



**HAL**  
open science

# Analyse et modélisation de l'utilisation de signaux GNSS en environnement marin

Sarab Tay

► **To cite this version:**

Sarab Tay. Analyse et modélisation de l'utilisation de signaux GNSS en environnement marin. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Télécom Bretagne, Université de Rennes 1, 2012. Français. NNT: . tel-00776316

**HAL Id: tel-00776316**

**<https://theses.hal.science/tel-00776316>**

Submitted on 15 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

## Télécom Bretagne

En habilitation conjointe avec l'Université de Rennes 1

Ecole Doctorale – MATISSE

---

### Analyse et modélisation de l'utilisation de signaux GNSS en environnement marin

---

### Thèse de Doctorat

Mention : Traitement du Signal et Télécommunications

Présentée par **Sarab Tay**

Département : Image et Traitement de l'information

Laboratoire : CNRS UMR 3192 Lab-STICC/CID

Directeur de thèse : René Garello

Soutenue le 06 février 2012

Jury :

M. Eric Pottier, Professeur, Université de Rennes1 / président du jury  
M. Serge Reboul, Maître de conférences, Université du Littoral Côte d'Opale / rapporteur  
M. Philippe Courmontagne, Professeur, ISEN Toulon / rapporteur  
M. Thierry Chonavel, Professeur, Télécom Bretagne / examinateur  
M. François Soulat, Ingénieur de recherche, CLS Toulouse / examinateur  
M. René Garello, Directeur de recherche, Télécom Bretagne / directeur de thèse  
M. Arnaud Coatanhay, Enseignant chercheur, ENSTA Bretagne / examinateur  
M. Frédéric Maussang, Maître de conférences, Télécom Bretagne / examinateur



*« Ils peuvent définir leur identité comme ils veulent.  
Le problème, c'est que cette conception de l'identité,  
signifie la négation de celle de l'autre ! »*

*Mahmoud DARWICHE,  
La Palestine comme métaphore  
(Actes Sud, 2002).*



*À Suraya, Maria et ...Blacky*



---

# Résumé

L'observation passive de la surface marine, utilisant notamment comme source d'opportunité des signaux émis par les systèmes de positionnement par satellites (GNSS), constitue depuis quelques années un axe de recherche et de développement très dynamique.

Plusieurs équipes de recherche ont déjà mis en évidence la pertinence de telles approches pour des observations aéroportées. Le travail de cette thèse s'inscrit dans le cadre général de la mesure passive utilisant les signaux de positionnement par satellites (GPS).

Toutefois, le contexte précis de notre étude se focalisera sur les observations côtières réalisées à proximité de la surface (quelques mètres). La surface de mer ne peut plus, dans ce cas, se résumer à une surface immobile rugueuse. La diffraction des signaux GPS doit alors prendre en compte la déformation spatio-temporelle de la surface et le déplacement des vagues.

L'analyse de ces signaux permet de mettre en évidence la variation temporelle de la surface, en identifiant le déplacement des principaux diffuseurs (crête de vague, objet flottant à la surface,...). Les mouvements auxquels il est fait référence sont très lents (de l'ordre du Hz) par rapport aux fréquences des ondes observantes (ordre du GHz). L'amplitude des déplacements reste limitée, ce qui induit des différences de retard très faibles.

Toutefois, dans ce contexte délicat, nous avons mis en oeuvre des techniques de traitement de signal adaptées, qui mettent en évidence ces mouvements à partir des signaux d'opportunité, réfléchis par la surface. L'étude s'appuie, en particulier, fortement sur la théorie du filtrage de Kalman dans le plan Doppler-retard des signaux diffractés.

*Mots-clés* : Système de navigation par satellites, Système de positionnement par satellites, Surface de mer, Télédétection, Observation côtière, Mesure passive, Suivi de cibles, Filtrage de Kalman (linéaire et étendu).



---

# Abstract

For many years now, passive observation of the ocean surface, using in particular, sources of opportunities from positioning satellites (GNSS), has been a very dynamic research and development topic. Several research teams have already demonstrated the relevance of such approaches for airborne observations.

The aim of this thesis is to address the feasibility of passive measurements from GPS system signals near the sea surface (a few meters) for recovering oceanographic information in coastal zones. The sea surface cannot anymore, in this case, be considered as a stationary rough surface. GPS reflected signals must consider the kinematic evolution of the sea surface and the wave motion. The processing of these signals can reveal the temporal variation of the surface, and identify the displacement of the main scatterers (wave crest, buoy on sea surface).

The motions described here are very slow (some Hz), with respect to the incident wave frequencies (some GHz). The movement amplitude is limited, which induces very short time delay differences.

Keywords : Global Navigation Satellite System (GNSS), Global Positioning System (GPS), Sea surface, Remote sensing, Coastal observation, Passive systems, Target tracking, Kalman filter (linear and extended).



---

# Remerciements

Entre deux tonnerres<sup>1</sup> à Brest, j'ai vécu une période fructueuse et importante de ma vie. Ayant quitté mon pays pour entamer une thèse, j'ai été accueillie à Télécom Bretagne avec beaucoup d'attention et de chaleur. Loin d'être juste une étape de ma formation, la thèse est bel et bien une expérience qui m'a marquée pour la vie.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. René GARELLO, pour avoir accepté de diriger ma thèse, pour son exigence et sa présence, sa sagesse et sa jeunesse, et sa compréhension et son accompagnement sans faille, tout au long de ces années.

Je voudrais remercier M. Arnaud COATANHAY pour son soutien en toutes circonstances, et ses compétences scientifiques et techniques, dont il a su me faire profiter. Pour ses conseils constructifs et son suivi assidu, qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à M. Frédéric MAUSSANG, qui m'a soutenue et apporté son aide au quotidien. Il m'a accompagné avec beaucoup d'enthousiasme, me permettant de profiter de ses remarques et ses réflexions.

Outre ceux qui ont accompagné ce travail, je tiens à remercier MM. Philippe COURMONTAGNE et Serge REBOUL, d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse, et d'en être les lecteurs privilégiés. C'est avec plaisir que j'ai soumis ce document à leur jugement et leurs critiques.

J'adresse également mes remerciements les plus sincères à M. Éric POTTIER qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, MM. François SOULAT et Thierry CHONAVEL pour leur présence, leurs recommandations et remarques si importantes.

Un grand merci à M. Ali KHENCHAF, chef du laboratoire  $E^3I^2$ , pour m'avoir accueillie au sein de l'ENSTA Bretagne, ainsi qu'à Mme Annick BILLON-COAT. Mention spéciale pour M. Basel SOLAIMAN, chef du département Image et Traitement de l'information.

J'ai aussi le devoir et le plaisir de témoigner mes remerciements à tous ceux qui ont collaboré, de près ou de loin, à rendre mon passage à Télécom Bretagne exceptionnel et haut en émotions.

---

1. Les Tonnerres de Brest, éditions 2008 et 2012.

Cela aurait été difficile d'achever une thèse sans mes chers amis. Pour tous les délicieux moments, les petits déjeuners au bureau, les barbecues de vendredi midi, les débats animés autour du café, les soirées et les anniversaires, les ballades sur le sentier des douaniers, et les après-midi de détente sur la plage : je tiens à remercier chaleureusement Céline, Naouraz, Pauline, Rana, Khawla, Violeta, Simona, Elisa (et sa famille à Tavarone, le centre du monde), Irène, Raushan, Lana, Sarah, Dona, Alya, Salma, Hala, Ghias, Rabie, Hakim, Slaheddine, Refzul, Laurent, Edouard, Antoine, Taha, Thibaut, Luca, Gérard, Hyunseuk, le couple glamour Houda et Riadh, le couple de coeur Rudi et Ana, Françoise, et tous les autres qui excuseront ma mémoire.

Un énorme merci à mes parents Mohamed et Binaa, ma soeur chérie Zeinab, et mes frères Ahmad et Ibrahim pour leur amour, leur soutien sans faille, pour leur étoile qui m'a toujours suivie à travers des milliers de kilomètres. Ma famille a toujours été le moteur de mes ambitions et le premier supporter de mes choix. En tout cas, il n'y a pas assez de mots qui peuvent exprimer ma reconnaissance envers mes anges gardiens.

Je voudrais remercier Jacky et Simone GUYOT, Carine et Thierry MARCELLIN et le petit Aurélian, pour leur gentillesse, leur présence bienveillante et leur soutien sincère.

Un merci exceptionnel à une personne qui m'est très chère, Stéphane, qui a donné une autre dimension à ma vie.

---

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Fondamentaux des Systèmes de Navigation par Satellites</b>	<b>5</b>
<b>1 Notions de bases</b>	<b>7</b>
1.1 Principe de navigation par satellites . . . . .	7
1.1.1 État actuel des GNSS dans le monde . . . . .	7
1.1.2 Systèmes de coordonnées . . . . .	8
1.1.3 Détermination de la position . . . . .	9
1.2 Composantes principales du système GPS . . . . .	10
1.2.1 Segment spatial . . . . .	11
1.2.2 Segment de contrôle . . . . .	11
1.2.3 Segment sol/ Utilisateurs, récepteurs . . . . .	12
1.2.4 Le message de navigation . . . . .	12
1.3 Galileo . . . . .	13
1.3.1 Avantages et enjeux du déploiement de Galileo . . . . .	14
1.3.2 Services proposés par Galileo . . . . .	14
1.3.3 Signaux Galileo . . . . .	15
1.4 GPS et Galileo : Intérêt pour la télédétection . . . . .	16
1.5 Conclusion . . . . .	17

<b>2</b>	<b>La composante signal du GPS</b>	<b>19</b>
2.1	Structure du signal GPS . . . . .	19
2.1.1	Codes Gold . . . . .	20
2.1.2	Fréquences et modulations . . . . .	21
2.2	Réception et acquisition du signal GPS . . . . .	24
2.2.1	Modèle du signal GPS démodulé . . . . .	24
2.2.2	Acquisition du signal GPS . . . . .	25
2.2.3	Traitement par blocs . . . . .	25
2.3	Détection des signaux faibles . . . . .	27
2.3.1	Intégration longue . . . . .	27
2.3.2	Sommation cohérente . . . . .	27
2.3.3	Sommation incohérente . . . . .	28
2.3.4	Gestion des bits de données . . . . .	29
2.4	Modes d'acquisition . . . . .	30
2.4.1	Mode d'acquisition en série . . . . .	30
2.4.2	Mode d'acquisition en parallèle . . . . .	30
2.4.3	Mode d'acquisition en parallèle du code . . . . .	32
2.5	Conclusion . . . . .	34
<b>II</b>	<b>Le signal GPS dans le contexte océanographique</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>Mesure passive du signal GPS dans les applications océanographiques</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Les signaux GNSS-R dans l'océanographie . . . . .	37
3.3	Modélisation des vagues . . . . .	38
3.3.1	Paramètres géophysiques mis en jeu . . . . .	38
3.3.2	Onde monochromatique . . . . .	38
3.3.3	Relation de dispersion et vitesse de phase des vagues . . . . .	39
3.4	Description statistique de la surface . . . . .	41
3.4.1	Hauteur moyenne des vagues . . . . .	41
3.4.2	Fonction de corrélation de la surface . . . . .	41
3.4.3	Densité de probabilité des pentes . . . . .	42
3.5	Modèle spectral de la surface de mer . . . . .	42
3.5.1	Comparaisons entre les modèles spectrales de la surface de mer . . . . .	42
3.5.2	Spectre d'Elfouhaily . . . . .	43

3.6	Exemple des types d'applications impliquant le GNSS-R . . . . .	43
3.6.1	Altimétrie . . . . .	43
3.6.2	Réfectométrie . . . . .	45
3.7	Système expérimental . . . . .	46
3.7.1	Expérience <i>Mobile Fixed Target</i> . . . . .	46
3.7.2	Caractéristiques des signaux synthétiques . . . . .	48
3.7.3	Définition du gain . . . . .	49
3.8	Scénarios considérés . . . . .	50
3.8.1	Le signal direct . . . . .	50
3.8.2	La cible fixe . . . . .	50
3.8.3	La cible mobile . . . . .	53
3.8.4	Sommation longue . . . . .	53
3.9	Résultats et conclusion . . . . .	55
 <b>III Techniques de filtrage</b>		<b>59</b>
 <b>4 Techniques de filtrage dans le contexte maritime</b>		<b>61</b>
4.1	Introduction . . . . .	61
4.1.1	Modélisation de l'environnement marin . . . . .	61
4.2	Théorie de Kalman . . . . .	62
4.3	Généralités sur le filtrage . . . . .	63
4.3.1	Utilité d'un filtre . . . . .	63
4.3.2	Systèmes dynamiques . . . . .	63
4.3.3	Définitions mathématiques . . . . .	64
4.4	Modèle d'état . . . . .	65
4.4.1	Construction du modèle d'état . . . . .	67
4.4.2	Dynamique du système . . . . .	68
4.5	Construction du modèle d'observation . . . . .	69
4.6	Équations du filtre de Kalman . . . . .	70
4.6.1	Densités de probabilité . . . . .	70
4.6.2	Formules récursives . . . . .	71
4.7	Résultats du filtrage de Kalman linéaire . . . . .	71
4.7.1	Mouvement rectiligne uniforme . . . . .	72
4.7.2	Mouvement vertical sinusoidal . . . . .	75
4.7.3	Premiers résultats . . . . .	75

---

<b>5</b>	<b>Filtrage de Kalman non linéaire</b>	<b>79</b>
5.1	Introduction . . . . .	79
5.2	Observations non linéaires . . . . .	79
5.2.1	Signal GPS reçu . . . . .	80
5.2.2	Fonction d’ambiguïté . . . . .	80
5.3	Filtrage de Kalman Étendu . . . . .	82
5.3.1	Modèle d’état et fonction d’observation . . . . .	82
5.3.2	Équations générales du Filtrage de Kalman Étendu . . . . .	84
5.4	Équations d’état appliquées à notre problématique . . . . .	85
5.5	Résultats de la simulation . . . . .	87
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>91</b>
5.6	Conclusion générale . . . . .	91
5.7	Perspectives . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Publications</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Corrélation circulaire</b>	<b>103</b>
<b>B</b>	<b>Échelle de Beaufort</b>	<b>105</b>
<b>C</b>	<b>Filtrage de Kalman sans parfum</b>	<b>107</b>
C.1	Problème de cohérence du FKE . . . . .	107
C.2	Transformation sans parfum . . . . .	108
C.3	Équations du filtre de Kalman sans parfum . . . . .	108

---

# Liste des figures

1.1	Technique de trilatération . . . . .	10
1.2	La structure du message de navigation ( <i>TLM</i> : telemetry et <i>HOW</i> : Hand Over Word) . . . . .	13
1.3	Présentation détaillée des différents signaux Galileo, les fréquences utilisées et les types de modulation utilisés [ONU, 2010] . . . . .	15
1.4	Représentation des signaux GPS (code C/A et code P), les fréquences (non exhaustives) correspondantes ( $L_1$ et $L_2$ ) et le type de modulation utilisé (à voir en détails dans le chapitre 2). . . . .	16
2.1	Générateur du code C/A (Gold) (adapté de [Borre <i>et al.</i> , 2007]) . . . . .	21
2.2	Structure du signal GPS sur la fréquence $L_1$ (Codes C/A et P) et $L_2$ (Code P) . . . . .	22
2.3	Spectre du signal GPS . . . . .	23
2.4	Structure d'un signal GPS . . . . .	24
2.5	Schéma d'acquisition . . . . .	26
2.6	Recherche en série du Doppler et du retard de code . . . . .	30
2.7	Recherche en parallèle du Doppler et du retard de code . . . . .	31
2.8	Acquisition en mode parallèle du code et de la phase . . . . .	32
2.9	Une carte Doppler - Retard qui montre la présence d'un signal GPS provenant du PRN 18, par le biais d'un pic de corrélation ayant comme coordonnées les valeurs du délai de code et du déphasage fréquentiel . . . . .	33
2.10	Une carte Doppler - Retard qui affiche seulement du bruit montrant ainsi l'absence d'un signal GPS provenant du PRN 18 . . . . .	33
3.1	Allure du spectre d'Elfouhaily, avec calcul pour plusieurs vitesses de vent différentes (tirée de [Lurton, 2010]) . . . . .	44
3.2	Principe d'altimétrie côtière où l'on voit que la différence de distance traversée $\delta l$ est proportionnelle à l'altitude $h$ du récepteur par rapport à la surface réfléchissante et le sinus de l'angle d'élévation du satellite GPS (adaptée de [Ruffini, 2006]) . . . . .	45

3.3	Schéma du système expérimental . . . . .	47
3.4	Schéma montrant la définition du gain . . . . .	49
3.5	Le produit d'auto-corrélation du signal $s_D(t)$ . Ce signal est affiché avec un retard $\tau_D = 0.5ms$ . . . . .	50
3.6	Évolution du gain du signal $s_D(t)$ en intégrant sur une durée de $L = 50ms$ . . . . .	51
3.7	Produit de corrélation du signal $s_F(t)$ avec une réplique du code du PRN 5, le pic du signal $s_D(t)$ est montré aussi. . . . .	51
3.8	Une vue plus précise du pic de corrélation du signal $s_F(t)$ permettant ainsi de calculer le délai de code $\Delta_{FD}$ . . . . .	52
3.9	La Carte Doppler - Retard montrant la corrélation entre le signal $s_F(t)$ avec une réplique propre et ayant le pic de $s_D(t)$ comme pilote . . . . .	52
3.10	Comparaison de l'évolution du gain pour les 2 signaux $s_D(t)$ et $s_F(t)$ pour une intégration sur une durée de $L = 50ms$ . . . . .	53
3.11	Fonction de corrélation $\Gamma_{FM}$ du signal $(s_F(t) + s_M(t))$ à l'instant $t_0$ . . . . .	54
3.12	Une vue plus précise de la fonction de corrélation du signal $(s_F(t) + s_M(t))$ , montrant la présence de la cible mobile et permettant de déterminer sa position $(\tau_M)$ . . . . .	54
3.13	La Carte Doppler - Retard montrant la corrélation entre le signal $s_F(t) + s_M(t)$ , dans le but de détecter la cible mobile dans le même plan que la cible fixe. . . . .	55
3.14	Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des deux premières observations . . . . .	56
3.15	Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des trois premières observations . . . . .	56
3.16	Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des quatre premières observations . . . . .	57
3.17	Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des cinq observations . . . . .	57
4.1	Schéma de la cible sur la surface de mer . . . . .	62
4.2	Modèle géométrique . . . . .	69
4.3	Crête d'une vague : une cible ayant un mouvement rectiligne uniforme . . . . .	73
4.4	Trajectoire théorique décrite par la cible . . . . .	73
4.5	Trajectoire « observée » . . . . .	74
4.6	Trajectoire filtrée (sortie du filtre de Kalman) . . . . .	74
4.7	Un bateau (ou une bouée) : une cible ayant un mouvement vertical sinusoidal . . . . .	75
4.8	Trajectoire théorique décrite par la cible . . . . .	76
4.9	Trajectoire « observée » . . . . .	76

---

4.10	Trajectoire filtrée (sortie du filtre de Kalman) . . . . .	77
5.1	Projection de la fonction d'ambiguïté sur l'axe $\tau$ . . . . .	81
5.2	Projection de la fonction d'ambiguïté sur l'axe $\delta$ . . . . .	81
5.3	Fonction d'observation $g_k$ bruitée, il s'agit de la fonction de corrélation. Celle-ci est représentée ici par une fonction gaussienne. . . . .	83
5.4	Construction de la fonction d'observation $g_k$ autour des valeurs $\delta_k$ et $\tau_k$ (le point en rouge foncé) : les indices $i$ et $j$ sont utilisés pour balayer le plan Doppler-Retard, et $\Delta_\delta$ et $\Delta_\tau$ déterminent le pas de déplacement dans chacune des deux directions. . . . .	83
5.5	La projection de la fonction de corrélation sur l'axe $\tau$ pour $k = 8$ observations . . . . .	88
5.6	La projection de la fonction de corrélation sur l'axe $\delta$ pour $k = 8$ observations . . . . .	88
5.7	Position estimée de la cible pour $k = 8$ observations . . . . .	89



---

# Liste des tableaux

1.1	Répartition des signaux Galileo . . . . .	16
2.1	La sortie $S$ d'un $XOR$ (OR exclusif) . . . . .	20
4.1	Système dynamique continu . . . . .	64
4.2	Système dynamique discret . . . . .	64
4.3	Propriétés statistiques des bruits d'état et d'observation . . . . .	66
4.4	Récapitulatif des équations du filtre de Kalman linéaire [Candy, 2009]. . . . .	72
5.1	Jacobiens des fonctions non linéaires . . . . .	85
5.2	Algorithme du filtrage de Kalman étendu [Candy, 2009]. . . . .	86
B.1	Échelle d'état de la mer . . . . .	105
B.2	Échelle de Beaufort . . . . .	106



---

# Introduction

La surveillance de la surface de mer, utilisant comme signaux d'opportunité les sources électromagnétiques émettrices, connaît un succès certain grâce au progrès des technologies spatiales notamment les systèmes de navigation par satellites GNSS (Global Navigation Satellite System, GNSS).

Cependant, le rôle initial d'un système GNSS consiste à fournir une couverture globale de géopositionnement pour l'usage civil. Il existe plusieurs GNSS dans le monde tels que le GPS (Global Positioning System) des États Unis, Galileo (Union Européenne), GLONASS (Russie), QZSS (Japon), Beidou (Chine) et IRNSS (Inde).

Le fonctionnement d'un GNSS est basé sur trois segments : le segment spatial, le segment de contrôle et les utilisateurs. Le segment spatial comporte une constellation de satellites répartis sur un certain nombre d'orbites, se trouvant à une altitude moyenne de 20200km autour de la Terre, assurant d'une façon continue une couverture globale de la surface du globe terrestre.

Dans le cas du GPS, par exemple, ce sont 32 satellites répartis sur 6 orbites et ayant une période de révolution d'à peu près 12 heures qui assurent cette couverture 24 heures sur 24. Ces satellites sont responsables de la transmission des ondes électromagnétiques et des données aux utilisateurs. La longueur d'onde étant de l'ordre de 20cm, il en résulte un signal insensible aux conditions météorologiques, même les plus extrêmes.

La maintenance des satellites, de leur configuration orbitale, des systèmes embarqués ainsi que la surveillance de l'intégrité des signaux transmis, sont assurés par la composante de contrôle au sol. Cette dernière est également responsable de la mise à jour des corrections de l'horloge des satellites et des éphémérides. Les utilisateurs regroupent l'ensemble des utilisateurs civils et militaires qui ne font que recevoir et exploiter les informations des satellites.

Parmi les GNSS, on considèrera dans ce document le GPS, dans la mesure où celui-ci a été longtemps le seul système disponible, et le seul qui est entièrement exploitable actuellement. En effet, le GPS est un système à couverture globale, disponible sans discontinuité. L'infrastructure principale de transmission est déjà mise en place et elle est exploitable par le grand public. Il suffit de se munir d'un récepteur GPS afin de profiter des différents services. Pour l'ensemble de ces raisons le GPS a connu un grand succès de développement commercial.

Dans le domaine civil, le GPS est surtout connu pour la navigation maritime, sur route (exemple des appareils de guidage TomTom<sup>™</sup>), pour la localisation de flottes de

véhicules, la randonnée, ... Il est également utilisé pour se synchroniser sur le Temps Atomique International TAI qui est lui-même décalé du Temps Universel Coordonné UTC. Toutefois, ce ne sont pas les seules utilisations du GPS. Le signal émis par un satellite GPS correspond à la modulation BPSK d'une porteuse à une fréquence centrale  $f_0 = 1,5742$  GHz. C'est un signal déterministe constitué d'une séquence connue (code PRN). Le code PRN est unique pour chaque satellite. A la réception d'un signal GPS provenant d'un satellite donné, un dispositif est mis en place au niveau du récepteur permettant d'extraire le signal reçu du bruit ambiant. Il s'agit d'effectuer à chaque fois le produit de corrélation entre le signal reçu et une réplique d'une séquence PRN.

Si cette réplique correspond au satellite émetteur du signal, le résultat de la corrélation est alors une forme d'onde - qu'on appelle pic de corrélation - qui a une amplitude significative. Dans ce cas, le satellite est identifié et l'on passe au traitement du signal reçu, notamment la détermination du déphasage fréquentiel du signal reçu dû au déplacement du satellite (effet Doppler) et du retard temporel pour extraire toutes les informations utiles. C'est pour cela qu'on appelle la matrice du produit de corrélation contenant le pic de corrélation : carte Doppler - Retard.

Dans le cas contraire, le produit de corrélation est presque nul ce qui se traduit par des pics d'amplitudes plus faibles qu'on appelle bruit, ne permettant pas de déterminer la position du récepteur.

Depuis deux décennies, de nombreux chercheurs ont essayé d'aborder le traitement du signal GPS pour des fins de réflectométrie. Ils ont montré qu'il était possible de profiter des caractéristiques du GPS, afin de l'utiliser pour d'autres fin que le positionnement, où ils ont mis en évidence la forme d'onde des signaux GPS réfléchis par la surface de mer. Ainsi, en étudiant la forme du pic de réflexion de la carte Doppler - Retard, il est possible de remonter à la rugosité de la surface de l'eau, la direction de vent, les mouvements des courants et l'altimétrie de surface. Cela peut même aller jusqu'à l'observation de la topologie de la banquise et l'humidité du sol.

Le récepteur mis en jeu peut être aéroporté (cas d'observation lointaine ou même spatiale), ou plus rarement situé à proximité de la surface de mer (observation côtière). Dans cette seconde configuration, les signaux GPS diffusés peuvent être analysés pour donner une information dynamique de la surface de mer. Par contre, l'analyse de ces signaux reste délicate et soulève des difficultés de mise en œuvre dans un cadre opérationnel. Cette problématique, assez peu exploitée théoriquement, fait l'objet d'un projet de recherche appelé MOPS (*Marine Opportunity Passive System*) [Coatanhay *et al.*, 2008], et c'est dans le contexte de ce projet que nous plaçons l'étude menée dans cette thèse.

Le projet MOPS réunit plusieurs disciplines comme l'électromagnétisme, le traitement du signal et l'océanographie, afin de développer une plateforme expérimentale à Brest. Il représente également le fruit de coopération entre Télécom Bretagne, l'ENSTA Bretagne, et l'Ifremer. Ce projet est constitué de quatre parties principales :

– **Modélisation physique :**

Il s'agit de la modélisation numérique du champs électromagnétique au voisinage des vagues côtières [Khairi *et al.*, 2010] et en particulier les vagues qui sont déferlantes. On y propose d'utiliser la méthode des moments d'ordre supérieur

(HO - MoM).

- **Traitement du signal** : L'utilisation des signaux GNSS pour l'observation passive exige des traitements sophistiqués pour mettre en évidence l'information utile. C'est pourquoi, le projet doit définir une certaine configuration pour développer des techniques de traitement du signal adaptées à la problématique de mesure passive.
- **Problèmes inverses** : Cette dernière partie dans l'étude théorique utilise les modèles et les résultats présentés dans les deux premières parties afin de transformer les traitements en données exploitables dans l'océanographie. Plus précisément, il s'agit de l'inversion du problème physique et de l'identification des paramètres océanographiques.
- **Plateforme de mesure** : Le rôle de cette plateforme est d'assurer les enregistrements nécessaires pour faire les mesures finales indispensables pour la validation de nos études [Raikotondrainibe *et al.*, 2011].

C'est dans la partie « traitement du signal » que s'inscrit le travail réalisé dans cette thèse. Dans cet esprit, cette partie consiste à développer des algorithmes de traitement d'un signal GPS faible, comme l'intégration des signaux GPS sur une longue durée. On modélise les particules de la surface de mer où se réfléchissent les signaux GPS par des cibles ponctuelles. Ensuite, on cherche à suivre ces cibles, en mettant en place un dispositif de suivi de celles-ci basé sur l'utilisation du filtrage de Kalman et d'un récepteur côtier qui mesure les signaux GPS réfléchis par la surface de mer.

Ce manuscrit est divisée en trois parties principales :

### Rappel sur les GNSS

Dans le chapitre 1, nous rappelons quelques généralités sur les systèmes de navigation par satellites, les actualités et les dernières mises à jour des différents GNSS, et surtout le GPS et Galileo. Les différentes composantes du système GPS sont présentées de façon plus détaillée.

Dans le chapitre 2, nous complétons la présentation par une description plus précise du signal GPS. Ainsi, nous présentons plus de détails sur la modulation des ondes électromagnétiques émises par les satellites, la structure d'un signal GPS, la transmission et l'acquisition d'un signal GPS.

L'objectif de cette première partie est avant tout de préciser la nature des signaux que nous devons traiter. Avant de présenter des traitements élaborés que nous avons développés, il est en effet primordial de souligner que les signaux GNSS sont déterministes.

### Le signal GPS dans le contexte océanographique

Dans le chapitre 3, on présente les différents travaux réalisés en associant les signaux GPS (GNSS-R) réfléchis par la surface et les différents types de récepteurs. Avant de procéder à une analyse des procédures utilisées dans la réalisation de ces

travaux, quelques notions physiques sur la modélisation des vagues et la description statistique et spectrale de la surface de mer, sont rappelées. Nous avons choisi de poser quelques hypothèses simplificatrices concernant les cibles, qui correspondent aux crêtes de vagues s'approchant de la côte.

Afin de modéliser notre système expérimental, nous proposons dans une première étape de synthétiser des signaux GPS directs et réfléchis, en considérant deux points - l'un fixe et l'autre mobile - qui représentent la surface de mer. Ces points sont assimilés à deux cibles fixe et mobile sur la surface de mer. Le mouvement de la cible mobile est géré par des trajectoires représentatives de l'environnement marin.

Le but est de pouvoir détecter la présence de la cible mobile, son mouvement par rapport au signal direct (pilote) et la cible fixe, ainsi que l'application de certains algorithmes spécifiques, pour maximiser le rapport signal à bruit et surmonter le problème du basculement de bits de données lors d'intégrations sur une longue durée.

### Techniques de filtrage

Dans le chapitre 4, nous assimilons la cible mobile à une crête de vague ou à une bouée, permettant ainsi d'affiner sa trajectoire par des équations de mouvement (vitesse de phase d'une vague) et des paramètres de définition du cadre de mesure (surveillance côtière). Cela permet de définir un modèle d'état propre à la cible. Nous proposons d'appliquer dans ce cas un algorithme de filtrage de Kalman pour la poursuite de cette cible.

Idéalement, des capteurs de mouvement de la cible devraient fournir les mesures nécessaires au fonctionnement du filtre de Kalman.

Pour notre modélisation, nous décidons d'utiliser les valeurs du Doppler et du retard du temps pour des instants différents (chapitre 3 - section 3.7) comme les mesures du capteur.

La théorie de Kalman ainsi que quelques définitions mathématiques sont présentées dans ce chapitre. Malgré des résultats encourageants pour cette tentative, nous remarquons que le filtre utilisé est sensible au bruit et que la fonction d'observation choisie est probablement peu réaliste.

Dans le chapitre 5, nous proposons d'utiliser d'autres types de mesures pour diminuer l'effet du bruit. Il s'agit de fournir à chaque instant d'observation une carte complète qui contient en même temps le bruit et le pic correspondant à la réflexion du signal GPS sur la cible mobile. Cette carte est représentée analytiquement par la fonction d'ambiguïté du signal GPS reçu. La fonction d'ambiguïté étant non linéaire, nous utilisons le filtrage de Kalman étendu. Les équations propres au FKE ainsi que la nouvelle fonction d'observation, modélisée par une fonction gaussienne ayant les mêmes caractéristiques statistiques que la fonction d'ambiguïté, sont présentées dans ce chapitre.

Finalement, nous reverrons dans la conclusion le travail réalisé pendant ces trois années de thèse. Les résultats obtenus lors des différentes expériences, seront discutés. On montrera également comment ce travail nous a permis de présenter une nouvelle approche pour approfondir l'étude de la surface de la mer, ainsi que les applications de suivi et de pistage de navires.

Première partie

Fondamentaux des Systèmes de  
Navigation par  
Satellites



La caractérisation et la surveillance de la surface océanique sont très importantes pour les océanographes et tous ceux intéressés à l'écologie et la télédétection du milieu marin. Les systèmes de navigation par satellites GNSS, dans le milieu maritime, sont le domaine d'application dont fait l'objet notre travail de recherche. Ces derniers sont donc définis sommairement dans ce chapitre.

## 1.1 Principe de navigation par satellites

Le terme GNSS représente un acronyme de l'expression Global Navigation Satellite System. Certains pays ont déjà développé des systèmes de positionnement, et tentent d'améliorer les performances de ces systèmes, avec l'utilisation de nouveaux signaux et de nouvelles fréquences.

Le GNSS comprend de nos jours les systèmes de positionnement par satellites tels que le GPS (États Unis), Galileo (Union Européenne), Glonass (Russie), . . .

En fait, le GPS est à l'origine du GNSS : au début des années 60, plusieurs départements du gouvernement américain tels que le département de la Défense (DOD), la NASA (National Aeronautics and Space Administration), et le département des transports (DOT) s'intéressaient au développement d'un système de positionnement à 3 dimensions de l'espace par les satellites. Ce système devait être optimal tout en fournissant une couverture globale continue, pour toutes les conditions météorologiques : ce système est le GPS (Global Positioning Satellite System) [Kaplan et Hegarty, 2006].

### 1.1.1 État actuel des GNSS dans le monde

Bien que les différents GNSS utilisent sensiblement les mêmes techniques de positionnement (trilatération, utilisation d'un code pseudo-aléatoire, mesure de la phase de la porteuse, . . .), les fréquences et les largeurs de bande utilisées par chaque système sont très différentes.

Le système le plus connu, le GPS, est opérationnel depuis plusieurs années avec une fréquence civile appelée  $L_1$  C/A. Le premier satellite GPS fut lancé en 1978 et le système a évolué depuis pour atteindre les capacités de mise en service en 1993 et une

pleine exploitation de ses capacités avec une deuxième génération de satellites en 1995 [Kaplan et Hegarty, 2006].

Depuis 2005, plusieurs satellites transmettent un signal civil à la fréquence  $L_{2C}$ . Ce signal sera disponible sur les 32 satellites d'ici 2016. D'autre part, un premier signal sur la fréquence  $L_5$  est disponible depuis 2009 ; les satellites lancés d'ici 2019 diffuseront également ce signal qui sera disponible à tous les utilisateurs civils [gps, 2011]. En 2014, aura lieu la diffusion du premier signal  $L_{1C}$  qui sera disponible sur la totalité des satellites en 2021.

Le système européen Galileo fournira des signaux dans trois bandes de fréquence :  $E_1$ ,  $E_5$  ( $E_{5a}$  et  $E_{5b}$ ) et  $E_6$ . Bien que sujet à plusieurs retards depuis sa conception initiale, il est prévu que Galileo soit opérationnel à l'horizon 2014 [ONU, 2010].

Pour la Russie, Glonass a été lancé en 1982. Cependant, la mise en place de ce système a été reprise en 1999 grâce à un décret présidentiel après un arrêt pour des raisons économiques [Spaans, 2006]. Le système russe Glonass possède actuellement 2 signaux civils ( $L_1$  et  $L_2$ ) et il était censé atteindre la capacité opérationnelle complète, ou Full Operational Capability (FOC), en fin 2010 [ONU, 2010].

Un troisième signal nommé  $L_3/L_5$  sera également ajouté sur les nouveaux satellites de type GLONASS-K et ce signal sera disponible sur tous les satellites vers 2017-2020 [Gibbons, 2008].

D'autres pays se sont lancés dans cette aventure comme le Japon avec son QZSS (Quasi Zenith Satellite System) qui couvre le Japon et l'Australie et qui devait être opérationnel en 2007. La Chine qui a lancé son système Beidou en 2001, déclaré opérationnel en 2004 [Spaans, 2006]. L'Inde avec l'Indian Regional Navigation Satellite System était le dernier arrivant.

Avant de présenter les composantes des systèmes de navigation par satellite, sur les deux exemples GPS et Galileo, il est nécessaire de montrer les systèmes référentiels et comment s'opère le positionnement par satellites.

### 1.1.2 Systèmes de coordonnées

Pour la mesure et la détermination des orbites des satellites GPS, il est nécessaire d'utiliser un système de coordonnées ECI (Earth-Centered Inertial). Cependant, la géométrie de ce système référentiel par rapport à la Terre fait qu'il est largement affecté par la rotation de la Terre et par les mouvements gravitationnels. Ainsi pour calculer la position du récepteur sur Terre, il est mieux d'utiliser un autre système qui tourne avec la Terre. Celui-ci est le ECEF (Earth-centered Earth-Fixed system). Ainsi, pour un récepteur GPS, il est indispensable de transformer le ECI en ECEF [Kaplan et Hegarty, 2006].

### 1.1.3 Détermination de la position

Chaque récepteur GNSS situé à une certaine position peut recevoir à tout moment la position des satellites qui lui sont visibles à travers leurs signaux de radionavigation. Cela permet de calculer les distances  $R^i$  qui les séparent du récepteur.

En effet, pour chaque signal du satellite  $i$  diffusé à l'instant  $t_S^i$  par rapport au référentiel satellitaire et reçu à l'instant  $t_R^i$  par rapport au référentiel satellitaire, on peut déduire la distance  $R^i$  entre le récepteur et le satellite grâce à l'équation 1.1 :

$$R^i = (t_R^i - t_S^i) \cdot c, \quad (1.1)$$

où  $c$  désigne la célérité. Théoriquement, l'horloge du récepteur est parfaitement synchronisée avec celle du satellite. Ainsi, pour une détermination précise de la position du récepteur (ou encore l'utilisateur), il suffit de calculer les distances séparant le récepteur de trois satellites (méthode de trilatération) comme le montrent la figure 1.1 et l'équation 1.2.

$$R^i = \sqrt{(x_i - x_R)^2 + (y_i - y_R)^2 + (z_i - z_R)^2}, \quad (1.2)$$

Pour  $i = 1 \rightarrow 3$ ,  $R^i$  représente la distance entre le satellite  $i$  et le récepteur,  $(x_i, y_i, z_i)$  les coordonnées du satellite  $i$  et  $(x_R, y_R, z_R)$  les coordonnées du récepteur.

La position du récepteur est déterminée en résolvant le système d'équations mettant en jeu les coordonnées des satellites  $(x_i, y_i, z_i)$  et du récepteur  $(x_R, y_R, z_R)$ . Ce processus de triangulation nécessite 3 satellites au minimum, comme le montre la figure 1.1.

Or, l'horloge du récepteur n'a pas la même précision que les horloges situées au bord des satellites. Ce qui implique l'existence, en pratique, d'un biais  $t^d$  entre l'horloge du récepteur et celles des satellites. Ce biais reste la source principale d'erreur pour les mesures de distances. D'où la notion de « pseudo-distance »  $\rho$  et la nécessité d'un quatrième satellite :

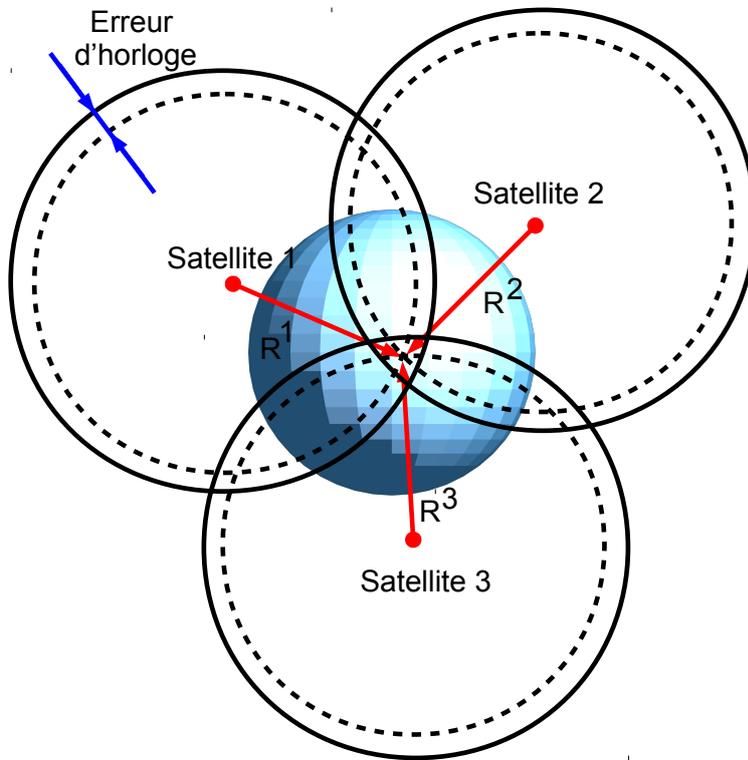
$$\rho = [(t_R + t_R^d) - (t_S + t_S^d)] \cdot c, \quad (1.3)$$

où l'on a :

- $t_R^d$  : Décalage de l'horloge du récepteur par rapport à la référence du temps.
- $t_S^d$  : Décalage de l'horloge du satellite par rapport à la référence du temps.
- $t_R + t_R^d$  : Temps affiché par l'horloge du récepteur au moment de la réception du signal.
- $t_S + t_S^d$  : Temps affiché par l'horloge du satellite au moment de la transmission du signal.

Tenant compte des équations 1.2 et 1.3,  $\rho$  aura l'expression suivante :

$$\rho^i = \sqrt{(x_i - x_R)^2 + (y_i - y_R)^2 + (z_i - z_R)^2} + ct_R^d \quad (1.4)$$



*Figure 1.1* — Technique de trilatération

( $i = 1 \rightarrow 4$ ).

Lors de la réception, d'autres mesures sont alors possibles comme la mesure du décalage Doppler et de phase.

Le décalage Doppler est la différence entre la fréquence reçue et la fréquence nominale de transmission. Ce décalage est induit par le mouvement relatif entre le satellite et le récepteur. Cette mesure est surtout utilisée pour déterminer la vitesse instantanée de récepteurs mobiles et pour détecter et corriger les sauts de cycles dans les mesures de phase.

Quant à la mesure de la phase, parfois on s'intéresse à la détermination du déphasage entre le signal reçu et sa réplique générée par le récepteur plutôt que de mesurer le temps de parcours de l'onde électromagnétique.

## 1.2 Composantes principales du système GPS

Le système GPS est composé de trois segments principaux : la constellation des satellites, le réseau de contrôle et de surveillance et le récepteur.

- La constellation de satellites étant l'ensemble des satellites en orbite qui fournissent les signaux de mesure et les données aux utilisateurs.
- La composante de contrôle est responsable de la surveillance et de la maintenance des satellites dans l'espace, l'intégrité des signaux transmis et la maintenance de la configuration orbitale des satellites. Cette composante met à jour les corrections de l'horloge des satellites, les éphémérides ainsi que d'autres paramètres essentiels à la détermination de la position de l'utilisateur.
- Le récepteur effectue la navigation et la synchronisation.

### 1.2.1 Segment spatial

La constellation du système GPS est constituée des satellites NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging). Elle comprend au minimum 24 satellites, positionnés à une altitude de 20200 km et évoluant sur des orbites circulaires inclinées à  $55^\circ$  par rapport à l'équateur. Ces satellites sont répartis dans 6 plans orbitaux différents comprenant chacun 4 satellites. Ils ont une période de révolution autour de la Terre de 11 heures et 58 minutes [Piéplu, 2006]. Ces satellites émettent des codes pseudo-aléatoires (Pseudo Random Noise) à partir desquelles les mesures de distance peuvent être faites. D'où la notion de système passif par rapport à l'utilisateur, comme :

- Les signaux sont émis par les satellites ;
- Les utilisateurs reçoivent les signaux passivement ;
- Le nombre d'utilisateurs capables de recevoir simultanément les signaux étant illimité.

### 1.2.2 Segment de contrôle

L'infrastructure au sol du système GPS, ou ce qu'on appelle la composante de contrôle, a pour fonctions principales de contrôler les satellites au cours de leur durée de vie, de maintenir leurs positions dans les orbites, de surveiller l'état de santé de ces satellites, ainsi que l'état de leurs panneaux solaires et le niveau des batteries.

Cette composante doit également activer les satellites de remplacement pour assurer la disponibilité du système en cas de faillite, mettre à jour l'horloge interne du satellite, les éphémérides, l'almanach, ainsi que d'autres indications dans le message de navigation au moins une fois par jour. Ces mises à jour sont d'autant plus fréquentes qu'une précision est nécessaire.

En plus, elle doit calculer les données que les satellites doivent diffuser aux récepteurs et d'opérer l'ensemble du système [Piéplu, 2006]. Cette infrastructure comprend plusieurs éléments déployés sur le globe, notamment les suivants :

- La station de contrôle principale, ou MGS (Master Ground Station) ;
- Les stations de surveillance, ou MS (Monitoring Station) ;
- Les antennes au sol.

### 1.2.3 Segment sol/ Utilisateurs, récepteurs

Les constructeurs de récepteurs ont développé une vaste gamme d'équipements dont les caractéristiques sont adaptées à de nombreuses applications. Il existe donc plusieurs catégories de récepteurs ayant des architectures différentes en fonction de leur utilisation. Avant de citer ces catégories, nous donnons une explication des fonctions principales des composantes d'une chaîne de réception.

#### Réception des signaux

La réception des signaux est réalisée par une chaîne qui comprend entre autres l'antenne, le pré-amplificateur et le convertisseur [Piéplu, 2006].

- Antenne :  
La première tâche de l'antenne consiste à transformer l'onde électromagnétique (signal GPS) reçue en courant électrique se propageant le long du câble de la sortie de l'antenne.
- Pré-amplificateur :  
La puissance des signaux reçus au sol étant très faibles, il est nécessaire de les amplifier avant de pouvoir les traiter. C'est la fonction du pré-amplificateur qui est directement intégré à la base de l'antenne de réception.
- Convertisseur :  
La fréquence des signaux reçus est trop élevée ( $L_1 = 1,5472 \text{ GHz}$ ) pour permettre de traiter le signal directement afin d'extraire les mesures de distance et les données. Le rôle du convertisseur est de ramener ces oscillations à une fréquence plus faible appelée fréquence intermédiaire.

#### Catégories des récepteurs

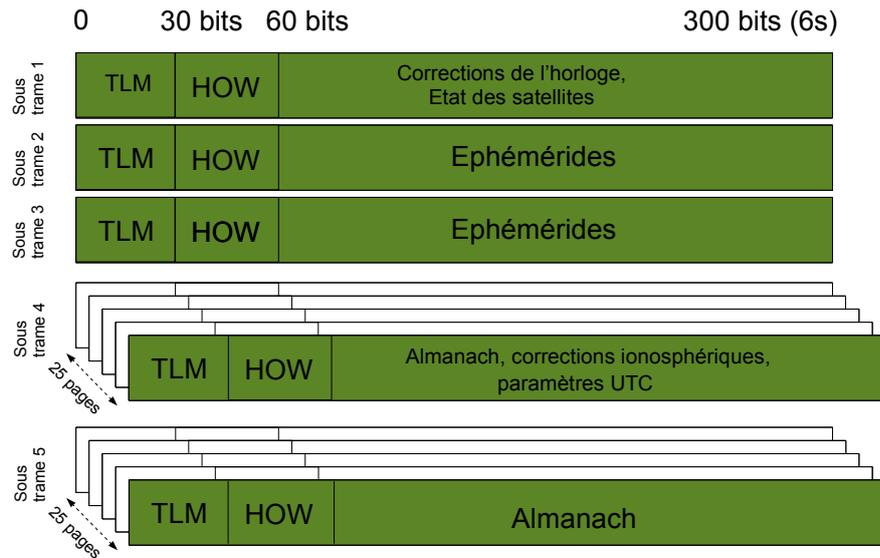
Les catégories de récepteurs sont aussi variées que les domaines d'applications. On peut citer :

- Les récepteurs grand public ;
- Les récepteurs certifiés pour les transports ;
- Les récepteurs de qualité géodésique ;
- Les récepteurs militaires.

### 1.2.4 Le message de navigation

Ce message contient des données bien définies qui sont nécessaires aux récepteurs pour effectuer leur calcul de position, et aux centres de contrôle sol pour faire les corrections sur ces positions et les communiquer par la suite aux satellites qui les renvoient aux récepteurs. Il est cadencé à une fréquence de 50 bits par seconde.

Ces données comportent des éléments comme les almanachs, les éphémérides, les corrections d'horloge (passage du système GPS au UTC), et les paramètres de correction ionosphérique. Toutes ces données sont transmises aux satellites avec un format standardisé. La figure suivante montre la structure du message de navigation.



**Figure 1.2** — La structure du message de navigation (*TLM* : telemetry et *HOW* : Hand Over Word)

## 1.3 Galileo

Initié au début des années 1990, le GNSS européen Galileo a été ensuite développé conjointement par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et la Communauté Européenne (CE), afin de répondre à plusieurs enjeux stratégiques, scientifiques et commerciaux [Piéplu, 2006].

Le programme Galileo consiste en la mise en place d'une infrastructure globale constituée de 30 satellites répartis sur 3 orbites différentes, positionnées à une altitude de 23222 km et inclinées à 56° par rapport à l'équateur. Ces satellites doivent être soutenus par un vaste réseau de stations sol mondialement réparties, 2 centres de contrôle en Europe, ainsi que 2 autres centres dédiés à la fourniture des différents services.

### 1.3.1 Avantages et enjeux du déploiement de Galileo

A la différence du GPS, Galileo est un système civil. Il a été conçu par des civils afin de répondre à plusieurs enjeux stratégiques (assurer l'indépendance de l'UE vis à vis des États Unis), économiques (création d'emploi, promotion de l'industrie et de la recherche, l'acquisition d'une expertise, compétitivité) et techniques (système de navigation précis avec une marge de 4 à 15m pour le service OS et 4 à 6m pour les services de sécurité, diminution des fausses alarmes et simplification des opérations de sauvetage en introduisant un signal - réponse aux appels de détresse avec le service SAR, augmentation du niveau de sécurité dans les messages d'intégrité...)

### 1.3.2 Services proposés par Galileo

Pour Galileo, cinq niveaux de services de natures différentes sont définis. Il s'agit de quatre services de navigation, plus un pour l'aide aux organismes de sauvetage.

- Service ouvert (OS - Open service) :

Ce service fournira à tout usager muni d'un récepteur bon marché sa localisation avec une précision de quelques mètres. Il est à destination du grand public, d'intérêt général, et est complètement gratuit. Il sera disponible en mono-fréquence et en double fréquence. L'utilisation de deux fréquences séparées permet de corriger les altérations survenues lors de la traversée de l'ionosphère, et qui dépendent de la fréquence utilisée.

- Service commercial (CS - Commercial Service) :

Destiné aux applications commerciales exigeant une précision supérieure à celle fournie par le service ouvert et une garantie de services. Par rapport à l'OS, deux signaux complémentaires cryptés sont transmis, afin d'augmenter le débit et un système d'authentification est prévu. En plus, un canal bas débit (500bits/s) permettra la diffusion d'informations des centres de services vers les utilisateurs : alertes météo, annonce d'accident, mise à jour, ... Cependant, l'accès à ce service sera payant.

- Sûreté de vie (SoL - Safety of Life) :

C'est un service de très haute qualité, dédié aux applications exigeant une forte sûreté de fonctionnement. Par exemple, les applications qui mettent en jeu la vie humaine comme la navigation aérienne ou maritime.

- Service gouvernemental (PRS - Public Regulated Service) :

Son accès est contrôlé. Il est dédié aux applications gouvernementales. Il sera constitué de deux signaux de navigation cryptés et protégés contre le brouillage et les interférences.

- Service de recherche et sauvetage (SAR - Search And Rescue) :

Il s'agit essentiellement des opérations de recherche pour le sauvetage et l'assistance. Il va assurer la détection du signal de détresse même en conditions difficiles,

la transmission quasi-immédiate du signal de détresse (contre une heure d'attente aujourd'hui), et la localisation de l'émetteur avec une précision de quelques mètres (contre 5km par rapport au GPS).

### 1.3.3 Signaux Galileo

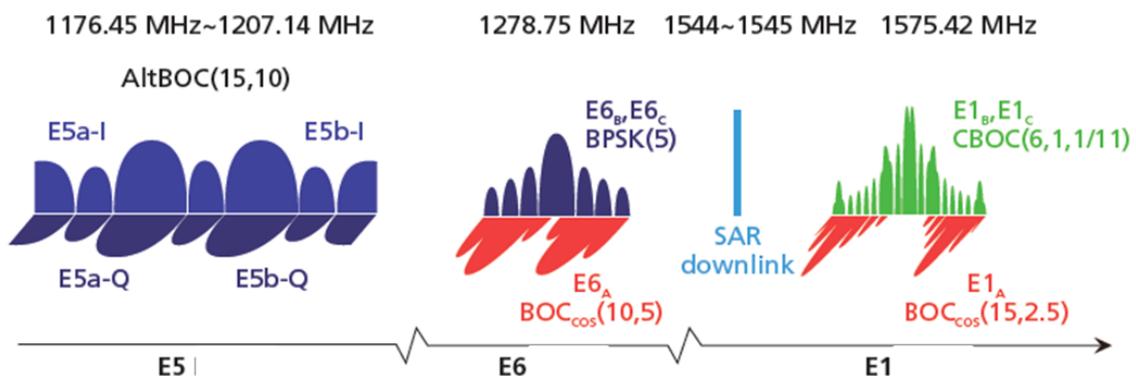
En 2000, certaines nouvelles bandes de fréquences ont été allouées aux GNSS (bandes  $E_{5a}$ ,  $E_{5b}$  et  $E_6$ ). Galileo dispose ainsi de deux bandes en commun avec le GPS ( $E_{5a} - L_5$ ,  $L_1$ ) afin d'assurer la compatibilité, et deux bandes distinctes ( $E_{5b}$  et  $E_6$ ) afin de supprimer le risque de panne commune. La compatibilité fait référence au partage de fréquences entre les GNSS. Autrement dit, Galileo et GPS ont des fréquences en commun, mais aucun des deux ne doit dégrader significativement le signal de l'autre.

Les satellites Galileo transmettent en permanence 10 signaux sur trois bandes de fréquences :  $E_5$  : (1164 – 1215)MHz,  $E_6$  : (1260 – 1300)MHz et  $E_2 - L_1 - E_1$  : (1559 – 1593)MHz. Un onzième signal est transmis vers les centres SAR (paragraphe :1.3.2) pour leur faire parvenir les messages de détresse détectés par Galileo, dans la bande 1554 – 1545MHz. La figures 1.3 montre les bandes de fréquences de Galileo ainsi que les signaux mis en jeu.

Tous les satellites utilisent les mêmes bandes de fréquence, et utilisent le *CDMA* comme mode de partage.

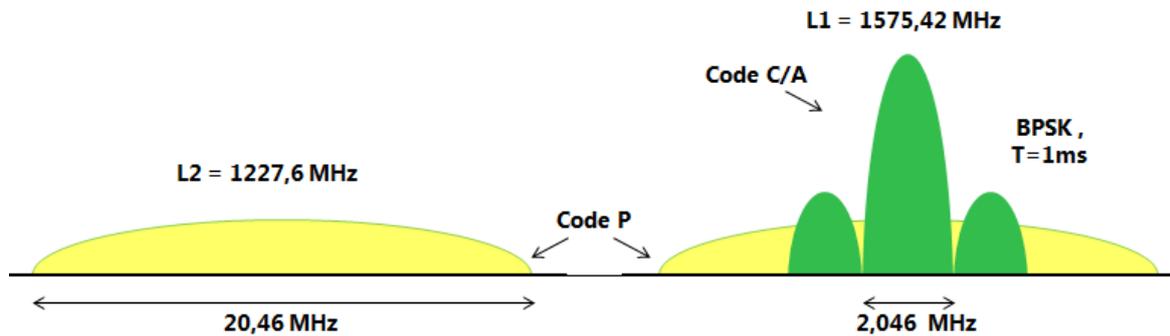
Les ondes sont polarisées circulairement vers la droite (tout comme le GPS) *RHCP* (Right Hand Circular Polarization). Pour la plupart des fréquences, des signaux sont émis à la fois sur la porteuse en phase I et en quadrature de phase Q. Les canaux en quadrature ne sont pas porteurs de données, et sont donc appelés pilotes. Bien que ces canaux ne transmettent pas des données, leur rôle est utile car ils améliorent la précision et la robustesse des mesures [Boost, 2005].

Les figures suivantes montrent brièvement les signaux mis en jeu :



**Figure 1.3** — Présentation détaillée des différents signaux Galileo, les fréquences utilisées et les types de modulation utilisés [ONU, 2010]

Le tableau 1.1 explique la répartition des fréquences.



**Figure 1.4** — Représentation des signaux GPS (code C/A et code P), les fréquences (non exhaustives) correspondantes ( $L_1$  et  $L_2$ ) et le type de modulation utilisé (à voir en détails dans le chapitre 2).

Signal	Fréquence centrale (MHz)	Modulation	Largeur de la bande (MHz)
$E5_a$ ( $L_5$ )	1176,45MHz	AltBOC (15, 10)	25,575
$E5_b$	1207,14MHz	AltBOC (15, 10)	25,575
$E6_a$	1278,75MHz	BOC (10, 5)	40,92
$E6_b$	1278,75MHz	BPSK (5)	40,92
$E1_a$ ( $L_1$ )	1575,42MHz	BOC (2, 2)	24,552

**Tableau 1.1** — Répartition des signaux Galileo

## 1.4 GPS et Galileo : Intérêt pour la télé-détection

Bien que les différents GNSS soient indépendants et autonomes, les applications civiles de certains d'entre eux comme le GPS et Galileo sont destinées à être utilisées conjointement. En effet, Galileo a été conçu de telle façon à permettre une grande interopérabilité, notamment avec le GPS.

L'interopérabilité couvre les aspects fonctionnels, et la possibilité de combiner les systèmes au niveau de l'utilisateur. L'utilisation des deux systèmes simultanément doit apporter à l'utilisateur une valeur ajoutée en terme de précision, d'intégrité, de disponibilité et de qualité de services en général.

Pour le GPS, l'interopérabilité a été rendue possible grâce à un recouvrement partiel du spectre, tandis que la compatibilité est assurée par l'utilisation de codes et de structures de signaux différents. Par exemple, si les signaux Galileo civils de la bande  $L_1$  sont brouillés, ceci n'affectera ni le signal PRS (paragraphe 1.3.2), ni le signal GPS. En plus, l'utilisation de fréquences centrales communes simplifie grandement la conception des récepteurs, mais elle est à l'origine d'interférences inter-systèmes qui viennent s'ajouter aux interférences intra-systèmes.

A eux deux, le GPS et Galileo couvrent une bande de fréquence de 160MHz environ sur le spectre électromagnétique entre 1GHz et 2GHz, offrant ainsi une grande disponibilité des signaux (qui sont émis à leur tour d'une manière continue).

D'une part, les fréquences situées dans cette bande ne nécessitent pas une forme spéciale d'antenne. Les longueurs d'ondes correspondantes à ces deux fréquences sont

de l'ordre de 15cm à 30cm. Par conséquent, la propagation des signaux dans cette bande n'est pas perturbée par les conditions météorologiques comme la pluie, la neige et les nuages.

D'autre part, l'espace est maintenant rempli avec les satellites appartenant aux différents GNSS, dont certains sont en pleine fonctionnalité et d'autres sont en pleine conception, assurant ainsi une couverture globale de la Terre et une transmission des signaux non interrompue grâce à l'interopérabilité des différents GNSS les uns avec les autres.

Ces derniers offrent alors une opportunité grandissante pour la télédétection de jour comme de nuit. Sachant qu'ils sont déjà utilisés dans des activités assez variées comme le transport maritime, la gestion des risques naturels, l'analyse du risque sismique, le suivi de l'évolution des volcans, le suivi et l'évaluation des zones d'inondations, la surveillance de la désertification, ainsi que le suivi de la pollution par hydrocarbures, la pollution maritime et la pollution atmosphérique.

C'est de là que vient notre motivation pour concevoir une plateforme de mesures capables d'exploiter les signaux GNSS dans un contexte de mesure passive de la surface de l'océan, permettant ainsi la mise en oeuvre d'autres applications comme le suivi de cibles sur cette surface.

Dans notre travail, nous utilisons seulement les signaux GPS, vu que c'est le seul système totalement fonctionnel et disponible selon notre position géographique. Toutefois, le traitement restera le même, à quelques modifications près, pour Galileo.

## 1.5 Conclusion

Après cette présentation globale des systèmes de navigation par satellites, qui sont au coeur de toutes les nouvelles technologies, un lecteur non averti est alors capable de comprendre les notions de base de la conception de ces systèmes ainsi que leur mode de fonctionnement dans un contexte de positionnement.

Nous avons montré qu'il était possible de profiter de ces systèmes pour d'autres fins que le positionnement. Nous avons pu voir que les GNSS sont de nos jours massivement exploités dans des opérations de télédétection et de surveillance grâce à leurs caractéristiques. Nous avons toujours considéré que les GNSS représentent une solution non couteuse, les équipements étant déjà existants. De plus, il y a toujours plusieurs satellites émetteurs en visibilité de n'importe quel point sur Terre fournissant des vues avec différentes géométries et une grande résolution, renforçant ainsi le pouvoir d'extraction des mesures du terrain (terrestre ou maritime).

« Mais comment faire concrètement pour utiliser les GNSS pour observer la surface de mer ? »

Une réponse à cette question se trouve dans la composante « signal » d'un GNSS. Nous allons voir dans le chapitre suivant comment des caractéristiques d'un signal GPS comme le type de modulation utilisé, sa composition et sa transmission constituent une source riche en information de la surface étudiée. Nous y présentons également les outils mathématiques ainsi que les algorithmes utilisés pour le traitement de ce signal.



Après cette présentation des aspects techniques du système GPS, nous allons détailler dans la suite l'aspect signal du GPS, notamment le type de transmission utilisée pour la diffusion des signaux de navigation, la structure du signal GPS ainsi que ses caractéristiques. Les satellites NAVSTAR<sup>1</sup> émettent des signaux électromagnétiques, de même nature que les ondes hertziennes de diffusion radio AM/FM ou TV, les signaux radar ou la lumière.

## 2.1 Structure du signal GPS

Les signaux du système GPS sont divisés selon CDMA (Code Division Multiple Access). Un signal GPS consiste en une porteuse, une séquence unique de code *PRN* (Pseudo-Random Noise) et un message contenant les données de navigation appelé message de navigation (revoir paragraphe 1.2.4). Le message de navigation et le code PRN sont codés par une modulation BPSK (Binary Phase Shift Keying). Dans ce type de modulation, le signal est transmis tel qu'il est ou avec un déphasage de 180°. Autrement dit, il s'agit de multiplier le signal non modulé par une séquence de données – ayant comme valeurs  $\pm 1$  – pour des intervalles successifs de durée  $T_b = 1/R_b$ , où  $R_b$  est le débit en bits par seconde.

Les différents satellites NAVSTAR transmettent tous sur la même fréquence sans interférence entre les différents canaux. Ceci est possible avec l'utilisation des codes PRN qui sont uniques et orthogonaux. Ces codes sont utilisés pour calculer la distance entre le satellite et le récepteur.

Les satellites GPS émettent plusieurs signaux codés, à destination civile comme le code C/A (Coarse / Acquisition) ou militaire comme le code P (Precise). Bien évidemment, la partie civile est non cryptée et par la suite disponible à l'utilisation par le grand public. C'est cette composante civile du signal GPS que nous utilisons dans ce document. Tandis que la composante militaire est cryptée et est réservée pour l'usage militaire et pour assurer la sécurité et l'intervention sur la composante civile.

Comme nous avons déjà vu, l'utilisateur doit mesurer, à l'aide du message de navigation, la phase de chaque code PRN reçu du satellite. Ceci est équivalent à la mesure

---

1. NAVSTAR est le nom officiel des satellites GPS.

$E_1$	$E_2$	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Tableau 2.1** — La sortie  $S$  d'un XOR (OR exclusif)

de la distance séparant le récepteur du satellite. C'est le rôle du récepteur d'assurer cette opération. Les propriétés de la fonction d'autocorrélation des codes PRN sont utilisées pour la détermination des codes PRN reçus. Avant d'aborder le sujet des fréquences utilisées, et la construction du signal GPS, nous présentons dans le paragraphe suivant les codes de Gold, qui sont des codes pseudo-aléatoires.

### 2.1.1 Codes Gold

#### Code C/A

C'est un code PRN en libre accès. Il est composé de séquences déterministes ayant des propriétés proches de celles d'un bruit aléatoire. Ce code doit son nom - code de Gold - à [Gold, 1967] même s'il a déjà été utilisé en radar [Golomb, 1964] et [Nathanson, 1969]. Ce code est généré à l'aide d'un registre à décalage qui utilise la sommation XOR (tableau 2.1) des sorties de 2 satellites différents de la constellation NAVSTAR [Stang et Borre, 1997]. Ce qui entraîne l'unicité de ce code par rapport à chaque satellite.

Le nombre d'éléments  $N$  d'une séquence de code Gold est exprimé en nombre d'étages  $n$  du registre, tel que :  $N = 2^n - 1$ . Pour le code C/A du GPS,  $n = 10$  d'après la figure 2.1. Elle consiste en 1023 chips partagés en 512 « uns » et 511 « zéros » (ces valeurs sont parfois implémentées par des NRZ chips).

Cette séquence se répète toutes les 1ms et est donc cadencée à 1,023Mbits/s. Ainsi la durée d'un chip de code sera  $\frac{1\text{ms}}{1023} \approx 1\mu\text{s}$  (ou 300m si la propagation se fait dans l'air ou dans le vide). Nous reviendrons dans la suite de ce chapitre sur ses caractéristiques et ses aspects utiles pour la télédétection.

#### Code P

C'est un code réservé à accès restreint qui permet d'accéder aux meilleures performances du GPS. C'est un code crypté (codes Y) dont le décryptage est inconnu du grand public. Il est cadencé à 10,23 MHz et est identique sur les 2 porteuses  $L_1$  et  $L_2$ . Théoriquement, il se répète tous les 38 semaines. Mais en réalité il est renouvelé toutes les semaines. Il a une résolution 10 fois celle du code C/A. De sa part,  $L_2$  n'est pas modulée par le code C/A.

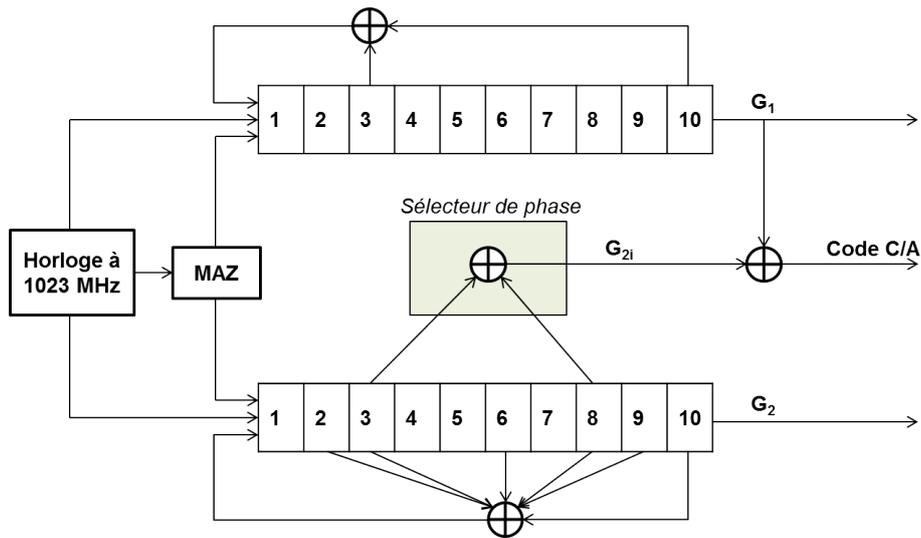


Figure 2.1 — Générateur du code C/A (Gold) (adapté de [Borre *et al.*, 2007])

### Propriétés de corrélation du code Gold

Tous les codes C/A sont presque décorrélés les uns des autres. Ainsi pour deux codes  $c^i$  et  $c^k$  correspondant aux satellites  $i$  et  $k$ , le produit de corrélation s'écrit alors :

$$\Gamma_{ik}(m) = \sum_{l=0}^{1022} c^i(l)c^k(l+m) \approx 0 \quad \forall m \quad (2.1)$$

Par ailleurs, le produit d'auto-corrélation d'une séquence donnée est presque nul pour tout déphasage non nul. C'est un indice important pour savoir si les deux codes sont alignés.

$$\Gamma_{kk}(m) = \sum_{l=0}^{1022} c^k(l)c^k(l+m) \approx 0 \quad |m| \geq 1 \quad (2.2)$$

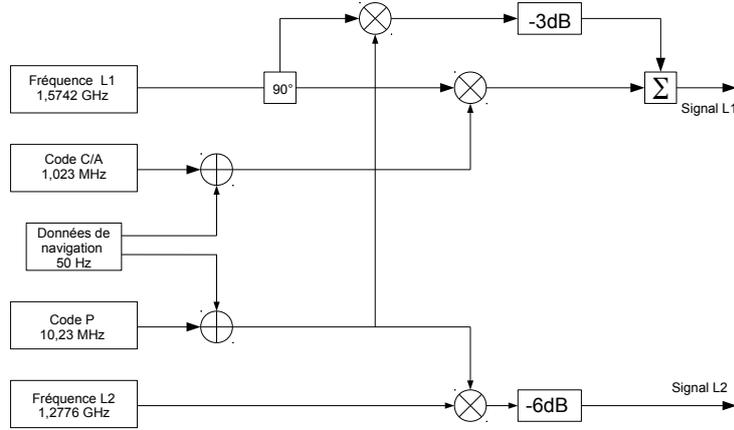
### 2.1.2 Fréquences et modulations

Les satellites *NAVSTAR* transmettent leurs signaux sur 2 fréquences porteuses appelées  $L_1$  et  $L_2$ . Ces deux fréquences sont déduites à partir d'une fréquence fondamentale  $F_0 = 10,23\text{MHz}$  par rapport à un observateur terrestre, tels que :

$$\begin{cases} L_1 = 154 \times F_0 = 1575,42\text{MHz} \\ L_2 = 120 \times F_0 = 1227,60\text{MHz} \end{cases} \quad (2.3)$$

La fréquence  $L_1$  est modulée par les deux codes PRN ; C/A et P, ainsi que par le message de navigation.

La fréquence  $L_2$  est modulée par le seul code P (figure 2.2). Le programme de modernisation du GPS permettra d'étendre ces possibilités à des nouveaux services par la mise en place de signaux supplémentaires.



**Figure 2.2** — Structure du signal GPS sur la fréquence  $L_1$  (Codes C/A et P) et  $L_2$  (Code P)

### Signal $L_1$

Le signal  $s_1(t)$  provenant d'un satellite  $i$  et transmis sur la fréquence  $L_1$  est formé des composantes en phase I et en quadrature de phase Q et est écrit sous la forme de  $s_{i,1}(t)$  dans l'équation 2.4 :

$$s_{i,1}(t) = \sqrt{2P_{CA}} \cdot c_i(t) \cdot d_i(t) \cos(2\pi L_1 t + \Phi) + \sqrt{2P_{p,L_1}} \cdot p_i(t) \cdot d_i(t) \sin(2\pi L_1 t + \Phi) \quad (2.4)$$

La composante I est modulée par le code C/A représenté par le terme  $c_i(t)$  et le message de navigation avec le terme  $d_i(t)$ . De son côté, Q est modulé par le code P présent par le terme  $p_i(t)$  et le message de navigation  $d_i(t)$ . On remarque donc que pour un signal transmis donné, les codes PRN sont différents mais le message de navigation est commun, ce dernier dépend uniquement du satellite émetteur.  $\Phi$  représente un déphasage dû à la transmission des signaux. On rappelle également que la puissance de la composante en phase  $P_{CA}$  diffère de celle de la composante Q,  $P_p$ , par +3dB.

### Signal $L_2$

De son côté, le signal  $s_2(t)$  est le signal transmis sur la fréquence  $L_2$  et est codé seulement par le code P. Pour un signal provenant d'un satellite  $i$ , ce signal s'écrit ainsi :

$$s_{i,2}(t) = \sqrt{2P_{p,L_2}} \cdot p_i(t) \cdot d_i(t) \cos(2\pi L_2 t + \Phi) \quad (2.5)$$

où  $p_i(t)$  et  $d_i(t)$  sont des séquences binaires qui correspondent respectivement au code P et aux données de navigation.

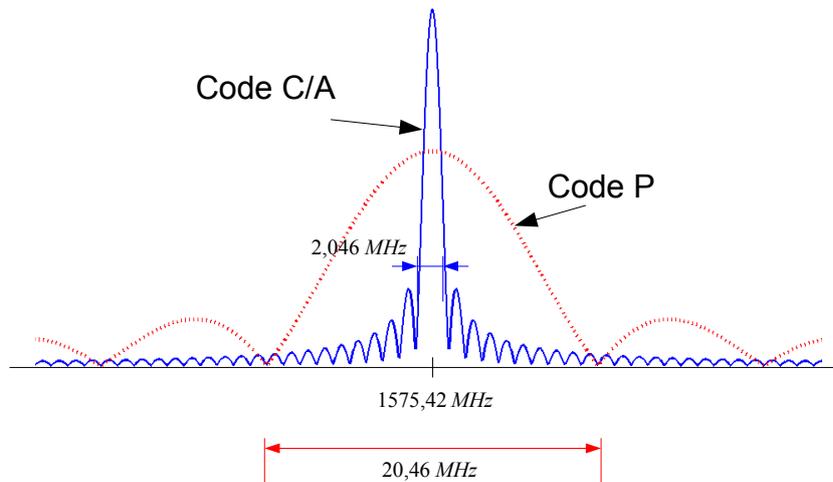


Figure 2.3 — Spectre du signal GPS

### Caractéristiques spectrales

Comme dans notre travail nous traitons seulement la composante  $L_1$  du signal  $s_{i,1}(t)$ , nous pouvons alors considérer que ce dernier s'écrit comme étant de la forme  $s_1(t) = f(t) \cdot c(t)$  où  $f$  est une sinusoïde et où  $c$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, T]$ ,  $T = 1/1,023\text{MHz}$  présente la période du code C/A.

Le spectre du signal  $s_1(t)$  sera alors de la forme :  $S_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(F(\gamma) * C(\gamma))$ , \* désignant un produit de convolution.

Avec :

$$F = \frac{1}{2} [\delta(\omega - 2\pi L_1) + \delta(\omega + 2\pi L_1)] \quad (2.6)$$

$$C = \frac{e^{iT\omega/2}}{\omega} \sin(T\omega/2)$$

Le spectre de  $S_1$  est alors un sinus cardinal centré à la fréquence de la porteuse. La forme de la puissance spectrale du signal  $S_1$  est donnée par la figure 2.3.

D'après ce spectre, on constate que le code P est très étalé temporellement par rapport au code C/A. De plus il est à  $-3\text{dB}$  par rapport au code C/A. C'est pourquoi on s'intéresse seulement à la composante  $L_1$  et surtout au code C/A. Le signal GPS  $s_1(t)$  utile émis par le satellite est alors donné par l'équation 2.7 et dans la figure 2.4.

$$s_1(t) = A_c \cdot c(t) \cdot d(t) \sin(2\pi L_1 t + \Phi) \quad (2.7)$$

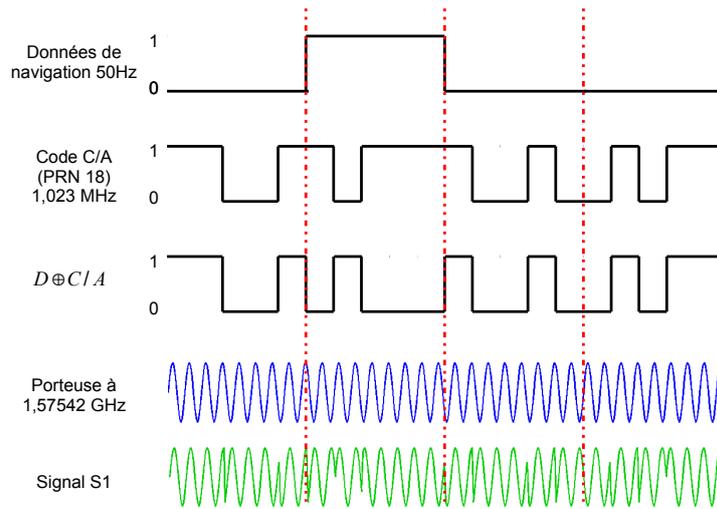


Figure 2.4 — Structure d'un signal GPS

## 2.2 Réception et acquisition du signal GPS

### 2.2.1 Modèle du signal GPS démodulé

Même avec une connaissance a priori des satellites en visibilité, la première tâche à effectuer par le récepteur GPS est d'acquérir la fréquence porteuse et le retard du signal reçu au sol par rapport au signal émis par le satellite. Le retard est directement lié à l'éloignement et le décalage par rapport à la fréquence  $L_1$  (effet Doppler) traduisant la vitesse radiale du satellite.

Au niveau du récepteur, le signal brut est modulé en fréquence intermédiaire de pulsation  $\omega_{IF}$ , numérisé et échantillonné à la pulsation  $\omega_s$ . Le signal reçu  $s(t)$ , composé des échantillons  $s_k$  correspondants aux instants d'échantillonnage  $t_k$  s'écrira alors [Psiaki, 2001] :

$$s_k = A \cdot d(t_k) \cdot c[(1 + \eta)(t_k - \tau)] \cos[\omega_{IF}t_k - (\omega_D t_k + \phi_0)] + v_k \quad (2.8)$$

A étant l'amplitude du signal. La valeur de A dépend uniquement du satellite que l'on cherche à détecter. La fonction  $d(t)$  décrit les données de navigation. Elle consiste en des bits de valeur  $\pm 1$  qui varient aléatoirement, toutes les 20ms ;  $d(t)$  est séquencée alors à 50Hz. La fonction  $c(t)$  représente le code C/A du signal reçu. C'est une séquence de  $\pm 1$  dont la répétition se fait à la fréquence 1.023MHz.

Le terme  $\eta$  traduit la variation du retard de code et des données induites par le déplacement du satellite impliqué (effet Doppler),  $\tau$  marque le début du code C/A et représente le retard de phase de  $c(t)$ , et  $\omega_D$  représente le décalage Doppler.  $\phi_0$  est la phase initiale du signal. Enfin,  $v_k$  est un bruit additif supposé Gaussien et coloré seulement par la bande passante du filtre d'entrée. Si on néglige les effets ionosphériques, la relation entre  $\eta$  et  $\omega_D$  s'exprime par :

$$\eta = \frac{\omega_D}{2\pi 1575,42 \cdot 10^6} \quad (2.9)$$

Le changement éventuel des bit de navigation de la fonction  $d(t)$ , se produit toutes les 20 périodes de  $c(t)$ , aux instants  $t_m$ , tels que :

$$t_m = \frac{0.02m + 0.001i}{1 + \eta} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

l'entier  $i$  est inconnu, mais qui varie de 0 à 19.

### 2.2.2 Acquisition du signal GPS

L'objectif du processus de l'acquisition est d'avoir une estimation de  $\tau$  et  $\omega_D$ , en se basant sur des mesures de  $s_k$ . Plus précisément, c'est un processus de recherche dans l'espace temps-fréquence<sup>2</sup>, des valeurs de  $\tau$  et  $\omega_D$  qui maximisent le produit de corrélation entre le signal brut reçu et une réplique de ce signal.

En supposant que  $\hat{\omega}_D$  et  $\hat{\tau}_s$  représentent les valeurs estimés du retard et du Doppler, et que  $\hat{\eta} = \hat{\omega}/(2\pi 1575,42 \cdot 10^6)$ , nous calculons les termes d'accumulation en phase  $I$  et en quadrature  $Q$  tels que :

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot c[(1 + \hat{\eta})(t_k - \hat{\tau})] \cos[(\omega_{IF} - \omega_D)t_k] \quad (2.11)$$

$$Q = - \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot c[(1 + \hat{\eta})(t_k - \hat{\tau})] \sin[(\omega_{IF} - \omega_D)t_k] \quad (2.12)$$

où l'on a : . Le terme  $N$  est choisi tel que la sommation se fasse sur une période d'une milliseconde du code C/A.

Après avoir calculé l'enveloppe  $P(\hat{\tau}, \hat{\omega}_D) = I^2 + Q^2$ , un processus de contrôle cherche à ajuster les valeurs  $\hat{t}_s$  et  $\hat{\omega}_D$  afin d'optimiser la grandeur  $P$ . On cherche alors dans le plan bidimensionnel,  $\hat{\tau} = t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$ , et  $\hat{\omega}_D = \omega_{Dmin}, \omega_{Dmin} + \Delta_{\omega_D}, \dots, \omega_{Dmax}$ .

Si la quantité  $P(\hat{\tau}, \hat{\omega}_D)$  dépassent un certain seuil prédéfini, alors on parle d'une acquisition réussie, et l'on considère que les valeurs  $\hat{t}_s$  et  $\hat{\omega}_D$  sont estimés de façon suffisamment précise. Dans le cas contraire, le signal est donc non détecté.

Le procédé d'acquisition est décrit schématiquement sur la figure 2.5.

### 2.2.3 Traitement par blocs

Dans un contexte permettant l'utilisation de calcul numérique et surtout si on s'affranchit d'une contrainte temps réel, le calcul de la corrélation vu précédemment

---

2. où l'axe temporel et l'axe fréquentiel, sont associés respectivement, au retard du code  $\tau$  et au décalage Doppler  $\omega_D$  du signal reçu.

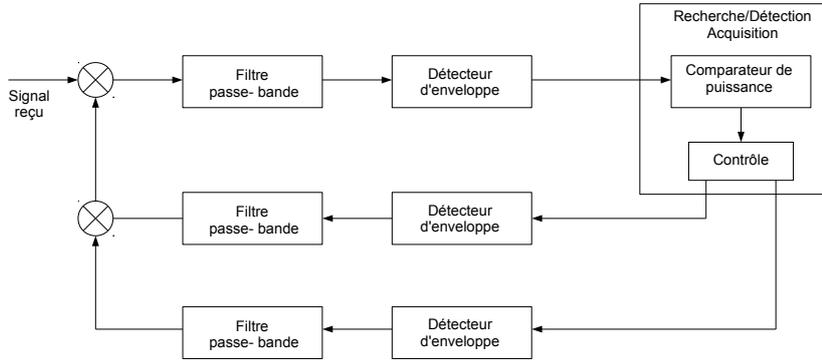


Figure 2.5 — Schéma d'acquisition

peut être avantageusement remplacé par un traitement en blocs faisant appel à des transformées de Fourier [Akopian, 2001] et [Psiaki, 2001].

En effet, en posant  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ , les équations 2.11 et 2.12 donnent :

$$\begin{aligned} z(n, \hat{\omega}_D) &= z(t_0 + n\Delta t, \hat{\omega}_D) &= I + jQ \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot c_{k-n} \cdot e^{-j(\omega_{IF} - \hat{\omega}_D)t_k} \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec  $c_{k-n} = c[(1 - \hat{\eta})(k - n)\Delta t]$ . Pour une fréquence Doppler fixée, on peut calculer la valeur de  $z(n, \hat{\omega}_D)$  pour toutes les valeurs de  $n$  allant de 0 à  $N - 1$  directement en appliquant la transformée de Fourier discrète (TFD) et son inverse (TFDI). En posant les notations suivantes :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_{N-1} \end{bmatrix} = \text{TFD} \begin{bmatrix} s_0 \cdot e^{-j(\omega_{IF} - \hat{\omega}_D)t_0} \\ s_1 \cdot e^{-j(\omega_{IF} - \hat{\omega}_D)t_1} \\ \vdots \\ s_{N-1} \cdot e^{-j(\omega_{IF} - \hat{\omega}_D)t_{N-1}} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{bmatrix} = \text{TFD} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Il vient immédiatement que :

$$\begin{bmatrix} z(0, \hat{\omega}_D) \\ z(1, \hat{\omega}_D) \\ z(2, \hat{\omega}_D) \\ \vdots \\ z(N - 1, \hat{\omega}_D) \end{bmatrix} = \text{TFDI} \begin{bmatrix} C_0 \cdot Y_0 \\ C_{N-1} \cdot Y_1 \\ C_{N-2} \cdot Y_2 \\ \vdots \\ C_1 \cdot Y_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

On choisit pour valeur du retard  $\tau = n_{max}\Delta t$ , où  $n_{max}$  est la position du maximum de la norme de  $z$ . On peut remarquer que dans la mesure où on s'intéresse à la norme de  $z(n, \omega_D)$  et où le signal  $c_n$  est réel, il est possible d'écrire :

$$\left\| \begin{bmatrix} z(0, \hat{\omega}_D) \\ z(1, \hat{\omega}_D) \\ z(2, \hat{\omega}_D) \\ \vdots \\ z(N-1, \hat{\omega}_D) \end{bmatrix} \right\| = \text{TFDI} \left\| \begin{bmatrix} C_0 \cdot Y_0 \\ C_{N-1} \cdot Y_1 \\ C_{N-2} \cdot Y_2 \\ \vdots \\ C_1 \cdot Y_{N-1} \end{bmatrix} \right\| \quad (2.17)$$

## 2.3 Détection des signaux faibles

Si le calcul de la corrélation sur une période de 1ms permet la détection des signaux GPS à un niveau de rapport signal à bruit nominal (45 – 50dBHz), cette acquisition devient impossible lorsqu'on doit faire face à des rapports plus faibles comme ceux envisagés dans le milieu marin. Le calcul de la corrélation doit donc s'opérer sur une période de temps plus longue. On envisage alors naturellement un calcul sur plusieurs périodes de code C/A.

### 2.3.1 Intégration longue

Il s'agit de la sommation cohérente sur une (ou plusieurs) période du code C/A des échantillons du signal complexe pour des valeurs fixées du Doppler  $\omega_D$ , corrélation de ces échantillons avec ceux de la réplique pour des différentes valeurs du retard  $\eta$ , sommation incohérente du signal de corrélation sur plusieurs périodes de bit de navigation. Il est possible de calculer en parallèle plusieurs séquences d'intégration longue décalées d'un certain nombre de périodes noté  $n$ .

Dans cette phase, il est indispensable d'utiliser des algorithmes qui servent à maximiser la puissance de la fonction de corrélation. Après le calcul de ces différentes séquences, une décision logique aura lieu pour déterminer la séquence optimale définie par l'indice de retard  $n$ .

Les bruits sont souvent additifs, stationnaires et centrés. Leurs moyennes temporelles tendent vers zéro. Tandis que le signal lui-même est constant : sa moyenne est égale à son amplitude. Ainsi, si l'on accumule les mesures sur une longue durée et que l'on fait la moyenne de l'intensité, on se rapproche de la valeur du signal et on élimine le bruit.

### 2.3.2 Sommation cohérente

La corrélation sur la  $i$ -ème période du code C/A peut être exprimée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
z_i(n, \hat{\omega}_D) &= I_i + jQ_i \\
&= \sum_{k=N_i}^{N(i+1)-1} s_k \cdot c_{k-n} \cdot e^{-j(\omega_{IF} - \hat{\omega}_D)t_k}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ainsi la sommation cohérente sur plusieurs périodes donne :

$$\begin{aligned}
z_{sc}(n, \hat{\omega}_D) &= I_{sc} + jQ_{sc} \\
&= \sum_{i=0}^{L-1} z_i(n, \hat{\omega}_D)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Nous calculons ainsi la puissance du signal  $P_{sc} = I_{sc}^2 + Q_{sc}^2$  que l'on cherche à optimiser en fonction de  $\hat{\omega}_D$  et  $n$ . Le calcul de cette sommation se fait par la méthode de traitement en blocs, sur une durée égale à 10 périodes.

Il existe un facteur qui peut limiter la durée de la sommation cohérente, c'est le changement des données de navigation, et par suite le signal brut toutes les 20 millisecondes. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà signalé, le message de navigation est connu par le récepteur GPS. Cependant, comme nous travaillons avec des signaux synthétiques, nous ne pouvons pas négliger cette composante du signal. C'est pourquoi, dans le chapitre 3, nous supposons que ces données sont a priori inconnues et que la fonction  $d(t)$  est non déterministe. Lors de la génération des signaux de la section 3.7, cette séquence sera représentée par une séquence de valeurs aléatoires dont les valeurs  $\in \{-1, 1\}$ . Ce qui explique le passage par la sommation incohérente.

### 2.3.3 Sommation incohérente

Le changement éventuel des bits de données toutes les 20ms entraîne un changement de phase du signal brut. Pour traiter ce problème, nous réalisons la sommation au carré des quantités  $z_{sc}$  calculées précédemment. Le nombre  $L$  de périodes de code C/A est choisi tel que  $L \leq 20$ , tout en débutant à l'instant  $t_m$ . On répète le même calcul pour d'autres instants  $t_n$ , et tous les éléments au carré sont sommés à la fin.

Cela s'exprime par l'équation :

$$z_{snc}(n, \hat{\omega}_D) = \sum_{m=0}^{M-1} |z_{sc}(n, \hat{\omega}_D)|^2, \tag{2.20}$$

$$z_{snc}(n, \hat{\omega}_D) = \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \left[ \sum_{i=i_m}^{i_m+L-1} I_i(n, \hat{\omega}_D) \right]^2 + \left[ \sum_{i=i_m}^{i_m+L-1} Q_i(n, \hat{\omega}_D) \right]^2 \right\} \tag{2.21}$$

Où  $i_m$  est la  $i$ -ème période du code, débutant à l'instant  $t_m$ , à laquelle on commence la sommation partielle.  $M$  représente le nombre de périodes de 20ms sur lesquelles s'effectue l'intégration longue.

### 2.3.4 Gestion des bits de données

La façon la plus naturelle pour traiter le problème des bits de données prenant aléatoirement la valeur 1 ou  $-1$  est de réaliser la sommation au carré des calculs effectués sur quelques périodes. Ainsi, nous allons effectuer le calcul proposé précédemment sur un nombre  $L$  de période de code  $C/A$  inférieur ou égal à 20, en commençant à une date  $t_m$ . On effectue ensuite le passage au carré et on somme le résultat obtenu avec celui effectué pour d'autres instants  $t_n$ .

Cela se traduit mathématiquement par la relation suivante :

$$P_{long} = \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \left[ \sum_{I=I_m}^{I_m+L-1} I_I(n, \hat{\omega}_D) \right]^2 + \left[ \sum_{I=I_m}^{I_m+L-1} Q_I(n, \hat{\omega}_D) \right]^2 \right\}, \quad (2.22)$$

où  $I_m$  est la  $m$ -ième période du code (débutant au temps  $t_m$ ) à laquelle on commence la sommation partielle.

Muni de cette expression, nous pouvons envisager une intégration du signal GPS sur une très longue période, à condition de bien choisir la séquence  $I_0, I_1, \dots, I_{M-1}$ . En particulier aucune transition de données ne doit avoir lieu entre la période  $I_m$  et la période  $I_m + L$ . Pour s'assurer de cela, [Dierendonck, 1996] propose deux techniques que nous présentons ci-dessous :

#### 1. Méthode des demi bits alternés

La première approche consiste à choisir deux séquences entrelacées pour les  $I_m$ .

Par exemple, pour une séquence  $l_1$ , on peut choisir  $I_0 = 0, I_1 = 20, I_2 = 40, \dots, I_{M-1} = (M-1) \times 20$ ; et pour une séquence  $l_2$ , on choisit  $I_0 = 10, I_1 = 30, I_2 = 50, \dots, I_{M-1} = 10 + (M-1) \times 20$ .

Alors, si on impose  $L = 10$  (demi durée d'un bit de données), nous sommes assurés que soit la séquence  $l_1$ , soit la séquence  $l_2$  évite toute transition de bit durant les sommations partielles.

Au final, le choix de la séquence se fera en considérant le meilleur rapport signal à bruit RSB.

#### 2. Méthode des bits entiers

La méthode des demi bits alternés se révèle très rapide, puisque les sommations partielles s'effectuent uniquement sur 10 périodes du code  $C/A$ , c'est à dire que l'on se prive potentiellement de la moitié du signal GPS.

Une autre possibilité est donc de considérer une séquence  $l_p$  tel que  $I_0 = p, I_1 = p + 20, I_2 = p + 40, \dots, I_{M-1} = p(M-1) \times 20$ ; avec une durée de sommation partielle telle que  $L = 20$ .

En faisant varier  $p \in 0, 1, 2, \dots, 19$ , on peut déterminer la séquence  $l_{optim}$  qui optimise le RSB.

La méthode de l'estimation de la date de transition (Méthode des bits entiers) est certainement plus coûteuse en temps. Par contre, elle permet un gain d'énergie de l'ordre de 2 par rapport à la méthode précédente : c'est à dire un gain de 3dB sur les sommations partielles, et un gain de 6dB lors de la mise au carré.

## 2.4 Modes d'acquisition

Il existe trois méthodes différentes pour effectuer l'opération de l'acquisition. Les figures 2.6, 2.7 et 2.8 sont adaptées de [Borre *et al.*, 2007].

### 2.4.1 Mode d'acquisition en série

Cette méthode est souvent utilisée pour les systèmes CDMA (division de code à accès multiple). Cet algorithme est basé sur la multiplication du signal reçu  $s_k$  par un code PRN  $c(t)$  généré localement, correspondant à un satellite donné et ayant une marge de déphasage de code de 0 à 1022 chips; et une porteuse générée elle aussi localement (figure 2.6).

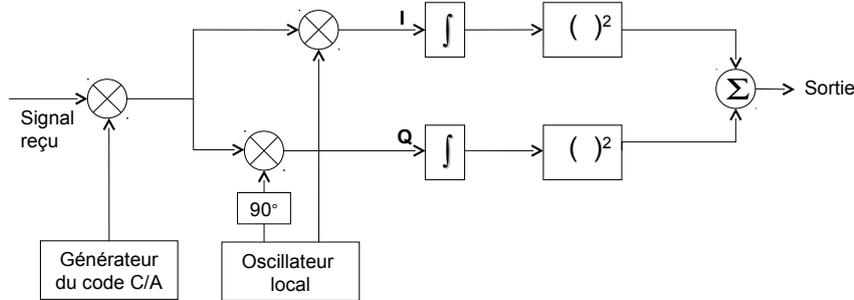


Figure 2.6 — Recherche en série du Doppler et du retard de code

Les composantes I et Q (équations 2.11 et 2.12) seront ensuite intégrées sur 1 ms, et leurs carrés sont sommés afin de calculer la puissance  $P(\hat{t}_s, \hat{\omega}_D) = I^2 + Q^2$ . Si le seuil de détection prédéfini est atteint, alors on peut dire que les valeurs estimées  $\hat{t}_s$  et  $\hat{\omega}_D$  sont correctes et on procède dès lors à la poursuite du signal.

Dans cet algorithme, il y a une recherche dans le domaine temporel (code) et fréquentiel (Doppler). Ainsi, à chaque fois, on fait balayer les 1023 chips d'un côté et un intervalle de la fréquence intermédiaire  $FI \pm 10$  KHz avec des pas de  $\Delta f_1 = 500$  Hz [Akos, 1997] de l'autre côté. Le nombre total d'opération sera alors :

$$1023 \times \left( \frac{20000}{500} + 1 \right) = 41 \times 1023 = 41943 \text{ combinaisons}$$

Ce grand nombre d'opérations constitue un point faible pour l'algorithme.

### 2.4.2 Mode d'acquisition en parallèle

Nous avons vu que la méthode de recherche en série est très coûteuse au niveau temps. C'est pourquoi, il est nécessaire d'éliminer un des deux paramètres recherchés,

ou le cas échéant le faire en parallèle. La deuxième méthode proposée dans ce paragraphe consiste à paralléliser la recherche d'un seul paramètre. Ainsi, on n'effectue plus le balayage de l'espace fréquentiel, éliminant ainsi 41 opérations de recherche.

La première partie de cette méthode est similaire à celle de la méthode de recherche en série, où le signal reçu est multiplié par un code PRN correspondant à un satellite bien défini, avec un délai de code allant de 0 à 1022. Le signal résultant (à la sortie du multiplicateur dans la figure 2.7) est alors obtenu dans le domaine fréquentiel par la Transformée de Fourier. Si le nombre d'échantillons de la séquence d'entrée, est une puissance de 2, on peut utiliser la Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform - FFT). Pour plus de détails sur la FFT, le lecteur pourrait se référer à [Oppenheim et Schafer, 1999].

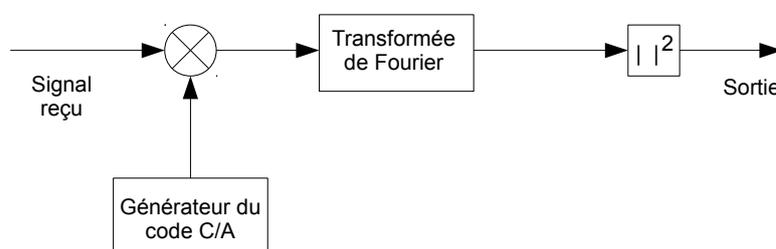


Figure 2.7 — Recherche en parallèle du Doppler et du retard de code

Le signal à la sortie de la FFT est alors complexe. Si le code PRN généré par le récepteur est parfaitement aligné avec le signal reçu, nous pouvons voir dans ce cas un pic de corrélation situé à une fréquence  $f_{rech}$  qui est égale à la somme du décalage Doppler recherché et la fréquence intermédiaire :  $f_{rech} = f_D + f_{IF}$ .

La précision de cette méthode au niveau fréquentiel dépend du nombre d'échantillons existants dans les données traitées. Par exemple, pour une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 60\text{MHz}$  et pour une durée de code de 1ms nous avons  $N_s = f_s/1000 = 60000$  échantillons.

Étant donné que les premiers  $N_s/2$  échantillons représentent les fréquences appartenant à l'intervalle  $[0, f_s/2\text{Hz}]$ , la résolution de recherche fréquentielle est alors :

$$\Delta f_2 = \frac{f_s/2}{N_s/2} = \frac{60 \cdot 10^6}{60 \cdot 10^3} = 1\text{kHz}$$

Pour cette méthode, nous remarquons que le pas de recherche  $\Delta f_2 = 1\text{kHz}$  est égal au double du pas de recherche  $\Delta f_1 = 500\text{Hz}$  propre à la méthode d'acquisition en série. Ainsi, cette méthode est deux fois moins précise que la première.

Le balayage dans cette méthode se faisant seulement sur 1023 bits de code, nous constatons alors que l'on gagne beaucoup en temps de calcul par rapport à la première. Toutefois, on y perd au niveau de la précision.

### 2.4.3 Mode d'acquisition en parallèle du code

L'objectif de cette méthode consiste à proposer une nouvelle architecture d'acquisition afin de résoudre les défauts des méthodes d'acquisition en série et en parallèle, comme le temps d'exécution (grand nombre d'opérations) pour la première et le manque relatif de précision pour la deuxième. Il s'agit toujours d'une corrélation entre le signal reçu et une réplique du code générée par le récepteur. Afin de gagner en temps d'exécution (diminuer le nombre d'opérations), cette méthode fait appel à la corrélation circulaire entre le signal reçu (entrée) et le code PRN généré comme le montre la figure 2.8 au lieu d'une corrélation avec les 1023 répliques décalées (acquisition en série).

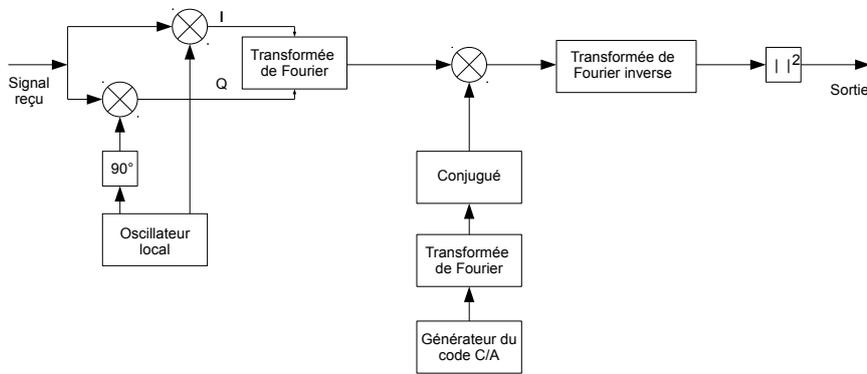


Figure 2.8 — Acquisition en mode parallèle du code et de la phase

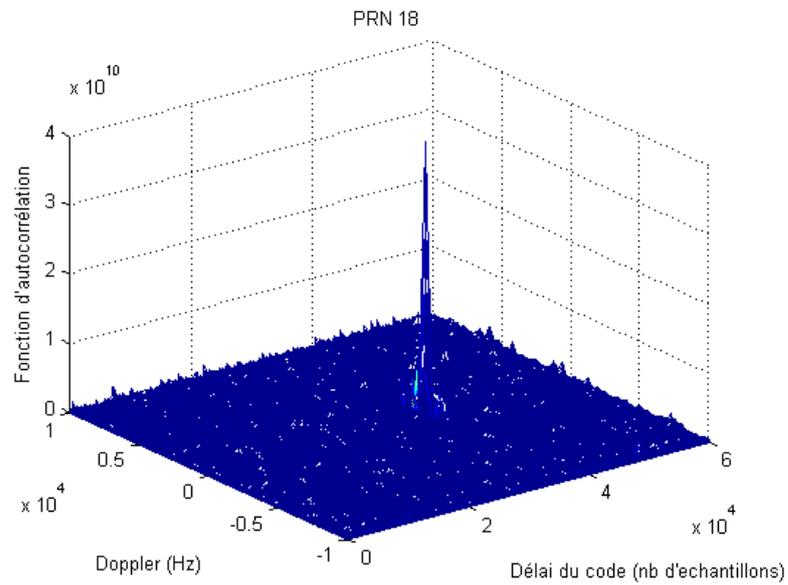
La multiplication du signal reçu avec la réplique du code générée par le récepteur donne lieu aux composantes en phase  $I$  et en quadrature de phase  $Q$  du signal. Le signal résultant à l'entrée de la Transformée de Fourier est alors  $x(n) = I(n) + jQ(n)$ .

D'un autre côté, le code PRN généré est obtenu dans le domaine fréquentiel après le passage par la Transformée de Fourier. Le conjugué du signal complexe résultant est ensuite calculé.

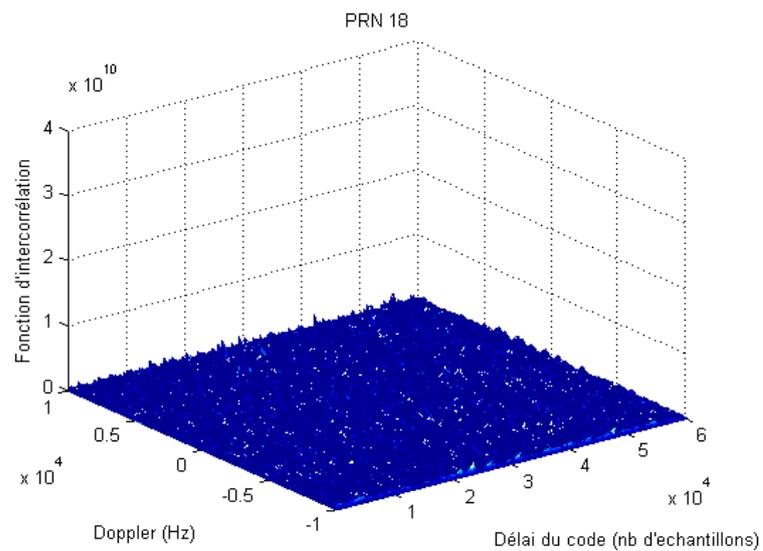
Les deux signaux résultants de la TF de  $x(n)$  et la TF du code PRN sont alors multipliés (3-ème multiplicateur de la figure 2.8) et ils sont ramenés ensuite en domaine temporel par une Transformée de Fourier Inverse.

La corrélation entre le signal reçu et le code PRN est alors donnée par le module du signal à la sortie de la Transformée de Fourier Inverse. Si l'on voit apparaître un pic de corrélation, les coordonnées de ce pic définissent le délai du code et le déphasage fréquentiel (Doppler) (figure 2.9). Toutefois, le délai du code est exprimé en nombre d'échantillons et non pas en chips de code, comme dans les deux premières méthodes.

Nous observons, dans la figure 2.9, l'existence d'un pic de corrélation. Cela montre la réception d'un signal provenant du satellite 18. Il est situé à  $t_N = 36000$  échantillons et  $f_D \approx 300\text{Hz}$ . Par contre, quand on n'obtient que du bruit dans la carte (figure 2.10) et pas de pic de corrélation, nous constatons alors que le satellite en question n'est pas visible. Par conséquent, le signal reçu ne contient pas son code PRN.



**Figure 2.9** — Une carte Doppler - Retard qui montre la présence d'un signal GPS provenant du PRN 18, par le biais d'un pic de corrélation ayant comme coordonnées les valeurs du délai de code et du déphasage fréquentiel



**Figure 2.10** — Une carte Doppler - Retard qui affiche seulement du bruit montrant ainsi l'absence d'un signal GPS provenant du PRN 18

L'avantage de cette méthode est la diminution du nombre d'opérations et la précision par rapport aux deux premières méthodes. D'une part, on génère le code PRN (1023 bits) une seule fois pour 41 opérations de balayage du domaine fréquentiel. D'autre part, la précision se fait désormais sur le nombre d'échantillons ( $N_s = 60000$  échantillons pour une  $f_s = 60\text{MHz}$ ) au lieu de 1023 bits.

C'est cette dernière méthode que nous allons utiliser pour le calcul de la fonction de corrélation dans le chapitre 3.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'exposer les caractéristiques des signaux GPS et les modes d'acquisition de ces signaux, dans le cas général et pour les signaux faibles.

Nous estimons que ce chapitre est nécessaire pour comprendre dans la suite la relation entre le signal GPS et la mer. Dans le chapitre suivant, nous allons aborder la problématique de mesures océanographiques avec les signaux GPS comme signaux d'opportunité.

Nous allons aussi présenter notre problématique de détection, et la modélisation des cibles de surface en montrant quelques résultats.

## Deuxième partie

# Le signal GPS dans le contexte océanographique



---

# Mesure passive du signal GPS dans les applications océanographiques

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une introduction sur la problématique de recherche océanographique, et plus particulièrement sur les applications réalisées avec les signaux GPS, et les techniques de mesure passive, dans ce contexte.

Ensuite, nous rappelons quelques notions physiques et électromagnétiques concernant la surface de mer, comme la modélisation des vagues, la description statistique de la surface, la description spectrale où l'on aborde le spectre d'Elfouhaily, celui-ci étant couramment utilisé dans la plupart des applications, et la génération de la surface de mer. Toutefois, certaines notions ne seront pas utilisées explicitement dans notre travail, le but étant de comprendre le cadre général des modèles théoriques étudiant l'interaction électromagnétique entre la surface de mer et les signaux incidents. Nous présentons également quelques applications basées sur GPS-Réfléchi (GNSS-R).

Enfin, nous commençons à aborder notre problématique de recherche en mettant en avant l'interaction entre la surface de mer et les signaux GPS réfléchis, en mettant en évidence l'influence du mouvement (position) des pics des signaux réfléchis par rapport au signal direct reçu.

## 3.2 Les signaux GNSS-R dans l'océanographie

Le GPS-R constitue un système « radar » bi-statique et passif, où l'on dispose d'un émetteur et d'un (ou plusieurs) récepteur(s). Les signaux GNSS sont très faibles car ils ne sont pas conçus pour les applications de radar ; toutefois ils sont détectables. Plus précisément, si les signaux réfléchis constituent pour certaines applications une sorte de bruit à éliminer afin d'améliorer l'acquisition du signal direct, pour notre problématique, ils constituent une source riche d'informations. En effet, le signal réfléchi est affaibli par la réflexion, avec une amplitude réduite, une forme d'onde modifiée et une cohérence perdue [Ruffini, 2006].

En 1993, Martín-Neira suggère l'utilisation des signaux diffusés provenant de la constellation actuelle des satellites GPS [Martín-Neira, 1993]. Deux ans après, [Anderson, 1995] suggérerait l'utilisation de l'empreinte d'interférence des signaux GPS réfléchis pour la détermination de la hauteur des marées. Fort des tests expérimentaux, qui montrent la possibilité de détection depuis un avion, des signaux GPS réfléchis [Auber *et al.*, 1994], [Katzberg et Garisson, 1996] suggèrent la détection à partir des satellites en basse orbite (LEO) de ces signaux afin de déterminer le retard ionosphérique au dessus de l'océan.

Martín-Neira a également travaillé sur l'estimation de la hauteur de la surface de mer, à partir des récepteurs situés respectivement à faibles distances [Martín-Neira, 1999], et à longues distances, en validant le concept d'altimétrie en utilisant le radar passif [Ruffini *et al.*, 2003].

D'autres ont même développé des récepteurs spécialisés qui ont pour fonction de récupérer les signaux GNSS réfléchis sur une surface convenable. On en cite deux : le Delay-Mapping Receiver (DMR) développé par la NASA [Garrison *et al.*, 1997] et le GPS Open Loop Differential Real Time Receiver (GOLD-RTR) par le centre d'étude spatiale CSIS-IEEC en Espagne [Norgués-Correig *et al.*, 2007]. Notons que, dans ces expériences, le récepteur était porté soit par des avions, radars, ballons stratosphériques ou des plates-formes spatiales.

Un autre type d'application est la surveillance côtière où le récepteur est situé à quelques mètres au-dessus de la surface de l'océan. Ce type de récepteur permet de fournir plus d'information sur le milieu océanique. Dans ce cadre, Starlab a déjà développé un récepteur côtier appelé OCEANPAL permettant de mettre en évidence la salinité et la hauteur des marées [Soulat *et al.*, 2006].

## 3.3 Modélisation des vagues

### 3.3.1 Paramètres géophysiques mis en jeu

Il existe trois paramètres principaux dans la génération des vagues :

- La vitesse du vent à dix mètres de la surface  $U_{10}$  en  $m.s^{-1}$ ,
- La durée de l'action du vent,
- Le *fetch*, la distance ou l'étendue de mer sur laquelle (ou encore surface effective) le vent a soufflé à une vitesse constante.

### 3.3.2 Onde monochromatique

Les vagues à la surface de la mer peuvent être décrites comme la superposition d'ondes liées à une perturbation de la surface. L'amplitude des ondes est petite devant leur longueur d'onde. On les décrit comme étant des ondes stationnaires et homogènes [Phillips, 1977].

Soit  $a$  l'amplitude locale de l'onde monochromatique et  $\chi$  sa phase, une fonction qui varie rapidement en fonction du temps et de l'espace. Cette onde est caractérisée par son

vecteur d'onde  $\vec{k}$  et sa pulsation  $\omega$ , définis à partir de la phase tels que [Mouche, 2005] :

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \nabla\chi \\ \omega &= -\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.1)$$

où  $\nabla$  désigne le gradient qui s'applique sur le plan horizontal (plan des  $x$ ) sauf indication contraire. Si le fluide est translaté horizontalement par un courant de vecteur  $\vec{U}$ , on a :  $\omega = \sigma + \vec{k} \cdot \vec{U}$ , où  $\sigma$  est la pulsation de l'onde dans un repère lié au mouvement alors que  $\omega$  est définie dans un repère fixe. La vitesse de phase d'une onde est sa vitesse de propagation. Quand la phase  $\chi(\vec{x}, t)$  est constante, la vitesse de phase  $c$  est alors donnée par :

$$\frac{d\chi}{dt} = \vec{c} \cdot \nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t} = \vec{c} \cdot \vec{k} - \omega = 0 \quad (3.2)$$

On en déduit la relation qui définit la vitesse de phase d'une vague  $\vec{c}$  pour un vecteur d'onde  $\vec{k}$  donné :

$$\vec{c} = \frac{\omega}{k} \Leftrightarrow c = \frac{\omega}{k} \quad (3.3)$$

car  $\vec{k}$  et  $\vec{c}$  sont parallèles et de même sens. La vitesse de déplacement de l'énergie par la propagation des ondes dans le fluide est donnée par la vitesse de groupe qui s'écrit :

$$\vec{c}_g = \nabla_k \sigma \quad (3.4)$$

### 3.3.3 Relation de dispersion et vitesse de phase des vagues

On utilise les équations de la mécanique des fluides pour décrire la propagation de ces ondes. D'une part, l'équation d'Euler qui s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique ( $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ) à un fluide de volume  $V$  et de surface  $S$  sur laquelle s'applique une force de pression  $p$  et la force de la pesanteur  $g$ .

D'autre part, l'équation de continuité qui s'écrit en égalant la variation de volume  $V$  du fluide à la quantité de fluide qui sort de ce volume par unité de temps et d'espace [Landau et Lifchitz, 1971].

Dans le cas de la mer, le fluide est supposé incompressible et irrotationnel. Sans considérer les forces dues aux interactions avec l'atmosphère (comme le forçage de vent), l'équation d'Euler appliquée à une particule fluide est alors donnée par :

$$\begin{aligned}-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} &= \rho\vec{a} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left[ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right]\end{aligned}\quad (3.5)$$

D'où la forme connue de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \quad (\text{Équation d'Euler}) \quad (3.6)$$

À noter que :

- Le terme  $\rho \cdot \vec{g}$  correspond aux forces de pesanteur par unité de volume ( $N \cdot m^{-3}$ ) subies par la particule fluide,
- $-\vec{\nabla}p$  correspond aux forces par unité de volume ( $N \cdot m^{-3}$ ) de pression sur les surfaces de la particule,
- $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$  correspond à la variation de la quantité de mouvement par unité de volume de la particule.

$$\nabla \vec{v} = 0 \quad (\text{équation de continuité}) \quad (3.7)$$

où  $v$  désigne la vitesse de déplacement d'un élément de fluide.

La relation de dispersion des vagues établit le lien entre la fréquence angulaire d'une vague  $\omega$  et son nombre d'onde  $k$ , c'est-à-dire qu'elle va constituer une équation de base pour l'évolution temporelle d'une surface de mer. Cette relation s'exprime comme :

$$\omega^2 = gk \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_m} \right)^2 \tanh(kD) \right] \quad (3.8)$$

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3 \tanh(kD) \quad (3.9)$$

$D$  étant la profondeur de l'eau,  $k_m = \sqrt{\rho g / T}$ ,  $\rho$  la densité de l'eau de mer,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $T$  la tension superficielle de la surface de mer. Dans les situations en eau profonde,  $D$  est supposée infinie, et par suite  $\tanh(kD) = 1$ . En remplaçant  $\omega$  par  $c \cdot k$  dans l'équation 3.9, on obtient la vitesse de phase des vagues en eau profonde :

$$c = \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{k}{k_m} \right)^2 \right] \cdot \frac{g}{k}} \quad (3.10)$$

On classe les vagues en trois grandes catégories suivant les processus physiques qui régissent la formation des ondes. chacune d'elles correspond à un régime de variation de la vitesse de phase en fonction de  $\lambda$  :

1. Vagues de capillarité : Ces ondes sont créées lorsque les forces de gravité sont négligeables devant la tension de surface. Elles ont une période inférieure à un dixième de seconde. La relation de dispersion s'écrit alors :

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} k^3 \quad (3.11)$$

2. Vagues de transition capillarité - gravité (ultra-vagues) : Les forces de pesanteur et de tension de surface sont de même ordre. Elles forment une classe intermédiaire

dont la période varie d'une seconde à un dixième de seconde. La relation (3.10) demeure la même :

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3 \quad (3.12)$$

3. Vagues de gravité : Elles sont générées par le vent et entretenues par un échange entre énergie cinétique et énergie potentielle gravitationnelle. Ces ondes ont une période comprise entre trente secondes et une seconde et leur relation de dispersion (3.9) se simplifie alors en :

$$\omega^2 = gk \quad (3.13)$$

On retrouve également cette relation de dispersion en résolvant le système d'équations (3.6) et (3.7) dans le cas où la tension de surface est négligée. Alors, la première condition aux limites est telle que la différence de pression entre la surface de l'eau et l'atmosphère soit nulle.

## 3.4 Description statistique de la surface

La surface de la mer peut être considérée comme le résultat de processus aléatoires. En effet, le complexité des phénomènes physiques en jeu rend particulièrement délicate, une description parfaitement déterministe de l'interaction vent-surface de mer. C'est pourquoi, il est fréquent d'utiliser ses propriétés statistiques pour la décrire.

Soit une surface de mer décrite par sa hauteur  $\zeta(x, y, t)$  par rapport à une surface référence définie telle que  $\zeta(x, y, t) = 0, \forall(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $p(\zeta)$  la probabilité d'avoir cette surface comprise entre une hauteur  $\zeta$  et  $\zeta + d\zeta$  pour n'importe quel point de l'espace défini par ses coordonnées  $\vec{r} = (x, y)$ . On peut alors introduire quelques notions statistiques fondamentales :

### 3.4.1 Hauteur moyenne des vagues

Soit  $\bar{\zeta} \equiv \langle \zeta(\vec{r}) \rangle$ , la hauteur moyenne de la surface.

$$\bar{\zeta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta p(\zeta) d\zeta = 0, \quad (3.14)$$

La variance des hauteurs  $\sigma_\zeta^2$  est définie comme étant le carré de la moyenne quadratique de l'écart entre la surface de la mer et la référence. Elle est donnée par :

$$\sigma_\zeta^2 = \langle (\zeta - \bar{\zeta})^2 \rangle, \quad (3.15)$$

### 3.4.2 Fonction de corrélation de la surface

La longueur de corrélation  $l$  de la surface dans une direction donnée, s'exprime en fonction de la fonction d'autocorrélation de cette surface. Elle se définit comme l'écart

type de la fonction d'autocorrélation. Il s'agit d'une mesure à l'échelle spatiale associée à la relation statistique qui relie les points de la surface.

La longueur de corrélation est liée à l'échelle de rugosité. Plus les rugosités sont restreintes à un spectre basse fréquence, et plus la longueur de corrélation est grande. Dans le cas de la mer, quand le vent devient fort, le spectre ([Elfouhaily *et al.*, 1997]) ne varie pratiquement pas dans les fréquences hautes, en revanche le spectre monte dans les basses, voire très basses fréquences (3.1). Ceci explique pourquoi, la longueur de corrélation augmente quand le vent souffle plus fort.

### 3.4.3 Densité de probabilité des pentes

En tout point de la surface assimilée localement à un plan, on peut associer des pentes  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  orientées respectivement le long des axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) portés par le couple de vecteurs  $(\hat{x}, \hat{y})$  qui forment une base orthonormée. À l'ordre premier, cette densité de probabilité est gaussienne, elle s'écrit :

$$p(\alpha_x, \alpha_y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_{x,y}}} \cdot \exp \left[ -\frac{(\overline{\alpha_x^2}\alpha_y^2 - 2\overline{\alpha_x\alpha_y}\alpha_x\alpha_y + \alpha_x^2\overline{\alpha_y^2})}{2\Delta_{x,y}} \right], \quad (3.16)$$

Où l'on a  $\Delta_{x,y} = \overline{\alpha_x^2\alpha_y^2} - (\overline{\alpha_x\alpha_y})^2$ . La fonction de densité de probabilité des pentes à la surface de la mer est utile dans l'étude des interactions des ondes électromagnétiques avec la surface [Mouche, 2005].

## 3.5 Modèle spectral de la surface de mer

Dans cette partie, nous présentons brièvement une comparaison entre plusieurs modèles spectraux de la surface de mer. Nous détaillerons un peu plus le spectre d'[Elfouhaily *et al.*, 1997]. La simulation de la surface de mer peut être déduite facilement du spectre.

### 3.5.1 Comparaisons entre les modèles spectrales de la surface de mer

De nombreux spectres de vagues de vent ont été énoncés durant les quatre dernières décennies [Apel, 1994], [Donelan et Pierson, 1987], [Durden et Vesecky, 1985] et [Elfouhaily *et al.*, 1997].

Certains de ces modèles ont été développés empiriquement à partir de mesures en mer ou en bassin ; d'autres ont un fondement théorique. On trouve des modèles qui décrivent le comportement d'une partie du spectre seulement (petites ou grandes vagues par exemple), et d'autres qui recouvrent l'ensemble des nombres d'ondes [Lurton, 2010]. On souligne le fait que les modèles déjà disponibles ne prennent pas en compte les différentes conditions de *fetch*, ne conviennent pas non plus avec les mesures *in situ* de [Cox et Munk, 1954] sur la dépendance de vent de la variance des pentes, et de

[Jähne et Riemer, 1990] et [Hara *et al.*, 1994] sur le spectre de courbure des vagues de gravité - capillarité. C'est pour cela, qu'il est admis qu'aucun des modèles énoncés jusqu'à maintenant ne confirme parfaitement l'ensemble des observations et mesures *in situ*.

D'où la proposition du modèle d'[Elfouhaily *et al.*, 1997]. Avant de présenter l'équation de ce spectre, qui s'exprime comme la somme d'un régime de grandes vagues  $S_l$  et d'un régime de petites vagues  $S_h$ , les auteurs d'[Elfouhaily *et al.*, 1997] commencent par examiner les modèles déjà existants et qui sont définis  $\forall k$ , comme ceux de [Bjerkaas et Riedell, 1979], [Donelan et Pierson, 1987] et [Apel, 1994]. Pour une comparaison brève, le lecteur peut se référer à [Soulat, 2003].

### 3.5.2 Spectre d'Elfouhaily

Le spectre d'[Elfouhaily *et al.*, 1997] possède une composante omnidirectionnelle et une fonction d'étalement angulaire. Il est défini pour tous les nombres d'onde  $k$  et peut être amené analytiquement à l'utilisation dans des modèles électromagnétiques. Les données radar sont exclues de l'élaboration de ce modèle. La validité de ce spectre est restreinte aux mers de vent, c'est à dire aux scènes de vent qui représentent un alignement entre la direction de propagation du vent et celle des vagues (pic des vagues) (figure 3.1). Il a pour expression :

$$\Psi(k, \Phi) = \frac{1}{2\pi} k^{-1} [S_l(k) + S_h(k)] \cdot [1 + \Delta(k) \cos(2\Phi)] \quad (3.17)$$

Le terme  $[1 + \Delta(k) \cos(2\Phi)]$  représente la fonction de répartition azimutale de spectre dépendant de  $k$  et  $\Phi$  la direction azimutale.  $k^{-1}[S_l(k) + S_h(k)]$  représente la partie omnidirectionnelle du spectre, elle est divisée entre les basse fréquences et les hautes fréquences. Les expressions détaillées de  $S_l(k)$  et  $S_h(k)$  se trouvent dans [Elfouhaily *et al.*, 1997].

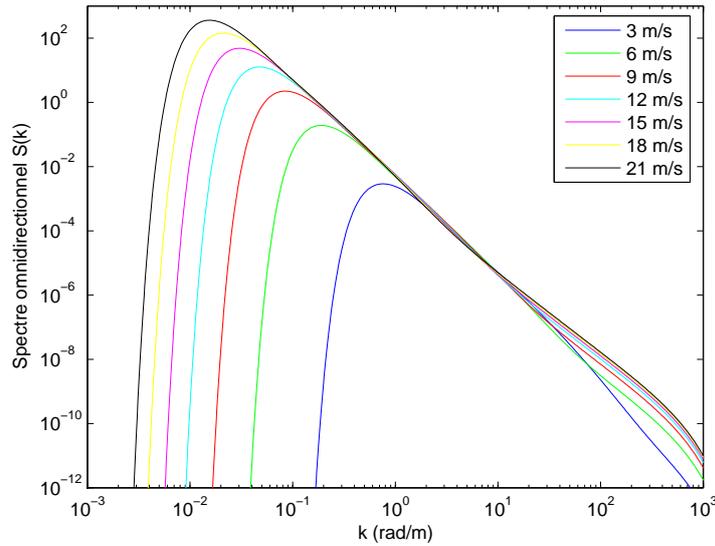
Ce modèle contient deux paramètres :  $U_{10}$  et  $k_m$  ( correspondant à la vitesse de phase  $c_p$ ), le nombre d'onde du pic des vagues dominantes. L'inverse de l'âge des vagues est donné en fonction de ces deux valeurs, ayant  $\Omega = U_{10}/c_p \equiv U_{10}\sqrt{k_m/g}$ . La fonction de frottement du vent  $u_*$ , reliée à la vitesse de vent  $U_{10}$  est prise en compte elle aussi [Soulat, 2003].

## 3.6 Exemple des types d'applications impliquant le GNSS-R

### 3.6.1 Altimétrie

Il existe deux types de mesure de l'altimétrie :

- Altimétrie par mesure de code : Le code est utilisé dans ce cas pour calculer la distance entre le signal direct et le réfléchi.



**Figure 3.1** — Allure du spectre d’Elfouhaily, avec calcul pour plusieurs vitesses de vent différentes (tirée de [Lurton, 2010])

- Altimétrie par mesure de phase : La phase est utilisée.

### Altimétrie par mesure de code

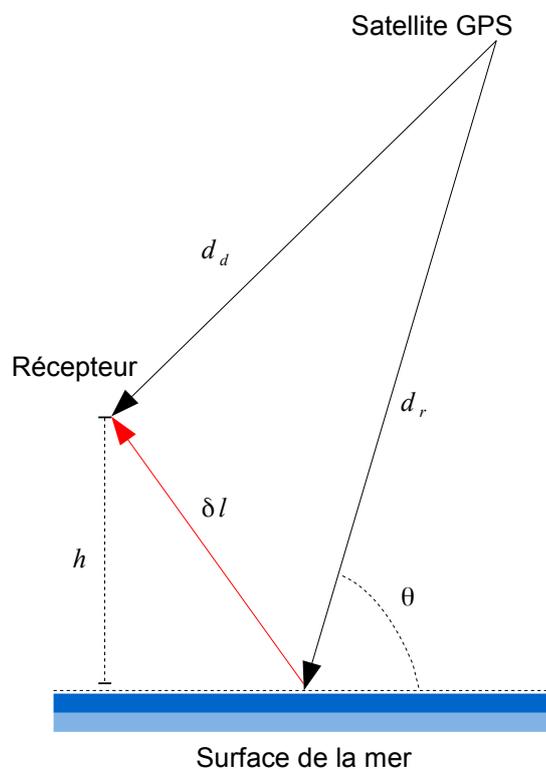
Comme les signaux réfléchis sont affectés par le processus de réflexion, la forme triangulaire du signal réfléchi est alors déformée entraînant une incohérence des signaux réfléchis, ce qui complique la mesure de distance.

Le principe de cette méthode repose sur la différence entre les temps d’arrivée du signal direct et du signal réfléchi. Nous appelons cette différence de temps  $\Delta t$ . Pour une réflexion à basse altitude (figure 3.2), l’incertitude sur la différence du temps d’arrivée  $\Delta t$  entraîne une incertitude de la différence de la distance traversée  $\delta l$  (incertitude altimétrique) par rapport à la surface moyenne de la mer. En considérant  $\theta$  l’angle d’élévation du satellite, nous avons alors :

$$d_r - d_d = 2h \sin(\theta)$$

Après la corrélation du signal direct reçu avec une réplique, l’onde C/A aura une forme triangulaire et bien déterminée. Pour les signaux réfléchis, il faut tenir compte de la dispersion et bien modéliser la forme d’onde résultante. Certains aspects de l’onde déformée sont plus sensibles que d’autres pour les applications océanographiques : altimétrie si le premier bout du pic de corrélation est déformé, et d’autres applications basées sur le GNSS-R si l’onde entière est déformée.

Plusieurs expériences ont montré la robustesse de l’altimétrie par mesure de code pour des applications au sol, dans l’air et dans l’espace [Lowe *et al.*, 2002]. Même si les mesures peuvent être précises mais biaisées parfois, l’efficacité de ce type d’altimétrie a été soulignée dans [Ruffini *et al.*, 2004].



**Figure 3.2** — Principe d'altimétrie côtière où l'on voit que la différence de distance traversée  $\delta l$  est proportionnelle à l'altitude  $h$  du récepteur par rapport à la surface réfléchissante et le sinus de l'angle d'élévation du satellite GPS (adaptée de [Ruffini, 2006])

### Altimétrie par mesure de phase

Si pour l'altimétrie par mesure de code, des dizaines d'expériences ont été réalisées, la validation de l'altimétrie par mesure de phase reste plus limitée.

Cette méthode consiste à pister le changement de phase sur le sol pour des observations côtières [Ruffini *et al.*, 2002] et au niveau des lacs aussi [Treuhaft *et al.*, 2001]. Les résultats obtenus étaient d'une précision de quelques centimètres. Le traitement de la phase est affecté par la rugosité de l'eau ainsi que par son mouvement entraînant une incohérence du signal réfléchi.

### 3.6.2 Réflectométrie

La réflexion des signaux GNSS par la surface de mer peut être modélisée par un modèle d'optique géométrique, où le processus physique fondamental est la réflexion

sur les facettes. Les signaux réfléchis sont gérés par les statistiques tels que le rayon de courbure et la densité de probabilité des pentes de la surface. Cette densité de probabilité peut nous informer sur l'interaction entre l'atmosphère et la surface de mer (moments, énergie, gaz).

## 3.7 Système expérimental

Le traitement du signal GPS décrit dans ce paragraphe intervient après la phase de réception. En fait, en mesurant le produit de corrélation des signaux GPS réfléchis et de la réplique du code PRN généré par le récepteur pour un satellite donné, on met en évidence le pic de réception du signal direct provenant du satellite. On met également en évidence les pics secondaires correspondant aux phénomènes de réflexion. Certains paramètres océanographiques peuvent ainsi être déduits à partir des caractéristiques de ces pics secondaires, comme l'humidité du sable, les mesures de la marée, la salinité de l'eau,...

Cependant l'analyse de ces signaux reste difficile dans la mesure où les réflexions sont perturbées par le mouvement de la surface de l'océan, la rugosité et l'atmosphère maritime et que ces signaux sont d'un niveau faible par rapport au bruit. Pour surmonter ces difficultés, le traitement de ces signaux nécessite une intégration sur plusieurs séquences de code de façon cohérente et/ou incohérente.

L'objectif de cette analyse est de vérifier la possibilité de détecter deux (ou plusieurs) types de mouvement différents. C'est pour cela que nous présentons dans l'expérience MFT (Mobile Fixed Target) le cas d'une cible mobile présente à la surface de la mer. Nous supposons également la présence d'une autre cible qui est fixe et qui servira de repère à la cible mobile.

Le travail présenté dans cette partie du chapitre 3 est à caractère générique et explorateur, aucune description de la vague elle-même n'a été à aucun moment envisagée. Nous supposons dans la suite que le satellite GPS est fixe sur la durée de l'intégration.

### 3.7.1 Expérience *Mobile Fixed Target*

L'interaction d'une onde électromagnétique avec une surface rugueuse en mouvement (surface de mer) est un phénomène particulièrement complexe qui rend le signal GPS réfléchi difficile à traiter. Pour illustrer la problématique du mouvement de la surface, nous avons procédé à une expérience simplifiée qui simule le mouvement des particules de la surface de l'océan et l'évolution du gain des signaux lors d'intégrations sur de longues périodes.

Nous considérons un système de radar passif bi-statique. Ce système, présenté sur la figure 3.3 est composé essentiellement de :

1. Un émetteur qui est un (ou plusieurs) satellites GPS,
2. Un récepteur qui est composé de deux antennes séparées par un plan de masse afin d'éviter les interférences entre les deux : la première est à polarisation circulaire

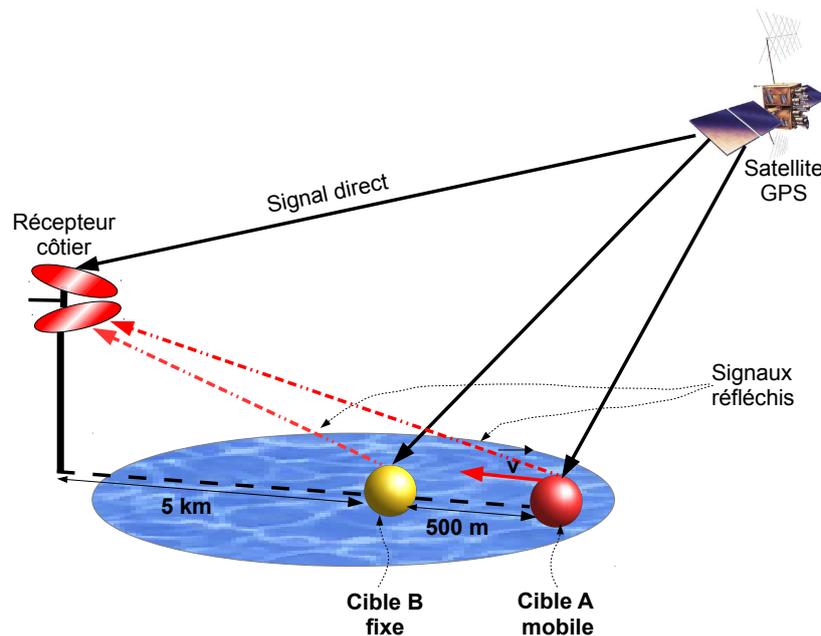


Figure 3.3 — Schéma du système expérimental

droite dirigée vers le haut afin de recevoir le signal direct, et la deuxième est à polarisation circulaire gauche dirigée vers la mer pour recevoir les signaux réfléchis par la surface de mer,

3. Deux cibles (A) et (B), la première est mobile et la deuxième a une position fixe par rapport à l'antenne réceptrice. La présence de la cible (B) sert comme une référence pour retrouver la cible (A) au cours des observations.

Nous considérons que le récepteur se situe dans un champ proche de la surface de mer. La perception de cette surface est alors différente. En effet, la surface est donc considérée comme déterministe, car il est possible de détecter le mouvement lents (quelques Hz) des vagues ayant des hauteurs allant de 50cm à 4m. Les signaux reçus seront alors directement liés à l'évolution temporelle de la surface.

Ainsi, afin de modéliser le mouvement de la surface, nous avons étudié la diffusion des signaux par cette surface. La surface est considérée comme étendue, ayant une répartition continue et composée de diffuseurs répartis uniformément.

Elle est modélisée, dans ce chapitre, par une série de diffuseurs discrets, qui pourraient être fixes et mobiles. Chaque diffuseur est considéré comme ponctuel. Leur mouvement sera connu (en relation avec le mouvement des vagues). Notre objectif est de mettre en évidence la présence de ces diffuseurs ainsi que leurs déplacements.

Dans ce paragraphe, les deux cibles (A) et (B) sont considérées comme deux diffuseurs ponctuels. (A) représente la crête d'une vague dans une mer forte où la vitesse de la vague peut atteindre  $v = 36\text{km/h}$ . Nous supposons également que (A) se situe à une distance initiale de 500m de la cible fixe (B), qui se situe à 5km de la côte (le récepteur).

L'objectif de cette simulation est de montrer la possibilité de récupérer par un récepteur côtier un signal GPS réfléchi sur une cible marine fixe ou mobile. En pratique, il s'agit de mesurer le déphasage fréquentiel dû à l'effet Doppler et le délai du code du signal réfléchi en utilisant une corrélation entre le signal considéré et une réplique propre du code PRN reçu.

Nous commençons notre analyse par une présentation des signaux synthétiques utilisés. Ensuite, nous montrerons l'avantage de la corrélation sur une longue durée. Afin de réduire le temps de calcul, nous utiliserons un traitement par blocs pour effectuer la corrélation. Nous terminons par une définition du gain comme nous l'avons considéré dans notre travail. Enfin, nous étudierons les cas des cibles une par une.

### 3.7.2 Caractéristiques des signaux synthétiques

Les signaux émis par les satellites GPS sont classés en deux groupes : les signaux directs traversant une distance  $D_{SR}$ , et les signaux réfléchis sur la surface de mer, qui de leur côté traversent les distances consécutives  $d_A$  et  $d_B$ .

Pour le reste du chapitre, les notations  $s_D(t)$ ,  $s_M(t)$  et  $s_F(t)$  désigneront respectivement le signal direct, le signal réfléchi sur la cible mobile et le signal réfléchi sur la cible fixe.

Notre expérience a été réalisée avec des signaux synthétiques. Les signaux  $s_D(t)$ ,  $s_M(t)$  et  $s_F(t)$  sont générés à partir d'une porteuse à une fréquence intermédiaire  $\omega_I$ , multipliée par la fonction  $c(t)$  qui représente le code C/A, et par , une séquence de  $\pm 1$  représentant les données de navigation. Ces signaux ont des amplitudes respectives  $A_D$ ,  $A_M$  et  $A_F$ .

De par leur nature, les signaux  $s_D(t)$ ,  $s_M(t)$  et  $s_F(t)$  arrivent au récepteur à des moments différents selon leurs positions initiales ( $s_D(t)$  et  $s_F(t)$ ) et l'évolution de leur mouvement en fonction du temps ( $s_M(t)$ ). Pour ce dernier signal, une variation de fréquence (effet Doppler) s'impose à cause du mouvement relatif de la cible mobile par rapport au récepteur. Lors de la génération des signaux synthétiques, le délai de code  $\tau$  et le Doppler  $\delta$  apparaissent dans l'expression du signal. Ainsi, pour le signal  $s_D(t)$  par exemple, l'expression de ce signal donne :

$$s_D(t) = A_D \cdot c(\tau, \delta) \cdot d(\tau, \delta) \cdot \sin[(\omega_I + \delta_D)(t - \tau_D) + \phi_D] + v(t), \quad (3.18)$$

Où l'on a :  $v(t)$  est un bruit blanc gaussien, et  $(A_D) = 10^{RSB/20}$ .

Pour ressortir le signal utile et le discriminer du bruit, nous calculons le produit de corrélation  $\Gamma_{s,p}$ , entre le signal  $s_D(t)$  par exemple, avec une réplique  $p(t)$  du code générée elle-même par le récepteur :

$$\Gamma_{s,p}(t) = p(t) \otimes s_D(t) \quad (3.19)$$

Nous soulignons le fait qu'en s'appuyant sur la corrélation normale point par point, on risque d'avoir une solution très couteuse en temps, surtout lorsqu'on a des contraintes sur la durée de calcul.

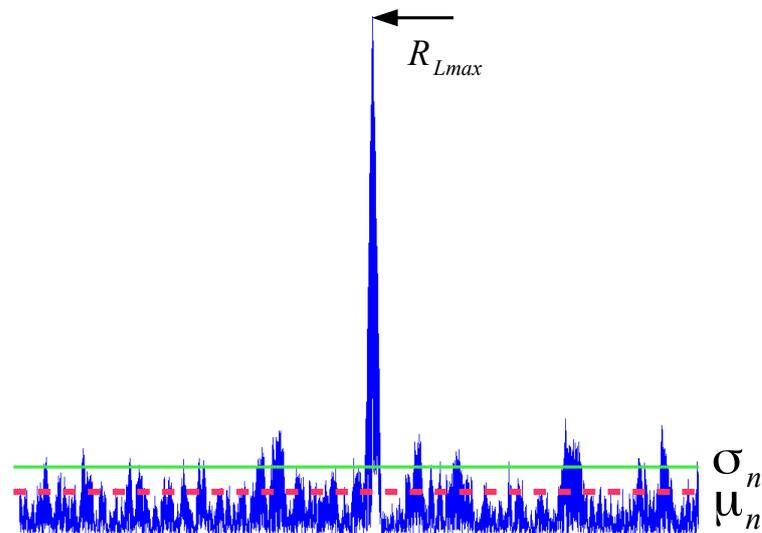


Figure 3.4 — Schéma montrant la définition du gain

Une bonne solution qui répond aux besoins en optimisation du temps de calcul est l'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète TFD. C'est ce que nous appelons le traitement en blocs [Psiaki, 2001].

### 3.7.3 Définition du gain

Pour améliorer les temps de calcul et éviter des ambiguïtés d'interprétation, nous avons choisi de considérer le gain comme le rapport entre la différence de hauteur de pic vis à vis du bruit par rapport à l'écart type du bruit.

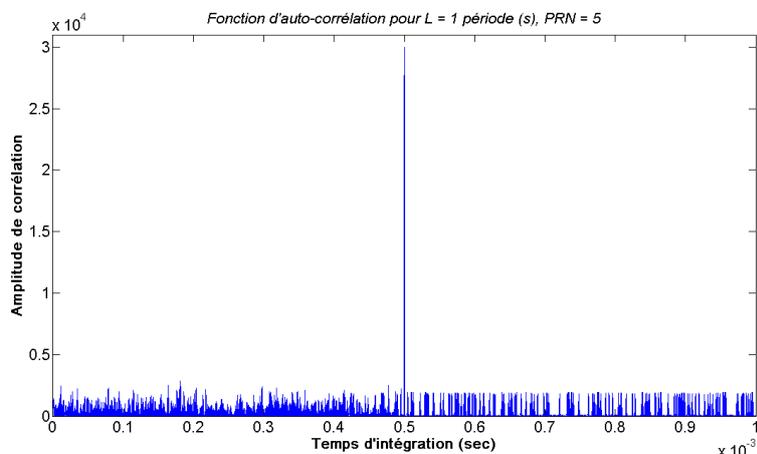
La moyenne  $\mu_n$  et l'écart type  $\sigma_n$  du bruit sont estimés en ne considérant pas les 100 points avant et après la position du pic. Le gain  $G$  vaut alors :

$$G = \frac{R_{Lmax} - \mu_n}{\sigma_n} \quad (3.20)$$

Le gain de décibel est alors :

$$G_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{R_{Lmax} - \mu_n}{\sigma_n} \right) \quad (3.21)$$

avec  $R_{Lmax}$  est la valeur maximale de corrélation alors que  $\mu_n$  et  $\sigma_n$  sont respectivement la moyenne et l'écart type du bruit (figure 3.4).



**Figure 3.5** — Le produit d’auto-corrélation du signal  $s_D(t)$ . Ce signal est affiché avec un retard  $\tau_D = 0.5ms$

## 3.8 Scénarios considérés

### 3.8.1 Le signal direct

Pour un signal  $s_D$  (équation 3.18) provenant du  $PRN = 5$  et ayant un  $RSB = -20dB$ , le produit de corrélation nous donne la figure 3.5 :

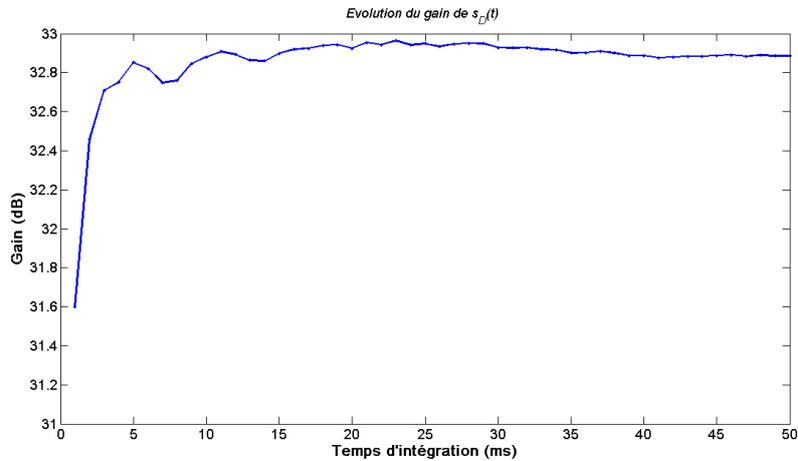
L’intérêt de l’obtention de  $\omega_D$  et  $\tau_D$  est de servir comme référence aux signaux réfléchis sur la cible fixe et la cible mobile. Nous avons vu dans la figure 3.5 qu’il est possible de déterminer le retard du code du signal  $s_D(t)$ . Pour avoir un repère du retard, le pic de corrélation du signal  $s_D(t)$  sera réinjecté dans la fonction d’auto-corrélation du signal  $s_F(t)$ . Ainsi, le calcul du délai du code de ce dernier est fait par rapport au signal direct.

Pour voir l’effet de l’intégration sur le gain du signal  $s_D(t)$ , nous effectuons une corrélation du signal  $s_D(t)$  cohérente sur  $1ms$ , et ensuite incohérente sur  $50ms$  ( $L = 50$ ). En calculant le gain résultant, on obtient la courbe de la figure 3.6.

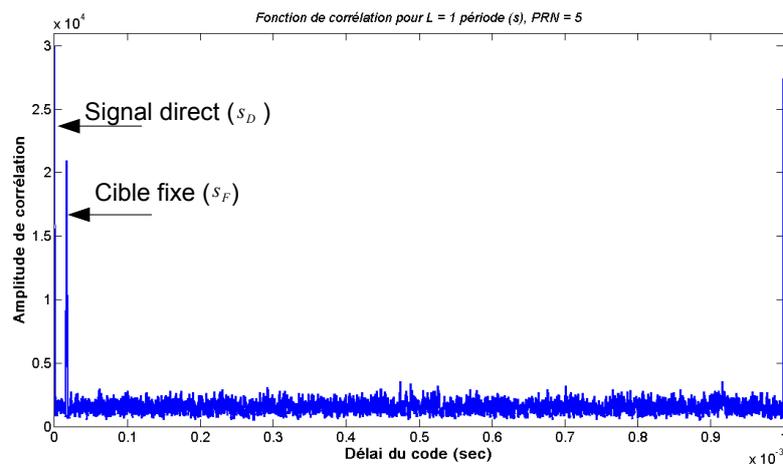
### 3.8.2 La cible fixe

Pour le signal direct  $s_D(t)$ , il est possible de retrouver le retard  $\tau_D$  et le doppler  $\delta_D$  du signal, en effectuant une simple corrélation sur  $1ms$ , dans des conditions nominales ( $RSB \approx -23dB$ ).

Afin de déterminer les coordonnées  $\tau_f$  et le doppler  $\delta_f$  du signal  $s_F(t)$ , nous avons effectué une corrélation entre le signal  $s_F(t)$  et une réplique propre du code provenant du PRN 5. Le pic de corrélation du signal  $s_D(t)$  obtenu pour les valeurs  $\tau_D$  et  $\delta_D$ ,



**Figure 3.6** — Évolution du gain du signal  $s_D(t)$  en intégrant sur une durée de  $L = 50\text{ms}$



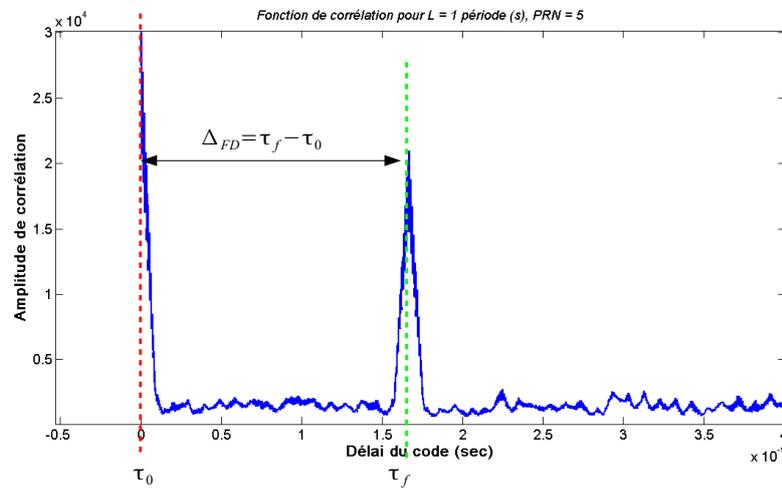
**Figure 3.7** — Produit de corrélation du signal  $s_F(t)$  avec une réplique du code du PRN 5, le pic du signal  $s_D(t)$  est montré aussi.

est réinjecté avec le pic du signal  $s_F(t)$ .  $\tau_D$  et  $\delta_D$  représentent alors une référence aux autres pics éventuels de corrélation. Ils sont désormais appelés  $\tau_0$  et  $\delta_0$ .

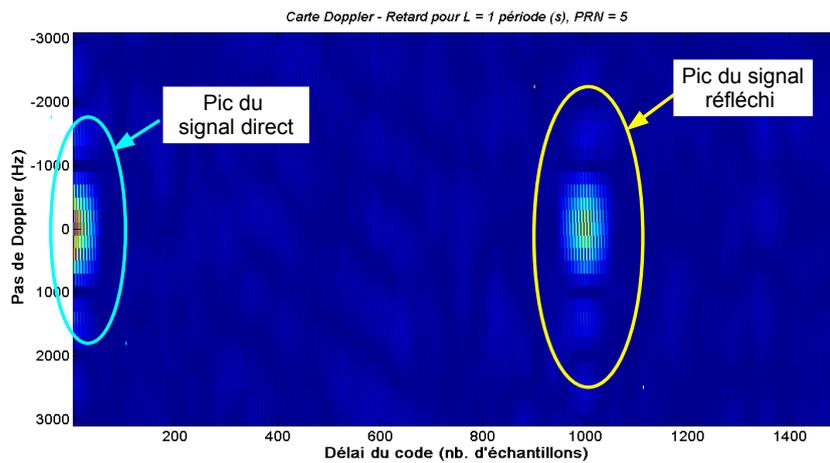
Par ailleurs, l'eau de la mer étant salée, elle constitue un bon réflecteur. La puissance du signal réfléchi sur la cible fixe vaut alors 70% de la puissance du signal direct.

Dans la figure 3.7, nous observons la corrélation du signal  $s_F(t)$ , et dans la figure 3.8, nous avons une vue plus précise du pic de corrélation. Ceci permet de retrouver la position de la cible fixe par rapport au récepteur par le biais du retard  $\Delta_\tau = \tau_f - \tau_0$ .

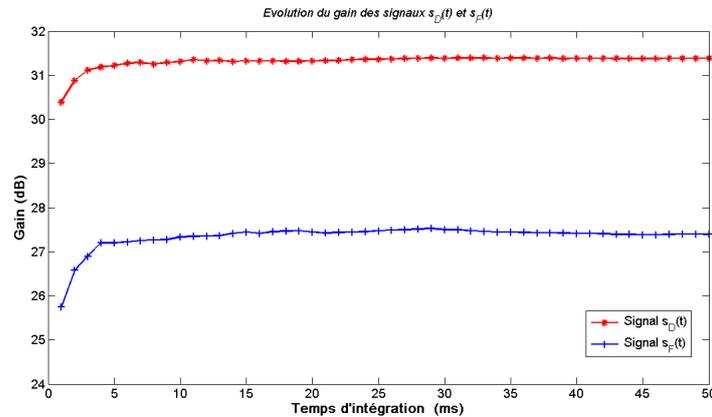
D'après la figure 3.7, nous avons  $\Delta_\tau = 1,666 \cdot 10^{-5}\text{s}$ .



**Figure 3.8** — Une vue plus précise du pic de corrélation du signal  $s_F(t)$  permettant ainsi de calculer le délai de code  $\Delta_{FD}$



**Figure 3.9** — La Carte Doppler - Retard montrant la corrélation entre le signal  $s_F(t)$  avec une réplique propre et ayant le pic de  $s_D(t)$  comme pilote



**Figure 3.10** — Comparaison de l'évolution du gain pour les 2 signaux  $s_D(t)$  et  $s_F(t)$  pour une intégration sur une durée de  $L = 50$ ms

L'importance de cette carte est de montrer qu'il n'est pas toujours évident de faire ressortir le pic correspondant au signal réfléchi. Et donc, dans ce cas, la question d'intégration longue ou de mettre en oeuvre d'autres dispositifs afin de détecter le pic de corrélation se pose.

Sur la figure 3.10, nous observons l'évolution du gain du signal direct par rapport au gain du signal réfléchi sur la cible fixe.

### 3.8.3 La cible mobile

Après l'étude de la corrélation des signaux  $s_D(t)$  et  $s_F(t)$ , il est temps de passer à la cible la plus problématique : la cible mobile. Le traitement du signal réfléchi sur la cible mobile soulève quelques défis, que ce soit au niveau de son RSB, sa position, son évolution dans le temps.

Dans notre simulation, nous avons supposé que cette cible représente la crête d'une vague qui s'approche à une vitesse  $v = 36$ km/h, dans ce cas, elle a un mouvement linéaire et elle se déplace parallèlement à la surface moyenne de la mer. Cette cible se trouve à une position initiale de 500m de la cible fixe. Nous avons effectué une corrélation pour vérifier s'il est possible de détecter cette cible mobile et de la situer dans le plan de la cible fixe. Nous avons obtenu les figures 3.12 et 3.13.

### 3.8.4 Somme longue

La sommation sur plusieurs périodes représente une solution efficace à un rapport signal à bruit très faible. Cependant, un problème se pose quant à la détection des pics représentant le signal  $s_M(t)$ . Pour préciser la nature de ce problème, nous avons mené plusieurs intégrations sur des périodes de 50ms.

Plus précisément, nous avons considéré une portion du signal  $s_F(t) + s_M(t)$  de

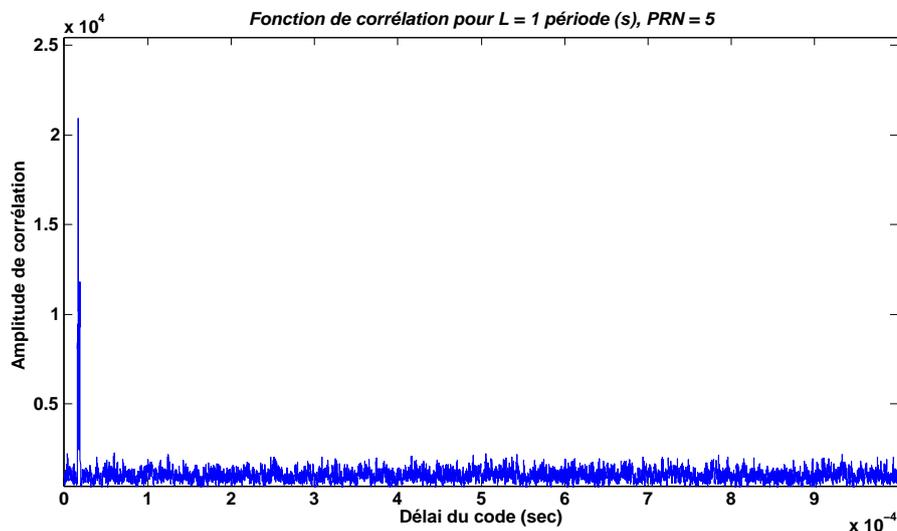


Figure 3.11 — Fonction de corrélation  $\Gamma_{FM}$  du signal  $(s_F(t) + s_M(t))$  à l'instant  $t_0$

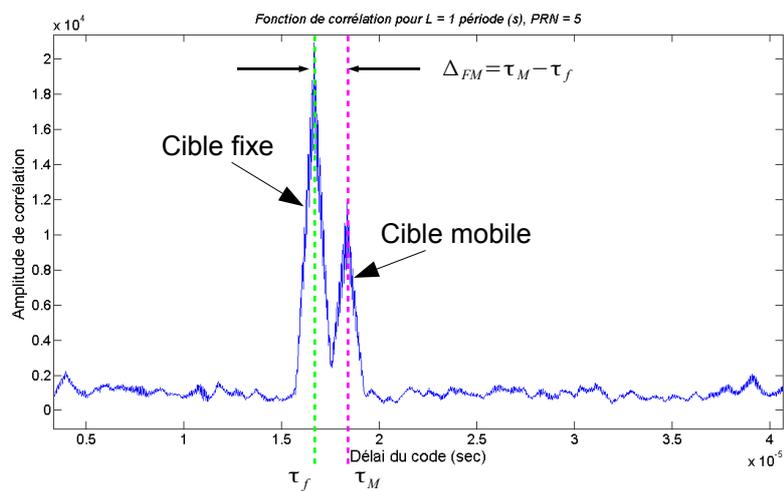
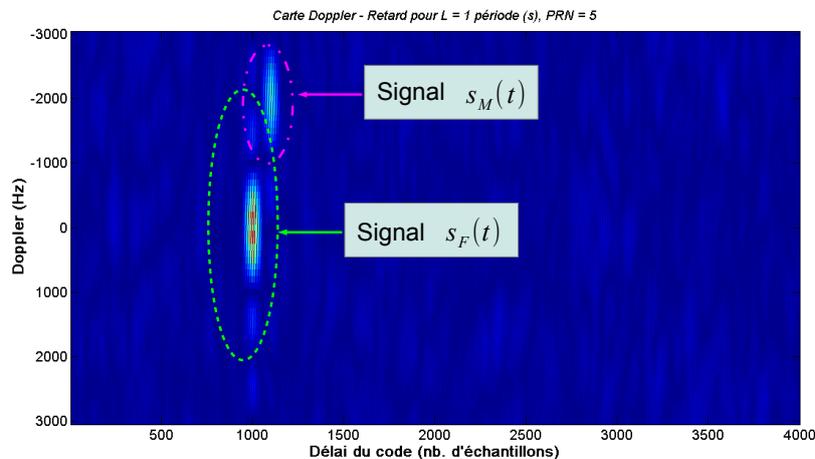


Figure 3.12 — Une vue plus précise de la fonction de corrélation du signal  $(s_F(t) + s_M(t))$ , montrant la présence de la cible mobile et permettant de déterminer sa position ( $\tau_M$ )



**Figure 3.13** — La Carte Doppler - Retard montrant la corrélation entre le signal  $s_F(t) + s_M(t)$ , dans le but de détecter la cible mobile dans le même plan que la cible fixe.

50s. Nous avons effectué cinq intégrations respectivement aux instants d'observations suivants :  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10$ ,  $t_2 = 20$ ,  $t_3 = 30$ ,  $t_4 = 40$ , et  $t_5 = 50$ . Ensuite, nous avons superposé les cartes DDM obtenues, afin de ressortir le mieux les pics fixe et mobile.

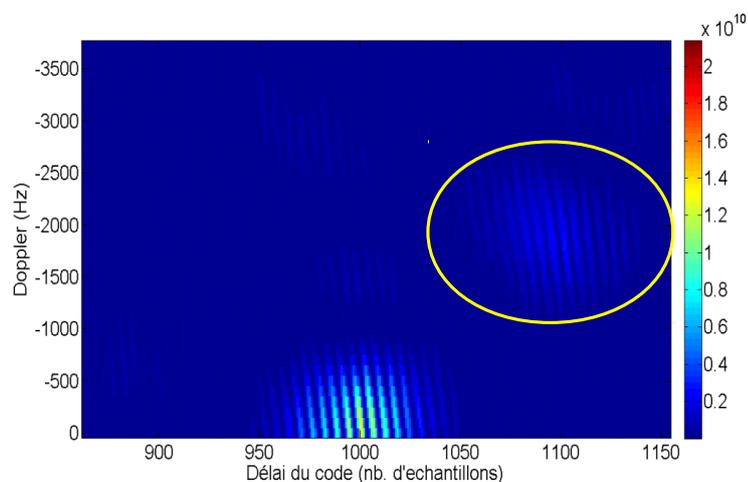
Ainsi, dans la figure 3.14, nous avons une superposition des deux premières observations. Dans la figure 3.15, nous avons la superposition des trois premières observations, et ainsi de suite jusqu'à la figure 3.17 qui représente la superposition de toutes les observations.

Nous remarquons alors, que d'une sommation à l'autre, le pic fixe est de plus en plus remarquable. Tandis que la zone en jaune, représentant le pic mobile disparaît au fur et à mesure. Donc il faut trouver une solution alternative, qui permet d'inclure le mouvement de la cible mobile dans le processus d'intégration. Nous avons choisi d'introduire une solution basée sur le suivi de cible mobile.

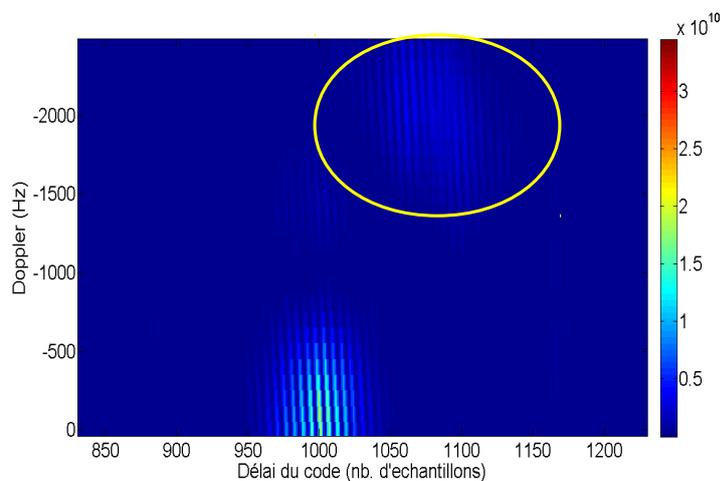
## 3.9 Résultats et conclusion

Le processus de corrélation permet l'identification du type de signal suivant la position et l'amplitude du pic correspondant (figures 3.8, 3.9, 3.12 et 3.13).

En plus, la corrélation sur plusieurs périodes du signal augmente le rapport signal à bruit. D'après les figures 3.6 et 3.10. On trouve que le gain augmente en fonction du nombre de périodes  $L$ . Ceci est utile surtout pour l'extraction des signaux faibles réfléchis du signal reçu. L'importance de cette expérience est qu'elle démontre la possibilité



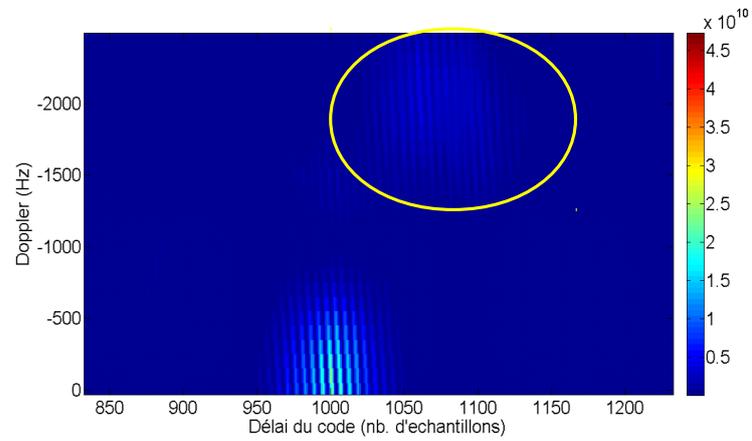
**Figure 3.14** — Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des deux premières observations



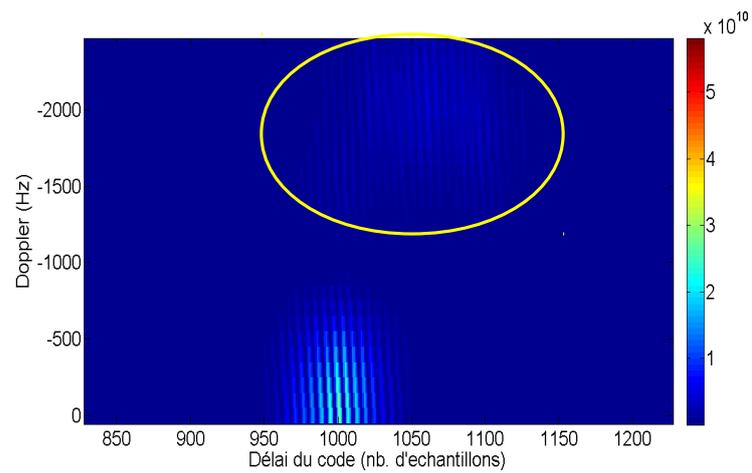
**Figure 3.15** — Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des trois premières observations

d'exploiter opportunément les signaux GPS. La présentation de cette méthode d'une manière simple est voulue dans un but pédagogique et générique.

Dans le chapitre suivant, nous essayons de nous approcher d'une modélisation plus réaliste de l'environnement marin surtout en ce qui concerne les distances séparant les cibles et la valeur de la vitesse. Nous introduisons également une autre approche pour détecter et suivre le mouvement de la cible sur la surface de la mer.



**Figure 3.16** — Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des quatre premières observations



**Figure 3.17** — Carte Doppler - Retard obtenue après la superposition des cinq observations



Troisième partie

Techniques de filtrage



## 4.1 Introduction

En réalité, le signal réfléchi est diffusé dans toutes les directions. Or, une grande partie des signaux qui atteignent le récepteur provient de la zone de réflexion spéculaire. De plus, la puissance maximale de réflexion provient du centre de cette zone, appelé le point de réflexion spéculaire. L'angle d'incidence du signal GPS reçu à ce point est égale à l'angle de réflexion.

Afin de garantir une probabilité de détection élevée du signal réfléchi, nous considérons le point de réflexion spéculaire sur la surface de mer comme une cible. Ensuite, pour des instants d'observation définis, on calcule la fonction d'ambiguïté du signal réfléchi et reçu par notre récepteur. Autrement dit, on essaye de suivre notre « cible » sur la Carte Doppler - Retard (*Delay Doppler Map*), qu'on va appeler brièvement *DDM* dans le reste du chapitre.

Afin de réaliser ce travail, nous supposons une analogie avec le problème classique de suivi des cibles mobiles. En général, dans le contexte classique de suivi de cibles, les mesures pré-traitées sont construites à partir des données de mesures originales à chaque fois mises en place. Dans ce cas, l'approche commune est de soumettre toutes les données à un seuil, puis de considérer celles qui dépassent le seuil comme des mesures ponctuelles. En revanche, ceci est acceptable si le rapport RSB est relativement élevé [Boers et Driessen, 2004]. Le filtrage de Kalman est conseillé dans ce cas. C'est pourquoi, nous développons un algorithme de suivi basé sur le filtrage de Kalman. La modélisation et l'initialisation des paramètres est possible avec une simple hypothèse et réaliste sur la surface de la mer. Les paramètres du problème sont définis par la position de l'émetteur qui est un satellite GPS, le récepteur qui est une antenne opérant dans un mode passif, et la cible qui est définie par ses équations de mouvement.

### 4.1.1 Modélisation de l'environnement marin

Schématiquement, nous envisageons les deux scénarios suivants :

1. La cible est une crête d'une vague se déplaçant parallèlement à la surface moyenne de l'eau. Le mouvement décrit par la cible est alors rectiligne uniforme. La vitesse

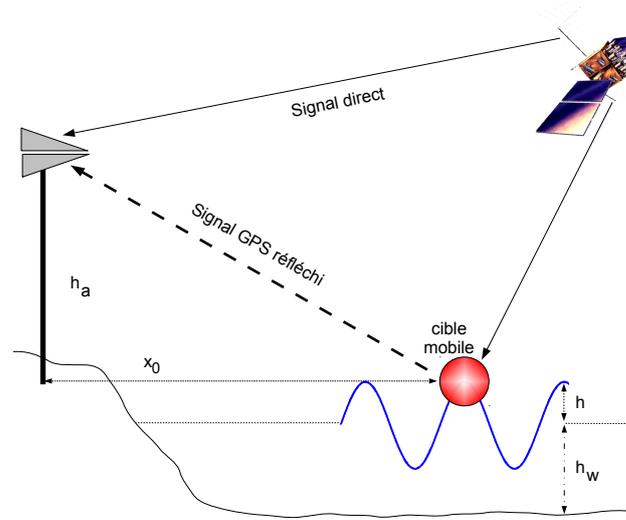


Figure 4.1 — Schéma de la cible sur la surface de mer

de cette cible dépend de sa position par rapport au récepteur  $x_0$ , la longueur d'onde de la vague  $\lambda_w$  et la profondeur de l'eau  $h_w$ .

2. La cible est une bouée flottante sur la surface qui oscille en place, ou encore un petit bateau situé à une certaine distance du récepteur. Le mouvement est alors vertical et sinusoïdal (figure 4.1).

Donc, comme on l'a déjà dit, la cible mobile a une vitesse constante qui dépend de la constante  $g$  de gravité, la profondeur de l'eau  $h_w$ , la longueur d'onde  $\lambda_w$ . La vitesse de phase  $v$  de la vague [Gurgel, 2009] peut être calculée par l'équation suivante :

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda_w}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda_w}\right)} = 1,7661\text{m/s} \quad (4.1)$$

avec  $g = 9.8\text{m/s}^2$ . Dans le cas considéré ici :  $\lambda_w = 2\text{m}$ , et  $h_w = 10\text{m}$ . La cible se déplace suivant l'équation de mouvement suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = d + vt \\ z(t) = -22 \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Le but est d'estimer les valeurs du déphasage fréquentiel (effet Doppler)  $\delta$  et le décalage temporel  $\tau$  dus au mouvement de la cible.

Pour cette raison, on va construire notre modèle d'état autour de ces deux valeurs  $(\delta_k, \tau_k)$ .

## 4.2 Théorie de Kalman

En mars 1960, R.E. Kalman publia ses travaux de recherche sur le filtrage linéaire et la prédiction de problèmes [Kalman, 1960]. Il s'agit d'un ensemble d'équations ma-

thématiques qui présentent des méthodes de calcul récursives qui visent à estimer de façon optimale l'état d'un système linéaire à partir des données discrètes issues des capteurs imprécis.

Depuis, le filtre de Kalman a fait l'objet de recherches approfondies qui ont abouti à d'autres processus liés au filtrage de Kalman. Et grâce aux progrès numériques, les domaines d'applications du filtrage de Kalman sont devenus très variés : navigation [Jazwinski, 1970] et [Maybeck, 1979], pistage [Bar-Shalom et Li, 1993], traitements chimiques [Candy et Rozsa, 1980], acoustique [Candy et Sullivan, 1992], sismologie [Mendel *et al.*, 1981],... On peut trouver une liste complète des applications du filtre de Kalman dans [Sorenson, 1983]. Pour plus de références sur ce sujet, le lecteur pourra se référer à [Brown et Hwang, 1992], [Gelb, 1974], [Lewis, 1986], [Grewal et Angus, 1993] et [Jacobs, 1993].

Dans ce chapitre, on présente la méthodologie mathématique : les notions de filtrage et des systèmes dynamiques discrets et continus. Ensuite, on présente le concept d'approche bayésienne et le modèle linéaire de Gauss - Markov. On verra également comment déduire le filtrage de Kalman linéaire à partir du modèle linéaire de Gauss-Markov et quelles sont les contraintes d'utilisation d'un tel filtre. Et pour finir cette partie, nous allons présenter notre problématique, construire notre modèle d'état, effectuer le réglage du filtre de Kalman linéaire (FKL) et bien sûr présenter les résultats.

## 4.3 Généralités sur le filtrage

### 4.3.1 Utilité d'un filtre

Soit un filtre défini par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ , le signal d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$ . La relation entre ces trois variables est donnée par la relation suivante :

$$x(t) \mapsto \boxed{h(t)} \mapsto y(t) \Leftrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

Un filtre sert à décomposer un signal comme par exemple distribuer un signal sur plusieurs voies (enceintes HIFI) ou analyser une bande de fréquences particulière (sélection de station FM), détecter (filtre adapté), approcher un signal à partir d'un autre comme la régression linéaire et le débruitage par le filtre de Wiener, compresser l'information (compression par prédiction linéaire), et encore l'estimation dans les modèles d'état. On en retient que le filtrage est une opération qui consiste à estimer l'état d'un système dynamique à partir des observations partielles et bruitées.

### 4.3.2 Systèmes dynamiques

Ce sont des modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines de sciences et techniques : physique, biologie, écologie, métrologie, ingénierie, ...

Ces systèmes évoluent dans le temps de façon à la fois :

1. Causale : leur avenir ne dépendant que de phénomènes passés ou présents,

2. Déterministe : à une condition initiale donnée à l'instant présent correspondant, à chaque instant ultérieur, un et un seul état futur.

Quant aux systèmes dynamiques, on parle d'équations différentielles ordinaires quand l'évolution est continue dans le temps, et d'équations récurrentes quand l'évolution est discontinue dans le temps. On dit qu'il s'agit de systèmes dynamiques stochastiques quand on prend en compte les perturbations aléatoires dans les équations du système, et pour l'évolution de phénomènes aléatoires décrits par des processus aléatoires continus ou discrets.

### 4.3.3 Définitions mathématiques

#### Cas continu :

Pour les processus aléatoires continus, on a :

Temps	Vecteur d'état	Vecteur des mesures
$t \in \mathbb{R}$	$X(t) \in \mathbb{R}^p$	$Z(t) \in \mathbb{R}^m$

**Tableau 4.1** — Système dynamique continu

$X(t)$  et  $Z(t)$  sont deux processus aléatoires continus, et l'état «  $X(t)$  » du système dynamique n'est pas observé. Les mesures bruitées disponibles à l'instant  $t$  sont définies par  $Z(t)$ , tel que  $\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$ . La relation entre les mesures et le signal à l'instant  $t$  est donnée par :

$$Z(t) = h(X(t)) + W(t) \quad (4.3)$$

où  $h(X(t))$  est un signal fonction de l'état  $X(t)$ , et  $W(t)$  un bruit additif supposé connu.

On en conclut que, pour un système continu, le filtrage consiste à la détermination d'un estimateur optimal  $\hat{X}(t)$  du vecteur d'état  $X(t)$  à partir de toutes les mesures disponibles  $Z(\tau), \tau \in [0, t]$ .

#### Cas Discret :

Pour les processus aléatoires discrets, on a :

Temps	Vecteur d'état	Vecteur des mesures
$k \in \mathbb{Z}$	$X_k \in \mathbb{R}^p$	$Z_k \in \mathbb{R}^m$

**Tableau 4.2** — Système dynamique discret

$X_k$  et  $Z_k$  sont deux processus aléatoires discrets, et l'état «  $X_k$  » du système dynamique n'est pas observé. Les mesures bruitées disponibles à l'instant  $k$  sont définies par  $Z_k$ , tel que  $Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$ .

La relation entre les mesures et le signal à l'instant  $k$  est donnée par :

$$Z_k = h(X_k) + W_k \quad (4.4)$$

où  $h(X_k)$  est un signal fonction de l'état  $X_k$ , et  $W_k$  un bruit additif supposé connu.

On en conclut que, pour un système discret, le filtrage consiste à la détermination d'un estimateur optimal  $\hat{X}_k$  du vecteur d'état  $X_k$  à partir de toutes les mesures disponibles  $Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$ .

## 4.4 Modèle d'état

D'après [Ristic *et al.*, 2004], dans l'approche Bayésienne de l'estimation de l'état dynamique, on essaye de calculer la densité de probabilité (Probability Density Function, pdf) a posteriori de l'état en se basant sur toutes les informations disponibles (même des mesures).

En principe, une estimation optimale - selon un critère donné - et la mesure de l'efficacité de cette estimation peuvent être obtenues à partir de la densité de probabilité a posteriori. Or, dans la plupart des cas, une estimation d'état est nécessaire chaque fois qu'on dispose d'une nouvelle mesure, ce qui convient à l'utilisation d'un filtre récursif.

Un filtre récursif implique que les données reçues sont traitées séquentiellement et non pas comme un bloc, donc il n'est pas nécessaire de stocker l'intégralité des données ni de traiter à nouveau des anciennes données si l'on dispose de nouvelles mesures. Le filtre récursif est composé de deux étapes : la prédiction et la correction (mise à jour).

- La prédiction utilise le modèle du système pour prédire la pdf de l'état d'une observation (mesure) à l'autre. Comme cet état est souvent soumis à des perturbations (bruit aléatoire), la prédiction déforme et élargit la pdf d'état.
- La correction utilise les dernières valeurs de mesures pour modifier la pdf de la prédiction en utilisant le théorème de Bayes. En fait, il s'agit d'un mécanisme pour mettre à jour les informations sur l'état de la cible en vue de connaissances supplémentaires obtenues à partir de nouvelles données.

Ainsi, pour définir un problème de filtrage linéaire ou pas, on introduit le vecteur d'état  $X_k$ , la durée d'intégration  $T_{k-1} \equiv t_k - t_{k-1}$ . L'état de la cible évolue suivant un modèle discret stochastique :

$$X_k = f_{k-1}(X_{k-1}, v_{k-1}) \quad (4.5)$$

où  $f_{k-1}$  est une fonction de  $X_{k-1}$  connue, probablement non linéaire ; et  $v_{k-1}$  est la séquence du bruit du modèle exprimé par une imperfection du modèle ou par d'autres perturbations inattendues dans le modèle de la cible.

L'objectif du filtrage dans ce cas est d'estimer  $X_k$  à partir des mesures  $z_k$  d'une manière récursive.

Les mesures sont liées à l'état de la cible par l'équation :

$$z_k = h_k(X_k, w_k) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}[v_k \cdot v_q^T]} &= 0 \quad \forall k \neq q \\ \mathbb{E}[w_k \cdot w_q^T] &= 0 \quad \forall k \neq q \\ \overline{\mathbb{E}[v_k \cdot w_k^T]} &= 0 \end{aligned}$$

**Tableau 4.3** — Propriétés statistiques des bruits d'état et d'observation

où  $h_k$  est une fonction connue probablement non linéaire, et  $w_k$  est le bruit de mesure.  $v_{k-1}$  et  $w_k$  sont donc deux bruits supposés indépendants, blancs et de covariances connues 4.3. On suppose aussi que  $p(0|0)$  la pdf de l'état initial de la cible est connue et indépendante du bruit.

Maintenant, on cherche à calculer les valeurs  $\hat{X}_k$  estimées de  $X_k$  à un instant  $t_k$  à partir de toutes les mesures disponibles  $Z_k \triangleq z_l, l = 1, \dots, k$  jusqu'à l'instant  $t_k$ . Du point de vue Bayésien, il s'agit de quantifier un certain degré de croyance dans l'état de  $X_k$  à l'instant  $t_k$ ,  $k$  ayant plusieurs valeurs, étant donné les mesures  $Z_k$  jusqu'à l'instant  $t_k$ . Ainsi, on demande de calculer la pdf a posteriori  $p(X_k|Z_k)$ . Pour  $t_0$ , lorsqu'il n'existe pas de mesures, la pdf initiale s'écrit alors :  $p(X_0) \triangleq p(X_0|Z_0)$ . Les valeurs ultérieures de  $p(X_k|Z_k)$  sont obtenues récursivement à partir des deux fameuses étapes que sont la prédiction et la correction. A commencer par la covariance  $P(1|0)$  de  $p(X_{k=1}|Z_{k=1})$  calculée avec l'équation de Lyapounov.

On suppose que l'on dispose de la valeurs de  $p(X_{k-1}|Z_{k-1})$  à l'instant  $k - 1$ . La prédiction consiste dans ce cas à utiliser le modèle du système (équation 4.5) pour obtenir la densité de la prédiction (a priori) de l'état à  $t_k$  via l'équation de Chapman - Kolmogorov<sup>1</sup> :

$$p(X_k|Z_{k-1}) = \int p(X_k|X_{k-1}) \cdot p(X_{k-1}|Z_{k-1}) dX_{k-1} \quad (4.7)$$

La phase de correction intervient à  $t = t_k$  quand la mesure  $z_k$  est disponible. Il s'agit d'une mise à jour de la pdf de prédiction (a priori) suivant la règle de Bayes :

$$\begin{aligned} p(X_k|Z_k) &= p(X_k|z_k, Z_{k-1}) \\ &= \frac{p(z_k|X_k, Z_{k-1}) \times p(X_k|Z_{k-1})}{p(z_k|Z_{k-1})} \\ &= \frac{p(z_k|X_k) \times p(X_k|Z_{k-1})}{p(z_k|Z_{k-1})} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sachant que le terme de normalisation (équation 4.9) dépend de la fonction de vraisemblance  $p(w_k, X_k)$  définie par le modèle de mesure (équation 4.6) et  $w_k$ , il vient :

1. Comme l'équation 4.5 décrit un processus de Markov de premier ordre, on peut écrire dans l'équation 4.7 :  $p(X_k|X_{k-1}, Z_{k-1}) = p(X_k|X_{k-1})$

$$p(z_k|Z_{k-1}) = \int p(z_k|X_k)p(X_k|Z_{k-1})dX_k \quad (4.9)$$

Pendant la phase de correction (équation 4.8), les mesures  $z_k$  sont utilisées pour modifier la densité a priori pour obtenir la densité a posteriori de l'état courant du système [Ristic *et al.*, 2004].

Dans le cas linéaire et Gaussien, la récurrence fonctionnelle dans les équations 4.7 et 4.8 deviennent le filtrage de Kalman. Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment nous avons construit notre modèle pour mettre en oeuvre les équations du filtre de Kalman.

#### 4.4.1 Construction du modèle d'état

Relation entre le temps et le Doppler :

$$\delta = \frac{v}{c}L_1 = \frac{\dot{\tau}}{c}L_1 \quad (4.10)$$

$L_1 = 1,5472GHz$  est la fréquence centrale du GPS.

Or d'après l'équation d'Euler, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &\approx \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{\Delta T} \\ \tau_{k+1} - \tau_k &\approx \frac{c\Delta T}{L_1}\delta \end{aligned} \quad (4.11)$$

En considérant que le temps d'intégration  $\Delta T$  est suffisamment petit pour que le Doppler ne varie pas beaucoup entre les deux instants  $k$  et  $k+1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{k+1} \approx \delta_k \\ \tau_{k+1} \approx \frac{c\Delta T}{L_1}\delta_k + \tau_k \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

D'où le modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta_{k+1} \\ \tau_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c\Delta T}{L_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \tau_k \end{bmatrix} + b_k \quad (4.13)$$

Considérant la bande dans laquelle nous travaillons, nous pouvons considérer le bruit  $b_k$  comme bruit blanc gaussien. Or en considérant la première ligne de l'équation 4.13, et statistiquement parlant, si on calcule la covariance, on aura :

$$\text{Var}(\delta_{k+1}) = \text{Var}(\delta_k) + \text{Var}(b_k)$$

Ce qui n'est pas nécessairement correct. Dans ce cas, un problème de calibrage de modèle s'impose. Cette même équation suit un modèle AR d'ordre 1, donc elle peut s'écrire :

$$\delta_{k+1} = a \cdot \delta_k + b_k \quad (4.14)$$

Pour calculer la valeur de  $a$ , on utilise la méthode des moindres carrés :

$$a \rightarrow \operatorname{argmin}_a \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\delta_{k+1} - a\delta_k)^2 \right] \quad (4.15)$$

D'où la valeur de  $a$  :

$$a = \frac{\sum_{k=1}^N (\delta_{k+1} \delta_k)}{\sum_{k=1}^N (\delta_k^2)} \quad (4.16)$$

#### 4.4.2 Dynamique du système

D'après le paragraphe précédent, le vecteur d'état est défini par :

$$X_k = \begin{bmatrix} \delta_k \\ \tau_k \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

L'évolution dynamique du système est donnée par l'équation récursive suivante :

$$X_{k+1} = f(X_k) + v_k \quad (4.18)$$

où  $f$  est une fonction linéaire de  $X_k$ , représentée par la matrice de l'équation 4.13

$$F = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \frac{c\Delta T}{L_1} & 1 \end{bmatrix}$$

$v_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$  est le bruit d'état.

$\Delta T$  est le temps de revisite du signal.

Théoriquement, le Doppler  $\delta$  et le retard  $\tau$  peuvent être calculés par les équations suivantes :

$$\delta_k = -\frac{L_1}{c} \cdot \frac{(x_k - x_a)(x_k - x_a)' + (z_k - z_a)(z_k - z_a)'}{\sqrt{(x_k - x_a)^2 + (z_k - z_a)^2}} \quad (4.19)$$

$$\tau_k = \frac{\sqrt{(x_k - x_a)^2 + (z_k - z_a)^2}}{c} \quad (4.20)$$

Sachant que  $L_1 = 1,57542$  GHz est la fréquence porteuse du signal GPS. Nous rappelons que  $(x_k, z_k)$  représentent les coordonnées de la cible à un temps d'observation  $t_k$  et  $(x_a, z_a)$  les coordonnées de l'antenne.

## 4.5 Construction du modèle d'observation

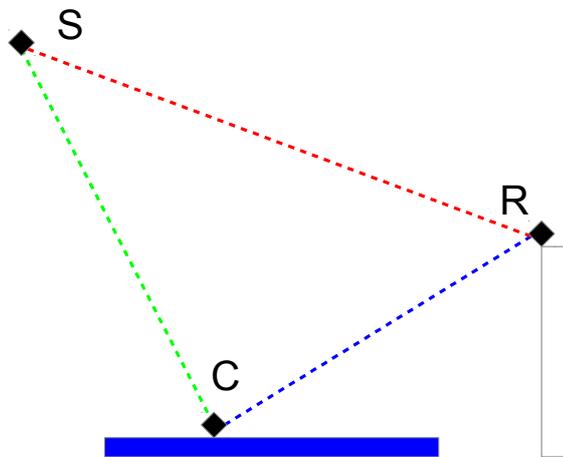
Les mesures sont liées à l'état de la cible par l'équation suivante :

$$z_k = g(X_k) + w_k \quad (4.21)$$

$g$  étant une fonction linéaire de  $X_k$  et  $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ .

Pour avoir les valeurs observées de  $(\delta_k, \tau_k)$ , on effectue la corrélation entre un signal reçu (simulé) et une réplique du signal. Ensuite, on détermine le pic ayant le maximum d'amplitude, et on note ses coordonnées dans le plan Doppler-Retard. En fait, on va générer un signal GPS « reçu » contenant les deux composantes directe et réfléchie, ainsi qu'une simulation du bruit d'observation  $w_k$ . Le signal réfléchi est supposé l'être sur la cible mobile en question. Pour le calcul de  $(\delta_k, \tau_k)$ , on ne considère pas seulement la cible mais aussi son interaction avec le satellite et le récepteur.

Si on reprend la figure 4.1, et on note R, S, et C respectivement le récepteur, le satellite émetteur et la cible mobile, on aura :



**Figure 4.2** — Modèle géométrique

Dans ce cas, le couple  $(\delta_k, \tau_k)$  est calculé par :

$$\delta_k = -\frac{L_1}{c} \cdot \frac{d}{dt}(RC + CS) \quad (4.22)$$

$$\tau_k = \frac{SC + CR - SR}{c} \quad (4.23)$$

Ces valeurs sont utilisées pour déterminer, à  $t = 0$  la position initiale de notre cible (pic correspondant), dans la DDM et l'évolution au plan temps - fréquence des paramètres de notre cible mobile.

Une fois que le produit de corrélation est calculé, les coordonnées du pic correspondant à la cible mobile, sont sauvegardées dans le vecteur d'observation.

Une fois que le vecteur d'état et le vecteur d'observation sont bien définis, on peut appliquer le filtrage de Kalman linéaire. Dans le paragraphe 4.6, on retrouve les équations du filtre de Kalman ainsi que la logique d'un tel filtre.

## 4.6 Équations du filtre de Kalman

Le filtrage de Kalman suppose que la densité a posteriori pour chaque instant  $t_k$  est gaussienne et elle peut, par la suite, être caractérisée par deux paramètres, sa moyenne et sa covariance.

Si  $p(X_{k-1}|Z_{k-1})$  est gaussienne, alors on peut montrer que  $p(X_k|Z_k)$  est encore gaussienne, tout en tenant en compte quelques hypothèses [Ho et Lee, 1964] :

- $v_{k-1}$  et  $w_k$  possèdent des densités de probabilité gaussiennes de paramètres connus,
- $f_{k-1}(X_{k-1}, v_{k-1})$  est une fonction linéaire de  $X_{k-1}$  et  $v_{k-1}$ ,
- $h_k(X_k, w_k)$  est une fonction linéaire de  $X_k$  et  $w_k$ ,

D'après les équations 4.5 et 4.6, on peut alors écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_k = F_{k-1}X_{k-1} + v_{k-1} \\ z_k = H_k X_k + w_k \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

où les matrices  $F_{k-1}[N_X \times N_X]$  et  $H_k[N_z \times N_X]$  sont des matrices connues qui définissent les fonctions linéaires. On rappelle également que les bruits  $v_{k-1}$  et  $w_k$  sont des bruits blancs gaussiens indépendants de moyennes nulles, et admettant  $Q_{k-1}$  et  $R_k$  respectivement comme matrices de covariance. Les matrices  $F_{k-1}$ ,  $H_k$ ,  $Q_{k-1}$  et  $R_k$  sont des matrices qui varient en fonction du temps.

### 4.6.1 Densités de probabilité

Ainsi, l'algorithme du filtrage de Kalman dérivé à partir des équations 4.7 et 4.8, peut être vu comme cette série d'équations récursives :

$$p(X_{k-1}|Z_{k-1}) = \mathcal{N}(X_{k-1} : \hat{X}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) \quad (4.25)$$

$$p(X_k|Z_{k-1}) = \mathcal{N}(X_k : \hat{X}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (4.26)$$

$$p(X_k|Z_k) = \mathcal{N}(X_k : \hat{X}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}) \quad (4.27)$$

où  $\mathcal{N}(X : m, \mathbf{P})$  est la densité de probabilité Gaussienne de l'argument  $X$  de moyenne  $m$  et de covariance  $\mathbf{P}$ . En général elle s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{N}(X : m, \mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{P}}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2}(X - m)^T \mathbf{P}^{-1}(X - m) \right] \quad (4.28)$$

### 4.6.2 Formules récursives

Afin de calculer les densités de probabilité  $p(X_{k-1}|Z_{k-1})$ ,  $p(X_k|Z_{k-1})$  et  $p(X_k|Z_k)$ , nous devons trouver les moyennes respectives  $\hat{X}_{k-1|k-1}$ ,  $\hat{X}_{k|k-1}$ , et  $\hat{X}_{k|k}$ ; et les matrices de covariance  $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ ,  $\mathbf{P}_{k|k-1}$ , et  $\mathbf{P}_{k|k}$ . Nous utilisons alors les formules récursives du filtrage de Kalman [Anderson et Moore, 1979], [Chui et Chen, 1991] et [Candy, 2009], nous obtenons :

$$\hat{X}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{X}_{k-1|k-1} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{F}_{k-1} \cdot \mathbf{P}_{k-1|k-1} \cdot \mathbf{F}_{k-1}^T \quad (4.30)$$

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \cdot (z_k - \mathbf{H}_k \hat{X}_{k|k-1}) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T \quad (4.32)$$

$\mathbf{S}_k$  représente la matrice de covariance du facteur de « l'innovation »  $e_k$  qui est égal à :

$$\begin{aligned} e_k &= z_k - \hat{z}_{k|k-1} \\ &= z_k - \mathbf{H}_k \hat{X}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$\mathbf{S}_k$  est alors :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (4.34)$$

Un autre terme remarquable c'est  $\mathbf{K}_k$  appelé le gain de Kalman,

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{H}_k^{-1} \quad (4.35)$$

L'ensemble de toutes ces équations ainsi que les différentes étapes résumant le fonctionnement d'un filtre de Kalman linéaire sont présentés dans le tableau 4.4.

## 4.7 Résultats du filtrage de Kalman linéaire

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulations nous permettant de suivre la position de la cible mobile à chaque instant  $t_k$  d'une période de 100ms. Nous avons considéré deux types de mouvement : rectiligne uniforme, et vertical sinusoidal.

**Prédiction**

$$\hat{x}(t|t-1) = F(t-1)\hat{x}(t-1|t-1)$$

*Prédiction de l'état*

$$\tilde{P}(t|t-1) = F(t-1)\tilde{P}(t-1|t-1)F'(t-1) + R_{vv}(t-1)$$

*Covariance de la prédiction***Innovation**

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t|t-1) = z(t) - H(t)\hat{x}(t|t-1)$$

*Innovation*

$$R_{ee}(t) = H(t)\tilde{P}(t|t-1)H'(t) + R_{ww}(t)$$

*Covariance de l'innovation***Gain**

$$K(t) = \tilde{P}(t|t-1)H'(t)R_{ee}^{-1}(t)$$

*Gain***Correction (mise à jour)**

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t)e(t)$$

*Correction de la variable d'état*

$$\tilde{P}(t|t) = [I - K(t)H(t)] \times \tilde{P}(t|t-1)$$

*Covariance de la correction***Conditions initiales**

$$\hat{x}(0|0) \text{ et } \tilde{P}(0|0)$$

**Tableau 4.4** — Récapitulatif des équations du filtre de Kalman linéaire [Candy, 2009].

### 4.7.1 Mouvement rectiligne uniforme

Sur la figure 4.3, nous observons une cible mobile représentant une crête de vague. Le mouvement de cette cible est décrit par l'équation 4.2.

Pour  $t_0$ , les valeurs théoriques du Doppler et du retard, sont calculées à partir des équations 4.19 et 4.20. Les figures suivantes montrent le calcul de l'effet Doppler et le délai dans les différentes étapes afin d'avoir la forme de la trajectoire suivie par la cible en fonction du Doppler et du retard.

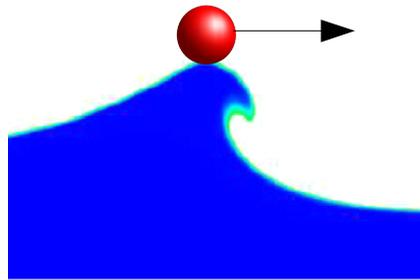
La fonction d'observation correspond à un relevé des coordonnées du pic de corrélation mobile, pour des instants d'observation différents.

Les figures 4.4 et 4.5 montrent respectivement les trajectoires théorique et observée de la cible, dans le plan Doppler - Retard. La trajectoire filtrée se trouve dans la figure 4.6.

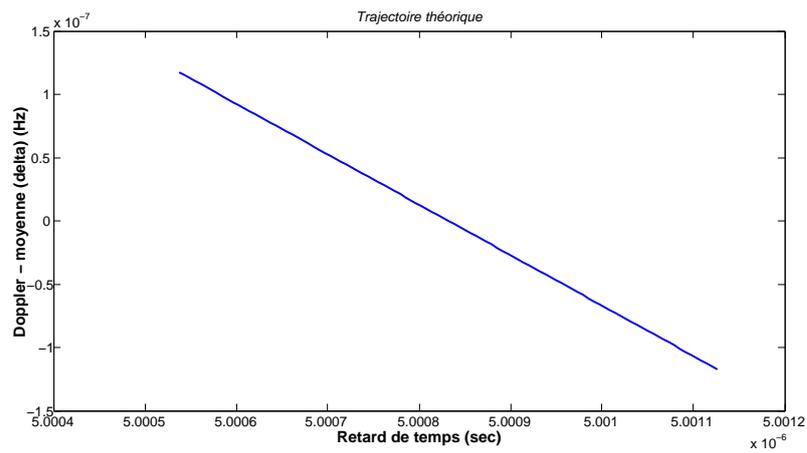
La valeur de Doppler indiquée sur l'axe des y est  $\Delta_{Doppler}$  qui est égal à la différence entre la valeur estimée  $\delta$  du Doppler (après filtrage) et la moyenne de toutes les mesures Doppler pendant 100ms.

$$\delta = \Delta_{Doppler} + \mu_\delta \quad (4.36)$$

avec  $\mu_\delta = -9.27\text{Hz}$



*Figure 4.3* — Crête d'une vague : une cible ayant un mouvement rectiligne uniforme



*Figure 4.4* — Trajectoire théorique décrite par la cible

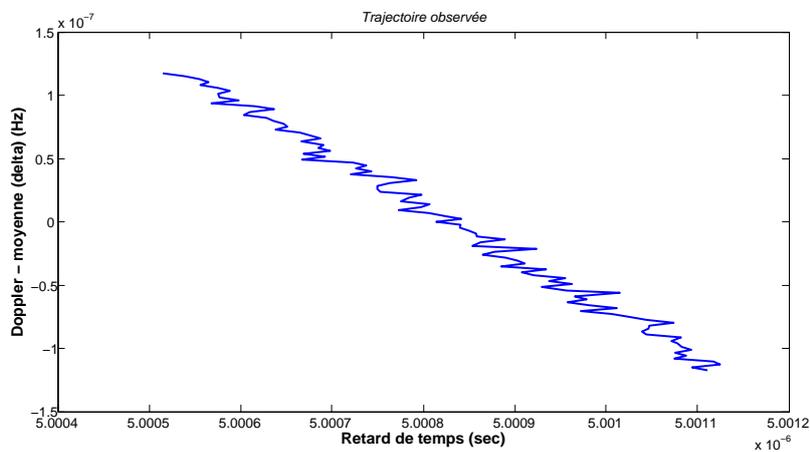


Figure 4.5 — Trajectoire « observée »

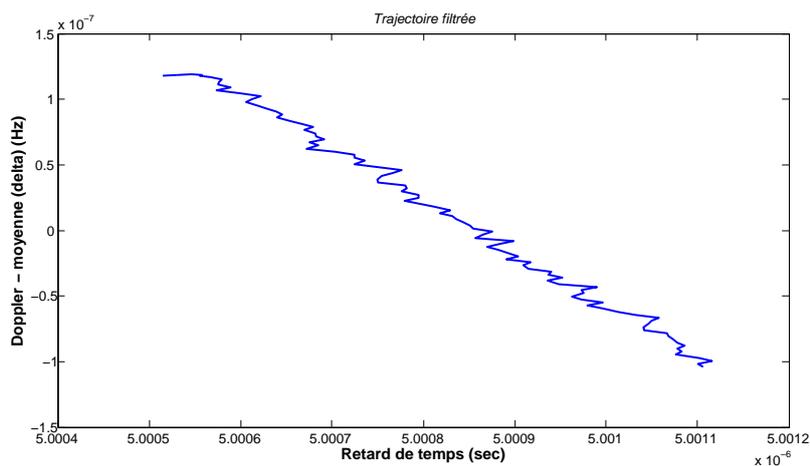
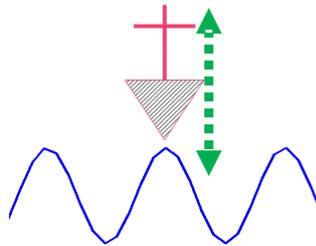


Figure 4.6 — Trajectoire filtrée (sortie du filtre de Kalman)

les courbes représentées dans les figures 4.4, 4.5 et 4.6 sont obtenues à partir d'une matrice intermédiaire simplifiée. On remarque que pour un niveau de bruit suffisamment petit, et pour un mouvement linéaire, on peut retrouver une trajectoire très proche de la théorie.

### 4.7.2 Mouvement vertical sinusoidal

Sur la figure 4.7, nous observons une cible mobile représentant une bouée ou un petit bateau se trouvant à la surface. Le mouvement de cette cible est décrit par les équations de mouvement :  $x = d = 10\text{m}$  et  $z = h_v \cdot \sin(2\pi f_m t)$ .



**Figure 4.7** — Un bateau (ou une bouée) : une cible ayant un mouvement vertical sinusoidal

Pour  $t_0$ , les valeurs théoriques du Doppler et du retard, sont calculées à partir des équations 4.19 et 4.20. Les figures suivantes montrent le calcul de l'effet Doppler et le délai dans les différentes étapes afin d'avoir la forme de la trajectoire suivie par la cible en fonction du Doppler et du retard.

Les figures 4.8 et 4.9 montrent respectivement les trajectoires théorique et observée de la cible, dans le plan Doppler - Retard. La trajectoire filtrée se trouve dans la figure 4.10.

### 4.7.3 Premiers résultats

En réalisant ce filtrage, nous avons réussi à joindre les deux approches ensemble : suivi de cibles et intégration sur de longues périodes du signal GPS afin d'extraire le signal réfléchi de la surface de mer. Nous avons trouvé qu'il était possible d'utiliser le filtre de Kalman linéaire pour le cas d'une seule cible mobile. Cependant, nous avons constaté que ce filtre est trop sensible au bruit : puisque il y a d'un côté le bruit du modèle d'état qui est difficile à définir, et le bruit d'observation qui perturbe les observations. Ce qui limite un peu l'efficacité de ce dispositif.

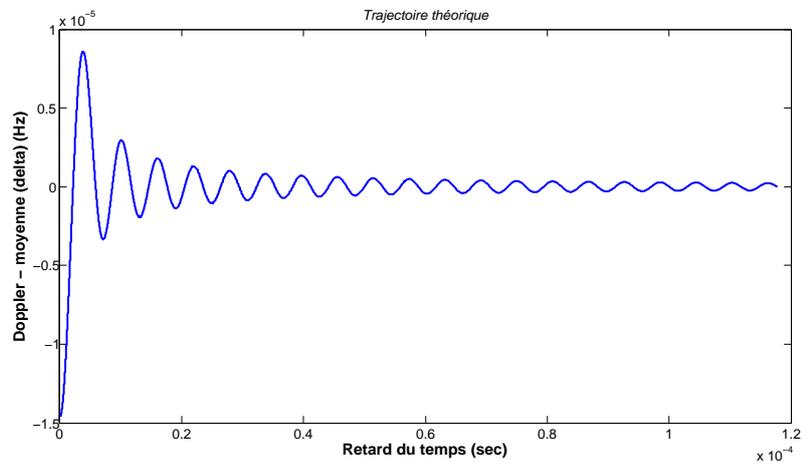


Figure 4.8 — Trajectoire théorique décrite par la cible

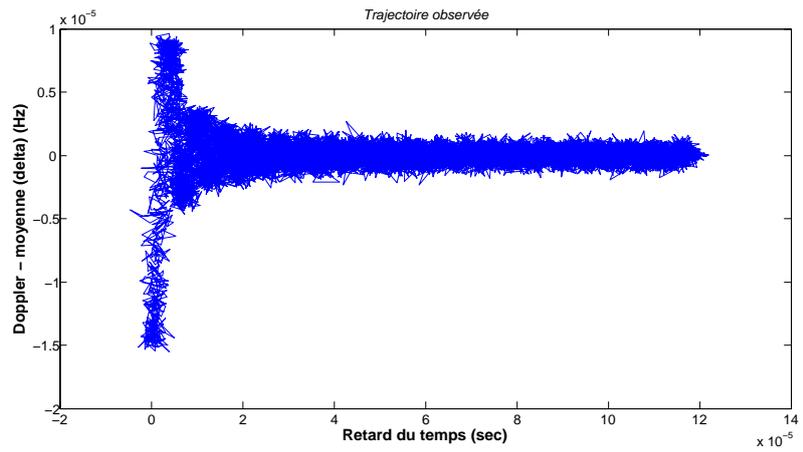


Figure 4.9 — Trajectoire « observée »

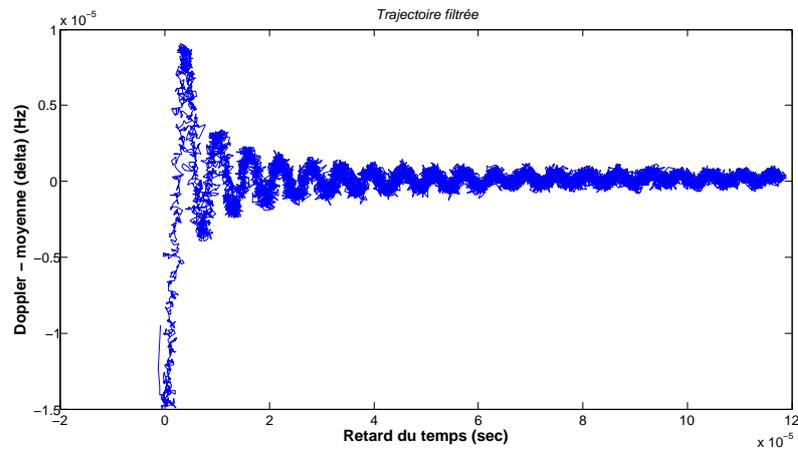


Figure 4.10 — Trajectoire filtrée (sortie du filtre de Kalman)

En effet, les figures observées ci-dessus sont obtenues pour un niveau du bruit faible. En réalité, le niveau du bruit est plus important, et par conséquent la détection du pic n'est pas évidente.

En effet, en passant d'une observation à une autre, on risque de faire une lecture erronée des coordonnées du pic de corrélation (fonction d'observation). Ceci induit un bruit plutôt uniforme, et non pas gaussien. Dans ce cas, l'observation doit se faire, non pas sur la distance entre les deux pics, mais sur l'énergie du pic de corrélation.

La fonction d'observation est alors non linéaire. Ce qui explique le besoin d'utiliser un filtre non linéaire, le Filtre de Kalman Étendu.



## 5.1 Introduction

Pour permettre une détection très précise du mouvement de la surface (mouvement lent de l'ordre de quelques dixièmes à quelques hertz), en considérant un train d'ondes des signaux GPS (quelques millisecondes), nous proposons d'utiliser un récepteur côtier situé à quelques mètres au dessus de la surface de mer. Ce récepteur est destiné à la réception et à l'enregistrement des signaux GPS direct et réfléchi, d'une façon séparée. Nous supposons que le satellite GPS est fixe.

Dans le chapitre 3 nous avons introduit la notion de cibles de la surface de mer. L'objectif étant, dans un premier temps, de détecter la présence ou non des cibles sur la surface de mer, et d'extraire le signal réfléchi du bruit et du « clutter » de mer. Nous avons montré qu'il était possible de réaliser ce travail par le biais d'une intégration cohérente et longue des signaux GPS réfléchis. Dans le chapitre 4, nous avons modélisé les cibles mobiles en les liant à des équations de mouvement plus rigoureuse avec des paramètres plus réalistes. Nous avons proposé également un algorithme basé sur le filtrage de Kalman afin d'étendre la problématique de détection du chapitre 3 au suivi de la trajectoire décrite par la dite cible sur la surface de mer.

## 5.2 Observations non linéaires

Nous rappelons également que l'objectif principal de ce filtrage est d'estimer les valeurs du Doppler et du retard ( $\delta_k, \tau_k$ ) pour certains instants  $t_k$ , engendrées par le déplacement de la cible, afin de pouvoir localiser d'une manière fiable les pics de réflexion représentant les cibles mobiles à chaque instant  $t_k$  sur la carte Doppler - Retard ( $DDM$ ).

Dans le chapitre 4, nous avons considéré un modèle simplifié où la fonction d'observation  $h$  est linéaire. En dépit des résultats encourageants obtenus, il est clairement apparu que ce modèle simplifié était sensible au bruit et manquait de robustesse. Pour que l'observation soit optimale et représentative de notre système, nous avons choisi des modèles de la fonction d'ambiguïté du signal réfléchi. Cette fonction ayant un lobe

principal significatif, nous choisissons de la modéliser par une fonction  $g$  ayant une forme gaussienne.

L'équation d'observation de cette grandeur étant non linéaire, notre algorithme s'appuie sur le filtrage de Kalman étendu (FKE).

### 5.2.1 Signal GPS reçu

Nous rappelons que la carte Doppler - Retard représente le produit de corrélation du signal reçu  $s_r(t)$  avec une réplique  $r(t)$  de ce signal générée localement par le récepteur, avec :

$$\begin{aligned} s_r(t) &= \alpha_s e^{2\pi j \delta (t-\tau)} \times r(t-\tau) + n_0(t) \\ r(t) &= c(t) \cos(2\pi f_1 t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Les paramètres  $\alpha_s$ ,  $\delta$ ,  $\tau$ , et  $c(t)$  désignent respectivement l'atténuation du signal reçu, le Doppler, le délai de code et la séquence du code C/A.

### 5.2.2 Fonction d'ambiguïté

Nous rappelons que la fonction d'ambiguïté d'un signal quelconque  $x(t)$  est définie par :

$$A_x(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{x}(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt \quad (5.2)$$

où  $\bar{x}$  est le conjugué de  $x$ .

Pour un signal GPS (séquence PRN), une approximation de la fonction d'ambiguïté est donnée par [Rabaste et Chonavel, 2007] :

$$A_x(\tau, f) \approx e^{-j\pi T_s f} \text{sinc}(T_s f) \cdot R(\tau) \quad (5.3)$$

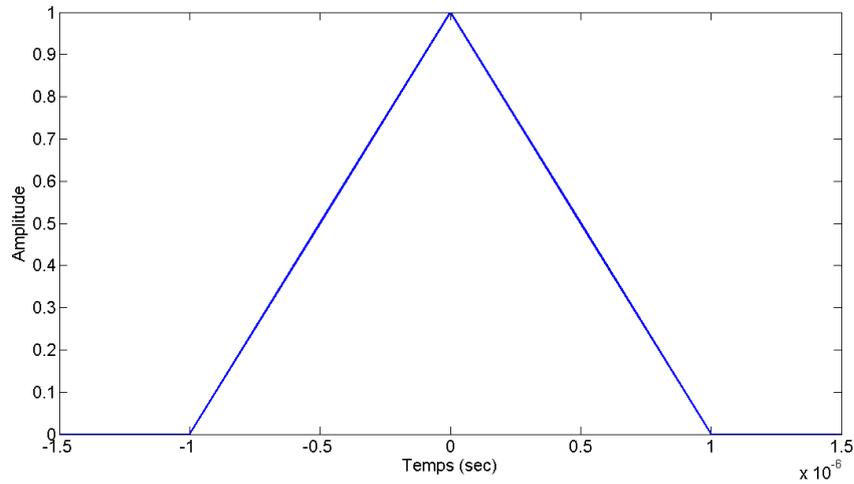
où  $T_s$  est la durée de la séquence PRN et  $R(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation de ce code.

On distingue deux valeurs particulières de  $\delta$  et  $\tau$  :

1. Doppler nul : La fonction d'autocorrélation a une forme triangulaire parfaite (Transformée de Fourier d'une fonction « porte » sur un intervalle fini) comme on le voit dans l'équation 5.4 et sur la figure 5.1 :

$$R(\tau)_{/\{\delta=0\}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left| \frac{\tau}{T_c} \right|, \quad \left| \frac{\tau}{T_c} \right| \leq 1 \\ 0, \quad \text{ailleurs} \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

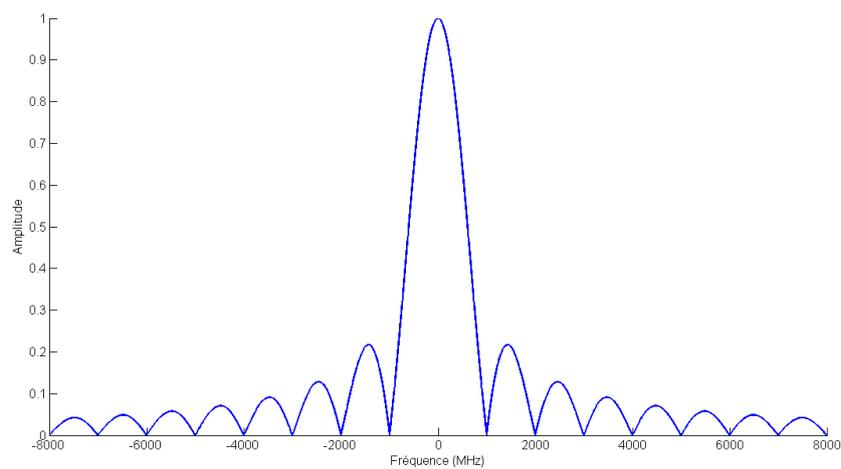
où  $T_c = 1\text{ms}/1023$  est la durée d'un chip. La largeur de la FAC est  $2T_c$ .



**Figure 5.1** — Projection de la fonction d'ambiguïté sur l'axe  $\tau$

2. Retard nul : La fonction d'autocorrélation a une forme de sinus cardinal (équation 5.5 et figure 5.2) :

$$R(\delta)_{\{\tau=0\}} = \alpha \cdot \text{sinc}(\pi fT) \quad (5.5)$$



**Figure 5.2** — Projection de la fonction d'ambiguïté sur l'axe  $\delta$

Dans la figure 5.2, le lobe central est contenu dans l'intervalle  $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$ , où  $T$  est le temps d'intégration.

### 5.3 Filtrage de Kalman Étendu

De retour à notre cible, nous considérons le cas d'une bouée déposée sur la surface de mer. Étant donné ses équations de mouvements (équation 5.6), on génère pour chaque  $(\delta_k, \tau_k)$  à l'instant  $t_k$ , une fonction de corrélation  $g_k$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ z = h \cdot \sin(2\pi f_m t) \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

#### 5.3.1 Modèle d'état et fonction d'observation

On rappelle que le vecteur d'état est donné par  $s_k = [\delta_k \ \tau_k]^T$  à l'instant  $t_k$ ; et les équations d'état par :

$$X_{k+1} = f(X_k) + v_k \quad (5.7)$$

$$y_k = g(X_k, w_k) \quad (5.8)$$

L'équation 5.7 représente l'évolution dynamique du système où  $f$  est une fonction linéaire et  $v_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ . Les mesures  $z_k$  du capteur, qui sont liées à l'état de la cible via la fonction  $g$ , apparaissent dans l'équation (5.8). Théoriquement  $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ .

Les valeurs du Doppler et du retard temporel peuvent être calculées à partir des équations :

$$\delta_k = -\frac{f_0}{c} \cdot v_a \quad (5.9)$$

$$\tau_k = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (z - h_a)^2}}{c} \quad (5.10)$$

où  $v_a$  est la vitesse apparente de la cible,  $x_0 = 10m$  est la distance séparant le récepteur de la cible à l'origine,  $h = 1m$  est la hauteur de la vague,  $f_m = 2Hz$  est la fréquence mécanique des vagues et  $h_a = 22m$  est la hauteur de l'antenne.

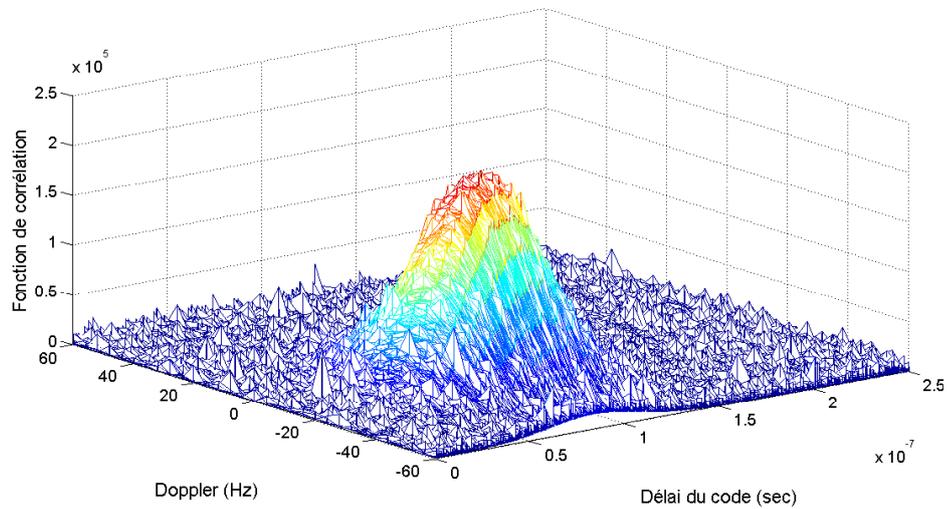
La fonction  $g_k$  (figure 5.3) a pour expression :

$$g_k = \left[ w_k + \frac{1}{2\pi\sigma_\delta\sigma_\tau} \cdot \exp\left(-\frac{(\delta_i - \delta_k)^2}{2\sigma_\delta^2} - \frac{(\tau_j - \tau_k)^2}{2\sigma_\tau^2}\right) \right] \quad (5.11)$$

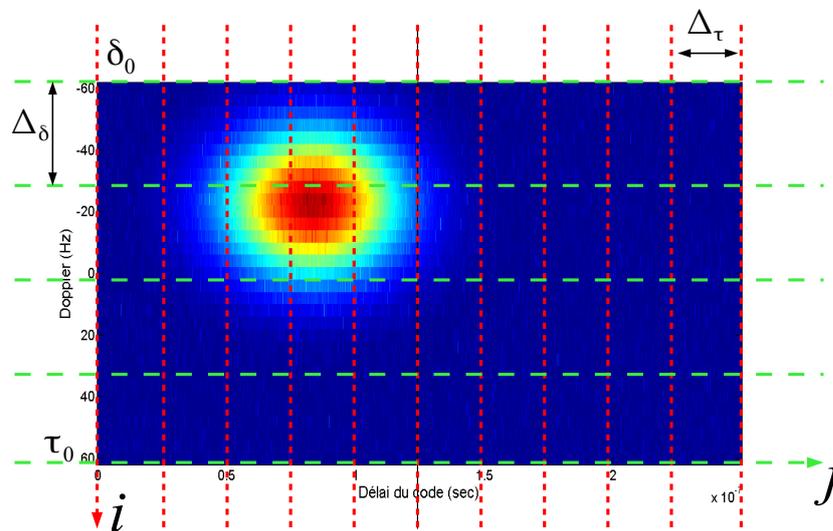
$\delta_i = i\Delta_\delta + \delta_0$  et  $\tau_j = j\Delta_\tau + \tau_0$  définissent les transitions d'une cellule à l'autre au sein de la carte DDM.  $\Delta_\delta$  and  $\Delta_\tau$  sont les pas de transition, et  $\delta_0$  et  $\tau_0$  sont les mesures à l'instant  $t_0 = 0$  (figure 5.4).

**Définitions des paramètres de  $g_k$**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau \approx \frac{2T_c}{4} \\ \approx 0,5\mu s \end{array} \right\} \quad (5.12)$$



**Figure 5.3** — Fonction d'observation  $g_k$  bruitée, il s'agit de la fonction de corrélation. Celle-ci est représentée ici par une fonction gaussienne.



**Figure 5.4** — Construction de la fonction d'observation  $g_k$  autour des valeurs  $\delta_k$  et  $\tau_k$  (le point en rouge foncé) : les indices  $i$  et  $j$  sont utilisés pour balayer le plan Doppler-Retard, et  $\Delta_\delta$  et  $\Delta_\tau$  déterminent le pas de déplacement dans chacune des deux directions.

Si l'on suppose en plus que le Doppler ne change pas dans une intervalle de durée  $T = 20\text{ms}$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{largeur du lobe} &= \frac{2}{T} \\ \sigma_\delta &\approx 22,8\text{Hz} \end{aligned} \quad (5.13)$$

### Distribution du bruit d'observation $w_k$

Le bruit dans notre cas possède deux dimensions suivant le Doppler et le retard. A l'entrée du récepteur,  $w_0(t)$  représente un bruit gaussien à moyenne nulle et ayant la fonction d'autocorrélation  $\Omega_0(t)$  [Rabaste et Chonavel, 2007].

- Pour  $f = f_\delta$   
 $A_x(\tau, f)$  sera la sortie d'un filtre adapté quand l'entrée a été modifiée par le Doppler  $f$ . Elle s'écrit alors :

$$y_f(t) = e^{-2j\pi f\tau} A_x(t - \tau, f - f_\delta) + w_f(t) \quad (5.14)$$

$w_f(t)$  est un bruit Gaussien, avec :  $\Omega_f(t) = \Omega_0(t) * ACF(x(t))$ .

- Pour  $\tau = t_\tau$   
 Le bruit à la sortie a une moyenne  $\mathcal{E}(w_f) = \sigma_\delta^2 \text{sinc}(\pi fT)$ .

### 5.3.2 Équations générales du Filtrage de Kalman Étendu

Dans le cas où l'observation est décrite par un modèle d'état non linéaire, les équations 4.5 et 4.6, s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_k = f_{k-1}(X_{k-1} + v_{k-1}) \\ y_k = g_k(X_k + w_k) \end{array} \right\} \quad (5.15)$$

Une approche convenable du problème de l'estimation de l'état serait de linéariser (développement de Taylor à l'ordre 1) les fonctions  $F_{k-1}$  et  $G_k$  autour de points particuliers.

On rappelle que les bruits  $v_{k-1}$  et  $w_k$  sont des bruits blancs gaussiens indépendants supposés centrés, et admettant  $R_{vv,k-1}$  et  $R_{ww,k-1}$  respectivement comme des matrices de covariance. La linéarisation se fera donc autour du point 0 pour ces termes.

Pour le processus de  $X$ , sa dépendance à l'instant  $t_k$  vis à vis des valeurs passées de l'observation incite à prendre en compte la connaissance disponible pour bien choisir le point de linéarisation. Plus précisément, si on considère les équations 4.29 et 4.31 du filtre de Kalman, il semble raisonnable d'utiliser une linéarisation de l'équation d'état autour de la valeur  $\hat{X}_{k|k}$  de  $X_k$  puisque l'équation de prédiction 4.29 est basée sur la connaissance de  $\hat{X}_{k|k-1}$  de  $X_k$ , puisque l'équation de filtrage 4.31 exploite la valeur prédite  $\hat{X}_{k|k-1}$  [Chonavel, 2009].

Ainsi, en développant les équations d'état  $f(t)$  et d'observation  $h(t)$  respectivement autour  $(\hat{X}_{k|k}, 0)$  et  $(\hat{X}_{k|k-1}, 0)$ , on a :

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= \frac{\partial f_{k+1}}{\partial X}(X_{k|k}, 0) \\
V_{k+1} &= \frac{\partial f_{k+1}}{\partial v}(X_{k|k}, 0) \\
H_k &= \frac{\partial g_{k+1}}{\partial X}(X_{k|k-1}, 0) \\
U_k &= \frac{\partial g_{k+1}}{\partial w}(X_{k|k-1}, 0)
\end{aligned}$$

**Tableau 5.1** — Jacobiens des fonctions non linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = f_{k+1}(X_{k|k}, 0) + \tilde{F}_k(X_{k+1} - X_{k|k}) + V_{k+1}v_k \\ y_k = g_k(X_{k|k-1}, 0) + G_k(X_k - X_{k|k-1}) + U_k w_k \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

Le tableau 5.3.2 explicite la signification des différents termes de l'équation 5.16.

Un récapitulatif du déroulement du FKE se trouve dans le tableau 5.2.

## 5.4 Équations d'état appliquées à notre problématique

Soit le vecteur d'état par  $X_k = [\delta_k \quad \tau_k]^T$ .

On procède par observation de la puissance du signal GPS réfléchi sur la cible mobile. Les équations d'état peuvent être exprimées sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = F_{k+1}(X_k, v_k) \\ y_k = G_k(X_k, w_k) \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

Plus précisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{f_c}{f} & 1 \end{pmatrix} X_k + v_k \\ y_k = \left[ w_k + \frac{1}{2\pi\sigma_\delta\sigma_\tau} \cdot \exp\left(-\frac{(\delta_i - \delta_k)^2}{2\sigma_\delta^2} - \frac{(\tau_j - \tau_k)^2}{2\sigma_\tau^2}\right) \right] \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

On pose :

$$\eta = \frac{1}{2\pi\sigma_\delta\sigma_\tau}, \quad \Sigma_\delta = 2\sigma_\delta^2, \quad \text{et} \quad \Sigma_\tau = 2\sigma_\tau^2.$$

En faisant un développement limité à l'ordre 1 des équations d'état et d'observation autour des points  $(\hat{X}_{k,k}, 0)$  et  $(\hat{X}_{k,k-1}, 0)$  respectivement, nous obtenons :

$$X_{k+1} \approx \tilde{F}_{k+1} + \tilde{F}_{X,k+1} [X_k - \hat{X}_{k,k}] + \tilde{F}_{v,k+1} v_k \quad (5.19)$$

**Prédiction**

$$\hat{x}(t|t-1) = f[\hat{x}(t-1|t-1)]$$

$$\tilde{P}(t|t-1) = F[\hat{x}(t|t-1)]\tilde{P}(t-1|t-1)F'[\hat{x}(t|t-1)]$$

$$\dots\dots\dots + R_{vv}(t-1)$$

*Prédiction de l'état**Covariance de la prédiction***Innovation**

$$e(t) = y(t) - g[\hat{x}(t|t-1)]$$

$$R_{ee}(t) = G[\hat{x}(t|t-1)]\tilde{P}(t|t-1)G'[\hat{x}(t|t-1)] + R_{ww}(t)$$

*Innovation**Covariance de l'innovation***Gain**

$$K(t) = \tilde{P}(t|t-1)G'[\hat{x}(t|t-1)]R_{ee}^{-1}(t)$$

*Gain***Correction (mise à jour)**

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t)e(t)$$

$$\tilde{P}(t|t) = [I - K(t) \times G'[\hat{x}(t|t-1)]] \times \tilde{P}(t|t-1)$$

*Correction de la variable d'état**Covariance de la correction***Conditions initiales**

$$\hat{x}(0|0) \text{ et } \tilde{P}(0|0)$$

**Dérivées partielles**

$$F[\hat{x}(t|t-1)] \equiv \left. \frac{df[x(t-1)]}{dx(t-1)} \right|_{x=\hat{x}(t|t-1)}$$

$$G[\hat{x}(t|t-1)] \equiv \left. \frac{dg[x(t)]}{dx(t)} \right|_{x=\hat{x}(t|t-1)}$$

**Tableau 5.2** — Algorithme du filtrage de Kalman étendu [Candy, 2009].

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{k+1} &= F_{k+1}(\hat{X}_{k,k}, 0) \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{Tc}{f} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{X,k+1} &= \frac{\partial F_{k+1}}{\partial s}(\hat{X}_{k,k}, 0) \\ &= \left[ \frac{\partial F_{k+1}}{\partial \delta} \quad \frac{\partial F_{k+1}}{\partial \tau} \right](\hat{X}_{k,k}, 0) \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{Tc}{f} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{v,k+1} &= \frac{\partial F_{k+1}}{\partial v_k}(\hat{X}_{k,k}, 0) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Quant à la fonction d'observation, elle est donnée par :

$$y_k \approx \tilde{G}_k + \tilde{G}_{X,k+1} [X_k - \hat{X}_{k,k-1}] + \tilde{G}_{w,k} w_k \quad (5.23)$$

Où l'on a :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k &= G_k(\hat{X}_{k,k-1}, 0) \\ &= \left[ \eta \cdot \exp\left(-\frac{(\delta_i - \delta_I)^2}{\Sigma_\delta} - \frac{(\tau_j - \tau_I)^2}{\Sigma_\tau}\right) + w_k \right] (\hat{X}_{k,k-1}, 0) \\ \tilde{G}_k &= \left[ \eta \cdot \exp\left(-\frac{(\delta_i - \hat{\delta}_{k,k-1})^2}{\Sigma_\delta} - \frac{(\tau_j - \hat{\tau}_{k,k-1})^2}{\Sigma_\tau}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{X,k} &= \frac{\partial G_k}{\partial X}(\hat{X}_{k,k-1}, 0) \\ &= \left[ \frac{\partial G_k}{\partial \delta} \quad \frac{\partial G_k}{\partial \tau} \right] (\hat{X}_{k,k-1}, 0) \end{aligned} \quad (5.25)$$

## 5.5 Résultats de la simulation

Nous avons réalisé plusieurs simulations paramétrées en faisant varier des grandeurs comme la hauteur des vagues, la distance de la cible par rapport à l'origine, la distribution et le niveau de bruit d'observation. Nous avons fait par la suite une comparaison entre les courbes théoriques et celles obtenues à la sortie du filtre, afin d'analyser les performances et la robustesse du filtre de Kalman étendu pour le suivi de la cible marine.

Nous rappelons que les résultats présentés dans cette section ont été réalisés dans une version intermédiaire. Les équations de mouvement de la cible sont générées sur une durée de 10 secondes, et pour une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 40\text{kHz}$ .

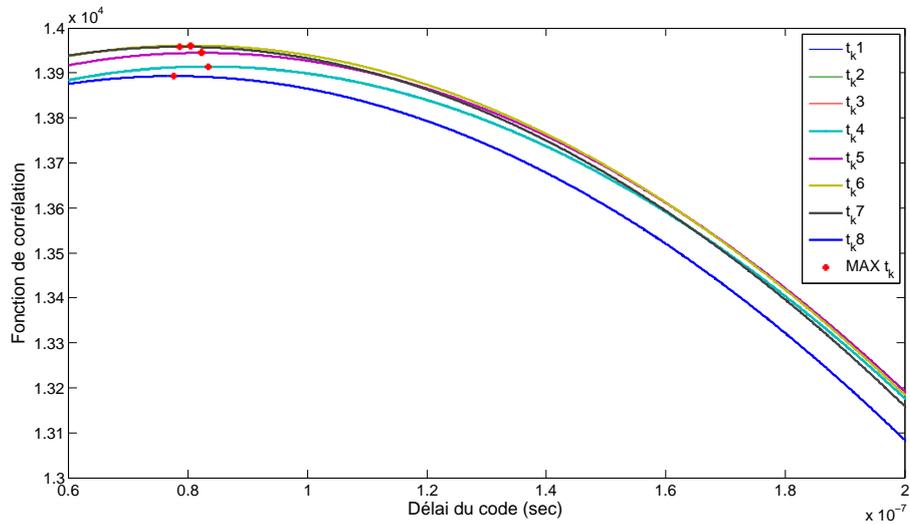
Cependant, pour mesurer des variations faibles de cette surface et donc des variations faibles des temps de parcours de l'onde réfléchie nous considérons une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 8\text{GHz}$ .

Dans la figure 5.5, on trouve la projection de la densité spectrale de puissance DSP sur l'axe  $\tau$  pour chacune des  $k = 8$  observations séparées par  $0.45\text{s}$ . Nous avons estimé la différence entre les retards :  $\Delta_{\tau,max} - \Delta_{\tau,min} = 6.06\text{ns}$ . Pour ces mêmes observations, nous avons calculé aussi la différence des valeurs du Doppler :

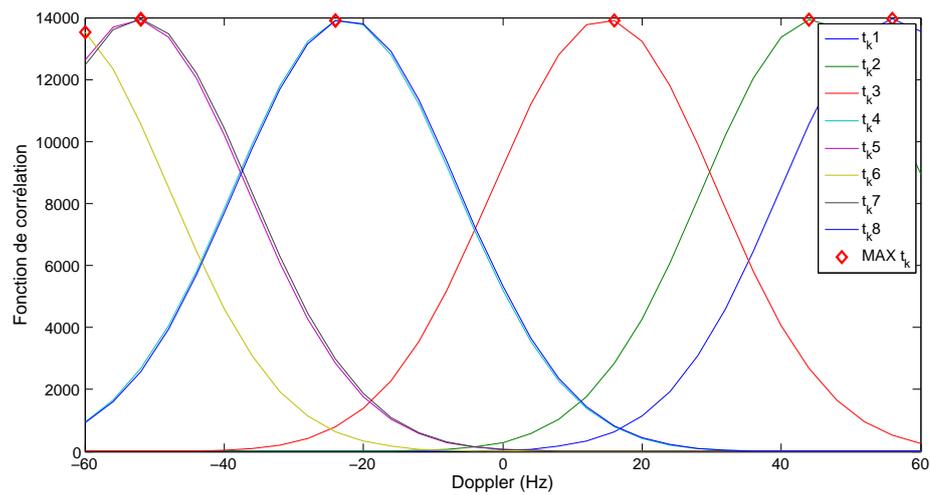
$$\Delta_{\delta,max} - \Delta_{\delta,min} = 120\text{Hz} \quad (\text{Fig. 5.6}).$$

Nous avons remarqué que la différence du retard temporel est tellement faible et par la suite difficile à détecter même avec la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 8\text{GHz}$  utilisée ici.

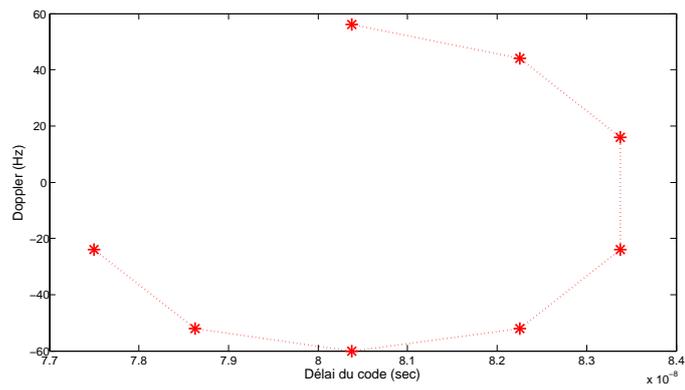
D'après la figure 5.7, nous pouvons déduire qu'il est possible de retrouver la trajectoire de la cible.



**Figure 5.5** — La projection de la fonction de corrélation sur l'axe  $\tau$  pour  $k = 8$  observations



**Figure 5.6** — La projection de la fonction de corrélation sur l'axe  $\delta$  pour  $k = 8$  observations



*Figure 5.7* — Position estimée de la cible pour  $k = 8$  observations



---

# Conclusion et perspectives

## 5.6 Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse concernait la modélisation de la propagation des signaux des systèmes de navigation par satellites (GNSS) dans un environnement marin.

Il s'agit d'un travail multidisciplinaire impliquant les GNSS (partie I), l'océanographie (partie II) et le traitement du signal (partie III). La bibliographie menée dans ce document était ainsi diversifiée, avec une attention particulière portée aux GNSS (chapitre 1).

Pour modéliser l'interaction entre la surface de mer et les signaux GNSS, en particulier le GPS, réfléchis par cette surface, nous avons développé des algorithmes basés sur la théorie de Kalman et sur la fonction de corrélation des signaux réfléchis.

Plus précisément, nous avons considéré un système radar bi-statique, composé principalement d'un émetteur de signaux GPS, d'un récepteur côtier à deux voies, et d'une cible en mouvement sur la surface de mer. Cette cible pouvait être un élément de la surface, la crête d'une vague, une bouée, ...

L'objectif consistait à quantifier le signal réfléchi sur cette cible, elle-même mobile, et reçu par l'antenne, en déterminant le retard du code et la fréquence doppler de ce type de signaux par rapport au signal direct. Le signal direct et le signal réfléchi sur la cible étaient reçus séparément, sur deux voies distinctes, par l'antenne.

Dans le cas de réflexion sur la cible mobile, deux problèmes se sont posés :

- La puissance du signal reçu :  
Celui-ci est atténué par le processus de réflexion sur la surface de mer, et par suite, il est noyé dans le « clutter » de mer.
- Le mouvement continu de la cible :  
Afin de pouvoir détecter le doppler et le retard, une adaptation de la configuration bi-statique, impliquant l'évolution de la position de la cible, était donc exigée.

Afin de ressortir le signal du bruit, en maximisant son amplitude, nous avons proposé des méthodes dédiées à l'acquisition des signaux faibles, comme par exemple, l'intégration des signaux réfléchis sur une longue durée (chapitre 2).

Nous avons calculé le produit de corrélation du signal réfléchi avec une réplique de

son code générée au niveau du récepteur (c'est un mode d'acquisition propre au signal déterministe du GPS), sur plusieurs périodes de code du signal réfléchi. Dans cette intégration, interviennent des sommations cohérentes, incohérentes, ainsi que la gestion des bits de données (chapitre 3).

L'intégration longue des signaux réfléchis sur la cible, est rendue difficile à cause de son mouvement. Il était donc essentiel de proposer une méthode, qui permet d'estimer le trajet effectué par la cible, à partir d'une position initiale, et de mesures d'observations concernant des aspects particuliers du mouvement. La théorie de Kalman se présentait alors comme une solution efficace pour ce type de problématiques.

Dans un premier temps, nous avons développé un algorithme de filtrage de Kalman linéaire. Nous avons choisi de poursuivre la cible mobile en fonction du retard du code et du doppler du signal réfléchi. Pour modéliser cet aspect, nous avons construit un modèle d'état basé sur l'estimation, pour des instants différents, des valeurs du retard et du doppler. Les observations, ou les mesures de capteurs en pratique, ont été obtenues en mesurant, dans le plan Doppler-Retard, les coordonnées du pic ayant l'amplitude maximale. Ce pic résulte de la corrélation du signal réfléchi avec la réplique du code (chapitre 4).

Ce modèle supposait que ce pic était détectable et discriminable dans le plan doppler - retard, permettant de retrouver pour tout instant d'observation, le maximum de corrélation. Or, dans une scène maritime, ce n'est pas toujours possible. Pour une caractérisation plus réaliste, nous avons pris en compte l'ensemble des points constituant la carte Doppler-Retard. Ainsi, dans un deuxième temps, une autre approche basée sur la même théorie de filtrage a été proposée. Il s'agit du filtre de Kalman étendu. Toutefois, le type d'observations n'est plus tout à fait le même dans ce cas. Les mesures du doppler et du retard, sont alors remplacées par les cartes Doppler-Retard. Ces cartes représentent la corrélation du signal brut reçu, pour des instants d'observations distincts (chapitre 5).

Dans ce document, nous avons essayé de présenter notre problématique d'une façon claire. A travers les différents chapitres, nous avons décrit les étapes nécessaires pour mener notre étude à sa fin. Comme nous avons voulu que ce travail soit initiateur et explorateur de la problématique de la mesure passive ou encore la réflectométrie, nous avons posé des hypothèses simples tout en étant révélatrices de la situation. Les résultats obtenus dans les chapitres (3, 4 et 5), nous permettent de constater que le raisonnement utilisé pour traiter notre problématique est correct.

En effet, nous avons vu dans le chapitre 3, qu'il est possible d'utiliser des signaux d'opportunité, comme les signaux GPS, pour détecter une cible mobile à la surface de la mer, en analysant finement l'amplitude de son pic de corrélation, son retard et son doppler. Dans le chapitre 4, nous avons affiné le problème de détection de la cible. Nous avons considéré des grandeurs et des dimensions plus compatibles avec le cas de la mer. Ensuite, nous avons étendu le problème de détection de la cible en un problème de suivi de cible, via un processus de Kalman linéaire. La forme des trajectoires issues de ce filtre montrait une cohérence avec les trajectoires (dans un repère Doppler-Retard) théoriques. Enfin, dans le chapitre 5, nous avons complété la forme des observations utilisées, en proposant l'utilisation du filtrage de Kalman étendu. Pour retrouver d'une

façon précise les valeurs du retard et du Doppler, nous avons utilisé une fréquence d'échantillonnage assez élevée.

A l'issue de notre filtre, nous avons réussi à obtenir des valeurs du Doppler d'une manière assez nette. Cependant, l'évolution entre le maximum et le minimum du retard était de l'ordre de quelques nanosecondes, valeur qui est critique et difficile à exploiter dans ce contexte. Ceci pourrait nous ramener à baisser la fréquence d'échantillonnage et à proposer une alternative pour la dimension du retard dans cette analyse.

## 5.7 Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse, constitue une partie intégrante du projet MOPS. Et donc, une évaluation de ce travail ne peut pas se faire dans un cadre indépendant de celui du projet. Étant donné que cette thèse était la première étape du projet qui a démarré, nous étions contraints d'adopter des hypothèses simples concernant le milieu marin, et des cas canoniques de cibles.

Une validation de nos algorithmes avec des signaux réels n'a pas été possible avant la rédaction du présent manuscrit. Toutefois, elle est prévue, avec des données réelles issues de la plateforme de mesures du projet. Pour de futurs travaux en relation avec cette thèse, nous recommandons d'apporter quelques informations supplémentaires.

- Dans le cas de la configuration bi-statique, nous proposons d'insister sur les dimensions du système bi-statique, surtout étudier le mouvement des satellites ([Coatanhay *et al.*, 2007]) (dans cette thèse, nous avons considéré que le satellite était fixe sur la durée d'intégration), et de quantifier la puissance réfléchiée par la réflexion spéculaire (travaux de [Zavorotny et Voronovich, 2000], [Stienne *et al.*, 2011] et [Azmani *et al.*, 2010]).
- Nous proposons également de mieux estimer le bruit de modèle dans le processus de filtrage.
- La comparaison entre les filtres de Kalman étendu et sans parfum est à considérer ([Candy, 2009]).



---

## Liste des publications et participations scientifiques

### Article de revue avec comité de lecture

TAY Sarab, MAUSSANG Frederic, COATANHAY Arnaud, CHONAVEL Thierry, GARELLO René. **Near sea surface target tracking by extended Kalman filtering of the GPS reflected signals**. IEEE Oceanic Engineering Society Newsletter, July 2011, vol. XLVI, n° 2, pp. 19 – 22

### Communication dans une conférence à comité de lecture

TAY Sarab, MAUSSANG Frederic, COATANHAY Arnaud, CHONAVEL Thierry, GARELLO René. **Near sea surface target tracking by extended Kalman filtering of the GPS reflected signals**. IEEE Oceans'11 , June 06 – 09, Santander, Spain, 2011, ISBN 978-1-4577-0087-3

TAY Sarab, COATANHAY Arnaud, MAUSSANG Frederic, GARELLO René. **A tracking algorithm for GNSS reflected signals on sea surface**. IGARSS 2010 : IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 25 – 30 july 2010, Honolulu, Hawaii, United States, 2010, pp. 3821 – 3824, ISBN 978-1-4244-9566-5

TAY Sarab, MAUSSANG Frederic, COATANHAY Arnaud, GARELLO René. **Kalman filtering of GPS signals for target tracking application**. Passive 2010 conference, June 23 – 25 , Brest, France, 2010

TAY Sarab, MAUSSANG Frederic, COATANHAY Arnaud, GARELLO René. **New concept of passive measure using GNSS reflected signals in oceanographic applications**. IEEE Oceans'09, May 11 – 14, Bremen, Germany, 2009, ISBN 978-1-4244-2523-5



---

# Bibliographie

- [gps, 2011] (2011). [www.gps.gov/systems/gps/modernization/civilsignals](http://www.gps.gov/systems/gps/modernization/civilsignals). Consulté le 6 octobre 2011.
- [Akopian, 2001] AKOPIAN, D. (2001). A Fast Satellite Acquisition Method. Salt Lake City , UT, USA. ON GPS 2001.
- [Akos, 1997] AKOS, D. (1997). A Software Radio Approach to Global Navigation Satellite System Receiver Design. Rapport technique, Ohio University, Athens, OH.
- [Anderson et Moore, 1979] ANDERSON, B. et MOORE, J. (1979). *Optimal Filtering*. NJ : Prentice Hall.
- [Anderson, 1995] ANDERSON, K. (1995). A GPS Tide Gauge. *GPS World Showcase*, (6).
- [Apel, 1994] APEL, J. R. (1994). An Improvement Model of the Ocean Surface Wave Vector Spectrum and its Effects on Radar Backscatter. *Journal of Geophysical Research*, (99):16269 – 16291.
- [Auber *et al.*, 1994] AUBER, J., BIBAUT, A. et RIGAL, J. (1994). Characterization of Multipath on Land and Sea at GPS Frequencies. pages 1155 – 1171, Salt Lake City, UT, USA. ION GPS - 94.
- [Azmani *et al.*, 2010] AZMANI, M., REBOUL, S., CHOQUEL, J. et BENJELLOUN, M. (2010). Soil Moisture Estimation using Land-Reflected GPS L2C Bi-Static Radar Measurements. In *23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation*.
- [Bar-Shalom et Li, 1993] BAR-SHALOM, Y. et LI, X. (1993). *Estimation and Tracking : Principles, Techniques, and Software*. Artech House, Norwood, MA.
- [Bjerkaas et Riedell, 1979] BJERKAAS, A. et RIEDELL, F. (1979). Proposed Model for the Elevation Spectrum of a Wind - Roughened Sea Surface. Technical Report APL - TG - 1328 - I - 31, Appl. Phys. Lab, John Hopkins University, Laurel, Md.
- [Boers et Driessen, 2004] BOERS, Y. et DRIESSEN, J. N. (2004). Multitarget particle filter track before detect application. *IEE Proc. of Radar Sonar Navigation*, 151(6).
- [Boost, 2005] BOOST (2005). Galileo et ses applications maritimes. Rapport technique, Boost Technologies.
- [Borre *et al.*, 2007] BORRE, K., AKOS, D., BERTELSEN, N., RINDER, P. et JENSEN, S. (2007). *A Software-Defined GPS and Galileo Receiver*. Birkhäuser.

- [Brown et Hwang, 1992] BROWN, R. G. et HWANG, P. Y. (1992). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons.
- [Candy, 2009] CANDY, J. (2009). *Bayesian Signal Processing : Classical, Modern, and Particle Filtering Methods*. John Wiley & Sons.
- [Candy et Rozsa, 1980] CANDY, J. et ROZSA, R. (1980). Safeguards for a Plutonium-Nitrate Concentrator-an Applied Estimation Approach. *Automatica*, 16:615 – 627.
- [Candy et Sullivan, 1992] CANDY, J. et SULLIVAN, E. (1992). OceanAcoustic Signal Processing :A Model-Based Approach. *Journal of Acoustic Society of America*, 92: 3185 – 3201.
- [Chonavel, 2009] CHONAVEL, T. (2009). *Techniques de filtrage : Filtres de Wiener et filtres adaptés, filtres de Kalman et filtres particuliers*. Télécom Bretagne. Document interne.
- [Chui et Chen, 1991] CHUI, C. et CHEN, G. (1991). *Kalman Filtering with Real Time Applications*. NY : Springer - Verlag.
- [Coatanhay et al., 2007] COATANHAY, A., ARNOLD-BOS, A. et KHENCHAF, A. (2007). Simulation of a GNSS signal for a receiver near a time-evolving sea surface. In *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, ICEAA 2007*, pages 153 –156.
- [Coatanhay et al., 2008] COATANHAY, A., GARELLO, R., CHAPRON, B. et ARDHUIN., F. (2008). Project MOPS : Marine Opportunity Passive Systems. Hyeres, France. Passive '08.
- [Cox et Munk, 1954] COX, C. et MUNK, W. (1954). Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. *Journal of the Optical Society of America*, 44:838 – 850.
- [Dierendonck, 1996] DIERENDONCK, A. (1996). *Global Positioning system : Theory and Applications*, volume 1 de *Chapter : GPS Receivers*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington.
- [Donelan et Pierson, 1987] DONELAN, M. A. et PIERSON, W. J. P. (1987). Radar Scattering and Equilibrium Ranges in Wind - Generated Waves with Application to Scatterometry. *Journal of Geophysical Research*, 92:4971 – 5029.
- [Durden et Vesecky, 1985] DURDEN, S. L. et VESECKY, J. F. (1985). A Physical Radar Cross - Section Model for a Wind - Driven Sea with Swell. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, (0E - 10):445 – 451.
- [Elfouhaily et al., 1997] ELFOUHAILY, T., CHAPRON, B., KATSAROS, K. et VANDERMARK, D. (1997). A unified directionnal spectrum for long and short wind - driven waves. *Journal of Geophysical Research*, 102(15):781 – 796.
- [Garrison et al., 1997] GARRISON, J., KATZBERG, S. et HOWELL, C. (1997). Detection of Ocean Reflected GPS Signals : Theory and Experiment. pages 290 – 294, Blacksburg, VA, USA. IEEE South-Eastcon'97 : Engineering The New Century.
- [Gelb, 1974] GELB, A. (1974). *Applied Optimal Estimation*. The MIT Press.
- [Gibbons, 2008] GIBBONS, G. (2008). Glonass - A New Look for the 21st Century. *Inside GNSS : Integrity Beyond RAIM, Beyond GPS*, 3(4).

- [Gold, 1967] GOLD, R. (1967). Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 13(4):619–621.
- [Golomb, 1964] GOLOMB, S. W. (1964). *Digital Communications with Space Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- [Grewal et Angus, 1993] GREWAL, M. et ANGUS, P. (1993). *Kalman Filtering : Theory and Practice*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- [Gurgel, 2009] GURGEL, K. (2009). High-Frequency Over-the-Horizon Radar Applications in Oceanography : Basic Physics of HF RDar. Tutorial, University of Hamburg, Centre for Marine and Climate Research.
- [Hara *et al.*, 1994] HARA, T., BOCK, E. et LYZENGA, D. (1994). In situ measurements of capillary - gravity wave spectra using a scanner laser slope gauge and microwave radars. *Journal of Geophysical Research*, 99(12):593 – 602.
- [Ho et Lee, 1964] HO, Y. et LEE, R. (1964). A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9:333 – 339.
- [Jacobs, 1993] JACOBS, O. (1993). Introduction to Control Theory. *Oxford University Press*.
- [Jähne et Riemer, 1990] JÄHNE, B. et RIEMER, K. S. (1990). Two Dimensional Wavenumber Spectra of Small-Scale Water Surface Waves. *Journal of Geophysical Research*, 95(11):531–546.
- [Jazwinski, 1970] JAZWINSKI, A. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York.
- [Julier et Uhlmann, 1997] JULIER, S. J. et UHLMANN, J. K. (1997). A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. In *AeroSense : The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls*.
- [Kalman, 1960] KALMAN, R. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82:35 – 45.
- [Kaplan et Hegarty, 2006] KAPLAN, E. D. et HEGARTY, C. (2006). *Understanding GPS : Principles and Applications*. Artech House Publishers.
- [Katzberg et Garisson, 1996] KATZBERG, S. et GARISSON, J. (1996). Utilizing GPS to Determine Ionospheric Delay over the Ocean. Technical Memory 4750, NASA .
- [Khairi *et al.*, 2010] KHAIRI, R., COATANHAY, A. et KHENCHAF, A. (2010). The observability of marine weather conditions using the electromagnetic waves scattering from the sea surface : A statistical analysis. In *ICEAA*, Sydney, Australia.
- [Landau et Lifchitz, 1971] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. (1971). *Mécanique des fluides*. Editions de Moscou.
- [Lewis, 1986] LEWIS, R. (1986). *Optimal Estimation with an Stochastic Control Theory*. John Wiley & Sons.
- [Lowe *et al.*, 2002] LOWE, S., LABREQUE, J., ZUFFADA, C., ROMANS, L., YOUNG, L. et HAJJ, G. A. (2002). First Spaceborne Observation of an Earth-Reflected GPS Signal. *Radio Science*, 37(1).

- [Lurton, 2010] LURTON, T. (2010). *Modélisation et simulation de l'interaction entre onde électromagnétique et surfaces de mer*. Thèse de doctorat, Télécom Bretagne.
- [Martín-Neira, 1993] MARTÍN-NEIRA, M. (1993). A Passive Reflectometry and Interferometry System (PARIS) : Application to Ocean Altimetry. *ESA Journal*, 17:331 – 355.
- [Martín-Neira, 1999] MARTÍN-NEIRA, M. (1999). Using GNSS Signals for Ocean Observation. ETP Technical Notes 8, ESA - ESTEC.
- [Maybeck, 1979] MAYBECK, P. (1979). *Stochastic Models, Estimation, and Control*. Academic Press, New York.
- [Mendel *et al.*, 1981] MENDEL, J., KORMYLO, J., LEE, J. et ASHIRAFI, F. (1981). A Novel Approach to Seismic Signal Processing and Modeling. *Geophysics*, 46:1398 – 1414.
- [Mouche, 2005] MOUCHE, A. (2005). *Apport de la double polarisation pour l'étude expérimentale et théorique de la section efficace radar de la surface océanique*. Thèse de doctorat, Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines.
- [Nathanson, 1969] NATHANSON, F. E. (1969). *Radar Design Principles*. McGraw-Hill, New York.
- [Norgués-Correig *et al.*, 2007] NORGUÉS-CORREIG, O., CARDELLACH-GALÍ, E., CAMPDERRÓS, J. S. et RIUS, A. (2007). A GPS Reflections Receiver That Computes Doppler/Delay Maps in Real Time. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(1):156 – 174.
- [ONU, 2010] ONU (2010). Current and Planned Global and Regional Navigation Satellite Systems and Satellite-based Augmentations Systems. Rapport technique, United Nations, Office for outer space affairs, New York, USA.
- [Oppenheim et Schafer, 1999] OPPENHEIM, A. et SCHAFER, R. (1999). *Discrete Time Signal Processing*. NJ : Prentice Hall.
- [Phillips, 1977] PHILLIPS, O. (1977). *The dynamics of the upper ocean*.
- [Piéplu, 2006] PIÉPLU, J. (2006). *GPS et Galileo : Systèmes de navigation par satellite*. Editions Eyrolles.
- [Psiaki, 2001] PSIAKI, M. (2001). Block Acquisition for Weak GPS Signals in a Software Receiver. Salt Lake City, UT, USA. ION GPS.
- [Rabaste et Chonavel, 2007] RABASTE, O. et CHONAVEL, T. (2007). Estimation of Multipath Channels with Long Impulse Response at Low SNR, via a MCMC Method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(4):1312 – 1325.
- [Raikotondrainibe *et al.*, 2011] RAIKOTONDRAINIBE, L., CAROUEN, N., LEROUX, Y., COATANHAY, A., GARELLO, R., MAUSSANG, F., CHAPRON, B. et ARDHUIN, F. (2011). Projet MOPS : système dédié à l'utilisation des signaux GNSS pour l'océanographie et la surveillance de la surface de la mer. In *17èmes Journées Nationales Microondes*.
- [Ristic *et al.*, 2004] RISTIC, B., ARULAMPALAM, S. et GORDON, N. (2004). *Beyond the Kalman Filter : Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House Publishers.

- [Ruffini, 2006] RUFFINI, G. (2006). A Brief Introduction to Remote Sensing Using GNSS Reflections. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Society Newsletter*, pages 15 – 21.
- [Ruffini *et al.*, 2002] RUFFINI, G., CAPARRINI, M. et RUFFINI, L. (2002). PARIS Altimetry with L1 Frequency Data from the Bridge 2 Experiment. Rapport technique ESA/ESTEC Contract No. 14285/85/nl/pb, Starlab CCN3-WP3, Abridged Starlab ESA/ESTEC. <http://starlab.es> Library.
- [Ruffini *et al.*, 2003] RUFFINI, G., SOULAT, F., CAPARRINI, M., GERMAIN, O. et MARTIN-NEIRA, M. (2003). The GNSS-R Eddy Experiment I : Accurate GNSS-R Ocean Altimetry from Low Altitude Aircraft. Workshop on Oceanography with GNSS Reflections.
- [Ruffini *et al.*, 2004] RUFFINI, G., SOULAT, F., CAPARRINI, M., GERMAIN, O. et MARTIN-NEIRA, M. (2004). The Eddy Experiment - Accurate GNSS-R Ocean Altimetry from Low Altitude Aircraft. *Geophysical Research Letters*, 31(12).
- [Sorenson, 1983] SORENSON, H. (1983). Special Issue on Applications of Kalman Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 3(AC - 28):253 – 427.
- [Soulat, 2003] SOULAT, F. (2003). *Sea Surface Remote Sensing with GNSS and Sunlight Reflections*. Thèse de doctorat, Universitat Politècnica de Catalunya.
- [Soulat *et al.*, 2006] SOULAT, F. *et al.* (2006). Oceanpal Experimental Campaigns. ESTEC, Noordwijk, Nederland. GNSS-R '06 Workshop.
- [Spaans, 2006] SPAANS, J. (2006). Global Navigation Satellite Systems. *Hydro International*.
- [Stang et Borre, 1997] STANG, G. et BORRE, K. (1997). *Linear Algebra, Geodesy and GPS*. Wellesley - Cambridge Press, Wellesly, MA.
- [Stienne *et al.*, 2011] STIENNE, G., REBOUL, S., CHOQUEL, J. et BENJELLOUN, M. (2011). A Phase Open Loop for the Long Coherent Integration of the Bi-Static Radar EGNOS Signal. *In Space Réflécto*.
- [Treuhaft *et al.*, 2001] TREUHAF, R., LOWE, S., ZUFFADA, C. et CHAO, Y. (2001). Two-cm GPS Altimetry over Crater Lake. *Geophysical Research Letters*, 22(23): 4343–4346.
- [Zavorotny et Voronovich, 2000] ZAVOROTNY, V. et VORONOVICH, A. (2000). Scattering of GPS Signals from the Ocean with Wind Remote Sensing Application. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(2):951 – 964.



# A

## Corrélation circulaire

---

### Corrélation circulaire

Soient deux séquences  $x(n)$  et  $y(n)$  quelconques de même longueur  $N$ .

Les Transformées de Fourier Discrètes de  $x(n)$  et  $y(n)$  s'écrivent :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad (\text{A.1})$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad (\text{A.2})$$

Le produit de corrélation circulaire  $z(n)$  entre les deux séquences périodiques  $x(n)$  et  $y(n)$  est donné par :

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(m+n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(-m)y(m-n) \quad (\text{A.3})$$

La TFD (Transformée de Fourier Directe) de  $z(n)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Z(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(-m)y(m-n) e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{j2\pi km/N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y(m+n) e^{-j2\pi k(n+m)/N} \\ &= X^*(k)Y(k) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où  $X^*(k)$  est le conjugué de  $X(k)$



L'échelle de Beaufort est une échelle de mesure empirique, comportant 13 degrés (de 0 à 12), de la vitesse moyenne du vent sur une durée de dix minutes utilisée dans les milieux maritimes. Le degré Beaufort correspond à la vitesse moyenne du vent. Si cette vitesse peut être mesurée avec une bonne précision à l'aide d'un anémomètre, il est commode, en mer, d'estimer cette vitesse par la seule observation des effets du vent sur la surface de la mer.

Il revient à l'amiral britannique Francis Beaufort (1774-1857) d'avoir, en 1805, imaginé une échelle comportant des critères assez précis pour quantifier le vent en mer et permettre la diffusion d'informations fiables universellement comprises. Ce fut l'« échelle de Beaufort ».

Échelle d'état de la mer		
Code	Description	Haut (m)
0	Calme	0
1	Calme (ridée)	0,1
2	Belle	0,1-0,5
3	Peu Agitée	0,5-1,25
4	Agitée	1,25-2,5
5	Forte	2,5-4
6	Très forte	4-6
7	Grosse	6-9
8	Très Grosse	9-14
9	Enorme	>14

*Tableau B.1* — Échelle d'état de la mer

Échelle de Beaufort					
Etat de mer	Force	Description	Noeuds	Km/h	Haut. prob. vagues (m)
Comme un miroir	0	Calme	<1	<1	0
Quelques rides	1	Très légère brise	1-3	1-5	0,1 (0,1)
Vaguettes ne déferlant pas	2	Légère brise	4-6	6-11	0,2 (0,3)
Les moutons apparaissent	3	Petite brise	7-10	12-19	0,6 (1)
Petites vagues, nombreux moutons	4	Jolie brise	11-16	20-28	1 (1,5)
Vagues modérés, moutons, embruns	5	Bonne brise	17-21	29-38	2 (2,5)
Lames, crêtes d'écume blanche, embruns	6	Vent frais	22-27	39-49	3 (4)
Lames déferlantes, traînées d'écumes	7	Grand frais	28-33	50-61	4 (5,5)
Tourbillons d'écume à la crête des lames, traînées d'écumes	8	Coup de vent Gale	34-40	62-74	5,5 (7,5)
Lames déferlantes, grosses à énormes, visibilité réduite par les embruns	9	Fort coup de vent	41-47	75-88	7 (10)
	10	Têmpete	48-45	89-102	9 (12,5)
	11	Violente tempête	56-63	103-117	11,5 (16)
	12	Ouragan	> 64	> 118	>14

Tableau B.2 — Échelle de Beaufort

## C

---

# Filtrage de Kalman sans parfum

Le Filtre de Kalman Etendu (FKE) impose le calcul en chaque point de linéarisation de la matrice jacobienne des dérivées partielles des fonctions  $F_t$  et  $G_t$ . Outre cette complexité, son bon fonctionnement est lié à la validité de l'approximation linéaire du système pour le pas d'échantillonnage employé. Il peut résulter de l'abus de l'hypothèse linéaire des instabilités du FKE. Le filtrage sans parfum propose une solution approchée de faible complexité à ce problème [Chonavel, 2009].

## C.1 Problème de cohérence du FKE

Dans le cadre du filtrage de Kalman, la loi de  $x_n$  sachant  $y_{1:n}$  est décrite au moyen de ses deux premiers moments (vecteur moyenne et matrice de covariance) donnés respectivement par  $\hat{x}_{n,n}$  et  $C_n$ . Le point de vue du FKE peut être résumé comme suit : étant données deux variables aléatoires  $U$  et  $v$ , liées par une relation de la forme  $v = g(U)$ , comment obtenir des expressions approchées, notées respectivement  $\bar{v}$  et  $C_v$  de la moyenne et de la matrice de covariance de  $v$  en fonction des paramètres  $\bar{U}$  et  $C_U$  correspondants de  $U$ . En considérant des développements au premier et au second ordre respectivement pour  $\bar{v}$  et  $C_v$  en fonction de  $\bar{U}$  et  $C_U$ , et en supposant de la loi de  $U$  est paire, on trouve :

$$\bar{v} \approx g(\bar{U}), \text{ et } C_v \approx \nabla g(\bar{U})C_U[\nabla g(\bar{U})]^T. \quad (\text{C.1})$$

Afin d'avoir une estimation cohérente de ces paramètres, il faudrait que :

$$C_v \geq E[(v - \bar{v})(v - \bar{v})^T]. \quad (\text{C.2})$$

En effet, si  $\bar{v}$  et  $C_v$  correspondent aux vraies valeurs des paramètres, on doit avoir l'égalité, tandis qu'en présence d'erreur sur la moyenne de  $v$ ,  $E[(v - \bar{v})(v - \bar{v})^T]$  est égale à la vraie covariance plus un terme d'erreur positif (au sens de la positivité des matrices) qui vaut  $(E[v] - \bar{v})(E[v] - \bar{v})^T$ . La matrice  $C_v$  doit donc être supérieure ou égale (au sens de l'inégalité des matrices positives) à  $E[(v - \bar{v})(v - \bar{v})^T]$ . Si cette inégalité n'est pas respectée, cela signifie que la linéarisation a introduit une réduction de variance au prix d'un accroissement de biais sur l'estimateur de la moyenne. Avec l'EKF, ce

problème peut être géré par l'ajout d'un terme de bruit artificiel supplémentaire dont le niveau est souvent difficile à régler.

## C.2 Transformation sans parfum

Pour résoudre le problème précédant, Julier et Uhlmann [Julier et Uhlmann, 1997] ont introduit la transformation *sans parfum* (en anglais *unscented transform*) qui est définie comme suit :

$$\begin{aligned} U_0 &= \bar{U}, & w_0 &= \frac{\lambda}{d+\lambda}, \\ U_i &= \bar{U} + [\sqrt{(d+\lambda)C_U}]_i, & w_i &= \frac{1}{2(d+\lambda)}, \\ U_{d+i} &= \bar{U} - [\sqrt{(d+\lambda)C_U}]_i, & w_{d+i} &= \frac{1}{2(d+\lambda)}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où  $d$  est la dimension de  $U$ ,  $\sqrt{M}$  une matrice telle de  $M = \sqrt{M}^2$  et  $[M]_i$  est la  $i$ ème colonne de  $M$ . En notant  $v_i = g(U_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2d$ , on définit alors  $\bar{v}$  et  $C_v$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sum_{i=0}^{2d} w_i v_i \\ C_v &= \sum_{i=0}^{2d} w_i (v_i - \bar{v})(v_i - \bar{v})^T. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Souvent, la valeur de  $w_0$  utilisée pour évaluer  $C_v$ , notée  $w_0^c$ , diffère de celle employée pour évaluer la moyenne, notée  $w_0^m$ . On prend  $w_0^m = \frac{\lambda}{(d+\lambda)}$  et  $w_0^c = \frac{\lambda}{(d+\lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta)$ , avec  $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$ .

$\alpha$  détermine la dispersion des points auxiliaires  $U_i$  autour de  $\bar{U}$ , et est choisi dans l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  en général.

$\kappa$  est généralement fixé à 0 pour l'estimation de l'état en filtrage et à  $3 - d$  pour l'estimation de paramètre.

$\beta$  permet de prendre en compte une connaissance a priori sur la loi de  $U$  ( $\beta = 2$  est optimal dans le cas gaussien).

La transformation sans parfum possède quelques propriétés intéressantes :

- le développement au premier et second ordre près respectivement de  $\bar{v}$  et de  $C_v$  correspondent à  $g(\bar{U})$  et  $\nabla g(\bar{U})C_U[\nabla g(\bar{U})]^T$  ;
- On peut choisir indifféremment la racine de  $C_U$  avec laquelle on définit les grandeurs  $U_i$  ;
- L'algorithme est relativement rapide (en particulier, il ne requiert pas le calcul de  $\nabla g(\bar{U})$ ).

## C.3 Équations du filtre de Kalman sans parfum

Pour simplifier la description du filtre de Kalman sans parfum, limitons nous ici à un modèle d'état de la forme :

$$\begin{cases} x_{t+1} = F_t(x_t) + v_t \\ y_t = G_t(x_t) + w_t \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

On notera  $\gamma = \sqrt{d + \lambda}$ .  $B_k$  et  $C_k$  représentent les matrices de covariances des erreurs de prédiction et de filtrage de l'état et  $Q_{v,t}$  et  $Q_{w,t}$  les matrices de covariance de  $v_t$

et  $w_t$ . Pour  $t > 0$ , les équation du filtre de Kalman sans parfum sont alors données ci-dessous :

initilisation :  $\hat{x}_{0,0}$  et  $C_0$  donnés.

itérations :

$$\begin{aligned}
x_{t-1} &= [\hat{x}_{t-1,t-1}, \{\hat{x}_{t-1,t-1} + \gamma(\sqrt{C_{t-1}})_i\}_{i=1:d}, \{\hat{x}_{t-1,t-1} - \gamma(\sqrt{C_{t-1}})_i\}_{i=1:d}] \\
x_{t,t-1}^* &= [F_t(\hat{x}_{t-1,t-1}), \{F_t(\hat{x}_{t-1,t-1} + \gamma(\sqrt{C_{t-1}})_i)\}_{i=1:d}, \{F_t(\hat{x}_{t-1,t-1} - \gamma(\sqrt{C_{t-1}})_i)\}_{i=1:d}] \\
\hat{x}_{t,t-1} &= \sum_{i=0}^{2d} w_i^m (x_{t,t-1}^*)_i \\
B_t &= \sum_{i=0}^{2d} w_i^c [(x_{t,t-1}^*)_i - \hat{x}_{t,t-1}] [(x_{t,t-1}^*)_i - \hat{x}_{t,t-1}]^T + Q_{v,t} \\
x_{t,t-1} &= [\hat{x}_{t-1,t-1}, \{\hat{x}_{t-1,t-1} + \gamma(\sqrt{B_t})_i\}_{i=1:d}, \{\hat{x}_{t-1,t-1} - \gamma(\sqrt{B_t})_i\}_{i=1:d}]
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
y_{t,t-1} &= [G_t(\hat{x}_{t-1,t-1}), \{G_t(\hat{x}_{t-1,t-1} + \gamma(\sqrt{B_t})_i)\}_{i=1:d}, \{G_t(\hat{x}_{t-1,t-1} - \gamma(\sqrt{B_t})_i)\}_{i=1:d}] \\
\hat{y}_{t,t-1} &= \sum_{i=0}^{2d} w_i^m (y_{t,t-1})_i \\
C_{xy,t} &= \sum_{i=0}^{2d} w_i^c [(x_{t,t-1})_i - \hat{x}_{t,t-1}] [(y_{t,t-1})_i - \hat{y}_{t,t-1}]^T \\
C_{y,t} &= \sum_{i=0}^{2d} w_i^c [(y_{t,t-1})_i - \hat{y}_{t,t-1}] [(y_{t,t-1})_i - \hat{y}_{t,t-1}]^T + Q_{w,t} \\
A_t &= C_{xy,t} C_{y,t}^{-1} \\
\hat{x}_{t,t} &= \hat{x}_{t,t-1} - A_t (y_t - \hat{y}_{t,t-1}) \\
C_t &= B_t - A_t C_{y,t} A_t^T
\end{aligned} \tag{C.7}$$