Thèse de doctorat de l'Observatoire de Paris.
Spécialité : Astronomie et Astrophysique

Étude d'états atomiques à proximité d'une surface massive
-
Application à l'expérience FORCA-G

Sophie PELISSON

Thèse soutenue le 25 octobre 2012

Jury :

M. Christophe SAUTY	*Président du jury*
M. Jean-François ROCH	*Examinateur*
M. Ernst RASEL	*Rapporteur*
Mme. Astrid LAMBRECHT	*Rapporteur*
Mme. Marie-Christine ANGONIN	*Directrice de thèse*
M. Peter WOLF	*Directeur de thèse*

À Grand-Père et Granny,
pour m'avoir transmis le goût des sciences.

Remerciements

J'ai effectué ma thèse au sein de l'équipe *théorie et métrologie* du SYRTE où j'ai bénéficié d'une ambiance exceptionnelle tant sur le plan humain que scientifique. Je voudrais exprimer ici mes remerciements à Noël Dimarcq, directeur du SYRTE, de m'avoir accueillie au laboratoire. Je voudrais aussi remercier les membres de mon jury : Astrid Lambrecht, Ernst Rasel, Jean-François Roch et Christophe Sauty, d'avoir accepté de participer à l'évaluation de mon travail et pour l'intérêt qu'ils y ont porté. Je remercie plus particulièrement Astrid Lambrecht et Ernst Rasel pour leurs rapports.

Ma thèse a été dirigée par Peter Wolf et Marie-Christine Angonin. Je tiens à les remercier chaleureusement pour l'aide et le soutien qu'ils m'ont apporté pendant ces trois années. Malgré leurs nombreuses responsabilités, ils ont toujours été présents pour répondre à mes appels à l'aide et leur conseils se sont toujours avérés avisés. J'ai également été amenée à travailler pendant deux ans avec Riccardo Messina que j'aimerais très sincèrement remercier ici. Cette thèse n'aurait sans doute pas été si complète sans son expérience et son perfectionnisme. Toujours tolérant envers mes bêtises, j'ai beaucoup profité de son aide notamment concernant le calcul de l'effet Casimir. Je le remercie également pour sa bonne humeur, les colles de phonétique et les découvertes "musicales" qui ont rythmé un certain nombre de nos journées.

Merci à l'équipe "FORCA-G" pour leur disponibilité à chaque fois que j'ai eu besoin de discuter des aspects expérimentaux. Merci en particulier à Franck Pereira Dos Santos, Quentin Beaufils, Bruno Pelle et Adèle Hilico pour avoir eu la patience de m'expliquer à plusieurs reprises les avancements de l'expérience. Je remercie aussi l'équipe "Fluctuations quantiques et relativité" du LKB pour les discussions fructueuses à propos de la régularisation de l'effet Casimir-Polder.

Merci aux membres du laboratoire, chercheurs et administratifs, pour leur bonne humeur, leur efficacité et leur disponibilité qui font du SYRTE un excellent environnement de travail. Un grand merci aux thésards du SYRTE pour avoir organisé mon pot de thèse

et pour les quelques sympathiques "doctoriales" auxquelles j'ai pu participer qui contribuent grandement à maintenir une excellente ambiance entre thésards dans le laboratoire. Merci aussi à Anne, Romain H, Romain S, Raphael, Mélody, Lauriane ainsi qu'aux autres thésards de l'IAP et de l'Observatoire pour les pauses déjeuner et bronzage qui furent autant de moment de décompression pendant ces trois ans. Merci aussi à tous mes amis grâce à qui toutes ces années d'études sont passées à la vitesse de la lumière.

Pour finir, je voulais remercier Laurent pour son soutien depuis 8 ans. Merci de me supporter dans mes moments de stress comme dans mes phases d'euphorie. Merci enfin à mes parents, Mamie, Elsa, Rémi et Marion ainsi qu'à ma famille plus large pour leurs encouragements tout au long de ces années malgré les nombreuses périodes de doute et de remise en question. Un grand merci à ma maman d'avoir toujours été là quand j'en ai eu le plus besoin et d'être toujours à l'écoute. J'ai enfin une pensée particulière pour mes grands parents, malheureusement décédés, mais sans qui l'idée saugrenue de me lancer dans la physique ne me serait sans doute jamais venue.

Sophie Pelisson
(Paris, octobre 2012)

Table des matières

Introduction **1**

1 Contexte scientifique **5**

1.1 Introduction 5

1.2 L'interférométrie atomique 7

1.2.1 Manipulation des ondes de matière par des réseaux matériels 8

1.2.2 Manipulation des ondes de matière par des réseaux lumineux 8

1.2.3 Les transitions Raman stimulées comme lame séparatrice 11

1.3 L'expérience FORCA-G 18

1.3.1 Le piège dipolaire à réseau optique 19

1.3.2 Le principe de la mesure 21

1.3.3 Les sources de bruit 22

1.3.4 Les objectifs de l'expérience 23

1.4 L'interaction Casimir-Polder 25

1.4.1 L'effet Casimir entre deux plaques conductrices 25

1.4.2 L'effet Casimir-Polder entre un atome et une surface conductrice . . 27

1.5 Les théories non-Newtoniennes 31

1.5.1 Paramétrisation des déviations 31

1.5.2 Quelques expériences - Les contraintes actuelles 32

2 États pseudo-propres des atomes dans le piège **37**

2.1 Introduction 38

2.2 États atomiques dans un réseau périodique 38
2.2.1 Les états de Bloch 38
2.2.2 Les états de Wannier-Stark 40
2.3 Les états de Wannier-Stark en présence de la surface 42
2.4 L'effet Casimir-Polder sur les états atomiques 45
2.4.1 L'Hamiltonien du système 45
2.4.2 Correction des niveaux d'énergie 48
2.4.3 Régularisation de la correction 49
2.4.4 La correction des états 52
2.5 Introduction d'une déviation à la loi de la gravitation 55
2.5.1 Cas d'un interféromètre avec un seul isotope du rubidium 58
2.5.2 Cas d'un interféromètre avec deux isotopes du rubidium 59
2.5.3 Contraintes attendues pour l'expérience 60
2.6 Article 61

3 Temps de vie dans un piège périodique vertical 75
3.1 Introduction 76
3.2 Les états résonants en mécanique quantique 76
3.2.1 Formule de Landau-Zener 76
3.2.2 L'approche diffusive 78
3.3 La méthode du *Complex Scaling* 80
3.3.1 Théorème de Balslev-Combes 80
3.3.2 Application aux états de Wannier-Stark 82
3.4 Application au problème des états de Wannier-Stark modifiés 85
3.4.1 Temps de vie des états de Wannier-Stark modifiés 85
3.4.2 Comparaison avec la formule de Landau-Zener 87
3.5 Le cas d'un atome au dessus de la surface 89
3.6 Introduction du potentiel de Yukawa 93
3.7 Le problème de l'effet Casimir-Polder 94

3.7.1 Théorie des perturbations non-hermitienne 94
3.7.2 Traitement perturbatif de l'Hamiltonien d'interaction champ-atome 98
3.7.3 Le cas de la régularisation du potentiel de Casimir-Polder 102
3.8 La méthode de stabilisation complexe 103
3.9 Conclusions et Perspectives 104
3.10 Article 104

4 Modélisation théorique de l'expérience FORCA-G 115
4.1 Introduction 116
4.2 Couplages des états atomiques du piège avec les lasers Raman 116
4.3 Choix de la profondeur des puits et délocalisation de la fonction d'onde . . 118
4.4 Problème des phases cumulées et proposition d'un nouveau schéma interférométrique 121
4.4.1 Modélisation de l'interféromètre papillon 121
4.4.2 Proposition d'un nouveau schéma interférométrique 125
4.5 Modélisation complète de l'expérience 127
4.5.1 Contraste à la sortie de l'interféromètre 127
4.5.2 Le cas d'une mesure très proche de la surface 128
4.5.3 L'optimisation du temps d'interaction 129
4.6 Comparaison avec l'expérience 130
4.7 Articles 132

Conclusions 145

Introduction

Ces dernières années, les progrès de l'interférométrie atomique ont permis des applications dans de nombreux domaines de la physique. Outre les horloges atomiques servant à définir la seconde, de nombreuses expériences utilisant les interféromètres à ondes de matière ont vu le jour au cours de ces dernières décennies. L'intérêt de ce type d'expérience repose sur le fait que l'on mesure différentes interactions simplement à l'aide d'une mesure de phase. Or, la mesure de fréquence est ce que l'on fait de plus précis à l'heure actuelle.

Dans ce contexte, s'est développée au SYRTE, l'idée d'une expérience utilisant l'interférométrie atomique dont l'objectif serait de mesurer des interactions de faible amplitude et à très courte distance, entre un atome et une surface massive. L'attrait principal de cette expérience réside dans la possibilité de tester les lois de la gravitation à très petite échelle. Cette recherche s'inscrit dans le développement récent de plusieurs théories au-delà du modèle standard dont l'objet est d'unifier la mécanique quantique et la relativité générale. Nombreuses sont ces théories prédisant une légère modification de la loi de Newton que l'on peut interpréter comme l'apparition, sous certaines conditions, d'une cinquième force. Cette déviation à la loi de la gravitation universelle s'écrit comme un potentiel additionnel au potentiel Newtonien et peut être paramétrée grâce à deux coefficients, l'un représentant la portée typique de la déviation, l'autre son amplitude. Ce sont ces deux paramètres que l'expérience vise à contraindre.

Les portées typiques auxquelles l'expérience va tester cette déviation sont de l'ordre de quelques microns. Cela représente une avancée pour ce type de test puisqu'il existe encore peu de contraintes dans ce domaine de distance. En effet, s'il est relativement aisé de tester les lois de la gravitation à l'échelle de quelques mètres jusqu'à l'échelle du système solaire par des expériences macroscopiques ou l'étude orbitographique d'objets célestes, deux fenêtres restent encore relativement peu testées en raison des difficultés expérimentales que cela représente : les tests à l'échelle du système solaire et au-delà, et ceux à faible distance. L'expérience au coeur de ce manuscrit, FORCA-G (FORce de CAsimir et Gravitation à courte distance) opèrera donc sur cette deuxième fenêtre de test.

Cependant, une autre interaction entre en concurrence avec la gravitation pour un atome à cette distance de la surface. Il s'agit de l'effet Casimir-Polder qui provient de l'interaction entre l'atome et le champ electromagnétique du vide entre l'atome et la surface. Aux distances que l'on teste, cet effet est dominant. Ceci aurait pu être gênant pour la réalisation de l'expérience mais il a été choisi d'adapter la configuration expérimentale afin de pouvoir mesurer cet effet avec une très grande précision en même temps que l'on cherche à contraindre les déviations gravitationnelles.

Les deux types d'interaction que l'on cherche donc à mesurer dépendent toutes deux de la distance entre l'atome et la surface. Un des intérêts de FORCA-G est qu'elle utilise des atomes dans un piège optique pour réaliser l'interféromètre. Ce piège est réalisé par une onde stationnaire monochromatique où les atomes sont confinés dans les minima d'intensité de l'onde. De cette manière, on contrôle très bien la distance entre les atomes et la surface puisque celle-ci est un multiple de la périodicité de l'onde stationnaire c'est-à-dire de la moitié de la longueur d'onde du laser utilisé pour réaliser le piège.

Ce mémoire présente l'accompagnement théorique de cette expérience, tant du point de vue de la modélisation de l'expérience en elle-même que de celui de la prédiction des signaux et des performances attendues. Le manuscrit sera organisé en quatre chapitres. Dans le premier, nous reviendrons sur le contexte scientifique dans lequel s'inscrit l'expérience. Nous développerons en particulier les méthodes de l'interférométrie atomique sur lesquelles s'appuie l'expérience. Puis nous reviendrons sur la description des interactions recherchées.

Dans le chapitre 2, nous présenterons le calcul des états propres du piège en tenant compte des effets de la surface et des interactions à courte distance. On traitera l'effet Casimir-Polder et la mesure des déviations à la loi de Newton séparément en précisant les configurations expérimentales envisagées pour chaque mesure. Les états propres recherchés sont obtenus à l'aide d'une résolution numérique de l'équation de Schrödinger prenant en compte les diverses interactions auxquelles sont soumis les atomes. On montrera à cette occasion que les interactions à courte distance que l'on recherche induisent une modification non négligeable des niveaux d'énergie atomiques dont le comportement non trivial ne peut être modélisé correctement par une approche effective en particulier lorsqu'il s'agit de l'effet des fluctuations du vide quantique.

Le chapitre 3 sera dédié à l'étude des temps de vie des états calculés au chapitre 2. En effet, on verra que l'état d'un atome dans un potentiel périodique n'est pas un véritable état propre mais plutôt une résonance. Ce calcul nécessitera donc l'introduction des

notions mathématiques propres au calcul des résonances quantiques et qui feront l'objet d'une section introductive au chapitre. Nous nous assurerons ensuite que le temps de vie des états du piège est suffisant pour permettre la réalisation de l'expérience.

Enfin, nous terminerons avec la modélisation du schéma expérimental en tant que tel en tenant compte des états que nous aurons présentés dans les chapitres précédents. Nous verrons que l'optimisation du contraste interférométrique à la sortie de l'interféromètre nécessite la modification du schéma expérimental tel qu'il avait été proposé initialement. Nous remarquerons aussi que la présence des interactions à courte distance nécessite le contrôle des fréquences des lasers réalisant l'interféromètre pour tenir compte de la modification des niveaux d'énergie lorsqu'on s'approche de la surface.

CHAPITRE 1

Contexte scientifique

Ce chapitre présente un bref rappel des bases théoriques constituant le contexte de l'expérience FORCA-G sur laquelle porte ce travail de thèse. Sont exposés dans un premier temps l'état de l'art en matière d'interférométrie atomique. On donnera ensuite une description plus précise du schéma expérimental en lui-même pour conclure par une brève revue des interactions recherchées par l'expérience à la fin du chapitre.

Sommaire

1.1 Introduction 5
1.2 L'interférométrie atomique 7
1.2.1 Manipulation des ondes de matière par des réseaux matériels . . 8
1.2.2 Manipulation des ondes de matière par des réseaux lumineux . . 8
1.2.3 Les transitions Raman stimulées comme lame séparatrice 11
1.3 L'expérience FORCA-G 18
1.3.1 Le piège dipolaire à réseau optique 19
1.3.2 Le principe de la mesure 21
1.3.3 Les sources de bruit 22
1.3.4 Les objectifs de l'expérience 23
1.4 L'interaction Casimir-Polder 25
1.4.1 L'effet Casimir entre deux plaques conductrices 25
1.4.2 L'effet Casimir-Polder entre un atome et une surface conductrice 27
1.5 Les théories non-Newtoniennes 31
1.5.1 Paramétrisation des déviations 31
1.5.2 Quelques expériences - Les contraintes actuelles 32

1.1 Introduction

Le travail de thèse que j'ai effectué au laboratoire SYRTE porte sur l'accompagnement théorique d'une expérience : FORCA-G (FORce de CAsimir et Gravitation à courte

distance). Cette expérience, proposée pour la première fois en 2005 [1, 2] s'appuie sur les progrès récents de l'interférométrie atomique et la capacité de cette technologie à mesurer de très petits déphasages. En effet, le but principal de l'expérience est de rechercher une déviation à la loi de la gravitation universelle de Newton à petite distance. Cette déviation est en réalité prédite par de nombreuses théories d'unification cherchant à allier la mécanique quantique et la relativité générale pour l'heure incompatibles. Si cette déviation existe, elle est forcément ténue puisque non encore mesurée. La précision de l'interférométrie atomique pourrait donc être un atout dans cette recherche et c'est dans cette optique qu'a été pensée FORCA-G.

L'objectif de cette expérience est d'utiliser un interferomètre à atomes de rubidium afin de mesurer les interactions de ces atomes avec une surface massive lorsque ceux-ci en sont très proches. Cette configuration permet, en plus des tests de gravitation, de mesurer avec précision l'effet Casimir-Polder qui est l'interaction dominante aux distances auxquelles on s'intéresse. La figure 1.1 présente un schéma simplifié de l'expérience. Sur cette figure, les flèches rouges représentent les impulsions électromagnétiques que l'on utilise pour réaliser l'interféromètre. Les flèches bleues et oranges représentent les interactions à courte distance (resp. les déviations gravitationnelles et l'interaction Casimir-Polder) avec la surface auxquelles est soumis l'atome.

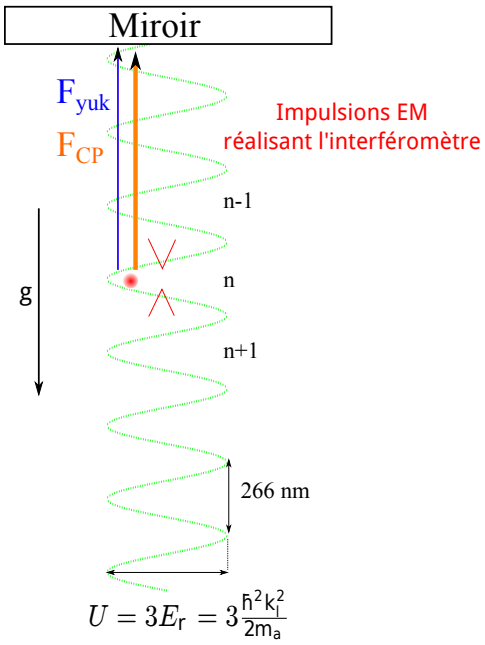


Figure 1.1 : Schéma de la configuration expérimentale de FORCA-G.

Ce premier chapitre introduit les notions théoriques nécessaires à la compréhension

du principe de l'expérience et des interactions que l'on recherche. On présentera dans un premier temps le principe de l'interférométrie atomique ainsi qu'une description plus détaillée de l'expérience FORCA-G en elle-même. On verra dans un second temps, une courte description des deux interactions à courte portée recherchées.

1.2 L'interférométrie atomique

L'histoire de l'interférométrie atomique débute dans les années 1920 avec la découverte de la dualité onde-corpuscule. C'est L. de Broglie qui postula en 1923 la nature ondulatoire de la matière par suite de la découverte des *quanta de lumière* par A. Einstein quelques années auparavant. Il proposa une relation entre la longueur d'onde associée à toute particule et sa quantité de mouvement p [3].

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.2.1}$$

où h est la constante de Planck, c la célérité de la lumière, m la masse de la particule et v sa vitesse. Cette équation posa les bases de la mécanique ondulatoire et fut confirmée par l'expérience de diffraction des électrons réalisée par C. Davisson et L. H. Germer en 1927 [4]. Le fait que les particules puissent être décrites comme des ondes ouvrit alors tout un champ d'investigation, en particulier sur l'application des méthodes de l'optique ondulatoire aux particules. Le précurseur en la matière fut O. Frisch en 1938 [5] qui utilisa la diffusion des neutrons dans le but d'étudier leur comportement dans un champ magnétique. Il faudra cependant attendre les années 50 pour voir un vrai développement de l'utilisation expérimentale des interférences à ondes de matière, d'abord à l'aide d'électrons [6] puis de neutrons [7]. Mais ce n'est que quarante ans plus tard que les progrès sur les faisceaux optiques permettant d'isoler les atomes de leur environnement permirent l'avènement des interféromètres atomiques.

Le principe de base de l'interférométrie repose sur la manipulation d'une superposition cohérente d'états à laquelle on fait parcourir deux chemins différents. En interférométrie optique, on utilise des lames séparatrices pour séparer le faisceau initial. Dans le cas de l'interférométrie atomique il existe deux types de solution que l'on va développer dans la suite : on peut utiliser les propriétés de diffraction des ondes de matière dans les milieux matériels ou manipuler directement les états internes et externes des atomes à l'aide de faisceaux laser.

1.2.1 Manipulation des ondes de matière par des réseaux matériels

La première expérience utilisant les interférences atomiques fut construite dans les années 1990 par O. Carnal et J. Mlynek [8] qui proposaient un schéma simple d'interféromètre utilisant une double fente d'Young pour diffracter un faisceau d'hélium métastable. Au même moment, l'équipe de D. Pritchard [9] réalise un interferomètre sur le modèle des interféromètres à neutrons en utilisant trois réseaux de diffraction. Ces expériences ont en commun l'utilisation d'un réseau matériel ayant pour but de diffracter l'onde entrante et de lui faire suivre deux chemins séparés avant de les recombiner. À titre d'exemple, le schéma expérimental utilisé par l'équipe de D. Pritchard en 1991 est présenté sur la figure 1.2. L'interféromètre ainsi réalisé est semblable à un interféromètre de Mach-Zehnder en optique. Ces expériences ont été rendues possibles grâce aux progrès de la nanolithogra-

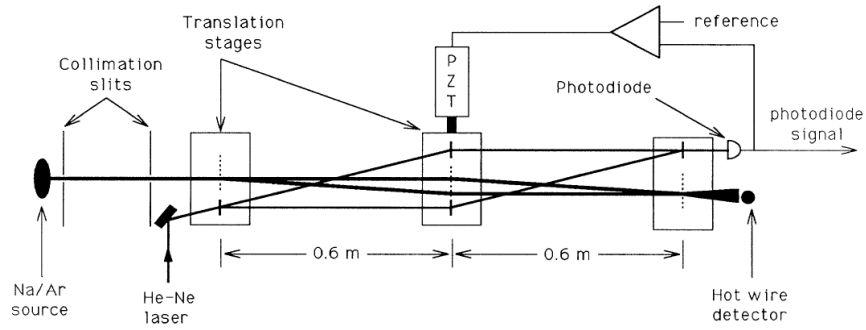


Figure 1.2 : Schéma expérimental d'un interféromètre atomique de type Mach-Zehnder utilisant des réseaux matériels. Ceci est le schéma de l'expérience de D. Pritchard de 1991 [9]. Les réseaux sont représentés par les lignes pointillées verticales.

phie permettant de créer des structures périodiques très fines dont la périodicité spatiale est de l'ordre du nanomètre soit l'ordre de grandeur des longueurs d'onde atomiques. Avec ces dimensions, les phénomènes ondulatoires pour les atomes deviennent visibles. Cette méthode de diffraction est indépendante de la structure interne de l'atome et a donc pu être généralisée à des systèmes plus complexes tels que les molécules par exemple [10, 11].

1.2.2 Manipulation des ondes de matière par des réseaux lumineux

Contrairement au cas des ondes lumineuses, les réseaux matériels ne sont pas les seuls outils permettant de manipuler les ondes de matière ; on peut aussi avoir recours aux champs électromagnétiques. À l'origine de cette technologie se trouve la prédiction de L. Kapitza et P. Dirac de la capacité d'une onde lumineuse stationnaire à diffracter des particules comme les électrons [12]. L'idée initiale était d'utiliser ce phénomène pour observer expérimentalement l'émission stimulée prédite par A. Einstein dans sa théorie des quanta [13]. Cependant, la faible densité de puissance lumineuse des sources disponibles à

l'époque et le faible couplage entre les électrons libres et la lumière n'a permis l'observation de cet effet qu'après l'apparition du laser. En revanche, la diffraction des ondes atomiques, elle, est beaucoup plus facile à observer du fait de la structure interne des atomes. En effet, comme l'ont démontré S. Altshuler, L. Franz et S. Braunstein en 1966, on peut utiliser les résonances entre les états atomiques et le champ électromagnétique pour augmenter la section efficace de diffraction de ces atomes sur l'onde lumineuse [14]. C'est ainsi que la première expérience de diffraction atomique par une onde stationnaire fut réalisée en 1983 par l'équipe de D. Pritchard [15]. Vinrent ensuite les premiers interféromètres atomiques utilisant des ondes stationnaires d'abord dans le régime de Bragg [16, 17] puis dans le régime de Kapitza-Dirac [18]. Ces deux régimes se distinguent par la direction des faisceaux diffractés à la sortie de l'interféromètre. Dans le premier, l'incidence du faisceau sur le réseau est telle que l'on n'obtient que deux faisceaux à la sortie du réseau. Le second cas quant à lui correspond à la diffraction sur une onde stationnaire mince, c'est-à-dire que l'on peut négliger le mouvement des atomes le long de l'axe de l'onde pendant le temps d'interaction. Dans ce cas, plusieurs ordres de diffraction sont autorisés. La figure 1.3 illustre ces deux situations. Toutes ces expériences utilisent la lumière comme un réseau de dif-

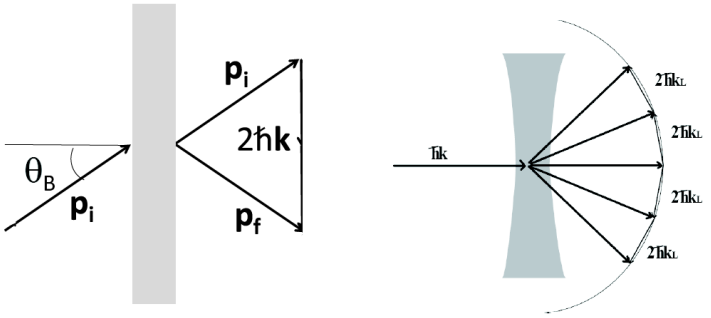


Figure 1.3 : Diffraction dans le régime de Bragg (à gauche) et de Kapitza-Dirac (à droite).

fraction pour les ondes de matière, mais il existe une alternative permettant de réaliser des séparatrices atomiques à l'aide d'ondes lumineuses. Cette méthode consiste à utiliser directement le couplage électromagnétique entre un atome et un champ laser. Ce type de manipulation à l'aide de champs radiofréquences fut initiée par I. Rabi en 1938 [19] puis affinée en 1949 par N. Ramsey [20]. Ces travaux permettent aujourd'hui la mise en place de schémas interférométriques de plus en plus performants.

Prenons un atome possédant deux niveaux atomiques internes distincts $|g\rangle$ et $|e\rangle$ et appliquons-lui une impulsion électromagnétique dont la fréquence est accordée sur la fréquence de transition atomique $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$. Le couplage entre le champ et l'atome permet de créer une superposition cohérente des deux états internes. De plus, la fonction d'onde

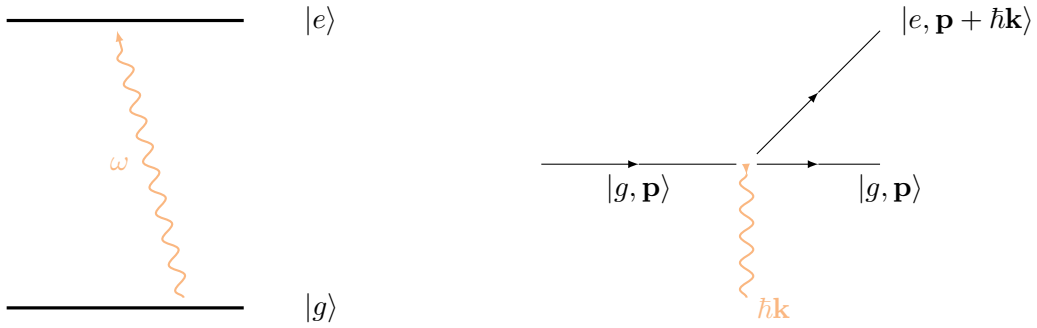


Figure 1.4 : Schéma de l'interaction entre un photon d'une onde lumineuse et un atome à deux niveaux. À gauche est représentée la modification de l'état interne de l'atome tandis que la transmission d'impulsion du photon à l'atome est montrée à droite.

atomique résultante de cette interaction est constituée de deux paquets d'onde séparés spatialement. Ceci est dû à la différence d'impulsion des deux états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ résultant de l'énergie de recul d'un photon du laser lorsque celui-ci est absorbé par l'état $|g\rangle$ pour atteindre l'état $|e\rangle$. Il y a ainsi correspondance entre les états internes et externes de l'atome et les deux états couplés peuvent s'écrire $|g, \boldsymbol{p}\rangle$ et $|e, \boldsymbol{p} + \hbar\boldsymbol{k}\rangle$, $\boldsymbol{k}$ étant le vecteur d'onde du laser. La modification des états internes et externes de l'atome par l'onde lumineuse est illustrée sur la figure 1.4.

L'intérêt de cette méthode réside dans la facilité de détection qu'elle apporte [21]. En effet, les paquets d'onde sont difficilement identifiables par leurs états d'impulsion alors que ce sont précisément ces états qui sont utiles pour les mesures de forces ou d'accélération. Le fait qu'il y ait correspondance entre les états atomiques internes et les états d'impulsion permet, en mesurant les uns, de connaître les autres. On peut donc faire la mesure des états internes à la sortie de l'interféromètre par fluorescence et revenir ensuite à la valeur des états d'impulsion grâce à eux. Ce type de montage est appelé interféromètre de Ramsey-Bordé et a initialement été développé en vue de construire des horloges optiques avant de conduire à un interféromètre pour la mesure de forces externes en 1991 qui permit la première observation de l'effet Sagnac pour des ondes atomiques [22]. Le schéma de cet interféromètre est présenté sur la figure 1.5.

Cependant, ce type de séparatrice nécessite que le temps de vie de l'état excité $|e\rangle$ soit beaucoup plus long que la durée de la séquence d'interférométrie afin d'éviter les phénomènes de décohérence dus à l'émission spontanée entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Une façon de limiter cette contrainte a été proposée par C. Bordé en 1989 [21] et consiste à utiliser des transitions Raman à deux photons pour créer la superposition des sous-niveaux hyperfins (métastables) de l'état fondamental de l'atome dans l'interféromètre. Dans ce type de transition, les deux états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ sont couplés par deux lasers de fréquences ω_1 et ω_2

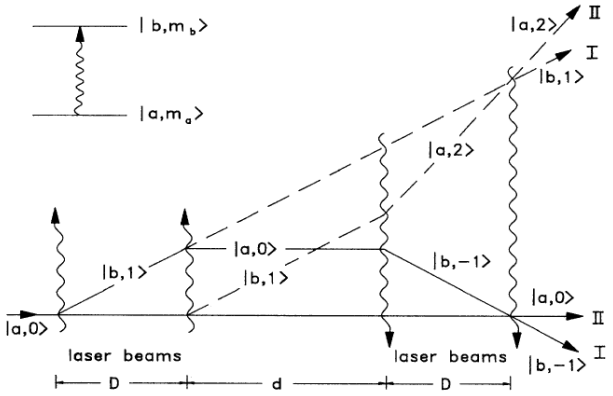


Figure 1.5 : Schéma d'un interféromètre de Ramsey-Bordé. Les paquets d'onde atomiques sont séparés et recombinés par une série de quatres impulsions lasers optiques représentées par les lignes ondulées. Dans la première zone d'interaction, l'onde de matière est séparée de manière cohérente en deux ondes avec les états internes $|a, m_a\rangle$ et $|b, m_b\rangle$ correspondant respectivement aux niveaux atomiques a et b et au nombre m de quantité de mouvement photonique transférée à l'atome. La figure est tirée de [22].

dont la fréquence est proche d'un troisième niveau atomique $|c\rangle$ (voir la figure 1.6) et de sorte que $(\omega_2 - \omega_1)$ soit la fréquence de transition entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Le couplage ainsi réalisé correspond à l'absorption d'un photon du laser (1) et à l'émission stimulée d'un photon dans le mode du laser (2). Ce type de transition permet de coupler des états métastables dont les niveaux énergétiques sont proches. Le fait de pouvoir coupler de tels états permet de s'affranchir du problème de l'émission spontanée entre ces niveaux puisque la nature métastable des états hyperfins rend ce phénomène très peu probable. Le premier interferomètre utilisant ce type de transition fut réalisé en 1991 par S. Chu et M. Kasevich [23] avant de se généraliser de sorte qu'aujourd'hui, la plupart des interféromètres atomiques utilisent des séparatrices Raman.

1.2.3 Les transitions Raman stimulées comme lame séparatrice

Dans cette partie nous allons voir plus en détail les transitions Raman stimulées et leur utilisation comme séparatrice. Pour cela, considérons un atome à 3 niveaux comme présenté dans la figure 1.6. L'atome est initialement dans un état atomique pur et il est éclairé par deux lasers dont la différence de fréquence est accordée sur la transition des deux niveaux inférieurs $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Les fréquences de chacun des deux lasers, ω_1 et ω_2, sont en outre proche de celle d'une transition optique vers un niveau $|c\rangle$, c'est-à-dire qu'elles sont accordées sur un niveau virtuel $|i\rangle$ dont l'écart en fréquence avec le niveau $|c\rangle$ est appelé le désaccord Raman et peut s'écrire

$$\Delta = \omega_1 - (\omega_i - \omega_g). \tag{1.2.2}$$

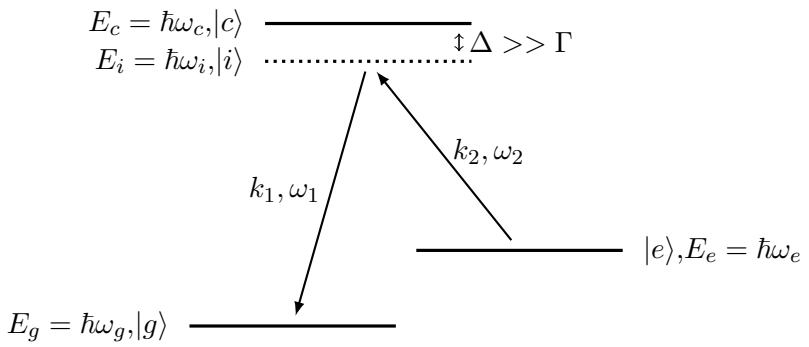


Figure 1.6 : Diagramme représentant les deux états métastables $|g\rangle$ et $|e\rangle$ et un troisième $|c\rangle$. La fréquence des lasers utilisés pour effectuer la transition Raman sont ν_1 et ν_2. La figure est extraite de [23].

Si l'atome est initialement dans l'état $|g\rangle$ avec une quantité de mouvement $\boldsymbol{p}$, il absorbe alors un photon du champ classique $\boldsymbol{E_1}(\boldsymbol{r}, t) \propto e^{i(\omega_1 t - \boldsymbol{k_1}.\boldsymbol{r} + \varphi_1)}$ qui lui confère l'impulsion de ce champ $\hbar\boldsymbol{k_1}$. Le photon est ensuite diffusé par émission stimulée dans le mode du deuxième laser dont le champ classique est proportionnel à $\boldsymbol{E_2}(\boldsymbol{r}, t) \propto e^{i(\omega_2 t - \boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{r} + \varphi_2)}$ et l'atome acquiert donc l'impulsion $-\hbar\boldsymbol{k_2}$ par conservation de la quantité de mouvement. À la fin de la transition, l'atome a donc une quantité de mouvement totale valant $\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \hbar\boldsymbol{k_{eff}}$ avec $\boldsymbol{k_{eff}} = \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2}$. Si les deux lasers sont contrapropageants, alors l'impulsion totale de l'atome vaut la somme des modules des impulsions de chaque laser. De plus, lorsque le désaccord Raman Δ est grand devant la largeur naturelle Γ de l'état supérieur, alors l'état $|i\rangle$ est très peu peuplé et on peut montrer que l'on peut négliger l'émission spontanée [24]. La cohérence de la superposition des états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ n'est alors plus limitée par Γ et on peut donc traiter l'atome comme un atome à deux niveaux.

L'interaction entre un champ électromagnétique et un atome à deux niveaux est un problème très classique en mécanique quantique [25–27]. Si on écrit la fonction d'onde atomique comme $|\psi(t)\rangle = a_g(t)e^{-i\omega_g t}|g\rangle + a_e(t)e^{-i\omega_e t}|e\rangle$ où $a_g(t)e^{-i\omega_g t}$ et $a_e(t)e^{-i\omega_e t}$ sont respectivement les amplitudes des états propres $|g\rangle$ et $|e\rangle$, alors l'équation de Schrödinger dépendante du temps mène, si on suppose que les lasers sont à résonance parfaite, au système d'équations couplées

$$\begin{cases} i\dot{a_g}(t) = & \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Delta}e^{i\varphi}a_e(t) \\ i\dot{a_e}(t) = & \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Delta}e^{-i\varphi}a_g(t) \end{cases} \tag{1.2.3}$$

où Ω_1 et Ω_2 sont les fréquences de Rabi décrivant l'interaction d'un état $|j\rangle$ ($j = g$ ou e) avec un champ k ($k = 1, 2$) et φ représente la phase effective des deux lasers. En utilisant l'approximation dipolaire, ces fréquences s'écrivent

$$\Omega_k = \langle g|\boldsymbol{d}.\epsilon_k\boldsymbol{E_k}|e\rangle \tag{1.2.4}$$

avec $k = 1, 2$ et ϵ_k la polarisation du champ. La résolution du système (1.2.3) conduit à

$$\begin{cases} a_g(t) = & \left[\cos\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_g(0) - ie^{i\varphi}\sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_e(0)\right] \\ a_e(t) = & \left[-ie^{-i\varphi}\sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_g(0) + \cos\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_e(0)\right] \end{cases} \tag{1.2.5}$$

où on a posé $\Omega_{eff} = \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Delta}$. Si on s'intéresse maintenant à la probabilité de présence dans chaque état hyperfin, on obtient les oscillations de Rabi bien connues entre les deux états de la superposition

$$\begin{cases} \mathcal{P}_g(t) = 1 - \sin^2\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) \\ \mathcal{P}_e(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) \end{cases} \tag{1.2.6}$$

en supposant que les conditions initiales sont telles que $a_g(0) = 1$ et $a_e(0) = 0$. Deux cas particuliers vont nous intéresser pour les interféromètres. Le premier cas se présente lorsque l'on choisit t tel que $\Omega_{eff}t = \frac{\pi}{2}$. La répartition est alors équiprobable sur les deux états et l'état de l'atome peut s'écrire

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|g, \boldsymbol{p}\rangle + |e, \boldsymbol{p} + \hbar\boldsymbol{k_{eff}}\rangle\right) \tag{1.2.7}$$

où l'on voit que les deux paquets d'onde s'éloignent l'un de l'autre du fait de leur différence de quantité de mouvement $\hbar\boldsymbol{k_{eff}}$. Le deuxième cas d'intérêt pour les expériences est le cas où $\Omega_{eff}t = \pi$. Dans ce cas, on a transfert total de l'état $|g, \boldsymbol{p}\rangle$ vers $|e, \boldsymbol{p} + \hbar\boldsymbol{k_{eff}}\rangle$.

On utilise ces deux types de transitions Raman dites impulsions $\frac{\pi}{2}$ et π pour réaliser les interféromètres atomiques. La figure 1.7 représente l'équivalent d'un interféromètre de Mach-Zehnder pour les ondes atomiques qui est un des plus simples que l'on puisse imaginer. Dans ce cas, une première impulsion $\frac{\pi}{2}$ sépare les deux composantes de la fonction d'onde. Après une durée T, une impulsion π les redirige l'une vers l'autre jusqu'à ce qu'elles se rejoignent au bout d'un nouveau laps de temps T. Enfin, une dernière impulsion recombine les deux paquets d'onde afin de les faire interférer.

À partir des équations (1.2.3), il est possible d'écrire l'effet d'une transition Raman sur les niveaux atomiques à l'aide d'une matrice. Si on appelle $\Psi(0)$ le vecteur désignant la fonction d'onde initiale

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} a_g(0) \\ a_e(0) \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

alors le vecteur $\Psi(t)$ à l'issue d'une transition Raman s'écrit, d'après (1.2.3)

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a_g(t) \\ a_e(t) \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\varphi, t) \cdot \Psi(0) \tag{1.2.9}$$

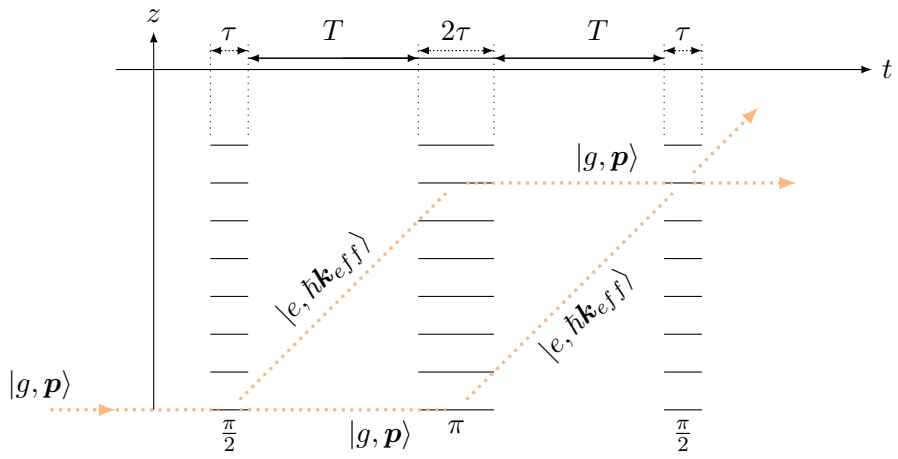


Figure 1.7 : Interféromètre de Mach-Zehnder atomique. Les ondes lumineuses formant le réseau de diffraction sont représentées par les lignes horizontales noires tandis que les ondes de De Broglie sont représentées par les lignes pointillées orange.

avec

$$\mathcal{M}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Omega_{eff}t}{2} & -ie^{i\varphi}\sin\frac{\Omega_{eff}t}{2} \\ -ie^{-i\varphi}\sin\frac{\Omega_{eff}t}{2} & \cos\frac{\Omega_{eff}t}{2} \end{pmatrix}. \tag{1.2.10}$$

D'autre part, la matrice décrivant l'évolution libre de la fonction d'onde pendant un temps T entre chaque transition s'écrit

$$\mathcal{M}_{\text{libre}}(T) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_g T} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_e T} \end{pmatrix}. \tag{1.2.11}$$

Ainsi, l'évolution de la fonction d'onde à travers un interféromètre de Mach-Zehnder s'écrit comme le produit de 3 matrices représentant les impulsions Raman π et $\frac{\pi}{2}$ et de 2 matrices représentant les évolutions libres entre les pulses

$$\Psi(4\tau + 2T) = \mathcal{M}(\varphi_1, \tau).\mathcal{M}_{\text{libre}}(T).\mathcal{M}(\varphi_2, 2\tau).\mathcal{M}_{\text{libre}}(T).\mathcal{M}(\varphi_3, \tau)\Psi(0) \tag{1.2.12}$$

où on a choisi τ tel que $\Omega_{eff}\tau = \frac{\pi}{2}$.

La fonction d'onde ainsi obtenue à la sortie de l'interféromètre est la superposition des deux fonctions d'onde correspondant aux deux chemins possibles dans le schéma interférométrique. On peut en déduire la probabilité de transition de l'état initial $|\psi(0)\rangle = |g, \boldsymbol{p}\rangle$ vers l'état $|e, \boldsymbol{p} + \hbar\boldsymbol{k}_{eff}\rangle$

$$\mathcal{P} = \frac{|a_e(4\tau + 2T)|^2}{|a_g(4\tau + 2T)|^2 + |a_e(4\tau + 2T)|^2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\Delta\phi). \tag{1.2.13}$$

Le calcul du déphasage $\Delta\phi$ dans l'équation (1.2.13) nécéssite la prise en compte de deux facteurs : le déphasage induit par la propagation libre dans l'interféromètre et celui éventuellement introduit en présence d'un champ inertiel ou d'un potentiel externe. Le calcul

de ce déphasage peut se faire par la méthode des intégrales de chemins introduite par R. Feynman en 1948 [28, 29].

Cette méthode repose sur le fait que l'on peut exprimer l'état d'un système à un instant t_b à partir de l'état de ce même système à un instant antérieur t_a à l'aide de l'opérateur d'évolution $U(t_b, t_a)$ de sorte que

$$|\psi(t_b)\rangle = U(t_b, t_a)|\psi(t_a)\rangle. \tag{1.2.14}$$

En projetant cette équation sur l'espace des positions on obtient

$$\psi(z_b, t_b) = \langle z_b|U(t_b, t_a)|\psi(t_a)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz_a K(z_b, t_b; z_a, t_a)\psi(z_a, t_a) \tag{1.2.15}$$

où $K(z_b, t_b; z_a, t_a) = \langle z_b|U(t_b, t_a)|z_a\rangle$ est le propagateur quantique qui représente l'amplitude de probabilité pour une particule d'arriver au point z_b à l'instant t_b si celle-ci est partie de z_a à l'instant t_a. On peut écrire ce propagateur de manière équivalente en fonction de l'action sous la forme

$$K(z_b, t_b; z_a, t_a) = \mathcal{N} \sum_{\Gamma} e^{i\frac{S_\Gamma}{\hbar}} = \int_a^b e^{i\frac{S_\Gamma}{\hbar}} Dz(t). \tag{1.2.16}$$

Dans l'expression précédente, $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation et la somme court sur tous les chemins Γ possibles entre (z_b, t_b) et (z_a, t_a) définis par une fonction $z(t)$ et tels que $z(t_a) = z_a$ et $z(t_b) = z_b$. S_Γ représente quant à elle l'action le long d'un chemin Γ

$$S_\Gamma = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \mathcal{L}[z(t), \dot{z}(t)] \tag{1.2.17}$$

où $\mathcal{L}[z(t), \dot{z}(t)]$ est le lagrangien du système. Lorsque ce lagrangien est quadratique i.e. de la forme

$$a(t)\dot{z}^2 + b(t)\dot{z}z + c(t)z^2 + d(t)\dot{z} + e(t)z + f(t), \tag{1.2.18}$$

on peut démontrer que la somme sur les chemins dans l'expression (1.2.16) se ramène à la somme sur le voisinage du chemin classique $z_{cl}(t)$ c'est-à-dire à celui répondant au principe de moindre action. On peut alors écrire $z(t)$ en fonction de $z_{cl}(t)$ sous la forme

$$z(t) = z_{cl}(t) + \xi(t) \tag{1.2.19}$$

avec, comme conditions aux limites

$$z(t_a) = z_{cl}(t_a) = z_a \qquad z(t_b) = z_{cl}(t_b) = z_b \qquad \xi(t_a) = \xi(t_b) = 0. \tag{1.2.20}$$

En termes de déviation au chemin classique, le propagateur s'écrit donc

$$K(z_b, t_b; z_a, t_a) = \int_0^0 e^{\frac{i}{\hbar}S[z_{cl}(t)+\xi(t)]} D\xi(t). \tag{1.2.21}$$

avec

$$S[z_{cl}(t)+\xi(t)] = S_{cl}(z_b,t_b;z_a,t_a) + \int_{t_a}^{t_b} dt\, a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2 \tag{1.2.22}$$

où $S_{cl}(z_b,t_b;z_a,t_a)$ représente l'action le long de la trajectoire classique. Le propagateur peut alors s'écrire sous la forme

$$K(z_b,t_b;z_a,t_a) = F(t_a,t_b)e^{i\frac{S_{cl}(z_b,t_b;z_a,t_a)}{\hbar}} \tag{1.2.23}$$

avec

$$F(t_a,t_b) = \int_0^0 D\xi(t)\, \exp\left\{\int_{t_a}^{t_b} dt\, a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2\right\}. \tag{1.2.24}$$

Si de surcroît l'onde entrante est une onde plane, alors on peut montrer que l'onde sortante est proportionnelle à

$$\psi(z_b,t_b) \propto F(t_b,t_a)e^{i\frac{S_{cl}(z_b,t_b;z_a,t_a)}{\hbar}}\psi(z_a,t_a) \tag{1.2.25}$$

de sorte que le déphasage à la sortie de l'interféromètre est donné par l'expression de l'action sur la trajectoire classique $z_{cl}(t)$. Une expression simple pour cette action est donnée par [30]

$$S_{cl} = \int_{\Gamma_{cl}} (pdz - Hdt) \tag{1.2.26}$$

où p représente la quantité de mouvement et H l'Hamiltonien du système.

Lorsqu'aucun champ inertiel ou potentiel extérieur n'intervient sur les chemins interférométriques, les trajectoires classiques entre deux interactions avec les lasers sont des lignes droites le long desquelles p et H sont constants. Dans ce cas, le déphasage sur chaque bras de l'interféromètre est obtenu par la somme du déphasage de la forme $\int_{\Gamma_{cl}}(pdz - Hdt)$ correspondant à la propagation libre entre deux zones d'interaction avec le laser et des déphasages dus à l'émission et à l'absorption de photons du laser pendant les phases d'interaction avec celui-ci. Si on considère maintenant le cas où les atomes sont soumis à un potentiel externe, il faut rajouter un terme de la forme $\varepsilon\mathcal{L}_1$ au lagrangien de propagation libre afin de décrire l'action de ce potentiel où ε est un paramètre représentant l'intensité de ce potentiel. Si on suppose là encore que $\mathcal{L}_1$ est quadratique, on peut utiliser les mêmes résultats que précédemment pour exprimer son propagateur. La méthode rigoureuse pour déduire le déphasage introduit par ce nouveau potentiel sur les deux bras de l'interféromètre est de recalculer les nouvelles trajectoires classiques le long de ces deux bras puisque celles-ci ne sont plus des lignes droites. Il faut ensuite réexprimer l'intégrale représentant l'action classique pour chaque chemin et ajouter les déphasages dus à l'émission ou à l'absorption d'un photon du laser par l'atome. Cependant, si ε est suffisament petit, on peut

estimer le déphasage total à l'aide d'un calcul perturbatif en gardant les trajectoires non perturbées et calculer simplement l'intégrale

$$\varepsilon \int \mathcal{L}_1 dt \tag{1.2.27}$$

pour chaque chemin I et II de l'interféromètre. Dans ce cas, le déphasage induit par un potentiel externe s'exprime simplement sous la forme

$$\Delta\phi_{pot} = \frac{\varepsilon}{\hbar} \oint_{I+II} \mathcal{L}_1 dt \tag{1.2.28}$$

qui s'ajoute aux déphasages calculés pour la propagation libre.

Selon la configuration de l'interféromètre, cela permet de mesurer l'accélération de la pesanteur, la rotation de la Terre ou encore, dans le cas de FORCA-G, les interactions à courte distance entre l'atome et un miroir.

La manipulation des atomes avec des champs lasers possède un autre avantage : elle permet de refroidir les atomes. Cela est très utile pour les interféromètres puisqu'en diminuant la vitesse des atomes, on augmente leur longueur d'onde de De Broglie (voir (1.2.1)) ce qui entraîne des effets ondulatoires plus marqués et les rend plus faciles à manipuler. De surcroît, une vitesse atomique plus basse augmente le temps disponible pour la mesure ce qui permet d'améliorer la précision des déphasages mesurés.

La somme de toutes ces techniques a permis de construire des interféromètres appliqués à de nombreux domaines de la physique comme la mesure précise de la constante de gravitation universelle à l'aide de gravimètres atomiques [31] ou encore la fabrication de capteurs inertiels (accéléromètres, gyromètres...) [32]. La manipulation d'atomes par des champs électromagnétiques a aussi permis le développement d'horloges à césium ultra-précises permettant la définition de la seconde [33]. De plus, la mesure de haute précision sur des déphasages relativement faibles que l'on peut atteindre avec de tels interféromètres ouvre un champ d'application très étendu pour différents tests de la relativité générale. En particulier, ce mémoire portera sur la recherche d'une cinquième force à courte distance prédite par certaines théories d'unification de la relativité générale et de la mécanique quantique.

Les interféromètres auxquels nous allons nous intéresser plus particulièrement ici sont ceux pour lesquels les atomes sont piégés dans une onde stationnaire verticale. Ce schéma a tout d'abord été introduit à des fins métrologiques pour construire des horloges optiques. En effet, si la seconde est actuellement définie à l'aide de fontaines atomiques, le

fait que les atomes soient en chute libre dans de tels appareils induit un déphasage des fréquences de transition atomique dû aux effets de mouvement. Ces effets peuvent être limités en utilisant des pièges optiques pour confiner les atomes. Les premiers interféromètres à utiliser des pièges électromagnétiques ont été les horloges à ions (voir par exemple les expériences [34, 35]) pour lesquels un tel piégeage est aisé de par leur charge. Vinrent ensuite les horloges optiques (les références [36–38] en présentent quelques exemples) sur le principe desquelles s'appuie l'expérience FORCA-G et qui furent introduites dans le but de combiner les avantages du confinement des atomes et le haut rapport signal à bruit des fontaines atomiques que l'on ne retrouve pas dans les horloges à ions. Ces horloges optiques se caractérisent par le piégeage d'atomes neutres dans des ondes stationnaires optiques.

1.3 L'expérience FORCA-G

L'expérience FORCA-G est une expérience d'interférométrie atomique dont le but est de mesurer les interactions à courte distance entre une surface massive et un atome de rubidium 87 [1, 2]. Dans ce but, le dispositif expérimental présenté sur la figure 1.8, a été proposé permettant la mesure des interactions gravitationnelle et électromagnétique entre un atome piégé dans une onde stationnaire et le miroir réalisant cette onde stationnaire.

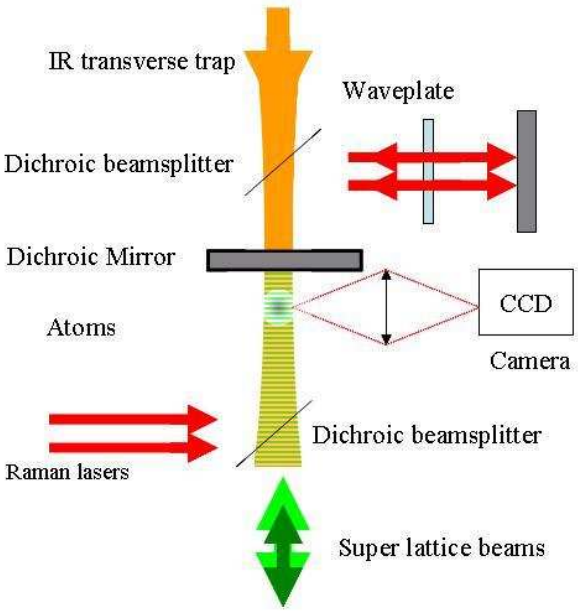


Figure 1.8 : Schéma du dispositif expérimental.

Pour être plus précis, les atomes sont piégés dans un réseau optique vertical réalisé par un laser de longueur d'onde $\lambda_l = 532\,\text{nm}$. Ce montage est très similaire à celui réalisé pour construire des horloges atomiques à réseau optique [36], le choix des atomes ainsi que du réseau est donc fondamental au bon fonctionnement de l'interféromètre.

1.3.1 Le piège dipolaire à réseau optique

Dans l'expérience, les atomes sont piégés dans un faisceau laser à haute puissance très focalisé qui est rétro-réfléchi sur la surface pour créer une onde stationnaire constituant un réseau optique [39].

Les fondements théoriques de la technique de piégeage des atomes dans une onde stationnaire reposent sur le fait que des atomes plongés dans un champ électromagnétique subissent un décalage de leurs énergies qui dépend à la fois de la transition atomique considérée mais aussi de sa polarisabilité, de l'intensité du champ et du désaccord entre la lumière et la fréquence de transition atomique [40]. La force s'exerçant alors sur les atomes provient de l'interaction entre l'onde lumineuse et le dipôle atomique induit par cette onde. Pour estimer cette force, et montrer qu'elle dérive d'un potentiel, considérons l'approximation semi-classique d'un atome de Lorentz plongé dans un champ électromagnétique classique monochromatique de la forme

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0(\boldsymbol{r})\,\mathrm{Re}[p e^{-i(\omega_l t-\phi)}] \tag{1.3.1}$$

où p représente la polarisation du champ, $E_0(\boldsymbol{r})$ son amplitude, ϕ sa phase et ω_l sa pulsation avec $\omega_l = \frac{2\pi c}{\lambda_l}$ où λ_l est la longueur d'onde du laser. Dans le cadre de l'approximation choisie, on considère un atome possédant un seul électron élastiquement lié dont la position est repérée par la coordonnée $\boldsymbol{r}_e$ et dont la fréquence d'excitation est ω_{eg}. Dans ces conditions, on peut exprimer l'interaction dipolaire électrique entre l'atome et le champ électromagnétique sous la forme

$$V_{AL} = -q_e \boldsymbol{r}_e \,.\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) \tag{1.3.2}$$

avec q_e la charge de l'électron et $\boldsymbol{R}$ la coordonnée du centre de masse atomique. En définissant le moment dipolaire électrique induit comme

$$\boldsymbol{d} = q_e \boldsymbol{r}_e = \mathrm{Re}[\varepsilon_0 \alpha_0 E_0(\boldsymbol{R}) p e^{-i(\omega_l t-\phi)}] \tag{1.3.3}$$

où $\varepsilon_0 \simeq 8.85.10^{-12}\,\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-3}.\text{A}^2.\text{s}^4$ est la permittivité du vide et α_0 est la polarisabilité atomique que l'on exprime sous la forme [41]

$$\alpha_0 = -\frac{q_e^2}{2m_e\omega_l\varepsilon_0}\frac{1}{\delta + i\Gamma/2}. \tag{1.3.4}$$

Dans l'expression (1.4.16) ci-dessus, δ représente le désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance atomique de sorte que $\delta = \omega_l - \omega_{eg}$ et Γ représente la largeur radiative classique [41]. La polarisabilité atomique est une quantité complexe que l'on peut donc exprimer sous la forme

$$\alpha_0 = \alpha_0' + i\alpha_0'' \tag{1.3.5}$$

où la partie réelle qui va nous intéresser plus particulièrement vaut

$$\alpha_0' = -\frac{q_e^2}{2m_e\omega_l\varepsilon_0}\frac{\delta}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \tag{1.3.6}$$

Grâce aux expressions précédentes, on obtient la formule de la force exercée sur l'atome par le champ électromagnétique

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\bigtriangledown_{\boldsymbol{R}} V_{AL} \\ &= \sum_{i=x,y,z} d_i \bigtriangledown_{\boldsymbol{R}} E_i \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\alpha_0' E_0(\boldsymbol{R}) \bigtriangledown_{\boldsymbol{R}} E_0(\boldsymbol{R}). \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

On voit que cette force dérive d'un potentiel de la forme

$$U(\boldsymbol{R}) = -\frac{\varepsilon_0}{4}\alpha_0' E_0^2(\boldsymbol{R}) \tag{1.3.8}$$

qui est proportionnel à l'intensité de l'onde électromagnétique

$$I(\boldsymbol{R}) = E_0^2(\boldsymbol{R}). \tag{1.3.9}$$

De cette manière, on s'aperçoit que la fréquence du champ monochromatique va déterminer la force s'exerçant sur l'atome. En effet, si l'onde électromagnétique est à résonance avec l'atome, on a $\delta = 0$ et la partie réelle de la polarisabilité atomique est nulle. De cette façon, la force dipolaire appliquée sur l'atome est nulle et l'onde a simplement pour effet d'exciter l'atome vers son niveau supérieur. En revanche, si le désaccord entre les deux fréquences est grand, alors l'onde électromagnétique exerce une force de rappel sur l'atome. On peut dans ce cas distinguer deux cas de figure : d'une part le cas où le piège est désaccordé vers le bleu c'est-à-dire que $\omega_l > \omega_{eg}$, d'autre part le cas où le piège est désaccordé vers le rouge (i.e. $\omega_l < \omega_{eg}$). Dans le premier cas, le désaccord $\delta = \omega_l - \omega_{eg}$ est positif ce qui implique que la partie réelle de la polarisabilité atomique est négative rendant le potentiel de piégeage positif. Par suite du principe de moindre action, les atomes sont alors attirés vers les zones où l'énergie est minimisée c'est-à-dire vers les minima d'intensité de l'onde de piégeage. A contrario, lorsque le piège est désaccordé vers le rouge, les atomes sont attirés vers les maxima d'intensité de l'onde électromagnétique. FORCA-G se trouve dans une configuration avec un désaccord vers le bleu ce qui entraîne un piégeage des atomes

vers les zones de faible intensité.

Le premier piège utilisant la force dipolaire a été réalisé en 1986 [42] avec des atomes de sodium. Ce type de piège est intéressant dans le sens où il permet d'isoler un grand nombre d'atomes de leur environnement. Cependant, cet avantage est contrebalancé par les effets de chauffage résultant des collisions entre les atomes du nuage. En effet, comme le piège ne dispose pas de dispositif de refroidissement, la durée de vie des atomes piégés à l'intérieur est réduite. On peut toutefois limiter ce chauffage en prenant des puits de profondeur faible [43], on a alors peu d'atomes dans les puits ce qui limite les effets de collisions mais il faut alors les refroidir au préalable pour qu'ils soient piégés.

1.3.2 Le principe de la mesure

Une fois les atomes piégés, nous allons nous intéresser au principe de la mesure en elle-même. À la différence des horloges optiques, FORCA-G utilise des atomes piégés à proximité d'une surface et on cherche à sélectionner les atomes dans un puits particulier. Plusieurs pistes sont explorées pour réaliser cette sélection. Le principe est de superposer un potentiel additionnel au réseau mais possédant un gradient le long de celui-ci. Ce potentiel va induire un déplacement lumineux différent en fonction du puits dans lequel les atomes se trouvent et l'on pourra éliminer les atomes dans les puits qui ne nous intéressent pas à l'aide d'un laser pousseur. Pour réaliser un tel potentiel, plusieurs pistes sont à l'étude. On peut utiliser un deuxième réseau optique, un champ magnétique ou tout autre potentiel induisant des déplacements lumineux des niveaux atomiques. De cette manière les états propres des atomes selectionnés sont des états de Wannier-Stark modifiés par la présence de la surface. La différence d'énergie entre deux puits loin de la surface vaut $m_a g \frac{\lambda_l}{2}$ avec m_a la masse de l'atome de rubidium, $g \simeq 9.81\,\mathrm{m.s^{-2}}$ la constante de gravitation terrestre et λ_l la longueur d'onde du laser piège. Les états de Wannier-Stark sont connus notamment en physique du solide [44, 45] comme les états propres d'une particule soumise à un potentiel périodique accéléré linéairement. Le calcul de ces états et de leur modification par la surface fera l'objet d'un calcul détaillé dans le chapitre 2.

La mesure est ensuite obtenue par interférométrie : on crée une superposition cohérente de ces états dans un puits entre les deux niveaux hyperfins du rubidium puis on sépare les deux paquets d'onde de quelques puits à l'aide d'impulsions Raman accordées sur la transition atomique plus ou moins $m_a g \frac{\lambda_l}{2}$ avant de les recombiner après un temps T de séparation. Pendant le temps de séparation, les deux paquets d'ondes se trouvent à des distances différentes de la surface et sont donc soumis à des potentiels différents. Cette différence va induire un déphasage à la sortie de l'interféromètre que l'on peut exprimer

comme suit,

$$\Delta\phi = \frac{2}{\hbar}\left(m_a g\lambda_l + U_{n+1} - U_{n-1}\right)T + (\omega_{eg}^{(n+1)} - \omega_{eg}^{(n-1)})T - \sum_i \phi_s^{(i)} \tag{1.3.10}$$

dans le cas où les deux paquets d'onde sont initialement dans le puits n et sont séparés de deux puits avant d'être recombinés. Dans l'équation (1.3.10), $(U_{n+1} - U_{n-1})$ représente la différence de potentiel due à la surface entre les deux puits de séparation et les $\phi_s^{(i)}$ sont les facteurs de phase pour chaque impulsion Raman utilisée pour réaliser l'interféromètre tandis que le terme $m_a g\lambda_l$ représente la différence d'énergie potentielle gravitationnelle entre les deux puits causée par la configuration verticale du piège. Les phases $\phi_s^{(i)}$ dépendent du laser utilisé et sont connues.

On s'aperçoit que la différence de phase mesurée dépend des interactions entre le miroir et l'atome et du temps de séparation T. Ainsi, plus T est grand, meilleure est la précision de la mesure. Cependant la durée de l'expérience est limitée par les phénomènes de décohérence des atomes dans le piège. Il est donc essentiel d'optimiser la durée des impulsions servant à réaliser le schéma d'interféromètre pour que celles-ci soient les plus courtes possible. En calculant le couplage entre les états de Wannier-Stark du piège et l'onde laser, il apparaît que la profondeur de piège optimale pour la réalisation d'un interféromètre avec une séparation de 2 puits est de 3 fois l'énergie de recul d'un photon du laser piège $E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_a}$. Cette valeur sera utilisée dans la suite pour les applications numériques. Une autre source importante d'incertitude réside dans l'annulation la plus parfaite possible du terme $\hbar(\omega_{eg}^{(n+1)} - \omega_{eg}^{(n-1)})$. En effet, la fluctuation de la fréquence de transition entre les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ empêche l'annulation de ce terme dans l'équation (1.3.10) qui conduit à une erreur supplémentaire. Nous allons maintenant voir les sources de perturbation éventuelles.

1.3.3 Les sources de bruit

L'objectif de l'expérience est de mesurer la différence de potentiel de l'équation (1.3.10) avec une précision de 10^{-4} Hz. Cet objectif tient compte des sources de bruits pouvant intervenir dans l'expérience et limiter la précision de la mesure sur la différence de phase exprimée dans l'équation (1.3.10). En effet, chaque terme de cette équation est soumis à des incertitudes provenant soit de l'erreur commise sur la connaissance de la phase des lasers utilisés pour effectuer les transitions Raman dans l'interféromètre soit de la modification anisotrope des niveaux d'énergie atomiques le long du piège.

La première de ces sources d'incertitude, qui concerne la phase des impulsions électromagnétiques réalisant l'interféromètre, intervient dans le dernier terme de l'équation (1.3.10) et peut être résolue en contrôlant la phase des lasers (ce qui est facile dans le cas

des transitions Raman) ou en utilisant une référence de phase comme un nuage atomique très loin de la surface par exemple. L'autre effet est plus délicat à traiter et intervient au niveau des deux autres termes de l'équation (1.3.10). En effet, la modification des niveaux d'énergie peut intervenir sur deux plans différents. Certains effets vont agir sur la différence $\left(\omega_{eg}^{(n+1)} - \omega_{eg}^{(n-1)}\right)$ en modifiant différemment la fréquence atomique selon le puits où se trouve l'atome. D'autres vont jouer sur le terme $(U_{n+1} - U_{n-1})$ en ne modifiant par exemple que l'état fondamental de l'atome mais de manière anisotrope dans le piège. De telles modifications engendreraient un signal semblable à un potentiel additionnel. Enfin, certaines sources de bruits vont cumuler ces deux effets.

Les perturbations auxquelles on s'attend sont de plusieurs nature. D'une part, le piègeage des atomes dans un potentiel optique induit un déplacement lumineux qui peut modifier aussi bien la fréquence atomique que les états fondamentaux d'un puits à l'autre. Ensuite, les interactions entre atomes à l'intérieur du piège vont perturber leur état fondamental ce qui va aussi jouer sur les deux premiers termes de l'équation (1.3.10). Pour une bonne précision sur la mesure des potentiels que l'on recherche on a aussi besoin de connaître le plus précisément possible le terme en $m_a g \frac{\lambda_l}{\hbar}$ afin de ne pas introduire d'erreur dans le premier terme de (1.3.10). Il faut de plus tenir compte des champs électriques et magnétiques résiduels dus par exemple au dépot de charges sur la surface entraînant la création d'un champ dipolaire qui sera plus sensible pour les atomes proches de la surface et qui va donc modifier les niveaux énergétiques de ceux-ci. Enfin, la précision de la mesure dépend très fortement de la précision avec laquelle on détermine la distance entre les atomes et la surface. En effet, tous les potentiels que l'on cherche à mesurer sont des potentiels dépendant de cette distance. Cette source d'incertitude est réduite à son minimum grâce à la présence du réseau permettant d'exprimer cette distance comme un multiple de la longueur d'onde du laser réalisant le piège.

L'étude de l'ensemble de ces perturbations a permis de déterminer le type d'atome le plus approprié pour FORCA-G ainsi que les différentes stratégies à mettre en place pour optimiser la précision de la mesure. La quantification plus précise de ces perturbations ainsi que les pistes expérimentales pour les résoudre ont été traitées en détail dans la référence [2].

1.3.4 Les objectifs de l'expérience

Comme on l'a dit en introduction, l'objectif de FORCA-G est de fournir une mesure précise des interactions à courte distance entre un atome et une surface massive. Dans un premier temps, on se propose d'explorer un phénomène d'électrodynamique quantique, l'*effet Casimir-Polder* qui résulte de l'interaction de l'atome avec les modes du champ

électromagnétique quantifié présents entre l'atome et la surface. Dans un second temps, on cherchera à contraindre l'existence d'une déviation à la loi de Newton prédite par de nombreuses théories d'unification de la relativité générale et de la mécanique quantique. Lorsque l'atome est à courte distance de la surface, ces deux effets sont en concurrence et leur mesure individuelle nécessite donc d'adapter la configuration expérimentale en fonction de l'interaction recherchée.

La première mesure que l'on va effectuer est la mesure de l'effet Casimir-Polder entre l'atome et la surface. Dans ce cas, on se place à très courte distance du miroir (environ $1\,\mu$m ou moins). À cette distance, l'effet Casimir-Polder est largement dominant par rapport aux autres interactions existantes entre atome et surface et notamment celles d'origine gravitationnelle. Grâce à la comparaison entre les résultats expérimentaux et la prédiction théorique assez poussée de cette interaction, on estime pouvoir mesurer expérimentalement l'effet Casimir-Polder avec une erreur de l'ordre du pourcent.

La deuxième partie de l'expérience est plus difficile à mettre en œuvre en raison de la faible intensité attendue des déviations à la loi de Newton recherchées par rapport à l'effet Casimir-Polder notamment. Intuitivement, on comprend que pour mesurer un effet gravitationnel quel qu'il soit, le meilleur choix est de se placer au plus proche de l'objet source du champ gravitationnel. Malheureusement, on a vu précédemment qu'à courte distance, l'effet Casimir-Polder dominait la mesure. On doit donc s'affranchir de cet effet pour rechercher les déviations qui nous intéressent. Cette difficulté est contournée par la mise en place de deux configurations expérimentales différentes. La première consiste à se mettre suffisamment loin de la surface de sorte que l'effet Casimir-Polder puisse être modélisé théoriquement avec une précision meilleure que la sensibilité expérimentale. Cette condition est atteinte lorsque l'atome se trouve à au moins $10\,\mu$m de la surface. La seconde configuration consiste à se placer très proche de la surface mais en utilisant deux isotopes différents du rubidium : ^{87}Rb et ^{85}Rb. Cette proposition repose sur le constat que l'effet Casimir-Polder dépend essentiellement de la polarisabilité atomique. Or, les deux isotopes sus-cités ont une masse différente mais une polarisabilité atomique semblable. En effectuant une mesure différentielle à l'aide de ces deux atomes, on pourra donc s'affranchir de l'effet Casimir-Polder et effectuer une mesure de la gravitation seule.

Dans les deux sections suivantes, nous allons détailler les principaux résultats théoriques concernant ces deux types d'interactions étudiées par FORCA-G.

1.4 L'interaction Casimir-Polder

Si la mécanique quantique a bouleversé beaucoup de nos intuitions classiques, c'est sans doute sur le concept de vide que la différence entre physique classique et quantique se fait le plus sentir. En effet, intuitivement, le vide est perçu comme l'absence totale de matière et d'énergie. Or, le principe d'Heisenberg nous apprend que le produit de l'incertitude sur l'énergie et de celle sur le temps est non nulle :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{1.4.1}$$

Il existe donc des fluctuations d'énergie dans le vide quantique et celles-ci sont à l'origine de phénomènes observables tels que l'effet Casimir auquel nous nous intéressons ici.

1.4.1 L'effet Casimir entre deux plaques conductrices

Découvert en 1948 par le physicien néerlandais H. Casimir [46], l'effet qui porte son nom est une des conséquences de l'énergie du vide et se manifeste par l'apparition d'une force attractive entre deux plaques conductrices dans le vide. Nous allons rappeler ici les principaux développements théoriques qui ont abouti à la prédiction de cet effet puis à son observation expérimentale.
Tout commence par la quantification du champ électromagnétique. La méthode standard utilisée conduit à un Hamiltonien similaire à celui d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques [47]

$$H_f = \sum_{\mathbf{k}p} \hbar\omega_k \left(a^\dagger_{\mathbf{k}p} a_{\mathbf{k}p} + \frac{1}{2} \right) \tag{1.4.2}$$

où chaque terme correspond à une onde progressive de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ et de polarisation j et où les opérateurs $a^\dagger_{\mathbf{k}p}$ et $a_{\mathbf{k}p}$ sont respectivement les opérateurs de création et annihilation d'un photon dans le mode $\{\boldsymbol{k}, j\}$. Le terme $\frac{1}{2}$ dans l'équation (1.4.2) représente ce que l'on appelle *"l'énergie de point zéro"* et correspond à la valeur moyenne de l'Hamiltonien sur l'état à zéro photon $|0\rangle$. Ce terme fut soumis longtemps à débat car formellement,

$$H_{pz} = \sum_{\boldsymbol{k},p} \frac{\hbar\omega_k}{2} \tag{1.4.3}$$

est une quantité infinie. Cette difficulté peut être contournée en observant que le terme (1.4.3) ne contient pas d'opérateur et qu'il ne s'agit donc que d'un nombre dont on peut s'affranchir en définissant l'énergie du système à une constante près. Toutefois, cet argument n'est valable que lorsque les conditions aux limites imposées pour la quantification du champ ne changent pas. En effet, la quantité (1.4.3) dépend des valeurs des fréquences autorisées ω_k du système qui elles-même dépendent fortement des conditions aux limites

imposées pour la quantification [48].

Pour résoudre ce paradoxe, prenons deux plaques conductrices infinies parallèles séparées d'une distance L et alignées suivant l'axe z. Dans cette configuration, les composantes k_x et k_y de $\boldsymbol{k}$ peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles. Il n'en est pas de même pour la composante k_z pour qui la présence des plaques impose les valeurs

$$k_z = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1.4.4}$$

On peut en déduire la valeur de l'énergie de point zéro dans le cas de deux plaques métalliques à une distance L

$$E_{pz}(L) = \sum_{n,p}{}' \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{\hbar c}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \tag{1.4.5}$$

où le signe $'$ sur la somme indique que le terme $n = 0$ doit être pondéré d'un facteur $\frac{1}{2}$ représentant le fait que l'on n'a qu'une seule polarisation indépendante lorsque $k_z = 0$. On rappelle ici que le terme ω_k peut s'écrire en fonction de la vitesse de la lumière

$$\omega_k = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \tag{1.4.6}$$

Si l'on suppose maintenant que les deux plaques sont espacées d'une distance infinie, l'expression de l'énergie de point zéro devient

$$E_{pz}(\infty) = \sum_{p} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\hbar c}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{1.4.7}$$

Si les deux quantités (1.4.5) et (1.4.7) sont infinies, il est possible de définir l'énergie potentielle entre les deux plaques en faisant la différence des expression (1.4.5) et (1.4.7)

$$E(L) = E_{pz}(L) - E_{pz}(\infty) \tag{1.4.8}$$

ce qui conduit à une quantité finie. Une manière de dériver cette énergie potentielle entre les deux plaques est d'utiliser la formule d'Euler-Maclaurin [49] qui conduit à l'expression obtenue par H. Casimir

$$E(L) = -\frac{\hbar c \pi^2 A}{720 L^3} \tag{1.4.9}$$

qui dépend de la distance entre les deux plaques L ainsi que de l'aire des deux plaques. Il resulte de cette énergie potentielle une force attractive entre les deux plaques qui s'exprime par unité de surface (de manière équivalente à une pression)

$$F(L) = -\frac{1}{A}\frac{dE}{dL} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 L^4}. \tag{1.4.10}$$

Il est important de noter ici que la pression qui s'exerce entre les deux plaques dépend seulement de la distance entre ces deux plaques et des constantes fondamentales $\hbar$ et c et non de la charge de l'électron comme on pourrait le penser pour une interaction de type électromagnétique. Cet état de fait vient en réalité de l'hypothèse que l'on a faite sur la nature des plaques. En considérant des plaques parfaitement conductrices, on suppose qu'elles renvoient toute la lumière qu'elles reçoivent ce qui n'est évidemment jamais le cas expérimentalement et la modélisation plus réaliste de ces plaques conduit à une introduction de la charge de l'électron dans l'expression de la force (1.4.10) ainsi qu'à une modification d'échelle de la force.

Après les travaux précurseurs de H. Casimir en présence de deux plans infinis [46], plusieurs études théoriques ont été conduites et ont montré que l'on retrouvait un effet similaire pour différents objets neutres dans le vide. Nous allons désormais nous intéresser au cas d'un atome neutre placé à proximité d'une surface conductrice.

1.4.2 L'effet Casimir-Polder entre un atome et une surface conductrice

La même année où paraissaient les travaux fondateurs de H. Casimir, celui-ci découvrit avec l'aide de D. Polder l'existence d'une force similaire entre deux atomes neutres et entre un atome et une surface [50]. Dans ce type de système, l'Hamiltonien décrivant le problème est la somme de trois termes différents :

– le terme correspondant au champ seul

$$H_{\mathrm{f}} = \sum_{\mathbf{k}p} \hbar\omega_k \left(a^{\dagger}_{\mathbf{k}p} a_{\mathbf{k}p} + \frac{1}{2} \right) \tag{1.4.11}$$

présenté plus haut

– le terme correspondant à l'atome seul

$$H_{\mathrm{at}} = \sum_{n} E_n c^{\dagger}_n c_n \tag{1.4.12}$$

où $c^{\dagger}_n$ et c_n sont les opérateurs de création et annihilation fermioniques associés au niveau atomique n alors que E_n est son énergie

– enfin le terme d'interaction entre le champ et l'atome qui peut s'écrire sous la forme

$$H_{\mathrm{i}} = \frac{e}{m_e c} \mathbf{p}.\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}) \tag{1.4.13}$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est le potentiel vecteur en jauge de Coulomb, $\mathbf{p}$ la quantité de mouvement et m_e la masse de l'électron.

Les trois termes ci dessus ont été exprimés dans l'approximation dite de *minimal coupling* laquelle fut utilisée par H. Casimir et D. Polder dans leurs calculs originaux [50, 51]. Cette

approximation est par exemple utilisée dans le calcul de la force entre deux atomes [50] que nous n'allons pas détailler ici. Pour le calcul entre un atome et une surface en revanche, on peut utiliser un autre schéma d'interaction équivalent à celui présenté précédemment appelé *multipolar coupling scheme*. Cette approximation repose sur le traitement de l'interaction atome-champ comme une interaction dipolaire et a été proposée pour la première fois en 1959 par E. Power et S. Zienau [52,53]. Dans ce schéma d'interaction, l'Hamiltonien d'interaction atome-champ s'ecrit

$$H_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{r}_A) \tag{1.4.14}$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est l'opérateur du moment dipolaire électrique et $\mathbf{D}_{\perp}(\mathbf{r}_A)$ est l'opérateur de déplacement du champ électrique transverse calculé à la position de l'atome $\boldsymbol{r}_A$. L'intérêt d'un tel traitement réside dans le fait qu'il ne fait intervenir que des termes directement mesurables comme l'opérateur de déplacement du champ électrique en lieu et place du potentiel vecteur dont l'évaluation est plus difficile. De plus, la partie électrostatique de l'interaction est inclue dans l'Hamiltonien (1.4.14) et ne nécessite donc pas de prise en compte à part. Une simplification supplémentaire a ensuite été proposée par D. Craig et E. Power en 1969 [54] grâce à l'application d'une transformation unitaire sur l'Hamiltonien (1.4.14) qui conduit à une description effective du terme d'interaction

$$H_i^{eff} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}p} \alpha(k)\mathbf{D}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r}_A).\mathbf{D}(\mathbf{r}_A) \tag{1.4.15}$$

où $\alpha(k)$ est la polarisabilité dynamique de l'atome qui peut s'écrire comme

$$\alpha(k) = \frac{2}{3}\sum_n \frac{E_{n0}\mu_{n0}^2}{E_{n0}^2 - \hbar^2 c^2 k^2}. \tag{1.4.16}$$

Dans l'équation (1.4.16), le terme $E_{n0} = E_n - E_0$ est la différence d'énergie entre le $n^{\text{ième}}$ niveau atomique et l'état fondamental tandis que μ_{n0} est l'élement de matrice de l'opérateur dipolaire électrique entre ces mêmes niveaux. L'opérateur de déplacement du champ électrique s'écrit quant à lui

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathbf{k}p} \mathbf{D}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r}) = i\sum_{\mathbf{k}p} \sqrt{\frac{2\pi\hbar ck}{V}} \left(a_{\mathbf{k}p} - a_{\mathbf{k}p}^{\dagger}\right) \mathbf{f}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r}) \tag{1.4.17}$$

où les fonctions $\mathbf{f}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r})$ sont les fonctions modes associées aux conditions aux limites choisies et V est le volume de quantification. Dans notre cas, la présence de la surface peut être modélisée par une boite de taille L avec les conditions aux limites suivantes

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \qquad -\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2} \qquad 0 \leq z \leq L \tag{1.4.18}$$

où l'on fait tendre L vers l'infini à la fin du calcul pour revenir au cas d'une plaque infinie. Dans ce cas, les fonctions $\mathbf{f}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r})$ s'expriment en fonction de x, y et z comme

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r}))_x &= \sqrt{8}(\hat{e}_{\mathbf{k}p})_x \cos\left[k_x\left(x+\frac{L}{2}\right)\right]\sin\left[k_y\left(y+\frac{L}{2}\right)\right]\sin\left(k_z z\right)\\
(\mathbf{f}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r}))_y &= \sqrt{8}(\hat{e}_{\mathbf{k}p})_y \sin\left[k_x\left(x+\frac{L}{2}\right)\right]\cos\left[k_y\left(y+\frac{L}{2}\right)\right]\sin\left(k_z z\right)\\
(\mathbf{f}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r}))_z &= \sqrt{8}(\hat{e}_{\mathbf{k}p})_z \sin\left[k_x\left(x+\frac{L}{2}\right)\right]\sin\left[k_y\left(y+\frac{L}{2}\right)\right]\cos\left(k_z z\right)
\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

où les $\hat{e}_{\mathbf{k}p}$ sont les vecteur unitaires de polarisation tels que

$$\sum_p \left(\hat{e}_{\mathbf{k}p}\right)_i^2 = 1 - \frac{k_i^2}{k^2} \qquad i = x, y, z \tag{1.4.20}$$

et les valeurs des composantes du vecteur $\mathbf{k}$ autorisées sont

$$k_x = \frac{l\pi}{L} \qquad k_y = \frac{m\pi}{L} \qquad k_z = \frac{n\pi}{L} \qquad l, m, n = 0, 1, 2... \tag{1.4.21}$$

En insérant les composantes (1.4.19) de $\mathbf{f}_{\mathbf{k}p}(\mathbf{r})$ dans (1.4.15) et en observant que, dans la limite où $L \to \infty$, on peut remplacer les fonctions trigonométriques par leur valeurs moyennes de sorte que $\cos^2\left(k_x\frac{L}{2}\right) \to \frac{1}{2}$ et $\sin\left(k_x\frac{L}{2}\right)\cos\left(k_x\frac{L}{2}\right) \to 0$ (ainsi que pour toutes les autres composantes similaires), on peut montrer que la pertubation au premier ordre de l'énergie s'écrit

$$E(z) = \langle 0_{\mathbf{k}p}|H_i^{eff}|0_{\mathbf{k}p}\rangle = -\sum_k \alpha(k)\frac{2\pi\hbar c k}{V}\left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\cos(2k_z z)\right). \tag{1.4.22}$$

Ce qui conduit à l'expression de la force agissant sur l'atome

$$F(d) = -\frac{dE(z)}{dz}|_d = \frac{4\pi\hbar c}{V}\sum_k \frac{k_z^3}{k}\alpha(k)\sin(2k_z d) \tag{1.4.23}$$

où d est la distance entre l'atome et la plaque. On a donc une expression de la force de Casimir-Polder entre un atome et une plaque en fonction du volume de quantification V et pour une surface parfaitement conductrice. Pour obtenir l'expression finale pour une plaque infinie, il s'agit maintenant de faire tendre L vers l'infini. Dans ce cas, la somme sur k devient une intégrale suivant la condition

$$\sum_k \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \tag{1.4.24}$$

Ce qui donne comme expression pour la force

$$F(d) = \frac{\hbar c}{2\pi^2}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{k_z^3}{k}\alpha(k)\sin(2k_z d). \tag{1.4.25}$$

On peut simplifier cette expression en utilisant les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} F(d) &= \frac{\hbar c}{2\pi^2}\int k^2 dk d\theta d\phi\, \frac{k^3\cos^3\theta}{k}\alpha(k)\sin(2k\cos\theta d) \\ &= \frac{\hbar c}{\pi}\int_0^\infty dk\, k^4\alpha(k)\int_0^\pi d\theta \sin\theta\cos^3\theta\sin(2k\cos\theta d) \\ &= \frac{\hbar c}{4\pi d^4}\int_0^\infty dk\,\alpha(k)\left[(6kd-4k^3d^3)\cos(2kd)+3(2k^2d^2-1)\sin(2kd)\right] \end{aligned} \tag{1.4.26}$$

Ce qui donne, en passant dans le plan complexe

$$F(d) = -\frac{\hbar c}{4\pi d^4}\int_0^\infty dk\,\alpha(ik)(6kd+4k^3d^3+3+6k^2d^2)e^{-2kd}. \tag{1.4.27}$$

L'expression (1.4.27) peut être explicitée en calculant l'intégrale à l'aide d'hypothèses sur la distance atome-surface d ce qui est généralement fait en distinguant deux régimes : l'un à grande distance, appelé *régime de Casimir-Polder* et l'autre à courte distance que l'on nomme *régime de van der Waals*. Cette distinction se fait par la comparaison de la distance d avec la longueur d'onde typique de la transition atomique λ_0.

Dans le cas où $d << \lambda_0$, on se trouve dans le régime de van der Waals et on peut considérer que la vitesse de la lumière est très grande devant les autres quantités en jeu dans (1.4.27). Ceci permet de considérer que le produit $kd << 1$ et donc que l'exponentielle dans (1.4.27) tend vers 1 tandis que le terme $6kd+4k^3d^3+3+6k^2d^2 \to 3$. L'expression de la force devient donc

$$F_{\mathrm{vdW}}(d) = -\frac{3\hbar c}{4\pi d^4}\int_0^\infty dk\,\alpha(ik). \tag{1.4.28}$$

Le second cas où $d >> \lambda_0$ implique que l'exponentielle dans (1.4.27) décroît beaucoup plus rapidement que la polarisabilité dynamique de l'atome. On peut donc remplacer $\alpha(ik)$ par sa valeur statique α_0 qui est une constante. Dans ce cas on peut se ramener à une expression simple de la force

$$F_{\mathrm{CP}} = -\frac{3\hbar c\alpha_0}{2\pi d^5}. \tag{1.4.29}$$

On retrouve dans (1.4.28) et (1.4.29) la modification de la dépendance de la force en d bien connue [55]. Une façon naïve de comprendre cette modification de la force (1.4.27) est de la voir comme provenant de l'interaction entre dipôles induits par les fluctuations du champ électromagnétique du vide sur l'atome [56]. En effet, lorsqu'on s'éloigne de la surface, la finitude de la vitesse de la lumière implique une perte d'efficacité sur le couplage entre les dipôles induits ce qui entraîne une baisse de l'intensité de l'interaction.

1.5 Les théories non-Newtoniennes

L'expérience FORCA-G a pour premier objectif de rechercher une éventuelle déviation de la loi de Newton à courte distance. Dans cette section nous allons détailler le contexte scientifique menant à cette quête.

Depuis l'énonciation par A. Einstein de la théorie de la relativité générale en 1916, de nombreuses vérifications expérimentales sont venues confirmer la pertinence de cette description géométrique de la gravitation. Cependant, la découverte ces dernières années d'observations inexplicables dans le cadre classique de la relativité générale tels que l'accélération de l'expansion de l'Univers ou la forme de la courbe de rotation des galaxies pousse les physiciens à chercher de nouvelles pistes pour décrire la gravitation. De surcroît, il est aujourd'hui largement admis que la théorie de la relativité générale décrivant l'interaction gravitationnelle et la théorie quantique des champs qui constitue le modèle standard de la physique des particules sont incompatibles. En effet, alors que les interactions forte, faible et électromagnétique sont décrites par l'échange de particules virtuelles, les bosons, la gravitation quant à elle est expliquée comme une conséquence de la courbure de l'espace-temps par son contenu en matière et en énergie.

Le fait que la théorie quantique des champs soit incapable de décrire la gravitation tandis que la relativité générale ne semble pas satisfaisante à l'échelle cosmologique pourrait indiquer que ni l'une ni l'autre de ces théories n'est réellement fondamentale et qu'il faut chercher un nouveau cadre mathématique incluant ces deux facettes de la physique. Cette quête vers une unification des interactions fondamentales a produit durant les dernières décennies de nombreuses théories telles que la théorie des cordes ou la gravitation quantique à boucle pour n'en donner que deux exemples (pour une revue plus exhaustive voir [57]). Le problème est de discriminer parmi ces nombreux modèles mathématiques en les confrontant à l'expérience afin d'en tirer des contraintes permettant de faire évoluer les théories. Cependant, les échelles d'énergie et/ou de distance auxquelles s'intéressent ces théories ne sont pas facilement accessibles (à l'échelle de Planck par exemple la gravitation et la force électrofaible sont supposées se coupler). Pour confronter la théorie à l'expérience, on se concentre donc sur les prédictions de phénomènes nouveaux à des échelles accessibles pour l'expérimentation ou l'observation.

1.5.1 Paramétrisation des déviations

La plupart des théories d'unification prédisent une petite déviation à la loi de gravitation due à l'échange d'un boson léger mais de masse non nulle et différente selon les théories considérées. Cette déviation, qui peut être vue comme l'apparition d'une "cinquième force" élémentaire pourrait alors être décrite par la théorie quantique des champs [58].

La description quantique de l'interaction par échange de boson a été pour la première fois proposée par H. Yukawa en 1935 pour expliquer les interactions entre protons et neutrons dans le noyau en relation avec la découverte de la radioactivité β [59].

L'approche habituelle consiste à décrire l'interaction à l'aide d'un champ scalaire répondant à l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi = 0 \tag{1.5.1}$$

où m représente la masse de la particule vecteur de l'interaction, φ est le champ scalaire qui nous intéresse et c la vitesse de la lumière dans le vide. Cette équation est une équation d'onde classique et si l'on considère que le champ qui nous intéresse est isotrope, statique et à symétrie sphérique (ce qui est nécessaire pour une interaction de type gravitationnelle)

$$\varphi = U(r) \tag{1.5.2}$$

on peut alors réduire l'équation (1.5.1) à

$$\begin{aligned} &\Delta U(r) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} U(r) = 0 \\ \Rightarrow &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU(r)}{dr}\right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} U(r) = 0. \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

La solution de l'équation (1.5.3) est un potentiel exponentiel

$$U(r) = \frac{C}{r} e^{-\frac{mc}{\hbar} r} \tag{1.5.4}$$

appelé potentiel de Yukawa où C est une constante d'intégration. On remarque ici que la portée de ce potentiel est inversement proportionnelle à la masse réduite du boson vecteur. À courte distance, on peut donc modeliser la présence d'une "cinquième force" comme une déviation à la loi de Newton caractérisée par deux paramètres α et λ tels que

$$U_{grav}(r) = \frac{GMm}{r}\left(1 + \alpha e^{-\frac{r}{\lambda}}\right) \tag{1.5.5}$$

où α représente l'amplitude de la déviation et λ sa portée.

1.5.2 Quelques expériences - Les contraintes actuelles

Au terme de ce chapitre, je vais exposer ici quelques-unes des expériences qui ont été réalisées dans le but de contraindre les paramètres α et λ ainsi que les contraintes actuellement connues.

Aujourd'hui la situation expérimentale est la suivante : aucune preuve n'a encore été apportée de l'existence d'une cinquième force et les résultats expérimentaux que l'on peut avancer ne sont que des contraintes sur les paramètres de l'équation (1.5.5). Cependant, certaines expériences ont mis en avant de potentielles anomalies dans la mesure de la gravitation. Parmi elles, la plus fameuse est sans doute l'expérience de R. Eötvös en 1922 [60] qui lança l'idée de la possibilité de l'existence d'une cinquième force de portée intermédiaire. Toutefois des expériences plus précises postérieures n'ont rien trouvé de la sorte ce qui laisse à penser que les résultats de R. Eötvös ne prenaient pas en compte tous les biais expérimentaux. Cependant, ces résultats restent aujourd'hui encore sujets à débat.

Les expériences de test de la gravitation peuvent se ranger en plusieurs catégories en fonction de la portée typique de la déviation cherchée. Pour des portées typiques de l'ordre de $10^3 < \lambda < 10^{11}\,\mathrm{m}$, on peut tester le principe d'équivalence à l'aide de télémétrie laser sur satellite [61] et sur la lune [62] ou bien tester les prédictions de la relativité par orbitographie planétaire [63] ou encore à l'aide d'objets astrophysiques comme les pulsars [64]. On utilise les expériences terrestres comme les tours de chute libre pour contraindre α pour des λ typiques de l'ordre de quelques mètres [65]. Et des expériences en laboratoires pour des portées plus faibles. La figure 2.5.1 présente l'état de l'art des contraintes actuelles pour ces différentes échelles. On peut y voir que si l'existence d'une "cinquième force" est relativement bien contrainte à l'échelle du système solaire notamment grâce aux précisions exceptionnelles des techniques de télémétrie laser, deux fenêtres restent ouvertes et relativement peu explorées surtout en raison des difficultés technologiques qu'elles supposent : la fenêtre cosmologique pour des λ très grands et la fenêtre à très courte distance lorsque $\lambda < 10^{-3}\,\mathrm{m}$. La solution pour la première est d'exploiter les données cosmologiques de la dynamique des galaxies ou du CMB tandis que la seconde requiert de nouvelles expériences de mesure d'interaction à courte distance auxquelles nous allons nous intéresser plus particulièrement dans cette thèse.

Plusieurs dispositifs expérimentaux ont été proposés pour contraindre la gravitation Non-Newtonienne à courte distance. Nous allons en présenter quelques uns ici.

En 1985, la première expérience de test de la loi de Newton utilise une balance de torsion pour tester la différence de potentiel gravitationnel en fonction de la distance. On place au centre de l'expérience un levier de cuivre et on observe la déflection produite par une masse lointaine que l'on compare avec celle créée par une masse proche [68]. Ce test permit de poser des contraintes pour des λ caractéristiques de quelques centimètres. Par la suite, il y eut plusieurs autres expériences utilisant des leviers pour améliorer ces premiers tests (voir par exemple [69–72]) mais d'autres méthodes de mesure ont aussi vu le jour. Parmi elles, on peut citer la mesure de l'interaction entre deux masses d'or par interféro-

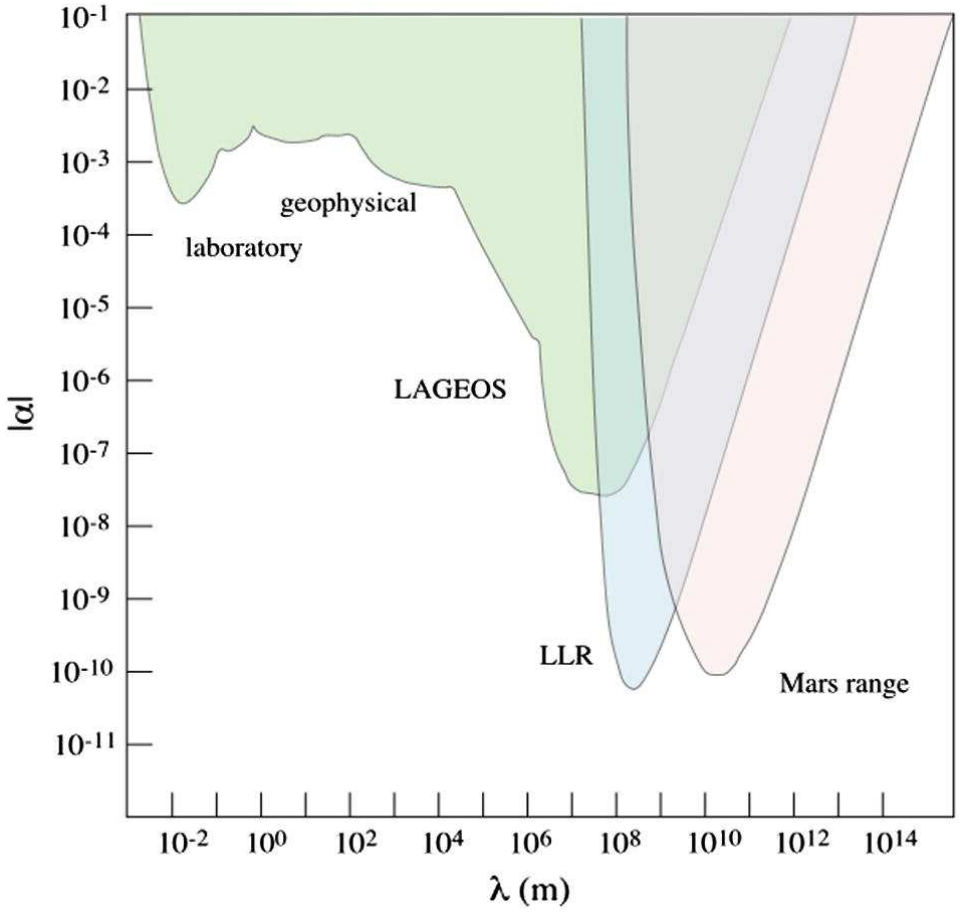


Figure 1.9 : Contraintes actuelles sur les paramètres α et λ des éventuelles déviations non-Newtoniennes. Ces contraintes ont été posées grâce à différentes techniques expérimentales dépendantes des échelles testées [66, 67]. Les zones colorées représentent les valeurs des paramètres α et λ d'ors et déjà exclues par les expériences.

métrie optique [73], les mesures utilisant l'effet Casimir [74–76] ou encore la proposition de S. Dimopoulos et A. A. Geraci d'utiliser l'interférométrie atomique avec des condensats de Bose-Einstein pour mesurer les interactions entre ceux-ci et une plaque massive [77]. Le résultat de ces dernières années de recherche à courte distance est présenté sur la figure 1.10.

L'expérience FORCA-G sur laquelle j'ai travaillé au cours de ces trois années utilise quant à elle, l'interférométrie atomique à l'aide d'atomes refroidis afin de mesurer à la fois l'effet Casimir-Polder entre un paquet d'atome et une surface à une précision autour de 1% encore jamais égalée et pour rechercher et contraindre les déviations à la loi de Newton à très courte distance (entre 1 μm et 10 μm).

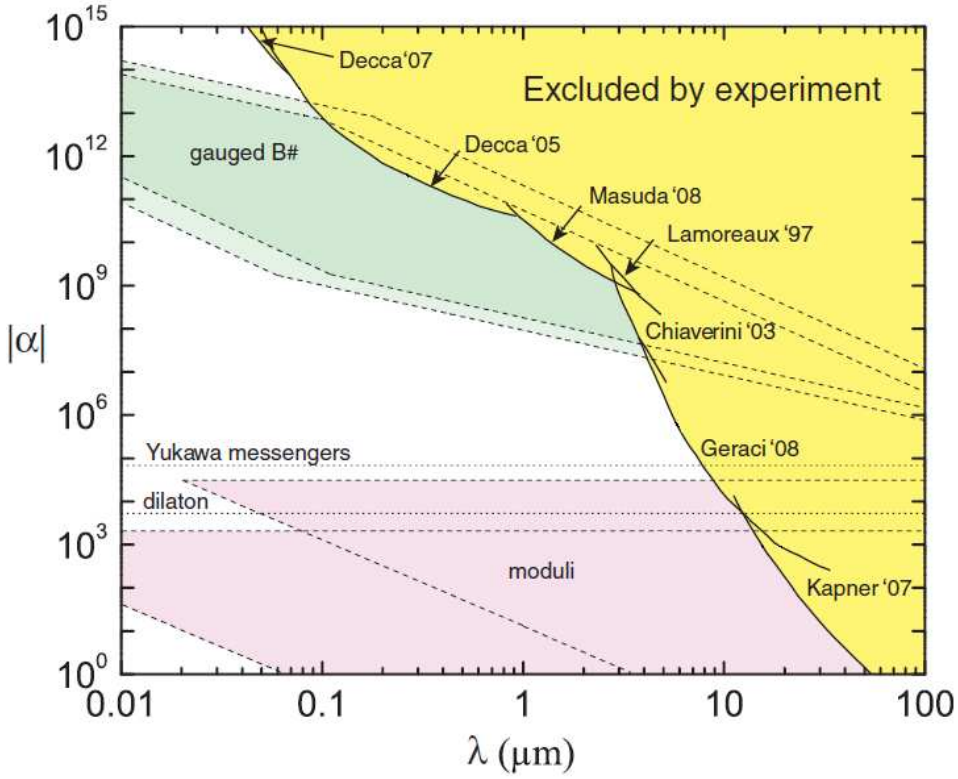


Figure 1.10 : Contraintes actuelles sur les paramètres α et λ des éventuelles déviations non Newtoniennes à courte distance [78].

CHAPITRE 2

Etats pseudo-propres des atomes dans le piège

La modélisation complète de l'expérience FORCA-G nécessite le calcul exact des états atomiques dans le piège. L'objet de ce chapitre est de résoudre l'équation de Schrödinger numériquement afin d'obtenir ces états propres. Dans un premier temps, on s'intéressera simplement au piège en lui-même et à la modification des états de Wannier-Stark en présence d'une surface traitée comme une barrière de potentiel infinie. On étudiera ensuite l'effet des interactions à courte distance citées dans le chapitre précédent sur ces états.

Sommaire

2.1 Introduction 38
2.2 États atomiques dans un réseau périodique 38
2.2.1 Les états de Bloch 38
2.2.2 Les états de Wannier-Stark 40
2.3 Les états de Wannier-Stark en présence de la surface 42
2.4 L'effet Casimir-Polder sur les états atomiques 45
2.4.1 L'Hamiltonien du système 45
2.4.2 Correction des niveaux d'énergie 48
2.4.3 Régularisation de la correction 49
2.4.4 La correction des états 52
2.5 Introduction d'une déviation à la loi de la gravitation 55
2.5.1 Cas d'un interféromètre avec un seul isotope du rubidium 58
2.5.2 Cas d'un interféromètre avec deux isotopes du rubidium 59
2.5.3 Contraintes attendues pour l'expérience 60
2.6 Article 61

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est le calcul des états de l'atome de rubidium piégé à proximité d'une surface dans une configuration similaire à celle de FORCA-G. Le calcul de ces états repose sur la résolution numérique de l'équation de Schrödinger par la méthode des différences finies. La première partie de ce chapitre rappelle le calcul des états d'une particule dans un piège périodique accéléré ou non. Ces états ont fait l'objet de nombreuses études en physique des solides puisqu'ils représentent les états propres des électrons dans un cristal [44, 79, 80]. On introduira ensuite la surface en tant que condition aux limites pour ces états propres et on verra comment ceux-ci sont modifiés par cette barrière lorsqu'ils en sont proches. Enfin, la seconde partie de ce chapitre sera dédiée à l'étude des états atomiques en présence d'interactions à courte distance. Tout d'abord, on remarquera que l'effet Casimir-Polder modifie fortement les niveaux d'énergie atomique lorsqu'on s'approche de la surface, tout en conservant un faible impact sur les états propres en tant que tels. Ensuite on étudiera le comportement de ces états sous l'hypothèse de l'existence d'une loi de la gravitation non-Newtonienne à courte distance. Cette étude, couplée à la connaissance des performances de l'expérience nous permettra de prédire l'ordre de grandeur des contraintes que FORCA-G pourra imposer sur ce type de déviations gravitationnelles.

2.2 États atomiques dans un réseau périodique

Le problème des états atomiques piégés dans une onde stationnaire est semblable à celui des électrons dans des réseaux cristallins rencontré en physique des solides [44]. En effet, dans notre cas comme dans celui des électrons, on étudie des particules piégées dans un potentiel périodique. On peut donc transposer les méthodes de calcul de la physique des solides au cas de FORCA-G.

2.2.1 Les états de Bloch

Considérons dans un premier temps, simplement un atome de masse m_a piégé dans une onde stationnaire réalisant un potentiel périodique de la forme

$$V_B(z) = \frac{U}{2}(1 - \cos(2k_l z)) \tag{2.2.1}$$

où U est l'amplitude du potentiel et k_l le vecteur d'onde du laser piège. L'Hamiltonien du système atomique piégé est donc

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2m_a}\frac{d^2}{dz^2} + V_B(z) \tag{2.2.2}$$

Le théorème de Bloch [44] nous indique que les états propres d'un Hamiltonien tel que (2.2.2) ont la forme d'un produit d'une onde plane avec une fonction $u_{\alpha,\kappa}(z)$ de même

périodicité que le potentiel V_{B}. On peut donc les écrire sous la forme (voir [44] pour la démonstration)

$$\varphi_{b,\kappa}(z) = e^{i\kappa z} u_{b,\kappa}(z) \tag{2.2.3}$$

où on a introduit une variable κ désignée communément comme la quasi-impulsion de la particule et qui joue un rôle assez similaire à celui du vecteur d'onde d'une particule libre dans la théorie de Sommerfeld. Cependant, on remarque ici que, contrairement au cas du vecteur d'onde d'une particule libre, que l'on peut exprimer en fonction de l'impulsion $\boldsymbol{p}$ de cette particule comme $\boldsymbol{p}/\hbar$, κ dans le cas du problème de Bloch n'est pas proportionnel à l'impulsion des particules dans le réseau. Ceci est vérifiable par le fait que si l'on applique l'opérateur d'impulsion $-i\hbar\frac{d}{dz}$ à la fonction $\varphi_{b,\kappa}(z)$ de l'équation (2.2.3) on obtient

$$\begin{aligned} -i\hbar\frac{d}{dz}\varphi_{b,\kappa}(z) &= -i\hbar\frac{d}{dz}\left(e^{i\kappa z}u_{b,\kappa}(z)\right) \\ &= \hbar\kappa\varphi_{b,\kappa}(z) - i\hbar e^{i\kappa z}\frac{d}{dz}u_{b,\kappa}(z). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Cependant, $\hbar\kappa$ peut être considéré comme une extension de l'impulsion dans le cas des potentiels périodiques.

L'indice b qui apparaît dans l'équation (2.2.3) exprime le fait qu'il existe plusieurs solutions de l'équation de Schrödinger pour un κ donné du fait des conditions aux limites périodiques. En effet, si l'on substitue, dans l'équation de Schrödinger, la fonction d'onde solution $\varphi_{b,\kappa}(z)$ par son expression donnée par (2.2.3) on trouve

$$\begin{aligned} \langle z|H_B|\varphi_{b,\kappa}\rangle &= \left(\frac{\hbar^2}{2m_a}\left(-i\frac{d}{dz}+\kappa\right)^2 + V_B(z)\right)u_{b,\kappa}(z)e^{i\kappa z} \\ &= \epsilon_{b,\kappa}u_{b,\kappa}(z)e^{i\kappa z} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

ce qui conduit à l'équation

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m_a}\left(-i\frac{d}{dz}+\kappa\right)^2 + V_B(z)\right)u_{b,\kappa}(z) = \epsilon_{b,\kappa}u_{b,\kappa}(z) \tag{2.2.6}$$

avec comme conditions aux limites

$$u_{b,\kappa}(z) = u_{b,\kappa}(z + \frac{\lambda_l}{2}), \tag{2.2.7}$$

λ_l étant la longueur d'onde du laser réalisant l'onde stationnaire et $\frac{\lambda_l}{2}$ étant donc la périodicité du piège.

Grâce aux conditions aux limites périodiques, on peut considérer l'expression (2.2.6) comme un problème aux valeurs propres hermitien restreint à une cellule primitive du

réseau périodique appelée première zone de Brillouin. Le problème aux valeurs propres se ramène alors à un problème sur un intervalle fini et on s'attend à trouver une famille infinie de valeur propres discrètes représentée par l'indice de bande b. On peut enfin noter que dans les expressions (2.2.6) et (2.2.7), κ apparaît seulement comme un paramètre dans l'Hamiltonien H_B. On s'attend donc à ce que les niveaux d'énergie, pour un b donné, varient de manière régulière avec κ de sorte que les niveaux d'énergie d'une particule dans un réseau périodique s'expriment comme une famille de fonctions continues de κ notées $\epsilon_b(\kappa)$. On parlera de *bandes d'énergie*. Les quatres première bandes d'énergie correspondant à l'Hamiltonien (2.2.2) sont représentées sur la figure 2.1 dans la première zone de Brillouin. Ces bandes ont été obtenues par la méthode de résolution présentée dans la référence [81].

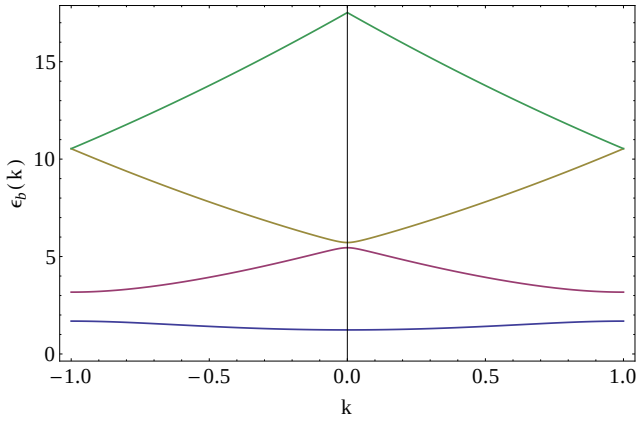


Figure 2.1 : 4 premières bandes d'énergie de Bloch sur la première zone de Brillouin. Ici les énergies sont représentées en unité de l'énergie de recul d'un photon du laser $E_R = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_a}$ et la quasi-impulsion est en unité de $\frac{k_r}{2}$.

Comme on le voit dans l'équation (2.2.3), les fonctions d'onde d'une particule dans un potentiel périodique sont symétriques par translation et non localisées. Il a toutefois été postulé dans les années 60, que l'ajout d'un potentiel linéaire au potentiel périodique conduisait à la localisation des états de la particule [80].

2.2.2 Les états de Wannier-Stark

L'effet de l'adjonction d'un potentiel linaire à l'Hamiltonien de Bloch (2.2.2) a d'abord été étudié en physique des solides pour le cas d'électrons dans un cristal soumis à un champ électrique continu [80]. Cela peut se transposer au cas qui nous intéresse puisque dans notre expérience les atomes sont piégés dans un réseau vertical. L'effet de la pesanteur terrestre sur l'atome ajoute donc un terme linéaire au réseau périodique et on peut écrire

l'Hamiltonien sous la forme

$$H_{WS} = -\frac{\hbar^2}{2m_a}\frac{d^2}{dz^2} + V_B - m_a g z \tag{2.2.8}$$

où V_B est le potentiel périodique et $g \simeq 9.81\,\mathrm{m.s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur terrestre. L'adjonction du potentiel linéaire brise la symétrie de translation observée dans le cas d'une particule dans un potentiel Bloch mais conserve tout de même le caractère périodique du potentiel. Or, le théorème de Bloch nous indique que pour un potentiel périodique quelconque, il est possible d'écrires les fonctions propres de ce potentiel comme une superposition d'états de Bloch. Pour calculer les états de Wannier-Stark, on va donc projeter l'équation aux valeurs propres

$$H_{WS}|WS_{b,l}\rangle = E_{b,l}|WS_{b,l}\rangle \tag{2.2.9}$$

sur la base des fonctions dites de Wannier

$$\psi_{b,l}(x) = \int_{-k_l}^{k_l} d\kappa e^{-i\kappa l\frac{\lambda_l}{2}}\varphi_{b,\kappa}(x). \tag{2.2.10}$$

Pour rendre le calcul analytique, une approximation courante consiste à se placer dans une bande d'énergie particulière b et à la considérer comme isolée c'est-à-dire que l'on ne prend pas en compte la possibilité pour les atomes de passer d'une bande à l'autre [45]. Cette approximation fut très discutée à la suite de son introduction par G. Wannier [80,82]. En effet, en négligeant simplement les autres bandes de Bloch dans le problème, on ne prend pas en compte le possible couplage des états entre bande, que l'on appelle *effet Landau-Zener* ou *Zener tunneling* [83] et que l'on discutera dans le chapitre 3. Cependant, dans le cas habituel des états de Wannier-Stark, ce couplage inter-bande est relativement faible et l'approximation conduit au spectre des états de Wannier-Stark appelé aussi *échelle de Wannier-Stark*

$$E_{b,l} = \bar{\epsilon}_b - l m_a g\frac{\lambda_l}{2}. \tag{2.2.11}$$

Contrairement aux états de Bloch, les états de Wannier-Stark sont localisés sur un nombre restreint de périodes du réseau. Cette localisation dépend toutefois de l'amplitude du piège périodique par rapport au potentiel linéaire comme on peut le voir sur la figure 2.2. Le fait que le piège soit peu profond dans les conditions de l'expérience induit une délocalisation de l'atome sur plusieurs puits. Cette remarque aura de l'importance dans la suite pour le calcul des états proches de la surface et cette observation aura de plus des conséquences notamment pour la modélisation de l'expérience en elle-même que nous détaillerons dans le chapitre 4.

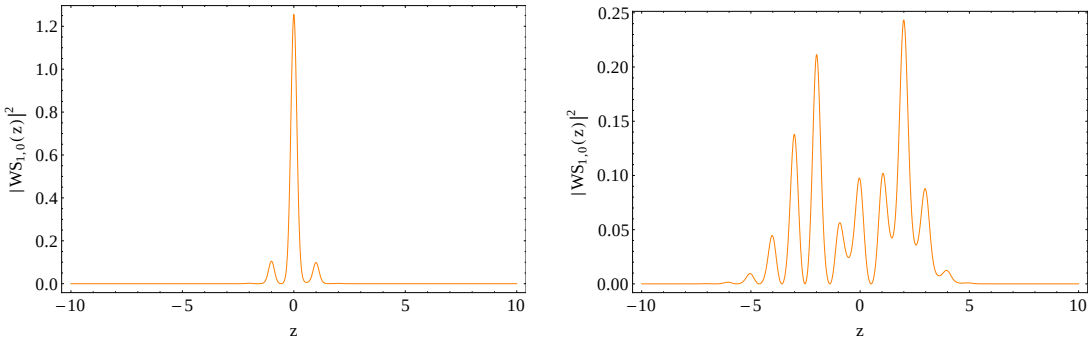


Figure 2.2 : À gauche : état de Wannier-Stark centré dans le puits 0 en fonction de la position z pour un piège périodique de profondeur $U_0 = 10E_R$. À droite : état de Wannier-Stark dans le même puits pour un piège périodique de profondeur $U_0 = 3E_R$ (conditions de FORCA-G). La position est exprimée en unité de la périodicité du réseau.

2.3 Les états de Wannier-Stark en présence de la surface

Dans la section précédente, nous avons vu les valeurs propres et la forme de la fonction d'onde des atomes de rubidium dans le piège optique de FORCA-G. Cependant, il n'a pas été pris en compte la présence de la surface dans ces calculs. En effet, utiliser le théorème de Bloch pour le calcul des états de Wannir-Stark suppose que le réseau que l'on étudie est parfaitement périodique et on utilise la symétrie de translation d'un tel réseau pour en déduire les niveaux d'énergie (2.2.11). Or, dans le cas plus réaliste de FORCA-G, ce réseau n'est pas infini et ceci impose des conditions aux limites.

En particulier, l'expérience qui nous occupe ici cherche à mesurer les interactions des atomes avec une surface. On ne peut donc décemment pas négliger la présence de cette surface dans les calculs et on va, dans un premier temps, la modéliser comme une simple barrière infinie de potentiel. Cette approximation a pour effet d'interdire à l'atome de pénétrer la surface. Autrement dit, la fonction d'onde atomique au niveau de la surface (que l'on placera par convention en $z = 0$) est nulle

$$WS(z = 0) = 0. \tag{2.3.1}$$

Avec cette condition au bord, le potentiel modifiant le piège optique n'est plus linéaire mais doit être considéré comme la somme du potentiel graviationnel pour $z > 0$ et d'une barrière infinie pour $z \leq 0$. Les états propres de l'Hamiltonien résultant (en unités de E_r)

$$H_{WS}^{(mod)} = -\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2\pi z)\right) + V(z) \qquad V(z) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad z \leq 0 \\ -m_a g \frac{\lambda_l}{2E_r} z & \text{si} \quad z > 0 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

ne sont donc plus à proprement parler des états de Wannier-Stark et doivent être calculés numériquement.

Il s'agit donc de résoudre l'équation aux valeurs propres $H_{WS}^{(mod)}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ à l'aide de la méthode des différences finies. La première étape de cette méthode consiste à se donner une boîte numérique de calcul telle que $0 \leq z \leq z_f$ et à imposer que la fonction d'onde recherchée s'annule sur ses bords. On remarque ici que si la condition en $z = 0$ correspond à une condition physique réelle imposée par la présence de la surface, la condition en z_f quant à elle est purement numérique et il faudra toujours s'assurer que la boîte est suffisament grande pour que cette condition n'ait pas d'effet sur le résultat du calcul. Les fonctions d'ondes calculées ne pourront donc être considérées comme valables qu'à la condition où elles deviennent négligeables bien avant z_f.

Une fois que l'on a défini une boîte de calcul, il faut discrétiser cet intervalle $[0, z_f]$, ce que l'on fait à l'aide d'un réseau de point z_i tels que $z_0 = 0, z_1, ..., z_N, z_{N+1} = z_f$ (ce qui donne un espacement entre les points de $\delta z = \frac{z_f}{N+1}$). On peut alors exprimer l'Hamiltonien (2.3.2) comme une matrice sur la base de l'espace discrétisé. On commence par discrétiser la partie cinétique de l'Hamiltonien. Ceci est fait à l'aide de la définition de la dérivée seconde d'une fonction f

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \lim_{dz \to 0} \frac{f(z_{i+1}) + f(z_{i-1}) - 2f(z_i)}{dz^2}. \tag{2.3.3}$$

L'énergie cinétique de l'atome dans le piège peut donc s'écrire comme une matrice tridiagonale de la forme

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi^2 dz^2} & -\frac{1}{\pi^2 dz^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\pi^2 dz^2} & \frac{2}{\pi^2 dz^2} & -\frac{1}{\pi^2 dz^2} & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{\pi^2 dz^2} & \frac{2}{\pi^2 dz^2} & -\frac{1}{\pi^2 dz^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{\pi^2 dz^2} & \frac{2}{\pi^2 dz^2} \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

à laquelle il faut ajouter la matrice diagonale représentant le potentiel qui s'exprime simplement comme la valeur dudit potentiel en chaque point du réseau. La matrice à diagonaliser s'écrit donc

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V} \tag{2.3.5}$$

avec

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2\pi z_i)\right) + V(z_i) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2\pi z_i)\right) + V(z_i) \end{pmatrix}. \tag{2.3.6}$$

Le problème aux valeurs propres se ramène donc à la diagonalisation d'une matrice tridiagonale.

On diagonalise $\mathcal{H}$ grâce à la méthode développée par G. Peters et J. Wilkinson [84]. Le principe de cet algorithme repose sur le théorème de Sturm. Ce théorème, établi en 1829, permet de calculer le nombre de racines réelles distinctes dans un intervalle donné d'une fonction polynôme. Ce nombre de racines réelles est égal au nombre de changement de signes entre deux membres successifs d'une série appelée *suite de Sturm*. Cette suite est obtenue à partir du polynôme en question $P = P_0$ et de sa dérivée $P' = P_1$ en leur appliquant des divisions euclidiennes successives

$$\begin{cases} P_0 & = P = x^n + ... + a_1 x + a_0 \\ P_1 & = P' = nx^{n-1} + ... + a_1 \\ P_{i-1} & = P_i Q_i - P_{i+1} \qquad (i = 0, 1, ..., n) \end{cases} \tag{2.3.7}$$

où Q_i représente le quotient de la division euclidienne $\frac{P_{i-1}}{P_i}$. Or, il se trouve que lorsque l'on cherche à résoudre le problème aux valeurs propres $\det(H - \Lambda \mathbb{1}) = 0$ avec H réelle et symétrique, les mineurs principaux dominants de H forment une suite de Sturm. Ce fait simplifie le calcul des valeurs propres de H puisque ces valeurs propres sont justement les racines de $\det(H - \Lambda \mathbb{1})$.

Pour trouver les premières valeurs propres de notre Hamiltonien, nous définissons donc une fonction $g(\Lambda)$ telle que

$$\begin{cases} g_1(\Lambda) & = h_{11} - \Lambda \\ g_i(\Lambda) & = h_{ii} - \Lambda - \frac{(h_{i,i-1})^2}{g_{i-1}(\Lambda)} \qquad i = 2, ..., n \\ g(\Lambda) & = g_n(\Lambda) \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Une fois cette fonction définie, on définit un intervalle $[a, b]$ dans lequel on recherche le nombre de valeurs propres. Chaque valeur propre est ensuite retrouvée grâce à un algorithme de dichotomie sur la fonction $g(\Lambda)$ [85].

Les 20 premières valeurs propres ainsi trouvées sont présentées dans la table 2.1. Dans ce tableau, la deuxième colonne représente la différence d'énergie entre deux valeurs propres successives. Dans le cas des états de Wannier-Stark classiques, cette différence est toujours la même du fait de la périodicité du potentiel et vaut (en tenant compte de la précision numérique du calcul) $\delta E_{n(\mathrm{WS})} = m_a g \frac{\lambda_l}{2} = -7.0068 \cdot 10^{-2} E_R$. Ici, l'introduction de la condition au bord modélisant la présence de la surface modifie cette différence pour les premiers puits mais on retrouve rapidement la différence d'énergie des états de Wannier-Stark classiques lorsqu'on s'éloigne du miroir. De la même façon, sur la figure 2.3 on voit

n	E_n	$\delta E_n(\times 10^{-2})$	n	E_n	$\delta E_n(\times 10^{-2})$
1	1.4757	-13.707	11	0.6659	-7.0068
2	1.3387	-9.9694	12	0.5959	-7.0068
3	1.2391	-8.0457	13	0.5258	-7.0068
4	1.1587	-7.2268	14	0.4557	-7.0068
5	1.0866	-7.0282	15	0.3857	-7.0068
6	1.0163	-7.0080	16	0.3156	-7.0068
7	0.9462	-7.0069	17	0.2455	-7.0068
8	0.8761	-7.0068	18	0.1755	-7.0068
9	0.8061	-7.0068	19	0.1054	-7.0068
10	0.7360	-7.0068	20	0.0353	-7.0068

Table 2.1 : 20 premières valeurs propres de l'Hamiltonien (2.3.2) calculées sur un intervalle $[0, 50]$. Les énergies sont données en unités de E_R.

la même modification des états propres lorsqu'on s'approche de la surface.

Une fois que l'on connaît les états de Wannier-Stark modifiés par la présence d'une surface modélisée par une barrière infinie de potentiel, on va s'intéresser aux effets de cette surface sur l'atome. En particulier, on va étudier la manière dont les interactions atome-surface recherchées dans le cadre de FORCA-G modifient les états atomiques dans le piège.

2.4 L'effet Casimir-Polder sur les états atomiques

Le premier effet que l'on va prendre en considération est l'effet Casimir-Polder. En effet, on a vu dans le chapitre 1 que cette interaction était dominante à courte distance, on peut donc s'attendre à ce que ce soit cette interaction qui modifie le plus drastiquement à la fois les niveaux d'énergie atomiques et les états en eux-même.

2.4.1 L'Hamiltonien du système

Dans cette section, nous allons considérer notre atome piégé face à une surface parfaitement conductrice placée en $z = 0$. On prend maintenant en compte le fait que l'atome soit, en plus de tous les potentiels cités précédemment, plongé dans le champ électromagnétique

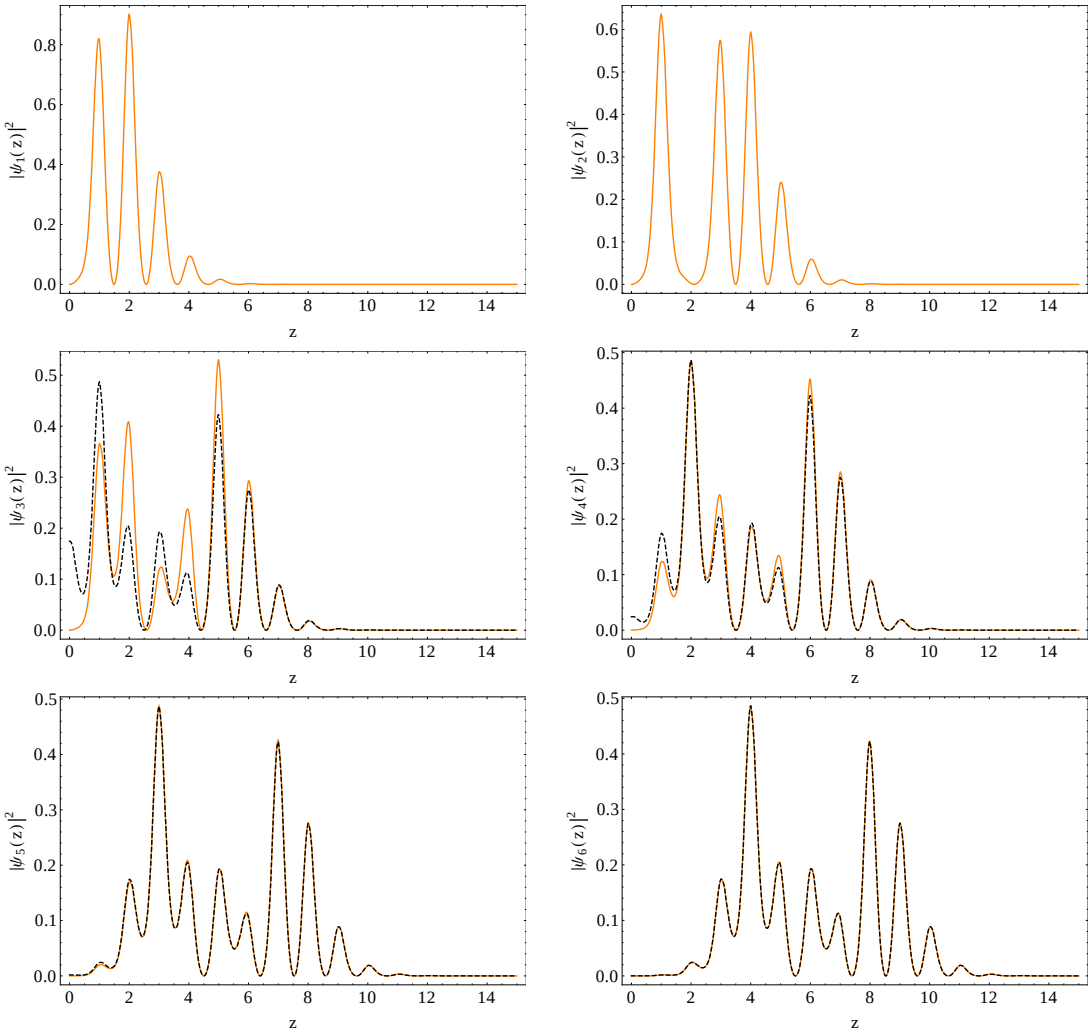


Figure 2.3 : Densité de probabilité des états de Wannier-Stark modifiés $\psi_n(z)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et $U_0 = 3$. Les quatres dernières fonctions sont comparées avec les fonctions de Wannier-Stark standards (lignes pointillées noires).

quantifié. L'Hamiltonien complet du problème s'écrit

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{int} \\ H_0 &= H_f + H_{at} + H_{WS} \\ H_f &= \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\, \hbar\omega\, a_p^\dagger(\mathbf{k}, k_z) a_p(\mathbf{k}, k_z) \\ H_{at} &= \hbar\omega_{eg}\Big(S_z + \frac{1}{2}\Big) \\ H_{WS} &= \frac{p^2}{2m} - mgz + \frac{UE_r}{2}\big(1 - \cos(2k_l z)\big). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Dans cette expression, H_f représente l'Hamiltonien du champ électromagnétique quantique libre caractérisé par les modes $(\mathbf{k}, k_z, p)$ décrits par les opérateur d'annihilation $a_p(\mathbf{k}, k_z)$ et de création $a_p^\dagger(\mathbf{k}, k_z)$. p représente la polarisation du champ et prend les valeurs $p = 1, 2$ tandis que le vecteur $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ est la composante transverse du vecteur d'onde complet $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{k}, k_z)$. Les états propres de H_f sont connus [86] et ont la forme

$$H_f|\{n_p(\mathbf{k}, k_z)\}\rangle = \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\, \hbar\omega\, n_p(\mathbf{k}, k_z)\hbar\omega|\{n_p(\mathbf{k}, k_z)\}\rangle \tag{2.4.2}$$

où $\{n_p(\mathbf{k}, k_z)\}$ est le nombre de photons occupant le mode $(\mathbf{k}, k_z, p)$ et $\omega = c\sqrt{\mathbf{k}^2 + k_z^2} = cK$. Le terme H_{at} correspond aux états internes de l'atome. Il est exprimé en fonction de l'opérateur de pseudo-spin $S_z = \frac{1}{2}\,\mathrm{diag}(-1, 1)$ dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ et ses états propres ont donc pour énergie 0 et $\hbar\omega_{eg}$. Enfin, le terme H_{WS} est l'Hamiltonien de Wannier-Stark que l'on a discuté dans la section précédente.

Comme on l'a dit plus haut, l'effet Casimir-Polder provient de l'interaction entre le champ électromagnétique et l'atome. Cette interaction peut s'écrire sous la forme de l'Hamiltonien multipolaire bien connu [52]

$$\begin{aligned} H_{int} &= -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{i}{\pi} \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0}}\, \boldsymbol{\mu} \cdot \big(\mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) a_p(\mathbf{k}, k_z) - h.c.\big)\big(S_+ + S_-\big) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

qui est proportionnel (par l'intermédiaire du moment dipolaire électrique) à la charge électrique. Dans cette expression $\boldsymbol{\mu}$ est l'élément de matrice de l'opérateur de moment dipolaire électrique entre les deux niveaux atomiques $|g\rangle$ et $|e\rangle$ et

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.4}$$

Enfin, l'expression du champ électrique est

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{\pi} \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0}} \big(\mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) a_p(\mathbf{k}, k_z) - h.c.\big) \\ &= \frac{i}{\pi} \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0}} \big(e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, z) a_p(\mathbf{k}, k_z) - h.c.\big) \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

où le vecteur $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ représente les coordonnées transversales et les fonctions de modes correspondant à la présence d'une surface parfaitement conductrice en $z = 0$ sont [87]

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1(\mathbf{k}, k_z, z) &= \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}} \sin(k_z z) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{k}, k_z, z) &= \hat{\mathbf{k}} \frac{ick_z}{\omega} \sin(k_z z) - \hat{\mathbf{z}} \frac{ck}{\omega} \cos(k_z z). \end{cases} \tag{2.4.6}$$

À partir de l'expression de ces Hamiltoniens, on va maintenant pouvoir quantifier la modification des niveaux de Wannier-Stark donnés dans le tableau 2.1 par l'effet Casimir-Polder.

2.4.2 Correction des niveaux d'énergie

Pour calculer la modification des niveaux de Wannier-Stark, on utilise la théorie des perturbations indépendantes du temps sur l'état fondamental

$$|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle = |g\rangle|0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|m,1\rangle \tag{2.4.7}$$

de l'Hamiltonien non perturbé H_0. Cet état est le produit des états fondamentaux du champ $|0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle$ et de l'atome ($|g\rangle$ représentant l'état interne et $|m,1\rangle$ représentant l'état externe, i.e. l'état de Wannier-Stark modifié dans le puits m pour la première bande de Bloch).

La perturbation au premier ordre de ces niveaux est nulle. En effet, la valeur moyenne de H_{int} sur l'état (2.4.7)

$$\langle g|\langle 0_p(\mathbf{k},k_z)|\langle m,1|H_{int}|g\rangle|0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|m,1\rangle = -\langle g|\langle 0_p(\mathbf{k},k_z)|\langle m,1|\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{E}|g\rangle|0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|m,1\rangle \tag{2.4.8}$$

est nulle en raison de la nature impaire de l'opérateur de moment dipolaire $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ ainsi que de la valeur moyenne des opérateurs de création et annihilation. Il faut donc calculer la correction au deuxième ordre

$$\Delta E^{(2)}_{m,1} = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\left|\langle\psi^{(0)}_{m,1}|H_{int}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,b\rangle\right|^2}{E^{(0)}_{n,b} - E^{(0)}_{m,1} + \hbar(\omega+\omega_{eg})}. \tag{2.4.9}$$

La différence d'énergie entre deux niveaux de Wannier-Stark est de l'ordre de l'énergie de recul d'un photon du piège E_R comme on l'a vu dans le tableau 2.1 soit $E^{(0)}_{n,b} - E^{(0)}_{m,1} \sim 10^{-11}$ eV. D'un autre coté, l'énergie $\hbar\omega_{eg}$ de la transition atomique est de l'ordre de l'électronvolt. On peut donc sans risque négliger la différence d'énergie de Wannier-Stark au dénominateur de (2.4.9) et utiliser la relation de fermeture sur les états $|n,b\rangle$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{m,1} = &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\ &\times \langle\psi^{(0)}_{m,1}|H_{int}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,b\rangle\langle 1_p(\mathbf{k},k_z)|\langle e|\langle n,b|H_{int}|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle \\ = &\langle m,1|\Big(-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{\left|A_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})\right|^2}{\hbar(\omega+\omega_0)}\Big)|m,1\rangle.\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

L'expression entre parenthèses coïncide avec l'expression de la correction aux énergies obtenue pour un atome dont la position serait traitée comme un paramètre et non comme un opérateur quantique (ce que l'on fait habituellement lorsqu'on calcule l'effet Casimir-Polder [88–91]). Nous avons donc démontré que la correction que nous recherchons est la

valeur moyenne du potentiel de Casimir-Polder que nous avons présenté au chapitre 1 sur les états de Wannier-Stark modifiés

$$\Delta E^{(2)}_{m,1} = \int_0^{+\infty} dz \left|\psi_m(z)\right|^2 V(z) \tag{2.4.11}$$

avec

$$V(z) = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{\left|A_p(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r})\right|^2}{\hbar(\omega + \omega_0)}. \tag{2.4.12}$$

Dans cette expression, on a défini

$$A_p(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) = \langle 0_p(\mathbf{k}, k_z)|\langle g|H_{\text{int}}|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle|e\rangle \tag{2.4.13}$$

où la dépendance en z est contenue dans l'Hamiltonien H_{int}.

L'expression (2.4.12) de $V(z)$ est valide à toute distance entre l'atome et la surface et correspond au cas d'une surface parfaitement conductrice à température nulle. On utilisera dans la suite l'expression plus générale valable pour toute température $T > 0$ donnée par

$$V(z) = -\frac{k_B T}{8\pi\varepsilon_0 z^3} {\sum_{n=0}^{+\infty}}' \alpha(i\xi_n) e^{-2\frac{\xi_n}{c}z} \Big[1 + \frac{2\xi_n}{c}z + 2\Big(\frac{\xi_n}{c}z\Big)^2\Big] \tag{2.4.14}$$

où $\xi_n = 2\pi n k_B T/\hbar$ est la $n$ième fréquence de Matsubara et le prime sur la somme indique que le terme pour $n = 0$ doit être pondéré par $\frac{1}{2}$. Dans cette expression, $\alpha(\omega)$ représente la polarisabilité atomique.

2.4.3 Régularisation de la correction

On a vu dans la section précédente que les corrections des niveaux d'énergie s'exprimaient sous la forme de la valeur moyenne du potentiel de Casimir-Polder sur les états de Wannier-Stark modifiés. Cependant, on voit dans l'équation (2.4.14) que le potentiel de Casimir-Polder diverge comme $\frac{1}{z^3}$ lorsque $z \to 0$. Ce comportement à courte distance pose un problème pour le calcul des corrections aux niveaux (2.2.11) puisque les états de Wannier-Stark modifiés se comportent comme z au voisinage de 0. Les corrections (2.4.11) divergent donc lorsqu'on s'approche de la surface. En fait, il a été démontré dans les années 1950 [92, 93] que les potentiels qui divergent plus vite que $1/z^2$ en 0 n'étaient pas physiques et nécessitaient une régularisation. Pour résoudre notre problème, nous avons donc besoin de tenir compte plus précisément de la physique de l'équation de Schrödinger à très courte distance.

Dans notre cas précis, le comportement à l'origine provient du fait que l'on ait traité l'atome comme un objet ponctuel. Pour calculer les états très proches de la surface, il faut

prendre en compte la taille finie de l'atome. On peut faire cela en s'inspirant des calculs d'effet Casimir entre une sphère métallique de rayon R et un mur [94–96]. Dans ce genre de configuration, le potentiel de Casimir voit sa dépendance en z changer en fonction de la distance entre la sphère et la surface. Aux grandes distances il varie comme z^{-4}, il passe par un régime intermédiaire en z^{-3} jusqu'à atteindre une dépendance en z^{-1} aux environs de $z = 0$. Cette transition est fonction du rayon de la sphère R.

Pour prendre en compte la taille de l'atome, nous avons donc modélisé celui-ci à l'aide d'une distribution sphérique de densité $\rho(\boldsymbol{r'})$ et de rayon R [97]. On considère de plus que le centre de l'atome a pour coordonnées $(0, 0, z + R)$ c'est-à-dire que le point de la sphère le plus proche de la surface est à la distance z de celle-ci. Cette modélisation n'est qu'une approximation dans le sens où on ne prend jamais en compte les éventuels effets d'adsorption chimique de l'atome par la surface et que l'on modélise l'atome comme une sphère parfaite sans tenir compte de la structure des fonctions d'ondes électroniques. Pour tester la robustesse de ce modèle, nous avons choisi de calculer les corrections ainsi obtenues avec deux types de distribution de densité : l'une uniforme

$$\rho_1(\boldsymbol{r'}) = N_1, \tag{2.4.15}$$

l'autre parabolique

$$\rho_2(\boldsymbol{r'}) = N_2 \left[R^2 - x'^2 - y'^2 - (z' - z - R)^2\right]. \tag{2.4.16}$$

Dans les deux cas, la variable $\boldsymbol{r'}$ est exprimée dans le même système de coordonnées que la position de l'atome et les constantes N_1 et N_2 sont données par la condition de normalisation

$$\int_\Omega d^3\boldsymbol{r'}\rho(\boldsymbol{r'}) = 1 \tag{2.4.17}$$

Ω étant le volume atomique.

L'introduction de la densité de probabilité $\rho(\boldsymbol{r'})$ pousse à réécrire le potentiel de Casimir-Polder comme

$$V_{reg}(z) = \int_\Omega d^3\boldsymbol{r'}\rho(\boldsymbol{r'})V(z') \tag{2.4.18}$$

Avant de remplacer $V(z)$ par $V_{\mathrm{reg}}(z)$ dans l'expression (2.4.11) pour obtenir les niveaux d'énergie régularisés, arrêtons nous sur le comportement asymptotique de ce potentiel $V_{\mathrm{reg}}(z)$ en $z = 0$. Si on suppose que ce comportement peut s'exprimer sous la forme

$$\lim_{z\to 0} V_{reg}(z) = \frac{A}{z^\alpha}, \tag{2.4.19}$$

l'exposant α s'exprime par

$$\alpha = -z\frac{\partial V_{reg}(z)}{\partial z}\frac{1}{V_{reg}(z)}. \tag{2.4.20}$$

La figure 2.4 représente la variation de cet exposant en fonction de la distance atome-surface pour le cas Casimir-Polder classique (l'atome est traité ponctuellement) et pour le cas régularisé avec différents rayons pour la sphère. Sur cette figure, on observe bien que

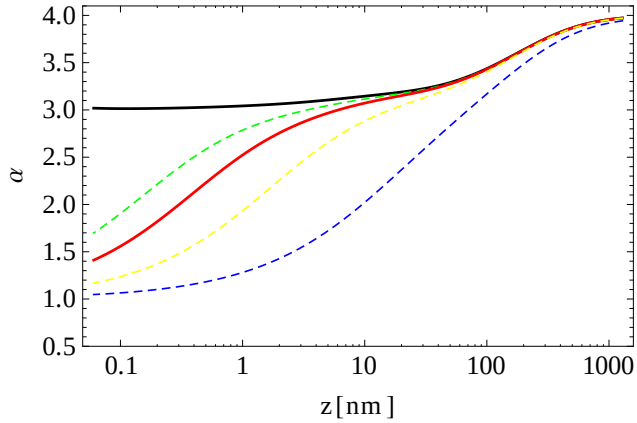


Figure 2.4 : Exposant α défini par l'expression (2.4.20) pour le potentiel de Casimir-Polder standard (en noir), et le potentiel régularisé pour des rayons de 235 pm (correspondant au rubidium, en rouge), 0.1 nm (vert), 1 nm (jaune) et 10 nm (bleu).

la transition vers z^{-1} apparaît à des distances comparables au rayon de la sphère choisie.

On peut maintenant calculer les niveaux d'énergie modifiés par l'effet Casimir-Polder en utilisant le potentiel régularisé. Nous avons alors besoin de faire des hypothèses sur les différents paramètres de régularisation, à savoir le rayon R de l'atome et la distribution de densité $\rho(\boldsymbol{r'})$.
En ce qui concerne le rayon atomique du rubidium, il en existe différentes définitions non équivalentes dans la littérature. À titre d'exemple, J. C. Slater propose une estimation empirique de 235 pm en 1964 [98] alors qu'une autre étude publiée trois ans plus tard estime ce rayon à 265 pm [99]. Il est donc difficile d'estimer la taille réelle de l'atome.

Pour étudier la dépendance des corrections avec ce rayon, l'étude à été menée pour des sphères dont le rayon R est compris entre 200 pm et 300 pm. Les corrections aux énergies ainsi obtenues sont présentées dans la table 2.2. Comme on peut le voir dans ce tableau, la modification du rayon atomique impose des modifications importantes de la correction contrairement à la modification de $\rho(\boldsymbol{r'})$. Cela pourrait être utilisé pour estimer un rayon effectif de l'atome de rubidium dans les conditions de FORCA-G.

Pour conclure cette section, on peut se demander si l'estimation de l'effet Casimir-Polder à l'aide du potentiel (2.4.14) simplement évalué au centre du puits fournirait une

n	200 pm - ρ_1	200 pm - ρ_2	300 pm - ρ_1	300 pm - ρ_2
1	2.39[1]	2.37[1]	2.19[1]	2.16[1]
2	1.76[1]	1.74[1]	1.60[1]	1.58[1]
3	1.20[1]	1.18[1]	1.09[1]	1.08[1]
4	6.80	6.7147	6.18	6.09
5	2.89	2.8557	2.63	2.59
6	8.71[-1]	8.60[-1]	7.91[-1]	7.80[-1]
7	1.93[-1]	1.91[-1]	1.76[-1]	1.74[-1]
8	3.57[-2]	3.53[-2]	3.27[-2]	3.23[-2]
9	6.76[-3]	6.70[-3]	6.33[-3]	6.27[-3]
10	1.84[-3]	1.83[-3]	1.78[-3]	1.78[-3]
11	8.36[-4]	8.35[-4]	8.29[-4]	8.29[-4]
12	5.10[-4]	5.10[-4]	5.09[-4]	5.09[-4]

Table 2.2 : Valeur absolue (en unités de E_R) des corrections aux énergies dues à l'effet Casimir-Polder (les signes sont inversés) pour les 12 premiers états de Wannier-Stark modifiés avec $U_0 = 3E_R$. La notation $a[b]$ correspond à $a \times 10^b$. Les valeurs ont toutes été calulées pour une surface parfaitement conductrice.

bonne approximation des corrections apportées aux niveaux d'énergie et présentées dans la table 2.2. La figure 2.5 illustre le fait que cette approximation n'est valable que pour des puits assez éloignés de la surface dans le cas d'un piège de profondeur $U = 3E_r$. On peut noter cependant que plus la profondeur des puits est grande, meilleure cette estimation des corrections par un potentiel effectif est. Cela se comprend aisément par le fait que lorsque les puits sont plus profonds, les fonctions d'onde des états de Wannier-Stark sont plus piquées dans le puits que l'on observe et la contribution à la correction des puits voisins est donc moindre.

2.4.4 La correction des états

Une fois que l'on connaît les niveaux d'énergie perturbés par l'effet Casimir-Polder, on s'intéresse à l'effet de la perturbation sur les états propres de l'Hamiltonien H_0. Selon la théorie des perturbations stationnaires [26], les nouveaux états s'écrivent

$$|\psi_{m,1}\rangle = |\psi^{(0)}_{m,1}\rangle + |\psi^{(1)}_{m,1}\rangle + |\psi^{(2)}_{m,1}\rangle \tag{2.4.21}$$

avec

$$|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} |1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,b\rangle \frac{\langle 1_p(\mathbf{k},k_z)|\langle e|\langle n,b|H_{\rm int}|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle}{E^{(0)}_{n,b} - E^{(0)}_{m,1} + \hbar(\omega+\omega_0)}. \tag{2.4.22}$$

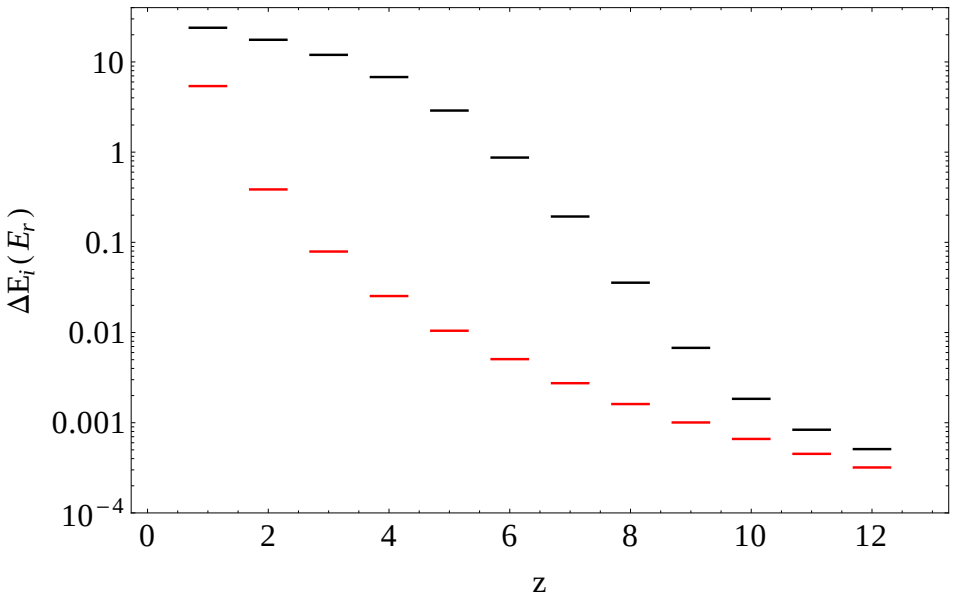


Figure 2.5 : Valeur absolue des corrections aux énergies dues à l'effet Casimir-Polder pour une distribution uniforme de rayon 200 pm (tirets noirs) en fonction du puits où l'atome se trouve comparée avec l'estimation de ces corrections à l'aide du potentiel (2.4.14) évalué au centre du puits (tirets rouges). Les énergies sont exprimées en unités de E_r.

En faisant la même approximation que pour l'équation (2.4.9) et en utilisant la même relation de fermeture, on obtient

$$|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{A_p^\dagger(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})}{\hbar(\omega+\omega_0)} |1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|m,1\rangle. \tag{2.4.23}$$

Dans cette expression, la dépendance en z est contenue dans $A_p^\dagger(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})$ sous forme d'un opérateur agissant sur $|m,1\rangle$. En passant dans la représentation de coordonnées, on obtient

$$\langle z|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{A_p^\dagger(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})}{\hbar(\omega+\omega_0)} |1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle\langle z|m,1\rangle \tag{2.4.24}$$

où $A_p^\dagger(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})$ ne dépend plus que de la coordonnée z. Ainsi, la densité de probabilité sur l'axe z de la correction au premier ordre est donnée par

$$\left|\langle z|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle\right|^2 = \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{\left|A_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})\right|^2}{\hbar^2(\omega+\omega_0)^2} \left|\langle z|m,1\rangle\right|^2. \tag{2.4.25}$$

Quant à la correction au second ordre, elle peut s'écrire sous la forme

$$|\psi^{(2)}_{m,1}\rangle = -\frac{\lambda^{(2)}}{2}|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle + |2\rangle \tag{2.4.26}$$

où

$$\lambda^{(2)} = \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\left|\langle 1_p(\mathbf{k},k_z)|\langle e|\langle n,b|H_{\rm int}|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle\right|^2}{\left(E^{(0)}_{n,b}-E^{(0)}_{m,1}+\hbar(\omega+\omega_0)\right)^2} \tag{2.4.27}$$

et $|2\rangle$ est perpendiculaire à l'état non perturbé $|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle$. Comme précédemment, on néglige la différence d'énergie entre niveaux de Wannier-Stark non perturbés et on introduit la relation de fermeture sur $|n,b\rangle$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)} &= \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{\langle m,1|A_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})A_p^\dagger(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})|m,1\rangle}{\hbar^2(\omega+\omega_0)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} dz \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \left|\langle z|m,1\rangle\right|^2 \frac{\left|A_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})\right|^2}{\hbar^2(\omega+\omega_0)^2}.\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

de sorte que

$$\langle\psi^{(1)}_{m,1}|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle = \int_0^{+\infty} dz \left|\langle z|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle\right|^2 = \lambda^{(2)}. \tag{2.4.29}$$

Ainsi, on obtient, au second ordre

$$\langle\psi_{m,1}|\psi_{m,1}\rangle = \langle\psi^{(0)}_{m,1}|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle(1-\lambda^{(2)}) + \langle\psi^{(1)}_{m,1}|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle = 1. \tag{2.4.30}$$

La densité de probabilité par rapport à z s'écrit alors

$$\left|\langle z|\psi_{m,1}\rangle\right|^2 = \left|\langle z|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle + \langle z|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle + \langle z|\psi^{(2)}_{m,1}\rangle\right|^2 \tag{2.4.31}$$

ce qui donne, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2

$$\left|\langle z|\psi_{m,1}\rangle\right|^2 = \left|\langle z|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle\right|^2 + \left|\langle z|\psi^{(1)}_{m,1}\rangle\right|^2 + \langle z|\psi^{(2)}_{m,1}\rangle\langle\psi^{(0)}_{m,1}|z\rangle + \langle z|\psi^{(0)}_{m,1}\rangle\langle\psi^{(2)}_{m,1}|z\rangle \tag{2.4.32}$$

Finalement, on peut écrire l'état propre de l'Hamiltonien total $H_0 + H_{int}$ comme

$$|\psi_{m,1}\rangle = |\psi^{(0)}_{m,1}\rangle\Big(1-\frac{\lambda^{(2)}}{2}\Big) + |\psi^{(1)}_{m,1}\rangle + |2\rangle \tag{2.4.33}$$

ce qui nous conduit à la densité de probabilité au second ordre

$$\left|\langle z|\psi^{(2)}_{m,1}\rangle\right|^2 = \left|\psi^{(0)}_{m,1}(z)\right|^2\Big(1-\lambda^{(2)}+f^{(2)}(z)\Big) \tag{2.4.34}$$

car

$$\left|\langle z|m,1\rangle\right|^2 = \left|\psi^{(0)}_{m,1}\right|^2 \tag{2.4.35}$$

et avec

$$f^{(2)}(z) = \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{\left|A_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})\right|^2}{\hbar^2(\omega+\omega_0)^2} \tag{2.4.36}$$

et

$$\lambda^{(2)} = \int_0^{+\infty} dz' \left|\psi^{(0)}_{m,1}(z')\right|^2 f^{(2)}(z'). \tag{2.4.37}$$

À l'issue du calcul, on obtient l'expression des états de Wannier-Stark modifiés en présence de l'effet Casimir-Polder (que nous désignerons sous le nom d'états *Wannier-Stark-Casimir*)

$$\left|\langle z|\mathcal{C}_{m,1}\rangle\right|^2 = \left|\psi^{(0)}_{m,1}(z)\right|^2 \left[1 + f^{(2)}(z) - \int_0^{+\infty} dz' \left|\psi^{(0)}_{m,1}(z')\right|^2 f^{(2)}(z')\right]. \tag{2.4.38}$$

La figure 2.6 montre la correction absolue aux états de Wannier-Stark apportée par l'effet Casimir-Polder. On voit que la modification des états de Wannier-Stark est faible par rapport à la correction apportée aux niveaux d'énergie. Ce sont donc surtout les corrections sur les niveaux qui vont être importantes pour la suite.

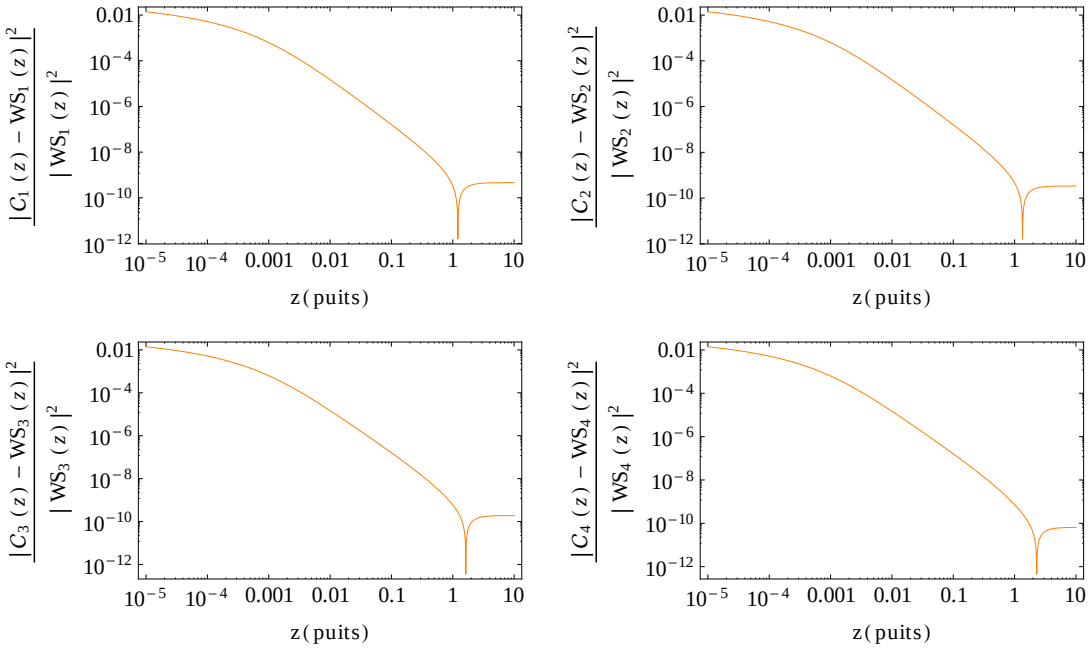


Figure 2.6 : États de Wannier-Stark-Casimir pour les quatres premiers puits. La coordonnées z est exprimée en unités de puits, les états sont calculés pour une distribution de densité uniforme de rayon $R = 200\,\text{pm}$.

2.5 Introduction d'une déviation à la loi de la gravitation

On a calculé dans la section précédente l'effet du vide quantique sur les états atomiques piégés en face de la surface. Nous allons donc maintenant nous intéresser aux déviations de

la loi de gravité par rapport à la loi de Newton à courte distance. La modification que l'on recherche s'exprime sous forme d'un potentiel de Yukawa comme on l'a décrit au chapitre 1

$$U_{grav}(r) = \frac{GMm_a}{r}\left(1 + \alpha e^{-\frac{r}{\lambda}}\right). \tag{2.5.1}$$

Dans la configuration de l'expérience, l'atome subit l'interaction gravitationnelle à la fois de la Terre et du miroir. Pour prendre en compte correctement l'attraction gravitationnelle que subit l'atome de la part de ces deux sources, il convient de tenir compte de la géométrie de celles-ci. Dans un premier temps, intéressons nous à la Terre. Le potentiel Newtonien pour un atome à une altitude a est donné par

$$U_T(a) = -\frac{GM_T m_a}{R_T + a} \tag{2.5.2}$$

où $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^2.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$ est la constante de gravitation, m_a la masse atomique, M_T est la masse de la Terre et R_T son rayon. Si on considère que le miroir est à une hauteur h de la surface de la Terre et qu'on prend comme origine des distances la surface de ce miroir alors on a $a = h - z_a$ où z_a est la distance entre l'atome et la surface. On peut alors réécrire l'équation précédente comme

$$U_T(z_a) = -\frac{GM_T m_a}{R_T + h - z_a} \tag{2.5.3}$$

Que l'on peut développer aux alentours de la surface ($z_a \ll 1$)

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{T}}(z) &= -\frac{GM_T m_a}{R_T + h} - \frac{GM_T m_a}{(R_T + h)^2} z_a \\ &= -\frac{GM_T m_a}{R_T} - m_a g z_a \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

où on a fait l'approximation que $R_T + h \simeq R_T$ et où $g = \frac{GM_T}{R_T^2} \simeq 9.81\,\mathrm{m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur. Connaissant la partie Newtonienne du potentiel terrestre, cherchons maintenant à estimer la déviation Yukawa due à la Terre sachant que pour l'expérience, on recherche des déviations ayant des portées typiques de l'ordre du micron de sorte que $\lambda_Y \sim 1\,\mu\mathrm{m}$. Cette déviation s'écrit

$$U_{YT}(z_a) = -\alpha_Y \frac{GM_T m_a}{R_T + h - z_a} e^{-\frac{R_T + h - z_a}{\lambda_Y}} \tag{2.5.5}$$

où l'on voit que le terme exponentiel est très petit puisqu'on peut écrire le facteur de l'exponentiel au premier ordre comme

$$\frac{R_T + h - z_a}{\lambda_Y} \simeq \frac{R_T}{\lambda_Y} \tag{2.5.6}$$

qui est de l'ordre de 6.10^{12}. On peut donc négliger la partie Yukawa du potentiel gravitationnel terrestre sans risque.

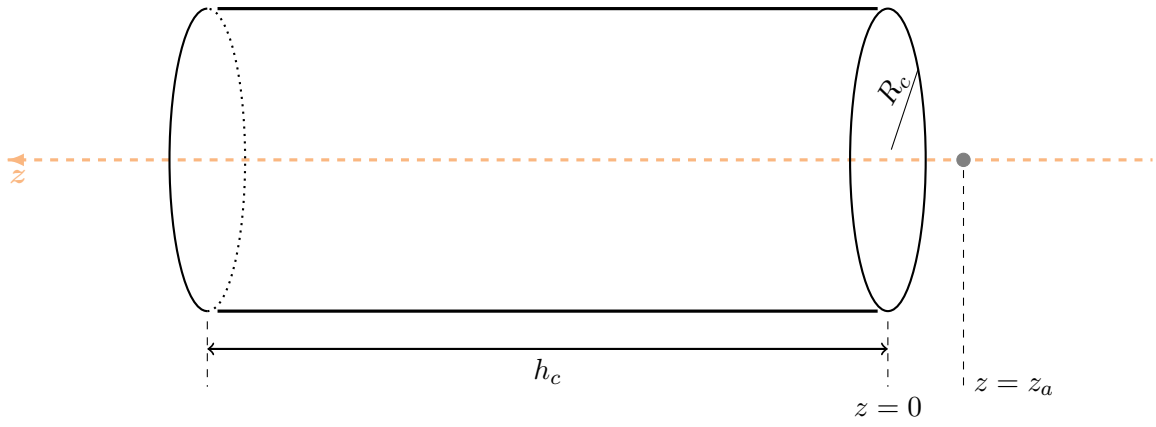


Figure 2.7 : Schéma de la modélisation du miroir par un cylindre infini pour le calcul du potentiel graviationnel de celui-ci. L'atome est situé sur l'axe du cylindre à une distance z_a de sa surface. Dans les expressions (2.5.8) et (2.5.9), on considère que $R_c \to \infty$ et $h_c \to \infty$.

Pour ce qui est de l'influence du miroir, supposons que l'on ait un miroir cylindrique très grand par rapport à la distance atome-miroir et de densité ρ_s (voir figure 2.7).

Le potentiel gravitationnel sur l'atome par unité de volume s'écrit donc

$$dU_{grav,s}(r) = \frac{G\rho_s m_a}{r} dV \left(1 + \alpha_Y e^{-\frac{r}{\lambda_Y}}\right). \tag{2.5.7}$$

La partie Newtonienne de ce potentiel s'écrit (en intégrant sur le cylindre et en prenant en compte que le rayon R_c et la hauteur h_c de celui-ci sont très grandes devant la distance atome-surface z_a)

$$U_s(z_a) = \pi G\rho_s m_a z_a^2 \tag{2.5.8}$$

tandis que la partie Yukawa s'écrit, en utilisant les coordonnées cylindriques $(\mathcal{R}, \theta, z)$

$$\begin{aligned} U_{Ys}(z_a) &= \int_0^{R_c}\int_0^{2\pi}\int_{z_a}^{z_a+h_c} \mathcal{R} d\mathcal{R} d\theta_{\mathcal{R}} \frac{G\rho_s m_a}{\sqrt{\mathcal{R}^2+z^2}} \alpha_Y e^{-\frac{\sqrt{\mathcal{R}^2+z^2}}{\lambda_Y}} \\ &= 2\pi G\rho_s m_a \alpha_Y \int_{z_a}^{z_a+h_c} dz \int_0^{R_c} d\mathcal{R} \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{\mathcal{R}^2+z^2}} e^{-\frac{\sqrt{\mathcal{R}^2+z^2}}{\lambda_Y}} \\ &= 2\pi G\rho_s \alpha_Y \lambda_Y \int_{z_a}^{z_a+h_c} dz \left(e^{-\frac{z}{\lambda_Y}} - e^{-\frac{\sqrt{z^2+R_c^2}}{\lambda_Y}}\right). \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Dans cette expression, R_c représente le rayon du miroir et h_c sa hauteur. Or, comme le miroir est de taille macroscopique, R_c est très grand devant λ_Y, le deuxième terme de l'équation (2.5.9) est négligeable et on obtient après intégration

$$U_{Ys}(z) \simeq 2\pi G\rho_s \alpha_Y \lambda_Y^2 \left(e^{-\frac{z_a}{\lambda_Y}} - e^{-\frac{z_a+h_c}{\lambda_Y}}\right) \tag{2.5.10}$$

là encore, l'épaisseur du miroir est très grande devant la distance atome-surface. On peut donc aussi négliger le deuxième terme de l'expression précédente pour obtenir l'expression du potentiel de Yukawa induit par la surface que l'on utilisera dans la suite

$$U_{grav,s}(z_a) \simeq 2\pi G\rho_s\alpha_Y\lambda_Y^2 e^{-\frac{z_a}{\lambda_Y}}. \tag{2.5.11}$$

Un rapide calcul d'ordre de grandeur nous montre qu'à $z_a = 1\,\mu$m avec une densité du miroir à peu près égale à la densité du silicium $\rho_s = 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, la valeur du potentiel Newtonien de la Terre est beaucoup plus grande que la valeur de la partie Newtonienne due à la surface

$$\begin{cases} \frac{U_{\mathrm{T}}(1\,\mu\mathrm{m})}{m_a} & = 9.8\times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 s^{-2}} \\ \frac{U_s(1\,\mu\mathrm{m})}{m_a} & \simeq 10^{-19}\,\mathrm{m^2 s^{-2}} \end{cases} \tag{2.5.12}$$

D'un autre coté, on remarque que si la partie Yukawa du potentiel dû à la Terre est tout à fait négligeable, c'est loin d'être le cas de la partie Yukawa du potentiel de la surface. En effet, si on prend comme ordre de grandeur pour α_Y une valeur en dessous des contraintes actuelles pour $\lambda_Y = 1\,\mu$m soit par exemple $\alpha_Y \simeq 10^{10}$, et que l'on compare la valeur de la partie Yukawa du potentiel dû à la surface à la partie Newtonienne de ce même potentiel on obtient

$$\frac{V_{SY}(1\,\mu\mathrm{m})}{m} \simeq 10^{10}\frac{V_S(1\,\mu\mathrm{m})}{m} \simeq 10^{-9}\,\mathrm{m^2 s^{-2}}. \tag{2.5.13}$$

Ainsi, les états propres que l'on cherche sont les états propres de l'Hamiltonien

$$H_Y = H_{WS} + 2\pi G\rho_s\alpha_Y\lambda_Y^2 e^{-\frac{z_a}{\lambda_Y}}. \tag{2.5.14}$$

Ce sont les valeurs propres de cet Hamiltonien qui nous permettrons de calculer les contraintes que l'on pourra appliquer aux paramètres α_Y et λ_Y en tenant compte de la sensbilité de l'expérience.

Nous avons décrit dans le chapitre 1 les deux configurations possibles de l'expérience que l'on va utiliser pour réaliser la mesure. Dans un premier temps, nous allons calculer les modifications des états induites par un potentiel de Yukawa à longue distance et dans un second temps à courte distance. Dans les deux cas, on supposera que l'effet Casimir-Polder est négligeable. Ceci est évidemment le cas à grande distance du fait du comportement en $\frac{1}{z^3}$ tandis que la configuration de l'expérience avec deux isotopes de rubidium proche de la surface annule l'effet Casimir-Polder lorsque l'on se place dans les premiers puits.

2.5.1 Cas d'un interféromètre avec un seul isotope du rubidium

Pour l'estimation des contraintes que l'expérience pourra apporter sur les déviations à la loi de Newton, on commence par se placer relativement loin de la surface avec un seul isotope de rubidium. La distance entre l'atome et la surface est déterminée par la

distance à laquelle on peut s'affranchir de l'effet Casimir-Polder. Sachant que l'on peut théoriquement calculer l'effet Casimir-Polder avec une erreur de l'ordre du pourcent et que la sensibilité de l'expérience est estimée à des déphasages de l'ordre de 10^{-4} Hz [1, 2], il faut se placer à un endroit où l'erreur sur le calcul théorique est plus faible que 10^{-4} Hz. Grâce à l'équation (2.4.12) on estime que ces conditions sont respectées à partir du puits 40 i.e. à $z \simeq 10\,\mu$m où la modification des niveaux par effet Casimir-Polder est de l'ordre de 0.06 Hz. Pour le calcul des contraintes sur les déviations dans cette première configuration expérimentale, on va donc se placer tout d'abord au 40 ième puits puis au 70 ième (où le potentiel Casimir-Polder est de l'ordre de 0.01 Hz) afin d'avoir un ordre de grandeur des performances expérimentales.

En utilisant le même algorithme de calcul que pour les états de Wannier-Stark modifiés, on calcule la valeur propre de l'Hamiltonien (2.5.14) pour $n = 40$ avec différentes valeurs de λ_Y. Pour chacune de ces valeurs, on calcule la valeur de α_Y minimale telle que la correction apportée aux valeurs propres par le potentiel de Yukawa soit supérieure à 10^{-4} Hz. Cette valeur de α_Y en fonction du λ_Y choisi est la contrainte que l'expérience pourra apporter dans le plan (α_Y, λ_Y). On procède de même pour $n = 70$. Les deux contraintes qui en résultent sont présentées sur la figure 2.8.

2.5.2 Cas d'un interféromètre avec deux isotopes du rubidium

Pour poser des contraintes proche de la surface, on utilise deux isotopes du rubidium dont la masse est différente mais pas la polarisabilité atomique. Ainsi, l'effet Casimir-Polder est le même pour les deux isotopes ce qui n'est pas le cas de la partie gravitationnelle et une mesure différentielle sur ces deux isotopes permet de s'affranchir des effets électrodynamiques quantiques. En conséquence, pour prédire les contraintes proches de la surface, il faut d'abord calculer la différence des valeurs propres de l'Hamiltonien (2.5.14) dans le même puits pour chacun des isotopes et la comparer à cette même différence en l'absence de déviation à la gravité. En clair, le déphasage mesuré sera fonction de

$$\mathcal{D}E_n = \left(E_n^{85} - E_n^{87}\right) - \left(E_n^{(Y)85} - E_n^{(Y)87}\right). \tag{2.5.15}$$

Or, ce déphasage doit être supérieur à 10^{-4} Hz. Les 24 premières valeurs de la différence (2.5.15) sont données dans la table 2.3.

À partir de ces différences, les contraintes expérimentales possibles à courte distance sont calculées en prenant la différence $\mathcal{D}E_{n=6} - \mathcal{D}E_{n=4}$ et en procédant comme dans la section précédente. On calcule cette différence pour plusieurs λ_Y en calculant le plus petit α_Y tel que cette différence soit supérieure à 10^{-4} Hz. La contrainte ainsi estimée est présentée sur la figure 2.8.

n	$\mathcal{D}E_n$ (Hz)		n	$\mathcal{D}E_n$ (Hz)
1	1.654[-1]		13	2.0[-3]
2	1.425[-1]		14	1.5[-3]
3	1.221[-1]		15	1.2[-3]
4	9.43[-2]		16	9[-4]
5	5.72[-2]		17	7[-4]
6	2.71[-2]		18	5[-4]
7	1.30[-2]		19	4[-4]
8	8.0[-3]		20	3[-4]
9	6.0[-3]		21	2[-4]
10	4.4[-3]		22	2[-4]
11	3.4[-3]		23	1[-4]
12	2.6[-3]		24	1[-4]

Table 2.3 : Les 24 premières valeurs de la différence (2.5.15) exprimées en Hz avec $\alpha_Y = 3\times10^{10}$ et $\lambda_Y = 1\mu$m.

2.5.3 Contraintes attendues pour l'expérience

La figure 2.8 présente l'amélioration des contraintes dans le plan (α_Y, λ_Y) attendues pour l'expérience. On remarque que ces contraintes sont plus importantes dans la configuration proche de la surface. En effet, l'intérêt de FORCA-G repose essentiellement sur la possibilité qu'elle offre de mesurer de très faibles interactions tout en contrôlant précisément la distance des atomes. Ceci permet d'atteindre des distances très faible et d'ouvrir une fenêtre de test pour les déviations à la loi de Newton et ainsi ajouter des contraintes à des distances très peu testées.

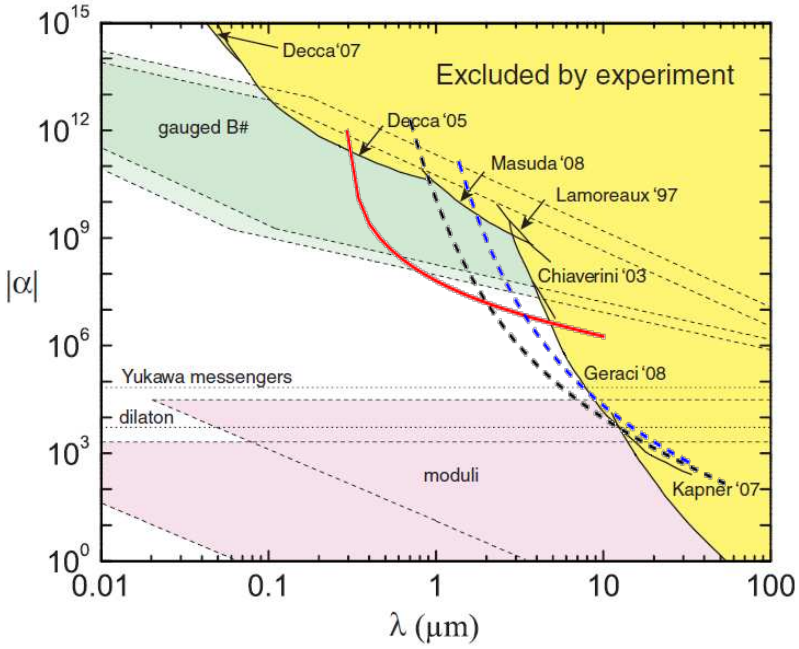


Figure 2.8 : Contraintes attendues pour l'expérience FORCA-G. Les zones en jaune sont les zones exclues par des expérience antérieures (figure originale tirée de [78]). Les trois courbes superposées correspondent aux contraintes calculées théoriquement dans le cas de deux isotopes initialement dans les puits 4 et 6 (courbe rouge) et avec un seul isotope dans le puits 40 (courbe noire pointillée) et 70 (courbe bleue pointillée).

2.6 Article

Cet appendice est constitué de l'article résumant les résultats présentés dans ce chapitre et publié en 2011 dans la revue Physical Review A [100].

PHYSICAL REVIEW A **83**, 052111 (2011)

Atomic states in optical traps near a planar surface

Riccardo Messina,* Sophie Pelisson, Marie-Christine Angonin, and Peter Wolf
LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS UMR8630, UPMC 61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France
(Received 8 March 2011; published 12 May 2011; corrected 31 May 2011)

In this paper, we discuss the atomic states in a vertical optical lattice in proximity of a surface. We study the modifications to the ordinary Wannier-Stark states in the presence of a surface, and we characterize the energy shifts produced by the Casimir-Polder interaction between atom and mirror. In this context, we introduce an effective model describing the finite size of the atom in order to regularize the energy corrections. In addition, the modifications to the energy levels due to a hypothetical non-Newtonian gravitational potential as well as their experimental observability are investigated.

DOI: 10.1103/PhysRevA.83.052111 PACS number(s): 12.20.Ds, 42.50.Ct, 37.10.Jk, 37.25.+k

I. INTRODUCTION

Atomic interferometry has the potential to become a powerful method to investigate atom-surface interactions, the main reason being the high precision that can be reached in frequency measurements. In this context, a new experiment named FORCA-G (FORce de CAsimir et Gravitation à courte distance) has recently been proposed [1]. The purpose of this experiment is manifold: On one hand, it aims at providing a new observation of the Casimir-Polder (CP) interaction between an atom and a surface, resulting from the coupling of the fluctuating quantum electromagnetic field with the atom [2]; on the other hand, it also intends to impose new constraints on the existence of hypothetical deviations from the Newtonian law of gravitation. These goals will be achieved thanks to the innovative design of FORCA-G, in which interferometric techniques are combined with a trapping potential. This is generated by a vertical standing optical wave produced by the reflection of a laser on a mirror. The vertical configuration leads to an external potential on the atom given by the sum of the optical one and a linear gravitational term due to the Earth: This deviation from a purely periodical potential produces a localization of the atomic wave packet, corresponding to the transition from Bloch to Wannier-Stark states [3]. Thus, the main advantages of FORCA-G are the refined control of the atomic position as well as the high precision of interferometric measurements, as demonstrated in the first results from the experiment [4].

Having in mind a theory-experiment comparison within a given accuracy, the theoretical treatment of the problem as well as the experimental investigation must be assessed independently with the same precision. In the case of FORCA-G, this demands a detailed theoretical study of the atomic wave functions and energy levels in proximity of a surface. As an intermediate step, a precise characterization of the CP atom-surface interaction is also needed.

These issues are the main subject of investigation in this paper. As a matter of fact, the influence of the CP interaction on the atomic energy levels has so far been explored [1,5] using the simple idea of calculating the electrodynamical potential at the center of each well of the trap. We will discuss the validity of this model focusing, in particular, on the scheme of FORCA-G. In this paper, we present a Hamiltonian approach to this problem. This treatment first allows us to discuss, independently of the CP atom-surface interaction, the atomic trapped states. Since the presence of the surface breaks the translational symmetry typical of Bloch and Wannier-Stark problems, we focus, in particular, on the difference (both in energy levels and wave functions) between our trapped states and the standard Wannier-Stark solutions. Then, in order to discuss the CP corrections to the energy levels, we generalize the perturbative treatment usually exploited to deduce atom-surface electrodynamical interactions, by including the external optical and gravitational potentials, and, as a consequence, treating the atomic coordinate as a dynamic variable. The theoretical work presented here will be useful for all experiments that aim at measuring short-range interactions between atoms trapped in optical lattices and a macroscopic surface [1,5,6] as they will require precise modeling of the atomic states and energy levels close to the surface.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we describe our physical system. Then, in Sec. III, we discuss the shape of atomic wave functions in the trap. Section IV is dedicated to the study of the CP interaction and its influence on the atomic energy levels. In this section, we introduce an effective description of the finite size of the atom and discuss its validity in connection with the experiment. In Sec. V, we look at the energy shifts introduced by a hypothetical non-Newtonian potential, and we investigate the constraints that FORCA-G could impose on the strength of this deviation. Finally, in Sec. VI, we discuss our results.

II. THE PHYSICAL SYSTEM

In this section, we are going to describe the main features of our physical system and the Hamiltonian formalism used to investigate the interaction between atom and electromagnetic field. Let us consider a two-level atom trapped in an optical standing wave produced by the reflection of a laser having wavelength $\lambda_l = \frac{2\pi}{k_l}$ on a surface located at $z = 0$. In the configuration we are considering the optical trap has a vertical orientation so that we have to take the Earth's gravitation field acting on the atom into account. The complete Hamiltonian

*riccardo.messina@obspm.fr

 ©2011 American Physical Society

can be written under the form

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\rm int} = H_{\rm f} + H_{\rm at} + H_{\rm WS} + H_{\rm int}, \\ H_{\rm f} &= \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\, \hbar\omega a_p^\dagger(\mathbf{k},k_z) a_p(\mathbf{k},k_z), \\ H_{\rm at} &= \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|, \\ H_{\rm WS} &= \frac{p^2}{2m} + mgz + \frac{U}{2}[1-\cos(2k_l z)], \\ H_{\rm int} &= -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathcal{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{1}$$

The complete Hamiltonian contains a term H_0 describing the free evolution of the atomic and field degrees of freedom. In particular, $H_{\rm f}$ is the Hamiltonian of the quantum electromagnetic field, described by a set of modes $(p,\mathbf{k},k_z)$: Here, p is the polarization index, taking the values $p=1,2$ corresponding to TE and TM polarizations, respectively, while $\mathbf{k}$ and k_z are the transverse and longitudinal components of the wave vector. We associate, with each single mode, a frequency $\omega = c\sqrt{k^2+k_z^2}$, as well as annihilation and creation operators $a_p(\mathbf{k},k_z)$ and $a_p^\dagger(\mathbf{k},k_z)$. Thus, an eigenstate of the field Hamiltonian is specified by giving a set of photon occupation numbers $|\{n_p(\mathbf{k},k_z)\}\rangle$ for each mode of the field. The vacuum state of the field, with zero photons in each mode, will be noted with $|0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle$. In our formalism, the expression of the electric field is the following:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\pi}\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0}} \\ \times [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp}\mathbf{f}_p(\mathbf{k},k_z,z)a_p(\mathbf{k},k_z) - \text{H.c.}], \end{aligned} \tag{2}$$

where we have introduced the transverse coordinate $\mathbf{r}_\perp = (x,y)$ and the mode functions $\mathbf{f}_p(\mathbf{k},k_z,z)$ characterizing the boundary conditions imposed on the field. Under the assumption of a perfectly conducting mirror in $z=0$, these functions take a very simple expression [7],

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(\mathbf{k},k_z,z) &= \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{z}}\,\sin(k_z z), \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{k},k_z,z) &= \hat{\mathbf{k}}\frac{ick_z}{\omega}\sin(k_z z) - \hat{\mathbf{z}}\frac{ck}{\omega}\cos(k_z z), \end{aligned} \tag{3}$$

where $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ and $\hat{\mathbf{z}} = (0,0,1)$. $H_{\rm at}$ is the internal Hamiltonian of our two level atom having ground state $|g\rangle$ and excited state $|e\rangle$ separated by a transition frequency ω_0. While $H_{\rm at}$ is associated with the internal atomic degrees of freedom, the term $H_{\rm WS}$ accounts for the external atomic dynamics. As a consequence, it contains the kinetic energy (p being the canonical momentum associated with z), as well as both the gravitational potential (treated here in first approximation as a linear term), where m is the atomic mass and g is the acceleration of the Earth's gravity, and the classical description of the stationary optical trap, having depth U. Here, we only treat the z-dependent terms of the Hamiltonian since the degrees of freedom x and y, even in the presence of a transverse trapping mechanism, are decoupled from the longitudinal dynamics. For simplicity, we will take, as a unit of energy, the photon recoil energy E_r given by $E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m}$. As far as the atomic position is concerned, it will be expressed, unless explicitly stated, in units of the periodicity of the trap $\frac{\lambda_l}{2}$. For all numerical examples in this paper, we will use the experimental configuration chosen for FORCA-G: $E_r = 5.37\times10^{-30}$ J ($\frac{E_r}{h} = 8.11\times10^3$ Hz) and $\frac{\lambda_l}{2} = 266$ nm.

The interaction between the atom and the quantum electromagnetic field is written here in the well-known multipolar coupling in dipole approximation [8], where $\boldsymbol{\mu} = q\boldsymbol{\rho}$ (q being the electron's charge and $\boldsymbol{\rho}$ being the internal atomic coordinate) is the quantum operator associated with the atomic electric dipole moment, and the electric field is calculated in the atomic position $\mathbf{r}$. It is important to observe that, since $\boldsymbol{\mu}$ clearly operates only on the atomic internal states, this interaction term is the only one coupling atomic (both internal and external) and field degrees of freedom. As a consequence, the ground state of the free Hamiltonian H_0 is simply given by the tensor product of the vacuum field state $|0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle$, the atomic state $|g\rangle$, and the ground state of $H_{\rm WS}$. In the picture of atomic dressing [9], the ground state of H_0 is the bare ground state, and the inclusion of $H_{\rm int}$ will produce a new ground state of the complete system, referred to as dressed ground state, mixing all the degrees of freedom. We are going to tackle the calculation of the ground state of $H_{\rm WS}$ in Sec. III, whereas the atom-field interaction will be treated in Sec. IV.

III. MODIFIED WANNIER-STARK STATES

A. Ordinary Wannier-Stark states

In solid-state physics, it is well known that the solution of the time-independent Schrödinger equation describing a quantum particle in a periodic potential leads to the so-called Bloch states [10,11]. Due to the periodicity of the system, these states are completely delocalized in space coordinate, and the energy spectrum is composed of bands of permitted energies, each band being labeled with an index $b=1,2,\ldots$. The addition of a linear potential (in our case, its role is played by gravity) to the trap produces localization of the states: These states are usually labeled as Wannier-Stark states (see, e.g., Refs. [12,13]). We will now describe their main features. For each Bloch band b, a discrete quantum number n is introduced, taking the values $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. The state $|n,b\rangle^{(\rm WS)}$ is, in coordinate representation, approximately centered in the nth well of the optical trap, and the energy of this state is in first approximation given by

$$E_{n,b}^{(\rm WS)} = \bar{E}_b^{(\rm WS)} + n\frac{mg\lambda_l}{2E_r}, \tag{4}$$

with $\bar{E}_b^{(\rm WS)}$ as the average of the bth Bloch band [3,14]. As a result of the quasiperiodicity of the system (i.e., of the linearity of the gravitational potential modifying the periodic trap) two states $|n,b\rangle^{(\rm WS)}$ and $|s,b\rangle^{(\rm WS)}$ belonging to the same band b are shifted, in coordinate representation, by $s-p$ wells. At the same time, their energies differ, in accordance with Eq. (4), by $s-p$ times $\delta_g = \frac{mg\lambda_l}{2E_r}$. Then, the problem of Wannier-Stark states is solved once we know, for each band b, the average Bloch-band energy $\bar{E}_b^{(\rm WS)}$ and the eigenfunction centered in a given well. The Wannier-Stark states can be calculated using, for example, the numerical approach of [13].

In Figs. 1 and 2, we give the Wannier-Stark states $|0,1\rangle^{(\rm WS)}$ for two different values of the potential depth $U=3,10$ (from now on expressed in units of E_r).

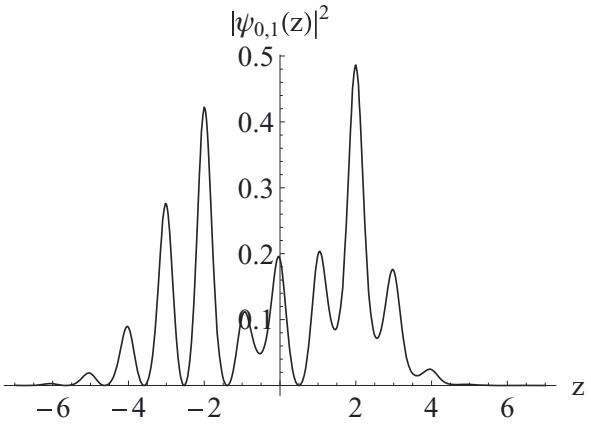


FIG. 1. Coordinate representation of the state $|0,1\rangle$ belonging to the first Bloch band and centered in the zeroth well for $U = 3$.

The figures show that, as expected, a deeper well produces a more localized state of the particle. Here, we recall that, in all the plots, unless explicitly stated, the atomic coordinate z is expressed in units of the trap period $\frac{\lambda_l}{2}$.

B. Wannier-Stark states in proximity of a surface

In the context of our problem, the presence of a surface at $z = 0$ plays two roles. On one hand, it induces a modification of the Wannier-Stark states by imposing a boundary condition on the eigenvalue problem. On the other hand, the quantum electrodynamical interaction between the atom and this surface must be taken into account, as we will describe in Sec. IV.

The surface at $z = 0$ breaks the quasiperiodicity of the system. The potential modifying the optical trap is no longer linear, since it must be considered as the gravitational linear potential for $z > 0$ and an infinite potential barrier for $z \leqslant 0$, describing the impossibility of the particle to penetrate into the mirror. We will refer to the eigenstates of this new physical system as the *modified* Wannier-Stark states. From now on, we are going to deal only with these new states: The state of the bth Bloch band centered in the nth well will be noted with $|n,b\rangle$ [and, correspondingly, $\psi_{n,b}(z)$].

We have solved the problem of modified Wannier-Stark states numerically, using a finite-difference method. The first step of our approach consists of considering a unidimensional box $0 < z < z_f$ and imposing that the wave function vanishes at the borders. As for $z = 0$, this corresponds to a real physical boundary condition (i.e., to the presence of the surface), whereas the condition $\psi(z_f) = 0$ is purely numerical. This means that z_f has to be chosen sufficiently large so that the eigenfunction of interest decays to zero well before z_f, i.e., a solution will be acceptable if it decays sufficiently fast toward 0 for $z \to z_f$. The next step is the discretization of the interval $[0,z_f]$ using a set of $N + 2$ mesh points z_i with $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_{N+1} = z_f$ (giving $\delta z = \frac{z_f}{N+1}$ for equally spaced mesh points).

Using this approach, the problem is reduced to an eigenvalue problem of a tridiagonal symmetric matrix. The solution of such a problem can efficiently be worked out using the numerical approach first introduced in Ref. [15] as well as a standard QL algorithm [16]. In order to check the robustness of our numerical results, we have also checked their coherence with a finite-element method [17,18].

Choosing a large enough numerical box, taking, for example, $z_f = 30$ (here, we recall that z is measured in units of trap periods $\frac{\lambda_l}{2}$), we have verified that the modified Wannier-Stark states centered in a well far from the surface (approximately starting from $n = 10$) have the same shape as the functions shown in Sec. III A: This reflects the fact that, far from the surface, the quasiperiodicity of the system is reestablished. Moreover, in this region, we find that the energy difference between two successive states equals the expected quantity δ_g defined before: Starting from $n = 10$, the differences equal δ_g with a relative precision better than 10^{-4}. This can be seen in Table I, where we show the results obtained for the first 13 energy levels with $U = 3$: In this table, we give the energy levels E_n as well as the differences $\delta E_n = E_{n+1} - E_n$. In this configuration, we have $\delta_g = 0.070\,068$.

Table I only shows values of the energies belonging to the first Bloch band ($b = 1$). We have checked that, increasing

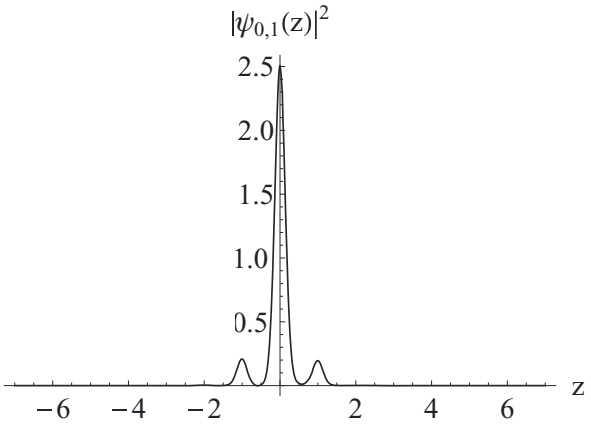


FIG. 2. Coordinate representation of the state $|0,1\rangle$ belonging to the first Bloch band and centered in the zeroth well for $U = 10$.

TABLE I. First 13 values of the modified Wannier-Stark spectrum for $U = 3$. These values have been obtained on an interval [0,30]. The first two columns are in units of E_r; the third one is in Hertz.

n	E_n	δE_n (units of 10^{-2} E_r)	δE_n (units of 10^2 Hz)
1	1.4028	12.302	9.9788
2	1.5258	9.8043	7.9525
3	1.6239	8.4432	6.8485
4	1.7083	7.6206	6.1812
5	1.7845	7.2026	5.8422
6	1.8566	7.0518	5.7199
7	1.9271	7.0146	5.6897
8	1.9972	7.0079	5.6843
9	2.0673	7.0070	5.6835
10	2.1374	7.0068	5.6834
11	2.2074	7.0068	5.6834
12	2.2775	7.0068	5.6834
13	2.3476	7.0068	5.6834

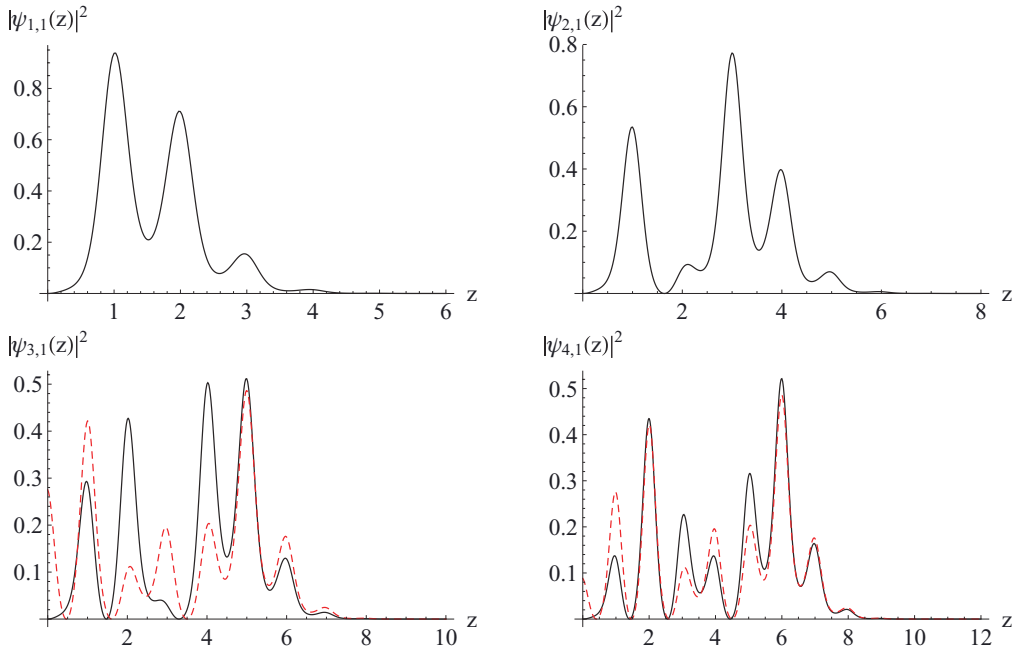


FIG. 3. (Color online) Density probability of modified Wannier-Stark states $\psi_{n,1}(z)$ for $n = 1,2,3,4$ and $U = 3$. The last two functions (black, solid line) are compared to the corresponding standard Wannier-Stark state (red, dashed line).

the value of N above 10^6, the last digit reported in Table I remains constant, corresponding to a relative precision of approximately 10^{-4}. Actually, as a result of our numerical method, we also found the eigenvalues and corresponding states associated with higher bands. Nevertheless, we will discuss only the first-band states since the ones belonging to higher bands are much less relevant for experimental purposes: As a matter of fact, higher bands are not efficiently trapped in the experiment (the average energy of the second band is around $4E_r$ for a trap depth of $3E_r$).

As far as the states in proximity of the plate are concerned, they are strongly modified by the boundary condition, and the same property holds for their energies. In Fig. 3, we show the first four eigenfunctions in the presence of the surface. For the sake of comparison, the third and fourth wave functions are superposed on the standard Wannier-Stark solutions centered in the corresponding well. It is important to stress that the ordinary Wannier-Stark functions of wells $n = 3,4$ are plotted only to show that the shape of the modified ones tends toward the standard solution: However, the fact that the ordinary functions for these wells are different from zero for $z \leqslant 0$, strictly speaking, makes no sense for our physical system. In order to discuss the influence of the depth of the wells, we will conclude this section giving the results obtained for $U = 10$. In this case, since the ordinary Wannier-Stark states are much more localized in each well, we expect the influence of the surface to be evident on a smaller range of distances. This can be seen directly in Table II, where the energy differences converge more rapidly to δ_g.

Moreover, from Fig. 4, we see that the state $\psi_{2,1}(z)$ already shows a remarkable accordance with the corresponding unmodified Wannier-Stark state in the interval $[0.6,6]$, where the probability of finding the atom is approximately 0.9997.

IV. CP INTERACTION

A. Standard CP calculations

The presence of the surface does not only play the role of imposing a boundary condition on the Wannier-Stark wave functions. In fact, since it modifies the structure of the modes of the quantum electromagnetic field, it is a source of an attractive force between the atom and the plate. This is a particular case of a general phenomenon usually called the Casimir effect for two macroscopic bodies and the CP force when it involves one or more atoms near a surface (for a general review, see, e.g., Ref. [19]). This phenomenon was first pointed out by Casimir

TABLE II. First ten values of the modified Wannier-Stark spectrum for $U = 10$. Same parameters as for Table I.

n	E_n	δE_n (units of 10^{-2} E_r)	δE_n (units of 10^2 Hz)
1	2.9496	7.5127	6.0938
2	3.0247	7.0276	5.7003
3	3.0950	7.0072	5.6837
4	3.1651	7.0068	5.6834
5	3.2352	7.0068	5.6834
6	3.3052	7.0068	5.6834
7	3.3753	7.0068	5.6834
8	3.4454	7.0068	5.6834
9	3.5154	7.0068	5.6834
10	3.5855	7.0068	5.6834

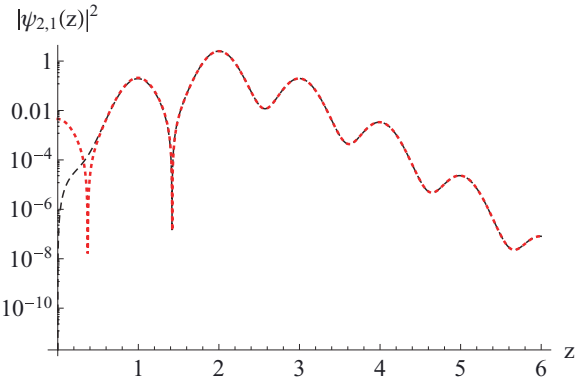


FIG. 4. (Color online) Density probability of modified Wannier-Stark states $\psi_{2,1}(z)$ (black, dashed line) for $U = 10$ compared to the corresponding standard Wannier-Stark state (red, dotted line).

in 1948 for two parallel perfectly conducting plates [20] and in the same year by Casimir and Polder for atom-surface and atom-atom systems [21].

The CP force between an atom and a mirror has been measured quite recently using several different techniques such as deflection of atomic beams [22] and reflection of cold atoms [23–25]. In the past few years, Bose-Einstein condensates proved to be efficient probes of this effect, both by means of reflection techniques [26,27] and by observing center-of-mass oscillations of the condensate [28–31]. The FORCA-G experiment aims at achieving a percent precision in the measurement of the force thanks to the combination of cold atoms and interferometric techniques.

From a theoretical point of view, the force is usually obtained from an interaction energy that results from a time-independent perturbative calculation on the matter-field Hamiltonian interaction term [2,9]. In this kind of approach, the position of the atom is usually treated as a fixed parameter and not as a quantum operator. As a consequence, in order to deduce the CP interaction energy between an atom and a perfectly conducting plate, we must neglect the term $H_{\rm WS}$ in the Hamiltonian of the system (1) and use Eq. (2) for the electric field. Choosing the bare ground state $|0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|g\rangle$ as the unperturbed configuration, the first-order perturbative correction on interaction term $H_{\rm int}$ is zero, since the atomic electric dipole moment operator is an odd operator and the annihilation and creation operators appearing in the electric field do not connect states with the same number of photons. Moving to second order, we obtain the z-dependent potential energy,

$$V_{\rm CP}^{(2)}(z) = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\, \frac{\left|A_p^{(1)}(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})\right|^2}{\hbar(\omega+\omega_0)}. \tag{5}$$

In this expression, we have defined

$$\begin{aligned} A_p^{(1)}(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r}) &= \langle 0_p(\mathbf{k},k_z)|\langle g|H_{\rm int}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle \\ &= -\frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp}\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{f}_p(\mathbf{k},k_z,z), \end{aligned} \tag{6}$$

and we sum over all the possible intermediate states $|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle$ having one photon in the mode $(p,\mathbf{k},k_z)$ and the atom in its excited internal state $|e\rangle$. Finally, the superscripts (2) and (1) refer to the order with respect to the electric charge contained in $\boldsymbol{\mu}$.

This result holds for a perfectly conducting surface and at zero temperature. However, the generalization for more realistic configurations including the finite conductivity of the plate as well as a temperature $T > 0$ is not straightforward in a perturbative approach. This can be worked out using, for example, the scattering method [32,33] or the Green-function formalism (see Refs. [34,35] and references therein). The resulting potential can be put under the form [36]

$$\begin{aligned} V_{\rm CP}^{(2)}(z) = \frac{2k_BT}{c^2}{\sum_{n=0}^{+\infty}}' \xi_n^2\frac{\alpha(i\xi_n)}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{+\infty} dk\,\frac{ke^{-2K_nz}}{2K_n} \\ \times\left[r_{\rm TE}(k,i\xi_n) - \left(1+\frac{2c^2k^2}{\xi_n^2}\right)r_{\rm TM}(k,i\xi_n)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

where $\xi_n = \frac{2\pi nk_BT}{\hbar}$ is the nth Matsubara frequency and the prime on the Matsubara sum indicates that the $n = 0$ term is to be taken with half weight. Moreover, we have defined $K_n = \sqrt{\frac{\xi_n^2}{c^2}+k^2}$, and the $r_p(k,\omega)$ are the well-known Fresnel coefficients for a planar surface. Finally, $\alpha(\omega)$ is the ground-state atomic polarizability, which, for a multilevel atom, takes the form [37]

$$\alpha(\omega) = \frac{2}{3}\sum_n \frac{E_{n0}\mu_{n0}^2}{E_{n0}^2-\hbar^2\omega^2}, \tag{8}$$

where $E_{n0} = E_n - E_0$ is the difference between the energies of the nth atomic level (starting from the first excited state) and of the ground state, whereas μ_{n0} is the matrix element of the electric dipole operator between the same couple of states. Clearly, the conductive properties of the surface material are included in the Fresnel coefficients through the electric permittivity and magnetic susceptibility $\epsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$, respectively. We conclude this section giving the expression of the CP potential for an atom in front of a real surface at zero temperature,

$$\begin{aligned} V_{\rm CP}^{(2)}(z) = \frac{\hbar}{\pi c^2}\int_0^{+\infty} d\xi\,\xi^2\frac{\alpha(i\xi)}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{+\infty} dk\,\frac{ke^{-2Kz}}{2K} \\ \times\left[r_{\rm TE}(k,i\xi) - \left(1+\frac{2c^2k^2}{\xi^2}\right)r_{\rm TM}(k,i\xi)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

where $K = \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2}+k^2}$ and the sum over the Matsubara frequencies is replaced by an integral.

B. Perturbation of modified Wannier-Stark states

In Sec. IV A, we have given the CP potential for an atom having polarizability $\alpha(\omega)$ in front of an arbitrary planar surface and at temperature T. It could be natural to think that this z-dependent potential should be added to the Wannier-Stark Hamiltonian $H_{\rm WS}$ in Eq. (1) to obtain a new time-independent problem. So, one could obtain a new set of energies and wave functions also taking the quantum electrodynamical part of the problem into account. In Fig. 5, we plot this new *complete* potential [sum of Eq. (5) and the

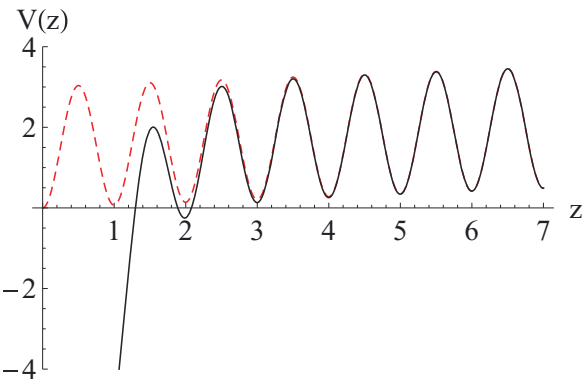


FIG. 5. (Color online) Sum of Wannier-Stark (for $U = 3$) and CP potentials (in black, solid line) compared to Wannier-Stark potential alone (in red, dashed line).

ordinary Wannier-Stark potential] for a rubidium atom in front of a perfectly conducting surface at zero temperature. This plot clearly shows that the CP interaction modifies the optical trap on a limited range. In particular, in our case, the first well no longer exists, the second and the third are slightly modified, and starting from the fourth, the trap is practically unperturbed.

Nevertheless, the simple addition of the CP z-dependent potential to the external Hamiltonian term $H_{\rm WS}$, strictly speaking, is incorrect. As a matter of fact, the potential (5) [as well as Eqs. (7) and (9)] has been derived using several hypotheses. First, it arises from a perturbative treatment of the interaction term $H_{\rm int}$ on the Hamiltonian $H_{\rm at} + H_{\rm f}$. Moreover, in this calculation, the atomic position z is treated as a fixed parameter. This is clearly incoherent with the fact that, for our complete Hamiltonian (1), z is a dynamic variable.

These arguments suggest that we should reconsider the calculation of the CP potential using our perturbative approach including the Wannier-Stark Hamiltonian $H_{\rm WS}$. The perturbative term is still $H_{\rm int}$, but now the atomic coordinate z has to be treated as a quantum operator as well. So, we are able to introduce a new unperturbed state for each well n of the first Bloch band having the form

$$\left|\psi^{(0)}_{n,1}\right\rangle = |0_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|g\rangle|n,1\rangle. \tag{10}$$

As we found for an ordinary CP calculation, the leading-order correction to the energies is the second, and the corrections take the new form

$$\Delta E^{(2)}_{n,1} = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \times \sum_{s=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\left|\left\langle\psi^{(0)}_{n,1}\right| H_{\rm int} |1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|s,b\rangle\right|^2}{E^{(0)}_{s,b} - E^{(0)}_{n,1} + \hbar(\omega+\omega_0)}, \tag{11}$$

where now the intermediate state contains the modified Wannier-Stark state $|s,b\rangle$. We notice that the difference between two Wannier-Stark energies appearing in the denominator is $s - n$ times approximately $0.07E_r$ if the state $|s,b\rangle$ belongs to the first band ($b = 1$). We now point out that the recoil energy for a rubidium atom having $m = 1.44 \times 10^{-25}$ kg trapped in a periodic potential having $\lambda_l = 532$ nm is on the order of 10^{-11} eV. On the other hand, the atomic transition energy $\hbar\omega_0$ is on the order of the eV. At the same time, the numerator in Eq. (11) involves an integral over the z coordinate containing the product of the wave functions associated with the two states. This product becomes negligibly small for $|s-n| \gtrsim 7$, while the energy difference $E^{(0)}_{s,1} - E^{(0)}_{n,1}$ is still orders of magnitude smaller than $\hbar\omega_0$. As a consequence, the Wannier-Stark energy difference in the denominator can always safely be neglected with respect to $\hbar\omega_0$ for the intermediate states having $b = 1$. As far as the higher bands are concerned, it is possible to see that the same superposition integral decays to zero due to the delocalization of the modified Wannier-Stark states. Furthermore, in the case of higher bands, the energy difference $E^{(0)}_{s,b} - E^{(0)}_{n,1}$ is still $100E_r$ (and then still negligible with respect to $\hbar\omega_0$) for $b = 10$. This reasoning enables us to use the closure relation on the $|s,b\rangle$ states and to obtain

$$\Delta E^{(2)}_{n,1} = \langle n,1| \left(-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \frac{\left|A^{(1)}_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})\right|^2}{\hbar(\omega+\omega_0)} \right) |n,1\rangle. \tag{12}$$

The expression in parentheses coincides with the second-order perturbative calculation on the atom-field ground state described in Sec. IV A. Thus, it is evident that the correction we are looking for equals the average on the Wannier-Stark state $|n,1\rangle$ of the known CP potential $V^{(2)}_{\rm CP}(z)$. Then, this can be expressed as follows:

$$\Delta E^{(2)}_{n,1} = \int_0^{+\infty} dz \left|\psi^{(0)}_{n,1}(z)\right|^2 V^{(2)}_{\rm CP}(z). \tag{13}$$

This expression has been obtained in the context of a perturbative treatment for a perfectly conducting surface at zero temperature. Nevertheless, the reasoning that led us from the general expression (11) to the simple average value (13) does not depend on the details of the calculation of the $V^{(2)}_{\rm CP}(z)$ itself. As a consequence, it is reasonable to assume that the average value (13) can also be used with the more general expressions of the interaction energy (7) or (9).

The behavior of the integrand function around $z = 0$ must be treated with care: Indeed, the CP potential diverges for $z \to 0$. In particular, it is well known that, for distances much smaller than the typical atomic transition wavelength (van der Waals regime), the interaction potential is temperature independent, and its expression reads [28]

$$V^{(2)}_{\rm CP;vdW}(z) = -\frac{\hbar}{4\pi z^3} \int_0^{+\infty} d\xi \, \frac{\alpha(i\xi)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon(i\xi)-1}{\epsilon(i\xi)+1}, \tag{14}$$

$\epsilon(\omega)$ being the electric permittivity of the surface material. As for the atomic wave function, we have verified numerically that, for any allowed value of n, it tends to zero linearly for $z \to 0$. As a consequence, the integrand function behaves like z^{-1} around the origin, implying a divergent energy correction (13) for any n. In Sec. IV C, we will develop an effective description of the atom to regularize this quantity.

C. Regularization of the correction

The potential $V^{(2)}_{\rm CP}(z)$ represents a particular case of singular potentials since it diverges around the origin faster than z^{-2}.

The treatment of such potentials has been discussed since the pioneering work of Case [38] (for more details, see, e.g., Ref. [39]). From first principles [40], it can be shown that these potentials describe an unphysical situation in proximity to the origin. In these cases, the solution of the time-independent Schrödinger equation requires more detailed knowledge of the short-distance physics of the problem.

In the case of atom-surface interaction, the z^{-3} behavior of the potential is an artifact of treating the atom as a pointlike source. This statement is supported by the calculation of the Casimir potential between a sphere of radius R and a wall [41–43]. The potential energy associated with this geometrical configuration shows a z^{-4} long-distance behavior (equivalent to the long-distance CP atom-surface interaction), an intermediate z^{-3} regime, and a transition toward a z^{-1} behavior when approaching $z = 0$. This property holds for any value of the radius R of the sphere: Nevertheless, the characteristic distance at which the transition occurs is, as physically predictable, on the order of the radius.

Inspired by Ref. [44], we take the finite size of the atom into account by replacing it with a probability density distribution $\rho(\mathbf{r}')$. In accordance with Ref. [44], we make the further assumption that the function $\rho(\mathbf{r}')$ is different from zero within a finite volume. Moreover, in our numerical applications, we take this volume to be a sphere of radius R, also discussing the dependence of the results on R. We assume that the atom has coordinates $(0,0,z)$. We stress here that the atomic coordinate z is taken at the point of the sphere nearest to the surface: As a consequence, the effective sphere representing the atom is centered in $(0,0,z+R)$. As far as the probability density distribution is concerned, we will consider the cases of a constant function $\rho_1(\mathbf{r}') = N_1$ and of a spherically symmetric parabolic distribution,

$$\rho_2(\mathbf{r}') = N_2[R^2 - x'^2 - y'^2 - (z' - z - R)^2]. \qquad (15)$$

For both probability distributions, the variable $\mathbf{r}'$ is expressed in the same frame of reference as for the atomic coordinate. The factors N_1 and N_2 are to be deduced from the normalization condition

$$\int_\Omega d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}') = 1, \qquad (16)$$

Ω being the spherical atomic volume. Our hypothesis leads to a new regularized expression of the atom-surface potential, given by the average with respect to $\rho(\mathbf{r}')$ of the standard CP potential,

$$V^{(2)}_{\mathrm{CP;reg}}(z) = \int_\Omega d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')V^{(2)}_{\mathrm{CP}}(z'), \qquad (17)$$

where the z dependence of the new potential is implicitly contained in the probability density distribution $\rho(\mathbf{r}')$ and the integration volume Ω. Substituting Eq. (17) into Eq. (13) then provides the regularized energies of our system.

Let us now analyze the behavior of the regularized potential (17) in proximity to the surface. Assuming that it has a form

$$V^{(2)}_{\mathrm{CP;reg}}(z) = \frac{A}{z^\alpha}, \qquad (18)$$

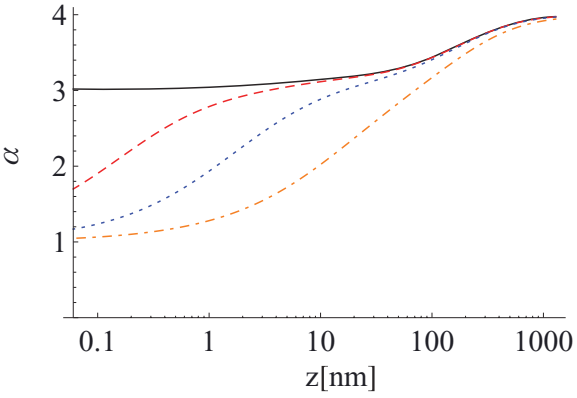


FIG. 6. (Color online) Exponent α defined in Eq. (19) for the standard CP potential (9) (black, solid line) and the regularized potential (17) for radii 0.1 nm (red, dashed line), 1 nm (blue, dotted line), and 10 nm (orange, dotted-dashed line). The sphere-surface distance is expressed in nm.

the exponent α is

$$\alpha = -z\frac{\partial_z V^{(2)}_{\mathrm{CP;reg}}(z)}{\partial z}\frac{1}{V^{(2)}_{\mathrm{CP;reg}}(z)}. \qquad (19)$$

In Fig. 6, we plot the exponent α as a function of z for the standard CP potential (9) and the regularized one (17). Both are calculated in this case for a rubidium atom in front of a perfectly conducting surface and at zero temperature: The data for the dynamical atomic polarizability of rubidium were kindly provided by Derevianko *et al.* [45]. Furthermore, the regularized expression is calculated for a uniform probability density distribution and three different radii $R = 100$ pm, 1, 10 nm. In the four cases, it is evident that the transition from z^{-4} to z^{-3} behavior starts around the first atomic transition wavelength ($\simeq$780 nm). Moreover, while for the standard CP calculation, the exponent tends to 3, in all the other cases, the finite size of the atom leads, as anticipated, to a z^{-1} asymptotic dependence. The figure clearly shows that the length scale of this second power-law transition is roughly on the order of the atomic size. We will make use of this regularized potential in Sec. IV D to work out the perturbative calculations on the modified Wannier-Stark states.

D. Energy corrections

We are now ready to evaluate the average value (13) of the potential (17) on any modified Wannier-Stark state. Our approach leaves, as free parameters, the atomic effective radius R and the probability density distribution $\rho(\mathbf{r}')$. As far as the radius R is concerned, we first remark that several nonequivalent definitions of the effective atomic radius exist in literature. For example, in Ref. [46], Slater gives an empirical value of rubidium radius equal to 235 pm with an associated accuracy of 5 pm. On the contrary, the work in Ref. [47] estimates the atomic radius for rubidium to be 265 pm. As a consequence, in order to study the dependence of the results on the value of the radius, we will consider the two extreme cases $R = 200$ pm and $R = 300$ pm. As for the probability distribution, we will use the functions $\rho_1(\mathbf{r}')$

TABLE III. Absolute value (in units of E_r) of the CP energy corrections (they are all changed in sign) to the first 12 modified Wannier-Stark states for $U = 3$. The notation $a[b]$ corresponds to $a \times 10^b$. These values are calculated for a perfectly conducting surface.

n	200 pm, ρ_1	200 pm, ρ_2	300 pm, ρ_1	300 pm, ρ_2
1	2.39[1]	2.37[1]	2.19[1]	2.16[1]
2	1.76[1]	1.74[1]	1.60[1]	1.58[1]
3	1.20[1]	1.18[1]	1.09[1]	1.08[1]
4	6.80	6.7147	6.18	6.09
5	2.89	2.8557	2.63	2.59
6	8.71[−1]	8.60[−1]	7.91[−1]	7.80[−1]
7	1.93[−1]	1.91[−1]	1.76[−1]	1.74[−1]
8	3.57[−2]	3.53[−2]	3.27[−2]	3.23[−2]
9	6.76[−3]	6.70[−3]	6.33[−3]	6.27[−3]
10	1.84[−3]	1.83[−3]	1.78[−3]	1.78[−3]
11	8.36[−4]	8.35[−4]	8.29[−4]	8.29[−4]
12	5.10[−4]	5.10[−4]	5.09[−4]	5.09[−4]

and $\rho_2(\mathbf{r}')$ discussed before. Furthermore, we are going to consider the case of a perfect conductor for the surface in order to get an insight into the qualitative features of the energy correction. In Table III, we show the energy corrections for the first 12 modified Wannier-Stark states obtained choosing two radii and two probability density distributions. In order to be coherent with the description of the atom as a sphere, the same regularization treatment used for the CP interaction is applied to the other z-dependent Hamiltonian terms contained in H_{WS}. As expected ($R \ll \lambda_l$), this does not modify our results by more than 10^{-3} in relative value.

It is easy to see from Table III that, as far as the energy levels are concerned, a change in the effective radius produces a more remarkable effect than a change of distribution from the uniform case $\rho_1(\mathbf{r}')$ to the parabolic $\rho_2(\mathbf{r}')$. In particular, switching from 200 to 300 pm gives a relative error that is on the order of 10% on the first wells and then drops down, whereas, the relative correction from $\rho_1(\mathbf{r}')$ to $\rho_2(\mathbf{r}')$ is at most around 1%.

It is now instructive to compare one of the set of energy corrections shown in Table III with the simple evaluation of the strength of the potential energy (9) at the center of each well [1,5], which could be used as a first estimation of the energy correction. This idea works better considering deeper traps or farther from the surface: For example, we have verified that the value of $V_{\mathrm{CP}}^{(2)}(z)$ calculated at $z = 1$ and the first energy correction differ by a factor of approximately 4.4 for $U = 3$ (see Fig. 7), while this factor already drops to 1.12 for $U = 20$ and to 1.05 for $U = 80$. We also remark that a larger value of U or a larger atom-surface distance reduces the dependence of the results on the choice of both the probability density distribution and the effective radius. This reasoning proves that, in the case of the experiment FORCA-G, the delocalization of the atom indeed plays a role.

Here, we want to stress that the validity of our spherical-atom model used for the regularization of $V_{\mathrm{CP}}^{(2)}(z)$ still remains to be tested by experimental measurements. Some more details, as well as the relationship with the search for non-Newtonian gravity, will be given in Sec. VI.

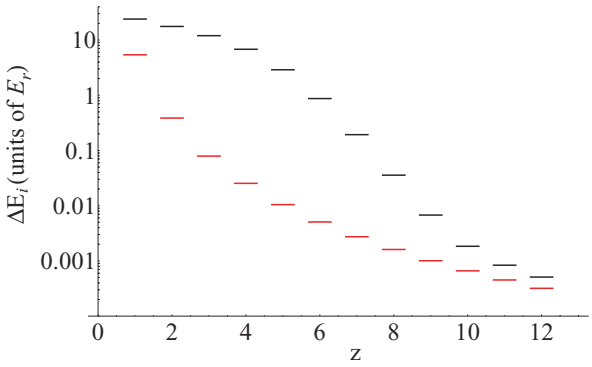


FIG. 7. (Color online) Absolute value expressed in units of E_r of the CP energy correction for a uniform distribution and a radius of 200 pm (black upper ticks) compared to the CP potential by evaluating Eq. (7) at the well center (red lower ticks). The depth of the trapping potential is $U = 3$.

V. DEVIATIONS FROM NEWTONIAN GRAVITATION

Many theories of unification of general relativity and quantum mechanics predict a modification of the laws of gravity at short distances. These modifications can be described by the addition of a new potential to the standard Newtonian one. This correction is often modelized by a Yukawa-type law so that the complete gravitational potential between two pointlike particles is written under the form

$$V_{\mathrm{G}}(z) = \frac{GMm}{z}(1 + \alpha_{\mathrm{Y}} e^{-z/\lambda_{\mathrm{Y}}}), \tag{20}$$

where G is the gravitational constant and m and M are the masses of the two particles. In this expression, α_{Y} and λ_{Y} are two parameters introduced to characterize the relative strength of the corrective potential and its typical range, respectively. The experiments aimed at testing the existence of such a deviation set constraints on the allowed values of the parameters α_{Y} and λ_{Y}. The present status of the excluded regions at short ranges ($z < 100\ \mu$m) on the $(\alpha_{\mathrm{Y}},\lambda_{\mathrm{Y}})$ plane is depicted in Fig. 8.

In the experimental configuration of FORCA-G, we have verified that the only relevant Yukawa-type contribution is the one associated with the atom-mirror gravitational interaction. At the same time, the Newtonian part of the atom-surface interaction is completely negligible with respect to the Earth-atom term already taken into account in the Wannier-Stark Hamiltonian (1) and with respect to the expected experimental uncertainties. As a consequence, the correction we are looking for is obtained by integrating the Yukawa part of Eq. (20) over the volume occupied by the surface. Describing the mirror as a cylinder (the atom being on the direction of its axis) and recalling that we are looking for deviations having length scale λ_{Y} in the micrometer range, we obtain, after a straightforward calculation,

$$H_{\mathrm{Y}} = 2\pi\alpha_{\mathrm{Y}} G\rho_{\mathrm{S}} m\lambda_{\mathrm{Y}}^2 e^{-2z/\lambda_{\mathrm{Y}}}, \tag{21}$$

ρ_{S} being the density of the surface. We are now going to find the new unperturbed energy levels of the system (in the absence

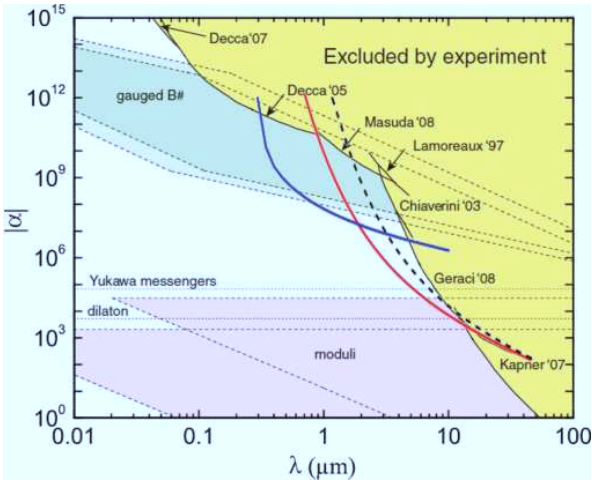


FIG. 8. (Color online) In yellow are displayed the regions of the (α_Y,λ_Y) plane excluded by experiments. The figure is taken from Ref. [48] and λ_Y is expressed in μm. The three superposed curves represent the experimental constraints theoretically calculated for the experiment FORCA-G. They correspond to the near regime, using a superposition between wells $n = 4$ and $n = 6$ (blue solid line, first from the left), the far regime for $n = 40$ (red solid line), and for $n = 70$ (black dashed line).

of the CP interaction) in the presence of the new Hamiltonian term (21). This can be done using the method described in Sec. III, after choosing the value of the parameters α_Y, λ_Y, and ρ_S. The new eigenvalues of the unperturbed Hamiltonian $H_{WS} + H_Y$ will be noted with $E_n^{(Y)}$ for each well n. As far as the surface density is concerned, since we still do not have any information about the surface to be used in the experiment, throughout this section, just as an example, we choose the density of silicon $\rho_S = 2.33 \times 10^3$ kg m^{-3}, close to the values corresponding to SiO_2 or BK7 typically used in experiments.

As anticipated in Sec. I, one of the the scopes of the experiment FORCA-G is to look for Yukawa-type deviations: This will be done both near the surface (at distances on the order of micrometers) and in the region where the CP interaction can theoretically be modeled at a degree of precision comparable to the experimental noise. In the former regime, the idea of the experiment is to compare the results obtained using two different isotopes of rubidium (in particular, ^{85}Rb and ^{87}Rb) in order to make the energy differences between wells almost independent of the CP interaction [1]. As a consequence, when discussing the Yukawa correction near the surface, we first need to calculate (both for Wannier-Stark and Yukawa potentials) the differences in energy levels E_n and $E_n^{(Y)}$ between ^{85}Rb and ^{87}Rb, calculated using the formalism described in Secs. II– IV with the different isotope masses in the Hamiltonians (1) and (21). These differences will be noted with

$$\mathcal{D}E_n = \left(E_n^{85} - E_n^{87}\right) - \left(E_n^{(Y)85} - E_n^{(Y)87}\right) \qquad (22)$$

Finally, the experiment will be able to detect a Yukawa-type deviation if the difference $\mathcal{D}E_n$ is within the experimental sensitivity. In the case of FORCA-G, the expected sensitivity is 10^{-4} Hz [1].

TABLE IV. First 24 values (the energy differences are expressed in Hertz) of the modified Wannier-Stark spectrum for $U = 3$ and in the presence of the Yukawa-type potential (21) with $\alpha_Y = 3 \times 10^{10}$ and $\lambda_Y = 1$ μm.

n	$\mathcal{D}E_n$ (Hz)	n	$\mathcal{D}E_n$ (Hz)
1	1.654[−1]	13	2.0[−3]
2	1.425[−1]	14	1.5[−3]
3	1.221[−1]	15	1.2[−3]
4	9.43[−2]	16	9[−4]
5	5.72[−2]	17	7[−4]
6	2.71[−2]	18	5[−4]
7	1.30[−2]	19	4[−4]
8	8.0[−3]	20	3[−4]
9	6.0[−3]	21	2[−4]
10	4.4[−3]	22	2[−4]
11	3.4[−3]	23	1[−4]
12	2.6[−3]	24	1[−4]

In Table IV, we first give the results obtained for $\alpha_Y = 3 \times 10^{10}$ and $\lambda_Y = 1$ μm: The value of α_Y approximately corresponds to the limit of the experimentally accessed region for $\lambda_Y = 1$ μm.

From these results, it is clear that the Yukawa-type deviations corresponding to the couple (α_Y,λ_Y) chosen are, in principle, experimentally detectable up to the well $n = 24$ in a differential ^{85}Rb$-^{87}$Rb measurement.

We now turn to the second experimental configuration in which the CP potential is expected to be predicted at the 10^{-4} Hz level [1]. We stress that, apart from the precision in the calculation of the nonregularized CP potential, we must pay attention to the uncertainty introduced by our effective description of the finite size of the atom. Assuming that the CP potential can theoretically be determined, independent of its regularization, with a 1% accuracy at best, the absolute precision in its determination can be considered comparable to the experimental error already around the well $n = 40$, where $z = 10$ μm and the potential equals approximately 0.06 Hz, i.e., in this second experimental configuration, the atoms will be at 10 μm or more from the surface. At this distance, our hypothesis of a spherical atom already plays no role. Indeed, we have checked that, using both probability distributions and both radii, the potentials so obtained differ less than 10^{-5} Hz already at $z = 5$ μm. This is coherent with the fact that the finite size of the atom plays a negligible role at distances much larger than the atomic size itself. As a consequence, in this second experimental regime, the precision on the standard calculation and the experimental uncertainties imposes stronger limitations than our effective model.

We have calculated the Yukawa corrections on the well $n = 40$ for different values of λ_Y: For each of them, we have found our limiting value of α_Y by looking for a correction on the order of 10^{-4} Hz. We have, moreover, repeated the same calculation for $n = 70$ (where $V_{CP} \simeq 0.01$ Hz) as well as in the near regime discussed above evaluating the energy difference between wells $n = 4$ and $n = 6$. These three curves are represented in Fig. 8 on top of the present experimental constraints.

VI. DISCUSSION

In this paper, we have introduced an effective model describing the atom as a spherical probability distribution. This was needed in order to regularize the expression of the CP energy correction to the modified Wannier-Stark states. It is important to discuss, in more detail, the validity of this model in connection with the experimental results.

Let us start by recalling that, in the context of the search for non-Newtonian gravitation, our model does not impose severe limitations. As a matter of fact, in the near regime, the CP contribution is almost canceled by the use of two isotopes, whereas, at far distances, we have shown (see Sec. V) that the error introduced by our description is negligible with respect to the accuracy in the knowledge of the CP potential itself.

The experiment could be used, in addition, to test the validity of our model. To this aim, measurements should be performed in the near regime (say, within the first ten wells) with a single isotope. In this case, the measured energy differences would check the consistency of our atomic description as well as provide an estimation of the effective radius. The use of a single isotope makes the correction coming from the Yukawa potential negligible with respect to the CP term (see Tables III and IV).

Finally, the experimental setup can be used for a measurement of the CP potential around 5 μm: In this region, as shown in Sec. V, the energy correction due to the atom-field interaction is almost insensitive to the model chosen, and the Yukawa interaction is much smaller than the quantum electrodynamical one. This measure could provide a new experimental observation of the CP potential with a relative uncertainty of less than one part in 10^3.

Nevertheless, here, we stress that precise knowledge of the CP standard potential requires an accurate description of the atomic and surface optical data. The details of the latter are unavailable at present, so the calculations in this paper have been performed for a perfectly conducting mirror. To complete our analysis, it will be enlightening to compare our results to the exact sphere-plate calculations [42,43]. In this case, as remarked in Ref. [43], an appropriate description of the dielectric properties of the sphere is needed to mimic the atomic optical response.

VII. CONCLUSIONS

In this paper, we have discussed the modifications of the Wannier-Stark states in the presence of a surface. As a first step, we have considered the presence of the surface as a boundary condition of the time-independent Schrödinger equation obtaining a different class of states in this way. These states, even if asymptotically coincident with the ordinary Wannier-Stark states at large distances from the surface, significantly differ from them, both in energy and in shape of the wave function, at the first few wells.

Then, we also have taken the CP interaction between the atom and the surface as a source of correction to the energy levels of the system into account. We have shown that these corrections diverge due to the z^{-3} behavior of the electrodynamical potential energy. In order to regularize this result, we have introduced an effective description of the atom as a probability density distributed over a spherical volume. Our description leaves, as free parameters, both the radius of the sphere and the probability distribution. We have characterized the dependence of our results on both quantities. The validity of this model as well as the values of these parameters remain to be investigated by experiments.

In the second part of the paper, we have studied the possibility of measuring a hypothetical Yukawa-type contribution to the gravitational potential at short distances. We have calculated the constraints that the experiment FORCA-G will be able to set on the (α_Y,λ_Y) plane. We have shown that the constraints set by the experiment are dominated by the experimental uncertainties and are unaffected (to within those uncertainties) by the choice of the model for the regularization of the CP interaction.

This paper paves the way for the precise calculation of the energy levels in the experimental configuration of FORCA-G and other experiments that use atoms in optical dipole traps close to a surface [1,6]. To this aim, precise knowledge of the optical data of the mirror and the atom is needed. This information will allow us to give a more detailed estimate of the accuracy of our results also based on the comparison with independent approaches to the regularization problem. Finally, knowledge of the atomic wave functions constitutes the first ingredient for the description of the dynamics of the system, which is the subject of ongoing work.

ACKNOWLEDGMENTS

This research is carried on within the project iSense, which acknowledges the financial support of the Future and Emerging Technologies (FET) programme within the Seventh Framework Programme for Research of the European Commission, under FET-Open Grant No. 250072. We also gratefully acknowledge support by Ville de Paris [Emergence(s) program] and IFRAF. The authors thank Q. Beaufils, A. Canaguier-Durand, R. Guérout, P. Lemonde, R. Passante, F. Pereira dos Santos, and S. Reynaud for fruitful and stimulating discussions.

[1] P. Wolf, P. Lemonde, A. Lambrecht, S. Bize, A. Landragin, and A. Clairon, Phys. Rev. A **75**, 063608 (2007).

[2] S. Scheel and S. Y. Buhmann, Acta Phys. Slov. **58**, 675 (2008).

[3] M. Gluck, A. R. Kolovsky, and H. J. Korsch, Phys. Rep. **366**, 103 (2002).

[4] Q. Beaufils, G. Tackmann, B. Pelle, S. Pelisson, P. Wolf, F. Pereira dos Santos, e-print arXiv:1102.5326 (2011).

[5] A. Derevianko, B. Obreshkov, and V. A. Dzuba, Phys. Rev. Lett. **103**, 133201 (2009).

[6] F. Sorrentino, A. Alberti, G. Ferrari, V. V. Ivanov, N. Poli, M. Schioppo, and G. M. Tino, Phys. Rev. A **79**, 013409 (2009).

[7] G. Barton, J. Phys. B **7**, 2134 (1974).

[8] E. A. Power and S. Zineau, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **251**, 427 (1959).

[9] G. Compagno, R. Passante, and F. Persico, *Atom-Field Interactions and Dressed Atoms* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995).

[10] F. Bloch, Z. Phys. **52**, 555 (1929).

[11] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehart & Winston, New York, 1976).

[12] G. H. Wannier, Phys. Rev. **117**, 1366 (1960).

[13] M. Gluck, A. R. Kolovsky, H. J. Korsch, and N. Moiseyev, Eur. Phys. J. D **4**, 239 (1998).

[14] Q. Niu, X.-G. Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **76**, 4504 (1996).

[15] G. Peters and J. H. Wilkinson, Comput. J. **12**, 398 (1969).

[16] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992).

[17] A. G. Abrashkevich, D. G. Abrashkevich, M. S. Kaschiev, and I. V. Puzynin, Comput. Phys. Commun. **85**, 40 (1995).

[18] N. Sukumar and J. E. Pask, Int. J. Numer. Methods Eng. **77**, 1121 (2009).

[19] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics* (Academic, San Diego, 1994).

[20] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).

[21] H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).

[22] C. I. Sukenik, M. G. Boshier, D. Cho, V. Sandoghdar, and E. A. Hinds, Phys. Rev. Lett. **70**, 560 (1993).

[23] A. Landragin, J. Y. Courtois, G. Labeyrie, N. Vansteenkiste, C. I. Westbrook, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **77**, 1464 (1996).

[24] F. Shimizu, Phys. Rev. Lett. **86**, 987 (2001).

[25] V. Druzhinina and M. DeKieviet, Phys. Rev. Lett. **91**, 193202 (2003).

[26] T. A. Pasquini, Y. Shin, C. Sanner, M. Saba, A. Schirotzek, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **93**, 223201 (2004).

[27] T. A. Pasquini, M. Saba, G. Jo, Y. Shin, W. Ketterle, D. E. Pritchard, T. A. Savas, and N. Mulders, Phys. Rev. Lett. **97**, 093201 (2006).

[28] M. Antezza, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A **70**, 053619 (2004).

[29] D. M. Harber, J. M. Obrecht, J. M. McGuirk, and E. A. Cornell, Phys. Rev. A **72**, 033610 (2005).

[30] M. Antezza, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, and V. B. Svetovoy, Phys. Rev. Lett. **97**, 223203 (2006).

[31] J. M. Obrecht, R. J. Wild, M. Antezza, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **98**, 063201 (2007).

[32] A. Lambrecht, P. A. Maia Neto, and S. Reynaud, New J. Phys. **8**, 243 (2006).

[33] R. Messina, D. A. R. Dalvit, P. A. Maia Neto, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Phys. Rev. A **80**, 022119 (2009).

[34] J. M. Wylie and J. E. Sipe, Phys. Rev. A **30**, 1185 (1984).

[35] S. Y. Buhmann, D.-G. Welsch, and T. Kampf, Phys. Rev. A **72**, 032112 (2005).

[36] The CP potential is naturally expressed, as a result of a perturbative calculation, as an integral over the real axis of frequencies [see, e.g,. Eq. (5)]. In order to make calculations easier, a rotation to the imaginary axis is usually performed [2]. In the case of zero temperature, since the integrand function has no poles on both axes, the result is an integral over imaginary frequencies (9). On the contrary, the integrand function in the case of nonzero temperature has an infinite number of poles on the imaginary axis, namely, the Matsubara frequencies $\xi_n = 2\pi n k_B T/\hbar$. This explains the sum over n appearing in Eq. (7).

[37] It may be useful to specify that the polarizability $\alpha(\omega)$ defined in Eq. (8) is given in *Système International* units and has the dimensions of $\mathrm{C\,m^2\,V^{-1}}$. The corresponding expression in cgs units is given by $\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0}$ and has the dimensions of a volume.

[38] K. M. Case, Phys. Rev. **80**, 797 (1950).

[39] W. M. Frank, D. J. Land, and R. M. Spector, Rev. Mod. Phys. **43**, 36 (1971).

[40] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1977).

[41] P. A. Maia Neto, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Phys. Rev. A **78**, 012115 (2008).

[42] A. Canaguier-Durand, P. A. Maia Neto, I. Cavero-Pelaez, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Phys. Rev. Lett **102**, 230404 (2009).

[43] A. Canaguier-Durand, A. Gérardin, R. Guérout, P. A. Maia Neto, V. V. Nesvizhevsky, A. Yu. Voronin, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Phys. Rev. A **83**, 032508 (2011).

[44] G. Compagno, R. Passante, and F. Persico, Europhys. Lett. **7**, 399 (1988).

[45] A. Derevianko, W. R. Johnson, M. S. Safronova, and J. F. Babb, Phys. Rev. Lett. **82**, 3589 (1999).

[46] J. C. Slater, J. Chem. Phys. **41**, 3199 (1964).

[47] E. Clementi, D. L. Raimondi, and W. P. Reinhardt, J. Chem. Phys. **47**, 1300 (1967).

[48] A. A. Geraci, S. B. Papp, and J. Kitching, Phys. Rev. Lett. **105**, 101101 (2010).

PHYSICAL REVIEW A **83**, 069902 (2011)

Publisher's Note: Atomic states in optical traps near a planar surface [Phys. Rev. A 83, 052111 (2011)]

Riccardo Messina, Sophie Pelisson, Marie-Christine Angonin, and Peter Wolf

(Received 20 May 2011; published 7 June 2011)

DOI: 10.1103/PhysRevA.83.069902 PACS number(s): 12.20.Ds, 42.50.Ct, 37.10.Jk, 37.25.+k, 99.10.Fg

This paper was published online on 12 May 2011 with typographical errors in the captions of Table III and Fig. 7. In Table III, the caption should read as "Absolute value (in units of E_r) of the. . ."; and the caption to Fig. 7 should read as "Absolute value expressed in units of E_r of the. . .". The paper has been corrected as of 31 May 2011. The text is correct in the printed version of the journal.

 ©2011 American Physical Society

CHAPITRE 3

Temps de vie dans un piège périodique vertical

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des états atomiques du piège étudiés dans le chapitre précédent. Ces états étant connus comme des résonances quantiques, une présentation succinte de la théorie des résonances est donnée en introduction. On developpera ensuite la méthode mathématique choisie pour le calcul de la durée de vie des états présentés dans le chapitre précédent puis nous exposerons les résultats obtenus par cette méthode.

Sommaire

3.1 Introduction 76
3.2 Les états résonants en mécanique quantique 76
3.2.1 Formule de Landau-Zener 76
3.2.2 L'approche diffusive 78
3.3 La méthode du *Complex Scaling* 80
3.3.1 Théorème de Balslev-Combes 80
3.3.2 Application aux états de Wannier-Stark 82
3.4 Application au problème des états de Wannier-Stark modifiés 85
3.4.1 Temps de vie des états de Wannier-Stark modifiés 85
3.4.2 Comparaison avec la formule de Landau-Zener 87
3.5 Le cas d'un atome au dessus de la surface 89
3.6 Introduction du potentiel de Yukawa 93
3.7 Le problème de l'effet Casimir-Polder 94
3.7.1 Théorie des perturbations non-hermitienne 94
3.7.2 Traitement perturbatif de l'Hamiltonien d'interaction champ-atome 98
3.7.3 Le cas de la régularisation du potentiel de Casimir-Polder 102
3.8 La méthode de stabilisation complexe 103
3.9 Conclusions et Perspectives 104

3.10 Article 104

3.1 Introduction

On a mentionné dans le chapitre 1 que les états de Wannier-Stark standards ne sont pas de véritables états propres du piège mais sont plutôt considérés comme des états métastables ayant une durée de vie finie. Le but de ce chapitre est de comprendre comment cette durée de vie, connue dans le cas des états de Wannier-Stark, est modifiée par les différentes interactions intervenant dans l'expérience. La question sous-jacente à cette étude est de savoir si cette durée de vie reste suffisamment longue pour effectuer les mesures expérimentalement et si l'approximation faite au chapitre 2 consistant à considérer ces états comme des états propres est valide. Pour réaliser ce calcul, nous nous baserons sur la théorie des résonances développée en mécanique quantique notamment dans le cadre des phénomènes de diffusion. Un bref rappel de cette théorie sera donné en première partie insistant sur les aspects propres aux états de Wannier-Stark. La seconde partie de cet exposé sera consacrée à l'approche mathématique du calcul des résonances quantiques. Nous présenterons ensuite les résultats obtenus pour les états du piège de FORCA-G en présence d'une barrière de potentiel représentant la surface et de déviation à la loi de la gravitation. Enfin, nous exposerons les problèmes particuliers posés par la prise en compte de l'effet Casimir-Polder. Le chapitre se concluera par une discussion sur la faisabilité de l'expérience compte tenu des résultats obtenus.

3.2 Les états résonants en mécanique quantique

La mécanique quantique repose essentiellement sur l'étude du spectre d'opérateurs hermitiens. En effet, l'un des postulats fondamentaux à l'origine de la théorie quantique stipule que le spectre d'un opérateur représentant une observable fournit les quantités physiques mesurables du problème. Dans la mesure où ces quantités telles que l'impulsion ou l'énergie d'une particule par exemple doivent être mesurables et donc réelles, l'opérateur les représentant est nécessairement hermitien. Si cette représentation mathématique fonctionne très bien dans la plupart des cas physiques présentant des états liés, cela complique considérablement le traitement de certains phénomènes, en particulier les phénomènes de diffusion.

3.2.1 Formule de Landau-Zener

Dans le chapitre 2, nous avons utilisé l'approche hermitienne pour résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire et en déduire les états propres du piège dipolaire en présence

d'une surface. Cependant, dans cette étude on a montré une similarité de comportement entre nos états propres et les états de Wannier-Stark représentant une particule dans un potentiel périodique augmenté d'un potentiel linéaire [44, 80]. Or, il a été démontré dans les années 30 que ce type d'états n'étaient pas réellement des états propres mais des états métastables [83, 101] ayant un temps de vie fini. Cette instabilité est souvent interprétée comme un effet tunnel résonant entre les différentes bandes d'énergie correspondant au problème de Bloch.

En effet, un atome dans un puits donné a une probabilité non nulle d'effectuer une transition vers un état de Wannier-Stark associé à une bande de Bloch supérieure. Cette probabilité augmente avec l'indice de la bande jusqu'à ce que l'atome ait une énergie trop grande pour rester confiné par le piège. Il s'échappe alors de celui-ci et son état rejoint les états du continuum. La détermination de la durée de vie des états de Wannier-Stark dans un piège infini a été modélisée grâce à la formule dite de *Landau-Zener* [101–104]. Cette formule résulte de la solution analytique des équations régissant la dynamique de la transition d'un système quantique à deux niveaux dont l'Hamiltonien est tel que la séparation entre les deux niveaux varie linéairement avec le temps. Dans le cas d'une particule dans un potentiel périodique plus un potentiel linéaire, les niveaux considérés sont les niveaux de Wannier-Stark dont la séparation en énergie est dépendante du terme linéaire du potentiel [44].

Considérons un potentiel périodique augmenté d'un potentiel linéaire de la forme

$$V(z) = \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2k_l z)\right) + Fz \tag{3.2.1}$$

k_l étant la valeur du vecteur d'onde du piège optique et F l'amplitude du terme linéaire. La probabilité de transiter à travers le *gap* d'énergie de Bloch dans un tel potentiel peut alors s'exprimer sous la forme [105]

$$\gamma = \frac{dn}{d\tau} = Fe^{-\frac{\alpha_c}{F}}. \tag{3.2.2}$$

Dans l'équation (3.2.2), γ représente le nombre de particules n qui passent au travers du gap Δ par effet tunnel pendant un intervalle de temps $d\tau$. Le terme $\alpha_c = \frac{\pi\Delta^2}{K}$ est l'accélération critique avec $K = \frac{p}{2}$ correspondant au $p^{\text{ième}}$ *gap*. Cette formule permet donc d'estimer le temps de vie d'un état de Wannier-Stark dans le potentiel (3.2.1) avant que la particule considérée ne passe dans un niveau d'énergie supérieure et ne sorte du piège. Cependant, cette approche n'est valide que sous certaines conditions. En effet, pour être rigoureusement valable, l'équation doit porter sur le système en entier c'est-à-dire que sa description doit prendre en compte toutes les influences extérieures pouvant s'exercer sur le système à deux niveaux tels que les éventuels champs électriques ou magnétiques ou

encore les collisions. Ceci est extrêmement difficile voir impossible à réaliser. Dans leurs calculs, C. Zener [101] et L. Landau [102] ont donc introduit des approximations permettant de résoudre les équations analytiquement. En particulier, la séparation des niveaux d'énergie du système doit varier linéairement avec le temps.

Grâce à la symétrie du réseau, l'approche est parfaitement valable pour les états de Wannier-Stark standards. En revanche, il n'est pas certain que ce soit toujours le cas pour les états modifiés par la présence de la surface et encore moins si l'on prend en compte l'effet Casimir-Polder ou une éventuelle déviation à la loi de la gravitation. Il convient donc de trouver une approche plus rigoureuse mathématiquement permettant de calculer les états métastables d'un système quantique quelconque. Ceci peut être réalisé en s'inspirant des méthodes développées dans le cadre de la théorie de la diffusion quantique.

3.2.2 L'approche diffusive

Les états de Wannier-Stark ne sont pas à proprement parler des états liés mais des résonances quantique inclues dans un continuum d'états [106]. Ce type d'état peut être rapproché des états de diffusion inélastique en mécanique quantique. En effet, lorsqu'on étudie le phénomène de diffusion, on regarde l'interaction entre une *"particule"* et une *"cible"* qui se traduit, dans le cas d'une diffusion inélastique par un échange d'énergie entre ces deux objets. On peut alors distinguer trois cas de figure illustrés sur la figure 3.1 : le premier correspond au piégeage de la particule dans le potentiel de la cible, le second correspond à une diffusion directe où la particule passe à proximité de la cible qui modifie sa trajectoire puis continue son chemin. Le troisième cas enfin, et celui qui va nous intéresser dans la suite correspond au cas où, en raison de multiples phénomènes de diffusion, la particule est piégée *temporairement* par la cible. On parle alors de résonance que l'on peut définir comme un état à longue durée de vie ayant suffisamment d'énergie pour se séparer en deux ou plusieurs sous-systèmes [107]. Les résonances ainsi définies sont caractérisées par un spectre discret avec une énergie fixée donnant la position de la résonance sur le spectre énergétique et par une largeur de résonance Γ pouvant être reliée à l'inverse du temps de vie de cet état résonant.

La méthode classique pour étudier les résonances quantiques est donc logiquement de calculer la matrice de diffusion du problème [108,109]. Plus particulièrement, on cherche à identifier les pôles complexes de cette matrice. En effet, considérons une particule diffusée sur une cible. Dans le cas de la diffusion standard, la particule est un paquet d'onde provenant de l'infini qui interagit avec le potentiel de la cible avant de repartir vers l'infini. La matrice de diffusion est alors une matrice réelle de passage modélisant la zone d'interaction entre la particule et la cible. En revanche, lorsqu'on a affaire à une résonance, la particule

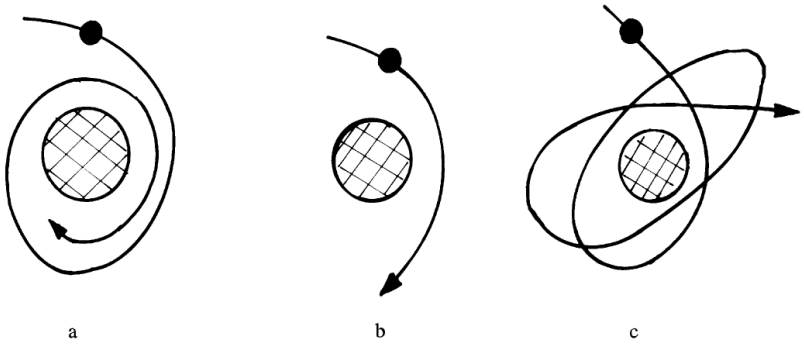


Figure 3.1 : Schéma des configurations de diffusions possibles. Le premier schéma correspond à la situation où la particule est piégée dans le potentiel de la cible. Le second représente une diffusion directe. Et le troisième présente le cas d'une résonance avec multi-diffusions (figure provenant de [107]).

va rester piégée un certain temps dans le potentiel de la cible et ainsi former un nouveau système avec la cible. Ce nouveau système ayant un état quasi-propre, ne correspond à aucun paquet d'onde à l'entrée de la zone de diffusion. On a donc un paquet d'onde sortant non nul correspondant à un paquet d'onde entrant nul. La matrice de diffusion étant définie comme le quotient de l'amplitude des ondes sortantes par celle des onde entrantes, la présence d'une résonance se traduit par une division par 0 dans la matrice de diffusion c'est-à-dire un pôle.

En effet supposons que le potentiel de la cible soit un potentiel à courte distance, de sorte que $V \to 0$ lorsque la coordonnée spatiale $r \to \infty$. Dans ce cas la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps lorsque $r \to \infty$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \varphi(r \to \infty) & = A(k)e^{-ikr} + B(k')e^{ik'r} = A(k)\left(e^{-ikr} + S(k,k')e^{ik'r}\right) \\ S(k,k') & := \frac{B(k')}{A(k)} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

$A(k)$ et $B(k')$ étant respectivement les amplitudes des ondes entrantes et sortantes et $S(k,k')$ représentant la matrice de diffusion. Lorsque $A(k) \to 0$ l'onde entrante est nulle et la matrice $S(k)$ présente un pôle. Si la partie imaginaire de ce pôle est positive alors les états qui lui sont associés sont des états liés et ne présentent aucun intérêt pour la dynamique du processus de diffusion puisque leur temps de vie est infini. En revanche, si cette partie imaginaire est négative alors on peut associer ce pôle à un phénomène de résonance. Dans ce cas le système possède une fonction d'onde dont l'énergie associée est complexe et de la forme

$$E_n = \epsilon_n - \frac{i}{2}\Gamma_n \tag{3.2.4}$$

où ϵ_n représente l'énergie de l'état et Γ_n est la largeur de la résonance. Γ_n est donc proportionnel à l'inverse du temps de vie de l'état associé au niveau d'énergie E_n.

De nombreuses techniques ont été développées pour calculer ces pôles soit en modélisant la diffusion complète soit en s'intéressant à l'extraction des pôles dans le spectre directement (voir [110] pour une revue). Une des ces méthodes en particulier repose sur l'analyse des propriétés des opérateurs en jeu dans la diffusion pour en déduire le spectre des résonances ainsi que les propriétés de celles-ci [111–114]. Nous allons donc développer cette méthode dans la suite.

3.3 La méthode du *Complex Scaling*

La méthode de calcul des pôles de la matrice de diffusion que nous allons utiliser s'appuie sur l'analyse spectrale des propriétés des opérateurs de Shrödinger du système étudié. Cette méthode est basée sur un théorème de théorie spectrale énoncé en 1971 par E. Balslev et J. M. Combes [112]. Dans cette section, nous allons discuter ce théorème et son application au calcul des résonances quantiques.

3.3.1 Théorème de Balslev-Combes

Considérons un opérateur de Schrödinger

$$P = -\frac{\hbar^2}{2m_a}\frac{d^2}{dz^2} + V(z) \tag{3.3.1}$$

où $V(z)$ est un potentiel à une dimension. On cherche à savoir si le spectre de ce potentiel présente des résonances ou simplement des états propres et/ou un continuum. Prolongeons analytiquement ce potentiel dans le plan complexe à l'aide de l'opérateur U_θ défini pour $\theta \in \mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} U_\theta : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ U_\theta\varphi(z) = e^{\frac{i\theta}{2}}\varphi(ze^{i\theta}) \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.3.2}$$

De par le choix de son préfacteur, U_θ est unitaire de sorte que

$$U_\theta^{-1} = U_\theta^\star = U_{-\theta}. \tag{3.3.3}$$

Ainsi, lorsqu'on applique cette transformation à l'opérateur de Schrödinger P défini précédement on obtient

$$P^{(\theta)} = U_\theta P U_\theta^\star = e^{-2i\theta}\left(-\frac{\hbar^2}{2m_a}\frac{d^2}{dz^2}\right) + V(ze^{i\theta}). \tag{3.3.4}$$

Le théorème de Balslev-Combes [112] stipule alors que les valeurs propres réelles de l'opérateur $P^{(\theta)}$ ainsi obtenu sont les mêmes que celle de l'opérateur P initial. Par ailleurs, les valeurs propres complexes de l'opérateur $P^{(\theta)}$ dont la partie imaginaire est négative, représentent les résonances du système. L'inconvénient majeur de ce théorème est que son application repose sur des hypothèses fortes sur la nature du potentiel $V(z)$ de l'opérateur (3.3.1). Plus précisément, celui-ci doit être dilatable analytiquement ce qui signifie formellement que la famille d'opérateurs

$$\left[V(ze^{i\theta})(-\frac{\hbar^2}{2m_a}\frac{d^2}{dz^2}+1)^{-1}\right]_{\mathbb{R}} \tag{3.3.5}$$

s'étende en une famille d'opérateurs compacts de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ analytiques par rapport à θ dans un voisinage complexe de 0. Dans le cas d'opérateurs à une dimension, la classe principale des potentiels dilatables analytiquement sont les potentiels $C^\infty(\mathbb{R})$ c'est-à-dire les potentiels représentés par des fonctions analytiques. Cela restreint de beaucoup le domaine d'application de la méthode. Cependant, B. Simon et W. Hunziker ont développé dans les années 70-80 une généralisation de ce théorème pour une classe plus large de potentiel [113, 115]. Cette généralisation nécessite l'introduction d'une nouvelle transformation de la forme

$$\begin{cases} T(\alpha) : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \\ T(\alpha)\varphi(z) = \varphi(z+\alpha v(z)) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{3.3.6}$$

où $v(z)$ est un champ de vecteurs fixé et arbitrairement régulier agissant de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et α est un paramètre de distorsion jouant le rôle du groupe de paramètres θ. Avec cette transformation, l'Hamiltonien

$$T(\alpha)HT(\alpha)^{-1} \tag{3.3.7}$$

peut être traité par le théorème de Balslev-Combes. On retrouve ainsi les résonances comme les valeurs propres complexes de cet Hamiltonien et on peut démontrer [115] que celles-ci ne dépendent pas du choix de α ni du champ de vecteurs $v(z)$.

Dans la suite, la représentation graphique de ces résonances aura son importance. En effet, si on trace la partie imaginaire du spectre complexe de l'Hamiltonien transformé en fonction de sa partie réelle, on peut distinguer graphiquement les trois types d'états suivant : les états propres dont la partie imaginaire est nulle, les états du continuum qui se répartissent sur une droite de pente 2θ et les états résonants qui n'apartiennent pas à cette droite mais qui ont une partie imaginaire non nulle. Ces trois types d'états sont représentés sur la figure 3.2.

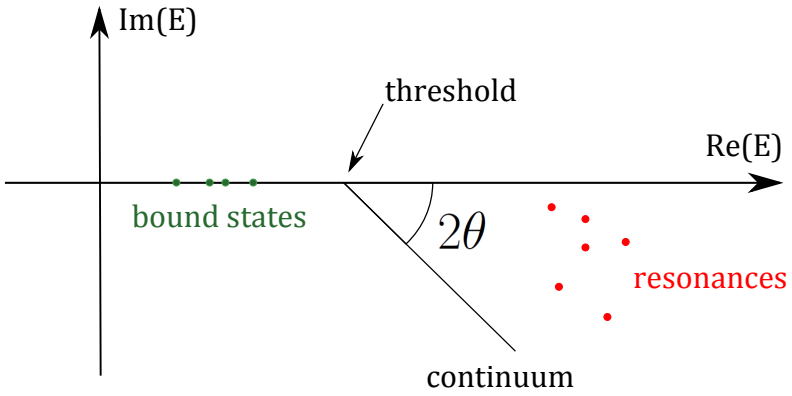


Figure 3.2 : Représentation schématique des valeurs propres complexes de l'Hamiltonien transformé $H^{(\theta)}$ en vertu du théorème de Balslev-Combes [112].

3.3.2 Application aux états de Wannier-Stark

Comme on l'a dit plus haut, les états de Wannier-Stark sont des états résonants inclus dans un continuum. Les méthodes spectrales telles que la méthode du *complex scaling* décrite dans la section précédente sont donc séduisantes pour une étude relativement aisée de ces états. Cette idée a notamment été largement développée par N. Moiseyev et ses collaborateurs [81,107,116]. Toute la méthode repose, on l'a déjà mentionné, sur l'analogie entre les états de Wannier-Stark et les états de diffusion d'une particule sur le potentiel périodique accéléré. Si on imagine qu'à un instant infiniment lointain, l'atome était libre, alors l'état de Wannier-Stark est son état en interaction avec le réseau périodique réalisé par l'onde stationnaire dans le champ de pesanteur terrestre. Cet état, de part sa nature, diverge lorsque $z \to \infty$ puisque l'onde sortante n'est pas de carré sommable [117]

$$\varphi_{\text{res}}(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} e^{ik_{res}z} \tag{3.3.8}$$

où k_{res} est le vecteur d'onde complexe associé au pôle complexe de la matrice de diffusion $S(k,k')$. Or le fait d'appliquer la transformation de coordonnées (3.3.2) à l'Hamiltonien, rend l'onde sortante exponentiellement décroissante pour z croissant

$$\varphi^{(\theta)}_{\text{res}}(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta/2} exp\left(i|k_{res}|e^{-i\arg(k_{res})}ze^{i\theta}\right) \tag{3.3.9}$$

à condition que θ soit suffisament grand pour que $(\theta - \arg(k_{res})) > 0$. Ainsi la fonction d'onde associée à la résonance devient de carré intégrable dans le plan complexe avec une énergie associée complexe de la forme (3.2.4).

Dans le cas des états de Wannier-Stark, le temps de vie de ces niveaux d'énergie complexes est relié à la probabilité d'effectuer une transition d'une bande de Bloch à une

autre [105] et on retrouve par conséquent cette structure de bande dans les valeurs propres complexes ainsi calculées. La figure 3.4 représente le spectre complexe pour les états de Wannier-Stark standards. Le calcul a été effectué pour un piège dipolaire accéléré sous l'effet de la gravité du type de celui de FORCA-G. Les atomes sont alors placés sous la surface et le potentiel schématisé par la figure 3.3 s'écrit

$$V(z) = \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2k_l z)\right) - m_a g z \tag{3.3.10}$$

avec $U = 3E_r$. Sur la figure 3.4 on observe une structure de bande qui correspond

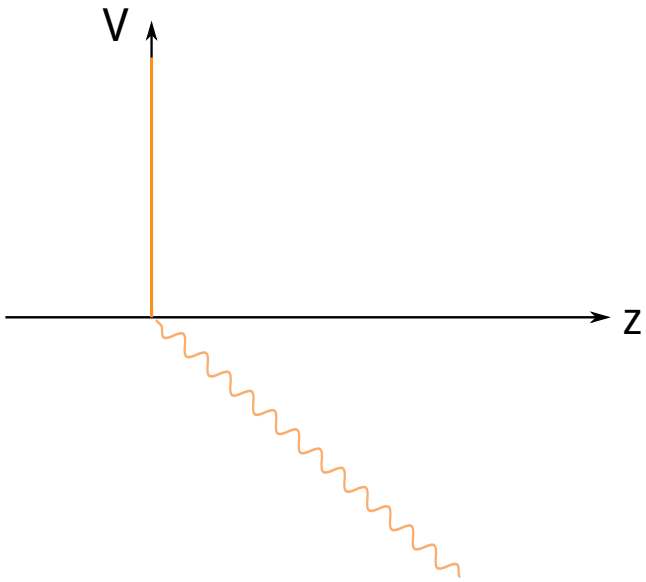


Figure 3.3 : Schéma du potentiel modélisant le cas d'un atome au-dessous d'une surface.

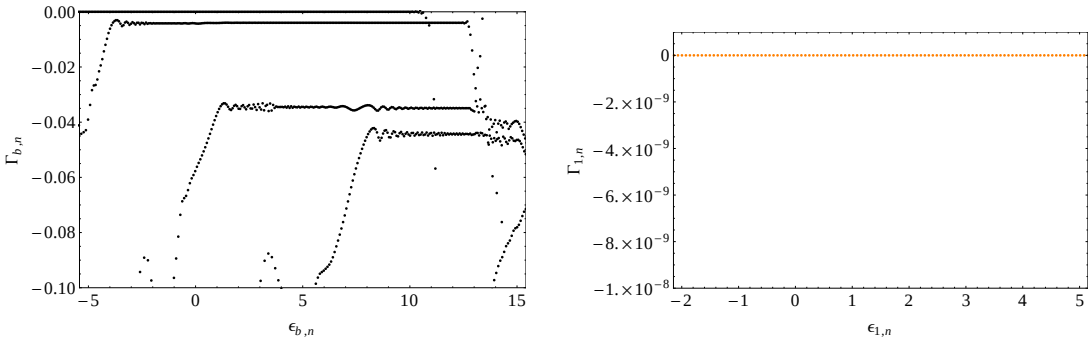


Figure 3.4 : Valeurs de la partie imaginaire des valeurs propres complexes de l'Hamiltonien de Wannier-Stark en fonction de leur partie réelle. Le grahique de gauche présente la structure générale du spectre tandis que celle de droite montre un zoom sur la première bande de ce spectre. Les valeurs de l'énergie sont en unités de E_r.

à la structure de l'échelle de Wannier-Stark [80]. En effet, si l'on excepte les effets de

bords correspondant à l'introduction d'une boîte numérique pour le calcul, les parties réelles des énergies calculées sont espacées comme on s'y attendait de $m_a g \frac{\lambda_l}{2}$. Les parties imaginaires quant à elles reflètent la structure des bandes de Bloch c'est-à-dire que les états correspondant à une même bande ont tous le même temps de vie. On remarque aussi que plus la bande de Bloch dans laquelle on s'est placé est élevée, moins sa durée de vie est longue. Cela se comprend aisément en revenant à la structure des états de Bloch qui servent de base pour le calcul des états de Wannier-Stark. En effet, les *gaps* entre les bandes d'énergie correspondant à l'Hamilotnien de Bloch se réduisent à mesure que l'énergie de la bande augmente. En reprenant l'interprétation de l'effet Landau-Zener comme un effet tunnel résonant d'une bande à une autre, on comprend que plus la bande de départ est élevée, plus la probabilité d'effectuer la transition vers une bande d'énergie supérieure est importante. Les états de Wannier-Stark ont donc une durée de vie de plus en plus réduite. Pour tenir compte de cette structure de bande, on notera désormais les valeurs propres complexes à l'aide de deux indices

$$E_{b,n} = \epsilon_{b,n} - \frac{i\Gamma_{b,n}}{2} \tag{3.3.11}$$

où b représente l'indice de bande et n l'indice de l'état de Wannier-Stark (qui correspond au puits dans lequel on se place).

Cette réduction de la durée de vie pour les bandes d'énergie élevées pourrait être un inconvénient majeur pour l'expérience puisque cette durée de vie diminue de plusieurs ordres de grandeur entre la première et la deuxième bande par exemple. En effet, si la valeur de $\Gamma_{b,n}$ obtenue par *complex scaling* pour la première bande vaut environ $\Gamma_{1,n} \simeq 10^{-19} E_r$, cette valeur monte à $\Gamma_{2,n} \simeq 4 \times 10^{-3} E_r$ pour la deuxième bande. Sachant que le temps de vie associé est donné par

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{\hbar}{\Gamma_n E_r} \\ &\simeq \frac{2.10^{-5}}{\Gamma_n}, \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

cette différence peut être à l'origine de nombreux problèmes expérimentaux si on se place dans la seconde bande puisque alors, le temps de vie de l'état de Wannier-Stark n'est plus significativement grand devant le temps nécessaire à la manipulation des atomes. Cependant, dans le cas de FORCA-G, la profondeur du puits choisie est autour de $U = 3E_r$. Or la valeur moyenne de la seconde bande de Bloch pour un piège périodique dont la profondeur serait $3E_r$ vaut $\bar{\epsilon} \simeq 5.45 E_r$. Comme on l'a vu au chapitre 1, l'énergie la plus basse de Wannier-Stark pour une bande donnée est la valeur moyenne de la bande de Bloch considérée. On voit donc que la deuxième bande n'est pas confinée par le piège tel qu'il est conçu pour FORCA-G ce qui est cohérent avec le temps de vie faible que

l'on a constaté pour cette seconde bande. Dès lors, seule la première bande et le temps de vie qui lui est associé nous intéresse. Dans ce cas, et pour les états de Wannier-Stark standards, il est largement supérieur à la durée de la mesure. On peut donc négliger l'effet Landau-Zener et considérer les états de Wannier-Stark comme des états *"pseudo-propres"* du piège. Toutefois, on a vu au chapitre 2 que la présence de la surface modifiait les valeurs propres réelles du spectre et il n'est pas inconcevable que ce soit aussi le cas de la partie imaginaire. La suite de ce chapitre concerne donc l'évaluation de cette partie imaginaire en présence de la surface.

3.4 Application au problème des états de Wannier-Stark modifiés

3.4.1 Temps de vie des états de Wannier-Stark modifiés

Comme dans le chapitre 2, nous allons procéder par étapes. La première consiste à considérer la présence de la surface comme une condition au bord en $z = 0$. Dans ce cas, on introduit une discontinuité dans le potentiel rendant la dilatation analytique au sens de Balslev-Combes impossible. Pour calculer le spectre complexe de l'Hamiltonien (2.3.2) présenté au chapitre 2 il faut donc utiliser les distortions analytiques et plus précisément la méthode dite *"exterior complex scaling"* qui consiste à ne faire la rotation dans le plan complexe que pour une partie de l'Hamiltonien. Cette méthode est très utile dans les cas où le potentiel est dilatable analytiquement au-delà d'une certaine valeur de la coordonnée notée z_0. En deçà de cette coordonnée, on conserve la partie réelle du potentiel et on effectue la rotation au-delà. Cette transformation s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} &U_\theta : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ &U_\theta\varphi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & si \quad z \leq z_0 \\ e^{\frac{i\theta}{2}}\varphi\left(z_0 + (z - z_0)e^{i\theta}\right) & si \quad z > z_0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Dans le cas d'une barrière de potentiel en $z = 0$, on choisit $z_0 = 0$ et on effectue la rotation pour la partie Wannier-Stark du potentiel. L'Hamiltonien ainsi obtenu est complexe et symétrique et de fait, non hermitien. La recherche des valeurs propres complexes de cet Hamiltonien s'effectue à l'aide de la sous-routine `zgeev` de la librairie `LAPACK` [118]. Cette sous-routine calcule les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice complexe quelconque en utilisant la décomposition de Schur de cette matrice [85]. Cette méthode repose sur la décomposition d'une matrice complexe carrée A sous la forme

$$A = MTM^H \tag{3.4.2}$$

où M est une matrice unitaire et T une matrice triangulaire supérieure complexe. De part la transformation(3.4.2), A est similaire à T, elle possède donc le même ensemble de valeurs propres. De plus, comme T est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les

valeurs de sa diagonale. Ainsi, trouver la décomposition de Schur de la matrice A permet de trouver les valeurs propres de celle-ci.

Grâce à cette décomposition, nous recherchons les valeurs propres complexes de l'Hamiltonien

$$H^{(\theta)} = \begin{cases} \infty & si \quad z \leq 0 \\ \frac{p^2}{2m_a} e^{-2i\theta} + \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2k_l z e^{i\theta})\right) - m_a g z e^{i\theta} & si \quad z > 0. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Or, si on choisit comme profondeur de puits pour le piège la valeur du piège de FORCA-G ($U = 3E_r$), on se rend compte que la partie imaginaire des valeurs propres de $H^{(\theta)}$ est beaucoup plus petite que la précision numérique de la méthode utilisée. Pour estimer le temps de vie des états de Wannier-Stark du piège avec les paramètres expérimentaux, nous avons donc opté pour une approche progressive avec des profondeurs différentes. Sachant que pour estimer la faisabilité de l'expérience, une borne inférieure de l'estimation du temps de vie est suffisante, j'ai calculé le spectre complexe de l'Hamiltonien (3.4.3) pour des profondeurs allant de $U = 0.1E_r$ à $U = 2E_r$ jusqu'à atteindre les limites de la précision numérique. Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 3.5. Sur cette

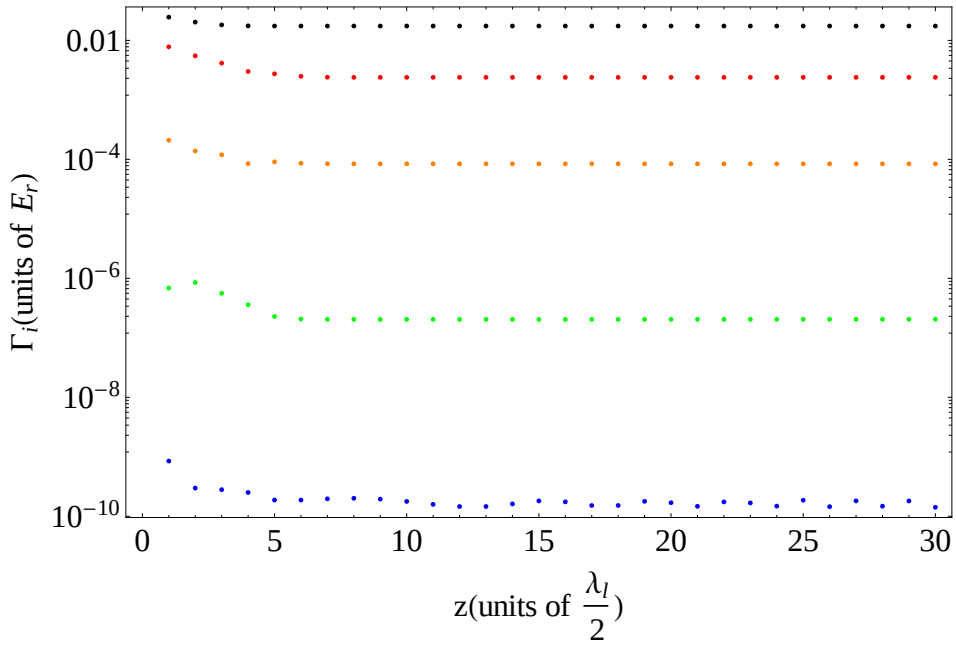


Figure 3.5 : Valeurs de la partie imaginaire du spectre pour la première bande en fonction de l'indice du puits de l'état pour différentes profondeurs de puits.

figure, on peut remarquer que lorsqu'on atteint la profondeur de $U = 2E_r$ pour les puits, la durée de vie des états dans le piège est nettement supérieure au temps disponible pour l'expérience. En effet, lorsque $U = 2E_r$, la partie imaginaire du spectre de la première

bande de Bloch vaut $\Gamma_{1,n} \simeq 1.6 \times 10^{-10}\, E_r$ ce qui correspond à un temps de vie d'environ $\tau \simeq 10^5\,\mathrm{s}$. D'un autre coté, pour des raisons expérimentales, le temps de cohérence des atomes dans le piège n'excède pas quelques secondes. Comme on le verra dans la suite (cf chap.4), le temps nécessaire à la réalisation de la mesure se situe autour de quelques centaines de millisecondes. Sachant que la durée de vie des états du piège augmente avec sa profondeur, on peut conclure que la durée de vie de ces états lorsque $U = 3E_r$ est très nettement supérieure au temps nécessaire pour réaliser la mesure. L'approximation consistant à considérer les états de Wannier-Stark modifiés comme des états propres du piège est donc toujours justifiée en présence de la surface si on considère cette surface comme une barrière de potentiel infinie. On peut cependant tenter de donner une estimation plus précise du temps de vie lorsque $U = 3E_r$ en comparant les résultats obtenus par la méthode du *complex scaling* à ceux fournis par la formule de Landau-Zener dans le cas des états de Wannier-Stark standards. Cela permettra en outre de préciser l'effet de la surface sur ces temps de vie.

3.4.2 Comparaison avec la formule de Landau-Zener

La comparaison de nos résultats obtenus par *complex scaling* avec la formule de Landau-Zener qui a démontré sa validité dans le cadre des états de Wannier-Stark standards permet de contrôler la valeur de nos propres conclusions. En effet, la présence de la surface étant pour l'heure simplement modélisée comme l'apparition d'une condition au bord en $z = 0$, on s'attend à retrouver des temps de vie similaires en ordre de grandeur à ceux obtenus par la méthode de Landau et Zener loin de la surface. La comparaison entre nos résultats et la formule (3.2.2) est présentée sur la figure 3.6. Sur cette figure, on a tracé en haut la fonction

$$\Gamma(U) = \frac{m_a^2 g}{2\hbar^2 k_l^3} e^{-2\pi \frac{\Delta(U)}{\alpha}} \tag{3.4.4}$$

où on a posé $\alpha = \frac{m_a^2 g}{8\hbar^2 k_l^3}$ et $\Delta(U) = \frac{\bar{\epsilon_2} - \bar{\epsilon_1}}{16}$ est la taille du premier *gap* en énergie en fonction de la profondeur du piège. Sur la figure du bas est tracée la fonction donnant le temps de vie définie par

$$\tau_{b,n}(U) = \frac{\hbar}{E_r \Gamma_{b,n}(U)}. \tag{3.4.5}$$

On a aussi reporté sur la figure 3.6 certaines prédictions de la formule de Landau-Zener pour des profondeurs particulières, représentées sur la figure par les lignes horizontales pointillées, ainsi que les points calculés par *complex scaling* (en rouge) pour les profondeurs correspondantes. La valeur calculée par *complex scaling* l'est pour les puits loin de la surface afin de comparer la valeur moyenne du temps de vie dans la bande concernée. On constate alors que la courbe donnée par la formule de Landau-Zener correspond assez bien aux points calculés numériquement. On en déduit que la formule de Landau-Zener fournit une bonne approximation du temps de vie des états de Wannier-Stark modifiés du piège

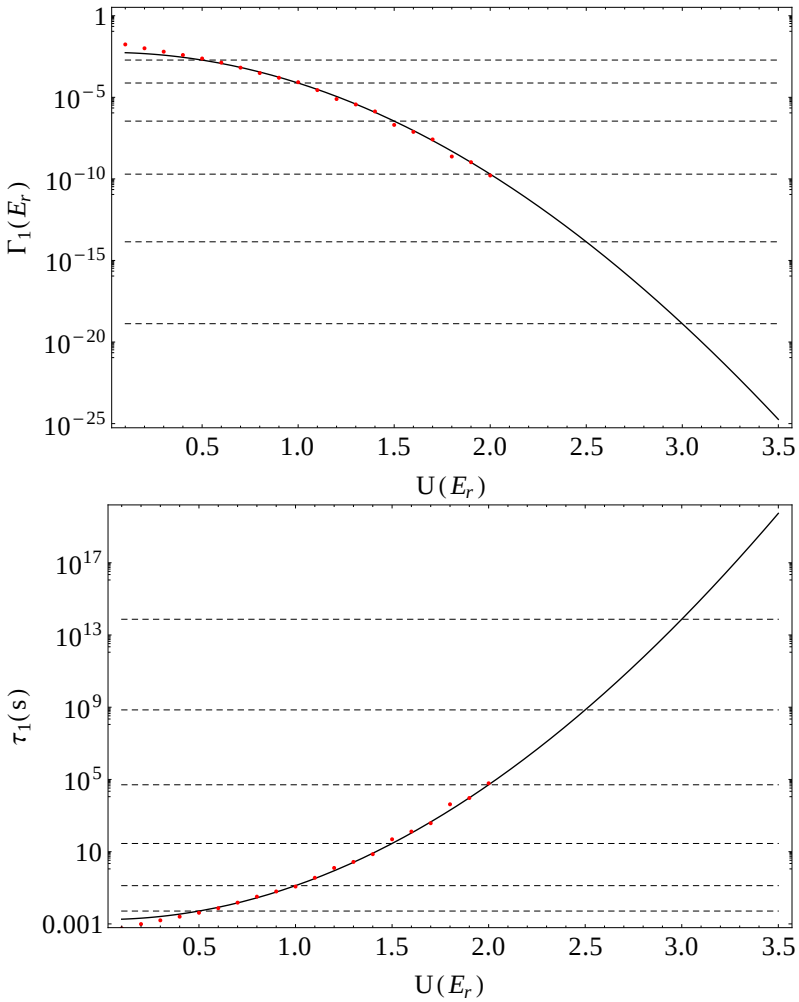


Figure 3.6 : Comparaison de $\Gamma_{1,n}$ (en haut) et des temps de vie $\tau_{1,n}$ (en bas) de la première bande entre le calcul par *complex scaling* (points rouges) et l'approximation de Landau-Zener (courbe noire) en fonction de l'amplitude de l'onde stationnaire U. Les traits horizontaux pointillés représentent la valeur du temps de vie calculé par la formule de Landau-Zener pour des valeurs particulières de U ($U = 0.5E_r$,$U = 1E_r$,$U = 1.5E_r$,$U = 2E_r$,$U = 2.5E_r$ et $U = 3E_r$)

lorsque l'on considère la surface comme une condition au bord. De sorte que cette formule nous donne une estimation de la durée de vie d'un état de Wannier-Stark modifié lorsque la profondeur du piège vaut $U = 3E_r$. Cette estimation donne un temps de vie pour la première bande et lorsque $U = 3E_R$ de l'ordre de $\tau_{1,n}(U = 3E_r) \simeq 10^{14}s$ ce qui représente une fraction non négligeable de l'âge de l'Univers et valide complètement l'approximation consistant à considérer les états de Wannier-Stark comme des états propres du piège. Il reste cependant à s'assurer que la présence des interactions dues à la surface telles que les modifications de la loi de Newton ou l'effet Casimir-Polder ne réduisent pas drastiquement cette durée de vie, c'est ce à quoi on va s'intéresser à la fin de ce chapitre.

3.5 Le cas d'un atome au dessus de la surface

Avant de regarder plus en détail l'effet des interactions à courte distance sur les états résonants du piège, il est intéressant de se pencher sur le cas où l'on place les atomes au-dessus de la surface plutôt qu'en-dessous. Cette étude présente de nombreux avantages. Tout d'abord, dans cette configuration, le potentiel piège s'écrit

$$V(z) = \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2k_l z)\right) + m_a g z \tag{3.5.1}$$

qui représente, dans le cas où on modélise la surface comme une barrière de potentiel infinie, un puits de potentiel. Ceci implique que les états atomiques associés sont de véritables états propres et non des résonances. Le calcul de ces états à l'aide de la méthode du *complex scaling* fournit donc une vérification supplémentaire de la validité de la méthode puisqu'on s'attend à avoir, dans ce cas, la partie imaginaire du spectre exactement nulle. Après rotation de l'Hamiltonien du système dans le plan complexe, on obtient effectivement des états propres dont la partie imaginaire est nulle. La méthode semble donc là encore validée.

De plus, le fait d'avoir des états liés dans le cas d'une barrière infinie permet d'étudier le comportement des résonances si on autorise dans une certaine mesure la pénétration de la surface par l'atome. On modélise cela par une barrière de potentiel de hauteur V_0 comme présentée sur la figure 3.7. Comme précédemment, on effectue la rotation de l'Hamiltonien

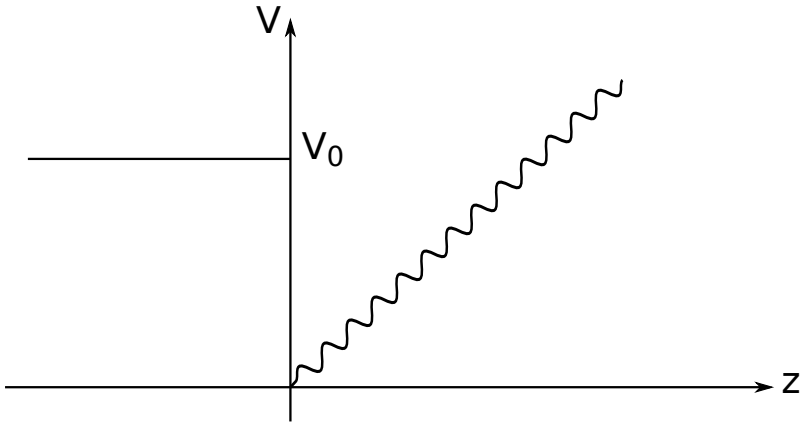


Figure 3.7 : Schéma du potentiel modélisant le cas d'un atome au-dessus d'une surface.

dans le plan complexe avant de résoudre l'équation de Schrödinger. Pour étudier le phénomène de manière la plus complète possible, on se place tout d'abord dans le cas d'un piège périodique très peu profond e.g. $U = 1E_r$ de façon à ce que les temps de vie des résonances soient facilement extraits du spectre des valeurs propres. Les résultats de cette résolution pour différentes valeurs de la hauteur de la barrière V_0 sont présentés sur la figure 3.8. Sur

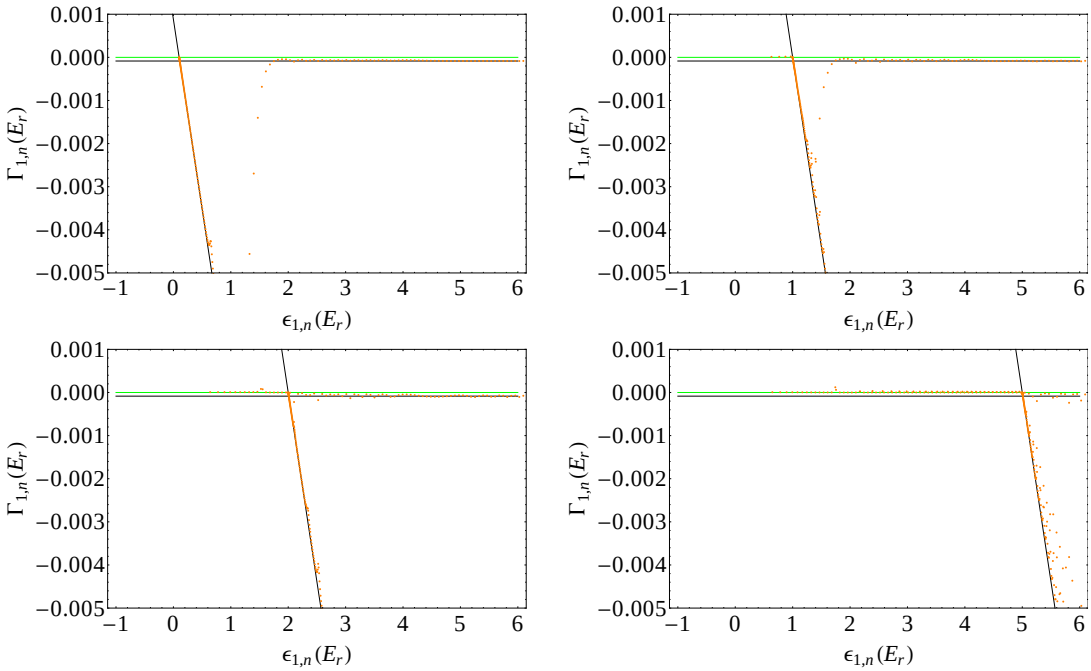


Figure 3.8 : Spectre des valeurs propres pour un atome au dessus d'une surface non infinie. La profondeur du potentiel périodique vaut $U = 1E_r$ tandis que les hauteurs de barrière choisies sont (de gauche à droite et de haut en bas) $V_0 = 0.1E_r$, $1E_r$, $2E_r$ et $5E_r$. Sur ces figure, la droite noire de pente 2θ représente la droite où se répartissent les états du continuum, la droite horizontale noire matérialise les états propres ayant une durée de vie infinie ($\Gamma_{1,n} = 0$), la droite horizontale verte quant à elle représente les états de Wannier-Stark classiques pour $U = 1E_r$ dont la partie imaginaire vaut $\Gamma_{1,n} = -8.5.10^{-5}E_r$ tandis que les points oranges sont les états calculés.

ces figures, on isole assez clairement les états du continuum qui se répartissent sur une droite de pente 2θ, θ étant l'angle de rotation de l'Hamiltonien. On observe aussi, pour des barrières suffisamment élevées l'apparition d'états liés à gauche du continuum. Enfin, tous les états à droite du continuum sont des états résonants semblables aux états de Wannier-Stark dont la durée de vie est comparable à celle estimée par la formule de Landau-Zener. On remarque aussi une série d'états de transition entre les états résonants très stables avec une durée de vie assez longue et les états du continuum. Ces états sont difficiles à classer et représentent en fait une transition entre les états du continuum et les états résonants.

Pour mieux comprendre la dynamique de ces états transitionnels, on peut se placer dans un puits plus profond (on choisit ici $U = 4E_r$) pour regarder le comportement de ces états lorsqu'on modifie la boîte numérique de résolution du problème aux valeurs propres. Pour cette étude on a choisit d'utiliser une barrière représentant la surface de hauteur $V_0 = 1.9E_r$ qui présente l'avantage de fournir quelques états propres permettant de véri-

fier la convergence de la méthode et de nombreux états résonants et transitoires. La figure 3.9 montre l'évolution du spectre avec la taille de la boîte. On vérifie dans un premier

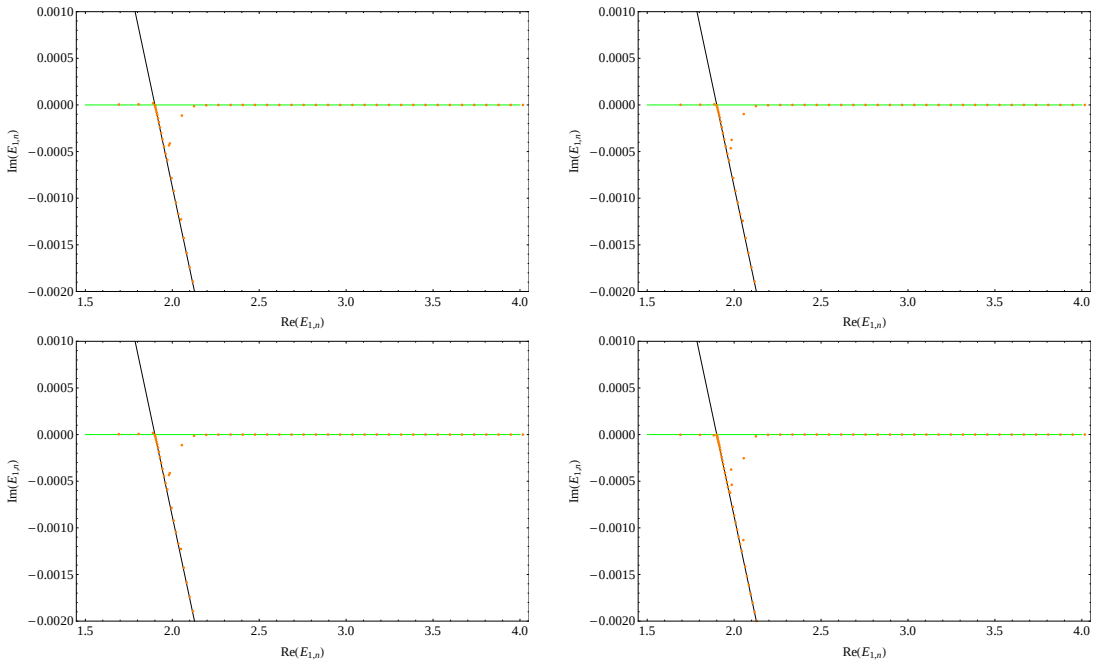


Figure 3.9 : Spectre complexe pour des atomes piégés dans un potentiel périodique d'amplitude $U = 4E_r$ face à une barrière de hauteur $V_0 = 1.9E_r$ pour des boîtes numériques de taille différentes. Les deux graphiques du haut correspondent à une modification de la borne droite de la boîte ($[-50, 50]$ et $[-50, 80]$ en unité de $\lambda_l/2$). Les deux du bas présentent une modification de la borne gauche ($[-50, 50]$ et $[-80, 50]$ en unité de $\lambda_l/2$).

temps que la partie réelle des états qui nous intéressent est bien stable par rapport à la modification de la taille de la boîte. Cela penche en faveur de l'argument consistant à considérer ces états comme des résonances d'autant que l'écart entre les parties réelles de deux valeurs propres successives est compatible avec celui attendu pour des états de Wannier-Stark.

Intéressons-nous maintenant à la partie imaginaire de ces états. Sur les deux premiers graphiques de la figure 3.9, on a changé la taille de la boîte à droite. On s'aperçoit alors que la partie imaginaire des valeurs propres semble stable. En revanche, sur les deux graphiques suivants, on voit qu'en augmentant la taille de la boîte à gauche, ces mêmes parties imaginaires ne sont plus stables. Cela se comprend en observant les fonctions d'onde associés aux états transitoires. La figure 3.10 montre la fonction d'onde associée à la valeur propre réelle $E_n = 2.05E_r$. On y voit que si la fonction d'onde tend relativement rapidement vers 0 à droite, elle oscille indéfiniment du coté gauche de la boîte. Il est donc normal que la valeur propre qui lui est associée soit stable si l'on change la taille de la boîte (et donc les

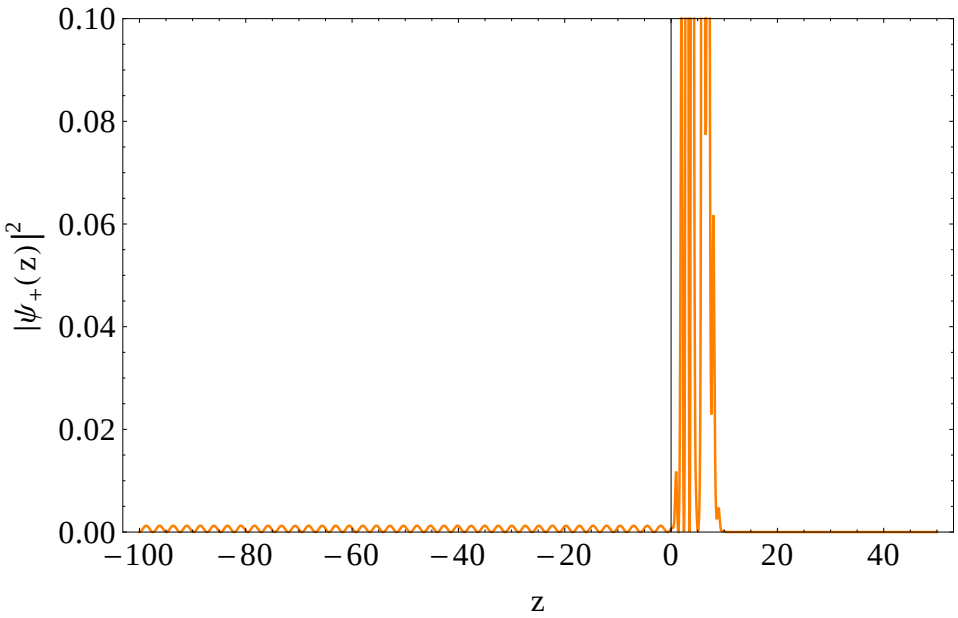


Figure 3.10 : Fonction d'onde de l'état associé à l'énergie $E_n = 2.05E_r$.

conditions aux limites numériques) à droite alors que ce n'est pas le cas à gauche puisque le résultat va dépendre du nombre d'oscillations alors prises en compte. On comprend avec cette figure que les états que l'on a désignés comme transitionnels au début de cette section le sont effectivement dans le sens où ce ne sont pas complètement des états du continuum puisque la partie oscillante est d'amplitude très faible par rapport au pic principal de la fonction d'onde mais en même temps on ne peut pas vraiment parler de résonance puisque ces états ne sont pas normalisables dans le plan complexe.

Avec cette étude complémentaire, nous avons montré que le fait de placer les atomes au-dessus d'une surface finie donnait lieu à une physique intéressante notamment aux niveaux des états transitionnels mais aussi utile pour comprendre les enjeux de la méthode du *complex scaling*. Mais on remarque aussi que ces effets apparaissent pour de très faibles hauteurs de barrières. En effet, pour observer des états résonants, la barrière doit être du même ordre de grandeur que la profondeur du piège périodique. On peut se convaincre facilement que dans la cas d'un atome face à un miroir macroscopique, cette barrière est beaucoup plus élevée que la profondeur du piège. Le calcul des résonances que l'on vient de décrire nous permet donc de nous conforter dans l'approximation que l'on a faite pour les calculs avec l'atome en dessous de la surface consistant à considérer la barrière comme infinie notamment dans le calcul des temps de vie des atomes dans le piège.

3.6 Introduction du potentiel de Yukawa

Revenons maintenant au cas où les atomes sont en dessous de la surface pour étudier l'effet des interactions à courte portée. Dans un premier temps, regardons les effets de la déviation du potentiel gravitationnel que l'on recherche sur le temps de vie des états du piège associés. On s'attend à ce que cette modification soit relativement faible aux vues de celle induite sur la partie réelle du spectre calculée dans le chapitre 2. Pour mener ce calcul, considérons l'Hamiltonien

$$H^{(\theta)} = \begin{cases} \infty & si \quad z \leq 0 \\ \frac{p^2}{2m_a} e^{-2i\theta} + \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2k_l z e^{i\theta})\right) - m_a g \frac{\lambda_l}{2E_R} z e^{i\theta} + 2\pi\alpha_y G \rho_S m_a \lambda_y^2 e^{-\frac{2ze^{i\theta}}{\lambda_y}} & si \quad z > 0, \end{cases} \tag{3.6.1}$$

où l'on a ajouté le potentiel de Yukawa utilisé au chapitre 2 et effectué la même transformation complexe que dans les sections précédentes. Comme précédemment, on a résolu le problème en utilisant la sous-routine `zgeev` de `LAPACK`. Le spectre résultant est présenté sur la figure 3.11. Cette figure montre en sus la comparaison de ce spectre avec celui ob-

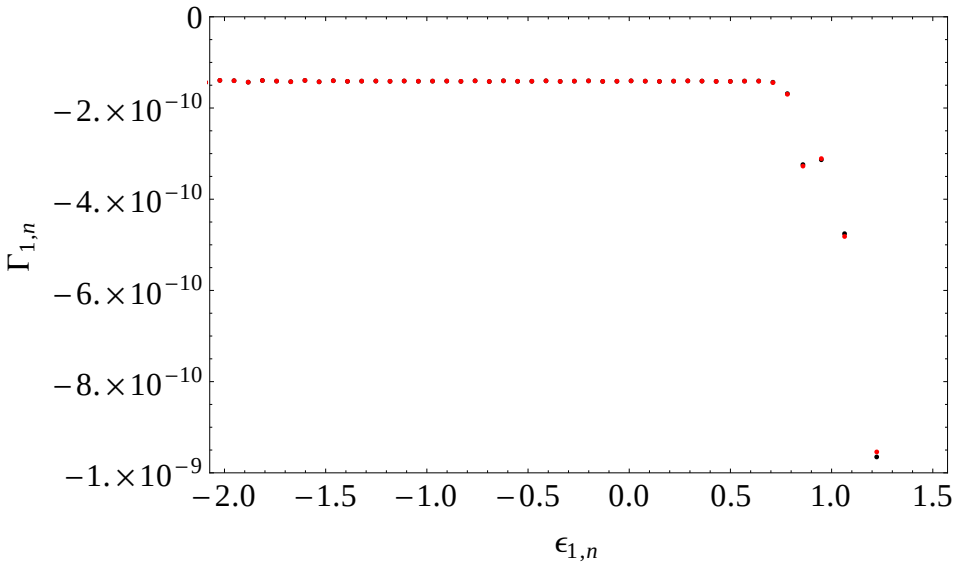


Figure 3.11 : Spectre complexe de l'Hamiltonien en présence d'une déviation à la loi de Newton (points rouges) comparé avec celui sans déviation (points noirs) pour une profondeur de piège $U = 2E_r$. Ici on a choisi α_y et λ_y de sorte que la déviation hypothétique soit maximale pour chaque puits (cf chap.2).

tenu en l'absence de déviation à la loi de Newton. Comme attendu, la correction de la partie imaginaire du spectre due à l'adjonction d'un potentiel de Yukawa à l'Hamiltonien n'est pas très importante. On voit aussi que cette modification est plus sensible lorsqu'on s'approche de la surface ce qui était également attendu sachant que le potentiel gravita-

tionnel est plus sensible à courte distance de la masse source de ce potentiel (ici la surface). Comme dans le cas des états de Wannier-Stark modifiés, le temps de vie des états du piège en présence d'un potentiel de Yukawa additionel dû à la surface reste donc très supérieure à la durée de l'expérience. Cette étude a montré que, même en présence d'une déviation hypothétique de la loi de Newton à courte distance, le temps de vie des états résonants du piège est suffisament long pour considérer ces états comme pseudo-propres sur l'échelle de temps de l'expérience.

3.7 Le problème de l'effet Casimir-Polder

On s'est assuré dans les sections précédentes que la présence de la surface traitée comme une barrière finie ou infinie en $z = 0$ ainsi que l'addition d'une modification de la loi de Newton à courte distance, ne réduisait pas de manière importante le temps de vie des états du piège et validait l'approximation consistant à considérer ces états comme des états pseudo-propres. Cependant, on n'a pas encore pris en compte la présence de l'effet Casimir-Polder dont on a constaté, dans le chapitre 2, qu'il était l'effet dominant à courte distance. C'est à ce problème que l'on va s'intéresser maintenant.

3.7.1 Théorie des perturbations non-hermitienne

Dans les chapitres 1 et 2, on a vu que la formule modélisant l'effet Casimir-Polder provenait du traitement perturbatif au deuxième ordre de l'Hamiltonien d'interaction entre le champ électromagnétique quantifié entre la surface et l'atome et l'atome lui-même. Cependant, la théorie des pertubations stationnaires repose sur les postulats fondamentaux de la mécanique quantique et plus particulièrement sur l'hypothèse que les Hamiltoniens traités sont tous hermitiens. Or, on a vu que la rotation dans le plan complexe de l'Hamiltonien traité associée à la méthode du *complex scaling* conduisait à considérer des Hamiltoniens non hermitiens. Afin d'effectuer le calcul de la modification du spectre complexe par l'effet Casimir-Polder il faut donc au préalable redéfinir les concepts fondamentaux de la mécanique quantique sans l'hypothèse d'hermiticité. Cette redéfinition a fait l'objet d'un ouvrage paru en 2011 [119] donnant les principes fondateurs d'une nouvelle mécanique quantique fondée sur un formalisme non-hermitien.

La première étape vers la reformulation de la mécanique quantique pour des opérateurs non-hermitiens est la redéfinition d'un produit scalaire [119, 120]. En effet, l'hypothèse de base de la mécanique quantique standard est de considérer qu'une solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps $|\varphi(t)\rangle$ décrit le système étudié pour chaque instant t et que chaque quantité mesurable du système peut être déduite de $|\varphi(t)\rangle$. Chaque propriété dynamique O est alors représentée par un opérateur $\hat{O}$. Dans la description quantique

standard, la projection de $|\varphi(t)\rangle$ sur un état propre spécifique de $\hat{O}$ donne la probabilité de mesurer la valeur propre correspondante de $\hat{O}$. La projection de $|\varphi(t)\rangle$ sur un état propre de $\hat{O}$ $|n\rangle$ est calculé à l'aide du produit scalaire de deux fonctions analytiques de carré sommable. La question qui se pose alors est de savoir comment extraire une quantité mesurable spécifique à partir d'une solution de l'équation de Schrödinger dans le contexte d'un formalisme non-hermitien. Ceci nécessite la redéfinition du produit scalaire de sorte qu'il conserve une partie des propriétés du produit scalaire usuel [120].

Plus précisément, on souhaite conserver l'orthogonalité entre deux fonctions propres non dégénérées de l'Hamiltonien non-hermitien ainsi que la relation de fermeture entre deux états propres d'un opérateur $\hat{O}$ qui illustre le fait que l'ensemble des valeurs propres d'un opérateur forment un ensemble complet de l'espace de définition de l'opérateur. Considérons donc l'état propre d'un opérateur $\hat{O}^{(\theta)}$ non-hermitien $|\varphi_n^{(\theta)})$ et associons lui les fonctions propres du problème aux valeurs propres

$$\hat{O}^{(\theta)}|\varphi_n^{(\theta)}) = \lambda_n^{(\theta)}|\varphi_n^{(\theta)}). \tag{3.7.1}$$

Dans l'équation (3.7.1), on a noté l'état $|\varphi_n^{(\theta)})$ afin de le différencier de la notation de Dirac standard utilisée dans le cas hermitien. Par analogie avec le cas hermitien, on impose que le nouveau produit scalaire, que l'on appellera le *"c-produit"*, satisfasse la condition d'orthogonalité des états propres de $\hat{O}^{(\theta)}$ de sorte que

$$(\varphi_{n'}^{(\theta)}|\varphi_n^{(\theta)}) = \delta_{n',n}. \tag{3.7.2}$$

L'élement clé de la description du nouveau produit est la garantie que le problème différentiel (3.7.1) puisse être transformé en problème aux valeurs propres c'est-à-dire que l'on puisse écrire l'opérateur $\hat{O}^{(\theta)}$ sous forme une matricielle telle que

$$\begin{cases} \boldsymbol{O}^{(\theta)}\boldsymbol{C}_n^{(\theta)} & = \lambda_n^{(\theta)}\boldsymbol{C}_n^{(\theta)} \\ \left[\boldsymbol{D}_m^{(\theta)}\right]^T\boldsymbol{O}^{(\theta)} & = \lambda_m^{(\theta)}\left[\boldsymbol{D}_m^{(\theta)}\right]^T \\ \left[\boldsymbol{D}_{m\neq n}^{(\theta)}\right]^T\boldsymbol{C}_n^{(\theta)} & = 0 \end{cases} \tag{3.7.3}$$

où $\boldsymbol{C}_n^{(\theta)}$ et $[\boldsymbol{D}_m^{(\theta)}]^T$ sont respectivement définis comme les vecteurs propres gauche et droite de la matrice $\boldsymbol{O}^{(\theta)}$. A l'aide de ces vecteurs propres, on peut définir les états propres de l'opérateur $\hat{O}^{(\theta)}$ comme

$$\begin{aligned} (x|\varphi_n^{(\theta)}) &\equiv \sum_j C_{j,n} f_j(x) \\ (\varphi_m^{(\theta)}|x) &\equiv \sum_j D_{j,m} f_j^*(x). \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

Sachant qu'une matrice quelconque possède le même spectre de valeurs propres que sa transposée, il est évident que $\boldsymbol{C}_n^{(\theta)}$ et $[\boldsymbol{D}_n^{(\theta)}]^T$ sont associés à la même valeur propre $\lambda_n^{(\theta)}$. Ainsi, le *c-produit* est défini par

$$(\varphi_m^{(\theta)}|\varphi_n^{(\theta)}) = \sum_j D_{j,m}C_{j,n} = \delta_{m,n}. \tag{3.7.5}$$

Lorsqu'on utilise une base de fonctions réelles $\{f_j(x)\}_{j=1,2,...}$ pour écrire les états $|\varphi_n^{\theta})$ et que la matrice non transformée $\boldsymbol{O}^{(\theta=0)}$ est réelle et symétrique, alors la transformation rend cette matrice complexe et symétrique. Ceci implique que lorsque l'opérateur initial est réel et hermitien, alors les fonctions propres non dégénérées de l'opérateur transformé $\hat{O}^{(\theta)}$ sont orthonormales par rapport au *c-produit*

$$(\varphi_m^{(\theta)}|\varphi_n^{(\theta)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^{(\theta)}(x)\varphi_n^{(\theta)}(x)dx = \delta_{m,n}. \tag{3.7.6}$$

Enfin, on retrouve l'équivalent d'une relation de fermeture pour les opérateurs non-hermitiens telle que

$$\sum_n |\varphi_n^{(\theta)})(\varphi_n^{(\theta)}| = \mathbb{1}. \tag{3.7.7}$$

Grâce à la définition de cet équivalent du produit scalaire pour des opérateurs non-hermitiens, on peut retrouver des analogues complexes pour l'ensemble des théorèmes de la mécanique quantique standard [121–123]. En particulier, on va pouvoir écrire un analogue complexe de la théorie des perturbations que l'on appliquera par la suite au calcul de l'effet Casimir-Polder.

Toute la reformulation de la mécanique quantique pour des Hamiltoniens rendus non-hermitiens par *complex scaling* se justifie par l'analogue complexe du principe variationnel que nous allons décrire rapidement ici. Comme on l'a dit précédemment, on peut imposer que les fonctions propres de $\hat{H}^{(\theta)}$ forment un ensemble complet normalisable au sens du *c-produit*. Dans ce cas,

$$\bar{E}^{(\theta)} = \frac{(\phi|\hat{H}^{(\theta)}|\phi)}{(\phi|\phi)} \tag{3.7.8}$$

donne une approximation de la valeur propre complexe $E_n^{(\theta)}$ de $\hat{H}^{(\theta)}$ lorque ϕ est une approximation *c-normalisable* (i.e. $(\phi|\phi) = 1$) de la fonction propre $\varphi_n^{(\theta)}$ de $\hat{H}^{(\theta)}$. En d'autres termes,

$$\phi = \varphi_n^{(\theta)} + \delta(\varepsilon) \Rightarrow \bar{E}^{(\theta)} = E_n^{(\theta)} + \delta(\varepsilon^2). \tag{3.7.9}$$

Ce principe variationnel complexe sert de base à toutes les redéfinitions des concepts de la mécanique quantique dans le cas des opérateurs non-hermitiens. En particulier, il permet de retrouver le spectre complexe comme la solution d'un problème aux valeurs propres

matriciel.

Considérons l'expansion des fonctions $|phi)$ sur une base de N fonctions orthogonales $\{|\chi_i\rangle\}_{i=1,...,N}$

$$\begin{aligned} |\phi) &= \sum_{j=1}^{N} C_j^R |\chi_j\rangle \\ (\phi| &= \sum_{i=1}^{N} C_i^L \langle\chi_i|. \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

En substituant les expressions de $|\phi)$ et $(\phi|$ dans l'expression 3.7.8 on obtient

$$\sum_{i,j} C_i^L C_j^R \left(H_{ij}^{(\theta)} - \bar{E}^{(\theta)} \delta_{ij} \right) = 0 \tag{3.7.11}$$

avec

$$H_{ij}^{(\theta)} = \langle\chi_i|\hat{H}^{(\theta)}|\chi_j\rangle. \tag{3.7.12}$$

Sur la base du principe variationnel énoncé en (3.7.8) et(3.7.9), on impose

$$\frac{\partial \bar{E}^{(\theta)}}{\partial C_i^L} = 0 \qquad pour \quad i = 1, 2, ...N \tag{3.7.13}$$

de sorte que l'on obtienne

$$\sum_{j=1}^{N} C_j^R \left(H_{ij}^{(\theta)} - \bar{E}^{(\theta)} \delta_{ij} \right) = 0 \tag{3.7.14}$$

que l'on peut réécrire sous forme matricielle

$$\boldsymbol{H}^{(\theta)} \boldsymbol{C}^R = \bar{\boldsymbol{E}}^{(\theta)} \boldsymbol{C}^R \tag{3.7.15}$$

où $\bar{\boldsymbol{E}}^{(\theta)}$ est une matrice diagonale.

Intéressons nous maintenant plus particulièrement à l'analogue de la théorie des perturbations pour un Hamiltonien non-hermitien [114,124,125]. Considérons donc l'Hamiltonien non-hermitien

$$\hat{H}^{(\theta)} = \hat{H}_0^{(\theta)} + W^{(\theta)} \tag{3.7.16}$$

où $\hat{H}_0^{(\theta)}$ est l'Hamiltonien d'ordre 0 dont on connaît les valeurs propres et $W^{(\theta)}$ est la perturbation qui nous intéresse. Grâce au principe variationnel complexe nouvellement défini, on peut écrire la correction des valeurs propres de l'Hamiltonien $\hat{H}_0^{(\theta)}$ due à la perturbation de façon similaire à celle de la théorie des perturbations hermitienne. Ainsi la correction des niveaux d'énergies au premier ordre s'écrira

$$\Delta E_n^{(1)} = (\varphi_n^{(0)}|W^{(\theta)}|\varphi_n^{(0)}) \tag{3.7.17}$$

où $|\varphi_n^{(0)})$ est l'état non perturbé. Pour alléger la notation, on a décidé ici de ne plus noter explicitement l'exposant (θ) pour les fonctions soumises à la rotation complexe. De la même façon la correction au deuxième ordre est donnée par

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{\left[(\varphi_k^{(0)}|W^{(\theta)}|\varphi_n^{(0)})\right]^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}. \tag{3.7.18}$$

On note ici qu'on a pris le carré du terme au numérateur et non sa norme au carré. Cela provient de la définition particulière du *c-produit* donnée par l'équation (3.7.6) qui ne fait pas intervenir le complexe conjugué de la fonction d'onde. Avec cette redéfinition de la théorie des perturbations pour le cas non-hermitien, nous allons pouvoir tenter d'appliquer l'approche du *complex scaling* à l'interaction entre un atome et un champ électromagnétique dans le but de quantifier la modification des temps de vie du piège induite par l'effet Casimir-Polder.

3.7.2 Traitement perturbatif de l'Hamiltonien d'interaction champ-atome

Avant de démarrer tout calcul de type *complex scaling*, il convient de s'assurer que le potentiel que l'on s'apprête à traiter répond aux conditions mathématiques de la méthode. L'Hamiltonien qui nous intéresse est l'Hamiltonien des équations (2.4.1) et (2.4.3) du chapitre 2.

Le terme H_{WS} associé à l'état externe de l'atome en l'absence d'effet Casimir-Polder est analytique sur l'intervalle $[0,\infty[$ et c'est justement ce qui nous a permis d'utiliser le *complex scaling* pour estimer les temps de vie dans le piège en présence du seul potentiel périodique. De même, les opérateurs H_{at} et H_f ne présentent aucune singularité sur leur domaine de définition ce qui assure l'existence d'une expansion en série de Taylor pour ces opérateurs et par là même leur analyticité. Reste le cas de l'Hamiltonien d'interaction H_{int} que l'on a écrit comme (voir chap.2)

$$\begin{aligned} H_{int} &= -\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{i}{\pi}\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0}}\big(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{f}_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})\big)\big(a_p(\mathbf{k},k_z) - a_p^\dagger(\mathbf{k},k_z)\big)\big(S_+ + S_-\big). \end{aligned} \tag{3.7.19}$$

Ce potentiel est lui aussi analytique puisque ne présentant pas de singularité. On va donc tenter d'utiliser la théorie des perturbations non-hermitienne pour trouver la modification du spectre complexe des résonances en présence d'effet Casimir-Polder. Prenons l'Hamiltonien non perturbé

$$H_0 = H_{WS} + H_f + H_{at} \tag{3.7.20}$$

et soumettons-le à la transformation U_θ donnée par l'équation (3.4.1). L'Hamiltonien résultant

$$H_0^{(\theta)} = U_\theta(\theta) H_0 U_\theta^{-1} \tag{3.7.21}$$

possède un état propre produit que l'on peut écrire

$$|\varphi_{m,1}^{(0)}) = |g\rangle|0_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle\rangle|m, 1) \tag{3.7.22}$$

par analogie avec le cas hermitien développé dans le chapitre 2. On remarque dans l'expression (3.7.22) que l'on n'utilise la notation provenant de la définition du *c-produit* que pour l'état externe de l'atome $|m, 1)$. En effet, appliquer la transformation (3.4.1) sur les Hamiltoniens H_{at} et H_f ne les modifie pas. Leurs états propres ne sont donc pas affectés par la transformation non plus.

À partir de cet état non perturbé, on peut écrire la correction au deuxième ordre pour les niveaux d'énergie (on rappelle que la correction au premier ordre est nulle en raison des propriétés de l'opérateur de moment dipolaire)

$$\Delta E_{m,1}^{(2)} = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\left[(\varphi_{m,1}^{(0)}|H_{int}^{\theta}|e\rangle|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle|n, b)\right]^2}{E_{n,b}^{(0)} - E_{m,1}^{(0)} + \hbar(\omega + \omega_0)} \tag{3.7.23}$$

où l'on a réutilisé les notations du chapitre 2 et où

$$\begin{aligned} H_{int}^{(\theta)} &= U_\theta H_{int} U_\theta^{-1} \\ &= -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}e^{i\theta}). \end{aligned} \tag{3.7.24}$$

On peut alors simplifier l'expression (3.7.23) en remarquant que dans le cas d'un piège tel que celui de FORCA-G, les bandes de Bloch plus hautes en énergie que la deuxième ne sont pas piégées. Les fonctions d'onde qui leur sont associées sont donc des fonctions d'onde du continuum et leur recouvrement avec les états de la première bande est négligeable. On peut donc limiter la somme sur b à ses deux premiers termes. De plus, on a vu au chapitre 2 que les fonctions d'onde de Wannier-Stark modifiées s'étendaient au maximum sur une vingtaine de puits. On peut donc limiter la somme sur n aux dix puits de part et d'autre de celui dont on calcule la correction et écrire

$$\begin{aligned} \Delta E_{m,1}^{(2)} = &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \frac{\left[(\varphi_{m,1}^{(0)}|H_{\text{int}}^{(\theta)}|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle|e\rangle|n, 1)\right]^2}{E_{n,1}^{(0)} - E_{m,1}^{(0)} + \hbar(\omega + \omega_0)} \\ &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \frac{\left[(\varphi_{m,1}^{(0)}|H_{\text{int}}^{(\theta)}|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle|e\rangle|n, 2)\right]^2}{E_{n,2}^{(0)} - E_{m,1}^{(0)} + \hbar(\omega + \omega_0)}. \end{aligned} \tag{3.7.25}$$

Dans cette expression, la différence entre les parties réelles des énergies de Wannier-Stark $E_{n,b}^{(0)}$ sont de l'ordre de l'énergie de recul des photons du piège

$$E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_a} \tag{3.7.26}$$

soit, pour un atome de rubidium ($m_a \simeq 1.44 \times 10^{-25}\,\mathrm{kg}$) piégé dans un réseau optique de longueur d'onde $\lambda_l = \frac{2\pi}{k_l} = 532\,\mathrm{nm}$ de l'ordre de $10^{-11}\,\mathrm{eV}$. D'un autre coté, l'énergie de la transition atomique $\hbar\omega_0$ est de l'ordre de l'électronvolt. On peut donc sans risque négliger la partie réelle des énergies de Wannier-Stark au dénominateur et obtenir

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{m,1} = &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \frac{\left[(\varphi^{(0)}_{m,1}|H^{(\theta)}_{\mathrm{int}}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,1)\right]^2}{-i\frac{\Delta\Gamma_{1,1}}{2} + \hbar(\omega+\omega_0)} \\ &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \frac{\left[(\varphi^{(0)}_{m,1}|H^{(\theta)}_{\mathrm{int}}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,2)\right]^2}{-i\frac{\Delta\Gamma_{2,1}}{2} + \hbar(\omega+\omega_0)}.\end{aligned} \tag{3.7.27}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{m,1} = &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \big(\hbar(\omega+\omega_0) + i\frac{\Delta\Gamma_{1,1}}{2}\big) \frac{\left[(\varphi^{(0)}_{m,1}|H^{(\theta)}_{\mathrm{int}}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,1)\right]^2}{\frac{\Delta\Gamma^2_{1,1}}{4} + \hbar^2(\omega+\omega_0)^2} \\ &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \big(\hbar(\omega+\omega_0) + i\frac{\Delta\Gamma_{2,1}}{2}\big) \frac{\left[(\varphi^{(0)}_{m,1}|H^{(\theta)}_{\mathrm{int}}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,2)\right]^2}{\frac{\Delta\Gamma^2_{2,1}}{4} + \hbar(\omega+\omega_0)^2}\end{aligned} \tag{3.7.28}$$

où $\Delta\Gamma_{b,1} = \Gamma_{n,b} - \Gamma_{m,1}$. Dans l'expression (3.7.28), on peut en outre remarquer que les termes multipliés par $i\frac{\Delta\Gamma_{b,1}}{2}$ sont négligeables devant tous les autres. En effet, le calcul de la durée de vie des états de Wannier-Stark effectué dans la section 3.4 permet d'estimer que

$$\begin{cases} \Delta\Gamma_{2,1} \gg \Delta\Gamma_{1,1} \\ \Delta\Gamma_{2,1} \simeq 10^{-13}\,\mathrm{eV}. \end{cases} \tag{3.7.29}$$

Pour la même raison, on va aussi négliger $\Delta\Gamma_{b,1}$ au dénominateur ce qui nous ammène à l'expression

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{m,1} = &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \frac{\left[(\varphi^{(0)}_{m,1}|H^{(\theta)}_{\mathrm{int}}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,1)\right]^2}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\ &-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \frac{\left[(\varphi^{(0)}_{m,1}|H^{(\theta)}_{\mathrm{int}}|1_p(\mathbf{k},k_z)\rangle|e\rangle|n,2)\right]^2}{\hbar(\omega+\omega_0)}.\end{aligned} \tag{3.7.30}$$

En introduisant, dans cette expression la relation de fermeture sur la coordonnée spatiale z, on obtient finalmement

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{m,1} = &\int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} dz' \sum_{n=m-10}^{m+10} \Big(-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \\ &\Big[\frac{\big(m,1|z\big)\big(z|A^{(\theta)}_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})|n,1\big)\big(m,1|z'\big)\big(z'|A^{(\theta)}_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r}')|n,1\big)}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\ &+ \frac{\big(m,1|z\big)\big(z|A^{(\theta)}_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r})|n,2\big)\big(m,1|z'\big)\big(z'|A^{(\theta)}_p(\mathbf{k},k_z,\mathbf{r}')|n,2\big)}{\hbar(\omega+\omega_0)}\Big]\Big)\end{aligned} \tag{3.7.31}$$

où l'on a défini

$$\begin{aligned} A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) &= \langle 0_p(\mathbf{k}, k_z)|\langle g|H_{\text{int}}^{(\theta)}|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle|e\rangle \\ &= -\langle 0_p(\mathbf{k}, k_z)|\langle g|\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E}(\mathbf{r}e^{i\theta})|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle|e\rangle. \end{aligned} \tag{3.7.32}$$

L'opérateur $\boldsymbol{\mu}$ agit sur les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ et est antisymétrique de sorte que l'on peut noter

$$\mu_{eg} = \mu_{ge} = \langle g|\boldsymbol{\mu}|e\rangle = \langle e|\boldsymbol{\mu}|g\rangle. \tag{3.7.33}$$

Ce qui, reporté dans l'expression (3.7.32) donne

$$\begin{aligned} A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) =& -\langle 0_p(\mathbf{k}, k_z)|\mu_{eg}\cdot\boldsymbol{E}(\mathbf{r}e^{i\theta})|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle \\ =& -\frac{i}{\pi}\mu_{eg}\sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0}}\sum_p\int_0^{+\infty}dk_z\int d^2\mathbf{k}\,\sqrt{\omega} \\ &\big[\langle 0_p(\mathbf{k}, k_z)|e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}e^{i\theta}}a_p(\mathbf{k}, k_z)\cdot\mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, ze^{i\theta}) - h.c.|1_p(\mathbf{k}, k_z\rangle\big] \end{aligned} \tag{3.7.34}$$

où on a séparé les coordonnées transversales $\boldsymbol{\rho}$ de la coordonnée z. On obtient alors, pour la correction aux énergies

$$\begin{aligned} \Delta E_{m,1}^{(2)} =& \int_0^\infty dz\int_0^\infty dz'\sum_{n=m-10}^{m+10}\Big[-\sum_p\int_0^{+\infty}dk_z\int d^2\mathbf{k}\Big(\big[\frac{(m,1|z)(z|n,1)(m,1|z')(z'|n,1)}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\ &+\frac{(m,1|z)(z|n,2)(m,1|z')(z'|n,2)}{\hbar(\omega+\omega_0)}\big]A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r})A_p^{(\theta)\dagger}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}')\Big)\Big] \\ =& -\int_0^\infty dz\int_0^\infty dz'\sum_p\int_0^{+\infty}dk_z\int d^2\mathbf{k}\sum_{n=m-10}^{m+10}\Big[\frac{W_{m,1}(z)W_{m,1}(z')}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\ &A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r})A_p^{(\theta)\dagger}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}')\left(W_{n,1}(z)W_{n,1}(z') + W_{n,2}(z)W_{n,2}(z')\right)\Big] \end{aligned} \tag{3.7.35}$$

où $W_{m,b}(z)$ représente l'état de Wannier-Stark modifié centré sur le puits m dans la bande b. En développant l'expression de $A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r})$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \Delta E_{m,1}^{(2)} =& -\frac{\hbar\mu_{eg}^2}{4\pi^3\varepsilon_0}\int_0^\infty dz\int_0^\infty dz'\sum_p\int_0^{+\infty}dk_z\int d^2\mathbf{k}\sum_{n=m-10}^{m+10}\Big[\frac{W_{m,1}(z)W_{m,1}(z')}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\ &\left(W_{n,1}(z)W_{n,1}(z') + W_{n,2}(z)W_{n,2}(z')\right)\omega\,\mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, ze^{i\theta})\cdot\mathbf{f}_p^*(\mathbf{k}, k_z, z'e^{i\theta})\Big] \end{aligned} \tag{3.7.36}$$

Pour obtenir l'expression (3.7.36), on a utilisé le produit scalaire hermitien pour les espaces représentant les états atomiques internes ainsi que les états du champ. Cela se justifie par le fait que l'état non perturbé agit sur un espace produit et que la transformation appliquée à l'Hamiltonien n'agit quant à elle que sur la coordonnée externe de celui-ci.

En reprenant les définitions de $\mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, z)$ données au chapitre 2

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1(\mathbf{k}, k_z, z) &= \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}} \sin(k_z z) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{k}, k_z, z) &= \hat{\mathbf{k}} \frac{ick_z}{\omega} \sin(k_z z) - \hat{\mathbf{z}} \frac{ck}{\omega} \cos(k_z z), \end{cases} \tag{3.7.37}$$

on arrive à

$$\Delta E^{(2)}_{m,1} = -\frac{\hbar \mu_{eg}^2}{4\pi^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \Big[\frac{W_{m,1}(z) W_{m,1}(z')}{\hbar(\omega + \omega_0)} \big(W_{n,1}(z) W_{n,1}(z') + W_{n,2}(z) W_{n,2}(z') \big) \omega \Big(\mathbf{f}_1(\mathbf{k}, k_z, z e^{i\theta}) \cdot \mathbf{f}_1^*(\mathbf{k}, k_z, z' e^{i\theta}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{k}, k_z, z e^{i\theta}) \cdot \mathbf{f}_2^*(\mathbf{k}, k_z, z' e^{i\theta}) \Big) \Big] \tag{3.7.38}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta E^{(2)}_{m,1} = -\frac{\hbar \mu_{eg}^2}{4\pi^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \\ \Big\{ \frac{W_{m,1}(z) W_{m,1}(z')}{\hbar(\omega + \omega_0)} \big(W_{n,1}(z) W_{n,1}(z') + W_{n,2}(z) W_{n,2}(z') \big) \\ \omega \Big[\left(1 + \left(\frac{ck_z}{\omega} \right)^2 \right) \sin(k_z z e^{i\theta}) \sin(k_z z' e^{i\theta}) + \left(\frac{ck}{\omega} \right)^2 \cos((k_z z e^{i\theta}) \cos(k_z z' e^{i\theta}) \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{3.7.39}$$

Or, si l'on développe les termes exponentiels dans les fonctions trigonométriques, on peut écrire

$$\begin{cases} \sin(k_z z e^{i\theta}) &= \sin(k_z z \cos\theta) \cosh(k_z z \sin\theta) + i \cos(k_z z \cos\theta) \sinh(k_z z \sin\theta) \\ \cos(k_z z e^{i\theta}) &= \cos(k_z z \cos\theta) \cosh(k_z z \sin\theta) - i \sin(k_z z \cos\theta) \sinh(k_z z \sin\theta) \end{cases} \tag{3.7.40}$$

où l'on comprend que les termes en cosh ou sinh rendent les intégrales divergentes et empêchent le calcul du potentiel de Casimir-Polder sous forme compacte comme dans le cas du chapitre 2.

3.7.3 Le cas de la régularisation du potentiel de Casimir-Polder

On l'a vu dans la section précédente, l'utilisation de la théorie des perturbations non-hermitienne pour le traitement de l'interaction atome-champ conduit à une intégrale divergente pour la correction des énergies au deuxième ordre. En effet, les termes en cosh et sinh de l'équation (3.7.39) divergent lorsque $z \to 0$ rendant ainsi l'intégrale divergente. Cette divergence a la même origine que celle observée dans le cas hermitien traité au chapitre 2. Comme dans le cas hermitien, on a considéré pour le traitement perturbatif que l'atome était ponctuel, et comme dans le cas hermitien cette approximation est fausse

lorsqu'on s'approche de 0. Cependant, la méthode de régularisation adoptée dans le cas hermitien n'est pas applicable à l'Hamiltonien transformé par *complex scaling*. En effet, dans le chapitre 2 on a considéré la taille de l'atome dans l'espace réel indépendamment de l'Hamiltonien décrivant les interactions. Or la prise en compte de la taille de l'atome dans le cas où on se place dans l'espace complexe n'est pas naturelle. La régularisation de la correction due à l'effet Casimir-Polder reste donc un problème ouvert.

3.8 La méthode de stabilisation complexe

Le problème de l'utilisation de la méthode du *complex scaling* pour le calcul de la correction due à l'effet Casimir-Polder provient en partie du fait que l'on agisse directement sur l'Hamiltonien. En effet, on a vu dans la section précédente que la régularisation du potentiel de Casimir-Polder par la prise en compte de la taille de l'atome à courte distance était mise en défaut par le fait que la distance atome-surface devienne complexe après rotation de l'Hamiltonien. Un autre méthode existe, basée sur les mêmes théorèmes que le *complex scaling* mais ne nécessitant pas la rotation directe de l'Hamiltonien dans le plan complexe. Cette méthode, dite de la *"stabilisation complexe"*, a été développée initialement pour le traitement des problèmes de résonances atomiques et moléculaires [126,127]. En effet, dans ce type de problème où les électrons et le noyaux sont traités par des coordonnées différentes, la rotation des Hamiltoniens dans le cadre du formalisme de Born-Oppenheimer conduit à une distance internucléaire ou noyaux-électrons complexe interdisant le traitement de tels Hamiltoniens par la méthode du *complex scaling*. L'intérêt de la méthode de stabilisation est que celle-ci ne repose pas sur la rotation de l'Hamiltonien dans le plan complexe mais sur la projection de cet Hamiltonien sur une base de N fonctions complexes de carré sommable $\varphi_n(x)$ dépendant d'une série de paramètres non-linéaires. Ainsi la matrice à diagonaliser s'exprime sous la forme

$$H^N_{nm} = \langle \varphi_n | H | \varphi_m \rangle. \tag{3.8.1}$$

Cette matrice a une taille dépendante du nombre N de fonctions de base choisi. Le principe de la méthode de stabilisation est d'étudier le comportement des valeurs propres trouvées en fonction de la taille de cette matrice. Les valeurs propres proches de la résonance seront stables par rapport à l'augmentation du nombre de fonctions de base (ce qui revient à augmenter la taille de la boîte numérique) tandis que les valeurs propres correspondant à des fonctions du continuum présenteront une forte dépendance par rapport à N. L'intérêt principal de cette méthode est qu'elle permet de s'affranchir des hypothèses de dilatation analytique sur l'Hamiltonien puisque celui-ci n'est plus transformé.

L'application de cette méthode au problème de états de Wannier-Stark modifiés en présence ou non d'un potentiel de Yukawa modélisant une cinquième force gravitationnelle

nous a fourni une vérification complémentaire des résultats exposés plus haut. On retrouve les mêmes valeurs de l'énergie associées aux mêmes temps de vie. En revanche, l'application de cette méthode au problème de l'effet Casimir-Polder s'est là encore révélée infructueuse. La raison de cet échec réside dans la difficulté de trouver une base de fonctions répondant aux conditions de la méthode de stabilisation et permettant par la même occasion de régulariser la correction aux énergies de l'effet Casimir-Polder.

3.9 Conclusions et Perspectives

On a vu au cours de ce chapitre deux méthodes pour le calcul du spectre complexe associé aux résonances en mécanique quantique. Ces deux méthodes ont prouvé leur efficacité pour le traitement de l'Hamiltonien de Wannier-Stark en présence ou non d'une déviation de la loi de Newton de type potentiel de Yukawa à courte distance. Dans ces deux cas, on a vu que la durée de vie des atomes de rubidium dans un piège optique tel que celui de FORCA-G était très longue en comparaison du temps nécessaire pour réaliser la mesure. En revanche, le calcul n'a pas abouti pour ce qui est du traitement de l'effet Casimir-Polder. Cependant, d'après ce que l'on sait de la physique du problème, on peut supposer que le temps de vie ne sera pas considérablement raccourci par l'effet Casimir-Polder. En effet, on a vu que le phénomène de résonance survenant lorsque les atomes sont piégés dans un potentiel périodique accéléré provient de la probabilité que ces atomes ont de transiter par effet tunnel d'une bande de Bloch à une autre jusqu'à ce qu'ils aient une énergie trop importante pour continuer à être confinés par le piège. Suivant cette interprétation, l'effet tunnel est d'autant plus probable que l'énergie de l'état de Wannier-Stark considéré est proche de celle de la bande de Bloch supérieure. De ce fait, les atomes ont tendance à aller vers les puits plus élevés c'est-à-dire vers $z \to \infty$. L'effet Casimir-Polder agit à l'inverse de ce phénomène puisqu'on a vu qu'il induisait une force attractive vers la surface. Il est donc naturel de penser que l'effet Casimir-Polder aura plutôt tendance à allonger la durée de vie des atomes du piège plutôt qu'à la raccourcir. Cela nous amène à conclure que les états résonants des atomes dans le piège de FORCA-G ont une durée de vie telle que celle-ci ne sera jamais un obstacle à la réalisation de l'expérience et que l'approximation consistant à traiter ces états comme de vrais états propres reste valable.

3.10 Article

Cet appendice est constitué d'une version provisoire de l'article résumant les résultats présentés dans ce chapitre soumis en 2013 dans la revue Physical Review A [128].

Lifetimes of atoms trapped in an optical lattice in proximity of a surface

Sophie Pelisson,[1,*] Riccardo Messina,[1,2] Marie-Christine Angonin,[1] and Peter Wolf[1]

[1] *LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS UMR8630, UPMC 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France*

[2] *Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD128, F-91127 Palaiseau Cedex, France*

(Dated: February 14, 2013)

We study the lifetime of an atom trapped in an optical vertical lattice in proximity of a massive surface using a complex-scaling approach. We analyze how the presence of the surface modifies the known lifetimes of Wannier-Stark states associated to Landau-Zener tunnelling. We also investigate how the existence of a hypothetical short-distance deviation from Newton's gravitational law could affect these lifetimes. Our study is relevant in order to discuss the feasibility of any atomic-interferometry experiment performed near a surface. Finally, the difficulties encountered in applying the complex-scaling approach to the atom-surface Casimir-Polder interaction are addressed.

PACS numbers: 32.70.Cs, 37.25.+k, 37.10.Jk, 42.50.Ct

I. INTRODUCTION

The problem of atoms trapped in an accelerated periodic lattice is an old one in solid state physics [1–5]. However, some phenomena like pseudo-eigenstates (Wannier-Stark ladders) and the lifetime limitations of those states (Landau-Zener tunneling) are still a current subject of research (see [5] for a review). In this work, we study the Landau-Zener effect [6–8] for atoms trapped in a vertical standing wave in presence of short scale interactions.

This is done in the context of the theoretical modeling of the experiment FORCA-G (FORce de CAsimir et Gravitation à courte distance) aiming at measuring the Casimir-Polder force acting on a neutral atom in presence of a massive dielectric surface by atomic interferometry. At the same time, the experiment is configured to search for non-Newtonian deviations from the gravitational law at short distances [9–15]. These two goals are reached by the use of atoms trapped in a vertical optical standing wave in front of a massive surface realizing the trap. Such a lattice allows a precise knowledge of the distance between the atom and the surface, this distance being a multiple of the wavelength of the trap. The atomic states in such a trap were the main subject of a previous paper [11]. In that paper the shape of the wavefunctions and the modification of energy levels due to the presence of the surface were deduced by solving a standard eigenvalue problem. In this context, the states are supposed to be bound states of the system, meaning that their lifetime is infinite.

Nevertheless, solid state physics teaches us that the states in an accelerated periodic lattice are not bound states but resonance states with a finite lifetime. The subject of this paper is to quantify these lifetimes for the states calculated in [11] in order to check the feasibility of the experiment, knowing that the measurement of the interaction by atom interferometry takes at most a few seconds. We want to understand, more in detail, how the presence of the surface and of a hypothetical non-Newtonian gravitational potential modifies the well-known finite lifetimes of standard Wannier-Stark states.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we describe the system under scrutiny and the method we use to calculate the lifetime of the atomic states. Section III is devoted to the effect of the surface. This section is separated in two parts. As a first step, we study the effect of a surface treated as a boundary condition for an atom below it. In the following, we investigate the phenomena arising when tunneling of the atom through the surface is allowed. This is done for an atom above the surface in order to clearly discriminate the effect of the finiteness of the potential barrier from other resonance effects. Then, Sec. IV shows the effect of a deviation from Newton's gravitational law at short distance on the lifetimes of the trapped atom whereas Sec. V discusses the problem arising when the Casimir-Polder interaction is taken into account. In this part, the difficulties of the treatment of the Casimir-Polder effect by the complex-scaling method are highlighted.

II. LIFETIMES OF ATOMS IN WANNIER-STARK STATES

Let us consider the Hamiltonian of an atom of mass m_a trapped in a periodic lattice $V(z) = \frac{U}{2}(1 - \cos(2k_l z))$ in presence of a linear gravitational potential

$$H_{\mathrm{WS}} = \frac{p^2}{2m_a} + \frac{U}{2}(1 - \cos(2k_l z)) - m_a g z. \qquad (1)$$

where U is the depth of the trapping potential, k_l represents the wavevector of the trap and g is the earth gravitationnal constant. This operator is the sum of the well-known Bloch Hamiltonian $H_B = \frac{p^2}{2m_a} + \frac{U}{2}(1 - \cos(2k_l z))$ [1] and a linear potential $-m_a g z$ (the z axis is oriented

*Electronic address: sophie.pelisson@obspm.fr

downwards). As a consequence, the eigenstates of Eq. (1) are derived from the Bloch states, generally taking into account one single Bloch band. The spectrum obtained using this procedure can be written as

$$E_{\alpha,n} = \bar{\varepsilon}_\alpha - n m_a g \frac{\lambda_l}{2}, \tag{2}$$

where $\frac{\lambda_l}{2}$ is the periodicity of the lattice, λ_l being its wavelength, $\bar{\varepsilon}_\alpha$ is the mean value of the energy of the Bloch band α under consideration and n is an integer labelling the well where the state is centered. The states obtained are known as Wannier-Stark states and were first discussed for electrons in a crystal submitted to a constant electric field [2]. The existence of such eigenstates results from the single-band approximation. Nevertheless, a calculation ignoring this approximation confirms the existence of these states, but associates a finite lifetime to each of them. This lifetime physically corresponds to the so-called Landau-Zener tunneling, namely the possibility for a particle in a Wannier-Stark lattice site to transist from one Bloch band to another [6–8]. In other words, the discrete spectrum in Eq. (2) is immersed in the continuum of eigenvalues of the Hamiltonian (1) and can thus be seen as a resonance spectrum [16]. The spectrum of Eq. (2) should thus be rewritten as [3–5]

$$E_{\alpha,n} = \bar{\varepsilon}_\alpha - n m_a g \frac{\lambda_l}{2} - i\frac{\Gamma_\alpha}{2}. \tag{3}$$

The eigenstates associated to the spectrum (3) are metastable states with a finite lifetime $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_\alpha}$. In order to completely characterize the states of an atom in our optical lattice, we need to work out this complex spectrum to evaluate their lifetime in the trap.

Several methods have been developed so far in order to study this complex spectrum [17–22], each using approximations such as a periodic potential with a finite number of gaps or a finite periodic lattice. Most of these methods are based on the analogy of the Wannier-Stark sates with scattering states. In this theoretical framework, the complex spectrum (3) can be calculated as the set of poles of the scattering matrix of the system. The method we will use in this work is based on the rotation of the Hamiltonian (1) in the complex plane and the derivation of the complex spectrum as eigenvalues of the obtained non-hermitian Hamiltonian. This approach is known as *complex-scaling* method [3] and the rotation of the Hamiltonian is performed via the operator $C(\theta)$ such that

$$C(\theta)\varphi(z) = \varphi(ze^{i\theta}) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty. \tag{4}$$

The one-dimensional complex-scaled Hamiltonian is then

$$H_{\rm WS}^{(\theta)} = \frac{e^{-2i\theta}p^2}{2m_a} + \frac{U}{2}\big(1 - \cos(2k_l z e^{i\theta})\big) - m_a g z e^{i\theta}. \tag{5}$$

According to the Balslev-Combes theorem [23], the complex spectrum (3) can then be found by solving the eigenvalue problem

$$H_{\rm WS}^{(\theta)}|\phi_{\alpha,n}\rangle = E_{\alpha,n}|\phi_{\alpha,n}\rangle, \tag{6}$$

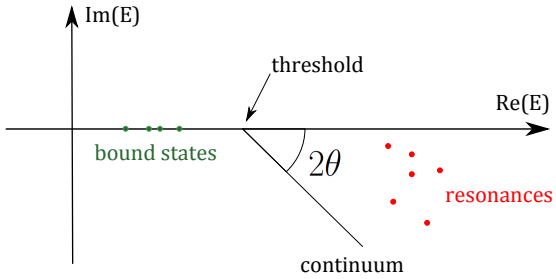


FIG. 1: Schematic representation of the complex eigenvalues of the complex-coordinate scaled Hamiltonian $H^{(\theta)}$ according to the Balslev-Combes theorem [23].

where the real part of a given eigenvalue represents its energy level, while its imaginary part is the width of the resonance.

We stress here that resonance wavefunctions are characterized by a divergent behavior when $z \to \infty$ as

$$\phi_{res}(z \to \infty) \simeq e^{-ikz} + S(k)e^{ikz}, \tag{7}$$

k being the wavevector of the atom and $S(k)$ the scattering matrix of the system. As demonstrated in [3], the divergent part of the resonant wavefunctions in Eq. (7) is regularized by the complex scaling. This is not the case for a non-resonant wavefunction of the continuum. As a consequence, it is important to distinguish the resonant from the non-resonant part of the complex spectrum worked out solving Eq. (6). A schematic representation of the eigenvalues of Hamiltonian (5) is shown in Fig. 1. We see in this figure that the continuum eigenvalues lie on a line forming an angle 2θ with the real axis, θ being the angle chosen for the transformation (4). At the same time the real bound states are located on the real axis (corresponding to the fact that they have an infinite lifetime) while the resonance states are the complex eigenvalues which are not part of the rotated continuum. In the case of the Wannier-Stark Hamiltonian, the presence of energy bands due to the periodicity of trap leads to a peculiar structure of the complex eigenvalues. The eigenvalues of the Hamiltonian (5) are shown in Fig. 2. These eigenvalues are obtained using the pseudo-periodicity of the trap. Indeed, the fact that we calculate states in an infinite pseudo-periodic lattice allows us to restrict the search of the spectrum in Eq. (3) to the analysis of the spectral properties of the evolution operator

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\rm WS}T_B} \qquad T_B = \frac{2\hbar}{m_a g \lambda_l}, \tag{8}$$

over a Bloch period [4, 5]. The eigenvalues are then worked out using a Discrete Variable Representation (DVR) method and a QR algorithm for complex symmetric matrices [24].

To check the validity of our method, we have to compare the real parts of the calculated eigenvalues with the spectrum obtained within a standard resolution of the

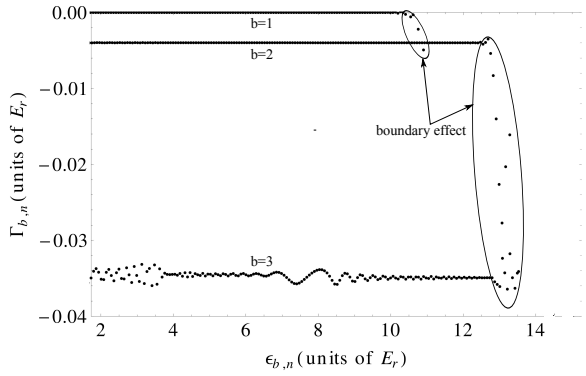


FIG. 2: Complex eigenvalues for the 3 first Bloch bands of the Hamiltonian $H_{\rm WS}^{(\theta)}$. The energies are expressed in units of $E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_a}$ which is the natural unit for energy levels in a trap with wavevector k_l (in the case of FORCA-G, $E_r \simeq 5.37 \cdot 10^{-30}$ J and $\Gamma = 1E_r$ corresponds to $\tau = \hbar/\Gamma = 1.96 \cdot 10^{-5}$ s). The spectrum here is calculated for $u = 3E_r$.

Schrödinger equation for $H_{\rm WS}$ (approach which does not give access to the finite lifetime of the states), and the imaginary parts with the results of the Landau-Zener formula [25]. Table I shows the good agreement between the real parts of eigenvalues (3) and the Wannier-Stark spectrum obtained using standard calculation.

n	$\mathrm{Re}(E_{1,n})$	$\mathcal{E}_n$
-5	1.576	1.584
-4	1.506	1.514
-3	1.436	1.444
-2	1.366	1.374
-1	1.296	1.304
0	1.226	1.234
1	1.156	1.164
2	1.086	1.093
3	1.016	1.023
4	0.946	0.953
5	0.876	0.883

TABLE I: Table of the real parts of the complex energies $\mathrm{Re}(E_{1,n})$ compared with the Wannier-Stark spectrum $\mathcal{E}_n$ obtained with standard calculation in the first Bloch band. The energies are given in units of $E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_a}$ which is the natural unit for energy levels in a trap with a wavevector k_l. The numerical example corresponds to $U = 3E_r$.

Concerning the imaginary parts, representing the lifetime of the band under scrutiny, Niu et al. have proposed a general formula to evaluate the inverse lifetime of the standard Wannier-Stark states [25]. This formula gives an estimate of the tunneling rate γ as a function of a critical acceleration α_c and the dimensionless accelaration α due to the linear potential.

$$\gamma = \alpha e^{-\alpha_c/\alpha}. \tag{9}$$

In our case, $\alpha = \frac{m_a^2 g}{\hbar^2 k_l^3}$ and the critical acceleration can be expressed as

$$\alpha_c = \frac{\pi \Delta^2}{K}, \tag{10}$$

where Δ is the half width of the energy gap between the first and the second Bloch band and $K = \frac{n}{2}$ is the wave number of Bragg scattering corresponding to the n-th gap (here we will take $n = 1$). With this expression, we obtain, for the second Bloch band, a tunneling rate of the order of $0.003\,E_r$ which is of the same order of magnitude of the value of the complex part of the spectrum (3) as it can be seen on Fig. 2. An additional verification with other values of the well depth assures us that the complex-scaling method provides satisfying results for this physical system. As a consequence, in the next section, we will use this method to analyze the lifetimes of the Wannier-Stark states in presence of a surface, whose main features have been already discussed in [11].

III. LIFETIMES IN PRESENCE OF THE SURFACE

A. Presence of the surface

In our problem, we consider the presence of a surface at $z = 0$. Our atom is thus located below the surface, in the region $z > 0$ (we recall that the z axis is oriented downwards). The presence of this boundary condition breaks the quasi-periodicity of the system. The potential modifying the optical trap is no longer linear, since it must be considered as the gravitational linear potential for $z > 0$ and an infinite potential barrier for $z \leq 0$, describing the impossibility of the particle to penetrate the mirror. We have shown in a previous paper [11] that this surface induces a modification of the energies and states of the Hamiltonian $H_{\rm WS}$. We now want to verify that this modification does not reduce drastically the lifetimes of our atoms in the trap.

As anticipated before, the presence of a boundary condition in $z = 0$ breaks the translational symmetry of the problem. Thus, we can no longer use the quasi-periodic approximation and we have to solve directly the eigenvalues problem (6). This is done using a finite-element method and once again a QR algorithm for symmetric complex matrices using the subroutine `zgeev` of the numerical package `LAPACK` [26]. However, using this method, numerical problems arise when the well depth is larger than $U = 2.2E_r$, since in this case the imaginary parts of the complex eigenvalues are too small. As a matter of fact, the lifetime of a given Wannier-Stark well is a strongly increasing function of the well depth.

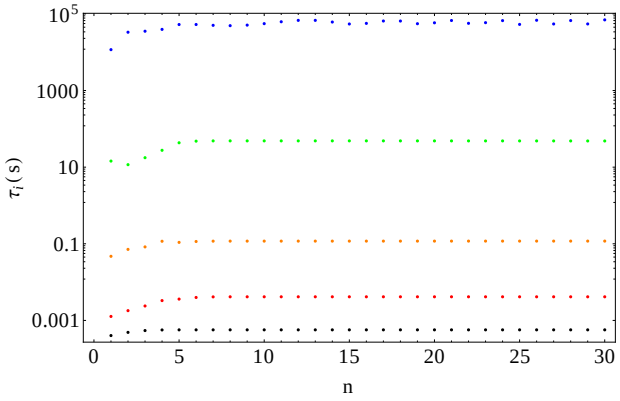


FIG. 3: (Color online) Lifetimes of the first Bloch band in function of the quantum number n labelling the well of the trap for five different depths. From top to bottom we have: $U = 2E_r$ (blue dots), $U = 1.5E_r$ (green dots), $U = 1E_r$ (orange dots), $U = 0.5E_r$ (red dots), $U = 0.1E_r$ (black dots).

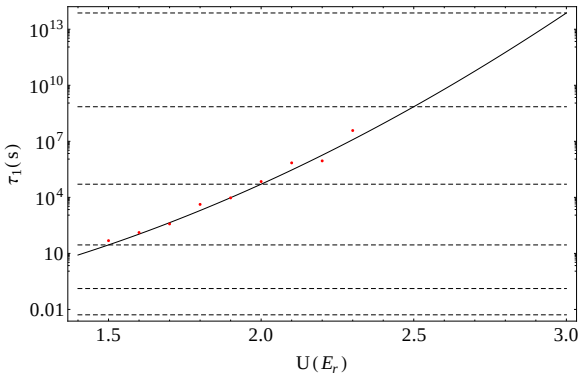


FIG. 4: (Color online) Lifetime of the first Bloch band calculated with the complex scaling method (Red dots) in function of the trap depth. The calculated lifetimes are compared with the Landau-Zener formula (Black line) for standard Wannier-Stark sates.

This dependence can be well understood using the image of tunneling. Indeed, the finite lifetime of the metastable states can be seen as a consequence of the possibility for an atom in a lattice site n to tunnel through the potential toward an upper Bloch band in another site. This is favorized by the linear potential which induces resonant tunneling between the first band in a given site to e.g. the second band in a farther site. As a consequence the atom reaches a new state with a new energy destroying the former one. Moreover, the atom can reach a state with an energy higher than the trap depth, being thus no longer trapped. So, the tunneling probability depends on the lattice depth: the deeper the trap is, the weaker this probability becomes.

This feature is illustrated in Fig. 3, where lifetimes are calculated for different well depths. Here we have taken into account only the lifetime of the first Bloch band. Indeed, as it can be seen in Fig. 2, the lifetime of the first band is the longest one, and the larger the band under scrutiny is, the shorter is this lifetime. In the particular case of our experimental parameters, the second Bloch band has a mean energy of $\bar{\epsilon}_2 \simeq 5.45\, E_r$ and is then not trapped by a well depth $U = 3E_r$. As a consequence, only the lifetime of the first band is of interest for us.

The analysis of Fig. 3 shows, moreover, that for any well depth, the first-band lifetimes are function of the considered well. In particular, the lifetimes do not vary remarkably starting approximately 5 wells away from the surface, whilst being functions of the considered well in proximity of the boundary $z = 0$. In order to verify the coherence of the calculation the constant lifetimes far from the surface (function of the well depth) can be compared to the ones obtained through the Landau-Zener formula, derived for the standard Wannier-Stark states (i.e. in an infinite lattice). This comparison is shown in Fig. 4. In this figure, we can see that the Landau-Zener formula still gives a good description far from the surface. This suggests that the lifetimes of our metastable states in presence of a surface are of the order of 10^{14} s for a well depth of $U = 3E_r$. However, in this analysis we have treated the mirror as an infinite barrier at $z = 0$, which is not very realistic. It is of interest to investigate how the results are modified if the mirror is modeled by means of a finite potential barrier. This will be done assuming that the atom is located above the mirror.

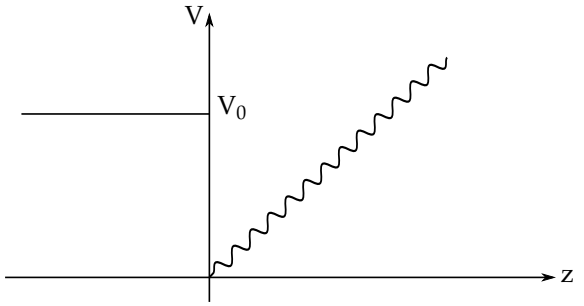


FIG. 5: Shape of the potential for atoms above a finite surface.

B. Atom above the mirror

A way to increase the lifetime of the states is to place the atom above the surface rather than below. In this case, if we consider as before the mirror as an infinite barrier, the potential is a well of infinite height. As a consequence, it supports only a discrete set of real eigenstates having an infinite lifetime. In order to model the surface more precisely, we allow the tunneling of the atom into this surface. Therefore we replace the infinite barrier by a finite one as shown in Fig. 5. As a consequence,

the complex-scaled Hamiltonian of the system can be expressed as

$$\begin{cases} H^{(\theta)}_{\text{above}} = \frac{e^{-2i\theta}p^2}{2m_a} + V_0 & \text{if } z \leq 0 \\ H^{(\theta)}_{\text{above}} = \frac{e^{-2i\theta}p^2}{2m_a} + \frac{U}{2}\left(1 - \cos(2k_l z e^{i\theta})\right) & \\ \qquad\qquad + m_a g z e^{i\theta} & \text{elsewhere,} \end{cases} \tag{11}$$

where $V_0 \in \mathbb{R}$. In order to study the behavior of the atoms in front of a surface with a finite size, we investigate the complex spectrum for a given well depth ($U = 1E_r$ in numerical example) as a function of the height of the barrier chosen to represent the surface. More specifically, we focus our attention on the transition from bound states to resonances for atoms in front of a potential barrier with a varying height.

The resulting complex eigenvalues for different heights of the barrier are shown in Fig. 6.

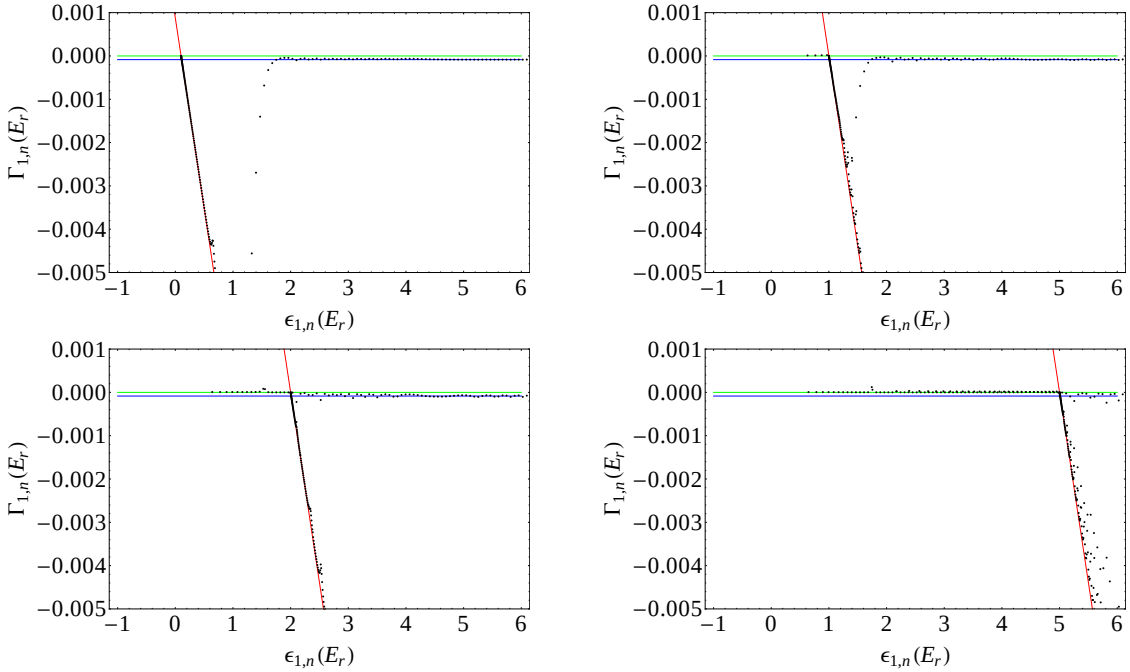


FIG. 6: (Color online) Complex spectrum of the Hamiltonian (11) describing an atom in front of a potential barrier with different heights (from left to right and top to bottom $V_0 = 0.1E_r$, $V_0 = 1E_r$, $V_0 = 2E_r$ and $V_0 = 5E_r$) (black dots) in comparison with the standard Wannier-Stark lifetimes (blue lower horizontal line). The depth of the periodic trap is chosen to be $U = E_r$. The solid red line represent the line of the continuum with a slope of 2θ and the horizontal green upper line highlights the eigenvalues with an imaginary part equals to 0.

In this figure, we see that the presence of the barrier induces the emergence of a continuum associated with the standard resonances spectrum. The position of this continuum depends on the height of the barrier: more precisely, the continuum region of the spectrum always starts at a value around V_0. When the barrier is very low (i.e. of the order of the depth of the periodic trap or below), we observe that the lifetime of the atom close of this barrier is shorter than the lifetime at longer distances. This can be understood thanks to the interpretation of Landau and Zener of the resonance phenomenon. Indeed, if we consider that the finite lifetime of the atom arises from the resonant tunnelling through the trap, it is clear that this tunnelling has a higher probability when the atom is close to the barrier because it is not trapped on the left side. In addition, we observe that when the barrier becomes higher than the well depth, some bound states appear corresponding to the closest states submitted to a potential well.

As expected, the effect of a finite barrier representing the surface is completely negligible for the wells far from the surface and starts to be visible for the closest wells

when the barrier height is of the order of the well depth or below. This means that the penetrability of the surface should be comparable to that of the periodic trap in order to allow a significant modification of the behavior of the complex spectrum. This is reasonably not at all the case for a solid mirror and we can conclude that the finiteness of the surface should not play a major role in the lifetime of our states in the trap.

IV. NON-NEWTONIAN GRAVITATION

After observing that the presence of the surface does not reduce drastically the lifetime of our modified Wannier-Stark states, we have to verify that this is not the case even in presence of a Yukawa gravitational potential. Indeed, the main goal of the experiment FORCA-G is to search for a hypothetical deviation from Newton's law at short distance predicted by some unification theories. We have then to estimate the modification of the lifetimes of the states in presence of such a deviation which can be written as an additional potential of the form [11]

$$U_{\mathrm{Y}} = 2\pi\alpha_{\mathrm{Y}} G\rho_{\mathrm{s}} m_a \lambda_{\mathrm{Y}}^2 e^{-2z/\lambda_{\mathrm{Y}}}, \tag{12}$$

where $G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ is the universal gravitational constant and ρ_{s} is the density of our surface (for which we have chosen the density of the silicon $\rho_{\mathrm{s}} = 2.33\times10^{3}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$). We want to stress here that the Yukawa potential presented in Eq. (12) depends on two parameters α_{Y} and λ_{Y}. These parameters represent respectively the coupling strength of the non-Newtonian deviation and its typical range. The aim of experiments devoted to non-Newtonian gravitation is to impose constraints on the value of these two parameters. The present constraints and the ones predicted for the experiment FORCA-G are shown in Fig. 7.

In order to analyze the modification to the lifetimes induced by a hypothetical Yukawa term, we have to calculate the spectrum of the Hamiltonian

$$\begin{aligned} H =& H_{\mathrm{WS}} + U_{\mathrm{Y}} \\ =& \frac{p^2}{2m_a} + \frac{U}{2}\left(1-\cos(2k_l z)\right) - m_a g z \\ &+ 2\pi\alpha_{\mathrm{Y}} G\rho_{\mathrm{s}} m_a \lambda_{\mathrm{Y}}^2 e^{-2z/\lambda_{\mathrm{Y}}}. \end{aligned} \tag{13}$$

As done previously, we apply the transformation (4) to this Hamiltonian, obtaining the non-hermitian Hamiltonian

$$\begin{aligned} H^{(\theta)} =& \frac{e^{-2i\theta}p^2}{2m_a} + \frac{U}{2}\left(1-\cos(2k_l z e^{i\theta})\right) \\ &- m_a g z e^{i\theta} + 2\pi\alpha_{\mathrm{Y}} G\rho_{\mathrm{s}} m_a \lambda_{\mathrm{Y}}^2 e^{-2ze^{i\theta}/\lambda_{\mathrm{Y}}}. \end{aligned} \tag{14}$$

The complex spectrum resulting from this modified Hamiltonian is presented in Fig. 8. This figure shows that even if the presence of a deviation from Newton's gravitation law modifies the lifetimes of the atom in the trap, particularly for the closest wells, this lifetime remains very large in comparison with the duration of the experiment. Indeed, for practical reasons due to the coherence of the cold atoms in the experimental setup, the duration of the measurement in FORCA-G will not exceed 1 s. As a consequence, the Landau-Zener effect is not a limitation for the measurement of a deviation from Newton's law in our experiment. This can be more accurately verified from the analysis of Table II.

This table confirms that the lifetimes of an atom in the trap are much longer than the duration of the measurement estimated in [14].

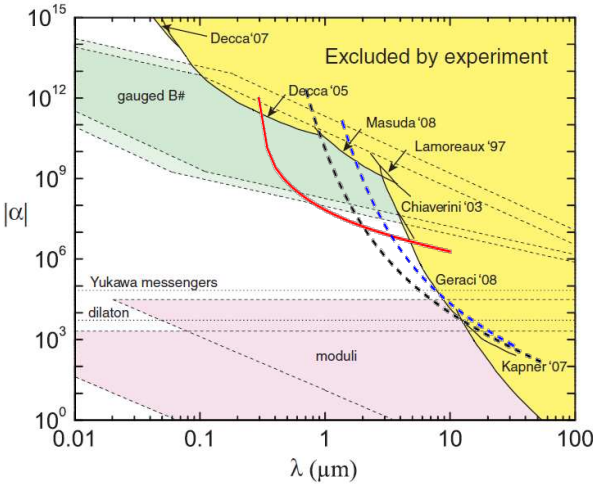


FIG. 7: (Color online) Present constraints (yellow region) and predicted constraints (coloured lines) for the FORCA-G experiment for the Yukawa potential in the $(\alpha_{\mathrm{Y}}, \lambda_{\mathrm{Y}})$ plane. The colored zones are excluded. This figure is taken from [11] and adapted from [27].

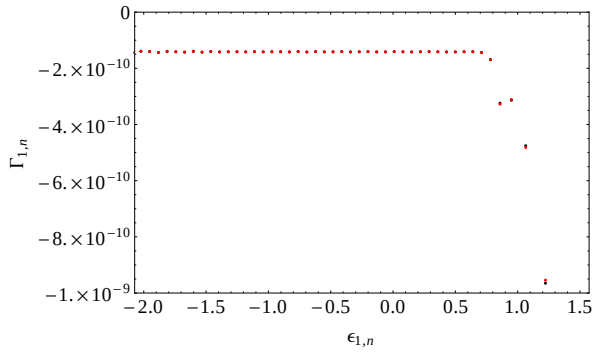


FIG. 8: (Color online) Values of the complex spectrum in presence of a Yukawa potential (Red dots) compared with the modified Wannier-Stark complex spectrum (Black dots). In this figure, we have chosen $U = 2Er$, $\alpha_{\mathrm{Y}} = 10^{11}$ et $\lambda_{\mathrm{Y}} = 1\,\mu$m.

Far Regime			
$\lambda_{\rm Y}$ (μm)	$\alpha_{\rm Y}$	Im($E^{(\rm Y)}_{1,1}$) (units of $10^{-10}E_r$)	$\tau^{(\rm Y)}$ (10^{10} s)
0.70000	1.95007[12]	-6.25618	6.13778
0.80835	2.08378[11]	-8.09505	7.94185
0.93347	2.87073[10]	-8.44136	8.28161
1.07795	4.92177[9]	-8.51022	8.34916
1.24480	1.02282[9]	-8.52701	8.36564
1.43747	2.51801[8]	-8.53137	8.36991
1.65996	7.15759[7]	-8.53326	8.37177
1.91689	2.30712[7]	-8.53361	8.37211
2.21359	8.33762[6]	-8.53419	8.37268
2.55622	3.31836[6]	-8.53403	8.37252
Near Regime			
$\lambda_{\rm Y}$ (μm)	$\alpha_{\rm Y}$	Im($E^{(y)}_{1,1}$) (units of $10^{-10}E_r$)	$\tau^{(\rm Y)}$ (10^{10} s)
0.10000	9.98047[11]	-8.55444	8.39255
0.11659	9.98047[11]	-8.55682	8.39488
0.13594	9.98047[11]	-8.55945	8.39746
0.15849	9.98047[11]	-8.56119	8.39917
0.18479	9.98047[11]	-8.56046	8.39845
0.21544	9.98047[11]	-8.55548	8.39357
0.25119	9.98047[11]	-8.54216	8.38050
0.29286	9.98047[11]	-8.51542	8.35427
0.34146	1.41907[10]	-8.53314	8.37165
0.39811	2.60450[9]	-8.53385	8.37235

TABLE II: Table of the first ten imaginary parts of the complex energy in the first well as a function of the values of $\alpha_{\rm Y}$ and $\lambda_{\rm Y}$ calculated in [11].

V. DISCUSSION

As we have seen in the previous sections, the presence of a material surface as well as the assumptions of a deviation from the short-range gravitational law do not considerably limit the lifetimes of the metastable states of the trap. As a consequence, the assumption consisting in considering these states as pseudo-eigenstates remains valid under these assumptions. However, up to now, we have not taken into account the effect of the Casimir-Polder interaction between the quantized electromagnetic field in presence of the surface and the atom. As we have seen in [11], this effect is dominant at short distances inducing an important correction to the real energy levels of the atomic states. So we can suspect that it could have a non-negligible effect on the imaginary part of the spectrum as well.

As shown in [11], the Casimir-Polder atom-surface interaction can be computed using second-order perturbation theory on the Hamiltonian interaction term. Using the same notation as [11], the Hamiltonian describing our system can be expressed as

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\rm int} = H_{\rm f} + H_{\rm at} + H_{\rm WS} + H_{\rm int} \\ H_{\rm f} &= \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\, \hbar\omega\, a_p^\dagger(\mathbf{k},k_z) a_p(\mathbf{k},k_z) \\ H_{\rm at} &= \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| \\ H_{\rm WS} &= \frac{p^2}{2m_a} - m_a g z + \frac{U}{2}\big(1-\cos(2k_l z)\big) \\ H_{\rm int} &= -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathcal{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{15}$$

The complete Hamiltonian is written as a sum of a term H_0 describing the free evolution of the atomic and field degrees of freedom. In particular, $H_{\rm f}$ is the Hamiltonian of the quantum electromagnetic field, described by a set of modes $(p,\mathbf{k},k_z)$: here p is the polarization index, taking the values $p=1,2$ corresponding to TE and TM polarization respectively, while $\mathbf{k}$ and k_z are the transverse and longitudinal components of the wavevector. $H_{\rm at}$ is the internal Hamiltonian of our two-level atom having ground state $|g\rangle$ and excited state $|e\rangle$ separated by a transition frequency ω_0. While $H_{\rm at}$ is associated to the internal atomic degrees of freedom, the term $H_{\rm WS}$ accounts for the external atomic dynamics. The interaction between the atom and the quantum electromagnetic field is written here in the well-known multipolar coupling in dipole approximation [28], where $\boldsymbol{\mu} = q\boldsymbol{\rho}$ (q being the electron's charge and $\boldsymbol{\rho}$ the internal atomic coordinate) is the quantum operator associated to the atomic electric dipole moment and the electric field is calculated in the atomic position $\mathbf{r}$.

In order to compute the correction to the complex energy spectrum due to the Casimir-Polder effect, we have used a non-hermitian equivalent of the complex perturbation theory based on a redefinition of the scalar product, which will be called *c-product*, defined by [29]

$$(\varphi|\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x)\psi(x). \tag{16}$$

Using this definition, we can define the correction term by the same way as in standard quantum mechanics and obtain the expression of the second order energy correction

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{\big[(\psi_k^{(0)}|W^\theta|\psi_n^{(0)})\big]^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \tag{17}$$

for a complex-scaled Hamiltonian of the form

$$H^\theta = H_0^\theta + W^\theta, \tag{18}$$

where H_0^θ is the non-hermitian unperturbed Hamiltonian and W^θ is a small perturbation. We recall here that the first-order correction in the case of the dipolar approximation for the atom-field interaction is null due to the nature of the atomic dipolar operator $\boldsymbol{\mu}$. After having

scaled the Hamiltonian (15), we are now prepared to calculate the complex correction knowing that the unperturbed states can be written as

$$|\psi_{n,1}^{(0)}) = |g\rangle|0_\epsilon(\mathbf{k}, k_z)\rangle|n, 1), \tag{19}$$

where n stands for the number of the well where the atom is initially placed (in the first Bloch band). We have to stress here that this state belongs to a product of three spaces and that the transformation (4) acts only on the external atomic states. As a consequence, we will use the *c-product* only on the external atomic states whereas we keep the standard scalar product acting on the internal atomic states and field states. These assumptions lead to an expression for the second-order correction of the modified Wannier-Stark energy levels

$$\Delta E_{m,1}^{(2)} = -\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\left[(\psi_{m,1}^{(0)}|H_{int}^{\theta}|e\rangle|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle|n, b)\right]^2}{E_{n,b}^{(0)} - E_{m,1}^{(0)} + \hbar(\omega + \omega_0)}, \tag{20}$$

where

$$H_{\text{int}}^{\theta} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}e^{i\theta}). \tag{21}$$

Equation (20) can be simplified considering that in a shallow trap, as in the case of FORCA-G, the Bloch bands above the second one are not trapped in the lattice so that the wavefunctions associated with these bands are very delocalized and the overlap with the states of the first band is very weak. This observation allows to restrict the sum over b to its first two terms. Moreover, due to the extension of the modified Wannier-Stark wavefunctions in the first band, it is sufficient to take into account only 20 terms in the sum over n. Finally, the weakness of the imaginary part of the modified Wannier-Stark states as well as those of the difference of the real part of the Wannier-Stark spectrum with respect to the term $\hbar(\omega+\omega_0)$ allows us to ignore the contribution $E_{n,b}^{(0)} - E_{m,1}^{(0)}$ in the denominator in Eq. (20). All these simplifications lead to a new expression of the correction

$$\begin{aligned}
\Delta E_{m,1}^{(2)} = &\int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} dz' \sum_{n=m-10}^{m+10} \Big[-\sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \Big(\Big[\frac{(m,1|z)(z|n,1)(m,1|z')(z'|n,1)}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\
&+ \frac{(m,1|z)(z|n,2)(m,1|z')(z'|n,2)}{\hbar(\omega+\omega_0)} \Big] A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) A_p^{(\theta)\dagger}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}') \Big) \Big] \\
= &-\int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} dz' \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=m-10}^{m+10} \Big[\frac{WS_{m,1}(z) WS_{m,1}(z')}{\hbar(\omega+\omega_0)} \\
&A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) A_p^{(\theta)\dagger}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}') \left(WS_{n,1}(z) WS_{n,1}(z') + WS_{n,2}(z) WS_{n,2}(z') \right) \Big].
\end{aligned} \tag{22}$$

where $WS_{n,m}(x)$ state for the modified Wannier-Stark states taking into account the presence of the surface, and

$$\begin{aligned}
A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}) &= -\langle 0_p(\mathbf{k}, k_z)|\boldsymbol{\mu}_{eg} \cdot \boldsymbol{E}(\mathbf{r}e^{i\theta})|1_p(\mathbf{k}, k_z)\rangle \\
&= -\frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}e^{i\theta}} \boldsymbol{\mu}_{eg} \cdot \mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, ze^{i\theta}),
\end{aligned} \tag{23}$$

where $\mathbf{f}_p(\mathbf{k}, k_z, z)$ are the mode functions of the electric field in presence of a perfectly conducting mirror in $z = 0$ [30]

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1(\mathbf{k}, k_z, z) &= \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}} \sin(k_z z) \\
\mathbf{f}_2(\mathbf{k}, k_z, z) &= \hat{\mathbf{k}} \frac{ick_z}{\omega} \sin(k_z z) - \hat{\mathbf{z}} \frac{ck}{\omega} \cos(k_z z),
\end{aligned} \tag{24}$$

being $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ and $\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1)$. Unfortunately, the terms $A_p^{(\theta)}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r})$ and $A_p^{(\theta)\dagger}(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}')$ lead to a divergent integral when the coordinate z is complex-scaled. Indeed, using the definitions of the electric field given in [11], we obtain the following divergent expression for the correction

$$\Delta E^{(2)}_{m,1} = -\frac{\hbar \boldsymbol{\mu}^2_{eg}}{4\pi^3\epsilon_0}\int_0^\infty dz\int_0^\infty dz'\int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\sum_{n=m-10}^{m+10} \Big\{\frac{W_{m,1}(z)W_{m,1}(z')}{\hbar(\omega+\omega_0)}\big(W_{n,1}(z)W_{n,1}(z')+W_{n,2}(z)W_{n,2}(z')\big) \omega\Big[\Big(1+\Big(\frac{ck_z}{\omega}\Big)^2\Big)\sin(k_z z e^{i\theta})\sin(k_z z' e^{i\theta})+\Big(\frac{ck}{\omega}\Big)^2\cos(k_z z e^{i\theta})\cos(k_z z' e^{i\theta})\Big]\Big\}. \quad (25)$$

This divergence is fundamental because the terms in cosh and sinh (coming from the sin and cos functions with complex arguments) produce a divergence which is not sensitive to any ordinary regularization technique. This could be due to the fact that the atom is treated all along the calculation as a pointlike particle whereas its finite size should be taken into account. However, this effect is difficult to characterize because the scaling of the Hamiltonian makes the coordinate representing the atom-wall distance complex so that the atomic size should be defined as a complex quantity, which is far from natural. So, for the time being, the calculation of the effect of the Casimir-Polder interaction on the lifetimes of the atomic states remains an open problem.

VI. CONCLUSIONS

In this paper we have studied the modifications to the lifetime of atoms trapped in an optical lattice in proximity of a surface. We have shown that the boundary condition introduced by the presence of the surface only marginally modifies the value of the ordinary Wannier-Stark lifetimes, leaving them almost infinite with respect to the duration of a measurement in a typical atomic-interferometry experiment such as the recently proposed FORCA-G. The same holds for the presence of a hypothetical Yukawa deviation from Newton's gravitational law. In our analysis, we have modeled the surface both as an infinite and a finite potential barrier, and considered both an atom above or below the surface.

As a natural development of our work, it could be interesting to investigate the behavior of the states in front of a more realistic surface, abandoning the assumptions of perfect conduction and infinite extension. This is the subject of ongoing work and will be part of an upcoming publication. As discussed in the last section, another problem which remains open is the precise calculation of the perturbation of the lifetimes due to the Casimir-Polder effect. However, we expect that this will not significantly reduce the lifetime. On the contrary, the Casimir-Polder force is attractive, so for atoms below the surface it will tend to counteract Landau-Zener tunnelling thus increasing the lifetime, rather than decreasing it. This assumption is made knowing that the Casimir-Polder potential is attractive toward the surface whereas the Landau-Zener effect tends to drag the atom away from the surface. Thus, at the moment we can assume that the Casimir-Polder effect should act on the lifetimes in an opposite way with respect to the Landau-Zener effect so that it should increase the lifetime of the atomic states. Finally, we point out that in this work we have not taken into account chemical processes between the atoms and the surface (atoms "sticking" to the surface) as we have considered the surface as a simple potential barrier. A more realistic analysis should include an additional potential describing that interaction, but is beyond the scope of the present paper.

Acknowledgments

This research is carried on within the project iSense, which acknowledges the financial support of the Future and Emerging Technologies (FET) programme within the Seventh Framework Programme for Research of the European Commission, under FET-Open grant number: 250072. We also gratefully acknowledge support by Ville de Paris (Emergence(s) program) and IFRAF. The authors thank N. Moiseyev, H. J. Korsch, Q. Beaufils, A. Hilico, B. Pelle and F. Pereira dos Santos for fruitful and stimulating discussions.

[1] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehan and Winston, New York, 1976).
[2] G. H. Wannier, Phys. Rev. **117**, 432 (1960).
[3] N. Moiseyev, Phys. Rep. **302**, 211 (1998).
[4] M. Gluck, A. R. Kolovsky, H. J. Korsch, and N. Moiseyev, Eur. Phys. J. D **4**, 239 (1998).
[5] M. Gluck, A. R. Kolovsky, and H. J. Korsch, Phys. Rep. **366**, 103 (2002).
[6] L. D. Landau, Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932).
[7] C. Zener, R. Soc. Lond. A **137**, 696 (1932).
[8] C. Zener, R. Soc. Lond. A **145**, 523 (1934).
[9] P. Lemonde and P. Wolf, Phys. Rev. A **72**, 033409 (2005).

[10] P. Wolf, P. Lemonde, A. Lambrecht, S. Bize, A. Landragin, and A. Clairon, Phys. Rev. A **75**, 063608 (2007).
[11] R. Messina, S. Pelisson, M.-C. Angonin, and P. Wolf, Phys. Rev. A **83**, 052111 (2011).
[12] Q. Beaufils, G. Tackmann, B. Pelle, S. Pelisson, P. Wolf, F. Pereira dos Santos, Phys. Rev. Lett. **106**, 213002 (2011).
[13] G. Tackmann, B. Pelle, A. Hilico, Q. Beaufils, and F. Pereira dos Santos, Phys. Rev. A **84**, 063422 (2011).
[14] S. Pelisson, R. Messina, M.-C. Angonin, and P. Wolf, Phys. Rev. A, **86**, 013614 (2012).
[15] B. Pelle, A. Hilico, G. Tackmann, Q. Beaufils, and F. Pereira dos Santos, **87**, 023601 (2013).
[16] J. Agler, and R. Froese, Commun. Math. Phys. **100**, 161 (1985).
[17] J. E. Avron, Phys. Rev. Lett **37**, 1568 (1976).
[18] F. Bentosela, V. Grecchi, and F. Zironi, J. Phys. C **15**, 7119 (1982).
[19] V. Grecchi, M. Maioli, and A. Sacchetti, J. Phys A **26**, L379 (1993).
[20] V. Grecchi, and A. Sacchetti, Commun. Math. Phys. **185**, 359 (1997).
[21] V. Buslaev, and A. Grigis, J. Math. Phys. **39**, 2520 (1998).
[22] S. Glutsch, and F. Bechstedt, Phys. Rev. B **60**, 16584 (1999).
[23] E. Balslev, and J. M. Combes, Commun. Math. Phys. **22**, 280 (1971).
[24] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
[25] Q. Niu, X.-G. Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **76**, 4504 (1995).
[26] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammmerling, A. McKenney, and D. Sorensen, *LAPACK User' Guide: Third Edition* (the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999).
[27] A. A. Geraci, S. B. Papp, and J. Kitching, Phys. Rev. Lett. **105**, 101101 (2010).
[28] E. Power, and S. Zienau, Phyl. Trans. R. Soc. A **251**, 427 (1959).
[29] N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum mechanics* (Cambridge University Press, 2011).
[30] G. Barton, J. Phys. B **7**, 2134 (1974).

CHAPITRE 4

Modélisation théorique de l'expérience FORCA-G

Ce dernier chapitre est consacré à la modélisation pure du schéma expérimental prenant en compte tous les effets exposés précédemment. La simulation de l'expérience sera effectuée par la résolution des équations de Rabi modélisant l'interaction des états atomiques calculés dans les chapitres précédents et les impulsions Raman ou micro-onde permettant de réaliser le schéma expérimental. Cette étude conduira à la proposition d'un nouveau schéma présenté en fin de chapitre.

Sommaire

4.1 Introduction 116

4.2 Couplages des états atomiques du piège avec les lasers Raman 116

4.3 Choix de la profondeur des puits et délocalisation de la fonction d'onde 118

4.4 Problème des phases cumulées et proposition d'un nouveau schéma interférométrique 121

4.4.1 Modélisation de l'interféromètre papillon 121

4.4.2 Proposition d'un nouveau schéma interférométrique 125

4.5 Modélisation complète de l'expérience 127

4.5.1 Contraste à la sortie de l'interféromètre 127

4.5.2 Le cas d'une mesure très proche de la surface 128

4.5.3 L'optimisation du temps d'interaction 129

4.6 Comparaison avec l'expérience 130

4.7 Articles 132

4.1 Introduction

Nous avons calculé dans les chapitres précédents les états pseudo-propres des atomes dans le piège en présence des différentes interactions qui nous intéressent et nous avons vérifié que la durée de vie de ces états était suffisante pour réaliser l'expérience. La dernière partie de ce mémoire présente l'utilisation de ces états particuliers pour la simulation rigoureuse du schéma expérimental envisagé. Cela a nécessité la résolution des équations de Rabi qui modélisent l'interaction entre les états atomiques et les impulsions électromagnétiques réalisant l'interféromètre. Cette résolution a permis d'adapter les impulsions aux particularités des états du piège décelées aux chapitres 2 et 3 et à la prédiction du contraste espéré à la sortie de l'interféromètre. Enfin, le calcul du contraste des franges d'interférences obtenues, a mis au jour un problème de phases résiduelles dans le schéma tel qu'il avait été envisagé initialement conduisant ainsi à la proposition d'un nouveau schéma interférométrique.

4.2 Couplages des états atomiques du piège avec les lasers Raman

Dans le chapitre 2, nous avons calculé les états des atomes piégés dans l'onde stationnaire en présence des interactions à courte distance avec la surface. Nous avons ensuite vérifié dans le chapitre 3 que ces états avaient une durée de vie suffisamment longue pour autoriser une mesure interférométrique. Pour achever ce travail et obtenir la modélisation complète de l'expérience, il nous faut maintenant étudier le comportement de ces états pseudo-propres sous l'influence des impulsions Raman réalisant le schéma interférométrique afin d'estimer le contraste en sortie de l'interféromètre et ainsi prédire les performances de l'expérience. Pour ce faire, écrivons le système physique à l'aide de l'Hamiltonien du chapitre 2

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\text{int}} = H_{\text{f}} + H_{\text{at}} + H_{\text{WS}} + H_{\text{int}} \\ H_{\text{f}} &= \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\, \hbar\omega\, a_p^\dagger(\mathbf{k}, k_z) a_p(\mathbf{k}, k_z) \\ H_{\text{at}} &= \hbar\omega_{eg} |e\rangle\langle e| \\ H_{\text{WS}} &= \frac{p^2}{2m_a} - m_a g z + \frac{U}{2}\big(1 - \cos(2k_l z)\big) \\ H_{\text{int}} &= -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

et ajoutons-y le terme de couplage entre un atome et un champ électromagnétique

$$H_s = \hbar\,\Omega\, \cos(\omega_s t - k_s z) |e\rangle\langle g| + \text{h.c.} \tag{4.2.2}$$

où Ω est la fréquence de Rabi tandis que ω_s est la fréquence effective du laser réalisant les impulsions Raman et k_s est son vecteur d'onde effectif tels que décrits au chapitre 1.

Connaissant les états stationnaires du système (4.2.1), on peut déduire l'interaction avec les lasers Raman à partir de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_{\rm at}(t)\rangle = (H + H_s)|\psi_{\rm at}\rangle. \tag{4.2.3}$$

Cette équation est résolue en projetant la fonction d'onde $|\psi_{\rm at}(t)\rangle$ sur la base des états internes et externes de l'atome

$$\{|\varphi_n, i\rangle\} = \{|\varphi_n\rangle \otimes |i\rangle\}. \tag{4.2.4}$$

Dans l'expression (4.2.4), $|\varphi_n\rangle\,(n = 1, 2\dots)$ représente les états externes de l'atome. Ces états sont ceux calculés au chapitre 2. En effet, lorsqu'on a regardé les états atomiques dans le piège dipolaire, on s'est intéressé aux états du piège et non aux états internes (fondamental $|g\rangle$ ou excité $|e\rangle$) de l'atome qui ne sont pas modifiés par les potentiels alors pris en compte. En revanche, l'interaction avec les lasers réalisant l'interféromètre modifie à la fois les états internes et externes de l'atome (voir chapitre 1). Comme on l'a vu précédemment, cette interaction produit une oscillation de Rabi entre les deux états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ que l'on obtient par l'intermédiaire du système d'équations couplées

$$\left\{\begin{array}{ll} i\dot{a}_n^g(t) & = \sum_{n'} \Omega\,\langle\varphi_n|\cos(\omega_s t - k_s z)|\varphi_{n'}\rangle a_{n'}^e(t)e^{-i\delta_{n'-n}t} \\ i\dot{a}_n^e(t) & = \sum_{n'} \Omega\,\langle\varphi_n|\cos(\omega_s t - k_s z)|\varphi_{n'}\rangle a_{n'}^g(t)e^{i\delta_{n-n'}t} \end{array}\right. \tag{4.2.5}$$

obtenu en posant

$$|\psi_{\rm at}(t)\rangle = \sum_n \Big[a_n^g(t)e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}|\varphi_n, g\rangle\ + a_n^e(t)e^{-i\frac{E_n+\hbar\omega_{eg}}{\hbar}t}|\varphi_n, e\rangle\Big]. \tag{4.2.6}$$

Les coefficients $a_n^g(t)$ et $a_n^e(t)$ que l'on cherche sont donc les amplitudes de probabilité des états fondamental et excité dans le puits n de l'onde stationnaire. Dans le système (4.2.5), la somme sur n' court sur toutes les valeurs des puits et nous avons défini $\delta_{n-n'} = \frac{E_n - E_{n'} + \hbar\omega_{eg}}{\hbar}$. En développant les termes en cosinus on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} i\dot{a}_n^g(t) & = \sum_{n'} \frac{\Omega}{2}\langle\varphi_n|\big(e^{i(\omega_s t - k_s z)} + e^{-i(\omega_s t - k_s z)}\big)|\varphi_{n'}\rangle a_{n'}^e(t)e^{-i\delta_{n'-n}t} \\ i\dot{a}_n^e(t) & = \sum_{n'} \frac{\Omega}{2}\langle\varphi_n|\big(e^{i(\omega_s t - k_s z)} + e^{-i(\omega_s t - k_s z)}\big)|\varphi_{n'}\rangle a_{n'}^g(t)e^{i\delta_{n-n'}t} \end{array}\right. \tag{4.2.7}$$

que l'on peut simplifier en faisant l'approximation classique de champ tournant qui consiste à négliger les termes de (4.2.7) qui oscillent rapidement. On obtient alors

$$\left\{\begin{array}{ll} i\dot{a}_n^g(t) & = \sum_{n'} \frac{\Omega}{2}\, a_{n'}^e(t)e^{i\Delta_{n',n}t}\langle\varphi_n|e^{-ik_s z}|\varphi_{n'}\rangle \\ i\dot{a}_n^e(t) & = \sum_{n'} \frac{\Omega}{2}\, a_{n'}^g(t)e^{-i\Delta_{n,n'}t}\langle\varphi_n|e^{ik_s z}|\varphi_{n'}\rangle \end{array}\right. \tag{4.2.8}$$

où l'on a posé

$$\Delta_{n,n'} = \omega_s - \delta_{n-n'} = \omega_s - \omega_{eg} - \frac{E_n - E_{n'}}{\hbar} \tag{4.2.9}$$

Dans l'équation (4.2.8), le terme $\frac{\Omega}{2} \langle \varphi_n | e^{-ik_s x} | \varphi_{n'} \rangle$ est la fréquence de Rabi pour la transition entre deux puits différents n et n', Ω étant la fréquence de Rabi en espace libre [129]. Cette fréquence de Rabi détermine la probabilité de transition d'un puits à un autre du piège et dépend fortement du piège dipolaire et plus particulièrement de sa longueur d'onde et de sa profondeur. Le choix du piège est donc fondamental pour l'optimisation de l'expérience. Sa longueur d'onde étant déterminée par les critères de choix du laser, une étude plus poussée de la profondeur du puits est utile pour optimiser le schéma d'interféromètre. Nous allons explorer les enjeux liés à ce choix dans la section suivante.

4.3 Choix de la profondeur des puits et délocalisation de la fonction d'onde

Afin de choisir la profondeur optimale pour le piège dipolaire il convient d'expliciter un peu plus avant le schéma interférométrique proposé pour l'expérience [1, 2].

Le but de l'expérience est de mesurer les interactions à courte distance entre une surface massive et un atome piégé dans une onde stationnaire. La mesure se fait par interférométrie atomique en mesurant la différence de phase entre deux paquets d'onde atomiques initialement dans un puits n puis séparés spatialement et recombinés. Dans la proposition de 2005 [1, 2] un schéma dit en *"papillon"* est proposé permettant de mesurer le déphasage dû à la différence de potentiel entre deux puits de l'onde stationnaire séparés d'une longueur d'onde. Ce schéma est constitué d'une séquence de cinq impulsions électromagnétiques auxquelles sont soumis les atomes. Ces impulsions sont de deux types selon que l'on souhaite modifier à la fois les états internes et externes de l'atome ou seulement ses états internes. En effet, pour faire voyager les atomes d'un puits à l'autre, on va utiliser des impulsions Raman qui, comme on l'a vu au chapitre 1, modifient à la fois l'état interne et l'état d'impulsion de l'atome. En revanche, lorsqu'il s'agit de modifier simplement les états internes pour des raisons de symétrisation que nous expliciterons dans la suite, on peut se contenter d'une impulsion micro-onde dont la fréquence est accordée sur la transition atomique entre les deux niveaux hyperfins $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Cette fréquence de transition vaut $\nu_{eg} = 6.8\,\mathrm{GHz}$. L'avantage d'utiliser une impulsion micro-ondes quand on veut rester dans le même puits est que le vecteur k_s est très petit par rapport à celui des lasers Raman, et par conséquent le couplage aux autres puits (voir l'équation (4.2.9)) est proche de zéro. Le schéma en papillon est présenté sur la figure 4.1.

Le schéma interférométrique consiste donc à séparer un paquet d'onde atomique dans

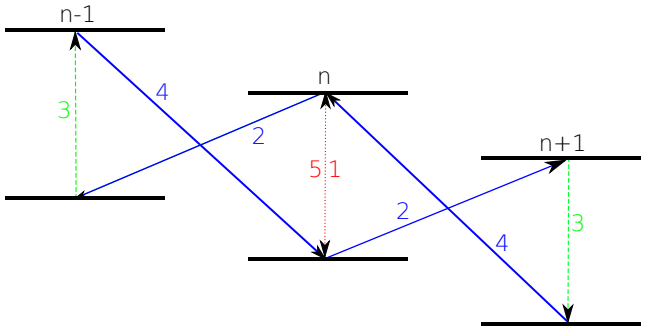


Figure 4.1 : Schéma papillon pour l'interféromètre [1, 2]. Les lignes pointillées rouges représentent les impulsions $\frac{\pi}{2}$ micro-ondes utilisées pour créer la superposition cohérente et pour recombiner le paquet d'onde à la sortie du schéma interférométrique. Les lignes bleues symbolisent les impulsions π Raman entre un puits et son voisin tandis que les tirets verts représentent les impulsions π micro-ondes dans les deux puits séparés. La séquence des impulsions est donnée par les chiffres de 1 à 5.

un puits n en deux à l'aide d'une impulsion $\frac{\pi}{2}$ micro-onde. On fait ensuite voyager les deux paquets d'onde ainsi séparés dans les deux puits voisins $(n+1)$ et $(n-1)$ à l'aide d'impulsions Raman π dont le désaccord correspond à la différence de potentiel entre les puits. On laisse ensuite les paquets d'onde évoluer librement dans chaque puits pendant un temps T avant de leur appliquer une impulsion micro-onde π de symétrisation permettant d'échanger les états internes avant de laisser de nouveau le système évoluer librement pendant T. Le fait d'ajouter une impulsion de symétrisation permet de s'affranchir de la dépendance en ν_{eg} du déphasage total. En effet, après l'interaction avec le laser Raman, le paquet d'onde dans le puit $(n+1)$ est dans l'état interne excité $|e\rangle$ tandis que celui dans le puits $(n-1)$ est dans l'état fondamental $|g\rangle$. Sans l'impulsion π numéro 3 sur la figure 4.1, la fréquence de transition entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$ participe au déphasage total alors que celui-ci s'annule grâce à la symétrisation de l'interféromètre. Le déphasage à la sortie de l'interféromètre de la figure 4.1 estimé dans [2] s'exprime donc comme suit

$$\Delta\phi = \frac{2}{\hbar}\left(m_a g \lambda_l + U_{n+1} - U_{n-1}\right) T + \left(\omega_{eg}^{n+1} - \omega_{eg}^{n-1}\right) T - \phi^{(1)} + 2(\phi^{(2)} - \phi^{(3)} + \phi^{(4)}) - \phi^{(5)} \tag{4.3.1}$$

où les termes $\phi^{(i)}$ sont les déphasages dus aux impulsions utilisées pour réaliser l'interféromètre, $\omega_{eg} = 2\pi\nu_{eg}$ est la pulsation de la transition atomique et U_n représente l'intensité des potentiels recherchés dans le puits n. On voit dans l'équation (4.3.1) que si les déplacements lumineux des niveaux atomiques sont les mêmes pour tous les puits (voir le chapitre 1 pour la liste des effets pouvant modifier ces déplacements) alors la dépendance en ω_{eg} s'annule.

Ce schéma d'interféromètre repose donc sur des transitions Raman entre deux puits directement voisins. Sachant cela, on peut déduire l'amplitude du piège la plus adaptée à

l'optimisation des impulsions Raman en considérant l'expression des fréquences de Rabi de l'équation (4.2.8)

$$\Omega_{n,n'} = \frac{\Omega}{2} \langle \varphi_n | e^{-ik_s z} | \varphi_{n'} \rangle. \tag{4.3.2}$$

À titre d'exemple et afin de permettre les calculs analytiques, plaçons nous assez loin de la surface. Dans ces conditions, $|\varphi_n\rangle$ est un état de Wannier-Stark standard. On a vu dans le chapitre 1 que cet état pouvait s'écrire comme la superposition des états de Bloch $|\kappa\rangle$ du piège en l'absence de potential linéaire [44, 79]

$$|\varphi_n\rangle = \int_{-k_l}^{k_l} d\kappa \, b_n(\kappa) |\kappa\rangle. \tag{4.3.3}$$

Dans l'expression (4.3.3) on a posé

$$\begin{cases} b_n(\kappa) = & Ce^{-\frac{i}{m_a g}(\kappa E_n - \tilde{\epsilon}(\kappa))} \\ E_n = & \bar{\epsilon_0} - n m_a g \frac{\lambda_l}{2} \end{cases} \tag{4.3.4}$$

où $\tilde{\epsilon}(q)$ représente la bande d'énergie de Bloch tandis que $\bar{\epsilon_0}$ en est sa valeur moyenne. Pour l'exemple, on ne considère que la première bande de Bloch (ce qui est justifié par le résultat du calcul du temps de vie de cette bande effectué au chapitre 3). On peut alors simplifier l'expression (4.3.3) en introduisant la relation de fermeture sur l'impulsion $|q\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | e^{-ik_s z} | \varphi_{n'} \rangle &= \int dq \langle \varphi_n | q \rangle \langle q | e^{-ik_s z} | \varphi_{n'} \rangle \\ &= \int dq \langle \varphi_n | q \rangle \langle q + k_s | \varphi_{n'} \rangle \\ &= \int dq \int_{-k_l}^{k_l} d\kappa \int_{-k_l}^{k_l} d\kappa' b_n^*(\kappa) b_{n'}(\kappa') \langle \kappa | q \rangle \langle q + k_s | \kappa' \rangle. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Or, on sait que, par propriété des états de Bloch, on peut écrire l'égalité suivante, à condition que $f(q)$ soit périodique :

$$\int_{-k_l}^{k_l} f(\kappa) < q | \kappa > \, \mathrm{d}\kappa = A f(q) C_0^q \tag{4.3.6}$$

où A est une constante de normalisation et les C_0^q sont les coefficients des états de Bloch décrits plus en détail dans [1]. On peut donc en déduire que

$$\langle \varphi_n | e^{-ik_s z} | \varphi_{n'} \rangle = A^2 C^2 \int dq \, C_0^q C_0^{q+k_s} e^{\frac{i}{m_a g}(qE_n - (q+k_s)E_{n'}) - \tilde{\epsilon}(q) + \tilde{\epsilon}(q+k_s)}. \tag{4.3.7}$$

Pour effectuer ce calcul, nous avons besoin des énergies des états de Bloch que l'on peut exprimer à l'aide d'une expansion en série de cosinus

$$\tilde{\epsilon}(q) = \bar{\epsilon_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j \cos(\frac{j\pi q}{k_l}) \tag{4.3.8}$$

avec

$$\epsilon_j = \frac{1}{k_l} \int_{-k_l}^{k_l} (\tilde{\epsilon}(q) - \bar{\epsilon_0}) \cos(\frac{j\pi q}{k_l})\, \mathrm{d}q. \tag{4.3.9}$$

Ce qui nous donne pour $\tilde{\epsilon}(q)$

$$\tilde{\epsilon}(q) = q\bar{\epsilon_0} + \sum_j \epsilon_j \frac{k_l}{j\pi} \sin(\frac{j\pi q}{k_l}). \tag{4.3.10}$$

Enfin, nous obtenons l'expression de la fréquence de Rabi de la transition

$$\langle \varphi_n | e^{-ik_s z} | \varphi_{n'} \rangle = A^2 C^2 \int dq C_0^{\alpha} C_0^{\alpha+k_s} \exp\left\{ i \left[q(n'-n)\frac{\lambda_l}{2} + n' k_s \frac{\lambda_l}{2} - \frac{1}{m_a g} \left(\sum_j \epsilon_j \frac{k_l}{j\pi} \sin\frac{j\pi q}{k_l} - \sum_l \epsilon_l \frac{k_l}{l\pi} \sin\frac{l\pi(q+k_s)}{k_l} \right) \right] \right\}. \tag{4.3.11}$$

La dépendance en U de l'équation (4.3.11) est cachée dans les valeurs de ϵ_i puisque la profondeur des puits de l'onde stationnaire a une influence sur l'expression des bandes de Bloch que l'on utilise [129,130]. La figure 4.2 présente les coefficients (4.3.11) pour les états de Wannier-Stark des atomes de rubidium dans un piège de longueur d'onde $\lambda_l = 532\,\mathrm{nm}$ interagissant avec des lasers Raman à $\lambda_s = 780\,\mathrm{nm}$ (soit $k_s = 4\pi/\lambda_s$). Cette figure nous permet de choisir la profondeur de puits optimale pour le schéma expérimental proposé sachant que celui-ci s'appuie sur des transitions entre puits directement voisins ($n \to n \pm 1$). Ainsi, sur la figure 4.2, on voit que le choix $U = 3E_r$ est le meilleur pour cette configuration puisque qu'à cette profondeur, les coefficients pour les transitions $n \to n$, $n \to n \pm 2$ sont faibles alors que les coefficients pour $n \to n \pm 1$ et $n \to n \pm 3$ sont dominants mais avec des désaccords très différents ce qui permet de selectionner seulement la transition $n \to n \pm 1$. On se placera donc expérimentalement à cette profondeur. Nous allons maintenant mener la modélisation complète du schéma interférométrique dans cette configuration.

4.4 Problème des phases cumulées et proposition d'un nouveau schéma interférométrique

4.4.1 Modélisation de l'interféromètre papillon

Une fois que l'on a choisi la profondeur du piège optique, on peut revenir au système (4.2.8) d'équations couplées pour chaque impulsion laser. La solution des équations différentielles est obtenue à l'aide de la méthode des différences finies déjà utilisée dans le chapitre 2. Comme on l'a vu précédemment, la résolution de ce système conduit à l'expression de la fonction d'onde qui permet de déterminer la distribution de probabilité entre

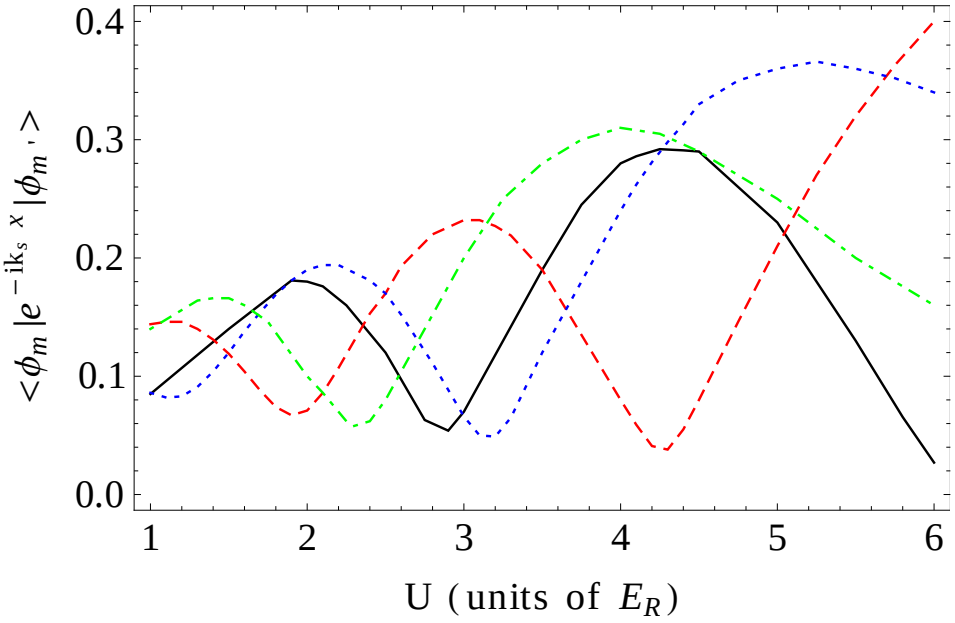


Figure 4.2 : Schéma des fréquences de Rabi de la transition entre un puits n et un autre n' en fonction de la profondeur du puits (en unité d'énergie de recul des photons du piège $E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_a}$). Sont présentés sur cette figure les coefficients pour la transition $n \to n$ (en noir), $n \to n \pm 1$ (en rouge), $n \to n \pm 2$ (en bleu) et $n \to n \pm 3$ (en vert).

l'état $|g\rangle$ et l'état $|e\rangle$ en fonction du temps d'interaction avec le champ électromagnétique. La probabilité oscille et permet de définir les impulsions dites π qui donnent une probabilité 1 pour un paquet d'onde initialement dans l'état $|g\rangle$ de se trouver dans l'état $|e\rangle$ et les impulsions $\frac{\pi}{2}$ qui créent une superposition des états $|g\rangle$ et $|e\rangle$. On choisit donc le temps d'interaction adéquat pour réaliser le schéma interférométrique décrit dans la section 4.3.

On doit toutefois distinguer le cas de l'impulsion Raman permettant la séparation spatiale des deux paquets d'onde et celui des impulsions micro-onde qui permettent la transition entre les états atomiques internes $|g\rangle$ et $|e\rangle$ d'un puits donné. En effet, si l'on a décrit dans la section 4.3 le calcul de l'interaction de type Raman entre un atome et un laser, la fréquence de Rabi est simplifiée dans le cas d'une impulsion micro-onde. Cela provient du fait que, dans le cas des impulsions micro-ondes, le vecteur d'onde de l'impulsion est très petit en comparaison de celui d'une impulsion Raman. En effet, pour une impulsion Raman, dont le but est d'envoyer un paquet d'onde dans un puits voisin, on choisit la fréquence du laser de sorte que celle-ci soit accordée sur la différence d'énergie entre deux puits ce qui donne (les longueurs sont exprimées en unités de puits)

$$k_s = \frac{4\pi}{\lambda_s}\frac{\lambda_l}{2} \simeq 4.2 \tag{4.4.1}$$

tandis que dans le cas d'une impulsion micro-onde on utilise la fréquence de transition hyperfine à 6.8 GHz ce qui donne pour k_s

$$k_s \simeq 3.8.10^{-5}. \tag{4.4.2}$$

De telle sorte qu'en écrivant la fréquence de Rabi sous la forme

$$\frac{\Omega}{2}\langle\varphi_n|e^{-ik_s z}|\varphi_{n'}\rangle = \frac{\Omega}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz\varphi_n^*(z)\varphi_{n'}(z)e^{-ik_s z} \tag{4.4.3}$$

et sachant que z repère la position de l'atome en unité de puits, on voit que l'exponentielle $e^{-ik_s z}$ tend vers 1 lorsque l'on considère une impulsion micro-onde. L'expression (4.4.3) se ramène alors au produit scalaire de deux fonctions orthogonales ce qui conduit à réécrire les équations couplées (4.2.8) sous la forme

$$\begin{cases} i\dot{a}_n^g(t) &= \sum_{n'} \frac{\Omega}{2}\, a_{n'}^e(t) \\ i\dot{a}_n^e(t) &= \sum_{n'} \frac{\Omega}{2}\, a_{n'}^g(t). \end{cases} \tag{4.4.4}$$

Pour la modélisation complète de l'interféromètre, on résout donc successivement les systèmes (4.2.8) et (4.4.4) en fonction de la nature de chaque implusion. On calcule ensuite la probabilité finale pour l'état excité afin d'estimer le contraste des franges à la sortie de l'interféromètre.

Un deuxième effet à prendre en compte pour modéliser l'interféromètre est la modification des niveaux d'énergie en présence de la surface. En effet, on a montré au chapitre 2 que l'effet Casimir-Polder et, dans une moindre mesure, le potentiel de Yukawa induisait une modification des niveaux d'énergie dépendant du puits dans lequel on se trouve en particulier lorsqu'on est proche de la surface. Cela implique que la fréquence des transitions Raman utilisées pour réaliser l'interféromètre dans ces premiers puits soit différente en fonction de celui dans lequel on se place. Ainsi, si on se place par exemple dans le huitième puits et que l'on prend en compte l'effet Casimir-Polder, on obtient comme différence d'énergie avec les deux puits voisins

$$\begin{aligned} \Delta_{7,8} &= 0.7013E_r \\ \Delta_{8,9} &= 0.0393E_r. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Il faut donc utiliser deux lasers pour réaliser les implusions π de séparation (2) et (4) de la figure 4.1 chacun étant accordé sur l'une ou l'autre des transitions. Dans la simulation, on a considéré que l'on allumait les deux lasers en même temps et on a optimisé le temps de chacun de façon à avoir les populations souhaitées dans chaque puits à la fin de chaque impulsion.

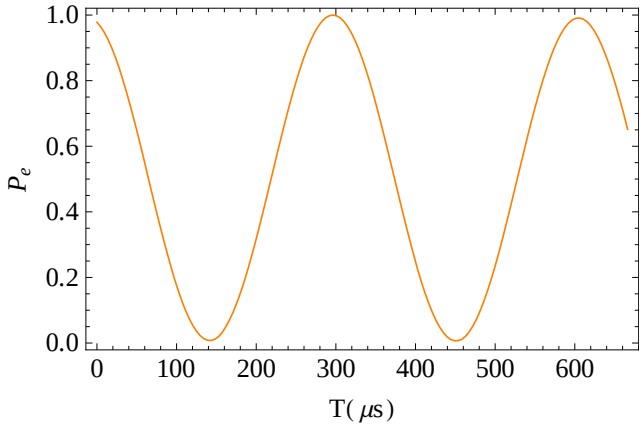


Figure 4.3 : Probabilité de mesurer l'atome dans l'état $|e\rangle$ à la sortie de l'interféromètre *papillon* en fonction du temps T d'évolution libre dans les puits séparés. La figure présente le cas où tous les atomes sont initialement dans le puits $n = 8$ et dans l'état $|g\rangle$.

Le résultat de la modélisation pour l'interféromètre *papillon* dans le cas où tous les atomes sont dans le même puits de départ est présenté sur la figure 4.3.

Cependant, il est assez difficile expérimentalement de maintenir tous les atomes dans le même puits afin de commencer le cycle interférométrique avec une condition initiale pure. Il nous faut donc vérifier que le schéma interférométrique fonctionne dans le cas où plusieurs puits sont initialement peuplés. La figure 4.4 montre le contraste espéré à la sortie de l'interféromètre *papillon* lorsque deux puits sont initialement peuplés. Pour ce

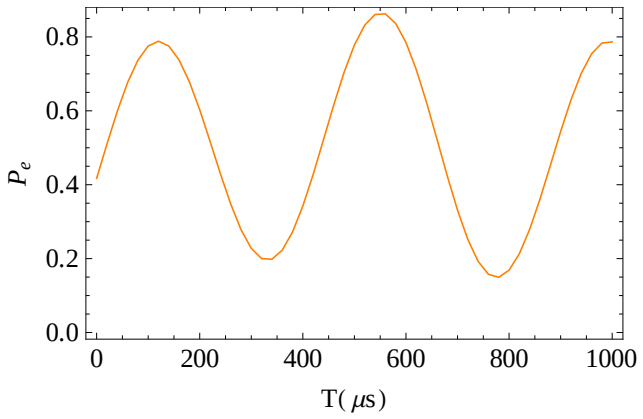


Figure 4.4 : Probabilité de mesurer l'atome dans l'état $|e\rangle$ à la sortie de l'interféromètre *papillon* pour deux puits initialement peuplés en fonction du temps T d'évolution libre dans les puits séparés.

calcul, on s'est intéréssé dans un premier temps aux puits lointains, c'est-à-dire que l'on se place dans le régime où les états propres sont les états de Wannier-Stark. On s'aperçoit

sur la figure 4.4 que le contraste est, dans ce cas, largement plus faible que lorsque les atomes sont initialement tous dans le même puits.

La raison de cette perte de contraste est à chercher dans l'expression du déphasage donnée en (4.3.1). En effet, en faisant l'estimation du déphasage en utilisant la méthode des matrices exposée au chapitre 1, on s'aperçoit que dans le cas de l'interféromètre en *papillon*, il apparaît un terme dépendant de l'indice du puits

$$\begin{aligned}\Delta\phi = & \boxed{-4n\pi\tfrac{k_s}{k_l}} + \frac{2}{\hbar}\left(m_a g\lambda_l + U_{n+1} - U_{n-1}\right)T \\ & + \left(\omega_{eg}^{n+1} - \omega_{eg}^{n-1}\right)T - \phi^{(1)} + 2(\phi^{(2)} - \phi^{(3)} + \phi^{(4)}) - \phi^{(5)}.\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Cette dépendance n'a aucune conséquence sur le contraste de l'interféromètre lorsque tous les atomes se trouvent initialement dans le même puits. En effet, dans ce cas, ce terme agit comme un simple facteur global. En revanche, si on peuple plusieurs puits au départ, ces facteurs se cumulent et induisent des interférences destructives qui ont pour effet de réduire le contraste. Afin d'avoir la meilleure mesure possible des interactions à courte portée, il faut donc trouver une nouvelle configuration d'interféromètre permettant l'annulation de ce terme de phase. La nouvelle configuration proposée fait l'objet de la section suivante.

4.4.2 Proposition d'un nouveau schéma interférométrique

Afin de s'affranchir du terme de phase dépendant de l'indice du puits, il faut trouver une nouvelle configuration permettant l'annulation de ce terme. Regardons donc de plus près d'où provient exactement ce terme. En fait, il peut s'expliquer simplement par la propriété de symétrie des états de Wannier-Stark classiques. En effet, on peut écrire le terme d'interaction entre deux états de Wannier-Stark quelconques et le laser Raman en fonction d'un état donné (dans le puits $n = 0$ par exemple)

$$\langle\varphi_n|e^{-ik_s z}|\varphi_{n'}\rangle = e^{i\pi n\frac{k_s}{k_l}}\langle\varphi_0|e^{-ik_s z}|\varphi_{n'-n}\rangle \tag{4.4.7}$$

de sorte que l'équation (4.2.8) se réécrit

$$\begin{cases} i\dot{a}_n^g(t) & = \sum_{n'}\frac{\Omega_{n-n'}}{2}\, a_{n'}^e(t)e^{-i\pi n'\frac{k_s}{k_l}}e^{i\Delta_{n',n}t}\langle\varphi_n|e^{-ik_s z}|\varphi_{n'}\rangle \\ i\dot{a}_n^e(t) & = \sum_{n'}\frac{\Omega_{n'-n}}{2}\, a_{n'}^g(t)e^{i\pi n\frac{k_s}{k_l}}e^{-i\Delta_{m,m'}t}\langle\varphi_n|e^{ik_s z}|\varphi_{n'}\rangle. \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Dans l'équation (4.4.8), on voit que l'apparition du facteur de phase provient du fait que celui-ci n'est pas de même signe lorsqu'on effectue une transition de l'état $|g,n\rangle$ vers $|e,n'\rangle$ que lorsqu'on fait la transition $|e,n\rangle \to |g,n'\rangle$ de sorte que les phases s'accumulent au cours des impulsions (2) et (4) de la figure 4.1. La manière la plus intuitive de supprimer cette phase est donc de s'arranger pour que les impulsions (2) et (4) soient les mêmes. Ainsi la

contribution est égale pour les deux impulsions et se compense. Pour pouvoir réaliser un tel schéma, il suffit de rajouter une nouvelle impulsion micro-onde π dans les puits séparés afin que les atomes reviennent à l'emplacement qu'ils occupaient après l'impulsion (2). Il faut alors adapter le temps d'interaction libre afin que le paquet d'onde reste le même temps dans chaque état interne. La somme de toute ces considérations a conduit à proposer un nouveau schéma interférométrique en *"accordéon"* présenté sur la figure 4.5. Sur cette

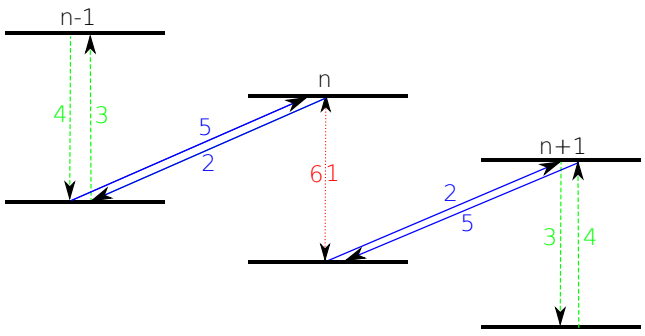


Figure 4.5 : Schéma du nouvel interféromètre en *accordéon*.

figure sont représentées les impulsions électromagnétiques utilisées pour réaliser un nouvel interféromètre permettant de s'affranchir du facteur de phase dépendant de l'indice du puits de départ de l'équation (4.4.6). Comme dans le cas du schéma en *papillon*, on utilise des lasers Raman pour les transitions destinées à modifier à la fois les états internes et externes du paquet d'onde tandis que l'on se contente d'impulsions micro-onde pour les transitions dans le même puits. Si on considère que les atomes évoluent librement pendant un temps T_1 après la transition (2), T_2 après (3) et T_3 avant l'impulsion de retour dans le puits de départ (5), l'expression du déphasage à la fin du schéma interférométrique s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta\phi =& \frac{1}{\hbar}\left(m_a g\lambda_l + U_{n+1} - U_{n-1}\right)\left(T_1+T_2+T_3\right) + \left(\omega_{eg}^{n+1} - \omega_{eg}^{n-1}\right)\left(T_1 - T_2 + T_3\right) \\ & - \phi^{(1)} + 2(\phi^{(2)} - \phi^{(3)} + \phi^{(4)} - \phi^{(5)}) + \phi^{(6)}.\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Pour conserver l'annulation du terme en ω_{eg}, il nous faut donc choisir T_1, T_2 et T_3 tels que

$$T_1 + T_3 = T_2 = T. \tag{4.4.10}$$

De cette manière, on s'affranchit du terme en ω_{eg} et on obtient un déphasage dépendant uniquement des phases de chaque impulsion et de la différence de potentiel entre les puits. La section suivante est dédiée aux résultats de la modélisation de l'interféromètre avec le nouveau schéma.

4.5 Modélisation complète de l'expérience

Avant de valider expérimentalement le nouveau schéma d'interféromètre, il est utile de simuler le contraste à la sortie de cet interféromètre en utilisant la même méthode que celle utilisée pour l'interféromètre *papillon*. Cette modélisation permettra de vérifier la validité d'un tel schéma ainsi que sa faisabilité en terme de temps disponible expérimentalement pour le piègeage des atomes.

4.5.1 Contraste à la sortie de l'interféromètre

La validation du nouveau schéma passe en premier lieu par le contrôle du contraste espéré dans le cas où tous les atomes sont placés dans le même puits à l'entrée de l'interféromètre. Dans le cas de l'interféromètre *papillon*, on a vu que le contraste était très proche de 1 pour cette configuration. Il convient donc de vérifier que l'ajout d'une impulsion supplémentaire ne le réduit pas dans ce cas. Le résultat de la population de l'état $|e\rangle$ à la sortie de l'interféromètre en fonction du temps d'évolution libre total pour des atomes initialement placés dans le huitième puits est tracé sur la figure 4.6. On voit sur

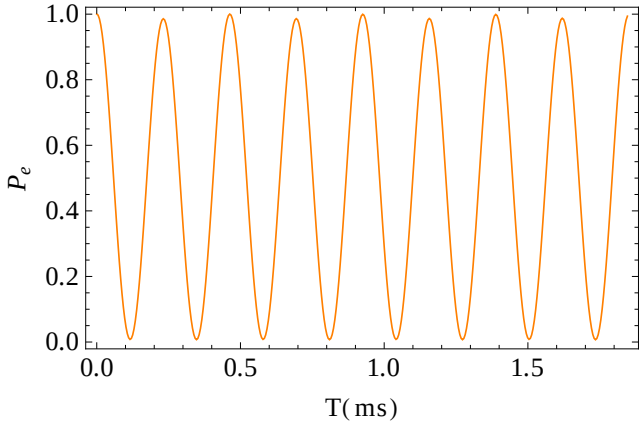


Figure 4.6 : Probabilité de transition de l'état $|g\rangle$ vers l'état $|e\rangle$ à l'issue de l'interféromètre en *accordéon* (fig. 4.5) en fonction du temps T d'évolution libre. Pour cette figure, les atomes sont initialements tous placés dans le puits $n = 8$.

cette figure que le contraste est toujours très élevé. L'ajout de l'impulsion (4) de la figure 4.5 ne réduit donc pas le contraste optimal obtenu dans le cas de l'interféromètre *papillon*.

Vérifions maintenant que notre proposition d'ajout d'une impulsion résout bien le problème de la perte de contraste observée lorsque l'on peuple plusieurs puits au début de l'interféromètre *papillon*. La figure 4.7 montre la population de l'état $|e\rangle$ à la sortie du nouvel interféromètre en fonction du temps total d'évolution libre. On voit bien que cette

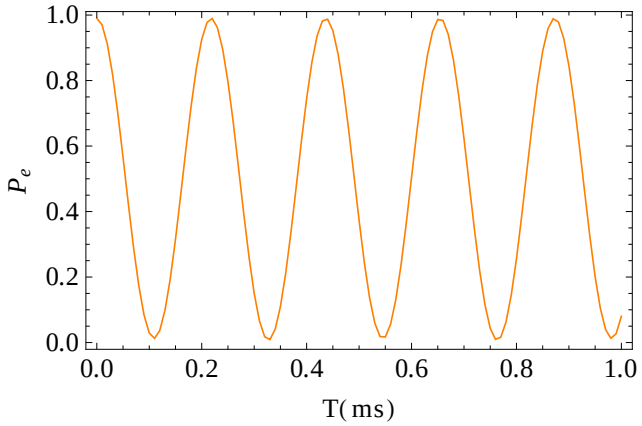


Figure 4.7 : Probabilité de transition de l'état $|g\rangle$ vers l'état $|e\rangle$ à l'issue de l'interféromètre en *accordéon* 4.5 en fonction du temps T d'évolution libre. Pour cette figure, les atomes sont initialements répartis entre deux puits très éloignés de la surface.

nouvelle proposition de schéma résout le problème de la perte de contraste. On peut donc valider ce nouveau schéma.

4.5.2 Le cas d'une mesure très proche de la surface

Dans la section précédente, on a traité le problème du contraste dans le cas où plusieurs puits sont initialement peuplés. Cependant, on n'a véritablement étudié que le cas où les atomes sont suffisament loin de la surface pour être dans un régime de Wannier-Stark. Précisons maintenant le comportement des atomes lorsqu'ils sont proches de la surface.

Dans ce cas, l'effet Casimir-Polder que nous avons détaillé précédemment joue un rôle prépondérant sur les niveaux d'énergie des atomes. Ces niveaux sont en effet décalés en fonction de la distance entre les atomes et la surface selon une loi démontrée au chapitre 2. Pour réaliser l'interféromètre, on a vu que l'on a besoin de modifier la fréquence des lasers Raman afin de les accorder sur chaque différence d'énergie. Si tous les atomes sont dans le même puits de départ et proche de la surface, on a donc besoin de deux lasers différents pour réaliser les impulsions Raman. Si on peuple plusieurs puits pour la mesure proches de la surface, il faut ajouter autant de laser que de puits peuplés. Expérimentalement, il reste donc plus simple de ne charger qu'un seul puits en atome à l'entrée de l'interféromètre plutôt que d'ajouter autant de lasers modulés en fréquence que de puits peuplés. Ceci peut être réalisé à l'aide d'un laser pousseur éliminant tous les atomes présents dans d'autres puits que celui choisi (voir chapitre 1).

Le nouveau schéma permettant la mesure avec plusieurs puits peuplés présente cepen-

dant un grand intérêt pour la recherche des déviations à la loi de la gravitation à grande distance de la surface. En effet, comme on l'a expliqué au chapitre 1, deux configurations sont proposées pour FORCA-G visant à poser le maximum de contraintes sur la déviation hypothétique à la loi de Newton. L'intérêt de ce nouveau schéma réside donc surtout dans la mise en place expérimentale des lasers Raman et pour les divers tests ainsi que dans la simplification considérable qu'il apporte pour la mesure loin de la surface. En revanche, il faut toujours s'arranger pour ne peupler qu'un seul puits pour réaliser les mesures proches de la surface.

4.5.3 L'optimisation du temps d'interaction

Pour réaliser l'interféromètre décrit dans les sections précédentes, on doit s'assurer que l'on effectue des impulsions électromagnétiques π ou $\frac{\pi}{2}$ optimales pour la mise en oeuvre du schéma proposé sur la figure 4.5. Il faut en particulier s'assurer que le temps nécessaire pour la réalisation de l'ensemble des impulsions est beaucoup plus faible que la durée possible de piégeage des atomes dans l'onde stationnaire. La figure 4.8 montre

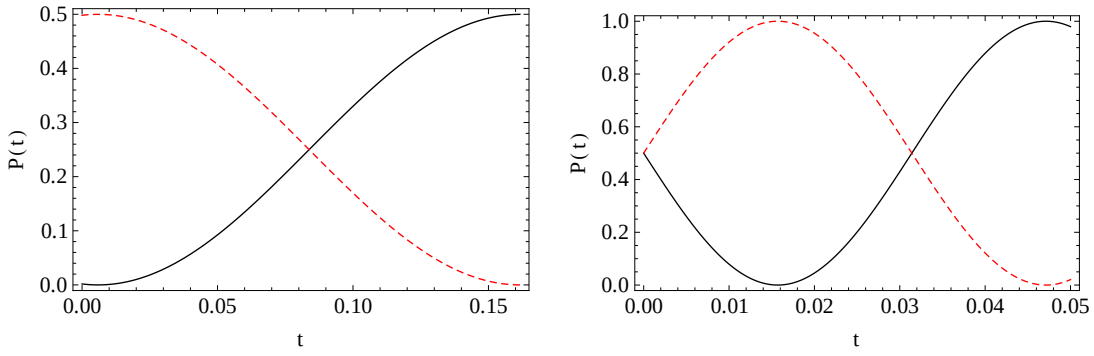


Figure 4.8 : Oscillations de Rabi pour les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ lorsque l'atome est soumis aux impulsions (5) (π Raman) et (6) ($\pi/2$ micro-onde) de la figure 4.5. La figure présente en rouge la probabilité de mesurer l'atome dans l'état $|e\rangle$ en fonction du temps t d'interaction avec le champ électromagnétique et en noir celle de se trouver dans l'état $|g\rangle$. Les deux graphiques sont tracés dans le puits $n+1$ (impulsion 5, figure de gauche) et dans le puits de départ n (impulsion 6, figure de droite).

les oscillations de Rabi des états internes de l'atome lorsque celui-ci est soumis aux impulsions électromagnétiques Raman ou micro-onde. Le tracé de ces oscillations permet de restreindre la fenêtre d'optimisation de la durée des impulsions. En effet, la durée optimale des impulsions est calculée numériquement par optimisation sur la population des états. Or du fait des erreurs numériques, cette optimisation peut aboutir à des durées d'impulsion correspondant à des impulsions $3\pi/2$ au lieu de $\pi/2$ par exemple. Cela n'a pas de sens physique et on utilise donc les courbes 4.8 pour réduire le domaine de recherche de la durée optimale. Le tableau 4.1 présente la durée finale de chaque impulsion. On y voit

Impulsion	Durée (s)		Population
1	0.0157		$P_g(2) = 0.5000$ $P_e(2) = 0.5000$
2	laser 1	laser 2	$P_g(1) = 0.5002$ $P_e(3) = 0.4983$
	0.1500	0.0974	
3	0.0314		$P_g(3) = 0.4983$ $P_e(1) = 0.5002$
4	0.0314		$P_g(1) = 0.5002$ $P_e(3) = 0.4983$
5	laser 1	laser 2	$P_g(2) = 0.5001$ $P_e(2) = 0.5004$
	0.1618	0.0974	
6	0.0157		$P_g(2) = 0$ $P_e(2) = 1.001$

Table 4.1 : Durée et probabilité de transition dans les puits après chaque impulsion réalisant l'interféromètre. Ici, le nombre entre parenthèses signale le puits auquel on s'intéresse.

que la somme des temps d'interaction nécéssaires pour réaliser le schéma d'interféromètre 4.5 vaut 0.4 s si on considère des impulsions dont l'intensité est donnée par $\Omega = 100\,\text{Hz}$.

4.6 Comparaison avec l'expérience

L'importance de la modélisation réalisée dans ce chapitre réside dans la comparaison avec l'expérience en elle même. En effet, la comparaison de la mesure expérimentale avec la prédiction théorique permettra de remonter aux sources de bruit et d'incertitudes dans l'expérience. Simultanément, cette démarche validera les diverses hypothèses que l'on a mises en place pour le calcul des états et la prédiction des performances de l'interféromètre.

Actuellement, l'expérience est en cours de montage. Pendant cette phase de montage, le calcul théorique est particulièrement important pour l'ajustement des paramètres expérimentaux. Le calcul des fréquences de Rabi a été utilisé pour déduire la profondeur expérimentale des puits. L'équipe expérimentale utilise une impulsion à fréquence large permettant de couvrir plusieurs transitions entre de nombreux de puits. En mesurant l'intensité de chaque transition et en comparant ces intensités avec le graphique de la figure 4.2, on a pu s'assurer de la valeur de la profondeur du puits.

Dans l'optique d'une comparaison réaliste avec l'expérience, un autre calcul a été effectué consistant à modéliser des impulsions électromagnétiques réalistes. En effet, dans

les sections précédentes, on a considéré que l'on avait une efficacité des impulsions de 100% négligeant ainsi toute forme de bruit expérimentaux. Une manière de modéliser les incertitudes sur la fréquence et la durée des impulsions réalisant l'interféromètre est de refaire la modélisation en ne considérant des impulsions qui ne sont efficaces qu'à 80%. Ceci est réalisé de deux manières différentes, soit en modifiant la durée des impulsions soit en modifiant la fréquence de transitions. Ces deux méthodes fournissent des résultats similaires et celui pour des durées imparfaites est présenté sur la figure 4.9. On voit

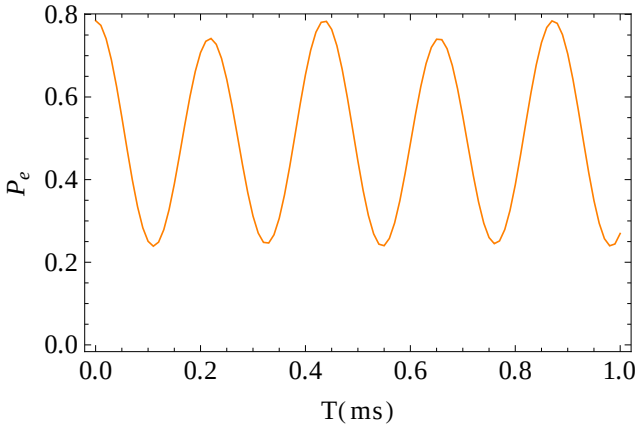


Figure 4.9 : Population de l'état $|e\rangle$ à la sortie de l'interféromètre en fonction du temps d'évolution libre avec des impulsions ayant seulement 80% d'efficacité. Pour cette modélisation, on a placé initialement tous les atomes dans le puits $m = 8$ dans l'état $|g\rangle$.

ici que le contraste est bien sûr réduit par de telles impulsions imparfaites. Cependant, celui-ci reste suffisament élevé pour permettre une mesure du déphasage à la sortie. On peut donc considérer que les incertitudes sur les impulsions électromagnétiques réalisant le schéma interférométrique ne devraient pas induire une perte de contraste significative pour la mesure.

4.7 Articles

Cet appendice est constitué des deux articles résumant les résultats présentés dans ce chapitre et publiés respectivement dans la revue Physical Review Letters en 2011 [129] et dans la revue Physical Review A en 2012 [131].

Laser Controlled Tunneling in a Vertical Optical Lattice

Q. Beaufils, G. Tackmann, X. Wang, B. Pelle, S. Pelisson, P. Wolf, and F. Pereira dos Santos*

LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, LNE, CNRS, UPMC; 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

(Received 22 February 2011; published 27 May 2011)

Raman laser pulses are used to induce coherent tunneling between neighboring sites of a vertical 1D optical lattice. Such tunneling occurs when the detuning of a probe laser from the atomic transition frequency matches multiples of the Bloch frequency, allowing for a spectroscopic control of the coupling between Wannier-Stark (WS) states. In particular, we prepare coherent superpositions of WS states of adjacent sites, and investigate the coherence time of these superpositions by realizing a spatial interferometer. This scheme provides a powerful tool for coherent manipulation of external degrees of freedom of cold atoms, which is a key issue for quantum information processing.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.213002 PACS numbers: 32.80.Qk, 05.60.Gg, 37.10.Jk, 37.25.+k

Trapping and manipulating cold neutral atoms in an optical lattice offers high controllability and robust quantum coherence properties, which makes it an attractive system for many applications such as quantum simulation of solid state systems [1], metrology [2,3], and quantum information processing (QIP) [4]. One key issue in this context is the possibility to coherently control the atoms internal and external degrees of freedom. Combined with the possibility to address single sites [5], this allows for the realization of quantum logic operations [6].

Atom transport control in an optical lattice has been previously reported using microwave fields [7], frequency, phase and amplitude modulation techniques [8–10], or an adiabatic change of the trapping potential [11,12]. In this work, we demonstrate coherent laser induced tunneling of cold atoms between neighboring sites of an optical lattice. In contrast with most previous approaches, our technique does not require any modification of the trapping potential. It allows us to displace the atoms by a large number of lattice periods (up to 9 in this work) in a system showing good coherence properties (up to 1 s).

Our system consists of laser-cooled ^{87}Rb atoms in the first band of a vertical one-dimensional optical lattice. Because of earth gravity, the ground energy levels of each site of the lattice are shifted out of resonance. For a sufficiently large lattice depth U_l, tunneling is highly reduced, leading to a ladder of localized Wannier-Stark (WS) eigenstates separated by the Bloch frequency $\nu_B = m_a g \lambda_l / 2h$. Here, m_a is the atomic mass, g is the gravity acceleration, $\lambda_l/2$ is the distance between two adjacent lattice sites, and h is the Planck constant. The WS states $|W_m\rangle$ are indexed by the discrete quantum number m characterizing the well containing the center of the wave function $\langle x|W_m\rangle$. The observation of Bloch oscillations of the atoms in such a system have already been reported and allowed a precise measurement of the Bloch frequency [13,14].

We use counterpropagating Raman beams to drive coherent transitions between the ground and excited hyperfine levels $|g\rangle = |5^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$ and $|e\rangle = |5^2S_{1/2}, F = 2, m_F = 0\rangle$. Such a transition implies a momentum transfer of $k_{\text{eff}} = k_1 + k_2 \approx 4\pi/(780\text{ nm})$ that couples the WS states either in the same well or in neighboring wells, with a coupling strength proportional to $\langle W_m|e^{ik_{eff}x}|W_{m\pm\Delta m}\rangle$. Fourier-limited widths of the resonances over excitation times larger than the Bloch period allows resolved intersite transitions $|g, m\rangle \rightarrow |e, m \pm \Delta m\rangle$, at Raman frequencies

$$\nu_R = \nu_{\text{HFS}} \pm \Delta m \times \nu_B,$$

where ν_{HFS} is the hyperfine splitting and Δm is the number of lattice wells separating the two coupled WS states. The energy spectrum of our system is schematically illustrated in Fig. 1.

Coupling between neighboring wells can be efficiently tuned using the lattice depth when k_l is close to k_{eff}, where k_l is the optical lattice wave vector [15]. We therefore use a mixed trap configuration with a blue detuned lattice generated by a single mode frequency doubled Nd: YVO_4 laser ($\lambda_l = 532$ nm, beam waist 600 μm) that provides only vertical longitudinal confinement, superposed with a

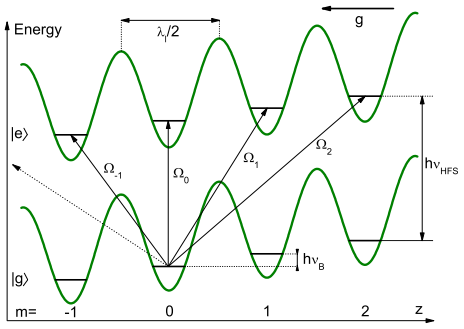


FIG. 1 (color online). Atoms in the first band of the lattice form a Wannier-Stark ladder of eigenstates. The Raman probe laser couples the ground to the excited hyperfine level in the different WS states separated by the Bloch frequency.

 © 2011 American Physical Society

red detuned ($\lambda = 1064$ nm, beam waist 200 μm) Yb fiber laser providing transverse confinement (see Fig. 2). To load this dipole trap, we superimpose it to a 3D-Magneto-Optical trap (MOT) containing 10^7 atoms fed by a 2D-MOT during 500 ms. The cloud is then cooled down to 2 μK by a far detuned molasses, at the end of which we switch off the cooling lasers to let the untrapped atoms fall. At our low lattice depth ($U_l \simeq 4E_R$ (where $E_R = (\hbar k_l)^2/(2m_a)$ is the lattice recoil energy), only the first band has a non-negligible lifetime and is populated with about 10^5 atoms vertically distributed along 10^4 sites (the second band is centered at $5E_R$ already above the lattice depth). The atoms accumulated in all the Zeeman sublevels of $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle$ are depumped to $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle$ and then optically pumped (95% efficiency) on the $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F = 0\rangle$ transition to the $|5^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$ Zeeman sublevel, which is sensitive to stray magnetic fields only to second order. The remaining 5% unpolarized atoms can easily be removed from the trap with a pushing beam. Our fluorescence detection scheme, based on a time of flight measurement similar to the one used in atomic clocks and inertial sensors, allows us to measure the atomic populations in the two hyperfine states after releasing the atoms from the trap [16]. The Raman transitions are driven by two counterpropagating beams at 780 nm circularly polarized, detuned from the atomic transition by about 3 GHz, and aligned along the direction of the optical trap beams. The beams are collimated with a $1/e^2$ radius of 1 cm, ensuring a good intensity homogeneity along the transverse size of the trap (about 200 μm radius).

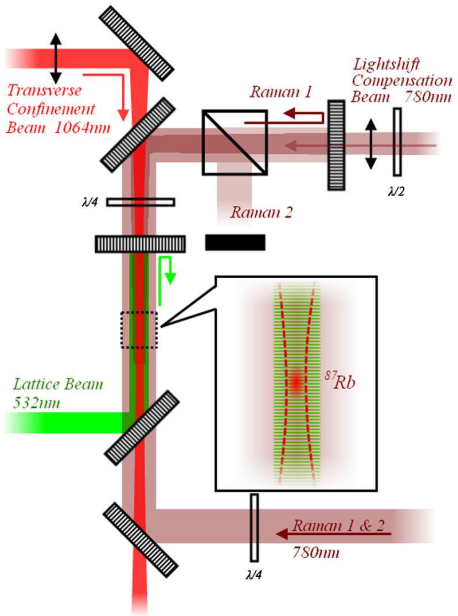


FIG. 2 (color online). Experimental setup for the optical trapping and Raman intersite transitions. The different beams are superposed using dichroic mirrors. The Raman beams are also superposed and one of them is retro-reflected to allow counterpropagating transitions.

Figure 3 shows two typical Raman spectra of the transition probability as a function of the Raman frequency ν_R, taken for two different lattice depths. Transitions between the two hyperfine levels at Raman frequencies equal to the hyperfine splitting plus or minus an integer number Δm of Bloch frequencies ($\nu_B \approx 569$ Hz in our system) are the signature that the atoms actually tunneled across Δm lattice sites. For those scans, the intensities in the Raman laser beams were 0.25 and 0.54 mW/cm^2. The resulting Rabi frequencies $\Omega_{\Delta m}$, different for each transition, are always smaller than the Bloch frequency, so that each peak is well resolved. The ratio between the Raman intensities was chosen to cancel the differential light shift of the hyperfine transition induced by them [17]. The Rabi frequency for each transition Δm is written [18]

$$\Omega_{\Delta m} = \Omega_{U_l=0}\langle W_m|e^{-ik_{\mathrm{eff}}x}|W_{m\pm\Delta m}\rangle, \qquad (1)$$

where $\Omega_{U_l=0}$ is the Rabi frequency in free space. Because of the translational symmetry of the WS states, $\Omega_{\Delta m}$ does not depend on the initial well index m but only on the absolute value of Δm [18]. It also depends on the lattice wavelength λ_l and depth U_l, which is an important feature of this experiment, as it induces a spatial inhomogeneity on the Rabi frequency seen by the trapped atoms via the transverse inhomogeneity of the lattice depth in the trap. The damping induced on the Rabi oscillations by this

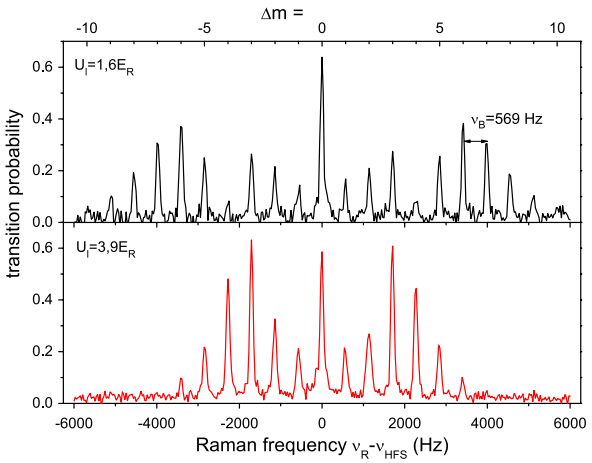


FIG. 3 (color online). Raman spectra for two different lattice depths, showing evidence of transitions between up to 9 neighboring lattice sites, each having a different Rabi frequency according to Eq. (1). The excitation time is 10 ms, which is smaller than the duration of a π pulse for each transition. The peaks are separated by the Bloch frequency of our system $\nu_B \approx 569$ Hz, and their amplitudes are related to the Rabi frequencies calculated in Fig. 4.

inhomogeneity is the main limitation on the transfer efficiency of the Raman transitions.

We calculated $\Omega_{\Delta m}$ for the parameters of our system, as a function of U_l and for various values of Δm. The result is shown in Fig. 4 for $\Delta m = \pm 1$, $\Delta m = \pm 2$ and $\Delta m = \pm 3$. To limit the lattice depth inhomogeneity due to the transverse extension of the atomic cloud, the $1/e^2$ waist of the beam providing transverse confinement is smaller than the one of the lattice beam. Moreover, we can choose to tune the lattice depth at a value where, for a transition of interest, the variation of the coupling with lattice depth $\Delta\Omega(U_l)/\Delta U_l$ is small, as illustrated by the inset of Fig. 4. On this graph, we compare the shape of Rabi oscillations at resonance for the $\Delta m = -3$ transition and for two different lattice depths. Besides a difference in the period of the Rabi oscillations, we observe that the best contrast is obtained for $U_l \simeq 4E_R$, where the coupling inhomogeneity is lower, allowing us to reach a transfer efficiency of about 80%. The lattice depth is estimated by measuring the Rabi frequencies for different transitions and comparing them to the calculation.

We investigated the question of the coherence time of the trapped states. As a diagnosis tool, we performed Ramsey spectroscopy on the $|g, m\rangle \rightarrow |e, m + 3\rangle$ transition. As there is no initial atomic coherence from one site to the neighboring site, the atoms distributed in many lattice sites can be treated as independent interferometers. The phase is read out by the measurement of the internal atomic state population. Our interferometer consists in two Raman $\pi/2$ pulses of frequency ν_R scanned close to $\nu_{\mathrm{HFS}} + 3\nu_B$, separated by a time interval T (see inset of Fig. 5). The intensity of the Raman lasers was chosen for the Rabi frequency $\Omega_{\Delta m=3}/2\pi$ to be much smaller than ν_B, in order to ensure a good separation with neighboring transitions. The duration of the $\pi/2$ pulses is then $\tau_{\pi/2} = 5.5$ ms. Figure 5 shows as open circles the evolution of the contrast as we increase the interrogation time T. The contrast at short T is about 60%, which is coherent with the 80% efficiency of each of the two Raman $\pi/2$ pulses. When increasing T, the contrast decreases rapidly, which is due to the transverse inhomogeneity of the differential light shift induced on the hyperfine transition by the Gaussian profile of the IR laser used for transverse trapping [19]. This position dependent frequency shift induces an inhomogeneous broadening along the transverse direction, which is the main effect limiting the coherence lifetime in the lattice trap.

Many schemes have been proposed and demonstrated to cancel this source of inhomogeneous dephasing in an optical trap [20–22]. One particularly efficient method in our case is to add a low power laser beam, mode matched with the transverse trapping beam, and whose frequency is tuned between the two hypefine levels, as reported in [23]. This beam compensates the differential lightshift induced by the transverse trapping light with a laser power of only a few tens of nW, so that decoherence due to photon scattering is negligible at the experiment's time scale. In practice, we use as a compensating beam a fraction of one of the two Raman beams, with an additional detuning of 80 MHz in order to prevent undesired Raman transitions. This beam is superposed with the IR laser (see Fig. 2), and its size, position and power are adjusted to optimize the contrast of the interferometer for long interrogation times of several hundreds of milliseconds, for which otherwise the contrast is zero. In our case, for an IR power of about 2 W, the differential light shift is compensated with a power of 12 nW. Figure 5 displays as black squares the evolution of the contrast vs T with the compensating beam, and clearly shows the improvement of the lifetime of the coherence.

Finally, as a preliminary investigation, we evaluated the frequency sensitivity of the interferometer. This is

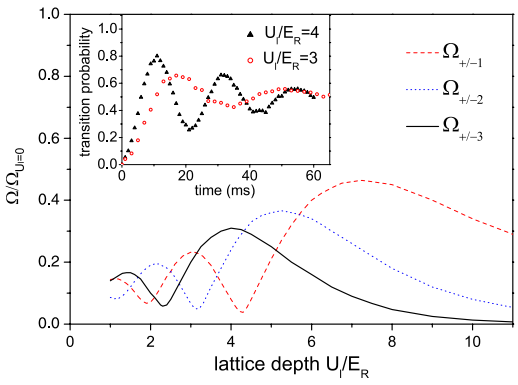


FIG. 4 (color online). Calculation of the normalized Rabi frequencies for $\Delta m = \pm 1$, $\Delta m = \pm 2$ and $\Delta m = \pm 3$ transitions, as a function of the lattice depth. Inset : Experimental Rabi oscillations on the transition $\Delta m = -3$, for $U_l = 4E_R$ and $U_l = 3E_R$.

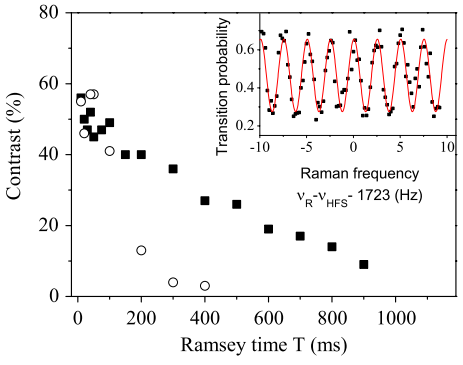


FIG. 5 (color online). Contrast of the interferometer versus Ramsey interrogation time T. Open circles (black squares) display the contrast without (with) the light shift compensation beam. Inset: Corresponding typical interference fringes for an interrogation time of 400 ms. The solid line is a least-squares sinusoidal fit to the data.

motivated by the possibility to use this trapped atomic spatial interferometer for metrology applications such as gravimetry or short range forces measurement [24]. We locked the Raman lasers frequency difference to the center fringe of the interferometer, with a computer controlled servo integrator. Performing the measurement alternatively on the left and right transitions ($\Delta m = \pm 3$) and calculating the difference of the measured frequencies allows us to measure $6\nu_B$ while cancelling the frequency shifts of the hyperfine clock frequency, due to, for example, the quadratic Zeeman effect and the differential lightshifts induced by the trapping lasers. For an interrogation time of $T = 400$ ms and a cycle time of $T_c = 1.4$ s, the Allan standard deviation of the frequency difference decreases as 0.1 Hz $\times \tau^{-1/2}$ with τ the integration time in seconds. This corresponds to a statistical uncertainty on the measurement of the Bloch frequency of 6×10^{-5} in relative value after 1 s integration which is about 5 times above the best sensitivity achieved with trapped atoms reported in [25].

If used for a measurement of g, this result is not competitive with free falling cold atoms gravimeters [26]. Nevertheless, the geometry of this trapped interferometer makes it promising for the measurement of short range forces (Casimir-Polder, short range modifications of gravity). Provided the possibility to initially select the atoms in a single lattice site [27] and to reach the same level of sensitivity on ν_B, performing the Wannier-Stark interferometer close to the reflecting surface of the lattice as proposed in [15] would allow a statistical uncertainty in the measurement of the Casimir-Polder potential of 1% for a distance of 5 μm and a measurement time of 1000 s.

In conclusion, we demonstrated a new versatile technique for controlled coherent transport of atoms in a lattice. The high resolution reachable by the Raman transitions (up to 1 Hz) suggests the possibility of selectively addressing one single lattice site, using, for example, the lightshift induced by a focused laser to lift the degeneracy between the transitions. Although demonstrated here for a thermal cloud in a shallow lattice, this technique is also suitable for degenerate quantum gases in deeper lattices (up to about 20 recoil energies). Besides, it also works with one photon transitions, as recently highlighted in [28]. All these features make this tool a potential candidate for the realization of quantum logic operations.

This research is carried on within the project iSense, which acknowledges the financial support of the Future and Emerging Technologies (FET) programme within the Seventh Framework Programme for Research of the European Commission, under FET-Open grant number: 250072. We also gratefully acknowledge support by Ville de Paris (Emergence(s) program) and IFRAF. G. T. thanks the Intercan network and the UFA-DFH for financial support. Helpful discussions with A. Landragin, P. Lemonde, A. Clairon, S. Bize, M-C. Angonin, and R. Messina are gratefully acknowledged.

*franck.pereira@obspm.fr

[1] J. J. Garcia-Ripoll, M. A. Martin-Delgado, and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **93**, 250405 (2004).
[2] M. Takamoto, F.-L. Hong, R. Higashi, and H. Katori, Nature (London) **435**, 321 (2005).
[3] P. Cladé *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 033001 (2006).
[4] H. J. Briegel *et al.*, J. Mod. Opt. **47**, 415 (2000).
[5] D. Schrader *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 150501 (2004).
[6] G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen, and I. H. Deutsch, Phys. Rev. Lett. **82**, 1060 (1999).
[7] L. Förster *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 233001 (2009).
[8] M. Ben Dahan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996).
[9] S. R. Wilkinson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4512 (1996).
[10] V. V. Ivanov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **100**, 043602 (2008).
[11] O. Mandel *et al.*, Nature (London) **425**, 937 (2003).
[12] M. Anderlini *et al.*, Nature (London) **448**, 452 (2007).
[13] G. Roati *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 230402 (2004).
[14] P. Cladé *et al.*, Europhys. Lett. **71**, 730 (2005).
[15] F. Pereira dos Santos *et al.*, *Proceedings of the 7th Symposium Frequency Standards and Metrology* (World Scientific, Singapore, 2009), p. 44.
[16] J. Le Gouët *et al.*, Appl. Phys. B **92**, 133 (2008).
[17] D. S. Weiss, B. C. Young, and S. Chu, Appl. Phys. B **59**, 217 (1994).
[18] P. Lemonde and P. Wolf, Phys. Rev. A **72**, 033409 (2005).
[19] S. Kuhr *et al.*, Phys. Rev. A **72**, 023406 (2005).
[20] M. F. Andersen, A. Kaplan, and N. Davidson, Phys. Rev. Lett. **90**, 023001 (2003).
[21] A. Derevianko, Phys. Rev. Lett. **105**, 033002 (2010).
[22] R. Chicireanu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 063002 (2011).
[23] A. Kaplan, M. F. Andersen, and N. Davidson, Phys. Rev. A **66**, 045401 (2002).
[24] P. Wolf *et al.*, Phys. Rev. A **75**, 063608 (2007).
[25] N. Poli *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 038501 (2011).
[26] A. Peters *et al.*, Metrologia **38**, 25 (2001).
[27] M. Karski *et al.*, New J. Phys. **12**, 065027 (2010).
[28] L. Yi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 073005 (2011).

Dynamical aspects of atom interferometry in an optical lattice in proximity of a surface

Sophie Pelisson,[1,*] Riccardo Messina,[1,2] Marie-Christine Angonin,[1] and Peter Wolf[1]

[1] *LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS UMR8630, UPMC 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France*

[2] *Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD128, F-91127 Palaiseau Cedex, France*

(Dated: April 24, 2012)

The efficiency of an atomic interferometer in proximity of a surface is discussed. We first study which is the best choice of frequency for a pulse acting on internal atomic transitions in the same well. Then considering the modification of atomic energy levels in vicinity of the surface, we propose the application of two simultaneous Raman lasers and numerically study the associated interference fringes. We show that the efficiency of the interferometric scheme is limited by the existence of a residual phase depending on the atomic path. We propose a symmetric scheme in order to avoid these contributions. We finally show that the suggested modifications make the contrast of the interference fringes close to 1 in any configuration, both close and far from the surface and with one or more initially populated wells.

PACS numbers: 37.25.+k, 37.10.Jk, 42.50.Ct, 12.20.Ds

I. INTRODUCTION

Atomic interferometry is an extremely powerful technique whose domains of application range from atomic clocks to gravimetry and fundamental physics. Its remarkable efficiency comes from the high precision that can be reached in the measurement of frequencies. Among its different applications, this experimental method allows to address the measurement of short-range interactions between an atomic ensemble and a macroscopic surface. Several experiments have been proposed and are currently being performed in this context [1–4].

Due to the physics behind atomic interferometry, an accurate knowledge of the energy levels of the system is a fundamental issue as far as the optimization of the interferometric scheme is concerned. As we have shown in a recent paper [5], these energy levels can be strongly modified by the proximity of a surface. This arises from the intrinsic modification of atomic wavefunctions due to the presence of a boundary condition and to the interaction between the atoms and the quantized electromagnetic field, known as Casimir-Polder interaction [7, 8], in presence of the surface.

Our calculations can be of interest for any interferometric measurement performed using an optical lattice in proximity of a surface. For the sake of clarity, we will focus our attention on the experiment FORCA-G (FORce de CAsimir et Gravitation à courte distance), recently proposed in order to measure the short-scale interactions between an atom of Rubidium and a massive surface [1, 2]. This experiment has two main goals. On one hand, it aims at providing a new measurement of the Casimir-Polder interaction. On the other hand, it also intends to set new constraints on the existence of a hypothetical deviation from the Newtonian law of gravitation predicted by unification theories [9].

The experimental setup is based on a vertical standing wave producing an optical lattice. In an ideal periodic optical lattice, the additional linear gravitational potential leads to a class of localized atomic states in the trap, kwown as Wannier-Stark states [10, 11]. As anticipated, these states and their energy levels are modified close to the surface [5]. An interferometric scheme is created by the way of a series of Raman pulses. This interferometric scheme is designed to separate the original wavepacket in two and to submit the two parts to a different potential by means of a spatial separation. After recombination, interferences are observed due to the phase shift cumulated during the time of separation in the trap. This phase shift depends on the potential difference supported by the two wavepackets at different distances from the surface. The measurement of the phase shift then gives access to the atom-surface interaction [2]. The main advantages of this experiment are the refined control of the atomic position as well as the high precision of the interferometric measurement. To exploit maximally these advantages, we have to optimize the interferometric scheme and the Raman pulses used to create it so that the contrast of the fringes at the end of the interferometer is maximal. In order to reach this goal, we can act on two parameters: the former is the frequency and intensity of the pulses used to move the atoms, the latter is the interferometric scheme itself. The main purpose of this paper is the optimization of these two parameters taking into account the real shape of the atomic wavefunctions in the trap as well as the modified energy levels. Nevertheless, we are going to show that this knowledge is not sufficient to design an efficient interferometric scheme, mainly because the presence of the surface breaks the translational symmetry characterizing

*Electronic address: sophie.pelisson@obspm.fr

the atomic states in an infinite optical lattice.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we present the physical system including the hamiltonian description of the atoms in the trap and the interaction of these atoms with the pulses used to create the interferometer. Section III is dedicated to the optimization of the interferometric scheme initially suggested in [2]. This section will be separated in two parts: on one hand we will present the optimization of the Raman pulses in proximity of the surface to take into account the modification of the atomic levels. On the other hand, we will discuss the problem arising from the scheme itself and we will propose a new interferometric scheme to solve it. Finally, the Sec. IV concern the results of this new scheme.

II. THE PHYSICAL SYSTEM

In this section, we are going to describe our physical system and the hamiltonian formalism used to investigate the dynamics of atoms trapped in front of a surface and submitted to a given series of laser pulses. Let us consider a two-level atom trapped in a vertical optical standing wave in proximity of a planar surface as described in [5]. The Hamiltonian of such a system is given by (with the same notations as in [5])

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\rm int} = H_{\rm f} + H_{\rm at} + H_{\rm WS} + H_{\rm int} \\ H_{\rm f} &= \sum_p \int_0^{+\infty} dk_z \int d^2\mathbf{k}\, \hbar\omega\, a_p^\dagger(\mathbf{k},k_z) a_p(\mathbf{k},k_z) \\ H_{\rm at} &= \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| \\ H_{\rm WS} &= \frac{p^2}{2m} - mgz + \frac{U}{2}\big(1-\cos(2k_l z)\big) \\ H_{\rm int} &= -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{1}$$

The complete Hamiltonian is written as a sum of a term H_0 describing the free evolution of the atomic and field degrees of freedom. In particular, $H_{\rm f}$ is the Hamiltonian of the quantum electromagnetic field, described by a set of modes $(p,\mathbf{k},k_z)$: here p is the polarization index, taking the values $p=1,2$ corresponding to TE and TM polarization respectively, while $\mathbf{k}$ and k_z are the transverse and longitudinal components of the wavevector. $H_{\rm at}$ is the internal Hamiltonian of our two level atom having ground state $|g\rangle$ and excited state $|e\rangle$ separated by a transition frequency ω_0. While $H_{\rm at}$ is associated to the internal atomic degrees of freedom, the term $H_{\rm WS}$ accounts for the external atomic dynamics. As a consequence, it contains the kinetic energy (p being the canonical momentum associated to z), as well as both the gravitational potential (treated here in first approximation as a linear term), where m is the atomic mass and g is the acceleration of the Earth's gravity, and the classical description of the stationary optical trap, having depth U. The interaction between the atom and the quantum electromagnetic field is written here in the well-known multipolar coupling in dipole approximation [6], where $\boldsymbol{\mu} = q\boldsymbol{\rho}$ (q being the electron's charge and $\boldsymbol{\rho}$ the internal atomic coordinate) is the quantum operator associated to the atomic electric dipole moment and the electric field is calculated in the atomic position $\mathbf{r}$.

This Hamiltonian can be separated in a part H_0 describing the free evolution of the atom (having ground and excited states $|g\rangle$ and $|e\rangle$ respectively, position z and conjugate momentum p) and the quantum electromagnetic field (quantized in presence of a perfectly conducting surface in $z=0$ [12]) and a perturbative term representing the interaction between the atom (having electric dipole moment $\boldsymbol{\mu}$) and the field. As discussed in detail in [5], the resolution of the time-independent Schrödinger equation for H_0 leads to a class of states similar to the well-known Wannier-Stark states [11], with a modification due to the presence of the surface. These states, noted with $\varphi_m(z)$ (where $m=1,2,\dots$), are identified with an index m corresponding to the well of the standing wave in which the atom is trapped. Some examples of these states compared with the corresponding Wannier-Stark ones are provided in Fig.1.

Moreover, the perturbative treatment of the atom-field interaction term leads to a shift of the energy levels of H_0. This shift is the result of the well-known Casimir-Polder effect [8] and the modified energy levels are shown in Fig.2.

In addition to the stationary Hamiltonian (1), we have to take into account the presence of laser pulses tuned on the atomic transition energy plus the energy difference between two different wells. The potential representing the atom-laser interaction can be written as

$$H_s = \hbar\,\Omega\,\cos(\omega_s t - k_s x)|e\rangle\langle g| + \text{H.c.} \tag{2}$$

where Ω is the Rabi frequency while ω_s is the probe laser frequency and k_s its wavevector. In order to model the interferometer scheme and to adjust the frequency of the beams to maximize the contrast of matter-wave interferences, we have to solve the time-dependent Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi_{\rm at}(t)\rangle = (H+H_s)|\Psi_{\rm at}\rangle. \tag{3}$$

The resolution of Eq. (3) will be performed by projecting it on the basis of external and internal atomic states $\{|\varphi_m,i\rangle = |\varphi_m\rangle\otimes|i\rangle\}$ where $m=1,2,\dots$ and $i=e,g$.

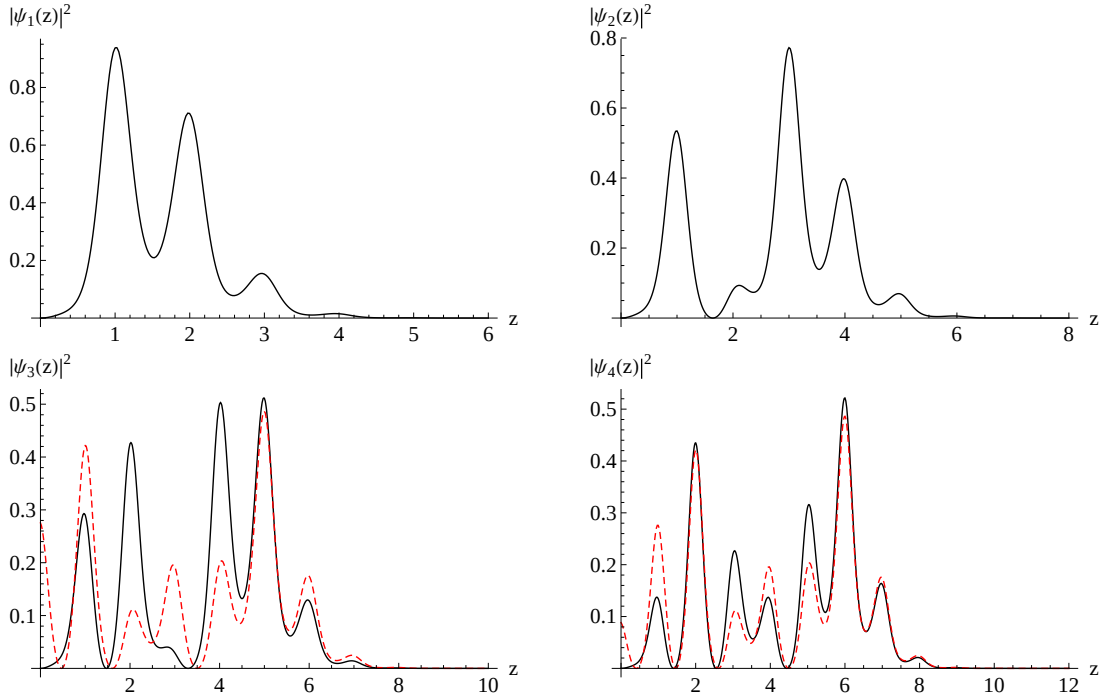


FIG. 1: (Color online) Square modulus of the first 4 modified Wannier-Stark states $\varphi_{m,1}(z)$ for $m = 1, 2, 3, 4$ and $U = 3E_r$ where $E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_a}$ represents the recoil energy of a photon of the laser [5]. The last two functions (black, solid line) are compared to the corresponding standard Wannier-Stark state (red, dashed line). Here, the position z of the atom is expressed as a function of the periodicity of the trap $\frac{\lambda_l}{2}$.

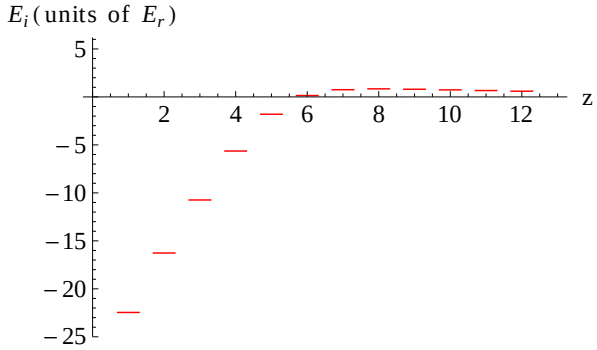


FIG. 2: Value of the first twelve energy levels in presence of the surface and taking into account the Casimir-Polder effect. Once again z is expressed in units of $\frac{\lambda_l}{2}$.

In this basis, the atomic wavefunction can be expressed as

$$|\Psi_{\text{at}}(t)\rangle = \sum_m \Big[a_m^g(t) e^{-i\frac{E_m t}{\hbar}} |\varphi_m, g\rangle + a_m^e(t) e^{-i\frac{E_m + \hbar\omega_{eg}}{\hbar} t} |\varphi_m, e\rangle \Big]. \tag{4}$$

Using this expression, the Schrödinger equation is equivalent to the following set of coupled equations for the coefficients $a_m^g(t)$ and $a_m^e(t)$

$$\begin{aligned} i\dot{a}_m^g(t) &= \sum_{m'} \Omega \langle \varphi_m | \cos(\omega t - k_s x) | \varphi_{m'} \rangle a_{m'}^e(t) e^{-i\delta_{m'-m}t} \\ i\dot{a}_m^e(t) &= \sum_{m'} \Omega \langle \varphi_m | \cos(\omega t - k_s x) | \varphi_{m'} \rangle a_{m'}^g(t) e^{i\delta_{m-m'}t} \end{aligned} \tag{5}$$

where m' runs over all the wells and we have defined $\delta_{m-m'} = \frac{E_m - E_{m'} + \hbar\omega_{eg}}{\hbar}$. Making the usual rotating wave approximation [1] and defining

$$\Delta_{m,m'} = \omega - \delta_{m-m'} = \omega - \omega_{eg} - \frac{E_m - E_{m'}}{\hbar} \tag{6}$$

we finally get

$$\begin{aligned} i\dot{a}_m^g(t) &= \sum_{m'} \frac{\Omega}{2} a_{m'}^e(t) e^{i\Delta_{m',m}t} \langle \varphi_m | e^{-ik_s x} | \varphi_{m'} \rangle \\ i\dot{a}_m^e(t) &= \sum_{m'} \frac{\Omega}{2} a_{m'}^g(t) e^{-i\Delta_{m,m'}t} \langle \varphi_m | e^{ik_s x} | \varphi_{m'} \rangle. \end{aligned} \tag{7}$$

In Eq. (7), the term $\frac{\Omega}{2} \langle \varphi_m | e^{-ik_s x} | \varphi_{m'} \rangle$ is the Rabi frequency for the transition between two different wells m and m', Ω being the Rabi frequency in free space [13].

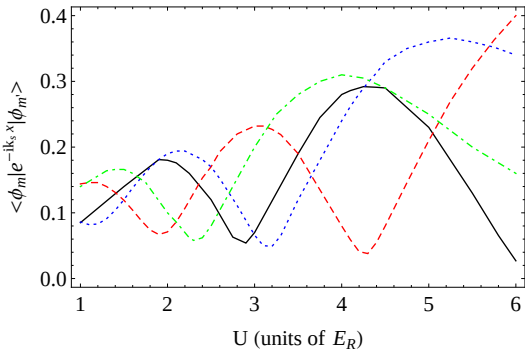


FIG. 3: (Color online) Normalized Rabi frequencies for $m - m' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ transitions, as a function of lattice depth. The Black solid line represents the Rabi frequency for $m - m' = 0$, the red dashed line is the Rabi frequency for $m - m' = \pm 1$, the blue dotted line is for $m - m' = \pm 2$ and the green dot-dashed line stands for $m - m' = \pm 3$. Here, the wavelength chosen for the trap is $\lambda_l = 532\,\text{nm}$ which is the case of FORCA-G.

This frequency governs the transition probability from one well to another and it strongly depends on the depth of the trapping potential and on the trapping wavelength. In Fig. 3 we show the behavior of these frequencies as a function of the well depth for our chosen trapping wavelength. The choice of these frequencies is fundamental for the realization of our interferometer scheme and it will determine the experimental parameters. In particular, the lattice depth will be chosen as $U = 3E_r$ in order to maximize the probability for the transition $m - m' = \pm 1$ and minimize the probability for $m - m' = \pm 2$ and $m - m' = 0$ [14]. In the following, we will study the optimization of the interferometric scheme with this depth.

III. OPTIMIZATION OF THE INTERFEROMETRIC SCHEME

The choice of the interferometric scheme is fundamental in order to have a precise measurement of the short-range interactions we intend to investigate. The basic idea of atomic interferometry is to create a coherent superposition of the two internal states in the starting well, to move the two components in the two neighbouring wells and to finally recombine them in the starting well. After recombination, the different path followed by the two components of the wavepacket leads to interference fringes due to the phase shift which is related to the energy difference between the two external wells. This section is dedicated to the investigation of an optimal interferometric scheme for our purpose. In the first section, we will discuss the problem of the interaction time between the Raman pulses and the atoms to create appropriate superposition. Then we will study the first proposal of interferometric scheme for FORCA-G [1, 2] when the atoms are close to the surface so that their energy levels are modified by the Casimir-Polder interaction and a hypothetical Yukawa gravitational deviation. Finally we will investigate the problem arising when several wells are populated at the beginning of the interferometer and we will propose a new scheme for the experiment.

A. Optimization of the sequence of pulses

In the first proposal presented in Fig. 4 of the experiment FORCA-G [2], the suggested interferometric scheme was a *butterfly*-like scheme with a trap depth of $U = 3E_r$. As it can be seen in Fig. 4 the interferometer

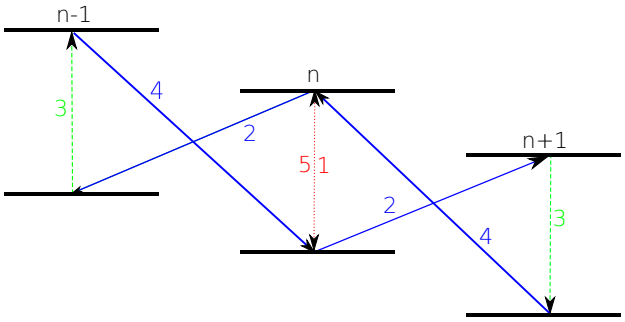


FIG. 4: (Colors online) Butterfly scheme for the interferometer [2] where the red dotted line represents the microwave $\frac{\pi}{2}$-pulses used to create the coherent superposition and for the recombination at the end of interferometer. The blue solid lines represent the Raman π-pulses toward neighbouring wells and the green dashed lines are the microwave π-pulses in the two separated wells.

consists in a sequence of pulses aiming at separating the atomic wavepacket in two parts and to recombine them after a time T of free evolution in two separated wells.

In order to realize this scheme, we need at least 5 Raman pulses to create the coherent superposition in the starting well, to move it in neighbouring wells and to recombine it in the starting well. We can remark here that it is in principle possible to add pulses in order to reach farther wells and then obtain a bigger phase shift in the interference pattern. However, the trapping time of the atoms is limited by experimental conditions and it is typically of the order of 1 s. At the same time, the free-evolution time has to be as long as possible in order to maximize the number of periods in interference fringes. As a consequence, it is crucial to optimize the sequence of pulses in order to make them as short as possible.

We have seen in Sec. II that the depth of the trap was chosen to favour the transition between adjacent wells. As a consequence, the transition between the internal atomic states in the same well (corresponding to the pulses 1, 3 and 5 on Fig. 4) is not efficient.

A natural solution to solve this problem is to use a microwave pulse instead of a Raman laser for the atomic

transitions in the same well. Indeed, the coupling between the external states of the atom and the laser in Eqs. (7) can be expressed as

$$\langle\varphi_m|e^{-ik_sx}|\varphi_{m'}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x)\varphi_{m'}(x)e^{-ik_sx}\,dx, \quad (8)$$

and whereas this coupling depends on the shape of the wavefunctions in the case of Raman beams, this is much less the case for microwave pulses. In fact, for these pulses the wavevector is such that $k_sx \ll 1$, so the exponential term in Eq. (8) tends to 1 and Eq. (8) is reduced to the scalar product $\langle\varphi_m|\varphi_{m'}\rangle = \delta_{m,m'}$. As a consequence, the microwave pulses are much more efficient for transitions in the same well and the duration of such pulses is very short in comparison with the duration of Raman pulses.

B. The interferometer close to the surface

Once the sequence of Raman and microwave pulses is chosen, we can investigate the interferometric scheme presented in Fig. 4 close to the surface where the atomic energy levels are modified. In this scheme, the atoms are first in the ground state $|g\rangle$. We apply a first $\frac{\pi}{2}$-microwave pulse tuned on the atomic transition in order to create a coherent superposition of the two internal states $|g\rangle$ and $|e\rangle$. We then apply a π-laser pulse with a frequency tuned on the atomic transition plus a detuning corresponding to the energy difference with the neighbouring wells in order to move the two components of the atomic wavefunction in two different wells. We let the system evolve in the arrival state during a time T before inducing a transition in the two separated wells using a π-microwave pulse. After an additional free-evolution time T in the separated wells, we finally induce the inverse path and recombine the wavefunction to observe interference fringes due to the energy difference between the two wells. To simulate this interferometer, Eqs. (7) are solved numerically using a C++ program. At the starting point of the simulation, we consider the atom in the ground atomic state $|g\rangle$ in the well m. We thus solve the coupled Eqs. (7) with the initial conditions

$$\begin{cases} a_n^g(t=0) &= 0 \qquad \forall n \neq m \\ a_m^g(t=0) &= 1 \\ a_n^e(t=0) &= 0 \qquad \forall n \end{cases} \quad (9)$$

and with a microwave laser pulse of frequency $\nu_{\mathrm{mw}} = 6.8\,\mathrm{GHz}$ and $\Omega = 100\,\mathrm{rad/s}$ with a duration of $t_1 = 0.0157\,\mathrm{s}$, corresponding to a $\frac{\pi}{2}$-pulse. Once the coherent superposition is created we apply the series of pulses shown in Fig. 4, taking as initial condition the end of the previous pulse. As it can be seen in Fig. 2, when the atom is close to the surface, its energy levels are modified mainly by the Casimir-Polder effect so that the energy differences between a given well and its two adjacent wells are no longer equal as in the absence of the surface [10]. In order to study the effect of this difference, we first used one single laser for each Raman pulse taking for its frequency the mean of the two energy differences. However, with this choice, we have numerically verified that the contrast at the end of the interferometer remains close to zero when the initially populated well is close to the surface. This is not surprising, since in this case the Raman lasers are too detuned with respect to each transition frequency. We have verified this for atoms initially in the well 8. In this well, the energy differences playing a role in the interferometer is the differences with the wells 7 and 9. These differences are respectively

$$\begin{aligned} \Delta E_{7,8} &\simeq 0.7013E_r \\ \Delta E_{8,9} &\simeq 0.0393E_r. \end{aligned} \quad (10)$$

As a consequence, when we use a Raman pulse with $\Omega = 100\,\mathrm{rad/s}$ ($\hbar\Omega = 1.23.10^{-2}E_R$) this pulse is relatively thin in the frequency domain with respect to the difference in energies (10) and thus the states are not efficiently poulated. One could increase Ω, but in that case the pulses would be too broad and significantly populate additional wells (e.g. well 7), which again leads to a loss of contrast.

A natural solution to improve the contrast of the interferometer is to take two Raman lasers with two different frequencies, each tuned on one energy difference. The interference pattern in this configuration is shown in Fig. 5 for the starting well 8. We can see that the contrast is,

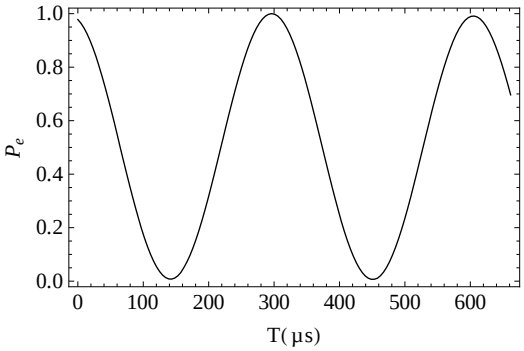


FIG. 5: Interference fringes at the end of the butterfly interferometer as a function of the free-evolution time in the case of two lasers used for the Raman transitions. The starting well is $m = 8$.

in this configuration, close to 1.

C. The interferometer in the case of several initially populated wells

We have seen in the previous section that using two Raman lasers for the transitions toward neighbouring wells makes the contrast of the interferometer in the case of one initially filled well maximal even for atoms very close to

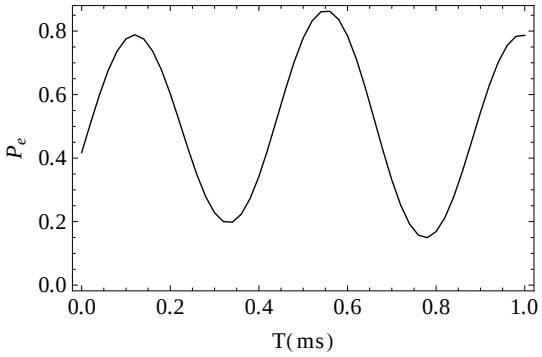


FIG. 6: Interference fringes at the end of the butterfly interferometer in function of the free-evolution time in the case of two initially populated wells. Here are shown two wells far from the surface in a regime of standard Wannier-Stark states.

the surface. Nevertheless it is experimentally difficult to populate one single well at the beginning of the measurement. At the same time, an initial condition with more than one populated well far from the surfcae could be of interest in order to increase the signal-noise ratio and thus the precision in the measurement of a hypothetical Yukawa deviation far from the surface and of the Earth gravitational acceleration g, which constitutes an important test for the experiment. The resulting contrast in the case of two initially populated wells far from the surface (in the Wannier-Stark regime) is shown in Fig. 6. We can see that the contrast is relatively low even in the case of wells taken far from the surface in a region where the energy separation between two adjacent wells is well-independent. The explanation of this phenomenon lies in the properties of the standard Wannier-Stark states. As a matter of fact, these states present a translational symmetry which allows us to rewrite Eqs. (7) as a function of the state in the central well labelled 0 (being the Wannier-Stark states defined in $[-\infty,\infty]$) [1].

$$\begin{aligned} i\dot{a}^g_m(t) &= \sum_{m'} \Omega^*_{m-m'}\, a^e_{m'}(t) e^{i\Delta_{m',m}t} e^{-i\pi m' \frac{k_s}{k_l}} \\ i\dot{a}^e_m(t) &= \sum_{m'} \Omega_{m'-m}\, a^g_{m'}(t) e^{-i\Delta_{m,m'}t} e^{i\pi m \frac{k_s}{k_l}} \end{aligned} \tag{11}$$

with $\Omega_m = \frac{\Omega}{2}\langle \mathrm{WS}_0 | e^{ik_s x} | \mathrm{WS}_m \rangle$. In Eqs. (11), we can see that expressing the coupling elements as a function of the central well introduces a phase factor of the form $e^{i\pi m' \frac{k_s}{k_l}}$ with a different sign depending on the transition. There is a minus when we go from ground to excited state and conversely so that the phase difference at the end of the interferometer can be expressed as

$$\begin{aligned} \Delta\phi = &-4m\pi\frac{k_s}{k_l} + \frac{2}{\hbar}\left(m_a g\lambda_l + U_{m+1} - U_{m-1}\right)T \\ &- \phi_s^{(1)} + 2(\phi_s^{(2)} - \phi_s^{(3)} + \phi_s^{(4)}) - \phi_s^{(5)}. \end{aligned} \tag{12}$$

In Eq. (12), the terms $\phi_s^{(i)}$ stand for the phase of each pulse and can be evaluated whereas the term of interest is the term $\frac{2}{\hbar}\left(m_a g\lambda_l + U_{m+1} - U_{m-1}\right)T$ where U_m is the external potential (Casimir and Yukawa) in the well m.

As a consequence, for two initial wells the phase term $-4m\pi\frac{k_s}{k_l}$ is different because of the factor m which is the starting-well index. So, at the end of the interferometer, we obtain two interference contributions with different phases which drastically reduce the contrast. This effect is even worse when more than two wells are initially populated. So we have to find a new interferometric scheme which could avoid these phase shifts, i.e. where the Raman pulses are symmetric in order to get rid of the contribution proportional to m. We will describe the new scheme in the next section.

IV. RESULTS FOR THE MODIFIED INTERFEROMETRIC SCHEME

As we have seen in the previous section, the butterfly scheme for the interferometer does not maximize the contrast of the interferences fringes. To avoid the problem of the phase shift cumulated during the Raman pulses, we propose a new scheme of interferometer with an additional microwave π-pulse in the wells $m \pm 1$ as shown in Fig. 7. This pulse aims at symmetrizing the scheme

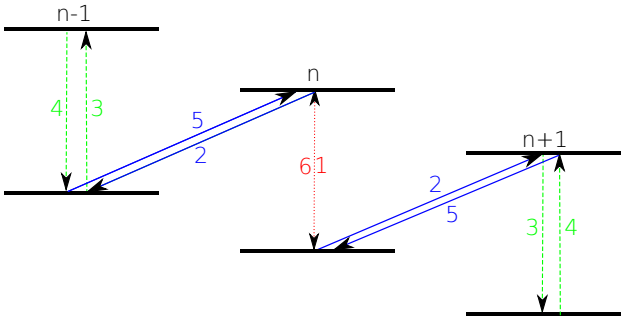


FIG. 7: (Colors online) New symmetric interferometric scheme where the red dotted line represents the microwave $\frac{\pi}{2}$-pulses used to create the coherent superposition and for its recombination at the end of interferometer. The blue solid lines represents the Raman π-pulses in neighbouring wells and the green dashed lines are the microwave π-pulses in the two separated wells.

leading to a cancellation of the residual well-dependent phase present in the case of the butterfly interferometer (see e.g. Eq. (11)). As the atom follows the same path during separtation and recombination, there is no additional phase factor on each arm , and the total phase difference is independent of the starting well index.

However, adding a new pulse extends the duration of the interferometric scheme. So we have to optimize the length of the pulses as we have done in the case of the butterfly scheme. Table I shows the optimal duration of

Pulse	Duration (s)		Population
1	0.0157		$P_g(2) = 0.5000$ $P_e(2) = 0.5000$
2	laser 1	laser 2	$P_g(1) = 0.5002$
	0.1500	0.0974	$P_e(3) = 0.4983$
3	0.0314		$P_g(3) = 0.4983$ $P_e(1) = 0.5002$
4	0.0314		$P_g(1) = 0.5002$ $P_e(3) = 0.4983$
5	laser 1	laser 2	$P_g(2) = 0.5001$
	0.1618	0.0974	$P_e(2) = 0.5004$
6	0.0157		$P_g(2) = 0$ $P_e(2) = 1.001$

TABLE I: Duration and population in the wells of interest after each pulse. In this table, the number in brackets represent the well under scrutiny.

each pulse, together with the final population of states $|g\rangle$ and $|e\rangle$ in the wells of interest (with $\Omega = 100\,\mathrm{rad/s}$). These interaction times are found by solving Eqs. (7) and optimizing the duration for each pulse. As in the case of the butterfly scheme, we use microwave pulses to induce transitions in the same well and Raman pulses for the transitions between adjacent wells. For the example presented in Table I, we have considered the well number 2 as starting well.

The duration of the first pulse is then given by the first cross of populations in the starting well ($\frac{\pi}{2}$-pulse) and at the inversion of population for the pulses 2, 3, 4 and 5 (π-pulse). Concerning the last pulse, it's duration is given by the maximal population of $|e\rangle$ ($\frac{\pi}{2}$-pulse). Each condition was found with a dichotomy algorithm in C++ [15].

After optimization of the pulses, the total duration of our interferometer, without counting the free evolution time, is around 0.4 s. We now have to test this new scheme by analyzing the contrast at the end of the interferometer. In Figs. 8 and 9 we plot the contrast obtained with optimized duration for the pulses as a function of the free-evolution time. We can see that the contrast is maximal even in the case of two wells populated at the beginning. Moreover, the typical oscillation period is much shorter than the coherence time of the atomic ensemble.

V. CONCLUSIONS

In this paper, we have discussed the optimization of the interferometric scheme for an atomic ensemble trapped in

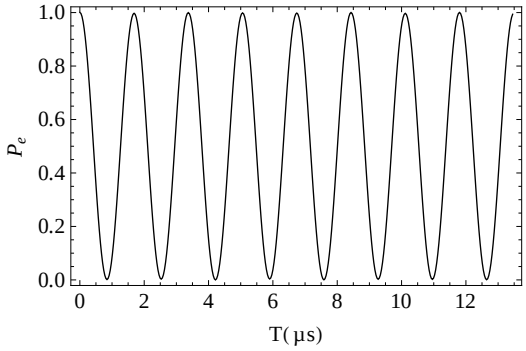


FIG. 8: Contrast of the interferences fringes at the end of the symmetric interferometer as a function of the free-evolution time T. As an example, we show here the contrast for all atoms initially in well $m = 2$.

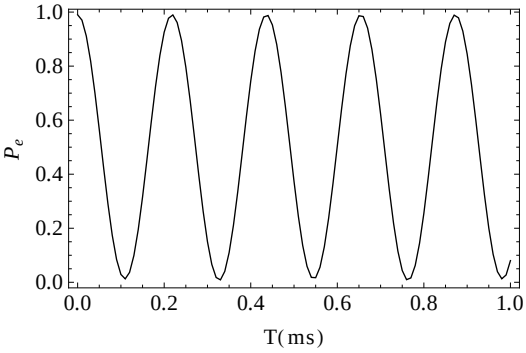


FIG. 9: Contrast for an initial superposition of two wells very far from the surface (Wannier-Stark regime).

proximity of a surface. In particular, we have started our discussion by studying the efficiency of the interferometric scheme initially proposed in [1**?**] for the experiment FORCA-G.

As a first step, we have shown that in order to minimize the interaction time, it is more efficient to use microwave pulses instead of Raman pulses to induce atomic internal transitions in one single well.

We have then considered the effect of the surface: the atomic energy levels in its proximity are strongly modified (mainly by the Casimir-Polder interaction) destroying the translational symmetry of the energy differences. This drastically reduces the contrast at the end of the interferometer. We have shown that this problem is solved by using two different simultaneous Raman lasers, each tuned on one energy difference.

Next we have seen that the butterfly scheme proposed in [1, 2] induces a loss of contrast due to the cumulation of residual phases during the Raman pulses in neighboring wells. A new scheme has been suggested to solve this problem. This consist in an addition of a symmetrization pulse in the two separating wells. As a consequence, the resulting scheme presents symmetric Raman pulses which

lead to a cancellation of the residual phases. Finally, we have shown that the modified interferometric scheme we propose leads to a contrast near to 1 both in proximity and far from the surface, optimizing the conditions in which the experiment is performed.

Our analysis can be of interest for any interferometric experiment performed in proximity of a surface. However, it was demonstrated that the Wannier-Stark states have a finite lifetime in the trap due to Landau-Zener tunneling [16, 17]. This effect was not considered in this paper where we have assumed that this lifetime is very long in comparison with the trapping time of the atoms limited by experimental conditions. This is the case for the standard Wannier-Stark states for which the lifetime is of the order of 10^{15} s (for FORCA-G parameters) whereas the experimental trapping time is around 1 s. However, it remains to be understood how the presence of the surface influences this lifetime and this will be the main subject of an upcoming publication.

Acknowledgments

This research is carried on within the project iSense, which acknowledges the financial support of the Future and Emerging Technologies (FET) programme within the Seventh Framework Programme for Research of the European Commission, under FET-Open grant number: 250072. We also gratefully acknowledge support by Ville de Paris (Emergence(s) program) and IFRAF. The authors thank Q. Beaufils, G. Tackmann, A. Hilico, B. Pelle and F. Pereira dos Santos for fruitful and stimulating discussions.

[1] P. Lemonde and P. Wolf, Phys. Rev. A **72**, 033409 (2005).
[2] P. Wolf, P. Lemonde, A. Lambrecht, S. Bize, A. Landragin, and A. Clairon, Phys. Rev. A **75**, 063608 (2007).
[3] A. Derevianko, B. Obreshkov, and V. A. Dzuba, Phys. Rev. Lett. **103**, 133201 (2009).
[4] F. Sorrentino, A. Alberti, G. Ferrari, V. V. Ivanov, N. Poli, M. Schioppo, and G. M. Tino, Phys. Rev. A **79**, 013409 (2009).
[5] R. Messina, S. Pelisson, M.-C. Angonin, and P. Wolf, Phys. Rev. A **83**, 052111 (2011).
[6] E. A. Power and S. Zineau, Phil. Trans. Roy. Soc. A **251**, 427 (1959).
[7] H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
[8] S. Scheel, S. Y. Buhmann, Acta Phys. Slov. **58**, 675 (2008).
[9] R. Onofrio, New J. Phys. **8**, 237 (2006).
[10] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehan and Winston, New York, 1976).
[11] M. Gluck, A. R. Kolovsky, and H. J. Korsch, Phys. Rep. **366**, 103 (2002).
[12] G. Barton, J. Phys. B **7**, 2134 (1974).
[13] Q. Beaufils, G. Tackmann, X. Wang, B. Pelle, S. Pelisson, P. Wolf, F. P. dos Santos, Phys. Rev. Lett. **106**, 213002 (2011).
[14] G. Tackmann, B. Pelle, A. Hilico, Q. Beaufils, and F. Pereira dos Santos, Phys. Rev. A **84**, 063422 (2011).
[15] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
[16] C. Zener, Proc. R. Soc. Lond. A **145**, 523 (1934).
[17] M. Gluck, A. R. Kolovsky, H. J. Korsch, and N. Moiseyev, Eur. Phys. J. D **4**, 239 (1998).

Conclusions

Dans ce mémoire, j'ai développé la modélisation théorique de l'expérience FORCA-G dont le but est de mesurer les interactions à courte distance entre un atome et une surface massive. Cette expérience, actuellement en cours de montage, a pour ambition à la fois de mesurer très précisément l'effet Casimir-Polder et de rechercher des déviations à la loi de la gravitation de Newton à très courte distance. Si le premier effet est connu depuis longtemps, les déviations à la loi de Newton ne sont encore que des hypothèses théoriques avancées dans le cadre des théories d'unification de la mécanique quantique et de la relativité générale.

Le travail présenté ici a donc deux facettes. D'une part il s'agit de prédire les états atomiques dans le piège de FORCA-G en présence des interactions recherchées ainsi que leur évolution dans ce piège. Cette première partie a pour objet l'étude de la faisabilité de l'expérience et la prévision des performances de celle-ci notamment en ce qui concerne les déviations non-Newtoniennes. Ceci est d'autant plus important que les ordres de grandeurs des deux interactions recherchées sont très différents dans le sens où, aux distances que l'on teste, l'effet Casimir-Polder est très largement dominant par rapport à la gravitation non-Newtonienne. Le travail de modélisation des états pour chaque type d'interaction est donc fondamental pour l'interprétation future des résultats expérimentaux.

Après avoir calculé les états du piège comme des états pseudo-propres, on a dû s'assurer que la durée de vie de ces états autorisait la réalisation de l'expérience. En effet, les états atomiques dans la configuration expérimentale de FORCA-G ne sont pas des états liés mais des résonances quantiques dont la durée de vie est limitée. Ce temps de vie fini peut s'interpréter comme un effet tunnel résonant au-travers des puits du réseau conduisant à l'échappée d'une partie des atomes du piège. La prédiction de ce temps de vie en présence des interactions à courte distance a nécessité la mise en oeuvre de méthodes mathématiques complexes et a soulevé des problèmes fondamentaux liés à la régularisation du potentiel de Casimir-Polder notamment. Cependant, la conclusion de cette étude a été que le temps pendant lequel les atomes restaient dans les états calculés précédemment

était beaucoup plus long que le temps nécessaire à la mesure. Cela a permis de conclure sur la faisabilité de l'expérience ainsi que sur la validité de l'approximation consistant à considérer les états du piège comme pseudo-propres.

La deuxième partie de ce travail a consisté en la modélisation du schéma expérimental en lui-même. Ceci a été effectué grâce à la connaissance préalable des états propres du piège ainsi que des modifications des niveaux d'énergie induites par les interactions à courte distance et notamment par l'effet Casimir-Polder. La prise en compte de ces effet a permis l'optimisation des fréquences de couplage Raman entre puits voisins ainsi que le choix de la profondeur de puits optimale pour l'expérience. Cela a aussi mis au jour une difficulté expérimentale intervenant avec le schéma d'interféromètre initialement proposé. En effet, la simulation de l'interféromètre avec ce premier schéma a mis en lumière un problème de phases résiduelles dans les franges d'interférences à la sortie de l'interféromètre dont l'effet était de dimminuer drastiquement leur contraste. L'étude théorique de ce phénomène a conduit à la proposition d'un nouveau schéma pour résoudre ce problème et optimiser les futurs résultats expérimentaux.

Je terminerai ce mémoire sur les perspectives théoriques et expérimentales reliées à FORCA-G. Du point de vue théorique, on a montré dans ce mémoire que le calcul du temps de vie des états métastables du piège en présence de l'effet Casimir-Polder est un problème encore ouvert. Si on a estimé que ce temps de vie n'était pas réellement une contrainte pour la réalisation de l'expérience, une étude plus poussée des méthodes de régularisation pour ce type de résonance pourrait être intéressante d'un point de vue plus général pour la théorie des résonances dans le cas de potentiel à divergence forte. Une telle étude pourrait avoir des répercussions sur les calculs de résonances atomiques et moléculaires par exemple.

Par ailleurs, dans les calculs effectués, nous avons considéré une surface conductrice parfaite. Or, dans la réalité, le miroir qui sera utilisé dans le cas de FORCA-G sera un miroir dichroïque pour les besoins liés à la réalisation du piège. Un tel miroir est consitué d'une surface multicouche et n'est donc pas un conducteur parfait. Il pourrait être intéressant de voir l'évolution du potentiel de Casimir-Polder pour une telle surface.

Concernant l'expérience, les premières mesures interféromètriques ont été effectuées récemment pour des atomes éloignés de la surface. Les premiers tests proches de la surface devraient arriver sous peu.

Bibliographie

[1] P. Lemonde and P. Wolf, *Optical lattice clock with atoms confined in a shallow trap*, Phys. Rev. A **72**, 033409 (2005).

[2] P. Wolf, P. Lemonde, A. Lambrecht, S. Bize, A. Landragin, and A. Clairon, *From optical lattice clocks to the measurement of forces in the Casimir regime*, Phys. Rev. A **75**, 063608 (2007).

[3] L. D. Broglie, *Waves and quanta*, Nature **112**, 540 (1923).

[4] C. Davisson and L. H. Germer, *Diffraction of electrons by a crystal of nickel*, Phys. Rev. **30**, 705 (1927).

[5] O. R. Frisch, H. von Halban Jr, and J. Koch, *Some experiments on the magnetic properties of free neutrons*, Phys. Rev. **53**, 719 (1938).

[6] L. Marton, *Electron interferometer*, Phys. Rev. **85**, 1057 (1952).

[7] H. Rauch, W. Treimer, and U. Bonse, *Test of a single crystal neutron interferometer*, Phys. Lett. A **47**, 369 (1974).

[8] O. Carnal and J. Mlynek, *Young's double slit experiment with atoms : a simple atom interferometer*, Phys Rev. Lett. **66**, 2689 (1991).

[9] D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette, and D. A. Pritchard, *An interferometer for atoms*, Phys Rev. Lett. **66**, 2693 (1991).

[10] M. S. Chapman, C. R. Ekstrom, T. D. Hammond, R. A. Rubienstein, J. Schmiedmayer, S. Wehinger, and D. E. Pritchard, *Optics and interferometry with Na_2 molecules*, Phys Rev. Lett. **74**, 4783 (1995).

[11] M.Arndt, O. Nairz, J. Petschinka, and A. Zeilinger, *High contrast interference with C_{40} and C_{70}*, Compt. Rend. Acad.Sci. SerieIV **2(4)**, 581 (2001).

[12] L. P. Kapitza and P. A. M. Dirac, *The reflection of electrons from standing light waves*, Proc. Cambridge. Philos. Soc. **29**, 297 (1933).

[13] A. Einstein, *Zur Quantentheorie der Strahlung*, Physikalische Zeitschrift **18**, 121 (1917).

[14] S. Altshuler, L. M. Frantz, and S. Braunstein, *Reflection of atoms from standing light waves*, Phys Rev. Lett. **17**, 231 (1966).

[15] P. E. Moskowitz, P. L. Gould, S. R. Atlas, and D. Pritchard, *Diffraction of atomic beamby standing wave radiation*, Phys. Rev. Lett. **51**, 370 (1983).

[16] E. M. Rasel, M. K. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger, *Atom wave interferometry with diffraction gratings of light*, Phys Rev. Lett. **75**, 2633 (1995).

[17] D. M. Giltner, R. W. McGowan, and S. A. Lee, *Atom interferometer based on bragg scattering from standing light waves*, Phys Rev. Lett. **75**, 2638 (1995).

[18] S. B. Cahn, A. Kumarakrishnan, U.Shim, and T. Sleator, *Time-Domain de Broglie wave interferometry*, Phys Rev. Lett. **79**, 784 (1997).

[19] I. Rabi, J. R. Zacharias, S. Millman, and P. Kusch, *A new method of measuring nuclear magnetic moment*, Phys. Rev. **53**, 318 (1938).

[20] N. F. Ramsey, *A new molecular beam resonance method*, Phys. Rev. **76**, 996 (1949).

[21] C. Bordé, *Atomic interferometry with internal state labelling*, Phys. Lett. A **140**, 10 (1989).

[22] F. Riehle, T. Kisters, A. Witte, J. Helmcke, and C. Bordé, *Optical Ramsey spectroscopy in a rotating frame : Sagnac effect in a matter-wave interferometer*, Phys Rev. Lett. **67**, 177 (1991).

[23] M. Kasevich, D. Weiss, A. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, *Atomic Velocity Selection Using Stimulated Raman Transitions*, Phys Rev. Lett. **66**, 2297 (1991).

[24] C. Cohen-Tannoudji, *Cours de Physique atomique et moléculaire*, Collège de France (1992-1993).

[25] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique Quantique I* (Hermann, 1973).

[26] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique Quantique II* (Hermann, 1973).

[27] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique tome 3 - Mécanique Quantique* (Mir Moscou, 1966).

[28] R. P. Feynman, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).

[29] P. Storey and C. Cohen-Tannoudji, *The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial*, J. Phys. II **4**, 1999 (1994).

[30] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique tome 1 - Mécanique* (Mir Moscou, 1964).

[31] Q. Bodart, S. Merlet, N. Malossi, F. P. D. Santos, P. Bouyer, and A. Landragin, *A cold atom pyramidal gravimeter with a single laser beam*, Appl. Phys. Lett. **96**, 134101 (2010).

[32] J. Kitching, S. Knappe, and E. A. Donley, *Atomic Sensors Ű A Review*, IEEE Sensors Journal **11**, 1749 (2011).

[33] P. Gill, *When should we change the definition of the second ?*, Phil. Trans. R. Soc. A **369**, 4109 (2011).

[34] C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. J. Koelemeij, D. J. Wineland, and T. Rosenband, *Frequency comparison of two high accuracy Al+ optical clocks*, J. Opt. Soc. Am. B **22**, 1819 (2005).

[35] M. Chwalla, J. Benhelm, K. Kim, G. Kirchmain, T. Monz, M. Riebe, P. Schindler, A. S. Villar, W. Hänsel, C. F. Roos, R. Blatt, M. Abgrall, G. Santarelli, G. D. Rovera, and P. Laurent, *Absolute frequency measurement of the* $^{40}Ca^{+}$ $4s^2S_{1/2} - 3d^2D_{5/2}$ *clock transition*, Phys Rev. Lett. **102**, 023002 (2009).

[36] R. L. Targat, X. Baillard, M. Fouché, A. Brusch, O. Tcherbakoff, G. D. Rovera, and P. Lemonde, *Accurate Optical Lattice Clock with* ^{87}Sr *Atoms*, Phys. Rev. Lett. **97**, 130801 (2006).

[37] J. Friebe, A. Pape, M. Riedmann, K. Moldenhauer, T. Mehlstäubler, N. Rehbein, C. Lisdat, E. M. Rasel, W. Ertmer, H. Schnatz, B. Lipphardt, and G. Grosche, *Absolute frequency measurement of the magnesium intercombination transition* $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$, Phys. Rev. A **78**, 033830 (2008).

[38] N. D. Lemke, A. D. Ludlow, Z. W. Barber, T. M. Fortier, S. A. Diddams, Y. Jiang, S. R. Jefferts, T. P. Heavner, T. E. Parker, and C. W. Oates, *Spin-1/2 optical lattice clock*, Phys. Rev. Lett. **103**, 063001 (2009).

[39] G. Grynberg and C. Robilliard, *Cold atoms in dissipative optical lattices*, Phys. Rep. **355**, 335 (2001).

[40] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).

[41] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atoms and photons - Introduction to quantum electrodynamics* (Wiley, 1989).

[42] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable, *Experimental Observation of Optically Trapped Atoms*, Phys Rev. Lett. **57**, 314 (1986).

[43] J. Vigué, *Possibility of applying laser-cooling techniques to the observation of collective quantum effects*, Phys. Rev. A **34**, 4476 (1986).

[44] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid state physics* (Thomson Learning, Inc., 1976).

[45] M. Glück, A. Kolovsky, and H. J. Korsch, *Wannier-Stark resonances in optical and semiconductor superlattices*, Phys. Rep. **366**, 103 (2002).

[46] H. B. G. Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).

[47] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique tome 4 - Électrodynamique Quantique* (Mir Moscou, 1973).

[48] P. W. Milonni, *The quantum vacuum : An introduction to quantum electrodynamics* (Academic Press, 1994).

[49] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical fiunctions* (Dover Publications, 1964).

[50] H. B. G. Casimir and D. Polder, *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).

[51] S. Y. Buhmann, L. Knöll, D.-G. Welsch, and H. T. Dung, *Casimir-Polder forces : A nonperturbative approach*, Phys. Rev. A **70**, 052117 (2004).

[52] E. Power and S. Zienau, *Coulomb gauge in non-relativistic quantum electrodynamics and the shape of spectral lines*, Phil. Trans. R. Soc. A **251**, 427 (1959).

[53] E. Power and T. Thirunamachandran, *The multipolar Hamiltonian in radiation theory*, Proc. R. Soc. Lond. A **372**, 265 (1980).

[54] D. P. Craig and E. A. Power, *The Asymptotic Casimir-Polder Potential from Second-Order Perturbation Theory and Its Generalization for Anisotropic Polarizabilities*, Int. J. Quant. Chem. **3**, 903 (1969).

[55] L. Spruch, *Long-Range (Casimir) Interactions*, Science **272**, 1452 (1996).

[56] E. A. Power and T. Thirunamachandran, *Casimir-Polder potential as an interaction between induced dipoles*, Phys. Rev. A **48**, 4761 (1993).

[57] E. G. Adelberger, B. R. Heckel, and A. E. Nelson, *Tests of the Gravitational Inverse-Square Law*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 77 (2003).

[58] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I* (Cambridge University press, 1995).

[59] H. Yukawa, *On the interaction of elementary particles*, Proc. Phys. Math. Soc (Japan) **17**, 48 (1935).

[60] R. V. Eötvös, D. Pekár, and E. Fekete, *Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität*, Ann. Phys (Leipzig) **373**, 11 (1922).

[61] I. Ciufolini, E. Pavlis, F. Chieppa, E. Fernandes-Vieira, and J. Pérez-Mercader, *Test of General Relativity and Measurement of the Lense-Thirring Effect with Two Earth Satellites*, Science **279**, 2100 (1998).

[62] J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. H. Boggs, *Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon*, Int. J. Mod. Phys. D **18**, 50 (2005).

[63] N. I. Kolosnitsyn and V. N. Melnikov, *Test of the Inverse Square Law through Precession of Orbits*, Gen. Rel. Grav **36**, 1619 (2004).

[64] C. M. Will, *The confrontation between general relativity and experiment*, Astrophysics and Space Science **63**, 731 (2004).

[65] D. H. Eckhardt, C. Jekeli, A. R. Lazarewicz, A. J. Romaides, and R. W. Sands, *Tower Gravity Experiment : Evidence for Non-Newtonian Gravity*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2567 (1988).

[66] E. Fischbach and C. L. Talmadge, *The search for Non-Newtonian gravity* (Springer-Verlag New York, Inc., 1999).

[67] A. S. Konopliv, S. W. Asmar, W. M. Folkner, O. Karatekin, D. C. Nunes, S. E. Smrekar, C. F. Yoder, and M. T. Zuber, *Marshighresolutiongravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters*, Icarus **211**, 401 (2011).

[68] J. K. Hoskins, R. D. Newman, R. Spero, and J. Schultz, *Experimental tests of the gravitational inverse-square law for mass separations from 2 to 105 cm*, Phys. Rev. D **32**, 3084 (1985).

[69] J. Chiaverini, S. J. Smullin, A. A. Geraci, D. M. Weld, and A. Kapitulnik, *New Experimental Constraints on Non-Newtonian Forces below* $100\,\mu m$, Phys Rev. Lett. **90**, 151101 (2003).

[70] J. C. Long, H. W. Chan, A. B. Churnside, E. A. Gulbis, M. C. M. Varney, and J. C. Price, *Upper limits to submillimetre-range forces from extra space-time dimensions*, Nature **421**, 922 (2003).

[71] C. D. Hoyle, D. J. Kapner, B. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, U. Schmidt, and H. E. Swanson, *Submillimeter tests of the gravitational inverse-square law*, Phys. Rev. D **70**, 042004 (2004).

[72] D. J. Kapner, T. S. Cook, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, C. D. Hoyle, and H. E. Swanson, *Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale*, Phys. Rev. Lett. **98**, 021101 (2007).

[73] S. J. Smullin, A. A. Geraci, D. M. Weld, J. Chiaverini, S. Holmes, and A. Kapitulnik, *Constraints on Yukawa-type deviations from Newtonian gravity at 20 microns*, Phys. Rev. D **72**, 122001 (2005).

[74] S. K. Lamoreaux, *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 mm Range*, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).

[75] R. S. Decca, D. López, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, and V. M. Mostepanenko, *Constraining New Forces in the Casimir Regime Using the Isoelectronic Technique*, Phys. Rev. Lett. **94**, 240401 (2005).

[76] R. S. Decca, D. López, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, and V. M. Mostepanenko, *Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated plates*, Phys. Rev. D **75**, 077101 (2007).

[77] S. Dimopoulos and A. A. Geraci, *Probing submicron forces by interferometry of Bose-Einstein condensed atoms*, Phys. Rev. D **68**, 124201 (2003).

[78] A. A. Geraci, S. B. Papp, and J. Kitching, *Short-Range Force Detection Using Optically Cooled Levitated Microspheres*, Phys. Rev. Lett. **105**, 101101 (2010).

[79] F. Bloch, *Über die quantenmechanik der electronen in kristallgittern*, Z. Phys. **52**, 555 (1928).

[80] G. Wannier, *Wave functions and effective Hamiltonian for Bloch electrons in an electric field*, Phys. Rev. **117**, 432 (1960).

[81] M. Glück, A. R. Kolovsky, H. J. Korsch, and N. Moiseyev, *Calculation of Wannier-Bloch and Wannier-Stark states*, Eur. J. Phys. D **4**, 239 (1998).

[82] J. B. Krieger and G. J. Iafrate, *Time evolution of a Bloch electron in a homogeneous electric field*, Phys. Rev. B **33**, 5494 (1986).

[83] C. Zener, *A theory of electrical breakdown of solid dielectrics*, Proc. R. Soc. Lond. A **145**, 523 (1934).

[84] G. Peters and J. H. Wilkinson, *Eigenvalues of $Ax = \lambda Bx$ with band symmetric A and B*, Comp.J. **12**, 398 (1969).

[85] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes in C* (Press syndicate of the University of Cambridge, 1992).

[86] R. Messina, *Casimir-Polder force between atom and surface : geometrical and dynamical effects*, Ph.D. Thesis, Università degli studi di Palermo and Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie (2010).

[87] G. Barton, *Frequency shifts near an interface : Inadequacy of two-level atomic models*, J. Phys. B : Atom. Molec. Phys. **7**, 2134 (1974).

[88] A. Lambrecht, P. M. Neto, and S. Reynaud, *The Casimir effect within scattering theory*, New J. Phys. **8**, 243 (2006).

[89] R. Messina, D. A. R. Dalvit, P. A. M. Neto, A. Lambrecht, and S. Reynaud, *Dispersive interactions between atoms and nonplanar surfaces*, Phys. Rev. A **80**, 022119 (2009).

[90] J. M. Wylie and J. E. Sipe, *Quantum electrodynamics near an interface*, Phys. Rev. A **30**, 1185 (1984).

[91] S. Y. Buhmann, D.-G. Welsch, and T. Kampf, *Ground-state van der Waals forces in planar multilayer magnetodielectrics*, Phys. Rev. A **72**, 032112 (2005).

[92] K. M. Case, *Singular Potentials*, Phys. Rev. **80**, 797 (1950).

[93] W. M. Frank, D. J. Land, and R. M. Spector, *Singular potentials*, Rev. Mod. Phys. **43**, 36 (1971).

[94] P. A. M. Neto, A. Lambrecht, and S. Reynaud, *Casimir energy between a plane and a sphere in electromagnetic vacuum*, Phys. Rev. A **78**, 012115 (2008).

[95] A. Canaguier-Durand, P. A. M. Neto, I. Cavero-Pelaez, A. Lambrecht, and S. Reynaud, *Casimir Interaction between Plane and Spherical Metallic Surfaces*, Phys. Rev. Lett. **102**, 230404 (2009).

[96] A. Canaguier-Durand, A. Gérardin, R. Guérout, P. A. M. Neto, V. Nesvizhevsky, A. Y. Voronin, A. Lambrecht, and S. Reynaud, *Casimir interaction between a dielectric nanosphere and a metallic plane*, Phys. Rev. A **83**, 032508 (2011).

[97] G. Compagno, R. Passante, and F. Persico, *Virtual Field and Internal Structure of Half-Dressed Extended Particles*, Europhys. Lett. **7**, 399 (1988).

[98] J. C. Slater, *Atomic Radii in Crystals*, J. Chem. Phys. **41**, 3199 (1964).

[99] E. Clementi, D. L. Raimondi, and W. P. Reinhardt, *Atomic Screening Constants from SCF Functions. II. Atoms with 37 to 86 Electrons*, J. Chem. Phys. **47**, 1300 (1967).

[100] R. Messina, S. Pelisson, M. C. Angonin, and P. Wolf, *Atomic states in optical traps near a planar surface*, Phys. Rev. A **83**, 052111 (2011).

[101] C. Zener, *Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels*, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A **137**, 696 (1932).

[102] L. D. Landau, *Zur Theorie der Enregieübertragung II*, Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932).

[103] Y. Gefen, E. Ben-Jacob, and A. O. Caldeira, *Zener transitions in dissipative driven systems*, Phys. Rev. B **36**, 2770 (1987).

[104] D. Iliescu, S. Fishman, and E. Ben-Jacob, *Quasienergy spectroscopy in mesoscopic systems*, Phys. Rev. B **46**, 14675 (1992).

[105] Q. Niu, X.-G. Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, *Atomic Landau-Zener Tunneling and Wannier-Stark Ladders in Optical Potentials*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4504 (1996).

[106] J. E. Avron, *Model Calculation of Stark Ladder Resonances*, Phys. Rev. Lett. **37**, 1568 (1976).

[107] N. Moiseyev, *Quantum theory of resonances : calculating energies, widths and cross-sections by complex scaling*, Phys. Rep. **302**, 211 (1998).

[108] A. I. Baz', Y. B. Zel'dovich, and A. M. Perelomov, *Scattering, reactions and decay in non-relativistic quantum mechanics* (IPST Press Jerusalem, 1969).

[109] V. I. Kukulin, V. M. KrasrOpol'sky, and J. Horácek, *Theory of resonances : Principles and applications* (Academic Publichers, Prague, 1989).

[110] B. R. Junker, *Recent computational developments in the use of complex scaling in resonance phenomena*, Adv. At. Mol. Phys. **18**, 207 (1982).

[111] J. Aguilar and J. M. Combes, *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*, Commun. Math. Phys. **22**, 269 (1971).

[112] E. Balslev and J. M. Combes, *Spectral Properties of Many-body Schrödinger Operators with Dilatation-analytic Interactions*, Commun. Math. Phys. **22**, 280 (1971).

[113] B. Simon, *Quadratic Form Techniques and the Balslev-Combes Theorem*, Commun. Math. Phys. **27**, 1 (1972).

[114] B. Simon, *Resonances in n-body quantum systems with dilatation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory*, Ann. Math. **97**, 247 (1973).

[115] W. Hunziker, *Distortion analyticity and molecular resonance curves*, Ann. Inst. Henri Poincaré **45**, 339 (1986).

[116] N. Moiseyev and L. S. Cederbaum, *Resonance solutions of nonlinear Schrödinger equation : tunneling lifetime and fragmentation of trapped codensates*, Phys. Rev. A **72**, 033605 (2005).

[117] W. P. Reinhardt, *Complex coordinates in the theory of atomic and molecular structure and dynamics*, Ann. Rev. Phys. Chem. **33**, 223 (1982).

[118] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. D. Croz, A. Greenbaum, S. Hammmerling, A. McKenney, and D. Sorensen, *LAPACK User' Guide : Third Edition*, the society for industrial and applied mathematics edn. (1999).

[119] N. Moiseyev, *Non-hermitian quantum mechanics* (Cambridge University press, 2011).

[120] N. Moiseyev, P. R. Certain, and F. Weinhold, *Resonance properties of complex-rotated hamiltonians*, Mol. Phys. **36**, 1613 (1978).

[121] E. Brändas and P. Froelich, *Continuum orbitals, complex scaling problem, and the extended virial theorem*, Phys. Rev. A **16**, 2207 (1977).

[122] N. Moiseyev, *Resonance states by the generalized complex variational method*, Mol. Phys. **47**, 3 (1982).

[123] H. Barkay and N. Moiseyev, *Complex density probability in non-Hermitian quantum mechanics : interpretation and a formula for resonant tunneling probability amplitude*, Phys. Rev. A **64**, 044702 (2001).

[124] N. Moiseyev and P. R. Certain, *Perturbation approach to the complex-rotation method*, Mol. Phys. **37**, 1621 (1979).

[125] S. Graffi, V. Grecchi, and H. J. Silverstone, *Resonances and convergence of perturbation theory for N-body atomic systems in external AC-electric field*, Ann. Inst. Henri Poincaré **42**, 215 (1985).

[126] A. U. Hazi and H. S. Taylor, *Stabilization method of calculating resonance energies : model problem*, Phys. Rev. A **1**, 4 (1970).

[127] B. R. Junker, *The complex stabilization method : Application to atomic resonances*, Int. J. Quant. Chem : Quant. Chem. Symp. **14**, 53 (1980).

[128] S. Pelisson, R. Messina, M. C. Angonin, and P. Wolf, *Lifetimes of atoms trapped in an optical lattice in proximity of a surface*, submitted to Phys. Rev. A (2013).

[129] Q. Beaufils, G. Tackmann, X. Wang, B. Pelle, S. Pelisson, P. Wolf, and F. P. dos Santos, *Laser controlled tunneling in a vertical optical lattice*, Phys. Rev. Lett. **106**, 213002 (2011).

[130] G. Tackmann, B. Pelle, A. Hilico, Q. Beaufils, and F. P. dos Santos, *Raman laser spectroscopy of Wannier-Stark states*, Phys. Rev. A **84**, 063422 (2011).

[131] S. Pelisson, R. Messina, M.-C. Angonin, and P. Wolf, *Dynamical aspects of atom interferometry in an optical lattice in proximity of a surface*, Phys. Rev. A **86**, 013614 (2012).

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente la modélisation théorique de l'expérience FORCA-G (FORce de CAsimir et Gravitation à courte distance) actuellement en cours de développement à l'Observatoire de Paris. L'objet de cette expérience est la mesure des interactions à courte portée entre un atome et une surface massive. Les interactions recherchées sont du type électrodynamique quantique (effet Casimir-Polder) et gravitationnelle. Le travail présenté ici a consisté à calculer les états des atomes dans le contexte de l'expérience afin de prévoir les signaux et les performances de l'expérience. Ceci a permis l'optimisation du schéma expérimental pour la mesure à la fois de l'effet Casimir-Polder à une précision non encore atteinte ainsi que pour la recherche de déviations à la loi de Newton prédites par les théories d'unification.

Mots-clés : Interférométrie atomique, Effet Casimir-Polder, Gravitation non-Newtonienne, Résonance quantique

ABSTRACT

This thesis presents the theoretical modeling of the experiment FORCA-G (FORce de CAsimir et Gravitation à courte distance) currently in progress at Paris Observatory. The purpose of this experiment is to measure short-range interactions between an atom and a massive surface. This interaction are of two kind : quantum electrodynamical (Casimir-Polder effect) and gravitationnal. The work presented here was to calculate the atomic states in the context of the experiment such that we can predict results and performances of the experiment. This has allowed to optimize the experimental scheme both for the high-precision measurement of the Casimir-Polder effect and for the search of deviation from the Newton's law of gravity predicted by unification theories.

key-words : Atom interferometry, Casimir-Polder effect, Non-Newtonian gravitation, Quantum resonance