μ_s pour le frottement sans glissement et une autre μ_c lorsque que les deux corps ont une vitesse relative non-nulle, avec, dans la plupart des cas, μ_s plus élevé que μ_c .

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{r}_t\| \leq -\mu r_n \\ \|\mathbf{r}_t\| = -\mu r_n \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \dot{\mathbf{w}} = -\lambda \mathbf{r}_t \\ \|\mathbf{r}_t\| < -\mu r_n \Rightarrow \dot{\mathbf{w}} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Cette loi est, tout comme la loi de contact de Signorini, non-régulière et non-univoque. Plusieurs modèles existent afin de la régulariser, le plus simple consistant à prendre un seuil δ en vitesse pour faire la transition entre les deux sens sur l'intervalle $[-\delta, \delta]$. D'autres encore utilisent une fonction du type Arctangente ou encore la loi de Norton-Hoff (4.4) qui permet d'approcher autant qu'on le souhaite la loi de Coulomb, et dont le graphe est donné sur la figure 4.2.

$$\mathbf{r}_t = \mu r_n \|\dot{\mathbf{w}}\|^{\xi-1} \dot{\mathbf{w}} \quad (4.4)$$

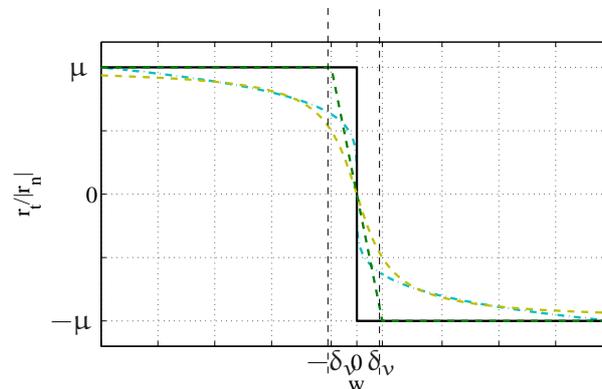


FIGURE 4.2 – Relation effort tangent-vitesse pour différentes lois de frottement : — Coulomb, - - Norton-Hoff, - - Arctangente, - - Linéaire

où $\xi \in]0; 1[$ est un paramètre qui permet de choisir le degré de régularisation de la loi.

On pourra noter une dernière variante de loi de frottement simple : la loi de Tresca. Il s'agit d'une loi de Coulomb simplifiée où l'on perd la dépendance à l'effort normal, la quantité μr_n étant alors simplement remplacée par un seuil s . Cette formulation ne présente pas beaucoup d'intérêt d'un point de vue physique, mais elle a le grand avantage d'admettre un théorème de l'énergie potentielle.

Le formalisme de la loi de Coulomb permet de prendre en compte de nombreux effets si l'on autorise le coefficient de frottement μ à être une fonction de diverses variables. Les choix classiques sont la vitesse de glissement et la température, mais ce ne sont pas les seuls possibles. Parmi les premiers raffinements de la loi de Coulomb, on trouve les études effectuées par Stribeck [116] qui, suite à de nombreuses expériences sur le frottement dans les roulements, déduit des plages de variation du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement, plages usuellement représentées dans un graphique appelé courbe de Stribeck (voir fig. 4.3). Sur ces courbes, on remarque en général une chute continue du coefficient de frottement sur les faibles vitesses de glissement, puis une augmentation régulière quasi linéaire sur une plage de vitesses modérées. Cet effet est appelé « effet Stribeck » et est modélisé par la loi de dépendance à la vitesse donnée par l'équation (4.5), dont le graphe se trouve en figure 4.4. Cette modélisation couple un effet de chute exponentielle du coefficient de frottement d'une valeur μ_s à celle μ_d avec une vitesse caractéristique v_{st} , et un effet visqueux avec un coefficient χ .

$$\mu = \mu_d + (\mu_s - \mu_d) e^{-\frac{\|\dot{w}\|}{v_{st}}} + \chi \|\dot{w}\| \quad (4.5)$$

Les études expérimentales du frottement montrent quelques classes de phénomènes que l'on peut souhaiter prendre en compte dans un modèle de frottement. Elles sont constituées des phénomènes d'adhérence, des phénomènes liés à un coefficient statique plus élevé que le coefficient dynamique, des comportements de type glissement-adhérence, des effets visqueux, de l'effet Stribeck et des

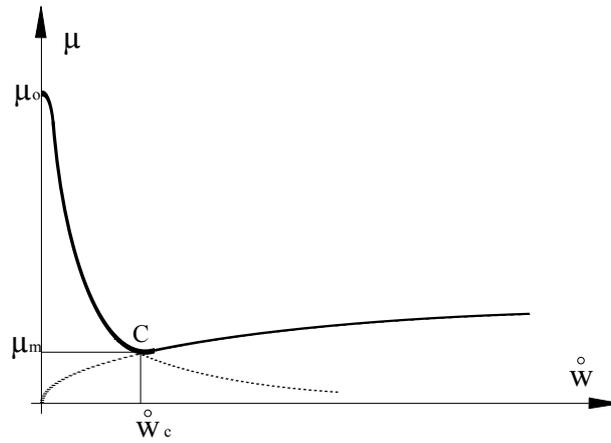


FIGURE 4.3 – Courbe de Stribeck

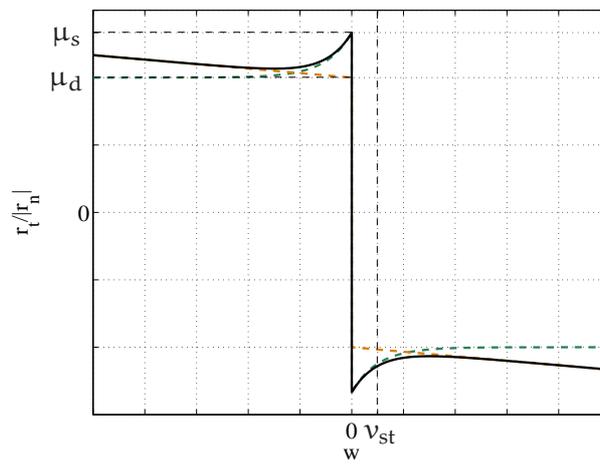


FIGURE 4.4 – Relation effort tangent-vitesse avec l'effet Stribeck : — courbe complète, - - partie exponentielle, - - partie visqueuse

effets d'histoire tels que des cycles d'hystérésis lors du glissement-adhérence.

Avec le formalisme de Coulomb et uniquement la vitesse de glissement comme paramètre pour faire varier le coefficient, les effets d'histoire ne sont pas représentables. Ces derniers nécessitent le recours à une ou plusieurs variables internes. Un des modèles les plus simples permettant de représenter l'effet d'hystérésis est celui de Dahl [27] qui utilise comme variable interne z , le glissement relatif, de sorte que $\frac{dz}{dt} = \dot{w}$, ainsi qu'une formulation inspirée des lois de plasticité traduite par l'équation (4.6).

$$\frac{dr_t}{dt} = -\sigma \left(1 + \frac{r_t \text{sign}(\dot{w})}{\mu|r_n|} \right)^\alpha \dot{w} \quad (4.6)$$

où r_t désigne l'effort local de friction, σ et α sont des paramètres de recalage, généralement dépendants du matériau. Diverses améliorations ont été apportées à ce modèle. Parmi les plus répandues, on trouve le modèle de LuGre [123] ou encore le modèle de Maxwell-Slip généralisé. Le modèle de LuGre est régi par les équations (4.7) et fait intervenir une variable interne z homogène à un déplacement.

$$\begin{aligned} r_t &= -(\sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{w}) \\ \frac{dz}{dt} &= \left(1 - \frac{\sigma_0}{g(\dot{w})} \text{sign}(\dot{w}) \right) \dot{w} \end{aligned} \quad (4.7)$$

où σ_0 et σ_1 sont respectivement une raideur et un terme d'amortissement portant sur la variable interne z , tandis que σ_2 est le coefficient de frottement visqueux du modèle et $g(\dot{w})$ est une fonction définissant le seuil de glissement.

Ce modèle permet la prise en compte de l'effet Stribeck et du terme visqueux. Le modèle Maxwell-Slip généralisé est quant à lui une mise en parallèle de plusieurs modèles LuGre avec une gestion de l'adhérence ajoutée.

La figure 4.5 montre une comparaison du comportement des modèles de Dahl et de LuGre pour une vitesse de glissement imposée sinusoïdale. On y voit très clairement le cycle d'hystérésis pour les deux modèles, la prise en compte de l'effet Stribeck et du terme visqueux par le modèle de LuGre.

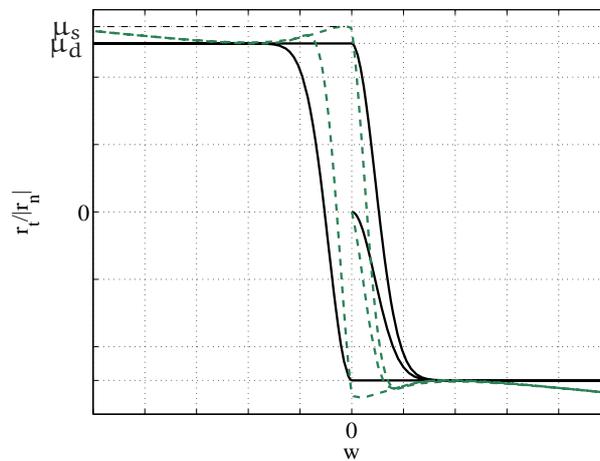


FIGURE 4.5 – Relation effort tangent-vitesse pour différents modèles : — Dahl, - - - LuGre

4.2 Méthodes numériques pour traiter le contact frottant en transitoire

Dans la section précédente, nous avons vu différentes modélisations du contact et du frottement. Ici, nous nous intéressons aux diverses méthodes que l'on peut mettre en œuvre afin de simuler de manière numérique la dynamique transitoire d'un système comportant une interface de contact frottant. Suivant le type de modélisation retenu, on ne dispose pas du même choix de méthodes, notamment du fait de la nature plus ou moins régulière de la modélisation choisie. Pour l'étude du crissement d'un système de freinage, la caractérisation des sources acoustiques nécessite l'obtention des niveaux vibratoires. En effet, même si on peut étudier la stabilité du système, comme on l'a vu au chapitre 2, les informations que l'on peut en tirer ne sont valides que pour des amplitudes faibles autour d'une position d'équilibre statique ou quasi statique, et ne permettent *a priori* que de statuer sur le développement ou non de vibrations auto-entretenues, sous réserve que les non-linéarités ne perturbent pas trop le comportement du système. De plus, la stabilité des systèmes frottants étant rarement une propriété robuste vis-à-vis des paramètres structuraux des systèmes [58], et les amplitudes vibratoires atteintes n'étant pas liées aux taux de divergence des modes instables, il semble important d'utiliser des outils capables de donner une information sur les niveaux vibratoires. Plusieurs méthodes sont envisageables pour parvenir à cette fin. L'une des démarches les plus évidentes est l'intégration temporelle du système, qui est la seule méthode capable de prendre en compte à la fois les conditions de fonctionnement et les conditions initiales, et de faire un lien entre un état final calculé et ces conditions. D'autres méthodes d'évaluation des états finaux – notamment s'ils sont des cycles limite périodiques ou quasi périodiques – existent, mais ne peuvent que difficilement prendre en compte un changement de comportement du système qui interviendrait durant la phase transitoire, et de ce fait ne permettent pas d'établir un lien fiable entre des conditions initiales, ou de fonctionnement, et le cycle obtenu.

On s'intéresse donc au problème de référence suivant, où une structure occupe un domaine Ω dont le bord $\partial\Omega$ admet une partition en trois ensembles : $\partial\Omega_1$, partie du bord sur laquelle le déplacement est imposé ; $\partial\Omega_2$, partie du bord où des efforts extérieurs connus sont imposés, et \mathcal{S}_c , l'interface de

contact.

4.2.1 Simulations en dynamique non-linéaire transitoire

Nous nous intéressons ici à la simulation temporelle de la dynamique d'un système mécanique sous l'hypothèse des petites perturbations. On considère de plus que le comportement du système est visco-élastique linéaire, avec des efforts extérieurs non-linéaires dépendants du déplacement et de la vitesse du système. On suppose qu'une discrétisation spatiale du problème a été effectuée de sorte que l'on peut écrire les équations gouvernant la dynamique du système sous la forme suivante [50] :

$$\begin{cases} \forall \dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n, \text{ trouver } (\dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{t}), \mathbf{u}^*(\mathbf{t})) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que :} \\ \dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{t})^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{t})^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{t})^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{t})^T (\mathbf{f}(\mathbf{t}) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{t})) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \mathbf{u}_{\text{bord}} = \mathbf{u}_d, \dot{\mathbf{u}}_{\text{bord}} = \dot{\mathbf{u}}_d \end{cases} \quad (4.8)$$

Ce qui se traduit par la résolution du système donné par l'équation (4.9).

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{t}) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{t}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \mathbf{u}_{\text{bord}} = \mathbf{u}_d, \dot{\mathbf{u}}_d = \dot{\mathbf{u}}_d \end{cases} \quad (4.9)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} , et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur du système ; \mathbf{u} est le champ de déplacement dans le système ; \mathbf{f} est le vecteur-force généralisé des efforts extérieurs donnés, et \mathbf{f}_{nl} celui des efforts non-linéaires. \mathbf{u}_0 , $\dot{\mathbf{u}}_0$ sont les champs de déplacement et de vitesse initiaux, et \mathbf{u}_d , $\dot{\mathbf{u}}_d$ sont des conditions aux limites imposées.

L'intégration temporelle numérique suppose une discrétisation du temps afin d'approcher la réponse du système. On distinguera principalement deux classes de méthodes. L'une, très classique, fondée sur le principe des *différences finies*, où les différentes quantités sont évaluées à des piquets de temps t_i en fonction de développements limités en chacun de ces piquets, l'autre, fondée sur les méthodes de Ritz consistant à projeter le problème sur un espace de fonctions choisies, souvent prises à variables séparées en temps et en espace.

4.2.1.1 Schémas aux différences finies

Les schémas aux différences finies reposent sur un découpage de l'intervalle d'étude $[0, T]$ en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur h_i et sur le fait d'exprimer la solution au piquet $i + 1$ en fonction des solutions aux autres piquets : $s_{i+1} = \mathcal{G}(s_0, s_1, \dots, c_n)$. On distingue dans ces schémas ceux qui sont dits *explicites*, c'est-à-dire qui expriment la solution au piquet $i + 1$ uniquement en fonction des

piquets strictement antérieurs ($s_{i+1} = \mathcal{G}(s_0, s_1, \dots, s_i)$), de ceux dits *implicites* pour lesquels des piquets suivants peuvent être utilisés. Si \mathcal{G} ne fait intervenir que les piquets i ou $i + 1$, le schéma est appelé schéma à un pas de temps. Les schémas à un pas sont souvent privilégiés car ils permettent de ne garder en mémoire que les solutions en i et $i + 1$.

Les propriétés recherchées dans un schéma d'intégration sont d'une part sa précision, évaluée via l'ordre de l'erreur commise en fonction de la taille du pas de temps h , d'autre part sa stabilité et enfin, le fait d'être conservatif. La stabilité des schémas explicites est souvent conditionnelle. Parmi les conditions classiques, il y a celle de Courant-Friedrichs-Lewy [25] qui lie les discrétisations temporelle et spatiale, ce qui a tendance à rendre ces schémas coûteux dès que la discrétisation spatiale est fine.

Le terme de force non-linéaire présent ici doit faire l'objet d'un traitement particulier car l'effort de contact peut être discontinu. Nous introduirons donc les schémas d'intégration en omettant ce terme puis nous verrons comment le rajouter par la suite.

Les schémas d'Euler et la θ -méthode. Parmi les schémas les plus simples, on trouve les schémas d'Euler explicite et implicite. En supposant la solution connue au piquet i et en intégrant l'équation (4.9) on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\dot{\mathbf{u}}^{i+1} - \dot{\mathbf{u}}^i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}})d\tau \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{u}}d\tau \end{cases} \quad (4.10)$$

En utilisant un développement limité à l'ordre 1 en t_i , on peut écrire :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}d\tau = h\mathbf{f}^i + o(h) \quad (4.11)$$

De même, en écrivant le développement limité en t_{i+1} , on obtient :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}d\tau = h\mathbf{f}^{i+1} + o(h) \quad (4.12)$$

En pondérant ces deux approximations, on obtient le schéma d'intégration suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}\dot{\mathbf{u}}^{i+1} = \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{f}^{i+1}, \mathbf{f}^i, \theta, h) \\ \mathbf{J} = \left(\frac{\mathbf{M}}{h} + h\theta^2\mathbf{K} + \theta\mathbf{C} \right) \\ \mathbf{e} = -\mathbf{K}\mathbf{u}^i + \left(\frac{\mathbf{M}}{h} - (1-\theta)[\mathbf{C} + h\theta\mathbf{K}] \right) \dot{\mathbf{u}}^i + \theta\mathbf{f}^{i+1} + (1-\theta)\mathbf{f}^i \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + h(\theta\dot{\mathbf{u}}^{i+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{u}}^i) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

où \mathbf{J} est la matrice de l'intégrateur ou matrice d'amortissement effective, et \mathbf{e} est le second membre effectif.

Lorsque θ est pris égal à 0, on obtient un schéma purement explicite appelé schéma d'Euler explicite. Ce schéma est un schéma du premier ordre conditionnellement stable. Pour $\theta = 1$, le schéma est purement implicite et inconditionnellement stable mais fortement amorti. Pour des valeurs de θ inférieures à 0,5, ce schéma est toujours conditionnellement stable, en revanche à partir de 0,5 il est stable quel que soit le pas de temps. La valeur de 0,5 a aussi l'intérêt de rendre ce schéma conservatif pour les problèmes linéaires, et donc de ne pas introduire d'amortissement numérique.

Les paramètres d'amortissement numérique sont une grande problématique pour les problèmes de dynamique. D'une part pour rester le plus proche possible de la physique, il est souhaitable de ne pas introduire d'amortissement. Cependant, du fait de bruit numérique, un léger amortissement haute fréquence peut être souhaitable afin de ne pas conserver et propager ce bruit au cours du temps. Toute la difficulté réside dans l'obtention d'un amortissement qui ne concerne que les fréquences situées en dehors de la plage d'intérêt.

Schémas de Newmark. Une classe de schémas très utilisée en dynamique, est celle des schémas de Newmark [90]. Ce sont des schémas qui prennent en compte l'accélération en écrivant des développements limités pondérés pour la vitesse et pour le déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}^i + h[(1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}^i + \delta\ddot{\mathbf{u}}^{i+1}] + o(h) \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + h\dot{\mathbf{u}}^i + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}^i + \alpha\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} \right] \end{array} \right. \quad (4.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}^i + h[(1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}^i + \delta\ddot{\mathbf{u}}^{i+1}] + o(h) \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + h\dot{\mathbf{u}}^i + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}^i + \alpha\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} \right] \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Ce qui donne comme matrice d'intégrateur et second membre effectif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} = \frac{1}{\delta h}\mathbf{M} + \mathbf{C} + \mathbf{K}\frac{\alpha h}{\delta} \\ \mathbf{e} = -\mathbf{K}\mathbf{u}^i + \left(\frac{\mathbf{M}}{h\delta} + \mathbf{K}\left(\frac{\alpha}{\delta} - 1\right)h \right) \dot{\mathbf{u}}^i \\ \quad + \left(\frac{1-\delta}{\delta}\mathbf{M} - \mathbf{K}h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \alpha\frac{1-\delta}{\delta} \right] \right) \ddot{\mathbf{u}}^i + \mathbf{f}^{i+1} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

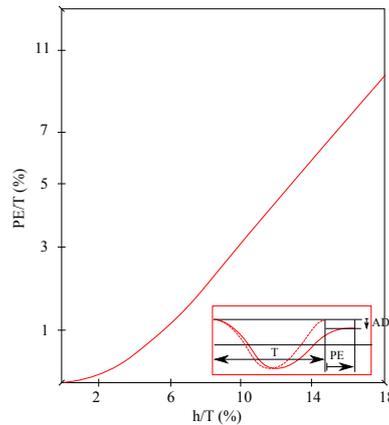


FIGURE 4.6 – Erreur sur l'estimation de la période en fonction du rapport h/T

Pour $\delta < 0,5$, cette méthode introduit un amortissement numérique négatif et s'avère être conditionnellement stable. Pour $\delta \geq 0,5$, elle introduit un amortissement positif, et pour $\delta = 0,5$, elle est conservative. Pour $\delta > 0,5$, la méthode est inconditionnellement stable pour $\alpha > \frac{(2\delta+1)^2}{4}$. Un des choix de paramètres les plus utilisés est $\delta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$ qui conduit à un schéma non-amorti, stable et d'ordre 2. La figure 4.6 montre pour ce schéma avec les paramètres sus-cités un phénomène général pour les schémas implicites qui est la surestimation des périodes. De ce fait, même si le schéma est stable quel que soit le pas de temps, si l'on veut convenablement représenter la physique, il faut garder un rapport h/T_{\min} entre le pas de temps et la plus petite période que l'on veut pouvoir représenter en dessous du dixième.

Du fait de cette contrainte sur la taille des pas de temps, pour les schémas explicites comme pour les schémas implicites, du bruit numérique peut se propager à haute fréquence dans les schémas conservatifs. On peut chercher à apporter de la dissipation pour les modes haute fréquence par l'ajout d'une contribution visqueuse (amortissement de Rayleigh, Caughey ou d'autres méthodes) mais pour de nombreux schémas, la matrice d'amortissement C n'a aucun effet en haute fréquence [61]. C'est pourquoi certains auteurs ont proposé des méthodes permettant d'introduire un amortissement numérique en haute fréquence, ou plus spécifiquement autour de la fréquence liée au pas de temps du schéma.

Un des schémas proposant un tel amortissement est le schéma Hilber-Hughes-Taylor (HHT) [57]. Il s'agit d'une modification des schémas de Newmark consistant à évaluer dans l'équation d'équilibre les champs cinématiques d'ordre 0 et 1 en temps en un instant décalé appelé point de collocation. Cette stratégie est inspirée des schémas θ -méthode de Wilson [122] mais permet de mieux maîtriser l'amortissement introduit et les phénomènes de dépassement importants lors de réponses à des échelons [56].

Ainsi avec la méthode HHT, l'équation de la dynamique discrétisée devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{C}(\gamma\dot{\mathbf{u}}^i + (1-\gamma)\dot{\mathbf{u}}^{i+1}) + \mathbf{K}(\gamma\mathbf{u}^i + (1-\gamma)\mathbf{u}^{i+1}) = (\gamma\mathbf{f}^i + (1-\gamma)\mathbf{f}^{i+1}) \quad (4.17)$$

Et on obtient les matrice et second membre de l'intégrateur suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \frac{1}{\delta h} \mathbf{M} + (1 - \gamma) \mathbf{C} + (1 - \gamma) \mathbf{K} \frac{\alpha h}{\delta} \\ \mathbf{e} = -\mathbf{M} \left(\frac{1}{\delta h} \dot{\mathbf{u}}^i + \frac{1 - \delta}{\delta} \ddot{\mathbf{u}}^i \right) - \gamma \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^i \\ \quad + \mathbf{K} \left(-\mathbf{u}^i + (1 - \alpha) h \left[\left(\frac{\alpha}{\delta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}^i + h \left(\frac{\alpha}{\delta} - \frac{1}{2} \right) \ddot{\mathbf{u}} \right] \right) + \alpha \mathbf{f}^i + (1 - \alpha) \mathbf{f}^{i+1} \end{cases} \quad (4.18)$$

Le paramètre γ permet d'introduire de la dissipation positive ou négative. Le schéma proposé par Hilber *et al.* prend des valeurs différentes pour δ et α que celles classiquement employées dans le but d'induire un fort amortissement numérique dans le schéma de Newmark correspondant, puis un amortissement négatif est introduit pour garder une précision raisonnable à basse fréquence. Les valeurs qu'ils proposent sont $\delta = 0,6$, $\alpha = 0,3025$ et $\gamma = -0,1$.

4.2.1.2 Schémas aux éléments finis espace-temps

Lorsque l'on traite du contact frottant en dynamique transitoire, il est probable que des chocs où d'autres formes de discontinuités se produisent, sur les vitesses. De plus, l'accélération peut ne pas être définie aux instants de chocs. Ces événements produisent des phénomènes difficiles à reproduire par les différents schémas introduits, avec généralement une propagation de fortes oscillations relativement large bande.

Une méthode élégante pour s'affranchir de ces difficultés est l'introduction de la discontinuité dans le schéma d'intégration en temps. Nous décrivons ici une méthode qui peut être vue comme une méthode aux éléments finis espace-temps faisant intervenir un choix de fonctions de forme pour l'évolution en temps des champs.

Schémas de Galerkin discontinus. Nous nous intéressons ici à un schéma de type Galerkin discontinu appliqué aux équations de la dynamique déjà discrétisées en espace. Pour simplifier la présentation, nous supposerons que les discontinuités ne se produisent qu'aux piquets de temps et que les différentes grandeurs sont continues sur les intervalles ouverts entre deux piquets. Ainsi, sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, les fonctions sont continues tandis qu'en un piquet t_i , elles sont bivaluées.

Suivant la formulation proposée par Hulbert *et al.* [62], on pose pour l'intégration sur $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\int_{[t_i, t_{i+1}]} f g dt = \int_{]t_i, t_{i+1}[} f g dt + f(t_i^+) [g(t_i^+) - g(t_i^-)] \quad (4.19)$$

Ce choix purement arbitraire sert à prendre en compte la discontinuité tout en évitant une interdépendance des différents intervalles, de sorte que le schéma qui en découle reste un schéma à un seul pas.

L'application de cette règle d'intégration aux équations déjà discrétisées en espace (4.20) et le choix de fonctions de forme pour l'évolution en temps des déplacements et des vitesses, permet l'obtention d'un système matriciel d'intégration en temps.

$$\begin{cases} \forall(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*), \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{v}^{*\top} (\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u}) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{v}^{*\top} \mathbf{f} dt \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{u}^{*\top} (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) dt = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

À titre d'exemple, un choix de fonctions de forme linéaires pour les déplacements, et constantes pour les vitesses, telles que décrites par l'équation (4.21) conduit à l'obtention de l'équation (4.22).

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 f_0(t) + \mathbf{u}_1 f_1(t) \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0^* f_0(t) + \mathbf{u}_1^* f_1(t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \text{ en } t_i^- \text{ et } \mathbf{v}_1 \text{ sur }]t_i, t_{i+1}[\\ \mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0^* \text{ en } t_i^- \text{ et } \mathbf{v}_1^* \text{ sur }]t_i, t_{i+1}[\\ f_0(t) = \left(1 - \frac{t}{h}\right), f_1(t) = \frac{t}{h} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{K}}{2} & \frac{\mathbf{M}}{h} + \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & -h\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}}{h}\mathbf{v}_0 - \frac{\mathbf{K}}{2}\mathbf{u}_0 + \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

avec \mathbf{I} la matrice identité.

Ce schéma, testé par Sen Gupta [52] pour des chocs dans des poutres, se montre très efficace pour la propagation de fortes discontinuités, mais introduit une dissipation importante pour des évolutions plus régulières, cette dissipation étant paramétrée par les discrétisations spatiale et temporelle uniquement. D'autres choix de fonctions de forme sont bien entendu possibles, et peuvent sans aucun doute pallier ce défaut, au détriment du nombre de données à stocker. Ce schéma est effectivement assez couteux avec quatre valeurs à garder par champ et par pas de temps.

Cette approche est similaire à celles développées par Krenk [70] et semble être une voie prometteuse pour l'avenir mais pour l'heure, la difficulté du choix des fonctions de forme, des paramètres gouvernant la dissipation et de sa mise en œuvre au vu des quantités de données à stocker semble ne pas inciter à utiliser ce genre d'approches.

Autres approches aux éléments finis espace-temps. Au lieu d'appliquer la formulation variationnelle sur le problème déjà discrétisé, il est possible de choisir des fonctions de forme temps-espace dès le début sur un principe variationnel continu, tel que le principe d'Hamilton. Ce type de démarche

est effectivement séduisant, mais nécessite d'établir des règles de maillage d'un domaine temps-espace garantissant une certaine causalité pour permettre une résolution incrémentale du problème. Si pour des structures 2D, on arrive relativement facilement à générer des maillages 2D×temps satisfaisants à l'aide de méthodes du type tent-pitcher [36], pour des structures 3D, les méthodes sont moins évidentes.

Une autre approche intéressante du point de vue gestion de la discontinuité est l'utilisation d'éléments finis étendus en temps. De même que les éléments finis étendus permettent de prendre en compte des discontinuités spatiales sans remaillage, l'idée ici est de réaliser un enrichissement lors d'une détection de discontinuité en dehors des piquets de temps [99]. Là encore, même si l'apport de telles méthodes semble intéressant, les coûts de mise en œuvre n'encouragent pas à les choisir.

De plus, compte tenu du nombre de données à conserver pour de tels schémas, il faut se poser la question de leur pertinence vis-à-vis d'approches aux différences centrées explicites avec un pas variable, telles que les approches *event driven* qui placent des piquets de temps à chaque détection d'un événement singulier.

4.2.2 Traitement numérique du contact frottant

4.2.2.1 Cas des lois régulières.

Dans la partie précédente, nous avons laissé de côté le terme lié aux efforts non-linéaires dans les procédures d'intégration. Dans le cas où l'effort non-linéaire peut être exprimé sous la forme d'une fonction régulière des quantités cinématiques $f_{nl}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}, t_{i+1})$ les stratégies de résolutions sont souvent fondées sur des méthodes de prédiction-correction et en particulier sur les algorithmes de Newton.

L'équation à résoudre dans un tel cas est alors donnée par (4.23), cette équation est non-linéaire et donc souvent non-résoluble de manière directe. On fait une prédiction des différentes quantités cinématiques en suivant le schéma d'intégration et, pour la première itération, en utilisant les quantités du pas de temps précédent. On peut alors calculer un défaut de vérification de l'équilibre donné par (4.24). On applique alors une correction $(\Delta\mathbf{u}, \Delta\dot{\mathbf{u}}, \Delta\ddot{\mathbf{u}})$ aux champs estimés visant à minimiser ce défaut.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{f}^{i+1} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}, t_{i+1}) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{r}_k^{i+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{f}^{i+1} - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}, t_{i+1}) \quad (4.24)$$

Les corrections en vitesse et en accélération sont liées à la correction en déplacement par le schéma d'intégration. Par exemple pour le schéma de Newmark, on dispose des relations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\mathbf{u}} = \frac{\Delta \mathbf{u}}{\alpha h^2} \\ \Delta \dot{\mathbf{u}} = \frac{\delta \Delta \mathbf{u}}{\alpha h} \end{cases} \quad (4.25)$$

Ainsi, on peut utiliser une procédure de Newton-Raphson ou de Newton tangent, en exprimant la jacobienne du résidu par rapport à la correction en déplacement, ce qui donne pour un schéma de Newmark :

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{M}}{\alpha h^2} + \frac{\delta \mathbf{C}}{\alpha h} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{NL}} \left(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} + \frac{\delta}{\alpha h} \Delta \mathbf{u} \right) \quad (4.26)$$

Si en théorie, l'utilisation de la jacobienne actualisée dans le schéma de Newton permet une convergence plus rapide, elle a pour effet de faire varier les opérateurs, ce qui implique une refactorisation à chaque itération et donc des coûts de calculs prohibitifs sur de larges systèmes. C'est pourquoi l'utilisation d'une jacobienne constante, et donc d'un algorithme de type Newton sécant est généralement préférée. On écrit donc la jacobienne sécante comme suit :

$$\mathbf{J}_{\text{SEC}} = \frac{\mathbf{M}}{\alpha h^2} + \frac{\delta}{\alpha h} \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{NL SEC}} \quad (4.27)$$

où $\mathbf{K}_{\text{NL SEC}}$ est une approximation constante de \mathbf{K}_{NL} .

La résultante de cette formulation est décrite par l'algorithme [alg. 1]. La vitesse de convergence de l'algorithme dépend du choix de la jacobienne sécante. Très souvent, on choisit comme jacobienne sécante la jacobienne tangente autour de l'équilibre. Ce choix est *a priori* raisonnable car l'évolution du système se fera autour de ce point. Cependant, pour un problème tel que le contact, le changement important de comportement entre état en contact et état décollé peut rendre ce choix non-optimal. Pour choisir la jacobienne sécante, Vermot des Roches, dans sa thèse [30], utilise une matrice correspondant à un contact linéaire bilatéral pénalisé sur l'ensemble de l'interface, avec le paramètre de pénalisation k_c . Il y montre aussi l'importance d'utiliser, en plus d'un algorithme de Newton, un *line search* qui consiste à considérer $\Delta \mathbf{u}$ comme une direction de descente et à chercher l'incrément effectif sous la forme $\Delta \mathbf{u}_{\text{eff}} = \rho \Delta \mathbf{u}$ où ρ est un réel. La recherche de ρ se fait elle aussi par un algorithme de Newton, qui a l'avantage d'être fonction d'une seule variable scalaire.

On notera que dès que l'on utilise un algorithme de Newton multidimensionnel, l'emploi d'une procédure de *line search* est très fortement recommandé. Dans l'ouvrage [98], on peut trouver une méthode de *line search* peu coûteuse par rapport à l'emploi d'un Newton unidimensionnel. Dans le cas du contact frottant régulier utilisé par Vermot des Roches, le *line search* utilisé est d'autant plus efficace que l'évaluation du résidu suivant la direction de descente ne fait intervenir aucun produit matrice-vecteur, ce qui la rend particulièrement peu coûteuse.

L'utilisation de lois de contact régulières permet aussi de limiter l'occurrence de discontinuités dans les champs solutions. En particulier, elles garantissent la définition en chaque instant de l'accéléra-

Algorithme 1: Algorithme de Newton sécant avec un schéma de Newmark**Data :** $\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \ddot{\mathbf{u}}^i, \varepsilon_f, \varepsilon_u$ **Result :** $\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}, \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}$ **begin**REM Prédiction à partir du pas i

$$\mathbf{u}_0^{i+1} = \mathbf{u}^i + h\dot{\mathbf{u}}^i + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{u}}^i$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}^i + h\ddot{\mathbf{u}}^i$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_0^{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}^i$$

REM Calcul du résidu i

$$k = 0$$

while $k < 1$ **or** $\frac{\|\mathbf{r}_k^{i+1}\|}{\|\mathbf{f}^{i+1}\|} < \varepsilon_f$ **or** $\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} < \varepsilon_u$ **do**

REM

$$\mathbf{r}_k^{i+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_k^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_k^{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_k^{i+1} - \mathbf{f}^{i+1} - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}, t_{i+1})$$

Correction

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{J}_{\text{SEC}}^{-1} \mathbf{r}_k^{i+1}$$

$$\mathbf{u}_{k+1}^{i+1} = \mathbf{u}_k^{i+1} + \Delta\mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{k+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_k^{i+1} + \frac{\delta\Delta\mathbf{u}}{\alpha h}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}^{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_k^{i+1} + \frac{\Delta\ddot{\mathbf{u}}}{\alpha h^2}$$

$$k = k + 1;$$

$$(\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}, \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}) = (\mathbf{u}_k^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}_k^{i+1}, \ddot{\mathbf{u}}_k^{i+1})$$

tion. Cette propriété permet l'utilisation des schémas de Newmark ou HHT qui utilisent la donnée de l'accélération et donc supposent qu'elle est définie.

4.2.2.2 Cas des lois non-régulières.

Lorsque l'on utilise des lois de contact non-régulières, on se heurte à plusieurs difficultés d'ordre numérique. Premièrement, les lois utilisées sont non-dérivables en tout point, ce qui nécessite de prendre certaines précautions pour les résolutions non-linéaires employant les gradients. Deuxièmement, les chocs et les événements de type glissement-adhérence sont des événements induisant de fortes discontinuités, ce qui nécessite un traitement particulier dans les intégrateurs numériques, en particulier pour les intégrateurs d'ordre élevé faisant intervenir l'accélération car cette dernière n'est pas définie au sens usuel du terme lors d'un choc. Enfin, les lois non-régulières de contact n'étant pas bi-univoques, les efforts de contact sont donc aussi des inconnues du problème, ce qui, suivant la méthode adoptée, peu vite entraîner une augmentation significative de la taille du problème avec, pour chaque inconnue cinématique de la zone de contact, une inconnue duale supplémentaire.

Dans leur grande majorité, les méthodes numériques pour la résolution du contact de Signorini-Coulomb se fondent sur une reformulation des lois décrites en section 4.1 proposée par Duvaut et Lions [33], qui permet d'écrire le problème en termes de projections sur des ensembles. On peut montrer que les lois de contact sont équivalentes aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \forall (\rho_n^u, \rho_t) \in \mathbb{R}_*^+, \\ \mathbf{r}_n = \text{proj}_{\mathbb{R}^-} (\mathbf{r}_n - \rho_n^u \mathbf{g}_n) \\ \mathbf{r} = \text{proj}_{K_\mu} (\mathbf{r} - \rho_t \dot{\mathbf{g}}_t) \end{cases} \quad (4.28)$$

où $\text{proj}_{\mathbb{R}^-}$ est l'opérateur de projection sur l'ensemble des réels négatifs tandis que proj_{K_μ} est la projection dans le cône de Coulomb K_μ qui est l'ensemble des vecteurs dont la composante tangente est de norme inférieure ou égale à μ fois la norme de la composante normale, ρ_n^u et ρ_t sont des paramètres scalaires arbitraires.

Différentes stratégies sont possibles pour traiter ce problème. On distinguera d'une part celles qui font explicitement appel à des multiplicateurs de Lagrange pour l'imposition des conditions de contact, et d'autre part celles qui utilisent les efforts de contact au second membre uniquement.

Une des méthodes les plus naturelles parmi les techniques s'appuyant sur un multiplicateur de Lagrange est la méthode des statuts [18]. Elle est particulièrement adaptée aux cas statiques ou quasi statiques. Elle consiste à imposer des conditions d'accroche des DDLs de contact, et à s'assurer que les champs obtenus (déplacement, vitesse et réaction de contact) vérifient les lois de contact. Les DDLs où les lois ne sont pas vérifiées voient leur condition levée.

Dans sa version la plus répandue, cette méthode considère un contact frottant de Tresca dont le seuil de frottement est recalculé après chaque itération, et une méthode des statuts pour résoudre le problème de Tresca. Cette méthode a été utilisée notamment par Louf [78] du fait de sa simplicité de mise en œuvre.

Pour la méthode des statuts, plutôt que d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange pour imposer les conditions, on peut procéder à une substitution. Pour les points glissants, cette substitution conduit à ne pas avoir les mêmes espaces pour la solution et les champs tests, et donc une matrice non-symétrique.

La méthode des statuts devient rapidement coûteuse car elle nécessite une refactorisation de la matrice du système à chaque fois que les statuts changent.

Une autre méthode utilisant explicitement les multiplicateurs de Lagrange est la méthode *semi-smooth Newton* (SSN) qui d'après Khenous [68] est une des méthodes les moins coûteuses en nombre d'itérations. Pour la méthode SSN, on écrit le problème de contact comme étant équivalent à trouver le zéro de la fonction $\mathcal{H}(z)$, définie par l'équation (4.29) avec $z = [\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t]$. Cette fonction est lipschitzienne et \mathcal{C}^1 par morceaux.

$$\mathcal{H}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} - \mathbf{P}_N^T \mathbf{r}_n - \mathbf{P}_T^T \mathbf{r}_t \\ \frac{1}{\rho} (\mathbf{r}_n - \text{proj}_{\mathbb{R}^-} (\mathbf{r}_n - \rho \mathbf{g}_n)) \\ \frac{1}{\rho} (\mathbf{r}_t - \text{proj}_{D_\mu} (\mathbf{r}_t - \rho \dot{\mathbf{g}}_t)) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

où \mathbf{P}_N et \mathbf{P}_T sont respectivement les matrices permettant de projeter un champ global en champ normal et champ tangent sur la zone de contact, et proj_{D_μ} correspond à la projection sur le disque

de base du cône de Coulomb K_μ .

Une résolution de type Newton est appliquée à cette fonction. Cependant, cette fonction n'est pas différentiable en tout point. Là où elle est différentiable, on utilise naturellement sa jacobienne \mathcal{H}' pour la procédure de Newton, et si lors des itérations, un point singulier est rencontré, alors le gradient d'un point régulier proche est utilisé.

La jacobienne de \mathcal{H} est toutefois non-symétrique et sur un système de grande taille cette procédure risque fort de se montrer très coûteuse. Une piste envisageable serait là aussi d'utiliser une méthode de Newton sécante avec une jacobienne approchée symétrique, mais le choix de la jacobienne constante est une question qui est loin d'être triviale.

Une dernière classe de méthodes pour traiter le contact frottant en dynamique sont les méthodes de la famille du lagrangien augmenté. Ces méthodes peuvent faire intervenir ou non un multiplicateur explicite. Nous détaillerons ici deux méthodes de cette famille, la première, la méthode *Large Time INcrement* introduite à l'origine pour des problèmes de plasticité en quasi statique [73], étendue à la dynamique et aux problèmes de contact quasi-statiques et en dynamique [19, 74, 94, 102]. La seconde méthode, plus classique, est une méthode de point fixe sur le lagrangien ou l'effort de contact. Elle est décrite par Laborde et Renard [72].

La méthode *LaTin*. Cette méthode repose sur la séparation des équations du problème en deux ensembles. Le premier, \mathcal{A}_d est celui des équations linéaires éventuellement globales, le second Γ est celui des équations locales éventuellement non-linéaires. Dans le cas du contact frottant en dynamique pour des milieux visco-élastiques linéaires, on retrouvera dans \mathcal{A}_d le principe des puissances virtuelles avec des efforts extérieurs connus, les conditions d'admissibilité cinématique et les relations de comportement, et dans Γ les équations décrivant le contact de Signorini-Coulomb.

Une fois cette séparation effectuée, la méthode *LaTin* consiste à rechercher successivement des solutions de chacun des jeux d'équations en partant d'une solution de l'autre et d'une direction de recherche. Suivant le choix de cette direction de recherche, le schéma converge vers une solution vérifiant les deux jeux d'équations et donc le problème non-linéaire complet. Parmi les particularités de cette méthode, on trouve le fait que la solution à chaque itération est définie sur l'ensemble de l'intervalle de temps d'étude – d'où le nom de *Large Time INcrement* – et que le problème peut admettre des discrétisations en espace et en temps différentes pour chaque jeu d'équations. C'est pourquoi nous le présentons ici dans un formalisme continu.

De plus, ce formalisme permet d'effectuer assez simplement une décomposition de domaine avec des sous-domaines reliés par des interfaces sur lesquelles les équations locales peuvent imposer soit du contact, soit une continuité des champs. Le problème global peut alors être écrit séparément sur chaque sous-domaine et donc être résolu de manière parallélisée.

On désigne par $s = (\dot{\mathbf{u}}, \sigma, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{r})$ une solution vérifiant \mathcal{A}_d où $\dot{\mathbf{u}}$ est le champ de vitesse dans le domaine, σ le tenseur des contraintes, $\dot{\mathbf{w}}$ est le champ des vitesses sur l'interface de contact et \mathbf{r} l'effort de contact. De même $\hat{s} = (\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}})$ désigne une solution vérifiant Γ . Les directions de recherche

sont données par les équations (4.30) où \mathbf{K}_0 est un opérateur local, souvent choisi sous la forme $\mathbf{K}_0 = k_0 \mathbf{I}$.

$$\begin{cases} \mathbf{E}^- : \mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{K}_0 (\dot{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{w}}) \\ \mathbf{E}^+ : \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = \mathbf{K}_0 (\hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}) \end{cases} \quad (4.30)$$

Chaque itération de cette méthode se décompose donc en deux étapes. La première est l'étape locale consistant à trouver une solution \hat{s} connaissant une solution s de \mathcal{A}_d suivant la direction de recherche ascendante \mathbf{E}^+ . Pour ce faire, on introduit les indicateurs de contact suivants (4.31) et (4.32) qui reposent sur la formulation en termes de projection (4.28). En utilisant la direction de recherche, ces indicateurs peuvent s'exprimer uniquement en fonction des solutions de l'étape globale s . Ils permettent de déterminer s'il y a décollement ou non et s'il y a adhérence ou non et de déduire une correction des champs locaux dans ces différents cas, de manière à vérifier les lois de contact.

$$\begin{aligned} 2C &= \hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{k_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{k_0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} 2G &= k_0 \Pi_T (\hat{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{r}}) \\ &= k_0 \Pi_T (\dot{\mathbf{w}} - \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

où Π_T est l'opérateur d'extraction du champ tangent. L'étape locale est alors résolue explicitement à partir de la solution de l'étape globale, elle est donc relativement peu coûteuse. Nous noterons sa résolution par la fonction $\hat{s} = \text{local}(C, g, h)$.

L'indicateur C , qui traite la partie normale du contact, fait intervenir le déplacement. Il faut donc introduire un intégrateur pour l'étape locale qui permet d'exprimer le déplacement en fonction de la vitesse. De manière assez naturelle, l'intégrateur choisi est un intégrateur du premier ordre. Le choix fait est généralement celui d'une méthode d'Euler implicite.

En utilisant les directions de recherche, l'étape globale consiste à résoudre le problème donné par l'équation (4.33)

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \mathbf{u}_{n+1}}{dt^2} \cdot \dot{\mathbf{u}}^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{K} \varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) : \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^*) d\Omega \\ &+ \int_{S_J} k_0 \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \cdot \dot{\mathbf{u}}^* d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \dot{\mathbf{u}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^* dS \end{aligned} \quad (4.33)$$

où $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + k_0 \hat{\mathbf{w}}$.

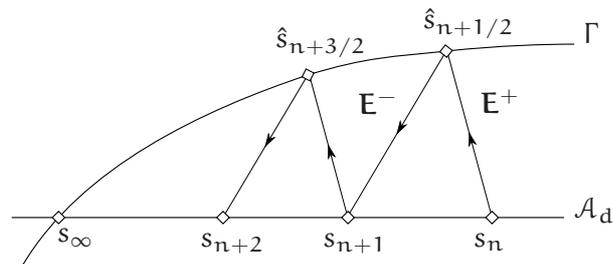


FIGURE 4.7 – Principe de la méthode LaTIn

On peut voir l'apparition d'un terme amortissant introduit par la méthode, terme qui disparaît lors de la convergence. On détermine \dot{w} comme étant la trace de \dot{u} sur l'interface de contact. L'étape globale est donc un problème linéaire classique de dynamique transitoire qui peut être résolu par n'importe quelle méthode adaptée. Nous noterons sa résolution $\text{global}(\tilde{f})$.

Parmi les intérêts de cette méthode, on trouve d'une part le fait que les opérateurs utilisés dans l'étape globale sont par construction constants, ce qui permet de ne faire qu'une seule fois la factorisation du système. Un autre point fort est le contrôle de la convergence au sens de critères définis sur l'ensemble de l'intervalle de temps, ce qui garantit une très bonne qualité de la solution. De plus, l'approche permet d'initialiser la solution sur l'intervalle complet en temps par une solution approchée du problème local, qui peut être un calcul effectué pour des jeux de paramètres de structure ou de fonctionnement proches, et ainsi améliorer la vitesse de convergence. Cette stratégie est souvent désignée par *multi-résolution* et permet notamment d'économiser un grand nombre d'itérations lors d'études paramétriques sur un système.

Cependant sous l'apparente simplicité de cette méthode se cache un grand nombre de paramètres : les libertés en discrétisation tant temporelle que spatiale changent le comportement de la convergence et deviennent donc des paramètres à optimiser dans la méthode. De même, le choix des directions de recherche influe directement sur le nombre d'itérations nécessaire pour converger.

Parmi les variantes de cette méthode, on peut citer les approches multi-échelles [51] qui rajoutent un problème grossier global sur les interfaces dans le cas de plusieurs sous-domaines, et les approches de type PGD ou plus historiquement dans le cadre de cette méthode de décomposition radiale, qui permettent de limiter le nombre d'inconnues en projetant la solution sur des modes que l'on enrichit éventuellement à chaque itération LaTIn. Les méthodes de PGD n'ont pas été appliquées avec succès à la dynamique transitoire.

Pour le traitement du contact Pierrès [97] a utilisé une formulation à trois champs faisant intervenir un multiplicateur de Lagrange pour les conditions de contact, pour lequel on vient imposer l'égalité faible entre le champ de vitesse \dot{u} et le champ de vitesse d'interface \dot{w} .

La figure 4.7 donne le schéma de principe de la méthode LaTIn tandis que l'algorithme est donné par [alg. 2].

Algorithme 2: Algorithme de la méthode LaTIn

```

Data :  $s_0, \varepsilon$ 
Result :  $s, \hat{s}$ 
begin
  err =  $\varepsilon + 1$ 
  while err >  $\varepsilon$  do
    REM   Étape locale
           $C = \frac{w \cdot n - \frac{1}{k_0} r \cdot n}{2}$ 
           $g = k_0 \Pi_T (\hat{w} - r)$ 
           $\hat{h} = \text{local}(C, g, h)$ 
    REM   Étape globale
           $\tilde{f} = f + k_0 \hat{w}$ 
           $h = \text{global}(\tilde{f})$ 
          err =  $\frac{\int_0^T \int_\gamma (r - \hat{r})^\top K_0 (w - \hat{w})}{\int_0^T \int_\gamma r K_0 w}$ 
    REM   Sortie

```

Méthode du lagrangien augmenté avec point fixe sur les réactions de contact Les équations (4.28) définissent assez naturellement une formulation de type point fixe où l'itéré $n + 1$ de la solution est l'application successive des projections définies sur l'itéré n . Les scalaires ρ_n^u et ρ_t sont alors des paramètres d'augmentation du lagrangien et viennent corriger l'effort de contact en fonction de la non-vérification des lois de Signorini-Coulomb.

Cette méthode, très intuitive, n'introduit que peu de paramètres : seulement les paramètres d'augmentation ρ_n^u et ρ_t . La convergence de cette stratégie dépend de la contractance de la fonction dont on cherche le point fixe, et cette propriété donne une démarche de choix de ces paramètres. Khenous [68] propose une estimation de leur valeur optimale donnée par l'équation (4.34)

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\lambda_2}}{(1 + \mu)^2} \quad (4.34)$$

où λ_1 et λ_2 sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de l'inverse de l'opérateur d'intégration J^{-1} projeté sur les degrés de liberté de l'interface de contact.

Beaucoup d'auteurs utilisent la plus petite valeur propre de J , ce qui constitue un choix sécuritaire mais qui peut amener à des itérations nombreuses.

Très souvent, on effectue les projections directement sur les champs éléments finis, en choisissant des éléments linéaires en zone de contact. L'emploi d'éléments de degré plus élevé nécessite de faire les projections en utilisant les pressions de contact, ce qui conduit à se donner une interpolation des pressions et à les déporter aux nœuds ou à déporter les quantités cinématiques aux points de Gauss. Ces dernières opérations font intervenir des matrices similaires à la matrice d'amortissement introduite dans la méthode LaTIn. Pour des éléments linéaires en zone de contact, cette méthode est

donc la recherche du point fixe de la fonction suivante :

$$f : (\mathbf{r}, \mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}, \rho_n^u, \rho_t) \mapsto \text{proj}_{K_\mu} \left(\mathbf{r}_t + \mathbf{P}_N^L \text{proj}_{\mathbb{R}^-} (\mathbf{r}_n - \rho_n^u (\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_0)) - \rho_t (\dot{\mathbf{g}}_t - \mathbf{v}_s) \right) \quad (4.35)$$

avec $\mathbf{r} = \mathbf{r}_t + \mathbf{P}_N^L \mathbf{r}_n$

L'algorithme utilisé est donné par [alg. 3] où \mathbf{P}_{NT} est l'opérateur de passage global-local. Parmi les variantes classiques de cet algorithme, on peut citer la méthode du bipentotiel, introduite par De Saxcé [103] et utilisée par Feng [39]. Il s'agit d'une reformulation des équations (4.28) qui ne fait intervenir qu'une seule projection globale traitant à la fois la composante normale et la composante tangentielle du problème de contact. Feng avance que le principal intérêt de cette formulation, par rapport à celle utilisant deux projections, est que le fait de n'effectuer qu'une seule projection permet de réduire le coût numérique d'une itération. Cependant il convient de se poser la question du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la même qualité de convergence.

Algorithme 3: Algorithme du lagrangien incrémental avec point fixe sur les réactions

Data : $\mathbf{u}^i, \dot{\mathbf{u}}^i, \mathbf{r}^i, \mathbf{e}^{i+1}, \varepsilon_r$

Result : $\mathbf{u}^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}^{i+1}, \mathbf{r}^{i+1}$

begin

REM Prédiction à partir du pas i (Intégrateur type θ -méthode)

$$\mathbf{r}_0^{i+1} = \mathbf{r}^i$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0^{i+1} = \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{e}^{i+1} + \mathbf{P}_{NT} \mathbf{r}_0^{i+1})$$

$$\mathbf{u}_0^{i+1} = \mathbf{u}^i + h (\theta \dot{\mathbf{u}}_k^{i+1} + (1 - \theta) \dot{\mathbf{u}}^i)$$

$$\mathbf{r}_1^{i+1} = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}_k^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}_k^{i+1}, \rho_n^u, \rho_t)$$

$$\text{err} = \frac{\|\mathbf{r}_1^{i+1} - \mathbf{r}_0^{i+1}\|}{\|\mathbf{r}_0^{i+1}\|}$$

$$k = 1$$

REM Itérations de point fixe

while $\text{err} > \varepsilon_r$ **do**

$$\dot{\mathbf{u}}_k^{i+1} = \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{e}^{i+1} + \mathbf{P}_{NT} \mathbf{r}_k^{i+1})$$

$$\mathbf{u}_k^{i+1} = \mathbf{u}^i + h (\theta \dot{\mathbf{u}}_k^{i+1} + (1 - \theta) \dot{\mathbf{u}}^i)$$

$$\mathbf{r}_{k+1}^{i+1} = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}_k^{i+1}, \dot{\mathbf{u}}_k^{i+1}, \rho_n^u, \rho_t)$$

$$\text{err} = \frac{\|\mathbf{r}_{k+1}^{i+1} - \mathbf{r}_k^{i+1}\|}{\|\mathbf{r}_k^{i+1}\|}$$

$$k = k + 1$$

REM Sortie

4.2.2.3 Traitement des discontinuités

En dynamique, de nombreuses discontinuités telles que des chocs ou des occurrences brutales d'adhérence peuvent intervenir. Nous proposons ici de discuter du traitement de ces aspects. Dans la méthode LaTIn, l'apparition d'une matrice d'amortissement d'interface ainsi que le couplage du problème local au problème global par la direction de recherche a tendance à lisser avant convergence ces discontinuités, mais elles restent cependant présentes dans la solution convergée. Même si, lors de l'extension de la méthode à la dynamique, Lemoussu [74] a utilisé un intégrateur du second ordre pour le problème global, le problème de la non-définition de l'accélération reste entier. Dans les autres méthodes, le choix d'un intégrateur ne faisant intervenir que le déplacement et la vitesse est souvent privilégié, mais il ne supprime pas pour autant certains problèmes d'oscillations parasites engendrées par l'intégrateur lors des chocs. Hormis pour le schéma d'Euler implicite, l'occurrence d'un choc entre deux piquets de temps entraîne un rebond immédiat alors que dans le formalisme continu en espace, le rebond ne se produit qu'après un aller-retour de l'onde dans le reste de la structure. Pour pallier ce dernier problème, trois stratégies existent, et même si elles proviennent de démarches différentes, elles présentent certaines similitudes.

La première consiste à éviter les chocs en ajoutant une fine couche d'éléments sans masse mais comportant une raideur sur l'interface de contact. Cette couche sans masse n'est alors pas soumise aux problèmes de rebond. Cependant, cette méthode s'apparente fortement à une pénalisation du contact.

Une deuxième méthode, proposée par Khenous [67], consiste en une re-répartition de masse. Partant du constat que les phénomènes de rebonds sont liés à la concentration de masse sur les nœuds d'interface alors qu'en formalisme continu, cette dernière a une masse nulle, Khenous propose de modifier la matrice de masse pour annuler les masses des nœuds d'interface en les redistribuant dans le reste du volume en respectant la position du centre de masse et les moments d'inertie. Conceptuellement, cette méthode est très proche de la précédente mis à part qu'elle permet le respect de la géométrie nominale discrétisée d'origine.

Finalement une dernière méthode est la θ -méthode modifiée, proposée par Vola [121] et Jean [66]. Dans le cadre de l'emploi de la θ -méthode comme intégrateur, lorsqu'un choc se produit entre deux piquets de temps, il se produit nécessairement un rebond, sauf pour $\theta = 1$. On peut montrer qu'en évaluant le déplacement pour le calcul des efforts à un instant postérieur au piquet de temps $i + 1$ suivant la formule donnée ici :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{i+1} = \mathbf{u}^{i+1} + h(1 - \theta) \dot{\mathbf{u}}^{i+1} \quad (4.36)$$

avec h , le pas de temps utilisé, on retrouve la propriété de non-rebond valide dans le cadre continu. Là encore cette stratégie n'est pas sans lien avec les stratégies précédentes car il y a apparition d'un effort de contact avant que les deux corps ne se touchent. La particularité de cette méthode provient du fait que l'effort de contact introduit vient placer le choc effectif sur un piquet de temps, et que contrairement aux deux autres méthodes proposées, la pénalisation introduite s'adapte à la position du choc dans le pas de temps.

Cette propriété permet de majorer l'énergie dissipée par cette méthode en un nœud par l'énergie cinétique de la masse portée par ce nœud.

4.3 Les choix retenus pour le traitement de la dynamique transitoire en présence de contact frottant

Compte tenu de la complexité des phénomènes mis en œuvre dans la zone de contact, de l'impossibilité de mener des mesures précises de caractérisation des différentes lois réalistes de l'interface, nous nous orientons vers une modélisation du contact de type Signorini-Coulomb avec un coefficient de frottement constant. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2, ce modèle est suffisant pour engendrer des vibrations auto-entretenues, et comme nous le verrons plus tard (Chapitre 6), l'étude de stabilité d'un frein TGV simplifié sous cette modélisation du contact frottant permet de retrouver certains résultats expérimentaux.

En ce qui concerne les méthodes numériques pour simuler le contact de Signorini-Coulomb en dynamique transitoire, nous avons testé deux méthodes, la méthode LaTIn et le lagrangien augmenté incrémental. L'attrait de la méthode LaTIn résidait en particulier dans le côté multi-résolution qui offrait *a priori* un moyen prometteur de tester l'influence de différents paramètres, tandis que la méthode incrémentale avait déjà donné lieu à des développements à la SNCF dans le cadre de la thèse de Xavier Lorang [75]. Pour la méthodes LaTIn, les intégrateurs testés pour l'étape globale ont été la méthode HHT et la θ -méthode. Pour le problème local une θ -méthode a été utilisée ainsi qu'une θ -méthode modifiée. Pour le lagrangien augmenté incrémental, les intégrateurs testés ont été une θ -méthode, avec la θ -méthode modifiée pour l'évaluation du déplacement lors du calcul des efforts de contact, ainsi que des tentatives d'adaptations de la θ -méthode modifiée au schéma HHT. En ce qui concerne la méthode LaTIn, des problèmes de convergence en présence de chocs ont été mis en évidence lorsque les deux intégrateurs n'étaient pas identiques, ce qui conduit à choisir de manière préférentielle une θ -méthode pour l'étape globale. La difficulté du choix de la direction de recherche en présence de matériaux très différents de part et d'autre de l'interface de contact a aussi été observée. Pour la méthode de point fixe, un soin particulier a été apporté à l'optimisation des paramètres d'augmentation. Au lieu d'utiliser un paramètre scalaire global pour l'ensemble de la zone de contact, un opérateur local a été choisi. Ce choix permet d'obtenir une méthode de construction d'un paramètre optimisé moyennant une hypothèse que nous détaillerons dans le paragraphe 4.3.1. De plus la méthode de point fixe pouvant être perçue comme une méthode de prédiction-correction, deux types de prédicteurs pour les efforts de contact d'un pas de temps vers le suivant ont été testés, ainsi qu'une adaptation de la multi-résolution LaTIn à cette stratégie de simulation.

Un autre point important sur les deux méthodes est le choix d'une mesure de la convergence. Pour la méthode LaTIn, les critères sont en général fondés sur une mesure de l'écart entre les champs du problème local et ceux du problème global. Il s'agit donc d'un critère d'erreur qui compare les deux solutions sur l'ensemble de l'espace et du temps, ce qui en fait un critère très exigeant. Pour la méthode de point fixe, le critère le plus courant est basé sur l'incrément de solution en effort ou en vitesse d'une itération sur l'autre.

4.3.1 Utilisation du lagrangien augmenté incrémental

La convergence d'une méthode de point fixe dépend de la contractance de la fonction dont on recherche le point fixe. Dans notre cas, les seuls leviers dont nous disposons sont les paramètres d'augmentation. Pour des raisons de simplicité de mise en œuvre de la méthode, le déplacement intervenant dans l'équation (4.28) est substitué par la somme de la vitesse et d'un terme qui prend en compte l'évaluation du jeu par la θ -méthode modifiée. Ces équations deviennent donc :

$$\begin{cases} \forall (\rho_n, \rho_t) \in \mathbb{R}_*^+, \\ r_n^{i+1} = \text{proj}_{\mathbb{R}^-} (r_n^{i+1} - \rho_n (\dot{g}_n^{i+1} + \tilde{b})) \\ \mathbf{r}^{i+1} = \text{proj}_{\mathcal{K}_\mu} (\mathbf{r}^{i+1} - \rho_t (\dot{\mathbf{g}}_t^{i+1} - \mathbf{v}_s)) \\ \tilde{b} = \frac{g_n^i - g_0}{h} + (1 - \theta) \dot{g}_n^i \end{cases} \quad (4.37)$$

où \tilde{b} est un jeu équivalent en vitesse, g_0 le jeu initial et h le pas de temps. Une des méthodes les plus classiques pour choisir les paramètres d'augmentation est de les prendre égaux ou proches de la plus petite valeur propre de la matrice de l'intégrateur. On a cité précédemment l'estimation du ρ optimale donnée par Khenous, mais cette dernière n'est utilisable que pour de faibles coefficients de frottement, l'expression devenant négative dès que les valeurs propres intervenant sont suffisamment différentes avec un μ non-nul. La figure 4.8 montre l'évolution du nombre d'itérations obtenues sur un problème de choc d'une structure 2D sur un plan rigide [121] en fonction du choix des ρ pris sous la forme $\rho_n = \rho_t = s\lambda_{\min}$. Le comportement obtenu est assez intéressant : on y voit un premier bassin convexe pour $s \in]0; 2]$ avec un minimum d'itérations pour $s = 1, 5$, puis un deuxième bassin, bien moins régulier pour $s \in]2; 4]$ avec un minimum autour de $s = 2, 5$. La figure 4.9 montre l'évolution du nombre d'itérations lorsque l'on fait varier ρ_n et ρ_t séparément.

Cette évolution amène plusieurs remarques :

- ◆ pour des paramètres scalaires, l'optimum est le même pour ρ_n et ρ_t ;
- ◆ seul le premier bassin est intéressant : le nombre d'itérations dans le second est toujours élevé et le comportement moins robuste ;
- ◆ l'évolution à gauche du minimum est régulière et relativement lente ;
- ◆ l'évolution à droite du minimum est très rapide.

La figure 4.9 montre que l'influence du paramètre ρ_n est plus grande que celle de ρ_t . En particulier, quand ρ_n est loin de sa valeur optimale, les variations de ρ_t n'ont que très peu d'influence sur la convergence tandis que ρ_n a toujours une influence quelle que soit la valeur de ρ_t .

Lorsque le paramètre ρ est trop petit, l'algorithme ne diverge pas, il ne fait que converger très lentement. L'intervalle $]0; s_1]$ est donc une zone dans laquelle l'algorithme est robuste. En revanche, lorsque le paramètre est trop grand, le comportement au cours des itérations est très chahuté, la solution hésitant sans cesse entre un état décollé ou collé, adhérent ou glissant.

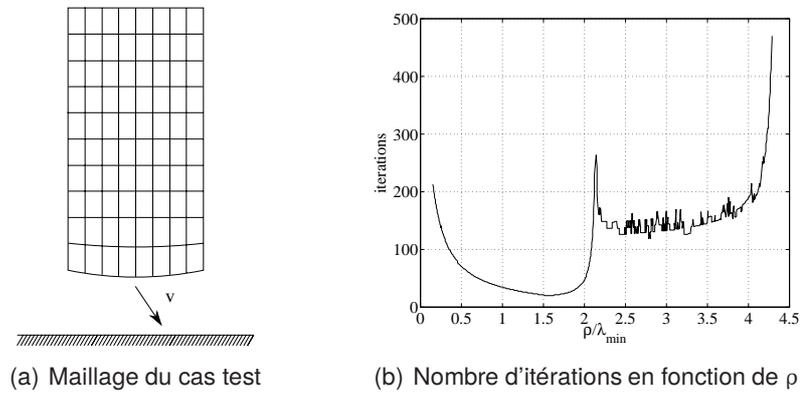


FIGURE 4.8 – Influence des paramètres d'augmentation

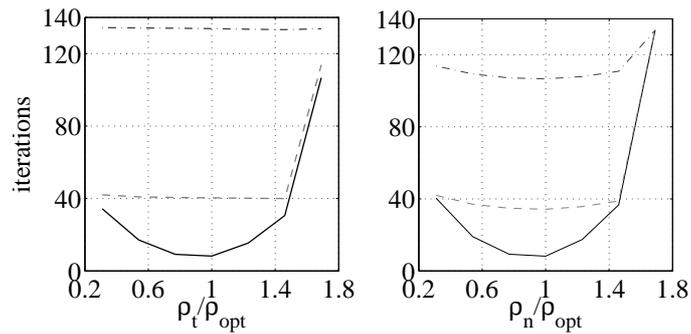


FIGURE 4.9 – Variation séparée des deux paramètres : à gauche, variation de ρ_t et à droite variation de ρ_n , l'autre étant fixé comme suit : — à ρ_{opt} , - - à $1,7 \rho_{opt}$ et - - - à $0,3 \rho_{opt}$

Compte tenu de ce comportement, on sait qu'il vaut mieux une estimation par défaut du ρ optimal, car une valeur légèrement supérieure à l'optimum peut très vite conduire à une divergence.

L'expression d'un majorant simple de la constante de Lipschitz de la fonction dont on cherche le point fixe n'est pas aisée, en partie à cause de l'enchaînement des deux projections. Afin de minimiser cette constante, nous proposons l'approximation suivante : l'optimisation des paramètres ρ_n et ρ_t pour le problème global peut s'approcher par l'optimisation de ρ_n pour un problème de contact unilatéral sans frottement et de ρ_t pour un problème de contact bilatéral frottant.

Le problème de contact sans frottement traité par la méthode de point fixe se ramène à la recherche du point fixe de la fonction suivante :

$$f_{\text{uni}} : (\mathbf{r}_n, \rho_n) \mapsto \text{proj}_{\mathbb{R}^-} (\mathbf{r}_n - \rho_n (\mathbf{P}_N \dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{b}})) \quad (4.38)$$

En substituant dans l'équation (4.38) $\dot{\mathbf{u}}$ par $\mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_N^T \mathbf{r}_n - \mathbf{f}$ on obtient facilement que ρ_n doit vérifier la propriété suivante :

$$\rho_n = (\mathbf{P}_N \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_N^T)^{-1} \quad (4.39)$$

On trouve donc que le ρ_n optimal au sens de la contractance de la fonction dont on cherche le point fixe est, comme décrit en annexe B, la condensation statique de la matrice l'opérateur de l'intégrateur \mathbf{J} . Cependant, seul un opérateur diagonal à coefficients strictement positifs permet de garantir la vérification du contact. La construction de l'opérateur ρ_n consiste donc à trouver une approximation diagonale de la matrice de l'intégrateur sur les degrés de liberté (DDLs) normaux de contact.

La même démarche aboutit à un résultat similaire pour l'opérateur ρ_t qui est une approximation diagonale de la matrice de l'intégrateur sur les DDLs tangents. Pour l'opérateur ρ_t une contrainte supplémentaire est à prendre en compte : il faut le même coefficient sur tous les DDLs tangents d'un même nœud. Sans cette condition, l'effort augmenté peut correspondre à des cônes de Coulomb différents suivant les DDLs. Nous avons choisi d'utiliser comme approximation la diagonale de la condensation statique de la matrice de l'intégrateur sur les degrés de liberté de contact, projetée respectivement sur les degrés normaux et tangents. Cette étape peut paraître coûteuse, mais nous verrons par la suite (chapitre 5) que les modes statiques nécessaires à cette condensation peuvent apporter beaucoup aux stratégies de réduction et donc le calcul effectué ici pourra être réutilisé pour la suite. La construction des opérateurs ρ_N et ρ_T est détaillée en annexe B.

Cette démarche permet d'obtenir une expression d'un ρ optimisé utilisable pour tout coefficient de frottement. Toutefois, cette expression repose sur l'hypothèse que l'optimisation séparée des deux paramètres d'augmentation permet effectivement d'optimiser ces paramètres pour le problème couplé. S'il est probable que l'opérateur ainsi obtenu soit proche des valeurs optimales, il peut cependant être suffisamment éloigné pour être trop grand et entraîner une divergence. Pour éviter cet écueil, on peut chercher à diminuer les opérateurs obtenus par un facteur arbitraire calibré sur différents essais. Dans ces travaux, nous faisons l'hypothèse que l'un de ces deux opérateurs est optimal et que l'autre

est éventuellement trop grand. On suppose qu'il est pertinent de comparer ces opérateurs avec la moyenne de leurs coefficients non-nuls. On multiplie alors le plus grand des deux par un scalaire de manière à rendre ces moyennes égales, ce qui est cohérent avec l'égalité des paramètres scalaires optimaux observée sur la figure 4.9. Comme nous le verrons par la suite, sur le système de frein simplifié étudié au chapitre 6, ce choix semble donner de très bons résultats (un nombre d'itérations par pas de temps compris entre 1 et 10).

Le choix des paramètres d'augmentation pour améliorer la vitesse de convergence soulève le problème du choix du critère d'arrêt. En effet, si les paramètres d'augmentation sont petits, l'incrément d'effort ou de déplacement sera lui aussi petit alors que l'on est loin de la vérification des lois de contact. Ce n'est pas parce que l'incrément est faible que l'on est proche de la valeur finale. Pour se prémunir contre de fausses convergences, il est donc nécessaire d'enrichir ce critère avec une mesure de la vérification du contact. Une idée naturelle est d'introduire la prise en compte de la puissance des efforts de contact normaux dans la vitesse normale. En effet, si le contact de Signorini est vérifié, cette puissance est nulle. Cependant, du fait de la modification apportée à la θ -méthode pour éviter les rebonds, la loi de Signorini est violée lors d'un choc : l'effort de réaction apparaît avant le choc ce qui provoque une puissance non nulle en phase d'approche. Il faut alors relâcher ce critère, soit en ne prenant en compte que sa partie positive (ce qui ignore les phases d'approche avant les chocs), soit en calculant la puissance dans le champ de vitesse modifié $g_n + \tilde{b}$.

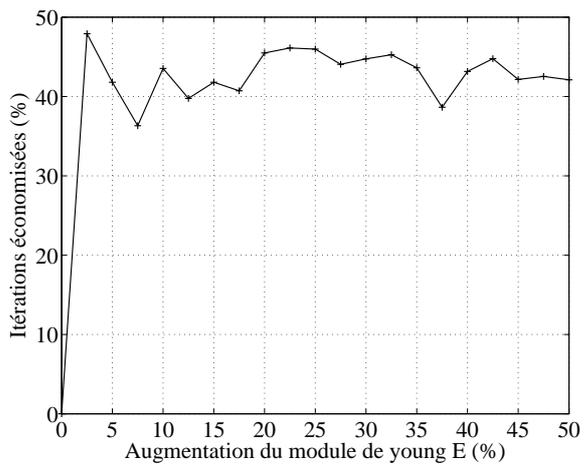
Il serait possible d'écrire un critère semblable sur la loi de frottement, cependant, la convergence de la solution du problème de frottement est en pratique gouvernée par celle du problème de contact unilatéral. L'ajout de ce critère permet de garantir la pertinence physique de la solution lorsque l'incrément de solution est faible. Du fait de la modification de la θ -méthode, il est raisonnable d'utiliser ce critère en supplément du critère classique sur l'incrément d'effort ou de vitesse.

Des simulations sur un cas simple ont montré que le critère d'erreur en point fixe avait une évolution de la forme $err = err_0 e^{-i/\iota}$ où ι est une constante qui ne dépend que du système et des paramètres d'augmentation. Si les paramètres d'augmentation sont choisis de façon optimale, le seul levier restant pour diminuer le nombre d'itérations est d'améliorer la prédiction de la réaction lors du passage d'un pas de temps au suivant.

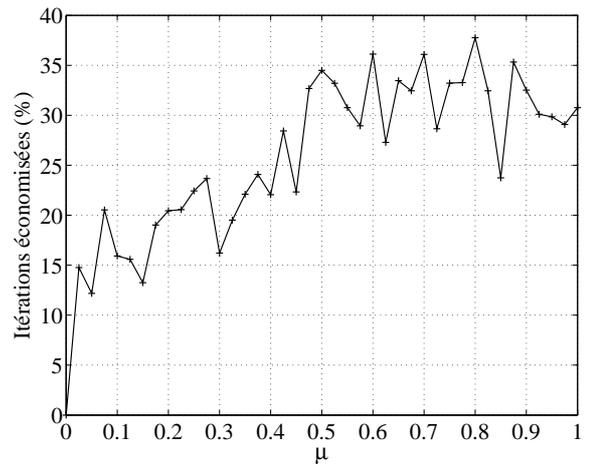
Lorang [75] utilisait comme prédiction de la réaction de contact la valeur au pas de temps précédent. Une idée naturelle pour tenter d'améliorer cette prédiction est d'extrapoler linéairement la réaction de contact à partir des deux pas de temps précédents. Cette stratégie améliore la prédiction lorsque la dynamique est régulière, par contre elle la détériore aux instants de fortes singularités. Le gain procuré par une telle stratégie dépend donc de la proportion d'événements singuliers intervenant dans la simulation courante et ne peut être estimé à l'avance. On peut se demander s'il peut être intéressant de mettre en œuvre des prédicteurs d'ordre plus élevé en prenant en compte plus de pas de temps. Outre le fait qu'il faudrait alors mettre en place une gestion des événements singuliers pour ne prendre en compte sur chaque DDL de contact que les pas de temps qui suivent le dernier événement de ce type y ayant eu lieu, la question du coût de ce prédicteur se pose : il nécessiterait effectivement de garder accessible en mémoire un grand nombre de pas de temps, d'en faire une extrapolation polynomiale ou autre pour initialiser la réaction de contact pour le pas de temps suivant.

Au delà du prédicteur linéaire, la complexité de mis en œuvre ainsi que le faible apport potentiel d'une telle méthode dissuade de l'appliquer.

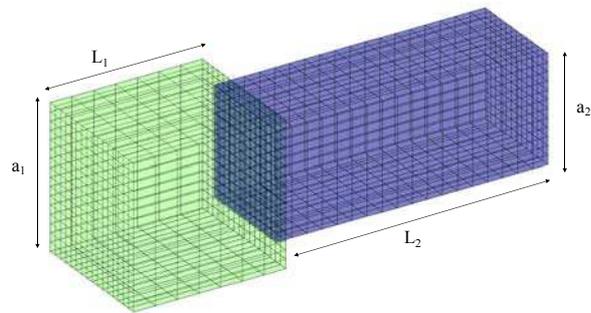
Toujours dans le but d'améliorer la prédiction, en particulier dans le cas d'études paramétriques, on peut appliquer le principe de la *multi-résolution* LaTin au lagrangien augmenté incrémental. L'idée est de venir lire la prédiction de l'effort de réaction dans le résultat stocké d'un calcul proche. Assez vite on se rend compte que si l'écart entre l'effort après convergence et l'effort lu dans le calcul précédent est trop grand, il est préférable de reprendre un prédicteur constant ou linéaire. Nous avons donc mis en place un prédicteur appelé paramétrique, qui propose une moyenne pondérée entre un prédicteur classique et une extrapolation à partir d'un calcul déjà effectué. L'extrapolation est faite de telle sorte à pouvoir rattraper un effet d'échelle entre le calcul déjà effectué et le calcul courant, tandis que la pondération sert à adapter l'importance donnée au calcul de référence par rapport au prédicteur classique en fonction de l'accord entre la valeur de l'effort convergé et de l'extrapolation. Un test a été effectué sur le choc de deux poutres 3D en faisant varier le module de Young E (augmentation de 50% par pas de 2,5%) et le coefficient de frottement μ (variation de 0 à 1 par pas de 0,025). Il montre clairement que cette stratégie peut apporter un gain significatif en nombre total de résolutions de système linéaire, et donc en temps de calcul. Dans ce test, la solution calculée pour le jeu de paramètres précédent est prise comme solution de référence pour le calcul paramétrique. Il est évident que si l'on a un grand nombre de paramètres variables, l'ordre des simulations sera d'une importance cruciale pour optimiser le gain. Une extension envisageable de cette méthode serait une prédiction par interpolation entre plusieurs calculs de référence pour venir raffiner une surface de réponse par exemple. La figure 4.10 donne le pourcentage d'itérations économisées à chaque jeu de paramètre pour la variation de E et pour celle de μ .



(a) Variation du module de Young de l'impacteur



(b) Variation du coefficient de frottement entre les poutres



(c) Maillage utilisé – Impacteur en bleu

FIGURE 4.10 – Gain apporté par la stratégie de multi-résolution

4.4 Analyse de stabilité d'un système avec une interface de contact de Signorini-Coulomb

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, sous certaines conditions, les systèmes présentant une interface de contact frottant peuvent donner lieu à des vibrations auto-entretenues et pour caractériser cette propriété, on peut procéder à une analyse de stabilité autour d'un point de fonctionnement. Dans le cadre d'un système de freinage, cette analyse est faite autour de la position d'équilibre quasi-statique du système. L'étude de la stabilité d'un équilibre est souvent effectuée à l'aide des valeurs propres du système linéarisé autour de cet équilibre [30, 108, 110]. Cependant, le cas du contact de Signorini-Coulomb est légèrement problématique car la linéarisation pour des perturbations ayant une composante normale en zone de contact n'est pas possible.

Comme nous l'avons vu précédemment, une des façons d'aborder la stabilité d'un système dynamique non-linéaire est de caractériser l'évolution de perturbations harmoniques autour d'un équilibre \mathbf{u}^e . La recherche de ces perturbations revient à la résolution d'un problème aux valeurs propres quadratique de la forme :

$$\lambda^2 \mathcal{M}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) + \lambda \mathcal{C}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) + \mathcal{K}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = 0 \quad (4.40)$$

La résolution d'un tel système donne l'évolution d'une solution autour de l'équilibre sous la forme

$$\mathbf{u}(t) = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\varphi}_i e^{\lambda_i t} + \overline{\alpha_i} \overline{\boldsymbol{\varphi}_i} e^{\overline{\lambda_i} t} \quad (4.41)$$

où λ_i et $\boldsymbol{\varphi}$ sont les valeurs propres et modes propres solutions du problème aux valeurs propres (4.40). La stabilité se traduit alors par le signe de la partie réelle des valeurs propres λ_i . Si elles sont toutes négatives ou nulles, le système est stable, en revanche si au moins une est strictement positive, le système est instable. On introduit le taux de divergence $\zeta = \frac{\Re(\lambda)}{\Im(\lambda)}$ qui est analogue à un taux d'amortissement négatif, où \Re et \Im représentent respectivement les opérateurs partie réelle et partie imaginaire. Un mode associé à une valeur propre à partie réelle positive sera appelé mode instable.

4.4.1 Calcul de l'équilibre quasi-statique

Une première étape nécessaire à la caractérisation de la stabilité d'un équilibre est le calcul de cet équilibre. Dans notre cas, nous recherchons un équilibre glissant, c'est à dire une solution stationnaire aux équations régissant le système telle que tous les points en contact dans cette solution soit en glissement et non en adhérence. La solution $(\mathbf{u}^e, \mathbf{r}^e, \mathcal{S}_c^e)$ de ce problème vérifie l'équation (4.42) où \mathcal{S}_c^e est la partie de \mathcal{S}_c où le contact est effectif. L'espace de recherche des solutions en déplacement de cette équation est donc l'espace des champs à déplacement normal nul sur \mathcal{S}_c^e .

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \varepsilon^* \mathcal{A} \varepsilon^e d\Omega = \int_{\partial\Omega_f} \dot{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{f}_s dS + \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{f}_v d\Omega + \int_{S_c^e} \dot{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{r}^e dS, \forall \dot{\mathbf{u}}^* \in U^0 \\ u_n^e \leq 0 \\ r_n^e \leq 0 \text{ et } \mathbf{r}_t^e = -\mu r_n^e \frac{\mathbf{v}_s}{\|\mathbf{v}_s\|} = -\mu r_n^e \mathbf{t} \\ u_n^e r_n^e = 0 \\ \varepsilon^e \text{ et } \varepsilon^* \text{ sont les gradients symétriques de } \mathbf{u}^e \text{ et } \mathbf{u}^* \end{array} \right. \quad (4.42)$$

En utilisant la condition de glissement, on obtient l'équation suivante :

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^e) = \mathcal{L}(\mathbf{u}^*) + \int_{S_c^e} r_n^e \dot{\mathbf{u}}^* \cdot (\mathbf{n} - \mu \mathbf{t}) dS, \forall \dot{\mathbf{u}}^* \in U^0 \quad (4.43)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (S_c^e, \mathbf{u}^e), \mathbf{u}^e \in U^0, \forall \mathbf{u}^* \in U^\mu \\ \mathcal{K}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^e) = \mathcal{L}(\mathbf{u}^*) \\ U^0 = \{\mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } S_c^e\} \\ U^\mu = \{\mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} - \mu \mathbf{t}) = 0 \text{ sur } S_c^e\} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Il s'agit d'une équation variationnelle en \mathbf{u}^e dans laquelle l'espace des champs solutions et celui des champs tests sont différents. Cette particularité implique que lors de la discrétisation éléments finis la matrice de cet opérateur sera non symétrique. Le problème discrétisé se traduit par le système (4.45) où \mathbf{T}_{BL} et \mathbf{T}_μ sont des bases des champs dont le déplacement sur S_c^e est orthogonal respectivement à \mathbf{n} et à $\mathbf{n} - \mu \mathbf{t}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (S_c^e, \mathbf{u}^e), \\ \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}^e = \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}_\mu^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{BL} \\ \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_\mu^T \mathbf{f} \end{array} \right. \quad (4.45)$$

La résolution du problème discrétisé se fait par une méthode des statuts où l'on suppose une première surface S_c^e sur laquelle on impose les conditions d'orthogonalité à gauche et à droite, ce qui donne une première solution \mathbf{u}^e dont on peut déduire un effort normal r_n^e . Il faut vérifier si sur tout S_c le contact est respecté : les points où l'effort est un effort de traction sont retirés de S_c^e , ceux de S_c où il se produit de la pénétration sont ajoutés à S_c^e .

Lorsqu'aucun point de S_c ne viole le contact, on a trouvé une solution du problème discret. L'algorithme est donné par l'algorithme [alg. 4]

Algorithme 4: Méthode des statuts pour le calcul de l'équilibre glissant

```

Data :  $S_c, n, t, f$ 
Result :  $u^e, S_c^e, r^e$ 
begin
REM Initialisation
 $S_c^e = S_c$  construire  $T_\mu$  et  $T_{BL}$  pour  $S_c^e$ 
 $\tilde{K} = T_\mu^T K T_{BL}$ 
 $\tilde{f} = T_\mu^T f$ 
 $\tilde{u}^e = \tilde{K}^{-1} \tilde{f}; u^e = T_{BL} \tilde{u}^e$ 
 $r^e = K u^e - f$ 
REM Itérations
while any( $P_N r^e$ ) > 0 or any( $P_N u^e$ ) > 0 do
     $S_c^e = S_c^e \setminus S_{P_N r^e > 0}$ 
     $S_c^e = S_c^e \cup S_{P_N u^e > 0}$ 
    construire  $T_\mu$  et  $T_{BL}$  pour  $S_c^e$ 
     $\tilde{K} = T_\mu^T K T_{BL}$ 
     $\tilde{f} = T_\mu^T f$ 
     $\tilde{u}^e = \tilde{K}^{-1} \tilde{f}; u^e = T_{BL} \tilde{u}^e$ 
     $r^e = K u^e - f$ 
REM Sortie

```

Cette méthode de résolution est assez robuste, elle se fonde sur l'algorithme des statuts dont la convergence est prouvée pour le cas sans frottement si l'on ne change qu'une seule condition à la fois [18]. Du fait de la recherche d'une solution stationnaire glissante, le frottement est automatiquement pris en compte dans la matrice de raideur non symétrique. Son inconvénient majeur est cependant la résolution d'un nouveau système non symétrique à chaque itération. Des pistes d'optimisation de cette méthode peuvent être de condenser statiquement le problème sur l'interface de contact, ce qui diminue la taille du système mais le rend plein, de procéder à une réduction de l'interface de contact ou de sauvegarder une factorisation partielle de la matrice en utilisant une numérotation des nœuds adéquate, c'est à dire avec les nœuds de contact à la fin.

4.4.2 Calcul des modes et valeurs propres complexes du système

Une fois l'équilibre quasi-statique déterminé, il est possible de rechercher les équations satisfaites par des perturbations (\hat{u}, \hat{r}) de cet équilibre. Pour ce faire, on écrit les équations de la dynamique en décomposant pour des champs $(u, r) = (u^e + \hat{u}, r^e + \hat{r})$. De plus, on limitera cette étude aux perturbations qui ne changent pas le statut de contact. Cette condition permet de linéariser le système autour de l'équilibre.

En effet, cette condition revient à imposer une condition de contact bilatérale, ce qui de fait rend le

problème de contact linéaire.

En utilisant les propriétés vérifiées par la solution d'équilibre, le système d'équations gouvernant les perturbations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{U} \text{ et } \hat{\mathbf{r}} \text{ tels que } \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}^0 \\ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^* \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* (\mathcal{B} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathcal{A} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega = \int_{S_c^e} \hat{\mathbf{u}}^* \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \\ \hat{u}_n = 0 \text{ sur } S_c^e \\ \hat{\mathbf{r}}_t = \mu \left(\frac{r_n^e}{\|\mathbf{v}_s\|} \hat{\mathbf{u}}_b \mathbf{b} - \hat{\mathbf{r}}_n \mathbf{t} \right) \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}^* \text{ sont les gradients symétriques de } \hat{\mathbf{u}} \text{ et } \mathbf{u}^* \end{array} \right. \quad (4.46)$$

où \mathbf{b} est la direction tangente orthogonale à la vitesse de glissement imposée \mathbf{v}_s : $\mathbf{b} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$.

On peut remarquer que dans le cas d'un problème 3D, la perturbation introduit une non-linéarité régulière provenant de la relation $\mathbf{r}_t = -\mu r_n \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\|\dot{\mathbf{v}}\|}$.

La linéarisation de ce terme conduit à l'ajout d'un opérateur de dissipation [85] qui reprend la partie suivant la direction \mathbf{b} de l'expression de $\hat{\mathbf{r}}_t$ dans l'équation (4.46) :

$$\mathcal{C}_{\text{lin}}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^*) = - \int_{S_c^e} \mu \frac{r_n^e}{\|\mathbf{v}_s\|} \hat{\mathbf{u}}_b \cdot \mathbf{u}_b^* dS \quad (4.47)$$

La même démarche que pour le problème statique est utilisable, on écrit donc cette formulation avec \mathcal{U}^0 comme espace de recherche des champs solutions et \mathcal{U}^μ pour les champs tests. En cherchant des solutions harmoniques $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{r}}) = e^{\lambda t}(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{r}}_0)$ on obtient le problème aux valeurs propres quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \hat{\mathbf{u}}_0 \in \mathcal{W}_0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{W}^\mu \\ \lambda^2 \mathcal{M}(\hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{u}^*) + \lambda \hat{\mathcal{C}}(\hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{u}^*) + \mathcal{K}(\hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{u}^*) = 0 \\ \mathcal{U}^0 = \{\mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } S_c^e\} \\ \mathcal{U}^\mu = \{\mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} - \mu \mathbf{t}) = 0 \text{ sur } S_c^e\} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Ce qui donne après discrétisation éléments finis :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \lambda \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{u}_0 = 0 \\ (\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{K}}) = \mathbf{T}_\mu^\top (\mathbf{M}, \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{K}) \mathbf{T}_{\text{BL}} \\ \text{avec } \mathbf{T}_{\text{BL}} \text{ et } \mathbf{T}_\mu \text{ des bases des espaces } \mathcal{W}^0 \text{ et } \mathcal{W}^\mu \text{ discrétisés} \end{array} \right. \quad (4.49)$$

où l'opérateur $\hat{\mathbf{C}}$ est défini par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mu \mathbf{P}_B^T \mathbf{D} \mathbf{P}_B \\ D_{ii} = \frac{(r_n^e)_i}{(v_s)_i} \end{cases} \quad (4.50)$$

où \mathbf{P}_B est la projection sur la direction \mathbf{b} .

Le problème quadratique aux valeurs propres obtenu est un système qui peut être de grande taille et qui est non symétrique du fait du frottement. Pour sa résolution, on utilise une linéarisation en un problème aux valeurs propres généralisé (GEP) de taille double en passant en variable d'état et un algorithme d'itération sur les résidus [9, 10] qui permet de ne résoudre que des systèmes dont la taille est du même ordre de grandeur que le nombre de modes propres recherchés. Le principe de cette méthode consiste à projeter les opérateurs $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ sur une base réduite \mathbf{B} , de résoudre le problème sur cette base et de construire un enrichissement de cette base en utilisant les résidus de vérification du problème par la solution approchée. Parmi les intérêts majeurs de cette méthode, il y a d'une part le fait d'avoir un critère de contrôle de l'erreur pertinent du point de vue de l'énergie mécanique du système – la norme énergétique du résidu – et d'autre part le fait d'avoir un enrichissement de la base visant à réduire rapidement le résidu.

Les systèmes non symétriques de grande taille étant souvent très sensibles aux erreurs numériques, la convergence de l'algorithme en gardant une taille de base raisonnable n'est pas garantie. En particulier le choix de la matrice pour l'orthonormalisation de la base peut avoir un impact considérable sur la convergence de cette méthode.

4.5 Méthodes de réduction modales et approximations non-linéaires

Comme nous l'avons vu, la simulation de la dynamique de systèmes non-linéaires de grande taille devient rapidement très coûteuse – voire impossible – avec les outils informatiques actuels. Ceci provient du fait de la nécessité de manipuler des systèmes matriciels de grande taille, d'être capable de les factoriser, et de stocker les résultats. De plus la non-linéarité implique le plus souvent une méthode itérative de résolution ce qui accroît encore le nombre de résolutions de système à faire.

Une idée naturelle est alors de chercher à diminuer la taille des systèmes à résoudre par différentes méthodes de réduction ou d'approximation. Une des méthodes d'approximation les plus classiques est la méthode de Ritz [101] qui consiste à rechercher les solutions dans un espace vectoriel ou affine de dimension finie. Cette méthode, peut s'avérer extrêmement efficace pour des systèmes linéaires où le choix de l'espace de recherche des solutions est relativement aisé. Pour ce qui est des systèmes non-linéaires, elle peut aussi être utilisée avec succès [115] du moins sur les systèmes où l'excitation est connue. D'autres méthodes de réduction ou d'approximations telles que la réduction sur les variétés centrales ou les méthodes de réponses harmoniques sont utilisables et plus spécifiques aux systèmes non-linéaires.

4.5.1 Méthode de Ritz

La méthode de Ritz est assez générale et peut s'appliquer à grand nombre d'équations variationnelles. Pour un système en dynamique non-linéaire, on recherche en générale les solutions \mathbf{u} et $\dot{\mathbf{u}}$ d'une équation sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}(\dot{\mathbf{u}}^*, \dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\dot{\mathbf{u}}^*, \dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}^*, \mathbf{u}) = \mathcal{L}(\dot{\mathbf{u}}^*) + \mathcal{N}(\dot{\mathbf{u}}^*, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \quad (4.51)$$

où \mathcal{M} , \mathcal{C} et \mathcal{K} sont les opérateurs de masse, d'amortissement visqueux et de raideur du système, \mathcal{L} est la forme linéaire de la puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesse virtuel $\dot{\mathbf{u}}^*$ et \mathcal{N} est la forme de la puissance des efforts non-linéaires dans le champ de vitesse virtuel.

Dans le cas général, les champs solutions appartiennent à des espaces vectoriels ou affines de dimension infinie (typiquement un espace de Sobolev), et il n'y a pas de méthode permettant de résoudre ce problème. La méthode de Ritz consiste à résoudre un problème approché, dans un espace de dimension finie n , en cherchant les champs solutions à chaque instant sous la forme $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}_r$, où $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ est une base de l'espace de dimension finie et \mathbf{u}_r est le vecteur des coordonnées du champ approché $\tilde{\mathbf{u}}$ dans cette base. En pratique on pourrait aussi appliquer cette méthode pour la variation en temps des champs solutions et l'on retomberait dans le cadre des éléments finis espace-temps évoqué précédemment. On peut remarquer que la méthode des éléments finis est un cas particulier de la méthode de Ritz où l'espace d'approximation peut être construit de manière automatique à partir d'une discrétisation de la géométrie. Ce cas particulier est intéressant car il permet de s'affranchir de faire un choix de base pour les solutions, en revanche il conduit rapidement à des espaces d'approximation de grande dimension et donc à une impossibilité de résoudre le système. La méthode de Ritz peut s'appliquer à un problème déjà discrétisé à l'aide de la méthode des éléments finis.

Toute la difficulté dans la méthode de Ritz est donc le choix d'une base adaptée au calcul de la solution. La plupart des méthodes modales peuvent être vues sous une même approche : celle de l'approximation de la réponse $\mathbf{B} = [\mathbf{K} + s^2\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{V}$ où \mathbf{V} est une matrice représentant la variation spatiale des chargements extérieurs considérés et $[\mathbf{K} + s^2\mathbf{M}]$ est la raideur dynamique dans le domaine de Laplace. Dans le cas contraire une approche robuste pour les systèmes linéaires avec amortissement proportionnel est l'utilisation des modes propres de la structure ou de sous-structures. En effet, on peut montrer que les modes normaux de la structure libre ou encastree, éventuellement complétés par des modes d'attaches (réponse à des forces unitaires) ou des modes contraints (réponse à des déplacements unitaires) permettent d'obtenir une bonne approximation de la réponse d'une structure soumise à une excitation dont la fréquence reste faible, c'est à dire sensiblement en dessous de la fréquence du plus haut mode compris dans la base. Par exemple, Balmès [6] montre comment diverses méthodes peuvent se comparer sous ce formalisme. Une telle réduction donne de très bons résultats lorsque les excitations extérieures ont des fréquences inférieures à deux tiers de la fréquence du plus haut mode pris en compte (critère dit de Rubin) et dont la variation spatiale est décrite par la matrice \mathbf{V} . Lorsque la structure comporte de l'amortissement non proportionnel, on peut ajouter la prise en compte d'un résidu dans la base d'approximation qui viendra corriger les modes normaux.

Dans le cas de systèmes non-linéaires, on peut être confronté à une évolution des modes en fonction de l'évolution de la solution. Dans ces cas, une approche de Ritz semble compromise. Deux démarches permettent de proposer des bases de réduction pertinentes, la première est de considérer plusieurs points de fonctionnement pour la construction de la base modale, et d'obtenir ainsi une base capable de représenter exactement le comportement modal en ces points de fonctionnement et de manière approchée ailleurs. Ce type de méthode a été utilisée par Sternchüss [115] pour la réduction de modèle de turbines multi-étagées. Elle nécessite néanmoins de pouvoir identifier plusieurs zones de fonctionnement d'intérêt et de venir y faire un calcul modal. Si l'évolution des modes est suffisamment régulière, on peut, une fois quelques modes nominaux calculés, ajouter des modes à l'aide d'interpolations paraboliques ou cubiques. La seconde méthode consiste à utiliser quelques simulations courtes et représentatives du système complet et d'en extraire des déformées principales à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières (SVD) modifiée pour utiliser l'énergie mécanique du système. Cette stratégie demande là encore d'identifier quelques points de fonctionnement intéressants, mais surtout d'être capable de mener des simulations certes sur une courte durée, mais sur un système complet. Ce type d'approches est similaires aux démarches de réduction par *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) [71]. Des extensions de la POD connues sous le nom de *Proper Generalized Decomposition* (PGD) [92] permettent de se passer de calcul d'une solution du système complet, cependant ces méthodes ne se prêtent pas encore à la dynamique transitoire.

Dans le cas du crissement, la difficulté de la construction de la base réside en plusieurs points. Premièrement, il n'y a pas d'excitation extérieure, ce qui rend l'utilisation du critère de Rubin difficile. Deuxièmement, les modes normaux ou même les modes complexes du système sans frottement ne sont pas forcément capables de bien représenter les déformées du système avec frottement. Cependant, Lorang a constaté [75] sur un modèle simplifié de frein à disque que les solutions obtenues se décomposent très bien sur les modes complexes issus de l'analyse de stabilité du système, avec en particulier une forte participation des modes instables. Ce résultat n'est toutefois pas général, comme cela a été montré par Sinou [107].

4.5.2 Réduction sur les variétés centrales

La méthode de réduction sur les variétés centrales est une méthode qui permet d'exprimer les solutions d'un système dynamique non-linéaire au voisinage d'une bifurcation de Hopf en fonction des variétés centrées uniquement, grâce à une description approchée des variétés stables en fonction des variétés centrées [89].

On considère un système non-linéaire décrit par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \mu) \quad (4.52)$$

où μ est un paramètre de contrôle.

Si l'on écrit l'équation d'état du système dynamique non-linéaire recentré sur sa position d'équilibre, on a alors :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (4.53)$$

Avec \mathbf{f} une fonction non-linéaire. Un développement de Taylor en $\mathbf{x} = 0$ donne l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdots + \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}\|^k) \quad (4.54)$$

avec $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=0}$ et $\mathbf{f}_j(\mathbf{x})$ est la contraction multiple de la dérivée $j^{\text{ième}}$ de \mathbf{f} avec \mathbf{x} . On suppose que la bifurcation se situe en $\mu = \mu_0$ et que le système n'admet pas de variété instable à cette bifurcation.

On effectue le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_c \\ \mathbf{v}_s \end{bmatrix}$ où \mathbf{v}_c et \mathbf{v}_s sont respectivement les variétés centrées et stables du système.

Le système au voisinage de la bifurcation suit donc l'équation :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c \approx \mathbf{J}_C(\mu_0) \mathbf{v}_c + \mathbf{g}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) + \cdots + \mathbf{g}_k(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) \\ \dot{\mathbf{v}}_s \approx \mathbf{J}_S(\mu_0) \mathbf{v}_s + \mathbf{h}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) + \cdots + \mathbf{h}_k(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) \end{cases} \quad (4.55)$$

Les valeurs propres λ_c de la matrice \mathbf{J}_C sont nulles et celles de la matrice \mathbf{J}_S sont négatives. Le comportement du système au voisinage de la bifurcation, c'est à dire en $\mu = \mu_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$, est alors donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_C(\mu) \mathbf{v}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu) \\ \dot{\mathbf{v}}_s = \mathbf{J}_S(\mu) \mathbf{v}_s + \mathbf{f}_s(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

On peut alors exprimer les variétés stables en fonction des variétés centrées [17] sous la forme $\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \varepsilon)$ où \mathbf{h} vérifie les conditions suivantes :

$$\mathbf{h}(0, 0) = \mathbf{0} ; D_{\mathbf{v}_c} \mathbf{h}(0, 0) = \mathbf{0} ; \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \varepsilon} = \mathbf{0}$$

L'expression de la fonction \mathbf{h} ne peut être obtenue explicitement, en revanche on peut l'approcher à l'aide d'un développement polynomial en \mathbf{v}_c et ε :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \varepsilon) = \sum_{\alpha_1=0}^q \sum_{\alpha_2=0}^{q-\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_{n+1}=\max(0, 1-\alpha_1-\dots-\alpha_n)}^{q-\alpha_1-\dots-\alpha_n} \mathbf{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}} \mathbf{v}_{c1}^{\alpha_1} \mathbf{v}_{c2}^{\alpha_2} \cdots \mathbf{v}_{cn}^{\alpha_n} \varepsilon^{\alpha_{n+1}}$$

où $\mathbf{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}$ sont des vecteurs constants que l'on détermine par substitution de \mathbf{v}_s dans la deuxième ligne du système d'équations (4.56).

Le système réduit devient donc :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_C(\mu) \mathbf{v}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \varepsilon), \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

où $\mathbf{f}_c(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \varepsilon), \mu)$ correspond aux contributions non-linéaires comportant les participations des variétés centrées ainsi que des variétés stables. On peut remarquer que la réduction obtenue par cette méthode est vite très importante, surtout pour un système comportant beaucoup de degrés de liberté. En effet, après réduction, le système ne comporte plus que les variétés centrées. Nous rappelons que pour un système mécanique comportant un unique mode instable, la variété centrée est de dimension 2. Cependant l'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne donne de bonnes approximations du système non-linéaire que dans un voisinage très proche de la bifurcation étudiée. Une application loin de la bifurcation nécessite de développer des approches de type variétés invariantes. De plus le choix de l'ordre du polynôme d'approximation des variétés stables a une incidence grande sur la qualité de la solution. L'ordre suffisant n'étant pas connu *a priori*. Des méthodes d'extensions par approximants multi-variables peuvent être mises en œuvre [106, 109] et permettent de s'éloigner un peu plus de la bifurcation mais le choix de l'ordre d'approximation reste un problème crucial ainsi que la définition de la « proximité » de la bifurcation.

4.5.3 Méthodes d'approximation

Afin d'obtenir des estimations des niveaux vibratoires loin des bifurcations, on peut se tourner vers des méthodes d'approximation qui proposent des estimations de la solution de la dynamique non-linéaire du système sous une forme supposée *a priori*.

4.5.3.1 Méthode de suivi des modes non-linéaires

Une première méthode est celle de suivi du mode non-linéaire complexe [110]. La solution dynamique autour de l'équilibre instable est approchée par l'évolution de l'amplitude suivant un mode instable du système dont la valeur propre λ a une partie réelle positive. Ainsi, un système non-linéaire gouverné par l'équation d'état

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{y}, \mu) \quad (4.58)$$

a pour solution approchée autour de l'équilibre $\tilde{\mathbf{y}}(t) = p \left(\boldsymbol{\psi} e^{\lambda t} + \overline{\boldsymbol{\psi}} e^{\bar{\lambda} t} \right)$ où λ et $\bar{\lambda}$ sont les valeurs propres conjuguées du mode instable issues de l'analyse de stabilité, $\boldsymbol{\psi}$ et $\overline{\boldsymbol{\psi}}$ sont les déformées associées et p l'amplitude modale. Le cycle limite, s'il existe est atteint lorsque λ est imaginaire pur.

Pour suivre l'évolution du mode instable, on s'intéresse à la solution périodique associée définie par $\hat{\mathbf{y}}(t, p) = p \left(\boldsymbol{\psi}(p) e^{i\omega(p)t} + \overline{\boldsymbol{\psi}}(p) e^{-i\omega(p)t} \right)$ où ω est la partie imaginaire de la valeur propre λ . En initialisant un cycle divergent suivant le mode, avec une amplitude $p = \Delta p$ faible, on peut calculer le système linéaire équivalent à (4.58) gouverné par l'équation (4.59) en minimisant la quantité $\varepsilon =$

$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega(p)}} \mathbf{f}_{nl}(\hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{A}_{NLEQ}\hat{\mathbf{y}}$. On incrémente progressivement l'amplitude modale p de δp et l'on recalcule les modes et valeurs propres $\psi(p)$ et $\lambda(p)$ du système linéaire équivalent. Lorsque $\Re(\lambda(p)) = 0$, on obtient une approximation du cycle limite.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{NLEQ}\mathbf{y} \quad (4.59)$$

Par rapport à la méthode de réduction sur les variétés centrales, le suivi du mode non-linéaire permet l'obtention d'approximations de la solution loin de la bifurcation. Cependant, elle néglige la participation des variétés stables dans la solution, et le cycle obtenu peut être sensiblement différent du cycle exact. De plus sur un système de grande taille, l'obtention du système linéaire équivalent à chaque incrément δp peut être coûteuse. Enfin cette méthode se fonde sur une notion de suivi continu des déformées $\psi(p)$ et des pulsations $\omega(p)$, ce qui peut être contraignant dans le cadre de problèmes non-linéaires à forte non-régularité.

4.5.3.2 Méthode de la balance harmonique sous contrainte

Une deuxième méthode d'approximation envisageable pour un problème de vibration auto-entretenue du fait d'une instabilité de type flottement est la « balance harmonique contrainte ». Elle consiste à rechercher une solution stationnaire sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre p :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1}^p \mathbf{b}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) + \mathbf{a}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right)$$

où ω est la fréquence fondamentale de la solution stationnaire recherchée et est une inconnue, et ν est un entier permettant de prendre en compte des sous-harmoniques liés aux non-linéarités. Le terme $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \mu)$ de l'équation (4.58) est lui aussi approché sous forme de série de Fourier tronquée $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \mu) = \mathbf{d}_0 + \sum_{k=1}^p \mathbf{d}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) + \mathbf{c}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right)$. Cette approximation est obtenue par un passage temps-fréquence analogue à celui proposé par Cameron [16] :

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{b}_p \mathbf{a}_p]^T & \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} & \mathbf{q}(t) \\ & & \downarrow \\ [\mathbf{d}_0 \mathbf{d}_1 \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{d}_p \mathbf{c}_p]^T & \xleftarrow{\text{FFT}} & \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t), \mu) \end{array}$$

On peut noter que l'expression de la non-linéarité est exacte dans le domaine temporel *via* l'expression $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t), \mu)$. Elle n'est approchée que lors du passage dans le domaine fréquentiel du fait de la projection sur une base de Fourier tronquée.

On définit alors $\mathbf{r}_{c,0}$, $\mathbf{r}_{c,k}$ et $\mathbf{r}_{s,k}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{c,0} &= \mathbf{K}\mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0 - \mathbf{f}_p \\
\mathbf{r}_{c,k,k \geq 1} &= \frac{k}{v} \omega \mathbf{C} \mathbf{a}_k + \left(\mathbf{K} - \left(\frac{k\omega}{v} \right)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{b}_k - \mathbf{d}_k \\
\mathbf{r}_{s,k,k \geq 1} &= \left(\mathbf{K} - \left(\frac{k\omega}{v} \right)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{a}_k - \frac{k}{v} \omega \mathbf{C} \mathbf{b}_k - \mathbf{c}_k
\end{aligned}$$

La recherche d'une solution stationnaire revient à trouver les coefficients de Fourier \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k ainsi que la pulsation fondamentale du système autonome ω minimisant les résidus $\mathbf{r}_{c,k}$ et $\mathbf{r}_{s,k}$. On peut noter que la pulsation fondamentale ω peut être différente de celle provenant du mode instable déterminé à partir d'une étude de stabilité d'un point d'équilibre comme cela a été montré par Coudeyras dans [23]. Cependant il existe une solution triviale qui est l'équilibre instable du système. La solution non triviale n'est *a priori* pas exactement représentée sous la forme recherchée, l'algorithme de minimisation ne peut donc que donner la solution triviale.

Afin de trouver les solutions non triviales, une méthode proche du suivi de modes complexes consiste à calculer le système linéaire équivalent et à rajouter l'objectif de minimisation suivant : $\max_k(\Re(\lambda_k))$, où λ_k représente la valeur propre associée au $k^{\text{ième}}$ mode non-linéaire « instable » du système. En effet, le cycle limite est caractérisé par un taux de croissance nul d'un mode et le fait que les autres modes sont amortis. Cet objectif de minimisation ajouté est la contrainte de technique de la balance harmonique sous contrainte et permet d'utiliser cette méthode sur des systèmes autonomes [24].

Cette méthode permet l'obtention de cycles éloignés des bifurcations, mais peut néanmoins s'avérer coûteuse si le système est de grande taille car la construction du système linéaire équivalent et la résolution du problème aux valeurs propres qui s'en suit prennent un temps de calcul conséquent.

De plus, si ces deux méthodes permettent de trouver un cycle limite autour d'une position d'équilibre, elles ne permettent pas d'obtenir le chemin emprunté par le système pour y parvenir et risquent de fait de manquer un changement de bassin attracteur. Elles ne permettent pas non plus, par conséquent, d'étudier la réponse transitoire et les évolutions des comportements possibles.

4.5.4 Choix d'une méthode de réduction

Compte tenu de la complexité d'un modèle éléments finis réaliste d'un système de frein ferroviaire et de la méthode de traitement du contact retenue, nous devons choisir une méthode de réduction qui rende les calculs accessibles sur les machines actuelles, tout en respectant la modélisation physique retenue. Si les méthodes de réduction sur les variétés centrales semblent performantes pour étudier la solution non-linéaire à proximité des bifurcations de Hopf, leur utilisation sur un système loin d'une bifurcation semble plus difficile. Les méthodes issues de la balance harmonique permettent de trouver des cycles de bonne qualité, et ce même loin des bifurcations de Hopf, mais la construction d'un système linéaire équivalent et le calcul de ses valeurs propres sur un modèle de grande taille risquent

fort d'en diminuer l'efficacité. De plus, si elles permettent d'obtenir des cycles limites, on ne peut établir de manière simple de liens entre des conditions de fonctionnement et initiales et le cycle obtenu. La méthode la plus simple à mettre en œuvre et qui permet le plus de flexibilité, reste la méthode de Ritz. De plus les résultats encourageants de représentation *a posteriori* de solutions de modèles de freins simplifiés sur la base des modes complexes [75] semblent désigner ces modes comme un bon espace de recherche de la solution. L'analyse de stabilité étant de toute façon réalisée sur le système étudié, la construction de la base de réduction ne demande que peu d'efforts numériques supplémentaires, contrairement aux constructions répétées de systèmes linéaires équivalents. La méthode de Ritz permet en outre de mener une résolution temporelle, et donc potentiellement de mettre en évidence des liens entre les conditions initiales et les cycles obtenus.

Chapitre 5

Validation sur un de modèle de couche 2D et proposition de réduction

Dans ce chapitre, nous allons vérifier la capacité des outils développés à simuler la dynamique transitoire et stationnaire d'un système déstabilisé par le frottement. Cette validation des méthodes se fera sur un cas simple d'une couche élastique glissant sur un massif rigide. Une fois ce système étudié sans réduction, nous testerons différentes bases de réduction afin de voir l'influence d'un calcul réduit sur les solutions obtenues.

5.1 Présentation du cas test

5.1.1 Description du modèle étudié

Le cas test est constitué d'une couche élastique 2D homogène isotrope de longueur L et de hauteur h glissant sur un plan rigide décrit par la figure 5.1. Pour la modélisation éléments finis, la couche en question est discrétisée avec un maillage de 50 éléments dans la longueur pour 20 dans la hauteur.

Le bord supérieur de la couche est encastré, et les deux bords latéraux sont soumis à une condition de périodicité, c'est à dire que le déplacement du bord gauche est imposé égal à celui du bord droit. On impose à l'ensemble de la couche un déplacement vertical δ vers le plan rigide, ce qui vient le presser contre l'interface de contact frottant. Cette interface est caractérisée par un coefficient de frottement constant μ et une vitesse de glissement Eulérienne v_g . L'amortissement dans cette structure est introduit en utilisant un modèle de Rayleigh, proportionnel aux matrices de masse et de raideur \mathbf{M} et \mathbf{K} . La matrice d'amortissement s'exprime alors de cette façon : $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}$ où α et β sont les coefficients de Rayleigh. Les paramètres physiques du système (L , h , la masse volumique ρ , le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , et les coefficients de Rayleigh α et β) sont donnés dans le tableau 5.1.

Le coefficient de frottement μ sera utilisé comme paramètre de contrôle : en effet, sa variation permet de « piloter » le nombre de modes instables présents autour de l'équilibre statique du système. Les paramètres v_g et δ constituent les paramètres de fonctionnement du système. Ils permettent notamment de privilégier l'adhérence ou le décollement comme premier événement non-linéaire intervenant lors de l'évolution transitoire de la réponse vibratoire du système au voisinage de la position d'équilibre statique. L'étude que nous menons ici s'apparente à celle effectuée par Baillet [5], dans laquelle l'influence de certains paramètres dans la simulation de la dynamique transitoire non-linéaire d'un système plot sur poutre est étudiée.

Le choix de ce système est motivé par le fait que sa stabilité et ses solutions dynamiques ont été largement étudiées dans le cas élastique pur (existence de solutions semi analytiques [1–3, 85]). De plus, ce système ayant déjà été étudié par Xavier Lorang [75], nous pourrions valider dans un premier temps les méthodes développées dans le cadre de cette thèse par rapport aux résultats de Lorang sur la couche. Ensuite, nous allons étudier la stabilité de ce système en fonction du coefficient de frottement. Suite à quoi, nous nous intéresserons plus particulièrement à 4 valeurs du coefficient de frottement pour comprendre le comportement du système en dynamique transitoire et stationnaire. Ces 4 valeurs seront choisies de manière à illustrer du mieux possible la diversité des comportements

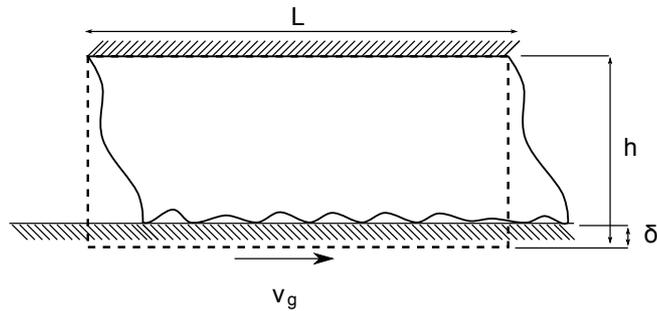


FIGURE 5.1 – Schéma de la couche élastique glissante

| Paramètre | L | h | E | ν | ρ | α | β | maillage |
|-----------|--------|--------|--------------------|-------|-------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------|
| Valeur | 0,15 m | 0,05 m | $5 \cdot 10^9$ MPa | 0,2 | 2500 kgm^{-1} | $7,8 \text{ s}^{-1}$ | $2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ | 50×20 |

TABLE 5.1 – Paramètres du système

observables. Pour finir, nous mettrons en œuvre une méthode de Ritz pour effectuer différentes réductions du système et observer leur impact sur les solutions obtenues. Cette démarche a fait l'objet d'une publication [80].

5.1.2 Validation des procédures développées

Afin de vérifier la validité des procédures codées pour la simulation de ce système, on se propose de comparer les résultats avec ceux obtenus par Lorang [75] pour deux configurations, l'une donnant un cycle de glissement - adhérence, l'autre de glissement - décollement. Cette comparaison s'est faite sur un maillage 25×10 pour être dans les conditions exactes de la simulation effectuée par Lorang. Les deux configurations sont décrites par le tableau 5.2

Les résultats de cette validation montrent un excellent accord entre les calculs effectués par Lorang et ceux menés à l'aide des procédures mises en place, que ce soit sur la configuration 1 (figure 5.2) ou sur la configuration 2 (figure 5.3). La seule différence sensible dans les deux calculs est une légère avance concernant la visibilité de l'instabilité sur nos simulations. Cette avance peut être liée à la qualité du calcul de la solution quasi-statique qui n'est pas nécessairement la même dans les deux simulations. La comparaison des solutions non-linéaires sur le cycle limite montre un accord quasi parfait.

| configuration | δ | v_g |
|---------------|-------------------------------|-----------------------|
| 1 | $1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ | $0,1 \text{ ms}^{-1}$ |
| 2 | $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ | $0,5 \text{ ms}^{-1}$ |

TABLE 5.2 – Configurations de validation

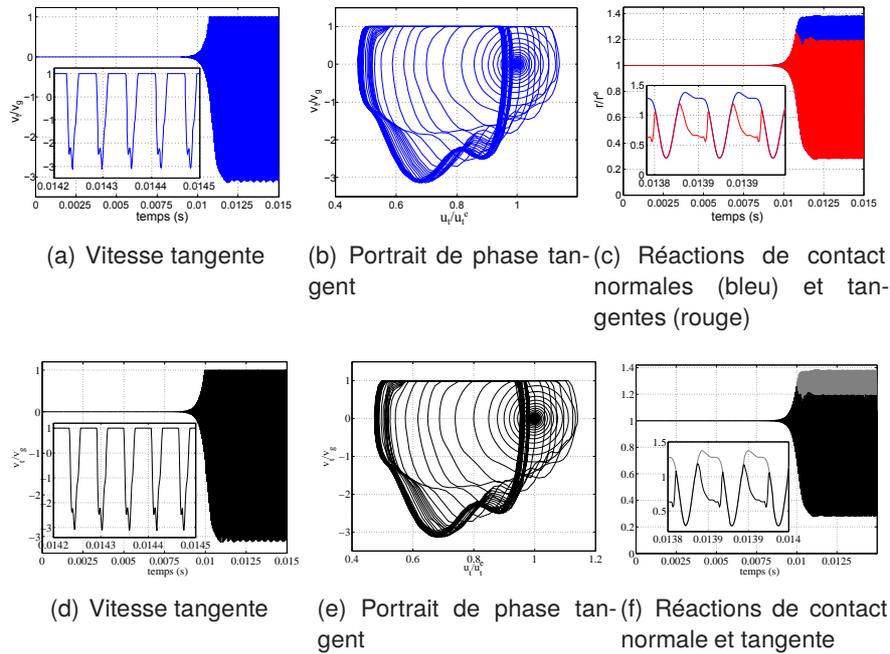


FIGURE 5.2 – Validation des procédures sur la configuration 1 – (a-c) Calculs de Lorang – (d-e) Procédures mises en place

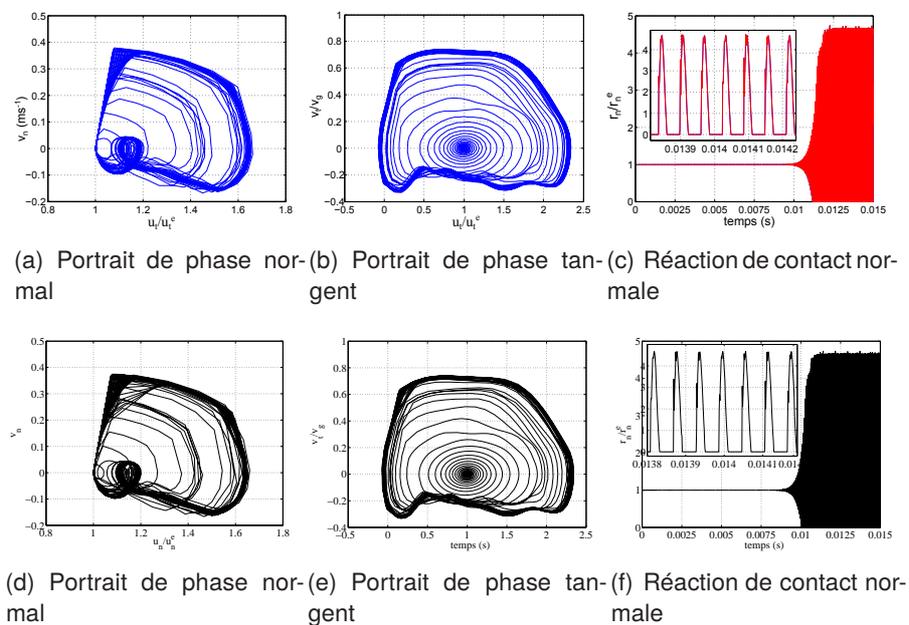


FIGURE 5.3 – Validation des procédures sur la configuration 1 – (a-c) Calculs de Lorang – (d-e) Procédures mises en place

5.2 Outils d'analyse des solutions

Afin de mener l'analyse des solutions des systèmes étudiés, différents outils vont être introduits. L'objectif principal de l'utilisation de ces outils est d'obtenir une signature de la solution dynamique non-linéaire transitoire et stationnaire afin de pouvoir d'une part caractériser le comportement du système mais aussi de comparer différentes solutions obtenues pour les mêmes conditions mais avec différents choix de base pour le calcul réduit.

Un point crucial dans la caractérisation de la solution est l'analyse temps-fréquence et l'analyse des déformées de la solution. En ce qui concerne l'analyse fréquentielle pour les signaux stationnaires, le calcul des composantes pour l'ensemble du signal est suffisant et s'obtient aisément grâce à une transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform* FFT). Dans le cas de signaux non stationnaires, la variation au court du temps des différentes contributions fréquentielles est fondamentale pour la bonne compréhension du comportement non-linéaire transitoire. Celle-ci peut s'étudier de manière classique avec une transformée de Fourier à court terme (*Short Time Fourier Transform*, STFT), transformée introduite par Gabor [45] et qui se trouve être appropriée pour des signaux faiblement non stationnaires. Lorsque les signaux sont plus fortement instationnaires, l'utilisation de la transformée en ondelettes continue (*Continuous Wavelet Transform*, CWT) est une bonne alternative à celle de la STFT.

Pour ce qui est de l'étude des déformées, un critère de type M-MAC est proposé. Il sert à étudier la ressemblance soit entre deux pics de deux solutions à comparer, soit entre un pic et les modes complexes issus du calcul de stabilité. Un outil très utile pour avoir une information à la fois spatiale et temporelle est la projection de la solution sur les modes de stabilité qui permet de suivre l'évolution au cours du temps des contributions de chaque mode dans la solution.

Nous proposons d'explicitier ces divers outils d'analyse dans les paragraphes qui suivent.

5.2.1 Transformée de Fourier à court terme (STFT)

La STFT est une extension de la transformée de Fourier fondée sur un fenêtrage glissant du signal à analyser, permettant ainsi l'obtention des composantes fréquentielles de parties du signal centrées en différents temps, et donc une évolution de ces composantes en fonction du temps. Cette méthode est fiable pour des signaux faiblement instationnaires et est définie par :

$$\text{STFT}_{\tau}^s(f) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)w(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt \quad (5.1)$$

où w est la fonction de fenêtrage et s le signal à analyser.

Un inconvénient de la STFT est le compromis entre les résolutions temporelle et fréquentielle.

5.2.2 Transformée en ondelettes continue (CWT)

Un moyen de pallier en partie le problème de résolution temps-fréquence de la STFT est l'utilisation des transformées en ondelettes. Ces dernières ont fait leurs apparitions dans les années 1980 avec les travaux de Morlet [87]. Nous nous contenterons ici d'évoquer les principes généraux.

La première étape de l'analyse par ondelettes constitue le choix d'une *ondelette mère*, $\phi(t)$, qui doit être une fonction à décroissance rapide remplissant la condition d'admissibilité définie dans [48]. Une famille de fonctions analysantes est alors dérivée de cette ondelette mère par translation et dilatation telles que définies par l'équation (5.2) où a est le facteur d'échelle – ou de dilatation – et b celui de translation en temps. La multiplication par $\frac{1}{\sqrt{a}}$ garantit la normalisation en énergie pour toutes les échelles.

La CWT est ensuite obtenue par projection du signal sur la famille d'ondelettes construite à l'aide de l'équation (5.2), produisant ainsi les coefficients de la CWT dont l'expression est donnée par l'équation (5.3) où $\bar{}$ désigne la conjugaison sur \mathbb{C} . Les coefficients obtenus sont une mesure de la corrélation du signal $s(t)$ avec la famille analysante. Ainsi, $\text{CWT}_{\phi}^s(a, b)$ correspond à l'information locale de $s(t)$ à l'échelle a et au temps b . Une représentation temps-échelle, appelée scalogramme, est obtenue en traçant le module des coefficients suivant le temps et l'échelle. En pratique, l'échelle est liée à l'inverse de la fréquence et l'on préfère donc souvent au scalogramme une représentation temps-fréquence en effectuant le tracé suivant l'inverse de l'échelle. La relation exacte entre fréquence et échelle dépend de l'ondelette mère. On définit le spectre en puissance d'ondelettes par $|\text{CWT}_{\phi}^s(f, b)|^2$. Celui-ci constitue la représentation la plus courante du fait de son analogie avec le spectre en puissance de Fourier.

$$\phi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (5.2)$$

$$\text{CWT}_{\phi}^s(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{\phi_{a,b}(t)} dt \quad (5.3)$$

Différents types d'ondelettes mères adaptés à des problématiques spécifiques ont été développés [31, 82]. Ici, nous utiliserons une des ondelettes les plus classiques, l'ondelette de Morlet. Son expression est donnée par :

$$\phi(t) = e^{jk_0 t} e^{-(1/2)t^2} \xrightarrow{\text{FT}} \hat{\phi}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-(1/2)(\omega - k_0)^2} \quad (5.4)$$

Pour l'ondelette de Morlet, la relation échelle-fréquence est donnée par la fréquence centrale $\omega_c = k_0/a$ à laquelle $\hat{\phi}(a\omega)$ est maximale. Le facteur k_0 est appelé nombre d'onde. Il est important de noter que l'ondelette de Morlet ne vérifie pas la condition d'admissibilité, en effet, $\hat{\phi}(0) \neq 0$. La transformée inverse n'est donc pas proprement définie. Du fait de la proximité de l'ondelette de Morlet et de la fonction exponentielle, la CWT de Morlet peut être vue comme une STFT avec une taille de fenêtre

inversement proportionnelle à la fréquence. C'est cette adaptation de la taille de fenêtre qui permet d'améliorer la résolution temps-fréquence par rapport à la STFT.

5.2.3 M-MAC pic à pic et pic à modes

Afin de comparer les déformées autour de pics fréquentiels d'une solution stabilisée calculée sur une certaine base de réduction avec celles d'une solution de référence, on met en place une projection des déformées normées en énergie cinétique. En pratique, il s'agit de calculer un critère de *Mass normalized Modal Assurance Criterion* (M-MAC) entre les deux déformées. L'expression du M-MAC utilisée ici est donnée par l'équation (5.5) dans laquelle les familles de vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} sont normés en masse. Ce critère est une extension du *Normalized Cross Orthogonality criterion* (NCO) dont on peut trouver une description par Morales dans [86].

$$\text{M-MAC}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{M} \mathbf{B}| \quad (5.5)$$

Nous utiliserons ce critère de deux manières. La première consiste à utiliser comme vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} les déformées normées extraites aux pics des FFT des solutions à comparer. Plus l'indicateur calculé est proche de 1, plus l'accord entre les deux solutions pour la déformée au pic extrait est bon. La deuxième manière d'utiliser ce critère est de prendre pour \mathbf{B} plusieurs modes complexes issus de l'analyse de stabilité. On obtient alors une projection de la déformée au pic sur ces modes complexes. Ce deuxième emploi permet d'identifier quels sont les modes participants à la déformée au pic. Du fait de la non orthogonalité de la base des modes complexes, l'information la plus sûre que l'on puisse tirer de cette projection est l'appariement de la déformée à 1 seul mode si l'on a une valeur de M-MAC suffisamment proche de 1. Pour les projections non nulles sur d'autres modes que le mode identifié, il convient pour en tirer une information pertinente de les comparer aux projections du mode identifié sur les autres modes.

Le M-MAC entre une déformée au pic et des modes complexes sera appelé M-MAC pic à modes et servira à l'étude des solutions de référence. Le M-MAC entre deux déformées aux pics sera appelé M-MAC pic à pic et servira à la comparaison de solutions réduites à une solution de référence.

5.2.4 Projection sur les modes complexes

Un dernier outil utilisé pour l'analyse des solutions transitoires non-linéaires est la projection sur les modes complexes dont le principe est décrit ici.

L'évolution du système pour le début de l'intervalle temporel est donnée par les déformées modales complexes et les valeurs propres calculées autour du point d'équilibre (*i.e.* les modes et valeurs propres issus de l'analyse de stabilité). Il semble donc intéressant de regarder l'évolution des participations de ces modes – plus particulièrement de ceux instables – pour étudier le comportement

non-linéaire de systèmes auto-entretenus et les phénomènes physiques intervenants. On cherche donc une décomposition du champ solution sur les modes complexes.

Les modes complexes issus de l'étude de stabilité vérifient la contrainte de contact bilatéral, ce qui n'est *a priori* pas le cas des champs de déplacement et de vitesse temporels solution du problème dynamique. Il faut donc extraire de la solution la partie compatible avec la contrainte de contact bilatérale. Pour ce faire, on décompose donc ces champs en somme d'un champ vérifiant cette contrainte et d'un saut normal à l'interface. On introduit à cet effet les matrices \mathbf{T}^N et \mathbf{T}^J , bases des espaces des champs sans déplacement normal et des sauts normaux respectivement. En utilisant le fait que \mathbf{T}^N et \mathbf{T}^J vérifient $\mathbf{T}^{N\top}\mathbf{T}^J = 0$ et en écrivant le champ solution \mathbf{u} ainsi $\mathbf{u} = \mathbf{T}^N\mathbf{u}_w + \mathbf{T}^J\mathbf{u}_k$, on peut extraire la composante \mathbf{u}_w de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_w = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}^{N\top}\mathbf{u} = \left(\mathbf{T}^{N\top}\mathbf{T}^N\right)^{-1}\mathbf{T}^{N\top}\mathbf{u} \quad (5.6)$$

Si l'on considère une évolution temporelle du système donnée par $(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$, on peut écrire la perturbation de l'équilibre vérifiant la contrainte bilatérale dans l'espace des phases α ainsi :

$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}^N(\mathbf{u} - \mathbf{u}^e) \\ \mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}^N\dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_w \\ \dot{\mathbf{u}}_w \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

où \mathbf{u}^e est le champ de déplacement à l'équilibre.

On cherche donc la décomposition du vecteur d'état α sur les modes complexes Φ_0 solutions du problème aux valeurs propres généralisé (GEP) de l'analyse de stabilité (c.f. section 4.4.2). Comme ces modes ne sont pas orthogonaux entre eux, on utilise la propriété dite de bi orthogonalité entre les modes Φ_0 et ceux Ψ_0 , solutions du problème adjoint (ou problème gauche). La propriété de bi orthogonalité s'écrit :

$$\forall i \neq j \quad \begin{aligned} \Psi_{0i}^\top \tilde{\mathbf{A}} \Phi_{0j} &= 0 \\ \Psi_{0i}^\top \tilde{\mathbf{A}} \Phi_{0i} &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

α admet une décomposition unique sur les modes complexes :

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \beta_k(t) \Phi_{0k} \quad (5.9)$$

La multiplication à gauche par les modes adjoints permet de trouver l'expression suivante pour les participations modales β_j :

$$\beta_j = \frac{\Psi_{0j}^\top \tilde{\mathbf{A}} \alpha}{\Psi_{0j}^\top \tilde{\mathbf{A}} \Phi_{0j}} \quad (5.10)$$

Si les modes adjoints et directs sont normés en énergie mécanique totale, la représentation de β_j au cours du temps donne une information sur l'évolution de la contribution énergétique du $j^{\text{ème}}$ mode

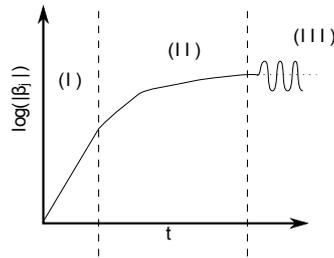


FIGURE 5.4 – Représentation schématique de l'évolution de la projection modale

dans la solution. Du fait du couplage existant entre les modes complexes, la somme des contributions énergétiques des modes est plus grande que l'énergie totale du système. Ainsi, la comparaison des contributions énergétiques n'est valable qu'entre deux modes.

La solution autour de l'équilibre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_w(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k \gamma_k e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k \gamma_k e^{r_k t} e^{j\omega_k t} \quad (5.11)$$

où \mathbf{a}_k est la partie de Φ_k correspondant au déplacement et γ_k dépend des conditions initiales. En écrivant la valeur propre associée au $i^{\text{ème}}$ mode $\lambda = r_i + j\omega_i$, on peut identifier β_i à $\gamma_i e^{r_i t}$ sur le début de l'intervalle de temps. En traçant $\log(|\beta_j|)$ en fonction du temps, on obtient donc une évolution linéaire tant que la linéarisation du système est valable. Sur la solution complète, le tracé montre typiquement trois phases (I), (II) et (III) représentées schématiquement sur la figure 5.4.

La phase (I) correspond au comportement linéaire du système autour du point d'équilibre. La phase (II) montre une évolution du taux de croissance de l'amplitude modale. Cette évolution est liée à l'apparition d'événements non-linéaires. Durant cette phase, une compétition entre différents modes instables peut avoir lieu. Enfin, dans la phase (III), le système atteint son état final où l'on peut voir un certain nombre de modes avec une amplitude modale significative. Suivant la sévérité des non-linéarités s'exprimant dans la solution, l'amplitude des modes dans la phase (III) peut être oscillante ou non. Les éventuelles oscillations peuvent être interprétées comme un changement significatif de déformée entre le mode de stabilité et celle du mode non-linéaire réellement présent.

Une alternative intéressante à la projection sur les modes complexes est la *Spectral Criterion based Linearization Method*, *SCLM* introduite par [49] qui permettait d'obtenir des déformées correspondant à l'état stationnaire croissant qui peuvent prendre en compte un changement d'état de contact. Cependant il reste à voir comment assurer une projection des solutions temporelles sur cette base pour suivre les évolutions des contributions de ces déformées principales.

5.3 Étude de stabilité du système

Dans cette partie, nous allons étudier la stabilité de l'équilibre statique de la couche 2D. Cette analyse sert de préambule à l'étude du comportement vibratoire non-linéaire du système

Sur ce cas simple, on remarquera tout d'abord que le statut des nœuds de la zone potentielle de contact ne dépend pas des conditions de fonctionnement : ils sont tous toujours en contact glissant. Ainsi, comme ce système est un système 2D la stabilité de cet équilibre ne dépend que du coefficient de frottement (pas de linéarisation de la direction de glissement).

La stabilité du système est donc étudiée uniquement en fonction du coefficient de frottement μ . La variation du coefficient de frottement de 0 à 1 permet de voir l'apparition successive de différents modes instables. La figure 5.5 montre le diagramme de stabilité du système pour 5 coefficients de frottement différents : $\mu = 0$, $\mu = 0,075$, $\mu = 0,19$, $\mu = 0,35$, et $\mu = 0,5$. Le choix de ces coefficients a été fait à proximité de l'apparition d'un nouveau mode instable. Ces diagrammes montrent que les modes déstabilisés sont tous des modes appartenant à des modes multiples du système. En particulier, le premier mode, qui est un mode simple voit son taux de divergence inchangé tout au long de la variation de μ .

La figure 5.6 montre l'évolution des valeurs propres des paires de modes dont l'un devient instable pour un coefficient de frottement inférieur à 0,5. Sur 5.6(a), on peut voir très nettement que le taux de divergence moyen dans chaque paire de mode reste constant. Cette propriété semble vérifiée sur d'autres systèmes avec une conservation de l'amortissement par fréquence. On notera toutefois que pour les systèmes 3D, la prise en compte de la matrice d'amortissement liée au frottement induit un échange de parties réelles moins localisé en fréquence, la propriété n'étant alors vérifiée qu'en moyenne sur une fenêtre fréquentielle. Si l'on s'intéresse à l'évolution de la fréquence des modes (figure 5.6(b)) on se rend compte de deux choses. Premièrement, le décalage en partie imaginaire est beaucoup plus faible que celui en partie réelle. Deuxièmement, il est dans le même sens et du même ordre de grandeur pour chaque mode d'une paire. D'autre part, on peut voir que le décalage fréquentiel induit par le frottement peut aussi bien être un décalage vers le bas que vers le haut.

Afin d'étudier le lien entre évolution de la déformée et évolution du taux de divergence, la figure 5.7 montre pour chaque mode instable l'évolution de son M-MAC avec le mode correspondant sans frottement en fonction de μ . Cette étude montre qu'il n'y a aucun lien entre évolution de la déformée modale et évolution de la partie réelle de la valeur propre : en effet parmi les modes qui obtiennent les plus hauts taux de divergence, on a aussi bien des modes dont la déformée évolue beaucoup (mode 6) que des modes dont la déformée reste inchangée (mode 3).

Finalement, la figure 5.8 montre la représentation des différentes déformées modales des modes instables. Comme il s'agit de modes complexes, ces déformées peuvent correspondre à des ondes progressives ou régressives (convention prise suivant le sens de la vitesse de glissement v_g) dans la structure. C'est effectivement le cas pour tous les modes instables observés. Il se trouve que la plupart d'entre eux correspondent à des ondes régressives, mais contrairement à ce qui est observé dans [1] certains modes instables sont des ondes progressives.

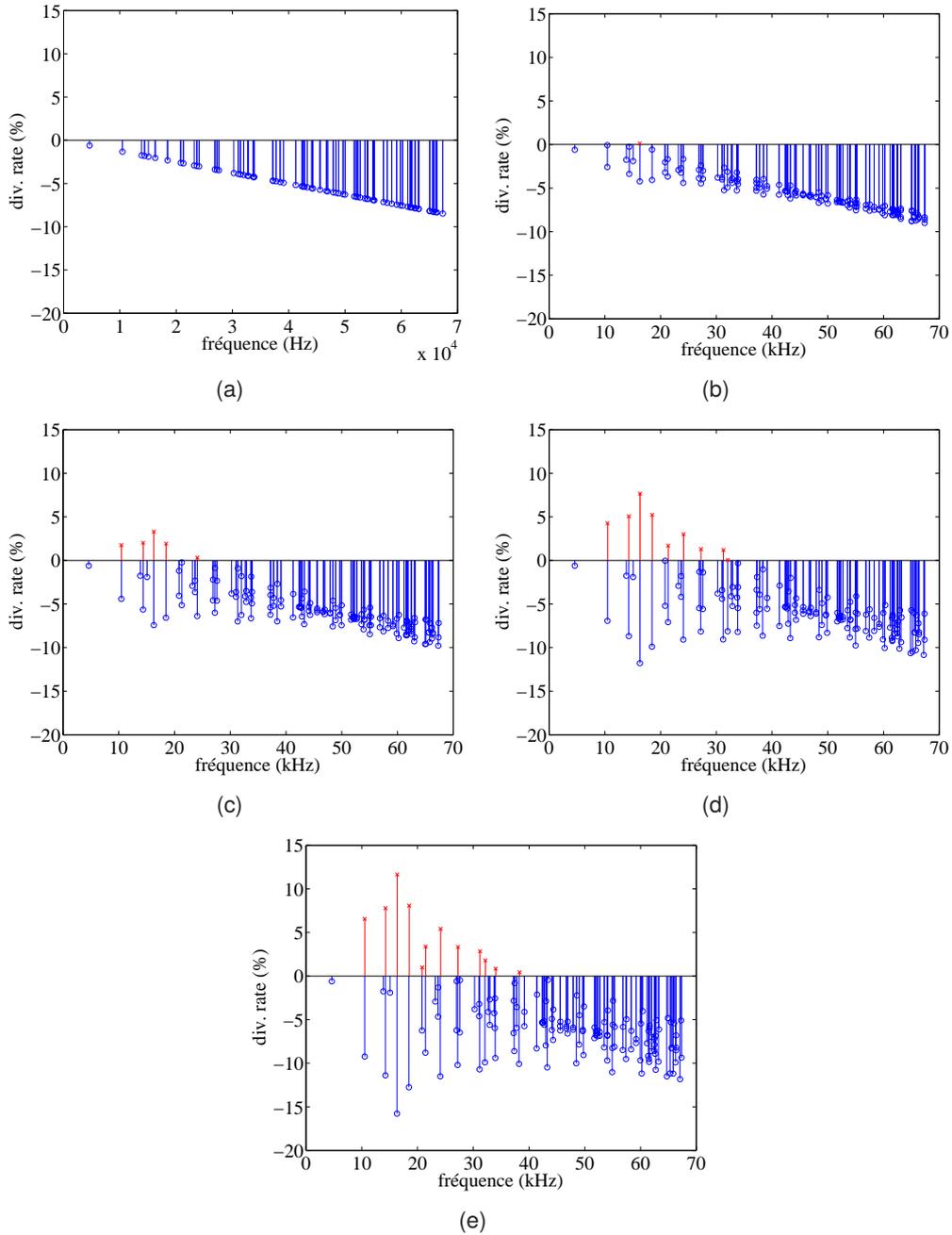


FIGURE 5.5 – Taux de divergence en fonction de la fréquence (× : modes instables, ○ : modes stables)
 – (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0,075$, (c) $\mu = 0,19$, (d) $\mu = 0,35$, (e) $\mu = 0,5$

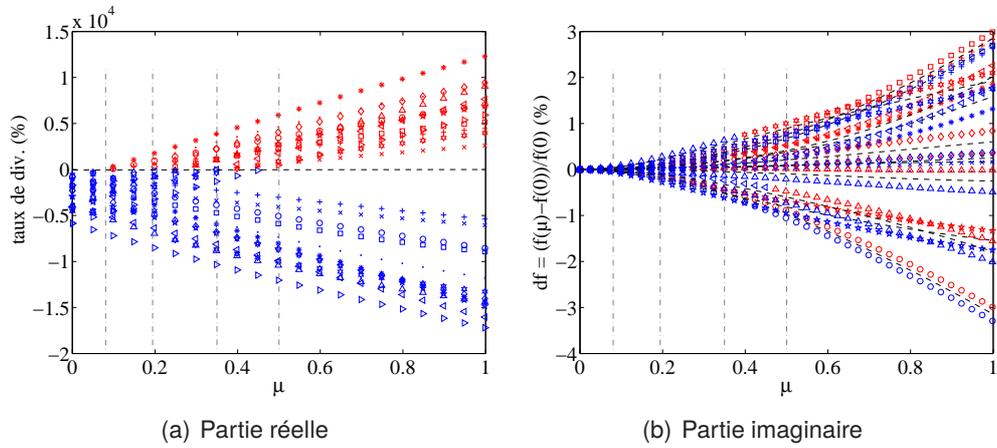


FIGURE 5.6 – Évolution des modes complexes – valeurs propres

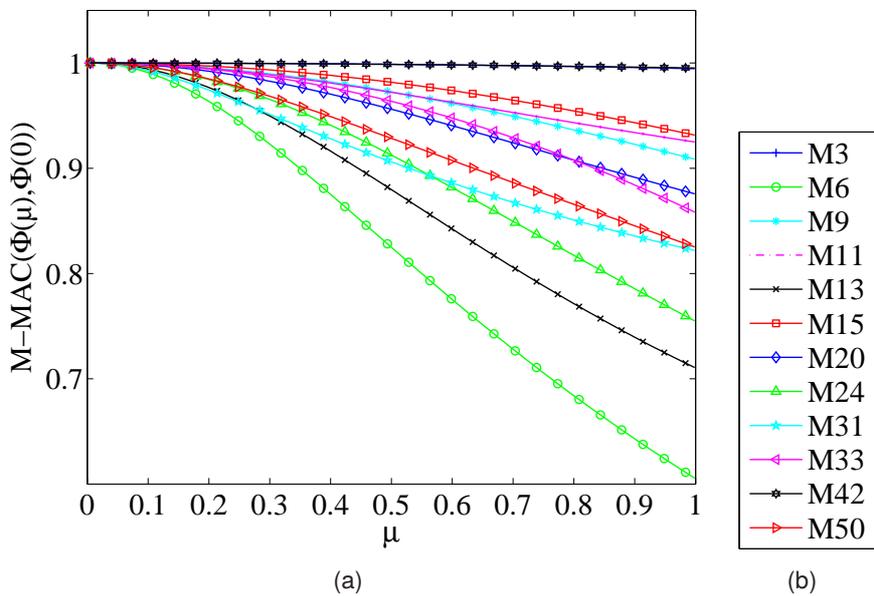


FIGURE 5.7 – Évolution des modes complexes – (a) M-MAC sur les déformées modales, (b) numéro de mode

| Cas | Modes instables | μ | Modes en C.I. | Première non-linéarité | Comportement non-linéaire | Réduction | Influence C.I. |
|---------|-----------------|-------|---------------|------------------------|---------------------------|-----------|----------------|
| 1_9A | 1 | 0.075 | 9 | adhérence | × | × | |
| 1_9S | 1 | 0.075 | 9 | décollement | × | × | |
| 5_9A | 5 | 0.19 | 9 | adhérence | × | × | × |
| 5_9S | 5 | 0.19 | 9 | décollement | × | | × |
| 5_allA | 5 | 0.19 | tous | adhérence | | | × |
| 5_allS | 5 | 0.19 | tous | décollement | | × | × |
| 5_20A | 5 | 0.19 | 20 | adhérence | | | × |
| 5_20S | 5 | 0.19 | 20 | décollement | | | × |
| 5_3×20A | 5 | 0.19 | 3 et 20 | adhérence | | | × |
| 5_3×20S | 5 | 0.19 | 3 et 20 | décollement | | | × |
| 5_3×9A | 5 | 0.19 | 3 et 9 | adhérence | | | × |
| 5_3×9S | 5 | 0.19 | 3 et 9 | décollement | | | × |
| 9_9A | 9 | 0.35 | 9 | adhérence | × | | × |
| 9_9S | 9 | 0.35 | 9 | décollement | × | | × |
| 9_allA | 9 | 0.35 | tous | adhérence | | × | × |
| 9_allS | 9 | 0.35 | tous | décollement | | | × |
| 9_33A | 9 | 0.35 | 33 | adhérence | | | × |
| 9_33S | 9 | 0.35 | 33 | décollement | × | × | × |
| 9_3×33A | 9 | 0.35 | 3 et 33 | adhérence | | | × |
| 9_3×33S | 9 | 0.35 | 3 et 33 | décollement | × | | × |

TABLE 5.3 – Description des différents cas. La croix × indique le type d'analyse détaillée dans ce chapitre pour le cas correspondant : "Comportement non-linéaire" pour l'analyse transitoire, "Réduction" pour l'évaluation de la performance de la réduction et "Influence C.I." pour l'étude de l'influence des conditions initiales sur la solution stationnaire.

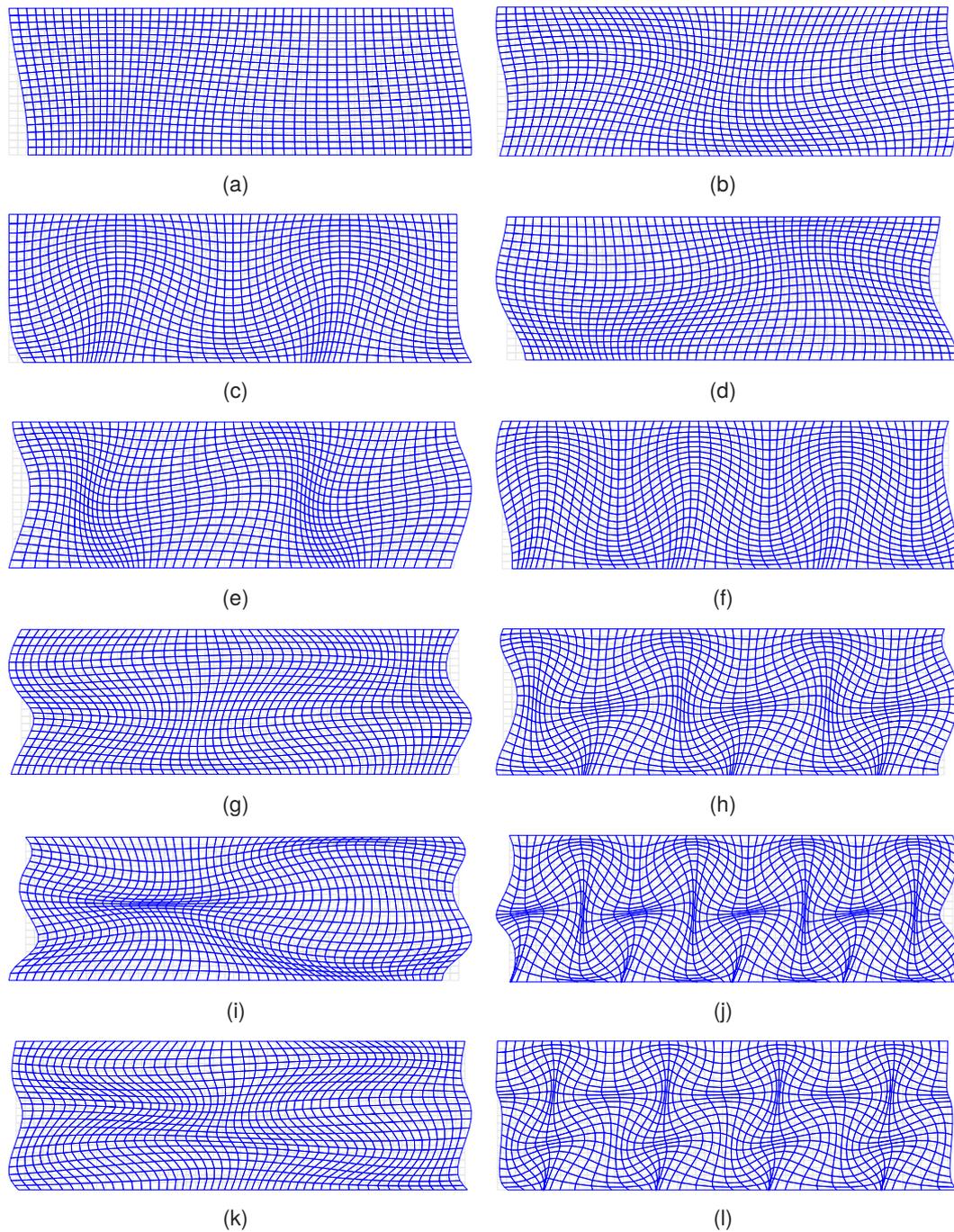


FIGURE 5.8 – Déformées des modes instables pour $\mu = 0,5$ (numéro du mode, fréquence, taux de divergence, OR (ou OP) pour onde régressive (ou progressive)) – (a) mode 3, 10,52 kHz, 6,5% OR, (b) mode 6, 14,25 kHz, 7,7% OR, (c) mode 9, 16,36 kHz ; 11,6% OR, (d) mode 11, 18,5 kHz, 8,1% OP, (e) mode 13, 20,83 kHz, 1,0% OP, (f) mode 15, 21,45 kHz, 3,4% OR, (g) mode 20, 24,15 kHz ; 5,4% OR, (h) mode 24, 27,25 kHz, 3,3% OR, (i) mode 31, 31,20 kHz, 2,9% OP, (j) mode 33, 32,16 kHz, 1,8% OR, (k) mode 42, 34,01 kHz, 0,8% OR, (l) mode 50, 38,29 kHz, 0,4% OR

5.4 Comportement du système de référence

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement du système étudié sans réduction. L'objectif est de vérifier que la démarche mise en œuvre est capable de reproduire la physique d'un système déstabilisé par le frottement. On retient pour cette étude 4 coefficients de frottement différents correspondant à un système à 1, 5, 9 ou 12 modes instables. Pour chacun de ces coefficients, deux conditions de fonctionnement sont testées, une favorisant le décollement, l'autre l'adhérence. Les valeurs des paramètres définissant ces deux configurations sont données dans le tableau 5.4. Dans chaque cas, le système a été soumis à différentes conditions initiales non nulles (*i.e.* perturbation par rapport à l'équilibre) prises suivant les modes instables. Ces conditions initiales ont été choisies de la manière suivante :

- ◆ conditions suivant un seul mode :
 - suivant le mode instable au plus fort taux de divergence,
 - suivant le mode instable au plus faible taux de divergence,
- ◆ conditions suivant deux modes :
 - suivant le mode au plus fort taux de divergence et un mode instable avec un taux de divergence moyen,
 - suivant le mode instable au plus faible taux de divergence et un mode instable avec un taux de divergence moyen,
- ◆ condition sur l'ensemble des modes instables.

Le tableau 5.3 liste l'ensemble des cas qui seront traités dans ce chapitre et détaille quel type d'analyse sera menée pour chacun d'entre eux. Il récapitule aussi les conditions initiales correspondant à chaque cas.

Le choix de prendre les conditions initiales correspondant à une perturbation vis-à-vis de la position d'équilibre suivant les modes instables est réalisé afin de diminuer le temps de simulation avant obtention d'une perturbation significative de l'équilibre quasi statique mais aussi de regarder l'influence des participations modales initiales sur le comportement dynamique non-linéaire transitoire et stationnaire du système. Cependant, ce choix éloigne de la prise en compte de perturbations physiques qui seraient les meilleures conditions initiales à prendre en compte pour l'étude d'un système réel. Un test de perturbation physique comme condition initiale a été effectué sur la couche : une chute du coefficient de frottement a été imposée. Le système tend alors à prendre sa nouvelle position d'équilibre en même temps que les modes instables gagnent en importance dans la solution dynamique. Le calcul donne alors la même solution qu'en partant de l'équilibre perturbé uniquement par le bruit numérique. Pour la plupart de ces calculs, la durée de simulation initiale a été fixée à 30 ms. Pour

| configuration | δ | v_g |
|---------------|-------------------------------|-----------------------|
| adhérence | $1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ | $0,1 \text{ ms}^{-1}$ |
| décollement | $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ | $0,5 \text{ ms}^{-1}$ |

TABLE 5.4 – Paramètres de fonctionnement

certains cas cette durée s'est avérée insuffisante pour atteindre un état stabilisé du système, il a donc fallu augmenter le temps de simulation à 60 voire 90 ms.

Le fait de prendre 5 conditions initiales en fonction du nombre de modes instables et de leurs taux de divergence sert à décrire autant que faire se peut la gamme de fonctionnement du système en un nombre raisonnable de simulations. En effet, comme il a été montré dans [107], différentes solutions périodiques ou quasi-périodiques peuvent être atteintes en fonction des conditions initiales. On étudie donc ici plusieurs systèmes avec des paramètres et des conditions de fonctionnement fixés sous diverses conditions initiales.

Cette étude a donc comporté 32 configurations simulées. Chaque configuration a été testée sur le système non réduit (appelé système de référence) ainsi que sur divers types de base de réduction.

Afin de simplifier la description des configurations qui vont être étudiées par la suite, on introduit la nomenclature suivante : Chaque simulation est désignée par un motif de la forme N_CT , où N est le nombre de modes instables que comporte le système (1, 5 ou 9 dans cette étude), C donne les modes présents dans les conditions initiales, et T est le type d'événement non-linéaire favorisé (A pour adhérence, S pour décollement). Les cas les plus caractéristiques observés sont présentés dans la suite.

5.4.1 Système comportant un unique mode instable

5.4.1.1 Cas 1 : adhérence

La figure 5.9 montre les évolutions des champs de vitesse et de déplacement tangentiels pour le premier cas étudié, le cas 1_9A . La saturation de la solution obtenue par adhérence peut se remarquer au fait que la vitesse est limitée par la vitesse de glissement v_g . Sur ce cas – comme sur la plupart des cas privilégiant l'adhérence – la composante normale de la vitesse n'est pas montrée car elle est négligeable devant la composante tangentielle. La transition entre la phase de comportement linéaire ($t \in [0; 5\text{ms}]$) et la solution stationnaire ($t \leq 10\text{ms}$) est douce : l'amplitude cesse lentement de croître lorsque la vitesse tangentielle rattrape la vitesse de glissement. Le portrait de phase tangent d'un nœud de contact est donné sur la figure 5.10. On y voit clairement l'augmentation de l'amplitude et la stabilisation vers un cycle fermé. On y constate aussi la saturation de la vitesse tangente $v_t = v_g$.

Le contenu fréquentiel de la solution est représenté sur la figure 5.11. La FFT utilisée pour cette analyse est effectuée sur les 3 dernières ms de la solution en vitesse. Le spectre présenté est un spectre en énergie cinétique sur l'ensemble du système. On peut voir très clairement un pic fondamental à $f_0 = 16,27$ kHz ainsi que des pics secondaires à $2f_0$ et $3f_0$. La fréquence fondamentale est très proche de la fréquence du mode 9 (*i.e.* 16,36 kHz). L'analyse temps-fréquence par ondelettes sur un point de la zone de contact confirme bien les comportements intuités sur les temporels et l'analyse fréquentielle : on est en présence d'une solution mono harmonique qui se développe à partir de l'augmentation de l'amplitude de la condition initiale suivant le mode 9 avec apparition des harmoniques 2 à 5 lors de la saturation. On notera que les harmoniques d'ordre élevé sont plus visibles sur la zone

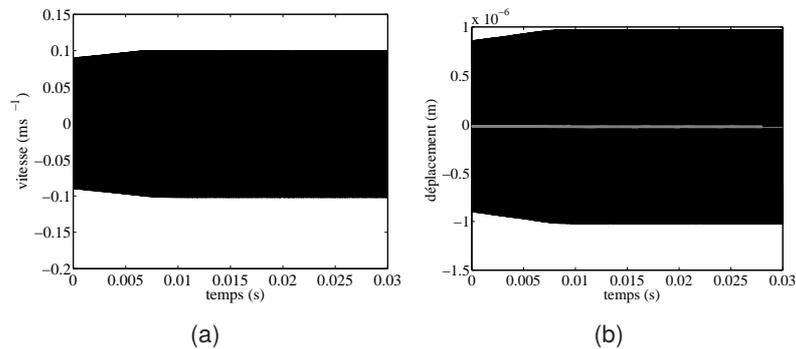


FIGURE 5.9 – Cas 1_9A – Vitesse et déplacement tangentiels sur un nœud de contact – (a) Vitesse, (b) Déplacement (en gris, la valeur moyenne)

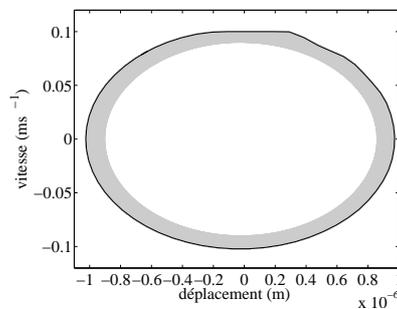


FIGURE 5.10 – Cas 1_9A – Portrait de phase tangential en zone de contact – gris clair : tracé complet, noir : cycle limite

de contact que sur les quantités énergétiques globales du système.

En projetant la solution sur le mode instable du système (voir figure 5.12(a)) on distingue très bien les trois phases présentées en 5.2.4. L'identification du pic principal de la FFT à l'aide du critère de MAC pic à mode 5.12(b) donne bien la signature spatiale du mode 9.

5.4.1.2 Cas 2 : décollement

L'étude du même système mais avec des conditions de fonctionnement favorisant le décollement montre des comportements similaires. Les figures 5.13 et 5.14 montrent les évolutions temporelles des vitesses et déplacements tangents et normaux à un nœud de contact. Sur la figure 5.13(a) on peut voir que malgré une allure similaire à la saturation par adhérence observée dans le cas précédent, la vitesse tangentielle reste bien inférieure à celle de glissement. La vitesse normale devient non nulle à partir de $t = 7,5$ ms. Son amplitude a une enveloppe non symétrique dont la partie supérieure atteint un maximum autour de $t = 12$ ms puis diminue légèrement lors de la stabilisation de la solution. La partie inférieure de l'enveloppe augmente de manière monotone jusqu'à l'obtention du cycle. Sur les

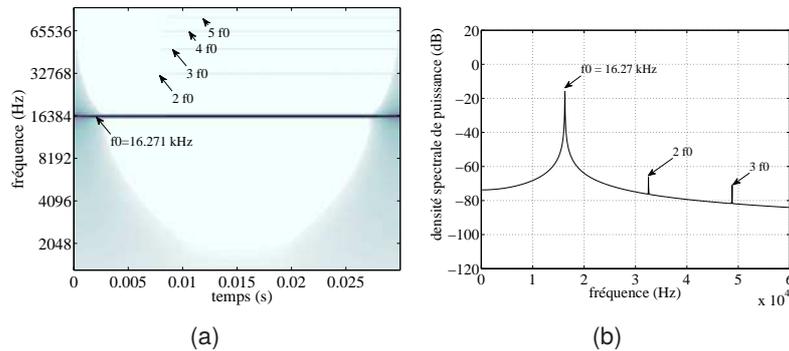


FIGURE 5.11 – Cas 1_9A – Analyse fréquentielle – (a) CWT de la vitesse tangentielle en zone de contact, (b) Densité spectrale de puissance cinétique

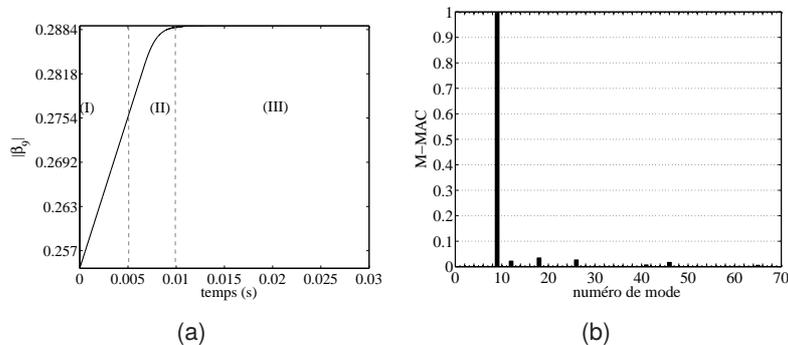


FIGURE 5.12 – Cas 1_9A – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode à f_0

portraits de phase tangent et normal (figure 5.15), de fortes non-linéarités sont visibles. En particulier les chocs sont clairement identifiés sur la composante normale. Le portrait tangent ressemble à celui du cas avec adhérence – plus exactement au portrait de phase de l’opposé des déplacements et vitesses – sauf que le palier de vitesse est moins net et ne correspond pas à la vitesse de glissement.

Comme dans le cas précédent, l’analyse fréquentielle fait ressortir dans la solution stationnaire une fréquence proche de celle du mode 9 (voir figure 5.16(b)). La CWT montre que l’apparition des ordres élevés (2 à 5) est directement liée au décollement. La projection sur le mode instable montre que la phase de transition (II) est bien plus longue que sur le cas 1_9A. L’amplitude modale du mode 9 dans le cycle des deux cas à un mode instable est assez proche (moins de 2% d’écart). L’identification du pic principal (figure 5.17(b)) donne la même signature que dans le cas adhérent : le cycle limite est composé essentiellement du mode 9.

Le comportement du système considéré avec un seul mode instable semble principalement gouverné par ce mode. La solution, qu’elle soit limitée par de l’adhérence ou du décollement, est fréquentiellement et spatialement proche du mode instable obtenu lors de l’analyse de stabilité du système. Le premier événement non-linéaire intervient pour des niveaux énergétiques différents, mais la phase de

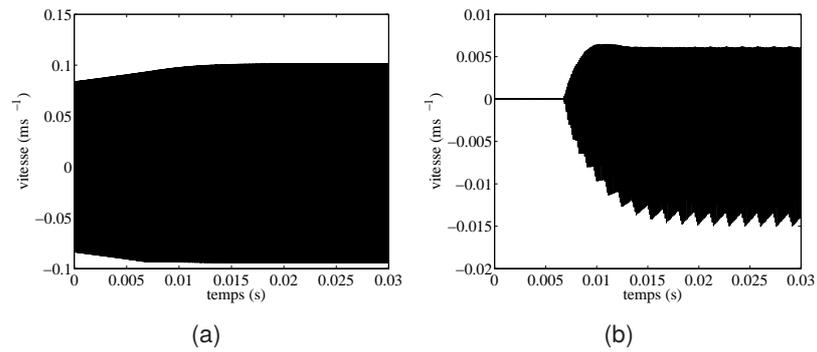


FIGURE 5.13 – Cas 1_9S – Vitesse sur un nœud de contact – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

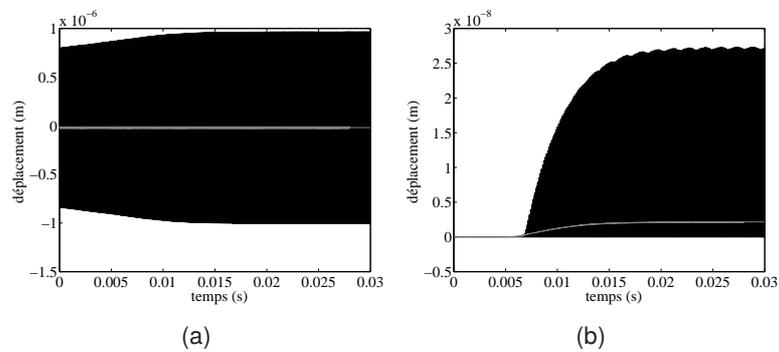


FIGURE 5.14 – Cas 1_9S – Déplacement sur un nœud de contact (en gris : valeur moyenne) – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

transition étant plus lente dans le cas de décollement, les niveaux énergétiques de la solution saturée sont très proches.

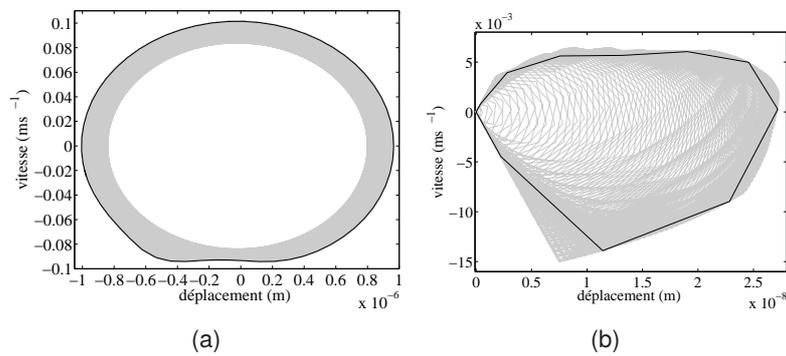


FIGURE 5.15 – Cas 1_9S – Portrait de phase en zone de contact – gris clair : tracé complet, noir : cycle limite – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

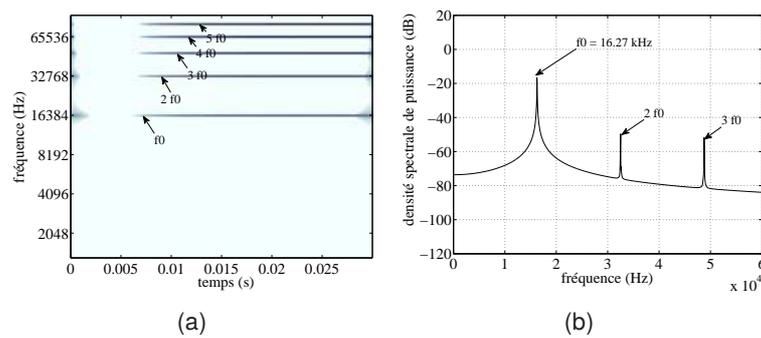


FIGURE 5.16 – Cas 1_9S – Analyse fréquentielle – (a) CWT de la vitesse normale en zone de contact, (b) Densité spectrale de puissance cinétique

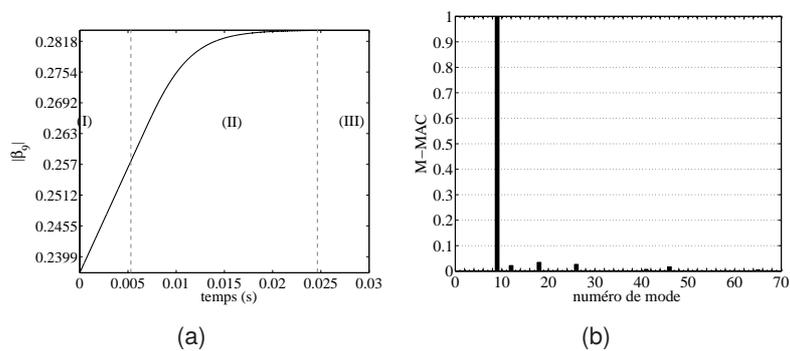


FIGURE 5.17 – Cas 1_9S – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode à f_0

5.4.2 Système comportant plusieurs modes instables

Nous venons de voir que le comportement du système avec un seul mode instable est assez simple et gouverné par le mode instable provenant de l'analyse de stabilité. Nous nous tournons maintenant vers des systèmes avec un plus grand nombre de modes instables donnés par l'analyse de stabilité dans le but de voir si leur comportement est là encore principalement déterminé par ces derniers. Nous rappelons en effet que la corrélation entre la signature non-linéaire du comportement vibratoire transitoire et stationnaire d'un système et les résultats issus de l'analyse de stabilité reste un problème scientifique ouvert [107]. Nous tenterons dans ce qui suit d'apporter quelques réponses à ce sujet.

5.4.2.1 Cas 3 : cas 5_9A

La figure 5.18 montre les évolutions des vitesse et déplacement d'un nœud de l'interface de contact. Ces évolutions montrent une phase (I) et (II) se produisant sur les premières 10 ms. Si l'on ne regarde que les simulations temporelles ou les portraits de phases (figure 5.20) pour des temps inférieurs à 50 ms, on pourrait penser que le système a atteint une solution stationnaire à partir de $t = 10$ ms. Cependant, on voit très nettement une surintensité en vitesse autour de 90 ms qui donnent lieu à une nouvelle transition puis à un état qui semble stabilisé avec une amplitude vibratoire moindre. Nous qualifierons ces deux phases quasi-stabilisées de cycles, même si à l'évidence seule la deuxième en est rigoureusement un. La deuxième transition est aussi très marquée sur le déplacement tangentiel (figure 5.18(b)) pour lequel le nouvel état stabilisé s'accompagne d'une diminution sensible du déplacement moyen. Cette chute du déplacement correspond à une diminution du coefficient de frottement apparent dû au changement des ondes de glissement-adhérence le long de la surface de contact. L'évolution du coefficient de frottement apparent (rapport des résultantes tangentielle et normale sur l'ensemble de la zone de contact) est donnée sur la figure 5.19(a). Les figures 5.19(b) et 5.19(c) montrent l'état de la zone de contact à deux temps différents. Dans ces graphes, les droites correspondant à des zones d'adhérence montrent que l'on a des ondes régressives de glissement-

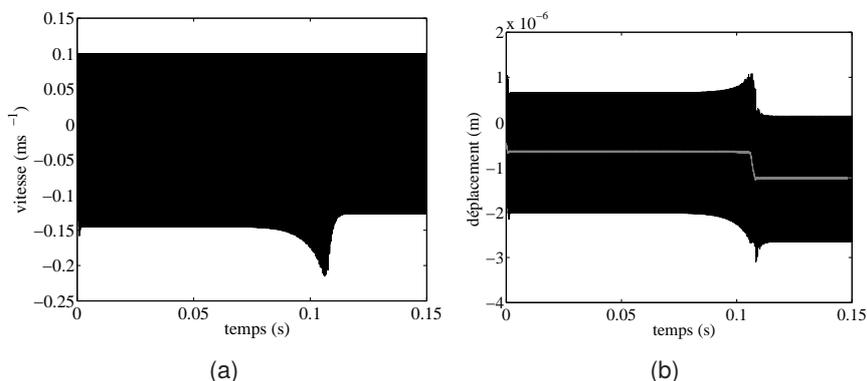


FIGURE 5.18 – Cas 5_9A – Vitesse et déplacement tangentiels sur un nœud de contact – (a) Vitesse, (b) Déplacement (en gris : valeur moyenne)

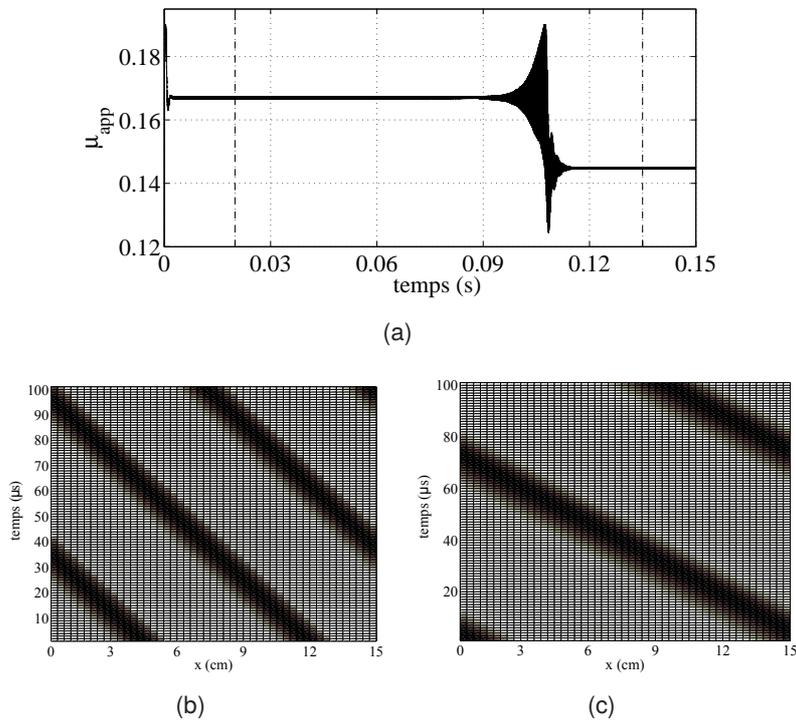


FIGURE 5.19 – Cas 5_9A – Évolution du coefficient de frottement apparent – (a) Coefficient de frottement apparent, (b) Onde de glissement adhérence autour de $t = 20$ ms, (c) Onde de glissement adhérence autour de $t = 135$ ms – les bandes sombres correspondent à des zones où le rapport de l’effort tangentiel sur l’effort normal $\frac{\tau_t}{\tau_n}$ est inférieur à μ

adhérence dont la longueur d’onde et la célérité changent entre les deux phases quasi-stationnaires identifiées.

La représentation de la solution sur un nœud de la zone de contact dans l’espace des phases – figure 5.20 – met aussi en évidence les deux cycles observés sur les temporels. L’analyse fréquentielle des trois dernières millisecondes du deuxième cycle – figure 5.21(b) – lui donne une fréquence fondamentale f_0 de 14,35 kHz qui est très proche de la fréquence du mode 6 (14,25 kHz). Les harmoniques d’ordre 2, 3 et 4 sont aussi présents. L’évolution temps-fréquence présentée sur la figure 5.21(a) montre que le premier cycle a un fondamental f_1 proche de la fréquence du mode 9 (16,3 kHz). Durant la phase de transition entre les deux cycles ($t \in [0,09; 0,11]$ s), on pourra remarquer la présence de combinaisons des fréquences fondamentales f_0 et f_1 (par exemple $f_1 - f_0$ et $6(f_1 - f_0)$). Dans le cycle final, il n’y a plus aucune trace des fréquences liées au mode 9.

La projection de la solution sur les modes complexes – figure 5.22(a) – permet d’obtenir une représentation claire de l’évolution de la solution transitoire et stationnaire. Pendant la phase de transition, l’amplitude du mode 9 (M9) décroît avec l’augmentation de celle du mode 6 (M6). De plus, l’observation faite par Lorang dans [76] comme quoi le mode prépondérant dans le cycle final est le mode

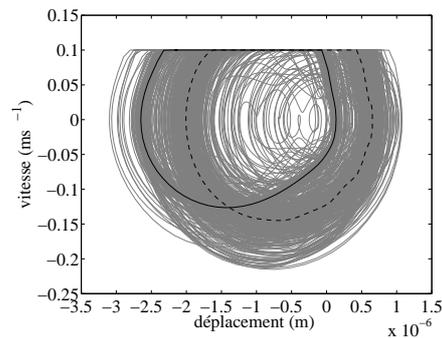


FIGURE 5.20 – Cas 5_9A – Portrait de phase en zone de contact – Composante tangentielle – (gris : tracé complet, noir plein : cycle final, pointillés noirs : premier cycle)

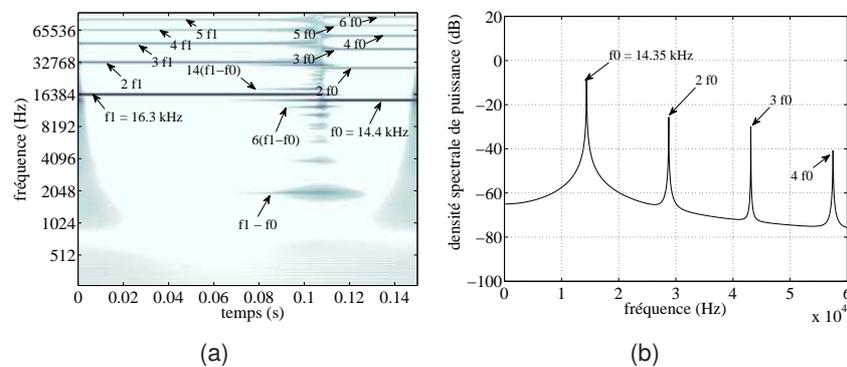


FIGURE 5.21 – Cas 5_9A – Analyse fréquentielle – (a) CWT de la vitesse normale en zone de contact, (b) Densité spectrale de puissance cinétique

capable de vibrer seul avec le plus d'énergie est vérifiée. Finalement, la figure 5.22(b), permet aussi d'identifier spatialement la vibration principale du cycle final au mode 6.

Le cas 5_9A illustre bien un des défauts de l'intégration temporelle pour l'étude de ces systèmes : il est très difficile de garantir que le cycle limite a été atteint. Pour pallier ce défaut, on peut s'orienter vers d'autres méthodes telles que la CHBM [23, 24] capables de prédire des états finaux périodiques ou quasi-périodiques mais qui perdent l'information sur le comportement transitoire non-linéaire du système. Un des outils d'analyse développé dans le cadre de cette thèse permet cependant d'avoir un bon degré de confiance dans l'atteinte du cycle : il s'agit de la projection sur les modes complexes. En effet, la figure 5.22(a) montre clairement que les amplitudes des modes 3 et 6 augmentent fortement pendant le premier cycle tandis que tous les modes semblent stabilisés dans le deuxième. De plus, cet indicateur illustre de façon claire les divers états transitoires et les contributions des modes pour chacun d'eux.

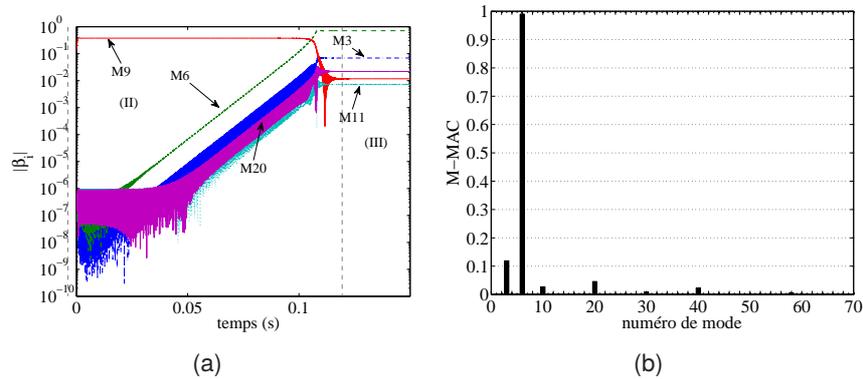


FIGURE 5.22 – Cas 5_9A – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode à f_0

5.4.2.2 Cas 4 : cas 5_9S

Les vitesses, déplacements et portraits de phase normaux et tangentiels de ce cas sont donnés sur les figures 5.23, 5.24 et 5.25 respectivement. Sur les évolutions temporelles (figures 5.23 et 5.24) on peut distinguer une succession de trois phases : les deux premières vont de paire avec une augmentation du décollement et de la valeur moyenne de la résultante normale de contact. La troisième phase se caractérise par une saturation et une stabilisation de la solution via de l'adhérence : la vitesse normale chute à un niveau très faible par rapport à celui qu'elle a dans les deux premières phases alors que la vitesse tangente atteint son amplitude maximale. Du fait de l'adhérence, on obtient là encore une réduction du coefficient de frottement apparent dans la phase (III) qui se traduit ici par une diminution du déplacement tangent moyen. Cette succession de phases se voit aussi très bien dans l'espace des phases (figure 5.25), où l'amplitude du cycle final sur le portrait pour la composante tangentielle est plus grande que celle du premier cycle, tandis que l'amplitude du cycle final pour la composante normale est très réduite.

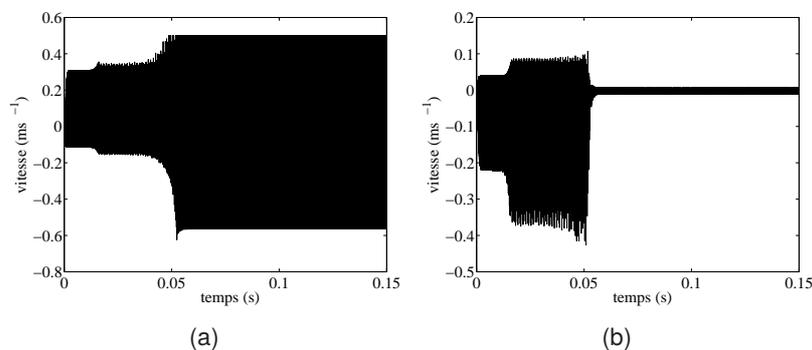


FIGURE 5.23 – Cas 5_9S – Vitesse sur un nœud de contact – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

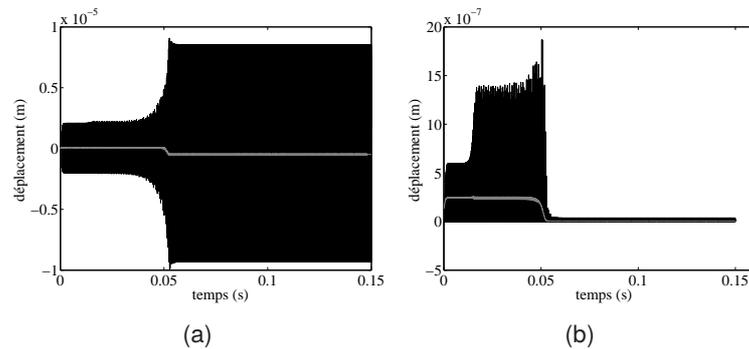


FIGURE 5.24 – Cas 5_9S – Déplacement sur un nœud de contact (en gris : valeur moyenne) – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

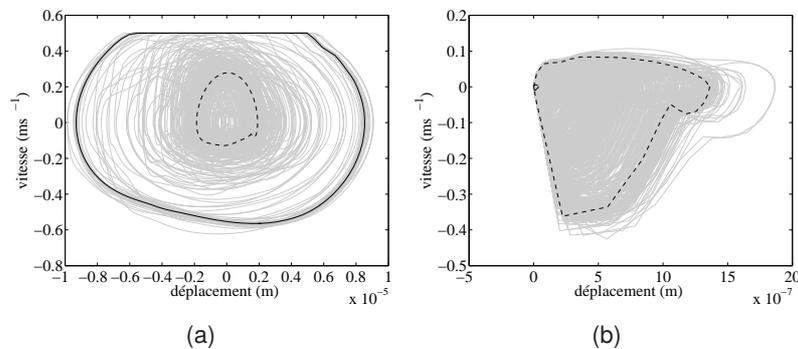


FIGURE 5.25 – Cas 5_9S – Portrait de phase sur un nœud de contact – gris : tracé complet, noir plein : final cycle, pointillés noir : premier cycle – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

La figure 5.26(b), montre que le fondamental de la solution stationnaire finale est à 10,45 kHz, ce qui est proche de la fréquence du mode 3 (*i.e.* 10,52 kHz). Les harmoniques d'ordre élevé – particulièrement l'ordre 3 – ont une participation significative à la solution. L'analyse par ondelettes (figure 5.26(a)) montre l'évolution des participations des fréquences au cours du temps. De manière similaire à ce qui se passe pour le cas 3 (Cas 5_9A), la première et la troisième phases ont une signature non-linéaire simple avec une contribution principale d'une fréquence proche de celle d'un mode instable (mode 9 et mode 3) et de leurs harmoniques. La deuxième phase présente une signature plus complexe avec des fréquences proches des modes 3, 6 et 9 ainsi que des combinaisons entre ces fondamentaux (par exemple $f_0 - f_1 = 3,79$ kHz). L'évolution fréquentielle détaillée est présentée sur la figure 5.27.

L'identification de la déformée du pic principal de la FFT montre, comme l'on pouvait s'y attendre, que ce pic est spatialement proche du mode 3. L'étude de la projection de la solution sur les modes complexes (figure 5.28(a)) montre une compétition assez compliquée durant la phase (II) : le mode 6 atteint sa saturation tandis que le mode 9 est déjà saturé depuis quelques millisecondes. Cette saturation arrive autour de $t = 15$ ms et apporte une quasi stabilisation du système, la plupart des modes instables présentant alors un taux de croissance instantané très faible. La saturation du mode

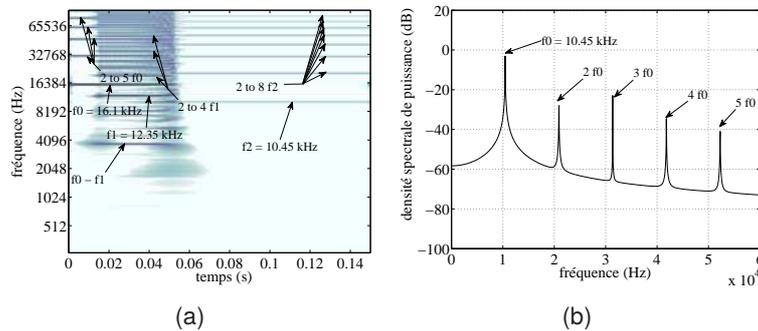


FIGURE 5.26 – Cas 5_9S – Analyse fréquentielle – (a) CWT de la vitesse normale en zone de contact, (b) Densité spectrale de puissance cinétique

6 semble être la cause de l'augmentation de l'amplitude normale observée sur la figure 5.23. Peu après la saturation du mode 6, le mode 3, voit son amplitude recommencer à croître. C'est ce dernier qui vient saturer la solution en phase (III) via de l'adhérence. Cette évolution concorde parfaitement avec les observations faites sur l'analyse CWT (figure 5.26(a)).

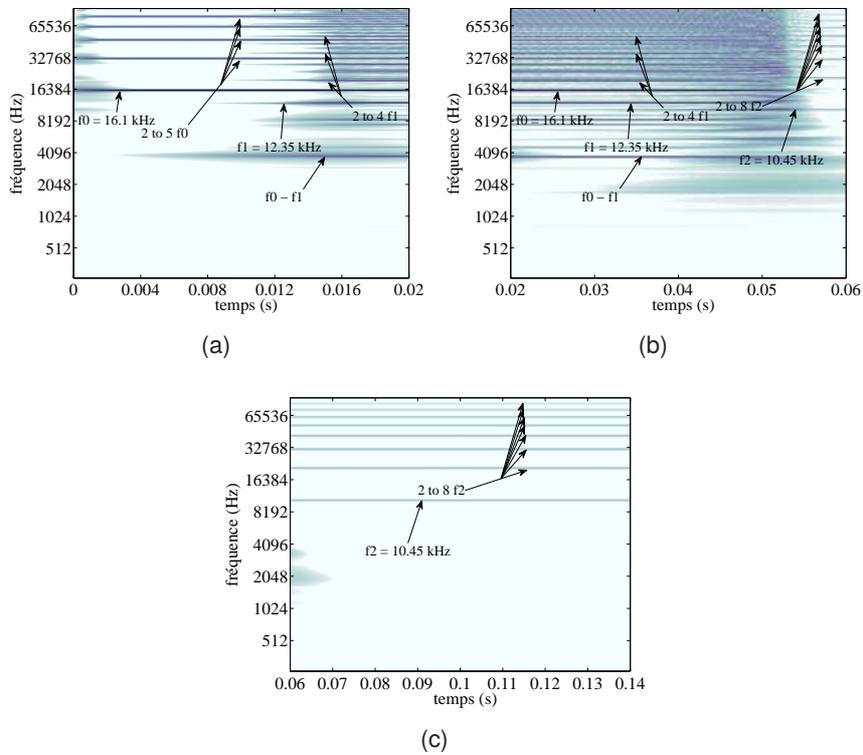


FIGURE 5.27 – Cas 5_9S – CWT de la vitesse normale sur des sous intervalles – (a) $t \in [0; 0, 02]$, (b) $t \in [0, 02; 0, 06]$, (c) $t \in [0, 06; 0, 14]$

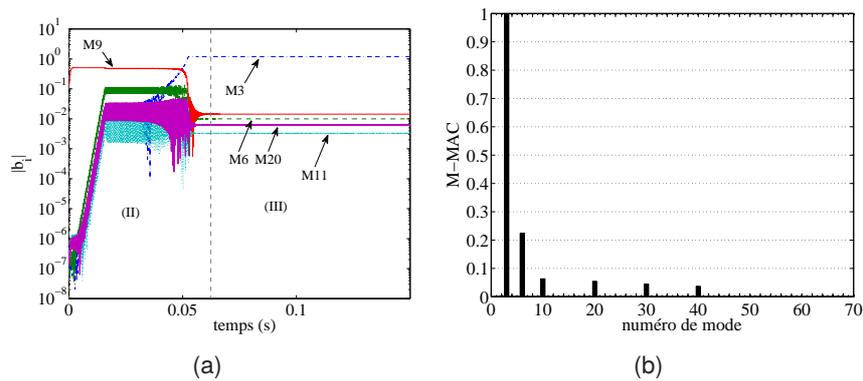


FIGURE 5.28 – Cas 5_9S – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode à f_0

5.4.2.3 Influence des conditions initiales

Pour terminer cette étude du comportement vibratoire du système en présence de 5 modes instables, nous proposons d'examiner l'effet des conditions initiales sur les comportements non-linéaires transitoires et stationnaires. Il semble que pour l'ensemble des conditions initiales testées, le cycle limite observé ne soit dépendant que des conditions de fonctionnement (adhérence ou décollement privilégié). La figure 5.29 montre la convergence des amplitudes modales vers un unique cycle pour les trois modes aux plus fortes contributions. On peut aussi remarquer que la phase transitoire dépend fortement des conditions initiales même si l'on peut extraire certaines parties, notamment proches des saturations de modes comme des signatures d'événements particuliers. Les différentes conditions initiales induisent un décalage en temps pour qu'un mode atteigne son amplitude modale stationnaire. Ce décalage semble dépendre de l'ordre dans lequel les modes passent par des paliers saturés.

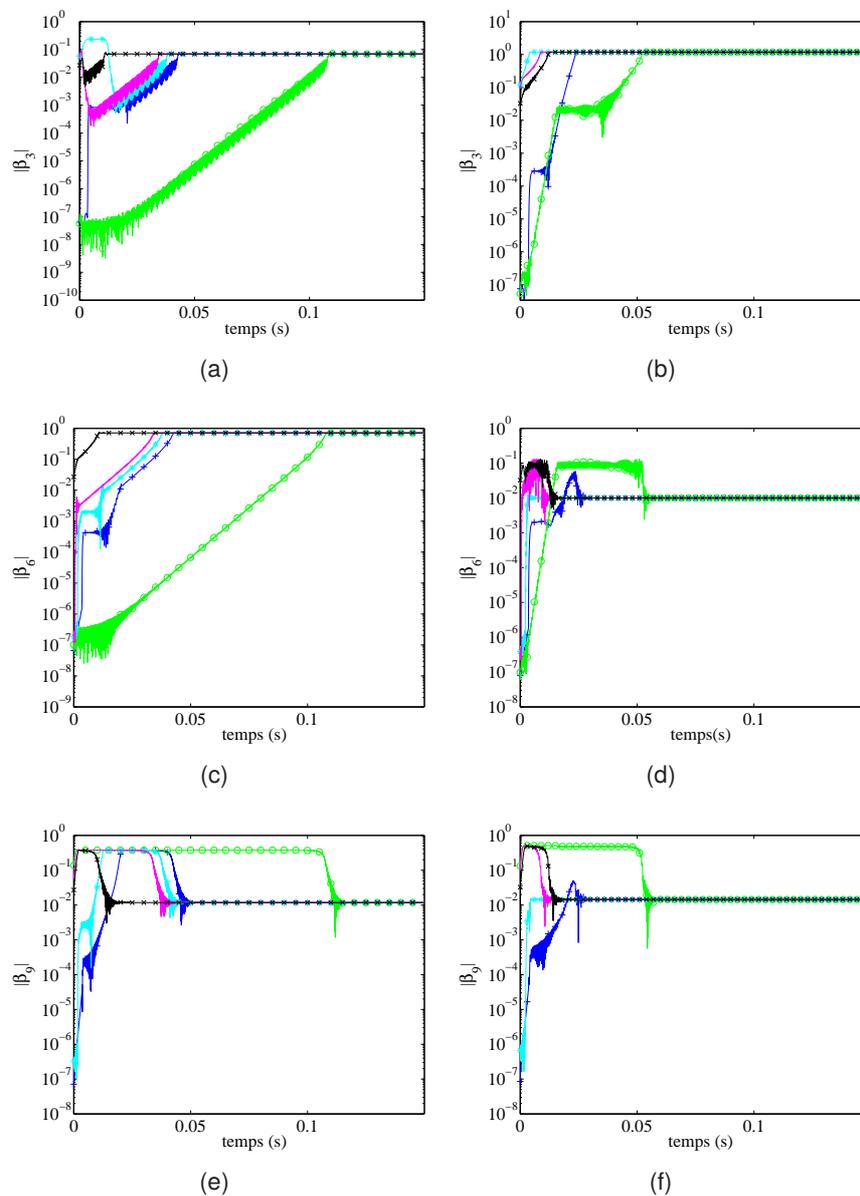


FIGURE 5.29 – Évolution des principales contributions modales – unicité du cycle limite. + : 5_20X, o : 5_9X, * : 5_3×20X, · : 5_3×9X et × : 5_allX – (a) Mode 3 adhérence, (b) Mode 3 décollement, (c) Mode 6 adhérence, (d) Mode 6 décollement, (e) Mode 9 adhérence, (f) Mode 9 décollement

5.4.3 Cas avec 9 modes instables

5.4.3.1 Cas 5 : cas 9_9A

Le cas 9_9A est l'un des cas au comportement le plus simple des cas à 9 modes instables testés : la condition initiale sur le mode 9 conduit à une saturation de ce mode et cet état se trouve correspondre au cycle limite. La figure 5.30 montre une surintensité aussi bien sur la vitesse que sur le déplacement lorsque la saturation via l'adhérence arrive autour de $t = 5 \cdot 10^{-4}$ s. Après cette surintensité, l'amplitude continue de croître jusqu'à l'obtention du cycle limite. Le portrait de phase sur la figure 5.31 montre un cycle manifestement mono harmonique bien que la projection sur les modes complexes (figure 5.33(a)) montre une participation significative du mode 33. La nature mono harmonique de ce cycle est confirmée par la FFT (figure 5.32(b)). L'analyse CWT ne montre pas de fréquences autres que celles du mode 9 ou de ses harmoniques. Pour comprendre pourquoi le cycle peut être mono harmonique même si la projection modale montre qu'il est composé de deux modes, il est important de regarder les fréquences de ces modes : celle du mode 33 est le double de celle du mode 9, ainsi la participation du mode 33 dans le cycle peut être vue comme une réponse forcée à une excitation due à l'harmonique d'ordre 2 du mode 9.

L'identification des deux pics principaux – figure 5.33(b) – montre que celui à $f_0 = 16,14$ kHz correspond au mode 9 tandis que le second à $2f_0$ correspond au mode 33. Le cycle limite obtenu ici est aussi obtenu pour toutes les conditions initiales testées sous ces conditions de fonctionnement à l'exception du cas 9_allA.

5.4.3.2 Cas 6 : cas 9_allA

Parmi tous les cas à 9 modes et adhérence (9_XA), le cas 9_allA présente un intérêt particulier du fait qu'il est le seul à atteindre un cycle limite différent. La figure 5.34 montre les vitesse et déplacement

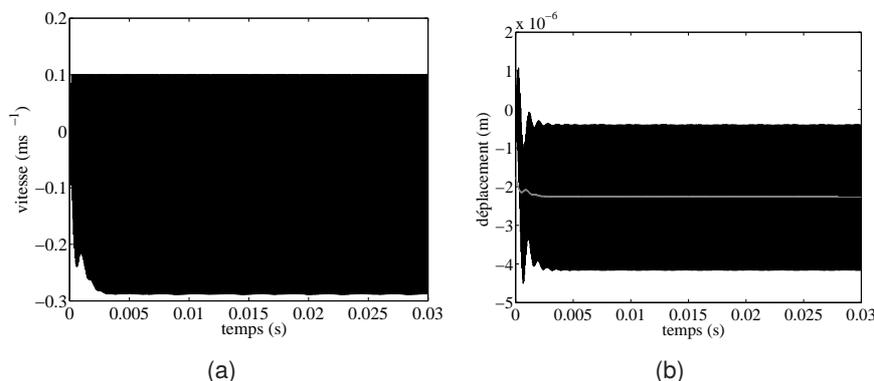


FIGURE 5.30 – Cas 9_9A – Vitesse et déplacement tangentiels sur un nœud de contact – (a) Vitesse, (b) Déplacement (en gris : valeur moyenne)

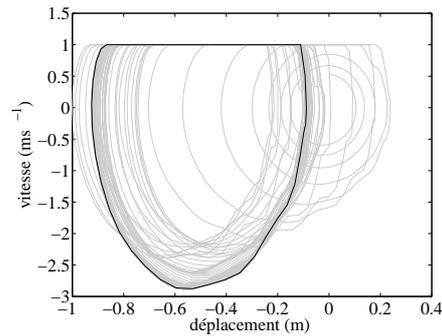


FIGURE 5.31 – Cas 9_9A – Portrait de phase tangentiel sur un nœud de contact

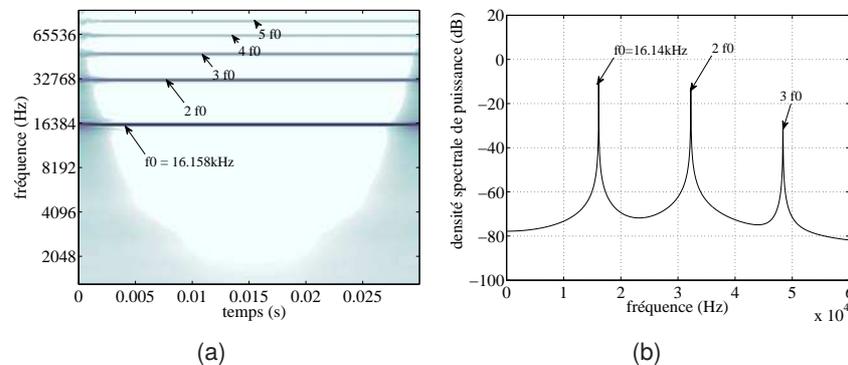


FIGURE 5.32 – Cas 9_9A – Analyse fréquentielle – (a) CWT de la vitesse normale en zone de contact, (b) Densité spectrale de puissance cinétique

tangentiels à l'interface frottante. On peut observer un comportement non-linéaire assez complexe avec un phénomène de battement produit par la présence de différentes fréquences fondamentales. En effet, la figure 5.36(b), montre que le cycle limite obtenu est quasi périodique avec deux fréquences fondamentales ($f_0 = 14,3$ kHz and $f_1 = 10$ kHz), des harmoniques d'ordre 2 et 3 ($2f_0$ et $3f_0$) et les combinaisons ($f_0 + f_1$ et $f_0 - f_1$). Les deux fréquences fondamentales f_0 et f_1 sont respectivement proches des modes 6 et 3.

Sur la figure 5.35 on peut voir l'évolution dans l'espace des phases sur tout l'intervalle de temps. Sur les derniers pas de temps, la solution dessine deux boucles distinctes centrées sur deux positions différentes tandis que sur l'intervalle $t \in [5 \text{ ms}, 10 \text{ ms}]$ on obtient une boucle unique se déplaçant lentement vers la droite.

L'analyse CWT (sur la figure 5.36(a)) montre un enrichissement progressif du spectre avec des harmoniques de f_0 et de f_1 sans participation significative d'ordre supérieur à 2. Durant le premier cycle observé, une fréquence proche de celle du mode 9 ($f_2 = 16,3$ kHz) participe. Elle disparaît néanmoins rapidement avant le cycle final.

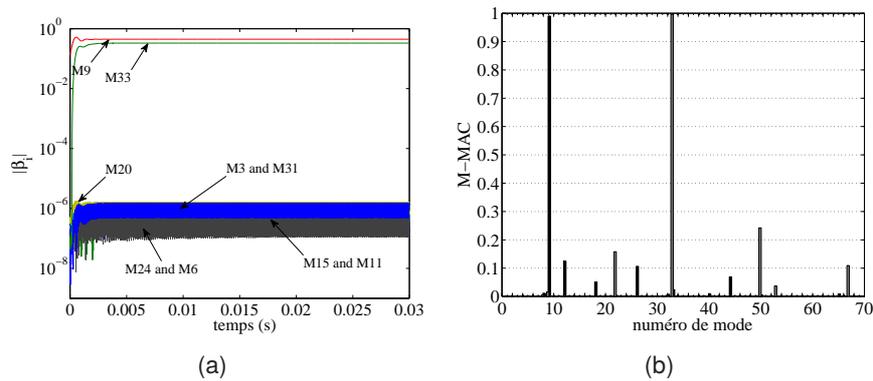


FIGURE 5.33 – Cas 9_9A – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode (■ : pic à f_0 et ■ : pic à $2f_0$)

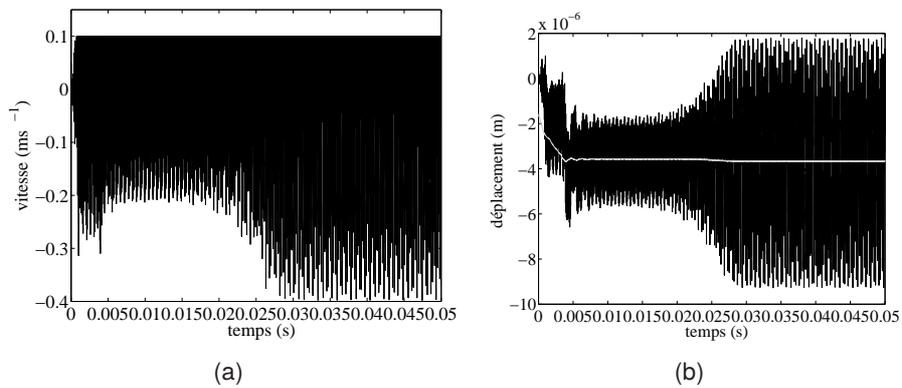


FIGURE 5.34 – Cas 9_allA – Vitesse et déplacement tangentiels sur un nœud de contact – (a) Vitesse, (b) Déplacement

La projection modale (figure 5.37(a)) confirme les participations principales des modes 6, 3, 9 et 11. Dans le cycle final, l'amplitude du mode 9 tombe au niveau de celle du mode 11 qui garde une amplitude assez constante tout au long de l'évolution. On peut aussi noter que mis à part le mode 6, tous les modes instables voient leur amplitude osciller dans le cycle final. En particulier, les oscillations du mode 3 sont très importantes, ceci traduit peut-être une évolution du mode par rapport à celui calculé autour de l'équilibre. Finalement, le critère de M-MAC pour les pics à f_0 et f_1 permet de les appairer aux modes 6 et 3.

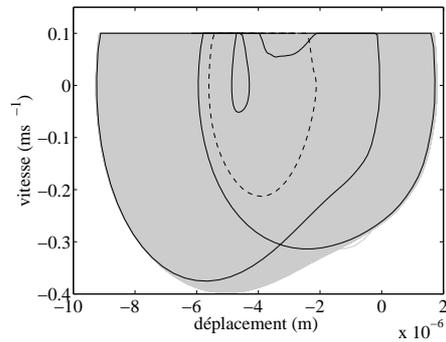


FIGURE 5.35 – Cas 9_allA – Portrait de phase tangentiel sur un nœud de contact – gris : tracé complet, noir plein : état final, pointillés noir : premier cycle

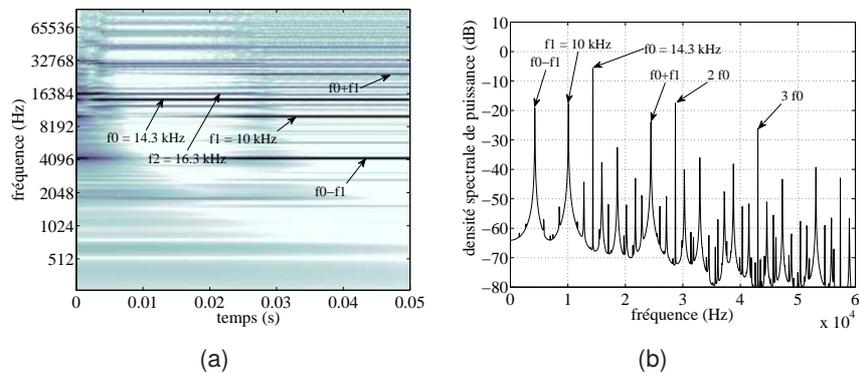


FIGURE 5.36 – Cas 9_allA – Analyse fréquentielle – (a) CWT de la vitesse normale en zone de contact, (b) Densité spectrale de puissance cinétique

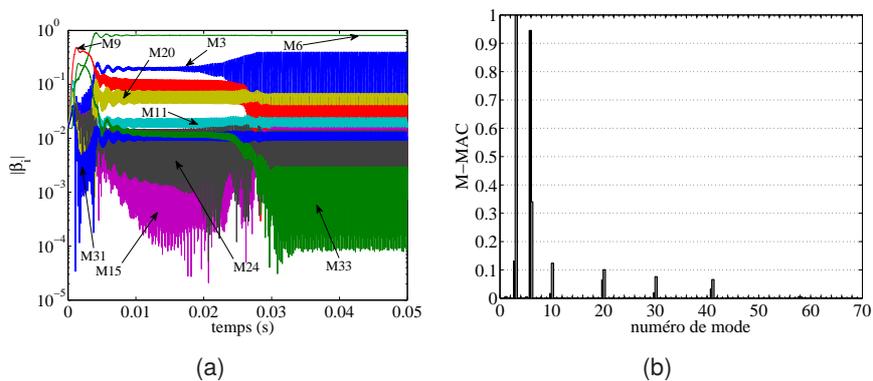


FIGURE 5.37 – Cas 9_allA – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode (■ : pic à f_0 , ■ : pic à f_1)

5.4.3.3 Cas 7 : cas 9_33S

Le cas 9_33S aboutit sur un état final comportant à la fois de l'adhérence et du décollement avec des ordres de grandeur comparables pour les vitesses tangentielle et normale. Cet état final est identique pour tous les cas 9_XS excepté le cas 9_3 × 33S qui sera décrit dans la section suivante.

Les vitesses tangentielle et normale (respectivement les déplacements) sont donnés sur la figure 5.38 (respectivement figure 5.39). Ces évolutions suggèrent l'existence de trois phases : la première, débute juste après la partie linéaire et prend fin à $t = 0,004$ s. Ensuite, la seconde s'étend de $t = 0,005$ s à $t = 0,01$ s, puis finalement, le cycle limite est atteint à $t = 0,015$ s. Une augmentation du déplacement tangentiel moyen liée au décollement est observée, elle est causée par l'augmentation de la réaction normale due aux chocs.

Sur les portraits de phases – figure 5.40 –, on peut voir le premier cycle transitoire (en ligne noire pointillée). Ensuite, l'état final correspond à un cycle quasi périodique. Ceci est aussi visible à l'aide de l'analyse fréquentielle sur la figure 5.41.

L'analyse fréquentielle du cycle limite final – figure 5.41(a) – montre la présence de deux fréquences fondamentales : $f_0 = 15,7$ kHz et $f_1 = 27,6$ kHz. La première est assez proche du mode 9 même si elle est sensiblement plus basse, la deuxième correspond à la fréquence du mode 24. On peut aussi voir que ce cycle est assez complexe avec des contributions d'harmoniques et de combinaisons d'ordre élevé des fondamentales f_0 et f_1 (on peut remarquer $2f_0$, $3f_0$, $2f_1$, $f_0 + f_1$, $f_1 - f_0$, $4f_0 - f_1$ et $5f_0 - f_1$). L'analyse CWT, figure 5.41 donne la signature non-linéaire de la réponse transitoire complète. Elle montre que la fréquence f_1 et les harmoniques et combinaisons n'apparaissent qu'à partir de $t > 0,01$ s, soit après la première phase.

La projection modale – figure 5.42(a) – est en bon accord avec ces observations : le cycle final est principalement composé des modes 9 et 33, avec des participations significatives des modes 24 et 6. Les trois phases perçues avec les analyses précédentes peuvent être facilement identifiées ici avec la saturation d'un mode spécifique : la première phase correspond à la saturation du mode 33, la seconde à la saturation plus énergétique du mode 9 qui ne parvient pas à stabiliser les modes 24 et 6

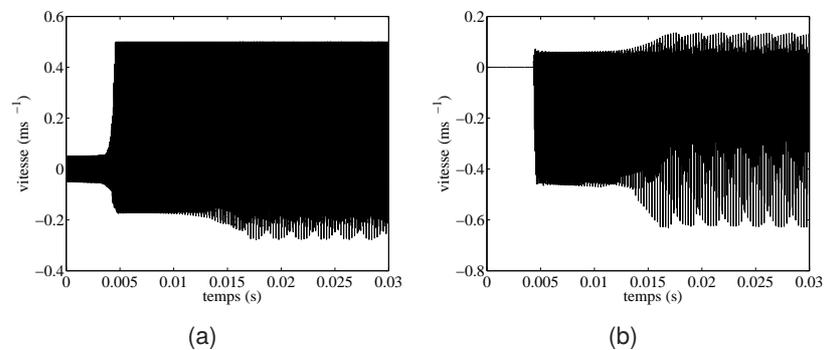


FIGURE 5.38 – Cas 9_33S – Vitesse sur un nœud de contact – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

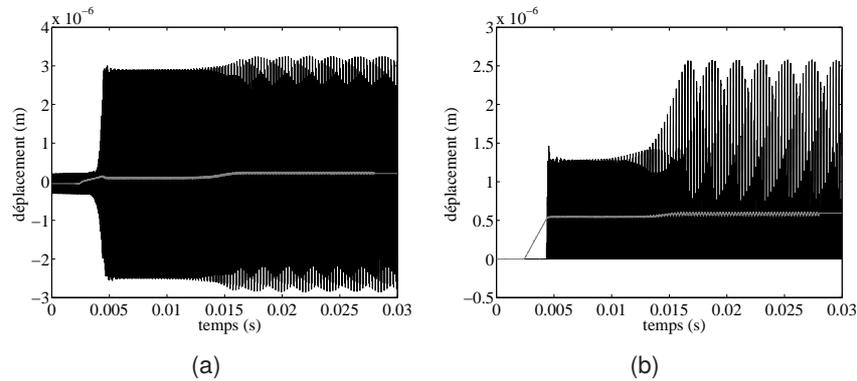


FIGURE 5.39 – Cas 9_33S – Déplacement sur un nœud de contact (en gris : valeur moyenne) – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

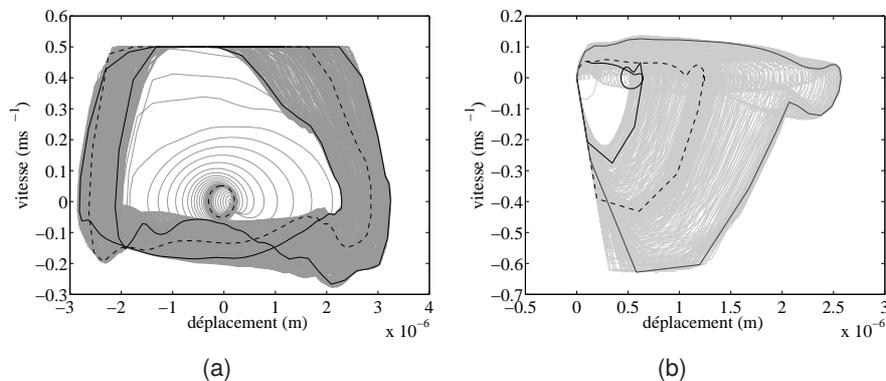


FIGURE 5.40 – Cas 9_33S – Portrait de phase sur un nœud de contact – (a) Composante tangentielle – gris : tracé complet, noir plein : état final, pointillés noir : premier cycle, (b) Composante normale – gris : tracé complet, noir plein : boucle extrême de l'état final, pointillés noirs : boucle intermédiaire de l'état final

dont la saturation apporte la dernière phase. Les modes 24 et 6 saturent à un niveau inférieur à celui du mode 9, mais leur saturation diminue l'amplitude des modes déjà saturés.

Finalement, on procède à l'identification des déformées des pics à f_0 , f_1 et $2f_0$ à l'aide du M-MAC pic à mode. Ils sont respectivement proches des modes 9, 24 et 33, confirmant que les déformées des pics principaux sont essentiellement composées d'un unique mode instable.

5.4.3.4 Cas 8 : cas 9_3×33S

Comme précédemment indiqué, le cas 9_3×33S est le seul parmi les cas 9_XS à se différencier par son cycle final. Les évolutions temporelles des vitesses et déplacements tangentiels et normaux (figures 5.43 et 5.44) semblent plus simples que dans le cycle final des autres cas 9_XS, avec une partie linéaire suivie d'une saturation présentant un léger phénomène de battement. On observe aussi une diminution du déplacement tangentiel moyen, correspondant à la chute du coefficient de frottement apparent causée par l'adhérence.

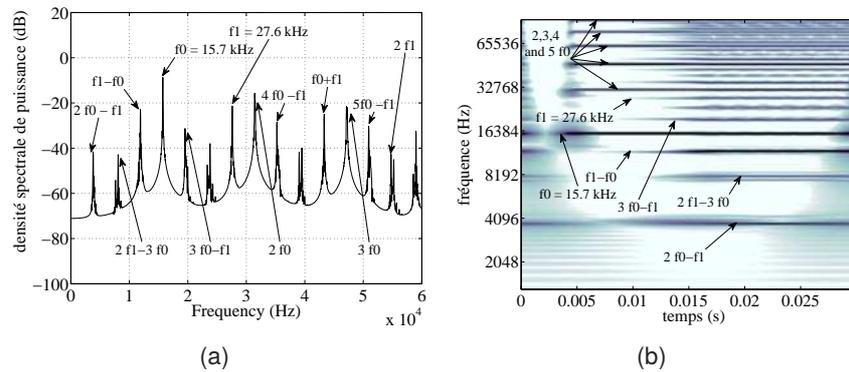


FIGURE 5.41 – Cas 9_33S – Analyse fréquentielle – (a) Densité spectrale de puissance cinétique, (b) CWT de la vitesse normale en zone de contact

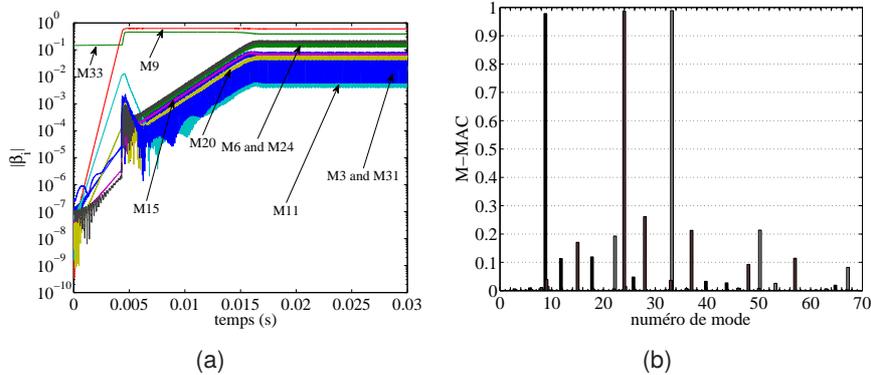


FIGURE 5.42 – Cas 9_33S – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode (■ : pic à f_0 , ■ : pic à $2f_0$ et ■ : pic à f_1)

Le portrait de phase tangentiel (figure 5.45(a)) montre un cycle quasi mono harmonique , l'état final ne noircissant qu'une mince bande de l'espace des phases. Concernant le portrait de phase normal (figure 5.45(b)), il montre clairement le phénomène de battements du fait de l'amplitude modulée du cycle.

La FFT (figure 5.46(b)) indique que l'état final est composé, d'un point de vue énergétique, essentiellement de la fréquence $f_0 = 10,5$ kHz, qui est proche de celle du mode 3, et de ses harmoniques. L'analyse par ondelettes (figure 5.46(a)) permet la détection d'une deuxième fréquence fondamentale $f_1 = 13,6$ kHz en zone de contact. Cette fréquence explique le phénomène de battement basse fréquence à $f_1 - f_0 = 3,1$ kHz.

Finalement, la projection modale (figure 5.47(a)) confirme la participation principale du mode 3 avec des participations plus faibles des modes 6, 9 et 20. Toutes ces participations modales ont une amplitude oscillante, indiquant une probable évolution du mode non-linéaire. L'identification du pic à f_0 montre une bonne correspondance au mode 3. L'indicateur de M-MAC pic à mode met aussi en évi-

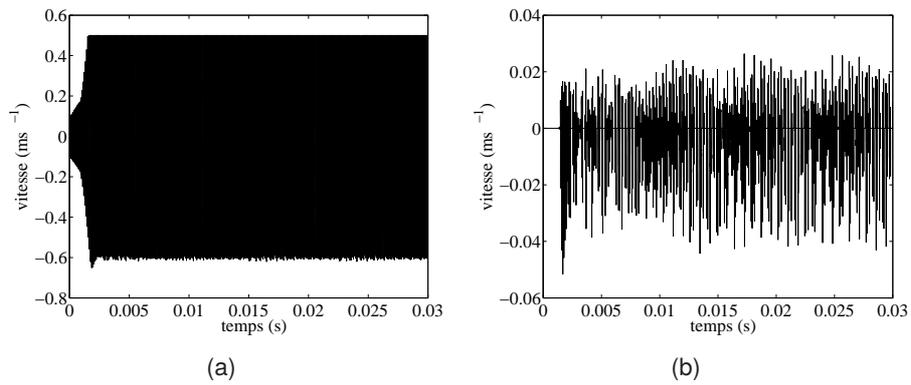


FIGURE 5.43 – Cas 9_3×33S – Vitesse sur un nœud de contact – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

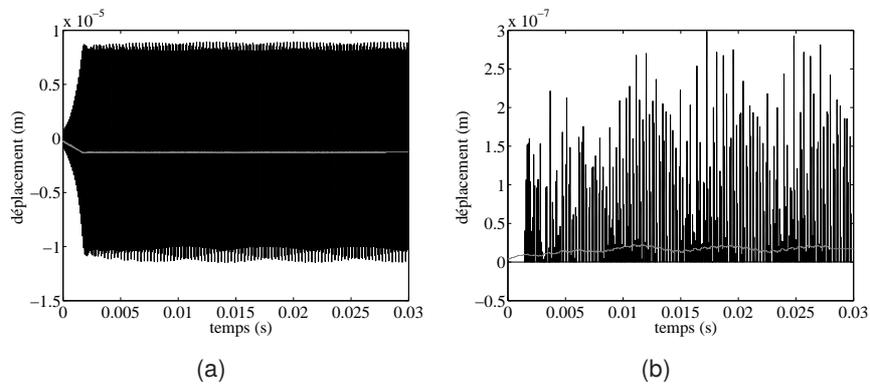


FIGURE 5.44 – Cas 9_3×33S – Déplacement sur un nœud de contact (en gris : valeur moyenne) – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

dence la proximité des modes 3 et 6.

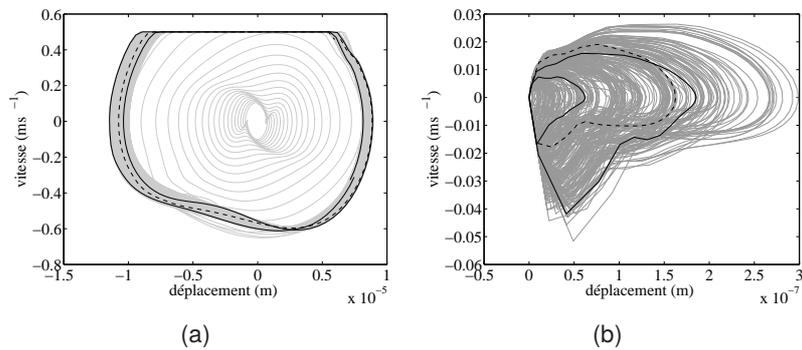


FIGURE 5.45 – Cas 9_3×33S – Portrait de phase sur un nœud de contact – gris : tracé complet, noir plein : état final, pointillés noirs : boucle intermédiaire – (a) Composante tangentielle, (b) Composante normale

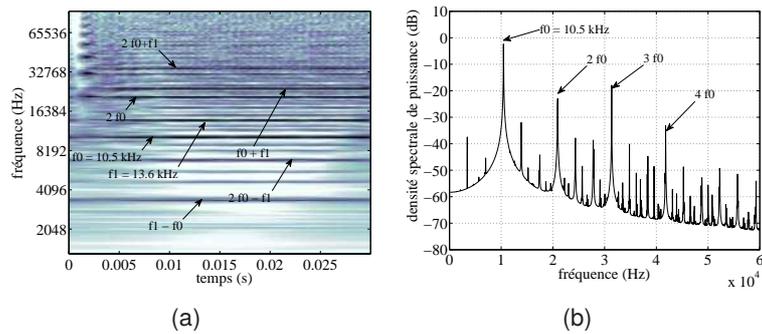


FIGURE 5.46 – Cas 9_3×33S – Analyse fréquentielle – (a) CWT de la vitesse normale en zone de contact, (b) Densité spectrale de puissance cinétique

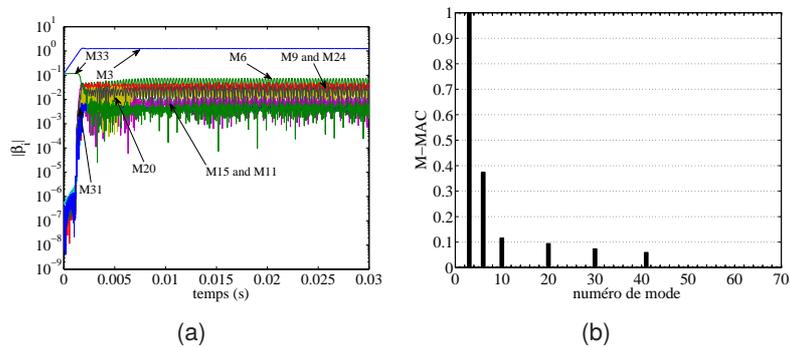


FIGURE 5.47 – Cas 9_3×33S – Identification modale – (a) Projection sur les modes complexes, (b) M-MAC pic à mode à f_0

5.4.3.5 Influence des conditions initiales

L'influence des conditions initiales sur le système à 9 modes instables a été étudiée pour les différentes conditions initiales testées. Aussi bien pour les cas d'adhérence que pour ceux de décollement, le cycle limite final obtenu dépend des conditions initiales. La figure 5.48 représente l'évolution des amplitudes des modes les plus importants pour les différentes conditions initiales. Elle met en évidence deux attracteurs pour chaque condition de fonctionnement. L'un de ces attracteurs semble gouverné par le mode au plus fort taux de divergence (*i.e.* le mode 9) tandis que l'autre a un comportement plus proche des observations du système à 5 modes instables, avec les modes 3 et 6 ayant une forte participation couplée, le mode 3 dominant dans les cas de décollement, le mode 6 dans ceux d'adhérence.

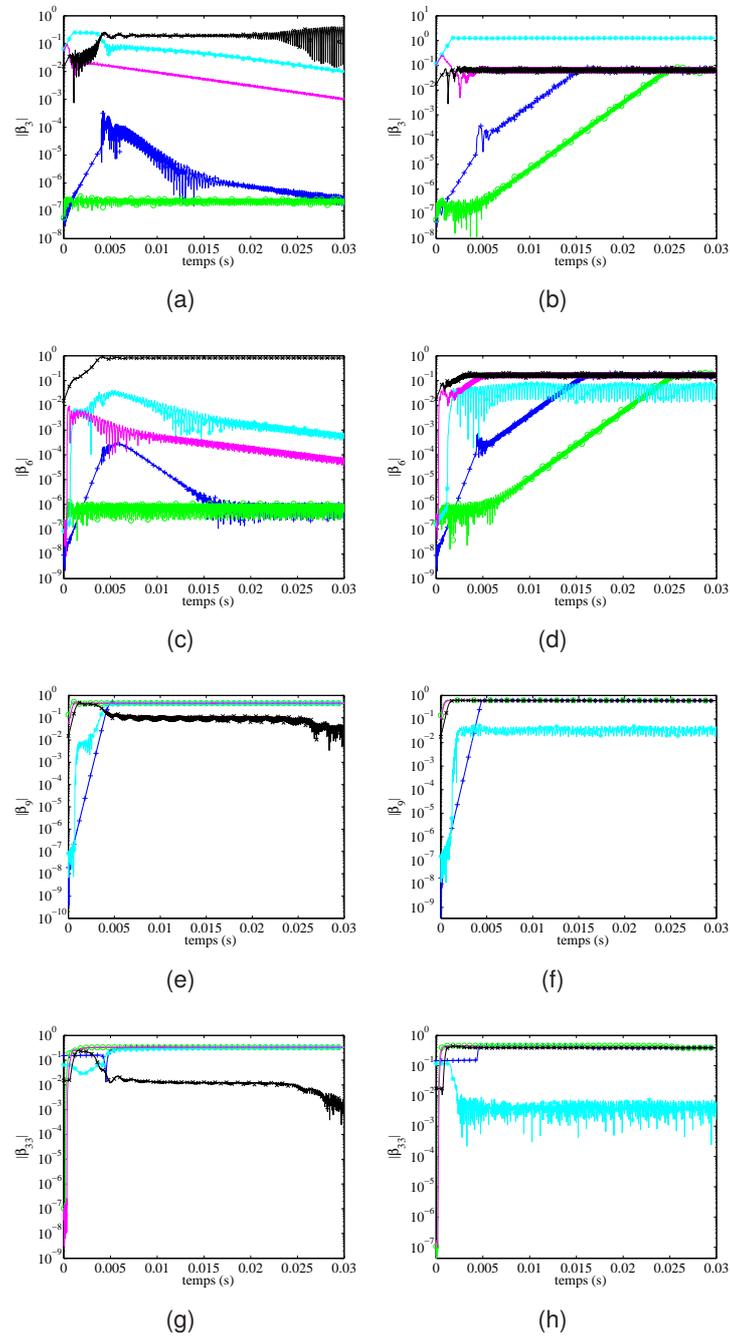


FIGURE 5.48 – Existence de deux états finaux. + : 9_33X, o : 9_9X, * : 9_3×33X, . : 9_3×9X et x : 9_allX
 – (a) Mode 3 adhérence, (b) Mode 3 décollement, (c) Mode 6 adhérence, (d) Mode 6 décollement, (e) Mode 9 adhérence, (f) Mode 9 décollement, (g) Mode 33 adhérence, (h) Mode 33 décollement

5.4.4 Conclusion sur le comportement du système

Dans cette section, différents comportements non-linéaires transitoires et stationnaires ont été étudiés. Une attention toute particulière a été portée à la signature non-linéaire du système et la contribution des modes instables issus du calcul de stabilité. De plus, l'effet des conditions de fonctionnement et initiales sur un système déstabilisé par le frottement a été examiné. La dépendance aux conditions de fonctionnement est systématiquement observée. L'effet des conditions initiales dépendant du nombre de modes instables. Pour les cas avec 1 ou 5 modes instables, un seul attracteur a été identifié, tandis que les cas avec 9 ou 12 modes instables ont montré deux attracteurs par condition de fonctionnement.

L'utilisation de la projection sur les modes complexes permet d'identifier les contributions des modes linéaires dans la solution non-linéaire. Cette technique s'est révélée très utile dans le suivi de la solution, en particulier dans les cas où l'on a une compétition entre plusieurs modes instables. Effectivement dans l'ensemble des cas étudiés, malgré la saturation par adhérence ou décollement, les modes linéaires restent assez proches des modes non-linéaires du système et permettent donc une bonne représentation de la solution. De plus cette projection apparaît comme un outil robuste pour vérifier la stabilisation de la solution. Cependant, sur certains cas, notamment ceux avec de nombreux modes instables, des oscillations sont observées sur les projections modales. Ces oscillations semblent se produire lorsque l'événement non-linéaire est très marqué (fort décollements par exemple) ou lorsque plusieurs modes sont présents à des niveaux énergétiques proches. Elles peuvent traduire une évolution du mode non-linéaire par rapport au mode linéaire ou bien un équilibre compétitif entre les modes présents. Aussi, l'outil de M-MAC pic à mode montre que le cycle limite a ses pics fondamentaux composés principalement d'un unique mode instable.

L'analyse spectrale (FFT et CWT) des réponses donne des résultats plutôt classiques, avec une présence de fréquences harmoniques et de combinaisons des fondamentales aussi bien pour les réponses non-linéaires transitoires que sur les cycles limites. Pour le système à 1 et 5 modes instables, seuls des cycles mono harmoniques ont été obtenus. Pour les autres cas étudiés, certains cycles obtenus sont des cycles bi harmoniques. Comme seulement quelques modes instables semblent significatifs dans le cycle limite, un point intéressant à traiter est le mécanisme de sélection des modes prépondérants. Au travers de ces simulations, aucune règle simple de sélection n'a pu être déterminée et la prédiction des modes dominants dans la réponse reste complexe, ces derniers provenant des compétitions modales et évolutions non-linéaires aussi bien en transitoire qu'en stationnaire. Un point remarquable dans ces solutions est le fait que les cycles limite n'ont des projections modales significatives que sur un nombre restreint de modes. En effet ce point semble particulièrement intéressant à exploiter dans l'optique de réduction du système, ce que nous tâcherons de faire dans la suite de la thèse.

5.5 Mise en œuvre d'une réduction efficace

Dans cette partie, nous nous intéressons à la réduction du système précédemment étudié. La résolution du problème non-linéaire suivant les schémas décrits dans le chapitre 4 implique une résolution de plusieurs systèmes linéaires par pas de temps, ce qui sur des modèles éléments finis de grande taille, entraîne vite des coûts de calcul prohibitifs. Afin de maintenir ces coûts à un niveau raisonnable, la réduction du système est une option qui peut apparaître comme un bon compromis. Bien que diverses méthodes de réduction pour la dynamique non-linéaire existent telles que celles exposées au chapitre 4, elles demandent en générale un effort de calcul important en amont de la résolution du problème et des mises en œuvre complexes. Nous nous concentrons donc ici sur une méthode de réduction linéaire, à savoir une méthode de Ritz [101], appliquée au problème non-linéaire. La méthode de réduction de Ritz consiste à chercher une solution approchée $\dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}$ du problème dans une base de réduction \mathbf{B} sous la forme $\dot{\mathbf{u}}_{\text{app}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_{\text{red}}$. En remplaçant dans le problème d'évolution donné dans le chapitre 4 par l'équation (4.8) les champs solutions et les champs virtuels par des champs exprimés dans la base de réduction $\dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}$ et $\dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}^*$ le principe des puissances virtuelles est donné par l'équation (5.12), qui se traduit par le système (5.13).

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ddot{\mathbf{u}}_{\text{app}}, \dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}, \mathbf{u}_{\text{app}}) = \mathbf{B} (\ddot{\mathbf{u}}_{\text{red}}, \dot{\mathbf{u}}_{\text{red}}, \mathbf{u}_{\text{red}}) \\ (\ddot{\mathbf{u}}_{\text{app}}^*, \dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}^*, \mathbf{u}_{\text{app}}^*) = \mathbf{B} (\ddot{\mathbf{u}}_{\text{red}}^*, \dot{\mathbf{u}}_{\text{red}}^*, \mathbf{u}_{\text{red}}^*) \\ \dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}^{*\text{T}} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{app}} + \dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}^{*\text{T}} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{\text{app}} + \dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}^{*\text{T}} \mathbf{K} \mathbf{u}_{\text{app}} = \dot{\mathbf{u}}_{\text{app}}^{*\text{T}} (\mathbf{f} + \mathbf{r}_{\text{c}}) \end{array} \right. \quad (5.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{\text{RED}} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{red}} + \mathbf{C}_{\text{RED}} \dot{\mathbf{u}}_{\text{red}} + \mathbf{K}_{\text{RED}} \mathbf{u}_{\text{red}} = \mathbf{f}_{\text{red}} + \mathbf{r}_{\text{red}} \\ (\mathbf{f}_{\text{red}}, \mathbf{r}_{\text{red}}) = \mathbf{B}^{\text{T}} (\mathbf{f}, \mathbf{r}_{\text{c}}) \\ (\mathbf{M}_{\text{RED}}, \mathbf{C}_{\text{RED}}, \mathbf{K}_{\text{RED}}) = \mathbf{B}^{\text{T}} (\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}) \mathbf{B} \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Les matrices \mathbf{M}_{RED} , \mathbf{K}_{RED} et \mathbf{C}_{RED} correspondent aux opérateurs de masse, de raideur et d'amortissement visqueux réduits dans la base \mathbf{B} , et les vecteurs \mathbf{f}_{red} et \mathbf{r}_{red} sont les vecteurs force et réaction de contact généralisés réduits.

Les équations ainsi projetées sur cet espace réduit sont compatibles avec les algorithmes de résolution décrits précédemment. Dans la suite, nous allons faire une proposition de bases construites *a priori* et évaluer leurs performances sur différents cas du système de la couche étudié dans la section précédente. La qualité de la solution réduite est évaluée par comparaison à la solution non réduite qui sert de solution de référence.

5.5.1 Définition de deux types de base de réduite

Pour définir des bases réduites, nous avons suivi deux principes directeurs. Le premier est qu'au vu des fortes non-linéarités siégeant dans la zone de contact, cette dernière sera préservée non réduite :

tous les degrés de liberté physiques de la zone contact seront donc présents dans la base réduite. Ce principe permet d'une part de garder intact la description du phénomène générateur de l'instabilité, et d'autre part, de faciliter l'implémentation numérique de la réduction en préservant inchangée la partie du code traitant de la non-linéarité de contact. Le deuxième principe est que la construction de la base réduite se fera à l'aide des modes complexes issus de l'étude de stabilité. Ce choix est motivé par trois raisons : premièrement, ces modes sont par construction les plus pertinents pour décrire la dynamique du système autour de l'équilibre ; deuxièmement, dans l'étude d'un système crissant, l'analyse de stabilité est une étape indispensable. Ces modes sont donc déjà calculés avant de lancer la simulation temporelle. Leur réutilisation dans la base est donc avantageuse en terme de coût de calcul ; troisièmement, l'étude du système de référence menée dans la section précédente et des études passées [75] ont montré que ces modes étaient aussi pertinents pour une représentation *a posteriori* de la solution dynamique non-linéaire transitoire et stationnaire. Notons cependant que ce dernier point n'est pas toujours vérifié, comme cela a pu être montré par Sinou [107]. Sur des modèles éléments finis industriels, la réduction de l'interface de contact est une option intéressante car le nombre de degrés de liberté de contact devient vite largement supérieur au nombre de degrés de liberté réduits utilisés pour décrire le reste du modèle. Cependant une telle réduction est très difficile sans connaissance préalable du comportement du système. Des approches de type POD [91], fondées sur une simulation du système complets sur des petites fenêtres temporelles représentatives sont envisageables mais restent difficiles à maîtriser pour un système autonome. De plus, la conservation des degrés de liberté physiques d'interface assure la représentation correcte des réactions de contact dans la base réduite, ce qui est un point nécessaire pour que la réduction puisse fonctionner [11]. En suivant ces deux principes, il semble donc possible d'obtenir des bases de réductions pertinentes, représentatives de la physique du problème et relativement peu chères à calculer.

Les bases de réduction construites peuvent donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{C}_{DDL} \quad \mathbf{G}_{DDL}] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{DDL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \tilde{\mathbf{G}}_{DDL} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

où \mathbf{C}_{DDL} est une base des degrés de libertés physiques de contact et \mathbf{G}_{DDL} est une base de degrés de liberté généralisés qui correspond à la trace en dehors de la zone de contact de modes complexes du système couplé par le frottement. La base \mathbf{G}_{DDL} peut aussi contenir la trace des modes statiques de liaison de l'interface de contact (*i.e* les réponses de la structure aux déplacements relatifs imposés sur les degrés de liberté de la zone de contact). Il est possible de reporter la trace des modes statiques sur les degrés de liberté physiques par inclusion d'une partie \mathbf{S} . Dans ce cas il faut bien veiller à préserver la description physique de l'interface. Pour obtenir une base réelle à partir des modes complexes, les parties réelle et imaginaire des modes sont ajoutées et orthonormalisées par rapport à la matrice de masse. Le cardinal d'une base composée des n premiers modes complexes est en générale compris entre $1, 2n$ et $1, 7n$. Ce constat plaide pour l'utilisation des modes complexes plutôt que des modes réels car il montre que l'on a besoin de beaucoup plus de modes réels pour décrire correctement le comportement du système dans la même gamme fréquentielle.

Ainsi, deux types de base réduite sont introduits par la suite. Le premier se fonde sur une approche de troncature modale classique où \mathbf{G}_{DDL} est simplement la trace des modes complexes jusqu'à une fréquence de coupure donnée f_c . Pour des systèmes linéaires, on prend classiquement f_c de l'ordre

de 1,5 à 2 fois la fréquence maximale f_m présente dans l'excitation du système. Cependant dans le cas des systèmes non-linéaires auto-entretenus, il n'y a pas d'excitation extérieure et les non-linéarités peuvent engendrer des fréquences élevées. D'un point de vue pragmatique, on considèrera que la fréquence maximale d'excitation est donnée par la fréquence du plus haut mode instable. En effet, le système n'aura comme fréquences fondamentales de vibration que des fréquences proches de celles des modes instables. Le deuxième type de base envisagé est fondé sur le caractère non-linéaire du problème. Le système autonome, verra une solution dynamique se développer d'abord sur les modes instables et les contributions non-linéaires associées (harmoniques ou combinaisons fréquentielles des modes instables). Suivant ce raisonnement, on cherche à construire une base G_{DDL} contenant la trace de modes dont les fréquences sont proches de celles des modes instables, de leurs harmoniques et combinaisons jusqu'à un ordre fixé o . Les bases ainsi obtenues sont *a priori* lacunaires en fréquence, mais avec des modes relativement haute fréquence par rapport à ceux qui sont présents dans les bases du premier type.

Dans la suite de la thèse, les bases du premier type seront nommées FC_n où n est le nombre de modes complexes inclus ; celles du second type seront notées IM_o où o est l'ordre retenu pour les harmoniques et combinaisons. Pour finir, nous proposerons aussi d'ajouter la contribution des modes statiques dans certains cas. Cette inclusion des modes statiques dans une base est signalée à l'aide de l'exposant s sur son nom. La figure 5.49 donne une représentation du contenu modal retenu pour différentes bases testées dans la suite pour les systèmes avec 1, 5 ou 9 modes instables. Le caractère lacunaire en mode des bases IM_o y est bien illustré, ainsi que le fait qu'elles puissent contenir des

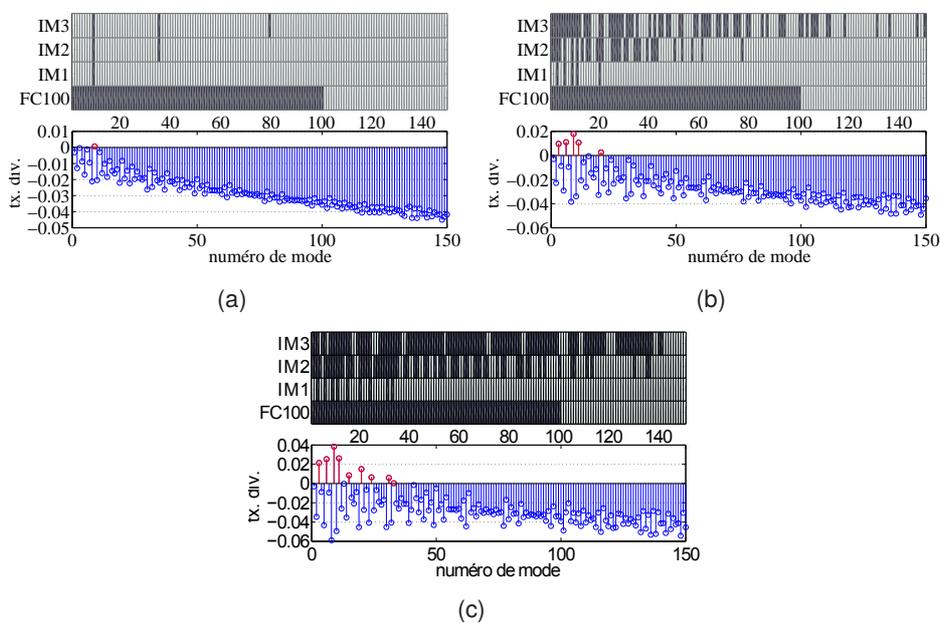


FIGURE 5.49 – Contenu modal des différentes bases et analyse de stabilité. (rouge : modes instables, bleu : modes stables, noir : modes sélectionnés) – (a) 1 mode instable, (b) 5 modes instables, (c) 9 modes instables

modes plus hauts en fréquence que ceux des bases FC_{100} .

5.5.2 Performances des bases réduites

Afin de comparer les performances des diverses bases proposées, différents indicateurs quantitatifs ont été introduits. Ils sont définis sur la densité spectrale d'énergie de la solution non-linéaire stationnaire. Pour chaque calcul, les pics des FFT sont appairés à ceux du calcul de référence à l'aide de la proximité en fréquence et du M-MAC pic à pic. Une fois l'appairage effectué, l'écart relatif en fréquence δf , l'erreur en amplitude $\delta \alpha$ et le critère de M-MAC pic à pic induits par la réduction sont utilisés pour quantifier l'erreur. La précision donnée sur le critère de M-MAC pic à pic est de 10^{-2} . Les pics comparés sont le pic le plus important ainsi que les pics secondaires s'ils ne sont pas atténués de plus de 20 dB. Lorsqu'un pic ne peut avoir un M-MAC supérieur à 0,6, on considère qu'il ne peut être appairé à un des pics de référence et les autres indicateurs (δf et $\delta \alpha$) ne sont alors pas calculés. En plus des indicateurs quantitatifs, une comparaison qualitative sur les portraits de phase et les évolutions temporelles est faite.

Les différentes bases ont été testées sur les six cas listés dans la tableau 5.5. Comme cela va être illustré par la suite, ces différents cas ayant été choisis à partir des analyses des comportements vibratoires précédemment présentés dans la section 5.4, ces études montrent que les deux types de base peuvent donner des résultats précis même si certaines bases souffrent d'un manque de robustesse quant à la qualité de leurs solutions, l'accord entre la solution réduite et celle de référence dépendant des conditions initiales choisies et non plus seulement du système.

5.5.2.1 Cas de réduction 1 – Cas 1_9A

Tout d'abord, la réduction sur le cas le plus simple, avec seulement un mode instable (cas 1_9A) donne des résultats très encourageants. Le tableau 5.6 donne les caractéristiques des trois pics principaux pour la solution de référence. Les indicateurs d'erreur en fréquence δf et en amplitude $\delta \alpha$ montrent un très bon accord entre les solutions réduites et la référence comme indiqué dans le tableau 5.7. Le critère d'appairage est de 1 pour toutes les bases. Ces résultats donnent confiance dans la capacité d'une base réduite à représenter le comportement dynamique d'un système croissant. Sur la figure 5.50, on peut voir que les portraits de phases en zone de contact sont très semblables. Du point de vue performance de réduction, on pourra noter que la base IM_1 n'a que deux DDL généralisés correspondant aux parties réelle et imaginaire du mode 9 et réalise donc une réduction très forte du

| Cas | nomenclature |
|--------------------|--------------|
| Cas de réduction 1 | 1_9A |
| Cas de réduction 2 | 1_9S |
| Cas de réduction 3 | 9_allA |
| Cas de réduction 4 | 9_33S |
| Cas de réduction 5 | 5_9A |
| Cas de réduction 6 | 5_allS |

TABLE 5.5 – Liste des cas de réduction

| numéro de pic | fréquence kHz | amplitude J | dB |
|---------------|---------------|-------------------|-----|
| 1 (f_0) | 16,27 | 0,0416 | |
| 2 ($2f_0$) | 32,54 | $3 \cdot 10^{-7}$ | -51 |
| 3 ($3f_0$) | 48,88 | $9 \cdot 10^{-8}$ | -57 |

TABLE 5.6 – Pics du spectre en puissance cinétique – Cas 1_9A (référence)

| base | δf | δa dB |
|--------------------------------|------------|---------------|
| FC ₁₀₀ | 0 | 0,032 |
| IM ₁ | 0 | 0,053 |
| IM ₂ | 0 | 0,053 |
| IM ₃ | 0 | 0,053 |
| FC ₁₀₀ ^s | 0 | 0,005 |

TABLE 5.7 – Indicateurs d'erreur sur le pic principal ($f_0 = 16,27$ kHz) pour les différentes bases – Cas 1_9A

système.

5.5.2.2 Cas de réduction 2 – Cas 1_9S

Sur le système avec un seul mode instable, lorsque l'on privilégie le décollement les paramètres des pics du cycle de référence sont donnés dans le tableau 5.8. L'erreur liée à la réduction augmente sensiblement pour toutes les bases ne comportant pas les modes statiques, et ce particulièrement pour la base FC₁₀₀, comme l'atteste le tableau 5.9. Un fait peu intuitif est que, malgré la présence des modes constituant les bases IM dans la base FC₁₀₀, cette dernière apporte des erreurs de réduction plus grandes que les bases IM. Ceci traduit la difficulté de faire une réduction appropriée d'un système non-linéaire : ajouter certains vecteurs dans la base peut dégrader la solution.

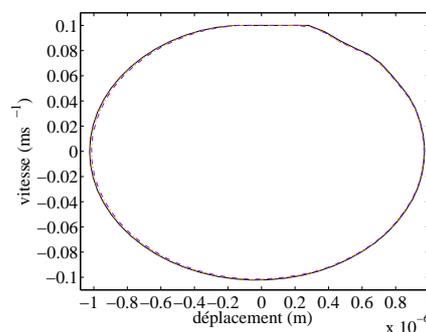


FIGURE 5.50 – Comparaison des bases pour le cas 1_9A, portrait de phase. — référence, — FC₁₀₀, — IM₁

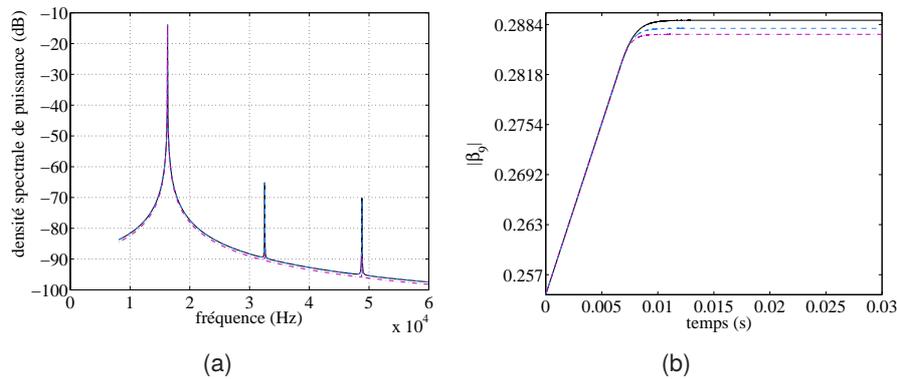


FIGURE 5.51 – Comparaison des bases pour le cas 1_9A, – référence, — FC₁₀₀ - - IM₁ – (a) FFT de l'état final, (b) Projection modale

| numéro de pic | fréquence kHz | amplitude J | dB |
|---------------|---------------|-------------------|-----|
| 1 (f_0) | 16,26 | 0,0364 | |
| 2 ($2f_0$) | 32,53 | $1 \cdot 10^{-5}$ | -35 |
| 3 ($3f_0$) | 48,74 | $5 \cdot 10^{-2}$ | -36 |

TABLE 5.8 – Pics du spectre en puissance cinétique – Cas 1_9S (référence)

Bien qu'une réduction efficace soit possible pour un modèle avec un seul mode instable, on peut voir que le décollement crée un clivage entre les bases qui comportent les modes statiques et les autres. La base FC₁₀₀^s a des performances similaires pour les deux cas, tandis que FC₁₀₀ voit le décollement dégrader la qualité de la solution. L'inclusion d'un résidu statique se révèle donc être un bon levier pour garantir une solution de qualité en présence de décollement.

La figure 5.52 montre que le décollement apporte une erreur visible sur les portraits de phases des solutions réduites. La non linéarité loin de la zone de contact est lissée en l'absence des modes statiques. La base FC₁₀₀^s quant à elle semble exacerber l'effet des non linéarités loin de la zone de contact.

| base | δf | $\delta \alpha$ dB |
|--------------------------------|------------|--------------------|
| FC ₁₀₀ | 0 | 0,38 |
| IM ₁ | 0 | 0,28 |
| IM ₂ | 0 | 0,28 |
| IM ₃ | 0 | 0,28 |
| FC ₁₀₀ ^s | 0 | 0,004 |

TABLE 5.9 – Indicateurs d'erreur sur le pic principal ($f_0 = 16,26$ kHz) pour les différentes bases – Cas 1_9S

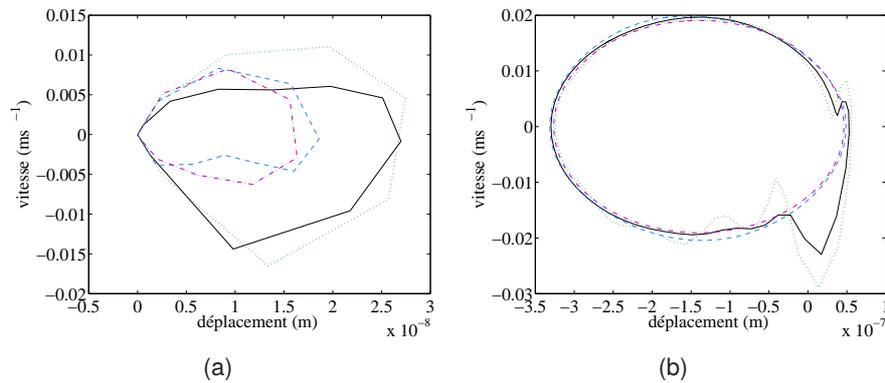


FIGURE 5.52 – Comparaison des bases pour le cas 1_9S, portrait de phase. — référence, — FC₁₀₀ ··· IM₁ et ··· FC₁₀₀^s – (a) Sur la zone de contact, (b) Sur un nœud interne

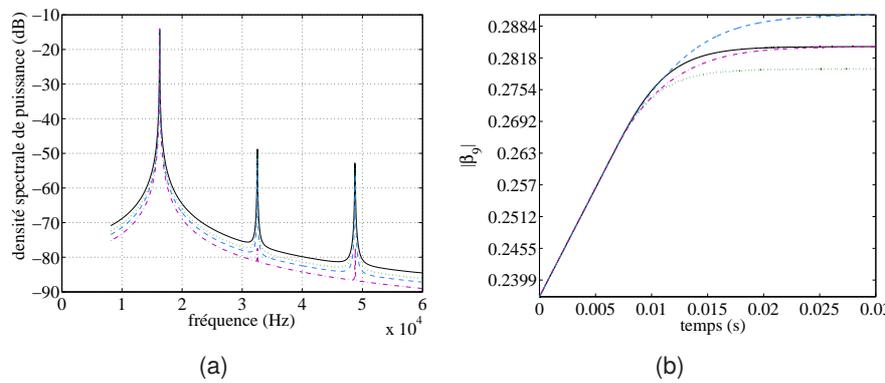


FIGURE 5.53 – Comparaison des bases pour le cas 1_9S, — référence, — FC₁₀₀ ··· IM₁ et ··· FC₁₀₀^s – (a) FFT de l'état final, (b) Projection modale

5.5.2.3 Cas de réduction 3 – Cas 9_allA

L'étude du système comportant 9 modes instables avec des conditions favorisant l'adhérence donne des résultats intéressants. Les caractéristiques du cycle limite de référence sont données dans le tableau 5.10. Ce système semble avoir une bonne capacité à la réduction : presque toutes les bases donnent de bons indicateurs (c.f. tableau 5.11). La base IM₁ ne permet pas de retrouver la solution de référence, ce qui s'explique par le fait qu'elle capte un cycle correspondant au deuxième attracteur observé dans la section 5.4.

Les spectres en puissance représentés sur la figure 5.54(a) montrent un bon accord entre les calculs réduits et la référence, mis à part pour la base IM₁. Les portraits de phase (figure 5.54(b)) montrent quelques manquements dans les solutions produites par les bases IM₂ et FC₁₀₀. Toutefois, les bases IM₂^s et FC₁₀₀^s sont en assez bon accord avec le calcul de référence. On notera qu'il est difficile de faire une comparaison des portraits de phase sur un cycle quasi périodique, et le choix est fait ici de

| numéro de pic | fréquence kHz | amplitude J | dB |
|-------------------|---------------|-------------|-----|
| 1 (f_0) | 14,333 | 0,2666 | |
| 2 ($2f_0$) | 28,667 | 0,0174 | -12 |
| 3 (f_1) | 10 | 0,0153 | -12 |
| 4 ($f_0 - f_1$) | 4,333 | 0,0116 | -14 |
| 5 ($f_0 + f_1$) | 24,333 | 0,0031 | -19 |

TABLE 5.10 – Pics du spectre en puissance cinétique – Cas 9_allA (référence)

| base | δf % | δa dB | M-MAC pic à pic |
|--------------------------------|--------------|--------------------------|-----------------|
| FC ₁₀₀ | [0 0 0 0] | [-0,05 0,09 -0,02 -0,68] | [1 1 1 1] |
| IM ₁ | [- - - -] | [- - - -] | [0 0,22 0 0] |
| IM ₂ | [0 0 0 0] | [-0,06 0,15 0,05 -0,29] | [1 1 1 1] |
| FC ₁₀₀ ^s | [0 0 0 0] | [0,01 -0,08 0,34 0,32] | [1 1 1 1] |
| IM ₂ ^s | [0 0 0 0] | [-0,02 -0,15 0,25 0,33] | [1 1 1 1] |

TABLE 5.11 – Indicateur d'erreur pour les quatre principaux pics (à $f_0 = 14,33$ kHz, $2f_0 = 28,67$ kHz, $f_1 = 10$ kHz, et $f_0 - f_1 = 4,33$ kHz) – Cas 9_allA

comparer essentiellement la taille du cycle, le nombre de boucles et l'aspect général. On peut voir que pour la plupart des bases testées, la solution réduite arrive à reproduire le pic à $f_0 - f_1$ qui correspond à une combinaison de deux fondamentaux issus des fréquences de modes instables. Ceci prouve la capacité de cette réduction à reproduire des cycles quasi-périodiques du système de référence.

La figure 5.55 donne les projections modales pour les modes 3, 6, 9 et 33. Elle confirme que la plupart des bases donnent des résultats proches de la solution de référence. Le comportement de la base IM₂ durant la phase transitoire entre 5 ms et 30 ms montre des niveaux trop importants pour les modes 9 et 33, même si la réponse dynamique proposée sur le stationnaire reste correcte vis à vis de la référence.

Ainsi, bien que les bases réduites proposées donnent des solutions admissibles sur le cycle final, on observe des phénomènes d'avance ou de retard dans la phase transitoire. La figure 5.56 montre que la base FC₁₀₀ est en avance par rapport à la solution de référence. Ici, les différentes phases identifiables dans la solution sont simplement décalées dans le temps mais parfaitement reconnaissables.

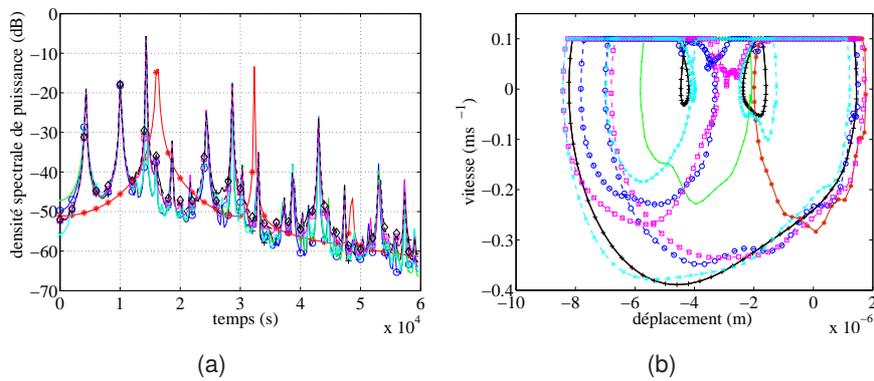


FIGURE 5.54 – Comparaison des bases pour le cas 9_allA (deux fréquences fondamentales : $f_0 = 15,67$ kHz et $f_1 = 27,67$ kHz, + : référence, o : FC₁₀₀, * : IM₁, · : IM₂, × : FC₁₀₀^s, □ : IM₂^s – (a) FFT de l'état final, (b) Portrait de phase

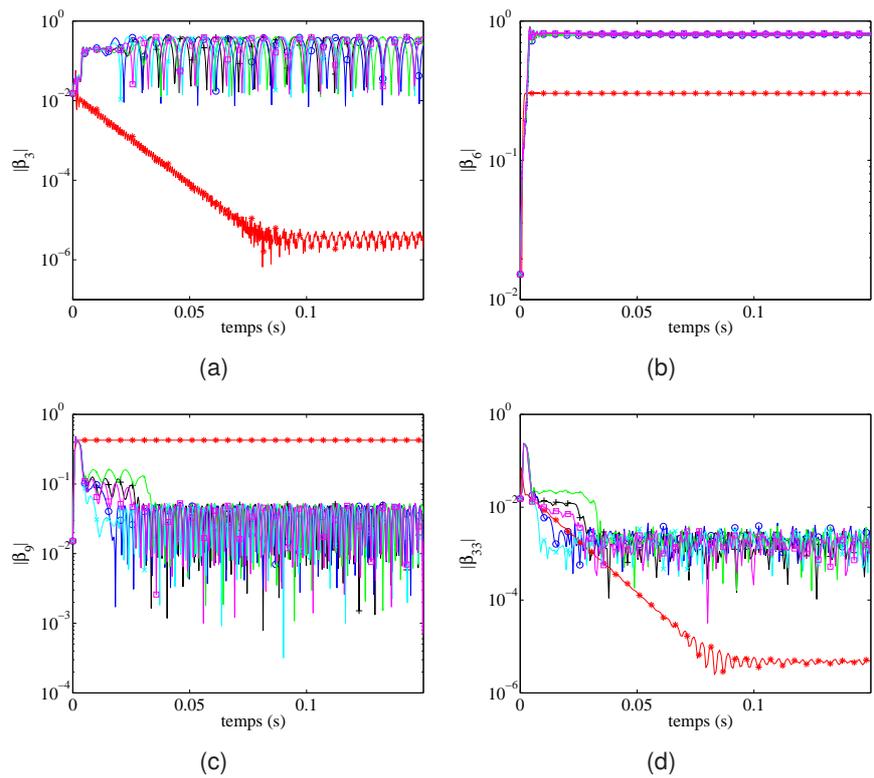


FIGURE 5.55 – Comparaison des projections modales pour le cas 9_allA, + : référence, o : FC₁₀₀, * : IM₁, · : IM₂, × : FC₁₀₀^s, □ : IM₂^s – (a) Mode 3 Cas 9_allA, (b) Mode 6 Cas 9_allA, (c) Mode 9 Cas 9_allA, (d) Mode 33 Cas 9_allA

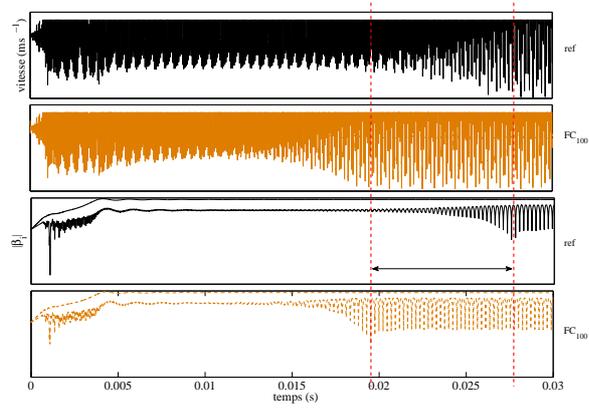


FIGURE 5.56 – Cas 9_allA – Phénomène d’avance, noir : référence, orange : FC_{100}

5.5.2.4 Cas de réduction 4 – Cas 9_33S

Le tableau 5.12 donne les caractéristiques des pics principaux sur la solution de référence du cas 9_33S. Ce cas met en jeux des harmoniques d'une des fréquences fondamentales ($2f_0$ et $3f_0$), ainsi que des participations de combinaisons de deux fréquences fondamentales ($f_1 - f_0$ et $f_0 + f_1$). Les indicateurs d'erreur sur les deux pics principaux (tableau 5.13) montrent l'efficacité de l'augmentation de l'ordre dans les bases IM : l'erreur en fréquence est bien moindre avec IM_3 qu'avec IM_1 . Les erreurs en amplitude et le critère de M-MAC montrent les mêmes tendances. Ainsi, l'ajout des contributions d'ordre supérieur des harmoniques et des combinaisons des fréquences fondamentales permet donc une meilleure représentation de la solution. De plus, l'apport des modes statiques à la qualité de la solution est mis en évidence au vu des indicateurs pour les bases IM_2^s et FC_{100}^s qui sont toutes deux très proches de la référence.

La comparaison des spectres en puissance est donnée sur la figure 5.57(a). Toutes les bases sont capables de capter le pic du fondamental principal à $f_0 = 15,67$ kHz ainsi que les harmoniques d'ordre 2 et 3, mais une seule base capte le pic à f_1 : c'est FC_{100}^s . C'est logiquement la seule base capable de reproduire les pics correspondant aux combinaisons de ces fréquences. La base IM_2^s capte de manière très faible une vibration à ces fréquences : on peut distinguer des pics très atténués.

L'étude des portraits de phase sur la figure 5.57(b) montre de manière manifeste que l'enrichissement harmonique des bases IM permet d'obtenir des portraits de phase très similaires à la référence malgré une sous-estimation de 35% de l'amplitude du cycle. La base IM_2^s a le portrait le plus proche de la référence, avec une amplitude et une forme très bonnes. La base FC_{100}^s a une forme tout à fait correcte, mais une amplitude un peu trop grande.

Finalement, la figure 5.58 montre les projections sur les modes 3, 6, 9 et 33 pour les différentes bases. Pour les modes 3 et 6 (c.f. figures 5.58(a) et 5.58(b)), les seules bases obtenant les amplitudes finales correctes sont les bases avec les modes statiques IM_2^s et FC_{100}^s . Toutefois, leur comportement autour de $t = 5$ ms pendant la phase transitoire n'est pas en parfaite adéquation avec la référence : elles surestiment sensiblement les taux de croissance des amplitudes modales. Les bases FC_{100} et IM_3 donnent autour de $t = 5,5$ ms de meilleures estimations des amplitudes de ces modes, mais elles restent à ce niveau dans la suite de la simulation. La base IM_2 montre les mêmes défauts que IM_3 et FC_{100} , mais avec une amplitude plus grande. Avec la base IM_1 , l'amplitude décroît à partir $t = 5,5$ ms

| peak | fréquence kHz | amplitude J | dB |
|-------------------|---------------|-------------|-----|
| 1 (f_0) | 15,67 | 0,1609 | |
| 2 ($2f_0$) | 31,33 | 0,0597 | -4 |
| 3 (f_1) | 27,67 | 0,0187 | -9 |
| 4 ($3f_0$) | 47 | 0,0123 | -11 |
| 5 ($f_1 - f_0$) | 12 | 0,012 | -11 |
| 6 ($f_0 + f_1$) | 43,33 | 0,0097 | -12 |

TABLE 5.12 – Pics du spectre en puissance cinétique – Cas 9_33S (référence)

| base | δf % | δa dB | M-MAC pic à pic |
|--------------|-----------------------|--------------------------|-------------------------|
| FC_{100} | [2, 13 2, 13 - 2, 13] | [7, 14 -2, 46 - -4, 57] | [0.98 0.98 0, 04 0.97] |
| IM_1 | [4, 26 4, 26 - 4, 26] | [7, 4 -7.95 - -27] | [0.98 0.99 0, 04 0, 14] |
| IM_2 | [2, 13 2, 13 - 2, 13] | [7, 01 -3, 4 - -6, 34] | [0.98 0.98 0, 04 0.93] |
| IM_3 | [0 0 - 0, 71] | [0, 28 0, 25 - 1, 71] | [1 1 0, 04 1] |
| FC_{100}^s | [0 0 0 0] | [0, 08 0, 24 0, 43 0.89] | [1 1 1 1] |
| IM_2^s | [0 0 - 0] | [0, 73 2, 17 - 3, 62] | [1 1 0, 04 1] |

TABLE 5.13 – Indicateurs d’erreur pour les quatre pics principaux à $f_0 = 15,67$ kHz, $2f_0$, $f_1 = 27,67$ kHz et $3f_0$ – Cas 9_33S

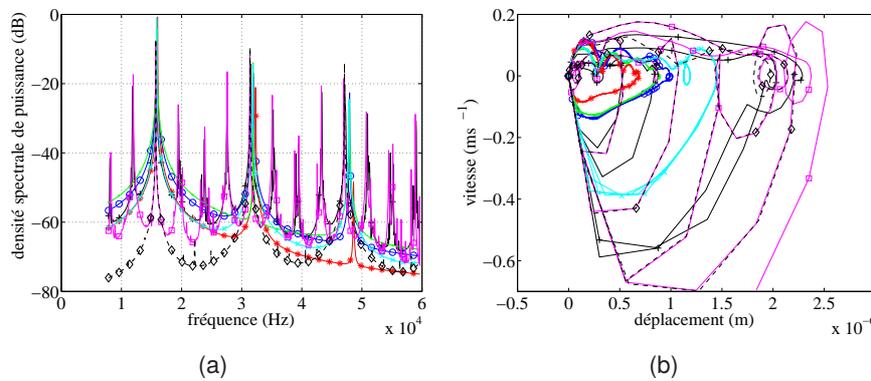


FIGURE 5.57 – Comparaison des bases pour le cas 9_33S, + : référence, o : FC_{100} , * : IM_1 , · : IM_2 , × : IM_3 , □ : FC_{100}^s , ◇ en pointillés : IM_2^s – (a) FFT de l’état final, (b) Portrait de phase

jusqu’à $t = 10$ ms, où l’amplitude est stabilisée. Pour le mode 9 (figure 5.58(c)), qui correspond au mode avec la contribution la plus élevée, toutes les bases donnent une bonne amplitude avec une correspondance parfaite pour les bases IM_3 , FC_{100}^s et IM_2^s . Ceci explique la pertinence dans les résultats obtenus par les deux bases réduites IM_2^s et IM_3 pour la solution globale via les quatre pics principaux (correspondance qui a déjà été expliquée et illustrée par l’intermédiaire des indicateurs d’erreur du tableau 5.13). Une des différences les plus visibles entre les deux groupes de bases est que les bases FC_{100} , IM_1 et IM_2 ont une transition plus douce vers la stabilisation des amplitudes autour de $t = 5$ ms. Pour le mode 33 (figure 5.58(d)), les bases donnent les mêmes résultats jusqu’au temps $t = 4$ ms. À cet instant, IM_1 se met à donner de fortes oscillations puis se stabilise à une amplitude de 0, 14. Les bases IM_2 et FC_{100} ont une augmentation brutale de l’amplitude, mais plus faible que dans le calcul de référence, il s’en suit une stabilisation autour de $t = 0, 28$ s. La base IM_3 suit exactement la référence jusqu’au temps $t = 11$ ms et ne capte pas la petite diminution d’amplitude. Toutes les amplitudes du modes 33 estimées par les bases FC_{100} , IM_1 , IM_2 et IM_3 sont non oscillantes. Les bases FC_{100}^s et IM_2^s restent très proches de la référence malgré une sous-estimation de l’amplitude à partir de $t = 5$ ms. Ces deux bases sont capables de reproduire la petite chute d’amplitude visible à $t = 11$ ms sur la référence, mais elles l’anticipent à $t = 8, 5$ ms.

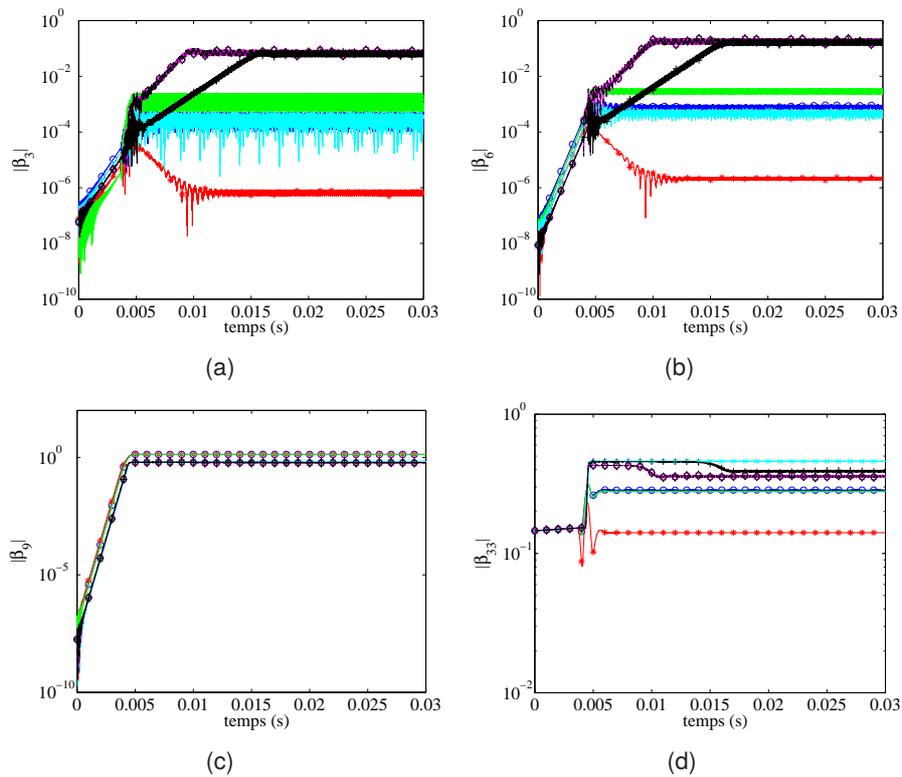


FIGURE 5.58 – Comparaison des projections modales pour le cas 9_33S, + : référence, o : FC₁₀₀, * : IM₁, · : IM₂, × : IM₃, □ : FC₁₀₀^s, ◇ en pointillés : IM₂^s – (a) Mode 3, (b) Mode 6, (c) Mode 9, (d) Mode 33

| numéro de pic | fréquence kHz | amplitude J | dB |
|----------------------|---------------|-------------|-----|
| 1 (f ₀) | 14,33 | 0,2259 | |
| 2 (2f ₀) | 28,67 | 0,0026 | -19 |
| 3 (3f ₀) | 43 | 0,0006 | -26 |

TABLE 5.14 – Pics du spectre en puissance cinétique – Cas 5_9A (référence)

5.5.2.5 Cas de réduction 5 – Cas 5_9A

Le cas 5_9A illustre la difficulté de choisir une base de réduction appropriée. La figure 5.59 montre la FFT du cycle final et le portrait de phase correspondant. Le tableau 5.14 présente les caractéristiques des trois principaux pics de la solution de référence. Les indicateurs de performances des différentes bases sont donnés dans le tableau 5.15. Le premier constat est que la base IM₃ obtient des résultats moins bons que les autres bases IM, y compris la base IM₁. Les deux bases IM₁ et IM₃ tendent à stabiliser la phase dominée par le mode 9. L'effet des modes statiques pour l'obtention d'une évaluation correcte des fréquences pour les deux pics principaux est aussi visible : la base IM₂^s donne exactement les mêmes fréquences que la référence tandis que IM₂ donne un décalage de 1%.

| base | δf % | δa dB | M-MAC pic à pic |
|--------------------------------|--------------|----------------|-----------------|
| FC ₁₀₀ | [0 0] | [0, 13 1, 19] | [1 1] |
| IM ₁ | [— —] | [— —] | [0 0, 2] |
| IM ₂ | [0 1, 16] | [—0, 69 0, 45] | [1 0, 73] |
| IM ₃ | [— —] | [— —] | [0, 01 0, 2] |
| FC ₁₀₀ ^s | [0 0] | [—0, 01 0, 26] | [1 1] |
| IM ₂ ^s | [0 0] | [2, 1 2, 81] | [1 0, 66] |

TABLE 5.15 – Indicateurs d’erreur sur les premier et second pics ($f_0 = 14.33$ kHz et $2f_0 = 28, 67$ kHz) pour les différentes bases – Cas 5_9A

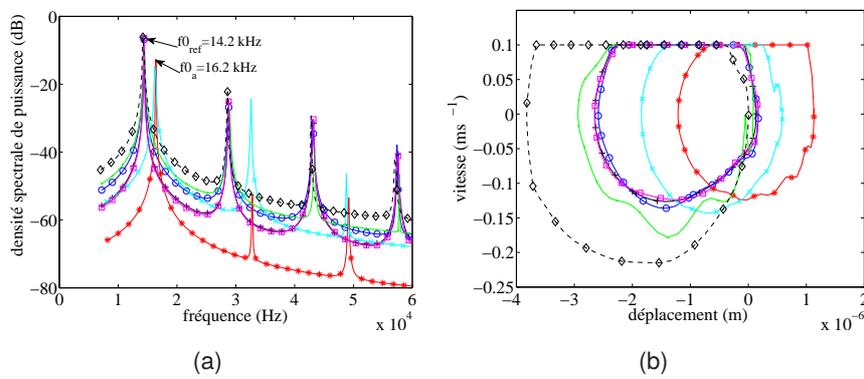


FIGURE 5.59 – Comparaison des bases pour le cas 5_9A, + : référence, o : FC₁₀₀, * : IM₁, · : IM₂, × : IM₃, □ : FC₁₀₀^s, ◇ en pointillés : IM₂^s – (a) FFT de l’état final, (b) Portrait de phase

La figure 5.59(a) montre l’impact des modes statiques sur l’amplitude des pics sur la FFT. Cet impact n’est pas forcément bénéfique : la base IM₂^s a une erreur en amplitude plus grande que IM₂.

La comparaison des portraits de phase sur la figure 5.59(b) montre que les bases FC₁₀₀, IM₂ et FC₁₀₀^s sont en bon accord avec la référence. La base IM₂^s a une amplitude un peu plus grande et les deux dernières bases ont une forme de cycle qui correspond plus au mode 9 qu’au mode 6.

La comparaison des amplitudes modales pour les modes 3, 6 et 9 sur la figure 5.60 montre que les bases IM₁ et IM₃ stabilisent un cycle composé du mode 9 seul, avec des amplitudes constantes des modes 3 et 6 à des niveaux très faibles. Cette figure indique également le fait que la réduction peut accélérer grandement l’évolution de la solution : les saturations des modes 3 et 6 surviennent avant $t = 0,06$ s pour les bases FC₁₀₀, FC₁₀₀^s, et IM₂^s, à $t = 0,075$ s pour IM₂ et seulement après $t = 0,1$ s pour la solution de référence. Cette accélération provient de deux effets : premièrement, les amplitudes des modes affectés changent grandement lors de la saturation du mode 9 ; ce changement est surestimé par beaucoup de bases réduites. De plus, les taux de croissance des modes sont aussi fréquemment mal estimés par les bases réduites. Ici toutes les bases ont tendance à les surestimer à part IM₂ qui les sous-estime. Cette mauvaise estimation peut expliquer les échecs des bases IM₁ et IM₃ qui sous estiment les contributions et taux de croissance des modes 3 et 6 lors de la saturation

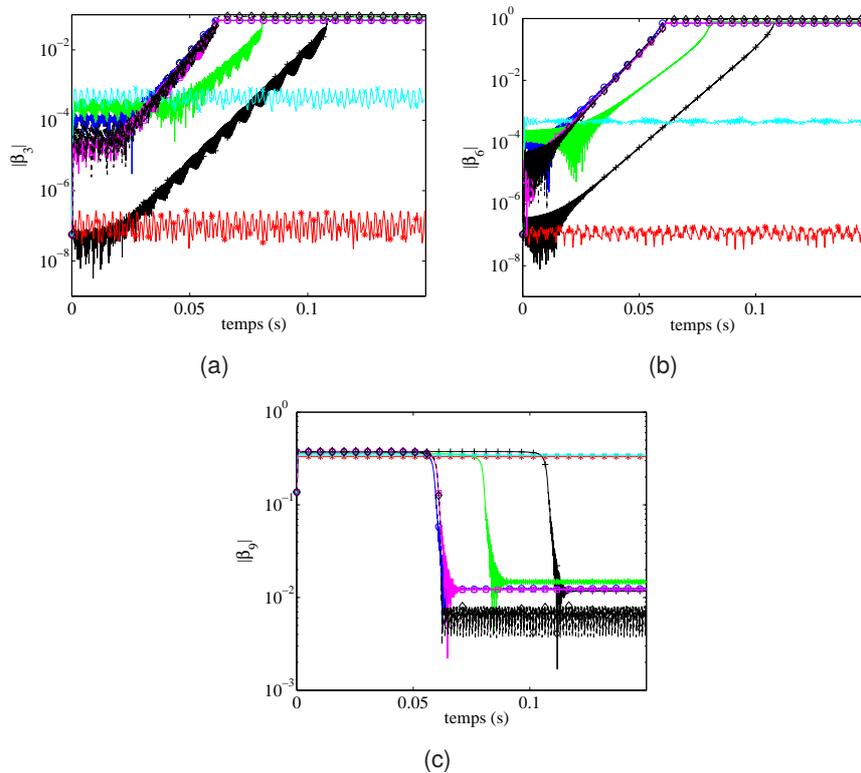


FIGURE 5.60 – Comparaison des projections modales pour le cas 5_9A, + : référence, o : FC₁₀₀, * : IM₁, · : IM₂, × : IM₃, □ : FC₁₀₀^s, ◇ en pointillés : IM₂^s – (a) Mode 3, (b) Mode 6, (c) Mode 9

du mode 9.

Finalement, les figures 5.61(a) et 5.61(b) donnent les évolutions temporelles des vitesses et déplacement tangentiels sur la zone de contact pour le calcul de référence et les bases IM₂ et FC₁₀₀^s. Si l'on compare les déplacement (figure 5.61(b)), on peut voir que les deux bases représentent correctement le comportement transitoire. En particulier, la première phase, avec la croissance de l'amplitude du mode 9 et la surintensité à t = 0,5 ms. La seconde phase est anticipée par les deux bases, mais mis à part ce décalage temporel, elle reste fidèle à la référence. La comparaison des vitesses (Figure 5.61(a)) donne des conclusions similaires. Cependant, dans la seconde phase, la base IM₂ montre une surestimation des vitesses.

5.5.2.6 Cas de réduction 6 – Cas 5_allS

Les bases de réduction sont maintenant testées sur le cas 5_allS. Ce cas s'avère être très sévère pour les différentes bases : FC₁₀₀^s correspond à l'unique base qui amène à des résultats satisfaisants. La caractérisation des trois pics principaux est donnée dans le tableau 5.16. Le tableau des indicateurs d'erreur 5.17 montre que la deuxième meilleure base est IM₁, avec une bonne représentation de la

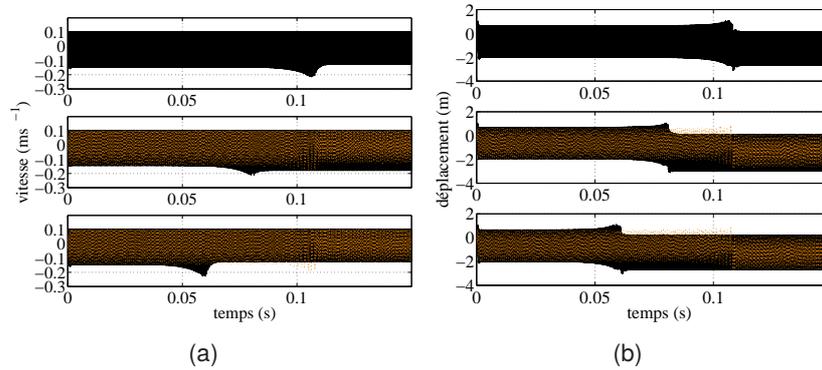


FIGURE 5.61 – Cas 5_9A – Comparaison des vitesse et déplacement tangentiels sur un nœud de contact. En haut : référence, au milieu : IM_2 , en bas : FC_{100}^s . Les points orange rappellent la référence. – (a) Vitesse tangentielle sur un nœud de contact, (b) Déplacement tangentiel sur un nœud de contact

| numéro de pic | fréquence kHz | amplitude J | dB |
|----------------------|---------------|-------------|-----|
| 1 (f_0) | 10,33 | 0,439 | |
| 2 ($\approx 3f_0$) | 31,33 | 0,005 | -19 |
| 3 ($\approx 2f_0$) | 21 | 0,002 | -23 |

TABLE 5.16 – Spectre en puissance cinétique pics – Cas 5_allS (référence)

fréquence et de la forme du premier pic mais avec une amplitude assez fausse. Toutes les autres bases donnent des solutions non comparables à la référence, avec des M-MAC proches de 0 pour les pics.

La comparaison des FFT (figure 5.62(a)) montre que mis à part FC_{100}^s , le cycle final obtenu par les différentes bases est gouverné par le mode 9. La base IM_1 a un cycle bi-harmonique avec les modes 3 et 9.

Les portraits de phase sur la figure 5.62(b) montrent que la réduction induit pour la plupart des bases des comportements totalement différents en zone de contact.

La projection sur les modes 3, 6 et 9 (c.f. figure 5.63) confirme le cycle en mode 9 capté par la plupart des bases. Les modes 3 et 6 ont des amplitudes oscillantes laissant penser que les modes des systèmes représentés par le modèle réduit sont bien plus affectés par la non-linéarité que ceux du système de référence.

| base | δf % | δa dB | M-MAC pic à pic |
|--------------------------------|--------------|---------------|-----------------|
| FC ₁₀₀ | [— —] | [— —] | [0 0] |
| IM ₁ | [0 —] | [-19,33 —] | [0,98 0,05] |
| IM ₂ | [— —] | [— —] | [0 0] |
| IM ₃ | [— —] | [— —] | [0,02 0,02] |
| FC ₁₀₀ ^s | [0 0] | [-0,09 0,51] | [1 0,97] |
| IM ₂ ^s | [— —] | [— —] | [0 0] |

TABLE 5.17 – Indicateurs d'erreur pour les premier et second pics principaux (à $f_0 = 10,33$ kHz et $3f_0 = 31,22$ kHz) – Cas 5_allS

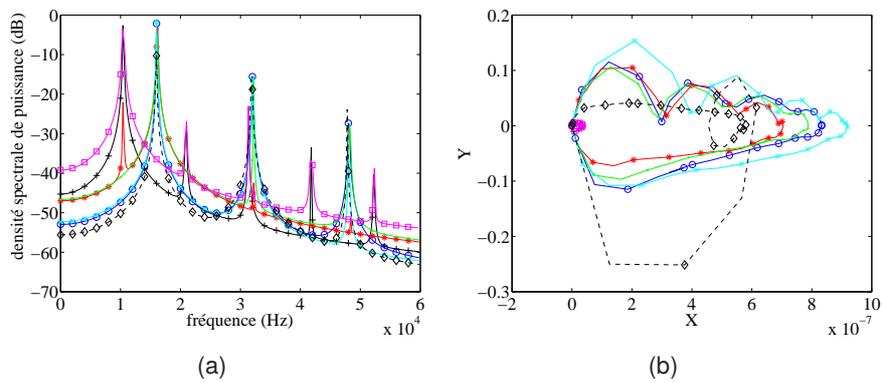


FIGURE 5.62 – Comparaison des bases pour le cas 5_allS, + : référence, o : FC₁₀₀, * : IM₁, · : IM₂, x : IM₃, □ : FC₁₀₀^s, ◇ en pointillés : IM₂^s – (a) FFT de l'état final, (b) Portrait de phase

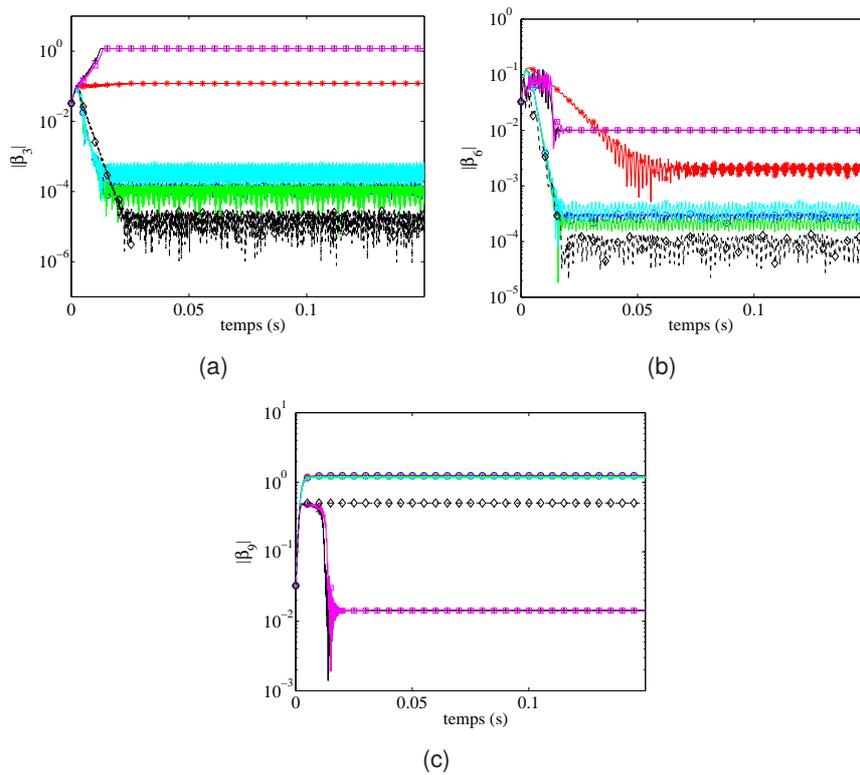


FIGURE 5.63 – Comparaison des projections modales pour le cas 5_allS, + : référence, o : FC₁₀₀, * : IM₁, · : IM₂, × : IM₃, □ : FC₁₀₀^s, ◇ en pointillés : IM₂^s – (a) Mode 3, (b) Mode 6, (c) Mode 9

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attaché à l'étude d'un système déstabilisé par le frottement dans lequel le mécanisme de déstabilisation correspond au phénomène de couplage de modes dû à une loi de contact de type Signorini-Coulomb. L'étude faite a porté à la fois sur la stabilité du système et sur son comportement en dynamique non-linéaire transitoire et stationnaire. Afin d'analyser et comprendre avec précision le comportement du système et l'évolution de la signature non-linéaire des réponses transitoires et stationnaires, divers outils ont été proposés (cycles limites, FFT, ondelettes CWT, critère M-MAC pic à pic et pic à mode ainsi que la projection sur les modes complexes). Une étude paramétrique a été menée en faisant varier les conditions de fonctionnements et les conditions initiales pour des systèmes comportant un nombre variable de modes instables. Il en est ressorti que pour les systèmes comportant peu de modes instables le cycle limite atteint ne dépend que des conditions de fonctionnement. Pour les systèmes avec plus de modes instables en revanche, deux attracteurs ont été observés pour chaque type de conditions de fonctionnement.

Dans un seconde partie, une démarche de réduction fondée sur une méthode de Ritz a été proposée. La construction de bases de réduction *a priori* a été développée à partir des observations menées sur le comportement dynamique du système de référence. Ces observations ont conduit à utiliser les modes complexes issus de l'analyse de stabilité ainsi qu'à formuler des choix sur les modes à sélectionner dans les bases en portant une attention particulière aux contributions non-linéaires et à l'ajout des modes statiques sur l'interface. Les différentes bases ainsi construites ont été testées sur le système de la couche 2D étudiée. La comparaison de ces simulations sur bases réduites avec les calculs de référence ont montré qu'une réduction précise d'un tel système est possible mais demande certaines précautions. L'inclusion des modes instables et des modes proches des harmoniques et combinaisons de leurs fréquences n'est pas une garantie suffisante pour l'obtention d'une solution fidèle à la référence. La seule solution donnant une réduction fiable dans l'ensemble des cas sur ce système est la prise en compte de tous les modes complexes dans une large bande de fréquence ainsi que l'inclusion des modes statiques de l'interface de contact.

Finalement, même avec les bases les plus complètes, il a été montré que la réduction peut entraîner une altération sensible de la solution transitoire, qui se traduit souvent par une anticipation des transitions dans les solutions réduites.

Chapitre 6

Application sur un modèle simplifié de frein TGV

Dans le chapitre précédent, le comportement d'un système simple déstabilisé par le frottement a été étudié pour diverses configurations de fonctionnement et conditions initiales. La capacité de différentes bases réduites à reproduire ce comportement a été éprouvée. Dans ce chapitre, l'application des méthodes développées à un modèle plus représentatif d'un frein TGV industriel est mise en œuvre. Cette application nécessite d'une part de vérifier que le passage d'un modèle 2D avec un nombre réduit de degrés de liberté à un modèle 3D avec un nombre plus élevé de degrés de liberté n'entraîne pas de problèmes numériques et d'autre part, afin de rendre cette étude la plus pertinente possible, d'obtenir un modèle aux éléments finis de frein TGV qui soit à la fois suffisamment proche du système réel tout en gardant une taille permettant d'effectuer quelques calculs de référence sans réduction.

6.1 Description du système réel

Le système de freinage TGV a été présenté au chapitre 1. Nous nous intéressons ici à ce système installé sur le banc d'essai de freinage de l'AEF décrit lors du chapitre 3. Ce système est donc constitué d'une timonerie TGV NG, d'un disque SEE et d'une partie garniture. Dans ce travail de thèse, nous nous concentrons, comme lors de l'étude expérimentale, sur la garniture GP1.

La timonerie TGV NG est donc constituée de 4 leviers amplificateurs, actionnés par un vérin et liés au bâti. Ces leviers portent les deux porte-garnitures, chacun d'entre eux recevant deux demi-garnitures. La timonerie comporte aussi un connecteur, qui sert de point d'appuis aux leviers. Les porte-garnitures sont reliés au bâti par l'intermédiaire de biellettes qui reprennent les efforts tangents de freinage et assurent un guidage des porte-garnitures afin de présenter une surface bien parallèle au disque. Sur la figure 6.1(a), on peut voir la timonerie seule fixée au banc d'essai. La figure 6.1(b) montre le disque de frein installé sur le banc. Pour terminer la présentation du système réel étudié, la figure 6.2 présente la garniture GP1.



(a) Timonerie NG



(b) Disque SEE

FIGURE 6.1 – Vue des éléments du système réel installés sur le banc d'essai de l'AEF



(a) Vue de face

(b) Vue de profil

(c) Vue de dos

FIGURE 6.2 – Garniture GP1

Dans la section suivante, nous tâcherons d'établir un modèle aux éléments finis de ce système qui soit à la fois représentatif tout en demeurant de taille modeste : l'un des objectifs restant de pouvoir statuer sur l'impact d'une réduction telle que proposée au chapitre précédent sur un cas plus industriel.

6.2 Choix du modèle aux éléments finis de frein TGV

Dans le cadre de l'étude numérique du crissement, on se limite au cas d'un disque avec ses garnitures et la timonerie associée. Dans cette section, nous présentons les choix de modélisation effectués afin de limiter la taille du modèle tout en restant physiquement proche du système réel. Les éléments pris en compte dans le modèle aux éléments finis sont : la cloche, le disque en acier, les garnitures et les porte-garnitures. Pour chacun de ces éléments, il faut choisir un degré de finesse de modélisation, trouver les bons paramètres pour la modélisation retenue et définir les conditions aux limites représentatives du système.

6.2.1 Modélisation du disque et de la cloche

Le disque correspond à une structure en acier plein relativement massive. Une modélisation par éléments volumiques paraboliques semble donc pertinente. Le maillage est paramétré par le nombre d'éléments dans l'épaisseur, celui dans une circonférence et celui le long d'un rayon.

Pour ce qui est de la cloche, la structure étant beaucoup plus mince que le disque, le choix d'éléments volumiques n'est pas le plus pertinent pour avoir le comportement correct de la sous-structure en maintenant un nombre raisonnable d'éléments. Le choix s'est donc porté vers des éléments de type coque, qui permettent d'avoir une bonne représentation de la cinématique de la cloche en gardant un nombre assez faible de degrés de liberté. La figure 6.3 montre le modèle aux éléments finis retenu pour cet ensemble. On pourra remarquer qu'une partie du disque est traitée différemment : il s'agit de la zone sur laquelle les garnitures vont s'appliquer. Le maillage a été établi de manière à être conforme à celui des plots de garniture, afin de rendre le traitement du contact possible par application directe

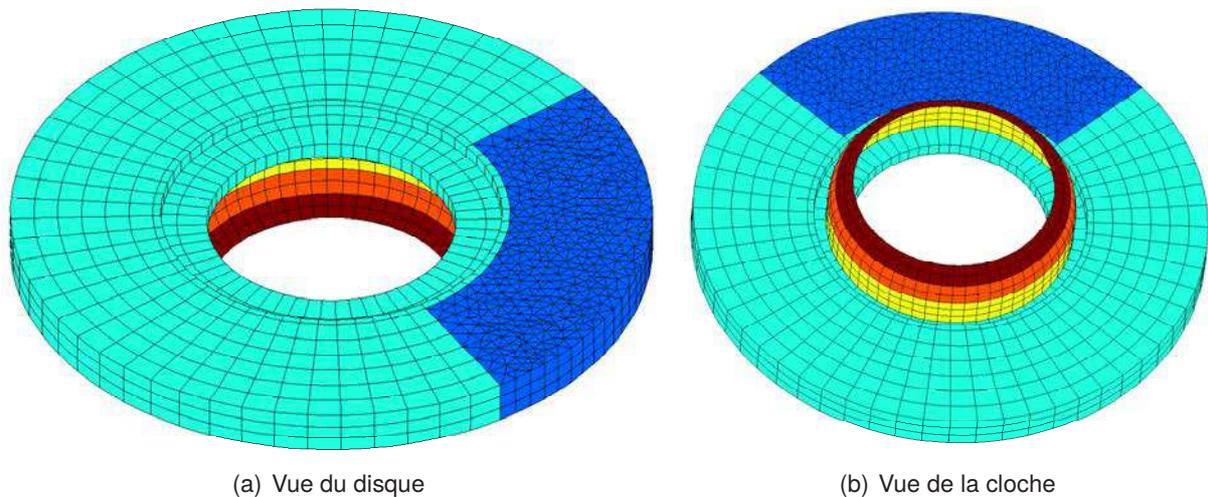


FIGURE 6.3 – Modèle aux éléments finis de l'ensemble disque-cloche

des méthodes choisies au chapitre 4 et testées sur la couche élastique 2D du chapitre 5. De plus, les éléments choisis sont de type quadratique, afin de mieux représenter le comportement modal du disque, sauf en zone de contact où l'on applique une linéarisation de ces éléments afin de pouvoir traiter le contact sur les efforts généralisés et les déplacements aux nœuds plutôt que de passer par les pressions locales.

6.2.2 Modélisation de la garniture, du porte-garniture et de la timonerie

Compte-tenu de la complexité du système complet, il a été décidé de simplifier le plus possible le modèle étudié. Toute la partie timonerie sera donc reportée en conditions aux limites sur le porte-garniture. Les plots de garniture sont modélisés par des éléments volumiques paraboliques. Le porte-garniture est quant à lui modélisé par un solide rigide. La figure 6.4 montre le modèle aux éléments finis de l'ensemble garniture/porte-garnitures. Ce modèle permet de respecter les différentes inerties de la pièce sans ajouter beaucoup de degrés de liberté. Ce porte-garniture est lié au bâti par différentes raideurs d'attache. Lorang [75] utilisait pour prendre en compte l'effet du porte-garniture une masse répartie sur la surface des plots et Brizard [13] des plots dont les faces supérieures sont encastrées. La prise en compte des inerties réelles du porte-garniture ainsi que de ses raideurs d'attache permet de rendre compte de son impact sur le système. Il est aussi possible de prendre en compte des modèles plus raffinés de porte-garnitures tels qu'une plaque, mais le raffinement procuré n'est pas intéressante au regard de l'augmentation du nombre de degrés de liberté que cela induit [21].

Concernant le choix des lois de comportement des différentes parties, on s'est orienté vers des matériaux élastiques isotropes. Ce choix est tout à fait justifié pour les pièces en acier. En revanche, le matériau de friction est un matériau orthotrope et ce choix est donc une approximation supplémentaire dans le modèle. Cependant, lors du recalage des différents paramètres, la prise en compte de

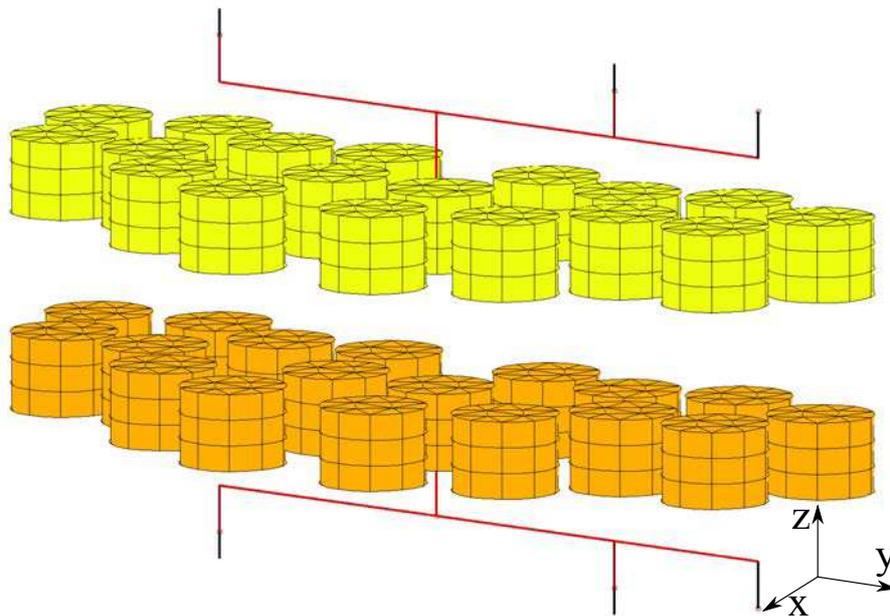


FIGURE 6.4 – Modèle aux éléments finis de l'ensemble garnitures/porte-garnitures

l'orthotropie n'a pas apporté de différences significatives vis-à-vis des critères considérés. Elle a donc été laissée de côté pour préserver la simplicité du modèle. En ce qui concerne l'amortissement, un modèle de Rayleigh par morceaux a été choisi. Deux zones sont prises en compte : d'un côté le disque et la cloche, de l'autre les garnitures et les porte-garnitures.

Le modèle aux éléments finis global ainsi obtenu comporte un total de 72685 degrés de liberté, dont 49473 pour l'ensemble disque/cloche et 23212 pour les garnitures et porte-garnitures. La zone de contact potentielle comporte 504 paires de nœuds en vis-à-vis, soit un total de 3024 degrés de liberté. Bien qu'il s'agisse d'un modèle simplifié, le nombre de degrés de liberté est important pour mener des simulations en dynamique non-linéaire transitoire avec une zone de contact à gérer assez étendue.

Dans ce modèle, il reste un grand nombre de paramètres à fixer. En particulier, les raideurs d'attache des porte-garnitures sont très difficiles à estimer : certaines d'entre elles correspondent à des sollicitations bien identifiées de certaines pièces de la timonerie, d'autres mettent en jeu des liaisons complexes, dans lesquelles des jeux interviennent, ou encore des éléments tels que le maître-cylindre.

Pour trouver la valeur optimale de ces différents paramètres, une démarche de recalage de certains d'entre eux a été mise en place.

6.2.3 Recalage des paramètres sur FRF

Les différents éléments du système ont été caractérisés expérimentalement par la société Vibratec durant le projet Acoufren [117–119]. Tous les paramètres extractibles de cette caractérisation ont été introduits dans la modélisation retenue. Ensuite, nous avons procédé au recalage de certains paramètres physiques. Dans un premier temps ce recalage a porté sur le système disque/cloche, puis dans un second temps sur le système complet serré sous couple.

6.2.3.1 Mise en œuvre d'une démarche de recalage

Pour le recalage du système disque/cloche, les FRF mesurées par l'AEF lors de la campagne d'essai après fissuration du disque ont été utilisées, d'une part pour extraire les paramètres α et β de l'amortissement de Rayleigh et d'autre part pour recalculer légèrement les modules de Young et les masses volumiques du disque et de la cloche. Ce recalage ne considère que de faibles variations d'un nombre restreint de paramètres. Il a donc été effectué par itérations manuelles et estimation des décalages fréquentiels induits par une petite variation des paramètres considérés. La figure 6.5 montre une comparaison des FRF expérimentale et simulée après recalage.

Pour le recalage du système complet sous couple, le nombre de paramètres physiques à recalculer étant bien plus important, la méthode manuelle n'a pas été envisagée. Nous nous sommes donc tournés vers une méthode d'optimisation de type algorithme génétique mono-objectif [22] avec pour but de minimiser l'écart entre une FRF mesurée sur le disque et celle simulée.

Inspiré par les théories évolutionnistes [28], le principe des algorithmes génétiques ou évolutionnaires, illustré sur la figure 6.6, est assez simple : on part d'une population initiale de k individus définis par p paramètres, et on les évalue suivant une fonction coût f_c . On sélectionne les meilleurs d'entre eux : les individus *parents*. On effectue alors une opération de croisement entre ces individus, ce qui donne des individus *enfants*. Et l'on procède à la mutation – faible variation aléatoire des paramètres – de certains individus *parents* suivant une règle probabiliste. Les individus ainsi obtenus sont réinsérés en remplaçant les individus les moins bons de la population initiale. Ce processus constitue une *génération* et est itéré g fois.

L'avantage de ces algorithmes est qu'ils permettent de mener une optimisation globale (qui évite les minima locaux) sans nécessiter d'autres connaissances que l'évaluation de la fonction à minimiser. Ceci permet une utilisation sur des fonctions *boîtes noires*. En revanche, le principal défaut de ces méthodes est le grand nombre d'évaluations de la fonction coût requis : $k \times g$.

La distinction entre algorithme génétique ou évolutionnaire repose sur le fait de coder les p variables ou non. Lorsqu'un codage est utilisé, on parle d'algorithme génétique. L'utilisation d'un codage permet de faciliter les opérations de croisement en imitant là encore la nature pour faire un échange de chromosomes. Lorsque l'on n'utilise pas de codage, la représentation de variables discrètes ou booléennes devient plus difficile. En particulier l'opération de croisement doit être bien réfléchie sur ces variables.

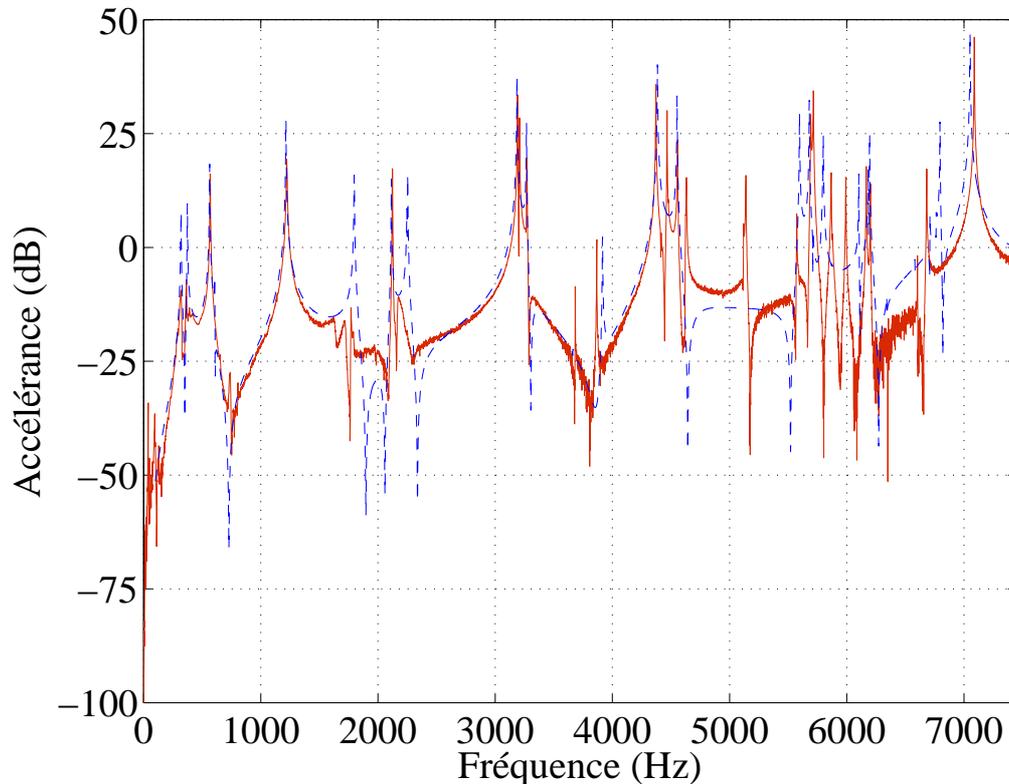


FIGURE 6.5 – Recalage des FRF du système disque et cloche. — : mesure, - - : simulation

Il existe un grand nombre de subtilités que l'on peut introduire dans ce type d'algorithme qui créent diverses variantes pouvant se révéler adaptées à des problèmes particuliers. Les algorithmes génétiques sont assez simples à mettre en œuvre par rapport à d'autres méthodes heuristiques. En revanche, leur grande flexibilité permet aussi d'introduire une grande complexité qui peut avoir des effets peu contrôlables.

L'ensemble des paramètres à recalculer est donné sur le tableau 6.1. Lorsqu'il s'agit de paramètres matériau, leur valeur initiale a été choisie en accord avec les caractérisations effectuées par la société Vibratéc [119, 120]. En ce qui concerne les raideurs d'attache du porte-garniture, la valeur initiale a été choisie à partir d'estimations faites sur les plans de la timonerie, en prenant une valeur arbitrairement faible de 100 N/m ou 100 Nm/rad lorsque la raideur correspond à un mouvement permis par une liaison. Enfin, la raideur axiale initiale du cylindre de frein a été prise égale à celle supposée par la société Vibratéc dans ses études. Dans le modèle utilisé, la raideur de l'étrier correspond à la raideur obtenue par les raideurs des leviers et du cylindre de frein en série. Lors du recalage, c'est cet unique paramètre qui est considéré et non les raideurs des leviers et du cylindre séparément.

Afin de lancer un algorithme d'optimisation pour recalculer un système, la première étape consiste à exprimer une fonction coût à minimiser qui représente effectivement l'écart entre le modèle et la mesure. Ici, le choix a été fait de comparer les FRF mesurées avec une excitation sur la garniture

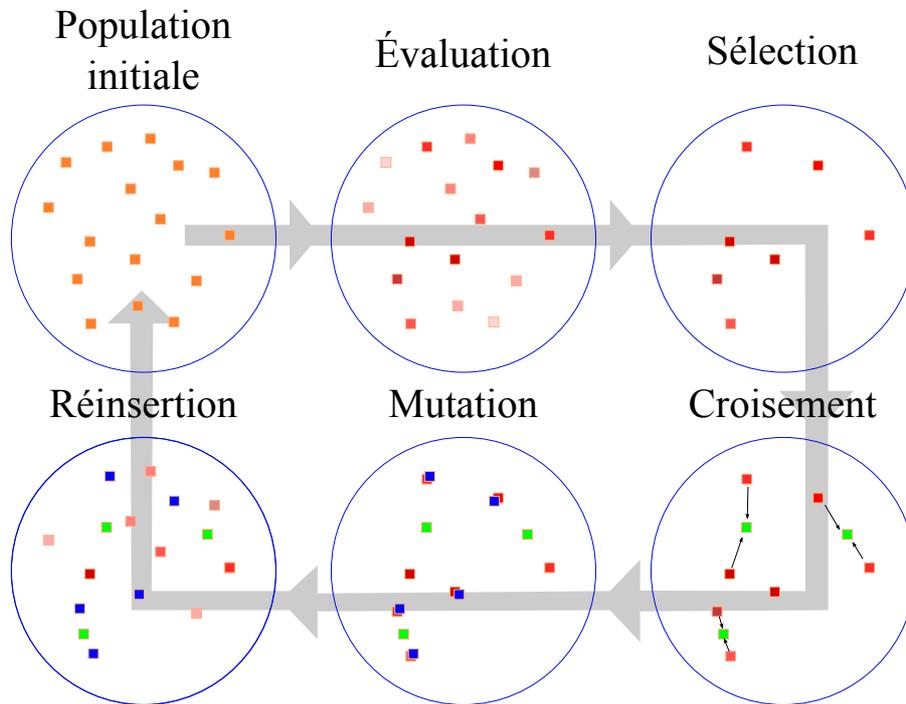


FIGURE 6.6 – Principe de l'algorithme génétique – Processus sur une génération

et un point de mesure sur le disque. Compte tenu du fait que le modèle de garniture retenu est très simplifié, ce choix permet de mesurer l'impact du modèle sur le comportement du disque, qui bénéficie d'une modélisation plus réaliste. La question qui se pose alors est d'obtenir une fonction qui exprime la ressemblance entre deux FRF. Les choix suivants ont été envisagés :

- ◆ (C1) comparaison des tracés semi-log des amplitudes des FRF ;
- ◆ (C2) comparaison des FRF complexes en norme L2 ;
- ◆ (C3) calcul de la cohérence entre les deux FRF ;
- ◆ (C4) comparaison des 10 principaux pics (position p_i , amplitude a_i et largeur w_i).

Le tableau 6.2 donne l'expression des fonctions coût associées à ces critères. Le premier critère correspond à la démarche la plus intuitive et la plus proche de celle faite manuellement sur le disque seul. Le deuxième permet quant à lui de préserver les informations sur la phase. Le troisième critère est sans aucun doute le moins physique de tous les critères proposés, l'idée sous-jacente dans ce critère est de capturer l'allure de la FRF plutôt que des écarts moyennés sur l'ensemble de la bande de fréquence considérée. Effectivement, si les deux premiers critères mesurent des écarts objectifs, ils moyennent l'erreur si bien que le résultat de l'optimisation risque d'être une FRF qui ne capte aucun comportement local en fréquence mais qui n'est très « fausse nulle part ». Finalement le dernier critère permet d'assurer un comportement modal proche entre les deux systèmes.

Deux optimisations ont été effectuées. La première porte sur le critère C1, tandis que la seconde porte

| paramètre | variable |
|--|------------|
| amortissement Rayleigh garniture et porte-garniture en masse | α |
| amortissement Rayleigh garniture et porte-garniture en raideur | β |
| raideur de traction biellette x | k_{tbx} |
| raideur de traction biellette y | k_{tby} |
| raideur de traction biellette z | k_{tbz} |
| raideur de rotation biellette x | k_{rbx} |
| raideur de rotation biellette y et z | k_{rbyz} |
| raideur de traction étrier x | k_{tex} |
| raideur de traction étrier y | k_{tey} |
| raideur de traction étrier z | k_{tez} |
| raideur de rotation étrier x | k_{rex} |
| raideur de rotation étrier y | k_{rey} |
| raideur de rotation étrier z | k_{rez} |

TABLE 6.1 – Paramètres pour le recalage du système complet

| critère | expression |
|---------|---|
| C1 | $\ 20 \log(FRF_{simu}) - 20 \log(FRF_{mes})\ $ |
| C2 | $\ FRF_{simu} - FRF_{mes}\ $ |
| C3 | $1 - \text{moy}(\text{cohere}(FRF_{simu}, FRF_{mes}))$ |
| C4 | $\left\ \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{10} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{10} \\ w_1 & w_2 & \dots & w_{10} \end{bmatrix}_{simu} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{10} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{10} \\ w_1 & w_2 & \dots & w_{10} \end{bmatrix}_{mes} \right\ $ |

TABLE 6.2 – Expressions des fonctions coût liées à chaque critère

sur une agrégation des trois autres critères. La solution donnée par le premier critère sera appelée S1, et la deuxième S2. Compte tenu du coût élevé de calcul des FRF nécessaires à l'évaluation des fonctions coûts, nous avons appliqué certaines restrictions : les FRF sont calculées sur la bande de fréquence 50 – 5000 Hz avec un pas fréquentiel de 10 Hz et la population pour l'optimisation génétique est limitée à 20 individus. Afin de garantir la pertinence des solutions proposées, l'optimisation génétique est complétée par un algorithme de type *steepest descent* avec estimation numérique des gradients. Cette étape permet d'acquérir un niveau de confiance dans l'atteinte d'un minimum local de la fonction coût ; il s'agit d'une étape assez classique lors de l'emploi d'algorithmes heuristiques tels que les algorithmes génétiques, car si ces derniers sont adaptés pour se rapprocher du minimum global d'une fonction non-convexe, une fois que la solution est suffisamment proche de ce minimum, ils sont bien plus lents à converger que des algorithmes locaux déterministes.

La figure 6.7 montre la comparaison des deux optimisations avec la FRF expérimentale. Les résultats de ces deux optimisations sont différents, et ceci montre bien la difficulté de quantifier la ressemblance entre des FRF. Il est manifeste que la solution S1 est insuffisamment amortie, tandis que la solution S2 est sur-amortie hormis à très basse fréquence. On pourra remarquer que les deux solutions présentent un dédoublement du pic à 1300 Hz qui est absent de la garniture cible. Le tableau 6.3 montre

| variable | S1 | S2 | valeur initiale |
|------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| α | 697 s^{-1} | 2530 s^{-1} | 150 s^{-1} |
| β | $1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ | $4,9 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ | $1,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ |
| k_{tbx} | $3,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ | $1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}$ | $4,7 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ |
| k_{tby} | $7,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}$ | $2 \cdot 10^9 \text{ N/m}$ | $6,05 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ |
| k_{tbz} | 130 N/m | 2000 N/m | 100 N/m |
| k_{rbx} | 670 N/rad | 3700 N/rad | 100 N/rad |
| k_{rbyz} | $1,5 \cdot 10^4 \text{ N/rad}$ | $7,4 \cdot 10^6 \text{ N/rad}$ | $4,05 \cdot 10^4 \text{ N/rad}$ |
| k_{tex} | $1 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ | $1,3 \cdot 10^{12} \text{ N/m}$ | $2,42 \cdot 10^9 \text{ N/m}$ |
| k_{tey} | $4,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ | $1,7 \cdot 10^9 \text{ N/m}$ | $7,05 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ |
| k_{tez} | $2,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ | $4,2 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ | $1,99 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ |
| k_{rex} | $9,6 \cdot 10^4 \text{ N/rad}$ | $4,3 \cdot 10^5 \text{ N/rad}$ | $3,4 \cdot 10^3 \text{ N/rad}$ |
| k_{rey} | 607 N/rad | $1,9 \cdot 10^4 \text{ N/rad}$ | 100 N/rad |
| k_{rez} | $3,5 \cdot 10^5 \text{ N/rad}$ | $8,4 \cdot 10^5 \text{ N/rad}$ | $3,78 \cdot 10^5 \text{ N/rad}$ |

TABLE 6.3 – Résultats pour les deux optimisations S1 et S2

les valeurs des paramètres trouvées par les deux optimisations. On peut remarquer que la solution S1 reste assez proche des valeurs estimées à partir des plans, tandis que sur certains paramètres, la solution S2 s'en éloigne fortement. La solution S2 est globalement beaucoup plus raide. On pourra aussi noter que l'amortissement introduit dans la solution S2 est extrêmement fort. Les limitations du modèle d'amortissement de Rayleigh se font sentir sur cette optimisation : il est impossible de trouver une valeur convenable sur l'ensemble de la bande de fréquence, qui est déjà une plage faible comparée à celle d'intérêt pour le crissement. Cette insuffisance du modèle d'amortissement est très visible sur la phase de *steepest descent* pour la solution S2, où l'algorithme tente de corriger β vers une valeur négative pour compenser le fort amortissement ; bien entendu, cette valeur est rejetée pour des raisons physiques. Une extension possible du modèle d'amortissement serait de rajouter des amortissements modaux en paramètres de l'optimisation : il s'agirait typiquement d'ajouter à un amortissement de Rayleigh une matrice dont la projection dans la base des modes réels est diagonale et serait définie par quelques coefficients et une interpolation linéaire entre chacun d'eux. Cependant, cette démarche ne sera pas réalisée ici. La problématique d'une représentation juste de l'amortissement réel présent dans le système est très délicate à traiter et sort du cadre de l'étude. De plus, il est bon de se rappeler que, lors du crissement, les phénomènes de dissipation par frottement jouent aussi un rôle important, et qu'un meilleur modèle d'amortissement structural n'est donc pas une garantie de meilleur accord entre les simulations de crissement et l'expérience. En ne considérant que les FRF, les deux optimisations proposées semblent pertinentes pour représenter des garnitures.

6.2.3.2 Sélections d'une des deux solutions

La modélisation que nous voulons obtenir doit être adaptée à la simulation du crissement. De ce point de vue, l'analyse de stabilité est *a priori* très discriminante. Afin de faire un choix entre les deux optimisations trouvées, une analyse de stabilité est pratiquée sur chacune d'entre elles. Nous rappo-

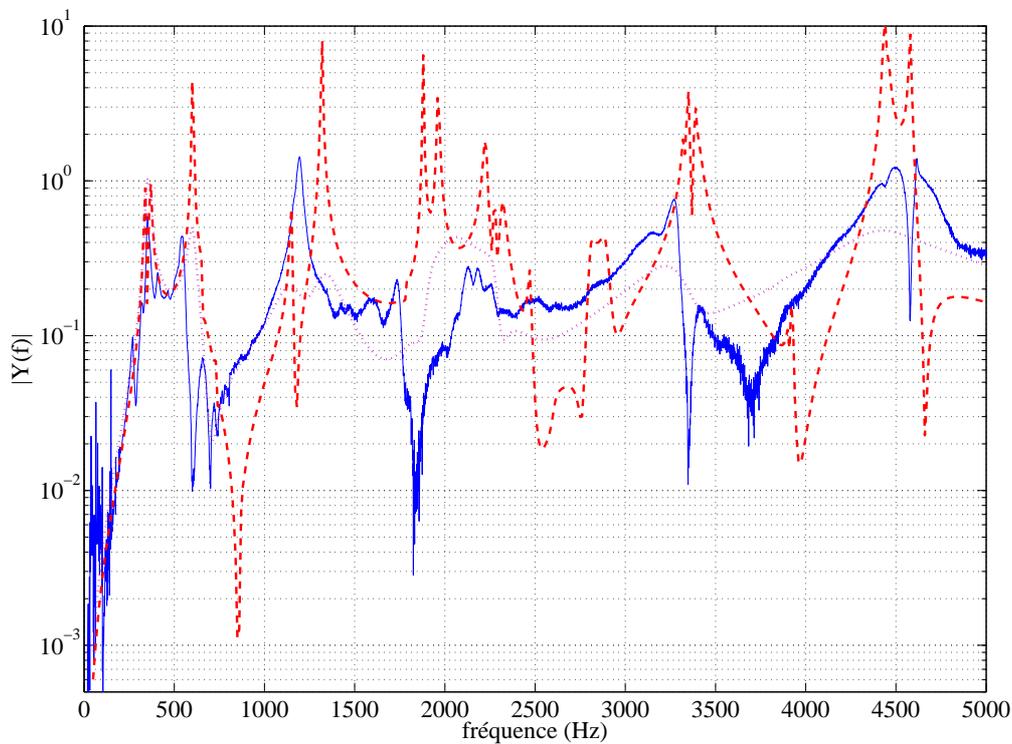
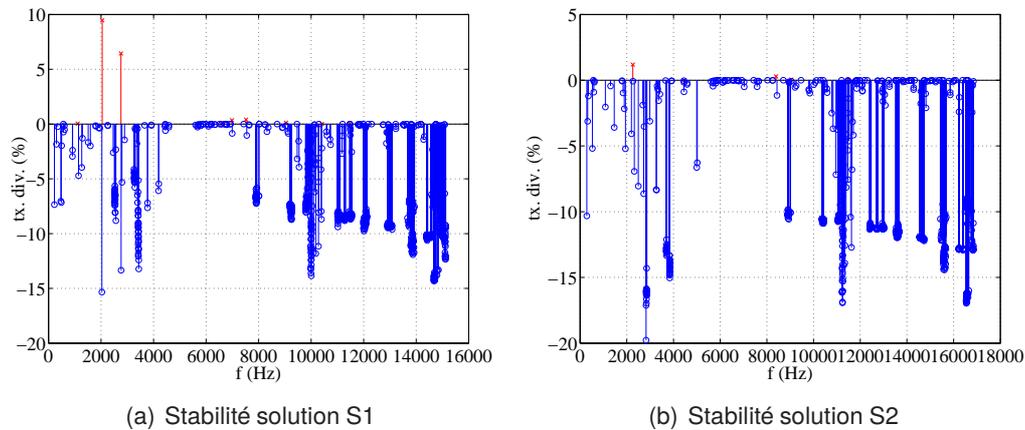


FIGURE 6.7 – Comparaison des FRF (accélérances) simulées et mesurées pour la garniture GP1 :
 — : mesure, - - - : S1 et . . . : S2

lors qu'une analyse de stabilité ne peut être comparée directement à des apparitions de crissement étant donné que cette analyse ne donne d'informations que sur l'état d'équilibre statique linéarisé en un point de fonctionnement tandis que le crissement correspond à la signature non-linéaire dynamique [107]. L'objectif de cette partie est donc uniquement de statuer sur une éventuelle ressemblance entre l'apparition des modes instables (l'analyse de stabilité) et la signature non-linéaire du crissement (extraite des essais). Comme évoqué au chapitre 4 section 4.4.2, le calcul des modes complexes peut être problématique. C'est le cas pour la solution S2, du fait du fort contraste présent dans la matrice d'amortissement entre le disque et la garniture. En pratique, en utilisant l'algorithme standard d'itération sur les résidus, le calcul ne converge que si l'on diminue drastiquement l'amortissement ou le frottement. Afin de pallier ce problème, la normalisation des bases successives par la matrice d'amortissement et l'ajout d'un enrichissement optimal calculé à partir de la raideur dynamique estimée du mode associé au plus grand résidu permet une convergence acceptable. Ces modifications rendent néanmoins l'algorithme bien plus coûteux, l'enrichissement optimal demandant la résolution d'un système de grande taille non-symétrique et différent à chaque itération.

La comparaison des analyses de stabilité avec les occurrences expérimentales de crissement est donnée sur la figure 6.8, et le tableau 6.4 liste les propriétés des modes instables. La solution S1 comporte



| fréquence Hz | Δf Hz | occurrence |
|--------------|---------------|------------|
| 1200 | 200 | 100 % |
| 1700 | 200 | 100 % |
| 2150 | 150 | 79 % |
| 2500 | 100 | 54 % |
| 3400 | 200 | 92 % |
| 3900 | 100 | 33 % |
| 4600 | 200 | 38 % |
| 5800 | 0 | 8 % |
| 7150 | 50 | 21 % |
| 8500 | 0 | 8 % |
| 10700 | 0 | 4 % |

(c) Occurrences de crissement sur les essais pour la garniture GP1

FIGURE 6.8 – Comparaison de la stabilité des solutions S1 et S2 aux occurrences de crissement

9 modes instables tandis que S2 n'en comporte que 6. En particulier la solution S1 présente un mode instable à 6580 Hz. Ce qui est très cohérent avec l'apparition quasi systématique de cette fréquence en gare et son observation, non-systématique, lors des essais au banc du projet CRISFIS [113]. La solution S2 ne présente pas cette instabilité. On pourra noter que la solution S2 ne présente d'accord raisonnable avec les apparitions de crissement en essais que pour son mode instable de plus basse fréquence, ce qui correspond à la plage fréquentielle où son amortissement est réaliste. L'utilisation d'un modèle plus fin que celui de Rayleigh pour l'amortissement pourrait permettre d'obtenir une stabilité du système en meilleur accord sur toute la plage fréquentielle.

Au vu des résultats des analyses de stabilité, il semble plus raisonnable d'utiliser la solution S1 pour la simulation temporelle du frein TGV avec une garniture GP1. De plus, ses paramètres sont les plus proches de ceux estimés initialement, et donc le degré de confiance dans la pertinence physique de ces derniers est plus fort que pour la solution S2. C'est donc ce choix qui est effectué pour la suite de cette étude. Comme il a été fait pour la couche élastique 2D, nous allons procéder à une

| S1 | S2 |
|------------------|-----------------|
| [1110; 0, 047] | [2255; 1, 18] |
| [2050; 9, 470] | [4447; 0, 011] |
| [2760; 6, 442] | [8397; 0, 295] |
| [6580; 0, 006] | [9049; 0, 0473] |
| [6980; 0, 344] | [11492; 0, 009] |
| [7530; 0, 403] | [13815; 0, 013] |
| [9050; 0, 122] | – |
| [10410; 0, 0001] | – |
| [11480; 0, 03] | – |

TABLE 6.4 – Stabilité des solutions S1 et S2 – Modes instables, [Fréquence (Hz) ; Taux de divergence (%)]

simulation temporelle de ce modèle non-réduit afin de vérifier que le comportement prédit par le modèle est cohérent avec l'expérience. En effet, nous rappelons que seule une comparaison des simulations temporelles avec les occurrences de crissement est pertinente car l'analyse de stabilité ne correspond qu'à l'étude d'un point d'équilibre statique et non du comportement dynamique non-linéaire du système. À ce titre, elle ne peut donner qu'une information limitée sur la concordance entre fréquences crissantes et modèle numérique. Ensuite, nous procéderons à la comparaison de la simulation réduite sur une base de type FC_{1000}^s afin d'évaluer la capacité à mener des calculs réduits par une méthode de Ritz pour la simulation d'un système crissant représentatif d'un frein TGV.

6.3 Simulations temporelles sur le modèle simplifié de frein TGV

6.3.1 Caractérisation de la stabilité du système

Nous nous intéressons ici de plus près à la stabilité du système de frein TGV simplifié sur lequel nous mènerons une simulation temporelle de référence. En particulier, nous nous intéresserons à la caractérisation des déformées modales associées aux modes instables. Nous choisissons ici comme paramètres de fonctionnement un effort de 8 kN et une vitesse du train de $14,4 \text{ kmh}^{-1}$, les biellettes travaillant en compression comme on peut le voir sur la solution quasi statique représentée sur la figure 6.9. L'effort retenu correspond à l'une des configurations testées lors de la campagne d'essais décrite au chapitre 3, et la vitesse correspond à une vitesse en milieu de freinage d'arrêt sur les configurations où la vitesse initiale est de 25 kmh^{-1} . Le système avec les paramètres S2 comporte donc 9 modes instables dont les fréquences et taux de divergence sont donnés par le tableau 6.5. Deux modes instables, le deuxième et le troisième, ont des taux de divergence assez importants tandis que les autres sont plutôt faibles, en particulier pour les modes au dessus de 3000 Hz

La figure 6.10 montre la répartition énergétique de ces déformées parmi les quatre composants suivants : le disque, la cloche, les plots et le porte-garniture. On peut voir qu'en dessous de 3000 Hz, les

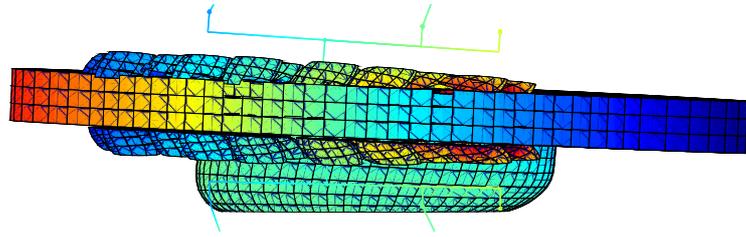


FIGURE 6.9 – Solution quasi statique sur le modèle de frein TGV simplifié

| Mode instable | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| Fréquence (Hz) | 1110 | 2050 | 2760 | 6580 | 6980 | 7530 | 9050 | 10410 | 11480 |
| taux de divergence (%) | 0,047 | 9,470 | 6,442 | 0,006 | 0,344 | 0,403 | 0,122 | 0,0001 | 0,03 |

TABLE 6.5 – Fréquences et taux de divergence des 9 modes instables dans la plage 0 – 15000 Hz pour les paramètres S1

modes instables semblent plutôt concerner les parties fixes (plots et porte-garnitures) tandis que les modes instables suivant sont principalement des modes de disque ou de disque/cloche.

La figure 6.11 montre les déformées des 9 modes instables de la solution S1. On pourra remarquer que dans les modes instables de disque, on a deux modes essentiellement plans. Il s'agit des modes à 6580 Hz et à 10410 Hz. La présence de ces deux modes dans des essais peut toutefois paraître étonnante au vu de l'analyse de stabilité car ce sont, parmi les modes instables, ceux qui présentent les plus faibles taux de divergence, pourtant la fréquence 6580 Hz est bien une fréquence qui ressort souvent en crissement en gare. Comme nous avons pu l'observer sur la couche élastique dans le chapitre 5, ce n'est pas nécessairement le mode le plus instable qui est prépondérant dans le cycle limite.

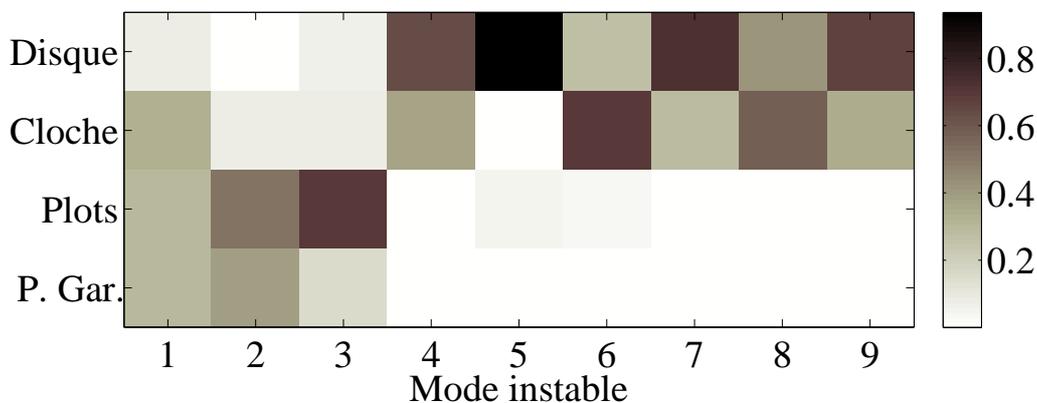


FIGURE 6.10 – Répartition énergétique des déformées modales dans les composants du frein

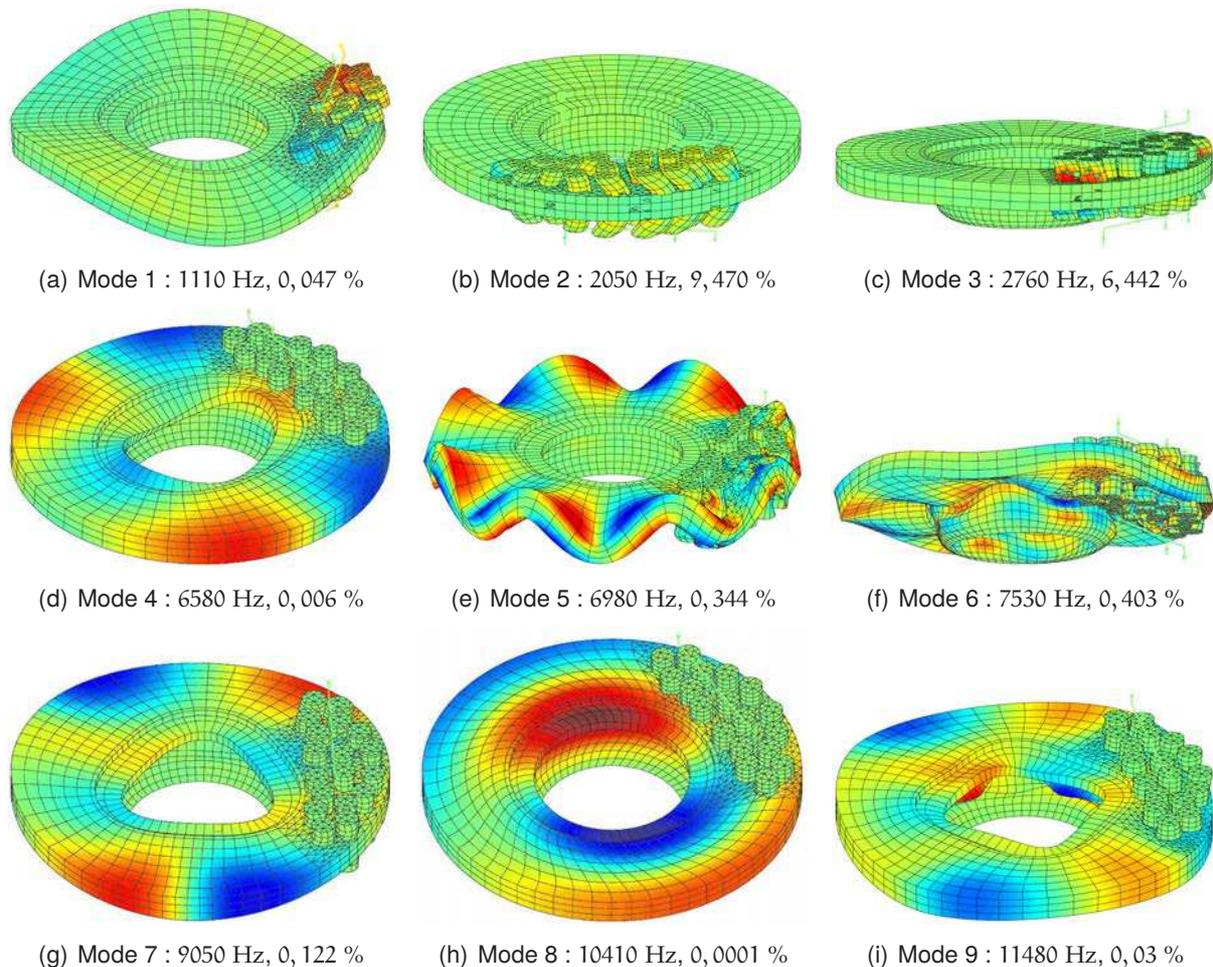


FIGURE 6.11 – Déformées modales des modes instables pour la solution S1

Si l'on s'intéresse aux taux de l'ensemble des modes complexes dans la plage de fréquence 5000 – 6000 Hz on pourra voir que beaucoup de modes stables ont aussi des taux presque nuls. Compte tenu de la forte sensibilité des problèmes aux valeurs propres non-symétriques, on se rend bien compte qu'il est difficile de caractériser de manière fiable la stabilité du système. On a pu voir dans la section précédente 6.2.3 que la stabilité de la solution S2 montre aussi des modes stables à taux presque nuls. Il semble donc que l'architecture même du système de frein TGV favorise l'apparition de modes à très faible de taux de divergence, ce qui rend l'exploitation de l'analyse de stabilité difficile et pose la question du comportement de ces modes dans les simulations temporelles.

6.3.2 Simulation temporelle sur le modèle de référence

Compte tenu de l'expérience acquise au chapitre 5, il a été décidé de prendre une condition initiale suivant l'ensemble des modes instables. En reprenant la nomenclature introduite alors pour les condi-

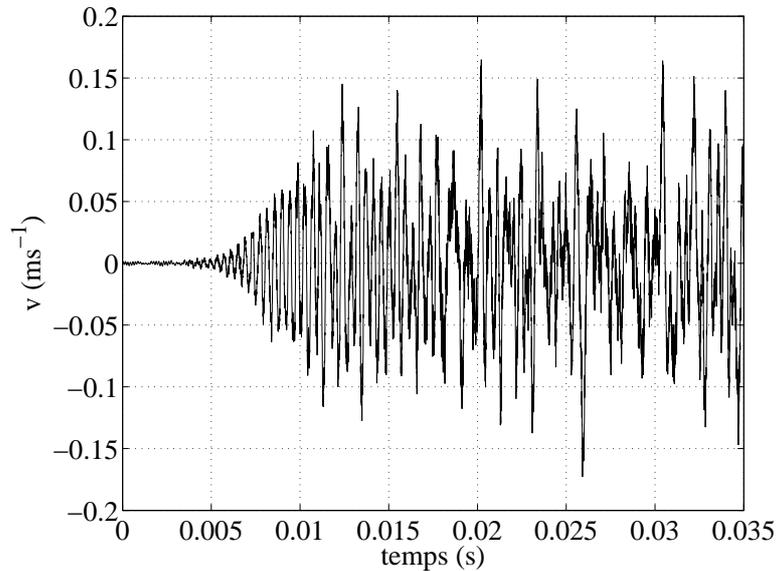


FIGURE 6.12 – Vitesse normale sur le disque – Point « vibromètre »

tions initiales, la simulation présentée ici correspond à un cas 9_allS, les neuf modes instables du système étant initiés à une contribution énergétique égale, et le premier événement non-linéaire fort susceptible de se produire étant du décollement en zone de contact. Contrairement au cas de la couche, il est important de remarquer que la linéarisation est faussée dès le début de la simulation du fait de la possibilité de changement de direction de l'effort de frottement dans les cas 3D. La figure 6.12 montre l'évolution de la vitesse normale sur le disque en un point correspondant au point de mesure vibrométrique lors des essais.

On peut voir que l'amplitude vers la fin de la fenêtre temporelle est comprise entre 8 et 18 cms^{-1} , ce qui est parfaitement compatible avec les ordres de grandeurs disponibles pour le crissement. Une estimation des niveaux acoustiques en champ proche à l'aide de l'expression $L_p = 20 \log \left(\frac{\rho_0 c v}{p_0} \right)$, où ρ_0 est la masse volumique de l'air, c est la célérité des ondes acoustiques, v la vitesse du point considéré et p_0 le seuil de perception de variation de pression par l'oreille humaine, donne alors un niveau compris entre 122 et 130 dB, ce qui est une valeur crédible pour du crissement de frein TGV en champ proche.

Cette première approche montre que la simulation effectuée a donné des résultats vraisemblables d'un point de vue physique. Nous allons maintenant étudier plus en détail cette solution, dans un premier temps par rapport aux caractéristiques du modèle, puis dans un second temps par comparaison aux données expérimentales collectées lors de la campagne d'essais.

6.3.3 Accord entre simulation non-linéaire et analyse de stabilité

Nous avons vu que le système de référence comportait neuf modes instables dont nous avons donné les caractéristiques précédemment. Lors d'une simulation temporelle, on s'attend donc à avoir un comportement croissant de l'amplitude de la plupart de ces modes, avec une compétition plus ou moins complexe conduisant à la disparition progressive de certains d'entre eux et à la stabilisation à des amplitudes non-négligeables d'un ou plusieurs modes dominants dans un éventuel cycle final.

La simulation a été effectuée sur une durée de 35 ms, il convient donc de se poser la question de la stabilisation de la solution sur cet intervalle de temps. La figure 6.12 laisse supposer qu'on est encore loin de cette stabilisation. La figure 6.13 montre la comparaison des FFT dans l'ensemble de la structure sur les 5 premières et les 5 dernières millisecondes de la simulation. On peut voir sur la figure correspondant au début de l'intervalle d'étude 6.13(a) que l'on retrouve bien principalement les fréquences des modes instables suivant lesquels les conditions initiales sont données. Sur la FFT en fin d'intervalle 6.13(b), les pics correspondant aux fréquences des modes instables ont été marqués en rouge, ceux correspondant à des harmoniques de modes instables en violet et ceux correspondant à des combinaisons simples de deux modes instables en vert. On peut constater qu'on a effectivement une augmentation de l'amplitude, notamment de fréquences proches de modes instables. Le spectre final est très riche mais cette richesse est peut-être liée au fait que l'on est encore dans une phase transitoire et non sur la solution dynamique stationnaire.

Sur cette FFT (figure 6.13), on retrouve les fréquences des neuf modes instables. Les niveaux de ces fréquences sont sensiblement plus élevés que sur la FFT de la fenêtre initiale.

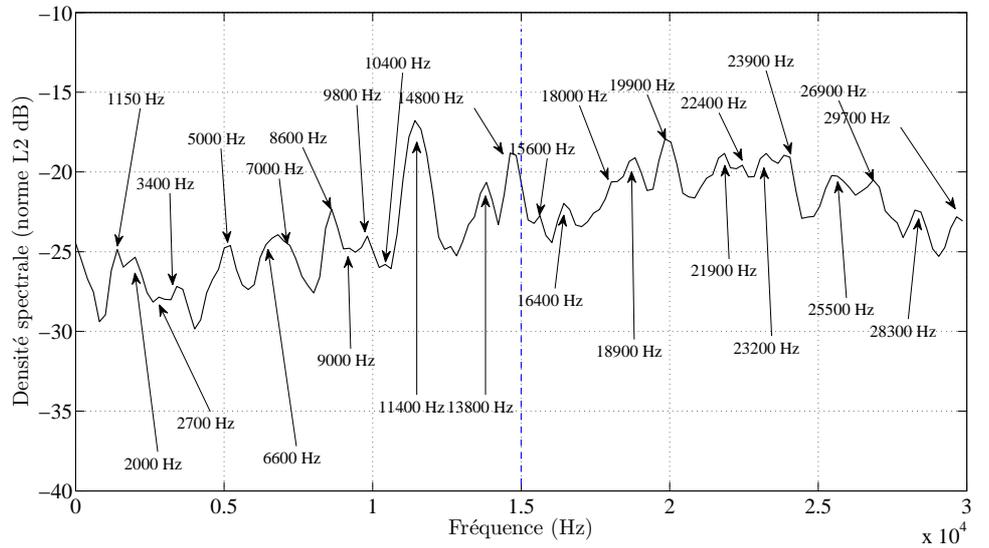
Afin de vérifier si les contributions visibles aux fréquences des modes instables dans la solution correspondent aux déformées modales de ces modes, une extraction des déformées aux pics correspondant a été effectuée afin de calculer le critère de MAC pic à modes. La figure 6.14 montre l'appariement alors réalisé entre les déformées et les modes instables. La matrice de MAC obtenue est bien quasi diagonale, cependant les valeurs des MAC sont très faibles. Ces mauvaises valeurs sont en partie dues à la difficulté d'avoir une résolution fréquentielle suffisante sur les déformées opérationnelles. Les résultats présentés ici sont obtenus avec du *zero padding* jusqu'à saturation de la mémoire de la machine sur lesquels le post-traitement a été effectué. Pour une résolution fréquentielle plus faible encore, les valeurs de MAC étaient beaucoup plus petites. La résolution fréquentielle des déformées utilisées ici est de 50 Hz, on peut imaginer qu'en obtenant des déformées plus précises l'appariement serait meilleur.

La figure 6.15 montre la projection sur les neuf modes instables de la solution transitoire obtenue. Le comportement de ces amplitudes modales semble assez chahuté, avec en particulier une forte oscillation dès les premiers instants de l'amplitude du mode instable M1 ($f = 1110$ Hz). Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène. La première réside dans le choix des conditions initiales et de l'échantillonnage de la solution simulée. En effet, la condition a été choisie de manière à être très proche du premier événement non-linéaire fort, et seulement un pas de temps sur cent est sauvegardé. Il se trouve qu'avec ces paramètres, le premier événement non-linéaire fort intervient avant le centième pas de temps, et donc que la solution visualisée ici est perturbée dans son ensemble par de

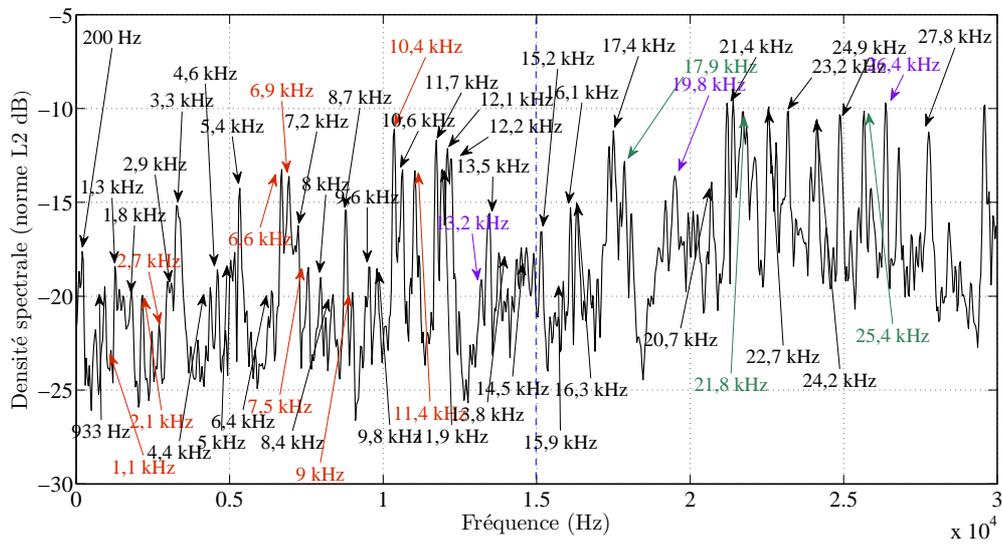
fortes non-linéarités. D'autre part, s'agissant d'un calcul sur un modèle 3D, il y a existence de la non-linéarité régulière liée à la composante radiale du frottement. L'impact de ces deux non-linéarités sur le système peut expliquer le caractère fortement oscillant des amplitudes modales complexes. Une dernière raison est la difficulté d'obtenir la base des modes adjoints (ou modes gauches). Les modes adjoints sont nécessaires à l'obtention de la projection sur les modes complexes, et correspondent aux modes propres du système avec les vecteurs à gauche des matrices. Si l'algorithme d'itération sur les résidus [9] donne d'excellents résultats pour les modes directs (ou droits), il se trouve que le critère en résidu d'énergie semble insuffisant pour les modes gauches. Aussi, si avec un critère de résidu en énergie relative de 10^{-3} les modes directs semblent avoir convergé, ceux adjoints pour la même précision ont des valeurs propres aux parties réelles très différentes de celles des modes directs. Avec ce critère d'arrêt, les modes adjoints comptaient 13 modes instables, et la propriété de bi-orthogonalité permettant la projection n'était pas vérifiée. En prolongeant le calcul des modes adjoints jusqu'à l'obtention d'un résidu de $5 \cdot 10^{-5}$, on aboutit à une concordance sur les modes instables (même nombre et même numéro de mode, mais taux de divergence sensiblement différents) et on retrouve une bi-orthogonalité satisfaisante. Si la question de la précision de la base pour la projection sur les modes complexes ne se posait pas pour la couche élastique 2D du chapitre 5, car le résidu en énergie pouvait facilement descendre proche de la précision machine ($\leq 10^{-12}$), pour ce modèle de frein, on peut penser que la base utilisée présente encore quelques défauts qui perturbent l'exploitation de la projection.

Malgré les limitations évoquées, la projection sur les modes instables donnée sur la figure 6.15 peut se décomposer en quatre phases. La première phase, de $t = 0$ ms à $t = 5$ ms semble essentiellement gouvernée par l'augmentation de l'amplitude des modes M2 ($f = 2050$ Hz) et M3 ($f = 2760$ Hz), avec M3 comme mode dominant. La deuxième phase, de $t = 5$ ms à $t = 10$ ms présente une rupture de pente nette dans l'amplitude du mode M2, mais aussi de celle du mode M3, qui semble toutefois moins affecté. Il s'en suit une augmentation de l'amplitude des modes M1 ($f = 1110$ Hz) et M5 ($f = 6980$ Hz) – ce dernier étant un des rares modes non-oscillants de cette phase – ainsi que, dans une moindre mesure, de celle des autres modes qui restent en « bruit de fond ». Dans la troisième phase, à partir de $t = 10$ ms, l'amplitude du mode M5 décroît pour retrouver les autres modes de plus bas niveau énergétique tandis que les modes M1, M2 et M3 adoptent des niveaux énergétiques assez semblables. Enfin, à partir de $t = 17$ ms, le mode M2 voit son amplitude diminuer un peu, tandis que le mode M1 semble devenir le mode prépondérant aux côtés du mode M3. La stabilisation de l'amplitude moyenne de M1 s'accompagne d'une forte diminution de ses oscillations. Globalement, on peut estimer que la réponse non-linéaire obtenue correspond à des contributions principales des modes M1, M2 et M3.

Alors qu'il semblait manifeste sur les champs temporels que l'on était encore loin de la solution stationnaire, la projection sur les modes complexes peut laisser penser que les amplitudes des différents modes sont stabilisées. On serait alors proche d'une solution stationnaire complexe avec de fortes oscillations des modes issus de l'analyse de stabilité qui la composent. On notera que les trois modes instables prépondérants dans la solution ne permettent pas d'expliquer l'ensemble des fréquences présentes dans le spectre de la figure 6.13 même si certaines fréquences peuvent se retrouver par combinaisons linéaires des harmoniques des fréquences des modes M1, M2 et M3. Dans la section suivante, nous avancerons quelques éléments de réponse pour expliquer ce constat.



(a) Sur 0 ms – 5 ms



(b) Sur 30 ms – 35 ms

FIGURE 6.13 – FFT globales en norme L_2

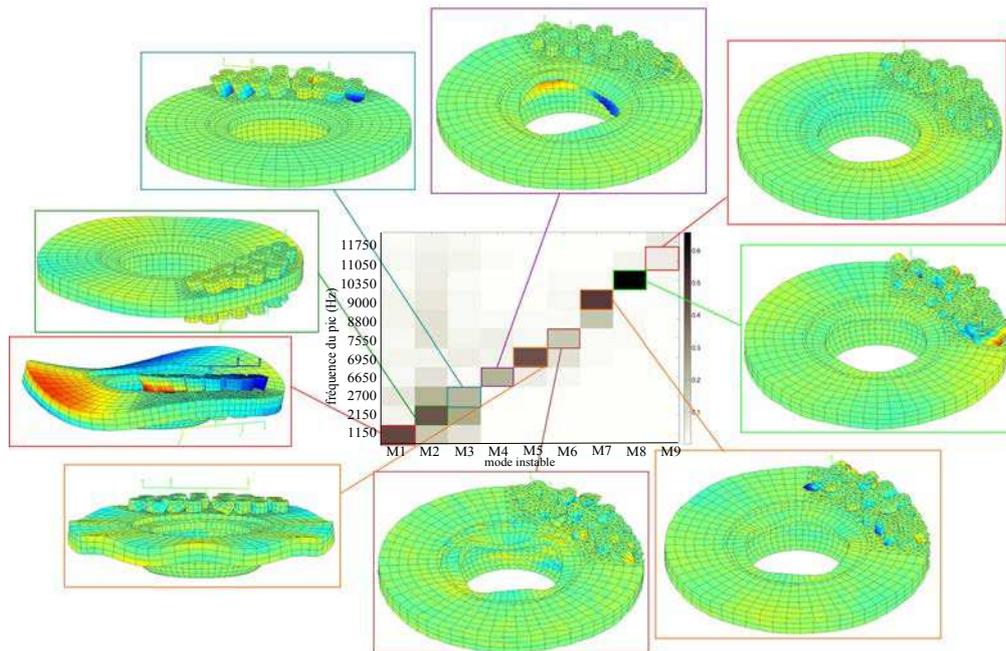


FIGURE 6.14 – Appariement des déformées aux pics aux modes instables

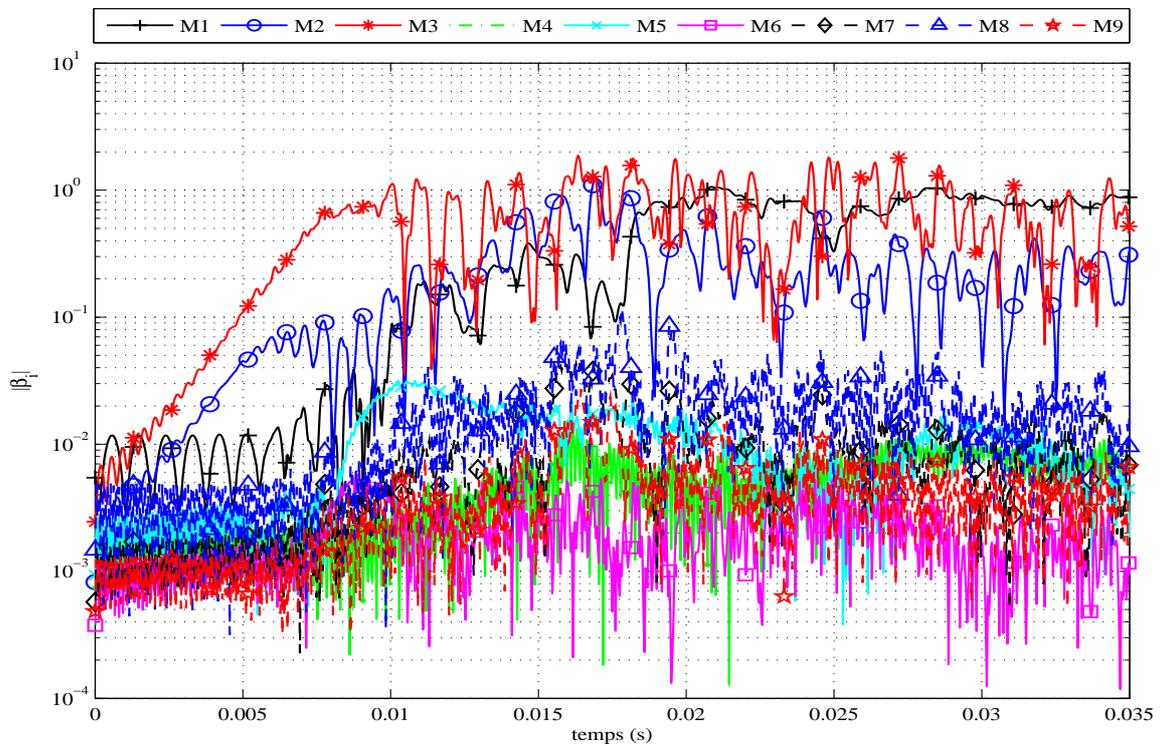


FIGURE 6.15 – Projection de la solution sur les neuf modes instables

6.4 Choix des quantités observées

Pour vérifier l'accord entre le modèle aux éléments finis et la simulation temporelle, nous avons essentiellement utilisé les FFT globales en norme L_2 sur l'ensemble de la structure. On peut néanmoins se poser la question de la justification de ce choix. Pour les FFT, les choix naturels sur un modèle mécanique sont soit des FFT ponctuelles en un point d'observation, soit des FFT globales en norme L_2 , ou encore des FFT globales en norme énergétique.

La figure 6.16 montre l'influence de cette pondération sur les FFT des 5 dernières millisecondes. La pondération énergétique choisie est en énergie cinétique, elle est donc effectuée avec la matrice de masse M . Une séparation entre les ensembles disque/cloche et garnitures/porte-garnitures a aussi été effectuée. On peut voir que la pondération mécanique favorise les basses fréquences. Pour les FFT de peau de disque, on notera une forte composante haute fréquence (autour de 27 kHz), probablement due à une réponse sur un harmonique ou une combinaison. Cette fréquence semble absente des garnitures, ce qui peut s'expliquer par leur fort amortissement.

Pour l'étude du crissement, les FFT globales en norme énergétique ne sont pas forcément les plus

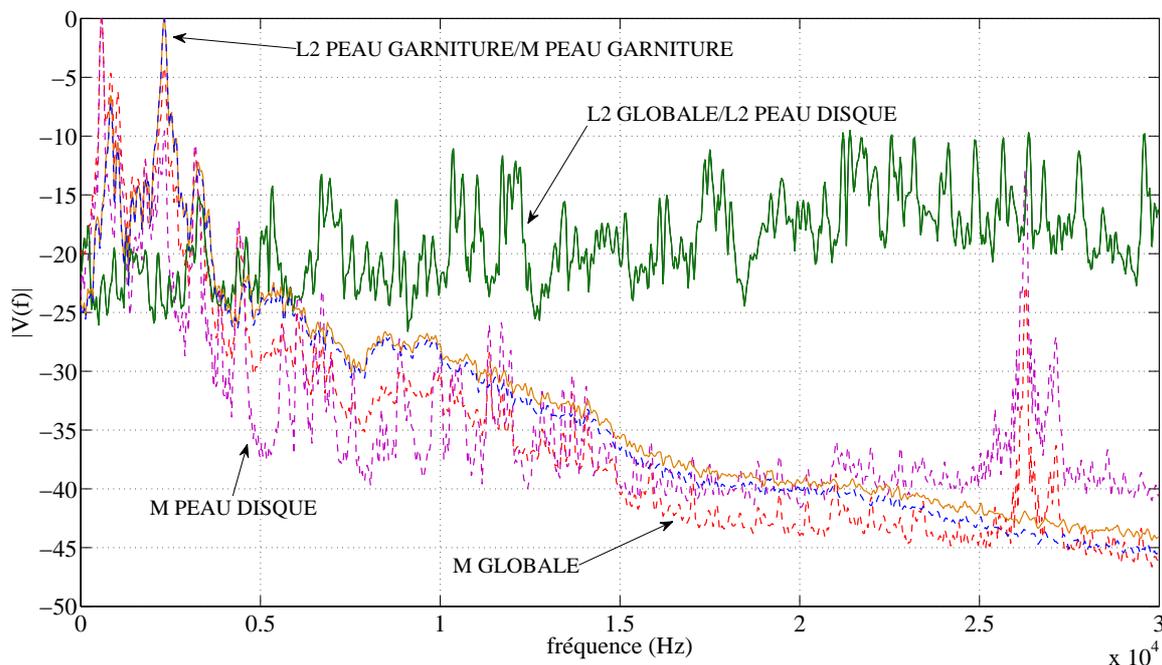


FIGURE 6.16 – Influence de la pondération pour la FFT – pondérations mécaniques (---), pondération L_2 (—).

pertinentes : en effet elles rendent compte de la vibration dans l'ensemble de la structure, mais la perception que l'on a du crissement est avant tout acoustique, et ne concerne donc que les vibrations de la peau de la structure suivant la normale sortante. Les FFT en norme L_2 évitent la pondération mécanique, mais sont encore portées sur l'ensemble du volume.

D'un point de vue *rendu acoustique* du crissement, les bons indicateurs sont sans doute les FFT en norme L_2 restreintes aux degrés de liberté normaux de la peau de la structure. Les pondérations mécaniques ont tendance à favoriser les basses fréquences tandis que la norme L_2 est plus homogène sur l'ensemble du spectre.

On pourra remarquer sur la figure 6.16, que les pondérations correspondant le mieux aux modes instables présents dans la solution sont celles qui sont restreintes aux peaux (disque ou garniture) pondérées en énergie cinétique.

Si la pondération L_2 sur les DDLs normaux de la peau semble pertinente, il faut néanmoins garder à l'esprit qu'elle prend en compte toutes les vibrations de la peau alors que certaines n'ont pas de propagation acoustique car elles génèrent des ondes évanescentes.

6.5 Comparaison avec l'expérience

Nous avons vu au chapitre 3 que le modèle numérique ne serait probablement comparable qu'avec les essais stationnaires. Dans cette partie, nous allons tâcher de mettre en vis-à-vis la simulation temporelle effectuée sur le modèle non-réduit avec les résultats des essais stationnaires et non-stationnaires à 25 km/h pour une force de 8 kN dans le sens de la compression.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la comparaison du spectre moyen du vibromètre sur les essais non-stationnaires avec le spectre final du point équivalent sur le modèle. Sur la figure 6.17, on peut voir un accord assez bon sur une large gamme fréquentielle avec cependant une différence notable autour du pic expérimental à 1248 Hz. On notera en particulier un très bon accord sur les pics à 3200 Hz, 2170 Hz, 2620 Hz et 4400 Hz. Concernant le comportement à 4400 Hz, on remarquera que dans le comportement expérimental, cette fréquence ressort fréquemment avec un δf de 200 Hz alors que la stabilité du modèle ne prédit strictement rien à cette fréquence. La simulation numérique trouve une sorte de triple pic autour de cette fréquence tandis que la mesure expérimentale trouve un pic très large. Il est particulièrement intéressant de voir que le modèle numérique est capable de reproduire les comportements physiques non-prévus par l'analyse de stabilité. Il reste cependant difficile de savoir la cause de la présence de cette fréquence, qui peut être liée à un harmonique ou à des combinaisons non-triviales de modes instables ou encore à l'émergence d'un mode déstabilisé par l'évolution non-linéaire du système. Dans cette simulation, on peut voir cette fréquence comme étant un harmonique d'ordre 4 du mode à 1112 Hz ou peut-être une combinaison entre le mode à 6580 Hz et celui à 2050 Hz dont les fréquences se seraient décalées du fait de la non-linéarité. Nous voyons ici toute la difficulté liée à l'interprétation de l'apparition de pics fréquentiels vis-à-vis des modes instables du système (*i.e.* fréquences fondamentales et combinaisons linéaires d'harmoniques possibles).

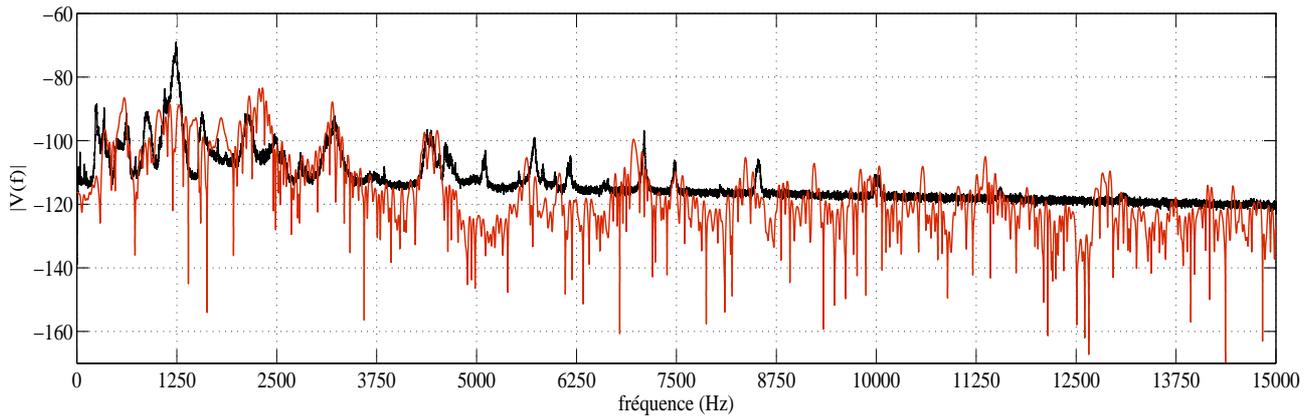
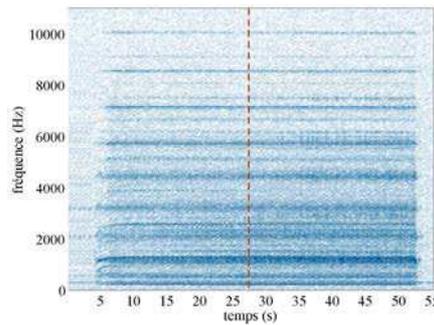
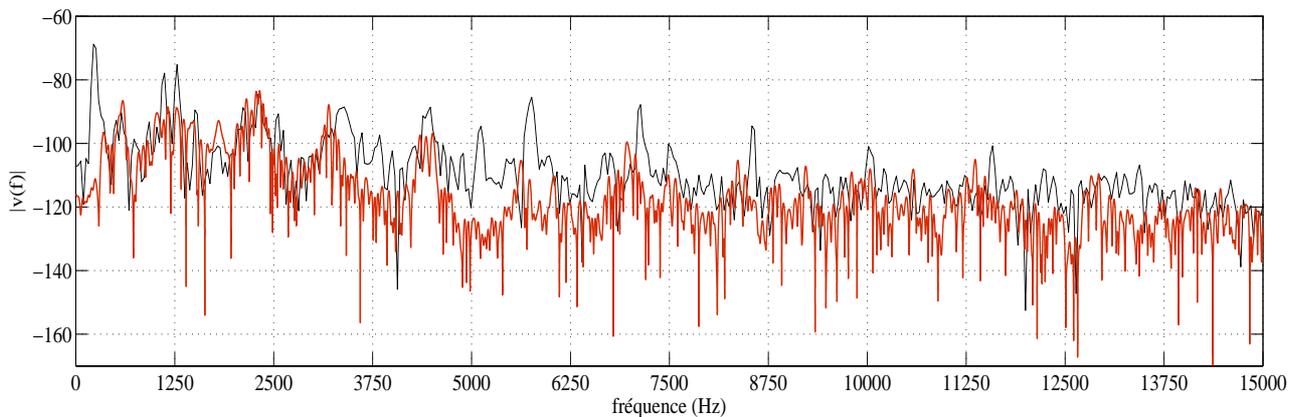


FIGURE 6.17 – Comparaison des FFT « vibromètre » : simulation (—) et essais non-stationnaires (—)



(a) Extraction d'une FFT des essais stationnaires



(b) Comparaison des FFT

FIGURE 6.18 – Comparaison des FFT « vibromètre » : simulation (—) et essais stationnaires (—)

Comme nous l'avons noté au chapitre 3, la comparaison des simulations aux essais de freinages non-stationnaires est de toute façon difficile. C'est pourquoi, nous regardons maintenant les résultats des essais stationnaires sur la GP1 dans les mêmes conditions que la simulation. Nous avons extrait une FFT en temps-fréquence afin de la comparer à celle finale sur la simulation de référence. Cette comparaison est présentée sur la figure 6.18. Si l'accord sur certains pics était meilleur sur les essais transitoires, on notera que le pic important en basse fréquence est bien moins important dans ces essais. L'accord semble donc globalement de meilleure qualité. Le modèle numérique mis en place et les méthodes de simulation sont bien capables de reproduire, du point de vue des fréquences émergentes et des niveaux, le comportement en essai stationnaire du frein TGV avec les garnitures GP1.

6.6 Calcul sur base réduite pour le modèle de frein simplifié

Dans cette section, nous nous intéressons au calcul sur base réduite pour le modèle présenté dans ce chapitre. Compte tenu des résultats obtenus sur la couche et des temps de calculs nécessaires pour ce modèle, nous avons opté pour la base FC_{1000}^s , qui semble être la plus susceptible de reproduire correctement le comportement du système non-réduit sur la gamme de fréquences d'intérêt : en effet, elle comporte les 1000 premiers modes complexes, qui couvrent la plage 0 – 15000 Hz ainsi que les modes statiques de l'interface de contact. Suivant la même démarche que dans le chapitre précédent, les conditions initiales du calcul de référence ont été transférées au modèle réduit.

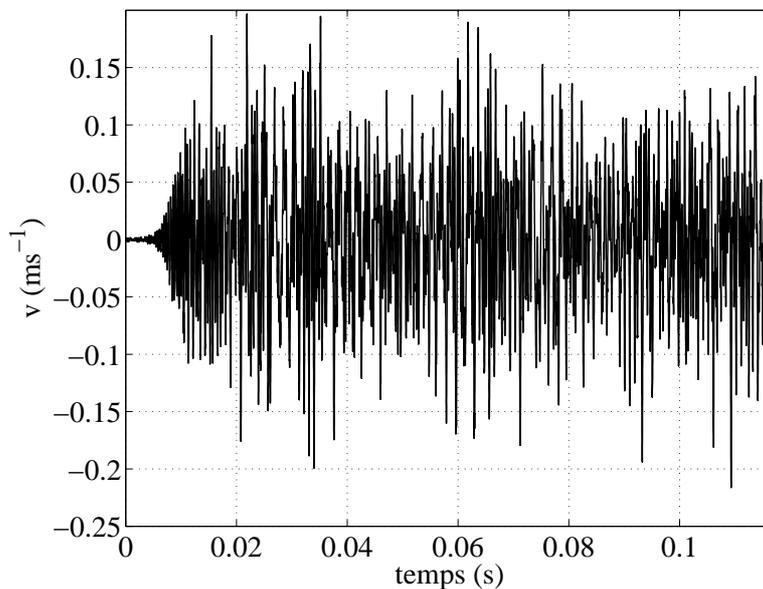


FIGURE 6.19 – Vitesse normale sur le disque – Modèle réduit, point « vibromètre »

La simulation réduite a permis d'obtenir une fenêtre temporelle simulée trois fois plus longue que la simulation non-réduite en 10 jours seulement, soit un facteur 6 sur le temps de calcul. La figure 6.19 montre que l'on obtient manifestement une solution différente de celle donnée par le modèle de référence. Il reste difficile en revanche de déterminer si la solution est complètement différente ou si l'on est confronté au phénomène d'avance observé sur certains cas de réduction au chapitre précédent. De plus, l'évolution n'est pas contradictoire avec l'hypothèse d'avance.

La figure 6.20 montre les projections sur les modes instables pour le système réduit. Cette projection est en très bon accord avec la solution de référence avec, en particulier, le bon ordre de grandeur pour les amplitudes des modes M1, M2 et M3 qui dominent la solution, ainsi que pour les autres modes qui restent en « bruit de fond ». Parmi les différences les plus notables, on remarquera que le mode M1 prend une place prépondérante plus tôt dans la solution réduite. La descente en amplitude amorcée par le mode M2 dans la solution de référence semble faire partie d'un motif plus vaste où l'amplitude décroît puis augmente de manière alternée. Il reste tout à fait probable que certains modes soient en

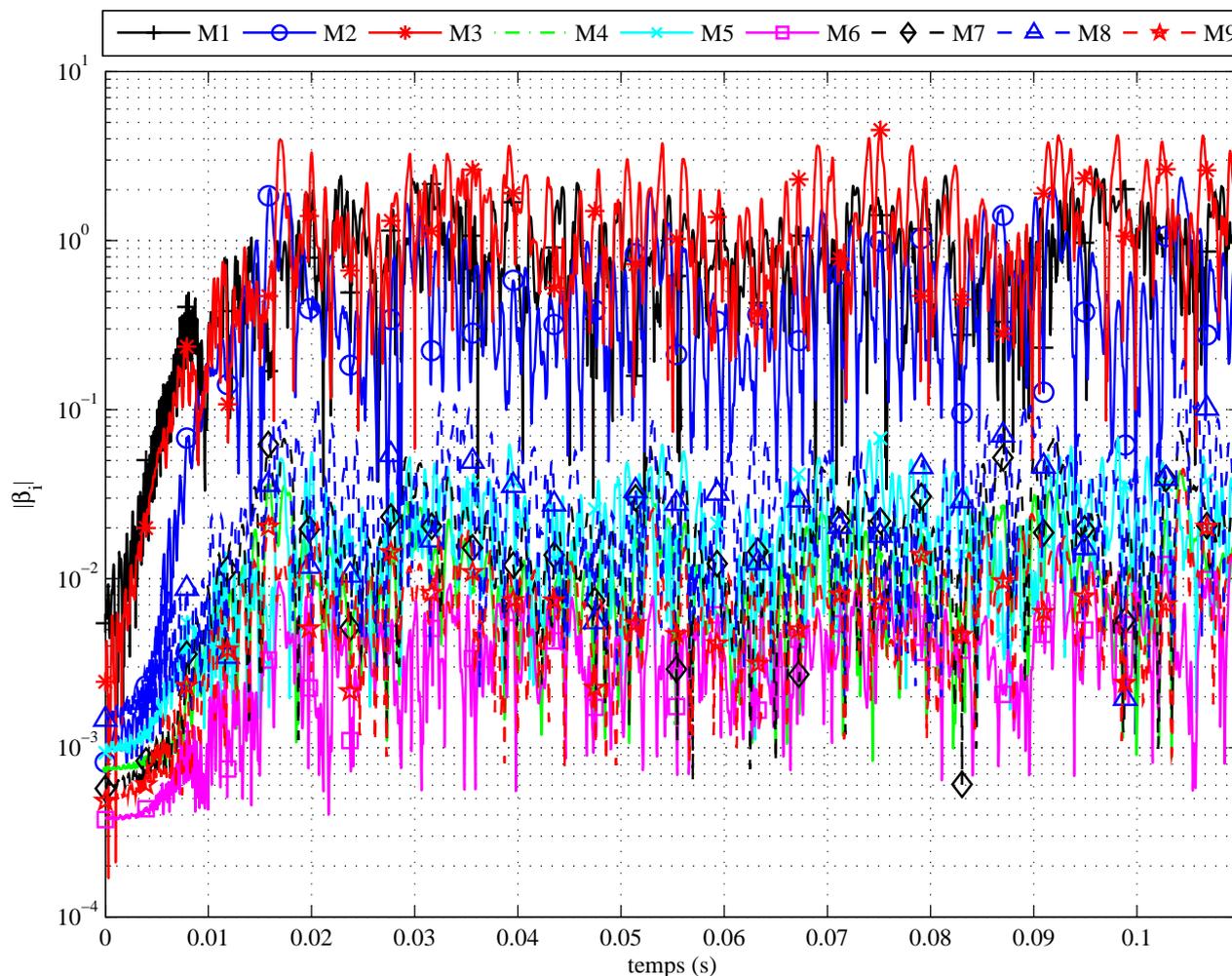


FIGURE 6.20 – Projection sur les neuf modes instables de la solution réduite

avance par rapport à leur évolution dans la solution de référence.

En termes de fréquence, la FFT au point correspondant à la mesure expérimentale au vibromètre des essais non-stationnaires est donnée sur la figure 6.21. Il est clair que cette FFT est cohérente avec le comportement du système non-réduit : on y retrouve plusieurs pics, notamment ceux à 580 Hz, 2180 Hz, 3250 Hz, 4400 Hz et 6950 Hz, ainsi que de nombreux pics plus hauts en fréquence. Concernant l'adéquation aux mesures expérimentales, le constat est similaire à celui du système non-réduit : on retrouve bien un certain nombre de pics avec des niveaux comparables. Par rapport à la simulation de référence, on pourra noter que l'accord avec l'expérience est meilleur sur quelques pics dont le pic à 1200 Hz et celui à 4400 Hz. On obtient aussi l'apparition d'un pic que la simulation de référence ne comportait pas : celui qui se situe à 1500 Hz. En revanche sur d'autres pics, l'accord semble moins bon, comme par exemple sur celui situé à 3250 Hz.

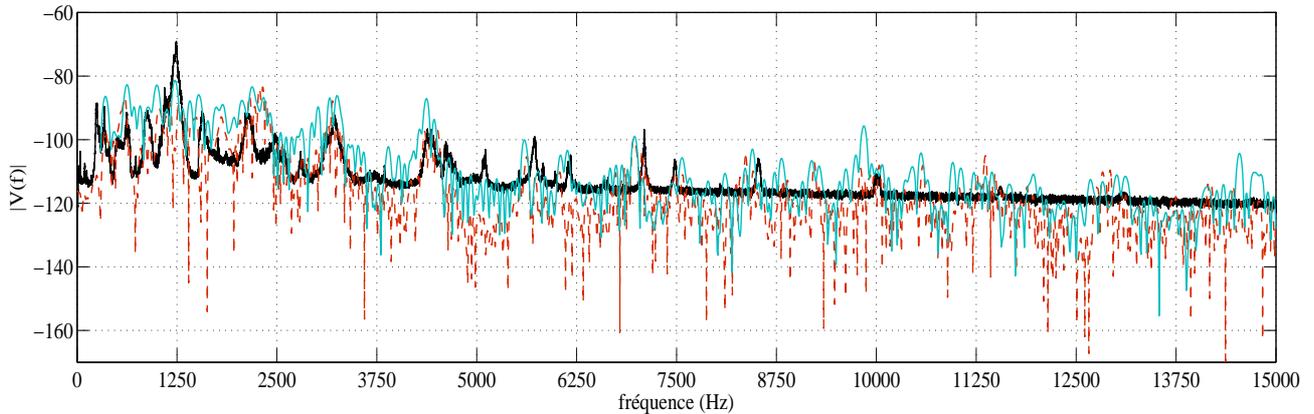


FIGURE 6.21 – Comparaison des FFT entre modèle réduit (—), modèle de référence (---) et essais non-stationnaires (—)

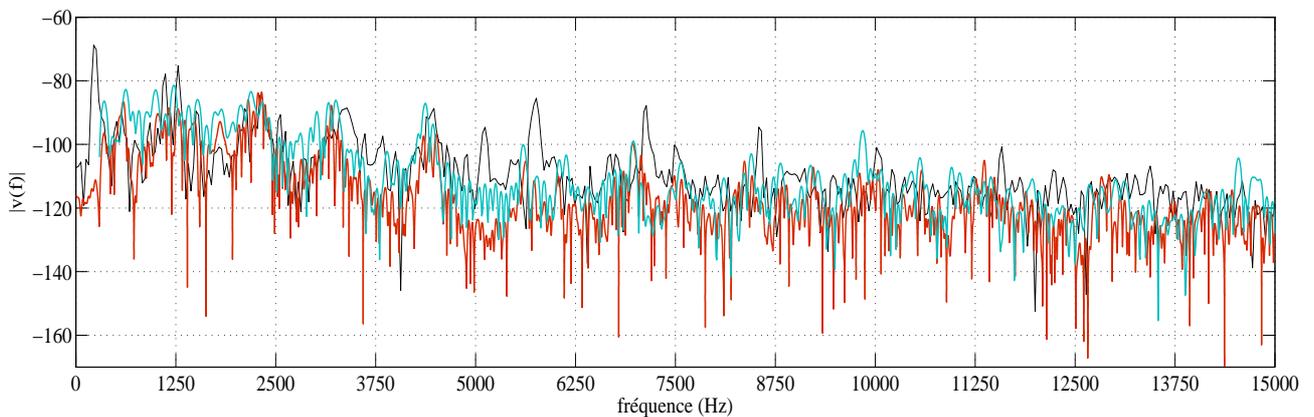


FIGURE 6.22 – Comparaison des FFT entre modèle réduit (—), modèle de référence (—) et essais stationnaires (—)

Cette FFT semble corroborer l'hypothèse du phénomène d'avance du modèle réduit sur le modèle de référence (comme cela avait été observé pour le cas de la couche élastique 2D du chapitre 5). L'augmentation de l'amplitude du pic à 1200 Hz laisse augurer que l'accord entre le modèle et l'expérience peut être meilleur que ce que des simulations sur de faibles durées laissent supposer.

La comparaison avec les essais stationnaires montre que la simulation réduite donne un niveau beaucoup plus juste sur le pic à 1200 Hz (comme indiqué en figure 6.22). En revanche, on peut constater un décalage fréquentiel sur de nombreux pics dont la position est meilleure sur le modèle non-réduit.

Ces différences peuvent être liées aux phénomènes qui génèrent les décalages fréquentiels observés lors des essais, qui devraient être représentables par la modélisation choisie : en effet, lors des essais stationnaires, on peut voir sur les temps-fréquences (figure 6.18(a)) que certaines fréquences augmentent de quelques centaines de Hertz. Les décalages fréquentiels produits par la réduction

sont des sous-estimations des fréquences, aussi bien par rapport aux essais qu'à la simulation de référence. On peut donc penser que le modèle de référence arrive à capter la cause de l'augmentation des fréquences tandis que le modèle réduit n'y parvient pas.

6.7 Conclusions sur l'application au cas d'un frein simplifié

Dans ce chapitre, nous avons mené sur un modèle simplifié comportant néanmoins un nombre significatif de degrés de liberté, une étude complète visant à valider une démarche de comparaison essais/simulation. Premièrement, nous avons défini le modèle et mis en œuvre une démarche de recalage qui a permis de rendre le modèle simplifié aussi fidèle que possible au système complet.

À partir de ce modèle recalé, nous avons pu étudier la stabilité de ce frein simplifié, et nous avons observé un assez bon accord de ces résultats avec les relevés expérimentaux. Il faut néanmoins garder à l'esprit que l'étude de stabilité ne donne au final que très peu d'information sur un système crissant : elle ne préjuge que de la stabilité autour d'un équilibre. En particulier, ce n'est pas parce qu'un mode est instable qu'il sera nécessairement présent dans la solution stationnaire, et ce pour au moins deux raisons. La première est qu'une fois éloigné de l'équilibre, on ne peut plus se prononcer sur la stabilité du mode. Il est donc possible que celui-ci devienne stable et disparaisse complètement de la solution. La deuxième raison est que même si ce mode reste instable, rien ne permet actuellement de relier son taux de divergence à l'amplitude stabilisée de la réponse stationnaire qu'il aura dans le cycle limite. Dès lors qu'il y a plusieurs modes instables, il est possible que l'un d'entre eux soit extrêmement prépondérant, masquant ainsi les contributions des autres.

Nous avons pu effectuer une simulation de référence en dynamique non-linéaire transitoire sur ce modèle simplifié. Il semble que la taille de ce modèle soit proche de la limite de ce que l'on peut raisonnablement calculer de nos jours sur des machines encore *relativement* accessibles. Nous avons obtenu une solution transitoire d'une durée de 35 ms en 20 jours de calcul.

L'étude de la solution obtenue a montré un assez bon accord entre le transitoire et la stabilité prédite par le modèle. La taille modeste de la fenêtre temporelle n'a pas permis d'atteindre une solution stabilisée. Ce dernier point est probablement la plus grande limitation de l'approche temporelle pour la simulation du crissement sur des modèles aux éléments finis de grande taille. Néanmoins, on a pu mettre en évidence l'importance spatiale des modes instables avec l'appariement des déformées aux pics à certains d'entre eux. Une autre limitation à laquelle nous avons été confronté est la difficulté de calculer avec une précision suffisante la base des modes adjoints pour la projection sur les modes complexes. Il est possible que l'emploi de méthodes inspirées de celle Lanczos complexe avec bi-réorthogonalisation permette de passer outre ce problème en obtenant dans le même calcul les bases des modes directs et adjoints en garantissant la bi-orthogonalité.

Si l'on s'intéresse aux ordres de grandeurs des quantités vibratoires et acoustiques estimées liées au crissement, on constate que cette simulation est physiquement crédible. Si l'on rentre plus en détail pour confronter ce modèle aux essais réalisés au banc, on se rend compte que la comparaison du spectre final de cette simulation est en assez bon accord avec le spectre moyen sur les freinages

d'arrêt dont les conditions de fonctionnement sont les plus proches de celles de la simulation. On observe une différence notable sur le pic à 1200 Hz qui est très fortement sous-estimé, mais la solution n'étant pas stabilisée, on peut espérer que le modèle soit capable de prédire ce pic. De plus, la comparaison aux essais stationnaires montre que ce pic est de moindre importance sur ces derniers. Ces résultats numériques sur frein simplifié sont donc très encourageants. Même s'ils ne permettent pas de statuer définitivement sur la pertinence des simplifications choisies (modèle simplifié, loi de frottement de type Coulomb constant, condition de fonctionnement stationnaire, . . .), ils illustrent bien la possibilité de reproduire des occurrences de crissement avec des modèles éléments finis industriels raisonnables (modèles simplifiés).

La réduction de ce modèle permet de gagner un facteur 5 à 6 sur le temps de calcul. La solution obtenue reste physique même si elle diffère légèrement de la solution de référence. Une des hypothèses les plus probables pour expliquer cette faible différence est le phénomène d'avance observé au chapitre 5. La solution réduite est globalement en meilleur accord avec les essais non-stationnaires que celle non-réduite. Sur les essais stationnaires, elle donne une amplitude assez juste du pic à 1200 Hz, mais introduit des décalages fréquentiels sur de nombreux autres pics. Malgré ces quelques différences, la pertinence d'une telle réduction est clairement mise en avant dans le cadre de cette étude.

En conclusion, la simulation d'un modèle aux éléments finis d'un frein TGV simplifié est donc possible et recolle assez bien à l'expérience. Cette application constitue donc une validation de l'ensemble de la démarche numérique mise en œuvre, depuis les procédures de simulation du contact frottant et celles de recalage d'un modèle de frein sur des mesures de FRF couplées, jusqu'à la stratégie de réduction déployée.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

7.1 Conclusions

Lors de ce travail de thèse, nous avons cherché à apporter une contribution à l'étude du crissement des freins à disque de TGV. Nous avons choisi une modélisation des phénomènes de déstabilisation par le contact frottant mettant en jeu le mécanisme de couplage de modes. Ces travaux de thèse proposent également des développements pour la mise en œuvre d'une méthode de simulation en dynamique non-linéaire transitoire et stationnaire des vibrations d'un système crissant, fondée sur un algorithme de point fixe sur un lagrangien augmenté. Parmi les contributions originales apportées sur le plan algorithmique, on notera l'effort fourni pour l'optimisation des paramètres d'augmentation afin de s'affranchir des problèmes de convergence et de la lenteur habituelle de l'algorithme de point fixe.

L'outil numérique de simulation développé au cours de cette thèse permet l'étude de la stabilité d'un système comportant une interface de contact frottant avec une loi de type Signorini-Coulomb dont le coefficient de frottement est constant, ainsi que la simulation de la dynamique transitoire de ce système. Le comportement d'un système de référence académique, une couche élastique 2D, a été étudié à l'aide de cet outil afin d'une part de valider la pertinence de l'approche retenue et d'autre part d'appréhender le type de phénomènes susceptibles de se produire dans de tels systèmes. Un soin particulier a été apporté à l'influence des conditions initiales sur la solution stationnaire finale obtenue et à la définition de critères pertinents pour analyser de façon fine les comportements vibratoires transitoires et stationnaires, ainsi que les contributions des modes instables.

L'utilisation de méthodes de réduction dans le but d'accélérer les temps de calculs a aussi fait l'objet d'une exploration poussée sur ce système académique. Il a été mis en évidence que si la réduction d'un système crissant est possible dans de nombreux cas, elle demande au minimum de prendre de grandes précautions, et induit souvent un biais sensible par rapport à la solution de référence non-réduite. Dans certains cas, la réduction semble modifier les frontières entre bassins attracteurs. Un point particulièrement intéressant, fréquemment observé sur les solutions réduites, est l'accélération de la transition entre les différentes phases de la solution qui conduit à l'obtention plus rapide de la solution stationnaire. Ce comportement constitue un gain supplémentaire apporté par la réduction car il permet de diminuer la taille de la fenêtre temporelle d'étude. Afin d'appuyer ces diverses observations, différents indicateurs de qualité de réduction et de suivi de la solution ont été utilisés. Parmi eux, ceux s'étant révélés les plus efficaces sont la projection sur les modes complexes pour le suivi de la solution et les variations en fréquence sur les pics principaux pour la qualité de la réduction. Ce cas-test et le type d'analyses effectuées pour son étude ont été proposés comme évaluation de performance pour des méthodes de réduction de systèmes déstabilisés par le frottement [80].

Afin d'appliquer les outils développés sur un système de freinage TGV réel, un protocole expérimental d'essais sur plusieurs garnitures TGV a été mis au point. Les résultats de ces essais ont permis de cerner le comportement du frein de TGV et de mieux connaître les limitations inhérentes à la modélisation choisie. Ainsi, d'un point de vue rigoureux, les simulations effectuées à partir de l'outil dans l'état actuel ne peuvent être comparées qu'aux essais de freinage de maintien et non à des freinages d'arrêt. Cependant, les niveaux vibratoires et acoustiques ainsi que les fréquences émergentes sont très proches lors des essais stationnaires et non-stationnaires, les principales différences se situant au niveau de l'enchaînement des apparitions et disparitions des fréquences, qui sont moins complexes

lors des freinages de maintien. Lors de cette campagne d'essais, une mesure de caractérisation du comportement vibratoire du système de freinage serré et sous couple a été effectuée. Cette caractérisation s'est avérée extrêmement utile pour recalibrer le modèle utilisé par la suite pour les simulations. Il est à noter que la répétabilité obtenue au cours de ces essais s'est avérée être d'un niveau très élevé, ce qui est assez rare pour des essais de crissement. La base de données ainsi constituée promet donc encore des résultats d'exploitation très riches.

La simulation du frein TGV dans des conditions correspondant à un essai réalisé au banc pour la garniture GP1 a été effectuée avec et sans réduction. Les résultats obtenus sont en accord très raisonnable avec les données expérimentales et ce, malgré la simplicité du modèle utilisé. Sur ce modèle, on semble être confronté au phénomène d'avance induit par la réduction, ce qui permet de rapprocher la solution réduite de la solution expérimentale malgré le fait que l'on soit encore loin de l'état stationnaire. Ce dernier point constitue le problème principal lié à la simulation temporelle du crissement.

Au final, la faisabilité de l'utilisation d'une simulation numérique sur un modèle de frein simplifié pour estimer le crissement a été montrée pour une garniture. Ce résultat est clairement encourageant pour la suite car il constitue une première marche vers la validation de la démarche proposée.

7.2 Perspectives

7.2.1 Objectifs à court terme

Si la faisabilité de la simulation du crissement avec une bonne représentativité par rapport aux essais a été montrée pour une garniture, il reste encore à démontrer qu'en utilisant les paramètres d'une autre garniture, on retrouve bien les mêmes tendances. Cette exploitation semble presque immédiate à effectuer pour certaines garnitures du panel ayant une architecture très proche de la GP1. Si cette deuxième validation donne des résultats aussi positifs que la première, l'extension du modèle simplifié pour prendre en compte les autres architectures de garniture TGV semble un moyen très raisonnable d'obtenir rapidement des indications sur le comportement vis-à-vis du crissement des garnitures. Un tel résultat serait très intéressant en particulier d'un point de vue conception et spécification de garniture, ce qui est l'objectif visé par le projet AcouFren.

Une autre action potentiellement très intéressante à mener serait de continuer à exploiter les données des essais qui constituent une base très riche dans laquelle se cachent probablement encore de nombreuses informations concernant les phénomènes liés au crissement.

7.2.2 Objectifs à plus long terme

On a pu voir lors de l'analyse des essais que dans certaines conditions, le couplage de modes n'était pas le seul mécanisme susceptible d'être à l'origine de l'instabilité de crissement dans les freins TGV.

On peut se poser la question de la pertinence de l'enrichissement du modèle, avec en particulier la prise en compte des phénomènes tribologiques siégeant à l'interface de contact. Certaines lois de frottement pourraient être introduites assez simplement avec le formalisme actuel dans l'analyse transitoire. Il faudrait néanmoins tester leur impact sur la convergence de l'algorithme qui, si elle se retrouvait fortement dégradée, risquerait de retirer tout l'intérêt de la finesse apportée par cet ajout. Développer de tels modèles physiques incluant des aspects tribologiques permettrait alors de statuer sur la complexité de modélisation nécessaire à l'interface frottante pour proposer des modèles pertinents robustes et juste suffisants.

Compte tenu de la difficulté à simuler le crissement sur de grandes durées temporelles, on peut se poser la question de la pertinence d'une approche temporelle. Les méthodes non-linéaires d'approximation permettant d'obtenir un cycle limite directement gardent leur intérêt. Le lien entre conditions de fonctionnement, conditions initiales et solution stationnaire que permet théoriquement l'emploi d'une méthode temporelle semble illusoire avant quelques années. Afin de pouvoir le faire, il faudrait être capable de simuler plusieurs secondes, ce qui semble aujourd'hui inenvisageable sur des modèles plus gros que celui utilisé au chapitre 5. La question de l'analyse globale, c'est-à-dire de l'estimation et de la détermination de l'ensemble des solutions physiques stationnaires existantes, reste également un problème ouvert. De même, la caractérisation de l'ensemble des comportements non-linéaires pouvant exister (périodique, multi-périodique ou chaotique) méritera, à plus long terme, une attention particulière.

D'un point de vue méthodes de réduction, une démarche de construction adaptative de base avait été proposée dans [79]. Elle a été abandonnée car elle entraînait l'utilisation de trop nombreux paramètres et restait très coûteuse à construire, mais le principe demeure intéressant.

Pour finir, un autre point intéressant à traiter serait la meilleure exploitation de l'analyse de stabilité. En effet, nous l'avons vu lors des simulations sur le modèle de frein simplifié, l'analyse de stabilité est incapable de prédire toutes les fréquences émergentes lors du crissement et les fréquences prédites comme instables ne ressortent pas forcément. En revanche, l'étude de stabilité se focalise généralement sur les valeurs propres et laisse de côté les déformées modales des modes complexes. Il serait intéressant de rechercher s'il existe un lien entre toutes les données issues de l'analyse de stabilité et les niveaux vibratoires simulés. Si un tel lien pouvait être exhibé, il donnerait peut-être accès à un levier plus robuste en conception que l'optimisation de la stabilité, réputée peu robuste [58], et moins coûteux qu'une simulation temporelle.

Annexe A

Algorithme de bipolarisation

A.1 Principe du regroupement

A.1.1 Problème de référence

Soit une population P de I individus définis par n paramètres de conception $c_i, 1 \leq i \leq n$ et notés en fonction de m critères de performances $p_i, 1 \leq j \leq m$. On veut réaliser un regroupement de ces individus en g groupes G_i d'individus proches. On ne veut pas se donner *a priori* le nombre ou la taille cible des groupes. D'autre part, on veut pouvoir étudier séparément ou conjointement la ressemblance dans l'espace de conception et celle dans l'espace des performances.

Ce problème de référence est assez courant et peut être traité de nombreuses manières plus ou moins coûteuse et plus ou moins rigoureuses. Il s'agit de trouver la partition optimale en un sens qui reste à définir d'un groupe de I points à la fois dans l'espace de conception, dans l'espace des performances et dans un espace joint performances/conception.

A.1.2 Principe de l'algorithme

On suppose ici que l'on a une mesure de la ressemblance entre individus sous la forme d'une matrice R_{ij} dont les coefficients varient entre 0 et 1. Si un coefficient R_{ij} vaut 1, les individus i et j sont identiques (au sens de la ressemblance choisie). Plus le coefficient est faible, moins les individus sont semblables.

Une idée naturelle pour faire des regroupements et de prendre un individu, et de lui raccrocher ceux qui ont une ressemblance suffisamment élevée. Le problème de ce genre d'algorithmes est que le regroupement est alors dépendant de la numérotation des individus et que si l'on ne prend pas garde, on peut se retrouver à avoir un seul groupe car par proximité des individus ajoutés dans le groupe à ceux encore à l'extérieur.

Dans [81] un algorithme de « bipolarisation rapide » est proposé. Il s'agit d'un algorithme récursif qui part du principe que si l'on veut faire au moins deux groupes, il y a deux individus que l'on sait ne pas appartenir au même groupe : les deux plus dissemblables. Ces deux individus sont appelés pôles d'ordre 0. On rattache à chacun de ces pôles les individus dont la ressemblance au pôle est supérieure à un seuil s .

Parmi les individus restant, on vient chercher les deux les plus dissemblables : les pôles d'ordre 1. On leur rattache les individus dont la ressemblance est supérieure au seuil. On répète la procédure jusqu'à ne plus avoir d'individus non assignés.

Lors du rattachement d'individus à un pôle, on peut tomber sur un cas de compétition. Cette compétition peut avoir lieu entre pôles d'ordre quelconque. Lorsqu'un individu est au dessus du seuil pour deux pôles différents, on le rattache au pôle dont il est le plus proche. Cette opération s'appelle le re-taillage des groupes car visuellement elle consiste à couper les disques de rayons s autour de chacun des deux pôles concernés au niveau de leur intersection.

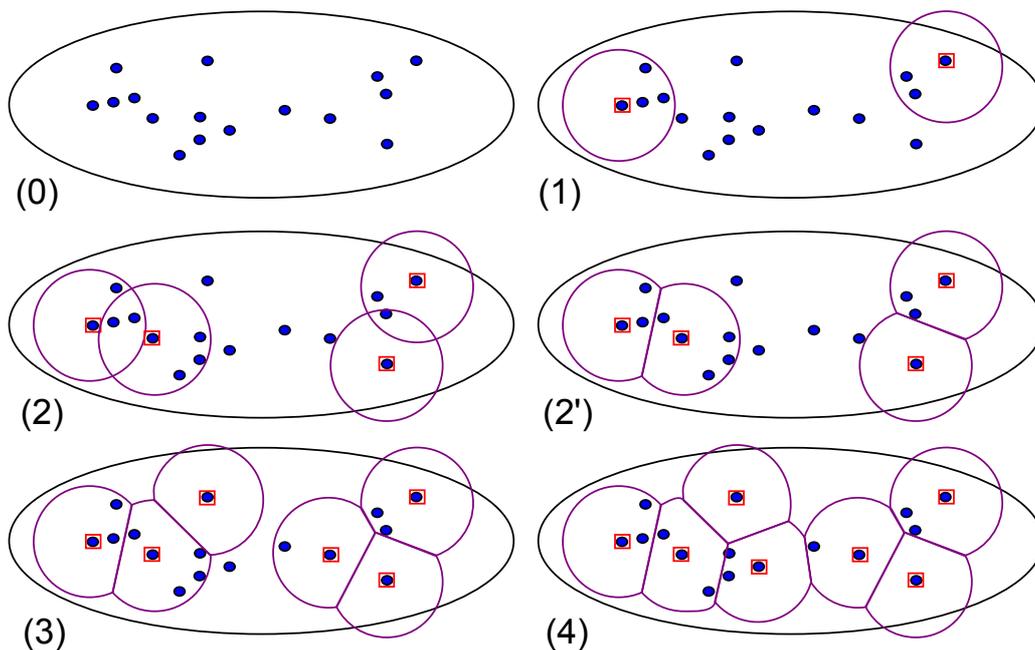


FIGURE A.1 – Principe de l'algorithme de bipolarisation

Le principe est illustré sur la figure A.1 où l'on voit sur un espace à deux dimensions les regroupements successifs ainsi que le retaillage.

Pour chaque groupe, on désigne un représentant virtuel (individu barycentre du groupe dans l'espace de conception) ainsi qu'un représentant réel, individu du groupe le plus proche du représentant virtuel.

A.1.3 Stratégies d'utilisation

Classiquement on utilise l'algorithme sur une pondération entre les ressemblances dans l'espace de conception et dans l'espace des performances. Cette stratégie donne souvent des résultats convenables.

Une autre approche (plus coûteuse) consiste à lancer l'algorithme d'abord en performance seule, puis de lancer dans les groupes identifiés en conception seule et de continuer jusqu'à n'avoir que des groupes d'un individu. Cette stratégie permet de visualiser les différents niveaux de ressemblance et d'avoir un aperçu rapide de l'existence de plusieurs solutions techniques pour un même type de performance.

A.1.4 Matrices de ressemblances

Un des points importants du regroupement, est le calcul des matrices de ressemblance. Un choix simple est de calculer une pseudo matrice de MAC après avoir normé les individus au sens du produit

scalaire utilisé. Cette méthode a le mérite d'être rapide et simple à mettre en œuvre. Cependant, elle ne permet pas de distinguer deux individus dont les paramètres sont proportionnels car elle ne fait que mesurer un angle entre les individus. Ce dernier point n'est pas nécessairement gênant si l'on raisonne dans l'espace conception/design ou si l'on sait que l'on n'a pas d'individus proportionnels.

Un choix plus robuste, mais plus coûteux en terme de calcul est d'utiliser la définition suivante pour la ressemblance :

$$R_{ij} = 1 - \left(\frac{\|C_i - C_j\|}{\|C_i\| + \|C_j\|} \right)^\beta \quad (\text{A.1})$$

Ce choix permet de discriminer des différences entre individus proportionnels entre eux. En augmentant le paramètre β , on diminue la sensibilité à la dissemblance entre individus proportionnels. En prenant un β inférieur à 1 on augmente cette sensibilité. Dans tous les cas, deux individus proportionnels mais de sens opposés ($C_i = -\alpha C_j$, $\alpha > 0$) ont une ressemblance de 0.

A.2 Exemple d'utilisation

On considère une population de 100 individus avec deux paramètres de conceptions c_1 et c_2 compris entre 0 et 1. On évalue cette population suivant deux critères de performance p_1 et p_2 définis par :

$$p_1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (\text{A.2})$$

$$p_2 = 2 \arctan \left(\frac{\frac{c_2}{p_1}}{1 + \frac{c_1}{p_1}} \right) \quad (\text{A.3})$$

Si l'on fait un tri de cette population en ne prenant en compte que les paramètres de conception, on obtient le regroupement donné en figure A.2. Si l'on trie cette population suivant les paramètres de performances uniquement, on obtient les groupes donnés par la figure A.3. Enfin, si l'on fait un tri prenant en compte à la fois les paramètres de conception et ceux de performance, on obtient le résultat présenté sur la figure A.4. La figure A.5 montre l'évolution des critères de performance en fonction des groupes. Ceci montre qu'outre le fait d'être proche dans l'espace de conception (figure A.4) les groupes sont aussi cohérents en terme de performance.

Les figures A.6, A.7 et A.8 donnent la visualisation des matrices de ressemblances dans les espaces de conception, des performances et conception/performances avant et après réorganisation de la population.

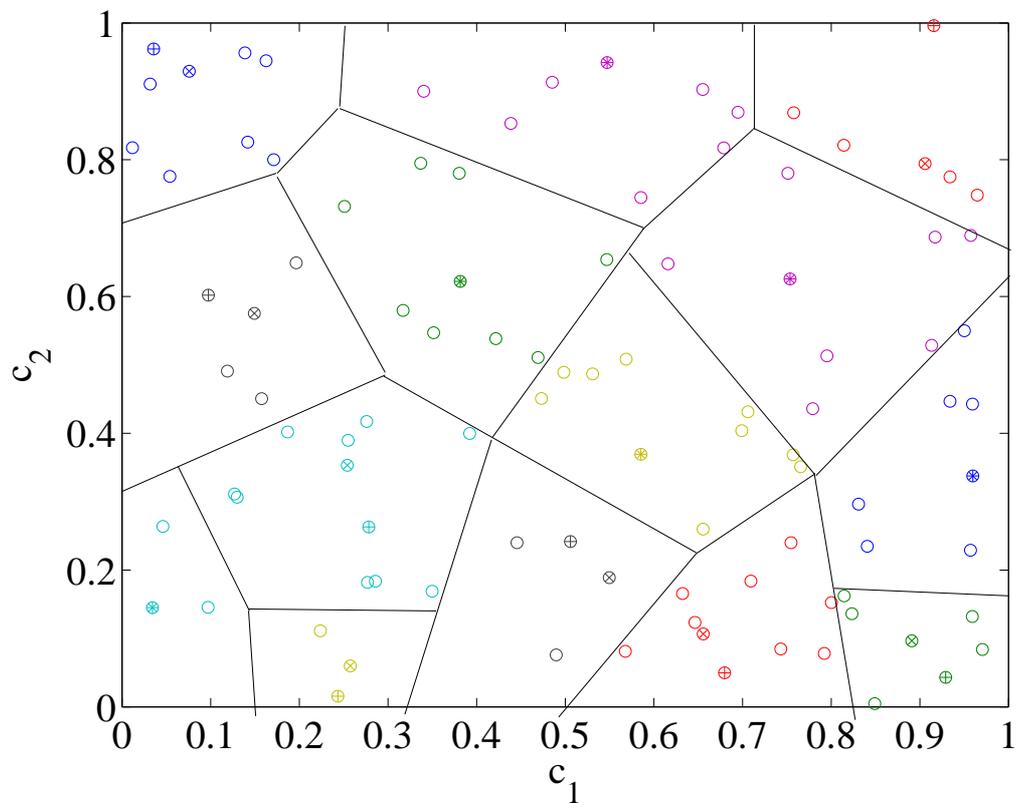


FIGURE A.2 – Groupes obtenus en ne considérant que c_1 et c_2 – Les pôles sont marqués + et les représentants ×

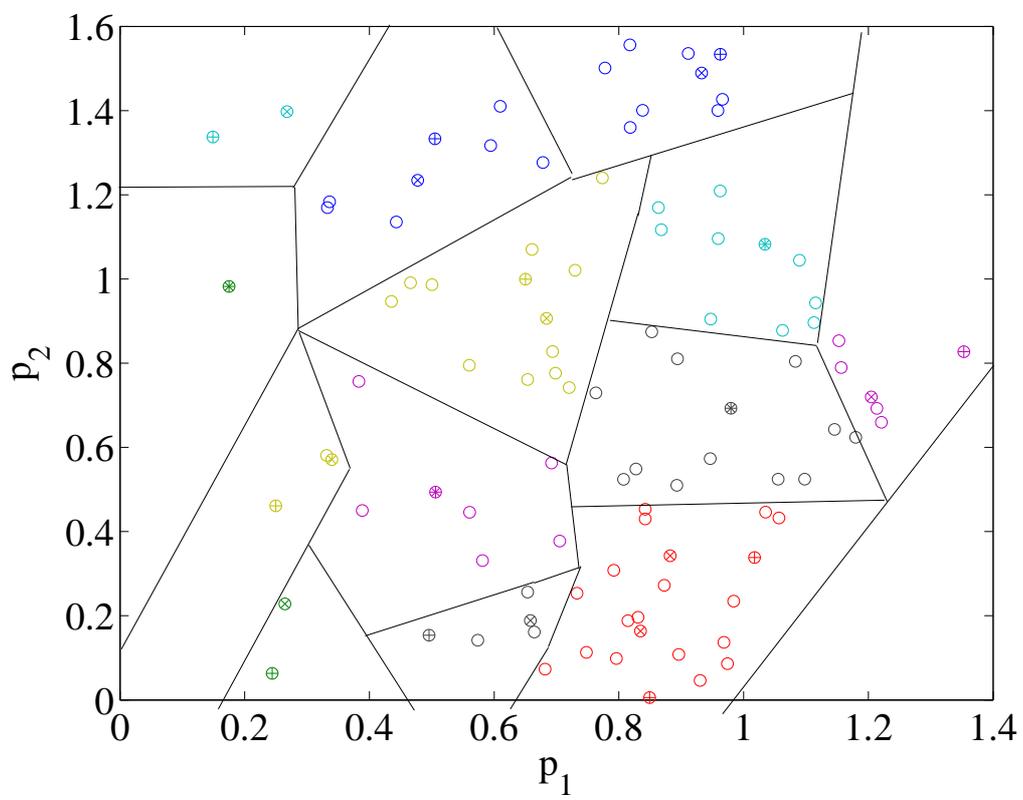


FIGURE A.3 – Groupes obtenus en ne considérant que p_1 et p_2 – Les pôles sont marqués + et les représentants ×

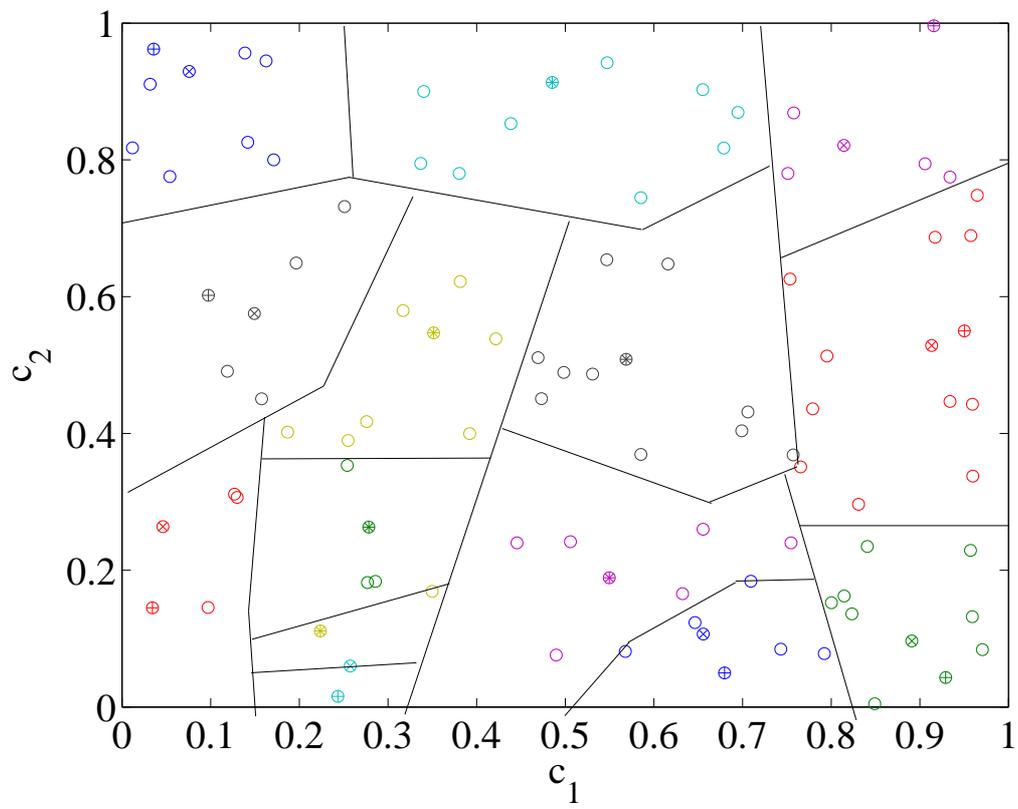


FIGURE A.4 – Groupes obtenus en conception/performance – Les pôles sont marqués + et les représentants ×

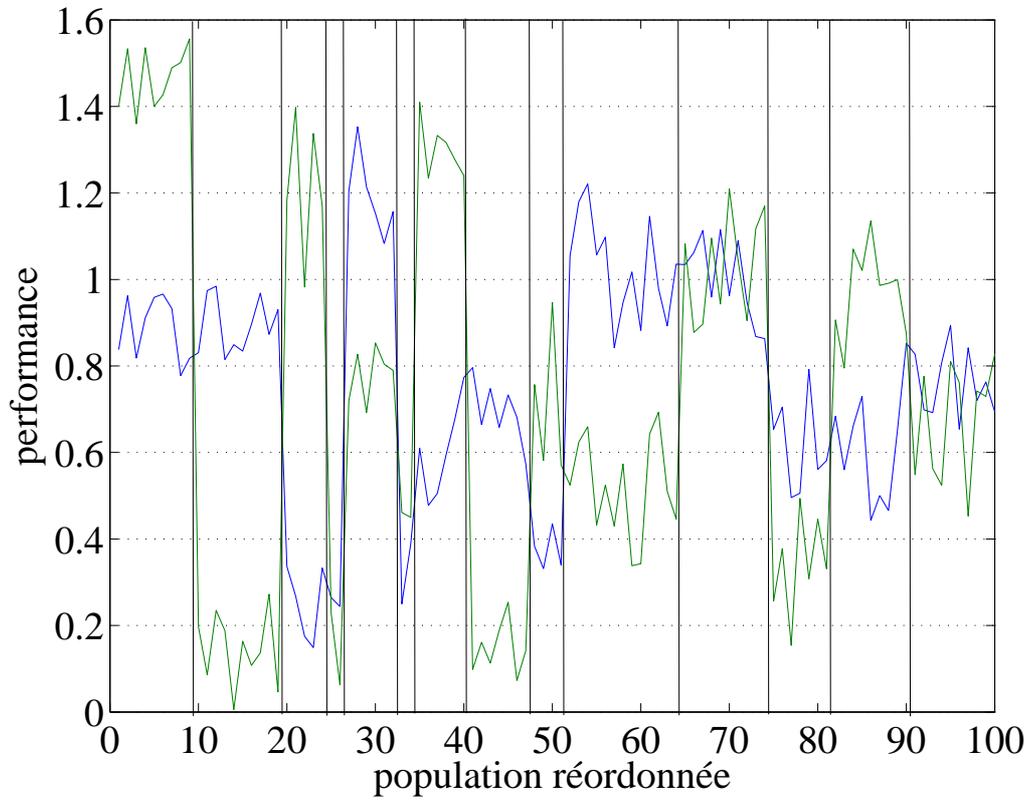


FIGURE A.5 – Évolution des fonctions performance en fonction des groupes

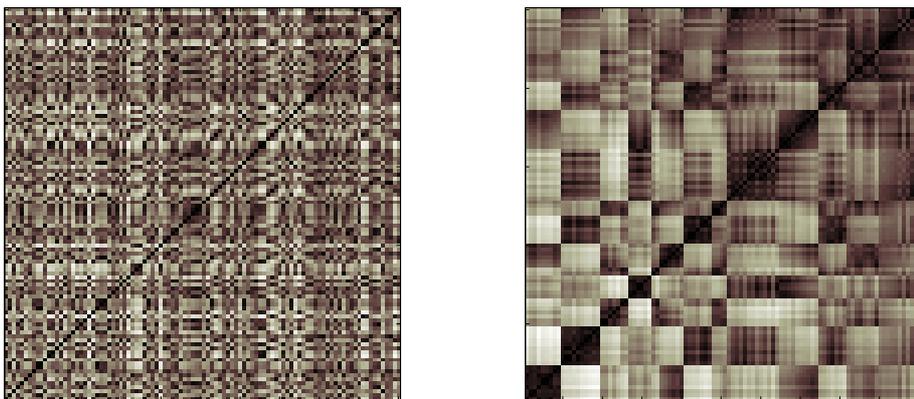


FIGURE A.6 – Matrice de ressemblance dans l'espace de conception

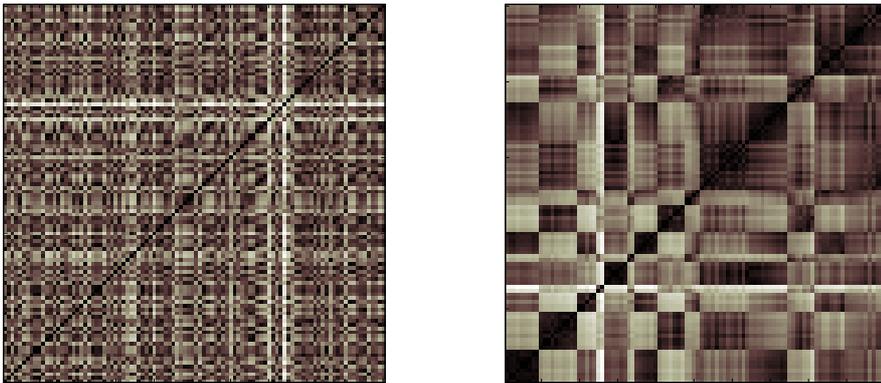


FIGURE A.7 – Matrice de ressemblance dans l'espace des performances

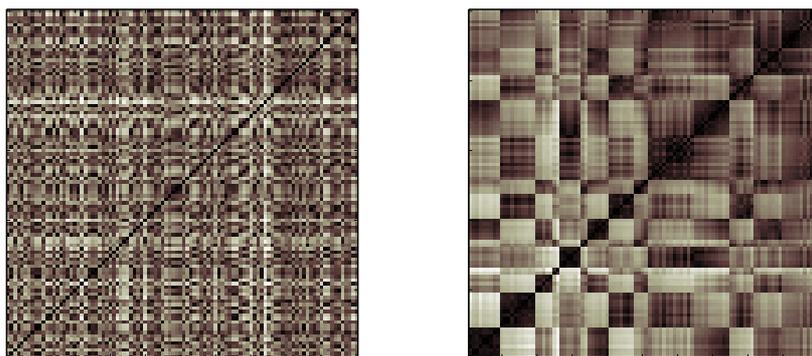


FIGURE A.8 – Matrice de ressemblance dans l'espace conception/performances

Annexe B

Optimisation des paramètres d'augmentation

Le problème de l'optimisation des paramètres d'augmentation a été évoqué dans le chapitre 4. Nous rappelons brièvement ici les formulations utilisées et définissons le mode de calcul retenu pour obtenir une approximation de paramètres d'augmentation proche des paramètres optimaux.

B.1 Rappel des formulations utilisées

B.1.1 Cadre global

Nous considérons donc un domaine Ω composé de deux sous-domaines Ω^1 et Ω^2 potentiellement en contact frottant sur une surface S_c . On se place dans le cas où les points de S_c de chaque sous-domaine peuvent être appariés de manière unique à un point correspondant de l'autre sous-domaine. Une vitesse de glissement Eulerienne v_s entre les deux domaines est aussi considérée. u désigne le champ de déplacement dans le domaine, $x^{(i)}$ est la restriction d'un champ x au domaine Ω^i , g est le déplacement relatif $u^{(1)} - u^{(2)}$ sur l'interface de contact S_c et la dérivation temporelle est notée à l'aide d'un point : \dot{x} . Les exposants situés à droite correspondent au numéro de pas de temps, ceux à gauche au numéro de l'itération non-linéaire. g_0 est le jeu initial entre les sous-domaines. Le contact est modélisé par une loi de Signorini-Coulomb telle que décrite au chapitre 4. Les indices à droite n et t correspondent respectivement à la projection sur la normale au contact et sur le plan tangent d'un champ. Les champs normaux sont considérés scalaires, tandis que les champs tangents sont simplement le champ total au quel est retiré la composante normale.

On utilise alors l'algorithme de résolution décrit au chapitre 4 avec les discrétisations qui y sont introduites. Afin de traiter l'interface de contact comme une interface avec un solide rigide, on introduit le changement de variable suivant :

$$(u_1, u_2) \rightarrow (U_1, U_2) = \frac{(u_1 - u_2, u_1 + u_2)}{\sqrt{2}}$$

On définit les trois opérateurs locaux suivants : P_N^L , P_T^L et P_B^L . P_N^L est l'opérateur de projection d'un champ défini sur les nœuds de contact suivant la normale sortante au domaine Ω_1 . Si l'on a N_{ctc_nodes} nœuds de contact avec $N_{dof_per_nd}$ DDLs par nœud, P_N^L est de taille N_{ctc_nodes} par $N_{ctc_nodes} N_{dof_per_nd}$. P_T^L est l'opérateur de projection sur la première direction tangente $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}_s}{\|\mathbf{v}_s\|}$. P_T^L est de taille N_{ctc_nodes} par $N_{ctc_nodes} N_{dof_per_nd}$. P_B^L est l'opérateur de projection sur la deuxième direction tangente $\mathbf{b} = \mathbf{n} \wedge \frac{\mathbf{v}_s}{\|\mathbf{v}_s\|}$. P_B^L est de taille N_{ctc_nodes} par $N_{ctc_nodes} N_{dof_per_nd}$. Les opérateurs P_N , P_T et P_B ont les mêmes sorties mais opèrent sur les champs globaux et non sur les restrictions à la zone de contact.

Un quatrième opérateur, \tilde{P}_T^L , est introduit. Il est défini comme suit : $\tilde{P}_T^L = 1 - P_N^{L\top} P_N^L$. \tilde{P}_T^L est de taille $N_{ctc_nodes} N_{dof_per_nd}$ par $N_{ctc_nodes} N_{dof_per_nd}$.

Ces quatre opérateurs sont indépendants du changement de variable introduit précédemment et doivent être considérés comme purement géométriques

B.1.2 Optimisation des paramètres d'augmentation

B.1.3 Paramètres constants

Dans le schémas numérique utilisé, on a vu que le choix des paramètres d'augmentation ρ_n et ρ_t était crucial. Dans la littérature [68] ces paramètres sont souvent pris égaux à la plus petite valeur propre de la matrice de l'intégrateur J ou d'une fonction de la plus petite et de la plus grande valeur propre et de du coefficient de frottement μ . Ce choix est souvent sécuritaire mais non optimal : pour des systèmes complexes avec des matériaux contrastés, cette valeur peut être extrêmement faible comparée à la norme de la matrice J , ce qui conduit à des augmentations très faibles du Lagrangien à chaque itération et donc à une convergence lente. Nous détaillons ici le choix retenu pour ces paramètres d'augmentation ainsi que des alternatives possibles.

Comme nous l'avons vu, les paramètres d'augmentation rentrent dans la définition de la fonction f (eq. B.1) dont on cherche le point fixe.

$$f : (\mathbf{r}, \mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}, \rho_n^u, \rho_t) \mapsto \text{proj}_{K_\mu} \left(\mathbf{r}_t + \mathbf{P}_N^L \text{proj}_{\mathbb{R}^-} (\mathbf{r}_n - \rho_n^u (\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_0)) - \rho_t (\dot{\mathbf{g}}_t - \mathbf{v}_s) \right) \quad (\text{B.1})$$

La minimisation de la constante de Lipschitz de cette fonction mène à considérer ρ_n et ρ_t comme des approximations diagonales de J sur les degrés de liberté de contact.

Afin de faire cette approximation, le choix a été fait de procéder à une condensation statique de J sur les DDLs de contact (plus précisément sur le déplacement relatif).

Nous décrivons ici la démarche justifiant ce choix pour le contact normal. Elle est identique pour le problème de frottement seul. Les modes statiques de liaisons sur les DDLs normaux \mathbf{T}_S^N sont définis comme suit :

$$\mathbf{J}\mathbf{T}_S^N = \mathbf{P}_N^T \mathbf{R}_N \quad (\text{B.2})$$

où \mathbf{R}_N est une matrice décrivant les sollicitations unitaires possibles de l'interface par un effort normal de contact. Ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{T}_S^{N^T} \mathbf{J}\mathbf{T}_S^N = \mathbf{T}_S^{N^T} \mathbf{P}_N^T \mathbf{R}_N = \mathbf{R}_N \quad (\text{B.3})$$

Or, d'après l'équation (B.2) on a : $\mathbf{T}_S^N = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_N^T \mathbf{R}_N$. De plus, on a la relation $\mathbf{P}_N \mathbf{T}_S^N = \mathbf{I}$, ce qui conduit à $\mathbf{I} = \mathbf{P}_N \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_N^T \mathbf{R}_N$. Au final on obtient l'égalité suivante :

$$\mathbf{T}_S^{N^T} \mathbf{J}\mathbf{T}_S^N = (\mathbf{P}_N \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_N^T)^{-1} \quad (\text{B.4})$$

Cette expression correspond bien à ce que doit vérifier l'opérateur d'augmentation normal ρ_N d'après l'équation (4.39) du chapitre 4. Il faut cependant utiliser une approximation diagonale de cet opérateur pour vérifier les lois de contact.

On définit donc ρ_{N0} et ρ_{T0} comme suit :

$$\rho_{N0} = D \left(P_N^L T_S^T J T_S P_N^{L^T} \right) \quad (B.5)$$

$$\rho_{T0} = \text{Avg} \left(D \left(\tilde{P}_T^L T_S^T J T_S \tilde{P}_T^{L^T} \right) \right) \quad (B.6)$$

où, T_S est une base des modes statiques de liaison sur les degrés de liberté relatifs en zone de contact (ou, sur les DDLs de contact avec le changement de variable introduit précédemment), D est un opérateur d'extraction de la diagonale et Avg est une opération de moyennage par nœud permettant de n'avoir qu'une seule valeur par nœud pour l'opérateur ρ_t .

$$T_S = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ -J_{CC}^{-1} J_{CI} \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

où l'indice C désigne les DDLs internes et I ceux d'interface

Ces deux opérateurs sont alors mis à l'échelle suivant la formule suivante :

$$\begin{aligned} \rho_N &= \frac{\alpha}{\text{mean}(D(\rho_{N0}))} \rho_{N0} \\ \rho_T &= \frac{\alpha}{\text{mean}(D(\rho_{T0}))} \rho_{T0} \end{aligned} \quad (B.8)$$

Où, α est choisi comme suit :

$$\alpha = \min(\text{mean}(D(\rho_{T0})), \text{mean}(D(\rho_{N0}))) \quad (B.9)$$

B.1.4 Alternatives à ce choix de paramètres d'augmentation

Du fait de la proximité de l'algorithme utilisé et de la méthode LaTin [19, 73, 74], on peut remarquer que le rôle joué par les paramètres d'augmentation est similaire à celui joué par les directions de recherches LaTin. Dans la LaTin pour des interfaces de contact frottant en dynamique, la direction de recherche optimale est proche de l'impédance de choc. Cette impédance pourrait être utilisée comme paramètre, en particulier si l'on résout le contact aux points de Gauss et non aux nœuds.

Cette approche semble intéressante car elle n'utilise pas de condensation coûteuse. Cependant, les essais menés avec la méthode LaTIn dans le cadre de cette thèse ont montré que lorsque les matériaux en contact étaient très contrastés, la convergence était difficile. Cette configuration est le cas pour les freins à disques TGV, et il se peut donc qu'un choix de paramètres d'augmentation inspiré de la LaTIn souffre des mêmes défauts.

B.2 Notations

Cette section permet de lister toutes les notations utilisées dans le calcul des paramètres d'augmentation.

| Nom | Définition | Description |
|---------------------------|--|--|
| Ω_1 | - | Domaine en contact maître |
| Ω_2 | - | Domaine en contact esclave |
| $N_{\text{ctc_nodes}}$ | - | Nombre de nœuds de contact |
| $N_{\text{dof_per_nd}}$ | - | Nombre de DDLs par nœud de contact |
| \mathbf{n} | - | Normale sortante sur la zone de contact pour Ω_1 |
| \mathbf{v}_s | - | Vitesse de glissement Eulerienne |
| \mathbf{t} | $\frac{\mathbf{v}_s}{\ \mathbf{v}_s\ }$ | Direction de glissement |
| \mathbf{b} | $\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$ | Deuxième direction tangente |
| \mathbf{u} | - | Champ de déplacement |
| \mathbf{r} | - | Réaction de contact de Ω_2 sur Ω_1 |
| $\dot{\mathbf{x}}$ | - | Dérivée temporelle de \mathbf{x} |
| x_n | $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ | Composante normale du champ \mathbf{x} |
| \mathbf{x}_t | $\mathbf{x} - \mathbf{n}x_n$ | Composante tangentielle du champ \mathbf{x} |
| h | - | Pas de temps de l'intégrateur |
| \mathbf{J} | $\mathbf{J} = \left(\mathbf{M} + (h\theta)^2 \mathbf{K} + h\theta \mathbf{C} \right) \frac{1}{h}$ | Matrice de l'intégrateur |
| \mathbf{P}_N | - | Projection globale sur la normale sortante |
| \mathbf{P}_T | - | Projection globale sur la première direction tangente \mathbf{t} |
| \mathbf{P}_B | - | Projection globale sur la seconde direction tangente \mathbf{b} |
| \mathbf{P}_N^L | - | Projection locale sur la normale sortante |
| \mathbf{P}_T^L | - | Projection locale sur la première direction tangente \mathbf{t} |
| \mathbf{P}_B^L | - | Projection locale sur la seconde direction tangente \mathbf{b} |
| $\tilde{\mathbf{P}}_T^L$ | $\mathbf{1} - \mathbf{P}_N^L \top \mathbf{P}_N^L$ | Extracteur de la composante tangente totale |
| x_n | $\mathbf{P}_N \mathbf{x}$ | Projection normale du champ \mathbf{x} |
| \mathbf{x}_t | $\tilde{\mathbf{P}}_T^L \mathbf{x}$ | Restriction tangente du champ \mathbf{x} |
| ρ_N | - | Paramètre d'augmentation normal |
| ρ_T | - | Paramètre d'augmentation tangentiel |

TABLE B.1 – Définition des notations

Bibliographie

- [1] G. G. ADAMS, *Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of friction*, Journal of Applied Mechanics, 62 (1995), p. 867–872. (Cité en pages 108 et 116.)
- [2] G. G. ADAMS, *Dynamic instabilities in the sliding of two layered elastic half-spaces*, Journal of Tribology, 120 (1998), p. 289–295. (Cité en page 108.)
- [3] G. G. ADAMS, *Steady sliding of two elastic half-spaces with friction reduction due to interface stick-slip*, Transaction of the ASME, 65 (1998), p. 470–475. (Cité en page 108.)
- [4] G. AMONTONS, *Mémoires de mathématiques et de physique*, Académie Royale des Sciences, seconde édition éd., 1699, chap. De la résistance causée dans les machines, tant par les frottements des parties qui les composent, que par la roideur des cordes qu'on y employe, La manière de calculer l'un et l'autre., p. 206–227. (Cité en page 66.)
- [5] L. BAILLET, S. D'ERRICO ET B. LAULAGNET, *Understanding the occurrence of squealing noise using the temporal finite element method*, Journal of Sound and Vibration, 292 (2006), p. 443 – 460. (Cité en page 108.)
- [6] E. BALMÈS, *Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduits en dynamique des structures*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1997. (Cité en page 99.)
- [7] F. BERGMAN, M. ERIKSSON ET S. JACOBSON, *Influence of disc topography on generation of brake squeal*, Wear, 225-229 (1999), p. 621 – 628. (Cité en pages 42 et 43.)
- [8] P. BERNDT ET W. SCHWEIGER, *Experimental and theoretical investigation of brake squeal with disc brakes installed in rail vehicles*, Wear, 113 (1986), p. 131 – 142. (Cité en page 45.)
- [9] A. BOBILLOT, *Méthodes de réduction pour le recalage Application au cas d'Ariane 5*, Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2002. (Cité en pages 98 et 186.)
- [10] A. BOBILLOT ET E. BALMÈS, *Iterative computation of modal sensitivities*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 44 (2006), p. 1332–1338. (Cité en page 98.)
- [11] E. BOYERE, *Réduction de modèle en dynamique linéaire et nonlinéaire : Méthode de ritz*, 2009. (Cité en page 149.)
- [12] F. BRISOU. *Rail21*. <http://florent.brisou.pagesperso-orange.fr/>, date de consultation : 20 Septembre 2011. (Cité en page 12.)

- [13] D. BRIZARD, O. CHIELLO, J.-J. SINOUE ET X. LORANG, *Performances of some reduced bases for the stability analysis of a disc/pads system in sliding contact*, Journal of Sound and Vibration, 330 (2011), p. 703 – 720. (Cité en page 172.)
- [14] T. BUTLIN ET J. WOODHOUSE, *Friction-induced vibration : Quantifying sensitivity and uncertainty*, Journal of Sound and Vibration, 329 (2010), p. 509 – 526. (Cité en page 44.)
- [15] T. BUTLIN ET J. WOODHOUSE, *A systematic experimental study of squeal initiation*, Journal of Sound and Vibration, In Press, Corrected Proof (2011), p. –. (Cité en page 44.)
- [16] T. M. CAMERON ET J. H. GRIFFIN, *An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems*, Journal of applied mechanics - Transactions of the ASME, 56 (1989), p. 149–154. (Cité en page 103.)
- [17] J. CARR, *Applications of centre manifold theory*, Springer, 1981. (Cité en page 101.)
- [18] L. CHAMPANEY, *Contact unilatéral entre solides élastiques*, 2007. (Cité en pages 80 et 96.)
- [19] L. CHAMPANEY, J.-Y. COGNARD ET P. LADEVÈZE, *Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions*, Computers and Structures, 73 (1998), p. 249–266. (Cité en pages 81 et 214.)
- [20] F. CHEVILLOT, J.-J. SINOUE, G.-B. MAZET, N. HARDOUIN ET L. JÉZÉQUEL, *The destabilization paradox applied to friction-induced vibrations in an aircraft braking system*, Archive of Applied Mechanics, 78 (2008), p. 949–963. 10.1007/s00419-008-0208-7. (Cité en page 28.)
- [21] O. CHIELLO, *Projet ACOUFREN - description des modèles de frein simplifiés disponibles*, rap. tech., IFSTTAR/LTE, 2010. (Cité en page 172.)
- [22] A. CHIPPERFIELD, P. FLEMING, H. POHLHEIM ET C. FONSECA, *Genetic Algorithm Toolbox for use with Matlab*, University of Sheffield, Department of Automatic Control and System Engineering, 1994. (Cité en page 174.)
- [23] N. COUDEYRAS, S. NACIVET ET J.-J. SINOUE, *Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, 328 (2009), p. 520 – 540. (Cité en pages 104 et 129.)
- [24] N. COUDEYRAS, J.-J. SINOUE ET S. NACIVET, *A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, 319 (2009), p. 1175 – 1199. (Cité en pages 104 et 129.)
- [25] R. COURANT, K. FRIEDRICHS ET H. LEWY, *Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik*, Mathematische Annalen, 100 (1928), p. 32–74. 10.1007/BF01448839. (Cité en page 72.)
- [26] D. A. CROLLA ET A. LANG, *Paper vii (i) brake noise and vibration - the state of the art*, in Vehicle Tribology, C. T. D. Dowson et M. Godet, édés., vol. 18 de Tribology Series, Elsevier, 1991, p. 165 – 174. (Cité en page 20.)
- [27] P. R. DAHL, *Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations*, AIAA Journal, 14 (1976), p. 1675–1682. (Cité en page 69.)

- [28] C.-R. DARWIN, *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou la lutte pour l'existence dans la nature*, Alfred Coste, 1859. (Cité en page 174.)
- [29] C.-A. DE COULOMB, *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, Bachelier (Paris), 1821. (Cité en page 66.)
- [30] G. V. DES ROCHES, *Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes*, Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2010. (Cité en pages 78 et 94.)
- [31] M. DU, F. H. Y. CHAN, F. LAM ET J. SUN, *Crackle detection and classification based on matched wavelet analysis*, in The 19th IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Conference Proceedings, 1997. (Cité en page 112.)
- [32] V. A. DUONG, *Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites*, Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2008. (Cité en page 65.)
- [33] G. DUVAUT ET J.-L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, no vol. 1 in Travaux et recherches mathématiques, Dunod, 1972. (Cité en page 79.)
- [34] S. W. E. EARLES ET M. N. M. BADI, *Oscillatory instabilities generated in a double-pin and uisk undamped system - a mechanism of disc-brake squeal*, Proceedings of the institution of mechanical engineers part C - Journal of Mechanical Engineering Science, 198 (1984), p. 43–50. (Cité en page 27.)
- [35] S. W. E. EARLES ET P. W. CHAMBERS, *Disk brake squeal noise generation - predicting its dependency on system parameters including damping*, International Journal of Vehicle Design, 8 (1987), p. 538–552. (Cité en page 27.)
- [36] J. ERICKSON, D. GUOY, J. M. SULLIVAN ET A. ÜNGÖR, *Building spacetime meshes over arbitrary spatial domains*, Engineering with Computers, 20 (2005), p. 342–353. 10.1007/s00366-005-0303-0. (Cité en page 77.)
- [37] C. EUROPÉENNE, *Décision de la commission du 23 décembre 2005 relative à la spécification technique d'interopérabilité concernant le sous-système "matériel roulant – bruit" du système ferroviaire transeuropéen conventionnel*, Rap. tech. c(2005) 5666, Commission Européenne, août 2006. (Cité en pages 6 et 17.)
- [38] A. FELSKE, G. HOPPE ET H. MATTHÄI, *Oscillations in squealing disc brakes – analysis of vibration modes by holographic interferometry*, Rap. tech. 780333, SAE, 1978. (Cité en page 42.)
- [39] Z.-Q. FENG, J.-M. CROS ET B. MAGNAIN, *Un algorithme efficace pour les problèmes d'impact avec frottement*, Revue européenne des éléments finis, 14 (2005), p. 65–86. (Cité en page 85.)
- [40] J. D. FIELDHOUSE, D. BRYANT ET C. J. TALBOT, *Investigation of brake squeal and the influence of the abutment faces*, in The 6th european conference on braking, 2010. (Cité en page 42.)
- [41] J. D. FIELDHOUSE ET T. P. NEWCOMB, *The application of interferometry to the study of disc brake noise*, Rap. tech. 930805, SAE, 1993. (Cité en page 42.)
- [42] J. D. FIELDHOUSE ET T. P. NEWCOMB, *Double pulsed holography used to investigate noisy brakes*, Optics and lasers in Engineering, 25 (1996), p. 455–494. (Cité en page 42.)

- [43] R. FOSBERRY ET Z. HOLUBECKI, *Disc brake squeal : its mechanism and suppression*, Rap. tech. 1961/1, Motor Industry Research Institution, 1961. (Cité en page 42.)
- [44] G. FRITZ, J.-J. SINOÛ, J.-M. DUFFAL ET L. JÉZÉQUEL, *Effects of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model*, Mechanics Research Communications, 34 (2007), p. 181 – 190. (Cité en page 28.)
- [45] D. GABOR, *Theory of communication*, IEEE Journal, 93 (1946), p. 429–457. (Cité en page 111.)
- [46] O. GIANNINI, A. AKAY ET F. MASSI, *Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup*, Journal of Sound and Vibration, 292 (2006), p. 1 – 20. (Cité en page 44.)
- [47] O. GIANNINI ET A. SESTIERI, *Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake*, Journal of Sound and Vibration, 296 (2006), p. 583 – 601. (Cité en page 44.)
- [48] P. GOUPILLAUD, A. GROSSMANN ET J. MORLET, *Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis*, Geoexploration, 23 (1984), p. 85 – 102. Seismic Signal Analysis and Discrimination III. (Cité en page 112.)
- [49] P. GRANGE, D. CLAIR, L. BAILLET ET M. FOGLI, *Brake squeal analysis by coupling spectral linearization and modal identification methods*, Mechanical Systems and Signal Processing, 23 (2009), p. 2575 – 2589. (Cité en page 115.)
- [50] A.-P.-M. GUIBERT, *Propriétés générales du mouvement d'un système de corps*, Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris, 1831. (Cité en page 71.)
- [51] P.-A. GUIDAULT, *Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration*, Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2005. (Cité en page 83.)
- [52] J. S. GUPTA, *Mésodynamique et rupture des composites 3D C/C sous choc : une stratégie numérique dédiée*, Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2005. (Cité en page 76.)
- [53] H. HERTZ, *Über die berührung fester elastischer körper and über die härtean*, J. für reine und angewandte Mathematik, 92 (1882). (Cité en page 65.)
- [54] B. HERVÉ, J.-J. SINOÛ, H. MAHÉ ET L. JÉZÉQUEL, *Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 27 (2008), p. 141 – 160. (Cité en page 28.)
- [55] B. HERVÉ, J.-J. SINOÛ, H. MAHÉ ET L. JÉZÉQUEL, *Extension of the destabilization paradox to limit cycle amplitudes for a nonlinear self-excited system subject to gyroscopic and circulatory actions*, Journal of Sound and Vibration, 323 (2009), p. 944 – 973. (Cité en page 28.)
- [56] H. M. HILBER, *Collocation, dissipation and 'overshoot' for the time integration schemes in structural dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 6 (1978), p. 99–117. (Cité en page 74.)
- [57] H. M. HILBER, T. J. R. HUGHES ET R. L. TAYLOR, *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5 (1977), p. 283–292. (Cité en page 74.)

- [58] N. HOFFMANN, *Brake squeal : mode coupling, flutter – and beyond ?*, in The 6th european conference on braking, 2010. (Cité en pages 70 et 200.)
- [59] N. HOFFMANN, M. FISCHER, R. ALLGAIER ET L. GAUL, *A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations*, Mechanics Research Communications, 29 (2002), p. 197 – 205. (Cité en page 26.)
- [60] E. HOPF, *Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differential-systems*, Berichte der Mathematisch-Physischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, XCIV (1942). (Cité en page 37.)
- [61] T. J. HUGHES, *Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics*, Computers and Structures, 6 (1976), p. 313 – 324. (Cité en page 74.)
- [62] G. M. HULBERT ET T. J. R. HUGHES, *Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 84 (1990), p. 327 – 348. (Cité en page 75.)
- [63] R. A. IBRAHIM, *Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos—part i : Mechanics of contact and friction*, Applied Mechanics Reviews, 47 (1994), p. 209–226. (Cité en page 20.)
- [64] R. A. IBRAHIM, *Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos—part ii : Mechanics of contact and friction*, Applied Mechanics Reviews, 47 (1994), p. 227–253. (Cité en page 20.)
- [65] R. JARVIS ET B. MILLS, *Vibration induced by dry friction*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, (1964), p. 847–866. (Cité en pages 27 et 42.)
- [66] M. JEAN, *The non-smooth contact dynamics method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177 (1999), p. 235 – 257. (Cité en page 86.)
- [67] H. B. KHENOUS, P. LABORDE ET Y. RENARD, *Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 27 (2008), p. 918 – 932. (Cité en page 86.)
- [68] H. B. KHENOUS, J. POMMIER ET Y. RENARD, *Hybrid discretization of the signorini problem with coulomb friction. theoretical aspects and comparison of some numerical solvers*, Applied Numerical Mathematics, 56 (2006), p. 163 – 192. (Cité en pages 80, 84 et 213.)
- [69] N. M. KINKAID, O. M. O'REILLY ET P. PAPADOPOULOS, *Automotive disc brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, 267 (2003), p. 105 – 166. (Cité en page 44.)
- [70] S. KRENK, *State-space time integration with energy control and fourth-order accuracy for linear systems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 65 (2006), p. 595–619. (Cité en page 76.)
- [71] K. KUNISCH ET S. VOLKWEIN, *Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems*, Numerische Mathematik, 90 (2001), p. 117–148. 10.1007/s002110100282. (Cité en page 100.)
- [72] P. LABORDE ET Y. RENARD, *Fixed point strategies for elastostatic frictional contact problems*, Mathematical methods in the applied sciences, 31 (2008), p. 415–441. (Cité en page 81.)

- [73] P. LADEVÈZE, *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 300, II (1985), p. 41–44. (Cité en pages 81 et 214.)
- [74] H. LEMOUSSU, P.-A. BOUCARD ET P. LADEVÈZE, *A 3d shock computational strategy for real assembly and shock attenuator*, Advances in engineering software, (2002). (Cité en pages 81, 86 et 214.)
- [75] X. LORANG, *Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV*, Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2007. (Cité en pages 7, 87, 91, 100, 105, 108, 109, 149 et 172.)
- [76] X. LORANG ET O. CHIELLO, *Stability and transient analysis in the modelling of railway disc brake squeal*, in Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems, vol. 99 de Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Springer Berlin / Heidelberg, 2008, p. 447–453. (Cité en page 128.)
- [77] X. LORANG, F. FOY-MARGIOCCHI, Q. S. NGUYEN ET P.-E. GAUTIER, *TGV disc brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, 293 (2006), p. 735 – 746. (Cité en page 45.)
- [78] F. LOUF, J.-P. COMBE ET J.-P. PELLE, *Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction*, Computers & Structures, 81 (2003), p. 1759 – 1772. Civil Comp Special Issue. (Cité en page 80.)
- [79] A. LOYER, J.-J. SINOÛ, O. CHIELLO ET X. LORANG, *Time simulation and reduction methodology for squeal noise prediction*, in Tenth International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, 2010. (Cité en page 200.)
- [80] A. LOYER, J.-J. SINOÛ, O. CHIELLO ET X. LORANG, *Study of nonlinear behaviors and modal reductions for friction destabilized systems. application to an elastic layer*, Journal of Sound and Vibration, 331 (2012), p. 1011 – 1041. (Cité en pages 109 et 198.)
- [81] B. LOYER, *Conception fonctionnelle robuste par optimisation multicritère de systèmes de suspension automobile passifs et semi-actifs*, Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 2009. (Cité en pages 47 et 202.)
- [82] H. MESA, *Adapted wavelets for pattern detection*, in Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications, A. Sanfeliu et M. Cortés, édés., vol. 3773 de Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin / Heidelberg, 2005, p. 933–944. (Cité en page 112.)
- [83] A. MEZIANE, L. BAILLET ET B. LAULAGNET, *Experimental and numerical investigation of friction-induced vibration of a beam-on-beam in contact with friction*, Applied Acoustics, 71 (2010), p. 843 – 853. (Cité en page 44.)
- [84] H. R. MILLS, *Brake squeal*, Rap. tech. 9000B, Institution of Automobile Engineers, 1938. (Cité en page 42.)
- [85] F. MOIROT, *Étude de la stabilité d'un équilibre de Coulomb - Application au crissement des freins à disque (Stability study of a Coulomb equilibrium - Implementation on disc brake squeal)*, Thèse de doctorat, École Polytechnique, France, 1998. (Cité en pages 97 et 108.)
- [86] C. MORALES, *Comments on the mac and the nco, and a linear modal correlation coefficient*, Journal of Sound and Vibration, 282 (2005), p. 529 – 537. (Cité en page 113.)

- [87] J. MORLET, G. ARENS, E. FOURGEAU ET D. GIARD, *Wave propagation and sampling theory—part ii : Sampling theory and complex waves*, Geophysics, 47 (1982), p. 222–236. (Cité en page 112.)
- [88] H. MURAKAMI, N. TSUNADA ET T. KITAMURA, *A study concerned with a mechanism of disc-brake squeal*, Rap. tech. 84123, SAE, 1984. (Cité en page 42.)
- [89] A. H. NAYFEH ET B. BALACHANDRAN, *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*, Wiley-VCH, 1995. (Cité en pages 20 et 100.)
- [90] N. M. NEWMARK, *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, 85 (1959), p. 67–94. (Cité en page 73.)
- [91] S. NIROOMANDI, I. ALFARO, E. CUETO ET F. CHINESTA, *Accounting for large deformations in real-time simulations of soft tissues based on reduced-order models*, Computer Methods and Programs in Biomedicine, In Press, Corrected Proof (2010), p. –. (Cité en page 149.)
- [92] A. NOUY, *A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199 (2010), p. 1603 – 1626. (Cité en page 100.)
- [93] J. ODEN ET J. MARTINS, *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 52 (1985), p. 527 – 634. (Cité en page 20.)
- [94] D. ODIÈVRE, P.-A. BOUCARD ET F. GATUINGT, *Stratégie de calcul multiéchelle pour la multirésolution dynamique transitoire*, in Neuvième Colloque national en Calcul des Structures - Giens 2009 - Actes, 2009. (Cité en page 81.)
- [95] K. OHTA, K. KAGAWA, T. ETO ET S. NISHIKAWA, *Study on the disc brake squeal (simulation using modal analysis technique and experiments)*, Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineers, Series C 50 (1984), p. 1585–1593. (Cité en page 42.)
- [96] M. PALIWAL, A. MAHAJAN, J. DON, T. CHU ET P. FILIP, *Noise and vibration analysis of a disc-brake system using a stick-slip friction model involving coupling stiffness*, Journal of Sound and Vibration, 282 (2005), p. 1273 – 1284. (Cité en page 24.)
- [97] E. PIERRÈS, M.-C. BAIETTO ET A. GRAVOUIL, *A two-scale extended finite element method for modelling 3d crack growth with interfacial contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199 (2010), p. 1165 – 1177. (Cité en page 83.)
- [98] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING ET B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3 éd., 2007. (Cité en page 78.)
- [99] J. RÉTHORÉ, A. GRAVOUIL ET A. COMBESCURE, *A combined space-time extended finite element method*, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 64 (2005), p. 260–284. (Cité en page 77.)
- [100] S. K. RHEE, M. G. JACKO ET P. H. S. TSANG, *The role of friction film in friction, wear and noise of automotive brakes*, Rap. tech. 900004, SAE, 1990. (Cité en page 42.)
- [101] W. RITZ, *Über eine neue methode zur lösung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1909 (1909), p. 1–61. (Cité en pages 98 et 148.)

- [102] C. ROYER, *Une Approche des problèmes de dynamique non-linéaires par la méthode à grand incrément de temps*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1990. (Cité en page 81.)
- [103] G. D. SAXCÉ ET Z.-Q. FENG, *The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms*, Mathematical and Computer Modelling, 28 (1998), p. 225 – 245. Recent Advances in Contact Mechanics. (Cité en page 85.)
- [104] M. SEBES, J.-B. AYASSE, H. CHOLLET, P. POULIGNY, J. PLU ET L. CHEVALIER, *Application de la méthode semi-hertzienne pour la simulation du passage d'un TGV dans un appareil de voie*, in 18ème Congrès Français de Mécanique, 2007. (Cité en page 65.)
- [105] A. SIGNORINI, *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata.*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 18 (1959), p. 95–139. (Cité en page 64.)
- [106] J.-J. SINOÛ, *Dynamique non-linéaire des structures complexes, fixes et tournantes Approches théoriques, numériques et expérimentales*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, École Centrale Lyon et Université Claude Bernard Lyon 1, 2007. (Cité en page 102.)
- [107] J.-J. SINOÛ, *Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal - on the need to consider both stability and non-linear analysis*, Mechanics Research Communications, 37 (2010), p. 96 – 105. (Cité en pages 100, 122, 127, 149 et 179.)
- [108] J.-J. SINOÛ, O. DEREURE, G.-B. MAZET, F. THOUVEREZ ET L. JEZEQUEL, *Friction-induced vibration for an aircraft brake system—part 1 : Experimental approach and stability analysis*, International Journal of Mechanical Sciences, 48 (2006), p. 536 – 554. (Cité en page 94.)
- [109] J.-J. SINOÛ, F. THOUVEREZ ET L. JEZEQUEL, *Center manifold and multivariable approximants applied to non-linear stability analysis*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 38 (2003), p. 1421 – 1442. (Cité en page 102.)
- [110] J.-J. SINOÛ, F. THOUVEREZ ET L. JEZEQUEL, *Stability analysis and non-linear behaviour of structural systems using the complex non-linear modal analysis (cnlma)*, Computers & Structures, 84 (2006), p. 1891 – 1905. (Cité en pages 94 et 102.)
- [111] SNCF/AEF, *Projet ACOUFREN - rapport sur les essais au banc des garnitures TGV*, Rap. tech. 04 66 C0063, Ademe, september 2011. (Cité en page 60.)
- [112] SNCF/CIM, *Cahier des charges garniture de frein (TGV)*, rap. tech., SNCF-CIM, 2009. (Cité en page 14.)
- [113] SNCF/I&R, *Projet PREDIT-ADEME : CRISFIS « CRISsement et FISsuration des freins à disque haute puissance pour le ferroviaire ». rapport final*, Rap. tech. 04 66 C0063, Ademe, avril 2008. (Cité en pages 17 et 180.)
- [114] R. T. SPURR, *A theory of brake squeal*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1 (1962), p. 33–40. (Cité en page 42.)
- [115] A. STERNCHÜSS, *Multi-level parametric reduced models of rotating bladed disk assemblies*, Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2009. (Cité en pages 98 et 100.)
- [116] R. STRIBECK ET M. SCHRÖTER, *Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager : Untersuchung einer Tandem-Verbundmaschine von 1000 PS / Schröter [u.a.]*, Mitteilungen über

Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, insbesondere aus den Laboratorien der technischen Hochschulen, Springer, 1903. (Cité en page 67.)

- [117] VIBRATEC, *Projet ACOUFREN - caractérisation expérimentale des garnitures - Mesures complémentaires sur garnitures*, Rap. tech. 562.008.NT.02.A, Ademe, 2010. (Cité en pages 13, 45 et 174.)
- [118] VIBRATEC, *Projet ACOUFREN - caractérisation expérimentale des garnitures - Rapport 1 Bases théoriques et approches méthodologiques*, Rap. tech. 562.008.RA.14.A, Ademe, 2010. (Cité en pages 13, 45 et 174.)
- [119] VIBRATEC, *Projet ACOUFREN - caractérisation expérimentale des garnitures - Rapport 2 Résultats des mesures*, Rap. tech. 562.008.RA.15.A, Ademe, 2010. (Cité en pages 13, 45, 174 et 175.)
- [120] VIBRATEC, *Projet ACOUFREN - ensemble couplé garniture/timonerie TGV - Rapport 4 Modèle éléments finis de la timonerie TGV seule*, Rap. tech. 562.008.RA.09.A, Ademe, 2010. (Cité en page 175.)
- [121] D. VOLA, E. PRATT, M. JEAN ET M. RAOUS, *Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementary techniques*, Revue européenne des éléments finis, 7 (1998), p. 149–162. (Cité en pages 86 et 88.)
- [122] E. L. WILSON ET R. E. NICKELL, *Application of the finite element method to heat conduction analysis*, Nuclear Engineering and Design, 4 (1966), p. 276 – 286. (Cité en page 74.)
- [123] C. C. D. WIT, H. OLSSON, K. J. ASTRÖM ET P. LISCHINSKY, *A new model for control of systems with friction*, IEEE Transactions on automatic control, 40 (1995), p. 419–425. (Cité en page 69.)