



# Géométrie des variétés, des espaces de mesures et des espaces de sous-groupes

Benoît Kloeckner

► **To cite this version:**

Benoît Kloeckner. Géométrie des variétés, des espaces de mesures et des espaces de sous-groupes. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Grenoble, 2012. tel-00785679

**HAL Id: tel-00785679**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00785679>**

Submitted on 6 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE  
INSTITUT FOURIER

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

*spécialité mathématiques ; présentée et soutenue publiquement par*

**Benoît R. Kloeckner**

*le 3 décembre 2012*

---

**Géométrie des variétés, des espaces de  
mesures et des espaces de sous-groupes**

---

*Soutenue après avis de*

Werner BALLMANN	Universität Bonn
Christopher B. CROKE	University of Pennsylvania
Yann OLLIVIER	Université Paris-Sud

*devant le jury formé de*

Gérard BESSON	Université Joseph Fourier
Yann OLLIVIER	Université Paris-Sud
Hervé PAJOT	Université Joseph Fourier
Frédéric PAULIN	Université Paris-Sud
Bertrand RÉMY	Université Lyon 1
Filippo SANTAMBROGIO	Université Paris-Sud







---

# Remerciements

---

---

Bien que le quotidien de la recherche en mathématiques soit relativement solitaire, dès que l'on prend un peu de recul on se rend compte qu'elle est toujours une aventure collective. Bien sûr, ceci apparaît clairement dès qu'on lit la bibliographie d'un article, et les mémoires tels que celui-ci portent le nom d'acteurs essentiels : ainsi Werner Ballmann, Chris Croke et Yann Ollivier ont accepté de rapporter cette habilitation, Gérard Besson, Hervé Pajot, Frédéric Paulin, Bertrand Rémy et Filippo Santambrogio d'en compléter le jury. C'est un plaisir et un grand honneur qu'autant de mathématiciens dont j'admire les contributions se penchent ainsi sur mon travail.

Mais également souvent, des remarques, des discussions, des exposés jouent de façon beaucoup plus discrète un rôle capital dans la recherche ; j'aimerais souligner quelques-unes de ces occasions dont j'ai bénéficié. Pierre de la Harpe a donné au quatorzième séminaire tripode un très bel exposé sur la topologie de Chabauty qui m'a fait découvrir ce sujet et m'a convaincu d'y réfléchir ; Hervé Pajot, Nicolas Juillet et les autres participants du groupe de travail « transport optimal », monté à l'Institut Fourier à peu près quand j'y suis arrivé, m'en ont appris les bases et montré la saveur ; Greg Kuperberg, lors de l'année qu'il a passé à Grenoble, m'a proposé de le rejoindre sur un projet isopérimétrique auquel je suis très heureux d'avoir pu contribuer et qui a connu des développements auxquels nous ne nous attendions, je crois, ni l'un ni l'autre. Chacun des trois chapitres de ce texte est donc le reflet de mon travail, mais aussi des interactions avec une communauté dont la diversité fait la richesse.

Je dois à Gérard Besson, entre autres choses, d'avoir pu passer un mois « au loin » après une déconvenue professionnelle assez démotivante, à Rafe Mazzeo que « au loin » soit dans le superbe environnement de Stanford, et au dévouement de Marie-Hélène Biasini et des responsables successifs des missions Brigitte Loiodice, Stéphanie Cardon, Yan Seguin et Christine Haccart que ce voyage et les autres aient pu avoir lieu malgré mes errements administratifs occasionnels. Merci à eux.

Je devrais encore citer beaucoup de noms pour être juste, j'espère que ceux que j'omets par concision savent que je ne les apprécie pas moins ; merci beaucoup à tous et toutes.

Enfin, je sais que ces anecdotes ont leur reflets un peu partout dans la recherche,

aussi je profite de ces lignes pour affirmer que l'idée d'*excellence*,<sup>1</sup> qui exclut par définition la majorité des acteurs impliqués, n'est pas l'amie de la science. Faisons notre possible pour pouvoir être fiers de la *qualité* de notre travail, plutôt que de chercher à tout prix à paraître meilleurs que nos collègues ou l'université voisine, et nous ferons bien mieux avancer la connaissance.

---

1. « Degré éminent de perfection qu'une personne, une chose, a en son genre. ⇒ **perfection, supériorité** » d'après le Robert.

---

# Introduction

---

---

Ce mémoire présente, sans preuves détaillées, les principaux résultats que j'ai obtenus ces cinq dernières années ; les articles qui constituaient ou prolongeaient ma thèse de doctorat, ainsi que quelques articles récents moins importants sont seulement listés ci-dessous. J'espère fournir une idée assez précise de mon activité de recherche passée, et par les questions ouvertes laissées en suspens illustrer mes perspectives à venir.

Les sujets abordés sont relativement variés, avec (dans l'ordre du texte qui est à peu près l'ordre chronologique inverse) de la géométrie riemannienne de saveur classique, une étude géométrique et dynamique d'espaces « de Wasserstein », issus du transport optimal, et une étude topologique des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^n$ . On trouve toutefois, à défaut de lien logique, une certaine filiation entre les différents chapitres. Par exemple, la section « du Petit Prince » dans le premier chapitre repose très largement sur un problème d'optimisation linéaire impliquant des mesures finies, ce qui n'est pas sans évoquer le transport optimal. L'étude des sous-groupes fermés est reliée aux espaces de modules (de tores plats ou de surfaces hyperboliques par exemple) dont l'étude géométrique est maintenant un sujet classique.

Je n'ai donné que des rappels relativement limités. La lecture du premier chapitre suppose ainsi une certaine familiarité avec la géométrie riemannienne ; le second chapitre introduit brièvement le transport optimal, mais suppose le lecteur familier avec les espaces CAT(0) ; le troisième chapitre n'utilise pas d'outil sophistiqué et en est d'autant raccourci.

## Description du Chapitre I

Ce chapitre décrit deux résultats de géométrie riemannienne obtenus en collaboration avec Greg Kuperberg.

Le premier est une généralisation de l'inégalité de Günther, qui minore le volume des petites boules d'une variété en fonction d'une borne supérieure sur la courbure sectionnelle. En fait, la minoration porte plus généralement sur l'expression du volume riemannien en carte exponentielle, on parlera de « minoration du volume » pour simplifier. C'est une inégalité extrêmement classique, qui a de nombreuses applications (sur l'entropie du flot géodésique, le groupe fondamental des variétés à courbure négative, le spectre du laplacien, les inégalités isopérimétriques). La



généralisation consiste à remplacer l'hypothèse de courbure sectionnelle par une hypothèse beaucoup plus faible, qui la rapproche de l'inégalité de Bishop. Cette compagne de l'inégalité de Günther donne une *majoration* du volume en fonction d'une borne *inférieure* sur la courbure *de Ricci*. On sait toutefois qu'il est impossible de remplacer dans l'inégalité de Günther « courbure sectionnelle » par « courbure de Ricci », notre généralisation demande d'introduire une nouvelle courbure qu'on nomme « courbure de Ricci radicielle ». Il s'agit d'une fonction définie sur le fibré unitaire tangent à une variété, dépendant d'un paramètre qui doit majorer la courbure sectionnelle, et qui est fortement reliée aux courbures sectionnelles et de Ricci. Là où la courbure de Ricci dans une direction donnée fait la somme des valeurs propres de l'opérateur de courbure associé à cette direction, la courbure de Ricci radicielle est reliée à une moyenne non-linéaire des mêmes valeurs propres. En particulier, une borne sur la courbure sectionnelle entraîne toujours une borne équivalente sur la courbure de Ricci radicielle.

Le second résultat riemannien est une avancée sur la conjecture isopérimétrique dans les variétés à courbure majorée. Cette conjecture prédit que les variétés de dimension  $n$  simplement connexes à courbure au plus  $\kappa$  (où  $\kappa \leq 0$ ) vérifient l'inégalité isopérimétrique de l'espace euclidien (pour  $\kappa = 0$ ) ou de l'espace hyperbolique réel à courbure  $\kappa$  de même dimension. Les résultats connus concernent les cas  $n = 2$  (André Weil 1926, Thierry Aubin 1976, ...),  $n = 3$  (Bruce Kleiner 1992) et ( $n = 4, \kappa = 0$ ) (Chris Croke 1984). On obtient un résultat partiel pour ( $n = 4, \kappa < 0$ ) et, dans un cadre adapté, le cas ( $n = 4, \kappa > 0$ ); la méthode fonctionne également en dimension 2, et fournit même un résultat « ponctuel » généralisant le théorème de Weil. De plus, comme Croke, on utilise beaucoup moins que la majoration de la courbure : on se contente de conditions de minoration de volume, qui d'après la section précédente découlent d'hypothèses sur la courbure de Ricci radicielle. Un aspect intéressant de notre méthode est qu'on traduit les informations géométriques en un problème d'optimisation linéaire, qui porte notamment sur une mesure dont certaines marginales sont prescrites. Ce problème a donc de fortes similarités avec le transport optimal.

## Description du Chapitre II

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux espaces de Wasserstein  $\mathcal{W}_p(X)$  (où  $p$  est un paramètre qu'on prendra souvent égal à 2), dont les points sont des mesures de probabilité sur un espace métrique  $X$  et où la distance est définie par le biais du transport optimal. Ces espaces ont été exploités notamment pour étudier la géométrie de  $X$  et pour représenter des équations aux dérivées partielles comme des flots

de gradient, mais leur géométrie propre n'a pas été beaucoup étudiée.

Je considère d'abord le cas où  $X = \mathbb{R}^n$  ; le résultat principal décrit entièrement leur groupe d'isométrie, qui est plus riche que celui de  $\mathbb{R}^n$ . Cette richesse est particulièrement frappante dans le cas de la droite ( $n = 1$ ), où certaines isométries déforment chaque mesure. Ce « flot exotique » semble un phénomène très rare. On considère également les « plats » de  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$  : on peut plonger isométriquement des boules euclidiennes de rayon et de dimension arbitraires, et plonger bilipschitz des espaces euclidiens de dimension arbitraire même dans  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$ , mais on ne peut pas plonger isométriquement  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$ . Ces derniers résultats sont très simples à obtenir, mais sont des points de comparaison importants.

La section suivante, issue d'un travail en collaboration avec Jérôme Bertrand, présente le cas où  $X$  est un espace métrique à courbure négative (localement compact, globalement CAT(0)). Il est bien connu que l'espace de Wasserstein  $\mathcal{W}_2(X)$  n'est alors pas CAT(0), mais on montre qu'il possède des propriétés proches de celles de  $X$ . En particulier, on en construit un bord géodésique naturel, qui permet notamment de montrer que si  $X$  est CAT(-1),  $\mathbb{R}^2$  (qui ne peut bien sûr pas se plonger isométriquement dans  $X$ ) ne peut pas non plus se plonger isométriquement dans  $\mathcal{W}_2(X)$  bien que ce dernier soit beaucoup plus gros que  $X$ .

Je présente ensuite une estimation de la « taille » de  $\mathcal{W}_2(X)$  dans le cas compact. L'idée est de généraliser la dimension de Hausdorff pour construire des invariants bilipschitz, et de les calculer pour certains espaces de Wasserstein. J'obtiens dans un cas très général une minoration assez faible de ces invariants, et dans le cas où  $X$  est une variété une estimation assez précise. En particulier, on déduit de ces estimations que si  $X, X'$  sont des variétés de dimensions  $d > d'$ , alors il n'existe pas de plongement bilipschitz de  $\mathcal{W}_2(X)$  dans  $\mathcal{W}_2(X')$ .

Enfin, j'utilise la structure différentielle associée à  $\mathcal{W}_2(X)$  pour calculer le comportement à l'ordre 1 d'une application dilatante du cercle, quand on la fait agir sur des mesures, près de son unique mesure invariante absolument continue. On constate par exemple que l'hyperbolicité de ces systèmes dynamiques sur  $S^1$  ne se transmet pas au système associé sur  $\mathcal{W}_2(S^1)$ , et que la mesure invariante peut être déformée d'une infinité de façon en des mesures presque invariantes.

### Description du Chapitre III

À un groupe topologique  $G$  on peut associer son *espace de Chabauty*  $\mathcal{C}(G)$ , qui est l'ensemble de ses sous-groupes fermés muni d'une topologie naturelle. Si  $G$  est localement compact,  $\mathcal{C}(G)$  est compact et permet de définir des compactifications (d'espaces symétriques, d'immeubles, par exemple).

Souvent,  $\mathcal{C}(G)$  ou certaines de ses parties peuvent s'identifier à des espaces de modules d'objets géométriques. Par exemple,  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  peut être vu comme une compactification de l'espace des réseaux (où on distingue les réseaux isométriques) ou, de manière équivalente, comme une compactification de l'espace des tores plats avec un repère marqué.

La topologie de  $\mathcal{C}(G)$  est connue précisément dans très peu de cas ; par exemple,  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  est facilement identifié à un intervalle,  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$  est une sphère de dimension 4 (c'est le théorème de Hubbard et Poureza, 1979), mais on ne sait pratiquement rien de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  pour  $n \geq 3$ . Ce chapitre explique brièvement comment j'ai montré qu'il est toujours simplement connexe.

---

**Travaux décrits dans cette habilitation**

- [1] Benoît Kloeckner. A generalization of Hausdorff dimension applied to Hilbert cubes and Wasserstein spaces. *J. Top. Ana.*, 4(2) :203–235, 2012. arXiv :1105.0360.
- [2] Benoît R. Kloeckner. Optimal transport and dynamics of expanding circle maps acting on measures. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2012. arXiv :1006.4491.
- [3] Benoît R. Kloeckner and Greg Kuperberg. The Little Prince and Weil’s isoperimetric problem. 2012.
- [4] Benoît R. Kloeckner and Greg Kuperberg. A refinement of Günther’s candle inequality. 2012. arXiv :1204.3943.
- [5] Jérôme Bertrand and Benoît R. Kloeckner. A geometric study of Wasserstein spaces : Hadamard spaces. 2010. arXiv :1010.0590.
- [6] Benoît Kloeckner. A geometric study of Wasserstein spaces : Euclidean spaces. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 9(2) :297–323, 2010. arXiv :0804.3505.
- [7] Benoît Kloeckner. The space of closed subgroups of  $\mathbb{R}^n$  is stratified and simply connected. *J. Topol.*, 2(3) :570–588, 2009. arXiv :0812.2111.

**Autres articles**

- [8] Benoît R. Kloeckner. Approximation by finitely supported measures. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 18(02) :343–359, 2012. arXiv :1003.1035.
- [9] Benoît Kloeckner. Sharp quantitative isoperimetric inequalities in the  $L^1$  Minkowski plane. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(10) :3671–3678, 2010. arXiv :0907.4945.
- [10] Benoît Kloeckner. Symmetric spaces of higher rank do not admit differentiable compactifications. *Math. Ann.*, 347(4) :951–961, 2010. arXiv :0912.0814.
- [11] Benoît Kloeckner. Almost homogeneous manifolds with boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(12) :6729–6740, 2009. arXiv :0804.2360.
- [12] Benoît Kloeckner and Vincent Minerbe. Rigidity in CR geometry : the Schoen-Webster theorem. *Differential Geom. Appl.*, 27(3) :399–411, 2009. arXiv :0709.2057.
- [13] Benoît Kloeckner. On Lipschitz compactifications of trees. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(7-8) :413–416, 2008. arXiv :0804.2357.
- [14] Benoît Kloeckner. On differentiable compactifications of the hyperbolic plane and algebraic actions of  $SL_2(\mathbb{R})$  on surfaces. *Geom. Dedicata*, 125 :253–270, 2007. arXiv : math/0506130.
- [15] Benoît Kloeckner. Sur les remplissages holomorphes équivariants. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(6) :2041–2061, 2007. arXiv : math/0610748.
- [16] Benoît Kloeckner. On differentiable compactifications of the hyperbolic space. *Transform. Groups*, 11(2) :185–194, 2006. arXiv : math/0506135.



# Courbure, volume et isopérimétrie

---

---

Ce chapitre présente deux articles [3, 4] écrits en collaboration avec Greg Kuperberg (University of California, Davis), dans lesquels nous étudions l'influence de la courbure d'une variété riemannienne sur son volume et sur ses propriétés isopérimétriques.

Il s'agit dans les deux cas de géométrie de comparaison, les espaces modèles joueront donc un rôle prépondérant. Notons  $S_\kappa^n$  la variété riemannienne complète simplement connexe de dimension  $n \geq 2$  à courbure constante  $\kappa$  ; ainsi,  $S_0^n = \mathbb{R}^n$  et  $S_{-1}^n$  est l'espace hyperbolique réel. On considèrera une variété riemannienne  $M$  de dimension  $n$  et on notera  $g$  la métrique,  $K$  la courbure sectionnelle et  $\text{Ric}$  la courbure de Ricci. Parfois,  $M$  sera une variété à bord mais si ce n'est pas précisé on la supposera sans bord.

## 1 Une amélioration de l'inégalité de Günther

L'influence de la courbure sur le volume est un des sujets classiques de la géométrie riemannienne, dont les inégalités de Bishop et de Günther sont deux piliers (voir [BC64, GHL90]). Soit  $B(x, r)$  une boule géodésique de  $M$  et soit  $B_\kappa(r)$  une boule de même rayon dans  $S_\kappa^n$ . L'inégalité de Bishop veut que si  $\text{Ric} \geq \kappa(n-1)g$ , alors

$$\text{Vol}(B(x, r)) \leq \text{Vol}(B_\kappa(r)).$$

L'inégalité de Günther stipule que si  $K \leq \kappa$  et si  $r$  est inférieur au rayon d'injectivité en  $x$ , alors

$$\text{Vol}(B(x, r)) \geq \text{Vol}(B_\kappa(r)).$$

Les deux inégalités sont très semblables puisqu'elles comparent toutes les deux le volume des boules dans la variété à celui des boules d'un espace à courbure constante égale à la borne sur la courbure ; mais l'écart entre l'hypothèse de courbure relativement faible de l'inégalité de Bishop et celle, très contraignante, de l'inégalité de Günther est un fait troublant.

Il est facile de se convaincre que l'inégalité de Günther ne peut être vérifiée si on remplace simplement la borne sectionnelle par la borne sur Ricci qui lui correspond.

Par exemple, dans le plan hyperbolique complexe  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2$  (normalisé pour avoir une courbure comprise entre  $-1$  et  $-4$ ), une boule de rayon  $r$  a pour volume

$$\text{Vol}(B(x, r)) = \frac{\pi^2}{2} \sinh(r)^4 \sim \frac{\pi^2}{32} \exp(4r).$$

La meilleure borne supérieure sur la courbure sectionnelle est  $-1$  et la courbure de Ricci est constante égale à  $-2 \times 3g$  où  $g$  est la métrique et  $3$  est la dimension d'une sphère unité tangente, de sorte que les inégalités de Bishop et Günther donnent

$$\exp(3\sqrt{2}r) \stackrel{\text{Bishop}}{\gtrsim} \text{Vol}(B(x, r)) \stackrel{\text{Günther}}{\gtrsim} \exp(3r).$$

La première inégalité ne peut pas être inversée donc on ne peut pas renverser les inégalités dans le théorème de Bishop.

Dans [4], nous introduisons une nouvelle courbure qui permet d'obtenir un théorème de Günther sous une hypothèse plus faible qu'une borne sectionnelle, et plus proche de celle du théorème de Bishop. Le point de départ est l'observation suivante : dans  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2$ , pour tout vecteur unitaire tangent  $u$  l'opérateur  $R(u, \cdot, u, \cdot)$  restreint à  $u^\perp$ , où  $R$  est le tenseur de Riemann interprété comme une forme quadrilinéaire (avec la convention de signe qui la rend ici négative), a pour valeurs propres  $-1$ ,  $-1$  et  $-4$ . Le facteur 4 dans la croissance des boules est égal à la somme  $\sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{4}$  des racines carrées des opposés de ces valeurs propres.

### 1.1 La courbure de Ricci radicielle

Soit  $M$  une variété riemannienne toujours supposée connexe, complète, de dimension  $n$ . On note  $K$  la courbure sectionnelle de  $M$ , Ric son tenseur de Ricci et  $UM$  son fibré unitaire tangent.

On définit la *courbure de Ricci radicielle*  $\sqrt{\text{Ric}}$  de  $M$  de la façon suivante. On suppose que  $K \leq \rho$  pour une constante  $\rho \geq 0$ , et pour  $u \in UM$  on pose

$$\sqrt{\text{Ric}}(\rho, u) = \text{Tr}(\sqrt{\rho - R(\cdot, u, \cdot, u)}).$$

où  $\sqrt{A}$  dénote la racine carrée positive d'un opérateur symétrique positif  $A$ . La notation se comprend de la façon suivante : on interprète dans Ric les lettres « ic » comme un suffixe désignant l'opérateur trace, et le symbole  $\sqrt{\phantom{x}}$  indique qu'on a préalablement pris une racine.

Une grandeur à l'expression un peu plus intriquée, mais qui a son intérêt est

$$\rho - \left( \frac{1}{n-1} \sqrt{\text{Ric}}(\rho, u) \right)^2 = \rho - \left( \frac{1}{n-1} \text{Tr}(\sqrt{\rho - R(u, \cdot, u, \cdot)}) \right)^2 \quad (1)$$

dans une version préliminaire de ce mémoire et de l'article [4], c'est cette expression qui était nommée courbure de Ricci radicielle. Avec Greg Kuperberg, nous avons finalement préféré utiliser la première expression pour trois raisons : elle est plus simple, elle donne des expressions plus simples dans certains résultats, et elle apparaît déjà (à un signe près et pour  $\rho = 0$ ) dans des travaux dont nous avons découvert l'existence récemment, voir [OS84].

Par rapport à  $\frac{1}{n-1} \text{Ric}$ , l'expression (1) remplace simplement une moyenne arithmétique de valeurs propres par une moyenne non-linéaire, conjuguée à la moyenne arithmétique par la fonction  $k \mapsto \sqrt{\rho - k}$ . Elle a en particulier l'avantage d'être homogène à une courbure, les bornes de courbure s'expriment de façon plus naturelle quand on l'utilise. En particulier, il est important de noter qu'une borne supérieure sur la courbure va s'écrire comme une borne *inférieure* sur  $\sqrt{\text{Ric}(\rho)}$  ; en effet  $\sqrt{\text{Ric}(\rho, u)}$  mesure à quel point les courbures sectionnelles impliquant la direction  $u$  sont plus basse en moyenne que la borne supérieure  $\rho$ .

Quand  $\rho$  est nul, on obtient la moyenne des racines des opposés des valeurs propres de l'opérateur de courbure ; dans le cas de  $\text{CH}^2$ , on a ainsi  $\sqrt{\text{Ric}(0)} \equiv 4$  et l'expression (1) vaut  $-16/9$ , or l'espace hyperbolique de dimension 4 et de courbure  $-16/9$  a des boules dont le volume croît bien comme  $e^{4r}$ .

## 1.2 La fonction chandelle

On peut formuler les théorèmes de Bishop et Günther de façon plus puissante qu'en terme de volume des boules, en introduisant une grandeur classique, mais que nous normalisons différemment de l'habitude et nommons donc différemment. Étant donnée une géodésique  $\gamma = \gamma_u$  issue d'un point  $p$  avec une vitesse initiale  $u \in U_p M$ , la *fonction chandelle*  $s(\gamma, r)$  est définie comme le jacobien de l'application  $u \mapsto \gamma_u(r)$  ; elle s'obtient donc par les équations

$$dq = s(\gamma_u, r) du dr \quad q = \gamma_u(r) = \exp_p(ru),$$

où  $dq$  est le volume riemannien sur  $M$ ,  $dr$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et  $du$  est le volume riemannien sur la sphère ronde  $U_p M$ . À un facteur près, c'est donc le jacobien de l'application exponentielle ; le terme « fonction chandelle » est inspiré par l'interprétation physique de cette quantité : un observateur en  $q$  voit une chandelle d'intensité unitaire placée en  $p$  avec une luminosité apparente  $1/s(\gamma, r)$ .

La fonction chandelle  $s_\kappa = s_\kappa^n$  de l'espace  $S_\kappa^n$  est indépendante du vecteur vitesse



et vaut

$$s_\kappa(r) = \begin{cases} \left( \frac{\sin(\sqrt{\kappa}r)}{\sqrt{\kappa}} \right)^{n-1} & \kappa > 0 \\ r^{n-1} & \kappa = 0 \\ \left( \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}r)}{\sqrt{-\kappa}} \right)^{n-1} & \kappa < 0 \end{cases}.$$

On peut alors définir deux propriétés de comparaison entre  $s$  et  $s_\kappa$  : la condition « de chandelle »

$$\text{CHA}(\kappa) : \quad s(\gamma, r) \geq s_\kappa(r) \quad \forall \gamma, r$$

et la comparaison des dérivées logarithmiques<sup>1</sup>

$$\text{DLC}(\kappa) : \quad \frac{s'(\gamma, r)}{s(\gamma, r)} \geq \frac{s'_\kappa(r)}{s_\kappa(r)} \quad \forall \gamma, r.$$

On notera  $\text{CHA}(\kappa, \ell)$  et  $\text{DLC}(\kappa, \ell)$  pour dire que ces inégalités sont vérifiées pour  $r \leq \ell$ . Comme le comportement de  $s$  au premier ordre en  $r = 0$  est toujours euclidien, par intégration  $\text{DLC}(\kappa)$  entraîne  $\text{CHA}(\kappa)$ .

L'inégalité de Günther dans sa version forte veut que<sup>2</sup>

$$K \leq \kappa \implies \text{DLC}\left(\kappa, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right)$$

où par convention  $1/\sqrt{\kappa} = +\infty$  si  $\kappa \leq 0$ .

### 1.3 L'inégalité de Günther généralisée

On peut maintenant énoncer le principal résultat de cette section.

**Théorème 1.1.** *Soit  $M$  une variété riemannienne de dimension  $n$  vérifiant  $K \leq \rho$  où  $\rho \geq 0$ , et  $\kappa < \rho$  un nombre. Si  $\sqrt{\text{Ric}}(\rho, u) \geq (n-1)\sqrt{\rho-\kappa}$  pour tout  $u \in UM$ , alors  $M$  vérifie  $\text{LCD}\left(\kappa, \frac{\pi}{2\sqrt{\rho}}\right)$ .*

La condition de courbure s'exprime aussi sous la forme

$$\rho - \left( \frac{1}{n-1} \sqrt{\text{Ric}}(\rho, u) \right)^2 \leq \kappa$$

ce qui plaide en faveur de l'expression (1), mais dans d'autres situations c'est  $\sqrt{\text{Ric}}$  qui fournit une formulation plus satisfaisante.

- 
1. Les dérivées sont par rapport à  $r$ .
  2. En particulier, on voit qu'en courbure négative  $\text{CAT}(\kappa) \implies \text{CHA}(\kappa)$ .

Quand  $\rho = 0$ , la conclusion du théorème 1.1 est identique à la conclusion de l'inégalité de Günther pour les variétés vérifiant  $K \leq \kappa$  (il n'y a pas de limite de portée), mais l'hypothèse est strictement plus faible. Quand  $\rho > 0$ , l'hypothèse de courbure est plus faible que dans l'inégalité de Günther mais la restriction sur  $r$  est plus forte.

La démonstration de ce résultat repose sur le même outil que le théorème de Günther : on traduit la dérivée logarithmique de la fonction chandelle en terme d'énergie de champs de Jacobi, et on l'optimise sous contrainte. Pour mener cette optimisation, on relâche l'hypothèse que les champs soient de Jacobi pour les intégrer en tant que variable dans le problème, et on est ramené au principe fondamental du calcul des variations et à des méthodes élémentaires sur les équations différentielles ordinaires.

#### 1.4 Propriétés de la courbure de Ricci radicielle

Expliquons comment la courbure de Ricci radicielle se compare aux courbures classiques et comment elle est influencée par le paramètre  $\rho$ .

Tout d'abord elle est comprise entre la courbure sectionnelle et de Ricci, dans le sens où

$$K \leq \kappa \implies \sqrt{\text{Ric}(\rho)} \geq (n-1)\sqrt{\rho - \kappa} \implies \text{Ric} \leq \kappa(n-1)g$$

Plus  $\rho$  est grand, plus il est facile d'en obtenir une minoration : si  $\rho' > \rho$ , alors

$$\sqrt{\text{Ric}(\rho)} \geq (n-1)\sqrt{\rho - \kappa} \implies \sqrt{\text{Ric}(\rho')} \geq (n-1)\sqrt{\rho' - \kappa},$$

et l'expression (1) converge vers la courbure de Ricci pour les grandes valeurs du paramètre :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho - \left( \frac{1}{n-1} \sqrt{\text{Ric}(\rho, u)} \right)^2 = \frac{1}{n-1} \text{Ric}(u, u) \quad \forall u \in UM.$$

En appliquant le théorème 1.1 pour de grandes valeurs de  $\rho$ , on retrouve donc le fait que la courbure de Ricci contrôle les volumes (plus précisément, la fonction chandelle) aux petites distances ( $r \rightarrow 0$ ). En particulier, il est inévitable que le choix d'une grande valeur pour  $\rho$  implique une faible portée pour l'inégalité de Günther généralisée, puisque la courbure de Ricci ne contrôle la fonction chandelle par en-dessous qu'infiniment.

Enfin, signalons qu'on peut déduire une borne inférieure sur la courbure de Ricci radicielle de diverses combinaisons entre une borne sectionnelle et une borne sur

Ricci. Pour tous  $\kappa \leq \alpha \leq \rho$ , il existe un nombre  $\beta = \beta(\kappa, \alpha, \rho)$ , décroissant en  $\alpha$ , tel que

$$K \leq \alpha \text{ et Ric} \leq \beta g \implies \sqrt{\text{Ric}(\rho)} \geq (n-1)\sqrt{\rho-\kappa}. \quad (2)$$

La valeur optimale de  $\beta$  est donnée par

$$\beta = \rho + (n-2)\alpha - \left( (n-1)\sqrt{\rho-\kappa} - (n-2)\sqrt{\rho-\alpha} \right)^2,$$

en particulier

$$\beta(\kappa, \rho, \rho) = (n-1)^2\kappa - n(n-1)\rho$$

$$\beta(\kappa, \kappa, \rho) = (n-1)\kappa.$$

L'implication (2) est en fait obtenue ponctuellement, et s'applique si  $\alpha$  est une fonction définie sur  $UM$  plutôt qu'une constante.

## 1.5 Applications

Chaque fois que l'inégalité de Günther est utilisée, on peut améliorer les constantes ou affaiblir les hypothèses en exploitant le théorème 1.1. Nous donnons quelques exemples ci-dessous, qui n'utilisent d'ailleurs pas la pleine puissance de l'inégalité de Günther. Celle-ci sera utile dans la section suivante pour démontrer des inégalités isopérimétriques optimales sous de faibles conditions de courbure.

### CROISSANCE DES BOULES

La première application, évidente, du théorème 1.1 est le contrôle du volume des boules de  $M$  : si  $\sqrt{\text{Ric}(\rho)} \geq (n-1)\sqrt{\rho-\kappa}$ , alors pour tout  $x \in M$  et tout  $r \leq \pi/(2\sqrt{\rho})$  tel que l'application exponentielle en  $x$  est injective sur la boule de rayon  $r$  centrée en l'origine de  $T_xM$ , la boule  $B(x, r)$  de  $M$  a un volume au moins égal à celui de la boule  $B_\kappa(r)$  de l'espace à courbure constante  $\kappa$  et de même rayon.

Dans le cas où  $M$  est à courbure négative, on peut prendre  $\rho = 0$  pour obtenir une minoration de la croissance des boules de  $\tilde{M}$  sans limitation de rayon. Rappelons une définition pratique : l'entropie volumique d'une variété riemannienne close  $M$  est

$$h_{\text{vol}}(M) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{Vol} B_{\tilde{M}}(p, r)}{r}.$$

Le théorème 1.1 montre donc que si  $K \leq 0$ ,

$$h_{\text{vol}}(M) \geq \inf_u \sqrt{\text{Ric}(0, u)}.$$

Un théorème célèbre de Dinaburg [Din71] et Manning [Man79] affirme que si  $M$  est une variété close, alors l'entropie topologique de son flot géodésique est minoré par  $h_{\text{vol}}(M)$ ; on en déduit que si  $K \leq 0$ , on a

$$h_{\text{top}}(M) \geq \inf_u \sqrt{\text{Ric}(0, u)}.$$

#### MAJORATION DE LA FONCTION CHANDELLE PAR UNE CONSTANTE

Plusieurs applications de l'inégalité de Günther reposent sur l'inégalité plus faible

$$\frac{s'}{s} \geq (n-1)\sqrt{-\kappa}, \quad (3)$$

qui découle du théorème 1.1 sous l'hypothèse  $K \leq 0$  et  $\sqrt{\text{Ric}(0)} \geq (n-1)\sqrt{-\kappa}$ , bien plus faible que l'hypothèse traditionnelle  $K \leq \kappa$ .

Supposons que  $M$  est simplement connexe, à courbure négative et vérifie (3); alors :

- (i) d'après un résultat de Yau [Yau75, BZ88], tout domaine  $D$  de  $M$  satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire

$$\text{Vol}(\partial D) \geq (n-1)\sqrt{-\kappa} \text{Vol}(D);$$

- (ii) d'après McKean [McK70], les fonctions de  $M$  lisses à support compact vérifient une inégalité de Poincaré

$$\int_M f^2 \leq \frac{4}{-\kappa n^2} \int_M |\nabla f|^2$$

ce qui entraîne un trou spectral pour le laplacien positif agissant sur  $L^2(\tilde{M})$  :

$$\lambda_0(\tilde{M}) \geq \frac{-\kappa n^2}{4}.$$

Il a été observé par Setti [Set91] et Borbély [Bor95] qu'on pouvait obtenir le résultat de McKean sous une majoration de la courbure de Ricci (toujours en courbure sectionnelle négative); le théorème 1.1 et l'inégalité (2) permettent de retrouver le résultat optimal de Borbély, mais l'usage de la courbure de Ricci radicielle permet d'obtenir de meilleures constantes dans de nombreux cas (notamment dans les espaces hyperboliques quaternioniques et octonionique).

## 1.6 Perspectives

Un des intérêts de la généralisation de l'inégalité de Günther présentée ici repose sur la flexibilité fournie par le paramètre  $\rho$  : une variété à courbure « presque négative » dans le sens où  $K \leq \rho$  pour un petit  $\rho$  et  $\sqrt{\text{Ric}(\rho)} \geq (n-1)\sqrt{\rho+1}$  se comporte comme une variété CAT(-1) sur des échelles de distance contrôlée par  $\rho$ . Si  $M$  est compacte, il est naturel de demander

$$\rho \ll \left( \frac{\pi}{\text{diam } M} \right)^2$$

de sorte que la limitation sur la portée de l'inégalité de Günther ne devient perceptible que pour des géodésiques traversant de nombreux domaines fondamentaux dans le revêtement universel (en particulier, ces conditions imposent immédiatement une borne inférieure sur le cardinal du groupe fondamental). Dans ce cadre, deux questions me semblent particulièrement intéressantes.

- (i) Pour une variété close, admettre une métrique à courbure presque négative (en précisant le  $\ll$  ci-dessus) impose-t-il des restrictions sur le groupe fondamental ? Cette question admet plusieurs ramifications : une variété à courbure presque négative a-t-elle nécessairement un groupe fondamental à croissance exponentielle ? De façon plus accessible peut-être, est-il possible de montrer que le tore n'admet aucune métrique à courbure presque négative ? Ce résultat contrasterait avec le théorème de Lokhamp assurant l'existence de métriques à courbure de Ricci négative sur toutes les variétés de dimension au moins 3 [Loh94]. Si on veut se montrer plus ambitieux, peut-on montrer que l'existence d'une métrique à courbure presque négative implique la présence d'un groupe libre dans le groupe fondamental ?
- (ii) Le flot géodésique d'une variété compacte à courbure presque négative a-t-il nécessairement de l'entropie topologique ? Ça ne serait pas surprenant puisqu'en temps relativement long, la croissance initialement exponentielle du volume dans le revêtement universel permet d'espérer une adaptation du théorème de Manning.

## 2 Le Petit Prince et la conjecture isopérimétrique de Weil

### 2.1 Le problème du Petit Prince

En guise de mise en bouche, commençons par considérer un problème introductif qui nous servira de fil rouge.

Le Petit Prince souhaite former une planète de sorte à maximiser la gravité ressentie en un point donné de sa surface. Il dispose pour cela d'un volume déterminé de matière incompressible  $V$ , et il peut se placer dans un espace à courbure négative ou nulle de son choix. Quel espace choisir, et quelle forme doit-il donner à sa planète ?

Si le modèle de gravitation est bien choisi, la réponse *en dimension 2* est : un espace plat, et une forme ronde. Plus formellement, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.1** (du Petit Prince). *Soit  $M$  un domaine compact à bord lisse dans une surface  $N$  simplement connexe à courbure négative.<sup>3</sup> Pour chaque  $x \in N$ , on définit un champ vectoriel « de gravitation »  $G_x$  en demandant qu'il soit radial (de sommet  $x$ ) et de divergence  $-\delta_x$  au sens des distributions.*

*On note  $B$  le disque euclidien de même volume que  $M$ .*

*Pour tous points  $p \in \partial M$  et  $q \in \partial B$ , dont on note  $v_p$  et  $v_q$  les vecteurs normaux rentrants, on a*

$$\int_M G_x \cdot v_p \, dx \leq \int_B G_y \cdot v_q \, dy \quad (4)$$

La force de ce résultat est que le problème est posé en favorisant le point  $p$ , mais que la réponse est parfaitement symétrique. Il est important de noter que ce résultat est faux en dimension  $n > 2$ , même en se restreignant à l'espace euclidien.

## 2.2 La conjecture isopérimétrique

Il est bien connu que dans les espaces modèles que sont les variétés simplement connexes à courbure constante, les boules sont les seules solutions du problème isopérimétrique. Formellement, si  $M$  est un domaine de  $S_\kappa^n$ , en notant  $V_M = \text{Vol}(M)$ ,  $A_M = \text{Vol}(\partial M)$  et  $B_\kappa^n(V)$  la boule de  $S_\kappa^n$  de volume  $V$ , on a l'inégalité

$$A_M \geq \text{Vol}(\partial B_\kappa^n(V_M)) \quad (5)$$

Plus  $\kappa$  est petit, plus cette inégalité est forte ; en particulier, les domaines de l'espace hyperbolique réel vérifient une inégalité isopérimétrique linéaire ( $\text{Vol}(\partial M) \geq C \text{Vol}(M)$ ) qui est très contraignante pour les grands domaines par rapport au cas euclidien, où l'homogénéité donne une inégalité concave. De plus, comme on l'a vu à la section précédente il est bien connu que cette inégalité linéaire persiste dans les espaces à courbure variable, majorée par  $\kappa < 0$  (et même plus généralement). Il est donc naturel de penser que l'inégalité (5) est valable pour les domaines de toute

3. La surface n'a pas besoin d'être complète, mais seulement d'être convexe au sens où toute paire de point est reliée par une géodésique, mais nous n'entrerons pas trop dans ces considérations ici.

variété simplement connexe à courbure majorée par  $\kappa \leq 0$  (voir [Aub76], [BZ88], [Gro81]). Cet énoncé est la « conjecture isopérimétrique » parfois dite de Cartan-Hadamard, mais qui serait mieux nommée d'après André Weil. Il a en effet démontré le premier résultat dans cette direction en 1926, en traitant le cas  $n = 2, \kappa = 0$  [Wei26]. il est assez compliqué d'attribuer le cas  $n = 2, \kappa < 0$ , voir [Oss78] qui malheureusement omet de mentionner le résultat de Weil. Le cas  $n = 3$  a été obtenu par Bruce Kleiner [Kle92], après le cas  $n = 4, \kappa = 0$  par Chris Croke [Cro84].

Rien n'est connu en dimension 5 et plus, et les dimensions 3 et 4 sont traitées avec des méthodes différentes ; la dimension 2 peut être traitée de nombreuses façons, y compris avec la méthode de Croke bien que ça n'ait il me semble jamais été écrit. Avec Greg Kuperberg nous avons obtenu une démonstration pour les dimensions 2 et 4, qui permet de traiter partiellement le cas  $\kappa < 0$  et essentiellement complètement, dans un cadre adapté, le cas  $\kappa > 0$ .

Expliquons déjà comment le théorème du Petit Prince permet de retrouver le théorème de Weil. On considère un domaine  $M$  comme dans l'énoncé 2.1, et on intègre simplement l'inégalité (4) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \int_M G_x \cdot v_p \, dx \, dp &\leq \text{Vol}(\partial M) \int_B G_y \cdot v_q \, dy \\ \int_M \int_{\partial M} G_x \cdot v_p \, dp \, dx &\leq \frac{\text{Vol}(\partial M)}{\text{Vol}(\partial B)} \int_B \int_{\partial B} G_y \cdot v_q \, dq \, dy \\ \int_{M^2} -\text{div} G_x(\xi) \, dx \, d\xi &\leq \frac{\text{Vol}(\partial M)}{\text{Vol}(\partial B)} \int_{B^2} -\text{div} G_y(\eta) \, dy \, d\eta \\ \int_M dx &\leq \frac{\text{Vol}(\partial M)}{\text{Vol}(\partial B)} \int_B dy \\ \text{Vol}(\partial B) &\leq \text{Vol}(\partial M) \quad \text{car } \text{Vol}(M) = \text{Vol}(B) \end{aligned}$$

Ainsi, le théorème du Petit Prince peut être considéré comme une version ponctuelle du théorème de Weil. Son deuxième intérêt apparaîtra plus bas : sa démonstration illustre bien les méthodes mises en oeuvre pour obtenir nos résultats.

L'inégalité (5) n'a bien sûr aucune chance d'être valide en toute généralité sous une seule hypothèse de courbure : si  $M$  est une variété hyperbolique compacte sans bord, elle est évidemment mise en défaut. Le rôle de l'hypothèse de simple connexité est donc d'écarter ces cas (en invoquant le théorème de Cartan-Hadamard qui garantit alors que  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ ) ; mais quand  $\kappa > 0$ , ou si on souhaite remplacer l'hypothèse de courbure par une condition de chandelle, la simple connexité n'est plus l'outil adapté.

Un cadre général, issu de l'article de Croke, consiste à demander que  $M$  soit une variété compacte à bord (pas nécessairement un domaine) où toute paire de points

est reliée par au plus une géodésique. En évitant lieu de coupure et lieu conjugué, on écarte ainsi les contre-exemples évidents, et quand  $\kappa \leq 0$  cette hypothèse est légèrement plus générale que demander que  $M$  soit un domaine d'une variété simplement connexe.

### 2.3 Inégalités isopérimétriques en dimension 2 et 4

On suppose que  $M$  est une variété de dimension  $n$  à bord lisse (le cas des variétés à coins s'obtenant ensuite par lissage), on note  $V_M$  son volume et  $A_M$  le volume de son bord. Soit  $L_M$  la plus grande longueur d'une géodésique dont les extrémités sont dans  $M$ ; si on ne donne pas d'hypothèse supplémentaire sur  $M$ , c'est la plus grande longueur d'une géodésique incluse dans  $M$ , mais quand  $M$  est supposée être un domaine d'une variété ambiante  $N$  (toujours convexe), c'est le diamètre de  $M$  en tant que partie de  $N$ .

On note également  $\omega_n$  le volume de la sphère unité  $S_1^n$ .

**Théorème 2.2** (borne positive ou nulle). *On suppose  $n = 2$  ou  $4$ , et  $\kappa \geq 0$ . Si  $M$  vérifie  $\text{CHA}(\kappa, L_M)$ , si toute paire de points  $y$  est reliée par au plus une géodésique, et si  $V_M \leq \kappa^{-n/2} \omega_n / 2$ , alors on a (5) :*

$$A_M \geq \text{Vol}(\partial B_\kappa^n(V_M)).$$

Quand  $\kappa = 0$  la condition de volume est vide, on retrouve donc les résultats de Weil et Croke. Quand  $\kappa > 0$  l'hypothèse sur le volume est naturelle puisque les boules de  $S_\kappa^n$  de volume plus grand ne vérifient plus l'unicité géodésique; d'ailleurs c'est exactement cette absence de modèle de comparaison qui limite notre démonstration. En volume plus grand, je ne sais pas quelle hypothèse pourrait remplacer l'unique géodésicité.

Il convient de signaler que le cas  $n = 2, \kappa > 0$  apparaît sous une forme légèrement différente dans [MJ00], alors que  $n = 4, \kappa > 0$  est nouveau. Enfin, en utilisant la condition de chandelle on obtient pour  $n = 4$  un résultat bien plus général qu'en demandant  $K \leq \kappa$ , notamment puisqu'en vertu de la section précédente  $\text{CHA}(\kappa, L_M)$  est entraînée par  $\sqrt{\text{Ric}(\rho)} \geq (n-1)\sqrt{\rho - \kappa}$  pour tout  $\rho$  tel que  $2L_M\sqrt{\rho} \leq \pi$ .

Pour  $\kappa < 0$  notre méthode échoue à moitié, et nous avons besoin de considérer  $M$  dans une variété ambiante, d'utiliser une condition de chandelle plus restrictive, et de nous restreindre à des domaines relativement petit en diamètre ou en volume; la condition de petitesse s'exprime en fonction de  $L_M = \text{diam} M$  et du rayon  $r_M(\kappa)$  de la boule de comparaison  $B_\kappa^n(V_M)$ .



**Théorème 2.3** (borne négative). *On suppose  $n = 2$  ou  $4$  et  $\kappa < 0$ . Soit  $M$  un domaine compact dans une variété simplement connexe  $N$  qui vérifie  $\text{DLC}(\kappa, L_M)$ , tel que toute paire de points de  $M$  est relié par exactement une géodésique de  $N$  (par exemple,  $N$  est une variété simplement connexe à courbure suffisamment négative et  $M$  un domaine quelconque).*

*Si  $n = 4$ , on suppose de plus que  $M$  est assez petit au sens où*

$$\tanh(L_M \sqrt{-\kappa}) \tanh(r_M(\kappa) \sqrt{-\kappa}) \leq 1/2 \quad (6)$$

*Dans ces conditions,  $M$  vérifie l'inégalité isopérimétrique hyperbolique (5) :*

$$A_M \geq \text{Vol}(\partial B_\kappa^n(V_M)).$$

Des trois restrictions que nous devons ajouter par rapport au cas  $\kappa \geq 0$ , la condition de petitesse est de loin la plus gênante, mais la retirer semble demander une approche différente. De plus, même avec cette restriction le résultat est plus général que le théorème de Croke puisque quand  $\kappa$  tends vers 0 la taille des domaines admissibles tend vers  $+\infty$ .

Ce genre d'inégalité a été démontrée en toute dimension pour les très petits domaines par Johnson et Morgan [MJ00], puis par Druet [Dru02] sous une borne stricte de la courbure scalaire, mais comme les arguments de ces auteurs utilisent des méthodes de compacité ils n'obtiennent pas de condition de taille uniforme, encore moins explicite.

Le cas d'égalité dans les résultats précédents n'est pas complètement clair, mais on l'obtient facilement si les conditions de chandelle sont remplacées par des bornes de courbures.

**Théorème 2.4.** *Soit  $M$  comme dans les théorèmes 2.2 ou 2.3, mais avec la condition de chandelle remplacée par  $\sqrt{\text{Ric}}(\rho) \geq (n-1)\sqrt{\rho-\kappa}$  pour n'importe quel  $\rho \geq \kappa$  tel que  $2\sqrt{\rho}L_M \leq \pi$  ; ou, si un tel  $\rho$  n'existe pas, supposons à la place  $K \leq \kappa$ .*

*S'il y a égalité dans (5), alors  $M$  est isométrique à  $B_\kappa^n(V_M)$ .*

Enfin, dans [3] nous obtenons un résultat dans la veine du problème de Didon, tel qu'étudié par Choé et Ritoré [Cho06, CR07], que je ne détaille pas ici.

Citons une conséquence en terme de spectre de ces inégalités isopérimétriques : en notant  $\lambda(M)$  le bas du spectre du laplacien avec condition de Dirichlet, la méthode de Faber-Krahn (voir par exemple [Cha84]) permet de voir que les théorèmes 2.2 et 2.3 impliquent

$$\lambda(M) \geq \lambda(B_\kappa^n(V_M))$$

et, sous les hypothèses du théorème 2.4, la seule variété réalisant l'égalité est la boule  $B_\kappa^n(V_M)$ .

## 2.4 Idée de démonstration

Pour les démonstrations détaillées, le lecteur est renvoyé à l'article [3], mais je souhaite donner une idée des méthodes employées en démontrant le cas simple du théorème du Petit Prince. Les autres théorèmes sont obtenus avec les mêmes idées, mais plus de technicité entre en jeu.

On considère donc  $M$  un domaine compact à bord lisse dans une surface simplement connexe à courbure négative ou nulle. On se ramène sans difficulté au cas où  $M$  est étoilé en  $p$  (quitte à modifier  $M$  d'une façon qui ne fait qu'augmenter la gravité ressentie par le Petit Prince). Le champ gravitationnel  $G_x$  est facilement écrit dans des coordonnées polaires centrées en  $x$  en utilisant la fonction de chandelle,

$$G_x = -(2\pi s_x)^{-1} \exp_{x^*} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

On définit sur l'ensemble  $\mathcal{G}_p \simeq U_p^+ M$  des géodésiques maximales issues de  $p$ , identifié à la fibre unitaire tangente rentrante en  $p$ , les fonctions  $\alpha$  et  $\ell$  donnant l'angle incident avec la normale et la longueur de la géodésique. On considère la mesure habituelle  $\mu$  sur le demi-cercle  $U_p^+ M$ , et on identifie naturellement  $\mu$  et sa mesure image par  $(\alpha, \ell)$ . L'expression de  $G_x$  permet d'écrire

$$\int_M G_x \cdot \nu_p \, dx = \int \ell \cos \alpha \, d\mu(\alpha, \ell)$$

et la condition de courbure, par le théorème de Günther, implique

$$V_M \geq \int \frac{1}{2} \ell^2 \, d\mu(\alpha, \ell).$$

De plus, par définition de  $\mu$  on a

$$\int f(\alpha) \, d\mu(\alpha, \ell) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \, d\alpha$$

pour toute fonction  $f$ .

À ce stade, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $\int \ell \cos \alpha \, d\mu$  et d'utiliser les informations restantes pour conclure, mais cette méthode directe semble trop délicate à mettre en oeuvre pour obtenir les théorèmes 2.2 et 2.3. Pour les prouver, plutôt que de chercher à combiner des inégalités fonctionnelles, on se laisse porter par le principe de dualité en optimisation linéaire. Illustrons la méthode dans le cas simple du théorème du Petit Prince.

On peut formuler notre problème dans le cadre de l'optimisation linéaire : étant donné le nombre  $V_M$ , trouver une mesure positive  $\mu_0$  maximisant

$$\int \ell \cos \alpha \, d\mu$$

parmi les mesures positives  $\mu$  telles que

$$\int \frac{1}{2} \ell^2 \, d\mu \leq V_M \quad (7)$$

$$\int f(\alpha) \, d\mu = 2 \int f(\alpha) \, d\alpha \quad \forall f. \quad (8)$$

Selon le principe classique de dualité, il suffit de trouver  $\mu_0, b_0, f_0$  positifs tels que

- $\mu_0$  vérifie les contraintes (7) et (8) et il y a égalité dans (7),
- pour tous  $(\alpha, \ell)$ , on a

$$\frac{b_0}{2} \ell^2 + f_0(\alpha) \geq \ell \cos \alpha \quad (9)$$

avec égalité sur  $\text{supp } \mu_0$

pour affirmer que  $\mu_0$  réalise le maximum de notre problème. En effet, pour toute mesure  $\mu$  vérifiant les contraintes on a alors

$$\begin{aligned} \int \ell \cos \alpha \, d\mu &\leq \int \left( \frac{b_0}{2} \ell^2 + f_0(\alpha) \right) d\mu \\ &\leq b_0 V_M + 2 \int f_0(\alpha) \, d\alpha \\ &= \int \left( \frac{b_0}{2} \ell^2 + f_0(\alpha) \right) d\mu_0 \\ &= \int \ell \cos \alpha \, d\mu_0 \end{aligned}$$

En général, trouver ces  $\mu_0, f_0, b_0$  peut être difficile, mais ici nous avons un candidat évident pour  $\mu_0$  : la mesure  $\mu$  obtenue dans le cas de la boule  $B = B_0^2(V_M)$ . Elle vérifie évidemment les contraintes voulues, réalise l'égalité dans (7) (l'inégalité de Günther étant dans le cas plat une égalité), et est concentrée sur l'ensemble

$$\left\{ (\alpha, \ell) \mid \cos \alpha = \frac{\ell}{2r} \right\}$$

où  $r$  est le rayon de  $B$ . De plus, le même argument que ci-dessus montre que  $b_0, f_0$  vont, sous la contrainte (9), minimiser la fonctionnelle linéaire  $bV_M + 2 \int f(\alpha) d\alpha$ . À  $b_0$  fixé on a donc intérêt à prendre  $f_0$  aussi petite que possible, on choisit donc

$$f_0(\alpha) = \sup_{\ell} \left( \ell \cos \alpha - \frac{b_0}{2} \ell^2 \right) = \frac{\cos^2 \alpha}{2b_0}$$

et on constate que l'égalité dans (9) est réalisée quand  $\cos \alpha = b_0 \ell$ . En prenant  $b_0 = 1/2r$ , la dualité assure l'optimalité de la boule blate.

Cette démonstration ne fonctionne qu'en dimension 2 et pour  $\kappa = 0$  car elle nécessite la proportionnalité de la fonction  $T$  définissant  $\partial B$  par  $\{\cos \alpha = T(\ell)\}$  et du rapport entre les grandeurs  $\ell^n/n$  et  $\ell$  (devant le  $\cos \alpha$ ) intervenant dans le problème d'optimisation.

Pour obtenir les théorèmes 2.2 et 2.3, on a besoin de faire intervenir la condition de chandelle à plusieurs reprises pour obtenir trois inégalités que l'optimisation linéaire permet ensuite de combiner de façon optimale.

## 2.5 Perspective

Telle quelle, la méthode ne semble pas permettre d'obtenir des résultats plus généraux. Toutefois, on pourrait espérer l'adapter pour d'autres problèmes proches, notamment pour prouver que dans le plan hyperbolique complexe  $\mathbb{C}H^2$ , les boules sont solutions du problème isopérimétrique ; ceci est encore une question ouverte ! Une difficulté est que l'isotropie est moins grande que dans le cas réel : par exemple à l'angle  $\alpha$  entre un vecteur  $u$  et la normale  $v$ , il faudrait adjoindre l'angle entre les droites complexes engendrées par  $u$  et  $v$  ; or plus on a de tels paramètres, plus il faut d'inégalités pour espérer faire fonctionner l'optimisation linéaire. Cette perspective est donc assez spéculative, mais à mon avis intéressante.



# Géométrie et dynamique des espaces de Wasserstein

---

---

Ce chapitre présente les articles [1, 5, 6, 2]. Il contient plus de rappels que le précédent, le lecteur n'étant pas supposé familier du transport optimal. Les questions abordées sont assez différentes des habitudes du sujet, de nature plus géométriques et dynamiques qu'analytiques. Il existe beaucoup de textes présentant le transport optimal, je me repose principalement sur la somme de Villani [Vil09] pour les résultats classiques utilisés. Je ne donne pas de références historiques et générales, renvoyant au même ouvrage qui contient des indications bibliographiques très détaillées. Enfin, j'ai préféré utiliser les habitudes de notation du sujet, notamment en utilisant le croisillon # plutôt que l'étoile \* pour noter le poussé en avant d'une mesure par une application, et j'appellerai topologie faible celle qu'on devrait appeler faible-étoile.

## 1 Transport optimal et espaces de Wasserstein

Cette section d'introduction ne contient bien sûr rien d'original, et de nombreuses expositions semblables ont été écrites ; elle n'est présente que pour faciliter la lecture de la suite du chapitre et fixer quelques notations.

### 1.1 De Monge à Kantorovich

Le problème de Monge consiste à déterminer la façon optimale de déplacer la terre issue de déblais de forme fixée pour former des remblais de forme fixée. Monge modélise ce problème en demandant, étant donné deux mesures de probabilité absolument continues  $d\mu(x) = f(x)dx$  (les déblais) et  $d\nu(x) = g(x)dx$  (les remblais) sur  $\mathbb{R}^n$ , à trouver une application  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  envoyant la première sur la deuxième ( $T_{\#}\mu = \nu$ ) en minimisant le déplacement total

$$c(T) := \int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x| f(x) dx.$$

Posé ainsi, c'est un problème très délicat car fortement non-linéaire. En particulier, la contrainte s'écrit quand  $T$  est différentiable

$$f(x) = (\det D_x T)g(T(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans les années 50, Kantorovich propose d'assouplir le problème en remplaçant l'application  $T$  par un couplage ou « plan de transport », c'est-à-dire une mesure de probabilité  $\Pi$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  qui se projette sur les mesures  $\mu$  et  $\nu$ . Ceci autorise en particulier la masse située en un point à être divisée et répartie sur plusieurs points images ; mais surtout la contrainte et l'objectif d'optimisation sont rendus linéaires, ce qui permet d'utiliser tout l'arsenal de la dualité déjà évoqué dans le premier chapitre.

La théorie du transport optimal s'est depuis largement développée dans ce cadre, amenant notamment à des solutions de versions très générales du problème de Monge.

## 1.2 Transport optimal

Un problème de transport optimal repose<sup>1</sup> sur la donnée d'un espace métrique polonais  $X$  (i.e. complet séparable, ce qui assure quand  $X$  est non dénombrable que sa tribu de Borel est isomorphe à celle de l'intervalle), d'une fonction  $c : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$  dite de coût qu'on supposera continue, et de deux mesures de probabilité  $\mu$  et  $\nu$ .

On appelle plan de transport (de  $\mu$  à  $\nu$ ) toute mesure de probabilité  $\Pi$  sur  $X \times X$  qui se projette sur  $\mu$  et  $\nu$  :

$$\Pi(A \times X) = \mu(A) \quad \text{et} \quad \Pi(X \times B) = \nu(B) \quad \forall A, B \text{ boréliens}$$

et on note  $\Gamma(\mu, \nu)$  l'ensemble des plans de transport. En vocabulaire probabiliste,  $\mu$  et  $\nu$  sont des lois et  $\Pi$  en est un couplage. L'ensemble  $\Gamma(\mu, \nu)$  n'est jamais vide puisqu'il contient toujours la mesure produit (ou couplage indépendant)  $\mu \otimes \nu$ .

Le coût d'un plan de transport est

$$c(\Pi) := \int_{X \times X} c(x, y) d\Pi(x, y)$$

et le problème du transport optimal est de minimiser  $c(\Pi)$  dans  $\Gamma(\mu, \nu)$ . On supposera que  $\mu$  et  $\nu$  ont été choisies de façon à ce qu'il existe  $\Pi \in \Gamma(\mu, \nu)$  de coût fini.

1. On ne donne pas le cadre le plus général, d'autant plus que de nombreuses variantes ont vu le jour.

Dans ce contexte, il existe toujours un plan optimal, mais celui-ci n'est pas nécessairement unique. On dispose d'une dualité, qui permet notamment de caractériser les plans de transport optimaux. Pour formuler cette caractérisation, introduisons encore une définition.

Une partie  $S$  de  $X \times X$  est dite *c-cycliquement monotone* si pour tous

$$(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in S$$

on a

$$c(x_1, y_1) + \dots + c(x_k, y_k) \leq c(x_1, y_2) + \dots + c(x_{k-1}, y_k) + c(x_k, y_1),$$

c'est-à-dire qu'on ne peut pas baisser la somme des coûts de couples de  $S$  en effectuant une permutation des deuxièmes termes. On dit qu'un plan de transport est *c-cycliquement monotone* si son support l'est (cette définition n'est adaptée que dans le cas où  $c$  est continue, ce qu'on a supposé ici).

Il est facile de voir qu'un plan de transport optimal est nécessairement *c-cycliquement monotone* ; cette condition est en fait également suffisante (voir par exemple [Vil09], théorème 5.10).

### 1.3 Espaces de Wasserstein

Parmi les coûts naturels, les puissances de la métriques  $d^p$  ( $p \geq 1$ ) ont été spécialement étudiées notamment parce qu'elles permettent de définir des distances entre mesures.

En effet, il est assez facile de voir que la quantité

$$W_p(\mu, \nu) := \left( \inf_{\Pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\Pi(x, y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

vérifie l'inégalité triangulaire. Ceci repose sur le lemme de collage, qui permet en utilisant la désintégration des mesures de construire un plan de transport « composé » de  $\mu$  à  $\rho$  à partir de plans de transport entre  $\mu$  et  $\nu$  et entre  $\nu$  et  $\rho$ .

Toutefois,  $W_p(\mu, \nu)$  n'est en général pas finie, on introduit donc l'espace des mesures de  $p$ -ième moment fini

$$\mathcal{W}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) \mid \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty \right\}$$

où  $\mathcal{P}(X)$  est l'ensemble des mesures de probabilité sur  $X$ .

Muni de  $W_p$ ,  $\mathcal{W}_p(X)$  est alors un espace métrique polonais appelé *espace de Wasserstein* de  $X$  (d'exposant  $p$ ). Le cas quadratique ( $p = 2$ ) est de loin le plus étudié, et nous ne dérogerons pas à cette habitude.



Quand  $X$  est compact,  $\mathcal{W}_p(X)$  est égal comme ensemble à  $\mathcal{P}(X)$ , est compact et  $W_p$  métrise la topologie faible. Quand  $X$  n'est pas compact,  $\mathcal{W}_p(X)$  n'est pas même localement compact (il y a un phénomène de fuite de masse à l'infini).

Une propriété importante qui se transmet de  $X$  à son espace de Wasserstein est la géodésicité ; il est important de noter que dans toute cette partie, comme il est souvent d'usage en transport optimal, on appellera géodésique d'un espace métrique  $(X, d)$  une courbe  $(\gamma_t)_{t \in I}$  telle que pour un certain  $s \geq 0$  et tous  $t, t' \in I$  on ait

$$d(\gamma_t, \gamma_{t'}) = s|t - t'|,$$

de sorte que les géodésiques sont supposées *globalement* minimisantes et paramétrées à vitesse constante, éventuellement nulle.

Si  $X$  est géodésique (toute paire de points est reliée par un segment géodésique) alors  $\mathcal{W}_p(X)$  également, et on sait de plus décrire les géodésiques par l'*interpolation de déplacement*, initialement introduite par McCann. En termes probabilistes : étant donnés  $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{W}_p(X)$ , toute géodésique  $(\mu_t)$  les reliant est obtenue comme suit :

- on choisit un plan de transport optimal  $\Pi$  de  $\mu_0$  à  $\mu_1$  et on note  $(Y_0, Y_1)$  un couple de variable aléatoires de loi  $\Pi$  ;
- on choisit mesurablement<sup>2</sup> pour chaque paire  $(y_0, y_1)$  une géodésique  $\gamma(y_0, y_1)$  de  $X$  les reliant ;
- on note  $Y_t = \gamma(Y_0, Y_1)_t$  ; c'est une variable aléatoire à valeurs dans  $X$ , dont on note  $\mu_t$  la loi ;
- la famille  $(\mu_t)$  forme la géodésique cherchée.

Donnons une autre façon de formuler l'interpolation de déplacement. On désignera par  $\mathcal{G}^I$  l'ensemble des géodésiques de  $X$  paramétrées par  $I$ , par  $\mathcal{G} := \mathcal{G}^{\mathbb{R}}$  l'ensemble des *géodésiques complètes*, et  $\mathcal{R} := \mathcal{G}^{[0, +\infty[}$  celui des *rayons géodésiques*. Pour  $t \in I$  on note  $e_t : \mathcal{G}^I \rightarrow X$  l'application d'évaluation en  $t$  définie par  $e_t(\gamma) = \gamma_t$ .

Pour toute géodésique  $(\mu_t)_{t \in [0, 1]}$  de  $\mathcal{W}_p(X)$ , il existe d'après ce qui précède une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathcal{G}^{[0, 1]}$  telle que pour tout  $t$ ,  $\mu_t = (e_t)_\# \mu$ . L'interpolation peut donc se décrire par le slogan « une géodésique de mesures est une mesure sur les géodésiques ». Notons qu'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathcal{G}^{[0, 1]}$  définit (toujours via la spécialisation  $((e_t)_\# \mu)_t$ ) une géodésique de l'espace de Wasserstein si et seulement si  $(e_0, e_1)_\# \mu$  est un plan de transport *optimal* de  $\mu_0$  à  $\mu_1$ .

2. Ce qui est possible dans un espace géodésique, en vertu d'un théorème de sélection mesurable.

## 2 Géométrie dans le cas euclidien

Cette section décrit les résultats de l'article [6], dans lequel est étudié la géométrie des espaces  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$ .

Commençons par des résultats très simples, qui s'obtiennent à partir de l'interpolation de déplacement.

**Proposition 2.1.** *Il n'y a pas de plongement isométrique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$ .*

*Toutefois, on peut plonger isométriquement des cônes ouverts euclidiens (c'est-à-dire précisément des parties de  $\mathbb{R}^k$  ouvertes et invariantes par les homothéties de rapport positif centrées en 0) de toute dimension dans  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$ . Ceci entraîne la plongeabilité isométrique de boules euclidiennes de rayon et dimension arbitraire, et la plongeabilité bilipschitz d'espaces euclidiens de dimension arbitraire.*

*Les résultats d'existence ci-dessus s'étendent immédiatement à tout espace  $\mathcal{W}_2(X)$  où  $X$  contient une géodésique complète.*

*En particulier, un tel espace n'est jamais hyperbolique au sens de Gromov, même si  $X$  est très négativement courbé, par exemple un arbre.*

On sait si  $X$  est à courbure positive ou nulle au sens d'Alexandrov, alors  $\mathcal{W}_2(X)$  également. On sait également que les propriétés de courbure négative ont au contraire tendance à ne pas passer de  $X$  à  $\mathcal{W}_2(X)$ ; le dernier résultat montre à quel point l'hyperbolicité est loin d'être transmise à l'espace de Wasserstein. On verra que  $\mathcal{W}_2(X)$  hérite malgré tout de certaines propriétés typiques de la courbure négative; une question naturelle est notamment de se demander à quels espaces de Wasserstein le non-plongement isométrique d'espaces euclidiens peut s'étendre. Elle sera abordée à la section suivante.

Je me suis surtout intéressé au groupe des isométries de  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$ . De même que le plongement isométrique

$$\begin{aligned} \delta : X &\rightarrow \mathcal{W}_2(X) \\ x &\mapsto \delta_x \end{aligned}$$

où  $\delta_x$  est la mesure de Dirac en  $x$  forme un pont entre  $X$  et son espace de Wasserstein, le morphisme

$$\begin{aligned} \# : \text{Isom } X &\rightarrow \text{Isom}(\mathcal{W}_2 X) \\ \varphi &\mapsto \varphi\# \end{aligned}$$

relie les groupes d'isométries de ces deux espaces. On s'attend à ce qu'un espace de Wasserstein n'ait en général pas plus d'isométries que l'espace sous-jacent, c'est-à-dire que  $\#$  soit surjective. On verra de tels cas à la section suivante, et ils sont

probablement dominants ; toutefois, la situation est plus riche dans le cas euclidien. On dira qu'une isométrie  $\Phi$  de  $\mathcal{W}_2(X)$  :

- est *triviale* si elle est dans l'image de  $\#$  ;
- *préserve la forme des mesures* si pour tout  $\mu \in \mathcal{W}_2(X)$ , il existe  $\varphi(\mu) \in \text{Isom}(X)$  telle que  $\Phi(\mu) = \varphi(\mu)\#\mu$  ;
- est *exotique* si elle ne préserve pas la forme des mesures.

*Exemple 2.2.* On peut construire des isométries non triviale de  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$  en choisissant  $\varphi \in O(n)$ , et en notant  $\varphi(\mu)$  l'isométrie affine de partie linéaire  $\varphi$  fixant le barycentre de  $\mu$  (rappelons que par définition  $\mu \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$  est  $L^2$ , donc en particulier a un barycentre bien défini – son espérance).

L'application  $\mu \mapsto \varphi(\mu)\#\mu$  est alors une isométrie dans la métrique de Wasserstein (ceci repose sur le théorème de Pythagore, le fait d'avoir choisi l'espace de Wasserstein *quadratique* est donc crucial).

**Théorème 2.3.** *Si  $n \geq 2$ , le groupe des isométries de  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$  est un produit semi-direct*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \ltimes O(n) \tag{1}$$

où  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  agit sur  $O(n)$  par conjugaison par la partie linéaire.

*Le facteur de gauche est l'image de  $\#$ , le facteur de droite consiste en les exemples ci-dessus ; en particulier ses éléments fixent les mesures de Dirac et il n'y a aucune isométrie exotique.*

La démonstration de ce théorème repose sur le résultat qui suit, ainsi que sur la transformation de Radon dont on utilise l'inversibilité.

**Théorème 2.4.** *Le groupe des isométries de  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$  est un produit semi-direct*

$$\text{Isom } \mathbb{R} \ltimes \text{Isom } \mathbb{R}. \tag{2}$$

*Chacun des facteurs se décompose en  $\text{Isom } \mathbb{R} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{R}$  et l'action définissant le produit semi-direct (2) est l'action usuelle du facteur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de gauche sur le facteur  $\mathbb{R}$  de droite, c'est-à-dire*

$$(\varepsilon, v) \cdot (\eta, t) = (\eta, \varepsilon t)$$

où  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est identifié à  $\{\pm 1\}$ .

*Dans (2), le facteur de gauche est l'image de  $\#$  et le facteur de droite est l'ensemble des isométries qui fixent toutes les mesures de Dirac. Dans la décomposition de ce dernier, le facteur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est engendré par l'unique exemple de la forme 2.2 tandis que le facteur  $\mathbb{R}$  est un flot d'isométries exotiques qu'on note  $(\Phi^t)$ .*

La droite est le seul espace que je connaisse dont l'espace de Wasserstein possède des isométries exotiques. La construction de ce flot exotique est faite en considérant les isométries de l'ensemble  $\Delta_2 \subset \mathcal{W}_2(\mathbb{R})$  des mesures dont le support contient au plus deux points. Bien paramétré, cet ensemble fait apparaître les différents types d'isométries décrits dans le théorème 2.4. Il est facile de vérifier que  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$  est à courbure nulle au sens d'Aleksandrov, ce qui permet d'étendre les isométries de  $\Delta_2$  à son enveloppe convexe ; mais celle-ci est dense, et on récupère bien des isométries de  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$ .

Ce procédé est constructif, mais peu explicite (l'expression exacte de l'action du flot exotique sur les combinaisons de trois mesures de Dirac est déjà trop désagréable pour être facilement exploitée). On peut toutefois comprendre grossièrement le comportement de ce flot :

**Proposition 2.5.** *Soit  $\mu$  un point de  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$  et  $x$  son barycentre. Si  $t \rightarrow \pm\infty$  alors  $\Phi^t(\mu)$  converge faiblement vers  $\delta_x$ .*

Plus précisément,  $(\Phi^t)$  tend à rassembler une partie de plus en plus importante de la masse vers le centre de gravité, légèrement à droite, tout en rejetant une petite portion de la masse loin à gauche (pour  $t \gg 1$ ) de sorte à garder le barycentre et la variance constantes.

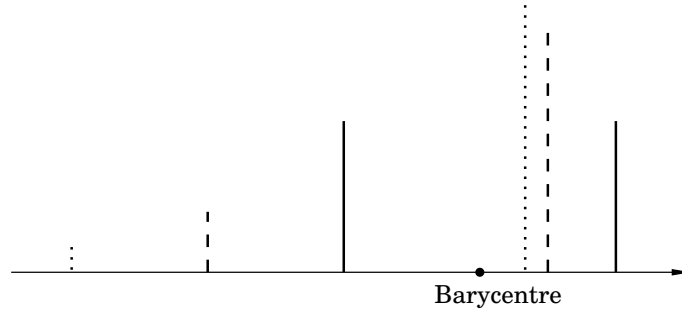


FIGURE 1 – Image d'un point de  $\Delta_2$  (lignes continues) par  $\Phi^2$  (tirets) et  $\Phi^3$  (pointillés).

### 3 Géométrie dans le cas Hadamard

Cette section décrit l'article [5] écrit avec Jérôme Bertrand (Université de Toulouse), où on étudie des questions semblables à celles de la section précédente, dans un cadre plus général.

Plutôt que de se limiter au cadre euclidien, on s'intéresse aux espaces à courbure négative ou nulle. Plus précisément, on suppose que l'espace  $X$  (toujours polonais) est localement compact, géodésique, et vérifie l'inégalité CAT(0) pour tous les triangles<sup>3</sup> (en particulier, il doit être simplement connexe). On dira que  $X$  est un *espace de Hadamard*.

Ce cadre inclut les espaces euclidiens, les variétés simplement connexes à courbure négative ou nulle (notamment les espaces hyperboliques réels, complexes, etc.), et la notion d'espace de Hadamard est stable par produit. Nous n'excluons pas la possibilité que  $X$  soit branchant, et incluons donc le cas des arbres simpliciaux et des immeubles à courbure négative ou nulle.

### 3.1 Isométries

En courbure strictement négative, le phénomène observé dans le cas euclidien ne se produit plus, au moins dans certaines classes assez larges.

**Théorème 3.1.** *Soit  $X$  un espace de Hadamard géodésiquement complet (i.e. toute géodésique peut être prolongée en une géodésique complète) et à courbure strictement négative (l'inégalité CAT(0) est stricte pour les points non alignés et  $X$  n'est pas une droite). Si*

- (i)  $X$  est un arbre ; ou
  - (ii)  $X$  est une variété riemannienne ; ou plus généralement
  - (iii) il existe une partie dense de  $X$  dont les points admettent tous un voisinage isométrique à un ouvert d'une variété riemannienne de dimension au moins 2 ;
- alors l'application  $\# : \text{Isom}(X) \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{W}_2 X)$  est surjective.

On voit donc que dans un cadre assez général, les espaces à courbure strictement négative ont des espaces de Wasserstein moins symétriques que ceux des espaces euclidiens.

Je ne donnerai pas de détail de la démonstration ici, disons simplement qu'elle repose sur une caractérisation géométrique des masses de Dirac et sur l'inversibilité d'une transformation de type Radon, qui généralise celle utilisée dans le cas euclidien. Le premier point fonctionne sous des hypothèses très faibles, et permet d'obtenir le résultat naturel suivant.

**Proposition 3.2.** *Soient  $Y, Z$  des espaces polonais avec  $Y$  localement compact et géodésiquement complet.*

*Alors  $\mathcal{W}_2(Y)$  est isométrique à  $\mathcal{W}_2(Z)$  si et seulement si  $Y$  est isométrique à  $Z$ .*

---

3. Voir [5] ou, mieux, [Bal95] pour une présentation des espaces CAT(0).

*Remarque.* Comme le cas de  $\mathbb{R}^n$  le montre (spécialement quand  $n = 1$ ), les isométries de  $\mathcal{W}_2(Y)$  à  $\mathcal{W}_2(Z)$  ne sont pas nécessairement des images par  $\#$  d'isométries de  $Y$  à  $Z$  ; on montre cependant que ces premières se restreignent aux images de  $\delta : Y \rightarrow \mathcal{W}_2(Y)$  et  $\delta : Z \rightarrow \mathcal{W}_2(Z)$  en des isométries.

### 3.2 Un bord à l'infini

Il est bien connu que la propriété de  $X$  d'être CAT(0) n'est pas transmise à  $\mathcal{W}_2(X)$  quand  $X \neq \mathbb{R}$  (en effet  $\mathcal{W}_2(X)$  est alors contractile mais pas uniquement géodésique). Toutefois, avec Jérôme Bertrand nous avons montré que  $\mathcal{W}_2(X)$  possède certaines propriétés typiques de la courbure négative, notamment l'existence d'un bord à l'infini assez naturel.

Rappelons brièvement comment est classiquement construit le *bord géodésique* de  $X$  : on note  $\mathcal{R}_1(X)$  l'ensemble des rayons géodésiques unitaires de  $X$ , et étant donné deux d'entre eux  $(\gamma_t), (\beta_t)$  on dit qu'ils sont *asymptotes* s'ils restent à distance bornée :

$$\gamma \sim \beta \quad \text{si} \quad \sup_{t \geq 0} d(\gamma_t, \beta_t) < +\infty.$$

On note  $\gamma_\infty$  la classe de  $(\gamma_t)$  pour cette relation. L'ensemble de ces classes d'équivalences, noté  $\partial X$ , est le bord géodésique. Ce bord comme la compactification  $\bar{X} := X \cup \partial X$  associée disposent naturellement d'une topologie dite « des cônes », qui en fait des espaces compacts. De plus, les rayons géodésiques qui ne sont pas asymptotes s'éloignent à vitesse linéaire, ce qui permet de définir une distance sur le bord par

$$d_\infty(\gamma_\infty, \beta_\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d(\gamma_t, \beta_t)}{t}.$$

La topologie définie par cette distance est en général très différente de la topologie des cônes (souvent, elle n'est même pas séparable). Parfois, on préfère considérer la distance de longueur associée (qui est alors appelée la métrique de Tits), mais ici c'est  $d_\infty$  elle-même qui se révélera pertinente.

Si on considère des rayons géodésiques de vitesse quelconque, ce qui sera nécessaire dans la suite, le quotient par la relation  $\sim$  est alors un cône topologique sur  $\partial X$ , qu'on note  $c\partial X$ . En effet la classe d'asymptotie d'un rayon est déterminée par la vitesse du rayon et par la classe d'asymptotie du rayon reparamétré à vitesse 1, tous les rayons de vitesse nulle étant identifiés. On peut alors placer sur  $c\partial X$  des coordonnées  $(s, \zeta)$  où  $s \in [0, +\infty[$ ,  $\zeta \in \partial X$  et  $(0, \zeta)$  est identifié à  $(0, \xi)$  pour tous  $\zeta, \xi$ . Enfin, la distance  $d_\infty$  s'étend par la même formule à  $c\partial X$  et en fait un cône métrique.

La première façon possible de construire le bord de  $\mathcal{W}_2(X)$  est de procéder comme dans  $X$ , en considérant la relation

$$(\mu_t) \sim (\sigma_t) \quad \text{si} \quad W_2(\mu_t, \sigma_t) \text{ est bornée}$$

entre rayons géodésiques de vitesse 1, dont l'ensemble est noté  $\mathcal{R}_1(\mathcal{W}_2 X)$ . Les classes de cette relation forment alors les points du bord à l'infini.

Un second point de vue consiste à exploiter l'interpolation de déplacement pour construire le bord de  $\mathcal{W}_2(X)$  à partir de celui de  $X$  : étant donnée un rayon géodésique unitaire  $(\mu_t)$ , on choisit une interpolation  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{R}(X))$ , c'est-à-dire une mesure vérifiant  $(e_t)_\# \mu = \mu_t$ . Notons que  $\mu$  n'a aucune raison d'être supportée sur  $\mathcal{R}_1(X)$ , les différents éléments de masse pouvant très bien se déplacer à des vitesses différentes. On note  $e_\infty : \mathcal{R}(X) \rightarrow c\partial X$  l'application qui à un rayon non nécessairement unitaire de  $X$  associe sa classe d'asymptotie, et on définit la *mesure asymptotique* du rayon  $(\mu_t)$  par

$$\mu_\infty := (e_\infty)_\# \mu \in \mathcal{P}(c\partial X).$$

Comme  $(\mu_t)$  était supposé unitaire, on obtient la relation

$$\int_{c\partial X} s^2 d\mu_\infty(s, \zeta) = 1.$$

On note  $\mathcal{P}_1(c\partial X)$  l'ensemble des mesures de probabilité satisfaisant cette relation, et cet espace peut alors jouer le rôle de bord.

Un problème se pose cependant : l'interpolation de déplacement n'est en général pas unique (en particulier quand il y a des branchements de géodésiques), donc il n'est pas évident que  $(\mu_t)$  détermine  $\mu_\infty$ . Le résultat suivant, sur lequel repose toute l'étude du bord, garantit en particulier que c'est bien le cas.

**Théorème 3.3** (formule asymptotique). *Soient  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  et  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  deux rayons géodésiques de  $\mathcal{W}_2(X)$  (où  $X$  est toujours un espace de Hadamard),  $\mu$  et  $\sigma$  des interpolations de déplacement de chacune d'elles et  $\mu_\infty$  et  $\sigma_\infty$  les mesures asymptotiques correspondantes.*

*Alors  $(\mu_t)$  et  $(\sigma_t)$  sont asymptotes si et seulement si  $\mu_\infty = \sigma_\infty$ , et on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_2(\mu_t, \sigma_t)}{t} = W_2^\infty(\mu_\infty, \sigma_\infty)$$

où  $W_2^\infty$  est la distance de Wasserstein quadratique associée à la distance  $d_\infty$  sur  $c\partial X$ .

En particulier, les deux visions ci-dessus se réconcilient naturellement, et on note

$$\partial \mathcal{W}_2(X) = \mathcal{R}_1(\mathcal{W}_2 X) / \sim \simeq \mathcal{P}_1(c\partial X).$$

On peut alors adapter la topologie des cônes pour en fournir un analogue sur  $\partial \mathcal{W}_2(X)$  et  $\overline{\mathcal{W}_2(X)} = \mathcal{W}_2(X) \cup \partial \mathcal{W}_2(X)$ , ce qui demande de contourner les défauts de convexité de la fonction distance. Le théorème 9.2 de [5] montre que la topologie définie sur  $\partial \mathcal{W}_2(X)$  s'identifie à la topologie de la convergence faible dans  $\mathcal{P}_1(c\partial X)$ . Notons que ni  $\partial \mathcal{W}_2(X)$  ni à plus forte raison  $\overline{\mathcal{W}_2(X)}$  ne sont compacts, ce qui n'est pas étonnant puisque  $\mathcal{W}_2(X)$  n'est pas localement compact.

Ce bord peut ensuite être utilisé pour étudier  $\mathcal{W}_2(X)$ , avec l'avantage d'être souvent plus simple. On obtient par exemple assez facilement le résultat de non-plongement suivant, à comparer avec la proposition 2.1, et que je considère comme le principal aboutissement de ce travail.

**Théorème 3.4.** *Si  $X$  a la propriété de visibilité, alors il n'est pas possible de plonger isométriquement  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathcal{W}_2(X)$ .*

Rappelons qu'on dit qu'un espace de Hadamard  $X$  a la propriété de visibilité si toute paire de points de  $\partial X$  est reliée par une géodésique, ce qui revient à demander que  $d_\infty(\xi, \zeta) = 2$  dès que  $\xi \neq \zeta$ . En particulier les espaces  $\text{CAT}(\kappa)$  avec  $\kappa < 0$  ont la propriété de visibilité, ce qui englobe notamment le cas des arbres et des espaces hyperboliques.

L'idée de la démonstration est la suivante : on montre par un argument classique qu'un rayon qui se prolonge en une géodésique complète doit avoir sa mesure asymptotique concentrée sur  $\mathcal{P}(\partial X) \subset \mathcal{P}_1(c\partial X)$  (où on identifie  $\partial X$  et  $\partial X \times \{1\} \subset c\partial X$ ); ensuite on montre que cet ensemble, muni de  $W_2^\infty$ , est un espace « en flocon de neige<sup>4</sup> » et n'a donc aucune courbe rectifiable (i.e. de longueur finie) non constante. Si  $\mathbb{R}^2$  se plongeait isométriquement dans  $\mathcal{W}_2(X)$ , son bord, c'est-à-dire le cercle muni de la métrique des cordes, se plongerait isométriquement dans la partie de  $\partial \mathcal{W}_2(X)$  correspondant aux géodésiques complètes, une contradiction.

Cette méthode est assez souple, et permet notamment de traiter le cas où  $\mathbb{R}^2$  est muni d'une norme non-euclidienne, ou celui des plongements lipschitziens qui envoient les géodésiques issues d'un point fixé sur des géodésiques, ou le cas d'un cône bi-infini ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Le choix de considérer les plongements isométriques de  $\mathbb{R}^2$  vient du rôle important que jouent les « plats » (plongements isométriques de  $\mathbb{R}^k$  avec  $k$  maximal, qui

4. C'est-à-dire dont la distance s'exprime comme  $d^\alpha$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $d$  une autre distance; le terme anglais est « snowflaked metric ».



est alors appelé le *rang* de l'espace considéré) dans la théorie des espaces CAT(0) et particulièrement des espaces symétriques. Il n'est par ailleurs pas difficile de voir que la plupart des notions plus faibles de rang sont infinies même pour  $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$ .

Une question naturelle est alors de savoir si le rang de  $\mathcal{W}_2(X)$  est toujours égal à celui de  $X$ . Le théorème 3.4 répond positivement pour une classe assez large d'espaces de rang 1, mais le rang supérieur nécessiterait une étude plus fine du bord ou une approche complètement différente.

## 4 Estimation de la taille des espaces de Wasserstein

Cette section est consacrée à l'article [1], où j'évalue notamment la « taille » des espaces de Wasserstein, dans le cas où  $X$  (et donc  $\mathcal{W}_2(X)$ ) est compact. Plus précisément, je cherche des invariants d'espaces métriques ayant les propriétés d'être :

- invariants bilipschitz ;
- monotone par rapport à l'inclusion (et donc par rapport aux plongements bilipschitz) ;
- capables de distinguer différents espaces de Wasserstein.

La dimension de Hausdorff, qu'on notera  $\dim$ , est probablement l'exemple le plus naturel vérifiant les deux premières propriétés, mais elle est infinie pour  $\mathcal{W}_2(X)$  si  $X$  n'est pas fini. L'idée est de généraliser sa construction en remplaçant la famille de fonctions  $(\varepsilon \mapsto \varepsilon^s)_s$  par d'autres familles ayant de bonnes propriétés.

L'article [1] contient d'autres résultats que ceux présentés ici, j'ai choisi de me limiter pour obtenir un texte plus clair et raisonnablement détaillé.

### 4.1 Paramètres critiques

Les idées qui suivent empruntent beaucoup à de précédents auteurs, voir par exemple [Rog70, Mat95, Boa73, Goo77, McC97].

Fixons  $Y$  un espace métrique compact dont on veut mesurer la taille.

On appelle *échelle* une famille  $\mathcal{F} = (f_s)_{s \in I}$  où  $I$  est un intervalle et les  $f_s$  sont des fonctions continues, croissantes, de  $[0, T_s[$  dans  $[0, +\infty[$ , envoyant 0 sur 0, et vérifiant la *condition de séparation forte* :

$$\forall t > s \in I, \forall C \geq 1, f_t(C\varepsilon) = o(f_s(\varepsilon)) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Une échelle va servir de comparaison pour mesurer la taille d'un recouvrement de l'espace métrique considéré. L'introduction du paramètre  $C$  est ce qui garantira l'invariance bilipschitz des invariants que nous allons construire, et est pratiquement le seul ingrédient nouveau.

Les échelles que nous utiliserons sont :

– l'échelle *dimensionnelle*

$$\mathcal{D} := \left( \varepsilon \mapsto \varepsilon^s \right)_{s \in (0, +\infty)}$$

utilisée pour la dimension de Hausdorff;

– les échelles *intermédiaires*, divisées en une échelle *grossière*

$$\mathcal{F} := \left( \varepsilon \mapsto e^{-\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^s} \right)_{s \in [1, +\infty)}$$

et, pour chaque  $\sigma \in [1, +\infty[$ , une échelle *fine*

$$\mathcal{F}_\sigma := \left( \varepsilon \mapsto e^{-s \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^\sigma} \right)_{s \in (0, +\infty)}$$

(notons que  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{D}$ );

– l'échelle *puissance-exponentielle*

$$\mathcal{P} := \left( \varepsilon \mapsto e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^s} \right)_{s \in (0, +\infty)}$$

On pourrait vouloir utiliser une échelle moins grossière que cette dernière, telle que  $(\varepsilon \mapsto \exp(-s/\varepsilon))_s$ , mais cette famille ne vérifie pas la condition de séparation forte, et ne permet pas de construire un invariant bilipschitz.

À une échelle  $\mathcal{F}$ , on associe un invariant bilipschitz appelé *paramètre critique* en mimant complètement la construction de la dimension de Hausdorff. La construction de Carathéodory associe d'abord à chaque  $s \in I$  une mesure  $\Lambda_s$  sur  $Y$  par

$$\Lambda_s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} f_s(\text{diam } E_i) \mid (E_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ recouvrement de } A \text{ avec } \text{diam } E_i \leq \delta \right\}$$

pour  $A \subset Y$  borélien. L'idée est de compter la taille d'un recouvrement fin (la finesse étant encodée par  $\delta$ ), où chaque élément du recouvrement est pondéré par  $f_s$ .

Comme dans le cas des mesures de Hausdorff, on sait que pour des paramètres  $t > s \in I$ , si  $\Lambda_t(Y) > 0$  alors  $\Lambda_s(Y) = +\infty$ ; il y a donc une transition de phase en une valeur, qu'on appelle le paramètre critique de  $Y$  associé à l'échelle  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} \text{crit}_{\mathcal{F}} A &:= \sup\{s \in I \mid \Lambda_s(A) = +\infty\} \\ &= \sup\{s \in I \mid \Lambda_s(A) > 0\} \\ &= \inf\{s \in I \mid \Lambda_s(A) = 0\} \\ &= \inf\{s \in I \mid \Lambda_s(A) < +\infty\} \end{aligned}$$

La propriété de séparation forte assure que ce paramètre est bien un invariant bilipschitz, et il est évidemment monotone. Il reste à l'estimer pour certains espaces de Wasserstein ; il est en général assez facile à majorer, les minoration sont plus délicates et reposent sur le classique « lemme de Frostman <sup>5</sup> » soit directement, soit par l'intermédiaire du plongement bilipschitz d'un espace plus facile à mesurer.

## 4.2 Les cubes de Hilbert généralisés

Les cubes euclidiens sont des étalons commodes pour la dimension de Hausdorff, introduisons donc une famille d'espaces compacts de dimension infinie qui joueront le même rôle pour les paramètres critiques.

Étant donnée une suite  $\bar{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels positifs dans  $\ell^2$  (par exemple  $a_n = 1/n$  pour le cas le plus classique), soit  $\text{HC}(I; \bar{a})$  l'ensemble des suites  $\bar{u}$  telles que  $0 \leq u_n \leq a_n$  pour tout  $n$ , et munissons-le de la distance  $\ell^2$ . Ici  $I$  représente l'intervalle  $[0, 1]$ , et  $\text{HC}(I; \bar{a})$  est compact. La construction se généralise à tout espace métrique compact  $X$  : le *cube de Hilbert (généralisé)*  $\text{HC}(X; \bar{a})$  est l'ensemble des suites  $\bar{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  muni de la distance

$$d_{\bar{a}}(\bar{x}, \bar{y}) := \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 d(x_n, y_n)^2 \right)^{1/2}$$

et est un espace compact.

Le rôle de  $\bar{a}$  est crucial dans l'estimation des paramètres critiques des cubes de Hilbert.

**Proposition 4.1.** *Soit  $X$  un espace compact dont la dimension supérieure de Minkowski <sup>6</sup> est égale à la dimension de Hausdorff, supposée non nulle et finie, et soit  $\lambda \in (0, 1)$ . On a alors*

$$\text{crit}_{\mathcal{H}} \text{HC}(X, (\lambda^n)) = 2 \quad \text{et} \quad \text{crit}_{\mathcal{H}_2} \text{HC}(X, (\lambda^n)) = \frac{\dim_{\text{H}} X}{2 \log \frac{1}{\lambda}}$$

**Proposition 4.2.** *Soit  $X$  un espace compact dont la dimension de Hausdorff est non-nulle et la dimension supérieure de Minkowski finie, et soit  $\alpha > 1/2$ . On a*

$$\text{crit}_{\mathcal{H}} \text{HC}(X, (n^{-\alpha})) = \frac{2}{2\alpha - 1}$$

5. Il dit en substance qu'exhiber une mesure donnant aux petites boules une croissance contrôlée par  $f_s$  assure la positivité de  $\Lambda_s$

6. La dimension de Minkowski, aussi appelée « box dimension » en anglais, est déterminée de façon naturelle par le nombre de boules de rayon  $\varepsilon$  nécessaires pour couvrir  $X$ .

On voit donc que, sans surprise, les suites décroissant lentement donnent naissance à des cubes de Hilbert de grande taille ; mais pour les suites polynomiales, ce comportement est tellement marqué que la taille de  $X$  lui même n'intervient pratiquement pas.

**Corollaire 4.3.** *Soient  $X, Y$  des espaces compacts ; supposons que  $X$  est de dimension de Hausdorff non nulle et  $Y$  de dimension de Minkowski finie.*

*Si  $\alpha < \beta \in (1/2, +\infty)$ , alors il n'existe pas de plongement bilipschitz*

$$\text{HC}(X; (n^{-\alpha})) \not\hookrightarrow \text{HC}(Y; (n^{-\beta})).$$

Je ne sais pas caractériser de façon générale les suites  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  telle que  $\text{HC}(I; \bar{a})$  se plonge de façon bilipschitz dans  $\text{HC}(I; \bar{b})$ , et j'avoue n'avoir pas idée de la difficulté de la question.

### 4.3 Le cas des espaces de Wasserstein

En exploitant ce qu'on a appris des cubes de Hilbert, il est possible d'estimer la taille de certains espaces de Wasserstein.

**Théorème 4.4.** *Si  $X$  est un espace compact de dimension de Hausdorff non nulle, alors  $\mathcal{W}_2(X)$  est de taille au moins intermédiaire, et plus précisément*

$$\text{crit}_{\mathcal{P}} \mathcal{W}_2(X) \geq 2, \quad \text{crit}_{\mathcal{P}_2} \mathcal{W}_2(X) \geq \frac{\dim X}{2 \log \frac{1}{3}}.$$

Ce résultat est largement sous-optimal pour de nombreux espaces, mais il a l'avantage d'être très général. Il repose sur un résultat de plongement de  $\text{HC}(X; (\lambda^n))$  dans  $\mathcal{W}_2(X)$  ; voir [1] pour des détails, ainsi qu'une version impliquant des produits finis.

Enfin, on arrive au principal résultat de cette section, présenté ici dans une version pas tout à fait la plus générale.

**Théorème 4.5.** *Si  $X$  est une variété compacte de dimension  $d$ , alors  $\mathcal{W}_2(X)$  est de taille puissance-exponentielle, et plus précisément*

$$\text{crit}_{\mathcal{P}} \mathcal{W}_2(X) = d.$$

Ce résultat montre que l'échelle  $\mathcal{P}$  est naturelle, et implique un résultat de non-plongement très peu surprenant, mais que je ne sais pas démontrer autrement.

**Corollaire 4.6.** *Soient  $X, X'$  des variétés compactes de dimension  $d > d'$ . Il n'existe pas de plongement bilipschitz de  $\mathcal{W}_2(X)$  dans  $\mathcal{W}_2(X')$ .*

Notons que les méthodes employées sont souples et s'appliquent à d'autres espaces que les cubes de Hilbert ou les espaces de Wasserstein.

**Théorème 4.7.** *Si  $X$  est une variété compacte de dimension  $d$ , l'espace  $\mathcal{C}(X)$  des parties fermées  $X$ , muni de la distance de Hausdorff, vérifie également*

$$\text{crit}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}(X) = d.$$

## 5 Dynamique sur les mesures du cercle

Cette section présente l'article [2], où je considère des questions dynamiques dans le cadre du transport optimal.

### 5.1 Applications dilatantes du cercle

Le cadre dynamique classique est le suivant : on se place sur le cercle  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et on considère une application  $\Phi : S^1 \rightarrow S^1$  supposée  $C^1$  et dilatante, c'est-à-dire que  $\Phi' > 1$  ; par exemple, on considère les « modèles » à dérivée constante

$$\Phi_d := x \mapsto dx \pmod{1}.$$

Beaucoup de propriétés dynamiques peuvent alors être étudiées : orbites périodiques, entropie, propriétés ergodiques et de mélange, etc. Par exemple, on sait que  $\Phi$  possède toujours une unique mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on notera  $\rho\lambda$  ( $\rho$  étant la densité,  $\lambda$  la mesure de Lebesgue), mais possède de très nombreuses mesures de probabilités invariantes.

Par exemple,  $\Phi_2$  préserve la mesure de Lebesgue, la masse de Dirac  $\delta_0$ , et les mesures « de Bernoulli » obtenues comme lois des variables aléatoires

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$$

où  $(X_k)_k$  est une suite de variable aléatoire indépendantes, de loi Bernoulli de paramètre  $p$ . Autrement dit, la mesure de Bernoulli de paramètre  $p$  donne un poids  $1-p$  à l'intervalle  $[0, 1/2]$  et  $p$  à  $[1/2, 1]$ ,  $(1-p)^2$  à  $[0, 1/4]$ ,  $p(1-p)$  à  $[1/4, 1/2]$  et à  $[1/2, 3/4]$ ,  $p^2$  à  $[3/4, 1]$ , etc. Pour  $p = 1/2$  on obtient la mesure de Lebesgue, mais deux valeurs différentes de  $p$  donnent des mesures étrangères. Notons que ces mesures ne forment qu'une part très mince des exemples connus de mesures invariantes.

## 5.2 Action sur les mesures

Étudier les mesures invariantes revient à étudier les point fixes de l'application  $\Phi_{\#}$  qui à une mesure de probabilité associe son image par  $\Phi$ . Il est alors naturel de considérer plus généralement la dynamique de  $\Phi_{\#}$  sur  $\mathcal{P}(S^1)$ . Le transport optimal se révèle pour cela un outil utile : on peut en effet munir  $\mathcal{W}_2(S^1)$ , qui en tant qu'ensemble est égal à  $\mathcal{P}(S^1)$ , d'une sorte de structure différentielle<sup>7</sup> ; ceci a été utilisé de façon heuristique ou rigoureuse par de nombreux auteurs, parmi lesquels je ne citerai que Otto [Ott01] qui fut l'un des précurseur, et Gigli [Gig11] dont j'utiliserai le formalisme. Ce formalisme a l'avantage de permettre de définir la différentielle d'une application  $\mathcal{W}_2(S^1) \rightarrow \mathcal{W}_2(S^1)$  en une mesure donnée (d'autres cadres ne permettent de différencier que presque partout le long de certaines courbes). Calculer la différentielle de  $\phi_{\#}$  au point  $\rho\lambda$  revient alors à comprendre la dynamique de  $\phi$  sur les mesures près de sa mesure invariante absolument continue, à l'ordre 1 au sens de la distance de Wasserstein.

Pour la description de la structure différentielle proposée par Gigli, on renvoie à son article [Gig11] ainsi qu'à [2] où le cas du cercle est expliqué succinctement. Signalons que considérer la structure affine sur  $\mathcal{P}(S^1)$  n'apporte aucune information, puisque dans ce cadre  $\Phi_{\#}$  est linéaire et donc égale à sa dérivée. De plus, aucune mesure ne disposerait d'un espace tangent linéaire : il existerait toujours des directions pointant vers des mesures positives dans un sens mais pas dans l'autre. Au contraire, la structure différentielle de  $\mathcal{W}_2(S^1)$  fournit à chaque mesure de probabilité sans atome  $\mu$  un espace tangent hilbertien  $L_0^2(\mu)$ , qui est un sous-espace de  $L^2(\mu)$ . Un vecteur tangent  $v \in L_0^2(\mu)$  fournit une courbe exponentielle notée  $(\mu + tv)_t$  ; elle n'est en général pas une géodésique même pour des temps petits, mais les vecteurs engendrant des géodésiques sont denses.

Les mesures atomiques, elles, ne disposent que d'un cône tangent<sup>8</sup> mais ce n'est pas une grosse restriction que de ne pas les considérer.

On peut résumer les principaux résultats de [2] comme suit.

**Théorème 5.1.** *Si  $\Phi$  est une application dilatante  $C^2$  du cercle,  $\Phi_{\#}$  a une dérivée  $D_{\rho\lambda}\Phi_{\#} =: \mathcal{L}$  au point  $\rho\lambda$  dans un sens de Gâteaux fort, c'est-à-dire que  $\mathcal{L}$  est une application linéaire continue de l'espace tangent  $L_0^2(\rho\lambda)$  dans lui-même et*

$$W_2(\Phi_{\#}(\rho\lambda + tv), \rho\lambda + t\mathcal{L}v) = o(t) \quad \forall v \in L_0^2(\mu)$$

7. Plus généralement ce procédé s'applique aux espaces de Wasserstein des variétés riemanniennes.

8. Dans le cas de  $\mathcal{W}_2(X)$  avec  $X$  une variété de dimension au moins 2, la condition « sans atome » doit être remplacée par une condition assez fine.

Dans le cas modèle  $\Phi = \Phi_d$ , (où  $\rho \equiv 1$ ),  $\mathcal{L}$  est égale à  $d$  fois l'opérateur de Perron-Frobenius de  $\Phi_d$ , qui est par définition l'adjoint de  $u \mapsto u \circ \Phi_d$  agissant sur  $L^2_0(\lambda)$ . Dans le cas général, l'adjoint de  $\mathcal{L}$  est  $u \mapsto \Phi' u \circ \Phi$ .

Dans tous les cas il existe un rayon  $R > 1$  tel que le disque de rayon  $R$  et de centre 0 dans  $\mathbb{C}$  est entièrement constitué de valeurs propres de dimension infinie de  $\mathcal{L}$ . En conséquence, pour tout entier  $n$  il existe un plongement bilipschitz  $F : (B^n, 0) \rightarrow (\mathcal{W}_2(S^1), \rho\lambda)$  de la boule unité euclidienne dont l'image est constituée de mesures presque invariantes au sens où

$$W_2(\Phi_{\#}F(a), F(a)) = o(|a|).$$

On a donc une assez bonne description de la dynamique à l'ordre 1 près de la mesure invariante absolument continue. En particulier on voit qu'alors que les applications dilatantes sont les exemples les plus simples de systèmes dynamiques hyperboliques, leur action sur les mesures est infiniment loin d'hériter de l'hyperbolicité.

Je ne sais pas si les familles de mesures « presque invariantes » obtenues sont en fait constituées (au moins en partie) de mesures réellement invariantes, ou si certaines sont absolument continues. Il est facile de voir qu'elles sont majoritairement sans atome.

### 5.3 Perspectives

Comprendre mieux les familles de mesures presque invariantes me semblerait intéressant. Notamment, on peut essayer de se servir de la forme explicite de la différentielle  $\mathcal{L}$  pour comprendre ce qu'ont en commun les dynamiques de  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ . En effet, la conjecture de Furstenberg prévoit notamment que la seule mesure sans atome simultanément invariante par ces deux applications est la mesure de Lebesgue, et on peut étudier facilement la même question « à l'ordre 1 » près de  $\lambda$ .

En fait, la fin du théorème 5.1 admet une généralisation que je n'avais pas remarquée en écrivant [2]. Notons  $\mathcal{L}_d = D_\lambda \Phi_{d\#}$ . Pour toute famille  $(p_1, \dots, p_n)$  de nombres premiers, et tout  $k_0$  entier non divisible par les  $p_i$ , en notant  $N$  l'ensemble des entiers naturels positifs n'admettant que les  $p_i$  dans leur décomposition en facteurs premiers, la fonction définie par

$$x \mapsto \sum_{n \in N} \frac{1}{n} \sin(2\pi nx)$$

est un vecteur invariant de  $\mathcal{L}_{p_i}$  pour tout  $i$ , donc de  $\mathcal{L}_d$  pour tout  $d \in N$ . Ainsi, on peut trouver des familles de dimensions arbitraires de mesures presque invariantes par tous les  $\Phi_{d\#}$ ,  $d \in N$ . En particulier,  $\Phi_{2\#}$  et  $\Phi_{3\#}$  ont de nombreuses

mesures presque invariantes en commun près de  $\lambda$ . En prenant carrément

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \sin(2\pi k_0 n x)$$

on obtient un vecteur invariant commun à tous les  $\mathcal{L}_d$ ,  $d \in \mathbb{N}$  (un deuxième est fourni en utilisant le cosinus). Il existe donc près de  $\lambda$  deux courbes de mesures simultanément presque invariantes par tous les  $\Phi_{d\#}$ . Ainsi, il est très improbable que les mesures presque invariante du théorème 5.1 soient, même parfois, réellement invariantes.

Dans une autre direction, on peut utiliser la distance de Wasserstein pour comprendre la géométrie de l'ensemble des mesures invariantes d'une application dilatante. Par exemple, à quel point le formalisme thermodynamique appliqué à des potentiels proches fournit-il des mesures proches ?

Enfin, on peut essayer de généraliser les résultats obtenus à un cadre plus général, par exemple en dimension 2 considérer les homéomorphismes anosov du tore ou les homéomorphismes pseudo-anosov de surfaces de translation.





# Sous-groupes euclidiens

---

Ce chapitre présente l'article [7], dans lequel j'étudie l'espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^n$ . Dans un premier temps, j'introduis la topologie dite de Chabauty dont on munit naturellement l'ensemble des sous-groupes fermés d'un groupe topologique et quelques-unes de ses propriétés, ensuite je détaille les résultats obtenus pour le groupe  $\mathbb{R}^n$ .

## 1 Topologie de Chabauty

Soit  $G$  un groupe topologique localement compact, par exemple un groupe de Lie. On peut munir l'ensemble  $\mathcal{C}(G)$  de ses sous-groupes fermés d'une topologie naturelle, dite de Chabauty [Cha50] (ou de Fell, ou géométrique, ...) en choisissant comme base de voisinages de  $\Gamma \in \mathcal{C}(G)$  les parties

$$\mathcal{V}_{K,U}(\Gamma) = \{\Gamma' \in \mathcal{C}(G) \mid \Gamma \cap K \subset \Gamma' \cdot U \text{ et } \Gamma' \cap K \subset \Gamma \cdot U\}$$

où  $K$  parcourt les parties compactes de  $G$  et  $U$  parcourt les voisinages de l'élément neutre, qu'on notera  $0$  par cohérence avec la suite bien que  $G$  ne soit pas supposé commutatif.

Autrement dit, un sous-groupe fermé  $\Gamma'$  est proche de  $\Gamma$  si sur un grand domaine compact ils sont impossible à distinguer modulo une petite perturbation.

Pour une présentation de nombreuses propriétés générales de cet espace, on peut se référer au survol [dlH08].

Cet espace topologique est en général très mal compris ; par exemple si  $G = \mathbb{R}^n$ , on ne sait le décrire complètement que si  $n$  vaut 1 ou 2. Le premier cas est un exercice simple : les sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}$  sont  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}$  et les  $\alpha\mathbb{Z}$  pour  $\alpha \in ]0, +\infty[$ . Si  $\alpha$  est petit,  $\alpha\mathbb{Z}$  est très proche de  $\mathbb{R}$  (prendre  $U = ]-\alpha, \alpha[$  et  $K$  n'importe quel compact) tandis que si  $\alpha$  est grand,  $\alpha\mathbb{Z}$  est très proche de  $\{0\}$  (prendre  $U$  quelconque et  $K = [-\alpha/2, \alpha/2]$ ). Ainsi, en notant  $\infty\mathbb{Z} = \{0\}$  et  $0\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ , le paramètre  $\alpha$  fournit un homéomorphisme explicite entre  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  et un segment. Le cas  $n = 2$  fait l'objet du théorème de Hubbard et Pourezza [PH79], qui affirme que  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$  est homéomorphe à la sphère de dimension 4.

Il peut paraître surprenant qu'un objet aussi simple ne soit pas mieux compris ; mais l'espace de Chabauty est en fait souvent très compliqué. Ainsi, il a été montré par Haettel [Hae10b] que  $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  a un groupe fondamental non dénombrable. En fait, Haettel décrit complètement cet espace. Mis à part une poignée de cas qui relèvent du simple exercice, le seul autre groupe dont l'espace de Chabauty a été décrit est le groupe de Heisenberg de dimension 3 [BdlHK09] ; mais la description est suffisamment compliquée pour qu'on ne sache pas s'il est simplement connexe.

Enfin, citons une application de cette notion : l'espace  $\mathcal{C}(G)$  est toujours compact, donc chaque fois qu'on peut paramétrer un espace topologique  $X$  par des sous-groupes fermés (par exemple si  $G$  agit sur  $X$ , on peut associer à chaque point son stabilisateur), on peut construire une compactification de  $X$ . Cette approche a été étudiée notamment par Guivarc'h et Rémy [GR06] et Haettel [Hae10a, Hae12], voir aussi les références dans les articles cités. La motivation initiale de Chabauty était la généralisation du critère de compacité de Mahler à des groupes de Lie ; remarquons dans cet esprit que  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  est une compactification de l'espace des réseaux de  $\mathbb{R}^n$  (mais pas de l'espace des modules des réseaux : ici on n'identifie pas deux réseaux isométriques).

## 2 Le cas euclidien

Le principal résultat que j'ai obtenu sur le sujet est le suivant.

**Théorème 2.1.** *L'espace de Chabauty de  $\mathbb{R}^n$  est simplement connexe pour tout  $n$ .*

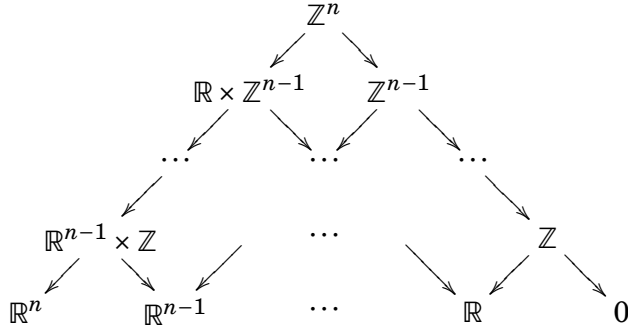
Le but de cette section est d'en expliquer brièvement la démonstration.

Commençons par une remarque élémentaire : on peut partitionner  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  par le type d'isomorphie, l'ensemble des sous-groupes d'un type donné formant une « strate »<sup>1</sup> ; ainsi  $\Gamma \in \mathcal{C}$  appartient à la strate  $(p, q)$  s'il est isomorphe à  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$ . Le diagramme suivant, où on a représenté chaque strate par le groupe modèle  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$ ,

---

1. On peut d'ailleurs montrer que cet espace est stratifié au sens de Goresky et MacPherson [GM88], mais je ne souhaite pas rentrer dans ces considérations ici.

décrit la façon dont ces strates se recollent :



Il se lit comme suit : l'adhérence d'une strate  $C$  rencontre une strate  $C'$  s'il existe un chemin orienté de  $C$  vers  $C'$ , et dans ce cas on a  $C' \subset \overline{C}$ .

Appelons *rang* de  $\Gamma \in \mathcal{C}$  la dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre, c'est à dire  $p + q$  quand  $\Gamma$  est dans la strate  $(p, q)$ . Dans le diagramme ci-dessus, les diagonales nord-est/sud-ouest correspondent chacune aux groupes d'un rang donné. Notons  $\mathcal{R}$  l'union des strates de rang  $n$  ; la démonstration du théorème 2.1 découle immédiatement des deux faits suivants :

- $\mathcal{R}$  est contractile ;
- tout lacet de  $\mathcal{C}$  basé en un point de  $\mathcal{R}$  est homotope à un lacet dans  $\mathcal{R}$ .

Le premier est très simple. On considère l'application

$$\begin{aligned}
 H : ]0, 1] \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\
 (t, \Gamma) &\mapsto H_t(\Gamma) = t\Gamma = \{t\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}
 \end{aligned}$$

et on l'étend à  $[0, 1] \times \mathcal{C}$  de façon à la rendre continue en la première variable, c'est-à-dire en posant  $H(0, \Gamma) = \text{vect}(\Gamma)$ . Il est important de noter que  $H$  n'est pas continue sur  $[0, 1] \times \mathcal{C}$  : il existe des éléments de la strate  $(0, n)$  (donc d'image  $\mathbb{R}^n$  par  $H_0$ ) arbitrairement proche de  $\mathbb{Z}^{n-1} \times \{0\}$ , dont l'image par  $H_0$  est  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ .

Toutefois, il est facile de voir que  $H$  est continue sur  $[0, 1] \times \mathcal{R}$ , qui se rétracte donc par déformation sur  $\{\mathbb{R}^n\}$ .

Le nœud de la démonstration du second point consiste à montrer que tout sous-groupe fermé  $\Gamma$  admet une base de voisinages  $(U_\varepsilon)$  où les  $U_\varepsilon$  sont contractiles, et les  $U_\varepsilon \cap \mathcal{R}$  sont connexes par arc. Ceci s'obtient par étude locale de la topologie de  $\mathcal{C}$ , utilisant la stratification et pour laquelle on renvoie à l'article [7].

Un chemin continu de  $U_\varepsilon$  dont les extrémités sont dans  $\mathcal{R}$  est donc homotope à un chemin de  $\mathcal{R}$  : il existe un chemin de  $\mathcal{R} \cap U_\varepsilon$  ayant les même extrémités, et  $U_\varepsilon$  est contractile donc simplement connexe. On peut alors « recoller » ces homotopies

locales pour montrer que tout lacet basé au point  $\mathbb{R}^n$  est homotope à un lacet de  $\mathcal{R}$ , ce qui conclut la démonstration. Plus généralement, on a le résultat suivant (probablement folklorique mais que je n'ai pas réussi à trouver dans la littérature).

**Théorème 2.2** (lemme de localisation). *Soit  $X$  un espace topologique séparé et  $Y$  une partie fermée de  $X$ . Si tout point  $y \in Y$  admet une base de voisinages  $(U_\varepsilon)$  telle que les paires  $(U_\varepsilon, U_\varepsilon \setminus Y)$  soient  $k$ -connexes, alors la paire  $(X, X \setminus Y)$  est  $k$ -connexe*

Rappelons qu'une paire  $(A, B)$  est 0-connexe si tout point de  $A$  est connecté par un arc à un point de  $B$ , et est  $k$ -connexe ( $k > 0$ ) si de plus pour tout  $\ell \leq k$ , toute application continue  $(I^\ell, \partial I^\ell) \rightarrow (A, B)$  du cube  $I^\ell$  envoyant son bord dans  $B$  est homotope, relativement au bord, à une application  $I^\ell \rightarrow B$ .

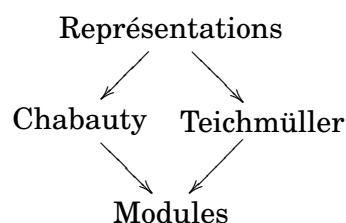
Ici, nous n'avons eu besoin que du cas  $k = 1$ . On peut se demander si la même stratégie pourrait permettre de montrer la trivialité de groupes d'homotopie supérieure de  $\mathcal{C}$ ; la réponse est négative, car la paire  $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$  n'est pas localement 2-connexe. Je ne sais pas si elle l'est globalement.

### 3 Perspectives

Pour conclure ce chapitre, je souhaite évoquer un projet qui a déjà quelques années, qui me semble intéressant bien que j'ai orienté mes efforts dans d'autres directions dernièrement. L'espace de Chabauty de  $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$  est certainement très complexe, et il paraît vain de le décrire complètement. Toutefois, des parties intéressantes de cet espace méritent d'être étudiées. Le cas des limites de sous-groupes à un générateur a été traité par Baik et Clavier [BC12]; il me semble que le cas des groupes de surfaces est pertinent. Les considérations qui suivent ne sont pour la plupart pas nouvelles, et j'ai notamment bénéficié de discussions avec Thomas Haettel; mais certains problèmes me semblent n'avoir pas ou peu été considérés.

Fixons une surface compacte  $\Sigma_g$  et considérons la partie  $\mathcal{C}_g$  de  $\mathcal{C}(\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}))$  formée des sous-groupes fermés isomorphes à  $\pi_1(\Sigma_g)$ . Cet espace s'identifie au quotient de l'espace des représentations discrètes et fidèles de  $\pi_1(\Sigma_g)$  dans  $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$  par les automorphismes de la source; il s'agit donc d'une sorte de dual de l'espace de Teichmüller, qui est lui le quotient du même espace par conjugaison au but. Faire

les deux quotients amène à l'espace des modules, on a donc un diagramme



Suivant W. Thurston, on peut interpréter géométriquement  $\mathcal{C}_g$  comme l'ensemble des structures hyperboliques sur  $\Sigma_g$  avec un repère marqué : ce marquage permet de distinguer les différents sous-groupes conjugués, alors que l'absence de marquage de l'homotopie permet de confondre les représentations de même image.

Dans le cadre non-compact, le type d'isomorphisme du groupe fondamental (qui est toujours libre) ne prescrit plus complètement la surface, et on peut trouver des chemins continus dans  $\mathcal{C}(\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}))$  tels que les surfaces quotients ont une topologie qui varie arbitrairement (alors que  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_{g'}$  ne sont certainement pas connectés par un chemin parmi les groupes cocompacts si  $g \neq g'$ ). Il est donc raisonnable de considérer la partie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}(\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}))$  constituée des sous-groupes fermés libres, et pour simplifier de type fini. Je pense que  $\mathcal{F}$  est simplement connexe, et probablement tous ses groupes d'homotopie sont triviaux. Toutefois, une approche consistant à trouver une rétraction globale sur un point, par exemple en utilisant un flot géométrique, me semble vouée à l'échec. Sans rentrer dans les détails, des difficultés apparaissent quand on étudie ce qui se passe quand un chemin traverse un pincement, c'est-à-dire que la systole du quotient passe par zéro. Ceci arrive par exemple quand le quotient passe d'un tore muni d'une pointe (ou une vasque) à une sphère munies de trois pointes (ou deux pointes et une vasque) par pincement d'un lacet non trivial.

En tout état de cause, le sujet me semble loin d'être épuisé et présente de jolis phénomènes, qui méritent d'être étudiés plus avant.



---

# Bibliographie

---

---

- [Aub76] T. Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Differential Geometry*, 11(4) :573–598, 1976.
- [Bal95] W. Ballmann. *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, volume 25 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. With an appendix by Misha Brin.
- [BC64] R. L. Bishop and R. J. Crittenden. *Geometry of manifolds*, volume XV of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1964.
- [BC12] H. Baik and L. Clavier. The space of geometric limits of one-generator closed subgroups of  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , 2012. arXiv :1202.1365.
- [BdlHK09] M. R. Bridson, P. de la Harpe, and V. Kleptsyn. The Chabauty space of closed subgroups of the three-dimensional Heisenberg group. *Pacific J. Math.*, 240(1) :1–48, 2009.
- [Boa73] E. Boardman. Some Hausdorff measure properties of the space of compact subsets of  $[0, 1]$ . *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 24 :333–341, 1973.
- [Bor95] A. Borbély. On the spectrum of the Laplacian in negatively curved manifolds. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 30(3-4) :375–378, 1995.
- [BZ88] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller. *Geometric inequalities*, volume 285 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1988.
- [Cha50] C. Chabauty. Limite d'ensembles et géométrie des nombres. *Bull. Soc. Math. France*, 78 :143–151, 1950.
- [Cha84] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1984.
- [Cho06] J. Choe. The double cover relative to a convex domain and the relative isoperimetric inequality. *J. Aust. Math. Soc.*, 80(3) :375–382, 2006.
- [CR07] J. Choe and M. Ritoré. The relative isoperimetric inequality in Cartan-Hadamard 3-manifolds. *J. reine angew. Math.*, 605 :179–191, 2007.



- 
- [Cro84] C. B. Croke. A sharp four-dimensional isoperimetric inequality. *Comment. Math. Helv.*, 59(2) :187–192, 1984.
- [Din71] E. Dinaburg. A connection between various entropy characterizations of dynamical systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35 :324–366, 1971.
- [dlH08] P. de la Harpe. Spaces of closed subgroups of locally compact groups, 2008. arXiv :0807.2030.
- [Dru02] O. Druet. Sharp local isoperimetric inequalities involving the scalar curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(8) :2351–2361 (electronic), 2002.
- [GHL90] S Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, second edition, 1990.
- [Gig11] N. Gigli. On the inverse implication of Brenier-McCann theorems and the structure of  $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ . *Methods Appl. Anal.*, 18(2) :127–158, 2011.
- [GM88] M. Goresky and R. MacPherson. *Stratified Morse theory*, volume 14 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, 1988.
- [Goo77] P. R. Goodey. Hausdorff measure functions in the space of compact subsets of the unit interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 226 :203–208, 1977.
- [GR06] Y. Guivarc’h and B. Rémy. Group-theoretic compactification of Bruhat-Tits buildings. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(6) :871–920, 2006.
- [Gro81] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, volume 1 of *Textes Mathématiques*. CEDIC, Paris, 1981. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
- [Hae10a] T. Haettel. Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact. *J. Lie Theory*, 20(3) :437–468, 2010.
- [Hae10b] T. Haettel. L’espace des sous-groupes fermés de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . *Algebr. Geom. Topol.*, 10(3) :1395–1415, 2010.
- [Hae12] T. Haettel. Compactification de Chabauty de l’espace des sous-groupes de Cartan de  $SL_n(\mathbb{R})$ , 2012. arXiv :1201.4274.
- [Kle92] B. Kleiner. An isoperimetric comparison theorem. *Invent. Math.*, 108(1) :37–47, 1992.
- [Loh94] J. Lohkamp. Metrics of negative Ricci curvature. *Ann. of Math. (2)*, 140(3) :655–683, 1994.

- 
- [Man79] A. Manning. Topological entropy for geodesic flows. *Ann. of Math. (2)*, 110(3) :567–573, 1979.
- [Mat95] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Stud. Adv. Math.* Cambridge Univ. Press, 1995.
- [McC97] M. McClure. The Hausdorff dimension of the hyperspace of compact sets. *Real Anal. Exchange*, 22(2) :611–625, 1996/97.
- [McK70] H. P. McKean. An upper bound to the spectrum of  $\Delta$  on a manifold of negative curvature. *J. Differential Geometry*, 4 :359–366, 1970.
- [MJ00] F. Morgan and D. L. Johnson. Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(3) :1017–1041, 2000.
- [OS84] R. Osserman and P. Sarnak. A new curvature invariant and entropy of geodesic flows. *Invent. Math.*, 77(3) :455–462, 1984.
- [Oss78] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(6) :1182–1238, 1978.
- [Ott01] F. Otto. The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(1-2) :101–174, 2001.
- [PH79] I. Poureza and J. Hubbard. The space of closed subgroups of  $\mathbf{R}^2$ . *Topology*, 18(2) :143–146, 1979.
- [Rog70] C. A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, London, 1970.
- [Set91] A. G. Setti. A lower bound for the spectrum of the Laplacian in terms of sectional and Ricci curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 112(1) :277–282, 1991.
- [Vil09] C. Villani. *Optimal transport, old and new*, volume 338 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2009.
- [Wei26] A. Weil. Sur les surfaces à courbure négative. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 182 :1069–1071, 1926.
- [Yau75] S.-T. Yau. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4) :487–507, 1975.



---

# Table des matières

---

---

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
Travaux décrits dans cette habilitation . . . . .	xi
Autres articles . . . . .	xi
<b>I Courbure, volume et isopérimétrie</b>	<b>1</b>
1 Inégalité de Günther . . . . .	1
1.1 La courbure de Ricci radicielle . . . . .	2
1.2 La fonction chandelle . . . . .	3
1.3 L'inégalité de Günther généralisée . . . . .	4
1.4 Propriétés de la courbure de Ricci radicielle . . . . .	5
1.5 Applications . . . . .	6
1.6 Perspectives . . . . .	8
2 Petit Prince . . . . .	8
2.1 Le problème du Petit Prince . . . . .	8
2.2 La conjecture isopérimétrique . . . . .	9
2.3 Inégalités isopérimétriques en dimension 2 et 4 . . . . .	11
2.4 Idée de démonstration . . . . .	13
2.5 Perspective . . . . .	15
<b>II Espaces de Wasserstein</b>	<b>17</b>
1 Transport optimal et espaces de Wasserstein . . . . .	17
1.1 De Monge à Kantorovich . . . . .	17
1.2 Transport optimal . . . . .	18
1.3 Espaces de Wasserstein . . . . .	19
2 Géométrie dans le cas euclidien . . . . .	21
3 Géométrie dans le cas Hadamard . . . . .	23
3.1 Isométries . . . . .	24

3.2	Un bord à l'infini . . . . .	25
4	Estimation de la taille des espaces de Wasserstein . . . . .	28
4.1	Paramètres critiques . . . . .	28
4.2	Les cubes de Hilbert généralisés . . . . .	30
4.3	Le cas des espaces de Wasserstein . . . . .	31
5	Dynamique sur les mesures du cercle . . . . .	32
5.1	Applications dilatantes du cercle . . . . .	32
5.2	Action sur les mesures . . . . .	33
5.3	Perspectives . . . . .	34
<b>III</b>	<b>Sous-groupes euclidiens</b>	<b>37</b>
1	Topologie de Chabauty . . . . .	37
2	Le cas euclidien . . . . .	38
3	Perspectives . . . . .	40
	<b>Bibliographie</b>	<b>43</b>

[www.fourier.ujf-grenoble.fr/~bkloeckn/](http://www.fourier.ujf-grenoble.fr/~bkloeckn/)

[bkloeckn@ujf-grenoble.fr](mailto:bkloeckn@ujf-grenoble.fr)

Benoît Kloeckner  
 Institut Fourier, Université de  
 Grenoble 1  
 100 rue des maths  
 38 402 Saint Martin d'Hères cedex  
 France