



**HAL**  
open science

# Caractérisation vibro-acoustique d'une cascade de distribution poids lourd

Alexandre Carbonelli

► **To cite this version:**

Alexandre Carbonelli. Caractérisation vibro-acoustique d'une cascade de distribution poids lourd. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ECDL0034 . tel-00779231

**HAL Id: tel-00779231**

**<https://theses.hal.science/tel-00779231>**

Submitted on 21 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

Spécialité : **Mécanique**

par **ALEXANDRE CARBONELLI**

Ingénieur de l'INSA de Lyon en Sciences et Génie des Matériaux

## **CARACTERISATION VIBRO-ACOUSTIQUE D'UNE CASCADE DE DISTRIBUTION POIDS LOURD**

soutenue le 8 novembre 2012

### **JURY :**

Messieurs	P. BOUVET	Docteur-Ingénieur, Vibratéc	Examineur
	M. OUISSE	Professeur, LMARC	Rapporteur
	J. PERRET-LIAUDET	Maître de conférences, LTDS	Directeur de thèse
	M. POTIER-FERRY	Professeur, MEM3	Rapporteur
	E. RIGAUD	Maître de conférences, LTDS	Directeur de thèse
	P. VELEX	Professeur, LAMCOS	Président du jury



*à Marco,  
pour son soutien inestimable...*



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon, UMR CNRS 5513, dirigé par Denis MAZUYER. Je tiens à le remercier pour son accueil, son accessibilité et les nombreux échanges scientifiques que j'ai pu avoir avec lui.

Cette thèse s'inscrit dans un projet financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR, numéro de contrat : ANR-08-VTT-007-02), en partenariat avec Vibratec, Renault Trucks et Renault. Je tiens à remercier sincèrement l'ANR pour son soutien financier de même que l'ensemble des partenaires.

Je tiens à remercier Joël PERRET-LIAUDET pour son encadrement, et la confiance qu'il m'a accordée durant ses trois années. Merci pour l'ensemble des discussions scientifiques que nous avons eues, et pour le travail d'enseignement que nous avons partagé.

Un immense merci à Emmanuel RIGAUD pour sa disponibilité et sa réactivité. Je te dois beaucoup dans cette thèse. Tu as su être patient et toujours trouver le temps de m'aider et de m'aiguiller au cours de ces années.

Je tiens également à remercier Pascal BOUVET, de la société Vibratec, pour son professionnalisme et son investissement dans le projet.

Merci à Philippe VELEX d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Morvan OUISSE et Michel POTIER-FERRY d'avoir accepté de rapporter le manuscrit de ce travail de thèse et pour la qualité des rapports émis.

Je tiens également à remercier l'ensemble des interlocuteurs de Renault Trucks.

Il ne serait pas concevable non plus de ne pas remercier Alain LE-BOT pour les discussions scientifiques et les travaux réalisés ensemble. Je salue tes connaissances scientifiques et ta maîtrise impressionnante des mathématiques.

Merci à Juliette CAYER-BARRIOZ pour ta franchise, tes conseils et pour tout ce que nous avons pu partager.

Merci à Sophie PAVAN pour toutes ces discussions que nous avons pu avoir.

Merci à toutes les personnes de l'administration qui facilitent la vie.

Merci à l'ensemble des doctorants, post-doctorants, ingénieurs qui ont été présents au début et/ou à la fin de ma thèse, merci à Younès, Imène, Gaylord, Romain, Florian (merci pour tous ces échanges musicaux), Matthieu, Marine, Olga, Thibault

et Fabien (une liste exhaustive n'est pas envisageable mais merci à tous les autres aussi).

Merci à Mickaël SYLVESTRE pour ton soutien en C++, j'en avais besoin!

Et pour terminer, merci à tous mes proches et à ceux qui sont venus me soutenir ce mémorable 8 novembre 2012, merci à Marco, mes parents, Flo, Jérôme, Karen, Julie, Ophélie, Cécile et Céline.



**Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon**

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL

**Nbre Ampère 9**

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
---------------	-----------------------	---------	-----

**Nbre DER EEA 1**

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

**Nbre DER STMS 2**

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

**Nbre ICJ 7**

CALLARD Anne-Ségolène	professeur	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

**Nbre INL 18**

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
DAVID Bertrand	professeur	LIRIS	ECL

**Nbre LIRIS 2**

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

**Nbre LMFA 23**

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SINOUE Jean-Jacques	professeur	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL

<i>THOUVEREZ Fabrice</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>TREHEUX Daniel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>VINCENS Eric</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL

**Nbre LTDS 25**

*Total HdR ECL*

91



# Résumé

L'objectif de ce travail est la compréhension et la modélisation des phénomènes physiques qui gouvernent la réponse vibro-acoustique d'une cascade de distribution de poids lourd. On s'intéresse en particulier au bruit de sirènement d'une cascade de six engrenages, qui correspond à la réponse aux excitations internes générées par le processus d'engrènement et au bruit de claquement, qui correspond à la réponse aux vibro-impacts entre dentures sous charge induits par les fluctuations des efforts extérieurs couplées aux excitations internes.

Dans un premier temps, les corrections de denture sont optimisées par une méthode méta-heuristique (essais particuliers), afin de minimiser les fluctuations des erreurs statiques de transmission en prenant en compte la large plage de couples de fonctionnement et les dispersions géométriques induites par les tolérances de fabrication des engrenages. Le bruit de sirènement est alors modélisé à partir d'une méthode spectrale qui prend en compte le couplage entre les différentes excitations internes de la cascade de dentures. Le gain apporté par l'optimisation des corrections sur le bruit de sirènement de la cascade de dentures a pu être estimé.

Dans un second temps, le bruit de claquement est analysé à partir de modèles non linéaires prenant en compte les jeux entre dentures. Une méthode de continuation couplée à une discrétisation par la méthode des différences centrées et une méthode d'intégration temporelle directe sont mises en œuvre.

Le comportement dynamique de la cascade induit par la fluctuation des efforts extérieurs couplée aux excitations internes est complexe : les réponses des différents pignons peuvent être périodiques, pseudo-périodiques ou chaotiques avec possibilité d'observer des pertes de contact multiples, et notamment des chocs entre les flancs rétros des dentures si l'acyclisme moteur est élevé. Les régimes de type vibro-impacts peuvent être établis sur une large plage de vitesses de fonctionnement.



# Abstract

The aim of this work is to characterize the vibro-acoustic response of a truck timing gear cascade, and especially the whining noise induced by internal excitations generated by the meshing process and the hammering noise induced by vibro-impacts between gears under fluctuations of external forces coupled with internal excitations.

The tooth corrections are optimized with a meta-heuristic method (particle swarm) in order to minimize the fluctuations of static transmission errors. A robustness analysis is performed taking into account the wide range of operating torque and the geometric dispersions induced by gear manufacturing tolerances. The whining noise is then modelled using a spectral method considering the coupling between the different internal excitations. The gain provided by the optimization of tooth corrections on the whining noise of the timing gear cascade can thus be estimated.

In a second step, the hammering noise is analyzed using nonlinear models which include the gears' backlashes. A continuation method coupled with centered finite differences method is implemented, as well as a direct time integration method.

The dynamic behaviour of the cascade induced by fluctuating external forces coupled with internal excitations is complex : the gear responses can be periodic, pseudo-periodic, or chaotic, with possibility of multiple contact losses, including collisions between reverse flanks when the engine torque fluctuation is high. Vibro-impact regimes can be observed over a wide range of operating conditions.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Résumé</b>	<b>11</b>
<b>Abstract</b>	<b>13</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>19</b>
<b>1. Comportement dynamique des systèmes à engrenages</b>	<b>23</b>
1.1. Introduction . . . . .	23
1.2. Bruit de sirènement . . . . .	23
1.2.1. Origines et caractéristiques de l’erreur statique de transmission . . . . .	23
1.2.2. Modélisation de l’erreur statique de transmission : principe . . . . .	27
1.2.3. Fluctuation de la raideur d’engrènement . . . . .	27
1.2.4. Modélisation du comportement dynamique ... . . . . .	28
1.3. Bruits induits par des vibro-impacts entre dentures . . . . .	29
1.3.1. Caractéristiques des comportements non-linéaires . . . . .	30
1.3.2. Les modèles non-linéaires . . . . .	32
1.3.3. Les méthodes de résolution . . . . .	33
1.4. Conclusion . . . . .	33
<b>2. Erreur statique de transmission : optimisation ...</b>	<b>35</b>
2.1. Introduction . . . . .	35
2.2. Modélisation du problème d’optimisation . . . . .	36
2.2.1. Description macrogéométrique des pignons étudiés . . . . .	36
2.2.2. Définition des facteurs du problème d’optimisation ... . . . . .	39
2.2.3. Définition de la fonction coût du problème d’optimisation . . . . .	40
2.2.4. Calcul de l’erreur statique de transmission sous charge . . . . .	42
2.2.5. Les sources de dispersion . . . . .	42
2.3. Optimisation par la méthode des essais particulières . . . . .	43
2.3.1. Comportement des pignons non optimisés . . . . .	43
2.3.2. La méthode des essais particulières . . . . .	47
2.3.3. Résultats . . . . .	49
2.3.3.1. Cascade 84-73-56 . . . . .	49
2.3.3.2. Cascade 50-72-54 . . . . .	53

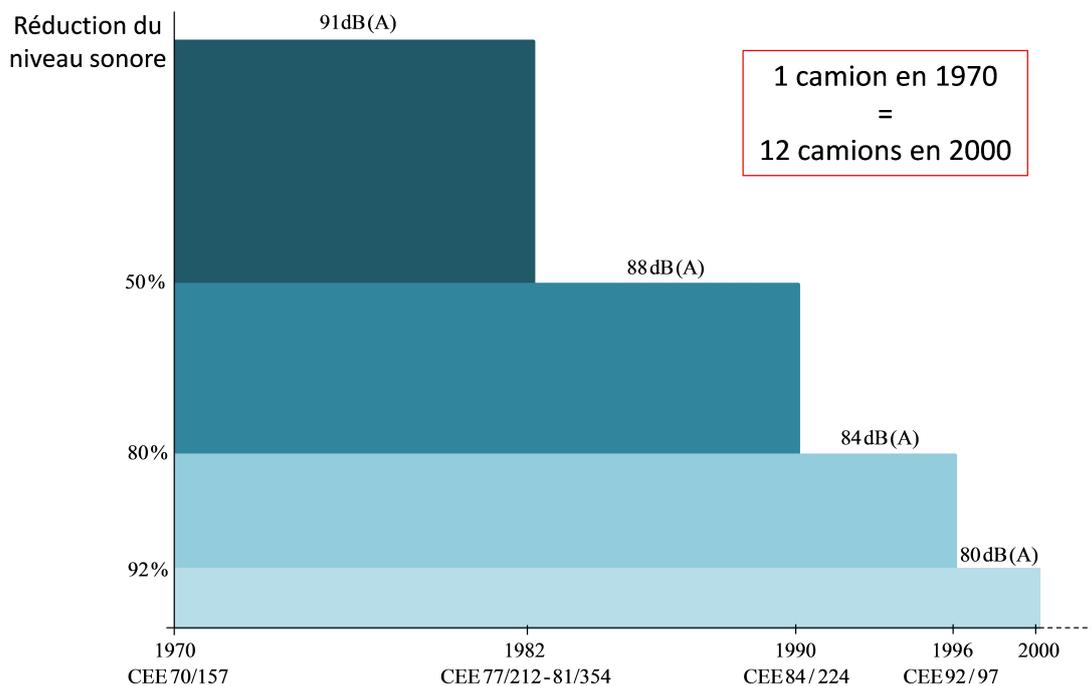
2.4.	Etude de la robustesse des solutions . . . . .	56
2.4.1.	Définition du problème de robustesse . . . . .	56
2.4.2.	Critère de détérioration de la solution . . . . .	57
2.4.2.1.	Valeurs détériorées pour la cascade 84-73-56 . . . . .	57
2.4.2.2.	Résultats pour la cascade 54-72-50 . . . . .	60
2.4.3.	Distribution statistique de la fonction coût . . . . .	63
2.4.3.1.	Résultats pour la cascade 84-73-56 . . . . .	65
2.4.3.2.	Résultats pour la cascade 54-72-50 . . . . .	66
2.5.	Conclusions . . . . .	67
<b>3.</b>	<b>Analyse du bruit de sirènement d'une cascade de distribution</b>	<b>69</b>
3.1.	Introduction . . . . .	69
3.2.	La méthode spectrale itérative . . . . .	69
3.2.1.	Description de la méthode . . . . .	69
3.2.1.1.	Linéarisation de l'effort de denture . . . . .	70
3.2.2.	Généralisation de la méthode pour $m$ engrènements . . . . .	71
3.2.2.1.	Equation matricielle du mouvement dans la base ... .	71
3.2.2.2.	Calcul de la base modale . . . . .	72
3.2.2.3.	Equations modales . . . . .	73
3.2.2.4.	Equations dans le domaine spectral . . . . .	74
3.2.2.5.	Procédure itérative de la méthode . . . . .	75
3.2.2.6.	Erreur dynamique, effort dynamique ... . . . .	76
3.2.2.7.	Fréquences excitatrices . . . . .	76
3.2.2.8.	Utilisation d'une base modale tronquée . . . . .	77
3.2.2.9.	Propriétés des modes de denture . . . . .	78
3.3.	Réponse dynamique de la cascade de distribution . . . . .	80
3.3.1.	Caractéristiques de la distribution étudiée . . . . .	80
3.3.2.	Modélisation de la cascade de distribution en rotation pure . .	80
3.3.2.1.	Cascades 84-73-56 . . . . .	80
3.3.2.2.	Cascades 50-72-54 . . . . .	88
3.3.2.3.	Cascades couplées . . . . .	88
3.3.3.	Modélisation complète de la cascade . . . . .	97
3.3.3.1.	Description du modèle . . . . .	97
3.3.3.2.	Corrections de dentures standards ... . . . .	99
3.3.3.3.	Corrections de denture optimisées ... . . . .	105
3.3.4.	Puissance vibratoire de la plaque support . . . . .	111
3.4.	Conclusions . . . . .	113
<b>4.</b>	<b>Analyse du claquement induit par les pertes de contact ...</b>	<b>115</b>
4.1.	Introduction . . . . .	115
4.2.	Modélisation du comportement dynamique non-linéaire ... . . . .	116
4.2.1.	Modélisation du contact . . . . .	116
4.2.2.	Loi de contact . . . . .	119
4.2.3.	Mise en équation . . . . .	121

4.3. Méthodes de résolution . . . . .	128
4.3.1. Intégration temporelle Runge-Kutta d'ordre 4 . . . . .	128
4.3.2. Méthode de la balance harmonique . . . . .	129
4.3.3. Méthode des différences finies centrées . . . . .	130
4.4. Techniques de continuation . . . . .	132
4.4.1. Stabilité des cycles limites . . . . .	136
4.5. Etude de la cascade de distribution . . . . .	138
4.5.1. Cascade 84-73-56 . . . . .	140
4.5.1.1. Excitations internes ... . . . .	140
Réponses dynamiques 1-T périodiques	
. . . . .	140
Influence de la phase entre les excitations	
. . . . .	161
Influence de l'amortissement	
. . . . .	164
4.5.1.2. Excitations internes et externes ... . . . .	168
4.5.2. Cascades 84-73-56 et 54-72-50 couplées . . . . .	189
4.5.2.1. Excitations internes ... . . . .	189
4.5.2.2. Excitations internes et externes ... . . . .	195
4.6. Conclusions . . . . .	203
<b>A. Le code ISIS et ses entrées/sorties</b>	<b>209</b>
A.1. Les entrées . . . . .	209
A.2. Les sorties . . . . .	210
<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>



## Introduction générale

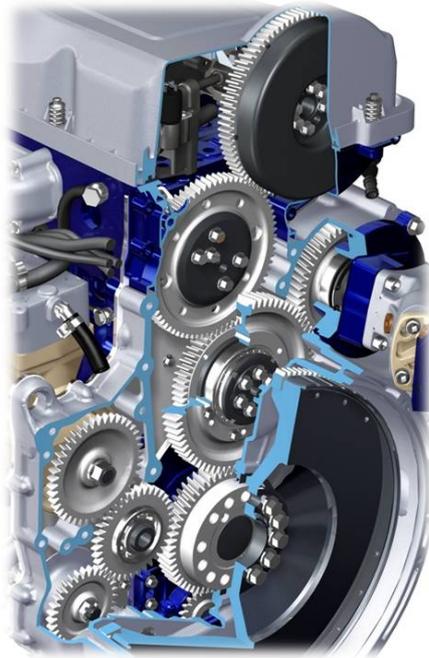
Dans un paysage industriel soumis à des contraintes environnementales de plus en plus grandes, la limitation des nuisances acoustiques liées au fonctionnement des véhicules poids-lourds est une problématique d'actualité. Les efforts déjà réalisés depuis 30 ans ont permis une baisse significative des émissions sonores et il est de plus en plus difficile d'améliorer encore les performances vibro-acoustiques (Figure 0.1). Pourtant, les directives européennes successives relatives au bruit émis par les véhicules poids-lourds imposent aux constructeurs des limitations de plus en plus sévères. A titre d'exemple, certaines villes européennes intègrent aujourd'hui des niveaux sonores maximaux pour les véhicules de livraison circulant en ville.



**Figure 0.1.** : Niveaux des émissions sonores.

Pour répondre à cette demande sociétale croissante, les constructeurs cherchent aujourd'hui à minimiser non seulement l'impact du groupe moto-réducteur, mais également celui des organes périphériques. A ce titre, la cascade de distribution constitue une source de bruit secondaire qu'il convient de minimiser. Elle est située en sortie du groupe moto-réducteur et permet de synchroniser le mouvement du vilebrequin et celui de l'arbre à cames, qui gère le mécanisme d'ouverture des soupapes d'admission et d'échappement. Elle permet également d'entraîner un certain nombre d'accessoires du véhicule, tels que la pompe à huile ou la prise de force extérieure, nécessaire à la mise en action d'éléments accessoires du véhicule (benne, toupie de bétonnière, etc.). Contrairement aux véhicules légers, pour lesquels la transmission du mouvement et des efforts aux accessoires est réalisée par une courroie, voire une

chaîne, la distribution d'un véhicule poids lourd est constituée d'une cascade de pignons (Figure 0.2), en raison du niveau des efforts transmis.

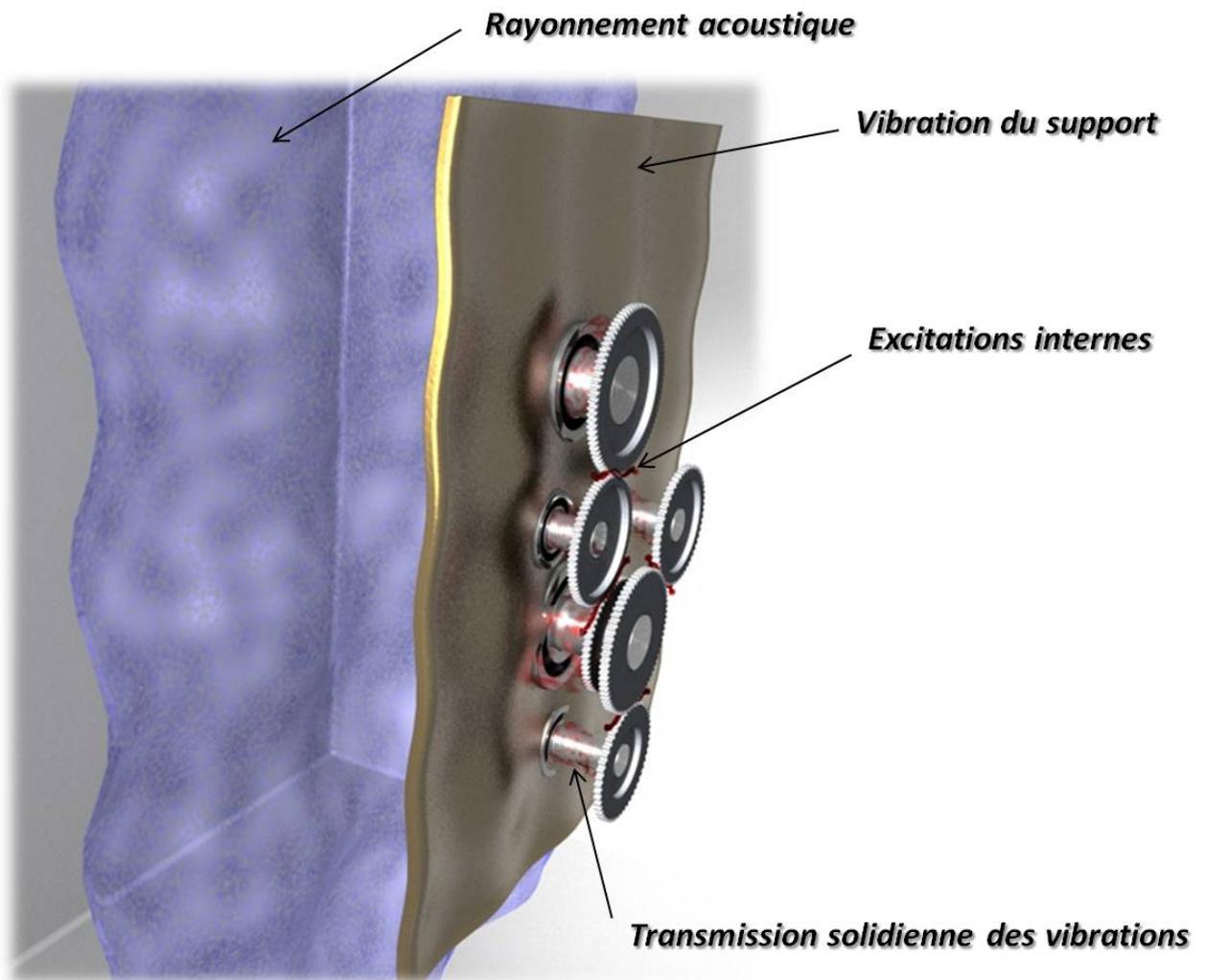


**Figure 0.2.** : Cascade de distribution d'un véhicule poids lourd.

L'alliance des besoins industriels de Renault et Renault Trucks, et de l'expertise technique vibratoire de Vibratec au savoir scientifique du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon se matérialise dans le projet MABCA (Maîtrise du Bruit de la Chaîne cinématique), cadre dans lequel s'inscrit ce travail de thèse. Le projet a pour but de fournir des méthodologies et des outils logiciels de conception de transmissions de puissance par engrenages, qui permettent d'optimiser la conception des transmissions pour garantir de faibles niveaux sonores de bruit émis, et une robustesse des solutions technologiques retenues à la dispersion inhérente aux procédés de fabrication. Les travaux de thèse réalisés dans ce contexte ont pour but de proposer des solutions techniques et des modèles permettant d'estimer le niveau d'excitation dans la cascade de distribution afin de pouvoir les réduire.

Les engrenages sont utilisés dans de nombreux systèmes pour transmettre à des organes récepteurs le couple et le mouvement de rotation générés par l'actionneur. Une transmission par engrenages est constituée de roues dentées montées sur des lignes d'arbres. Ces lignes d'arbres sont supportées par des paliers, le plus souvent des roulements. L'ensemble de ces composants mécaniques est généralement assemblé dans un carter qui supporte les paliers et confine le lubrifiant. Dans notre cas d'étude, le carter se résume à la plaque supportant les roulements et les arbres des pignons. Le comportement dynamique des transmissions par engrenages et les bruits associés

résultent généralement du processus d'engrènement, siège d'excitations internes qui sont à l'origine de surcharges dynamiques sur les dentures. Celles-ci sont transmises, via les lignes d'arbres et les roulements, jusqu'au carter de la transmission. Les vibrations, qui résultent de l'excitation de ces différentes composantes, transmises de manière solidienne au carter font de l'état vibratoire de celui-ci la principale source du bruit rayonné. Les mécanismes mis en jeu sont illustrés Figure 0.3.



**Figure 0.3.** : Principe de génération du bruit de sirènement.

Dans certaines conditions de fonctionnement et en introduisant la non-linéarité liée au jeu entre dentures, on observe des chocs successifs entre les dentures des pignons chargés qui sont à l'origine du bruit de claquement, phénomène encore mal maîtrisé. Ces chocs résultent des pertes de contact autorisées par la présence de jeux fonctionnels. Elles ont pour cause les excitations internes (fluctuations des raideurs

d'engrènement et des erreurs statiques de transmission) et les excitations externes telles que l'acyclisme généré par le fonctionnement des moteurs thermiques : les différentes phases de combustion et de détente génèrent des fluctuations de couple. Le couple global en sortie du moteur peut être considéré comme la somme d'un couple moyen constant et d'un couple oscillant définissant l'acyclisme moteur qui est considéré comme la principale source excitatrice extérieure du bruit de claquement. Par décomposition spectrale, les variations du couple moteur peuvent s'écrire sous la forme d'harmoniques multiples de 0.5 de la vitesse de rotation du vilebrequin (c'est à dire  $H_{0.5}$ ,  $H_1$ ,  $H_{1.5}$ ,  $H_2$ ...). Dans la mesure où il y a deux explosions par tour, l'harmonique  $H_3$  est l'ordre le plus énergétique pour un moteur thermique à six cylindres.

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés au bruit de sirènement et au bruit de claquement de la cascade de dentures.

Le chapitre 1 fournit un état de l'art sur les principaux phénomènes observés, et sur leur modélisation.

Le chapitre 2 traite de l'optimisation des corrections de dentures de six des pignons de la cascade de distribution. En effet, le principal levier pour minimiser le bruit de sirènement consiste à optimiser les corrections micro-géométriques des dentures, afin de réduire les fluctuations des erreurs statiques de transmission associées à chaque engrènement, qui constituent les sources excitatrices du système. L'objectif du travail réalisé consiste donc d'abord à développer une méthodologie permettant de sélectionner un jeu de corrections de dentures optimales qui prennent en compte le caractère multi-engrènement de la cascade, la large plage de couples de fonctionnement et la robustesse des solutions proposées à la dispersion des corrections micro-géométriques des dentures.

Le chapitre 3 se propose de qualifier le sirènement de la cascade de denture, à partir de la modélisation de son comportement dynamique. Pour cela, il est nécessaire de prendre une nouvelle fois en compte le caractère multi-engrènement de la cascade qui génère des excitations paramétriques couplées, induites par les fluctuations périodiques des différentes raideurs d'engrènement.

Enfin, le chapitre 4 porte sur la modélisation non-linéaire du comportement dynamique des pignons sous charge incluant les pertes de contact. La mise en œuvre de ce modèle non linéaire a pour but de dégager les principales caractéristiques du comportement dynamique de la cascade de dentures, dans les conditions de fonctionnement associées à l'apparition du phénomène de claquement.

# 1. Comportement dynamique des systèmes à engrenages

## 1.1. Introduction

Les comportements dynamiques et acoustiques des transmissions par engrenages sont bien identifiés (voir par exemple [1]). On distingue généralement le bruit induit par l'erreur statique de transmission (bruit de sirènement) de ceux générés par des chocs entre dentures (bruit de grailonnement et bruit de claquement). Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés au bruit de sirènement de transmissions par engrenages multi-étages d'une part, et au bruit de claquement d'autre part. Une description particulière de ces deux types de bruit et un état de l'art des modèles existants et de leurs limites sont donc proposés.

## 1.2. Bruit de sirènement

Il est communément admis qu'en l'absence de chocs entre les dents, les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge constituent la source principale d'excitations internes dans les systèmes à engrenages, à l'origine du bruit de sirènement [2]. Le présent chapitre a pour objectif de fournir les origines et les caractéristiques de l'erreur statique de transmission. En outre, nous présentons les grandes lignes de sa modélisation en tant que source excitatrice ainsi que les modèles dynamiques associés.

### 1.2.1. Origines et caractéristiques de l'erreur statique de transmission

Le profil en développante de cercle des engrenages permet en théorie d'assurer un rapport de transmission  $i$  linéaire tel que :

$$\forall t, i = \frac{\theta_1(t)}{\theta_2(t)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (1.1)$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les positions angulaires de deux roues dentées, et  $Z_1, Z_2$  leurs nombres de dents respectifs. Ce rapport de transmission idéal s'observerait si les engrenages étaient géométriquement parfaits et infiniment rigides. L'erreur statique de transmission est définie comme l'écart  $\Delta\theta_2$  entre la position réelle de la roue menée  $\theta_2$  et sa position théorique, pour une vitesse de rotation très faible. Pour deux engrenages cylindriques extérieurs à axes parallèles, cet écart s'exprime :

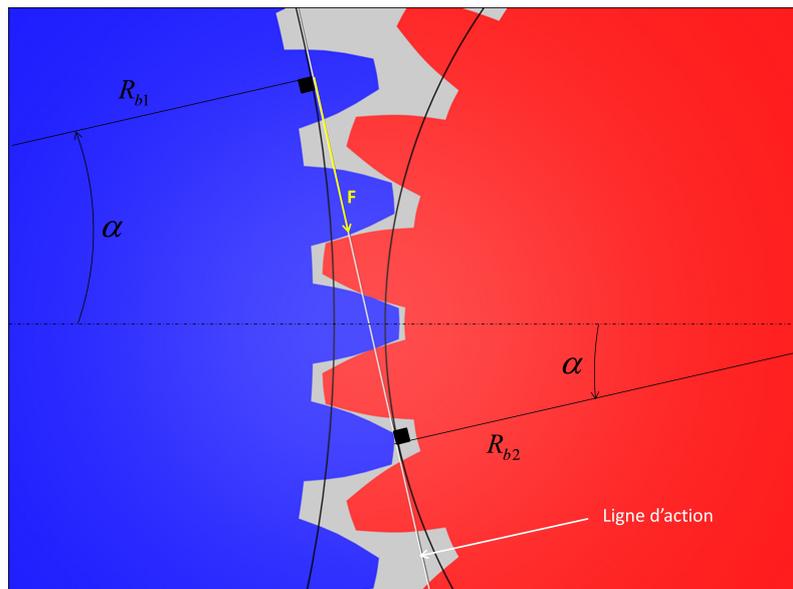
$$\Delta\theta_2(\theta_1) = \theta_2 - \frac{Z_1}{Z_2}\theta_1 \quad (1.2)$$

si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont orientés dans le même sens.

Il est également possible de définir l'erreur statique de transmission  $EST$  comme le rapprochement des dentures sur la ligne d'action, comme représentée sur la Figure 1.1, en utilisant la relation suivante :

$$EST(\theta_1) = R_{b2}.\theta_2(\theta_1) - R_{b1}\theta_1 \quad (1.3)$$

où  $R_{bj}$  désigne le rayon de base de la roue dentée  $j$ .



**Figure 1.1.** : Schéma de la ligne d'action.

L'angle  $\alpha$  est l'angle de pression apparent de fonctionnement de l'engrenage. Lorsque qu'aucun couple n'est appliqué, l'erreur statique de transmission correspond à l'erreur cinématique (ou l'erreur statique de transmission hors charge). Elle a pour origines physiques :

- les défauts de géométrie (erreurs de profils et d'hélice, erreurs de pas, faux-ronds, ...) qui résultent des procédés de fabrication des engrenages,
- les défauts d'assemblage de la transmission (excentricité des roues, erreurs de parallélisme entre dentures),
- les corrections de dentures (usinages micro-géométriques des dents, qui correspondent à des écarts de géométrie volontaires).

Lorsque l'engrenage transmet un couple, l'erreur statique de transmission sous charge a également pour origine :

- les déformations élasto-statiques globales des dentures et des corps de roues,
- les déformations locales de type Hertziennes,
- les déformations globales de la transmission (arbres, paliers, carter) qui peuvent induire des erreurs de parallélisme (Figure 1.2 et Figure 1.3).

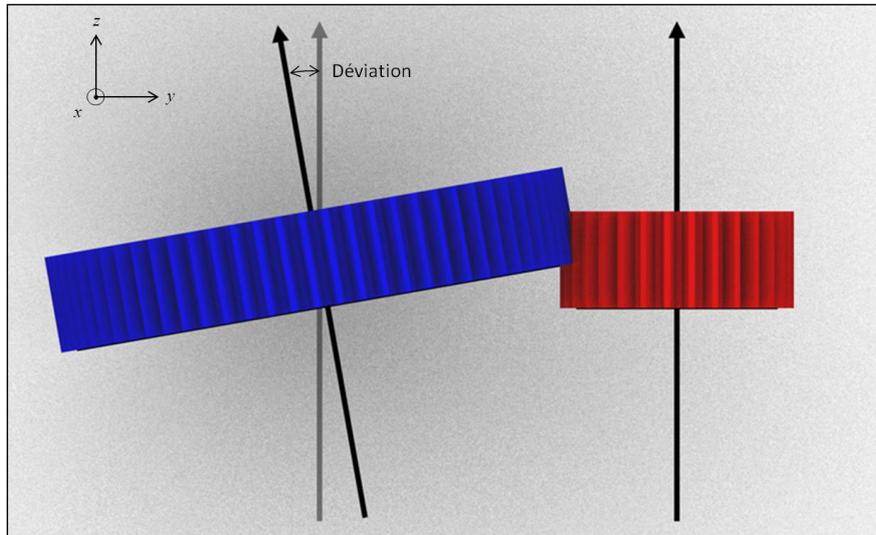
En l'absence de défaut d'excentricité des roues ou d'erreur de pas, l'erreur statique de transmission est une fonction périodique, à la période dite d'engrènement  $T_E$ . La fréquence d'engrènement  $f_E$  d'un couple d'engrenages est définie comme le produit de la fréquence de rotation  $f_j$  d'une roue  $j$  par son nombre de dents  $Z_j$  :

$$f_E = f_j Z_j = \frac{1}{T_E} \quad (1.4)$$

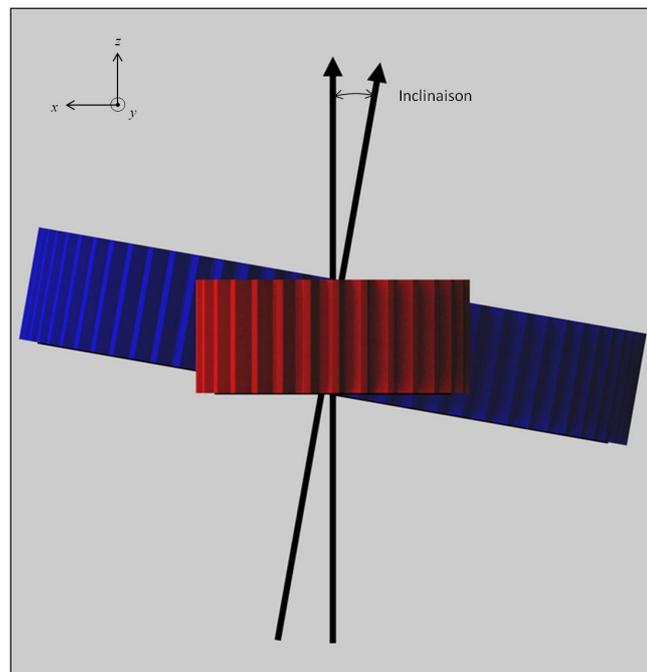
En présence de défauts d'excentricité des roues ou d'erreurs de pas, le contenu fréquentiel de l'erreur statique de transmission s'enrichit de raies à la fréquence de rotation des roues dentées et de raies latérales autour de la fréquence d'engrènement et ses différents harmoniques. Pour des régimes de fonctionnement standards, les fréquences de rotation des roues dentées sont liées à des excitations basses fréquences, alors que la fréquence d'engrènement et ses différents harmoniques sont liés à des excitations hautes fréquences susceptibles d'exciter les modes de denture. Ces derniers correspondent aux modes dont l'excitation génère les plus grandes surcharges dynamiques de denture, et dont la fréquence est généralement de l'ordre de quelques kilohertz.

A titre d'exemple, dans le domaine automobile la valeur moyenne de l'erreur statique de transmission peut être élevée (jusqu'à plusieurs dizaines de  $\mu\text{m}$ ). L'amplitude des fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge varie entre quelques  $\mu\text{m}$  et quelques dizaines de  $\mu\text{m}$  en fonction des charges transmises. Il est généralement admis que le bruit de sirènement est directement corrélé à ces amplitudes.

La sensibilité de l'erreur statique de transmission à la micro-géométrie des dentures a été largement étudiée [3, 4, 5, 6] de même que l'influence des déformations des corps de roue et des couplages entre les différentes dents en prise simultanément [7].



**Figure 1.2.** : Déviation d'une roue.



**Figure 1.3.** : Inclinaison d'une roue.

L'effet des corrections de denture sur la répartition de la charge, les contraintes et l'usure des dents a également été étudié [8, 9]. L'introduction d'écarts de corrections de denture est un moyen efficace de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission. De nombreux auteurs ont étudié l'influence des corrections de dentures [5, 10, 4] pour un couple de fonctionnement donné. Notre cas d'étude comporte plusieurs particularités. Il y a multi-engrènement lorsque l'on considère des cascades de dentures. Les corrections réalisées doivent apporter une amélioration sur une plage de couples. Enfin, une importante dispersion sur les paramètres de corrections est considérée. Les cas d'optimisation aussi complexes sont peu présents dans la littérature.

Il convient donc dans un premier temps de bien modéliser cette source excitatrice.

### 1.2.2. Modélisation de l'erreur statique de transmission : principe

La modélisation de l'erreur statique de transmission requiert la connaissance :

- de la micro-géométrie des dentures en contact définissant l'écart initial hors charge entre les dentures,
- des caractéristiques de souplesse des dentures,
- des déformations locales hertziennes.

A partir de ces données, le calcul de l'erreur statique de transmission est relativement bien maîtrisé [11]. Il est généralement basé sur un modèle éléments finis des dentures qui permet d'accéder à leurs caractéristiques de souplesse. Les équations de contact sont ensuite résolues. Ces dernières se présentent sous la forme d'équations sous contraintes. La description détaillée est présentée dans le chapitre 2. Le calcul permet ainsi d'accéder à la répartition de la charge sur la ligne de contact et au rapprochement des dentures projetés sur la ligne d'action, pour les différentes positions angulaires successives du pignon menant. Par ailleurs la connaissance de l'erreur statique de transmission permet d'obtenir la raideur d'engrènement, décrite ci-après.

### 1.2.3. Fluctuation de la raideur d'engrènement

Les modes locaux des dentures étant de fréquences très élevées, le couplage élastique induit par l'engrènement entre deux roues dentées peut être modélisé par une raideur dite d'engrènement  $K_e$ . Elle a pour caractéristique d'être périodique à la période de l'erreur statique de transmission. Elle est définie à partir de l'erreur statique de transmission et du couple appliqué pour chacune des différentes positions angulaires successives du pignon menant, par la relation suivante :

$$K_e(\theta) = \frac{\partial F}{\partial EST(\theta)} \quad (1.5)$$

où  $F$  est la charge transmise au niveau de la ligne d'action qui vaut pour un couple  $C$  donné :

$$F = C/R_b \quad (1.6)$$

Dans le cas des engrenages des transmissions utilisés dans les secteurs de l'automobile et des poids lourds, l'ordre de grandeur de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement est de quelques centaines de  $N/\mu\text{m}$ . Pour des engrenages en acier à denture droite standard, Welbourn [2] propose un ordre de grandeur de  $14 N/\mu\text{m}$  par unité de longueur de contact exprimée en mm.

Par ailleurs, la raideur d'engrènement fluctue fortement, de manière périodique en régime stationnaire en raison de la fluctuation périodique du nombre de dents en prise. A titre d'exemple, elle peut atteindre des niveaux proches de la valeur moyenne pour des dentures droites non corrigées. Les fluctuations sont généralement plus faibles pour des dentures hélicoïdales.

La raideur d'engrènement joue un rôle primordial dans le comportement dynamique des transmissions par engrenages. D'une part, sa valeur moyenne a un effet direct sur les modes de dentures. D'autre part, ses fluctuations constituent une excitation paramétrique qui peut donc donner lieu à des instabilités ou des résonances paramétriques [12, 13].

L'erreur statique de transmission et la raideur d'engrènement constituent les données d'entrée, en tant que sources excitatrices, aux modèles dynamiques permettant de prédire le comportement en sirènement des transmissions par engrenages. On décrit ci-après les grands principes de ces modèles.

#### 1.2.4. Modélisation du comportement dynamique des engrenages en sirènement

Un très grand nombre de modèles a été proposé pour étudier le comportement dynamique des engrenages en sirènement. Une étude bibliographique [14] permet de faire une synthèse de ces modèles. Généralement, la modélisation s'appuie sur des techniques de discrétisation par éléments finis. On peut distinguer succinctement ces modèles en fonction de la description du couplage entre dentures, à savoir :

- des modèles linéaires à paramètres constants [15, 16] (dans ce cas, l'erreur statique de transmission est introduite comme source excitatrice de type déplacement et seule la raideur moyenne d'engrènement est prise en compte),

- des modèles linéaires à paramètres variables [17] (dans ce cas, la fluctuation périodique de la raideur d'engrènement est introduite),
- des modèles non-linéaires [18] (dans ce cas, ces modèles tentent de résoudre les équations du contact à tout instant).

Les différents modèles peuvent également être classés en fonction du nombre de degrés de liberté. On trouve d'abord des modèles à très faible nombre de degrés de liberté (réduits au mouvement des pignons). Il existe ensuite des modèles à faible nombre de degrés de liberté (de l'ordre de la centaine) lorsque sont pris en compte les lignes d'arbre en torsion/flexion. Enfin, certains modèles proposés possèdent un très grand nombre de degrés de liberté (modélisation de la transmission complète en incluant le carter, jusqu'au million de degrés de liberté). Seuls ces derniers modèles [7] permettent d'accéder à l'état vibratoire de la transmission complète, et donc d'alimenter un éventuel calcul acoustique (vitesse pariétale du carter).

Dans des cas très particuliers, il est possible d'obtenir une solution analytique ou semi-analytique à la réponse de modèles linéaires et paramétriques [19]. Toutefois, cette approche analytique n'est pas généralisable au cas de modèles de transmission plus réalistes. Les équations du mouvement sont la plupart du temps intégrées numériquement dans le domaine temporel. Le principal inconvénient est alors le temps de calcul, qui peut être prohibitif pour des modèles à très grands nombre de degrés de liberté. Les équations du mouvement peuvent également être résolues dans le domaine fréquentiel, permettant de réduire considérablement ces temps de calcul, si tant est que le modèle soit linéaire et paramétrique [17].

Enfin, on trouve également des travaux sur le comportement dynamique des transmissions multi-étages [16, 20, 21, 22]. Les effets de l'influence de la longueur des arbres des pignons, de la flexibilité des roulements et des phases entre les excitations sont étudiés par exemple par Kubur [23].

Les développements du chapitre 3 sont basés sur l'exploitation de la méthode spectrale itérative [17] et sur son extension au cas des transmissions multi-étages présentant plusieurs excitations paramétriques simultanées. Les équations du mouvement sont linéarisées autour des positions d'équilibre statique et prennent en compte les excitations paramétriques que constituent les fluctuations des raideurs d'engrènement. Le choix de cette méthode se justifie par la possibilité de pouvoir intégrer dans les modèles l'ensemble des composants de la transmission et de son environnement en vue de calculs acoustiques de rayonnement, qui nécessitent la connaissance de l'état vibratoire du carter.

## 1.3. Bruits induits par des vibro-impacts entre dentures

Les vibro-impacts sont rendus possibles, sous certaines conditions de fonctionnement, compte tenu de la présence de jeux fonctionnels entre dentures. La perte de

contact des pignons est due en général à de fortes fluctuations de couple ou de vitesse de rotation sur les pignons de la transmission (conséquence d'un acyclisme moteur par exemple). Plus rarement, ces pertes de contact sont induites par l'erreur statique de transmission. Ce phénomène est favorisé par l'excitation des modes propres des systèmes à engrenages mais peut se produire à tout régime si le niveau d'excitation est suffisamment important [24]. On distinguera les pertes de contact entre pignons chargés (bruit de claquement) des pertes de contact entre pignons non chargés (bruit de gaillonnement). Les travaux de thèse sont focalisés sur le bruit de claquement.

La littérature consacrée à l'étude du claquement est très réduite. Pfeiffer [25] propose un modèle théorique pour étudier le claquement et obtient de bonnes corrélations avec des mesures. Ziegler [26] propose un modèle pour déterminer la force de contact lors des impacts et valide ses résultats avec une approche par éléments finis. On trouve également des études prenant en compte la non-linéarité de jeu de denture pour des systèmes de pignons chargés sous l'excitation de l'erreur statique de transmission (couple extérieur constant) où l'on observe des pertes de contact [27, 28, 29]. Cependant, ces modèles ne prennent pas en compte simultanément les excitations internes hautes fréquences (fluctuations de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement) et les excitations externes basses fréquences (acyclisme moteur).

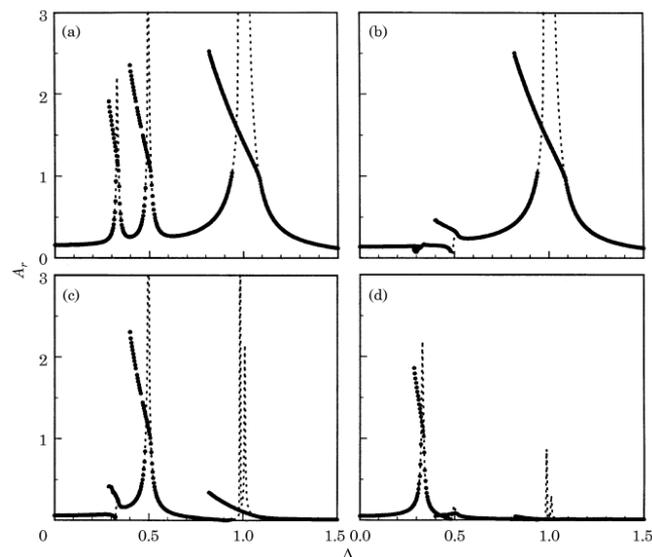
Le bruit de gaillonnement de boîtes de vitesses automobile associé à la dynamique des pignons fous, i.e. pignons non chargés, excités par l'acyclisme des moteurs est désormais relativement bien maîtrisé [30, 31, 32, 24]. Dans ce contexte, les rapports non engagés présentent un pignon fou désolidarisé de l'arbre, et qui tourne donc librement autour de son axe. Sous certaines conditions de fonctionnement, les fluctuations de vitesse de l'arbre primaire induites par l'acyclisme du moteur génèrent des vibrations des pignons fous conduisant à des impacts entre le pignon fou et le pignon complémentaire. Les chocs successifs se propagent par voies solidiennes (roulements, arbres...) et/ou aériennes (rayonnement des corps de roues) jusqu'au carter de la boîte de vitesses. Le gaillonnement est donc le bruit associé à ces régimes de vibro-impacts.

Compte tenu du faible nombre de travaux relatifs au bruit de claquement, nous nous sommes intéressés aux modèles et aux techniques de résolution proposés pour ces problématiques non-linéaires.

### 1.3.1. Caractéristiques des comportements non-linéaires

On se propose ici de fournir les caractéristiques essentielles des comportements non-linéaires associés aux bruits de claquement et de gaillonnement et à la dynamique des pignons chargés sous excitation interne (erreur statique de transmission).

Les principales différences avec les résultats issus des modèles linéaires se situent

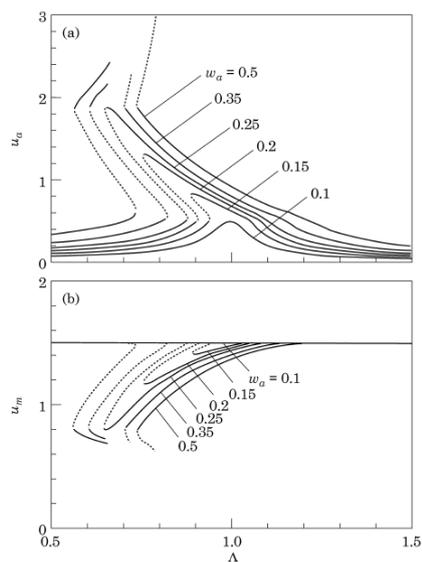


**Figure 1.4.** : Evolution de la valeur RMS (a) et des trois premières composantes harmoniques (b), (c) et (d) de la réponse dynamique en fonction de la fréquence excitatrice sans dimension  $\Lambda$ .

(—) Approche non-linéaire (balance harmonique).

(....) Approche linéaire.

(Blankenship 1995 [33])



**Figure 1.5.** : Effet de la fluctuation de raideur  $w_a$  sur la partie fluctuante (a) et la valeur moyenne (b) de la résonance paramétrique principale du système.

(—) Solutions stables.

(....) Solutions instables.

(Blankenship 1995 [33]).

autour des amplifications dynamiques induites par l'excitation des modes de denture du système (Figure 1.4). L'amplitude de la réponse est telle que les surcharges dynamiques de denture ne sont plus négligeables devant les efforts statiques. Lorsque ces surcharges dépassent l'effort statique, on observe des pertes de contact entre les dents conduisant à des régimes de vibro-impacts. Un effet mollissant est d'abord observé en raison de la phase de "vol libre" du pignon pendant laquelle la raideur d'engrènement est nulle, ce qui induit une diminution de la valeur moyenne (calculée sur toute la période de la réponse). Si l'excitation est suffisante, le jeu de denture est franchi entièrement. Un autre impact a lieu entre les flancs rétros. La nouvelle raideur de contact induit cette fois-ci une augmentation de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement et le système devient durcissant. La Figure 1.5 montre ce phénomène pour différentes valeurs de fluctuations de la raideur supposé purement harmonique d'amplitude  $w_a$ . Lorsque le régime de fonctionnement varie, le caractère mollissant ou durcissant de la réponse en fréquence du système conduit à des pertes de stabilité des solutions qui se traduisent par un saut brutal de l'amplitude de la réponse. Par ailleurs, Theodossiades, Litak et Ji [34, 35, 36], mettent en évidence l'apparition de réponses chaotiques en fonction des paramètres principaux, i.e. les excitations et le jeu de denture, en utilisant des méthodes numériques d'intégration temporelle. Les réponses dynamiques des systèmes non-linéaires peuvent être très riches : périodiques, pseudo-périodiques, chaotiques, avec plusieurs impacts par période et entre les deux flancs des dents. Les régimes sont fonction de l'architecture de la transmission et de ses caractéristiques géométriques (jeux fonctionnels, vitesse de rotation moteur, inerties, couples de fonctionnement ...).

### 1.3.2. Les modèles non-linéaires

Wang [37] fait l'état de l'art des principaux modèles non-linéaires des systèmes de transmission à engrenages. La gestion du contact se fait généralement en utilisant les multiplicateurs de Lagrange ou par pénalité (une raideur d'engrènement est considérée lorsque le contact est établi).

Le cas des pignons non chargés (graillonnement) est bien étudié [38, 39, 30, 31, 40, 24]. Les modèles correspondants s'appuient généralement sur une description de la réponse par morceaux. En effet, un coefficient de restitution (grandeur représentative de l'énergie ou de la vitesse restituée après l'impact) est utilisé pour modéliser le contact. Le temps de contact est supposé négligeable par rapport au temps de "vol libre". Le mouvement relatif des deux pignons engrenant peut se ramener au comportement d'un oscillateur à impacts [24]. La dynamique du système peut être décrite simplement par une carte des itérés précisant la vitesse d'impact et le déphasage par rapport à l'excitation. Les problèmes de type "bouncing ball" (une masse qui rebondit sur un ou deux plans qui oscillent avec une certaine vitesse et une certaine amplitude) sont abondamment étudiés dans la littérature [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49].

L'étude des pignons chargés sous l'excitation de l'erreur statique de transmission

(couple extérieur constant) se fait généralement en considérant une raideur d'engrènement constante [50] ou paramétrique [51]. En effet, la prise en compte de l'impact par un coefficient de restitution n'est plus valide compte tenu des durées de chocs plus longues dans ce contexte. Ont été également étudiées [52, 29] les interactions entre les excitations paramétriques internes, périodiques à la fréquence d'engrènement, comme c'est le cas pour les fluctuations de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement. Les pignons sont réduits à des masses et des inerties en rotation. Les raideurs des supports (roulements, arbre) peuvent être prises en compte, mais des modèles complets incluant l'environnement carter sont prohibitifs au niveau du temps de calcul.

Enfin peu d'études, dans le contexte de l'engrenage, concernent l'amortissement et vraisemblablement son caractère non-linéaire [50].

### 1.3.3. Les méthodes de résolution

Comparin [53], Kahraman [54, 52, 29], Natsavias [55] et Theodossiades [34] utilisent des approches semi-analytiques pour étudier les différents types de réponse périodique possibles (pas d'impact, impact sur un flanc ou impacts sur les deux flancs). L'intégration temporelle, comme par exemple avec des méthodes de type Runge-Kutta, est nécessaire pour étudier les solutions non-périodiques, comme les solutions chaotiques par exemple. Pour les solutions périodiques, l'utilisation de la méthode de la balance harmonique couplée à des techniques de continuation est la solution la plus communément utilisée [33, 29, 56, 51, 57, 58].

Cependant, pour décrire correctement la perte de contact, la méthode de la balance harmonique, nécessite le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel pour résoudre le problème de contact.

## 1.4. Conclusion

L'étude bibliographique réalisée nous a permis d'orienter les choix techniques de modélisation de ces phénomènes. Comme nous venons de le voir, la maîtrise vibro-acoustique de la cascade de distribution passe par plusieurs étapes. En premier lieu, réduire le bruit de sirènement revient à réduire la source excitatrice que représente l'erreur statique de transmission. Cela se fait par l'optimisation des corrections de dentures des pignons. En second lieu, il convient de bien modéliser la cascade de distribution et les excitations pour estimer l'état vibratoire de la plaque support. Enfin, pour appréhender le comportement dynamique non-linéaire associé au claquement, il est nécessaire de prendre en compte l'acyclisme comme excitation externe et la non-linéarité du jeu entre denture.



## 2. Erreur statique de transmission : optimisation des corrections de dentures

### 2.1. Introduction

Le phénomène de sirènement est généré par la fluctuation de l'erreur statique de transmission qui constitue la source excitatrice vibratoire. Ainsi, réduire cette dernière permet de diminuer les surcharges dynamiques de denture, et finalement le bruit rayonné par la transmission. L'erreur statique de transmission sous charge dépend des situations instantanées des dentures qui résultent des défauts de géométrie, des déformations élastiques des dentures, mais également des déformations de l'ensemble de la transmission (carter, plaque support, arbres, roulements) qui peuvent affecter le parallélisme entre les dentures.

Les corrections de denture correspondent à des écarts de géométrie volontaires. Pour un engrenage sans défaut de fabrication, l'optimisation des corrections permet de diminuer fortement, voire d'éliminer la fluctuation de l'erreur statique de transmission pour un couple de fonctionnement donné. Dans le cas d'une distribution de véhicule poids-lourd, l'optimisation des pignons doit être performante pour une plage de couple de fonctionnement, ce qui constitue une première difficulté. Par ailleurs, le multi-engrènement implique que les corrections réalisées sur un pignon intermédiaire affectent les deux engrènements concernés. Enfin, il convient de prendre en compte l'effet des écarts de géométrie involontaires liées aux tolérances de fabrication comme source de dispersion.

De nombreux auteurs [59, 3, 4, 60, 9, 8, 61] ont considéré l'optimisation des corrections de denture d'un engrenage parallèle simple étage. En revanche peu [62, 63] ont traité l'aspect multi-engrènement d'une cascade de pignons, où le pignon intermédiaire engrène avec deux roues.

Le nombre important de paramètres et les fortes irrégularités de la fonction définissant l'erreur statique de transmission écartent le choix de méthodes classiques de recherche d'optimum. Par exemple, la méthode du gradient [64] requiert le calcul de la jacobienne du système, difficile à estimer dans notre cas.

Les algorithmes d'optimisation métaheuristiques [65, 66] ne nécessitent qu'une fonction de classe  $C^0$ . Dans ce travail et parmi les algorithmes métaheuristiques existants, nous avons choisi la méthode des essais particuliers [67] pour déterminer les

corrections de dentures optimales. La robustesse des solutions (jeux de corrections des pignons) aux tolérances de fabrication et aux défauts de géométrie est ensuite éprouvée par un critère de robustesse et par une approche statistique.

## 2.2. Modélisation du problème d'optimisation

Pour appréhender un problème d'optimisation, il est nécessaire de définir correctement les facteurs d'optimisation. Les données macrogéométriques et microgéométriques sont présentées. Dans un problème d'optimisation, on définit une fonction à minimiser (ou maximiser selon les cas) appelée "fonction coût". Cette fonction est définie de manière à prendre en considération le multi-engrènement sur une plage de couples donnée.

### 2.2.1. Description macrogéométrique des pignons étudiés

La cascade de distribution complète de la Figure 2.1 est composée de 10 pignons assurant la transmission du couple du vilebrequin à l'arbre à cames et entraînant également différents organes extérieurs tels que pompe à huile ou prise de force extérieure. Le modèle d'étude retenu et présenté Figure 2.2, concerne les 6 pignons cerclés de couleur Figure 2.1.

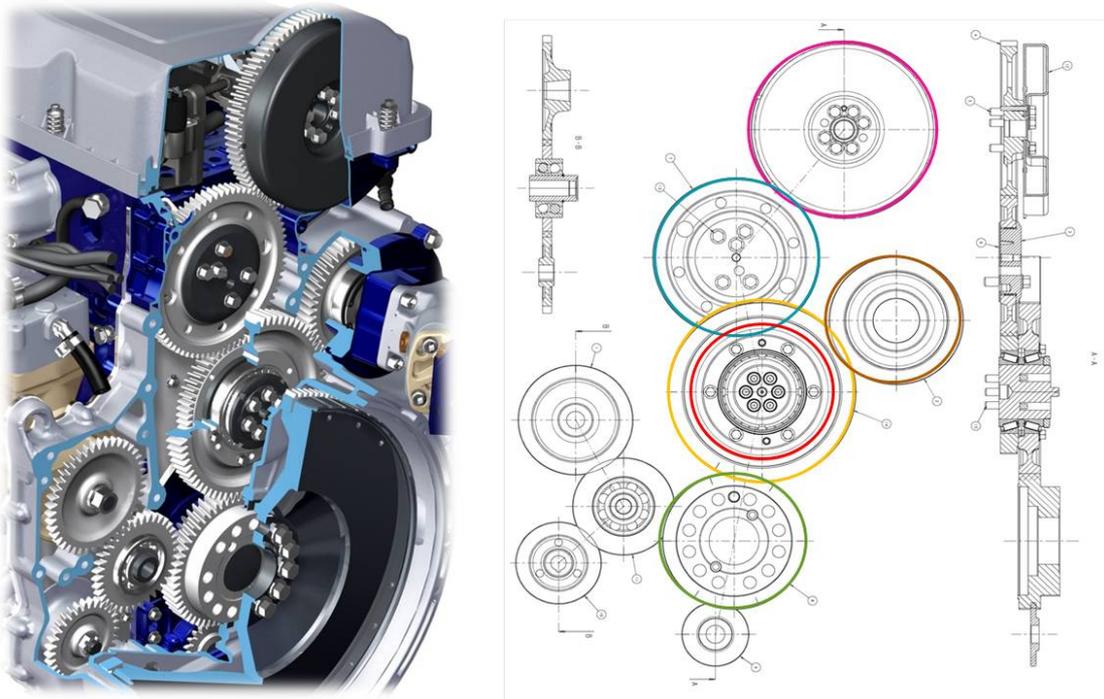


Figure 2.1. : Cascade de distribution d'un véhicule poids lourd.

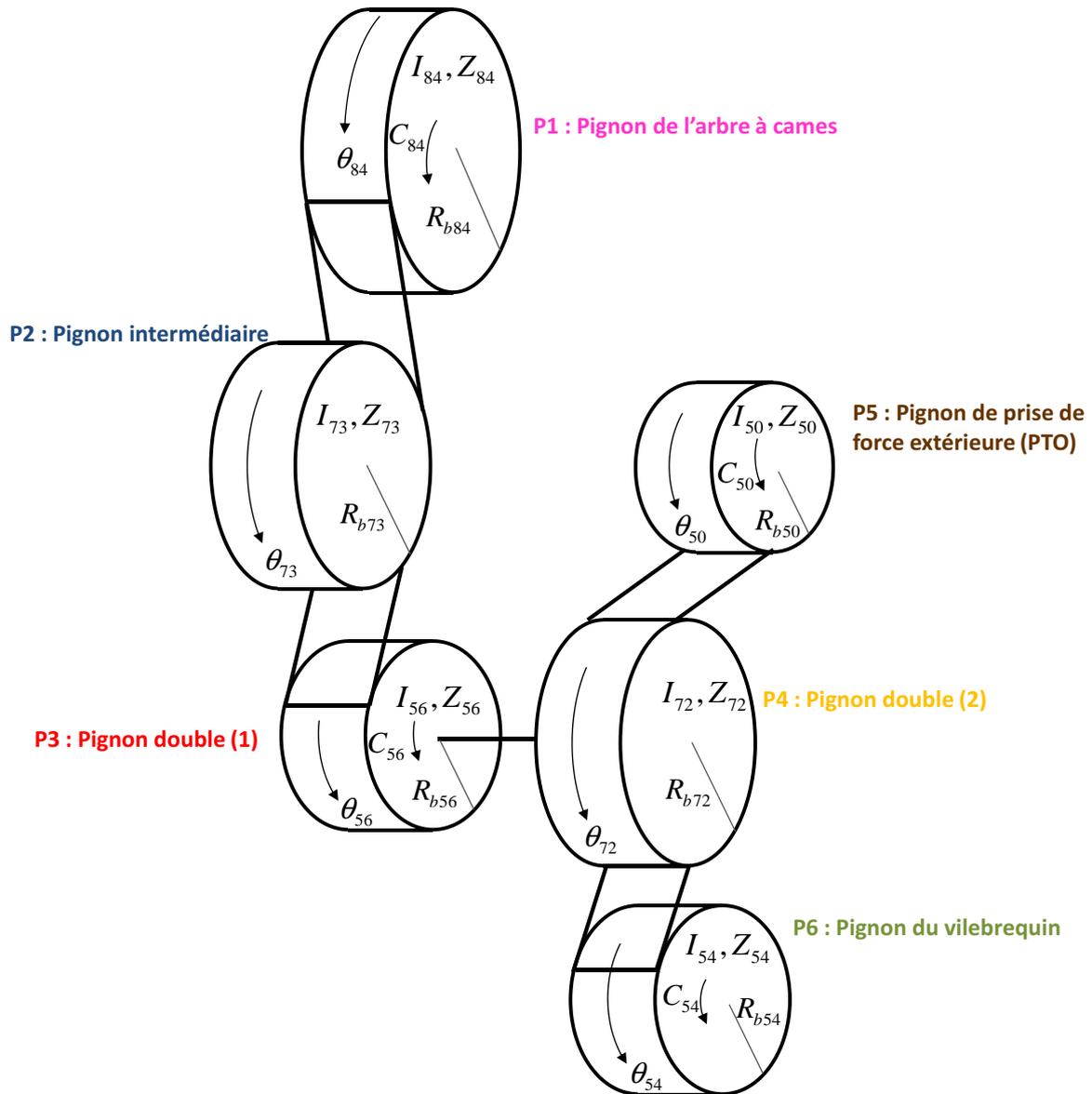


Figure 2.2. : Les pignons de la cascade retenus pour l'étude.

Les caractéristiques macroscopiques de ces pignons sont listées dans le Tableau 2.1.

Pignon	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Nombre de dents $Z_i$	84	73	56	72	50	54
Module normal $m_n$ [mm]	2,85			3,25		
Diamètre de pied $\phi_{r_i}$ [mm]	226,7	200,2	151,1	150,8	221,9	163,9
Diamètre de base $\phi_{b_i}$ [mm]	229,4	199,3	152,9	157,1	226,3	169,7
Diamètre primitif $\phi_{p_i}$ [mm]	240,6	209,1	160,4	165,0	237,6	178,2
Diamètre de tête $\phi_{a_i}$ [mm]	241,7	217,0	168,0	174,4	243,9	186,0
Largeur active de denture $b_i$ [mm]	22			28		
Angle de pression normal $\alpha_{0n}$ [°]	17,5					
Angle d'hélice de base $\beta_{b_i}$ [°]	5,78	-5,78	5,78	-10	10	10
Coefficient de déport $x_{n_i}$	-0,650	0,148	0,300	-0,081	-0,394	-0,166
	84/73	56/73	54/72	50/72		
Entraxe de fonctionnement $a_k$ [mm]	233,4	186,0	206,0	199,7		

**Tableau 2.1.** : Caractéristiques macrogéométriques des pignons étudiés.

La plage de variation du couple du pignon de l'arbre à cames  $C_{84}$  est [112 -312] N.m (données fournies par Renault Trucks). Le couple appliqué par le pignon de prise de force extérieure est supposé constant. Sa valeur peut être soit quasi nulle, soit 200 N.m ou soit 400 N.m. Avec les couples appliqués par les pignons de l'arbre à cames  $C_{84}$  et de la prise de force extérieure  $C_{50}$ , on accède au couple délivré par le vilebrequin  $C_{54}$  en écrivant l'équilibre statique :

$$C_{54} = \frac{54}{50}C_{50} + \frac{54}{72}C_{56} \quad (2.1)$$

où

$$C_{56} = \frac{56}{84}C_{84} \quad (2.2)$$

soit

$$C_{54} = \frac{54}{50}C_{50} + \frac{1}{2}C_{84} \quad (2.3)$$

Ainsi les valeurs extrêmes et moyennes des couples appliqués sont données dans le Tableau 2.2.  $C_{X/Y}$  désigne le couple appliqué par le pignon à X dents sur la roue à Y dents. Pour le couple du vilebrequin  $C_{54/72}$ , ces valeurs sont données en fonction des trois différents couples possibles pour le pignon de prise de force extérieur  $C_{50/72}$ .

	Min	Moy.	Max	Min	Moy.	Max	Min	Moy.	Max
$C_{50/72} [N.m]$	~ 0			200			400		
$C_{54/72} [N.m]$	57	107	157	272	322	372	488	538	588
	$\forall C_{50/72}$			Min	Moy.	Max			
	$C_{84/73} [N.m]$			112	222	312			
	$C_{56/73} [N.m]$			74	141	208			

**Tableau 2.2.** : Couples de fonctionnement des pignons.

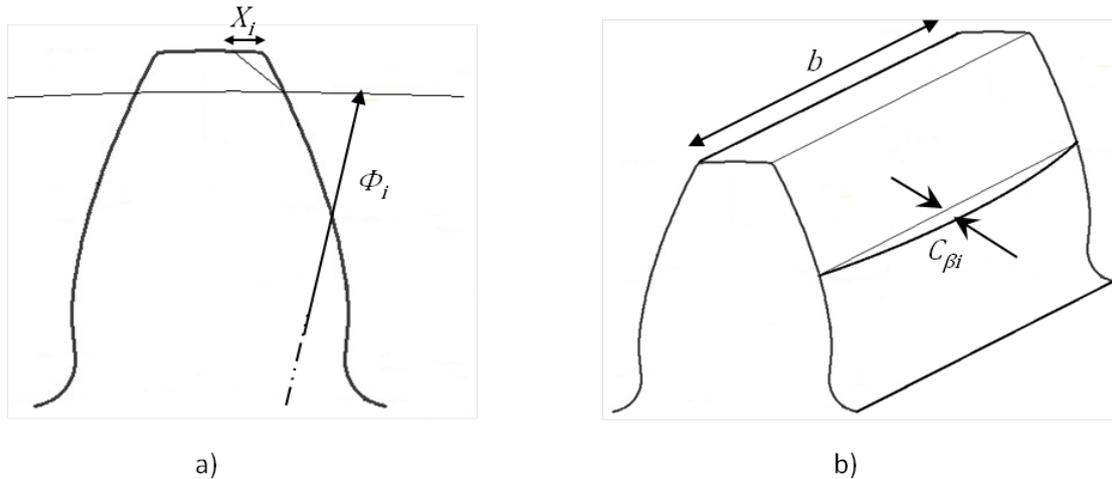
### 2.2.2. Définition des facteurs du problème d'optimisation : corrections microgéométriques de denture

En général, pour minimiser l'erreur statique de transmission, on pratique des enlèvements de matières micrométriques selon le profil de denture et selon sa largeur (correction d'hélice). Ces corrections de denture constituent les facteurs du problème d'optimisation. En accord avec Renault Trucks, celles retenues pour l'étude sont :

- $X_i$  : les dépouilles en tête de dent pour les 6 pignons. Comme le montre la Figure 2.3 a, il s'agit de l'enlèvement de matière en tête de dent. Hormis son effet sur l'erreur statique de transmission, la dépouille en tête de dent permet d'éviter une entrée en contact prématurée qui est générée par une avance de la dent liée aux déformations des autres dents.
- $\phi_i$  : les diamètres qui caractérisent les profondeurs de dépouille. Ils correspondent aux diamètres à partir desquels commencent les dépouilles qui varient linéairement jusqu'à la tête des dents.
- $C_{\beta k} = C_{\beta i} + C_{\beta j}$  : le bombé cumulé entre deux dents centré sur la largeur active de denture  $b$ . Il est supposé parabolique sur la largeur de denture (voir Figure 2.3b).

où  $i = 1..6$  pour chacun des pignons, et  $k = 1..4$  pour chaque engrènement entre un pignon  $i$  et un pignon  $j$ .

Ainsi, le problème d'optimisation concerne au total 16 facteurs.



**Figure 2.3.** : Paramètres de correction.

- a) Correction de profil : dépouille  $X_i$  et diamètre de dépouille  $\phi_i$ .
- b) Correction d'hélice : bombé  $C_{\beta i}$ .

### 2.2.3. Définition de la fonction coût du problème d'optimisation

Il est possible de séparer notre problème en deux cascades de trois pignons, les pignons 84, 73 et 56 d'une part, les pignons 50, 72 et 54 d'autre part. Lorsqu'il y a multi-engrènement, i.e. un pignon engrenant directement avec deux autres, il y a interdépendance entre les corrections de dentures des deux engrenages en jeu. La minimisation du niveau d'excitation vibratoire est un problème d'optimisation multi-objectifs compte tenu que deux erreurs statiques de transmission sont à minimiser simultanément. Les fronts de Pareto [65] associés au problème multi-objectifs sont présentés. Néanmoins, pour une cascade de 3 pignons, les deux erreurs statiques sont a priori aussi importantes l'une que l'autre, on ramène donc le problème à une optimisation mono-objectif en considérant la somme sans pondération spécifique des valeurs crête-à-crête des deux erreurs statiques de transmission (notées  $E_{cc_1}$  et  $E_{cc_{1I}}$ ). Ce passage d'une optimisation multi-objectifs à une optimisation mono-objectif est valable car les grandeurs sont de même nature. L'amplitude crête-à-crête de l'erreur statique de la cascade cumulée sur le pignon intermédiaire est définie comme la fonction coût à minimiser et est notée  $f$ . Si  $f_{(z_1/z_2)}$  est la valeur de l'erreur statique de transmission crête-à-crête d'un engrènement, la fonction coût  $f$  d'une cascade de trois engrenages s'écrit pour des couples de fonctionnement  $C_{z_1}$  et  $C_{z_3}$  donnés :

$$f(\mathbf{C}) = f_{(z_1/z_2)}(C_{z_1}) + f_{(z_3/z_2)}(C_{z_3}) \quad (2.4)$$

Ainsi pour un couple de fonctionnement donné, la fonction coût dépend de 8 facteurs : les dépouilles des trois pignons, les diamètres de dépouilles respectifs et les bombés cumulés des deux engrènements considérés. Dans le cas de notre étude,

l'optimisation se fait sur une plage de couple. La fonction coût d'un engrenement devient donc :

$$f_{(Z1/Z2)} = \int_{C_{min}}^{C_{max}} p(C) E_{cc_I}(C) dC \quad (2.5)$$

Dans l'équation (2.5),  $p(C)$  représente la fonction de distribution du couple sur la plage considérée  $[C_{min} \quad C_{max}]$ . Elle est supposée uniforme, i.e.  $p(C) = \frac{1}{C_{max}-C_{min}}$ .

Le calcul de l'intégrale (2.5) est réalisée par quadrature de Gauss-Hermite. Les pondérations des points de Gauss permettent d'approcher la valeur de l'intégrale par l'estimation de la fonction en N points, ce qui procure un gain de temps très important. Avec trois points de Gauss, la fonction coût pour une paire de pignons Z1/Z2 devient :

$$f_{(Z1/Z2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i E_{cc_I}(C_i) \quad (2.6)$$

Avec  $a_i$  les pondérations de Gauss  $\begin{cases} a_1 = 0.5556 \\ a_2 = 0.8888 \\ a_3 = 0.5556 \end{cases}$

et  $C_i$  les points de Gauss  $\begin{cases} C_1 = \frac{C_{max}+C_{min}}{2} (1 - \sqrt{\frac{3}{5}}) \\ C_2 = \frac{C_{max}+C_{min}}{2} \\ C_3 = \frac{C_{max}+C_{min}}{2} (1 + \sqrt{\frac{3}{5}}) \end{cases}$

La fonction coût de la cascade 84-73-56 qui sera retenue pour l'optimisation s'écrit finalement :

$$f_{84/73/56} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i (E_{cc_{84/73}}(C_{84/73 i}) + E_{cc_{56/73}}(C_{56/73 i})) \quad (2.7)$$

Pour considérer les trois différentes valeurs du couple  $C_{50/72}$  dans le cas particulier de la seconde cascade, on moyenne les trois contributions de la valeur de l'erreur statique de transmission crête-à-crête de l'engrenement 50/72 et de la fonction coût de l'engrenement 54/72 associée :

$$f_{54/72/50} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \left( E_{cc_{50/72}}(C_{50/72 j}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i E_{cc_{54/72}}(C_{50/72 j}, C_{54/72 i}) \right) \quad (2.8)$$

### 2.2.4. Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge

Le calcul de l'erreur statique de transmission sous une charge  $F$ , correspondant à l'effort total s'exerçant sur l'ensemble des couples de dents en prise, est relativement classique [11, 7]. Ce calcul est basé sur des hypothèses de petites déformations et d'élasticité linéaire. Pour chaque position  $\theta$  de la roue menante, une analyse cinématique du fonctionnement de l'engrenage permet de déterminer les lignes théoriques de contact (lieu des contacts potentiels sur les surfaces des dents en prise dans le plan d'action). On discrétise ensuite les lignes de contact. Une matrice de souplesse  $\mathbf{H}$  relie les points discrets des lignes de contact. Elle est calculée à partir des matrices de souplesse des dents en prise essentiellement représentatives de la flexion des dents et du corps de roue. Les matrices de souplesse des dents en prise sont généralement obtenues par modélisation par éléments finis. On intègre également les déformations locales de type Hertz dans la matrice  $\mathbf{H}$ . Les corrections de denture et les défauts de géométrie sont introduits par un vecteur d'écarts initiaux séparant les dents en ces points discrets  $\underline{e}$ . Avec  $F$  la force totale transmise par le pignon menant, on peut alors accéder au rapprochement de corps rigide global des dents  $\delta$  pour chaque position successive  $\theta$  des roues dentées et aux charges réparties  $P_i$  sur les points discrets des lignes de contacts.

Le système d'équations sous contraintes qui gère les déformations élastostatiques de l'engrenage s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{H} \cdot \underline{P} = \delta(\theta) \cdot \underline{1} - \underline{e} \\ \underline{1} \cdot \underline{P} = F \end{cases} \quad (2.9)$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} -\mathbf{H} \cdot \underline{P} + \delta(\theta) \cdot \underline{1} \leq \underline{e} \\ P_i \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

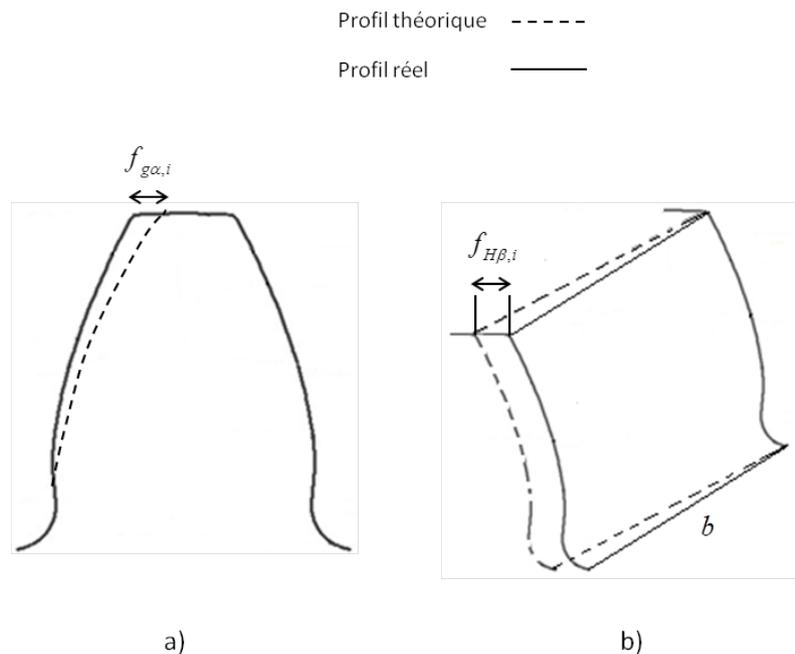
La résolution du système d'équations (2.9) sous les contraintes (2.10) peut se faire avec la méthode du simplexe, par itérations, ou par programmation quadratique. Dans cette étude, on utilise un logiciel de calcul dédié fourni par Renault Trucks, qui s'appuie sur une résolution par la méthode du simplexe.

### 2.2.5. Les sources de dispersion

Les fonctions coût précédemment définies sont des fonctions perturbées par les écarts de fabrication. Les défauts de géométrie induits par les tolérances de fabrication présentés Figures 2.4 a et 2.4 b, peuvent constituer d'autres écarts microgéométriques qu'il est nécessaire de prendre en compte à travers l'étude de la robustesse des solutions :

- le défaut d'angle d'hélice cumulé :  $f_{H\beta,k} = f_{H\beta,i} + f_{H\beta,j}$
- les défauts d'angle de pression pour chacune des roues :  $f_{g\alpha,i}$  et  $f_{g\alpha,j}$

La variabilité doit donc être prise en compte car elle peut engendrer des écarts de 10 dB entre deux échantillons d'une même population, a priori identiques, en termes de rayonnement acoustique [68, 69]. La robustesse de chaque solution optimisée obtenue est donc analysée.



**Figure 2.4.** : Défauts de géométrie.

- Défaut d'angle de pression.
- Défaut d'angle d'hélice  $f_{H\beta,i}$ .

## 2.3. Optimisation par la méthode des essais particulières

L'objectif de l'optimisation mise en œuvre est de minimiser le niveau d'excitation vibratoire en prenant en compte le multi-engrènement et la variation du couple de fonctionnement dans une grande plage de fonctionnement.

### 2.3.1. Comportement des pignons non optimisés

Les corrections de denture de référence (avant optimisation) introduites sur les dents sont listées dans le Tableau 2.3. Ces valeurs ont été définies sans tenir compte

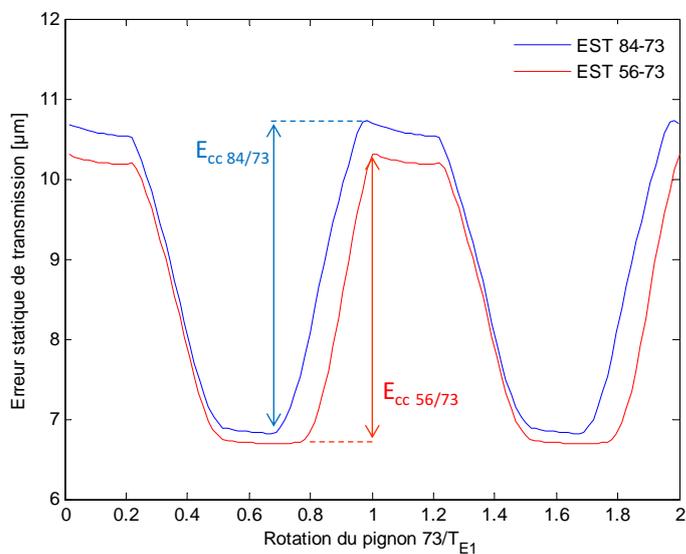
de leur effet sur la fluctuation de l'erreur statique de transmission. Elles ne sont donc a priori pas optimisées.

	$Z=84$	$Z=73$	$Z=56$	$Z=54$	$Z=72$	$Z=50$
Dépouille $X_i$ [ $\mu\text{m}$ ]	20	15	20	35	35	30
Diamètre de dépouille $\phi_i$ [mm]	239,25	214,55	165,55	183,15	241,05	171,55
Bombé cumulé $C_{\beta k}$ [ $\mu\text{m}$ ]		12	12		12	12

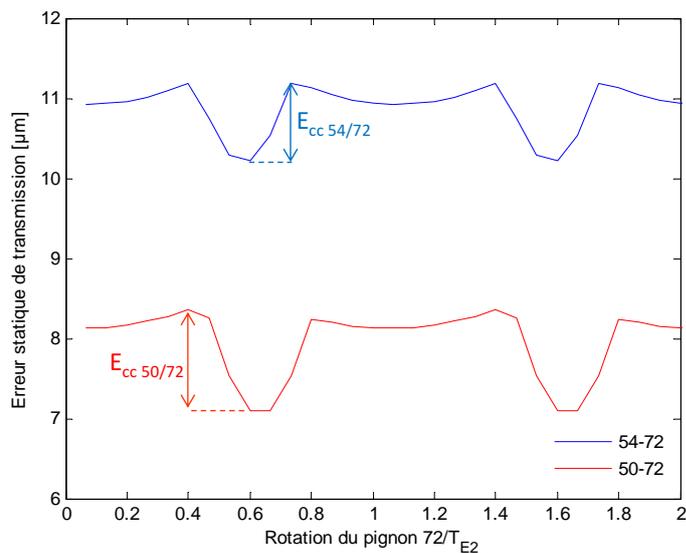
**Tableau 2.3.** : Valeurs des corrections de référence (non optimisées) pour les pignons étudiés.

Les Figures 2.5 et 2.6 présentent l'évolution de l'erreur statique de transmission exprimée en micromètres sur la ligne d'action pour les deux cascades. L'erreur statique de transmission sous charge est périodique à la période d'engrènement  $T_E$  si l'on ne tient pas compte des erreurs de pas et des défauts d'excentricité des roues. Les couples de fonctionnement considérés sont les couples moyens, i.e.  $C_{84/73} = 222 \text{ N.m}$  et  $C_{56} = 141 \text{ N.m}$  pour la cascade 84-73-56,  $C_{50/72} = 200 \text{ N.m}$  et  $C_{54/72} = 322 \text{ N.m}$  pour la cascade 50-72-54. L'indicateur retenu pour décrire le niveau d'excitation vibratoire d'une paire de pignons correspond à la valeur crête-à-crête de l'erreur statique de transmission sous charge  $E_{cc}$ . Pour la cascade 84-73-56, l'erreur statique de transmission crête-à-crête est égale à 3,9  $\mu\text{m}$  pour l'engrènement 84/73 et à 3,6  $\mu\text{m}$  pour l'engrènement 56-73. Les valeurs sont sensiblement plus faibles pour la seconde cascade, soit 1  $\mu\text{m}$  pour l'engrènement 54/72 et 1,3  $\mu\text{m}$  pour l'engrènement 50/72.

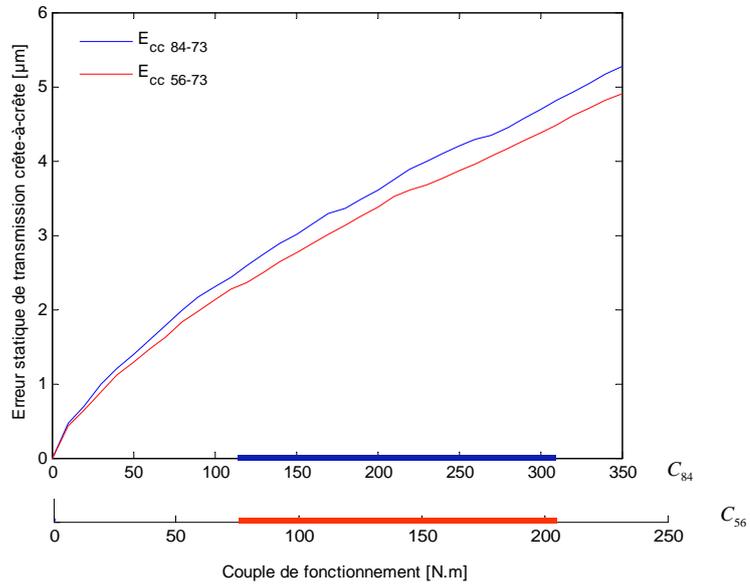
Les erreurs statiques de transmission crête-à-crête sont tracées en fonction du couple de fonctionnement Figures 2.7 et 2.8. Les couples possibles pour chaque engrènement sont représentés par les zones bleues et rouges des axes des abscisses et sont issus du Tableau 2.2. Pour les deux cascades, la croissance de l'erreur statique de transmission crête-à-crête est globalement monotone avec le couple. Il n'y a donc pas réellement de couple optimal pour ces corrections. Les niveaux sont similaires pour les deux engrènements d'une même cascade, mais les niveaux de la cascade 50-72-54 sont plus faibles que ceux de la cascade 84-73-56. Les corrections de profil considérées sont dites "courtes", i.e. le diamètre de dépouille est très supérieur au diamètre primitif du pignon. Le rapport de conduite de chaque engrènement est tel qu'il existe toujours un point pour lequel le profil est non corrigé dans la zone de contact. Par conséquent, l'erreur statique de transmission hors charge (ou erreur cinématique) de l'engrènement sans défaut de géométrie est nulle.



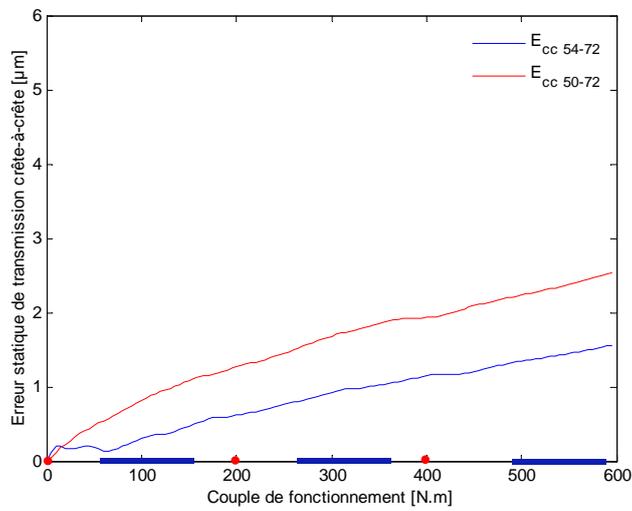
**Figure 2.5.** : Erreurs statiques de transmission de la cascade 84-73-56 avec les corrections de référence pour un couple de fonctionnement moyen.



**Figure 2.6.** : Erreurs statiques de transmission de la cascade 54-72-50 avec les corrections de référence pour un couple de fonctionnement moyen.



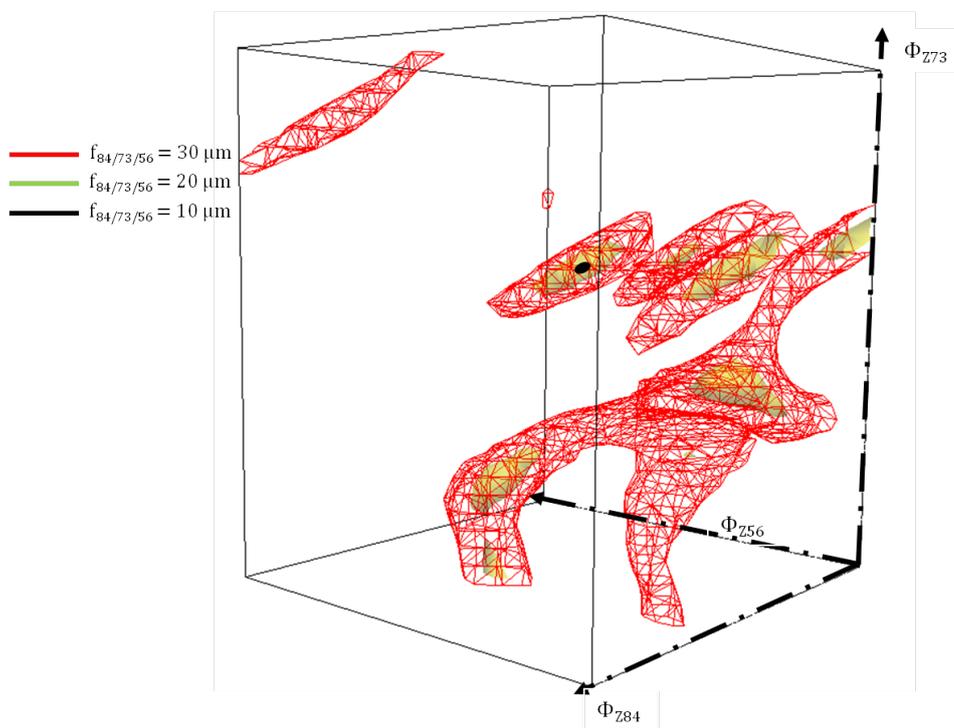
**Figure 2.7.** : Valeurs crête-à-crête des erreurs statiques de transmission de la cascade 84-73-56 en fonction du couple appliqué (corrections de denture de référence).



**Figure 2.8.** : Valeurs crête-à-crête des erreurs statiques de transmission de la cascade 54-72-50 en fonction du couple appliqué (corrections de denture de référence).

### 2.3.2. La méthode des essais particulaires

Comme il est particulièrement difficile d'accéder à la jacobienne de la fonction coût, les algorithmes métaheuristiques constituent une bonne alternative aux méthodes dites "classiques" de recherche optimum pour une fonction de classe  $C^0$ . De plus les algorithmes méta-heuristiques permettent de "sortir" des minima locaux lors de l'exploration de la fonction. La Figure 2.9 illustre la complexité de la fonction coût en présentant la répartition tridimensionnelle d'iso-surfaces de sa valeur pour la cascade 84-73-56. Les dépouilles ( $30\ \mu\text{m}$  pour les trois pignons) et les bombés cumulés ( $24\ \mu\text{m}$  pour les deux engrenements) sont fixés. Seuls les diamètres de dépouille sont variables. La complexité de la fonction coût se traduit par l'existence d'un grand nombre de minima locaux et la garantie de localiser le minimum global n'est pas assurée.



**Figure 2.9.** : Isosurfaces de la fonction coût de la cascade de 84-73-56 en fonction des diamètres de dépouille variables avec ( $X_i = 30\ \mu\text{m}$  et  $C_{\beta k} = 24\ \mu\text{m}$ ).

Parmi les différentes méthodes testées, l'algorithme TRUST [70, 71], le recuit simulé et la méthode des essais particulaires [66, 65], cette dernière est celle qui fournit les meilleures solutions (valeurs minimales de la fonction coût) avec le temps de calcul le plus court. Cette méthode a fait l'objet de nombreuses études [67, 72, 73, 74, 75], notamment dans le cas d'optimisation multi-objectifs [76].

Le principe repose sur un comportement collectif d'une population d'individus communiquant les uns avec les autres sur leur position dans l'espace de définition de la

fonction coût à minimiser. L'analogie peut être faite avec le comportement des insectes sociaux tels que les abeilles. On parle aussi de stigmergie. Ainsi, ces particules explorent la fonction sur son espace de définition avec une position et une vitesse propres. De cette position initiale sur l'hyper-espace à huit dimensions formé par les valeurs des paramètres de l'optimisation, les particules vont modifier leur vitesse en fonction de la position de leurs congénères à la recherche de la meilleure solution, correspondant à un minimum de la fonction coût  $f$ , vers laquelle elles finissent par converger. Les paramètres de l'algorithme sont les poids attribués à la position d'une particule  $p_i(t)$  à un temps  $t$ , à sa meilleure position  $p_{ind}$  et à la meilleure position globale  $p_{glob}$  de la population de particules. A chaque itération, la vitesse de chaque particule est réévaluée et une nouvelle position est obtenue ainsi que le décrivent la Figure 2.10 et les équations (2.11) :

$$\begin{cases} v_i(t) = \varphi_0 v(t-1) + \varphi_1 A_1 [p_{ind} - p_i(t-1)] + \varphi_2 A_2 [p_{glob} - p_i(t-1)] \\ p_i(t) = p_i(t-1) + v_i(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

Les termes  $A_1$  et  $A_2$  correspondent à des nombres aléatoires compris entre 0 et 1. Les choix des paramètres  $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$  est important pour les performances de l'algorithme [77]. Les paramètres finalement utilisés sont ceux suggérés par Clerc et Trelea [78, 79, 80] :

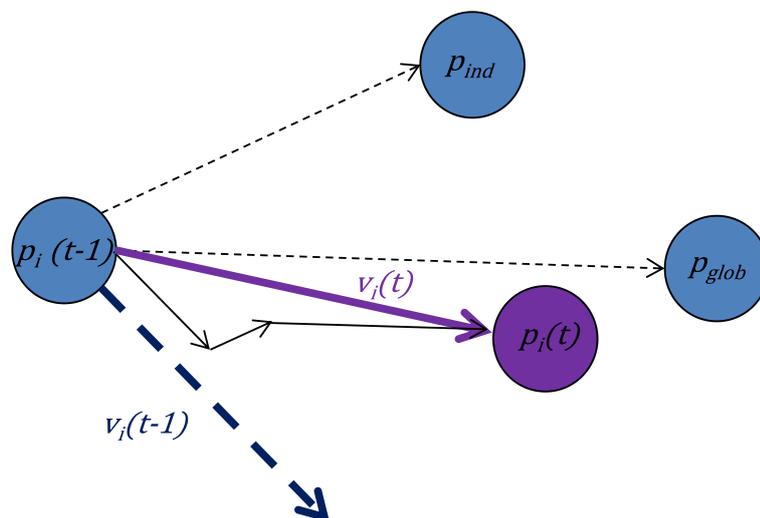
$$\begin{cases} \varphi_0 = 0.729 \\ \varphi_1 = 1.494 \\ \varphi_2 = 1.494 \end{cases}$$

Comme dans toute optimisation, il s'agit de trouver un compromis entre le temps de calcul et la qualité du résultat obtenu. La taille de la population est fixée à 25 individus, à la suite d'essais préliminaires. Cela signifie qu'à chaque itération, la fonction coût est évaluée 25 fois. La convergence est présumée lorsque 30 itérations se produisent sans amener de solution meilleure. Le nombre d'itérations avant convergence est variable. Si  $N$  calculs d'optimisation sont lancés,  $N$  jeux de corrections sont trouvés puis testés en termes de robustesse aux tolérances et défauts de montage et de fabrication. Comme il n'est pas possible d'affirmer que la meilleure solution est obtenue, il faut donc se satisfaire d'un critère d'exigence en termes de valeur crête-à-crête de l'erreur statique de transmission et de robustesse de la solution.

Les bornes de recherches de solutions sont celles définies dans le Tableau 2.4.

Facteur	Bornes
$X_i$	$[0 - 60] \mu\text{m}$
$\phi_i$	$[\phi_{b_i} - \phi_{a_i}]$
$C_{\beta k}$	$[0 - 40] \mu\text{m}$

**Tableau 2.4.** : Domaines de l'optimisation pour chacun des facteurs et intervalles de tolérances.



**Figure 2.10.** : Schéma d'une itération pour une particule  $p_i$ .

### 2.3.3. Résultats

Pour chaque cascade, l'algorithme d'optimisation est lancé 20 fois. Ces résultats sont tout d'abord tracés dans un plan  $(f_{Z1/Z2}, f_{Z3/Z2})$  pour déterminer les solutions dominantes au sens de Pareto. Parmi les solutions obtenues, trois par cascade, notées S1, S2 et S3, sont étudiées en détail.

#### 2.3.3.1. Cascade 84-73-56

La Figure 2.11 présente les 20 solutions optimisées et la solution de référence dans le plan  $(f_{84/73}, f_{56/73})$ . L'optimisation est efficace car toutes les solutions trouvées diminuent sensiblement la fonction coût.

Le front de Pareto de la Figure 2.11 est constitué de deux solutions dominantes très proches l'une de l'autre. Ce sont a priori les meilleures solutions au problème d'optimisation. Les résultats sont présentés plus en détail pour une solution dominante, deux solutions dominées et la solution de référence. Ce panel de solutions sélectionné est décrit en comparaison avec la solution de référence dans le Tableau 2.5.

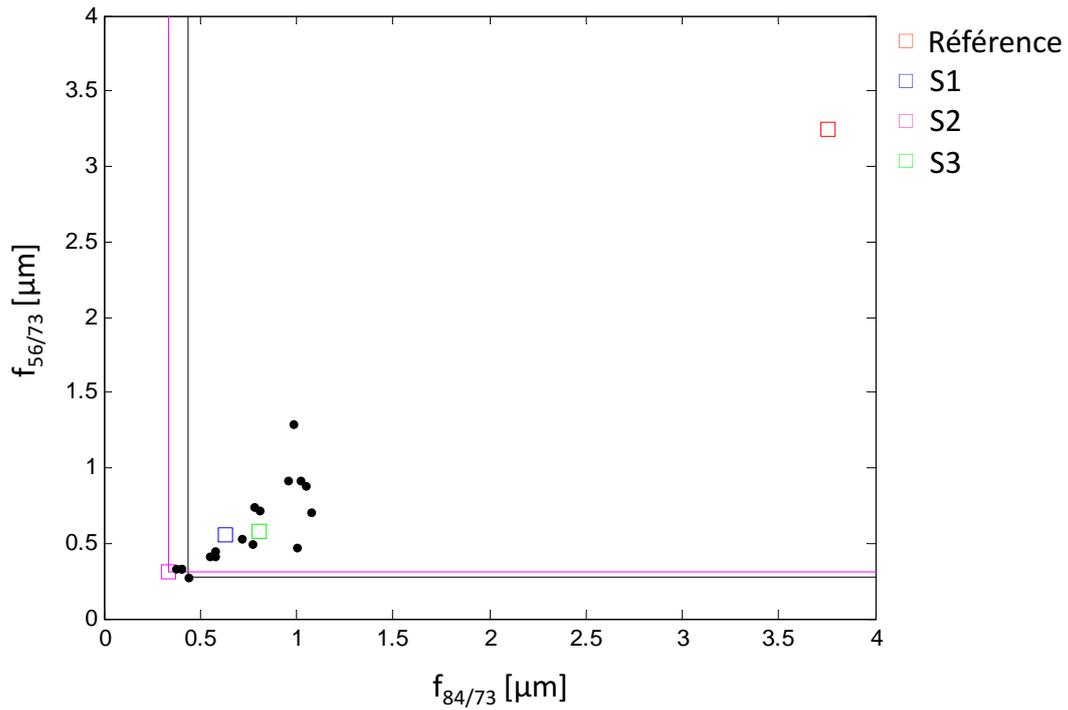
		$X_i$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\phi_i$ [mm]	$C_{\beta k}$ [ $\mu\text{m}$ ]		$f$ [ $\mu\text{m}$ ]
Référence	Z=84	20	239,25	12	12	7,0
	Z=73	15	214,55			
	Z=56	20	165,55			
S1	Z=84	15	235,88	8	8	1,2
	Z=73	23	200,38			
	Z=56	15	160,49			
S2	Z=84	10	235,6	8	8	0,7
	Z=73	10	209,54			
	Z=56	10	160,14			
S3	Z=84	25	235,54	8	8	1,4
	Z=73	27	208,55			
	Z=56	25	160,01			

**Tableau 2.5.** : Solution de référence et solutions optimisée de la cascade 84-73-56.

Plusieurs remarques peuvent être faites sur ce panel de solutions :

- Les dépouilles sont variées. La solution S1 présente des dépouilles de même ordre de grandeur que la solution de référence. Les solutions S2 et S3 ont par contre des dépouilles respectivement plus faible et plus importante que la solution de référence.
- Les trois solutions optimisées ont des corrections plus longues (diamètres de dépouille plus proches du diamètre de base) que la solution de référence. Il s'agit du facteur le plus différent de la solution de référence.
- Les bombés cumulés sont tous au minimum de la plage de recherche. Cela indique que le bombé est préjudiciable à la minimisation de l'erreur statique de transmission, mais une valeur minimale est nécessaire pour assurer le bon fonctionnement de l'engrènement (charge transmise centrée sur la largeur de denture)
- La valeur de la fonction coût de la solution de référence est divisée de 5 à 7 fois pour les solutions optimisées.

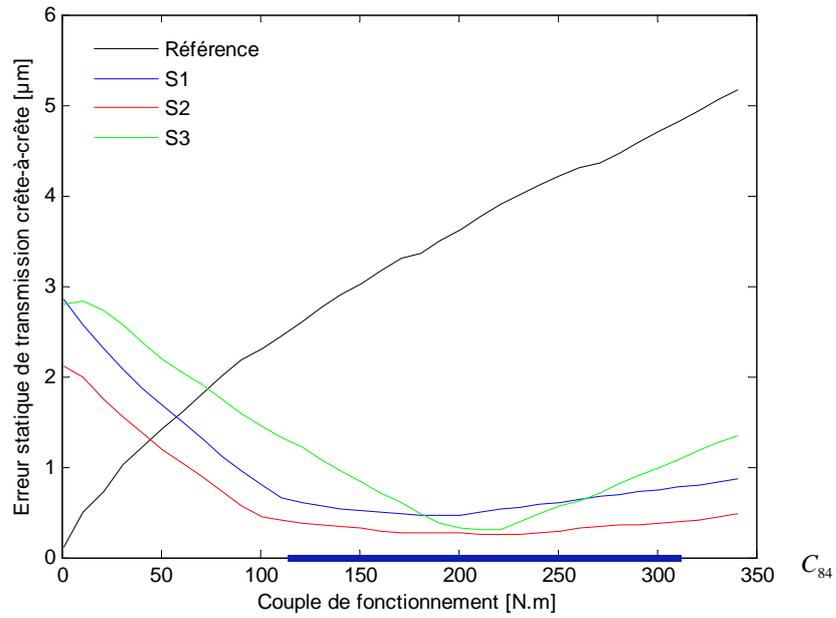
Pour les quatre solutions, il est intéressant de tracer les évolutions des erreurs statiques crête-à-crête en fonction du couple (Figures 2.12 et 2.13). Les comportements des deux engrènements sont très similaires pour les solutions optimisées. Toutes présentent une erreur statique de transmission crête-à-crête bien inférieure à la solution de référence sur la plage de couples considérée (représentée par un trait épais sur l'axe des abscisses). Les solutions S1 et S2 présentent un optimum peu marqué centré sur la plage de couples considérée, et fluctuent peu avec le couple sur cette plage. En revanche la solution S3 a un optimum plus marqué sur le centre de la plage. Par ailleurs, à faible couple de fonctionnement (mais en dehors de la plage de



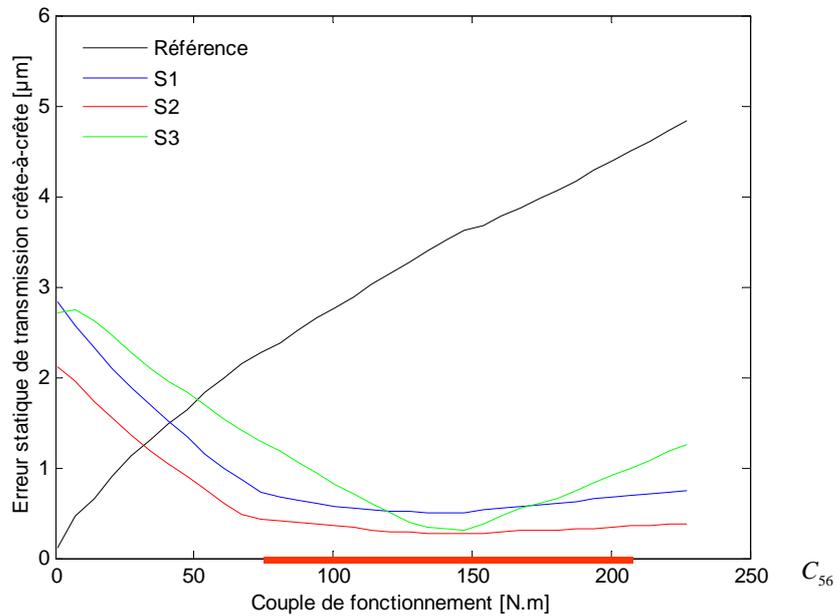
**Figure 2.11.** : Solutions optimisées de la cascade 84-73-56 dans le plan  $(f_{84/73}, f_{56/73})$ .

couple considérée pour l'optimisation), les trois solutions optimisées présentent des amplitudes supérieures à la solution de référence.

Ainsi, la solution dominante S2 est bien celle qui optimise le mieux la fonction coût sur la plage de couples considérée, correctement représentée par les trois points de Gauss choisis.



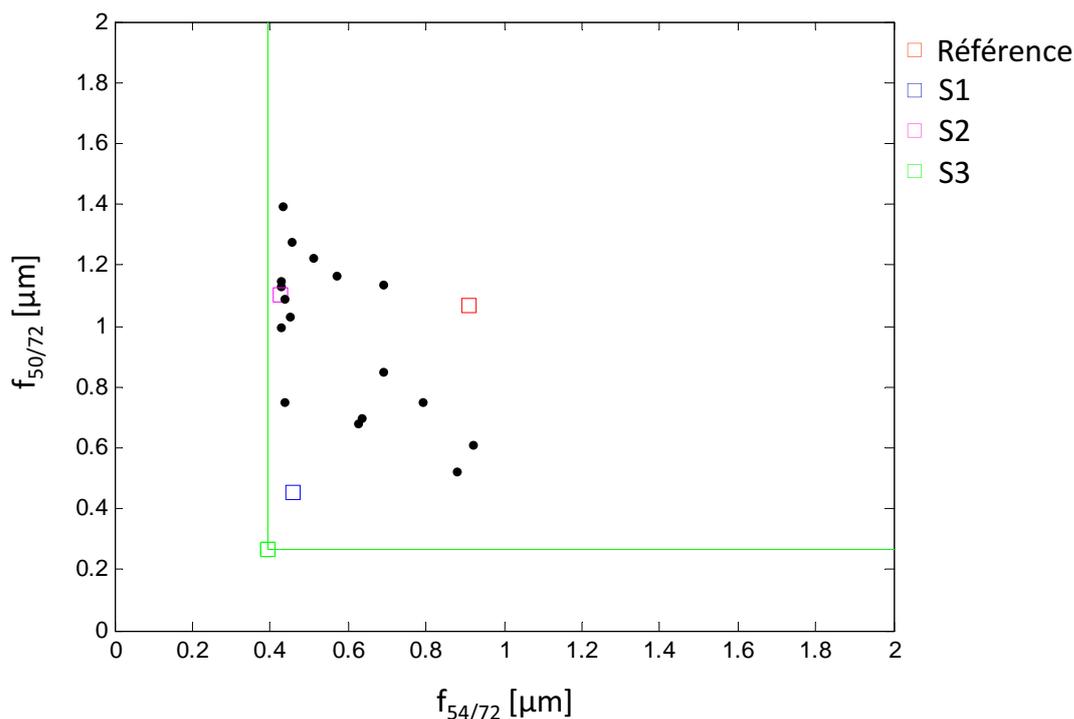
**Figure 2.12.** : Erreur statique de transmission crête-à-crête pour la solution de référence (corrections de référence) et les solutions optimisées sélectionnées pour l’engrènement 84/73.



**Figure 2.13.** : Erreur statique de transmission crête-à-crête pour la solution de référence (corrections de référence) et les solutions optimisées sélectionnées pour l’engrènement 56/73.

## 2.3.3.2. Cascade 50-72-54

La Figure 2.14 présente les 20 solutions optimisées et la solution de référence dans le plan  $(f_{54/72}, f_{50/72})$ . Comme la solution de référence a une fonction coût relativement faible, la minimisation de celle-ci est plus difficile. Cependant, sur les 20 solutions présentées, 10 dominent la solution de référence et aucune n'est dominée. L'amélioration globale est plus faible que pour la cascade précédente mais néanmoins satisfaisante.



**Figure 2.14.** : Solutions optimisées de la cascade 84-73-56 dans le plan  $(f_{84/73}, f_{56/73})$ .

Le front de Pareto est constitué d'un unique point qui correspond à la solution optimale. De la même manière que pour la cascade précédente, cette solution dominante (S3), deux autres dominées (S1 et S2) et la solution de référence sont sélectionnées pour une étude plus en détails. Ce panel de trois solutions est décrit en comparaison avec la solution de référence dans le Tableau 2.6.

Plusieurs remarques peuvent être faites sur ce panel de solutions :

- Les dépouilles sont variées. La solution S1 a deux dépouilles faibles et une dépouille élevée. La solution S2 a trois dépouilles égales. Enfin la solution S3 a des dépouilles élevées sur les 3 pignons.

		$X_i$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\phi_i$ [mm]	$C_{\beta k}$ [ $\mu\text{m}$ ]		$f$ [ $\mu\text{m}$ ]
Référence	Z=54	35	183	12	12	2,0
	Z=72	35	241,05			
	Z=50	30	171,55			
S1	Z=54	14	177,46	8	8	0,9
	Z=72	12	237,66			
	Z=50	47	173,62			
S2	Z=54	20	175,49	8	10	1,5
	Z=72	20	233,63			
	Z=50	20	162,96			
S3	Z=54	53	182,83	8	8	0,7
	Z=72	60	241,03			
	Z=50	60	171			

**Tableau 2.6.** : Solution de référence et solutions optimisée de la cascade 54-72-50.

- Les diamètres de début de dépouille de la solution S3 sont très proches de ceux de la solution de référence.
- Les bombés cumulés sont presque tous au minimum de la plage de recherche, mis à part pour la solution S2.
- La valeur de la fonction coût est réduite d'un rapport supérieur à 2 pour les solutions S1 et S3.

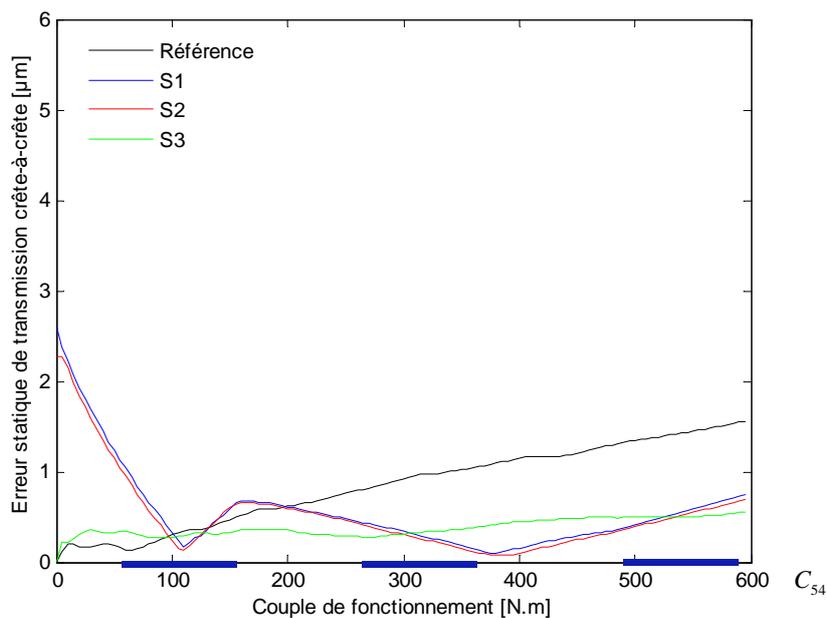
Les évolutions des erreurs statiques crête-à-crête en fonction du couple sont présentées Figures 2.15 et 2.16.

Pour l'engrènement 54/72, aucune solution optimisée n'apporte une réelle amélioration par rapport à la solution de référence pour la première plage de couples (qui correspond à  $C_{50} = 0 \text{ N.m}$ ). En revanche, les trois solutions sont meilleures que la solution de référence sur les deux autres plages de couples (pour  $C_{50} = 200 \text{ N.m}$  et  $C_{50} = 400 \text{ N.m}$ ). Les solutions S1 et S2 ont un comportement similaire, avec la présence de deux minima locaux. La solution S3 est relativement constante pour un couple compris entre 50 et 600 N.m.

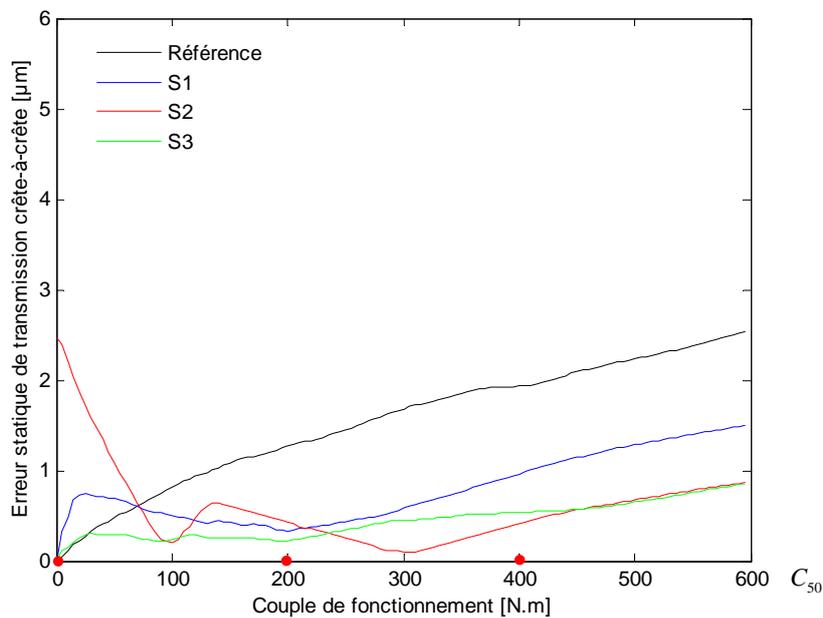
Pour l'engrènement 50/72, les solutions S1 et S3 sont meilleures que la solution de référence pour les trois couples de fonctionnement possibles.

Ainsi, le panel de solutions proposé permet de minimiser l'erreur statique de transmission crête-à-crête par rapport à la solution de référence. La solution S3 est la solution qui minimise le plus la fonction coût.

On s'intéresse maintenant à la robustesse de ces solutions à des dispersions induites par les tolérances de fabrication avant de se prononcer sur un choix définitif.



**Figure 2.15.** : Erreur statique de transmission crête-à-crête pour la solution de référence (corrections de référence) et les solutions optimisées sélectionnées pour l'engrènement 54/72.



**Figure 2.16.** : Erreur statique de transmission crête-à-crête pour la solution de référence (corrections de référence) et les solutions optimisées sélectionnées pour l'engrènement 50/72.

## 2.4. Etude de la robustesse des solutions

Dans cette partie, les panels de solutions des deux cascades sont étudiés en termes de robustesse vis à vis de la dispersion liée aux tolérances et défauts. Un critère de détérioration est défini et une étude statistique est réalisée par la méthode de Monte-Carlo.

### 2.4.1. Définition du problème de robustesse

Les tolérances sur les facteurs  $X_i$ ,  $\phi_i$  et  $C_{\beta k}$  et les défauts de profil  $f_{g\alpha,i}$  et d'hélice  $f_{H\beta,k}$  sont considérées. Pour la solution de référence et les solutions optimisées, les valeurs de défauts sont supposées nulles. Les intervalles de tolérances sont notés "IT" et définis pour un facteur Y donné par :

$$Y \subset [Y^* \pm IT] \quad (2.12)$$

$Y^*$  est la valeur du facteur sans la dispersion, et Y est la valeur avec la dispersion incluse dans le domaine défini par l'intervalle de tolérances IT. Pour une cascade donnée, l'hyper-espace  $\mathbf{D}_{\text{tol}}$  centré sur une solution donnée est de dimension 13. Une solution  $s$  s'écrit donc dans le domaine  $\mathbf{D}_{\text{tol}}$  de la manière suivante :

$$s = \left\{ \begin{array}{c} X_{Z1} \\ \phi_{Z1} \\ f_{g\alpha,Z1} \\ C_{\beta,Z1/Z2} \\ f_{H\beta,Z1/Z2} \\ X_{Z2} \\ \phi_{Z2} \\ f_{g\alpha,Z2} \\ C_{\beta,Z2/Z3} \\ f_{H\beta,Z2/Z3} \\ X_{Z3} \\ \phi_{Z3} \\ f_{g\alpha,Z3} \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Le Tableau 2.7 liste les intervalles de tolérances de chaque facteur pour les pignons considérés de classe de qualité 7. Pour chacun des facteurs, les lois de distribution sont supposées uniformes (donnée Renault Trucks), ce qui est le cas le plus préjudiciable pour la robustesse. Enfin, on suppose que les facteurs sont indépendants.

Le domaine de tolérances est très large, notamment pour les dépouilles où l'étendue de l'intervalle est du même ordre de grandeur que la correction. Ce domaine très vaste mène à une grande dispersion des résultats.

Facteur	IT
$X_i$	15 $\mu\text{m}$
$\phi_i$	0,46 mm
$C_{\beta k}$	8 $\mu\text{m}$
$f_{g\alpha,i}$	12 $\mu\text{m}$
$f_{H\beta,k}$	32 $\mu\text{m}$

Tableau 2.7. : Intervalles de tolérances.

## 2.4.2. Critère de détérioration de la solution

Le critère de détérioration d'une solution correspond à la valeur maximale de la fonction coût dans l'hyper-espace  $\mathbf{D}_{\text{tol}}$ . Elle correspond à la solution la plus mauvaise que l'on puisse produire en respectant les intervalles de tolérances autour de la solution optimisée. Cette valeur détériorée s'écrit  $f^d$  et s'obtient en utilisant un algorithme heuristique de type Nelder-Mead [81]. Cependant, la probabilité de voir cet évènement se produire reste a priori très faible.

### 2.4.2.1. Valeurs détériorées pour la cascade 84-73-56

Les solutions (référence et optimisées) détériorées de la cascade 84-73-56 sont présentées Figures 2.17. Les valeurs de chacun des facteurs  $Y$  détériorés sont données en fonction de l'intervalle de tolérances correspondant. On constate que beaucoup de paramètres correspondant aux solutions détériorées se retrouvent à la valeur limite définie par les bornes de l'intervalle de tolérances (notamment les dépouilles  $X$  et les défauts de profil  $f_{g\alpha}$ ). Néanmoins, les résultats correspondants aux bombés cumulés et aux diamètres de dépouille montrent qu'il n'est pas possible d'explorer uniquement les valeurs extrêmes des intervalles de tolérances. Les solutions S2 et S3 (coûts des solutions détériorées respectivement égales à 10.5  $\mu\text{m}$  et 13.1  $\mu\text{m}$ ) sont potentiellement moins dégradables que la solution de référence (coût de la solution détériorée 14.5  $\mu\text{m}$ ), au contraire de la solution S1 (coût de la solution détériorée 29.35  $\mu\text{m}$ ).

Les Figures 2.18 et 2.19 présentent l'évolution des erreurs statiques de transmission crête-à-crête des solutions détériorées en fonction du couple de fonctionnement pour les deux engrenements. Aucune des solutions n'est optimisée pour la plage de couples considérée. La solution S1 majore les autres sur toute la plage. Au contraire la solution S2 les minore, c'est donc la solution la plus favorable par rapport au critère de détérioration. Les deux figures permettent donc de connaître la limite supérieure pour chaque couple de fonctionnement pour les valeurs de tolérances listées dans le Tableau 2.7.

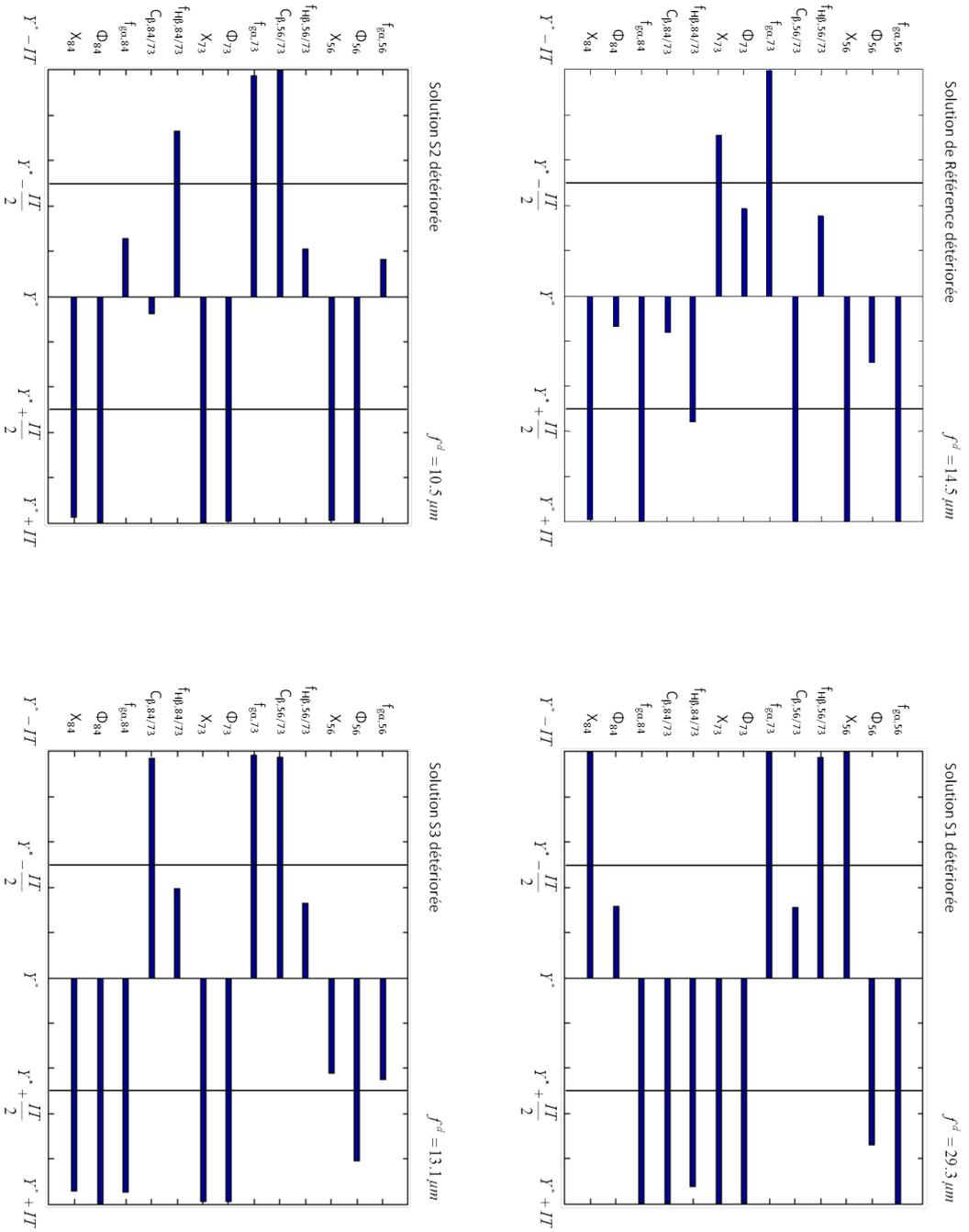
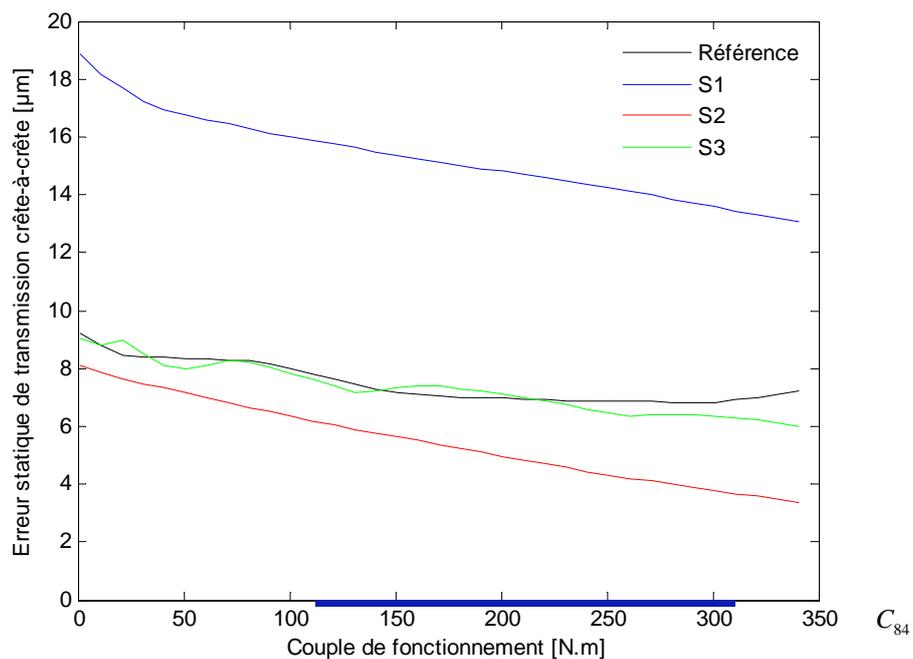
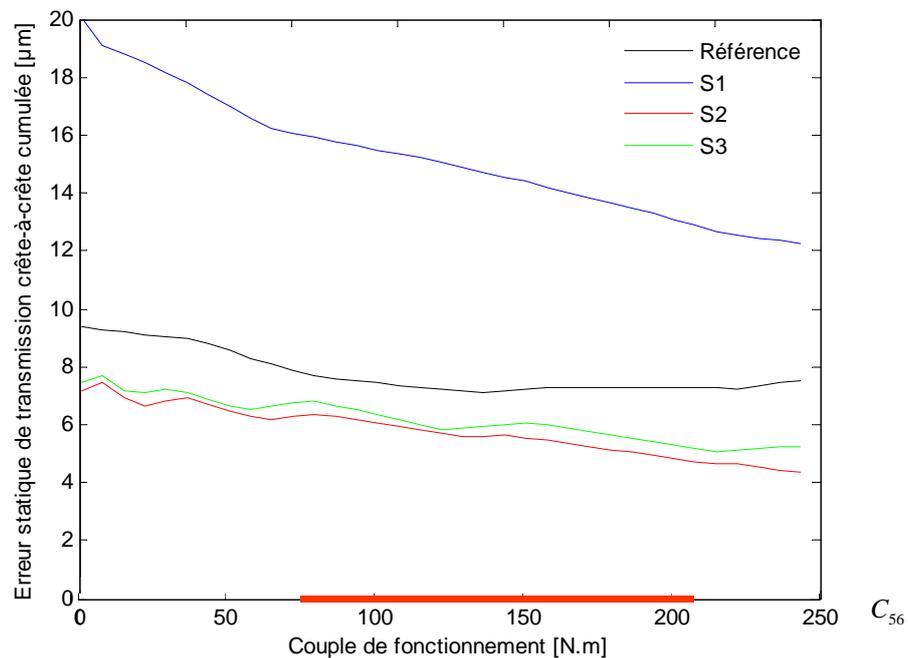


Figure 2.17. : Solutions détériorées de la cascade 84-73-56.



**Figure 2.18.** : Erreurs statiques de transmission crête-à-crête des solutions détériorées pour l'engrènement 84/73 en fonction du couple de fonctionnement.



**Figure 2.19.** : Erreurs statiques de transmission crête-à-crête des solutions détériorées pour l'engrènement 56/73 en fonction du couple de fonctionnement.

#### 2.4.2.2. Résultats pour la cascade 54-72-50

Les solutions (référence et optimisées) détériorées de la cascade 54-72-50 sont présentées Figure 2.20. Les valeurs de chacun des facteurs  $Y$  détériorés sont données en fonction de l'intervalle de tolérances correspondant. On constate à nouveau que nombre de facteurs des solutions détériorées se retrouvent à la valeur limite définie par les bornes de l'intervalle de tolérances (notamment les dépouilles  $X$  et les défauts de profils  $f_{g\alpha}$ ). Les valeurs des fonctions coût des solutions sont très proches (environ 10  $\mu\text{m}$ ). La solution S3 est néanmoins celle présentant la valeur minimale.

Les Figures 2.21 et 2.22 présentent l'évolution des erreurs statiques de transmission crête-à-crête des solutions détériorées pour les deux engrènements. Les solutions ne sont pas optimisées pour les couples considérés. La solution de référence et la solution S3 sont celles qui se détériorent le moins pour l'engrènement 54/72 alors que la tendance est inverse pour l'engrènement 50/72. Il convient d'étudier la répartition statistique de la fonction coût avec les dispersions pour conclure sur un choix de correction.

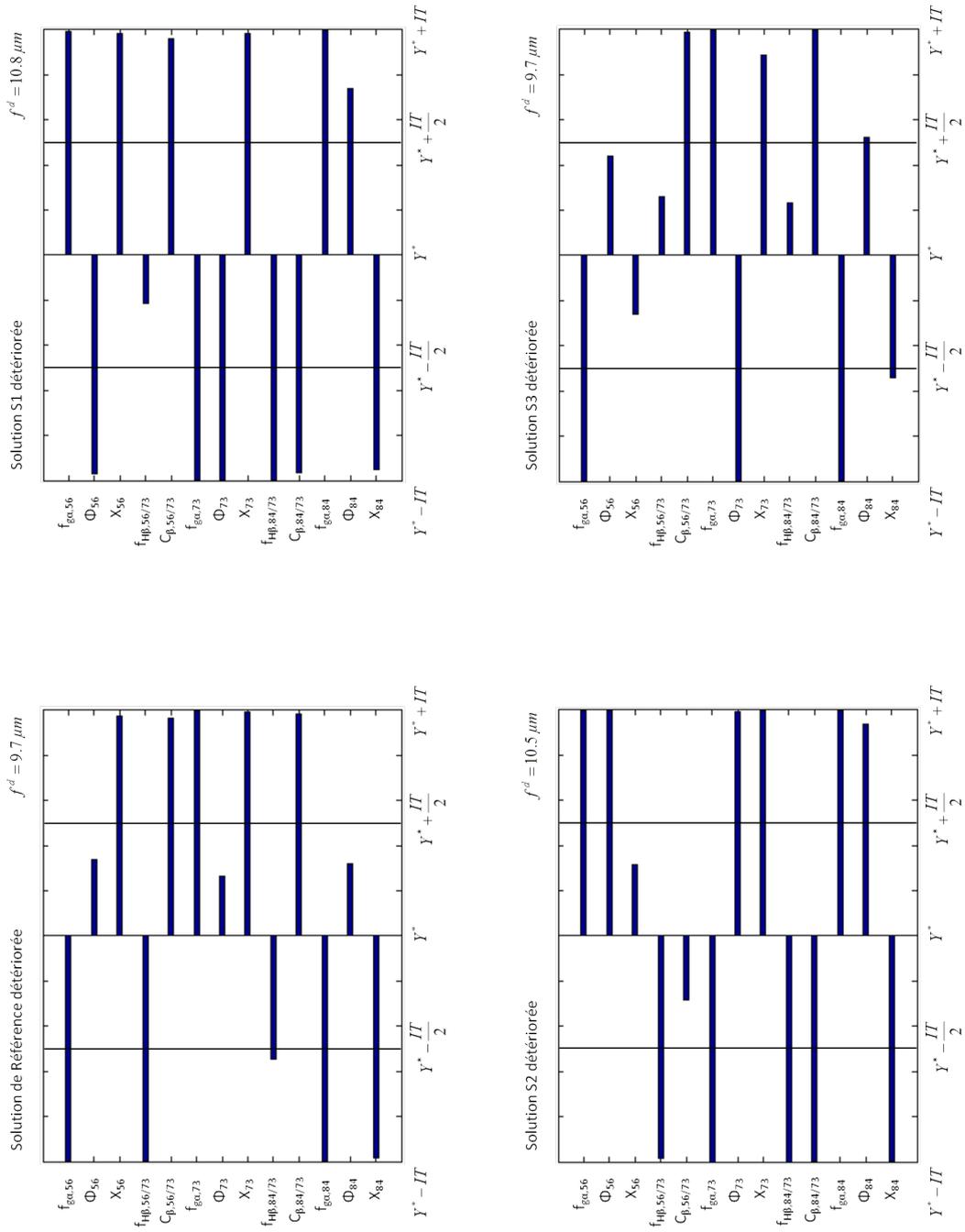
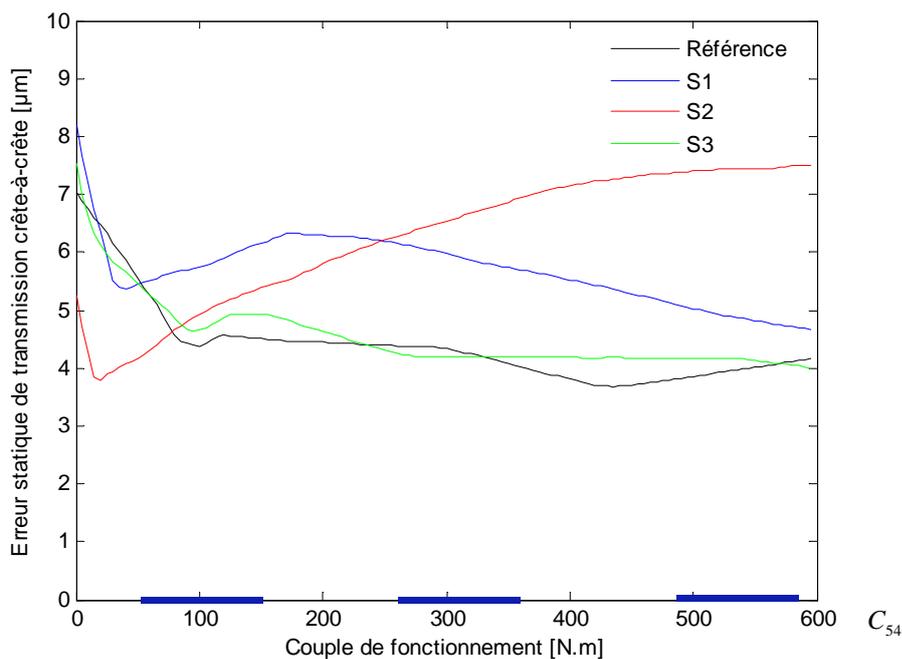
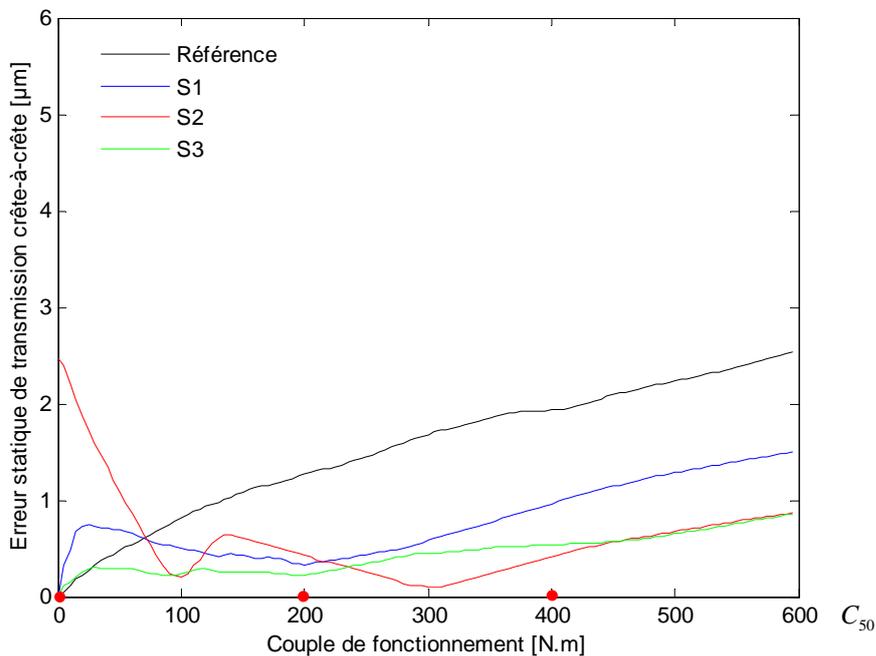


Figure 2.20. : Solutions dégradées de la cascade 84-73-56.



**Figure 2.21.** : Erreurs statiques de transmission crête-à-crête des solutions détériorées pour l'engrènement 54/72 en fonction du couple de fonctionnement.



**Figure 2.22.** : Erreurs statiques de transmission crête-à-crête des solutions détériorées pour l'engrènement 50/72 en fonction du couple du fonctionnement.

### 2.4.3. Distribution statistique de la fonction coût

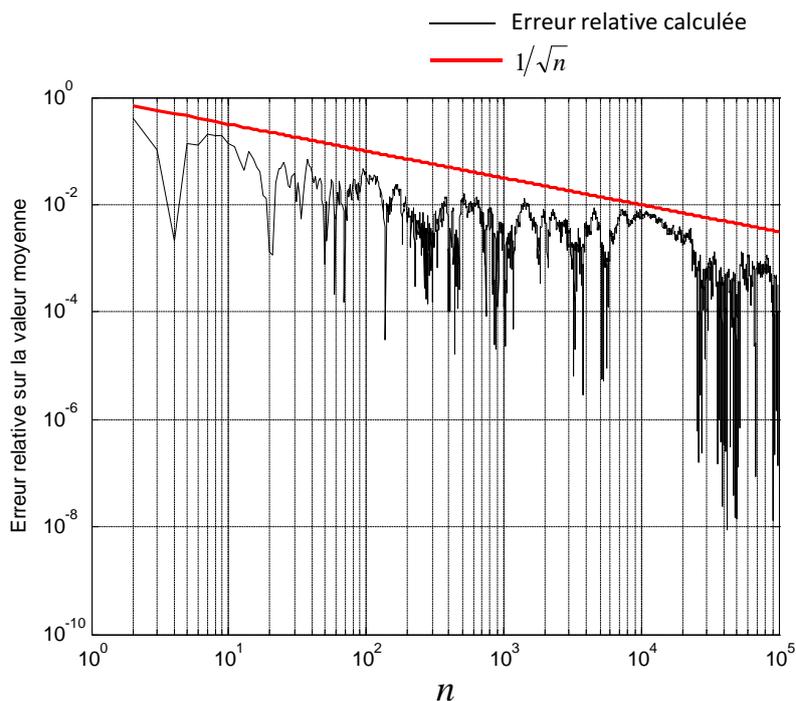
La méthode de Monte-Carlo est utilisée pour déterminer statistiquement l'espérance (ou valeur moyenne) de la fonction coût, son écart-type et sa valeur médiane. On suppose l'indépendance statistique des variables et une distribution uniforme pour chacune d'elle (donnée Renault Trucks). L'étude est menée pour les deux panels de solutions (cascade 84-73-56 et cascade 54-72-50).

Dans un premier temps, la convergence sur la valeur moyenne et son écart-type est étudiée. La théorie prédit une convergence en  $n^{-\frac{1}{2}}$ , où  $n$  correspond à la taille de l'échantillon. Les Figures 2.23 et 2.24 présentent les erreurs relatives  $\varepsilon_{rel}$  en fonction de  $n$ , calculées comme suit :

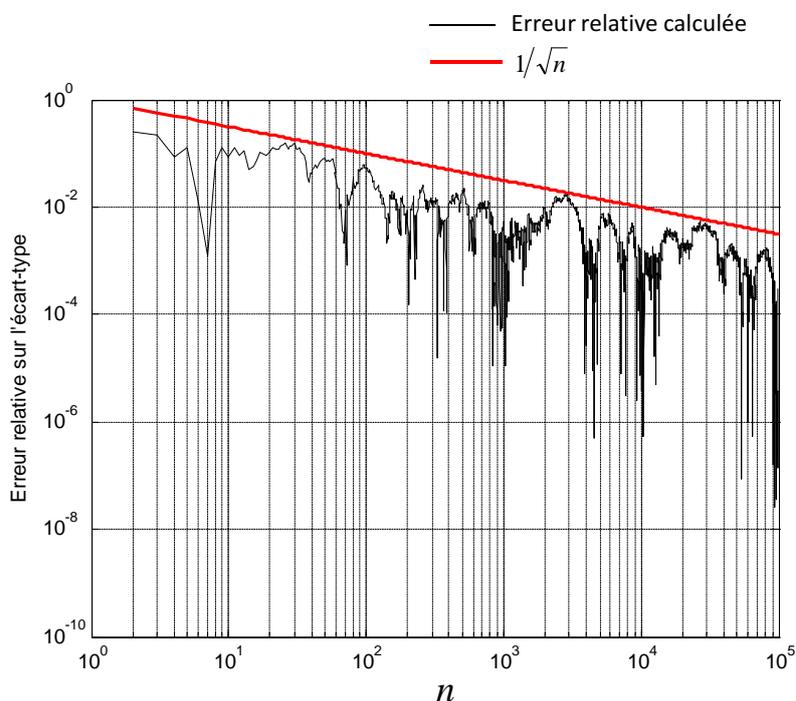
$$\varepsilon_{rel}(X) = \frac{|X_{10^5} - X_n|}{X_{10^5}} \quad (2.14)$$

où  $X_n$  correspond à la grandeur estimée (moyenne ou écart-type) sur un échantillon de taille  $n$ .

On constate que la loi théorique est suivie et qu'une population de 100000 individus assure une erreur relative inférieure à 1%. Dans la suite de l'étude, l'ensemble des résultats statistiques est obtenu pour  $n = 10000$ .



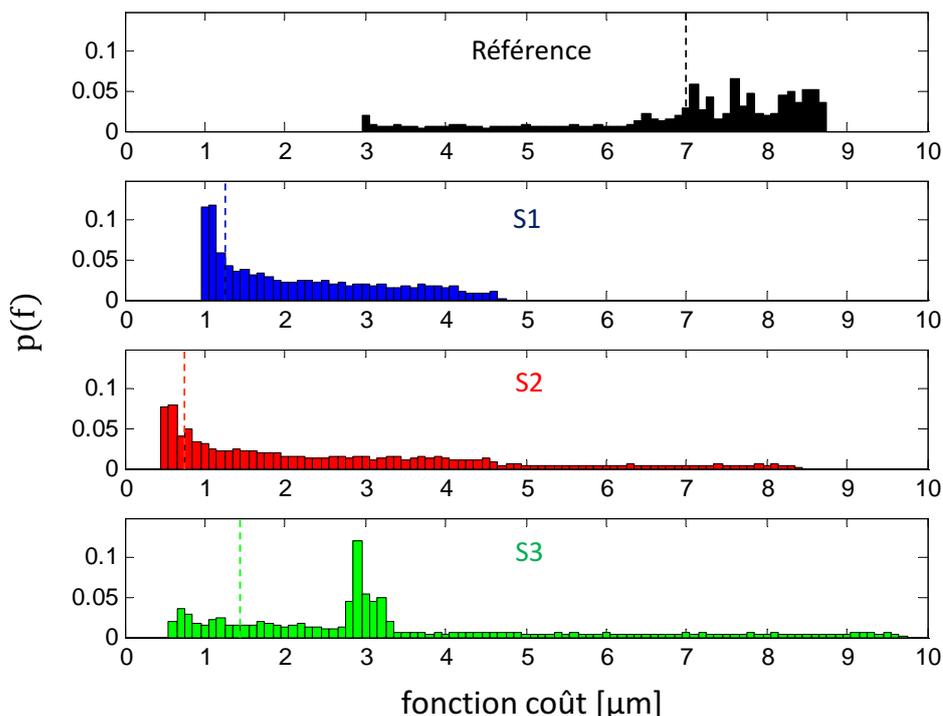
**Figure 2.23.** : Erreur relative sur la moyenne de la fonction coût d’une solution et fonction  $1/\sqrt{n}$  en fonction de la taille  $n$  de l’échantillon.



**Figure 2.24.** : Erreur relative sur l’écart-type de la fonction coût d’une solution et fonction  $1/\sqrt{n}$  en fonction de la taille  $n$  de l’échantillon.

### 2.4.3.1. Résultats pour la cascade 84-73-56

La Figure 2.25 présente les densités de probabilité des fonctions coût  $p(f)$  de la cascade 84-73-56 pour la solution de référence et le panel de solutions S1, S2 et S3. La valeur moyenne de la fonction coût optimisée est indiquée en trait pointillé sur la figure. Les lois de distribution de chacune des solutions sont très distinctes. Elles sont toutes fortement dissymétriques et donc très différentes d'une loi gaussienne.



**Figure 2.25.** : Densité de probabilité de la fonction coût des solutions de la cascade 84-73-56.

La solution S1 est statistiquement la plus robuste, même si son critère de détérioration présenté en 2.4.2.1. est le plus défavorable. Ce cas le plus pessimiste, est donc statistiquement improbable. Les solutions S2 et S3 se détériorent statistiquement plus que la solution S1. Le Tableau 2.8 liste les valeurs moyennes, les médianes et les écart-types. Les bornes  $[B_1 - B_2]$  de la plage contenant plus de 99% des échantillons sont également déterminées telles que

$$\int_{B_1}^{B_2} p(f)df > 0.99 \quad (2.15)$$

De plus, la probabilité d'être supérieur à la valeur moyenne de la solution de référence  $p_{>ref}$  est relevée. Cette dernière valeur traduit indirectement le recouvrement des densités de probabilités des différentes solutions.

	Référence	S1	S2	S3
Valeur moyenne [ $\mu\text{m}$ ]	7	2.2	2.6	3.4
Valeur médiane [ $\mu\text{m}$ ]	7.5	1.8	1.9	2.9
Ecart-type [ $\mu\text{m}$ ]	1.5	1.1	1.1	2
Bornes ( $B_1$ ; $B_2$ ) [ $\mu\text{m}$ ]	(3.6; 8.6)	(1.0; 4.1)	(0.5; 7.0)	(0.7; 8.4)
$p_{>ref}$	0.66	0	0.05	0.11

**Tableau 2.8.** : Caractérisation statistique des solutions de la cascade 84-73-56.

La solution S1 est meilleure que les autres selon les quatre critères du Tableau 2.8. En effet, la valeur moyenne et l'écart-type de la fonction coût sont les plus faibles. Enfin, sur cet échantillon de 10000 configurations, la valeur maximale est statistiquement toujours inférieure à la valeur moyenne de la solution de référence. Hors dispersion induite par les tolérances de fabrication, la solution dominante S2 est la plus avantageuse. Mais au vu des résultats de l'étude de robustesse, il est statistiquement plus judicieux de choisir la solution dominée S1.

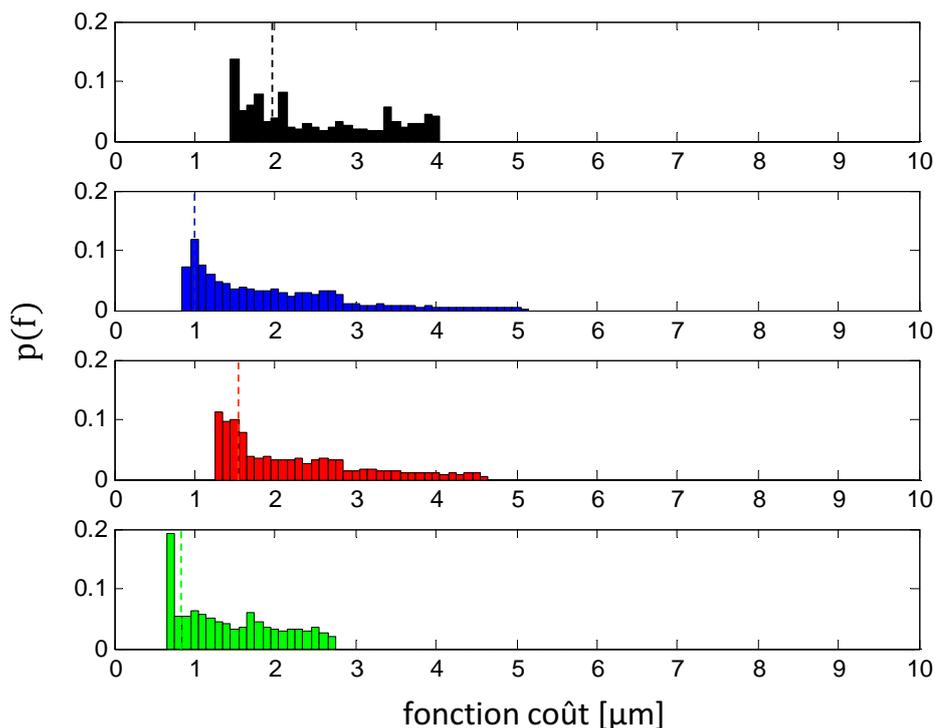
#### 2.4.3.2. Résultats pour la cascade 54-72-50

La Figure 2.26 présente les densités de probabilité des fonctions coût  $p(f)$  de la cascade 54-72-50 pour la solution de référence et le panel de solutions S1, S2 et S3. La valeur moyenne de la fonction coût optimisée est indiquée en trait pointillé sur la figure. Les lois de distribution des solutions sont dissymétriques. La solution dominante S3 est la moins sensible aux dispersions. On rappelle que la solution S2 sélectionnée ne domine pas la solution de référence (cf. Figure 2.14).

Le Tableau 2.9 liste les valeurs moyennes, les médianes, les écart-types, les bornes [ $B_1 - B_2$ ] de la plage contenant plus de 99% des échantillons et la probabilité d'être supérieur à la valeur moyenne de la solution de référence  $p_{>ref}$ .

	Référence	S1	S2	S3
Valeur moyenne [ $\mu\text{m}$ ]	2.5	1.9	2.2	1.4
Valeur médiane [ $\mu\text{m}$ ]	2.2	1.7	2.0	1.3
Ecart-type [ $\mu\text{m}$ ]	0.8	1.0	0.9	0.6
Bornes ( $B_1$ ; $B_2$ ) [ $\mu\text{m}$ ]	(1.5; 3.9)	(0.9; 3.9)	(1.3; 4)	(0.7; 2.5)
$p_{>ref}$	0.43	0.25	0.32	0.06

**Tableau 2.9.** : Caractérisation statistique des solutions de la cascade 54-72-50.



**Figure 2.26.** : Densité de probabilité de la fonction coût des solutions de la cascade 54-72-50.

La solution S3 est statistiquement meilleure que les autres selon les critères du Tableau 2.9. En effet, la valeur moyenne et l'écart-type de la fonction coût sont les plus faibles. Enfin, sur cet échantillon de 10000 configurations, la valeur maximale est statistiquement inférieure à la valeur moyenne de la solution de référence dans 94% des cas. Cette solution de référence déjà bonne a donc pu être optimisée de manière satisfaisante.

## 2.5. Conclusions

Pour traiter le multi-engrènement et l'optimisation sur une plage de couples, la méthode des essais particuliers s'avère être un outil adapté à la recherche de solutions pour minimiser l'erreur statique de transmission en optimisant les corrections de denture. L'analyse de la robustesse des solutions étudiées aux tolérances de fabrication montre qu'un premier critère de robustesse permet de borner le cas extrême de détérioration d'une solution dans l'intervalle de tolérances. Cependant, ce critère n'est pas le plus pertinent pour caractériser la dispersion potentielle d'une solution. A l'aide de simulations de Monte-Carlo, il est possible d'accéder aux probabilités de distribution de la fonction coût et aux grandeurs statistiques caractérisant

chacune des solutions. Les solutions proposées au constructeur permettent un gain moyen de 5 dB par rapport à la solution de référence avec la solution S2 (Tableau 2.5) pour la cascade 84-73-56 et de 2.5 dB avec la solution S2 (Tableau 2.6) pour la cascade 54-72-50. Les fluctuations des erreurs statiques de transmission correspondantes servent d'entrées au calcul dynamique en sirènement de la cascade de pignons dans le chapitre suivant.

# 3. Analyse du bruit de sirènement d'une cascade de distribution

## 3.1. Introduction

La dynamique des systèmes à engrenages est complexe et les aspects linéaires et non-linéaires peuvent être dissociés pour en simplifier la compréhension. Ce chapitre traite du sirènement, qui est le bruit rayonné par le carter (ou la plaque support dans notre cas) engendré par les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement.

La distribution étant composée de deux cascades de trois pignons, il est nécessaire de prendre en compte le caractère multi-engrènement de l'excitation. L'analyse de la réponse vibratoire de la cascade de distribution s'appuie sur une extension de la méthode spectrale itérative [17] aux problèmes de type excitations paramétriques linéaires multi-ordres.

Le chapitre présente d'abord les équations physiques et la méthode de calcul développée. La validité des résultats obtenus est vérifiée par comparaison avec les résultats issus de méthodes d'intégration temporelle. La mise en œuvre de la méthode proposée permet ensuite d'analyser les couplages entre les différents engrènements, de qualifier la réponse dynamique de la cascade de distribution et de tester les jeux de corrections de denture optimaux obtenus dans le chapitre précédent.

## 3.2. La méthode spectrale itérative

### 3.2.1. Description de la méthode

La méthode spectrale itérative permet la résolution en régime stationnaire de systèmes d'équations à coefficients périodiques (masses, amortissements et/ou raideurs périodiques) par une description spectrale du problème. Cette approche procure un gain de temps considérable par rapport à des méthodes d'intégration temporelle, notamment lorsqu'on doit prendre en compte simultanément des excitations basses fréquences, comme celle générée par un défaut d'excentricité sur les roues dentées, et hautes fréquences, comme les fluctuations de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement dont les composantes fréquentielles sont liées à la fréquence d'engrènement et à ses harmoniques.

### 3.2.1.1. Linéarisation de l'effort de denture

Pour expliquer la démarche, on considère le cas simplifié d'une transmission simple étage, où seule l'élasticité des dentures est prise en compte. L'équation différentielle du mouvement régissant le vecteur des coordonnées généralisées  $x$  peut s'écrire :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + f_{NL}(x, t) = F_S \quad (3.1)$$

Dans cette équation,  $M$  désigne la matrice de masse et  $C$  la matrice d'amortissement. Le terme non-linéaire  $f_{NL}(x, t)$  représente l'effort de denture qui dépend des fluctuations de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement.  $F_S$  constitue l'effort statique transmis par l'engrenage.

La Figure 3.1 illustre la variation de l'effort non-linéaire de denture  $f_{NL}(x, t)$ .

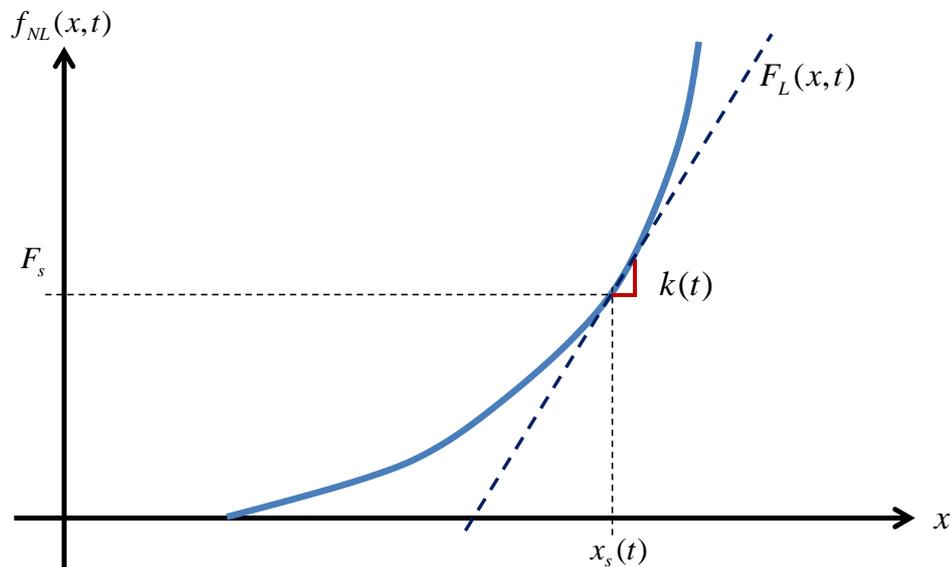


Figure 3.1. : Linéarisation de  $f_{NL}$ .

$F_L(x, t)$  représente l'effort linéarisé autour de la position d'équilibre  $x_s$  et  $k$  représente la raideur d'engrènement définie comme étant :

$$k(t) = \left( \frac{\partial f_{NL}}{\partial x} \right) (x_s, t) \quad (3.2)$$

L'effort linéarisé  $F_L(x, t)$  peut s'écrire en utilisant le développement limité au premier ordre de  $f_{NL}(x, t)$  autour de la position d'équilibre  $x_s$  :

$$F_L(x, t) \approx f_{NL}(x_s) + \frac{\partial f_{NL}}{\partial x}(x_s, t) \cdot (x_L(t) - x_s(t)) = F_s + k(t) \cdot (x - x_s(t)) \quad (3.3)$$

Les grandeurs de l'équation (3.3) sont toutes dépendantes du temps.  $f_{NL}(x, t)$  est périodique (en raison de la nature des sources excitatrices), et donc  $F_L(x, t)$  l'est aussi.

En introduisant l'effort linéarisé dans l'équation (3.1), l'équation différentielle à coefficients paramétriques qui décrit le mouvement s'écrit alors :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + k(t) \cdot x(t) = k(t) \cdot x_S(t) \quad (3.4)$$

Cette équation peut être résolue en utilisant la Méthode Spectrale Itérative.

### 3.2.2. Généralisation de la méthode pour $m$ engrènements

#### 3.2.2.1. Equation matricielle du mouvement dans la base physique

Pour  $m$  engrènements et une transmission discrétisée par éléments finis en  $N$  degrés de liberté, l'équation matricielle du mouvement gouvernant le vecteur  $\mathbf{x}$  des coordonnées généralisées s'écrit formellement :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{EF}}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\mathbf{EF}}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^m \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^T \mathbf{f}_{NLj}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_s \quad (3.5)$$

Dans cette équation, les matrices de masse  $\mathbf{M}_{\mathbf{EF}}$  et de raideur  $\mathbf{K}_{\mathbf{EF}}$  sont issues du modèle éléments finis, hors liaison élastique entre dentures, et la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  est prise en compte a posteriori avec l'hypothèse de Basile. Le couplage entre dentures pour le  $j^{\text{ème}}$  engrènement est introduit via la raideur périodique d'engrènement  $k_j(t)$  et un vecteur de structure géométrique  $\mathbf{R}_j$ .  $\mathbf{F}_s$  correspond au vecteur des efforts statiques appliqués (couples moteur et récepteur). Enfin, le vecteur non-linéaire  $f_{NLj}$  peut être linéarisé comme expliqué en 3.2.1.1. L'équation du mouvement s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{EF}}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\mathbf{EF}}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^m k_j(t) \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^m k_j(t) \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^T \mathbf{x}_s(t) \quad (3.6)$$

où le vecteur  $x_s(t)$  correspond à la réponse statique aux efforts extérieurs  $\mathbf{F}_s$ . Au final, l'équation matricielle retenue s'écrit :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{EF}}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\mathbf{AV}}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^m g_j(t) \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^m k_j(t) \mathbf{R}_j \Delta_j^{(s)}(t) \quad (3.7)$$

La fonction scalaire  $\Delta_j^{(s)}(t)$  représente l'erreur statique de transmission sous charge du  $j^{\text{ème}}$  engrènement. La fonction  $g_j(t)$  correspond à la fluctuation centrée de la raideur du  $j^{\text{ème}}$  engrènement. De la même manière, on note que la fonction scalaire  $\Delta_j(t) = \mathbf{R}_j^T \mathbf{x}$  représente l'erreur dynamique de transmission du  $j^{\text{ème}}$  engrènement. Enfin, la matrice  $\mathbf{K}_{\text{AV}}$  correspond à la matrice de raideur totale moyennée en temps.

$$g_j(t) = k_j(t) - \overline{k_j(t)} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}_{\text{AV}} = \mathbf{K}_{\text{EF}} + \sum_{j=1}^m \overline{k_j(t)} \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^T \quad (3.9)$$

avec  $\overline{(\bullet)}(t)$  la valeur moyenne de  $(\bullet)(t)$ .

### 3.2.2.2. Calcul de la base modale

On étend la solution sur la base modale déterminée à partir des caractéristiques moyennes du système. Cependant, cette base modale ne permet pas de découpler les excitations paramétriques. Le calcul modal est donc réalisé à l'aide d'un code éléments finis à partir des matrices de masse  $\mathbf{M}_{\text{EF}}$  et de raideur moyenne  $\mathbf{K}_{\text{AV}}$ . Il convient donc d'introduire dans le modèle discret les matrices moyennes de couplage élastique entre dentures  $\overline{k_j(t)} \mathbf{R}_j \mathbf{R}_j^T$ .

Pour un engrènement, le vecteur de couplage  $\mathbf{R}_j$  s'écrit dans le repère local  $\{x_L, y_L, z_L\}$  :

$$\mathbf{R}_j = \begin{Bmatrix} 0, 1, \tan(\beta), R_{b1} \tan(\alpha) \tan(\beta), -R_{b1} \tan(\beta), R_{b1}, \\ 0, -1, -\tan(\beta), R_{b2} \tan(\alpha) \tan(\beta), -R_{b2} \tan(\beta), R_{b2} \end{Bmatrix}$$

Ce vecteur de couplage permet de relier les 6 degrés de liberté du pignon menant aux 6 degrés de liberté de la roue menée (si tous les degrés de liberté sont considérés).

L'axe  $y_L$  est porté par la ligne d'action et l'axe  $z_L$  par l'axe de rotation du pignon menant (Figure 3.2).

$R_{b1}$  et  $R_{b2}$  sont respectivement les rayons de base des pignons menant et mené. Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement l'angle de pression apparent de fonctionnement et l'angle d'hélice de base de l'engrenement.

Le calcul modal conduit aux pulsations propres  $\omega_k$  et aux vecteurs propres  $\mathbf{V}_k$  associés choisis normés sur la matrice de masse :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_N] \quad (3.10)$$

tel que

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}_{\text{EF}}\mathbf{B}=\mathbf{I} \quad (3.11)$$

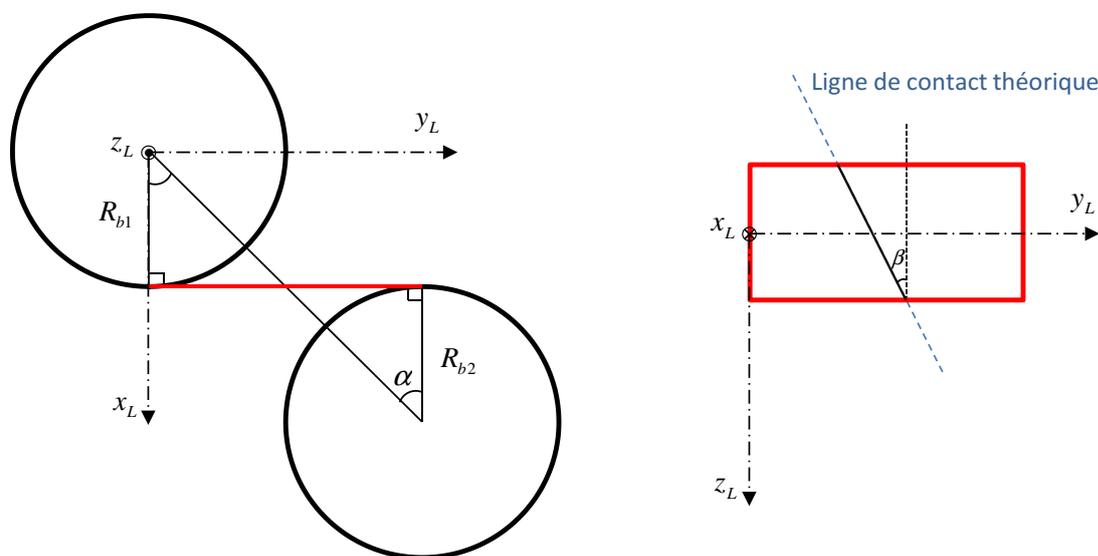


Figure 3.2. : Définition du repère local de l'engrènement.

### 3.2.2.3. Equations modales

Les équations modales du mouvement s'écrivent à partir de l'équation (3.7) :

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}_{\text{EF}}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}_{\text{AV}}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^m g_j(t)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_j\mathbf{R}_j^T\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m k_j(t)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_j\Delta_j^{(s)}(t) \quad (3.12)$$

L'hypothèse de Basile sur un amortissement proportionnel tel que  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M}_{\text{EF}} + \beta\mathbf{K}_{\text{AV}}$  est faite. Soit en posant  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ , où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des coordonnées modales :

$$\text{diag}[1]\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}[2\zeta_k\omega_k]\dot{\mathbf{q}} + \text{diag}[\omega_k^2]\mathbf{q} + \sum_{j=1}^m g_j(t)\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j^T\mathbf{q} = \sum_{j=1}^m k_j(t)\mathbf{r}_j\Delta_j^{(s)}(t) \quad (3.13)$$

Dans cette équation,  $\zeta_k$  représente le taux d'amortissement visqueux équivalent du mode, et  $\mathbf{r}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_j$  le vecteur structure géométrique projeté dans la base modale. Les équations couplées du système (3.13) s'écrivent sous la forme indicelle suivante :

$$\ddot{q}_k + 2\zeta_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2q_k + \sum_{j=1}^m g_j(t)r_{jk} \sum_{l=1}^N r_{jl}q_l = \sum_{j=1}^m k_j(t)r_{jk}\Delta_j^{(s)}(t) \quad (3.14)$$

### 3.2.2.4. Equations dans le domaine spectral

La résolution des équations couplées (3.14) s'effectue dans le domaine spectral, en ne retenant que les solutions stationnaires (réponse forcée) du système. En effet, la réponse libre est soit une exponentielle décroissante (stabilité asymptotique) soit une exponentielle croissante en cas d'instabilités paramétriques. On suppose que l'amortissement est suffisant pour se situer hors de ces régions d'instabilités paramétriques. La transformée de Fourier de (3.14) conduit à :

$$H_k^{-1}(\omega)Q_k(\omega) + \sum_{j=1}^m G_j(\omega)r_{jk} \otimes \sum_{l=1}^N r_{jl}Q_l = \sum_{j=1}^m K_j(\omega) \otimes r_{jk}E_j^{(s)}(\omega) \quad (3.15)$$

soit aussi

$$Q_k(\omega) + H_k(\omega) \sum_{j=1}^m G_j(\omega)r_{jk} \otimes \sum_{l=1}^N r_{jl}Q_l(\omega) = H_k(\omega) \sum_{j=1}^m K_j(\omega) \otimes r_{jk}E_j^{(s)}(\omega) \quad (3.16)$$

où  $Q_k(\omega)$ ,  $G_j(\omega)$ ,  $K_j(\omega)$  et  $E_j^{(s)}(\omega)$  sont respectivement les transformées de Fourier de  $q_k(t)$ ,  $g_j(t)$ ,  $k_j(t)$  et  $\Delta_j^{(s)}(t)$ . L'opérateur  $\otimes$  représente le produit de convolution.  $H_k(\omega)$  représente la fonction complexe de réponse en fréquence du mode  $k$ , soit :

$$H_k(\omega) = \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\zeta_k\omega_k\omega)} \quad (3.17)$$

Soit  $E_j(\omega)$  la transformée de Fourier de l'erreur dynamique de transmission pour le mode  $j$  :

$$E_j(\omega) = \sum_{l=1}^N r_{jl}Q_l(\omega) \quad (3.18)$$

il vient de (3.16) et (3.18) :

$$\sum_{k=1}^N r_{ik}Q_k(\omega) + \sum_{k=1}^N r_{ik}H_k(\omega) \sum_{j=1}^m G_j(\omega)r_{jk} \otimes \sum_{l=1}^N r_{jl}Q_l(\omega) = \sum_{k=1}^N r_{ik}H_k(\omega) \sum_{j=1}^m K_j(\omega) \otimes r_{jk}E_j^{(s)}(\omega) \quad (3.19)$$

$$E_i(\omega) + \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^N r_{ik}r_{jk}H_k(\omega) \right] G_j(\omega) \otimes E_j(\omega) = S_i(\omega) \quad (3.20)$$

avec

$$S_i(\omega) = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^N r_{ik} r_{jk} H_k(\omega) \right] K_j(\omega) \otimes E_j^{(s)}(\omega) \quad (3.21)$$

En introduisant la fonction scalaire  $T_{ij}(\omega)$  définie par :

$$T_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^N r_{ik} r_{jk} H_k(\omega) \quad (3.22)$$

Le système des  $m$  équations spectrales s'écrit finalement :

$$E_i(\omega) + \sum_{j=1}^m T_{ij}(\omega) \cdot [G_j \otimes E_j](\omega) = S_i(\omega) \quad (3.23)$$

$$S_i(\omega) = \sum_{j=1}^m T_{ij}(\omega) \cdot [K_j \otimes E_j^{(s)}](\omega) \quad (3.24)$$

### 3.2.2.5. Procédure itérative de la méthode

Le principe de la méthode consiste à itérer selon le schéma suivant à l'étape  $n + 1$  :

$$E_i^{(n+1)}(\omega) = S_i(\omega) - \sum_{j=1}^m T_{ij}(\omega) \cdot [G_j \otimes E_j^{(n)}](\omega) \quad (3.25)$$

avec

$$E_i^{(1)}(\omega) = S_i(\omega) \quad (3.26)$$

Le critère d'arrêt est basé sur l'écart relatif entre deux itérations qui est comparé à un réel très petit  $\varepsilon \ll 1$ , typiquement  $\varepsilon = 10^{-6}$  :

$$\frac{\|E_i^{(n+1)}(\omega) - E_i^{(n)}(\omega)\|}{\|E_i^{(n+1)}(\omega)\|} < \varepsilon \quad (3.27)$$

Un autre critère d'arrêt est également imposé. Lorsqu'un nombre maximum retenu d'itérations  $N_{MAX}$  a été réalisé, la non-convergence du calcul itératif est décrétée. Par expérience, cette dernière situation résulte d'une instabilité paramétrique associée à la réponse libre du système, et n'est pas imputable au schéma itératif. Il convient alors d'augmenter l'amortissement visqueux équivalent des modes incriminés.

### 3.2.2.6. Erreur dynamique de transmission, effort dynamique de denture, réponses dynamiques des différents degrés de liberté

Les équations (3.23) et (3.24) et le schéma itératif (3.25) fournissent de manière directe l'erreur dynamique de transmission sur chacun des engrènements. Les surcharges dynamiques de dentures associées  $f_{D_j}(t)$  s'écrivent :

$$f_{D_j}(t) = k_j(t)\mathbf{R}_j^T \mathbf{x}(t) - k_j(t)\mathbf{R}_j^T \mathbf{x}_s(t) \quad (3.28)$$

Soit, dans le domaine fréquentiel :

$$F_{D_j}(t) = [K_j \otimes E_j](\omega) - [K_j(t) \otimes E_j^{(s)}](\omega) \quad (3.29)$$

Pour restituer la réponse des différents degrés de liberté  $X_i(\omega)$  du système, il faut revenir à la base physique par la matrice  $\mathbf{B}^{-1}$  et utiliser l'équation (3.16), ce qui donne :

$$Q_k(\omega) = H_k(\omega) \cdot \sum_{j=1}^m r_{jk} [K_j \otimes E_j^{(s)} - G_j \otimes E_j](\omega) \quad (3.30)$$

et

$$X_i(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^N V_{ik} r_{jk} H_k(\omega) \cdot [K_j \otimes E_j^{(s)} - G_j \otimes E_j](\omega) \quad (3.31)$$

### 3.2.2.7. Fréquences excitatrices

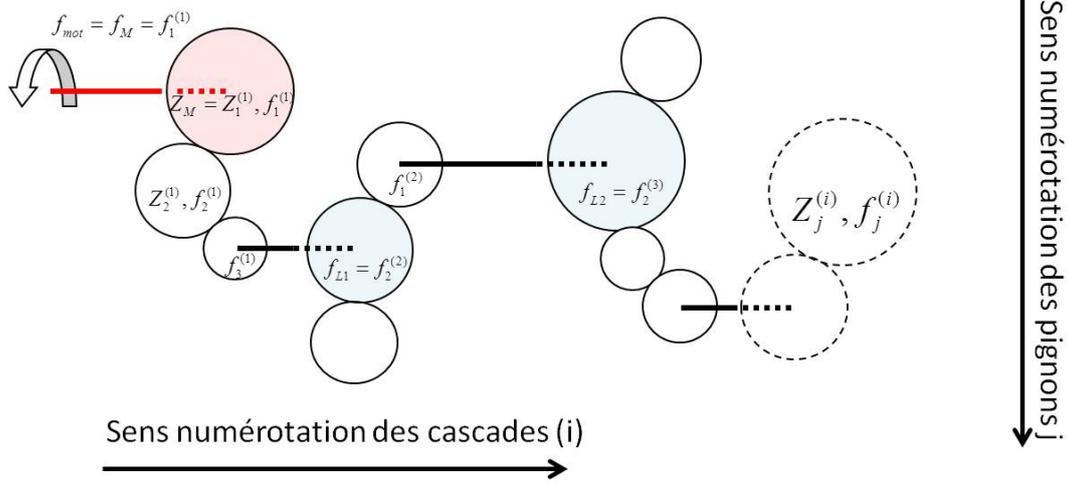
La démarche générale est expliquée à partir d'une série de  $C$  cascades à  $P$  pignons (voir Figure 3.3)

L'exposant ( $i$ ) désigne le numéro de la cascade.

L'indice  $j$  désigne le numéro des pignons au sein d'une cascade.

L'indice  $M$  désigne le pignon et l'arbre moteurs.

L'indice  $L_k$  désigne les pignons de liaison à partir de la cascade contenant l'arbre moteur.



**Figure 3.3.** : Schéma général d'une transmission par engrenages.

Les termes  $f_j^{(i)}$  désignent les fréquences de rotation des pignons et  $Z_j^{(i)}$  leur nombre de dents.

La fréquence excitatrice fondamentale  $f_0$  est définie comme étant le plus petit multiple commun des autres fréquences (engrènement, rotation). Elle s'exprime en fonction de la fréquence de rotation de l'arbre moteur et du nombre de dents des pignons par :

$$f_0 = \frac{f_M Z_M \left( \prod_{k=1}^{C-1} Z_{L_k} \right)}{\prod_{i=1}^C \left( \prod_{j=1}^P Z_j^{(i)} \right)} \quad (3.32)$$

La fréquence d'engrènement  $f_{Ei}$  est définie comme étant :

$$f_{Ei} = f_j^{(i)} \cdot Z_j^{(i)} \quad (3.33)$$

### 3.2.2.8. Utilisation d'une base modale tronquée

La méthode précédemment exposée implique jusqu'alors la nécessité de connaître la base modale complète du système. Cependant, il est possible de ne considérer qu'une base modale tronquée en évaluant la contribution statique des modes ignorés. Si  $n^*$  désigne le nombre de modes retenus, alors :

$$T_{ij}^{(tronqué)}(\omega) = \sum_{k=1}^{n^*} r_{ik} r_{jk} H_k(\omega) + \sum_{k=n^*+1}^N r_{ik} r_{jk} H_k(0) = T_{ij}^*(\omega) + T_{Rés,ij} \quad (3.34)$$

Soit avec  $H_k(0) = 1/\omega_k^2$ ,

$$T_{ij}(0) = \mathbf{R}_i^t \cdot \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j^t \cdot \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{R}_i \quad (3.35)$$

avec

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_0^t \quad (3.36)$$

$\mathbf{G}_0$  désigne la matrice de souplesse statique du système. Le terme  $T_{ij}(0) = \mathbf{R}_i^t (\mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{R}_j)$  correspond au rapprochement statique sur la denture  $i$ , soit  $\mathbf{R}_i^t \mathbf{X}_{sj}$  induit par un système de forces  $\mathbf{R}_j$  appliqué sur la denture  $j$  (force unitaire transmise à la denture). S'agissant d'une structure libre-libre,

$$T_{ij}(0) = \frac{1}{k_i} \delta_{ij} \quad (3.37)$$

où  $\delta_{ij}$  est l'opérateur de Kronecker défini comme :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.38)$$

La partie résiduelle s'écrit alors :

$$T_{Rés\ ij} = \frac{1}{k_i} \delta_{ij} - T_{ij}^*(0) \quad (3.39)$$

Ce qui conduit à :

$$T_{ij}^{(tronqué)}(\omega) = T_{ij}^*(\omega) - T_{ij}^*(0) + \frac{1}{k_i} \delta_{ij} \quad (3.40)$$

### 3.2.2.9. Propriétés des modes de denture

La recherche des modes de denture revient à déterminer les modes qui contribuent de la façon la plus énergétique à la sollicitation de la raideur d'engrènement. En remarquant par l'équation (3.37) que

$$T_{ii}(0) = \sum_{k=1}^N \frac{r_{ik}^2}{\omega_k^2} = \frac{1}{k_i} \quad (3.41)$$

la contribution énergétique  $\rho_{ik}$  du mode  $k$  à l'engrènement  $i$  s'écrit :

$$\rho_{ik} = k_i \frac{r_{ik}^2}{\omega_k^2} \quad (3.42)$$

Dans le cas où la totalité des modes est prise en compte, la relation suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^N \rho_{ik} = 1 \quad (3.43)$$

## 3.3. Réponse dynamique de la cascade de distribution

### 3.3.1. Caractéristiques de la distribution étudiée

La cascade de distribution étudiée est celle du chapitre 2, (Figure 2.1). Les Figures 3.4 et 3.5. présentent respectivement les spectres d'amplitude des erreurs statiques de transmission sous charge et des raideurs d'engrènement correspondant aux corrections de référence. Ces spectres sont obtenus pour les couples de fonctionnement moyens de l'optimisation (couple d'entrée sur l'arbre à cames égal à 221 N.m, voir Tableau 2.2).

### 3.3.2. Modélisation de la cascade de distribution en rotation pure

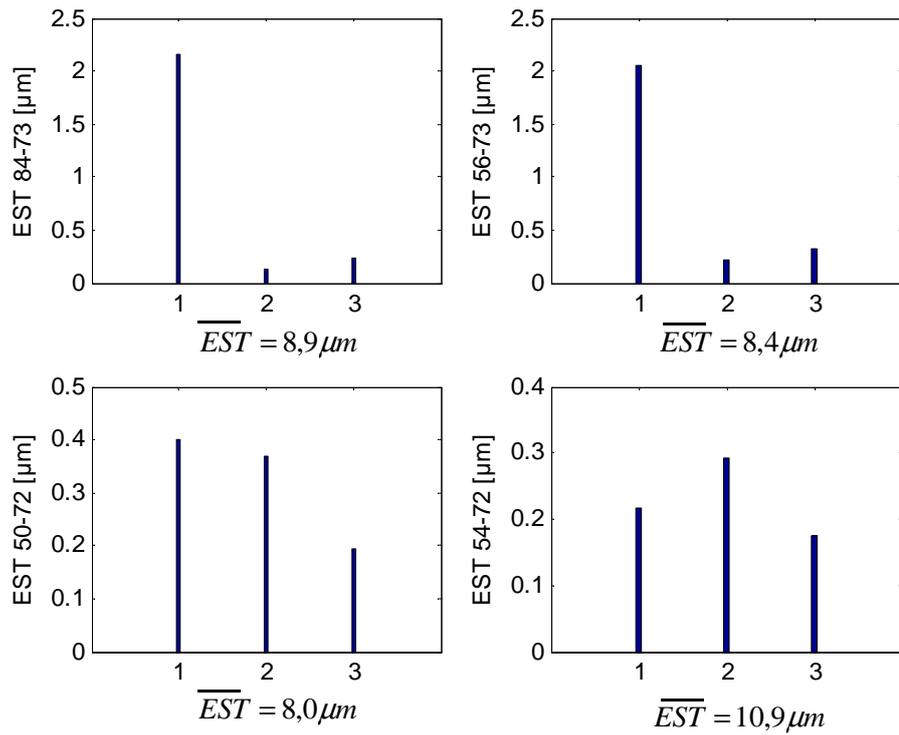
La cascade de distribution est modélisée en rotation. Chaque pignon, modélisé par une inertie en leur centre, possède un unique degré de liberté, la rotation autour de son axe. L'engrènement entre les pignons est modélisé par une matrice de raideur [2x2] telle qu'expliquée dans le paragraphe 3.2.2.2. Les sources d'excitation retenues sont les fluctuations des raideurs d'engrènement et des erreurs statiques de transmission présentés précédemment. Plusieurs modèles sont étudiés, en partant d'une unique cascade et en complexifiant jusqu'à la cascade complète de six pignons, afin de bien mettre en évidence les différences observées selon les cas.

#### 3.3.2.1. Cascades 84-73-56

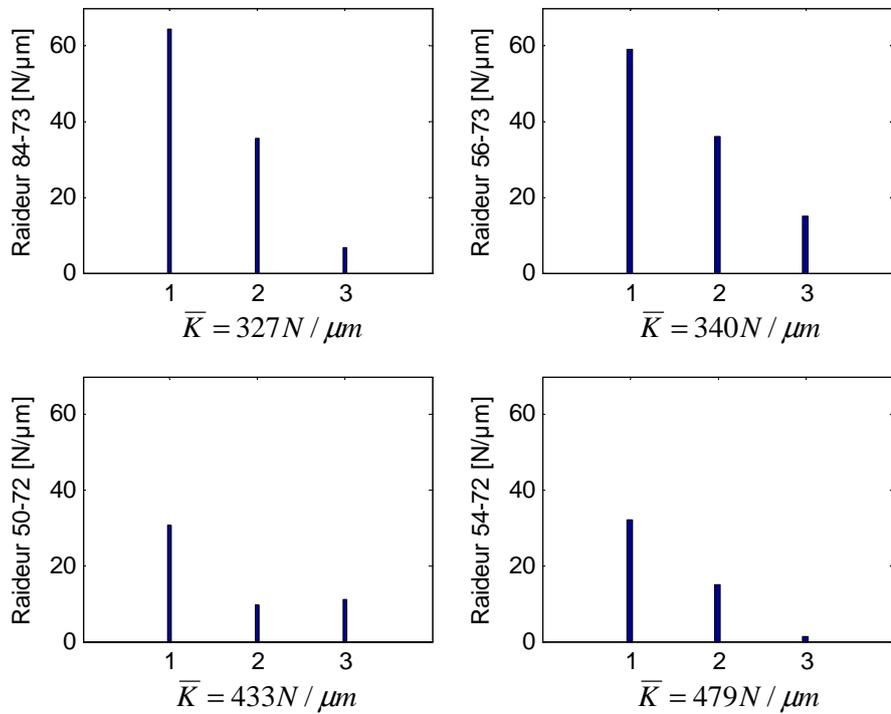
En plus du mode de corps rigide, les deux modes propres sont situés à  $f_{1(84/73/56)} = 1959 \text{ Hz}$  et  $f_{2(84/73/56)} = 3248 \text{ Hz}$ . La Figure 3.7 montre la contribution énergétique sur les engrènements des modes propres de la cascade 84-73-56 (Figure 3.6). Les deux modes ne sollicitent pas de la même manière les deux engrènements (le premier mode sollicite plus le premier engrènement, et le deuxième mode sollicite plus le deuxième engrènement).

L'erreur dynamique de transmission et l'effort de denture sont susceptibles de présenter une amplification dynamique pour les régimes correspondant à une coïncidence entre la fréquence du mode et celle d'un des harmoniques de la fréquence d'engrènement.

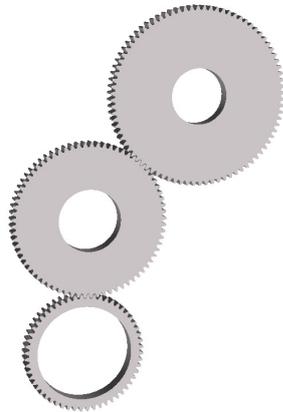
#### *Validité de la méthode spectrale itérative*



**Figure 3.4.** : Spectres d'amplitudes des erreurs statiques de transmission (corrections standards et couple nominal).



**Figure 3.5.** : Spectres d'amplitudes des raideurs d'engrènement pour les corrections de référence.



**Figure 3.6.** : Cascade 84-73-56 (n° des pignons de haut en bas).

La méthode spectrale itérative est mise en oeuvre pour calculer les réponses dynamiques qui sont ensuite validées par comparaison avec une méthode numérique d'intégration temporelle. Le système d'équations différentielles du mouvement s'écrit dans le domaine temporel comme ceci :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + C_{11}\dot{x}_1 + C_{12}\dot{x}_2 + \frac{k_1(t)}{M_I} (x_1 - x_{s1}(t)) + \frac{k_2(t)}{m_2} (x_2 - x_{s2}(t)) = 0 \\ \ddot{x}_2 + C_{21}\dot{x}_1 + C_{22}\dot{x}_2 + \frac{k_1(t)}{m_2} (x_1 - x_{s1}(t)) + \frac{k_2(t)}{M_{II}} (x_2 - x_{s2}(t)) = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement les erreurs dynamiques de transmission des couples de pignons 84-73 et 75-56. Les termes de raideur et d'erreur statique de transmission s'écrivent :

$$\begin{aligned} k_i(t) &= \overline{k_i(t)} \left( 1 + \sum_{n=1}^{N_{hk}} a_{k_n} \cos(2n\pi\omega t) + b_{k_n} \sin(2n\pi\omega t) \right) \\ x_{si}(t) &= \overline{x_{si}(t)} \left( 1 + \sum_{n=1}^{N_{he}} a_{e_n} \cos(2n\pi\omega t) + b_{e_n} \sin(2n\pi\omega t) \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Les termes  $a_{k_n}, b_{k_n}$  et  $a_{e_n}, b_{e_n}$  sont respectivement les coefficients de Fourier des raideurs d'engrènement et des erreurs statiques de transmission.

$N_h$  désigne le nombre d'harmoniques considérés pour représenter les deux grandeurs.

Un amortissement visqueux équivalent à 5% est introduit sur chaque mode propre. La Figure 3.8 présente les évolutions des valeurs efficaces des erreurs dynamiques de transmission. La valeur obtenue pour un régime nul correspond à la valeur efficace

de l'erreur statique de transmission. Les courbes obtenues par la méthode spectrale itérative et par la méthode d'intégration temporelle se superposent parfaitement. La méthode spectrale itérative offre un gain de temps de l'ordre de 150 pour une erreur relative inférieure à 0.1%.

#### *Influence du couplage*

Afin de mettre en évidence l'effet du couplage entre les excitations paramétrique, on calcule l'erreur statique avec les équations couplées d'une part, puis en sommant les réponses obtenues en considérant les deux excitations séparément. La Figure 3.9 permet de comparer la réponse obtenue en considérant les deux excitations couplées avec la somme des réponses obtenues en considérant les excitations les unes après les autres. La valeur efficace de la réponse présente une différence relative qui peut atteindre 37%. Ce résultat met en évidence la nécessité de prendre en compte les couplages entre engrènements.

#### *Effort dynamique de denture*

La Figure 3.10 montre l'évolution de l'effort dynamique de denture en fonction du régime de fonctionnement. Les différents pics d'amplification correspondent à l'excitation des modes de denture par la fréquence d'engrènement (résonances principales) et de ses harmoniques (résonances paramétriques secondaires). Le niveau des efforts est très élevé. En effet, pour le modèle simplifié retenu, le modèle ne possède que 3 degrés de liberté et chacun des 2 modes est très énergétique. Un modèle plus réaliste (comme présenté plus tard) prenant notamment en compte l'élasticité des arbres, des roulements et de la plaque support de la cascade de distribution conduit à une répartition de l'énergie de déformation de l'engrènement sur un nombre plus grand de modes et à des niveaux d'effort dynamique plus faibles.

#### *Influence de la phase entre les excitations*

Bien souvent, le positionnement relatif des pignons au sein de la distribution répond en premier lieu à une contrainte d'espace. Il est donc possible de modifier ce paramètre dans un cas industriel, mais cela doit être fait bien en amont dans la phase de préconception du groupe moto-propulseur. Pour étudier l'influence de la phase entre l'excitation liée à l'engrènement des pignons 84 et 73 et celle liée entre les pignons 56 et 73, un déphasage d'un 1/4, d'un 1/2 et de 3/4 de la période d'engrènement est introduit sur la première excitation (voir Figure 3.11). Le même déphasage est également introduit sur la fluctuation de la raideur d'engrènement qui reste toujours en phase avec l'erreur statique de transmission correspondante. La Figure 3.12 montre que l'influence de la phase entre les excitations peut être très importante. En effet, l'effort de denture à la résonance principale est environ trois fois plus important pour une valeur de phase de  $\Psi = 0.75$  que pour une valeur de phase de  $\Psi = 0.25$ .

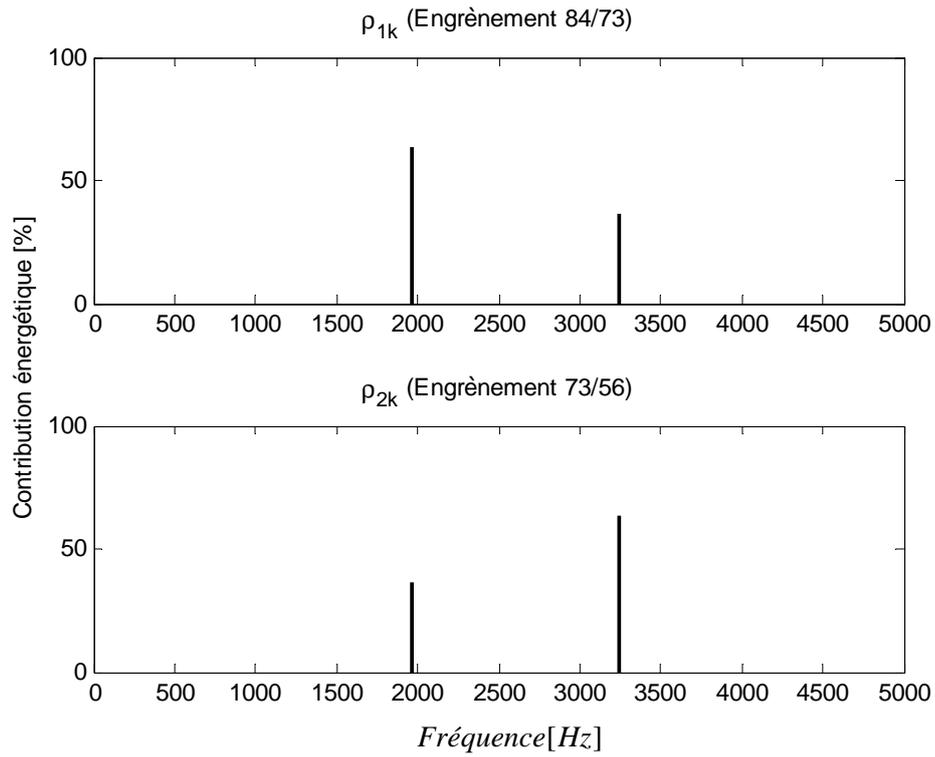


Figure 3.7. : Contribution énergétique des modes propres.

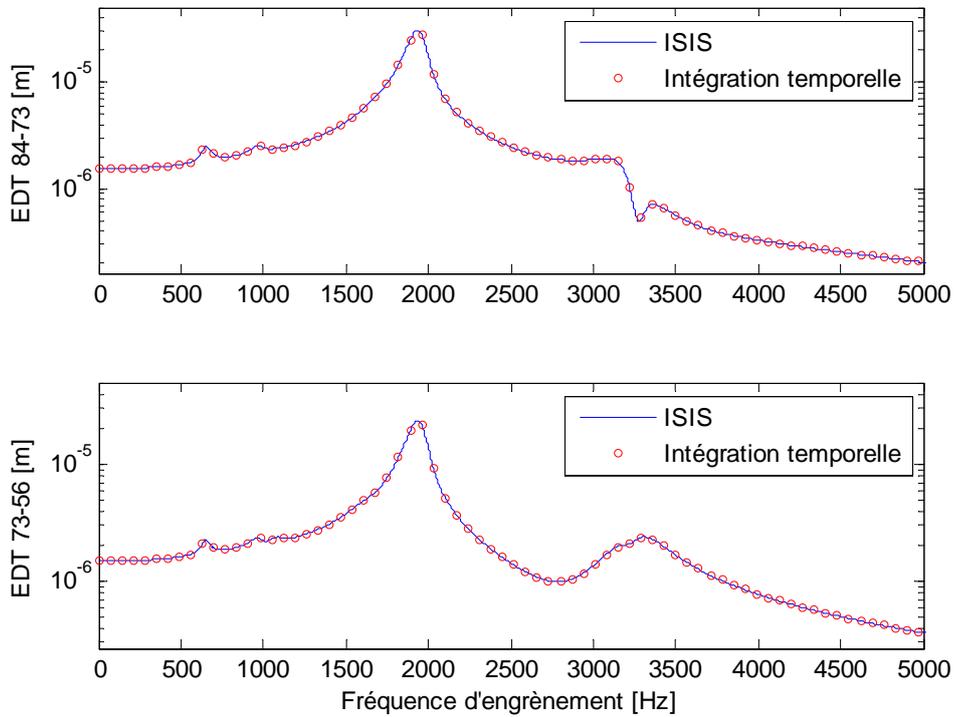
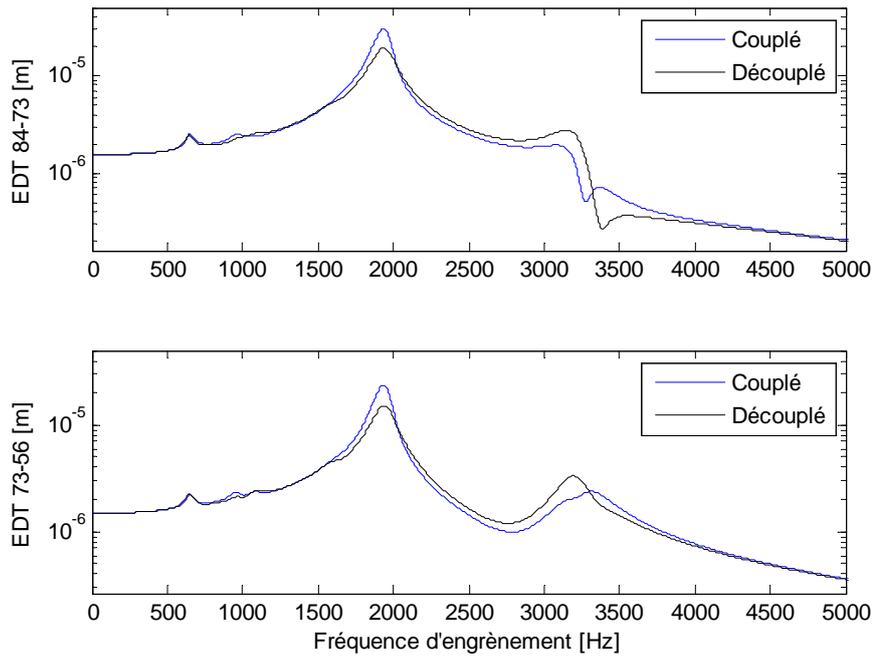
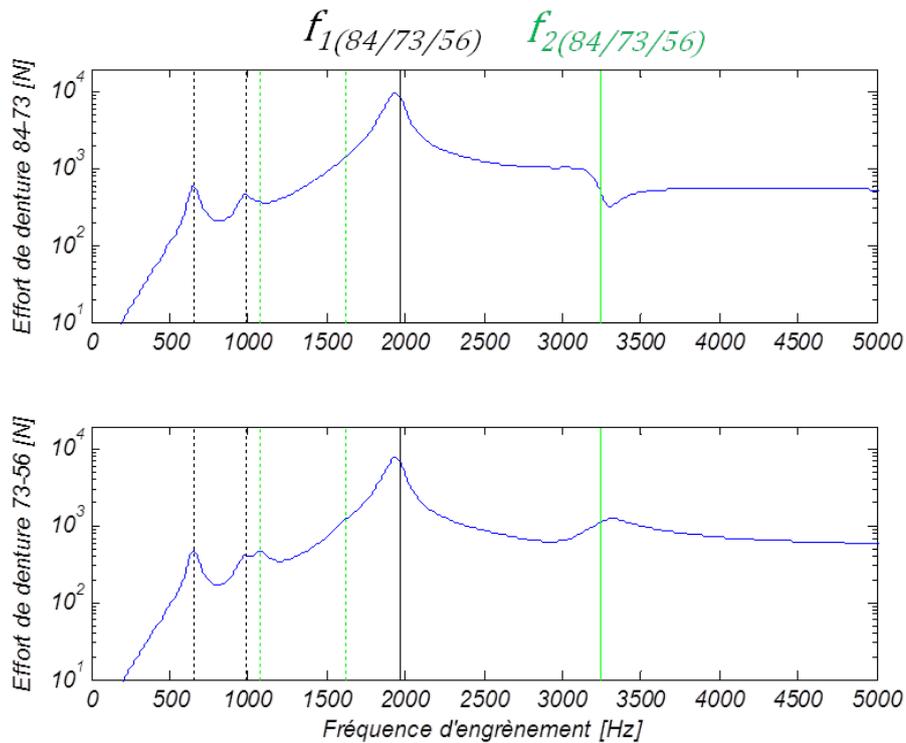


Figure 3.8. : Erreurs dynamiques de transmission avec la méthode spectrale itérative et par intégration temporelle.



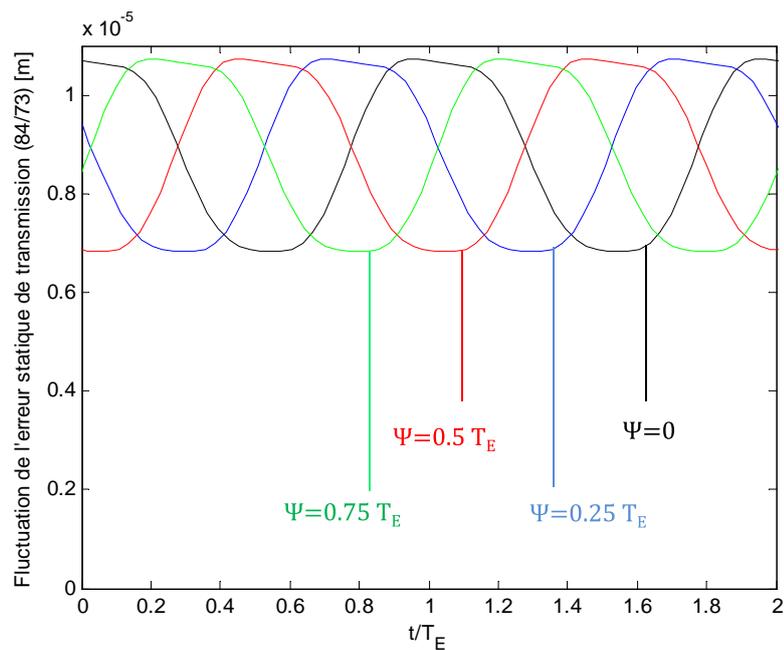
**Figure 3.9.** : Comparaison des réponses entre la prise en compte des excitations couplées et la somme des excitations découplées.



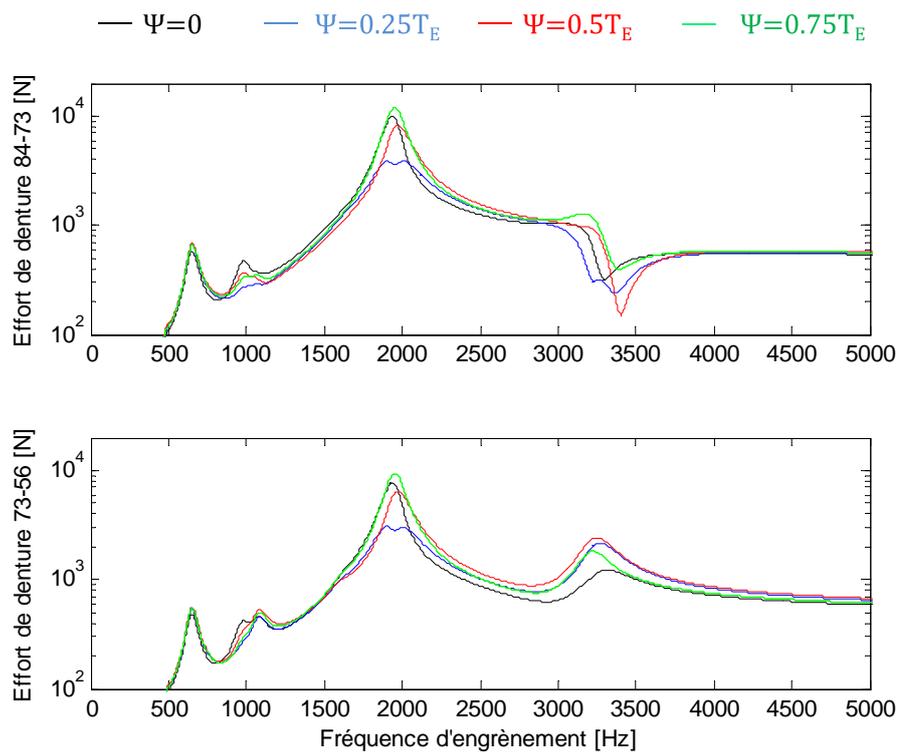
**Figure 3.10.** : Efforts dynamiques de denture.

- Résonances principales.
- - - Résonances secondaires.

La phase entre ces excitations est physiquement liée à l'angle entre les entraxes des pignons.



**Figure 3.11.** : Déphasage appliqué sur l'erreur statique de transmission de l'engrènement 84/73.



**Figure 3.12.** : Influence de la phase  $\Psi$  entre les excitations sur l'effort de denture.

### 3.3.2.2. Cascades 50-72-54

Cette configuration (voir Figure 3.13) est similaire à la précédente, les pignons ont simplement des caractéristiques différentes.

L'analyse modale du système révèle un mode de corps rigide et deux modes aux fréquences  $f_{1(50/72/54)} = 1867 \text{ Hz}$  et  $f_{2(50/72/54)} = 3002 \text{ Hz}$ .



**Figure 3.13.** : Cascade 50-72-54 (n° des pignons de haut en bas).

La Figure 3.14 présente les contributions énergétiques des modes sur les engrèvements. Les efforts dynamiques de denture des deux engrèvements sont présentés Figure 3.15. Contrairement à la cascade 84-73-56, les spectres excitateurs de la seconde cascade ont des composantes de plus faibles amplitudes. L'influence des harmoniques supérieures est plus marquée. Par conséquent, les excitations des modes par les harmoniques supérieurs (résonances paramétriques secondaires) mènent à un effort de denture de même ordre de grandeur qu'au niveau des résonances principales.

### 3.3.2.3. Cascades couplées

Les cascades 84-73-56 et 50-72-54 sont maintenant couplées par une liaison rigide entre le pignon à 56 dents de la première et le pignon à 72 dents de la seconde cascade, soit  $\theta_{56} = \theta_{72}$  (cf. Figure 3.16). En effet, l'arbre reliant ces pignons est très court et son diamètre est tel que sa raideur est très grande devant les autres raideurs du système élastique considéré.

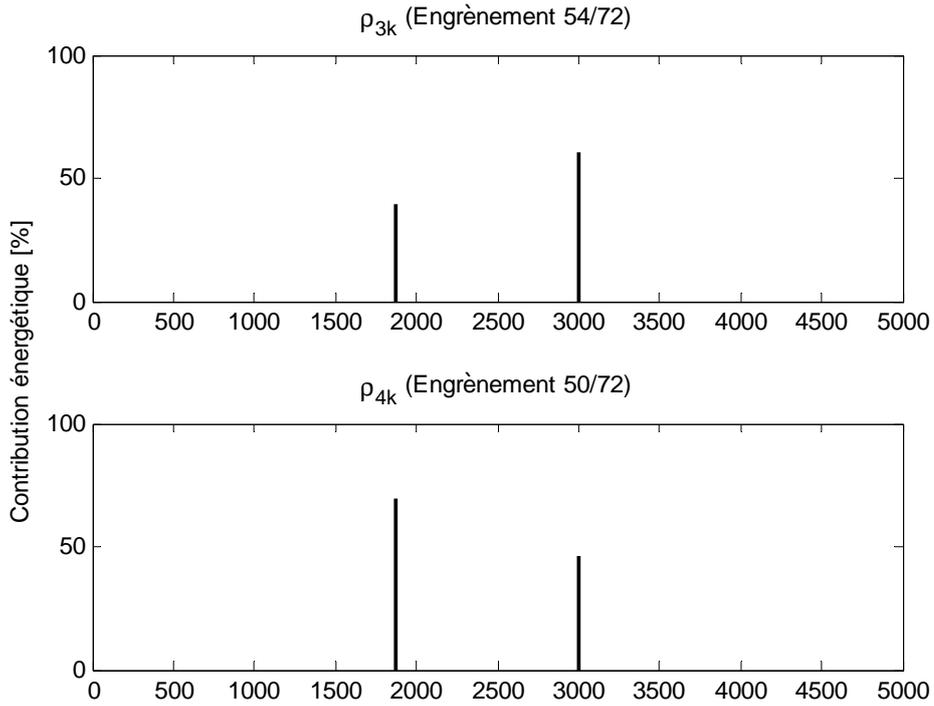


Figure 3.14. : Contribution énergétique des modes propres.

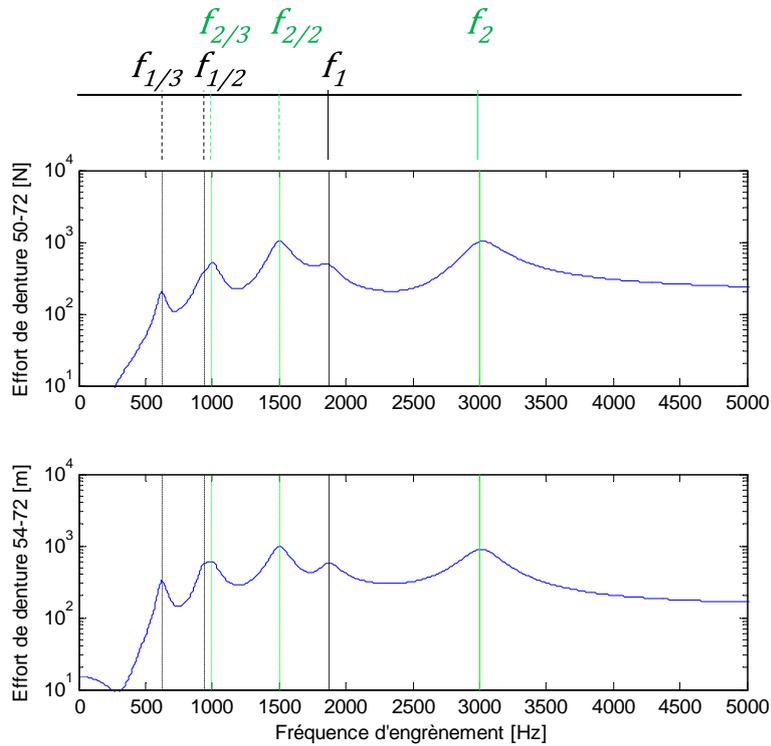
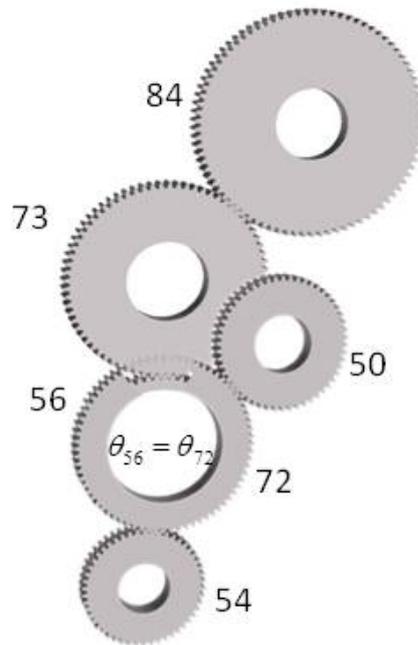


Figure 3.15. : Efforts dynamiques de denture.

- Résonances principales.
- - - Résonances secondaires.



**Figure 3.16.** : Cascades 84-73-56 et 50-72-54 couplées.

L'analyse modale révèle un mode de corps rigide et 4 modes propres dont les fréquences sont récapitulées dans le Tableau 3.1.

Mode - Fréquence propre
0 - 0 Hz
1 - 1180 Hz
2 - 1868 Hz
3 - 2739 Hz
4 - 3099 Hz

**Tableau 3.1.** : Fréquences propres des cascades couplées.

L'analyse des contributions énergétiques de ces modes (cf. Figure 3.17) montre que la déformée modale du premier mode sollicite principalement la première cascade et celle du second mode la deuxième cascade. Par contre, l'énergie de déformation des modes 3 et 4 est répartie sur les deux cascades. Les déformées modales de chacun des modes propres sont représentées 3.18.

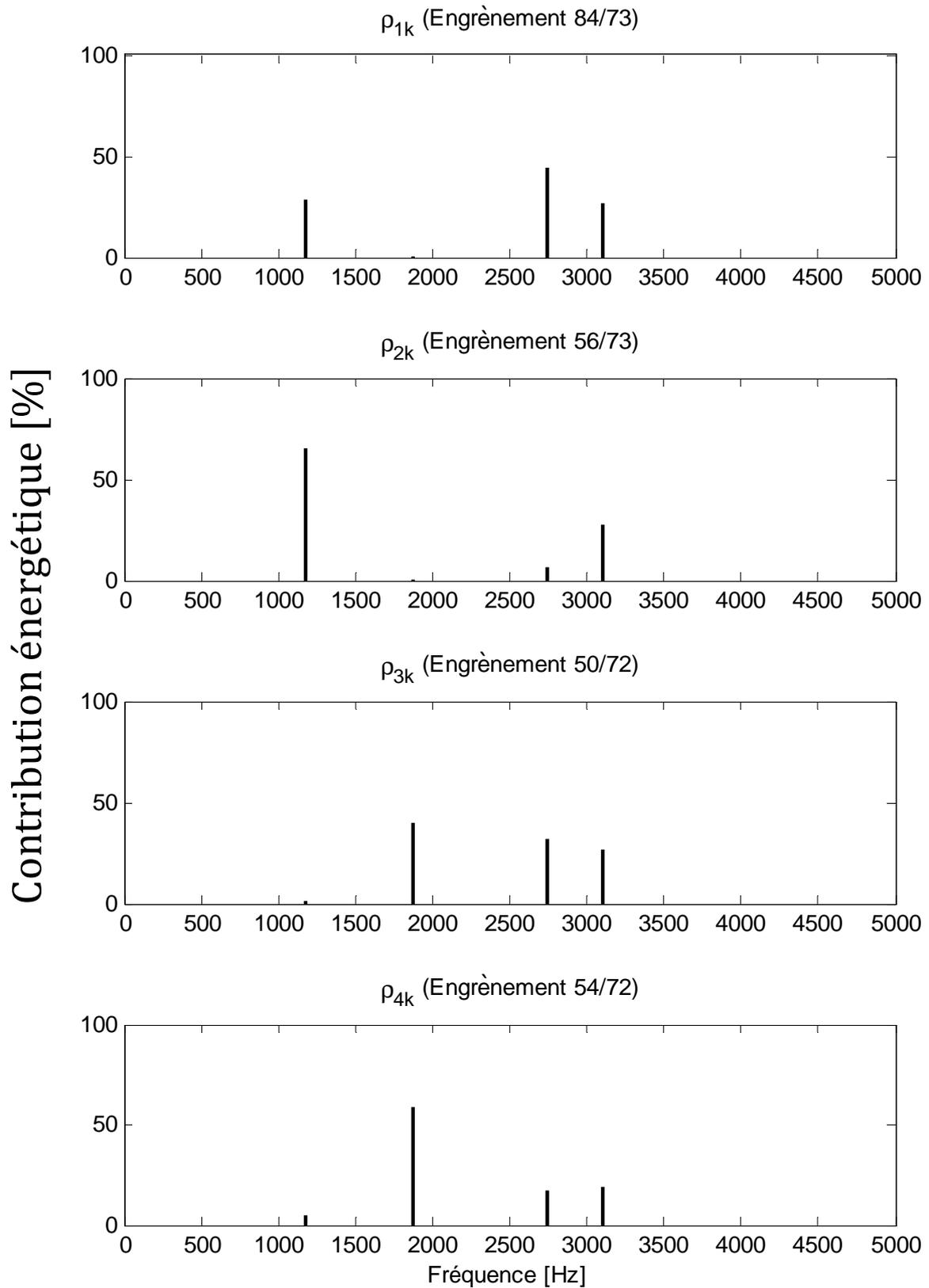
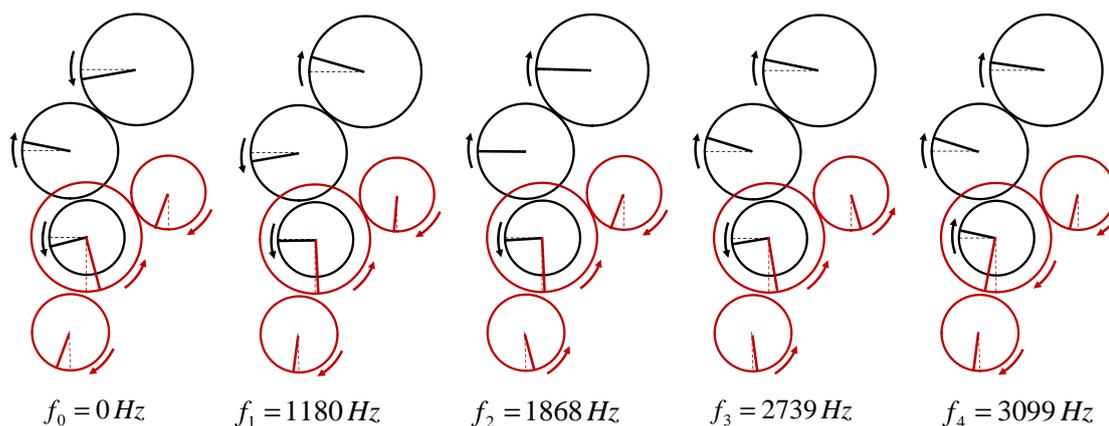


Figure 3.17. : Contributions énergétiques des modes aux différents engrènements.



**Figure 3.18.** : Déformées modales du système de cascades couplées.

La cascade de denture complète présente 2 fréquences d'engrènement distinctes :  $f_{E_1}$  pour les engrènements de la cascade 84-73-56 et  $f_{E_2}$  pour les engrènements de la cascade 50-72-54. Par ailleurs, les ordres des différentes raies sont identifiés en fonction de la fréquence d'engrènement sous cette forme  $n_i \cdot f_{E_i}$  avec  $i$  le numéro de la cascade, et  $n_i$  le rang ( $n_i = 1$  fondamentale, et  $n_i = 2, 3, \dots$  les deuxième, troisième, ... harmoniques). Les différents ordres attendus peuvent alors s'écrire sous la forme  $n_1 f_{E_1} \pm n_2 f_{E_2}$ , avec  $n_1$  et  $n_2$  des entiers. On identifie alors les différents ordres comme présenté dans le Tableau 3.2.

Identifiant $(n_1, n_2)$	Ordres
$(-1, 1)$	$-f_{E_1} + f_{E_2}$
$(1, 0)$	$f_{E_1}$
$(0, 1)$	$f_{E_2}$
$(2, 0)$	$2f_{E_1}$
$(1, 1)$	$f_{E_1} + f_{E_2}$
$(0, 2)$	$2f_{E_2}$
$(3, 0)$	$3f_{E_1}$
$(0, 3)$	$3f_{E_2}$

**Tableau 3.2.** : Identification des ordres.

La Figure 3.19 présentent les cascades des spectres d'amplitudes, ou "waterfalls", des différentes erreurs dynamiques de transmission en fonction du régime de fonctionnement. L'amplitude de la raie est représentée en décibels par une couleur. La référence correspond à l'amplitude maximale de l'erreur dynamique considérée. Pour comparer deux erreurs dynamiques, il est donc nécessaire en premier lieu de comparer les amplitudes maximales. Les fréquences des modes propres (excités) sont symbolisées par les rectangles en transparence sur la Figure 3.19.

Les ordres identifiés comme expliqué précédemment sont indiqués et des lignes fictives en pointillées sont tracées pour faciliter la lecture.

L'analyse des résultats montre que le niveau de la réponse dynamique de la cascade 84-73-56 est 3 à 5 fois plus élevé que celui de l'autre cascade. Cela est cohérent avec les spectres d'erreurs statiques de transmission et de raideurs d'engrènement de la première cascade (Figure 3.4 et Figure 3.5) qui présentent une raie fondamentale de grande amplitude masquant l'influence des autres harmoniques.

Le couplage entre les excitations est mis en évidence par l'émergence des ordres  $(-f_{E_1} + f_{E_2})$  et  $(f_{E_1} + f_{E_2})$ .

Le régime critique à  $830 \text{ tr/min}$  correspond à une fréquence d'engrènement de la première cascade de  $1150 \text{ Hz}$ . Pour la cascade 50-72-54, les pics d'amplification sont plus nombreux en raison de l'influence des différents harmoniques mais leur amplitude est modérée. Les pics d'amplification de la réponse de la cascade 84-73-56 correspondent principalement à l'excitation du premier mode, et, de manière secondaire, au troisième. Les pics d'amplification de la réponse de la cascade 50-72-54 correspondent à l'excitation des quatre modes.

La Figure 3.20 présente les spectres des erreurs dynamiques de transmission à la vitesse de rotation moteur critique ( $830 \text{ tr/min}$ ) avec les ordres les plus influents indexés.

Pour les quatre erreurs dynamiques de transmission, les maxima d'amplitude correspondent à l'ordre de la fréquence d'engrènement de la première cascade.

La Figure 3.21 présente la valeur efficace des erreurs dynamiques de transmission en fonction de la vitesse de rotation moteur. La lecture de ce graphe permet de conclure que le régime critique se situe à  $830 \text{ tr/min}$  mais l'information sur les ordres critiques est alors perdue. Les diagrammes waterfall sont donc les plus adaptés à la description de la réponse dynamique des transmissions multi-étages en raison de la présence de deux fréquences d'engrènement.

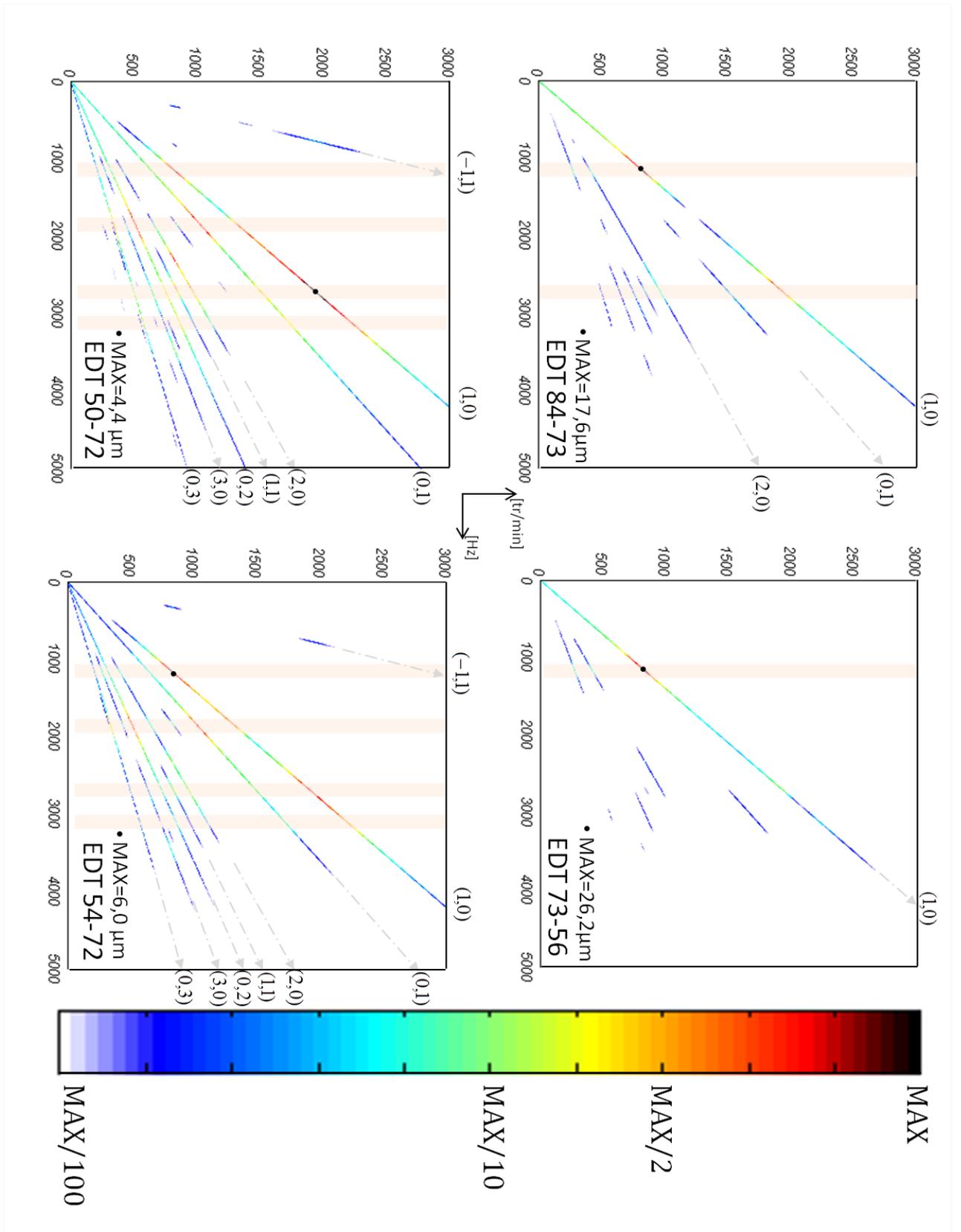
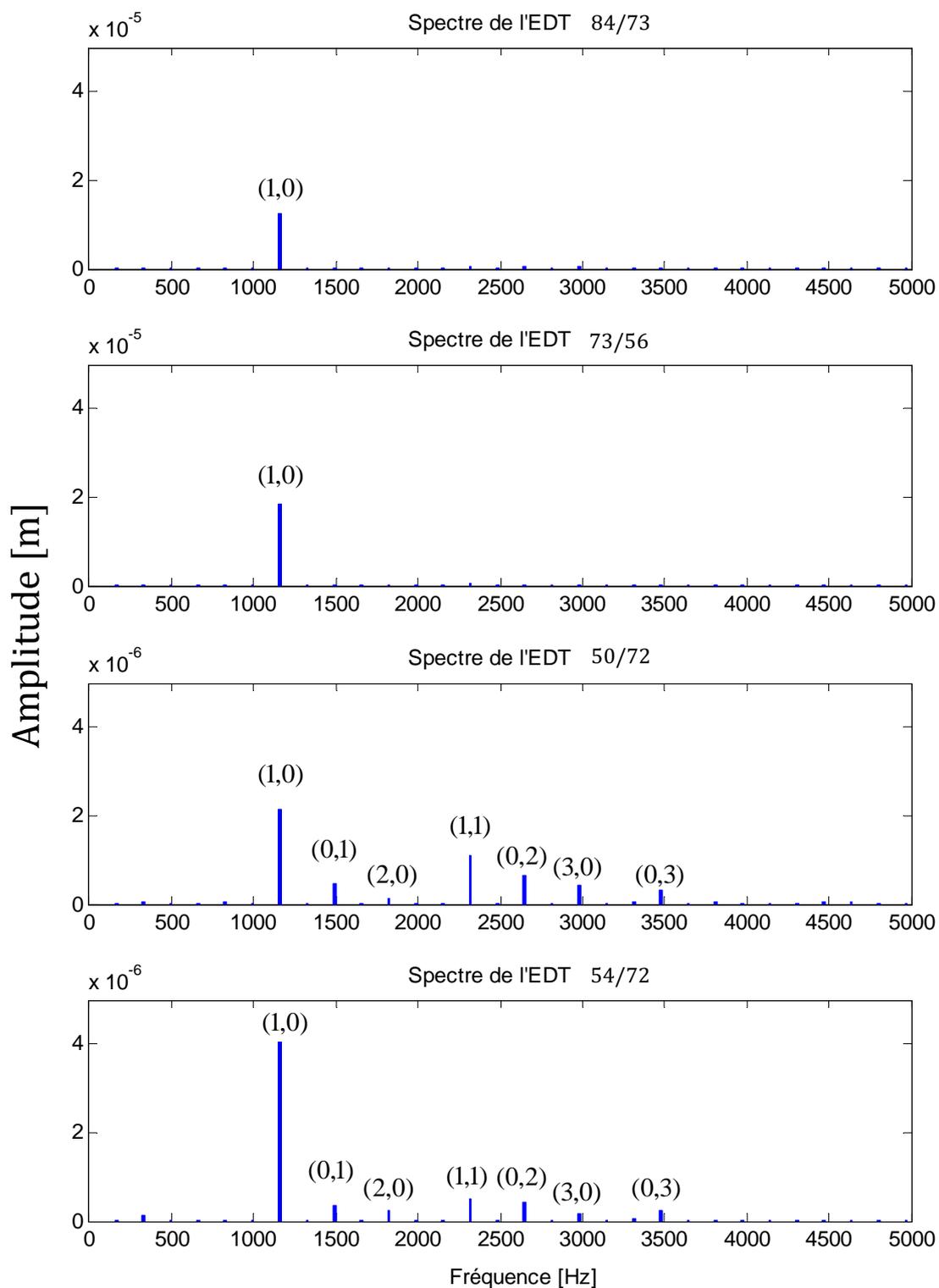
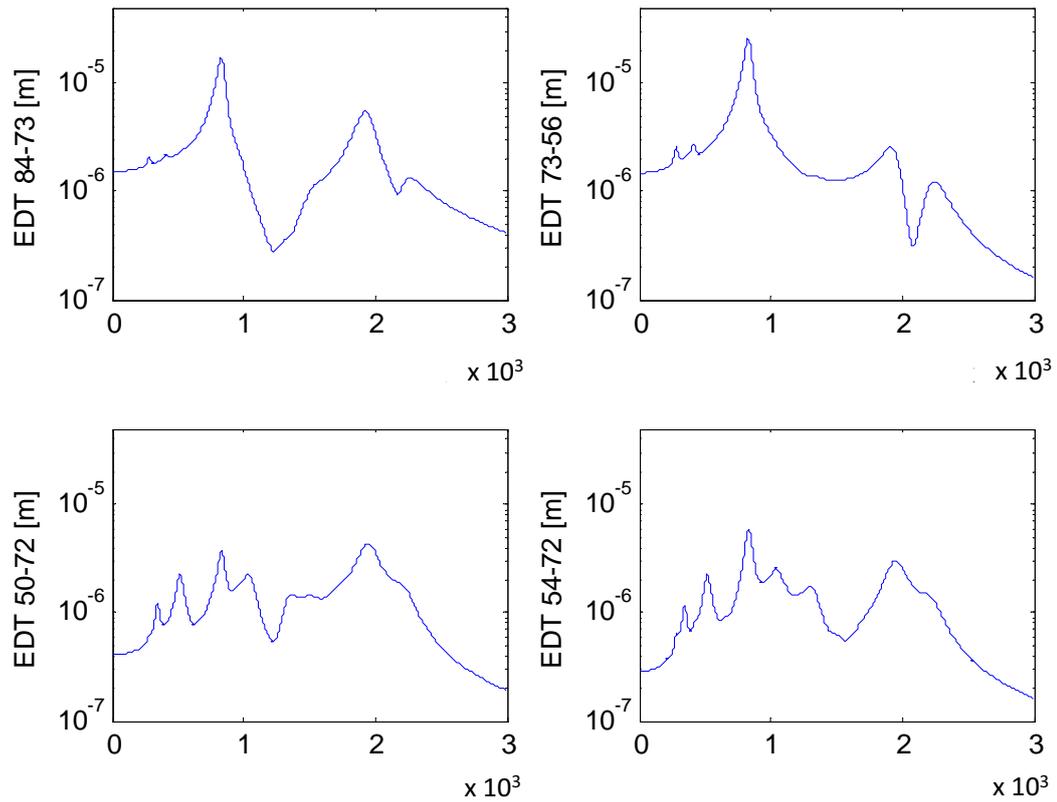


Figure 3.19. : Diagrammes “waterfall” de la valeur efficace des erreurs dynamiques de transmission du système de cascade couplées.



**Figure 3.20.** : Spectres d'amplitudes des erreurs dynamiques de transmission pour une vitesse de rotation moteur de  $830 \text{ tr/min}$ .



**Figure 3.21.** : Valeur efficace des erreurs dynamiques de transmission en fonction de la vitesse de rotation moteur.

#### 3.3.3. Modélisation complète de la cascade

##### 3.3.3.1. Description du modèle

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire une modélisation complète de la cascade en intégrant l'élasticité des lignes d'arbres, des roulements et de la plaque support, afin d'analyser notamment la réponse vibratoire de celle-ci et les nuisances générées par le sirènement de la cascade. Chacun des éléments de la transmission est discrétisé par éléments finis. Le schéma de la cascade de dentures est représenté Figure 3.22 (les diamètres et longueurs des arbres ne sont pas respectés dans cette représentation). Les pignons sont en porte à faux. Les liaisons pivot entre la plaque support et les arbres supportant les pignons sont assurées par des roulements.



**Figure 3.22.** : Schéma de la cascade de dentures : arbres, pignons, roulements et plaque support.

##### *Pignons*

Chaque pignon est modélisé par un noeud possédant six degrés de liberté et des éléments de masse et d'inertie concentrés. Cette modélisation de corps rigide est justifiée car les fréquences des modes propres des pignons sont très élevés par rapport à la plage de fréquence d'intérêt.

##### *Lignes d'arbres*

Les arbres des pignons sont modélisés par des éléments de poutre à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud. La description du couplage élastique entre les lignes d'arbres induit par le contact entre les dents en prise est assurée par une matrice

de raideur généralisée de dimension  $[12 \times 12]$  telle que présentée dans le paragraphe 3.2.2.2. Le Tableau 3.3 liste la valeur des diamètres des arbres supportant les pignons.

Pignon	84	73	56	50	72	54
Diamètre l'arbre [mm]	70	104	115	60	128	67
Longueur de l'arbre [mm]	12			41		

**Tableau 3.3.** : Diamètres et longueurs des arbres des pignons.

### *Roulements*

Les bagues extérieures et intérieures des roulements sont supposés rigides, et bien que la nature des contacts dans les roulements rend la raideur de ceux-ci non-linéaire, une matrice de raideur diagonale linéarisée autour de la position d'équilibre statique induite par le couple transmis est considérée pour les 5 degrés de liberté  $\{x, y, z, \theta_x, \theta_y\}$  (la rotation autour de l'axe de rotation des pignons est considérée libre). Il est difficile de caractériser précisément les raideurs des roulements. Ainsi, le Tableau 3.4 liste la valeur des raideurs des roulements choisies de manière réaliste en fonction de leur architecture.

Pignon	Raideurs radiales $\{x, y\}$ [N/ $\mu\text{m}$ ]	Raideur axiale $\{z\}$ [N/ $\mu\text{m}$ ]	Raideurs angulaires $\{\theta_x, \theta_y\}$ [N/ $\mu\text{rad}$ ]
84	412	138	0.828
73	346	116	0.695
56/72	218	729	0.438
50	386	129	0.776
54	582	195	0.117

**Tableau 3.4.** : Raideurs des roulements.

### *Plaque support*

La plaque est modélisée par des éléments de plaques quadrangulaires à 4 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud. Les caractéristiques physiques de la plaque sont listés dans le Tableau 3.5.

Module d'Young	210 <i>Gpa</i>
Masse volumique	7800 <i>kg/m<sup>3</sup></i>
Coefficient de Poisson	0.3
Epaisseur	15 <i>mm</i>
Largeur	43 <i>cm</i>
Hauteur	80 <i>cm</i>
Surface	0.344 <i>m<sup>2</sup></i>

**Tableau 3.5.** : Caractéristiques de la plaque support.

Les liaisons de la plaque avec son environnement (autres composants du groupe motopropulseur) sont ignorées. Elle est considérée encadrée sur sa périphérie.

#### 3.3.3.2. Réponse dynamique pour des corrections de dentures standards

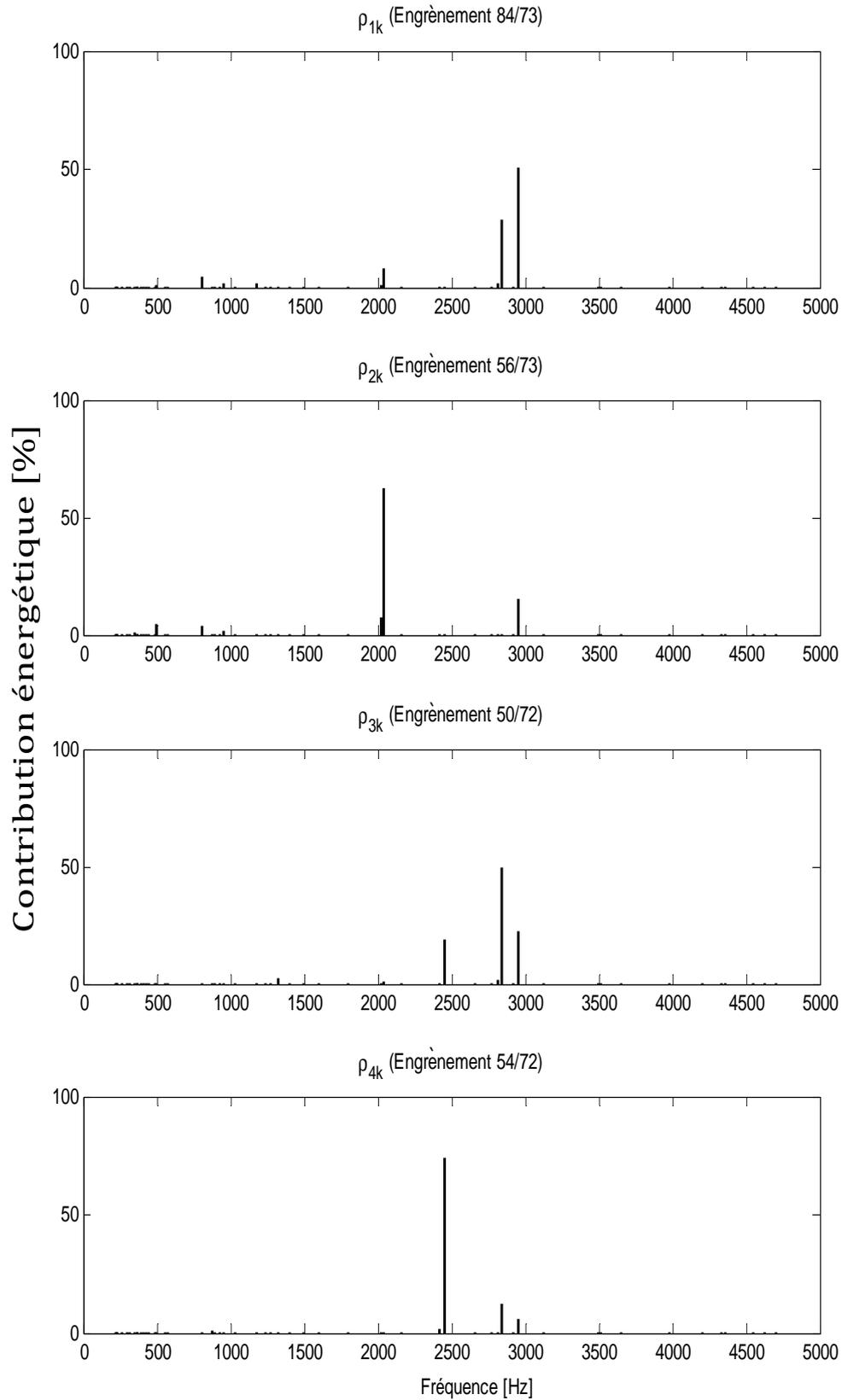
Les spectres des erreurs statiques de transmission correspondent à ceux fournis Figures 3.4 et 3.5. La base modale est tronquée à partir du 100<sup>ème</sup> mode de manière à assurer qu’au moins 99% de l’énergie de déformation de chaque engrènement est prise en compte. La Figure 3.23 présente les contributions énergétiques des modes.

Près de 90% de l’énergie est répartie sur 5 modes propres compris dans la plage [2000 – 3000] Hz (qui se situent donc dans le domaine audible) et listés dans le Tableau 3.6. Les modes 40 et 42 sont par ailleurs très proches. Les résultats obtenus confirment que la prise en compte des propriétés élastiques des arbres, des roulements et du carter modifie sensiblement la localisation fréquentielle des modes de denture et, par conséquent, des régimes critiques de fonctionnement [82].

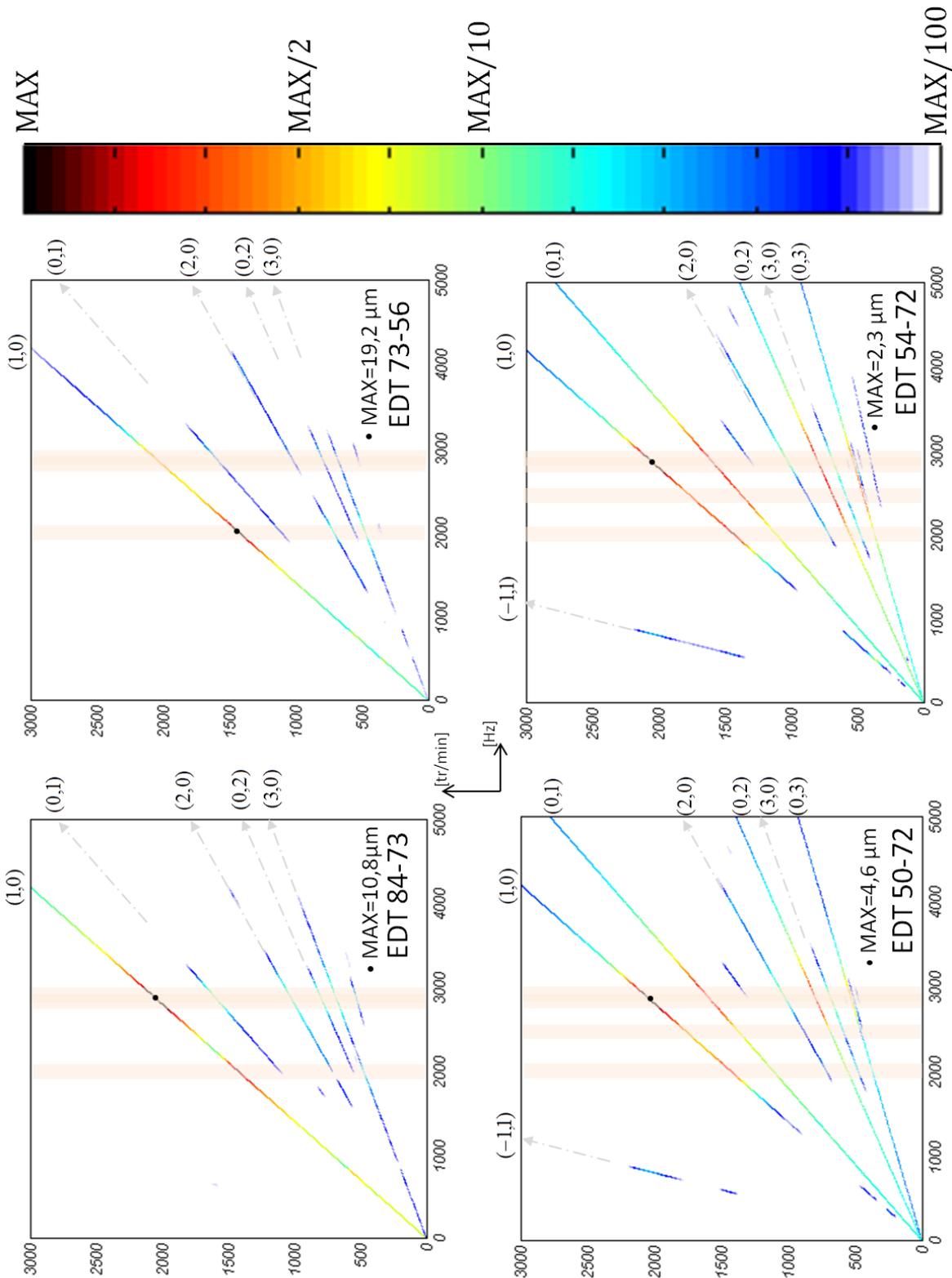
Mode - Fréquence	$\rho_{1k}$ [%]	$\rho_{2k}$ [%]	$\rho_{3k}$ [%]	$\rho_{4k}$ [%]
32 - 2018 Hz	1	8	-	-
33 - 2040 Hz	8	63	1	1
36 - 2454 Hz	-	-	19	74
40 - 2844 Hz	28	1	49	13
42 - 2950 Hz	51	15	23	6
$\sum_{k=32,33,36,40,42} \rho_{ik}$	<b>88</b>	<b>87</b>	<b>92</b>	<b>94</b>

**Tableau 3.6.** : Liste des 5 modes les plus énergétiques.

La Figure 3.24 présente les “waterfalls” des spectres d’amplitudes des différentes erreurs dynamiques de transmission en fonction du régime de fonctionnement. L’identification des ordres est la même que précédemment (voir Tableau 3.2). L’amplification dynamique liée à l’ordre de la fréquence l’engrènement de la cascade 84-72-56 reste la plus importante. Les maxima des erreurs dynamiques des engrènements 84/73, 50/72 et 54/72 s’observent autour de 2870 Hz pour une vitesse de rotation moteur de 2050 *tr/min*, zones où coexistent les deux modes énergétiques 40 et 42. Cependant, le maximum des 4 erreurs dynamiques de transmission est observé pour l’engrènement 73/56 à 2040 Hz, correspondant aussi à un régime moteur de 1440 *tr/min*. Le niveau de l’erreur dynamique de transmission atteint alors 13,7  $\mu\text{m}$ . De manière générale, les niveaux sont inférieurs à ceux du modèles des deux cascades couplées en rotation pure (mise à part pour l’engrènement 50/72). Cela s’explique par la

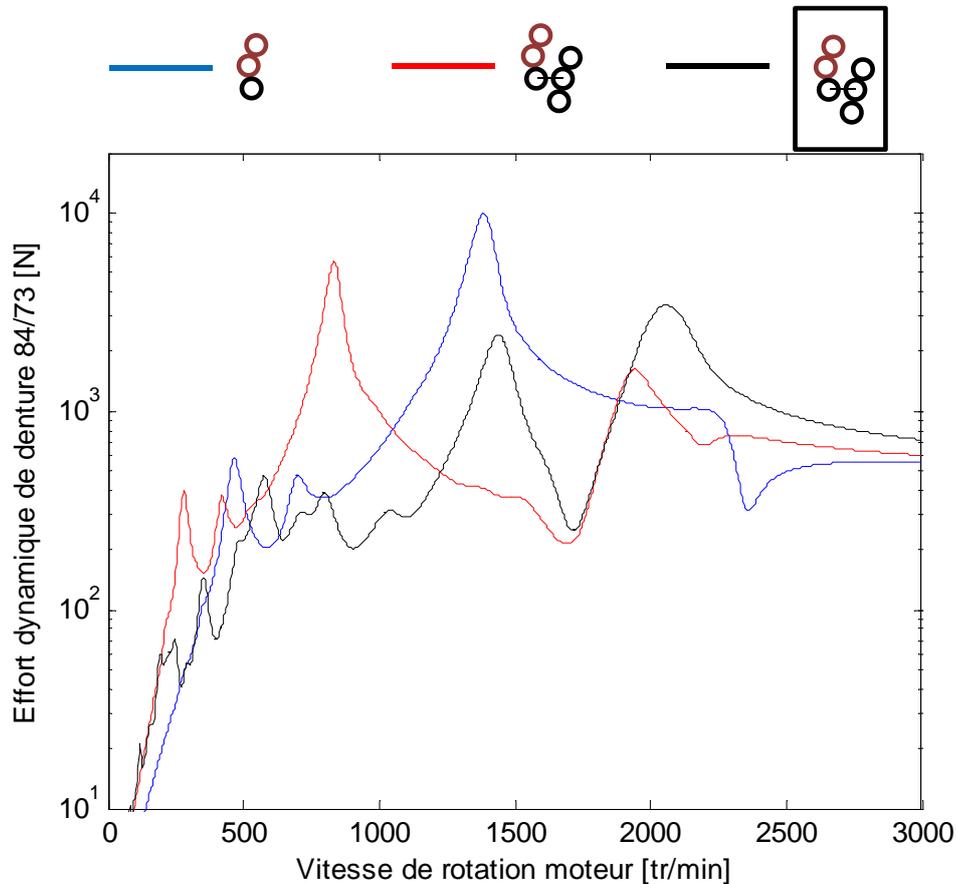


**Figure 3.23.** : Contributions énergétiques des modes du système complet (dentures standards).



**Figure 3.24.** : Diagrammes “waterfall” de la valeur efficace des erreurs dynamiques de transmission du système complet avec dentures standards.

répartition de l'énergie de déformation des dents sur un plus grand nombre de modes.



**Figure 3.25.** : Effort dynamique de denture de l'engrènement 84/73 pour les différents modèles étudiés.

La Figure 3.25 présente l'évolution de l'effort dynamique de denture de l'engrènement 84/73 pour les différents modèles étudiés : cascade 84-73-56 en rotation pure, cascades couplées en rotation pure et modèle complet. Le niveau maximal de l'effort dynamique de denture diminue fortement lorsqu'on prend en compte l'élasticité des arbres, des roulements et du carter. Les zones où l'effort dynamique de denture est le plus élevé indiquent les potentielles zones où l'on peut s'attendre à des pertes de contact si le jeu entre denture est pris en compte.

Il est également intéressant d'observer l'évolution temporelle de l'erreur dynamique de transmission pour différents régimes moteurs (Figure 3.26).

A  $\Omega_{mot} = 540 \text{ tr/min}$ , on s'aperçoit que la réponse n'est plus périodique à la période d'engrènement de la cascade 84-73-56  $f_{E1}$ , en raison de l'émergence de raies associées

la fréquence d'engrènement  $f_{E2}$  de la deuxième cascade. La période fondamentale se calcule en considérant le rapport des deux fréquences d'engrènement :

$$\begin{aligned} f_{E1} &= 84 \cdot f_{mot} \\ f_{E2} &= 72 \cdot f_{72} = 72 \cdot \frac{84}{56} \cdot f_{mot} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Soit

$$\frac{f_{mot}}{12} = \frac{1}{7} f_{E1} = \frac{1}{9} f_{E2} \quad (3.47)$$

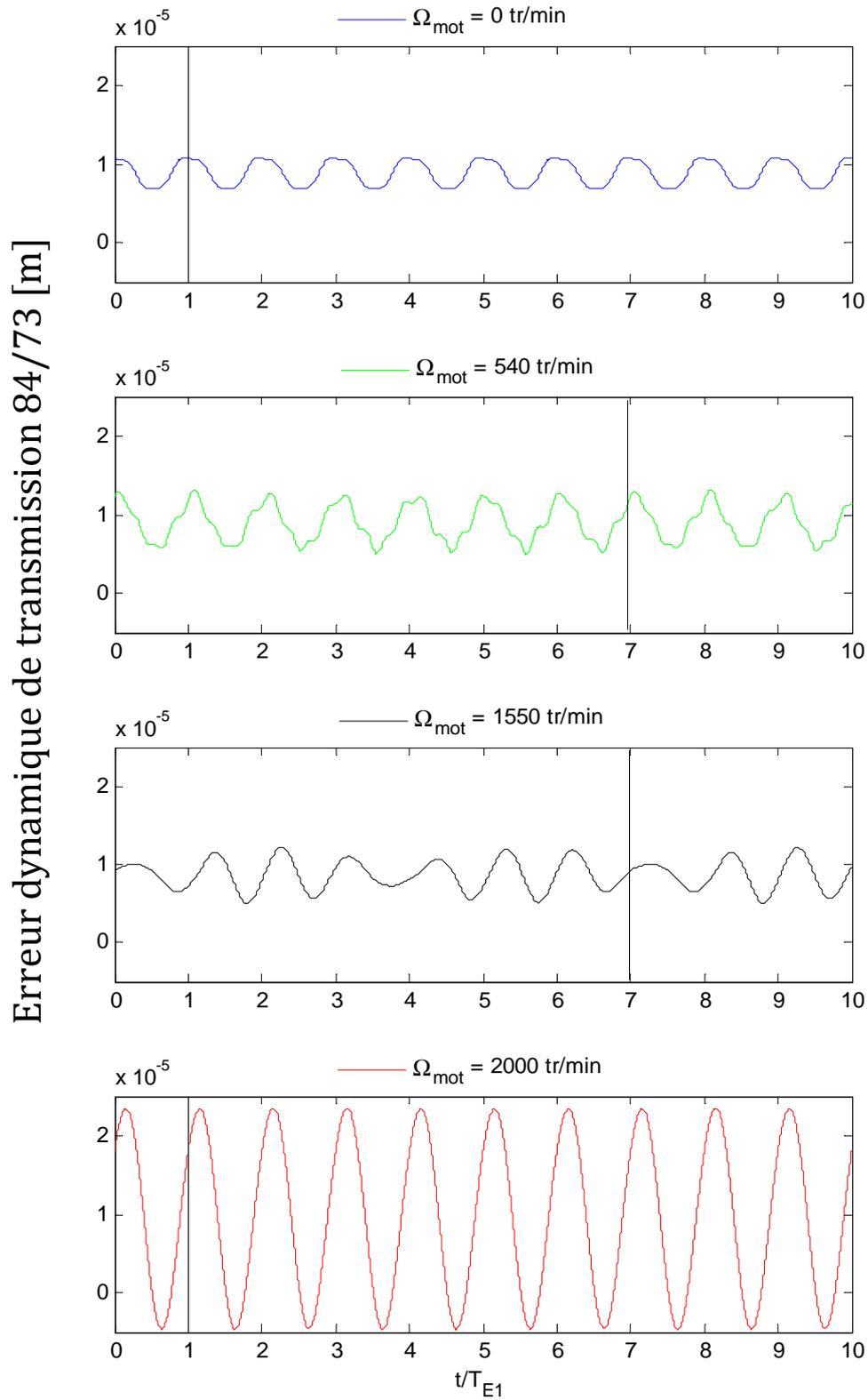
La plus petite période  $T_c$  commune s'écrit alors :

$$T_c = 7T_{E1} = 9T_{E2} = \frac{12}{f_{mot}} \quad (3.48)$$

La période de l'erreur dynamique de transmission à  $\Omega_{mot} = 540 \text{ tr/min}$  est donc  $7T_{E1}$  à cause de l'excitation par le premier harmonique de la deuxième fréquence d'engrènement, soit l'ordre (0,2).

A  $\Omega_{mot} = 1550 \text{ tr/min}$ , peu après l'amplification dynamique à  $2000 \text{ Hz}$ , le signal n'est à nouveau pas périodique à la période d'engrènement de la cascade 84-73-56 en raison de l'émergence de l'ordre (0,1), qui correspond à la fréquence d'engrènement  $f_{E2}$  de la deuxième cascade.

Enfin, pour un régime moteur de  $\Omega_{mot} = 2000 \text{ tr/min}$ , on retrouve la périodicité  $T_{E1}$ . L'amplification dynamique induite par l'excitation des modes de denture autour de  $2900 \text{ Hz}$  est très marquée. L'erreur dynamique est essentiellement caractérisée par l'excitation par le fondamental des excitations à la fréquence d'engrènement de la cascade 84-73-56  $f_{E1}$ . L'amplitude de la fluctuation est élevée (supérieure à la valeur moyenne) ce qui impliquerait une éventuelle perte de contact dans un modèle non-linéaire considérant ce phénomène.



**Figure 3.26.** : Evolution temporelle de l'erreur dynamique 84/73 en fonction du régime de fonctionnement.

### 3.3.3.3. Réponse dynamique pour des corrections de dentures optimisées

La réponse dynamique de la cascade de distribution est analysée pour des pignons avec les corrections de dentures optimisées établies au chapitre 2. Les Figures 3.27 et 3.28 présentent respectivement les spectres d'amplitude des erreurs statiques de transmission et des raideurs d'engrènement obtenues pour le couple de fonctionnement nominal ( $C_{84} = 221 N.m$ , cf. Tableau 2.2). Les valeurs moyennes de raideurs d'engrènement étant différentes, la base modale est a priori modifiée.

Les amplitudes des raies des spectres d'erreurs statiques de transmission sont fortement réduites, spécialement pour la cascade 84-73-56 (0.15  $\mu m$  d'amplitude maximale pour les dentures optimisées contre 2  $\mu m$  pour les dentures standards). En revanche, l'optimisation ne prédit aucune diminution des fluctuations des raideurs d'engrènement.

La base modale est tronquée à partir du 100<sup>ème</sup> mode de manière à assurer qu'au moins 99% de l'énergie de déformation de chaque engrènement est prise en compte. La Figure 3.29 présente les contributions énergétiques des modes. Les conclusions sont semblables à celles du cas des dentures non corrigées. Selon les engrènements considérés, plus de 80% à 90 % de l'énergie est répartie sur les 5 modes de dentures listés dans le Tableau 3.7, dont la fréquence se situe dans la plage [2000 – 3000] Hz.

Les modes 40 et 41 sont très rapprochés et peu éloignés du mode 42. La région fréquentielle correspondante ([2900 - 3000] Hz) est donc le siège de fortes amplifications dynamique.

Mode - Fréquence	$\rho_{1k}$ [%]	$\rho_{2k}$ [%]	$\rho_{3k}$ [%]	$\rho_{4k}$ [%]
33 - 2066 Hz	9	70	2	-
36 - 2586 Hz	-	-	35	59
40 - 2918 Hz	9	-	12	7
41 - 2927 Hz	18	-	29	20
42 - 3033 Hz	55	14	16	10
$\sum_{k=32,36,40,41,42} \rho_{ik}$	<b>91</b>	<b>84</b>	<b>94</b>	<b>96</b>

**Tableau 3.7.** : Liste des 5 modes les plus énergétiques.

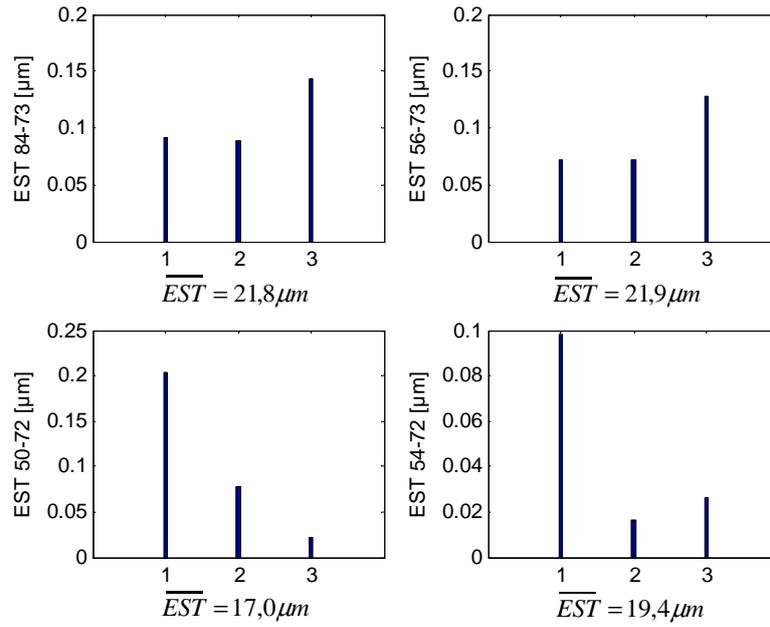


Figure 3.27. : Spectres des erreurs statiques de transmission pour les corrections optimisées.

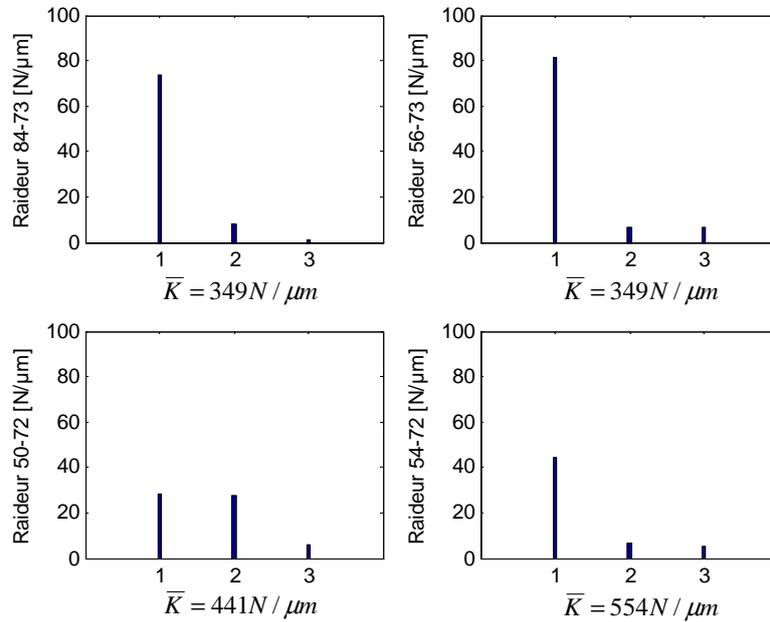


Figure 3.28. : Spectres des raideurs d'engrènement pour les corrections optimisées.

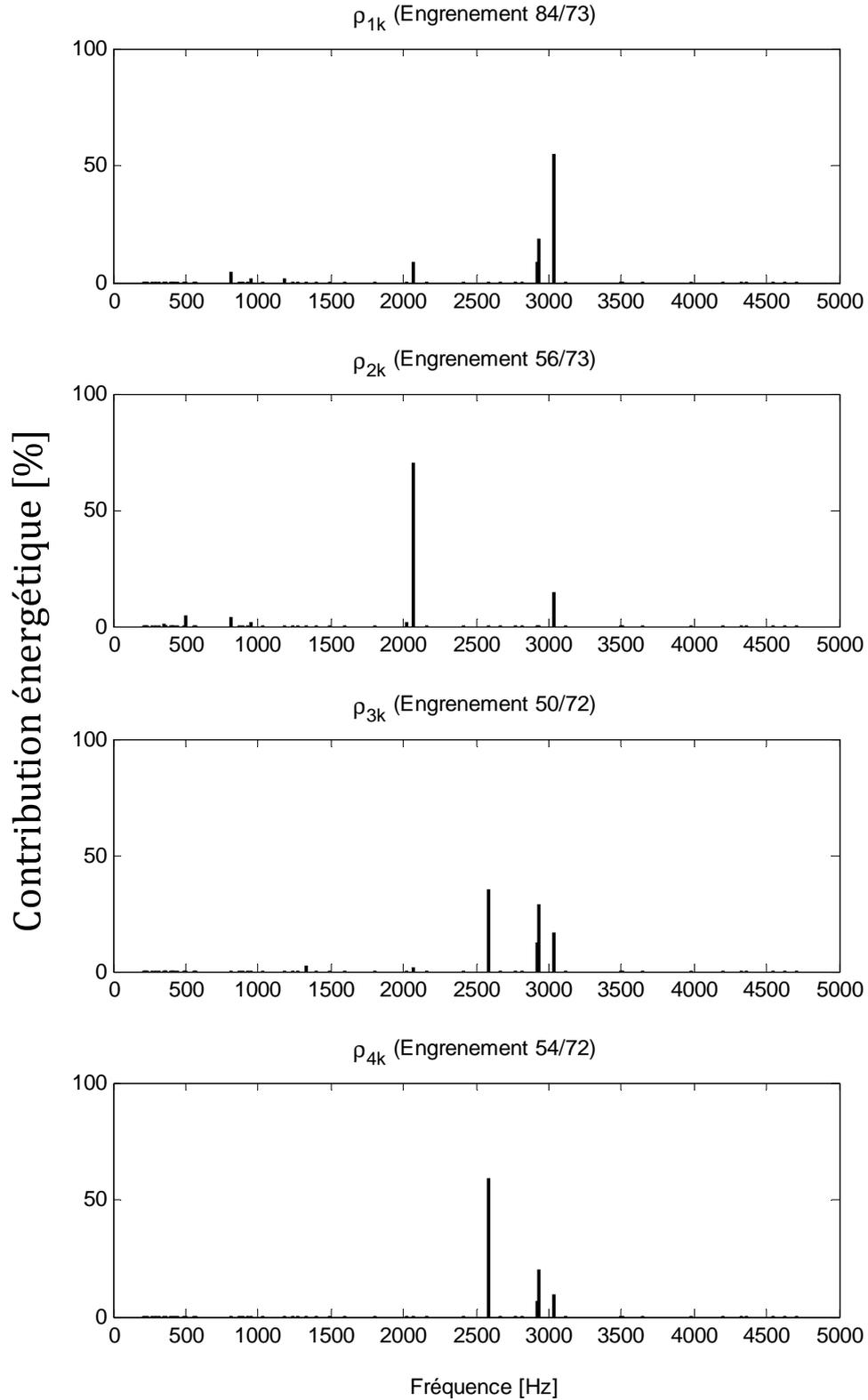
La Figure 3.30 présente les digrammes “waterfalls” des erreurs dynamiques de transmission. L’identification des ordres reste la même que dans les modèles précédents. Comme les excitations sont très fortement réduites, les niveaux maximaux des erreurs dynamiques de transmission sont très faibles ( $1,1 \mu\text{m}$ ). Les spectres d’erreurs statiques de transmission de la Figure 3.27 montrent que c’est le deuxième harmonique qui est le plus élevé, et c’est bien l’excitation liée à cette raie qui correspond aux valeurs maximales des erreurs dynamiques de transmission de la cascade 84-73-56. Les amplitudes des composantes aux fréquences fondamentales des erreurs statiques de transmission de la cascade 50-72-54 sont les plus élevées. L’excitation des modes de denture par ces raies génère les maxima des erreurs dynamiques de transmission de cette cascade. Les contributions liées à cette fréquence se retrouvent également dans les erreurs dynamiques de la cascade 84-73-56.

La Figure 3.31 présente l’évolution temporelle de l’erreur dynamique de transmission de l’engrènement 84/73 pour différents régimes moteur (Figure 3.31).

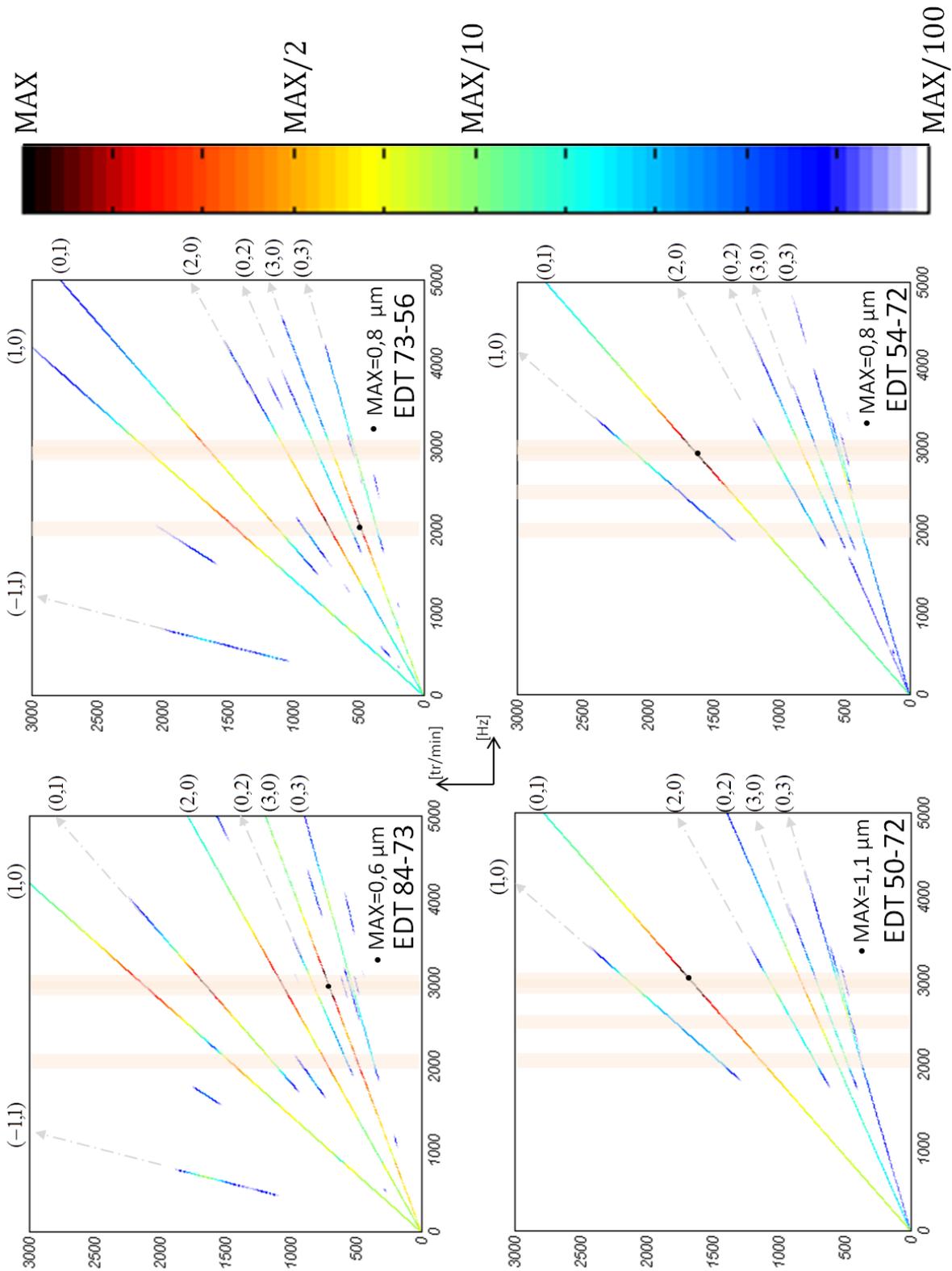
A  $\Omega_{mot} = 540 \text{ tr}/\text{min}$ , on s’aperçoit que la réponse n’est pas périodique à la période d’engrènement de la cascade 84-73-56  $f_{E1}$ , en raison de l’émergence des raies indexées (0,2) et (0,3) qui modulent légèrement la réponse sur une période de  $7T_{E1}$ . Le deuxième harmonique de la fréquence d’engrènement de la cascade 84-73-56 reste très marqué.

A  $\Omega_{mot} = 1550 \text{ tr}/\text{min}$ , l’erreur dynamique de transmission de l’engrènement 84/73 est induite par les excitations aux fréquences d’engrènement des deux cascades. La réponse est donc  $7T_{E1}$  périodique.

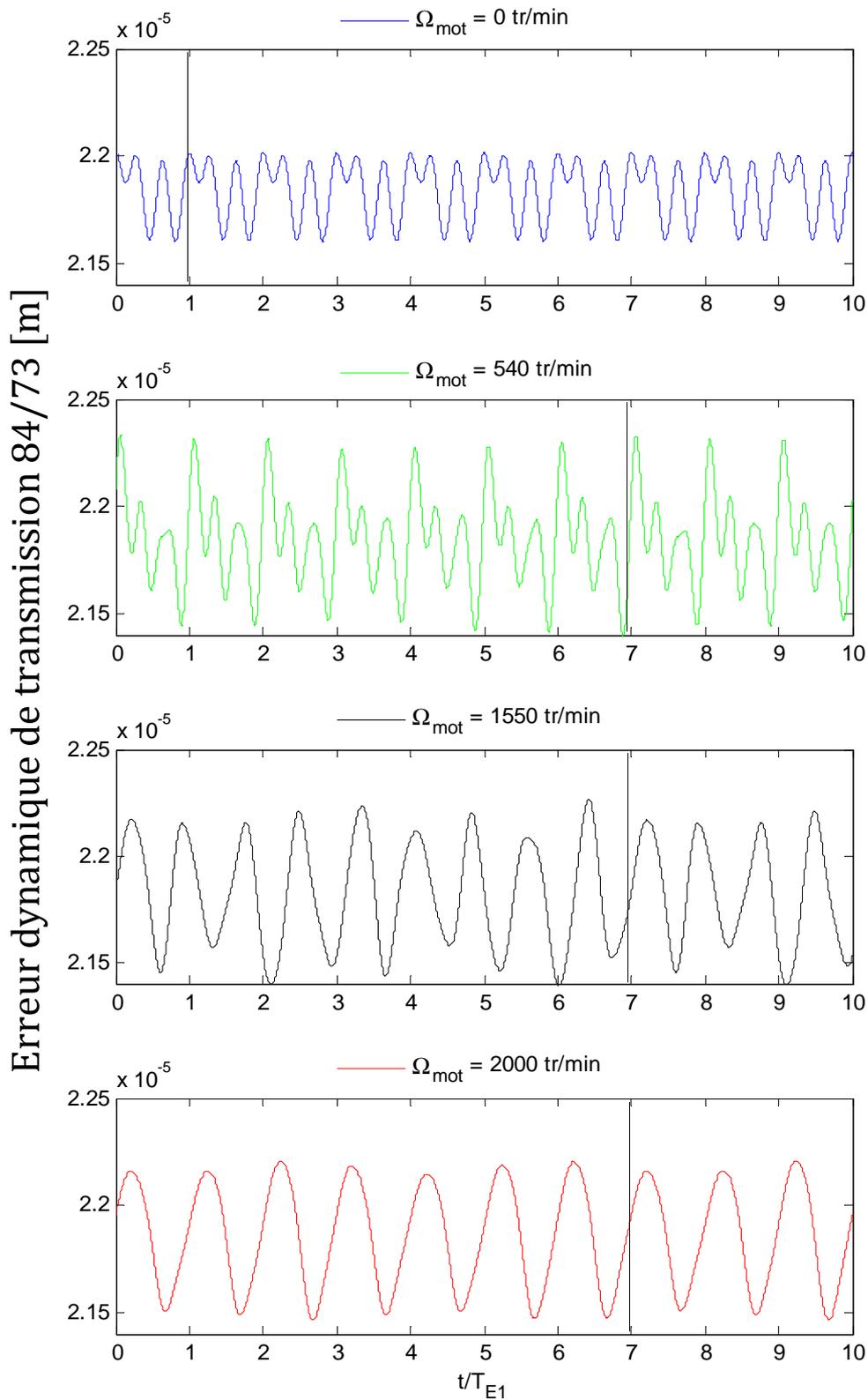
Enfin, pour un régime moteur de  $\Omega_{mot} = 2000 \text{ tr}/\text{min}$ , l’erreur dynamique de transmission est majoritairement induite par l’excitation à la fréquence d’engrènement  $f_{E1}$  de la cascade 84-73-56.



**Figure 3.29.** : Contributions énergétiques des modes du système complet (dentures optimisées).



**Figure 3.30.** : Diagrammes “waterfall” de la valeur efficace des erreurs dynamiques de transmission du système complet avec dentures optimisées.



**Figure 3.31.** : Evolution temporelle de l'erreur dynamique 84/73 en fonction du régime de fonctionnement.

### 3.3.4. Puissance vibratoire de la plaque support

Le bruit rayonné par les transmissions par engrenages provient essentiellement du comportement vibratoire du carter, correspondant dans le cas de cette étude à la plaque support. Afin de déterminer l'efficacité de l'optimisation des corrections de dentures d'un point de vue acoustique, la puissance acoustique rayonnée par la plaque support est calculée pour les corrections de denture de référence et optimisées.

Soit  $P_{ac}(\omega)$  la puissance acoustique rayonnée par la plaque :

$$P_{ac}(\omega) = \rho_0 c_0 \sigma(\omega) \int_S \langle V_z^2(\omega) \rangle dS \approx \frac{\rho_0 c_0 \sigma(\omega) S}{N_{noeuds}} \sum_{i=1}^{N_{noeuds}} \langle V_{z,i}^2(\omega) \rangle \quad (3.49)$$

$\rho_0$  est la masse volumique de l'air,

$c_0$  est la vitesse du son dans l'air,

$S$  est la surface de la plaque support,

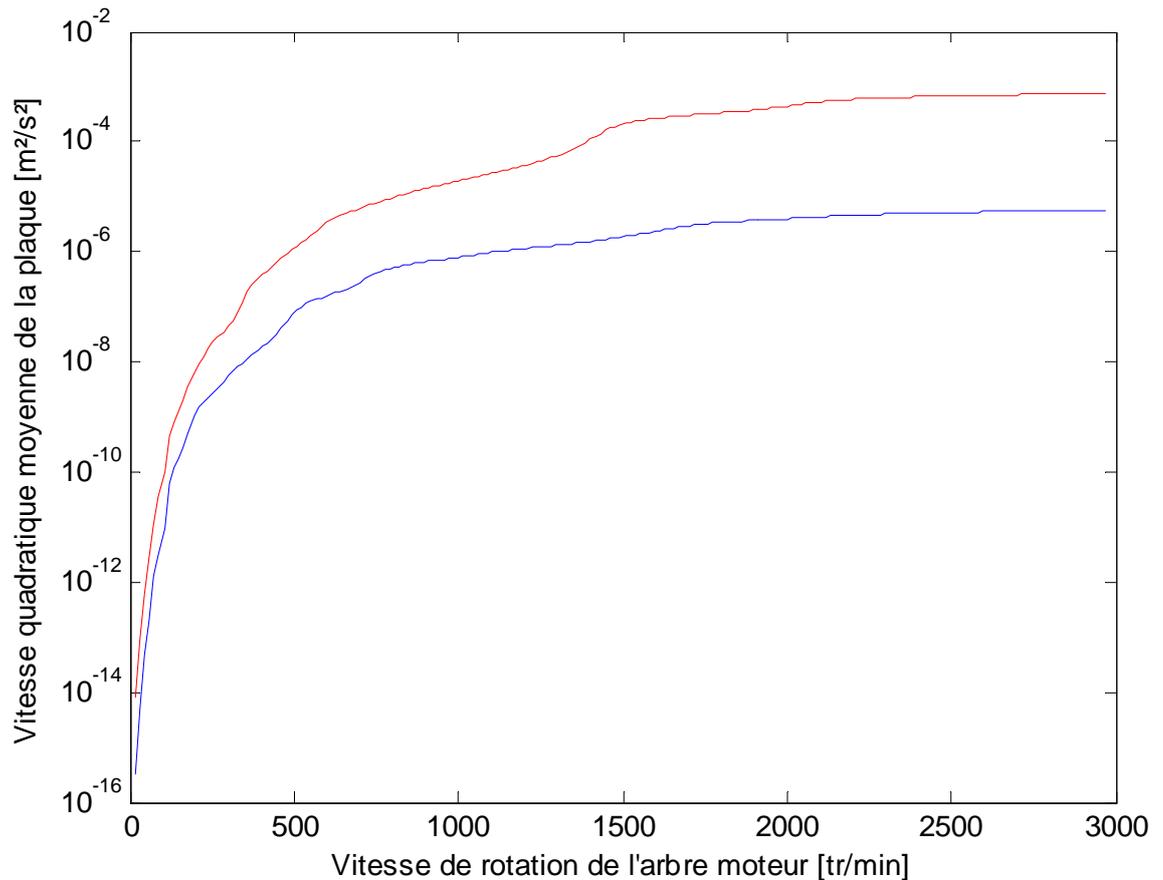
$\sigma(\omega)$  est le facteur de rayonnement de la plaque,

$\int_S \langle V_z^2(\omega) \rangle dS$  est la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter,

$\langle V_{z,i}^2(\omega) \rangle$  est la vitesse quadratique d'un noeud  $i$  du maillage de la plaque,

$N_{noeuds} = 3440$  est le nombre de noeuds du maillage de la plaque, ce qui est suffisant pour représenter les modes de la plaque dans la plage de fréquences d'intérêt.

La vitesse quadratique moyenne est représentative de la puissance acoustique de la plaque. La Figure 3.32 présente l'évolution de  $\int_S \langle V_z^2(\omega) \rangle dS$  en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre moteur. On constate que la vitesse quadratique moyenne augmente fortement jusqu'à  $1500 \text{ tr/min}$ .



**Figure 3.32.** : Gain acoustique apporté par l'optimisation de denture.

- Corrections de référence.
- Corrections optimisées.

L'objectif étant de comparer les puissances acoustiques des deux configurations, le gain acoustique apporté par l'optimisation des corrections de denture s'exprime simplement en décibels par la relation suivante :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^{N_{noeuds}} \langle V_{z,i}(\omega) \rangle_{standard}}{\sum_{i=1}^{N_{noeuds}} \langle V_{z,i}(\omega) \rangle_{optimisé}} \quad (3.50)$$

La Figure 3.33 présente l'évolution du gain acoustique en fonction du régime moteur. L'influence des modes de la plaque est peu marquée. Le gain est important sur toute la plage (au moins 8 dB) et devient encore plus important à partir de 1000 tr/min. Au-delà de 1900 tr/min, le gain atteint jusqu'à 20 dB de réduction. Cependant, une réserve doit être apportée à la vue des ces résultats. Les résultats sont biaisés par le

fait qu'on ne prend pas en compte les écarts de fabrication et de montage éventuels évoqués dans le chapitre 2.

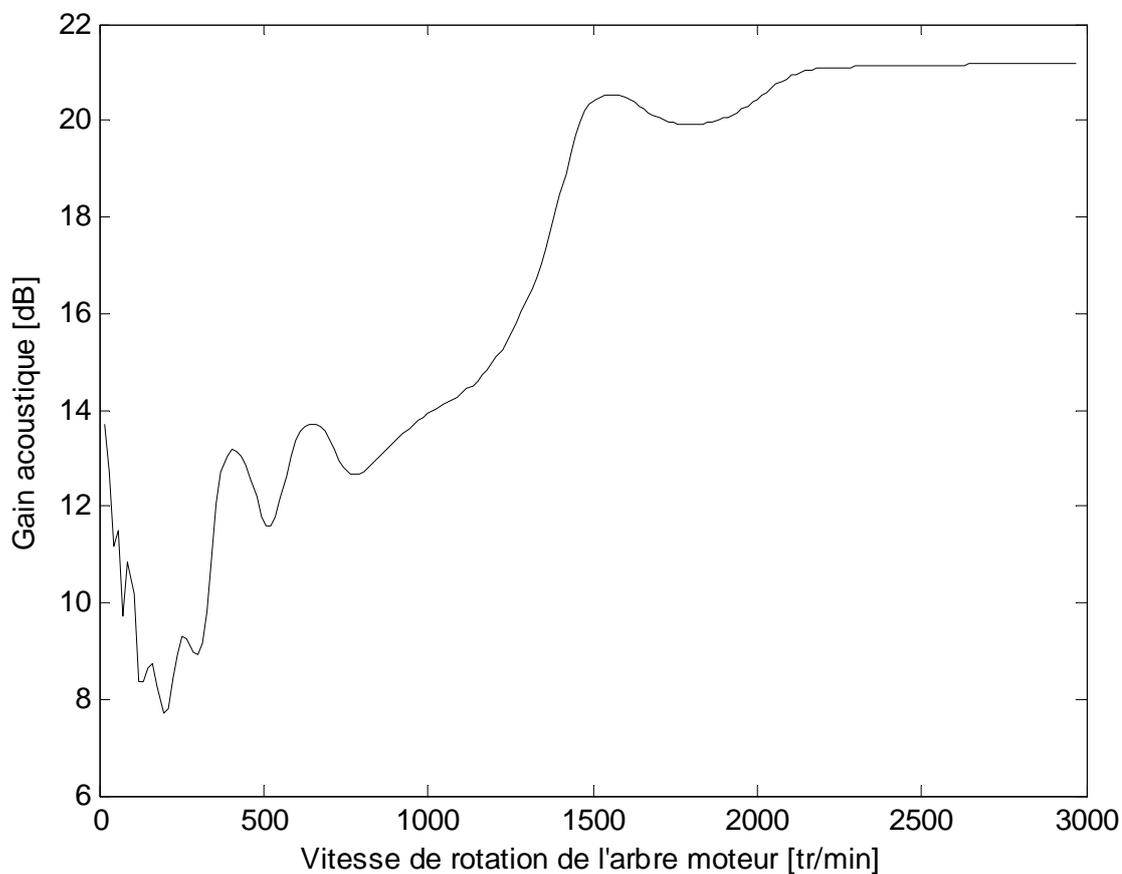


Figure 3.33. : Gain acoustique apporté par l'optimisation de denture.

## 3.4. Conclusions

La méthode spectrale itérative a été mise en oeuvre pour le calcul de réponses dynamiques de systèmes à excitations paramétriques couplées. Elle permet un gain de temps de calcul très important (d'un facteur 150 à 1000 par rapport à une méthode d'intégration temporelle). Plusieurs modèles ont été étudiés et les conclusions sont les suivantes.

Le couplage entre les réponses des deux cascades de pignons se fait d'une part par les modes propres du système, dont l'énergie se répartit sur les différents engrènements. D'autre part par les excitations paramétriques à deux fréquences distinctes, qui sont

couplées à certains régimes de fonctionnement, donnent lieu à des réponses d'une périodicité égale à un multiple commun des deux périodes d'engrènement.

La prise en compte des arbres, des roulements et du carter augmente la densité modale. L'énergie de déformation des engrènements se répartit ainsi sur un nombre de modes de dentures élevé et les niveaux des réponses sont plus faibles. Les spectres d'erreurs statiques de transmission des dentures non corrigées de la cascade 84-73-56 possèdent une raie à la fréquence d'engrènement qui domine la réponse dynamique.

La comparaison avec les dentures optimisées souligne le gain apporté par l'optimisation. Les excitations sont toutes de faibles niveaux, les fondamentaux des erreurs statiques de transmission de la cascade 84-73-56 ayant été fortement diminués. Les spectres des réponses dynamiques sont plus riches, et aucun régime de fonctionnement particulièrement critique n'apparaît. En terme de gain acoustique, les corrections optimisées permettent 8 à 20  $dB$  de gain par rapport aux corrections de denture standards. Ce gain espéré doit être relativisé à cause des écarts fabrication et de montage éventuels.

Jusqu'alors, les éventuelles pertes de contact ne sont pas prises en compte, c'est l'objet du chapitre 4.

# 4. Analyse du bruit de claquement induit par les pertes de contact entre dentures

## 4.1. Introduction

Lorsque les excitations sont de grandes amplitudes, ce qui peut souvent se produire en présence d'acyclisme, des pertes de contact entre les dentures peuvent apparaître à certains régimes de fonctionnement. Elles entraînent des chocs à la reprise du contact. Ces chocs entre les dentures des pignons chargés caractérisent le phénomène de claquement, également évoqué dans la littérature sous le nom de martèlement.

De nombreux auteurs ont modélisé le comportement dynamique non-linéaire des engrenages soumis aux excitations internes (erreur statique de transmission) en prenant en compte les pertes de contact éventuelles entre dentures [54, 52, 29, 27, 28, 33]. Le comportement non-linéaire induit par les pertes de contact des engrenages non chargés générées par l'acyclisme a également été modélisé [24]. Par contre, il existe très peu d'études [25] concernant le claquement, induit par les pertes de contact entre dentures des engrenages chargés sous l'effet simultané des excitations internes et de l'acyclisme.

La résolution des équations du mouvement par des techniques de continuation numériques peut procurer un gain de temps important par rapport aux méthodes d'intégration temporelle. Cependant, les méthodes existantes n'ont pas été éprouvées dans le cadre de la prise en compte d'excitations simultanées à des fréquences très différentes (basses fréquences pour l'acyclisme lié à la rotation des pignons et hautes fréquences pour les excitations internes liées à la fréquence d'engrènement).

La première partie du chapitre décrit le modèle utilisé pour décrire le comportement dynamique non-linéaire d'une cascade de distribution. Dans un premier temps, les limites du domaine de validité d'une modélisation des impacts par un coefficient de restitution sont étudiées. Pour cela, les résultats associés au comportement dynamique d'une balle rebondissante ("Bouncing Ball Problem") [41] sont comparés pour une modélisation du contact entre les solides par un coefficient de restitution et par un système ressort et amortisseur.

La seconde partie du chapitre a pour but d'évaluer les avantages et inconvénients de deux méthodes pour résoudre les équations du mouvement : la méthode de la

balance harmonique et la méthode des différences finies, assortie d'une technique de continuation par longueur d'arc. Enfin, la troisième partie du chapitre a pour but d'analyser l'influence des différents paramètres du modèle sur le seuil d'apparition du claquement et sur les principales caractéristiques du comportement dynamique non linéaire des engrenages.

## 4.2. Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des engrenages

### 4.2.1. Modélisation du contact

Une cascade de pignons peut être décrite comme un système à impacts dans la mesure où des pertes de contact entre dentures peuvent se produire, en raison de la présence de jeux fonctionnels. Plusieurs approches peuvent être adoptées pour décrire la phase de contact des systèmes à impacts. Une première approche consiste à décrire le mouvement des solides pendant l'impact par une raideur de contact et une source dissipative. Une seconde approche consiste à introduire un coefficient de restitution pour décrire les conditions juste après l'impact à partir des conditions juste avant l'impact. La réponse dynamique du système pendant les phases de vol libre est alors construite par morceaux à partir des nouvelles conditions initiales après chaque impact. Cette modélisation a notamment été adoptée pour décrire le comportement dynamique non-linéaire des pignons fous d'une boîte de vitesses automobile [24] ou encore du système d'entraînement d'une pompe à huile sur moteur diesel [83]. L'immense avantage de ce type d'approche est la simplicité de sa mise en œuvre et les temps de calcul très faibles.

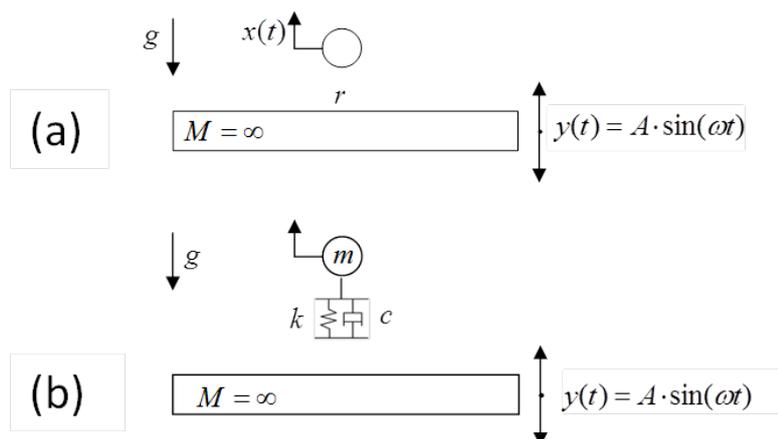
Dans ce cadre, nous avons souhaité comparer les deux types de modèles afin de choisir le plus pertinent pour modéliser la cascade de distribution. Pour ce faire, nous avons retenu le modèle classique d'une balle soumise à un effort constant et qui peut rebondir sur une table vibrant de manière harmonique ("Bouncing ball problem"). Les deux types de modèles de contact sont décrits Figure 4.1.

Pour la période de vol libre, l'équation du mouvement s'écrit simplement :

$$\ddot{x}(t) = -F \tag{4.1}$$

$x(t)$  est le déplacement de la balle sous l'effet de la force  $F$  qui peut être induite par exemple par la gravité  $g$ .

Soit  $y(t)$  le déplacement de la table qui oscille harmoniquement avec une amplitude  $A$  et une pulsation  $\omega$ . La prise en compte du choc, que l'on suppose de durée infiniment courte, s'exprime, pour le modèle avec coefficient de restitution, par l'équation suivante :



**Figure 4.1.** : Modélisation de la "Bouncing Ball" avec coefficient de restitution (a), ou système ressort-amortisseur (b).

$$\dot{x}^+(t_i) - \dot{y}(t_i) = -r \cdot [\dot{x}^-(t_i) - \dot{y}(t_i)] \quad (4.2)$$

$r$  est le coefficient de restitution  $\dot{x}^+$  et  $\dot{x}^-$  sont respectivement les vitesses de la balle juste après et juste avant l'impact, et  $\dot{y}(t_i)$  est le vitesse de la table au moment  $t_i$  de l'impact.

Dans le cas du modèle avec raideur et amortissement, le choc est de durée non nulle. Le contact est géré par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = -F$$

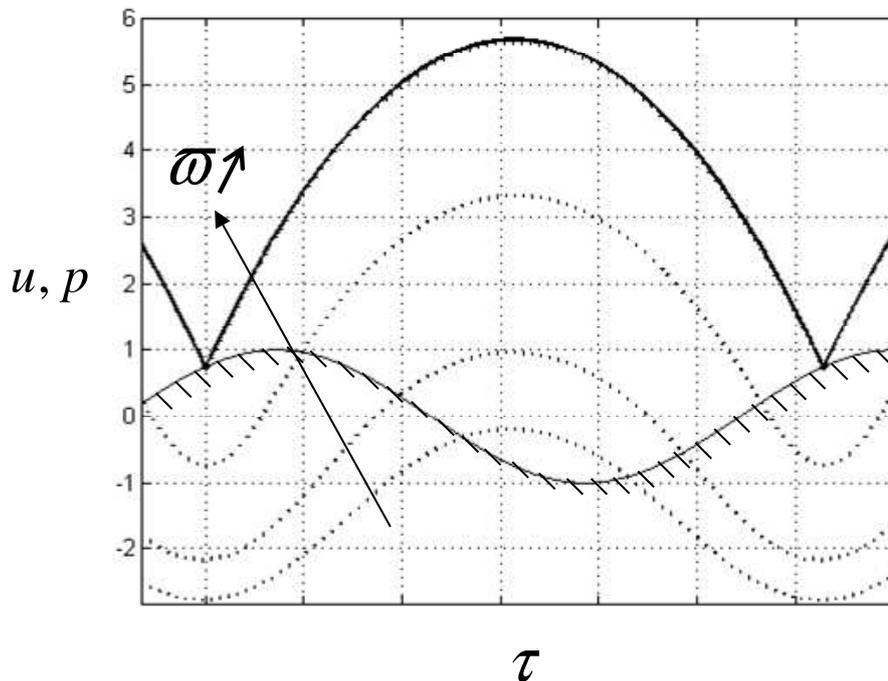
$k$  est la raideur de contact et  $c$  l'amortissement.

Une analyse dimensionnelle des paramètres des équations du mouvement permet la réduction du nombre de variables indépendantes conformément au théorème de Vashi-Buckingham (1890, voir par exemple [84]). Les variables sans dimensions choisis sont :

- le temps  $\tau_i = \omega \cdot t_i$ ,
- l'excitation  $\Lambda = \frac{(A\omega^2)}{g}$ ,
- le déplacement de la balle  $u = \Lambda \cdot \frac{x}{A}$ ,
- le déplacement de la table  $p = \Lambda \cdot \frac{y}{A}$ ,
- le taux d'amortissement visqueux équivalent  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ ,
- la pulsation propre  $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,
- le rapport des fréquences  $\varpi = \frac{\Omega}{\omega}$ .

Il convient de choisir des valeurs de paramètres permettant d'avoir des comportements limites similaires pour les deux modèles. Ainsi, le taux d'amortissement visqueux équivalent est directement relié au coefficient de restitution par la relation proposée par Nagurka [85] dans le contexte d'une balle rebondissant sur une table fixe :

$$\zeta = -\frac{\ln r}{\sqrt{\pi^2 + (\ln r)^2}} \quad (4.3)$$



**Figure 4.2.** : Réponse dynamique 1-T périodique.  $\Lambda = 1$ .

$\zeta = 0.136$ , correspondant à  $r = 0.65$ .

Trait épais : déplacement de la balle avec coefficient de restitution.

Trait fin pointillé : mouvement de la table avec ressort et amortisseur pour des rapports des fréquences croissants.

Trait fin : mouvement de la table.

La Figure 4.2 présente le déplacement de la table  $p$  et la réponse 1-T périodique de la balle  $u$  pour les deux approches et pour différentes valeurs croissantes du rapport des fréquences  $\varpi$ . Le temps d'impact est inversement proportionnel à  $\varpi$ . Pour le modèle à coefficient de restitution, la trajectoire de la balle est identique

à celle obtenue avec le modèle ressort-amortisseur en considérant un rapport des fréquences infini, i.e. une raideur de contact infinie. Plus le rapport des fréquences  $\varpi$  diminue, plus le temps de contact augmente et plus les résultats obtenus pour les deux modèles divergent. Une étude détaillée [86] nous a permis de montrer que le rapport des fréquences doit être supérieur à 100 pour commettre que la différence relative sur l'amplitude maximale du déplacement reste inférieure à 1%.

Dans le cas de l'analyse du comportement dynamique non-linéaire des pignons fous d'une boîte de vitesses [24, 32], les pignons ne sont pas chargés. Les chocs sont de très courtes durées et la modélisation des impacts par un coefficient de restitution est justifiée. De même, dans le cas du comportement dynamique du système d'entraînement d'une pompe à huile la raideur du contact extrêmement importante valide l'utilisation d'un coefficient de restitution [83]. Dans notre cas d'étude, les pignons sont chargés et l'hypothèse d'un temps d'impact négligeable ne semble pas réaliste. Aussi, une modélisation des impacts par une raideur de contact et un amortissement est choisie.

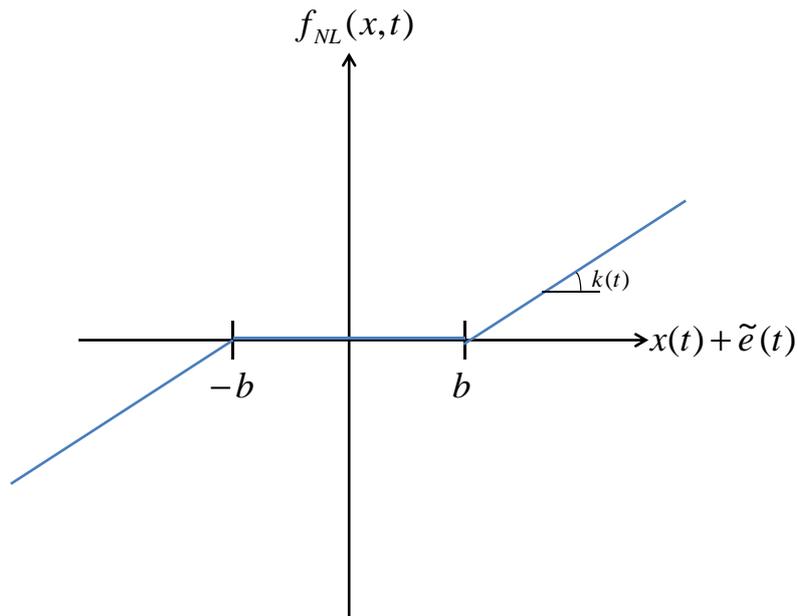
### 4.2.2. Loi de contact

La loi de contact doit obéir à plusieurs conditions. L'effort de contact  $f_{NL}(x, t)$  est modélisé par une composante purement élastique, linéaire et paramétrique. Il est nul si les dentures ne sont pas en contact, i.e. si  $-b < x < b$ . Par ailleurs, le jeu  $2b$  est supposé constant. Une fois la dent en contact, on considère la raideur comme une fonction périodique pour prendre en compte la fluctuation de la raideur d'engrènement. Par ailleurs, on suppose que la raideur du contact entre les flancs actifs est égale à la raideur du contact entre les flancs rétros. Dans le principe, la Figure 4.3 présente l'évolution de l'effort non-linéaire  $f_{NL}(x, t)$  en fonction du rapprochement des dentures. La composante dissipative au moment du choc n'est pas prise en compte. Elle est introduite a posteriori par un taux amortissement visqueux équivalent quelles que soient les phases de la réponse dynamique (vol libre ou contact).

En tenant compte de l'excitation interne que constitue l'erreur statique de transmission, la loi de contact s'écrit pour un engrènement indicé  $m$  :

$$\begin{aligned} f_{NLm}(x_m, t) &= k_m(t)g_{NLm}(x_m) \\ g_{NLm}(x_m) &= (\tilde{e}_m + x_m - b_m)H(\tilde{e}_m + x_m - b_m) \\ &\quad + (\tilde{e}_m + x_m + b_m)H(-\tilde{e}_m - x_m - b_m) - \bar{e}_m(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\tilde{e}_m$  est la partie fluctuante de l'erreur statique de transmission et  $\bar{e}_m(t)$  est le terme qui, multiplié par  $k_m(t)$ , traduit la contribution de l'effort statique tel que le montre l'équation 3.3.  $H(\bullet)$  désigne la fonction Heaviside définie comme :



**Figure 4.3.** : Loi de contact.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Les raideurs d'engrènement et les erreurs statiques de transmission sont considérées comme des processus périodiques et s'écrivent :

$$k_m(t) = \bar{k}_m(t) \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_k} \left( k_c^{(i,m)} \cos(i \cdot \omega_{E_q} t) + k_s^{(i,m)} \sin(i \cdot \omega_{E_q} t) \right) \right) \quad (4.6)$$

$$e_m(t) = \bar{e}_m(t) + \tilde{e}_m(t) = \bar{e}_m(t) + \sum_{i=1}^{N_e} \left( e_c^{(i,m)} \cos(i \cdot \omega_{E_q} t) + e_s^{(i,m)} \sin(i \cdot \omega_{E_q} t) \right) \quad (4.7)$$

$\bar{k}_m(t)$  est la valeur moyenne de la raideur de l'engrènement  $m$  sur une période d'engrènement  $T_{E_q}$ .  $\omega_{E_q}$  est la fréquence d'engrènement de la cascade  $q$ .

$k_c^{(i,m)}$  et  $k_s^{(i,m)}$  sont les coefficients de Fourier décrivant la raideur d'engrènement  $k(t)$  en  $N_k$  raies pour l'engrènement  $m$ .

$e_c^{(i,m)}$  et  $e_s^{(i,m)}$  sont les coefficients de Fourier décrivant l'erreur statique de transmission  $e(t)$  en  $N_e$  raies pour l'engrènement  $m$ .

### 4.2.3. Mise en équation

Le système étudié est la cascade de distribution constituée des six pignons modélisés en rotation pure étudiée dans le chapitre 3. Le modèle à masses et inertie concentrées associé est présenté Figure 4.4. Dans ce modèle, seule l'élasticité des dentures est introduite.

$I_j$  désigne l'inertie du pignon  $j$ ,  $Z_j$  son nombre de dents et  $R_{bj}$  son rayon de base. Ces données sont listées dans le Tableau 4.1.  $\theta_j$  est le déplacement angulaire du pignon  $j$ .  $C_j$  désigne le couple extérieur appliqué sur le pignon  $j$ .

Les pignons 3 et 4 sont considérés comme couplés de manière rigide, i.e.  $\theta_3 = \theta_4 = \theta_{34}$ .

$j$	1	2	3	4	5	6
$Z_j$	84	73	56	72	50	54
$I_j [kg.m^2]$	0.035	0.026	0.010	0.055	0.016	0.031
$R_{bj}$	114.69	99.67	76.46	113.15	78.57	84.86

**Tableau 4.1.** : Caractéristiques physiques des pignons de la cascade.

Pour un engrènement indicé  $m$ ,  $k_m$ ,  $e_m$ ,  $c_m$  et  $b_m$  désignent respectivement la raideur d'engrènement, l'erreur statique de transmission, l'amortissement et le demi jeu de denture.

L'excitation du système par l'erreur statique de transmission  $e$  est prise en compte comme dans les modèles linéaires et paramétriques introduits au chapitre 3. Les fluctuations de la raideur d'engrènement et de l'erreur statique de transmission ne sont considérées que lorsque le contact est établi. Le couple statique moyen est pris en compte par le terme contenant l'erreur statique de transmission moyenne (voir équation (4.4)). Seule la partie fluctuante et périodique des couples  $\tilde{C}_j$  que génère l'acyclisme est considérée sous la forme :

$$\tilde{C}_j = \sum_{i=1}^{N_c} \left( C_c^{(i,j)} \cos(i \cdot \omega_{acy,j} t) + C_s^{(i,j)} \sin(i \cdot \omega_{acy,j} t) \right) \quad (4.8)$$

$\omega_{acy,j}$  correspond à la fréquence d'excitation de l'acyclisme.  $C_c^{(i,j)}$  et  $C_s^{(i,j)}$  sont les coefficients de Fourier décrivant les fluctuations de couple  $\tilde{C}_j$  en  $N_c$  raies pour l'engrènement  $m$ .

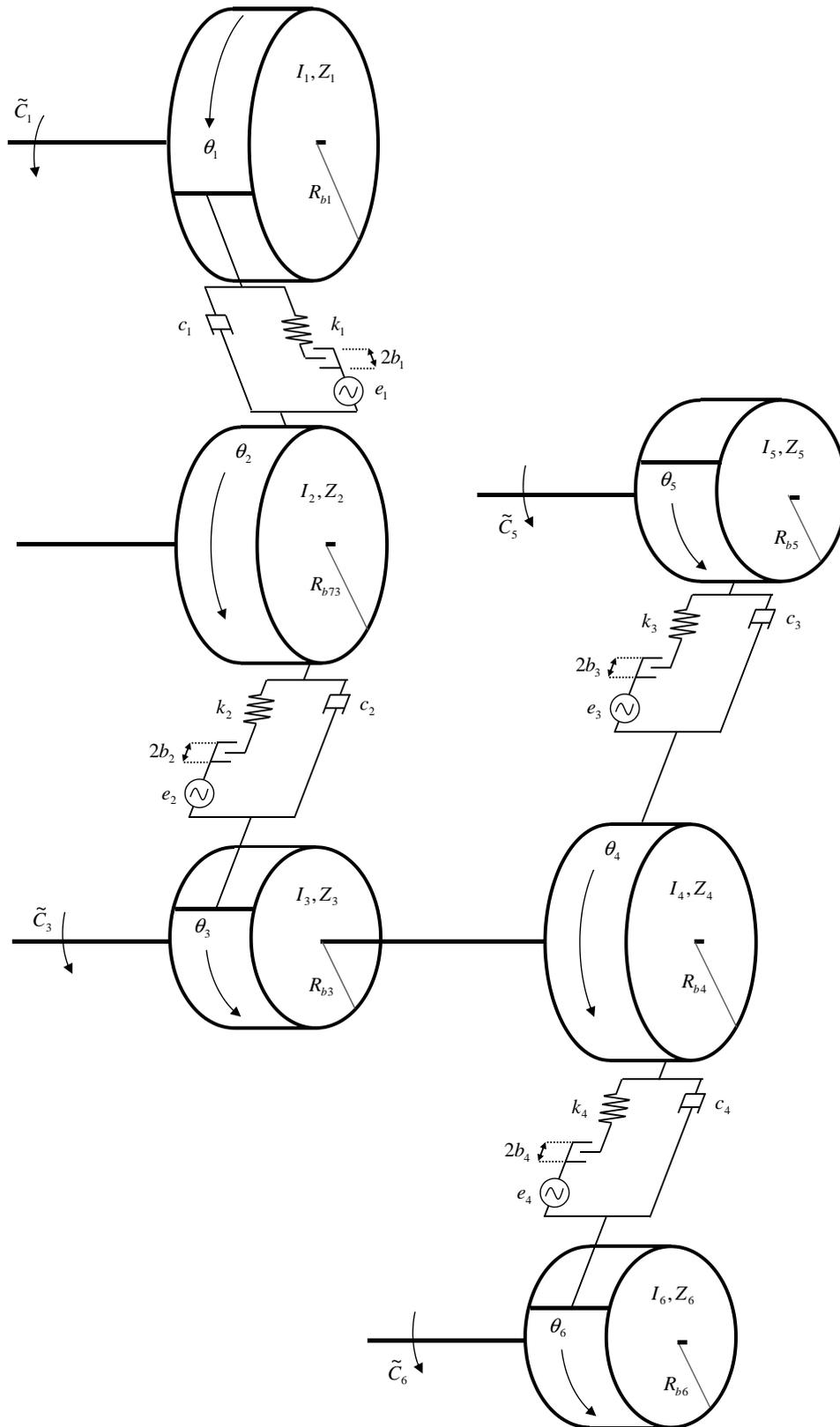


Figure 4.4. : Modèle de la cascade de pignons.

Pour l'écriture des équations du mouvement, on considère dans un premier temps le système sans l'erreur statique de transmission et sans la prise en compte du jeu par les fonctions  $g_{NLm}$ . Le Lagrangien  $\mathcal{L}$  du modèle présenté s'écrit  $\mathcal{L} = T - U$ , où  $T$  est l'énergie cinétique du système et  $U$  l'énergie potentielle, avec :

$$T = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^6 I_j \dot{\theta}_j^2 \right) \quad (4.9)$$

$$U = \frac{1}{2} [k_1(R_{b1}\theta_1 + R_{b2}\theta_2)^2 + k_2(R_{b2}\theta_2 + R_{b3}\theta_{34})^2 + k_3(R_{b4}\theta_{34} + R_{b5}\theta_5)^2 + k_4(R_{b4}\theta_{34} + R_{b6}\theta_6)^2] \quad (4.10)$$

Les forces dissipatives liées à l'amortissement du système sont introduites par la fonction de dissipation de Rayleigh :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} [c_1(R_{b1}\dot{\theta}_1 + R_{b2}\dot{\theta}_2)^2 + c_2(R_{b2}\dot{\theta}_2 + R_{b3}\dot{\theta}_{34})^2 + c_3(R_{b4}\dot{\theta}_{34} + R_{b5}\dot{\theta}_5)^2 + c_4(R_{b4}\dot{\theta}_{34} + R_{b6}\dot{\theta}_6)^2] \quad (4.11)$$

Les efforts généralisés  $Q_j$  sont obtenus en considérant les travaux virtuels  $\delta W$  :

$$\delta W = \sum_{j=1}^6 Q_j \delta \theta_j = \sum_{j=1}^6 \tilde{C}_j \delta \theta_j \quad (4.12)$$

Les équations d'Euler-Lagrange permettent d'établir le système d'équations différentiels géométrant le mouvement des pignons et s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_j} = Q_j - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{\theta}_j} \quad (4.13)$$

On introduit de nouvelles variables décrivant les rapprochements des dents  $x_m$  projetés sur la ligne l'action des engrènements afin d'éliminer le mouvement de corps rigide du système libre-libre :

$$x_1 = R_{b1}\theta_1 + R_{b2}\theta_2 \text{ pour l'engrènement } 84/73,$$

$$x_2 = R_{b2}\theta_2 + R_{b34}\theta_{34} \text{ pour l'engrènement } 56/73,$$

$$x_3 = R_{b4}\theta_{34} + R_{b5}\theta_5 \text{ pour l'engrènement } 50/72,$$

$x_4 = R_{b4}\theta_{34} + R_{b6}\theta_6$  pour l'engrènement 54/72.

Les termes  $\tilde{C}_2$ ,  $\tilde{C}_3$  et  $\tilde{C}_4$  sont supposés nuls. Le système d'équations devient :

$$\begin{aligned}
I_1\ddot{\theta}_1 + c_1R_{b1}\dot{x}_1 & & + k_1R_{b1}x_1 & & = \tilde{C}_1 \\
I_2\ddot{\theta}_2 + c_1R_{b2}\dot{x}_1 + c_2R_{b2}\dot{x}_2 & & + k_1R_{b2}x_1 + k_1R_{b2}x_2 & & = 0 \\
I_{34}\ddot{\theta}_{34} + c_2R_{b3}\dot{x}_2 + c_3R_{b4}\dot{x}_3 + c_4R_{b4}\dot{x}_4 & & + k_2R_{b3}x_2 + k_3R_{b4}x_3 + k_4R_{b4}x_4 & & = 0 \\
I_5\ddot{\theta}_5 + c_3R_{b5}\dot{x}_3 & & + k_3R_{b5}x_3 & & = \tilde{C}_5 \\
I_6\ddot{\theta}_6 + c_4R_{b6}\dot{x}_4 & & + k_4R_{b6}x_4 & & = \tilde{C}_6
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Il reste alors à mettre en évidence les termes  $\ddot{x}_m$  en combinant les équations du système (4.14). On divise chacune des équations par l'inertie correspondante et l'on multiplie ensuite par le rayon de base correspondant. A titre d'exemple, les deux premières équations du système (4.14) deviennent :

$$\begin{aligned}
R_{b1}\ddot{\theta}_1 + c_1\frac{R_{b1}^2}{I_1}\dot{x}_1 + k_1\frac{R_{b1}^2}{I_1}x_1 & = \frac{R_{b1}}{I_1}\tilde{C}_1 \\
R_{b2}\ddot{\theta}_2 + c_1\frac{R_{b2}^2}{I_2}\dot{x}_1 + c_2\frac{R_{b2}^2}{I_2}\dot{x}_2 + k_1\frac{R_{b2}^2}{I_2}x_1 + k_2\frac{R_{b2}^2}{I_2}x_2 & = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

En sommant ces deux équations, on peut écrire :

$$\ddot{x}_1 + c_1\left(\frac{R_{b1}^2}{I_1} + \frac{R_{b2}^2}{I_2}\right)\dot{x}_1 + c_2\left(\frac{R_{b2}^2}{I_2}\right)\dot{x}_2 + k_1\left(\frac{R_{b1}^2}{I_1} + \frac{R_{b2}^2}{I_2}\right)x_1 + k_2\left(\frac{R_{b2}^2}{I_2}\right)x_2 = \frac{R_{b1}}{I_1}\tilde{C}_1 \tag{4.16}$$

En procédant de la sorte pour les autres équations, on arrive au système suivant :

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \frac{k_1}{M_I}x_1 + \frac{k_2}{m_2}x_2 & = \frac{R_{b1}}{I_1}\tilde{C}_1 + \frac{c_1}{M_I}\dot{x}_1 + \frac{c_2}{m_2}\dot{x}_2 \\
\ddot{x}_2 + \frac{c_3}{m_{34}}\dot{x}_3 + \frac{c_4}{m_{34}}\dot{x}_4 + \frac{k_1}{m_2}x_1 + \frac{k_2}{M_{II}}x_2 + \frac{k_3}{M_{34}}x_3 + \frac{k_4}{m_{34}}x_4 & = 0 + \frac{c_1}{m_2}\dot{x}_1 + \frac{c_2}{m_{II}}\dot{x}_2 \\
\ddot{x}_3 + \frac{c_2}{m_{34}}\dot{x}_2 + \frac{c_3}{M_{III}}\dot{x}_3 + \frac{c_4}{m_4}\dot{x}_4 + \frac{k_2}{m_{34}}x_2 + \frac{k_3}{M_{III}}x_3 + \frac{k_4}{m_4}x_4 & = \frac{R_{b5}}{I_5}\tilde{C}_5 \\
\ddot{x}_4 + \frac{c_2}{m_{34}}\dot{x}_2 + \frac{c_3}{m_4}\dot{x}_3 + \frac{c_4}{M_{IV}}\dot{x}_4 + \frac{k_2}{m_{34}}x_2 + \frac{k_3}{m_4}x_3 + \frac{k_4}{M_{IV}}x_4 & = \frac{R_{b6}}{I_6}\tilde{C}_6
\end{aligned} \tag{4.17}$$

avec  $m_2 = \frac{I_2}{R_{b2}^2}$ ,  $m_{34} = \frac{I_{34}}{R_{b3}\cdot R_{b4}}$  et  $m_4 = \frac{I_4}{R_{b4}^2}$ .

Les termes de masse  $M_I$ ,  $M_{II}$ ,  $M_{III}$  et  $M_{IV}$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_I = \left[ \frac{R_{b1}^2}{I_1} + \frac{R_{b2}^2}{I_2} \right]^{-1} \\ M_{II} = \left[ \frac{R_{b2}^2}{I_2} + \frac{R_{b3}^2}{I_{34}} \right]^{-1} \\ M_{III} = \left[ \frac{R_{b4}^2}{I_{34}} + \frac{R_{b5}^2}{I_5} \right]^{-1} \\ M_{IV} = \left[ \frac{R_{b4}^2}{I_{34}} + \frac{R_{b6}^2}{I_6} \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

On définit alors la matrice de raideur sans dimension en introduisant une pulsation caractéristique  $\omega_c$  :

$$[\Omega_{ij}] = \frac{1}{\omega_c} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{M_I}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{m_2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{m_2}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{M_{II}}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_3}{m_{34}}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_4}{m_{34}}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{m_{34}}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_3}{M_{III}}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_4}{m_4}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{m_{34}}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_3}{m_4}} & \sqrt{\frac{\bar{k}_4}{M_{IV}}} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

On choisit  $\omega_c = \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{M_I}}$ .

On définit la matrice d'amortissement du système :

$$[\zeta_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2M_I\Omega_{11}} & \frac{c_2}{2m_2\Omega_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{2m_2\Omega_{21}} & \frac{c_2}{2M_{II}\Omega_{22}} & \frac{c_3}{2m_{34}\Omega_{23}} & \frac{c_4}{2m_{34}\Omega_{24}} \\ 0 & \frac{c_2}{2m_{34}\Omega_{32}} & \frac{c_3}{2M_{III}\Omega_{33}} & \frac{c_4}{2m_4\Omega_{34}} \\ 0 & \frac{c_2}{2m_{34}\Omega_{42}} & \frac{c_3}{2m_4\Omega_{43}} & \frac{c_4}{2M_{IV}\Omega_{44}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

On définit le temps sans dimension  $\tau$  :

$$\tau = \omega_0 \cdot t \quad (4.21)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation fondamentale des excitations, soit le plus petit multiple commun des fréquences excitatrices considérées.

Les déplacements sont adimensionnés par une longueur caractéristique :

$$u_m(\tau) = \frac{x_m(\tau)}{l_c} \quad (4.22)$$

On définit le paramètre sans dimension  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{\omega_c} \quad (4.23)$$

Les termes contenant la fluctuation des couples s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_1(\tau) &= \frac{R_{b1}\widetilde{C}_1(\tau)}{I_1\omega_c^2 l_c} \\ F_2(\tau) &= 0 \\ F_3(\tau) &= \frac{R_{b5}\widetilde{C}_5(\tau)}{I_5\omega_c^2 l_c} \\ F_4(\tau) &= \frac{R_{b6}\widetilde{C}_6(\tau)}{I_6\omega_c^2 l_c} \end{aligned} \quad (4.24)$$

soit

$$F_m(\tau) = \sum_{i=1}^{N_e} \left( \chi_c^{(i,m)} \cos\left(i\frac{\omega_{acy,q}}{\omega_0}\tau\right) + \chi_s^{(i,m)} \sin\left(i\frac{\omega_{acy,q}}{\omega_0}\tau\right) \right) \quad (4.25)$$

Le système (4.17) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\lambda^2 \begin{Bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \\ u''_3 \\ u''_4 \end{Bmatrix} + 2\lambda [\mathbf{\Omega}_{ij}\zeta_{ij}] \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{Bmatrix} + [\mathbf{\Omega}_{ij}^2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Il reste à prendre en compte les excitations internes et les pertes de contact. Les erreurs statiques de transmission et les jeux sont également adimensionnés par la longueur caractéristique  $l_c$  tels que :

$$\mu_m = \frac{b_m}{l_c} \quad (4.27)$$

$$E_m = \frac{e_m}{l_c} \quad (4.28)$$

avec

$$E_m(t) = \bar{E}_m(t) + \sum_{i=1}^{N_e} \left( E_c^{(i,m)} \cos(\omega_{E_q} t) + E_s^{(i,m)} \sin(\omega_{E_q} t) \right) \quad (4.29)$$

Les raideurs sont adimensionnées par leur valeur moyenne :

$$\kappa_m(\tau) = \frac{k_m(\tau)}{\bar{k}_j(\tau)} \quad (4.30)$$

avec

$$\kappa_m(t) = \bar{\kappa}_m(t) \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_k} \left( \kappa_c^{(i,m)} \cos(\omega_{E_q} t) + \kappa_s^{(i,m)} \sin(\omega_{E_q} t) \right) \right) \quad (4.31)$$

On remplace donc les termes linéaires  $x_m$  dans le système d'équations (4.26) par les fonctions non-linéaires sans dimension  $\kappa_m(\tau)G_{NL_m}(u_m)$ , avec :

$$G_{NL_m}(u_m) = (\tilde{E}_m + u_m - \mu_m)H(\tilde{E}_m + u_m - \mu_m) + (\tilde{E}_m + u_m + \mu_m)H(-\tilde{E}_m - u_m - \mu_m) - \bar{E}_m(t) \quad (4.32)$$

Le système sans dimension régissant l'erreur dynamique de transmission des engrenements de la cascade de distribution avec excitation par les erreurs statiques de transmission et prise en compte des pertes de contact s'écrit alors :

$$\lambda^2 \begin{Bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \\ u''_3 \\ u''_4 \end{Bmatrix} + 2\lambda [\Omega_{ij} \zeta_{ij}] \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{Bmatrix} + [\Omega_{ij}^2] \begin{Bmatrix} \kappa_1(\tau)G_{NL_1}(u_1) \\ \kappa_2(\tau)G_{NL_2}(u_2) \\ \kappa_3(\tau)G_{NL_3}(u_3) \\ \kappa_4(\tau)G_{NL_4}(u_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Pour traiter le cas de la cascade 84-73-56, il suffit de considérer comme nuls tous les termes d'indice supérieur à 2 et de prendre en compte  $I_3$  au lieu de  $I_{34}$ , ce qui transforme  $\Omega_{ij}$  et  $\zeta_{ij}$  en  $\Omega_{ij}^*$  et  $\zeta_{ij}^*$ . Par ailleurs, le terme d'excitation extérieure  $\tilde{C}_3$  et  $f_2$  sont considérés non nuls. Dans ce cas, le système (4.33) est réduit à :

$$\lambda^2 \begin{Bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \end{Bmatrix} + 2\lambda [\Omega_{ij}^* \zeta_{ij}^*] \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} + [\Omega_{ij}^{*2}] \begin{Bmatrix} G_{NL_1}(u_1) \\ G_{NL_2}(u_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

### 4.3. Méthodes de résolution

Dans cette partie, plusieurs méthodes de résolution sont étudiées pour accéder à la réponse dynamique du système. Pour chacune, le principe, les avantages et les inconvénients sont présentés afin de mieux justifier le choix des méthodes employées. Par ailleurs, on considère uniquement le modèle réduit des trois pignons de la cascade 84-73-56, afin de simplifier l'écriture des équations.

#### 4.3.1. Intégration temporelle Runge-Kutta d'ordre 4

Parmi les nombreuses méthodes d'intégration temporelle, une des plus classiques et efficaces est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 [87]. Le système (4.34) est réécrit sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre en introduisant :

$$\begin{aligned} y_{j1} &= u_j \\ y_{j2} &= \frac{dy_{j1}}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Le flot du système dynamique s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_{11}}{d\tau} \\ \frac{dy_{12}}{d\tau} \\ \frac{dy_{21}}{d\tau} \\ \frac{dy_{22}}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Omega_{11}^{*2} \kappa_1 G_{NL_1} & 2\lambda \Omega_{11}^* \zeta_{11}^* & \Omega_{12}^{*2} \kappa_2 G_{NL_2} & 2\lambda \Omega_{12}^* \zeta_{12}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{21}^{*2} \kappa_1 G_{NL_1} & 2\lambda \Omega_{21}^* \zeta_{21}^* & \Omega_{22}^{*2} \kappa_2 G_{NL_2} & 2\lambda \Omega_{22}^* \zeta_{22}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dy_{11} \\ dy_{12} \\ dy_{21} \\ dy_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F_1(\tau) \\ 0 \\ F_2(\tau) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Soit :

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \varphi(\underline{y}, \tau) \quad (4.37)$$

Les conditions initiales sont connues :

$$\underline{y}(\tau = 0) = \underline{y}_0 \quad (4.38)$$

Le schéma classique de Runge-Kutta d'ordre 4 s'écrit alors :

$$\underline{y}_{k+1} = \underline{y}_k + \frac{\Delta\tau}{6} (\underline{\nu}_1 + 2\underline{\nu}_2 + 2\underline{\nu}_3 + \underline{\nu}_4) \quad (4.39)$$

Avec

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \varphi(\underline{y}_k, \tau_k) \\
\nu_2 &= \varphi\left(\underline{y}_k + \frac{\Delta\tau}{2}\nu_1, \tau_k + \frac{\Delta\tau}{2}\right) \\
\nu_3 &= \varphi\left(\underline{y}_k + \frac{\Delta\tau}{2}\nu_3, \tau_k + \frac{\Delta\tau}{2}\right) \\
\nu_4 &= \varphi\left(\underline{y}_k + \Delta\tau\nu_1, \tau_k + \Delta\tau\right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Le principal inconvénient de la méthode est le temps de calcul lié au pas de temps  $\Delta\tau$  qui doit être suffisamment petit pour assurer la convergence du schéma numérique. Par ailleurs, il est nécessaire d'attendre la fin du régime transitoire pour observer la réponse dynamique stationnaire souhaitée, ce qui est également coûteux en temps de calcul pour des systèmes non-linéaires complexes. En revanche, aucune hypothèse concernant le contenu fréquentiel de la réponse dynamique n'est requise pour mettre en œuvre cette méthode d'intégration numérique. Celle-ci permet d'obtenir différents types de réponses dynamiques (présentant un contenu fréquentiel varié), tels que des régimes périodiques, des régimes pseudo-périodiques ou encore des régimes chaotiques. Cette méthode permet également d'effectuer un balayage sur le paramètre  $\lambda$  et de construire un diagramme des bifurcations observées. Par ailleurs, les solutions périodiques trouvées lors du balayage peuvent servir de solutions initiales pour les techniques de continuation (voir section 4.4).

### 4.3.2. Méthode de la balance harmonique

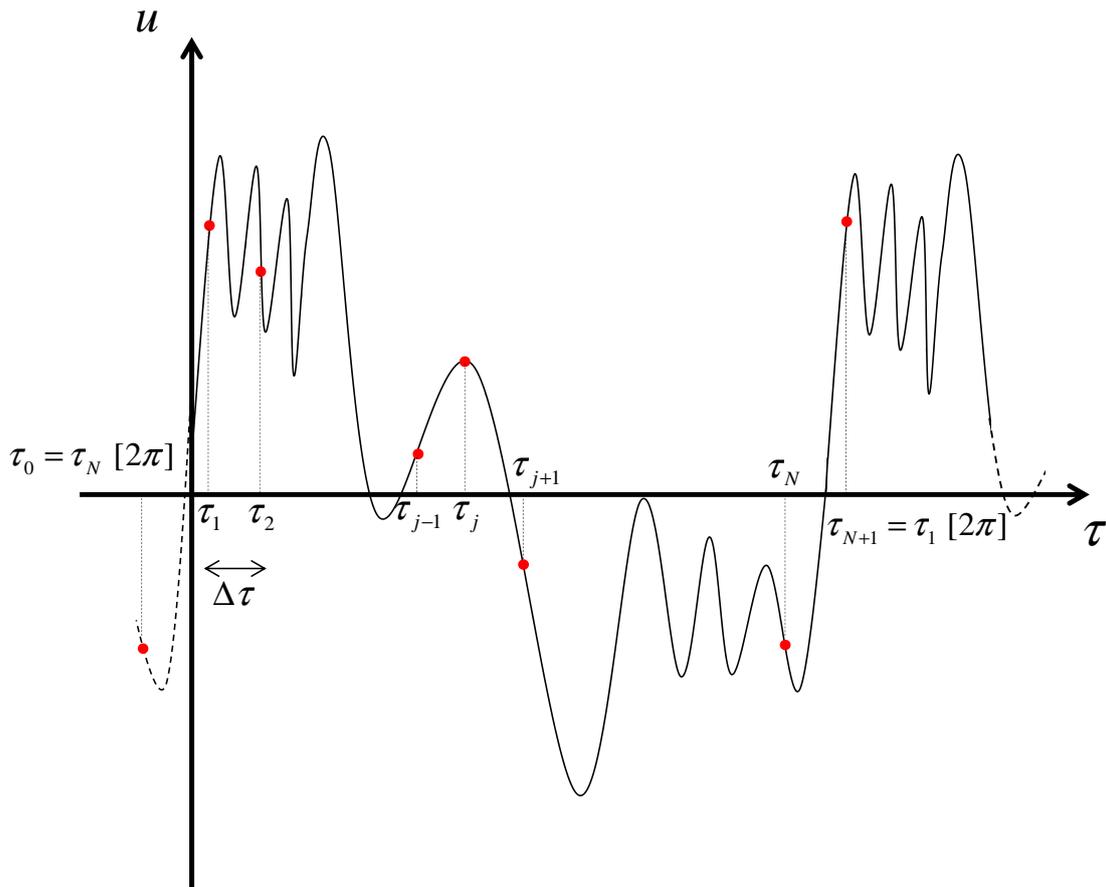
La méthode de la balance harmonique a déjà été employée dans le cadre de la dynamique non-linéaire des engrenages [27, 50, 56, 28, 51]. Cette méthode s'appuie sur la résolution du système d'équations différentielles non-linéaires (4.34) dans le domaine spectral et permet de déterminer les solutions périodiques du système. La convergence de la réponse dépend du nombre  $N$  de raies retenues, et donc de la troncature de la réponse :

$$u_j(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\tau) + b_k \sin(k\tau)) \approx a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\tau) + b_k \sin(k\tau)) \tag{4.41}$$

Si l'on considère la cascade 84-73-56 avec excitations internes et externes, la fréquence d'engrènement qui gouverne la fluctuation de la raideur d'engrènement est 56 fois plus grande que la fréquence fondamentale du système. Pour prendre en compte les trois premières raies des fluctuations de la raideur d'engrènement il faut au minimum  $N = 3 \times 56 = 128$ . Cela mène donc à un système dont la taille totale est égale à  $2 \cdot (2N + 1) = 674$ . Par ailleurs, la résolution du système nécessite des allers-retours du domaine fréquentiel au domaine temporel (par des transformées de Fourier) pour traiter les fonctions non-linéaires  $G_{NL_m}$ . Cette discrétisation

temporelle et la taille du système génèrent des temps de calculs prohibitifs. La méthode temporelle des différences finies semble alors mieux adaptée à la résolution du problème.

### 4.3.3. Méthode des différences finies centrées



**Figure 4.5.** : Discretisation temporelle d'une période.

La période  $T$  du signal est discrétisée en  $N$  points (voir Figure 4.5) avec un pas de temps  $h = \frac{kT}{N}$ , le  $N + 1^{\text{ème}}$  point étant identique au premier. Le terme  $k$  correspond à l'ordre de périodicité de la solution ( $k \in \mathbb{N}^*$ ). L'échantillonnage doit permettre de décrire correctement une période du signal. La notation suivante est utilisée :  $u_i(\tau_j) = u_{i,j}$ , avec  $\tau_j = jh$ .

Le principe des différences finies repose sur un développement de Taylor de l'opérateur dérivée. Les dérivées première et seconde s'expriment alors :

$$u'_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \quad (4.42)$$

$$u''_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{h^2} \quad (4.43)$$

Les vecteurs de solutions sont :

$$\underline{u}_i = \begin{pmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,j} \\ \vdots \\ u_{i,N} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (4.44)$$

Soient les matrices de taille  $[N \times N]$  :

$$\underline{\Upsilon}^{(1)} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\underline{\Upsilon}^{(2)} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Compte tenu des conditions  $u_{i,0} = u_{i,N}$  et  $u_{i,N+1} = u_{i,1}$ , la périodicité de la solution est assurée par les termes  $\Upsilon_{1N}^{(i)}$  et  $\Upsilon_{N1}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Le système à résoudre s'écrit finalement :

$$\begin{cases} \lambda^2 \underline{\Upsilon}^{(2)} \underline{u}_1 + 2\lambda \zeta_{11} \Omega_{11} \underline{\Upsilon}^{(1)} \underline{u}_1 + 2\lambda \zeta_{12} \Omega_{12} \underline{\Upsilon}^{(1)} \underline{u}_2 + \Omega_{11}^2 \kappa_1 \underline{G}_{NL_1} + \Omega_{12}^2 \kappa_2 \underline{G}_{NL_2} - \underline{F}_1 = \underline{0} \\ \lambda^2 \underline{\Upsilon}^{(2)} \underline{u}_2 + 2\lambda \zeta_{21} \Omega_{21} \underline{\Upsilon}^{(1)} \underline{u}_1 + 2\lambda \zeta_{22} \Omega_{22} \underline{\Upsilon}^{(1)} \underline{u}_2 + \Omega_{21}^2 \kappa_1 \underline{G}_{NL_1} + \Omega_{22}^2 \kappa_2 \underline{G}_{NL_2} - \underline{F}_2 = \underline{0} \end{cases}$$

(4.47)

La difficulté réside donc dans le choix du nombre de points pour décrire la plus petite période. Dans nos applications, nous avons choisi 16 points. Le système d'équation a également une taille importante ( $>5000$  équations), mais les équations sont beaucoup plus simples (grande majorité de zéros dans les matrices) que celles obtenues par la méthode de la balance harmonique et elles sont traitées uniquement dans le domaine temporel. Les temps de calculs sont donc plus courts.

## 4.4. Techniques de continuation

Il existe de nombreux logiciels libres d'analyse non-linéaire, comme MATCONT, MANLAB, AUTO ou encore OSCILL8. Cependant, nous avons développé un code pour traiter le cas d'équations différentielles non-linéaires à excitations paramétriques afin d'avoir une totale maîtrise des étapes du calcul. La description formelle complète des principes de continuation est proposée par de nombreux auteurs [88, 89, 90]. Aussi, ce chapitre propose une description de la méthode choisie. Elle est basée sur une méthode de prédiction-correction avec longueur d'arc. Elle est destinée à l'étude des solutions périodiques uniquement.

Le système d'équations non-linéaires à traiter peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{G}(\underline{x}, \lambda) = \underline{0} \quad (4.48)$$

Avec  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ .

$\lambda$  est le paramètre de continuation.

$\underline{x}$  s'écrit dans le cas du système (4.47),

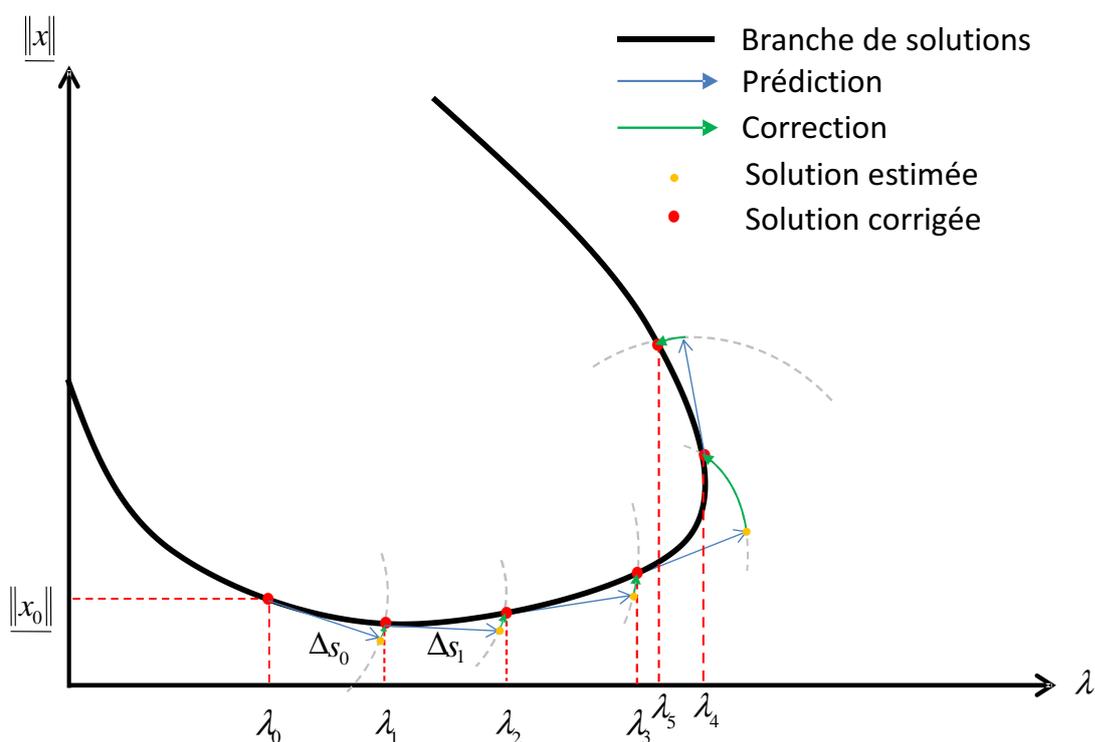
$$\underline{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Le vecteur  $\underline{x}$  est de dimension  $n = 2N$ , où  $N$  est le nombre de points sur une période du signal. L'ensemble de ces points permet de décrire une solution périodique (cycle limite). Le principe de la continuation est d'obtenir l'ensemble de la branche de solutions à partir d'une première solution  $(\underline{x}_0, \lambda_0)$  de (4.48), en incrémentant la valeur du paramètre de continuation  $\lambda$ .

L'utilisation de la longueur d'arc comme paramètre de continuation consiste à introduire l'abscisse curviligne  $s$  de la branche de solution  $(\underline{x}(s), \lambda(s))$ . Une nouvelle équation  $q(\underline{x}(s), \lambda(s), s) = 0$  est introduite conduisant au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \underline{G}(\underline{x}(s), \lambda(s)) \\ q(\underline{x}(s), \lambda(s), s) \end{bmatrix} = \underline{F}(\underline{x}(s), \lambda(s)) = \underline{0} \quad (4.50)$$

La prochaine solution  $(\underline{x}(s_{i+1}), \lambda(s_i))$  est recherchée sur l'intersection entre la branche de solution  $(\underline{x}(s), \lambda(s))$  et une hypersphère centrée sur la solution connue  $(\underline{x}(s_i), \lambda(s_i))$  et de rayon  $\Delta s = s_{i+1} - s_i$ . Les différentes étapes de continuation sont représentées Figure 4.6.



**Figure 4.6.** : Etapes de prédiction-corréction pour une continuation avec longueur d'arc.

Pour ce faire, l'équation introduite s'écrit :

$$q(\underline{x}(s_{i+1}), \underline{x}(s_i), \lambda(s_{i+1}), \lambda(s_i), s_{i+1}, s_i) = \|\underline{x}(s_{i+1}) - \underline{x}(s_i)\|^2 + (\lambda(s_{i+1}) - \lambda(s_i))^2 - \Delta s = 0 \quad (4.51)$$

Avec

$$\Delta s = s_{i+1} - s_i \quad (4.52)$$

La solution estimée en  $s_{i+1}$  s'écrit alors :

$$\left( \underline{x}^{(0)}(s_{i+1}), \lambda^{(0)}(s_{i+1}) \right) = \left( \underline{x}(s_i), \lambda(s_i) \right) + \Delta s \left( \underline{x}'(s_i), \lambda'(s_i) \right) \quad (4.53)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{x}'(s_i) &= \frac{d\underline{x}(s_i)}{ds} \\ \lambda'(s_i) &= \frac{d\lambda(s_i)}{ds} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Il vient :

$$\underline{x}'(s_i) = \frac{d\underline{x}(s_i)}{ds} = \frac{d\underline{x}(s_i)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} \quad (4.55)$$

Le terme  $\frac{d\lambda}{ds}$  se calcule à partir de 4.51 :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left\| \frac{d\underline{x}}{d\lambda} \right\|^2}} \quad (4.56)$$

Avec

$$\frac{d\underline{x}}{d\lambda} = \frac{d\underline{x}}{d\underline{G}} \frac{d\underline{G}}{d\lambda} = \underline{G}_x^{-1} \underline{G}_\lambda \quad (4.57)$$

Une fois les vecteurs directeurs  $(\underline{x}'(s_i), \lambda'(s_i))$  calculés, il convient de les normer par la longueur d'arc en écrivant :

$$\begin{aligned} \underline{x}'(s_i) &:= \frac{\underline{x}'(s_i)}{\sqrt{\left\| \underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i \right\|^2 + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2}} \\ \lambda'(s_i) &:= \frac{\lambda'(s_i)}{\sqrt{\left\| \underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i \right\|^2 + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

La solution  $\left( \underline{x}^{(0)}(s_{i+1}), \lambda^{(0)}(s_{i+1}) \right)$  estimée ne vérifie pas nécessairement :

$$\underline{F}(\underline{x}^{(0)}(s_{i+1}), \lambda^{(0)}(s_{i+1})) = \underline{0} \quad (4.59)$$

Le processus itératif de correction est de type Newton-Raphson. Il s'écrit au point de calcul  $i + 1$  et à l'itération  $k$  :

$$\underline{J}_F(\underline{x}^{(k)}(s_i), \lambda^{(k)}(s_i)) \begin{pmatrix} \underline{x}^{(k+1)}(s_{i+1}) - \underline{x}^{(k)}(s_{i+1}) \\ \lambda^{(k+1)}(s_{i+1}) - \lambda^{(k)}(s_{i+1}) \end{pmatrix} = -\underline{F}(\underline{x}^{(k)}(s_i), \lambda^{(k)}(s_i)) \quad (4.60)$$

Avec  $\underline{J}_F$  la Jacobienne de  $\underline{F}$  s'écrivant :

$$\underline{J}_F = \begin{bmatrix} \frac{F_x}{\frac{\partial q}{\partial x}} & \frac{F_\lambda}{\frac{\partial q}{\partial \lambda}} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

En posant

$$\Delta \underline{x}^{(k)}(s_{i+1}) = (\underline{x}^{(k+1)}(s_{i+1}) - \underline{x}^{(k)}(s_{i+1})) \quad (4.62)$$

et

$$\Delta \lambda^{(k)}(s_{i+1}) = (\lambda^{(k+1)}(s_{i+1}) - \lambda^{(k)}(s_{i+1})) \quad (4.63)$$

le système (4.60) devient :

$$\underline{J}_F(\underline{x}^{(k)}(s_i), \lambda^{(k)}(s_i)) \begin{pmatrix} \Delta \underline{x}^{(k)}(s_{i+1}) \\ \Delta \lambda^{(k)}(s_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{G}(\underline{x}^{(k)}(s_i), \lambda^{(k)}(s_i)) \\ q(\underline{x}^{(k)}(s_{i+1}), \underline{x}(s_i), \lambda^{(k)}(s_{i+1}), \lambda(s_i), s_{i+1}, s_i) \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Une condition nécessaire pour la convergence de cet algorithme est que la Jacobienne  $\underline{J}_F$  soit inversible. L'introduction de la longueur d'arc comme paramètre de continuation d'assurer une Jacobienne non-singulière aux points de rebroussement. La convergence est déterminée par le critère suivant :

$$\max \left( G(\underline{x}^{(k+1)}(s_{i+1}) - \underline{x}^{(k)}(s_{i+1}), \lambda^{(k+1)}(s_{i+1}) - \lambda^{(k)}(s_{i+1})) \right) < \varepsilon \quad (4.65)$$

Si le critère de convergence est atteint après  $K$  itérations, l'étape de correction est terminée et l'étape suivante est considérée en posant :

$$\underline{x}(s_{i+1}) = \underline{x}^{(K)}(s_{i+1}) \quad (4.66)$$

La méthode des différences centrées assortie de cette technique de continuation permet ainsi de suivre les cycles limites (stables ou instables), qui correspondent à la réponse dynamique du système.

#### 4.4.1. Stabilité des cycles limites

Pour étudier la stabilité des cycles limites obtenus par continuation, la méthode ci-après est retenue et appliquée au système d'équations (4.34).

Soit  $\underline{u}_0$  une solution T-périodique du système (4.34) :

$$\underline{u}_0(\tau) = \begin{pmatrix} \underline{u}_{0,1}(\tau) \\ \underline{u}_{0,2}(\tau) \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Avec

$$\underline{u}_0(\tau) = \underline{u}_0(\tau + T) \quad (4.68)$$

La stabilité de cette solution est étudiée en utilisant la théorie de Floquet [90]. Une perturbation  $\Delta \underline{u}(\tau) = \begin{pmatrix} \Delta u_1(\tau) \\ \Delta u_2(\tau) \end{pmatrix}$  est ajoutée à la solution  $\underline{u}_0$ . Un développement en série de Taylor du système autour de  $\underline{u}_0$  conduit à :

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \begin{Bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \end{Bmatrix} + 2\lambda [\Omega_{ij}^* \zeta_{ij}^*] \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} + [\Omega_{ij}^{*2}] \begin{Bmatrix} G_{NL_1}(u_1) \\ G_{NL_2}(u_2) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \\ & - \left( \lambda^2 \begin{Bmatrix} \Delta u''_1 \\ \Delta u''_2 \end{Bmatrix} + 2\lambda [\Omega_{ij}^* \zeta_{ij}^*] \begin{Bmatrix} \Delta u'_1 \\ \Delta u'_2 \end{Bmatrix} + [\Omega_{ij}^{*2}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial G_{NL_1}}{\partial u_{0,1}}(u_{0,1}) \\ \frac{\partial G_{NL_2}}{\partial u_{0,2}}(u_{0,2}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Comme  $\underline{u}_0$  est solution de (4.34), le membre de gauche de (4.69) est nul. Le membre de droite peut être réécrit dans l'espace des phases sous la forme suivante :

$$\underline{y}'(\tau) = \underline{\Psi}(\tau) \underline{y}(\tau) \quad (4.70)$$

Avec

$$\underline{y}(\tau) = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u'_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u'_2 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

et

$$\underline{y}'(\tau) = \begin{pmatrix} \Delta u'_1 \\ \Delta u''_1 \\ \Delta u'_2 \\ \Delta u''_2 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

La matrice  $\underline{\Psi}(\tau)$  est périodique et est définie comme :

$$\underline{\Psi}(\tau) = \underline{\Psi}(\tau + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Omega_{11}^{*2} \kappa_1 \frac{\partial G_{NL1}}{\partial u_{0,1}}(u_{0,1}) & 2\lambda \Omega_{11}^* \zeta_{11}^* & \Omega_{12}^{*2} \kappa_2 \frac{\partial G_{NL2}}{\partial u_{0,2}}(u_{0,2}) & 2\lambda \Omega_{12}^* \zeta_{12}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{21}^{*2} \kappa_1 \frac{\partial G_{NL1}}{\partial u_{0,1}}(u_{0,1}) & 2\lambda \Omega_{21}^* \zeta_{21}^* & \Omega_{22}^{*2} \kappa_2 \frac{\partial G_{NL2}}{\partial u_{0,2}}(u_{0,2}) & 2\lambda \Omega_{22}^* \zeta_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Par ailleurs, les dérivées des fonctions non-linéaires  $G_{NL_m}$  s'écrivent :

$$\frac{\partial G_{NL_m}}{\partial u_{0,m}}(u_{0,m}) = H(\tilde{E}_m + u_{0,m} - \mu_m) + H(-\tilde{E}_m - u_{0,m} - \mu_m) \quad (4.74)$$

Soit la matrice  $\underline{Y}(\tau = 0) = \underline{I}$ , matrice identité carrée de dimension 4, dont les colonnes forment une base de solutions du système. La stabilité du système est obtenue en considérant les valeurs propres de la matrice de monodromie  $\underline{\Xi} = \underline{Y}(\tau = T)$ . Cette dernière est obtenue en intégrant numériquement le système (4.70).

L'étude des 4 valeurs propres complexes  $\Lambda_i$  de  $\underline{\Xi}$  permet de conclure sur la stabilité :

- la solution est stable si  $\forall \Lambda_i, |\Lambda_i| < 1$ ,
- la solution est instable si  $\exists \Lambda_i, |\Lambda_i| > 1$ .

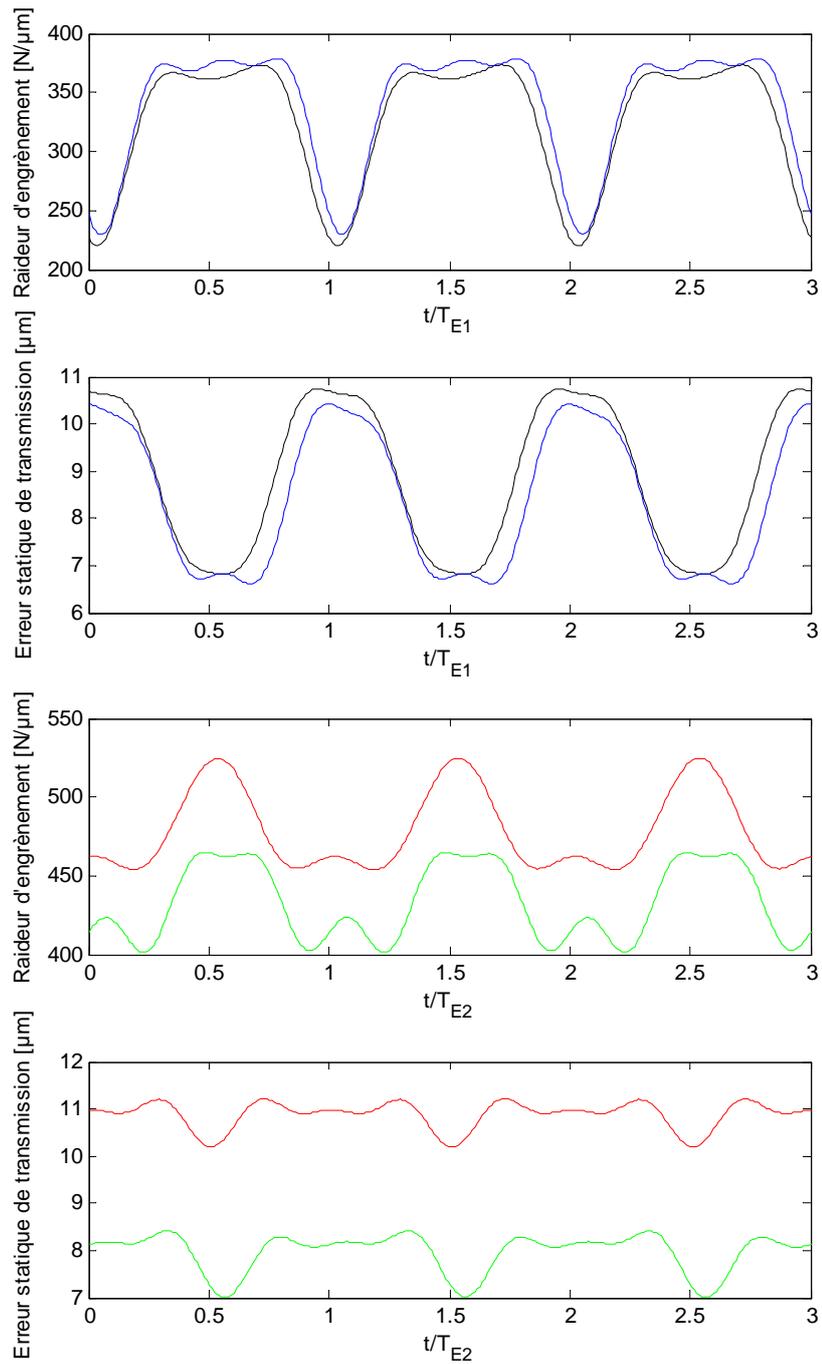
On peut analyser l'évolution des valeurs propres en fonction du paramètre de continuation  $\lambda$ . Lorsque les valeurs propres de la matrice de monodromie  $\underline{\Xi}$  sortent du cercle unité représenté dans le plan complexe ( $Re$ ,  $Im$ ), on a une bifurcation locale du cycle limite avec perte de stabilité. Trois cas de figure sont à considérer :

- La bifurcation “noeud-col” est associée à la sortie du cercle unité d’une des valeurs propres  $\Lambda_i$  par l’axe des réels positifs. Il s’agit du point de coalescence de deux cycles limites, l’un stable et l’autre instable. Le point de coalescence est aussi appelé point de rebroussement. (Cela peut aussi correspondre aux bifurcations instables de type transcritique ou fourche).
- La bifurcation par “dédoublment de période” est associée à la sortie du cercle unité d’une des valeurs propres  $\Lambda_i$  par l’axe des réels négatifs. Dans ce cas, le cycle stable de période  $T$  perd sa stabilité au profit d’un cycle limite de période  $2T$ . On distingue les bifurcations par doublement de période sur-critique et sous-critique. Dans le premier cas, au passage de la bifurcation, la perte de stabilité conduit nécessairement à la solution  $2T$  périodique stable correspondante. Dans le deuxième cas, la solution  $2T$  périodique issue de la bifurcation est instable. On ne peut donc pas prédire la réponse juste après la bifurcation.
- La bifurcation de Hopf de seconde espèce (ou de Neimark) est associée à la sortie du cercle unité de 2 valeurs propres conjuguées  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_j$  telles que :  $\Lambda_i = Re(\Lambda_i) \pm i\omega_2$ . Dans ce cas, le cycle limite de pulsation  $\omega_1$  devient un tore avec l’apparition de la deuxième pulsation  $\omega_2$ . Si les pulsations sont incommensurables, la solution obtenue est quasi-périodique. De la même manière, les cas sur-critique et sous-critique sont à distinguer, avec les mêmes conséquences que pour la bifurcation par dédoublement de période.

## 4.5. Etude de la cascade de distribution

Dans cette partie, les outils présentés précédemment sont utilisés pour étudier le comportement dynamique non-linéaire de la cascade 84-73-56 seule et de la cascade de distribution complète (cascade 84-73-56 et cascade 54-72-50). Dans un premier temps, seules les excitations internes (raideurs d’engrènement et erreurs statiques de transmission) sont prises en compte. Dans un second temps, on superpose aux excitations internes différents niveaux d’acyclisme. Le Tableau 4.2 présente les grandeurs caractéristiques du système. Le taux d’amortissement visqueux équivalent du système est de l’ordre de 5%. La Figure 4.7 présente l’évolution des excitations internes correspondant aux corrections standards, conformément aux spectres présentés sur les Figures 3.4 et 3.5. On constate que les excitations sont en phase.

Pour la suite  $p_m(\tau)$  désigne l’erreur dynamique de transmission de l’engrènement  $m$ , fonction de la variable sans dimension  $\tau$ .



**Figure 4.7.** : Evolution temporelles des excitations internes des deux cascades sur 3 périodes d'engrènement.

En bleu, engrènement 84/73. En noir, engrènement 56/73.

En vert, engrènement 50/72. En rouge, engrènement 54/72.

### 4.5.1. Cascade 84-73-56

Le modèle de la cascade 84-73-56 seule est régi par le système d'équations sans dimension (4.34). Les deux fréquences propres du système (déterminées dans le chapitre 3) sont  $f_{p1} = 1959 \text{ Hz}$  et  $f_{p2} = 3248 \text{ Hz}$ .

#### 4.5.1.1. Réponses dynamiques induites par les excitations internes

Le paramètre de continuation est la fréquence d'engrènement de la cascade, soit  $Z_1\omega_1$ . Seules les excitations liées à la fréquence d'engrènement sont prises en compte ( $\chi_c^{(i,m)} = \chi_s^{(i,m)} = 0$ ).

#### Réponses dynamiques 1-T périodiques

La Figure 4.8 présente les amplitudes maximale et minimale de la réponse 1-T périodique en fonction de la fréquence d'engrènement  $f_{E_1}$  de la cascade 84-73-56 pour les deux engrènements. La réponse est centrée autour de l'écrasement statique, soit  $b_m + \bar{e}_m$ . Les seuils de contact sont représentés par un trait noir. Le dépassement du seuil  $+b_m$  traduit la perte ou la reprise du contact entre les flancs actifs et dépassement du seuil  $-b_m$  traduit la perte ou la reprise du contact entre les flancs rétros. On souhaite dans un premier temps comparer les réponses dynamiques du modèle non-linéaire avec ceux obtenus avec le modèle linéaire sans jeu. Sans surprise, les deux modèles sont en accord tant que les contacts restent permanents. Au niveau de la résonance principale, située dans la région  $[1720 - 1940] \text{ Hz}$  (correspondant à  $f_{E_1} = f_{p1}$ ), la perte de contact s'initie d'abord sur l'engrènement 84/73 ( $p_1$ ). La résonance s'incline vers des fréquences plus basses traduisant le caractère mollissant du système induit par la perte de contact. Les amplitudes sont plus faibles avec le modèle non-linéaire. Comme on peut le constater, le jeu n'est pas entièrement franchi, et aucun impact ne se produit sur les flancs rétros. On remarque que la réponse 1-T périodique du modèle non-linéaire est rapidement instable dans cette région. On constate également que l'amplification dynamique induite par l'excitation du deuxième mode n'induit pas d'amplitudes suffisantes pour entraîner la perte de contact.

Par ailleurs, les réponses 1-T périodiques linéaires et non-linéaires présentent une zone d'instabilité dans la plage  $f_{E_1} \in [3853 - 3967] \text{ Hz}$ . Cette zone correspond à l'instabilité paramétrique principale, soit  $f_{E_1} = 2f_{p1}$ .

Afin de préciser les bifurcations observées, Les Figures 4.9 et 4.10 présentent l'évolution de la valeur RMS et de la valeur moyenne en fonction de la fréquence d'engrènement des erreurs dynamiques de transmission 1-T périodiques des deux engrènements. La stabilité du système est gouvernée par les 4 valeurs propres de la matrice de monodromie (théorie de Floquet [90]). Les branches stables sont représentées par

des lignes continues et les réponses instables par des lignes discontinues. Les bifurcations sont indiquées par un point, et accompagnées d'un identifiant traduisant le type de bifurcation locale. Ces identifiants sont :

- NC pour une bifurcation noeud-col.
- R pour une sortie du cercle unité d'une valeur propre par l'axe des réels positifs, alors que la solution est déjà instable. Cette "bifurcation" correspond à un point de rebroussement.
- DP<sub>n</sub> pour dédoublement de période d'une solution n-T périodique.
- DP<sub>n</sub>\* pour une sortie du cercle unité d'une valeur propre par l'axe des réels négatifs, alors que la solution est déjà instable. Cette bifurcation correspond à la naissance d'une solution 2-T périodique instable.
- HS pour une bifurcation de Hopf de seconde espèce.

En général, une bifurcation s'accompagne d'une perte de stabilité. Il s'agit d'un point de stabilité marginale. Ceci étant dit, la dimension de notre système peut conduire à une sortie d'une valeur propre du cercle unité alors que la réponse est déjà instable (i.e. une autre valeur propre est déjà en dehors du cercle unité). Nous décidons de parler aussi de bifurcation dans ce cas, même si ce terme paraît impropre. Afin d'illustrer ce propos, la position des valeurs propres sur le plan complexe est précisée aux abords des bifurcations (Figure 4.9). La branche de solutions 1-T périodiques (suivie dans le sens des fréquences croissantes) perd sa stabilité à 1718 Hz par une bifurcation noeud-col (NC). A 1687 Hz, il y a une bifurcation par dédoublement de période de la branche instable (DP1\*) sans changement de stabilité. A 1559 Hz, on observe un point de rebroussement (R). La stabilité est récupérée par une bifurcation par dédoublement de période à 1890 Hz (DP1). Au-delà de 1890 Hz la réponse reste stable jusqu'à une première bifurcation par dédoublement de période (DP1) sous-critique à 3853 Hz. Elle reste ensuite instable jusqu'à une seconde bifurcation par dédoublement de période (DP1) sous-critique à 3967 Hz. On notera enfin que l'évolution de la valeur moyenne de la réponse avec la fréquence traduit également un phénomène paramétrique non-linéaire.

Afin de mieux décrire les différentes réponses observables, on se propose d'étudier les réponses temporelles 1-T périodiques du modèle non-linéaire à différents régimes de fonctionnement par intégration numérique (Runge-Kutta d'ordre 4). Les Figures 4.11 à 4.14 présentent l'erreur dynamique de transmission  $p_1(t)$  de l'engrènement 84/73 pour différentes fréquences d'engrènement. Pour chaque figure, les parties (a), (b), (c) et (d) correspondent respectivement à la réponse temporelle (avec seuil de contact en trait pointillé), au spectre d'amplitudes, au plan de phase et à la section de Poincaré. Nous précisons que les termes de plan de phase et de section de Poincaré sont impropres. Compte tenu que le système est non-autonome et de dimension 4, il s'agit en réalité respectivement d'une projection du plan de phase augmenté (dimension 5 avec le temps) sur le plan position, vitesse ( $p_1, p'_1$ ) et d'une stroboscopie de la réponse sur ce même plan.

Pour  $f_{E_1} = 1650 \text{ Hz}$ , juste avant la bifurcation noeud-col, la solution 1-T périodique stable frôle le seuil de contact et est dominée par le fondamental de la fréquence d'engrènement (Figure 4.11).

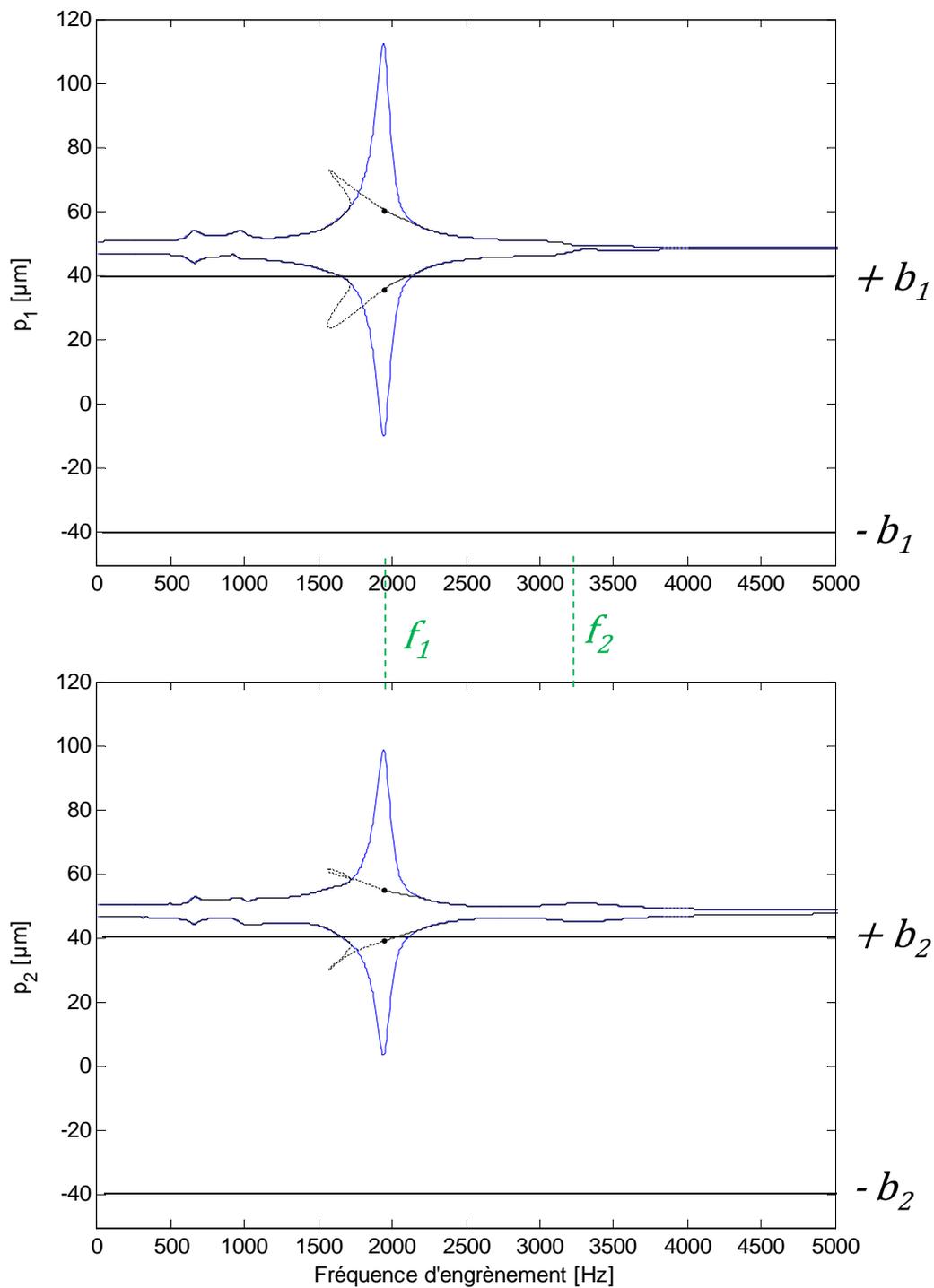
On initie la solution pour  $f_{E_1} = 1830 \text{ Hz}$  avec les conditions initiales de la solution 1-T périodique instable et on observe l'évolution de la réponse sur plusieurs périodes. La réponse évolue pour devenir 2-T périodique avec 2 impacts par période (Figure 4.12).

Pour  $f_{E_1} = 1950 \text{ Hz}$ , la solution 1-T périodique est stable avec un impact par période. Elle est dominée par le fondamental de la fréquence d'engrènement (Figure 4.13).

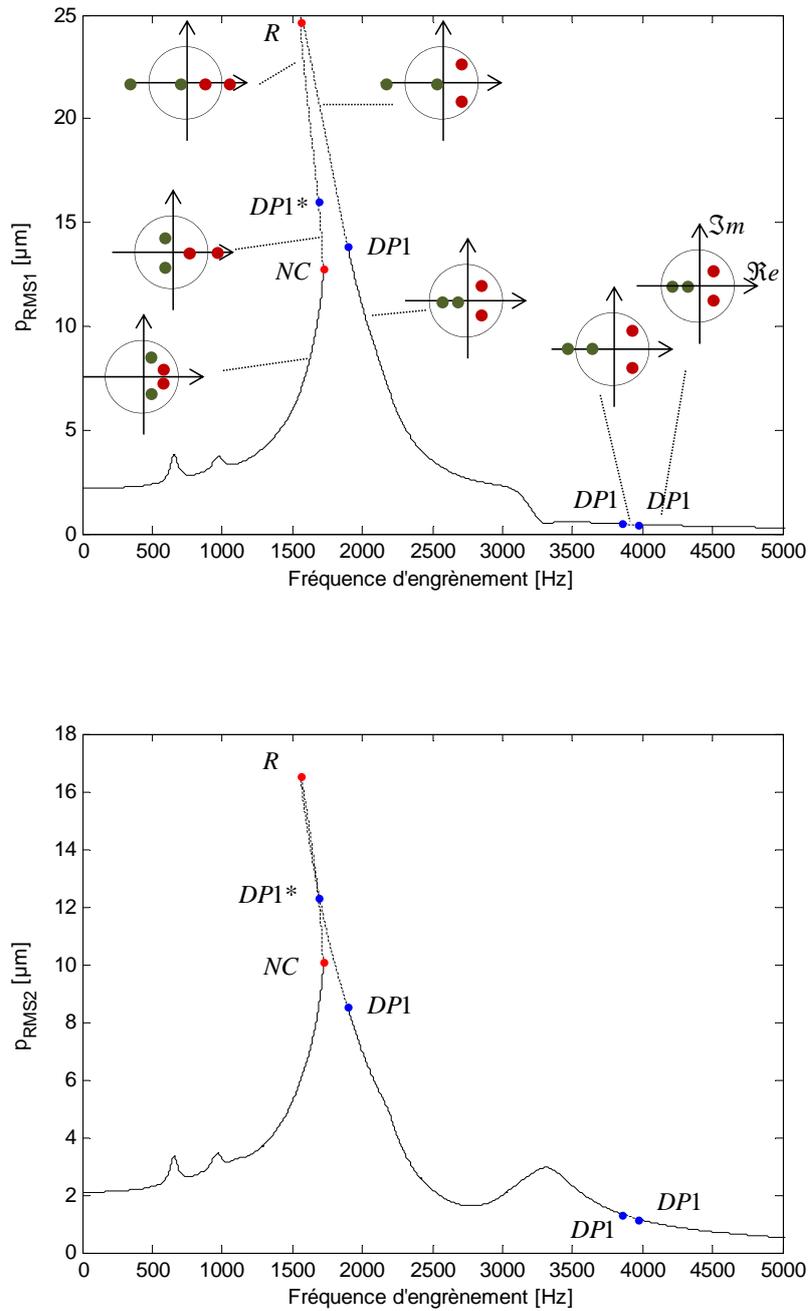
Pour  $f_{E_1} = 2110 \text{ Hz}$ , l'amplitude de la réponse 1-T périodique a diminué et il n'y a plus de perte de contact (Figure 4.14).

Enfin on initie la solution  $f_{E_1} = 3880 \text{ Hz}$  pour avec les conditions initiales de la solution 1-T périodique instable et on observe l'évolution de la réponse sur plusieurs périodes. La réponse croit de manière exponentielle. Cette instabilité donne nécessairement naissance à une réponse avec perte de contact. En effet, une fois le régime transitoire achevé, la réponse est 2-T périodique avec un impact par période (Figure 4.15).

Les différentes régions d'instabilités observées sur la solution 1-T périodique peuvent être le siège de réponses sous-harmoniques ou chaotiques que nous nous proposons d'étudier.



**Figure 4.8.** : Amplitudes extrêmes de la réponse dynamique obtenue à partir d'une approche linéaire (en bleu) et d'une approche non-linéaire (en noir).

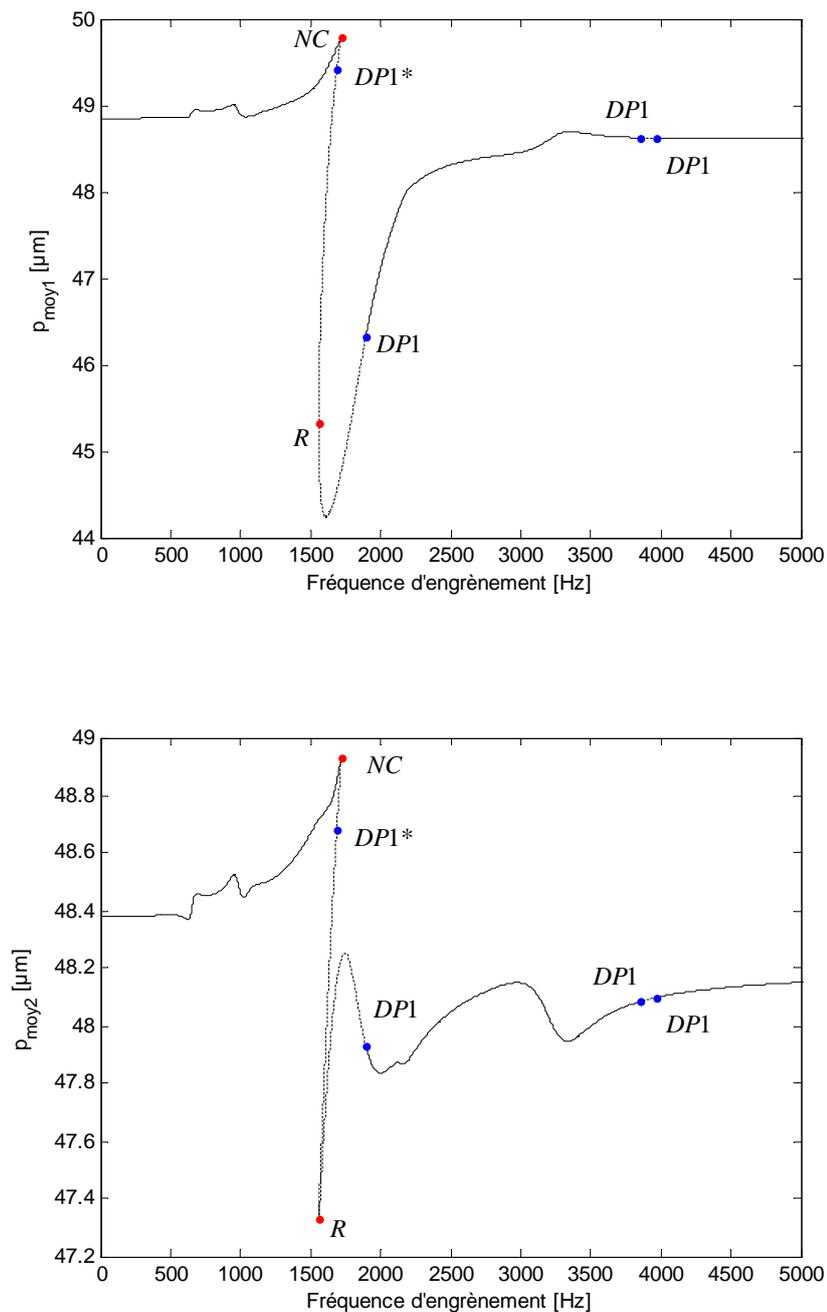


**Figure 4.9.** : Valeurs RMS des réponses 1-T périodiques des deux engrènements de la cascade 84-73-56.

(—) Solution stable, (- - -) solution instable.

(●) Sortie d'une valeur propre par l'axe des réels négatifs, (●) sortie d'une valeur propre par l'axe des réels positifs.

NC : Noeud-col.  $DP_n$  : Dédoublment de période. R : Point de rebroussement.

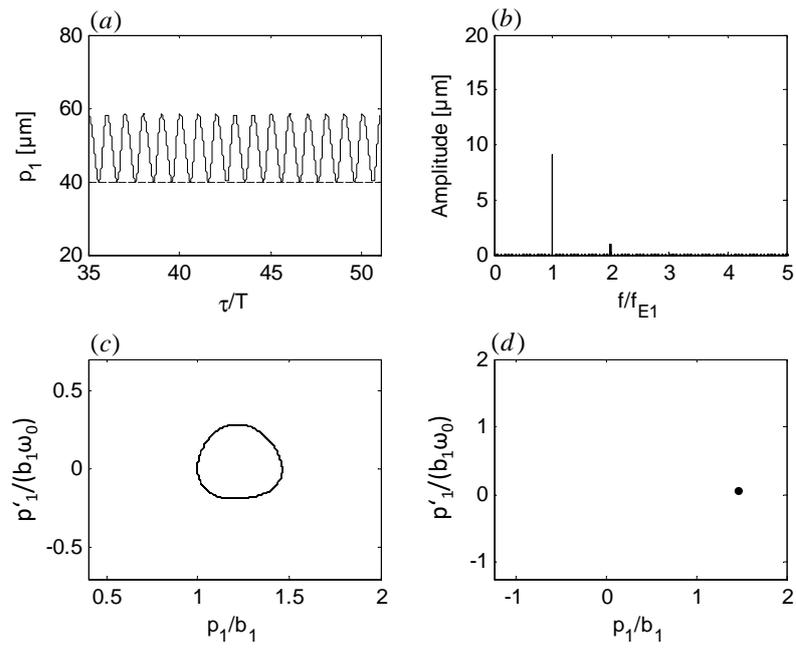


**Figure 4.10.** : Valeurs moyennes des réponses 1-T périodiques des deux engrènements de la cascade 84-73-56.

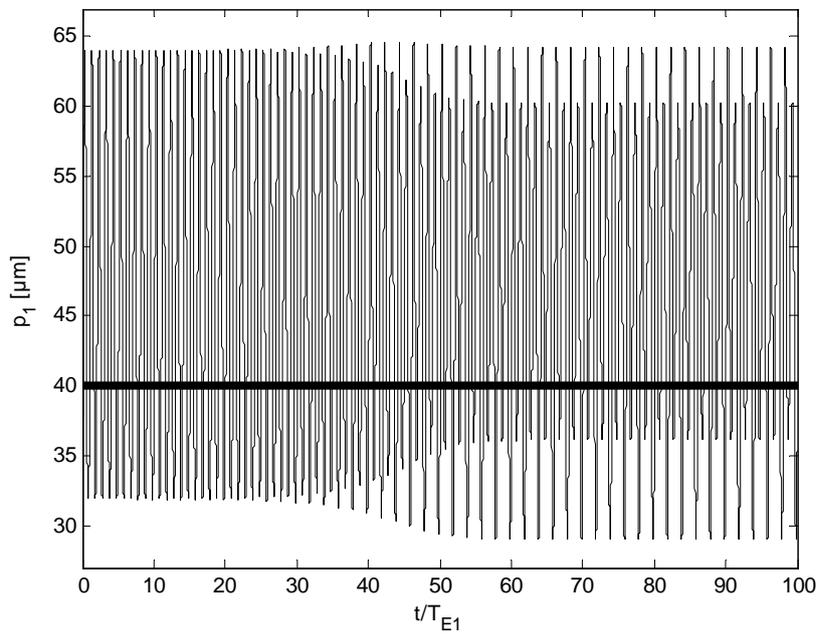
(—) Solution stable, (- - -) solution instable.

(●) Sortie d'une valeur propre par l'axe des réels négatifs, (●) sortie d'une valeur propre par l'axe des réels positifs.

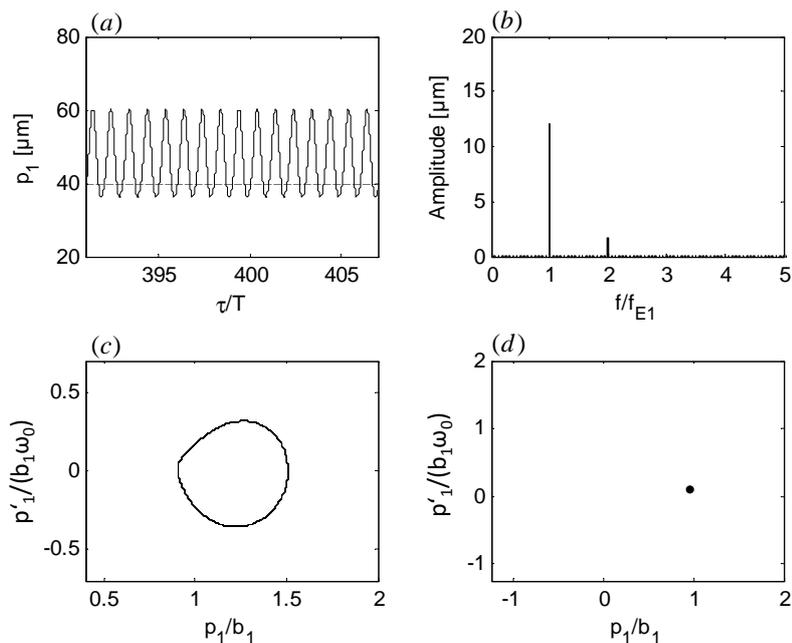
NC : Noeud-col. DPn : Dédoublment de période. R : Point de rebroussement.



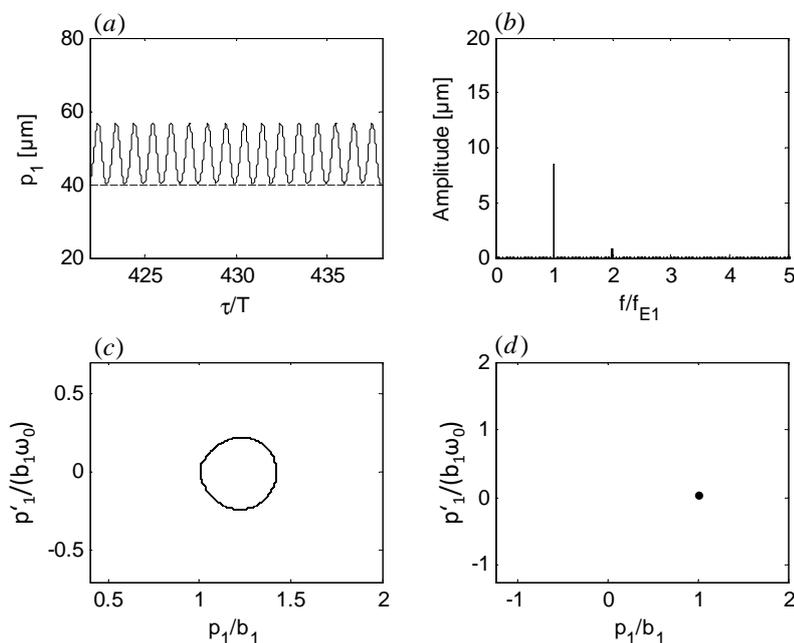
**Figure 4.11.** : Solution 1-T périodique sans impact, à  $f_{E_1} = 1650 \text{ Hz}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.12.** : Evolution temporelle de la solution 1-T instable, à  $f_{E_1} = 1830 \text{ Hz}$ .



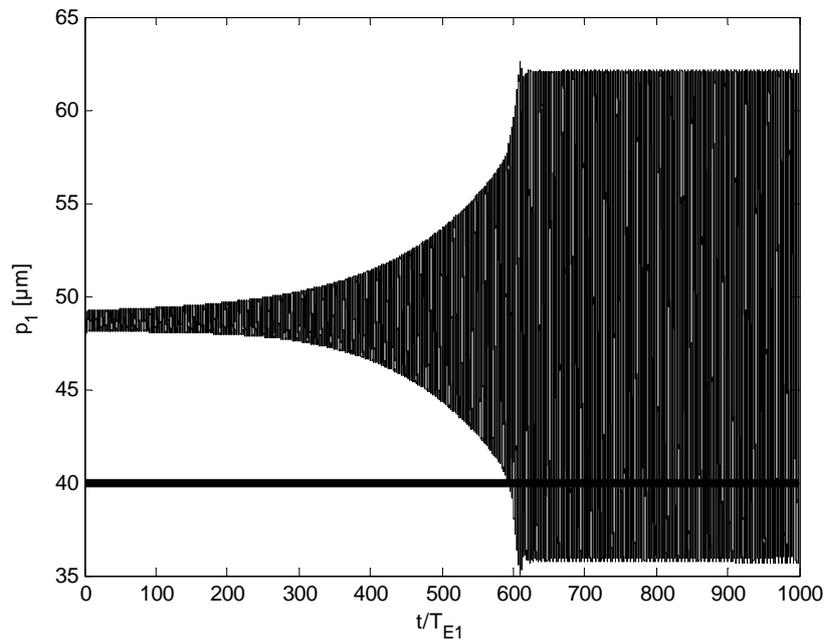
**Figure 4.13.** : Solution 1-T périodique avec 1 impact par période, à  $f_{E_1} = 1950 \text{ Hz}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.14.** : Solution 1-T périodique sans impact, à  $f_{E_1} = 2110 \text{ Hz}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.

	Engrènement			
	84/73	56/73	54/72	50/72
Demi-jeu de denture $b_m$ [ $\mu\text{m}$ ]	40	40	40	40
Amortissement $c_m$ [N.s/m]	2642	1900	2800	3199
Masse équivalente $M_m$ [kg]	1.34	2.11	1.72	2.32
Raideur d'engrènement moyenne $\bar{k}_m$ [N/ $\mu\text{m}$ ]	327	340	433	479
Erreur statique de transmission moyenne $\bar{e}_m$ [ $\mu\text{m}$ ]	8.8	8.4	8.0	10.9

**Tableau 4.2.** : Grandeurs caractéristiques des engrènements.



**Figure 4.15.** : Evolution temporelle de la solution 1-T instable initiée à  $f_{E_1} = 3880 \text{ Hz}$ .

### Réponses dynamiques n-T périodiques

Deux zones d'instabilités ont été mises en évidence. La première correspond à la résonance paramétrique principale et la seconde à l'instabilité paramétrique principale. L'étude des réponses n-T périodiques est séparée entre ces deux zones.

#### a) Résonance principale

Les Figures 4.16 et 4.17 présentent l'évolution de la valeur RMS et de la valeur moyenne en fonction de la fréquence d'engrènement des réponses 2-T et 4-T périodiques observables dans la région  $[1550 - 1900] Hz$  (la solution 1-T périodique est également rappelée). Les mêmes notations que pour les solutions 1-T périodiques sont utilisées.

La branche 2-T périodique stable commence à  $1890 Hz$  (DP1). On observe une bifurcation par dédoublement de période (DP2) à  $1591 Hz$  (donnant lieu à une solution 4-T périodique stable). A partir de cette bifurcation, la solution reste instable jusqu'à son terme (DP1\*) à  $1687 Hz$ . Néanmoins, un point de rebroussement (R) est observé à  $1580 Hz$  et un dédoublement de période sans changement de stabilité (DP2\*) apparaît à  $1607 Hz$ .

La branche 4-T périodique est stable sur une fenêtre fréquentielle très étroite ( $[1584 - 1591] Hz$ ). Elle perd sa stabilité par une bifurcation noeud-col à  $1584 Hz$  (NC) et reste instable jusqu'à la bifurcation par dédoublement de période à  $1607 Hz$  de la solution 2-T périodique (DP2\*).

Les Figures 4.11 à 4.14 présentent l'erreur dynamique de transmission  $p_1(t)$  de l'engrènement 84/73 pour différentes fréquences d'engrènement.

Pour  $f_{E_1} = 1830 Hz$ , la solution 2-T périodique stable engendre 2 impacts par période et est fortement dominée par le fondamental de la fréquence d'engrènement. On observe (Figure 4.18) la présence des raies aux ordres  $\frac{k}{2} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , caractéristiques des solutions 2-T périodiques. Sur les parties (c) et (d), la réponse 1-T périodique instable est tracée en gris clair .

Pour  $f_{E_1} = 1595 Hz$ , la réponse 2-T périodique est stable juste avec la bifurcation par dédoublement de période. On observe (Figure 4.19) 2 impacts par période, et la réponse est fortement dominée par le fondamental de la fréquence d'engrènement. Elle présente également des raies en  $\frac{k}{2} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Les amplitudes des raies sont plus élevées qu'à  $1830 Hz$  car la résonance est mollissante.

Pour  $f_{E_1} = 1589 Hz$ , juste après le passage de la bifurcation par dédoublement de période à  $1591 Hz$ , on observe (Figure 4.20) la solution 4-T périodique stable avec 4 impacts par période. Le spectre est similaire à celui de la solution 2-T périodique à  $1595 Hz$ , mais il s'est enrichi de raies en  $\frac{k}{4} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , caractéristiques d'une réponse 4-T périodique. L'effet de ces raies s'observe nettement sur les amplitudes maximales et minimales de la réponse temporelle. Cette solution ne peut s'observer

que lors d'une descente en régime très lente car l'étroitesse de sa fenêtre fréquentielle de stabilité rend la solution difficile à observer.

*b) Instabilité paramétrique principale*

Les Figures 4.21 et 4.22 également présentent l'évolution de la valeur RMS et de la valeur moyenne en fonction de la fréquence d'engrènement des réponses 2-T, 4-T et 8-T périodiques observables dans la région  $[2700 - 4050] Hz$ . Les mêmes notations que pour les solutions 1-T périodiques sont utilisées.

L'analyse détaillée de chacune des branches serait fastidieuse et peut être faite de manière autonome par le lecteur en se reportant aux figures et à la description de la résonance principale. Cependant, plusieurs remarques peuvent être faites. Plusieurs bifurcations par dédoublement de période sont de type sous-critique, car elles ne conduisent pas à une solution de période double stable. Pour chacune d'elle, il est intéressant de déterminer sur quelle branche la réponse se situe après le régime transitoire. Le résultat, obtenu par intégration numérique, est représenté sur la Figure 4.21 par les flèches oranges.

En premier lieu, en partant de la branche 1-T instable à  $3950 Hz$  (soit, dans une descente en régime juste après la bifurcation par dédoublement de période sous-critique DP1 de la solution 1-T périodique), la Figure 4.23 montre que la réponse évolue en trois étapes (a, b et c). La réponse (a) croît de manière exponentielle jusqu'à la solution 2-T instable (b). Cette réponse étant instable, elle évolue rapidement vers la réponse 4-T périodique stable (c).

En second lieu, en partant de la branche 1-T instable à  $3880 Hz$  (soit, dans une montée en régime juste après la bifurcation par dédoublement de période sous-critique DP1 de la solution 1-T périodique), nous avons vu précédemment que la réponse accroche la réponse 2-T périodique (Figure 4.15), mais celle-ci est stable à ce régime de fonctionnement, la réponse n'évolue donc plus.

Enfin, on détermine de la même manière à quelle solution conduit l'autre bifurcation par dédoublement de période sous-critique (DP2) de la branche 2-T périodique à  $3123 Hz$ . On observe qu'elle mène à la branche 4-T périodique.

On observe également des bifurcations de Hopf de seconde espèce à (HS)  $3321 Hz$  et à  $3654 Hz$ . Elles traduisent l'existence d'un cycle quasi-périodique sur cette plage.

La succession des solutions 2-T, 4-T et 8-T périodiques est le signe d'une cascade harmonique. Dans notre cas, elle est interrompue à la solution 8-T périodique, car la bifurcation noeud-col intervient avant la bifurcation par dédoublement de période. Avec des excitations plus fortes ou un amortissement plus faible, on observerait des solutions 16-T, 32-T ... jusqu'à l'apparition du chaos.

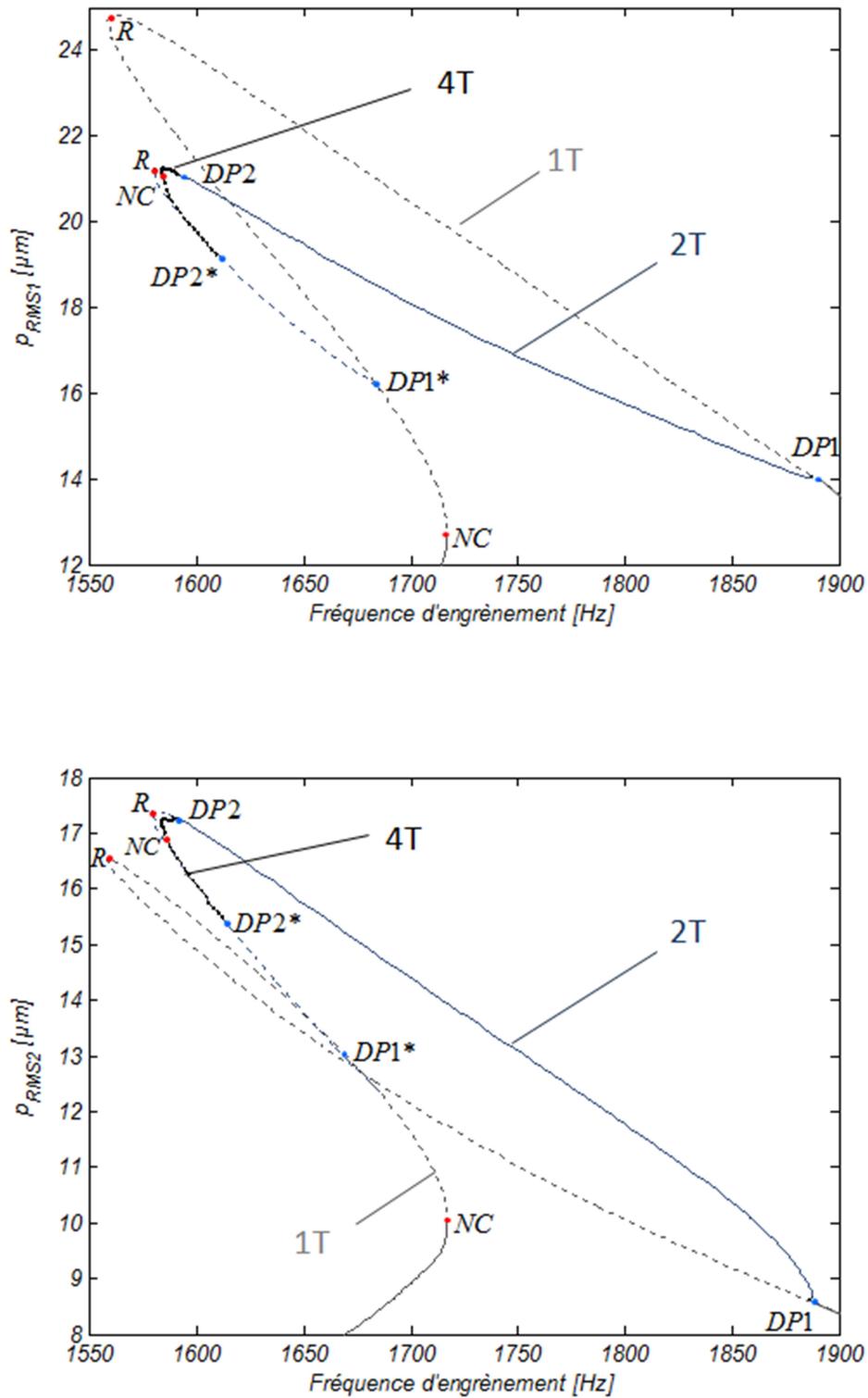
On se propose d'étudier plus en détails les différentes réponses observables par intégration numérique. Les Figures 4.24 à 4.27 présentent l'erreur dynamique de transmission  $p_1(t)$  de l'engrènement  $84/73$  pour différentes fréquences d'engrènement.

Pour  $f_{E_1} = 3800 Hz$ , a solution 2-T périodique est stable avec un impact par période (Figure 4.24). Elle est très largement dominée par l'ordre  $\frac{1}{2}f_{E_1}$ .

Pour  $f_{E_1} = 3800 \text{ Hz}$ , la solution 4-T périodique est également stable à cette fréquence (Figure 4.25). La réponse engendre 1 impact par période et est dominée par l'ordre  $\frac{1}{2}f_{E_1}$ , mais on relève la présence d'ordre en  $\frac{k}{4} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $f_{E_1} = 3650 \text{ Hz}$ , la solution est quasi-périodique (Figure 4.26). La réponse est dominée par l'ordre  $\frac{1}{2}f_{E_1}$  mais on trouve aussi des raies à environ  $0.148f_{E_1}$ ,  $0.352f_{E_1}$ ,  $0.648f_{E_1}$ , ..., qui caractérisent la quasi-périodicité. La réponse 2-T périodique instable est tracée en gris clair sur le plan de phase et la section de Poincaré montre que la solution quasi-périodique est centrée autour de la solution 2-T instable correspondante.

Pour  $f_{E_1} = 3000 \text{ Hz}$ , la solution 8-T périodique à 4 impacts par période est dominée par les ordres en  $\frac{k}{2}f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  (Figure 4.27). Les raies en  $\frac{k}{4} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  sont plus marquées et les raies en  $\frac{k}{8} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  émergent.

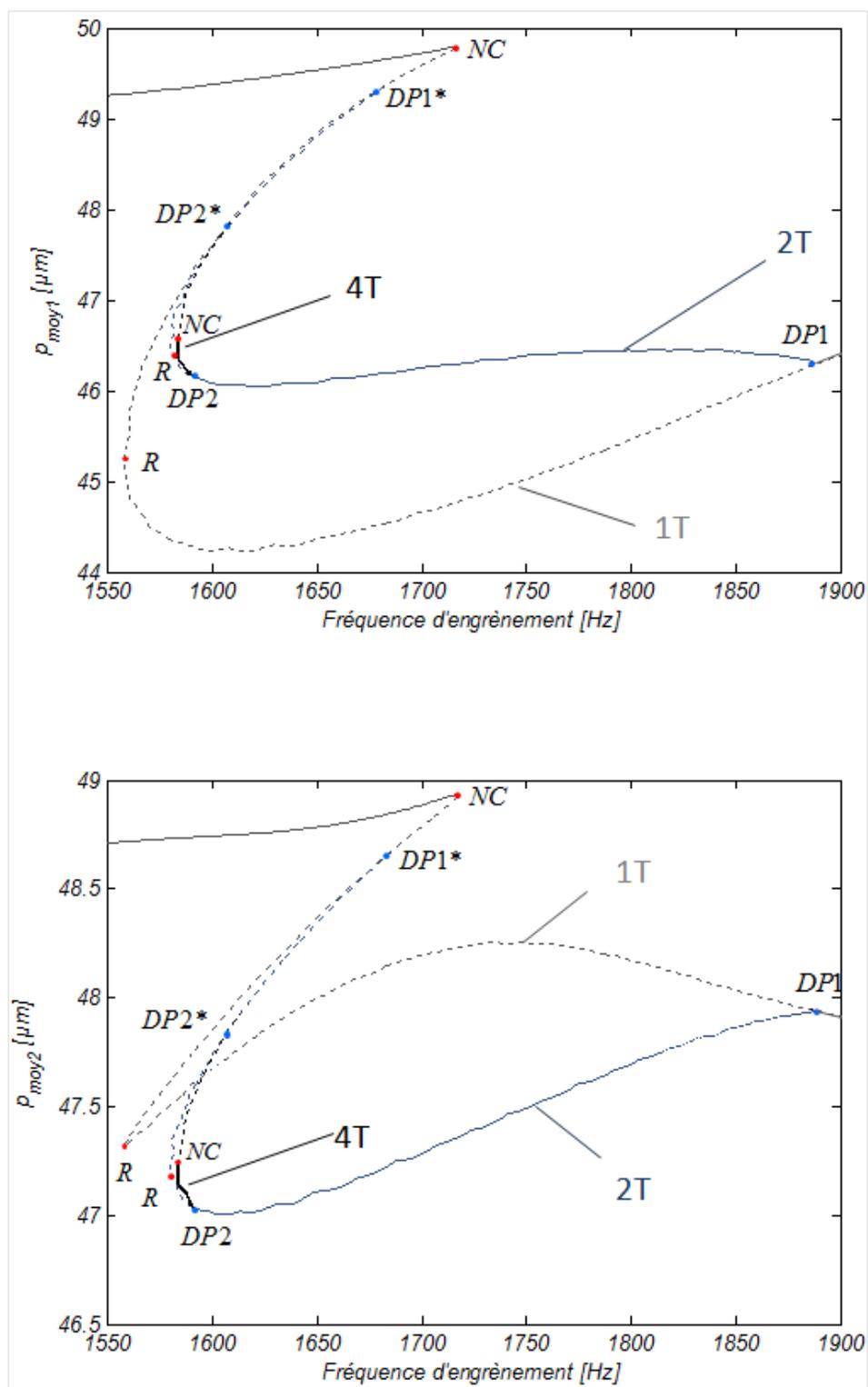


**Figure 4.16.** : Valeurs RMS des réponses 1-T, 2-T et 4-T périodiques des deux engrènements de la cascade 84-73-56 autour de la résonance principale.

(—) Solution stable, (- - -) solution instable.

(●) sortie d'une valeur propre par l'axe des réels négatifs, (●) sortie d'une valeur propre par l'axe des réels positifs.

NC : Noeud-col. DPi : Dédoublément de période. R : Point de rebroussement.

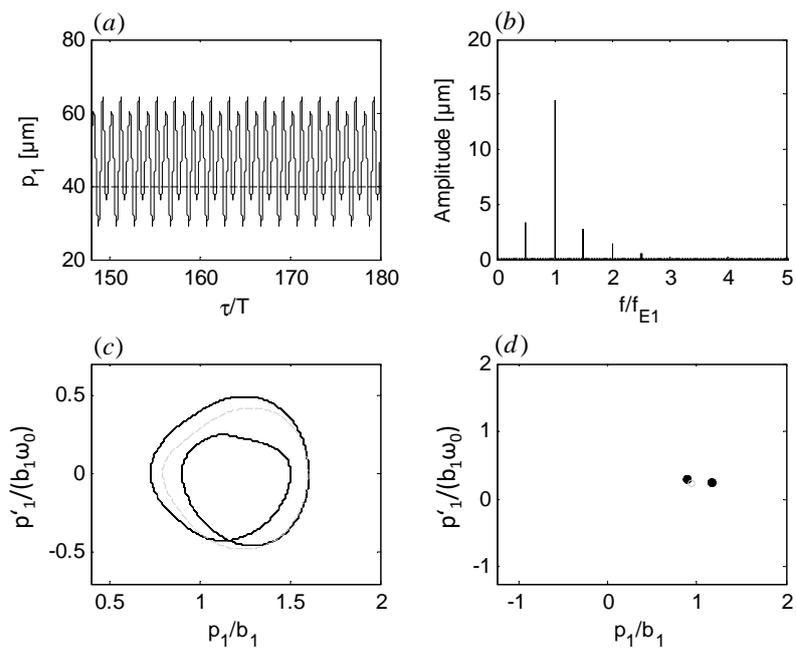


**Figure 4.17.** : Valeurs moyennes des réponses n-T périodiques des deux engrènements de la cascade 84-73-56 autour de la résonance principale.

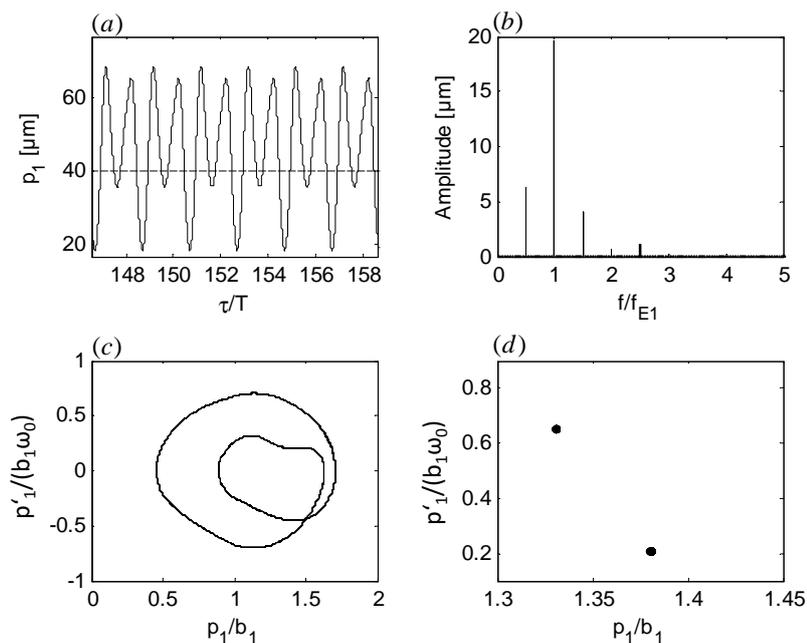
(—) Solution stable, (- - -) solution instable.

(●) Sortie d'une valeur propre par l'axe des réels négatifs, (●) sortie d'une valeur propre par l'axe des réels positifs.

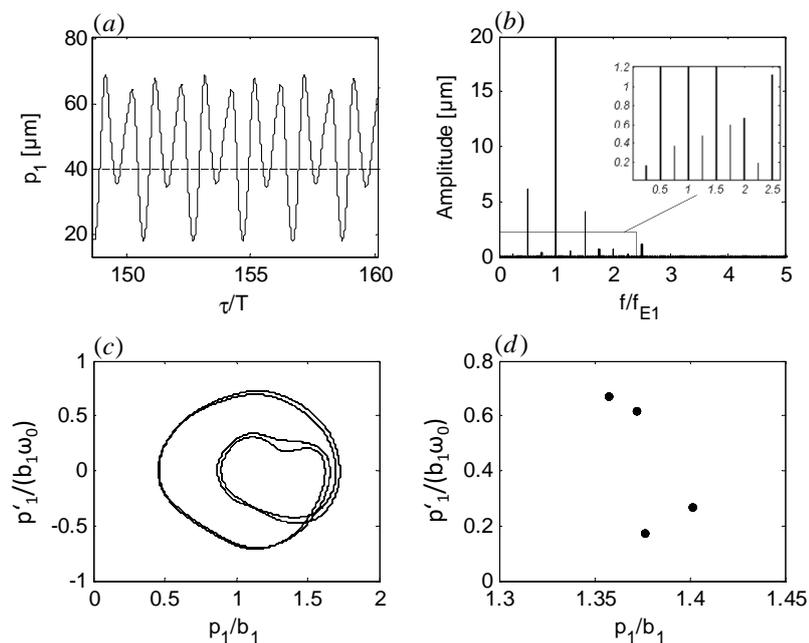
NC : Noeud-col. DP1 : Dédoublément de période. R : Point de rebroussement.



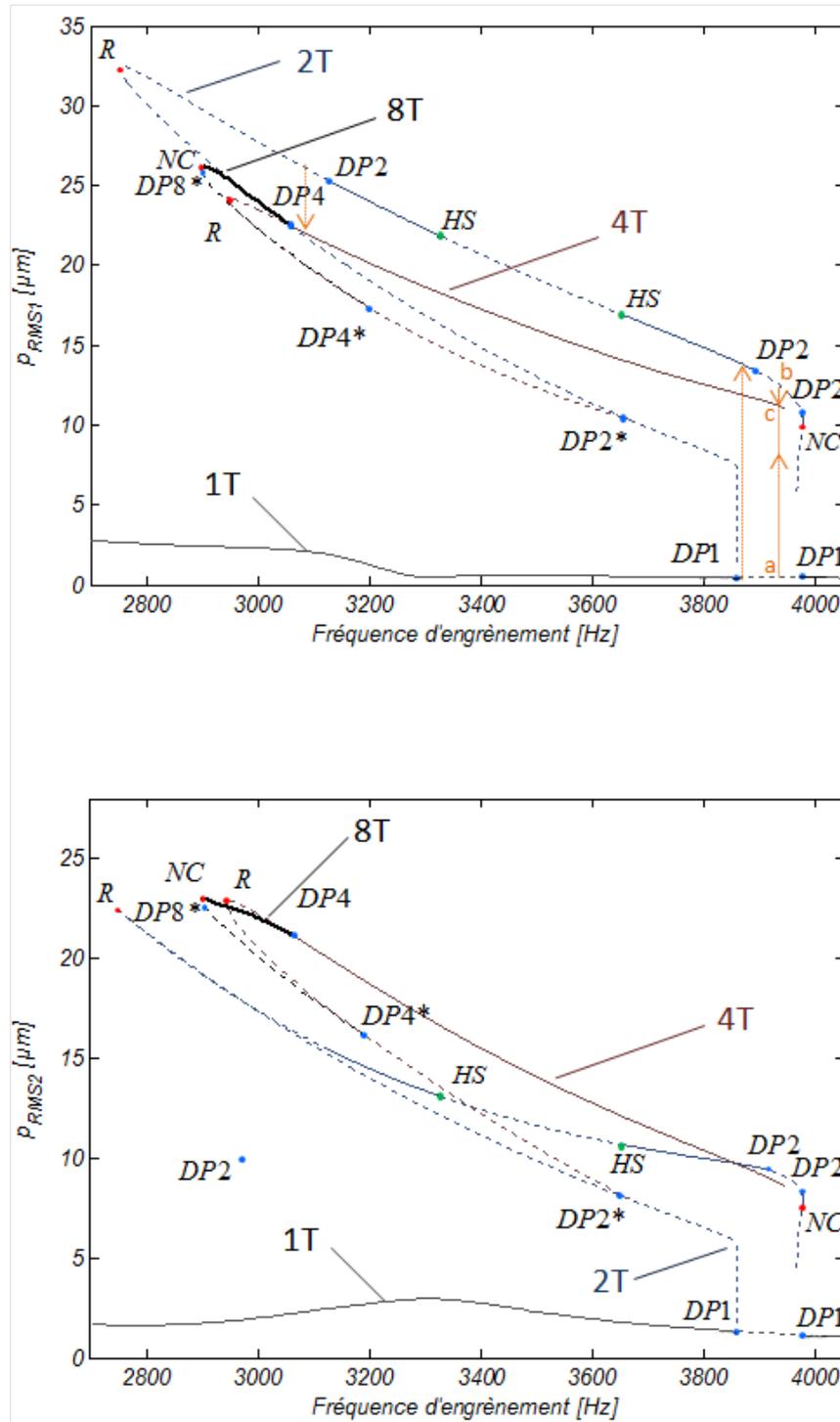
**Figure 4.18.** : Solution 2-T périodique avec 2 impacts par période, à  $f_{E1} = 1830 \text{ Hz}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.19.** : Solution 2-T périodique avec 2 impacts par période, à  $f_{E_1} = 1595 \text{ Hz}$ . (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.20.** : Solution 4-T périodique avec 4 impacts par période, à  $f_{E_1} = 1589 \text{ Hz}$ . (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



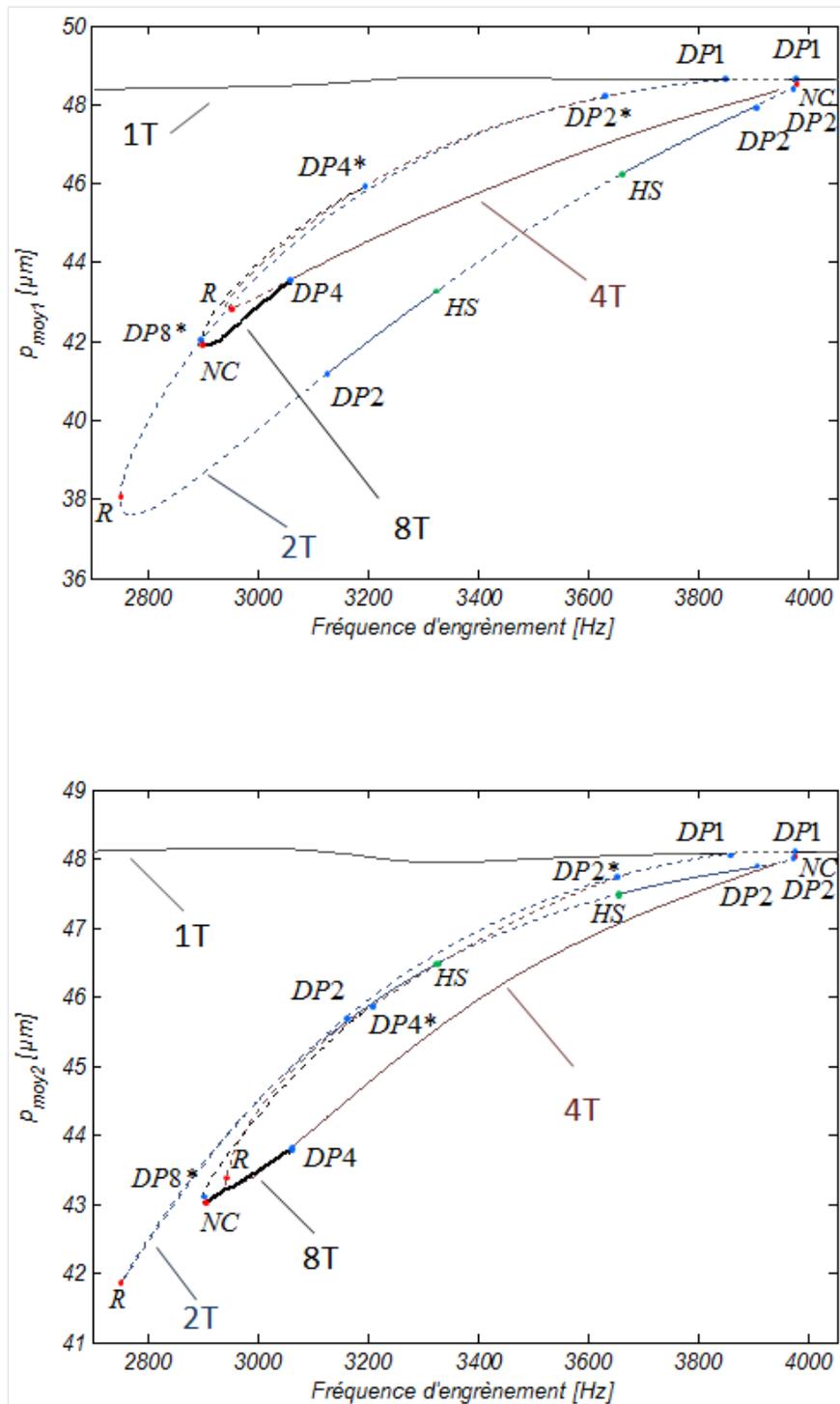
**Figure 4.21.** : Valeurs RMS des réponses n-T périodiques des deux engrènements de la cascade 84-73-56 autour d’instabilité paramétrique principale.

(—) Solution stable, (- - -) solution instable.

(●) Sortie d’une valeur propre par l’axe des réels négatifs, (●) sortie d’une valeur propre par l’axe des réels positifs, (●) sortie d’une paire valeurs propres conjuguées.

NC : Noeud-col. DPi : Dédoublment de période. R : Point de rebroussement.

HS : Hopf de seconde espèce.



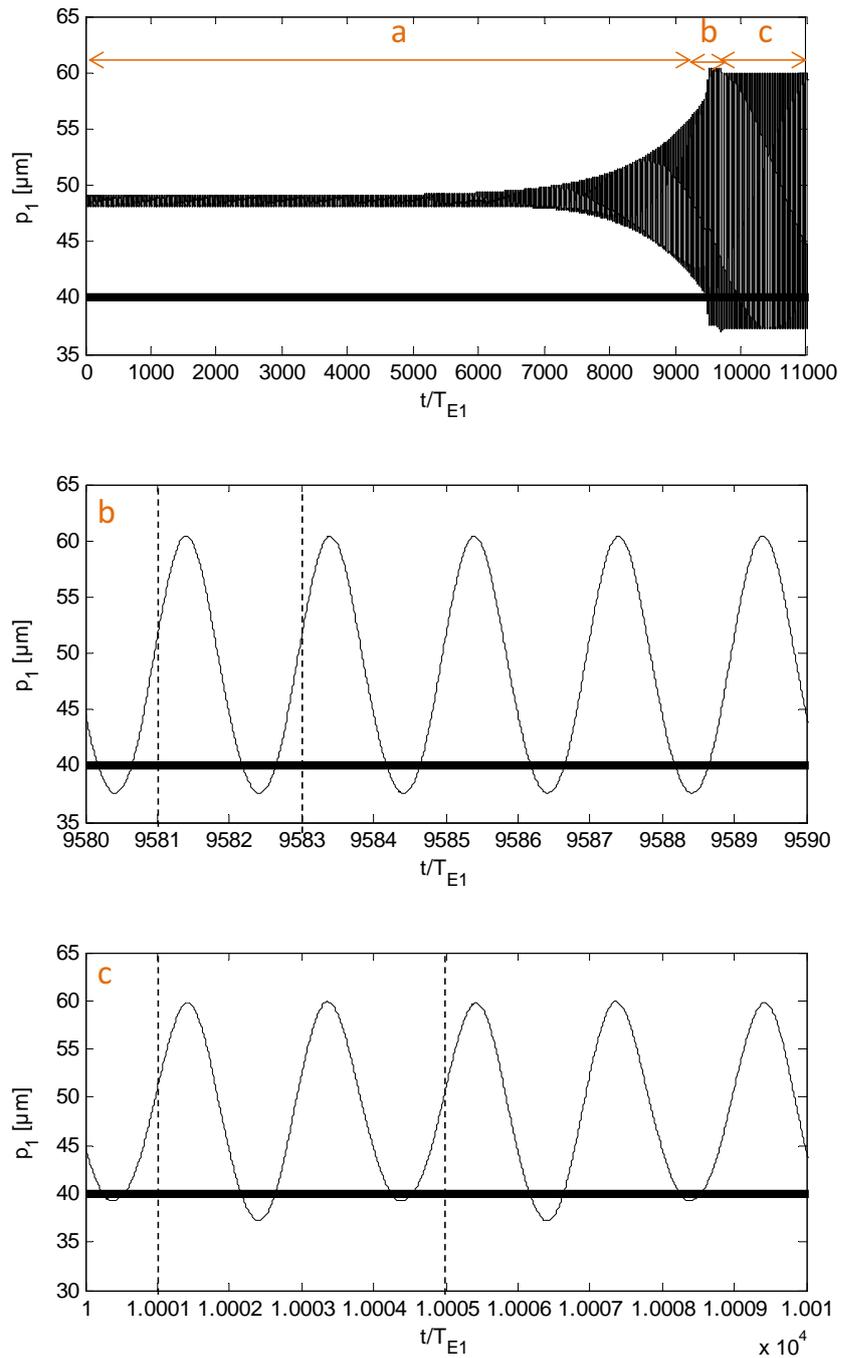
**Figure 4.22.** : Valeurs moyennes des réponses n-T périodiques des deux engrènements de la cascade 84-73-56 autour d'instabilité paramétrique principale.

(—) Solution stable, (- - -) solution instable.

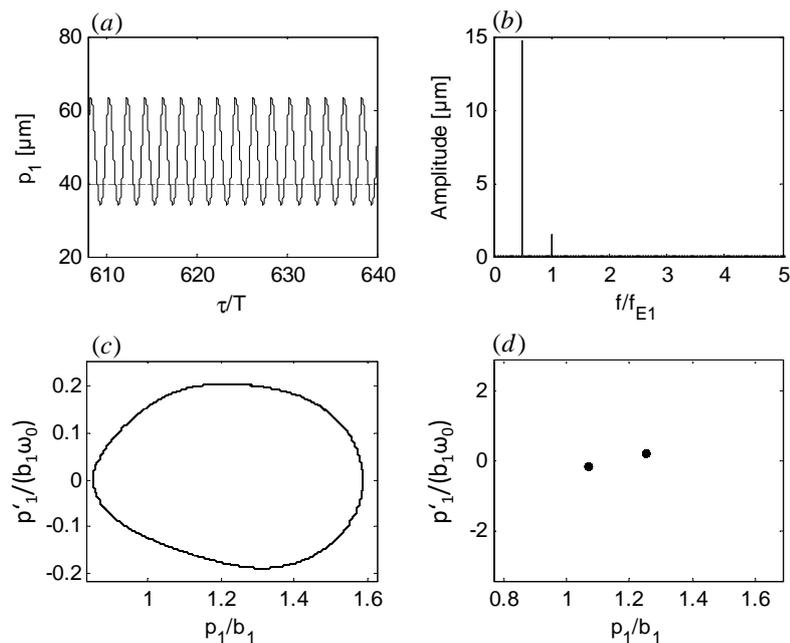
(●) Sortie d'une valeur propre par l'axe des réels négatifs, (●) sortie d'une valeur propre par l'axe des réels positifs, (●) sortie d'une paire valeurs propres conjuguées.

NC : Noeud-col. DPi : Dédoublément de période. R : Point de rebroussement.

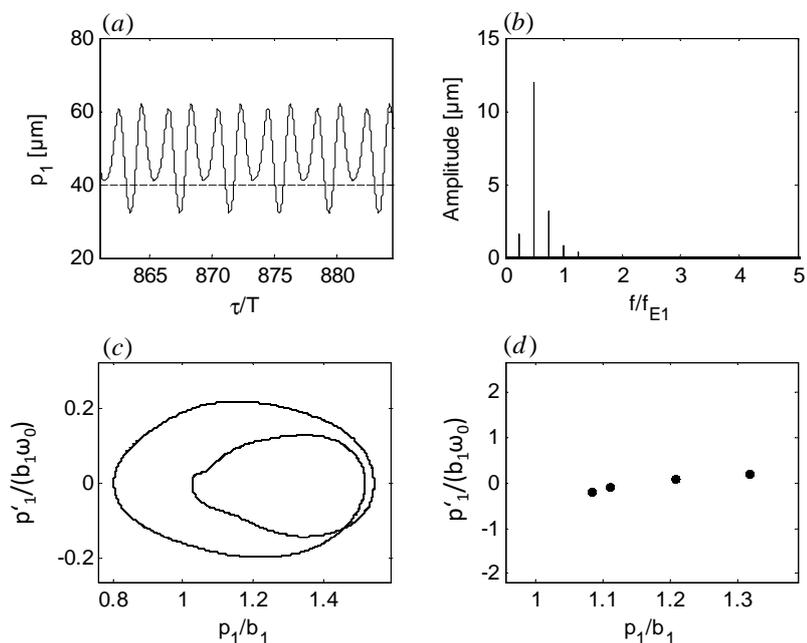
HS : Hopf de seconde espèce.



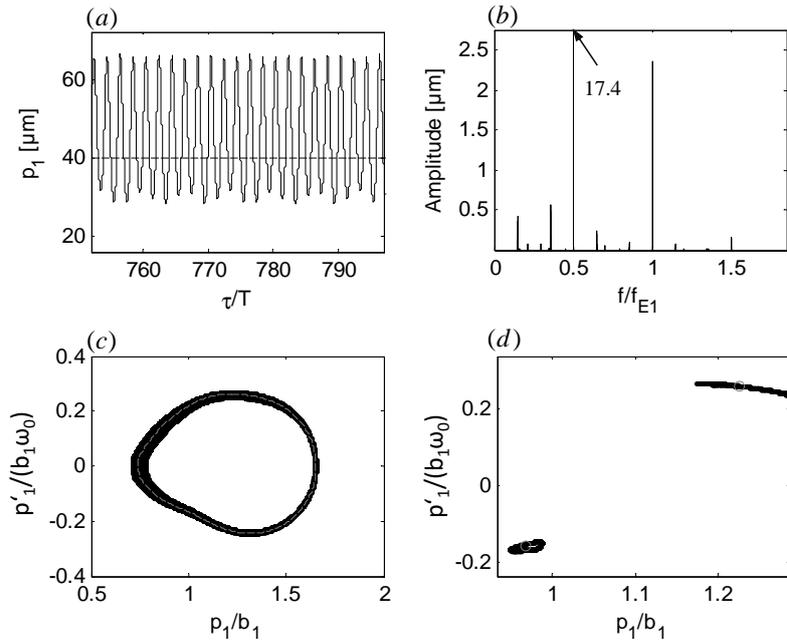
**Figure 4.23.** : Evolution temporelle de la réponse 1-T périodique instable initiée à  $3950\text{ Hz}$  avec zoom sur les parties *b* (solution 2-T périodique instable avec un impact par période) et *c* (solution 4-T périodique stable avec 2 impacts par période).



**Figure 4.24.** : Solution 2-T périodique avec 1 impact par période, à  $f_{E_1} = 3800 \text{ Hz}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.

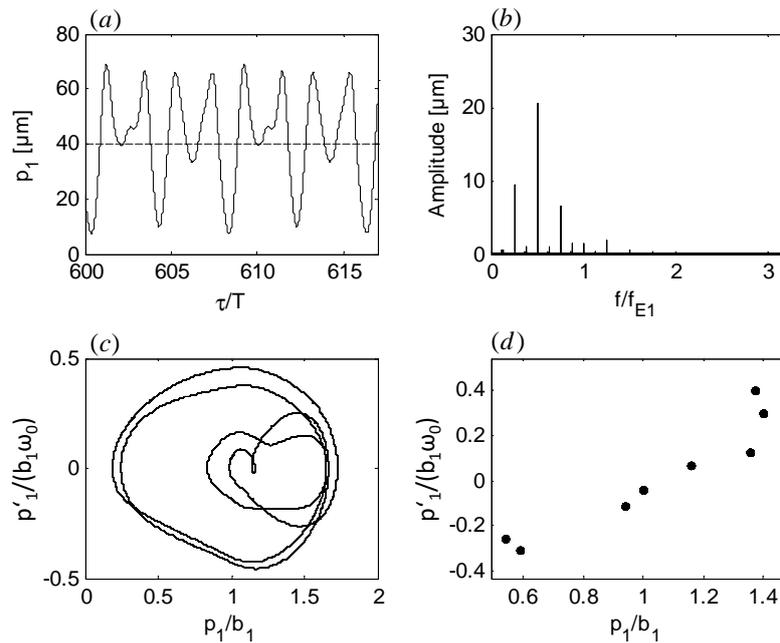


**Figure 4.25.** : Solution 4-T périodique avec 1 impact par période, à  $f_{E_1} = 3800 \text{ Hz}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.26.** : Solution quasi-périodique à  $f_{E_1} = 3650 \text{ Hz}$ .

(a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.

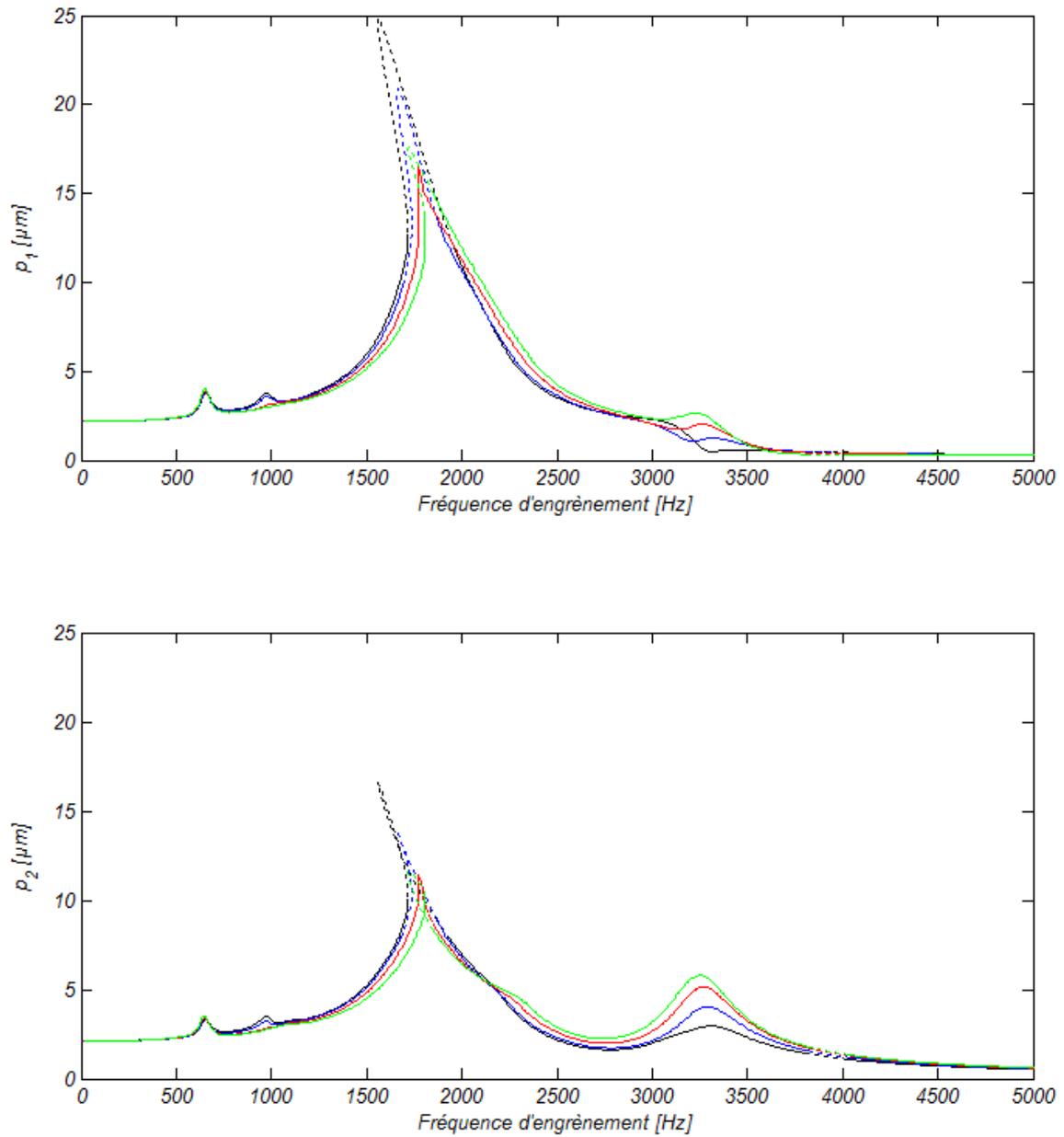


**Figure 4.27.** : Solution 8-T périodique avec 4 impacts par période, à  $f_{E_1} = 3000 \text{ Hz}$ .

(a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.

### **Influence de la phase entre les excitations**

Pour étudier l'influence de la phase entre les excitations sur la réponse 1-T périodique, on introduit un déphasage  $\Psi$  d'un  $1/4$ , de  $1/2$  et de  $3/4$  de la période d'engrènement entre les excitations liées aux deux engrènements. Les Figures 4.28 et 4.29 présentent l'évolution des valeurs RMS et moyennes des solutions pour les différentes phases  $\Psi$  appliquées. En fonction de la phase, le deuxième mode (à  $3248 Hz$ ) peut émerger, mais l'amplitude de la réponse est plus faible qu'au niveau du premier mode propre ( $1959 Hz$ ). La plage d'instabilité autour de la résonance principale est plus ou moins large en fonction de la phase. En revanche, la plage d'instabilité autour de l'instabilité paramétrique n'est quasiment pas influencée. Ainsi, le principal impact de la phase entre les excitations est le niveau d'amplitude des résonances.



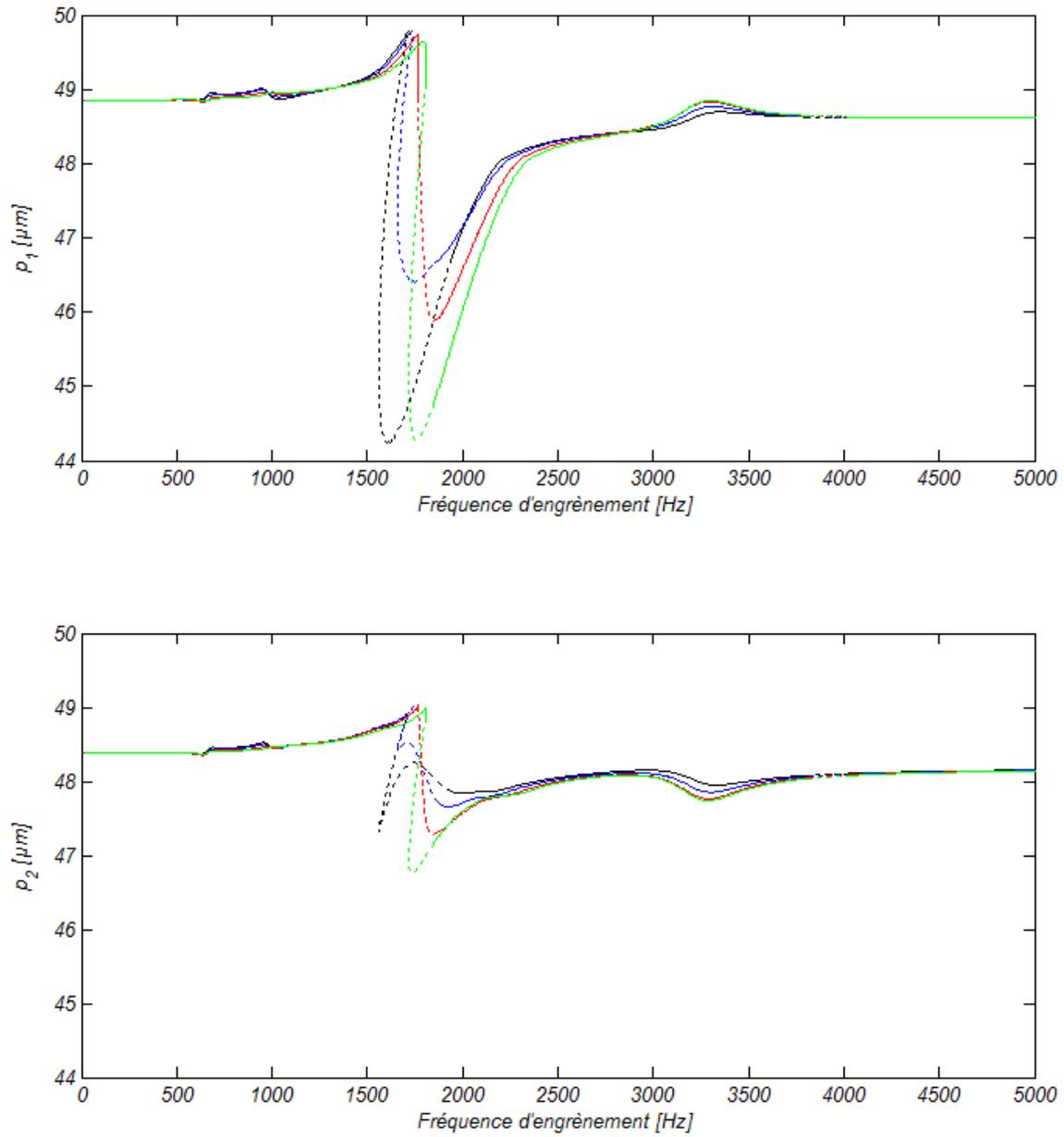
**Figure 4.28.** : Valeurs RMS des solutions 1-T périodique de la cascade 84-73-56 pour différentes valeurs de déphasage.

En noir :  $\Psi = 0$

En bleu :  $\Psi = 0.25 T_E$

En rouge :  $\Psi = 0.50 T_E$

En vert :  $\Psi = 0.75 T_E$



**Figure 4.29.** : Valeurs moyennes des solutions 1-T périodique de la cascade 84-73-56 pour différentes valeurs de déphasage.

En noir :  $\Psi = 0$

En bleu :  $\Psi = 0.25 T_E$

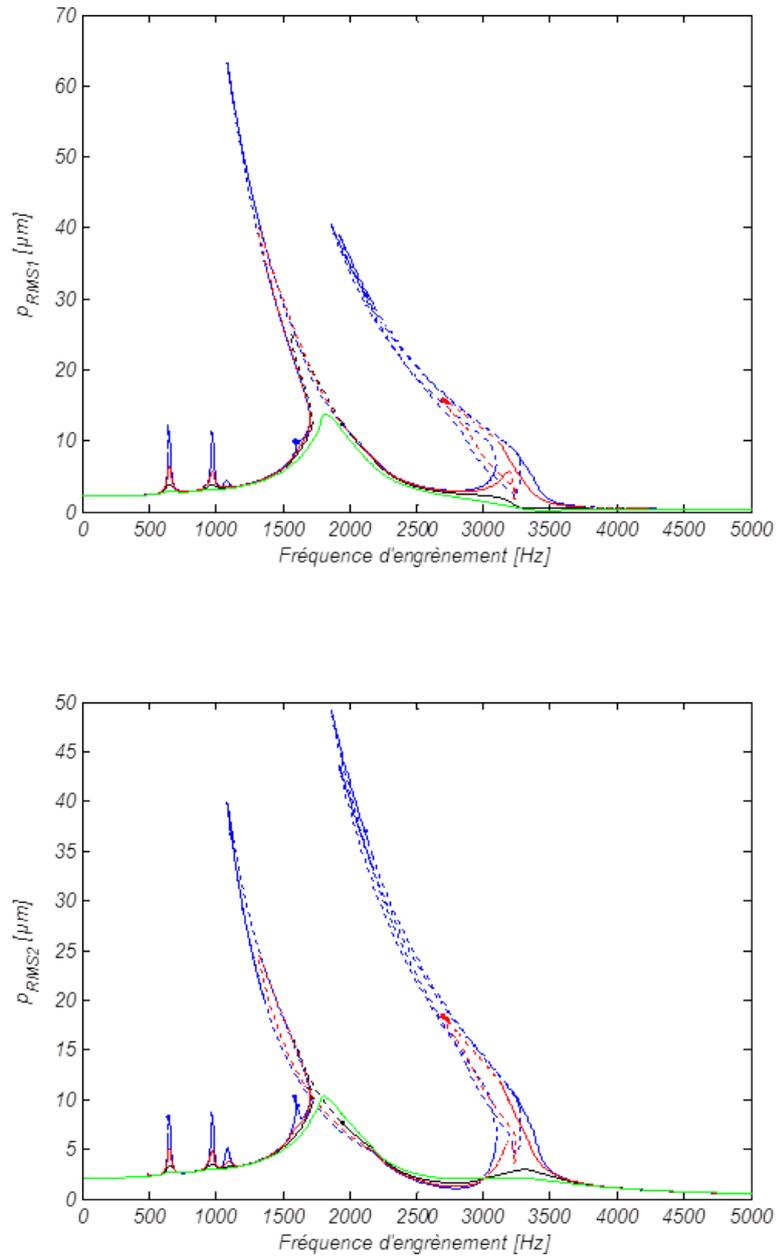
En rouge :  $\Psi = 0.50 T_E$

En vert :  $\Psi = 0.75 T_E$

### Influence de l'amortissement

L'amortissement a une influence très importante sur l'amplitude des résonances et sur la stabilité des solutions [13]. Les Figures 4.30 et 4.31 présentent donc l'évolution des valeurs RMS et moyennes des solutions 1-T périodiques pour des valeurs d'amortissement  $\eta c_m$  avec  $\eta = 0.25, 0.5, 1$  ou  $2$ . Le cas  $\eta = 1$  correspond à celui étudié dans la partie précédente. Lorsque l'amortissement est faible ( $\eta = 0.25$  ou  $0.5$ ), les zones d'instabilités sont plus larges, et les amplitudes de la réponse sensiblement plus grandes. On constate que pour des amortissements faibles, l'excitation du deuxième mode à  $3248 \text{ Hz}$  peut mener à des pertes de contact et son amplification dynamique est plus élevée qu'au niveau du premier mode pour l'engrènement  $56/73$ . De même, les amplifications associées à l'excitation des modes par les harmoniques supérieurs sont nettement plus marquées avec un amortissement faible. Enfin, un amortissement important ( $\eta = 2$ ) génère des amplitudes faibles et une stabilité de la solution 1-T périodique sur l'ensemble de la plage considérée.

Un amortissement plus faible rend également possible l'apparition du chaos. Les Figures 4.32 et 4.33 présentent respectivement la solution 2-T périodique et la solution chaotique. Le contenu fréquentiel de la réponse 1-T périodique est dominé par les ordres en  $\frac{k}{2} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le spectre de la solution chaotique est maintenant continu. Il reste largement dominé par des composantes discrètes de fréquences égale à  $\frac{k}{2} \cdot f_{E_1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . On remarque par ailleurs que l'attracteur étrange de la solution chaotique est centré autour des deux points fixes décrits sur la section de Poincaré de la solution 2-T périodique.



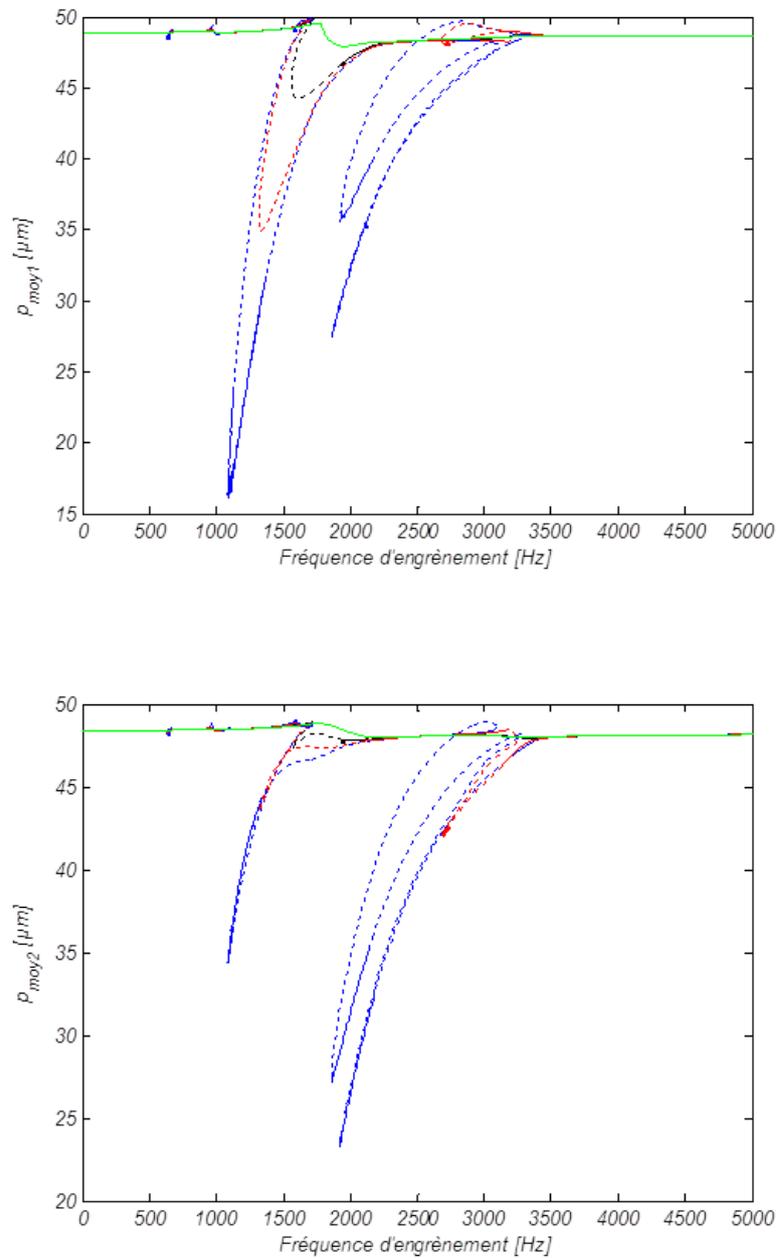
**Figure 4.30.** : Valeurs RMS des solutions 1-T périodiques de la cascade 84-73-56 pour différents amortissements.

En vert :  $\eta = 2$

En noir :  $\eta = 1$

En rouge :  $\eta = 0.5$

En bleu :  $\eta = 0.25$



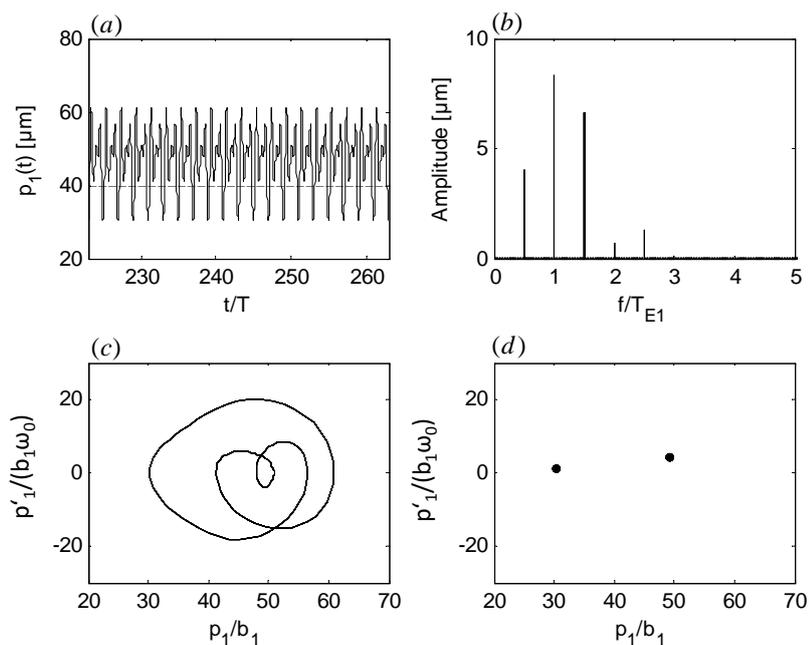
**Figure 4.31.** : Valeurs moyennes des solutions 1-T périodiques de la cascade 84-73-56 pour différents amortissements.

En vert :  $\eta = 2$

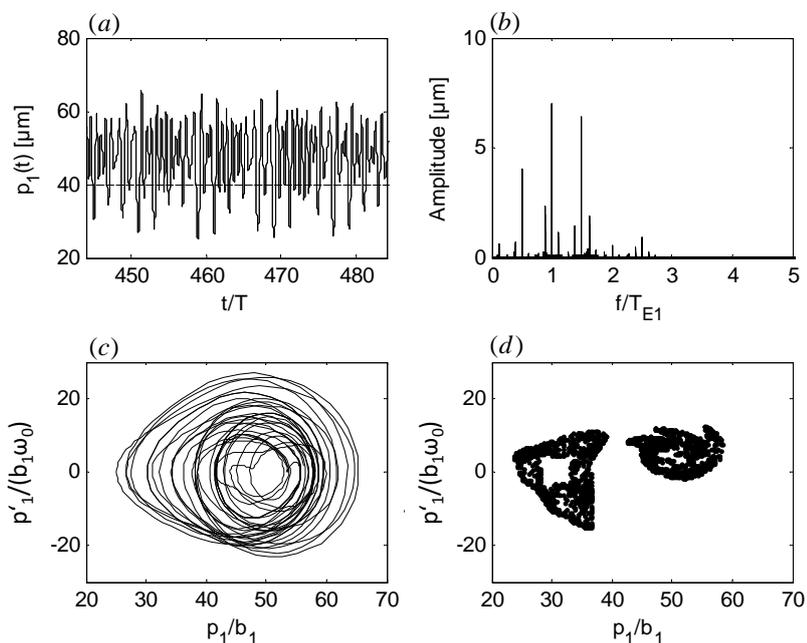
En noir :  $\eta = 1$

En rouge :  $\eta = 0.5$

En bleu :  $\eta = 0.25$



**Figure 4.32.** : Solution  $2-T$  périodique avec 1 impact par période, à  $f_{E_1} = 1850 \text{ Hz}$ . Amortissement pour  $\eta = 0.25$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.33.** : Solution chaotique pour  $f_{E_1} = 1850 \text{ Hz}$ . Amortissement pour  $\eta = 0.25$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.

#### 4.5.1.2. Réponses dynamiques induites par les excitations internes et externes

Les deux différents cas d'acyclisme envisagés sont listés dans le Tableau 4.3. Les amplitudes des efforts extérieurs  $\chi_c^{(i,m)}$  et  $\chi_s^{(i,m)}$  sont également normées par la valeur  $\bar{E}_m$ .

	$\frac{\chi_c^{(1,1)}}{\bar{E}_1}$	$\frac{\chi_s^{(1,1)}}{\bar{E}_1}$	$\frac{\chi_c^{(1,2)}}{\bar{E}_2}$	$\frac{\chi_s^{(1,2)}}{\bar{E}_2}$
1) Acyclisme modéré	0.20	0.17	0.23	0.16
2) Acyclisme fort	0.20	0.17	0.92	0.50

**Tableau 4.3.** : Différents cas d'acyclisme considérés pour la cascade 84-73-56.

Les termes relatifs à l'acyclisme n'étant plus négligés, le paramètre de continuation doit être redéfini. Il y a 3 fréquences excitatrices, la fréquence d'engrènement (haute fréquence) et les deux fréquences de rotation (basses fréquences). La fréquence de rotation du pignon 56 est donnée par :

$$f_3 = \frac{84}{56}f_1 = \frac{3}{2}f_1 \quad (4.75)$$

Par ailleurs, le moteur thermique considéré possède 6 cylindres, de sorte que le contenu spectral de l'excitation associée à l'acyclisme est dominé par les raies multiples de 3 fois la fréquence de rotation, soit  $f_{acy,q} = 3 \cdot f_q$ .

$$\begin{aligned} f_{E_1} &= 84f_1 = 56 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot f_1 \\ f_{acy,1} &= 3f_1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot f_1 \\ f_{acy,2} &= 3f_3 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot f_1 \end{aligned} \quad (4.76)$$

La discrétisation d'une période du signal est fixée par la plus grande période considérée. En présence de chocs, le pas de discrétisation minimal est difficile à estimer. Le nombre de points choisis pour une période totale du système doit être très élevé, et peut donc invalider la possibilité d'appliquer les méthodes de continuation (temps de calcul prohibitif). Par ailleurs, l'étude de la stabilité requiert une intégration temporelle particulièrement coûteuse en temps. Aussi, les résultats discutant la stabilité des solutions ne sont pas présentés.

Dans un premier temps, les deux fréquences d'excitations sont supposées égales, i.e.  $f_{acy,1} = f_{acy,2} = 3f_1$ , afin de faciliter la mise en oeuvre des techniques de continuation. Le paramètre de continuation est alors  $\lambda = 3\frac{\omega_1}{\omega_c}$ , ce qui permet de réduire considérablement la taille du système.

La Figure 4.34 présente les enveloppes des valeurs extrémales de la solution 1-T périodique pour les 3 cas d'acyclisme présentés dans le Tableau 4.3.

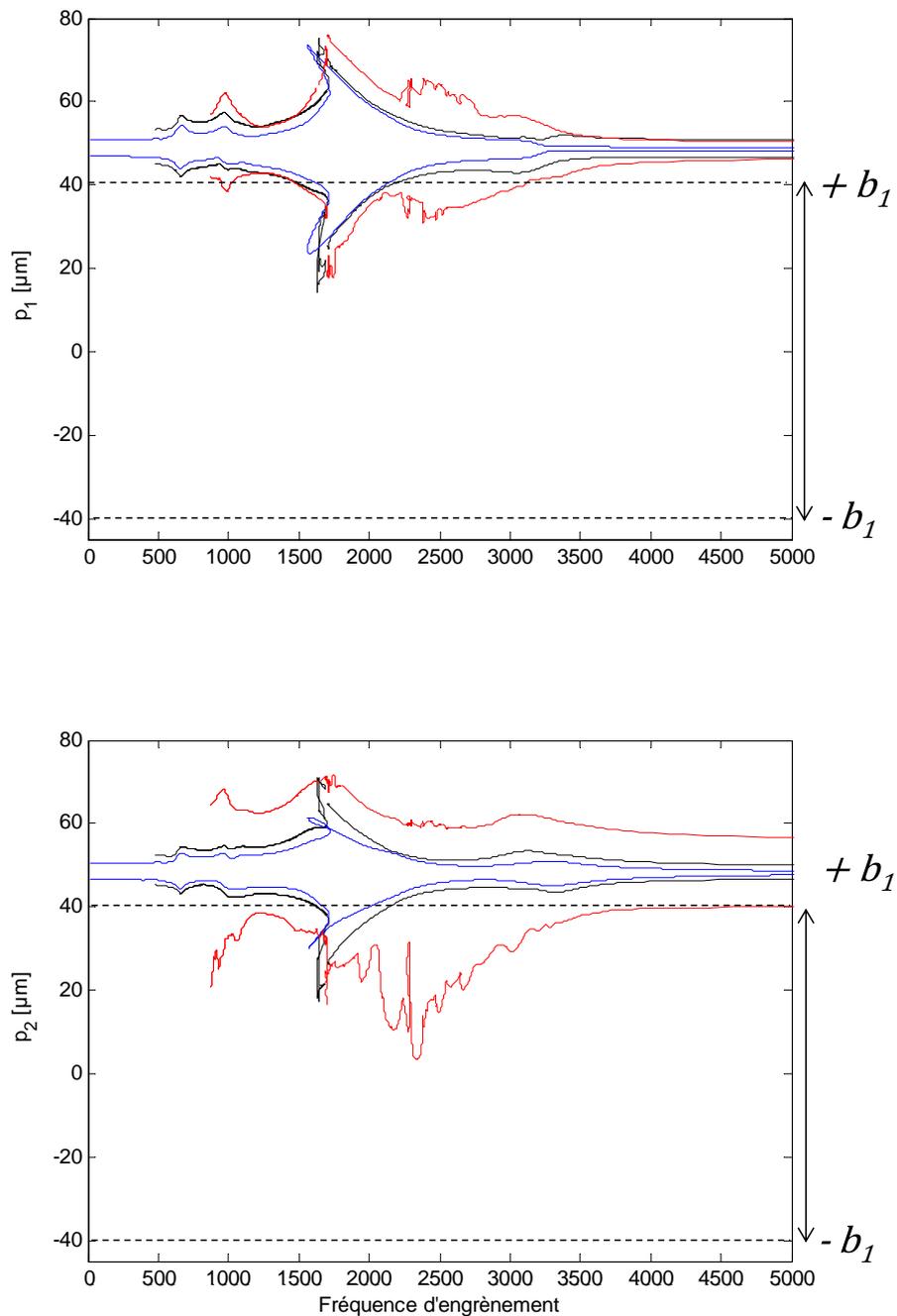
Un acyclisme modéré (Cas 1, courbe noire sur la Figure 4.34) augmente l'amplitude de la réponse et complexifie le comportement autour de la résonance principale. On observe une perte de contact uniquement dans cette région. L'acyclisme fort (Cas 2 courbe rouge sur la Figure 4.34) entraîne une perte de contact généralisée pour l'engrènement 56/73 sur la plage de fréquences considérée. En effet, l'acyclisme le plus élevé (de l'ordre de l'écrasement statique moyen) est appliqué sur l'engrènement 56/73. On note que le maximum d'amplitude ne se situe pas autour de la résonance principale mais autour de  $f_{E_1} = 2400 \text{ Hz}$ . Les techniques de continuation échouent en-dessous de 800 Hz. Cela peut être dû à l'apparition de chaos ou bien à une discrétisation insuffisante.

On considère maintenant les excitations à leur fréquence réelle (telle que définies par (4.76) en choisissant  $\lambda = \frac{3}{2} \frac{\omega_1}{\omega_c}$ ). La Figure 4.35 présente les enveloppes des valeurs extrémales de la solution 1-T périodique pour les 2 cas d'acyclisme et pour un acyclisme nul. Les amplitudes sont sensiblement supérieures au cas où l'on considère les fréquences d'excitations égales (cf. Figure 4.34). L'utilisation de méthode de continuation s'avère compliquée car le système nécessite plus de points pour la description de la plus petite période. La discrétisation du système ne permet pas d'aller en-dessous de 1600 Hz pour un cas d'acyclisme modéré et en-dessous de 3500 Hz pour un cas d'acyclisme fort.

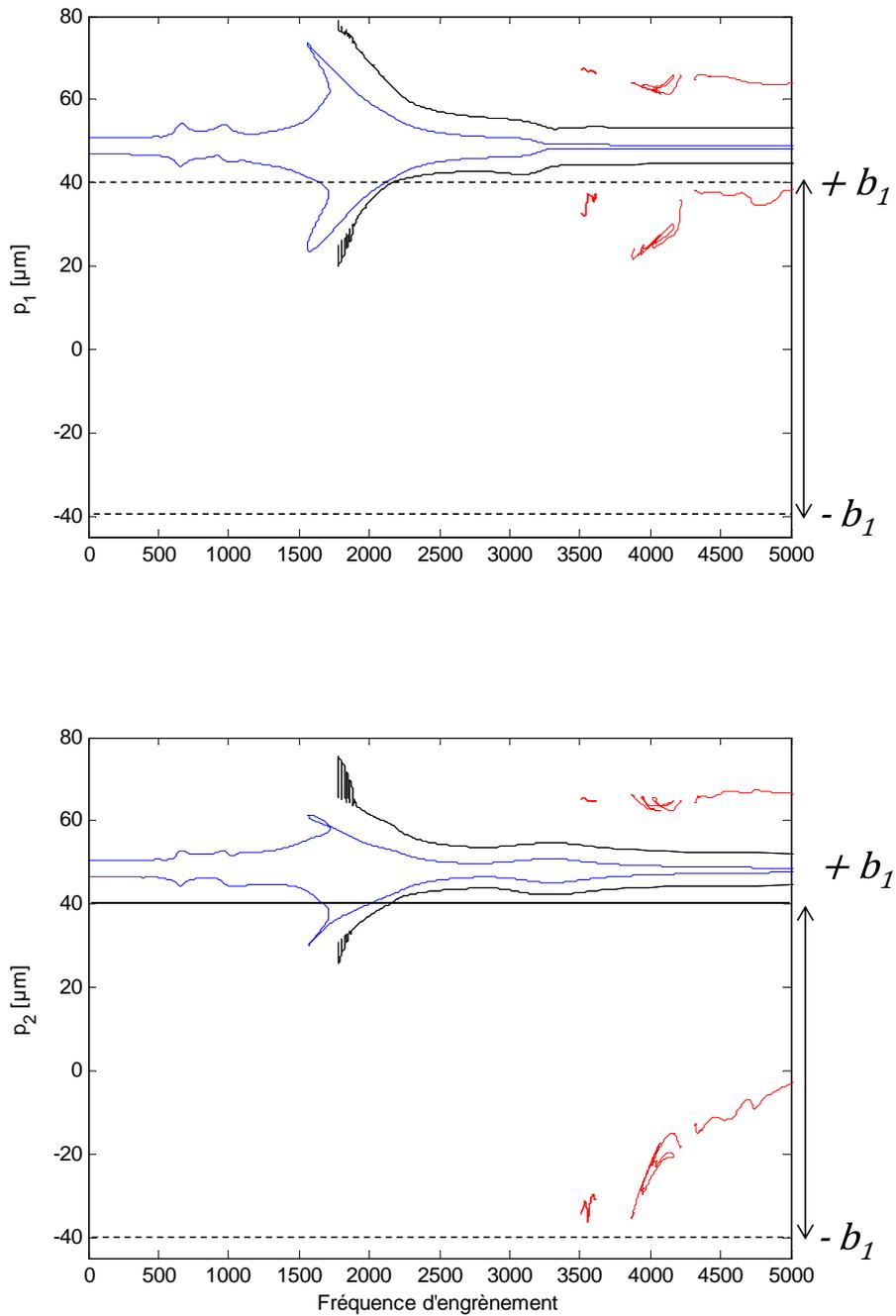
On étudie maintenant les réponses dynamiques à différentes fréquences d'engrènement. On distinguera d'une part, les figures présentant les erreurs dynamiques de transmission  $p_1$  et  $p_2$  des engrènements 84/73 et 56/73. Pour chaque figure, les sous-figures (a), (b), (c) et (d) correspondent respectivement à la réponse temporelle (avec seuil de contact en trait pointillé), au spectre d'amplitudes, (par abus de langage) au plan de phase et à la section de Poincaré. D'autre part, les figures présentant l'évolution temporelle de deux réponses pour des conditions initiales peu différentes. Cela permet de se prononcer sur le caractère chaotique de la réponse. En effet, une des propriétés du chaos est la sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, on initie deux réponses avec un écart  $\epsilon$  sur une des conditions initiales  $p_{0,m}$  (le choix de la condition initiale perturbée n'est pas important) et l'on trace l'écart  $r_p = |p_1(\tau, p_{0,1}) - p_1(\tau, p_{0,1} + \epsilon)|$  entre les deux solutions. Si l'écart entre les réponses est décroissant, la solution est périodique, sinon elle est chaotique.

Pour  $f_{E_1} = 10 \text{ Hz}$ , la Figure 4.36 montre que pour les deux cas d'acyclisme, les solutions sont périodiques. On note par ailleurs l'effet de la détection du contact sur l'écart entre les réponses pour le cas d'acyclisme fort au niveau des pertes de contact.

Avec un acyclisme modéré, on observe une solution 1-T périodique sans impact (Figure 4.37). On remarque la convolution de la fréquence d'engrènement avec



**Figure 4.34.** : Valeurs extrêmes de la réponse dynamique pour les différents cas d'acyclisme avec  $f_{acy,1} = f_{acy,2} = 3f_1$ .  
 En bleu : sans acycclisme.  
 En noir : acycclisme modéré.  
 En rouge : acycclisme fort.



**Figure 4.35.** : Valeurs extrêmes de la réponse dynamique pour les différents cas d'acyclisme.  
 En bleu : sans acycclisme.  
 En noir : acycclisme modéré.  
 En rouge : acycclisme fort.

les fréquences de l'acyclisme sur les spectres d'amplitudes qui se traduit par des modulations d'amplitudes de la réponse temporelle. Les raies liées à la fréquence d'engrènement et à ses multiples sont flanquées de raies latérales aux fréquences  $nf_{E_1} \pm k \cdot f_{acy,q}$ ,  $k = 1, 2$  et  $n = 1..N_e$ . On observe les 3 oscillations basses fréquences associées à l'acyclisme sur une période totale de la réponse. Les amplitudes des fréquences associées aux acyclismes sont les plus importantes.

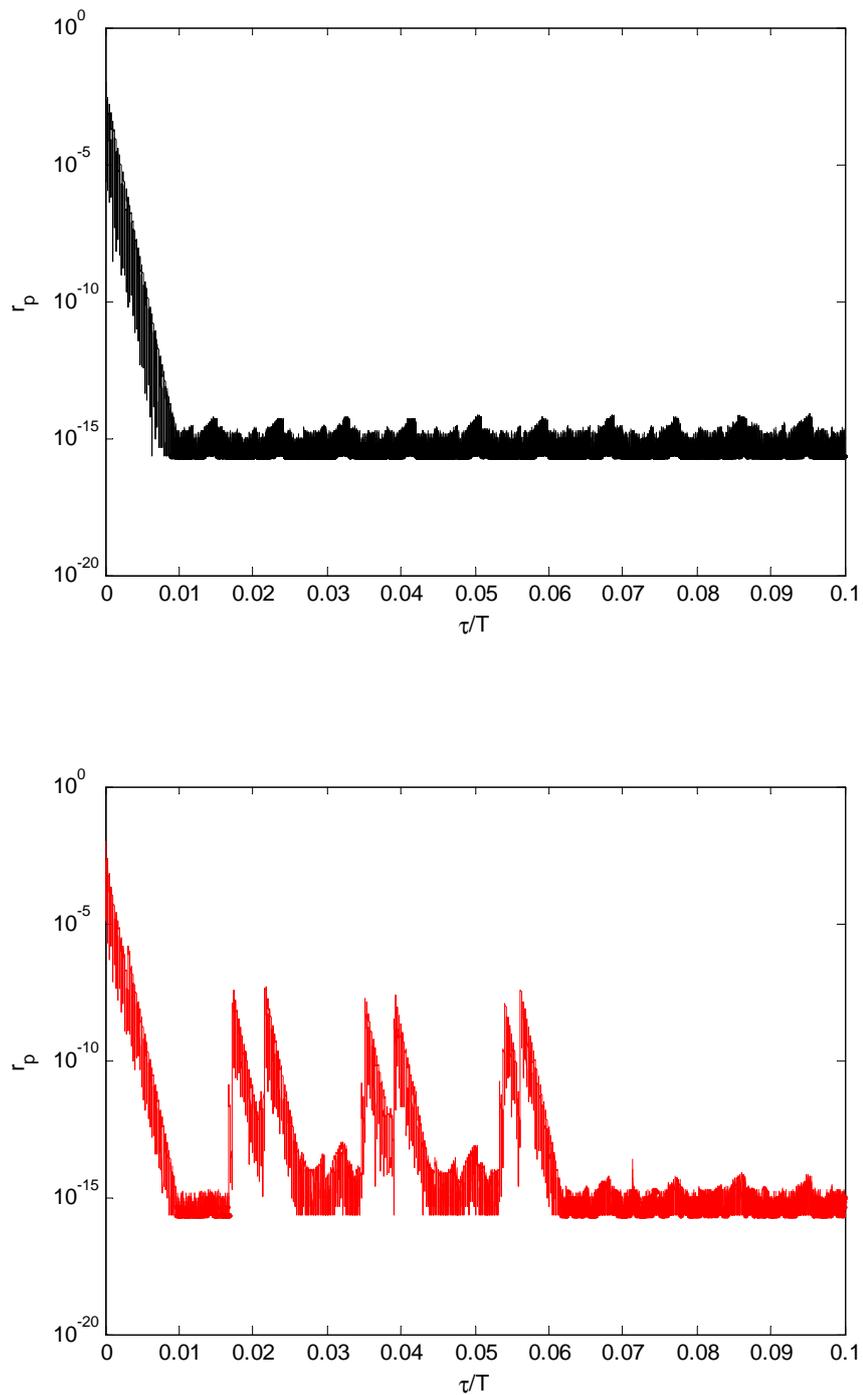
Avec un acyclisme fort, la réponse est 1-T périodique avec pertes de contact à lieu. Ces dernières occasionnent des chocs violents (vitesse d'impact élevée). On constate que le jeu est franchi pour les deux engrènements (chocs entre les flancs rétros). L'apparition de chocs enrichit le spectre des réponses sans pour autant que celles-ci perdent le caractère périodique. Pour la réponse de l'engrènement 84/73, on observe que toutes les fréquences autour des raies associées à la fréquence d'engrènement et à ses multiples sont présentes. Les raies liées à la convolution de la fréquence d'engrènement avec les fréquences d'acyclisme sont également observées. Pour l'engrènement 56/73, les chocs génèrent aussi des raies sur une large bande de fréquences. Cependant, l'allure du spectre est différente de celle du premier engrènement. Les amplitudes sont plus grandes car les chocs se produisent à chaque période d'acyclisme pour l'engrènement 56/73 (alors qu'ils ne se produisent que toutes les 3 périodes d'acyclisme pour l'autre engrènement). C'est d'ailleurs sur l'engrènement 56/73 que les excitations externes sont les plus élevées (voir Tableau 4.3). La Figure 4.38 présente la réponse temporelle des deux engrènements. Les zones encadrées sur la Figure 4.38 illustrent les impacts courts et les impacts longs évoqués. Par ailleurs, on constate que les chocs se produisant sur l'engrènement 56/73 génère une contribution sur la réponse de l'engrènement 84/73 et vice versa.

Pour  $f_{E_1} = 1000 \text{ Hz}$ , la Figure 4.39 montre que pour les deux cas d'acyclisme, les solutions sont périodiques.

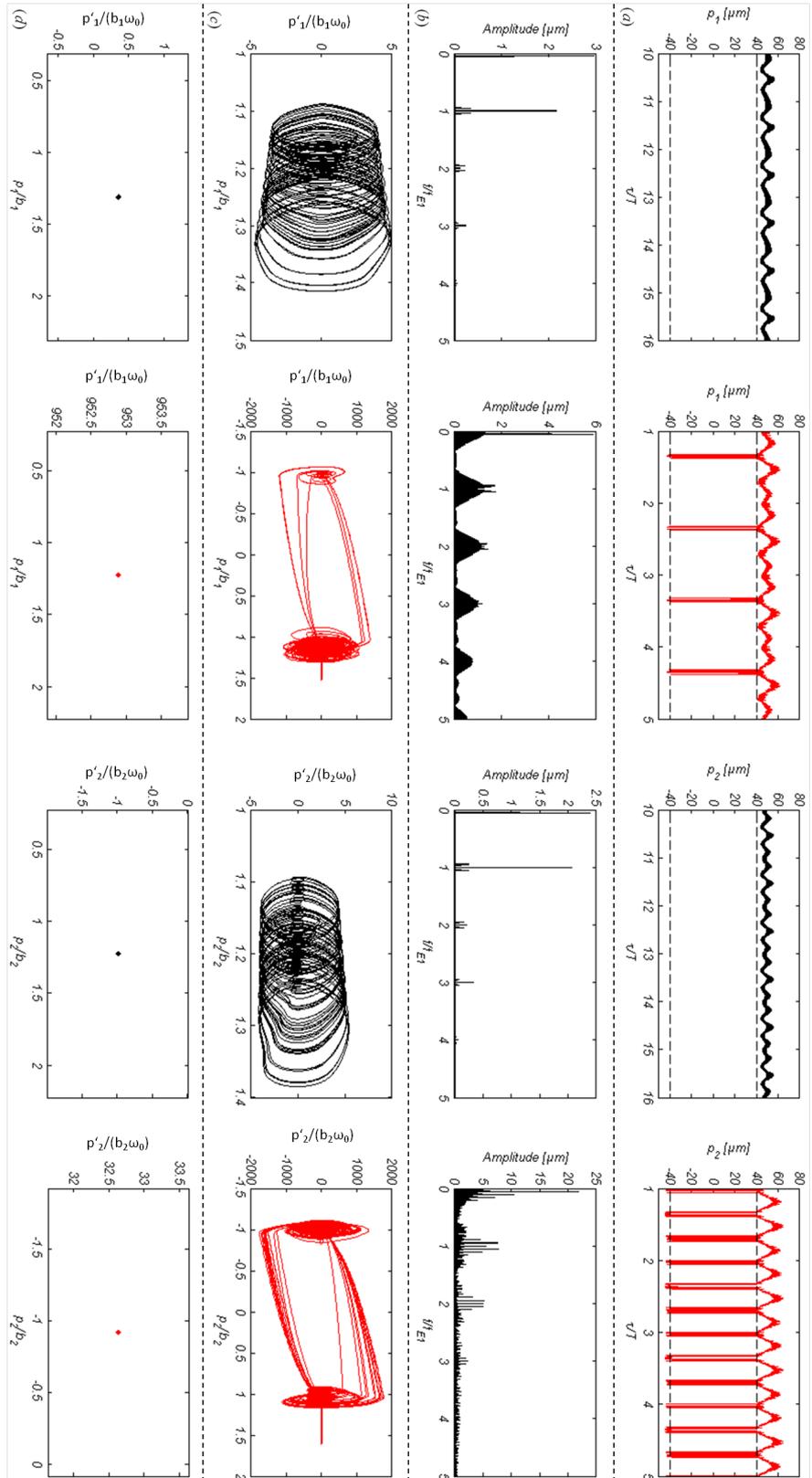
Avec un acyclisme modéré, on observe (Figure 4.40) une réponse 1-T périodique avec convolution entre la fréquence d'engrènement et les fréquences d'acyclisme, sans toutefois observer de perte de contact. Les raies latérales en  $nf_{E_1} \pm k \cdot f_{acy,q}$ ,  $k = 1, 2$  et  $n = 1..N_e$  sont visibles sur le spectre d'amplitudes. Les raies associées à l'acyclisme et à la fréquence d'engrènement sont de même ordre de grandeur.

Avec un acyclisme fort, la réponse n'est plus exactement 1-T périodique mais 3-T périodique. La Figure 4.41 permet de mieux observer cette périodicité. On observe que des pertes de contacts se produisent avec 2 impacts de fortes intensités par période pour l'engrènement 56/73. Ces impacts génèrent une perte de contact entraînant un choc entre les flancs actifs pour l'engrènement 84/73 (cf. Figure 4.41) sans pour autant que le jeu ne soit franchi. Le spectre de l'engrènement 84/73 est enrichi de nombreuses raies latérales autour des raies correspondant à la fréquence d'engrènement et à ses harmoniques. Pour l'engrènement 56/73, le spectre d'amplitudes est dominé par les raies associées aux fréquences d'acyclisme.

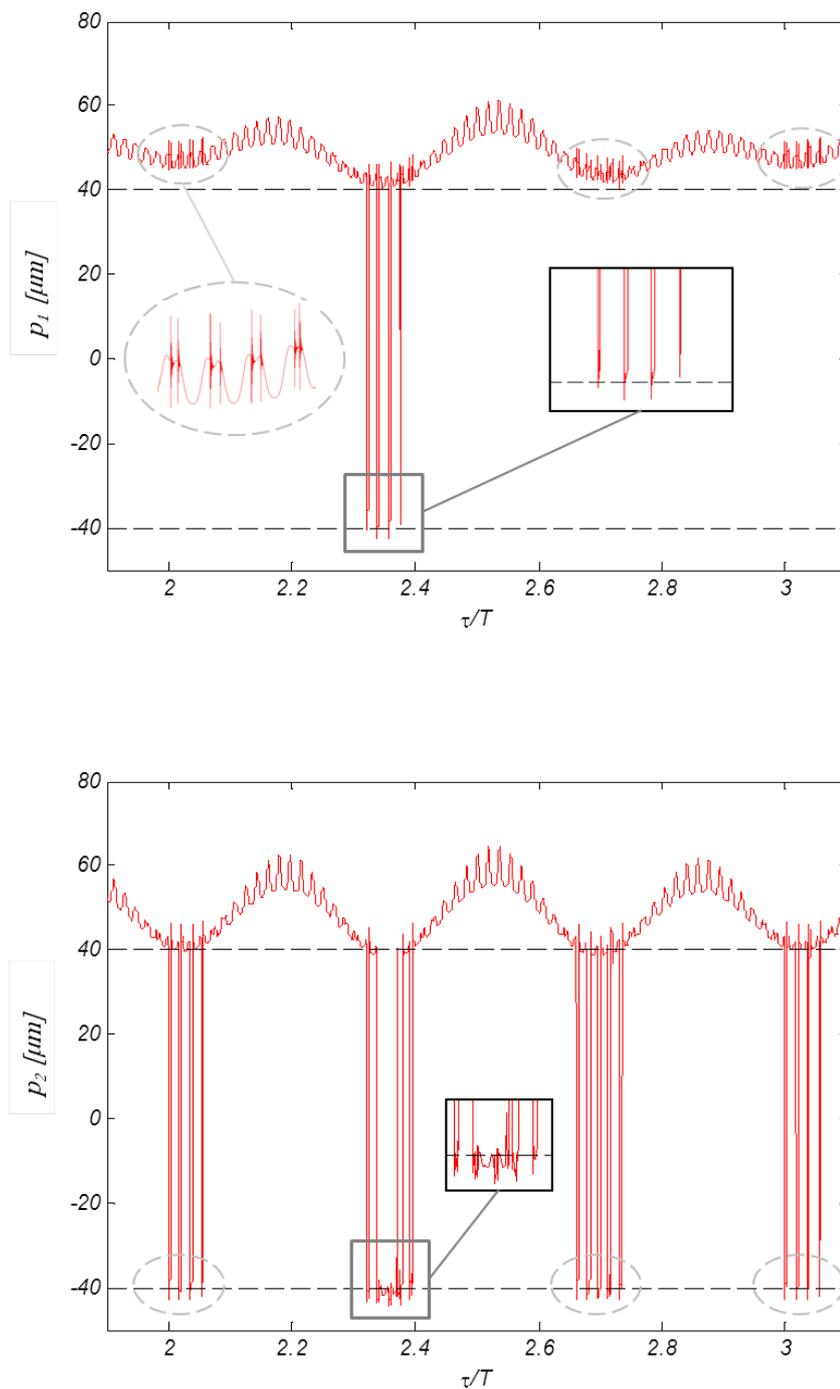
Pour  $f_{E_1} = 1750 \text{ Hz}$ , au niveau de la résonance paramétrique principale, la Figure 4.42 montre que pour les deux cas d'acyclisme, les solutions sont chaotiques. Les



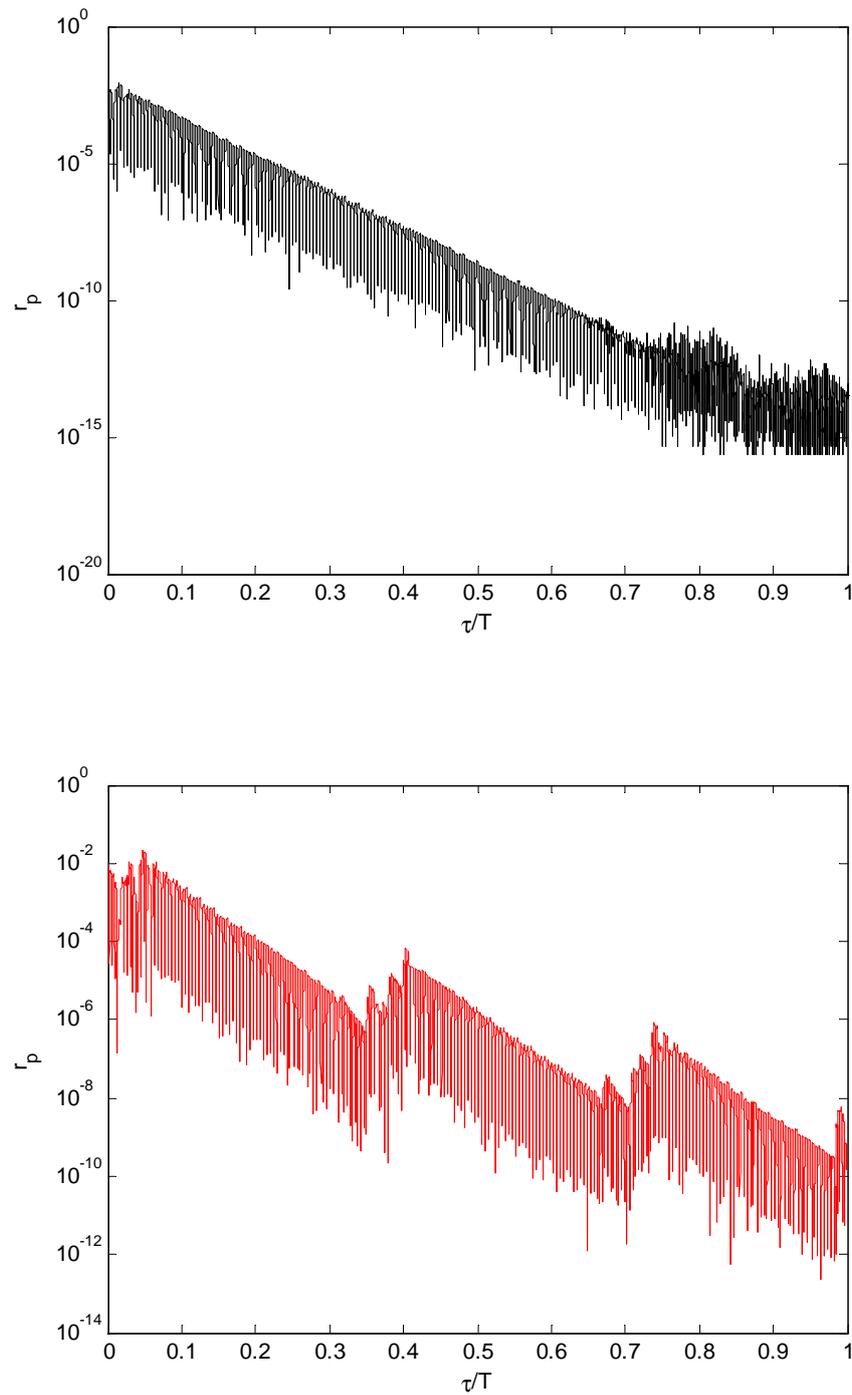
**Figure 4.36.** : Evolution temporelle de l'écart entre deux réponses avec des conditions initiales proches à  $f_{E_1} = 10 \text{ Hz}$ .



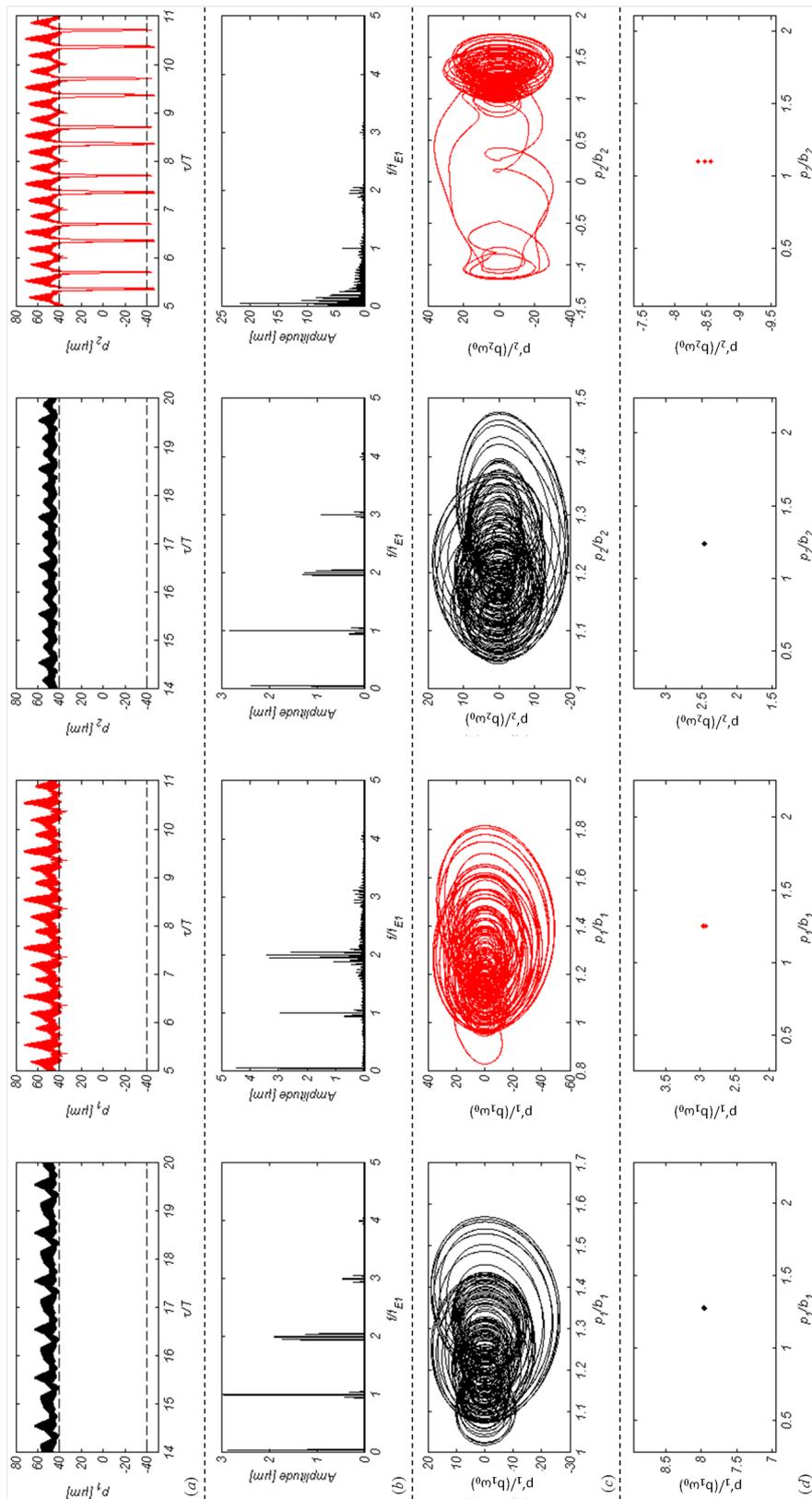
**Figure 4.37.** : Réponses dynamiques des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) pour les deux cas d'acyclisme à  $f_{E_1} = 10 Hz$ .  
 En noir : acyclisme modéré.  
 En rouge : acyclisme fort.



**Figure 4.38.** : Réponses dynamiques des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) à  $f_{E_1} = 10 \text{ Hz}$  pour un acyclisme fort.



**Figure 4.39.** : Evolution temporelle de l'écart entre deux réponses avec des conditions initiales proches à  $f_{E_1} = 1000 \text{ Hz}$ .

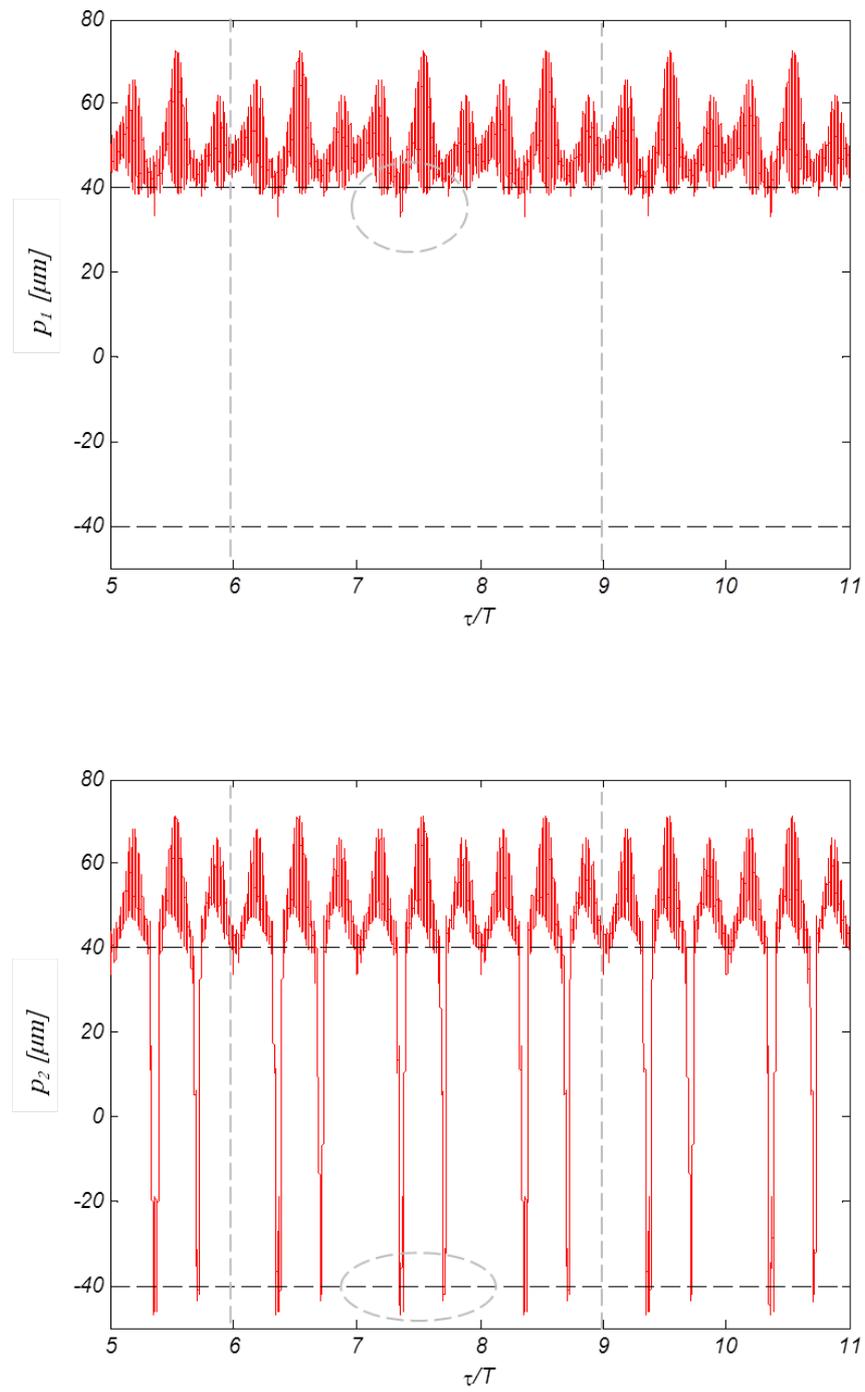


**Figure 4.40.** : Réponses dynamiques des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) pour les deux cas d'acyclisme à  $f_{E_1} = 1000 \text{ Hz}$ .

(a) Réponse temporelle, (b) spectre d'amplitudes, (c) plan de phase, (d) section de Poincaré.

En noir : acycclisme modéré.

En rouge : acycclisme fort.



**Figure 4.41.** : Réponses dynamiques 3-T périodiques des engrènements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) à  $f_{E_1} = 1000 \text{ Hz}$  pour un acyclisme fort.

excitations internes seules jouent un rôle important dans les pertes de contact observée Figure 4.43. En effet, chaque oscillation associée à la fréquence d'engrènement conduit à une perte de contact.

Avec un acyclisme modéré, les sections de Poincaré suggèrent des solutions “périodiques faiblement bruités”. Les spectres d'amplitudes de la réponse avec un acyclisme modéré montrent des modulations autour de la fréquence d'engrènement et ses harmoniques, avec une présence de la raie à  $\frac{1}{2}f_{E_1}$  plus marquée pour l'engrènement 56/73 que pour l'engrènement 84/73. Pour les deux engrènements, le spectre d'amplitudes est dominé par la raie à la fréquence d'engrènement.

Avec un acyclisme fort, le caractère chaotique est mis en évidence Figure 4.44. Le spectre d'amplitudes de l'engrènement 84/73 est principalement marqué par la fréquence d'engrènement et ses raies latérales. Pour l'engrènement 56/73, on observe un double choc (cf. zone encadrée Figure 4.44) entre les flancs rétros par période fondamentale. Le spectre est essentiellement dominé par les raies à basses fréquences.

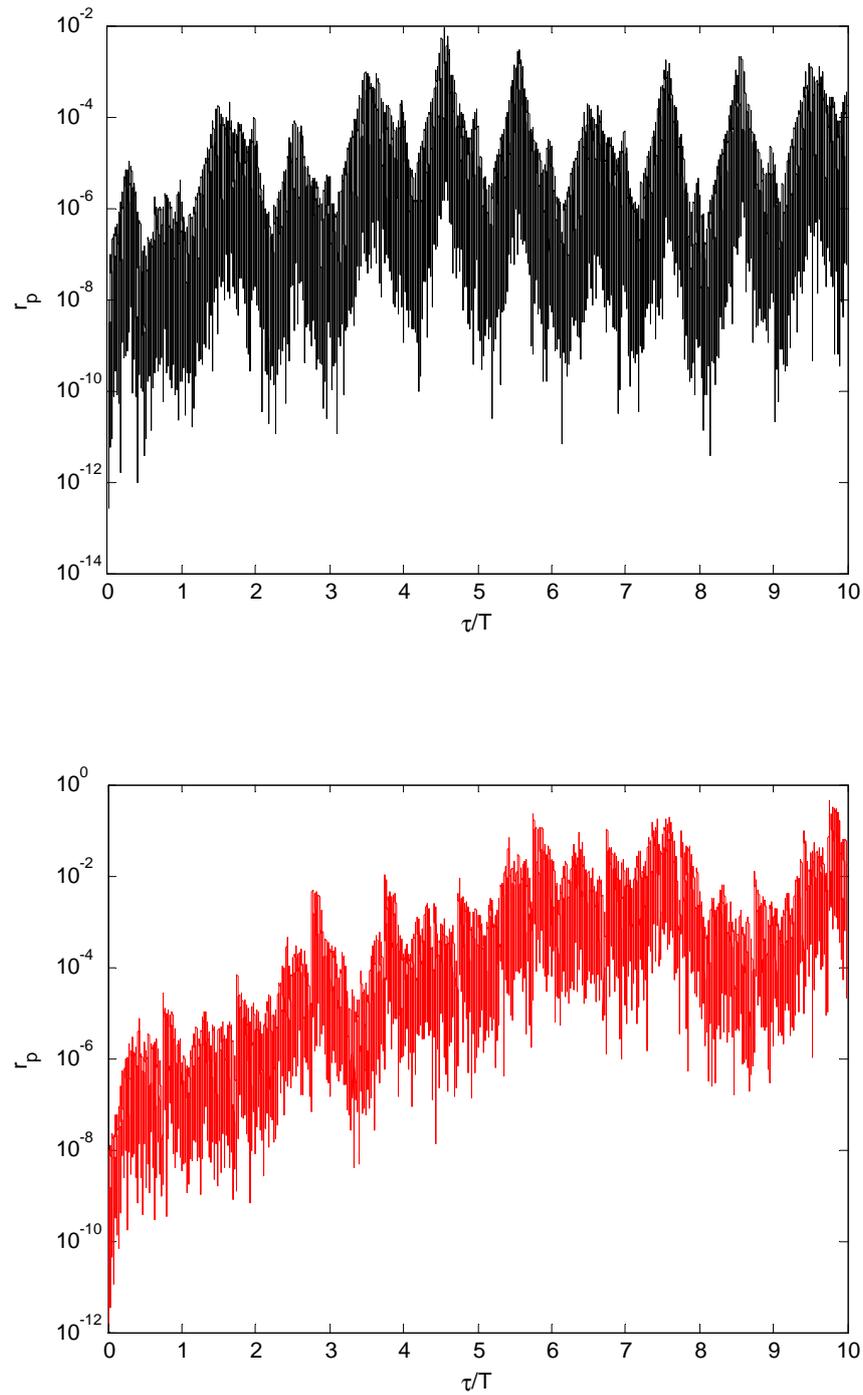
Pour  $f_{E_1} = 2400 \text{ Hz}$ , on observe une réponse 1-T périodique sans perte de contact pour un acyclisme modéré (voir Figures 4.45 et 4.46). On observe également la convolution de la fréquence d'engrènement avec les fréquences d'acyclisme et les raies latérales en  $n.f_{E_1} \pm k \cdot f_{acy,q}$ ,  $k = 1, 2$  et  $n = 1..N_e$  sont visibles sur le spectre d'amplitudes. On note que les amplitudes des excitations aux fréquences d'acyclisme sont moins élevées que celles associées à la fréquence d'engrènement.

Avec un acyclisme fort, des pertes de contact ont lieu, avec un impact entre les flancs rétros par période fondamentale pour l'engrènement 56/73. La Figure 4.45 nous indique que la réponse est chaotique. Cependant, les sections de Poincaré et la Figure 4.47 montrent que la réponse est peu différente d'une période sur l'autre et qu'on peut à nouveau parler de réponse “périodique faiblement bruitée”. Le spectre de l'erreur dynamique de l'engrènement 84/73 montre un contenu riche entre 0 et  $f_{E_1}$ . Pour l'engrènement 56/73 le spectre est dominé par les basses fréquences.

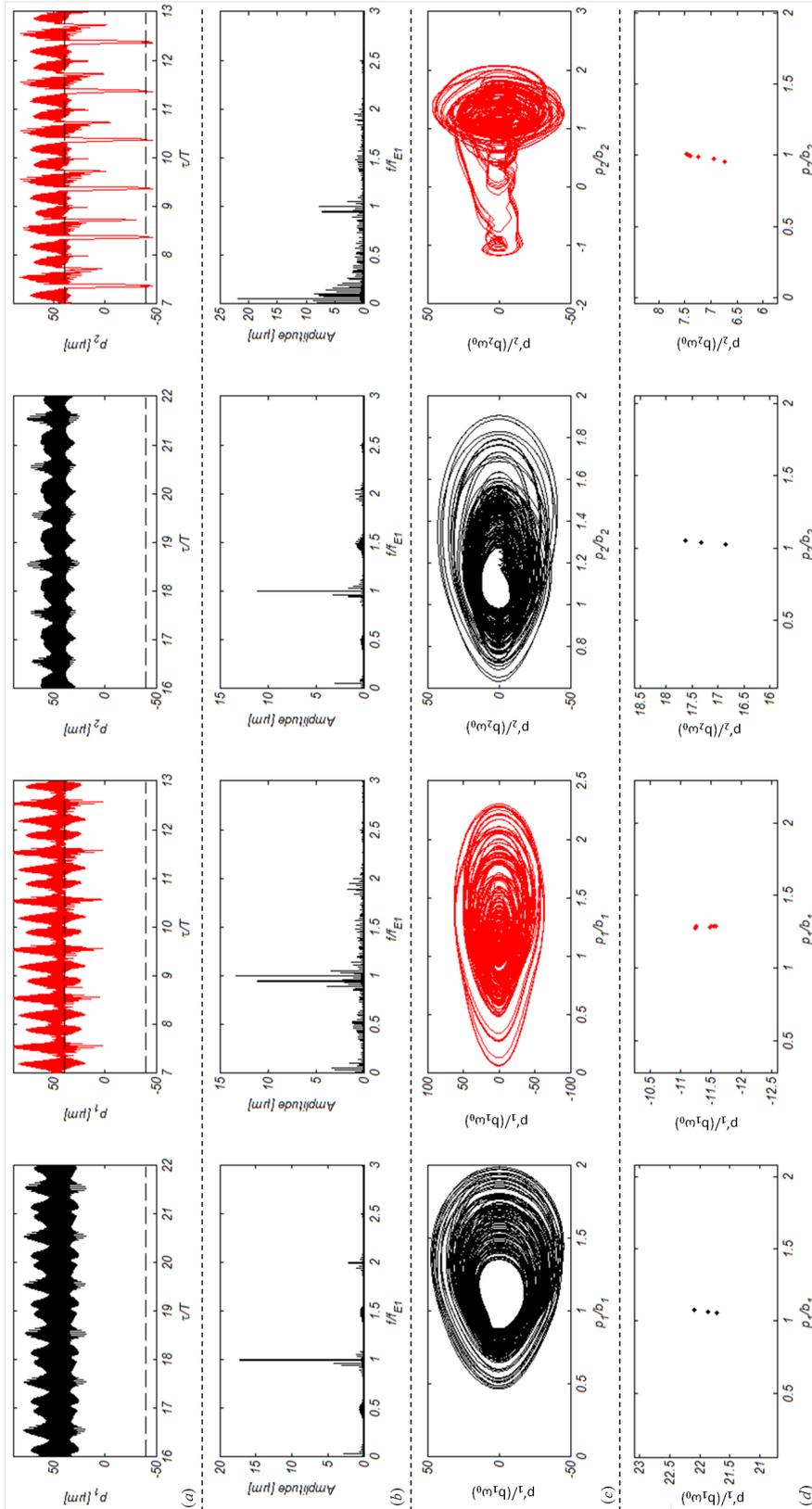
Pour  $f_{E_1} = 4000 \text{ Hz}$ , on observe une réponse 1-T périodique sans perte de contact pour un acyclisme modéré (voir Figures 4.48 et 4.49). Les spectres des erreurs dynamiques de transmission sont dominés par les raies associées l'acyclisme. La présence de la raie à la fréquence d'engrènement est plus marquée pour l'engrènement 56/73 que pour l'engrènement 84/73.

Le cas d'acyclisme modéré génère une solution 1-T périodique et le cas d'acyclisme fort, une solution chaotique.

Avec un acyclisme fort, la réponse est chaotique comme le montre les Figures 4.48 et 4.50. Les pertes de contact peuvent conduire à des chocs entre les flancs rétros de l'engrènement 56/73. On peut également observer le décalage entre le moment où la perte de contact se produit sur l'engrènement 56/73 et l'effet du choc sur l'engrènement 84/73 (Figure 4.50).



**Figure 4.42.** : Evolution temporelle de l'écart entre deux réponses avec des conditions initiales proches à  $f_{E_1} = 1750 \text{ Hz}$ .

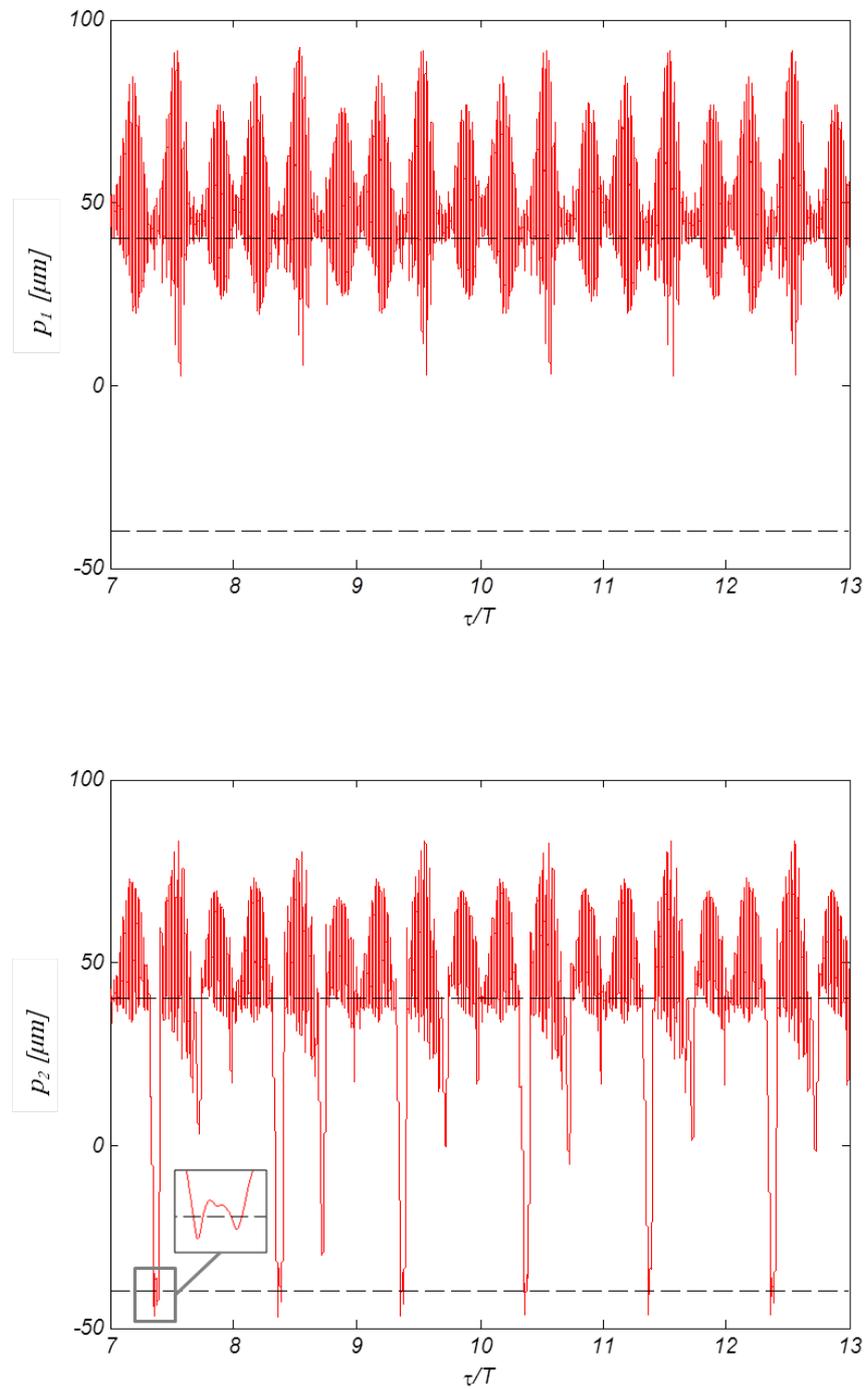


**Figure 4.43.** : Réponses dynamiques des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) pour les deux cas d'acyclisme à  $f_{E_1} = 1750 \text{ Hz}$ .

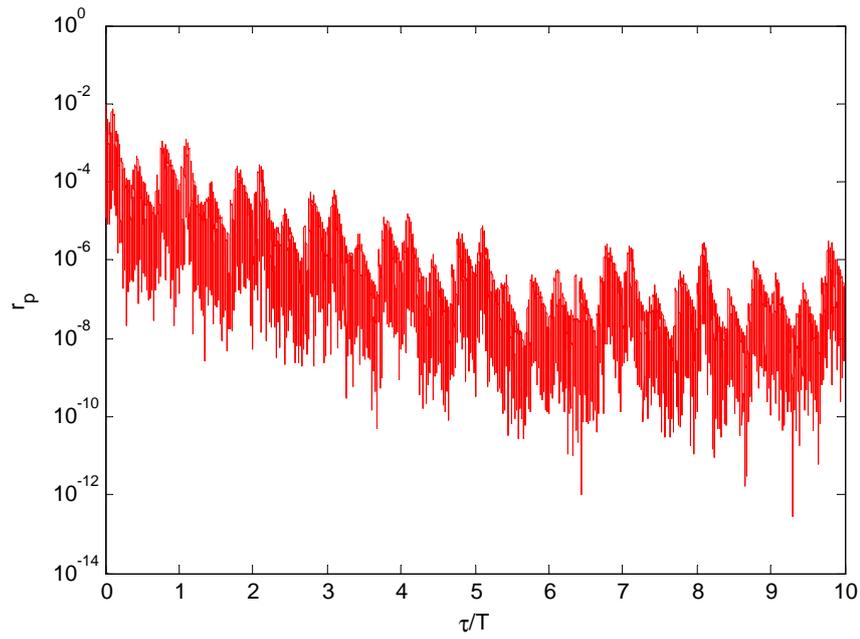
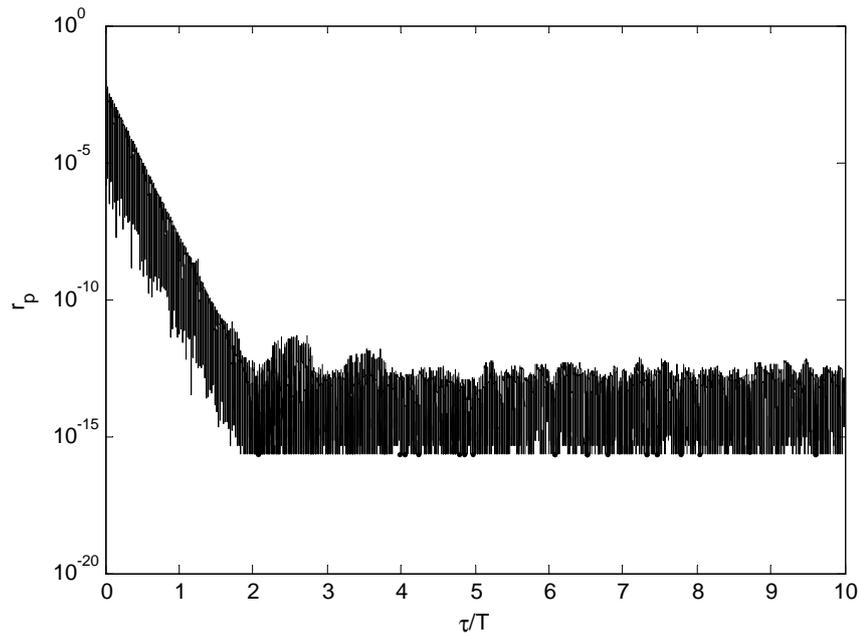
(a) Réponse temporelle, (b) spectre d'amplitudes, (c) plan de phase, (d) section de Poincaré.

En noir : acycclisme modéré.

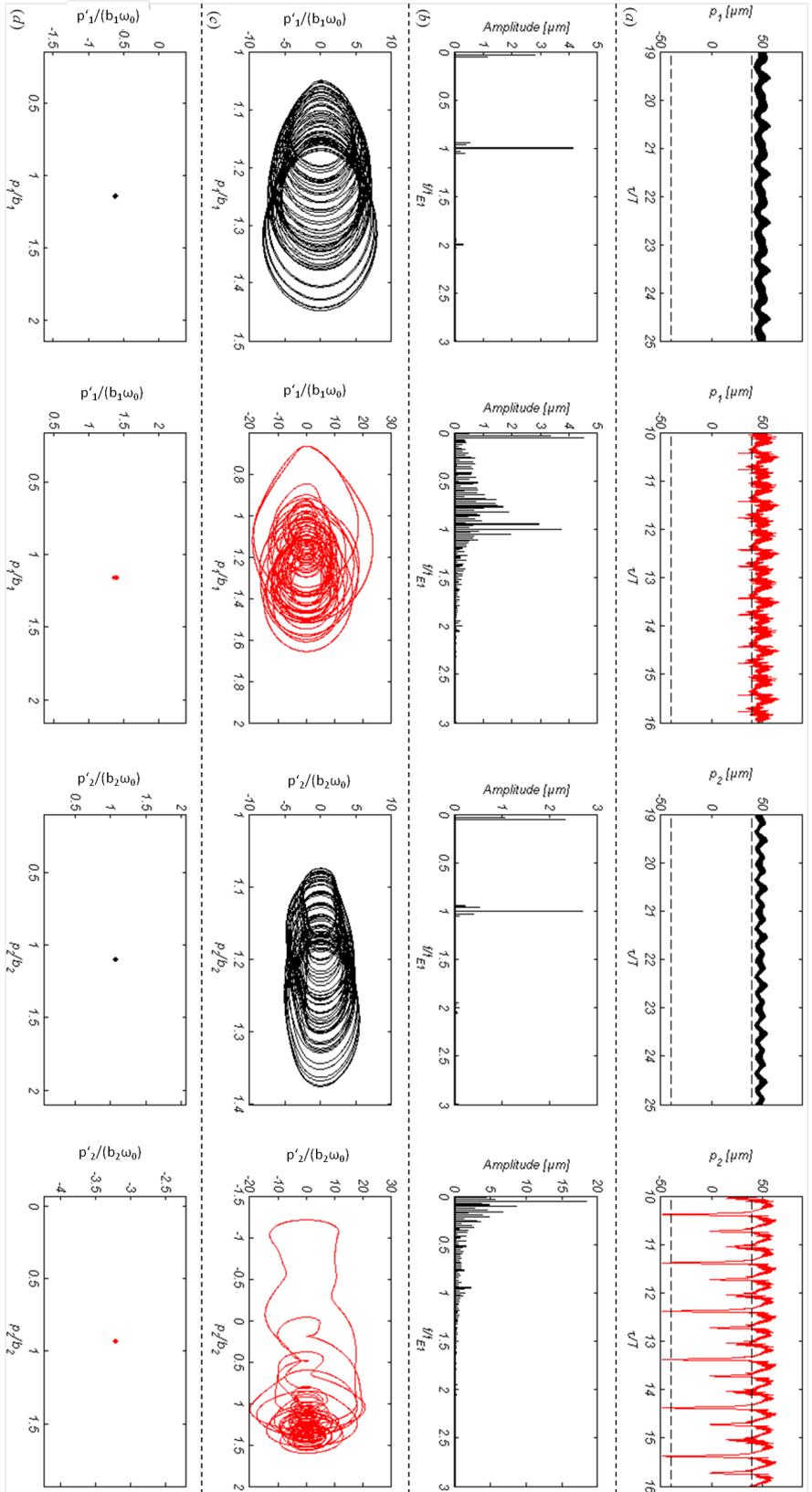
En rouge : acycclisme fort.



**Figure 4.44.** : Réponses chaotiques des engrèments 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) à  $f_{E_1} = 1750 \text{ Hz}$  pour un acyclisme fort.

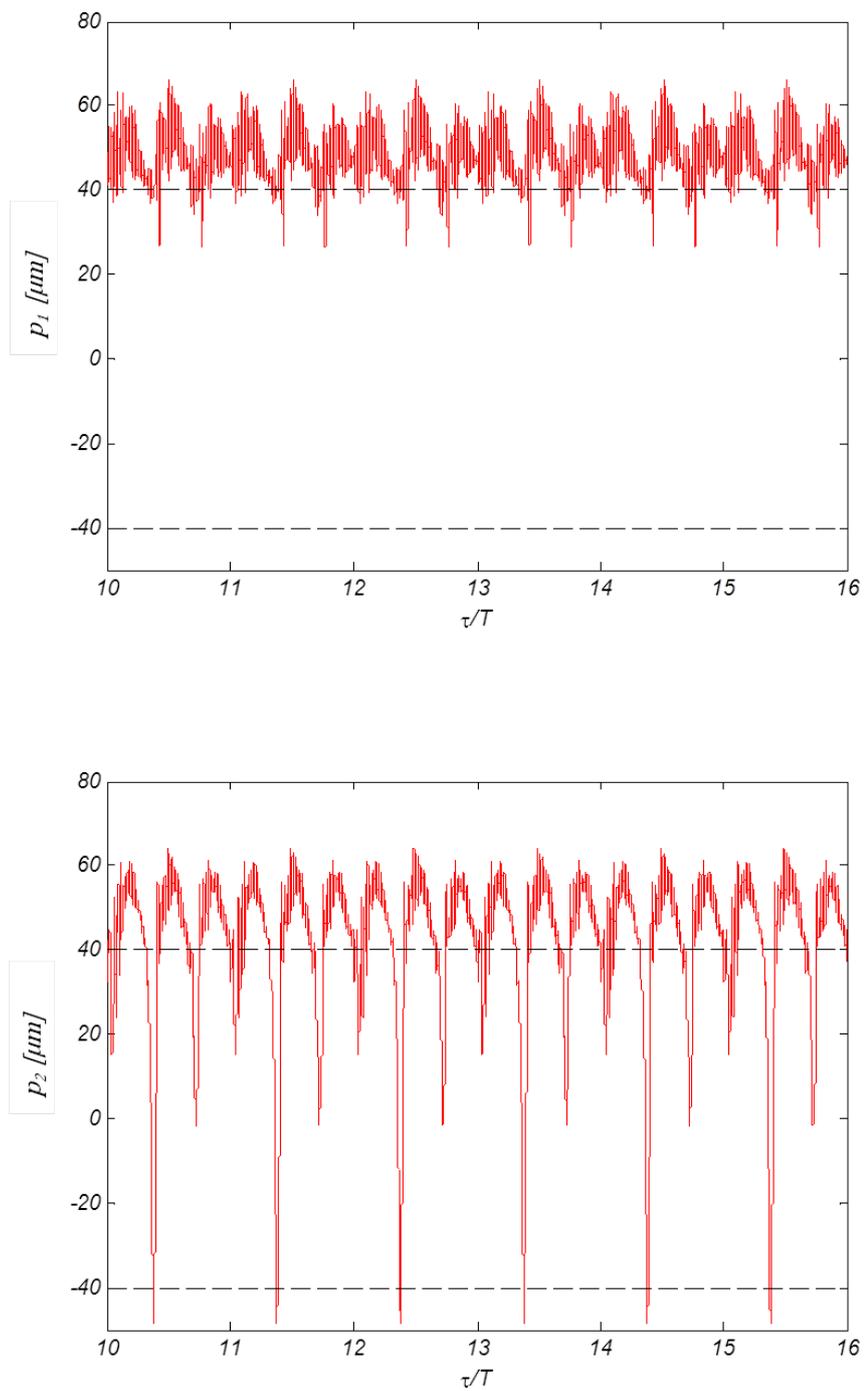


**Figure 4.45.** : Evolution temporelle de l'écart entre deux réponses avec des conditions initiales proches à  $f_{E_1} = 2400 \text{ Hz}$ .

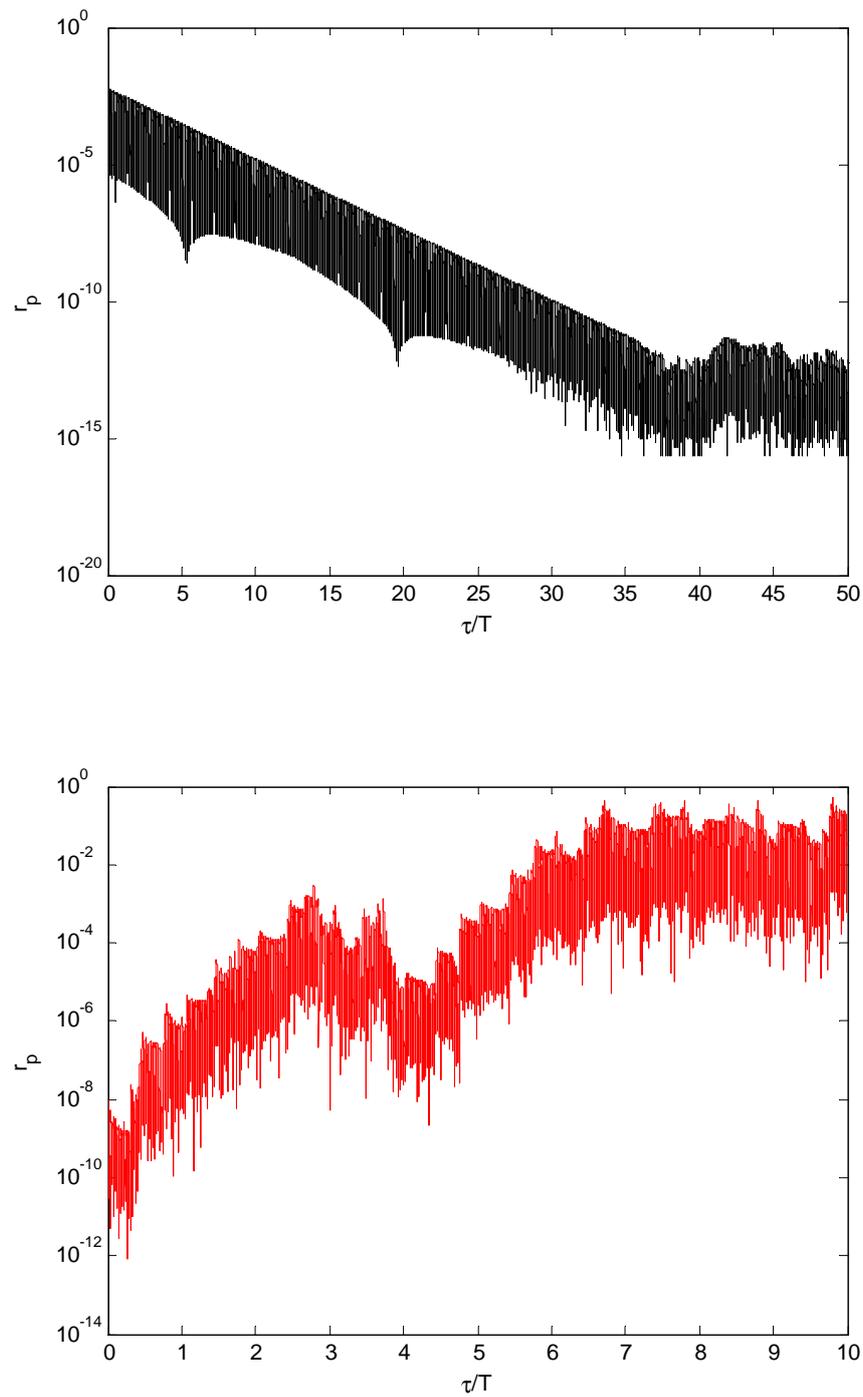


**Figure 4.46.** : Réponses dynamiques des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) pour les deux cas d'acyclisme à  $f_{E1} = 2400 \text{ Hz}$ .

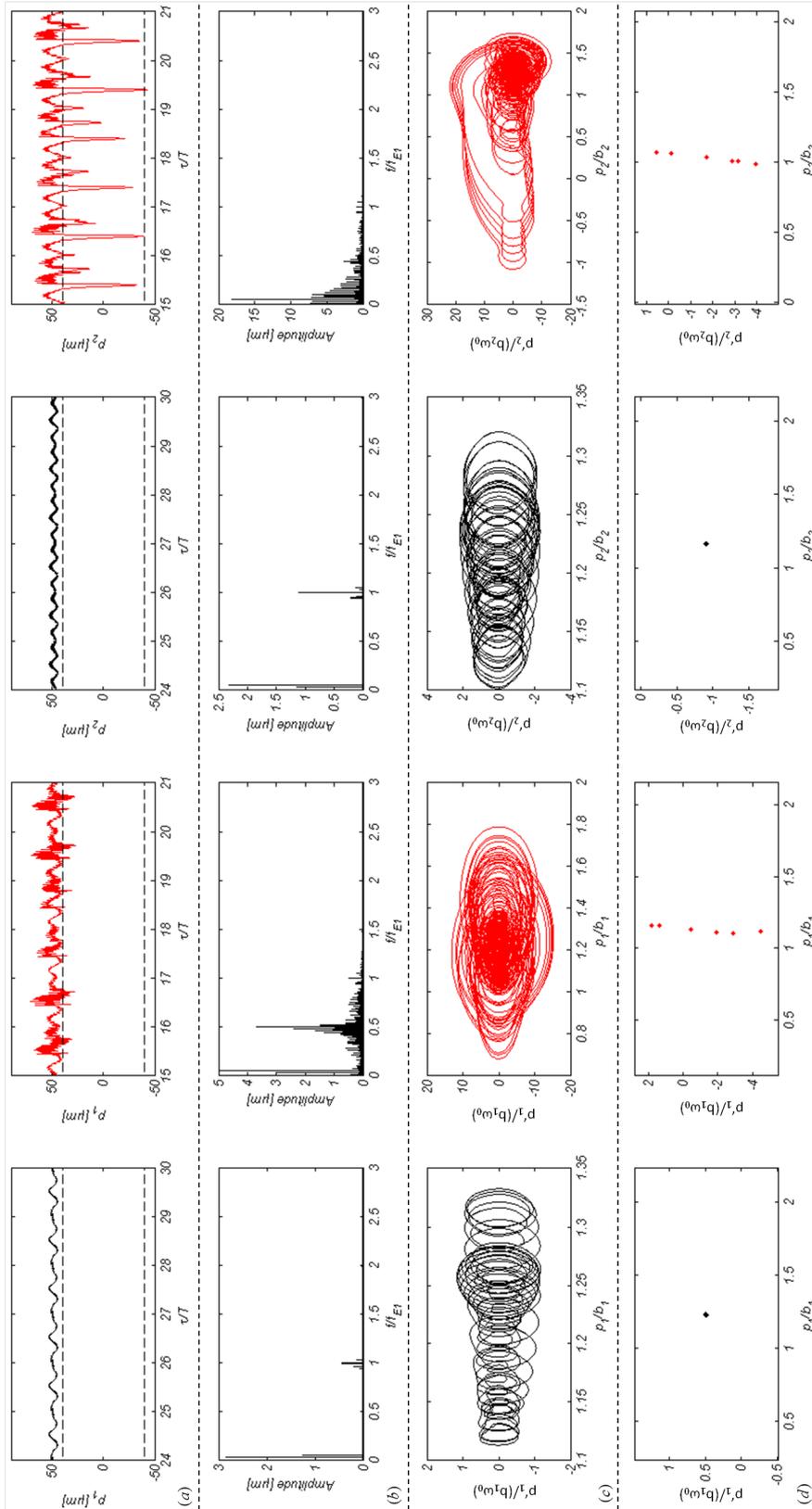
- (a) Réponse temporelle, (b) spectre d'amplitudes, (c) plan de phase, (d) section de Poincaré.
- En noir : acycclisme modéré.
- En rouge : acycclisme fort.



**Figure 4.47.** : Réponses chaotiques à  $f_{E_1} = 2400 \text{ Hz}$  des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) pour un acyclisme fort.



**Figure 4.48.** : Evolution temporelle de l'écart entre deux réponses avec des conditions initiales proches à  $f_{E_1} = 4000 \text{ Hz}$ .

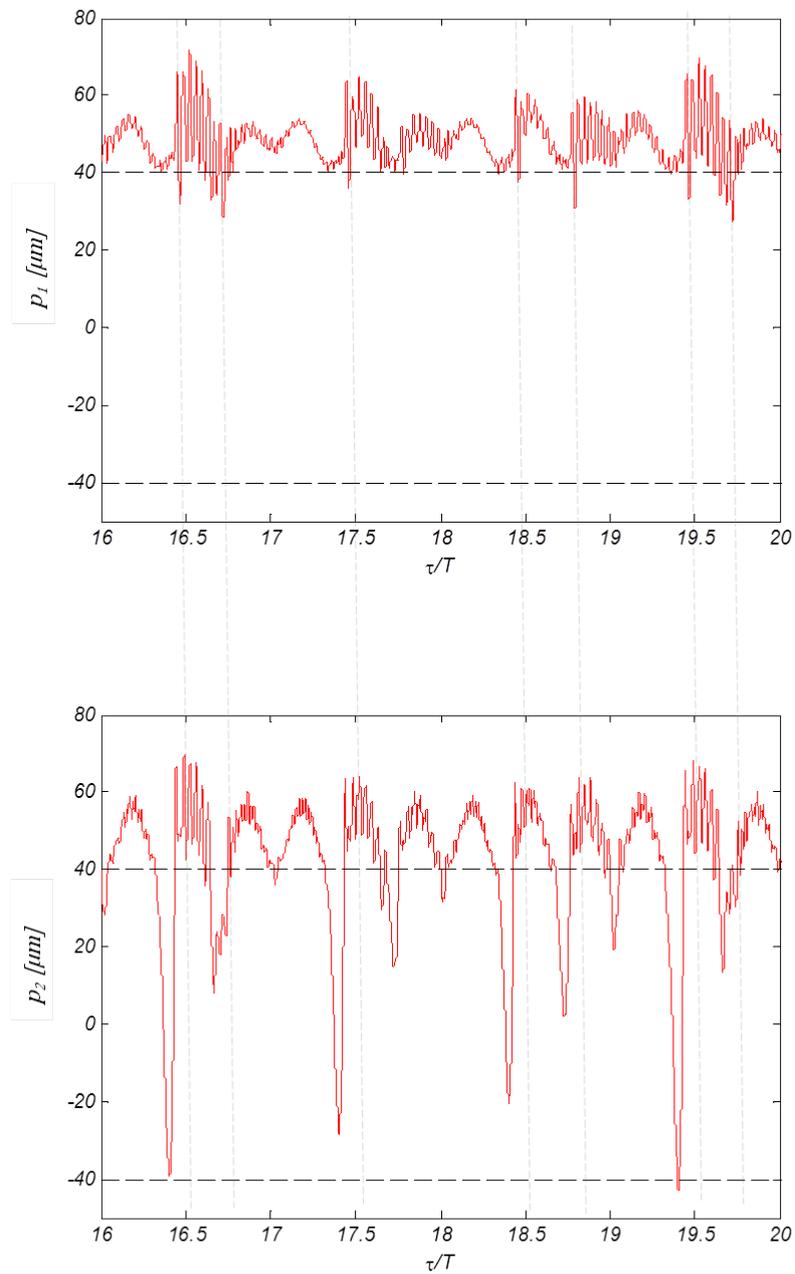


**Figure 4.49.** : Réponses dynamiques des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) pour les deux cas d'acyclisme à  $f_{E_1} = 4000 \text{ Hz}$ .

(a) Réponse temporelle, (b) spectre d'amplitudes, (c) plan de phase, (d) section de Poincaré.

En noir : acycclisme modéré.

En rouge : acycclisme fort.



**Figure 4.50.** : Réponses chaotiques à  $f_{E_1} = 4000 \text{ Hz}$  des engrenements 84/73 ( $p_1$ ) et 56/73 ( $p_2$ ) pour un acyclisme fort.

### 4.5.2. Cascades 84-73-56 et 54-72-50 couplées

Le modèle étudié obéit au système d'équations adimensionnées (4.33). Les fréquences propres (déterminées dans le chapitre 3) sont  $f_{p1} = 1180 \text{ Hz}$ ,  $f_{p2} = 1868 \text{ Hz}$ ,  $f_{p3} = 2739 \text{ Hz}$  et  $f_{p4} = 3099 \text{ Hz}$ . Le système est excité par deux fréquences d'engrènement, une pour chaque cascade, reliées par la relation  $9f_{E1} = 7f_{E2}$ . La plus petite fréquence commune s'écrit :

$$\begin{aligned} f_{E1} &= 84f_1 = 84f_1 = 7 \cdot (12) \cdot f_1 \\ f_{E2} &= 72f_2 = 108f_1 = 9 \cdot (12) \cdot f_1 \end{aligned}$$

Les fréquences d'excitation  $f_{rot,q}$  associées aux acyclismes sont exprimées en fonction de la fréquence de rotation du pignon moteur  $f_1$  :

$$\begin{aligned} f_{acy,1} &= 3f_1 &= 25 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \\ f_{acy,3} &= 3f_3 = 3\frac{72}{50}f_2 = 3\frac{72}{50}\frac{3}{2}f_1 = 54 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \\ f_{acy,4} &= 3f_4 = 3\frac{72}{54}f_2 = 3\frac{72}{54}\frac{3}{2}f_1 = 50 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \end{aligned} \quad (4.77)$$

La discrétisation du système requiert donc un nombre de points très élevé même en ne considérant que ces excitations externes. En effet, si l'on discrétise un sinus par 8 points, il faut  $8 \times 54 = 432$  points pour décrire une période de la réponse dynamique d'un engrènement, soit  $4 \cdot 432 = 1728$  points pour l'ensemble du système. Dans le cas où des excitations internes et externes sont considérées, la taille du système croît encore de manière considérable. En effet, la plus petite fréquence commune aux excitations s'obtient en considérant :

$$\begin{aligned} f_{E1} &= 84f_1 = 700 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \\ f_{E2} &= 108f_1 = 900 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \\ f_{acy,1} &= 3f_1 = 25 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \\ f_{acy,3} &= \frac{162}{25}f_1 = 54 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \\ f_{acy,4} &= 6f_1 = 50 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot f_1 \end{aligned} \quad (4.78)$$

#### 4.5.2.1. Réponses dynamiques induites par les excitations internes

La fréquence fondamentale reste suffisamment grande pour que ce système puisse être étudié par continuation lorsque seules les excitations internes sont prises en compte. Le paramètre de continuation est égal à  $\lambda = 12\frac{\omega_1}{\omega_c}$ . La Figure 4.51 présente les valeurs extrêmes des réponses des quatre engrènements. Sans surprise, les excitations étant nettement supérieures sur la première cascade ( $p_1$  et  $p_2$ ) seules ces deux engrènements sont le siège de pertes de contact. On relève des régimes de fonctionnement critiques similaires à ceux du modèle linéaire du chapitre 3, soit autour

de  $830 \text{ tr/min}$  et  $1950 \text{ tr/min}$ . Par ailleurs, bien qu'aucune perte de contact n'est générée pour la seconde cascade (54-72-50), on observe des résonances non-linéaires mollissantes associées aux pertes de contact des engrènements de la première cascade.

Les Figures 4.52 à 4.57 présentent les erreurs dynamiques de transmission  $p_2(t)$  et  $p_3(t)$  des engrènements 56/73 et 50/72 pour des régimes de fonctionnement proches des deux régimes critiques. Pour chaque figure, les parties (a), (b), (c) et (d) correspondent respectivement à la réponse temporelle (avec seuil de contact en trait pointillé), au spectre d'amplitudes, au plan de phase et à la section de Poincaré. Par ailleurs, l'existence de deux fréquences d'engrènement rend plus judicieux le choix fondamentale du système pour rendre sans dimension la fréquence de fonctionnement lors de la lecture des spectres d'amplitudes (l'ordre 7 ainsi sans dimension correspond alors à la fréquence d'engrènement de la cascade 84-73-56, et l'ordre 9 à celle de la cascade 54-72-50).

Pour  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ , la réponse est 1-T périodique et ne génère pas de perte de contact (Figures 4.52 et 4.53).

Pour l'engrènement 56/73 ( $p_2$ ), la Figure 4.52 montre des raies associées aux deux fréquences d'engrènement sont présentes, mais c'est le fondamental de la fréquence d'engrènement de la cascade 84-73-56  $f_{E_1}$  qui domine la réponse.

Pour l'engrènement 50/72 ( $p_3$ ), la Figure 4.53 montre que la réponse est dominée par le fondamental de la fréquence d'engrènement de la cascade 54-72-50  $f_{E_2}$ .

Cependant, dans les spectres des deux engrènements, des raies au deux fréquences d'engrènement sont observées, traduisant ainsi le couplages entre les cascades.

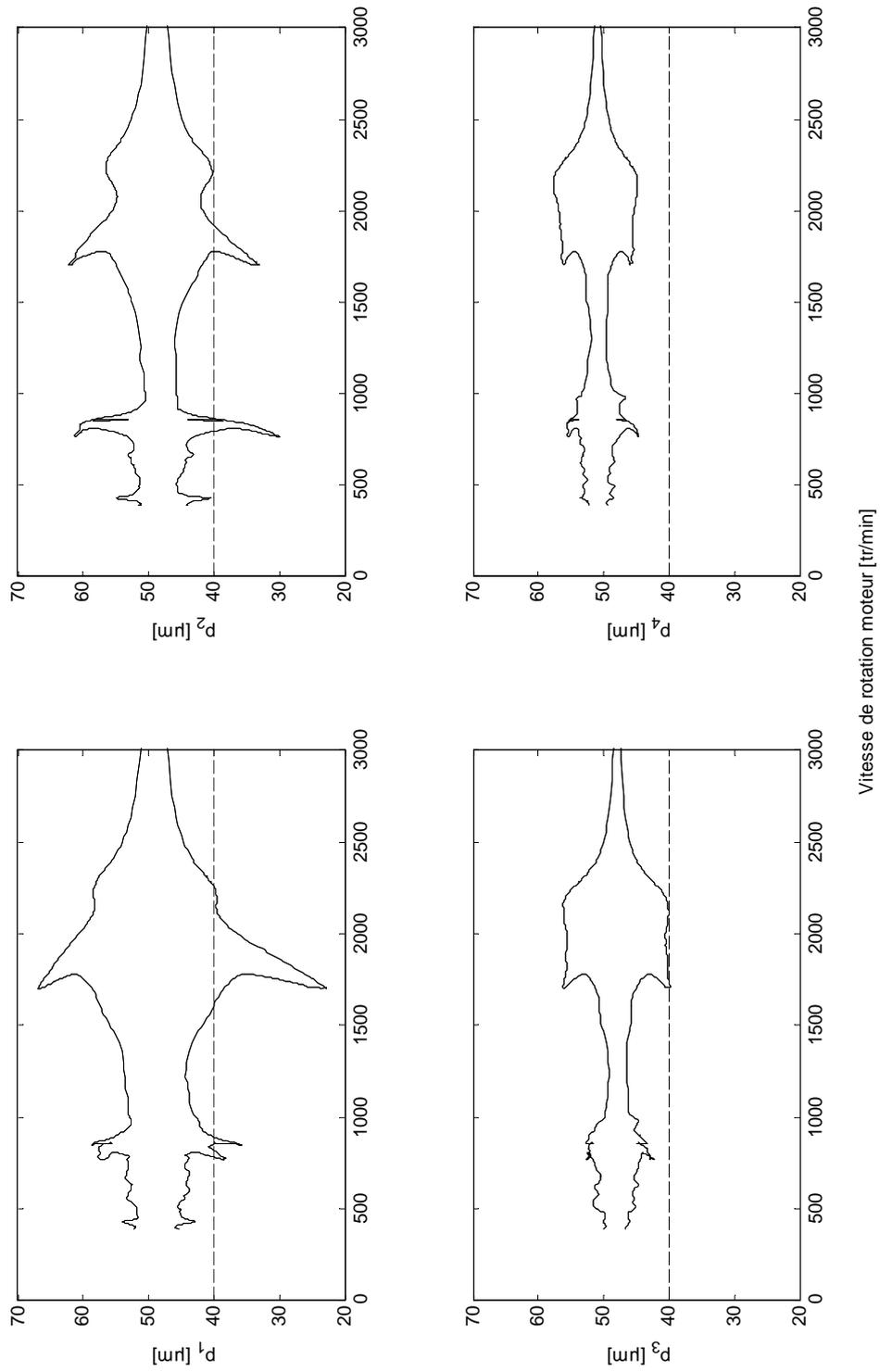
Pour  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ , la Figure 4.54 montre qu'une réponse 2-T périodique coexiste avec la 1-T périodique et génère 7 impacts par période pour l'engrènement 56/73 (ce qui correspond à 1 impact par période d'engrènement  $T_{E_1}$ ). L'amplitude de la réponse est élevée est dominée par l'ordre  $\frac{1}{2}f_{E_1}$ .

La réponse de l'engrènement 50/72 ne génère pas de perte de contact, et est de faible amplitude (voir Figure 4.55). Le spectre est constitué de plusieurs raies d'amplitudes de même ordre de grandeur associées aux deux fréquences d'engrènement et à leur harmoniques. On relève également une raie à  $f_{E_2} - f_{E_1}$  (ordre 2) de faible amplitude traduisant le couplage entre les excitations à ces deux fréquences.

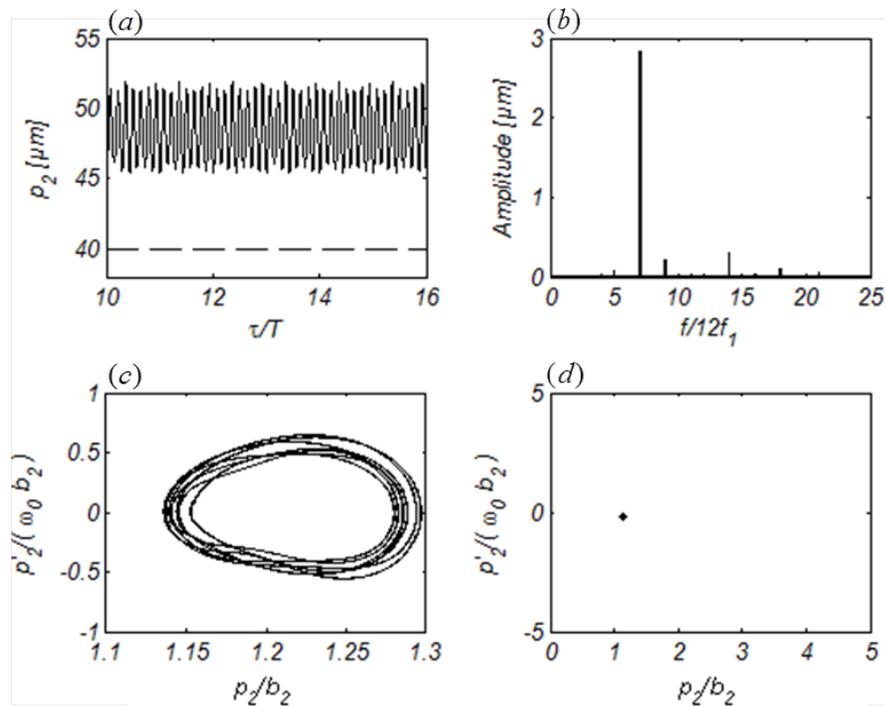
Pour  $\omega_1 = 1800 \text{ tr/min}$ , la réponse 1-T périodique ne génère pas de perte de contact.

Pour l'engrènement 56/73 ( $p_2$ ), des raies associées aux deux fréquences d'engrènement sont présentes, mais c'est la raie  $f_{E_1}$  qui domine la réponse (voir Figure 4.56).

Pour l'engrènement 70/72 ( $p_3$ ), la réponse est également dominée par la raie  $f_{E_1}$ . La raie  $f_{E_2}$  et son premier harmonique sont aussi présentes (voir Figure 4.57).

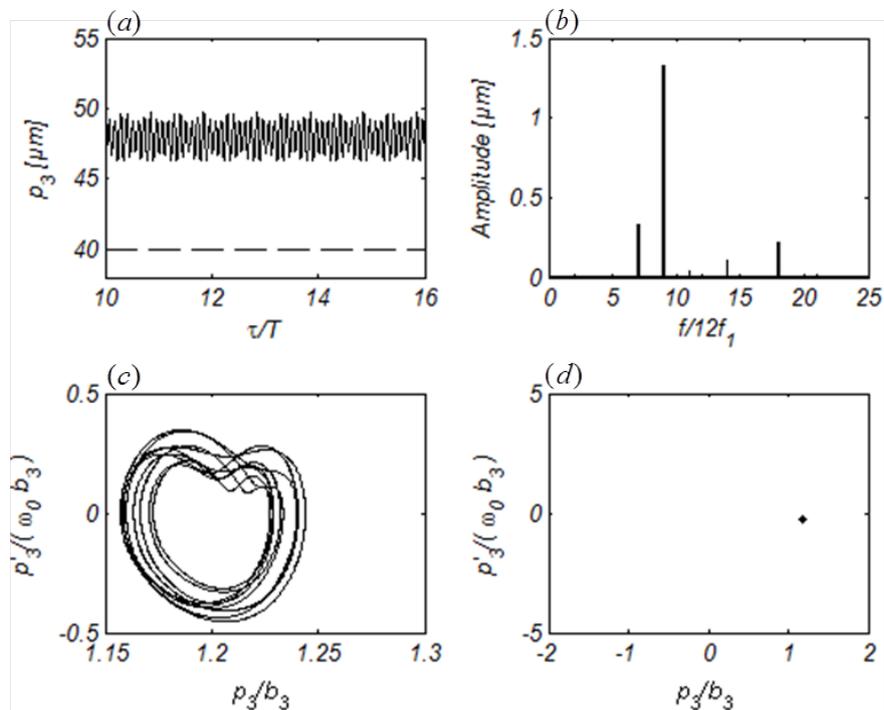


**Figure 4.51.** : Valeurs extrêmes des réponses dynamiques des quatre engrenements de la cascade de distribution complète. Excitation internes uniquement.



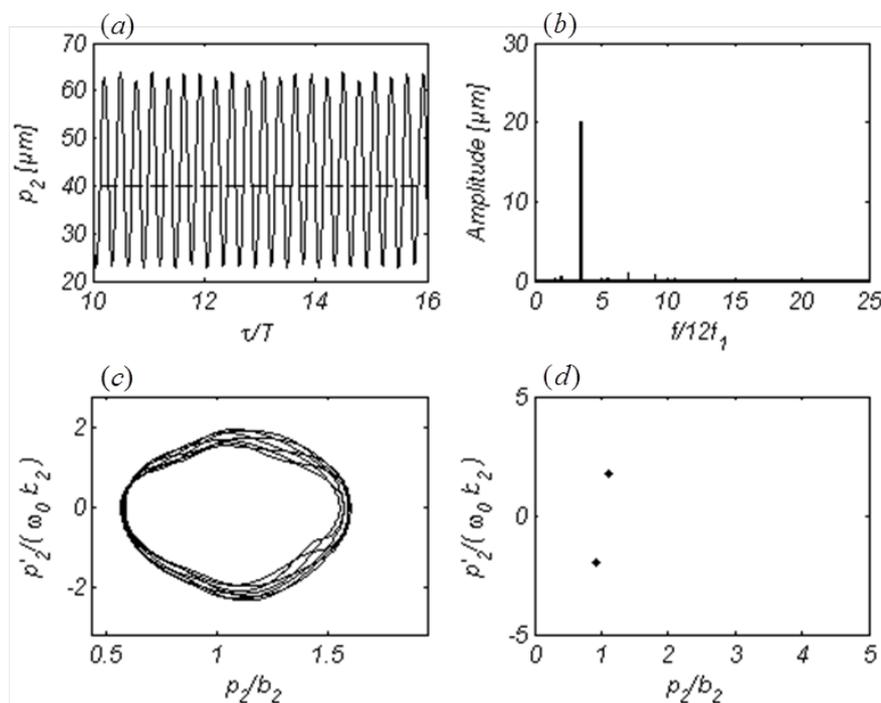
**Figure 4.52.** : Réponse 1-T périodique sans impact pour l'engrènement 56/73, à  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ .

(a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.

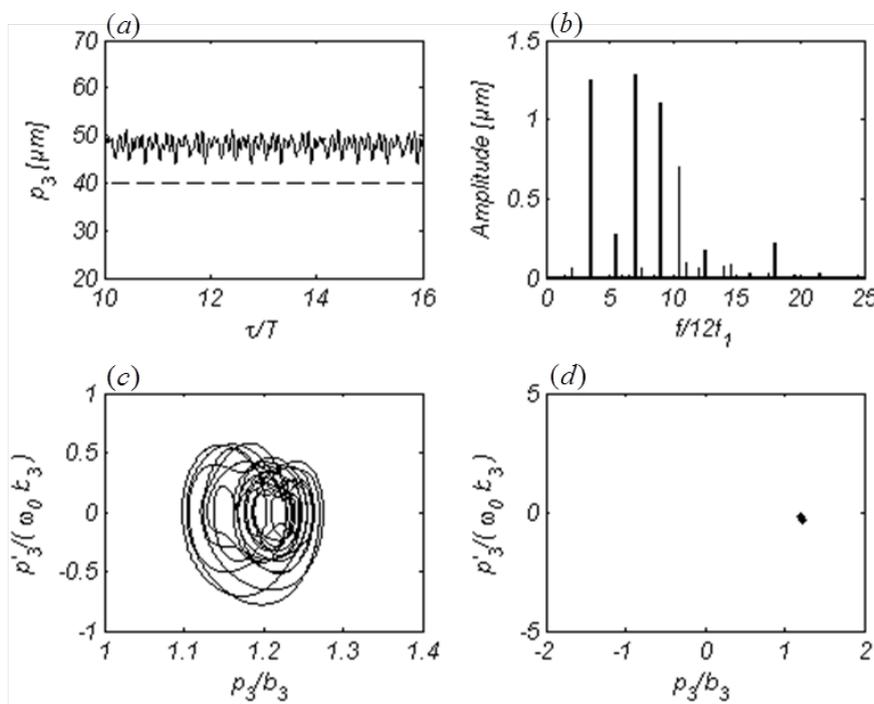


**Figure 4.53.** : Réponse 1-T périodique sans impact pour l'engrènement 50/72, à  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ .

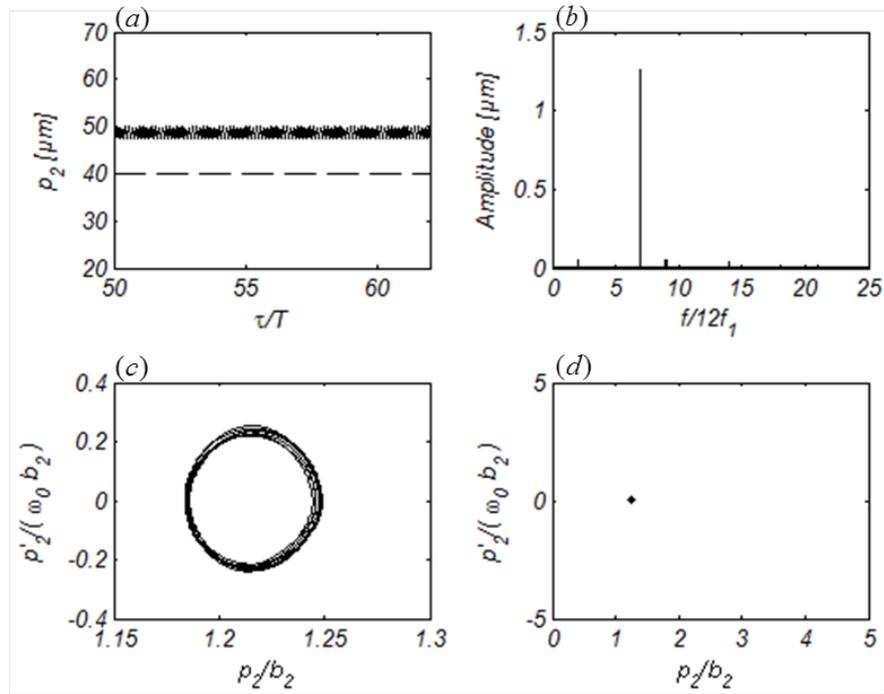
(a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



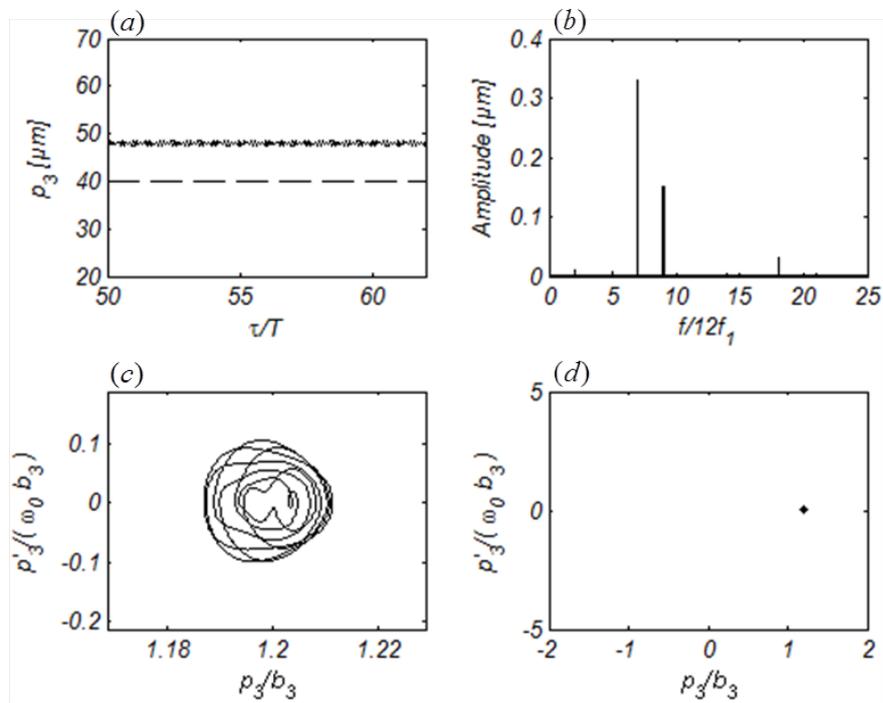
**Figure 4.54.** : Réponse 2-T périodique sans impact pour l’engrènement 56/73, à  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d’amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.55.** : Réponse 2-T périodique sans impact pour l’engrènement 50/72, à  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d’amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.56.** : Réponse 2-T périodique sans impact pour l'engrènement 56/73, à  $\omega_1 = 1800 \text{ tr/min}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.



**Figure 4.57.** : Réponse 2-T périodique sans impact pour l'engrènement 50/72, à  $\omega_1 = 1800 \text{ tr/min}$ .  
 (a) Réponse temporelle, (b) Spectre d'amplitudes, (c) Plan de phase, (d) Section de Poincaré.

### 4.5.2.2. Réponses dynamiques induites par les excitations internes et externes

La fréquence fondamentale du système est  $f_0 = \frac{3}{25}f_1$ . La continuation des branches de solutions n'est pas possible (taille du système trop important) et on propose une description par intégration temporelle. Deux cas d'acyclisme sont envisagés et présentés dans le Tableau 4.4. On présente l'étude du caractère chaotique de la même manière que précédemment d'une part, et les erreurs dynamiques de transmission des 4 engrènements et leurs spectres d'amplitudes pour des régimes de fonctionnement proches des deux régimes critiques et pour les deux cas d'acyclisme d'autre part.

	$\frac{\chi_c^{(1,1)}}{\bar{E}_1}$	$\frac{\chi_s^{(1,1)}}{\bar{E}_1}$	$\frac{\chi_c^{(1,2)}}{\bar{E}_2}$	$\frac{\chi_s^{(1,2)}}{\bar{E}_2}$	$\frac{\chi_c^{(1,3)}}{\bar{E}_3}$	$\frac{\chi_s^{(1,3)}}{\bar{E}_3}$	$\frac{\chi_c^{(1,4)}}{\bar{E}_4}$	$\frac{\chi_s^{(1,4)}}{\bar{E}_4}$
1) Acyclisme modéré	0.20	0.17	0	0	0.21	0.29	0.34	0.17
2) Acyclisme fort	0.20	0.17	0	0	0.51	0.32	0.88	0.52

**Tableau 4.4.** : Cas d'acyclisme considéré pour les cascades couplées.

Pour  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ , avec un acyclisme modéré, la réponse est 1-T périodique (voir Figures 4.58 et 4.59). Pour chaque engrènement, on observe des pertes de contact et des chocs entre les flancs actifs. Les réponses aux amplitudes les plus élevées sont celles des engrènements 56/73 ( $p_2$ ) et 54/72 ( $p_4$ ). Pour l'engrènement 56/73, c'est la raie au fondamental de la fréquence d'engrènement de la cascade 84-73-56  $f_{E_1}$  qui domine la réponse. Pour l'engrènement 54/72, c'est la raie associée à l'acyclisme  $f_{acy,4}$  qui domine la réponse.

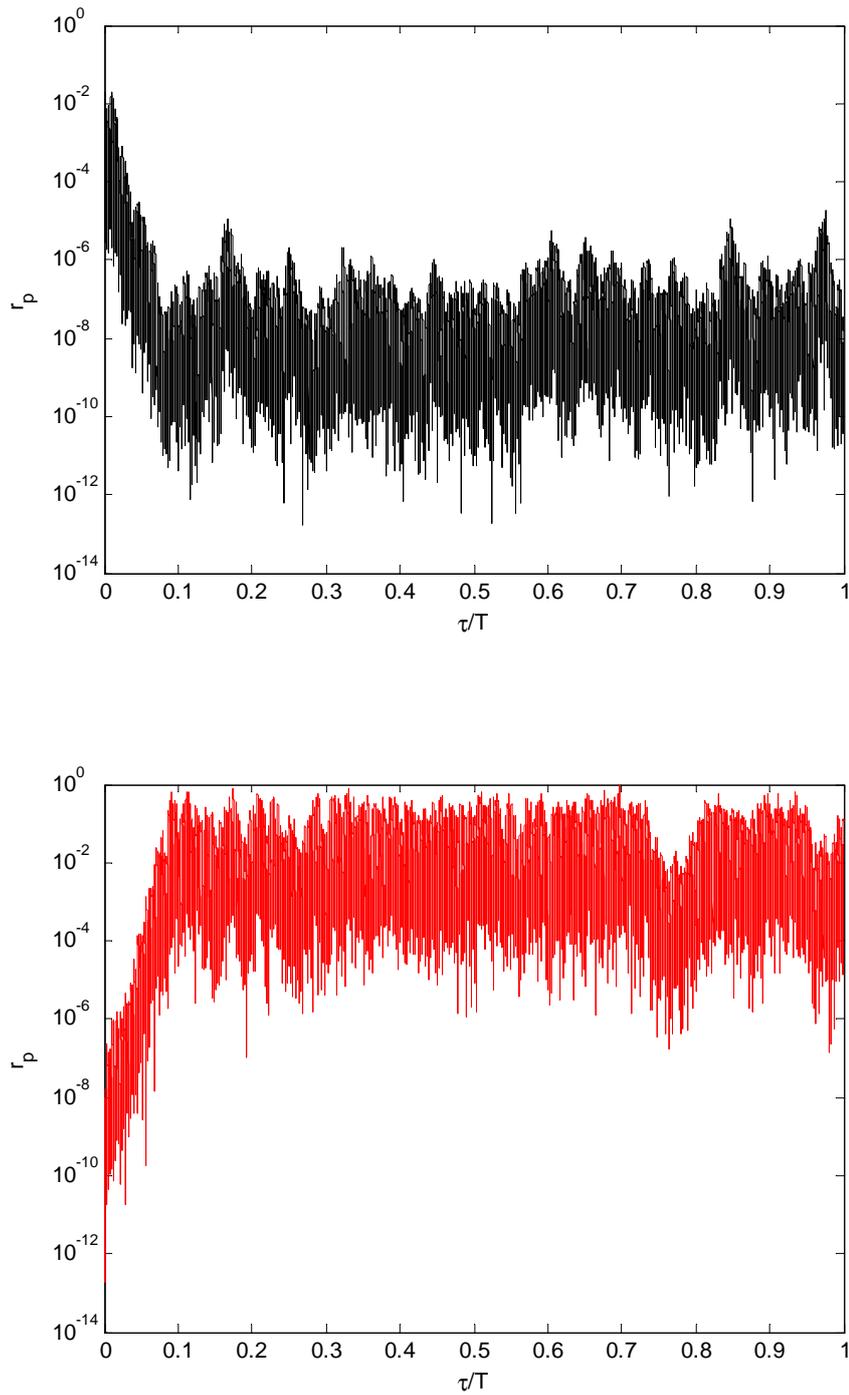
Avec un acyclisme fort, la Figure 4.58 montre que la réponse est chaotique. On observe (Figure 4.60) des pertes de contact pour chaque engrènement, avec chocs entre les flancs rétros excepté pour l'engrènement 84/73, qui est celui pour lequel l'acyclisme est le plus faible. Pour tous les spectres, les raies associées aux excitations de l'acyclisme dominant. On note toutefois une contribution non négligeable de la raie  $f_{E_1}$  pour l'engrènement 84/73.

De manière générale, les spectres sont bien plus riches que pour la cascade 84-73-56 seule. Cela s'explique par le fait que les excitations et les raies latérales dues aux multiples convolutions sont plus nombreuses.

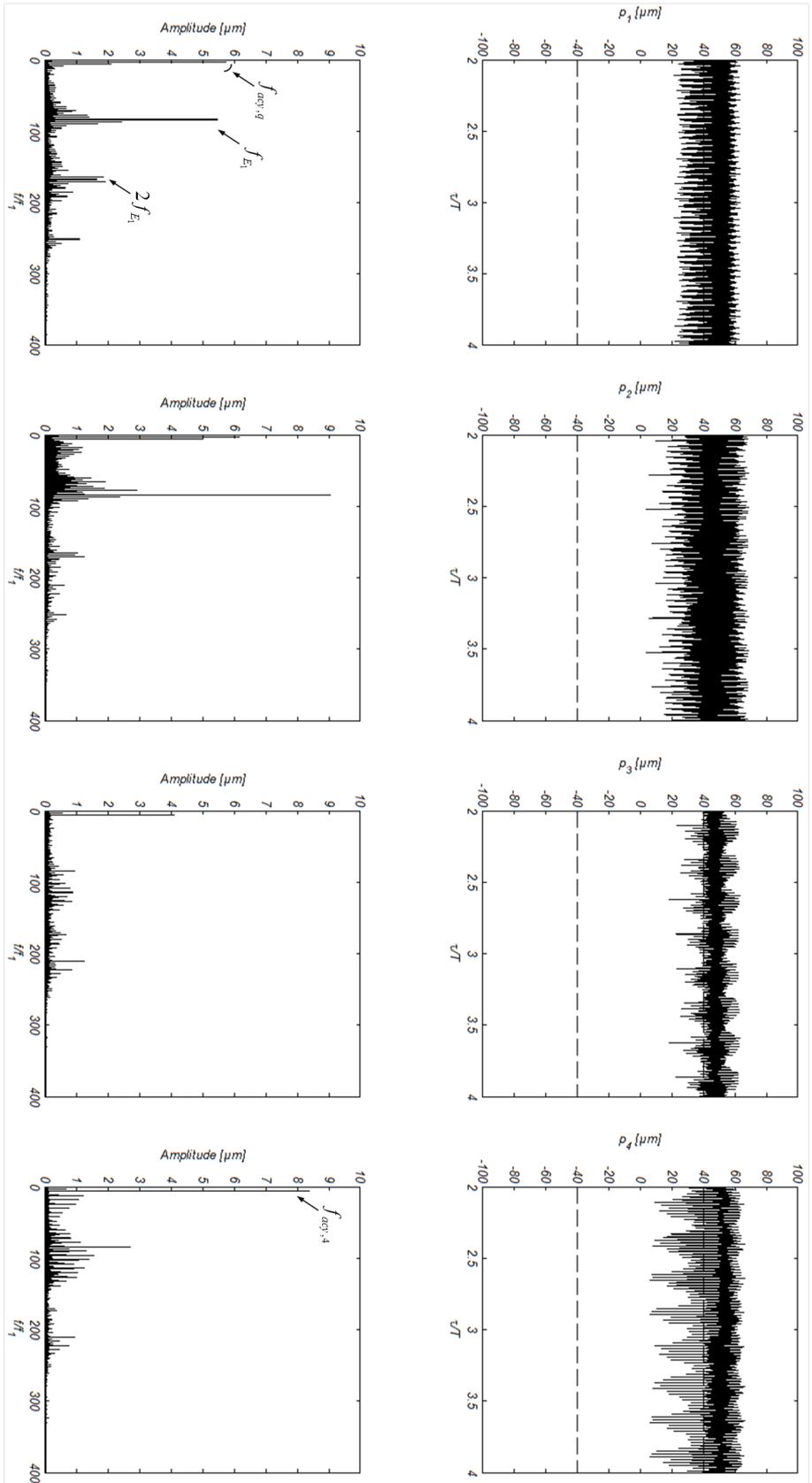
Pour  $\omega_1 = 1800 \text{ tr/min}$ , avec un acyclisme modéré, la réponse est 1-T périodique (voir Figures 4.58 et 4.59). Les réponses sont de faibles amplitudes et dominées par les raies associées aux excitations par l'acyclisme et au fondamental de la fréquence d'engrènement de la cascade 84-73-56  $f_{E_1}$ .

Avec un acyclisme fort, la Figure 4.61 montre que la réponse est chaotique. Les réponses de la Figure 4.63 sont très semblables à celles observées pour un régime de fonctionnement à  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ , et de par ce fait les conclusions et commentaires

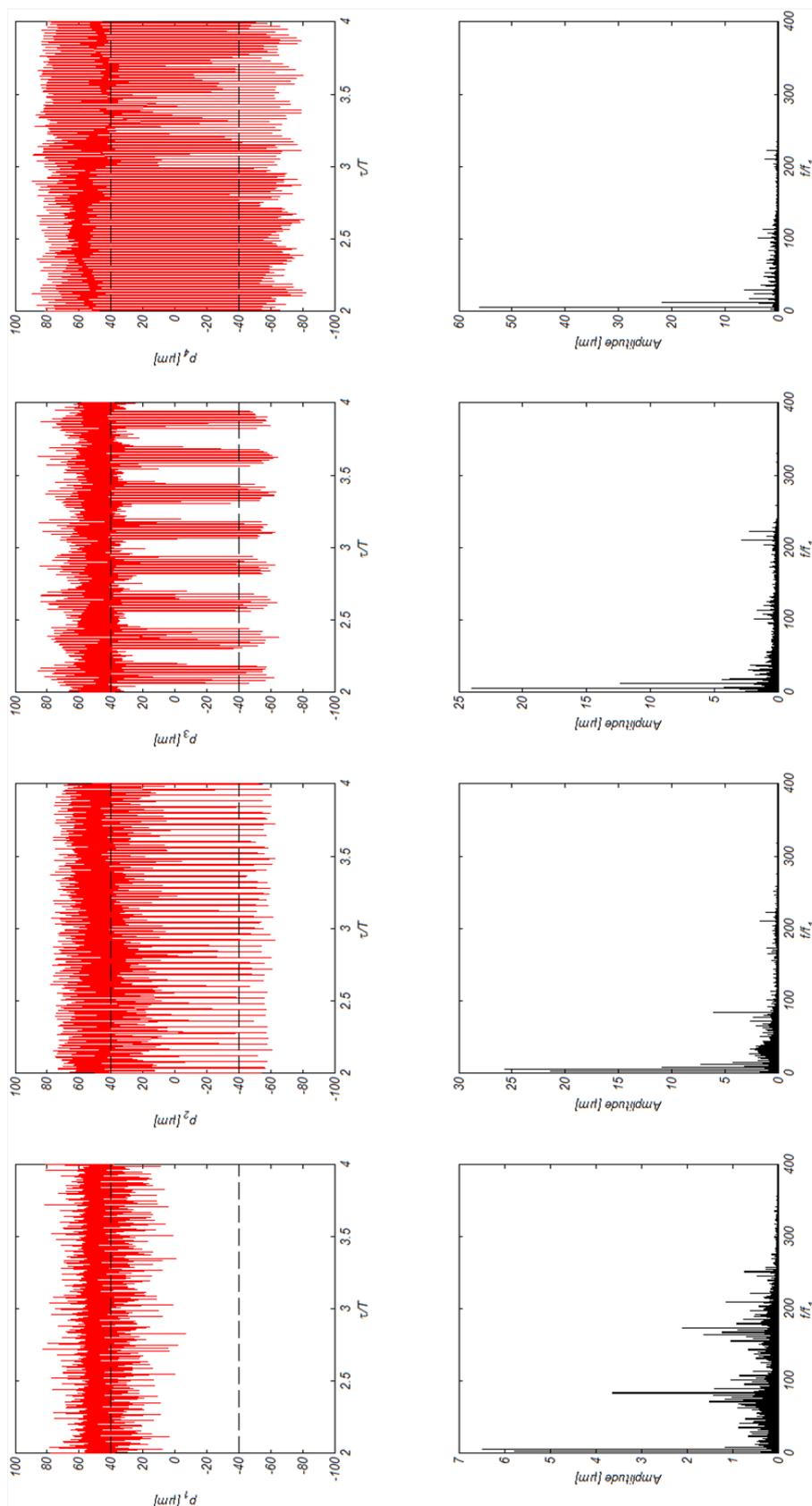
sont relativement identiques. On observe des chocs entre les flancs rétros pour chaque engrènement excepté l'engrènement 84/73.



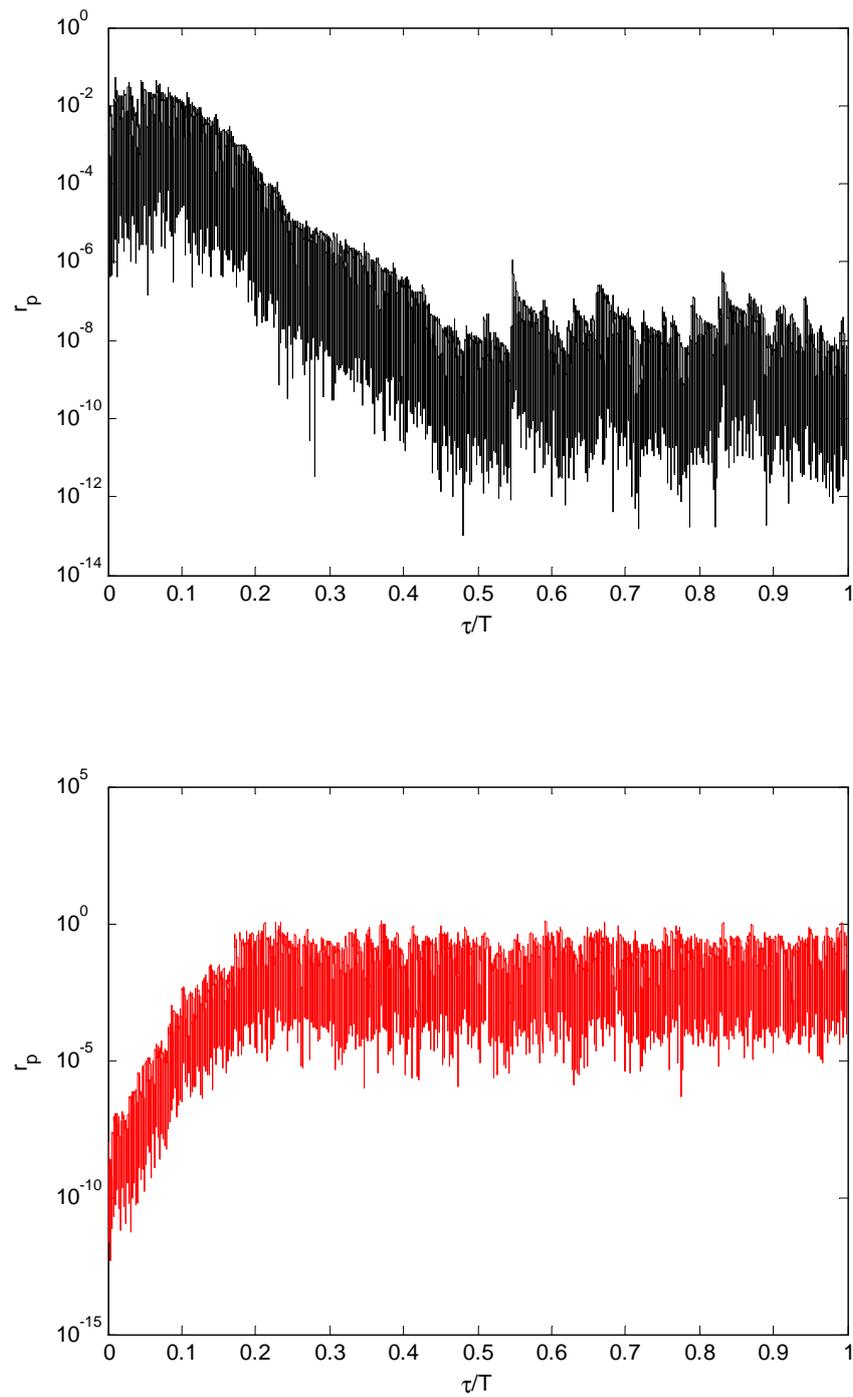
**Figure 4.58.** : Evolution temporelle du rapport d'amplitudes de deux réponses avec conditions initiales proches à  $\omega_1 = 810 \text{ tr/min}$ .



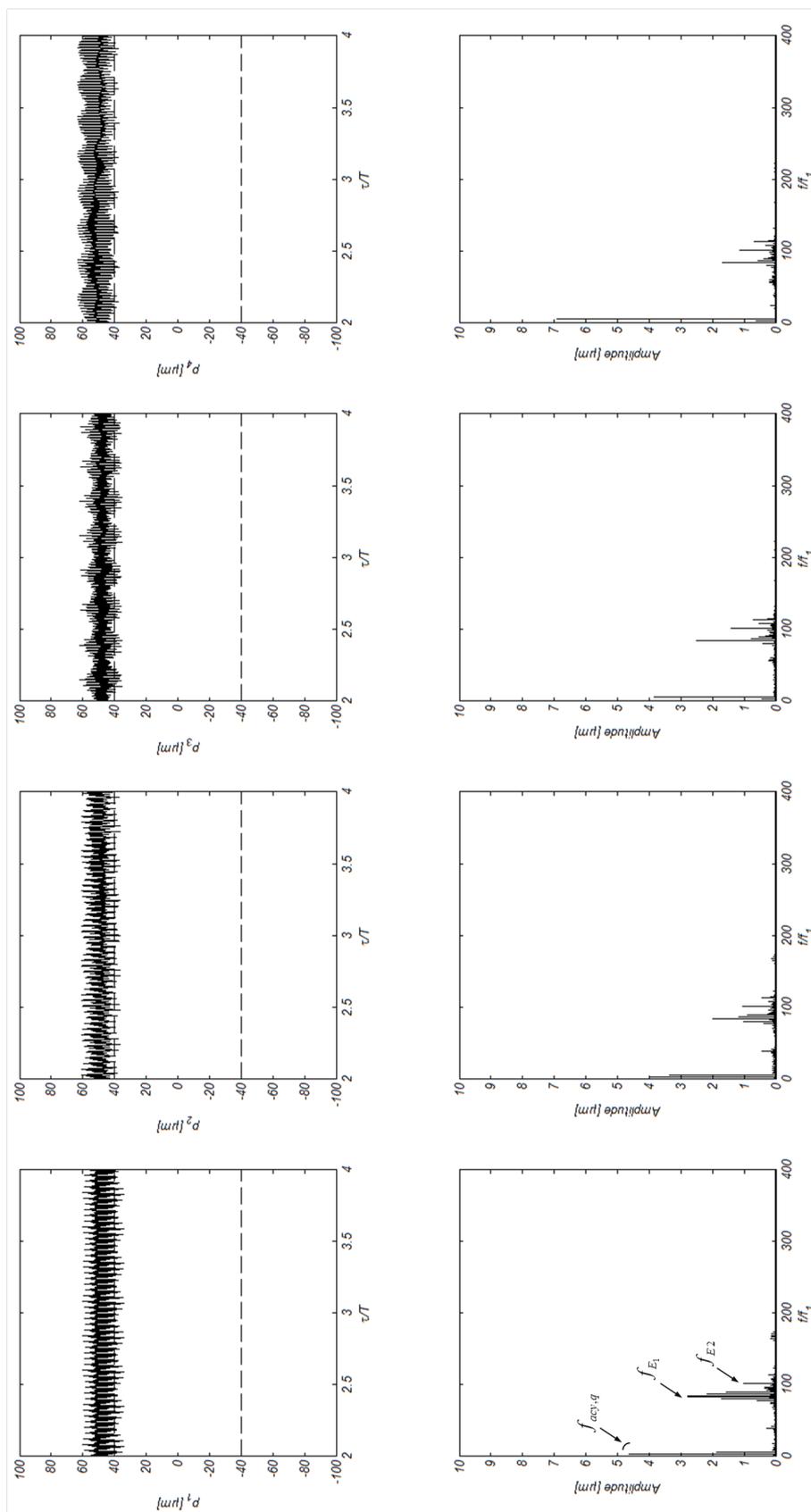
**Figure 4.59.** : Réponses temporelles et spectres d'amplitudes du système de cascades couplées avec acyclysme modéré à  $\omega_1 = 810 \text{ tr}/\text{mm}$ .



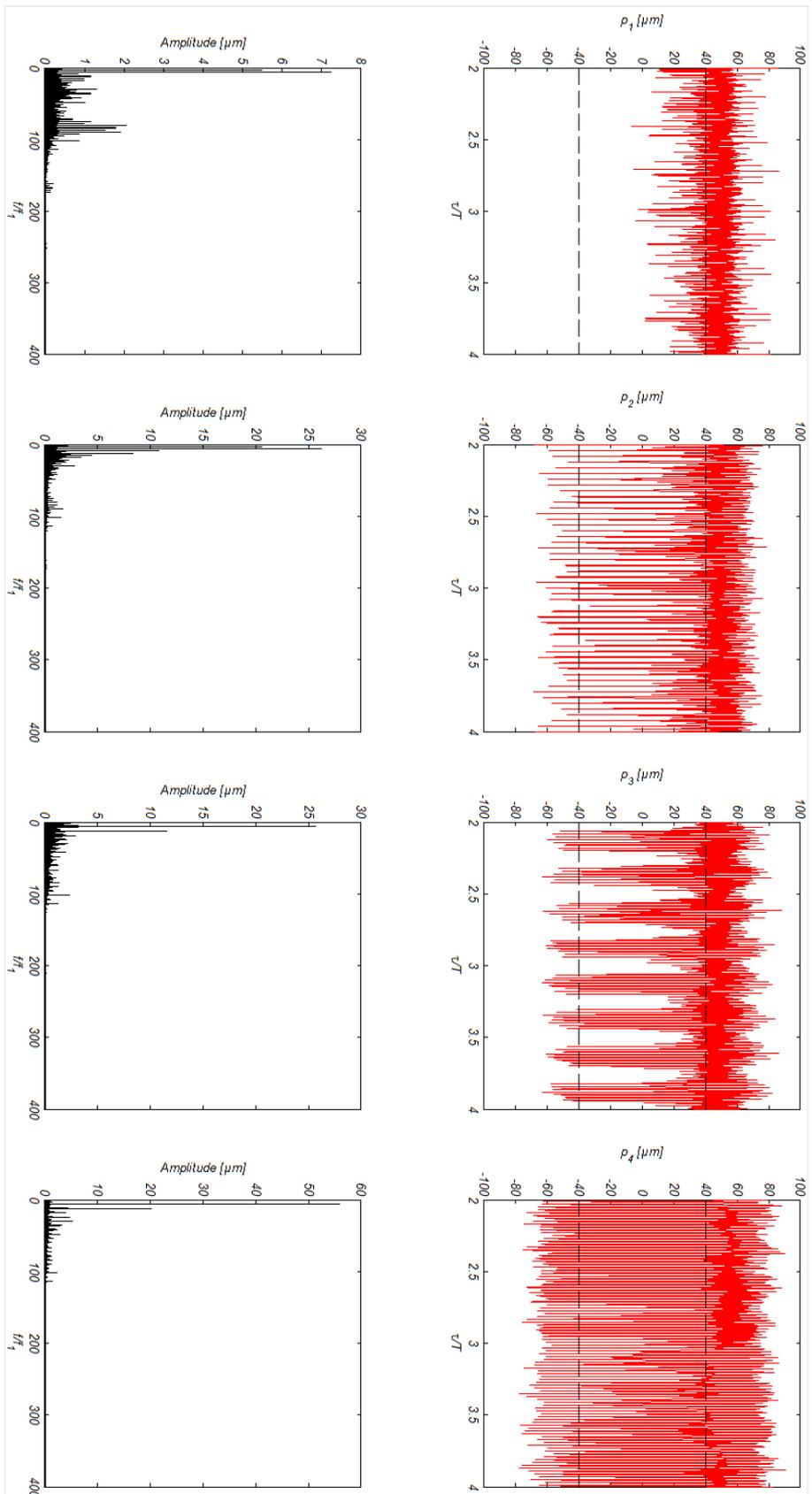
**Figure 4.60.** : Réponses temporelles et spectres d'amplitudes du système de cascades couplées avec acyclisme fort à  $\omega_1 = 810 \text{ tr}/\text{min}$ .



**Figure 4.61.** : Evolution temporelle du rapport d'amplitudes de deux réponses avec conditions initiales proches à  $\omega_1 = 1800 \text{ tr/min}$ .



**Figure 4.62.** : Réponses temporelles et spectres d'amplitudes de cascades couplées avec acyclisme modéré à  $\omega_1 = 1800 \text{ tr}/\text{min}$ .



**Figure 4.63.** : Réponses temporelles et spectres d'amplitudes du système de cascades couplées avec acyclisme fort à  $\omega_1 = 1800 \text{ tr}/\text{min}$ .

## 4.6. Conclusions

Des modèles non-linéaires de la cascade 84-73-56 et du système des deux cascades couplées ont été proposés et étudiés. Ils permettent de prendre en compte la perte de contact entre denture, et des excitations internes et externes aux fréquences très distinctes.

La technique de continuation mise en place a permis de suivre les solutions périodiques de ces systèmes, et d'étudier en détails la dynamique de la cascade 84-73-56 seule. La perte de contact est favorisée par un amortissement faible et des excitations élevées.

Les excitations internes seules conduisent à des pertes de contact aux régions d'amplification dynamique et d'instabilité paramétriques. Les résonances non-linéaires induites par la non-linéarité de jeu donnent naissance à des solutions de périodicité multiple et des régimes à plusieurs impacts par période.

Lorsque les excitations externes sont introduites, les excitations à la fréquence d'engrènement (correspondant aux excitations internes) sont modulées par les acyclismes (excitations externes à basses fréquences). Lorsque l'acyclisme est suffisamment élevé, la perte de contact se généralise sur l'ensemble de la plage de fréquence considérée. La dynamique est complexe, on peut observer du chaos et des chocs sur les flancs rétros pour un acyclisme fort.

Pour le système constitué des deux cascades couplées, les conclusions sont similaires à celles de la cascade de trois pignons seules. Les régimes observés comportent des pertes de contact pour les deux cas d'acyclisme considérés.

Pour un acyclisme modéré, les chocs se produisent uniquement entre les flancs actifs et les réponses sont périodiques.

Pour un acyclisme élevé, la présence de nombreuses excitations à des fréquences diverses (hautes et basses) et de chocs génèrent des réponses chaotiques avec chocs entre flancs rétros.



# Conclusion et perspectives

Dans le cadre de la réduction des nuisances acoustiques générées par le fonctionnement d'un véhicule poids lourd, l'objectif de ce travail de thèse était de caractériser le comportement vibratoire d'une cascade de distribution. Cette dernière est composée de deux cascades de trois pignons chacune. On cherche notamment à caractériser le sirènement généré par l'erreur statique de transmission et le claquement associé aux vibro-impacts susceptibles d'apparaître entre les dents.

Dans un premier temps, nous avons cherché à optimiser les corrections de denture des pignons, afin de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission, principale source d'excitation interne. On prend en compte, d'une part, le caractère multi-engrènement qui impose une optimisation simultanée des trois pignons de chaque cascade et la large plage de couples de fonctionnement, d'autre part, la robustesse des solutions proposées aux écarts de géométrie induits par les tolérances de fabrication.

Les corrections considérées sont les dépouilles, les diamètres de dépouille et le bombé cumulé. Les pignons considérés sont de classe de qualité 7, et les intervalles de tolérances associés aux défauts de fabrication correspondant sont de l'ordre de la valeur moyenne de la correction. Les défauts de profils et d'hélices sont également considérés.

Une fonction coût a été introduite permettant d'intégrer plusieurs critères d'optimisation. L'optimisation multi-objectifs (deux erreurs statiques de transmission à minimiser pour chacune des deux cascades) a été traitée en considérant la somme des valeurs crête à crête. L'optimisation a été réalisée pour une plage de couples de fonctionnement. Un algorithme méta-heuristique de type essais particuliers a été mis en œuvre pour optimiser efficacement la fonction coût. Les solutions obtenues ont été triées en fonction de leurs performances et trois d'entre elles ont été sélectionnées pour une étude de robustesse face aux écarts de géométrie.

Un critère de robustesse a été défini de manière à estimer le pire scénario possible dans les intervalles de tolérances. La densité de probabilité de la fonction coût des solutions a permis d'effectuer un choix fiable optimisant correctement les pignons. On propose finalement des jeux de corrections de dentures qui procurent un gain moyen sur la fonction coût de 5 dB pour la cascade 84-73-56 et de 2.5 dB pour la cascade 54-72-50, par rapport aux solutions de référence.

Dans un deuxième temps, nous avons analysé le comportement dynamique de la cascade de dentures induit par les fluctuations des erreurs statiques de transmission et

les fluctuations des raideurs d'engrènement qui en résultent. Pour cela, les différents composants de la cascade (engrenages, arbres, roulements, plaque support) ont été discrétisés par la méthode des éléments finis, afin d'établir la base modale moyenne du système. Les équations de mouvement correspondent à une modélisation paramétrique linéaire du problème, qui permet la prise en compte du couplage entre les excitations de chaque engrènement. Elles sont résolues dans le domaine fréquentiel grâce à une méthode spectrale itérative à multi-excitations qui offre des gains de temps très importants par rapport aux méthodes d'intégration temporelle.

Pour chaque régime de fonctionnement, les réponses dynamiques des engrenages mettent en évidence les raies dominantes et le couplage entre les deux fréquences d'engrènement. Le calcul de la puissance vibratoire de la plaque pour les jeux de corrections standards et optimisés montre qu'un gain de 8 à 20 dB peut être espéré, selon le régime de fonctionnement considéré.

Enfin, nous avons modélisé le comportement dynamique non-linéaire de la cascade associé aux pertes de contact susceptibles d'apparaître entre les dentures. La complexité du problème traité conduit à réduire le nombre de degrés de liberté de la cascade en introduisant un modèle qui prend en compte uniquement les rotations des pignons autour de leur axe et les couplages entre les roues induits par les engrènements. Le modèle dynamique non-linéaire proposé permet d'introduire simultanément les excitations externes associées aux fréquences de rotation et leurs harmoniques (excitations basses fréquences liées à l'acyclisme moteur) et les excitations internes associées aux fréquences d'engrènement et leurs harmoniques (excitations hautes fréquences liées aux fluctuations des erreurs statiques de transmission et des raideurs d'engrènement). Une discrétisation des équations de mouvement par la méthode des différences centrées assortie d'une technique de continuation avec longueur d'arc ont été mise en œuvre pour explorer la dynamique de la cascade de dentures. Compte tenu de la complexité des calculs, l'étude a dans un premier temps été menée pour la cascade de pignons 84-73-56. Dans le cas où seules les excitations internes sont prises en compte, la stabilité des réponses 1-T périodiques et la nature des bifurcations observées a pu être analysée. Pour les régimes de fonctionnement correspondants à la résonance paramétrique principale et l'instabilité paramétrique principale, le comportement dynamique de la cascade est très riche. Des solutions 2-T, 4-T, et 8-T périodiques sont observées, de même qu'une solution quasi-périodique. Le comportement de chacune des branches de solutions correspondantes a pu être décrit en détail. L'amplitude de la réponse dynamique conduit à des pertes de contact et des chocs entre les flancs actifs, sans qu'aucun choc entre les flancs rétros ne se produise.

La prise en compte simultanée des excitations internes et externes conduit à une augmentation significative de l'amplitude de la réponse et à l'apparition de modulations entre les basses et les hautes fréquences. Quand le niveau de l'acyclisme devient suffisamment important (de l'ordre de l'écrasement statique moyen), les pertes de contact se généralisent et donnent lieu à un comportement très complexe. Les méthodes de continuation échouent et l'étude du comportement dynamique de

la cascade est réalisée par intégration temporelle. A basses fréquences, le contenu spectral de la réponse dynamique est dominé par les raies associées à l'acyclisme. L'intensité des chocs qui se produisent à la fois entre les flancs actifs et les flancs rétros est telle que l'amplitude de la réponse dynamique de la cascade est très élevée. Des régimes chaotiques sont également observés.

En considérant les deux cascades 84-73-56 et 54-72-50 couplées, l'excitation générée par l'acyclisme conduit systématiquement à des régimes périodiques ou chaotiques avec pertes de contact entre les dentures selon les niveaux d'acyclisme considérés. On note toutefois que les pertes de contact sont favorisées par la complexité du système et la multitude des excitations. Le couplage entre les engrènements est tel que les chocs se produisant sur un engrènement peuvent générer des pertes de contact sur l'autre engrènement.

Par ailleurs, l'amplitude des réponses dynamiques de chaque engrènement après la perte de contact est bornée par l'amplitude du jeu fonctionnel, si bien que les réponses chaotiques conservent une certaine périodicité due à l'influence de certaines raies dominantes.

La principale perspective de ces travaux est la validation expérimentale des modèles proposés. La méthode d'optimisation des corrections de dentures et le modèle dynamique traitant le problème du sirènement sont suffisamment aboutis pour traiter un cas industriel complexe. Un jeu de pignons avec dentures corrigées a été fabriqué, suite aux préconisations issues de l'analyse réalisée. La comparaison du sirènement d'une cascade modifiée avec celui d'une cascade équipée de pignons standards est désormais possible. Pour la gestion des pertes de contact entre dentures, le modèle développé ne permet pas d'intégrer les propriétés élastiques et inertielles de l'ensemble des éléments de la cascade. Une étude expérimentale du comportement dynamique non-linéaire d'une maquette composée uniquement d'une cascade de 3 pignons montés sur des supports rigides permettrait de valider la capacité du modèle non-linéaire à prédire correctement les pertes de contact et les chocs successifs entre les dentures.

Enfin, compte tenu de la richesse vibratoire des réponses de la cascade, une étude du bruit rayonné permettrait d'associer une signature acoustique des différents régimes mis en évidence.



# A. Le code ISIS et ses entrées/sorties

Le fonctionnement du code est schématisé A.1. Les différentes entrées du code de calcul sont listées ci-dessous.

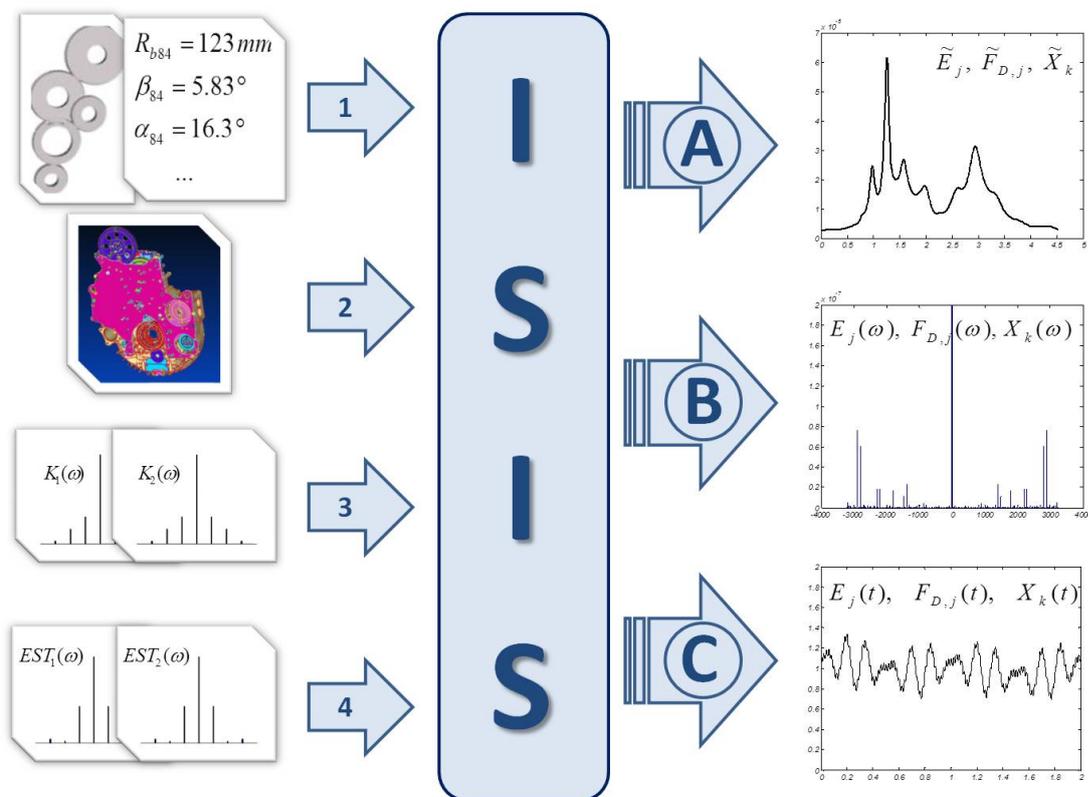


Figure A.1. : Entrées et sorties du code de calcul ISIS

## A.1. Les entrées

### 1 Caractéristiques de la transmission

- le nombre d'arbres,

- le nombre de pignons,
- le nombre d'engrènement,
- l'arbre moteur.

Pour chaque engrènement :

- les arbres et pignons concernés,
- l'angle de pression apparent de fonctionnement,
- l'angle d'hélice de base,
- le sens de rotation,
- l'angle entre les repères local et global.

Pour chaque pignon :

- un identifiant (étiquette facilitant la lecture des résultats),
- le nombre de dents,
- le rayon de base.

Les régimes des vitesses de l'arbre moteur doivent également être spécifiés.

## 2 : Base modale éléments finis

- le nombre de modes propres (sans compter les modes de corps rigides),
- le nombre de degrés de liberté du modèle.
- les vecteurs de couplages  $\mathbf{R}_j$
- en cas de base tronquée, les flexibilités résiduelles  $T_{Rés\ ij}$  (voir 1.2.2.8) sont déduits des informations précédentes

## 3 : Spectres des raideurs d'engrènements $K_j$

## 4 : Spectres des erreurs statiques de transmission $E_j^{(s)}$

## A.2. Les sorties

A l'issu du calcul, le code donne accès aux erreurs dynamiques de transmission  $E_j$ , aux efforts dynamiques de dentures  $F_{Dj}$  et aux déplacements  $X_k$  en tout degré de liberté des noeuds du modèle considéré. Il est possible de visualiser ces résultats en observant :

**A : La valeur efficace en fonction du régime de fonctionnement**

**B : Les spectres à un régime de fonctionnement donné**

**C : L'évolution temporelle à un régime de fonctionnement donné**

# Bibliographie

- [1] D. Remond, P. Velez, J. Sabot, et al. Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages : synthèse bibliographique. 1993.
- [2] D. B. Welbourn. Fundamental knowledge of gear noise : a survey. Technical report, 1979.
- [3] M. Umeyama. Effects of deviation of tooth surface errors of a helical gear pair on the transmission error. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, 61(587) :3101–3107, 1995.
- [4] S. Kurokawa, Y. Ariura, and M. Ohtahara. Transmission errors of cylindrical gears under load - influence of tooth profile modification and tooth deflection. *American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE*, 88 :213–217, 1996.
- [5] A. L Kapelevich and R. E Kleiss. Direct gear design for spur and helical involute gears. *Gear Technology*, 19(5) :29–35, 2002.
- [6] C.H. Wink and A.L. Serpa. Investigation of tooth contact deviations from the plane of action and their effects on gear transmission error. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 219(5) :501–509, 2005.
- [7] E. Rigaud. *Interactions dynamiques entre dentures, lignes d’arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- [8] R. Guilbault, C. Gosselin, and L. Cloutier. Helical gears, effects of tooth deviations and tooth modifications on load sharing and fillet stresses. *Journal of Mechanical Design*, 128(2) :444–456, mar 2006.
- [9] A. Kahraman, P. Bajpai, and N. E. Anderson. Influence of tooth profile deviations on helical gear wear. *Journal of Mechanical Design*, 127(4) :656–663, jul 2005.
- [10] L. Vedmar. *On the design of external involute helical gears*. PhD thesis, University of Lund, 1981.
- [11] E. Rigaud and D. Barday. Modélisation et analyse de l’erreur statique de transmission d’un engrenage : influence des déformations des roues et interactions entre les couples de dents en prise. *Arxiv preprint physics/0701043*, 2007.

- 
- [12] J. S. Bendat. *Principles and applications of random noise theory*, volume 81. Wiley New York, 1958.
- [13] N. Minorsky and T. Teichmann. Nonlinear oscillations. *Physics Today*, 15 :63, 1962.
- [14] H.Nevzat Ozguven and D.R. Houser. Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error. *Journal of Sound and Vibration*, 125(1) :71–83, aug 1988.
- [15] D. R. Houser. *Gear noise sources and their prediction using mathematical models*. Gear Dynamics and Gear Noise Research Laboratory, Ohio State Univ., 1985.
- [16] H. Vinayak, R. Singh, and C. Padmanabhan. Linear dynamic analysis of multi-mesh transmissions containg external, rigid gears. *Journal of Sound and Vibration*, 185(1) :311–329, 2000.
- [17] J Perret-Liaudet. An original method for computing the response a parametrically excited forced system. *Journal of Sound and Vibration*, 196(2) :165–177, 1996.
- [18] R. G. Parker, S. M. Vijayakar, and T. Imajo. Non-linear dynamic response of a spur gear pair : modelling and experimental comparisons. *Journal of Sound and Vibration*, 237(3) :435–455, oct 2000.
- [19] C. S. Hsu and W. H Cheng. Steady-state response of a dynamical system under combined parametric and forcing excitations. *Journal of applied mechanics*, 41 :371, 1974.
- [20] J. P. Raclot and P. Velez. Simulation of the dynamic behaviour of single and multi-stage geared systems with shape deviations and mounting errors by using a spectral method. *Journal of sound and vibration*, 220(5) :861–903, 1999.
- [21] T. C. Lim and J. Li. Dynamic analysis of multi-mesh counter-shaft transmission. *Journal of Sound Vibration*, 219 :905–919, 1999.
- [22] S. Draca. *Finite element model of a double-stage helical gear reduction*. PhD thesis, University of Windsor, 2006.
- [23] M. Kubur, A. Kahraman, D. M. Zini, and K. Kienzle. Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements : model and experiment. *Journal of vibration and acoustics*, 126 :398, 2004.
- [24] Y. Kadmiri. *Etude du grailonnement d'une boite de vitesse*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2011.
- [25] F. Pfeiffer and W. Prestl. Hammering in diesel-engine driveline systems. *Non-linear Dynamics*, 5(4) :477–492, jun 1994.
- [26] P. Ziegler, P. Eberhard, and B. Schweizer. Simulation of impacts in geartrains using different approaches. *Archive of Applied Mechanics*, 76(9) :537–548, 2006.

- [27] A. Al-Shyyab and A. Kahraman. Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method : period-one motions. *Journal of Sound and Vibration*, 284(1-2) :151–172, 2005.
- [28] A. Al-Shyyab and A. Kahraman. Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method : Sub-harmonic motions. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1-2) :417–451, 2005.
- [29] A. Kahraman and G. W. Blankenship. Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance. *Journal of Sound and Vibration*, 194(3) :317–336, jul 1996.
- [30] M. Barthod, J. Tébec, and M. Gizard. Etude du bruit dit de grailonnement dans les boites de vitesses. *Mécanique & Industries*, 4(2) :99–106, 2003.
- [31] M. Barthod, B. Hayne, J.-L. Tébec, and J.-C. Pin. Experimental study of dynamic and noise produced by a gearing excited by a multi-harmonic excitation. *Applied Acoustics*, 68(9) :982–1002, sep 2007.
- [32] Y. Kadmiri, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, and L. Vary. Experimental and numerical analysis of automotive rattle noise. *Journal of Sound and Vibration*, 331(13) :3144–3157, 2012.
- [33] G. W. Blankenship and A. Kahraman. Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity. *Journal of Sound and Vibration*, 185(5) :743–765, 1995.
- [34] S. Theodossiades and S. Natsiavas. Periodic and chaotic dynamics of motor-driven gear-pair systems with backlash. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(13) :2427–2440, oct 2001.
- [35] G. Litak and M. I. Friswell. Vibration in gear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16(5) :795–800, jun 2003.
- [36] J.C. Ji and A.Y.T. Leung. Periodic and chaotic motions of a harmonically forced piecewise linear system. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(12) :1807–1825, dec 2004.
- [37] J. Wang, R. Li, and X. Peng. Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems. *Applied Mechanics Reviews*, 56 :309, 2003.
- [38] K. Karagiannis and F. Pfeiffer. Theoretical and experimental investigations of gear-rattling. *Nonlinear Dynamics*, 2(5) :367–387, 1991.
- [39] Q. Feng and F. Pfeiffer. Stochastic model on a rattling system. *Journal of Sound and Vibration*, 215(3) :439–453, 1998.
- [40] Silvio L.T. de Souza, Ibere L. Caldas, Ricardo L. Viana, Antonio M. Batista, and Tomasz Kapitaniak. Noise-induced basin hopping in a gearbox model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(5) :1523–1531, dec 2005.
- [41] P. J Holmes. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*, 84(2) :173–189, 1982.

- 
- [42] N. B. Tuffillaro and A. M. Albano. Chaotic dynamics of a bouncing ball. *American Journal of Physics*, 54(10) :939–944, 1986.
- [43] C.N. Bapat, S. Sankar, and N. Popplewell. Repeated impacts on a sinusoidally vibrating table reappraised. *Journal of Sound and Vibration*, 108(1) :99–115, 1986.
- [44] M.S. Heiman, P.J. Sherman, and A.K. Bajaj. On the dynamics and stability of an inclined impact pair. *Journal of Sound and Vibration*, 114(3) :535–547, 1987.
- [45] M.S. Heiman, A.K. Bajaj, and P.J. Sherman. Periodic motions and bifurcations in dynamics of an inclined impact pair. *Journal of Sound and Vibration*, 124(1) :55–78, jul 1988.
- [46] T.O. Dalrymple. Numerical solutions to vibroimpact via an initial value problem formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 132(1) :19–32, jul 1989.
- [47] J. M. Luck and A. Mehta. Bouncing ball with a finite restitution : Chattering, locking, and chaos. *Physical Review E*, 48(5) :3988–3997, 1993.
- [48] Albert C. J. Luo and Ray P. S. Han. The dynamics of a bouncing ball with a sinusoidally vibrating table revisited. *Nonlinear Dynamics*, 10(1) :1–18, may 1996.
- [49] J. J Barroso, M. V Carneiro, and E. E.N Macau. Bouncing ball problem : Stability of the periodic modes. *Physical Review E*, 79(2) :26206, 2009.
- [50] T.C. Kim, T.E. Rook, and R. Singh. Effect of nonlinear impact damping on the frequency response of a torsional system with clearance. *Journal of Sound and Vibration*, 281(3-5) :995–1021, mar 2005.
- [51] Qinglong Ma and A. Kahraman. Subharmonic resonances of a mechanical oscillator with periodically time-varying, piecewise-nonlinear stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 294(3) :624–636, jun 2006.
- [52] A. Kahraman and R. Singh. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system. *Journal of Sound and Vibration*, 146(1) :135–156, apr 1991.
- [53] R. J. Comparin and R. Singh. Non-linear frequency response characteristics of an impact pair. *Journal of Sound and Vibration*, 134(2) :259–290, oct 1989.
- [54] A. Kahraman and R. Singh. Non-linear dynamics of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 142(1) :49–75, 1990.
- [55] S. Natsiavas, S. Theodossiades, and I. Goudas. Dynamic analysis of piecewise linear oscillators with time periodic coefficients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35(1) :53–68, jan 2000.
- [56] Q. Ma and A. Kahraman. Period-one motions of a mechanical oscillator with periodically time-varying, piecewise-nonlinear stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5) :893–914, 2005.

- [57] Y. Shen, S. Yang, and X. Liu. Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method. *International journal of mechanical sciences*, 48(11) :1256–1263, 2006.
- [58] G. Liu and R. G Parker. Dynamic modeling and analysis of tooth profile modification for multimesh gear vibration. *Journal of Mechanical Design*, 130 :121402, 2008.
- [59] M. S. Tavakoli and D. R. Houser. Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears. In *American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Technical Conference, Cambridge, MA*, page 1984, 1984.
- [60] M. Beghini, F. Presicce, C. Santus, and D. di Ingegneria. A method to define profile modification of spur gear and minimize the transmission error. In *Proceedings AGMA Fall Meeting*, 2004.
- [61] M. Bonori, G. Barbieri and F. Pellicano. Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms. *Journal of Sound and Vibration*, 313(3-5) :603–616, jun 2008.
- [62] T. Ertlenel and R.G. Parker. A static and dynamic model for three-dimensional, multi-mesh gear systems. In *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference - DETC2005*, volume 5, pages 945–956, 2005.
- [63] A. Carbonelli, E. Rigaud, A. Le Bot, et al. Particle swarm optimization as an efficient computational method in order to minimize vibrations of multimesh gears transmission. *Advances in Acoustics and Vibration*, 2011, 2011.
- [64] J. C. Gilbert, J. Nocedal, et al. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization. 1990.
- [65] D. Johann, A. Petrowsky, E. Taillard, and P. Siarry. Métaheuristiques pour l’optimisation difficile. *Eyrolles Edition, France*, 2003.
- [66] M. Pirlot and J. Teghem. *Resolution de problemes de RO par les métaheuristiques*. Hermes sciences, 2003.
- [67] R. Eberhart and J. Kennedy. A new optimizer using particle swarm theory. In *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS’95., Proceedings of the Sixth International Symposium on*, pages 39–43, 1995.
- [68] N. Driot, E. Rigaud, J. Sabot, and J. Perret-Liaudet. Allocation of gear tolerances to minimize gearbox noise variability. *Acta Acustica united with Acustica*, 87(1) :67–76, 2001.
- [69] N. Driot and J. Perret-Liaudet. Variability of modal behavior in terms of critical speeds of a gear pair due to manufacturing errors and shaft misalignments. *Journal of Sound and Vibration*, 292(3-5) :824–843, 2006.

- 
- [70] B. C. Cetin, J. Barhen, and J. W. Burdick. Terminal repeller unconstrained subenergy tunneling (TRUST) for fast global optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 77(1) :97–126, 1993.
- [71] J. Barhen, V. Protopopescu, and D. Reister. TRUST : a deterministic algorithm for global optimization. *Science*, 276(5315) :1094–1097, 1997.
- [72] J. Kennedy and R. Eberhart. Particle swarm optimization. In *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, volume 4, pages 1942–1948, 1995.
- [73] Y. Shi and R. C. Eberhart. Empirical study of particle swarm optimization. In *Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*, volume 3, 1999.
- [74] Y. Shi and R. Eberhart. A modified particle swarm optimizer. In *Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*, pages 69–73, 1998.
- [75] Y. Shi et al. Particle swarm optimization : developments, applications and resources. In *Evolutionary Computation, 2001. Proceedings of the 2001 Congress on*, volume 1, pages 81–86, 2001.
- [76] X. Hu and R. Eberhart. Multiobjective optimization using dynamic neighborhood particle swarm optimization. In *Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on*, volume 2, pages 1677–1681, 2002.
- [77] Y. Shi and R. Eberhart. Parameter selection in particle swarm optimization. In *Evolutionary Programming VII*, pages 591–600, 1998.
- [78] M. Clerc. The swarm and the queen : towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. In *Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*, volume 3, 1999.
- [79] M. Clerc and J. Kennedy. The particle swarm : explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(1) :58–73, 2002.
- [80] I. C. Trelea. The particle swarm optimization algorithm : convergence analysis and parameter selection. *Information processing letters*, 85(6) :317–325, 2003.
- [81] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7 :308, 1965.
- [82] E. Rigaud and J. Sabot. Effect of elasticity of shafts, bearings, casing and couplings on the critical rotational speeds of a gearbox. *VDI Berichte*, 1230 :833–845, 1996.
- [83] T. Amado. *Modélisation d'un système dynamique à jeu du groupe motopropulseur*. PhD thesis, 2006.

- [84] R. Prud'homme. Dimensionless numbers and similarity. In *Flows of Reactive Fluids*, volume 94 of *Fluid Mechanics and Its Applications*, pages 97–108. Birkhäuser Boston, 2010.
- [85] M. Nagurka and S. Huang. A mass-spring-damper model of a bouncing ball. *International Journal of Engineering Education*, 22(2) :393, 2006.
- [86] A. Carbonelli, J. Perret-Liaudet, E. Rigaud, and M.-S. Feki. Investigation of restitution coefficient and spring-damper models for the bouncing ball problem. In *8th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, IDETC/CIE*, 2011.
- [87] H. J. Stetter. Analysis of discretization methods for ordinary differential equations (Hans j. stetter). *SIAM Review*, 16(4) :561, 1974.
- [88] E. L. Allgower and K. Georg. *Introduction to numerical continuation methods*, volume 45. Society for Industrial Mathematics, 2003.
- [89] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, dec 2008.
- [90] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer, dec 2009.



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur J. PERRET-LIAUDET

et les rapports de

Monsieur M. OUISSE

Professeur - Institut FEMTO ST - UMR CNRS 6174 - Département de mécanique appliquée (LMARC)  
24 chemin de l'épitaphe - 25000 Besançon cedex

Et de

Monsieur M. POTIER-FERRY

Professeur - MEM3 - Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Métaux  
UMR CNRS 7239 - Université Paul Verlaine - Ile du Saulcy - 57045 Metz cedex 1

**Monsieur CARBONELLI Alexandre**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 29 octobre 2012

P/Le directeur de l'E.C.L.  
La directrice des Etudes

