



**HAL**  
open science

# Calcul du rayonnement acoustique de structures à partir de données vibratoires par une méthode de sphère équivalente

Laurent Bouchet

► **To cite this version:**

Laurent Bouchet. Calcul du rayonnement acoustique de structures à partir de données vibratoires par une méthode de sphère équivalente. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 1996. Français. NNT: . tel-00778519

**HAL Id: tel-00778519**

**<https://theses.hal.science/tel-00778519>**

Submitted on 21 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée devant*

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

*pour obtenir*

**LE GRADE DE DOCTEUR**

FORMATION DOCTORALE: ACOUSTIQUE  
ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR DE LYON:  
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)  
ECL - INSA - UCBL

PAR

**Laurent BOUCHET**

Ingénieur ECL

**CALCUL DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DE STRUCTURES**

**A PARTIR DE DONNEES VIBRATOIRES**

**PAR UNE METHODE DE SPHERE EQUIVALENTE**

Soutenue le 18 décembre 1996 devant la Commission d'Examen :

Jury MM. C. BOISSON  
M.A. HAMDI ( rapporteur )  
N. HAMZAOUI  
E. LANDEL  
C. LESUEUR  
T. LOYAU  
J.C. PASCAL ( rapporteur )

---

NOVEMBRE 1995

## INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur: J. ROCHAT

Professeurs:

S.	AUDISIO	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
J.C.	BABOUX	GEMPM
J.	BAHAUD	MECANIQUE DES SOLIDES
B.	BALLAND	PHYSIQUE DE LA MATIERE
D.	BARBIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
G.	BAYADA	EQUIPE MOD. MATH. CALC. SC.
C.	BERGER (Mlle)	CETHIL/EQ. PHYSIQUE INDUSTRIELLE
M.	BETEMPS	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
J.M.	BLANCHARD	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
C.	BOISSON	VIBRATIONS ACOUSTIQUE
M.	BOIVIN	MECANIQUE DES SOLIDES
H.	BOTTA	EQUIPE DEVELOPPEMENT URBAIN
G.	BOULAYE	L.I.S.I.
J.	BRAU	CETHIL/EQ. EQUIPEMENT DE L'HABITAT
M.	BRUNET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.C.	BUREAU	THERMOCHIMIE MINERALE
J.P.	CHANTE	COMPOSANTS DE PUISSANCE ET APPLICATIONS
B.	CHOCAT	METHODES
B.	CLAUDEL	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
M.	COUSIN	BETON ET STRUCTURES
L.	CRONENBERGER	CHIMIE BIOLOGIQUE
M.	DIOT	THERMOCHIMIE MINERALE
A.	DOUTHEAU	CHIMIE ORGANIQUE
J.C.	DUPUY	PHYSIQUE DE LA MATIERE
H.	EMPTOZ	MOD. SYST. ET REC. DES FORMES
C.	ESNOUF	GEMPPM*
G.	FANTOZZI	GEMPPM*
J.	FAUCHON	C.A.S.M.
J.	FAVREL	L.I.S.P.I.
G.	FERRARIS-BESSO	MECANIQUE DES STRUCTURES
Y.	FETIVEAU	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
L.	FLAMAND	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	FLEISCHMANN	GEMPPM*
A.	FLORY	L.I.S.I.
R.	FOUGERES	GEMPPM*
L.	FRECON	D.E.L.I.A.
R.	GAUTHIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	GERY	CETHIL/EQ. EQUIPEMENT DE L'HABITAT
G.	GIMENEZ	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASON
P.	GOBIN	GEMPPM*
P.	GONNARD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
R.	GOUTTE	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASON
G.	GRANGE	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	GUENIN	GEMPPM*
G.	GUILLOT	PHYSIQUE DE LA MATIERE

---

<b>A. GUINET</b>	L.I.S.P.I.
<b>C. GUITTARD</b>	D.E.L.I.A.
<b>J.L. GUYADER</b>	VIBRATIONS ACOUSTIQUE
<b>J.P. GUYOMAR</b>	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
<b>J.M. JOLION</b>	L.I.S.P.I.
<b>J. JOUBERT</b>	GENIE MECANIQUE
<b>J.F. JULLIEN</b>	BETON ET STRUCTURES
<b>A. JUTARD</b>	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
<b>R. KASTNER</b>	GEOTECHNIQUE
<b>H. KLEIMANN</b>	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
<b>J. KOULOUMDJIAN</b>	L.I.S.I.
<b>M. LAGARDE</b>	CHIMIE BIOLOGIQUE
<b>M. LALANNE</b>	MECANIQUE DES STRUCTURES
<b>A. LALLEMAND</b>	CETHIL/EQ. ENERGETIQUE ET THERMIQUE
<b>M. LALLEMAND (Mme)</b>	CETHIL/EQ. ENERGETIQUE ET THERMIQUE
<b>P. LAREAL</b>	GEOTECHNIQUE
<b>A. LAUGIER</b>	PHISYQUE DE LA MATIERE
<b>Ch. LAUGIER</b>	PHYSIOLOGIE ET PHARMACODYNAMIE
<b>P. LEJEUNE</b>	G.M.M.O.
<b>C. LESUEUR</b>	VIBRATIONS ACOUSTIQUE
<b>A. LUBRECHT</b>	MECANIQUE DES CONTACTS
<b>Y. MARTINEZ</b>	L.I.S.P.I.
<b>H. MAZILLE</b>	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
<b>P. MERLE</b>	GEMPPM*
<b>J. MERLIN</b>	GEMPPM*
<b>J.P. MILLET</b>	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
<b>M. MIRAMOND</b>	METHODES
<b>N. MONGEREAU</b>	GEOTECHNIQUE
<b>R. MOREL</b>	MECANIQUE DES FLUIDES
<b>P. NARDON</b>	GEOLOGIE APPLIQUEE
<b>A. NAVARRO</b>	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
<b>M. OTTERBEIN</b>	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
<b>J.P. PASCAULT</b>	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
<b>J. PERA</b>	MATERIAUX MINERAUX
<b>G. PERACHON</b>	THERMOCHIMIE MINERALE
<b>M. PERDRIX</b>	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
<b>J. PEREZ</b>	GEMPPM*
<b>Q. PHAM</b>	L.M.M.
<b>P. PINARD</b>	PHYSIQUE DE LA MATIERE
<b>J.M. PINON</b>	L.I.S.I.
<b>D. PLAY</b>	C.A.S.M.
<b>J. POUSIN</b>	EQUIPE MOD. MATH. ET CALCUL SCIEN.
<b>P. PREVOT</b>	L.I.S.P.I.
<b>R. PROST</b>	TRAITEMENT DU SIGNAL ET DES ULTRASONS
<b>M. RAYNAUD</b>	CETHIL/EQUIPE GMC
<b>J.M. REYNOUARD</b>	BETONS ET STRUCTURES
<b>J. ROBERT-BAUDOY (Mme)</b>	G.M.M.O.
<b>A. ROCHE</b>	L.M.M.
<b>D. ROUBY</b>	GEMPPM*
<b>P. RUBEL</b>	L.I.S.I.
<b>J.F. SACADURA</b>	CETHIL/EQUIPE GMC
<b>H. SAUTEREAU</b>	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES

---

<b>S.</b>	<b>SCAVARDA</b>	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
<b>D.</b>	<b>THOMASSET</b>	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
<b>M.</b>	<b>TROCCAZ</b>	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
<b>R.</b>	<b>UNTERREINER</b>	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
<b>J.</b>	<b>VERON</b>	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
<b>A.</b>	<b>VINCENT</b>	GEMPPM*
<b>G.</b>	<b>VIGIER</b>	GEMPPM*
<b>P.</b>	<b>VUILLERMOZ</b>	PHYSIQUE DE LA MATIERE

Directeurs de recherche C.N.R.S. :

<b>Y.</b>	<b>BERTHIER</b>	MECANIQUE DES CONTACTS
<b>P.</b>	<b>CLAUDY</b>	THERMOCHIMIE MINERALE
<b>M.</b>	<b>MURAT</b>	GEMPPM*
<b>A.</b>	<b>NOUAILHAT</b>	PHYSIQUE DE LA MATIERE
<b>M.A.</b>	<b>MANDRAND (Mme)</b>	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES

Directeurs de recherche I.N.R.A. :

<b>G.</b>	<b>BONNOT</b>	BIOLOGIE
<b>S.</b>	<b>GRENIER</b>	BIOLOGIE
<b>Y.</b>	<b>MENEZO</b>	BIOLOGIE

Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M. :

<b>A-F.</b>	<b>PRIGENT (Mme)</b>	CHIMIE BIOLOGIQUE
<b>N.</b>	<b>SARDA (Mme)</b>	CHIMIE BIOLOGIQUE

\* GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

---

INSA DE LYON  
 Département des Etudes Doctorales  
 Octobre 1995

LISTE DES DEA ou FORMATIONS DOCTORALES

<b>FORMATIONS DOCTORALES</b>	<b>RESPONSABLE INSA</b>	<b>ADRESSE INSA</b>
Acoustique	<u>GUYADER Jean Louis</u>	Bât. 303 Tél. 80 80
Analyse et modélisation de systèmes biologiques	NARDON Paul	Bât. 406 Tél. 80 86
Automatique industrielle	SCAVADA Serge	Bât. 303 Tél. 83 41
Biochimie	LAGARDE Michel	Bât. 406 Tél. 82 40
Chimie Inorganique	GONNARD Paul	Bât. 504 Tél. 81 58
Conception en bâtiment et techniques urbaines	<u>MIRAMOND Marcel</u>	Bât. 304 Tél. 85 56
DEA Informatique de Lyon	KOULOUMDJIAN Jacques	Bât. 501 Tél. 80 99
Dispositifs de l'électronique intégrée	<u>PINARD Pierre</u>	Bât. 502 Tél. 82 47
Génie biologique et médical	MAGNIN Isabelle	Bât. 502 Tél. 85 63
Génie civil : Sols, matériaux, structures, physique du bâtiment	<u>LAREAL Pierre</u>	Bât. 304 Tél. 82 16
Génie Electrique	CHANTE Jean-Pierre	Bât. 401 Tél. 87 26
Matériaux polymères et Composites	SAUTEREAU Henri	Bât. 403 Tél. 81 78
Mécanique	DALMAZ Gérard	Bât. 113 Tél. 83 03
Microstructure et comportement mécanique et macroscopique des matériaux - génie des matériaux	<u>GUENIN Gérard</u>	Bât. 502 Tél. 82 45
Productique : organisation et conduite des systèmes de production	<u>FAVREL Joël</u>	Bât. 502 Tél. 83 63
Sciences des matériaux et des surfaces	LAUGIER André	Bât. 502 Tél. 82 33
Sciences et techniques du déchet	<u>NAVARRO Alain</u>	Bât. 404 Tél. 84 30
Signal, image, Parole	GIMENEZ Gérard	Bât. 502 Tél. 83 32
Thermique et énergétique	LALLEMAND Monique	Bât. 404 Tél. 81 54

Les responsables soulignés sont également responsables généraux

ECOLE DOCTORALES  
MAI 1996

**Ecole Doctorale Matériaux de Lyon =**  
INSA - ECL - UCBNL - U. Chambéry - ENS

Responsable : Pr. A. HOAREAU

Formations doctorales :

- Génie des matériaux (Pr. GUENIN)
- Sciences des matériaux (Pr. BARRAT)
- Matériaux macromoléculaires et composites (Pr. SAUTEREAU)

**Ecole Doctorale des Sciences pour l'ingénieur de Lyon :**  
**Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA) =**  
ECL - INSA - UCBL

Responsable : Pr. J. BATAILLE

Formations doctorales :

- Acoustique (Pr. GUYADER)
- Génie civil : Sols, Matériaux, Structures physique du bâtiment (Pr. LAREAL)
- Mécanique (Pr. BATAILLE)
- Thermique et Energétique (Pr. LANCE)

**Ecole Doctorale des Sciences pour l'ingénieur de Lyon :**  
**Electronique, Electrotechnique, Automatique (EEA) =**  
INSA - ECL - UCBL - U.Chambéry - U. St Etienne

Responsable : Pr. G. GIMENEZ

Formations Doctorales :

- Acoustique (Pr. GUYADER)
  - Automatique industrielle (Pr. BOLON)
  - Dispositifs de l'électronique intégrée (Pr. PINARD)
  - Génie biologique et médical (Pr. COLLOMBEL)
  - Génie Electrique (Pr. AURIOL)
  - Signal, image, parole (Pr. LACOUME)
-

*A ma famille*

*A Karine*

---



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier chaleureusement M. BOISSON et M. HAMZ AOUI pour l'encadrement de cette thèse, pour leur aide et leurs idées.

Je remercie M. ARBEY, M. LOVAT et M. THOMÉ d'avoir initié cette thèse au sein du laboratoire d'acoustique de l'INRS et de m'avoir associé pendant trois ans aux activités de ce laboratoire. Que Thierry LOYAU trouve dans ces quelques mots toute la reconnaissance et l'estime que je lui porte pour avoir su patiemment m'écouter et me conseiller.

Je remercie M. HAMDI et M. PASCAL qui ont accepté de rapporter ce mémoire. Mes remerciements vont également à M. L ANDEL et M. L ESUEUR pour leur participation au jury et pour les discussions fructueuses qui l'ont précédée.

Un grand merci enfin aux membres du laboratoire d'acoustique de l'INRS et du laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA pour leur accueil et leur disponibilité.

---



## RESUME:

La prévision du bruit rayonné par une structure vibrante à partir de données vibratoires calculées ou mesurées intéresse de nombreux industriels qui, dès le stade de la conception, peuvent prévoir, analyser et éventuellement corriger les nuisances sonores engendrées par une machine. Grâce aux récents développements des moyens de calcul numériques, les travaux de recherche théoriques et expérimentaux dans le domaine de la vibro-acoustique ont fortement progressé. Ils ont conduit à des logiciels de calcul basés sur des méthodes d'éléments finis ou d'éléments finis de frontière qui nécessitent cependant des investissements importants : calculateurs puissants et utilisateurs avertis. Afin de réduire les temps de calcul, le principe des sources équivalentes a été appliqué en remplaçant la structure vibrante par une sphère qui va générer le même rayonnement acoustique que cette structure. Le champ de vitesse vibratoire à la surface de la structure étant supposé connu par le calcul ou par la mesure, il est utilisé pour déterminer le champ de vitesse à la surface de la sphère équivalente par minimisation (méthode de la sphère équivalente proprement dite) ou par projection (approche géométrique). Les deux méthodes sont validées sur des exemples numériques et expérimentaux lorsque la structure admet une géométrie simple et compacte. Différents paramètres qui permettent de caractériser le modèle (rayon et position de la sphère par exemple) ainsi que la précision et la stabilité des résultats en fonction du maillage vibratoire et des erreurs de mesure sont discutés.

## SUMMARY:

The prediction of sound radiated by vibrating structures using measured or calculated data is of interest to many manufacturers because it allows them to anticipate, analyze and correct the noise emitted by a machine. Numerical methods for solving acoustic radiation problems such as Finite Element Method or Boundary Element Method have been widely developed but still remain difficult to apply since they require powerful calculators and experienced users. In order to limit computation time, the principle of equivalent sources has been applied and the structure replaced by a sphere which radiates the same acoustic field as the structure's one. The normal velocity field on the surface of the structure, which is assumed to be measured or calculated, has been used to calculate the velocity field onto the sphere using a minimization technique (the actual equivalent sphere method) or a direct projection (geometrical approach). Both methods have been validated from numerical and experimental data associated with simple and compact structures. The influence of the model parameters (position and radius of the equivalent sphere as well as vibrational mesh and measurement errors) on the accuracy and stability of the radiated acoustic field has been investigated.

## SOMMAIRE

<b><u>INTRODUCTION</u></b> .....	<b>15-16</b>
<b><u>CHAPITRE I : Exposé du problème et analyse bibliographique</u></b> .....	<b>17-26</b>
<b>1. EXPOSE DU PROBLEME</b> .....	<b>17</b>
<b>2. ANALYSE DES METHODES EXISTANTES</b> .....	<b>18</b>
2.1. METHODE ANALYTIQUE .....	18
2.2. METHODES NUMERIQUES .....	18
2.2.1. <i>Méthode des éléments finis</i> .....	19
2.2.2. <i>Méthodes des éléments finis de frontière</i> .....	19
2.2.3. <i>Méthode des sources équivalentes</i> .....	21
<b>3. METHODE DE LA SPHERE EQUIVALENTE</b> .....	<b>24</b>
3.1. APPLICATION DE LA METHODE DES SOURCES EQUIVALENTE AU CAS DE LA SPHERE .....	24
3.2. APPROCHE GEOMETRIQUE .....	25
<b><u>CHAPITRE II : Méthode de la sphère équivalente</u></b> .....	<b>27-74</b>
<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>27</b>
<b>1. RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE SPHERE VIBRANTE</b> .....	<b>28</b>
1.1. EXPRESSION DE LA PRESSION ACOUSTIQUE RAYONNEE PAR UNE SPHERE .....	28
1.2. EXPRESSION DE LA PUISSANCE ACOUSTIQUE RAYONNEE PAR UNE SPHERE .....	31
1.3. NOTION DE MODES DE RAYONNEMENT .....	32
1.4. NOTION DE MODES RAYONNANTS ET DE MODES NON RAYONNANTS .....	35

1.5. APPLICATION : CRITERE DE TRONCATURE.....	37
<b>2. MODELISATION DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE SURFACE QUELCONQUE A PARTIR DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE SPHERE .....</b>	<b>39</b>
2.1. EXPRESSION DE LA VITESSE PARTICULAIRE RAYONNEE PAR UNE SPHERE EN TOUT POINT DE LA SURFACE VIBRANTE .....	41
2.2. APPLICATION DE LA METHODE DES SOURCES EQUIVALENTES : DETERMINATION DES COEFFICIENTS MODAUX DE LA SPHERE EQUIVALENTE PAR MINIMISATION DE LA VITESSE RESIDUELLE QUADRATIQUE .....	43
2.2.1. <i>Aspect théoriques et expression d'un premier système linéaire</i> .....	43
2.2.2. <i>Choix d'une méthode d'intégration simple et expression d'un système linéaire approché</i> .....	45
2.2.2.1 Cas général.....	45
2.2.2.2 Cas d'un maillage vibratoire régulier.....	48
2.2.3. <i>Choix d'une méthode de résolution</i> .....	51
2.2.3.1 Rappels sur le conditionnement d'un système linéaire .....	51
2.2.3.2. Intérêt de la méthode de Décomposition en Valeurs Singulières .....	54
2.2.3.3. Application au choix du rayon et de la position de la sphère équivalente.....	56
2.2.4. <i>Choix du maillage vibratoire</i> .....	59
2.2.5. <i>Choix du nombre de coefficients modaux à déterminer</i> .....	63
2.3. METHODE GEOMETRIQUE .....	68
<b>3. CONCLUSION.....</b>	<b>72</b>

## **CHAPITRE III : Validations numériques.....75-140**

<b>1. INTRODUCTION.....</b>	<b>75</b>
<b>2. CALCUL DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE SPHERE VIBRANTE.....</b>	<b>76</b>
2.1. DEFINITION D'UN MAILLAGE VIBRATOIRE REGULIER .....	77
2.2. CHOIX DU RAYON ET DE LA POSITION DE LA SPHERE EQUIVALENTE .....	78
2.2.1. <i>Cas d'une sphère équivalente identique à la sphère vibrante</i> .....	78
2.2.2. <i>Influence du rayon de la sphère équivalente</i> .....	86
2.2.3. <i>Comparaison sphère / multipôle</i> .....	91
2.2.4. <i>Cas d'une sphère équivalente décentrée</i> .....	95
2.3. COMPARAISON AVEC LA SOLUTION ANALYTIQUE .....	105

2.3.1. Calcul du rayonnement acoustique d'une portion de sphère pulsante.....	105
2.3.2. Calcul du rayonnement acoustique d'une sphère pulsante à partir d'une sphère équivalente décentrée...	112
2.3.3. Conclusion .....	118
<b>3. CALCUL DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE BOITE .....</b>	<b>120</b>
3.1. DEFINITION DU MAILLAGE VIBRATOIRE.....	120
3.2. CHOIX DE LA POSITION ET DU RAYON DE LA SPHERE EQUIVALENTE.....	121
3.3. COMPARAISON AVEC UNE METHODE INTEGRALE .....	123
3.1. Description de la méthode utilisée.....	123
3.2. Comparaison des résultats.....	125
<b>4. APPLICATION DE LA METHODE GEOMETRIQUE.....</b>	<b>132</b>
4.1. CALCUL DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE INSEREE DANS UN BAFFLE RIGIDE.....	132
4.2. CALCUL DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UN CUBE .....	136
<b>5. CONCLUSION.....</b>	<b>138</b>
<b><u>CHAPITRE IV</u> : Validations expérimentales .....</b>	<b>141-154</b>
<b>1. DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL .....</b>	<b>141</b>
<b>2. COMPORTEMENT VIBRATOIRE DE LA BOITE.....</b>	<b>143</b>
<b>3. PRISE EN COMPTE DU SOL REFLECHISSANT PAR LA METHODE DES IMAGES .....</b>	<b>144</b>
<b>4. COMPARAISON CALCULS/MESURES .....</b>	<b>147</b>
4.1. CARACTERISTIQUES DE LA SPHERE EQUIVALENTE UTILISEE - RESULTATS.....	147
4.2. ANALYSE DU MODELE DE LA SPHERE EQUIVALENTE .....	149
<b>5. APPLICATION DE LA METHODE GEOMETRIQUE.....</b>	<b>152</b>
<b>6. CONCLUSION.....</b>	<b>154</b>

**CHAPITRE V : CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....155-158**

**1. SYNTHESE DES CONCLUSIONS..... 155**

**2. VALIDATIONS ET SOLUTIONS PROPOSEES..... 156**

**3. PERSPECTIVES..... 157**

**ANNEXES.....159-246**

A1. Rappels des propriétés des fonctions de Legendre et des fonctions de Hankel sphériques ..... 159

A2. Définition des fonctions d'onde sphériques et d'un multipôle - Propriétés et application à la méthode de la sphère équivalente ..... 175

A3. Prise en compte des erreurs de mesure par la méthode de la sphère équivalente ..... 179

A4. Propriétés du rayonnement acoustique d'une sphère équivalente dont les coefficients modaux sont solution du système linéaire (II.42)..... 187

A5. Critère d'échantillonnage pour la décomposition de la vitesse vibratoire d'une sphère dans l'ensemble des fonctions harmoniques sphériques ..... 191

A6. Expression du rayonnement acoustique d'une surface vibrante à partir du rayonnement acoustique d'une sphère qui englobe cette surface..... 197

A7. Unicité de la décomposition de la pression acoustique rayonnée par une structure vibrante dans l'ensemble des fonctions d'onde sphériques ..... 201

A8. Calcul du rayonnement acoustique d'une portion de sphère pulsante..... 203

A9. Figures associées à la modélisation du rayonnement acoustique d'une boîte (chapitre III)..... 205

A10. Méthode géométrique : Définitions des projections et application au cas d'un cube..... 217

A11. Méthodes des images et orthogonalité des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  ..... 225

A12 Figures associées au chapitre IV ..... 229

A.13 Extension de la méthode de la sphère équivalente au cas de plusieurs sphères - Application au calcul du rayonnement acoustique d'une boîte..... 243

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....247-252**

## INTRODUCTION

Plus d'un siècle après le début de la révolution industrielle, les outils et les machines se sont multipliés jusqu'à investir tous les domaines de l'activité humaine. De la conception à la fabrication, les machines intègrent désormais des technologies complexes qui témoignent du savoir-faire des entreprises. Les compétences acquises dans de nombreuses branches de la physique leur permettent d'en améliorer quotidiennement les performances. Chacun peut cependant constater que d'importants progrès restent encore à réaliser dans le domaine du bruit généré par ces machines.

On estime en effet aujourd'hui en France à 1.800.000 personnes le nombre de travailleurs exposé à des niveaux sonores supérieurs à 85 dB A. Reconnue comme maladie professionnelle depuis 1963, le bruit coûte cher aux entreprises (environ 500 kF par an et par surdité reconnue). La protection des travailleurs exposés à des niveaux de bruits élevés met en oeuvre de nombreuses techniques d'insonorisation coûteuses (traitement acoustique des locaux, capotage des machines) qui s'avèrent dans certains cas insuffisantes. Les directives françaises et européennes mettent aujourd'hui l'accent sur l'importance de la réduction du bruit à la source afin d'assurer la protection des travailleurs (directive CEE 86/188) et la sécurité des machines (directives CEE 89/392 et 91/368). Les constructeurs sont désormais tenus de fournir dans les notices techniques des informations quantitatives sur le bruit émis par les machines. Ces données doivent également être conçues et construites de manière à réduire les risques résultants de leur émission sonore au niveau le plus bas compte tenu des progrès techniques. Au-delà de cet aspect normatif, la réduction du bruit apparaît plus généralement comme un élément de confort qui devient un argument de vente important pour de nombreux industriels dans le domaine de l'électroménager ou de l'automobile par exemple.

L'identification des sources de bruit dans une machine a permis de montrer depuis de nombreuses années la contribution importante des phénomènes d'origine vibratoire. Les efforts mécaniques injectés dans la structure de la machine par les sources d'énergie et les mécanismes qui la constituent génèrent une vibration de la surface de la structure qui engendre du bruit. Grâce aux récents développements des moyens de calculs numériques, les travaux de recherche théoriques et expérimentaux dans le domaine de la vibro-acoustique ont fortement progressé. Des logiciels de calcul de rayonnement acoustique existent déjà sur le marché. Ils nécessitent cependant des investissements importants - calculateurs puissants et utilisateurs avertis - qui les rendent encore difficilement accessibles à la majorité des bureaux d'études.

C'est dans le cadre de la prévention des surdités professionnelles que le Laboratoire d'Acoustique Industrielle de l'Institut National de Recherche et de Sécurité développe des outils de calcul d'aide à la conception de machines plus silencieuses qui soient simples d'utilisation et qui limitent les temps de calculs<sup>(1)</sup>. Destinés aux industriels, ces codes de calculs permettront de prévoir, d'analyser et éventuellement de corriger les nuisances sonores engendrées par une machine. Les différentes étapes de l'étude du comportement dynamique d'une structure sont ainsi traitées. La détermination des efforts mécaniques injectés (étape n°1), le calcul de l'état vibratoire (étape n°2) et le calcul du rayonnement acoustique (étape n°3) font l'objet de différentes études où interviennent des compétences internes et externes au laboratoire.

Développé en collaboration avec le Laboratoire Vibrations-Acoustique de l'Institut National des Sciences Appliquées, le travail présenté dans ce mémoire s'intéresse au calcul du rayonnement acoustique des structures (étape n°3) dans le domaine des basses fréquences. L'état vibratoire de la structure est supposé connu (étapes n°1 et n°2). On fait ainsi abstraction de l'origine des sources acoustiques et vibratoires placées à l'intérieur de la structure pour ne s'intéresser qu'au champ vibratoire qu'elles induisent à la surface de la structure. Notons que la connaissance du champ de vitesse peut être le résultat d'une analyse modale - issu d'un calcul par éléments finis et/ou de mesures sur un prototype - ou de mesures directes sur la structure (à l'aide d'accéléromètres ou d'un vibromètre laser par exemple).

Les différentes méthodes qui permettent de calculer le rayonnement acoustique d'une structure à partir de données vibratoires dans le domaine des basses fréquences vont être rappelées dans le premier chapitre. Elles font en général appel à des méthodes de types éléments finis ou éléments finis de frontières dont la mise en oeuvre reste complexe et qui entraînent des temps de calculs importants. Nous nous sommes donc intéressés au principe des sources équivalentes qui consiste à remplacer la structure vibrante par un ensemble de sources acoustiques élémentaires placées à l'intérieur de la structure. Les temps de calcul sont alors fortement réduits si le rayonnement acoustique de la structure peut être approché à l'aide d'un faible nombre de sources. Le nombre ainsi que la position de ces sources ne sont cependant pas connus *a priori*. La démarche que nous avons adoptée consiste à choisir une source équivalente unique mais plus complexe : une sphère. Le rayonnement acoustique d'une sphère s'exprime en effet simplement en fonction du champ de vitesse vibratoire à sa surface. Deux approches sont alors présentées dans le second chapitre de ce mémoire. Elles permettent de déterminer ce champ de vitesse en fonction de divers paramètres (rayon et position du centre de la sphère, maillage vibratoire, ...). Dans le troisième chapitre, ces deux approches sont illustrées et validées sur des exemples numériques simples. Différents critères permettant de déterminer la qualité du modèle sont également discutés. Les résultats obtenus dans le cas d'une boîte rectangulaire sont comparés à ceux obtenus par une méthode d'éléments finis de frontière. Une application expérimentale est finalement présentée dans le quatrième chapitre. Une boîte posée sur un sol réfléchissant est excitée par un pot vibrant. Pour prendre en compte l'effet du sol réfléchissant, on applique la méthode des images. Le rayonnement acoustique de la boîte calculé par la méthode de la sphère équivalente est alors comparé à la mesure et au rayonnement acoustique calculé par une méthode d'éléments finis de frontière.

# CHAPITRE I

## Exposé du problème et analyse bibliographique

### 1. Exposé du problème

La prédiction du bruit rayonné par une structure vibrante à partir de données vibratoires calculées ou mesurées est un problème classique dans le domaine de la vibro-acoustique. Il intéresse de nombreux industriels qui, dès le stade de la conception, veulent prévoir, analyser et éventuellement corriger les nuisances sonores engendrées par une machine. Les logiciels actuellement proposés font appels à des techniques de calculs qui demandent des moyens numériques importants et difficiles à mettre en oeuvre. Toute méthode approchée qui tend à limiter les besoins informatiques présente donc un intérêt majeur. Le modèle utilisé est celui d'une structure fermée entourée d'un fluide parfait, homogène, compressible et infini. Il suppose l'absence de phénomènes aérodynamiques (couplages avec un écoulement) et thermodynamiques (couplage avec des sources de chaleur). Cette structure est soumise à une excitation harmonique qui génère en tout point  $M_s$  de sa surface  $S$  un champ de vitesse vibratoire normale  $V_n$  supposé connu pour toutes les fréquences d'excitation. A chaque instant  $t$ , la pression acoustique rayonnée en tout point  $M$  extérieur à  $S$  est notée  $P(M, t)$ . En régime harmonique de pulsation  $\omega = 2\pi f$ , on suppose une dépendance temporelle de la forme  $P(M, t) = P(M)e^{j\omega t}$ . Les hypothèses de l'acoustique linéaire classique nous permettent de définir la pression acoustique rayonnée comme la solution d'un système différentiel de type Neumann extérieur non-homogène défini par:

- l'équation de Helmholtz en tout point  $M$  extérieur à la structure

$$\Delta P(M) + k^2 P(M) = 0 \quad (\text{I.1a})$$

- les conditions aux limites pour tout point  $M_s$  appartenant à la structure

$$\frac{\partial P(M_s)}{\partial n_{M_s}} = -j\omega\rho_0 V_n(M_s) \quad (\text{I.1b})$$

- la condition de rayonnement de Sommerfeld à l'infini

$$\lim_{r=|\vec{OM}| \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial P(M)}{\partial r} + jkP(M) \right) = 0 \quad (\text{I.1c})$$

où

$k$  est le nombre d'onde associé au milieu fluide ( $k = \frac{\omega}{c_0}$ )

$c_0$  est la vitesse de propagation du son dans le fluide

$n_{M_s}$  est la normale extérieure à la structure au point  $M_s$

$\rho_0$  est la masse volumique du fluide

D'un point de vue mathématique c'est un problème bien posé qui admet une solution unique pour toutes les fréquences.

## 2. Analyses des méthodes existantes

### 2.1. Méthode analytique

Le système différentiel (I.1) peut se résoudre par une méthode analytique qui consiste à chercher la solution sous la forme d'une série de fonctions. Dans notre cas, il s'agit des fonctions d'onde constituées par les vecteurs propres de l'opérateur d'Alembertien  $\Delta + k^2$  qui vérifient la condition de rayonnement de Sommerfeld. Ces fonctions constituent les modes de rayonnement acoustique de certaines structures dites idéales. Morse et Feshbach<sup>(2)</sup> ont répertorié les 11 systèmes de coordonnées qui permettent, dans un espace à trois dimensions, de déterminer ces fonctions propres en appliquant la méthode de séparation des variables. En pratique on s'est surtout intéressé aux systèmes de coordonnées qui génèrent des surfaces de géométries simples lorsque l'on rend constant l'une des coordonnées. Ces surfaces peuvent être fermées (sphères et sphéroïdes) ou non fermées (plaque infinie et cylindre de longueur infinie). Le rayonnement acoustique de ces structures idéales s'exprime ainsi analytiquement au moyen de séries de fonctions plus ou moins faciles à calculer. Dans le système de coordonnées propre à chacune de ces géométries, les conditions aux limites permettent de calculer directement les coefficients de ces séries. Cette propriété constitue le principal intérêt de la méthode. L'expression analytique de la pression acoustique est donc bien connue pour ces structures même si la convergence des séries n'est pas toujours numériquement accessible. Les résultats obtenus servent en général de référence pour valider les autres méthodes.

### 2.2. Méthodes numériques

Dans le cas d'une structure quelconque, on ne sait pas exprimer les modes de rayonnement acoustique sous une forme analytique. La résolution du système différentiel (I.1) fait alors appel à des méthodes approchées qui nécessitent des outils numériques avancés que le développement des calculateurs a rendu possible depuis quelques années.

### 2.2.1. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique numérique qui permet de résoudre de manière approchée les équations différentielles linéaires quelles que soient les conditions aux limites que l'on impose. Elle consiste plus précisément à transformer le système différentiel en un système d'équations linéaires qui présente l'avantage d'être creux et symétrique.

Pour des problèmes de rayonnement acoustique, c'est le milieu de propagation qu'il faut discrétiser. S'il existe déjà des logiciels commercialisés qui traitent les problèmes intérieurs à partir de ces méthodes, les problèmes extérieurs qui nous intéressent nécessitent une approche différente. En effet, il faut imposer sur une surface finie qui entoure la structure vibrante une condition aux limites équivalente à la condition de Sommerfeld. Cette nouvelle condition aux limites peut être déterminée de manière exacte<sup>(3)</sup> ou approchée par itération<sup>(4)</sup>. Lorsque cette surface de contour est une surface idéale, au sens du paragraphe 2.1, on peut effectuer un raccordement analytique. Dans le cas d'une sphère par exemple, on peut utiliser le développement en série sur les fonctions d'onde sphériques pour calculer la pression acoustique rayonnée à l'extérieur de la sphère<sup>(5)</sup>. Le raccordement avec des solutions analytiques permet de limiter le volume à discrétiser pour réduire la dimension des matrices et les temps de calculs tout en traduisant correctement la décroissance du champ acoustique lorsque l'on s'éloigne de la structure.

Une variante intéressante consiste par exemple à définir des éléments dits infinis au-delà de la surface vibrante avec un modèle de décroissance donné qui respecte la condition de Sommerfeld<sup>(6,7)</sup>. Bien que les matrices rencontrées soient en général creuses et symétriques, le maillage tridimensionnel rend la méthode très coûteuse en temps de calcul lorsque la surface vibrante est grande devant la longueur d'onde acoustique. Il rend également l'utilisation d'un mailleur de volume quasiment indispensable.

### 2.2.2. Méthodes des éléments finis de frontière

Le maillage tridimensionnel imposé par la méthode des éléments finis peut sembler d'autant plus inadapté à notre problème que le milieu de propagation est supposé homogène. En effet, le théorème de Green permet de faire passer le problème de sa forme différentielle (1.1) à une forme intégrale connue sous le nom d'équation intégrale de Helmholtz. Le champ acoustique rayonné ne dépend alors que des valeurs de pression et de vitesse à la surface de la structure ainsi que du choix d'une fonction de propagation qui respecte la condition de rayonnement de Sommerfeld (la fonction de Green en champ libre  $G_0$  par exemple). La vitesse vibratoire étant connue, l'essentiel du calcul est reporté sur la détermination de la pression pariétale. L'équation intégrale de Helmholtz doit pour cela être discrétisée par une méthode de type collocation. Elle conduit à la résolution d'un système matriciel carré dont la dimension est directement liée au nombre de points de maillage à la surface de la structure. La pression pariétale en ces points joue le rôle d'inconnue. Dans ces méthodes dites intégrales, seule la discrétisation de la surface est nécessaire. On a donc gagné une dimension pour les éléments de discrétisation appelés désormais éléments finis de frontière ou éléments finis de surface pour bien les différencier des éléments finis classiques volumiques. En contre partie, les systèmes matriciels formés sont pleins et non symétriques. Quelle que soit la fréquence de l'excitation à laquelle est soumise la structure, on peut démontrer l'existence d'une solution au système linéaire ainsi formé.

Cette formulation doit cependant faire face au problème des fréquences dites critiques, caractéristiques ou encore irrégulières. C'est un problème qui caractérise les intégrales de Freedom de première espèce dont fait partie l'intégrale de Helmholtz <sup>(8)</sup>. Il est lié au choix de la fonction de Green en champ libre comme fonction de propagation <sup>(9)</sup> et se traduit par une perte de l'unicité de la solution lorsque la fréquence d'excitation correspond à une fréquence propre du système différentiel de Dirichlet homogène intérieur associé à au problème (I.1). A proximité de ces fréquences, le système devient mal conditionné et peut conduire à des résultats erronés. Ces "accidents" sont d'autant plus nombreux que la fréquence augmente. Pour une structure de géométrie quelconque il est impossible de les prévoir sans résoudre le problème de Dirichlet intérieur.

Diverses solutions ont été proposées pour surdéterminer le système matriciel carré initial afin de rendre le rang du système suffisant et assurer l'unicité de la solution. Reprenant une idée présentée par Copley <sup>(10)</sup> en 1967, Schenk <sup>(11)</sup> a proposé dès 1968 une méthode connue sous l'acronyme CHIEF. Elle consiste à appliquer l'équation de Helmholtz en certains points choisis à l'intérieur de la structure. En effet, parmi l'infinité de solutions qui existe aux fréquences critiques, une seule vérifie à la fois le problème intérieur et extérieur. La solution du nouveau système matriciel rectangulaire est déterminée au sens des moindres carrés. Le choix de points intérieurs reste cependant une étape capitale. En effet, le rang du système ne sera augmenté que si les points choisis n'appartiennent pas aux surfaces nodales du volume intérieur associées au problème de Dirichlet. Pour une structure quelconque on ne connaît pas ces surfaces nodales. De plus, lorsque la fréquence augmente, la distance entre les surfaces nodales diminue <sup>(12)</sup> et la difficulté de trouver les points intérieurs rend la méthode délicate.

Il faut noter également que l'équation intégrale de Helmholtz fait intervenir la dérivée de la fonction de Green  $G_0$  par rapport à la normale à la surface. Lorsque le point courant d'intégration coïncide avec les points où la pression pariétale est calculée l'intégrale devient singulière. Elle doit donc être calculée au sens de la valeur principale de Cauchy par des techniques numériques spécifiques qui augmentent les temps de calcul.

Piaszczyk et Klosner <sup>(13)</sup> ont également proposé de surdéterminer le système linéaire en ajoutant un certain nombre d'équations obtenues cette fois pour des points qui appartiennent au champ lointain de la structure vibrante. Le champ de pression rayonnée en ces points supplémentaires est calculé à partir d'une hypothèse d'onde plane appliquée à la surface de la structure. La pression pariétale est alors déterminée pour toutes les fréquences en résolvant un système rectangulaire au sens des moindres carrés. Dans un second temps, la pression pariétale solution du système est utilisée pour recalculer le champ de pression aux points supplémentaires. Si le résultat est différent de celui obtenu par l'hypothèse d'onde plane, alors on résout un nouveau système rectangulaire défini par les nouvelles valeurs de pression aux points supplémentaires. Le procédé est répété jusqu'à ce qu'un critère de convergence donné soit vérifié. Cette démarche a été testée sur des surfaces de révolution mais des doutes subsistent sur la convergence de la méthode dans un cas général.

La méthode proposée par Burton et Miller <sup>(14)</sup> en 1971 consiste à former un système matriciel à partir d'une combinaison linéaire entre l'équation intégrale de Helmholtz et sa dérivée par rapport à la normale en tout point de la surface. L'existence et l'unicité de la solution sont assurées dès que le coefficient de couplage entre les deux équations est un nombre complexe de partie imaginaire non

nulle. Certaines intégrales font intervenir cette fois la dérivée seconde de  $G_0$ . Elles deviennent alors singulières et doivent être calculées au sens de la partie finie d' Hadamard. Des simplifications ont été présentées par Terai <sup>(15)</sup> et Reut <sup>(16)</sup> qui permettent de calculer ces intégrales sans faire appel à des techniques d'intégration numériques trop coûteuses en temps de calcul.

En 1989, Cunefare *et al* <sup>(17)</sup> ont appliqué cette méthode à l' équation intégrale de Helmholtz intérieure. En choisissant des points à l'intérieur de la structure, les intégrales qui dépendent de la dérivée seconde de  $G_0$  ne sont plus singulières.

La méthode du champ nul <sup>(18,19)</sup> consiste à calculer la pression pari étale à partir d' un développement en série de la fonction de Green en champ libre sur la base des fonctions d' onde sphériques. L' orthogonalité de ces fonctions d' onde conduit à un système linéaire que l' on peut résoudre au sens des moindres carrés. Elle est plus généralement connue sous le nom de " T-matrix method" (TMM) dans le domaine de la diffraction des ondes électromagnétiques et acoustiques <sup>(20)</sup>. Stupfel *et al* <sup>(21)</sup> ont couplé cette méthode avec la méthode intégrale pour surdéterminer le système carré initial. Ils ont cependant remarqué que la convergence numérique de la série peut poser des problèmes d' une part lorsque la fréquence augmente et, d' autre part, lorsque la surface  $S$  est très différente d' une sphère. Sur ce dernier point, on se référera par exemple à l' article de Tobocman <sup>(22)</sup> qui compare la méthode TMM à une méthode intégrale et illustre la lenteur de la convergence des fonctions d' onde sphériques. Jones <sup>(23)</sup> a néanmoins montré l' existence et l' unicité de la solution sur une certaine gamme de fréquence lorsque l' on ne considère qu' un nombre fini de termes de la série.

Les méthodes indirectes appartiennent également aux méthodes des éléments finis de frontière. Elles consistent à chercher des distributions de sources simples ponctuelles à la surface de la structure. La contribution de chacune des sources est déterminée à partir des conditions aux limites. On distingue le potentiel de simple couche, qui correspond au saut de vitesse entre les deux côtés de la surface vibrante, et le potentiel de double couche, qui correspond au saut de pression acoustique. Cette formulation permet de traiter les surfaces non fermées. Elle est également sensible au problème des fréquences irrégulières car la fonction de propagation associée à chacune de ces sources est définie simplement à partir de la fonction de Green  $G_0$ . Une solution unique pour toutes les fréquences est obtenue en combinant les potentiels de simple et double couche <sup>(24)</sup>. Les méthodes indirectes s' appuient sur une discrétisation de la surface vibrante où coïncident les points sources et les points où la vitesse est connue. Les intégrales qui font intervenir les dérivées premières et secondes de  $G_0$  deviennent alors singulières et doivent être calculées respectivement au sens de la valeur principale de Cauchy et au sens de la partie finie d' Hadamard. Les temps de calcul sont bien sûr plus importants.

Les méthodes indirectes présentent donc de nombreuses similitudes avec les méthodes intégrales directes. Seule la nature des inconnues est différente. Dans un cas on introduit des densités de sources et dans l' autre c' est directement la pression pari étale qu' il faut calculer. On peut noter également une troisième formulation obtenue en résolvant le système (I.1) par une méthode variationnelle <sup>(25)</sup>.

Les logiciels vendus actuellement dans le domaine du rayonnement acoustique de structures sont en majorité issus de ces méthodes. Les systèmes linéaires que l' on est amené à résoudre sont pleins. Les temps de calcul sont donc directement liés à la dimension du système, c' est-à-dire au nombre de points de maillage sur la surface vibrante. Le pas de maillage est donc un paramètre

important. Il doit être choisi de manière à assurer une représentativité suffisante de l'état vibratoire sans pour autant conduire à des temps de calcul inutilement long. Seuls les modes vibratoires associés à une fréquence critique inférieure à la fréquence d'excitation auront une contribution importante au rayonnement. La détermination d'un maillage optimal ne peut donc se faire sans connaître les modes propres de la structure ainsi que la répartition modale pour chaque fréquence d'excitation. Lorsque l'on ne connaît pas les modes de la structure on applique en général un critère simple de quatre à six points de maillage par longueur d'onde acoustique. On peut montrer dans le cas d'une plaque insérée dans un baffle que ce critère conduit à un maillage surabondant pour un mode donné lorsque la fréquence d'excitation est supérieure à la fréquence critique du mode. Les méthodes qui utilisent les éléments finis de frontière entraînent donc des temps de calcul importants dès que les dimensions de la structure deviennent grandes devant la longueur d'onde acoustique. En 1964, Chertock<sup>(26)</sup> a présenté deux approximations qui permettent d'évaluer simplement la pression pariétale. Dans le domaine des hautes fréquences, il applique une hypothèse d'onde plane et dans le domaine des basses fréquences celle du fluide incompressible. Dans le cas d'une structure de géométrie quelconque les limites d'application de ces approximations ne sont pas encore entièrement explicitées.

### 2.2.3. Méthode des sources équivalentes

La méthode des sources équivalentes consiste à modéliser le champ acoustique rayonné par une structure vibrante complexe par la superposition des champs acoustiques générés par des sources connues placées à l'intérieur de la structure. La contribution de chacune des sources est déterminée en minimisant l'écart entre les conditions aux limites de vitesse imposées à la surface de la structure - supposées connues par mesure ou par calcul - et la vitesse rayonnée par ces sources. Suivant les auteurs, on trouve cette approche sous les noms de "méthodes de superposition" (Koopmann *et al*<sup>(27)</sup>), "méthodes des sources auxiliaires" (Bobrovnikii *et al*<sup>(28)</sup>), "méthode des sources équivalentes" (Tomilina<sup>(29)</sup>) ou encore plus récemment "méthode de simulation de sources" (Ochmann<sup>(30)</sup>).

Ces méthodes se sont développées depuis quelques années pour des sources équivalentes simples de types monopolaires et dipolaires. Elles ont montré dans le cas d'un cylindre<sup>(31)</sup> qu'elles proposaient une alternative intéressante car, contrairement aux méthodes d'éléments finis de frontière, les intégrales que l'on doit calculer ne sont plus singulières. D'autre part, le nombre d'inconnues du problème n'est plus directement lié au nombre de points de maillage sur la structure mais au nombre de sources équivalentes utilisées dans le modèle. La méthode des sources équivalentes présente donc un intérêt majeur si le rayonnement acoustique de la structure peut être approché avec un nombre de sources suffisamment faible.

Lorsque les monopôles et les dipôles sont répartis sur une surface à l'intérieur de la structure vibrante, Hwang et Chang<sup>(32)</sup> ont montré en 1990 que seule une combinaison analogue à celle utilisée dans les méthodes indirectes permettait d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution pour toutes les fréquences. Le problème des fréquences irrégulières est ici lié à la surface qui supporte les sources. Il peut également être évité en plaçant les sources sur une surface simple où ces fréquences peuvent être connues (une sphère par exemple).

La détermination d'une configuration optimale (nombre et position des sources) n'est pas aujourd'hui un problème résolu. D'une part Jeans et Matthews<sup>(33)</sup> ont montré, dans le cas simple d'une sphère et d'un sphéroïde, que le conditionnement du système linéaire que l'on est amené à résoudre se détériore lorsque les sources sont placées loin de la surface vibrante. D'autre part, les intégrales redeviennent singulières si les sources sont trop proches de la surface. L'utilisation de techniques d'optimisation de la position de chacune des sources conduirait à des temps de calcul prohibitifs car le nombre de sources reste en général trop important.

L'utilisation de sources équivalentes plus complexes que les monopôles et les dipôles - mais dont le rayonnement est connu - semble donc une voie intéressante car elle permettrait de limiter le nombre de sources. En 1988, Cremer et Wang<sup>(34)</sup> ont proposé d'utiliser les modes de rayonnement acoustique des sources idéales définis par les méthodes analytiques pour approcher les modes de rayonnement d'une structure. En effet, les méthodes numériques qui ont été présentées utilisent essentiellement la fonction de Green en champ libre comme fonction de propagation. Une partie de l'information sur la géométrie de la structure serait désormais contenue dans des fonctions d'onde plus complexes que la fonction de Green en champ libre. On peut donc s'attendre à une diminution du nombre d'inconnues du problème.

Le multipôle constitue une extension naturelle des sources simples déjà rencontrées. C'est une source ponctuelle que l'on peut définir à partir d'un développement de Taylor de la fonction de Green en champ libre<sup>(35,36)</sup> ou à partir des fonctions d'onde sphériques<sup>(37)</sup>. Morse et Ingard ont montré l'équivalence de ces deux représentations<sup>(37)</sup>. Dans les deux cas le multipôle est défini par une série infinie de fonctions d'onde. Il peut donc être considéré comme un ensemble de sources ponctuelles placées en un même point. Chaque source est associée à une fonction de la série et les coefficients de la série traduisent la participation de chacune des sources.

Le principe des sources équivalentes consiste alors à remplacer la structure vibrante par un multipôle placé à l'intérieur de la structure. Heckl<sup>(38)</sup> et Ochmann<sup>(39)</sup> ont appliqué la méthode des résidus pondérés pour déterminer les coefficients de la série en minimisant l'écart entre la vitesse quadratique calculée et celle connue sur la surface de la structure. Il a été montré que le système matriciel formé ne présentait pas de problèmes de fréquences critiques<sup>(8)</sup>.

Dès 1964, Williams *et al*<sup>(40)</sup> avaient appliqué cette méthode pour modéliser le rayonnement d'un cylindre de longueur finie. La convergence de la série dépend clairement du rapport entre le rayon et la longueur du cylindre. Le choix des fonctions d'onde sphéroïdales est alors proposé pour traiter le cas des sources peu compactes. Le calcul numérique de ces fonctions est cependant plus complexe que celui des fonctions d'onde sphérique (on se référera par exemple à l'article de Burnett<sup>(6)</sup> pour s'en convaincre) et personne ne semble les avoir utilisées dans le domaine des sources équivalentes jusqu'à présent. Lorsque la géométrie de la structure vibrante est éloignée de celle d'une sphère, Ochmann préfère utiliser plusieurs sources multipolaires. Les coefficients de chacune des séries constituent les nouvelles inconnues du problème. Pour déterminer la position optimale des multipôles, les coordonnées de leurs centres sont également considérés comme des inconnues. Un système non-linéaire est alors résolu au sens des moindres carrés en appliquant la méthode de Levenberg-Marquardt<sup>(41)</sup>. Les temps de calcul sont cependant fortement pénalisés. La vitesse quadratique résiduelle, qui mesure l'écart entre la vitesse connue sur la structure et la vitesse calculée par les sources multipolaires, permet de caractériser la précision de la reconstitution des conditions aux limites. On peut cependant remarquer l'absence de critère de choix explicite concernant la troncature des séries et ses conséquences sur le maillage vibratoire. De même, la détermination des coefficients par une minimisation au sens des moindres carrés fait entrer le problème dans la

catégorie des problèmes inverses. Le conditionnement du système linéaire obtenu dans les méthodes de sources équivalentes est donc un paramètre important qui caractérise l'instabilité de la méthode liée au choix des sources équivalentes. Il permet par exemple de relier la précision que l'on peut attendre sur les résultats en fonction de la précision à laquelle les données vibratoires sont connues.

### 3. Méthode de la sphère équivalente

Le principe des sources équivalentes complexes propose donc une alternative intéressante aux méthodes des éléments finis de frontière généralement utilisées dans le domaine du rayonnement acoustique. Il reste encore peu étudié et on se propose dans le cadre de ce mémoire de l'appliquer lorsque la source équivalente est une sphère.

#### 3.1. Application de la méthode des sources équivalentes au cas de la sphère

La sphère est une structure idéale, au sens du paragraphe 2.1, dont le rayonnement acoustique s'exprime analytiquement sous la forme d'une série infinie qui fait intervenir les fonctions d'onde sphériques (i.e. les modes de rayonnement de la sphère). Le problème consiste donc à chercher le champ de vitesse vibratoire à la surface de la sphère qui donnerait le même rayonnement acoustique que la structure. Comme dans le cas des sources multipolaires, le problème peut se ramener à la résolution d'un système linéaire où les inconnues, les coefficients de la série, sont déterminées en fonction des données vibratoires discrètes sur la structure. La précision des résultats obtenus dépend donc de la troncature de la série, du maillage vibratoire et de la précision des données vibratoires. C'est l'étude de ces différents paramètres qui va mettre en évidence les limites de la méthode.

En effet, l'utilisation des fonctions d'onde sphériques dans les problèmes de rayonnement acoustique - mais également électromagnétique - n'est pas nouvelle. On l'a vu dans la méthode du champ nul par exemple. On peut citer également les domaines de l'antennerie <sup>(42-44)</sup> et de l'holographie <sup>(45)</sup> où le champ acoustique, mesuré sur une sphère qui entoure la source, est propagé ou rétropropagé grâce aux propriétés des fonctions d'onde sphériques. Certains résultats obtenus par ces méthodes vont nous permettre d'explicitier les liens qui existent entre le maillage vibratoire de la structure et les fonctions d'onde sphériques utilisées dans notre modèle. Un critère sur le pas de maillage équivalent à la condition de Shannon dans le domaine du traitement du signal peut ainsi être appliqué dans le cas simple d'une source sphérique. Pour une structure de géométrie quelconque, le critère d'échantillonnage spatial reste cependant inconnu.

Le conditionnement du système est un paramètre qu'il est indispensable de connaître dans ce type de problème inverse. On utilisera donc la méthode de décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) pour résoudre le système matriciel. C'est une méthode déjà largement utilisée en acoustique dans le domaine de l'holographie <sup>(46-47)</sup>. Elle permet également de mettre en évidence le problème des fréquences critiques pour les méthodes intégrales <sup>(48)</sup> et les méthodes de sources équivalentes simples <sup>(33)</sup>.

### 3.2. Approche géométrique

Contrairement au multipôle, la sphère possède une surface propre pour traduire des conditions aux limites. Cette propriété a été utilisée par Hickling et Marin<sup>(49)</sup> pour déterminer les parties les plus bruyantes d'un moteur diesel. Ils ont remplacé ce moteur par une sphère équivalente. Ils ont identifié chaque partie du moteur à une partie de la sphère et comparé le rayonnement acoustique de chacune des calottes sphériques définies suivant différents modèles de champs vibratoires simples (calotte sphérique pulsante et oscillante, distribution aléatoire proposée par Morse et Ingard<sup>(37)</sup>). Les différences de géométrie entre la sphère et le moteur ont été supposées négligeables aux fréquences basses considérées et les résultats sont encourageants.

Dans le même esprit, une seconde approche a été développée à partir d'une simplification de la méthode de la sphère équivalente. Elle consiste à faire correspondre chaque point de la structure à un point de la sphère et le champ vibratoire à la surface de la sphère est déduit de celui de la structure par une simple projection géométrique. Des résultats peuvent être obtenus très rapidement car aucune inversion de matrice n'est nécessaire. La précision des résultats est bien sûr fonction de la projection, de la fréquence d'excitation et de la distance entre la sphère et la structure.

Dans le chapitre suivant, les bases théoriques de la méthode de la sphère équivalente sont présentées. Les principales propriétés des modes de rayonnement de la sphère sont d'abord rappelées afin de déterminer les paramètres importants qui interviennent dans son rayonnement acoustique. Le système linéaire qui caractérise la méthode de la sphère équivalente est alors défini ainsi que la méthode de décomposition en valeurs singulières utilisée pour le résoudre. Les différents critères que doivent vérifier les paramètres de la méthode (troncature de la série, maillage vibratoire, rayon et position du centre de la sphère, ...) sont explicités en fonction de la géométrie de la structure, de la fréquence d'excitation et du point d'écoute. L'approche géométrique est ensuite présentée.



## CHAPITRE II

### Méthode de la sphère équivalente

#### Introduction

Dans un premier temps, différents résultats concernant le rayonnement acoustique d'une sphère vibrante vont être rappelés (§1). Le champ de pression et la puissance acoustique rayonnée par une sphère sont exprimés au moyen de séries convergentes qui font intervenir une base modale vibratoire ainsi que des modes de rayonnement. L'étude de ces fonctions permet de mettre en évidence les principaux phénomènes physiques rencontrés dans le domaine du rayonnement acoustique de structures : existence de modes rayonnants et de modes non rayonnants et décroissance du champ sonore en fonction de la distance par exemple. Des critères de troncature simples de ces séries sont alors établis.

Dans le cas d'une structure de géométrie quelconque, on ne sait exprimer sous une forme analytique ni la base modale vibratoire, ni les modes de rayonnement associés à cette structure. On utilisera donc les bases modales de la sphère. Dans un premier temps, la vitesse particulière rayonnée par une sphère est calculée en tout point extérieur à la sphère (§2.1). Les deux approches annoncées au chapitre I sont ensuite présentées:

#### 1. Méthode de la sphère équivalente

La démarche adoptée par Butler<sup>(42)</sup> dans le cas de mesures de pression acoustique autour d'une structure va être appliquée aux mesures vibratoires (§2.2). Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente est déterminé en minimisant l'écart entre la vitesse vibratoire connue sur la structure et celle rayonnée par la sphère sur la surface de cette structure. Le problème se ramène à l'inversion d'un système linéaire dont les paramètres importants sont explicités : dimensions du système, convergence de la série et conditionnement du système. Les différents critères qui vont guider le choix de ces paramètres sont ensuite établis. Ils seront illustrés sur des exemples numériques simples dans le chapitre III. En particulier, lorsque le maillage vibratoire est suffisamment dense sur toute la surface de la structure, la solution du système linéaire tend vers la solution théorique du système différentiel (I.1). La vitesse de convergence dépend bien sûr de la géométrie de la structure et de la déformée vibratoire.

#### 2. Méthode géométrique

Dans un deuxième temps, une méthode approchée qui s'appuie sur une simplification géométrique de la méthode précédente sera développée (§2.3). Cette méthode ne nécessite pas l'inversion numérique d'un système linéaire. Elle identifie au moyen d'une projection géométrique les champs de vitesse de la sphère et de la structure. Elle sera donc d'autant plus précise que la sphère sera proche de la structure. Une application sera présentée au chapitre III dans le cas d'un cube et d'une plaque rectangulaire insérée dans un baffle.

# 1. Rayonnement acoustique d'une sphère vibrante

## Notations

Soit  $O$  le centre d' un repère orthonormé où tout point  $M(x,y,z)$  est défini par ces coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

avec  $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi[$

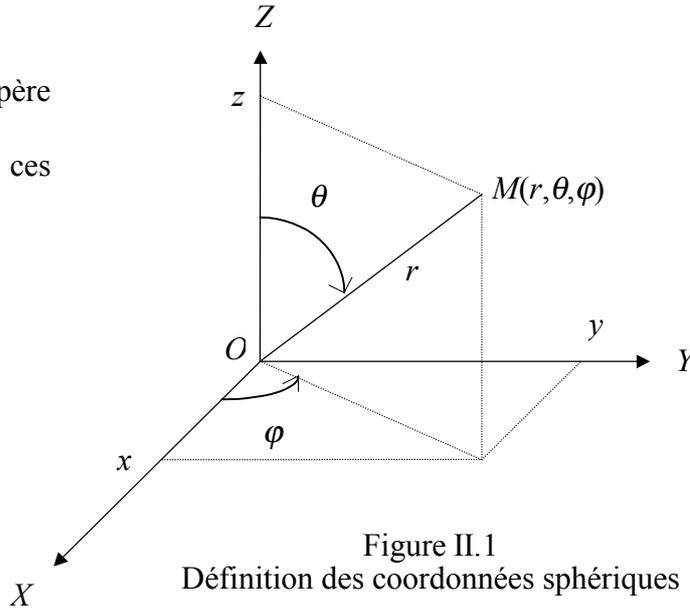


Figure II.1  
Définition des coordonnées sphériques

On note  $S_a$  la sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$ .

### 1.1. Expression de la pression acoustique rayonnée par une sphère

Il s'agit d'exprimer la pression acoustique rayonnée par la sphère  $S_a$  en supposant connue la vitesse vibratoire normale en tout point de sa surface. Les différentes étapes qui permettent de résoudre le système différentiel (I.1) dans le cas d'une source sphérique ne sont pas détaillées ici. On se reportera à <sup>(2)</sup> par exemple. Une méthode couramment utilisée consiste à appliquer l'équation intégrale de Helmholtz à partir d'une expression analytique de la fonction de Green dont la dérivée suivant la normale en tout point de la sphère est nulle. La pression acoustique rayonnée dépend alors directement de cette fonction de Green et de la vitesse vibratoire. Pour tout point  $M(r, \theta, \varphi)$  extérieur à  $S_a$ , elle se met sous la forme d'une série convergente:

$$P(M) = P(r, \theta, \varphi) = -j\rho_0 c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)}$$

(II.1)

avec les notations suivantes:

- $\bar{Y}_{nm}^{\sigma}$  est la fonction harmonique sphérique normalisée associée au triplet  $(n, m, \sigma)$ :

$$\bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) = \frac{1}{N_{nm}} P_{mn}(\cos\theta) \begin{cases} \cos(m\varphi) & \text{si } \sigma = 1 \\ \sin(m\varphi) & \text{si } \sigma = 0 \end{cases}$$

(II.2)

où

$m$  et  $n$  sont deux entiers positifs ou nuls tels que  $m \leq n$ ,  
 $P_{mn}$  est la fonction de Legendre de degré  $n$  et d'ordre  $m$ ,

$N_{nm}$  est un coefficient de normalisation :  $N_{nm} = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_m} \frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}}$

$\varepsilon_m$  est le facteur de Neumann :  $\varepsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$

et  $\delta$  est le symbole de Kronecker:  $\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$

- $h_n$  est la fonction de Hankel sphérique d'ordre  $n$  définie par  $h_n = j_n - jy_n$  où  $j_n$  et  $y_n$  sont respectivement les fonctions de Bessel et de Neumann sphériques d'ordre  $n$ .
- $V_{nm\sigma}^a$  est un coefficient complexe défini par

$$V_{nm\sigma}^a = \iint_{S_a} V^a(\theta_a, \varphi_a) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_a, \varphi_a) \sin\theta_a d\theta_a d\varphi_a$$

(II.3)

où  $V^a$  est la vitesse vibratoire normale à la sphère qui ne dépend que des coordonnées  $(\theta_a, \varphi_a)$  des points de  $S_a$ .

Remarquons que les fonctions  $\bar{Y}_{n0}^0$  sont identiquement nulles. Par la suite elles sont implicitement exclues de l'ensemble des fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$ .

Les principales caractéristiques des fonctions de Legendre et des fonctions de Hankel sphériques sont rappelées dans l'annexe 1. Elles vérifient des relations de récurrences entre les fonctions et leur dérivées ainsi qu'entre les fonctions de différents ordres qui, sous certaines conditions, sont utilisées pour le calcul numérique de ces fonctions. Le comportement asymptotique des fonctions de Legendre et des fonctions de Hankel sphériques est également connu : lorsque l'ordre  $n$  augmente, l'amplitude de  $P_{mn}$  et  $h_n$  peut augmenter plus rapidement que le factoriel de  $n$ . Ces grandes variations ont des conséquences numériques évidentes sur le calcul de ces fonctions. Elles auront également des conséquences importantes lors de la résolution du système linéaire obtenu en appliquant la méthode de la sphère équivalente (cf. § 2.2).

Rappelons également que ces fonctions sont les solutions d'équations différentielles du second ordre de type Sturm-Liouville. A ce titre elles vérifient des propriétés d'orthogonalités et forment un ensemble de fonctions complet<sup>(2)</sup>. En effet, si on note  $L^2(S_{\theta,\varphi})$  l'ensemble des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur  $S_{\theta,\varphi} = \{M(\theta, \varphi) / \theta \in [0, \pi] \varphi \in [0, 2\pi[ \}$ , il forme un espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien:

$$\langle u, v \rangle_{S_{\theta,\varphi}} = \iint_{\theta,\varphi} u(\theta, \varphi) \cdot v^*(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi$$

(II.4)

avec  $u, v \in L^2(S_{\theta,\varphi})$  et  $v^*$  est le conjugué de  $v$ .

Par construction, les fonctions harmoniques sphériques normalisées constituent une base orthonormée de  $L^2(S_{\theta,\varphi})$  car elles vérifient:

$$\langle \bar{Y}_{nm}^\sigma, \bar{Y}_{\nu\mu}^\tau \rangle_{S_{\theta,\varphi}} = \delta_{n,\nu} \delta_{m,\mu} \delta_{\sigma,\tau} \quad (\text{II.5})$$

On peut ainsi décomposer de manière unique la vitesse vibratoire normale en une série convergente, dite série de Fourier généralisée:

$$V^a(\theta_a, \varphi_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_a, \varphi_a) \quad (\text{II.6})$$

où les coefficients de Fourier  $V_{nm\sigma}^a$  sont donnés par la relation (I.1.3) que l'on met simplement sous la forme:

$$V_{nm\sigma}^a = \langle V^a, \bar{Y}_{nm}^\sigma \rangle_{S_{\theta,\varphi}} \quad (\text{II.7})$$

L'ensemble de fonctions harmoniques sphériques normalisées constitue une base modale vibratoire pour la sphère. Les coefficients  $V_{nm\sigma}^a$  sont donc les coefficients modaux qui définissent entièrement la vitesse vibratoire normale de la sphère dans cette base de fonctions.

Remarque sur la convergence des séries (II.1) et (II.6)

Les fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  forment un ensemble complet sur  $L^2(S_{\theta,\varphi})$ . Cela signifie que toute fonction  $V^a$  vérifie:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{\theta_a, \varphi_a} |V^a(\theta_a, \varphi_a) - V_N^a(\theta_a, \varphi_a)|^2 \sin \theta_a d\theta_a d\varphi_a = 0 \quad (\text{II.8})$$

où  $V_N^a(\theta_a, \varphi_a) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_a, \varphi_a)$  et  $V_{nm\sigma}^a$  est défini par (II.7)

La série (II.6) est dite convergente dans  $L^2(S_{\theta,\varphi})$  ou encore convergente au sens des moindres carrés car les coefficients  $V_{nm\sigma}^a$  minimisent l'écart quadratique entre la fonction  $V^a$  et sa décomposition  $V_N^a$  sur tout sous-ensemble fini de fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$ . Si  $V^a$  est une fonction continue sur  $S_a$  (ce qui est toujours le cas pour une structure réelle) alors cette convergence est uniforme. En revanche, les fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  étant continues, la convergence ne peut être uniforme si  $V^a$  admet des discontinuités de première espèce. La série (II.6) converge alors en tout point où  $V^a$  est continue et on observe un phénomène de Gibbs aux points de discontinuités. Les conséquences de ce comportement caractéristique des séries de Fourier seront illustrées au chapitre III.

### Exemples de rayonnement acoustique à partir de vitesses vibratoires simples :

- Cas de la sphère pulsante

La vitesse vibratoire est supposée constante en tout point de  $S_a$  :  $V^a(\theta_a, \varphi_a) = V$ . En appliquant la relation (II.3) on obtient:

$$V_{nm\sigma}^a = \begin{cases} \sqrt{4\pi}V & \text{si } (n, m, \sigma) = (0, 0, 1) \\ 0 & \text{si } (n, m, \sigma) \neq (0, 0, 1) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

La vitesse vibratoire ne dépend que du mode  $(n, m, \sigma) = (0, 0, 1)$  et la pression acoustique rayonnée s'écrit:

$$P(M) = P(r) = -j\rho_0 c_0 V_{0,0,1}^a \bar{Y}_{0,0}^1(\theta, \varphi) \frac{h_0(kr)}{h_0'(ka)} = \rho_0 c_0 \frac{a}{r} \frac{jka}{1 + jka} V e^{-jk(r-a)} \quad (\text{II.10})$$

car  $h_0(x) = j \frac{e^{-jx}}{x}$  et  $\bar{Y}_{0,0}^1(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ .

- Cas de la sphère oscillante

La vitesse vibratoire de  $S_a$  vérifie:  $V^a(\theta_a, \varphi_a) = V \cos\theta_a$ . Elle s'exprime uniquement en fonction du mode  $\bar{Y}_{1,0}^1(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$  et la pression acoustique rayonnée se met sous la forme:

$$P(M) = P(r, \theta) = -j\rho_0 c_0 V_{1,0,1}^a \bar{Y}_{1,0}^1(\theta, \varphi) \frac{h_1(kr)}{h_1'(ka)} = \rho_0 c_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{(1 + jkr)ka}{2ka + j((ka)^2 - 2)} V \cos\theta e^{-jk(r-a)} \quad (\text{II.11})$$

## **1.2. Expression de la puissance acoustique rayonnée par une sphère**

La puissance acoustique rayonnée par une structure vibrante est une grandeur qui intéresse également l'acousticien. Elle est définie par:

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \iint_S P(M) V^*(M) dS \right] \quad (\text{II.12})$$

où  $S$  est une surface fermée qui entoure la sphère vibrante  $S_a$  et  $V$  la vitesse particulière normale à cette surface. Dans le cas d'une sphère, la puissance acoustique se calcule très simplement à partir des coefficients modaux grâce à l'orthogonalité des fonctions harmoniques sphériques. En effet, en posant  $S = S_a$ , on applique les relations (II.1) et (II.6) pour obtenir:

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ -j\rho_0 \mathcal{G}_0 \iint_{S_a} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \right)^* dS_a \right] \quad (\text{II.13})$$

que l'on peut mettre sous la forme:

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 \mathcal{G}_0 \operatorname{Im} \left[ \sum_{\substack{(n,m,\sigma) \\ (n',m',\sigma')}} V_{nm\sigma}^a V_{n'm'\sigma'}^{a*} \frac{h_n(ka) h_n^*(ka)}{|h_n(ka)|^2} \iint_{S_a} \bar{Y}_{mn}^{\sigma} \bar{Y}_{m'n'}^{\sigma'} dS_a \right] \quad (\text{II.14})$$

Les relations d'orthogonalité (I.1.5) vérifiées par les fonctions harmoniques sphériques normalisées impliquent alors:

$$\iint_{S_a} \bar{Y}_{mn}^{\sigma} \bar{Y}_{m'n'}^{\sigma'} dS_a = \iint_{S_a} \bar{Y}_{mn}^{\sigma}(\theta_a, \varphi_a) \bar{Y}_{m'n'}^{\sigma'}(\theta_a, \varphi_a) a^2 \sin\theta_a d\theta_a d\varphi_a = \begin{cases} a^2 & \text{si } (n, m, \sigma) = (n', m', \sigma') \\ 0 & \text{si } (n, m, \sigma) \neq (n', m', \sigma') \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

et la relation dite du Wronskien <sup>(52)</sup> permet de simplifier l'expression  $\operatorname{Im}[h_n(ka)h_n^*(ka)]$ :

$$\operatorname{Im}[h_n(ka)h_n^*(ka)] = j_n(ka)y_n'(ka) - y_n(ka)j_n'(ka) = \frac{1}{(ka)^2} \quad (\text{II.16})$$

On obtient donc finalement:

$$W = \frac{\rho_0 \mathcal{G}_0}{2k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 \left| \frac{V_{nm\sigma}^a}{h_n(ka)} \right|^2 \quad (\text{II.17})$$

### 1.3. Notion de modes de rayonnement

On peut donner une interprétation physique simple des différents termes de la série (I.1.1) en l'exprimant sous la forme:

$$P(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a Z_n(ka) \Psi_{nm\sigma}^a(r, \theta, \varphi) \quad (\text{II.18})$$

avec

- $\Psi_{nm\sigma}^a(r, \theta, \varphi) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)}$
- $Z_n(ka) = -j\rho_0 c_0 \frac{h_n(ka)}{h_n'(ka)}$

Pour simplifier les notations, on notera par la suite  $H_{0,n}$  et  $H_{1,n}$  les fonctions définies par:

$$H_{0,n}(f, a, r) = \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)} \text{ et } H_{1,n}(f, a, r) = \frac{h_n(kr)}{h_n'(ka)} \quad (\text{II.19})$$

En dehors des coefficients modaux  $V_{nm\sigma}^a$  qui traduisent les conditions aux limites de vitesse sur  $S_a$ , on distingue dans l'expression (II.18) les fonctions  $\Psi_{nm\sigma}^a$  et  $Z_n$ :

$\Psi_{nm\sigma}^a(r, \theta, \varphi) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) H_{0,n}(f, a, r)$  est le mode de rayonnement acoustique de  $S_a$  associé au triplet  $(n, m, \sigma)$ . C'est une solution élémentaire de l'équation de Helmholtz qui vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld. Les fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  et  $H_{0,n}$  qui le définissent lui confèrent des caractéristiques spécifiques respectivement en termes de directivité et de propagation des ondes sonores. En effet, les fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  admettent  $n+m$  lignes nodales sur  $]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Les modes  $\Psi_{nm\sigma}^a$  d'ordres élevés sont donc ceux qui présentent le plus de directivité. La fonction  $H_{0,n}$  traduit la "propagation" des modes d'ordre  $n$  de la surface de la sphère jusqu'au point d'écoute. Pour un ordre  $n$  donné, les deux paramètres importants sont la fréquence réduite  $kr$  et le nombre de Helmholtz  $ka$ . Notons que les  $2n+1$  modes de rayonnement d'ordre  $n$  admettent le même comportement en fonction de la distance  $r$ .

$Z_n(ka) = -j\rho_0 c_0 H_{1,n}(f, a, a)$  est l'impédance modale de rayonnement associée au mode  $\Psi_{nm\sigma}^a$ . Elle se décompose en une partie active  $R_n(ka)$  et réactive  $X_n(ka)$  où ces deux fonctions réelles sont définies par:

$$Z_n(ka) = R_n(ka) - jX_n(ka) \quad (\text{II.20})$$

La figure II.2 représente les variations de ces fonctions pour différents ordres  $n$ .

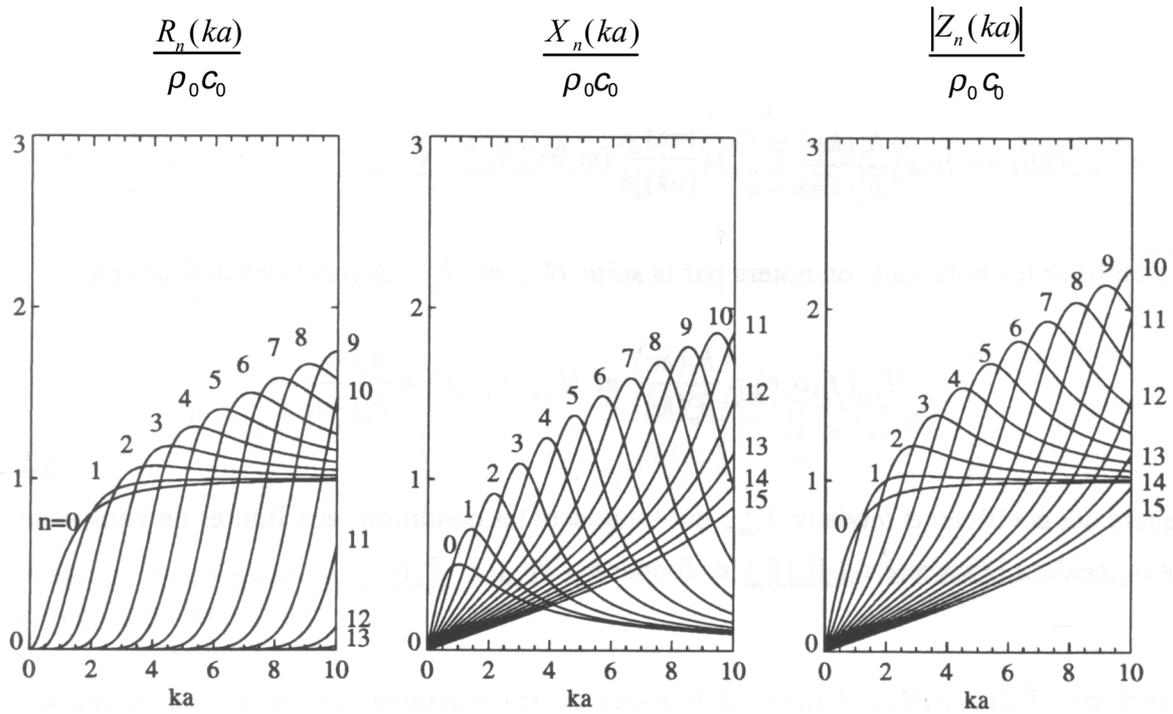


Figure II.2  
Variations de l'impédance modale de rayonnement  
en fonction de  $ka$  pour différents ordres  $n$

En utilisant la relation ( II.14 ), l'impédance modale active s'écrit simplement:

$$R_n(ka) = \frac{\rho_0 c_0}{|ka h'_n(ka)|^2} \quad (\text{II.21})$$

On peut ainsi exprimer simplement la puissance rayonnée par  $S_a$ , sous la forme:

$$W = \frac{a^2}{2} \sum_{(n,m,\sigma)} R_n(ka) |V_{nm\sigma}^a|^2 \quad (\text{II.22})$$

### Lien entre l'impédance modale active et le facteur de rayonnement modal

On définit le facteur de rayonnement de la sphère par:

$$\sigma_{S_a} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{W}{V_{\text{quad}}^a} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{W}{\frac{1}{2} \iint_{S_a} |V^a|^2 dS_a} \quad (\text{II.23})$$

où  $V_{\text{quad}}^a$  est la vitesse quadratique de la sphère qui s'exprime simplement en fonction des coefficients modaux:

$$V_{\text{quad}}^a = \frac{a^2}{2} \sum_{(n,m,\sigma)} |V_{nm\sigma}^a|^2 \quad (\text{II.24})$$

On en déduit:

$$\sigma_{S_a} = \frac{\sum_{(n,m,\sigma)} R_n(ka) |V_{nm\sigma}^a|^2}{\rho_0 c_0 \sum_{(n,m,\sigma)} |V_{nm\sigma}^a|^2} \quad (\text{II.25})$$

et  $\frac{R_n(ka)}{\rho_0 c_0}$  est le facteur de rayonnement modal associé aux modes d'ordre  $n$ .

#### 1.4. Notion de modes rayonnants et de modes non rayonnants

A partir des modes de rayonnement et de l'impédance qui leur est associée, on peut analyser simplement le rayonnement de  $S_a$ . En effet, pour une fréquence d'excitation  $f$  donnée (i.e.  $ka$  donné), seuls certains modes vont réellement contribuer au rayonnement acoustique de la sphère. L'étude des fonctions  $H_{0,n}$  et  $H_{1,n}$  (cf. annexe 1) permet de distinguer trois zones de comportement en fonction de l'ordre  $n$  du mode:

1. Tous les modes  $\Psi_{nm\sigma}^a$  d'ordre  $n$  inférieur à  $ka$  ont une impédance active proche de l'impédance du fluide:  $R_n(ka) \approx \rho_0 c_0$ . Ils sont donc rayonnants (i.e. facteur de rayonnement modal proche de 1). L'étude de  $H_{0,n}$  montre également que ces modes admettent une décroissance en  $\frac{1}{r}$ .
2. Lorsque l'ordre  $n$  devient grand devant  $ka$ ,  $R_n(ka)$  tend très rapidement vers zéro. L'impédance modale est essentiellement imaginaire et admet une décroissance vers zéro plus lente. On en déduit que le mode  $\Psi_{nm\sigma}^a$  ne contribue pas à la puissance acoustique rayonnée: il est non rayonnant (i.e. facteur de rayonnement proche de 0). Sa contribution à la pression acoustique dépend principalement de la fonction  $H_{0,n}$ , c'est-à-dire de la position du point d'écoute  $M$ . Elle admet son maximum pour  $r = a$  avec  $H_{0,n}(f, a, a) = 1$  et décroît comme  $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$  lorsque  $M$  s'éloigne de la sphère.
3. Les modes qui vérifient  $n \approx ka$  sont ceux qui présentent la plus grande impédance. Ils traduisent un phénomène de coïncidence spatiale entre l'onde rayonnée par la sphère et l'onde qui va se propager dans le milieu fluide qui l'entoure. En effet, la fonction  $\Psi_{n01}^a$  admet  $n$  cercles nodaux perpendiculaires à l'axe OZ de la sphère. Bien qu'ils ne soient pas régulièrement répartis entre 0 et  $\pi$ , on peut considérer que la distance entre chaque cercle est en moyenne de  $d = \frac{\pi a}{n}$ . Pour un mode qui vérifie  $n \approx ka$ , cela signifie  $d \approx \frac{\pi}{k}$ , c'est-à-dire

$d \approx \frac{\lambda}{2}$  où  $\lambda$  est la longueur de l'onde acoustique dans le milieu fluide. On en déduit que l'impédance est maximum lorsque la dimension de la région où tous les points vibrent en phase (i.e. espace entre deux cercles nodaux) est de l'ordre d'une demi longueur d'onde acoustique.

⇒ On associe à chaque mode  $\Psi_{nm\sigma}^a$  une fréquence critique modale de rayonnement  $f_n^c$  qui ne dépend que du rayon de la sphère et de l'ordre  $n$  du mode:

$$f_n^c = n \frac{c_0}{2\pi a}$$

(II.26)

En conclusion, le mode  $\Psi_{nm\sigma}^a$  sera dit rayonnant si la fréquence d'excitation  $f$  est supérieure à  $f_n^c$  et non rayonnant si  $f$  est inférieure à  $f_n^c$ . Cette distinction est représentée sur la figure II.3 suivant l'axe des fréquences et, de manière équivalente, en fonction de  $ka$ .

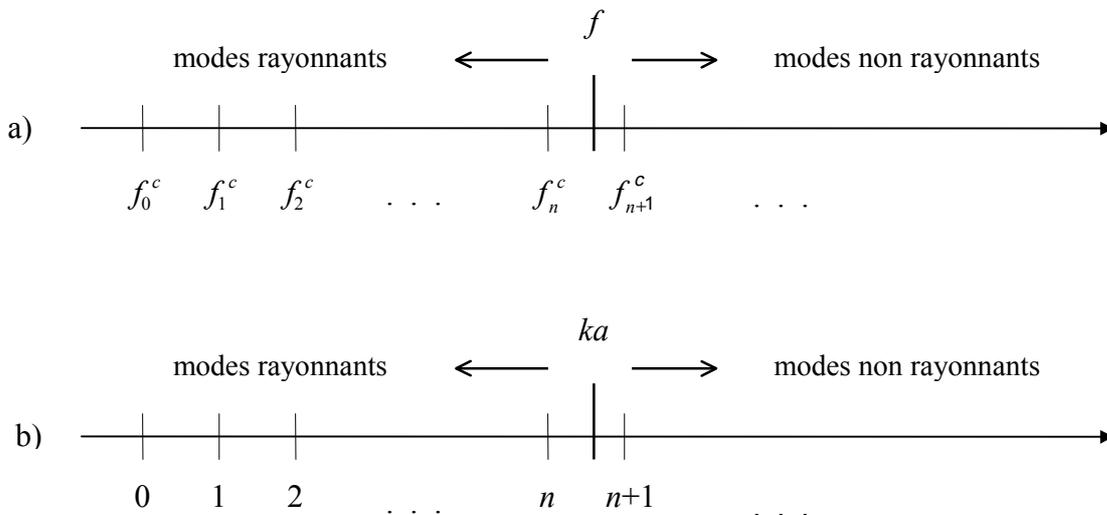


Figure II.3

Distinction entre modes rayonnants et modes non rayonnants en fonction:

- a) de la fréquence d'excitation
- b) du nombre de Helmholtz  $ka$

### 1.5. Application : critère de troncature

On a montré au paragraphe précédent que seul un nombre fini de modes de  $S_a$  était rayonnant pour une fréquence d'excitation donnée. On peut donc en déduire des critères de troncature simple des séries (I.1.1) et (I.1.17) qui s'appuient sur l'ordre  $n$  des modes de rayonnement. L'amplitude des modes non rayonnants est suffisamment faible pour que leur contribution soit négligée. On suppose pour cela que tous les coefficients modaux  $V_{nm\sigma}^a$  restent d'un ordre de grandeur comparable.

Troncature de la série (II.17) qui définit la puissance acoustique rayonnée par la sphère

L'expression (II.22) montre que la troncature ne dépend que de la décroissance de la fonction  $R_n(ka)$  lorsque que  $n$  devient supérieur à  $ka$ . Pour une fréquence réduite  $ka$  donnée, on cherche donc numériquement le premier entier supérieur à  $ka$  tel que la quantité  $\frac{R_n(ka)}{\text{Max}\{R_n(ka), n=0,1,2,\dots\}}$  soit inférieure à une valeur  $\varepsilon$  donnée. Le maximum de  $R_n(ka)$  étant obtenu pour une valeur un peu supérieur à  $ka$ , on définit l'ordre de troncature  $N_w$  par:

$$N_w(S_a, \varepsilon) = [ka] + n_w(\varepsilon)$$

(II.27)

où

- $[ka]$  est l'entier le plus proche de  $ka$ .
- $\varepsilon$  est un nombre réel positif qui caractérise la précision de la troncature.
- $n_w$  est un entier qui rend compte de la transition entre les modes rayonnants et non rayonnants. Il est en général assez faible (i.e. inférieur à 3) pour des valeurs  $\varepsilon$  de quelques pourcents.

⇒ conséquence:

Pour des vitesses vibratoires relativement régulières (i.e. pas de composantes importantes dans les ordres  $n$  élevés) une précision suffisante pour le calcul de la puissance rayonnée par la sphère sera obtenue en tronquant la série (II.17) à l'ordre  $n = N_w$ . La série peut ainsi être tronquée *a priori*, sans connaître expressément la déformée vibratoire de la sphère.

On peut remarquer que  $N_w$  est quasiment proportionnel à  $ka$ . Il faut donc prendre en compte d'autant plus de termes dans la série que la fréquence est élevée et/ou que la sphère est de grand rayon. Inversement, pour  $ka < 1$ , seuls le mode monopolaire  $n = 0$  (i.e. sphère pulsante) et éventuellement les trois modes dipolaires associés à  $n = 1$  (i.e. sphère oscillante) auront une contribution importante au rayonnement. La figure II.4 illustre les variations du facteur de rayonnement modal en fonction de l'ordre  $n$  pour une valeur de  $ka$  fixée. La décroissance rapide du facteur de rayonnement modal lorsque  $n$  est supérieur à  $ka$  conduit, pour une valeur de  $\varepsilon$  de quelques pourcents, à un entier  $n_w$  relativement faible. Pour  $ka = 4,2$  (ce qui correspond à une sphère de rayon 50 cm excitée à 455 Hz) et  $\varepsilon < 5\%$ ,  $n_w$  vaut 2. Notons que  $N_w = 6$  entraîne le calcul de  $(N_w+1)^2 = 49$  coefficients modaux.

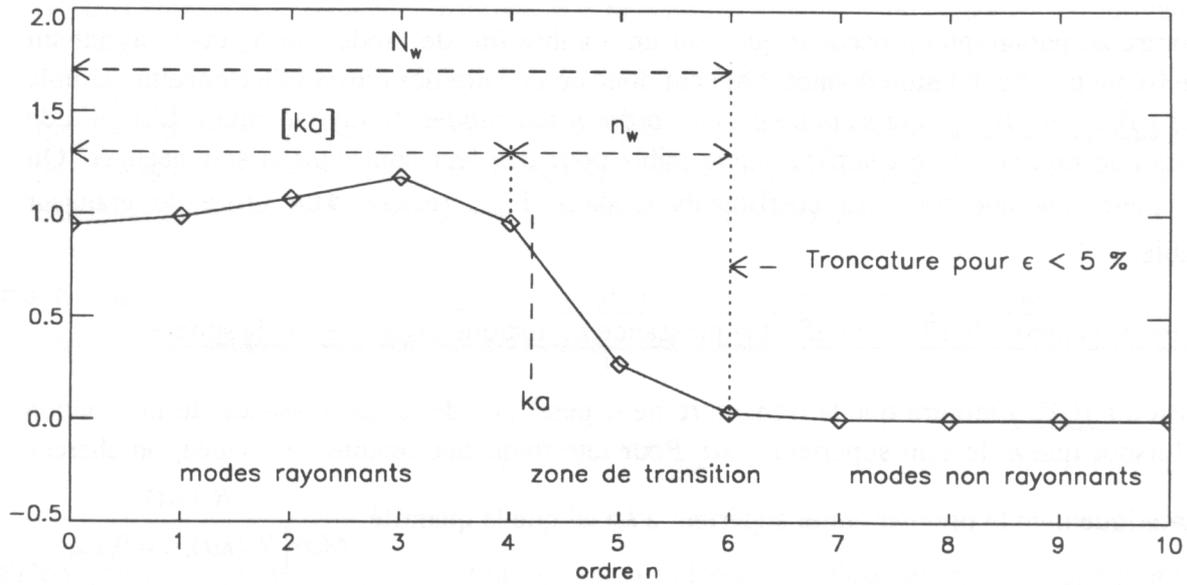


Figure II.4

Exemple d'application du critère de troncature

à partir des variations de  $\frac{R_n(ka)}{\rho_0 c_0}$  en fonction de l'ordre  $n$  pour  $ka = 4,2$

### Troncature de la série ( II.1 ) qui définit la pression acoustique rayonnée par la sphère

Le champ de pression acoustique rayonné par  $S_a$  est calculé par la somme sur tous les indices  $n$ ,  $m$  et  $\sigma$  des termes  $V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) H_{1,n}(f, a, r)$ . La détermination de l'ordre de troncature  $N_p$  est donc ramenée à l'étude de la décroissance du module de  $H_{1,n}(f, a, r)$  dès que  $n$  est supérieur à  $ka$ . La valeur de  $f$ ,  $a$  et  $r$  étant fixée, on cherche comme précédemment le premier entier  $n$  supérieur à

$ka$  tel que la quantité  $\frac{|H_{1,n}(f, a, r)|}{\text{Max}\{|H_{1,n}(f, a, r)|, n = 0, 1, 2, \dots\}}$  soit inférieur à une valeur  $\varepsilon$  donnée. Le maximum du module de  $H_{1,n}(f, a, r)$  étant également obtenu pour une valeur de  $n$  proche de  $ka$ , on peut définir  $N_p$  par:

$$N_p(S_a, \varepsilon, M) = [ka] + n_p(\varepsilon, r)$$

( II.28 )

où  $n_p$  est un entier qui dépend de la position du point d'écoute : il est d'autant plus grand que  $r$  est voisin de  $a$  et  $\varepsilon$  proche de zéro.

Dans le champ proche de la sphère de nombreux modes contribuent au rayonnement ( $n_p$  est relativement grand) alors qu'en champ lointain  $n_p$  atteint un minimum (typiquement entre 4 et 5 pour une valeur de  $\varepsilon$  de quelques pourcents). Ce comportement est illustré sur la figure II.5 où les variations du module de  $H_{1,n}(f, a, r)$  sont représentées en fonction de l'ordre  $n$  pour  $ka = 4,2$  et différentes valeurs de  $kr$ .

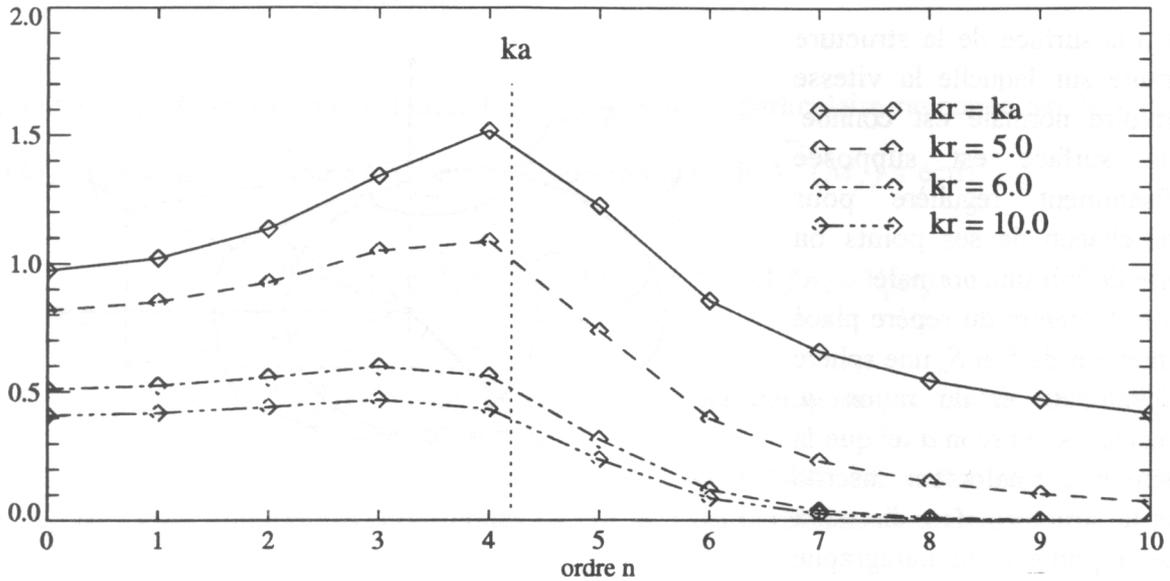


Figure II.5  
Variation du module de  $H_{1,n}(f, a, r)$  en fonction de l'ordre  $n$   
pour  $ka = 4,2$  et différentes valeurs de  $kr$

Pour un point d'écoute qui vérifie  $kr \geq 6$ , l'ordre de troncature  $N_p = 8$  est suffisant (i.e.  $[ka] = 4$  et  $n_p = 4$  pour  $\varepsilon \approx 2\%$ ) alors que le rapport  $\frac{|H_{1,n}(f, a, r)|}{\text{Max}\{|H_{1,n}(f, a, r)|, n = 0, 1, 2, \dots\}}$  pour les modes d'ordre  $n = 10$  est encore de 27 % pour un point d'écoute à la surface de la sphère ( $kr = ka$ ) et de 7 % pour  $kr = 5$ .

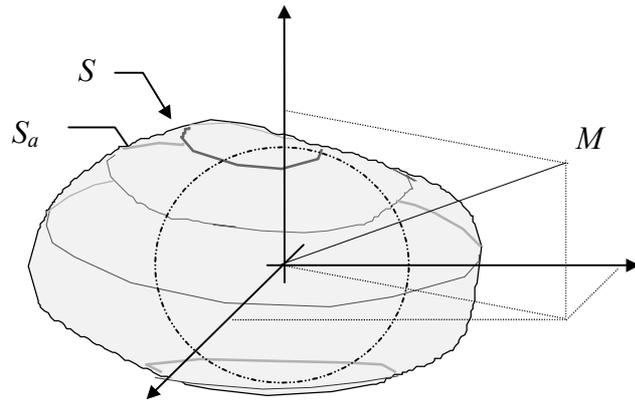
⇒ Des modes considérés comme non rayonnants (i.e. contribution négligeable à la puissance acoustique rayonnée) peuvent admettre une contribution à la pression acoustique encore importante dans le champ proche de la sphère. Le nombre de coefficients modaux nécessaire pour calculer avec précision la pression acoustique dans le champ proche de la sphère peut ainsi être très important. L'ordre  $N_p$  est en général supérieur à l'ordre  $N_w$ .

## 2. Modélisation du rayonnement d'une surface quelconque à partir du rayonnement d'une sphère

Dans le cas d'une structure de géométrie quelconque, on ne sait pas définir de système de coordonnées simple qui permettent d'appliquer la méthode de séparation des variables et d'exprimer analytiquement les modes de rayonnement de la structure. Le principe des sources équivalentes appliqué au cas d'une sphère revient donc à utiliser les modes de rayonnement associés à la sphère pour calculer le rayonnement de la structure.

### Notations

Soit  $S$  la surface de la structure vibrante sur laquelle la vitesse vibratoire normale est connue. Cette surface est supposée suffisamment régulière pour qu'en chacun de ses points on puisse définir une normale. Soit  $O$  le centre du repère placé à l'intérieur de  $S$  et  $S_a$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$ . Choisissons le rayon  $a$  tel que la sphère soit totalement inscrite dans la structure. On discutera cette hypothèse au paragraphe 2.2.3.3.



Le rayonnement acoustique de la sphère  $S_a$  exprimé par (II.1) vérifie l'équation de Helmholtz et la condition de rayonnement de Sommerfeld pour tout point  $M$  extérieur à la structure. Il sera donc équivalent à celui de la structure si les deux sources vérifient les mêmes conditions aux limites de vitesse sur  $S$ . On cherche ainsi le champ vibratoire à la surface de  $S_a$  qui générerait le même champ vibratoire que celui de la structure.

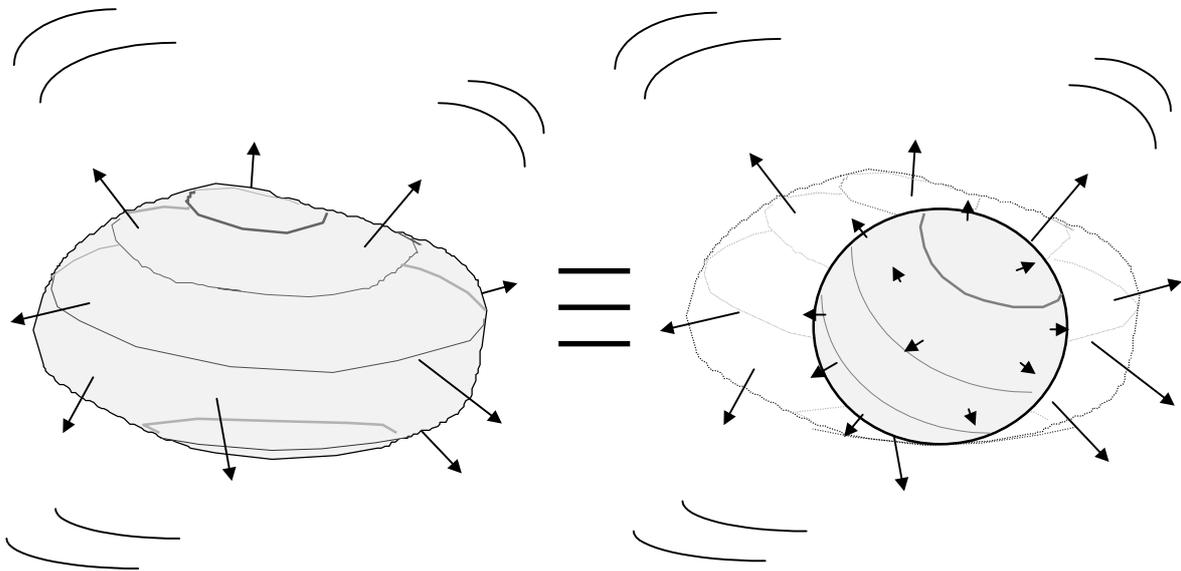


Figure II.6  
Equivalence structure-sphère

Exprimons, dans un premier temps, la vitesse particulière rayonnée par la sphère en tout point de la structure en fonction des coefficients modaux de la sphère.

## 2.1. Expression de la vitesse particulière rayonnée par la sphère en tout point de la structure

En tout point  $M_s$  de  $S$  on peut définir  $\vec{V}^S(M_s)$ , la vitesse particulière rayonnée par la sphère et  $\vec{n}(M_s)$  la normale extérieure à  $S$ . La composante normale de  $\vec{V}^S(M_s)$  s'écrit:

$$V_n^S(M_s) = \vec{V}^S(M_s) \cdot \vec{n}(M_s) = V_r^S n_r + V_\theta^S n_\theta + V_\varphi^S n_\varphi \quad (\text{II.29})$$

où  $(n_r, n_\theta, n_\varphi)$  et  $(V_r^S, V_\theta^S, V_\varphi^S)$  sont respectivement les composantes radiale, tangentielle et circonférentielle de  $\vec{n}(M_s)$  et  $\vec{V}^S(M_s)$ . On peut alors relier les composantes sphériques  $(n_r, n_\theta, n_\varphi)$  aux composantes cartésiennes  $(n_x, n_y, n_z)$  par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta_s \cos\varphi_s & \sin\theta_s \sin\varphi_s & \cos\theta_s \\ \cos\theta_s \cos\varphi_s & \cos\theta_s \sin\varphi_s & -\sin\theta_s \\ -\sin\varphi_s & \cos\varphi_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (\text{II.30})$$

où  $\theta_s$  et  $\varphi_s$  sont les coordonnées sphériques du point  $M_s$ . De même, les composantes radiale, tangentielle et circonférentielle de  $\vec{V}^S(M_s)$  sont obtenues en appliquant l'équation d'Euler qui relie la pression acoustique à la vitesse particulière:

$$\text{grad}P(M_s) = -j\omega\rho_0 \vec{V}(M_s) \quad (\text{II.31})$$

En coordonnées sphériques, le gradient s'exprime dans le repère local par:

$$\text{grad}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial r}(\cdot) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\cdot) \vec{u}_\varphi \quad (\text{II.32})$$

Lorsque la pression rayonnée par  $S_a$  est définie par (I.1.1) les composantes sphériques de  $\vec{V}^S(M_s)$  s'écrivent respectivement:

$$\begin{aligned} V_r^S(M_s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s) \frac{h_n'(kr_s)}{h_n'(ka)} \\ V_\theta^S(M_s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \frac{\partial Y_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s)}{kr_s \partial \theta} \frac{h_n(kr_s)}{h_n'(ka)} \\ V_\varphi^S(M_s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \frac{\partial Y_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s)}{kr_s \sin\theta_s \partial \varphi} \frac{h_n(kr_s)}{h_n'(ka)} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

En remplaçant  $\bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s)$  par  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$ , on en déduit l'expression au point  $M_s$  de la composante normale de la vitesse particulière rayonnée par la sphère:

$$V_n^S(M_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \left[ \bar{Y}_{nm}^\sigma \frac{h'_n(kr_s)}{h'_n(ka)} n_r + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma}{kr_s \partial \theta} \frac{h_n(kr_s)}{h'_n(ka)} n_\theta + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma}{kr_s \sin \theta_s \partial \varphi} \frac{h_n(kr_s)}{h'_n(ka)} n_\varphi \right]$$

(II.34)

Remarque:

Pour simplifier les expressions liées au rayonnement acoustique de la sphère équivalente, on adoptera par la suite une notation à un seul indice. On peut en effet passer simplement d'une notation à trois indices  $n, m$  et  $\sigma$  à une notation à un seul indice à partir de la bijection qui associe à chaque triplet  $(n, m, \sigma)$  un entier  $j$  tel que:

$$j = j_{nm\sigma} = n^2 + 2m + \sigma$$

(II.35)

Cette relation n'est valable que si  $m$  et  $\sigma$  ne sont pas nuls en même temps (i.e. les fonctions identiquement nulles sont exclues). Elle permet de décrire l'ensemble des modes de rayonnement par ordre  $n$  puis  $m$  et  $\sigma$  croissants. On obtient le tableau de correspondance ci-dessous:

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
$n$	0	1		2				3						4		...			
$m$	0	0	1	0	1	2		0	1	2		3		0	1	...			
$\sigma$	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	...

Tableau II.1

Correspondance entre les notations à un et trois indices

La pression acoustique et la vitesse particulière rayonnée par  $S_a$  s'écrivent alors:

$$P(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{j=1}^{\infty} x_j \Psi_j(M)$$

(II.36)

$$V_n^S(M_s) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{\partial \Psi_j(M_s)}{\partial n}$$

(II.37)

où les coefficients modaux  $x_j$ , les fonctions  $\Psi_j$  et  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sont définis dans le tableau II.2.

$c_j$	$\Psi_j$	$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$
$V_{nm\sigma}^a$	$\bar{Y}_{nm}^\sigma \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)}$	$\bar{Y}_{nm}^\sigma \frac{h_n'(kr_s)}{h_n'(ka)} n_r + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma}{kr_s \partial \theta} \frac{h_n(kr_s)}{h_n(ka)} n_\theta + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma}{kr_s \sin \theta_s \partial \varphi} \frac{h_n(kr_s)}{h_n(ka)} n_\varphi$

Tableau II.1

Définition de  $c_j$ ,  $\Psi_j$  et  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$

## 2.2. Application de la méthode des sources équivalentes : détermination des coefficients modaux de la sphère équivalente par minimisation de la vitesse résiduelle quadratique

### 2.2.1. Aspects théoriques et expression d'un premier système linéaire

Notons  $V^{cal}$  la composante normale de la vitesse particulière rayonnée par la sphère équivalente en tout point de la surface  $S$  et  $V^{mes}$  la vitesse vibratoire normale connue sur  $S$  soit par la mesure soit par le calcul.

Le rayonnement de la sphère équivalente est identique à celui de la structure si l'écart entre  $V^{cal}$  et  $V^{mes}$  est nul en tout point de cette structure, c'est-à-dire:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta V_N(M_s) = \lim_{N \rightarrow \infty} (V^{mes}(M_s) - V_N^{cal}(M_s)) = 0$$

(II.1)

où  $V_N^{cal}(M_s) = \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M_s)$  est la restriction de  $V^{cal}$  aux  $N$  premiers termes de la série.

Dans le cadre d'une méthode approchée où la série est tronquée à ses  $N$  premiers termes une valeur minimale de  $\Delta V_N$  suffit. En effet, on peut associer à la valeur de la vitesse en tout point de  $S$  une "erreur de mesure", que  $V^{mes}$  soit le résultat de mesures ou de calculs. Il sera alors suffisant de savoir que l'erreur commise sur l'identification de la vitesse est du même ordre de grandeur que les erreurs de mesure pour estimer notre modèle satisfaisant.

Les coefficients modaux qui définissent le rayonnement de la sphère équivalente vont être calculés de manière à minimiser  $\Delta V$ . Pour ramener ce problème de minimisation à la résolution d'un système linéaire il faut que la distance entre  $V^{mes}$  et  $V_N^{cal}$  sur toute la surface  $S$  soit mesurée par une fonctionnelle quadratique. Notons  $x = {}^t [x_1, \dots, x_j, \dots, x_N]$  le vecteur qui contient les  $N$  premiers coefficients modaux de la sphère équivalente.

Dans un premier temps, indépendamment de l'aspect discret des mesures de vitesses, on définit  $J_N(x)$  la vitesse vibratoire résiduelle quadratique par:

$$J_N(x) = \frac{1}{2} \|\Delta V_N\|_S^2 = \frac{1}{2} \iint_S |V^{mes}(M_s) - V_N^{cal}(M_s)|^2 dS \quad (\text{II.2})$$

où  $\|u\|_S$  est la norme de la fonction  $u$  associée au produit scalaire hermitien  $\langle u, v \rangle_S = \iint_S uv^* dS$  défini

pour toutes fonctions  $u$  et  $v$  de  $L^2(S)$ .

Les coefficients modaux qui rendent la fonctionnelle  $J_N(x)$  minimale vérifient:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [J_N(x)] = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq N \quad (\text{II.3})$$

Un résultat classique d'analyse matricielle montre que ces  $N$  équations conduisent aux  $N$  équations normales suivantes<sup>(50)</sup>:

$$\sum_{j=1}^N x_j \iint_S \frac{\partial \Psi_j(M_s)}{\partial n} \frac{\partial \Psi_i^*(M_s)}{\partial n} dS = \iint_S V^{mes}(M_s) \frac{\partial \Psi_i^*(M_s)}{\partial n} dS \text{ pour } i \in [1, \dots, N] \quad (\text{II.4})$$

Le vecteur  $x$  est alors solution du système linéaire complexe:

$$Cx = d$$

avec

$$C_{ij} = \left\langle \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \right\rangle_S \text{ pour } i \in [1, \dots, N] \text{ et } j \in [1, \dots, N]$$

$$d_j = \left\langle V^{mes}, \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right\rangle_S \text{ pour } j \in [1, \dots, N]$$

(II.5)

La matrice  $C$  vérifie une symétrie hermitienne (i.e.  $C = C^*$  où  $C^*$  est la matrice adjointe de  $C$ ). Le système (II.5) admet donc une unique solution si la matrice  $C$  est de rang  $n$ , c'est-à-dire si les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sont linéairement indépendantes par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ .

C'est une propriété que l'on peut facilement démontrer lorsque  $S$  est une sphère de même centre que la sphère équivalente. Ce cas est traité au chapitre III où l'on montre que les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sont

orthogonales sur  $S$ . La matrice  $C$  est donc diagonale et le système (II.5) admet une unique solution. Lorsque le nombre de coefficients modaux pris en compte augmente, cette solution tend vers celle décrite au paragraphe II.1 sous la forme d'une série de Fourier.

Si  $S$  n'est pas une sphère de centre  $O$ , il faut faire appel au caractère complet dans  $L^2(S)$  de l'ensemble des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  lorsque le point  $O$  est placé à l'intérieur de toute surface régulière (cf. annexe 2). Cette propriété est importante car elle permet d'assurer la convergence de la solution du système (II.5) vers la solution du problème différentiel (II.1). Les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  n'étant plus orthogonales sur  $S$ , le système (II.5) peut devenir très sensible aux erreurs numériques et aux erreurs de mesures. La position et le rayon de la sphère équivalente sont alors des paramètres importants qui, en fonction de la géométrie de la structure, vont conduire à un système linéaire plus ou moins bien conditionné. Les coefficients modaux que l'on peut déterminer par le système (II.5) dépendent ainsi de la précision avec laquelle est connue le champ de vitesse vibratoire sur  $S$ . Ces différents points seront développés dans les paragraphes II.2.3 à II.2.5.

La résolution du système (II.5) passe par le calcul des  $\frac{N(N+3)}{2}$  intégrales qui définissent les composantes de la matrice  $C$  et du vecteur  $d$ . Dans le cas d'une structure de géométrie quelconque, on ne connaît pas l'expression analytique des intégrales  $C_{ij}$  et  $d_j$ . De plus, la fonction  $V^{mes}$  n'est en général connue qu'en un nombre fini de points. La résolution de ce système impose donc une discrétisation de la surface  $S$  et le calcul approché des composantes de la matrice  $C$  et du vecteur  $d$  par des méthodes d'intégration numériques.

## 2.2.2. Choix d'une méthode d'intégration simple et expression d'un système linéaire approché

### 2.2.2.1. Cas général

On dispose de nombreuses méthodes numériques simples pour calculer les intégrales définies sur un domaine à une dimension. La méthode des trapèzes et la méthode de Simpson par exemple sont associées à un découpage régulier du domaine d'intégration alors que la méthode de Gauss-Legendre est associée à un découpage irrégulier. Pour ces méthodes, la convergence de la somme discrète vers l'intégrale peut être exprimée en fonction du nombre de points de maillage et des variations de la fonction à intégrer.

Pour des surfaces à variables séparables, on peut se ramener à un problème à une dimension. Dans le cas d'une surface constituée d'un assemblage de plaques rectangulaires par exemple, on peut appliquer une des méthodes monodimensionnelles citées précédemment sur chacune des faces et dans les deux directions de la plaque.

Dans le cas d'une structure de géométrie quelconque, la discrétisation de l'intégrale fait en général appel à différents types d'éléments de maillage. On ne sait alors plus exprimer analytiquement la convergence de la somme discrète vers l'intégrale en fonction du maillage et des variations de la fonction à intégrer. Seules les méthodes itératives de type Monte-Carlo qui s'appuient sur un maillage aléatoire de la surface vibrante permettent d'obtenir une estimation de l'intégrale et de l'écart entre la somme discrète et l'intégrale. La convergence de ces méthodes (i.e. variance faible de l'estimateur de l'intégrale) est en général relativement lente. On préférera donc appliquer la méthode simple des rectangles. Elle consiste à découper la surface vibrante en  $N_s$  surfaces élémentaires sur

lesquelles la fonction à intégrer est supposée constante. Les intégrales  $C_{ij}$  et  $d_j$  sont donc approchées par une expression de la forme:

$$\iint_S f(M_s) dS \approx \sum_{l=1}^{N_s} f(M_l) \Delta S_l \quad (\text{II.6})$$

où  $f$  est une fonction de  $L^2(S)$  et  $\Delta S_l$  la surface élémentaire associée au point de maillage  $M_l$ . La vitesse de convergence de la somme discrète vers l'intégrale dépend du nombre de points de maillage et des variations de la fonction  $f$ . Pour s'assurer de la bonne représentation de l'intégrale, il faudra vérifier que le nombre de points de maillage est suffisamment important et qu'il permet bien de décrire les variations de  $f$ .

On écrit donc les intégrales  $C_{ij}$  et  $d_j$  sous forme discrète:

$$\begin{aligned} C_{ij} &\approx \sum_{l=1}^{N_s} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n}(M_l) \frac{\partial \Psi_j^*}{\partial n}(M_l) \Delta S_l \\ d_j &\approx \sum_{l=1}^{N_s} V^{mes}(M_l) \frac{\partial \Psi_j^*}{\partial n}(M_l) \Delta S_l \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Les coefficients  $x_j$  sont ainsi la solution du système linéaire suivant:

$A^* . Ax = A^* . b$

avec

$$(A^* A)_{ij} = \sum_{l=1}^{N_s} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n}(M_l) \frac{\partial \Psi_j^*}{\partial n}(M_l) \Delta S_l \text{ pour } i \in [1, \dots, N] \text{ et } j \in [1, \dots, M]$$

$$(A^* b)_j = \sum_{l=1}^{N_s} V^{mes}(M_l) \frac{\partial \Psi_j^*}{\partial n}(M_l) \Delta S_l \text{ pour } j \in [1, \dots, N]$$

(II.8)

où la matrice  $A$  et le vecteur  $b$  vérifient:

$A . x = b$

avec

$$A_{ij} = \sqrt{\Delta S_l} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M_l) \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s] \text{ et } j \in [1, \dots, M]$$

$$b_i = \sqrt{\Delta S_l} V^{mes}(M_l) \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s]$$

(II.9)

Le système (II.8) est constitué des équations normales associée à la résolution au sens des moindres carrés du système (II.9).

## Remarques:

### 1. Formulation continue et formulation discrète

On peut désormais distinguer deux formulations de la méthode de la sphère équivalente. La première est une formulation "continue" associée à l'espace des fonctions  $L^2(S)$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ . Elle conduit au système linéaire (I.15). Le découpage de la surface  $S$  en surfaces élémentaires permet d'identifier chaque fonction  $u$  de  $L^2(S)$  à un vecteur  $u = (u_1, \dots, u_{N_s})$  composé des valeurs de cette fonction aux points du maillage. La seconde formulation est donc une formulation "discrète" associée au système (II.8) et au produit scalaire euclidien usuel  $\langle u, v \rangle_2 = \sum_{i=1}^{N_s} u_i \cdot v_i^*$ .

Si on note respectivement  $A_i$  et  $A_j$  les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  colonnes de la matrice  $A$ , la discrétisation des intégrales  $C_{ij}$  et  $d_j$  revient donc à approcher le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  avec:

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} \langle A_i, A_j \rangle_2 = \left\langle \frac{\partial \Psi_i}{\partial n}, \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right\rangle_S = C_{ij} \quad (\text{II.10})$$

Lorsque le nombre de points de maillage est suffisamment grand, les problèmes continu et discret admettent *a priori* des propriétés identiques. En particulier, si les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sont linéairement indépendantes par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  (i.e. la matrice  $C$  est inversible) alors les colonnes de la matrice  $A$  sont indépendantes par rapport à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  et le système (II.9) admet une unique solution. *A contrario*, un maillage vibratoire insuffisant peut rendre linéairement dépendantes deux colonnes de la matrice  $A$  alors que les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  qui leur sont associées sont linéairement indépendantes.

### 2. Expression matricielle des grandeurs quadratiques pour la formulation discrète

Soit  $J_{N, N_s}$  la vitesse résiduelle quadratique associée au problème discret. En fonction de la matrice  $A$  et du vecteur  $b$  elle s'écrit:

$$J_{N, N_s}(x) = \frac{1}{2} (b - Ax)^* (b - Ax) = \frac{1}{2} \|b - Ax\|_2^2 \quad (\text{II.11})$$

Si  $A^* A$  est inversible alors  $x = (A^* A)^{-1} A^* b$  est l'unique solution du système (II.8) pour laquelle  $J_{N, N_s}$  devient:

$$J_{N, N_s}(x) = \frac{1}{2} \|d\|_2^2 - \frac{1}{2} \|Ax\|_2^2 \quad (\text{II.12})$$

où

$$\frac{1}{2} \|b\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} |V^{mes}(M_i)|^2 \Delta S_i = V_{quad}^{mes N_s} \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{1}{2} \|Ax\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} |V_N^{cal}(M_i)|^2 \Delta S_i = V_{quad}^{cal, N_s} \quad (\text{II.14})$$

$V_{quad}^{mes, N_s}$  et  $V_{quad}^{cal, N_s}$  sont respectivement les approximations liées à la discrétisation de la surface  $S$  des vitesses quadratiques mesurées et calculées que l'on définit par:

$$V_{quad}^{mes} = \frac{1}{2} \iint_S |V^{mes}|^2 dS = \frac{1}{2} \|V^{mes}\|_S^2 \quad (\text{II.15})$$

et

$$V_{quad}^{cal} = \frac{1}{2} \iint_S |V_N^{cal}|^2 dS = \frac{1}{2} \|V_N^{cal}\|_S^2 \quad (\text{II.16})$$

### 3. Critère pour caractériser la précision du modèle de sphère équivalente

La vitesse résiduelle quadratique mesure l'écart entre les conditions aux limites vérifiées par la structure et par la sphère équivalente. On associe donc au problème discret une erreur relative notée  $e_2$  et définie par:

$$e_2^2 = \frac{J_{N, N_s}}{V_{quad}^{mes N_s}} = \frac{\|b - Ax\|_2^2}{\|d\|_2^2} \quad (\text{II.17})$$

Cette fonction ne peut que décroître lorsque le nombre de coefficients modaux pris en compte augmente. On peut donc considérer que la sphère équivalente vérifie les mêmes conditions aux limites que la structure vibrante lorsque l'erreur quadratique  $e_2$  est du même ordre de grandeur que les erreurs de mesures commises sur la vitesse vibratoire. On montrera cependant dans le chapitre III que la connaissance de ce seul critère peut s'avérer insuffisante pour garantir que le rayonnement acoustique de la sphère équivalente est proche de celui de la structure.

#### **2.2.2.2. Cas d'un maillage vibratoire régulier**

Afin d'obtenir une méthode simple à mettre en oeuvre, on s'est intéressé au cas où les éléments du maillage ont une surface constante :  $\Delta S_i = \Delta S$ . Tous les points de maillage sont alors affectés du même poids et le système (II.9) s'écrit simplement:

$$A'x = b'$$

avec

$$A'_{ij} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta S}} A_{ij} \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s] \text{ et } j \in [1, \dots, N]$$

$$b'_i = V^{mes}(M_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta S}} b_i \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s]$$

(II.18)

La résolution de ce système ramène le calcul des intégrales  $C_{ij}$  et  $d_j$  à un simple calcul des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  aux différents points de maillage. Les coefficients modaux sont alors indépendants de  $\Delta S$  et minimisent directement l'écart entre  $V^{mes}$  et  $V_N^{cal}$  aux points du maillage.

### Remarques:

#### 1. Notion de régularité du maillage

La notion de régularité du maillage fait ici référence à la surface des éléments. En particulier elle n'implique pas de conditions particulières sur la position des points du maillage. Pour des surfaces simples telles que des plaques, on peut définir des maillages à éléments de surface constante pour lesquels les points sont régulièrement répartis suivant les deux axes de la plaque (i.e. distance constante entre deux points consécutifs du maillage). Sur une surface plus complexe, la notion de points consécutifs disparaît ainsi que celle de points régulièrement répartis.

#### 2. Intérêt d'un maillage irrégulier

Pour que les systèmes discrets (II.9) et (II.18) soient proches du système continu (II.5), la densité du maillage et la géométrie des éléments doivent être choisies par rapport aux variations des fonctions que l'on cherche à intégrer. Un maillage régulier présente l'avantage de conduire à une formulation numérique simple puisque seul le calcul des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  aux points de maillage est nécessaire. Il peut en revanche imposer un nombre de points de maillage inutilement grand sur une structure hétérogène où le champ de vitesse varie rapidement dans certaines zones et lentement dans d'autres. C'est le cas par exemple pour une structure fermée constituée d'un ensemble de plaque dont l'une est plus mince que les autres. Pour une fréquence d'excitation donnée, la longueur d'onde de flexion dans cette plaque est plus faible que dans le reste de la structure. Sur cette plaque, la déformée contient des modes d'ordre élevé (i.e. nombre de lignes nodales élevé) qui demande un maillage plus fin.

Un maillage irrégulier de  $S$  sera également intéressant pour prendre en compte les hétérogénéités locales d'une structure. Il permet de décrire correctement le champ de vitesse vibratoire avec un nombre minimum de points de maillage.

### 3. Critères supplémentaires pour caractériser la précision du modèle de sphère équivalente

Lorsque les éléments de maillage ont la même surface, on peut donner un sens à la mesure de l'écart entre  $V^{mes}$  et  $V_N^{cal}$  par d'autres normes vectorielles que la norme euclidienne<sup>(51)</sup>. On définit alors:

$$e_{\max} = \frac{\|b - A'x\|_{\max}}{\|b\|_{\max}} \quad (II.19)$$

avec

$$\|b - A'x\|_{\max} = \text{Max}\{V^{mes}(M_i) - V_N^{cal}(M_i), i = 1, \dots, N_s\} \quad (II.20)$$

$$\|b\|_{\max} = \text{Max}\{V^{mes}(M_i), i = 1, \dots, N_s\} \quad (II.21)$$

⇒ l'erreur  $e_{\max}$  caractérise l'écart maximum entre la vitesse mesurée et la vitesse calculée aux points de maillage. Elle est normalisée par le maximum de la vitesse mesurée sur  $S$ .

De même, en utilisant la norme 1 on définit:

$$e_1 = \frac{\frac{1}{N_s} \|b - A'x\|_1}{\frac{1}{N_s} \|b\|_1} = \frac{\|b - A'x\|_1}{\|b\|_1} \quad (II.22)$$

où

$$\|b - A'x\|_1 = \sum_{i=1}^{N_s} |V^{mes}(M_i) - V_N^{cal}(M_i)| \quad (II.23)$$

$$\|b\|_1 = \sum_{i=1}^{N_s} |V^{mes}(M_i)| \quad (II.24)$$

⇒ l'erreur  $e_1$  caractérise l'écart moyen entre la vitesse mesurée et calculée sur tous les points de maillage. Elle est normée par la moyenne des vitesses mesurées sur  $S$ .

## Conclusion et paramètres à déterminer

La méthode des rectangles présente l'avantage de résoudre simplement le système (II.5). Seul le calcul des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  et  $V^{mes}$  aux points du maillage est nécessaire. Le problème est alors ramené à la résolution au sens des moindres carrés du système (II.9) si le maillage est irrégulier et (II.18) si le maillage est régulier.

Avant d'appliquer cette méthode sur quelques exemples simples, il faut préciser le choix:

- de la méthode numérique utilisée pour l'inversion du système linéaire (§ 2.2.3)
- du nombre de points de maillage (§ 2.2.4)
- du nombre de coefficients modaux que l'on doit déterminer (§ 2.2.5)

Les paragraphes suivants vont permettre d'énoncer les différents critères qui devront être vérifiés par ces paramètres pour que la précision de notre modèle soit assurée.

### 2.2.3. Choix d'une méthode de résolution

Si la convergence de la méthode de la sphère équivalente vers la solution du système différentiel (I.1) est assurée d'un point de vue théorique, elle peut s'avérer dans certains cas inaccessible d'un point de vue numérique. En effet, les systèmes linéaires obtenus par minimisation d'une fonctionnelle au sens des moindres carrés doivent être résolus avec précaution lorsque la solution est décomposée dans un ensemble de fonctions qui ne sont pas orthonormées. En particulier, la solution d'un tel système linéaire peut être très sensible aux erreurs d'arrondis. La précision que l'on peut attendre de cette solution est liée au conditionnement du système linéaire.

#### 2.2.3.1. Rappels sur le conditionnement d'un système linéaire

##### a) Définitions

Un système linéaire est dit bien conditionné lorsque de faibles variations sur les éléments du système (i.e. erreurs d'arrondis ou erreur de mesures sur composantes de la matrice  $A$  et/ou du vecteur  $b$ ) entraînent de faibles variations sur la solution du système. *A contrario*, la solution d'un système mal conditionné est susceptible d'être entachée d'une erreur largement supérieure à celle apportée par les variations de  $A$  et/ou de  $b$ . Le conditionnement caractérise la stabilité de la solution d'un système linéaire. Il se mesure au moyen du nombre de conditionnement, noté  $\mu(A)$  et défini par:

$$\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (\text{II.25})$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle et  $A^{-1}$  est la matrice inverse de  $A$  (ou la matrice inverse généralisée lorsque  $A$  est rectangulaire<sup>(52)</sup>).

Si on utilise la norme matricielle euclidienne,  $\mu(A)$  s'écrit:

$$\mu(A) = \frac{\text{Max}\{w_j, j = 1..N\}}{\text{Min}\{w_j, j = 1..N\}} \quad (\text{II.26})$$

où  $\{w_j, j = 1..N\}$  est l'ensemble des valeurs singulières de  $A$ .  $\mu(A)$  est donc un nombre réel supérieur ou égal à un et la matrice  $A$  est d'autant mieux conditionnée que  $\mu(A)$  est proche de un.

b) Applications à la résolution du système  $Cx = d$ :

### Propriété 1

Soit  $\tilde{x}$  une solution approchée du système  $Cx = d$ . On définit l'écart entre la solution exacte et la solution approchée par  $e = x - \tilde{x}$  et le résidu associé à  $\tilde{x}$  par  $r = d - C\tilde{x}$ . Un résultat classique d'analyse matricielle <sup>(50)</sup> montre que l'erreur  $e$  vérifie l'inégalité suivante:

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \mu(C) \frac{\|r\|}{\|d\|} \quad (\text{II.27})$$

Cette inégalité montre que l'erreur relative commise sur la solution du système linéaire peut être aussi grande que le produit du résidu relatif et du nombre de conditionnement. Si  $\mu(C)$  est proche de un, le résidu relatif donne une bonne estimation de l'erreur commise sur la solution. En revanche, un résidu faible ne garantit pas la stabilité de la solution lorsque le conditionnement est très grand devant un. Cette instabilité doit être considérée comme une caractéristique du système linéaire.

Exemple: Le champ de vitesse mesuré sur  $S$  peut être correctement approché par un modèle de sphère équivalente (ie: résidu faible) sans que ce modèle soit stable. Une "légère" modification des données vibratoires conduirait à une solution tout à fait différente. Dans un tel cas, on peut dire que les limites d'un modèle déterministe du rayonnement de  $S$  par la méthode de la sphère équivalente sont atteintes.

Notons que la relation (II.27) ne donne qu'un majorant de l'erreur  $e$ . Elle ne permet pas de distinguer les composantes stables des composantes instables de la solution. Cette inégalité est également la meilleure possible, c'est-à-dire qu'il existe un champ de vitesse sur  $S$  et une solution approchée  $\tilde{x}$  tels que l'égalité soit vérifiée.

### Propriété 2

Soit  $E$  une matrice erreur telle que  $\tilde{x}$  soit la solution du système  $(C + E)\tilde{x} = d$ . L'erreur  $e$  vérifie alors:

$$\frac{\|e\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \mu(C) \frac{\|E\|}{\|C\|} \quad (\text{II.28})$$

Cette inégalité montre que la solution d'un système linéaire mal conditionné peut admettre de grandes variations si la matrice  $C$  n'est pas connue avec une grande précision. Or, la discrétisation des intégrales  $C_{ij}$  par la méthode des rectangles conduit à la résolution du système linéaire (II.8) où la matrice  $A^*A$  est une approximation de la matrice  $C$ . On en déduit que la solution obtenue en résolvant le problème discret est *a priori* très sensible à la discrétisation de la surface vibrante. En particulier, seul un nombre de points de maillage infini permettrait à la norme de  $E$  de tendre vers zéro et à la solution du système discret de tendre vers la solution du système continu.

### Propriété 3

Soit  $u$  la précision du codage numérique des nombres réels utilisé par le calculateur ( $u = 10^{-6}$  pour un codage en simple précision et  $u = 10^{-15}$  pour un codage en double précision). L'erreur  $e$  commise sur la solution du système  $Cx = d$  vérifie:

$$\frac{\|e\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \mu(C) Nu$$

(II.29)

Cette troisième inégalité apporte une majoration de l'erreur en fonction du codage numérique utilisé. Les erreurs d'arrondis liés à ce codage constituent en effet une source incontournable de modification des données. Ce bruit de fond numérique impose une limite au nombre de conditionnement. Si  $\mu(C) \approx 10^t$  et  $Nu \approx 10^{-s}$ , il ne faut pas attendre une précision relative sur la solution du système meilleure que  $10^{-t-s}$ . Quelle que soit la méthode d'inversion de système linéaire choisie, l'inégalité (II.29) impose une limite supérieure pour  $\mu(C)$  au-delà de laquelle on peut fortement suspecter la solution d'être dominée par les erreurs d'arrondis.

Exemple: pour un codage en double précision et un système linéaire d'une centaine d'inconnues, la limite est donnée par  $\mu(C) \approx 10^{12}$  (i.e. l'erreur relative  $\frac{\|e\|}{\|\tilde{x}\|}$  due aux erreurs numériques est inférieure à 10 %).

### Conclusions:

Le nombre de conditionnement d'un système linéaire apporte une information sur le risque d'instabilité du système par rapport aux variations de ses composantes. Il ne permet cependant pas de quantifier réellement cette instabilité car les inégalités (II.27) à (II.29) n'apportent que des majorants de l'erreur  $e$ . En particulier, on ne peut pas préciser quelles sont les composantes de la solution qui sont sensibles aux variations du premier et/ou du second membre du système. Quelle que soit la méthode d'inversion choisie, les erreurs d'arrondis sont une source inévitable d'erreur. Une première limite simple pour  $\mu(C)$  - et donc pour  $\mu(A^*A)$  - est donnée par la relation (II.29) en fonction du codage numérique utilisé.

### 2.2.3.2. Intérêt de la méthode de Décomposition en Valeurs Singulières

La matrice  $A$  étant rectangulaire, on montre <sup>(50)</sup> que  $\mu(A)$  vérifie:

$$\mu(A^* \cdot A) = \mu(A)^2 \quad (\text{II.30})$$

Il n'est donc pas intéressant de résoudre les équations normales associées au système  $A \cdot x = b$  lorsque la matrice  $A$  est mal conditionnée. On préférera utiliser la méthode de décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) de la matrice  $A$  pour résoudre directement le système  $A \cdot x = b$  au sens des moindres carrés. En effet, la matrice complexe  $A$  de dimensions  $N_s \times N$ , peut se décomposer sous la forme:

$$A = U W V^* \quad (\text{II.31})$$

où  $V$  est une matrice carrée  $N \times N$  unitaire (i.e.  $V^* V = V V^* = I$ ) et  $U$  une matrice unitaire suivant ses colonnes (i.e.  $U U^* = I$ ) de mêmes dimensions que  $A$ .  $W$  est une matrice réelle carrée  $N \times N$  diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs singulières de la matrice  $A$ . Si la matrice  $A^* A$  est inversible, alors toutes les valeurs singulières de  $A$  sont strictement positives et la solution du système s'écrit:

$$x = V W^{-1} U^* b = V \text{diag}\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_N}\right) U^* b \quad (\text{II.32})$$

Cette solution minimise la norme euclidienne du résidu  $r = b - Ax$ . La solution du système linéaire rectangulaire (II.9) donnée par la méthode S.V.D. est ainsi identique à la solution issue des équations normales et du système (II.8). La S.V.D. permet également de calculer directement le nombre de conditionnement de  $A$  en appliquant la relation (II.26).

Si on note respectivement  $U_i$  et  $V_i$  les  $i^{\text{ème}}$  vecteurs-colonnes des matrices  $U$  et  $V$  alors ils vérifient:

$$A V_i = w_i U_i \quad (\text{II.33})$$

La méthode S.V.D. permet de construire explicitement une base de vecteurs orthonormés (i.e. les colonnes de la matrice  $U$ ) à partir des modes de rayonnement de la sphère équivalente (i.e. les colonnes de la matrice  $A$ ). Les vecteurs-colonnes de  $U$  forment donc une base modale vibratoire de la surface  $S$ . De même, les vecteurs-colonnes de la matrice  $V$  définissent une base orthonormée dans laquelle se décomposent les coefficients modaux de la sphère équivalente. La relation (II.70) montre que la valeur singulière  $w_i$  est un facteur d'amplification qui caractérise la contribution des différents modes de rayonnement de la sphère équivalente à la  $i^{\text{ème}}$  composante de la base modale vibratoire de  $S$ . La contribution de ce mode vibratoire au champ de vitesse mesuré est donc faible si l'amplitude de  $w_i$  est faible (i.e. si elle est beaucoup plus faible que les autres valeurs singulières). *A contrario*, les modes vibratoires associés à des valeurs singulières de grande amplitude ont une contribution importante au champ de vitesse mesuré.

La relation (II.29) montre que les valeurs singulières les plus faibles de  $A$  peuvent conduire à une matrice  $A$  numériquement singulière. En fonction de la précision du codage utilisé, le calcul des vecteur-colonnes de  $U$  associés à ces valeurs singulières deviennent très sensibles aux erreurs numériques. Ce sont des vecteurs instables que le modèle de la sphère équivalente ne permet pas de déterminer avec précision. En particulier, ils peuvent être très sensibles aux erreurs de mesures (i.e. modification du vecteur  $b$ ).

On donne en annexe 3 une interprétation statistique de l'instabilité de la solution d'un système linéaire lorsqu'il est résolu au sens des moindres carrés. Le champ de vitesse vibratoire de la structure est considéré comme une variable aléatoire définie en tout point  $M_i$  du maillage par sa valeur moyenne (la vitesse mesurée  $V^{mes}(M_i)$ ) et son écart-type  $\sigma_v(M_i)$ . Les coefficients modaux de la sphère équivalente ainsi que la pression acoustique rayonnée par cette sphère deviennent également des variables aléatoires dont on sait calculer l'écart-type (relations (A3.6) et (A3.10)). La solution obtenue par la méthode des moindres carrés correspond à des hypothèses simples effectuées sur l'écart-type de la vitesse vibratoire. Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente sera donc stable si les coefficients modaux qui le définissent sont stables, c'est-à-dire s'ils sont associés à un faible écart-type. On montre également que cette stabilité peut être améliorée en annulant la contribution des vecteurs-colonnes instables de la matrice  $U$ . Cette opération est rendue possible par la S.V.D. en remplaçant dans la matrice  $W^{-1}$  les coefficients associés aux valeurs singulières les plus faibles par zéro<sup>(53)</sup>. En diminuant le nombre de valeurs singulières on diminue l'écart-type des coefficients modaux, mais on s'écarte également de la solution "exacte" définie par le système complet (i.e. avec toutes les valeurs singulières prises en compte).

Pour une matrice mal conditionnée, le problème est ramené au choix des valeurs singulières qu'il faut annuler pour améliorer la stabilité des coefficients modaux. Une approche classique consiste à déterminer le nombre de conditionnement maximum admissible en fonction de la précision des données mesurées<sup>(46,47,54)</sup>. La dynamique de mesure doit en effet permettre d'extraire avec précision la contribution des modes de la sphère équivalente dont l'amplitude sur  $S$  est faible. Or, la relation (II.70) montre que la valeur singulière  $w_i$  traduit l'amplitude du  $i^{\text{ème}}$  mode vibratoire de  $S$  que l'on peut déterminer à partir des modes de rayonnement de la sphère équivalente. Le nombre de conditionnement caractérise donc le rapport entre le mode de plus grande et de plus faible amplitude et on lui impose d'être inférieur à la dynamique de mesure. Ce critère permet donc de ne prendre en compte que les modes de la sphère équivalente qui admettent une amplitude suffisante sur  $S$ .

On montre cependant en annexe 3 que la stabilité des coefficients modaux dépend de la densité du maillage vibratoire. On expliquera plus en détail le lien entre le conditionnement de  $A$  et le maillage vibratoire dans le paragraphe II.2.2.4. On montre également au paragraphe II.2.2.5 que seuls certains modes de la sphère équivalente contribuent au rayonnement acoustique de la structure. On peut donc obtenir de bons résultats satisfaisants avec une matrice  $A$  mal conditionnée si l'instabilité du système n'affecte que des coefficients modaux de la sphère qui ne contribuent pas au rayonnement acoustique de la structure. On en déduit qu'une limite précise pour le nombre de conditionnement maximum admissible n'est pas simple à déterminer.

D'un point de vue numérique, la résolution du système (II.46) par la méthode S.V.D. impose le stockage d'une matrice  $N_s \times N$  au lieu d'une matrice  $N \times N$  pour les équations normales associées au

système (II.45). Si on est assuré du bon conditionnement de  $A$ , on peut résoudre directement ce dernier système par une méthode de type Cholesky ou LU<sup>(53)</sup>.

### 2.2.3.3. Application au choix du rayon et de la position de la sphère équivalente

On montre dans l'annexe 4 que le rayonnement acoustique d'une sphère équivalente dont les coefficients modaux vérifient le système (II.46) est théoriquement indépendant du rayon de la sphère équivalente. D'un point de vue numérique on a cependant intérêt à ce que le conditionnement du système soit minimum.

Les matrices unitaires ayant un nombre de conditionnement égal à un, on peut donc distinguer deux origines au mauvais conditionnement du système (II.9):

- la première est liée à la non-orthogonalité des vecteurs-colonnes de  $A$  : les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  n'étant pas orthogonales sur des surfaces non sphériques, le nombre de conditionnement de  $A$  sera *a priori* d'autant plus grand que  $S$  sera éloignée d'une sphère.
- la seconde est associée à la différence de norme entre les vecteurs-colonnes de  $A$ . En effet, une colonne de  $A$  d'un ordre de grandeur bien plus faible que les autres sera associée à une valeur singulière de faible amplitude. La matrice  $A$  est dite équilibrée suivant ses colonnes (respectivement suivant ses lignes) si elle admet des vecteurs-colonnes (resp. des vecteurs-lignes) dont la norme est comparable<sup>(50,55)</sup>. Pour que les colonnes de  $A$  soient équilibrées, les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  doivent présenter des amplitudes comparables à la surface de la structure. Or, on a montré au paragraphe II.1 que l'on pouvait distinguer parmi les modes de rayonnement de  $S_a$ :

1) les modes rayonnants qui admettent une décroissance du champ de pression en  $\frac{a}{r}$

2) les modes non rayonnants qui vérifient une décroissance en  $(\frac{a}{r})^{n+1}$

$\Rightarrow$  L'amplitude des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sera du même ordre de grandeur sur  $S$  si la distance entre la sphère équivalente et la structure est la plus faible possible.

Pour tout point  $O$  appartenant au volume intérieur de la structure  $S$  on définit la compacité  $C$  de cette structure  $S$  relativement au point  $O$  par:

$$C(O) = \frac{r_{cir}}{r_{ins}} = \frac{\text{Max}\{d(O, M_s), M_s \in S\}}{\text{Min}\{d(O, M_s), M_s \in S\}}$$

(II.34)

où

$r_{ins}$  est le rayon de la plus grande sphère de centre  $O$  inscrite dans la structure

$r_{cir}$  le rayon de la plus petite sphère, de centre  $O$  circonscrite à  $S$ .

⇒ La position optimale de la sphère équivalente est associée à une compacité minimale.

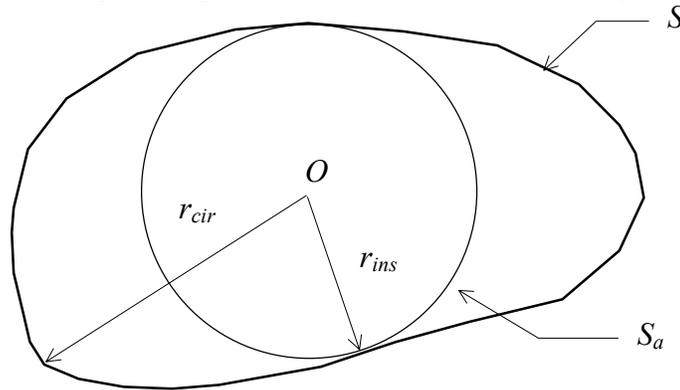


Figure II.1  
Position optimale de la sphère équivalente

La série ( II.42 ) qui traduit le rayonnement acoustique de  $S_a$  n'est convergente que pour des points d'écoute placés en dehors de la sphère. Pour pouvoir calculer la pression acoustique en un point proche de la structure, la sphère équivalente doit donc être inscrite à l'intérieur de la structure vibrante. Le rayon de la sphère est choisi égal à  $r_{\min}$ . Le nombre de coefficients modaux étant nécessairement fini, on constatera cependant sur les exemples du chapitre III que le conditionnement de la matrice  $A$  peut être minimum pour un rayon  $a$  un peu supérieur à  $r_{\min}$ .

### Remarques:

#### 1) Analogie avec les méthodes holographiques

La méthode de la sphère équivalente s'apparente à une méthode d'holographie "vibratoire" où le champ de vitesse inconnu sur une surface "source" (i.e. la sphère équivalente  $S_a$ ) est déterminé par rétropropagation du champ de vitesse mesuré sur un hologramme (i.e. la surface vibrante  $S$ ). Il s'agit d'holographie non conforme dès que la surface  $S$  n'est plus une sphère de même centre que la sphère équivalente. C'est donc bien un problème inverse d'autant plus mal conditionné que la surface de l'hologramme est éloignée de la surface de la source. Comme en holographie de champ proche, l'amplitude des modes non rayonnants associés à la surface source ne pourra être déterminée avec précision que si l'hologramme est proche de cette source, c'est-à-dire si la distance entre la sphère équivalente et la structure est la plus faible possible.

L'influence du rayon et de la position de la sphère équivalente sur le conditionnement de la matrice  $A$  est détaillée au chapitre II sur des exemples simples.

#### 2) Comparaison avec une source multipolaire

On montre en annexe 2 que la pression acoustique rayonnée par un multipôle se met sous la forme:

$$P(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 M_{nm\sigma} \mathcal{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) h_n(kr)$$

( II.35 )

où on définit:

$$\Psi_j^{\text{mul}}(M) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) h_n(kr) \quad (\text{II.36})$$

comme la  $j^{\text{ème}}$  fonction d'onde sphérique ou encore, en reprenant la terminologie modale, le  $j^{\text{ème}}$  "mode de rayonnement" du multipôle associé au coefficient modal  $M_{nm\sigma}$ . Si la sphère équivalente et le multipôle ont le même centre  $O$  alors le rayonnement acoustique du multipôle est identique à celui de la sphère lorsque les coefficients  $M_{nm\sigma}$  vérifient le système (II.46) où les  $N$  premières fonctions  $\Psi_j$  sont remplacées par les  $N$  premières fonctions  $\Psi_j^{\text{mul}}$ . Cette propriété est démontrée dans l'annexe 4 en remarquant que les fonctions  $\Psi_j$  et  $\Psi_j^{\text{mul}}$  vérifient:

$$\Psi_j^{\text{mul}} = h'_n(ka) \Psi_j \quad (\text{II.37})$$

Le conditionnement du système (II.46) n'est cependant pas indifférent au choix du modèle. Les fonctions  $\Psi_j$  et  $\Psi_j^{\text{mul}}$  étant linéairement dépendantes, les deux modèles correspondent à un équilibrage différent de la matrice  $A$ .

Pour une source multipolaire, la valeur de  $\mu(A)$  est en effet dirigée par l'amplitude des fonctions  $h_n(kr_s)$  et  $h'_n(kr_s)$  où la fonction  $h_n(kr_s)$  vérifie:

$$|h_n(kr_s)| \approx \frac{(2n-1)!!}{(kr_s)^{n+1}} \text{ si } n \text{ est supérieur à } kr_s \quad (\text{II.38})$$

$$|h_n(kr_s)| \approx \frac{1}{kr_s} \text{ si } n \text{ est inférieur à } kr_s \quad (\text{II.39})$$

La fonction  $h'_n(kr_s)$  admet un comportement identique. A cause du coefficient  $(2n-1)!!$ , les composantes des colonnes de  $A$  associées aux modes d'ordres  $n$  élevés deviennent donc rapidement d'une amplitude très supérieure à l'amplitude des composantes des premières colonnes de  $A$ . La matrice  $A$  est donc mal équilibrée et admet un nombre de conditionnement élevé. En choisissant le modèle d'une sphère, les variations de  $h_n(kr_s)$  et  $h'_n(kr_s)$  sont "normalisées" par celles de  $h'_n(ka)$  et la matrice est mieux conditionnée. On comparera plus précisément ces deux modèles au chapitre III dans le cas simple où  $S$  est une sphère vibrante.

Notons pour finir que Stupfel<sup>(21)</sup> et Wall<sup>(56)</sup> ont proposé des procédures numériques de normalisation des fonctions de Hankel sphériques pour appliquer respectivement la méthode du champ nul et la méthode de la matrice  $T$ . La méthode de la sphère équivalente présente l'avantage de donner une interprétation physique à cette normalisation.

### 2.2.4. Choix du maillage vibratoire

Pour que la solution du système discret soit proche de celle du problème continu - et donc du problème différentiel (I.1) - il faut que les intégrales  $C_{ij}$  et  $d_j$  soient calculées avec précision. Le maillage doit ainsi être suffisamment fin pour que la méthode des rectangles conduisent à une approximation correcte de ces intégrales. Un critère de quelques points de maillage entre chaque oscillation des fonctions  $V^{mes}$  et  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  est en général admis comme suffisant.

La fonction  $V^{mes}$  est une donnée de notre problème. On suppose donc que l'on est capable *a priori* de déterminer un maillage suffisamment dense pour décrire cette fonction. En pratique on applique souvent des critères qui dépendent des ondes de flexions attendues dans la structure.

Les variations des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sont plus difficile à prévoir. On sait cependant que le nombre d'oscillations de ces fonctions augmentera rapidement avec l'indice  $j$ . On peut en effet distinguer différentes origines:

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M_s) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s) \frac{h'_n(kr_s)}{h'_n(ka)} n_r + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s)}{kr_s \partial \theta} \frac{h_n(kr_s)}{h'_n(ka)} n_\theta + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s)}{kr_s \sin \theta_s \partial \varphi} \frac{h_n(kr_s)}{h'_n(ka)} n_\varphi$$

a) La fonction harmonique sphérique  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  admet  $n+m$  cercles nodaux lorsque  $(\theta, \varphi)$  parcourt  $]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  et ses dérivées suivant les angles  $\theta$  et  $\varphi$  vérifient des propriétés similaires.

b) Si la structure n'est pas compacte, les fonctions  $\frac{h_n(kr_s)}{h'_n(ka)}$  et  $\frac{h_n(kr_s)}{h'_n(ka)}$  d'ordre  $n$  élevé sont associées aux modes non-rayonnants de la sphère équivalente et présentent des amplitudes très différentes entre un point de la structure proche de la sphère et un point éloigné. Ce comportement accentue les variations des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ .

c) La géométrie de la structure est également prise en compte par la normale en tout point du maillage. Les surfaces à fort rayon de courbure sont ainsi caractérisées par des variations rapides des composantes  $(n_r, n_\theta, n_\varphi)$  de la normale. Une description précise des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  demande donc un nombre de points de maillage important dans les zones où la courbure varie rapidement. Si la structure présente des arêtes, la normale devient même

discontinue. La surface vibrante n'est alors plus régulière et la convergence de la méthode n'est plus assurée d'un point de vue théorique. Les exemples traités dans les chapitres III et IV montrent cependant que la méthode ne semble pas être très sensible à cette hypothèse de régularité.

### Remarques:

#### 1. Lien entre le maillage vibratoire et le nombre de conditionnement de $A$

Lorsque le maillage vibratoire de  $S$  n'est pas suffisamment dense, certaines fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  peuvent devenir difficile à distinguer. Elles peuvent donc sembler linéairement dépendantes et conduire à une matrice  $A$  mal conditionnée. En affinant le maillage, l'orthogonalité des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sera mieux traduite et le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  diminuera.

⇒ Le maillage sera suffisamment dense s'il permet au moins de différencier la contribution de toutes les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  prises en compte dans le modèle. Le nombre de conditionnement de  $A$  apparaît comme un indicateur du sous-maillage de la structure.

Notons cependant qu'en augmentant la densité du maillage le système discret tend vers le système continu dont on sait *a priori* qu'il est mal conditionné. Le nombre de conditionnement du système discret admet donc une valeur limite. Rien ne s'oppose par ailleurs à ce qu'il existe un maillage pour lequel le système discret soit mieux conditionné que le système continu.

#### 2. Notion de critère d'échantillonnage

Le maillage vibratoire de la surface  $S$  peut être interprété simplement comme un critère d'échantillonnage des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ . En effet, la relation (I.1.37) traduit explicitement la décomposition de la vitesse vibratoire  $V^{mes}$  dans l'ensemble des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ . Ce sont donc des fonctions d'interpolation qui permettent de reconstituer les variations de  $V^{mes}$  en tout point de  $S$  à partir de la connaissance de  $V^{mes}$  en un nombre fini de points de  $S$ . Entre les points de maillage, il est implicite que la vitesse calculée n'admet pas de variations importantes. Or, lorsque les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  d'ordres élevés qui admettent de fortes oscillations rapides sur  $S$  sont sous-échantillonnées, la vitesse calculée peut se caractériser par une erreur très faible aux points de mesure (i.e. valeurs des paramètres  $e_2$ ,  $e_{max}$  et  $e_1$  faibles) et des oscillations importantes entre les points de maillage (cf. figure II.8). Le calcul de la contribution des modes d'ordre  $n$  et/ou  $m$  élevé est donc très sensible au maillage vibratoire. Les coefficients modaux solution du système linéaire sous-échantillonné sont alors très différents des coefficients solutions du système continu. Ce comportement est comparable à celui que l'on peut constater en traitement du signal lors d'un repliement de spectre.

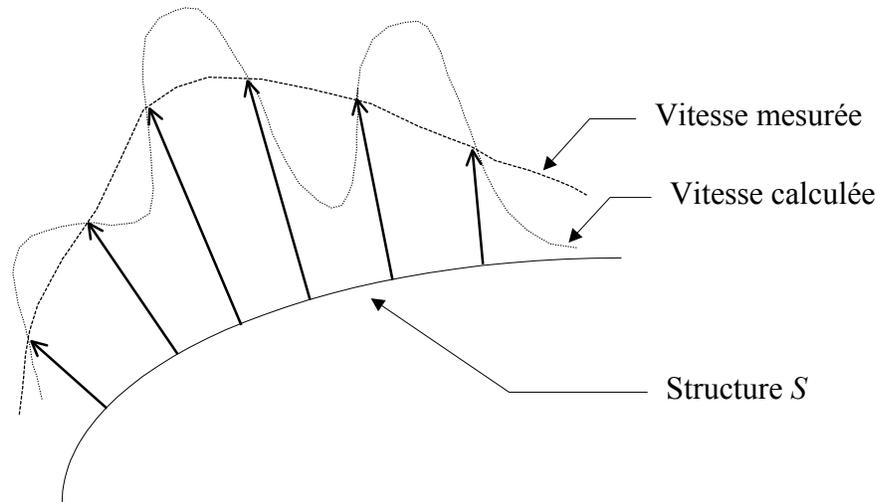


Figure II.2

Conséquences d'un sous-échantillonnage des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$

### Critère de validité du modèle de sphère équivalente

Si on est capable de définir un surmaillage de la surface  $S$  (i.e. maillage contenant deux ou trois fois plus de points que le maillage initial) alors la validité du modèle de sphère équivalente peut être vérifiée *a posteriori* en comparant la vitesse quadratique calculée par la sphère équivalente à partir du maillage initial et la vitesse quadratique calculée à partir du surmaillage. Si le maillage initial n'est pas suffisamment dense, les oscillations entre les points de maillage se traduiront par une différence entre les deux vitesses quadratiques.

Notons qu'un maillage de la surface  $S$  peut être tout à fait correct pour décrire la vitesse vibratoire (cas de la figure II.8 par exemple) et s'avérer insuffisant pour décrire les oscillations de certaines fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ .

### 3. Application de la méthode de la sphère équivalente aux mesures de pression acoustique et comparaison des critères de maillage

Si on était capable de mesurer la pression pariétale en tout point de la surface  $S$  alors la méthode de la sphère équivalente conduirait à la minimisation au sens des moindres carrés de la pression pariétale résiduelle quadratique:

$$\iint_S \left| P^{mes}(M_s) - P_N^{cal}(M_s) \right|^2 dS$$

(II.40)

où  $P_N^{cal}$  est la restriction de la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente aux modes de rayonnement d'ordre  $n$  inférieur ou égal à  $N$ :

$$P_N^{cal}(M_s) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 P_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s) \frac{h_n(kr_s)}{h_n(ka)} \quad (\text{II.41})$$

Les coefficients modaux de  $S_a$  vérifient alors le système  $Ax = b$  avec :

$$\begin{cases} A_{ij} = \sqrt{\Delta S_i} \Psi_j(M_i) \\ b_i = \sqrt{\Delta S_i} P^{mes}(M_i) \end{cases}$$

où  $\Psi_j(M_i) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i) \frac{h_n(kr_i)}{h_n(ka)}$  (II.42)

Les fonctions  $\Psi_j$  forment un ensemble complet sur  $L^2(S)$  et la solution de ce système converge au sens des moindres carrés vers  $P^{mes}$ . Le maillage de la surface  $S$  doit tenir compte des variations de la pression pariétale et des fonctions  $\Psi_j$ . Ces fonctions admettent des variations plus régulières que les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  définies dans le système (II.46) car elles ne dépendent pas de la normale.

On peut également remarquer que si les mesures de pression sont effectuées sur une sphère  $S_0$  qui englobe la structure, on pose  $S_a = S_0$  et les coefficients vérifient :

$$P_{nm\sigma}^a = \iint_S \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) P^{mes}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{II.43})$$

On retrouve la méthode classique proposée par <sup>(42-44)</sup> où le maillage de mesure ne dépend plus que des variations de la pression acoustique sur  $S_0$  et des fonctions harmoniques sphériques. Le critère de maillage est alors identique à celui défini en annexe 5 pour des mesures vibratoires sur une sphère.

⇒ Le critère de maillage appliqué pour la modélisation du rayonnement acoustique d'une structure à partir de mesures vibratoires est plus sévère que celui appliqué pour des mesures de pression acoustique car les fonctions utilisées pour décomposer la vitesse vibratoire sur  $S$  admettent des variations plus rapides que les fonctions  $\Psi_j$  définies par (II.79).

### Conclusion : Démarche préconisée pour choisir un maillage vibratoire

Dans un premier temps, le maillage vibratoire est défini en fonction des variations de la vitesse vibratoire. On applique par exemple les mêmes critères que pour une méthode d'éléments de frontière. Dans un second temps, et de manière itérative, on définit un maillage plus fin de la structure jusqu'à obtenir une solution du système (II.9) qui ne dépende plus du nombre de points de maillage. Si le maillage initial a été correctement choisi, la vitesse vibratoire peut être interpolée pour définir les autres maillages. Pour un nombre de coefficients modaux donné, un maillage vibratoire sera considéré comme suffisamment dense dès que la vitesse quadratique

calculée par  $S_a$  est indépendante du maillage. Un critère simple qui ne tient compte que des variations des fonctions harmoniques sphériques sera présenté au chapitre III.

### 2.2.5. Choix du nombre de coefficients modaux à déterminer

La méthode de minimisation est intéressante, en terme de temps de calcul, si une approximation correcte du rayonnement de  $S$  est obtenue pour une faible valeur de  $N$ . Il est donc important de pouvoir prédire le nombre de coefficients modaux qu'il est nécessaire de calculer pour obtenir un modèle satisfaisant (i.e. valeurs des paramètres  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$  suffisamment faibles).

Lorsque la structure  $S$  est une sphère de centre  $O$ , on a montré que l'on pouvait définir des ordres  $N_p$  et  $N_w$  (respectivement pour la pression et pour la puissance) au-delà desquels les modes acoustiques de la sphère ne rayonnaient plus. Ce sont des critères intéressants car ils permettent de prévoir *a priori* (i.e. quelle que soit la déformée vibratoire sur la sphère) les termes de la série qui vont contribuer au rayonnement. Physiquement, les termes que l'on néglige correspondent aux modes non rayonnants de la sphère. Cette approximation est donc tout à fait légitime dès lors que la vitesse vibratoire n'admet pas de fortes composantes pour  $n > N_p$  (resp.  $n > N_w$ ). La décroissance des modes non rayonnants est en général suffisamment rapide lorsque le point d'écoute appartient au champ lointain de la sphère pour que les critères de troncature  $n > N_p$  (resp.  $n > N_w$ ) conduisent à des résultats satisfaisants. On cherche donc à établir des critères équivalents dans le cas d'une structure de géométrie quelconque.

#### Critère de troncature associé au calcul de la pression acoustique

Dans un premier temps, les coefficients modaux de la sphère équivalente vont être exprimés analytiquement en fonction de la pression pariétale et de la vitesse vibratoire mesurée sur la structure  $S$ . Soit  $S_0$  une sphère de rayon  $r_0$  et de même centre que la sphère équivalente englobant la structure  $S$ .

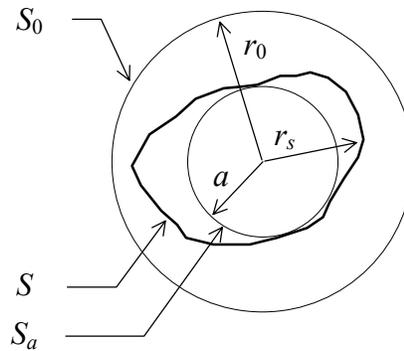


Figure II.3  
Représentation de  $S_0$ ,  $S_a$  et  $S$

En tout point  $M$  extérieur à  $S_0$ , on montre (cf annexe 6) que la pression rayonnée par la structure se met sous la forme d'une série convergente:

$$P(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^6 \nabla_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h_n'(kr_0)}$$

(II.44)

$$\text{avec } V_{nm\sigma}^{r_0} = \frac{k}{\rho_0 c_0} h'_n(kr_0) \iint_S \left( P(M_s) \frac{\partial \hat{\Psi}_{nm\sigma}}{\partial n}(M_s) + jk\rho_0 c_0 V^{mes}(M_s) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s) \right) dS \quad (\text{II.45})$$

$$\text{et } \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_s, \varphi_s) j_n(kr_s) \quad (\text{II.46})$$

Cette expression est obtenue à partir de l'équation intégrale de Helmholtz lorsque la fonction de Green en champ libre  $G_0$  est décomposée dans l'ensemble des fonctions d'onde sphériques. Elle caractérise le rayonnement acoustique de la sphère  $S_0$  : les coefficients modaux  $V_{nm\sigma}^{r_0}$  de  $S_0$  sont exprimés directement en fonction de la pression pariétale et de la vitesse vibratoire mesurée sur la surface  $S$ . Lorsque ses coefficients modaux vérifient la relation (I.1.44), la sphère  $S_0$  peut être considérée comme une sphère équivalente à la structure  $S$ .

En appliquant la méthode de la sphère équivalente on exprime la pression acoustique rayonnée par la structure sous la forme:

$$P(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^{a,\infty} \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)} \quad (\text{II.47})$$

où les coefficients  $V_{nm\sigma}^{a,\infty}$  sont la solution du système (II.9) lorsque tous les modes de rayonnement de  $S_a$  sont pris en compte. La convergence de cette série est uniforme en tout point  $M$  extérieur à  $S$ . La décomposition du champ de pression rayonné par la structure dans l'ensemble des fonctions d'onde sphériques étant unique (cf annexe 7), on en déduit que les coefficients  $M_{nm\sigma}^c$  et  $V_{nm\sigma}^{r_0}$  vérifient pour tous les triplets  $(n, m, \sigma)$ :

$$\frac{V_{nm\sigma}^{a,\infty}}{h'_n(ka)} = \frac{V_{nm\sigma}^{r_0}}{h'_n(kr_0)} \quad (\text{II.48})$$

Cette relation traduit l'équivalence terme à terme entre le rayonnement des modes de  $S_a$  et de  $S_0$ , c'est-à-dire entre le rayonnement acoustique de  $S_a$  et de  $S_0$ . On en déduit l'expression analytique des coefficients modaux de  $S_a$ :

$$V_{nm\sigma}^{a,\infty} = \frac{k}{\rho_0 c_0} h'_n(ka) \iint_S \left( P(M_s) \frac{\partial \hat{\Psi}_{nm\sigma}}{\partial n}(M_s) + jk\rho_0 c_0 V^{mes}(M_s) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s) \right) dS \quad (\text{II.49})$$

### Conséquence:

La distinction entre les modes rayonnants et les modes non rayonnants de la sphère  $S_0$  permet d'appliquer le critère de troncature développé au paragraphe II.1.5. Si la vitesse particulière rayonnée par la structure à la surface de  $S_0$  est suffisamment régulière, alors les séries (I.1.44) et (I.1.47) peuvent être tronquée à l'ordre:

$$N_p = N_p(S_0, \varepsilon, M) = [kr_0] + n_p(\varepsilon, r) \quad (\text{II.50})$$

La décroissance des coefficients  $V_{nm\sigma}^{r_0}$  pouvant être assez lente, le critère de troncature est d'autant plus précis que la vitesse vibratoire admet de nombreuses oscillations lentes sur  $S$  et que le point d'écoute appartient au champ lointain de  $S_0$ . On en déduit également que les modes vibratoires de la structure qui vont contribuer au rayonnement acoustique sont entièrement décrits par les  $N_{\text{ray}} = (N_p + 1)^2$  premiers modes de rayonnement de la sphère équivalente. Les modes de  $S_a$  d'ordre  $n$  supérieur à  $N_p$  sont associés aux modes non rayonnants de la structure. La figure II.10 résume le comportement des différents modes de  $S_a$  en fonction de leur ordre  $n$ , de  $ka$  et de  $kr_0$ .

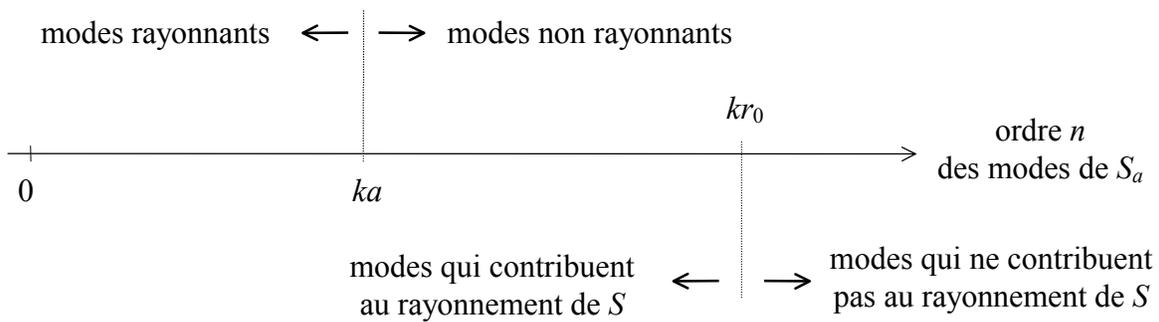


Figure II.4  
Caractéristiques des modes de la sphère équivalente  
en fonction de leur ordre  $n$

Les problèmes de conditionnement associés aux systèmes linéaires (II.42) et (II.46) sont liés à la contribution des modes non rayonnants de  $S_a$  (i.e.  $n > ka$ ) qui admettent une contribution au rayonnement de  $S_0$  (i.e.  $n < kr_0$ ).

#### Application au choix de $N$

La pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente limitée aux modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à  $N_p$  et associée aux coefficients modaux  $V_{nm\sigma}^{a,\infty}$  est une bonne approximation du champ pression acoustique rayonné par la structure. Le critère de troncature (II.87) n'est cependant applicable que si les coefficients  $V_{nm\sigma}^{a,\infty}$  sont connus, c'est-à-dire lorsque le système linéaire (II.9) est résolu en prenant en compte tous les modes de  $S_a$ . Notons alors  $V_{nm\sigma}^{a,N}$  les coefficients modaux solutions du système linéaire lorsque seuls les  $N$  premiers modes de  $S_a$  sont pris en compte. Comme la série (I.1.47) converge uniformément à l'extérieur de  $S$ , les coefficients  $V_{nm\sigma}^{a,N}$  vérifient:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_{nm\sigma}^{a,N} = V_{nm\sigma}^{a,\infty} \quad (\text{II.51})$$

Le nombre de coefficients modaux qu'il faut réellement prendre en compte dans le système linéaire doit ainsi tenir compte de la vitesse de convergence des coefficients  $V_{nm\sigma}^{a,N}$  d'ordre  $n$  inférieur à  $N_p$  vers les coefficients  $V_{nm\sigma}^{a,\infty}$ . Si la convergence est rapide (cas n°1 de la figure II.11) alors le rayonnement acoustique de la structure sera correctement approché en calculant les coefficients modaux de  $S_a$  jusqu'à un ordre  $n = N_{\max}$  un peu supérieur à  $N_p$ . En revanche, si la convergence est lente (cas n°2 de la figure II.11), il faudra choisir  $N_{\max}$  très supérieur à  $N$ .

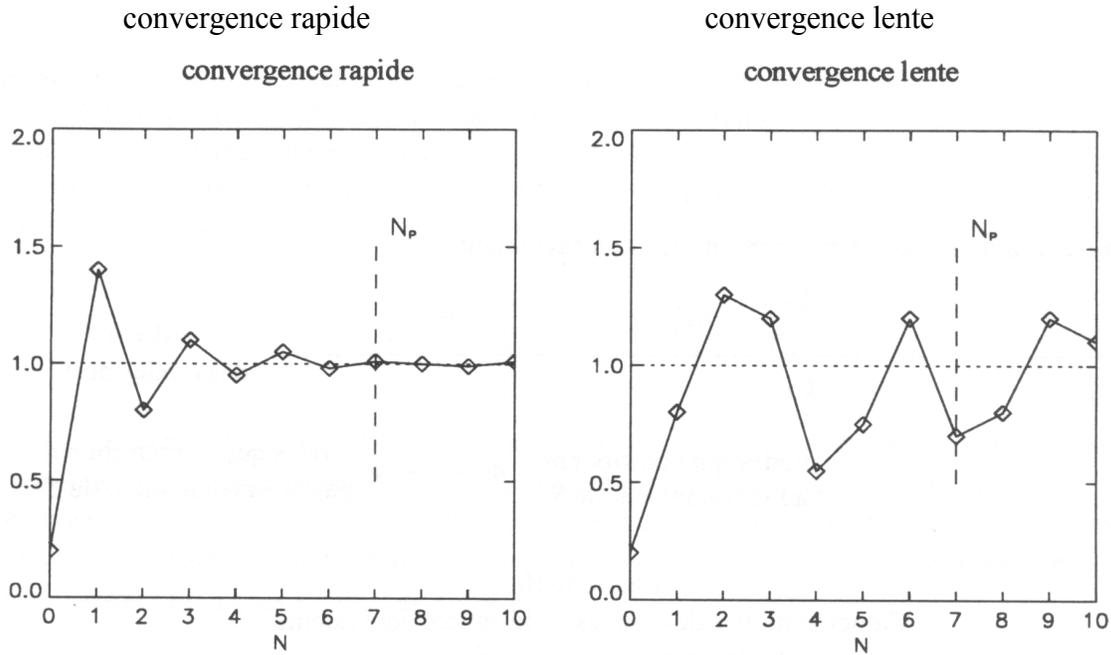


Figure II.5

Exemple de variations de  $\frac{V_{nm\sigma}^{a,N}}{V_{nm\sigma}^{a,\infty}}$  en fonction de  $N$  (amplitude arbitraire)

Si la structure est une sphère de centre  $O$ , alors  $V_{nm\sigma}^{a,N} = V_{nm\sigma}^{a,\infty}$  quel que soit  $N$  et le critère (II.87) est vérifié exactement. On en déduit que la convergence de  $V_{nm\sigma}^{a,N}$  vers  $V_{nm\sigma}^{a,\infty}$  est d'autant plus rapide que la structure est proche d'une sphère.

La vitesse de convergence dépend également de la déformée vibratoire. Ce sont en effet les modes de  $S_a$  d'ordres  $m$  et/ou  $n$  élevés qui admettent le plus de directivité et qui seront capables de traduire les oscillations rapides sur  $S$ .

De manière générale, le champ de pression acoustique rayonné par la structure sera donc approché par:

$$P(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{n=0}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^{a,N_{\max}} \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h_n'(ka)}$$

(II.52)

où  $N_{\max}$  est supérieur à  $N_p$ .

### Critère de troncature associé au calcul de la puissance acoustique

En appliquant les relations ( I. I.17 ) pour calculer la puissance rayonnée par  $S_0$  et ( I. I.48 ) pour l'équivalence entre  $S_a$  et  $S_0$ , la puissance acoustique rayonnée par la structure s'écrit simplement:

$$W = \frac{\rho_0 c_0}{2k^2} \sum_{(n,m,\sigma)} \left| \frac{V_{nm\sigma}^b}{h'_n(kr_0)} \right|^2 = \frac{\rho_0 c_0}{2k^2} \sum_{(n,m,\sigma)} \left| \frac{V_{nm\sigma}^{a,\infty}}{h'_n(ka)} \right|^2 \quad (\text{II.53})$$

Comme précédemment, la décroissance des coefficients modaux de  $S_0$  permet d'appliquer le critère du paragraphe 1.5 On en déduit que l'ordre de troncature  $N_w$  vérifie:

$$N_w = N_w(S_0, \varepsilon) = [kr_0] + n_w(\varepsilon) \quad (\text{II.54})$$

La puissance acoustique rayonnée par  $S$  est donc approchée par:

$$W = \frac{\rho_0 c_0}{2k^2} \sum_{n=0}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 \left| \frac{V_{nm\sigma}^{a, N_{\max}}}{h'_n(ka)} \right|^2 \quad (\text{II.55})$$

avec  $N_{\max} > N_w$ .

### Conclusion sur le choix de $N$ :

A partir de l'équation intégrale de Helmholtz et du rayonnement acoustique d'une sphère  $S_0$  qui entoure la structure, on a déterminé les modes de rayonnement de la sphère équivalente qui vont théoriquement contribuer au rayonnement acoustique de la structure (i.e. modes d'ordre  $n$  inférieur à  $N_p$  pour la pression acoustique et  $N_w$  pour la puissance acoustique). Les coefficients modaux qui rendent le rayonnement de  $S_a$  équivalent à celui de la structure ont été exprimés en fonction de la pression pariétale et de la vitesse vibratoire mesurée sur la structure.

Si cette structure n'est pas compacte, la vitesse de convergence des coefficients modaux de la sphère équivalente d'ordre  $n$  inférieur à  $N_p$  impose en général de prendre en compte un nombre plus important de coefficients modaux. En revanche, si la vitesse vibratoire varie lentement sur une surface compacte, les premiers modes de  $S_a$  peuvent très bien converger rapidement et traduire correctement le rayonnement de la structure. La troncature peut alors avoir lieu avant l'ordre  $n = N_p$  (resp.  $N_w$ ).

Les critères de troncature ( II.87 ) et ( II.91 ) donnent donc un ordre de grandeur pour le choix de  $N$ . Une démarche itérative est en général nécessaire pour confirmer la convergence du modèle. Un premier calcul peut être effectué avec  $N = (N_p+1)^2$ . Le rayonnement acoustique est alors comparé à celui obtenu pour une valeur supérieure de  $N$  jusqu'à ce que les  $(N_p+1)^2$  premiers coefficients aient convergé.

On a montré au paragraphe 2.3 que la sphère équivalente devait approcher au plus près la structure pour que le système linéaire soit le mieux conditionné possible. Pour que le nombre de coefficients à calculer soit également le plus faible possible, les relations ( II.87 ) et ( II.91 ) montrent que la sphère  $S_0$  doit être de rayon minimal. La position de la sphère équivalente influence donc à la fois le conditionnement du système linéaire et le nombre de coefficients modaux à calculer.

### 2.3. Méthode géométrique

En appliquant la méthode des sources équivalentes au cas de la sphère, nous avons montré qu'il était possible de ramener le rayonnement acoustique d'une structure  $S$  fermée et régulière à celui d'une sphère dont le centre est choisi à l'intérieur de la structure. Lorsque la surface  $S$  s'éloigne de celle d'une sphère le système linéaire que l'on doit inverser peut cependant prendre des dimensions importantes. Il conduit alors à des temps de calcul comparables à ceux des méthodes intégrales. Des problèmes numériques liés au conditionnement du système viennent également limiter les applications de la méthode. L'idée développée dans ce paragraphe consiste à éviter la résolution d'un système linéaire en déterminant le champ de vitesse vibratoire à la surface de la sphère équivalente par une simple projection géométrique du champ de vitesse connu sur la structure. On définit donc dans un premier temps un maillage vibratoire de la sphère équivalente tel que tout point de la structure soit associé à un point image sur la sphère. La projection permet ainsi de définir la vitesse vibratoire en chaque point de la sphère équivalente en fonction de la vitesse vibratoire de son image sur la structure (figure II.12).

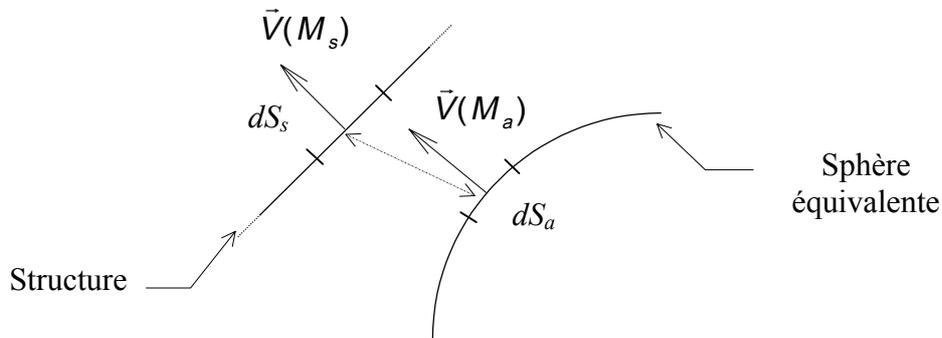


Figure II.1

Projection de la vitesse vibratoire de la structure sur la sphère

Dans un second temps, le rayonnement acoustique de la sphère équivalente est déterminé en calculant les coefficients modaux associés aux modes rayonnants par la relation (II.3) :

$$V_{nm\sigma}^a = \langle V^a, \bar{Y}_{nm}^\sigma \rangle_{\theta, \varphi} = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} V^a(\theta_a, \varphi_a) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_a, \varphi_a) dS_a$$

(II.1)

Cette intégrale est calculée numériquement à partir du maillage de la sphère équivalente.

Deux exemples de projection sont illustrés sur les figures II.13 et II.14 lorsque la structure est une plaque rectangulaire :

- La première est une projection suivant les rayons de la sphère. Le point  $M_s$  de la structure défini par ses coordonnées sphériques  $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$  dans le repère lié au centre de la sphère est associé au point  $M_a$  de  $S_a$  de coordonnées  $(a, \theta_s, \varphi_s)$ .

- La seconde est une projection suivant l'axe  $OZ$ . Le point  $M_s(x_s, y_s, z_s)$  est associé au point  $M_a(x_a, y_a, z_a)$  où  $z_a = \sqrt{a^2 - x_s^2 - y_s^2}$ . Pour que ce point soit défini sur la sphère, il faut que le diamètre de la sphère soit supérieur à la plus grande dimension de la plaque.

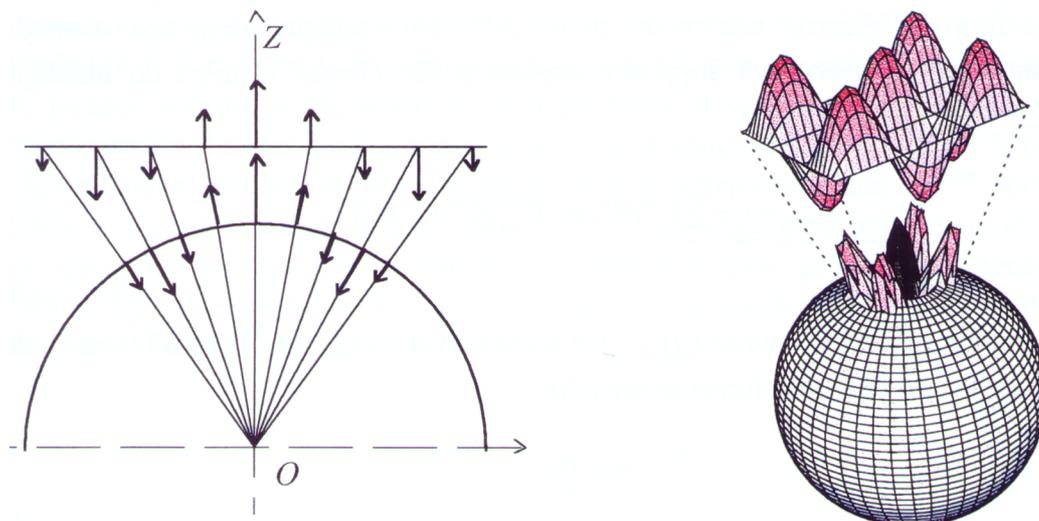


Figure II.2  
Projection suivant les rayons de la sphère équivalente

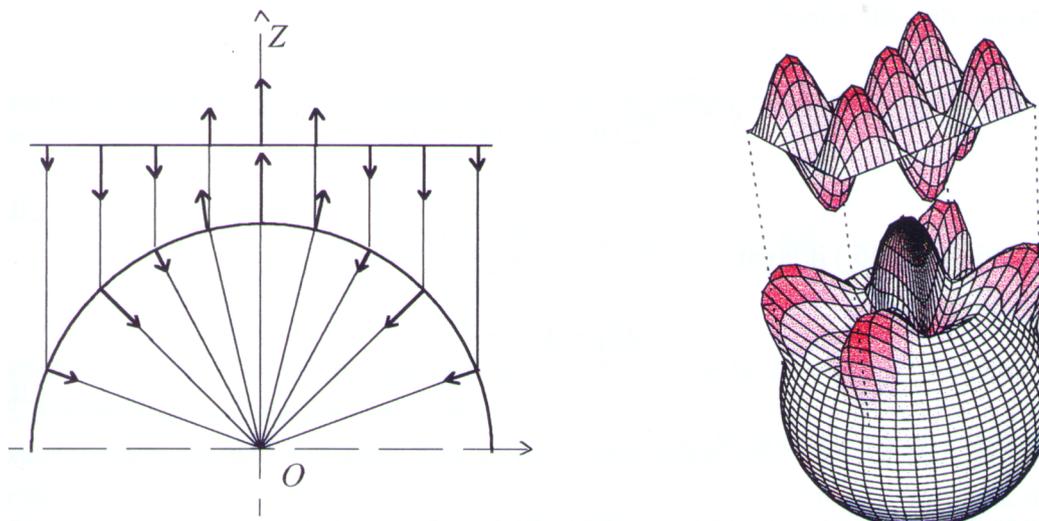


Figure II.3  
Projection suivant l'axe  $OZ$

Dans ces deux exemples, l'amplitude de la vitesse vibratoire normale sur la plaque est conservée lors de la projection (i.e. même amplitude pour la vitesse associée à un point de la

structure et à son image sur la sphère). On suppose donc que la propagation entre la sphère et la structure ne modifie pas radicalement le champ de vitesse.

On peut alors montrer que la méthode géométrique est une simplification de la méthode de la sphère équivalente. On définit en effet sur la sphère équivalente un maillage de  $N_a$  points tel que  $\Delta S_i^a$  est la surface de l'élément associé au point  $M_i^a$ . On applique alors une méthode de collocation simple où la vitesse est supposée constante sur chaque élément du maillage. La relation (II.93) est approchée par:

$$V_{nm\sigma}^a = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{N_a} V^a(\theta_i^a, \varphi_i^a) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i^a, \varphi_i^a) \Delta S_i^a \quad (\text{II.2})$$

En adoptant la notation à un seul indice (II.35) et en notant  $x_j = V_{nm\sigma}^a$  le  $j^{\text{ème}}$  coefficient modal de la sphère équivalente, on écrit sous forme matricielle:

$$x = By \quad (\text{II.3})$$

où  $y$  est le vecteur de dimension  $N_a$  qui contient la vitesse vibratoire à la surface de la sphère:

$$y_i = \sqrt{\Delta S_i^a} V^a(\theta_i^a, \varphi_i^a) \quad (\text{II.4})$$

et  $B$  la matrice  $N \times N_a$  qui traduit la contribution de la vitesse en tout point de la sphère aux coefficients modaux de cette sphère :

$$B_{ij} = \frac{\sqrt{\Delta S_i^a}}{a^2} \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i^a, \varphi_i^a) \text{ où } j = j_{n,m,\sigma} \quad (\text{II.5})$$

En utilisant la relation (II.46) il vient:

$$ABy = b \quad (\text{II.6})$$

où  $AB$  est une matrice de dimensions  $N_s \times N_a$ .

Lorsque la vitesse vibratoire est connue à la surface de la sphère (i.e. le vecteur  $y$  est connu), on peut déterminer la vitesse vibratoire à la surface de la structure en appliquant directement la relation (II.98). La vitesse normale en tout point de la structure dépend alors linéairement de la vitesse aux points du maillage de la sphère. Réciproquement, l'inversion de la matrice  $AB$  permet de déterminer le champ de vitesse de la sphère équivalente à partir de celui de la structure.

En choisissant  $N_a = N_s$ , la matrice  $AB$  devient carrée et, si elle est inversible, le champ de vitesse de la sphère s'exprime en fonction de celui de la structure sous la forme:

$$y = (AB)^{-1} b = Pb$$

(II.7)

où  $P$  est une matrice qui caractérise la projection du champ de vitesse de  $S$  vers  $S_a$ . L'inversibilité de la matrice de projection dépend de la position des points de maillage sur  $S$  et sur  $S_a$ . Or, lorsque la distance qui sépare  $S_a$  de  $S$  est faible, la vitesse en un point de la sphère est déterminée principalement par la vitesse du point de la structure le plus proche. Si les points de  $S$  et de  $S_a$  sont numérotés de manière à ce que le point de  $S_a$  le plus proche du  $i^{\text{ème}}$  point de  $S$  soit le  $i^{\text{ème}}$  point de  $S_a$ , alors la matrice de projection est à diagonale dominante pour les points de la sphère qui sont proches de la structure. L'approximation géométrique consiste à poser simplement  $P = I$  où  $I$  est la matrice identité. Pour tous les points de la sphère (i.e. proche ou loin de la structure) la vitesse vibratoire vérifie ainsi:

$$V(M_i^a) = \sqrt{\frac{\Delta S_i^s}{\Delta S_i^a}} V(M_i^s)$$

(II.8)

On peut alors remarquer que la vitesse quadratique de la structure est conservée lors de la projection. En effet, à partir du maillage vibratoire de la sphère, on peut exprimer la vitesse quadratique de la sphère en fonction du vecteur  $y$ :

$$V_{\text{quad}}^{N_a}(S_a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_a} |V^a(M_i^a)|^2 \Delta S_i^a = \frac{1}{2} \|y\|_2^2$$

(II.9)

De même, la relation (II.50) permet d'exprimer la vitesse quadratique de la structure sous la forme:

$$V_{\text{quad}}^{N_s}(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} |V^s(M_i^s)|^2 \Delta S_i^s = \frac{1}{2} \|b\|_2^2$$

(II.10)

En posant  $P = I$ , les vitesses quadratiques de la sphère et de la structure sont égales.

Si les éléments de maillage ont des surfaces voisines sur  $S$  et sur  $S_a$  (i.e.  $\Delta S_i^s \approx \Delta S_i^a$ ), les vitesses vibratoires normales peuvent alors être simplement identifiées entre les deux points images. On suppose donc que le champ de vitesse n'est pas modifié par la distance entre les deux éléments. Cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée que la sphère est proche de la structure. On validera ainsi la méthode géométrique dans le chapitre III en traitant le cas d'une structure plane insérée dans un baffle plan. En augmentant le rayon de la sphère équivalente on peut en effet rendre la distance entre la structure et la sphère aussi faible que l'on veut pour tous les points de la plaque et du baffle. On traitera également le cas simple d'un cube en choisissant une sphère équivalente de même centre que le cube.

### 3. Conclusion

Après avoir rappelés les principaux résultats concernant le rayonnement acoustique d'une sphère vibrante, la méthode des sources équivalentes a été appliquée au cas de la sphère. Les coefficients modaux de la sphère équivalente sont définis comme la solution d'un système linéaire qui traduit la décomposition de la vitesse vibratoire de la structure dans l'ensemble des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ . Ces fonctions traduisent la contribution des modes de rayonnement de la sphère

Lorsque la vitesse est connue en un nombre fini de points de la structure, les coefficients modaux qui conduisent au minimum de la vitesse résiduelle quadratique de la structure sont obtenus en résolvant un système linéaire au sens des moindres carrés. On dispose alors d'autant d'équations que de points de mesure. Le second membre du système est directement constitué des vitesses vibratoires supposées connues au points du maillage de la structure. La matrice à inverser au sens des moindres carrés traduit la contribution de chaque coefficient modal au champ de vitesse vibratoire de la structure.

Dès que la structure est différente d'une sphère, les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  ne sont plus orthonormées.

Elles conduisent donc à un système linéaire mal conditionné. La méthode de décomposition en valeurs singulières permet d'exprimer une base modale vibratoire de la structure à partir du maillage vibratoire et de calculer le nombre de conditionnement du système linéaire. On peut ainsi qualifier la stabilité du modèle de la sphère équivalente. Plus généralement, à partir d'hypothèses statistiques simples sur les erreurs de mesures de vitesse vibratoire, la résolution du système au sens des moindres carrés permet de calculer la variance associée à chaque coefficient modal. On peut ainsi quantifier l'instabilité du modèle de la sphère équivalente en distinguant les modèles stables (i.e. la variance des modes de la sphère qui contribuent au rayonnement de la structure est faible), des modèles instables (i.e. la variance de ces modes est supérieure à la variance associée aux erreurs de mesure).

Pour appliquer la méthode de la sphère équivalente, il faut choisir le rayon et la position de la sphère. On a tout intérêt à choisir un modèle stable, c'est-à-dire une sphère équivalente qui

conduit au minimum du nombre de conditionnement. Les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  prises en compte

dans le modèle seront associées à un système linéaire équilibré si elles admettent des amplitudes comparables sur la structure. Pour limiter la propagation des modes non rayonnants de la sphère, on peut choisir comme centre de cette sphère le point qui correspond au minimum de compacité de la structure. Le choix de la sphère équivalente sera précisé au chapitre III sur des exemples simples.

Pour que le nombre de conditionnement soit également minimum, le maillage vibratoire doit permettre de traduire l'orthogonalité des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ . Ces fonctions admettent cependant

des variations très rapides sur la structure lorsqu'elles sont associées à des modes de la sphère d'ordre élevé. Lorsque le maillage vibratoire ne permet pas de traduire les oscillations de ces modes, la vitesse calculée par la sphère équivalente peut admettre des oscillations entre les points de maillage et conduire à un rayonnement acoustique erroné. La méthode de la sphère équivalente impose donc un nombre de points de maillage très important, en général plus important que celui nécessaire pour traduire les variations de la vitesse vibratoire.

Nous avons également montré que les modes de la sphère équivalente qui vont contribuer au rayonnement acoustique de la structure sont déterminés par le rayon de la plus petite sphère

qui admet le même centre que la sphère équivalente et qui englobe la structure. Une expression analytique des coefficients modaux de la sphère équivalente lorsque tous les modes sont pris en compte a été déterminée en fonction de la vitesse et de la pression acoustique à la surface de la structure. La convergence des coefficients vers cette valeur limite est cependant d'autant plus lente que la structure s'éloigne d'une sphère. Des exemples vont être donnés au chapitre III.

De même, différents critères qui permettent *a priori* de mesurer la précision du modèle ont été présentés. Les erreurs quadratique, moyenne et maximale sont des indicateurs qui vont être étudiés aux chapitres III et IV. Nous montrerons également dans quelle mesure le nombre de conditionnement du système linéaire et des écart-types associés aux coefficients modaux et à la pression acoustique rayonnée par la sphère permettent de prévoir la précision du modèle.

Une approche simplifiée qui s'appuie sur la projection du champ de vitesse de la structure sur la sphère a ensuite été présentée. Les coefficients modaux de la sphère équivalente sont directement calculés en associant chaque point de la sphère à un point image sur la structure. Si la distance entre la structure et la sphère est faible, la vitesse vibratoire en tout point de la sphère peut être simplement identifiée à celle de son point image sur la structure. Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente sera alors relativement proche de celui de la structure. Cette approche géométrique va être validée dans le cas d'une plaque rectangulaire insérée dans un baffle et dans le cas d'une boîte aux chapitres III et IV.

## CHAPITRE III

### Validations numériques

#### 1. Introduction

Il s'agit de valider sur des exemples simples les méthodes présentées au chapitre précédent. Différentes configurations vont permettre d'illustrer la qualité des critères établis pour la méthode de la sphère équivalente.

Le cas le plus simple consiste à comparer le rayonnement d'une sphère vibrante calculé directement à partir des relations (II.1) et (II.3) à celui obtenu par la méthode de la sphère équivalente. Dans un premier temps, un maillage vibratoire régulier est défini sur la sphère vibrante (§2.1). On étudie alors le comportement du conditionnement du système linéaire en fonction de la densité du maillage vibratoire pour mettre en évidence les problèmes liés au sous-échantillonnage (§2.2). Les critères qui conduisent au choix optimum du rayon et de la position de la sphère équivalente sont également interprétés à partir des modes rayonnants et non rayonnants de la sphère équivalente. On applique alors la méthode de la sphère équivalente au cas d'une portion de sphère pulsante (§2.3). De manière à rendre plus critique les problèmes de maillage vibratoire, de conditionnement et de vitesse de convergence de la méthode, le rayonnement acoustique d'une sphère pulsante est traité à partir d'une sphère équivalente décentrée. On illustrera sur ces exemples les variations des paramètres présentés au chapitre II. (i.e. paramètres  $e_2$ ,  $e_{\max}$ , et  $e_1$ )

La méthode de la sphère équivalente est également appliquée au cas d'une boîte rectangulaire (§3). Le rayonnement acoustique est alors comparé avec celui obtenu par une méthode d'éléments finis de frontière. Des déformées simples sur les faces de la boîte sont adoptées (faces pulsantes ou faces vibrants suivant des déformées simples).

L'approche géométrique est ensuite validée dans le cas d'une plaque rectangulaire insérée dans un baffle et dans le cas d'un cube (§4).

## 2. Calcul du rayonnement acoustique d'une sphère vibrante

Dans tout le paragraphe on note  $S$  la sphère vibrante de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Dans le repère  $(O, X, Y, Z)$  chaque point de  $S$  est défini par ses coordonnées sphériques  $M(R, \theta, \varphi)$ . La vitesse vibratoire est supposée connue en tout point de  $S$ . Elle est notée  $V^R(\theta, \varphi)$ . On définit également  $S_a$  la sphère équivalente de centre  $O_a$  et de rayon  $a$ . Dans le repère  $(O_a, X, Y, Z)$  lié à  $S_a$  chaque point  $M_s$  de  $S$  est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ . Le repère  $(O_a, X, Y, Z)$  est défini par une simple translation du repère  $(O, X, Y, Z)$ .

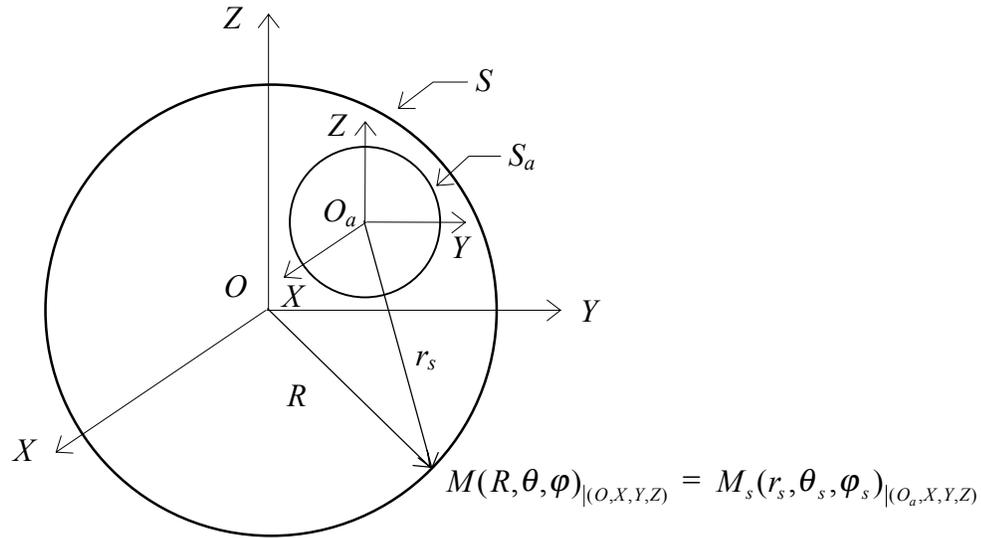


Figure III.1  
Sphère vibrante et sphère équivalente

On a montré au paragraphe II.1 que l'on pouvait exprimer simplement les coefficients modaux de la sphère  $S$  à partir de la vitesse vibratoire  $V^R(R, \theta, \varphi)$ . On peut ainsi comparer cette solution analytique exacte à la solution obtenue par la méthode de la sphère équivalente en résolvant au sens des moindres carrés le système linéaire  $Ax = b$  décrit par la relation (II.46):

$$\begin{cases} A_{ij} = \sqrt{\Delta S_i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M_i) \\ b_i = \sqrt{\Delta S_i} V^R(M_i) \end{cases}$$

où  $M_i \in S$  et

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M_i) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i) \frac{h'_n(kr_f)}{h'_n(ka)} n_r(M_i) + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i)}{kr_f \partial \theta} \frac{h_n(kr_f)}{h'_n(ka)} n_\theta(M_i) + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i)}{kr_f \sin \theta_i \partial \varphi} \frac{h_n(kr_f)}{h'_n(ka)} n_\varphi(M_i)$$

(III.1)

## 2.1. Définition d'un maillage vibratoire régulier

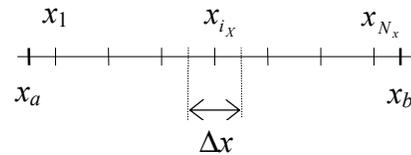
Pour toute surface à variables séparables de la forme  $S = \{(x, y) \in [x_a, x_b] \times [y_a, y_b]\}$ , la méthode des rectangles qui permet d'associer une surface élémentaire constante à chacun des points de maillage se s'écrit simplement:

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i_x=1}^{N_x} \sum_{i_y=1}^{N_y} f(x_{i_x}, y_{i_y}) \Delta x \Delta y$$

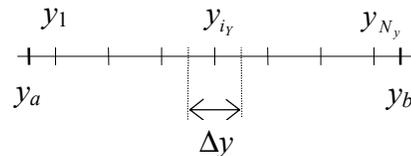
( III.2 )

avec

$$\Delta x = \frac{x_b - x_a}{N_x} \text{ et } x_{i_x} = x_a + \frac{\Delta x}{2}(2i_x - 1)$$



$$\Delta y = \frac{y_b - y_a}{N_y} \text{ et } y_{i_y} = y_a + \frac{\Delta y}{2}(2i_y - 1)$$



Dans le cas de la sphère  $S$ , l'intégrale  $I = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\mathcal{S}(\theta, \varphi)$  est associée à la surface infinitésimale  $dS(\theta, \varphi)$  définie par:

$$dS(\theta, \varphi) = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 d(-\cos \theta) d\varphi$$

( III.3 )

Avec les notations précédentes, on pose:

$$\begin{cases} x = -\cos \theta & ; (x_a, x_b) = (-1, 1) \\ y = \varphi & ; (y_a, y_b) = (0, 2\pi) \end{cases}$$

( III.4 )

et on en déduit une expression approchée de l'intégrale  $I$ :

$$I_{N_\theta, N_\varphi} = \sum_{i_\theta=1}^{N_\theta} \sum_{i_\varphi=1}^{N_\varphi} f(\theta_{i_\theta}, \varphi_{i_\varphi}) \Delta S$$

( III.5 )

avec le maillage suivant:

$$\text{Maillage à surface élémentaire constante : } \left\{ \begin{array}{l} \theta_{i_\theta} = \text{Arccos}\left(1 - \frac{2i_\theta - 1}{N_\theta}\right) \\ \varphi_{i_\varphi} = \frac{\pi}{N_\varphi} (2i_\varphi - 1) \\ \Delta S = \frac{4\pi R^2}{N_\theta N_\varphi} \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

Le maillage de  $S$  est ainsi entièrement déterminé par les entiers  $N_\theta$  et  $N_\varphi$  qui correspondent au nombre de points de maillage respectivement dans les intervalles  $[0, \pi]$  et  $[0, 2\pi]$ . Un tel maillage permet de vérifier:

$$\lim_{\substack{N_\theta \rightarrow \infty \\ N_\varphi \rightarrow \infty}} \frac{1}{N_\theta N_\varphi} = 1 \quad (\text{III.7})$$

En posant  $N_s = N_\theta \cdot N_\varphi$ , on notera par la suite  $\{M_i, i = 1, \dots, N_s\}$  l'ensemble des points de maillage sur la sphère  $S$ .

## 2.2. Choix du rayon et de la position de la sphère équivalente

Il s'agit dans ce paragraphe d'étudier l'influence du rayon et de la position de la sphère équivalente sur le conditionnement du système linéaire. On s'intéresse dans un premier temps au cas où la sphère équivalente et la sphère vibrante sont identiques (i.e. même centre et même rayon).

### 2.2.1. Cas d'une sphère équivalente identique à la sphère vibrante

En tout point  $M_s$  de  $S$ , la normale est donc purement radiale :  $(n_r, n_\theta, n_\varphi) = (1, 0, 0)$ . Tous les points de  $S$  vérifient également  $r_s = R = a$ . On en déduit une expression simple des fonctions  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial n}$  aux points du maillage vibratoire:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n}(M_i) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i) \quad (\text{III.8})$$

En appliquant le découpage de  $S$  donné par le maillage (III.6), les coefficients de la matrice  $A$  s'écrivent donc:

$$A_{ij} = \sqrt{\Delta S} \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_j) \quad (\text{III.9})$$

C'est une matrice réelle qui ne dépend que de la position angulaire des points de maillage. Les fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  étant orthonormées par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S_{\theta, \varphi}}$ , on déduit de (II.5) et (III.9) que les vecteurs colonnes de  $A$  vérifient:

$$\lim_{\substack{N_\theta \rightarrow \infty \\ N_\varphi \rightarrow \infty}} \langle A_i, A_j \rangle_2 = R^2 \delta_{ij} \quad (\text{III.10})$$

Lorsque le nombre de points de maillage augmente, les colonnes de matrice  $A$  deviennent orthogonales et de même norme  $R^2$ . La matrice  $A$  vérifie donc:

$$\lim_{\substack{N_\theta \rightarrow \infty \\ N_\varphi \rightarrow \infty}} A^* A = R^2 I \quad (\text{III.11})$$

où  $I$  est la matrice identité.

⇒ La sphère est un cas particulier pour lequel le nombre de conditionnement de  $A$  tend vers un lorsque le nombre de points de maillage tend vers l'infini.

On cherche alors les critères que doivent vérifier  $N_\theta$  et  $N_\varphi$  en fonction de l'ordre des coefficients modaux pour que le conditionnement de  $A$  soit "suffisamment proche" de un. Pour cela, on analyse séparément l'influence de  $N_\theta$  et de  $N_\varphi$ .

### 2.2.1.1. Choix de $N_\varphi$

On montre en annexe 5 qu'à partir du maillage vibratoire:

$$\begin{cases} \theta_i = \frac{\pi}{2N'_\theta} (2i-1) \\ \varphi_j = \frac{\pi}{N'_\varphi} (2j-1) \end{cases}$$

(III.12)

où les points sont régulièrement répartis suivant les angles  $\theta$  et  $\varphi$ , toute intégrale de la forme:

$$I = \langle f, \bar{Y}_{nm}^\sigma \rangle_S = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) dS(\theta, \varphi)$$

(III.13)

peut être calculée exactement si  $N'_\theta$  et  $N'_\varphi$  vérifie le critère d'échantillonnage:

- a)  $N'_\theta = n+1$
- b)  $N'_\varphi = 2m+1$

( III.14 )

En effet, les variations de  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  sont  $2\pi$ -périodiques par rapport à l' angle  $\varphi$  car elles dépendent des fonctions  $\sin(m\varphi)$  si  $\sigma=0$  et  $\cos(m\varphi)$  si  $\sigma=1$ . Avec un maillage régulier de l'intervalle  $[0,2\pi]$ , il faut donc simplement vérifier le théorème de Shannon pour que, dans l'intégrale  $I$ , la contribution liée à l' variable  $\varphi$  soit calculée exactement à partir d' une somme discrète. La relation ( III.14 ) traduit ce critère (i.e. minimum de deux points de maillage par longueur d'onde). On en déduit également que la contribution suivant l'angle  $\varphi$  est calculée exactement pour toute fonction  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  telle que  $n \leq N_{max}$  dès que  $N'_\varphi = 2N_{max}+1$ . Les maillages 1 et 2 ayant le même découpage suivant l'angle  $\varphi$ ,  $N_\varphi$  doit donc vérifier:

$$\text{Critère pour } N_\varphi : N_\varphi = 2N_{max}+1$$

( III.15 )

La figure III.2 montre les variations de  $\mu(A)$  en fonction de  $N$  pour différentes valeurs de  $N_\theta$  et  $N_\varphi$  (on montrera dans le paragraphe suivant que  $N_\theta = N_\varphi$  est une valeur satisfaisante de  $N_\theta$ ).

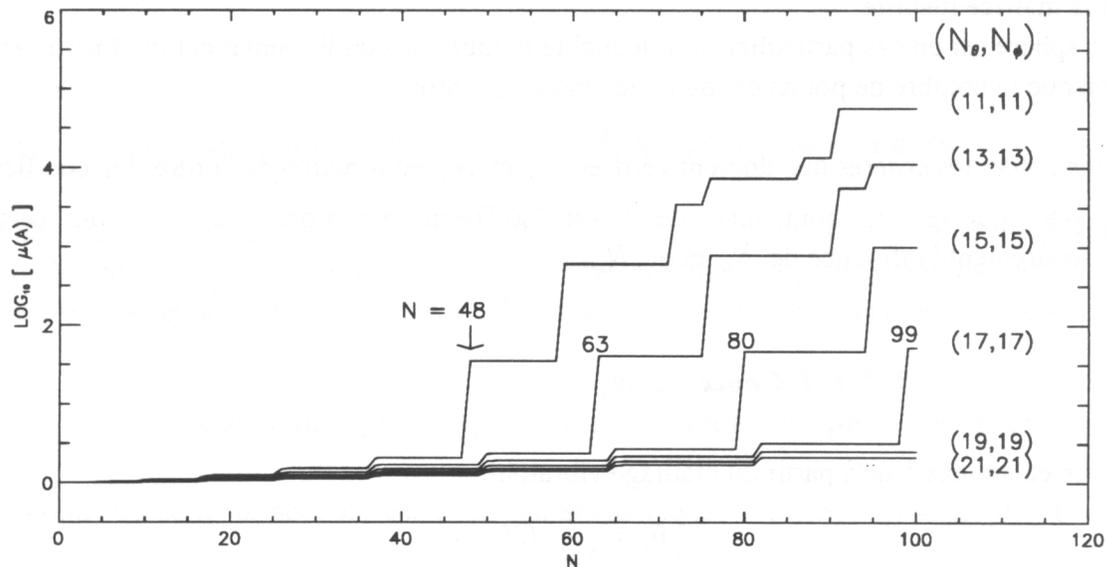


Figure III.2

Variations du nombre de conditionnement de  $A$   
en fonction du nombre de coefficients modaux  $N = n^2 + 2m + \sigma$   
et pour différentes valeurs de  $N_\theta$  et  $N_\varphi$

Pour une faible valeur de  $N$ , le nombre de points de maillage est suffisant car les fonctions harmoniques sphériques ont des variations lentes sur la sphère :  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  a  $n-m$  zéros lorsque  $\theta$  décrit l'intervalle  $]0,\pi[$  et  $2m$  zéros lorsque  $\varphi$  décrit  $[0,2\pi[$ . La matrice  $A$  est donc bien conditionnée puisque ses colonnes sont quasiment orthonormées.

Lorsque  $N$  augmente, le nombre de points de maillage suivant l'angle  $\theta$  devient insuffisant pour rendre compte des variations des fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  d'ordre  $n$  élevé. Les relations d'orthogonalité sont donc moins bien traduites et le nombre de conditionnement augmente légèrement avec  $N$ . La limite au-delà de laquelle le nombre de conditionnement augmente brusquement est en revanche liée au non respect du critère d'échantillonnage suivant l'angle  $\varphi$ .

Pour  $N_\varphi = 11$  par exemple, la valeur limite de  $m$  est atteinte dès que  $m > \frac{N_\varphi - 1}{2} = 5$ . L'ordre  $n$  étant toujours supérieur ou égal à  $m$ , la première fonction qui ne respectera pas le critère d'échantillonnage sera donc  $Y_{6,6}^0$ . Cette fonction est repérée sur la figure III.2 par le numéro  $N = n^2 + 2m + \sigma \big|_{(n,m,\sigma) = (6,6,0)} = 48$ .

Les limites associées aux autres valeurs de  $N_\varphi$  ont également été repérées. Le critère d'échantillonnage suivant l'angle  $\varphi$  est donc respecté pour les 100 premiers coefficients modaux (i.e.  $N_{max} = 9$ ) dès que  $N_\varphi$  est supérieur ou égal à  $2N_{max} + 1 = 19$ .

### 2.2.1.2. Choix de $N_\theta$

Bien que les maillages ( III.6 ) et ( III.12 ) soient différents suivant l'angle  $\theta$ , on peut également mettre en évidence les problèmes de maillage liés à une valeur trop faible de  $N_\theta$  (figure III.3).

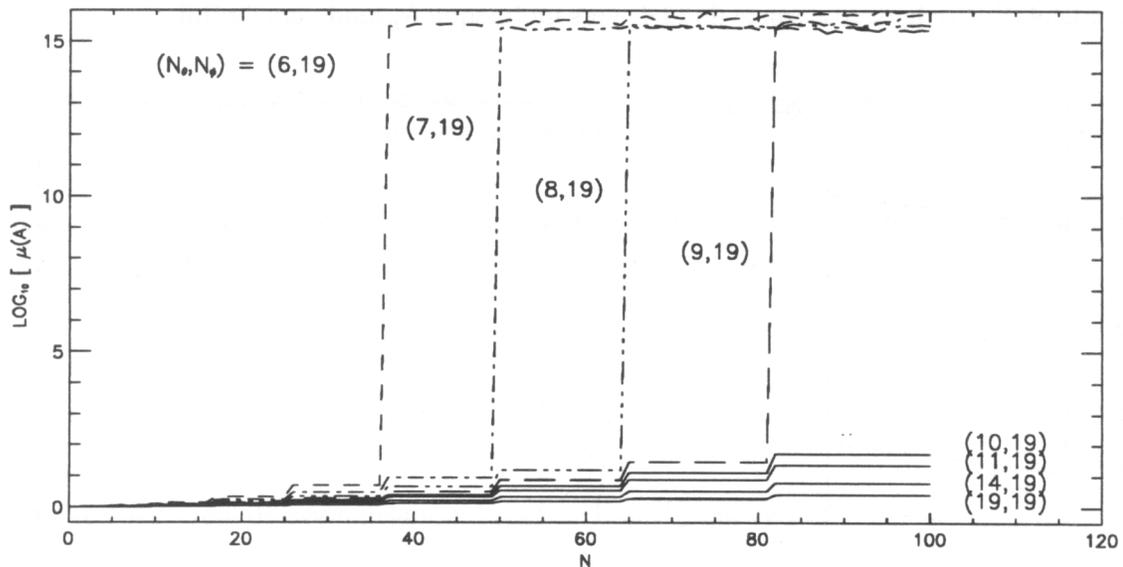


Figure III.3

Variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction du nombre de coefficients modaux  $N$  pour  $N_\varphi$  fixé et différentes valeurs de  $N_\theta$

La valeur de  $N_\theta$  a été choisie de manière à respecter le critère d'échantillonnage pour les 100 premiers coefficients modaux (i.e. jusqu'à l'ordre  $m = 9$  c'est-à-dire  $N_\varphi = 19$ ). La valeur  $N_\theta = 6$  correspond à la valeur limite en dessous de laquelle le système présente plus d'inconnues que d'équations. Le calcul étant effectué en double précision, une valeur de  $\mu(A)$  proche de  $10^{15}$

correspond à une valeur théorique infinie. Pour une valeur de  $N_\theta$  fixée, il existe donc une fonction  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  qui rend le système singulier. Le maillage ne permet pas de distinguer ces fonctions de s précédentes. La fonction  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  admettant  $n-m$  zéros entre 0 et  $\pi$ , un nombre minimum de point est donc nécessaire pour rendre compte de ses variations. En particulier, le maillage e ( III.12 ) impose un minimum de  $n+1$  points qui correspond à un point par lobe de directivité de la fonction  $\bar{Y}_{n0}^1$ . On peut constater sur la figure III.4 que ce minimum reste applicable au maillage ( III.6 ). Le maillage suivant l'angle  $\theta$  doit ainsi vérifier:

$$\text{Critère pour } N_\theta \quad : N_\theta \geq N_{\max} + 1$$

( III.16 )

Avec  $N_\theta = 6$  par exemple, le système devient singulier pour la première fonction harmonique sphérique où  $n = 6$ , c'est-à-dire  $\bar{Y}_{6,0}^1$  dont le numéro est  $N = n^2 + 2m + \sigma = 37$ .

Si  $N_\phi$  respecte le critère d'échantillonnage, l'écart entre l'intégrale  $\langle \bar{Y}_{nm}^\sigma, \bar{Y}_{n'm'}^{\sigma'} \rangle_{|S}$  et la somme discrète  $\langle A_j, A_j \rangle_{|_2}$  est d'autant plus faible que  $N_\theta$  est grand. Les fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  étant orthonormées, on en déduit:

$$\lim_{\substack{N_\theta \rightarrow \infty \\ N_\phi = 2N_{\max} + 1}} \mu(A) = 1$$

( III.17 )

La figure III.4 illustre la décroissance de  $\mu(A)$  vers un lorsque  $N_\theta$  tend vers l'infini.

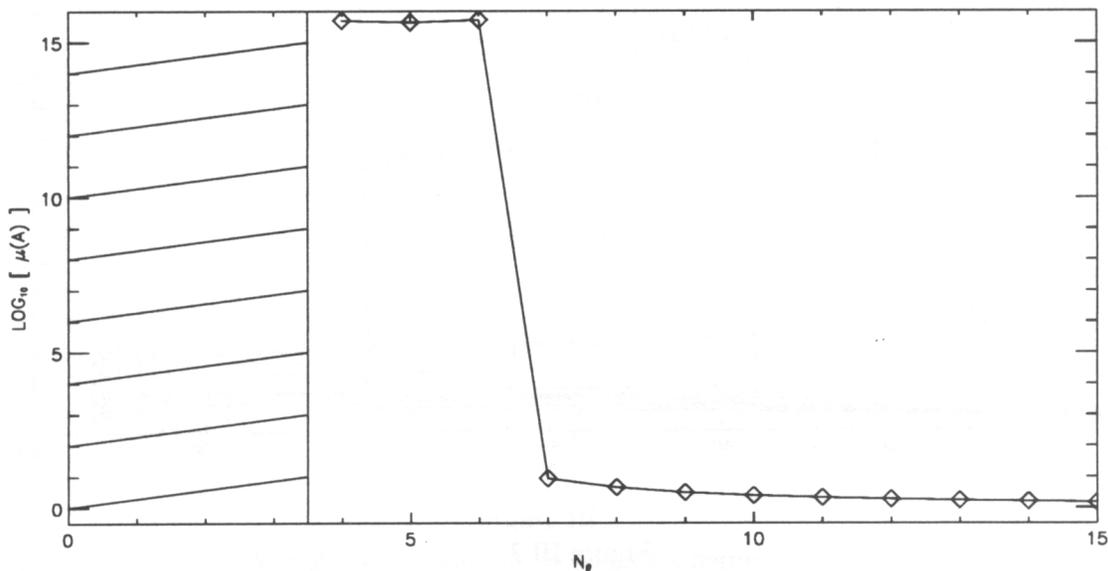


Figure III.4

Variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction de  $N_\theta$   
pour  $N_\phi = 13$  et  $N_{\max} = 6$

A partir de  $N_\theta = 4$  le système admet plus d'équations que d'inconnues. Pour  $N_\theta$  égal à 4, 5 et 6, le critère  $N_\theta \geq N_{max}+1$  n'est pas vérifié et le système est singulier. Une solution stable (i.e.  $\mu(A)$  proche de 1) est obtenue assez rapidement.

### 2.2.1.3. Conclusion sur le choix de $N_\theta$ et $N_\varphi$

L'étude des variations du nombre de conditionnement de la matrice  $A$  en fonction du nombre de coefficients modaux permet de mettre en évidence les problèmes liés au sous-échantillonnage des fonctions harmoniques sphériques. Pour calculer les coefficients modaux jusqu'à l'ordre  $n = N_{max}$ , le maillage doit vérifier:

$$\left| \begin{array}{l} N_\varphi = 2N_{max}+1 \\ N_\theta \geq N_{max}+1 \end{array} \right.$$

( III.18 )

La première condition est suffisante pour garantir le respect du critère de Shannon suivant l'angle  $\varphi$ . La seconde n'est qu'une condition minimum pour assurer la non-singularité de la matrice  $A$ . En choisissant  $N_\theta$  deux fois supérieur à  $N_{max}$  ( $N_\theta = N_\varphi$  par exemple) on assure en général un bon conditionnement pour  $A$ .

### 2.2.1.4. Remarque sur la normalisation des fonctions harmoniques sphériques

Il s'agit de justifier le choix des fonctions harmoniques sphériques normalisées  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  par rapport aux fonctions harmoniques sphériques  $Y_{nm}^\sigma$ . Elles sont liées par la relation:

$$Y_{nm}^\sigma = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_m(2n+1)(n-m)!}} \bar{Y}_{nm}^\sigma = N_{nm} \bar{Y}_{nm}^\sigma$$

( III.19 )

où  $N_{nm}$  est le coefficient de normalisation de la fonction  $Y_{nm}^\sigma$  qui vérifie:

$$\langle Y_{nm}^\sigma, Y_{\nu\mu}^\tau \rangle_{S_{\theta,\varphi}} = \frac{\delta_{n,\nu} \cdot \delta_{m,\mu} \cdot \delta_{\sigma,\tau}}{N_{nm}^2}$$

( III.20 )

Si on applique la méthode de minimisation avec les fonctions  $Y_{nm}^\sigma$ , la matrice  $A$  devient:

$$A_{ij} = \sqrt{\Delta} S Y_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_j)$$

( III.21 )

Si le maillage est suffisamment dense, les colonnes de  $A$  vérifient donc :

$$\langle A_i, A_j \rangle_2 \approx \frac{R^2}{N_{nm}} \delta_{ij} \quad (\text{III.22})$$

Elles sont quasiment orthogonales mais leur norme dépend du coefficient  $N_{nm}$ . On peut montrer l'influence des coefficients  $N_{nm}$  sur la valeur de  $\mu(A)$  en mettant  $A$  sous la forme:

$$A = A'.D \quad (\text{III.23})$$

où  $A'$  est la matrice  $N_s \times N$  étudiée au paragraphe précédent:  $A'_{ij} = \sqrt{\Delta S} \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_j)$

et  $D$  la matrice carrée diagonale qui contient les coefficients  $\frac{1}{N_{nm}}$  sur sa diagonale.

La matrice  $D$  traduit le déséquilibre de  $A$ . En effet, si les colonnes de  $A'$  sont orthonormées alors  $\mu(A) = \mu(D)$ . La matrice  $D$  est tant diagonale à coefficients réels strictement positifs,  $D_{ii}$  est directement la  $i^{\text{ème}}$  valeur singulière de  $D$  et  $\mu(D)$  vérifie:

$$\mu(D) = \frac{\text{Max}\{D_{ii}, i = 1..N\}}{\text{Min}\{D_{ii}, i = 1..N\}} \quad (\text{III.24})$$

Lorsque le nombre de coefficients modaux pris en compte s'écrit  $N = (n_0+1)^2$ , les coefficients  $N_{nm}$  maximum et minimum sont respectivement:

$$N_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2n_0+1}}$$

$$N_{m,n_0} = \sqrt{\frac{4\pi(2n_0)!}{2(2n_0+1)}} \quad (\text{III.25})$$

On en déduit:

$$\text{Min}\{D_{ii}, i = 1..N\} = \sqrt{\frac{2(2n_0+1)}{4\pi(2n_0)!}}$$

$$\text{Max}\{D_{ii}, i = 1..N\} = \sqrt{\frac{2n_0+1}{4\pi}} \quad (\text{III.26})$$

et le nombre de conditionnement de  $D$  s'écrit simplement

$$\mu(D) = \sqrt{\frac{(2n_0)!}{2}}$$

( III.27 )

Le conditionnement du système  $A$  se détériore donc rapidement lorsque l'ordre des coefficients modaux augmente. La figure III.5 permet de comparer le nombre de conditionnement des matrices  $A$  et  $A'$  ainsi que la valeur de  $\mu(D)$  pour les entiers  $N$  égaux à  $(n_0+1)^2$  avec  $n_0 = 1, 2, 3, \dots$

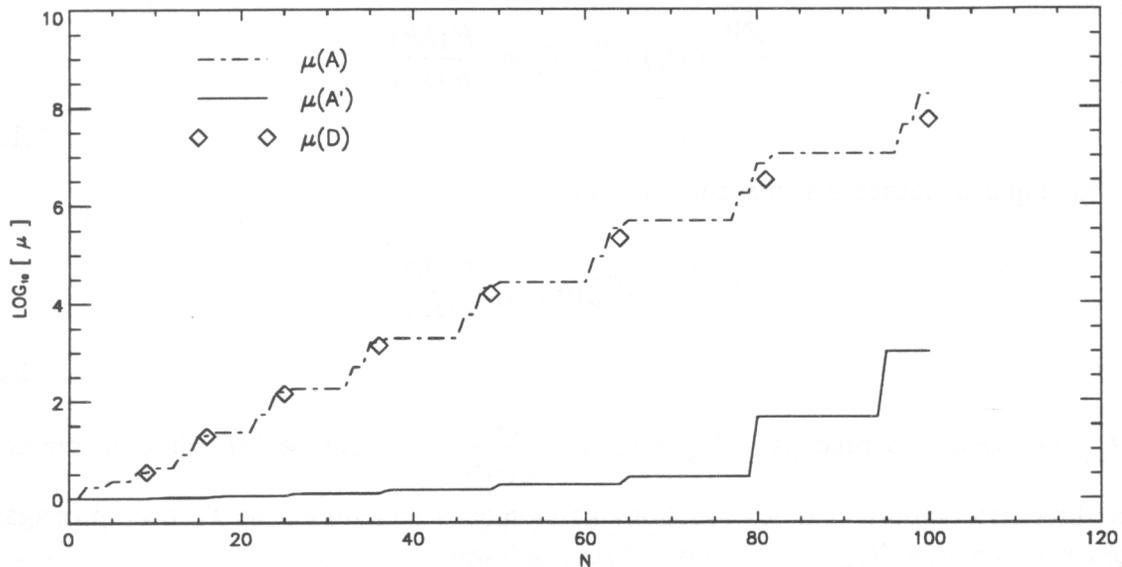


Figure III.5  
Variations du nombre de conditionnement de  $A$   
en fonction du nombre de coefficients modaux  $N$  pour  $(N_\theta, N_\phi) = (15, 15)$

Pour de faibles valeurs de  $N$ , la matrice  $A'$  est quasiment orthonormée et  $\mu(D)$  est une bonne approximation de  $\mu(A)$  : le mauvais conditionnement de  $A$  est donc uniquement lié à la différence de norme entre ses colonnes, c'est-à-dire à la norme des fonctions harmoniques sphériques.

Lorsque le maillage devient insuffisant (i.e. problème d'échantillonnage suivant l'angle  $\varphi$  à partir de  $N = 80$  par exemple),  $\mu(A)$  devient supérieur à  $\mu(D)$  : le conditionnement de  $A$  traduit à la fois la différence de norme des fonctions harmoniques sphériques et la faible densité du maillage. Le problème d'échantillonnage semble donc en partie masqué par le déséquilibre de  $A$ .

### Conclusion :

Le choix des fonctions harmoniques sphériques normalisées permet un équilibrage optimal de la matrice  $A$ . Les fonctions  $Y_{nm}^\sigma$  ne doivent donc pas être utilisées car elles risquent de masquer les problèmes liés au maillage vibratoire.

### 2.2.2. Influence du rayon de la sphère équivalente

On choisit la sphère équivalente avec un rayon  $a$  différent de  $R$ . Les normales restent purement radiales en tout point du maillage vibratoire. Les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  s'écrivent simplement:

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M_i) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i) \frac{h'_n(kR)}{h'_n(ka)} \quad (\text{III.28})$$

On en déduit que la matrice  $A$  se met sous la forme:

$$A_{ij} = \sqrt{\Delta S} \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i) \frac{h'_n(kR)}{h'_n(ka)} \quad (\text{III.29})$$

Soit  $H_{2,n}$  la fonction définie par  $H_{2,n}(f, a, b) = \frac{h'_n(kb)}{h'_n(ka)}$ . On peut séparer dans la matrice  $A$  l'aspect directivité apporté par les fonctions harmoniques sphériques de l' aspect propagation apporté par la fonction  $H_{2,n}$ . On écrit donc  $A$  sous la forme:

$$A = A' \cdot H \quad (\text{III.30})$$

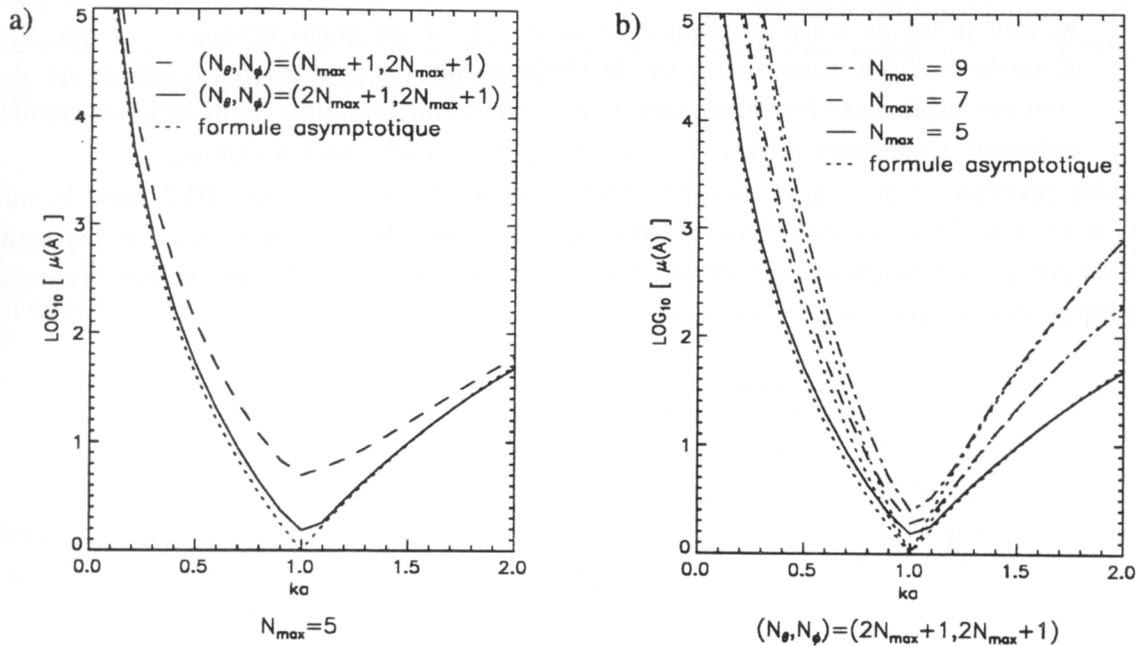
où  $A'$  est la matrice  $N_s \times N$  définie par  $A'_{ij} = \sqrt{\Delta S} \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i)$

et  $H$  la matrice  $N \times N$  complexe diagonale telle que  $H = \text{Diag}\{H_{2,0}, H_{2,1}, H_{2,1}, H_{2,1}, H_{2,2}, \dots, H_{2,N_{\max}}\}$

Les  $2n+1$  modes d'ordre  $n$  sont associés à la même fonction  $H_{2,n}$ . On retrouve donc sur la première ligne de  $H$  la contribution monopolaire (i.e.  $H_{2,0}$ ), sur les trois suivantes les contributions dipolaires ( $H_{2,1}$ ) et sur les cinq suivantes les contributions quadripolaires ( $H_{2,2}$ ), et caetera jusqu'aux modes d'ordre  $N_{\max}$ .

La matrice  $A'$  est identique à celle étudiée au paragraphe 2.2.1. En imposant un maillage suffisamment dense, ces colonnes peuvent être rendues quasiment orthonormées (de norme  $R^2$ ). Ainsi, comme dans le cas des fonctions harmoniques sphériques non normalisées, le nombre de conditionnement de  $H$  est une bonne approximation de celui de  $A$ .

Les figures III.6a et III.6b permettent de comparer  $\mu(A)$  à une expression asymptotique de  $\mu(H)$  que l'on va établir dans le paragraphe suivant (relations (III.36) et (III.38)) en fonction du rayon  $a$ . Le nombre de coefficients modaux pris en compte est choisi suffisamment grand (i.e.  $N_{\max} > kR$ ) de manière à respecter le critère de troncature défini au paragraphe II.2.2.



Figures III.6 a) et b)

Variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction du rayon de la sphère équivalente pour  $kR = 1$  et différentes valeurs de  $(N_\theta, N_\phi)$  et  $N_{\max}$

### Analyse des variations de $\mu(A)$ en fonction de $a$

#### 1. $a = R$

Pour  $a = R$  (i.e.  $ka = 1,0$  sur la figure III.6), la matrice  $H$  est la matrice identité et le nombre de conditionnement de  $A$  atteint un minimum qui tend vers un lorsque le nombre de points de maillage suivant l'angle  $\theta$  tend vers l'infini. (i.e.  $\mu(A)|_{N_\theta=2N_{\max}+1}$  est inférieur à  $\mu(A)|_{N_\theta=N_{\max}+1}$  sur la figure III.6a)

#### 2. $a < R$

La matrice  $A$  est d'autant plus mal conditionnée que  $a$  est petit devant  $R$ . C'est un résultat classique des méthodes d'holographie <sup>(47)</sup>. Le champ de vitesses normales sur la surface source (ici la sphère équivalente  $S_a$ ) est déterminé par rétropropagation du champ de vitesses normales sur un hologramme (ici la sphère vibrante  $S$ ). Les problèmes de conditionnement s'expliquent physiquement à partir des modes rayonnants et non rayonnants de la sphère équivalente.

- Tant que l'ordre  $n$  est inférieur à  $ka$ , il s'agit de modes rayonnants qui admettent la même décroissance entre  $S_a$  et  $S$ . Les fonctions  $H_{2,n}(f,a,R)$  sont donc du même ordre de grandeur sur  $S$  et les premières colonnes de  $A$  qui leur sont associées ont une norme comparable.

- Lorsque l'ordre  $n$  est supérieur à  $ka$ , il s'agit de modes non rayonnants dont l'amplitude en tout point de  $S$  est d'autant plus faible que  $n$  est grand devant  $ka$  et que  $S_a$  est éloignée de  $S$  (i.e. source éloignée de l'hologramme). Les dernières colonnes de  $A$  qui sont associées à ces fonctions sont donc d'une norme bien plus faible que les premières colonnes. La matrice  $A$  n'est plus équilibrée et  $\mu(A)$  est grand devant un.

Les modes rayonnants et non rayonnants sont représentés sur la figure III.7 avec la même amplitude au point  $M_a$  de la sphère équivalente. Sur la sphère vibrante les modes non rayonnants (flèche rouge) ont une amplitude qui devient très faible par rapport à celle des modes rayonnants (flèche bleue) dès que  $a$  est très inférieur à  $R$ .

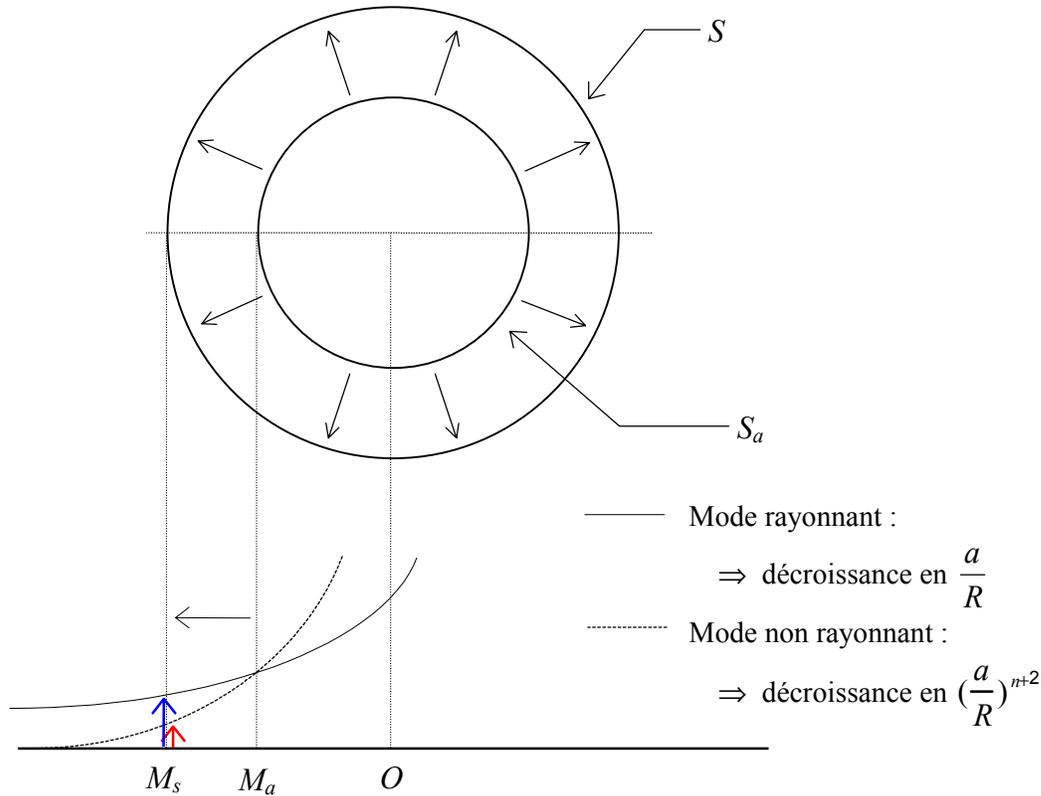


Figure III.7

Amplitude des modes rayonnants et non rayonnants de  $S_a$  sur la surface  $S$   
Cas où  $S_a$  est de rayon inférieur à  $R$

Le conditionnement de  $A$  est directement lié au rapport entre les amplitudes des différents modes de  $S_a$  sur  $S$ . En effet, si le maillage est suffisamment dense,  $\mu(A)$  est très proche de  $\mu(H)$ . La matrice  $H$  étant diagonale, son nombre de conditionnement est donné par:

$$\mu(H) = \frac{\text{Max}\{H_{ii}, i = 1..N\}}{\text{Min}\{H_{ii}, i = 1..N\}}$$

(III.31)

Lorsque les paramètres  $ka$  et  $kR$  sont petits devant  $N_{max}$ , on peut approcher  $\mu(H)$  par les expressions asymptotiques de la fonction  $H_{2,n}$ . La décroissance des modes non rayonnants est donnée avec une très bonne précision par la relation:

$$|H_{2,n}(f, a, R)| \approx \left(\frac{a}{R}\right)^{n+2} \quad (\text{III.32})$$

On en déduit:

$$\text{Min}\{H_{ii}, i = 1..N\} = \left(\frac{a}{R}\right)^{N_{max}+2} \quad (\text{III.33})$$

D'autre part, les modes rayonnants ont une amplitude très voisine qui permet de prendre la valeur pour  $n = 0$  comme référence. On a alors:

$$|H_{2,0}(f, a, R)| = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{1+(kR)^2}{1+(ka)^2}} \quad (\text{III.34})$$

et

$$\text{Max}\{H_{ii}, i = 1..N\} = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{1+(kR)^2}{1+(ka)^2}} \quad (\text{III.35})$$

Un modèle approché des variations du nombre de conditionnement de  $H$  en fonction de  $ka$  et  $kR$  est donc donné par:

$$\mu_{app}(H)_{|a < R} = \left(\frac{R}{a}\right)^{N_{max}} \sqrt{\frac{1+(kR)^2}{1+(ka)^2}} \quad (\text{III.36})$$

Il est représenté sur la figure III.6 et donne des résultats très satisfaisants dès que le maillage est suffisamment dense.

### 3. $a > R$

Le cas d'une sphère équivalente dont le rayon est supérieur au rayon de la sphère vibrante a également été tracé sur la figure III.6. Le modèle de la sphère équivalente ne peut plus s'interpréter comme une méthode d'holographie puisque la surface de mesure est à l'intérieur de la sphère équivalente. Les coefficients modaux de  $S_a$  sont simplement calculés en "propagant" le champ de vitesse de  $S$  vers  $S_a$ . Lorsque  $S_a$  s'éloigne de  $S$ , les modes non rayonnants de  $S_a$  admettent désormais une amplitude qui augmente plus rapidement que l'amplitude des modes rayonnants (resp. flèche

rouge et bleue sur la figure III.8). Les colonnes de  $A$  ne sont donc plus équilibrées et  $\mu(A)$  devient grand devant un.

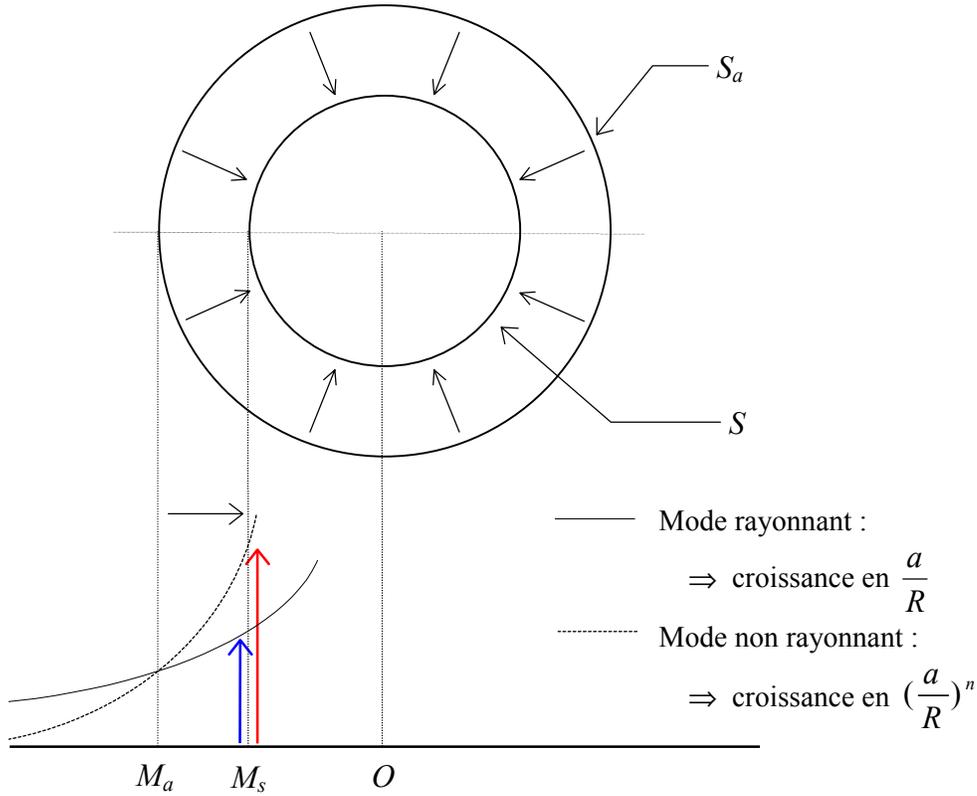


Figure III.8  
 Amplitude des modes rayonnants et non rayonnants de  $S_a$  sur la surface  $S$   
 Cas où  $S_a$  est de rayon supérieur à  $R$

On peut remarquer que la fonction  $H_{2,n}$  vérifie:

$$H_{2,n}(f, a, R) = H_{2,n}(f, R, a)^{-1} \tag{III.37}$$

On en déduit que le maximum et le minimum de l'ensemble  $\{|H_{ii}|, i = 1, \dots, N\}$  pour  $ka > kR$  sont respectivement les valeurs inverses du minimum et du maximum du même ensemble pour  $ka < kR$ . Si  $N_{\max}$  reste supérieur à  $ka$  - ce qui est le cas sur les figures III.6a et III.6b - alors on peut approcher le nombre de conditionnement de  $H$  par:

$$\mu_{\text{app}}(H)_{a>R} = \left(\frac{a}{R}\right)^{N_{\max}} \sqrt{\frac{1+(ka)^2}{1+(kR)^2}} \tag{III.38}$$

On peut constater sur la figure III.6 que cette expression conduit à une très bonne estimation du nombre de conditionnement de  $A$ .

Les relations (III.36) et (III.38) indiquent que le conditionnement de  $H$  pour  $a = 2R$  est identique au conditionnement de  $H$  pour  $a = R/2$ .

### 2.2.3. Comparaison Sphère/Multipôle

Il s'agit dans ce paragraphe de comparer le conditionnement du système linéaire obtenu en appliquant la méthode des sources équivalentes à partir d'une sphère et à partir d'un multipôle. En effet, on montre en annexe 2 que l'on peut représenter le rayonnement acoustique d'une sphère à partir d'une source multipolaire définie par:

$$\frac{\partial \Psi_j^{\text{mul}}}{\partial n}(R, \theta_i, \varphi_i) = \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta_i, \varphi_i) h'_n(kR) \quad (\text{III.39})$$

Ce modèle conduit théoriquement au même rayonnement acoustique que celui de la sphère équivalente  $S_a$  représentée par (III.28) car les modes de rayonnement d'une sphère et d'un multipôle sont linéairement dépendants. Il conduit cependant à un conditionnement du système linéaire très différent. Comme dans le paragraphe précédent, on peut décomposer la matrice  $A$  obtenue à partir de (III.39) sous la forme:

$$A = A' H_m \quad (\text{III.40})$$

où  $H_m$  est la matrice diagonale qui contient les dérivées des fonctions de Hankel sphériques et  $A'$  la matrice définie au paragraphe précédent. Si le maillage vibratoire de  $S$  est suffisamment dense, on peut approcher le conditionnement de  $A$  par celui de  $H$  avec:

$$\mu(H_m) = \frac{\text{Max}\{h'_n(kR), n = 0, 1, \dots, N_{\text{max}}\}}{\text{Min}\{h'_n(kR), n = 0, 1, \dots, N_{\text{max}}\}} \quad (\text{III.41})$$

En fonction de la valeur de  $N_{\text{max}}$  il faut distinguer deux cas:

1.  $N_{\text{max}} < kR$

Les modes de rayonnement du multipôle sont rayonnants et admettent une décroissance en  $\frac{1}{R}$ . Les composantes de  $H_m$  sont du même ordre de grandeur sur  $S$  et, si le maillage vibratoire est suffisamment dense, le nombre de conditionnement de  $H$  est proche de un.

Le module des fonctions  $h'_n$  peut être approché par celui de  $h'_0$  qui vérifie:

$$|h'_0(kR)| = \frac{\sqrt{1+(kR)^2}}{(kR)^2} \quad (\text{III.42})$$

2.  $N_{\max} > kR$

Les modes de rayonnement du multipôle dont l'ordre  $n$  est supérieur à  $kR$  sont non rayonnants car les fonctions  $h'_n$  vérifient:

$$|h'_n(kR)| \approx (n+1) \frac{(2n-1)!!}{(kR)^{n+2}} \quad (\text{III.43})$$

Comme la sphère  $S_a$ , ils admettent une décroissance en  $\frac{1}{R^{n+2}}$  mais leur amplitude augmente très rapidement avec l'ordre  $n$  (i.e. plus vite que le factoriel de  $n$ ). On en déduit:

$$\text{Max} \left\{ |h'_n(kR)|, n = 0, 1, \dots, N_{\max} \right\} = |h'_{N_{\max}}(kR)| \approx (N_{\max} + 1) \frac{(2N_{\max} - 1)!!}{(kR)^{N_{\max}+2}} \quad (\text{III.44})$$

On peut alors approcher le nombre de conditionnement de  $H_m$  par:

$$\mu_{\text{app}}(H_m)_{N_{\max} > kR} \approx \frac{|h'_{N_{\max}}(kR)|}{|h'_0(kR)|} \approx \frac{(N_{\max} + 1)(2N_{\max} - 1)!!}{(kR)^{N_{\max}} \sqrt{1+(kR)^2}} \quad (\text{III.45})$$

La figure III.9 permet de comparer le conditionnement de  $A$  et celui de  $H_m$  approché par la relation (III.45). Tant que  $n$  est inférieur ou égal à  $kR$ , le nombre de conditionnement de  $A$  reste très proche de un (i.e. tous les modes sont rayonnants). Il augmente cependant rapidement dès qu'un mode d'ordre  $n$  supérieur à  $kR$  est pris en compte.

Pour  $kR = 5$ , le premier mode d'ordre  $n = 6$  correspond au numéro  $N = n^2 + 2m + \sigma_{|(n,m,\sigma)=(6,0,1)} = 37$ .

On observe les mêmes décrochements pour  $N = 50, 65, \dots$  qui correspondent respectivement aux ordres  $n = 7, 8, \dots$

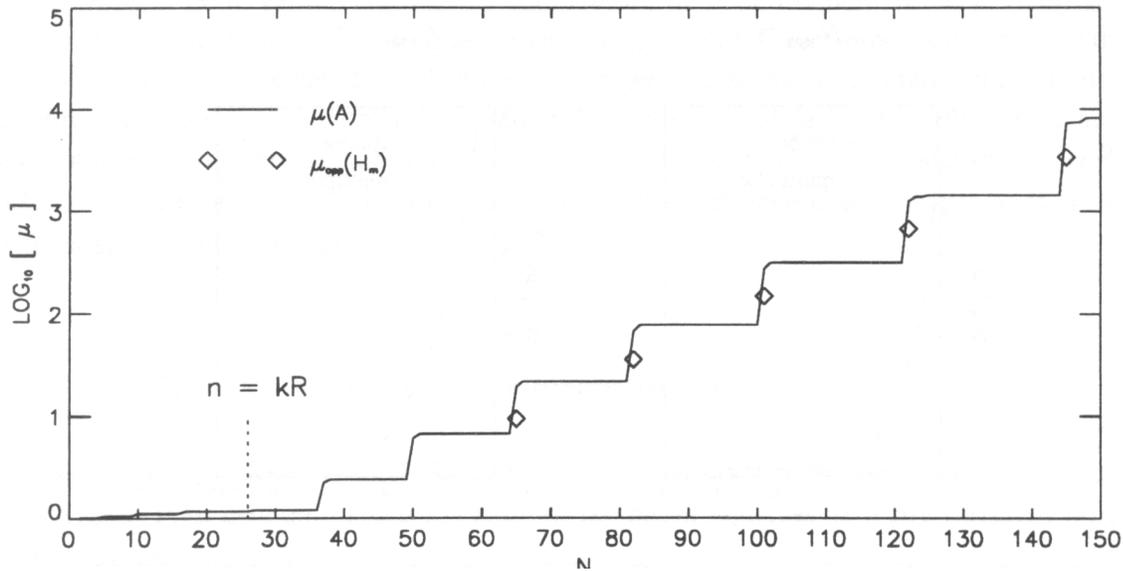


Figure III.9  
 Comparaison entre  $\mu(A)$  et  $\mu_{app}(H_m)$   
 pour  $kR = 5$  et  $(N_\theta, N_\varphi) = (30, 30)$

En choisissant le modèle de la sphère équivalente, les variations de  $h_n(kR)$  sont "normalisées" par celles de  $h_n(ka)$ . La figure III.10 permet de comparer le nombre de conditionnement de  $A$  pour un multipôle et pour une sphère ayant le même centre. On détermine les coefficients modaux de mêmes ordres pour les deux modèles et le maillage vibratoire de  $S$  vérifie le critère du paragraphe 2.2. Tant que l'ordre maximum des modes qui sont pris en compte est inférieur ou égal à  $kR$  (cas des deux premières figures), on ne détermine que les modes rayonnants du multipôle et le conditionnement de  $A$  est proche de un. En choisissant  $ka$  supérieur à  $N_{max}$ , seuls les modes rayonnants de la sphère sont également pris en compte et la sphère se comporte comme le multipôle. En revanche, dès que  $N_{max}$  est supérieur à  $kR$ , le modèle  $S_a = S$  est le seul qui permette d'équilibrer la matrice  $A$ . Si  $a$  est différent de  $R$ , les modes non rayonnants de  $S_a$  conduisent à une matrice mal conditionnée. En particulier, lorsque  $ka$  devient supérieur ou égal à  $N_{max}$  tous les modes de  $S_a$  sont rayonnants mais leur amplitude est dirigée par la fonction  $h_n(kR)$ . La sphère et le multipôle admettent alors un conditionnement identique que l'on peut approcher par la relation (III.45).

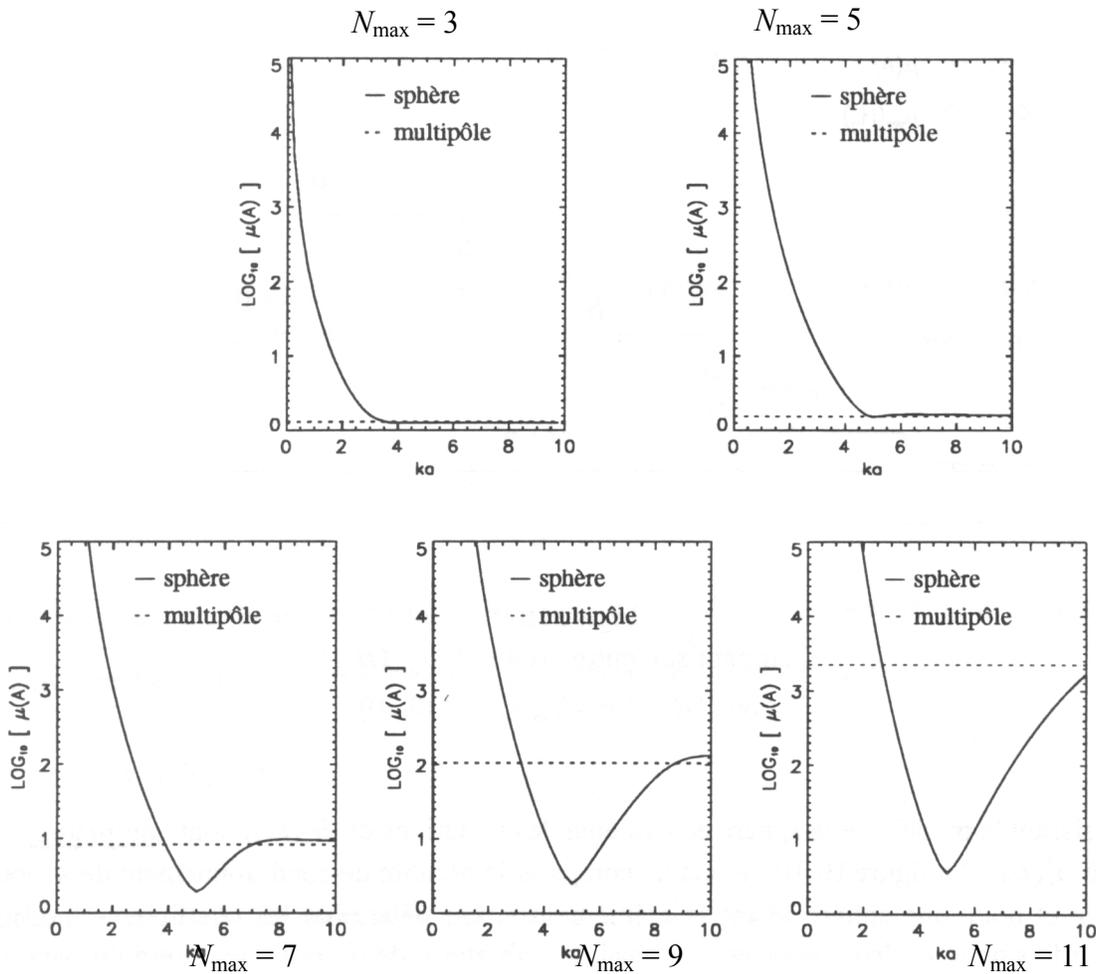


Figure III.10

## Comparaison Sphère/Multipôle

Variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction de  $ka$  et  $N_{\max}$   
 pour  $kR = 5$  et  $(N_{\theta}, N_{\phi}) = (2N_{\max}+1, 2N_{\max}+1)$

### Conclusion sur l'analyse du conditionnement de $A$ lorsque $S_a$ et $S$ ont le même centre

Nous avons montré dans les paragraphes précédents que le conditionnement de la matrice  $A$  dépendait fortement du maillage de la sphère vibrante. En choisissant  $S_a = S$ , l'orthogonalité des fonctions harmoniques sphériques permet cependant d'obtenir un conditionnement proche de un lorsque ces fonctions sont normalisées et que le nombre de points de maillage tend vers l'infini. En fonction de l'ordre des coefficients modaux que l'on cherche à déterminer, un système linéaire bien conditionné est obtenu si le maillage vibratoire vérifie les critères (III.16) et (III.17). Pour un maillage donné, le conditionnement du système augmente dès que l'ordre des modes est supérieur à  $kR$  et que le rayon de la sphère équivalente est différent du rayon de la sphère vibrante. Nous avons montré que l'on pouvait déterminer analytiquement une expression asymptotique du nombre de conditionnement en fonction de  $kR$  et  $ka$  qui permet

d'expliquer ce comportement à partir de la décroissance rapide des modes non rayonnants de la sphère équivalente. Le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  est donc d'autant plus grand devant un que la distance entre  $S$  et  $S_a$  est importante et que l'ordre  $n$  des modes est élevé. Le cas du multipôle a également été traité. Il conduit à une matrice mal équilibrée pour des modes d'ordre supérieur à  $kR$ . Le rayon de la sphère équivalente apparaît donc comme un moyen en d'équilibrer la matrice  $H$  (i.e. normaliser les fonctions  $h_n(kR)$  par  $h_n(ka)$ ). On va montrer que c'est un résultat que l'on peut généraliser lorsque  $S_a$  et  $S$  ne sont pas deux sphères concentriques.

#### 2.2.4. Cas d'une sphère équivalente décentrée

Il s'agit dans ce paragraphe de montrer la sensibilité du conditionnement de  $A$  à la compacité de la surface vibrante. Pour cela on impose au centre de la sphère équivalente d'être différent du centre de la sphère vibrante.

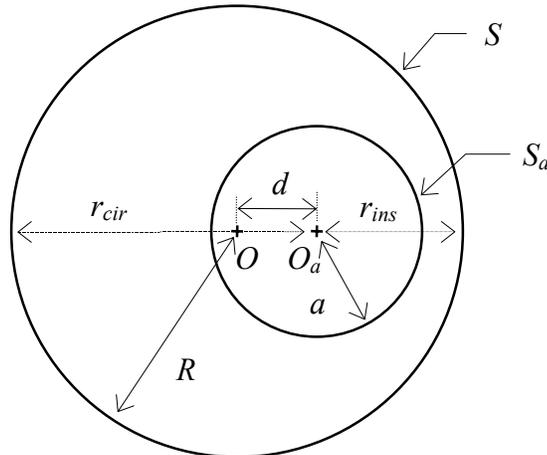


Figure III.11  
Sphère vibrante et sphère équivalente décentrée

Dans le cas d'une sphère,  $r_{ins}$ ,  $r_{cir}$  et la compacité vérifient simplement:

$$\begin{aligned} r_{ins} &= R - d \\ r_{cir} &= R + d \\ C(S, O_a) &= \frac{r_{cir}}{r_{ins}} = \frac{R + d}{R - d} \end{aligned}$$

( III.46 )

où  $d$  la distance entre le centre de  $S$  et le centre de  $S_a$ .

Lorsque  $O_a$  est différent de  $O$ , la normale extérieure en tout point de la sphère  $S$  exprimée dans le repère  $(O_a, X, Y, Z)$  n'est plus uniquement radiale. On ne peut plus simplifier les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  car

elles contiennent désormais les composantes tangentielle et circonférentielle de la normale des modes de  $S_a$  en tout point de  $S$ :

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M) = \underbrace{\bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) \frac{h'_n(kr)}{h'_n(ka)} n_r}_{\text{contribution radiale}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi)}{kr \partial \theta} \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)} n_\theta}_{\text{contribution tangentielle}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi)}{kr \sin \theta \partial \varphi} \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)} n_\varphi}_{\text{contribution circonférentielle}}$$

( III.47 )

### 2.2.4.1. Influence de la position et du rayon de $S_a$ sur le conditionnement de $A$

La figure III.12 illustre les variations de  $\mu(A)$  en fonction de  $a$  pour différentes positions de  $S_a$ . Le maillage vibratoire et le nombre de mode de  $S_a$  que l'on cherche à déterminer sont identiques dans les quatre configurations. Les valeurs de  $r_{ins}$ ,  $r_{cir}$  et  $C(S, O_a)$  qui correspondent à chaque configuration sont exprimées dans le tableau III.1.

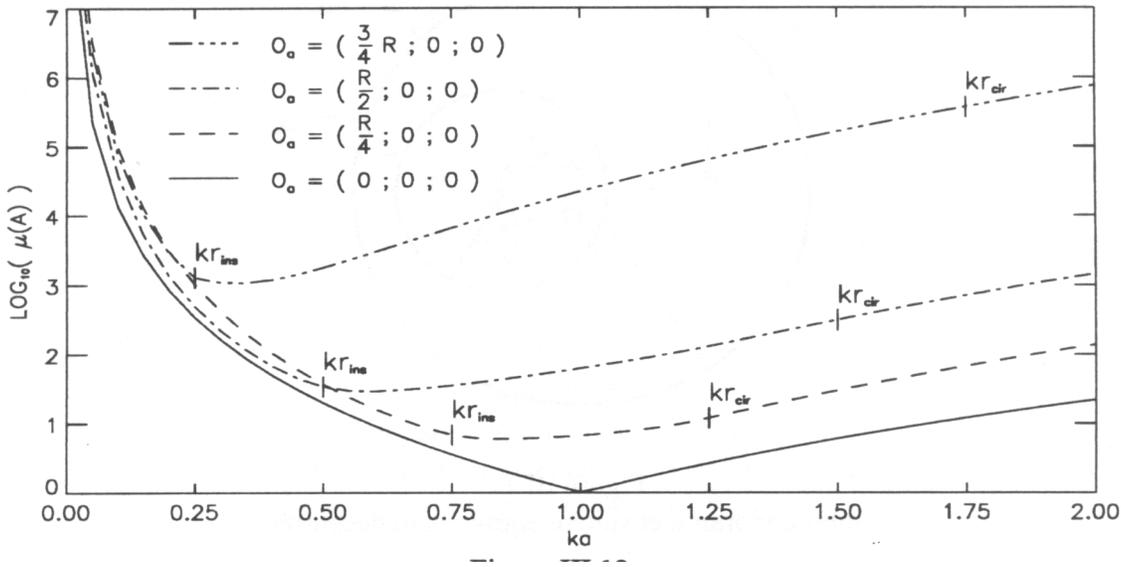


Figure III.12  
Variations du nombre de conditionnement de  $A$   
en fonction de  $ka$  pour différentes positions de la sphère équivalente  
(  $kR = 1,0 - (N_\theta, N_\varphi) = (30, 30) - N_{max} = 5$  )

$d$	0	$R/4$	$R/2$	$3R/4$
$r_{ins}$	$R$	$3R/4$	$R/2$	$R/4$
$r_{cir}$	$R$	$5R/4$	$3R/2$	$7R/4$
$C$	1	$5/3$	3	7

Tableau III.1  
Valeurs de  $r_{ins}$ , de  $r_{cir}$  et de la compacité de  $S$  pour les différentes positions de  $S_a$

Pour une position de  $S_a$  donnée, le minimum de conditionnement est obtenu pour une sphère dont le rayon est un peu supérieur au rayon de la sphère inscrite. Comme dans le cas de deux sphères concentriques, le comportement de  $\mu(A)$  en fonction de  $a$  s'explique simplement à partir des modes rayonnants et non rayonnants de  $S_a$ .

Cas n°1. :  $a < r_{ins}$

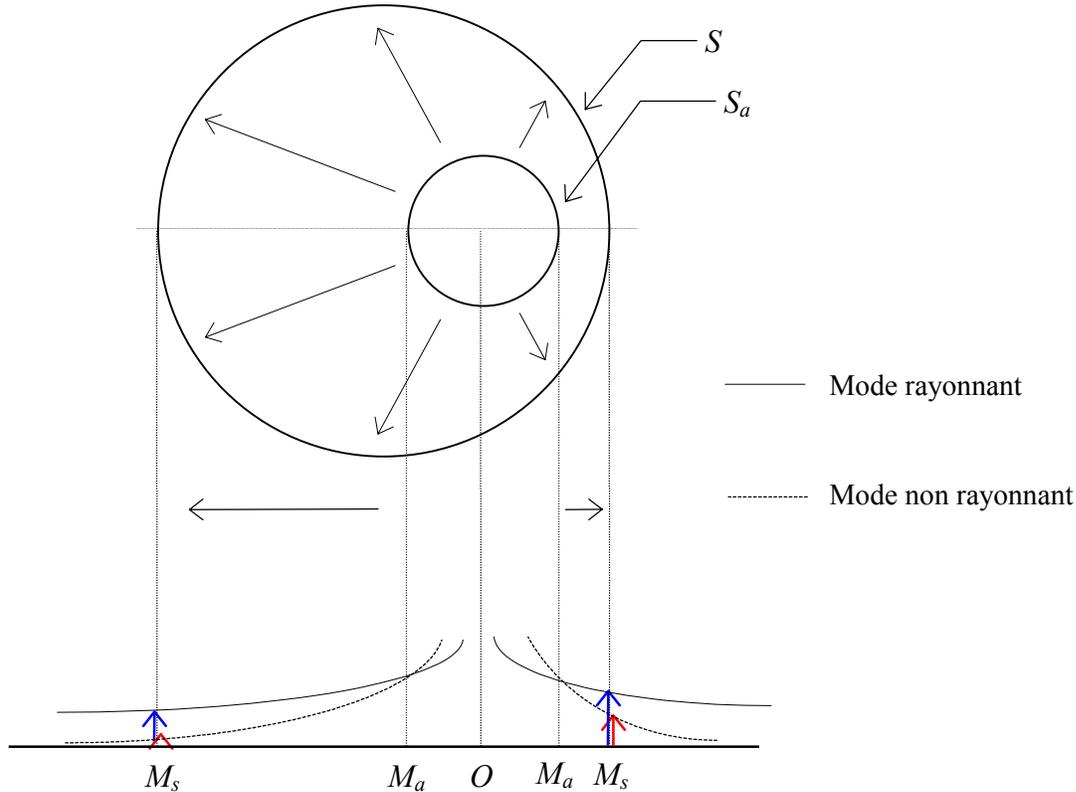


Figure III.13

Amplitude des modes rayonnants et non rayonnants de  $S_a$  sur la surface  $S$   
Cas où  $S_a$  est décentrée et de rayon inférieur à  $r_{ins}$

La décroissance rapide des fonctions  $\frac{h'_n(kr)}{h'_n(ka)}$  et  $\frac{h_n(kr)}{h_n(ka)}$  lorsque  $n$  est supérieur à  $ka$  (i.e. associées aux modes non rayonnants de  $S_a$ ) conduit à une matrice  $A$  mal équilibrée suivant ses colonnes, donc mal conditionnée. Les variations de  $\mu(A)$  en fonction de  $ka$  ne s'expriment plus aussi simplement qu'au paragraphe III.2.2.2. On peut néanmoins remarquer que les composantes radiales, tangentielles et circonférentielles de  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  admettent la même décroissance en  $\frac{1}{r_s^{n+2}}$  si  $n$  est grand devant  $ka$  et  $kr_s$ .

Lorsque  $a$  tend vers zéro, le nombre de conditionnement de  $A$  augmente donc au moins aussi rapidement que si  $S$  était une sphère de rayon  $r_{ins}$ .

Cas n°2. :  $a > r_{\text{ins}}$

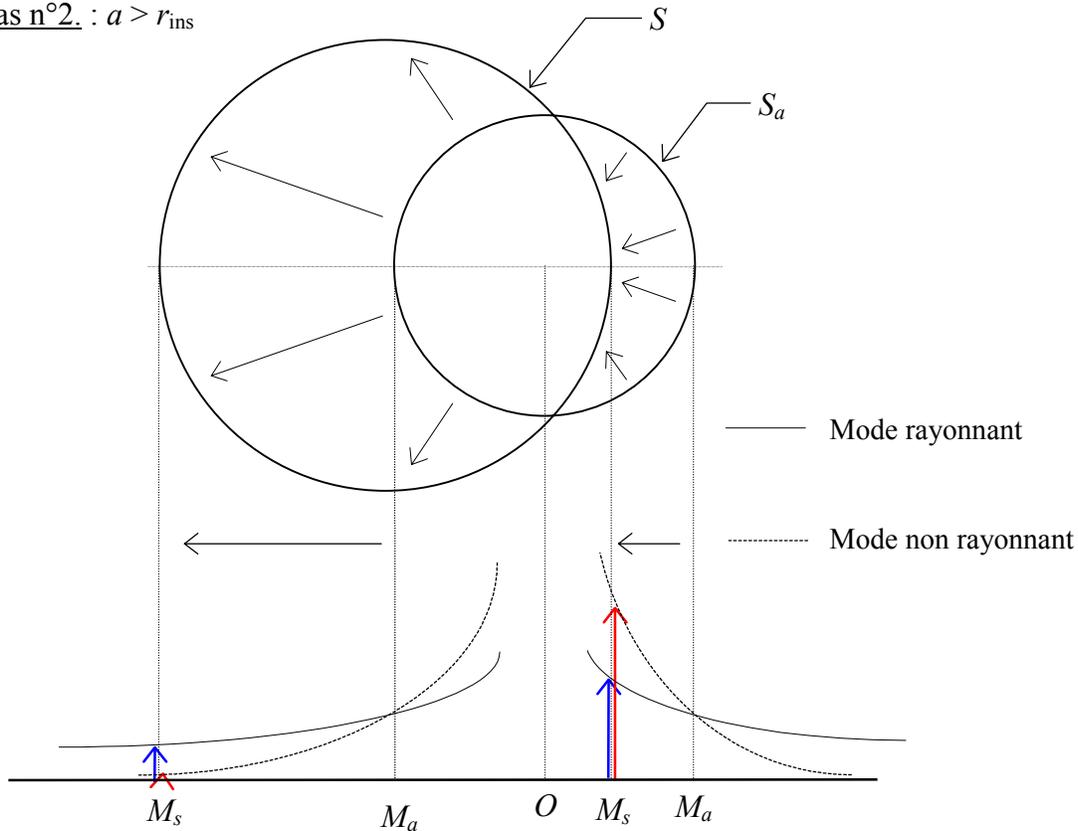


Figure III.14

Amplitude des modes rayonnants et non rayonnants de  $S_a$  sur la surface  $S$   
Cas où  $S_a$  est décentrée et de rayon supérieur à  $r_{\text{ins}}$

Lorsque le rayon de  $S_a$  est supérieur à  $r_{\text{ins}}$ , le champ de vitesse vibratoire de  $S$  est à la fois propagé et rétropropagé vers  $S_a$ . Aux points de  $S$  situés à l'extérieur de  $S_a$  les modes non rayonnants de  $S_a$  ont une amplitude plus faible que l'amplitude des modes rayonnants (flèche bleue et rouge côté gauche). Aux points de  $S$  situés à l'intérieur de  $S_a$  l'amplitude des modes non rayonnants est au contraire plus grande que celle des modes rayonnants (flèche bleue et rouge côté droit). Les colonnes de  $A$  associées aux modes non rayonnants de  $S_a$  ont ainsi une amplitude forte aux points de  $S$  extérieur à  $S_a$  et faible aux points intérieur à  $S_a$ . L'amplitude de ces modes est d'autant plus élevée que  $a$  devient grand devant  $r_{\text{ins}}$ . Le minimum de conditionnement est donc obtenu pour le rayon de  $S_a$  qui équilibre les contributions de forte et de faible amplitudes. Sur la figure III.14, il s'agit d'un rayon légèrement supérieur au rayon de la sphère inscrite qui tend vers  $r_{\text{ins}}$  lorsque le nombre de modes de  $S_a$  pris en compte augmente. Il s'agit bien sûr de résultats que l'on ne peut démontrer analytiquement. Ils ont néanmoins été constatés dans tous les exemples traités.

On constate également que le minimum atteint par le nombre de conditionnement de  $A$  est d'autant plus grand devant un que la compacité de la sphère  $S$  est grande par rapport au centre de la sphère équivalente.

### 2.2.4.2. Influence du maillage vibratoire

La figure III.15 montre que le rayon de  $S_a$  qui rend minimum le nombre de conditionnement de  $A$  dépend également de la position des points du maillage vibratoire. Dans l'exemple de la figure III.15, le maillage vibratoire de la sphère vibrante et la distance entre les centres des deux sphères sont constants. Le rayon de  $S_a$  qui rend  $\mu(A)$  minimum varie alors en fonction de la position de  $O_a$ . La valeur de ce minimum varie également. Dans cet exemple, on cherche à déterminer les 36 premiers coefficients modaux de  $S_a$  pour une sphère de compacité égale à 7. Avec 900 points de maillage, le nombre de conditionnement minimum de  $A$  reste particulièrement élevé (i.e. entre 220 et 1000 suivant la position de  $O_a$ ).

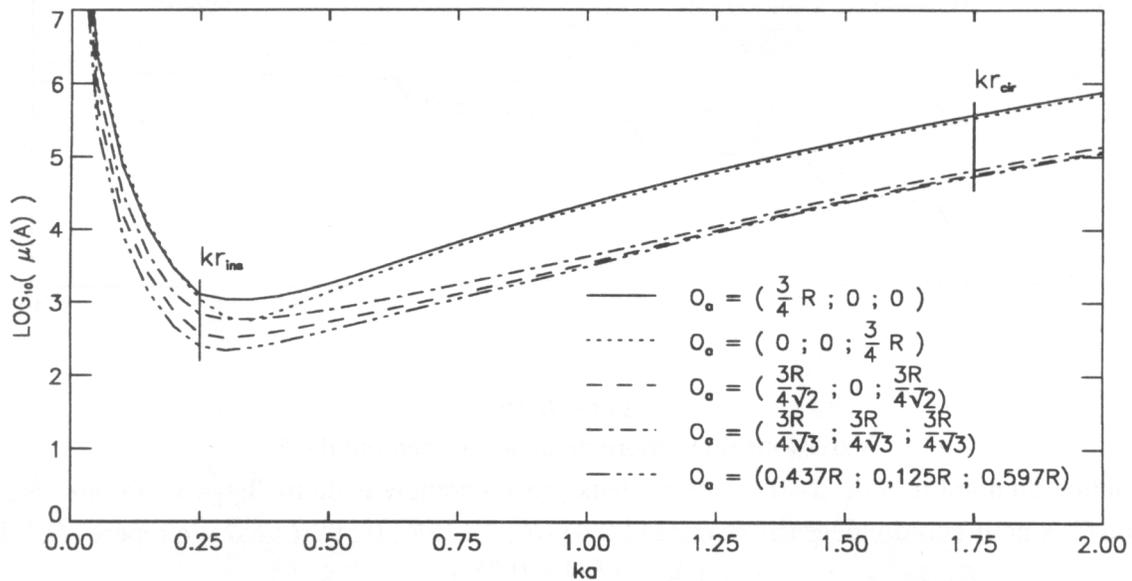


Figure III.15

Variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction de  $ka$  pour différentes positions de la sphère équivalente avec  $d$  constant  
 ( $d = 3R/4$  ;  $kR = 1$  ;  $(N_\theta, N_\varphi) = (30, 30)$  ;  $N_{\max} = 5$ )

Lorsque la sphère équivalente a le même centre que la sphère vibrante, on a montré au paragraphe III.2.2.1 que le nombre de conditionnement de  $A$  pouvait être très sensible à la densité du maillage vibratoire. En particulier, lorsque les modes de  $S_a$  admettent des oscillations rapides sur  $S$  (i.e. modes d'ordres  $n$  et/ou  $m$  élevés), un maillage fin est indispensable pour traduire correctement ces oscillations. L'exemple de la figure III.16 illustre les variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction du nombre de coefficients modaux pris en compte et pour différentes densités du maillage de  $S$ . Le centre de la sphère équivalente a été choisi de manière à éviter les symétries. Pour déterminer la contribution des cinq premiers modes de  $S_a$  le maillage régulier  $(N_\theta, N_\varphi) = (10, 10)$  est associé au même conditionnement que les maillages plus denses. Les oscillations des cinq premiers modes sont donc bien traduites par ce maillage et on peut supposer que les systèmes discret (II.42) et continu (II.48) sont très proches : le nombre de conditionnement "résiduel" associé aux deux systèmes linéaires est alors une caractéristique du modèle de la sphère équivalente. Il traduit la non

orthogonalité de ses fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  et ne peut être diminué en augmentant le nombre de points de maillage. S'il est grand devant un, il faut vérifier la stabilité des coefficients modaux solutions du système linéaire.

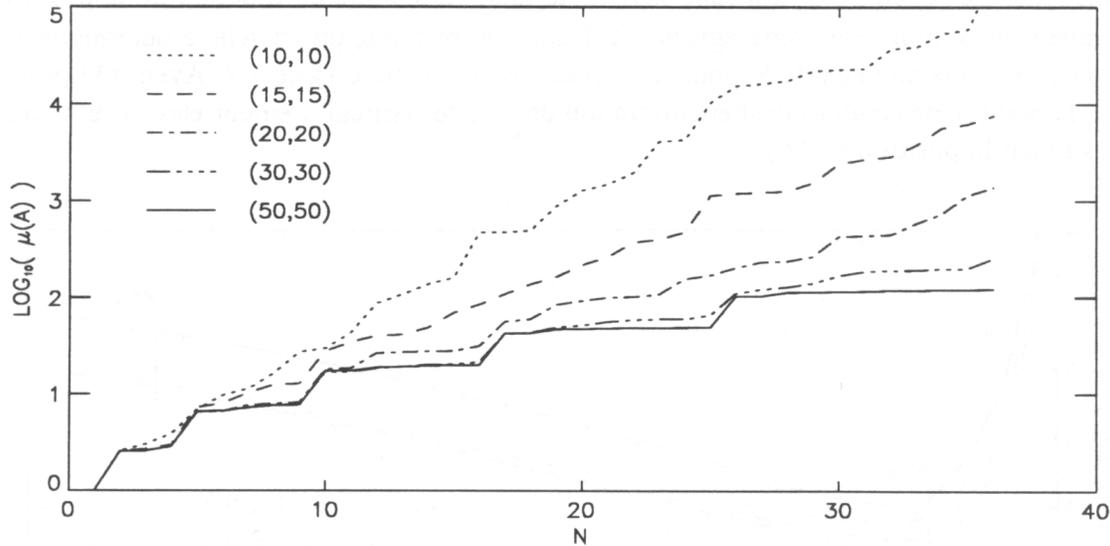


Figure III.16

Variations du nombre de conditionnement de  $A$

en fonction du nombre  $N$  de coefficients modaux pris en compte et du maillage vibratoire  $(N_\theta, N_\phi)$  lorsque  $O_a$  a pour coordonnées cartésiennes  $(0,437R; 0,125R; 0,597R)$  dans le repère  $(O, X, Y, Z)$  ( $ka = kR/4 = 0,25$ )

Pour  $N = 36$  par exemple, le nombre de conditionnement du système discret ne se stabilise qu'à partir du maillage  $(N_\theta, N_\phi) = (50, 50)$ . La détermination a priori d'un critère de maillage est rendue difficile à cause de la contribution couplée des différentes composantes radiales, tangentes et circonférentielles de la fonction  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ .

La figure III.17 représente les variations de  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  pour différentes valeurs de  $j$  en tout point de la sphère  $S$ . Le centre de la sphère équivalente a été choisi de manière à simplifier la représentation graphique et l'amplitude de chaque fonction est normalisée par rapport au maximum qu'elle atteint sur  $S$ . On obtient ainsi les mêmes courbes quel que soit le rayon de la sphère équivalente. Elles correspondent également au cas d'un multipôle de même centre que  $S_a$ . Le point  $M_0$  de coordonnées  $(\theta_0, \varphi_0) = (105,5^\circ; 146,3^\circ)$  est le point de  $S$  le plus proche de  $S_a$ .

Les modes  $j = 1 \mid_{(n,m,\sigma) = (0,0,1)}$  et  $j = 2 \mid_{(n,m,\sigma) = (1,0,1)}$  correspondent respectivement aux modes pulsant et oscillant suivant l'axe  $O_a Z$  de  $S_a$ . Ils admettent déjà des variations sur  $S$  qui nécessitent un nombre de points de maillage important. Les figures III.17c et III.17d montrent les lobes de directivité associés aux modes  $j = 16 \mid_{(n,m,\sigma) = (3,2,0)}$  et  $j = 36 \mid_{(n,m,\sigma) = (5,5,1)}$ . Avec  $kr_{ins} \approx 0,75$  ces deux modes sont non rayonnants. Leur amplitude est donc maximum au point le plus proche de  $S$  et décroît rapidement dès que l'on s'éloigne de ce point.

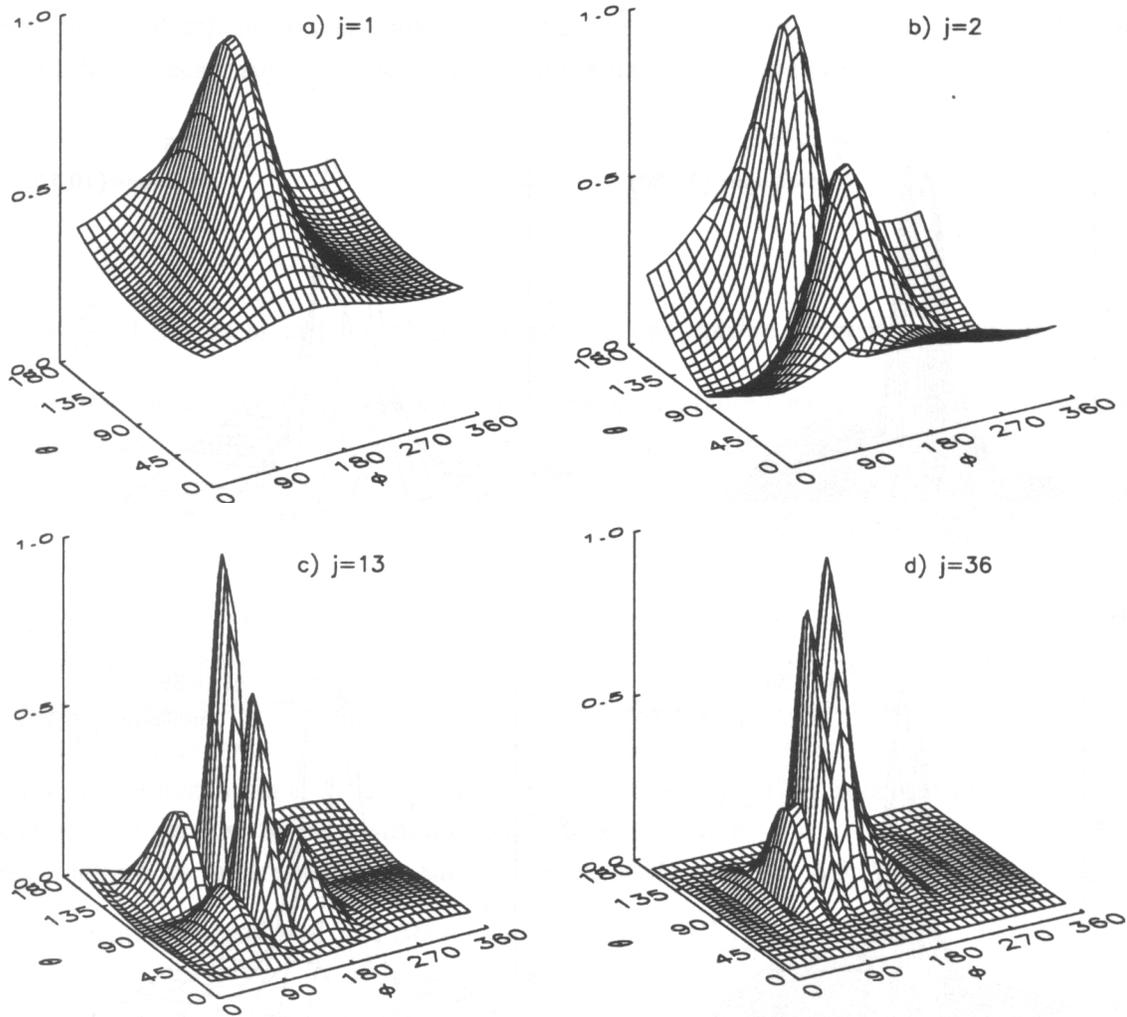


Figure III.17

Variations de  $\frac{\left| \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right|}{\text{Max}\left( \left| \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right| \right)}$  en tout point de la sphère  $S$  pour différentes valeurs de  $j$

(chaque point de  $S$  est défini par ses coordonnées sphériques associées au repère  $(O, X, Y, Z)$ )  
 (Coordonnées cartésiennes du point  $O_a$  dans le repère  $(O, X, Y, Z) = (-0,3 ; 0,2 ; -0,1)$ )  
 ( $kR = 1 ; (N_\theta, N_\varphi) = (30, 30)$ )

La figure III.18 montre alors qu'un maillage vibratoire trop faible autour de  $M_0$  ne permet pas de différencier la contribution des modes 16 et 36. Pour un maillage régulier  $(N_\theta, N_\varphi) = (10, 10)$ , ces deux modes sont quasiment comme linéairement dépendants. En augmentant le nombre de points de maillage ils sont donc mieux décrits et conduisent à un système mieux conditionné.

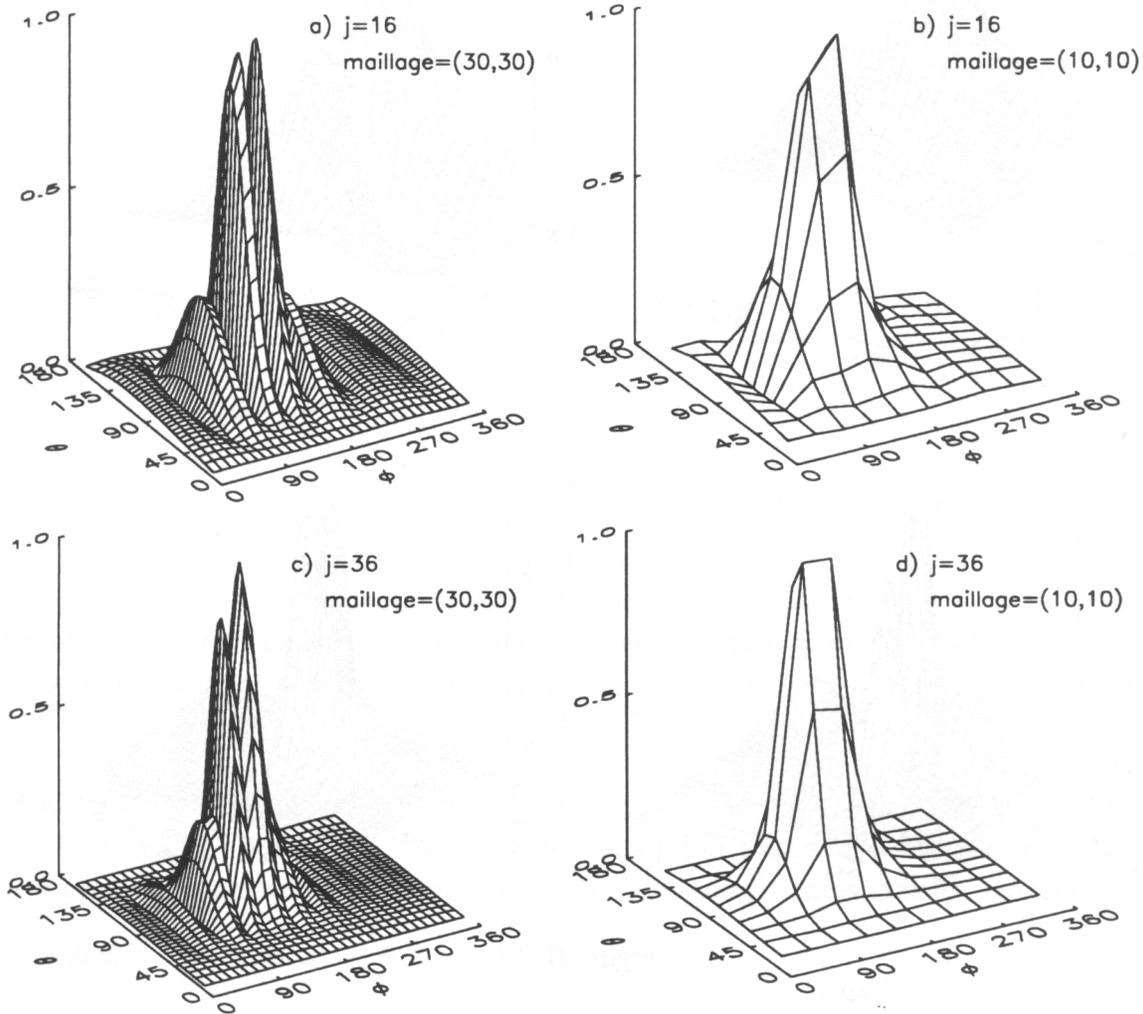


Figure III.18

$$\text{Variations de } \frac{\left| \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right|}{\text{Max} \left( \left| \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right| \right)} \text{ en tout point de la sphère } S$$

pour différentes valeurs de  $j$  et différents maillage vibratoire  $(N_\theta, N_\varphi)$   
 (Coordonnées cartésiennes du point  $O_a$  dans le repère  $(O, X, Y, Z) = (-0,3 ; 0,2 ; -0,1)$   
 ( $kR = 1$ )

Remarque : critère de maillage vibratoire lié aux fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$

Lorsque la sphère équivalente est de même centre que la sphère vibrante, la relation (III.18) montre que pour échantillonner toutes les fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$  dont l'indice  $m$  est inférieur à  $N_{\max}$ , l'écart  $\Delta\varphi$  entre deux points du maillage vibratoire doit vérifier:

$$\Delta\varphi \leq \frac{2\pi}{2N_{\max} + 1}$$

( III.48 )

où  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}$ . Lorsque la surface vibrante n'est pas une sphère de centre  $O$ , l'écart entre deux points de maillage vu depuis le centre de la sphère équivalente n'est plus constant. Pour assurer une bonne description des fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$ , on peut alors appliquer le critère:

$$\Delta\varphi_{\max} \leq \frac{\pi}{N_{\max}}$$

( III.49 )

où  $\Delta\varphi_{\max}$  est l'écart maximum entre deux points de maillage "consécutifs" par rapport à un repère lié au centre de la sphère équivalente. Notons que si la structure n'est plus une sphère, les points de maillage vibratoire définis dans le repère lié à la structure ne sont plus répartis suivant des cercles où les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont constants. La notion de points consécutifs suivant l'angle  $\varphi$  n'est donc pas réellement définie. Une application du critère ( III.49 ) sera néanmoins donnée au paragraphe III.3 dans le cas où la structure vibrante est un cube.

On peut définir un critère similaire suivant l'angle  $\theta$ : Si on note  $\Delta\theta$  l'écart moyen entre deux points consécutifs du maillage (i.e.  $\Delta\theta \approx \frac{\pi}{N_\theta}$ ) la relation ( III.18 ) entraîne:

$$\Delta\theta_{\max} \leq \frac{\pi}{N_{\max}}$$

( III.50 )

Pour les structures à fort rayon de courbure, ces deux critères sont en général insuffisants car ils ne tiennent pas compte des oscillations engendrées par les composantes radiales, tangentielles et circonférentielles de la normale et par les dérivées des fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  suivant les angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Ils donnent néanmoins un ordre de grandeur intéressant sur la densité du maillage vibratoire minimum. Ils montrent plus généralement que le maillage de la structure vibrante doit être défini en fonction de la position de la sphère équivalente. Pour un maillage vibratoire donné, les angles  $\Delta\theta_{\max}$  et  $\Delta\varphi_{\max}$  seront en effet d'autant plus grands que la sphère équivalente est proche de la structure (figure III.19). On en déduit que l'ordre maximum des coefficients modaux qu'un maillage vibratoire imposé permet de calculer est d'autant plus faible que la sphère équivalente est proche de la surface vibrante. Pour décrire les oscillations des modes d'ordre  $n$  et  $m$  plus élevés, il faut diminuer  $\Delta\theta_{\max}$  et  $\Delta\varphi_{\max}$ , c'est-à-dire augmenter le nombre de points de maillage lorsque la sphère équivalente est proche de la structure.

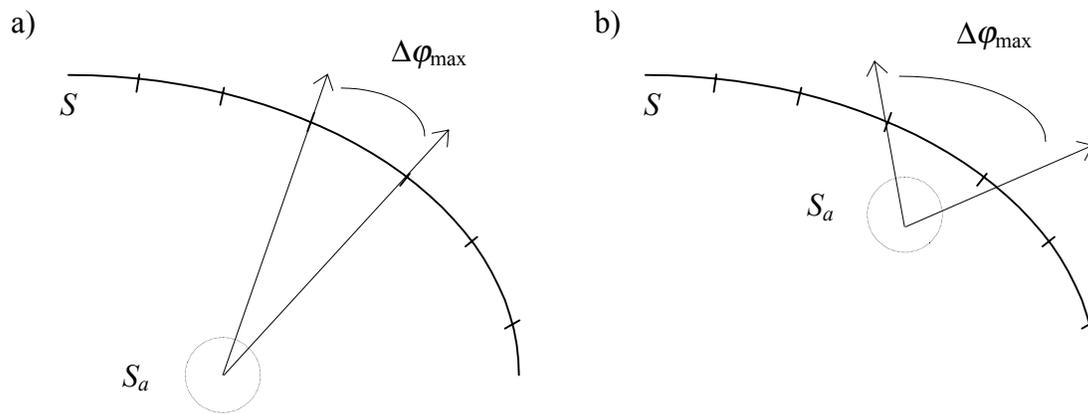


Figure III.19

Influence de la position de la sphère équivalente sur  $\Delta\varphi_{\max}$

a) sphère équivalente éloignée de la structure

b) sphère équivalente proche de la structure

Notons que le critère (I II.49) a été utilisé par Imhof<sup>(57)</sup> dans le cadre d'une méthode de sources équivalentes multipolaires appliquée à la diffraction acoustique dans un domaine à deux dimensions. Chaque point du domaine étant repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \varphi)$ , les fonctions harmoniques sphériques se ramènent en effet aux seules fonctions sinusoïdales  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$ . Les dérivées de ces fonctions étant encore des fonctions sinusoïdales, le critère est toujours satisfait.

### 2.2.4.3. Conclusion

En modélisant le rayonnement acoustique d'une sphère par une sphère équivalente décentrée on met en évidence les problèmes liés à la non compacité de la surface vibrante. Les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  n'étant plus orthonormées, la matrice  $A$  est *a priori* mal conditionnée. On peut cependant minimiser ce conditionnement en choisissant une sphère équivalente dont le rayon est proche du rayon de la sphère inscrite. C'est pour cette sphère que l'amplitude des modes non rayonnants de  $S_a$  conduit à un meilleur équilibrage des colonnes de la matrice  $A$ . Le nombre de conditionnement de  $A$  est également très sensible au maillage vibratoire. En effet, les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  associées aux modes d'ordre  $n$  et  $m$  élevés admettent de nombreuses oscillations sur  $S$ , notamment aux points les plus proches de  $S_a$ . Lorsque ces fonctions sont correctement échantillonnées, leur contribution au champ de vitesse mesuré sur  $S$  est en général stabilisée et le conditionnement de  $A$  atteint un

minimum. Si la structure n'est pas compacte et que l'on cherche à déterminer les coefficients modaux associés aux modes d'ordre  $n$  supérieur à  $kr_{\text{ins}}$ , ce minimum reste grand devant un. Il est alors indispensable d'analyser la stabilité de la solution du système linéaire afin de différencier les coefficients modaux associés à de forts ou à de faibles écarts types.

Notons pour finir que dans tous les exemples traités le nombre de conditionnement de  $A$  décroît de manière monotone lorsque la densité du maillage augmente. Ce n'est cependant pas un résultat général. Il peut en effet exister un maillage vibratoire de  $S$  - régulier ou non - qui contient un nombre de points minimum et qui échantillonne correctement les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ . Le système discret associé à ce maillage peut alors être mieux conditionné que le système continu ou que les systèmes discrets associés à certains maillages plus denses.

### 2.3. Comparaison entre le rayonnement acoustique d'une sphère équivalente et une solution analytique

#### 2.3.1. Calcul du rayonnement acoustique d'une portion de sphère pulsante

En tout point de la sphère  $S$  et quelle que soit la fréquence, la vitesse est définie par:

$$\frac{L_x}{N_x} = \frac{L_y}{N_y} = \frac{L_z}{N_z}$$

(III.51)

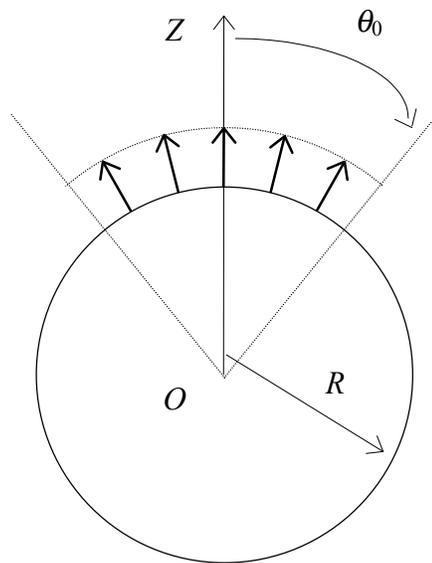


Figure III.20  
Portion de sphère pulsante  
définie par l'angle  $\theta_0$

### 2.3.1.1. Description de la solution analytique

En appliquant la relation (I.1.3) on peut décomposer la fonction  $z^{-\frac{L}{2}}$  dans la base des fonctions harmoniques sphériques normalisées:

$$Z = \frac{L}{2} z \quad (III.52)$$

où les coefficients  $\frac{L}{N_x N_z}$  sont les coefficients modaux de la sphère  $S$ . La vitesse étant indépendante de l'angle  $\varphi$ , on montre en annexe 8 qu'elle s'exprime en fonction de l'angle  $\theta$  et des polynômes de Legendre  $P_n$ . Les modes vibratoires de  $S$  associés aux indices  $m$  différents de  $z$  ont une contribution nulle au champ de vitesse. On note alors  $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$  les coefficients modaux non nuls. On montre également que les fonctions harmoniques sphériques normalisées vérifient:

$$\bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos\theta) \quad (III.53)$$

et on en déduit l'expression de  $V^R$  et de la pression acoustique rayonnée par  $S$ :

$$V^R(R, \theta, \varphi) = V^R(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} V_n^R P_n(\cos\theta) = \frac{V}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)) P_n(\cos\theta) \quad (III.54)$$

$$P(M) = P(r, \theta) = \frac{V}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)) P_n(\cos\theta) \frac{h_n(kr)}{h_n(kR)} \quad (III.55)$$

Il faut ainsi la contribution d'une infinité de modes vibratoires pour traduire la discontinuité de la vitesse en  $\theta = \theta_0$ . En effet, les polynômes de Legendre étant continus sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , la convergence de la série (III.54) n'est pas uniforme sur cet intervalle. En particulier, la convergence sera lente aux points proches de la discontinuité.

La figure III.21 illustre le phénomène de Gibbs que l'on peut observer en  $\theta = \theta_0$  lorsque le nombre de coefficients pris en compte dans la série (III.54) augmente.

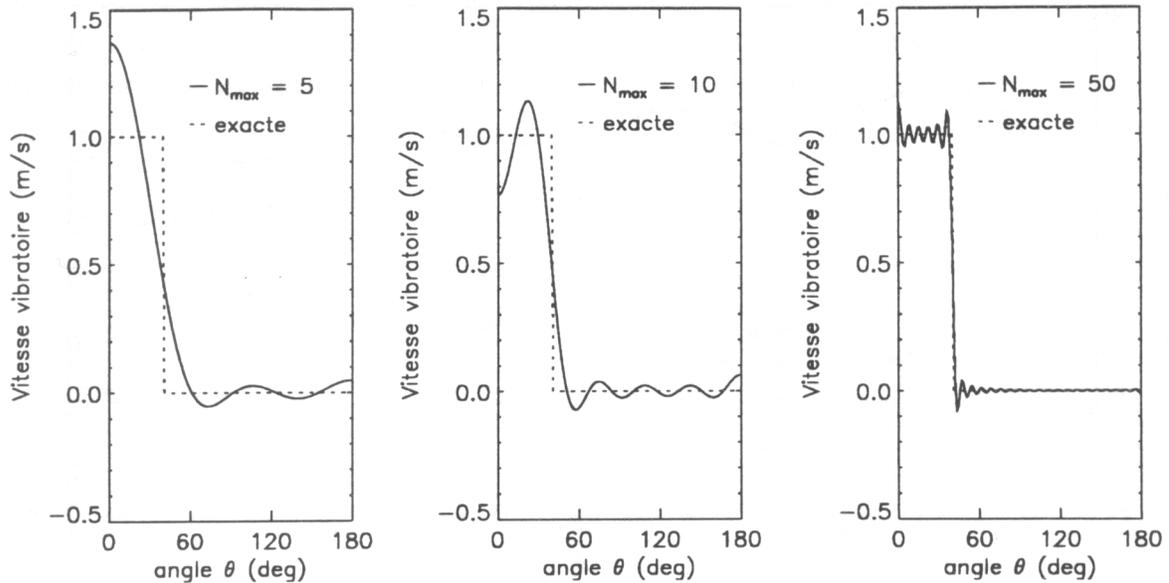


Figure III.21

Illustration du phénomène de Gibbs en  $\theta = \theta_0$

lorsque les coefficients modaux  $V_n^R$  sont pris en compte jusqu'à l'ordre  $n = N_{\max}$   
 ( $\theta_0 = 40^\circ$  ;  $V = 1,0$  m/s)

Pour  $N_{\max} = 50$ , on peut encore observer une erreur supérieure à 5 % en de très nombreux points de  $S$ . La vitesse de convergence ne pose cependant pas de problème car seul un nombre fini de modes vibratoires de la sphère sont rayonnants. Le rayonnement acoustique de la portion de sphère est ainsi approché avec précision dès que les critères de troncature développés au paragraphe I.1 sont vérifiés. En prenant en compte les coefficients modaux de  $S$  jusqu'à l'ordre  $n = N_{\max}$  on peut attendre une précision correcte sur la pression acoustique rayonnée jusqu'à la fréquence  $kR$  définie par :

$$N_{\max} = [kR] + n_p \quad (\text{III.56})$$

Pour  $N_{\max}$  fixé, la fréquence limite au de là de laquelle le nombre de modes pris en compte est insuffisant vérifie donc :

$$kR \approx N_{\max} - n_p \quad (\text{III.57})$$

Pour le point d'écoute  $M_1$  de coordonnées  $(4R, 0, 2R)$ , la décroissance rapide de la fonction  $\frac{h_n(kR)}{h_n(4R)}$

conduit à  $n_p \approx 3$ . Le rayonnement acoustique de  $S$  est donc correctement approché jusqu'à  $kR = 2$  pour  $N_{\max} = 5$  (respectivement  $kR = 7$  et  $12$  pour  $N_{\max} = 10$  et  $15$ ). La figure III.22 confirme la validité de la relation (III.57).

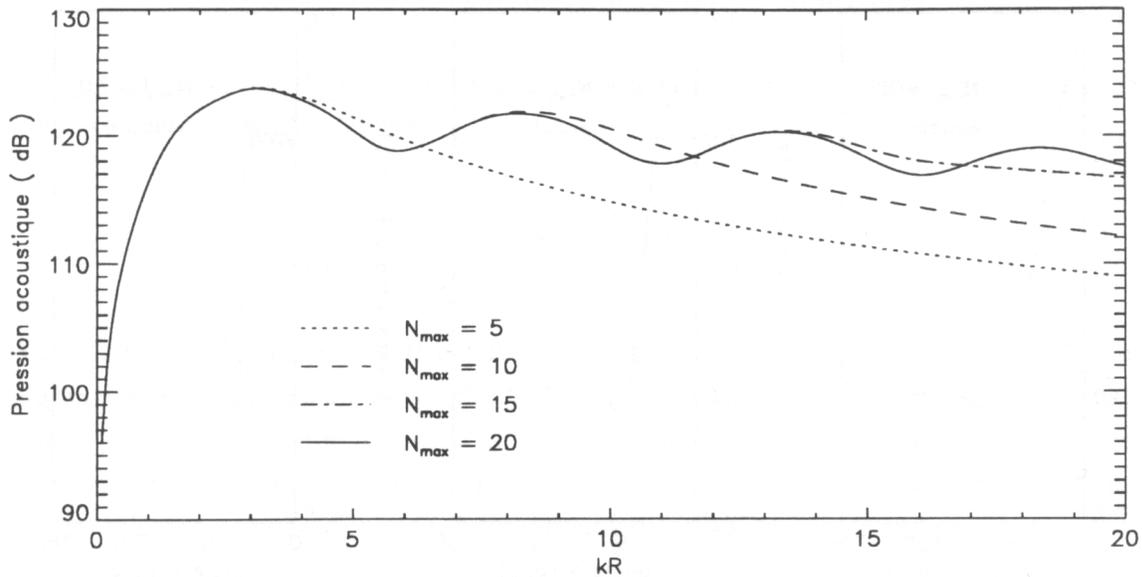


Figure III.22

Pression acoustique rayonnée par une portion de sphère pulsante au point  $M_1$   
 ( $\theta_0 = 40^\circ$  ;  $V = 1,0$  m/s )

Pour  $N_{\max} = 5$ , la vitesse vibratoire sur  $S$  est différente de celle donnée par le modèle de la portion de sphère pulsante avec une erreur maximum de l'ordre de 40 % au point  $\theta = 0^\circ$  (cf. figure III.21). On montre donc sur cet exemple que le rayonnement acoustique de  $S$  peut être calculé avec précision (i.e. si  $kL \leq 2$  pour  $N_{\max} = 5$ ) alors que le champ de vitesse imposé n'est pas entièrement reconstitué. Il suffit en effet de calculer la contribution des seuls modes rayonnants. De manière plus générale, les critères qui s'appuient sur la reconstitution de la vitesse vibratoire peuvent donc être trop sévères pour caractériser la précision du rayonnement acoustique. Ce point sera illustré au paragraphe suivant.

### 2.3.1.2. Calcul du rayonnement acoustique de $S$ par la méthode de la sphère équivalente

La sphère équivalente est choisie identique à la sphère vibrante. On définit sur  $S$  un maillage vibratoire régulier à partir du maillage (III.6). La surface associée à chaque point du maillage est donc constante (i.e.  $\Delta S = \frac{4\pi R^2}{N_s}$ ) et on se ramène donc à la résolution du système  $A'x = b'$  décrit par (II.48):

$$\begin{cases} A'_{ij} = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i) \\ b'_i = V^R(\theta_i, \varphi_i) \end{cases}$$

(III.58)

où les coefficients  $x_j = V_{nm}^{a,N}$  sont les coefficients modaux de la sphère équivalente lorsque l'on cherche à déterminer la contribution des  $N$  premiers modes de  $S_a$ .

La symétrie du problème conduit à une solution où seuls les coefficients d'ordre  $(n,0,1)$  sont différents de zéro. Ils sont notés  $V_n^{a,N}$ . La figure III.23 montre que la convergence vers la solution analytique est rapide et qu'elle vérifie exactement le critère de troncature (III.57).

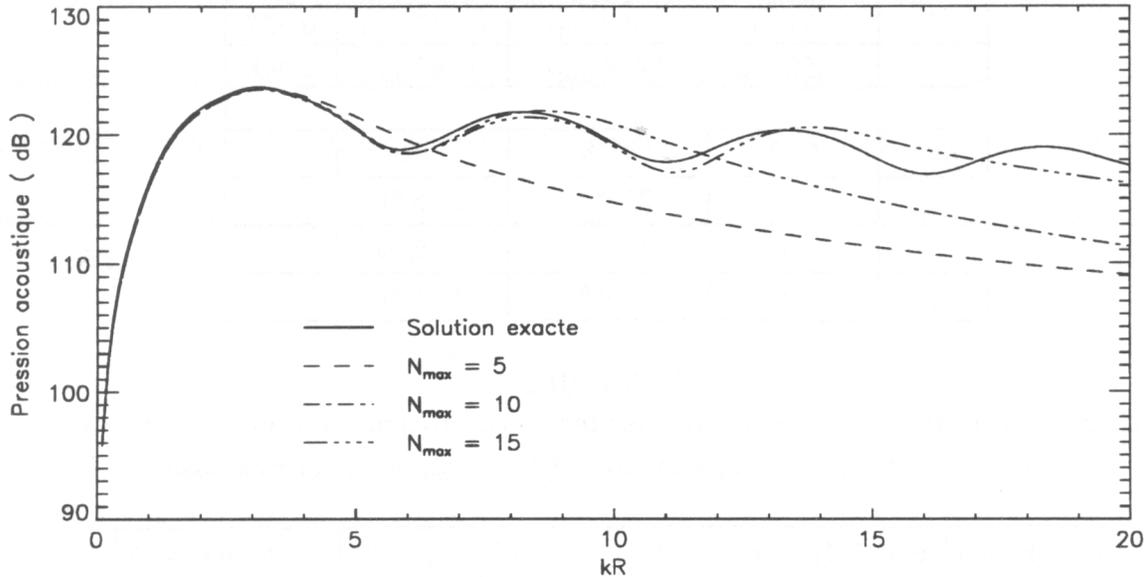


Figure III.23

Comparaison entre la solution analytique et la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente au point  $M_1$  lorsque tous les modes d'ordre  $n$  inférieur à  $N_{\max}$  sont pris en compte ( $N_{\theta} = 50$  ;  $V = 1,0$  m/s)

### Stabilité du modèle en fonction du maillage vibratoire

Le tableau II.2 permet de comparer les quatre premiers coefficients modaux non nuls de  $S_a$  pour différents maillages vibratoires. Tous les modes de  $S_a$  dont l'ordre  $n$  est inférieur ou égal à 9 ont été pris en compte. On applique un modèle de Gauss-Markov en associant à chaque point de mesure un écart-type constant  $\sigma_0 = \frac{V}{10}$  m/s avec  $V = 1,0$  m/s (i.e. 10 % d'erreur sur les mesures). La relation (A3.13) permet alors de calculer les écarts-types  $\sigma(V_n^{a,N})$  associés aux coefficients  $V_n^{a,N}$ . Le nombre de conditionnement de  $A$  ainsi que les paramètres  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$  sont également indiqués.

Le tableau II.3 contient la pression acoustique rayonnée au point  $M_1$  et l'écart-type  $\sigma_P$  qui lui est associé pour les différents maillages vibratoires ( $\sigma_P$  est calculé par (A3.14)).

$n$	$V_n^{a,N} \sigma(V_n^{a,N})$			$V_n^R$
	$N_\theta = 10$ $N_\varphi = 20$	$N_\theta = 30$ $N_\varphi = 20$	$N_\theta = 50$ $N_\varphi = 20$	
0	0,453 <sub>0,051</sub>	0,466 <sub>0,015</sub>	0,423 <sub>0,011</sub>	0,415
1	0,768 <sub>0,320</sub>	0,701 <sub>0,015</sub>	0,645 <sub>0,011</sub>	0,634
2	0,831 <sub>0,105</sub>	0,659 <sub>0,015</sub>	0,632 <sub>0,011</sub>	0,627
3	0,850 <sub>0,493</sub>	0,444 <sub>0,015</sub>	0,462 <sub>0,011</sub>	0,468
$\mu(A)$	52,3	1,48	1,16	
$e_2$	$\approx 0$	27,2 %	28,5 %	
$e_1$	$\approx 0$	35,9 %	36,6 %	
$e_{\max}$	$\approx 0$	37,9 %	44,1 %	

Tableau III.2

Comparaison entre les valeurs des quatre premiers coefficients modaux de  $S$  et de  $S_a$  pour  $N = 9$  et valeurs des paramètres  $\mu(A)$ ,  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$  correspondant

$ P(M_1) $ et $\sigma_P(M_1)$ en Pascal	$N_\theta = 10$	$N_\theta = 30$	$N_\theta = 50$	solution exacte
$kR = 2$	32,0 <sub>9,8</sub>	27,6 <sub>1,0</sub>	25,7 <sub>0,8</sub>	25,4
$kR = 20$	2,2 <sub>8,3</sub>	11,1 <sub>4,1</sub>	8,48 <sub>3,2</sub>	15,2

Tableau III.3

Comparaison entre le module de la pression acoustique rayonnée par  $S_a$  au point  $M_1$  et la solution analytique pour les données du tableau III.1

Pour  $N_\theta = 10$ , les erreurs quadratique, moyenne et maximale sont quasiment nulles (i.e. de l'ordre de grandeur de la précision du calculateur). La vitesse calculée par la sphère équivalente aux points de maillage est donc égale à la vitesse de la portion de sphère pulsante. Cette solution est cependant très instable comme l'indique le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  et les écart-types associés aux quatre premiers coefficients modaux de  $S_a$  : avec 10 % d'erreur sur les données, le coefficient  $V_3^{a,100}$  admet un écart type relatif de 50 %. La pression acoustique rayonnée au point  $M_1$  admet également un écart type important pour les fréquences  $kR = 2$  et  $kR = 20$ . Bien que la différence entre la pression acoustique rayonnée par  $S_a$  et la solution exacte soit inférieure à 3 dB pour  $kR = 2$  l'écart type associé à la pression acoustique rayonnée nous indique que cette solution n'est pas stable : elle pourrait être complètement différente si l'on modifiait légèrement les données de vitesse par exemple.

Lorsque  $S_a$  et  $S$  sont identiques, on sait que l'on peut rendre le nombre de conditionnement très proche de un en augmentant le nombre de points de maillage. La stabilité du système linéaire se traduit alors par des écart-types plus faibles pour les coefficients modaux de  $S_a$  et pour la pression acoustique rayonnée. On constate également que les coefficients modaux de  $S_a$  se rapprochent des coefficients modaux de  $S$ . On a montré au chapitre I que les coefficients de  $S_a$  ne sont

théoriquement égaux à ceux de  $S$  que lorsque tous les coefficients modaux de  $S_a$  sont pris en compte. La vitesse de convergence est donc ici relativement rapide.

Pour  $kR = 20$  et  $N_\theta = 50$ , on peut noter que la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente est relativement stable et reste néanmoins éloignée de la solution analytique. A cette fréquence, le critère de troncature (III.56) indique qu'il faudrait prendre en compte les coefficients modaux de  $S_a$  supérieur à l'ordre 23 pour approcher la pression acoustique rayonnée par  $S$ . L'écart type associé à la pression acoustique ne permet donc pas de savoir si l'on est proche ou non de la solution exacte. Il ne caractérise que la stabilité du rayonnement acoustique de  $S_a$ .

On a montré en annexe 3 que les écart-types associés aux coefficients modaux de  $S_a$  admettent une décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{N_s}}$  lorsque le nombre de points de maillage tend vers l'infini. Dans le cas d'une sphère, on peut même exprimer analytiquement cet écart-type. En effet, l'écart type associé au  $j^{\text{ème}}$  coefficient modal est défini par:

$$\sigma_j = \sigma_0 \sqrt{\left[ (A'^* A')^{-1} \right]_{jj}} \quad (\text{III.59})$$

$$\text{avec } (A'^* A')_{ij} = \sum_{l=1}^{N_s} \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_l, \varphi_l) \bar{Y}_{\nu\mu}^\tau(\theta_l, \varphi_l) \Big|_{\substack{i=(n,m,\sigma) \\ j=(\nu,\mu,\tau)}}$$

Lorsque le nombre de points de maillage tend vers l'infini, on déduit de (III.10) que la matrice de variance-covariance  $\sigma_0^2 (A'^* A')^{-1}$  tend vers  $\sigma_0^2 \frac{\Delta S}{R^2} I$ , c'est-à-dire:

$$\sigma_j \xrightarrow{N_s \rightarrow \infty} \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{N_s}} \quad (\text{III.60})$$

Cette relation est déjà vérifiée pour  $(N_\theta, N_\varphi) = (30, 20)$  et  $(N_\theta, N_\varphi) = (50, 20)$  car elle donne respectivement  $\sigma_j = 0,015$  et  $\sigma_j = 0,011$ . Dans le cas d'une sphère, l'écart-type est donc identique pour tous les coefficients modaux et vérifie la décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{N_s}}$  lorsque  $N_s$  tend vers l'infini.

Remarquons enfin que le maillage en  $N_\theta = 50$  conduit à un rayonnement acoustique de la sphère équivalente très proche de la solution analytique alors que les erreurs quadratique et moyenne sont encore voisines de 30%. Pour que le rayonnement acoustique de  $S_a$  soit proche de la solution exacte il suffit en effet que les coefficients modaux associés aux modes rayonnants aient convergé. L'erreur quadratique résiduelle caractérise alors les oscillations de vitesse associées aux modes non rayonnants (i.e. oscillations sur la surface de la sphère plus rapides que la longueur d'onde acoustique). On en déduit que le rayonnement acoustique de  $S$  peut être correctement approché sans que la vitesse vibratoire soit entièrement reconstituée.

### 2.3.2. Calcul du rayonnement d'une sphère pulsante à partir d'une sphère équivalente décentrée

Il s'agit dans ce paragraphe de calculer le rayonnement acoustique d'une sphère pulsante (i.e. pour tout point de  $S$  :  $V^R(R, \theta, \varphi) = V$ ) à partir d'une sphère équivalente décentrée. Les deux exemples traités vont permettre de comparer la vitesse de convergence du rayonnement acoustique de la sphère équivalente en fonction de la position de cette sphère. La sphère équivalente est choisie faiblement décentrée dans le premier cas et fortement décentrée dans le second. Dans les deux cas le rayon de la sphère équivalente est égal au rayon de la sphère inscrite et le centre de  $S_a$  est choisi de manière à éviter les symétries.

Cas d'une sphère faiblement décentrée :  $O_a = (-\frac{3R}{10}, \frac{R}{5}, -\frac{R}{10})$

On en déduit  $a = r_{ins} = (1 - \frac{\sqrt{14}}{10})R = 0,626R$  et  $r_{cir} = 1,374 R$ . La sphère vibrante a donc une compacité de 2,2.

Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente est comparé à la solution analytique lorsque  $kR$  varie de 0 à 10. Avec les 10 premiers modes de  $S_a$  ( $N_{max} = 3$ ), la pression acoustique rayonnée par  $S$  au point  $M_2$  de coordonnées  $(3R, 4R, 5R)$  est approchée à 2 dB près (figure III.24a). Pour obtenir une erreur inférieure à 0,5 dB, il faut prendre en compte les 36 premiers modes ( $N_{max} = 5$ ). La puissance acoustique converge cependant beaucoup plus rapidement que le champ de pression (figure III.24b).

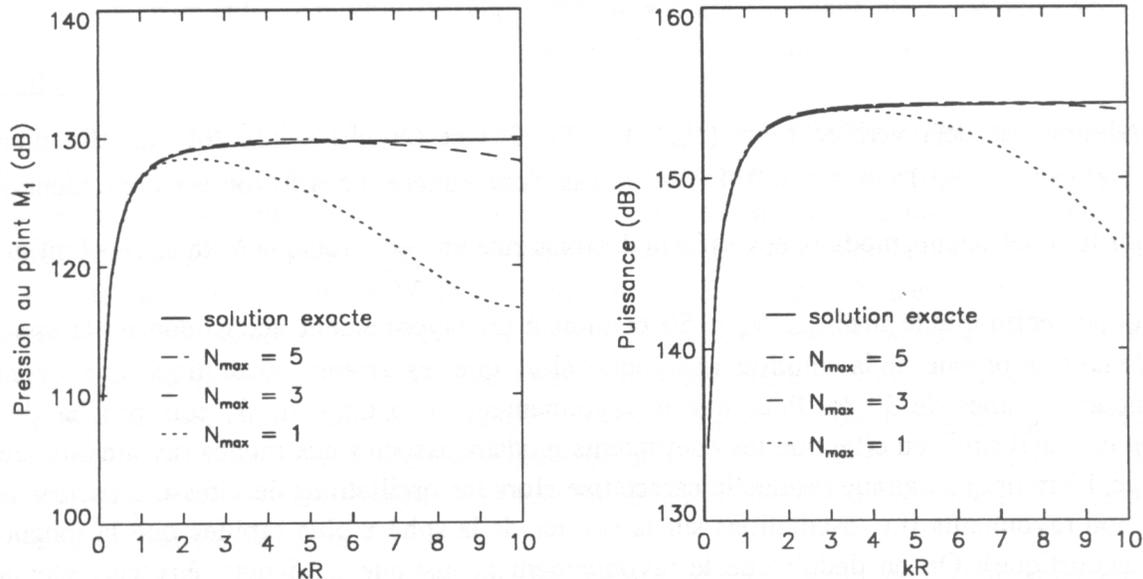


Figure III.24

Pression et puissance acoustique rayonnée par la sphère équivalente décentrée en fonction de la fréquence et du nombre de modes pris en compte avec un maillage vibratoire (30,30)

L'erreur quadratique  $e_2$  est inférieure à 30 % avec 1 es 10 premiers coefficients et inférieure à 5 % avec les 36 premiers coefficients (figure III.25a). L'erreur maximum reste néanmoins largement supérieure à l'erreur quadratique (figure III.25b). C'est un résultat général qui caractérise la convergence plus lente du champ de vitesse aux points de  $S$  proches de  $S_a$ . L'erreur moyenne admet des valeurs très voisines de l'erreur quadratique et n'a pas été représentée.

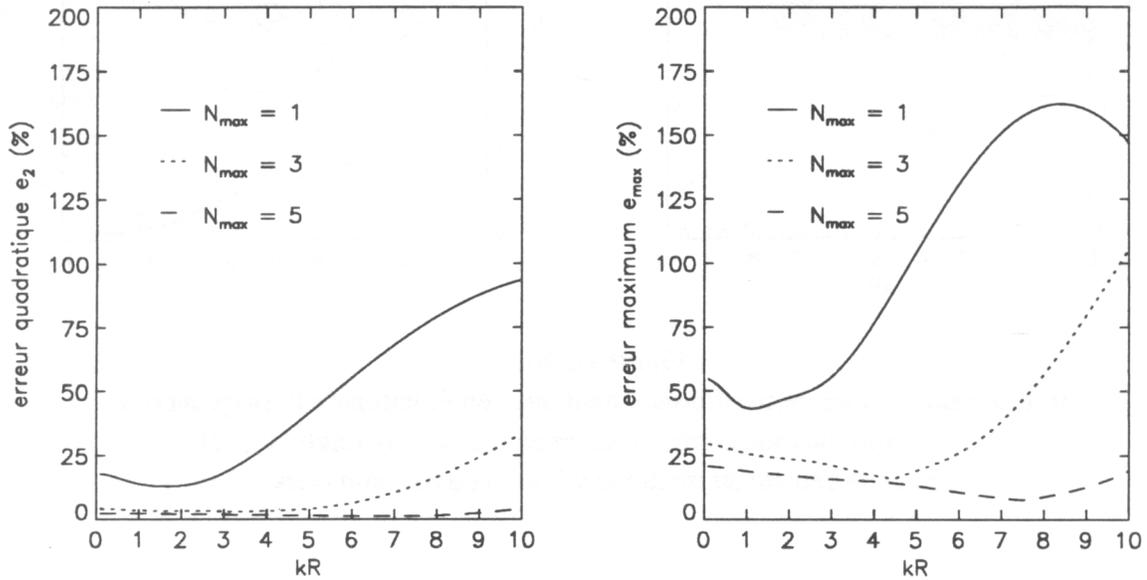


Figure III.25

Variations des erreurs  $e_2$  et  $e_{max}$  en fonction de la fréquence et du nombre de modes pris en compte avec un maillage (30,30)

Le maillage vibratoire a été choisi en fonction du conditionnement de la matrice  $A$ . Lorsque l'on cherche à déterminer la contribution des 36 premiers modes de  $S_a$ , la figure III.26b montre en effet que le nombre de conditionnement de  $A$  se stabilise à partir du maillage (30,30) et atteint un minimum sur toute la gamme de fréquence étudiée. Ce minimum est même proche de un dès que  $kr_{ins}$  est supérieur à  $N_{max}$  car les modes pris en compte sont alors tous rayonnants. La fréquence limite au delà de laquelle tous les modes sont rayonnants vérifie donc:

$$kR \geq N_{max} \frac{R}{r_{ins}}$$

(III.61)

Pour  $N_{max} = 1, 3$  et  $5$  les valeurs attendues sont respectivement 1,6, 4,8 et 8,0 que l'on retrouve sur la figure III.26a.

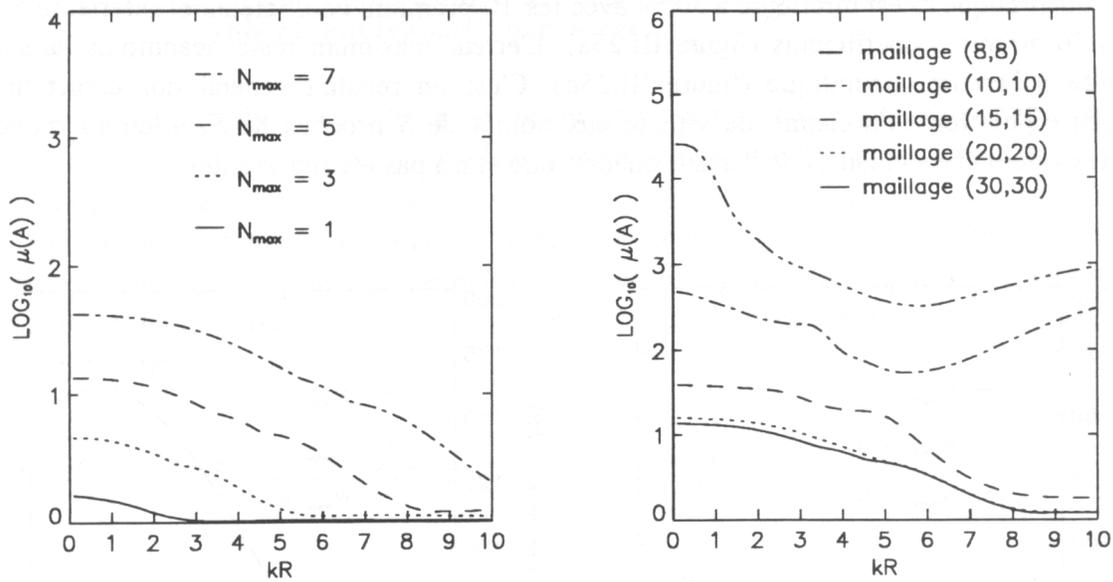


Figure III.26

Variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction de la fréquence et  
 a) du nombre de modes pris en compte avec un maillage (30,30)  
 b) de la densité du maillage vibratoire avec 36 modes

La figure III.27 permet de mettre simplement en évidence les conséquences d'un sous-échantillonnage de la sphère pulsante. Le module de la vitesse calculé aux points de maillage de  $S$  à partir des 16 premiers coefficients modaux de  $S_a$  et d'un maillage (10,10) est représenté sur la figure III.27a. Il semble très proche de la valeur attendue (i.e.  $V = 1,0$  m/s). En réalité, le champ de vitesse calculé par la sphère équivalente admet des oscillations entre ces points de maillage. Elles sont mises en évidence en représentant le module de la vitesse calculée à partir d'un surmaillage (30,30) de  $S$  (figure III.27b). Ces oscillations ont lieu entre deux demi-cercles à angle  $\varphi$  constant. Le mode sous-échantillonné est donc le mode d'ordre  $m$  le plus élevé car c'est lui qui fait intervenir les fonctions qui admettent le plus de zéros suivant l'angle  $\varphi$ .

Lorsque  $kR$  est supérieur à 5, la figure III.24 montre que les quatre premiers modes de  $S_a$  ne permettent pas d'approcher le rayonnement acoustique de la sphère pulsante. Ces modes sont cependant tous rayonnants. La matrice  $A$  est donc bien conditionnée et les écarts types associés aux quatre coefficients modaux sont faibles. La pression acoustique rayonnée est également associée à un écart type faible alors qu'elle est tout à fait différente de la solution analytique. Cet exemple montre bien que les écarts types ne peuvent être interprétés qu'en terme de stabilité du rayonnement de  $S_a$  et non en terme de "proximité" de la solution.

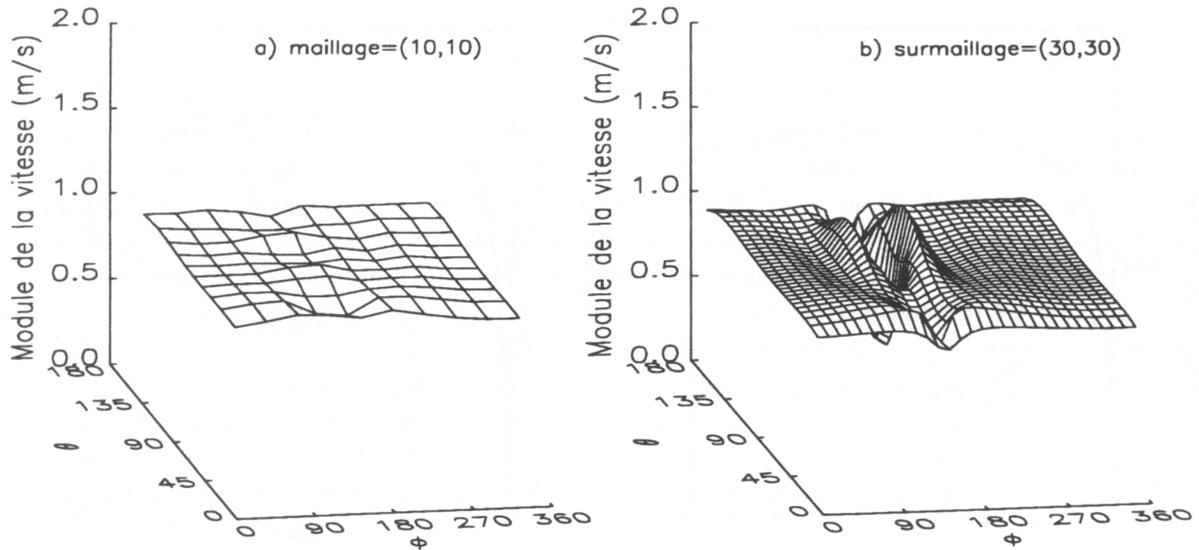


Figure III.27

Calcul du champ de vitesse avec un maillage (10,10) et 16 modes de  $S_a$

a) Représentation à partir du maillage initial (10,10)

b) Représentation à partir d'un surmaillage (30,30) de la sphère

Cas d'une sphère équivalente fortement décentrée :  $O_a = (0,437R; 0,125R; 0,597R)$

La sphère vibrante a une compacité de 7 ( $a = r_{ins} = \frac{R}{4}$ ,  $r_{cir} = \frac{7R}{4}$ ).

La pression acoustique rayonnée au point  $M_1$  est désormais beaucoup plus lente à converger vers la solution analytique (figure II.28a). L'erreur n'est inférieure à 3 dB que pour  $N_{max} = 7$  (i.e. 64 premiers modes pris en compte). De même, la puissance acoustique rayonnée converge moins rapidement que dans le premier cas (figure III.28b).

On a montré au paragraphe II.2.2 que les modes de  $S_a$  qui vont contribuer à la pression acoustique rayonnée par la surface vibrante sont les modes dont l'ordre  $n$  vérifie:

$$n \leq [kr_{cir}] + n_w$$

( III.62 )

La fréquence limite au delà de laquelle ce critère n'est plus vérifié est donc donnée par:

$$kR \approx (N_{max} - n_w) \frac{R}{r_{cir}}$$

( III.63 )

Avec  $n_w \approx 2$ , les valeurs attendues pour  $N_{max}$  égal à 3, 5 et 7 sont respectivement  $kR = 0,6; 2,3$  et  $2,9$ . Elles correspondent bien aux fréquences pour lesquelles la puissance acoustique rayonnée par  $S_a$  est proche de la solution analytique. Les coefficients modaux de  $S_a$  sont donc proches de leur limite théorique donnée par la relation ( II.86 ) (i.e.  $V_{nm\sigma}^{a,N} \approx V_{nm\sigma}^{a,\infty}$ ).

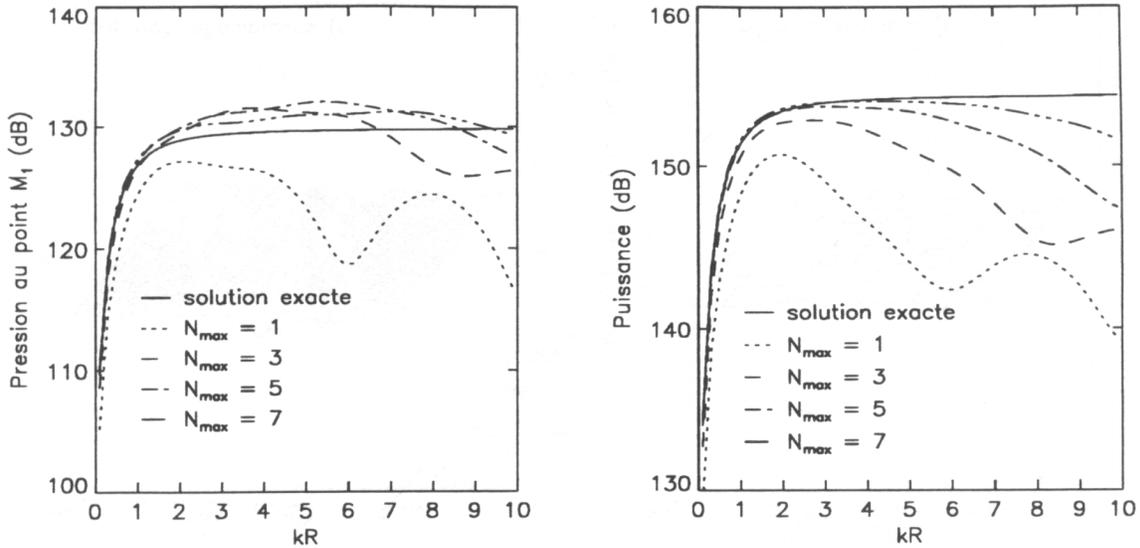


Figure III.28

Pression et puissance acoustique rayonnée par la sphère équivalente décentrée en fonction de la fréquence et du nombre de modes pris en compte avec un maillage vibratoire (50,50)

Pour  $N_{\max} = 7$ , la figure III.29 montre que l'erreur quadratique est inférieure à 20 % en basses fréquences, où la puissance rayonnée est bien approchée par la sphère équivalente, et supérieure à 50 % en hautes fréquences où l'erreur sur la puissance rayonnée de l'ordre de 3 dB.

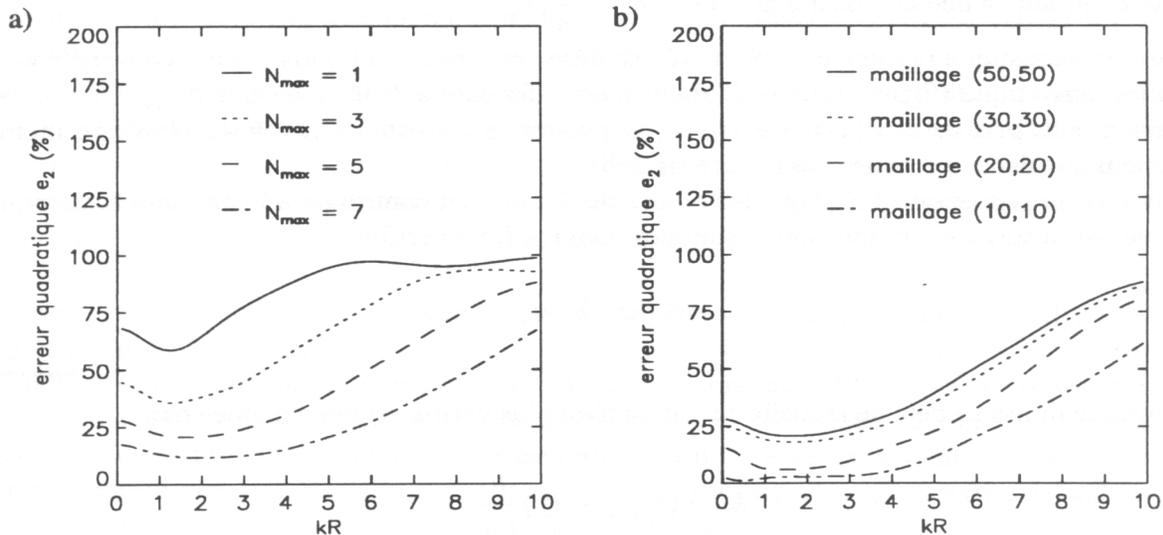


Figure III.29

Variations de l'erreur quadratique  $e_2$  en fonction de la fréquence et  
 a) du nombre de modes pris en compte avec un maillage (50,50)  
 b) de la densité du maillage vibratoire avec 36 modes

Les figures III.30a et III.30b permettent de comparer le rayonnement acoustique calculée par la sphère équivalente pour les 36 premiers modes (i.e.  $N_{\max} = 5$ ) et différents maillages vibratoires. Les maillages (10,10) et (20,20) ne sont pas suffisamment fins et conduisent à une solution qui présente de grandes oscillations entre les points de maillage. A partir du maillage (30,30) les modes de  $S_a$  sont correctement décrits et la solution du système linéaire devient quasiment indépendante du maillage vibratoire (i.e. solution identique pour le maillage (30,30) et (50,50)). Le maillage (50,50) correspond cependant à la solution la plus stable car il rend le conditionnement de  $A$  minimum (figure III.31a). Notons également que si les maillages (10,10) et (20,20) ne sont pas suffisamment fins, ils conduisent à une erreur quadratique beaucoup plus faible que celles associées aux maillages (30,30) et (50,50) (figure III.29b). En effet le champ de vitesse peut admettre de grandes oscillations entre les points de maillage et identifier néanmoins correctement le champ de vitesse aux points de maillage. Il faut donc prendre garde à n'interpréter les valeurs faibles de l'erreur quadratique, moyenne et maximum qu'après s'être assuré de la validité du maillage vibratoire.

Pour  $N_{\max} = 7$ , le nombre de conditionnement de  $A$  est compris entre  $10^2$  pour  $kR = 10$  et  $10^3$  lorsque  $kR$  est proche de zéro. La solution reste néanmoins stable car l'écart-type associé aux coefficients modaux reste en général inférieure à 10 % de la valeur du coefficient. Certains termes de la matrice de covariance admettent une grande amplitude, mais ils sont associés à des modes non rayonnants. L'écart type associé à la pression acoustique est ainsi très faible (i.e. inférieur à 0,5 dB).

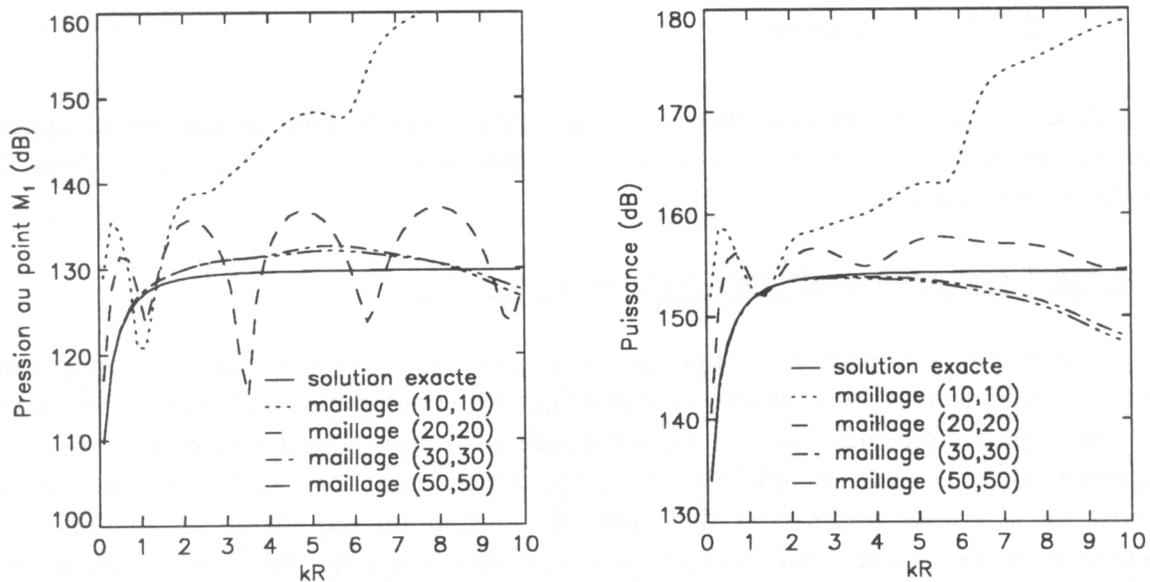


Figure III.30

Pression et puissance acoustique rayonnée par la sphère équivalente décentrée en fonction de la fréquence et de la densité du maillage vibratoire avec 36 modes pris en compte

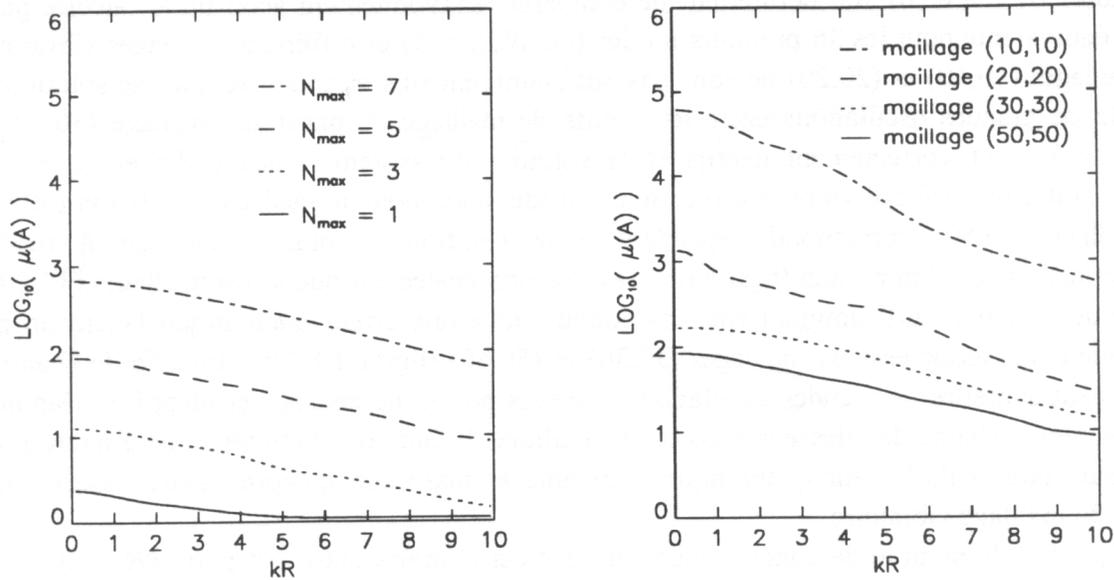


Figure III.31

Variations du nombre de conditionnement de  $A$  en fonction de la fréquence et  
 a) du nombre de modes pris en compte avec un maillage (50,50)  
 b) de la densité du maillage vibratoire avec 36 modes

### 2.3.3. Conclusion

Les deux structures simples étudiées dans ce paragraphe (sphère pulsante et portion de sphère pulsante) ont permis de mettre en évidence les problèmes liés à l'interprétation des critères de validité du modèle de la sphère équivalente.

- Interprétation des erreurs quadratique, maximum et moyenne

Les caractéristiques modales de la structure (i.e. modes vibratoires et modes de rayonnement) sont a priori inconnues. Nous savons cependant que les composantes de la vitesse vibratoire qui varient plus rapidement que la longueur d'onde acoustique sont associées aux modes de rayonnement de la structure qui ont un comportement non rayonnants. Les oscillations rapides de la vitesse n'admettent donc pas de contribution importante au rayonnement acoustique de la structure. Ce dernier peut ainsi être approché avec précision par une sphère équivalente sans que la déformée vibratoire soit correctement reconstituée. Il suffit en effet que les modes de la sphère qui contribuent au rayonnement de la structure convergent rapidement vers leur limite théorique (i.e.  $V_{nm\sigma}^{a,N} \approx V_{nm\sigma}^{a,\infty}$  pour  $N$  faible). Les erreurs quadratique, moyenne et maximum peuvent alors être relativement importantes : elles caractérisent les composantes "non rayonnantes" de la vitesse qui n'ont pas été reconstituées. Ce phénomène est particulièrement mis en évidence lorsque la structure est proche d'une sphère car la convergence de la sphère équivalente est très rapide. Un exemple sera donné au paragraphe suivant dans le cas d'un cube.

Nous avons également montré que les erreurs  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$  pouvaient être très proches de zéro alors que le rayonnement acoustique de la structure est erroné. Lorsque le maillage vibratoire n'est pas suffisamment dense, la contribution des modes de la sphère équivalente qui oscillent rapidement sur la structure n'est pas calculée correctement. Le champ de vitesse peut alors être minimum aux points de maillage et admettre des oscillations importantes entre les points de maillage. Si les modes sous-échantillonnés sont des modes rayonnants, le rayonnement acoustique de la sphère équivalente diffère très rapidement de celui de la structure alors que les différentes erreurs tendent vers zéro.

Pour interpréter les erreurs  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$  il faut donc s'assurer de la validité du maillage vibratoire en comparant par exemple la vitesse vibratoire calculée par la sphère équivalente entre les points du maillage à la vitesse connue aux points du maillage les plus proches.

Notons également que l'erreur quadratique ne peut que décroître lorsque le nombre de modes de la sphère équivalente pris en compte augmente car le rayonnement acoustique de la sphère minimise la vitesse quadratique résiduelle. L'erreur moyenne ne vérifie pas cette propriété mais son comportement est en général très proche de celui de  $e_2$ . Elle n'apporte donc pas d'information particulière. L'erreur maximum peut en revanche rendre compte de problèmes locaux où la convergence est plus lente. On a cité le cas des points de  $S$  proches de la sphère équivalente et les points de  $S$  où la vitesse vibratoire est discontinue (i.e. admet des variations très rapides). A proximité de ces points, le rayonnement acoustique de la structure peut être très lent à converger.

- Interprétation du nombre de conditionnement de la matrice  $A$  et des écart-types associés des coefficients modaux

Lorsque la structure vibrante est une sphère, on a montré qu'en choisissant  $S_a = S$  le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  ne dépendait que de la densité du maillage vibratoire (i.e.  $\mu(A) \xrightarrow{N_s \rightarrow \infty} 1$ ). Plus généralement, pour une structure quelconque, le nombre de conditionnement sera minimum si le maillage vibratoire permet de traduire l'orthogonalité des modes de la sphère équivalente pris en compte. Le nombre de conditionnement peut donc être considéré comme une caractéristique du modèle de la sphère équivalente (i.e. maillage vibratoire + modes pris en compte).

Lorsque la densité du maillage vibratoire est suffisante, le rayonnement acoustique de  $S_a$  peut cependant être tout à fait stable sans que le nombre de conditionnement de  $A$  soit proche de un. Pour que le modèle soit stable il suffit en effet que les modes de  $S_a$  qui contribuent au rayonnement acoustique de  $S$  soient stables. Les écart-types associés aux coefficients modaux permettent d'effectuer cette distinction.

Nous avons montré dans le cas de la portion de sphère pulsante que le sous-échantillonnage des modes de  $S_a$  pouvaient se traduire par des écart-types élevés. Ce résultat n'est cependant pas généralisable. En appliquant le modèle simple de Gauss-Markov, on a également exprimé la

décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{N_s}}$  de ces écart-types.

Notons enfin que l'écart-type associé à la pression acoustique rayonnée ne caractérise que la stabilité de la solution et non l'écart entre cette solution et le rayonnement acoustique exact. La solution calculée par la sphère équivalente peut en effet être tout-à-fait stable sans être proche de la solution.

En conclusion, ces premiers exemples ont permis de montrer que l'interprétation des différents critères n'est pas simple. Les erreurs  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$  peuvent ainsi être faibles sans que le rayonnement de  $S_a$  soit proche de la solution (i.e. problème lié au maillage vibratoire), ou élevées avec un rayonnement acoustique proche de la solution (les coefficients modaux associés aux modes qui contribuent au rayonnement acoustique de  $S$  convergent rapidement). De même, le nombre de conditionnement est un indicateur du sous-maillage de la structure vibrante. Le rayonnement acoustique de  $S_a$  peut cependant être stable sans que le nombre de conditionnement soit proche de un.

Ces différents points vont être confirmés par l'étude de la boîte rectangulaire pour laquelle la solution analytique n'est pas connue.

### 3. Calcul du rayonnement acoustique d'une boîte par la méthode de la sphère équivalente

#### 3.1. Définition de la boîte et du maillage vibratoire

On considère une boîte rectangulaire de côté  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  dont le centre est le point  $O$ , centre du repère  $(O, X, Y, Z)$ .

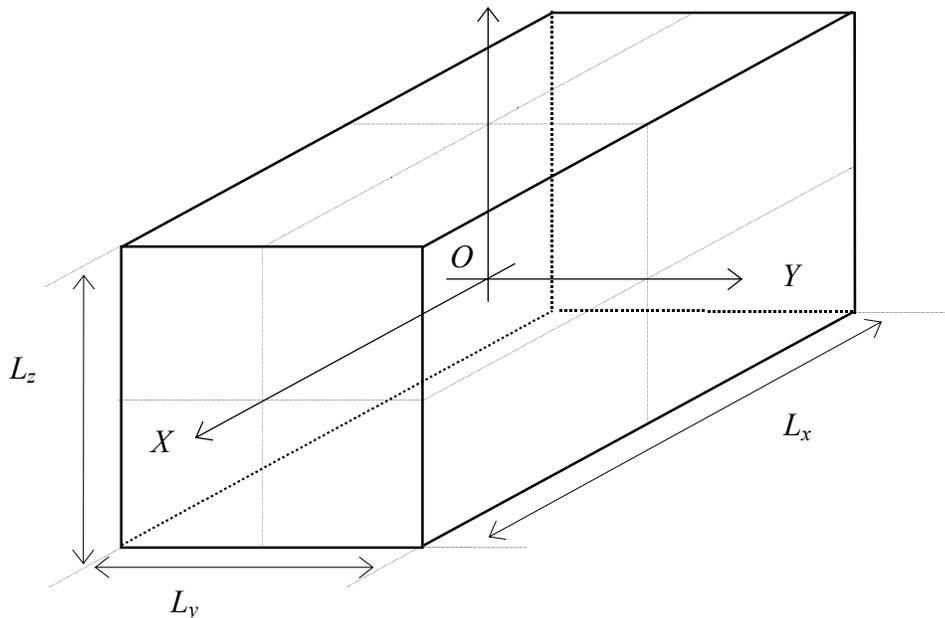


Figure III.32  
Description de la boîte

Un maillage régulier est défini pour chacune des faces de la boîte en appliquant la relation ( III.1 ). Si on note  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_z$  le nombre de points de maillage respectivement suivant les côtés de longueur  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$ , alors la surface élémentaire associée aux points de maillage de chacune des faces est exprimée dans le tableau III.4.

Faces de la boîte	$\Delta S$
$X = \frac{L_x}{2}$ et $X = -\frac{L_x}{2}$	$\frac{L_y L_z}{N_y N_z}$
$Y = \frac{L_y}{2}$ et $Y = -\frac{L_y}{2}$	$\frac{L_x L_z}{N_x N_z}$
$Z = \frac{L_z}{2}$ et $Z = -\frac{L_z}{2}$	$\frac{L_x L_y}{N_x N_y}$

Tableau III.4  
Surface des éléments associés au maillage des faces de la boîte

Si le maillage vérifie  $\frac{L_x}{N_x} = \frac{L_y}{N_y} = \frac{L_z}{N_z}$  alors il est régulier pour l'ensemble de la boîte.

### 3.2. Choix de la position et du rayon de la sphère équivalente

Afin de minimiser la compacité de la boîte le centre de la sphère équivalente est choisi au centre de la boîte. La compacité s'exprime alors simplement en fonction des dimensions:

$$C(O, S) = \frac{\sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}}{\text{Min}\{L_x, L_y, L_z\}}$$

( III.64 )

On a montré dans le paragraphe précédent que le rayon de  $S_a$  qui minimise le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  est en général obtenu pour  $a$  légèrement supérieur à  $r_{ins}$ . La figure III.33 illustre ce résultat dans le cas de boîtes de différentes longueurs.

$$\begin{aligned} \text{Boîte 1 : } (L_x, L_y, L_z) &= (L, L, L) \text{ et } (N_x, N_y, N_z) = (N_m, N_m, N_m) \\ \Rightarrow C(O) &= \sqrt{3} \approx 1,73 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Boîte 2 : } (L_x, L_y, L_z) &= (2L, L, L) \text{ et } (N_x, N_y, N_z) = (2N_m, N_m, N_m) \\ \Rightarrow C(O, S) &= \sqrt{6} \approx 2,45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Boîte 3 : } (L_x, L_y, L_z) &= (3L, L, L) \text{ et } (N_x, N_y, N_z) = (3N_m, N_m, N_m) \\ \Rightarrow C(O, S) &= \sqrt{11} \approx 3,32 \end{aligned}$$

Le nombre total de points de maillage est respectivement de  $6N_m^2$ ,  $10N_m^2$  et  $14N_m^2$ .

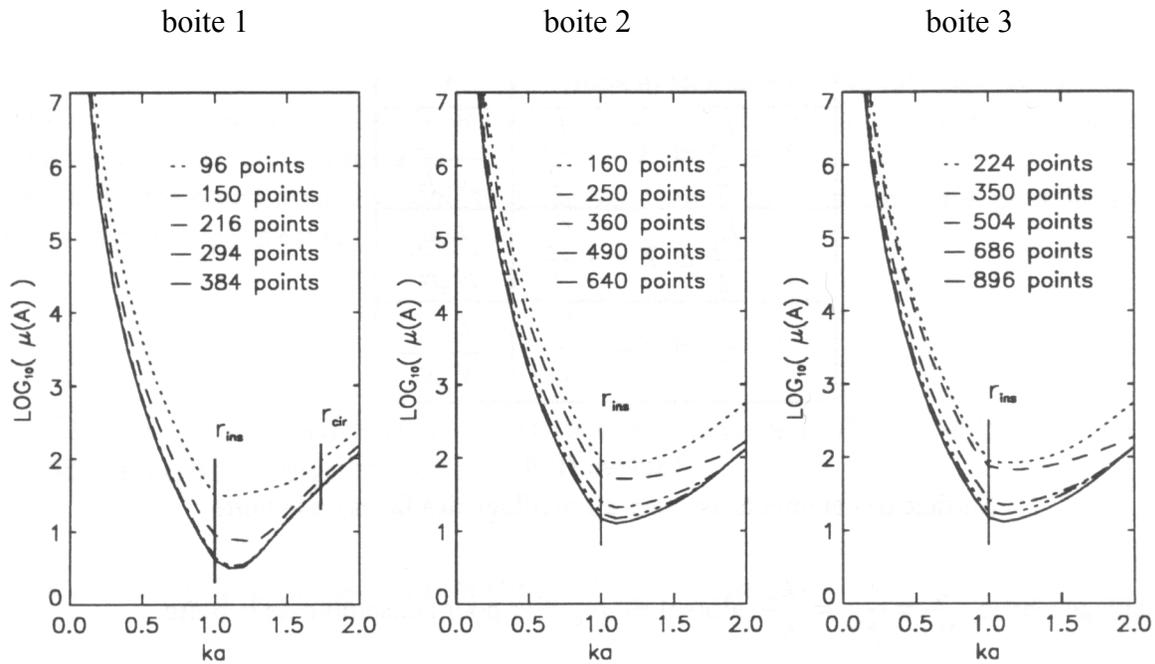


Figure III.33

Variations du nombre de conditionnement de la matrice  $A$  en fonction de  $ka$  pour différentes dimensions de la boîte et différents maillages vibratoires ( $kL = 2$  ;  $N_{\max} = 7$  ;  $N_m$  varie de 4 à 8)

Les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  ne sont plus orthogonales sur la surface de la boîte. Le nombre de conditionnement de  $A$  admet donc un minimum supérieur à un. Bien que les modes de  $S_a$  pris en compte soient fortement non rayonnants (i.e.  $N_{\max}$  grand devant  $ka$ ), ce minimum reste très proche de un dans le cas du cube (figure III.33a) et augmente légèrement lorsque l'une des dimensions de la boîte augmente (figure III.33b et III.33c). On constate également sur la figure III.34 que ce minimum augmente lorsque le nombre de modes pris en compte augmente.

On peut donc choisir  $a = r_{ins}$  pour traiter le cas d'une boîte par la méthode de la sphère équivalente. En fonction de la densité du maillage vibratoire, le conditionnement de la matrice  $A$  peut être suffisamment faible et conduire à une solution stable.

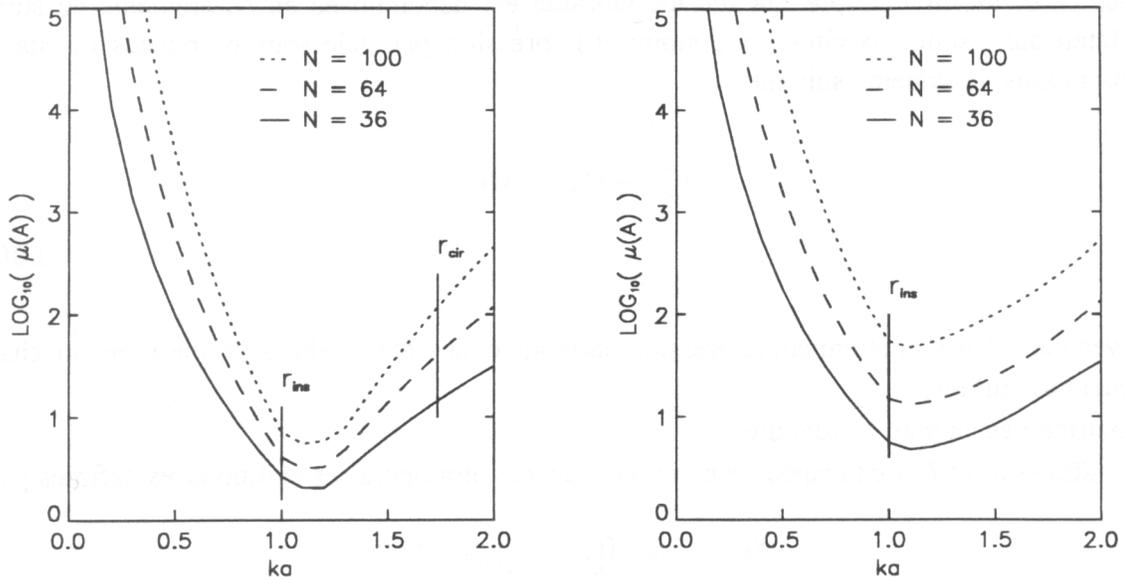


Figure III.34

Variations du nombre de conditionnement de la matrice  $A$   
en fonction de  $ka$  et du nombre de mode de  $S_a$  pris en compte

- a) boîte 1 avec  $N_s = 600$  et  $kL = 2$
- b) boîte 3 avec  $N_s = 896$  et  $kL = 2$

### 3.3. Comparaison avec une méthode intégrale

#### 3.3.1. Description de la méthode utilisée

La méthode des éléments finis de frontière utilisée a été développée au Laboratoire de Vibrations et d'Acoustique de l'I.N.S.A. de Lyon. On trouvera les détails de la méthode dans <sup>(58)</sup>.

Rappelons que la pression acoustique rayonnée par une surface vibrante fermée s'exprime en tout point  $M$  extérieur à cette surface au moyen de l'équation intégrale de Helmholtz:

$$P(M) = \iint_S \left( P(M_s) \frac{\partial G_0}{\partial n}(M, M_s) + j\omega\rho_0 V^{mes}(M_s) G_0(M, M_s) \right) dS$$

(III.65)

où  $P(M_s)$  est la pression pariétale et  $G_0$  la fonction de Green en champ libre.

En tout point de  $S$  le champ de pression pariétale inconnu vérifie l'équation intégrale de surface:

$$\frac{1}{2} P(M_s) = v \iint_S \left( P(M_s) \frac{\partial G_0}{\partial n}(M, M_s) + j\omega\rho_0 V^{mes}(M_s) G_0(M, M_s) \right) dS$$

(III.66)

où l'intégrale est à prendre au sens de la valeur principale de Cauchy <sup>(59)</sup>. On se ramène alors à la résolution d'un système linéaire ayant la pression pariétale pour inconnue en appliquant une méthode de collocation simple : la surface vibrante est décomposée en  $N_s$  éléments de surface quadrilatère sur lesquels la vitesse vibratoire et la pression pariétale sont supposées constantes. On obtient ainsi le système suivant:

$$\left(\frac{1}{2}I - D\right)P = MV \quad (\text{III.67})$$

où

- les vecteurs  $P$  et  $V$  contiennent la pression pariétale et la vitesse vibratoire mesurée sur chaque élément de surface,
- la matrice  $I$  est la matrice identité
- les matrices  $M$  et  $D$  sont respectivement les matrices monopolaires et dipolaires définies par:

$$M_{ij} = j\omega\rho_0 \iint_{\Delta S_j} G_0(M_i, M_j) dS_j \quad (\text{III.68})$$

$$D_{ij} = \iint_{\Delta S_j} \frac{\partial G_0}{\partial n} (M_i, M_j) dS_j \quad (\text{III.69})$$

Les intégrales  $M_{ij}$  et  $D_{ij}$  sont calculées numériquement par la méthode de Gauss-Legendre. Le système (III.67) est connu pour admettre une unique solution en dehors des fréquences caractéristiques de  $S$ . On met alors en évidence la singularité de la matrice  $\frac{1}{2}I - D$  en étudiant son conditionnement (cf <sup>(46)</sup> par exemple).

La figure III.35 permet de visualiser les différentes fréquences caractéristiques dans le cas d'un cube de côté  $L$ . L'expression analytique des fréquences caractéristiques réduites est connue:

$$kL_{(n_x, n_y, n_z)} = \pi \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (\text{III.70})$$

où  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont des entiers supérieurs ou égaux à un. Sur la figure III.35, le nombre de conditionnement de  $\frac{1}{2}I - D$  est défini à partir de la norme matricielle 1:

$$\mu_1 = \left\| \frac{1}{2}I - D \right\|_1 \left\| \left(\frac{1}{2}I - D\right)^{-1} \right\|_1 \quad (\text{III.71})$$

et les fréquences réduites  $kL$  calculées par ( III.70 ) sont signalées par les symboles " □ ".

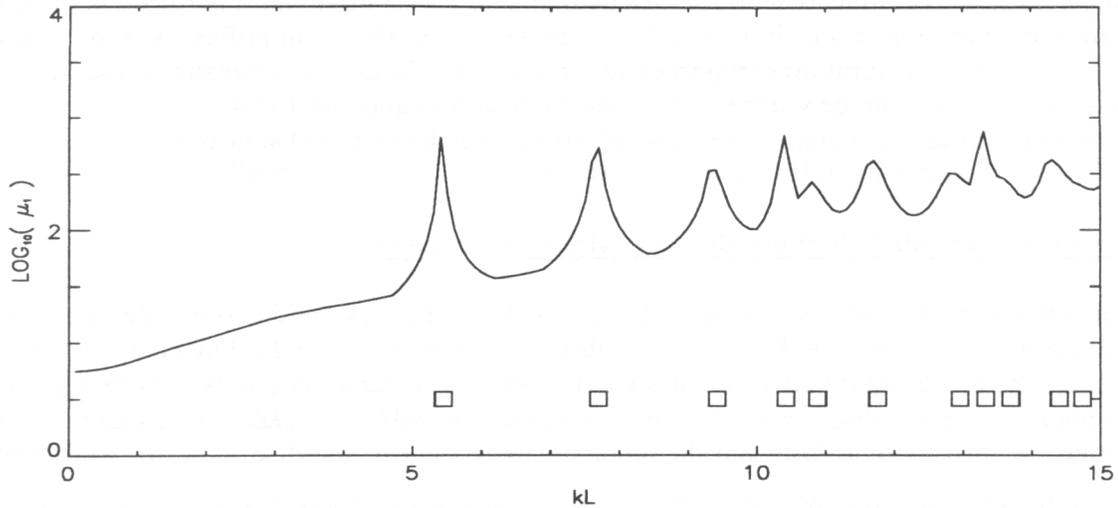


Figure III.35

Mise en évidence des fréquences caractéristiques de la matrice  $\frac{L_x L_y}{N_x N_y}$   
à partir des variations de son nombre de conditionnement  $\mu_1$

#### Conséquences:

Dans les exemples qui vont suivre, on s'est assuré que la fréquence d'excitation ne coïncidait pas avec une fréquence caractéristique de la boîte.

### 3.3.2. Comparaison des résultats

La vitesse vibratoire imposée sur chacune des faces de la boîte est choisie parmi les deux configurations suivantes:

#### 1. Face pulsante:

En tout point de la face la vitesse est uniforme :  $V(M_s) = V$

#### 2. Face vibrante sur un mode $(p_1, p_2)$ :

Dans un repère local associé à la face on définit un point par ses coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2)$  et la vitesse en ce point vérifie:

$$V(x_1, x_2) = V \sin(\pi p_1 \frac{x_1}{L_1}) \sin(\pi p_2 \frac{x_2}{L_2})$$

( III.72 )

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les dimensions de la face.

La comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes est effectuée à partir de la directivité du champ de pression acoustique rayonné par la boîte. Pour simplifier la représentation graphique, les vitesses vibratoires imposées sur chacune des faces sont normalisées par rapport à la fréquence. Le maximum de vitesse correspond à une accélération de  $1 \text{ m/s}^2$ .

Les figures citées dans les paragraphes suivants sont rassemblées dans l'annexe 9.

#### a) Cas d'un cube de côté $L$ dont une des faces vibre sur le mode (1,1)

Dans un premier temps, toutes les faces du cube sont supposées rigides (i.e. vitesse vibratoire nulle) à l'exception de la face  $X = L/2$  qui vibre suivant le mode (1,1). On compare alors les diagrammes de directivité du cube calculés par la méthode intégrale et par la sphère équivalente dans le plan  $Z = 0$  à une distance  $r = 10 L$  pour les fréquences  $kL = 2$  et  $kL = 10$  (figure A9.1). Le diagramme de directivité calculé par la méthode intégrale est stabilisé à partir d'un maillage vibratoire de 294

points (i.e.  $N_x = N_y = N_z = 7$ ). La sphère équivalente de rayon  $a = \frac{L}{2}$  est placée au centre du cube. Le

champ de vitesse étant symétrique par rapport aux plans  $Z = 0$  et  $Y = 0$ , les modes de la sphère équivalente qui vérifient cette symétrie auront une contribution importante au champ de vitesse vibratoire. En revanche, la contribution des modes définis par  $\sigma = 0$  (modes anti-symétriques par rapport au plan  $Y = 0$ ) ou  $n+m$  impair (modes anti-symétriques par rapport au plan  $Z = 0$ ) est

rigoureusement nulle car les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  associées à ces modes sont orthogonales au champ de vitesse.

Pour la fréquence  $kL = 2$  ( $L = 1,0 \text{ m}$  et  $f = 108 \text{ Hz}$  par exemple), seuls les modes de  $S_a$  dont l'ordre  $n$  est inférieur ou égal à 3 contribuent au rayonnement acoustique du cube en champ lointain. A cette fréquence, le cube admet une directivité peu marquée et la sphère équivalente converge très rapidement vers la solution donnée par la méthode intégrale. L'écart entre les deux méthodes est inférieur à 3 dB si tous les modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à 6 sont pris en compte. La méthode de la sphère équivalente permet donc d'approcher très rapidement le rayonnement acoustique du cube.

Lorsque la fréquence augmente, le rayonnement acoustique devient plus directif et la convergence des coefficients associés aux modes rayonnants de la sphère équivalente est plus lente. En prenant en compte les modes jusqu'à l'ordre  $n = 10$ , l'erreur commise pour les points d'écoute situés en face de la face vibrante devient négligeable. Du côté opposé à la face vibrante, les champs acoustiques calculés par la sphère et par la méthode intégrale admettent jusqu'à 10 dB d'écart. L'amplitude de ces lobes de directivité secondaires est cependant très faible et le diagramme calculé par la méthode intégrale est encore sensible au maillage vibratoire. Notons également que la vitesse de convergence des coefficients modaux de la sphère est identique si une autre face est choisie comme face vibrante.

#### Application des critères de maillage ( III.49 ) et ( III.50 )

En appliquant ces critères, on peut déterminer l'ordre maximum des coefficients modaux que le maillage vibratoire permet de calculer. Dans les plans  $Z = 0$  et  $Y = 0$ , les angles  $\Delta\varphi_{\max}$  et  $\Delta\theta_{\max}$  vérifient en effet:

$$\Delta\varphi_{\max} = \Delta\theta_{\max} = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta}{L/2}\right)$$

( III.73 )

avec  $\Delta = \frac{L}{7}$  pour le maillage considéré. Le critère suivant l'angle  $\theta$  est le plus sévère. Il entraîne:

$$N_{\max} \leq \frac{\pi}{\Delta\theta_{\max}} - 1 \leq 103$$

( III.74 )

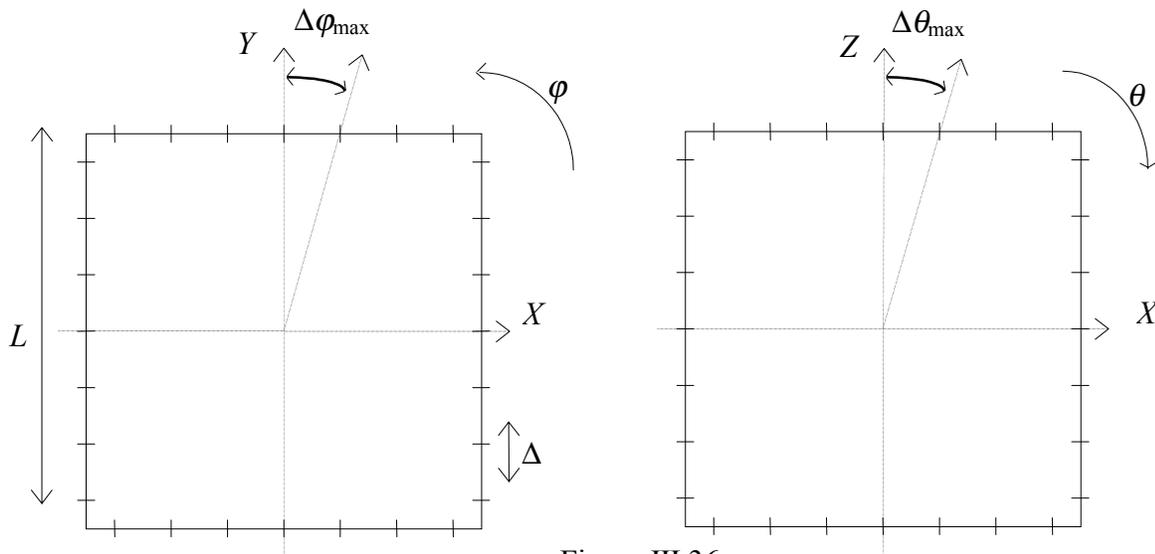


Figure III.36

Lien entre le maillage vibratoire régulier d'un cube et les angles  $(\Delta\varphi_{\max}, \Delta\theta_{\max})$

A partir de  $N_{\max} = 10$ , les fonctions harmoniques sphériques sont donc susceptibles d'être sous-échantillonnées. L'influence de  $N_{\max}$  sur le rayonnement acoustique de la sphère est illustrée sur la figure A9.2. Dans un premier temps, le diagramme de directivité associé à la sphère converge vers le diagramme calculé par la méthode intégrale. Le mode pulsant de la sphère n'est bien sûr pas suffisant ( $N_{\max} = 0$ ). En lui ajoutant les modes dipolaires ( $N_{\max} = 1$ ) puis quadripolaires ( $N_{\max} = 2$ ) on voit apparaître progressivement les différents lobes de directivité du cube. L'amplitude du lobe principal lié à la face vibrante est correctement décrite dès l'ordre  $N_{\max} = 5$  alors que les lobes secondaires sont plus longs à converger. Pour  $N_{\max} = 11$ , l'écart devient relativement faible entre les deux diagrammes. Au delà de  $N_{\max} = 11$ , le rayonnement acoustique de la sphère commence à diverger. Les lobes secondaires sont modifiés en premier à cause de leur faible amplitude. En effet, le sous-échantillonnage des fonctions harmoniques sphériques affecte dans un premier temps les modes d'ordre  $n$  et/ou  $m$  élevés qui sont très directifs mais non rayonnants. Les erreurs qu'ils engendrent sur le rayonnement ne sont donc perceptibles que dans les zones où l'amplitude du rayonnement est faible. Ils conduisent à une solution qui minimise la vitesse quadratique résiduelle calculée à partir du maillage vibratoire mais qui admet de grosses oscillations importantes entre les points du maillage.

L'amplitude de ces modes peut donc être surévaluée. Le rayonnement acoustique calculé par la sphère est alors supérieur au rayonnement acoustique réel. En faisant intervenir des modes d'ordre  $n$  encore plus grand ( $N_{\max} = 17$ ), les coefficients associés aux modes rayonnants sont à leur tour modifiés. L'amplitude du lobe principal commence alors à être modifiée.

On peut également distinguer les deux zones de convergence et de divergence à partir de la puissance acoustique rayonnée par la sphère équivalente (figure A9.3a). De même, le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  permet de caractériser le sous-échantillonnage des modes de la sphère. Le cube étant une structure très compacte, le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  reste proche de un tant que le maillage vibratoire du cube permet de distinguer la contribution des différents modes de la sphère (i.e.  $N_{\max} < 10$  sur la figure A9.3b). Au-delà de cette valeur, l'orthogonalité des modes n'est plus traduite et le nombre de conditionnement augmente.

La figure A9.3c montre qu'il est difficile d'interpréter le sous-échantillonnage des fonctions harmoniques sphériques à partir des erreurs quadratique et maximum. En effet, quel que soit le maillage vibratoire, l'erreur quadratique ne peut que diminuer lorsque le nombre de modes de la sphère équivalente pris en compte augmente. Tant que  $N_{\max}$  est inférieur à 10, la décroissance de  $e_2$  traduit la convergence du rayonnement de la sphère vers le rayonnement du cube ( $e_2 = 15\%$  pour  $N_{\max} = 10$ ). La décroissance de  $e_2$  est cependant encore plus rapide lorsque  $N_{\max}$  est supérieur à 10 car les modes sous-échantillonnés sont très directifs et améliorent la reconstitution de la vitesse aux points du maillage.

L'erreur maximum tend également très vite vers zéro lorsque  $N_{\max}$  est supérieur à 10. En revanche, elle ne décroît pas systématiquement lorsque le nombre de modes pris en compte augmente (i.e.  $e_{\max}$  augmente légèrement entre  $N_{\max} = 7$  et  $N_{\max} = 10$  sur la figure A9.3c). La figure A9.4 représente en effet la vitesse vibratoire exacte et calculée par la sphère équivalente sur la face vibrante et sur une face rigide en contact avec la face vibrante. Elles sont calculées à partir d'un maillage important ( $N_x = N_y = N_z = 20$ ) de manière à simplifier la représentation graphique et à s'affranchir des problèmes d'échantillonnage. En ne considérant que le mode pulsant de la sphère (i.e.  $N_{\max} = 0$ ) la déformée du cube n'est bien sûr pas correctement approchée. En augmentant le nombre de modes de  $S_0$ , la vitesse vibratoire est de mieux en mieux approchée en dehors des arêtes. L'erreur maximum est alors obtenue aux points proches de l'arête du cube. Les arêtes engendrent une discontinuité de la normale

- et donc des fonctions  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial n}$  - qui se traduit par une convergence relativement lente de la vitesse vibratoire calculée par la sphère. On observe un comportement proche du phénomène de Gibbs illustré au paragraphe III.2 lorsque la vitesse vibratoire était une fonction discontinue.

### Stabilité des coefficients modaux de la sphère équivalente

On a montré en annexe 3 que la stabilité des coefficients modaux de la sphère équivalente dépendait du nombre de points de maillage. On associe donc à chaque point du maillage vibratoire un écart-type  $\sigma_0$  égal à 10 % du maximum de la vitesse imposée sur le cube. Le maillage du cube étant régulier, le modèle vérifie les hypothèses de Gauss-Markov et l'écart-type  $\sigma(x_j)$  associé au  $j^{\text{ème}}$

coefficient modal admet une décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{N_s}}$  (relation (A3.28)). Le tableau III.5 permet de vérifier cette décroissance pour différents maillages lorsque les modes de  $S_a$  sont limités à l'ordre 4.

	$N_s = 294$	$N_s = 600$	$N_s = 1350$
$\frac{\sigma(x_1)  _{N_s}}{\sigma(x_1)  _{N_{s_0}}}$	0,70	0,503	0,334
$\sqrt{\frac{N_{s_0}}{N_s}}$	0,71	0,5	0,333

Tableau III.5

Vérification de la décroissance de l'écart-type coefficient modal  $(n,m,\sigma) = (0,0,1)$   
 en fonction du nombre de points de maillage  
 (référence  $N_{s_0} = 150$  ;  $kL = 10$  ;  $N_{\max} = 4$ )

Les quatre maillages considérés respectent le critère d'échantillonnage (III.48). Pour la fréquence  $kL = 10$ , le système linéaire est donc très bien conditionné (i.e.  $\mu(A) \approx 1,3$ ) et la matrice de variance-covariance qui lui est associée est quasiment orthonormée (la norme de ses vecteurs-colonnes ne dépend que de  $\sigma_0$ ). On en déduit que les coefficients modaux sont fortement décorélés (i.e. termes hors-diagonaux de la matrice de variance-covariance quasiment nuls) et qu'ils admettent à peu près le même écart-type. Les modes de  $S_a$  pris en compte sont donc stables pour les quatre maillages vibratoires (i.e. écart-type compris entre 5 et 50 % de la valeur du coefficient modal). On peut alors calculer l'écart-type  $\sigma_P(M)$  associé à la pression acoustique rayonnée par la sphère en tout point du cercle de directivité. Il est représenté sur la figure A9.5 à l'aide des trois courbes suivantes:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(M) &= 20 \log_{10} \frac{|P(M)|}{P_0} \\ \text{b) } P_+(M) &= 20 \log_{10} \frac{|P(M)| + \sigma_P(M)}{P_0} \\ \text{c) } P_-(M) &= 20 \log_{10} \frac{|P(M)| - \sigma_P(M)}{P_0} \end{aligned}$$

(III.75)

avec la référence  $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Pascal.

Pour  $N_s = 150$ , les trois courbes se confondent sur les forts niveaux (i.e. en face de la face vibrante) et admettent des écarts importants dès que le niveau est inférieur à 40 dB. L'écart-type associé à la pression est en effet de cet ordre de grandeur sur tout le cercle de directivité (i.e.  $20 \log_{10} \frac{\sigma_P(M)}{P_0} \approx$

40 dB). On a montré en annexe 3 que  $\sigma_p(M)$  vérifiait également la décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{N_s}}$ . Pour  $N_s =$

1350, elle se traduit par un gain de  $20L \log_{10} \sqrt{\frac{1350}{150}} \approx 10$  dB que l'on peut constater sur la figure A9.5d.

Rappelons également que le rayonnement acoustique de la sphère équivalente peut être stable sans être proche du rayonnement acoustique du cube. La contribution des modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à 4 est en effet stabilisée lorsque le nombre de points de maillage augmente, mais elle reste insuffisante pour décrire le rayonnement acoustique du cube (cf. figure A9.2).

Lorsque la face  $X = L/2$  est une face pulsante (figure A9.6) le diagramme de directivité du cube à la fréquence  $kL = 2$  est très proche de celui de la face vibrante. La convergence des coefficients de la sphère est cependant plus lente pour  $kL = 10$  car la discontinuité de la surface est accentuée par la discontinuité de la vitesse sur les arêtes de la face pulsante.

#### b) Cas d'un cube dont les six faces vibrent en phase sur le mode (1,1)

En plus des symétries précédentes, le champ de vitesse admet également les plans  $X = 0$  et  $X = Y$  comme plans de symétrie. On en déduit que les modes de la sphère équivalente associés à un indice  $m$  multiple de quatre sont les seuls à contribuer au rayonnement acoustique du cube. Pour  $kL = 2$  le seul mode rayonnant qui admette une contribution différente de zéro est le mode pulsant  $(n, m, \sigma) = (0, 0, 1)$  et le cube se comporte exactement comme une sphère pulsante (figure A9.7). Pour  $kL = 10$ , le rayonnement acoustique du cube est parfaitement décrit par les modes dont l'ordre  $n$  est inférieur ou égal à quatre (écart inférieur à 0,5 dB). Pour ces deux fréquences, la convergence des coefficients modaux de la sphère équivalente est donc très rapide. Pour un cube à six faces pulsantes la convergence est plus lente en face des arêtes (figure A9.8).

#### c) Cas d'un cube dont la face $Z = L/2$ vibre sur un mode (3,3) et les autres vibrent en phase sur le mode (1,1) (figure A9.9)

Pour la fréquence  $kL = 10$ , la solution donnée par la méthode intégrale se stabilise pour un maillage vibratoire de 480 points ( $N_x = N_y = 10$  et  $N_z = 7$ ). En dehors des points situés en face de la face  $Z = L/2$ , le diagramme de directivité est identique à celui obtenu dans le cas du cube à six faces vibrantes (i.e. même forme pour les lobes de directivité et même amplitude). Il faut cependant attendre les modes d'ordre  $n = 10$  pour traduire la contribution de la face  $Z = L/2$ . La forme des lobes de directivité est alors respectée mais l'amplitude de ces lobes peut admettre jusqu'à 10 dB d'erreur. À partir des modes d'ordre  $n = 20$ , l'écart entre les deux diagrammes est toujours inférieur à 3 dB. Le nombre de points de maillage nécessaire pour appliquer la méthode de la sphère équivalente est alors très important (i.e. plusieurs milliers si on applique les critères (III.49) et (III.50)). Les deux méthodes admettent le même nombre d'inconnues et conduisent à des temps de calculs équivalents.

Notons que le nombre de conditionnement de  $A$  est proche de 100 lorsque tous les modes d'ordre  $n$

inférieur ou égal à 20 sont pris en compte. En appliquant le modèle de Gauss-Markov avec un écart-type constant et égal à 10 % du maximum de la vitesse vibratoire, les écart-types associés aux modes rayonnants sont également de l'ordre de 10 %. Le modèle est donc stable bien que le nombre de conditionnement soit grand devant un.

La figure A9.10 illustre la convergence de la vitesse vibratoire calculée par la sphère sur la face  $Z = L/2$  vers le mode (3,3). Comme dans le cas du cube à une face vibrante, le choix de la face qui vibre sur le mode (3,3) n'affecte pas la vitesse de convergence des coefficients modaux de la sphère équivalente.

d) Cas d'une boîte de dimensions  $2L \times L \times L$  dont les six faces vibrent en phase sur le mode (1,1)

Cet exemple permet d'illustrer la lenteur de la convergence des coefficients modaux de la sphère équivalente lorsque la structure n'est plus compacte. Pour approcher avec précision le rayonnement acoustique de la boîte lorsque ses six faces vibrent en phase sur le mode (1,1), il faut en effet davantage de coefficients que dans le cas du cube. Pour  $kL = 10$ , les lobes de directivité sont relativement bien décrits à partir de l'ordre  $n = 4$  (figure A9.11). Il faut cependant attendre les modes d'ordre  $n = 10$  pour que l'erreur sur la pression acoustique rayonnée soit partout inférieure à 5 dB. La solution est alors stable ( $\mu(A) = 2,0$ ) et l'erreur quadratique inférieure à 25 %. Pour  $kL = 20$ , le rayonnement acoustique de la boîte est très directif et, contrairement au cas du cube, il ne peut plus être traduit par les modes d'ordre  $n$  inférieur à 4 (figure A9.12). Les erreurs quadratique et maximum sont de l'ordre de 75 %. À partir de  $N_{\max} = 10$ , les principaux lobes de directivité sont très bien approchés alors que l'erreur quadratique est encore supérieure à 40 %. La vitesse est en effet bien approchée au centre des faces et moins bien aux points proches des arêtes. Tous les modes étant rayonnants, le conditionnement de  $A$  est très proche de un (i.e.  $\mu(A) = 1,6$ ). Notons que pour obtenir des lobes secondaires stables par la méthode intégrale il faut un maillage vibratoire de plus de 400 points. Bien que la convergence soit plus lente que dans le cas du cube, la méthode de la sphère équivalente permet d'approcher assez rapidement la forme et l'amplitude des lobes de directivité de la boîte.

Pour un maillage régulier de la boîte, l'angle  $\Delta\varphi_{\max}$  vérifie la relation (III.73) avec  $N_x = \frac{2L}{\Delta}$ . Pour déterminer les coefficients modaux jusqu'à l'ordre  $N_{\max}$ ,  $N_x$  doit donc vérifier:

$$N_x \geq \frac{4}{\tan(\Delta\varphi_{\max})} \geq \frac{4}{\tan\left(\frac{2\pi}{2N_{\max} + 1}\right)}$$

(III.76)

Pour  $N_{\max} = 10$ , on en déduit :  $N_x \geq 13$ . En choisissant  $N_x = 20$  (i.e. 1000 points de maillage), le critère (III.49) est donc largement respecté.

## 4. Applications de la méthode géométrique

### 4.1. Calcul du rayonnement acoustique d'une plaque rectangulaire insérée dans un baffle

On considère une plaque rectangulaire, homogène, appuyée sur ses bords et soumise à une excitation ponctuelle harmonique. On sait exprimer analytiquement la base modale vibratoire de cette plaque en fonction de ses dimensions ( $L_x; L_y$ ), de sa masse  $M$  et de son module de rigidité de flexion  $D$  <sup>(59)</sup>. Dans un repère lié au centre de la plaque on définit ainsi respectivement la forme propre et la pulsation propre associées au mode d'ordre  $(n_x, n_y)$  par:

$$\Phi_{n_x n_y}(x_s, y_s) = \sin(n_x \pi \frac{x_s}{L_x}) \sin(n_y \pi \frac{y_s}{L_y}) \quad (\text{III.1})$$

et

$$\omega_{n_x n_y} = \sqrt{\frac{D}{M} \left( \left( \pi \frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left( \pi \frac{n_y}{L_y} \right)^2 \right)} \quad (\text{III.2})$$

La vitesse vibratoire normale en tout point de la plaque s'écrit alors:

$$V^s(x_s, y_s) = \frac{4j\omega}{M} \sum_{n_x n_y} \frac{F_{n_x n_y} \sin(n_x \pi \frac{x_s}{L_x}) \sin(n_y \pi \frac{y_s}{L_y})}{\omega_{n_x n_y}^2 - \omega^2 + j\eta_{n_x n_y} \omega_{n_x n_y} \omega} \quad (\text{III.3})$$

où

- $F_{n_x n_y} = F_0 \sin(n_x \pi \frac{x_0}{L_x}) \sin(n_y \pi \frac{y_0}{L_y})$  est l'amplitude de l'excitation associée au mode  $(n_x, n_y)$  pour une force  $F_0$  placée au point  $(x_0; y_0)$
- $\eta_{n_x n_y}$  est l'amortissement du mode  $(n_x, n_y)$

Le rayonnement acoustique de cette plaque est obtenu en appliquant la formule de Rayleigh <sup>(59)</sup>:

$$P(M) = 2jk\rho_0 c_0 \int_S V^s(M_s) G_0(M_s, M) dS \quad (\text{III.4})$$

où  $G_0$  est la fonction de Green en champ libre définie en annexe 2.

On définit une sphère équivalente de rayon  $a$  et de centre  $(0;0;-a)$ . C'est une sphère qui est tangente à la plaque au point  $O$  centre du repère. Les coefficients modaux de cette sphère sont calculée par

l'intégrale ( II.93 ). La vitesse en tout point de la sphère est définie par l'une des projections présentée au paragraphe II.2.3.

Seule une portion de la sphère équivalente est ainsi associée à la plaque vibrante (cas 1 de l'équation ( III.81 )). En dehors de cette portion vibrante, la vitesse est égale à zéro (cas 2 de l'équation ( III.81 )). Elle rend compte du baffle rigide.

$$V_{nm\sigma}^a = \underbrace{\int_{\varphi_a=0}^{2\pi} \int_{\theta_a=0}^{\theta_{\text{lim}}(\varphi_a)} V^a(\theta_a, \varphi_a) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_a, \varphi_a) \sin\theta_a d\theta_a d\varphi_a}_{\text{cas 1 point image sur la plaque}} + \underbrace{\int_{\varphi_a=0}^{2\pi} \int_{\theta_a=\theta_{\text{lim}}(\varphi_a)}^{\pi} V^a(\theta_a, \varphi_a) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_a, \varphi_a) \sin\theta_a d\theta_a d\varphi_a}_{\text{cas 2 point image sur le baffle}}$$

$\Rightarrow V^a(\theta_a, \varphi_a) = V^s(x_s, y_s)$ 
 $\Rightarrow V^a(\theta_a, \varphi_a) = 0$

( III.5 )

Les relations qui permettent d'exprimer les coordonnées  $(x_s, y_s)$  des points de la plaque en fonction des coordonnées  $(\theta_a, \varphi_a)$  de leur point image sur la sphère sont détaillées en annexe 10 en fonction de la projection choisie.

Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente est comparé à la solution analytique donnée par la formule de Rayleigh pour une plaque en acier de dimensions  $(L_x; L_y) = (L; 0,7L)$  dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes:

masse volumique :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  ;      module de Young :  $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$   
 coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$  ;      amortissement :  $\eta = 0,01$

Cette plaque est excitée par une force unitaire placée au point  $(x_0; y_0) = (-0,15L; 0,10L)$ .

Pour le point d'écoute  $M_1$  proche de la plaque, la figure III.37 indique que les deux projections conduisent à un rayonnement acoustique très proche de la solution analytique. La pression acoustique rayonnée en ce point est très peu influencée par le baffle. Une sphère équivalente de rayon  $a = 2L$  suffit donc pour traduire le rayonnement acoustique de la plaque, que la déformée admette des variations lentes (figure III.37a) ou plus rapides (figure III.37b).

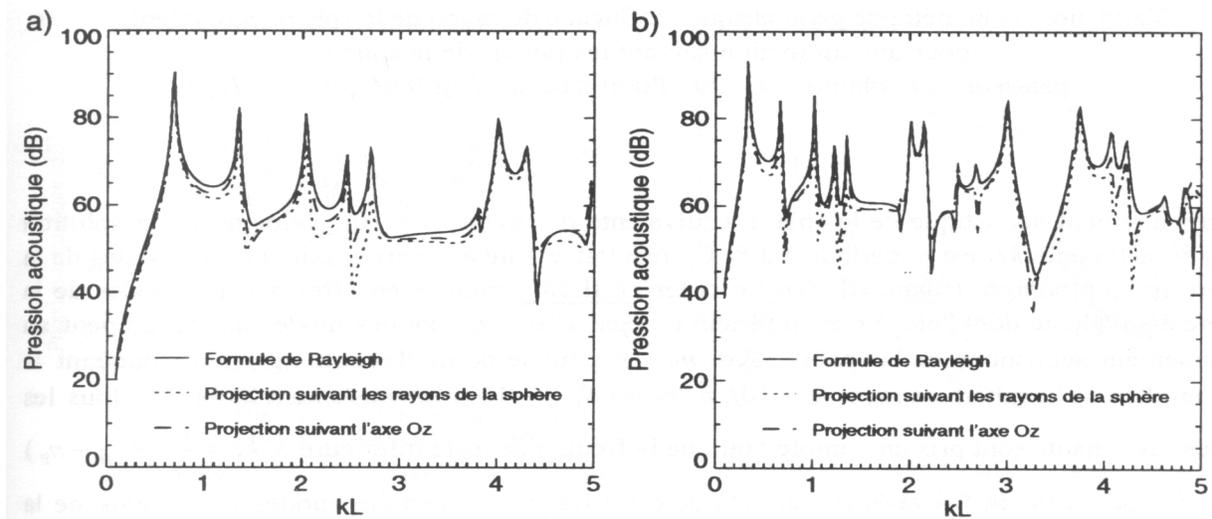


Figure III.1

Validation de la méthode géométrique : comparaison des deux projections

a) épaisseur de la plaque =  $L / 20$

b) épaisseur de la plaque =  $L / 40$

(  $a = 2L$  ;  $N_{\text{max}} = 10$  ; Point d'écoute  $M_1( 0,2L ; 0,15L ; 0,3L )$  )

Lorsque le point d'écoute s'éloigne de la plaque, il faut augmenter le rayon de la sphère équivalente pour prendre en compte l'effet du baffle. Une sphère de rayon  $a = 10L$  permet ainsi de mieux approcher le rayonnement acoustique de la plaque qu'une sphère de rayon  $a = L$  ou  $a = 2L$  (figure III.38).

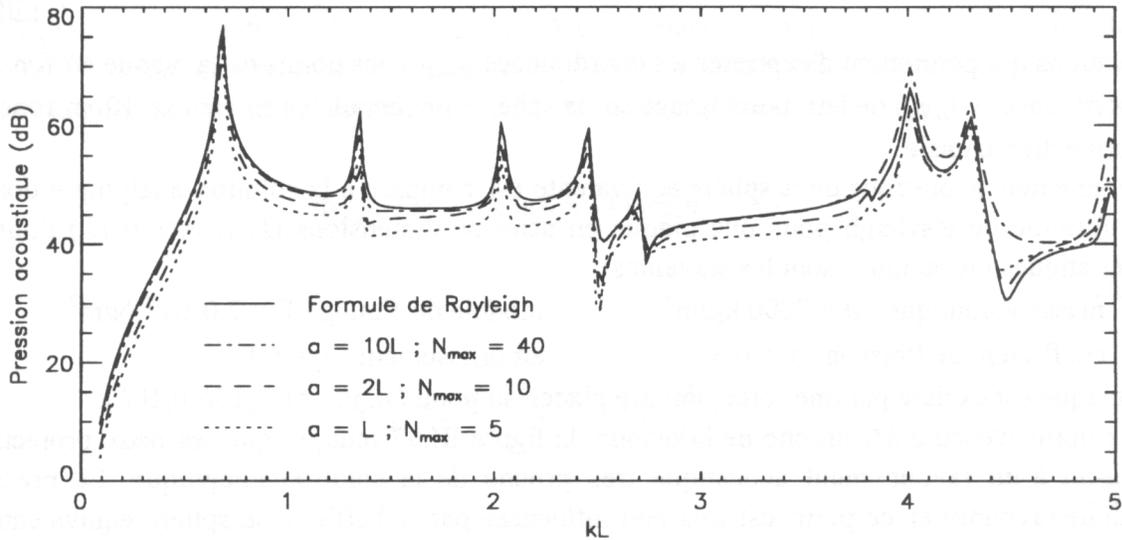


Figure III.2

Validation de la méthode géométrique : influence du rayon de la sphère équivalente pour une projection suivant les rayons de la sphère (épaisseur de la plaque =  $L/20$  ; Point d'écoute  $M_2(0,6L ; 0,4L ; 2L)$ )

Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente de rayon  $a = 10L$  s'éloigne de la solution analytique lorsque  $kL$  est supérieur à 3,8. Ce résultat est lié à l'ordre maximum des modes de la sphère pris en compte (figure III.39). Le critère (II.28) montre en effet que les modes de la sphère équivalente dont l'ordre  $n$  est inférieur ou égal à  $ka + n_p$  sont des modes qui participent au rayonnement acoustique de la sphère (avec  $n_p \approx 4$  pour le point d'écoute  $M_2$ ). En tronquant la base modale de la sphère de rayon  $a = 10L$  à l'ordre  $N_{\max} = 10$  (respectivement 25 et 40), tous les modes rayonnants sont pris en compte tant que la fréquence reste inférieure à  $kL = \frac{L}{a}(N_{\max} - n_p) \approx 0,6$  (respectivement 2,1 et 3,6). Au-delà de cette fréquence, certains modes rayonnants de la sphère peuvent manquer pour traduire avec précision le rayonnement acoustique de la plaque.

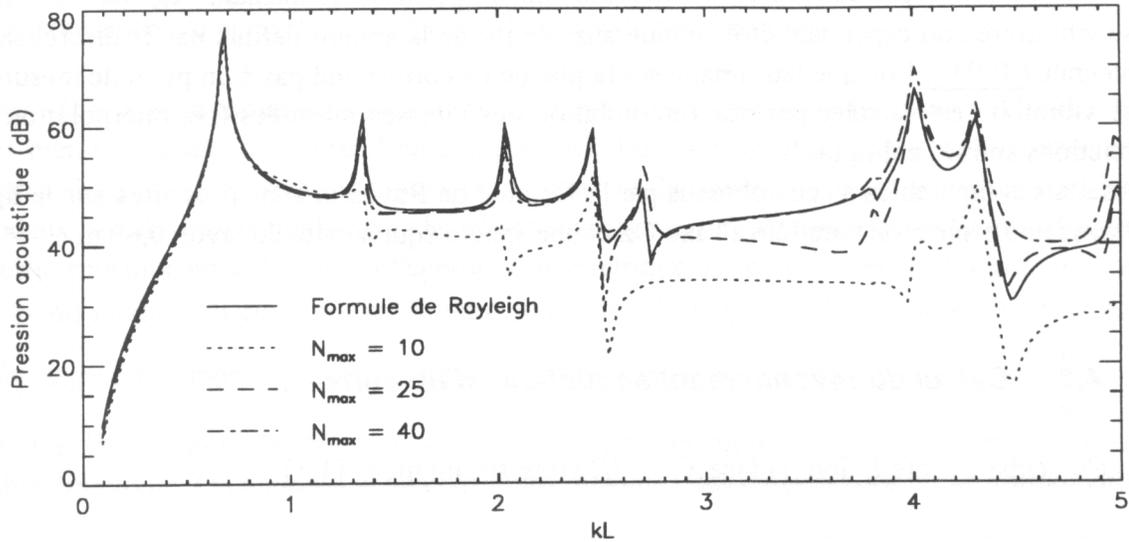


Figure III.3

Validation de la méthode géométrique :  
Influence de l'ordre maximum des modes de la sphère équivalente pris en compte  
pour une projection suivant les rayons de la sphère  
(  $a = 10L$  ; Point d'écoute  $M_2(0,6L ; 0,4L ; 2L)$  )

L'approximation géométrique a également été validée à partir de vitesses vibratoires mesurées sur une plaque en acier de 5 mm d'épaisseur et de dimensions  $(L_x; L_y) = (0,60\text{m}; 0,40\text{m})$  (figure III.40).

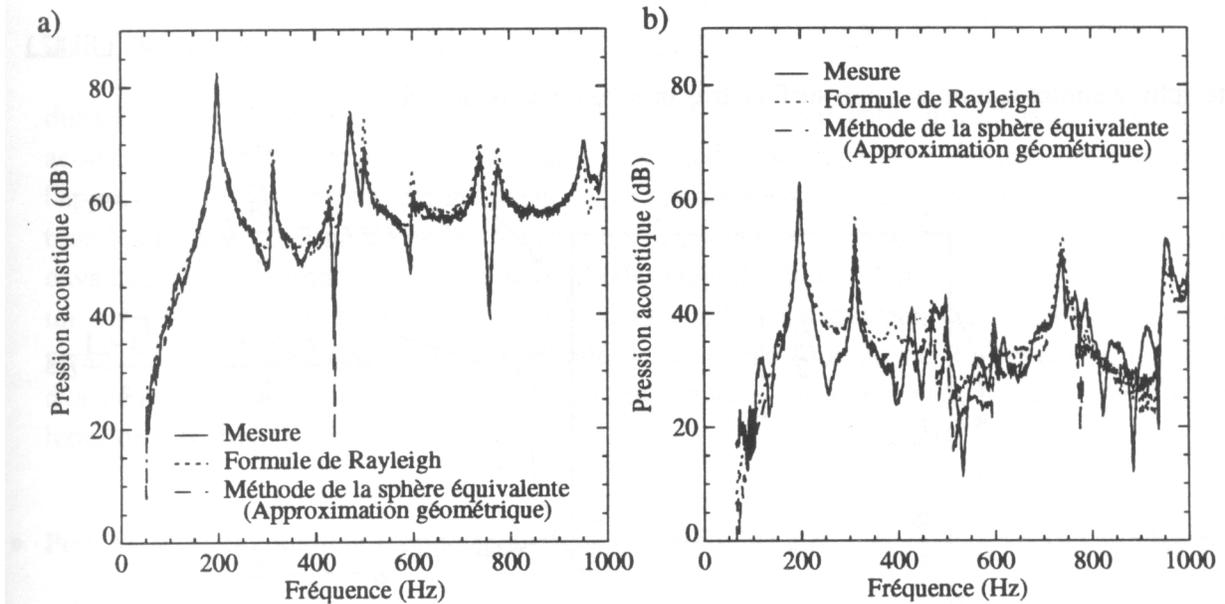


Figure III.4

Validation de la méthode géométrique : comparaison Calculs/Mesures  
a) Point d'écoute proche de la plaque : ( 0,20 m ; 0,12 m ; 0,10 m )  
b) Point d'écoute éloigné de la plaque : ( 1,30 m ; 0,12 m ; 1,30 m )

La vitesse vibratoire est connue en un nombre fini de points (i.e. maillage régulier 13×9). La vitesse vibratoire doit cependant être connue aux points de la sphère définis par la discrétisation de l'intégrale ( II.93 ). Lorsque leur image sur la plaque ne correspond pas à un point de mesure, la vitesse vibratoire est calculée par une interpolation des vitesses mesurées (i.e. interpolation par des fonctions splines cubiques<sup>(53)</sup>).

Des résultats comparables à ceux obtenus par la formule de Rayleigh sont présentés sur la figure III.40 avec une projection parallèle à l'axe Oz et une sphère équivalente de rayon 0,60 m.

#### 4.2. Calcul du rayonnement acoustique d'un cube

##### 1. Cas d'un cube de côté $L$ dont la face $X = L/2$ vibre sur un mode (1,1)

L'intégrale ( II.93 ) est calculée à partir d'un maillage vibratoire de la sphère équivalente défini par la relation ( III.6 ). On utilise le critère ( III.18 ) pour s'assurer que les modes vibratoires de la sphère équivalente que l'on cherche à déterminer sont suffisamment échantillonnés.

Les meilleurs résultats ont été obtenus pour une sphère de même centre que le cube et de rayon  $a = \frac{r_{ins} + r_{cir}}{2}$  (figure III.41). En adoptant une projection suivant les rayons de la sphère, la distance maximum, notée  $d_{max}$ , entre un point de la structure et son point image sur la sphère vérifie:

$$d_{max} = \frac{r_{ins} + r_{cir}}{2} - r_{ins} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} L$$

( III.6 )

Cette sphère admet également une surface très proche de celle du cube.

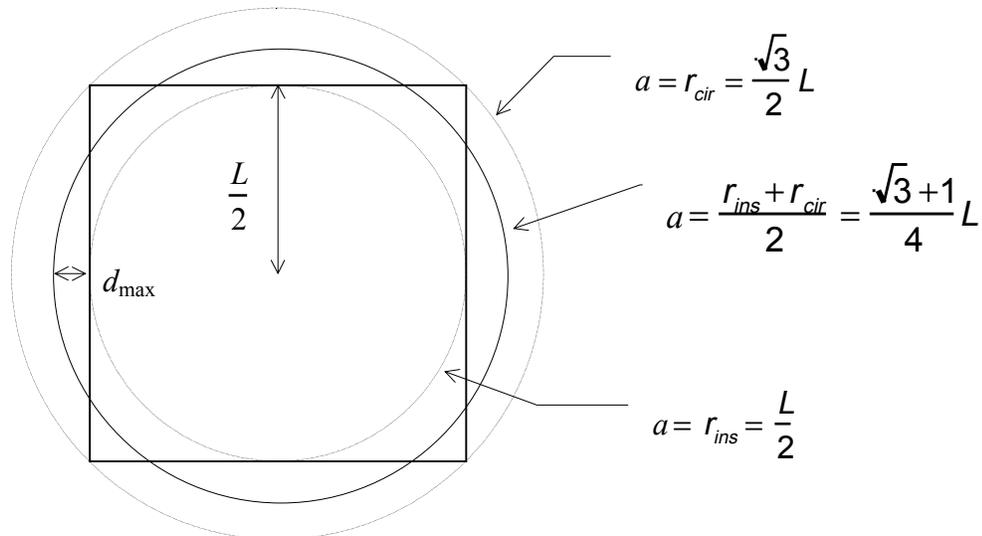


Figure III.5

Sphère équivalente pour le calcul du rayonnement acoustique d'un cube par la méthode géométrique

La figure A10.2 permet de comparer les diagrammes de directivité obtenus par la méthode intégrale présentée au paragraphe III.3 et par la méthode géométrique.

- Pour  $kL = 2$ , le rayonnement acoustique du cube est très peu directif (figure A10.2a). Il est très bien représenté si on prend en compte tous les modes de la sphère équivalente jusqu'à l'ordre  $N_{\max} = 3$  (i.e. tous les modes rayonnants de la sphère). L'écart entre les coefficients modaux calculés par la méthode de la sphère équivalente (cf. paragraphe 3 et figure A9.1) et les coefficients modaux calculés par l'approche géométrique est relativement faible (i.e. inférieur à 10 % du module du coefficient). A cette fréquence, la longueur d'onde acoustique  $\lambda_0$  est en effet largement supérieure à la distance qui sépare le cube de la sphère (i.e.  $\frac{\lambda_0}{d_{\max}} = \frac{\pi L}{d_{\max}} \approx 17$ ). De plus, les modes de la sphère pris en compte sont des modes d'ordre peu élevé qui ont une faible directivité. On a montré au paragraphe 1.4 du chapitre I I que la longueur d'onde associée aux modes  $(n, 0, \sigma)$  vérifiait  $\lambda_{(n)} = \frac{2\pi a}{n}$  (i.e.  $\frac{\lambda_{(n)}}{2}$  est la distance qui caractérise les points de la sphère qui vibrent en phase). Pour  $N_{\max} = 3$ , les modes pris en compte admettent des oscillations à la surface de la sphère qui restent grandes devant  $d_{\max}$  (i.e.  $\frac{\lambda_{(3)}}{d_{\max}} \approx 8$ ). La projection géométrique n'entraîne donc pas d'écarts importants sur le calcul des coefficients modaux.
- Pour  $kL = 10$ , le rayonnement acoustique du cube est très directif (figure A10.2b). Il est bien approché sur les forts niveaux lorsque les modes de la sphère équivalente sont pris en compte jusqu'à l'ordre  $N_{\max} = 5$ . La longueur d'onde acoustique est du même ordre de grandeur que le rayon de la sphère équivalente ( $\lambda_0 = \frac{2\pi}{10} L \approx 0,63L$  et  $a = \frac{1+\sqrt{3}}{4} L \approx 0,68L$ ) et  $\frac{\lambda_{(5)}}{d_{\max}} \approx 5$ . La distance entre la sphère et la structure est donc suffisamment faible devant la longueur d'onde acoustique et la longueur d'onde associée aux modes de la sphère d'ordre élevé pour que l'approximation géométrique conduisent à des résultats satisfaisants. Si on prend en compte tous les modes rayonnants de la sphère (i.e.  $N_{\max} = 8$ ), le diagramme de directivité s'éloigne davantage du diagramme donné par la méthode intégrale (figure A10.3a). On observe toujours un écart relativement faible entre les premiers coefficients modaux calculés par la méthode géométrique et ceux calculés par la méthode de la sphère équivalente. En revanche, les modes d'ordre  $n$  et  $m$  élevés admettent des erreurs importantes qui expliquent l'écart observé sur les lobes de directivité de faibles niveaux.
- Pour  $kL = 20$ , la longueur d'onde acoustique est inférieure à  $d_{\max}$  et  $\frac{\lambda_{(16)}}{d_{\max}} \approx 1,5$  (les modes de la sphère sont rayonnants jusqu'à l'ordre  $N_{\max} = 16$ ). Le calcul de la contribution de ces modes n'est donc plus insensible aux erreurs générées par la projection géométrique. Le diagramme de directivité admet un écart de 5 dB sur le lobe principal (figure A10.3b).

## 2. Cas d'un cube de côté $L$ dont la face $Z = L/2$ vibre sur le mode (3,3) et les autres faces vibrent sur le mode (1,1)

En appliquant une projection suivant les rayons de la sphère équivalente, le diagramme de directivité de la sphère est proche de celui du cube, en particulier sur les forts niveaux associés aux faces qui vibrent sur le mode (1,1) (figure A10.4). Comme précédemment, les coefficients modaux associés aux premiers modes de la sphère admettent des valeurs très proches de celles calculées par la méthode de la sphère équivalente alors que les coefficients d'ordre élevé admettent davantage d'écart. Cela se traduit par une erreur importante sur les lobes de directivité associés à la face  $Z = L/2$ . Le champ de vitesse sur cette face n'est cependant pas reconstitué par la projection géométrique. La figure A10.5 permet de comparer la vitesse vibratoire exacte (i.e. mode (3,3)) à la vitesse vibratoire calculée par la sphère équivalente. Lorsque l'ordre  $n$  des modes pris en compte augmente, les modes de la sphère sont de moins en moins rayonnants et le champ acoustique qui leur est

associé varie en puissance de  $n$ . Pour une sphère équivalente de rayon  $a = \frac{r_{ins} + r_{cir}}{2}$ , la vitesse vibratoire calculée aux points proches du centre des faces (i.e. où la distance entre la sphère et le cube est maximale), est obtenue en rétropropageant les différents modes de la sphère. Elle admet donc une amplitude importante liée à la contribution des modes non rayonnants. En choisissant une sphère de rayon  $a = r_{ins}$ , l'amplitude est moins importante au centre des faces mais la vitesse sur le bord des faces n'est pas reconstituée.

Différents essais ont été effectués pour prendre en compte lors de la projection la distance qui sépare un point du cube de son image sur la sphère. Aucune tendance cohérente n'a pu être mise en évidence dans les résultats obtenus. L'influence de la distance sur la contribution des différents modes ne peut en effet pas traduire le comportement des différents modes de la sphère. On peut par exemple montrer à partir de (II.10) que la composante radiale de la vitesse particulière rayonnée par

le mode pulsant de la sphère admet une composante qui décroît en  $\frac{1}{r}$  et une composante qui décroît en  $\frac{1}{r^2}$ . D'autre part, la méthode de la sphère équivalente a montré que le calcul du champ de vitesse sur le cube faisait intervenir des modes non rayonnants de la sphère équivalente. Ces modes présentent une décroissance en puissance de  $\frac{1}{r}$  qui ne peut être prise en compte.

## 5. Conclusion

La méthode de la sphère équivalente a été validée sur des structures simples et compactes. Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente a été comparé à celui obtenu par une méthode intégrale (cas de la boîte) ou à une solution analytique (cas de la sphère). Dans un premier temps, l'influence du rayon et de la position du centre de la sphère équivalente sur le conditionnement du système linéaire a été étudiée. Lorsque la structure vibrante est une sphère, on peut en effet utiliser les expressions asymptotiques des modes de rayonnement de la sphère équivalente pour calculer le nombre de conditionnement du système linéaire. En distinguant la contribution des modes

rayonnants et des modes non rayonnants de la sphère équivalente, les critères simples établis au chapitre II sur le choix de la position et du rayon de la sphère équivalente ont été validés.

Les problèmes liés à l'interprétation des critères de validité du modèle de la sphère équivalente ont été mis en évidence. Nous avons ainsi montré que l'écart entre la vitesse mesurée et la vitesse calculée par la sphère sur la structure peut être faible sans que le rayonnement de la sphère équivalente soit proche de la solution (i.e. problème lié au maillage vibratoire), ou élevé avec un rayonnement acoustique proche de la solution (i.e. les coefficients modaux associés aux modes de la sphère qui contribuent au rayonnement acoustique de la structure convergent rapidement). De même, le nombre de conditionnement peut être un indicateur du sous-maillage de la structure vibrante. Le rayonnement acoustique de  $S_a$  peut cependant être stable sans que le nombre de conditionnement soit proche de un.

Nous avons montré sur différents exemples que le nombre de modes de la sphère équivalente que l'on peut déterminer dépend fortement du maillage vibratoire de la structure. Un critère simple qui ne prend en compte que les variations des fonctions harmoniques sphériques a été validé dans le cas d'une boîte. La convergence du champ de vitesse calculé par la sphère vers celui mesuré sur la structure est relativement lente aux points proches des arêtes de la boîte où l'on peut observer un comportement proche du phénomène de Gibbs. Le modèle de la sphère équivalente semble cependant peu sensible à l'hypothèse de régularité de la structure.

L'approche géométrique a également été validée dans le cas d'une plaque rectangulaire insérée dans un baffle. Le rayon de la sphère équivalente est choisi en fonction de la position du point d'écoute de manière à rendre compte de la plaque et du baffle. La distance entre la sphère équivalente et la structure peut en effet être rendue très faible en choisissant un grand rayon pour la sphère équivalente. Le rayonnement acoustique de cette sphère est alors une très bonne approximation de celui de la plaque si tous les modes rayonnants de la sphère sont pris en compte (i.e. tous les modes qui vérifient les critères de troncature établis au paragraphe 1.5 du chapitre II).

L'application au cas d'un cube a montré que la projection du champ de vitesse modifiait la contribution des modes de la sphère équivalente dès que la distance entre la sphère et le cube devenait du même ordre de grandeur que la longueur d'onde caractéristique des modes de la sphère et/ou du même ordre de grandeur que la longueur d'onde acoustique.

La méthode géométrique fournit donc des résultats rapides puisque les calculs se ramènent à une simple intégration de la vitesse vibratoire de la sphère. Le temps nécessaire pour définir la projection géométrique est cependant important. Il peut également devenir difficile d'associer de manière automatique un point de la structure à un point de la sphère lorsque cette structure devient complexe. Le calcul des coefficients modaux de la sphère impose d'autre part de connaître la vitesse vibratoire en certains points de la sphère, c'est-à-dire de connaître la vitesse vibratoire associée à leurs points images sur la structure. Lorsque ces points ne coïncident pas avec des points de maillage où la vitesse est connue (par la mesure ou par le calcul) il faut la calculer par interpolation. Cette étape peut également s'avérer difficile à mettre en oeuvre pour une structure de géométrie quelconque.



## CHAPITRE IV

### Validations expérimentales

Il s'agit dans ce chapitre de valider la méthode de la sphère équivalente et l'approche géométrique à partir de données mesurées sur une boîte rectangulaire posée sur le sol réfléchissant d'une chambre semi-anéchoïque. Après avoir présenté le montage expérimental utilisé (§1), le comportement vibratoire de la boîte est analysé (§2). Afin de simplifier la lecture, les différentes courbes citées dans ce paragraphe sont rassemblées en annexe 12. On applique alors la méthode des images pour se ramener à un problème de rayonnement acoustique en champ libre (§3) et les résultats obtenus par les deux méthodes sont comparés d'une part à la mesure et d'autre part aux résultats obtenus par la méthode intégrale présentée au chapitre III (§4 et §5).

### 1. Description du montage expérimental

#### Description de la structure

La structure étudiée est une boîte rectangulaire de dimensions  $0,610 \text{ m} \times 0,410 \text{ m} \times 0,305 \text{ m}$  posée sur le sol réfléchissant de la chambre semi-anéchoïque de l'IN.R.S (plan  $Z=0$  sur la figure IV.1). Elle est constituée de cinq faces homogènes (i.e. pas de raidisseur, pas de masse ajoutée) et d'épaisseur constante égale à  $4 \text{ mm}$ .

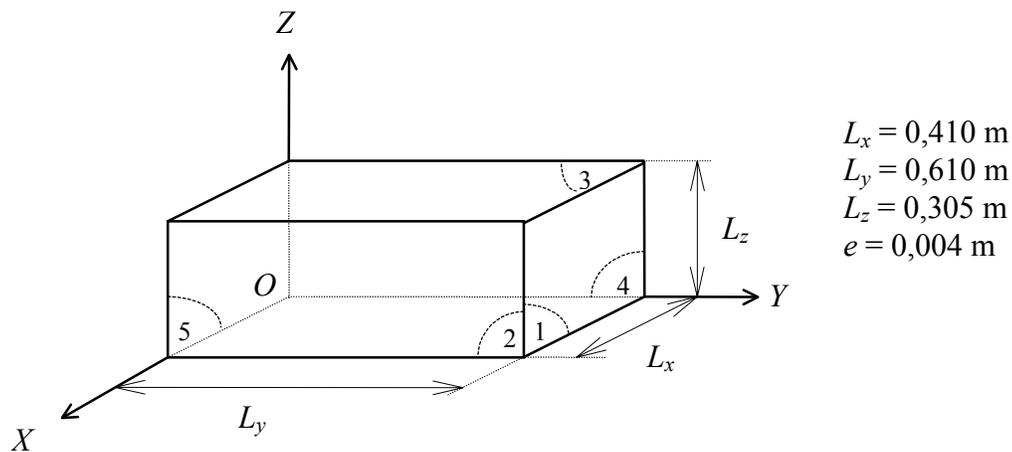


Figure IV.1  
Schéma de la boîte

Les faces 2, 3 et 4 repérées sur la figure IV.1 sont issues d'une plaque pliée sur laquelle ont été soudées les faces 1 et 5. Afin d'assurer l'étanchéité acoustique entre l'intérieur et l'extérieur de la boîte celle-ci repose sur un joint en mousse dont l'épaisseur sera toujours négligée par la suite.

### Description de l'excitation

Un pot vibrant placé à l'intérieur de la boîte excite la face n° 4 au point de coordonnées (0,000;0,475;0,100). Il est alimenté en bruit blanc sur la gamme de fréquence 20-1000Hz.

### Description de la mesure des vibrations

Suivant les axes  $O_x$ ,  $O_y$  et  $O_z$  un maillage régulier respectivement de 5 cm, 5 cm et 4,5 cm a été appliqué. Il conduit à un ensemble de 425 points de mesure :

63 points sur les faces 1 et 5

91 points sur les faces 2 et 4

117 points sur la face 3

La vitesse vibratoire est mesurée en chacun de ces points par un vibromètre laser monté sur un robot 2-axes piloté par un ordinateur. Le robot permet un balayage semi-automatique des faces de la boîte. La vitesse vibratoire est mesurée par le vibromètre en amplitude et en phase. Les déformées vibratoires sont reconstruites à partir d'une référence de phase prise sur une tête d'impédance montée entre le pot vibrant et la structure (cf. figure IV.2) : l'autospectre de la vitesse mesurée donne le module de la vitesse vibratoire et la phase est apporté par la phase de l'interspectre entre la vitesse mesurée et le signal de référence.

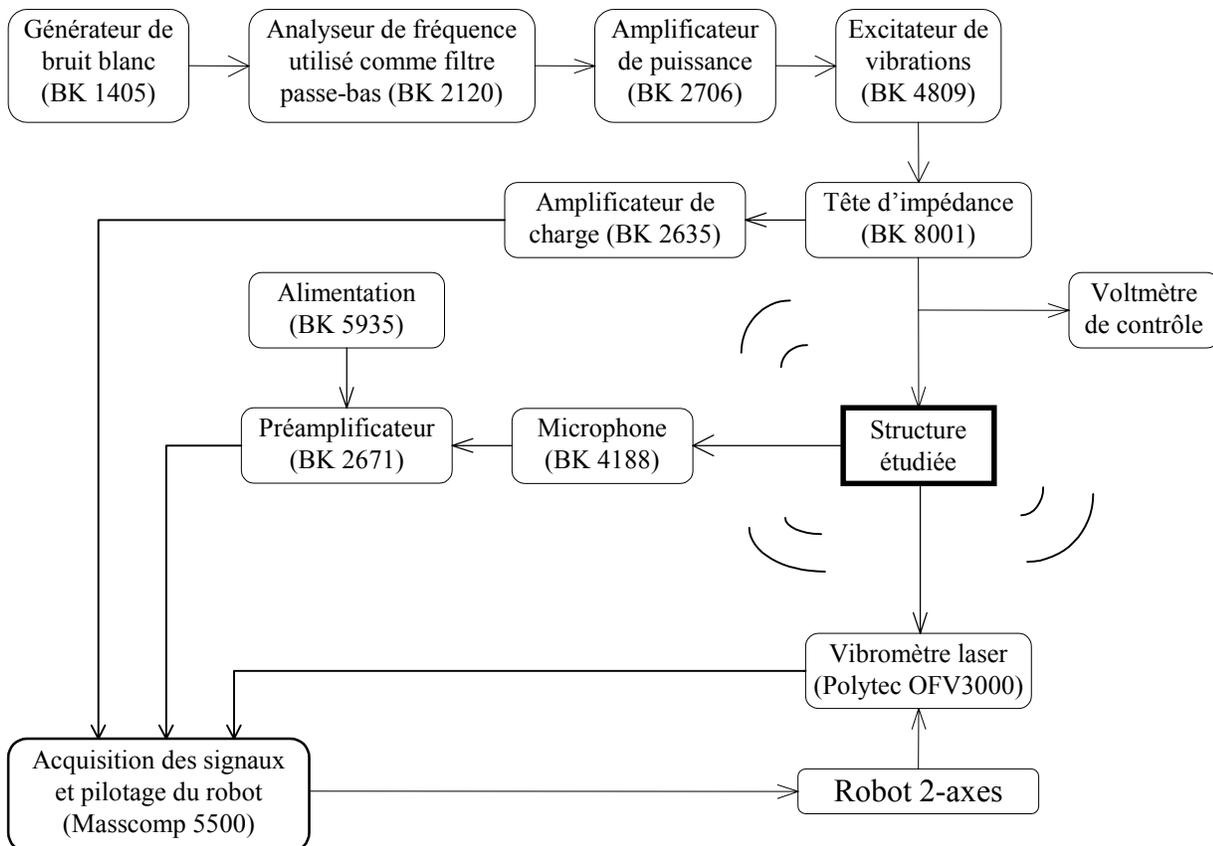


Figure IV.2  
Schéma du montage expérimental - matériels utilisés

## 2. Comportement vibratoire de la boîte

Les conditions aux limites vibratoires sur chacune des faces ne sont bien sûr pas connues. On ne peut donc pas prévoir analytiquement les modes propres de la boîte (i.e. fréquences propres et déformées modales). Un certain nombre de résultats peuvent cependant être établis à partir des vitesses quadratiques partielles mesurées sur chacune des faces de la boîte. Elles sont représentées, ainsi que la vitesse quadratique globale, sur la figure A12.1.

Elles montrent dans un premier temps que la boîte admet un comportement modal très marqué sur toute la gamme de fréquence d'analyse. La face n°4, excitée par le pot vibrant, apporte la contribution principale à la vitesse quadratique de la boîte. Elle présente par exemple de forts niveaux de vitesse quadratique pour les fréquences 95 Hz, 200 Hz, 305 Hz et 345 Hz. Les figures A12.2 à A12.5 montrent que les déformées vibratoires associées à ces fréquences sont associées à l'émergence de modes locaux et/ou globaux de la boîte. On constate alors que ce sont les bords de la boîte en contact avec le joint en mousse qui admettent les vibrations de plus grandes amplitudes. Les conditions aux limites sur ces arêtes sont donc assez proches des conditions libres.

En étudiant les déformées de la face 3 (i.e. la face du dessus), on constate également que cette boîte admet un découplage assez fort entre chacune des plaques. Les fréquences associées aux premiers maxima de la vitesse quadratique partielle mesurée sur cette face sont répertoriées dans le tableau IV.1. Elles sont comparées aux fréquences propres calculées pour une plaque appuyée sur ces quatre bords dont les dimensions et les caractéristiques mécaniques sont celles de la face 3.

Premières fréquences émergeant de la vitesse quadratique mesurée sur la face 3	98 Hz	209 Hz	305 Hz	380 Hz	442 Hz
Fréquences propres des modes vibratoires associés à un modèle de plaque appuyée ayant les mêmes caractéristiques mécaniques que la face 3	104 Hz mode (1,1)	201 Hz mode (2,1)	319 Hz mode (1,2)	363 Hz mode(3,1)	416 Hz mode (2,2)

Tableau IV.1  
Comparaison entre les modes d'une plaque appuyée et le comportement vibratoire mesurée sur la face 3

Les déformées vibratoires associées aux fréquences propres de la plaque ont été mentionnées. On peut alors vérifier sur les figures A12.6 et A12.7 la prédominance de ces modes sur les déformées mesurées. On en déduit que les modes locaux associés à cette face sont assez peu perturbés par les modes d'ensemble de la boîte.

Les figures A12.8 et A12.9 montrent que le maillage vibratoire permet de représenter correctement les déformées vibratoires mesurées dans toute la bande d'analyse (déformée de la face 3 à 800 Hz et de la face 5 à 975 Hz). Il en est de même sur les autres faces.

On peut conclure ce paragraphe en remarquant que les vitesses quadratiques partielles mesurées sur les faces 1 et 5 (respectivement 2 et 4) sont relativement différentes alors qu'elles sont associées à des surfaces qui ont *a priori* des caractéristiques mécaniques et des conditions aux limites très voisines.

### 3. Prise en compte du sol réfléchissant par la méthode des images

Le champ de pression acoustique rayonné par une structure de géométrie arbitraire posée sur un sol rigide vérifie le système différentiel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{Equation de Helmholtz: } \Delta P(M) + k^2 P(M) = 0 \\ b) \text{Conditions aux limites sur } S: \frac{\partial P(M_s)}{\partial n} = -j\omega\rho_0 V_n(M_s) \\ c) \text{Conditions aux limites sur } \Pi: V_n(z=0) = 0 \\ d) \text{Condition de rayonnement de Sommerfeld: } \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial P(M)}{\partial r} + jkP(M) \right] = 0 \end{array} \right.$$

(IV.1)

où  $\Pi$  est le plan réfléchissant défini par  $z = 0$  et  $\Pi^+$  le demi-espace supérieur ( $z > 0$ ) extérieur à  $S$ .

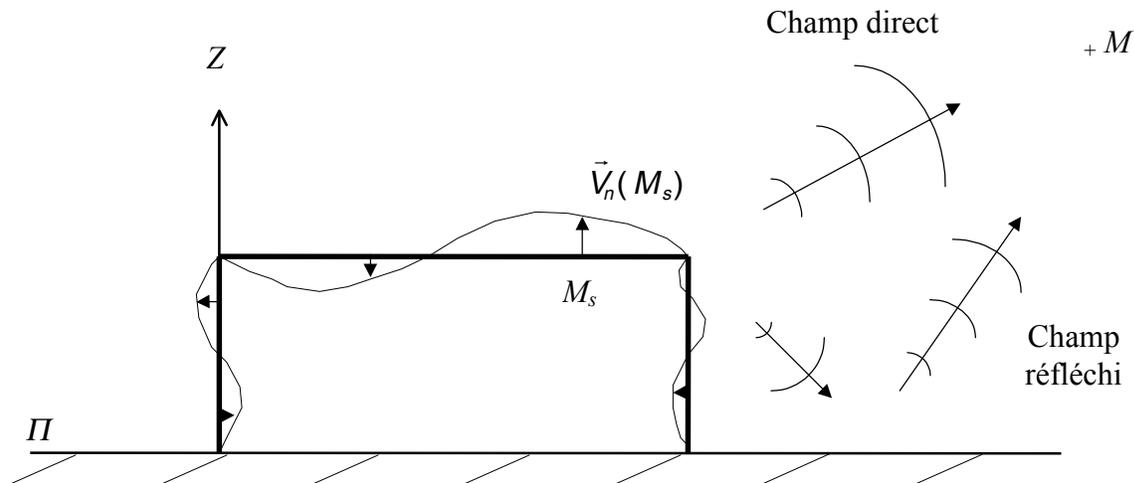


Figure IV.3  
Structure vibrante posée sur un sol réfléchissant

Le champ acoustique en tout point  $M$  de  $\Pi^+$  se décompose en un champ direct rayonné par la surface  $S$  et un champ réfléchi par le plan  $\Pi$  (cf. figure IV.3). Quelle que soit la méthode utilisée, (méthode intégrale ou méthode de la sphère équivalente), la contribution associée au plan réfléchissant ne peut être obtenue simplement puisqu'il ne constitue pas une surface fermée et qu'il est théoriquement de dimensions infinies. Pour se ramener à l'étude d'une surface vibrante fermée qui rayonne en champ libre on applique la méthode des images.

Soient  $S'$  la surface image de  $S$  par rapport au plan  $\Pi$  et  $\Sigma$  la surface fermée fictive définie par la réunion de  $S$  et  $S'$ .

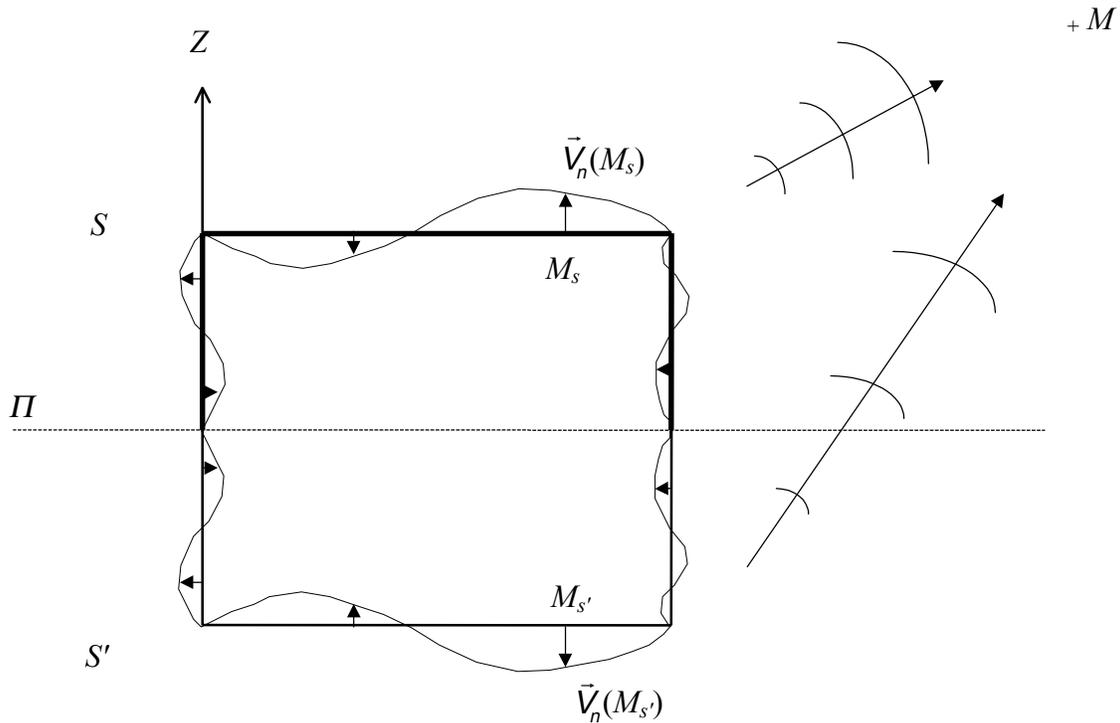


Figure IV.4  
Application de la méthode des images

Si le champ vibratoire sur  $S'$  est également le symétrique du champ vibratoire de  $S$  alors le champ de pression acoustique rayonné par  $\Sigma$  admet le plan  $\Pi$  comme plan de symétrie et vérifie en tout point du demi-espace  $\Pi^+$  le système différentiel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{Equation de Helmholtz : } \Delta P(M) + k^2 P(M) = 0 \\ b) \text{Conditions aux limites sur } S : \frac{\partial P(M_s)}{\partial n} = -j\omega\rho_0 V_n(M_s) \\ c) \text{Condition de rayonnement de Sommerfeld : } \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial P(M)}{\partial r} + jkP(M) \right] = 0 \end{array} \right.$$

(IV.2)

On en déduit qu'il vérifie également l'équation IV.1.c) car la symétrie du champ de pression entraîne que son gradient suivant l'axe  $Oz$  est nul sur le plan  $\Pi$  (i.e.  $V_n(z=0) = 0$ ).

Les systèmes IV.1 et IV.2 décrivent donc la même solution : la méthode des images permet de traduire simplement la contribution du plan réfléchissant en remplaçant la surface  $S$  et le plan  $\Pi$  par la surface  $\Sigma$ . On est alors ramené au calcul du rayonnement acoustique d'une surface vibrante fermée en champ libre.

Conséquences:1) sur la méthode des éléments finis de frontières

On peut appliquer la méthode présentée au chapitre I à partir d'un maillage vibratoire de  $\Sigma$  symétrique par rapport au plan  $\Pi$ . Le champ de pression pariétale étant également symétrique, le nombre d'inconnues du système linéaire peut être divisé par deux en ne calculant que les pressions pariétales sur  $S$ .

2) sur la méthode de la sphère équivalente

La symétrie de  $\Sigma$  par rapport au plan  $\Pi$  entraîne dans un premier temps que le minimum de compacité de  $\Sigma$  est obtenu lorsque le centre de la sphère équivalente appartient au plan  $\Pi$ . On choisira donc le centre de la sphère équivalente sur le sol réfléchissant.

Dans un second temps, si l'axe  $Oz$  de la sphère est choisi normal au plan  $\Pi$ , les relations de symétrie vérifiées par les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  entraînent (cf. annexe 11):

$$\text{si } n+m \text{ impair} : \iint_{\Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} (M_s) V^{mes} (M_s) dS = 0$$

(IV.3)

Toutes les fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  telles que  $n+m$  est impair sont orthogonales au champ de vitesse vibratoire de  $\Sigma$ . Elles ne peuvent donc pas contribuer à la base modale vibratoire de  $\Sigma$ . Seules les fonctions telles que  $n+m$  est pair peuvent contribuer au champ de vitesse vibratoire. Elles seules sont donc prises en compte dans la matrice  $A$ . Remarquons alors qu'elles vérifient:

$$\text{si } n+m \text{ pair} : \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Sigma} \frac{\partial \Psi_{j_1}}{\partial n} (M_s) V^{mes} (M_s) dS = 2 \iint_S \frac{\partial \Psi_{j_1}}{\partial n} (M_s) V^{mes} (M_s) dS \\ \iint_{\Sigma} \frac{\partial \Psi_{j_1}}{\partial n} (M_s) \frac{\partial \Psi_{j_2}}{\partial n} (M_s) dS = 2 \iint_S \frac{\partial \Psi_{j_1}}{\partial n} (M_s) \frac{\partial \Psi_{j_2}}{\partial n} (M_s) dS \end{array} \right.$$

(IV.4)

On en déduit que les coefficients modaux de la sphère équivalente ne dépendent que des points de maillage qui appartiennent à la surface  $S$ . Ils sont donc déterminés en résolvant au sens des moindres carrés le système:

$$Ax = b$$

avec

$$A_{i,j} = \sqrt{\Delta S_i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} (M_i) \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s] \text{ et } j \in [1, \dots, N]$$

$$b_i = \sqrt{\Delta S_i} V^{mes} (M_i) \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s]$$

pour  $M_i \in S$  et  $j$  tel que  $n+m$  est pair

(IV.5)

De manière plus générale, la méthode des images peut être appliquée lorsque la structure n'est pas en contact avec le plan réfléchissant. La surface  $\Sigma$  est alors constituée de deux surfaces sources distinctes  $S$  et  $S'$ . On peut alors remplacer la surface  $S$  par une sphère équivalente  $S_a$  en résolvant le système (I.45) et associer à la surface  $S'$  la sphère  $S'_a$ , image de  $S_a$  par rapport au plan réfléchissant. La pression acoustique rayonnée par  $S$  en présence du plan réfléchissant est obtenue en additionnant la pression acoustique rayonnée par  $S_a$  et  $S'_a$ .

## 4. Comparaison Calculs / Mesures

### 4.1. Caractéristiques de la sphère équivalente utilisée - Résultats

Dans le cas de la boîte, le minimum de compacité est obtenu pour une sphère équivalente placée au centre de la boîte  $\Sigma$  de dimensions  $L_x \times L_y \times 2L_z$ . La sphère inscrite a donc pour rayon  $r_{ins} = \frac{L_x}{2} = 0,205$  m. Lorsque la fréquence varie de 20 à 1000 Hz,  $kr_{ins}$  varie de 0,076 à 3,8. Dès que l'on prend en compte des modes de la sphère équivalente d'ordre  $n$  supérieur à 4 le rayon de cette sphère qui conduit au minimum de conditionnement est  $a = 0,28$  m qui est légèrement supérieur à  $r_{ins}$ . C'est un résultat que l'on a déjà interprété au chapitre I sur des exemples numériques à partir des modes rayonnants et non rayonnants de la sphère équivalente.

Dans un premier temps, la méthode de la sphère équivalente a été appliquée avec les modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à 5 (i.e. les 21 premiers modes). La boîte  $\Sigma$  étant relativement compacte (i.e.  $C = 2,33$ ), la solution obtenue est totalement stable. La figure A12.10 montre en effet que le nombre de conditionnement de la matrice  $A$  est inférieur à dix sur toute la gamme de fréquence. Les figures IV.5 et IV.6 permettent de comparer la mesure et le calcul de la pression acoustique rayonnée par la boîte en différents points dont les coordonnées sont exprimées en mètre dans le repère lié à la boîte (figure IV.1).

En utilisant les 21 premiers modes de la sphère équivalente on obtient donc un spectre de la pression acoustique rayonnée aux points  $M_1$  et  $M_2$  du même ordre de grandeur que ceux donnés par la mesure et par la méthode intégrale. La figure IV.7a montre en particulier que la différence entre la puissance acoustique calculée par les deux méthodes est inférieure à 5 dB sur toute la gamme de fréquence étudiée.

A partir d'un maillage vibratoire identique, on résout dans un cas un système à 425 inconnues et dans l'autre un système à 21 inconnues. Rappelons que le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un système linéaire est en général proportionnel au cube du nombre d'inconnue du système<sup>(53)</sup>. Dans le cas de la boîte, le rapport 20 entre les nombres d'inconnues permet de passer, pour chaque fréquence, d'une heure de calcul à quelques secondes. Le calcul des coefficients de la matrice à inverser est également beaucoup plus rapide dans le cas de la méthode de la sphère équivalente.

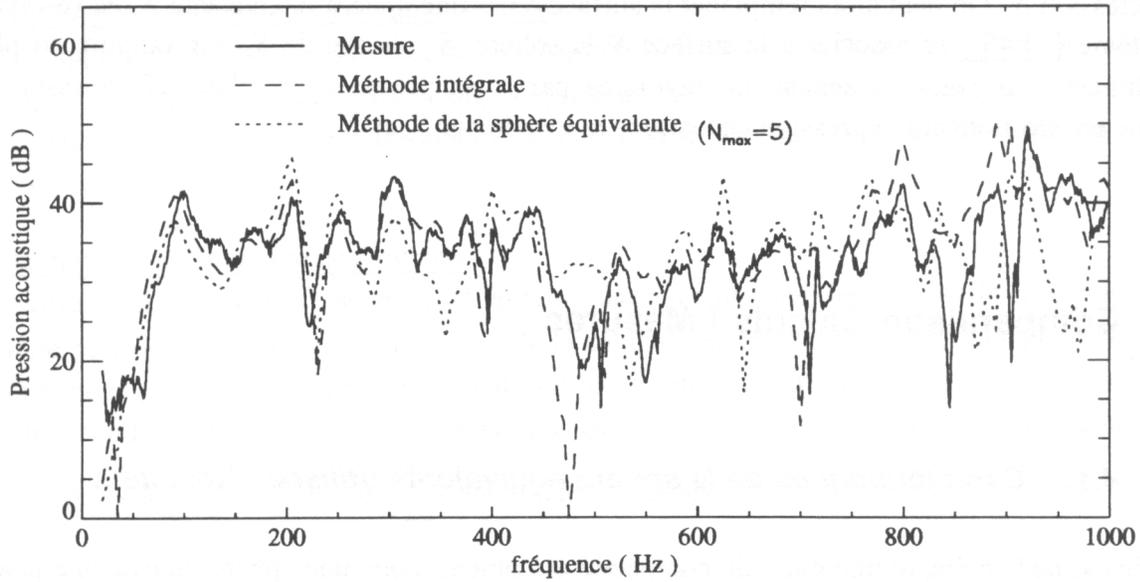


Figure IV.5  
 Comparaison calculs/mesures pour la pression acoustique rayonnée par la boîte  
 au point  $M_1(-0,33;2,30;2,37)$

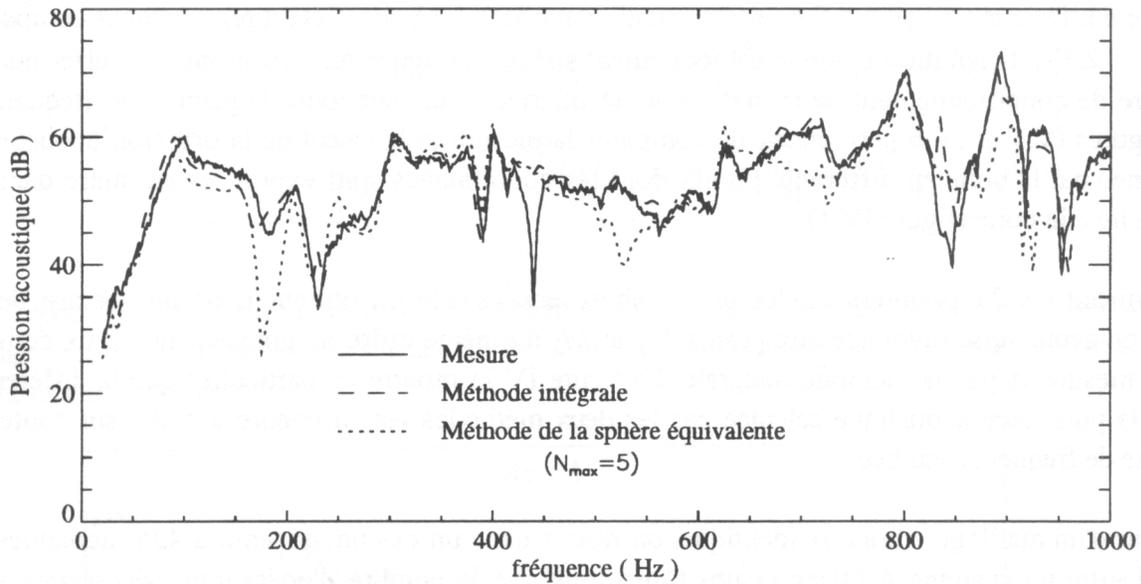


Figure IV.6  
 Comparaison calculs/mesures pour la pression acoustique rayonnée par la boîte  
 au point  $M_2(-0,10;0,40;0,40)$

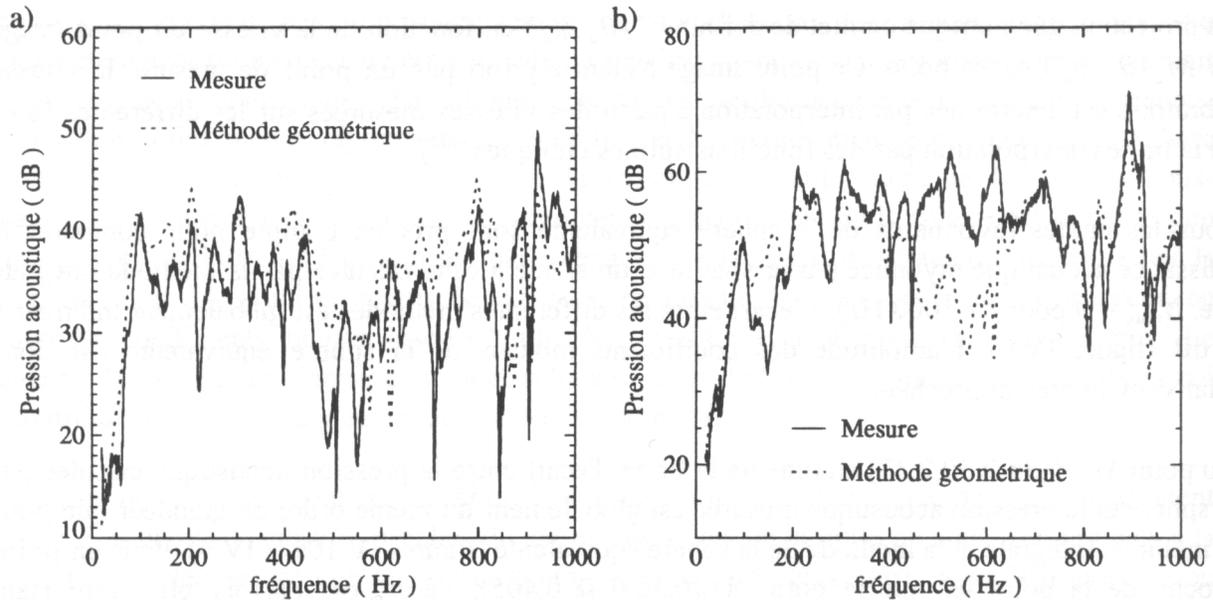


Figure IV.7

Calcul de la puissance acoustique rayonnée par la boîte  
 a) par la méthode intégrale et la méthode de la sphère équivalente  
 b) par la méthode de la sphère équivalente pour différentes valeurs de  $N_{\max}$

#### 4.2. Analyse du modèle de la sphère équivalente

##### Critères d'erreur $e_2$ , $e_{\max}$ et $e_1$

La valeur des paramètres  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$  associés au modèle à 21 modes est représentée en fonction de la fréquence sur la figure A12.11. L'erreur quadratique est comprise entre 50 et 95 % sur toute la gamme d'analyse. Elle devient inférieure à 80 % si on prend en compte les modes de la sphère équivalente jusqu'à l'ordre  $N_{\max} = 8$  (i.e. 45 premiers modes) (figure A12.12).

Le modèle à 21 modes est donc stable et traduit relativement bien le rayonnement acoustique de la boîte alors que l'erreur quadratique est encore importante. Les coefficients modaux associés aux modes rayonnants de la sphère équivalente ont donc convergé rapidement. La puissance acoustique rayonnée par la sphère est en effet peu modifiée lorsque l'on considère les modes jusqu'à l'ordre  $N_{\max} = 8$  (figure IV.7b). Les nouveaux modes pris en compte ne modifient que très peu la contribution des 21 premiers, en particulier en dessous de 500 Hz. Comme dans les exemples du paragraphe III.2, l'erreur quadratique reste élevée car la vitesse vibratoire sur la boîte admet des variations plus rapides que la longueur d'onde acoustique. Seuls des modes d'ordre  $n$  et  $m$  élevés de 1 à la sphère permettraient de reconstituer entièrement le champ de vitesse. Ces modes apportent cependant une contribution négligeable à la puissance acoustique rayonnée.

### Cas d'un point d'écoute proche d'une face de la boîte

La pression acoustique mesurée en un point proche d'une face de la boîte dépend essentiellement de la reconstitution de la vitesse vibratoire sur cette face. C'est le cas par exemple pour le point  $M_3$  de coordonnées (0,36;0,48;0,405) qui est situé à 10 cm au dessus de la face 3. A 240 Hz, le champ de vitesse sur cette face est dominé par le mode (1,2). La figure A12.14 montre que la vitesse vibratoire calculée à partir des 21 premiers modes de la sphère équivalente est assez proche de cette déformée. A cette fréquence, la différence entre la pression acoustique mesurée et calculée au point  $M_3$  est inférieure à 2 dB (figure A12.13). La figure A12.15 montre en revanche que le champ de vitesse mesuré sur la face 3 à 625 Hz est proche d'un mode (1,4) qui n'est pas traduit par les 21 premiers modes de la sphère équivalente. On constate alors un écart supérieur à 10 dB entre la pression acoustique calculée et mesurée. En prenant en compte tous les modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à 8 la figure A12.16 montre que la vitesse est un peu mieux reconstruite. L'écart entre la pression acoustique calculée et mesurée est alors inférieure à 5 dB.

Pour un point proche de la structure, tous les modes de la sphère équivalente sont rayonnants. La reconstruction du champ de vitesse vibratoire est donc une condition nécessaire pour assurer la précision du rayonnement acoustique de la sphère. Les erreurs quadratique, moyenne et maximum sont alors des critères tout à fait pertinents.

### Troncature de la base modale liée au maillage vibratoire

On a montré au chapitre II que la solution du système linéaire discret sera proche de la solution du système linéaire continu si le maillage vibratoire traduit correctement les oscillations des modes de  $S_a$  pris en compte. La limite imposée par le maillage n'est cependant pas accessible *a priori* puisque

l'on ne connaît pas les variations des fonctions  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$ . On a alors proposé de déterminer cette limite *a posteriori* en comparant la vitesse quadratique calculée à partir du maillage initial de la boîte à la vitesse quadratique calculée à partir d'un surmaillage de la boîte. En effet, si le maillage est suffisamment dense, la solution du système linéaire discret ne doit pas admettre d'oscillations importantes entre les points de maillage. Les vitesses quadratiques calculées à partir du maillage et du surmaillage doivent donc être très proches.

On définit ainsi sur la boîte un surmaillage tel que le nombre de points de maillage est multiplié par trois. Si on prend en compte les 120 premiers modes de  $S_a$  (i.e.  $N_{\max} = 14$ ), les vitesses quadratiques partielles calculées sur les faces 2 et 4 à partir du surmaillage admettent un écart compris entre 15 et 20 dB par rapport aux vitesses quadratiques mesurées (figure A12.17). La figure A12.18 permet de comparer le champ de vitesse généré par les 50, 80 et 100 premiers modes de  $S_a$  sur la face 4 à 200 Hz. Elle montre que des oscillations ont lieu entre les points de maillage situé le long de l'axe  $OY$  de la plaque (i.e. axe appartenant au plan du sol). On en déduit que ce sont les modes sous-échantillonnés sont des modes qui admettent des variations rapides suivant l'angle  $\varphi$  (i.e. les modes dont l'ordre  $m$  est élevé). On peut en effet montrer que les oscillations apparaissent lorsque l'on fait intervenir les ordres  $m$  supérieurs à 11. Comme dans le cas de la boîte étudiée au chapitre III, cette limite s'explique simplement à partir du critère d'échantillonnage des fonctions harmonique sphériques (i.e. relations (III.49) et (III.50)). Sur l'ensemble de la boîte, l'angle maximum  $\Delta\varphi_{\max}$  - défini à partir du centre de la sphère - qui sépare deux points de maillage "consécutifs" est situé précisément au centre de l'arête de la face 4 en contact avec le sol (ou au centre de l'arête de la face 2 par symétrie du maillage).

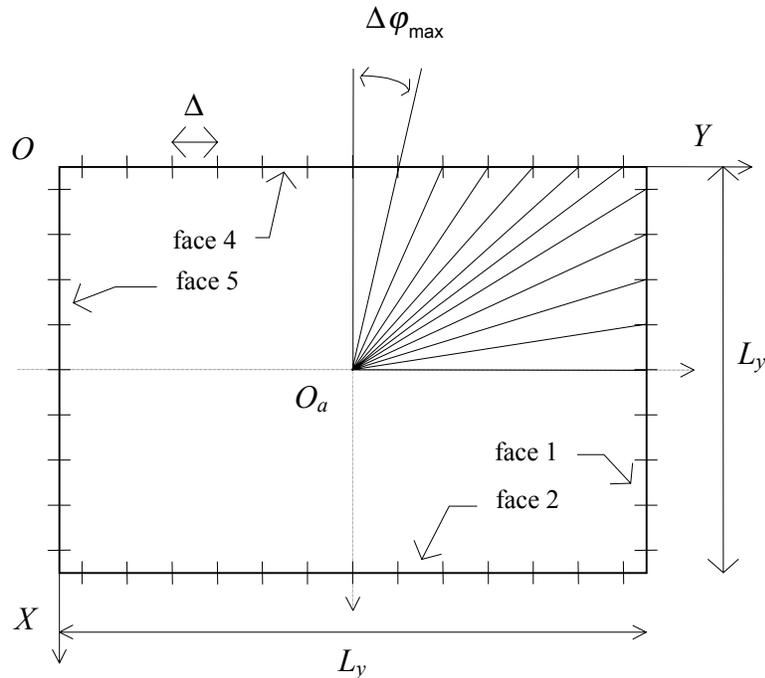


Figure IV.8  
Représentation du maillage vibratoire dans le plan  $Z = 0$

On en déduit:

$$\Delta \varphi_{\max} = \text{Arctan} \frac{2\Delta}{L_x}$$

(IV.6)

c'est-à-dire, en appliquant la relation (III.49) :

$$N_{\max} \leq \frac{\pi}{\text{Arctan} \frac{2\Delta}{L_x}} - \frac{1}{2}$$

(IV.7)

Le pas de maillage suivant l'axe  $OY$  est de 5 cm . Avec  $L_x = 0,410$  m, on obtient  $N_{\max} \leq 12$  qui correspond à la limite observée.

Lorsque le nombre de modes sous-échantillonnés augmente, la vitesse vibratoire calculée par la sphère se rapproche de la vitesse mesurée aux points de maillage mais admet une amplitude de plus en plus grande entre certains points du maillage. Les coefficients modaux associés aux modes sous-échantillonnés sont alors mal évalués. S'ils sont rayonnants, nous avons vu au paragraphe 2 du chapitre III dans le cas d'une sphère vibrante, que le rayonnement acoustique de la sphère équivalente peut devenir rapidement très différent du rayonnement acoustique de la structure. S'ils ne sont pas rayonnants, la divergence est plus lente. En effet, lorsque le nombre de modes sous-échantillonnés est faible, les petites oscillations présentes entre les points du maillage de mesure ne

modifient pas fondamentalement la contribution des modes rayonnants. Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente est alors identique à celui obtenu en ne prenant pas en compte les modes sous-échantillonnés. Quand les oscillations deviennent très importantes, la contribution des modes rayonnants est modifiée et le rayonnement acoustique de la sphère équivalente ne correspond plus à celui de la structure vibrante. Lorsque les modes sous-échantillonnés ne sont pas rayonnants, le rayonnement acoustique de la sphère est donc un peu plus robuste. La figure A12.19 montre par exemple que la pression acoustique calculée par la sphère au point  $M_3$ , situé au dessus de la face 3, est proche de la mesure même si on prend en compte les coefficients modaux jusqu'à l'ordre  $N_{\max} = 14$  (i.e. 120 modes pris en compte). Le problème de sous-échantillonnage est en effet lié aux faces 2 et 4 et fait intervenir des modes qui ne contribuent pas au rayonnement acoustique au point  $M_3$ .

Afin de simplifier le déplacement du robot, le maillage vibratoire de la boîte n'est pas totalement régulier. Les points de mesures proches du sol et des arêtes de la boîte ne sont pas associés à la même surface élémentaire que les autres points (i.e. rapport deux entre la surface associée au point proches des arêtes et les points du centre d'une face). Nous avons cependant constaté que le rayonnement acoustique de la sphère équivalente est très peu modifié si l'on affectait la même surface à chaque point du maillage. Il suffit donc que le maillage soit suffisamment dense et uniforme sur la structure pour que la solution soit stabilisée.

Notons enfin que le maillage de la boîte est suffisant pour décrire la déformée vibratoire et appliquer la méthode intégrale. En revanche, si l'on veut améliorer la précision du modèle en augmentant le nombre de modes de la sphère équivalente, il faut d'abord augmenter le nombre de points de maillage. Une méthode d'interpolation de type "spline cubique" peut être appliquée pour utiliser les données de vitesse existantes.

## 5. Application de la méthode géométrique

L'approche géométrique présentée au paragraphe 2.3 du chapitre I est appliquée en projetant le champ de vitesse mesuré sur la boîte  $\Sigma$  de dimensions  $L_x \times L_y \times 2L_z$  suivant les rayons d'une sphère de même centre que  $\Sigma$  et de rayon  $a = \frac{r_{ins} + r_{cir}}{2} \approx 0,34\text{m}$ . Le plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  est un plan de symétrie pour la boîte  $\Sigma$ , pour le champ de vitesse vibratoire de  $\Sigma$  et pour les fonctions harmoniques sphériques associée à la sphère équivalente. Les coefficients modaux de cette sphère vérifient donc:

$$V_{nm\sigma}^a = \begin{cases} 2 \int_{\varphi_a=0}^{2\pi} \int_{\theta_a=0}^{\pi/2} V^a(\theta_a, \varphi_a) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_a, \varphi_a) \sin\theta_a d\theta_a d\varphi_a & \text{si } n+m \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n+m \text{ est impair} \end{cases}$$

(IV.8)

où  $V^a(\theta_a, \varphi_a)$  est la vitesse vibratoire au point  $M_a(\theta_a, \varphi_a)$  de la sphère.

La projection géométrique permet de définir  $V^a(\theta_a, \varphi_a)$  en fonction de la vitesse du point image de  $M_a(\theta_a, \varphi_a)$  sur la boîte. Ce point image n'étant a priori pas un point de mesure, la vitesse vibratoire est déterminée par interpolation à partir des vitesses mesurées sur les différentes faces de la boîte (interpolation par des fonctions splines cubiques<sup>(53)</sup>).

Tous les modes rayonnants de la sphère équivalente sont pris en compte pour comparer la puissance acoustique rayonnée par la sphère équivalente à celle calculée par la méthode intégrale (i.e.  $N_{\max} = 9$  pour  $f = 1000$  Hz). L'écart entre les différentes méthodes est globalement inférieur à 5 dB (figure IV.9). L'amplitude des coefficients modaux de la sphère équivalente est donc relativement bien approchée.

Au point  $M_1(-0,33;2,30;2,37)$  éloigné de la boîte, l'écart entre la pression acoustique calculée par la sphère et la pression acoustique mesurée est globalement du même ordre de grandeur que pour la méthode intégrale et la méthode de la sphère équivalente (figures IV.10a et IV.4). Pour un point proche de la boîte tel que le point  $M_3(0,36;0,48;0,405)$ , l'écart est parfois plus important (figure IV.10b).

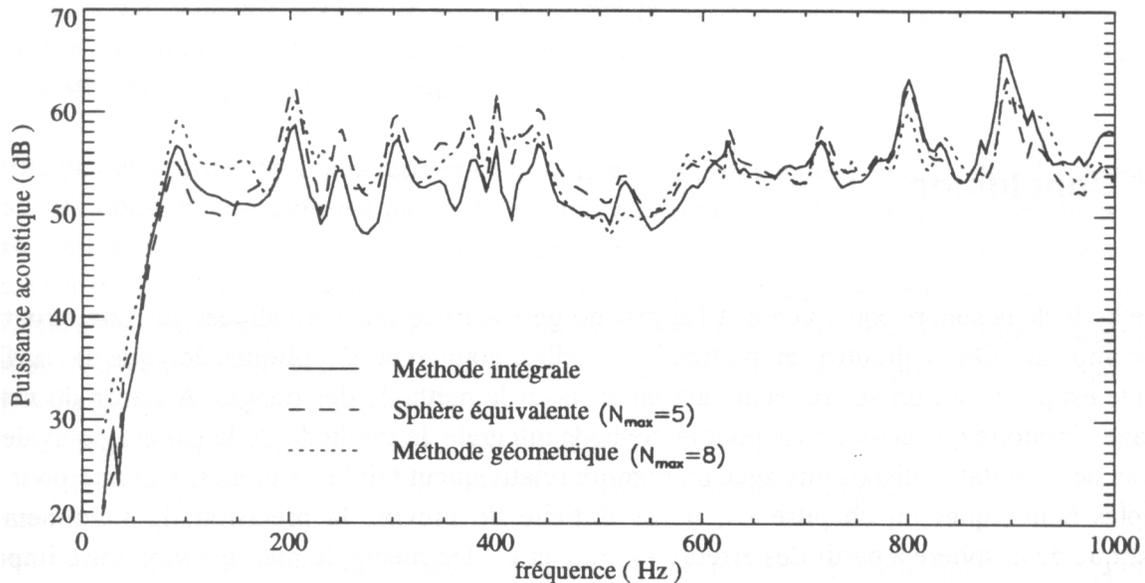


Figure IV.9  
 Comparaison des différentes méthodes  
 pour le calcul de la puissance acoustique rayonnée par la boîte

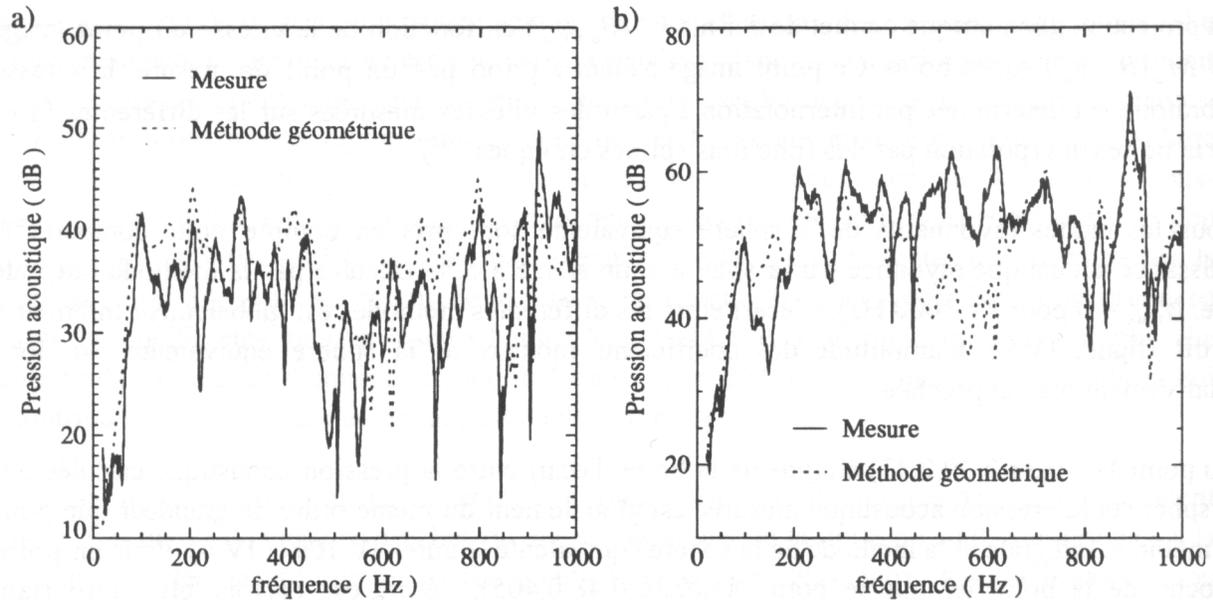


Figure IV.10  
 Comparaison des différentes méthodes  
 pour le calcul de la pression acoustique rayonnée par la boîte aux points :  
 a)  $M_1(-0,33;2,30;2,37)$   
 b)  $M_3(0,36;0,48;0,405)$   
 ( $N_{\max} = 9$ )

## 6. Conclusion

La méthode de la sphère équivalente et l'approche géométrique ont été validées sur une structure semi-complexe. On a montré en particulier qu'elles pouvaient s'appliquer lorsque la surface vibrante est posée sur un sol réfléchissant en utilisant la méthode des images. A partir du même maillage vibratoire que celui utilisé pour la méthode intégrale, la méthode de la sphère équivalente a donné des résultats satisfaisants avec un nombre relativement faible de modes. Comme pour les exemples numériques du chapitre III, il est difficile de prévoir la précision du rayonnement acoustique de la sphère à partir des erreurs  $e_2$ ,  $e_{\max}$  et  $e_1$ . De même, le maillage vibratoire impose une limite pour l'ordre maximum de modes de la sphère équivalente pris en compte. Au delà de cette limite, certains modes sont sous-échantillonnés. Ces modes n'étant pas rayonnants dans la gamme de fréquence étudiée, le rayonnement acoustique de la sphère est cependant moins sensible au sous-échantillonnage que la sphère pulsante étudiée au chapitre III.

## CHAPITRE V

### Conclusions et perspectives

#### 1. Synthèse des conclusions

Les différentes méthodes numériques qui permettent de prévoir le rayonnement acoustique des structures vibrantes ont été rappelées dans le premier chapitre. Lorsqu'elles s'appuient sur une discrétisation de type éléments finis ou éléments finis de frontières, elles nécessitent des moyens informatiques importants. Depuis la fin des années quatre-vingt, de nombreuses méthodes ont été développées à partir du principe des sources équivalentes. Des articles parus récemment dans différentes revues spécialisées<sup>(30,31)</sup> confirment l'intérêt porté à ces méthodes inverses qui consistent à remplacer la structure vibrante par des sources acoustiques simples (i.e. monopôles et dipôles). L'amplitude de ces sources est déterminée en minimisant l'écart entre le champ de vitesse vibratoire mesuré sur la structure et le champ de vitesse calculé par ces sources à la surface de la structure. L'intérêt de la méthode réside dans le faible nombre de sources équivalentes qui peut être nécessaire pour modéliser le rayonnement acoustique de la structure. Le nombre minimum ainsi que la position optimale de ces sources ne sont cependant pas connus pour une structure de géométrie complexe.

Le principe des sources équivalentes a été appliqué au cas d'une sphère en calculant le champ de vitesse vibratoire de la structure à partir des modes de rayonnement de la sphère (méthode de la sphère équivalente) ou en projetant directement sur la sphère équivalente le champ de vitesse mesuré sur la structure (approche géométrique). Dans le premier cas, le système linéaire que l'on est amené à résoudre s'appuie sur une discrétisation de la surface vibrante qui impose de connaître la surface élémentaire et la normale à la structure associées à chaque point du maillage. Les paramètres importants du modèle sont alors:

- a) la position et le rayon de la sphère équivalente,
- b) le maillage vibratoire et le nombre de modes de rayonnement de la sphère équivalente pris en compte,
- c) le conditionnement du système linéaire et les critères d'erreur qui caractérisent la reconstruction du champ de vitesse vibratoire.

Différents critères ont été présentés pour guider le choix de la sphère équivalente en fonction de la structure et du maillage vibratoire. Ils ont été validés sur des structures simples et ont permis d'interpréter les variations du conditionnement et des erreurs en fonction des paramètres qui définissent la sphère équivalente.

## 2. Validations et solutions proposées

La méthode de la sphère équivalente et l'approche géométrique ont été validées sur des structures simples : une plaque rectangulaire insérée dans un baffle, une sphère et une boîte. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par une méthode analytique ou par une méthode d'éléments finis de frontière sur les niveaux de pression et de puissance acoustique et sur la directivité de rayonnement acoustique. Pour la méthode de la sphère équivalente on a ainsi pu mettre en évidence les résultats suivants:

- a) En distinguant la contribution des modes rayonnants et des modes non rayonnants de la sphère équivalente, on a montré que le conditionnement du système linéaire était lié à la compacité de la structure. Le centre de la sphère équivalente doit être choisi de manière à rendre minimal le rapport entre le rayon de la sphère circonscrite et le rayon de la sphère inscrite dans la structure. Dans le cas de structures simples (i.e. sphère et boîte), le rayon de la sphère équivalente qui conduit au modèle le plus stable est proche du rayon de la sphère inscrite. Il correspond à une distance de propagation minimale pour les modes non rayonnants de la sphère équivalente et se traduit par un équilibrage optimal du système linéaire.
- b) On a par ailleurs exprimé analytiquement les coefficients modaux de la sphère équivalente en fonction de la vitesse vibratoire et de la pression acoustique à la surface de la structure. L'ordre maximum des modes de la sphère équivalente qui contribuent au rayonnement acoustique de la structure augmente avec la fréquence et le rayon de la sphère circonscrite à la structure. Les modes d'ordre élevés de la sphère équivalente admettent également une directivité très marquée et la densité du maillage vibratoire nécessaire pour traduire les différents lobes de directivité devient un paramètre très important. Lorsque la structure est de géométrie complexe, le nombre de points de maillage vibratoire peut devenir bien plus important que celui nécessaire pour appliquer une méthode d'éléments finis de frontière (en particulier aux points de la structure les plus proches de la sphère). Pour un maillage vibratoire donné, un critère simple a été présenté qui permet de définir les modes de rayonnement de la sphère équivalente que l'on peut déterminer. Il a été validé dans le cas d'une boîte aux chapitres III et IV. Différentes solutions ont également été proposées pour valider *a posteriori* la qualité du maillage vibratoire en fonction des modes pris en compte.
- c) Les méthodes inverses conduisent en général à des systèmes linéaires mal conditionnés où la stabilité de la solution par rapport aux erreurs numériques (i.e. erreurs d'arrondis liées au calculateur) et par rapport aux variations des composantes du système n'est pas assurée. Le rayonnement acoustique de la sphère équivalente peut néanmoins être stable et approcher correctement le rayonnement acoustique de la structure. A partir d'hypothèses simples sur les propriétés statistiques vérifiées par les erreurs de mesure, la solution du système linéaire peut être interprétée comme une variable aléatoire dont on peut calculer la variance. Pour que le modèle de la sphère équivalente soit stable, il suffit donc que les modes de la sphère équivalente qui contribuent au rayonnement acoustique de la structure soient stables (i.e. associés à une variance faible).

Différents critères d'erreur qui caractérisent l'écart entre le champ de vitesse mesuré et le champ de vitesse calculé par la sphère équivalente ont également été définis. Le rayonnement acoustique de

la sphère équivalente est *a priori* d'autant plus proche de celui de la structure que les conditions aux limites de vitesse vérifiées par les deux sources sont voisines. L'interprétation de ces critères s'avère cependant difficile. D'une part, l'écart entre les deux champs de vitesse peut être faible sans que le rayonnement acoustique de la sphère soit proche de celui de la structure (i.e. problème lié au maillage vibratoire). D'autre part, cet écart peut être élevé alors que le rayonnement acoustique de la sphère est proche de celui de la structure (i.e. problème lié au calcul des composantes vibratoires non rayonnantes de la structure).

L'approche géométrique permet d'éviter l'inversion du système linéaire. Elle conduit à des résultats satisfaisants sur des structures simples (i.e. une plaque rectangulaire insérée dans un baffle rigide et un cube) tant que l'écart entre la structure et la sphère est inférieur d'une part à la longueur d'onde acoustique et, d'autre part, à la longueur d'onde vibratoire qui caractérise les modes de la sphère équivalente pris en compte dans le modèle. La projection peut cependant s'avérer difficile à définir lorsque la structure est de géométrie complexe.

La méthode de la sphère équivalente et l'approche géométrique ont été validées à partir de données vibratoires mesurées sur une boîte posée sur un sol réfléchissant. On a montré que l'on pouvait prendre en compte le sol réfléchissant en appliquant la méthode des images. Le modèle de la sphère équivalente confirme les résultats établis sur les exemples numériques. Il conduit à des résultats comparables à ceux obtenus par une méthode intégrale ou par la mesure, avec un nombre de modes relativement faible. Si les temps de calcul sont notablement réduits, les critères d'erreurs semblent également insuffisants pour interpréter et prévoir la qualité du modèle.

### 3. Perspectives

La méthode de la sphère équivalente et l'approche géométrique ont montré leur intérêt en terme de temps de calcul en permettant d'approcher le rayonnement acoustique de structures de géométries simples à partir d'un faible nombre de modes de la sphère. Elles apportent également une autre représentation du rayonnement acoustique de la structure vibrante qui peut simplifier l'analyse de ce rayonnement (i.e. structure vibrant comme une sphère pulsante, comme une sphère oscillante, ...).

Pour traiter des structures plus complexes (i.e. structures non compactes, non convexes, ...), la convergence de la méthode de la sphère équivalente devient lente. Le système linéaire devient également mal conditionné et les erreurs de mesures sur la vitesse vibratoire rendent la solution instable. Le modèle de la sphère équivalente ne peut plus être appliqué ou conduit à un temps de calcul supérieur à celui nécessaire pour appliquer une méthode intégrale.

Dans un premier temps, on peut choisir une source équivalente plus complexe que la sphère telle que le sphéroïde. Il permettrait en particulier de traiter le cas de structures élancées. Le rayonnement acoustique de cette structure est plus complexe à interpréter que celui de la sphère car les modes rayonnants et non rayonnants dépendent désormais des dimensions du sphéroïde suivant ses trois

axes principaux. Le choix de ces dimensions s'effectuerait *a priori* de la même manière que dans le cas de la sphère en choisissant un sphéroïde inscrit dans la structure.

Dans un deuxième temps, on peut choisir de prendre en compte plusieurs sphères équivalentes (ou plusieurs sphéroïdes équivalents). La vitesse vibratoire en tout point de la structure est déterminée par la contribution de toutes les sources. Le système linéaire que l'on est amené à résoudre est explicité en annexe 13 dans le cas de plusieurs sphères. Il est résolu dans le cas d'une boîte de dimensions  $2L \times L \times L$  pour une déformée vibratoire simple. Cet exemple montre que la convergence peut être plus rapide avec un modèle à deux sphères équivalentes qu'avec une seule sphère. Un certain nombre de résultats obtenus dans le cadre de la méthode de la sphère équivalente peuvent également être transposés. En augmentant le nombre de sphères équivalentes, le système linéaire devient plus rapidement instable et demande un nombre de points de maillage plus important. Il faut donc trouver un compromis entre cette instabilité et une convergence plus rapide vers le champ de vitesse de la structure.

## Annexe 1

### Rappel des propriétés des fonctions de Legendre et des fonctions de Hankel sphériques

#### 1. Fonctions de Legendre

##### 1.1. D définition

On appelle fonction de Legendre d'ordre  $n$  et de degré  $m$  la fonction  $P_{mn}$  définie sur l'intervalle  $I = [-1, 1]$  qui est solution de l'équation différentielle <sup>(2)</sup>:

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)f(x) = 0$$

(A1.1)

où  $m$  et  $n$  sont deux entiers.

C'est une équation différentielle de type Sturm-Liouville obtenue en résolvant l'équation d'onde par la méthode de séparation des variables dans le cas des coordonnées sphériques avec  $x = \cos\theta$  et  $\theta \in [0, \pi]$ .

##### 1.2. Cas particulier $m = 0$

L'équation différentielle devient:

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0$$

(A1.2)

Les fonctions  $f(x) = 1$  et  $f(x) = x$  sont les solutions de cette équation associées respectivement aux entiers  $n = 0$  et  $n = 1$ . On note donc  $P_0(x) = 1$  et  $P_1(x) = x$ . On montre alors aisément que pour tout  $x \in I$  et  $n > 0$ , les fonctions  $P_{mn}(x) = P_{0n}(x) = P_n(x)$  solutions de l'équation différentielle ci-dessus vérifient la relation de récurrence:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

(A1.3)

La fonction  $P_n$  est donc un polynôme de degré  $n$  en  $x$  appelé *polynôme de Legendre*. Elle possède  $n$  zéros compris entre  $-1$  et  $1$  et vérifient pour tout entier  $n$ :  $P_n(1) = 1$  et  $P_n(x) \in [-1, 1]$ . Elle admet la même parité que  $n$ :  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ .

En posant  $x = \cos \theta$ , on peut exprimer le polynôme  $P_n$  sous la forme:

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{4^n} \binom{2m}{m} \binom{2n-2m}{n-m} \cos^{n-2m}\theta$$

(A1.4)

où  $\binom{k}{l} = \frac{k!}{(k-l)!l!}$

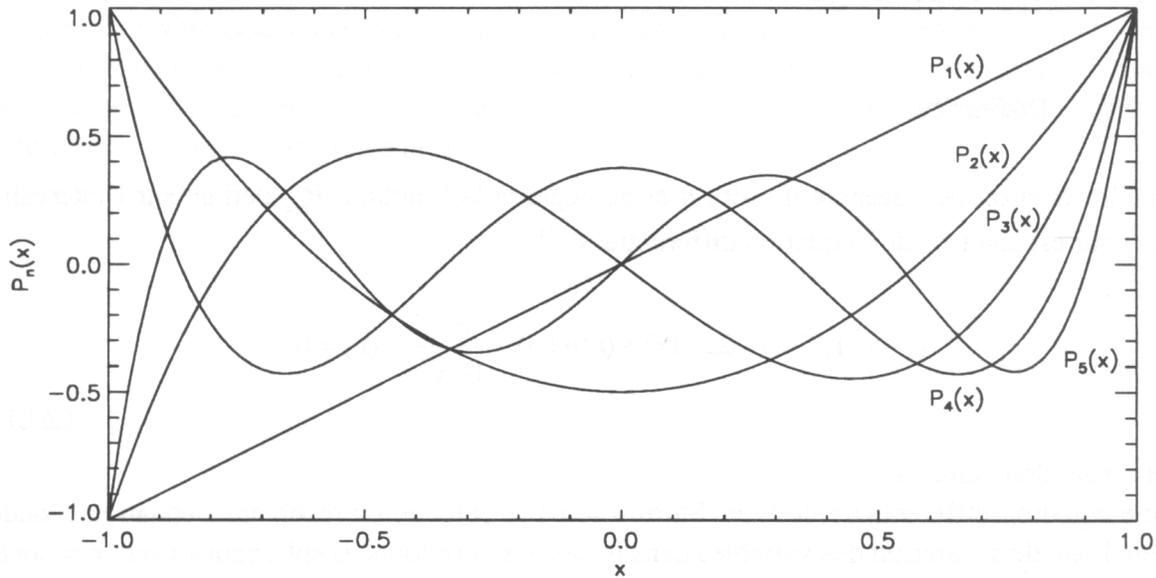


Figure A1.1  
Polynômes de Legendre  $P_n(x)$  pour  $x \in [-1, 1]$

### 1.3. C as général

On définit  $P_{mn}$  en fonction du polynôme de Legendre  $P_n$  par:

$$P_{mn}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m(P_n(x))}{dx^m}$$

(A1.5)

Pour  $m \leq n$ , on en déduit que  $P_{mn}$  est une fonction de même parité que  $m+n$ , ayant  $n-m$  zéros dans  $]-1, 1[$ . Pour  $m > n$ ,  $P_{mn}$  est identiquement nulle. D' autre part, quels que soient  $m$  et  $n$ :  $P_{mn}(-1) = P_{mn}(1) = 0$ . Sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , les fonctions de Legendre vérifient:

$$\int_{-1}^1 P_{mn}(x) P_{ml}(x) dx = \frac{2\delta_{nl}}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

(A1.6)

On en déduit que les fonctions  $\bar{P}_{mn}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{mn}(x)$  associées au produit scalaire  $\langle u, v \rangle_{[-1,1]} = \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$  forment une base orthonormée sur  $[-1,1]$ .

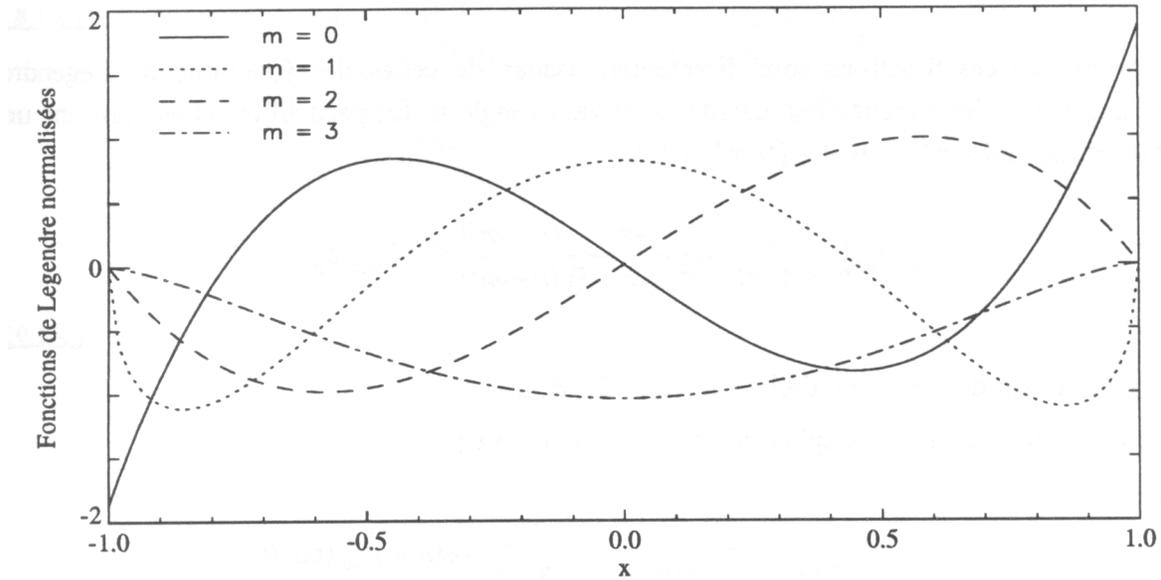


Figure A1.2  
Fonctions de Legendre normalisées pour  $n = 3$  et  $m$  variant de 0 à 3

#### 1.4. Calcul numérique de $P_{mn}(x)$

Le calcul des fonctions de Legendre fait intervenir les trois relations de récurrence suivantes:

- $P_{mm}(x) = (-1)^m (2m-1)!! (1-x^2)^{m/2}$
- $P_{m,m+1}(x) = x(2m+1)P_{mm}(x)$
- $(n-m)P_{mn}(x) = (2n-1)xP_{m,n-1}(x) - (n+m-1)P_{m,n-2}(x)$

(A1.7)

où  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$

C'est la méthode préconisée par <sup>(53)</sup>. Notons que l'amplitude des fonctions de Legendre augmente très rapidement avec l'ordre  $n$ . Pour une valeur de  $n$  donnée, le maximum est atteint par  $|P_{nn}(0)| = (2n-1)!!$  (i.e.  $|P_{20,20}(0)| \approx 3,210^{23}$ ).

### 1.5. Application : étude des fonctions harmoniques sphériques $Y_{nm}^\sigma$

Par définition, on note:

$$Y_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) = \begin{cases} \cos(m\varphi)P_{mn}(\cos\theta) & \text{si } \sigma = 1 \\ \sin(m\varphi)P_{mn}(\cos\theta) & \text{si } \sigma = 0 \end{cases}$$

(A1.8)

Les propriétés de ces fonctions sont directement issues de celles des fonctions de Legendre suivant l'angle  $\theta$  et des fonctions sinusoïdales suivant l'angle  $\varphi$ . En particulier, elles forment un ensemble orthogonal sur l'intervalle  $[0, \pi] \times [0, 2\pi[$ :

$$\langle Y_{nm}^\sigma, Y_{\nu\mu}^\tau \rangle_{[0, \pi] \times [0, 2\pi[} = \frac{4\pi}{\varepsilon_m(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \delta_{n,\nu} \cdot \delta_{m,\mu} \cdot \delta_{\sigma,\tau}$$

(A1.9)

où  $\varepsilon_m$  est le facteur de Neumann défini par  $\varepsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$ .

Soit  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  la fonction harmonique sphérique normalisée définie par:

$$\bar{Y}_{nm}^{-\sigma} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot Y_{nm}^\sigma = \begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2\pi}} \cos(m\varphi) \bar{P}_{mn}(\cos\theta) \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2\pi}} \sin(m\varphi) \bar{P}_{mn}(\cos\theta) \end{cases}$$

(A1.10)

Les fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  forment un ensemble orthonormé sur  $[0, \pi] \times [0, 2\pi[$ .

#### Propriétés:

- Les  $n-m$  zéros de la fonction  $P_{mn}$  se traduisent par  $n-m$  cercles nodaux perpendiculaires à l'axe Oz. Les  $2m$  zéros associés aux fonctions sinusoïdales se traduisent également par  $2m$  cercles nodaux qui contiennent l'axe OZ.
- Suivant l'angle  $\theta$ , on ne connaît pas l'expression analytique des zéros de  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  alors que suivant l'angle  $\varphi$  ils sont régulièrement répartis entre 0 et  $2\pi$ .

Les figures A1.3 à A1.6 illustrent les oscillations des fonctions  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  lorsque les angles  $\theta$  et  $\varphi$  parcourent  $[0, \pi] \times [0, 2\pi[$  pour différents triplets  $(n, m, \sigma)$ . En tout point  $M_i$  de coordonnées  $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ , ces figures représentent la fonction  $\bar{Y}_{nm}^\sigma$  sous la forme:

$$r_i = 1 + \frac{1}{2} \frac{\bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i)}{\text{Max}\{\bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta_i, \varphi_i), i = 1, 2, \dots\}}$$

(A1.11)

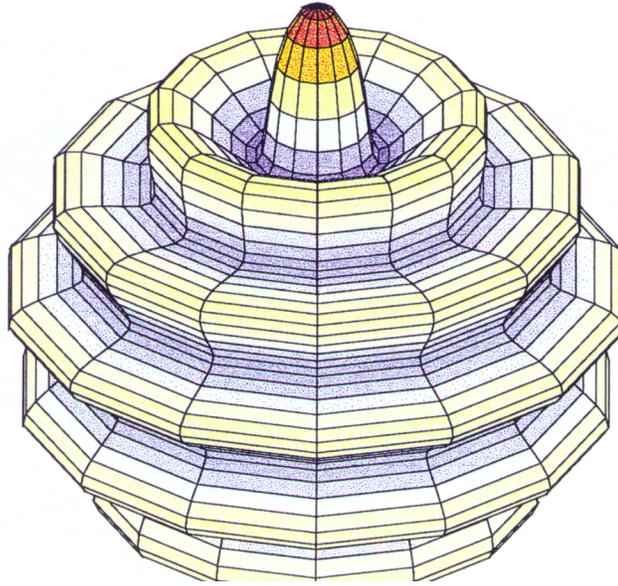


Figure A1.3  
Représentation de la fonction  $\bar{Y}_{13,0}^1$

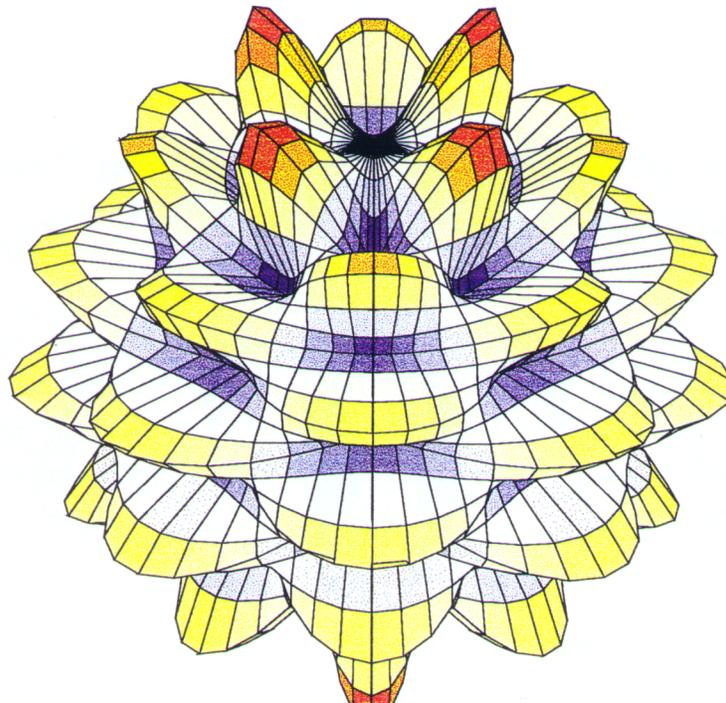


Figure A1.4  
Représentation de la fonction  $\bar{Y}_{13,4}^1$

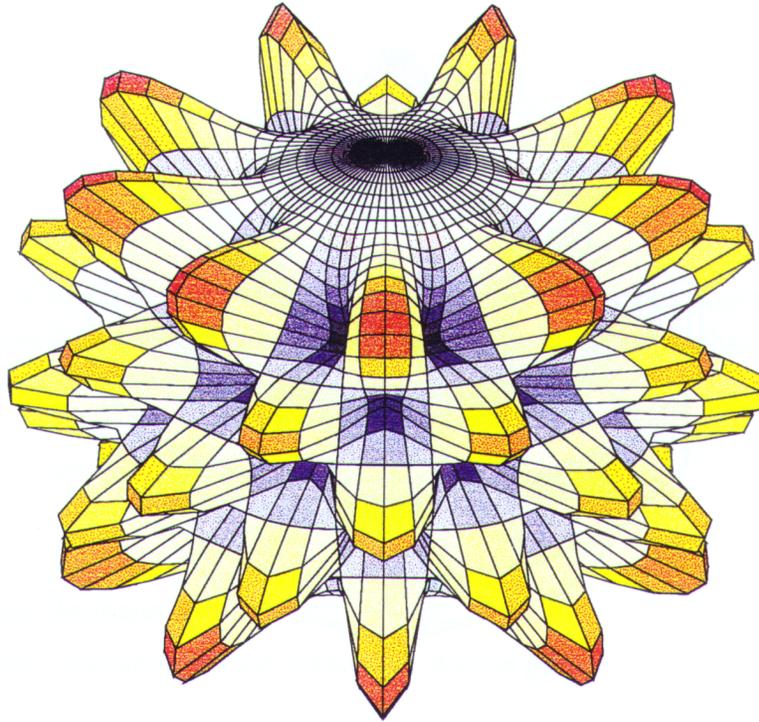


Figure A1.5  
Représentation de la fonction  $\bar{Y}_{13,9}^1$

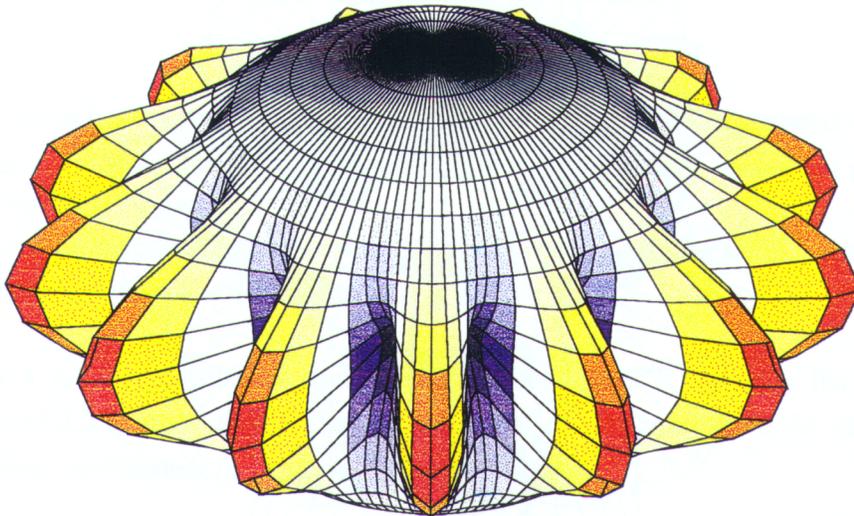


Figure A1.6  
Représentation de la fonction  $\bar{Y}_{13,13}^1$

## 2. Etude de la fonction de Hankel sphériques $h_n$

### 2.1. Définitions

On note respectivement  $j_n$  et  $y_n$  les fonctions de Bessel et de Neumann sphérique d'ordre  $n$  qui sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle:

$$x^2 f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 - n(n+1))f(x) = 0 \quad (\text{A1.12})$$

pour  $x > 0$  et  $n = 0, 1, 2, \dots$  On appelle alors fonction de Hankel sphérique d'ordre  $n$  la fonction à valeurs complexes définie par:

$$h_n(x) = j_n(x) - jy_n(x) \quad (\text{A1.13})$$

On trouve également  $j_n, y_n$  et  $h_n$  sous les noms respectifs de première, seconde et troisième fonctions de Bessel sphériques d'ordre  $n$ . Pour tout entier  $n$  et  $x > 0$ , on peut définir  $j_n$  et  $y_n$  par rapport aux fonctions de Bessel cylindriques  $J_n$  et  $Y_n$ :

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \end{aligned} \quad (\text{A1.14})$$

La formule de Rayleigh<sup>(60)</sup> permet également d'exprimer  $j_n$  et  $y_n$  sous la forme:

$$\begin{aligned} j_n(x) &= x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} \\ y_n(x) &= -x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

On en déduit une expression de  $h_n$  en fonction des dérivées de la fonction de Green en champ libre

$$G_0(x) = \frac{e^{-jx}}{4\pi x} :$$

$$h_n(x) = -jx^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{-jx}}{x} = -4\pi jx^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n G_0(x) \quad (\text{A1.16})$$

Plus simplement, la fonction  $h_n$  s'exprime comme le produit de  $G_0$  par un polynôme de degré fini en  $\frac{1}{x}$  :

$$h_n(x) = 4\pi j^{n+1} G_0(x) \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m!(n-m+1)!} \left(\frac{1}{2jx}\right)^m$$

(A1.17)

## 2.2. Exemples

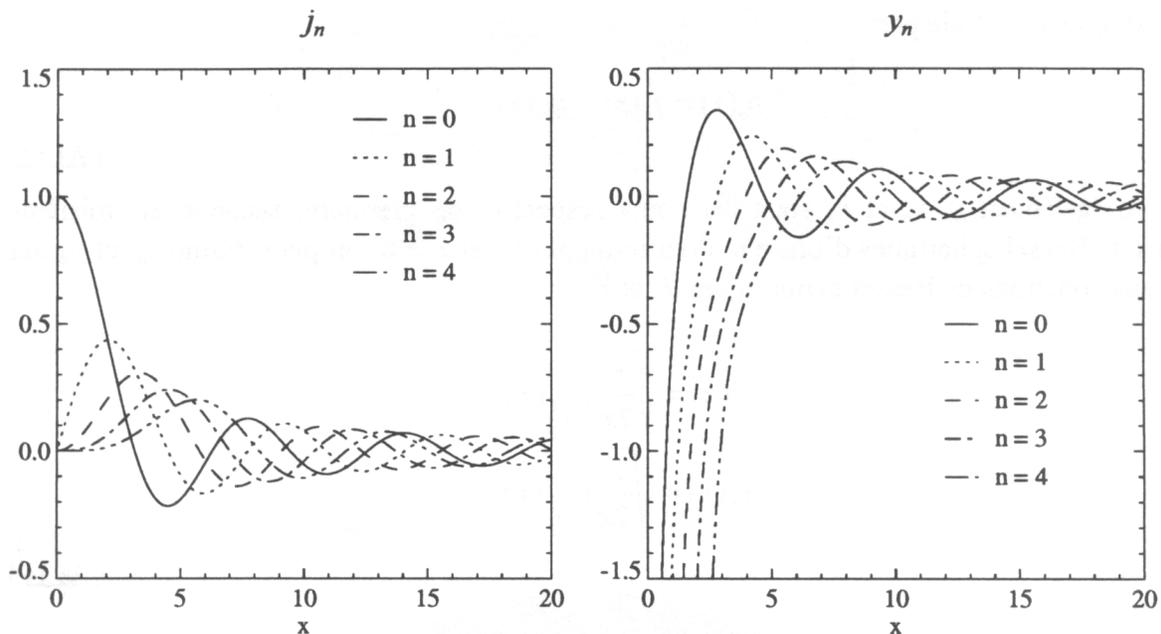


Figure A1.7

Variations des fonctions de Bessel et de Neumann sphériques pour  $n$  variant de 0 à 4 et  $x \in [0,20]$

Les fonctions  $j_n$  se prolongent par continuité en  $x = 0$  :  $j_0(0) = 1$  et  $j_n(0) = 0$  si  $n > 0$ .

Les fonctions de Bessel sphériques ont des comportements asymptotiques différents suivant que l'argument est grand ou petit devant l'ordre  $n$  de la fonction.

## 2.3. Propriétés

### Propriété 1 : Approximation pour les grands ordres

pour  $n \gg x$  :

$$a) j_n(x) \approx \frac{x^n}{(2n+1)!!}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y_n(x) &\approx -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \\ \text{c) } h_n(x) &\approx -j\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

(A1.18)

où  $(2n+1)!! = 1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)$

On en déduit que  $j_n$  tend très vite vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini alors que  $y_n$  et  $h_n$  ont une amplitude qui augmente très rapidement.

### Conséquences:

#### 1. Problèmes numériques

Le calcul des fonctions de Bessel sphériques pour des arguments proches de zéro et des ordres élevés peut être limité par le codage numérique utilisé. Pour un codage des nombres réels en simple précision (c'est-à-dire  $10^{-38} < |x| < 10^{+38}$ ) les fonctions de Bessel sphériques d'ordre  $n$  supérieur à  $N_{max}$  ne pourront être représentées pour certaines valeurs de  $x$  données dans le tableau ci-dessous:

$x$	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$
$N_{max}$	28	18	13

Rappelons que  $x = ka = 0,1$  correspond à l'étude d'une sphère de rayon 1,0 m à 5,4 Hz ou d'une sphère de rayon 10 cm à 54 Hz. On pourrait donc appliquer la méthode de sphère équivalente à des structures de quelques dizaines de centimètres sans que la représentation numérique soit un problème. Les difficultés sont en fait davantage liées à la précision du calcul. Comme pour les fonctions de Legendre, les algorithmes de calcul doivent s'appuyer sur des relations de récurrence stables<sup>(53)</sup>. Le principal problème consiste en effet à assurer la précision du résultat afin de ne pas accumuler les erreurs d'arrondis. Le codage des nombres réels en double précision est donc fortement recommandé.

#### 2. Approximation de $j'_n$ , $y'_n$ et $h'_n$

Lorsque  $x$  est très inférieur à  $n$ , les fonctions de Bessel sphériques sont continues et monotones. On en déduit des approximations simples de leurs dérivées:

$$\begin{aligned} \text{a) } j'_n(x) &\approx \frac{n}{(2n+1)!!} x^{n-1} \\ \text{b) } y'_n(x) &\approx -(n+1)\frac{(2n-1)!!}{x^{n+2}} \\ \text{c) } h'_n(x) &\approx -j(n+1)\frac{(2n-1)!!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

(A1.19)

- Propriété 2 : Approximation pour des grands arguments (i.e. champ lointain)  
pour  $x \gg n$  :

$$h_n(x) \approx j^{n+1} \frac{e^{-jx}}{x}$$

(A1.20)

c'est-à-dire  $h_n(x) \approx 4\pi j^{n+1} G_0(x)$ . Les fonctions de Hankel sphériques se comportent comme la fonction de Green en champ libre. La figure A1.8 montre que cette approximation est assez rapidement vérifiée.

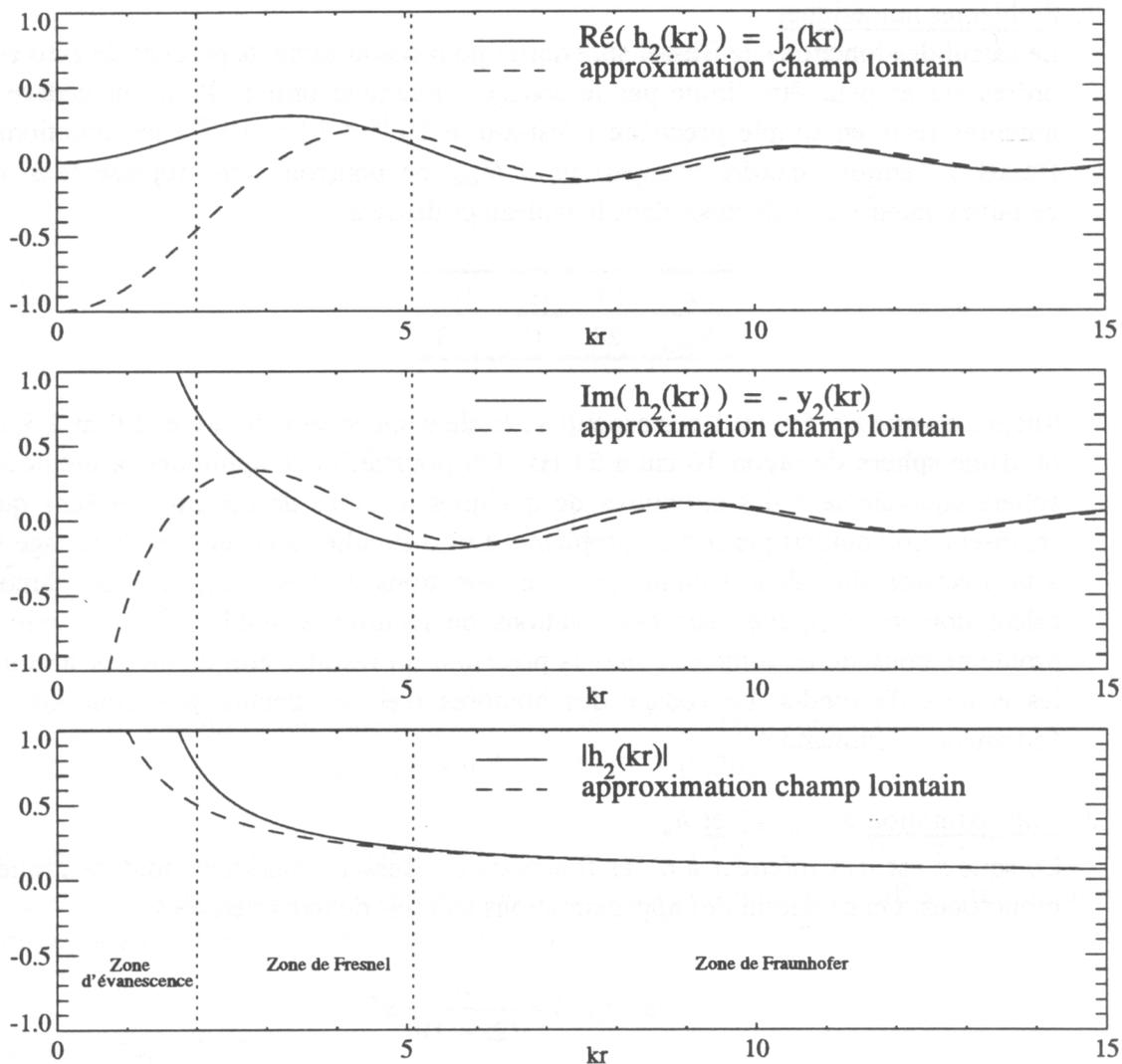


Figure A1.8

Validité de l'expression asymptotique (A1.20) pour  $n = 2$   
( les zones d'évanescence, de Fresnel et de Fraunhofer sont définies au § 2.4.1 )

- Propriété 3 : décroissance monotone du module de  $h_n$

Quel que soit  $n$ ,  $|h_n|$  est une fonction strictement monotone décroissante.

### Démonstration

Il faut montrer que  $|h_n|'$  est strictement négatif quels que soient  $n = 0, 1, \dots$  et  $x > 0$ .

Comme  $\left(|h_n|^2\right)' = 2|h_n||h_n|'$  et que  $h_n$  n'admet pas de zéro réel, le problème revient à montrer que  $\left(|h_n|^2\right)'$  est strictement négatif. On montre que  $|h_n|^2$  se met sous la forme <sup>(60)</sup>:

$$|h_n(x)|^2 = \frac{1}{x^2} \sum_{m=0}^n a_{n,m} (2x)^{2(m-n)}$$

avec  $a_{n,m} = \frac{(2n-m)!(2n-2m)!}{k![(n-m)!]^2}$ .

On obtient donc simplement

- si  $n = 0$  :  $\left(|h_0(x)|^2\right)' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$
- si  $n > 0$  :  $\left(|h_n(x)|^2\right)' = -\frac{2}{x^3} \sum_{m=0}^{n-1} (n+1-m) a_{n,m} (2x)^{2(m-n)}$

Comme  $a_{n,m}$  est strictement positif, on en déduit que  $\left(|h_n|^2\right)'$  est bien strictement négatif pour tout  $x > 0$  et quel que soit  $n$ . La proposition est donc démontrée.

## **2.4. Applications :**

### **2.4.1. Calcul du rayonnement acoustique d'un multipôle**

On définit en annexe 2 les modes de rayonnement d'un multipôle par:

$$\Psi_{nm\sigma}^{\text{mul}}(r, \theta, \varphi) = \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) h_n(kr)$$

(A1.21)

Les fonctions de Hankel sphériques traduisent donc la propagation de ces modes du centre  $O$  du multipôle au point  $M$  situé à une distance  $r = \left\| \vec{OM} \right\|$ . On peut ainsi distinguer la contribution des différents modes au point  $M$  en fonction de leur décroissance, on peut alors identifier les différentes zones de comportement en fonction de l'ordre  $n$  du mode et de la position du point d'écoute.

En adoptant la terminologie de <sup>(61)</sup>, on a ainsi distingué sur la figure A1.8:

1. la zone d'évanescence définie par  $0 < kr \leq n$  ;

La relation ( A1.18 ) indique que le rayonnement acoustique du mode décroît en  $\frac{1}{r^{n+1}}$  avec une amplitude qui est néanmoins très importante (i.e. proportionnelle à  $(2n-1)!!$ ).

2. la zone de Fraunhofer (ou champ lointain) telle que  $\frac{4n^2}{\pi} \leq kr < \infty$  ;

On peut appliquer la relation ( A1.20 ) et en déduire que champ acoustique décroît en  $\frac{1}{r}$  indépendamment de l'ordre  $n$  du mode.

3. la zone de Fresnel (où champ proche) qui est la zone de transition :  $n \leq kr \leq \frac{4n^2}{\pi}$

On parle généralement des modes évanescents d'une structure pour désigner les modes de rayonnement qui admettent une contribution nulle à la puissance acoustique rayonnée par cette structure. Dans le cas d'une plaque de dimensions infinies par exemple, la pression acoustique rayonnée par ces modes admet une décroissance en fonction de la distance de type exponentielle. Le terme d'onde évanescente a ainsi été parfois utilisé pour décrire cette décroissance exponentielle (pour les modes axiaux des cylindres par exemple). On le trouve plus généralement chez certains auteurs - dont <sup>(61)</sup> - pour décrire toute décroissance du champ de pression plus rapide que  $\frac{1}{r}$  (modes circonférentiels des cylindres par exemple qui admettent, comme pour la sphère, une décroissance de type puissance). Pour éviter les ambiguïtés, le terme de "mode non rayonnant" a été préféré dans tout le mémoire à celui de mode évanescent.

#### 2.4.2. Etude de la fonction $H_{0,n}$

La fonction  $H_{0,n}$  est définie par  $H_{0,n}(f, a, r) = \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)}$  où  $n = 0, 1, \dots$  et  $k = \frac{2\pi f}{c_0}$ . Elle intervient dans le calcul de la pression acoustique rayonnée au point  $M(r, \theta, \varphi)$  par une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a > 0$ :

$$P(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a Z_n(ka) \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)}$$

( A1.22 )

La fonction  $H_{0,n}$  traduit la propagation du rayonnement de la surface de la sphère jusqu'au point  $M$ . On s'intéresse donc uniquement au cas  $r \geq a$ . On a montré que le module de  $h_n$  est une fonction strictement monotone décroissante. On en déduit que  $|H_{0,n}|$  admet son maximum pour  $r = a$  :

$|H_{0,n}(f, a, a)| = 1$ . Dès que le point  $M$  s'éloigne de la sphère, la décroissance du champ sonore dépend de l'ordre  $n$  de la fonction. Comme il n'existe pas d'expression analytique simple de  $H_{0,n}$ , on peut utiliser les différentes expressions asymptotiques établies pour les fonctions de Hankel sphériques pour étudier son comportement.

- Si  $kr$  est grand devant  $n$ , on applique la relation (A1.20). La fonction  $H_{0,n}$  admet une décroissance en  $\frac{1}{r}$  qui caractérise les modes rayonnants de la sphère.
- Si  $n$  est grand devant  $kr$  (et donc devant  $ka$ ), la fonction  $h_n$  est dominée par sa partie imaginaire et vérifie la relation (A1.19c). On en déduit:

$$H_{0,n}(f, a, r) \approx \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \quad (\text{A1.23})$$

La fonction  $H_{0,n}$  admet une décroissance en puissance de  $\frac{1}{r}$  d'autant plus rapide que  $r$  est grand devant  $a$ . Dès que le point  $M$  s'éloigne de la surface de la sphère, les modes de rayonnement associés à ces fonctions de propagation ont une contribution négligeable par rapport aux modes rayonnants. Ils ont un comportement non rayonnants.

### 2.4.3. Etude de la fonction $H_{1,n}$

La fonction  $H_{1,n}$  est définie par  $H_{1,n}(f, a, r) = \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)}$ .

Si on note  $Z_n(ka)$  l'impédance modale associée aux modes d'ordre  $n$  alors:

$$Z_n(ka) = H_{1,n}(f, a, a) \quad (\text{A1.24})$$

et la fonction  $H_{1,n}$  vérifie:

$$H_{1,n}(f, a, r) = Z_n(ka)H_{0,n}(f, a, r) \quad (\text{A1.25})$$

La fonction  $H_{1,n}$  traduit la propagation des modes d'ordre  $n$  et tient compte de l'impédance de chacun de ces modes. Le comportement de  $H_{1,n}$  en fonction de  $r$  est donc identique à celui de  $H_{0,n}$ . La figure A1.9 montre que l'on peut distinguer trois zones:

1) Zone où les modes sont rayonnants :  $n < ka$

Lorsque  $n$  est inférieur à  $ka$  (et donc  $kr$ ),  $H_{1,n}$  vérifie:

$$H_{1,n}(f, a, r) \approx -j \frac{a}{r} e^{-jk(r-a)} \quad (\text{A1.26})$$

Le module et la phase de  $H_{1,n}$  sont indépendants de  $n$  et tendent respectivement vers  $\frac{a}{r}$  et  $k(r-a) + \frac{\pi}{2}$ . Ils caractérisent les modes rayonnants de la sphère qui se propagent jusqu'au point  $M$  avec une contribution équivalente.

2) Zone de transition :  $n \approx ka$

En fonction de la fréquence, on constate que le module de  $H_{1,n}$  peut admettre un maximum dans cette zone qui caractérise l'adaptation d'impédance optimum entre la sphère vibrante et le milieu fluide extérieur.

3) Zone où les modes sont non rayonnants :  $n > ka$

En utilisant les expressions asymptotiques vérifiées par la fonction de Hankel sphérique et sa dérivée on obtient:

$$H_{1,n}(f, a, r) \approx \frac{ka}{n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \quad (\text{A1.27})$$

Conclusion :

Les fonctions  $H_{1,n}$  évaluées au triplet  $(f, a, r)$  sont du même ordre de grandeur lorsque  $n$  est faible (i.e. inférieur à  $ka$ ) et décroissent très fortement dès que  $n$  est largement supérieur à  $ka$ . Cette décroissance est d'autant plus rapide que  $r$  est grand devant  $a$ .

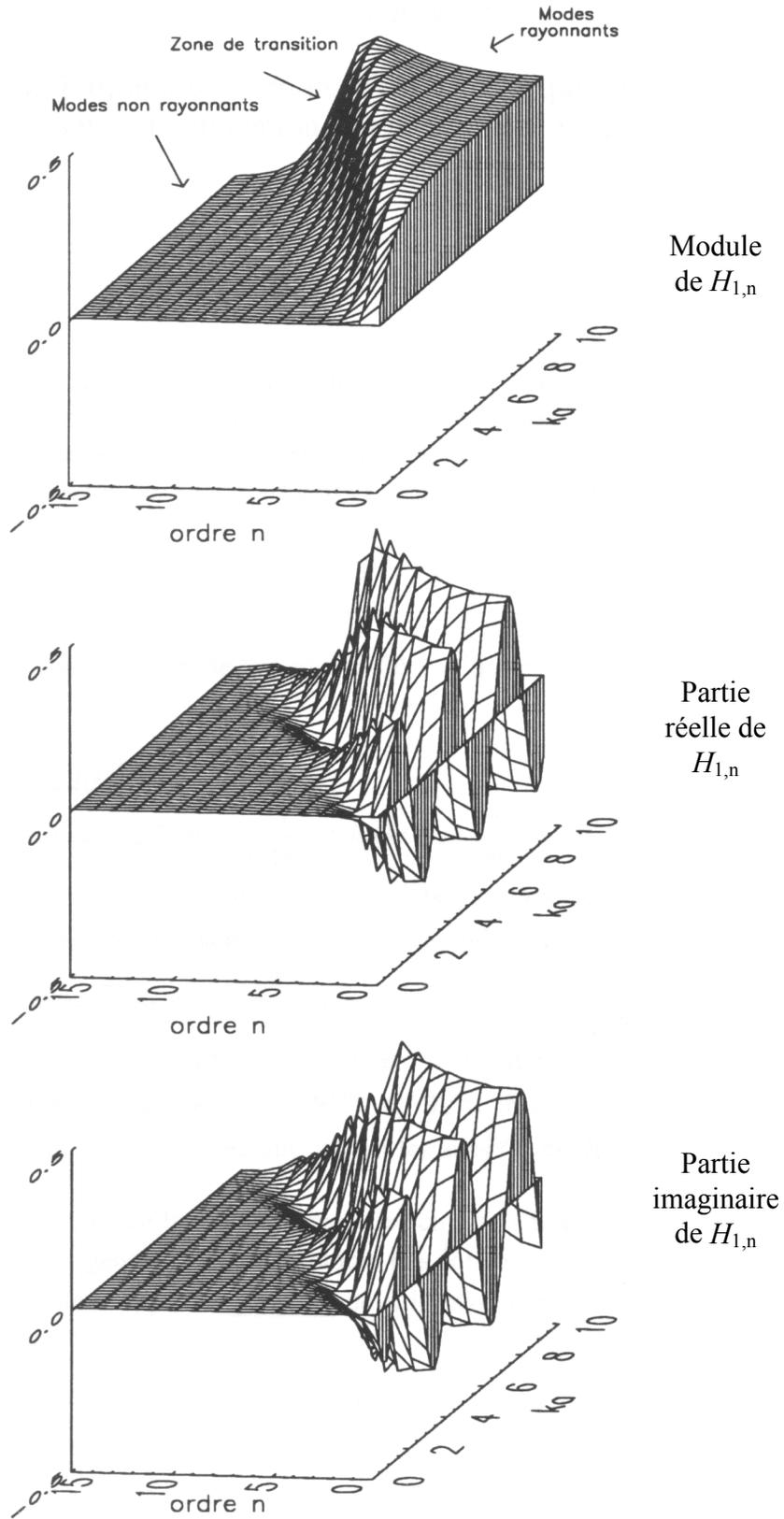


Figure A1.9  
 Variations de  $H_{1,n}$  en fonction de  $ka$  et de  $n$  pour  $a$  et  $r$  fixés ( $r = 3a$ )



## Annexe 2

### Définition des fonctions d'onde sphériques et du multipôle Propriétés et application à la méthode de la sphère équivalente

#### Définitions

En appliquant la méthode de séparation des variables à partir du système de coordonnées sphériques, on montre <sup>(2)</sup> qu'il existe une infinité de fonctions qui sont solutions de l'équation de Helmholtz (I.1a) et qui vérifient également la condition de rayonnement de Sommerfeld (I.1c). Ces fonctions sont appelées fonctions d'onde sphériques et elles sont notées:

$$\Psi_{nm\sigma}^{\text{mul}}(r, \theta, \varphi) = \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) h_n(kr) \quad (\text{A2.1})$$

Ce sont les fonctions propres de l'opérateur  $(\Delta + k^2)$  qui vérifient la condition de rayonnement de Sommerfeld.

Exemples de fonctions d'onde :

- $\Psi_{0,0,1}^{\text{mul}} = \bar{Y}_{0,0}^1 \cdot h_0$  avec  $\bar{Y}_{0,0}^1(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$  et  $h_0(kr) = j \frac{e^{-jkr}}{kr} = \frac{4j\pi}{k} G_0(r)$

La fonction  $\Psi_{0,0,1}^{\text{mul}}$  est proportionnelle à la fonction de Green en champ libre  $G_0$ . Elle traduit le rayonnement acoustique d'un monopôle placé au point  $O$ .

- $\Psi_{1,0,1}^{\text{mul}} = \bar{Y}_{1,0}^1 \cdot h_1$  avec  $\bar{Y}_{1,0}^1(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$  et  $h_1(kr) = \frac{e^{-jkr}}{kr} \left(1 - \frac{j}{kr}\right)$

La fonction  $\Psi_{1,0,1}^{\text{mul}}$  traduit le rayonnement d'un dipôle orienté suivant l'axe  $Oz$ . Les deux autres fonctions d'ordre  $n = 1$ ,  $\Psi_{1,1,0}^{\text{mul}}$  et  $\Psi_{1,1,1}^{\text{mul}}$ , traduisent le rayonnement acoustique de dipôles orientés respectivement suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

⇒ On peut interpréter de la même manière les cinq fonctions d'onde d'ordre  $n = 2$  comme des quadripôles. Plus généralement, l'ensemble des fonctions  $\Psi_{nm\sigma}^{\text{mul}}$  permet de définir une source ponctuelle complexe appelée multipôle dont le rayonnement acoustique se met sous la forme d'une série convergente:

$$P(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 M_{nm\sigma} \Psi_{nm\sigma}^{\text{mul}}(r, \theta, \varphi) \quad (\text{A2.2})$$

Par analogie avec le rayonnement acoustique d'une sphère les fonctions  $\Psi_{nm\sigma}^{\text{mul}}$  sont les modes de rayonnement du multipôle associés aux coefficients modaux  $M_{nm\sigma}$ .

Remarque:

Il existe une autre définition du multipôle que l'on trouve dans <sup>(2,p.1276)</sup> et <sup>(35,51)</sup> par exemple. Elle consiste à développer la fonction de Green en champ libre  $G_0$  en série de Taylor en fonction des coordonnées cartésiennes. L'équivalence de cette représentation avec celle du multipôle défini par les fonctions d'onde sphériques a été montrée dans <sup>(2)</sup>. Il n'en sera donc pas dit davantage sur cette représentation.

**Application au rayonnement acoustique d'une sphère:**

La pression acoustique rayonnée par la sphère  $S_a$  de même centre que le multipôle vérifie:

$$P(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)} \quad (\text{A2.3})$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions harmoniques sphériques, on montre que les expressions (A2.1) et (A2.3) traduisent le même rayonnement acoustique en tout point extérieur à  $S_a$  si et seulement si les coefficients modaux de la sphère et du multipôle vérifient pour tout triplet  $(n, m, \sigma)$ :

$$M_{nm\sigma} = -j\rho_0 c_0 \frac{V_{nm\sigma}^a}{h'_n(ka)} \quad (\text{A2.4})$$

Cette expression traduit également une dépendance linéaire entre les fonctions d'ondes sphériques et les modes de rayonnement de la sphère. En reprenant les notations du chapitre I on peut en effet écrire:

$$\Psi_{nm\sigma}^{\text{mul}}(r, \theta, \varphi) = h'_n(ka) \Psi_{nm\sigma}(r, \theta, \varphi) \quad (\text{A2.5})$$

$$\text{où } \Psi_{nm\sigma}(r, \theta, \varphi) = \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)}$$

Notations

Pour simplifier les expressions, on appliquera la notation à un seul indice:

$$\Psi_{nm\sigma}^{\text{mul}} = \Psi_j^{\text{mul}} \quad (\text{A2.6})$$

où  $j = j(n, m, \sigma)$  est défini par la relation (II.35).

### Propriétés des fonctions d'onde sphériques

Soit  $S$  une surface fermée suffisamment régulière pour qu'une normale puisse être définie en chacun de ses points. Sur une telle surface, dite de Lyapunov, l'ensemble des fonctions à valeurs complexes et de carré intégrable est noté  $L^2(S)$ . Il forme un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel:

$$\langle u, v \rangle_S = \iint_S u(M_s) \cdot v^*(M_s) dS$$

(A2.7)

où  $v^*$  est le conjugué de  $v$ .

Soit  $O$  le centre d'un repère placé à l'intérieur de  $S$ .

#### Théorème 1:

L'ensemble des fonctions d'onde sphériques  $\Psi = \{\Psi_j^{\text{mul}}, j = 1, 2, \dots\}$  est complet dans  $L^2(S)$ .

#### Théorème 2:

L'ensemble des dérivées normales sur  $S$  des fonctions d'onde sphériques

$\partial\Psi = \left\{ \frac{\partial\Psi_j^{\text{mul}}}{\partial n}, j = 1, 2, \dots \right\}$  est complet dans  $L^2(S)$ .

Cela signifie qu'il n'existe pas de fonction, autre que la fonction nulle, qui soit orthogonale à toutes les fonctions  $\Psi_j^{\text{mul}}$  (respectivement  $\frac{\partial\Psi_j^{\text{mul}}}{\partial n}$ ). Ces théorèmes ont été démontrés par <sup>(62-64)</sup>. On trouvera d'autres références dans l'article <sup>(30)</sup> de Ochmann.

Tout ensemble complet pouvant être orthonormé par la procédure de type Gram-Schmidt, on en déduit l'existence d'une base de fonctions orthonormées sur  $S$  notée  $\partial\Phi = \left\{ \frac{\partial\Phi_j}{\partial n}, j = 1, 2, \dots \right\}$  telle que:

$$\left\langle \frac{\partial\Phi_i}{\partial n}, \frac{\partial\Phi_j}{\partial n} \right\rangle_S = \delta_{ij}$$

(A2.8)

Toute fonction  $f$  de  $L^2(S)$  vérifie donc:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_S |f - f_N|^2 dS = 0$$

(A2.9)

où  $f_N$  est la décomposition en série de Fourier généralisée de la fonction  $f$  sur l'ensemble  $\partial\Phi$  :

$$f_N(M_s) = \sum_{j=1}^N \left\langle f, \frac{\partial\Phi_j}{\partial n} \right\rangle_s \frac{\partial\Phi_j}{\partial n}(M_s) \quad (\text{A2.10})$$

Cette série est dite convergente vers la fonction  $f$  au sens des moindres carrés.

Application à la méthode de la sphère équivalente:

Les fonctions  $\frac{\partial\Psi_j}{\partial n}$  utilisées par la méthode de la sphère équivalente forment un ensemble complet sur  $L^2(S)$  car elles sont linéairement dépendantes des fonctions  $\frac{\partial\Psi_j^{\text{mul}}}{\partial n}$ .

⇒ En appliquant la procédure de Gram-Schmidt on peut donc orthogonaliser les fonctions  $\frac{\partial\Psi_j}{\partial n}$  et exprimer la vitesse vibratoire de  $S$  sous la forme d'une série convergente de la forme (A2.11).

À cause de sa très grande sensibilité aux erreurs numériques (i.e. accumulation des erreurs d'arrondis), cette technique d'orthonormalisation n'est en général pas conseillée (cf. <sup>(50)</sup> ou <sup>(53)</sup>).

On lui préférera la méthode de Décomposition en Valeurs Singulières (S.V.D.) telle qu'elle est présentée au paragraphe 2.2.3. du chapitre II. En effet, la minimisation au sens des moindres carrés de la vitesse vibratoire résiduelle quadratique de  $S$  associée à la S.V.D. permet de construire la base orthonormée  $\partial\Phi$  (i.e. ensemble des vecteurs colonnes de la matrice  $U$  dans l'expression (II.68)) tout en conservant l'information sur la sensibilité aux erreurs (i.e. conditionnement de la matrice  $A$ ).

La décomposition de la vitesse vibratoire de  $S$  dans un sous-ensemble fini de fonctions  $\frac{\partial\Psi_j}{\partial n}$  conduit donc à un système linéaire dont la solution converge au sens des moindres carrés vers la vitesse vibratoire.

## Annexe 3

### Prise en compte des erreurs de mesure par la méthode de la sphère équivalente

#### 1. Introduction

On a montré au paragraphe 2.2.3. du chapitre II que le conditionnement d'un système linéaire est un paramètre important car il permet de qualifier la stabilité de la solution numérique du système. Les inégalités (II.64) à (II.66) fournissent en effet des majorants de la norme de l'erreur commise par rapport à la solution exacte lorsque les sources d'erreur sont liées aux composantes de la matrice  $A$

(erreurs dues au maillage vibratoire et au calcul des fonctions  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial n}$ ) et aux composantes du vecteur  $b$  (erreurs de mesure). Le nombre de conditionnement ne permet cependant pas de traduire directement cette instabilité en terme d'incertitude associée à chaque coefficient modal. On cherche donc à affecter à chaque coefficient modal, puis à la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente, une incertitude qui dépend des erreurs de mesure.

Une première approche consiste à modifier "légèrement" les données de vitesse sur la structure et à comparer le rayonnement du champ de vitesse initial au rayonnement du champ de vitesse modifié. En fonction des différences observées entre les deux rayonnements on peut conclure sur la stabilité de la solution du système. Cette démarche nécessite cependant de déterminer différents champs de vitesse vibratoire. Outre le problème du choix de ces différentes configurations, cette approche peut s'avérer très coûteuse en temps de calculs. Une méthode plus avantageuse consiste à inverser directement un système linéaire qui tient compte du caractère aléatoire des mesures de vitesses.

#### 2. Application du modèle linéaire : cas général

Dans le modèle linéaire, le vecteur  $b$  qui contient les vitesses vibratoires mesurées est considéré comme une réalisation particulière d'un vecteur aléatoire dont l'espérance (c'est-à-dire la moyenne pour une infinité de réalisations) vérifie le système linéaire (II.46). Si on note  $\hat{b}$  cette réalisation, elle vérifie:

$$E[\hat{b}] = Ax \tag{A3.1}$$

La matrice  $A$  est une matrice déterministe alors que le vecteur  $x$  est un vecteur aléatoire qui contient les coefficients modaux que l'on cherche désormais à déterminer en fonction de l'erreur de mesure associée à la réalisation  $\hat{b}$ .

Le vecteur  $\hat{b}$  vérifie donc:

$$\hat{b} = Ax + \hat{e} \quad (\text{A3.2})$$

où  $\hat{e}$  est la réalisation d'un vecteur erreur aléatoire centré (i.e.  $E[\hat{e}] = 0$ ) et de matrice de variance-covariance:

$$S_{\hat{b}} = E[(\hat{b} - E[\hat{b}])(\hat{b} - E[\hat{b}])^*] = E[\hat{e}\hat{e}^*] \quad (\text{A3.3})$$

Cette matrice caractérise la corrélation des erreurs entre les différents points de mesure. On cherche donc un estimateur de la solution  $x$  pour  $\hat{b}$  et  $S_{\hat{b}}$  donnés.

Le théorème de Gauss-Markov généralisé <sup>(65)</sup> montre alors que l'estimateur  $\hat{x}$  de  $x$  non biaisé (i.e.  $E[\hat{x}] = x$ ) qui admet une variance minimale est défini par:

$$\hat{x} = (A^* S_{\hat{b}}^{-1} A)^{-1} A^* S_{\hat{b}}^{-1} \hat{b} \quad (\text{A3.4})$$

Ce vecteur minimise la forme quadratique:

$$J(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (\hat{b} - A\tilde{x})^* S_{\hat{b}}^{-1} (\hat{b} - A\tilde{x}) \quad (\text{A3.5})$$

et la matrice de variance-covariance  $S_{\hat{x}} = E[(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^*]$  qui lui est associée se met simplement sous la forme:

$$S_{\hat{x}} = (A^* S_{\hat{b}}^{-1} A)^{-1} \quad (\text{A3.6})$$

La diagonale de cette matrice contient la variance associée à chaque coefficient modal. On peut donc déterminer les coefficients les plus sensibles aux erreurs de mesure en comparant entre elles les erreurs normalisées:

$$\varepsilon(\hat{x}_j) = \frac{(S_{\hat{x}})_{jj}}{|\hat{x}_j|} \quad (\text{A3.7})$$

On définit de manière équivalente l'erreur normalisée associée aux mesures:

$$\varepsilon(\hat{b}_j) = \frac{(S_{\hat{b}})_{jj}}{|\hat{b}_j|} \quad (\text{A3.8})$$

Les composantes de  $\hat{x}$  telles que  $\varepsilon(\hat{x}_j)$  est du même ordre de grandeur que  $\varepsilon(\hat{b}_j)$  sont des composantes stables de la solution.

### Application au rayonnement acoustique de la sphère équivalente:

Soit  $\phi$  une fonction qui dépend linéairement des coefficients modaux:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j = \mathbf{t} \alpha \mathbf{x} \quad (\text{A3.9})$$

où  $\alpha$  est le vecteur  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]$ . Le modèle linéaire permet d'estimer la variance de cette fonction lorsqu'elle est associée à la solution  $\hat{x}$  <sup>(65)</sup>:

$$\sigma^2(\phi(\hat{x})) = \mathbf{t} \alpha S_x \alpha \quad (\text{A3.10})$$

⇒ En posant  $\phi = P(M)$  et  $\alpha_j = -j\rho_0 \mathfrak{G} \Psi_j(M)$ , on peut calculer la variance associée à la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente (la fonction  $\Psi_j$  est définie dans le tableau II.2).

Que les vitesses vibratoires soient obtenues par le calcul ou par la mesure, le problème consiste désormais à connaître la matrice  $S_{\hat{v}}$ . C'est en effet une matrice difficile à calculer car elle nécessite une modélisation statistique des sources d'erreur dans le calcul des vitesses vibratoires. Elle demande également des calculs importants lorsque les vitesses sont mesurées. Une estimation même imprécise de  $S_{\hat{v}}$  nécessite en particulier le stockage d'un grand nombre de données (i.e. tous les spectres de vitesses pour tous les points de mesure). On est donc amené à appliquer des hypothèses simplificatrices.

### 3. Hypothèses de Gauss-Markov

Elles consistent à supposer la matrice  $S_{\hat{v}}$  diagonale et à coefficients constants. Les erreurs ne sont donc pas corrélées d'un point de mesure à l'autre et admettent la même variance  $\sigma_0^2$  (hypothèse d'homocédasticité). La matrice  $S_{\hat{v}}$  devient:

$$S_{\hat{v}} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_0^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 I \quad (\text{A3.11})$$

La solution  $\hat{x}$  est alors indépendante de  $\sigma_0^2$  et s'écrit:

$$\hat{x} = (A^* A)^{-1} A^* \hat{b} \quad (\text{A3.12})$$

C'est la solution obtenue en appliquant directement la méthode des moindres carrés. On en déduit les expressions:

$$S_{\hat{x}} = \sigma_0^2 \cdot (A^* A)^{-1} \quad (\text{A3.13})$$

et

$$\sigma^2(\phi(\hat{x})) = \sigma_0^2 \cdot \alpha (A^* A)^{-1} \alpha \quad (\text{A3.14})$$

### Remarques:

#### 1. Lien avec la minimisation de la vitesse résiduelle quadratique

Les hypothèses de Gauss-Markov conduisent à une méthode de régression linéaire classique où tous les points de mesure sont affectés de la même incertitude. La fonctionnelle  $J$  définie par (A3.5) s'écrit:

$$J(\tilde{x}) = \frac{1}{2\sigma_0^2} (\hat{b} - A\tilde{x})^* (\hat{b} - A\tilde{x}) = \frac{1}{\sigma_0^2} J_{N, N_s}(\tilde{x}) \quad (\text{A3.15})$$

On est donc bien ramené à la minimisation de la vitesse résiduelle quadratique sur  $S$ .

#### 2. Estimation de $\sigma_0^2$

On choisit en général pour  $\sigma_0$  un pourcentage de la dynamique des vitesses mesurées. Avec les hypothèses de Gauss-Markov on peut estimer la valeur de  $\sigma_0^2$  associée au modèle de régression linéaire par:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\|\hat{b} - A\hat{x}\|^2}{N_s - N} \quad (\text{A3.16})$$

C'est un estimateur sans biais de  $\sigma_0^2$ .

### 3. Application de la méthode de décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A$  permet de mettre la matrice  $S_{\hat{x}}$  sous la forme <sup>(53,65)</sup>:

$$(S_{\hat{x}})_{ij} = \sigma_0^2 \sum_{k=1}^N \frac{V_{ik} V_{jk}}{w_k^2} \quad (\text{A3.17})$$

où  $w_k$  est la  $k^{\text{ème}}$  valeur singulière de  $A$ . La variance des coefficients modaux est inversement proportionnelle au carré des valeurs singulières de la matrice  $A$ . Les valeurs singulières les plus faibles entraînent donc des coefficients de grande amplitude dans la matrice  $S_{\hat{x}}$ . A une matrice mal conditionnée sont associées de grandes incertitudes sur les coefficients modaux. La matrice  $S_{\hat{x}}$  permet donc bien de quantifier l' influence d'un mauvais conditionnement sur la stabilité des coefficients modaux.

#### Conclusion:

En appliquant les hypothèses de Gauss-Markov, on obtient un modèle simple qui, à défaut d'être réaliste, permet de traduire directement sur des grandeurs physiques les instabilités liées à un modèle de sphère équivalente. On peut en effet associer à ce modèle:

- un écart type à tous les coefficients modaux:  $\sigma(\hat{x}_j) = \sigma_0 \sqrt{((A^* A)^{-1})_{jj}}$
- un écart type pour la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente

On a vu au paragraphe 2.2.5. du chapitre II que seuls certains modes contribuent au rayonnement acoustique de la sphère équivalente. Pour que le modèle soit stable par rapport aux erreurs de mesure il suffit donc que les coefficients associés à ces modes rayonnants soient caractérisés par un faible écart type. L'écart type des coefficients qui " ne rayonnent pas " peut en revanche être assez élevé. On peut ainsi distinguer parmi les systèmes mal conditionnés ceux qui correspondent à un modèle stable ou instable. Notons également que le nombre de coefficients qui participe au rayonnement augmente lorsque le point d'écoute se rapproche de la structure. Un modèle pourra donc être stable en champ lointain et instable en champ proche.

## 4. **Autres modèles pour la matrice de variance-covariance**

Si l'on veut conserver un modèle simple, il est difficile de lever l'hypothèse d'une matrice  $S_{\hat{b}}$  diagonale. En revanche, on peut supposer que la variance n'est pas constante d'un point de mesure à l'autre (hypothèse d'hétéroscédasticité). On définit alors la matrice diagonale  $H_{\hat{b}}$  telle que  $S_{\hat{b}}^{-1} = H_{\hat{b}}^2$ :

$$H_{\hat{b}} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_{N_b}} \right) \quad (\text{A3.18})$$

et la solution  $\hat{x}$  s'écrit:

$$\hat{x} = \left( (H_{\hat{b}} A)^* (H_{\hat{b}} A) \right)^{-1} (H_{\hat{b}} A)^* H_{\hat{b}} \hat{b} \quad (\text{A3.19})$$

Elle est obtenue simplement à partir de la méthode de décomposition en valeurs singulières en remplaçant  $A$  et  $\hat{b}$  respectivement par  $H_{\hat{b}} A$  et  $H_{\hat{b}} \hat{b}$ . Elle rend minimale la fonctionnelle:

$$J_H(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (H_{\hat{b}} \hat{b} - H_{\hat{b}} A \tilde{x})^* (H_{\hat{b}} \hat{b} - H_{\hat{b}} A \tilde{x}) \quad (\text{A3.20})$$

que l'on peut mettre sous la forme:

$$J_H(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} \frac{|V^{mes}(M_i) - V_N^{cal}(M_i)|^2}{\sigma_i^2} \Delta S_i \quad (\text{A3.21})$$

La matrice  $H_{\hat{b}}$  apporte donc une pondération des lignes de la matrice  $A$  et "favorise" les points de mesure associé à un faible écart type. La contribution de la différence  $V^{mes}(M_i) - V_N^{cal}(M_i)$  à la fonctionnelle  $J_H(\tilde{x})$  est en effet plus importante pour les points associés à un faible écart type. Pour rendre  $J_H(\tilde{x})$  minimum, la solution  $\hat{x}$  devra davantage minimiser cette différence. Affecter un écart type élevé à un point de mesure revient à diminuer son importance dans le calcul de  $\hat{x}$ .

Si l'écart type est choisi arbitrairement proportionnel à l'amplitude de la vitesse mesurée, la solution  $\hat{x}$  conduira à une bonne estimation des faibles niveaux de vitesse sur  $S$ . En revanche, si l'amplitude des forts niveaux n'est pas respectée, le rayonnement de la structure risque d'être largement sous-estimé !

Un modèle moins "déterministe" que celui de Gauss-Markov est obtenu en faisant varier aléatoirement les écarts types autour d'une valeur moyenne. On pose:

$$S_{\hat{b}} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_{N_s}^2) \quad (\text{A3.22})$$

avec

$$\text{Modèle aléatoire centré : } \sigma_i = \sigma_0(1 + \eta_i^\varepsilon)$$

(A3.23)

où

$\eta_i^\varepsilon$  est un nombre aléatoire compris entre  $-\varepsilon$  et  $\varepsilon$   
 $\sigma_0$  est la valeur moyenne des écarts types

Exemple :

Pour une vitesse vibratoire comprise entre  $-V$  et  $V$ , on peut définir un modèle simple avec un écart type moyen de 5% ( $\sigma_0 = 0,05 * V$ ) et une fluctuation de 10% autour de cette moyenne ( $\epsilon = 0,1$ ).

Remarques :1. Loi suivie par les erreurs de mesure

Les modèles utilisés n'ont pas fait d'hypothèse sur la loi suivie par le vecteur aléatoire  $e$ . Si on suppose que l'erreur en chacun des points de mesure suit une loi de Laplace-Gauss (i.e. loi normale) alors les coefficients modaux et la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente sont des variables aléatoires qui suivent également une loi normale.

2. Amélioration de la stabilité du modèle à partir de la méthode S.V.D.

Avec les hypothèses de Gauss-Markov, la méthode des moindres carrés conduit à un estimateur de la solution qui est non biaisé et de variance minimale. On ne peut donc espérer trouver un estimateur de variance plus faible (i.e. une solution plus stable) qu'en utilisant un estimateur biaisé. La relation (A3.17) montre que ce sont les valeurs singulières les plus faibles qui génèrent le plus d'instabilité. On peut donc diminuer la variance des coefficients modaux en supprimant certaines de ces valeurs singulières. C'est une opération simple à effectuer lorsque l'on dispose de la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A$  (cf. § 2.2.3 du chapitre II).

3. Application des hypothèses de Gauss-Markov à la résolution du système (II.46)

Lorsque l'on cherche à résoudre le système (II.46), la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $b$  est définie par:

$$b_i = \sqrt{\Delta S_i} V(M_i)$$

(A3.24)

Elle dépend donc de la vitesse vibratoire et de la surface associée au point de maillage  $M_i$ . Pour que les hypothèses de Gauss-Markov soient vérifiées, il faut que:

a) la vitesse vibratoire admette un écart-type constant pour tous les points du maillage:

$$\sigma_v(M_i) = \sigma_0$$

(A3.25)

b) le maillage vibratoire soit régulier:

$$\Delta S_i = \Delta S = \frac{S}{N_s}$$

(A3.26)

où  $N_s$  est le nombre de points de maillage.

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, l'écart type associé à chaque composante du vecteur  $b$  est constant:  $\sigma(b) = \sigma_0 \sqrt{\Delta S}$ .

On peut alors montrer que les écart-types associés aux coefficients modaux tendent vers zéro lorsque  $N_s$  tend vers l'infini. En effet, la matrice  $A^* A$  vérifie:

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} A^* A = C \quad (\text{A3.27})$$

où la matrice  $C$  est associée au système continu (II.42). En fonction du conditionnement de  $C$ , la matrice  $(A^* A)^{-1}$  converge donc plus ou moins rapidement vers  $C^{-1}$  et la matrice de variance-covariance  $S_x$  vers la matrice  $\sigma_0^2 \Delta S C^{-1}$ . On en déduit:

$$\sigma(x_j) = \sqrt{(S_x)_{jj}} \xrightarrow{N_s \rightarrow \infty} \sigma_0 \sqrt{\frac{S}{N_s}} \sqrt{(C^{-1})_{jj}} \quad (\text{A3.28})$$

Lorsque le nombre de points de maillage  $s$  tend vers l'infini, l'écart-type associé à chaque coefficient modal admet donc une décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{N_s}}$ . Cette décroissance caractérise la convergence du système discret vers le système continu.

On déduit de l'expression (A3.10) que l'écart-type associé à la pression acoustique rayonnée par la sphère équivalente admet la même décroissance:

$$\sigma_p = \sqrt{{}^t \alpha S_x \alpha} \xrightarrow{N_s \rightarrow \infty} \sigma_0 \sqrt{\frac{S}{N_s}} \sqrt{{}^t \alpha C^{-1} \alpha} \quad (\text{A3.29})$$

Si la matrice  $C$  est bien conditionnée, on améliore la stabilité du modèle en augmentant le nombre de points de maillage. Si elle ne l'est pas, la convergence vers zéro des écarts-types peut être relativement lente et la valeur des  $\sigma(x_j)$  associés aux modes rayonnants caractérisent le modèle de la sphère équivalente. Notons enfin que cette décroissance des  $\sigma(x_j)$  traduit la convergence de la formulation discrète du problème de minimisation vers la formulation continue. Cette dernière est en effet entièrement déterministe car elle admet  $N$  équations pour  $N$  inconnues.

## Annexe 4

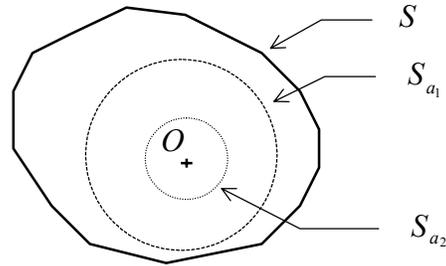
Propriété du rayonnement acoustique d'une sphère équivalente  
dont les coefficients modaux sont solutions du système (II.42)

### Objectif:

Il s'agit de montrer que le rayonnement acoustique d'une sphère équivalente définie à partir de la résolution du système (II.42) est théoriquement indépendant du choix du rayon de cette sphère (démonstration 1). Le cas d'un multipôle placé au centre de la sphère équivalente est également traité (démonstration 2) et on montre que ce multipôle conduit au même rayonnement acoustique que la sphère.

### Démonstration 1

Soient  $S_{a_1}$  la sphère de centre  $O$  et de rayon  $a_1$  et  $S_{a_2}$  la sphère de centre  $O$  et de rayon  $a_2$  telle que  $a_2 \neq a_1$ .



En reprenant les notations du chapitre II, on note P1 le problème:

Trouver les coefficients  $V_j^{a_1}$  associés à la sphère  $S_{a_1}$  qui minimisent

$$P1 \quad \int \int_S J_N^{a_1} = J_N |_{\Psi_j = \Psi_j^{a_1}} = \int \int_S \left| V^{mes}(M_s) - \sum_{j=1}^N V_j^{a_1} \frac{\partial \Psi_j^{a_1}}{\partial n} \right|^2 dS$$

et P2 le problème :

Trouver les coefficients  $V_j^{a_2}$  associés à la sphère  $S_{a_2}$  qui minimisent

$$P2 \quad \int \int_S J_N^{a_2} = J_N |_{\Psi_j = \Psi_j^{a_2}} = \int \int_S \left| V^{mes}(M_s) - \sum_{j=1}^N V_j^{a_2} \frac{\partial \Psi_j^{a_2}}{\partial n} \right|^2 dS$$

où les fonctions  $\Psi_j^{a_1}$  et  $\Psi_j^{a_2}$  sont liées aux modes de rayonnement de  $S_{a_1}$  et  $S_{a_2}$  et définies par:

$$\Psi_j^{a_1}(M) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka_1)} \quad (A4.1)$$

$$\Psi_j^{a_2}(M) = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka_2)} \quad (A4.2)$$

Soit  $\{\tilde{V}_j^{a_1}, j = 1..N\}$  l'unique solution de P1. Elle vérifie le système S1:

$$S1 : \text{pour } i = 1..N, \quad \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_1} \iint_S \frac{\partial \Psi_j^{a_1}(M_s)}{\partial n} \frac{\partial \Psi_i^{a_1^*}(M_s)}{\partial n} dS = \iint_S V^{mes}(M_s) \frac{\partial \Psi_i^{a_1^*}(M_s)}{\partial n} dS \quad (A4.3)$$

De même, on note  $\{\tilde{V}_j^{a_2}, j = 1..N\}$  l'unique solution de P2. Elle vérifie le système S2:

$$S2 : \text{pour } i = 1..N, \quad \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_2} \iint_S \frac{\partial \Psi_j^{a_2}(M_s)}{\partial n} \frac{\partial \Psi_i^{a_2^*}(M_s)}{\partial n} dS = \iint_S V^{mes}(M_s) \frac{\partial \Psi_i^{a_2^*}(M_s)}{\partial n} dS \quad (A4.4)$$

### 1ère étape :

Montrons que les ensembles  $\{\tilde{V}_j^{a_1}, j = 1..N\}$  et  $\{\tilde{V}_j^{a_2}, j = 1..N\}$  sont liés termes à termes.

Les relations (A4.1) et (A4.2) montrent que les fonctions  $\Psi_j^{a_1}$  et  $\Psi_j^{a_2}$  sont linéairement dépendantes. En tout point de la surface  $S$  elles vérifient:

$$\Psi_j^{a_1} = \alpha_j \Psi_j^{a_2} \text{ avec } \alpha_j = \frac{h'_n(ka_2)}{h'_n(ka)} \quad (A4.5)$$

Le système S1 admet donc la même solution que le système S'1:

$$S'1 : \text{pour } i = 1..N, \quad \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_1} \alpha_j \alpha_i^* \iint_S \frac{\partial \Psi_j^{a_2}(M_s)}{\partial n} \frac{\partial \Psi_i^{a_2^*}(M_s)}{\partial n} dS = \alpha_i^* \iint_S V^{mes}(M_s) \frac{\partial \Psi_i^{a_2^*}(M_s)}{\partial n} dS \quad (A4.6)$$

Comme  $\alpha_i \neq 0$  pour tout entier  $i$ , S'1 devient:

$$S'1 : \text{pour } i = 1..N, \quad \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_1} \alpha_j \iint_S \frac{\partial \Psi_j^{a_2}(M_s)}{\partial n} \frac{\partial \Psi_i^{a_2^*}(M_s)}{\partial n} dS = \iint_S V^{mes}(M_s) \frac{\partial \Psi_i^{a_2^*}(M_s)}{\partial n} dS \quad (A4.7)$$

On en déduit que le système S'1 est identique au système S2 et les coefficients solutions des problèmes P1 et P2 vérifient donc:

$$\tilde{V}_j^{a_2} = \alpha_j \tilde{V}_j^{a_1} = \frac{h'_n(ka_2)}{h'_n(ka)} \tilde{V}_j^{a_1} \text{ pour } j = 1..N$$

(A4.8)

**2ème étape :**

Montrons que les rayonnements de  $S_{a_1}$  et  $S_{a_2}$  sont identiques.

Si on note  $P_1(M)$  (respectivement  $P_2(M)$ ) la pression acoustique rayonnée par  $S_{a_1}$  (resp.  $S_{a_2}$ ) qui est solution du problème P1 (resp. P2), on a pour tout point  $M$  extérieur à  $S$ :

$$P_1(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_1} \Psi_j^{a_1}(M) \quad (\text{A4.9})$$

et

$$P_2(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_2} \Psi_j^{a_2}(M) \quad (\text{A4.10})$$

On déduit des expressions (A4.5) et (A4.8) les relations suivantes:

$$\begin{aligned} P_1(M) &= -j\rho_0 c_0 \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_1} \Psi_j^{a_1}(M) \\ &= -j\rho_0 c_0 \sum_{j=1}^N \left( \frac{h'_n(ka_1)}{h'_n(ka_2)} \tilde{V}_j^{a_2} \right) \cdot \left( \frac{h'_n(ka_2)}{h'_n(ka_1)} \Psi_j^{a_2}(M) \right) \\ &= -j\rho_0 c_0 \sum_{j=1}^N \tilde{V}_j^{a_2} \Psi_j^{a_2}(M) \\ &= P_2(M) \end{aligned}$$

Bien que leurs rayons soient différents, les sphères  $S_{a_1}$  et  $S_{a_2}$  ont un rayonnement acoustique identique en tout point  $M$  extérieur à  $S$ .

**Démonstration 2**

Soit  $P_{\text{mul}}(M)$  la pression rayonnée au point  $M$  par un multipôle placé au point  $O$ . En reprenant les notations de l'annexe 2, on peut écrire:

$$P_{\text{mul}}(M) = \sum_{j=1}^N M_j \Psi_j^{\text{mul}}(M) \quad (\text{A4.11})$$

avec

$$\Psi_j^{\text{mul}}(M) = \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) h_n(kr) \quad (\text{A4.12})$$

Comme précédemment, on note Pm le problème :

$$\text{Pm} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les coefficients } M_j \text{ associés au multipôle qui minimisent} \\ J_N = \iint_S \left| V^{mes}(M_s) - \sum_{j=1}^N M_j \frac{\partial \Psi_j^{mul}}{\partial n} \right|^2 dS \end{array} \right.$$

Soit  $\{\tilde{M}_j, j = 1..N\}$  les coefficients qui sont solution de P1. Ils vérifient le système Sm:

$$\text{Sm : pour } i = 1..N, \quad \sum_{j=1}^N \tilde{M}_j \iint_S \frac{\partial \Psi_j^{mul}(M_s)}{\partial n} \frac{\partial \Psi_j^{mul*}(M_s)}{\partial n} dS = \iint_S V^{mes}(M_s) \frac{\partial \Psi_j^{mul*}(M_s)}{\partial n} dS \quad (\text{A4.13})$$

En tout point de la surface S, les fonctions  $\Psi_j^{mul}$  et  $\Psi_j^{a_1}$  vérifient la relation:

$$\Psi_j^{mul} = h'_n(ka_1) \Psi_j^{a_1} \quad (\text{A4.14})$$

On peut donc appliquer la même démarche que précédemment et en déduire:

$$\tilde{M}_j = -j\rho_0 c_0 \frac{\tilde{V}_j^{a_1}}{h'_n(ka_1)} \quad (\text{A4.15})$$

Les coefficients modaux du multipôle et de la sphère  $S_{a_1}$  vérifient donc:

$$\tilde{M}_j \Psi_j^{mul} = -j\rho_0 c_0 \tilde{V}_j^{a_1} \Psi_j^{a_1} \quad (\text{A4.16})$$

et le rayonnement du multipôle est bien identique à celui de la sphère  $S_{a_1}$ .

## Conclusions

Lorsque l'on cherche à remplacer une structure vibrante par une source sphérique équivalente en résolvant le système (II.42), le type de la source (sphère ou multipôle) n'a théoriquement pas d'importance dès lors que ces sources admettent le même centre  $O$ . En particulier, quel que soit le rayon de la sphère - *a priori* même lorsque la sphère n'est pas inscrite dans la structure ! - le champ acoustique rayonné est le même. D'un point de vue numérique le problème est tout à fait différent car le conditionnement du système linéaire dépend fortement du rayon de la sphère (cf. § 2.2.3. du chapitre II).

## Annexe 5

### Critère d'échantillonnage pour la décomposition de la vitesse vibratoire d'une sphère dans l'ensemble des fonctions harmoniques sphériques

#### Objectif:

Soit  $S_a$  la sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$  sur laquelle est définie en tout point  $M(a, \theta, \varphi)$  la vitesse vibratoire  $V^a(M)$ . Les fonctions harmoniques sphériques normalisées constituent une base orthonormée pour l'ensemble des fonctions définies sur une sphère. On peut donc décomposer  $V^a(M)$  sous la forme (cf. les notations du chapitre II):

$$V^a(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^a \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \quad (\text{A5.1})$$

où

$$V_{nm\sigma}^a = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} V^a(\theta, \varphi) \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{A5.2})$$

Soit  $V_N^a(M)$  la restriction de  $V^a(M)$  aux termes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à  $N$  (i.e.  $V_N^a(M)$  contient  $(N+1)^2$  termes).

Afin de simplifier les expressions, on adopte la notation complexe  $e^{jm\varphi}$  pour remplacer les fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$  qui interviennent dans  $\bar{Y}_{nm}^{\sigma}$ . On note désormais:

$$V_N^a(M) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n V_{nm}^a \bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi) \quad (\text{A5.3})$$

avec

$$\bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{N_{nm}} P_{mn}(\cos \theta) e^{jm\varphi}$$

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_m} \frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}} \quad (\text{coefficient de normalisation})$$

$$\text{et } V_{nm}^a = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} V_N^a(\theta, \varphi) \bar{Y}_{nm} \sin \theta d\theta d\varphi$$

Par rapport aux notations du chapitre I les coefficients modaux et les fonctions harmoniques vérifient:

$$V_{nm\sigma}^a = \begin{cases} \operatorname{Re}(V_{nm}^a) & \text{si } \sigma = 1 \\ \operatorname{Im}(V_{nm}^a) & \text{si } \sigma = 0 \end{cases} \text{ et } \bar{Y}_{nm} = \begin{cases} \operatorname{Re}(\bar{Y}_{nm}^\sigma) & \text{si } \sigma = 1 \\ \operatorname{Im}(\bar{Y}_{nm}^\sigma) & \text{si } \sigma = 0 \end{cases} \quad (\text{A5.4})$$

Il s'agit de montrer que les coefficients  $V_{nm}^a$  peuvent être calculés de manière exacte à partir d'un nombre fini de valeurs discrètes de  $V_N^a(M)$  régulièrement répartis suivant angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

### **Démonstration:**

#### **a) Décomposition en série de Fourier suivant l'angle $\varphi$**

Par rapport à l'angle  $\varphi$ , la fonction  $V_N^a(M)$  est une fonction  $2\pi$ -périodique définie par ses  $2N+1$  coefficients de Fourier  $c_m(\theta)$  tels que:

$$V_N^a(M) = \sum_{m=-N}^N c_m(\theta) e^{jm\varphi} \quad (\text{A5.5})$$

avec, pour  $m = 0, \dots, N$ :

$$c_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_N^a(\theta, \varphi) e^{-jm\varphi} d\varphi \quad (\text{A5.6})$$

En appliquant le théorème d'échantillonnage de Shannon, cette intégrale est calculée exactement à partir de  $2N+1$  valeurs discrètes de  $V_N^a(M)$  régulièrement réparties sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ :

$$c_m(\theta) = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=0}^{2N} V_N^a(\theta, \varphi_i) e^{-jm\varphi_i} \quad (\text{A5.7})$$

avec

$$\varphi_i = i\Delta\varphi \text{ et } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{2N+1} \quad (\text{A5.8})$$

On reconnaît dans cette expression la transformée de Fourier discrète de  $c_m(\theta)$ .

Par définition, les coefficients  $V_{nm}^a$  s'écrivent:

$$V_{nm}^a = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} V_N^a(\theta, \varphi) \bar{Y}_{mn}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{N_{nm}} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} V_N^a(\theta, \varphi) P_{mn}(\cos\theta) e^{jm\varphi} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{A5.9})$$

On en déduit:

$$V_{nm}^a = \frac{2\pi}{N_{nm}} \int_0^{\pi} c_m(\theta) P_{mn}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (\text{A5.10})$$

Il faut maintenant montrer que l'intégrale (A5.9) peut être calculée exactement à partir de valeurs discrètes de  $c_m(\theta)$ .

### b) Décomposition en série de Fourier suivant l'angle $\theta$

La fonction de Legendre  $P_{mn}(\cos\theta)$  se peut se mettre sous la forme <sup>(60)</sup> :

$$P_{mn}(\cos\theta) = \sum_{q=-n}^n A_q e^{jq\theta} \quad (\text{A5.11})$$

où les coefficients  $A_q$  ne dépendent que des entiers  $n$  et  $m$ . On trouvera dans <sup>(66)</sup> une relation de récurrence qui permet de les calculer.

La fonction  $V_N^a(M)$  se décompose donc également dans l'ensemble des fonctions  $e^{jq\theta}$  avec  $q = -N, \dots, 0, \dots, N$ . Les fonctions  $c_m(\theta)$  et  $P_{mn}(\cos\theta)$  n'étant définies que sur  $[0, \pi]$ , on les prolonge pour les rendre  $2\pi$ -périodique:

$$\tilde{P}_{mn}(\theta) = \begin{cases} P_{mn}(\cos\theta) & \text{si } \theta \in [0, \pi] \\ (-1)^m P_{mn}(\cos(2\pi - \theta)) & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (\text{A5.12})$$

$$\tilde{c}_m(\theta) = \begin{cases} c_m(\theta) & \text{si } \theta \in [0, \pi] \\ (-1)^m c_m(2\pi - \theta) & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (\text{A5.13})$$

On en déduit une décomposition en série de Fourier de  $\tilde{c}_m(\theta)$ :

$$\tilde{c}_m(\theta) = \sum_{q=-N}^N d_{qm} e^{jq\theta} \quad (\text{A5.14})$$

avec

$$d_{qm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{c}_m(\theta) e^{-jq\theta} d\theta \quad (\text{A5.15})$$

En appliquant le théorème d' échantillonnage de Shannon, cette intégrale est également calculée exactement à partir de  $2N+1$  valeurs discrètes de  $\tilde{c}_m(\theta)$  régulièrement réparties sur l' intervalle  $[0, 2\pi]$ . En utilisant les propriétés de symétrie de  $\tilde{c}_m(\theta)$ , on peut exprimer les coefficients  $d_{qm}$  en fonction de  $N+1$  valeurs de  $c_m(\theta)$  :

$$d_{qm} = \frac{1}{2N+1} \left( c_m(0) + \sum_{i=1}^N (e^{-jq\theta_i} + (-1)^m e^{jq\theta_i}) c_m(\theta_i) \right) \quad (\text{A5.16})$$

où

$$\theta_i = i\Delta\theta \text{ et } \Delta\theta = \frac{2\pi}{2N+1} \quad (\text{A5.17})$$

On en déduit:

$$V_{nm}^a = \sum_{q=-N}^N A_{qnm} d_{qm} \quad (\text{A5.18})$$

où les  $A_{qnm}$  sont des coefficients constants qui s' expriment en fonction des  $A_q$ . Sous sa forme développée, on obtient:

$$V_{nm}^a = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{q=-N}^N A_{qnm} \sum_{i=0}^{2N} \left( V_N^a(0, \varphi_i) + \sum_{l=1}^N (e^{-jq\theta_l} + (-1)^m e^{jq\theta_l}) V_N^a(\theta_l, \varphi_l) \right) e^{-jm\varphi_i} \quad (\text{A5.19})$$

### **Conclusion:**

Dans le cas d' une sphère vibrante, les coefficients modaux  $V_{nm}^a$  peuvent être calculés exactement à partir de valeurs discrètes de la vitesse vibratoire si le maillage vérifie un double critère de Shannon suivant les angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Tous les coefficients  $V_{nm}^a$  d'ordre  $n$  inférieur à  $N$  sont ainsi calculés pour un maillage de  $(N+1) \times (2N+1)$  points régulièrement répartis sur le domaine  $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ .

Avec les définitions (A5.8) et (A5.17) les points  $\{(0, \varphi_i), i = 1, \dots, 2N\}$  correspondent en fait à un seul et même point. Il faut donc définir  $(N+1) \times (2N-1)$  points de maillage sur la sphère pour calculer les  $(N+1)^2$  premiers coefficients. Pour  $N \gg 1$ , il faut environ deux fois plus de points de maillage que de coefficients à calculer.

En particulier, si on note  $N_\theta$  et  $N_\varphi$  le nombre de points de maillage suivant les angles  $\theta$  et  $\varphi$  alors le calcul du coefficient  $V_{nm}^a$  respectera le critère de Shannon si  $n$  et  $m$  vérifient:

$$\text{Critère d'échantillonnage pour le coefficient modal } V_{nm}^a : \left\{ \begin{array}{l} n+1 \leq N_\theta \\ 2m+1 \leq N_\varphi \end{array} \right. \quad (\text{A5.20})$$

Les coefficients qui ne respectent pas ce critère ne pourront être calculés. Cette limite liée à l'échantillonnage s'interprète comme dans le domaine du traitement du signal à partir du phénomène de recouvrement de "spectre" <sup>(61)</sup>.



## Annexe 6

Expression du rayonnement acoustique d'une surface vibrante  
à partir du rayonnement d'une sphère qui englobe cette surface

### Objectif

Il s'agit de montrer, à partir de l'équation intégrale de Helmholtz, que la pression acoustique rayonnée par une structure vibrante  $S$  peut s'exprimer sous la forme d'une série convergente si le point d'écoute est placé à l'extérieur de  $S_0$ , une sphère qui englobe la surface  $S$ .

### Démonstration:

L'équation intégrale de Helmholtz permet d'exprimer la pression acoustique rayonnée en tout point  $M$  extérieur à  $S$  sous la forme:

$$P(M) = \iint_S (P(M_s) \frac{\partial G(M, M_s)}{\partial n_{M_s}} + j\omega\rho_0 V(M_s) G(M, M_s)) dS \quad (\text{A6.1})$$

où  $P(M_s)$  et  $V(M_s)$  sont respectivement la pression pariétale et la vitesse vibratoire définies en tout point  $M_s$  de  $S$ , et  $G$  une fonction de Green solution de l'équation d'onde non-homogène:

$$\Delta G(M_1, M_2) + k^2 G(M_1, M_2) = -\delta(M_1, M_2) \quad (\text{A6.2})$$

Si l'on n'impose pas à  $G$  de vérifier de conditions aux limites particulières sur  $S$ , on peut prendre la fonction de Green en champ libre  $G_0$  définie par:

$$G_0(M_1, M_2) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (\text{A6.3})$$

où  $r = \left\| \vec{M_1 M_2} \right\|$ .  $G_0$  s'exprime simplement en fonction de  $h_0$  la fonction de Hankel sphérique d'ordre 0:

$$G_0(M_1, M_2) = -\frac{jk}{4\pi} h_0(kr) \quad (\text{A6.4})$$

Soit  $O$  un point situé à l'intérieur de la surface  $S$ . Dans un repère associé à  $O$ , les points  $M_1$  et  $M_2$  sont définis par leurs coordonnées sphériques  $M_1(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  et  $M_2(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ . En appliquant le théorème de translation des fonctions de Bessel <sup>(2)</sup>, on peut exprimer  $h_0$  sous la forme d'une série convergente qui dépend des coordonnées des points  $M_1$  et  $M_2$ . En fonction de la position de ces points par rapport au point  $O$  il faut distinguer deux cas:

$$1) \text{ si } r_1 \geq r_2 : G_0(M_1, M_2) = -jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 \Psi_{nm\sigma}(M_1) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_2) \quad (\text{A6.5})$$

$$2) \text{ si } r_1 \leq r_2 : G_0(M_1, M_2) = -jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 \Psi_{nm\sigma}(M_2) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_1) \quad (\text{A6.6})$$

où

$$\Psi_{nm\sigma}(M_1) = \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta_1, \varphi_1) h_n(kr_1)$$

$$\hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_1) = \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta_1, \varphi_1) j_n(kr_1)$$

Si le point  $M$  respecte la condition  $r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \geq r_s(M_s)$  pour tout point  $M_s$  de  $S$ , alors on peut développer la fonction de Green  $G_0$  de l'équation (A6.1) sous la forme (A6.6). En posant  $M_1 = M$  et  $M_2 = M_s$ , on obtient:

$$\begin{aligned} P(M) &= \iint_S (P(M_s) \frac{\partial G_0(M, M_s)}{\partial n_{M_s}} + j\omega\rho_0 V(M_s) G_0(M, M_s)) dS \\ &= -jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 \iint_S (P(M_s) \Psi_{nm\sigma}(M) \frac{\partial \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s)}{\partial n_{M_s}} + j\omega\rho_0 V(M_s) \Psi_{nm\sigma}(M) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s)) dS \\ &= -jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 \Psi_{nm\sigma}(M) \iint_S (P(M_s) \frac{\partial \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s)}{\partial n_{M_s}} + j\omega\rho_0 V(M_s) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s)) dS \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$P(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 P_{nm\sigma} \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) h_n(kr) \quad (\text{A6.7})$$

avec

$$P_{nm\sigma} = -jk \iint_S \left( P(M_s) \frac{\partial \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s)}{\partial n_{M_s}} + jk\rho_0 c_0 V(M_s) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s) \right) dS \quad (\text{A6.8})$$

Ces deux relations traduisent le rayonnement acoustique d'un multipôle équivalent à la structure  $S$  (cf. annexe 2 pour la définition du multipôle).

Soit  $S_0$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r_0$  qui englobe la structure. La fonction  $h'_n(kr_0)$  n'étant jamais nulle, on peut donc poser:

$$V_{nm\sigma}^{r_0} = \frac{j}{\rho_0 c_0} h'_n(kr_0) P_{nm\sigma} \quad (\text{A6.9})$$

et exprimer simplement le champ acoustique rayonné par la structure pour tout point  $M$  extérieur à  $S_0$  sous la forme attendue:

$$P(M) = -j\rho_0 c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 V_{nm\sigma}^{r_0} \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \frac{h_n(kr)}{h'_n(kr_0)} \quad (\text{A6.10})$$

avec

$$V_{nm\sigma}^{r_0} = \frac{k}{\rho_0 c_0} h'_n(kr_0) \iint_S \left( P(M_s) \frac{\partial \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s)}{\partial n_{M_s}} + jk\rho_0 c_0 V(M_s) \hat{\Psi}_{nm\sigma}(M_s) \right) dS \quad (\text{A6.11})$$

### **Remarque:**

Les relations (A6.7) et (A6.10) ont assez peu d'applications pratiques car en général on ne connaît pas la pression pariétale sur la structure  $S$ . Elles permettent cependant de faire le lien entre la formulation intégrale et la méthode de la sphère équivalente développée au chapitre I. En particulier, la méthode utilisée pour démontrer la relation (A6.10) ne permet pas de montrer la convergence de la série entre  $S$  et  $S_0$ . Or, la série (I.1.84) obtenue par la méthode de la sphère équivalente converge en tout point extérieur à  $S$ . La décomposition en série dans l'ensemble des fonctions d'onde sphériques étant unique, la série (A6.10) converge donc également aux points compris entre  $S$  et  $S_0$ .



## Annexe 7

### Unicité de la décomposition de la pression acoustique rayonnée par une structure vibrante dans l'ensemble des fonctions d'onde sphériques

Soient  $S$  une surface vibrante et  $O$  un point placé dans le volume intérieur de  $S$ . On note:

$$A_1 = \{P_{nm\sigma}^1, n=0, \dots; m=0, \dots, n, \sigma=0, 1\}$$

$$A_2 = \{P_{nm\sigma}^2, n=0, \dots; m=0, \dots, n, \sigma=0, 1\}$$

deux ensembles de coefficients tels que la pression acoustique rayonnée par  $S$  et associée respectivement à  $A_1$  et  $A_2$  s'écrit:

$$P_1(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 P_{nm\sigma}^1 \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) h_n(kr)$$

$$P_2(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 P_{nm\sigma}^2 \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) h_n(kr)$$

(A7.1)

Ces deux séries convergent uniformément en tout point  $M$  extérieur à  $S$  et, par hypothèse:

$$P_1(M) = P_2(M)$$

(A7.2)

Soit  $S_0$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r_0$  qui englobe la structure. En tout point  $M_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  de  $S_0$  les éléments de  $A_1$  et  $A_2$  vérifient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 (P_{nm\sigma}^1 - P_{nm\sigma}^2) \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta_0, \varphi_0) h_n(kr_0) = 0$$

(A7.3)

On peut alors multiplier chaque membre de l'équation par  $\bar{Y}_{\nu\mu}^s(\theta_0, \varphi_0)$  et intégrer sur la surface  $S_0$ . On en déduit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=0}^1 (P_{nm\sigma}^1 - P_{nm\sigma}^2) h_n(kr_0) \iint_{S_0} \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{\nu\mu}^s(\theta_0, \varphi_0) \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 = 0$$

(A7.4)

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions  $\bar{Y}_{\nu\mu}^s$ , les coefficients vérifient:

$$(P_{nm\sigma}^1 - P_{nm\sigma}^2) h_n(kr_0) = 0 \text{ pour tout triplet } (n, m, \sigma)$$

(A7.5)

Les zéros des fonctions de Hankel sphériques étant des nombres complexes de partie imaginaire strictement négative<sup>(52)</sup>, on en déduit l'unicité du développement en série du rayonnement de  $S$  dans l'ensemble des fonctions d'onde sphériques.



## Annexe 8

### Calcul du rayonnement acoustique d'une portion de sphère pulsante

#### Définition

Soit  $S$  la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  telle qu'en tout point de sa surface la vitesse vibratoire  $V^R$  vérifie:

$$V^R(\theta, \varphi) = \begin{cases} V & \text{si } \theta \in [0, \theta_0[ \\ 0 & \text{si } \theta \in ]\theta_0, \pi] \end{cases}$$

(A8.1)

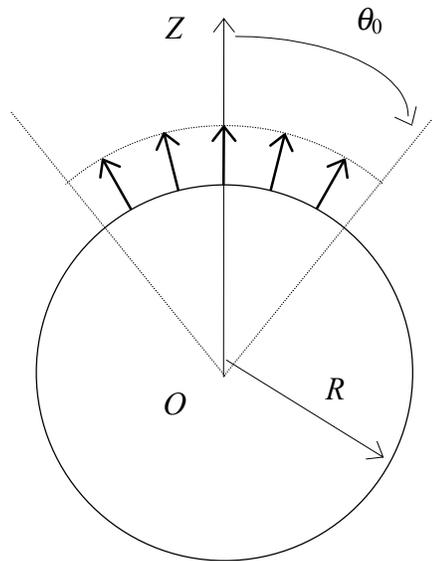


Figure A8.1  
Portion de sphère pulsante  
définie par l'angle  $\theta_0$

#### Expression des coefficients modaux de $S$

En appliquant la relation (II.3) les coefficients modaux de  $S$  vérifient

$$\begin{aligned} V_{nm\sigma}^R &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} V^R(\theta, \varphi) \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{V}{N_{nm}} \underbrace{\left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{vmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{vmatrix} d\varphi \right)}_{I_{\varphi}} \underbrace{\left( \int_{\theta=0}^{\theta_0} P_{mn}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \right)}_{I_{\theta}} \end{aligned}$$

(A8.2)

Si l'indice  $m$  est différent de zéro alors l'intégrale  $I_\varphi$  est nulle. On en déduit que seuls les coefficients modaux  $(m, \sigma) = (0, 1)$  sont différents de zéro. L'intégrale  $I_\varphi$  vaut alors  $2\pi$ . Les coefficients sont notés  $V_n^R$ .

Le coefficient de normalisation s'exprime simplement en fonction de l'ordre  $n$ :

$$N_{nm} = N_{n0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}} \quad (\text{A8.3})$$

De même, l'intégrale  $I_\theta$  vérifie:

$$I_\theta = \int_{\cos\theta_0}^1 P_n(x) dx \quad (\text{A8.4})$$

où les fonctions  $P_n$  sont les polynômes de Legendre définis en annexe 1. Avec la notation  $P_{-1} = P_0$  cette intégrale se met sous la forme:

$$I_\theta = \frac{P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)}{2n+1} \quad (\text{A8.5})$$

On en déduit l'expression des coefficients modaux de  $S$ :

$$V_n^R = V \sqrt{\frac{\pi}{2n+1}} (P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)) \quad (\text{A8.6})$$

### Application

La vitesse vibratoire, la pression et la puissance acoustique rayonnée par  $S$  se mettent sous la forme:

$$V^R(\theta) = \frac{V}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)) P_n(\cos\theta) \quad (\text{A8.7})$$

$$P(M) = P(r, \theta) = -j\rho_0 c_0 \frac{V}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)) P_n(\cos\theta) \frac{h_n(kr)}{h_n'(kR)} \quad (\text{A8.8})$$

$$W = \frac{\rho_0 c_0}{2k^2} V^2 \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0))^2}{(2n+1) |h_n'(kR)|^2} \quad (\text{A8.9})$$

## Annexe 9

Cette annexe contient les figures citées dans le paragraphe 3.3.2. du chapitre III.

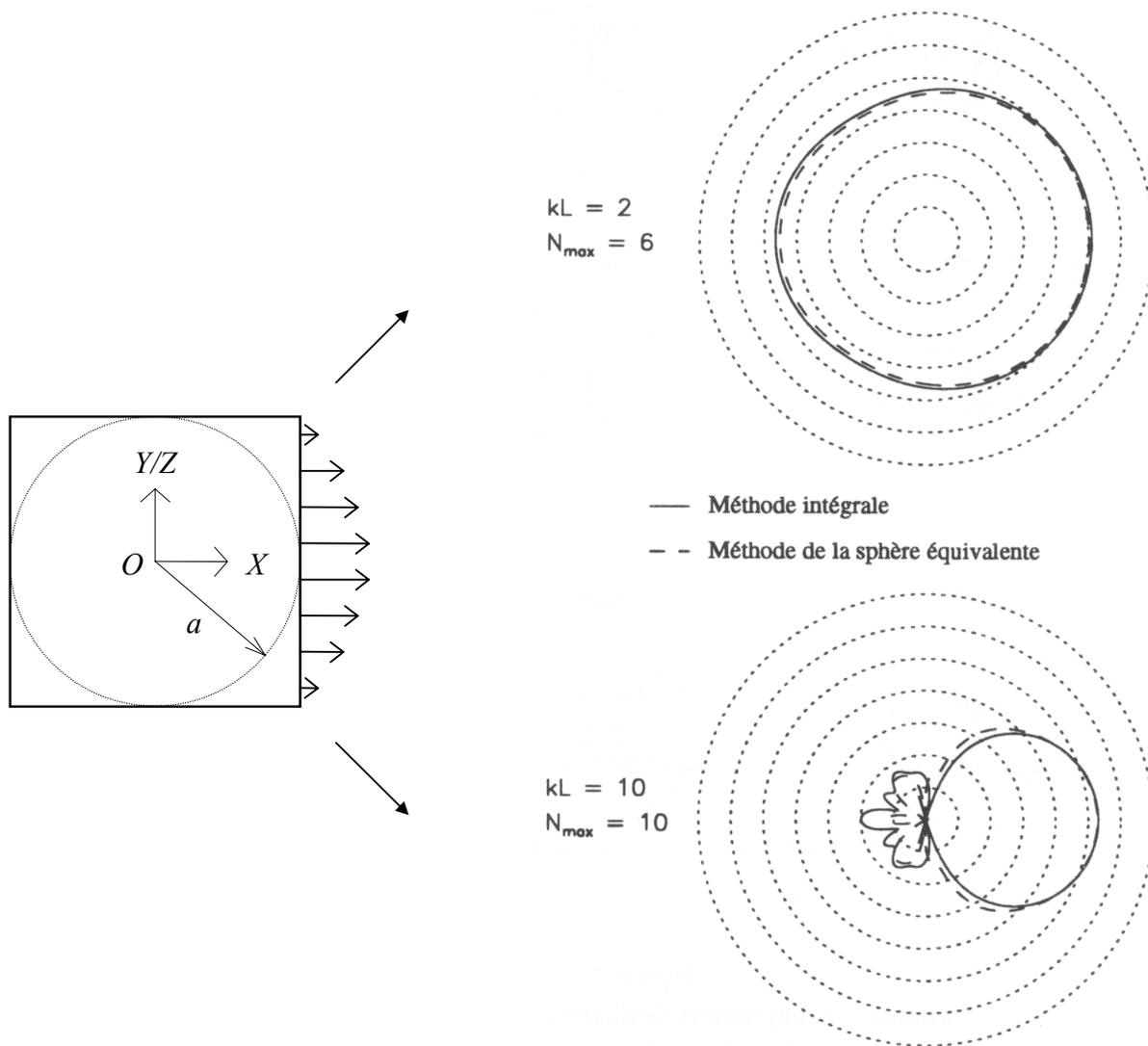


Figure A9.1  
 Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont la face  $X = L/2$  vibre sur le mode (1,1)  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre du cube	$r = 10L$
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )
maillage vibratoire utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )

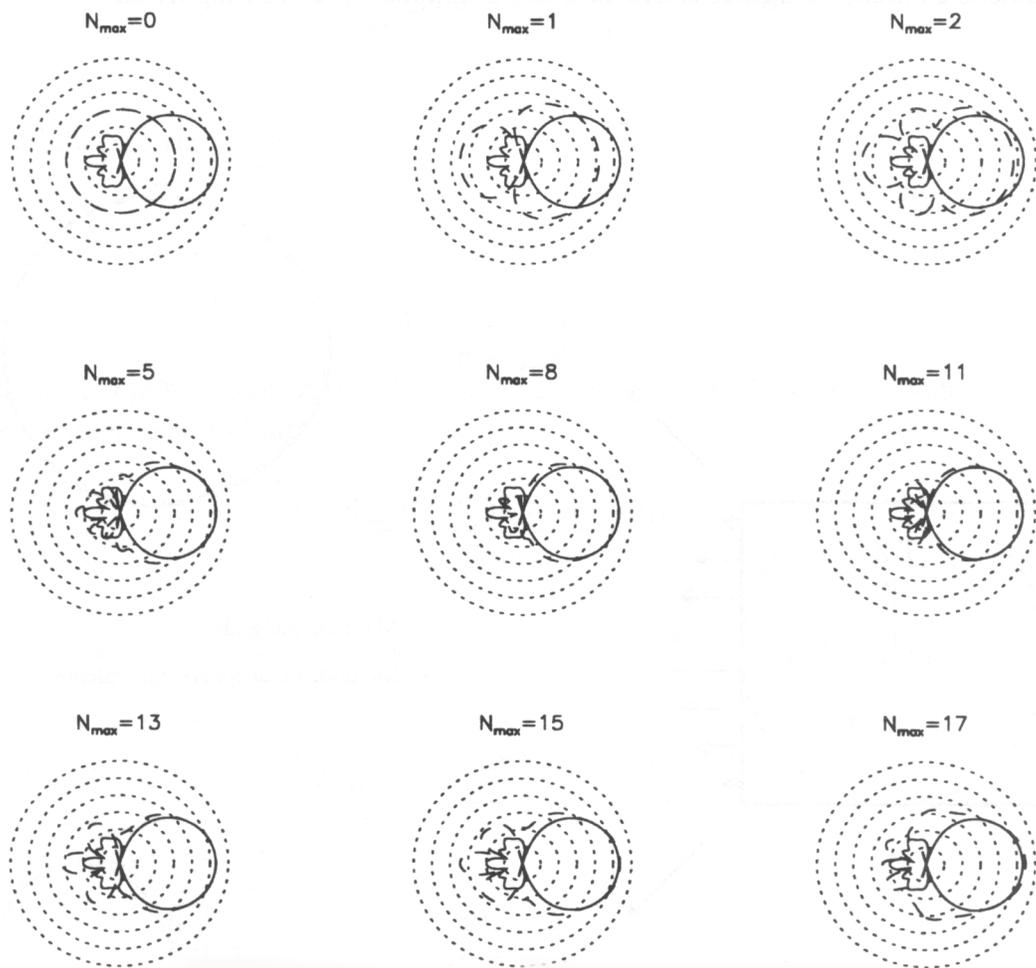


Figure A9.2  
 Variation du diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont la face  $X = L/2$  vibre sur le mode  $(1,1)$   
 en fonction de l'ordre maximum des modes de la sphère équivalente pris en compte  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre du cube	$r = 10L$
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )
maillage vibratoire utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )

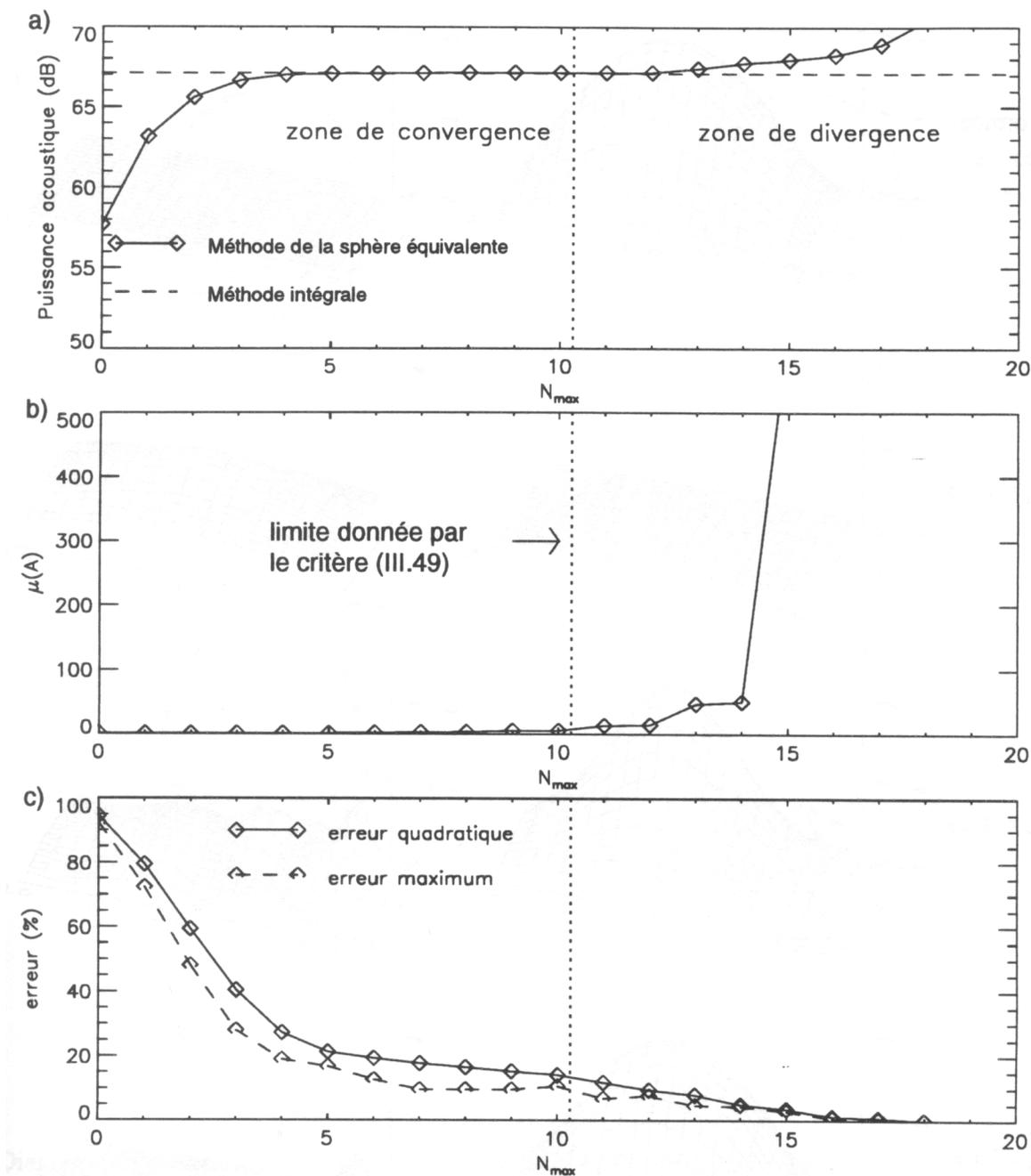


Figure A9.3

Variations de la puissance acoustique, du nombre de conditionnement de la matrice  $A$ , de l'erreur quadratique et de l'erreur maximum en fonction de l'ordre maximum des modes de la sphère équivalente pris en compte. (maillage de 294 points :  $N_x = N_y = N_z = 7$ )

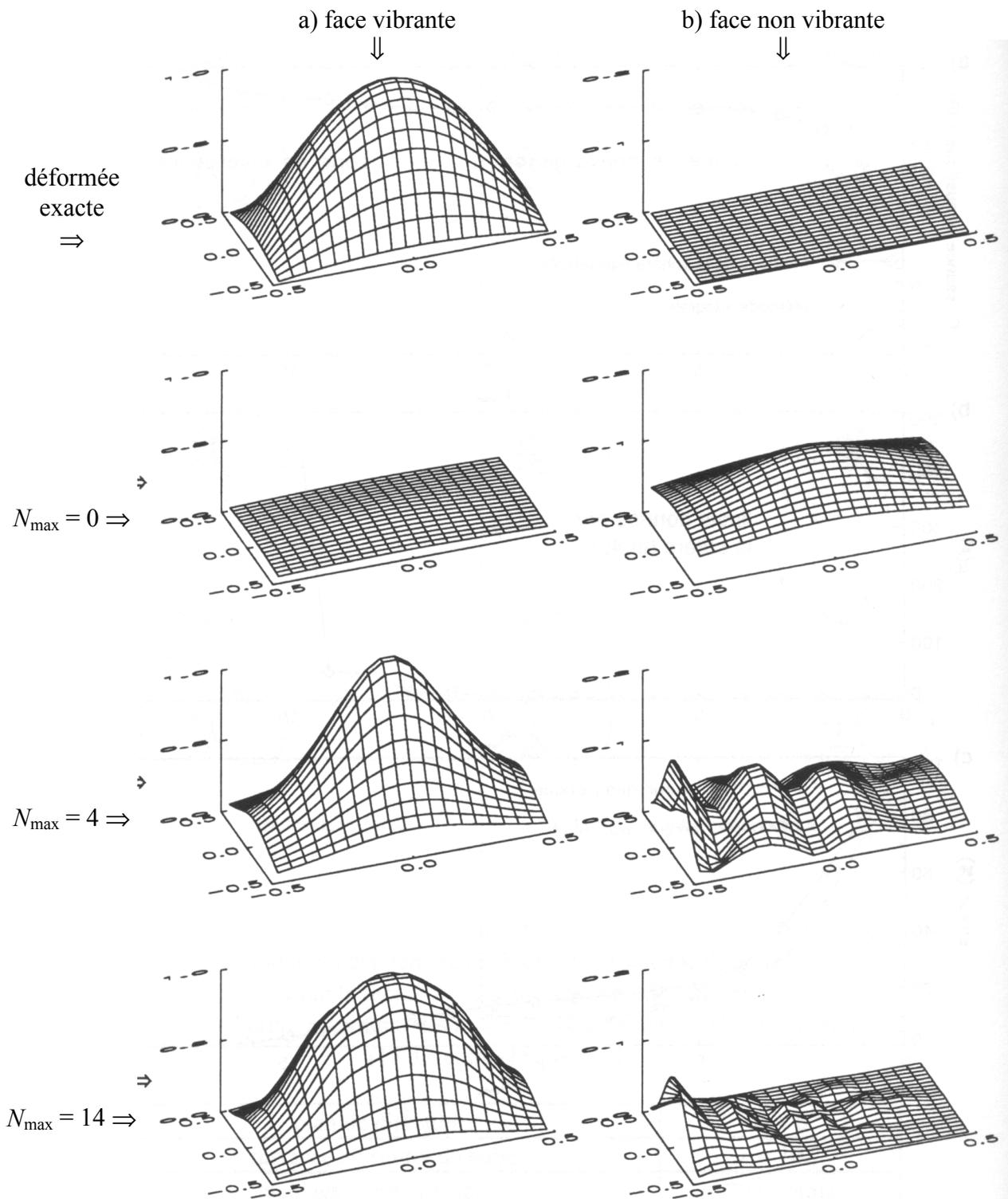


Figure A9.4

Déformée vibratoire calculée par la sphère équivalente en fonction de  $N_{\max}$   
 a) sur une face qui vibre sur le mode (1,1)  
 b) sur une face rigide en contact avec la face vibrante  
 ( $L = 1,0 \text{ m}$  ;  $kL = 10$  ; 400 points de maillage sur chaque face ; vitesses normalisées)

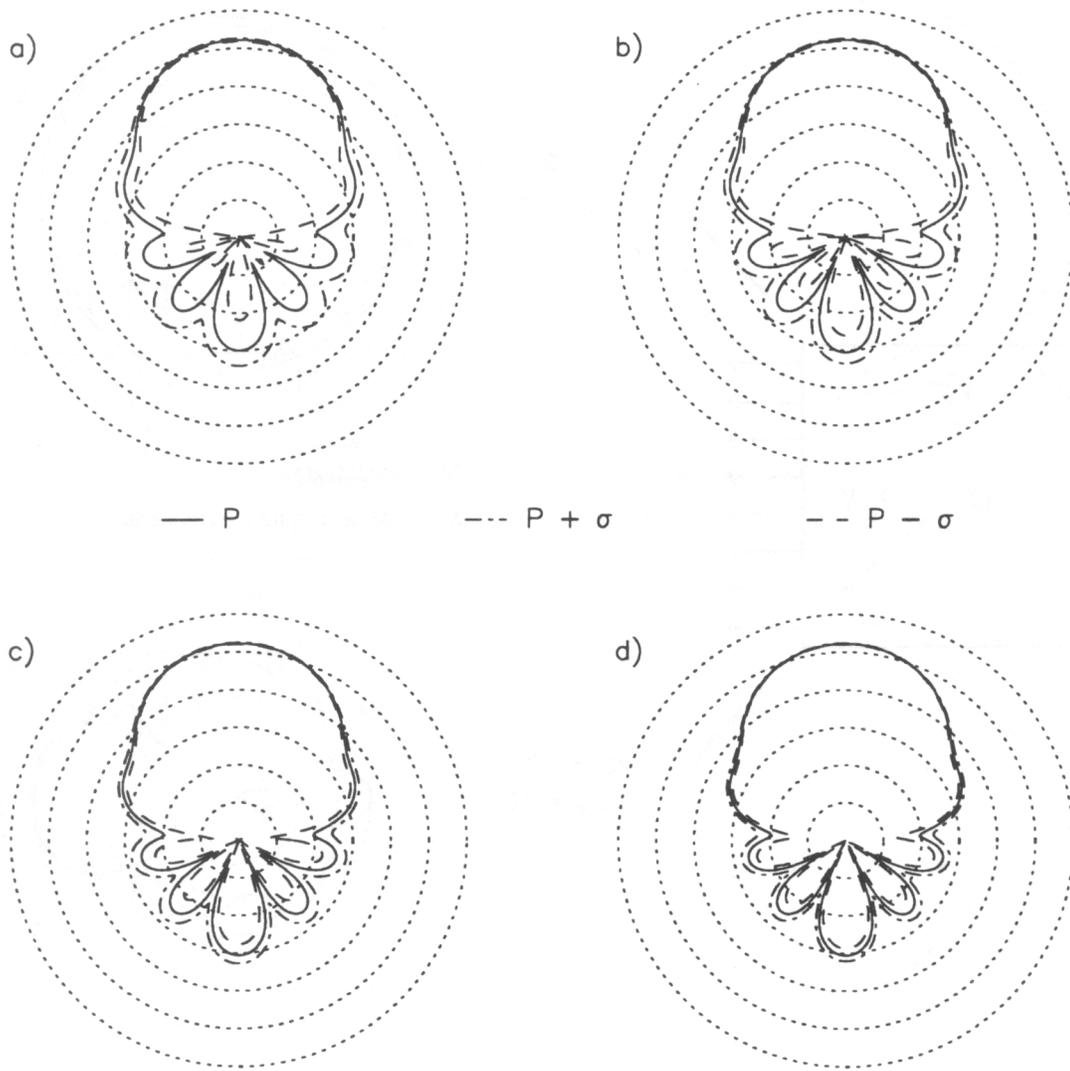


Figure A9.5

Diagrammes de directivité du champ de pression acoustique rayonné par la sphère équivalente

pour un écart type constant sur les vitesses vibratoires :  $\sigma_0 = \frac{1}{10} \text{Max} \left[ V(M_i), i = 1, \dots, N_s \right]$

a) maillage de 150 points :  $N_x = N_y = N_z = 5$

b) maillage de 294 points :  $N_x = N_y = N_z = 7$

c) maillage de 600 points :  $N_x = N_y = N_z = 10$

d) maillage de 1350 points :  $N_x = N_y = N_z = 15$

(  $N_{\text{max}} = 4$  ;  $kL = 10$  ; plan de directivité  $Z = 0$  ; distance au centre du cube  $r = 10L$  )

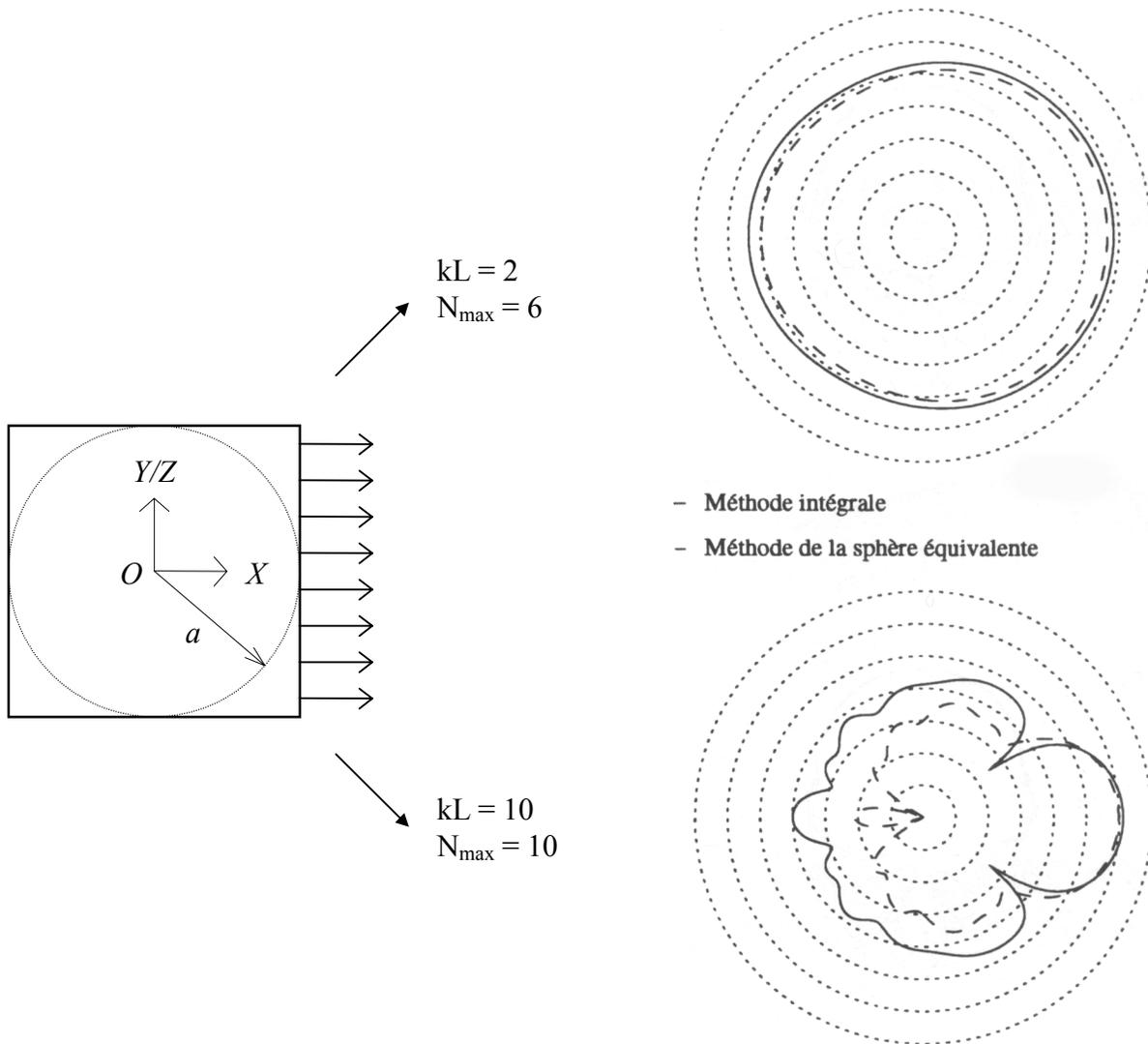


Figure A9.6  
 Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont la face  $X = +L/2$  pulse  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre du cube	$r = 10L$
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )
maillage vibratoire utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )

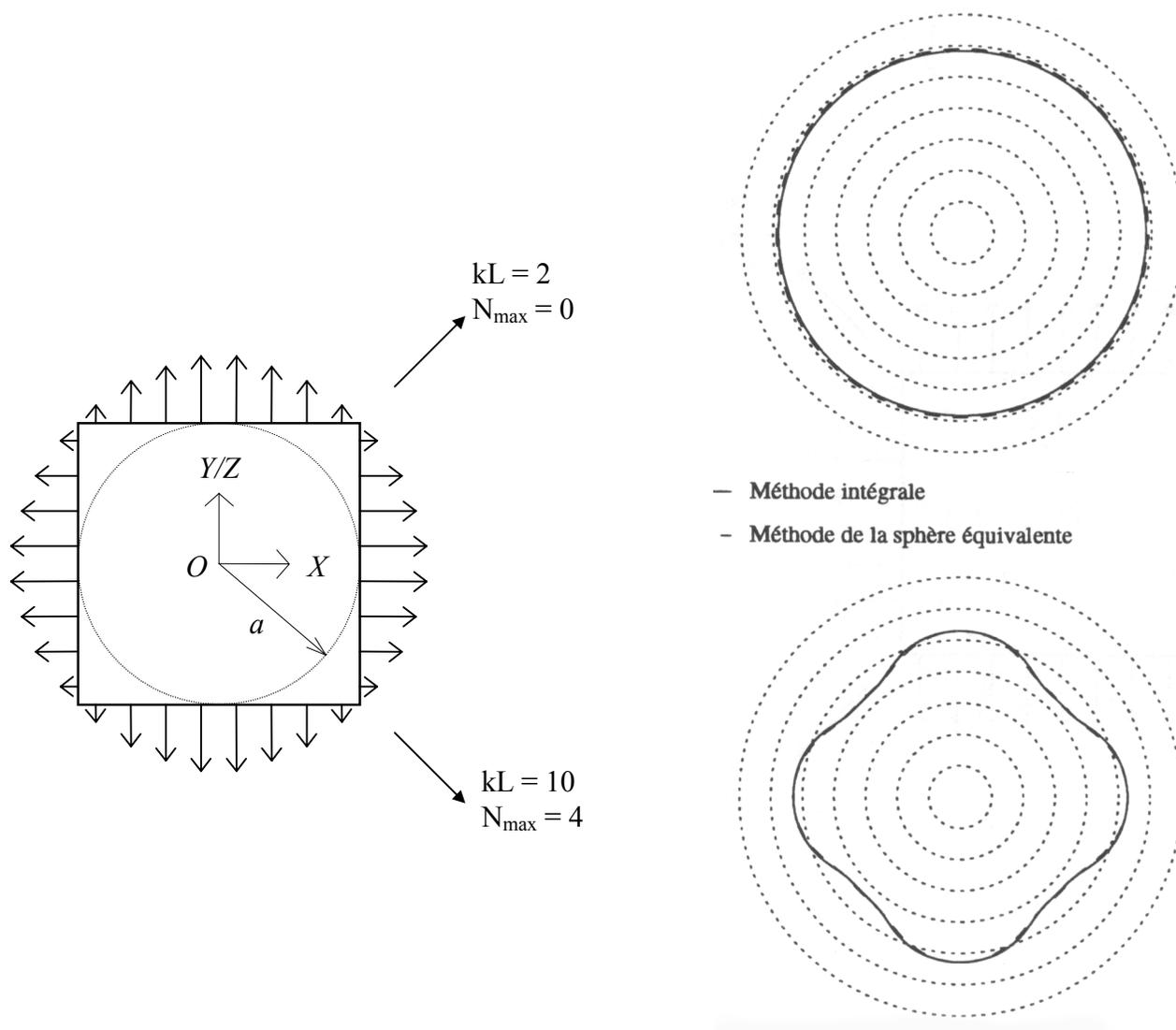


Figure A9.7  
 Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont les six faces vibrent en phase sur le mode (1,1)  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre du cube	$r = 10L$
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )
maillage vibratoire régulier utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )

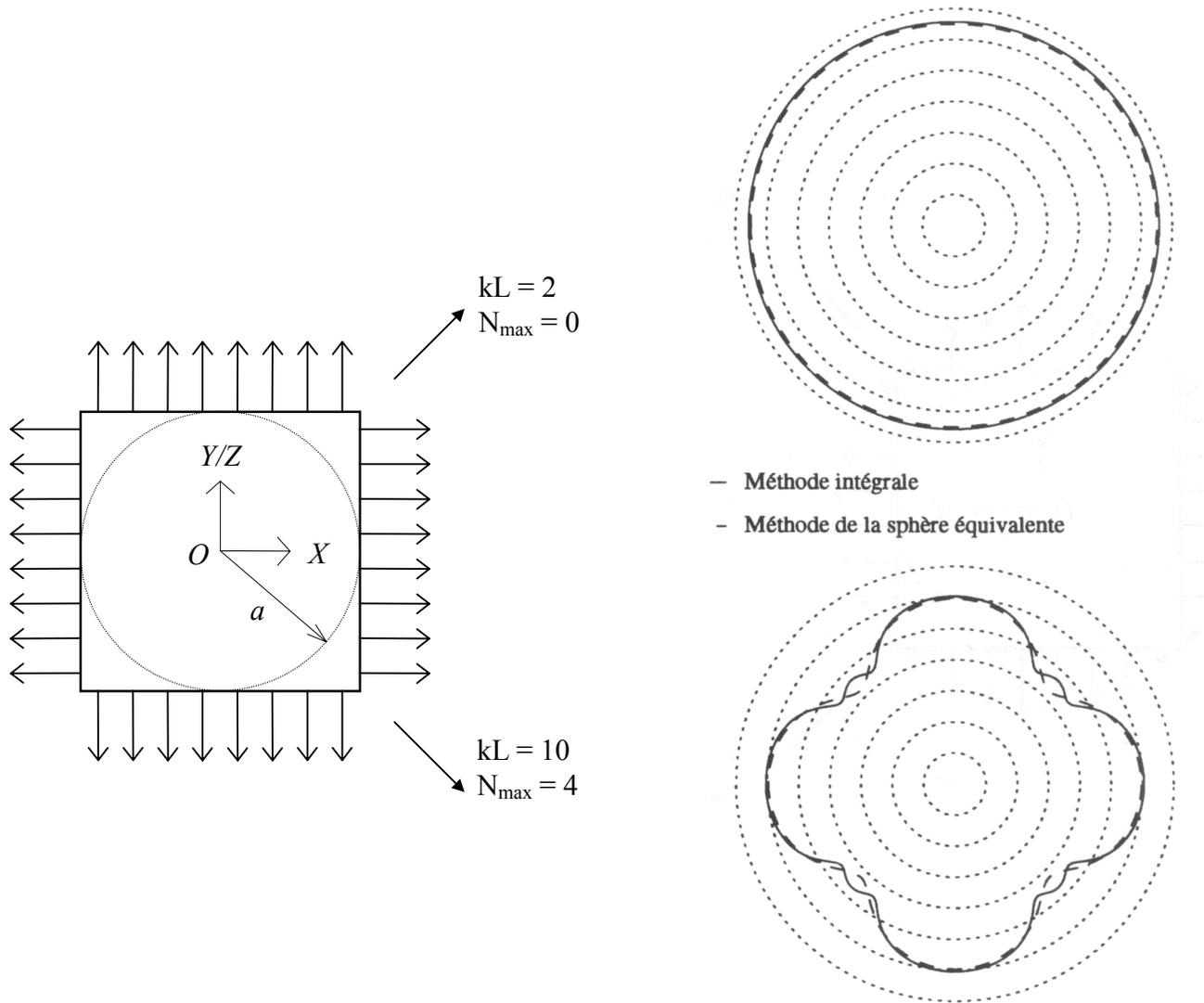


Figure A9.8  
 Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont les six faces pulsent en phase  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre du cube	$r = 10L$
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )
maillage vibratoire régulier utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )

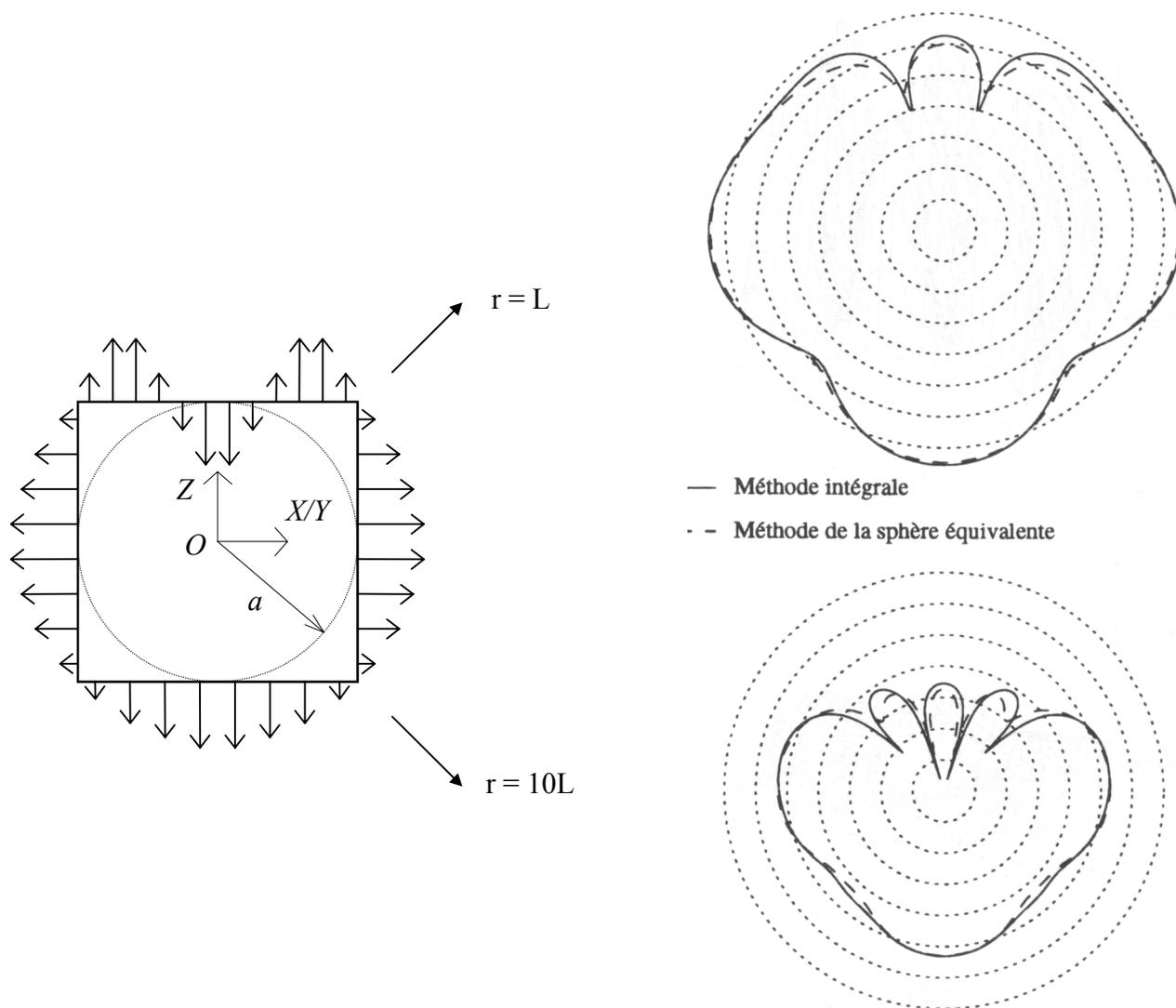


Figure A9.9  
 Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont la face  $Z = L/2$  vibre sur le mode (3,3)  
 et les cinq autres faces vibrent en phase sur le mode (1,1)  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$X = 0$
$kL$	10
$N_{\max}$	10
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	480 $N_x = N_y = 10 ; N_z = 7$
maillage vibratoire régulier utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	600 ( $N_x = N_y = N_z = 10$ )

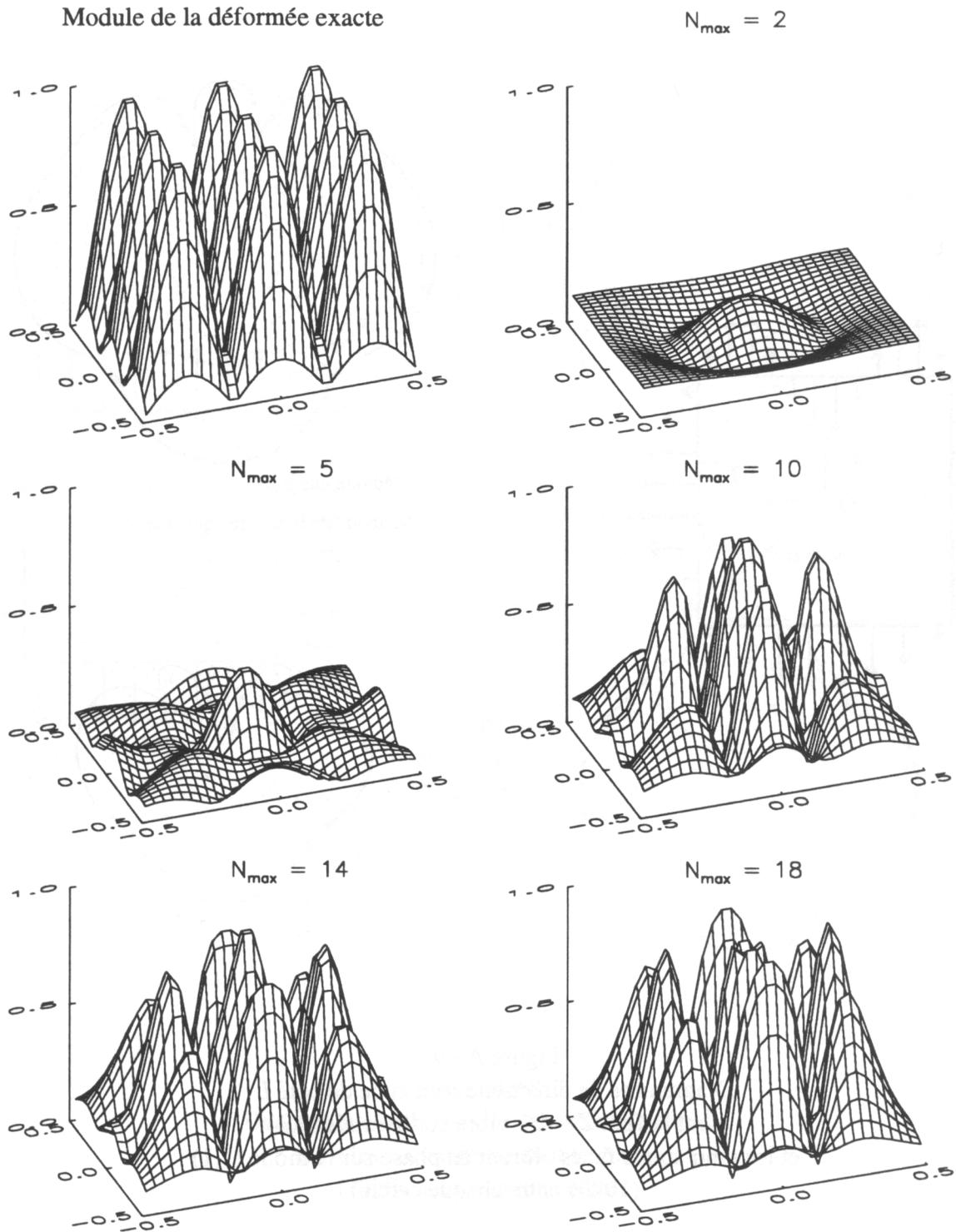


Figure A9.10  
 Comparaison entre le module de la déformée vibratoire imposée et calculée  
 par la sphère équivalente  
 Cas d'une face vibrant sur le mode (3,3)

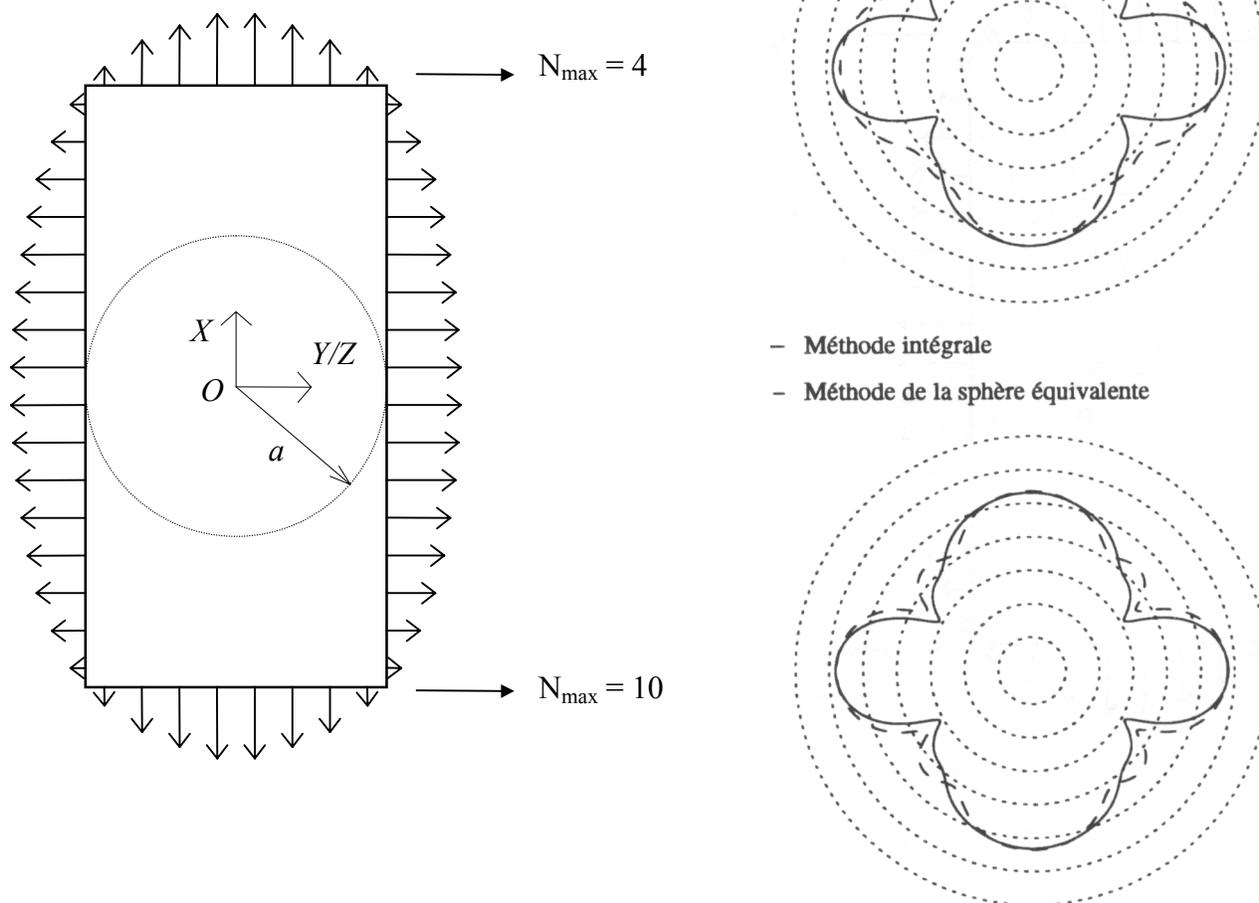


Figure A9.11  
 Diagramme de directivité d'une boîte de dimensions  $L_x = 2L$  et  $L_y = L_z = L$   
 dont les six faces vibrent en phase sur le mode (1,1)  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
$kL$	10
distance au centre de la boîte	$r = 10L$
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	264 points ( $N_x = 8, N_y = N_z = 6$ )
maillage vibratoire régulier utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	1000 points ( $N_x = 2N_y = 2N_z = 20$ )

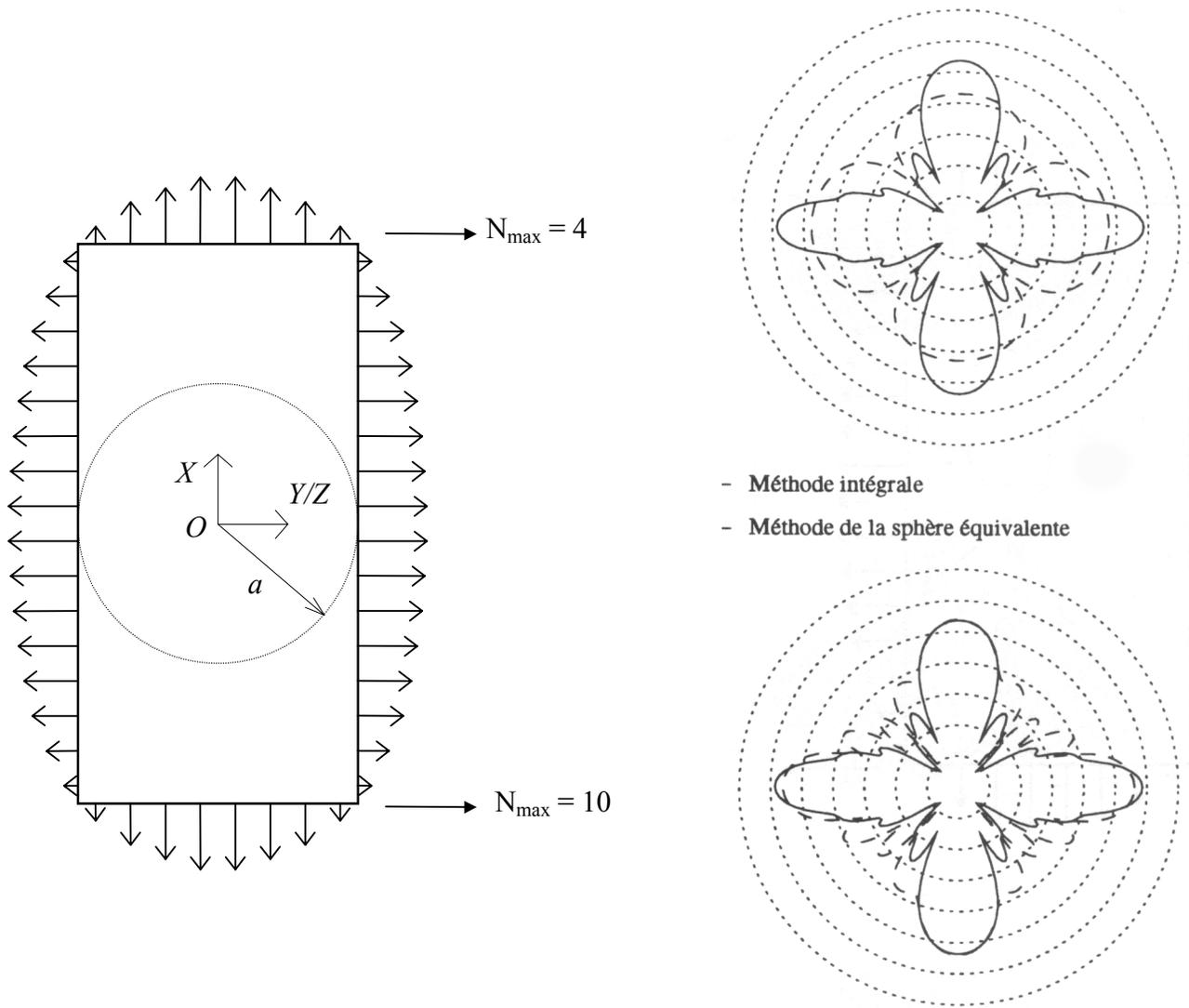


Figure A9.12

Diagramme de directivité d'une boîte de dimensions  $L_x = 2L$  et  $L_y = L_z = L$   
 dont les six faces vibrent en phase sur le mode (1,1)  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
$kL$	20
distance au centre de la boîte	$r = 10L$
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	264 points ( $N_x = 8, N_y = N_z = 6$ )
maillage vibratoire régulier utilisé pour la méthode de la sphère équivalente	1000 points ( $N_x = 2N_y = 2N_z = 20$ )

## Annexe 10

Méthode géométrique :

- 1) Définitions des projections dans le cas d'une plaque rectangulaire insérée dans un baffle
- 2) Applications au cas d'un cube

### 1) Définitions des projections

Soit une plaque rectangulaire de centre  $O$  et de dimensions  $L_x \times L_y$ , telle que tout point de la plaque est repéré par ses coordonnées  $(X_s, Y_s)$  dans le repère  $(O, X, Y, Z)$ . On définit également la sphère  $S_a$  de rayon  $a$  et de centre  $O_a(0, 0, -a)$ . Cette sphère est tangente à la plaque au point  $O$ . Dans le repère  $(O_a, X, Y, Z)$ , tout point de la sphère est défini par ses coordonnées sphériques  $(a, \theta_s, \varphi_s)$ .

⇒ Il s'agit d'exprimer les coordonnées  $(X_s, Y_s)$  d'un point  $M_s$  qui décrit la surface plane en fonction des coordonnées  $(a, \theta_s, \varphi_s)$  de son point image  $M_a$  sur la sphère équivalente pour les deux projections définies au paragraphe 2.3. du chapitre II.

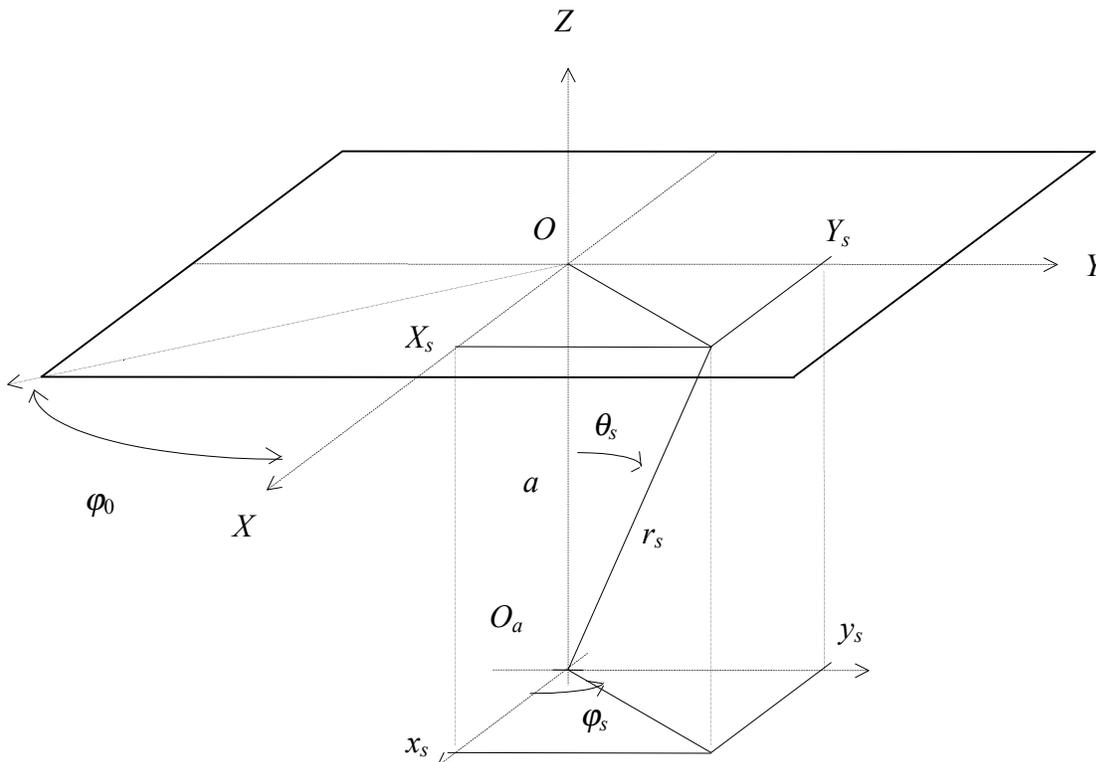


Figure A10.1  
Schéma de la plaque

a) Projection suivant l'axe  $OZ$

Soit  $(x_s, y_s, z_s)$  les coordonnées cartésiennes du point  $M_s$  dans le repère lié à la sphère. Le point  $M_a$ , image de  $M_s$  par la projection suivant l'axe  $Oz$ , vérifie:

$$(x_a, y_a) = (x_s, y_s) \quad (\text{A10.1})$$

On en déduit:

$$\begin{cases} x_s = a \sin \theta_a \cos \varphi_a \\ y_s = a \sin \theta_a \sin \varphi_a \end{cases} \quad (\text{A10.2})$$

Avec  $(X_s, Y_s) = (x_s, y_s)$ , il vient:

$$\begin{cases} X_s = a \sin \theta_a \cos \varphi_a \\ Y_s = a \sin \theta_a \sin \varphi_a \end{cases} \quad (\text{A10.3})$$

b) Projection suivant les rayons de la sphère

Les coordonnées cartésiennes du point  $M_s$  s'exprime fonction des coordonnées sphériques  $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$  par:

$$\begin{cases} x_s = r_s \sin \theta_s \cos \varphi_s \\ y_s = r_s \sin \theta_s \sin \varphi_s \\ z_s = r_s \cos \theta_s \end{cases} \quad (\text{A10.4})$$

Le point  $M_s$  appartenant au plan  $z_s = a$ , on en déduit  $r_s = \frac{a}{\cos \theta_s}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X_s = a \tan \theta_s \cos \varphi_s \\ Y_s = a \tan \theta_s \sin \varphi_s \end{cases} \quad (\text{A10.5})$$

Pour la projection suivant les rayons de la sphère, l'image de  $M_s$  sur la sphère est le point  $M_a$  tel que  $(\theta_s, \varphi_s) = (\theta_a, \varphi_a)$ . On obtient donc la relation:

$$\begin{cases} X_s = a \tan \theta_a \cos \varphi_a \\ Y_s = a \tan \theta_a \sin \varphi_a \end{cases} \quad (\text{A10.6})$$

Les coefficients modaux de la sphère équivalente vérifient:

$$V_{nm\sigma}^a = \underbrace{\int_{\varphi_a=0}^{2\pi} \int_{\theta_a=0}^{\theta_{\text{lim}}(\varphi_a)} V^a(\theta, \varphi) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}_{\text{point image sur la plaque}} + \underbrace{\int_{\varphi_a=0}^{2\pi} \int_{\theta_a=\theta_{\text{lim}}(\varphi_a)}^{\pi} V^a(\theta, \varphi) \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}_{\text{point image sur le baffle}} \quad (\text{A10.7})$$

Pour décrire l'ensemble de la plaque vibrante, l'angle  $\varphi_a$  doit donc varier de 0 à  $2\pi$  et l'angle  $\theta_a$  de 0 à un angle limite  $\theta_{\text{lim}}$  qui dépend de l'angle  $\varphi_a$ . Si on note  $\varphi_0 = \text{Arctan}\left(\frac{L_y}{L_x}\right)$  alors l'angle  $\theta_a$  vérifie:

$$\begin{aligned} \theta_a &\in \left[0, \text{Arcsin}\left|\frac{L_x}{2a\cos\varphi_a}\right|\right] \text{ si } \varphi_a \in [-\varphi_0, \varphi_0] \cup [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0] \\ \theta_a &\in \left[0, \text{Arcsin}\left|\frac{L_y}{2a\sin\varphi_a}\right|\right] \text{ si } \varphi_a \in [\varphi_0, \pi - \varphi_0] \cup [\pi + \varphi_0, 2\pi - \varphi_0] \end{aligned} \quad (\text{A10.8})$$

pour une projection suivant l'axe  $OZ$  et

$$\begin{aligned} \theta_a &\in \left[0, \text{Arctan}\left|\frac{L_x}{2a\cos\varphi_a}\right|\right] \text{ si } \varphi_a \in [-\varphi_0, \varphi_0] \cup [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0] \\ \theta_a &\in \left[0, \text{Arctan}\left|\frac{L_y}{2a\sin\varphi_a}\right|\right] \text{ si } \varphi_a \in [\varphi_0, \pi - \varphi_0] \cup [\pi + \varphi_0, 2\pi - \varphi_0] \end{aligned} \quad (\text{A10.9})$$

pour une projection suivant les rayons de la sphère.

A partir des relations (A13.7) et (A13.8), on peut donc exprimer la vitesse vibratoire en tout point  $M_a(a, \theta_a, \varphi_a)$  de la sphère équivalente en fonction de la vitesse vibratoire au point  $M_s(X_s, Y_s)$  de la plaque. En dehors de ces domaines, le point  $M_a(a, \theta_a, \varphi_a)$  est associé à une vitesse vibratoire nulle qui rend compte du baffle.

## 2) Application au cas d'un cube

Lorsque la surface vibrante est un cube de même centre que la sphère, chaque point du cube peut être associé à un unique point de la sphère en choisissant une projection suivant les rayons de la sphère. Des relations équivalentes à la relation A10.6 peuvent être établies pour la projection de chacune des faces du cube. Les figures A10.2 à A10.5 sont commentées au paragraphe 4.2. du chapitre III.

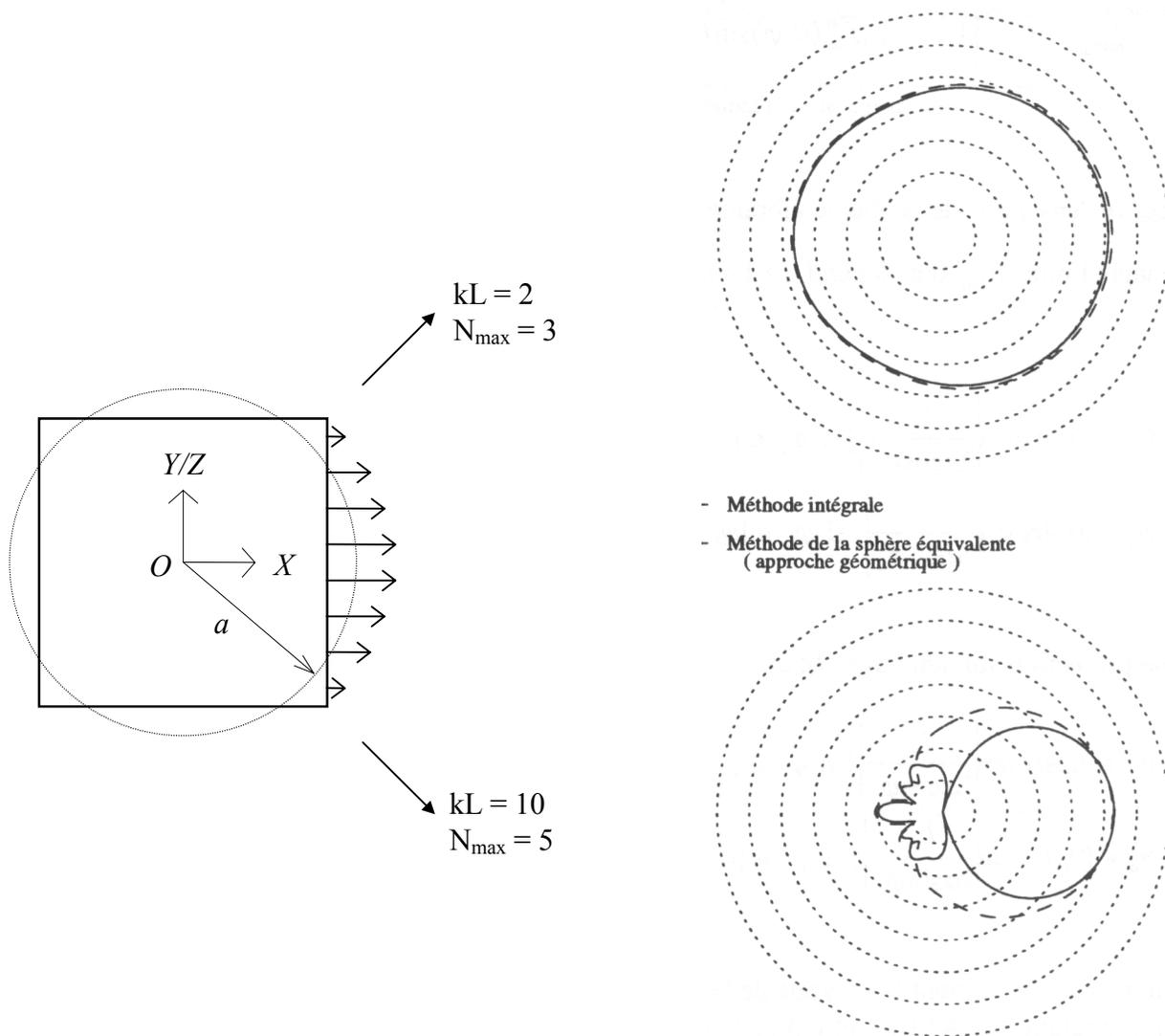


Figure A10.2  
 Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont la face  $X = L/2$  vibre sur le mode (1,1)  
 Approche géométrique avec une projection suivant les rayons de la sphère  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre du cube	$r = 10L$
maillage vibratoire du cube utilisé pour la méthode intégrale	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )
maillage vibratoire de la sphère équivalente pour la méthode géométrique	800 points ( $N_\varphi = 2N_\theta = 40$ )
rayon de la sphère équivalente	$a = (r_{\text{ins}} + r_{\text{cir}}) / 2$

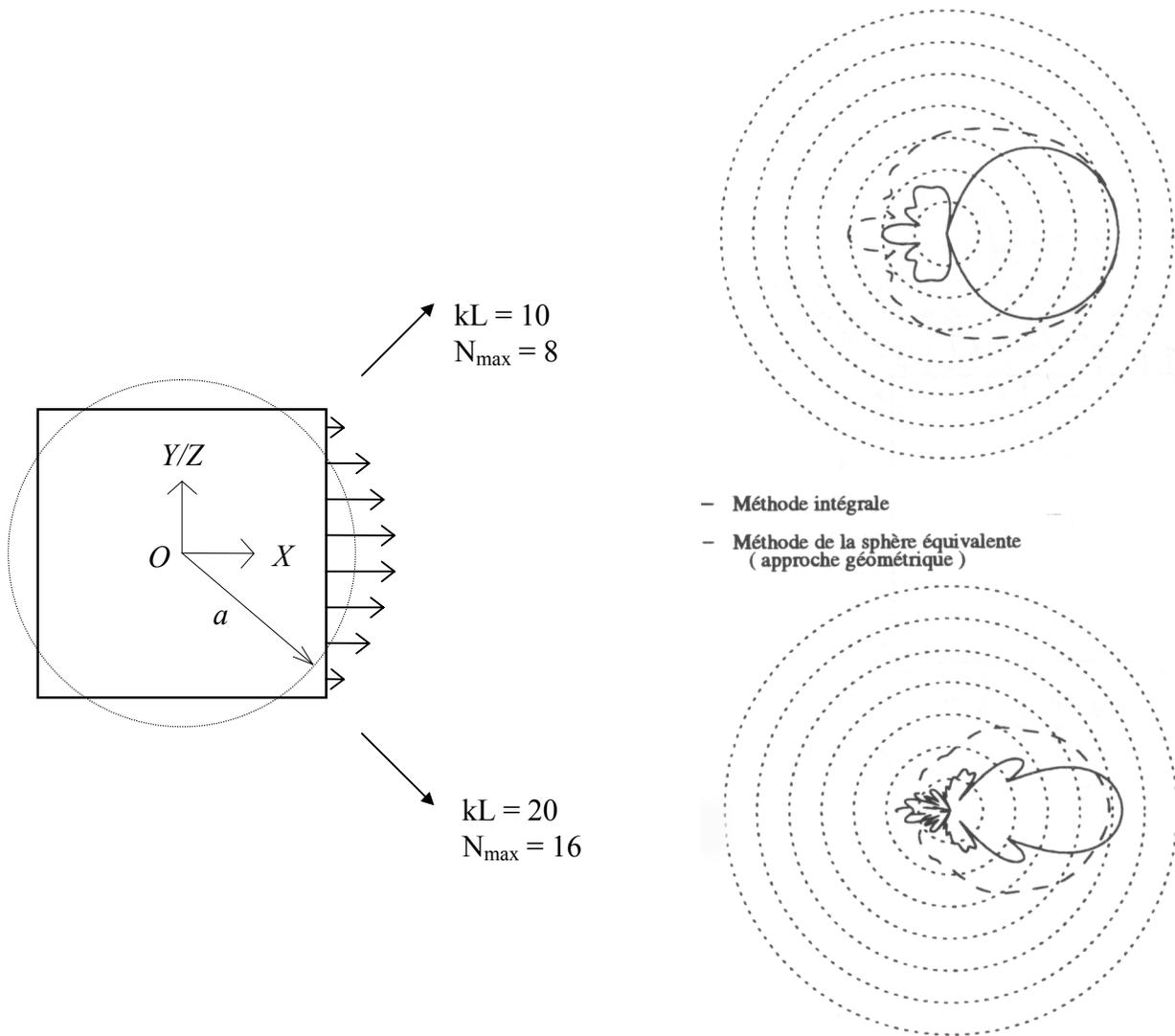


Figure A10.3  
 Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$   
 dont la face  $X = L/2$  vibre sur le mode (1,1)  
 Approche géométrique avec une projection suivant les rayons de la sphère  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre du cube	$r = 10L$
maillage vibratoire du cube utilisé pour la méthode intégrale	294 points ( $N_x = N_y = N_z = 7$ )
maillage vibratoire de la sphère équivalente pour la méthode géométrique	800 points ( $N_\varphi = 2N_\theta = 40$ )
rayon de la sphère équivalente	$a = (r_{\text{ins}} + r_{\text{cir}}) / 2$

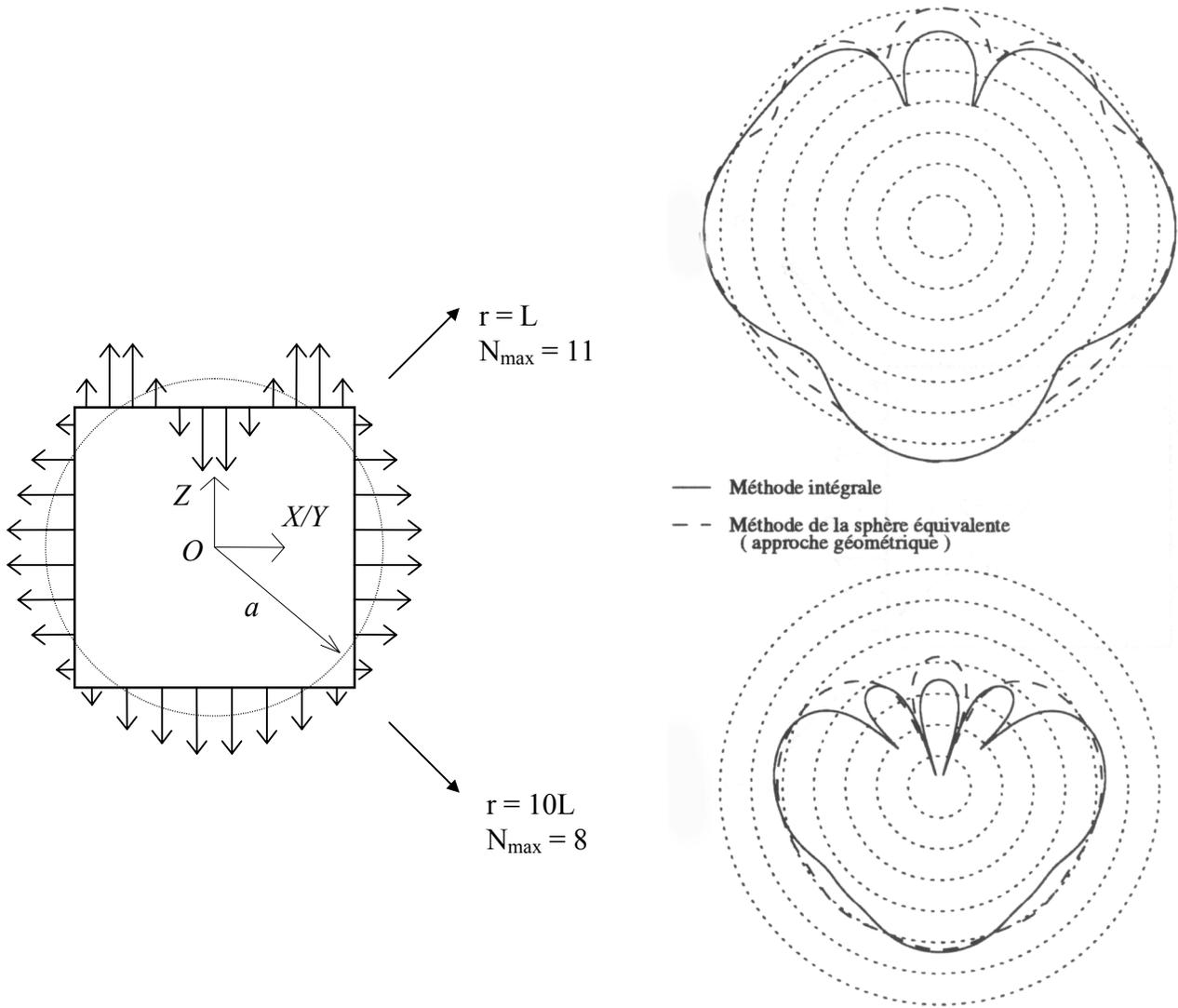


Figure A10.4

Diagramme de directivité d'un cube de côté  $L$  dont la face  $Z = L/2$  vibre sur le mode (3,3) et les cinq autres faces vibrent en phase sur le mode (1,1)  
 Approche géométrique avec une projection suivant les rayons de la sphère  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$X = 0$
$kL$	10
maillage vibratoire utilisé pour la méthode intégrale	480 ( $N_x = N_y = 10 ; N_z = 7$ )
maillage vibratoire de la sphère équivalente pour la méthode géométrique	800 points ( $N_\phi = 2N_\theta = 40$ )
rayon de la sphère équivalente	$a = (r_{\text{ins}} + r_{\text{cir}}) / 2$

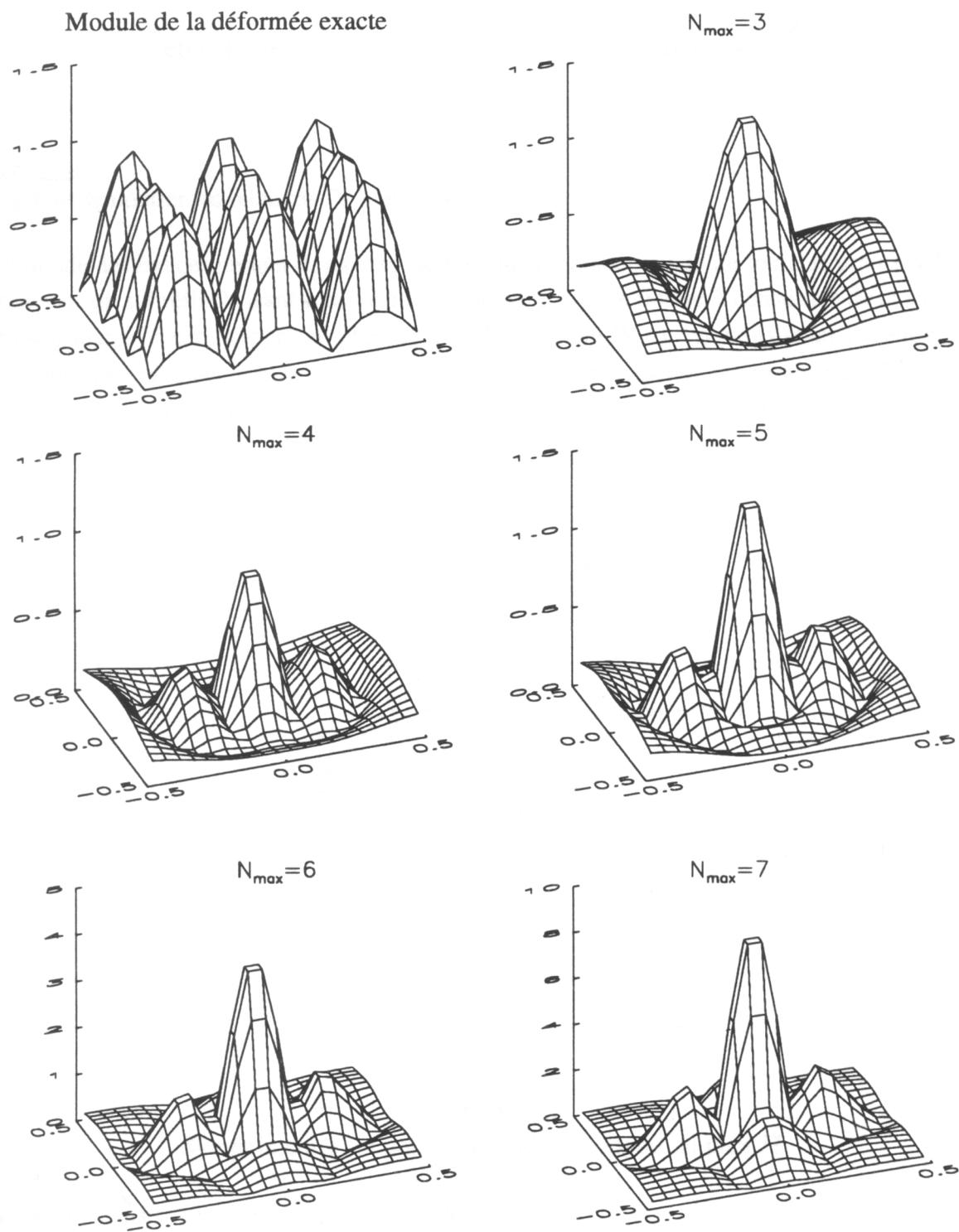


Figure A10.5  
 Comparaison entre le module de la déformée vibratoire imposée et calculée  
 par la sphère équivalente (approche géométrique) pour différentes troncatures modales  
 Cas d'une face vibrant sur le mode (3,3)

## Annexe 11

### Méthode des images et orthogonalité des fonctions $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$

**Objectif :**

Il s'agit de démontrer les relations IV.3 et IV.4.

La méthode des images permet de calculer le rayonnement acoustique de toute structure vibrante  $S$  posée sur un sol réfléchissant à partir de celui d'une structure fictive  $\Sigma$  constituée de la surface  $S$  et de son image  $S'$  par rapport au plan du sol  $\Pi$  (cf. figure IV.4). En choisissant le centre de la sphère équivalente dans le plan de symétrie  $\Pi$  et l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan  $\Pi$ , on peut associer à tout point  $M(r, \theta, \varphi)$  de  $S$  un point  $M'(r', \theta', \varphi')$  de  $S'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan  $\Pi$ .

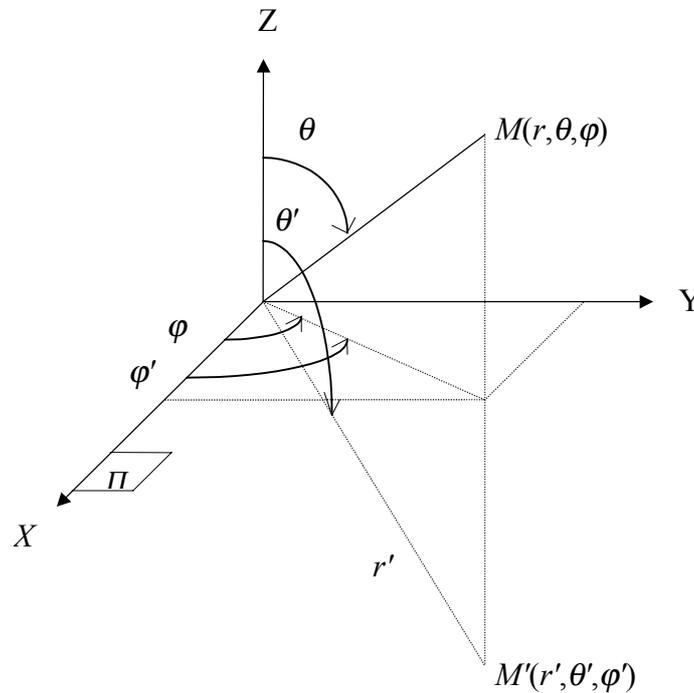


Figure A11.1  
Symétrie entre les points  $M$  et  $M'$  par rapport au plan  $\Pi$ .

Les coordonnées sphériques des points  $M$  et  $M'$  vérifient:

$$\begin{cases} r' = r \\ \theta' = \pi - \theta \\ \varphi' = \varphi \end{cases}$$

(A11.1)

De même, les coordonnées sphériques de la normale à la surface  $S'$  au point  $M'$  s'exprime simplement en fonction des coordonnées sphériques de la normale à  $S$  au point  $M$

$$\begin{cases} n'_r = n_r \\ n'_\theta = -n_\theta \\ n'_\varphi = n_\varphi \end{cases}$$

(A11.2)

En tout point  $M'$  on peut écrire la fonction  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}$  sous la forme:

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M') = \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta', \varphi') \frac{h'_n(kr')}{h'_n(ka)} n'_r + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta', \varphi')}{kr_s \partial \theta} \frac{h_n(kr')}{h'_n(ka)} n'_\theta + \frac{\partial \bar{Y}_{nm}^\sigma(\theta', \varphi')}{kr_s \sin \theta' \partial \varphi} \frac{h_n(kr')}{h'_n(ka)} n'_\varphi$$

(A11.3)

En appliquant les relations (A11.1) et (A11.2), l'expression (A11.3) devient:

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M') = Y_{nm}^\sigma(\pi - \theta, \varphi) \frac{h'_n(kr)}{h'_n(ka)} n_r + \frac{\partial Y_{nm}^\sigma(\pi - \theta, \varphi)}{kr_s \partial \theta} \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)} (-n_\theta) + \frac{\partial Y_{nm}^\sigma(\pi - \theta, \varphi)}{kr_s \sin \theta \partial \varphi} \frac{h_n(kr)}{h'_n(ka)} n_\varphi$$

(A11.4)

Or, les fonctions de Legendre d'ordre  $n$  et de degré  $m$  admettent des relations de symétrie par rapport au plan  $\Pi$  (i.e.  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) qui entraînent:

$$Y_{nm}^\sigma(\pi - \theta, \varphi) = \begin{cases} Y_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) & \text{si } n+m \text{ est pair} \\ -Y_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) & \text{si } n+m \text{ est impair} \end{cases}$$

(A11.5)

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{nm}^\sigma(\pi - \theta, \varphi) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) & \text{si } n+m \text{ est pair} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{nm}^\sigma(\theta, \varphi) & \text{si } n+m \text{ est impair} \end{cases}$$

(A11.6)

On en déduit donc :

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M') = \begin{cases} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M) & \text{si } n+m \text{ est pair} \\ -\frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M) & \text{si } n+m \text{ est impair} \end{cases}$$

(A11.7)

Application à la méthode de la sphère équivalente:

Pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $S$  on peut écrire:

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M) f(M) dS = \iint_S \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M) f(M) dS + \iint_{S'} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M') \cdot f(M') dS' \quad (\text{A11.8})$$

Si  $f$  est une fonction symétrique par rapport au plan  $\Pi$ , c'est-à-dire  $f(M') = f(M)$ , alors on déduit de (A11.7) qu'elle vérifie:

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M) f(M) dS = \begin{cases} 2 \iint_S \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M) f(M) dS & \text{si } n+m \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n+m \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{A11.9})$$

$\Rightarrow$  En posant  $f(M) = V^{mes}(M)$  ou  $f(M) = \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}(M)_{|n+m \text{ est pair}}$  on démontre respectivement les relations 3 et 4 du chapitre IV.



## Annexe 12

Cet annexe contient les figures citées dans les paragraphes 2 et 4 du chapitre IV.

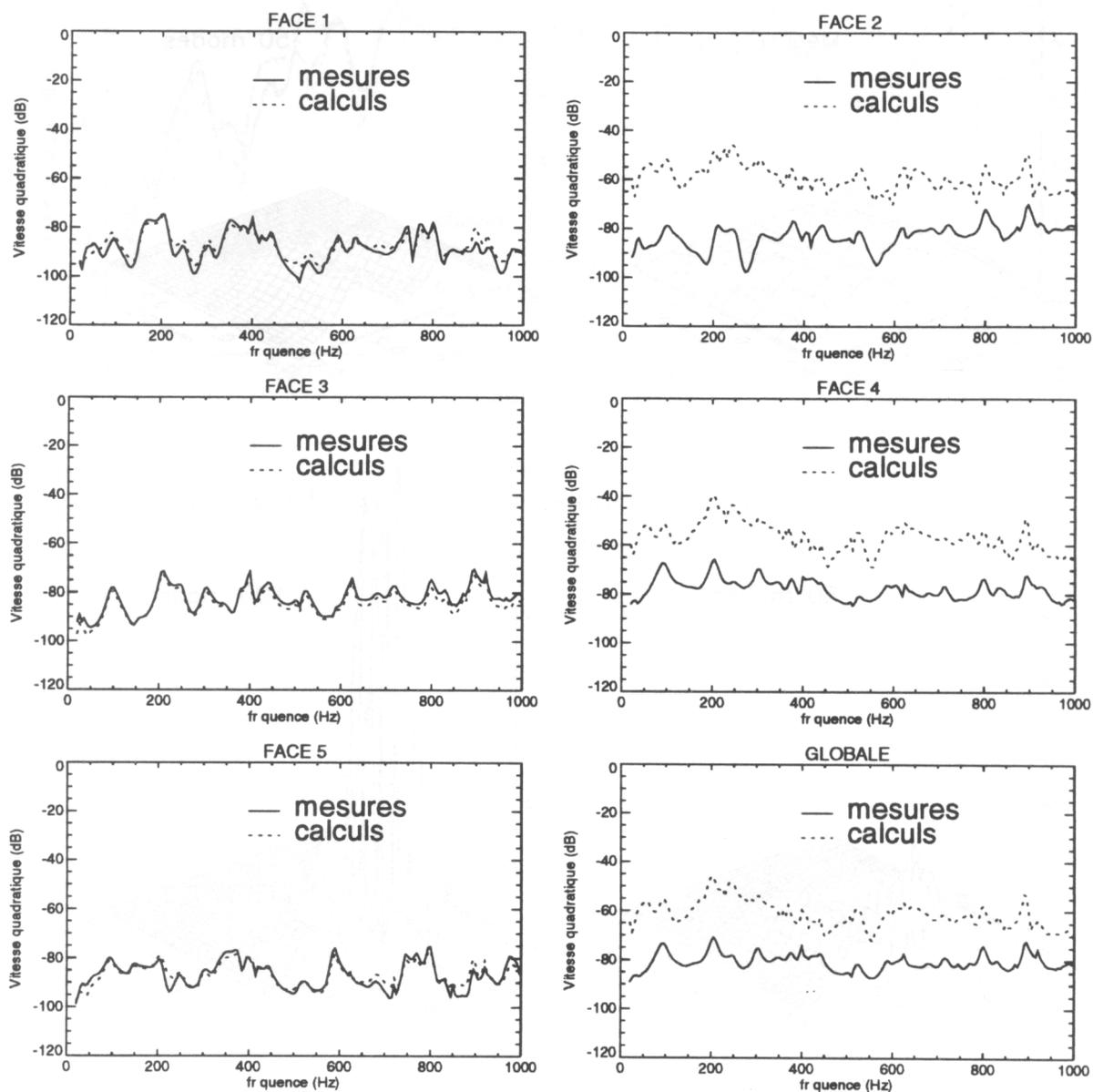
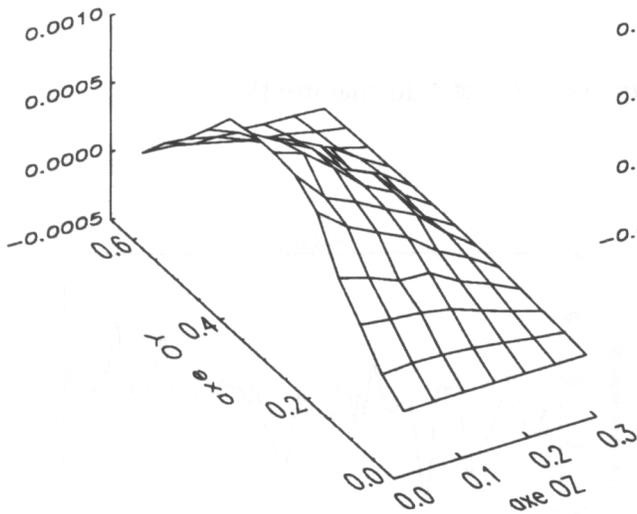


Figure A12.1  
Vitesses quadratiques partielles et globale mesurées sur la boîte

Partie réelle de la vitesse (m/s)



Partie imaginaire de la vitesse (m/s)

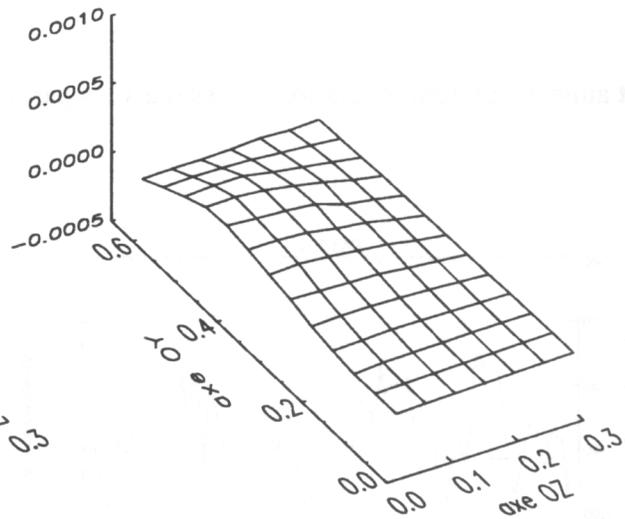
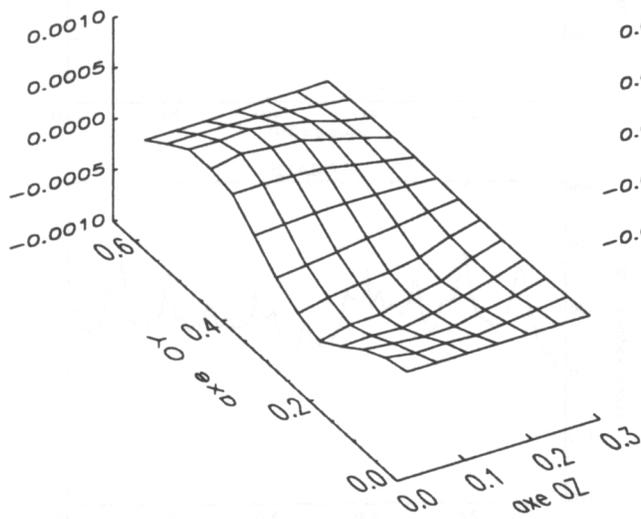


Figure A12.2

Vitesse vibratoire mesurée sur la face 4 de la boîte à 95 Hz

Partie réelle de la vitesse (m/s)



Partie imaginaire de la vitesse (m/s)

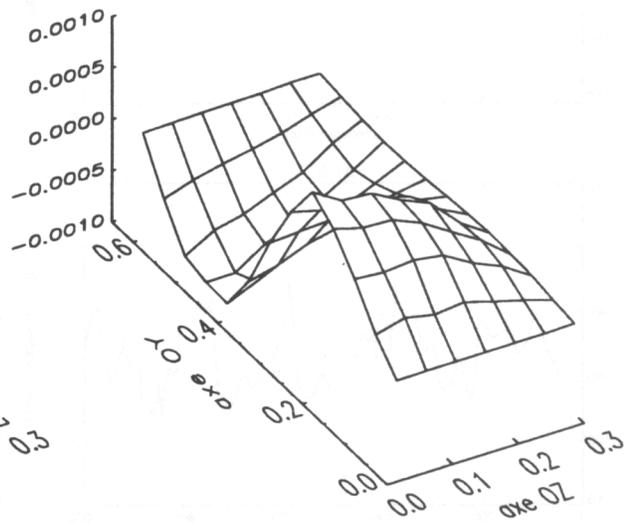


Figure A12.3

Vitesse vibratoire mesurée sur la face 4 de la boîte à 200 Hz

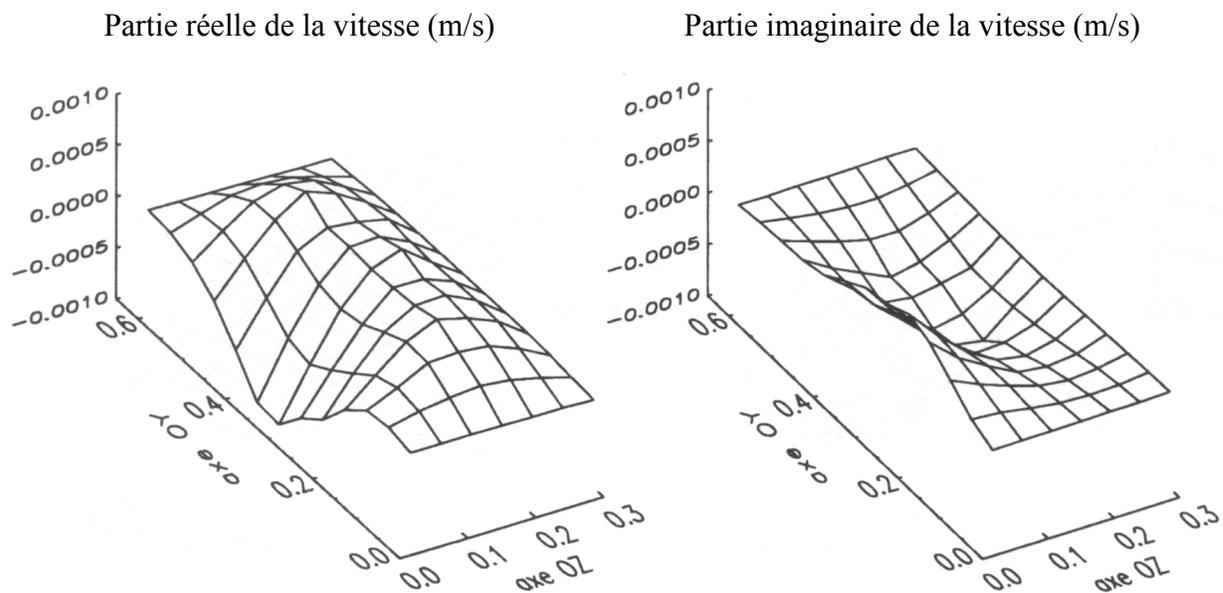


Figure A12.4  
Vitesse vibratoire mesurée sur la face 4 de la boîte à 305 Hz

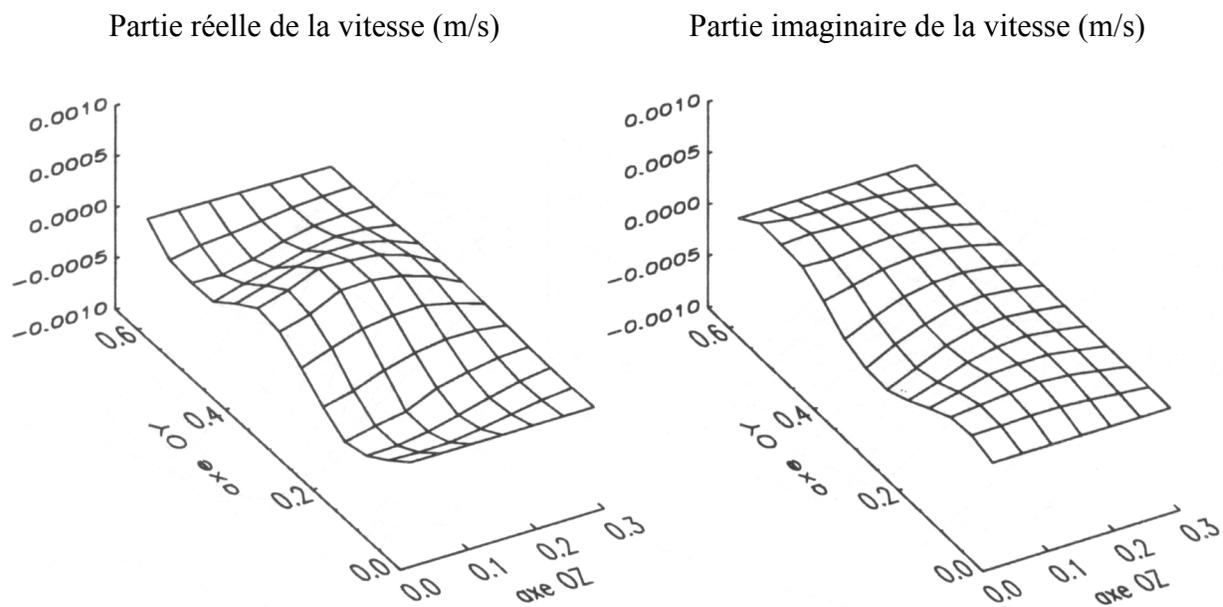


Figure A12.5  
Vitesse vibratoire mesurée sur la face 4 de la boîte à 345 Hz

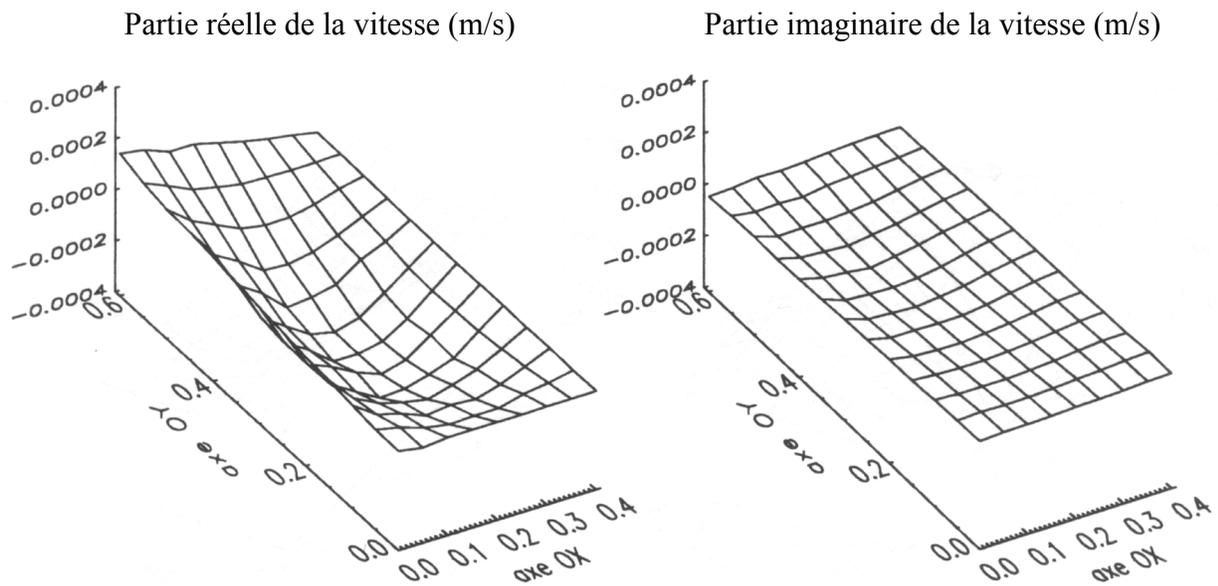


Figure A12.6  
Vitesse vibratoire mesurée sur la face 3 de la boîte à 98 Hz

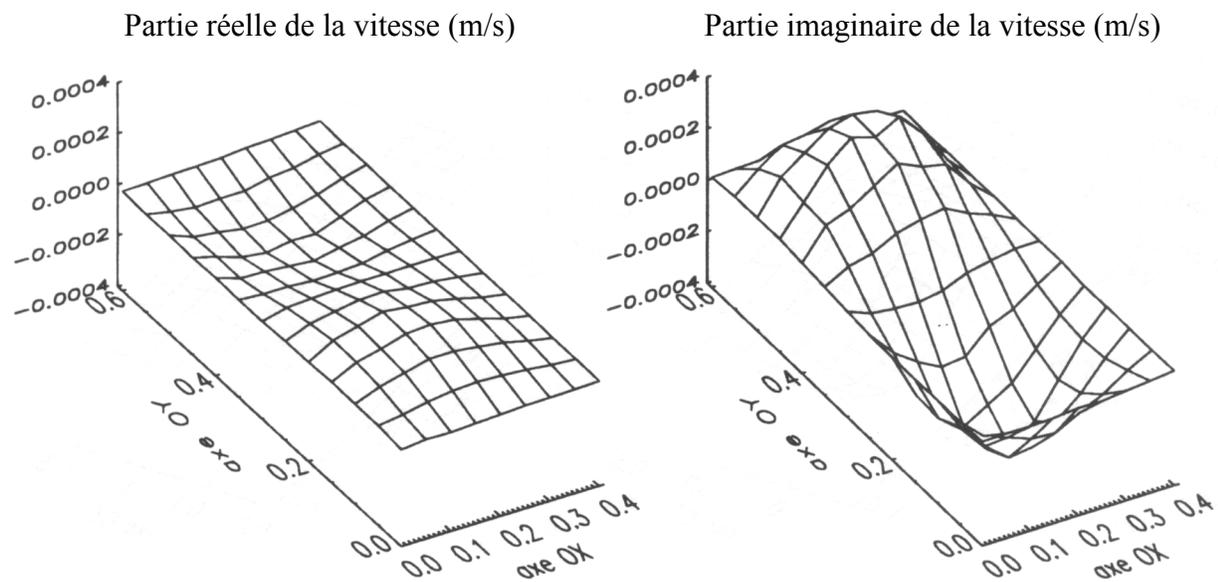


Figure A12.7  
Vitesse vibratoire mesurée sur la face 3 de la boîte à 209 Hz

Partie réelle de la vitesse (m/s)

Partie imaginaire de la vitesse (m/s)

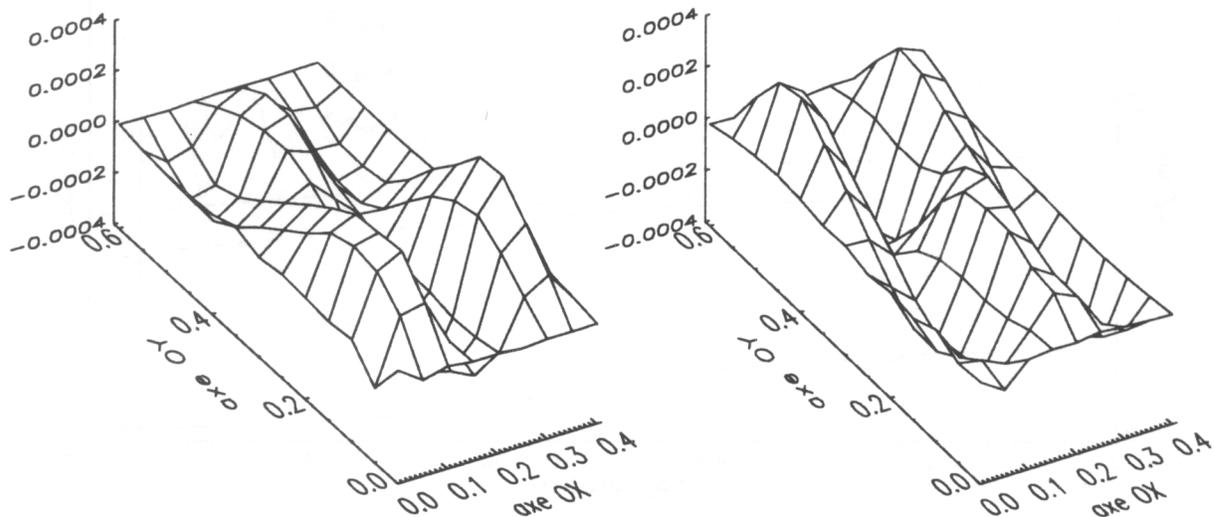


Figure A12.8

Vitesse vibratoire mesurée sur la face 3 de la boîte à 800 Hz

Partie réelle de la vitesse (m/s)

Partie imaginaire de la vitesse (m/s)

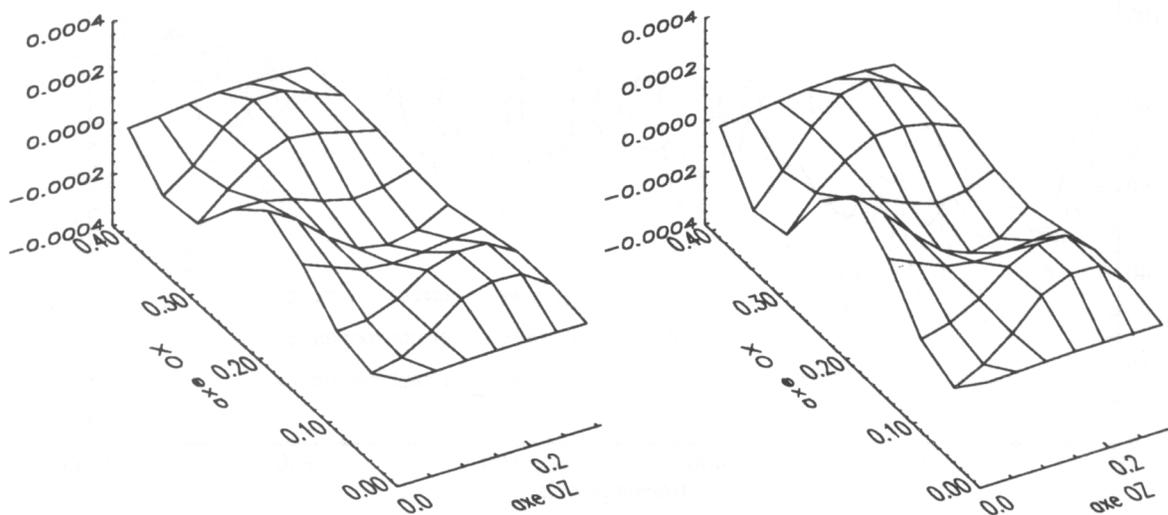


Figure A12.9

Vitesse vibratoire mesurée sur la face 5 de la boîte à 975 Hz

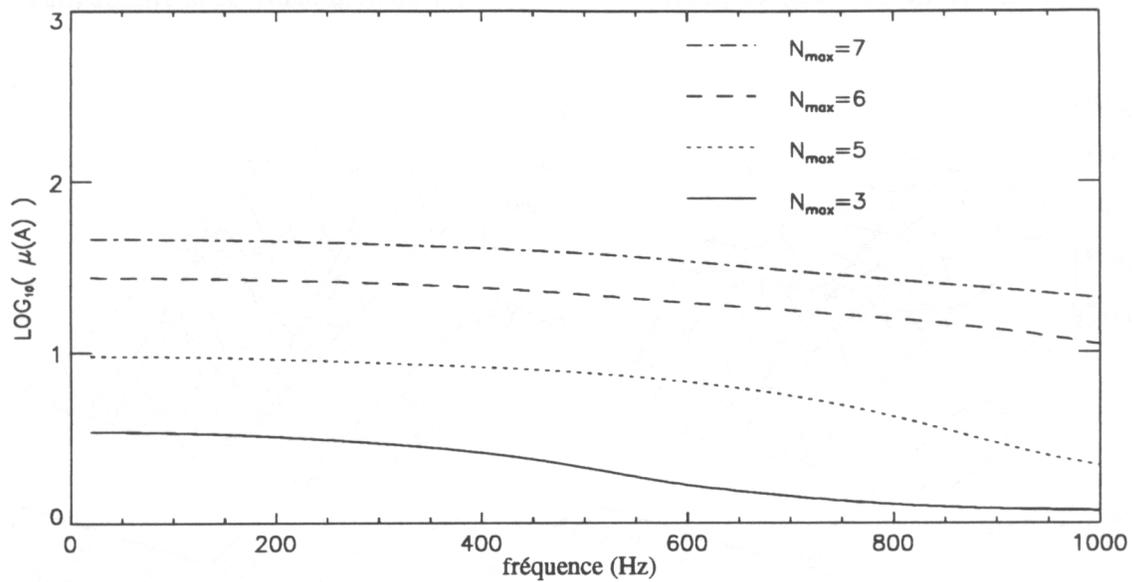


Figure A12.10

Variations du nombre de conditionnement de la matrice  $A$  en fonction de la fréquence et du nombre de l'ordre maximum des coefficients modaux de la sphère équivalente pris en compte

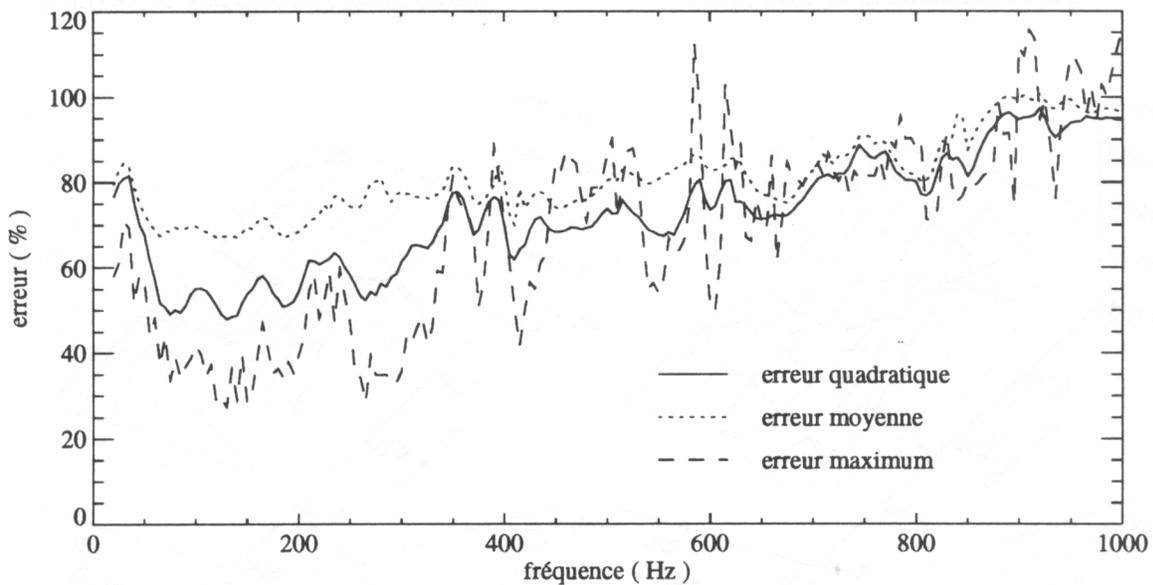


Figure A12.11

Variations des erreurs quadratique, moyenne et maximale en fonction de la fréquence lorsque les 21 premiers coefficients modaux de la sphère équivalente sont pris en compte

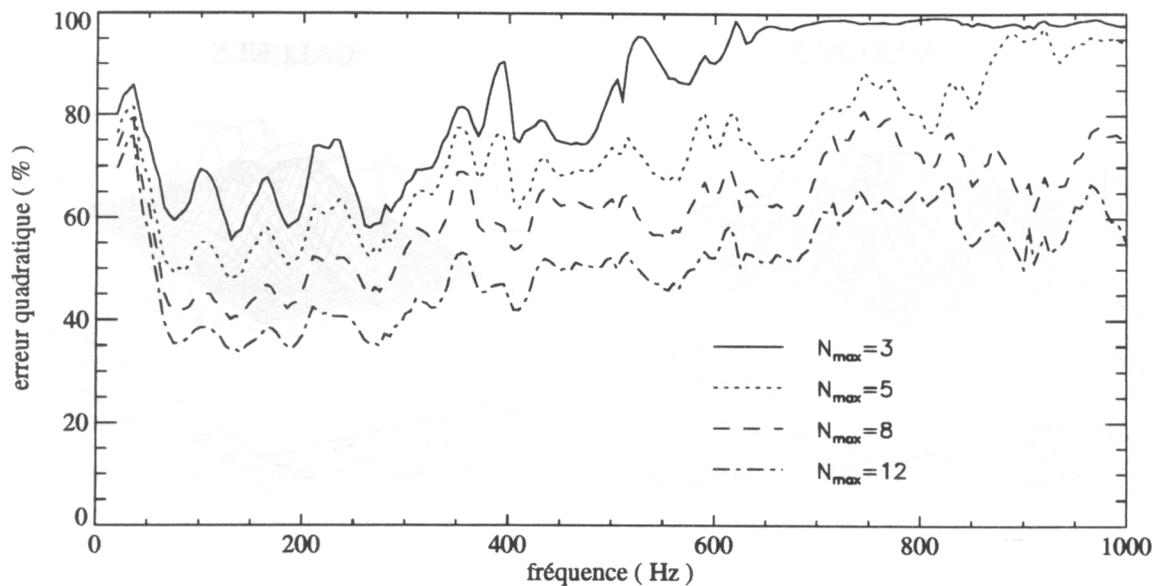


Figure A12.12  
Variations de l'erreur quadratique en fonction de la fréquence  
pour différentes troncatures modales

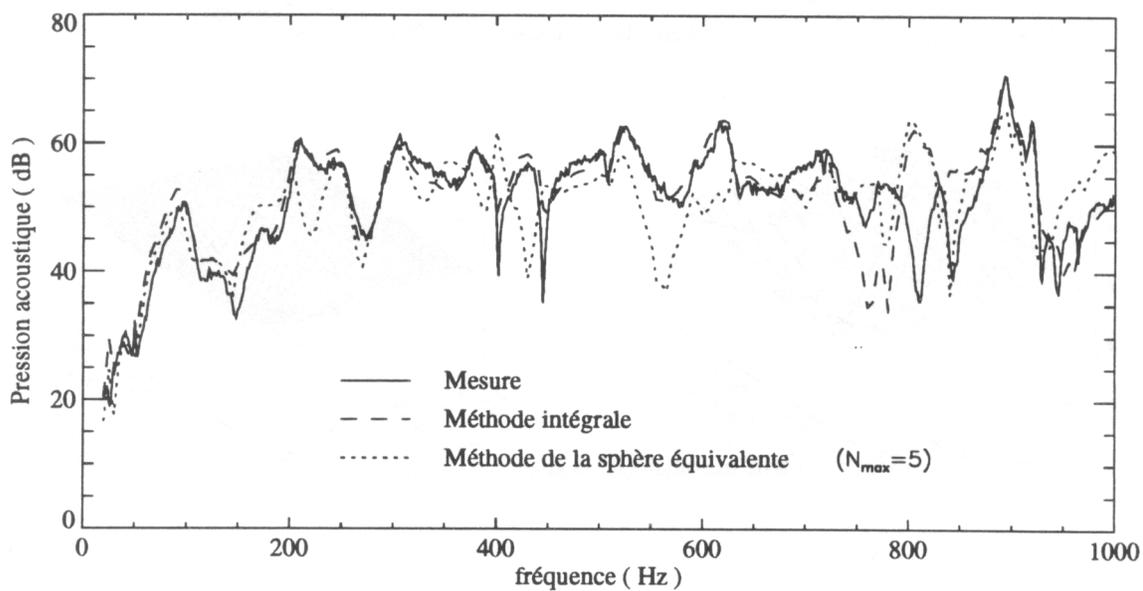


Figure A12.13  
Comparaison calculs/mesures pour la pression acoustique rayonnée par la boîte  
au point  $M_3(0,36;0,48;0,405)$

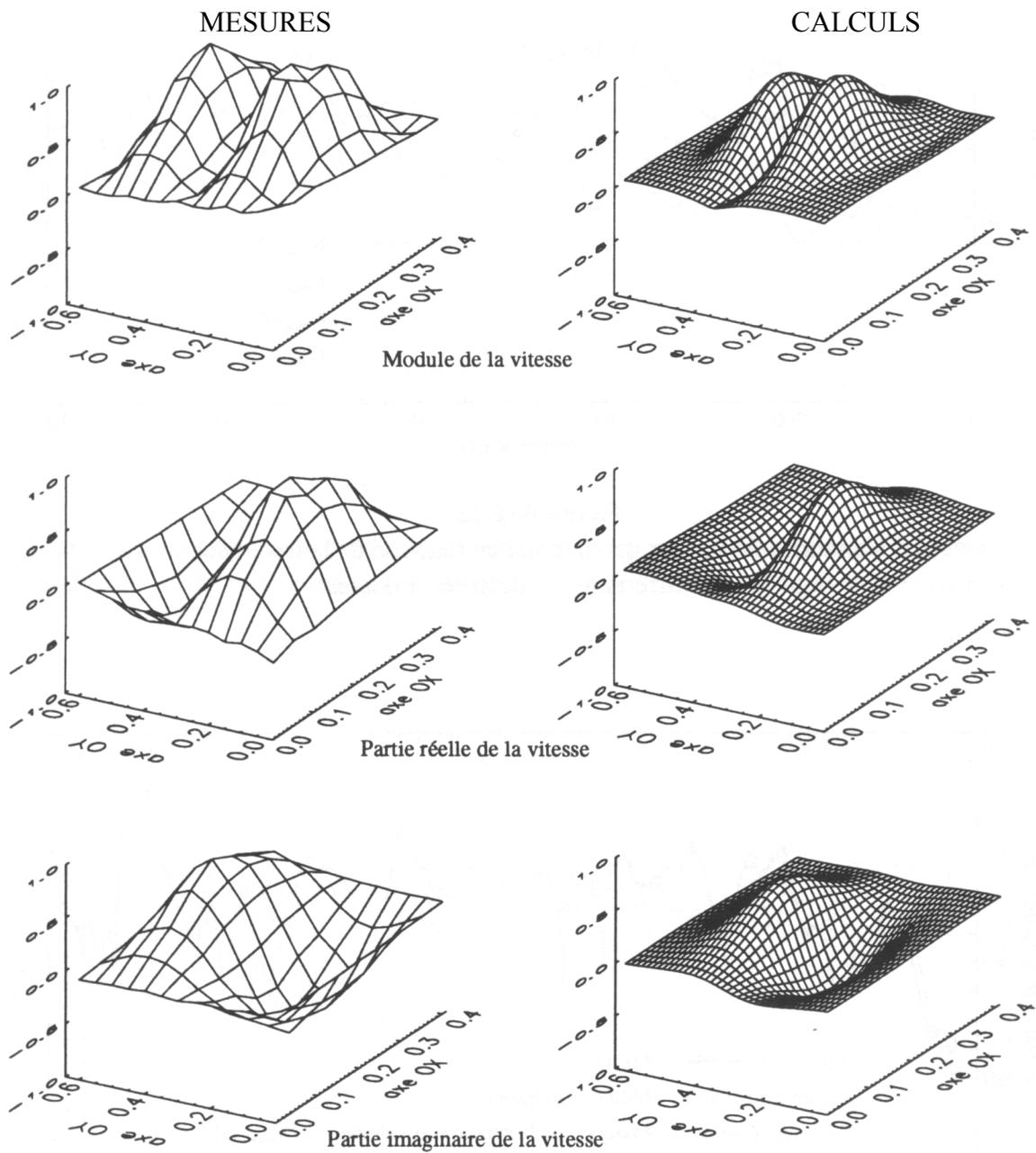


Figure A12.14

Comparaison entre la vitesse mesurée sur la face 3 à 240 Hz et la vitesse calculée par la sphère équivalente lorsque tous les modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à 5 sont pris en compte (les vitesses sont normalisées par rapport au maximum de la vitesse mesurée)

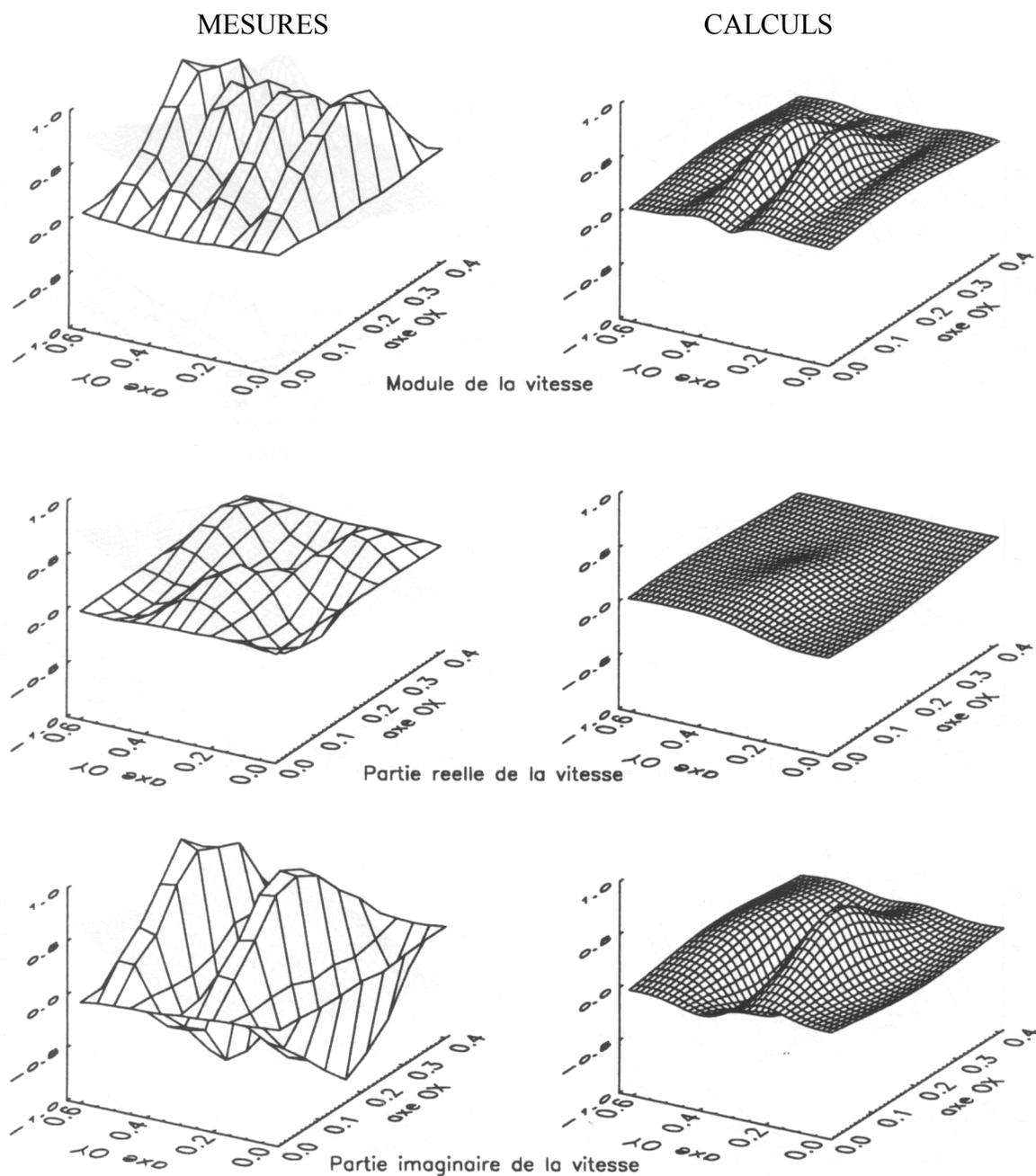


Figure A12.15

Comparaison entre la vitesse mesurée sur la face 3 à 625 Hz et la vitesse calculée par la sphère équivalente lorsque tous les modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à 5 sont pris en compte (les vitesses sont normalisées par rapport au maximum de la vitesse mesurée)

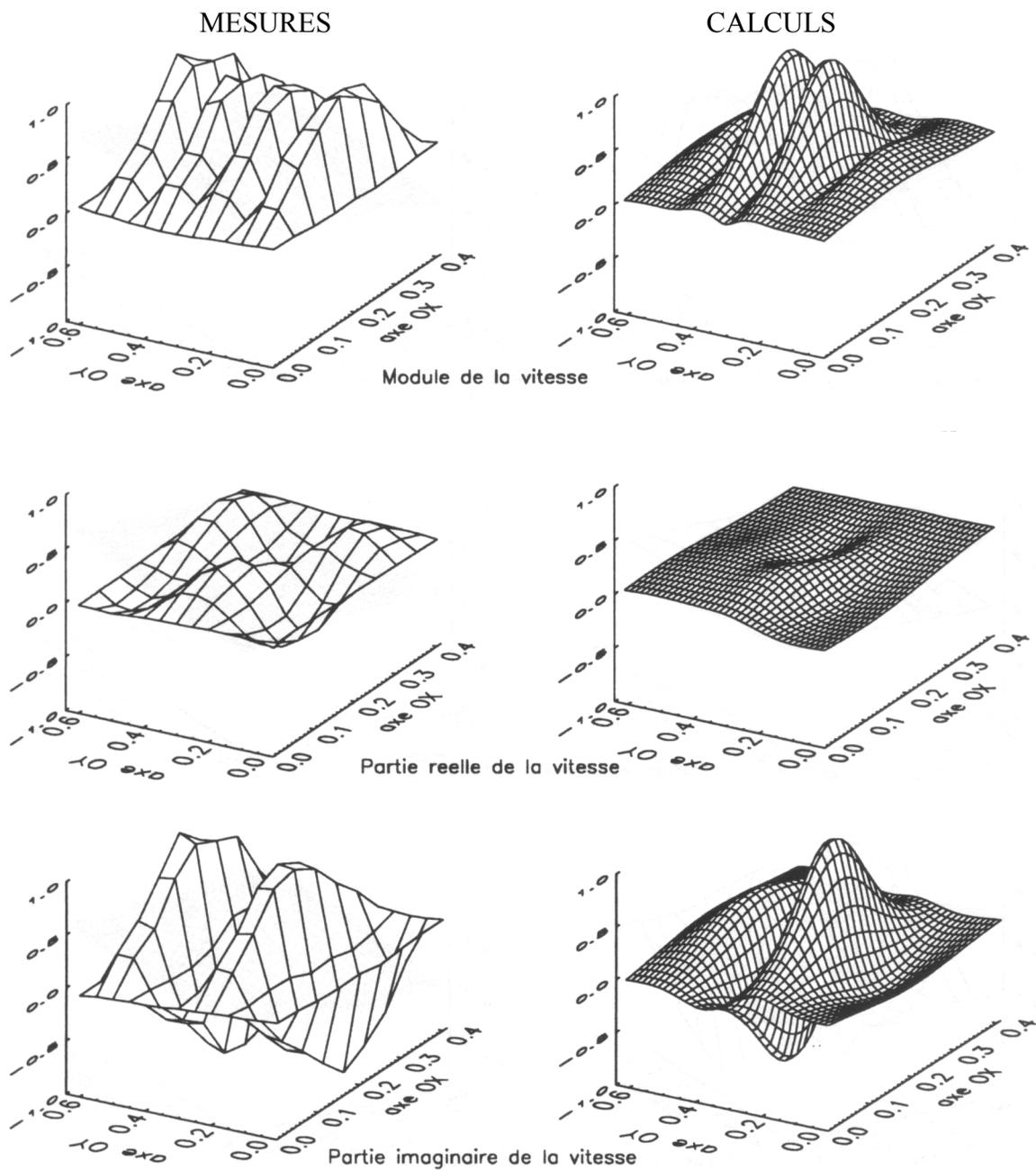


Figure A12.16

Comparaison entre la vitesse mesurée sur la face 3 à 625 Hz et la vitesse calculée par la sphère équivalente lorsque tous les modes d'ordre  $n$  inférieur ou égal à 8 sont pris en compte (les vitesses sont normalisées par rapport au maximum de la vitesse mesurée)

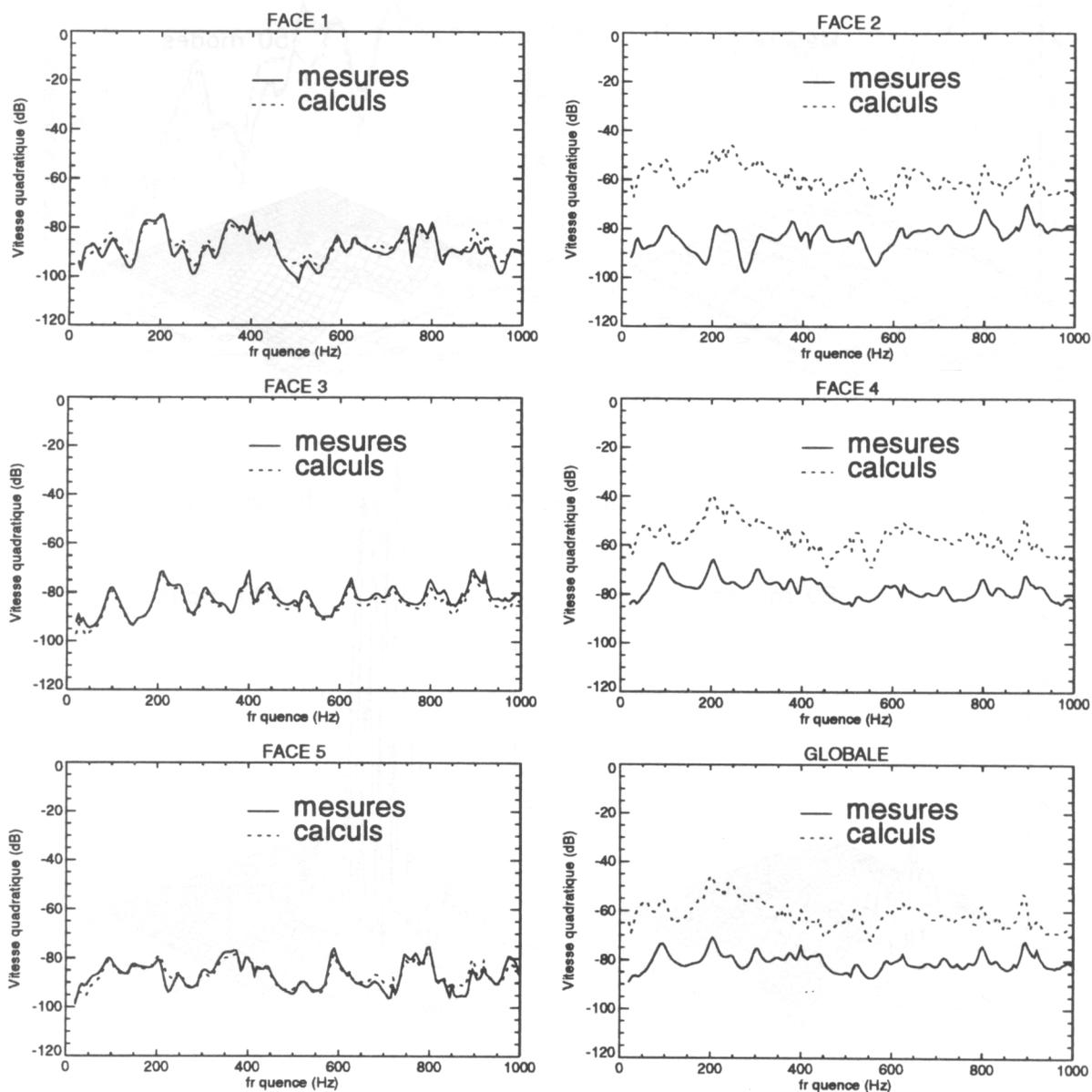


Figure A12.17

Comparaison entre les vitesses quadratiques partielles et globale mesurées sur la boîte et calculées par la sphère équivalente lorsque les 120 premiers modes sont pris en compte

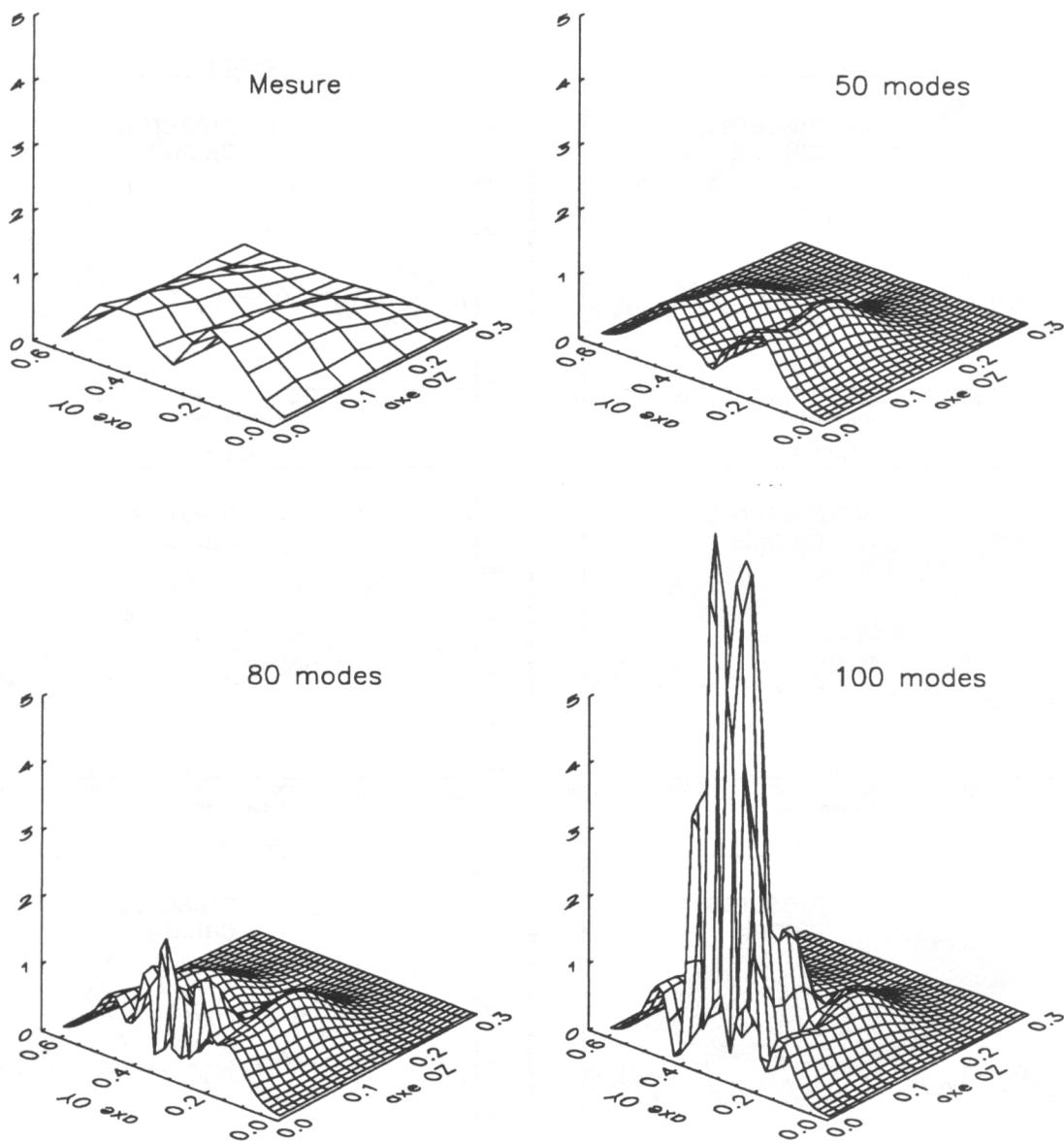


Figure A12.18

Comparaison entre le module de la vitesse vibratoire mesuré sur la face 4 à 200 Hz sur le maillage de 63 points et le module de la vitesse calculée par la sphère équivalente à partir de ce maillage et pour différentes troncatures modales

(les vitesses calculées sont représentées avec un surmaillage de  $3 \cdot 63 = 189$  points)  
 (elles sont normalisées par rapport au maximum de la vitesse mesurée)

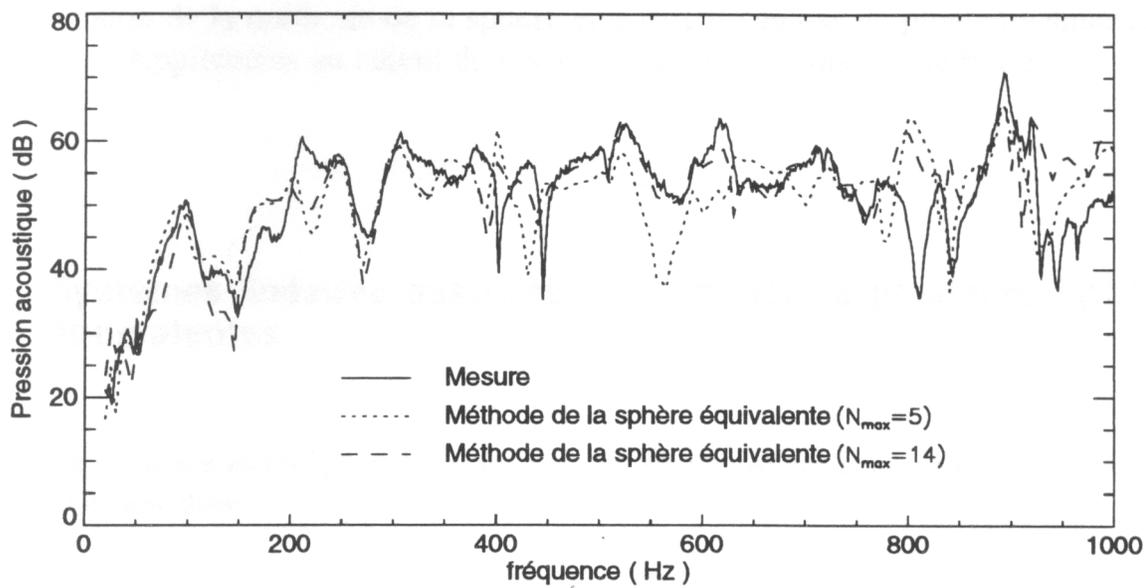


Figure A12.19  
Comparaison calculs/mesures pour la pression acoustique rayonnée par la boîte  
au point  $M_3(0,36;0,48;0,405)$



## Annexe 13

### Extension de la méthode de la sphère équivalente au cas de plusieurs sphères Application au calcul du rayonnement acoustique d'une boîte

#### 1. Systèmes linéaires associés à un modèle à plusieurs sphères équivalentes

La vitesse vibratoire en tout point de la structure est déterminée par la contribution de toutes les sphères. On note donc:

$$V^{cal}(M_i) = \sum_{l=1}^{N_{sph}} \sum_{j=1}^{N^{(l)}} x_j^{(l)} \frac{\partial \Psi_j^{(l)}}{\partial n}(M_i^{(l)})$$

( A13.1)

où:

- $\frac{\partial \Psi_j^{(l)}}{\partial n}$  est la fonction associée au  $j^{\text{ème}}$  mode de la  $l^{\text{ème}}$  sphère équivalente
- $x_j^{(l)}$  est le  $j^{\text{ème}}$  coefficient modal de la  $l^{\text{ème}}$  sphère équivalente
- $M_i^{(l)}$  est le  $i^{\text{ème}}$  point du maillage vibratoire de la structure dont les coordonnées sont exprimées dans le repère lié au centre de la  $l^{\text{ème}}$  sphère équivalente
- $N_{sph}$  est le nombre de sphères équivalentes et  $N^{(l)}$  le nombre de coefficients modaux pris en compte pour la  $l^{\text{ème}}$  sphère équivalente

Si on note  $x^{(l)}$  le vecteur de dimension  $N^{(l)}$  qui contient les coefficients modaux de la  $l^{\text{ème}}$  sphère et  $A^{(l)}$  la matrice de dimensions  $N_s \times N^{(l)}$  qui traduit la contribution de la  $l^{\text{ème}}$  sphère aux  $N_s$  points de maillage de la structure, le système linéaire que l'on est amené à résoudre se met sous la forme:

$$Ax = b$$

où  $A = [A^{(1)}, \dots, A^{(l)}, \dots, A^{(N_{sph})}]$  et  $x = [x^{(1)}, \dots, x^{(l)}, \dots, x^{(N_{sph})}]$

avec:

$$A_{ij}^{(l)} = \sqrt{\Delta S_i} \frac{\partial \Psi_j^{(l)}}{\partial n}(M_i^{(l)}) \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s], j \in [1, \dots, N^{(l)}] \text{ et } l \in [1, \dots, N_{sph}]$$

$$b_i = \sqrt{\Delta S_i} V^{mes}(M_i) \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s]$$

( A13.2)

C'est un système linéaire qui généralise le système (II.46) et que l'on peut résoudre au sens des moindres carrés. La solution minimise alors la vitesse vibratoire résiduelle quadratique.

Si les éléments associés à chaque point de mesure admettent la même aire (i.e.  $\Delta S_i = \Delta S$ ) le système devient:

$$A'x = b'$$

avec:

$$A_{ij}^{(l)} = \frac{\partial \Psi_j^{(l)}}{\partial n} (M_i^{(l)}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta S}} A_{ij}^{(l)} \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s], j \in [1, \dots, N^{(l)}] \text{ et } l \in [1, \dots, N_{sph}]$$

$$b_i = V^{mes} (M_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta S}} b_i \text{ pour } i \in [1, \dots, N_s]$$

(A13.3)

Ce système est analogue au système (II.55).

## 2. Application au calcul du rayonnement acoustique d'une boîte

Le rayonnement acoustique d'une boîte de dimensions  $2L \times L \times L$  dont les six faces vibrent en phase sur un mode (1,1) peut être calculé à partir d'un modèle à deux sphères équivalentes dont les coefficients modaux sont limités à l'ordre 5 (i.e. 72 inconnues) (figure A13.1). Pour  $kL = 10$ , le modèle à deux sphères conduit à un diagramme de directivité plus proche du diagramme calculé par la méthode intégrale que le modèle à une sphère lorsque les coefficients modaux de cette sphère sont pris en compte jusqu'à l'ordre 10 (i.e. 121 inconnues). Le nombre de conditionnement du système linéaire est relativement faible (i.e.  $\mu(A) \approx 25$ ) car d'une part, les critères de maillage (II.49) et (III.50) sont vérifiés pour chacune des sphères et, d'autre part, seuls les modes rayonnants de ces sphères sont pris en compte. Pour  $kL = 20$ , la convergence est plus lente en face des plus grands côtés de la boîte.

Plus généralement, un certain nombre de résultats obtenus dans le cadre de la méthode de la sphère équivalente peuvent être transposés. Le conditionnement du système linéaire (A13.2) dépend toujours du maillage vibratoire et des modes de rayonnement pris en compte pour chacune des sphères. Il sera donc minimal lorsque les modes pris en compte pour chaque sphère seront des modes rayonnants (i.e. équilibrage des vecteurs-colonnes des matrices  $A^{(l)}$  donc des vecteurs-colonnes de la matrice  $A$ ) et que le maillage vibratoire permettra de distinguer la contribution de tous les modes (i.e. l'orthogonalité des vecteurs-colonnes de la matrice  $A$ ).

La structure ne peut en effet pas être "compacte" pour toutes les sphères équivalentes. En particulier, les modes non rayonnants associés à une sphère équivalente excentrée admettront une différence d'amplitude importante entre les points les plus proches et les points les plus éloignés de la structure. En cherchant à déterminer leur contribution, on détériorera le conditionnement du système. On aura

ainsi intérêt à limiter le nombre de modes non rayonnants pris en compte pour des sphères excentrées.

De même, la contribution des modes rayonnants et non rayonnants conduira au meilleur équilibre de la matrice  $A$  lorsque le rayon de la sphère équivalente sera proche du rayon de la sphère inscrite. La distance entre deux sphères équivalentes devra être suffisante pour que leurs contributions au champ de vitesse puissent être correctement distinguées. Les critères de maillage doivent également être vérifiés par chacune des sphères. On en déduit que l'ordre maximum des coefficients modaux que l'on pourra déterminer pour chaque sphère équivalente sera donc d'autant plus faible que le centre de cette sphère sera proche de la structure. Pour éviter les problèmes de sous-échantillonnage sans devoir définir un nombre prohibitif de points de maillage, il faudra donc limiter le nombre de modes de rayonnement pris en compte pour de telles sphères.

En augmentant le nombre de sphères équivalentes, le système linéaire devient *a priori* plus instable et demande un nombre de points de maillage plus important. Il faut donc trouver un compromis entre cette instabilité et une convergence plus rapide vers le champ de vitesse de la structure.

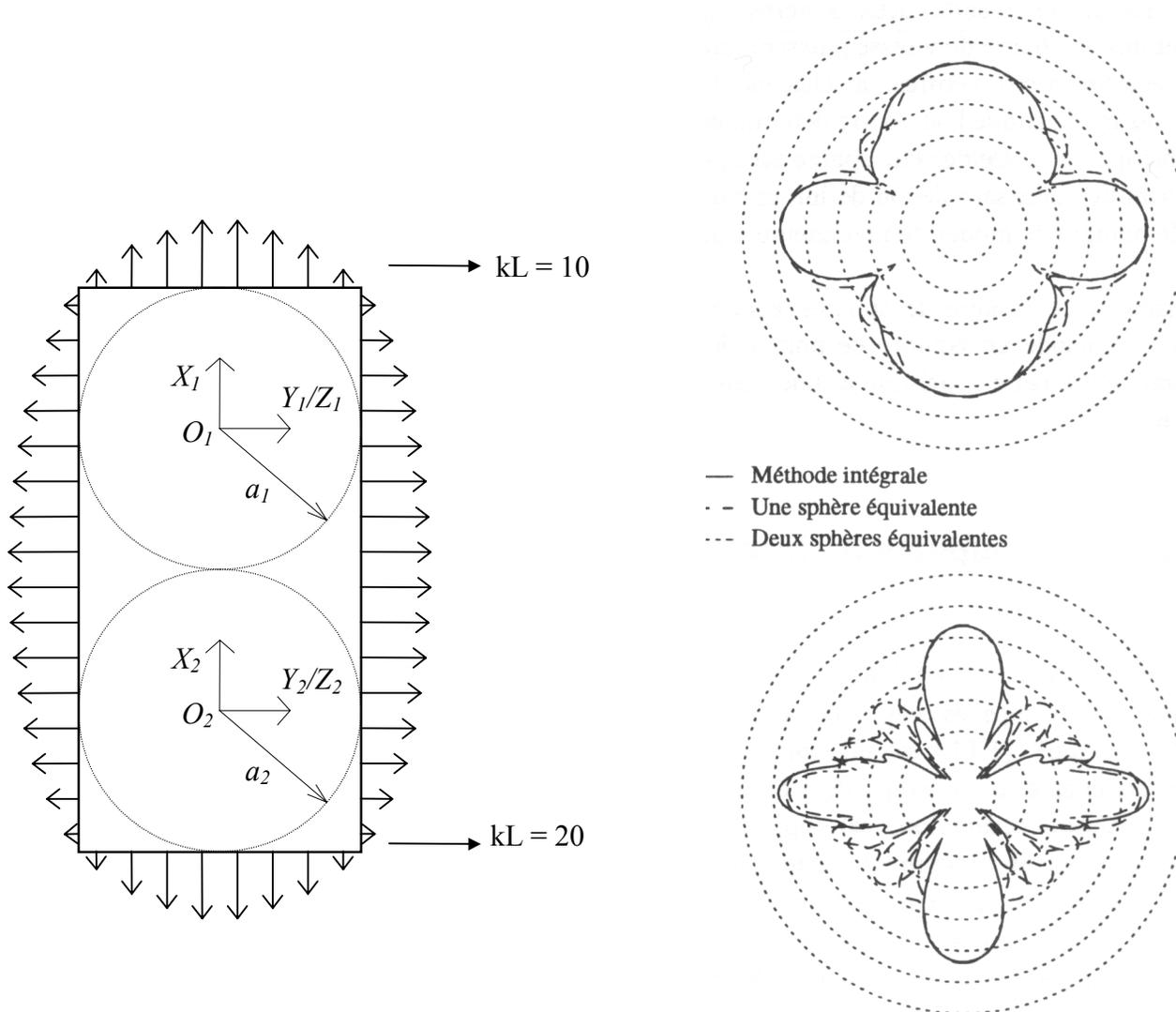


Figure A13.1  
 Diagramme de directivité d'une boîte de dimensions  $L_x = 2L$  et  $L_y = L_z = L$   
 dont les six faces vibrent en phase sur le mode (1,1)  
 Comparaison avec un modèle à deux sphères équivalentes  
 (10 dB entre chaque cercle)

plan de directivité	$Z = 0$
distance au centre de la boîte	$r = 10L$
$N_{\max}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pour une sphère : <math>N_{\max} = 10</math></li> <li>• pour chacune des deux sphères :  <math>N_{\max} = 5</math> pour <math>kL = 10</math>  <math>N_{\max} = 8</math> pour <math>kL = 20</math></li> </ul>
maillages vibratoires utilisés	cf. figure A9.12

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] *Réduction à la source du bruit des machines - Projet n°5*. Vandoeuvre (France) : Institut National de Recherche et de Sécurité, 1993, p. 51-56, Plan Etudes et Recherches - Etudes nouvelles.
- [1] **MORSE, P .M.** and **FESHBACH, H.** *Methods of theoretical physics* . New York : McGraw-Hill, 1953. Part I and II. 1978 p.
- [1] **TING, L.** and **MIKSIS, M. J.** Exact boundary conditions for scattering problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1986, Vol. 80, N° 6, p. 1825-1827.
- [2] **SHIRRON J.J.** An iterative solution scheme for the exterior Neumann problem for  $\Delta + \kappa^2$  using elements in bounded domain. *Journal of the Acoustical Society of America* , 1993, Vol. 94, N° 2, p. 1121-1125.
- [3] **HUNT, J.T., K NITTEL, M.R.** and **BARACH, D.** Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures. *Journal of the Acoustical Society of America* , 1974, Vol. 55, N° 2, p. 269-280.
- [4] **BURNETT, D.S.** A three dimensional acoustic infinite element based on a prolate spheroidal expansion. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, Vol. 96, N° 5, p. 2798-2816.
- [5] **CREMERS, L.** and **FYFE, K. R.** On the use of variable order infinite wave envelope elements for acoustic radiation and scattering . *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, Vol. 97, N° 4, p. 2028-2040.
- [6] **BROD, K.** On the uniqueness of solution for all wavenumbers in acoustic radiation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1984, Vol. 76, N° 4, p. 1238-1243.
- [7] **URSELL, F.** On the exterior problems of acoustics. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1973, Vol. 74, p. 117-125.
- [8] **COPLEY, L.G .** Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, Vol. 44, N° 1, p. 28-32.
- [9] **SCHENCK, H.A.** Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1967, Vol. 44, N° 1, p. 41-58.

- [10] **CHERTOCK, G.** Solutions for sound-radiation problems by integral equations at the critical wavenumbers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, Vol. 47, N° 1, p. 387-388.
- [11] **PIASZCZYK, C.M.** and **KLOSNER J.M.** Acoustic radiation from vibrating surfaces at characteristic frequencies. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1984, Vol. 75, N° 2, p. 363-375.
- [12] **BURTON, A.J.** and **MILLER, G.F.** The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1971, Vol. 323, p. 201-210.
- [13] **TERAI, T.** On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, Vol. 69, N° 1, p. 71-100.
- [14] **REUT, Z.** On the boundary integral methods for the exterior acoustic problem. *Journal of Sound and Vibration*, 1985, Vol. 103, N° 2, p. 297-298.
- [15] **CUNEFARE, K. A.**, **KOOPMANN G.** and **BROD, K.** A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1989, Vol. 85, N° 1, p. 39-48.
- [16] **MARTIN, P.A.** Acoustic scattering and radiation problems, and the null-field method. *Wave motion* 1982, Vol. 4, N° 4, p. 391-408.
- [17] **COLTON, D.** and **KRESS, R.** The unique solvability of the null field equations of acoustics. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1983, Vol. 36, Part 1, p. 87-95.
- [18] **VARADAN, V.K.** and **VARADAN, V.V.** (Eds). *Acoustics, Electromagnetic and Elastic Waves Scattering - Focus on the T-Matrix approach*. New-York : Pergamon Press, 1980. 693 p. ISBN 0-08-025096-3.
- [19] **STUPFEL, B.**, **LAVIE, A.** and **DECARPIGNY, J.N.** Combined integral equation formulation and null-field method for the exterior acoustic problem. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, Vol. 83, N° 3, p.927-941.
- [20] **TOBOCMAN, W.** Comparison of the T-Matrix and Helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, Vol. 77, N° 2, p. 369-374.
- [21] **JONES, D.S.** Integrals equations for the exterior acoustic problem. *Q.J. Mech. appl. Math.* 1974, Vol. 27, Part 1, p. 129-142.
- [22] **FILIPPI, P.J.T.** Layer potentials and acoustic diffraction. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, Vol. 54, N° 4, p. 473-500.
- [23] **HAMDI, M.A.** *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains*. Thèse d'état : Université Technologique de Compiègne, 1982. 213 p.

- [24] **CHERTOCK, G.** Sound radiation from vibrating surfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, Vol. 36, N° 7, p. 1305-1313.
- [25] **KOOPMANN, G.H., SONG, L. and FAHNLIN, J.B.** A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1989, Vol. 86, N° 6, p. 2433-2438.
- [26] **BOBROVNITSKII, Y.I. and TOMILINA T.M.** Calculation of radiation from finite elastic bodies by the method of auxiliary sources. *Sov. Phys. Acoust.* 1990, Vol. 36, N° 4, p. 334-338.
- [27] **TOMILINA, T.** *The equivalent sources approach to acoustical design of forced vibrating structures.* Inter-Noise 93, Leuven (Belgium), August 24-26, p. 1597-1600.
- [28] **OCHMANN, M.** The source simulation technique for acoustic radiation problems. *Acustica*, 1995, Vol. 81, N° 6, p. 512-527.
- [29] **STEPANISHEN P.R. and RAMAKRISHNA, S.** Acoustic radiation impedances and impulse responses for elliptical cylinders using internal source density and singular value decomposition methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, Vol. 176, N° 1, p. 49-68.
- [30] **HWANG, J. and CHANG, S.** A retracted boundary integral equation for exterior acoustic problem with unique solution for all wave numbers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1991, Vol. 90, N° 2, p. 1167-1180.
- [31] **JEANS, R. and MATHEWS, I.C.** The wave superposition method as a robust technique for computing acoustic fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1992, Vol. 92, N° 2, p. 1156-1166.
- [32] **CREMER, Von L. and WANG, M.** Die Synthese eines von einem beliebigen Körper in Luft erzeugten Feldes aus Kugelschallfeldern und deren Realisierung in Durchrechnung und Experiment. *Acustica*, 1988, Vol. 65, N° 2, p. 53-74.
- [33] **KEMPTON, A.J.** The ambiguity of acoustic sources - a possibility for active control? *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 48, N° 4, p. 475-483.
- [34] **LANDEL, E. et al.** *Identification of series of multipoles : application to the prediction of the far field from near field measurements.* Inter-Noise 88, Avignon (France), 30 août - 01 septembre, p. 379-382.
- [35] **MORSE, P.M. and INGARD, K.U.** *Theoretical Acoustics.* New-York : Mc Graw-Hill, 1968. 927 p. ISBN 07-043330-5.
- [36] **HECKL, M.** Bemerkung zur Berechnung der Schallabstrahlung nach der Methode der Kugelfeldsynthese. *Acustica*, 1989, Vol. 68, N° 4, p. 251-257.

- [37] **OCHMANN, M.** Die Multipolstrahlersynthese - ein effektives Verfahren zur Berechnung der Schallabstrahlung von schwingenden Strukturen beliebiger Oberflächengesalt. *Acustica*, 1990, Vol. 72, p. 233-246.
- [38] **WILLIAMS, W. et al.** Acoustic radiation from a finite cylinder. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, Vol. 36, N° 12, p. 2316-2322.
- [39] **OCHMANN, M.** *Calculation of the sound radiation from complex structures using multipole radiator synthesis with optimized source locations.* 2nd international congress on recent developments in air- and structure-borne sound and vibration, Auburn (USA), 1992. M. J. Croker ed. p.1187-1194
- [40] **BUTLER, J.L.** Solution of acoustical radiation problems by boundary collocation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, Vol. 48, N° 1, part 2, p. 325-336.
- [41] **WEINREICH, G.** and **ARNOLD, E.B.** Method for measuring acoustic radiation fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, Vol. 68, N° 2, p. 404-411.
- [42] **FILIPPI, P. J.T., HABAULT, D.** and **PIRAUX, J.** Noise sources modeling and intensimetry using antenna measurement and identification procedures. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, Vol. 124, N° 2, p. 285-296.
- [43] **LAVILLE, F., SIDKI, M.** and **NICOLAS J.** Spherical acoustical holography using sound intensimetry measurements : theory and simulation. *Acustica*, 1992, Vol. 76, p. 193-198.
- [44] **BORGIOTTI, G. V. et al.** Conformal generalized near-field acoustic holography for axisymmetric geometries. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, Vol. 88, N° 1, p. 199-209.
- [45] **VERONESI, W.A.** and **MAYNARD, J.D.** Digital holographic reconstruction of sources with arbitrarily shaped surfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1989, Vol. 85, N° 2, p. 588-598
- [46] **JUHL, P.** A numerical study of the coefficient matrix of the boundary element method near characteristic frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, Vol. 175, N° 1, p. 39-50.
- [47] **HICKLING, R.** and **MARIN, S.P.** Enhancement of the sound power of a component of a complex noise source by sound from other nearby components. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, Vol. 84, N° 1, p. 262-274.
- [48] **CIARLET, P.G.** *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Paris : MASSON, 1982. 279 p. ISBN 2-226-68893-1.
- [49] **DIRDINGER, et al.** *Identification de multipôles à partir de mesures d'accélération - Etude théorique et numérique de la méthode.* La Seyne/Mer (France) : Principia R.D. 1996, 49 p. Rapport d'étude INRS-Principia, RET.41.240.01.
- [50] **RUST, B.W.** and **BURRUS, W.R.** Mathematical programming and the numerical solution of linear equations. *Modern analytic and computational methods in science and*

- mathematics - Nb 38*, Edited by Richard Bellmann. New York : American Elsevier Publishing Company, 1972. 218 p.
- [51] **PRESS, W.H. et al.** *Numerical Recipes, the art of scientific computing*. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge (USA) : Cambridge University Press, 1992. 963 p.
- [52] **PHOTIADIS, D.M.** The relationship of singular value decomposition to wave-vector filtering in sound radiation problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, Vol. 88, N° 2, p. 1152-1159.
- [53] **GOLUB, G.H.** and **Van LOAN, C.F.** *Matrix computations*. Baltimore, London : John Hopkins University Press, 1989. 642 p.
- [54] **WALL, D.J.N.** Methods of overcoming numerical instabilities associated with the T-Matrix-Method, *in* : *Acoustics, Electromagnetic and Elastic Waves Scattering - Focus on the T-Matrix approach*. Edited by VARADAN, V.K. and VARADAN, V.V. Pergamon Press, 1980, p. 269-282. ISBN 0-08-025096-3.
- [55] **IMHOF, M.G.** Multiple multipole expansions for acoustic scattering. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, Vol.97, N° 2, p.754-763.
- [56] **HAMZAOU, N.** et **BOISSON, C.** *Calcul du rayonnement acoustique par une méthode intégrale simplifiée*. Lyon, (France) : Laboratoire Vibrations Acoustique, I.N.S.A. Rapport contrat INRS-INSA, 1996, 80 p., Convention N° 5951555-5951556.
- [57] **LESUEUR, C.** *Rayonnement acoustique des structures - Vibroacoustique, Interactions fluide-structure*. Paris : Eyrolles, 1988. 591 p. N° 66 de la Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France.
- [58] **ABRAMOVITZ, M.** and **STEGUN, I.A.** (eds). *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*. 9<sup>th</sup> ed. New York : Dovers Publication, 1970, 1046 p. ISBN 0-486-61272-4.
- [59] **HALD, J. HANSEN, J.E. et al.** Spherical Near-Field Antenna Measurements. *IEE Electromagnetic waves series 26*, Edited by J.E.Hansen, London : Peter Perigrinus Ltd, 1988. 387 p.
- [60] **VEKUA, N.P.** En russe ( On the completeness of the system of metaharmonic functions ). *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*. 1990, Vol 90. p. 715-718.
- [61] **AYDIN, K.** and **HIZAL, A.** On the completeness of the spherical vector wave functions *J. Math. Anal. Appl.*, 1986; Vol.117, p.428-440.
- [62] **MILLAR, R.F.** The Rayleigh hypothesis and a related least square solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers. *Radio Science*. 1973, Vol. 8, N° 8-9, p.785-796.
- [63] **SAPORTA, G.** *Probabilités analyse des données et statistique*. Paris : Editions Technip, 1990. 493 p. ISBN 2-7108-0565-0.

- [64] **RICARDI, L.J.** and **BURROWS, M.L.** A recurrence technique for expanding a function in spherical harmonics. *IEEE Transactions on computers*, 1972, Vol. C.21, p.583-585.

FOLIO ADMINISTRATIF  
THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM: BOUCHET (avec précision du nom de jeune fille le cas échéant)	DATE de SOUTENANCE 18 décembre 1996
Prénoms: Laurent	
<b>TITRE: CALCUL DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DE STRUCTURES A PARTIR DE DONNEES VIBRATOIRES PAR UNE METHODE DE SPHERE EQUIVALENTE</b>	
Nature: Doctorat Nouveau Régime 0125	Numéro d'ordre: 96 ISAL
Formation doctorale: Acoustique	
Cote B.I.U. - Lyon: T 50/210/19 / et bis	CLASSE:
<b>RESUME:</b> La prévision du bruit rayonné par une structure vibrante à partir de données vibratoires calculées ou mesurées intéresse de nombreux industriels qui, dès le stade de la conception, peuvent prévoir, analyser et éventuellement corriger les nuisances sonores engendrées par une machine. Grâce aux récents développements des moyens de calcul numériques, les travaux de recherche théoriques et expérimentaux dans le domaine de la vibro-acoustique ont fortement progressé. Ils ont conduit à des logiciels de calcul basés sur des méthodes d'éléments finis ou d'éléments finis de frontière qui nécessitent cependant des investissements importants : calculateurs puissants et utilisateurs avertis. Afin de réduire les temps de calcul, on applique le principe des sources équivalentes en remplaçant la structure par une sphère qui va générer le même rayonnement acoustique que la structure. Le champ de vitesse vibratoire à la surface de la structure étant supposé connu, il est utilisé pour déterminer le champ vibratoire à la surface de la sphère équivalente par minimisation (méthode de la sphère équivalente proprement dite) ou par projection (approche géométrique). Les deux méthodes sont validées sur des exemples numériques et expérimentaux lorsque la structure admet une géométrie simple et compacte. Différents paramètres qui permettent de caractériser le modèle (rayon et position de la sphère par exemple) ainsi que la précision et la stabilité des résultats en fonction du maillage vibratoire et des erreurs de mesure sont discutés.	
<b>MOTS-CLES: RAYONNEMENT ACOUSTIQUE - SPHERE - METHODE SUPERPOSITION - CONDITIONNEMENT - PROBLEME INVERSE - VIBRATIONS - VALIDATION</b>	
Laboratoire(s) de recherches: Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon	
Directeur de thèse: Professeur Claude BOISSON	
Président du Jury:  Composition du jury: Claude BOISSON - Mohamed Ali HAMDI - Nacer HAMZAoui - Eric LANDEL - Claude LESUEUR - Thierry LOYAU - Jean Claude PASCAL	