K-théorie et cohomologie des champs algébriques.

Bertrand Toen

N° d'ordre:

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

Spécialité:
Mathématiques pures

par
Bertrand TOEN

K-THÉORIE ET COHOMOLOGIE DES CHAMPS ALGÉBRIQUES: THÉORÈMES DE RIEMANN-ROCH, $\mathcal{D}$-MODULES ET THÉORÈMES "GAGA".

Soutenue le 24 *Juin* 1999*, devant le jury composé de:*

L. BREEN	Professeur, Université de Paris 13	
L. MORET-BAILLY	Professeur, Université de Rennes 1	
C. SIMPSON	Directeur de Recherche C.N.R.S. (Toulouse)	Co-directeur de Thèse
J. TAPIA	Professeur, Université Paul Sabatier (Toulouse)	Directeur de Thèse
C. VOISIN	Directrice de Recherche C.N.R.S. (Paris 7)	Rapporteur
C. WALTER	Professeur, Université de Nice-Sophia-Antipolis	Rapporteur

Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex France.

Je dédie cette thèse à E.

Contents

Remerciements:

Je tiens tout d'abord, à remercier très sincèrement Joseph Tapia et Carlos Simpson, qui ont su encadrer ce travail de thèse avec beaucoup d'humanité. Je les remercie d'avoir accepté de partager avec moi un peu de leur passion pour la géométrie algébrique : je leur dois un enrichissement mathématique considérable.

Ce fut un réel plaisir de travailler sous leur direction.

Je remercie tout particulièrement Charles Walter, qui est à l'origine de la question du théorème de Riemann-Roch pour les champs algébriques, et qui par là même a motivé cette thèse.

Je remercie Claire Voisin et Charles Walter pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je voudrais aussi remercier André Hirschowitz pour s'être intéressé à ce travail, et m'avoir permis de m'exprimer sur ce sujet lors du séminaire "GAF 3", ce qui fut pour moi très motivant.

Un grand merci à Lawrence Breen et Laurent Moret-Bailly pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Marie Brouard et Yveline Panabière, dont la gentillesse et l'efficacité sont hors du commun.

Je remercie tous les mathématiciens de Toulouse avec qui j'ai eu l'occasion de participer aux séminaires, et grâce à qui j'ai beaucoup appris. Je pense en particulier à : C. Simpson, J. Tapia, M. Reversat, P. Essydieux, B. Anglès et T. Fiedler.

J'exprime aussi mes remerciements à l'institut Max Plank pour leur accueil durant les mois d'Avril et Mai 1997. Ce séjour à été aussi productif et qu'agréable.

Je remercie aussi tous les autres étudiants du "Frigo" et du "Goulag", avec qui j'ai partagé de nombreuses discussions, débats, repas, soirées ... et qui ont créé une ambiance de travail plus qu'agréable.

Enfin, je remercie Jacques, Nicole et Guillaume, pour leur soutien et leur compréhension durant toute la durée de cette thèse.

0 Introduction

Depuis les idées novatrices d'Evariste Galois, les mathématiciens ont appris qu'étant donné un problème à résoudre, il est important de considérer les solutions dans leur ensemble, ainsi que les relations qui les lient entre elles. D'une certaine façon, la théorie des champs, imaginée par Alexandre Grothendieck dans les années 60, est une illustration de ce principe. En effet, dans les problèmes de classification, l'utilisation des champs permet de prendre en compte l'information concernant l'ensembles des solutions, codé sous forme "d'ensembles d'objets", mais aussi les relations entre ses solutions, codées sous forme de "morphismes entre les objets". Ainsi, tout comme la théorie de Galois nous dit que l'ensemble des solutions d'une équation algébrique peut-être considéré comme un groupoide, dont les morphismes sont déterminés par l'action de son groupe de Galois, les solutions aux problèmes de classifications apportées par la théorie des champs se trouvent sous forme de groupoides (plus précisément de "catégories fibrées en groupoides").

L'utilisation avec succès de la théorie des champs aux problèmes de modules (i.e. de classification en géométrie algébrique), ainsi que l'apparition des solutions sous forme de "champs algébriques", remonte à l'article fondateur de Pierre Deligne et David Mumford [D-M]. Les deux auteurs y montrent qu'il est possible de "géométriser" (ou encore "d'algébriser") la notion de champs, et de créer ainsi un cadre unique contenant, d'une part les schémas, mais aussi certains champs de nature géométrique (les champs de modules par exemple) : celui des champs algébriques.

Tout comme un schéma peut-être vu comme une solution au problème de modules du foncteur qu'il représente (qui classifie ses "points"), un champ algébrique est un objet de nature géométrique, classifiant non seulement des objets (ses points), mais aussi leurs isomorphismes. Ainsi, de façon un peu naive, on peut se représenter un champ algébrique comme un objet en groupoides dans la catégorie des schémas.

L'introduction de tels objets apporte de nombreux avantages en théorie des modules. A titre d'exemple, examinons brièvement le cas du champ des courbes de genre g (qui est l'exemple traité dans [D-M]).

Considérons le problème de modules suivant : chercher un objet de nature géométrique $\mathcal{M}_g$, qui représente le foncteur qui à un schéma X associe le groupoide des familles de courbes propres lisses de genre g sur X.

Il est démontré dans [D-M] qu'il existe un champ algébrique $\mathcal{M}_g$, lisse sur $Spec\mathbf{Z}$, et une équivalence naturelle entre $Hom(X, \mathcal{M}_g)$, et le groupoides des courbes de genre g sur X. De plus, il existe une compactification $\mathcal{M}_g \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$, où $\overline{\mathcal{M}}_g$ est un champ irréductible, propre et lisse sur $Spec\mathbf{Z}$, classifiant les courbes stables de genre g.

Ainsi, par définition même, il existe une courbe stable universelle $\pi : \overline{\mathcal{C}}_g \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$, correspondant au morphisme identité de $\overline{\mathcal{M}}_g$. De plus, si ω est le fibré en droites canonique relatif de $\overline{\mathcal{C}}_g$ sur $\overline{\mathcal{M}}_g$, on peut alors définir des fibrés vectoriels $\mathcal{V}_m := \pi_*(\omega^{\otimes m})$ sur $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Les avantages d'une telle situation en comparaison avec celle dont on dispose à l'aide de l'espace de modules grossier $\overline{M}_g$ (qui est le schéma dont les points géométriques classifient les courbes stables de genre g) sont nombreux.

- Tout d'abord le schéma $\overline{M}_g$ n'est qu'une solution partielle au problème de modules initial consistant à classifier toutes les familles de courbes de genre g. Pour cette raison, la courbe universelle de genre g sur $\overline{M}_g$ ne peut pas exister (il manque une cohérence entre les points géométriques de $\overline{M}_g$, du à l'existence de courbes avec des groupes d'automorphismes non triviaux).

- Bien que $\overline{\mathcal{M}}_g$ soit un champ lisse sur $Spec\mathbf{Z}$, le schéma $\overline{M}_g$ ne l'est pas. Par exemple, cela pose quelques problèmes si l'on souhaite utiliser des outils analytiques tels que la théorie de Hodge sur $\overline{M}_g \otimes \mathbf{C}$, ou encore la théorie des intersections (au moins à coefficients entiers).

- Les fibrés vectoriels $\mathcal{V}_m$ n'existent pas sur $\overline{M}_g$ (pour la même raison que la courbe universelle n'existe pas). Ainsi, l'étude de ces fibrés ne peut se faire que si l'on accepte de travailler sur le champ $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Les trois exemples précédents, qui ne sont que des exemples parmi tant d'autres, montrent qu'il est capital de généraliser les outils de la géométrie algébrique (théorie de Hodge, théorie des intersections, K-théorie et classes caractéristiques ...) au cadre plus général des champs algébriques, si l'on veut profiter de la richesse de tels objets.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à essentiellement deux problèmes

- L'étude de la K-théorie algébrique des champs algébriques, et son application à des formules de Riemann-Roch ainsi que des formules d'indices de $\mathcal{D}$-modules.

- Les relations entre champs algébriques et champs analytiques : théorèmes GAGA et critères d'algébrisations.

Expliquons en quelques mots les raisons de ces deux choix.

Comme nous l'avons aperçu dans l'exemple précédent, il existe naturellement de nombreux fibrés vectoriels sur les champs de modules. Il se trouve que l'étude de ces fibrés présente des intérêts géométriques et arithmétiques.

Par exemple, dans l'exemple de $\overline{\mathcal{M}}_g$, les sections des fibrés $\mathcal{V}_m$ s'identifient aux "formes modulaires de poids m". De même, il existe des fibrés vectoriels $\mathcal{V}_m$ sur le champ (compactifié) $\overline{\mathcal{A}}_1$ des courbes elliptiques, dont les sections sont les formes modulaires de poids m sur le demi-plan de Poincaré. On connaît depuis longtemps l'intérêt de tels objets en arithmétique.

D'autre part, la formule bien connu pour des variétés, $C_1(\mathcal{V}_m) = Div(f)$, pour une section méromorphe f de $\mathcal{V}_m$ sur $\overline{\mathcal{A}}_1$, s'interprète comme la formule classique ([Se, VII, 3.1])

$$\frac{m}{24} = \frac{1}{4}v_i(f) + \frac{1}{6}v_\rho(f) + \frac{1}{2}.\sum_{x\neq i,\rho} v_x(f)$$

Ceci permet légitimement de penser que le formalisme des classes caractéristiques a un intérêt dans ce contexte.

Dans le même genre d'idées, les formules de Riemann-Roch appliquée aux fibrés $\mathcal{V}_m$, sont aussi un outil pour étudier les dimensions d'espaces de formes modulaires.

Un autre champ d'application éventuel du formalisme des classes caractéristiques et des formules de type Riemann-Roch est celui de la géométrie énumérative de M. Kontsevich et Y. Manin [Ko, 2] (d'autant plus que la transformation de Riemann-Roch est souhaitée pour certaines constructions [B-F, 5.4]).

L'étude des $\mathcal{D}$-modules sur les champs algébriques présente, elle aussi, plusieurs intérêts. Le premier qui vient à l'esprit est l'étude topologique des champs algébriques. Par exemple, les théorèmes d'indices pour les $\mathcal{D}$-modules holonômes permettent de démontrer des formules de Gauss-Bonnet pour des caractéristiques d'Euler pondérées (analogues à [Mac]).

Par ailleurs, il est montré dans [Jos], que le théorème de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-modules équivariants est utile en théorie des représentations. Dans la même veine d'idée, la correspondance de Langlands géométrique fait naturellement apparaître des $\mathcal{D}$-modules sur certains champs de fibrés vectoriels ([Gin]). L'étude de ces objets (par exemple leurs indices) nécessite alors une généralisation des résultats de [Jos] au cadre plus général, et bien plus maniable, des champs algébriques.

Il va sans dire que l'utilisation de méthodes analytiques en géométrie algébrique complexe est un outil extrêmement puissant. Leur pertinence est d'autant plus grande qu'il existe des théorèmes de comparaison entre la géométrie algébrique et analytique (par exemple les "théorèmes GAGA"). Il nous semble alors intéressant de posséder de tels résultats pour les champs algébriques complexes.

Il se trouve qu'une partie non négligeable des travaux consacrés aux champs algébriques traite de la théorie des intersections ([Mu, G2, Vi2, E-G, Kr]), et plus particulièrement de la définition de groupes (ou anneaux) de Chow pour des champs algébriques. Le point commun à toutes ces définitions est la remarquable propriété que pour la projection d'un champ de Deligne-Mumford sur son espace de modules $p : F \longrightarrow M$, le morphisme d'images directes $p_* : CH(F) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow CH(M) \otimes \mathbf{Q}$ est un isomorphisme. Ainsi, ces groupes ne contiennent pas (ou pas assez) l'information équivariante supplémentaire que possède F par rapport à M. Ceci implique en particulier, que même pour les champs les plus simples (les champs classifiant d'un groupe fini par exemple), il ne peut exister de formule du type Hirzebruch-Riemann-Roch à valeurs dans ces groupes de Chow.

C'est cette dernière remarque qui nous a naturellement amenés a nous intéresser au problème majeur traité dans cette thèse, qui est d'élargir les précédentes définitions des groupes de Chow, de façon à ce que des formules d'Hirzebruch-Riemann-Roch puissent exister. Nous résolvons ce problème en introduisant la notion de "cohomologie à coefficients dans les représentations", ce qui nous permet de démontrer des formules générales de Grothendieck-Riemann-Roch dans le cadre des champs algébriques.

Comme il a été expliqué ci-dessus, le point de départ est la constatation que les groupes de Chow déjà existant ([Mu, G2, Vi2, E-G, Kr]) ne sont pas adaptés aux formules de Riemann-Roch. Pour résoudre ce problème nous avons décidé de remonter "à la source", et d'étudier directement les propriétés de la K-théorie des champs algébriques. Comme on sait, la K-théorie algébrique joue un rôle de "cohomologie universelle", et donc, à travers son étude, ce sont les propriétés cohomologiques (voire même "motiviques") que nous étudions. Les résultats clés que nous démontrons sont les théorèmes de dévissage. Pour simplifier, supposons que F soit un champ de Deligne-Mumford lisse sur le corps des nombres complexes. Dans ce cas, le théorème de dévissage assure l'existence d'un isomorphisme d'anneaux, fonctoriel pour les images réciproques

$$\phi_F : \mathbf{G}_*(F) \otimes \mathbf{C} \longrightarrow H^{-*}(I_F, \underline{G}) \otimes \mathbf{C}$$

où I_F est le champ des ramifications de F, et le membre de droite est la cohomologie de I_F à valeurs dans le préfaisceau en spectres de G-théorie (remarquons dès maintenant que nous sommes obligés ici d'utiliser les techniques d'algèbre homotopique pour lui donner un sens).

Il est à noter, que lorsque $F = [X/H]$ est le champ quotient d'une variété par un groupe fini, la formule précédente est équivalente à une formule connue depuis longtemps, décrivant la K-théorie équivariante de

X en fonction de la K-théorie des points fixes ([A-S, Vi])

$$\mathbf{K}_*(X, H) \otimes \mathbf{C} \simeq \bigoplus_{h \in c(H)} \mathbf{K}_*(X^h)^{Z(h)}$$

où $c(H)$ est l'ensemble des classes de conjugaisons de H, X^h le sous-schéma des points fixes de X par h, et $Z(h)$ le centralisateur de h dans H. Comme un champ de Deligne-Mumford est localement un quotient par un groupe fini, on peut légitimement penser que notre théorème de dévissage est obtenu en "recollant" les isomorphismes ci-dessus. C'est précisément cette opération de recollement qui fait apparaître la cohomologie généralisée dans la formule de dévissage.

Notons enfin, que sans l'utilisation du formalisme des champs, la construction du morphisme ϕ_F pourrait paraître un peu technique, alors qu'il s'agit d'une construction tout à fait naturelle, consistant à diagonaliser chaque fibré vectoriel suivant les actions des automorphismes du champ F (construction qui existe au niveau des catégories).

En gardant à l'esprit l'isomorphisme ϕ_F, il est alors très naturel de penser que la cohomologie du champ I_F est le bon objet à considérer. Nous avons choisi d'appeler cette cohomologie la "cohomologie à coefficients dans les représentations". Le choix de cette terminologie réside dans le fait qu'elle s'interprète effectivement comme la cohomologie de l'espace de modules de F, mais où les coefficients des cycles sont pris dans les fonctions centrales des groupes d'automorphismes de ses points.

Un fois cette idée dégagée, on peut dire, en exagérant tout de même un peu, que la démonstration du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch n'est plus qu'un gros exercice technique. La méthode que nous avons choisie pour résoudre cet "exercice" est la suivante. Dans un premier temps nous nous inspirons des démonstrations des formules de Lefschetz-Riemann-Roch ([B-F-M, Th3]) pour démontrer le théorème dans le cas d'un morphisme fortement projectif. Ensuite, à l'aide de techniques de descente par quasi-enveloppes de Chow (notion qui remplace celle des enveloppes de Chow de [G3]), et du cas précédent, nous réduisons le problème au cas des champs classifiants de groupes finis. Le théorème devient alors équivalent à des formules classiques de la théorie des représentations des groupes finis.

Avant de décrire plus en détail les chapitres à venir, notons que la "cohomologie à coefficients dans les représentations" permet aussi d'interpréter de nombreux travaux antérieurs.

- La première référence que nous connaissons dans laquelle on peut reconnaître cette notion, est l'article de P. Baum, W. Fulton, et R. MacPherson sur la formule de Lefschetz-Riemann-Roch [B-F-M]. En effet, si l'on considère le champ quotient d'une variété par un automorphisme d'ordre fini, sa "cohomologie à coefficients dans les représentations" contient naturellement le réceptacle du caractère de Chern équivariant construit dans [B-F-M]. La formule de Grothendieck-Riemann-Roch que l'on démontre, appliquée au morphisme naturel d'un tel champ vers le classifiant du groupe engendré par l'automorphisme, redonne alors la formule de Lefschetz-Riemann-Roch démontrée dans [B-F-M]. Plus généralement, les formules de Riemann-Roch équivariantes se retrouvent en appliquant notre théorème de Grothendieck-Riemann-Roch à la projection d'un champ quotient par un schéma en groupe vers le classifiant de ce groupe.

- Dans ses deux articles [Ka, Ka2] T. Kawasaki démontre des formules d'indices et de Riemann-Roch pour des V-variétés, qui, dans le cadre des champs algébriques, s'interprètent comme des champs de Deligne-Mumford lisses sur le corps des nombres complexes, génériquement non-ramifiés (i.e. des orbifolds complexes). Pour cela, il associe à toute V-variété X, une nouvelle V-variété ΣX. Cette dernière correspond exactement au champ des ramifications (1.10) du champ X. Par ces identifications, la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch qu'il démontre est équivalente à celle que nous déduisons du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, lorsqu'on l'applique au morphisme structural.

- En géométrie non commutative, on trouve une description de l'homologie périodique d'un groupoide étale différentiel $X_\bullet$, à l'aide de la cohomologie du groupoide des lacets $\Omega X_\bullet$ ([C-M, 6.12]). Or, si F est le champ différentiel associé au groupoide $X_\bullet$, alors le champ associé à $\Omega X_\bullet$ s'identifie naturellement au champ des ramifications de F. Ainsi, par ces identifications, le caractère de Chern non-commutatif pour les groupoides différentiels étales est une version $\mathcal{C}^\infty$ du caractère de Chern à "coefficients dans les représentations".

Le corps de la thèse est constitué de cinq chapitres et un appendice. Le premier est un résumé de notations et de définitions. Les chapitres deux et trois vont ensembles, et traitent de la K-théorie des champs algébriques et des formules de Riemann-Roch. Dans le chapitre quatre, on applique ces formules aux $\mathcal{D}$-modules. Le cinquième chapitre est indépendant de tous les autres, et rassemble des résultats de types "GAGA". Enfin, l'appendice comporte quatre parties qui rassemblent des faits (quelques fois avec démonstrations) qui nous sont utiles tout au cours de ce texte.

Dans le premier chapitre, le lecteur trouvera deux paragraphes que nous invitons à considérer comme des annexes de notations et de définitions

(bien que l'on y trouve des démonstrations). On s'y référera tout au long du texte, surtout au cours des chapitres 2, 3 et 4.

Dans le premier paragraphe nous donnons essentiellement deux définitions : les foncteurs de K-théorie et de K-cohomologie. Nous avons choisi de les définir dans le cadre le plus général possible, à savoir celui d'un site muni d'une catégorie cofibrée en catégories exactes (dont l'exemple standard est celui du grand site lisse des schémas, muni de son champ des fibrés vectoriels). Ce degré de généralité nous permettra de traiter, de façon uniforme et sans répétitions, aussi bien le cas des fibrés vectoriels, que celui des faisceaux cohérents, des $\mathcal{D}$-modules, des fibrés avec connexion ... Le seul résultat démontré dans ce paragraphe est le fait qu'il existe toujours une transformation naturelle de la K-théorie vers la K-cohomologie.

Le second paragraphe est consacré aux champs algébriques. On y rappelle les principales définitions, ainsi que quelques résultats concernant les espace de modules. Enfin, nous introduisons les quasi-enveloppes de Chow (qui remplaceront pour les champs algébriques la notion d'enveloppe de Chow de [G3]), et on démontre des résultats d'existence.

Dans le second chapitre on étudie la G-théorie et la G-cohomologie des champs algébriques. Nous n'insistons pas beaucoup sur les propriétés générales (fonctorialités, localisation, homotopie ...), mais nous concentrons plutôt nos efforts sur les résultats de descente et de dévissage.

Les théorèmes de descente sont de deux types : contravariants et covariants. Dans le premier cas on montre que le foncteur de G-théorie vérifie la propriété de descente étale au-dessus d'un espace algébrique. C'est un résultat très commode qui permet par exemple d'utiliser la descente galoisienne, ainsi que de réduire certains énoncés au cas de champs quotients. Notons aussi que l'on montre que le morphisme de la G-théorie vers la G-cohomologie n'est pas un isomorphisme (même rationnellement), ce qui est un phénomène nouveau quand on compare avec le cas des schémas. En réalité, ce phénomène explique déjà pourquoi il ne peut y avoir de formule de Riemann-Roch à valeurs dans les groupes de Chow usuels (ou même dans la cohomologie usuelle).

Les théorèmes de descente covariante permettent à l'aide des quasi-enveloppe de Chow de ramener certains calculs au cas des gerbes (voir même des gerbes triviales). La moralité de ces théorèmes est que l'on connaît la G-théorie (resp. la G-cohomologie) des champs algébriques, si l'on connaît celle des gerbes (resp. celle des schémas).

Comme nous l'avons expliqué plus haut dans cette introduction, les résultats clés sont les théorèmes de dévissage. Bien qu'inspirés de constructions existantes en géométrie équivariante ([B-F-M, Th3, Vi]), ces résultats sont nouveaux. De façon intuitive, il s'agit de diagonaliser les fibrés vectoriels sur un champ algébrique. Dans le cas des champs de

Deligne-Mumford, tous les automorphismes sont d'ordre fini, et donc diagonalisables s'ils sont d'ordre premier aux caractéristiques. Ainsi, le théorème de dévissage dans ce cas, compare la K-théorie d'un champ F, à la K-cohomologie de son champ des ramifications modéré I_F^t (classifiant les automorphismes d'ordre premier aux caractéristiques). En contrepartie, dans le cas des champs algébriques généraux, il nous faut utiliser une construction un peu plus technique, s'appuyant sur un théorème de représentabilité d'Alexandre Grothendieck. On construit le "champ des sous-groupes de type multiplicatif" D_F, qui remplacera le champ I_F^t. Le théorème de dévissage compare alors la K-théorie d'un champ F, avec la K-cohomologie du champ D_F, tordue par le "faisceau des caractères". Le formalisme nécessaire pour donner un sens à cette expression est brièvement rappelé en appendice.

Notons aussi, qu'il existe une autre façon de traiter le cas général. Cela consiste à ne considérer que les automorphismes d'ordre fini et premier aux caractéristiques. A la fin du troisième chapitre, on démontrera donc aussi un théorème de dévissage comparant la K-théorie de F, avec la K-cohomologie du champ des automorphisme d'ordre fini et modérés $I_F^{t,f}$. La justification de la pertinence d'une telle définition, est à chercher dans le fait que pour un schéma en groupes affine, les éléments d'ordre fini forment un ensemble schématiquement dense dans l'ensemble des éléments semi-simples. L'information contenue dans la K-cohomologie de $I_F^{t,f}$ doit donc s'avérer suffisante pour démontrer des formules de Riemann-Roch, ce que nous montrerons être le cas sous certaines hypothèses.

A la fin de ce chapitre nous nous intéressons à la description de la G-théorie des gerbes bornées par des groupes réductifs. Ce résultat ne sera pas utilisé par la suite.

Le troisième chapitre est le cœur de la thèse. On commence par y étudier les propriétés générales de la cohomologie à coefficients dans les représentations (ou encore dans les caractères). On montre en particulier l'existence du caractère de Chern, et on définit la transformation de Riemann-Roch pour des champs "bien ramifiés" (qui comprennent les champs lisses qui sont localement des quotients par des groupes affines et lisses sur un corps).

Ensuite, on démontre les différentes formules de Riemann-Roch (Lefschetz-Riemann-Roch et Grothendieck-Riemann-Roch). Tous ces théorèmes sont nouveaux, et généralisent les différents théorèmes de Riemann-Roch équivariants déjà existants ([B-F-M, Th3]), ainsi que la formule de Riemann-Roch pour les V-variétés de T. Kawasaki ([Ka]).

Les démonstrations ont toutes deux étapes. La première traite le cas de morphismes fortement projectifs. Les démonstrations proposées ici sont alors très proches de celles utilisées en géométrie équivariante (déformation vers le cône normal, et utilisation du calcul de la K-théorie des fibrés projectifs). La seconde étape traite du cas des morphismes propres généraux (éventuellement non représentables). La méthode consiste à utiliser la première étape et les quasi-enveloppes de Chow, afin de se ramener au cas des champs classifiants de schémas en groupes. Les théorèmes se traduisent alors par des formules connues en théorie des représentations.

La fin de ce chapitre est consacré à quelques exemples d'applications de telles formules dans le cas des champs de Deligne-Mumford (formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch, cas particulier des courbes, formules de Gauss-Bonnet, de signature ...), ainsi qu'à la comparaison de la cohomologie à coefficients dans les représentations avec deux autres théories cohomologiques : les groupes de Chow du complexe de Gersten, et la cohomologie périodique. La seconde comparaison nous semble intéressante, car elle confirme les relations entre la théorie des champs algébriques et la géométrie non-commutative.

Depuis l'article de G. Laumon [L], on sait que le théorème de Riemann-Roch permet de calculer des indices de $\mathcal{D}$-modules algébriques. Dans ce quatrième chapitre nous suivons cette idée afin de démontrer des formules de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-modules sur des champs de Deligne-Mumford. Nous n'avons pas traité le cas des champs algébriques généraux que par souci de simplicité. Il semble clair que les résultats s'étendent à ce cas, et donnent ainsi des théorèmes généralisant les théorèmes de R. Joshua [Jos], bien que les techniques utilisées pour prendre en compte la K-théorie supérieure, soient différentes.

Un autre résultat qui nous semble nouveau (même dans le cas des schémas) est la description de la K-théorie des $\mathcal{D}$-modules holonômes, à l'aide de "fonctions constructibles".

Dans le cinquième chapitre nous étudions les relations entre champs algébriques complexes (de Deligne-Mumford), et champs analytiques. Nous commençons par y démontrer que les théorèmes "GAGA" restent valables. Nous nous intéressons ensuite aux problèmes d'algébrisation des champs analytiques. A ce sujet nous posons la question de savoir si un champ analytique propre est algébrique si et seulement si son espace de modules l'est. On démontrera que ceci est vrai après éclatement, et on proposera une méthode, basée sur les idées de M. Artin ([A]), pour démontrer que ceci est suffisant pour répondre par l'affirmative à la question précédente.

Enfin, nous avons rassemblé en appendice des résultats concernant les spectres, la descente cohomologique, l'extension des coefficients, la strictification des pseudo-foncteurs, et la théorie de Hodge pour les champs complexes. Le premier de ces appendices à pour but d'expliquer très rapidement le fonctionnement des spectres aux lecteurs peu habitués à ce language. Les deux appendices suivants rassemblent des résultats qui seront utilisés tout au long du chapitre deux, dans l'étude des foncteurs de K-théorie. En ce qui concerne la strictification, nous rappelons juste que la théorie des pseudo-foncteurs est, d'un point de vue de la théorie de l'homotopie, équivalente à celle des foncteurs stricts. Ceci nous permet de contourner des difficultés (dues au fait que la catégorie des champs est une 2-catégorie) pour définir certains objets (spectres de G-théorie des champs simpliciaux augmentés 2.7, construction du morphisme ψ_F dans la preuve de 3.25, ...). Dans la dernière partie de cet appendice on montre très brièvement comment la théorie de Hodge reste valable pour des champs de Deligne-Mumford complexes. Ces résultats sont, semble-t-il, des faits connus, bien que n'apparaissant pas, ou peu ([Tel]), dans la littérature.

Notations et Conventions:

Pour une catégorie C, on notera $Ob(C)$ son ensemble d'objets, $Fl(C)$ son ensemble de morphismes, et $\pi_0(C)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de C.

La catégorie simpliciale standard sera notée Δ. Pour toute catégorie C, la catégorie des objets simpliciaux de C est

$$SC := Hom_{Cat}(\Delta^{op}, C)$$

La catégorie des ensembles sera notée Ens, celle des groupes Gp, et celle des groupes abéliens Ab.

Pour tous groupes abéliens M et A, on notera $M_A := M \otimes_{\mathbf{Z}} A$.

Un groupoide est une catégorie pour laquelle tout morphisme admet un inverse. La 2-catégorie des groupoides est celle dont les objets sont les groupoides, les 1-morphismes sont les foncteurs, et les 2-morphismes les transformations naturelles entre foncteurs.

Si C est une catégorie de modèles fermée au sens de [Q2], nous noterons HoC la catégorie homotopique associée.

Une résolution injective d'un objet $X \in Ob(C)$, est une cofibration triviale $X \hookrightarrow X'$, avec X' fibrant.

La catégorie des ensembles simpliciaux est notée $SEns$. Par convention, on appliquera systématiquement la construction de Kan décrite dans [J2], et on supposera donc qu'ils sont tous fibrants.

Si I est une catégorie, et $H : I \longrightarrow SEns$ un préfaisceau, on notera sa limite homotopique et sa colimite homotopique ([B-K, XI, XII]) par

$$holim_I H \qquad hocolim_I H$$

La catégorie des spectres est notée Sp. Pour tout objet E de Sp, nous noterons $E_{[n]} \in Ob(SEns)$ son "n-ème étage".

Si I est une catégorie, et $H : I \longrightarrow Sp$ un préfaisceau, sa limite homotopique et sa colimite homotopique ([Th4, 5]) seront notées par

$$holim_I H \qquad hocolim_I H$$

Si X est un espace algébrique, X_{et} (resp. X_{li}) désignera le site des espaces algébriques étales et de type fini sur X (resp. lisses et de type fini sur X) muni de la topologie étale (resp. lisse).

Première Partie :

Théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch

1 Chapitre 1 : Généralités sur les champs

Dans ce chapitre nous fixerons les notations et les définitions dont nous aurons besoin par la suite. Comme il ne contient aucun résultat vraiment nouveau, nous invitons le lecteur à le considérer comme une annexe de notations.

Dans un premier temps nous rappelons les relations entre champs et préfaisceaux simpliciaux. Cela nous permettra par la suite de donner un cadre naturel pour la cohomologie d'un champ à valeurs dans un préfaisceau en spectres, formalisme qu'il est indispensable de posséder pour étudier la K-théorie de tels objets. Comme nous aurons à faire de nombreuses constructions directement au niveau des spectres, en particulier pour appliquer des techniques de descente, nous avons choisi de travailler dans le cadre des catégories homotopiques.

Dans la seconde partie du chapitre nous fixerons quelques définitions concernant les champs algébriques. Certaines se trouvent dans la littérature classique ([D-M, L-M]), d'autres pas (1.20). Le lecteur y trouvera aussi des énoncés sur les (quasi) enveloppes de Chow dans le cadre des champs algébriques. Cette notion nous sera très utile pour "approximer" certains champs algébriques par des gerbes.

1.1 Champs, préfaisceaux simpliciaux et préfaisceaux en spectres

Tout au long de ce paragraphe, C désignera un site de Grothendieck, dans lequel les produits fibrés existent.

1.1.1 Champs et préfaisceaux simpliciaux

Soit $SPr(C)$ la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur C. D'après [J2], c'est une catégorie de modèles fermée simpliciale. Rappelons que lorsque C possède suffisamment de points (par exemple lorsque C est le grand site étale des schémas), un morphisme $f : F \longrightarrow F'$ entre deux préfaisceaux simpliciaux est une équivalence faible, si pour tout point x, le morphisme induit sur les fibres $f_x : F_x \longrightarrow F'_x$ est une équivalence faible.

Si F et G sont deux objets de $SPr(C)$, nous noterons $Hom_s(F,G)$ l'ensemble simplicial des morphismes de F dans G, et

$$\mathbf{R}Hom_s(F,G) := Hom_s(F,HG)$$

où l'on a choisi une résolution injective $G \hookrightarrow HG$. Comme les résolutions injectives sont essentiellement uniques, $\mathbf{R}Hom_s(F,G)$ est un objet déterminé à isomorphisme unique près dans la catégorie homotopique $HoSEns$.

Soit $U \longrightarrow X$ un morphisme de C, et $\mathcal{N}(U/X)$ son nerf. C'est l'objet simplicial de C défini par

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{N}(U/X): & \Delta^{op} & \longrightarrow & C \\ & [p] & \mapsto & \underbrace{U \times_X U \times_X \cdots \times_X U}_{p\ fois} \end{array}$$

Ainsi, pour tout préfaisceau simplicial F sur C, on dispose du foncteur composé

$$\begin{array}{cccc} F \circ \mathcal{N}(U/X): & \Delta & \longrightarrow & SEns \\ & [p] & \mapsto & F(\mathcal{N}(U/X)([p])) \end{array}$$

Nous noterons alors

$$\mathbf{H}(U/X, F) := holim_{\Delta}(F \circ \mathcal{N}(U/X))$$

Dans le cas où $U \longrightarrow X$ est un morphisme couvrant, $\mathbf{H}(U/X, F)$ est l'espace de cohomologie de Čech du recouvrement $U \longrightarrow X$ à coefficients dans F. Par la propriété universelle des limites homotopiques, il existe un morphisme naturel d'ensembles simpliciaux

$$F(X) \longrightarrow \mathbf{H}(U/X, F)$$

Définition 1.1 *Un objet F de $SPr(C)$ est appelé flasque, si pour tout morphisme couvrant $U \longrightarrow X$ de C, le morphisme naturel*

$$F(X) \longrightarrow \mathbf{H}(U/X, F)$$

est une équivalence faible.

La relation entre préfaisceaux flasques et fibrants est donnée par le théorème de descente, dont une partie de la démonstration figure en appendice (6.11).

Théorème 1.2 *Un préfaisceau simplicial F sur C est flasque, si et seulement si pour toute résolution injective*

$$F \hookrightarrow HF$$

et tout objet $X \in Ob(C)$, le morphisme

$$F(X) \longrightarrow HF(X)$$

est une équivalence faible.

Remarque: Dans la terminologie de [J2], notre notion de flasque se traduit par "flasque par rapport à tout objet X de C".

Il existe aussi une notion analogue pour les préfaisceaux en spectres, et le théorème précédent reste encore valable.

Rappelons ([L-M]) qu'une catégorie fibrée en groupoides sur C est la donnée d'un catégorie $\mathcal{C}$ et d'un foncteur

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow C$$

vérifiant les deux conditions suivantes

1. Pour tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$ dans C, et tout objet $x \in Ob(\mathcal{C})$ tel que $\pi(x) = X$, il existe un morphisme $u : y \longrightarrow x$ dans $\mathcal{C}$ tel que $\pi(u) = f$.
2. Pour toute paire de morphismes $u : y \longrightarrow x$ et $v : z \longrightarrow x$ dans $\mathcal{C}$, et tout morphisme $f : \pi(y) \longrightarrow \pi(z)$ dans C tel que $\pi(v)\circ\pi(f) = \pi(u)$, il existe un unique morphisme $w : y \longrightarrow z$ dans $\mathcal{C}$ tel que $\pi(w) = f$.

Pour tout préfaisceau d'ensembles E sur C, on définit la catégorie fibrée en groupoides $\pi : \widetilde{E} \longrightarrow C$ de la façon suivante

- les objets de $\widetilde{E}$ sont les couples (X, s) où $X \in Ob(C)$, et $s \in E(X)$
- un morphisme $u : (Y, t) \longrightarrow (X, s)$ est la donnée d'un morphisme $f : Y \longrightarrow X$ dans C, tel que $u^*(s) = t$
- le foncteur π est défini par $\pi(X, s) = X$, et $\pi(u) = f$.

Si $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow C$ et $\pi' : \mathcal{C}' \longrightarrow C$ sont deux catégories fibrées en groupoides sur C, nous noterons $Hom_C(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ qui commutent avec π et π'. Remarquons que cette catégorie est en réalité un groupoide ([L-M]).

Définition 1.3 *Soit $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow C$ une catégorie fibrée en groupoides sur C. Le préfaisceau en groupoides associé est défini par*

$$\begin{array}{cccc} F_{\mathcal{C}} : & C & \longrightarrow & Gpd \\ & X & \mapsto & Hom_C(\widetilde{X}, \mathcal{C}) \end{array}$$

où $\widetilde{X}$ est le préfaisceau représenté par X.

Le préfaisceau simplicial déduit de $F_{\mathcal{C}}$ par le foncteur qui à un groupoide associe son ensemble simplicial classifiant, sera noté $BF_{\mathcal{C}}$.

Rappelons qu'un catégorie fibrée en groupoides $\mathcal{C}$ est un champ en groupoides, si toutes les données de descente sont effectives ([L-M]). Par abus de langage le mot "champ" signifiera toujours "champ en groupoides", sauf mention explicite du contraire. Il est alors facile de voir que $\mathcal{C}$ est un champ si et seulement si $BF_{\mathcal{C}}$ est flasque. La catégorie des champs en groupoides sur C sera notée $Ch(C)$. Nous noterons aussi $HoCh(C)$ sa catégorie homotopique. C'est la catégorie qui possède les mêmes objets que $Ch(C)$, et dont l'ensemble des morphismes entre deux champs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est

$$Hom_{HoCh(C)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') := \pi_0 Hom_C(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

En réalité le foncteur $\mathcal{C} \mapsto BF_{\mathcal{C}}$ induit une équivalence de la catégorie homotopique des champs sur C avec celle des préfaisceaux simpliciaux flasques 1-tronqués et morphismes flexibles ([S]). Remarquons que cette dernière est elle-même équivalente à la sous-catégorie pleine de $HoSPr(C)$, formée des objets 1-tronqués.

Ainsi, il nous est permis de voir un champ (ou une catégorie fibrée en groupoides) comme un préfaisceau simplicial. De cette façon, pour tout champ $\mathcal{C}$ sur C, et tout $F \in SPr(C)$, nous pouvons définir

$$\mathbf{R}Hom_s(\mathcal{C}, F) := \mathbf{R}Hom_s(BF_{\mathcal{C}}, F) \in HoSEns$$

1.1.2 Cohomologie généralisée des préfaisceaux Simpliciaux

Soit $Sp(C)$ la catégorie des préfaisceaux en spectres sur C. Nous savons d'après [J, 2.53], que c'est une catégorie de modèles fermée munie de "Hom" internes que l'on notera $\underline{Hom}_{sp}(.,.)$. Le spectre des morphismes entre deux objets $F, G \in Sp(C)$, est défini par

$$Hom_{sp}(F, G) := lim_C(\underline{Hom}_{sp}(F, G))$$

On définit alors

$$\mathbf{R}Hom_{sp}(F, G) := Hom_{sp}(F, HG)$$

où l'on a choisi une résolution injective $G \hookrightarrow HG$. C'est un objet déterminé à isomorphisme unique près dans $HoSp$.

Si F est un préfaisceau simplicial, et K un préfaisceau en spectres, on peut définir exactement comme dans 6.1 le préfaisceau en spectres des morphismes

$$\underline{Hom}_{sp}(F, K).$$

On dipose alors du spectre des morphismes de F vers K, défini par

$$Hom_{sp}(F, K) := lim_C(\underline{Hom}_{sp}(F, G)).$$

Définition 1.4 *Soit F un préfaisceau simplicial, et K un préfaisceau en spectres sur C. Alors le spectre de cohomologie de F à coefficients dans K est défini par*

$$\mathbf{H}(F, K) := \mathbf{R}Hom_{sp}(F, K)$$

Si $\mathcal{C} \longrightarrow C$ est une catégorie fibrée en groupoides sur C, son spectre de cohomologie à coefficients dans K est défini par

$$\mathbf{H}(\mathcal{C}, K) := \mathbf{H}(F_{\mathcal{C}}, K)$$

Remarquons que $\mathbf{H}$ définit des bifoncteurs

$$\mathbf{H} : HoSpr(C) \times HoSp(C) \longrightarrow HoSp$$

$$\mathbf{H} : HoCh(C) \times HoSp(C) \longrightarrow HoSp$$

1.2 Champs et spectres de K-théorie

Pour ce paragraphe, on supposera de plus qu'il existe une catégorie cofibrée en catégories exactes

$$p : \mathcal{E} \longrightarrow C$$

C'est à dire que $\mathcal{E}$ est une catégorie exacte, et p est un foncteur tel que

- Pour tout objet $x \in Ob\mathcal{E}$, et tout morphisme de C $f : Y \longrightarrow X$, il existe une "image réciproque de x par f". C'est à dire, il existe un morphisme $u : y \longrightarrow x$ dans $\mathcal{E}$, tel que $p(u) = f$, et tel que pour tout morphisme de $\mathcal{E}$ $v : z \longrightarrow x$ avec $p(v) = f$, il existe un unique morphisme $w : y \longrightarrow z$ tel que $p(w) = Id$.
- Soit $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ sont deux morphismes de C, $x \in Ob\mathcal{E}$, et $y \in Ob\mathcal{E}$ une image réciproque de x par f. Alors toute image réciproque de y par g est une image réciproque de x par $f \circ g$.
- Si $x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z$ est une suite exacte dans $\mathcal{E}$, alors $p(u) = p(v) = Id$.
- Si $E :\ x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z$ est une suite exacte avec $p(x) = X$, alors pour tout morphisme de C $f : Y \longrightarrow X$, toute image réciproque de E par f est encore une suite exacte.

Nous lui associons le préfaisceau en catégories exactes suivant

$$\begin{array}{rccc} F_{\mathcal{E}} : & C & \longrightarrow & CatEx \\ & X & \mapsto & Hom_{Cart}(X, \mathcal{E}) \end{array}$$

où $CatEx$ est la catégorie des catégories exactes et foncteurs exacts, et $Hom_{Cart}(X, \mathcal{E})$ la sous-catégorie de $Hom_C(\widetilde{X}, \mathcal{E})$ des sections cartésiennes ([Gi, 1.1.1]).

L'exemple standard que l'on utilisera est celui où $C = (Sch/S)_{li}$ est le site des schémas muni de la topologie lisse, et $\mathcal{E}$ la catégorie cofibrée des fibrés vectoriels sur C. Ses objets sont les couples (X, V), avec X un schéma sur S, et V un fibré vectoriel sur X, et un morphisme entre (Y, W) et (X, V) est la donnée d'un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ et d'un morphisme de fibrés vectoriels sur Y, $W \longrightarrow f^*(V)$.

Si $\mathcal{C}$ est un champ, on posera

$$\int_{\mathcal{C}} \mathcal{E} := Hom_{Cart}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

la catégorie des morphismes cartésiens de champs sur C ([Gi, 1.1.1]).

Si on note $\mathcal{C}(X)$ la catégorie des flèches de $\mathcal{C}$ au-dessus de l'identité de X, alors la catégorie $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{E}$ est équivalente à la catégorie suivante

un objet : est défini par la donnée suivante :

- Pour tout objet $X \in Ob(C)$, et tout objet $s \in Ob(\mathcal{C}(X))$ la donnée d'un objet $V_{(s)} \in Ob\mathcal{E}(X)$
- Pour tout morphisme de C, $f : Y \longrightarrow X$, et toute paire d'objets $s \in Ob(\mathcal{C}(X))$, $s' \in Ob(\mathcal{C}(Y))$, et tout isomorphisme dans $\mathcal{C}(Y)$, $h : f^*(s) \simeq t$, un isomorphisme dans $\mathcal{E}(Y)$

$$\phi_{s,f,h} : f^*V_{(s)} \simeq V_{(t)}$$

- Pour toute paire de morphismes de C

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$

tout triplets d'objets $s \in Ob(\mathcal{C}(X))$, $t \in Ob(\mathcal{C}(Y))$, $u \in Ob(\mathcal{C}(Z))$, et toute paire d'isomorphismes dans $\mathcal{E}(Y)$ et $\mathcal{E}(Z)$

$$h : f^*(s) \simeq t$$

$$j : g^*(t) \simeq u$$

une égalité dans $\mathcal{E}(Z)$

$$\phi_{t,g,j} \circ g^*\phi_{s,f,h} = \phi_{u,f\circ g,h\circ j}$$

<u>un morphisme :</u> entre V et W est défini par la donnée suivante :

- Pour tout objet $s \in Ob(\mathcal{C}(X))$, un morphisme dans $\mathcal{E}(E)$

$$a_s : V_{(s)} \longrightarrow W_{(s)}$$

- Pour tout morphisme de C, $f : Y \longrightarrow X$, toute paire d'objets $s \in Ob\mathcal{C}(X)$ et $t \in \mathcal{C}(Y)$, et tout isomorphisme dans $\mathcal{E}(Y)$, $h : f^*(s) \simeq t$, une égalité dans $\mathcal{E}(Y)$

$$\phi^W_{s,f,h} \circ f^*(a_s) = a_t \circ \phi^V_{s,f,h}$$

Ainsi, $\int_C \mathcal{E}$ est équivalent à la catégorie des pseudo-transformations naturelles entre les pseudo-foncteurs (6.3)

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & Cat \\ X & \mapsto & \mathcal{C}(X) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & Cat \\ X & \mapsto & \mathcal{E}(X) \end{array}$$

Nous noterons aussi $\int_C \mathcal{E}$ la catégorie des sections cartésiennes globales de $\mathcal{E}$ sur C. En clair

$$\int_C \mathcal{E} := Hom_{Cart}(\widetilde{*}, \mathcal{E})$$

où $*$ est le préfaisceau d'ensembles constant associé à un ensemble à un élément.

Définition 1.5 *Le préfaisceau en spectres de K-théorie associé au couple $(C, \mathcal{E})$ est défini par*

$$\begin{array}{cccc} \underline{K}: & C & \longrightarrow & Sp \\ & X & \mapsto & K(F_{\mathcal{E}}(X)) \end{array}$$

où

$$K : CatEx \longrightarrow Sp$$

est le foncteur de K-théorie défini dans [Wal, 1.3] par exemple. On définit alors la K-cohomologie d'un champ $\mathcal{C}$ à coefficients dans $\mathcal{E}$ par

$$\underline{\mathbf{K}}(\mathcal{C}) := \mathbf{H}(\mathcal{C}, \underline{K})$$

Le spectre de K-théorie d'un champ $\mathcal{C}$ à coefficients dans $\mathcal{E}$ est défini

$$\mathbf{K}(\mathcal{C}) := K(\int_{\mathcal{C}} \mathcal{E})$$

Les groupes de K-cohomologie et de K-théorie de $\mathcal{C}$ à coefficients dans $\mathcal{E}$ sont définis respectivement par

$$\underline{\mathbf{K}}_m(\mathcal{C}) := \pi_m \underline{\mathbf{K}}(\mathcal{C})$$

$$\mathbf{K}_m(\mathcal{C}) := \pi_m \mathbf{K}(\mathcal{C})$$

Les correspondances $\mathcal{C} \mapsto \underline{\mathbf{K}}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C} \mapsto \mathbf{K}(\mathcal{C})$, définissent des foncteurs

$$\underline{\mathbf{K}} : HoSPr(C) \longrightarrow HoSp$$

$$\mathbf{K} : HoCh(C) \longrightarrow HoSp$$

En effet, pour $\underline{\mathbf{K}}$ cela provient directement de sa définition. Pour le second, il suffit de garder à l'esprit que

$$\mathcal{C} \mapsto \int_{\mathcal{C}} \mathcal{E}$$

transforme équivalences de champs en équivalences de catégories, et détermine donc un foncteur

$$HoCh(C) \longrightarrow HoCatEx$$

Proposition 1.6 *Il existe une transformation naturelle de foncteur*

$$can : \mathbf{K} \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}$$

<u>Preuve:</u> Soit $\mathcal{C}$ un champ en groupoides sur C. Alors, pour chaque objet X de C, et chaque morphisme de champs $s : \widetilde{X} \longrightarrow \mathcal{C}$, on dispose du foncteur image réciproque

$$s^* : \int_{\mathcal{C}} \mathcal{E} := Hom_{Cart}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \longrightarrow Hom_{Cart}(\widetilde{X}, \mathcal{E}) =: F_{\mathcal{E}}(X)$$

Ces images réciproques vérifient de plus $(s \circ s')^* = s^* \circ (s')^*$. Ainsi, pour X variable dans $Ob(C)$, les foncteurs

$$Hom_{Cart}(\widetilde{X}, \mathcal{C}) \longrightarrow F_{\mathcal{E}}(X)$$

définissent un foncteur exact de catégories exactes

$$\int_{\mathcal{C}} \mathcal{E} \longrightarrow Hom_C(F_{\mathcal{C}}, F_{\mathcal{E}})$$

où $Hom_C(F_{\mathcal{C}}, F_{\mathcal{E}})$ est la catégorie exacte des morphismes de préfaisceaux en catégories sur C. Or, il existe un morphisme naturel de catégories

$$WHom_C(F_{\mathcal{C}}, F_{\mathcal{E}}) \longrightarrow Hom_C(F_{\mathcal{C}}, WF_{\mathcal{E}})$$

où W désigne la construction de Waldhausen ([Wal, 1.3]) qui a une catégorie exacte associe son spectre de K-théorie. Ainsi, on trouve un foncteur naturel en $\mathcal{C}$

$$W \int_{\mathcal{C}} \mathcal{E} \longrightarrow Hom_C(F_{\mathcal{C}}, WF_{\mathcal{E}})$$

que l'on compose avec le foncteur classifiant

$$BW \int_{\mathcal{C}} \mathcal{E} \longrightarrow BHom_C(F_{\mathcal{C}}, WF_{\mathcal{E}})$$

Comme il existe un morphisme canonique

$$BHom_{Cat}(A, B) \longrightarrow Hom_{SEns}(BA, BB)$$

on en déduit un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$\mathbf{K}(\mathcal{C})_{[o]} := BW \int_{\mathcal{C}} \mathcal{E} \longrightarrow Hom_s(BF_{\mathcal{C}}, \underline{K}_{[o]})$$

Par la naturalité de cette construction, ce morphisme s'étend en un morphisme de spectres

$$\mathbf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow Hom_{sp}(S(BF_{\mathcal{C}}), \underline{K})$$

On peut alors composer ce morphisme avec une résolution injective

$$\underline{K} \hookrightarrow H\underline{K}$$

pour obtenir le morphisme cherché

$$\mathbf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathcal{C}, \underline{K})$$

Une fois que cette résolution injective a été choisie, ce morphisme est fonctoriel en $\mathcal{C}$. $\square$

Voici deux exemples qui montrent que le morphisme de $HoSp$

$$\mathbf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}(\mathcal{C})$$

peut être, ou ne pas être, un isomorphisme.

Considérons $C = (QProj/k)_{Zar}$, le gros site des schémas quasi-projectifs sur un corps k, muni de la topologie de Zariski. Prenons $\mathcal{E}$ la catégorie cofibrée des faisceaux cohérents localement libres et de rang fini sur C, et $\mathbf{K}$ et $\underline{\mathbf{K}}$ les foncteurs de K-théorie et de K-cohomologie associés.

Alors, pour $\mathcal{C} = X$ un schéma de C, $\mathbf{K}(F)$ est le spectre de K-théorie de la catégorie des faisceaux localement libres et de rang fini sur X, et $\underline{\mathbf{K}}(\mathcal{C})$ est le spectre de cohomologie de X_{Zar} à coefficients dans $\mathbf{K}$. On sait alors que le morphisme canonique

$$\mathbf{K}(X) \longrightarrow \mathbf{H}(X_{Zar}, \mathbf{K})$$

est une équivalence faible ([Th, 10.5]).

Prenons maintenant $C = (QProj/k)_{et}$, le gros site des schémas quasi-projectifs sur un corps k, muni de la topologie de étale. Dans ce cas $\underline{\mathbf{K}}(X)$ est le spectre de cohomologie de X_{et} à coefficients dans $\mathbf{K}$. On sait alors que le morphisme naturel

$$\mathbf{K}(X) \longrightarrow \mathbf{H}(X_{Zar}, \mathbf{K})$$

n'est une équivalence que rationnellement.

Supposons pour terminer que l'on dispose d'une autre catégorie cofibrée en catégories exactes $\mathcal{E}'$ sur C, qu'il existe un produit tensoriel exact dans les deux variables

$$\otimes : \mathcal{E} \times_C \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ainsi qu'une structure de $\mathcal{E}$-module sur $\mathcal{E}'$

$$\otimes : \mathcal{E} \times_C \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}'$$

qui est exacte en la première variable. Notons $\mathbf{K}'$ et $\underline{\mathbf{K}}'$ les foncteurs de K-théorie et de K-cohomologie à coefficients dans $\mathcal{E}'$. On sait alors que l'on peut construire des produits ([J, 5.3])

$$\mathbf{K} \wedge \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$\mathbf{K} \wedge \mathbf{K}' \longrightarrow \mathbf{K}'$$

$$\underline{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{K}} \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}$$

$$\underline{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{K}}' \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}'$$

qui font de $\mathbf{K}$ (resp. $\underline{\mathbf{K}}$) un foncteur en spectres en anneaux, et de $\mathbf{K}'$ (resp. $\underline{\mathbf{K}}'$) un foncteur en spectres en $\mathbf{K}$-modules (resp. $\underline{\mathbf{K}}$-modules).

1.3 Champs algébriques

Nous noterons S un schéma noethérien intègre de dimension finie et universellement japonais (i.e. toutes les normalisations de schémas de type fini sur S sont des morphismes finis), et $(Esp/S)_{li}$ le gros site des S-espaces algébriques essentiellement de type fini et séparés sur S, où un morphisme est couvrant s'il est lisse et surjectif.

A l'aide du lemme de Yoneda, nous identifierons la catégorie (Esp/S) à une sous-catégorie pleine des préfaisceaux simpliciaux sur $(Esp/S)_{li}$. Nous dirons alors qu'un objet $F \in SPr((Esp/S)_{li})$ est représentable s'il est isomorphe dans $HoSPr((Esp/S)_{li})$ à un objet provenant de (Esp/S). Par extension, nous appellerons tout objet représentable un "S-espace algébrique".

Comme nous l'avons fait remarquer au 2.1.1, nous pouvons définir les champs en groupoides comme des préfaisceaux simpliciaux. Il nous arrivera cependant de les définir comme des catégorie fibrées en groupoides. Comme nous les considérerons dans la catégorie homotopique, le point de vu adopté importe peu.

1.3.1 Quelques définitions et propriétés

Définition 1.7 *1. Un morphisme de préfaisceaux simpliciaux $f : F \longrightarrow F'$ sur $(Esp/S)_{li}$ est représentable, si pour tout S-espace algébrique X, et tout morphisme $s : X \longrightarrow F'$ de préfaisceaux simpliciaux, le préfaisceau simplicial $f^{-1}(X) := F \times_{F'} X$ est représentable.*

2. Soit $\mathbf{P}$ un type de morphismes de S-espaces algébriques, stable par changement de base (e.g. lisse, étale, plat, immersion fermée, immersion ouverte, surjectif, de type fini ...). Un morphisme représentable de préfaisceaux simpliciaux sur $(Esp/S)_{li}$ $f : F \longrightarrow F'$ est de type $\mathbf{P}$, si pour chaque S-espace algébrique X, et chaque morphisme $s : X \longrightarrow F'$ de préfaisceaux simpliciaux, le morphisme d'espaces algébriques

$$f_X : f^{-1}(X) \longrightarrow X$$

est de type $\mathbf{P}$.

3. Soit $\mathbf{P}$ un type de morphismes de S-espaces algébriques, local pour la topologie lisse (e.g. localement d'intersection complète, immersion régulière ...). Un morphisme représentable de préfaisceaux simpliciaux sur $(Esp/S)_{li}$ $f : F \longrightarrow F'$ possède la propriété $\mathbf{P}$, si pour chaque S-espace algébrique X, et chaque morphisme $s : X \longrightarrow F'$ représentable et lisse, le morphisme d'espaces algébriques

$$f_X : f^{-1}(X) \longrightarrow X$$

est de type $\mathbf{P}$.

4. *Un préfaisceau simplicial* 1*-tronqué sur* $(Esp/S)_{li}$ F*, est algébrique (quasi-séparé et localement de type fini), si*

   - *le morphisme diagonal*

     $$\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$$

     est représentable, quasi-compact et séparé

   - *il existe un* S*-espace algébrique* X*, et un morphisme (automatiquement représentable par le premier point), lisse et surjectif*

     $$f : X \longrightarrow F$$

   On dira alors que F *est lisse (resp. régulier, normal, de type fini) sur* S*, si on peut prendre* X *lisse (resp. régulier, normal, de type fini) sur* S*.*

5. *une catégorie fibrée en groupoides* $\mathcal{C}$ *sur* $(Esp/S)_{li}$ *est un champ algébrique, si le préfaisceau simplicial* $F_{\mathcal{C}}$ *est flasque et algébrique.*

Remarquons qu'une catégorie fibrée en groupoides $\mathcal{C}$ sur $(Esp/S)_{li}$ est un champ algébrique dans la terminologie de [L-M], si et seulement si c'est un champ algébrique pour la définition précédente.

Définition 1.8 *La* 2*-catégorie des champs algébriques sur* S *sera notée* $ChAlg(S)$*. Le groupoide des* 1*-morphismes de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$ *sera noté* $Hom_{Ch}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$*.*

La catégorie homotopique des champs algébriques sur S*, notée* $HoChAlg(S)$*, est l'image essentielle dans* $HoSPr((Esp/S)_{li})$ *du foncteur*

$$\begin{array}{ccc} ChAlg(S) & \longrightarrow & HoSPr((Esp/S)_{li}) \\ \mathcal{C} & \mapsto & F_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Notations et Terminologie: Le mot "morphisme" fera toujours référence à un morphisme dans $HoChAlg(S)$, alors que nous préciserons "1-morphisme" pour ceux dans $ChAlg(S)$. De même nous parlerons de "diagrammes commutatifs" pour les diagrammes commutatifs de $HoChAlg(S)$, et de "diagrammes 1-commutatifs" pour ceux de $ChAlg(S)$. Nous dirons que deux champs sont équivalents s'ils sont isomorphes dans $HoChAlg(S)$.

Un 1-morphisme $s : X \longrightarrow F$, avec X un espace algébrique sera appelé une section de F au-dessus de X. Le lemme de Yoneda permettant d'identifier canoniquement le groupoide des sections au-dessus de X avec $F(X)$, nous parlerons alors de l'objet $s \in ObF(X)$ associé à s. Ce n'est que l'image par s de l'identité.

Par la suite un "champ algébrique" sera toujours un champ algébrique de type fini sur S. Dans les quelques cas où les champs ne seront pas de type fini, nous préciserons "champs algébriques localement de type fini".

En particulier, comme S est noethérien, tout champ algébrique est aussi noethérien.

Bien que nous travaillerons essentiellement dans $HoChAlg(S)$, nous aurons besoin quelque-fois de revenir à $ChAlg(S)$ pour définir certains objets.

Définition 1.9 *Un* 1*-morphisme de champs algébriques* $f : F \longrightarrow F'$ *est propre, si pour tout* S*-espace algébrique* X*, et tout* 1*-morphisme* $s : X \longrightarrow F'$*, il existe un* S*-espace algébrique* Y*, et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ f^{-1}(X) \arrow[r, "f_X"'] & X \end{tikzcd}$$

avec q *propre, et* p *surjective.*

Remarque: Comme la propriété d'être représentable pour un 1-morphisme est invariante par équivalence, la notion de morphismes représentables dans $HoChAlg(S)$ est bien définie (comme morphismes isomorphes à des images de 1-morphismes représentables). De même, pour un morphisme représentable, la propriété d'être étale, surjectif, lisse, plat, localement d'intersection complète, une immersion fermée, une immersion ouverte ... possède un sens.

Il en est de même pour la notion de morphisme propre.

Définition 1.10 *Le champ des ramifications* I_F *d'un champ algébrique* F *est défini par*

$$I_F := F \times_{F \times_S F} F$$

On notera

$$\pi_F : I_F \longrightarrow F$$

le morphisme naturel.

Soit F *un champ algébrique.*

1. *On dira que* F *est séparé, si le morphisme*

$$\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$$

est propre.

2. *Nous dirons que* F *est de Deligne-Mumford, si le morphisme*

$$\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$$

est non-ramifié.

3. Nous dirons que F est Δ-affine, si le morphisme

$$\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$$

est affine.

Par la suite, tous les champs de Deligne-Mumford que l'on rencontrera seront supposés séparés.

<u>Remarques:</u>

- Soit F un champ algébrique. Pour chaque objet $X \in (Esp/S)$, et chaque objet $s \in ObF(X)$, le faisceau des automorphismes de s

$$\begin{array}{cccc} \underline{Aut}_X(s): & (Esp/X)_{li} & \longrightarrow & Gp \\ & (\ u : Y \to X\ ) & \mapsto & Aut_{F(Y)}(u^*(s)) \end{array}$$

  est représentable par un X-espace algébrique en groupes ([L-M]), noté $Aut_X(s)$. Dire alors que F est Δ-affine, est équivalent à dire que pour tout X et s comme ci-dessus, $Aut_X(s)$ est affine sur X.

- D'après [L-M], la définition (2) précédente est équivalente à la définition donnée dans [D-M, 4.6], ce qui explique le choix de la terminologie.

- Un champ algébrique séparé de Deligne-Mumford est Δ-affine. En effet, Δ étant quasi-compact et non-ramifié, il est quasi-fini. Ainsi, Δ est propre et quasi-fini, donc fini, et en particulier affine.

- Si S est de caractéristique nulle, tout champ algébrique Δ-affine et séparé est de Deligne-Mumford. En effet, Δ étant affine et propre, il est fini, et donc quasi-fini. C'est donc un champ de Deligne-Mumford d'après [Vi2, 7.17]. Ceci n'est plus vrai pour S général.

- Remarquons aussi, qu'un S-espace algébrique est un champ algébrique F tel que

$$\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$$

  soit un monomorphisme. ([L-M]).

<u>Exemple:</u> Soit X un S-espace algébrique, et $H \longrightarrow S$ un X-espace algébrique en groupes, lisse sur S. On suppose que H opère sur X au-dessus de S

$$a : X \times_S H \longrightarrow X$$

On définit le champ classifiant $[X/H]$, comme la catégorie fibrée sur $(Esp/S)_{li}$, dont la catégorie fibre au-dessus d'un objet $Y \in (Esp/S)$ est le groupoide des diagrammes

$$Y \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X$$

où p est un H-fibré principal, et f un morphisme H-équivariant. On sait que $[X/H]$ est un champ algébrique ([L-M]).

De plus, dans le cas où H est affine sur S, $[X/H]$ est $\underline{\Delta}$-affine. En effet, le champ I_F est alors équivalent au champ quotient $[\overline{X}/H]$, où $\overline{X}$ est le sous-espace algébrique en groupes de $X \times_S H$ des couples (x, h) tels que $h.x = x$.

Définition 1.11 *Soit F un champ algébrique.*

- *Un espace de modules pour F est un S-espace algébrique M, muni d'un morphisme*
$$p : F \longrightarrow M$$
tel que
  1. *pour tout S-corps séparablement clos K, le morphisme induit*
  $$p_* : \pi_0 F(SpecK) \longrightarrow \pi_0 M(SpecK)$$
  est une bijection
  2. *le morphisme p est universel (dans $HoChAlg(S)$) pour les morphismes vers les espaces algébriques.*
- *Un quotient géométrique uniforme pour F est un espace de modules M, tel que*
  1. *la projection $p : F \longrightarrow M$ est un morphisme submersif (i.e. un sous-champ $F' \hookrightarrow F$ est ouvert si et seulement si $p(F')$ est ouvert dans M)*
  2. *le morphisme naturel $F \longrightarrow F \times_M F$ est surjectif*
  3. *pour tout morphisme plat d'espaces algébriques $f : M' \longrightarrow M$, la projection $p' : F' := F \times_M M' \longrightarrow M'$ est un morphisme submersif, qui fait de M' un espace de modules pour F', et vérifiant la propriété (2) ci-dessus*

Remarque: Si $F = [X/H]$, est un champ quotient d'une action d'un S-schéma en groupes sur un S-schéma X, alors M est un quotient géométrique uniforme pour F si et seulement s'il est un quotient géométrique uniforme de X par H au sens de [M-F-K, 0.6].

Rappelons les deux principaux résultats d'existence.

Théorème 1.12 *[K-M] Si F est un champ algébrique tel que*
$$\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$$
soit fini, alors F possède un quotient géométrique uniforme.

En particulier, tout champ de Deligne-Mumford possède un quotient géométrique uniforme.

Question: Le théorème 1.12 reste-t-il vrai si on remplace "fini" par "équidimensionnel" ?

Dans le cas où S est de caractéristique nulle, on possède le lemme suivant, répondant partiellement à la question précédente.

Lemme 1.13 *Soit F un champ algébrique sur S, tel que le morphisme diagonal $\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$ est équidimensionnel. Alors, si S est de caractéristique nulle, il existe une factorisation unique à homotopie près*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & F_0 \arrow[dl, "q"] \\ M & \end{tikzcd}$$

où F_0 est un champ de Deligne-Mumford (éventuellement non quasi-séparé, i.e. avec un morphisme diagonal éventuellement non séparé), et f fait de F une gerbe bornée par des espaces algébriques en groupes lisses sur F_0.

Preuve: Pour chaque paire de sections $s, t : X \longrightarrow F$, on dispose de l'espace algébrique des isomorphismes $Isom_X(s,t) \longrightarrow X$. C'est un torseur sous le X-espace algébrique en groupes $Aut_X(s)$. Par hypothèse, le morphisme de projection $Aut_X(s) \longrightarrow X$ est équidimensionnelle. Comme la caractéristique de S est nulle, on conclut donc par [SGA 3 I, Exp. IV_B Cor. 4.4] que le schéma des composantes connexes $K = \pi_0 Aut_X(s) \longrightarrow X$ existe, mais peut être non séparé sur X. Le torseur $Isom_X(s,t)$ induit donc un K-torseur sur X, $\pi_0 Isom_X(s,t) \longrightarrow X$.

Ceci nous permet alors de définir $F_0(X)$ comme étant le groupoide possédant les mêmes objets que $F(X)$, et avec l'ensemble des sections de $\pi_0 Isom_X(s,t) \longrightarrow X$ comme morphisme de s vers t.

De cette façon, F_0 est clairement un champ tel que le morphisme diagonal $F_0 \longrightarrow F_0 \times F_0$ est quasi-fini. Comme nous sommes en caractéristique nulle, c'est un champ de Deligne-Mumford. Enfin, le morphisme naturel $F \longrightarrow F_0$ est localement sur $s : X \longrightarrow F_0$ de la forme

$$BAut_X(s) \longrightarrow B\pi_0 Aut_X(s).$$

C'est donc une gerbe borné par l'espace algébrique en groupes lisse sur X représentant la composante neutre de $Aut_X(s)$. $\Box$

Définition 1.14 *Supposons que S est de caractéristique nulle. Un champ algébrique F, tel que le morphisme diagonal est équidimensionnel est appelé Δ-équidimensionnel.*

Dans ce cas, si le champ F^0 du lemme 1.13 est séparé, on dira que F est pseudo-séparé.

Ainsi, on voit que si S est de caractérisitique nulle, tout champ Δ-équidimensionnel pseudo-séparé possède un quotient géométrique uniforme.

Inversemment, si F est normal et possède un quotient géométrique uniforme, alors le morphisme diagonal est forcemment équidimensionnel.

Théorème 1.15 *[L-M] Si F est un champ algébrique, tel que le morphisme*

$$\pi_F : I_F \longrightarrow F$$

soit plat, alors F possède un quotient géométrique uniforme M. De plus le morphisme naturel $F \longrightarrow M$, fait de F une gerbe sur M, bornée par des M-espaces algébriques en groupes plats sur M.

Par la suite, nous nous intéresserons particulièrement aux champs qui sont localement des quotients par des groupes affines.

Définition 1.16 *Un champ algébrique F est localement un quotient (resp. localement un quotient affine), s'il existe un morphisme*

$$p : F \longrightarrow X$$

où X est un S-espace algébrique, tel qu'il existe un recouvrement étale $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, des S-espaces algébriques en groupes H_i lisses (resp. lisses et affines) sur S, opérant sur des S-espaces algébriques X_i, et des équivalences

$$F_{U_i} := F \times_X U_i \simeq [X_i/H_i]$$

Si de plus, F possède un quotient géométrique uniforme, on dira que F est localement un quotient géométrique uniforme (resp. quotient géométrique uniforme affine).

Pour terminer nous rappelons un fait bien connu, mais pour lequel nous n'avons pas trouvé de référence sous cette forme.

Proposition 1.17 *Soit F un champ de Deligne-Mumford, et $p : F \longrightarrow M$ son espace de modules. Alors, il existe un recouvrement étale $\{U_i\}_{i\in I}$ de M, des groupes finis H_i, des espaces algébriques X_i et une action de H_i sur X_i, tel que pour tout $i \in I$, le champ $F_{U_i} := p^{-1}(U_i)$ soit équivalent au champ $[X_i/H_i]$.*

Preuve: Voir la première partie de la preuve de [Vi2, 2.8]. $\square$

Corollaire 1.18 *Tout champ F de Deligne-Mumford est localement un quotient géométrique uniforme affine.*

Si S est de caractéristique nulle, tout champ algébrique Δ-équidimensionnel et pseudo-séparé est localement un quotient géométrique uniforme.

Question: Si F est un champ algébrique Δ-affine possédant un quotient géométrique uniforme, F est-il localement un quotient géométrique uniforme ?

1.3.2 Quasi-enveloppes de Chow

Pour un champ algébrique F, nous noterons $|F|$ l'ensemble de ses sous-champs fermés intègres. Les éléments de $|F|$ seront appelés les points de F.

Pour chaque point $x \in |F|$, le sous-champ correspondant sera noté $\overline{\{x\}}$. Comme ce champ est intègre, il existe un sous-champ ouvert U de $\overline{\{x\}}$ qui est une gerbe sur un espace algébrique intègre M. Notons $i : SpecK(M) \longrightarrow M$, le point générique de M. Alors $i^*F := U \times_M SpecK(M)$ est une gerbe sur $SpecK(M)$.

Définition 1.19 *La gerbe i^*F définie ci-dessus est appelée la gerbe résiduelle de F au point x. Elle sera notée $\widetilde{x}$.*

La classe du groupe d'isotropie d'un point $x \in |F|$, est la classe de conjugaison du groupe algébrique sur $Speck(x)^{sp}$ qui borne la gerbe $\widetilde{x}$. On la notera $|H_x|$.

L'ordre de ramification de F en un point x est par définition l'ordre de $|H_x|$, s'il existe.

Remarquons que pour chaque point x de F, on dispose d'un morphisme représentable canonique

$$i_x : \widetilde{x} \longrightarrow F$$

Définition 1.20 *Un morphisme propre de champs algébriques*

$$f : F \longrightarrow F'$$

est une quasi-enveloppe de Chow, si pour tout point $x \in |F'|$, le morphisme induit

$$f_{\widetilde{x}} : f^{-1}(\widetilde{x}) := F \times_{F'} \widetilde{x} \longrightarrow \widetilde{x}$$

admet une section après un changement de base fini de $k(x)$.

Notons que les quasi-enveloppes de Chow sont stables par changements de base quelconques, ainsi que par composition.

Exemple: Soit F un champ algébrique séparé, et $X \longrightarrow F$ une quasi-enveloppe de Chow, avec X un espace algébrique. Alors F est automatiquement un espace algébrique. En effet, lorsqu'un morphisme représentable $f : F \longrightarrow F'$ est une quasi-enveloppe de Chow, pour tout point $x \in |F'|$, il existe un point $y \in |F|$ avec $f(y) = x$, tel que le morphisme induit

$$|H_y| \otimes Spec\overline{k(y)^{sp}} \longrightarrow |H_x| \otimes Spec\overline{k(y)^{sp}}$$

soit un isomorphisme. Comme X est tel que $|H_y|$ est trivial pour chaque $y \in |X|$, on en déduit que F est un champ algébrique tel que

$$\Delta : F \longrightarrow F \times_S F$$

est une immersion fermée. C'est donc un espace algébrique.

Théorème 1.21 *1. Soit F un champ algébrique de Deligne-Mumford réduit. Alors, il existe un nombre fini de S-espaces algébriques X_i, des groupes finis H_i (opérant trivialement sur X_i), et un morphisme représentable fini*

$$f : \coprod_i [X_i/H_i] \longrightarrow F$$

qui est une quasi-enveloppe de Chow.

2. Supposons que S est de caractéristique nulle. Soit F un champ algébrique normal, Δ-équidimensionnel et pseudo-séparé (1.14). Alors, il existe un nombre finis d'espaces algébriques X_i, et un morphisme représentable fini

$$f : \coprod_i F_i \longrightarrow F$$

qui est une quasi-enveloppe de Chow, avec F_i une gerbe sur X_i bornée par des espaces algébriques en groupes lisses sur X_i.

Preuve: (1) Si on construit une quasi-enveloppe de Chow vérifiant les conclusions du théorème pour chacune des composantes irréductibles de F, leur union disjointe satisfera aux conditions demandées. On peut donc se restreindre au cas où F est intègre. Soit M l'espace de modules de F. D'après [Vi2, 2.6], il existe un S-espace algébrique normal X et un morphisme représentable fini

$$f : X \longrightarrow F$$

Notons F_0 la normalisation de $F \times_M X$, et X_0 l'espace de modules de F_0. Alors le morphisme naturel $X_0 \longrightarrow X$ est un morphisme fini et birationnel entre deux espaces algébriques normaux, c'est donc un isomorphisme. Démontrons alors que F_0 est une gerbe triviale sur son espace de modules X.

Lemme 1.22 *Soit F un champ de Deligne-Mumford normal tel que la projection naturelle $p : F \longrightarrow M$ sur son espace de modules admette une section. Alors F est équivalent à une gerbe triviale sur M.*

Preuve: Il suffit de montrer que la projection $F \longrightarrow M$ fait de F une gerbe sur M. Comme ceci est local sur M_{et}, on peut supposer par 1.17, que $F = [X/H]$ est un champ quotient d'un groupe fini H opérant sur un S-schéma normal et irréductible X.

Dans ce cas $M = X/H$, et la section $M \longrightarrow F$ est définie par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X/H \arrow[r, "Id"] & X/H \\ Y \arrow[u, "q"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

où p est la projection canonique, q un H-fibré principal, et f un morphisme H-équivariant. Comme q est étale, f est non-ramifié. Or Y et X sont normaux et de même dimension, donc f est étale. Ce qui implique que p est aussi étale. Ainsi, si $H_0 = Ker(H \longrightarrow Aut(X))$, l'action de H/H_0 est libre , et F est équivalent à $[(X/H)/H_0]$. $\square$

Ainsi, $F_0 \simeq [X_0/H_0]$ pour un groupe fini opérant trivialement sur X_0. De plus, le morphisme

$$f_0 : F_0 \longrightarrow F$$

est représentable fini, et est génériquement une quasi-enveloppe de Chow. Il existe donc un sous-champ ouvert dense $U \hookrightarrow F$ tel que $F_0 \times_F U \longrightarrow U$ soit une quasi-enveloppe de Chow. Notons F' le fermé complémentaire réduit de U dans F. Par récurrence noethérienne, la proposition est vraie pour F'. Soit X'_i, H'_i et

$$f' : \coprod_i [X'_i/H'_i] \longrightarrow F'$$

une quasi-enveloppe de Chow pour F'. Alors

$$f = f_0 \coprod f' : [X_0/H_0] \coprod_i [X'_i/H'_i] \longrightarrow F$$

est une quasi-enveloppe de Chow pour F qui vérifie les conditions demandées.

(2) Le résultat se déduit immédiatemment du cas (1) et du lemme 1.13. $\square$

2 Chapitre 2 : K-théorie des champs algébriques

Dans ce chapitre nous allons étudier les spectres de K-théorie des champs algébriques. Il s'agit d'essayer de décrire ces spectres en fonctions de "choses connues", à savoir les spectres de K-théorie des schémas ou des espaces algébriques, ou encore la K-cohomologie des champs algébriques.

Les premiers résultats dans cette direction sont les théorèmes de descente (2.4, 2.9). Cependant, ils ne sont pas réellement utilisables pour décrire la K-théorie, mais sont plutôt des outils techniques permettant de ramener les calculs à des cas connus (quotients par des groupes finis par exemple). Nous en feront un usage intensif dans le chapitre suivant, lors de la preuve des formules de Riemann-Roch.

Bien que possédant de nombreuses propriétés analogues à celles de la K-théorie des schémas (localisation, homotopie, axiome du fibré projectif ...), la K-théorie des champs algébriques diffère de celle-ci par le fait qu'elle ne possède plus la propriété de descente étale ([Th, 11.10]). Ceci provient de la nature mixte des faisceaux cohérents sur les champs algébriques, dans le sens où ils font intervenir d'une part des faisceaux cohérents sur des schémas, et d'autre part des représentations de groupes algébriques. Dans le cas des champs de Deligne-Mumford par exemple, la K-cohomologie rationnelle ne peut pas retenir l'information sur ces représentations, car la cohomologie d'un groupe fini est de torsion. Bien que je n'aie pas vérifié tous les détails, il est même probable que la condition de descente étale pour la K-théorie caractérise les espaces algébriques parmi les champs de Deligne-Mumford. C'est alors le but des théorèmes de dévissage (2.15, 2.23, 2.29) de décrire la partie de la K-théorie qui disparaît dans la K-cohomologie. Ces théorèmes sont d'un certain point de vue orthogonaux aux théorèmes de descente. En effet, il est difficile de les utiliser dans les calculs, mais en contre-partie, leur caractère descriptif permet de définir, de manière assez évidente, le caractère de Chern qui sera utilisé dans les formules de Riemann-Roch.

Le site $(Esp/S)_{li}$ est muni d'un faisceau d'anneaux cohérent

$$\mathcal{O} : X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$$

On lui associe le champ en catégories $\mathbf{Vect} \longrightarrow (Esp/S)_{li}$ (resp. $\mathbf{Coh} \longrightarrow (Esp/S)_{li}$), dont la catégorie des sections au-dessus d'un espace algébrique X est la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules localement libres et de rang fini (resp. localement de présentation finie) sur le site restreint $(Esp/X)_{li}$. Remarquons que $\mathbf{Vect}$ est un champ en catégories exactes. Il n'en n'est plus de même de $\mathbf{Coh}$.

Si F est un champ algébrique, on peut définir son petit site lisse F_{li}. Ses objets sont les 1-morphismes lisses $s : X \longrightarrow F$, avec X un espace algébrique. Un morphisme entre $s : X \longrightarrow F$ et $t : Y \longrightarrow F$, est la donnée d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$, et d'un 2-morphisme h entre s et $t \circ f$.

Ce site est muni du faisceau d'anneaux

$$\mathcal{O}_F : (\ X \longrightarrow F\ ) \mapsto \mathcal{O}_X(X)$$

On lui associe le champ en catégories exactes $\mathbf{Coh}_F \longrightarrow F_{li}$, dont la catégorie des sections au-dessus de l'objet $X \longrightarrow F$ est la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_F$-modules cohérents sur X. C'est la catégorie cofibrée **Coh** restreinte à F_{li}.

Pour un champ algébrique F, on pose alors

$$\mathbf{Vect}(F) := \int_F \mathbf{Vect}$$

$$\mathbf{Coh}(F) := \int_F \mathbf{Coh}$$

D'après la définition des sections cartésiennes globales d'un champ ([Gi, 1.1.1]), la catégorie $\mathbf{Vect}(F)$ (resp. $\mathbf{Coh}(F)$) peut-être définie de la façon suivante

un objet : est défini par la donnée suivante :

- Pour toute section $s : X \longrightarrow F$, avec X un espace algébrique, la donnée d'un fibré vectoriel (resp. faisceau cohérent) $V_{(s)}$ sur X
- pour tout morphisme d'espaces algébriques $f : Y \longrightarrow X$, et toute paire de sections
$$s : X \longrightarrow F$$
$$t : Y \longrightarrow F$$
et tout 2-morphisme $h : s \circ f \Rightarrow t$, un isomorphisme de fibrés vectoriels (resp. faisceaux cohérents)
$$\phi_{s,f,h} : f^* V_{(s)} \simeq V_{(t)}$$
- Pour toute paire de morphismes d'espaces algébriques
$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$
tout triplet de 1-morphismes $s : X \longrightarrow F$, $t : Y \longrightarrow F$, $u : Z \longrightarrow F$, et toute paire de 2-morphismes
$$h : s \circ f \Rightarrow t$$
$$j : t \circ g \Rightarrow u$$
une égalité
$$\phi_{t,g,j} \circ g^* \phi_{s,f,h} = \phi_{u,f \circ g, h \circ j}$$

un morphisme : entre V et W est défini par la donnée suivante :

- Pour toute section $s : X \longrightarrow F$, avec X un espace algébrique, un morphisme de fibrés vectoriels (resp. faisceaux cohérents) sur X

$$a_s : V_{(s)} \longrightarrow W_{(s)}$$

- Pour tout morphisme d'espaces algébrique $f : Y \longrightarrow X$, et toute paire de sections

$$s : X \longrightarrow F$$

$$t : Y \longrightarrow F$$

  et tout 2-morphisme $h : s \circ f \Rightarrow t$, une égalité

$$\phi^W_{s,f,h} \circ f^*(a_s) = a_t \circ \phi^V_{s,f,h}$$

Plus généralement, pour $\mathcal{E}$ une catégorie cofibrée sur $(Esp/S)_{li}$, F un champ, et V une section globale cartésienne de $\mathcal{E}$ sur F, nous noterons $V_{(s)}$ la section de $\mathcal{E}$ sur l'espace algébrique X définie par un 1-morphisme $s : X \longrightarrow F$.

Supposons que $f : F \longrightarrow F'$ soit un morphisme propre de champs algébriques. Alors, on peut définir une pseudo-transformation naturelle entre les pseudo-foncteurs sur F'_{li}

$$U \mapsto \mathbf{Coh}(f^{-1}(U))$$

$$U \mapsto \mathbf{Coh}(U)$$

qui à un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $f^{-1}(U)$, associe le faisceau $f_*(\mathcal{F})$ sur U. Le fait que ceci définit bien une pseudo-transformation naturelle est une conséquence de la formule de transfert pour les morphismes lisses. Ainsi, f_* définit un morphisme de champs sur F'_{li}

$$f_* : f_*\mathbf{Coh} \longrightarrow \mathbf{Coh}$$

Par la même construction, si $C\mathbf{Mod}_{qcoh}$ désigne la catégorie cofibrée des complexes de $\mathcal{O}$-modules, à cohomologie quasi-cohérente et bornée, on définit une image directe

$$f_* : f_*C\mathbf{Mod}_{qcoh} \longrightarrow C\mathbf{Mod}_{qcoh}$$

2.1 Premières propriétés

Définition 2.1 *Le préfaisceau en spectres de K-théorie à coefficients dans* **Vect** *est noté* $\underline{K}$. *La K-cohomologie d'un champ algébrique F est*

$$\underline{\mathbf{K}}(F) := \mathbf{H}(F, \underline{K}_{\mathbf{Q}})$$

Le foncteur de K-théorie à coefficients dans **Vect** *est noté*

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{K}: & Ch(S) & \longrightarrow & Sp \\ & F & \mapsto & \mathbf{K}(F) := K(\mathbf{Vect}(F)) \end{array}$$

Si F est un champ algébrique, son préfaisceau en spectres de K-théorie à coefficients dans $\mathbf{Coh}_F$ sera noté $\underline{G}$. On définit la G-cohomologie de F par

$$\underline{\mathbf{G}}(F) := \mathbf{H}(F_{li}, \underline{G}_{\mathbf{Q}})$$

Le spectre de G-théorie d'un champ algébrique F est défini par

$$\mathbf{G}(F) := K(\mathbf{Coh}(F))$$

Nous noterons

$$can_F : \mathbf{K}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}(F)$$

$$can_F : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F)$$

les morphismes canoniques (1.6).

Remarque: Pour le site lisse F_{li} les morphismes de transitions ne sont pas forcement plats. Ainsi, $\underline{G}$ n'est pas réelement défini comme préfaisceau en spectres sur F_{li}. Pour résoudre cette difficulté il suffit de travailler avec les définitions de [Th].

Notons que si $f : F \longrightarrow F'$ est un 1-morphisme plat entre deux champs algébriques, le foncteur

$$f^* : f^*\mathbf{Coh}_{F'} \longrightarrow (\mathbf{Coh}_F)$$

est exact, et induit donc des morphismes

$$f^* : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(F')$$

$$f^* : \underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F')$$

De cette façon, $F \mapsto \mathbf{G}(F)$ et $F \mapsto \underline{\mathbf{G}}(F)$ sont des foncteurs stricts de la 2-catégorie $(ChAlg(S), fl)$ des champs algébriques et 1-morphismes plats, vers celle des spectres, morphismes de spectres et classe d'homotopie d'homotopie entre morphismes.

Si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme propre et de dimension cohomologique finie. Alors, on peut définir un morphisme dans $HoSp$

$$f_* : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(F')$$

De cette façon, $F \mapsto \mathbf{G}(F)$ est un foncteur covariant de la catégorie $(HoChAlg(S), pr < \infty)$ des champs algébriques et morphismes propres de dimension cohomologique finie, vers $HoSp$.

Nous aurons besoin à certains moments d'avoir une version fonctorielle de ces images directes. Pour cela, nous utiliserons les constructions de Thomason ([Th]).

Par exemple supposons que l'on dispose d'un I-pseudo-diagramme de champs algébriques
$$F : I \longrightarrow ChAlg(S)$$
tel que pour chaque $u : i \longrightarrow j$, le morphisme $F(u) : F(i) \longrightarrow F(j)$ soit propre et de dimension cohomologique finie. Notons, pour chaque $i \in I$, $A(i)$ la catégorie bi-compliciale de Waldhausen des complexes de $\mathcal{O}_{SF(i)}$-modules acycliques, et à cohomologie cohérente et bornée. Alors, la correspondance
$$i \mapsto A(i)$$
$$(u : i \to j) \mapsto F(u)_* : A(i) \longrightarrow A(j)$$
définit un I-pseudo-diagramme de catégories bi-compliciales de Waldhausen. Et par le procédé de strictification 6.3, un I-diagramme de catégories bi-compliciales de Waldhausen
$$SA : i \mapsto SA(i)$$
En prenant l'image par le foncteur covariant $\mathbf{G}$, on obtient donc un I-diagramme dans Sp
$$\mathbf{G} : i \mapsto K(SA(i))$$
Ainsi, pour chaque diagramme de champs algébriques, avec des morphismes de transition propres et de dimension cohomologique finie, on disposera d'un diagramme de spectres de G-théorie associé. Le cas que nous utiliserons le plus est celui où $I = \Delta^{op}$.

Supposons maintenant que $f : F \longrightarrow F'$ est propre et représentable. On dispose alors d'un morphisme de champs sur F'_{li}
$$f_* : f_*\mathbf{Coh} \longrightarrow \mathbf{Coh}$$
Si on note $C\mathbf{Mod}_{coh}$ (resp. $C\mathbf{Mod}_{coh}^{ac}$) la catégorie cofibrée en catégories bi-compliciales de Waldhausen des complexes de $\mathcal{O}$-modules (resp. des $\mathcal{O}$-modules acycliques et à cohomologie cohérente et bornée), à cohomologie bornée et cohérente, ce morphisme induit un morphisme exact de catégories cofibrées en catégories bi-compliciales de Waldhausen
$$f_* : f_*C\mathbf{Mod}_{coh}^{ac} \longrightarrow C\mathbf{Mod}_{coh}$$
Ainsi, en passant aux spectres de K-théorie, on a construit un morphisme de préfaisceaux en spectres sur F'_{li}
$$f_* : f_*\underline{G} \longrightarrow \underline{G}$$
Les produits tensoriels
$$\otimes : \mathbf{Vect} \times_{(Esp/S)_{li}} \mathbf{Vect} \longrightarrow \mathbf{Vect}$$
$$\otimes : \mathbf{Vect}_F \times_{F_{li}} \mathbf{Vect}_F \longrightarrow \mathbf{Vect}_F$$

$$\otimes : \mathbf{Vect}_F \times_{F_{li}} \mathbf{Coh}_F \longrightarrow \mathbf{Coh}_F$$

induisent des produits dans $HoSp$ (1.2)

$$\otimes : \mathbf{K} \wedge \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$\otimes : \mathbf{K}(F) \wedge \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(F)$$

$$\otimes : \underline{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{K}} \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}$$

$$\otimes : \underline{\mathbf{K}}(F) \wedge \underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F)$$

Rappelons les principales propriétés de ce foncteurs.

Proposition 2.2 *1. (axiome du fibré projectif) Soit $\pi : \mathbf{P}(V) \longrightarrow F$ un fibré projectif associé à un fibré vectoriel V de rang $r+1$ sur un champ algébrique F, et $x = \mathcal{O}_P(1)$ le fibré inversible canonique. Alors il existe des isomorphismes dans $HoSp$*

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{i=0}^{i=r} \mathbf{K}(F) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{P}(V)) \\ \vee_i a_i & \mapsto & \sum_i x^i \otimes \pi^*(a_i) \end{array}$$

et de même avec $\underline{\mathbf{K}}$, $\mathbf{G}$ et $\underline{\mathbf{G}}$.

2. (localisation) Si $j : F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée de champs algébriques, et $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion ouverte complémentaire. Alors il existe des triangles fonctoriels pour les images réciproques de morphismes plats

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{G}(F') \arrow[dr, "j_*"] & \\ \mathbf{G}(U) \arrow[ur, "-1"] & & \mathbf{G}(F) \arrow[ll, "i^*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \underline{\mathbf{G}}(F') \arrow[dr, "j_*"] & \\ \underline{\mathbf{G}}(U) \arrow[ur, "-1"] & & \underline{\mathbf{G}}(F) \arrow[ll, "i^*"] \end{tikzcd}$$

3. (homotopie) Si $p : V \longrightarrow F$ est un morphisme de champs algébriques qui est un torseur affine sur F_{li}, alors les morphismes naturels dans $HoSp$

$$p^* : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(V)$$

$$p^* : \underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(V)$$

sont des isomorphismes.

4. (dualité de Poincaré) Si F est un champ algébrique régulier, le morphisme naturel dans $HoSp(F_{li})$

$$\underline{\mathbf{K}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}$$

est un isomorphisme.

5. *(descente) Pour tout champ algébrique F, le morphisme canonique*
$$\underline{\mathbf{K}}(F) \longrightarrow \mathbf{H}(F_{li}, \underline{K}_{\mathbf{Q}})$$
est un isomorphisme d'anneaux dans $HoSp$, compatible avec les images réciproques.
Si X est un espace algébrique, alors le morphisme canonique
$$\mathbf{G}_*(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*(X)$$
est un isomorphisme.

6. *(invariance topologique) Si $j : F_{red} \hookrightarrow F$ est l'immersion canonique du sous-champ algébrique réduit d'un champ algébrique, les morphismes*
$$j_* : \mathbf{G}(F_{red}) \longrightarrow \mathbf{G}(F)$$
$$j_* : \underline{\mathbf{G}}(F_{red}) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F)$$
sont des isomorphismes de $HoSp$.

7. *(continuité) Soit $\{F_i\}_{i\in I}$ un système inductif filtrant de champs algébriques avec 1-morphismes de transition plats. Alors, si $F = Colim_I F_i$ est une 1-limite inductive dans $ChAlg(S)$, le morphisme naturel*
$$\mathbf{G}(F) \longrightarrow lim_I \mathbf{G}(F_i)$$
est un isomorphisme dans $HoSp$.

8. *(transfert) Si*
$$\begin{tikzcd} F'_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f'"'] & F_0 \arrow[d, "f"] \\ F' \arrow[r, "u"'] & F \end{tikzcd}$$
est un carré 2-cartésien dans $ChAlg(S)$, avec f propre et représentable, et u plat et représentable, alors les diagrammes suivants commutent à homotopie naturelle près dans Sp
$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}(F'_o) \arrow[d, "f'_*"'] & \mathbf{G}(F_o) \arrow[l, "u_0^*"'] \arrow[d, "f_*"] \\ \mathbf{G}(F') & \mathbf{G}(F) \arrow[l, "u^*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathbf{G}}(F'_0) \arrow[d, "f'_*"'] & \underline{\mathbf{G}}(F_0) \arrow[l, "u_0^*"'] \arrow[d, "f_*"] \\ \underline{\mathbf{G}}(F') & \underline{\mathbf{G}}(F) \arrow[l, "u^*"] \end{tikzcd}$$

9. *(formule de projection) Soit $f : F' \longrightarrow F$ un morphisme propre et représentable de champs algébriques. Alors les diagrammes suivants commutent à homotopie naturelle près dans Sp*
$$\begin{tikzcd} \mathbf{K}(F) \wedge \mathbf{G}(F') \arrow[r, "Id\otimes f_*"] \arrow[d, "f^*\otimes Id"'] & \mathbf{G}(F) \\ \mathbf{K}(F') \wedge \mathbf{G}(F') \arrow[r, "\otimes"] & \mathbf{G}(F') \arrow[u, "f_*"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathbf{K}}(F) \wedge \underline{\mathbf{G}}(F') \arrow[r, "Id\otimes f_*"] \arrow[d, "f^*\otimes Id"'] & \underline{\mathbf{G}}(F) \\ \underline{\mathbf{K}}(F') \wedge \underline{\mathbf{G}}(F') \arrow[r, "\otimes"] & \underline{\mathbf{G}}(F') \arrow[u, "f_*"'] \end{tikzcd}$$

Preuve: Les points (1), (2), (3), (6), (7), (8) et (9) se démontrent exactement comme dans le cas d'un schéma ([Q]). Le point (4) se démontre comme dans [Th2].

Le point (5) provient directement du théorème de descente de la G-théorie étale ([Th, 11.10]), et du fait qu'un préfaisceau en spectres est flasque pour la topologie étale si et seulement il l'est pour la topologie lisse (car tout morphisme lisse possède une section après un recouvrement étale). $\square$

Remarques:

- Le problème de savoir si pour un champ régulier F, le morphisme naturel $\mathbf{K}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(F)$ est un isomorphisme semble difficile, même à coefficients rationnels. Les seuls cas où nous connaissons une réponse partielle est celui des champs quotients par des groupes affines ([Th2]).

- La propriété de descente implique que l'on a un isomorphisme naturel dans $HoSp(F_{li})$
$$\underline{G}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}$$
Ainsi, si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme propre et représentable, on a $\mathbf{R}f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}} \simeq f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}}$ dans $HoSp(F'_{li})$, et donc on peut construire une image directe
$$f_* : \underline{\mathbf{G}}(F) \simeq \mathbf{H}(F'_{li}, \mathbf{R}f_*\underline{G}) \simeq \mathbf{H}(F'_{li}, \mathbf{R}f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}}) \stackrel{\mathbf{H}(f_*)}{\longrightarrow} \mathbf{H}(F'_{li}, \underline{G}_{\mathbf{Q}}) \simeq \underline{\mathbf{G}}(F')$$
dans $HoSp$. En utilisant les images directes fonctorielles pour $\mathbf{G}$, et cette identification, on peut montrer que
$$F \mapsto \underline{\mathbf{G}}$$
est un foncteur covariant de la 2-catégorie des champs algébriques représentables sur un champ de base fixe F', et 1-morphismes propres et représentables, vers celle des spectres, morphismes de spectres et classes d'homotopie d'homotopie entre morphismes.

Corollaire 2.3 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un 1-morphisme propre et représentable de champs algébriques. Alors le diagramme suivant commute dans $HoSp$*
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}(F) & \xrightarrow{f_*} & \mathbf{G}(F') \\ {\scriptstyle can}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle can} \\ \underline{\mathbf{G}}(F) & \xrightarrow[f_*]{} & \underline{\mathbf{G}}(F') \end{array}$$

Preuve: C'est immédiat d'après la fonctorialité du morphisme can. $\square$

2.2 Descente de la G-théorie rationnelle

2.2.1 Descente au-dessus d'un espace algébrique

Théorème 2.4 *Soit F un champ algébrique, et $p : F \longrightarrow X$ un 1-morphisme, avec X un espace algébrique. Alors*

$$\begin{array}{cccc} p_*\mathbf{G}_{\mathbf{Q}} : & X_{li} & \longrightarrow & Sp \\ & U & \mapsto & \mathbf{G}(p^{-1}U)_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

est un préfaisceau flasque sur X_{li}.

Preuve: Comme un morphisme lisse possède des sections après un changement de base étale et surjectif, un préfaisceau est flasque sur X_{li} si et seulement si sa restriction l'est sur X_{et}. On travaillera donc avec la topologie étale sur X.

Remarquons aussi, que s'il existe un triangle

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr] & \\ F \arrow[ur, "-1"] \arrow[rr] & & G \end{tikzcd}$$

dans $Sp(X_{et})$, G est flasque si et seulement si E et F le sont. Ainsi, en utilisant la localisation (2.2), la continuité (2.2) et une récurrence noethérienne on peut supposer que $X = SpecK$, est le spectre d'un corps.

Lemme 2.5 *Soit $K \hookrightarrow L$ une extension galoisienne de corps, et H son groupe de galois. Soit F un champ algébrique sur K, et $F_L := F \times_{SpecK} SpecL$, muni de l'action de H induite. Alors le morphisme naturel*

$$\mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow holim_H \mathbf{G}(F_L)_{\mathbf{Q}}$$

est un isomorphisme dans $HoSp$.

Preuve: Comme H est un groupe fini, et que les spectres sont à coefficients rationnels, le lemme est équivalent au fait que le morphisme naturel

$$q^* : \mathbf{G}_*(F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}_*(F_L)^H_{\mathbf{Q}}$$

est un isomorphisme. Mais d'après la formule de projection (2.2 (9)) pour la projection $q : F_L \longrightarrow F$, un inverse de q^* est $\frac{1}{m}q_*$, où m est l'ordre de H. $\square$

D'après le lemme, $p_*\mathbf{G}_{\mathbf{Q}}$ possède la propriété de descente pour tout recouvrement dans $(SpecK)_{et}$ qui est de la forme $SpecL \longrightarrow SpecK$, pour une extension galoisienne L/K. Mais comme tout morphisme couvrant de $(SpecK)_{et}$ possède une section après un changement de base de cette forme, le préfaisceau en spectres $p_*\mathbf{G_Q}$ est flasque sur $(SpecK)_{et}$. $\Box$

Corollaire 2.6 *1. Soit F un champ algébrique, $F \longrightarrow X$ un 1-morphisme vers un espace algébrique, et $Y \longrightarrow X$ un fibré principal homogène sous un groupe fini H. Notons $p : F_Y := F \times_X Y \longrightarrow F$ son image réciproque sur F. Alors, il existe un diagramme commutatif d'isomorphismes dans $HoSp$*

$$\begin{tikzcd} hocolim_H \mathbf{G}(F_Y)_\mathbf{Q} \arrow[r, "can"] \arrow[d, "p_*"'] & holim_H \mathbf{G}(F_Y)_\mathbf{Q} \arrow[dl, "p_*"] \\ \mathbf{G}(F)_\mathbf{Q} & \end{tikzcd}$$

2. Si F est un champ de Deligne-Mumford régulier, et $p : F \longrightarrow M$ la projection sur son espace de modules, alors il existe un isomorphisme naturel dans $HoSp$

$$\mathbf{H}(M_{et}, p_*\mathbf{K} \otimes \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{G}(F)_\mathbf{Q}$$

<u>Preuve:</u> (1) Comme H est fini, on sait que pour toute action de H sur un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel V, le morphisme naturel $V_H \longrightarrow V^H$, des co-invariants vers les invariants, est un isomorphisme. Ceci implique que le morphisme *can* du corollaire est un isomorphisme.

Il suffit ensuite de remarquer que $p^* \circ p_* = \times m$, avec m l'ordre de H. Or une application du théorème 2.4 au morphisme $F \longrightarrow X$, et au recouvrement étale $Y \longrightarrow X$, montre que

$$p^* : \mathbf{G}(F)_\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{H}(Y/X, f_*\mathbf{G_Q})$$

est un isomorphisme. Mais le membre de droite est canoniquement isomorphe dans $HoSp$ à $holim_H \mathbf{G}(F_Y)_\mathbf{Q}$.

(2) Considérons les morphismes naturels de $HoSp$

$$\mathbf{G}(F)_\mathbf{Q} \xrightarrow{a} \mathbf{H}(M_{et}, p_*\mathbf{G_Q}) \xleftarrow{b} \mathbf{H}(M_{et}, p_*\mathbf{K_Q})$$

Le théorème 2.4 implique que a est un isomorphisme. Localement sur M_{et}, on a $F \simeq [X/H]$, avec H un groupe fini opérant sur un schéma régulier X (1.17). Mais dans ce cas, on sait que le morphisme naturel

$$\mathbf{K}([X/H]) \longrightarrow \mathbf{G}([X/H])$$

est un isomorphisme dans $HoSp$ ([Th2, 5.3]). Ce qui montre que le morphisme

$$p_*\mathbf{K_Q} \longrightarrow p_*\mathbf{G_Q}$$

est une équivalence faible sur M_{et}, et donc que b est un isomorphisme dans $HoSp$. $\Box$

Remarques:

- Il est en général faux que $\mathbf{G_Q}$ soit flasque sur F_{li}. Un exemple simple est celui de $F = [SpecK/H]$, avec H un groupe fini (1.2).
- Un cas d'application important du précédent théorème est celui où F est localement un quotient affine géométrique uniforme (par exemple un champ de Deligne-Mumford), et $p : F \longrightarrow M$ la projection naturelle sur l'espace de modules. En effet dans ce cas le théorème nous permet de localiser sur M_{et}, et donc de ramener certaines situations au cas où $F = [X/H]$ est un quotient par un groupe affine.

2.2.2 Descente covariante

Dans ce paragraphe on considérera des "champs simpliciaux augmentés". Comme ces objets ne sont pas réellement des objets simpliciaux strictement augmentés, mais seulement "augmentés à isomorphismes près", nous allons commencer par fixer le vocabulaire pour éviter les confusions.

Définition 2.7 *1. Soit F un champ algébrique. On définit la 1-catégorie quotient des champs sur F, Ch/F, par*

- *les objets de Ch/F sont les 1-morphismes*

$$u : F' \longrightarrow F$$

- *un morphisme entre $u : F' \longrightarrow F$ et $v : F'' \longrightarrow F$, est un couple (f, h), où f est un 1-morphisme entre F'' et F', et h un 2-morphisme entre $u \circ f$ et v.*

2. Un champ simplicial augmenté vers un champ algébrique F, est un objet simplicial de Ch/F.

Remarque: Si on considère les champs comme des catégories fibrées (donc, en particulier, comme des catégories), un champ simplicial augmenté vers F donne lieu à un pseudo-foncteur covariant

$$F_\bullet : \Delta^{op} \longrightarrow Cat$$

En particulier, si chaque 1-morphisme de transition est propre et de dimension cohomologique finie sur F, on peut en prendre l'image par le pseudo-foncteur covariant **Coh**, et obtenir un Δ^{op}-pseudo-diagramme de catégories

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{Coh}(F_\bullet) : & \Delta^{op} & \longrightarrow & Cat \\ & [n] & \mapsto & \mathbf{Coh}(F_n) \end{array}$$

En considérant les catégories de complexes de $\mathcal{O}$-modules acycliques et à cohomologie cohérente et bornée, on en déduit un Δ^{op}-pseudo-diagramme (covariant) de catégories bi-compliciales de Waldhausen (6.3). Par les procédés de strictification 6.3, on en déduit un Δ^{op}-diagramme dans Sp

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{G}: & \Delta^{op} & \longrightarrow & Sp \\ & [m] & \mapsto & \mathbf{G}(F_m) \end{array}$$

On posera alors

$$\mathbf{G}(F_\bullet) := hocolim_{[n]\in\Delta^{op}}\mathbf{G}(F_n)$$

De plus, l'augmentation de $F_\bullet$ vers F induit un pseudo-morphisme de $F_\bullet$ vers le champ simplicial augmenté constant F. Et donc, un morphisme dans $HoSp$ (6.3)

$$\mathbf{G}(F_\bullet) \longrightarrow \mathbf{G}(F)$$

De même, si $f : F \longrightarrow F'$ est un 1-morphisme de champs, $q : F_\bullet \longrightarrow F$ et $q' : F'_\bullet \longrightarrow F'$ deux champs simpliciaux augmentés, et $f_\bullet : F_\bullet \longrightarrow F'_\bullet$ un morphisme de champs simpliciaux augmentés sur F', propre sur chaque F_m, alors on trouve un diagramme commutatif dans $HoSp$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}(F_\bullet) \arrow[r, "(f_\bullet)_*"] \arrow[d, "q_*"'] & \mathbf{G}(F'_\bullet) \arrow[d, "q'_*"] \\ \mathbf{G}(F) \arrow[r, "f_*"'] & \mathbf{G}(F') \end{tikzcd}$$

Soit $f : F_0 \longrightarrow F$ un 1-morphisme propre de champs algébriques. Son nerf est le champ algébrique simplicial augmenté sur F, $\mathcal{N}(F_o/F)$, défini par

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{N}(F_o/F): & \Delta & \longrightarrow & ChAlg(S) \\ & [m] & \mapsto & \underbrace{F_0 \times_F F_0 \cdots \times_F F_0}_{m\ fois} \end{array}$$

Définition 2.8 *Le spectre* $\mathbf{G}(\mathcal{N}(F_o/F))$ *sera noté* $\mathbf{G}(F_o/F)$.

De la même façon, si f est représentable, on définit les spectres de G-cohomologie relatifs

$$\underline{\mathbf{G}}(F_0/F) := hocolim_{[n]\in\Delta^{op}}\underline{\mathbf{G}}(\mathcal{N}(F_o/F)_n)$$

Comme la construction précédente est fonctorielle, elle garde un sens au niveau des catégories homotopiques. Ainsi, si $f : F_0 \longrightarrow F$ est un morphisme propre et de dimension cohomologique finie dans $HoChAlg(S)$, on dispose des spectres $\mathbf{G}(F_o/F)$, et $\underline{\mathbf{G}}(F_0/F)$ dans le cas où f est représentable, munis de morphismes dans $HoSp$

$$f_* : \mathbf{G}(F_o/F) \longrightarrow \mathbf{G}(F)$$

$$f_* : \underline{\mathbf{G}}(F_0/F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F)$$

Théorème 2.9 *1. Soit $f : X \longrightarrow F$ un morphisme propre et surjectif de champs algébriques, avec F de Deligne-Mumford et X un espace algébrique. Alors le morphisme naturel*

$$f_* : \underline{\mathbf{G}}(X/F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F)$$

est un isomorphisme.

2. Soit $f : F_0 \longrightarrow F$ une quasi-enveloppe de Chow de dimension cohomologique finie. Alors le morphisme naturel

$$f_* : \mathbf{G}(F_0/F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}}$$

est un isomorphisme.

Preuve: (1) En utilisant la localisation (2.2), la continuité (2.2), et une récurrence noethérienne, on peut se ramener au cas où F est une gerbe sur un corps K. De plus, comme les colimites homotopiques commutent entre elles, une utilisation du corollaire 2.3 nous ramène au cas où K est séparablement clos, et donc au cas où F est une gerbe triviale, bornée par un groupe fini H.

Formons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} SpecK \arrow[r] & F \\ Y \arrow[u, "g"] \arrow[r] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Il nous permet de construire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} hocolim_H \underline{\mathbf{G}}(SpecK) \arrow[r] & \underline{\mathbf{G}}(F) \\ hocolim_H \underline{\mathbf{G}}(Y/SpecK) \arrow[u, "g_*"] \arrow[r] & \underline{\mathbf{G}}(X/F) \arrow[u, "f_*"'] \end{tikzcd}$$

La formule de projection (2.2) implique que les flèches horizontales sont des isomorphismes. Il reste donc à montrer que g_* est un isomorphisme. Comme les colimites homotopiques préservent les équivalences faibles, il suffit de montrer que

$$g_* : \underline{\mathbf{G}}(Y/SpecK) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(SpecK)$$

est un isomorphisme.

Soit L/K une extension purement inséparable, telle que Y possède un point rationnel sur L. Posons $Y_L = Y \times_{SpecK} SpecL$. Alors, on sait que les morphismes

$$\underline{\mathbf{G}}(Y_L) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(Y)$$
$$\underline{\mathbf{G}}(SpecL) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(SpecK)$$

sont des isomorphismes ([Q, 4.7]). On peut donc supposer que Y possède un point rationnel sur K. Mais dans ce cas, la section $s : SpecK \longrightarrow Y$, induit un inverse homotopique de g_* ([G3, 4.1 (I)]).

(2) Comme pour le point (1), on peut se ramener au cas où F est une gerbe sur un corps séparablement clos K. Comme, par définition des quasi-enveloppes de Chow, le morphisme $F_0 \longrightarrow F$ dispose alors d'une section après un changement de base par une extension purement inséparable de K, on peut supposer que

$$F_0 = F \times_{SpecK} SpecL \longrightarrow F$$

où L/K est purement inséparable.

Dans ce cas on a un isomorphisme

$$\mathcal{N}(F_o/F) \simeq F \times_{SpecK} \mathcal{N}(SpecL/SpecK)$$

De plus, $\mathcal{N}(SpecL/SpecK)_{red}$ est isomorphe au champ simplicial constant $SpecL$. Par invariance topologique, il faut donc montrer que

$$f_* : \mathbf{G}(F_o)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}}$$

est un isomorphisme.

Or la formule de projection (2.2) implique que $f_* \circ f^* = \times m$, où m est le degré de L sur K.

Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "f"] & F \\ F_0 \times_F F_0 \arrow[u, "q"] \arrow[r, "p"'] & F_0 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Comme L/K est purement inséparable, la section diagonale $a : F_0 \longrightarrow F_0 \times_F F_0$, est une immersion nilpotente. En particulier $a_* : \mathbf{G}(F_o)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(F_o \times_F F_o)_{\mathbf{Q}}$ est un isomorphisme (2.2). Ainsi, $p_* = q_* = (a_*)^{-1}$. Un autre application de la formule de projection implique alors que $p^* = q^* = m \times a_*$.

Le transfert implique alors que

$$\begin{aligned} f^* \circ f_* &= q_* \circ p^* \\ &= m \times (a_*)^{-1} \circ a_* \\ &= \times m \end{aligned}$$

Ainsi, $f_* \circ f^* = \times m$, et $f^* \circ f_* = \times m$. Donc $f_* : \mathbf{G}(F_o)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(F)$ est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 2.10 *1. Pour toute hyper-quasi-enveloppe de Chow (1.19)*

$$p : F_\bullet \longrightarrow F$$

le morphisme naturel

$$\mathbf{G}(F_\bullet)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}}$$

est un isomorphisme dans HoSp.

2. *Le foncteur covariant*

$$\begin{array}{rccc} \underline{\mathbf{G}}: & (HoChAlg(S), pr.rep.) & \longrightarrow & HoSp \\ & F & \mapsto & \underline{\mathbf{G}}(F) \end{array}$$

s'étend en un foncteur covariant

$$\begin{array}{rccc} \underline{\mathbf{G}}: & (HoChAlgDM(S), pr.) & \longrightarrow & HoSp \\ & F & \mapsto & \underline{\mathbf{G}}(F) \end{array}$$

où $(HoChAlgDM(S), pr.)$ est la sous-catégorie des champs algébriques de Deligne-Mumford et morphismes propres. Ce foncteur vérifie encore les formule de transfert et de projection pour des morphismes non-nécessairement représentables.

De plus, si F est de Deligne-Mumford, et $p : F \longrightarrow M$ la projection sur son espace de modules, alors

$$p_* : \underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(M) \simeq \mathbf{G}(M)_{\mathbf{Q}}$$

est un isomorphisme.

3. *Si $S = SpecK$, avec K un corps de caractéristique nulle, alors le foncteur précédent s'étend en un foncteur covariant*

$$\begin{array}{rccc} \underline{\mathbf{G}}: & (HoChAlg^{aff}(S), pr.) & \longrightarrow & HoSp \\ & F & \mapsto & \underline{\mathbf{G}}(F) \end{array}$$

où $(HoChAlg^{aff}(S), pr.)$ est la sous-catégorie des champs algébriques Δ-affines, et morphismes propres.

Preuve: (1) Il suffit d'appliquer un raisonnement analogue à celui fait dans [G3, 4.1].

(2) Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de champs de Deligne-Mumford. D'après [Vi2, 2.6], il existe un espace algébrique X, et un morphisme propre et surjectif $p : X \longrightarrow F$. On définit alors f_* par le diagramme commutatif dans $HoSp$ suivant

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{G}}(X/F) \arrow[dr, "(f\circ p)_*"] & \\ \underline{\mathbf{G}}(F) \arrow[u, "(p_*)^{-1}"] \arrow[r, "f_*"'] & \underline{\mathbf{G}}(F') \end{tikzcd}$$

Comme le produit fibré de deux morphismes propres et surjectifs est encore un morphisme propre et surjectif, on vérifie aisément que f_* ne dépend pas du choix du morphisme $p : X \longrightarrow F$, vérifie la formule de transfert et de projection, et défini bien un foncteur covariant. Pour un choix fixé de $X \longrightarrow F$, on dispose en réalité d'un morphisme dans $HoSp(F'_{li})$

$$f_* : \mathbf{R}f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{G}_{\mathbf{Q}}$$

Soit $p : F \longrightarrow M$ la projection d'un champ de Deligne-Mumford sur son espace de modules, et montrons que p_* est un isomorphisme.

Par invariance topologique, on peut supposer que F et M sont réduits. Considérons le morphisme

$$f_* : \mathbf{R}f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{G}_{\mathbf{Q}}$$

sur M_{li}, et montrons que c'est une équivalence faible. Comme localement sur M_{et}, F est un quotient par un groupe fini, on peut se restreindre au cas où $F = [X/H]$, avec H un groupe fini opérant sur un schéma réduit X.

On considère alors le morphisme propre et surjectif $q : X \longrightarrow F$. On a alors un isomorphisme

$$q_* : hocolim_H \underline{\mathbf{G}}(X) \simeq \underline{\mathbf{G}}(X/F)$$

Il reste à montrer que le morphisme induit par la projection $r : X \longrightarrow X/H$

$$r_* : hocolim_H \underline{\mathbf{G}}(X) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(X/H)$$

est un isomorphisme. Ce qui est équivalent au lemme suivant

Lemme 2.11 *Soit X un schéma, et H un groupe fini opérant sur X. Alors le morphisme naturel $p : X \longrightarrow X/H$ induit un isomorphisme*

$$p_* : (\underline{\mathbf{G}}_*(X))_H \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*(X/H)$$

Preuve: On peut clairement supposer que H opère fidèlement, et que X est réduit. En utilisant alors la localisation (2.2), on se ramène au cas où l'action de H est libre sur X. Le lemme provient alors de 2.3. $\Box$

On vient de voir que $f_* : \mathbf{R}f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{G}_{\mathbf{Q}}$ est un isomorphisme dans $HoSp(M_{li})$. Il induit donc un isomorphisme dans $HoSp$

$$f_* : \mathbf{H}(M_{li}, \mathbf{R}f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}}) \simeq \underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \mathbf{H}(M_{li}, \underline{G}_{\mathbf{Q}}) \simeq \underline{\mathbf{G}}(M)$$

$\Box$

(3) Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de champs algébriques Δ-affines. Pour chaque $U \longrightarrow F'$ lisse, avec U un espace algébrique, $f^{-1}(U)$ est un champ algébrique Δ-affine, et propre sur U. En particulier, il est

séparé, donc de Deligne-Mumford (1.3.1). Ainsi, f_*F détermine un champ en champs de Deligne-Mumford sur F_{li}, avec morphismes de restriction lisses et représentables.

Rappelons que (Ch/F') désigne la catégorie des 1-morphismes vers F', dans laquelle un morphisme de $f : F_1 \longrightarrow F'$ vers $g : F_2 \longrightarrow F'$ est une paire composée d'un 1-morphisme $u : F_1 \longrightarrow F_2$ et d'un 2-morphisme de $g \circ u$ vers f. De même, nous noterons (Esp/F') la sous-catégorie de (Ch/F') des espaces algébriques sur F'.

Soit $C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}$ la catégorie cofibrée des complexes de $\mathcal{O}$-modules acycliques, à cohomologie bornée et cohérente, sur le site $(Esp/F', li)_{li}$ des espaces algébriques sur F' et morphismes lisses. Par strictification, on peut associer à cette catégorie cofibrée un préfaisceau en catégories bicompliciales de Waldhausen sur $(Esp/F', li)_{li}$ (qui sera encore noté $C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}$), et vérifiant les hypothèses suivantes :

- Pour tout morphisme propre de Esp/F', $f : X \longrightarrow Y$, il existe un foncteur "exact"
$$f_* : C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}(X) \longrightarrow C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}(Y)$$
- Pour toute paire de morphismes propres $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ d'espaces algébriques sur F', on a une égalité de foncteurs
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}(X) \longrightarrow C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}(Z)$$
- Pour tout diagramme cartésien d'espaces algébriques sur F'
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"'] & X' \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$
avec f propre et u lisse, une égalité de foncteurs
$$u^* \circ f_* = f'_* \circ (u')^* : C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}(Y) \longrightarrow C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}(X')$$
- Pour tout objet X de Esp/F', il existe une équivalence faible dans Sp, compatible avec les images réciproques, et les images directes
$$K(C\mathbf{Mod}^{ac}_{coh}(X)) \simeq \mathbf{G}(X)$$

On pourra donc supposer que $X \mapsto \mathbf{G}(X)_{\mathbf{Q}}$, où $X \in Ob(Esp/F')$, est un foncteur strict pour les images réciproques de morphismes lisses et pour les images directes de morphismes propres, et qui vérifie de plus la formule de transfert strictement.

En clair, si on note $(Esp/F', pr.)$ la catégorie des espaces algébriques sur F' et morphismes propres, on a construit un foncteur covariant

$$\begin{array}{ccc} (Esp/F', pr.) & \mapsto & Sp(F'_{li}) \\ (p : X \to F') & \mapsto & p_*\mathbf{G} \end{array}$$

Pour tout champ de Deligne-Mumford F_0 sur F', nous noterons $Pr(F_0)$ la catégorie des 1-morphismes propres et surjectifs $p : X \longrightarrow F_0$ avec X un schéma (un morphisme entre $p : X \longrightarrow F_0$ et $q : Y \longrightarrow F_0$ étant la donnée d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ et d'un 2-morphisme entre $q \circ f$ et p). Le théorème 2.9 (1), et la descente 2.2 (5) impliquent qu'il existe un isomorphisme naturel dans $HoSp$

$$hocolim_{X \in Pr(F_0)} \mathbf{G}(X/F_o)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F_o)_{\mathbf{Q}}$$

De plus, la propriété universelle des colimites homotopique, et la formule de transfert (stricte) pour $\mathbf{G}$ montrent que si $u : F'_0 \longrightarrow F_0$ est un 1-morphisme lisse et représentable de champs sur F', il existe un morphisme naturel

$$u^* : hocolim_{X \in Pr(F_0)} \mathbf{G}(X/F_o)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow hocolim_{X' \in Pr(F'_o)} \mathbf{G}(X'/F'_o)_{\mathbf{Q}}$$

qui fait de $U \mapsto hocolim_{X \in Pr(f^{-1}(U)}\mathbf{G}(X/f^{-1}(U))_{\mathbf{Q}}$ un foncteur contravariant de F'_{li} vers Sp. L'isomorphisme précédent montre alors qu'il existe un isomorphisme dans $HoSp(F'_{li})$ entre $f_*\underline{\mathbf{G}}$ et $U \mapsto hocolim_{X \in Pr(f^{-1}(U))}\mathbf{G}(X/f^{-1}(U))_{\mathbf{Q}}$. De plus, ce foncteur est naturellement muni d'une augmentation

$$hocolim_{X \in Pr(f^{-1}(U))} \mathbf{G}(X/f^{-1}(U))_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(U)_{\mathbf{Q}}$$

donné par les images directes. Ainsi, cette augmentation définit un morphisme dans $HoSp(F'_{li})$

$$f_* : \mathbf{R}f_*\underline{G}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{G}_{\mathbf{Q}}$$

En passant à la cohomologie, on obtient le morphisme cherché dans $HoSp$

$$f_* : \underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F')$$

On vérifie aisément que ces images directes sont fonctorielles, vérifient les propriétés de transfert et de projection, et étendent les images directes pour les champs de Deligne-Mumford. $\square$

<u>Remarque:</u> Au cours de la preuve du point (3), nous avons défini un foncteur covariant

$$\begin{array}{ccc} (Esp/F', pr.) & \mapsto & Sp(F'_{li}) \\ (p : X \to F') & \mapsto & p_*\mathbf{G} \end{array}$$

Il est à noter, que c'est cette forme de covariance renforcée que nous imposerons par la suite aux théories cohomologiques utilisées (3.1, 3).

2.3 Théorèmes de dévissage de la G-théorie

2.3.1 Cas des champs de Deligne-Mumford

Rappelons que pour un champ F, nous avons défini son champ des ramifications I_F, muni de sa projection canonique (1.10)

$$\pi_F : I_F \longrightarrow F$$

Remarquons que si F est représenté par un préfaisceau en groupoides, alors I_F est canoniquement équivalent au préfaisceau en groupoide ΩF, dont le groupoide des sections au-dessus d'un S-espace algébrique X est défini par :

- Les objets de ΩF sont les couples (s, h), avec $s \in ObF(X)$, et $h \in Hom_{F(X)}(s, s)$.
- Les flèches entre (s, h) et (s', h') sont les flèches $u \in Hom_{F(X)}(s, s')$, telle que $u^{-1}.h'.u = h$.

Définition 2.12 *Soit F un S-champ de Deligne-Mumford. On définit son champ des ramifications modérées I_F^t, comme le sous-champ de I_F formé des objets $(s, h) \in ObF(X) \times Aut(s)$, avec h d'ordre premier aux caractéristiques de S.*

Nous dirons alors que F et modéré sur S si $I_F^t = I_F$.

Remarquons que si F est un champ de Deligne-Mumford, alors tous les automorphismes des objets de F sont d'ordre fini. Ainsi, la définition précédente a un sens. De plus, I_F^t est un sous-champ ouvert et fermé de I_F.

Un champ F de Deligne-Mumford est modéré sur son espace de modules, si et seulement si pour tout point $x \in |F|$, l'ordre de ramification de F en x (1.19) est premier avec la caractéristique du corps résiduel $k(x)$.

Par définition même, le faisceau sur $(I_F^t)_{et}$ représenté par $I_{I_F^t} \longrightarrow I_F^t$, possède une section canonique

$$\mathcal{S} : I_F^t \longrightarrow I_{I_F^t}$$

qui à un objet $(s, h) \in I_F^t(X)$ au-dessus d'un espace algébrique X, associe l'automorphisme $h : s \simeq s$, qui vérifie bien $h^{-1}.h.h = h$.

Nous noterons μ_∞^t le faisceau sur $(Esp/S)_{et}$, qui à un S-espace algébrique X associe le sous-groupe de $\mathcal{O}_X^*(X)$ des éléments de torsion, dont l'ordre est premier aux caractéristiques de S. On dispose alors d'un faisceau en $\mathbf{Q}$-algèbres

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{Q}[\mu_\infty^t] : & (Esp/S)_{et} & \longrightarrow & \mathbf{Q} - alg \\ & X & \mapsto & \mathbf{Q}[\mu_\infty^t(X)] \end{array}$$

Si H est un groupe cyclique d'ordre fini, on peut choisir un isomorphisme

$$\mathbf{Q}[H] \simeq \frac{\mathbf{Q}[X]}{X^m - 1}$$

où m est l'ordre de H. On écrit alors

$$X^m - 1 = \prod_{d|m} \phi_d(X)$$

où $\phi_d(X)$ est le d-ème polynôme cyclotomique. Le noyau du quotient de $\mathbf{Q}[H]$ correspondant à la projection naturelle

$$\frac{\mathbf{Q}[X]}{X^n - 1} \longrightarrow \frac{\mathbf{Q}[X]}{\phi_m(X)},$$

sera notée I_H. Il est indépendant de l'isomorphisme choisi entre $\mathbf{Q}[H]$ et $\frac{\mathbf{Q}[X]}{X^m-1}$. On notera alors

$$\mathbf{Q}(H) := \frac{\mathbf{Q}[H]}{I_H}.$$

De plus, si $H \hookrightarrow H'$ est un homomorphisme injectif de groupes cycliques, alors le morphisme naturel

$$\mathbf{Q}[H] \longrightarrow \mathbf{Q}[H']$$

induit un morphisme de $\mathbf{Q}$-algèbres entre $\mathbf{Q}(H)$ et $\mathbf{Q}(H')$.

En appliquant cette construction aux faisceaux μ_m des racines m-ème de l'unité sur $(Esp/S)_{et}$, on peut définir un faisceau en $\mathbf{Q}$-algèbres $\mathbf{Q}(\mu_m)$. On passe alors à la limite inductive sur les entiers m premiers avec les caractéristiques de S, et on obtient un faisceau de $\mathbf{Q}$-algèbres sur $(Esp/S)_{et}$

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & (Esp/S)_{et} & \longrightarrow & \mathbf{Q} - alg \\ & X & \mapsto & colim_m \mathbf{Q}(\mu_m(X)) \end{array}$$

C'est une algèbre quotient de l'algèbre de groupes $\mathbf{Q}[\mu_\infty^t]$. On dispose donc d'une projection naturelle

$$\mathbf{Q}[\mu_\infty^t] \longrightarrow \Lambda$$

Dans le cas où $S = Speck$, avec k un corps contenant les racines de l'unité, on peut choisir un plongement (non canonique)

$$\mu_\infty^t(Speck) \hookrightarrow \mu_\infty(\mathbf{C})$$

Ceci nous permet alors de définir un plongement (non canonique)

$$\Lambda = \mathbf{Q}(\mu_\infty^t(k)) \hookrightarrow \mathbf{Q}^{ab} \hookrightarrow \mathbf{C}$$

où $\mathbf{Q}^{ab}$ est la clôture abélienne de $\mathbf{Q}$, vue comme un faisceau constant sur $(Esp/S)_{et}$.

Comme il est expliqué dans l'appendice, il existe des objets $\underline{K} \otimes \Lambda$ et $\underline{G} \otimes \Lambda$ dans $HoSp((I_F^t)_{et})$. Le premier est un objet en $\mathbf{Q}$-algèbres dans $HoSp((I_F^t)_{et})$, et le second est un objet en $\underline{K} \otimes \Lambda$-modules.

A l'aide de ces notations on va définir la K-cohomologie "à coefficients dans les représentations". Le choix de la terminologie sera expliqué au cours du chapitre suivant.

Définition 2.13 *Soit F un champ de Deligne-Mumford. La K-cohomologie et la G-cohomologie à coefficients dans les représentations sont définies par*

$$\underline{\mathbf{K}}^{rep}(F) := \mathbf{H}((I_F^t)_{et}, \underline{K} \otimes \Lambda)$$
$$\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F) := \mathbf{H}((I_F^t)_{et}, \underline{G} \otimes \Lambda)$$

Des propriétés des foncteurs $\underline{K}$ et $\underline{G}$ (2.2) on tire immédiatement la proposition suivante.

Proposition 2.14 *La correspondance $F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$ est un foncteur contravariant de la sous-catégorie de $HoChAlg(S)$ des champs de Deligne-Mumford vers les $\mathbf{Q}$-algèbres de $HoSp$.*

La correspondance $F \mapsto \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F)$ est un foncteur covariant de la sous-catégorie de $HoChAlg(S)$ des champs de Deligne-Mumford et morphismes propres, vers $HoSp$. C'est aussi un foncteur contravariant pour les morphismes étales représentables. De plus, on a les propriétés suivantes

1. *pour tout champ F de Deligne-Mumford, $\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F)$ est un $\underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$-module. Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme propre, $x \in \underline{\mathbf{K}}_*^{rep}(F)$ et $y \in \underline{\mathbf{G}}_*^{rep}(F')$, alors*

$$f_*(f^*(x).y) = x.f_*(y)$$

2. *si le carré suivant est cartésien*

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"'] & F' \arrow[d, "u"] \\ G \arrow[r, "p"'] & F \end{tikzcd}$$

avec p propre, et u étale, alors

$$q_* \circ v^* = u^* \circ p_*$$

3. *si $j : F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée, et $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion complémentaire, alors il existe un triangle fonctoriel dans $HoSp$*

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F') \arrow[dr, "j_*"] & \\ \underline{\mathbf{G}}^{rep}(U) \arrow[ur, "-1"] & & \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F) \arrow[ll, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

4. *si $p : T \to F$ est un torseur sous un fibré vectoriel V sur F, alors le morphisme naturel*

$$p^* : \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(V)$$

est un isomorphisme.

Preuve Il suffit d'appliquer les propriétés des foncteurs $\underline{K}$ et $\underline{G}$ au cas des champs I_F^t. □

Remarque: D'après les propriétés rappelées en appendice (6.4), si μ_∞ est un faisceau constant sur I_F^t (on dira dans ce cas que "S contient les racines de l'unité"), on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathbf{K}}^{rep}(F) \simeq \underline{\mathbf{K}}(I_F^t) \otimes \Lambda(I_F^t)$$

Comme, Λ est le sous-corps de $\mathbf{Q}^{ab}$ engendré par les racines de l'unité d'ordre premier aux caractéristiques de S, on a

$$\underline{\mathbf{K}}_*^{rep}(F) \hookrightarrow \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t) \otimes \mathbf{Q}^{ab}$$

Théorème 2.15 *Soit F un champ de Deligne-Mumford.*

1. *Il existe un morphisme de spectres en anneaux*

$$\phi_F : \mathbf{K}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$$

qui est fonctoriel pour les images réciproques.

2. *Si de plus, S est d'égales caractéristiques et contient les racines de l'unité, et F est régulier alors le morphisme induit*

$$\phi_F : \mathbf{G}(F) \otimes \Lambda(S) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F)$$

est un isomorphisme.

Preuve: (1) Soit $\zeta \in \mu_\infty^t(I_F^t)$ une section globale. Commençons par définir un foncteur exact

$$F_\zeta : Vect(I_F^t) \longrightarrow Vect(I_F^t)$$

Soit $V \in Vect(I_F^t)$, un fibré vectoriel sur I_F^t. Il est défini par les données suivantes :

- Pour tout S-espace algébrique X, et tout objet (s,h) de $I_F^t(X)$, un fibré vectoriel $V_{(s,h)}$ sur X.
- Pour tout couple $(s,h) \in Ob(I_F^t(X))$, $(s',h') \in Ob(I_F^t(Y))$, tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$ de S-espaces algébriques, et tout isomorphisme $H : f^*(s,h) \simeq (s',h')$, un isomorphisme de fibrés vectoriels sur Y
$$\phi_{f,H} : f^*V_{(s,h)} \simeq V_{(s',h')}$$
- Pour tout couple de morphismes de S-espaces algébriques
$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$
tout objet $(s,h) \in Ob(I_F^t(X))$, $(s',h') \in Ob(I_F^t(Y))$, et $(s'',h'') \in Ob(I_F^t(Z))$, et tout isomorphisme $H_1 : f^*(s,h) \simeq (s',h')$, et $H_2 : g^*(s',h') \simeq (s'',h'')$, une égalité
$$g^*\phi_{f,H_1} \circ \phi_{g,H_2} = \phi_{f\circ g, g^*H_1 \circ H_2}$$

En particulier, comme pour tout objet $(s,h) \in I_F^t(X)$, $h \in Hom_{F(X)}(s,s)$, définit un isomorphisme $h : (s,h) \longrightarrow (s,h)$ dans $I_F^t(X)$, le fibré vectoriel $V_{(s,h)}$ sur X est muni d'une action du groupe cyclique $< h >$, engendré par h dans $Hom_{F(X)}(s,s)$. Par hypothèse sur l'ordre de h, cette action se diagonalise canoniquement
$$V_{(s,h)} \simeq V_{(s,h)}^{(\zeta)} \bigoplus W_{(s,h)}$$
où $V_{(s,h)}^{(\zeta)}$, est le sous-fibré où h opère par multiplication par ζ.

De plus, pour tout couple $(s,h) \in Ob(I_F^t(X))$, $(s',h') \in Ob(I_F^t(Y))$, tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$ de S-espaces algébriques, et tout isomorphisme $H : f^*(s,h) \longrightarrow (s',h')$, $\phi_{f,H}$ commute avec les actions de $< h >$ et $< h' >$. Il induit donc des isomorphismes
$$\phi_{f,H}^{\zeta} : f^*V_{(s,h)}^{(\zeta)} \longrightarrow V_{(s',h')}^{(\zeta)}$$
La condition de cocycle pour ϕ induit alors une condition de cocycle pour chaque ϕ^{ζ}. Ainsi, la donnée de $V_{(s,h)}^{(\zeta)}$, pour chaque $(s,h) \in Ob(I_F^t)$, et des cocycles ϕ^{ζ}, définissent un fibré vectoriel $V^{(\zeta)}$ sur I_F^t.

Ce fibré vectoriel $V^{(\zeta)}$, est aussi le sous-fibré de V sur lequel la section canonique $\mathcal{S} : I_F^t \longrightarrow I_{I_F^t}$ opère par multiplication par ζ.

Posons alors
$$\begin{array}{cccc} F_{\zeta} : & Vect(I_F^t) & \longrightarrow & Vect(I_F^t) \\ & V & \mapsto & V^{(\zeta)} \end{array}$$

Pour chaque $\zeta \in \mu_{\infty}^t$, F_{ζ} est un foncteur exact. On peut considérer la somme directe de ces foncteurs
$$\begin{array}{cccc} F : & \mathbf{Vect}(I_F^t) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mu_{\infty}^t(I_F^t)} \mathbf{Vect}(I_F^t) \\ & V & \mapsto & \oplus_{\zeta \in \mu_{\infty}^t(I_F^t)} V^{(\zeta)} \end{array}$$

Nous noterons $\bigoplus_{\mu_\infty}\mathbf{Vect}$ le champ associé à la catégorie fibrée

$$\begin{array}{ccc} (I_F^t)_{et} & \longrightarrow & Cat \\ U & \mapsto & \bigoplus_{\mu_\infty(U)}\mathbf{Vect}(U) \end{array}$$

On peut alors vérifier que le foncteur F se localise sur $(I_F^t)_{et}$, et induit un morphisme sur les champs en catégories exactes sur $(I_F^t)_{et}$

$$F : \mathbf{Vect} \longrightarrow \bigoplus_{\mu_\infty^t}\mathbf{Vect}$$

Nous faisons ici remarquer au lecteur que la catégorie cofibrée $\bigoplus_{\mu_\infty^t}\mathbf{Vect}$ n'est généralement pas un champ. Ce morphisme induit donc un morphisme dans $HoSp((I_F^t)_{et})$

$$F : \underline{K} \longrightarrow K(\bigoplus_{\mu_\infty^t}\mathbf{Vect})$$

Or, d'après 6.16 (4), on sait que

$$K(\bigoplus_{\mu_\infty^t}\mathbf{Vect})_{\mathbf{Q}} \simeq \underline{K}\otimes\mathbf{Q}[\mu_\infty^t]$$

dans $HoSp((I_F^t)_{et})$.

On compose alors avec les deux morphismes canoniques

$$\mathbf{Q}[\mu_\infty^t] \longrightarrow \Lambda$$

$$can : \mathbf{K}(I_F^t) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}(I_F^t)$$

pour obtenir le morphisme cherché

$$F : \mathbf{K}(I_F^t) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$$

Posons alors

$$\phi_F = F\circ\pi_F^* : \mathbf{K}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$$

Ce morphisme est clairement fonctoriel en F pour les images réciproques. La compatibilité avec les produits, provient du fait que F est un morphisme de champs en catégories tensorielles. Ce qui peut se vérifier localement sur $(I_F)_{et}$ à l'aide de l'isomorphisme naturel de foncteurs

$$F_\zeta(-\otimes -) \simeq \bigoplus_{\eta.\eta'=\zeta} F_\eta(-)\otimes F_{\eta'}(-)$$

Remarquons que le morphisme au niveaux des catégories cofibrées

$$\mathbf{Vect} \longrightarrow \bigoplus_{\mu_\infty^t}\mathbf{Vect}$$

ne préserve pas le produit tensoriel en général (prendre par exemple $S = Spec\mathbf{R}$, et $F = B\mathbf{Z}/3$).

(2) Comme S "contient les racines de l'unité", on a (6.16 (5))

$$\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F) \simeq \underline{\mathbf{G}}(I_F^t) \otimes \Lambda(S)$$

Soit $p : F \longrightarrow M$ l'espace de modules de F. D'après 2.4, pour montrer que le morphisme ϕ_F induit une équivalence faible en Gthéorie, on peut remplacer M par un recouvrement étale. Ainsi, 1.17 nous permet de supposer que F est un champ quotient $[X/H]$, avec X un S-schéma régulier d'égales caractéristiques, et H un groupe fini opérant sur X. On sait alors que I_F^t est équivalent à $[\overline{X}/H]$, où

$$\overline{X} := \{(x,h) \in X \times H/h.x = x \; et \; h \; d'ordre \; premier \; avec \; carS\}$$

Ainsi

$$\underline{\mathbf{G}}_*(I_F^t) \simeq \bigoplus_{h \in H \; o(h) \; premier \; avec \; carS} \mathbf{G}_*(X^h)^{Z(h)}$$

avec X^h le sous-schéma des points fixes de h, et $Z(h)$ le centralisateur de h dans H.

Mais alors le morphisme

$$\phi_F : \mathbf{G}_*(F) \otimes \Lambda(S) \longrightarrow \bigoplus_{h \in c(H) \; o(h) \; premier \; avec \; carS} \mathbf{G}_*(X^h)^{Z(h)} \otimes \Lambda(S)$$

est celui défini dans [Vi, Th. 1]. On sait alors que c'est un isomorphisme. □

Notons que le foncteur F défini au cours de la preuve du point (1), existe plus généralement sur la catégorie des $\mathcal{O}_{I_F^t}$-modules. De plus, il est exact et préserve la cohérence, la quasi-cohérence, et la propriété d'être acyclique. La construction est rigoureusement la même. Il suffit de se rappeler que l'action d'un groupe diagonalisable sur un $\mathcal{O}$-module se diagonalise canoniquement.

Corollaire 2.16 *Soit F un champ algébrique de Deligne-Mumford régulier, avec S d'égales caractéristiques et contenant les racines de l'unité. Soit IM l'espace de modules de I_F^t. Alors, il existe un isomorphisme de $\Lambda(I_F^t)$-modules*

$$\mathbf{G}(F) \otimes \Lambda(S) \longrightarrow \mathbf{G}(IM) \otimes \Lambda(S)$$

Preuve: Il suffit de composer le 2.15 (2) avec 2.10. □

Remarque: Notons que cet isomorphisme est composé de deux isomorphismes, dont l'un préserve les images réciproques, et l'autre les images directes. Ainsi, l'isomorphisme précédent n'est pas fonctoriel en général.

Une version covariante, ainsi qu'une extension aux cas des champs avec singularités, seront données comme conséquences des théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch.

Dans le cas où le faisceau μ_∞^t est constant sur S (i.e. "S contient les racines de l'unité"), on peut choisir un plongement

$$\mu_\infty^t \hookrightarrow \mu_\infty(\mathbf{C})$$

Dans ce cas la $\mathbf{Q}$-algèbre $\Lambda(S)$ s'identifie à un sous-corps de $\mathbf{Q}^{ab}$, la clôture abélienne de $\mathbf{Q}$. Ainsi, le corollaire précédent donne un isomorphisme

$$\mathbf{G}_*(F) \otimes \mathbf{Q}^{ab} \longrightarrow \mathbf{G}_*(IM) \otimes \mathbf{Q}^{ab}$$

2.3.2 K-théorie à coefficients dans les caractères

Nous venons de voir que pour un champ de Deligne-Mumford F, les spectres de G-théorie sont approximables (et même calculables, après extension des coefficients et dans le cas régulier) par la G-cohomologie du champ I_F^t. Une généralisation directe de ses résultats pose quelques difficultés. Nous proposons dans ce paragraphe une approche dont les idées sont proches de celles du paragraphe précédent. Cependant, même dans le cas des champs qui possèdent des quotients géométriques uniformes affines sur un corps de caractéristique nulle, cette dernière méthode ne permet pas d'obtenir des résultats analogues à 2.16.

Soit X un S-espace algébrique, et $H \longrightarrow X$ un X-espace algébrique en groupes. Par abus de notations, nous dirons que H est de type multiplicatif, s'il est de type multiplicatif et de type fini sur X (donc quasi-isotrivial d'après [SGA 3 II, X 4.5]). Avant tout rappelons que si $H \longrightarrow X$ est un X-espace algébrique en groupes affine et lisse sur X, alors le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_H : & Esp/X & \longrightarrow & Ens \\ & Y & \mapsto & \mathcal{T}_H(Y) \end{array}$$

où $\mathcal{T}_H(Y)$ est l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de $H_Y := H \times_X Y$, est représentable (localement de type fini), et lisse sur X ([SGA 3 II, XI 4.1]). De plus, si $H' \longrightarrow H$ est un sous-groupe fermé, alors $\mathcal{T}_H \longrightarrow \mathcal{T}_{H'}$ représentable par une immersion fermée ([SGA 3 II, XI 4.3]).

Définition 2.17 *1. Soit F un champ algébrique. Nous définissons le champ des sous-groupes de type multiplicatif de F*

$$\begin{array}{rccc} D_F : & Esp/S & \longrightarrow & Gpd \\ & X & \mapsto & D_F(X) \end{array}$$

où $D_F(X)$ est le groupoide dont les objets sont les couples (s, D), avec $s \in ObF(X)$, et D un sous-groupe de type multiplicatif fermé *de $Aut_X(s)$, et un isomorphisme entre (s, D) et (s', D') est donné par un isomorphisme $u : s \simeq s'$ dans $F(X)$, tel que $u^{-1}.D'.u = D$.*

2. *Nous définissons le champ des caractères de F*

$$\begin{array}{rccc} X_F^* : & (Esp/S) & \longrightarrow & Gpd \\ & X & \mapsto & X_F^*(X) \end{array}$$

où $X_F^*(X)$ est le groupoide des triplets (s, D, χ), avec $(s, D) \in ObD_F(X)$, et $\chi \in Hom_{Gp/X}(D, \mathbf{G}_m)$ un caractère de D. Un morphisme de (s, D, χ) vers (s', D', χ') est un morphisme $u : (s, D) \longrightarrow (s', D')$ dans $D_F(X)$, tel que $u^{-1}.\chi'.u = \chi$.

D'après [SGA 3 II, IX 6.8], si $f : H \longrightarrow H'$ est un morphisme de X-espaces algébriques en groupes affines sur X, et $D \hookrightarrow H$ un sous-groupe de type multiplicatif, le morphisme induit $D \longrightarrow H'$ se factorise canoniquement en

$$D \longrightarrow D' \xrightarrow{j} H$$

où D' est de type multiplicatif, et j une immersion fermée. Ainsi, on dispose d'une application f_* qui envoie sous-groupes de type multiplicatif de H vers sous-groupes de type multiplicatif de H'. Ceci permet de voir que $F \mapsto D_F$ est fonctoriel.

Il est clair que ces définitions passent à la catégorie homotopique. On peut donc définir le foncteur suivant

$$\begin{array}{rccc} D_F : & HoChAlg(S) & \longrightarrow & HoCh(S) \\ & F & \mapsto & D_F \end{array}$$

De plus, si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme représentable de champs, il existe un morphisme naturel

$$X^*(f) : X_F^* \longrightarrow X_{F'}^*$$

En effet, si f est représentable, pour chaque section $s \in ObF(X)$, et $s' = f(s) \in ObF'(X)$, le morphisme induit

$$Aut_X(s) \longrightarrow Aut_X(s')$$

est une immersion. Ainsi, si D est un sous-groupe de type multiplicatif de $Aut_X(s)$, et $\chi \in X^*(D)$, l'image de (s, D, χ) par f est par définition $(f(s), D, \chi)$, où D est vu comme sous-groupe de $Aut_X(f(s))$.

Proposition 2.18 *Soit F un champ algébrique tel que, pour chaque objet $s \in ObF(X)$ au-dessus d'un S-espace algébrique X, le X-espace algébrique en groupes $Aut_X(s)$ soit localement sur X_{et}, un sous-groupe fermé d'un X-espace algébrique en groupes affine et lisse sur X (par exemple F est un localement un quotient affine). Alors le champ D_F est un champ algébrique, localement de type fini sur F.*

Preuve: Il nous suffit de démontrer que

$$D_F \longrightarrow F$$

est représentable par une réunion disjointe de champs algèbriques de type fini sur F. Comme D_F est réunion disjointe des sous-champs D_F^M, paramétrisants les sous-groupes de types constants égaux à M, où M parcourt l'ensemble d'isomorphie des groupes abéliens de type fini, il suffit de montrer que chaque D_F^M est algébrique et de type fini sur F.

Il faut donc montrer que pour chaque 1-morphisme $s : X \longrightarrow F$, avec X représentable, le champ $D_F^M \times_F X$ est un espace algébrique de type fini sur X. Considérons ce champ comme un champ sur X. Son groupoide des sections au-dessus de $f : Y \longrightarrow X$, est formé des triplets (t, D, h), où $(t, D) \in ObD_F^M(Y)$, et h est un 2-morphisme entre $s \circ f$ et t. Par le morphisme de groupoides $(t, D, h) \mapsto h^{-1}.D.h$, il est équivalent au groupoide discret des sous-groupes de type multiplicatif de type M de $f^*Aut_X(s) \longrightarrow Y$. Ainsi, $D_F^M \times_F X$ est équivalent au foncteur $\mathcal{T}^M(Aut_X(s))$ des sous-groupes de type multiplicatif de $Aut_X(s)$, de types constants égaux à M ([SGA 3 II, IX 1.4]). Mais d'après l'hypothèse, on sait que ce foncteur est représentable par un X-espace algébrique de type fini sur X. $\square$

Corollaire 2.19 *Si F est un champ algébrique vérifiant l'hypothèse de la proposition précédente. Alors le morphisme naturel*

$$X_F^* \longrightarrow F$$

est représentable.

Preuve: D'après la proposition, il suffit de montrer que

$$X_F^* \longrightarrow D_F$$

est représentable. Montrons que $X_F^* \longrightarrow D_F$ est un champ constant tordu quasi-isotrivial (au sens de [SGA 3 II, X 7]).

On peut se restreindre au-dessus d'une composante D_F^M, et supposer que les types des sous-groupes de type multiplicatif sont constants égaux à M.

Soit X un espace algébrique, et $X \longrightarrow D_F^M$ une section, correspondant à l'objet $(s, D) \in ObD_F^M$. Ainsi, D est un sous-groupe de type multiplicatif de $Aut_X(s)$. Son faisceau des caractère $Hom_{Gp/X}(D, \mathbf{G}_m)$, est un faisceau constant tordu quasi-isotrivial sur X, dont les fibres sont isomorphes au schéma discret M. Il est donc représentable par un espace algébrique constant tordu quasi-isotrivial $X^*(D) \longrightarrow X$. Comme cet espace algébrique représente le champ $X_F^* \times_{D_F} X$, il vient que $X_F^* \longrightarrow D_F$ est un champ constant tordu quasi-isotrivial. $\square$

La proposition et le corollaire précédents permettent de donner un sens aux foncteurs suivants

$$\begin{array}{rccc} D: & HoChAlg'(S) & \longrightarrow & \overline{HoChAlg}(S) \\ & F & \mapsto & D_F \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} X^*: & (HoChAlg'(S), rep.) & \longrightarrow & \overline{HoChAlg}(S) \\ & F & \mapsto & X_F^* \end{array}$$

où $HoChAlg'(S)$ (resp. $(HoChAlg'(S), rep.)$) est la sous-catégorie pleine de $HoAlgCh(S)$ des champs vérifiant l'hypothèse de la proposition (resp. et morphismes représentables.), et $\overline{HoChAlg}(S)$ celle des champs algébriques locamenent de type fini sur S.

Remarquons aussi, que si $F' \hookrightarrow F$ est une immersion localement fermée, alors les diagrammes suivants sont cartésiens

$$\begin{tikzcd} D_{F'} \arrow[r] \arrow[d] & D_F \arrow[d] \\ F' \arrow[r] & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^*_{F'} \arrow[r] \arrow[d] & X^*_F \arrow[d] \\ F' \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Il est assez difficile de décrire D_F en fonction de F en toute généralité. Par contre, la proposition suivante donne une description locale du morphisme induit $Df : D_F \longrightarrow D_{F'}$, lorsque f est un morphisme représentable.

Proposition 2.20 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme représentable de champs algébriques, et $Df : D_F \longrightarrow D_{F'}$ le morphisme induit.*

Soit $(s, D) : X \longrightarrow D_{F'}$ un 1-morphisme, avec X un espace algébrique, correspondant à un sous-groupe de type multiplicatif

$$D \hookrightarrow Aut_X(s)$$

et à un 1-morphisme $s : X \longrightarrow F$. Notons $Z = X \times_{D_{F'}} D_F$, et $X' = X \times_{F'} F$. Alors il existe un isomorphisme canonique entre Z et $(X')^D$, le sous-espace des points fixes de X' par l'action de D, induite par celle de $Aut_X(s)$ sur X'.

Preuve: C'est une vérification immédiate à l'aide des définitions. $\square$

Par construction, on dispose du groupe de type multiplicatif universel, $\mathcal{D}_F \longrightarrow D_F$. C'est un champ en groupes de type multiplicatif sur D_F, tel que pour toute section au-dessus d'un espace algébrique

$(s,D)\ :\ X \longrightarrow D_F$, $X \times_{D_F} \mathcal{D}_F \simeq D$ comme X-espace algébrique en groupes. On peut alors définir le faisceau des caractères universels

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{X}^*_F : & (Esp/D_F)_{li} & \longrightarrow & Ab \\ & X \to D_F & \mapsto & Hom_{Gp/X}(\mathcal{D}_F \times_{D_F} X, \mathbf{G}_m) \end{array}$$

De façon plus explicite, si $(s,D) : X \longrightarrow D_F$ est une section au-dessus de X, correspondant au sous-groupe $D \hookrightarrow Aut_X(s)$, alors

$$\mathcal{X}^*_F(X) = Hom_{Gp/X}(D, \mathbf{G}_m)$$

C'est aussi le faisceau sur $(Esp/D_F)_{li}$ représenté par le morphisme $X^*_F \ \longrightarrow\ D_F$.

Pour tout groupe abélien de type fini M, nous noterons $K[[M]]$ l'anneau $K[M]$ localisé le long du système multiplicatif engendré par les éléments de la forme $1-m$, où $m \in M$.

Définition 2.21 • *La* $\mathbf{Q}$*-algèbre* $\mathbf{Q}[[\mathcal{X}^*(F)]]$ *est notée* $\mathcal{A}_F$*.*

- *La* K*-cohomologie d'un champ* F*, à coefficients dans les caractères, est définie par*

  $$\underline{\mathbf{K}}^\chi(F) := \mathbf{H}(D_F, \underline{K} \otimes \mathcal{A}_F)$$

  où l'on prend la cohomologie dans la catégorie $Sp((Esp/D_F)_{li})$*.*

  La G*-cohomologie d'un champ* F*, à coefficients dans les caractères, est définie par*

  $$\underline{\mathbf{G}}^\chi(F) := \mathbf{H}((D_F)_{li}, \underline{G} \otimes \mathcal{A}_F)$$

  où l'on prend la cohomologie dans la catégorie $Sp((D_F)_{li})$*.*

Notons que $\underline{\mathbf{K}}^\chi(F)$ est muni naturellement d'une structure d'algèbre, qui est le produit tensoriel des produits sur $\underline{K}$ et sur $\mathbf{Q}[[\mathcal{X}^*_F]]$ (6.4). De même, $\underline{\mathbf{G}}^\chi(F)$ est un $\underline{\mathbf{K}}^\chi(F)$-module.

Proposition 2.22 *La correspondance* $F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^\chi(F)$ *est un foncteur contravariant de* $HoChAlg'(S)$ *vers les anneaux de* $HoSp$*.*

La correspondance $F \mapsto \underline{\mathbf{G}}^\chi(F)$ *est un foncteur covariant de* $(HoChAlg'(S), pr.rep.)$*, la sous-catégorie de champs algébriques et morphismes propres représentables, vers celle des groupes abéliens. C'est aussi un foncteur contravariant pour les morphismes étales représentables. De plus, on a les propriétés suivantes*

1. *pour tout champ* F*,* $\underline{\mathbf{G}}^\chi(F)$ *est un* $\underline{\mathbf{K}}^\chi(F)$*-module. Si* $f : F' \longrightarrow F$ *est un morphisme propre,* $x \in \underline{\mathbf{K}}^\chi_*(F)$ *et* $y \in \underline{\mathbf{G}}^\chi_*(F')$*, alors*

   $$f_*(f^*(x).y) = x.f_*(y)$$

2. *si le carré suivant est cartésien*

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"'] & F' \arrow[d, "u"] \\ G \arrow[r, "p"'] & F \end{tikzcd}$$

avec p propre, et u étale, alors

$$q_* \circ v^* = u^* \circ p_*$$

3. *si $j : F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée, et $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion complémentaire, alors il existe un triangle fonctoriel dans HoSp*

$$\begin{tikzcd}
& \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F') \arrow[dr, "j_*"] & \\
\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(U) \arrow[ur, "-1"] & & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \arrow[ll, "i^*"]
\end{tikzcd}$$

4. *si $p : T \rightarrow F$ est un torseur sous un fibré vectoriel V sur F, alors le morphisme naturel*

$$p^* : \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(V)$$

est un isomorphisme.

Preuve: Commençons par les fonctorialités.

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de champs de $HoChAlg'(S)$. Il existe un morphisme de restriction des caractères

$$Res_f : Df^*\mathcal{X}^*_{F'} \longrightarrow \mathcal{X}^*_F$$

où $Df : D_F \longrightarrow D_{F'}$ est le morphisme induit par f. Il est défini de la façon suivante. Une section de $Df^*\mathcal{X}^*(F')$ au-dessus d'un espace algébrique X, est la donnée d'une section $(s, D) \in ObD_F(X)$, d'une section $(s', D', \chi') \in Ob\mathcal{X}_{F'}(X)$, et d'un isomorphisme $u \in Isom_X(f(s), s')$, tel que $u^{-1}.Df(D).u = D'$. On pose alors

$$Res_f(s, D, \chi') := u.\chi'.u^{-1} \circ f : D \hookrightarrow Df(D) \longrightarrow \mathbf{G}_m$$

Ce morphisme induit donc un morphisme d'algèbres

$$Res_f : \mathbf{Q}[[Df^*\mathcal{X}^*_{F'}]] = Df^*\mathcal{A}_F \longrightarrow \mathcal{A}_F$$

On dispose ainsi d'un morphisme dans $HoSp(Esp/D_F)$

$$Id \otimes Res_f : \underline{K} \otimes Df^*\mathcal{A}_{F'} \longrightarrow \underline{K} \otimes \mathcal{A}_F$$

En prenant l'image par $\mathbf{R}Df_* : HoSp(Esp/D_F) \longrightarrow HoSp(Esp/D_{F'})$, on obtient un morphisme dans $HoSp(Esp/D_{F'})$

$$\mathbf{R}Df_*(\underline{K}) \otimes \mathcal{A}_{F'} \longrightarrow \mathbf{R}Df_*(\underline{K} \otimes \mathcal{A}_F)$$

que l'on compose avec les images réciproques pour $\underline{K}$

$$\underline{K} \otimes \mathcal{A}_{F'} \xrightarrow{Df^* \otimes Id} \mathbf{R}Df_*(\underline{K}) \otimes \mathcal{A}_{F'} \longrightarrow \mathbf{R}Df_*(\underline{K} \otimes \mathcal{A}_F)$$

En prenant les sections globales sur $D_{F'}$, on trouve

$$f^* : \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F') \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$$

Il est clair que cette construction est naturelle pour la composition, et préserve la structure d'anneau.

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre et représentable. Il induit alors un morphisme naturel $Ind_f : \mathcal{X}_F \longrightarrow \mathcal{X}_F$, et donc un morphisme d'algèbres

$$Ind_f : \mathcal{A}_F \longrightarrow Df^*\mathcal{A}_{F'}$$

et donc

$$Id \otimes Ind_f : \underline{G} \otimes \mathcal{A}_F \longrightarrow \underline{G} \otimes Df^*\mathcal{A}_{F'}$$

En en prenant l'image directe par Df

$$\mathbf{R}Df_*(\underline{G} \otimes \mathcal{A}_F) \longrightarrow \mathbf{R}Df_*\underline{G} \otimes \mathcal{A}_{F'}$$

et en composant avec les images directes pour $\underline{G}_{\mathbf{Q}}$

$$\mathbf{R}Df_*\underline{G}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{G}_{\mathbf{Q}}$$

on obtient un morphisme dans $HoSp((D_{F'})_{li})$

$$Df_* : \mathbf{R}Df_*(\underline{G} \otimes \mathcal{A}_F) \longrightarrow \underline{G} \otimes \mathcal{A}_{F'}$$

et donc le morphisme cherché sur les sections globales

$$f_* : \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F')$$

Il est aussi clair que cette construction est naturelle pour la composition.

Passons à la démonstration des points (1) à (4).

Une remarque générale qui nous sera utile, est que lorsque $f : F \longrightarrow F'$ est représentable, le morphisme de restriction

$$Res_f : Df^*\mathcal{A}_{F'} \longrightarrow \mathcal{A}_F$$

est un isomorphisme, et $Ind_f = (Res_f)^{-1}$.

Les points (1) et (2) se déduisent directement de la formule de projection 2.2, et du fait que $Res_f = Ind_f^{-1}$ pour un morphisme représentable.

(3) Comme le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd}
D_{F'} \arrow[r, "Dj"] \arrow[d] & D_F \arrow[d] & D_U \arrow[l, "Di"'] \arrow[d] \\
F' \arrow[r, "j"'] & F & U \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

on a un triangle dans $HoSp((D_F)_{li})$

$$\begin{tikzcd} & j_*\underline{G} \arrow[dr, "j_*"] & \\ i^*\underline{G} \arrow[ur, "-1"] & & \underline{G} \arrow[ll, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

qui induit un triangle après tensorisation par $\mathcal{A}_F$ (car $\mathcal{A}_F$ est plat sur $\mathbf{Z}$)

$$\begin{tikzcd} & j_*\underline{G} \otimes \mathcal{A}_F \arrow[dr, "j_*"] & \\ i^*\underline{G} \otimes \mathcal{A}_F \arrow[ur, "-1"] & & \underline{G} \otimes \mathcal{A}_F \arrow[ll, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

Or

$$Ind_j : \mathbf{R}j_*(\underline{G} \otimes \mathcal{A}_{F'}) \simeq j_*\underline{G} \otimes \mathcal{A}_F$$
$$Res_i : i^*\underline{G} \otimes \mathcal{A}_F \simeq i^*(\underline{\mathbf{G}} \otimes \mathcal{A}_U)$$

Ainsi, le triangle précédent induit un triangle sur la cohomologie

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathbf{G}}^\chi(F') \arrow[dr, "j_*"] & \\ \underline{\mathbf{G}}^\chi(U) \arrow[ur, "-1"] & & \underline{\mathbf{G}}^\chi(F) \arrow[ll, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

(4) Commençons par montrer que $Dp : D_T \longrightarrow D_F$ est encore un torseur sous un fibré vectoriel. Soit $(s, D) : X \longrightarrow D_F$ une section, avec X un espace algébrique, correspondant au sous-groupe $D \hookrightarrow Aut_X(s)$. Alors $D_V \times_{D_F} X$ est équivalent à l'espace V_X^D des points fixes de l'action de D sur la restriction V_X, de V sur X (2.20). Or V_X^D est un sous-fibré vectoriel de V_X. Ceci montre que D_V est un sous-fibré vectoriel de $V \times_F D_F$. De plus, D_T étant un torseur sous D_V, c'est encore un torseur affine sur D_F.

On sait alors que (2.2)

$$Dp^* : \underline{G} \longrightarrow \mathbf{R}Dp_*\underline{G}$$

est une équivalence faible, et donc

$$Dp^* \otimes Id : \underline{G} \otimes \mathcal{A}_{F'} \longrightarrow \mathbf{R}Dp_*\underline{G} \otimes \mathcal{A}_{F'}$$

aussi. Mais

$$\mathbf{R}Dp_*\underline{G} \otimes \mathcal{A}_{F'} \simeq \mathbf{R}Dp_*(\underline{G} \otimes Dp^*\mathcal{A}_{F'})$$

et comme la restriction $Res_f : Dp^*\mathcal{A}_{F'} \longrightarrow \mathcal{A}_F$ est un isomorphisme, on obtient bien que

$$f^* = Dp^* \otimes Res_f : \underline{G} \otimes \mathcal{A}_{F'} \longrightarrow \mathbf{R}Dp_*(\underline{G} \otimes Dp^*\mathcal{A}_{F'}) \simeq \mathbf{R}Dp_*(\underline{G} \otimes \mathcal{A}_F)$$

est un isomorphisme. $\square$

Théorème 2.23 *Soit F un champ algébrique de $HoChAlg'(S)$. Alors, il existe un morphisme d'algèbres dans $HoSp$*

$$\chi_F : \mathbf{K}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$$

qui est compatible avec les images réciproques.

Preuve: Comme il existe un morphisme naturel d'algèbres $\mathbf{Q}[\mathcal{X}_F^*] \longrightarrow \mathcal{A}_F$, il suffit de construire un morphisme

$$\mathbf{K}(F) \longrightarrow \mathbf{H}(D_F, \underline{K}_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{Q}[\mathcal{X}_F^*])$$

Construisons un foncteur exact

$$\rho : \mathbf{Vect}(D_F) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{X}_F^*(D_F)} \mathbf{Vect}(D_F)$$

Si V est un fibré vectoriel sur D_F, il est canoniquement muni d'une action du groupe de type multiplicatif universel $\mathcal{D}_F \hookrightarrow I_{D_F}$. Pour cette action, V se décompose en somme de sous-fibrés propres

$$V \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}_F^*(D_F)} V^{(\chi)} \bigoplus W$$

où $V^{(\chi)}$ est le sous-fibré de V sur lequel $\mathcal{D}_F$ opère par multiplication par $\chi \in Hom_{Gp/D_F}(\mathcal{D}_F, \mathbf{G}_m)$. Le foncteur exact $V \mapsto \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}_F^*(D_F)} V^{(\chi)}$ se localise sur $(D_F)_{li}$, et induit un morphisme de champs en catégories exactes sur $(D_F)_{li}$

$$\rho : \mathbf{Vect} \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{X}_F^*} \mathbf{Vect}$$

Remarquons qu'il se passe ici le même phénomène que dans la preuve de 2.23, à savoir que la catégorie cofibrée

$$U \mapsto \bigoplus_{\mathcal{X}_F^*(U)} \mathbf{Vect}(U)$$

n'est pas un champ sur $(D_F)_{li}$. Nous mettons en garde le lecteur que la notation $\bigoplus_{\mathcal{X}_F^*} \mathbf{Vect}$ fait référence au champ associé à cette catégorie cofibrée.

En termes de cocycles, les fibrés $V^{(\chi)}$ sont construits de la façon suivante.

Le fibré V sur D_F est défini par les donnée suivantes :

- Pour chaque espace algébrique X, et chaque section $(s, D) \in ObD_F(X)$, un fibré vectoriel $V_{(s,D)}$ sur X.
- Pour chaque morphisme d'espaces algébriques $f : Y \longrightarrow X$, chaque couple de sections $(s, D) \in ObD_F(X)$, $(s', D') \in ObD_F(Y)$, et

chaque isomorphisme $u : f^*(s, D) \simeq (s', D')$ dans $D_F(Y)$, un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\phi_{f,u} : f^* V_{(s,D)} \simeq V_{(s',D')}$$

- Pour tout couple de morphismes d'espaces algébriques

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$

tout objet $(s, D) \in ObD_F(X)$, $(s', D') \in ObD_F(Y)$, et $(s'', D'') \in ObD_F(Z)$, et tous isomorphismes $u_1 : f^*(s, D) \simeq (s', D')$, et $u_2 : g^*(s', D') \simeq (s'', D'')$, une égalité

$$g^* \phi_{f,u_1} \circ \phi_{g,u_2} = \phi_{f \circ g, g^* u_1 \circ u_2}$$

Ainsi, chaque $V_{(s,D)}$ sur X, est muni d'une action linéaire du sous-groupe D. Comme D est de type multiplicatif, cette action se diagonalise

$$V_{(s,D)} \simeq \bigoplus_{\chi \in X^*(D)} V_{(s,D)}^{(\chi)} \bigoplus W_{(s,D)}$$

où $X^*(D) = Hom_{Gp/X}(D, \mathbf{G}_m)$ est le groupe des caractères de D, et $V^{(\chi)}$ le sous-fibré de V sur lequel D opère par multiplication par χ. Alors, pour chaque morphisme $f : Y \longrightarrow X$, chaque couple de sections $(s, D) \in ObD_F(X)$, $(s', D') \in ObD_F(Y)$, et chaque isomorphisme $u : f^*(s, D) \simeq (s', D')$ dans $D_F(Y)$, l'isomorphisme $\phi_{f,u}$ préserve cette décomposition, et induit donc un isomorphisme

$$\phi_{f,u} : f^* V_{(s,D)}^{(\chi)} \simeq V_{(s',D')}^{(\chi)}$$

Ces isomorphismes vérifient évidemment la condition de cocycles, et permettent donc de recoller les $V_{(s,D)}^{(\chi)}$ en un fibré vectoriel sur D_F, noté $V^{(\chi)}$.

Par le morphisme canonique 1.6 appliqué à la K-théorie à coefficients dans $\bigoplus_{\mathcal{X}_F^*} \mathbf{Vect}$, le morphisme ρ induit un morphisme de spectres

$$\rho : \mathbf{K}(D_F) \longrightarrow \mathbf{H}(D_F, \underline{K}) \longrightarrow \mathbf{H}(D_F, K(\bigoplus_{\mathcal{X}_F^*} \underline{V}ect) \simeq \mathbf{H}(D_F, \bigoplus_{\mathcal{X}_F^*} \underline{K}) \longrightarrow \mathbf{H}(D_F, \underline{K} \otimes \mathbf{Q}[\mathcal{X}_F^*]$$

et en composant avec le morphisme naturel $\mathbf{Q}[\mathcal{X}_F^*] \hookrightarrow \mathcal{A}_F$

$$\rho : \mathbf{K}(D_F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$$

On définit alors

$$\chi_F : \mathbf{K}(F) \xrightarrow{d_F^*} \mathbf{K}(D_F) \xrightarrow{\rho} \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$$

où $d_F : D_F \longrightarrow F$ est la projection.

Pour finir, la compatibilité avec le produit provient du fait que ρ est un foncteur de champs en catégories tensorielles. Ce qui se vérifie localement sur $(D_F)_{li}$, à l'aide de la formule

$$(V \otimes W)^{(\chi)} \simeq \bigoplus_{\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi} V^{(\chi_1)} \otimes W^{(\chi_2)}$$

Remarquons qu'ici aussi, le morphisme ρ preserve la structure tensorielle car nous avons considéré le champ $\bigoplus_{\mathcal{X}_F^*} \mathbf{Vect}$, et non la catégorie cofibrée $U \mapsto \bigoplus_{\mathcal{X}_F^*(U)} \mathbf{Vect}(U)$. $\square$

Remarque: Lorsque le morphisme $p_F : D_F \longrightarrow F$ est de Tor-dimension finie, on peut définir une image réciproque

$$d_F^* : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(D_F)$$

La même construction que précédemment, donne également un morphisme

$$\rho : \mathbf{G}(D_F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F)$$

Ce morphisme sera utilisé dans le cas des "champs bien ramifiés" (3.9), pour démontrer une formule de Riemann-Roch. Notons alors que les deux constructions sont compatibles pour le morphisme naturel $\mathbf{Vect} \longrightarrow \mathbf{Coh}$.

Une fois de plus, la construction du foncteur ρ garde un sens dans le cadre plus général des $\mathcal{O}_{D_F}$-modules.

Exemple: Soit k un corps algébriquement clos, $S = Speck$, H un groupe algébrique affine et lisse opérant sur un schéma X, et $F = [X/H]$. Notons A l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de type multiplicatif de H, et fixons pour chaque $a \in A$, un représentant $D_a \hookrightarrow H$. Notons M_a le groupe des caractères de H, et $\mathcal{N}_a$ le normalisateur de D_a dans H. Alors $\mathcal{N}_a$ opère par conjugaison sur M_a, et par l'action induite sur X^a, le sous-schéma des points fixes de D_a. Alors on a des équivalences

$$X^*(F) \simeq \coprod_{a \in A} [X^a \times M_a/\mathcal{N}_a]$$

$$D_F \simeq \coprod_{a \in A} [X^a/\mathcal{N}_a]$$

Ceci provient du fait que le schéma des sous-groupes de type multiplicatif de H, est la réunion disjointes de ses orbites sous l'action de H par conjugaison (voir la preuve de [SGA 3 II, XII 5.5]). Ainsi

$$\underline{\mathbf{K}}_0^{\chi}(F) \simeq \bigoplus_{a \in A} \mathbf{H}^o([X^a/\mathcal{N}_a], \underline{K} \otimes \mathbf{Q}[[M_a]])$$

et le morphisme

$$\chi_F : \mathbf{K}_{\mathrm{o}}(F) \longrightarrow \bigoplus_{a\in A} \mathbf{H}^{\mathrm{o}}([X^a/\mathcal{N}_a], \underline{K} \otimes \mathbf{Q}[[M_a]])$$

induit un morphisme

$$\mathbf{K}_{\mathrm{o}}(F) \longrightarrow (\bigoplus_{a\in A} \mathbf{K}_{\mathrm{o}}(X^a) \otimes \mathbf{Q}[[M_a]])^{\mathcal{N}_a}$$

qui est la somme des morphismes res_a, décrits dans [C-G, 5.11]. Ainsi, le théorème précédent est une globalisation du morphisme de localisation en K-théorie équivariante.

Pour finir, nous allons montrer que l'on peut aussi généraliser le théorème de dévissage des champs de Deligne-Mumford au cas des champs algébriques vérifiant l'hypothèse de la proposition 2.18. Comme les idées et les preuves sont tout à fait analogues, nous nous contenterons d'une brève description.

Définition 2.24 *Soit F un champ algébrique. On définit le champ $I_F^{t,f}$, des automorphismes d'ordre fini et non-ramifiés, comme le sous-champ de I_F formé des couples (s,h), où h est d'ordre fini et premier aux caractéristiques de S.*

En clair, le champ $I_F^{t,f}$ est défini par le préfaisceau en groupoides, dont la valeur sur un espace algébrique X est le groupoide des couples (s,h), avec $s \in ObF(X)$, et $h \in Aut_{F(X)}(s)$ est d'ordre fini, premier aux caractéristiques de S.

Lemme 2.25 *Si F est dans $HoChAlg(S)'$ (i.e. satisfait à l'hypothèse de la proposition 2.18), alors le champ $I_F^{t,f}$ est algébrique, et la projection naturelle*

$$\pi_F : I_F^{t,f} \longrightarrow F$$

est représentable.

Preuve: On considère le morphisme naturel

$$p : I_F^{t,f} \longrightarrow D_F$$

qui à une section (s,h) au-dessus de X, associe la section $(s, < h >)$ de D_F, où $< h >$ est le sous-schéma en groupe de $Aut_X(s)$ engendré par h. Il est clair que ce morphisme est représentable, fini et étale. En effet, si (s,D) est une section de D_F au-dessus de X, $I_F^{t,f} \times_{D_F} X$ est vide si D n'est pas fini sur X, et un D-torseur sinon.

Comme d'après 2.18, D_F est représentable, $I_F^{f,t}$ aussi. $\square$

Remarque: On peut aussi démontrer ce lemme en remarquant que $I_F^{t,f}$ est un sous-champ ouvert et fermé de $\mathcal{D}_F$.

Définition 2.26 *Soit F un champ de $HoChAlg(S)'$. On définit sa K-cohomologie et sa G-cohomologie à coefficients dans les représentations par*

$$\underline{\mathbf{K}}^{rep}(F) := \mathbf{H}(I_F^{t,f}, \underline{K} \otimes \Lambda)$$

$$\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F) := \mathbf{H}((I_F^{t,f})_{li}, \underline{G} \otimes \Lambda)$$

La même construction que celle décrite dans 2.15 donne alors le théorème suivant.

Théorème 2.27 *Soit F un champ de $HoChAlg(S)'$. Alors il existe un morphisme d'anneaux dans $HoSp$, et fonctoriels pour les images réciproques*

$$\phi_F : \mathbf{K}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$$

2.3.3 Dévissage des gerbes réductives

Bien que l'on ne sache pas démontrer de résultats analogues à 2.15 pour le cas des champs d'Artin, il existe un résultat pour les gerbes bornée par des groupes réductifs.

Rappelons que tout schéma constant tordu quasi-isotrivial sur un schéma normal, est isotrivial (c'est un corollaire de [SGA 3 II, X 5.13]) (i.e. trivial après un changement de base étale et fini).

Soit X un espace algébrique normal, et $H \longrightarrow X$ un espace algébrique en groupes réductifs ([SGA 3 III, XIX 2.7]). On se propose de "calculer" $\mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}}$, où F est une gerbe sur X bornée par H.

Pour cela nous construisons l'espace des caractères de F. Sans perte de généralité on pourra supposer X connexe. Soit r le rang réductif de H. Notons $\mathcal{T}^{max}(F)$ le sous-champ ouvert et fermé de D_F des sous-groupes de type multiplicatif de type $\mathbf{Z}^r$. Ainsi, $\mathcal{T}^{max}(F)$ est le "champ des tores maximaux de F". Nous noterons $X_F^{*,max} = X_F^* \times_{D_F} \mathcal{T}^{max}(F)$.

Lemme 2.28 *Le champ $X_F^{*,max}$ est une gerbe bornée par H, sur un espace algébrique MX_F^*, tel que la projection naturelle*

$$p : MX_F^* \longrightarrow X$$

fasse de MX_F^* un espace constant tordu et quasi-isotrivial sur X ([SGA 3 II, X 7]).

De plus, pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, la fibre de p au-dessus de $\overline{x}$ s'identifie à l'ensemble des caractères invariants par conjugaison, d'un tore maximal de $H_x \otimes k(x)^{sp}$.

Preuve: Comme ceci est local sur X_{et}, il suffit de traiter le cas où F est une gerbe triviale bornée par H. On peut aussi supposer que H admet un tore maximal $\mathbf{T} \hookrightarrow H$, diagonalisable sur X. Alors $X_F^{*,max}$ est équivalent au quotient $[(H/\mathcal{N}(\mathbf{T})) \times \mathbf{Z}^r/H]$ (où $\mathcal{N}(\mathbf{T})$ est le normalisateur de $\mathbf{T}$ dans H) ou encore au quotient $[X \times \mathbf{Z}^r/H]$, où H opère sur $\mathbf{Z}^r$ par conjugaison à travers l'identification

$$Hom_{Gp/X}(\mathbf{T}, \mathbf{G}_m) \simeq \mathbf{Z}^r$$

□

Théorème 2.29 *Soit $Z(H)$ le centre de H. Si la classe définie par F dans $H^2_{et}(X, Z(H))$ est de torsion, alors il existe un isomorphisme dans $HoSp$*

$$\psi_F : \mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{G}(MX^*_F)_{\mathbf{Q}}$$

Preuve: Le principe de la démonstration consiste a construire $f : Y \longrightarrow X$, une normalisation de X dans une extension galoisienne de $K(X)$. Alors d'après le théorème de descente on a

$$f^* : \mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{G}(F_Y)^{Gal}_{\mathbf{Q}}$$

où Gal est le groupe de galois de Y sur X, et $F_Y = F \times_X Y$. De plus, comme le carré suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & X \\ T^{max}(F_Y) \arrow[u] \arrow[r] & T^{max}(F) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

on a aussi

$$f^* : \mathbf{G}(MX^*_F)_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{G}(MX^*_{(F_Y)})^{Gal}_{\mathbf{Q}}$$

On construira alors ψ_F à l'aide de ψ_{F_Y} et du carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\psi_F"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbf{G}(MX^*_F)_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "f^*"] \\ \mathbf{G}(F_Y)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\psi_{F_Y}"'] & \mathbf{G}(MX^*(F_Y))_{\mathbf{Q}} \end{tikzcd}$$

Il suffira pour cela de vérifier que la construction est compatible avec les changements de bases étales.

Comme X est normal, il existe un revêtement galoisien $Y \longrightarrow X$, tel que le schéma en groupes $Out_X(H)$, soit constant sur Y ([SGA 3 *III*, *XXIV* 4.16] et [SGA 3 *III*, *XXIV* 1.3 (*ii*)]). Par l'argument ci-dessus, on peut donc supposer que le schéma des automorphismes extérieurs, $Out_X(H)$ est constant sur X.

Soit $Z(H)$ le centre de H. Comme H est réductif, alors $Z(H)$ est un groupe de type multiplicatif de type fini. Or comme X est normal, il existe un revêtement galoisien $Y \longrightarrow X$, tel que la restriction de $Z(H)$ sur Y soit le produit direct d'un tore déployé et d'un groupe constant fini. On peut donc aussi supposer que $Z(H) \simeq (\mathbf{G}_m/X)^r \times Z$, avec Z un groupe fini.

Soit $a \in H^1(X_{et}, Out_X(H))$ le lien de F ([S2]). Comme $Out_X(H)$ est constant et X normal, toute classe dans $H^1(X_{et}, Out_X(H))$ devient triviale après un revêtement galoisien $Y \longrightarrow X$. Ainsi, on peut supposer que F est déterminée par sa classe $b \in H^2(X_{et}, Z(H))$ ([S2]), qui est de torsion par hypothèse. Elle provient donc d'un élément dans $H^2_{et}(X_{et}, \mu_n^r \times Z)$, correspondant à une gerbe de groupe $\mu_n^n \times Z$ sur X_{et}. Etant un champ de Deligne Mumford, on sait qu'il existe un revêtement ramifié galoisien $Y \longrightarrow X$, qui la trivialise. Ainsi, on peut supposer que $F \simeq X \times BH$.

Enfin, comme H est réductif sur X, qui est normal, le théorème d'isotrivialité ([SGA 3 III, $XXIV$ 4.16]), permet de se ramener au cas où H admet un tore maximal déployé sur H, que nous noterons alors $\mathbf{T} \hookrightarrow H$, et M son groupe des caractères.

Construisons un morphisme

$$\chi : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(X \times M)^W$$

où W est le groupe de Weil de $\mathbf{T}$. On procède de la façon suivante. En choisissant une section de $F \longrightarrow M$, on peut identifier F à un quotient $[M/H]$, et donc $\mathbf{Coh}(F)$ à la catégorie des faisceaux cohérents sur M munis d'une action de H. Nous noterons $\mathbf{Coh}(M, H)$ cette catégorie. Par restriction, on dispose d'un foncteur exact

$$Res : \mathbf{Coh}(M, H) \longrightarrow \mathbf{Coh}(M, \mathbf{T})$$

De plus le groupe W opère par automorphismes intérieurs sur $\mathbf{T}$, et donc sur la catégorie $\mathbf{Coh}(M, \mathbf{T})$. Le foncteur de restriction Res devient alors une pseudo-transformation naturelle de W-pseudo-foncteurs, $\mathbf{Coh}(M, H)$ étant vu comme un diagramme trivial. Par les procédés de strictification 6.3, on en déduit un morphisme de spectres de K-théorie

$$\mathbf{G}(F) \longrightarrow holim_W \mathbf{G}(B\mathbf{T} \times X) =: \mathbf{G}(B\mathbf{T} \times X)^W$$

Or, on sait que la catégorie $\mathbf{Coh}(B\mathbf{T} \times X)$ est canoniquement équivalent à la catégorie $\bigoplus_M \mathbf{Coh}(X)$. Ainsi, on a des isomorphismes canoniques dans $HoSp$

$$\mathbf{G}(B\mathbf{T} \times X)^W \simeq (\bigvee_M \mathbf{G}(X))^W \simeq \mathbf{Coh}(X \times M)^W$$

Mais, on sait que le morphisme $r : X \times M \longrightarrow (X \times M)/W = MX_F^*$ induit un isomorphisme

$$r^* : \mathbf{G}(MX_F^*)_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{G}(X \times M)_{\mathbf{Q}}^W$$

Ainsi, on a construit le morphisme cherché

$$\psi_F : \mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(MX_F^*)_{\mathbf{Q}}$$

Par construction, ce morphisme est clairement compatible aux changements de base étales sur X. Ainsi, l'existence de ψ_F est démontrée. Pour voir que c'est une équivalence faible, une localisation sur X_{et} (2.4), permet de se ramener au cas où F est triviale, et H possède un tore maximal déployé. On utilise alors une localisation sur X (2.2), et un raisonnement par récurrence noethérienne, pour ce ramener au cas où $X = Speck$, le spectre d'un corps. Par une autre application de la descente (2.4), on peut aussi supposer que k est séparablement clos. Et comme une extension purement inséparable induit un isomorphisme en G-théorie rationnelle, on peut même supposer que k est algébriquement clos.

Alors, la catégorie $\mathbf{Coh}(F)$ est semi-simple, car H est réductif. De plus, comme k est algébriquement clos, l'anneau des endomorphismes d'un objet simple est isomorphe à k. On sait alors que

$$\mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}} \simeq \bigvee_{S(\mathbf{Coh}(F))} \mathbf{G}(Speck)_{\mathbf{Q}}$$

où $S(\mathbf{Coh}(F))$ est l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets simples de $\mathbf{Coh}(F)$. Ceci implique, que le morphisme de Kunneth

$$\mathbf{G}_{\mathrm{o}}(F) \otimes \mathbf{G}_q(Speck) \longrightarrow \mathbf{G}_q(F)$$

est un isomorphisme. On se ramène donc à démontrer que

$$\begin{array}{rccc} ch : & \mathbf{G}_{\mathrm{o}}(F)_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & \mathbf{Q}[M]^W \\ & x & \mapsto & ch(x) \end{array}$$

qui à une représentation associe son caractère, est un isomorphisme. Ce qui est bien connu. $\square$

Remarquons que l'hypothèse concernant la torsion de l'élément dans $H^2_{et}(X, Z(H))$, est de torsion est vérifiée lorsque X est lisse, on encore lorsque H est semi-simple.

3 Chapitre 3 : Cohomologie à coefficients dans les caractères et théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch

Ce chapitre est consacré aux théorèmes de Riemann-Roch. On y démontre essentiellement deux types de formules, les formules de type Lefschetz-Riemann-Roch, et celles de type Grothendieck-Riemann-Roch.

Dans le premier cas (3.16, 3.25), ces formules explicitent le comportement des morphismes de dévissage (2.15, 2.23, 2.27), par rapport aux images directes. Lorsque le champ est un quotient d'un schéma par un automorphisme d'ordre fini, nous retrouvons la formule de Lefschetz-Riemann-Roch de [B-F-M]. Plus généralement, si le champ est un quotient par un schéma en groupes affine, nous retrouvons la formule des traces de Lefschetz pour les faisceaux cohérents démontrée dans [Th3, 6.4]. Remarquons que lorsque l'on applique ces formules à des schémas, on trouve que l'identité commute avec les images directes, ce qui n'est pas une grande découverte.

Les formules de Grothendieck-Riemann-Roch (3.21, 3.33), quant à elles, explicitent le comportement du caractère de Chern en K-cohomologie par rapport aux images directes. Dans le cas où on les applique à des schémas, on retrouve les formules de Grothendieck-Riemann-Roch démontrées dans [G, 4.1]. Cependant, appliquées au morphisme structural d'un champ algébrique sur un corps, elles ne donnent pas de formule de Hirzebruch-Riemann-Roch.

On peut alors dire que le cas le plus intéressant est lorsque l'on compose les formules de Grothendieck-Riemann-Roch, avec celles de Lefschetz-Riemann-Roch. On obtient, dans ce cas, le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch sous sa forme finale (3.23, 3.36, 3.37), qui permet de calculer des caractéristiques d'Euler de faisceaux cohérents, au moins dans le cas des champs de Deligne-Mumford.

Notons que nous n'avons réussi à démontrer les théorèmes de Riemann-Roch pour des morphismes non-représentables de champs algébriques d'Artin, que dans le cas des champs qui admettent des quotients géométriques uniformes. Cette restriction nous est imposée par le manque de résultats concernant les quasi-enveloppes de Chow de morphismes propres, analogues à 1.21 (mais dans un cadre relatif).

Notons aussi que le théorème de Riemann-Roch est démontré en toute généralité en utilisant la cohomologie à coefficients dans les représentations, et non celle à coefficients dans les caractères. Il se trouve que cette dernière n'est pas bien adaptée au cas des morphismes non représentables, et que le théorème serait faux, même pour les cas les plus simples.

Bien que cela multiplie les notations et les énoncés nous avons tenu à donner les formules précédentes séparément avant de les composer, car les deux formules nous semblent séparément intéressantes. Le lecteur pourra se convaincre par exemple de l'utilité de la formule de Grothendieck-Riemann-Roch en K-cohomologie dans l'étude de la topologie orbifold des champs de Deligne-Mumford (3.44).

3.1 Cohomologie des champs algébriques

Nous commencerons ce chapitre par des préliminaires sur la cohomologie des champs algébriques. Cela nous semble nécessaire, car nous ne savons définir des images directes que sous certaines hypothèses concernant la théorie cohomologique utilisée. Nous expliciterons donc de quelles propriétés nous avons besoin, et donnerons deux exemples de théorie cohomologique vérifiant ces hypothèses.

On supposera, sauf exception au paragraphe 3.2.3, que $S = Speck$, avec k un corps.

3.1.1 Théorie cohomologique avec images directes

Définition 3.1 *Une théorie cohomologique avec images directes est la donnée de :*

1. *Pour chaque entier i, un préfaisceau en spectres sur $(Esp/S)_{li}$ $\mathcal{H}^i$, muni d'une structure de groupe abélien dans $HoSp(S)$.*
2. *Des morphismes dans $HoSp(S)$*

$$\mathcal{H}^i \wedge \mathcal{H}^j \longrightarrow \mathcal{H}^{i+j}$$

qui font de $\mathcal{H} := \bigvee_i \mathcal{H}^i$ un anneau gradué commutatif dans $HoSp(S)$.

3. *Pour tout espace algébrique lisse X, une structure de foncteur covariant*

$$\begin{array}{ccc} (Li/X, pr.) & \longrightarrow & (\mathcal{H}_{X_{li}}) - mod \\ f : Y \to X & \mapsto & \mathbf{R}f_*\mathcal{H} \end{array}$$

où $(Li/X, pr.)$ est la catégorie des X-espaces algébriques lisses, et fortement quasi-projectifs sur X avec morphismes propres, et $(\mathcal{H}_{X_{li}})$-mod celle des objets en $\mathcal{H}$-modules dans $Sp(X_{li})$. L'image d'un X-morphisme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

sera notée

$$u_* : \mathbf{R}g_*(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbf{R}f_*(\mathcal{H})$$

Si de plus, $u : Y \longrightarrow X$ est un morphisme propre d'espaces algébriques lisses et irréductibles, alors u_* est gradué de degré $d.p$, où d est un entier égal à 1 où 2, et $p = DimX - DimY$.

4. *Pour toute immersion fermée $j : Y \hookrightarrow X$ d'espaces algébriques lisses, un triangle fonctoriel dans $HoSp(X_{li})$*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}j_*(\mathcal{H}) \arrow[dr, "j_*"] & \\ i^*\mathcal{H} \arrow[ur, "-1"] & & \mathcal{H} \arrow[ll, "i^*"] \end{tikzcd}$$

où $i : X - Y \hookrightarrow X$ est l'immersion ouverte complémentaire.

5. *Un morphisme dans $HoSp(S)$*

$$C_1 : BPic \longrightarrow \mathcal{H}^d_{[o]}$$

tel que si $p : \mathbf{P}(V) \longrightarrow X$ est un fibré projectif associé à un fibré vectoriel V de rang $r+1$ sur X, et $x = C_1(\mathcal{O}_1(\mathbf{P}(V)))$, alors le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{i=0}^{i=r} \mathcal{H}_{X_{li}} & \longrightarrow & \mathbf{R}p_*\mathcal{H} \\ \vee a_i & \mapsto & \sum_i p^*(a_i).x^i \end{array}$$

est un isomorphisme dans $HoSp(X_{li})$.

Remarquons, qu'en dehors du point (3), ces axiomes sont ceux donnés dans [G, 2.1]. Le point (3) quant à lui, est une covariance renforcée, qui n'est pas vérifiée, à priori, pour toutes les théories cohomologiques habituelles citées dans [G, 1.4]. Nous connaissons essentiellement deux exemples vérifiant ces axiomes.

Exemples:

- La théorie de Gersten ([G, 1.4]):

  Soit $\mathcal{K}_i : X \mapsto \mathbf{K}_i(X)$ le préfaisceau du i-ème groupe de K-théorie sur $(Esp/S)_{li}$. On lui associe par la construction de Dold-Puppe un préfaisceau en spectres ([Q2])

$$\mathcal{H}^i := K(\mathcal{K}_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}, i)$$

  Pour montrer que cette théorie vérifie (3), on utilise les résolutions de Gersten ([G, 7.17]).

  Notons $\mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{R}^i$ la résolution de Gersten de $\mathcal{K}_i$ sur $(Esp/S, fl)_{li}$, le site des S-espace algébriques et morphismes plats. Soit

$$\mathcal{H}'_i := K(\mathcal{R}^i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}, i)$$

Alors, pour tout espace algébrique lisse X, le morphisme induit

$$\mathcal{H}^i \longrightarrow (\mathcal{H}'_i)$$

est une équivalence faible sur X_{li}. De plus, comme on a pris le complexe $\mathcal{R}^i$ à coefficients rationnels, le préfaisceau $\mathcal{H}'_i$ est flasque sur X_{li}. Ainsi, pour tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$, avec Y lisse, $\mathbf{R}f_*\mathcal{H}$ est canoniquement isomorphe dans $HoSp(X_{li})$ à $f_*\mathcal{H}'$. Mais on sait alors, que les images directes de morphismes propres sur $\mathcal{H}'$ vérifient les formules de transfert et de projection, elles permettent donc de définir le foncteur cherché dans (3).

- <u>La cohomologie de De Rham ([H]):</u>

  Supposons que k soit de caractéristique nulle. Posons alors

  $$\mathcal{H}^i := K(\Omega, 2i)$$

  où Ω est le complexe de De Rham sur $(Esp/S)_{li}$ défini dans [H]. Pour montrer que cette théorie vérifie (3), on utilise les résolutions canoniques de [H, 2]. On conclut alors par la même méthode que précédemment.

Pour la suite, on se fixe une théorie cohomologique avec images directes. Si X est un espace algébrique, la restriction de $\mathcal{H}$ sur le petit site lisse X_{li}, sera notée $\mathcal{H}_X$.

Si X est un espace algébrique irréductible, on peut trouver d'après [Jo], une hyper-quasi-enveloppe de Chow

$$p : Z_\bullet \longrightarrow X$$

telle que chaque Z_m soit lisse irréductible et quasi-projectif sur $Speck$. En appliquant (3) au-dessus de Z_0, on peut définir un spectre simplicial

$$\mathbf{H}(Z_\bullet, \mathcal{H}^i) : [m] \mapsto \mathbf{H}((Z_m)_{li}, \mathcal{H}^{i-d_m})$$

où $d_m = DimZ_0 - DimZ_m$. Notons alors

$$\mathbf{H}(Z/X, \mathcal{H}^i) := hocolim_{\Delta^{op}}\mathbf{H}(Z_\bullet, \mathcal{H}^i)$$

et

$$\mathcal{H}'_i(X) := hocolim_{Z_\bullet \in HE(X)}\mathbf{H}(Z/X, \mathcal{H}^i)$$

où la limite est prise sur la catégorie $HE(X)$ des hyper-enveloppes de Chow lisses et quasi-projectives sur $Speck$. Notons que les images directes sur $\mathcal{H}$ (3.1 3) induisent des morphismes pour tout entier i

$$\mathcal{H}'_i(X) \longrightarrow \mathcal{H}^i(X)$$

Lemme 3.2 *Si X est lisse, alors le morphisme naturel*

$$\mathcal{H}'_i(X)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{H}^i(X_{li}, \mathcal{H})_{\mathbf{Q}}$$

est un isomorphisme dans $HoSp$.

De plus, la correspondance $X \mapsto \mathcal{H}'_i(X)$ est un préfaisceau en spectres sur $(Esp/S, li)$, la catégorie des espaces algébriques et morphismes lisses.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre d'espaces algébriques, alors il existe un morphisme dans $HoSp(Y_{li})$

$$f_* : f_*\mathcal{H}'_X \longrightarrow \mathcal{H}'_Y$$

compatible avec l'équivalence précédente lorsque X et Y sont lisses, et f fortement quasi-projectif.

Preuve: La première partie se démontre comme les théorèmes de descente 2.4. La seconde assertion est une conséquence directe de (3), et de la propriété universelle des colimites homotopiques.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre. On considère la catégorie $f^*HE(Y)$ formée des triplets $(Z_\bullet, Z'_\bullet, u)$, où $Z_\bullet$ est un objet de $HE(X)$, $Z'_\bullet$ un objet de $HE(Y)$, et u un morphisme de $Z_\bullet$ vers $f^{-1}Z'_\bullet := Z'_\bullet \times_Y X$ dans $HE(X)$. Alors, par (3) on a un morphisme naturel

$$f_* : hocolim_{(Z_\bullet, Z'_\bullet, u) \in f^*HE(Y)} \mathbf{H}(Z/X, \mathcal{H}) \longrightarrow hocolim_{Z'_\bullet \in HE(Y)} \mathbf{H}(Z'/Y, \mathcal{H}) = \mathcal{H}'(Y)$$

Or, comme toute objet $f^{-1}Z'_\bullet$, où $Z'_\bullet \in HE(Y)$, est dominé par un objet de $HE(X)$, le morphisme naturel

$$a : hocolim_{(Z_\bullet, Z'_\bullet, u) \in f^*HE(Y)} \mathbf{H}(Z/X, \mathcal{H}) \longrightarrow hocolim_{Z_\bullet \in HE(X)} \mathbf{H}(Z/X, \mathcal{H}) = \mathcal{H}'(X)$$

est une équivalence faible. Comme cette construction est compatible avec le changement de base par des morphismes lisses, on a donc construit un diagramme dans $HoSp(Y_{li})$

$$\begin{tikzcd} hocolim_{(Z_\bullet, Z'_\bullet, u) \in f^*HE(Y)} \mathbf{H}(Z/X, \mathcal{H})_X \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "a"'] & \mathcal{H}'_Y \\ f_*\mathcal{H}'_X & \end{tikzcd}$$

avec u un isomorphisme. Ceci définit donc de façon unique un morphisme dans $HoSp(Y_{li})$

$$f_* : f_*\mathcal{H}'_X \longrightarrow \mathcal{H}'_Y$$

$\square$

Définition 3.3 *Soit F un champ algébrique. On définit sa cohomologie et son homologie par*

$$H^p(F, q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}(F_{li}, \mathcal{H}^q \otimes \mathbf{Q})$$

$$H_p(F, q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}(F_{li}, \mathcal{H}'_q \otimes \mathbf{Q})$$

Les principales propriétés sont répertoriées dans la proposition suivante.

Proposition 3.4 *La correspondance $F \mapsto H^\bullet(F,*)$ est un foncteur contravariant de $HoChAlg(S)$ vers les $\mathbf{Q}$-algèbres commutatives bi-graduées.*

La correspondance $F \mapsto H_\bullet(F,*)$ est un foncteur covariant de $(HoChAlg(S), pr.rep.)$, la sous-catégorie de champs algébriques et morphismes propres représentables, vers celle des groupes abéliens. C'est aussi un foncteur contravariant pour les morphismes lisses et représentables. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. *Pour tout champ F, $H_\bullet(F,*)$ est un $H^\bullet(F,*)$-module bi-gradué. Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme propre représentable, $x \in H^\bullet(F,*)$ et $y \in H_\bullet(F',*)$, alors*
$$f_*(f^*(x).y) = x.f_*(y)$$
2. *Si F est lisse, il existe un isomorphisme de $H^\bullet(F,*)$-modules*
$$p_F : H^\bullet(F,*) \simeq H_\bullet(F,*)$$
compatible avec les images réciproques et les produits.
3. *Si le carré suivant est cartésien*
$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"'] & F' \arrow[d, "u"] \\ G \arrow[r, "p"'] & F \end{tikzcd}$$
avec p propre représentable, et u lisse et représentable, alors
$$q_* \circ v^* = u^* \circ p_*$$
4. *Si $j : F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée, et $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion complémentaire, alors il existe une suite exacte fonctorielle*
$$\cdots \longrightarrow H_\bullet(F',*) \xrightarrow{j_*} H_\bullet(F,*) \xrightarrow{i^*} H_\bullet(U,*) \longrightarrow \cdots$$
5. *Si $p : V \to F$ est un fibré vectoriel, alors le morphisme naturel*
$$p^* : H_\bullet(F,*) \longrightarrow H_\bullet(V,*)$$
est un isomorphisme.
6. *Si $p : \mathbf{P}(V) \longrightarrow F$ est la projection d'un fibré projectif associé à un fibré vectoriel V de rang $r+1$, et si $x = C_1(\mathcal{O}_P(1)) \in H^d(F, 1)$, alors le morphisme naturel*
$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^{i=r} H_\bullet(F,*) & \longrightarrow & H_\bullet(P,*) \\ \sum_i x_i & \mapsto & \sum x^i.p^*(x_i) \end{array}$$
est un isomorphisme.

Preuve: L'existence des images directes pour les morphismes propres représentables est une conséquence directe du lemme 3.2. Toutes les autres propriétés se déduisent alors aisément des axiomes 3.1. $\square$

Il nous reste à traiter le cas des images directes pour des morphismes propres non-nécessairement représentables. Pour cela, on utilise les mêmes arguments que 2.6, et on démontre la proposition suivante.

Proposition 3.5 *1. Le foncteur covariant*

$$\begin{array}{cccc} H_\bullet(-,*): & (HoChAlg(S), pr.rep.) & \longrightarrow & Ab \\ & F & \mapsto & H_\bullet(F,*) \end{array}$$

s'étend en un foncteur covariant

$$\begin{array}{cccc} H_\bullet(-,*): & (HoChAlgDM(S), pr.) & \longrightarrow & Ab \\ & F & \mapsto & H_\bullet(F,*) \end{array}$$

où $(HoChAlgDM(S), pr.)$ *est la sous-catégorie des champs algébriques de Deligne-Mumford et morphismes propres. Ce foncteur vérifie encore les formules de transfert et de projection pour des morphismes non-nécessairement représentables.*

De plus, si F *est de Deligne-Mumford, et* $p : F \longrightarrow M$ *la projection sur son espace de modules, alors*

$$p_* : H_\bullet(F,*) \longrightarrow H_\bullet(M,*)$$

est un isomorphisme.

2. Si $S = SpecK$*, avec* K *un corps de caractéristique nulle, alors le foncteur précédent s'étend en un foncteur covariant*

$$\begin{array}{cccc} H_\bullet(-,*): & (HoChAlg^{aff}(S), pr.) & \longrightarrow & Ab \\ & F & \mapsto & H_\bullet(F,*) \end{array}$$

où $(HoChAlg^{aff}(S), pr.)$ *est la sous-catégorie des champs algébriques* Δ*-affines, et morphismes propres.*

Terminons par la définition des classes caractéristiques.

Dans [G, 2.2] sont construits des morphismes dans $HoSpr((Esp/S)_{li})$

$$C_i : \underline{K}_{[0]} \longrightarrow \mathcal{H}^i_{[o]}$$

Ces morphismes induisent donc, pour tout champ algébrique F, la i-ème classe de Chern

$$C_i : \underline{\mathbf{K}}_p(F) \simeq \pi_p \mathbf{H}(F_{li}, \underline{K}_{[o]}) \longrightarrow H^{di-p}(F,i)$$

Ces classes caractéristiques vérifient évidemment tous les axiomes de [G]. Elles permettent aussi de définir le caractère de Chern

$$Ch : \underline{\mathbf{K}}_*(F) \longrightarrow H^\bullet(F,*)$$

qui est un morphisme d'algèbres, fonctoriel pour les images réciproques.
Enfin, on dispose aussi d'une classe de Todd

$$Td : \underline{\mathbf{K}}_0(F) \longrightarrow H^\bullet(F,*)$$

qui est multiplicatif, et fonctoriel pour les images réciproques.

A l'aide de ces définitions et du "splitting principle", on démontre l'équation suivante ([F-L, 5.3]), qui nous sera utile par la suite.

Lemme 3.6 *Soit $x \in \mathbf{K}_\mathrm{o}(F)$, r son rang, que l'on suppose positif, et $x^\vee$ son dual. Soit*

$$\lambda_i : \mathbf{K}_\mathrm{o}(F) \longrightarrow \mathbf{K}_\mathrm{o}(F)$$

la i-ème λ-opération ([F-L, V, 1]), et $\lambda_{-1}(x) := \sum_i (-1)^i.\lambda_i(x)$. Alors

$$Ch(can(\lambda_{-1}(x))).Td(can(x^\vee)) = C_r(can(x^\vee))$$

Remarque : Il nous arrivera d'écrire $C_i(x)$ (de même pour Ch et Td), pour signifier $C_i(can(x))$, lorsque $x \in \mathbf{K}_*(F)$.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons montrer que ces théories cohomologiques ne permettent pas de démontrer un théorème de Riemann-Roch. Le contre-exemple est le suivant.

Soit $F = [Spec\mathbf{C}/H]$ avec H un groupe fini abélien. Dans ce cas le fibré tangent est trivial, et la transformation de Riemann-Roch associée aux définitions de Ch et Td précédentes

$$\tau_F : \mathbf{K}_\mathrm{o}(F) \to H^*(F,\mathrm{o})$$

est donc le caractère de Chern. Ainsi, c'est un morphisme d'anneaux. La propriété 3.5 implique que

$$p_* : H^*(F,0) \longrightarrow H^*(Spec\mathbf{C},\mathrm{o})$$

est un isomorphisme. Supposons que la théorie cohomologique soit telle que $H^*(Spec\mathbf{C},\mathrm{o})$ soit un corps K de caractéristique nulle. C'est le cas pour les deux exemples que nous avons cité. Si la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch était vérifiée, on aurait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{K}_\mathrm{o}(F) \arrow[r, "Ch"] \arrow[d, "p_*"'] & H^*(F,*) \arrow[d, "\wr p_*"] \\ K \arrow[r, "Id"'] & K \end{tikzcd}$$

En identifiant $\mathbf{K}_{\mathrm{o}}(F)$ avec le groupe de Grothendieck des représentations linéaires de H dans $\mathbf{C}$, on aurait pour tout $\mathbf{C}[H]$-module V de dimension finie

$$p_*Ch(V) = Dim(V^H)$$

Prenons V de dimension 1 non triviale. Alors $V^H = (0)$. Or si m est l'ordre de H, alors $V^{\otimes m} = 1$. On aurait donc

$$Ch(V^{\otimes m}) = Ch(V)^m = Ch(1) = 1 \Rightarrow Ch(V) \neq 0$$

Ce qui est absurde.

3.1.2 Cohomologie à coefficients dans les caractères

Fixons-nous une théorie cohomologique avec images directes $\mathcal{H}$. Les groupes de cohomologie et d'homologie associés à cette théorie, seront notés comme dans le paragraphe précédent, $H^\bullet(-,*)$, et $H_\bullet(-,*)$.

Définition 3.7 *Soit F un champ algébrique de $HoChAlg'(S)$.*

1. *Sa cohomologie et son homologie, à coefficients dans les caractères, sont définis par*

$$H^p_\chi(F,q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((D_F)_{li}, \mathcal{H}^q \otimes \mathcal{A}_F \otimes \mathbf{Q})$$
$$H_p^\chi(F,q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((D_F)_{li}, \mathcal{H}'_q \otimes \mathcal{A}_F \otimes \mathbf{Q})$$

   On notera aussi

$$H^\bullet_\chi(F,*) := \bigoplus_{p,q} H^p_\chi(F,q)$$
$$H_\bullet^\chi(F,*) := \bigoplus_{p,q} H_p^\chi(F,q)$$

2. *Les classes caractéristiques à coefficients dans les caractères, sont définies par*

$$C_i^\chi : \mathbf{K}_p(F) \xrightarrow{\chi_F} \mathbf{H}^{-p}((D_F)_{li}, \underline{K} \otimes \mathcal{A}_F \otimes \mathbf{Q}) \xrightarrow{C_i \otimes Id} H^{di-p}((D_F)_{li}, \mathcal{H}^i \otimes \mathcal{A}_F \otimes \mathbf{Q}) = H^{di-p}_\chi(F,i)$$

3. *Le caractère de Chern et la classe de Todd sont définis de manière analogue*

$$Ch^\chi : \mathbf{K}_*(F) \xrightarrow{\chi_F} \underline{\mathbf{K}}^\chi_*(F) \xrightarrow{Ch} H^\bullet_\chi(F,*)$$

$$Td^\chi : \mathbf{K}_{\mathrm{o}}(F) \xrightarrow{\chi_F} \underline{\mathbf{K}}^\chi_0(F) \xrightarrow{Td} H^\bullet_\chi(F,*)$$

<u>Remarques:</u>

- Les classes de Chern définies ci-dessus ne vérifient par l'axiome de normalisation ([G, 2.1]). En effet, prenons le cas où $F = BH$ est le champ classifiant d'un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos k, $\mathcal{H}$ la théorie de Gersten, et V une représentation linéaire de H. Alors

$$C_0(V) \in H^0_\chi(F,0) \simeq \bigoplus_{D \in \mathcal{T}_H(k)} \mathbf{Q}[[M_D]]$$

est la somme des caractères des représentations obtenues par restriction de D sur V. Ainsi, $C_0(V) \neq 1$ en général.

- Pour tout champ algébrique F, il existe une section canonique $F \hookrightarrow D_F$, correspondant au sous-groupe trivial. Ainsi, on dispose d'isomorphismes fonctoriels

$$H^\bullet_\chi(F,*) \simeq H^\bullet(F,*) \oplus H^\bullet_{\chi\neq 1}(F,*)$$
$$H^\chi_\bullet(F,*) \simeq H_\bullet(F,*) \oplus H^{\chi\neq 1}_\bullet(F,*)$$

Par ces isomorphismes, il nous arrivera d'identifier $H^\bullet(F,*)$ (resp. $H_\bullet(F,*)$) à son image dans $H^\bullet_\chi(F,*)$ (resp. $H^\chi_\bullet(F,*)$). De cette façon, si $x \in \mathbf{K}_p(F)$, les classes de Chern $C_i(x) \in H^{d.i-p}(F,i)$ seront vues comme des éléments de $H^\bullet_\chi(F,*)$. De plus, il est clair que la projection de $C^\chi_i(x)$ dans $H^\bullet(F,*)$ est $C_i(x)$.

Les produits sur $\mathcal{H}$ et $\mathbf{Z}[[\mathcal{X}^*_F]]$ induisent des produits sur $\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathbf{Q}$. De cette façon, les groupes $H^\bullet_\chi(F,*)$ sont des anneaux bi-gradués. De même, $H^\chi_\bullet(F,*)$ est un $H^\bullet_\chi(F,*)$-modules bi-gradués. Ces structures sont compatibles avec la décomposition précédente.

Rappelons que $HoChAlg'(S)$ est la sous-catégorie de $HoChAlg(S)$ des champs qui vérifient l'hypothèse de 2.18.

Proposition 3.8 *La correspondance $F \mapsto H^\bullet_\chi(F,*)$ est un foncteur contravariant de $HoChAlg'(S)$ vers les algèbres commutatives bi-graduées.*

La correspondance $F \mapsto H^\chi_\bullet(F,*)$ est un foncteur covariant de $(HoChAlg'(S), pr.)$, la sous-catégorie des champs algébriques et morphismes propres et représentables, vers celle des groupes abéliens. C'est aussi un foncteur contravariant pour les morphismes étales représentables. De plus, on a les propriétés suivantes

1. *pour tout champ F, $H^\chi_\bullet(F,*)$ est un $H^\bullet_\chi(F,*)$-module bi-gradué. Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme propre représentable, $x \in H^\bullet_\chi(F,*)$ et $y \in H^\chi_\bullet(F',*)$, alors*

$$f_*(f^*(x).y) = x.f_*(y)$$

2. *si le carré suivant est cartésien*

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"'] & F' \arrow[d, "u"] \\ G \arrow[r, "p"'] & F \end{tikzcd}$$

avec p propre représentable, et u étale représentable, alors

$$q_* \circ v^* = u^* \circ p_*$$

3. *si $j : F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée, et $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion complémentaire, alors il existe une suite exacte naturelle*

$$\dots H^{\chi}_{\bullet}(F', *) \xrightarrow{j_*} H^{\chi}_{\bullet}(F, *) \xrightarrow{i^*} H^{\chi}_{\bullet}(U, *) \longrightarrow H^{\chi}_{\bullet}(F', *) \dots$$

4. *si $p : V \to F$ est un fibré vectoriel, alors le morphisme naturel*

$$p^* : H^{\chi}_{\bullet}(F, *) \longrightarrow H^{\chi}_{\bullet}(V, *)$$

est un isomorphisme.

Preuve: C'est la même que pour 2.22. $\square$

Revenons un moment au cas d'une base générale S.

Lorsqu'un morphisme $f : F \longrightarrow F'$, est localement une intersection complète, on peut définir le fibré conormal $\mathcal{N}_f^{\vee} := \mathcal{N}(F/F')^{\vee}$ de f. Nous noterons alors

$$\lambda_f = \lambda_{-1}(\mathcal{N}(F/F')^{\vee}) \in \mathbf{K}_{\mathrm{o}}(F)$$

Rappelons que nous avons défini un morphisme

$$\rho : \mathbf{K}(D_F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$$

pour tout champ algébrique F (voir la preuve de 2.23).

Définition 3.9 • *Soit F un champ algébrique tel que la projection*

$$d_F : D_F \longrightarrow F$$

soit localement d'intersection complète (représentable). La classe de ramification de F est définie par

$$\alpha_F := \rho(\lambda_{d_F}) \in \underline{\mathbf{K}}^{\chi}_0(F)$$

où ρ est défini dans 2.23.

- *Un champ algébrique de $HoChAlg'(S)$ est dit bien ramifié, si le morphisme*
$$d_F : D_F \longrightarrow F$$
est localement d'intersection complète, et α_F est inversible dans $\underline{\mathbf{K}}_0^{\chi}(F)$.

Proposition 3.10 *Dans tous les cas suivants, le champ F de $HoChAlg'(S)$ est bien ramifié.*

1. *Le champ F est une gerbe sur X, bornée par un X-espace algébrique en groupes affine et lisse sur X.*
2. *Le champ F est un champ de Deligne-Mumford régulier.*
3. *Le champ F est localement un quotient affine, lisse sur $S = Speck$, avec k un corps.*
4. *Le champ F est localement un quotient affine, régulier, et pour toute section $s \in ObF(X)$ au-dessus d'un S-espace algébrique, $Aut_X(s)$ est abélien.*

Preuve: Pour montrer qu'un élément de $\underline{\mathbf{K}}_0^{\chi}(F)$ est inversible, on utilisera le lemme suivant, appliqué à $C = (D_F)_{li}$, et $K = \underline{K} \otimes \mathcal{A}_F$.

Lemme 3.11 *Soit C un site, et $K \in HoSp(C)$, un objet en anneaux. Un élément $x \in \mathbf{H}^o(C, K)$ est inversible, si et seulement pour tout objet $X \in C$, il existe un recouvrement $i : U \longrightarrow X$, tel que $i^*(x) \in \mathbf{H}^o(U, K)$ est inversible.*

Preuve: L'élément x est représenté par un morphisme de préfaisceaux en spectres
$$x : * \longrightarrow HK$$
où $K \hookrightarrow HK$ est une résolution injective. Alors, dire que x est inversible est équivalent à dire que le morphisme de $HoSp(C)$
$$\begin{array}{cccc} - \wedge x : & HK & \longrightarrow & HK \\ & y & \mapsto & y \wedge x \end{array}$$
est un isomorphisme. Mais ceci est local sur C. $\Box$

(1) Comme ceci est local sur X_{et}, on peut supposer que $F = [X/H]$ est une gerbe triviale de groupe H. Alors
$$D_F \simeq [\mathcal{T}_H/H]$$
où $\mathcal{T}_H$ est le schéma des sous-groupes de type multiplicatif de H. Or, comme $\mathcal{T}_H \longrightarrow X$ est lisse d'après [SGA 3 II, XI 4.1], le morphisme $D_F \longrightarrow F$ est lisse. Ainsi, le fibré conormal de $D_F \longrightarrow F$ est trivial, et

donc $\alpha_F = 1$.

(2) En localisant sur l'espace de modules de F, on peut supposer que $F = [X/H]$, où X est un schéma régulier, et H un groupe fini opérant sur X. Notons $T(H)$ l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de $H \times X \longrightarrow X$.

Soit $\overline{X} = \coprod_{D \in T(H)} X^D$, où X^D est le sous-schéma de X des points fixes de D. On sait alors que $\overline{X}$ est régulier ([Th3, 6.2]). Or, $D_F \simeq [\overline{X}/H]$. Donc D_F est régulier. Ainsi, le morphisme $D_F \longrightarrow F$ est localement d'intersection complète.

Supposons toujours que $F = [X/H]$, et notons $M(D)$ le groupe des caractères de D. Comme $\coprod_{D \in T(H)} X^D \longrightarrow D_F$ est lisse et surjectif, le lemme 3.11, nous permet de nous ramener à démontrer que la restriction de α_F à chaque X^D est inversible.

Pour chaque $D \in T(H)$, soit $\mathcal{N}_D^\vee$ le fibré conormal de X_D dans X. Alors, la composante de α_F supportée par X^D, est de la forme

$$\alpha_F(D) = \prod_{t \in M(D)} \lambda_{-t}((\mathcal{N}_D^\vee)^{(t)}) \in \mathbf{K}_0(X^D)[[M(D)]]_{\mathbf{Q}}$$

où $(\mathcal{N}_D^\vee)^{(t)}$ est le sous-fibré de $\mathcal{N}_D^\vee$ où D opère par multiplication par t. Ainsi, le rang de $\alpha_F(D)$ est

$$\prod_{t \in M(D)} (1-t)^{rg(\mathcal{N}_D^\vee)^{(t)}} \in \mathbf{Q}[[M(D)]]$$

Or, comme D fixe exactement X^D, $(\mathcal{N}_D^\vee)^{(1)} = 0$, et ainsi le rang de $\alpha_F(D)$ est inversible. Donc $\alpha_F(D)$ aussi.

(3) On peut clairement supposer que k est algébriquement clos.

Soit $f : F \longrightarrow M$ un morphisme, avec M un espace algébrique, tel que localement sur M_{et}, F soit un quotient par un schéma en groupes lisse et affine sur k.

En localisant sur M_{et}, on peut supposer que $F = [X/H]$, où X est un schéma lisse, et H un schéma en groupes lisse et affine opérant sur X.

Alors D_F est équivalent au champ quotient

$$D_F \simeq \coprod_{a \in A} [X^{D_a}/\mathcal{N}(D_a)]$$

où A est l'ensemble des classes de conjugaisons de sous-groupes de type multiplicatif de H, D_a un représentant de $a \in A$, $\mathcal{N}(D_a)$ le normalisateur de D_a dans H, et X^{D_a} le sous-schéma des points fixes de D_a. Alors, comme $X^{D_a} \hookrightarrow X$ est une immersion régulière ([Th3, 6.2]), ceci montre que $D_F \longrightarrow F$ est localement d'intersection complète.

En localisant sur $\coprod_{a\in A} X^{D_a} \longrightarrow D_F$, qui est lisse et surjectif, on démontre que α_F est inversible comme dans le (2).

(4) Tout comme dans le point (3) on peut supposer que $F = [X/H]$, avec H un S-groupe lisse et affine sur S, opérant sur un S-espace algébrique régulier X. En localisant sur $X \longrightarrow F$, on se ramène à démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.12 *Soit H un S-schéma en groupes abéliens lisse et affine sur S, opérant sur un S-schéma régulier X. Soit H' le X-schéma en groupes*

$$H' = \{(x,h) \in X \times_S H / h.x = x\}$$

Alors $\mathcal{T}_{H'}$ est régulier.

Preuve: Comme ceci est local sur X_{et}, on peut supposer que H est déployé sur X (i.e. que son sous-groupe de type multiplicatif maximal est diagonalisable sur X).

Soit $T(H)$ l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de H_X. Alors, comme H est abélien, $\mathcal{T}_{H_X} = \coprod_{D\in T(H)} X$. Ainsi

$$\mathcal{T}_{H'} = \coprod_{D\in T(H)} X^D$$

où X^D est le sous-schéma de X des points fixés par D. Or on sait que X^D est régulier ([Th3, 6.2]). $\square$

Le lemme ci-dessus montre que $D_F \longrightarrow F$ est localement d'intersection complète.

La démonstration du fait que α_F est inversible se fait de la même façon que dans (2).

$\square$

Remarque: Tous les exemples de la proposition sont des champs qui sont localement des quotients. Il serait très intéressant de savoir si de façon plus générale un champ algébrique lisse sur un corps est bien ramifié. Comme la plupart des champs algébriques connus sont des quotients par des groupes affines, la recherche d'un contre exemple éventuel est assez délicate.

Pour la fin de ce paragraphe, on revient au cas où $S = Speck$.

Définition 3.13 *Soit F un champ algébrique lisse et bien ramifié. La classe de Todd de F est définie par*

$$Td^{\chi}(F) := Ch(\alpha_F^{-1}).Td(T_{D_F}) \in H^{\bullet}_{\chi}(F,*)$$

où $T_{D_F} \in \underline{\mathbf{K}}_0(F)$ est le fibré virtuel tangent de F.

La transformation de Riemann-Roch à coefficients dans les caractères est alors définie par

$$\begin{array}{rccc} \tau_F^{\chi}: & \mathbf{G}_*(F) & \longrightarrow & H_{\chi}^{\bullet}(F,*) \\ & x & \mapsto & Ch^{\chi}(x).Td^{\chi}(F) \end{array}$$

Remarque: Dans 3.7, nous n'avons défini Ch^{χ} que pour les éléments de $\mathbf{K}_*(F)$. Cependant, lorsque F est lisse et bien ramifié, on peut refaire le théorème 2.23 en G-théorie. On définit Ch^{χ} de façon analogue à 3.7, en gardant à l'esprit que $\underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F) \simeq \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F)$, car D_F est lisse (2.2). Ainsi, la définition précédente possède un sens.

3.2 Formules de Riemann-Roch

Nous possédons maintenant tous les outils pour démontrer une formule de Grothendieck-Riemann-Roch à valeur dans la cohomologie à coefficients dans les caractères. Cependant, nous n'avons pas réussi à démontrer le théorème pour le cas général des morphismes propres et représentables de champs localement quotients affines sur un corps, alors que ce degré de généralité semble pourtant accessible. En majeure partie, c'est le manque de résultats concernant les (quasi) enveloppes de Chow des morphismes propres de champs algébriques, ainsi que la résolution des faisceaux cohérents par des fibrés vectoriels, qui limite le cadre d'application du théorème. D'autre part le cas des morphismes propres non-représentables ne peut pas être traité avec les définitions que nous avons pour le moment. Nous montrerons cependant en fin de chapitre, qu'il est possible de généraliser les résultats obtenus pour les champs de Deligne-Mumford aux champs qui possèdent des quotients géométriques uniformes (tout au moins en caractéristique nulle). Je n'ai pas réussi à démontrer le théorème dans le cas plus général des champs Δ-affines bien ramifiés, alors qu'il me semble que la formule de Riemann-Roch reste vraie.

Un autre façon d'éliminer les hypothèses superflues serait de trouver un moyen de ramener le théorème de Riemann-Roch à un problème "local en bas". C'est à dire que pour démonter la formule pour un morphisme $f : F \longrightarrow F'$, il suffirait de la démontrer après un changement de base par un morphisme lisse est surjectif $X \longrightarrow F'$. Mais pour l'instant, les preuves existantes de la formule de Riemann-Roch ne permettent pas ce genre de réduction. Peut-être qu'une utilisation systématique des méthodes homotopiques de [SH], permettrait d'avancer dans cette direction.

3.2.1 Formule de Lefschetz-Riemann-Roch

Le point crucial pour la formule de Lefschetz-Riemann-Roch est le cas particulier de la formule d'intersection suivante.

Proposition 3.14 *Soit $j : F \longrightarrow F'$ une immersion régulière de champs algébriques bien ramifiés. Notons*

$$\alpha_j := \lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}^{\vee}_{D_{F'}/F'} - \mathcal{N}^{\vee}_{D_F/F}) \in \mathbf{K}_0(D_F)$$

Alors le diagramme suivant commute dans $HoSp$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(F) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\alpha_j . d_F^*"'] & \mathbf{G}(F') \arrow[d, "d_{F'}^*"] \\
\mathbf{G}(D_F) \arrow[r, "Dj_*"'] & \mathbf{G}(D_{F'})
\end{tikzcd}$$

<u>**Preuve:**</u> Une application de la déformation vers le cône normal ([G, 4.1]), nous permet de ne considérer que le cas où $F' = \mathbf{P}(V \oplus 1)$ est le complété projectif d'un fibré vectoriel V sur F, et j est la section nulle $e : F \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathbf{P}(V \oplus 1)$. Notons $P = \mathbf{P}(V \oplus 1)$, et

$$p : P \longrightarrow F$$
$$Dp : D_P \longrightarrow D_F$$
$$De : D_F \longrightarrow D_P$$

les morphismes induits. Remarquons qu'il suffit de démontrer que

$$De_*(\alpha_e) = d_P^*(e_*(1)) \in \mathbf{K}_0(D_P)$$

En effet, si la formule ci-dessus est vraie, on a les égalités suivantes dans $HoSp$

$$\begin{aligned}
De_*(\alpha_e.d_F^*) &= De_*(\alpha_e.De^*Dp^*d_F^*) \\
&= De_*(\alpha_e).Dp^*d_F^* \\
&= De_*(\alpha_e).d_P^*p^* \\
&= d_P^*(e_*(1)).d_P^*p^* \\
&= d_P^*(e_*(1).p^*) \\
&= d_P^*(e_*(1.e^*p^*)) \\
&= d_P^*(e_*)
\end{aligned}$$

Soit $i : D_P \longrightarrow D_F \times_F P$ le morphisme canonique. C'est l'immersion canonique des points fixes du fibré projectif $D_F \times_F P$, pour l'action linéaire du groupe de type multiplicatif universel $\mathcal{D}_F$ (2.21). Ainsi, localement sur $(D_F)_{li}$, si $W = V \oplus 1 \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}_F^*(F)} W^{(\chi)}$, on a

$$D_P \simeq \coprod_{\chi \in \mathcal{X}_F^*(F)} P^{\chi}$$

où P^{χ} est le fibré projectif associé au fibré vectoriel $W^{(\chi)}$.

Lemme 3.15 *On a* $\alpha_e = \lambda_{-1}(De^*\mathcal{N}_i^\vee)$*, où* $\mathcal{N}_i^\vee$ *est le fibré conormal de l'immersion régulière* $i : D_P \hookrightarrow D_F \times_F P$*.*

<u>**Preuve:**</u> Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
D_P \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "Dp"'] & D_F \times_F P \arrow[r, "a"] \arrow[d, "q"] & P \arrow[d, "p"] \\
& D_F \arrow[r, "d_F"'] & F
\end{tikzcd}$$

Notons $f : D_F \hookrightarrow D_F \times_F P$ la section induite par e. Alors

$$\mathcal{N}_{d_P}^\vee = \mathcal{N}_i^\vee + Di^*\mathcal{N}_a^\vee$$

donc

$$De^*(\mathcal{N}_{d_P}^\vee) = De^*Di^*\mathcal{N}_a^\vee + De^*\mathcal{N}_i^\vee = Df^*\mathcal{N}_a^\vee + De^*\mathcal{N}_i^\vee$$

et

$$q^*\mathcal{N}_{d_F}^\vee = \mathcal{N}_a^\vee$$

donc

$$Df^*\mathcal{N}_a^\vee = Df^*q^*\mathcal{N}_{d_F}^\vee = \mathcal{N}_{d_F}^\vee$$

Ainsi

$$De^*(\mathcal{N}_{d_P}^\vee - Dp^*\mathcal{N}_{d_F}^\vee) = Df^*\mathcal{N}_a^\vee + De^*\mathcal{N}_i^\vee - \mathcal{N}_{d_F}^\vee = De^*\mathcal{N}_i^\vee$$

□

On a donc

$$De_*(\alpha_e) = De_*(De^*\lambda_{-1}(\mathcal{N}_i^\vee)) = \lambda_{-1}(\mathcal{N}_i^\vee).De_*(1)$$

Or comme la section De_* envoi D_F dans $P^1 = \mathbf{P}(W^{(1)})$, $De_*(\alpha_e)$ est supporté par P^1.

Notons $\mathcal{N}_1^\vee$ le fibré conormal de P^1 dans P. Il faut donc montrer que

$$De_*(1).\lambda_{-1}(\mathcal{N}_1^\vee) = d_P^*(e_*(1))$$

dans $\mathbf{K}_0(P^1)$.

Soit

$$0 \longrightarrow E_P \longrightarrow p^*V \oplus 1 \longrightarrow \mathcal{O}_P(1) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_{P^1} \longrightarrow Dp_1^*W^{(1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{P^1}(1) \longrightarrow 0$$

les suites exactes canoniques sur P et P^1, où $Dp_1 : P^1 \longrightarrow D_F$ est la projection. Alors, on sait que ([F-L, 4.3])

$$e_*(1) = \lambda_{-1}(E_P)$$

$$De_*(1) = \lambda_{-1}(E_{P^1})$$

Notons $W \simeq W^{(1)} \oplus W^{(\neq 1)}$, où $W^{(1)}$ est le sous-fibré où $\mathcal{D}_F$ opère trivialement. Remarquons que par définition, $W^{(1)} \simeq V^{(1)} \oplus 1$. Ainsi, $\mathcal{N}_1^\vee = Dp_1^* W^{\neq 1}$, et donc,

$$\begin{aligned}
De_*(1).\lambda_{-1}(\mathcal{N}_1^\vee) &= \lambda_{-1}(E_{P^1}).\lambda_{-1}(Dp_1^* W^{(\neq 1)}) \\
&= \lambda_{-1}(Dp_1^*(V^{(1)}) + 1 - \mathcal{O}_{P^1}(1) + Dp_1^* W^{(\neq 1)}) \\
&= \lambda_{-1}(Dp_1^*(V+1) - \mathcal{O}_{P^1}(1))
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
d_P^*(e_*(1)) &= i^*(f_*(1)) \\
&= i_1^*(f_*(1))
\end{aligned}$$

où $i_1 : P^1 \hookrightarrow P$ est induit par i. Donc

$$\begin{aligned}
d_P^*(e_*(1)) &= i_1^* \lambda_{-1}(a^*(E_P)) \\
&= \lambda_{-1}(Dp_1^* V + 1 - \mathcal{O}_{P^1}(1))
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$De_*(1).\lambda_{-1}(\mathcal{N}_1^\vee) = d_P^*(e_*(1))$$

et donc la proposition. □

Théorème 3.16 *(Lefschetz-Riemann-Roch) Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme localement d'intersection complète et fortement projectif de champs algébriques bien ramifiés (3.9). Alors le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{G}_*(F) & \xrightarrow{\chi_F.\alpha_F^{-1}} & \underline{\mathbf{G}}_*^\chi(F) \\
{\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\
\mathbf{G}_*(F') & \xrightarrow[\chi_{F'}.\alpha_{F'}^{-1}]{} & \underline{\mathbf{G}}_*^\chi(F')
\end{array}$$

Preuve: En factorisant f en une immersion fermée régulière, suivie de la projection d'un fibré projectif associé à un fibré vectoriel, et à l'aide du lemme suivant, on peut ne traiter que ces deux cas.

Lemme 3.17 *Soit F un champ bien ramifié, et $P \longrightarrow F$ un fibré projectif associé à un fibré vectoriel V sur F. Alors P est encore bien ramifié.*

Preuve: On a déjà vu que le morphisme naturel

$$D_V \longrightarrow D_F \times_F V$$

faisait de D_V un sous-fibré vectoriel de $D_F \times_F V$ sur D_F. De plus, $D_P \hookrightarrow D_F \times_F P$ est une immersion régulière. Ainsi, la projection $D_P \longrightarrow P$ se factorise par $D_P \hookrightarrow D_F \times_F P \longrightarrow P$, qui comme $P \longrightarrow F$ est lisse, est encore un morphisme localement d'intersection complète.

Pour montrer que α_P est inversible, on va montrer que

$$Dp^*(\alpha_F^{-1}).\alpha_P \in \underline{\mathbf{K}}_0^\chi(P)$$

est inversible. Par le lemme 3.11, ceci est local sur $(D_F)_{li}$, ce qui nous permet de faire les calculs au-dessus d'un morphisme lisse et surjectif $(s,D) : X \longrightarrow D_F$, qui correspond à un sous-groupe diagonalisable

$$D \hookrightarrow Aut_X(s)$$

Le fibré vectoriel V_X étant muni d'une action de D, le fibré projectif P_X aussi. Alors $D_P \times_{D_F} X$ est représenté par P_X^D, le sous-espace de P_X des points fixes de D. Or la restriction de $Dp^*(\alpha_F^{-1}).\alpha_P$ dans $\mathbf{K}_0(P_X^D)[[M(D)]]_{\mathbf{Q}}$, est égale à

$$\prod_{t\in M(D)} \lambda_{-t}(\mathcal{N}_D^\vee)$$

où $M(D)$ est le groupe des caractères de D, et $\mathcal{N}_D^\vee$ le fibré conormal de P_X^D dans P_X. C'est donc un élément inversible. $\square$

<u>Cas d'une immersion fermée:</u>

Soit $j : F \hookrightarrow F'$ une immersion fermée, régulière. Alors le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "j"] & F' \\ D_F \arrow[u] \arrow[r, "Dj"] & D_{F'} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Notons $\lambda_F = \lambda_{-1}(\mathcal{N}_{d_F}^\vee)$ (resp. $\lambda_{F'} = \lambda_{-1}(\mathcal{N}_{d_F}^\vee)$), où $\mathcal{N}_{d_F}^\vee$ est le fibré conormal de $d_F : D_F \longrightarrow F$ (resp. $d_{F'} : D_{F'} \longrightarrow D_F$). Alors, la formule d'auto-intersection (3.14) implique, que pour tout $x \in \mathbf{G}_*(F)$

$$Dj_*(\lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}_{d_{F'}}^\vee - \mathcal{N}_{d_F}^\vee).d_F^*(x)) = d_{F'}^*(j_*(x))$$

En composant avec le morphisme ρ (2.23), qui commute avec les images directes et réciproques pour j, et les produits sur D_F, on obtient

$$j_*(\rho(\lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}_{d_{F'}}^\vee - \mathcal{N}_{d_F}^\vee)).\rho(d_F^*(x))) = \rho(d_{F'}^*(j_*(x))$$

Or, $\rho(d_F^*(x)) = \chi_F(x)$, et $\rho(d_{F'}^*(j_*(x)) = \chi_{F'}(x)$, par définition. D'autre part

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}_{d_{F'}}^\vee - \mathcal{N}_{d_F}^\vee)).\alpha_F &= \rho(\lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}_{d_{F'}}^\vee - \mathcal{N}_{d_F}^\vee)).\rho(\lambda_F) \\
&= \rho((\lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}_{d_{F'}}^\vee - \mathcal{N}_{d_F}^\vee)).\lambda_{-1}(\mathcal{N}_{d_F}^\vee)) \\
&= \rho(\lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}_{d_{F'}}^\vee)) \\
&= j^*\rho(\lambda_{F'}) \\
&= j^*\alpha_{F'}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\rho(\lambda_{-1}(Dj^*\mathcal{N}_{d_{F'}}^\vee - \mathcal{N}_{d_F}^\vee)) = j^*\alpha_{F'}.\alpha_F^{-1}$$

et donc

$$j_*(j^*\alpha_{F'}.\alpha F^{-1}.\chi_F(x)) = \chi_{F'}(j_*(x))$$

ce qui, par la formule de projection est équivalent à

$$j_*(\alpha_F^{-1}.\chi_F(x)) = \alpha_{F'}^{-1}.j_*(x)$$

Remarquons que la démonstration précédente montre que l'on a une égalité dans $HoSp$

$$j_*(\alpha_F^{-1}.\chi_F) = \alpha_{F'}^{-1}.j_*$$

Cas d'un fibré projectif:

Soit $V \longrightarrow F$ un fibré vectoriel de rang $r+1$, et $p : P = \mathbf{P}(V) \longrightarrow F$ le fibré projectif associé. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer la formule pour les éléments $x^i = \mathcal{O}_P(i) \in \mathbf{G}_0(P)$. En effet, d'après 2.2, tout élément $y \in \mathbf{G}_*(P)$ s'écrit de façon unique

$$y = \sum_{i=0}^{i=r} p^*(a_i).x^i$$

$a_i \in \mathbf{G}_*(F)$. Supposons que la formule soit démontrée pour les éléments x^i, alors

$$\begin{aligned} p_*(\alpha_P^{-1}.\chi_P(y)) &= \textstyle\sum_i p_*(\alpha_P^{-1}.p^*(\chi_F(a_i)).x^i) \\ &= \textstyle\sum_i p_*(\alpha_P^{-1}.x^i).\chi_F(a_i) \\ &= \textstyle\sum_i \alpha_F^{-1}.\chi_F(p_*(x^i)).\chi_F(a_i) \\ &= \alpha_F^{-1}.\textstyle\sum_i \chi_F(p_*(x^i).a_i) \\ &= \alpha_F^{-1}.\textstyle\sum_i \chi_F(p_*(y)) \end{aligned}$$

Commençons par montrer que l'on peut supposer que V est une somme directe de fibrés inversibles.

Lemme 3.18 *Soit $p : P \longrightarrow F$ un fibré projectif, avec F un champ lisse et bien ramifié. Alors le morphisme*

$$p^* : \underline{\mathbf{G}}_*^\chi(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*^\chi(P)$$

est injectif.

Preuve: Comme $D_P \longrightarrow D_F$ est un morphisme propre et lisse, il existe des images réciproques

$$p^* : \underline{\mathbf{G}}^\chi(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^\chi(P)$$

et des images directes

$$p^* : \underline{\mathbf{K}}^\chi(P) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^\chi(F)$$

On peut alors appliquer la formule de projection 2.2 pour $x \in \underline{\mathbf{G}}_*^\chi(F)$

$$p_* p^*(x) = x.p_*(1)$$

Or, $p_*(1)$ est inversible dans $\underline{\mathbf{K}}^\chi(F)$. En effet, ceci est local sur $(D_F)_{li}$, et localement sur $(D_F)_{li}$, $p : P \longrightarrow F$ est la projection d'une réunion disjointe de fibrés projectifs (non vides). $\square$

Soit alors $f : G \longrightarrow F$ un morphisme projectif et lisse, tel que $g^*(G)$ admette une filtration par de sous-fibrés de quotients successifs de rang 1. On sait qu'un tel morphisme existe, et de plus, d'après le lemme 3.18, le morphisme

$$f^* : \underline{\mathbf{G}}_0^\chi(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_0^\chi(G)$$

est injectif.

Notons $g : G_P := G \times_F P \longrightarrow P$ et $q : G_P \longrightarrow P$ les morphismes induits, et $x_G = q^*(x)$. Comme $G \longrightarrow F$ est lisse, on a

$$q^*(\alpha_P^{-1}.p^*\alpha_F) = \alpha_{G_P}^{-1}.q^*\alpha_G$$

Avec ces notations, si la formule est démontrée pour q et x_G^i, on a

$$\begin{aligned}
f^*(p_*(\lambda_P^{-1}.p^*\lambda_F.\chi_P(x^i))) &= q_*(g^*(\lambda_P.p^*\lambda_F.\chi_P(x^i)) \\
&= q_*(\lambda_{G_P}.q^*\lambda_G.g^*(\chi_P(x^i))) \\
&= q_*(\lambda_{G_P}.q^*\lambda_G.\chi_G(g^*(x)^i)) \\
&= q_*(\lambda_{G_P}.q^*\lambda_G.\chi_G(x_G^i)) \\
&= \chi_G(q_*(x_G^i)) \\
&= \chi_G(q_*(g^*(x^i))) \\
&= \chi_G(f^*(p_*(x^i))) \\
&= f^*(\chi_{F,f}(p_*(x^i)))
\end{aligned}$$

Or comme f^* est injectif, on en déduit la formule pour p et x^i.

On est donc ramené au cas où V est sous forme triangulaire. Il existe alors un morphisme lisse

$$r : W \longrightarrow F$$

qui est une composition de torseurs sous des fibrés vectoriel, tel que $r^*(V)$ soit une somme directe de fibrés inversibles. En utilisant 2.2, et un calcul analogue à celui fait ci-dessus, on peut supposer que V est diagonalisable.

Soit $V \simeq V_1 \oplus \mathcal{L}$ une décomposition de V, avec $\mathcal{L}$ de rang 1. On note $j : P_1 := \mathbf{P}(V_1) \hookrightarrow P$ l'immersion canonique. Comme tout élément $x \in \mathbf{G}_0(P)$ s'écrit comme

$$x = j_*(y) + p^*(z)$$

le cas d'une immersion fermée permet de nous ramener au cas où $x = p^*(z)$, et par la formule de projection au cas où $x = 1$.

On va utiliser l'argument de déformation de [B-F-M, App. 3], pour montrer que
$$p_*(\alpha_P^{-1}.p^*(\alpha_F)) = 1$$
Comme V est diagonalisable, la construction de l'espace de déformation de [B-F-M, App. 3], se globalise sur F_{li}, et donne un sous-champ algébrique fermé
$$J : \mathcal{X} \hookrightarrow P \times_F P \times_S \mathbf{A}^1$$
tel que la projection induite
$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow F \times_S \mathbf{A}^1$$
soit un morphisme plat, et que
$$J_1 : \mathcal{X}_1 := \pi^{-1}(F \times \{1\}) \hookrightarrow P \times_F P$$
soit l'immersion diagonale, et
$$J_0 : \mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(F \times \{0\}) = \cup_{a+b=r} P^a \times_F P^b$$
où P^n désigne un sous-fibré projectif de P de rang n.

Pour un champ bien ramifié, notons
$$\lambda_F = \alpha_F^{-1}.\chi_F : \mathbf{G}_0(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_0^{\chi}(F)$$
Pour tout sous-champ fermé $\mathcal{Y}$ de $P \times_F P \times_S \mathbf{A}^1$ de complémentaire U, on notera $\lambda_{\mathcal{Y}}$ le morphisme induit sur la fibre des suites exactes suivantes
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(\mathcal{Y}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{Y}}"'] & \mathbf{K}(P \times_F P \times \mathbf{A}^1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{P \times_F P \times \mathbf{A}^1}"'] & \mathbf{K}(U) \arrow[d, "\lambda_U"] \\
\underline{\mathbf{K}}^{\chi}(\mathcal{Y}) \arrow[r] & \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(P \times_F P \times \mathbf{A}^1) \arrow[r] & \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(U)
\end{tikzcd}$$
Remarquons que le théorème dans le cas d'une immersion fermée régulière de champs bien ramifiés permet de conclure que les deux définitions ci-dessus de $\lambda_{\mathcal{Y}}$ coincident si $\mathcal{Y} \hookrightarrow P \times_F P \times_S \mathbf{A}^1$ est une immersion régulière, et $\mathcal{Y}$ est bien ramifié (exactement comme le corollaire [G, 3.7, (ii)] se déduit du théorème [G, 3.1]). En particulier pour
$$\mathcal{X}_1 \simeq P \hookrightarrow P \times_F P \times_S \mathbf{A}^1$$
Définissons alors, pour $\mathcal{Y}$ un sous-champ fermé de $P \times_F \times_S \mathbf{A}^1$
$$\chi(\mathcal{Y}) := q_*(\lambda_{\mathcal{Y}}(1))$$
où $q : \mathcal{Y} \longrightarrow F$ est la projection induite.

Si on montre que $\chi(\mathcal{X}_t)$ est indépendant de $t \in \mathbf{A}^1$, alors
$$p_*(\alpha_P^{-1}.p^*\alpha_F) = \chi(\mathcal{X}_1) = \chi(\mathcal{X}_0)$$

De la même façon que dans [B-F-M, App. 3], on conclut alors par récurrence sur le rang de V que

$$p_*(\alpha_P^{-1}.p^*\alpha_F) = 1$$

Il nous reste donc à montrer que $\chi(\mathcal{X}_t)$ est indépendant de $t \in \mathbf{A}^1$.

Soit $L := \lambda_{\mathcal{X}}(1) \in \underline{\mathbf{G}}_0^{\chi}(\mathcal{X})$. Comme dans le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_t \arrow[r, "J_t"] \arrow[d, "q_t"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ F \arrow[r, "i_t"'] & F \times_S \mathbf{A}^1 \end{tikzcd}$$

le morphisme π est plat, les fibré conormaux de i_t et de J_t sont triviaux. Ainsi, on a

$$(q_t)_* \circ J_t^*(L) = i_t^* \circ \pi_*(L)$$

Or $i_t^* = i_{t'}^*$ pout tout t et $t' \in \mathbf{A}^1$, ceci montre que $(q_t)_* \circ J_t^*(L)$ est indépendant de t. Or $J_t^*(L) = \lambda_{\mathcal{X}_t}(1)$, et donc $\chi(\mathcal{X}_t) = (q_t)_* \circ J_t^*(L)$ est indépendant de t. $\Box$

Remarque: La formule précédente reste de toute évidence valable pour un morphisme propre représentable de champs bien ramifiés. Cependant, faute de résultats concernant les enveloppes (ou quasi-enveloppes) de Chow d'un morphisme propre, nous ne savons pas la démontrer dans cette généralité.

Cela pose aussi la question de savoir quand un morphisme propre représentable est fortement projectif. On sait que cela est vrai lorsque les champs satisfont deux hypothèses supplémentaires. A savoir l'existence d'un fibré ample, et le fait que tout faisceau cohérent est quotient d'un fibré vectoriel. Ainsi, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.19 *Soit $HoChAlg''(S)$ la sous-catégorie de $HoChAlg'(S)$ des champs algébriques bien ramifiés et vérifiant les hypothèses suivantes :*

- *Il existe un fibré inversible ample sur F. C'est à dire $\mathcal{L}$, tel que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur F, il existe un entier n, tel que $H^i(F, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ pour $i > n$.*
- *Tout faisceau cohérent est quotient d'un fibré vectoriel.*

Alors, pour tout morphisme propre, représentable et localement d'intersection complète de $HoChAlg''(S)$ $f : F \longrightarrow F'$, le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_*(F) \arrow[r, "\chi_F.\alpha_F^{-1}"] \arrow[d, "f_*"'] & \underline{\mathbf{G}}_*^{\chi}(F) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathbf{G}_*(F') \arrow[r, "\chi_{F'}.\alpha_{F'}^{-1}"'] & \underline{\mathbf{G}}_*^{\chi}(F') \end{tikzcd}$$

Corollaire 3.20 *Soit $S = Speck$, et F et F' deux champs algébriques, qui sont équivalents à des champs quotients de schémas quasi-projectifs par des schémas en groupes réductifs. Alors, pour tout morphisme propre, représentable et localement d'intersection complète $f : F \longrightarrow F'$, le carré suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_*(F) \arrow[r, "\chi_F.\alpha_F^{-1}"] \arrow[d, "f_*"'] & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}_*(F) \arrow[d, "f_*"] \\
\mathbf{G}_*(F') \arrow[r, "\chi_{F'}.\alpha_{F'}^{-1}"'] & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}_*(F')
\end{tikzcd}$$

Preuve: On sait que ces deux champs vérifient les hypothèses du corollaire précédent ([Th2]). □

3.2.2 Formule de Grothendieck-Riemann-Roch

Pour tout ce paragraphe, $S = Speck$ est le spectre d'un corps, et $\mathcal{H}$ désigne une théorie cohomologique avec images directes.

Proposition 3.21 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme fortement projectif de champs algébriques lisses. Alors, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{G}}_*(F) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "Td(T_F).Ch"'] & \underline{\mathbf{G}}_*(F') \arrow[d, "Td(T_{F'}).Ch"] \\
H^{\bullet}(F,*) \arrow[r, "f_*"'] & H^{\bullet}(F',*)
\end{tikzcd}$$

où $T_F \in \underline{\mathbf{K}}_0(F)$ et $T_{F'} \in \underline{\mathbf{K}}_0(F')$ sont les fibrés tangents virtuels de F et F'.

Preuve: C'est mot pour mot la même que celle pour des schémas ([G, 4.1]). Le cas d'une immersion fermée provient de la déformation vers le cône normal et des propriétés des classes caractéristiques, et celui d'un fibré projectif, de la formule du projectif 2.2 en G-cohomologie. □

Proposition 3.22 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme fortement projectif de champ algébriques lisses et bien ramifiés. Alors le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^*(D_F, \underline{K} \otimes \mathcal{A}_F) \arrow[r, "Df_* \otimes Ind_f"] \arrow[d, "Td(T_{D_F}).Ch\otimes Id"'] & \mathbf{H}^*(D_{F'}, \underline{K} \otimes \mathcal{A}_{F'}) \arrow[d, "Td(T_{D_{F'}}).Ch\otimes Id"] \\
\mathbf{H}^*(D_F, \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}_F) \arrow[r, "Df_* \otimes Ind_f"'] & \mathbf{H}^*(D_{F'}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}_{F'})
\end{tikzcd}$$

Preuve: En effet, si F et F' sont lisses et bien ramifiés, D_F et $D_{F'}$ sont lisses. De plus, le morphisme induit $Df : D_F \longrightarrow D_{F'}$ est encore fortement projectif. En effet, soit

$$F \xrightarrow{j} P \xrightarrow{p} F'$$

une factorisation de f, avec j une immersion fermée et p la projection d'un fibré projectif. Alors, Df se factorise par

$$Df : \ D_F \xrightarrow{Dj} D_P \xrightarrow{Dp} D_F$$

Or on sait que Dj est une immersion fermée, et de plus Dp se factorise par

$$Dp : \ D_P \xrightarrow{i} D_{F'} \times_{F'} P \xrightarrow{q} D_{F'}$$

où i est une immersion fermée.

On peut alors refaire la preuve de la proposition précédente avec $\underline{K} \otimes \mathcal{A}$ à la place de $\underline{K}$, et $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$ à la place de $\mathcal{H}$. $\square$

Pour le corollaire suivant, on a noté $H_\bullet^{\chi,f}(F', *)$ la composante de $H_\bullet^{\chi}(F', *)$ supportée par $D_{F',f}$.

Corollaire 3.23 *(Grothendieck-Riemann-Roch) Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme fortement projectif de champs algébriques lisses et bien ramifiés. Alors le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_*(F) \arrow[r, "\tau_F^\chi"] \arrow[d, "f_*"'] & H_\bullet^{\chi}(F, *) \arrow[d, "f_*"] \\
\mathbf{G}_*(F') \arrow[r, "\tau_{F'}^\chi"'] & H_\bullet^{\chi,f}(F', *)
\end{tikzcd}$$

Preuve: Il suffit de composer la formule 3.16 et le corollaire précédent. $\square$

3.2.3 Cas des champs de Deligne-Mumford : Cohomologie à coefficients dans les représentations

Dans le cas des champs de Deligne-Mumford, le théorème de dévissage 2.15 est plus précis, et permet d'étendre les formules de Riemann-Roch au cas des morphismes non représentables.

Nous revenons un moment au cas où S est un schéma régulier universellement japonais.

Pour simplifier les énoncés et les notations, on supposera que S contient les racines de l'unité. On fixera alors un plongement

$$\mu_\infty^t(S) \hookrightarrow \mu_\infty(\mathbf{C})$$

qui nous permettra d'identifier par la suite le faisceau Λ avec un sous-faisceau constant $K \hookrightarrow \mathbf{Q}^{ab}$. Comme K est un corps, on a

$$\underline{\mathbf{K}}_*^{rep}(F) \simeq \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t) \otimes K \hookrightarrow \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t) \otimes \mathbf{Q}^{ab}$$

Nous faisons remarquer au lecteur que cette hypothèse supplémentaire n'est pas très restrictive. En effet, si F est un champ de Deligne-Mumford, il existe un changement de base galoisien de S, tel que le faisceau μ_m soit constant sur S_{et}, avec m un multiple de tous les ordres de ramifications de F. On peut alors redescendre sur S par le procédé de descente galoisienne 2.6 (1).

Rappelons que l'on a construit un morphisme

$$F : \mathbf{K}(I_F^t) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$$

Nous noterons également, pour $\zeta \in \mu_\infty(S)$

$$F_\zeta : \mathbf{Vect}(I_F^t) \longrightarrow \mathbf{Vect}(I_F^t)$$

le foncteur qui a un fibré vectoriel V sur I_F^t, associe le sous-fibré vectoriel $V^{(\zeta)}$ sur lequel la section canonique $\mathcal{S}$ (2.3.1) opère par multiplication par ζ.

Définition 3.24 *Soit F un champ de Deligne-Mumford.*

1. *Si F est régulier, sa classe de ramification est définie par*

$$\alpha_F^{rep} := F(\lambda_{\pi_F}) \in \underline{\mathbf{K}}^{rep}(F)$$

   où $\pi_F : I_F^t \longrightarrow F$ est la projection, et $F : \mathbf{K}_0(I_F^t) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_0^{rep}(F)$ est défini dans 2.15.

2. *Soit $S = Speck$, et $\mathcal{H}$ est une des deux théories cohomologiques avec images directes citée dans 3.1.1. On définit la cohomologie et l'homologie à coefficients dans les représentations par*

   - $$H^p_{rep}(F, q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((I_F^t)_{li}, \mathcal{H}^q \otimes K)$$
     $$H_p^{rep}(F, q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((I_F^t)_{li}, \mathcal{H}'_q \otimes K)$$

     si $\mathcal{H}$ est la théorie de Gersten.

   - $$H^p_{rep}(F, q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((I_F^t)_{li}, \mathcal{H}^q)$$
     $$H_p^{rep}(F, q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((I_F^t)_{li}, \mathcal{H}'_q)$$

     si k est de caractéristique nulle, et $\mathcal{H}$ est la cohomologie de De Rham

On notera aussi

$$H^{\bullet}_{rep}(F,*) := \bigoplus_{p,q} H^{p}_{rep}(F,q)$$

$$H^{rep}_{\bullet}(F,*) := \bigoplus_{p,q} H^{rep}_{p}(F,q)$$

3. *Si F est lisse sur $S = Speck$, sa classe de Todd est définie par*

$$Td^{rep}(F) := Ch(\alpha_F^{rep})^{-1}.Td(T_{I_F^t}) \in H_{rep}\bullet(F,*)$$

4. *Le caractère de Chern est défini par*

$$Ch^{rep} : \mathbf{K}_*(\mathbf{F}) \xrightarrow{\phi_F} \underline{\mathbf{K}}_*^{rep}(F) \xrightarrow{Ch} H^{\bullet}_{rep}(F,*)$$

5. *Si F est lisse sur $S = Speck$ et que son espace de modules est quasi-projectif, alors la transformation de Riemann-Roch est définie par*

$$\begin{array}{cccc} \tau_F^{rep} : & \mathbf{G}_*(F) & \longrightarrow & H^{\bullet}_{rep}(F,*) \\ & x & \mapsto & Ch^{rep}(x).Td^{rep}(F) \end{array}$$

Remarquons que le même argument que 3.10 montre que, si F est un champ de Deligne-Mumford régulier, alors I_F^t est aussi régulier, et de plus α_F^{rep} est inversible. Ainsi, la définition (2) possède un sens.

Pour tout champ algébrique de Deligne-Mumford, il existe une section canonique $F \hookrightarrow I_F^t$ correspondant à l'identité. Cette section induit donc des isomorphismes naturels

$$H^{\bullet}_{rep}(F,*) \simeq H^{\bullet}(F,*) \oplus H^{\bullet}_{rep\neq 1}(F,*)$$

$$H^{rep}_{\bullet}(F,*) \simeq H_{\bullet}(F,*) \oplus H^{rep\neq 1}_{\bullet}(F,*)$$

compatibles avec les produits et les classes caractéristiques.

Nous ne redémontrerons pas les propriétés des théories $H^{\bullet}_{rep}(F,*)$, et $H^{rep}_{\bullet}(F,*)$. Elles sont en tout point analogues à celles de la cohomologie à coefficients dans les caractères.

Remarque: Supposons que $k = \mathbf{C}$, et que l'on prenne la cohomologie de De Rham. Si F est un champ de Deligne-Mumford lisse, on peut lui associer un champ analytique F^{an} (5.6). Le théorème de comparaison de Grothendieck ([Gr, Thm. 1′]) donne alors un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$H^{\bullet}_{rep}(F,0) \simeq H^{\bullet}((I_F)^{top}, \mathbf{C})$$

où $(I_F)^{top}$ est le site topologique sur $(I_F)^{an}$, et $\mathbf{C}$ le faisceau constant de fibre $\mathbf{C}$. Soit $\pi : I_F \to F$ la projection, et $p : F \to M$ la projection sur l'espace de modules. On pose $R = p_* \circ \pi_*(\mathbf{C})$; c'est un faisceau en $\mathbf{C}$-algèbres sur M^{top}, dont la fibre au point $x \in M$ est isomorphe à $\mathbf{C}(H_x)$, la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions centrales sur le groupe d'isotropie H_x de x. Ainsi

$$H^\bullet_{rep}(F, 0) \simeq H^\bullet(M^{top}, R)$$

Cet isomorphisme explique le nom de "cohomologie à coefficients dans les représentations", en gardant à l'esprit que les éléments de $\mathbf{C}(H_x)$ s'identifient à des représentations virtuelles de H_x à coefficients complexes.

Le théorème suivant est la version étendue de 3.16

Théorème 3.25 *(Lefschetz-Riemann-Roch) Supposons que S est régulier. Soit $\mathcal{QDM}$ (resp. $\mathcal{DM}$) la sous-catégorie de $HoChAlg(S)$ des champs de Deligne-Mumford sur S, et dont l'espace de modules est quasi-projectif sur S (resp. des champs de Deligne-Mumford sur S). Alors, pour chaque F objet de $\mathcal{DM}$, il existe un unique morphisme*

$$\psi_F : \mathbf{G}_*(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{rep}_*(F)$$

tel que :

1. *Si F est lisse sur S, et dans $\mathcal{QDM}$, alors*

$$\begin{array}{cccc} \psi_F : & \mathbf{K}_*(F) & \longrightarrow & \underline{\mathbf{G}}^{rep}_*(F) \\ & x & \mapsto & (\alpha^{rep}_F)^{-1}.\phi_F(x) \end{array}$$

2. *Pour tout morphisme propre de dimension cohomologique finie de $\mathcal{DM}$, $f : F \longrightarrow F'$, on a*

$$f_* \circ \psi_F = \psi_{F'} \circ f_*$$

   dans l'un des cas suivants

   - *le morphisme f est représentable*
   - *le champ F est lisse sur S*

3. *Si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme représentable et étale de champs de $\mathcal{DM}$, alors*

$$\psi_F \circ f^* = f^* \circ \psi_{F'}$$

4. *Pour tout champ F de $\mathcal{DM}$, tout $x \in \mathbf{G}_*(F)$ et tout $y \in \mathbf{K}_*(F)$, on a*

$$\psi_F(x.y) = \psi_F(x).\phi_F(y)$$

5. *Pour tout morphisme propre de dimension cohomologique finie, $f : F \longrightarrow F'$ de champs de $\mathcal{DM}$, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_0(F) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\psi_F"'] & \mathbf{G}_0(F') \arrow[d, "\psi_{F'}"] \\ \underline{\mathbf{G}}_0^{rep}(F) \arrow[r, "f_*"'] & \underline{\mathbf{G}}_0^{rep}(F') \end{tikzcd}$$

Par la suite, nous dirons "schéma", pour "S-schéma". Les termes "projectifs", "fortement projectif", "lisse" ... feront référence aux notions relatives sur S.

Preuve: Notons que la même preuve que 3.16, montre que la transformation naturelle

$$\psi_F := (\alpha_F^{rep})^{-1}.\phi_F$$

commute avec les images directes de morphismes fortement projectifs entre champs lisses de $\mathcal{QDM}$.

Définition de ψ_F:

Soit F un champ de $\mathcal{DM}$. Nous dirons qu'un champ simplicial $q : F_\bullet \longrightarrow F$ augmenté et propre (2.7) sur F, est une enveloppe si :

- Pour tout $[m] \in \Delta^{op}$ F_m est une gerbe triviale sur un schéma quasi-projectif et bornée par un faisceau constant de groupes finis (donc des réunions disjointes de $X_n \times BH_n$.
- Les morphismes de faces et dégénérescences $F_m \longrightarrow F_n$ sont propres représentables et de la forme $f \times \rho : X_n \times BH_n \longrightarrow X_m \times BH_m$, pour $f : X_n \longrightarrow X_m$ et $\rho : H_n \longrightarrow H_m$.
- Le morphisme induit (2.7)

$$q_* : \mathbf{G}_*(F_\bullet)_\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{G}_*(F)_\mathbf{Q}$$

est un isomorphisme.

Lemme 3.26 *1. Il existe toujours une enveloppe pour F.*

2. *Deux enveloppes quelconques de F sont dominées par une troisième.*
3. *Pour tout 1-morphisme de champs de $\mathcal{DM}$, $f : F \longrightarrow F'$, il existe un diagramme commutatif de champs simpliciaux augmentés*

$$\begin{tikzcd} F_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "b"'] & F'_\bullet \arrow[d, "a"] \\ F \arrow[r, "f"'] & F' \end{tikzcd}$$

avec a et b des enveloppes.

Preuve: La preuve est la même que [G3, 3.1, 3.2, 3.3], mais en remplaçant le mot "enveloppe" par "quasi-enveloppe de Chow". $\square$

Considérons alors F un champ de $\mathcal{DM}$, et $q : F_\bullet \longrightarrow F$ une enveloppe.

Lemme 3.27 *Il existe un morphisme $\psi_{F_\bullet}$ dans la catégorie homotopique des spectres simpliciaux, entre*

$$[n] \mapsto \mathbf{G}(F_n)$$

et

$$[n] \mapsto \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_n),$$

telle que pour tout $[n]$, le morphisme induit $\mathbf{G}(F_n) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_n)$ soit le morphisme ϕ_m.

Preuve: Pour chaque $[n] \in \Delta$, on a une équivalence de spectres

$$\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_n) \longrightarrow \mathbf{G}(MIF_n)_K$$

où MIF_n est l'espace de modules du champ $I^t_{F_n}$. Ainsi, le spectre simplicial $[n] \mapsto \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_n)$ est équivalent à $[n] \mapsto \mathbf{G}(MIF_n)_K$.

D'un autre coté, pour tout $[n] \in \Delta$, on dispose du morphisme naturel

$$\mathbf{G}(F_n) \longrightarrow \mathbf{G}(X_n) \otimes K(H_n),$$

où $K(H_n)$ est l'algèbre des fonctions centrales sur H_n, nulles sur les éléments d'ordre non-inversible sur S, à valeurs dans K. Il est défini exactement de la même façon que le morphisme ϕ. Si $f \times \rho : X_n \times BH_n \longrightarrow X_m \times BH_m$ est un morphisme de transition, alors on dispose de

$$f_* \times Ind_\rho : \mathbf{G}(X_n) \otimes K(H_n) \longrightarrow \mathbf{G}(X_m) \otimes K(H_m).$$

Ici, f_* est l'image directe pour la version strictement fonctorielle de $\mathbf{G}$, et $Ind_\rho : K(H_n) \longrightarrow K(H_m)$ est égal par définition à $[H_n : H_m]$ fois le morphisme d'induction des caractères (remarquer qu'ici $H_n \longrightarrow H_m$ est injectif).

Ce morphisme est de plus fonctoriel pour les images directes pour $F_n \longrightarrow F_m$, et donc définit un morphisme de spectres simpliciaux, entre $[n] \mapsto \mathbf{G}(F_n)$ et $[n] \mapsto \mathbf{G}(X_n) \otimes K(H_n)$.

Enfin, il est clair que $\mathbf{G}(X_n) \otimes K(H_n) \simeq \mathbf{G}(MIF_n)_K$, et donc $[n] \mapsto \mathbf{G}(MIF_n)_K$ est équivalent à $[n] \mapsto \mathbf{G}(X_n) \otimes K(H_n)$.

En conclusion, on a un diagramme de spectres simpliciaux

$$\mathbf{G}(F_\bullet) \longrightarrow \mathbf{G}(MIF_\bullet)_K \simeq \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_\bullet),$$

ce qui définit bien le morphisme cherché dans la catégorie homotopique. $\square$

Le lemme précédent implique que l'on peut définir un morphisme de spectres (2.7)

$$\psi_{F_\bullet} : \mathbf{G}_*(F_\bullet/F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*^{rep}(F_\bullet/F)_K$$

On définit alors ψ_F par le diagramme commutatif suivant dans $HoSp$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_*(F_\bullet/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\psi_{F_\bullet}"] \arrow[d, "q_*"'] & \underline{\mathbf{G}}_*^{rep}(F_\bullet/F)_K \arrow[d, "Iq_*"] \\
\mathbf{G}_*(F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\psi_F"] & \underline{\mathbf{G}}_*^{rep}(F)_K
\end{tikzcd}$$

Cette définition possède un sens, car d'après 2.6, on sait que q_* est un isomorphisme.

Les propriétés des enveloppes rappelées dans 3.26 et une autre application du lemme précédent montre que ψ_F est indépendant du choix de l'enveloppe.

Remarquons enfin, que si $q_0 : F_0 \longrightarrow F$ est une quasi-enveloppe de Chow, avec q_0 un morphisme propre et représentable, et F_0 une gerbe triviale, on peut construire une enveloppe $q : F_\bullet \longrightarrow F$, avec $q = q_0 : F_0 \longrightarrow F$. Alors, comme le champ simplicial constant F_0 est une enveloppe pour F_0, on a

$$(Iq_0)_*\psi_{F_0} = \psi_F(q_0)_*$$

Preuve de (1):

Commençons par une petite digression sur les orbifolds lisses de $\mathcal{QDM}$: ce sont les champs F de $\mathcal{QDM}$,lisses sur S, tel que $\pi_F : I_F \longrightarrow F$ soit birationnel.

Lemme 3.28 *Soit F un orbifold lisse et connexe de $\mathcal{QDM}$. Alors il existe un schéma lisse et quasi-projectif X, une action du S-schéma en groupes $\mathbf{Gl}_n/S$ sur X, et une équivalence de champs*

$$F \simeq [X/\mathbf{Gl}_n/S]$$

Preuve: La preuve qui suit m'a été communiquée par A. Kresch.

Soit $q : T^k \longrightarrow F$ le $\mathbf{Gl}_n/S$-torseur correspondant au fibré vectoriel des k-jets sur F (relatif à S). Commençons par montrer que T^k est représentable dès que k est assez grand.

Comme ceci est local sur l'espace de modules de F, on peut supposer que $F = [X/H]$, est le quotient d'un schéma quasi-projectif lisse et connexe par un groupe fini. Dire que F est un orbifold est alors équivalent à dire qu'aucun élément de H ne fixe le point générique de X, ou encore que pour tout $h \in H$, le sous-schéma des points fixes de h dans X est un fermé strict, $X^h \hookrightarrow X$.

Soit $x : Speck(x) \longrightarrow X$ un point géométrique, et considérons $H_x \longrightarrow Gl(T^k_{X,x})$ l'action du sous-groupe d'isotropie de x sur l'espace des k-jets en x. Comme pour $h \in H_x$, $T^k_{X^h,x} \simeq (T^k_{X,x})^h$, cette action est fidèle pour k assez grand. Ainsi, pour tout point géométrique x de X, le morphisme naturel

$$H_x \longrightarrow Gl(T^k_{X,x}) \simeq \mathbf{Gl}_n/k(x)$$

est injectif pour k assez grand.

Soit T^k_X le $\mathbf{Gl}_n/S$-torseur des k-jets sur X (relativement à S). Alors le champ T^k est équivalent au champ quotient $[T^k_X/H]$. Or, comme pour tout point géométrique x de X, le morphisme naturel de H_x dans $\mathbf{Gl}_n/k(x)$ est injectif, H opère sans points fixes sur T^k_X. Ainsi, le champ $T \simeq [T^k_X/H]$ est représentable par le S-schéma quotient T^k_X/H.

De plus, si M est l'espace de modules de F, le morphisme induit $T^k \longrightarrow M$ est affine. Comme M est quasi-projectif sur S, il en est de même de T^k.

On vient donc de démontrer que $F \simeq [T^k/\mathbf{Gl}_n/S]$, avec T^k un S-schéma quasi-projectif et lisse. □

A l'aide du lemme précédent, et de [Th2], on sait que tout faisceau cohérent sur un orbifold est quotient d'un fibré vectoriel, et que F admet un faisceau inversible ample. En particulier, tout morphisme propre et représentable $f : F' \longrightarrow F$ est fortement projectif.

Revenons au cas général d'un champ lisse de $\mathcal{QDM}$. On sait qu'il existe un morphisme

$$p : F \longrightarrow F'$$

où F' est un orbifold lisse de $\mathcal{QDM}$, et p fait de F une gerbe de groupe fini sur F' ([S2]). On choisit à l'aide de 1.21 une quasi-enveloppe de Chow, représentable

$$r : F'_0 \longrightarrow F'$$

avec F'_0 une gerbe triviale sur un schéma quasi-projectif. Posons $q \ : \ F_0 = F'_0 \times_{F'} F \ \longrightarrow \ F$ le morphisme induit. Alors F_0 est une gerbe sur F'_0, donc est encore une gerbe.

Comme r est fortement projectif (par 3.28), q l'est aussi. En effectuant un changement de base fini de l'espace de modules de F_0, ce qui ne change pas le caractère fortement projectif de q, on peut même supposer que c'est une gerbe triviale.

Montrons alors que $q_* : \mathbf{G}_*(F_o)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}_*(F)_{\mathbf{Q}}$ est surjectif.

En effet, comme q est fortement projectif, on peut utiliser le théorème de Lefschetz-Riemann-Roch pour les morphismes fortement projectifs, qui nous donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_*(F_{\rm o})_K \arrow[r, "(\alpha^{rep}_{F_0})^{-1}.\phi_F"] \arrow[d, "q_*"'] & \underline{\mathbf{G}}^{rep}_*(F_0) \arrow[d, "q_*"] \\ \mathbf{G}_*(F_{\rm o})_K \arrow[r, "(\alpha^{rep}_{F})^{-1}.\phi_F"'] & \underline{\mathbf{G}}^{rep}_*(F) \end{tikzcd}$$

Comme les flèches horizontales sont des isomorphismes, il suffit de montrer que $q_* : \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_0) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F)$ est surjectif, ce qui est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 3.29 *Soit $f : F' \longrightarrow F$ un morphisme fini représentable et surjectif de champs, avec F lisse. Alors, le morphisme*

$$f_* : \underline{\mathbf{G}}_*(F') \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*(F)$$

est surjectif.

Preuve: A l'aide de la dualité de Poincaré 2.2, on peut utiliser la formule de projection pour f. Ceci implique que

$$f_*(f^*(x)) = x.f_*(1)$$

pour $x \in \underline{\mathbf{G}}_*(F)$. Il suffit donc de montrer que $f_*(1)$ est inversible dans $\underline{\mathbf{G}}_0(F)$, ce qui, d'après le lemme 3.11, est local sur F_{et}. On peut donc supposer que F et F' sont des schémas quasi-projectifs. Mais $f_*(1)$ possède un rang égal au degré de f, qui est non-nul, car f est dominant. Ainsi $f_*(1) \in \mathbf{G}_{\rm o}(F)_{\mathbf{Q}}$ a un rang inversible, donc est inversible ([F-L]). $\square$

Soit $x \in \mathbf{G}_*(F)_{\mathbf{Q}}$. On vient de voir que l'on peut écrire $x = q_*(y)$, avec $y \in \mathbf{G}_*(F_{\rm o})_{\mathbf{Q}}$. On applique alors une nouvelle fois la formule pour le cas des morphismes fortement projectifs, à q et y

$$(\alpha^{rep}_F)^{-1}\phi_F(q_*(y)) = Iq_*\phi_{F_0}(y)$$

Ainsi, comme $Iq_*(\phi_{F_0}(y)) = \psi_F(x)$, on a

$$\psi_F = (\alpha^{rep}_F)^{-1}.\phi_F$$

Preuve de (2):

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de dimension cohomologique finie.

Cas où f est représentable : D'après 3.26, on peut trouver un diagramme commutatif de champs simpliciaux augmentés (2.7)

$$\begin{tikzcd} F_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "b"'] & F'_\bullet \arrow[d, "a"] \\ F \arrow[r, "f"'] & F' \end{tikzcd}$$

avec a et b des enveloppes. En prenant les images par les foncteurs $\mathbf{G}$ et $\underline{\mathbf{G}}^{rep}$, ce diagramme induit deux diagrammes commutatifs dans $HoSp$ (2.7)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(F_\bullet) \arrow[r, "(f_\bullet)_*"] \arrow[d, "b_*"'] & \mathbf{G}(F'_\bullet) \arrow[d, "a_*"] \\
\mathbf{G}(F) \arrow[r, "f_*"'] & \mathbf{G}(F')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_\bullet) \arrow[r, "(f_\bullet)_*"] \arrow[d, "b_*"'] & \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F'_\bullet) \arrow[d, "a_*"] \\
\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F) \arrow[r, "f_*"'] & \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F')
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ϕ définit alors un morphisme entre ces deux diagrammes

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{G}(F_\bullet)_{\mathbf{Q}} \arrow[rr, "(f_\bullet)_*"] \arrow[dl, "a_*"] \arrow[dd, "\phi_{F_\bullet}"' near start] & & \mathbf{G}(F'_\bullet)_{\mathbf{Q}} \arrow[dl, "b'_*"] \arrow[dd, "\phi_{F'_\bullet}"] \\
\mathbf{G}(F)_{\mathbf{Q}} \arrow[rr, "f_*" near end] \arrow[dd, "\phi_F"'] & & \mathbf{G}(F')_{\mathbf{Q}} \arrow[dd, "\phi_{F'}" near start] & \\
& \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F_\bullet) \arrow[rr, "(f_\bullet)_*"' near start] \arrow[dl, "a_*"] & & \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F'_\bullet) \arrow[dl, "b_*"] \\
\underline{\mathbf{G}}^{rep}(F) \arrow[rr, "f_*"'] & & \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F') &
\end{tikzcd}$$

Ce qui, par définition, implique que

$$f_* \circ \psi_F = \psi_{F'} \circ f_*$$

<u>Cas où F est lisse :</u> Soit $q' : F'_0 \longrightarrow F'$ une quasi-enveloppe de Chow, avec F'_0 une gerbe triviale, et q' un morphisme représentable fini (1.21). Notons $q : F'_0 \times_{F'} F \longrightarrow F$ la quasi-enveloppe induite, $r : F_0 \longrightarrow F'_0 \times_{F'} F$ une seconde quasi-enveloppe de Chow par une gerbe triviale, et r un morphisme représentable fini. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & F_0 \arrow[d, "q'"] \\
F \arrow[r, "f"'] & F'
\end{tikzcd}$$

Nous avons déjà vu précédemment que le morphisme induit

$$p_* : \mathbf{G}_*(F_{\text{o}})_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}_*(F)_{\mathbf{Q}}$$

est surjectif.

Soit $x \in \mathbf{G}_*(F)_{\mathbf{Q}}$, et $y \in \mathbf{G}_*(F_{\text{o}})_{\mathbf{Q}}$ tel que $p_*(y) = x$. Alors

$$\begin{aligned} \psi_F(x) &= \psi_F(p_*(x)) \\ &= p_* \psi_{F_0}(y) \end{aligned}$$

par définition de ψ_F. Ainsi, si l'on savait que

$$g_*\psi_{F_0} = \psi_{F_0'}g_*$$

on aurait

$$\begin{aligned} f_*\psi_F(x) &= f_*\psi_F(p_*(x)) \\ &= f_*p_*\psi_{F_0}(y) \\ &= q'_*g_*\psi_{F_0}(y) \\ &= q'_*\psi_{F_0'}(g_*(y)) \\ &= \psi_{F'}(q'_*g_*(y)) \\ &= \psi_{F'}(f_*p_*(y)) \\ &= \psi_{F'}(f_*(x)) \end{aligned}$$

Il nous reste donc à démontrer le lemme suivant

Lemme 3.30 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de dimension cohomologique finie de gerbes triviales de Deligne-Mumford, alors le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_*(F) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\phi_F"'] & \mathbf{G}_*(F') \arrow[d, "\phi_{F'}"] \\ \underline{\mathbf{G}}_*^{rep}(F) \arrow[r, "f_*"'] & \underline{\mathbf{G}}_*^{rep}(F') \end{tikzcd}$$

<u>Preuve :</u> Factorisons f par son "espace de modules relatif"

$$f : \ F \xrightarrow{k} F'' \xrightarrow{h} F'$$

Le morphisme k est, par définition, le morphisme universel vers les champs qui sont représentable sur F'.

Remarquons qu'un tel champ existe. Comme l'existence de ce champ est locale sur F'_{et}, il suffit de montrer qu'il existe lorsque F' est un schéma. Mais dans ce cas, F'' est tout simplement l'espace de modules de F.

On peut donc supposer que $f = k$. Dans ce cas les champs F et F' sont des gerbes sur M, l'espace de modules de F, et le morphisme induit par f est l'identité sur M. De plus, le morphisme f fait de F une gerbe étale sur F', bornée par un groupe fini K. Ce qui implique en particulier que f est étale (éventuellement non représentable).

Formons alors le carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] & F' \\ F'' \arrow[u, "u"] \arrow[r, "u"'] & F \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Supposons que l'on ait démontré le lemme pour le morphisme u, alors, par la formule de transfert (2.18), et la fonctorialité de ϕ pour les images réciproques, on peut écrire

$$\begin{aligned} f^*f_*\phi_F &= g_*g^*\phi_F \\ &= g_*\phi_{F''}g^* \\ &= \phi_F g_*g^* \\ &= \phi_F f^*f_* \\ &= f^*\phi_{F'}f_* \end{aligned}$$

Or, on sait que $f_*f^* = \times\frac{1}{k}$, où k est l'ordre de K. Ainsi, en multipliant par $k.f_*$, on trouve

$$f_*\phi_F = \phi_{F'}f_*$$

Il nous reste à démontrer la formule pour u. Or, par construction, u possède une section $s : F \longrightarrow F''$. Ainsi, F'' est une gerbe triviale sur F. On peut donc supposer que $F'' = F \times_S BK$, où $BK = [S/K]$, et u la projection

$$b : F \times_S BK \longrightarrow F$$

On utilise alors la "formule de Kunneth" pour F''.

Lemme 3.31 *Soit $a : F \times_S BK \longrightarrow BK$, et $b : F \times_S BK \longrightarrow F$ les deux projections. Alors, le morphisme*

$$a^*.b^* : \mathbf{K}_o(BK) \otimes_{\mathbf{K}_o(S)} \mathbf{G}_*(F) \longrightarrow \mathbf{G}_*(F \times BK)$$

est bijectif.

<u>Preuve:</u> Soit $SpecA \hookrightarrow Spec\mathbf{Z}$ l'image du morphisme canonique $S \longrightarrow Spec\mathbf{Z}$. Comme K est d'ordre premier aux caractéristiques de S, le $SpecA$-schéma en groupes qu'il définit est réductif. Notons alors $R(K)$ un système de représentants des classes d'isomorphie des objets simples de la catégorie $\mathbf{Coh}([SpecA/K])$. Ce sont aussi les objets simples de la catégorie des $A[K]$-modules. Le théorème de dévissage de Quillen [Q, 5.1], implique alors qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\mathbf{K}_o(BK) \simeq \bigoplus_{R(K)} \mathbf{K}_o(S)$$

De même, il existe un isomorphisme

$$\mathbf{G}_*(F \times_S BK) \simeq \bigoplus_{R(K)} \mathbf{G}_*(F)$$

et le lemme s'en suit. $\square$

Soit $x \in \mathbf{G}_*(F \times_S BK)_{\mathbf{Q}}$. On écrit $x = a^*(y).b^*(z)$, avec $y \in \mathbf{K}_o(BK)$ et $z \in \mathbf{G}_*(F)$. Notons $p : BK \longrightarrow S$, et $q : F \longrightarrow S$ les deux projections.

Supposons que le lemme soit démontré pour $F = BK$, $F' = S$, et pour les éléments de $\mathbf{G}_o(F)$, alors

$$\begin{aligned}
\phi_F(b_*(x)) &= \phi_F(b_*(a^*(y).b^*(z))) \\
&= \phi_F(b_* a^*(y).z) \\
&= \phi_F(q^* p_*(y).z) \\
&= q^* \phi_{Speck}(p_*(y)).\phi_F(z) \\
&= q^* p_*(\phi_{BK}(y)).\phi_F(z) \\
&= b_* a^*(\phi_{BK}(y)).\phi_F(z) \\
&= b_* \phi_{F\times BK}(a^*(y)).\phi_F(z) \\
&= b_*(\phi_{F\times BK}(a^*(y)).b^*\phi_F(z) \\
&= b_*(\phi_{F\times BK}(a^*(y)).\phi_{F\times BK}(b^*(z))) \\
&= b_*(\phi_{F\times BK}(a^*(y).b^*(z))) \\
&= b_*(\phi_{F\times BK}(x))
\end{aligned}$$

On s'est donc ramené au cas où $F = BK$, et f est le morphisme structural

$$f : BK \longrightarrow S$$

En identifiant $\mathbf{Coh}(F)$ avec la catégorie des représentations de H dans $\mathbf{Coh}(S)$, le morphisme

$$f_* : \mathbf{G}_o(F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}_o(S)_{\mathbf{Q}}$$

associe à un $\mathcal{O}_S$-module cohérent muni d'une action de H, son sous-module des invariants.

De plus, $\underline{\mathbf{G}}_0^{rep}(F)$ est isomorphe à l'anneau des fonctions centrales de H dans $\mathbf{G}_o(S)_K$. Et par cet isomorphisme, le morphisme

$$\phi_F : \mathbf{G}_o(F) \longrightarrow \mathbf{G}_o(S)_K$$

associe à une représentation V de H dans $\mathbf{Coh}(S)$ "son caractère"

$$\begin{array}{cccc}
\chi : & K & \longrightarrow & \mathbf{G}_o(S)_K \\
& h & \mapsto & \sum_{\zeta\in\mu_\infty(S)} \zeta.V^{h,(\zeta)}
\end{array}$$

où $V^{h,(\zeta)}$ est le sous-module de V sur lequel h opère par multiplication par ζ.

Enfin, le morphisme

$$f_* : \underline{\mathbf{G}}^{rep}(F) \longrightarrow \mathbf{G}_o(S)_K$$

est alors donné par

$$f_*(\chi) = \frac{1}{k}.\sum_{h\in K} \chi(h)$$

pour toute fonction centrale

$$\chi : K \longrightarrow \mathbf{G}_o(S)_K$$

La formule à démontrer se traduit donc par

$$[V^K] = \frac{1}{k}.\sum_{h\in K}\zeta.[V^{h,(\zeta)}]$$

en tant qu'éléments de $\mathbf{G}_\mathrm{o}(S)_K$. Ce qui est une formule bien connue.

Preuve de (3) **:**

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme représentable étale, $q' : F'_\bullet \longrightarrow F'$ une enveloppe, $q : F_\bullet := F'_\bullet \times_{F'} F \longrightarrow F$ l'enveloppe induite, et $f_\bullet : F_\bullet \longrightarrow F'_\bullet$ le morphisme induit.

Soit $x \in \mathbf{G}_*(F')_\mathbf{Q}$, et $x = q'_*(y)$, avec $y \in \mathbf{G}_*(F'_\bullet/F')_\mathbf{Q}$. Alors, par la formule de transfert, on a

$$f^*(x) = q_* f_\bullet^*(y)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi_F(f^*x) &= q_*(\phi_{F_\bullet}(f_\bullet^*(y))) \\ &= q_*(f_\bullet^*\phi_{F_\bullet}(y)) \\ &= f^*(q'_*\phi_{F_\bullet}(y)) \\ &= f^*\psi_{F'}(x) \end{aligned}$$

Preuve de (4) **:**

Soit $x \in \mathbf{G}_*(F)$ et $y \in \mathbf{K}_*(F)$. Ecrivons

$$x = q_*(z)$$

avec $q : F_\bullet \longrightarrow F$ une enveloppe, et $z \in \mathbf{G}_*(F_\bullet)_\mathbf{Q}$. Alors, comme $q_*(z.q^*(y)) = x.y$, on a

$$\begin{aligned} \psi_F(x.y) &= q_*(\phi_{F_\bullet}(z.q^*(y))) \\ &= q_*(\phi_{F_\bullet}(z).\phi_{F_\bullet}(q^*(y))) \\ &= q_*(\phi_{F_\bullet}(z).q^*\phi_F(y)) \\ &= q_*(\phi_{F_\bullet}(z)).\phi_F(y) \\ &= \psi_F(x).\phi_F(y) \end{aligned}$$

Preuve de (5) **:** C'est la même que le second cas du point (2), car on a le résultat suivant.

Lemme 3.32 *Soit $q : F_0 \longrightarrow F$ une quasi-enveloppe de Chow, avec q représentable et fini. Alors le morphisme*

$$q_* : \mathbf{G}_\mathrm{o}(F_\mathrm{o})_\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{G}_\mathrm{o}(F)_\mathbf{Q}$$

est surjectif.

Preuve : On procède par récurrence noethérienne dans F.

Soit $i : U \hookrightarrow F$ un ouvert non-vide de F lisse, et $F' \hookrightarrow F$ son complémentaire réduit. On dispose alors d'un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{G}_0(f^{-1}(F'))_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & \mathbf{G}_0(X)_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & \mathbf{G}_0(f^{-1}(U))_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow \\
\mathbf{G}_0(F')_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & \mathbf{G}_0(F)_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & \mathbf{G}_0(U)_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le "lemme des cinq" implique donc qu'il nous suffit de considérer le cas de U. On suppose donc que F est lisse. Mais alors on a déjà vu que f_* est surjectif. $\square$

$\square$

Pour la suite on suppose que $S = Speck$, avec k un corps contenant les racines de l'unité.

Théorème 3.33 *(Grothendieck-Riemann-Roch) Pour chaque F objet de $\mathcal{QDM}$, il existe un unique morphisme*

$$\tau_F : \underline{\mathbf{G}}_*(F) \longrightarrow H_\bullet(F, *)$$

tel que :

1. *Si F est lisse dans $\mathcal{QDM}$, alors*

$$\begin{array}{cccc} \tau_F : & \underline{\mathbf{G}}_*(F) & \longrightarrow & H_\bullet(F,*) \\ & x & \mapsto & Td(T_F).Ch(x) \end{array}$$

   De même, si X est un schéma quasi-projectif, τ_X coincide avec le morphisme défini dans [G, 4.1].

2. *Pour tout morphisme propre de $\mathcal{QDM}$, $f : F \longrightarrow F'$, on a*

$$f_* \circ \tau_F = \tau_{F'} \circ f_*$$

3. *Si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme représentable et étale de champs de $\mathcal{QDM}$, alors*

$$\tau_F \circ f^*(x) = f^* \circ \tau_{F'}(x)$$

   pour tout $x \in \underline{\mathbf{G}}_0(F')$.

4. *Pour tout champ F de $\mathcal{QDM}$, tout $x \in \underline{\mathbf{G}}_0(F)$ et tout $y \in \underline{\mathbf{K}}_*(F)$, on a*

$$\tau_F(x.y) = \tau_F(x).Ch(y)$$

5. *La transformation naturelle* $\tau_F : \underline{\mathbf{G}}_0(F) \longrightarrow H_\bullet(F,*)$ *se prolonge de façon unique à une transformation naturelle de foncteurs covariants sur* $(DM, pr.)$*, la sous-catégorie des champs de Deligne-Mumford et morphismes propres.*

<u>Preuve:</u> La preuve suit le même principe que celle de 3.25.

<u>Définition de τ_F:</u>

Soit F un champ de $\mathcal{QDM}$, et $p : F \longrightarrow M$ la projection sur son espace de modules. On définit τ_F par le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{G}}_*(F) & \xrightarrow{\tau_F} & H_\bullet(F,*) \\ {\scriptstyle p_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \mathbf{G}(M)_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow[\tau_M]{} & H_\bullet(M,*) \end{array}$$

où τ_F est le morphisme défini dans [G, 4.1]. Cette définition possède un sens car, d'après 2.6, le morphisme p_* est bijectif.

<u>Preuve de (1) :</u>

Commençons par le cas où F est un orbifold. D'après 3.28, on sait que tout morphisme propre et représentable $F' \longrightarrow F$ est en réalité fortement projectif.

Soit $f : X \longrightarrow F$ un morphisme propre et surjectif avec X un schéma quasi-projectif et lisse ([Jo]). Alors, comme F est lisse, la formule de projection implique que le morphisme

$$f_* : \mathbf{G}_*(X)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*(F)$$

est surjectif. Notons $q : X \longrightarrow M$ le morphisme induit.

Si $x \in \underline{\mathbf{G}}_*(F)$, on peut écrire $x = f_*(y)$, avec $y \in \mathbf{G}_*(X)_{\mathbf{Q}}$. Alors, par définition de τ_F, et par la formule de Grothendieck-Riemann-Roch pour les schémas ([G, 4.1])

$$\begin{aligned} \tau_F(x) &= (p_*)^{-1}\tau_M(q_*(y)) \\ &= (p_*)^{-1}q_*(\tau_X(y)) \\ &= (p_*)^{-1}q_*(Td(X).Ch(y)) \\ &= f_*(Td(X).Ch(y)) \end{aligned}$$

Or, une application de la formule de Grothendieck-Riemann-Roch au morphisme f, qui est fortement projectif, donne
$f_*(Td(X).Ch(y)) = Td(T_F).Ch(x)$.

Dans le cas d'un champ lisse F de $\mathcal{QDM}$, on peut trouver un morphisme

$$q : F \longrightarrow F_0$$

qui fait de F une gerbe sur F_0, et avec F_0 un orbifold lisse. Remarquons alors que le morphisme naturel

$$Tq : T_F \longrightarrow q^*T_{F_0}$$

est un isomorphisme.

Le lecteur vérifiera que l'on peut utiliser le point (2) sans tomber dans un cercle vicieux.

Notons alors, $p : F \longrightarrow M$, et $p_0 : F_0 \longrightarrow M$ les projections sur l'espace de modules. On a évidemment $p_0 \circ q = p$. Ainsi, par (2) et le cas précédent

$$\begin{aligned} \tau_F(x) &= p_*^{-1}(\tau_M(p_*(x))) \\ &= q_*^{-1}(p_0)_*^{-1}(\tau_M((p_0)_*q_*(x))) \\ &= q_*^{-1}(\tau_{F_0}(q_*(x))) \\ &= q_*^{-1}(Td(T_{F_0}).Ch(q_*(x))) \end{aligned}$$

Lemme 3.34 *Soit $q : F \longrightarrow F_0$ un morphisme de champs de Deligne-Mumford, lisses et connexes, qui fasse de F une gerbe bornée par un groupe fini H sur F_0. Alors*

$$q^*q_* : H^\bullet(F, *) \longrightarrow H^\bullet(F, *)$$

est la multiplication par $\frac{1}{m}$, où m est l'ordre de H.

Preuve: Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "q"] & F_0 \\ F_1 \arrow[u, "a"] \arrow[r, "b"'] & F \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

Comme q est étale, la formule de transfert 2.18 implique que

$$q^*q_*(x) = b_*a^*(x)$$

pour tout $x \in H^\bullet(F, *)_{\mathbf{Q}}$. Or b est une gerbe triviale de groupe H. Ainsi, $F_1 \simeq F \times [Speck/H]$. La formule de transfert nous ramène alors au cas où $q : F = [Speck/H] \longrightarrow F_0 = Speck$ est la projection naturelle. Soit $e : F_0 \longrightarrow F$ le H-torseur universel, qui est une section de q. Alors, $y = \frac{1}{m}.e^*(x)$ est un antécédent de x par q_*. Ainsi

$$q^*q_*(x) = \frac{1}{m}.(e \circ q)^*(x) = \frac{1}{m}.x$$

□

Comme on sait que q_* est un isomorphisme, le lemme ci-dessus montre que

$$q^* = \frac{1}{m}.(q_*)^{-1}$$

$$q_* = \frac{1}{m}.(q^*)^{-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \tau_F(x) &= q_*^{-1}(Td(T_{F_0}).Ch(q_*(x))) \\ &= m.q^*(Td(T_{F_0}).Ch(q_*(x))) \\ &= m.Td(q^*(T_{F_0})).q^*Ch(q_*(x)) \\ &= m.Td(T_F).Ch(q^*q_*(x)) \\ &= m.Td(T_F).Ch(\tfrac{1}{m}.x) \\ &= Td(T_F).Ch(x) \end{aligned}$$

Pour finir, le cas d'un schéma X est évident, car $M = X$ et la projection naturelle est $p = Id : X \longrightarrow X$.

<u>Preuve de</u> <u>(2)</u> **<u>:</u>**

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de champs de $\mathcal{QDM}$. Notons $p : F \longrightarrow M$ et $p' : F' \longrightarrow M'$ les projections sur les espaces de modules, ainsi que $Mf : M \longrightarrow M'$ le morphisme induit. Alors, pour $x \in \underline{\mathbf{G}}_*(F)$, on a

$$\begin{aligned} \tau_{F'}(f_*(x)) &= (p'_*)^{-1}\tau_{M'}(p'_*f_*(x)) \\ &= (p'_*)^{-1}\tau_{M'}(Mf_*p_*(x)) \\ &= (p'_*)^{-1}Mf_*\tau_M(p_*(x)) \\ &= f_*(p_*)^{-1}\tau_M(p_*(x)) \\ &= f_*\tau_F(x) \end{aligned}$$

<u>Preuve de</u> <u>(3)</u> **<u>:</u>**

Soit $u : F \longrightarrow F'$ représentable et étale.

Lemme 3.35 *Soit $f : X \longrightarrow F$ un morphisme propre, tel que pour tout sous-champ irréductible $F' \hookrightarrow F$, il existe une composante irréductible X' de X au-dessus de F', telle que $f : X' \longrightarrow F'$ soit génériquement fini.*

Alors le morphisme

$$f_* : \mathbf{G}_0(X)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_0(F)$$

est surjectif.

<u>Preuve :</u> On procède par récurrence noethérienne dans F.

Soit $i : U \hookrightarrow F$ un ouvert non-vide de F lisse, et $F' \hookrightarrow F$ son complémentaire réduit. On dispose alors d'un morphisme de suite exactes longues

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_0(f^{-1}(F'))_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \mathbf{G}_0(X)_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \mathbf{G}_0(f^{-1}(U))_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & 0 \arrow[d] \\
\underline{\mathbf{G}}_0(F') \arrow[r] & \underline{\mathbf{G}}_0(F) \arrow[r] & \underline{\mathbf{G}}_0(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le "lemme des cinq" implique donc qu'il nous suffit de considérer le cas de U. On suppose donc que F est lisse. Mais alors $f : X \longrightarrow F$ étant propre et surjectif, on a déjà vu que f_* est surjectif. $\Box$

Soit $x \in \underline{\mathbf{G}}_0(F')$, et $f' : X' \longrightarrow F'$ un morphisme comme dans le lemme, avec $y \in \mathbf{G}_0(X')_{\mathbf{Q}}$ et $f'_*(y) = x$. Notons $f : X = X' \times_{F'} F \longrightarrow F$, et $v : X \longrightarrow X'$ les morphismes induits. Alors, à l'aide de (2) et du cas des schémas [G], on a

$$\begin{aligned}
u^*\tau_{F'}(x) \quad &= u^*\tau_{F'}(f'_*(y)) \\
&= u^* f'_* \tau_{X'}(y) \\
&= f_* v^* \tau_{X'}(y) \\
&= f_* \tau_X(v^*(y)) \\
&= \tau_F(f_* v^*(y)) \\
&= \tau_F(u^* f'_*(y)) \\
&= \tau_F(u^*(x))
\end{aligned}$$

Preuve de (4) **:**

Soit $x \in \underline{\mathbf{G}}_0(F)$ et $y \in \underline{\mathbf{K}}_*(F)$. Choisissons un morphisme propre et surjectif

$$f : X \longrightarrow F$$

avec X un schéma quasi-projectif, tel que $x = f_*(z)$, avec $z \in \mathbf{G}_0(X)_{\mathbf{Q}}$. Un tel morphisme existe d'après [Vi2, 2.6], et le lemme 3.35. On a alors $x.y = f_*(x.f^*(y))$, et donc, en utilisant le point (2) et le cas des schémas

$$\begin{aligned}
\tau_F(x.y) \quad &= \tau_F(f_*(z.f^*(y))) \\
&= f_*\tau_X(z.f^*(y)) \\
&= f_*\tau_X(z).f^*Ch(y) \\
&= f_*(\tau_X(z)).Ch(y) \\
&= \tau_F(f_*(z)).Ch(y) \\
&= \tau_F(x).Ch(y)
\end{aligned}$$

Preuve de (5) **:**

Soit F un champ de Deligne-Mumford, et $p : F \longrightarrow M$ la projection sur son espace de modules. Alors, on définit τ_F par le diagramme commutatif suivant

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{G}}_0(F) \arrow[r, "\tau_F"] \arrow[d, "p_*"'] & H_\bullet(F,*) \arrow[d, "p_*"] \\
\mathbf{G}_0(M)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\tau_M"'] & H_\bullet(M,*)
\end{tikzcd}
$$

où τ_M est défini dans [G2, 7]. Il est clair que cette définition répond aux conditions demandées. $\square$

Les théorèmes 3.25 et 3.33 peuvent se composer. On obtient de cette façon le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch sous sa forme finale.

Théorème 3.36 *(Grothendieck-Riemann-Roch) Pour chaque F objet de $\mathcal{QDM}$, il existe un unique morphisme*

$$\tau_F^{rep} : \mathbf{G}_*(F) \longrightarrow H_\bullet^{rep}(F,*)$$

tel que :

1. *Si F est lisse dans $\mathcal{QDM}$, alors*

$$\begin{array}{rccc} \tau_F^{rep}: & \mathbf{G}_*(F) & \longrightarrow & H_\bullet^{rep}(F,*) \\ & x & \mapsto & Td^{rep}(F).Ch^{rep}(x) \end{array}$$

   De même, si X est un schéma quasi-projectif, τ_X^{rep} coincide avec le morphisme défini dans [G, 4.1].

2. *Pour tout morphisme propre de $\mathcal{QDM}$, $f : F \longrightarrow F'$, on a*

$$f_* \circ \tau_F^{rep} = \tau_{F'}^{rep} \circ f_*$$

   dans l'un des deux cas suivants

   - *le morphisme f est représentable*
   - *le champ F est lisse*

3. *Si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme représentable et étale de champs de $\mathcal{QDM}$, alors*

$$\tau_F^{rep} \circ f^*(x) = f^* \circ \tau_{F'}^{rep}(x)$$

   pour tout $x \in \mathbf{G}_0(F')$.

4. *Pour tout champ F de $\mathcal{QDM}$, tout $x \in \mathbf{G}_0(F)$ et tout $y \in \mathbf{K}_*(F)$, on a*

$$\tau_F^{rep}(x.y) = \tau_F^{rep}(x).Ch^{rep}(y)$$

5. *La transformation naturelle $\tau_F^{rep} : \mathbf{G}_0(F) \longrightarrow H_\bullet^{rep}(F,*)$ se prolonge de façon unique à une transformation naturelle de foncteurs covariants sur $(\mathcal{DM}, pr.)$, la sous-catégorie des champs de Deligne-Mumford et morphismes propres.*

Preuve : On définit τ_F^{rep} par la composition

$$\tau_F^{rep}:\ \mathbf{G}_*(F) \xrightarrow{\psi_F} \underline{\mathbf{G}}(I_F^t)_K \xrightarrow{\tau_{I_F^t}} H_\bullet(I_F^t,*) = H_\bullet^{rep}(F,*)$$

Les cinq assertions du théorème sont alors obtenues en composant les cinq assertions des théorèmes 3.25 et 3.33. $\square$

En utilisant le théorème 2.27, ainsi que les lemmes sur l'existence des quasi-enveloppes de Chow (1.21 (2)), on peut montrer le théorème suivant, dont nous ferons l'économie de la démonstration (qui est tout à fait analogue au cas des champs de Deligne-Mumford).

Nous supposerons que S contient les racines de l'unités, et que nous avons fixé un plongement $\mu_\infty(S) \hookrightarrow \mathbf{C}^*$. On posera alors $K := \mathbf{Q}(\mu_\infty(S))$.

Dans le théorème suivant, nous avons bien entendu posé les définitions suivantes :

$$H^p_{rep}(F,q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((I_F^{t,f})_{li}, \mathcal{H}^q \otimes K)$$
$$H_p^{rep}(F,q) := \pi_{dq-p}\mathbf{H}((I_F^{t,f})_{li}, \mathcal{H}'_q \otimes K).$$

Théorème 3.37 *Supposons que S soit de caractéristique nulle. Notons $\mathcal{QGA}$ la sous-catégorie de $HoChAlg(S)$, des champs lisses sur S, Δ-équidimensionnels et pseudo-séparés (1.14), et $\mathcal{QQGA}$ celle de $\mathcal{QGA}$ formées des champs dont l'espace de modules est quasi-projectif.*

Pour chaque F objet de $\mathcal{QGA}$ notons

$$\begin{array}{rccc} \tau_F^{rep}: & \mathbf{G}_*(F) & \longrightarrow & H_\bullet^{rep}(F,*) \\ & x & \mapsto & Td^{rep}(F).Ch^{rep}(x) \end{array}$$

Alors, on a les propriétés suivantes.

1. *Pour tout morphisme propre de $\mathcal{QGA}$, $f : F \longrightarrow F'$, on a*

$$f_* \circ \tau_F^{rep} = \tau_{F'}^{rep} \circ f_*.$$

2. *Si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme représentable et étale de champs de $\mathcal{QGA}$, alors*

$$\tau_F^{rep} \circ f^*(x) = f^* \circ \tau_{F'}^{rep}(x)$$

   pour tout $x \in \mathbf{G}_0(F')$.

3. *Pour tout champ F de $\mathcal{QGA}$, tout $x \in \mathbf{G}_0(F)$ et tout $y \in \mathbf{K}_*(F)$, on a*

$$\tau_F^{rep}(x.y) = \tau_F^{rep}(x).Ch^{rep}(y)$$

3.2.4 Exemples d'applications

On notera k un corps qui contient les racines de l'unité.

Nous allons donner toute une série de corollaires du théorème 3.36. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux formules de type Gauss-Bonnet.

Pour un champ algébrique F, nous noterons

$$\begin{aligned} A^p(F) &:= H^p(F, \mathcal{K}_p \otimes \mathbf{Q}) \\ A_p(F) &:= H^p(F, \mathcal{R}^p \otimes \mathbf{Q}) \\ A^p_{rep}(F) &:= H^p(I_F^t, \mathcal{K}_p \otimes K) \\ A_p^{rep}(F) &:= H^p(I_F^t, \mathcal{R}^p \otimes K) \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}^p$ est le complexe de Gersten de codimension p. Notons, qu'aux graduations près, ces groupes sont des morceaux de la cohomologie et de l'homologie à coefficients dans les représentations de F.

Corollaire 3.38 *Si F est un champ de Deligne-Mumford, alors les morphismes*

$$\tau_F : \underline{\mathbf{G}}_0(F) \longrightarrow \bigoplus_p A_p(F)$$

$$\tau_F^{rep} : \mathbf{G}_0(F)_K \longrightarrow \bigoplus_p A_p^{rep}(F)$$

sont des isomorphismes.

En particulier, si F est lisse dans $\mathcal{QDM}$, alors

$$Ch : \underline{\mathbf{G}}_0(F) \longrightarrow \bigoplus_p A^p(F)$$

$$Ch^{rep} : \mathbf{G}_0(F)_K \longrightarrow \bigoplus_p A^p_{rep}(F)$$

sont des isomorphismes.

<u>Preuve:</u> La seconde partie se déduit de la première en remarquant que les classes de Todd $Td(T_F)$ et $Td^{rep}(F)$ sont des éléments inversibles.

Comme $\tau_F^{rep} = \tau_F \circ \psi_F$, et que ψ_F est un isomorphisme, il suffit de démontrer que τ_F est un isomorphisme. Soit $p : F \longrightarrow M$ la projection sur l'espace de modules. Le théorème de Riemann-Roch montre alors que l'on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_0(F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\tau_F"] \arrow[d, "p_*"'] & A_*(F) \arrow[d, "p_*"] \\ \mathbf{G}_0(M)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\tau_M"'] & A_*(M) \end{tikzcd}$$

Or, on sait que τ_M est un isomorphisme, et donc τ_F aussi. $\Box$

Remarque: En utilisant les complexes de Chow-Bloch définis dans [B], on peut démontrer des résultats analogues pour la G-théorie supérieure.

Si F est un champ propre sur un $Speck$, nous noterons

$$\int_F^{rep} := p_* : H_\bullet^{rep}(F,*) \longrightarrow H_\bullet^{rep}(Speck,*)$$

où p est le morphisme structural.
De même, nous noterons

$$\int_F := p_* : H_\bullet(F,*) \longrightarrow H_\bullet(Speck,*)$$

Corollaire 3.39 *(Hirzebruch-Riemann-Roch) Soit F un champ algébrique de Deligne-Mumford modéré et propre sur k. Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur F, on a*

$$\chi(F,\mathcal{F}) := \sum_i (-1)^i Dim_k H^i(F,\mathcal{F}) = \int_F^{rep} \tau_F^{rep}(\mathcal{F})$$

En particulier si F est lisse et dans $\mathcal{QDM}$, on a

$$\chi(F,\mathcal{F}) = \int_F^{rep} Td^{rep}(F).Ch^{rep}(\mathcal{F})$$

Preuve : Il suffit d'appliquer 3.36 à la projection $p : F \longrightarrow Speck$, et remarquer que si un champ de Deligne-Mumford est modéré sur $Speck$, alors p est de dimension cohomologique finie. $\Box$

Dans le cas des orbifolds de dimension 1, cette formule peut s'expliciter. On retrouve alors la formule de Riemann-Roch pour les courbes orbifolds complexes démontrée dans [Ta]. Pour simplifier, on supposera que k est algébriquement clos.

Soit F est un orbifold lisse propre de dimension 1, et modéré sur k, et M son espace de modules. Alors, M est une courbe lisse et projective sur k. Notons $x_1, \ldots, x_m$ les points fermés de M au-dessus desquels F n'est pas un schéma, et $A_i := \mathcal{O}_{M,x_i}^h$ l'hensélisé de l'anneau local de M en x_i. Alors, la restriction de F au-dessus de $SpecA_i$, est équivalent à un quotient de la forme $[X_i/H_i]$, avec X_i le spectre d'une k-algèbre locale hensélienne et régulière de dimension 1, et H_i un groupe fini opérant sur X_i, et ne fixant que le point fermé $y_i \in X_i$. Ainsi, $X_i \longrightarrow SpecA_i$ définit un revêtement fini, modérément ramifié en x_i, car F est modéré sur k. Il correspond donc a un quotient de noyau ouvert

$$\widehat{\pi}_1^t(SpecA_i, x_i) \longrightarrow H_i$$

Or, on sait que
$$\widehat{\pi}_1^t(SpecA_i, x_i) \simeq \widehat{\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]}$$
Ainsi, on a forcément $H_i \simeq \mathbf{Z}/r_i$, où r_i est l'ordre de ramification de F en x_i (1.19). Fixons nous des sections $s_i : Speck(x_i) \longrightarrow \widetilde{x}_i$, ainsi que des générateurs $h_i \in H_i$.

Si π_i est une uniformisante en y_i, l'action de $H_i =< h_i >$, est donnée par
$$\begin{array}{cccc} h_i : & B_i & \longrightarrow & B_i \\ & \pi_i & \mapsto & \zeta_i.\pi_i \end{array}$$
où ζ_i est une racine primitive r_i-ème de l'unité dans k.

Soit $T_{F,x_i} := s_i^* i_{x_i}^* T_F$ la restriction du fibré tangent sur $Speck(x_i)$. Alors, T_{F,x_i} est un espace vectoriel de dimension 1, sur lequel h_i opère par multiplication par ζ_i. Maintenant, si $\mathcal{L}$ est un fibré inversible sur F, sa restriction sur $Speck(x_i)$, donne une représentations de H_i sur un k-espace vectoriel de dimension 1, $\mathcal{L}_{x_i} := s_i^* i_{x_i}^* \mathcal{L}$. Notons k_i l'entier compris entre 0 et $r_i - 1$, tel que h_i opère par multiplication par $\zeta_i^{k_i}$ sur $\mathcal{L}_{x_i}$.

Définition 3.40 *([Ta]) L'entier k_i est appelé la multiplicité de $\mathcal{L}$ en x_i.*

Corollaire 3.41 *(Riemann-Roch)([Ta]) Soit F un orbifold lisse, propre, et modéré sur k algébriquement clos, de dimension 1. Soit M son espace de modules, et $x_i \in M$ les points de ramifications de F, d'ordre r_i.*

Soit $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur F, et k_i la multiplicité de $\mathcal{L}$ en x_i. Alors on a
$$\chi(F, \mathcal{L}) = \int_F C_1(\mathcal{L}) + 1 - g - \sum_i \frac{k_i}{r_i}$$

Preuve: On utilisera la théorie de Gersten comme théorie cohomologique.

Le champ I_F s'écrit comme une réunion disjointe
$$I_F \simeq F \coprod_{i=1}^{m} BH_i$$
et donc
$$H^0_{rep}(F, 0) \simeq H^0(F, 0) \bigoplus_{i=1}^{m} K(H_i)$$
$$H^1_{rep}(F, 1) \simeq H^1(F, 1)$$

Ainsi, l'anneau gradué $H^*_{rep}(F,*)$ est isomorphe à

$$H^0(F,0) \oplus H^1(F,1) \bigoplus_{i=1}^{m} K(H_i)$$

A travers cet isomorphisme, le caractère de Chern de $\mathcal{L}$ est donné par la formule suivante

$$Ch^{rep}(\mathcal{L}) = Ch(\mathcal{L}) \bigoplus_{i=1}^{m} \chi(\mathcal{L}_{x_i})$$

où $\chi(\mathcal{L}_{x_i}) \in K(H_i)$ est le caractère de la représentation de H_i sur $\mathcal{L}_{x_i}$. Ainsi, avec les notations précédentes, on a

$$\begin{array}{rccc} \chi(\mathcal{L}_{x_i}): & H_i & \longrightarrow & K \\ & h_i^a & \mapsto & \zeta_i^{a.k_i} \end{array}$$

Quand à la classe de Todd de F, elle s'écrit

$$Td^{rep}(F) = Td(T_F) \bigoplus_{i=1}^{m} Td_i$$

où

$$\begin{array}{rccc} Td_i: & H_i & \longrightarrow & K \\ & h_i^a & \mapsto & \frac{1}{1-\zeta_i^a} \end{array}$$

Ainsi, la classe $\tau_F^{rep}(\mathcal{L})$ est

$$\tau_F(\mathcal{L}) \bigoplus_{i=1}^{m} \chi(\mathcal{L}_{x_i}).Td_i$$

et donc, la formule 3.39 implique que

$$\chi(F,\mathcal{L}) = \int_F \tau_F(\mathcal{L}) + \sum_i \frac{1}{r_i}.\sum_{a=0}^{r_i-1} \frac{\zeta_i^{a.k_i}}{1-\zeta_i^a}$$

Or, $\tau_F(\mathcal{L}) = C_1(\mathcal{L}) + \frac{1}{2}.C_1(T_F)$. La formule de Gauss-Bonnet 3.44 (ou une application de 3.39 au fibré trivial) donne

$$\int_F \tau_F(\mathcal{L}) = \int_F C_1(\mathcal{L}) + 1 - g + \sum_i \frac{r_i - 1}{2.r_i}$$

On conclut alors à l'aide de la formule

$$\sum_{a=0}^{r_i-1} \frac{\zeta_i^{a.k_i}}{1-\zeta_i^a} = -\frac{r_i-1}{2} - k_i$$

ou encore

$$\sum_{a=0}^{r_i-1} \frac{\zeta_i^{a.k_i}+1}{1-\zeta_i^a} = -k_i$$

□

Corollaire 3.42 *Soit F un champ de Deligne-Mumford propre et modéré sur Speck, et M son espace de modules. Alors, le genre arithmétique de M est donné par la formule suivante*

$$\chi^a(M) := \chi(M, \mathcal{O}_M) = \int_F^{rep} \tau_F^{rep}(1)$$

En particulier, si F est lisse et dans $\mathcal{QDM}$, on a

$$\chi^a(M) = \int_F^{rep} Td^{rep}(F)$$

__Preuve :__ Commençons par remarquer que, comme F est modéré, le foncteur q_* (où q est la projection canonique $q : F \longrightarrow M$) est exact.

En procédant par récurrence sur la dimension du support des faisceaux cohérents $\mathbf{R}p_*^i(\mathcal{F})$, on peut se restreindre à un sous-champ ouvert non-vide de F. Comme on peut aussi supposer que F est réduit (car $F_{red} \hookrightarrow F$ est acyclique pour les faisceau cohérents), on se ramène au cas où F est une gerbe sur M.

Comme l'assertion est locale sur M_{et}, on peut supposer que $F = [X/H]$, avec X un schéma et H un groupe fini opérant trivialement sur X. En identifiant alors la catégorie $\mathbf{Coh}([X/H])$, à la catégorie des faisceaux cohérents sur X, munit d'une action de H, le foncteur

$$b_* : \mathbf{Coh}([X/H]) \longrightarrow \mathbf{Coh}(X/H)$$

associe à un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ son sous-faisceau des invariants par H, $\mathcal{F}^H$. Mais, comme F est modéré sur *Speck*, l'ordre de H est premier avec la caractéristique de k, et donc le foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^H$ est exact.

Comme q_* est exact, on a

$$\chi(F, \mathcal{O}_F) = \chi(M, q_*\mathcal{O}_F)$$

mais $q_*(\mathcal{O}_F) = \mathcal{O}_M$, et donc

$$\chi(F, \mathcal{O}_F) = \chi(M, \mathcal{O}_M) = \int_F^{rep} \tau_F^{rep}(1)$$

□

Remarque : La formule précédente est une généralisation au cas des champs singuliers, ainsi qu'à la caractéristique quelconque, de la formule obtenue par [Ka]. Son intérêt principal est qu'elle permet de calculer le genre arithmétique d'un schéma éventuellement singulier M, en fonction de certaines classes de cohomologie sur un objet lisse F.

Les formules de Gauss-Bonnet qui vont suivre possèdent le même intérêt.

Définition 3.43 *Soit F un champ de Deligne-Mumford sur un corps k, algébriquement clos et de caractéristique nulle.*

Nous définissons sa caractéristique d'Euler topologique par

$$\chi^{top}(F) := \sum_{p=0}^{p=Dim_k F} (-1)^p Dim_k H_p(F, p)$$

où l'on utilise la cohomologie de De Rham.

- *Notons $\{M_i\}_i$ une stratification de son espace de modules par des sous-espaces localement fermés, lisses et connexes, tels que la fonction qui à un point $x \in M$ associe l'ordre de ramification de F en x soit constante sur chacun des M_i, égale à m_i.*

  La caractéristique d'Euler orbifold de F est définie par

  $$\chi^{orb}(F) := \sum_i \frac{\chi^{top}(M_i)}{m_i}$$

- *La caractéristique d'Euler des physiciens et définie par*

  $$\chi^{phy}(F) := \chi^{top}(I_F)$$

Pour la suite k est sera un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et contenant les racines de l'unités.

Pour un élément x de $\underline{\mathbf{K}}_0(F)$, nous noterons $C_{max}(x)$ sa classe de Chern maximale. Lorsque F est connexe, et x de rang r, $C_{max}(x) = C_r(x)$. En général, $C_{max}(x)$ est la somme des $C_{r_i}(x_i)$, où i parcourt l'ensemble des composantes connexes de F, et r_i est le rang de x sur la composante i.

Corollaire 3.44 *(Gauss-Bonnet I) Soit F un champ algébrique de $\mathcal{QDM}$ propre et lisse sur k, et M son espace de modules. Alors*

$$\chi^{orb}(F) := \int_F C_{max}(T_F)$$

Preuve : On va appliquer le théorème 3.33, au cas de la projection $p : F \longrightarrow M$, et de l'élément

$$x = can(\sum_i (-1)^i \Omega_F^i) \in \underline{\mathbf{G}}_0(F)$$

En utilisant le lemme 3.6, on peut écrire

$$\tau_F(x) = Td(T_F).Ch(can(\lambda_{-1}(T_F)^{-1})) = C_{max}(T_F)$$

On en déduit alors

$$\int_F C_{max}(T_F) = f_*(x)$$

où $f : F \longrightarrow Speck$. On conclut alors à l'aide de 4.27 (le lecteur vérifiera qu'il n'y pas de cercle vicieux !). $\square$

Corollaire 3.45 *(Gauss-Bonnet II) Soit F un champ de Deligne-Mumford, lisse et propre sur k. Alors, la caractéristique d'Euler topologique de F est donnée par*

$$\chi^{top}(F) = \chi^{top}(M) = \int_{I_F} C_{max}(T_{I_F})$$

<u>**Preuve :**</u> On applique la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch

$$\chi(F, x) = \int_F^{rep} Td^{rep}(F).Ch^{rep}(x)$$

avec $x = \lambda_{-1}(\Omega^1_F)$.

Alors, par la suite spectrale d'hyper-cohomologie associé au complexe de De Rham sur F, on trouve

$$\begin{aligned} \chi(F, x) &= \textstyle\sum_i (-1)^{p+q} Dim_k H^p(F, \Omega^q_F) \\ &= \textstyle\sum_i (-1)^i Dim_k H^i(F, \Omega^\bullet_F) \\ &= \chi^{top}(F) \end{aligned}$$

Il nous reste à évaluer $Td^{rep}(F).Ch^{rep}(x)$.

Soit $\pi : I_F \longrightarrow F$ la projection naturelle, et

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^\vee_\pi \longrightarrow \pi^*\Omega^1_F \longrightarrow \Omega^1_{I_F} \longrightarrow \mathrm{o}$$

la suite exacte courte des 1-formes différentielles. Par le morphisme F défini dans 2.15

$$F : \mathbf{K}_\mathrm{o}(I_F) \longrightarrow \mathbf{K}_\mathrm{o}(I_F)$$

on obtient

$$F(\pi^*\Omega^1_F) = F(\Omega^1_{I_F}) + F(\mathcal{N}^\vee_\pi)$$

et donc

$$\lambda_{-1}(F(\pi^*\Omega^1_F)) = \lambda_{-1}(F(\Omega^1_{I_F})).\lambda_{-1}(F(\mathcal{N}^\vee_\pi))$$

Or, par définition

$$\lambda_{-1}(F(\mathcal{N}^\vee_\pi)) = \alpha_F$$

De plus, pour toute racine de l'unité $\zeta \neq 1$, on a

$$F_\zeta(\Omega^1_{I_F}) = 0$$

et donc

$$F(\Omega^1_{I_F}) = \Omega^1_{I_F}$$

Ainsi, on a

$$Ch^{rep}(x) = Ch(\Omega^1_{I_F}).Ch(\alpha_F)$$

et donc, par le lemme 3.6

$$Ch^{rep}(x).Td(T_{I_F}) = Ch(\alpha_F).C_{max}(T_{I_F})$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} Td^{rep}(F).Ch^{rep}(x) &= Td(T_{I_F}).Ch(\alpha_F)^{-1}.Ch^{rep}(x) \\ &= C_{max}(T_{I_F}) \end{aligned}$$

□

Ces deux derniers corollaires permettent de donner une relation de récurrence sur les différentes caractéristiques d'Euler.

Pour cela, si F est un champ, nous définirons par récurrence

$$I_F^m := I_{I_F^{m-1}}$$

avec $I_F^0 := F$. On dispose alors des relations suivantes.

Corollaire 3.46 *Si F est un champ de Deligne-Mumford, lisse et propre sur k, alors on a*

$$\chi^{phy}(I_F^m) = \chi^{top}(I_F^{m+1}) = \chi^{orb}(I_F^{m+2})$$

pour tout $m \geq 0$.

Preuve : On applique les corollaires précédents. □

Il est à noter que lorsque $F = [X/H]$ est un champ quotient par un groupe fini, $I_F^m \simeq [X^{(m)}/H]$, où

$$X^{(m)} = \{(x, h_1, \ldots, h_m) \in X \times H^m \ / \ h_i.h_j = h_j.h_i \ \forall \ i,j \ et \ h_i.x = x \ \forall \ i\}$$

et l'action de $h \in H$ est donnée par la formule

$$h.(x, h_1, \ldots, h_m) := (h.x, h.h_1.h^{-1}, \ldots, h.h_m.h^{-1})$$

On remarque alors que $\chi^{orb}(I_F^m)$ est la caractéristique d'Euler supérieure $\chi_m(X, H)$ définie dans [Br-Fu]. Ainsi, on pourrait définir une "cohomologie à coefficients dans les représentations" supérieure, pour un champ F propre et lisse, par

$$H^\bullet_{rep,m}(F, *) := H^\bullet(I_F^m, *)$$

ainsi que les caractéristiques d'Euler supérieures

$$\chi_m(F) := \sum_i Dim_k H^i_{rep,m}(F, 0)$$

Dans chacun des anneaux $H^\bullet_{rep,m}(F, *)$ on dispose d'une classe d'Euler

$$Eu_m(F) := C_{max}(T_{I_F^m}) \in H^\bullet(I_F^m, *)$$

La relation du corollaire précédent se traduit alors par

$$\chi_m(F) = \int_F^{m+1} Eu_{m+1}(F)$$

où $\int_F^m = p_*^{(m)}$, avec $p^{(m)} : I_F^m \longrightarrow Speck$ le morphisme structural.

Dans [Br-Fu], les nombres $\chi_m(X,H)$ sont étudiés à l'aide d'une série génératrice

$$f(X,H;t) := \sum_m \chi_m(X,H).t^m$$

Suivant cette idée, pour un champ F propre et lisse, on peut définir une cohomologie rassemblant toute les cohomologies $H^\bullet_{rep,m}(F,*)$, en posant

$$H^\bullet_\infty(F,*) := \prod_m H^\bullet_{rep,m}(F,*)$$

Alors, la classe $\sum_m Eu_m(F)$ définit une classe "d'Euler totale"

$$Eu_\infty(F) := \prod_m Eu_m(F) \in H^\bullet_\infty(F,*)$$

qui vérifie

$$\int_F^\infty Eu_\infty(F) = f(X,H;t) \in H^\bullet_\infty(Speck,*) \simeq k[[t]]$$

Il serait peut-être intéressant d'étudier les propriétés de la théorie cohomologique $F \mapsto H^\bullet_\infty(F,*)$, en vue d'obtenir des "formules de Riemann-Roch supérieures".

Supposons maintenant que k soit un sous-corps de $\mathbf{C}$. A tout champ de Deligne-Mumford F sur k est alors associé le champ analytique $F^{an} := (F \times_{Speck} Spec\mathbf{C})^{an}$ (5.6). Notons M^{an} son espace de modules, et M celui de F. Nous noterons F^{top} et M^{top} les champs topologiques associés aux champs analytiques F^{an} et M^{an}.

Lemme 3.47 *Le morphisme naturel de champs topologiques*

$$p : F^{top} \longrightarrow M^{top}$$

induit un isomorphisme de $\mathbf{Q}$*-algèbres*

$$p^* : H^*(M^{top};\mathbf{Q}) \longrightarrow H^*(F^{top},\mathbf{Q})$$

Preuve: Par Mayer-Vietoris, ceci est local sur M^{top}. On peut donc supposer d'après 1.17, que $F = [X/H]$, avec H un groupe fini opérant sur un espace topologique X. Il faut alors montrer que le morphisme naturel

$$p^* : H^*(X/H^{top},\mathbf{Q}) \longrightarrow H^*(X^{top},\mathbf{Q})^H$$

est un isomorphisme. Mais ceci est un cas particulier du théorème de changement de base propre. $\Box$

Dans le cas où F est lisse et propre sur $Speck$, ce lemme implique que le produit d'intersection

$$\phi : H^n(M^{top}, \mathbf{Q}) \times H^n(M^{top}, \mathbf{Q}) \longrightarrow H^{2n}(M^{top}, \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}$$

où $n = Dim_k F$, est non-dégénéré.

Définition 3.48 *Soit F un champ de Deligne-Mumford, propre et lisse sur $Speck$, avec $Dim_k F = 2m$. La signature de M (ou de F) est la signature de la forme quadratique réelle*

$$\phi \otimes \mathbf{R} : H^{2m}(M^{top}, \mathbf{R}) \times H^{2m}(M^{top}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

Elle est notée $\sigma(M)$ (ou bien $\sigma(F)$).

Si F est un champ lisse de $\mathcal{QDM}$, une application de la théorie de Hodge pour les champs algébriques complexes (6.5) implique immédiatement que

$$\sigma(M) = \sigma(F) = \chi(F, \lambda_1(\Omega^1_F))$$

où $\lambda_1(x) := \sum_i \lambda^i(x) \in \mathbf{K}_o(F)$, pour tout élément $x \in \mathbf{K}_o(F)$ de rang positif. On peut alors appliquer la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch à l'élément $\lambda_1(\Omega^1_F)$, pour en déduire une formule de la signature. Pour cela rappelons la définition du L-genre $L(F)$ ([Hi, 8.2.2]), d'un champ lisse F.

Soit T_F le fibré tangent de F, et a_i ses racines de Chern. On a donc

$$\sum_i C_i(T_F).t^i = \prod_{i=1}^{i=n}(1 + a_i t)$$

Alors, le "polynôme"

$$\prod_{i=1}^{i=n}\left(\frac{a_i}{tanh(a_i)}\right)$$

est symétrique en les a_i. Il s'exprime donc comme un polynôme $L(F) \in H^{\bullet}(F, *)$, en les classes de Chern $C_i(T_F)$.

Corollaire 3.49 *(Formule de la signature) Soit F un champ de Deligne-Mumford lisse et propre sur $Speck$, de dimension paire. Notons*

$$\beta_F := can(F(\lambda_1(\mathcal{N}^{\vee}_{\pi}))) \in \underline{\mathbf{K}}^{rep}_o(I_F)$$

où $\mathcal{N}^{\vee}_{\pi}$ est le fibré conormal du morphisme

$$\pi_F : I_F \longrightarrow F$$

Alors, on a

$$\sigma(M) = \sigma(F) = \int_{I_F} Ch(\alpha_F^{-1}.\beta_F).L(I_F)$$

Preuve: C'est le même calcul que pour la formule de Gauss-Bonnet 3.45. $\square$

Remarque: Lorsque $F = [X/H]$ est un quotient d'un schéma X par un groupe fini H d'ordre m, la formule précédente se réécrit

$$\sigma(X/H) = \frac{1}{m}.\sum_{h\in H}\int_{X^h} Ch(\alpha_h^{-1}.\beta_h).L(X^h)$$

où α_h et β_h sont les restrictions de α_F et β_F sur X^h. On reconnaît alors la formule de la "G-signature" d'Atiyah-Singer. Ceci permet d'interpréter ce genre de formule dans le cadre de la "cohomologie à coefficients dans le représentations". Il pourrait-être par ailleurs intéressant d'utiliser cette cohomologie pour démontrer un théorème d'indice à la Atiyah-Singer pour des champs différentiels. Comme tout orbifold différentiel est un quotient par un groupe de Lie compact, la formule d'indice équivariant d'Atiyah-Singer, permet au moins de traiter ce cas (c'est ce qui est fait dans [Ka]). Le passage aux champs différentiels généraux ne devrait pas alors poser trop de problèmes.

3.3 Comparaison avec d'autres théories cohomologiques

Dans ce paragraphe nous allons comparer la cohomologie à coefficients dans les caractères (ou dans les représentations) avec deux autres constructions : la cohomologie périodique de la catégorie des faisceaux cohérents ([K]), et les "groupes de Chow" associés à la filtration par la codimension du support sur la K-théorie des faisceaux cohérents (qui apparaissent déjà dans [G2]).

3.3.1 Groupes de Chow

On supposera que $S = Speck$ avec k un corps contenant les racines de l'unité, et on utilisera la théorie de Gersten comme théorie cohomologique.

Soit F un champ algébrique de Deligne-Mumford, et $\mathbf{Coh}^p(F)$ la catégorie de faisceaux cohérents sur F dont le support est de codimension supérieure ou égale à p. Si on note

$$\mathbf{G}^p(F) := K(\mathbf{Coh}^p(F))$$

le foncteur d'inclusion $\mathbf{Coh}^{p+1}(F) \longrightarrow \mathbf{Coh}^p(F)$ induit un triangle dans

$HoSp$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{G}^{p+1}(F) \arrow[dr] & \\ \bigvee_{x\in|F|^{(p)}} \mathbf{G}(\widetilde{x}) \arrow[ur, "+1"] & & \mathbf{G}^p(F) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

où $|F|^{(p)}$ et l'ensemble des points de F de codimension supérieure ou égale à p. On déduit de ces triangles des complexes de groupes abéliens $\mathcal{R}^p(F)$, que l'on considère comme concentrés en degré $[-p,0]$

$$\mathcal{R}^p(F) : 0 \to \bigoplus_{x\in|F|^{(0)}} \mathbf{G}_p(\widetilde{x}) \longrightarrow \bigoplus_{x\in|F|^{(1)}} \mathbf{G}_{p-1}(\widetilde{x}) \cdots \bigoplus_{x\in|F|^{(p-1)}} \mathbf{G}_1(\widetilde{x}) \longrightarrow \bigoplus_{x\in|F|^{(p)}} \mathbf{G}_0(\widetilde{x}) \to 0$$

Remarquons que le terme de droite s'interprète comme le groupe des cycles de F à "coefficients dans les représentations des gerbes résiduelles".

Définition 3.50 *Les groupes de Chow à coefficients dans les représentations sont définis par*

$$CH^p_{rep}(F,q) := H^{-q}(\mathcal{R}^p(F))$$

Nous noterons

$$CH^\bullet_{rep}(F,*) := \bigoplus_{p,q} CH^p_{rep}(F,q)$$

Indiquons sans démonstrations (le lecteur pourra les déduire des propriétés générales du foncteur de G-théorie) les principales propriétés de ces groupes.

- Pour tout morphisme propre de dimension cohomologie finie

  $$f : F \longrightarrow F'$$

  entre deux champs de Deligne-Mumford, il existe une image directe fonctorielle

  $$f_* : CH^\bullet_{rep}(F,*) \longrightarrow CH^\bullet_{rep}(F,*)$$

  Si, de plus F et F' sont irréductibles, alors on a

  $$f_* : CH^p_{rep}(F,q) \longrightarrow CH^{p+d}_{rep}(F,q)$$

  où $d = Dim_k F' - Dim_k F$.

- Pour tout morphisme représentable et plat

  $$f : F \longrightarrow F'$$

  entre deux champs de Deligne-Mumford, il existe une image réciproque fonctorielle

  $$f^* : CH^p_{rep}(F',q) \longrightarrow CH^p_{rep}(F,q)$$

- Si $j : F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée de codimension d de champs de Deligne-Mumford, et $i : F-F' \hookrightarrow F$ l'immersion complémentaire, alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow CH^{p-d}_{rep}(F',q) \xrightarrow{j_*} CH^p_{rep}(F,q) \xrightarrow{i^*} CH^p_{rep}(U,q) \longrightarrow CH^{p-d}_{rep}(F',q-1) \longrightarrow \cdots$$

- Soit $p : F \longrightarrow M$ la projection d'un champ de Deligne-Mumford sur son espace de modules. Alors, les complexes

$$p_*(\mathcal{R}^p) \otimes \mathbf{Q}$$

sont flasques sur M_{et}.

Théorème 3.51 *Il existe un isomorphisme compatible avec les images directes*

$$\epsilon_F : CH^\bullet_{rep}(F,*)_K \longrightarrow H^{rep}_\bullet(F,*)$$

Preuve: Comme les techniques utilisées ci-dessous sont en tout point similaires à celles utilisées dans le paragraphe précédent, nous ne donnerons qu'une esquisse de preuve.

Remarquons tout d'abord que par définition, on a un isomorphisme naturel

$$H_p(F,q) \simeq H^{p-q}((I_F)_{et}, \mathcal{R}^p \otimes K)$$

On cherche donc à construire un isomorphisme fonctoriel pour les images directes (qui ne respectera pas la graduation !)

$$\epsilon_F : CH^\bullet_{rep}(F,*)_K \longrightarrow H^*((I_F)_{et}, \mathcal{R}^\bullet \otimes K)$$

Commençons par supposer que F est une gerbe sur un espace algébrique X. Comme $\pi_F : I_F \longrightarrow F$ est plat, il existe

$$\pi_F^* : CH^p_{rep}(F,q) \longrightarrow CH^p_{rep}(I_F,q)$$

Considérons alors pour toute racine de l'unité $\zeta \in \mu_\infty(k)$, le foncteur défini dans la preuve de 2.15

$$F_\zeta : \mathbf{Coh}(I_F) \longrightarrow \mathbf{Coh}(I_F)$$

Comme ce foncteur préserve la filtration par la codimension du support, on obtient un morphisme de complexes de préfaisceaux sur $(I_F)_{et}$

$$F_\zeta : \mathcal{R}^p \longrightarrow \mathcal{R}^p \otimes K$$

On pose alors

$$\epsilon_F := \sum_\zeta can \circ F_\zeta \circ \pi_F^* : \mathcal{R}^p(F) \longrightarrow \mathcal{R}^p(I_F) \otimes K$$

C'est un morphisme de complexes. De plus, si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme propre et représentable de gerbes, alors on a

$$\epsilon_{F'} \circ f_* = If_* \circ \epsilon_F : \mathcal{R}^p(F) \longrightarrow \mathcal{R}^p(I_F) \otimes K$$

en tant que morphisme de complexes.

Dans le cas d'un champ de Deligne-Mumford général, choisissons une hyper-quasi-enveloppe de Chow

$$q : F_\bullet \longrightarrow F$$

tel que F_m soit une gerbe triviale.

En appliquant les foncteurs covariants $\mathcal{R}^*_{\mathbf{Q}}$ au champ simplicial $F_\bullet$, on obtient un complexe simplicial, dont le complexe simple associé sera noté

$$\mathcal{R}^*(F_\bullet)_{\mathbf{Q}}$$

Ce complexe est muni d'un morphisme de complexe

$$q_* : \mathcal{R}^*(F_\bullet/F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathcal{R}^*(F)_{\mathbf{Q}}$$

On montre de façon analogue à 2.9, que le morphisme q_* est un quasi-isomorphisme.

On applique alors le morphisme ϵ construit ci-dessus à chaque "étage" de $F_\bullet$, ce qui induit un morphisme de complexes

$$\epsilon_{F_\bullet} : \mathcal{R}^*(F_\bullet/F)_K \longrightarrow \mathcal{R}^*(I_{F_\bullet}/I_F)_K$$

On a ainsi construit un diagramme de complexes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}^*(F_\bullet/F)_K \arrow[r, "\epsilon_{F_\bullet}"] \arrow[d, "q_*"'] & \mathcal{R}^*(I_{F_\bullet}/I_F)_K \arrow[d, "Iq_*"] \\ \mathcal{R}^*(F)_K & \mathcal{R}^*(F)_K \end{tikzcd}$$

Comme q_* est un quasi-isomorphisme, on peut définir un morphisme

$$\epsilon_F := (Iq_*)\epsilon_{F_\bullet}(q_*)^{-1} : CH^\bullet_{rep}(F,*)_K \longrightarrow CH^\bullet_{rep}(I_F,*)_K$$

On le compose alors avec le morphisme canonique

$$can : CH^\bullet_{rep}(I_F,*)_K \longrightarrow H^*((I_F)_{et}, \mathcal{R}^\bullet \otimes K)$$

pour obtenir le morphisme cherché

$$\epsilon_F : CH^\bullet_{rep}(F,*)_K \longrightarrow H^{rep}_\bullet(F,*)$$

Par construction, ce morphisme est compatible avec les images directes, et les changements de base étales de l'espace de modules. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut donc raisonner par récurrence sur la dimension de F en appliquant les suites exactes longues, et donc se ramener au cas où F est une gerbe triviale sur un schéma. Comme le morphisme ϵ_F est clairement un isomorphisme dans ce cas, on en déduit le théorème. $\square$

Remarque: L'isomorphisme 3.51 ne préserve pas la graduation.

3.3.2 Cohomologie Périodique

Rappelons que pour une catégorie exacte $\mathcal{E}$, il existe une construction d'un spectre de cohomologie périodique de $\mathcal{E}$ ([K]). On se propose dans ce paragraphe de comparer la cohomologie périodique des fibrés vectoriels et des faisceaux cohérents sur un champ, et sa cohomologie de De Rham à coefficients dans les caractères et dans les représentations. Pour cela on supposera que $S = Speck$, avec k un corps de caractéristique nulle contenant les racines de l'unité, et que la théorie cohomologique utilisée est la cohomologie de De Rham.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie k-linéaire et exacte. Dans [K], Keller lui associe un complexe double $CP(\mathcal{E})$ de k-espaces vectoriels. Le spectre associé au complexe simple $sCP(\mathcal{E})$ par la construction de Dold-Puppe, sera noté $\mathcal{CP}(E)$. On l'appellera le spectre de cohomologie périodique de $\mathcal{E}$. Il sera considéré comme un objet de $HoSp$. On dispose alors des propriétés suivantes :

- $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{CP}(E)$ est un foncteur de la catégorie des catégories exactes k-linéaires (et foncteurs exacts k-linéaires), vers la catégorie des spectres.
- si R est une k-algèbre, il existe un isomorphisme naturel
$$CP(R) \stackrel{\simeq}{\longrightarrow} CP(\mathcal{E})$$
où $\mathcal{E}$ est la catégorie des R-modules projectifs de type fini et $CP(R)$ est le complexe d'homologie périodique de la k-algèbre R.
- si A est une catégorie abélienne et B une sous-catégorie de Serre, alors les foncteurs naturels
$$B \longrightarrow A \longrightarrow A/B$$
induisent un triangle dans $HoSp$
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{CP}(B) \arrow[dr] & \\ \mathcal{CP}(A/B) \arrow[ur, "-1"] & & \mathcal{CP}(A) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

- si $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est un foncteur exact qui induit une équivalence sur les catégories dérivées, alors le morphisme induit

$$F : \mathcal{CP}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{CP}(\mathcal{E}')$$

  est un isomorphisme

- il existe un morphisme fonctoriel en $\mathcal{E}$

$$Ch : K(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{CP}(\mathcal{E})$$

- si on note $(Li/k)_{li}$ le site des espaces algébriques lisses muni de la topologie lisse, alors il existe un isomorphisme dans $HoSp((Li/k)_{li})$

$$\mathcal{CP} \simeq \mathcal{H}$$

Bien entendu, la liste n'est pas exhaustive. En particulier la troisième propriété que l'on cite n'est qu'un cas particulier d'une propriété de localisation bien plus générale.

Définition 3.52 *Pour tout champ algébrique F, on définit sa cohomologie périodique par*

$$HP_*(F) := \pi_*\mathcal{CP}(\mathbf{Vect}(F))$$

Par construction, $F \mapsto HP_*(F)$ est clairement un foncteur contravariant.

Proposition 3.53 *Soit F un champ lisse et bien ramifié.*

1. *Il existe une transformation naturelle de foncteurs contravariants*

$$Ch^{per} : \mathbf{K}_* \longrightarrow HP_*$$

2. *Si F est un champ algébrique lisse, il existe un morphisme*

$$\epsilon_F : HP_*(F) \longrightarrow H^\bullet_\chi(F, *)$$

   telle que

   - *ϵ est compatible avec les images réciproques de morphismes entre champs lisses*
   - *on a*

$$\epsilon_F \circ Ch^{per} = Ch^\chi \circ \epsilon_F$$

<u>Preuve:</u> Nous ne donnerons qu'une esquisse de preuve.

L'existence du caractère de Chern provient directement des propriétés rappelées ci-dessus.

De façon tout à fait analogue à 2.23, on construit un morphisme

$$\rho : \mathcal{CP}(D_F) \longrightarrow \mathbf{H}((D_F)_{li}, \mathcal{CP} \otimes \mathcal{A}_F)$$

que l'on compose avec l'équivalence rappelée ci-dessus

$$\mathbf{H}((D_F)_{li}, \mathcal{CP} \otimes \mathcal{A}_F) \longrightarrow \mathbf{H}((D_F)_{li}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}_F)$$

et l'image réciproque $d_F^* : \mathcal{CP}(F) \longrightarrow \mathcal{CP}(D_F)$ pour obtenir le morphisme cherché

$$HP_*(F) \longrightarrow H_\chi^\bullet(F, *)$$

Par la propriété de naturalité de cette construction et du caractère de Chern construit dans [K], on a clairement

$$\epsilon_F \circ Ch^{per} = Ch^\chi \circ \epsilon_F$$

□

Dans le cas où F est un champ de Deligne-Mumford, on peut aller un peu plus loin.

Proposition 3.54 *Soit $p : F \longrightarrow M$ la projection d'un champ de Deligne-Mumford lisse, sur son espace de modules. Considérons le préfaisceau en spectres sur M_{et}*

$$\begin{array}{rccc} p_*\mathcal{CP} : & M_{et} & \longrightarrow & Sp \\ & U & \mapsto & \mathcal{CP}(\mathbf{Vect}(p^{-1}U)) \end{array}$$

Posons alors

$$HP'_*(F) := \mathbf{H}^{-*}(M_{et}, p_*\mathcal{CP})$$

Nous noterons encore Ch^{per} le morphisme composé

$$\mathbf{K}_*(F) \xrightarrow{Ch^{per}} HP_*(F) \xrightarrow{can} HP'_*(F)$$

Alors, il existe un isomorphisme

$$\epsilon'_F : HP'_*(F) \longrightarrow H^\bullet_{rep}(F, *)$$

tel que

- *ϵ' est compatible avec les images réciproques de morphismes entre champs lisses*
- *on a*

$$\epsilon_F \circ Ch^{per} = Ch^{rep} \circ \epsilon_F$$

Preuve: L'existence du caractère de Chern, et du morphisme ϵ'_F se démontre comme dans la proposition précédente. Il ne reste qu'à démontrer que ϵ'_F est un isomorphisme.

Mais, par définition de $HP'_*(F)$, ceci est local sur M_{et}. On peut donc supposer que $F = [X/H]$ est un quotient d'un schéma affine lisse X par un groupe fini. Le fait que ϵ'_F est un isomorphisme dans ce cas est alors démontré dans [F-T, A6.1, A6.9]. $\square$

Remarque: Je ne sais pas si le morphisme naturel

$$can : HP_*(F) \longrightarrow HP'_*(F)$$

est un isomorphisme, mais cela me semblerait moral. On aurait alors un isomorphisme pour un champ de Deligne-Mumford lisse

$$HP_*(F) \simeq H^{\bullet}_{rep}(F, *)$$

Cet isomorphisme serait alors un analogue algébrique de la description de la cohomologie périodique d'un orbifold ([C-M, 6.12]).

3.4 Conclusion sur les théorèmes de Riemann-Roch

A la lumière des théorèmes 3.23, 3.36 et 3.37, on peut conclure que le problème initial consistant à démontrer des théorèmes de Riemann-Roch pour les champs algébriques est résolu dans le cas des champs de Deligne-Mumford, et partiellement résolu dans le cas général. Il me semble cependant que la définition de la cohomologie à coefficients dans les représentations est une bonne notion pour traiter le cas des champs Δ-affines. Je pense que l'on pourra dire que la situation est satisfaisante lorsque l'on aura démontré que le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch reste vrai (au moins au niveau du $\mathbf{G}_0$) pour un morphisme propre de champs algébriques Δ-affines et lisses sur un corps. Pour arriver à un tel résultat, il manque essentiellement deux choses. Premièrement, il faudrait montrer que les champs Δaffines et lisses sur un corps sont bien ramifiés. Le second point important est celui de l'existence de "lemmes de Chow" pour des morphismes propres de champs algébriques, qui nous fait défaut en toute généralité, et nous oblige donc à ne traiter que le cas des champs qui sont localement des quotients géométriques uniformes affines (pour lesquels on dispose des quasi-enveloppe de Chow). Un autre point de vu consisterait à montrer que l'on peut "localiser en bas" le théorème de Riemann-Roch, et donc se ramener systématiquement à ce dernier cas.

Seconde Partie :

$\mathcal{D}$-modules et théorème "GAGA"

4 Chapitre 4 : Théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-modules et formules d'indices

Comme il est expliqué dans [L], une importante application de la formule de Riemann-Roch est le calcul d'indices de $\mathcal{D}$-modules cohérents. Dans ce chapitre nous nous inspirons de ces constructions pour comparer les spectres de K-théorie des faisceaux cohérents aux spectres de K-théorie des $\mathcal{D}$-modules cohérents, et nous en déduisons des formules de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents dans le cadre des champs algébriques.

Le point essentiellement technique de ce chapitre est la définition des images directes en K-théorie. En effet, dans la littérature les images directes de $\mathcal{D}$-modules ne sont définies qu'au niveau des catégories dérivées. Or, ceci n'est pas suffisant pour induire un morphisme au niveau des spectres de K-théorie. Pour contourner cette difficulté nous avons choisi de travailler avec les méthodes de [Th]. Cependant, par souci de légèreté nous n'avons pas donné toutes les démonstrations en détails. Ce choix est justifié par le fait que nous nous intéressons plus ici aux applications du théorème de Riemann-Roch de la section précédente, qu'à l'étude détaillée des $\mathcal{D}$-modules sur les champs algébriques.

Dans un premier temps, le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch au niveau du K_0 nous permet d'obtenir des formules calculant des caractéristiques d'Euler pondérées, analogues à ce qui est démontré dans [Mac]. En particulier, on complète ainsi la preuve de la formule de Gauss-Bonnet 3.44. Par la suite, la formule de Riemann-Roch appliquée à certains éléments de la K-théorie des $\mathcal{D}$-modules holonomes, permet d'obtenir des formules calculant des caractéristiques d'Euler pondérées par des fonctions constructibles à valeurs dans la K-théorie supérieure du corps de base.

Notons enfin, que la description de la K-théorie des $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers nous fait espérer qu'il serait possible d'étendre la formule de Riemann-Roch de S. Bloch et H. Esnault [B-E] au cas des $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers. Ce théorème serait alors à valeurs dans les fonctions constructibles à valeurs dans la cohomologie de Chern-Simons définie dans [B-E].

Pour tout ce chapitre, on notera k un corps de caractéristique nulle et contenant les racines de l'unité. Un champ sera un champ sur $(Esp/Speck)_{et}$.

Nous noterons $(Li/k)_{et}$ (resp. $(Li/k, li)_{et}$) le site des espaces algébriques lisses sur k (resp. des espaces algébriques lisses et morphismes lisses), muni de la topologie étale.

Nous noterons aussi $\mathcal{LDM}$ (resp. $\mathcal{QLDM}$) la catégorie homotopiques des champs de Deligne-Mumford lisses et séparés sur k (resp. lisses et séparés sur k et dont l'espace de modules est quasi-projectif).

Par la suite on se fixera une théorie cohomologique avec images directes (3.1.1). Les groupes de cohomologie et d'homologie associés seront notés $H^\bullet(-,*)$ et $H_\bullet(-,*)$. On utilisera aussi la cohomologie à coefficients dans les représentations définie dans 3.2.3. Elle sera notée comme précédemment $H^\bullet_{rep}(-,*)$ et $H^{rep}_\bullet(-,*)$.

4.1 Les champs de $\mathcal{D}$-modules

Pour chaque objet $X \in Ob(Li/k)$, on dispose du faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X$ ([Bo]). La catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules (resp. des $\mathcal{D}_X$-modules $\mathcal{D}_X$-cohérents, resp. des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes, resp. des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers, resp. des $\mathcal{D}_X$-modules $\mathcal{O}_X$-cohérents, resp. des $\mathcal{D}_X$-modules $\mathcal{O}_X$-cohérents réguliers) sera notée $\mathcal{D}-\mathbf{Mod}(X)$ (resp. $\mathcal{D}-\mathbf{Coh}(X)$, resp. $\mathcal{D}_h-\mathbf{Coh}(X)$, resp. $\mathcal{D}_{hr}-\mathbf{Coh}(X)$, resp. $\nabla(X)$, resp. $\nabla_r(X)$). Par abus de langage on dira "$\mathcal{D}_X$-module cohérent" pour "$\mathcal{D}_X$-modules $\mathcal{D}_X$-cohérent". On appelera aussi $\nabla(X)$ la catégorie des connexions sur X.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme dans (Li/k), on dispose d'images réciproques ([Bo])

$$f^! : \mathcal{D}-\mathbf{Mod}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}-\mathbf{Mod}(X)$$

qui préservent les propriétés d'être holonome (resp. holonome régulier, resp. $\mathcal{O}$-cohérent, resp. $\mathcal{O}$-cohérent régulier). Ceci permet de définir la catégorie cofibrée $\mathcal{D}-\mathbf{Mod}$, des $\mathcal{D}$-modules (resp. $\mathcal{D}_h-\mathbf{Coh}$, des $\mathcal{D}$-modules holonomes, resp. $\mathcal{D}_{hr}-\mathbf{Coh}$, des $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers, resp. ∇, des $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{O}$-cohérents, resp. des ∇_r, des $\mathcal{D}$-modules
$\mathcal{O}$-cohérents réguliers). Ce sont des catégories cofibrées sur $(Li/k)_{et}$.

De même, lorsque f est lisse, le foncteur $f^!$ préserve la propriété d'être $\mathcal{D}$-cohérent. Ainsi, on peut définir $\mathcal{D}-\mathbf{Coh}$, la catégorie cofibrée des $\mathcal{D}$-modules cohérents sur $(Li/k, li)_{et}$.

Proposition 4.1 *Les catégories cofibrées $\mathcal{D}_h-\mathbf{Coh}$, $\mathcal{D}_{hr}-\mathbf{Coh}$ et ∇ sont des champs sur $(Li/k)_{et}$.*

La catégorie cofibrée $\mathcal{D}-\mathbf{Coh}$ est un champ sur $(Li/k, li)_{et}$.

Se sont de plus des champs en catégories exactes sur $(Li/k, li)_{et}$.

Preuve: Cette proposition provient directement du fait qu'un $\mathcal{D}$-module sur un espace algébrique lisse X, est la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathcal{O}$-module quasi-cohérent. Ce qui est équivalent à la donnée d'un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérent $\mathcal{M}$, et d'un scindage de la suite exacte d'Atiyah

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

Il est clair que ces données possèdent la propriété de descente pour des morphismes étales et surjectifs. $\square$

Définition 4.2 *Soit F un champ de $\mathcal{LDM}$, F_{et} son site étale, et $\mathcal{D}-\mathbf{Mod}_F$, $\mathcal{D}-\mathbf{Coh}_F$, $\mathcal{D}_h-\mathbf{Coh}_F$, $\mathcal{D}_{hr}-\mathbf{Coh}_F$, $\nabla_{r,F}$ et ∇_F, les champs restreints sur F_{et}. Ce sont des champs en catégories exactes sur F_{et}.*

- *On définit*

$$\mathcal{D}-\mathbf{Mod}(F) := \int_{F_{et}} \mathcal{D}-\mathbf{Mod}_F$$

$$\mathcal{D}-\mathbf{Coh}(F) := \int_{F_{et}} \mathcal{D}-\mathbf{Coh}_F$$

$$\mathcal{D}_h-\mathbf{Coh}(F) := \int_{F_{et}} \mathcal{D}_h-\mathbf{Coh}_F$$

$$\mathcal{D}_{hr}-\mathbf{Coh}(F) := \int_{F_{et}} \mathcal{D}_{hr}-\mathbf{Coh}_F$$

$$\nabla(F) := \int_{F_{et}} \nabla_F$$

$$\nabla_r(F) := \int_{F_{et}} \nabla_{r,F}$$

Ce sont respectivement les catégories exactes des $\mathcal{D}$-modules sur F, des $\mathcal{D}$-modules cohérents sur F, des $\mathcal{D}$-modules holonomes sur F, des $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers sur F, et des connexions sur F.

- *Les spectres de K-théorie associés (1.5) seront notés respectivement*

$$\mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) := K(\mathcal{D}-\mathbf{Coh}(F))$$

$$\mathbf{K}^{h}(F) := K(\mathcal{D}_h-\mathbf{Coh}(F))$$

$$\mathbf{K}^{h,r}(F) := K(\mathcal{D}_{hr}-\mathbf{Coh}(F))$$

$$\mathbf{K}^{\nabla}(F) := K(\nabla(F))$$

$$\mathbf{K}^{\nabla,r}(F) := K(\nabla_r(F))$$

Les spectres de K-cohomologie associés (1.5) seront notés respectivement

$$\underline{\mathbf{K}}^{\mathcal{D}}(F) := \mathbf{H}(F_{li}, \underline{K}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{D}})$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{h}(F) := \mathbf{H}(F_{li}, \underline{K}_{\mathbf{Q}}^{h})$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{h,r}(F) := \mathbf{H}(F_{li}, \underline{K}_{\mathbf{Q}}^{h,r})$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{\nabla}(F) := \mathbf{H}(F_{li}, \underline{K}_{\mathbf{Q}}^{\nabla})$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{\nabla,r}(F) := \mathbf{H}(F_{li}, \underline{K}_{\mathbf{Q}}^{\nabla,r})$$

Remarque: Sur F_{et} on dispose du faisceaux des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_F$. Il y a alors une équivalence naturelle entre la catégorie des $\mathcal{D}$-modules sur F au sens précédent, et celle des $\mathcal{D}_F$-modules sur F_{et}. De même, il existe des définitions évidentes de $\mathcal{D}_F$-modules cohérents, holonomes, holonomes réguliers ... Ces notions se correspondent évidemment par l'équivalence de catégories évoquée ci-dessus.

Avant d'aller plus loin, rappelons quelques propriétés concernant les $\mathcal{D}_F$-modules cohérents.

Proposition 4.3 *Soit F un champ de $\mathcal{LDM}$.*

1. *Pour tout $\mathcal{D}_F$-module cohérent $\mathcal{M}$, il existe un sous-$\mathcal{O}_F$-module cohérent $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M}$, tel que*

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_F.\mathcal{F}$$

2. *Tout $\mathcal{D}_F$-module cohérent admet une bonne filtration ([L]).*

Preuve: (1) Comme $\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}_F$-quasi-cohérent, il est limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_F$-modules cohérents. Donc $\mathcal{M}$ est limite inductive de ses sous-modules de la forme $\mathcal{D}_F.\mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est un sous-$\mathcal{O}_F$-module cohérent. Comme $\mathcal{M}$ est cohérent, on en déduit qu'il existe un sous-$\mathcal{O}_F$-module cohérent $\mathcal{F}_o$, tel que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_F.\mathcal{F}_o$.

(2) Soit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_F.\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}$ un sous-$\mathcal{O}_F$-module cohérent. Alors, si $\mathcal{D}_F^i$ est le sous-$\mathcal{O}_F$-module de $\mathcal{D}_F$, des opérateurs différentiels d'ordre inférieur à i, la filtration

$$\mathcal{M}^i := \mathcal{D}_F^i.\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

est une bonne filtration. $\Box$

Il est clair que les correspondances

$$F \mapsto \mathbf{K}^h(F) \qquad F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^h(F) \qquad F \mapsto \mathbf{K}^{h,r}(F) \qquad F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^{h,r}(F)$$

$$F \mapsto \mathbf{K}^\nabla(F) \qquad F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^\nabla(F) \qquad F \mapsto \mathbf{K}^{\nabla,r}(F) \qquad F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^{\nabla,r}(F)$$

définissent des foncteurs contravariants de la catégorie $\mathcal{LDM}$ vers $HoSp$.

De même les correspondances

$$F \mapsto \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F)$$

$$F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^{\mathcal{D}}(F)$$

définissent des foncteurs contravariants de la sous-catégorie de $\mathcal{LDM}$ des champs et morphisme lisses, vers $HoSp$.

4.1.1 Images directes de $\mathcal{D}$-modules

Proposition 4.4 *1. La correspondance*

$$F \mapsto \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F)$$

définit un foncteur covariant de la sous-catégorie $(\mathcal{LDM}, pr.)$ de $HoChAlg(k)$, des champs de Deligne-Mumford lisses et morphismes propres, vers $HoSp$.

2. Les correspondances

$$F \mapsto \mathbf{K}^{h}(F)$$

$$F \mapsto \mathbf{K}^{h,r}(F)$$

définissent des foncteurs covariants de $\mathcal{LDM}$, vers $HoSp$.

Preuve: Nous allons utiliser les constructions de Thomason ([Th]), afin de définir un analogue des images directes de $\mathcal{D}$-modules définies dans [Bo, 5], suffisamment fonctorielles pour passer aux spectres de K-théorie.

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un 1-morphisme de champs de Deligne-Mumford lisses. Sur le faisceau d'anneaux $f^*\mathcal{D}_{F'}$, il existe une structure naturelle de $\mathcal{D}_F$-module à gauche. Elle est définie en considérant le morphisme naturel sur les faisceaux tangents $T_F \longrightarrow f^*T_{F'}$, qui induit un morphisme sur les faisceaux des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_F \longrightarrow f^*\mathcal{D}_{F'}$. En tant que $(\mathcal{D}_F, f^{-1}\mathcal{D}_{F'})$-bi-module, $f^*\mathcal{D}_{F'}$ sera noté

$$\mathcal{D}_{F\to F'}$$

Le $\mathcal{D}_F$-module à droite dual ([Bo, 3.3]) de $\mathcal{D}_{F\to F'}$ sera alors noté

$$\mathcal{D}_f := \mathcal{D}_{F\to F'} \otimes_{\mathcal{O}_F} \omega_F$$

C'est un $(f^{-1}\mathcal{D}_{F'}, \mathcal{D}_F)$-bi-module. De façon explicite on a

$$\mathcal{D}_f = f^{-1}(\mathcal{D}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \omega_F^{\vee}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{F'}} \omega_{F'}$$

Introduisons les notations suivantes.

- Soit $B(f)$ la catégorie bi-compliciale de Waldhausen des complexes de $f^{-1}\mathcal{D}_{F'}$-modules injectifs, cohomologiquement bornés.
- Soit $A(f)$ la catégorie bi-compliciale de Waldhausen des triplets $(E_\bullet, F_\bullet, u)$, où $E_\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}_F$-modules plats sur $\mathcal{D}_F$, et à cohomologie bornée et cohérente, $F_\bullet$ est un objet de $B(f)$, et

  $$u : \mathcal{D}_f \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet \longrightarrow F_\bullet$$

  est un quasi-isomorphisme.

- Soit $C(f)$ la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_{F'}$-modules à cohomologie bornée.

Notons alors que le foncteur naturel

$$(E_\bullet, F_\bullet, u) \mapsto E_\bullet$$

de $A(f)$ dans la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_F$-modules à cohomologie bornée et cohérente, induit une équivalence au niveau des catégories dérivées (appliquer [Th, 1.9.7]), et donc un isomorphisme naturel dans $HoSp$ ([Th, 1.9.8])

$$K(A(f)) \simeq \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F)$$

De plus, le foncteurs

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{D}_f \otimes_{\mathcal{O}_F} - : & A(f) & \longrightarrow & B(f) \\ & (E_\bullet, F_\bullet, u) & \mapsto & F_\bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} f_* : & B(f) & \longrightarrow & C(f) \\ & F_\bullet & \mapsto & f_*(F_\bullet) \end{array}$$

sont "exacts" au sens de [Th]. Par composition on obtient un foncteur exact

$$f_+ : A(f) \longrightarrow C(f)$$

qui est une réalisation de l'image directe définie dans [Bo, 5], au niveau des catégories de complexes. Nous noterons

$$\mathbf{R}f_+ : D^b(\mathcal{D}_F) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_{F'})$$

le morphisme induit sur les catégories dérivées des complexes de $\mathcal{D}$-modules cohomologiquement bornés.

Preuve de (1):

Lemme 4.5 *Si f est un morphisme propre, alors le foncteur $\mathbf{R}f_+$ préserve la propriété d'être "à cohomologie cohérente".*

Preuve: La preuve donnée dans [A-L, 2.2.1.1] se traduit mot pour mot au cas des champs algébriques. Elle sera réécrite au cours de la démonstration de 4.10. Le lecteur vérifiera qu'il n'y a pas de cercle vicieux. □

Le lemme précédent permet donc de dire que le foncteur $\mathbf{R}f_+$ se factorise par

$$\mathbf{R}f_+ : A(f) \longrightarrow C'(f)$$

où $C'(f)$ est la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_{F'}$-modules à cohomologie cohérente et bornée. Il induit donc un morphisme dans $HoSp$

$$f_+ : K(A(f)) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F')$$

Et en composant avec l'isomorphisme canonique $\mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \simeq K(A(f))$, on obtient le morphisme cherché dans $HoSp$

$$f_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F')$$

Il reste à montrer que cela définit bien un foncteur, $F \mapsto \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F)$.

Lemme 4.6 *1. Soit $i : F \longrightarrow F'$ un morphisme représentable fini et non-ramifié, $p : F' \longrightarrow F''$ un morphisme lisse, et $f = p \circ i$. Alors, on a une égalité dans $HoSp$*

$$f_+ = p_+ \circ i_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F')$$

2. Soit $i : F' \longrightarrow F''$ un morphisme représentable fini et non-ramifié, $p : F \longrightarrow F'$ un morphisme lisse, et $f = i \circ p$. Alors, on a une égalité dans $HoSp$

$$f_+ = i_+ \circ p_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F')$$

Preuve: On ne démontrera que le premier point, le second se traitant de la même façon.

On va utiliser une construction différente de i_+ et p_+.

Commençons par le cas de $i : F \longrightarrow F'$, un morphisme représentable, fini et non-ramifié.

On sait alors que $\mathcal{D}_i$ est un $\mathcal{D}_F$-module localement libre ([Bo, 7.7]). Ainsi, comme i_* est exact, on peut définir i_+ au niveau des complexes de $\mathcal{D}_F$-modules à cohomologie bornée, par la formule

$$\begin{array}{rccc} i_+ : & A'(i) & \longrightarrow & C(p) \\ & E_\bullet & \mapsto & i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \end{array}$$

où $A'(i)$ est la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_F$-modules à cohomologie bornée et cohérente. Il est alors clair, que le morphisme induit sur les spectres de K-théorie

$$i_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \simeq K(A'(i)) \longrightarrow K(C(p)) \simeq \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F')$$

est égal au morphisme défini précédemment.

Passons au cas d'un morphisme lisse (non-nécessairement représentable)

$$p : F' \longrightarrow F''$$

Notons $\phi : \mathcal{D}_{p,\bullet} \longrightarrow \mathcal{D}_p$ la résolution $\mathcal{D}_{F'}$-localement libre de De Rham ([Bo, 5.3, (ii)]). Notons alors $A'(p)$ la catégorie bi-compliciale de Waldhausen des triplets

$$(E_\bullet, F_\bullet, u)$$

où $E_\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}_{F'}$-module à cohomologie cohérente et bornée, $F_\bullet$ un complexe de $p^{-1}\mathcal{D}_{F''}$-modules acycliques, et

$$u : \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} E_\bullet \longrightarrow F_\bullet$$

un quasi-isomorphisme. On pose alors

$$\begin{array}{rccc} p_+ : & A'(p) & \longrightarrow & C(f) \\ & (E_\bullet, F_\bullet, u) & \mapsto & p_*(F_\bullet) \end{array}$$

Il est alors clair, que le morphisme induit sur les spectres de K-théorie

$$p_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F') \simeq K(A'(p)) \longrightarrow K(C(f)) \simeq \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F'')$$

coincide avec celui défini précédemment.

Soit $A(f,i,p)$ la catégorie bi-compliciale de Waldhausen dont les objets sont les

$$(E_\bullet, F_\bullet, u, G_\bullet, v, w)$$

avec

- $(E_\bullet, F_\bullet, u)$ un objet de $A(f)$
- $v : \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$ est un quasi-isomorphisme, et $G_\bullet$ un complexe de $p^{-1}(\mathcal{D}_{F''})$-modules acycliques
- $w : i_*(F_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$ est un quasi-isomorphisme de complexes de $\mathcal{D}_{F''}$-modules

Considérons le diagramme "exact" de catégories bi-compliciales de Waldhausen

$$\begin{tikzcd} A(f) \arrow[rr, "f_+"] \arrow[dd, "a"'] & & C(f) \\ & A(f,i,p) \arrow[ul, "b"'] \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "d"] & \\ A'(i) \arrow[r, "i_+"'] & C(p) & A'(p) \arrow[l, "e"'] \arrow[uu, "p_+"'] \end{tikzcd}$$

Les foncteurs a, b, c, d et e étant les foncteurs canoniques

$$\begin{array}{rccc} a : & A(f) & \longrightarrow & A'(i) \\ & (E_\bullet, F_\bullet, u) & \mapsto & E_\bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} b : & A(f,i,p) & \longrightarrow & A(f) \\ & (E_\bullet, F_\bullet, u, G_\bullet, v, w) & \mapsto & (E_\bullet, F_\bullet, u) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} c : & A(f,i,p) & \longrightarrow & A'(i) \\ & (E_\bullet, F_\bullet, u, G_\bullet, v, w) & \mapsto & E_\bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} d: & A(f,i,p) & \longrightarrow & A'(p) \\ & (E_\bullet, F_\bullet, u, G_\bullet, v, w) & \mapsto & (\mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet, G_\bullet, v)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e: & A'(p) & \longrightarrow & C(p) \\ & (E_\bullet, F_\bullet, u) & \mapsto & E_\bullet \end{array}$$

Il est alors évident que $a \circ b = c$, et que $i_+ \circ c = e \circ d$.

De plus

$$(E_\bullet, F_\bullet, u, G_\bullet, v, w) \mapsto p_* w$$

induit un quasi-isomorphisme entre les foncteurs $f_+ \circ b$ et $p_+ \circ d$. Enfin, à l'aide de [Th, 1.9.7, 1.9.8], on montre que les morphismes e et a induisent des équivalences sur les catégories dérivées, et donc des isomorphismes dans $HoSp$ sur les spectres de K-théorie. Ainsi, lorsque que l'on considère le diagramme induit au niveau des spectres de K-théorie, on obtient un diagramme commutatif dans $HoSp$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \simeq K(A(f)) \arrow[rr, "f_+"] \arrow[dd, "a"'] & & K(C(f)) \simeq \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F'') \\
& K(A(f,i,p)) \arrow[ul, "b"'] \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "d"] & \\
\mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \simeq K(A'(i)) \arrow[r, "i_+"] & \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F') \simeq K(C(p)) \simeq \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F') & K(A'(p)) \simeq \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F') \arrow[l, "e"'] \arrow[uu, "p_+"']
\end{tikzcd}$$

Pour terminer la preuve, il nous reste à montrer que le morphisme

$$b : K(A(f,i,p)) \longrightarrow K(A(f))$$

est un isomorphisme. Pour cela il nous suffit de montrer que le foncteur $b : A(f,i,p) \longrightarrow A(f)$ induit une équivalence au niveau des catégories dérivées

$$\mathbf{R}b : D(A(f,i,p)) \longrightarrow D(A(f))$$

ce qui provient d'une nouvelle application des méthodes de [Th, 1.9.7, 1.9.8]. Montrons à titre d'exemple que $\mathbf{R}b$ est essentiellement surjectif.

Soit $(E_\bullet, F_\bullet, u)$ un objet de $D(A(f))$. Choisissons un résolution injective dans la catégorie des $p^{-1}\mathcal{D}_{F''}$-modules

$$v : \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$$

Comme $\mathcal{D}_{p,\bullet}$ est un complexe de $\mathcal{D}_{F'}$-modules localement libres, le morphisme naturel

$$can : \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \longrightarrow i_*(i^{-1}\mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)$$

est un isomorphisme dans $C(p)$.

De plus, comme $\mathcal{D}_i$ est plat sur $\mathcal{D}_F$, le quasi-isomorphisme

$$\phi : \mathcal{D}_{p,\bullet} \longrightarrow \mathcal{D}_p$$

induit un quasi-isomorphisme

$$\phi : i_*(i^{-1}\mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)) \longrightarrow i_*(i^{-1}\mathcal{D}_p \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)$$

Or, on sait que $\mathcal{D}_f$ est isomorphe à $i^{-1}\mathcal{D}_p \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_i$. On a donc un quasi-isomorphisme naturel

$$\phi \circ can^{-1} : \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \longrightarrow i_*(\mathcal{D}_f \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)$$

Enfin, comme i_* est exact, le morphisme

$$i_*(u) : i_*(\mathcal{D}_f \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \longrightarrow i_*(F_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme. Par composition, ceci induit un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \longrightarrow i_*(F_\bullet)$$

Donc, comme v est une résolution injective du membre de gauche, on en déduit qu'il existe un quasi-isomorphisme

$$w : i_*(F_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$$

Ainsi, l'objet $(E_\bullet, F_\bullet, u, G_\bullet, v, w)$ est un "antécédent" de $(E_\bullet, F_\bullet, u)$ par $\mathbf{R}b$. $\square$

Lemme 4.7 *1. Soit $i : F \longrightarrow F'$ et $j : F' \longrightarrow F''$ deux morphismes représentables, fini et non-ramifiés. Alors*

$$(j \circ i)_+ = j_+ \circ i_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F'')$$

2. Soit $p : F \longrightarrow F'$ et $q : F' \longrightarrow F''$ deux morphismes propres et lisses. Alors

$$(q \circ p)_+ = q_+ \circ p_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F'')$$

Preuve:

(1) Comme $\mathcal{D}_i$ (resp. $\mathcal{D}_j$) sont localement libre sur $\mathcal{D}_F$ (resp. $\mathcal{D}_{F'}$), on a, pour tout complexe de $\mathcal{D}_F$-modules à cohomologie bornée et cohérente $E_\bullet$, des isomorphismes fonctoriels en $E_\bullet$

$$\begin{aligned} j_+ \circ i_+(E_\bullet) &\simeq j_*(\mathcal{D}_j \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_+(E_\bullet)) \\ &\simeq j_*(\mathcal{D}_j \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)) \\ &\simeq j_*(i_*(i^{-1}\mathcal{D}_j \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)) \\ &\simeq (j \circ i)_*(\mathcal{D}_{j\circ i} \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \\ &\simeq (j \circ i)_+(E_\bullet) \end{aligned}$$

Ce qui montre (1).

(2) Soit $\mathcal{D}_{p,\bullet} \longrightarrow \mathcal{D}_p$ (resp. $\mathcal{D}_{q,\bullet} \longrightarrow \mathcal{D}_q$) la résolution de De Rham ([Bo, 5.3 (ii)]). Alors, comme $\mathcal{D}_q$ est plat sur $q^{-1}\mathcal{D}_{F'}$, le morphisme naturel

$$\phi : p^{-1}\mathcal{D}_{q,\bullet} \otimes_{q^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_{p,\bullet} \longrightarrow p^{-1}\mathcal{D}_q \otimes_{q^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_p \simeq \mathcal{D}_{q\circ p}$$

est un quasi-isomorphisme.

Notons $A''(p)$ (resp. $A''(q)$) la catégorie bi-compliciale de Waldhausen des complexes de $\mathcal{D}_F$-modules (resp. $\mathcal{D}_{F'}$-modules) acycliques, et à cohomologie cohérente et bornée.

Remarquons que si E est un $\mathcal{D}_F$-module acyclique, $\mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_F} E$ est un complexe de $p^{-1}\mathcal{D}_{F'}$-modules, localement isomorphes à une somme directe de E. C'est donc un complexe de $p^{-1}\mathcal{D}_{F'}$-modules acycliques. Ainsi, on peut définir des foncteurs exacts

$$\begin{array}{rccc} p_+ : & A''(p) & \longrightarrow & A''(q) \\ & E_\bullet & \mapsto & p_*(\mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_F} E) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q_+ : & A''(q) & \longrightarrow & C(q\circ p) \\ & E_\bullet & \mapsto & q_*(\mathcal{D}_{q,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} E) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} (q\circ p)_+ : & A''(p) & \longrightarrow & C(q\circ p) \\ & E_\bullet & \mapsto & (q\circ p)_*(p^{-1}\mathcal{D}_{q,\bullet} \otimes_{p^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_F} E) \end{array}$$

Il est immédiat que ces foncteurs induisent les morphismes définis plus haut

$$p_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F')$$
$$q_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F') \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F'')$$
$$(q\circ p)_+ : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F'')$$

Or, comme $\mathcal{D}_{q,\bullet}$ est localement libre sur $\mathcal{D}_{F'}$, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{array}{rl} q_+ \circ p_+(E_\bullet) & \simeq q_*(\mathcal{D}_{q,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_{F'}} p_*(\mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)) \\ & \simeq q_*(p_*(p^{-1}\mathcal{D}_{q,\bullet} \otimes_{p^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet)) \\ & \simeq (q\circ p)_*(p^{-1}\mathcal{D}_{q,\bullet} \otimes_{p^{-1}\mathcal{D}_{F'}} \mathcal{D}_{p,\bullet} \otimes_{\mathcal{D}_F} E_\bullet) \\ & \simeq (q\circ p)_+(E_\bullet) \end{array}$$

$\square$

On termine alors la preuve du point (1) en utilisant un lemme formel suivant.

Lemme 4.8 *Soit $H : Ob(\mathcal{DM}) \longrightarrow Ob(HoSp)$, une application. On suppose que pour tout morphisme propre $f : F \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{LDM}$, il existe un morphisme dans $HoSp$*

$$f_+ : H(F) \longrightarrow H(F')$$

qui vérifie les propriétés suivantes

- *si $f = p \circ i$, avec i un morphisme représentable fini et non-ramifié de $\mathcal{LDM}$, et p un morphisme lisse, alors*

$$f_+ = p_+ \circ i_+$$

- *si $f = i \circ p$, avec i un morphisme représentable fini et non-ramifié de $\mathcal{LDM}$, et p un morphisme lisse, alors*

$$f_+ = i_+ \circ p_+$$

- *si $i : F \longrightarrow F'$ et $j : F' \longrightarrow F''$ sont deux morphismes représentables finis, et non-ramifiés de $\mathcal{LDM}$, alors*

$$(j \circ i)_+ = j_+ \circ i_+$$

- *si $p : F \longrightarrow F'$ et $q : F' \longrightarrow F''$ sont deux morphismes propres et lisses de $\mathcal{LDM}$, alors*

$$(q \circ p)_+ = q_+ \circ p_+$$

Alors, pour tout morphisme propre $f : F \longrightarrow F'$ et $g : F' \longrightarrow F''$ de $\mathcal{LDM}$, on a

$$(g \circ f)_+ = g_+ \circ f_+$$

Preuve: On considère le diagramme commutatif suivant de $\mathcal{LDM}$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & F' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"] & F'' \\
F \times F' \arrow[ur, "p"'] \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & F' \times F'' \arrow[ur, "q"'] & \\
F \times F' \times F' \times F'' \arrow[ur, "r"'] & &
\end{tikzcd}$$

où i, k et j sont les graphes de f, $j \circ p$ et g, et p, q, r les projections. On a alors

$$\begin{aligned}
g_+ \circ f_+ &= q_+ \circ j_+ \circ p_+ \circ i_+ \\
&= q_+ \circ h_+ \circ i_+ \\
&= q_+ \circ r_+ \circ k_+ \circ i_+ \\
&= (q \circ r)_+ \circ (k \circ i)_+ \\
&= (g \circ f)_+
\end{aligned}$$

□

Preuve de (2): Il faut montrer que $\mathbf{R}f_+$ préserve les propriétés d'être à cohomologie holonome et à cohomologie holonome régulier. La fonctorialité se démontre alors exactement comme dans le point (1).

Lemme 4.9 *Le foncteur* $\mathbf{R}f_+$ *preserve la propriété d'être "à cohomologie holonome (resp. "à cohomologie holonome régulier").*

<u>**Preuve:**</u> Comme c'est une assertion locale sur F'_{et}, le cas où f est représentable se traite comme celui des schémas ([Bo, 10.1, 12.2]). De plus, on peut toujours supposer que F' est un schéma affine Y.

Soit $F_1 \hookrightarrow F$ le support réduit d'un $\mathcal{D}_F$-module holonome (resp. holonome régulier) $\mathcal{M}$. Soit $U \hookrightarrow F_1$ un sous-champ ouvert dense, lisse sur k, qui est une gerbe sur son espace de modules V, que l'on peut supposer lisse et affine. Notons

$$i : U \hookrightarrow F$$

l'immersion canonique. On considère alors le triangle dans la catégorie dérivée des $\mathcal{D}_F$-modules à cohomologie bornée et holonome (resp. holonome régulier)

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{N} \arrow[dr, "a"] & \\ i_+ \circ i^! \mathcal{M} \arrow[ur, "+1"] & & \mathcal{M} \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{N}$ est le cone du morphisme naturel

$$a : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{R}i_+ \circ i^! \mathcal{M}$$

Alors, comme a et un isomorphisme sur U, $\mathcal{N}$ possède un support de dimension strictement plus petite que celui de $\mathcal{M}$. En raisonnant par récurrence, il nous suffit donc de démontrer le lemme pour des $\mathcal{D}_F$-modules de la forme $i_+ \circ \mathcal{M}$, où $i : U \hookrightarrow F$ est une immersion localement fermée, U une gerbe sur un schéma lisse et affine V, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_U$-module holonome (resp. holonome régulier). Ainsi, on peut supposer que F est une gerbe sur un schéma affine et lisse X.

Le morphisme $f : F \longrightarrow Y$ se factorise alors par

$$f : \ F \xrightarrow{p} X \xrightarrow{g} Y$$

où p est la projection sur l'espace de modules. Le cas de $\mathbf{R}g_+$ est déjà connu, car g est représentable. Il nous reste donc à traiter le cas de $\mathbf{R}p_+$. En localisant sur X_{et}, on se ramène au cas où $F = [X/H]$, avec H un groupe fini opérant trivialement sur X. Alors, la donnée d'un $\mathcal{D}_F$-module est équivalente à la donnée d'un $\mathcal{D}_X$-module H-équivariant. De plus le foncteur $\mathbf{R}p_+ \simeq p_+$ est exact, et associe à un $\mathcal{D}_X$-module équivariant $\mathcal{M}$, le sous $\mathcal{D}_X$-module des invariants par H, $\mathcal{M}^H$. Comme ce sous-modules est un facteur direct de $\mathcal{M}$, il est holonome (resp. holonome régulier) si $\mathcal{M}$ l'est. $\square$

4.1.2 Comparaison entre $\mathbf{G}$ et $\mathbf{K}^{\mathcal{D}}$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.10 *Pour tout champ F dans $\mathcal{LDM}$, il existe un isomorphisme dans $HoSp$*

$$\delta_F^{-1} : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F)$$

qui commute avec les images directes de morphismes propres.

Preuve: On définit un foncteur exact

$$\begin{array}{cccc} \delta_F^{-1}: & \mathbf{Coh}(F) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}^{\mathcal{D}} \\ & \mathcal{E} & \mapsto & \mathcal{D}_F \otimes_{\mathcal{O}_F} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_F} \omega_F^{\vee}) \end{array}$$

où $\omega_F^{\vee}$ est le dual du faisceau inversible canonique $\omega_F := Det\Omega_F^1$.

Ce foncteur induit un morphisme sur les spectres de K-théorie

$$\delta_F^{-1} : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F)$$

Lemme 4.11 *Le morphisme δ_F^{-1} est un isomorphisme dans $HoSp$*

Preuve: Comme tout $\mathcal{D}$-module admet une bonne filtration, le dévissage de [Q, 6.7], implique que le foncteur $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{D}_F \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{E}$ induit un isomorphisme entre les spectres $\mathbf{G}(F)$ et $\mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F)$. De plus, comme $\omega_F^{\vee}$ est inversible, le foncteur $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_F} \omega_F^{\vee}$ induit aussi une équivalence sur le spectre $\mathbf{G}(F)$. Ainsi, par composition δ_F^{-1} est un isomorphisme dans $HoSp$. $\Box$

Pour la covariance de δ_F^{-1}, on factorise tout morphisme propre $f : F \longrightarrow F'$ par son graphe

$$f : F \xrightarrow{i} F \times F' \xrightarrow{p} F'$$

On se ramène donc à deux cas, celui où $f = i$ est représentable fini et non-ramifié, et celui où $f = p$ est un morphisme lisse.

Commençons par le cas où f est fini et non-ramifié. Comme i_+ est alors exact, on peut réaliser l'image directe en K-théorie par la foncteur

$$\begin{array}{cccc} i_+ : & \mathbf{Coh}^{\mathcal{D}}(F) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}^{\mathcal{D}}(F') \\ & \mathcal{M} & \mapsto & i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} \mathcal{M}) \end{array}$$

Comme $\mathcal{D}_i$ est localement libre sur $\mathcal{D}_F$, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} i_+ \circ \delta_F^{-1}(\mathcal{E}) &\simeq i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} \rho(\mathcal{E})) \\ &\simeq i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{D}_F} \mathcal{D}_F \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_F} \omega_F^{\vee}) \\ &\simeq i_*(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_F} \omega_F^{\vee}) \\ &\simeq i_*(i^{-1}(\mathcal{D}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \omega_{F'}^{\vee}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{F'}} \omega_F \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_F} \omega_F) \\ &\simeq i_*(i^{-1}(\mathcal{D}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \omega_{F'}^{\vee}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{F'}} \mathcal{E}) \\ &\simeq \mathcal{D}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \omega_{F'}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} i_*(\mathcal{E}) \\ &\simeq \delta_F^{-1}(i_*(\mathcal{E})) \end{aligned}$$

Le cas où f est un morphisme lisse se traite d'une manière analogue, en utilisant la résolution de De Rham de $\mathcal{D}_f$. $\square$

Définition 4.12 *On pose*

$$\delta_F := (\delta_F^{-1})^{-1} : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(F)$$

En localisant cette construction pour la topologie étale, on obtient une comparaison entre $\underline{\mathbf{G}}$ et $\underline{\mathbf{K}}^{\mathcal{D}}$.

Théorème 4.13 *Pour tout champ F dans $\mathcal{LDM}$, il existe un isomorphisme dans $HoSp$*

$$\delta_F^{-1} : \underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{\mathcal{D}}(F)$$

qui commute avec les images directes de morphismes propres représentables.

De plus, on a un diagramme commutatif dans $HoSp$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(F) \arrow[r, "\delta_F^{-1}"] \arrow[d, "can"'] & \mathbf{K}^{\mathcal{D}}(F) \arrow[d, "can"] \\
\underline{\mathbf{G}}(F) \arrow[r, "\delta_F^{-1}"] & \underline{\mathbf{K}}^{\mathcal{D}}(F)
\end{tikzcd}$$

Preuve: C'est la même que celle de 4.13. $\square$

Le point fondamental que l'on utilisera par la suite, est le calcul explicite de δ_F au niveau du K_0.

Proposition 4.14 *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_F$-module cohérent sur un champ F de $\mathcal{LDM}$. Soit $\mathcal{M}^i \hookrightarrow \mathcal{M}^{i+1} \hookrightarrow \mathcal{M}$ une bonne filtration de $\mathcal{M}$, et $Gr\mathcal{M}$ son module gradué, vu comme faisceau cohérent sur le champ cotangent T^*F. Alors, on a une égalité dans $\mathbf{G}_0(F)$*

$$\delta_F([\mathcal{M}]) = e^*[Gr\mathcal{M}]$$

où $e : F \hookrightarrow T^*F$ est la section nulle.

On a aussi

$$\delta_F([\mathcal{M}]) = DR(\mathcal{M})$$

où $DR(\mathcal{M})$ est la classe du complexe de De Rham de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{G}_0(F)$ (au sens de [A]).

Preuve: C'est la même que [A-L, 1.2.1]. $\square$

4.2 Etude des spectres de K-théorie des $\mathcal{D}$-modules holonomes

4.2.1 Le lemme de Kashiwara

Dans cette section nous allons rappeler Le lemme de Kashiwara et en déduire de très fortes propriétés pour les spectres de K-théorie des $\mathcal{D}$-modules holonomes.

Théorème 4.15 *("Lemme de Kashiwara") Soit $j : F' \hookrightarrow F$ une immersion fermée de champs de $\mathcal{LDM}$, et $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion ouverte complémentaire. Alors on a*

$$j^! \circ j_+ = Id : \mathbf{K}^h(F) \longrightarrow \mathbf{K}^h(F)$$

et

$$j_+ \circ j^! + i_+ \circ i^! = Id : \mathbf{K}^h(F) \longrightarrow \mathbf{K}^h(F)$$

dans $HoSp$.

Il en est de même pour les foncteurs $\underline{\mathbf{K}}^h$, $\mathbf{K}^{h,r}$ et $\underline{\mathbf{K}}^{h,r}$.

Preuve: Donnons la démonstration pour le cas du foncteur $\mathbf{K}^h$. Le cas de $\mathbf{K}^{h,r}$ se traite de la même façon. Par localisation on obtiendra alors le résultat pour les foncteurs $\underline{\mathbf{K}}^h$ et $\underline{\mathbf{K}}^{h,r}$.

Soit $\mathcal{HOL}(F\ on\ F')$ la catégorie des $\mathcal{D}_F$-modules holonome dont le support est contenu dans F'. Les mêmes calculs que ceux faits dans [Bo, 7.11] montrent que les foncteurs j_+ et $j^!$ définissent des équivalences, "inverses l'une de l'autres", entre les catégories $\mathcal{HOL}(F')$ et $\mathcal{HOL}(F\ on\ F')$ (c'est le "lemme de Kashiwara").

Soit $\mathbf{K}^h(F\ on\ F')$ le spectre de K-théorie de la catégorie $\mathcal{HOL}(F\ on\ F')$. On notera

$$c : \mathbf{K}^h(F\ on\ F') \longrightarrow \mathbf{K}(F)$$

le morphisme induit par l'inclusion naturelle. Notons aussi

$$j_+^{F'} : \mathbf{K}^h_*(F') \longrightarrow \mathbf{K}^h_*(F\ on\ F')$$

$$j^!_{F'} : \mathbf{K}^h_*(F\ on\ F') \longrightarrow \mathbf{K}^h_*(F')$$

les morphisme induits par les foncteurs exacts j_+ et $j^!$. Ils vérifient clairement $j^!_{F'} \circ j_+^{F'} = Id$ et $j_+^{F'} \circ j^!_{F'} = Id$. De plus, on a $j_+ = c \circ j_+^{F'}$ et $j^! \circ c = j^!_{F'}$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} j^! \circ j_+ &= j^! \circ c \circ j_+^{F'} \\ &= j^!_{F'} \circ j_+^{F'} \\ &= Id \end{aligned}$$

Le théorème de localisation de [Q, 5.5], implique que l'on a un triangle dans $HoSp$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{K}^h(F\ on\ F') \arrow[dr, "c"] & \\ \mathbf{K}^h(U) \arrow[ur, "-1"] & & \mathbf{K}(F) \arrow[ll, "i^!"] \end{tikzcd}$$

De plus, comme $i^!$ possède une section $i_+ : \mathbf{K}^h(U) \longrightarrow \mathbf{K}^h(F)$, ce triangle se scinde, et donne lieu à une suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}^h_*(F\ on\ F') \xrightarrow{c} \mathbf{K}^h_*(F) \xrightarrow{i^!} \mathbf{K}^h_*(U) \longrightarrow 0$$

Et en utilisant l'équivalence entre $\mathcal{HOL}(F\ on\ F')$ et $\mathcal{HOL}(F')$, on trouve une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}^h_*(F') \xrightarrow{j_+} \mathbf{K}^h_*(F) \xrightarrow{i^!} \mathbf{K}^h_*(U) \longrightarrow 0$$

Ecrivons alors

$$Id = \alpha + i_+ i^!$$

Ainsi, $i^! = i^! \circ \alpha + i^!$, et donc $i^! \circ \alpha = 0$. Ceci montre que l'on peut écrire $\alpha = j_+ \circ \beta$, avec $\beta : \mathbf{K}^h_*(F') \longrightarrow \mathbf{K}^h_*(F)$. Le fait que $j^! \circ j_+ = Id$ implique alors que $j^! = \beta + j^! \circ i_+ \circ i^!$.

Il ne nous reste qu'à montrer que $j^! \circ i_+ = 0$.

Soit A la catégorie bi-compliciale Waldhausen des triplets $(E_\bullet, F_\bullet, u)$, où $E_\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}_U$-modules acycliques à cohomologie holonome et bornée, et

$$u : i_* E_\bullet \longrightarrow F_\bullet$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de $\mathcal{D}_F$-modules avec $F_\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_F$-modules plats. Soit B la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_{F'}$-modules à cohomologie holonome et bornée. On veut montrer que l'unique transformation naturelle de foncteurs exacts

$$0 \Rightarrow i_+ \circ j^! : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ (E_\bullet, F_\bullet, u) & \mapsto & j^*(F_\bullet) \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme. Comme ceci est local sur F_{et}, on peut se ramener au cas où F est un schéma affine. Le résultat provient alors de [Bo, VI 8.5]. □

Corollaire 4.16 *Soit*

$$\begin{tikzcd} F'_1 \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f_1"'] & F' \arrow[d, "f"] \\ F_1 \arrow[r, "j"'] & F \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien de champ de $\mathcal{LDM}$, avec j une immersion localement fermée. Alors on a

$$j^! \circ f_+ = (f_1)_+ \circ (j')^! : \mathbf{K}^h(F) \longrightarrow \mathbf{K}^h(F)$$

Il en est de même pour les foncteurs $\underline{\mathbf{K}}^h$, $\mathbf{K}^{h,r}$ et $\underline{\mathbf{K}}^{h,r}$.

Preuve: Comme pour le théorème, nous ne donnerons la preuve que dans le cas du foncteur $\mathbf{K}^h_*$.

De la cas où j est une immersion ouverte, le corollaire provient du fait que les images directes sont compatibles avec les changements de bases étales.

Supposons maintenant que j est une immersion fermée. Notons $i : F - F_1 \hookrightarrow F$ et $i' : F' - F'_1 \hookrightarrow F'$, les immersions ouvertes complémentaires, et $g : F' - F'_1 \longrightarrow F - F_1$ le morphisme induit.

Soit $x \in \mathbf{K}^h_*(F')$. A l'aide du théorème 4.15 on peut écrire

$$x = j'_+(j')^!(x) + i'_+(i')^+(x)$$

On a donc

$$\begin{aligned} j^! f_+(x) &= j^! f_+ j'_+(j')^!(x) + j^! f_+ i'_+(i')^!(x) \\ &= j^! j_+(f_1)_+(j')^!(x) + j^! i_+ g_+ i'_+(x) \\ &= (f_1)_+(j')^!(x) \end{aligned}$$

car $j^! i_+ = 0$.

Dans le cas général, on factorise j en une immersion fermée suivie d'une immersion ouverte, et on utilise les deux cas précédents. □

Corollaire 4.17 *Soit F un champ de $\mathcal{LDM}$, et $j_i : F_i \hookrightarrow F$ des sous-champs localement fermés de $\mathcal{LDM}$ formant une stratification de F. Alors*

$$\sum_i : (j_i)_+ \circ j_i^! = Id : \mathbf{K}^h(F) \longrightarrow \mathbf{K}^h(F)$$

Il en est de même pour les foncteurs $\underline{\mathbf{K}}^h$, $\mathbf{K}^{h,r}$ et $\underline{\mathbf{K}}^{h,r}$.

Preuve: Ce corollaire se déduit immédiatement du théorème précédent par une récurrence sur le nombre de sous-champs F_i. □

4.2.2 Fonctions constructibles à valeurs dans un foncteur et théorèmes de dévissage

Commençons par introduire la notion de fonctions constructibles à valeurs dans un foncteur.

Rappelons pour cela que pour tout point $x \in |F|$, on dispose d'un morphisme canonique

$$i_x : \widetilde{x} \longrightarrow F$$

Si x est un point de F, et $H : \mathcal{LDM} \longrightarrow Ab$ un foncteur contravariant, nous noterons

$$H(\widetilde{x}) := colim_U H(U)$$

où U parcourt les sous-champs ouverts non-vides et lisses de $\overline{\{x\}}$. On dispose alors d'un morphisme de restriction

$$i_x^* : H(F) \longrightarrow H(\widetilde{x})$$

Définition 4.18 *Soit $H : \mathcal{LDM} \longrightarrow Ab$ un foncteur contravariant. On définit le groupe des fonctions constructibles sur F à coefficients dans H par*

$$F_{ct}H(F) := \{(\sigma_x) \in \prod_{x \in |F|} H(\widetilde{x}) \ / \ \forall x \in |F|,$$
$$\exists U \textit{ ouvert dense de } \overline{\{x\}}, \textit{ et } \sigma_U \in H(U) \ / \ \forall y \in |U| \ \sigma_y = i_y^*(\sigma_U)\}$$

Par exemple, si H est un foncteur constant défini par un groupe abélien A, $F_{ct}H(F)$ coincide avec le groupe des fonctions constructibles de M à valeurs dans A, où M est l'espace de modules de F.

Notons qu'il existe un morphisme naturel

$$\begin{array}{ccc} H(F) & \longrightarrow & F_{ct}H(F) \\ \sigma & \mapsto & ((i_x^*(\sigma))_{x \in |F|}) \end{array}$$

Proposition 4.19 *Pour tout foncteur contravariant*

$$H : \mathcal{LDM} \longrightarrow Ab$$

on peut munir $F \mapsto F_{ct}H(F)$ d'une unique structure de foncteur contravariant compatible avec le morphisme naturel

$$H(F) \longrightarrow F_{ct}H(F)$$

Preuve: Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de $\mathcal{LDM}$, et (σ_x) un élément de $F_{ct}H(F')$. Soit $y \in |F|$ un point de F au-dessus d'un point x de F', et $f_y : \widetilde{y} \longrightarrow \widetilde{x}$ le morphisme induit. On pose alors

$$f^*(\sigma_x)_y := f_y^*(\sigma_x)$$

Cette définition vérifie clairement les hypothèses demandées. $\square$

Théorème 4.20 *Il existe des isomorphismes compatibles avec les images réciproques sur* $\mathcal{LDM}$

$$\mathbf{K}^h_*(F) \simeq F_{ct}\mathbf{K}^\nabla_*(F)$$

$$\mathbf{K}^{h,r}_*(F) \simeq F_{ct}\mathbf{K}^{\nabla,r}_*(F)$$

$$\underline{\mathbf{K}}^h_*(F) \simeq F_{ct}\underline{\mathbf{K}}^\nabla_*(F)$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{h,r}_*(F) \simeq F_{ct}\underline{\mathbf{K}}^{\nabla,r}_*(F)$$

Preuve: Comme pour le théorème 4.15, on ne démontrera ce résultat que pour le foncteur $\mathbf{K}^h_*$.

Pour un champ F (supposé connexe) dans $\mathcal{LDM}$, on considère

$$\gamma_F := \prod_{x\in|F|} j^!_x : \mathbf{K}^h_*(F) \longrightarrow \prod_{x\in|F|} \mathbf{K}^h_*(\widetilde{x})$$

Comme la catégorie des $\mathcal{D}_{\widetilde{x}}$-modules est équivalente à la catégorie des connexions sur $\widetilde{x}$, la continuité du foncteur de K-théorie implique que l'inclusion naturelle induit un isomorphisme

$$\mathbf{K}^\nabla_*(\widetilde{x}) \simeq \mathbf{K}^h_*(\widetilde{x})$$

Le morphisme obtenu

$$\mathbf{K}^h_*(F) \longrightarrow \prod_{x\in|F|} \mathbf{K}^\nabla_*(\widetilde{x})$$

est contravariant par définition.

Remarquons alors que l'image d'un élément $\sigma \in \mathbf{K}^h_*(F)$ par γ_F est un élément constructible dans $\prod_{x\in|F|} \mathbf{K}^\nabla_*(\widetilde{x})$. Ceci est équivalent au fait que pour tout élément $\sigma \in \mathbf{K}^h_*(F)$, il existe un sous-champ ouvert $i : U \hookrightarrow F$ tel que $i^!\sigma$ est dans l'image de $\mathbf{K}^\nabla_*(U)$. Soit ξ le point générique de F. Comme le morphisme naturel

$$\mathbf{K}^\nabla_*(\widetilde{\xi}) \longrightarrow \mathbf{K}^h_*(\widetilde{\xi})$$

est un isomorphisme, pour tout $\sigma \in \mathbf{K}^h_*(F)$, il existe un sous-champ ouvert lisse $U \hookrightarrow F$ non vide, un élément $\sigma' \in \mathbf{K}^\nabla(U)$, tel que $i^!_\xi(\sigma) = i^!_\xi(\sigma')$. Ce qui implique qu'il existe un ouvert lisse $j : V \hookrightarrow U \hookrightarrow F$, non vide, avec $j^!(\sigma) = j^!(\sigma')$. Ainsi, $j^!(\sigma)$ est dans l'image de $\mathbf{K}^\nabla_*(V)$.

Montrons alors que γ_F induit un isomorphisme de $\mathbf{K}^h_*(F)$ sur $F_{ct}\mathbf{K}^\nabla_*(F)$.

Soit $\sigma \in \mathbf{K}^h_*(F)$, et supposons que $\gamma_F(\sigma) = 0$. En particulier si ξ est le point générique de F, $i^!_\xi(\sigma) = 0$, et donc il existe un sous-champ ouvert non-vide lisse $j_0 : F_0 \hookrightarrow F$ tel que $j^!_0(\sigma) = 0$. Soit x un des points génériques du complémentaire réduit $F' = (F - U)_{red}$. Alors $i^!_x(\sigma) = 0$.

On peut donc trouver un ouvert non-vide lisse de F_1, $j_1 : F_1 \hookrightarrow F_0 \hookrightarrow F$, tel que $j_1^!(\sigma) = 0$. Ainsi, par récurrence noethérienne on trouve une stratification de F par des sous-champs localement fermés et lisses, $j_i : F_i \longrightarrow F$, tel que

$$j_i^!(\sigma) = 0 \; \forall \; i$$

Le corollaire 4.17 implique alors que

$$\sigma = \sum_i (j_i)_+ \circ j_i^!(\sigma) = 0$$

Ceci montre que γ est injective.

Soit $(\sigma_x) \in F_{ct}\mathbf{K}_*^\nabla(F)$. Par définition, il existe une stratification de F par des sous-champs localement fermés et lisses, $j_i : F_i \hookrightarrow F$, et des éléments $\sigma_i \in \mathbf{K}^\nabla(F_i)$, tels que

$$i_x^!(\sigma_i) = \sigma_x \quad \forall \; x \in |F_i|$$

Posons

$$\sigma = \sum_i (j_i)_+(\sigma_i)$$

Alors, le corollaire 4.16, implique que, pour $x \in |F_i|$

$$i_x^!(\sigma) = i_x^!(\sigma_i) = \sigma_x$$

Ce qui montre que $\gamma_F(\sigma) = (\sigma_x)$. $\square$

Par la suite, si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme de $\mathcal{LDM}$, nous noterons

$$f_+ : F_{ct}\mathbf{K}_*^\nabla(F) \longrightarrow F_{ct}\mathbf{K}_*^\nabla(F')$$

le morphisme défini par le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}_*^h(F) \arrow[r, "f_+"] \arrow[d, "\gamma_F"'] & \mathbf{K}_*^h(F') \arrow[d, "\gamma_{F'}"] \\
F_{ct}\mathbf{K}_*^\nabla(F) \arrow[r, "f_+"'] & F_{ct}\mathbf{K}_*^\nabla(F')
\end{tikzcd}$$

On définit de la même manière des images directes sur les foncteurs $F_{ct}\mathbf{K}_*^{\nabla,r}$, $F_{ct}\underline{\mathbf{K}}_*^\nabla$ et $F_{ct}\underline{\mathbf{K}}_*^\nabla$. Remarquons que pour les deux derniers, ces images directes ne sont définies que pour des morphismes représentables.

Par la suite nous identifierons $\mathbf{K}_*^h$ avec $F_{ct}\mathbf{K}_*^\nabla$ et $\mathbf{K}_*^{h,r}$ avec $F_{ct}\mathbf{K}_*^{\nabla,r}$ par les isomorphismes 4.20.

Proposition 4.21 *Les foncteurs covariants $\underline{\mathbf{K}}_*^h(-)$ et $\underline{\mathbf{K}}_*^{h,r}(-)$, de la catégorie $\mathcal{LDM}$ et morphismes représentables, s'étendent de façon unique en des foncteurs covariants sur $\mathcal{LDM}$.*

On a alors, pour tout morphisme de $\mathcal{LDM}$, $f : F \longrightarrow F'$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{K}}^h_*(F) \arrow[r, "\gamma_F"] \arrow[d, "f_+"'] & \underline{\mathbf{G}}_*(F) \arrow[d, "f_*"] \\ \underline{\mathbf{K}}^h_*(F') \arrow[r, "\gamma_{F'}"] & \underline{\mathbf{G}}_*(F') \end{tikzcd}$$

Preuve: Nous ne démontrerons cette proposition que pour le foncteur $\underline{\mathbf{K}}^h_*(-)$, le second cas se traitant de façon similaire.

Commençons par l'unicité.

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de $\mathcal{LDM}$, et $\sigma \in \underline{\mathbf{K}}^h_*(F)$. On peut choisir une stratification $j : F_i \hookrightarrow F$ de F, telle que chaque F_i soit une gerbe triviale sur un schéma lisse X_i, et de plus qu'il existe $\sigma_i \in \underline{\mathbf{K}}^h_*(F_i)$, avec $\sigma = \sum_i (j_i)_+(\sigma_i)$. Or, si on note $p_i : X_i \longrightarrow F_i$ une section, le morphisme induit

$$(p_i)_+ : \underline{\mathbf{K}}^h_*(X_i) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^h_*(F_i)$$

est surjectif. On écrit alors $\sigma_i = (p_i)_+(\alpha_i)$. Mais comme les morphismes $g_i : X_i \longrightarrow F$, et $h_i : X_i \longrightarrow F'$ sont représentables, l'image directe de σ, si elle existe, doit vérifier

$$f_+(\sigma) = \sum_i f_+(g_i)_+(\alpha_i) = \sum_i (h_i)_+(\alpha_i)$$

Elle est donc déterminée uniquement par $(h_i)_+$ et $(g_i)_+$.

Notons toujours $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de $\mathcal{LDM}$, et $\sigma \in \underline{\mathbf{K}}^h_*(F)$.

Si F et F' sont des gerbes lisses sur des espaces algébriques lisses X et X', les morphismes naturels induits par les projections $p : F \longrightarrow X$ et $p' : F' \longrightarrow X'$

$$p^* : \underline{\mathbf{K}}^h_*(X) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^h_*(F)$$
$$(p')^* : \underline{\mathbf{K}}^h(X') \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^h(F')$$

sont des isomorphismes. Notons m et m' les ordres de ramifications de F et F' sur X et X'. On définit alors l'image directe par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{K}}^h_*(F) \arrow[r, "f_+"] & \underline{\mathbf{K}}^h_*(F') \\ \underline{\mathbf{K}}^h_*(X) \arrow[u, "\frac{1}{m}\cdot p^*"] \arrow[r, "Mf_+"'] & \underline{\mathbf{K}}^h_*(X') \arrow[u, "\frac{1}{m'}\cdot (p')^*"'] \end{tikzcd}$$

où $Mf : X \longrightarrow X'$ est le morphisme induit sur les espaces de modules. Dans le cas où f est quelconque, on trouve des stratifications $j'_i : F'_i \hookrightarrow F'$ et $j_k : F_k \hookrightarrow F$ par des gerbes lisses et compatible avec f (i.e. une strate est envoyée dans une strate). Pour chaque k, on note $f(k)$ un entier tel que $f(F_k) \hookrightarrow F'_{f(k)}$, et

$$f_k : F_k \longrightarrow F_{f(k)}$$

le morphisme induit. On pose alors

$$f_+(\sigma) := \sum_k (j'_{f(k)})_+ (f_k)_+ j_k^!(\sigma)$$

Comme l'ensemble des stratifications est filtrant, on vérifie que cette définition ne dépend pas des choix des F'_i, F_k, $f(k)$, et définit sur $\underline{\mathbf{K}}^h_*(-)$ une structure de foncteur covariant, compatible avec celle définie précédemment pour les morphismes représentables. $\square$

4.3 Les théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-modules

4.3.1 Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch en $\mathbf{K}^{\mathcal{D}}$-théorie

Théorème 4.22 *Pour chaque F objet de $\mathcal{LDM}$, il existe un unique morphisme*

$$\tau_F^{rep,\mathcal{D}} : \mathbf{K}^{\mathcal{D}}_*(F) \longrightarrow H^{rep}_\bullet(F,*)_{\mathbf{Q}}$$

tel que

1. *si F est dans $\mathcal{QLDM}$, alors*

$$\begin{array}{cccc} \tau_F^{rep,\mathcal{D}} : & \mathbf{K}^{\mathcal{D}}_*(F) & \longrightarrow & H^{rep}_\bullet(F,*) \\ & x & \mapsto & Td^{rep}(F).Ch^{rep}(\delta_F(x)) \end{array}$$

   De même, si X est un schéma quasi-projectif, $\tau_X^{rep,\mathcal{D}}$ coincide avec le morphisme défini dans [A-L, 3.4].

2. *pour tout morphisme propre de $\mathcal{LDM}$, $f : F \longrightarrow F'$, on a*

$$f_* \circ \tau_F^{rep,\mathcal{D}} = \tau_{F'}^{rep,\mathcal{D}} \circ f_+$$

3. *si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme représentable et étale de champs de $\mathcal{LDM}$, alors*

$$\tau_F^{rep,\mathcal{D}} \circ f^!(x) = f^* \circ \tau_{F'}^{rep,\mathcal{D}}(x)$$

   pour tout $x \in \mathbf{K}^{\mathcal{D}}_0(F')$.

Preuve: On pose
$$\tau_F^{rep,\mathcal{D}} := \tau_F^{rep} \circ \delta_F$$
et on compose le théorème précédent avec le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch 3.36. $\square$

Remarquons que l'on peut composer ce théorème avec le morphisme canonique
$$\mathbf{K}_*^h(F) \longrightarrow \mathbf{K}_*^{\mathcal{D}}(F)$$
On notera la transformation de Riemann-Roch obtenue par
$$\tau_F^{rep,h} : \mathbf{K}_*^h(F) \longrightarrow H_{rep}^{\bullet}(F,*)$$

4.3.2 Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch en $\mathbf{K}^h$-cohomologie

Théorème 4.23 *Pour chaque F objet de $\mathcal{LDM}$, il existe un unique morphisme*
$$\tau_F^h : \underline{\mathbf{K}}_*^h(F) \longrightarrow H_\bullet(F,*)_{\mathbf{Q}}$$
tel que

1. *si F est dans $\mathcal{QLDM}$, alors*
$$\begin{array}{cccc} \tau_F^h : & \underline{\mathbf{K}}_*^h(F) & \longrightarrow & H_\bullet(F,*)_{\mathbf{Q}} \\ & x & \mapsto & Td(F).Ch(\delta_F(x)) \end{array}$$
si X est un espace algébrique lisse, alors τ_X^h coincide avec le morphisme défini dans [A-L, 3.4].

2. *pour tout morphisme propre de $\mathcal{LDM}$, $f : F \longrightarrow F'$, on a*
$$f_* \circ \tau_F^h = \tau_{F'}^h \circ f_+$$

3. *si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme représentable et étale de champs de $\mathcal{LDM}$, alors*
$$\tau_F^h \circ f^!(x) = f^* \circ \tau_{F'}^h(x)$$
pour tout $x \in \underline{\mathbf{K}}_0^h(F')$.

Preuve: On pose $\tau_F^h := \tau_F \circ \delta_F$, où on a encore noté δ_F le morphisme composé
$$\underline{\mathbf{K}}^h(F) \xrightarrow{nat} \underline{\mathbf{K}}^{\mathcal{D}}(F) \xrightarrow{\delta_F} \underline{\mathbf{K}}(F)$$
Le seul point non trivial est le point (2), dans le cas où f est non représentable.

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre, et $\sigma \in \underline{\mathbf{K}}_*^h(F)$. A l'aide de [D-M] et de la résolution des singularité, on peut trouver un schéma lisse X, muni d'un morphisme propre, surjectif et génériquement fini

$p : X \longrightarrow F$. En raisonnant par récurrence noethérienne, on peut supposer que p est tel que, pour tout sous-champ fermé irréductible $F_1 \hookrightarrow F$, il existe une composante connexe de X au-dessus de F_1, sur laquelle p est génériquement fini.

Sous ces hypothèse, le morphisme

$$p_+ : \underline{\mathbf{K}}_*^h(X) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_*^h(F)$$

est surjectif. En effet, soit $j_i : F_i \hookrightarrow F$ une stratification par des sous-champs lisses, et $k_i : X_i \hookrightarrow X$ des sous-espace localement fermés, tel que

$$p : X_i \longrightarrow F_i$$

soit étale et fini. Une utilisation de 4.17 nous ramène donc au cas où p est un morphisme étale et fini. Mais alors, on a

$$p_+p^!(\sigma) = m.\sigma$$

où m est le degré de X sur F. Ceci montre que p_+ est surjectif.

Soit alors $\sigma' \in \underline{\mathbf{K}}_*^h(X)$, avec $\sigma = p_+(\sigma')$. Alors, comme le point (2) est vrai pour les morphismes représentables, il est vrai pour p et $f \circ p$. On a donc

$$\begin{aligned} \tau_{F'}^h(f_+(\sigma)) &= \tau_{F'}^h(f_+p_+(\sigma')) \\ &= f_+p_+\tau_X^h(\sigma') \\ &= f_+\tau_F^h(p_+(\sigma')) \\ &= f_+\tau_F^h(\sigma) \end{aligned}$$

$\square$

4.4 Exemples d'application

Si $p : F \longrightarrow F$ est le morphisme structural d'un champ propre F de $\mathcal{LDM}$, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_F$-module sur F, nous noterons

$$Ind(F, \mathcal{M}) := p_+(\mathcal{M}) \in \mathbf{K}_0^{\mathcal{D}}(Speck) = \mathbf{Z}$$

Remarque: Par définition des images directes de $\mathcal{D}$-modules, $Ind(F, \mathcal{M})$ est aussi la caractéristique d'Euler du complexe de De Rham de $\mathcal{M}$ sur F.

Corollaire 4.24 *Soit F un champ propre de $\mathcal{QLDM}$, et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_F$-module cohérent sur F. Notons $[Gr\mathcal{M}] \in \mathbf{G}_0(T^*F)$ la classe du gradué associé. Alors*

$$Ind(F, \mathcal{M}) = \int_{T^*F}^{rep} Ch^{rep}([Gr\mathcal{M}]).Ie_*(Td^{rep}(F))$$

où $e : F \hookrightarrow T^*F$ est la section nulle du fibré cotangent à F.

Preuve: On utilise la proposition 4.14. □

Par exemple, dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{O}_F$ est la connexion triviale, on trouve

$$Ind(F, \mathcal{O}_F) = \int_{T^*I_F} (Ie_*(1))^2 = \int_{I_F} C_{max}(T_{I_F})$$

On retrouve ainsi la formule de Gauss-Bonnet 3.45.

Remarquons aussi, que le corollaire précédent appliqué à une connexion (V, ∇) sur un fibré vectoriel de rang r sur F, donne

$$Ind(F, (V, \nabla) = r.\chi^{top}(F)$$

et même, plus précisemment

$$\tau_F^h(V, \nabla) = r.C_{max}(T_{I_F}) \in H^\bullet_{rep}(F, *)$$

On remarquera que, contrairement à ce qui se passe pour un schéma ([L, 6.6.4]), la formule précédente ne se simplifie pas dans le cas où $\mathcal{M}$ est holonome. En effet, le fait que $Gr\mathcal{M}$ possède un support de dimension moitié dans T^*F, n'implique pas à priori que $\pi_F^*(Gr\mathcal{M}) \in \mathbf{G}_0(T^*I_F)$ possède encore cette propriété.

Notons que l'on a toujours un morphisme canonique

$$p^! : \mathbf{K}_*(Speck) \longrightarrow \mathbf{K}_*^\nabla(F)$$

induit par le morphisme structural $p : F \longrightarrow Speck$. Ce morphisme induit donc un morphisme sur les fonctions constructibles

$$F_{ct}\mathbf{K}_*(k)(F) \longrightarrow F_{ct}\mathbf{K}_*^\nabla(F) \simeq \mathbf{K}_*^h(F)$$

En composant avec la transformation de Riemann-Roch, on obtient des "morphismes d'Euler-MacPherson"

$$E^i_{rep,M} : F_{ct}\mathbf{K}_i(k)(F) \longrightarrow H^\bullet_{rep}(F, *)$$

De la même façon on peut aussi définir

$$F_{ct}\mathbf{K}_*(k)(F) \longrightarrow F_{ct}\underline{\mathbf{K}}_*^\nabla(F) \simeq \underline{\mathbf{K}}_*^h(F)$$

et donc

$$E^i_M : F_{ct}\mathbf{K}_i(k)(F) \longrightarrow H^\bullet(F, *)_\mathbf{Q}$$

Par exemple, si $i = 0$, on trouve deux morphisme

$$E^0_{rep,M} : F_{ct}\mathbf{Z}(F) \longrightarrow H^\bullet_{rep}(F, *)$$

$$E^0_M : F_{ct}\mathbf{Z}(F) \longrightarrow H^\bullet(F, *)_\mathbf{Q}$$

Pour $i = 1$, on a

$$E^1_{rep,M} : F_{ct}k^*(F) \longrightarrow H^\bullet_{rep}(F, *)$$

$$E^1_M : F_{ct}k^*(F) \longrightarrow H^\bullet(F, *)_\mathbf{Q}$$

Définition 4.25 *Soit F un champ dans $\mathcal{LDM}$. Soit $\sigma \in F_{ct}\mathbf{Z}(F)$. Les caractéristiques d'Euler topologique et orbifold de F pondérées par σ, sont définies par*

$$\chi^{orb}(F,\sigma) := \sum_i \sigma_i.\chi^{orb}(F_i)$$

$$\chi^{top}(F,\sigma) := \sum_i \sigma_i.\chi^{top}(F_i)$$

où les sous-champs $F_i \hookrightarrow F$ forment une stratification de F, telle que σ soit constante égale à σ_i sur $|F_i|$.

Corollaire 4.26 *Soit F un champ de $\mathcal{LDM}$. Pour tout $\sigma \in F_{ct}\mathbf{Z}(F)$, on a*

$$\chi^{top}(F,\sigma) = \int_F^{rep} E^0_{rep,M}(\sigma)$$

$$\chi^{orb}(F,\sigma) = \int_F E^0_M(\sigma)$$

<u>**Preuve:**</u> Fixons nous une stratification $j_i : F_i \hookrightarrow F$, telle que σ soit constant égale à $\sigma_i \in \mathbf{Z}$ sur $|F_i|$. Notons $\mathbf{1}_i$ la classe de la connexion triviale sur F_i. Alors, par définition de l'isomorphisme γ (4.20), on a

$$E^0_{rep,M}(\sigma) = \sum_i \sigma_i.\tau_F^{rep,h}((j_i)_+(\mathbf{1}_i)) \in H^\bullet(F,*)$$

Ainsi, le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch 4.22, appliqué à $\sum_i \sigma_i.(j_i)_+(\mathbf{1}_i)$, donne

$$\sum_i \sigma_i.Ind(F_i,\mathbf{1}_i) = \int_F^{rep} E^o_{rep,M}(\sigma)$$

Ce qui est la formule que l'on voulait démontrer.

Le cas de la caractéristique d'Euler orbifold se traite de la même façon.
$\square$

Ce dernier corollaire explique le choix de la terminologie de "classe d'Euler-MacPherson" pour l'application E^0_M. Notons qu'elle n'est pas égale à l'application définie dans [Mac]. En effet, si $F = X$ est un schéma lisse et propre, on a $E^0_M(\mathbf{1}_X) = C_{max}(T_X) = Eu(X)$, alors que $C_*(\mathbf{1}_X)$ est la classe de Chern total du fibré tangent T_X. De plus, nous n'avons pas su démontrer que E^0_M commute avec les images directes.

Corollaire 4.27 *Soit F un champ propre de $\mathcal{LDM}$, et $x = can(\lambda_{-1}(\Omega^1_F)) \in \underline{\mathbf{K}}_0(F)$. Alors*

$$p_*(x) = \chi^{orb}(F)$$

où $p : F \longrightarrow Speck$ est le morphisme structural.

Preuve: On applique le corollaire 4.26 à la fonction constructible constante $\mathbf{1}$. On a donc

$$\chi^{orb}(F,\mathbf{1}) = \chi^{orb}(F) = \int_F E_M(\mathbf{1})$$

Or, $E_M(\mathbf{1}) = \tau_F^h(\mathcal{O}_F)$, où $\mathcal{O}_F$ est muni de la connexion triviale. Les énoncés 4.10 et 4.14 impliquent alors que

$$\tau_F^h(\mathcal{O}_F) = \tau_F(\lambda_{-1}(\Omega_F^1))$$

Ainsi, d'après 3.33

$$\chi^{orb}(F) = \int_F \tau_F(\lambda_{-1}(\Omega_F^1)) = p_*(\lambda_{-1}(\Omega_F^1))$$

$\square$

On peut aussi donner une interprétation de $\int_F^{rep} E_M^1(\sigma)$, et de $\int_F E_M^1(\sigma)$, pour $\sigma \in F_{ct}k^*(F)$, en terme de "determinants d'Euler".

Définition 4.28 *Soit F un champ de $\mathcal{LDM}$, et $\sigma \in F_{ct}k^*(F)$. Notons $j_i : F_i \hookrightarrow F$, une stratification de F, telle que σ soit constante égale à $\sigma_i \in k^*$ sur $|F_i|$. Le determinant d'Euler de F pondéré par σ est*

$$Det(F,\sigma) := \prod_i \sigma_i^{\chi^{top}(F_i)} \in k^*$$

Le determinant d'Euler orbifold de F pondéré par σ est

$$Det^{orb}(F,\sigma) := \prod_i \sigma_i^{\chi^{orb}(F_i)} \in k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

Pour le corollaire suivant, nous supposerons que la théorie cohomologique utilisé est la théorie de Gersten. Nous la noterons alors avec les indices usuels des groupes de Chow

$$A^p(F,q) := H^p(F_{et}, \underline{K}_{p+q})$$
$$A^p_{rep}(F,q) := H^p((I_F)_{et}, \underline{K}_{p+q})$$

Corollaire 4.29 *Soit F un champ de $\mathcal{LDM}$ et $\sigma \in F_{ct}\mathbf{K}_p(k)(F)$. Notons $j_i : F_i \hookrightarrow F$ une stratification de F, telle que σ soit constante égale à $\sigma_i \in \mathbf{K}_p(k)$ sur F_i. Alors*

$$\sum_i \chi^{top}(F_i).\sigma_i = \int_F^{rep} E^p_{rep,M}(\sigma)$$

$$\sum_i \chi^{orb}(F_i).\sigma_i = \int_F^{rep} E^p_M(\sigma)$$

En particulier

$$Det(F,\sigma) = \int_F^{rep} E^1_{rep,M}(\sigma)$$

$$Det^{orb}(F,\sigma) = \int_F E^1_M(\sigma)$$

Preuve: Commençons par remarquer que la transformation de Riemann-Roch

$$\tau^h_{Speck} : \mathbf{K}^h_p(Speck) \simeq A^{\text{o}}(Speck,p) = \mathbf{K}_p(Speck)$$

est un isomorphisme.

Comme dans la preuve du corollaire 4.26, on a

$$E^p_M(\sigma) = \sum_i \tau_F^{rep,h}((j_i)_+(p_i^! \sigma_i))$$

où $p_i : F_i \longrightarrow Speck$ est le morphisme structural. Ainsi, par le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch 4.23, et la formule de projection pour les morphismes structuraux, on trouve

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_F^{rep} E^p_M(\sigma) &= \textstyle\sum_i (p_i)_+ p_i^!(\sigma_i) \\
&= \textstyle\sum_i (p_i)_+(\mathcal{O}_{F_i}).\sigma_i \\
&= \textstyle\sum_i Ind(F_i,\mathcal{O}_{F_i}).\sigma_i \\
&= \textstyle\sum_i \chi^{top}(F_i).\sigma_i \in \mathbf{K}_p(k)
\end{aligned}$$

□

Pour terminer cette partie, notons qu'il serait intéressant de posséder des formules analogues aux formules précédentes, mais dans un cas relatif. On disposerait ainsi de "classes d'Euler-MacPherson pour la K-théorie supérieure", bien que la signification de telles formules pour les $\mathbf{K}_p$ avec $p > 1$ me semble un peu mystérieuses.

5 Chapitre 5 : Champs algébriques et champs analytiques

Ce dernier chapitre est indépendant des précédents. Nous nous intéresserons au problème de comparaison entre champs analytiques et champs algébriques complexes. Notre but est d'essayer de généraliser les résultats d'algébrisation d'Artin ([A, 7.3]), au cas des champs analytiques.

Pour cela nous commencerons par démontrer les théorèmes GAGA pour des champs algébriques complexes de Deligne-Mumford. Ils seront utilisés par la suite pour démontrer un cas particulier du théorème d'Artin.

Dans cette section nous appellerons schéma un schéma localement de type fini et séparé sur $Spec\mathbf{C}$. Nous noterons $(Sch/\mathbf{C})_{et}$ le site des schémas, muni de la topologie étale. Le petit site étale d'un schéma X sera noté X_{et}. Un champ algébrique sera un champ de Deligne-Mumford, localement de type fini et séparé sur $\mathbf{C}$ (1.10). Si X est un schéma, X^{an} sera l'espace analytique associé.

Un espace analytique, est un espace analytique complexe, localement de type fini et séparé sur $\mathbf{C}$. L'espace topologique sous jacents à un espace analytique X sera noté X^{top}.

5.1 Analytification des champs algébriques

5.1.1 Champs analytiques

Rappelons pour commencer les définitions suivantes.

Définition 5.1 *Un morphisme d'espaces analytiques*

$$f : X \longrightarrow Y$$

est

- *étale, si pour chaque point $x \in X$, le morphisme d'anneaux locaux*

$$f_x^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

  est un isomorphisme.
- *non ramifié, si localement sur X^{top}, c'est une immersion fermée.*
- *fini, s'il est propre et à fibres finies.*

Avec ces définitions, le site analytique est défini par la catégorie des espaces analytiques, dont les morphismes couvrant sont les morphismes étales et surjectifs. Il sera noté $(An/\mathbf{C})_{et}$. Sur ce site on dispose alors de la notion de champs ([L-M]), ainsi que de morphismes de champs représentables possédant certaines propriétés locales, comme étales, finis, non ramifiés, lisses ... (1.7). Un champ équivalent à un espace analytique, sera encore appelé un espace analytique.

Définition 5.2 *Un champ analytique (de Deligne-Mumford et séparé) est un champ F sur le site $(An/\mathbf{C})_{et}$ tel que*

1. *le morphisme diagonal*
$$\Delta : F \longrightarrow F \times F$$
est représentable et fini.

2. *il existe un espace analytique X et un morphisme étale et surjectif*
$$X \longrightarrow F$$

Nous noterons $Ch^{an}(\mathbf{C})$ (resp. $ChAn(\mathbf{C})$) la 2-catégorie des champs (resp. champs analytiques) sur $(An/\mathbf{C})_{et}$. Les catégories homotopiques associées, seront notées respectivement $HoCh^{an}(\mathbf{C})$ et $HoChAn(\mathbf{C})$.

Remarque: Comme dans le cas des schémas (1.10), le morphisme diagonal d'un champ analytique est automatiquement non ramifié.

L'exemple standard de champ analytique est le champ quotient par un groupe fini. Pour un action d'un groupe fini H sur un espace analytique X, nous noterons $[X/H]$ le champ quotient. Son groupoide des sections au-dessus d'un espace Y, est le groupoide des couples (P, f), où $P \longrightarrow Y$ est un H-torseur, et $f : P \longrightarrow X$ est un morphisme H-équivariant.

Définition 5.3 *Le champ des ramifications d'un champ analytique F, est défini par*
$$I_F := F \times_{F \times F} F$$
Si la projection naturelle
$$\pi_F : I_F \longrightarrow F$$
est étale, on dit que F est une gerbe.

Les champs analytiques possèdent de nombreuses propriétés analogues à celles des champs algébriques. Nous ne retiendrons que les suivantes.

Proposition 5.4 *Soit F un champ analytique.*

1. *Il existe un espace analytique M, et un morphisme propre*
$$p : F \longrightarrow M$$
qui est universel vers les espaces analytiques, et qui induit une bijection
$$\pi_0 F(Spec\mathbf{C}^{an}) \simeq M(Spec\mathbf{C}^{an})$$
On dira que M est un espace de modules pour F.

2. *Soit M l'espace de modules de F. Alors, il existe un recouvrement étale $U \longrightarrow M$, un espace analytique X, un faisceau en groupes finis H constant sur X, et une opération de H sur X, tel que le champ*
$$F_U := F \times_M U$$
soit équivalent au champ classifiant $[X/H]$.
3. *Si F est réduit, il existe un sous-champ analytique fermé $F_1 \hookrightarrow F$, tel que $F - F_1$ soit une gerbe.*

Un champ analytique sera propre si son espace de modules est un espace analytique compact.

Notons pour finir que, comme dans le cadre algébrique (2.1), il y a une notion de faisceaux analytiques cohérents sur un champ analytique F. Ce sont les sections globales cartésiennes sur F, du champ en catégories abéliennes **Coh** sur $(An/\mathbf{C})_{et}$, dont les sections au-dessus d'un espace analytique X, sont les faisceaux de $\mathcal{O}_X^{an}$-modules cohérents.

5.1.2 Analytification

Soit $f : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre deux sites. On suppose que f est continu, dans le sens où
$$f(U) \longrightarrow F(X)$$
est couvrant dans C', si $U \longrightarrow X$ est couvrant dans C.

Soit $p : \mathcal{C} \longrightarrow C$ un champ. On dispose alors d'un champ "image réciproque" $f^*(\mathcal{C})$ ([Gi, 3.2]).

Lemme 5.5 *Soit*
$$\alpha : (Esp/\mathbf{C})_{et} \longrightarrow (An/\mathbf{C})_{et}$$
le foncteur continu qui à un schéma X associe son espace analytique X^{an}. Alors l'image par α^* d'un champ algébrique est un champ analytique.

Preuve: En effet, si F est un champ algébrique équivalent à un préfaisceau simplicial représenté par un espace algébrique en groupoides $X_\bullet$, alors le champ F^{an} est équivalent au préfaisceau représenté par l'objet en groupoides $X_\bullet^{an}$, qui, par définition, est un champ analytique. $\square$

Comme le foncteur α^* préserve les équivalences de champs, il passe aux catégories homotopiques.

Définition 5.6 *On notera*
$$\begin{array}{ccc} HoChAlg(\mathbf{C}) & \longrightarrow & HoChAn(\mathbf{C}) \\ F & \mapsto & F^{an} := \alpha^*(F) \end{array}$$
le foncteur d'analytification.

Comme on sait que les champs de Deligne-Mumford sont localement des quotients par des groupes finis (5.4, 1.17), il est naturel de commencer par comparer les quotients algébriques, et les quotients analytiques.

Proposition 5.7 *Soit X un schéma et H un groupe fini opérant sur X. Alors il existe une équivalence faible naturelle*

$$[X/H]^{an} \simeq [X^{an}/H]$$

<u>Preuve:</u> Soit $X \longrightarrow [X/H]$ le H-torseur universel. Comme le foncteur d'analytification transforme H-torseurs en H-torseurs ([SGA 1]), le morphisme induit

$$X^{an} \longrightarrow [X/H]^{an}$$

est un H-torseur. Il défini donc une équivalence faible

$$[X/H]^{an} \longrightarrow [X^{an}/H]$$

$\square$

Corollaire 5.8 *Soit F un champ algébrique et $p : F \longrightarrow M$ la projection sur son espace de modules ([K-M]). Alors le morphisme induit*

$$p : F^{an} \longrightarrow M^{an}$$

fait de M^{an} l'espace de modules de F^{an}.

<u>Preuve:</u> Soit X l'espace de modules de F^{an}. Par la propriété universelle des espaces de modules, il existe un morphisme naturel

$$X \longrightarrow M^{an}$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut effectuer un changement de base de M^{an} par un morphisme $u^{an} : (U \longrightarrow M)^{an}$, avec u étale et surjectif. Par 1.17, on peut donc supposer que $F = [X/H]$, avec X un schéma affine, et H un groupe fini opérant sur X. Mais alors, comme $F^{an} \simeq [X^{an}/H]$, l'assertion à démontrer est que le morphisme naturel

$$X^{an}/H \longrightarrow (X/H)^{an}$$

est un isomorphisme. Ce qui est vrai. $\square$

Soit $\alpha_*\mathbf{Coh}$ l'image réciproque du champ des faisceaux analytiques cohérents par le foncteur d'analytification. C'est le champ sur $(Esp/\mathbf{C})_{et}$, dont la catégorie des sections au-dessus d'un espace algébrique X, est la catégorie $\mathbf{Coh}(X^{an})$ des faisceaux analytiques cohérents sur X^{an}. Alors, on dispose d'un foncteur naturel d'analytification ([SGA 1, XII])

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Coh}(X) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}(X^{an}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}^{an} \end{array}$$

Ce foncteur défini un morphisme de champs sur $(Esp/\mathbf{C})_{et}$

$$\mathbf{Coh} \longrightarrow \alpha_* \mathbf{Coh}$$

ou bien, par adjonction, un morphisme de champs sur $(An/\mathbf{C})_{et}$

$$-^{an} : \alpha^* \mathbf{Coh} \longrightarrow \mathbf{Coh}$$

Par composition, ce foncteur défini un foncteur sur les sections cartésiennes

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{Cart}(F, \mathbf{Coh}) & \longrightarrow & Hom_{Cart}(F^{an}, \alpha^*\mathbf{Coh}) & \longrightarrow & Hom_{Cart}(F^{an}, \mathbf{Coh}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \alpha^*\mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}^{an} \end{array}$$

Et donc un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Coh}(F) := Hom_{Cart}(F, \mathbf{Coh}) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}(F^{an}) := Hom_{Cart}(F^{an}, \mathbf{Coh}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}^{an} \end{array}$$

Définition 5.9 *Soit F un champ algébrique, le foncteur d'analytification ci-dessus est noté*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Coh}(F) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}(F^{an}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}^{an} \end{array}$$

Notons, que $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ est un foncteur exact. En effet, comme ceci est local sur F_{et}, on se ramène au cas des schémas [SGA 1, XII 4.4].

5.2 Théorèmes GAGA

Le théorème principal est le suivant.

Théorème 5.10 *("GAGA") Soit F un champ algébrique propre. Alors le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Coh}(F) & \longrightarrow & \mathbf{Coh}(F^{an}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}^{an} \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Preuve:

Lemme 5.11 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre et représentable de champs algébriques, et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur F. Alors le morphisme naturel*

$$R^i f_*^{an}(\mathcal{F}^{an}) \longrightarrow R^i f_*(\mathcal{F})^{an}$$

est un isomorphisme.

Preuve: Comme ceci est local sur $(F')^{an}_{et}$, le lemme est une conséquence directe de [SGA 1, XII 4.2]. $\square$

Lemme 5.12 *Soit $p : F \longrightarrow M$ le projection d'un champ algébrique sur son espace de modules, et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur F. Alors le morphisme naturel*

$$p_*^{an}(\mathcal{F}^{an}) \longrightarrow p_*(\mathcal{F})^{an}$$

est un isomorphisme.

__Preuve:__ Soit $U \longrightarrow M$ un recouvrement étale algébrique tel que F_U soit un champ quotient sur U. En localisant sur U, on peut donc supposer que $F = [X/H]$, avec H un groupe fini opérant sur un schéma X. Le faisceau $\mathcal{F}$ est alors donné par un faisceau cohérent $\mathcal{F}_X$ sur X, muni d'une action de H.

Soit $q : X \longrightarrow X/H$ la projection. D'après le lemme précédent on a alors

$$q_*^{an}(\mathcal{F}_X^{an}) \simeq q_*(\mathcal{F}_X)^{an}$$

De plus cet isomorphisme est un isomorphisme équivariant de H-faisceaux analytiques cohérents sur X^{an}/H. En prenant les invariants sous H on obtient

$$p_*^{an}(\mathcal{F}_X^{an}) \simeq q_*^{an}(\mathcal{F}_X^{an})^H \simeq (q_*(\mathcal{F}_X)^{an})^H \simeq (q_*(\mathcal{F}_X)^H)^{an} \simeq p_*(\mathcal{F}_X)^{an}$$

$\Box$

Revenons à la preuve du théorème. Elle suit exactement le même schéma que la preuve donnée dans [SGA 1, *XII* 4.4].

__(1) Le foncteur est pleinement fidèle:__

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur F. Alors, comme p_* est un foncteur exact, on a un isomorphisme canonique

$$H^i(F, \mathcal{F}) \simeq H^i(M, p_*\mathcal{F})$$

De plus, M est un espace algébrique propre, et $p_*\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur M, donc le théorème GAGA pour les espaces algébriques ([SGA 1, *XII* 4.4]) nous dit que le morphisme naturel

$$H^i(M, p_*\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(M^{an}, (p_*\mathcal{F})^{an})$$

est un isomorphisme. De plus le lemme 5.12 implique que

$$H^i(M^{an}, (p_*\mathcal{F})^{an}) \simeq H^i(M^{an}, p_*^{an}(\mathcal{F}^{an}))$$

Or

$$H^i(M^{an}, p_*^{an}(\mathcal{F}^{an})) \simeq H^i(F^{an}, \mathcal{F}^{an})$$

On obtient donc l'isomorphisme cherché

$$H^i(F, \mathcal{F}) \simeq H^i(F^{an}, \mathcal{F}^{an})$$

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux cohérents sur F, on dispose du faisceau cohérent $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ sur F. Nous pouvons donc lui appliquer l'isomorphisme précédent avec $i=0$

$$Hom_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \simeq H^{o}(F, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{F},\mathcal{G})) \simeq H^{o}(F^{an}, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{F},\mathcal{G})^{an})$$

Or

$$H^0(F^{an}, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{F},\mathcal{G})^{an}) \simeq Hom_{\mathcal{O}_{F^{an}}}(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an})$$

Ceci achève la preuve de l'assertion (1).

(2) Le foncteur est essentiellement surjectif:

Commençons par le cas où $F = X \times BH$ est une gerbe triviale de groupe fini H et d'espace de modules X un schéma propre. Alors un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur F^{an} est donné par un faisceau cohérent $\mathcal{F}_X$ sur X^{an} muni d'une action du groupe H. D'après le théorème GAGA pour X, on sait qu'il existe un faisceau cohérent $\mathcal{M}_X$ sur X tel que $\mathcal{F}_X \simeq \mathcal{M}_X^{an}$. L'action de H est alors donnée par une représentation

$$H \longrightarrow Aut_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(\mathcal{M}_X^{an})$$

Or, une seconde application du théorème GAGA implique que

$$Aut_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(\mathcal{M}_X^{an}) \simeq Aut_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_X)$$

On munit ainsi $\mathcal{M}_X$ d'une action de H, ce qui définit le faisceau cohérent $\mathcal{M}$ sur F tel que $\mathcal{M}^{an} \simeq \mathcal{F}$.

Passons au cas général. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur F^{an}. On raisonne par récurrence sur la dimension d du support de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'idéal annulateur de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{O}_{F^{an}}$. En se restreignant au fermé défini par $\mathcal{A}$, on peut supposer que le support de $\mathcal{F}$ est F.

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de F_{red} dans F, et k un entier tel que $\mathcal{I}^k = o$. On dispose de la filtration suivante

$$0 \hookrightarrow \mathcal{I}^{k-1}.\mathcal{F} \hookrightarrow \ldots \mathcal{I}.\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}$$

dont les quotients successifs sont des images directes de modules cohérents sur F_{red} par l'immersion canonique $F_{red} \hookrightarrow F$. Remarquons alors qu'une extension analytique de faisceaux cohérents algébrisables est algébrisable. En effet, le fait que le foncteur d'analytification $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^{an}$ soit exact et pleinement fidèle, et la formule

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{F},\mathcal{G})^{an} \simeq \underline{Hom}_{\mathcal{O}_{F^{an}}}(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an})$$

montre que

$$Ext^1_{\mathcal{O}_{F^{an}}}(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an}) \simeq Ext^1_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

On peut donc se restreindre au cas où F est réduit.

D'après [D-M, Thm. 4.12], on peut trouver un schéma projectif X normal, et un morphisme propre et génériquement étale

$$X \longrightarrow F$$

Soit $F_X = F \times_M X$ le champ induit sur X, et F_0 la normalisation de F_X. Alors, d'après 1.22, on sait que F_0 est une gerbe triviale sur X. Notons $q : F_0 \longrightarrow F$ la projection. Alors $q^*\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur F_0^{an}, qui est algébrisable d'après la première partie. Ecrivons

$$\mathcal{M}^{an} \simeq q^*\mathcal{F}$$

avec $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent sur F_0. On considère le faisceau cohérent sur F^{an} $q_*(\mathcal{M}^{an})$. Il est algébrisable d'après le lemme 5.11. De plus, par la formule de la projection, on a

$$q_*q^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{F^{an}}} q_*(\mathcal{O}_{F_0^{an}})$$

Comme q est génériquement un changement de base par un revêtement étale de l'espace de modules, on sait que $q_*\mathcal{O}_{F_0}$ est génériquement isomorphe à $\mathcal{O}_F^m$. Cet isomorphisme générique donne lieu à un diagramme de faisceaux cohérents sur F

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & q_*\mathcal{O}_{F_0} \\
\mathcal{O}_F^m &
\end{tikzcd}$$

où u et v sont des isomorphismes génériques. Considérons le diagramme obtenu sur F^{an} en tensorisant par $\mathcal{F}$, et en complétant avec les noyaux et conoyaux

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & & \mathcal{K}_1 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}_2 \arrow[r] & \mathcal{N} \otimes \mathcal{F} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & q_*(\mathcal{O}_{F_0^{an}}) \otimes \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}_2 \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathcal{F}^m \arrow[d] & & & \\
 & & \mathcal{C}_1 \arrow[d] & & & \\
 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Comme u et v sont des isomorphismes sur un ouvert Zariski dense, on conclut que $\mathcal{K}_i$ et $\mathcal{C}_i$ ont un support de dimension strictement plus petit que d, et sont donc algébrisables par récurrence. De plus, on a vu que

$$q_*(\mathcal{O}_{F_o^{an}}) \otimes \mathcal{F} \simeq (q_*\mathcal{M})^{an}$$

Ainsi, on en déduit que $\mathcal{N} \otimes \mathcal{F}$ est algébrisable comme extension de faisceaux cohérents algébrisables. La colonne verticale nous dit alors que $\mathcal{F}^m$ est algébrisable. On termine en remarquant par exemple, que $\mathcal{F}$ est le noyau du morphisme $\mathcal{F}^m \longrightarrow \mathcal{F}^m$, qui déplace les facteurs d'un cran vers la droite. $\square$

On déduit de ce théorème, les corollaires habituels.

Corollaire 5.13 *Soit F un champ algébrique propre. Alors le foncteur*

$$G \mapsto G^{an}$$

induit une bijection entre les sous-champs algébriques fermés de F, et les sous-champs analytiques fermés de F^{an}

Preuve: Le foncteur d'analytification induit une bijection entre les faisceaux cohérents d'idéaux de $\mathcal{O}_F$, et les faisceaux cohérents d'idéaux de $\mathcal{O}_{F^{an}}$. $\square$

Corollaire 5.14 *Soit F un champ algébrique propre. Alors le foncteur*

$$G \mapsto G^{an}$$

induit une équivalence de la catégorie homotopique des champs algébriques finis et représentables sur F, et celle des champs analytiques finis et représentables sur F^{an}.

Preuve: En effet, le foncteur en question induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux en $\mathcal{O}_F$-algèbres cohérentes et celle des faisceaux en $\mathcal{O}_{F^{an}}$-algèbres cohérentes. $\square$

Corollaire 5.15 *Soit F et G deux champs algébriques propres. Alors le foncteur d'analytification induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie homotopique des champs algébriques propres, vers celle des champs analytiques.*

Preuve: Il faut remarquer qu'un morphisme

$$f : F^{an} \longrightarrow G^{an}$$

est déterminé à homotopie près par son graphe

$$\gamma_f : F^{an} \longrightarrow F^{an} \times G^{an}$$

qui est un morphisme fini, et appliquer le corollaire précédent. $\square$

5.3 Algébrisation des champs analytiques

Dans cette dernière section nous analysons le cas des champs analytiques dont les espaces de modules sont des espaces algébriques.

Proposition 5.16 *Soit X un espace algébrique, et H un groupe fini. Alors le foncteur*

$$F \mapsto F^{an}$$

induit une équivalence entre le
2-groupoide des gerbes algébriques bornées par le groupe H sur X, et celle des gerbes analytiques bornées par le groupe H sur X^{an}.

Preuve: Remarquons d'abord qu'il est clair que le foncteur d'analytification transforme gerbes en gerbes.

Soit BH l'ensemble simplicial classifiant de H, et $Aut(BH)$ l'ensemble simplicial des auto-équivalences de BH. Ce dernier possède un ensemble simplicial classifiant $BAut(BH)$, qui est un ensemble simplicial connexe et 2-tronqué. Ainsi, à travers l'équivalence démontrée dans [Tan], nous le verrons comme un 2-groupoide. Ces groupes d'homotopie sont donnés par

$$\pi_1(BAut(BH)) \simeq Out(H)$$
$$\pi_2(BAut(BH)) \simeq Z(G)$$

où $Out(H) = Aut(H)/Int(H)$ est le groupe des automorphismes extérieurs de H, et $Z(H)$ le centre de H. Nous noterons $\mathcal{G}$ le 2-champ associé au préfaisceau simplicial constant sur $(Sch/\mathbf{C})_{et}$, de fibre $BAut(BH)$. Alors $\mathcal{G}^{an}$ est canoniquement équivalent au champ sur $(An/\mathbf{C})_{et}$, associé au préfaisceau simplicial constant $BAut(BH)$.

Enfin nous savons d'après [S2], qu'il existe une équivalence entre le 2-groupoide des gerbes algébriques de groupes H sur X (resp. analytiques de groupes H sur X^{an}) et $\mathcal{G}(X)$ (resp. $\mathcal{G}^{an}(X^{an})$). Pour démontrer la proposition, il nous suffit donc de montrer que le morphisme d'analytification induit une équivalence faible

$$\mathcal{G}(X) \simeq \mathcal{G}^{an}(X^{an})$$

Mais ceci provient du lemme général suivant.

Lemme 5.17 *Soit F un préfaisceau simplicial n-tronqué sur $(Sch/\mathbf{C})_{et}$, tel que pour chaque section $s : X \longrightarrow F$, les faisceaux d'homotopie $\pi_m(F, s)$ soient localement constants à fibres finies sur X_{et}. Alors pour chaque espace algébrique X, le morphisme naturel*

$$F(X) \longrightarrow F^{an}(X^{an})$$

est une équivalence faible.

Preuve: Il suffit de regarder, pour chaque section $s \in F(X)$, le morphisme induit sur les suites spectrales

$$E_2^{p,q} = H^q(X_{et}, \pi_p(F,s)) \longrightarrow (E')_2^{p,q} = H^q(X_{top}^{an}, \pi_p(F^{an}, s))$$

qui convergent vers $\pi_*(F(X), s)$ et $\pi_*(F^{an}(X^{an}), s)$. Le théorème de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie transcendante pour des groupes finis ([SGA 1]), permet de conclure que le morphisme est un isomorphisme sur les termes E_2. $\Box$

Définition 5.18 *Un* 1*-morphisme propre et représentable de champs analytiques*

$$f : F_0 \longrightarrow F$$

est une modification, s'il existe un sous-champ fermé $F' \hookrightarrow F$, tel que f induise une équivalence

$$f : F_0 - f^{-1}(F') \longrightarrow F - F'$$

Le résultat suivant est un analogue du résultat de Moisezon [A, 7.16].

Théorème 5.19 *Soit F un champ analytique réduit tel que son espace de modules soit algébrique et propre. Alors il existe une modification*

$$f : F_0 \longrightarrow F$$

avec F_0 équivalent à un champ algébrique.

Preuve: Comme M est algébrisable, nous écrirons encore M pour l'espace algébrique correspondant.

En considérant la réunion disjointe des composantes irréductibles de F, on peut supposer que F est irréductible, et donc intègre.

Soit M l'espace de modules de F, et $S \hookrightarrow M$ un sous-espace fermé tel que F soit une gerbe sur $M - S$.

Commençons par fixer quelques définitions. Si H est un groupe fini, un revêtement (resp. revêtement analytique) d'un schéma X de groupe H non-ramifié en dehors de S, est la donnée d'une action de H sur un schéma Y (resp. sur un espace analytique Y) et d'un morphisme équivariant $Y \longrightarrow M$ (resp. $Y \longrightarrow M^{an}$) étale sur $M - S$, et qui fasse de M le quotient de Y par H (resp. étale sur $(M-S)^{an}$, et qui fasse de M^{an} le quotient de Y par H).

Si $x \in M^{an}$, nous parlerons de germe analytique de revêtements de groupe H de M en x et non-ramifié en dehors de S, pour désigner une classe de tels revêtements, où deux revêtements sont équivalents s'ils sont isomorphes sur un voisinage analytique de x. Pour simplifier le vocabulaire nous dirons simplement "revêtement de groupe H" pour revêtement de groupe H et non-ramifié en dehors de S. De même, nous parlerons de germes étales de revêtements de groupe H de M en un point fermé $x \in M$.

Le foncteur d'analytification transforme un germe étale de revêtements de groupe H, en un germe analytique de revêtements de groupe H. Nous dirons que l'image d'un germe étale est un germe analytique algébrisable.

Etape (1):

Commençons par supposer que F et M sont normaux, et que M vérifie l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.20 *Pour tout point $x \in M^{an}$, tout germe analytique de revêtement de groupe H est algébrisable.*

Soit $x \in M$, et $x \in U \hookrightarrow M$ un voisinage analytique de x tel que $F \times_M U =: F_U$ soit équivalent à un champ quotient par un groupe fini

$$F_U \simeq [V/H]$$

On peut donc, d'après l'hypothèse, supposer qu'il existe un schéma X et un morphisme étale au voisinage de x

$$X \longrightarrow M$$

une action de H sur un schéma Y, et un morphisme

$$p : Y \longrightarrow X$$

qui fasse de X le quotient de Y par H, et tel que dans un voisinage analytique de x, le morphisme p soit isomorphe à la projection canonique

$$q : V \longrightarrow U$$

Compactifions le morphisme $Y \longrightarrow M$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d] & Z \arrow[dl, "p"] \\ M & \end{tikzcd}$$

où j est une immersion ouverte d'image Zariski dense, et p propre. Considérons le changement de base sur Z, $F_Z := F \times_M Z \longrightarrow Z^{an}$, ainsi que $F_Z^{\circ} \longrightarrow (F_Z)_{red}$ sa normalisation réduite. Par construction, le morphisme

$$F_Z^{\circ} \longrightarrow Z^{an}$$

possède au voisinage analytique d'un point $z \in Z^{an}$ au-dessus de x, une section. Or, comme Z^{an} est normal en x, l'analogue de 1.22 pour des champs analytiques implique que F_Z° est une gerbe au voisinage analytique de z. Or, comme Z est un schéma propre, il existe un ouvert Zariski dense de Z, W contenant x, tel que F_Z° soit une gerbe sur W^{an}. Mais par la proposition 5.16, cette gerbe est algébrisable. Il existe donc un schéma $\widetilde{W}$, un morphisme étale et surjectif $\widetilde{W} \longrightarrow W$, et un diagramme 1-commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{W}^{an} \arrow[r] \arrow[d] & W^{an} \\ F_Z^\circ \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Le 1-morphisme composé

$$\widetilde{W}^{an} \longrightarrow F_Z^\circ \longrightarrow F_Z \longrightarrow F$$

est par construction un prolongement de la section canonique

$$V \longrightarrow F_U \longrightarrow F$$

Comme celle-ci est étale au voisinage analytique de x, le 1-morphisme

$$\widetilde{W}^{an} \longrightarrow F$$

est étale dans un voisinage Zariski d'un point $w \in \widetilde{W}$ au-dessus de x. Ainsi, quitte à restreindre W, on montre qu'il existe un 1-morphisme étale

$$X(x)^{an} \longrightarrow F$$

où $X(x)$ est un schéma, et dont l'image dans M contient le point fermé x.

Lorsque x parcourt M^{an} tout entier, on construit ainsi un schéma $X = \coprod_x X(x)$ et un morphisme étale et surjectif

$$X^{an} \longrightarrow F$$

Or, par quasi-compacité de la topologie de Zariski sur M, on peut supposer que X est un schéma de type fini sur $\mathbf{C}$. Enfin, comme F est normal, X est aussi normal.

Il nous reste alors à démontrer que le morphisme naturel

$$r : Y_1 := X^{an} \times_F X^{an} \longrightarrow X^{an} \times_M X^{an}$$

est algébrisable. En effet, dans ce cas, on pourra écrire $Y_1 = X_1^{an}$, et le champ F sera alors équivalent au champ associé à l'analytifié du groupoide algébrique

$$s, b : X_1 \longrightarrow X$$

Comme F est un champ analytique propre, il est séparé. Ainsi, r est un morphisme fini. De plus, son image est $X^{an} \times_M X^{an}$, et comme F est une gerbe sur $M - S$, r est étale en dehors de $S^{an} \times_M X^{an} \cup X^{an} \times_M S$. Ainsi, r est un morphisme fini et étale en dehors d'un sous-espace algébrisable. Comme Y_1 est normal, ceci implique que r est algébrisable ([SGA 1, XII]).

Etape (2):

Soit F comme dans l'énoncé du théorème. On considère un éclatement

$$p : X \longrightarrow M$$

tel que X soit lisse, et que $p^{-1}(S)$ soit un diviseur à croisements normaux dans X. Un tel morphisme existe d'après la résolution des singularités. Soit F_0 la normalisation de $F \times_M X$. Alors, le 1-morphisme canonique

$$f : F_0 \longrightarrow F$$

est une modification. De plus, lemme suivant implique que le champ F_0 vérifie les hypothèses de la première étape. Il est donc algébrisable.

Lemme 5.21 *Soit X un schéma lisse est $S \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé, tel que S soit un diviseur à croisements normaux dans X. Alors tout germe analytique de revêtement de groupe H non-ramifié en dehors de S sur X est algébrisable.*

Preuve: Soit $x \in X^{an}$. Alors il existe un voisinage analytique U de x, tel que la paire $(U, U \cap S)$ soit homéomorphe à $(\mathbf{C}^m, H)$, où H est une réunion finie d'hyperplans complexes. Ainsi, on a

$$\pi_1(U - U \cap S) \simeq \mathbf{Z}^r$$

où r est le nombre de composantes irréductibles de $S \cap U$.

De plus, il existe un voisinage étale de x, $f : V \longrightarrow X$, et une immersion ouverte $V \hookrightarrow \mathbf{A}^m$, tel que la paire $(V, f^{-1}(S))$ soit isomorphe à $(V, V \cap H)$, où H est une réunion finie d'hyperplans de $\mathbf{A}^m$.

Soit $q : V \longrightarrow U$ un germe analytique de revêtement de groupe H. Quitte à restreindre U on peut supposer qu'il est comme ci-dessus. Comme le revêtement est non-ramifié en-dehors de S, il donne lieu à un homomorphisme

$$\pi_1(U - U \cap S) \longrightarrow H$$

Comme on a un isomorphisme canonique

$$\pi_1(U - U \cap S) \simeq \pi_1(\mathbf{C}^m - H) \simeq \mathbf{Z}^r$$

on a un homomorphisme induit

$$\pi_1((\mathbf{A}^m - H)^{an}) \longrightarrow H$$

Ce H-torseur est algébrisable d'après [SGA 1]. On obtient donc un H-torseur algébrique

$$Y \longrightarrow \mathbf{A}^m - H$$

Si V est un voisinage étale de x comme ci-dessus, alors par restriction on a un H-torseur

$$Y_V \longrightarrow V$$

Soit Z la normalisation de V dans Y_V. Alors

$$p : Z \longrightarrow V$$

définit un germe étale de revêtement de groupe H en x, qui, par construction, est une algébrisation du germe analytique $q : V \longrightarrow U$. □
□

On tire de ce théorème le corollaire suivant sur "les champs de Moisezon".

Corollaire 5.22 *Si F est un champ analytique réduit tel que son corps des fonctions méromorphes est de dimension de transcendance égal à sa dimension, alors il existe une modification*

$$f : F_0 \longrightarrow F$$

où F_0 est algébrisable.

Preuve: En effet, les fonctions méromorphes sur F, sont les fonctions méromorphes sur son espace de modules M. L'espace analytique M est donc algébrisable d'après [A, 7.3]. On termine alors par le théorème précédent. □

Corollaire 5.23 *Tout champ analytique propre et lisse de dimension* 1 *est algébrique.*

Preuve: C'est en réalité un corollaire de la preuve du théorème. En effet, comme F est lisse, son espace de modules est une surface de Riemann compacte, et vérifie donc les hypothèses de la première partie de la preuve. □

A la vue de ces derniers résultats, on peut légitimement poser la question suivante.

Question: Tout champ analytique propre F, dont l'espace de modules est un espace algébrique, est algébrisable.

Cette conjecture implique à titre d'exemple le fait (certainement bien connu) suivant.

Corollaire 5.24 *Supposons que la conjecture précédente soit vraie.*

Soit X un espace analytique lisse muni d'une action propre d'un groupe de Lie affine H, tel que le quotient X/H soit algébrisable et propre. Soit Z le $\mathbf{Gl}_m$-torseur tangent à X, muni de son action naturelle de H. Alors, le quotient $Y = Z/H$ est représentable par un espace algébrique lisse, et l'action naturelle de $\mathbf{Gl}_m$ sur Y est algébrisable.

Preuve: Commençons par supposer que $F = [X/H]$ est un orbifold. La conjecture implique que F est un champ algébrisable. Ainsi, le lemme 3.28 implique que le torseur tangent à F est représentable par un espace algébrique lisse Y. Comme $Y^{an} \simeq [Z/H]$, ceci montre que Y^{an} est un quotient pour Z par H. De plus, comme Y est le torseur tangent à F, l'action de $\mathbf{Gl}_m$ sur Y^{an} est alors l'analytification de celle de $\mathbf{Gl}_m$ sur Y.

Dans le cas général, on peut écrire $q : F \longrightarrow F'$, où F' un orbifold algébrisable. On termine alors en remarquant que

$$T_F = T_{F'} \times_{F'} F$$

□

Remarques:

- Lorsque X/H est une variété projective, P. Essydieux m'a fait remarquer qu'il est facile de démontrer le corollaire 5.24 "à la main".
- La moralité de ce corollaire est qu'à toute construction d'un champ algébrique lisse et propre de Deligne-Mumford par des méthodes analytiques, on associe naturellement une construction algébrique de ce champ. En effet, en gardant les mêmes notations que dans le corollaire, on a
$$[X/H] \simeq [Y/Gl_m]^{an}$$

Nous terminerons par une esquisse de démonstration de cette conjecture. Nous préférons cependant la laisser sous forme de conjecture, car, comme nous n'avons pas vérifié tous les détails, il se pourrait qu'une difficulté technique nous ait échapper.

Etape (1) : On peut supposer que F est réduit.

Supposons que F_{red} est algébrisable, et montrons alors que F aussi.

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal nilpotent de F_{red} dans F. Comme $\mathcal{I}^k = o$, un raisonnement par récurrence sur k montre qu'il suffit de démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.25 *Soit F un champ analytique propre, et F_0 un sous-champ défini par un idéal de carré nul dans $\mathcal{O}_F$. Si F_0 est algébrisable, F aussi.*

"Preuve:" En s'inspirant de [Be], on espère pouvoir définir un complexe cotangent analytique de F_0. On le notera $L_{F_0^{an}}$. C'est un objet de la catégorie dérivée des complexes de préfaisceaux de $\mathcal{O}_{F_0}^{an}$-modules à cohomologie cohérente, tel que $H^1(F_0^{an}, L_{F_0^{an}})$ est en bijection avec les classes d'isomorphie des déformations infinitésimales de F_0^{an}. En particulier, le champ F est déterminé à équivalence près par une classe dans ce groupe.

D'autre part les déformations infinitésimales du champ algébrique F_0 sont classifiées par le groupe $H^1(F_{et}, L_{F_0})$, où L_{F_0} est le complexe cotangent relatif au morphisme structural $F \longrightarrow Spec\mathbf{C}$ ([L-M, 9]).

Comme l'analytifié de $L_{F_0}^{an}$ est quasi-isomorphe à $L_{F_0^{an}}$, le théorème GAGA implique que toute déformation infinitésimale du champ F_0^{an} est algébrisable. Ainsi, F est algébrisable. □

Etape (2) : Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre et birationnel de champs analytiques. Alors, F est algébrisable si et seulement si F est algébrisable.

Pour démontrer cette partie il faudrait réécrire l'article d'Artin [A] dans le cadre plus général des champs analytiques de Deligne-Mumford. Cela implique en particulier qu'il faut démontrer des théorèmes GAGF dans ce cadre. Cependant, la preuve du théorème GAGA donnée précédemment donne bon espoir que de tels énoncés soient vérifiés.

La preuve du corollaire [A, 7.15] se généralise alors au cas des champs analytiques, au détail près que nous n'avons démontré 5.19 que pour des champs réduits. Cependant l'étape (1) implique que cela suffit. □

6 Appendice

6.1 Spectres

Le formalisme des spectres permet de ne prendre en compte que "l'information stable" de la théorie de l'homotopie. Pour l'utilisation que nous en ferons, leur intérêt réside dans le fait que les limites et colimites homotopiques de spectres sont des foncteurs "exacts". Ceci nous permet en particulier de faire commuter ces limites homotopiques avec la formation des fibres et des cofibres. Cet argument est utilisé implicitement tout au long de ce travail.

Un spectre E est la donnée d'une famille d'ensembles simpliciaux fibrants pointés $(E_{[n]}, x_n)$, avec $n \in \mathbf{Z}$, et d'une famille de morphismes

$$e_n : (E_{[n]}, x_n) \longrightarrow (\Omega_{x_{n+1}}(E_{[n+1]}), x_{n+1}).$$

Un morphisme de spectres $f : E \longrightarrow E'$ est la donnée d'une famille de morphismes pointés

$$f_n : (E_{[n]}, x_n) \longrightarrow (E'_{[n]}, x'_n)$$

tel que $e'_n \circ f_n = \Omega(f_{n+1}) \circ e_n$.

On peut définir pour tout $i \geq 0$ un morphisme de groupes

$$\pi_i(E_{[n]}, x_n) \longrightarrow \pi_i(\Omega_{x_{n+1}}(E_{[n]}), x_{n+1}) \simeq \pi_{i+1}(E_{[n+1]}, x_{n+1}).$$

On notera la limite de ce système inductif par

$$\pi_i(E, x) := colim_{m \geq n}(\pi_{i+m-n}(E_{[m]}, x_m)).$$

Un morphisme de spectres $f : E \longrightarrow E'$, est appelé une équivalence faible, si pour tout $i \in \mathbf{Z}$, le morphisme induit

$$f_* : \pi_i(E, x) \longrightarrow \pi_i(E', f(x))$$

est un isomorphisme.

Un théorème important ([J, 2.53]) est qu'il existe sur la catégorie des spectres une structure de catégorie de modèles fermée compatible avec la définition précédente d'équivalence faible.

Si X est un ensemble simplicial, et E un spectre, on peut définir le spectre des morphismes $Hom_{sp}(X, E)$ par

$$Hom_{sp}(X, E)_{[n]} := Hom_s(X, E_{[n]}),$$

les morphismes de transition étant donnés par

$$Hom_s(X, E_{[n]}) \xrightarrow{e_n} Hom_s(X, \Omega_{x_{n+1}}(E_{[n+1]})) \xrightarrow{nat} \Omega_{x_{n+1}}(Hom_s(X, E_{[n+1]}))$$

De plus, cette catégorie possède des Hom internes, notés Hom_{sp}. Tout comme la catégorie des ensembles simpliciaux, elle possède aussi des limites et colimites homotopiques. En particulier, si $f : E \longrightarrow E'$ est un morphisme de spectres, on dispose de la fibre et cofibre homotopique de f

$$Fib(f) := holim(E \longrightarrow E' \longleftarrow \bullet)$$
$$Cof(f) := hocolim(\bullet \longleftarrow E \longrightarrow E').$$

La principale propriété, qui distingue la catégorie des spectres de celle des ensembles simpliciaux, est que si l'on note

$$u : E' \longrightarrow Cof(f)$$

le morphisme naturel, alors il existe une équivalence faible fonctorielle

$$E \simeq Fib(u).$$

De même, si on note

$$v : Fib(f) \longrightarrow E$$

le morphisme naturel, il existe une équivalence faible naturelle

$$Cof(v) \simeq E'.$$

De cette façon, on voit que la formation des fibres et cofibres homotopiques commute avec les limites et colimites homotopiques. C'est une propriété tout à fait remarquable, et propre à l'homotopie stable, que nous utiliserons tout au long de ce travail.

Pour finir, la construction de Dold-Puppe permet d'associer à tout complexe de groupes abéliens $C : \dots C_n \longrightarrow C_{n+1} \dots$, un spectre pointé $(K(C), 0)$. Cette construction est fonctorielle, et est telle que

$$\pi_i(K(C), 0) \simeq H^{-i}(C).$$

Notons que "n-ème étage" $K(C)_{[n]}$, est par définition l'ensemble simplicial obtenu par la construction de Dolp-Puppe appliquée au complexe $\tau_{\leq 0}C[n]$.

6.2 Descente

Dans cet appendice on démontre le théorème de descente. La preuve est déjà dans la preuve de [J2, Thm. $3-10$], mais le résultat n'étant pas explicité sous cette forme nous avons tenu à en donner une démonstration complète.

Pour tout l'appendice, C est un site. On utilisera les notations de la section 1, ainsi que la proposition suivante :

Proposition 6.1 *[Q2, I − 1 Cor. 1] Soit F un préfaisceau simplicial fibrant, et $f : A \to B$ une équivalence faible. Alors le morphisme induit*

$$f^* : Hom_s(B, F) \to Hom_s(A, F)$$

est une équivalence faible.

Si $X \in C$, alors on dispose d'un foncteur image réciproque

$$j^* : SPr(C) \to SPr(C/X)$$

Ce foncteur possède un adjoint à gauche

$$j_! : SPr(C/X) \to SPr(C)$$

qui est l'extension par le préfaisceau vide. Il est défini par :
pour $F \in SPr(C/X)$ et $U \in C$, alors

$$(j_!F(U)) := \coprod_{Hom_C(U,X)} F(U \to X)$$

Il est clair que $j_!$ préserve les cofibrations ainsi que les équivalences faibles.

Lemme 6.2 *Soit C et C' deux sites et un foncteur*

$$\mathbf{a} : SPr(C') \to SPr(C)$$

possèdant un adjoint à gauche

$$\mathbf{b} : SPr(C) \to SPr(C')$$

qui préserve les cofibrations et les équivalences faibles, et tel que $\mathbf{b}(*) = *$. Alors le foncteur $\mathbf{a}$ transforme objets fibrants en objets fibrants.

Preuve: Soit F un préfaisceau simplicial fibrant sur C', et $i : A \hookrightarrow B$ une cofibration triviale de $SPr(C)$. Il faut montrer que le morphisme induit

$$i^* : Hom(B, a(F)) \to Hom(A, a(F))$$

est surjectif. Mais par adjonction, on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Hom(B, a(F)) & \to & Hom(A, a(F)) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ Hom(b(B), F) & \to & Hom(b(B), F) \end{array}$$

Or par hypothèse $b(i) : b(A) \to b(B)$ est une cofibration triviale de $SPr(C')$, et donc le morphisme du bas est surjectif. Ce qui implique que celui du haut aussi. $\square$

On vient de voir que si F est fibrant sur C, alors le préfaisceau j^*F (que l'on notera F_X par la suite) est fibrant sur C/X. De plus, comme

j^* préserve les cofibrations triviales, on obtient une équivalence faible canonique

$$H(C/X, F_X) \stackrel{\simeq}{\to} F^\circ(X)$$

pour chaque résolution injective $F \hookrightarrow F^\circ$. De cette façon on identifiera toujours les espaces $F^\circ(X)$ et $H(C/X, F_X)$, que l'on notera $H(X, F)$.

Définition 6.3 *Un objet simplicial $X_\bullet$ de C est un foncteur*

$$X_\bullet : \Delta^{op} \to C$$

où Δ est la catégorie simpliciale standard. On notera X_m pour l'objet $X_\bullet([m])$.

Si $X_\bullet$ est un objet simplicial de C, le site induit sur $X_\bullet$ est le site suivant :

- *les objets sont les morphismes de C*

  $$U \to X_m$$

  pour m un entier positif.

- *un morphisme de $f : U \to X_m$ vers $g : V \to X_n$ est la donnée d'un morphisme $a : [n] \to [m]$ dans Δ et d'un diagramme commutatif dans C*

  $$\begin{array}{ccc} U & \to & V \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ X_m & \stackrel{X_\bullet(a)}{\to} & X_n \end{array}$$

- *un morphisme est couvrant si le morphisme induit*

  $$U \to V$$

  est couvrant dans C.

Ce site est noté $C/X_\bullet$

Remarquons que l'on a un foncteur de restriction

$$j^* : SPr(C) \to SPr(C/X_\bullet)$$

A travers ce foncteur, tout préfaisceau simplicial F sera aussi considéré comme préfaisceau sur $X_\bullet$. Ainsi $H(X_\bullet, F)$ désignera $H(C/X_\bullet, j^*F)$.

Soit X un objet de C et $U \to X$ un morphisme couvrant. Le nerf du recouvrement U/X est l'objet simplicial de C défini par

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \to & C \\ [m] & \mapsto & U^{(m)} = \underbrace{U \times_X U \ldots \times_X U}_{m+1\ fois} \end{array}$$

et les morphismes $U^{(m)} \to U^{(n)}$ sont induits par les projections et les diagonales. On le note $\mathcal{N}(U/X)$.

Si F est un préfaisceau simplicial et $U \to X$ un recouvrement de C, on obtient un Δ-diagramme (espace cosimplicial) d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \to & SEns \\ [m] & \mapsto & F(U^{(m)}) \end{array}$$

Rappelons que l'espace de cohomologie de *Čech* du recouvrement U/X à coefficients dans le préfaisceau simplicial F est

$$\check{H}(U/X, F) := Holim_{[m]\in\Delta} F(U^{(m)})$$

Définition 6.4 *Un espace cosimplicial Z est un foncteur*

$$\begin{array}{cccc} Z: & \Delta & \to & SEns \\ & [m] & \mapsto & Z([m]) \end{array}$$

La catégorie des espaces cosimpliciaux est notée $CSEns$

Exemples

- $*$ est l'espace cosimplicial constant
- l'espace cosimplicial $\Delta/-$ est défini par

$$[m] \mapsto (\Delta/-)([m]) = B(\Delta/[m])$$

  où $B(I)$ est l'espace classifiant de la catégorie I, et I/i est la catégorie des morphismes de I de but i

Un espace cosimplicial Z peut être vu comme un préfaisceau simplicial sur Δ (site trivial). Ainsi, si Y et Z sont deux espaces cosimpliciaux, on définit l'espace des morphismes de Y vers Z par

$$Hom_{cs}(Y, Z) := Hom_s(Y, Z)$$

où Y et Z sont considérés comme préfaisceaux sur Δ.

Avec ces notations, la limite homotopique de Z est donnée par ([B-K, Ch. XI $3-2$])

$$Holim_{\Delta} Z = Hom_{cs}(\Delta/-, Z)$$

Théorème 6.5 *Soit F un préfaisceau simplicial sur C, et $X_\bullet$ un objet simplicial de C. Alors il existe une équivalence faible fonctorielle en F*

$$H(X_\bullet, F) \simeq Holim_{[m]\in\Delta} H(X_m, F)$$

Lemme 6.6 *Si F est un objet fibrant de $SPr(C)$, alors le préfaisceau induit F sur le site $C/X_\bullet$ est flasque.*

Preuve: Soit $j^* : SPr(C) \to SPr(C/X_\bullet)$ le morphisme de restriction. On considère $j^*F \to F^\circ$ une résolution injective sur $C/X_\bullet$. Alors, d'après le lemme 6.2, le morphisme induit sur C/X_m

$$F \to F^\circ$$

est une cofibration triviale d'objets fibrants. C'est donc une équivalence d'homotopie. Ainsi, pour tout objet U de C/X_m, le morphisme induit

$$F(U) \to F^\circ(U)$$

est une équivalence faible. Comme ceci est vrai pour tout U et tout m, on en déduit que pour tout objet U de $C/X_\bullet$

$$F(U) \to F^\circ(U)$$

est une équivalence faible. $\Box$

Lemme 6.7 *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} SPr(C/X_\bullet) & \to & CSEns \\ F & \mapsto & F(X_\bullet) \end{array}$$

admet un adjoint à gauche noté $Z \mapsto \widetilde{Z}$

Preuve: Soit Z un espace cosimplicial. On définit

$$\widetilde{Z} : \begin{array}{ccc} C/X_\bullet & \to & SEns \\ (\ U \to X_m\ ) & \mapsto & Z([m]) \end{array}$$

$\Box$

Preuve du théorème: Soit F un préfaisceau simplicial sur C. En remplaçant F par F° on peut supposer que F est fibrant sur C. Soit $F \hookrightarrow F^\circ$ une résolution injective sur $C/X_\bullet$. On sait que $H(X_\bullet, F) = Hom_s(*, F^\circ)$. Notons $\mathbf{1} = (\widetilde{\Delta/-})$.

Lemme 6.8 *Le morphisme canonique $\mathbf{1} \to *$ est une équivalence faible dans $SPr(C/X_\bullet)$.*

Preuve: Il suffit de voir que pour chaque m l'espace $\mathbf{1}(X_m)$ est contractile. Or par définition, on a

$$\mathbf{1}(X_m) = B(\Delta/[m])$$

Mais le classifiant d'une catégorie qui possède un objet final est contractile. $\square$

Comme F° est fibrant, la proposition 6.1 montre que le morphisme naturel

$$Hom_s(*, F^\circ) \xrightarrow{\simeq} Hom_s(\mathbf{1}, F^\circ)$$

est une équivalence faible. Mais, par adjonction, il existe une équivalence faible fonctorielle

$$Hom_s(\mathbf{1}, F^\circ) \xrightarrow{\simeq} Holim_\Delta F^\circ(X_\bullet)$$

On obtient ainsi une équivalence naturelle

$$H(X_\bullet, F) \xrightarrow{\simeq} Holim_\Delta F^\circ(X_\bullet)$$

De plus, par le lemme 6.6, le morphisme naturel

$$F \to F^\circ$$

est une équivalence faible *objet par objet*. Comme les limites homotopiques préservent les équivalences faibles, le morphisme induit

$$Holim_\Delta F(X_\bullet) \to Holim_\Delta F^\circ(X_\bullet)$$

est une équivalence faible. Enfin, comme F est fibrant, et par la remarque suivant 6.2, on obtient un diagramme fonctoriel en F

$$H(X_\bullet, F) \xrightarrow{\simeq} Holim_\Delta F^\circ(X_\bullet) \xleftarrow{\simeq} Holim_\Delta H(X_m, F)$$

$\square$

Proposition 6.9 *Si F est un préfaisceau simplicial, alors le morphisme naturel*

$$H(X, F) \to H(\mathcal{N}(U/X), F)$$

est une équivalence faible

Pour cela on a besoin d'un lemme que nous ne démontrerons pas (voir [J2, Cor. $2-7$]).

Lemme 6.10 *Si F est un faisceau simplicial sur un site C, alors il existe une résolution injective $F \hookrightarrow F^\circ$, où F° est un faisceau d'ensembles simpliciaux.*

Preuve de la proposition: Remarquons que, si l'on note $SS(X)$ la catégorie des faisceaux simpliciaux sur le site C/X, alors on dispose d'une équivalence de catégories

$$b : SS(X) \to SS(\mathcal{N}(U/X))$$

De plus, si $F \in SS(X)$, qui est aussi fibrant comme préfaisceau simplicial, $b(F)$ est alors fibrant en tant qu'objet de $SPr(\mathcal{N}(U/X))$. En effet, notons a le foncteur de faisceautisation.

Soit $A \hookrightarrow B$ une cofibration triviale de $SPr(\mathcal{N}(U/X))$, et un diagramme commutatif sur $\mathcal{N}(U/X)$

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & b(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \rightarrow & * \end{array}$$

Comme F est un faisceau on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(B, b(F)) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(A, b(F)) \\ \| & & \| \\ Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(a(B), b(F)) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(a(A), b(F)) \end{array}$$

Puis, par l'équivalence de catégories $SS(X) \rightarrow SS(\mathcal{N}(U/X))$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(B, b(F)) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(A, b(F)) \\ \| & & \| \\ Hom_X(a(B), F) & \rightarrow & Hom_X(a(A), F) \\ \| & & \| \\ Hom_X(B, F) & \rightarrow & Hom_X(A, F) \end{array}$$

et le morphisme du bas est surjectif par hypothèse.

Soit F un préfaisceau simplicial sur C. Quitte à remplacer F par son faisceau associé, on peut supposer que F est un faisceau. En effet le morphisme naturel $F \rightarrow a(F)$ est une équivalence faible, donc F et $a(F)$ ont la même cohomologie.

Soit $F \hookrightarrow F^\circ$ une résolution injective dans $SPr(C)$, avec F° un faisceau. Alors

$$b(F) \rightarrow b(F^\circ)$$

est encore une résolution injective. On en déduit donc

$$H(\mathcal{N}(U/X), F) = Hom_s(*, b(F^\circ)) = Hom_s(*, F^\circ) = H(X, F)$$

$\square$

Corollaire 6.11 *Si $U \rightarrow X$ est un recouvrement de C et F un préfaisceau simplicial, alors il existe une équivalence faible fonctorielle en F, X et U*

$$H(X, F) \stackrel{\simeq}{\rightarrow} \check{H}(U/X, H(-, F))$$

Preuve: On applique la proposition 6.9 et le théorème 6.5. $\Box$

Le théorème 6.5 sera appliqué de la façon suivante.

Corollaire 6.12 *Soit $X_\bullet$ un objet simplicial de C, et F_X le préfaisceau simplicial qu'il représente. Alors, pour tout préfaisceau simplicial F, on a un isomorphisme naturel dans $HoSp$*

$$\mathbf{R}Hom_s(F_X, F) \simeq \mathbf{H}(X_\bullet, j^*F)$$

où $j : SPr(C/X_\bullet) \longrightarrow SPr(C)$ est le morphisme de restriction.

Preuve: Quitte à remplacer F par une résolution injective, on peut supposer que F est fibrant.
Alors, on a par définition

$$\mathbf{R}Hom_s(F_X, F) \simeq Hom_s(F_X, F) \simeq Tot(F(X_\bullet)$$

où $Tot(F(X_\bullet))$ est l'espace total de l'espace cosimplicial $[n] \mapsto F(X_n)$ ([B-K,]). Mais, il est démontré dans [J2], que le morphisme canonique

$$Tot(F(X_\bullet)) \longrightarrow holim_\Delta F(X_\bullet)$$

est un isomorphisme. On conclut alors par le théorème 6.5. $\Box$

En stabilisant ces résultats, on obtient des résultats analogues sur les spectres.

Corollaire 6.13
1. *Soit K un préfaisceau en spectres fibrant dans $Sp(C)$. Alors F est flasque.*
2. *Soit K un préfaisceau en spectres, et $X_\bullet$ un objet simplicial de C. Alors, il existe un isomorphisme naturel dans $HoSp$*

$$\mathbf{H}(X_\bullet, j^*K) \simeq holim_{[m]\in\Delta}\mathbf{H}(X_m, K)$$

où $j : SPr(C/X_\bullet) \longrightarrow SPr(C)$ est le morphisme de restriction.

6.3 Strictification

Les objets simpliciaux que nous avons manipulé au cours de cette thèse ne sont pas de vrais objets simpliciaux, mais des "pseudo-objets simpliciaux". Dans cette section nous justifions les définitions des spectres de K-théorie de tels objets.

Soit I une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow Cat$ un pseudo-foncteur contravariant ([M, 3.1]). On lui associe, à l'aide de la construction de Grothendieck ([M, 3.4]), une strictification

$$SF : I \longrightarrow Cat$$

qui est un foncteur, muni de pseudo-transformations naturelles

$$SF \longrightarrow F$$

$$F \longrightarrow SF$$

adjoint l'une de l'autre.

Si pour chaque objet i, $F(i)$ est une catégorie exacte (ou bi-complicial de Waldhausen), et que pour chaque morphisme $i \to j$, $F(i) \to F(j)$ est un foncteur exact, alors les $SF(i)$ sont encore des catégories exactes (ou bi-compliciales de Waldhausen), et les $SF(i) \to SF(j)$ des foncteurs exacts. On dira alors que F est un I-pseudo-diagramme de catégories exactes.

Définition 6.14 *Soit $F : I \longrightarrow Cat$ un I-pseudo-diagramme de catégories exactes (ou bi-compliciale de Waldhausen). Notons $K : CatEx \longrightarrow Sp$ le foncteur de K-théorie. On définit alors*

$$holim_I K(F(i)) := holim_I K(SF(i))$$

$$hocolim_I K(F(i)) := hocolim_I K(SF(i))$$

en tant qu'objet de $HoSp$.

Il est à noter que si F est déjà un foncteur, la transformation naturelle $SF \longrightarrow F$ induit une équivalence sur les spectres de K-théorie (car elle possède un adjoint) objet par objet. Ainsi, la définition précédente concide avec la définition classique ([B-K, X 3]) à isomorphisme canonique près dans $HoSp$.

Supposons maintenant que l'on dispose d'une pseudo-transformation naturelle de pseudo-foncteurs sur I ([M, 3.2])

$$f : F \longrightarrow F'$$

Elle induit alors, une transformation naturelle de foncteurs

$$Sf : SF \longrightarrow SF'$$

et donc des morphismes dans $HoSp$

$$Sf : holim_I K(F(i)) \longrightarrow holim_I K(F'(i))$$

$$Sf : hocolim_I K(F(i)) \longrightarrow hocolim_I K(F'(i))$$

Par le procédé précédent, tous les pseudo-diagrammes de catégories exactes que nous rencontrerons seront strictifiés pour pouvoir en prendre le spectre de K-théorie.

6.4 Extension des coefficients

Lorsque K est un préfaisceau en spectres sur un site C, et $\mathcal{A}$ un préfaisceau de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels, nous souhaitons donner un sens à l'expression $K \otimes \mathcal{A}$.

Il est alors naturel de poser la définition suivante.

Définition 6.15 *Soit C un site, muni d'un préfaisceau de $\mathbf{Q}$-epaces vecoriels $\mathcal{A}$. Notons $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = K(\mathcal{A}, 0)$ le préfaisceau en spectres d'Eilenberg-Maclane associé. C'est un préfaisceau en spectres tel que ses préfaisceaux d'homotopie vérifient*

$$\begin{array}{ll} \pi_k(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) = & 0 \text{ pour } k \neq 0 \\ \pi_0(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) \simeq H_0(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, \mathbf{Z}) & \simeq \mathcal{A} \end{array}$$

Pour tout objet $K \in Sp(C)$, nous noterons

$$K \otimes \mathcal{A} := K \wedge \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$$

en tant qu'objet de $HoSp(C)$.

Remarquons que comme $\mathcal{A}$ est un préfaisceau en $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels, $K(\mathcal{A}, 0)$ est aussi un préfaisceau en spectres de Moore pour $\mathcal{A}$.

Proposition 6.16
1. *La correspondance $K \mapsto K \otimes \mathcal{A}$ est un foncteur de $HoSp(C)$ dans $HoSp(C)$.*
2. *Soit K un objet en anneaux de $HoSp(C)$. Si $\mathcal{A}$ est un préfaisceau de $\mathbf{Q}$-algèbres, alors $K \otimes \mathcal{A}$ est un objet en anneaux dans $HoSp(C)$. De plus, il existe un morphisme naturel dans $HoSp(C)$*
$$K \longrightarrow K \otimes \mathcal{A}$$
3. *Si $\mathcal{A}$ est le préfaisceau en $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels libres engendré par un préfaisceau d'ensembles X, alors il existe un isomorphisme canonique*
$$K \otimes \mathcal{A} \simeq \bigvee_X K_{\mathbf{Q}}$$
4. *Si $\mathcal{A}$ est un préfaisceau constant en $\mathbf{Q}$-algèbres et acyclique, alors pour chaque objet $X \in Ob(C)$, il existe un isomorphisme naturel*
$$H^*(X, K \otimes \mathcal{A}) \simeq H^*(X, K) \otimes H^0(\mathcal{A}(X))$$

Preuve: Les propriétés (1) et (2) sont immédiates par définition, et (3) et (4) sont une application de la formule de Kunneth. □

Remarque: Si $\mathcal{A}$ est un préfaisceau constant de fibre A, et $a \in A$, le morphisme

$$\begin{array}{rccc} a: & A & \longrightarrow & A \\ & b & \mapsto & a.b \end{array}$$

induit un morphisme de préfaisceaux de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels

$$a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

Ainsi, par fonctorialité, on a un morphisme de spectres abéliens

$$a : K \otimes \mathcal{A} \longrightarrow K \otimes \mathcal{A}$$

Ceci justifie en particulier la notation

$$\frac{1}{m} : K \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow K \otimes \mathbf{Q}$$

ou encore si K est un spectre en anneau, et $\phi : K \longrightarrow K$ un morphisme dans $HoSp(C)$

$$\frac{1}{m}.\phi : K \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow K \otimes \mathbf{Q}$$

qui est un morphisme dans $HoSp(C)$.

Corollaire 6.17 *Soit F un champ de Deligne-Mumford, et Λ le faisceau de $\mathbf{Q}$-algèbres défini dans 2.13. Alors, si S contient les racines de l'unité, il existe un isomorphisme naturel*

$$H^{-*}(I_F^t, \underline{K} \otimes \Lambda) \simeq \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t) \otimes \Lambda(S)$$

Preuve: D'après 6.16 (5), il suffit de montrer que Λ est acyclique sur $(Esp/S)_{et}$.

Comme la cohomologie commute avec les limites inductives filtrantes, il suffit de montrer que Λ_m est acyclique pour la topologie étale. Comme c'est un préfaisceau constant de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels, il est acyclique pour la topologie étale.

6.5 Théorie de Hodge pour les champs algébriques complexes

Pour démontrer la formule de la signature 3.49, nous avons utilisé que pour un champ algébrique complexe lisse F, dont l'espace de modules est projectif, on a

$$\sigma(F) = \sum_{p,q} (-1)^p h^{p,q}$$

où $h^{p,q} := Dim_{\mathbf{C}} H^p(F, \Omega_F^q)$. Pour le cas où F est un schéma, cette formule se démontre à l'aide de la théorie de Hodge ([Hi, 15.8.2]). Nous allons montrer dans cette partie, que cette théorie est applicable aux champs algébriques, et donc, que l'on peut démontrer la formule précédente par un raisonnement tout à fait analogue à celui fait dans [Hi, 15.8.2]. Nous utiliserons pour cela un argument de Deligne ([D]).

Fixons nous un champ algébrique complexe et lisse F, tel que son espace de modules M soit projectif. Nous noterons $p : F \longrightarrow M$ la projection. Soit $h_M \in H^2(M^{an}, \mathbf{Z})$ une section hyperplane de M. Comme p

est un morphisme fini, la classe $h := p^*(h_M) \in H^2(F^{an}, \mathbf{Z})$ est positive, et définit donc une métrique Kählérienne sur F^{an}. On associe à cette métrique les notions usuelles de formes harmoniques, et des opérateurs L, Λ, h, d, d', et d''. Les identités de Kähler impliquent que les formes harmoniques sur F^{an}, sont les formes α vérifiant $d'\alpha = d''\alpha = 0$.

Soit $q : X \longrightarrow F$ un morphisme propre et génériquement fini, avec X un schéma lisse et projectif. En utilisant les arguments de transferts utilisés dans [D, 4.3], on montre que les morphismes

$$q^* : H^p(F, \Omega^q) \longrightarrow H^p(X, \Omega^q)$$

sont injectifs. On suit alors l'argument utilisé dans [D, 5.3], pour aboutir à la proposition suivante.

Proposition 6.18 *(Deligne [D, 5.3, 5.4])*

- *La suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère.*
- *La filtration induite sur $H^*(F^{an}, \mathbf{C})$ vérifie*

$$F^p(H^n(F^{an}, \mathbf{C})) = \bigoplus_{i \geq p} F^p(H^{p+q}(F^{an}, \mathbf{C})) \cap \overline{F^q(H^{p+q}(F^{an}, \mathbf{C}))}$$

En particulier, on a un isomorphisme naturel

$$H^n(F^{an}, \mathbf{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(F, \Omega^q)$$

- *Toute classe de cohomologie dans $H^*(F^{an}, \mathbf{C})$ peut se représenter par un forme α avec $d'\alpha = d''\alpha = 0$. En particulier l'inclusion des formes harmoniques dans les formes exactes induit un isomorphisme*

$$\mathcal{H}^n(F^{an}) \simeq H^n(F^{an}, \mathbf{C})$$

En corollaire de cette proposition, on voit que tout le formalisme de la théorie de Hodge est valable pour le champ F. En particulier, la preuve de [Hi, 15.8.2] se généralise à notre situation, et montre la formule cherchée

$$\sigma(F) = \sum_{p,q} (-1)^p h^{p,q}$$

Par exemple, dans le cas des champs algébrique de dimension 2, on trouve la formule d'indice de Hodge suivante.

Corollaire 6.19 *Soit F un champ algébrique complexe lisse, tel que son espace de modules soit une surface projective. Alors, la forme d'intersection*

$$H^1(F, \Omega^1_F) \cap H^2(F^{an}, \mathbf{R}) \times H^1(F, \Omega^1_F) \cap H^2(F^{an}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

possède un unique vecteur propre positif.

Remarque: On doit aussi pouvoir démontrer plus généralement un théorème de Hodge pour des champs différentiels riemanniens compacts.

References

[A-L] B. Angéniol, M. Lejeune-Jalabert, "Le théorème de Riemann-Roch singulier pour les $\mathcal{D}$-modules", dans "Systèmes différentiels et singularités", ed. A. Galligo, M. Granger, Ph. Maisonobe, Astérisque **130** (1985).

[A] M. Artin, "Algebraization of formal moduli II : Existence of modification", Annals of Math. vol **91** No. 1 (1970) pp. 88 – 135.

[A-S] M. Atiyah and G. Segal, "On Equivariant Euler characteristics", J. Geom. Phys. **6** (1989) pp. 671 – 677.

[B-F-M] P. Baum, W. Fulton and R. MacPherson, "Riemann-Roch and topological K-theory for singular varieties", Acta. Math. **143** (1979) pp. 155 – 192.

[Be] Belkilani, "Le complexe cotangent analytique", Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie, Tome **27**, No. 3, 1985.

[B-F] K. Behrend, B. Fantechi, "The intrinsic normal cone", Invent. Math. **128** (1997), pp. 45 – 88.

[B] S. Bloch, "Higher algebraic K-theory and algebraic cycles", Adv. in Math. **61** (1985) pp. 267 – 304.

[B-E] S. Bloch, H. Esnault, "A Riemann-Roch theorem for flat bundles, with values in the algebraic Chern-Simons theory", preprint.

[Bo] A. Borel, "Algebraic $\mathcal{D}$-modules", perspectives in mathematics, Academic Press, Inc. 1987.

[B-K] A.K. Bousfield and D.M. Kan, "Homotopy limits, completions and localisations", Lecture Notes in Mathematics No. **304** , Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[Br-G] Brown and Gersten, "Algebraic K-theory as generalized cohomology", in "Algebraic K-theory" (H. Bass Ed.), Lecture Notes No. **341** , Springer-Verlag, Berlin, 1977, pp. 266 – 292.

[Br-Fu] J. Bryan, J. Fulman, "Orbifold Euler characteristics and the number of commuting n-tuples in the symmetric group", preprint.

[B-N] J.L. Brylinski and V. Nistor, "Cyclic cohomology of etale groupoids", K-theory Vol **8** , No 4 pp. 341 – 366, 1994.

[C-G] N. Chriss, V. Ginzburg, "Representation theory and complex geometry", Birkh$\ddot{a}$user 1997.

[C-M] M. Crainic, I. Moerdijk, "A homology theory for etale groupods", preprint.

[D] P. Deligne, "Critères de dégénérescence des suites spectrales", Publ. Math. I.H.E.S. **35** (1968) pp. 107 – 126.

[D-M] P. Deligne and D. Mumford, "The irreducibility of the moduli space of curves of a given genus", Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969) pp. 75 – 110.

[E-G] D. Edidin and W. Graham, "Equivariant intersection theory", Preprint.

[F-T] B. L. Feigin, B. L. Tsygan, "Additive K-theory", in "K-theory, arithmatic and geometry", Ed. Y. Manin, Lecture Notes in Mathematics **1289**, Springer 1982.

[F-L] W. Fulton and S. Lang "Riemann-Roch algebra", a series of comprehensive studies in Mathematics **277**, Springer-Verlag (1985).

[G] H. Gillet, "Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory", Adv. in Math. **40** (1981) pp. 203 – 289.

[G2] H. Gillet, "Intersection theory on algebraic stacks and Q-varieties", J. Pure Appl. Algebra **34** (1984) pp. 193 – 240.

[G3] H. Gillet, "Homological descent for the K-theory of coherent sheaves", in "Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis" Lecture Notes in Mathematics No. **1046**, Springer-Verlag (1982) pp. 80 – 103.

[Gin] V. Ginzburg, "Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality", preprint.

[Gi] J. Giraud, "Cohomologie non-abélienne", Springer-Verlag 1971.

[Gr] A. Grothendieck, "On the de Rham cohomology of algebraic varieties", Publ. Math. I.H.E.S. **29** (1966) pp. 95 – 103.

[H] R. Hartshorne, "On the de Rham cohomology of algebraic varieties", Publ. Math. I.H.E.S. **45** (1975) pp. 5 – 99.

[Hi] F. Hirzebruch, "Topological methods in algebraic geometry", classics in mathematics, Springer-Verlag 1995.

[J] J. F. Jardine, "Generalized etale cohomology theories", progress in Mathematics vol. **146**, Birkhäuser (1997).

[J2] J. F. Jardine, "Simplicial presheaves", J. Pure and Appl. Algebra **47** (1987) pp. 35 – 87.

[Jo] A. J. de Jong, "Smoothness, semi-stability and alterations", Publ. Math. I.H.E.S. **83** (1996) pp. 51 – 93.

[Jos] R. Joshua, "Riemman-Roch for weakly equivariant $\mathcal{D}$-modules", Math. Z. **206** (1990) pp. 131 − 144.

[K-M] S. Keel and S. Mori, "Quotients by groupoids", Preprint.

[K] B. Keller, "Cyclic homology of exact categories" Preprint.

[Ka] T. Kawasaki, "The index of elliptic operators over V-manifolds", Nogoya Math. J. Vol. **84** (1981), pp. 135 − 157.

[Ka2] T. Kawasaki, "The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds", Osaka J. Math. **16** (1979), pp. 151 − 159.

[Kr] A. Kresch, "Chow homology for Artin stacks", Ph.D. thesis, Univ. of Chicago, 1998.

[Ko] B. Koeck, "The Grothendieck-Riemann-Roch theorem for group scheme action", Preprint.

[Kon] M. Kontsevich, "Ennumeration of rational curves via torus actions", preprint.

[L] G. Laumon, "Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-modules filtrés", in Algebraic Geometry, Tokyo/Kyoto 1982, Lecture Notes in Mathematics No. **1016**, Springer-Verlag.

[L-M] G. Laumon et L. Moret-Bailly, "Champs algébriques", Prépublication d'Orsay (1992).

[Mac] R. D. MacPherson, "Chern classes for singular algebraic varieties", Ann. of Math. (2) **100**, (1974) pp. 423 − 432.

[M] J. P. May, "Pairing of categories and spectra", J. Pures and Appl. Algebra Vol. **19** (1980) pp. 299 − 347.

[Mu] D. Mumford, "Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves", in "Arithmetic geometry : Papers Dedicated to I.R. Shafarevich on the Occasion of His Sixieth Birthday Vol II", progress in Mathematics vol. **36**, Birkh$\ddot{a}$user (1983) pp. 271 − 328.

[M-F-K] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, "Geometric invariant theory 3^{rd} edition", a series of modern surveys in mathematics **34**, Springer-Verlag 1992.

[Q] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, in "Algebraic K-theory" (H. Bass Ed.), Lecture Notes in Mathematics No. **341** , Springer-Verlag 1977, pp. 85 − 147.

[Q2] D. Quillen, "Homotopical algebra", Lecture Notes in Mathematics No. **43**, Springer-Verlag 1967.

[SGA 1] "Revêtements étales et groupes fondamental", Lecture Notes in Mathematics No. **224**, Springer-Verlag (1971).

[SGA 3 *I*] "Schémas en groupes I : Généralités sur les schémas en groupes", Lecture Notes in Mathematics No. **151**, Springer-Verlag (1970).

[SGA 3 *II*] "Schémas en groupes II : Groupes de type multiplicatif et structure des schémas en groupes généraux", Lecture Notes in Mathematics No. **152**, Springer-Verlag (1970).

[SGA 3 *III*] "Schémas en groupes III : Structure des schémas en groupes réductifs", Lecture Notes in Mathematics No. **153**, Springer-Verlag (1970).

[Se] J. P. Serre, "Cours d'arithmétique", Presse universitaire de France 1970.

[S] C. Simpson, "Flexible sheaves", Preprint.

[S2] C. Simpson, "Algebraic stacks : summer school in Trento", Septembre 1996, notes manuscrites.

[SH] C. Simpson, A. Hirschowitz, "Descente pour les n-champs", preprint.

[Tan] Z. Tansamani, "Equivalence de la théorie homotopique des n-groupoides et celle des espaces topologiques n-tronqués", preprint.

[Ta] J. Tapia, "Classes de chern des fibrés sur les espaces d'orbites", Manuscrit non publié.

[Tel] , C. Teleman, "The quatization conjecture revisited", preprint.

[Th] R.W. Thomason, "Algebraic K-theory of schemes and of derived categories", in Grothendieck Festschrift vol. III, Birkh$\ddot{a}$user 1990, pp. 247 – 436.

[Th2] R.W. Thomason, "Algebraic K-theory of group schemes actions", Annals of Math. Studies **113** Princeton, 1983 pp. 539 – 563.

[Th3] R.W. Thomason, "Lefschetz-Riemann-Roch theorem and coherent trace formula", Invent. Math. Vol. **85** Fasc. 3 (1986) pp. 515 – 545.

[Th4] R.W. Thomason, "Algebraic K-theory and etale cohomology", An. Sci. de l'E.N.S. tome 18 fasc. 3 (1985) pp. 437 – 553.

[Vi] A. Vistoli, "Higher algebraic K-theory of finite group actions", Duke Math. Journal No. **63** (1991) pp. 399 – 419.

[Vi2] A. Vistoli, "Intersection theory on algebraic stacks and their moduli spaces", Invent. Math. **97** (1989) pp. 613 – 669.

[Wal] F. Waldhausen, "Algebraic K-theory of spaces", in "Algebraic and geometric topology", Ed. A. Ranicki, N. Levitt, F. Quinn, Lecture Notes in Mathematics **1126**, Springer 1981.