



HAL
open science

Méthodes d'optimisation du tracé de rayons

Olivier Devillers

► **To cite this version:**

Olivier Devillers. Méthodes d'optimisation du tracé de rayons. Synthèse d'image et réalité virtuelle [cs.GR]. Université Paris Sud - Paris XI, 1988. Français. NNT : . tel-00772857

HAL Id: tel-00772857

<https://theses.hal.science/tel-00772857>

Submitted on 11 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

Le titre de docteur en science
par

Olivier DEVILLERS

Sujet : Méthodes d'optimisation du tracé de rayons.

soutenue le Lundi 20 Juin 1988 a 11 heures devant la Commission d'examen

MM. Guy Vidal-Naquet **Président**

Christian Bouville

Heinrich Müller

Alain Nicolas

Claude Puech

Francis Schmitt

Résumé

Le tracé de rayons est la seule technique de synthèse d'images permettant la réalisation d'effets lumineux spéculaires. Cet algorithme est très coûteux en temps de calcul. Nous nous intéressons aux diverses méthodes d'optimisation du tracé de rayons basées sur la subdivision de l'espace. Nous proposons une structure de subdivision originale : les macro-régions. Cette structure utilise un grid dans lequel les éléments de grid appartenant à des zones à faible densité d'information sont regroupés en macro-régions.

Nous présentons ensuite une étude théorique et pratique du coût de différentes méthodes de subdivision de l'espace : grid, octree, boîtes englobantes et la structure de macro-régions.

Le coût moyen d'un rayon est étudié d'un point de vue pratique d'après les résultats d'une implantation de l'algorithme, et théorique en utilisant des résultats de géométrie stochastique. Ce coût est divisé en deux parties, on calculera tout d'abord le nombre moyen d'objets rencontrés par un rayon, puis le nombre moyen de régions rencontrées par un rayon dans les différents cas de subdivision. Cette étude fournit un certain nombre de résultats généraux permettant de mener à bien les mêmes calculs pour d'autres structures.

Les résultats exposés établissent l'efficacité de la subdivision par macro-régions.

Abstract

Ray tracing is the only image synthesis technique which allows the rendering of specular effects. In this thesis we explore the use of space subdivisions for ray tracing optimization. We propose a new method of subdivision : the macro-regions. This structure is based on a grid where some places, having a low density of information, are enclosed into macro-regions.

We present a theoretical and practical study of space subdivision methods : grid, octree, bounding boxes and macro-regions structure.

The average cost of a ray is investigated both from a practical point of view using the results of an implementation of the algorithm, and from a theoretical one, using some results from stochastic geometry. This cost is divided into two parts, the average number of objects intersected by a ray and the average number of regions intersected by a ray. The analysis gives some means to compute the same numbers for other subdivision structures.

Results exposed in this thesis show the efficiency of the macro-regions structure.

Je tiens à remercier tout d'abord Claude Puech qui a dirigé ce travail au Laboratoire de Recherche en Informatique, puis au Laboratoire de l'Ecole Normale Supérieure.

Je suis très honoré que Guy Vidal-Naquet ait accepté d'être président du jury.

Je remercie tout spécialement Christian Bouville du CCETT et Heinrich Müller qui m'a encadré durant mon stage de DEA, qui ont tous deux accepté d'être rapporteurs.

Merci à Alain Nicolas qui m'a suivi durant toute cette année, ainsi qu'à tous les membres de la société Thomson Digital Image pour l'accueil qu'ils m'ont réservé.

Merci aussi à Francis Schmitt d'avoir bien voulu faire partie du jury.

J'ai eu pendant l'élaboration de cette thèse des discussions très intéressantes et constructives avec Claire, François, Patrice et tous les membres de l'équipe algo.

Blandine s'est chargée d'interfacer ce travail avec le logiciel de TDI, ce qui a permis d'y intégrer des effets de textures.

François a eu la gentillesse de s'occuper des photographies.

Je tiens enfin à remercier Anne, François et plus particulièrement Monique pour la pénible tâche de relecture qu'ils ont effectuée.

Table des matières

Résumé	1
Remerciements	3
Table des matières	5
Liste des figures	9
Liste des tableaux	11
Introduction	13
1 L'algorithme de tracé de rayons	15
1.1 L'équation de Kajiya	16
1.2 Le tracé d'un rayon, opération de base	18
1.3 L'algorithme de Whitted	19
1.3.1 principe de l'algorithme	19
1.3.2 La réflexion diffuse de l'éclairage	19
1.3.3 La réflexion spéculaire	21
1.3.4 La réfraction	22
1.3.5 La notion de rayon	23
1.4 Le tracé de rayons distribué	26
1.5 Le tracé de rayons arrière	28
1.6 Le système Cil	30
1.6.1 Le principe de la radiosité	30
1.6.2 Les facteurs de formes étendus	30
1.7 Coût du tracé de rayons	31
2 Structures de subdivision de l'espace	33
2.1 La sélection des objets	33
2.2 Grid	34
2.2.1 Traversée du grid	34

2.2.2	Coût de la traversée d'une région du grid	35
2.3	Octree	36
2.3.1	Traversée de l'octree	36
2.3.2	Coût de la traversée d'une région de l'octree	37
2.4	Boîtes englobantes	37
2.4.1	Sélection d'une boîte englobante	37
2.4.2	Coût de la traversée d'une boîte	38
2.5	Résultats	38
3	Macro-régions	41
3.1	Objectifs	41
3.2	Définition des macro-régions	42
3.3	Construction d'une macro-région	42
3.4	Répartition des macro-régions	43
3.5	Parcours d'un rayon	44
3.5.1	Sélection d'une macro-région	44
3.5.2	Traversée d'une macro-région	46
3.6	Comparaison avec l'octree	46
3.7	Etude pratique de la taille des macro-régions	47
4	Macro-régions directionnelles	55
4.1	Sélection directionnelle de la macro-région	55
4.2	Construction des macro-régions directionnelles	56
4.3	Interêt des macro-régions directionnelles	58
5	Hypothèses probabilistes	59
5.1	Hypothèses sur les objets	59
5.2	Hypothèses sur les rayons	60
5.3	Hypothèses sur les octrees	60
6	Coût d'une subdivision spatiale	65
6.1	Etude théorique	65
6.1.1	Résultats généraux	65
6.1.2	Grid	69
6.1.3	Octree	71
6.1.4	Macro-régions	72
6.1.5	Boîtes englobantes	74
6.2	Etude pratique	75

7	Distribution des objets	79
7.1	Taux d'occupation du grid	79
7.2	Taille du grid optimale	81
7.3	Etude pratique de la taille du grid	82
8	Evolution vers une structure adaptative	87
8.1	Limites de l'étude du chapitre 7	87
8.2	Introduction d'une structure hiérarchique	88
8.3	Une structure hiérarchique dynamiquement adaptée	89
	Conclusion	91
	Annexes	
A	Intersection d'une droite et d'un domaine convexe	93
A.1	Calcul de l'intégrale (A.1)	93
A.2	Calcul de l'intégrale (A.2)	94
A.3	Calcul de l'intégrale (A.3)	96
B	Etude du rapport volume sur aire pour un parallélépipède	99
C	Calculs pratiques d'intersections	101
C.1	Intersection d'un rayon avec un objet	101
C.1.1	Intersection d'un rayon avec une sphère	101
C.1.2	Intersection d'un rayon avec une facette plane	101
C.2	Paramétrage d'un point sur un objet	104
C.2.1	Paramétrage d'un point sur une sphère	105
C.2.2	Paramétrage d'un point sur un triangle	106
C.2.3	Paramétrage d'un point sur un quadrilatère	107
D	Images	109
E	Temps d'exécution	111
F	Lexique	123
	Bibliographie	127

Liste des figures

1.1	L'équation de Kajiya.	16
1.2	Algorithme élémentaire pour tracer un rayon.	18
1.3	Tracé des rayons primaires.	20
1.4	Réflexion diffuse de l'éclairage.	20
1.5	Détermination de la direction de la réflexion.	21
1.6	Détermination de la direction de la réfraction.	22
1.7	Génération des rayons.	24
1.8	Arbre des rayons.	25
1.9	Phénomènes d'aliassage.	26
1.10	Approximations de l'angle solide.	27
1.11	Tracé de rayons distribué.	28
1.12	Réflexion de l'éclairage.	29
2.1	Traversée du grid.	35
2.2	Traversée de l'octree.	36
2.3	Sélection d'une boîte englobante.	38
3.1	Construction d'une macro-région.	42
3.2	Exemple de répartition des macro-régions.	43
3.3	Traversée de plusieurs macro-régions.	44
3.4	Sélection d'une macro-région.	45
3.5	Traversée d'une macro-région.	46
3.6	Comparaison entre octree et macro-régions.	47
3.7	Recouvrement des macro-régions.	48
3.8	Répartition des macro-régions par taille dans la scène "sphères".	50
3.9	Répartition des macro-régions par taille dans la scène "hall".	51
3.10	Répartition des macro-régions par taille dans la scène "flocon".	52
3.11	Répartition des macro-régions par taille dans la scène "tétraèdre".	53
4.1	Faisceaux de directions.	56
4.2	Macro-régions et faisceaux de rayons.	57
4.3	Macro-région directionnelle.	57
5.1	Modèle d'octree de H. Samet.	61

6.1	Définition des variables.	66
6.2	Changement de variables.	67
6.3	Éléments de grid traversés par un rayon.	70
6.4	Feuilles de l'octree traversées par un rayon.	70
6.5	Macro-régions traversées par un rayon.	72
6.6	Boîtes traversées par un rayon.	74
6.7	Nombre moyen d'intersections du rayon avec les objets et les régions. . .	77
6.8	Coût d'un rayon.	78
7.1	Taux d'occupation du grid effectif et théorique.	84
7.2	Temps de calcul en fonction de la taille du grid.	85
8.1	Influence des conditions d'observation sur l'équiprobabilité des rayons. .	88
A.1	Intégration sur la demi-sphère unité Σ_+	94
A.2	Domaine engendré dans la direction x_1 en dimension 2.	97
C.1	Intersection d'un rayon avec une sphère.	102
C.2	Représentation d'un polygone.	102
C.3	Intersection d'un polygone et d'un rayon.	103
C.4	Méthodes de subdivision d'une sphère.	104
C.5	Définition des paramètres sur une sphère.	105
C.6	Définition des paramètres sur un triangle.	106
C.7	Définition des paramètres sur un quadrilatère.	108
D.1	Image "sphères".	110
D.2	Image "hall".	110
D.3	Image "flocon".	110
D.4	Image "tétraèdre".	110
D.5	Projet "Osaka".	110
D.6	Le système "CIL".	110

Liste des Tableaux

2.1	Coût de la recherche d'une région.	39
C.1	Cas de subdivision de la sphère.	106
E.1	Caractéristiques des scènes calculées.	112
E.2	Temps d'exécutions sur les bases de données d'Eric Haines.	113
E.3	Taux d'occupation du grid.	114
E.4	Temps en fonction de la taille du grid.	115
E.5	Temps en fonction de la taille du grid avec macro-régions.	116
E.6	Temps en fonction de la taille du grid avec macro-régions directionnelles.	117
E.7	Nombre moyen d'intersections du rayon.	118
E.8	Répartition des macro-régions dans la scène "sphères".	119
E.9	Répartition des macro-régions dans la scène "hall".	120
E.10	Répartition des macro-régions dans la scène "flocon".	121
E.11	Répartition des macro-régions dans la scène "tétraèdre".	122

Introduction

La synthèse d'images a pour but la simulation de prises de vue. Les applications sont multiples : CAO, simulateurs de vols, applications audiovisuelles, design industriel. Certaines de ces utilisations nécessitent du "temps réel", c'est-à-dire la production d'images à un rythme de 25 par seconde. Par contre, d'autres utilisations, par une vision différée des séquences d'images, autorisent des temps de calcul plus longs, et donc l'utilisation de méthodes plus puissantes permettant un degré de réalisme élevé.

En synthèse d'images, le problème à résoudre est le suivant : à partir d'un ensemble d'objets, donnés par une description géométrique abstraite, de sources lumineuses et de conditions de vision, c'est-à-dire de la position d'un observateur, il faut produire sur l'écran la vision de la scène par cet observateur.

La description de la scène peut-être donnée sous plusieurs formes : une description par des facettes planes, par des surfaces de Bézier, ou bien par la définition spécifique d'objets complexes (sphères, quadriques, fractales, surfaces de révolution).

Le tracé de rayons est une technique très puissante de synthèse d'images. C'est le seul algorithme permettant de d'obtenir des effets complexes de réflexions spéculaires et réfractions [Whi80] [DPS87], mais il nécessite des temps de calcul importants. Il est donc crucial d'optimiser cet algorithme et de pouvoir étudier les performances de ces optimisations.

Le développement de différents algorithmes utilisant la même primitive de *lancer d'un rayon* nous a conduit à étudier cette opération en dehors de son contexte éventuel, mais il est bien évident qu'une exploitation de ce contexte peut dans certains cas permettre d'autres améliorations.

Ce travail comporte deux aspects originaux, d'une part la description d'une nouvelle méthode de subdivision de l'espace pour l'optimisation du tracé de rayons et d'autre part l'évaluation des performances de diverses structures de subdivision.

La méthode des macro-régions que nous développons dans cette thèse repose sur une structure de grid. L'inconvénient majeur de la structure de grid, est la trop forte subdivision des régions à faible densité d'information, nous le

résolvons par l'introduction de macro-régions permettant un traitement rapide de ces zones. Le but de la structure de macro-région est d'utiliser la simplicité et l'efficacité du grid dans les régions où c'est le plus utile, et d'utiliser une structure plus sophistiquée dans les autres régions.

La seconde partie de cette thèse porte sur l'étude de l'efficacité de structures de subdivision de l'espace pour le tracé de rayons. Nous examinons ainsi des méthodes classiques (octree, boîtes englobantes) et plus particulièrement le grid et les macro-régions. Cette étude a été menée sur des plans théoriques et pratique. L'étude pratique est basée sur les temps de calculs que nous avons obtenus à partir d'une implantation du tracé de rayons. L'étude théorique de ces structures concerne deux points importants dans l'algorithme de tracé de rayons : d'une part le coût de traversée d'une telle structure, et d'autre part la manière dont les objets sont répartis afin d'en faciliter le traitement.

Le chapitre 1 présente le principe du tracé de rayons et son utilisation. Les méthodes habituelles d'optimisation du tracé de rayons basées sur la subdivision spatiale seront exposées ensuite (chapitre 2), ainsi que la méthode des macro-régions (chapitres 3 et 4). Les chapitres 6 et 7 sont consacrés à une étude théorique et pratique du coût d'un rayon, en séparant le coût de traitement des objets de celui des méthodes de subdivision. Pour mener cette étude théorique il sera nécessaire de faire certaines hypothèses probabilistes. Celles-ci sont décrites au chapitre 5. Le détail de certains calculs, les méthodes utilisées pour la descriptions des objets, les résultats d'exécution et un lexique sont donnés en annexes.

Chapitre 1

L'algorithme de tracé de rayons

Le problème principal de la synthèse d'images réalistes est la modélisation de la lumière, c'est-à-dire de la manière dont l'ensemble des objets contribuera à l'intensité lumineuse de chaque point de l'écran. Kajiya a proposé une équation globale modélisant les flux lumineux dans une scène [Kaj86b]. Le contenu essentiel de cette équation est le fait que l'intensité lumineuse émise par un objet de la scène dépend de celle émise par tous les autres objets.

Parmi les modèles de la lumière utilisés en synthèse d'images, il faut distinguer les modèles locaux des modèles globaux. Les modèles locaux évaluent l'intensité émise par un objet à partir de paramètres locaux : état de surface, direction des lampes... et ne font pas intervenir cette interdépendance entre les objets. C'est ainsi que fonctionnent les systèmes de synthèses d'images les plus couramment employés [Gou71] [Pho73].

Les modèles globaux font, eux, intervenir ces effets d'inter-réflexions. Les deux principaux modèles globaux sont la radiosité pour la modélisation des effets de diffusion de la lumière [GTGB84] [CG85] [CGIB86], et le tracé de rayons pour la modélisation des effets spéculaires [Whi80] [CT82].

Le tracé de rayons est un outil puissant permettant d'implanter certaines approximations de l'équation de Kajiya, autorisant des effets spéculaires. Le tracé de rayons tel que Whitted l'a introduit [Whi80] est la première de ces approximations, elle consiste à évaluer le flux lumineux provenant d'une direction donnée en traçant un rayon dans cette direction puis en calculant l'intensité lumineuse émise par l'objet détecté. Il faut distinguer deux aspects : d'une part le calcul géométrique de détection de l'objet situé dans la direction du rayon, et d'autre part les calculs photométriques. Plusieurs variantes ont été proposées —tracé de rayons distribué [CPC84], tracé de rayons arrière [Arv86], tracé de cônes [Ama84]— elles permettent une meilleure qualité, notamment en ce qui concerne l'antialiasage. Le tracé d'un rayon est également une primitive intéressante pour d'autres algorithmes que celui de Whitted, on l'utilise notam-

ment dans des méthodes basées sur le principe de la radiosité qui permettent de mieux modéliser la lumière diffuse [WCG87] [DPS87].

Dans ce chapitre, nous formulons tout d'abord l'équation de Kajiya, puis nous présentons le tracé de rayons en tant que primitive géométrique, et différents algorithmes utilisant cette primitive. A partir de cette primitive géométrique, on peut appliquer plusieurs modèles photométriques, celui que Whitted a introduit en 1980 [Whi80] ou d'autres plus récents [CT82]. L'objet de cette thèse est l'étude du tracé de rayons en temps qu'outil de calcul géométrique. Même si des notions de photométrie sont présentées dans ce chapitre, les modèles de la lumière ne sont pas présentés de manière exhaustive.

1.1 L'équation de Kajiya

La synthèse d'images repose sur la modélisation physique de la lumière. Kajiya [Kaj86b] propose une modélisation très générale de la propagation de la lumière dans des milieux non diffusants (les objets agissent sur la lumière uniquement au niveau de leur surface). Le principe de cette modélisation consiste à considérer l'intensité de transport entre deux points quelconques de la scène. Soit $I(x, x')$ l'intensité lumineuse allant de x' vers x , on a alors :

$$I(x, x') = g(x, x')[\varepsilon(x, x') + \int_S \rho(x, x', x'')I(x', x'')dx''] \quad (1.1)$$

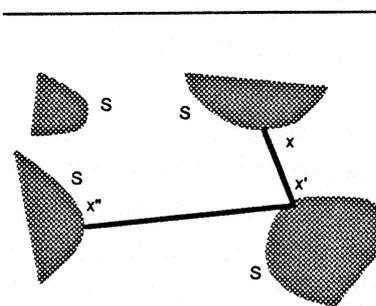


Figure 1.1: L'équation de Kajiya.

Les différents termes de cette équation s'interprètent de la façon suivante (voir figure 1.1¹) :

¹De nombreuses figures sont faites en dimension 2 pour des raisons de clarté, alors qu'elles illustrent une propriété en dimension 3.

$I(x, x')$ est reliée à l'intensité lumineuse transportée du point x au point x' (intensité de transport)

$g(x, x')$ est une fonction de visibilité entre x et x' , qui vaut

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \text{ est invisible de } x'. \\ \frac{1}{d(x, x')^2} & \text{si } x \text{ est visible de } x'. \end{array}$$

$\varepsilon(x, x')$ est reliée à l'émission propre de lumière au point x' dans la direction du point x .

$\rho(x, x', x'')$ est reliée à la fonction de réflectance bi-directionnelle au point x' , pour les directions de x et x'' .

Le domaine S sur lequel s'effectue l'intégration est la réunion des surfaces de tous les objets composant la scène.

Les quantités introduites ici sont légèrement différentes des notions habituelles d'intensité ou de réflectance, en particulier elles ne s'expriment pas dans les mêmes unités physiques. Par contre elles correspondent à l'idée intuitive que l'on se fait de la lumière, ce qui permet de comprendre rapidement la signification de l'équation : la lumière émise au point x' ne peut parvenir en x que si les deux points peuvent se voir. C'est le sens du terme de visibilité (le carré de la distance intervient dans g pour des raisons de dimensionnalité). Si x' est visible de x , deux termes vont concourir au transport de lumière de x' à x :

- L'émission propre de lumière en x' , si la surface située en x' est intrinsèquement lumineuse (terme ε).
- La lumière réfléchiée en x' vers x , en provenance du reste de l'environnement (intégrale sur $x'' \in S$). Cette lumière est modulée par la valeur de la fonction de réflectance ρ en x' .

Le modèle de Kajiya est très intéressant, car il propose une approche globale, permettant la plupart des effets réalisés jusqu'à maintenant, mais cette approche est beaucoup trop générale pour déboucher sur un calcul pratique. Par contre de nombreux algorithmes de synthèse d'images sont basés sur des modèles que l'on peut voir comme des approximations de celui-ci.

Le tracé de rayons

Le tracé de rayons a été introduit par Turner Whitted [Whi80]. Cet algorithme permet la modélisation des effets spéculaires, c'est-à-dire de la réflexion par des

miroirs et de la réfraction par des objets transparents. L'algorithme de Whitted repose sur une approximation de l'équation de Kajiyama où on se restreint à une fonction ρ bien précise : la somme d'une fonction constante et d'une fonction de Dirac concentré aux points x, x', x'' tels que x et x'' soit conjugué par rapport à x' , soit vis-à-vis de la réflexion géométrique, soit vis-à-vis de la réfraction.

Cet algorithme est très coûteux en temps de calcul, il est donc primordial d'étudier avec soin son optimisation pour l'utiliser efficacement.

1.2 Le tracé d'un rayon, opération de base

Le tracé de rayons introduit par Whitted repose sur une opération de base : calculer le premier point d'intersection d'un rayon avec l'ensemble des objets de la scène. Cette opération de base est la partie la plus coûteuse de toutes les variantes de l'algorithme de tracé de rayons, c'est donc à elle que nous allons nous intéresser prioritairement.

Un rayon sera déterminé par son point origine O et un vecteur \vec{v} . Le résultat du tracé d'un rayon est un objet et le point d'intersection avec cet objet. Ce point est défini par $\lambda > 0$ tel que $O + \lambda\vec{v}$ soit ce point d'intersection. On appellera λ la *distance du rayon à l'objet*.

On peut alors écrire un premier algorithme élémentaire pour tracer un rayon (figure 1.2).

Pour chaque objet α
calculer λ_α tel que $O + \lambda_\alpha\vec{v}$ soit le point d'intersection avec l'objet α
Trouver α_0 tel que λ_{α_0} soit le minimum des λ_α positifs
L'objet détecté est α_0 à la distance λ_{α_0}

Figure 1.2: Algorithme élémentaire pour tracer un rayon.

On voit ici se dégager deux phases de calcul : tout d'abord le calcul de la distance d'un rayon à un objet, et d'autre part la détermination de l'objet le plus proche.

Le calcul de la distance d'un rayon à un objet dépend essentiellement du type d'objet. L'annexe C détaille ce calcul dans le cas de facettes polygonales et de sphères. Cette distance peut être calculée par une méthode spécifique

pour certains types d'objets complexes : fractales, prismes, objets de révolution, objets déformés [Kaj83] [Tot85].

Pour déterminer l'objet le plus proche, on cherche à éliminer à priori un certain nombre d'objets non susceptibles de couper le rayon. C'est cet aspect de l'optimisation du tracé de rayon que nous allons étudier. Cette optimisation ne dépend pas du type d'objets utilisé.

Le tracé d'un rayon est l'opération de base de plusieurs algorithmes. Le premier est celui de Whitted qui a donné lieu à diverses modifications et améliorations : tracé de rayons distribué, tracé de rayons arrière, tracé de cônes. Nous verrons également comment le système CIL, basé sur la méthode de la radiosité, intègre les phénomènes spéculaires à l'aide de cette opération de tracé d'un rayon.

1.3 L'algorithme de Whitted

L'algorithme de Whitted a pour but la synthèse d'images avec des effets de réflexion spéculaire, de réfraction et d'ombres portées.

1.3.1 principe de l'algorithme

Le problème que l'on cherche à résoudre est :

"quelle est l'intensité lumineuse reçue par l'œil
dans la direction de chaque pixel ?"

Pour répondre à cette question, on trace un rayon depuis l'œil en direction de chaque pixel, on appellera ces rayons : *rayons primaires*.

Le rayon primaire donne un point d'intersection avec la scène (figure 1.3). La lumière reçue par l'œil dans la direction du pixel provient de ce point d'intersection, on la sépare en plusieurs composantes :

- La réflexion diffuse de l'éclairage
- La réflexion spéculaire (miroir)
- La réfraction

1.3.2 La réflexion diffuse de l'éclairage

Si une lampe émet de la lumière avec une certaine puissance p_0 , une partie de celle-ci arrive sur l'objet, et est r emise de manière isotrope (diffuse). La puissance r emise dans la direction de l'œil est (figure 1.4) :

$$p = cte \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot p_0$$

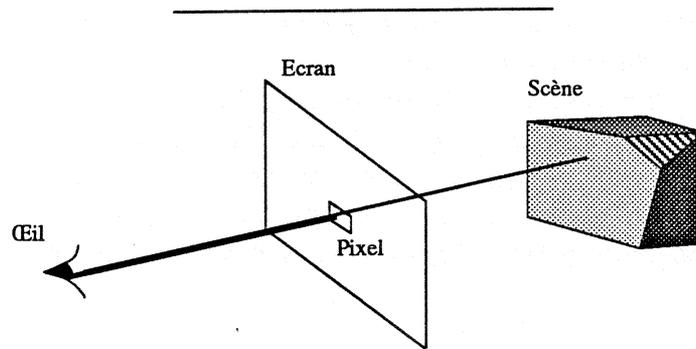


Figure 1.3: Tracé des rayons primaires.

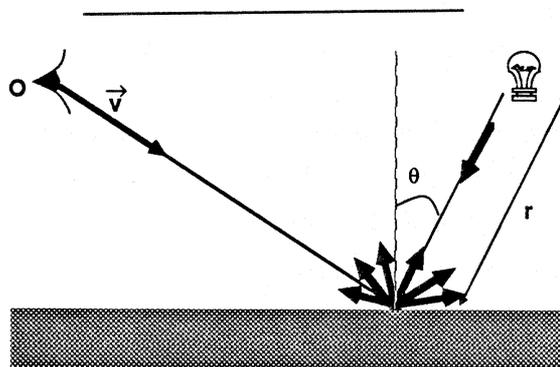


Figure 1.4: Réflexion diffuse de l'éclairage.

Pour savoir si une lampe éclaire effectivement un objet, on trace un rayon depuis le point de l'objet qui nous intéresse vers la lampe afin de détecter les obstacles éventuels. On obtient ainsi les effets d'ombres portées. Ces rayons sont appelés : *rayons d'ombrage*.

1.3.3 La réflexion spéculaire

C'est la réflexion non isotrope de la lumière par un objet, ce qui permet de modéliser les miroirs. Une part de la lumière reçue est réémise dans la direction de la réflexion géométrique. Pour modéliser cet effet, on introduit un coefficient de réflexion du matériau. La part de l'intensité lumineuse véhiculée par un rayon incident due à la réflexion spéculaire est évaluée en traçant un rayon depuis l'objet détecté par le rayon incident dans la direction de la réflexion géométrique, et en multipliant le résultat de ce rayon par le coefficient de réflexion du matériau. Ce rayon est appelé *rayon secondaire*. Les rayons sont tracés dans le sens inverse du parcours réel de la lumière.

Détermination de la direction de la réflexion

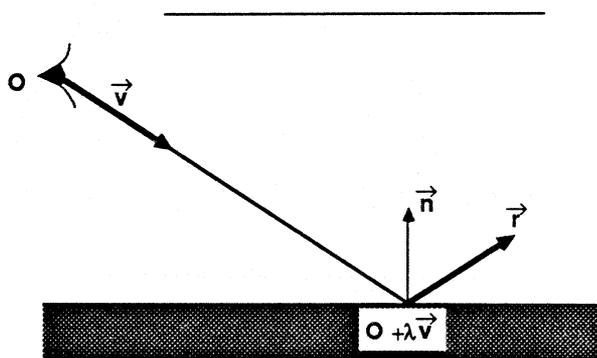


Figure 1.5: Détermination de la direction de la réflexion.

Le rayon incident est déterminé par O et \vec{v} .
Le tracé de ce rayon produit comme résultat :

- λ tel que $P = O + \lambda\vec{v}$,
- le coefficient de réflexion spéculaire en P ,
- la normale \vec{n} à l'objet détecté au point P , $\|\vec{n}\| = 1$.

On a alors la direction de la réflexion \vec{r} (figure 1.5) :

$$\vec{r} = \vec{v} - 2 \vec{n} \cdot \vec{v} \vec{n}$$

1.3.4 La réfraction

Une part de la lumière reçue par un objet transparent est réémise dans la direction réfractée. On procède comme dans le cas de la réflexion spéculaire. On introduit un coefficient de réfraction du matériau et on trace un rayon depuis le point détecté dans la direction de la réfraction déterminée par la loi de Descartes. Ce rayon est aussi appelé *rayon secondaire*.

Détermination de la direction de la réfraction

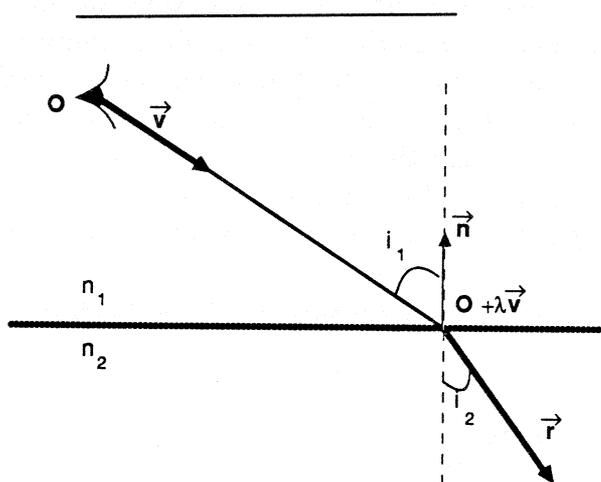


Figure 1.6: Détermination de la direction de la réfraction.

La direction de la réfraction est donnée par la loi de Descartes (figure 1.6) :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Le rayon incident est déterminé par O et \vec{v} .

Le tracé de ce rayon produit comme résultat :

- λ tel que $P = O + \lambda\vec{v}$,
- le coefficient de transmission de l'intensité lumineuse en P ,
- la normale \vec{n} à l'objet détecté au point P , $\|\vec{n}\| = 1$.

On calcule alors la direction de la réfraction \vec{r} :

On décompose \vec{v} et \vec{r} selon la normale et un vecteur \vec{t} tangent à l'objet.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_n \vec{n} + v_t \vec{t} \\ \vec{r} &= r_n \vec{n} + r_t \vec{t}\end{aligned}$$

Seule la direction de \vec{r} est importante, on va donc chercher à exprimer \vec{r} sous la forme $\vec{v} + \mu\vec{n}$ ce qui conduit à poser $r_t = v_t$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sin i_1 &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{t}}{\|\vec{v}\|} = \frac{v_t}{\|\vec{v}\|} \\ \sin i_2 &= \frac{\vec{r} \cdot \vec{t}}{\|\vec{r}\|} = \frac{v_t}{\|\vec{r}\|} \\ \frac{n_2}{n_1} &= \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{v}\|} \\ \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 &= \frac{r_t^2 + r_n^2}{v_t^2 + v_n^2} = \frac{v_t^2 + r_n^2}{v_t^2 + v_n^2}\end{aligned}$$

On peut alors calculer r_n et en déduire \vec{r} .

$$r_n^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \|\vec{v}\|^2 - v_t^2$$

En reportant $v_t^2 = \|v\|^2 - (\vec{n} \cdot \vec{v})^2$, on a

$$r_n^2 = (\vec{n} \cdot \vec{v})^2 - \|\vec{v}\|^2 \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]$$

Si cette valeur est négative, on a un phénomène de réflexion totale, sinon on obtient \vec{r} :

$$\vec{r} = \vec{v} - \left(\vec{n} \cdot \vec{v} + \sqrt{(\vec{n} \cdot \vec{v})^2 - \|\vec{v}\|^2 \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]} \right) \vec{n}$$

1.3.5 La notion de rayon

On voit ici se préciser l'utilisation de la notion de rayon. L'information que l'on attend d'un rayon O, \vec{v} est :

“Quelle intensité lumineuse parvient en O depuis la direction \vec{v} ?”

Le calcul de cette information nécessite de tracer le rayon O, \vec{v} , ce qui aboutit à la détection du point $P = O + \lambda\vec{v}$. Il faut alors, pour calculer l'intensité, tracer deux types de rayons : des rayons d'ombrage en direction de chaque lampe et les rayons secondaires pour connaître la lumière provenant de des directions réfléchiée et réfractée. Les rayons secondaires donnent naissance à de nouveaux rayons (figures 1.7 et 1.8).

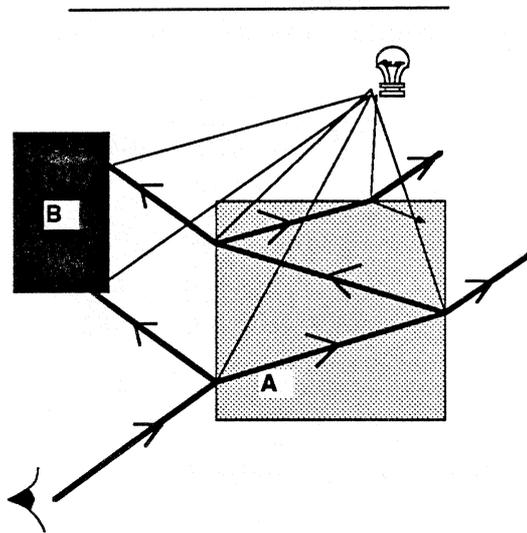


Figure 1.7: Génération des rayons.

Pour le calcul de chaque pixel, on trace donc un rayon primaire, qui entraîne le calcul d'un certain nombre de rayons d'ombrage et de rayons secondaires que l'on peut structurer sous forme d'arbre (voir figure 1.8). Nous appellerons cet arbre *l'arbre des rayons*.

On voit ici que les rayons d'ombrage et les rayons primaires et secondaires jouent des rôles différents. L'information que l'on attend des rayons d'ombrage est :

“Y-a-t-il un obstacle entre la lampe et le point ?”

alors que les rayons primaires et secondaires véhiculent une information plus complexe. Les rayons d'ombrage sont nécessairement des feuilles de l'arbre des rayons, alors que les rayons primaires et secondaires entraînent le tracé récursif d'autres rayons. L'arbre des rayons n'étant pas à priori fini il est nécessaire de borner sa profondeur.

L'algorithme se divise en deux parties, d'une part le tracé des rayons au sens du paragraphe 1.2, c'est-à-dire le calcul des intersections, et d'autre part l'application du modèle de la lumière. Le coût du modèle de la lumière dépend de la sophistication de celui-ci (lissage, textures...) et n'est pas propre au tracé de rayons. C'est le calcul des intersections, primitive de base du tracé de rayons, que l'on cherche à optimiser. Toutes les méthodes d'optimisation du tracé de rayons reposent sur un traitement de cette opération pour réduire sa complexité

en fonction de la taille de la scène.

1.4 Le tracé de rayons distribué

L'algorithme de Whitted lance un rayon au centre de chaque pixel, ce qui produit des phénomènes d'aliassage illustrés sur la figure 1.9 : lignes crénelées, sous échantillonnage d'une texture.

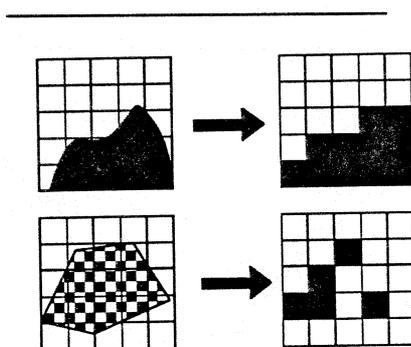
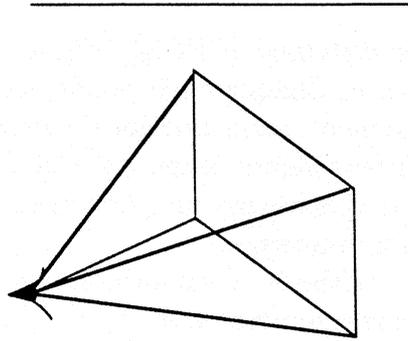


Figure 1.9: Phénomènes d'aliassage.

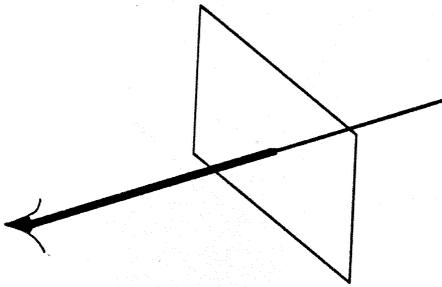
Ce phénomène est dû au fait que ce que perçoit l'œil ne correspond pas à un rayon mais une évaluation de la distribution de luminance des objets situés autour de la direction du rayon. L'œil effectue une intégration et un filtrage de l'intensité émise par les objets selon une distribution dont nous supposons que le support est l'angle solide ayant l'œil pour origine, et délimité par les bords du pixel (figure 1.10a). Dans le tracé de rayons habituel, cet angle solide est approché par une droite (figure 1.10b), ce qui provoque ces phénomènes d'aliassage.

En outre, le tracé de rayons d'ombrage pour la détermination des ombres portées ne correspond pas au phénomène physique réel : il produit des ombres nettes présentant un contraste total entre la partie éclairée et la partie dans l'ombre, ignorant ainsi la diffusion de l'éclairage par le reste de la scène, et la possibilité de sources lumineuses non ponctuelles.

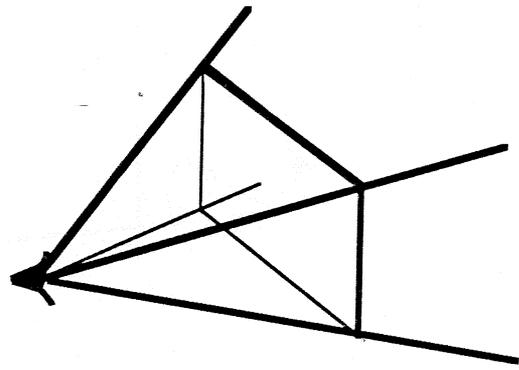
Des méthodes permettant une meilleure approximation de l'angle solide ont été proposées. Le tracé de faisceaux [HH84] (figure 1.10c) propose de calculer de manière exacte les angles solides. Cette méthode n'est appliquée que dans le cas d'objets polygonaux. Le tracé de cônes [Ama84] (figure 1.10d) utilise des cônes



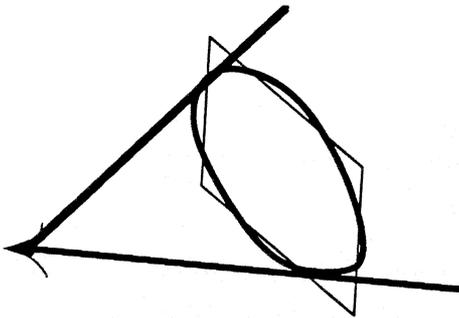
a : Angle solide.



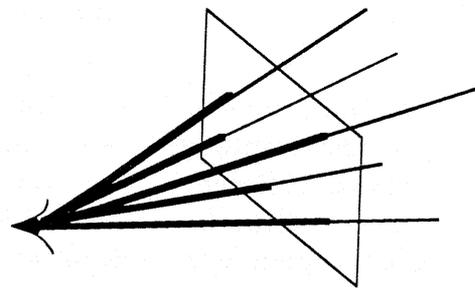
b : Tracé de rayons.



c : Tracé de faisceaux.



d : Tracé de cônes.



e : Tracé de rayons distribué.

Figure 1.10: Approximations de l'angle solide.

comme approximation des angles solides, on a alors une notion “d’épaisseur du rayon”.

Le tracé de rayons distribué [CPC84] (figure 1.10e) introduit la notion d’échantillonnage aléatoire. Chaque angle solide est évalué à l’aide de plusieurs rayons répartis aléatoirement selon une loi de Poisson. La valeur résultat est la moyenne des différentes valeurs obtenues. Cet échantillonnage stochastique substitue au phénomène d’aliasage un phénomène de bruit nettement moins perturbant pour la vision humaine.

En appliquant cette méthode d’échantillonnage stochastique à d’autres angles solides que ceux correspondant aux rayons primaires, on obtient d’autres effets que l’anti-aliasage (figure 1.11) :

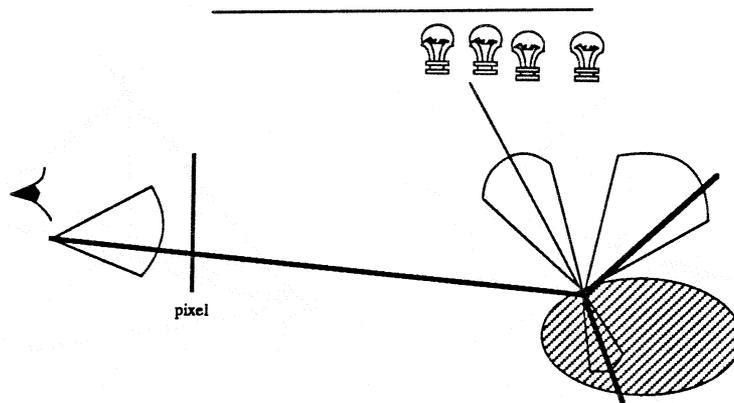


Figure 1.11: Tracé de rayons distribué.

-
- | | | |
|------------------|---|------------------------------------|
| rayons primaires | → | antialiasage |
| rayons d’ombrage | → | sources lumineuses non ponctuelles |
| rayons réfléchis | → | objets dépolis |
| rayons réfractés | → | objets translucides |

Comme pour le tracé de rayons usuel, le coût d’une image est essentiellement dû aux calculs d’intersections. Mais cette méthode nécessite le tracé d’un plus grand nombre de rayons, elle est donc plus coûteuse que le tracé de rayons classique.

1.5 Le tracé de rayons arrière

Le tracé de rayons ne rend compte des phénomènes de réflexion et de réfraction que pour la lumière émise par les objets, et non pour la lumière

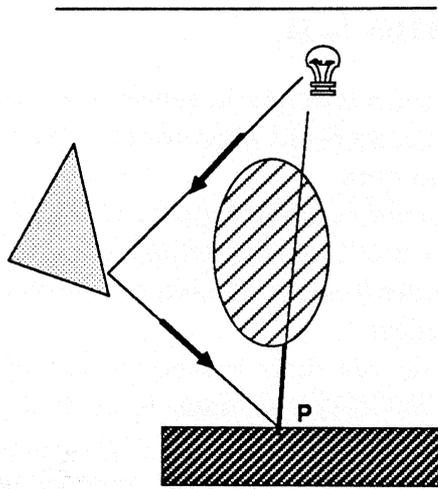


Figure 1.12: Réflexion de l'éclairage.

émission par les sources lumineuses. En effet, les lois de l'optique nous permettent de calculer, étant donné un rayon et une surface, les rayons réfléchis et réfractés. Par contre, étant donné deux points (un objet et une lampe), calculer le chemin suivi par la lumière pour aller de l'un à l'autre est un problème trop complexe pour être résolu dans un temps raisonnable. Les problèmes d'éclairage d'objets à travers des objets transparents ou par l'intermédiaire de miroirs ne sont donc pas résolus correctement par le tracé de rayons. L'approximation la plus courante est de ne pas dévier les rayons d'ombrage traversant des objets transparents, mais seulement de les atténuer. Ainsi sur la figure 1.12 le point P est considéré comme étant à l'ombre de la lampe alors que celle-ci l'éclaire par l'intermédiaire du miroir.

Pour résoudre ce problème, J. Arvo [Arv86] propose la méthode suivante. On effectue d'abord un tracé de rayons depuis chaque lampe, dans toutes les directions. À chaque objet détecté, on enregistre la quantité de lumière reçue par l'objet et on trace les rayons réfléchis et réfractés. Ce tracé de rayons fournit une carte de l'illumination des objets tenant compte des propriétés de réflexions et de réfractions spéculaires de ces objets. On procède alors au tracé de rayons de visualisation : lorsqu'un point est détecté, on consulte la carte d'illumination pour connaître la manière dont le point est éclairé.

Cette méthode permet de nouveaux effets, mais elle nécessite de subdiviser les objets et d'effectuer plusieurs tracés de rayons. Elle ne permet toujours pas une bonne modélisation de la lumière diffuse.

1.6 Le système Cil

Le tracé de rayons ne considère que la réflexion et la réfraction suivant les lois de l'optique géométrique, ignorant ainsi toute la partie diffusée de la lumière et les phénomènes de pénombre.

Jusqu'en 1986, la seule technique permettant de calculer une illumination diffuse globale était la méthode de radiosité [GTGB84], mais au prix d'une simplification grossière des lois de réflexion de la lumière ignorant toute la partie directionnelle de la lumière.

Des combinaisons de ces deux méthodes ont été proposées par Wallace, Cohen et Greenberg [WCG87], et dans le système "CIL" [DPS87] : *calculs d'inter-réflexions lumineuses*.

L'objectif est de définir une méthode générale de calcul pour l'image de synthèse, empruntant aux deux méthodes leurs avantages respectifs, sans augmenter des temps de calcul déjà importants. La radiosité fournira le cadre global du calcul alors que le tracé de rayons sera la primitive élémentaire généralisant la projection perspective utilisée dans la radiosité classique.

1.6.1 Le principe de la radiosité

Dans la méthode de la radiosité, on cherche à calculer quelle est l'intensité lumineuse B_i émise par un élément i de la scène. Pour cela on calcule une matrice d'interactions entre ces différents éléments de la scène, les coefficients de cette matrice sont appelés facteurs de forme. $F_{i,j}$ est la proportion de lumière émise par j qui arrive sur i et est réémise. Nous pouvons maintenant écrire l'intensité lumineuse émise par i . C'est la somme de l'intensité qu'il reçoit des autres objets et réémet, et de l'intensité E_i qu'il émet par lui même si cet objet est une lampe.

$$B_i = E_i + \sum_j F_{i,j} B_j$$

Soit matriciellement

$$B = E + F \cdot B \quad (1.2)$$

L'algorithme de radiosité calcule cette matrice, puis résout l'équation (1.2).

Cette méthode ne prend en compte que la lumière diffuse et ne permet aucun effet spéculaire.

1.6.2 Les facteurs de formes étendus

Le système "CIL" que nous avons développé [DPS87] repose sur une définition étendue des facteurs de formes. Nous distinguons deux modes de réflexions de la lumière, le mode diffus et le mode spéculaire. On applique alors le même

raisonnement que pour la radiosité simple, mais en changeant légèrement la signification des quantités que l'on manipule :

- B_i est l'intensité lumineuse émise par un élément i de la scène de manière diffuse.
- $F_{i,j}$ est la proportion de lumière émise par j qui arrive sur i et est réémise après avoir suivi un chemin spéculaire entre i et j .

Le calcul de ces facteurs de formes étendus nécessite non plus de connaître l'existence d'un chemin lumineux rectiligne entre i et j , mais l'existence d'un chemin spéculaire. C'est le tracé de rayons qui va permettre ce calcul.

Avec ces nouvelles définitions, on peut comme précédemment calculer les facteurs de formes étendus et résoudre l'équation de la radiosité (1.2). On obtient alors l'intensité émise par chaque objet de manière diffuse, il reste alors pour obtenir une image à effectuer un tracé de rayons de visualisation dans lequel on appliquera pas de formule de rendu comme dans l'algorithme de Whitted, mais où on utilisera les valeurs B_i . Ce tracé de rayons n'utilise pas de rayons d'ombrage.

Le système "CIL" permet la modélisation d'effets lumineux complexes, notamment de réflexion et de réfraction de l'éclairage ainsi qu'une excellente modélisation de la lumière diffuse. La combinaison de ces deux aspects sur une même image ne pourrait pas actuellement être obtenue par d'autres méthodes. Nous présentons une image réalisée avec cet algorithme D.6.

1.7 Coût du tracé de rayons

Pour les différentes applications présentées dans ce chapitre, l'outil de base est le tracé d'un rayon. Les algorithmes nécessitant un grand nombre de rayons, il est indispensable d'optimiser avec soin le tracé d'un rayon.

Dans une première approche, le temps de calcul peut-être évalué ainsi :

$$t = n_r \times t_r + t_i \quad (1.3)$$

où

- t est le temps de calcul total.
- n_r est le nombre de rayons.
- t_r est le temps de calcul d'un rayon.
- t_i est le temps de prétraitement.

Nous ne nous intéresserons pas pour l'instant à n_r et t_i car ils dépendent à priori de l'application particulière que l'on fait du tracé de rayons. Diminuer n_r produit des phénomènes d'aliassage dûs au sous-échantillonnage.

Il faut donc minimiser t_r . Le temps de calcul d'un rayon, t_r , peut s'écrire ainsi :

$$t_r = t_s + n_o \times t_o + t_a \quad (1.4)$$

où

- t_s est le temps de sélection des objets.
- t_o est le temps d'intersection du rayon avec un objet.
- n_o est le nombre d'objets testés.
- t_a est le temps de calcul de l'application particulière.

On commence par sélectionner les objets susceptibles de rencontrer le rayon. Cette opération produit en moyenne n_o objets en un temps t_s . Puis on calcule l'intersection du rayon avec chaque objet sélectionné en un temps t_o . On cherche alors parmi ces objets quel est le premier rencontré.

Les méthodes permettant de diminuer t_o sont très dépendantes du type d'objets utilisés, elles ne s'appliquent que sur des objets relativement complexes [Kaj83] [Bar86] [Tot85]. Dans le cas d'objets de définition simple comme des facettes planes, le calcul de l'intersection d'un rayon avec cette facette est suffisamment rapide pour n'autoriser que peu de possibilités d'optimisation (voir annexe C).

Nous allons donc nous intéresser à des méthodes de sélection des objets. Plus celles-ci seront complexes, et plus n_o diminuera, au prix d'une augmentation de t_s . Il faut donc trouver le meilleur compromis. Les chapitres 2 et 3 présentent différentes méthodes de sélection des objets basées sur des subdivisions de l'espace. Le coût de ces méthodes, c'est-à-dire t_s , sera étudié au chapitre 6 et leur efficacité, c'est à dire n_o , est étudiée au chapitre 7.

Comme nous étudions le tracé de rayons en tant que primitive géométrique indépendante de l'application, nous nous interdirons toute exploitation de la cohérence entre les rayons.

Chapitre 2

Structures de subdivision de l'espace

Le principe de la sélection des objets par subdivision de l'espace est présenté en détail dans ce chapitre, ainsi que différentes méthodes utilisées. La plus simple est la structure de grid qui utilise un maillage régulier de l'espace (paragraphe 2.2). On peut subdiviser l'espace d'une manière adaptée à la géométrie de la scène à l'aide de structures hiérarchiques : octree [Gla84], arbres BSP [PAB87] ; nous décrivons l'octree au paragraphe 2.3. Un autre moyen d'aboutir à une structure adaptée à la scène est de regrouper les objets dans des boîtes englobantes [Kaj86a] [WHG84] (paragraphe 2.4). Les performances de ces différentes structures seront étudiées au chapitre 6.

2.1 La sélection des objets

Le but de la sélection des objets est de ne traiter les intersections *rayon-objets* que lorsque cela est judicieux. C'est-à-dire que l'on désire éliminer à priori un certain nombre d'objets comme n'étant pas intéressants : ce sont les objets "loin" du rayon.

Les méthodes de sélection utilisées reposent sur une subdivision de l'espace. L'espace est subdivisé en *régions*. Les objets sont partagés entre les différentes régions.

Le traitement d'un rayon peut alors se faire région par région. Les régions que le rayon ne coupe pas ne sont pas examinées, on a donc bien éliminé un certain nombre d'objets à priori par rapport à l'algorithme de la figure 1.2.

Mais cette subdivision entraîne un surcoût. D'une part, un prétraitement est nécessaire pour calculer comment les objets se répartissent ou se partagent entre les différentes régions. D'autre part, il faut calculer quelles sont les régions traversées par le rayon.

Si on reprend l'équation (1.4), t_s correspond à la recherche des régions. Les objets sélectionnés sont ceux appartenant aux régions rencontrées, la liste en ayant été établie lors du prétraitement.

- Fixons quelques notations utilisées dans ce chapitre :

Le rayon est donné par son origine O et sa direction \vec{v} . Un point M sur le rayon est caractérisé par $\lambda > 0$ tel que $M = O + \lambda\vec{v}$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{pmatrix}$$

P désigne le point d'entrée dans la région courante, r et R sont des points permettant de désigner cette région.

- Certains paramètres ne dépendent que du rayon et peuvent ne pas être recalculés à chaque nouvelle région visitée :

$$s_i = \text{Signe}(v_i) \in \{-1, 0, 1\}, \quad i \in \{x, y, z\}$$

$$\theta_i = \frac{1}{v_i}, \quad i \in \{x, y, z\}$$

2.2 Grid

Le grid est la structure de subdivision la plus simple. C'est un maillage régulier de l'espace contenant la scène par une grille de taille $N \times N \times N$ [Mul85]. Toutes les régions ont la même taille et sont contiguës. L'exploitation de cette forte cohérence entre les régions va rendre la recherche des régions rencontrées par un rayon dans une telle structure assez simple. On va pouvoir implanter celle-ci sous la forme d'un algorithme incrémental.

2.2.1 Traversée du grid

Une région est de la forme : $[r_x, r_x + 1] \times [r_y, r_y + 1] \times [r_z, r_z + 1]$. Cette région sera repéré par le point $r(r_x, r_y, r_z)$ dont les coordonnées sont entières.

- Initialisation du rayon :

Soit λ tel que $P = O + \lambda\vec{v}$ est le point d'entrée dans le grid. (si O est à l'intérieur du grid, $\lambda = 0$, sinon $O + \lambda\vec{v}$ est sur le bord du grid). La première région rencontrée par le rayon peut alors être déterminée.

$$r_i = \lfloor P_i \rfloor \quad (i \in \{x, y, z\}) \quad \text{détermine la région.}$$

Nous calculons alors les trois paramètres $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ où :

$$\delta_i \text{ est le plus petit réel positif tel que } O_i + (\lambda + \delta_i)v_i \in \mathbb{N} \quad (i \in \{x, y, z\})$$

- Recherche de l'élément de grid suivant.

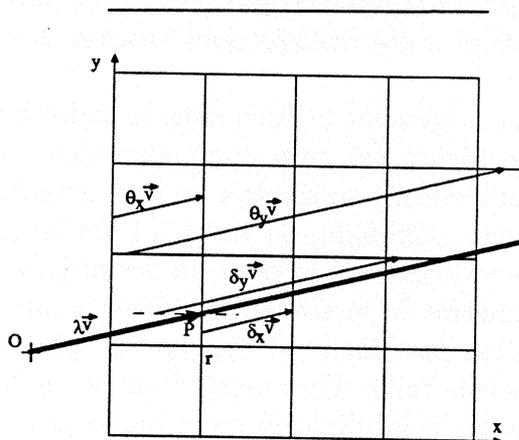


Figure 2.1: Traversée du grid.

On part de la situation suivante :

r est la région courante,

λ tel que $P = O + \lambda\vec{v}$ soit le point d'entrée dans la région r ,

δ_x tel que $O + (\lambda + \delta_x)\vec{v}$ soit le prochain point d'abscisse entière,

δ_y et δ_z de même.

On détermine le plus petit des nombres δ_i . Par exemple $\delta_x = \min(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$, la prochaine région se trouve dans la direction x . Les paramètres sont mis à jour ainsi :

$$\lambda = \lambda + \delta_x$$

$$\delta_y = \delta_y - \delta_x$$

$$\delta_z = \delta_z - \delta_x$$

$$\delta_x = \theta_x$$

$$r_x = r_x + s_x$$

2.2.2 Coût de la traversée d'une région du grid

Déterminer la région suivante nécessite 4 additions et 2 comparaisons. Le temps CPU nécessaire dépend de la machine utilisée, par exemple nous obtenons sur un Sun 3/50 un temps $t_1 = 0.13ms$.

2.3 Octree

L'octree est une structure récursive permettant une subdivision adaptative de l'espace. Cette structure a été utilisée pour stocker des points ou des régions [Sam84].

Cette méthode est largement utilisée dans le cadre du tracé de rayons (voir [Gla84]). Quand une région est trop complexe, c'est-à-dire contient un trop grand nombre d'objets, elle est subdivisée en huit octants et ceci récursivement jusqu'à une profondeur maximale, ou jusqu'à l'obtention de régions suffisamment simples. L'octree dépend de la position des objets, la subdivision spatiale est adaptée à la géométrie de la scène. Un octree a une profondeur maximale, une région à profondeur maximale est appelée un *voxel*. On peut construire un grid ayant pour finesse la taille d'un voxel, dans ce cas la subdivision de l'octree est un sous ensemble de la subdivision créée par le grid.

Les régions sont contigües. Quand on quitte une région, on doit calculer le point d'entrée dans la région suivante (i.e. le point de sortie de la région courante) et effectuer une recherche de voisin dans l'octree pour trouver la région suivante.

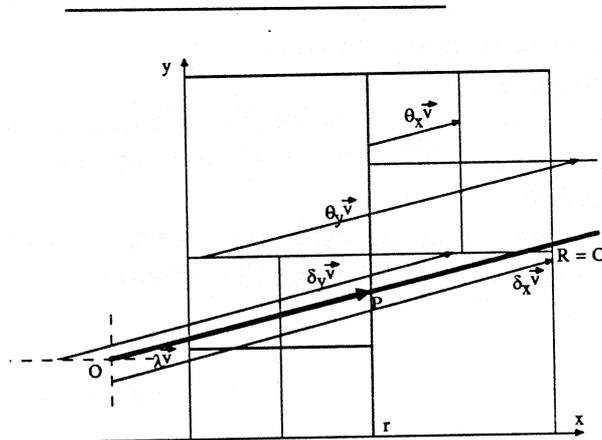


Figure 2.2: Traversée de l'octree.

2.3.1 Traversée de l'octree

Pour calculer le point de sortie de la région courante, nous effectuons les opérations suivantes (Figure 2.2).

Soit $[r_x, R_x] \times [r_y, R_y] \times [r_z, R_z]$ la région courante; pour chaque direction $i \in \{x, y, z\}$, C_i est la coordonnée de sortie de la région (si $s_i > 0$ alors $C_i = R_i$ sinon $C_i = r_i$) on calcule

$$\delta_i = \theta_i(C_i - O_i)$$

La direction de la prochaine région est celle du plus petit des δ_i .

Par exemple $\delta_x = \min(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$, alors le point de sortie de la région est :

$$P_i = O_i + \delta_x v_i, \quad i \in \{x, y, z\}$$

La recherche de voisin dans un octree est une opération classique (voir par exemple [Sam84] pour une description de l'algorithme). Il faut remonter dans l'octree jusqu'au plus petit ancêtre commun des deux régions, puis redescendre vers la région suivante.

2.3.2 Coût de la traversée d'une région de l'octree

Le calcul du point de sortie de la région courante nécessite 6 multiplications, 6 additions et 5 comparaisons, On appelle t_2 le temps CPU correspondant. Dans notre implantation, $t_2 = 0.4ms$ (sur SUN 3/50).

La recherche d'un voisin dans l'octree se fait en $3k$ comparaisons pour remonter jusqu'à l'ancêtre commun, et k comparaisons pour redescendre. On note t_3 le temps CPU correspondant. $k = 2$ est une bonne estimation de la valeur moyenne (voir paragraphe 5.3).

2.4 Boîtes englobantes

L'idée de base des boîtes englobantes est de regrouper les objets par proximité, et de calculer une boîte englobant chaque groupe d'objets. Ce regroupement est en général effectué récursivement.

Dans cette structure, il n'y a pas de cohérence entre les différentes régions. On ne peut pas parler de régions voisines comme dans l'octree ou dans le grid, à chaque instant toutes les boîtes doivent être prises en compte.

2.4.1 Sélection d'une boîte englobante

Une boîte englobante est intéressante si elle est intersectée par le rayon.

Soit $[r_x, R_x] \times [r_y, R_y] \times [r_z, R_z]$ la région. Pour un rayon, on calcule les coordonnées d'entrée c_i et de sortie C_i de la région dans chaque direction :

$$c_i = r_i \text{ si } v_i > 0, R_i \text{ sinon}$$

négative à un test d'intersection. Ces coûts sont essentiellement destinés à donner un ordre de grandeur des opérations nécessaires au traitement de ces différents types de régions et non une évaluation précise qui sera dépendante de la machine.

		multiplications	additions	comparaisons
t_1	(grid)		4	2
t_2	(octree)	6	6	5
t_3	(voisin dans l'octree)			8
t_4	(boîtes englobantes)	6		8

Tableau 2.1: Coût de la recherche d'une région.

Après avoir présenté dans ce chapitre différentes méthodes de subdivision de l'espace utilisées dans le cadre du tracé de rayons, nous allons maintenant exposer la méthode des macro-régions que nous avons développée à partir de la structure de grid.

Chapitre 3

Macro-régions

3.1 Objectifs

Toutes les méthodes d'accélération du tracé de rayons basées sur la subdivision spatiale sont confrontées au problème suivant :

Une subdivision plus fine diminue le nombre d'objets à envisager, mais augmente le temps de sélection de ces objets.

La première idée pour contourner cet obstacle est de subdiviser uniquement les parties de l'espace où c'est nécessaire. Cette idée débouche sur des structures adaptatives ou hiérarchiques de subdivision de l'espace. L'inconvénient de ces structures par rapport au grid est que leur gestion est plus compliquée, et le coût de recherche d'une région plus important (voir paragraphe 2.5). Les solutions généralement adoptées reposent sur des octrees [Gla84] ou d'autres subdivisions de l'espace à l'aide d'arbres BSP [PAB87]. On peut également utiliser des mélanges de plusieurs méthodes : grid, octree, boîtes englobantes [BMPA87] [SB87]. Le grid est alors utilisé comme moyen d'accès rapide à une région de l'octree ou pour présélectionner les boîtes englobantes.

Le but de la structure de macro-régions que nous avons développée [DP88] est d'introduire la notion de regroupement de régions en macro-régions pour les zones ne contenant pas d'information tout en préservant la simplicité et l'efficacité de la structure de grid dans les zones à plus forte densité d'information. La plupart des structures classiques procèdent par adaptation de la structure à la densité d'information. En choisissant de privilégier délibérément les zones ne contenant aucun objet, nous obtenons une grande simplicité de traitement.

L'objectif est de traiter rapidement les zones ne contenant pas d'objet tout en utilisant un grid très subdivisé. Il faut que ce grid soit suffisamment fin pour épouser d'assez près la forme des objets. La sélection des objets introduite par le

grid est alors suffisamment précise, rendant ainsi caduque la combinaison avec d'autres structures comme des boîtes englobantes.

3.2 Définition des macro-régions

La structure de macro-régions est construite à partir de la structure de grid. Une macro-région est un parallélépipède rectangle isothétique, regroupant un certain nombre de régions élémentaires du grid.

Ces macro-régions sont destinées à occuper les zones à faible densité d'information, c'est-à-dire les zones contenant peu d'objets. En fait, les zones à faible densité d'information seront les zones sans aucun objet ce qui permettra de gérer facilement les problèmes d'intersection éventuels entre macro-régions.

La structure de macro-régions dépend du grid sous-jacent. Elle est utilisée sous la forme d'un tableau de la taille du grid. Un élément du grid contient soit l'adresse d'une macro-région regroupant divers éléments de grid, soit l'information habituelle dans la structure de grid classique, c'est-à-dire la liste des objets coupant cet élément de grid.

3.3 Construction d'une macro-région

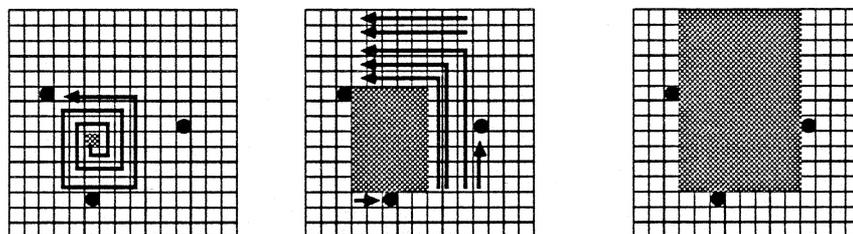


Figure 3.1: Construction d'une macro-région.

La traversée d'une macro-région évite la traversée d'un certain nombre d'éléments de grid. Plus ce nombre est grand, plus la macro-région sera intéressante. Comme on le verra au paragraphe 6.1.4, il faut maximiser le rapport volume sur aire de la macro-région, c'est-à-dire que les macro-régions doivent être le plus "cubiques" possible (voir annexe B).

La macro-région doit répondre à un certain critère. Par la suite, le critère sera de ne contenir aucun objet, mais on pourrait en utiliser un autre moins restrictif, par exemple de contenir moins d'un nombre donné d'objets, ou un autre critère plus complexe. Pour construire une macro-région "cubique" ne contenant pas d'objet, on repère un élément de grid vide. Cet élément de grid est la macro-région de départ. On essaie alors de l'étendre successivement dans chacune des six directions $+x$, $+y$, $+z$, $-x$, $-y$, $-z$ tant que cette extension n'introduit pas d'objet dans la macro-région (figure 3.1). Cette construction "en escargot" préserve au maximum la forme cubique de la macro-région.

On calcule ainsi des macro-régions jusqu'à ce que chaque élément de grid, soit appartienne à une macro-région, soit contienne des objets.

3.4 Répartition des macro-régions

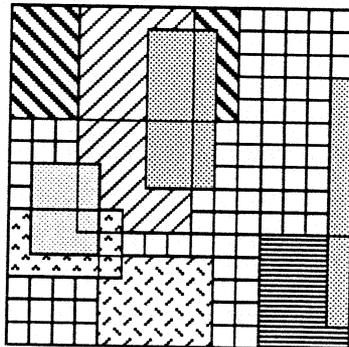


Figure 3.2: Exemple de répartition des macro-régions.

La figure 3.2 donne un exemple de répartition des macro-régions. Selon le critère de définition des macro-régions, on peut avoir ou non imposé aux macro-régions d'être disjointes. Les macro-régions ne contenant pas d'objets, le partage éventuel d'information entre deux macro-régions non disjointes ne pose pas de problèmes puisqu'il n'y a que l'absence d'information à partager. Cette possibilité de recouvrement entre les macro-régions présente même un double avantage. En effet, seuls les éléments de grid contenant des objets peuvent faire obstacle à l'expansion des macro-régions et non les macro-régions déjà cons-

truites, ce qui permet d'avoir des macro-régions plus grandes et plus simples à construire.

La structure de macro-région permet une bonne occupation de l'espace dans les zones ne contenant pas d'informations. Contrairement à la structure d'octree, les macro-régions n'obéissent à aucune autre contrainte initiale que d'être supportée par le grid sous-jacent (voir paragraphe 3.6). Des exemples de répartition des macro-régions en fonction de leur taille dans les scènes de l'annexe D sont donnés au paragraphe 3.7.

3.5 Parcours d'un rayon

Pour chaque élément de grid, on connaît, soit une liste d'objets, soit une liste de macro-régions. Lorsque le rayon pénètre dans un élément de grid, soit celui-ci contient des objets et on le traite comme dans la structure de grid classique, soit il appartient à des macro-régions. On calcule alors directement le point de sortie de ces macro-régions sans s'intéresser aux éléments de grid traversés.

3.5.1 Sélection d'une macro-région

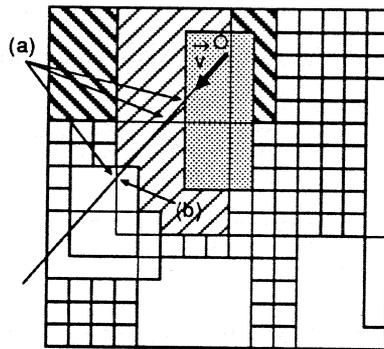
Dans le cas où les macro-régions ne sont pas disjointes, un élément de grid peut appartenir à plusieurs macro-régions. Calculer le point de sortie du rayon de l'ensemble de ces macro-régions nécessite alors le calcul du point de sortie de chacune des macro-régions (a), puis la sélection du plus éloigné (b) (figure 3.3).

Calculer ce point de sortie de l'ensemble des macro-régions sélectionnées n'est pas nécessaire. En effet si on choisit a priori une macro-région (1) (figure 3.4) et que l'on calcule le point de sortie de cette macro-région (c) si ce point n'est pas le point recherché (b) c'est que l'on se trouve encore à l'intérieur d'une macro-région (2) on peut donc examiner seulement maintenant cette macro-région.

Pour chaque élément de grid on ne conserve donc qu'une seule macro-région, et non pas une liste de macro-régions. La sélection de la macro-région est effectuée une fois pour toutes lors du prétraitement. On choisit la macro-région la meilleure statistiquement, c'est-à-dire celle qui a le plus grand rapport $\frac{\text{volume}}{\text{surface}}$ (voir paragraphe 6.1.4). Si cette macro-région est trop petite, on préfère utiliser la subdivision du grid (voir proposition 5).

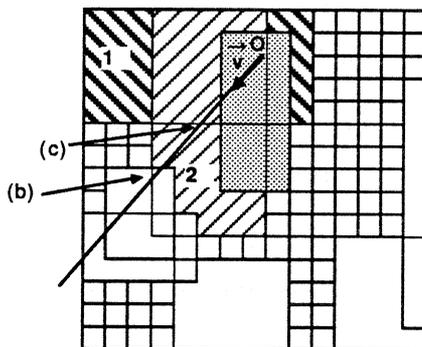
3.5.2 Traversée d'une macro-région

La traversée d'une macro-région se calcule exactement comme la traversée d'une feuille de l'octree au paragraphe 2.3 donc en un temps t_2 (figure 3.5). Ce calcul



- (a) points de sortie des macro-régions sélectionnées.
(b) point de sortie de l'ensemble des macro-régions sélectionnées.

Figure 3.3: Traversée de plusieurs macro-régions.



(c) point de sortie de la macro-région 1 choisie a priori.

Figure 3.4: Sélection d'une macro-région.

est plus complexe que celui de la traversée d'un élément de grid, mais dans les zones fortement subdivisées, on pourra utiliser le calcul incrémental vu au paragraphe 2.2. Le temps de traversée d'une région est alors t_1 puisque ces régions sont des éléments de grid.

Un des avantages de la structure de macro-régions est de n'utiliser une structure de subdivision de l'espace plus complexe, et donc plus coûteuse, qu'aux endroits où elle est la plus efficace.

3.6 Comparaison avec l'octree

La structure de macro-régions, comme l'octree, est basée sur un critère de "simplicité" d'une région et sur un niveau maximal de subdivision.

Contrairement à l'octree, il n'y a pas unicité de la structure de macro-régions pour une scène donnée, mais on peut remarquer que l'octree construit avec le même critère de simplicité des régions peut être vu comme une structure de macro-régions dans laquelle les macro-régions seraient nécessairement de la forme $[n2^p, (n+1)2^p]$. Il est alors possible à partir de l'octree, vu comme une structure de macro-régions, d'étendre chaque feuille de l'octree jusqu'à une macro-région maximale en accord avec le critère de regroupement des éléments de grid. La structure de macro-régions obtenue est alors nécessairement meil-

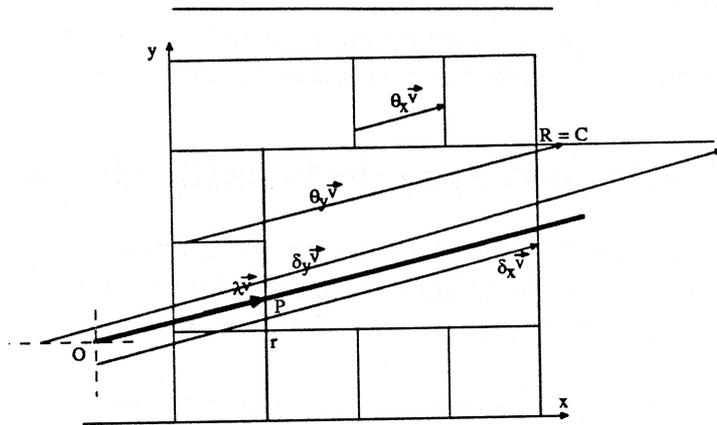


Figure 3.5: Traversée d'une macro-région.

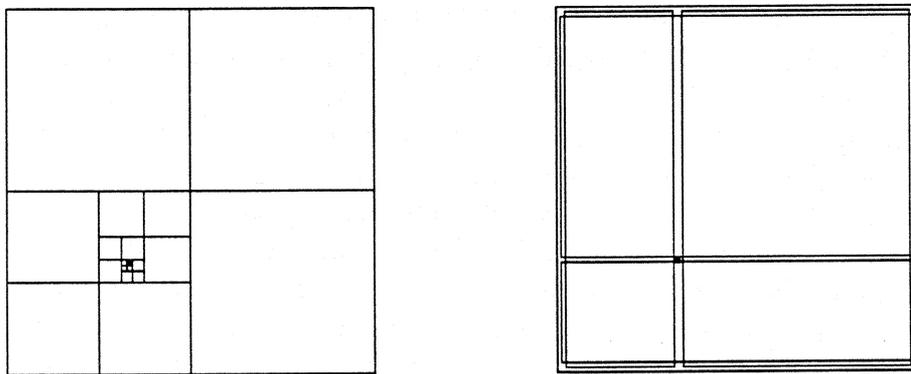


Figure 3.6: Comparaison entre octree et macro-régions.

leure que l'octree puisque chaque feuille de l'octree est incluse dans une macro-région répondant au même critère.

La figure 3.6 montre un cas dégénéré dans lequel la subdivision de l'octree concentrée autour d'un voxel introduit beaucoup plus de régions que la structure de macro-régions où quatre macro-régions et un élément de grid suffisent.

3.7 Etude pratique de la taille des macro-régions

Les figures 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 montrent la répartition des macro-régions, obtenues sur les scènes de l'annexe D, en fonction de leur taille pour différentes subdivisions du grid, le grid a une taille $N \times N \times N$ (voir tableaux E.7, E.8, E.9 et E.10).

La taille d'une macro-région est le nombre moyen d'éléments de grid rencontrés par un rayon la traversant, c'est-à-dire

$$\frac{6 \times \text{volume}}{\text{aire}}$$

(voir paragraphe 6.1.4).

L'intérêt des macro-régions ne réside pas dans leur nombre mais surtout dans leur taille, ainsi la structure obtenue avec la scène "hall" comporte peu de macro-régions, mais celles-ci occupent une grande partie de l'espace. Il est important de noter que pour toutes les scènes, il existe des macro-régions de grande taille, qui introduiront donc des gains de temps très importants. La structure de macro-régions permet donc bien une gestion rapide des vides de l'espace tout en utilisant une subdivision extrêmement fine.

Une des sources du grand nombre de macro-régions de grande taille est leur possibilité de recouvrement et le fait que les objets ne sont pas parallèles aux axes. Ainsi sur la figure 3.7, on obtient un grand nombre de macro-régions avec un seul objet. Ce phénomène ne se produit pas dans la scène "hall" car les objets sont parallèles aux axes de définition du grid.

La présence de deux pics dans les diagrammes de la figure 3.11 s'explique en observant la géométrie de la scène. Le pic correspondant aux boîtes de grande taille correspond aux boîtes extérieures au tétraèdre principal, alors que le pic correspondant aux boîtes de petites tailles correspond aux boîtes occupant les interstices entre les petits tétraèdres.

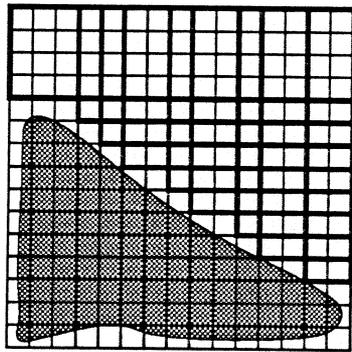


Figure 3.7: Recouvrement des macro-régions.

Dans cette structure, le choix de la macro-région utilisée dans une situation donnée ne dépend pas de la direction du rayon. Le chapitre suivant présente une variante de la structure de macro-régions intégrant cette information de direction du rayon : les macro-régions directionnelles.

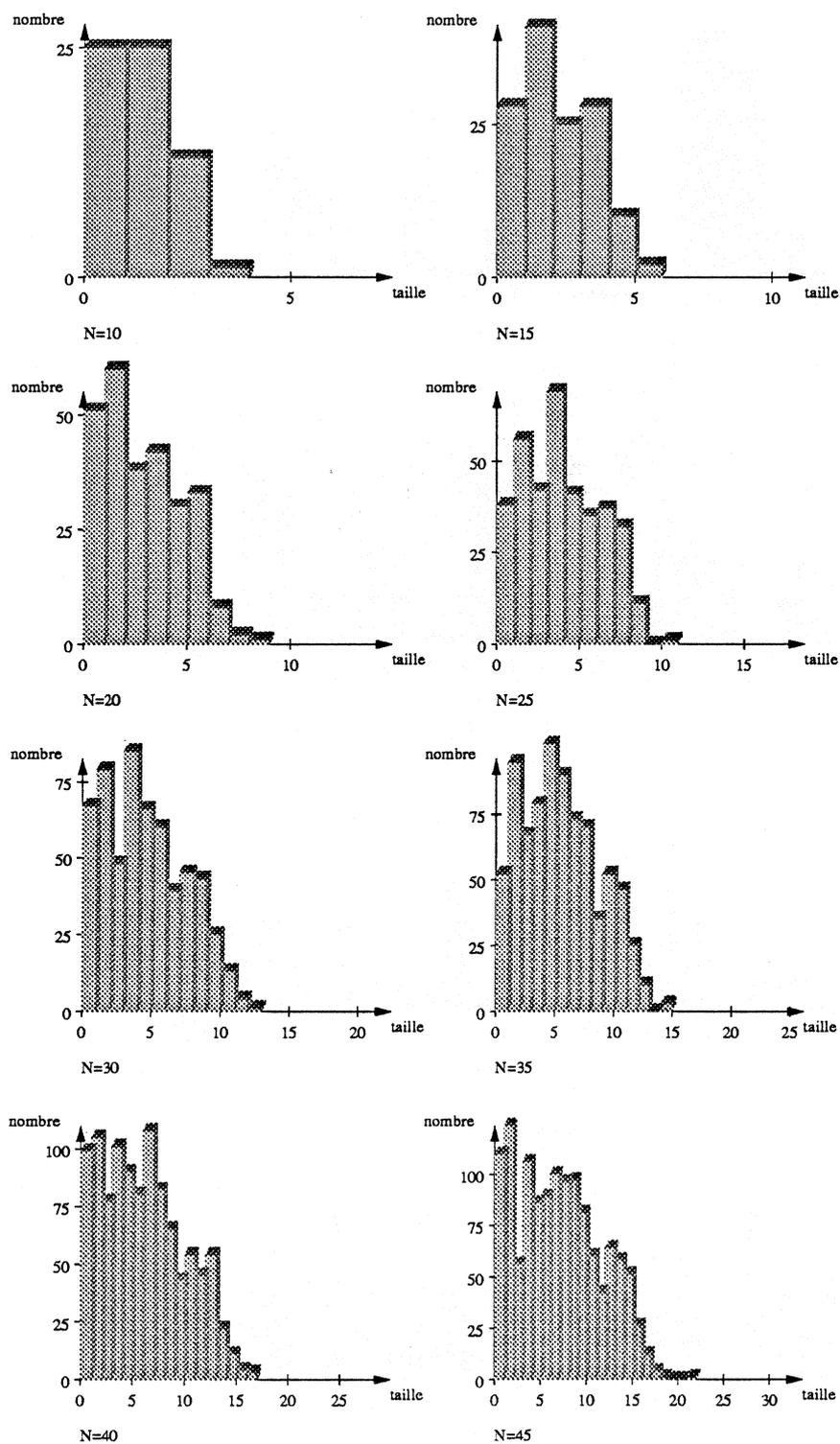


Figure 3.8: Répartition des macro-régions par taille dans la scène “sphères”.

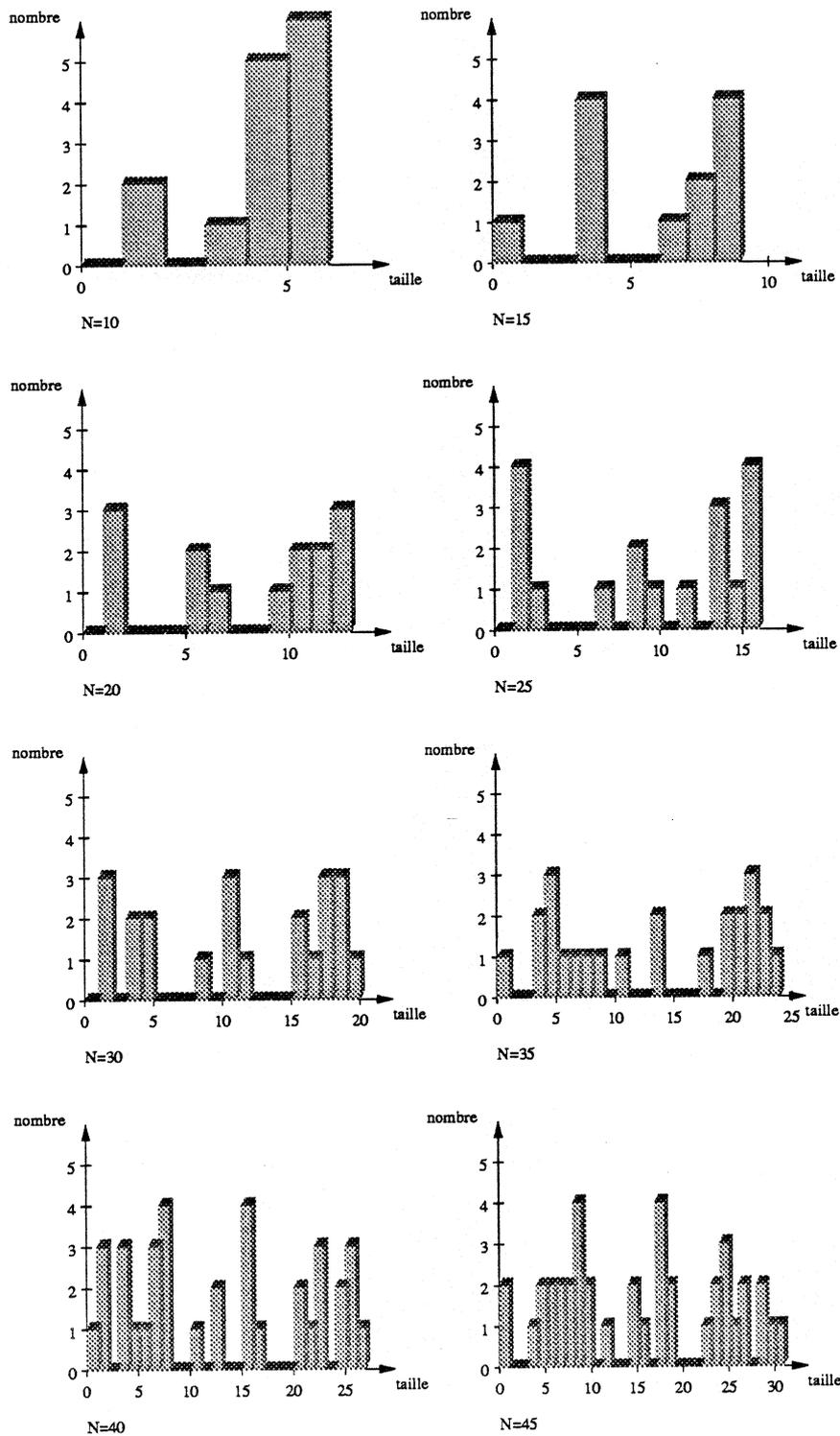


Figure 3.9: Répartition des macro-régions par taille dans la scène "hall".

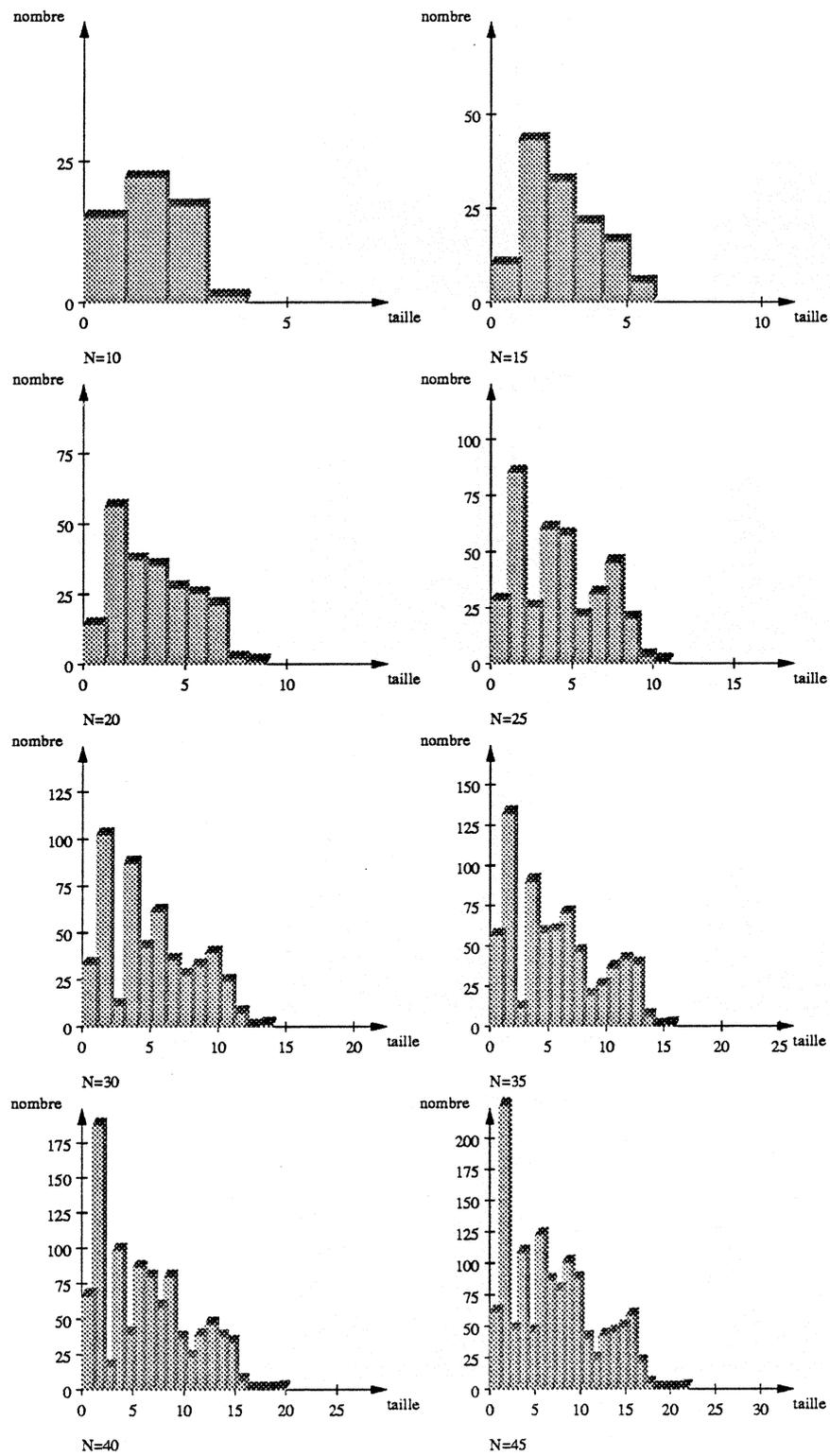


Figure 3.10: Répartition des macro-régions par taille dans la scène “flocon”.

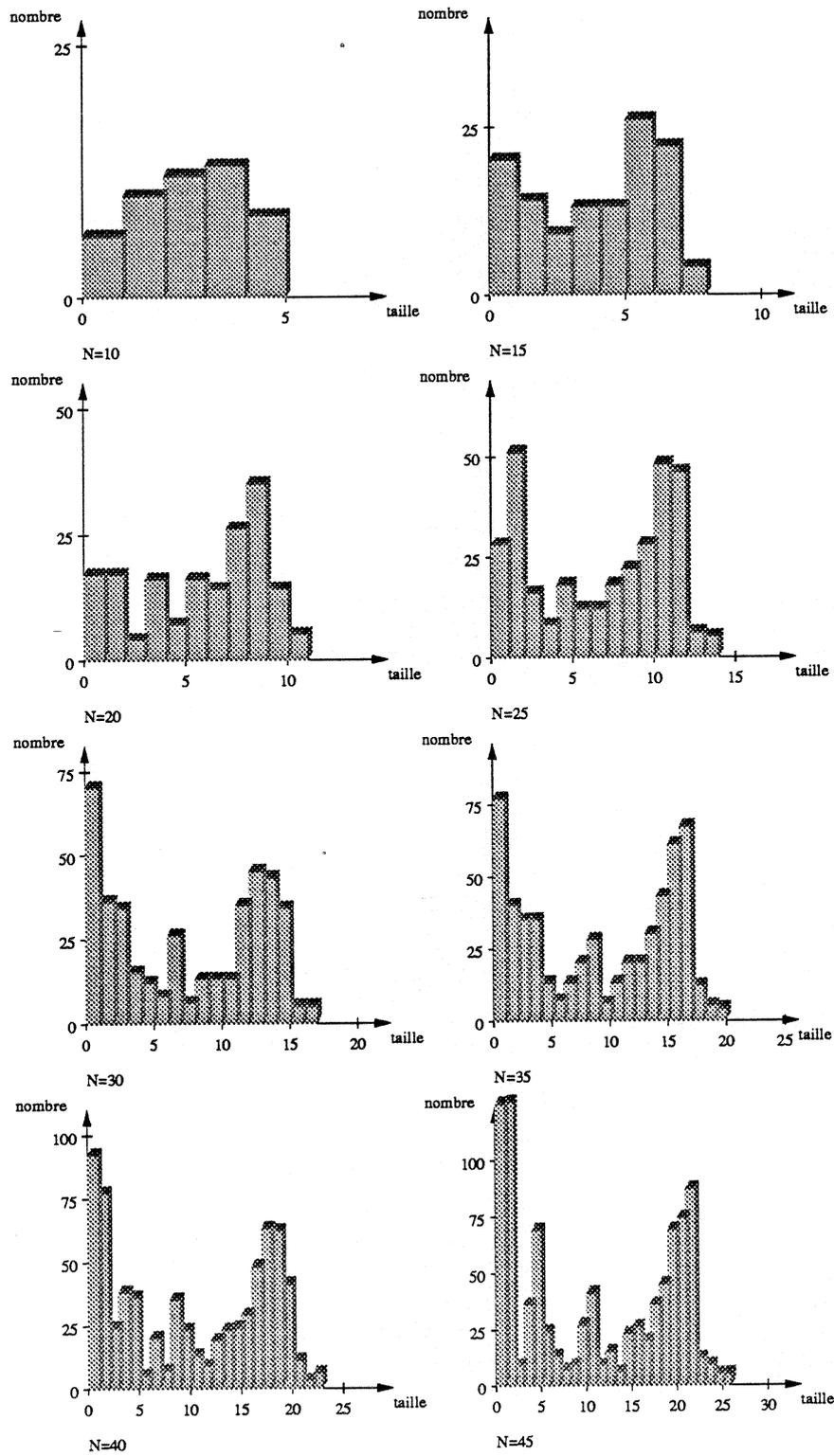


Figure 3.11: Répartition des macro-régions par taille dans la scène “tétraèdre”.

Chapitre 4

Macro-régions directionnelles

Nous présentons dans ce chapitre une variante de la structure précédente utilisant non seulement une partition de l'espace, mais également une partition des directions des rayons. Cette nouvelle structure est en fait une subdivision de l'espace des rayons à cinq dimensions.

4.1 Sélection directionnelle de la macro-région

Dans la structure de macro-régions, un élément de grid peut appartenir à plusieurs macro-régions. Les paragraphes 3.5.1 et 6.1.4 expliquent comment sélectionner à priori la meilleure macro-région pour un rayon rencontrant l'élément de grid et ayant une direction aléatoire.

Nous allons introduire une nouvelle structure, dans laquelle la macro-région ne sera plus sélectionnée à priori, mais en fonction de la direction dominante du rayon par rapport aux axes d'un repère fixé.

La macro-région déterminée au paragraphe 3.5.1 est la meilleure statistiquement, c'est-à-dire en l'absence d'information sur la direction du rayon. Mais si on suppose que l'on possède des données supplémentaires sur le rayon, on veut déduire la meilleure macro-région en fonction de ces données.

L'espace des directions possibles pour un rayon est subdivisé en plusieurs faisceaux de directions. Dans la suite, on envisagera une subdivision en 6 faisceaux correspondant aux 6 faces d'un cube isothétique centré à l'origine du rayon (figure 4.1) :

- $|v_x| > |v_y|, |v_x| > |v_z|$ et $v_x > 0$
- $|v_x| > |v_y|, |v_x| > |v_z|$ et $v_x < 0$
- $|v_y| > |v_x|, |v_y| > |v_z|$ et $v_y > 0$
- $|v_y| > |v_x|, |v_y| > |v_z|$ et $v_y < 0$

- $|v_z| > |v_x|, |v_z| > |v_y|$ et $v_z > 0$
- $|v_z| > |v_x|, |v_z| > |v_y|$ et $v_z < 0$

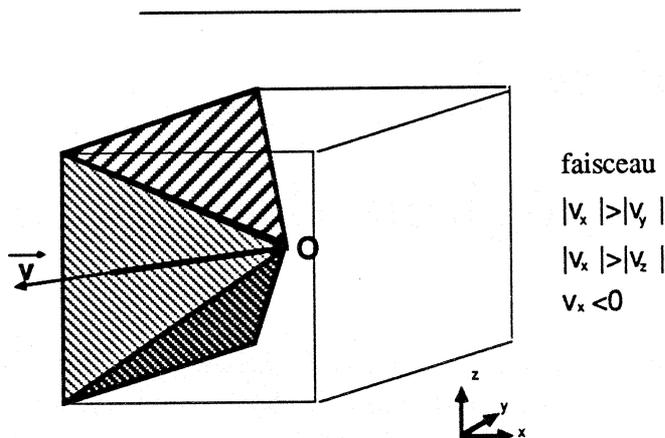
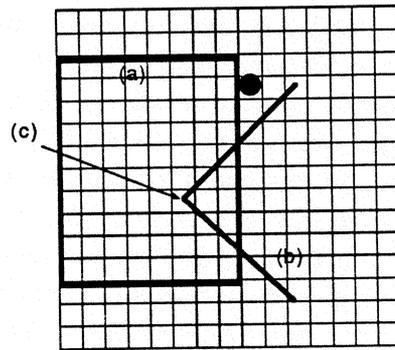


Figure 4.1: Faisceaux de directions.

Il faut déterminer la meilleure macro-région pour les rayons appartenant à chacun de ces faisceaux. On peut remarquer tout de suite que les macro-régions telles qu'on les a introduites sont trop restrictives. En effet, la figure 4.2 montre un cas où l'expansion de la macro-région est interrompue par un objet ne pouvant être coupé par un des rayons du faisceaux. On est alors conduit à introduire un nouveau type de macro-régions, *les macro-régions directionnelles*. Une macro-région directionnelle dépend de son élément de grid origine et d'un faisceau de directions. L'information contenue dans une macro-région directionnelle est la distance que les rayons issus de cet élément de grid ayant leur direction dans le faisceau peuvent parcourir sans rencontrer d'objets.

4.2 Construction des macro-régions directionnelles

Une macro-région directionnelle n'est calculée que pour un seul faisceau de directions et un élément de grid donné. Lors de la construction de cette macro-région, on ne considère que les éléments de grid pouvant être atteints par un rayon débutant dans l'élément de grid origine et ayant une direction appartenant au faisceau considéré. Ces éléments de grid forment une pyramide comme le montre la figure 4.3.



- (a) macro-région
- (b) faisceau de rayons
- (c) origine du faisceau

Figure 4.2: Macro-régions et faisceaux de rayons.

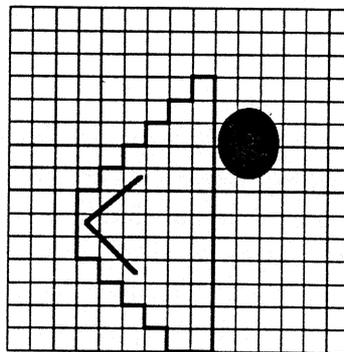


Figure 4.3: Macro-région directionnelle.

4.3 Interêt des macro-régions directionnelles

La macro-région dépend de l'origine du rayon et du faisceau de sa direction ; c'est à la fois l'avantage et l'inconvénient de cette méthode. Pour chaque élément de grid ne contenant pas d'objet, il faut connaître une macro-région pour chaque faisceau de directions. Il en découle tout d'abord un prétraitement important, et un problème de mémoire pour le stockage de toutes ces macro-régions. Si ces problèmes de stockage sont résolus en utilisant des calculateurs ayant une mémoire plus importante, on dispose d'une subdivision de l'espace adaptée non seulement à la géométrie de la scène mais également à la direction des rayons. Cette structure est une subdivision de l'espace des rayons à cinq dimensions : trois dimensions pour l'origine des rayons et deux dimensions pour leur direction. On se rapproche alors des propositions d'Arvo et Kirk [AK87] qui proposent d'utiliser des structures de boîtes englobantes dans l'espace des rayons à cinq dimensions. Nous préférons stocker des régions de l'espace 5-D des rayons pour lesquels nous sommes assurés de l'absence de point d'intersection, alors que Arvo et Kirk pour certaines régions de l'espace 5-D, calculent des listes d'objets candidats à une intersection avec les rayons de cette région.

L'implantation de cette méthode donne des temps de calculs similaires à ceux obtenus avec la structure de macro-régions (voir figure 6.8 et tableau E.5). On obtiendrait certainement de meilleurs résultats avec un plus grand nombre de faisceaux de directions, mais on augmenterait alors les problèmes de prétraitement et de mémoire.

Quelques méthodes de subdivision de l'espace classique dans le cadre du tracé de rayons étaient présentées au chapitre 2. Dans les chapitres 3 et 4, nous avons exposé deux méthodes de subdivision de l'espace originales, nous allons maintenant dans la suite de cette thèse nous intéresser à l'étude théorique et pratique de l'efficacité de ces structures. Dans le chapitre 5 nous posons les hypothèses probabilistes à partir desquelles l'étude théorique sera menée.

Chapitre 5

Hypothèses probabilistes

L'étude théorique de performances en moyenne de certains algorithmes nécessite des hypothèses de type probabiliste sur les données que l'on va utiliser. Un des problèmes majeurs de l'étude des algorithmes de synthèse d'images est la difficulté d'évaluer leurs performances car celles-ci sont très dépendantes de la description de la scène que l'on veut synthétiser. Haines [Hai87] propose d'évaluer pratiquement les performances des algorithmes sur certaines scènes "standard" représentant à priori l'éventail des scènes que l'on est amené à traiter en synthèse d'images. Définir ce que signifie la description d'une scène d'un point de vue probabiliste est difficile car les scènes utilisées possèdent toujours un certain degré de cohérence spatiale qu'il faut modéliser.

Pour répondre à cette question, nous utilisons des résultats de géométrie statistique sur la position "aléatoire" d'objets dans un grid (paragraphe 5.1).

Nous présenterons dans les parties 5.2 et 5.3 les hypothèses probabilistes faites sur les rayons et sur le modèle statistique d'octrees.

5.1 Hypothèses sur les objets

Pour donner des résultats sur la manière dont les objets se répartissent dans la structure de subdivision de l'espace, il faut avoir des hypothèses sur la forme et la position des objets. En prenant la même approche que Serra [Ser82] en morphologie mathématique, on utilise des résultats classiques de géométrie stochastique [San76].

Une hypothèse que nous devons faire est que les objets constituant la scène sont des ensembles convexes et compacts. Cette hypothèse n'est pas trop restrictive et permettra d'utiliser des résultats connus. Il faut également faire des hypothèses sur la position des objets : nous supposons qu'un objet donné a une position et une orientation équiprobables à l'intérieur de la scène. Le problème est plus délicat lorsqu'on a plusieurs objets, car la cohérence spatiale

de la scène rend les positions de ces objets non indépendantes. Le paragraphe 5.3 peut être interprété comme un modèle de répartition cohérente des objets.

5.2 Hypothèses sur les rayons

Lorsqu'on développe une application utilisant le tracé de rayons, ces rayons peuvent présenter une certaine cohérence, par exemple les rayons primaires dans l'algorithme de Whitted sont tous issus d'un même point, et il est possible d'utiliser cette propriété. Le jeu des réflexions et des réfractions détruit de toute façon la cette cohérence sur les rayons secondaires. D'autre part nous nous intéressons au tracer d'un rayon comme opération de base, nous ne ferons donc aucune hypothèse contraignante sur les rayons, ils sont supposés totalement aléatoires.

La séparation de l'étude du traitement d'une région et de la traversée de la structure de subdivision conduit à ne pas s'intéresser ni à l'origine ni à la fin du rayon car ceux-ci sont dépendants du traitement des régions et donc de la répartition des objets.

L'ensemble des rayons possède cinq degrés de liberté, trois pour l'origine du rayon et deux pour sa direction, c'est pourquoi Arvo et Kirk utilisent un tracé de rayons dans un espace à 5 dimensions [AK87]. Pour étudier l'effet de la subdivision sur les rayons indépendamment de la répartition des objets, seule la droite orientée support du rayon est importante, et non l'origine du rayon, les paramètres définissant un rayon ne varient alors que dans un espace à quatre dimensions : deux pour l'origine et deux pour la direction.

5.3 Hypothèses sur les octrees

La structure d'octree dépend de la cohérence des objets. Sans connaissance sur la disposition des objets, on ne peut pas connaître la subdivision que celle-ci induira sur l'octree. H. Samet [Sam84] a étudié un modèle probabiliste sur les quadrees obtenus à partir d'images 2D.

h désigne la profondeur maximale de l'octree.

L'hypothèse principale du modèle de Samet est :

“La probabilité qu'un voxel appartienne à une région de taille 2^i ne dépend pas de i ”.

C'est-à-dire qu'un voxel donné a la même probabilité d'appartenir à une région de n'importe quelle taille. Ce voxel correspond à une branche particulière de longueur h dans l'octree développé au maximum. La figure 5.1 représente un pixel et la branche correspondante dans l'octree (en gras sur la figure), l'octree

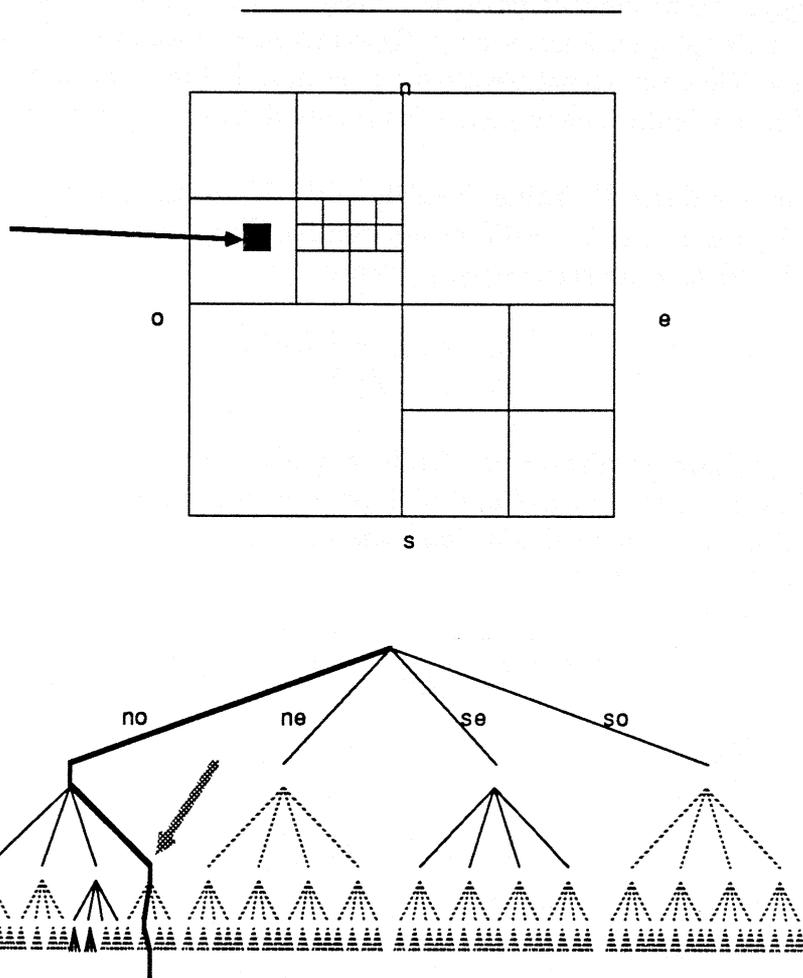


Figure 5.1: Modèle d'octree de H. Samet.

correspondant à la subdivision est représenté en trait plein et l'octree développé en pointillé. Dire qu'un voxel a la même probabilité d'appartenir à une région de n'importe quelle taille, c'est dire que lorsque l'on suit dans l'octree la branche correspondant à ce voxel, on arrive à une feuille de l'octree (marquée d'une flèche) aux niveaux $0, 1, 2, \dots, h$ avec même probabilité.

Ce modèle étant efficace pour des images 2D présentant une certaine cohérence, on va l'appliquer à nos scènes 3D ayant elles aussi une cohérence spatiale. C'est un modèle de la structure d'octree, et non de l'information contenue dans l'octree. En particulier, ce modèle est indépendant du critère d'arrêt de la subdivision.

Comme le montre H. Yahia [Yah86] [MPY87], si $2\beta_i$ est la probabilité pour un nœud à profondeur $h - i$ d'être une feuille, l'hypothèse de Samet se traduit alors par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}\beta_i &= (1 - 2\beta_i)\beta_{i-1} \\ \beta_0 &= 1/2\end{aligned}$$

Car la probabilité d'avoir une feuille à profondeur $(h - i)$ est d'après l'hypothèse de Samet, égale à la probabilité d'avoir un nœud interne à cette profondeur et une feuille au niveau suivant dans une direction donnée.

On a alors $2\beta_0 = 1$ et :

$$2\beta_i = 2 \frac{\beta_{i-1}}{1 + 2\beta_{i-1}} = 1 - \frac{1}{1 + 2\beta_{i-1}}$$

On en déduit :

$$\beta_i = \frac{1}{2(i+1)}$$

Soit f_i le nombre de feuilles à profondeur $h - i$, n_i le nombre de nœuds internes à profondeur $h - i$.

On peut montrer que :

$$\begin{aligned}n_i &= (1 - 2\beta_i) 8 n_{i+1} \\ f_i &= 8 n_{i+1} 2\beta_i\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}n_i &= 8^{h-i} (1 - 2\beta_i)(1 - 2\beta_{i+1}) \dots (1 - 2\beta_h) \\ &= 8^{h-i} \frac{i}{i+1} \frac{i+1}{i+2} \dots \frac{h-1}{h}\end{aligned}$$

$$f_i = \frac{8^{h-i}}{h}$$

H. Yahia montre aussi que rechercher le voisin d'une région dans l'octree nécessite en moyenne de remonter deux fois dans l'octree pour trouver l'ancêtre commun. Ce résultat est utilisé au paragraphe 2.3 pour estimer le temps CPU nécessaire pour trouver le voisin d'une région dans l'octree.

Remarque sur les macro-régions

On ne fait pas d'hypothèses sur la répartition des macro-régions, mais comme on l'a vu au paragraphe 3.6, la structure de macro-régions est nécessairement moins subdivisée que la structure d'octree.

En utilisant les hypothèses que nous avons faites dans ce chapitre, nous allons mener l'étude théorique de l'efficacité du tracé de rayons. Le chapitre 6 étudie le coût de la gestion de la structure de subdivision et le chapitre 7 étudie la répartition des objets obtenue dans la cas de la structure de grid, c'est-à-dire la capacité de cette structure à séparer les objets.

Chapitre 6

Coût d'une subdivision spatiale

Ce chapitre étudie le coût de la gestion d'une structure de subdivision tout d'abord d'un point de vue théorique, puis d'un point de vue pratique à partir de temps de calcul obtenus sur quelques scènes de test. L'étude théorique nécessite la mise en place de quelques outils probabilistes simples, ces outils pourraient être utilisés sans difficulté pour l'étude d'autres méthodes de subdivision. L'étude de la répartition des objets dans la scène sera menée au chapitre suivant.

6.1 Etude théorique

Le paragraphe 6.1.1 présente des résultats généraux sur l'intersection d'une droite avec un domaine convexe. Ces résultats peuvent être appliqués à différentes structures de subdivision de l'espace, en utilisant certaines hypothèses probabilistes sur ces structures. On peut alors calculer le nombre moyen de régions traversées par un rayon dans une telle structure [DPS88].

Les paragraphes suivants appliquent ces résultats à certains cas de subdivision spatiale : grid, macro-régions, octree, boîtes englobantes. On calcule la part due à la gestion de la structure de subdivision dans le coût d'un rayon. On note n_g , n_m , n_o et n_b le nombre moyen de régions rencontrées par un rayon et C_g , C_m , C_o et C_b ce coût partiel du rayon dans les différentes structures étudiées.

6.1.1 Résultats généraux

Fixons d'abord quelques notations :

- On se place dans l'espace \mathbb{R}^n de dimension n .
- On notera N_i la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du point N .
- Un rayon r est défini par son origine O et sa direction \vec{v} .

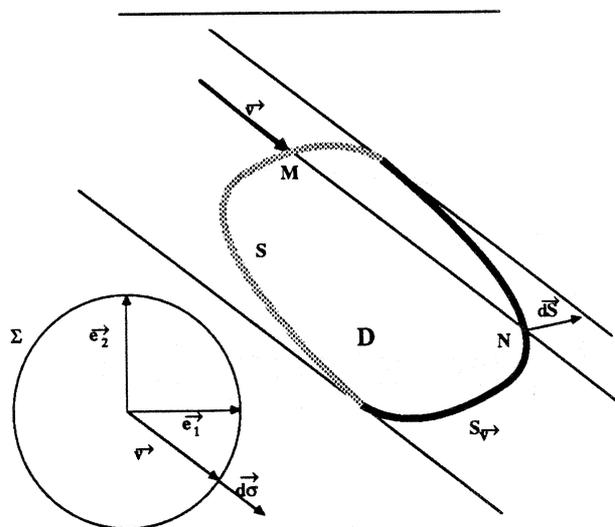


Figure 6.1: Définition des variables.

- La distribution de \vec{v} est isotrope, $\vec{v} \in \Sigma$ où Σ est la sphère unité. Un rayon est donc un point de $\mathbb{R}^n \times \Sigma$.
- On s'intéressera aux rayons coupant un domaine compact et convexe donné D de surface S .
- Un rayon donné (O, \vec{v}) coupe S en deux points M et N tels que \overrightarrow{MN} a la même orientation que \vec{v} .

L'équiprobabilité de l'origine des rayons et leur isotropie se traduit par un élément d'intégration $d\sigma d\tau$ dans l'espace des rayons $\Sigma \times \mathbb{R}^n$ où $d\sigma$ est l'élément de surface sur Σ et $d\tau$ l'élément de volume dans \mathbb{R}^n .

C'est-à-dire que pour une direction \vec{v} fixée, on a une densité d'origines de rayons parallèles à \vec{v} constante.

Un rayon de direction \vec{v} est déterminé par O mais aussi par N et la position de O sur la droite (N, \vec{v}) . N appartient à la partie de S dont le vecteur normal \vec{N} en N vérifie $\vec{v} \cdot \vec{N} > 0$, $S_{\vec{v}}$ désigne cette partie de S (figure 6.1).

Un rayon sera donné par sa direction $\vec{v} \in \Sigma$, par son point de sortie $N \in S_{\vec{v}}$ du domaine D , et par un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $O = N + \alpha\vec{v}$.

Considérons le changement de coordonnées $O, \vec{v} \mapsto N, \alpha, \vec{v}$. Les rayons de direction \vec{v} se situant dans un voisinage $dS d\alpha$ d'un rayon donné par N, α_0, \vec{v} , sont des rayons de direction \vec{v} ayant leur origine dans un cylindre de direction \vec{v} s'appuyant sur dS de longueur $d\alpha$ (figure 6.2).

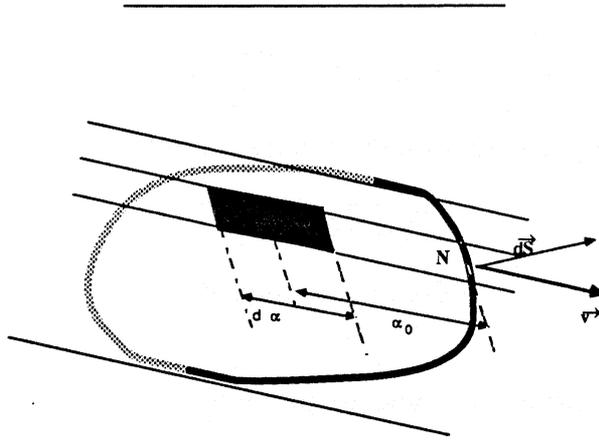


Figure 6.2: Changement de variables.

Le volume de ce cylindre est $\vec{dS} \cdot \vec{v} d\alpha$. La densité d'origines de rayons étant constante par élément de volume de \mathbb{R}^n , l'élément d'intégration dans le système de coordonnées N, α, \vec{v} est : $\vec{dS} \cdot \vec{v} d\alpha$.

Comme on l'a dit au paragraphe 5.2, le paramètre α ne sera pas utilisé dans cette analyse.

Dans l'espace des droites orientées, le domaine R_D des droites coupant D est donné par :

$$r \in R_D \iff \vec{v} \in \Sigma, N \in S_{\vec{v}}$$

L'élément d'intégration sur ce domaine qui traduit l'équiprobabilité des rayons est :

$$dr = \vec{dS} \cdot \vec{v} d\sigma$$

Pour la structure de grid, la quantité intéressante est le nombre d'éléments de grid entre les points N et M . Si la finesse du grid est 1, on note "norme δ " cette quantité :

$$\|\overrightarrow{MN}\|_{\delta} = \sum_{i=0}^n |[N_i] - [M_i]|$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

Si la taille de l'élément de grid tend vers zéro, la quantité importante est la "norme 1" :

$$\|\overrightarrow{MN}\|_1 = \sum_{i=0}^n |N_i - M_i|$$

qui est une approximation de la norme δ telle que :

$$|\|\overrightarrow{MN}\|_1 - \|\overrightarrow{MN}\|_\delta| < n$$

puisque dans chaque coordonnée la quantité sous les signes \sum diffère au plus d'une unité.

Avec ces définitions on montre que (démonstration à l'annexe A) :

$$\begin{aligned} \int_{r \in R_D} 1 \, dr &= k_{n-1} A(D) \\ \int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_1 \, dr &= 2 n k_{n-1} V(D) \\ \int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_\delta \, dr &= \int_{\vec{v} \in \Sigma} \vec{V} \cdot \vec{v} \, d\sigma \end{aligned}$$

k_n est le volume de la sphère unité en dimension n ($k_2 = \pi$, $k_3 = \frac{4}{3}\pi$). $A(D)$ et $V(D)$ désignent respectivement l'aire et le volume d'un domaine D convexe et compact.

La signification de \vec{V} est expliquée en détail au paragraphe A.3 équation (A.11). Les coordonnées de \vec{V} sont des approximations du volume de D par des cylindres ayant pour base des hyperplans à coordonnées entières.

On déduit alors les résultats suivants.

Proposition 1 : Si D est un domaine compact et convexe contenant la scène et Δ un domaine compact et convexe inclus dans D , alors la probabilité pour un rayon rencontrant D de rencontrer Δ est :

$$\frac{\int_{r \in R_\Delta} dr}{\int_{r \in R_D} dr} = \frac{A(\Delta)}{A(D)} \quad (6.1)$$

Si D et Δ sont des parallélépipèdes rectangles isothétiques à coordonnées entières, le nombre moyen d'éléments de grid traversés par un rayon rencontrant D à l'intérieur de Δ est :

$$\frac{\int_{r \in R_\Delta} \|\overrightarrow{MN}\|_\delta dr}{\int_{r \in R_D} dr} = \frac{2 n V(\Delta)}{A(D)} \quad (6.2)$$

On en déduit :

Proposition 2 : *Si D est un parallélépipède rectangle isothétique à coordonnées entières, le nombre moyen d'éléments de grid traversés par un rayon rencontrant D est :*

$$\boxed{\frac{\int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_\delta dr}{\int_{r \in R_D} dr} = \frac{2 n V(D)}{A(D)}} \quad (6.3)$$

Nous allons maintenant appliquer ces résultats pour estimer le coût de la traversée par un rayon d'une structure de subdivision de l'espace.

6.1.2 Grid

Dans l'exemple de la figure 6.3 le rayon traverse 22 éléments de grid.

Le nombre moyen de régions traversées par un rayon n_g , se calcule facilement à l'aide de la proposition 2. Si le grid G a pour taille $a \times b \times c$

$$\begin{aligned} n_g &= \frac{2 \cdot 3 \cdot V(G)}{A(D)} \\ &= \frac{3abc}{ab + bc + ac} \end{aligned}$$

Si le grid est cubique, $N = a = b = c$:

$$n_g = N$$

Le coût d'un rayon est alors :

$$C_g = N t_1 \quad (6.4)$$

Proposition 3 : *En moyenne, le coût de traversée du grid est linéaire en N où N^3 est le nombre d'éléments de grid.*

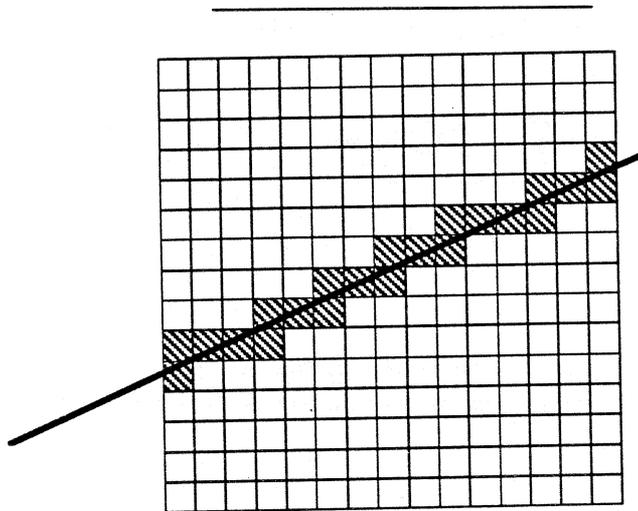


Figure 6.3: Eléments de grid traversés par un rayon.

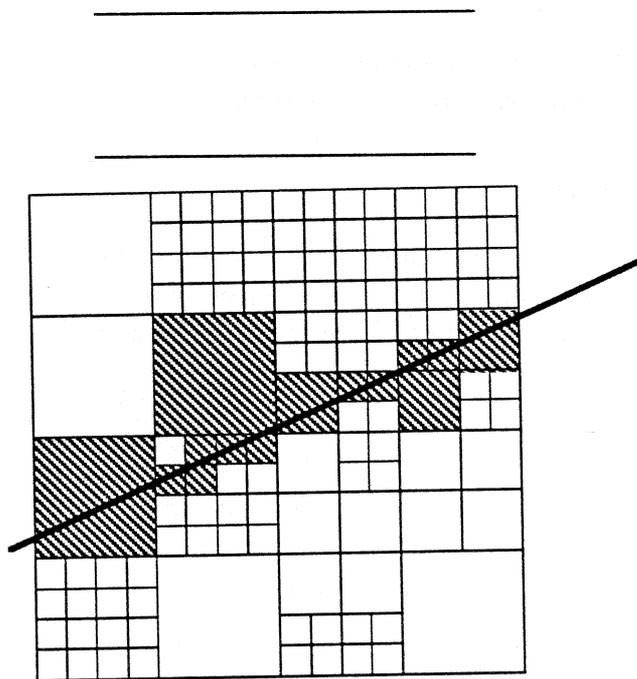


Figure 6.4: Feuilles de l'octree traversées par un rayon.

6.1.3 Octree

La proposition 1 donne la probabilité pour un rayon de rencontrer une feuille de l'octree. La figure 6.4 montre les régions traversées par un rayon (14 sur cet exemple). Le nombre moyen de régions traversées par un rayon est :

$$n_o = \sum_{o \in O} \frac{A(o)}{A(D)}$$

où O est l'ensemble des feuilles de l'octree.

A partir d'un modèle statistique d'octree, on peut calculer l'expression précédente. Si h est la profondeur maximale de l'octree et f_i le nombre de feuilles à profondeur $h - i$, on a :

$$n_o = \sum_{i=0}^h f_i \frac{A(o)}{A(D)} = \sum_{i=0}^h f_i \frac{6 \cdot 2^i}{6 \cdot 2^h} = \sum_{i=0}^h f_i 2^{i-2h} \quad (6.5)$$

En utilisant le modèle d'octree présenté au paragraphe 5.3, on a :

$$\begin{aligned} n_o &= \sum_{o \in O} \frac{A(o)}{A(D)} = \sum_{i=0}^h \frac{8^{h-i}}{h} 2^{i-2h} = \frac{\sum_{i=0}^h 2^{3h-3i+2i}}{h 2^{2h}} \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^h 2^{h-i} = \frac{1}{h} \frac{2^h - 1}{2 - 1} = \frac{2^h}{h} \end{aligned}$$

Le coût moyen de la traversée de l'octree par un rayon est alors :

$$C_o = \frac{2^h}{h} (t_2 + t_3) \quad (6.6)$$

h est la profondeur maximale de l'octree, un tel octree correspond a un maillage de l'espace par $N \times N \times N$ voxels où $N = 2^h$.

Proposition 4 : *Le coût de traversée de l'octree est en moyenne en $\frac{N}{\log N}$ où N^3 est le nombre de voxels de l'octree.*

Ce coût est asymptotiquement meilleur que celui de la structure de grid (pour laquelle le coût était linéaire). Pratiquement, compte tenu des valeurs de N habituellement utilisées, on ne peut pas dire que l'on ait gagné un ordre de grandeur significatif, et la constante est meilleure dans le cas du grid.

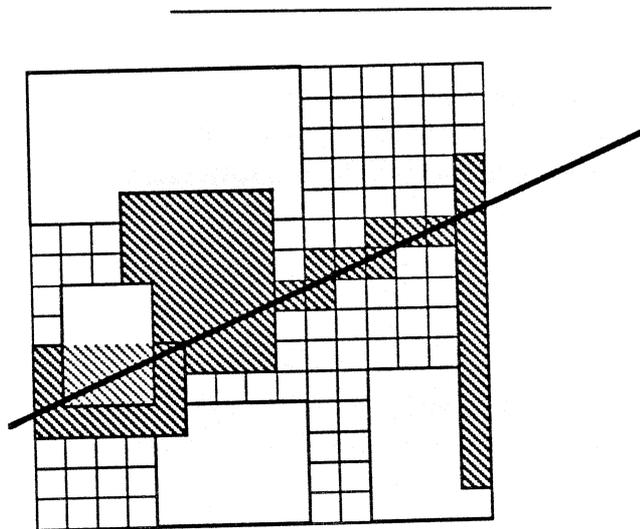


Figure 6.5: Macro-régions traversées par un rayon.

6.1.4 Macro-régions

Comme on l'a vu au paragraphe 3.5.2, le coût de traitement d'une macro-région n'est pas le même selon que celle-ci est ou non réduite à une région élémentaire du grid. On déduit de la proposition 2 que la traversée de la macro-région M correspond en moyenne à la traversée de $\frac{2 \cdot 3 \cdot V(M)}{A(M)}$ éléments de grid dans la structure de grid sous-jacente, c'est-à-dire $\frac{3abc}{ab + bc + ac}$, si a, b, c sont les longueurs des arêtes de M . Si ce nombre est plus petit que $\frac{t_2}{t_1}$, on en déduit que la macro-région est statistiquement inintéressante et on préférera utiliser la subdivision maximale du grid.

Proposition 5 : Une macro-région M est plus intéressante que le grid si elle vérifie :

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot V(M)}{A(M)} \geq \frac{t_2}{t_1}$$

(où t_1 et t_2 sont les temps de calcul de changement d'éléments de grid et de macro-régions).

D'après les temps donnés au chapitre 2, on a $\frac{t_2}{t_1} = 3$. La traversée d'une macro-région est donc intéressante si elle permet d'économiser en moyenne au

moins trois traversées d'éléments de grid.

La figure 6.5 montre le trajet d'un rayon dans une structure de macro-régions. Dans cet exemple, le rayon traverse 3 macro-régions et 8 éléments de grid.

Le coût moyen de traversée C_m de la structure de macro-région se sépare en deux parties, d'une part le coût C_1 de traversée des éléments de grid n'appartenant à aucune macro-région, et d'autre part le coût C_2 de traversée des macro-régions : $C_m = C_1 + C_2$.

On a :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sum_{g \in G} \frac{A(g)}{A(D)} t_1 \\
 &= \frac{6 \times \text{Card}G}{A(D)} t_1 \\
 &= \frac{\text{Card}G}{N^2} t_1
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

où G est l'ensemble des éléments de grid n'appartenant à aucune macro-région.

On peut considérer que lorsque la subdivision du grid augmente, les éléments de grid n'appartenant pas aux macro-régions, c'est-à-dire contenant des objets, se concentrent au voisinage de la surface des objets. Leur nombre $\text{Card}G$ croît donc en N^2 , et la quantité (6.7) admet une limite.

L'étude de C_2 est compliquée par les possibilités de recouvrement des macro-régions, qui rendent non indépendantes la traversée de deux macro-régions. La remarque effectuée au paragraphe 3.6 (qui assurait que les macro-régions permettent une subdivision plus adaptée que la structure d'octree) nous permet d'assurer que ce coût est de toutes façons meilleur que celui de l'octree, nous pouvons alors déduire de la proposition 4 que C_2 est majoré par $\frac{N}{\log N} t_2$. En outre, si les objets sont parallèles aux axes, le phénomène d'augmentation du nombre des macro-régions expliqués sur la figure 3.7 au paragraphe 3.7 ne se produit pas. Une macro-région M donnée occupe la même zone quelque-soit la finesse du grid. La probabilité pour un rayon de traverser cette macro-région : $\frac{A(M)}{A(D)}$ ne dépend alors pas de la taille du grid N , la traversée des macro-régions se fait en temps constant. Dans la pratique nous constaterons que C_2 connaît une faible croissance en fonction de N .

Proposition 6 : *Le coût de la traversée de la structure de macro-région se sépare en deux parties :*

La traversée des zones contenant des objets se fait en moyenne en temps constant.

La traversée des zones ne contenant pas d'objets est effectuée en moyenne en moins de $\frac{N}{\log N}$.

où N est la taille du grid sous-jacent.

6.1.5 Boîtes englobantes

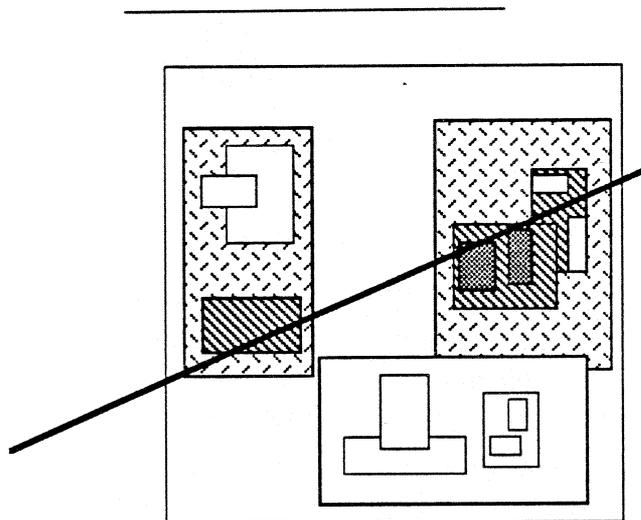


Figure 6.6: Boîtes traversées par un rayon.

Les boîtes englobantes sont calculées récursivement (voir paragraphe 2.4), on obtient alors une structure arborescente.

La figure 6.6 montre un exemple où 7 boîtes sont examinées.

Le coût d'un rayon est égal au nombre de boîtes examinées multiplié par t_4 .

D désigne la boîte englobant toute la scène, c'est-à-dire la racine de l'arbre. Pour une boîte B on note $n(B)$ le nombre de sous-boîtes de B , i.e. le nombre

de fils de B dans la structure arborescente. On note $b \ll B$ la relation b est une sous-boîte de B . Enfin on note D^* l'ensemble de toutes les boîtes, D comprise.

Si b est une sous-boîte de la boîte B , la proposition 1 permet de calculer la probabilité pour un rayon rencontrant B de rencontrer b :

$$\frac{A(b)}{A(B)}$$

Le nombre moyen de boîtes rencontrées est alors :

$$n_b = \sum_{b \in D^*} \frac{A(b)}{A(D)}$$

Le coût d'un rayon est :

$$\begin{aligned} C_b &= t_4 n(D) + t_4 \sum_{b_1 \ll D} \frac{A(b_1)}{A(D)} \left[n(b_1) + \sum_{b_2 \ll b_1} \frac{A(b_2)}{A(b_1)} [\dots] \right] \\ &= \frac{t_4}{A(D)} \left[n(D)A(D) + \sum_{b_1 \ll D} \left(n(b_1)A(b_1) \sum_{b_2 \ll b_1} [\dots] \right) \right] \\ &= \frac{t_4}{A(D)} \sum_{b \in D^*} n(b)A(b) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Proposition 7 : *Le coût de la traversée d'une structure hiérarchique de boîtes englobantes est en moyenne proportionnel à la surface des boîtes multipliée par leur nombre de sous-boîtes.*

6.2 Etude pratique

La figure 6.7 décrit le nombre moyen d'intersections calculées pour un rayon. D'une part, le nombre d'intersections avec les objets qui permet de contrôler l'efficacité de la subdivision. D'autre part le nombre d'intersections du rayon avec les régions : tout d'abord dans le cas de la structure de grid, puis dans le cas de la structure de macro-régions ; on distingue alors les macro-régions vides des éléments de grid pleins (voir tableau E.7).

On peut vérifier que le nombre moyen d'intersections avec les éléments du grid (en pointillé long sur la figure 6.7) est bien conforme à la proposition 3 : le coût de traversée d'un grid est linéaire. Le résultat est inférieur à N car nous n'avions pas tenu compte du fait que les rayons ont une origine et une fin comprises dans le grid.

On contrôle également la proposition 6 : le nombre moyen d'intersections d'un rayon avec des éléments de grid n'appartenant à aucune macro-région (en trait plein) est bien constant, et le nombre d'intersections avec les macro-régions (en pointillé serré) est légèrement croissant. L'application de la proposition 5 rejetant les macro-régions trop petites a pour effet de remonter légèrement la courbe des intersections rayon-éléments de grid n'appartenant pas à des macro-régions (en trait plein) et de diminuer légèrement le nombre d'intersections rayon-macro-régions (en pointillé serré).

L'efficacité de la structure de macro-régions apparaît sur ces courbes. Pour les grandes tailles du grid, une grande partie des intersections rayon-éléments de grid est remplacée par quelques intersections rayon-macro-régions. On bénéficie ainsi pleinement des avantages d'une subdivision fine du grid.

La figure 6.8 présente le coût moyen d'un rayon pour trois structures de subdivision : le grid, les macro-régions et les macro-régions directionnelles (voir tableaux E.4, E.5 et E.6). Il faut noter tout d'abord que même pour la structure de grid, le minimum du coût d'un rayon est obtenu pour une subdivision assez fine du grid, et correspondant à un très petit nombre d'objets rencontrés par rayon. La structure de macro-régions directionnelles n'apparaît pas plus avantageuse que les macro-régions, c'est essentiellement du au petit nombre de faisceaux de directions utilisé. L'augmentation du nombre de faisceaux devrait donner de bons résultats, mais on se heurte alors à un problème de capacité mémoire.

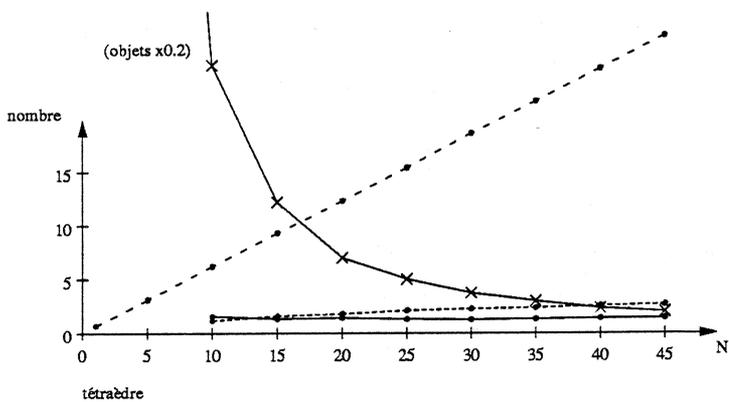
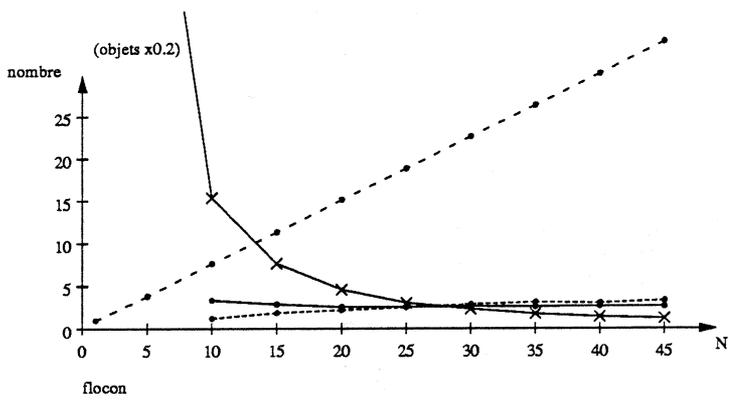
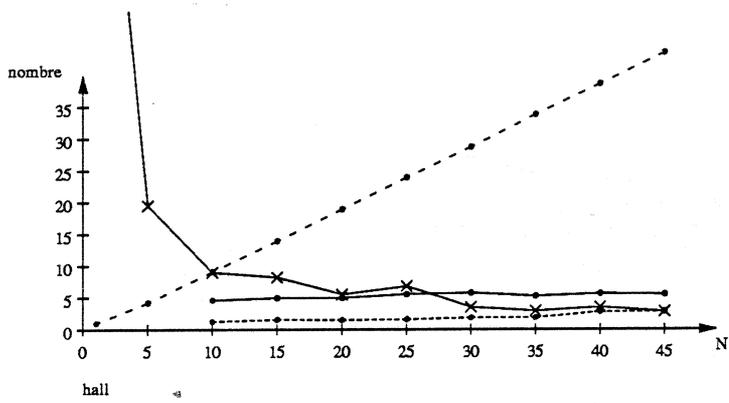
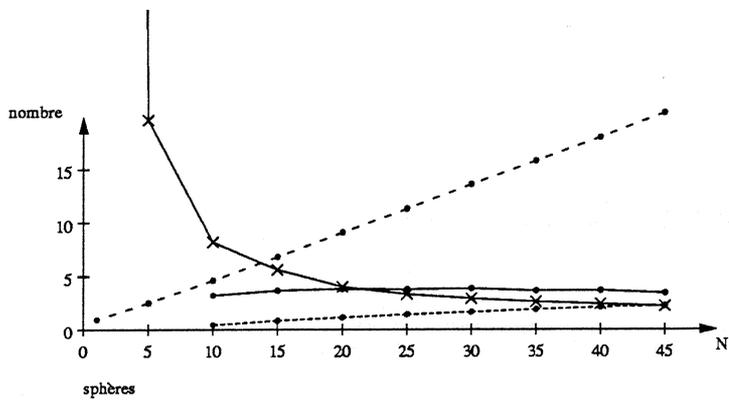
La structure de macro-régions permet une amélioration notable du temps de calcul par rapport à la structure de grid.

Si on reprend l'équation (1.4) :

$$t_r = t_s + n_o \times t_o + t_a$$

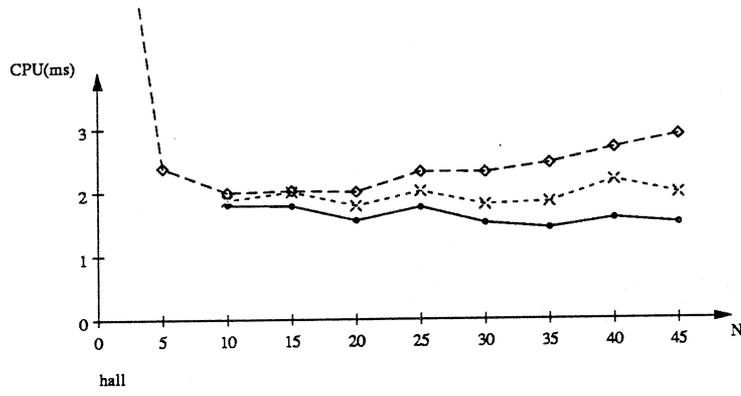
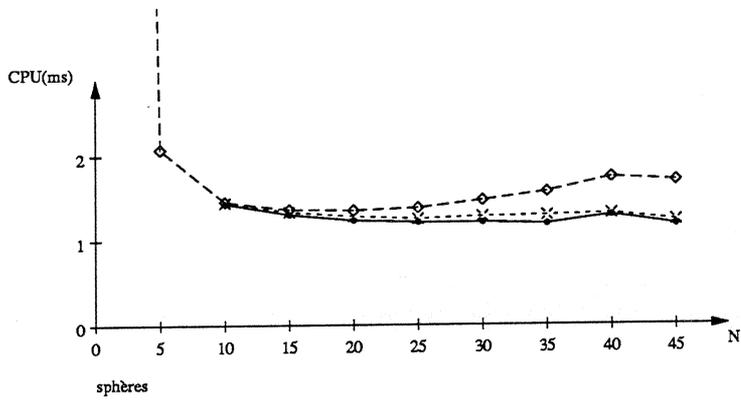
t_a dépend de l'application et est donc incompressible et indépendant de toute structure de subdivision. La finesse du grid agit sur n_o , mais de la même manière dans le cas du grid simple, des macro-régions ou des macro-régions directionnelles puisque ces dernières n'interviennent que dans les zones où il n'y a pas d'objets. La différence entre grid et macro-régions n'intervient que sur t_s , l'amélioration apportée par les macro-régions sur le coût de la subdivision est très importante.

Après avoir étudié le coût d'une subdivision spatiale, nous allons maintenant nous intéresser à son efficacité, c'est à dire à son aptitude à répartir les objets dans les différentes régions de la subdivision.



- × — intersections rayon-objet
- ◆ - - - intersections rayon-région
- — intersections rayon-région pleine
- ····· intersections rayon-macro-région

Figure 6.7: Nombre moyen d'intersections du rayon avec les objets et les régions. Les macro-régions permettent d'économiser un grand nombre d'intersections rayon-élément de grid.



- ◇ --- grid simple
- × --- grid avec macro-régions directionnelles
- --- grid avec macro-régions

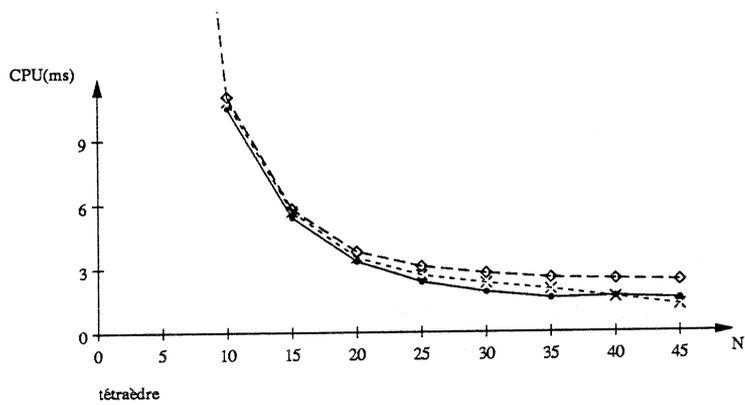
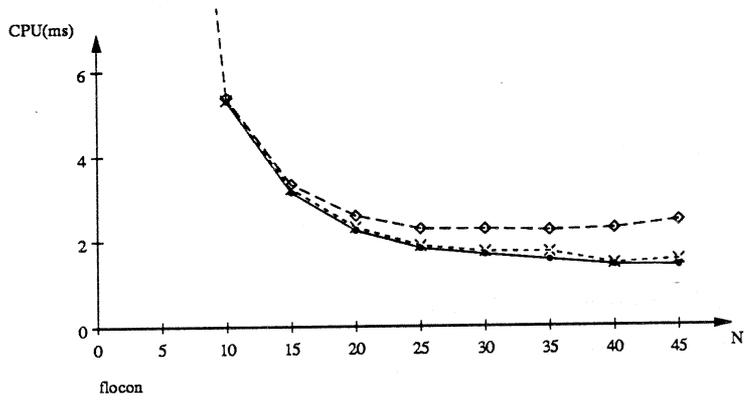


Figure 6.8: Coût d'un rayon.

Chapitre 7

Distribution des objets

La répartition des objets dans la structure de grid est étudiée dans ce chapitre. L'ensemble des objets est inclus dans le volume total du grid, et à l'intérieur de celui-ci, les objets ont une position aléatoire conformément aux hypothèses faites au paragraphe 5.1. L'occupation du grid va être étudiée dans un premier temps de manière théorique (paragraphe 7.1 7.2) puis pratique (paragraphe 7.3) à partir de quelques scènes tests (voir annexe D).

Cette étude utilise la structure de grid, mais elle est également valable pour les macro-régions puisqu'au voisinage des objets, la structure des macro-régions est identique à celle du grid.

Dans la cas de l'octree, les résultats de ce chapitre fournissent une minoration du nombre d'objets rencontrés par un rayon. Il suffit d'utiliser le grid où chaque élément de grid correspond à un voxel, la subdivision de l'espace obtenue est plus fine que celle de l'octree. Dans ce grid un rayon rencontre donc moins d'objets.

7.1 Taux d'occupation du grid

Etudions le nombre moyen d'éléments de grid intersectés par un objet donné X en dimension 3 : $N(X)$. La moyenne est faite sur les différentes positions possibles de X comme on l'a dit au paragraphe 5.1.

Soit X un ensemble compact et convexe, a la taille d'un élément de grid, $V(X)$ le volume de X , $A(X)$ l'aire de la surface de X , $D(X)$ le diamètre de X .

k_n désigne le volume de la sphère unité en dimension n ($k_2 = \pi$, $k_3 = \frac{4}{3}\pi$).

Santaló ([San76] équation (15.91)) montre que :

$$N(X) = 1 + \frac{V(X)}{a^n} + \frac{n}{k_n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{k_{h+1}}{(1+h)^2 a^{h+1}} M_{n-2-h}^{(n)}(X)$$

avec ([San76] equation (13.45)) :

$$M_r^{(n)}(X) = n W_{r+1}^{(n)}(X)$$

où $W_h^{(n)}$ sont les fonctions de Minkowski en dimension n (voir ci-dessous pour $n = 3$).

En dimension 3 :

$$N(X) = 1 + \frac{V(X)}{a^3} + \frac{9}{4 a^2} W_1^{(3)}(X) + \frac{9}{2 \pi a} W_2^{(3)}(X) \quad (7.1)$$

Les fonctions de Minkowski sont décrites par Santaló ([San76] équation (13.8)) ou par Serra ([Ser82] équation (IV-13), figure IV-7).

$$\begin{aligned} W_1^{(3)}(X) &= \frac{1}{3} A(X) \\ W_2^{(3)}(X) &= \frac{1}{3 k_2} \int_{\vec{v} \in \Sigma} W_1^{(2)}(X | \vec{v}^\perp) d\sigma \\ &= \frac{1}{3 \pi} \int_{\vec{v} \in \Sigma} \frac{1}{2} P(X | \vec{v}^\perp) d\sigma \end{aligned}$$

où P est le périmètre et $|\vec{v}^\perp$ la projection sur le plan perpendiculaire à \vec{v} .

Soient r_1 et r_2 les deux rayons de courbure principaux de X en chacun des points de sa surface ∂X , alors ([Ser82] page 103) :

$$W_2^{(3)}(X) = \frac{1}{6} \int_{\partial X} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) dS$$

Si

$$U(X) = \frac{1}{\pi} \int_{\vec{v} \in \Sigma} P(X | \vec{v}^\perp) d\sigma = \int_{\partial X} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) dS$$

l'équation (7.1) devient :

$$\boxed{N(X) = 1 + \frac{1}{a^3} V(X) + \frac{3}{4 a^2} A(X) + \frac{3}{4 \pi a} U(X)} \quad (7.2)$$

Les équations [San76] (13.46) et (13.47) permettent de calculer $U(X)$ pour une sphère de diamètre $D(X)$ et pour un parallélépipède rectangle dégénéré de cotés $D(X), 0, 0$:

$$\begin{aligned} U(\text{Sphère}) &= 4 \pi D(X) \\ U(\text{Parallélépipède dégénéré}) &= 2 \pi D(X) \end{aligned}$$

Ces deux cas réalisent le maximum et le minimum de U pour un diamètre donné.

$$2 \pi D(X) \leq U(X) \leq 4 \pi D(X) \quad (7.3)$$

Un encadrement de $N(X)$ en fonction du volume, de l'aire et du diamètre de X se déduit alors des équations (7.2) et (7.3).

Pour un parallélépipède rectangle d'arêtes α, β, γ , U vaut :

$$U \left(\begin{array}{c} \text{parallélépipède} \\ \text{rectangle} \end{array} \right) = 2 \pi (\alpha + \beta + \gamma)$$

L'équation (7.2) devient :

$$N \left(\begin{array}{c} \text{parallélépipède} \\ \text{rectangle} \end{array} \right) = 1 + \frac{\alpha\beta\gamma}{a^3} + \frac{3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{2 a^2} + \frac{3(\alpha + \beta + \gamma)}{2 a} \quad (7.4)$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} o &= \sum_{X \in S} \frac{N(X)}{N^3} \\ &= \frac{1}{N^3} \left(\text{Card } S + \sum_{X \in S} \frac{V(X)}{a^3} + \frac{3}{4} \sum_{X \in S} \frac{A(X)}{a^2} + \frac{3}{4 \pi} \sum_{X \in S} \frac{U(X)}{a} \right) \quad (7.5) \end{aligned}$$

où S est l'ensemble des objets et où le grid est composé de $N \times N \times N$ éléments de grid de taille $a \times a \times a$. o est alors le taux d'occupation moyen d'un élément de grid et le coût de traitement d'un tel élément est proportionnel à o .

7.2 Taille du grid optimale

La probabilité pour un rayon de rencontrer une région donnée ne dépend pas de cette région dans le cas du grid. Le taux d'occupation moyen d'un élément de grid nous fournit bien le coût moyen de traitement d'un élément de grid, la moyenne étant faite sur l'ensemble des rayons.

Les équations (7.5) et (6.4) permettent de déduire le coût total d'un rayon. t_5 désigne le temps de calcul de l'intersection d'un objet avec un rayon. Si la scène est incluse dans le cube $[0, 1]^3$ et que le grid est de taille N , on a alors $a = \frac{1}{N}$:

$$\begin{aligned} \text{Coût} &= N t_1 + N o t_5 \\ &= N(t_1 + t_5 \sum_{X \in S} V(X)) + \left(\frac{3}{4} t_5 \sum_{X \in S} A(X)\right) \\ &\quad + \frac{1}{N} t_5 \frac{3}{4\pi} \sum_{X \in S} U(X) + \frac{\text{Card } S}{N^2} t_5 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Pour trouver la taille du grid optimale, il faut minimiser ce coût. Pour cela on va simplifier l'équation (7.6). Tout d'abord, l'aire des objets intervient avec

un facteur ne dépendant pas de N . Le calcul de U est complexe, nous allons donc approcher U par $3\pi D$ en utilisant l'équation (7.3). La quantité à minimiser est alors :

$$N(t_1 + t_5 V) + \frac{1}{N} t_5 \frac{9}{4} D + \frac{1}{N^2} C t_5 \quad (7.7)$$

En posant $V = \sum_{X \in S} V(X)$, $D = \sum_{X \in S} D(X)$ et $C = \text{Card } S$.
En dérivant l'expression (7.7) on obtient :

$$(t_1 + t_5 V) - \frac{1}{N^2} t_5 \frac{9}{4} D - \frac{2}{N^3} C t_5$$

Pour minimiser l'expression (7.7), il faut annuler le polynôme suivant qui admet une unique racine positive.

$$(t_1 + t_5 V)N^3 - t_5 \frac{9}{4} D N - 2 C t_5 \quad (7.8)$$

Dans la pratique, on cherche une valeur approchée entière de cette racine. De plus cette valeur ne doit pas être trop grande, car un grid trop subdivisé poserait des problèmes d'espace mémoire.

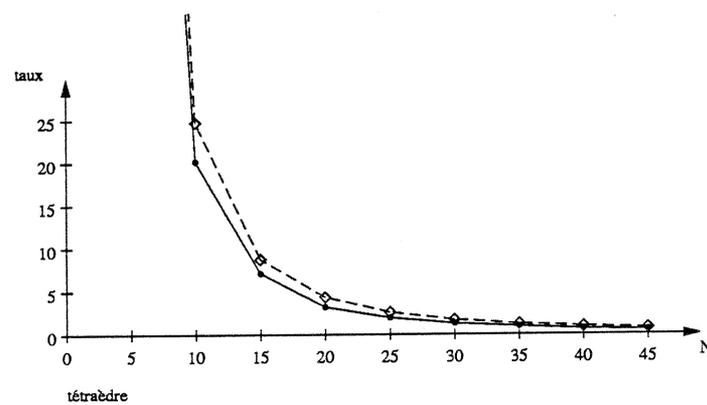
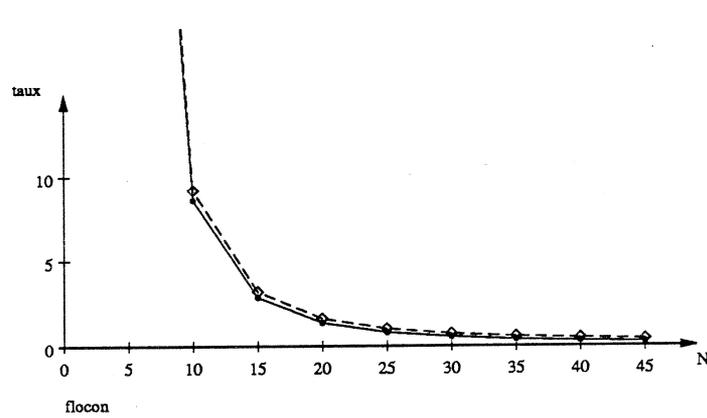
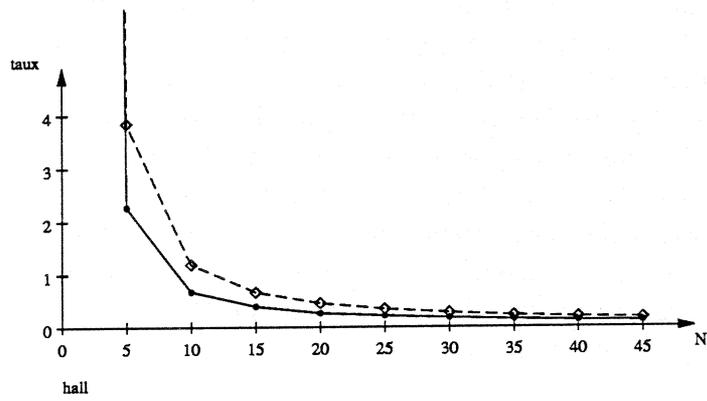
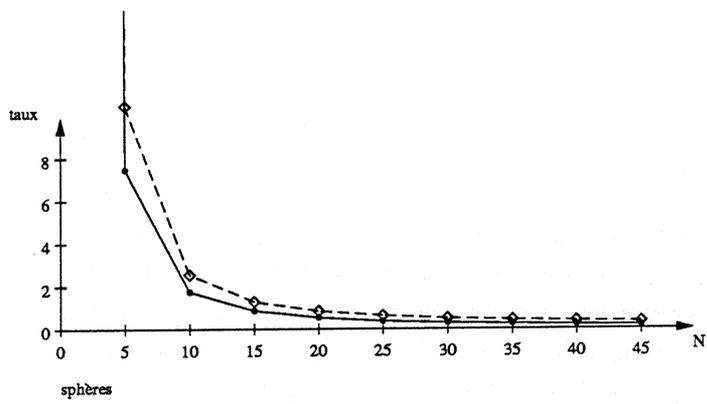
7.3 Etude pratique de la taille du grid

Dans cette partie, nous cherchons à vérifier pratiquement la validité des formules (7.5) et (7.8) établies au paragraphe précédent. Pour utiliser les résultats de Santalò et établir l'équation (7.1), on a supposé le grid infini et l'objet X disposé aléatoirement par rapport au grid (voir paragraphe 5.1). Or le grid que nous utilisons est fini et les objets sont strictement inclus dans ce grid. Pour un grid très subdivisé et des objets de petite taille, nous pouvons considérer que le grid est infini. Mais lorsque le grid est peu subdivisé ou que les objets sont grands par rapport à la taille totale du grid, cette hypothèse n'est plus vérifiée. On aboutit alors à une surévaluation du taux d'occupation du grid. En particulier pour un grid de taille 1, un objet n'a pas une position aléatoire puisqu'il est strictement inclus dans l'unique région du grid.

L'aire et le diamètre des objets ne sont pas calculés de manière exacte mais majorés, d'où une seconde raison pour laquelle le taux d'occupation calculé est supérieur au taux d'occupation effectif.

L'approximation que l'on obtient ainsi présente tout de même une qualité suffisante comme l'attestent les courbes de la figure 7.1 qui comparent le taux d'occupation théorique du grid (en pointillé) avec le taux effectif pour les scènes correspondant aux images de l'annexe D (voir tableau E.3).

La figure 7.2 montre la variation du temps de calcul de l'image en fonction de la taille du grid (voir tableau E.4). La courbe en pointillé représente le temps de prétraitement, et la courbe en trait plein le temps de calcul proprement dit d'une image avec une résolution de 250×250 pixels. Le prétraitement comprend la lecture et la mise en forme de la base de données, la détermination de la taille du grid, puis la répartition des objets dans le grid et la construction des macro-régions. Seules les allures de ces deux courbes et non leurs valeurs peuvent être vraiment comparées car le prétraitement est indépendant de la résolution de l'image, alors que le traitement proprement dit est proportionnel au nombre de pixels. Si on avait voulu calculer ces images au format video, on aurait eu un temps de traitement 10 fois plus important. Le point marqué d'une croix correspond à la taille de grid calculée en annulant la quantité (7.8), c'est-à-dire la taille optimale théorique. On constate que la taille du grid calculée est satisfaisante. Elle est légèrement sous-évaluée dans le cas de la scène "flocon" car, comme cette scène ne contient que des sphères, t_5 est plus important que dans les autres scènes ; pour résoudre ce problème, il faudrait séparer les objets par type, chacun ayant son coût propre.



● ——— taux d'occupation réel
 ◇ - - - - - taux d'occupation calculé

Figure 7.1: Taux d'occupation du grid effectif et théorique.

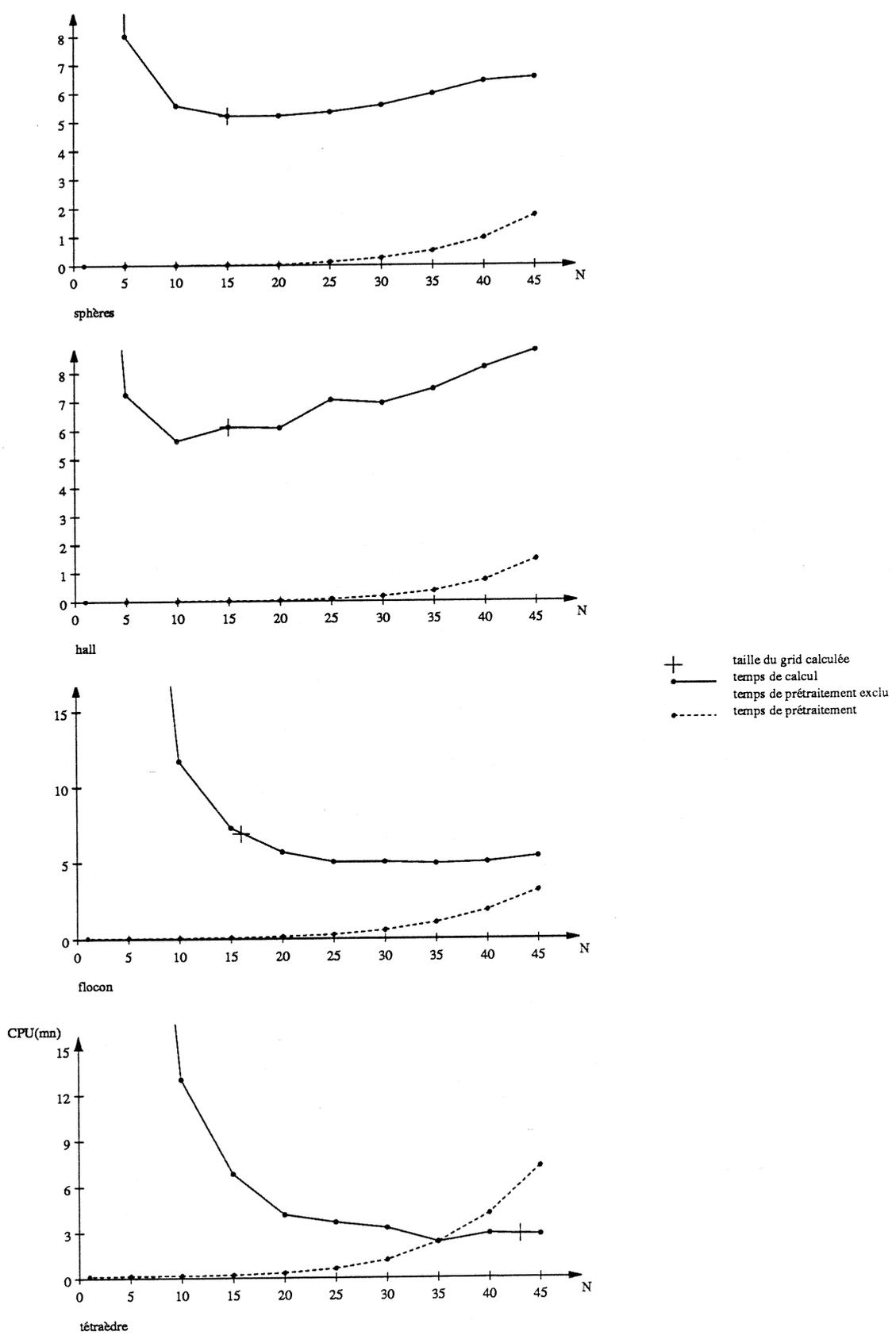


Figure 7.2: Temps de calcul en fonction de la taille du grid.

Chapitre 8

Evolution vers une structure adaptative

Les résultats obtenus sur nos scènes tests (figures D.1, D.2, D.3 et D.4) sont performants. Par contre sur d'autres images, comme celle de la figure D.5, nos temps de calculs se sont avérés peu satisfaisants. Ces scènes sont de grandes dimensions, et comportent de petits détails mal subdivisés. Les problèmes apparaissent lorsque l'on calcule des gros plans de ces détails.

8.1 Limites de l'étude du chapitre 7

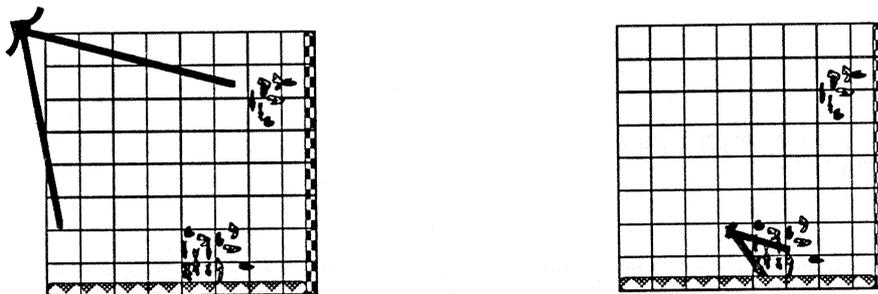
Dans l'étude du coût d'un rayon au chapitre précédent (paragraphe 7.2), nous avons supposé que les rayons étaient aléatoirement répartis dans la scène, ce qui permettait de dire que la probabilité que le rayon traverse un élément de grid donné ne dépendait pas de cet élément de grid.

Cette supposition est raisonnable lorsque l'observateur considère l'ensemble de la scène (figure 8.1a), par contre, si l'observateur ne considère qu'un détail à l'intérieur d'une scène, la distribution de probabilité des rayons n'est plus uniforme et l'élément de grid contenant ce détail possède une probabilité d'être traversé par un rayon beaucoup plus forte que celle que nous avons supposée a priori (figure 8.1b).

Reprenons l'étude du coût d'un rayon. On note g un élément de grid, G l'ensemble des éléments de grid, $o(g)$ le nombre d'objets interceptant g et $p(g)$ la probabilité pour un rayon, parmi l'ensemble des rayons qui nous intéressent, de rencontrer g .

On a alors :

$$\text{Coût} = \sum_{g \in G} p(g) \cdot [t_1 + o(g)t_5] \quad (8.1)$$



a : Rayons “aléatoires”

b : Rayons non “aléatoires”

Figure 8.1: Influence des conditions d'observation sur l'équiprobabilité des rayons.

Si les rayons sont équiprobables au sens du chapitre 5, on a :

$$\forall g \in G, p(g) = \frac{1}{N^2}$$

On retrouve l'équation (7.6), où o est le taux d'occupation moyen du grid :

$$\begin{aligned} \text{Coût} &= \sum_{g \in G} \frac{1}{N^2} \cdot [t_1 + o(g)t_5] \\ &= \frac{N^3}{N^2} (t_1 + t_5 \cdot o) \\ &= N(t_1 + t_5 \cdot o) \end{aligned} \tag{8.2}$$

8.2 Introduction d'une structure hiérarchique

La comparaison des équations (8.2) et (8.1) nous permet de localiser d'éventuels problèmes. Le coût d'une image est concentré dans les régions où le produit $p(g) \cdot o(g)$ est important.

C'est dans ces régions que la subdivision de l'espace peut se révéler insuffisante. Nous proposons donc d'utiliser une structure hiérarchique adaptative, mais au contraire des différentes structures existantes comme celles développées

au chapitre 2 qui sont adaptées à la géométrie de la scène (subdiviser plus là où il y a beaucoup d'objets), cette structure serait adaptée conjointement à la scène et aux rayons (subdiviser plus là où il y a beaucoup d'objets et beaucoup de rayons).

$p(g)$ dépend de l'ensemble des rayons que l'on devra considérer. L'évaluation de $p(g)$ ne saurait être faite a priori durant la phase de prétraitement car cette quantité dépend d'une part de la position de l'observateur, des lampes, mais aussi des caractéristiques optiques des objets. Certains détails de la scène, source de complexité du calcul, peuvent se trouver sur l'écran par le biais d'un miroir ou d'une loupe, ce qui est très difficile à prévoir initialement.

Afin d'évaluer $p(g)$, on procède au tracé des rayons dans un ordre aléatoire parmi l'ensemble des rayons que l'on va être amené à tracer. On effectue au fur et à mesure une évaluation dynamique de $p(g)$. Quand $p(g) \cdot o(g)$ devient trop important par rapport à la valeur théorique de $\frac{o}{N^2}$, on subdivise g à l'aide d'un nouveau grid.

8.3 Une structure hiérarchique dynamiquement adaptée

Dans le calcul d'une image, la complexité du calcul se trouve concentrée dans les régions de la subdivision maximisant le produit du nombre d'objets dans la région par la probabilité pour un rayon de rencontrer cette région. Si l'observateur observe l'ensemble de la scène, il n'y a pas de pic dans les probabilités d'intersection d'une région. Si on a une répartition homogène des objets dans la scène, il n'y aura pas de pic du taux d'occupation. Dans ces deux cas la structure de macro-régions se révèle efficace.

Par contre si on a sur la même région un pic de la probabilité d'intersection et du taux d'occupation, la structure de subdivision sera inopérante. Ce cas se produit lorsque l'on s'intéresse à un détail très complexe d'une scène de grande dimension.

La solution que nous proposons consiste à utiliser une structure hiérarchique de grids emboîtés avec macro-régions, le critère de subdivision étant évalué dynamiquement à partir du comportement des rayons déjà tracés.

A la traversée d'une région, on évalue la probabilité pour un rayon de rencontrer cette région, en effectuant le rapport du nombre de rayons l'ayant déjà traversée sur le nombre total de rayons tracés. Si le produit du taux d'occupation de la région et de cette probabilité dépasse la valeur idéale que l'on a calculée (avec une certaine tolérance), on décide de subdiviser la région à l'aide d'un grid et de macro-régions.

La structure de subdivision de l'espace évolue donc dynamiquement au cours

du tracé de rayons. Cette structure est une structure arborescente de grids.

Dans une première implantation où l'on a borné la profondeur de l'arbre de grids à 2 nous avons obtenu des résultats satisfaisants. Nous avons gagné un facteur 3 sur l'image de la figure D.5, et des facteurs 1 à 50 sur des images composées d'une structure complexe observée en gros plan positionnée dans un décor de grande taille.

Conclusion

La synthèse d'images évolue vers la production d'images ayant un degré de réalisme croissant. Le tracé de rayons est le seul outil permettant de modéliser des effets de propagation spéculaire de la lumière. Les techniques habituelles d'optimisation sont basées sur une subdivision de l'espace, régulière (grid) ou adaptée à la scène (octree,...). Nous avons proposé une structure originale de subdivision de l'espace : les macro-régions. Cette structure utilise un grid dans lequel les régions ne contenant pas d'information sont regroupées. Nous avons comparé cette structure avec les structures usuelles : grid, octree. Cette étude théorique a montré l'efficacité de la structure de macro-régions qui permet d'obtenir une subdivision aussi fine qu'un grid tout en autorisant une adaptation de la subdivision meilleure que dans l'octree.

Pour pallier certains problèmes dus au fait que les rayons ne sont pas aléatoires, nous proposons une solution utilisant une structure hiérarchique de grids emboîtés avec macro-régions, le critère de subdivision étant évalué dynamiquement à partir du comportement des rayons déjà tracés et non à partir de la seule géométrie de la scène.

Nous avons introduit des moyens théoriques pour comparer statistiquement les diverses structures de subdivision de l'espace. Ces méthodes peuvent être utilisées pour l'étude d'autres méthodes de subdivision que celles envisagées dans cette thèse.

Nous avons également mené une étude pratique basée sur une implantation de la structure de grid et sur notre structure de macro-régions. Cette étude montre clairement que l'augmentation de la finesse de la subdivision n'introduit pas un coût linéaire en fonction de cette subdivision, mais un coût bien inférieur qui permet de subdiviser jusqu'à ce que chaque région contienne un nombre très restreint d'objets.

Les mesures effectuées (annexe E) montrent que le coût du tracé de rayons reste cependant élevé. Nous devons maintenant nous tourner vers une amélioration du temps de calcul par des moyens matériels. Les deux possibilités sont la parallélisation et la vectorisation. Ces moyens nécessitent deux approches totalement différentes. La vectorisation impose de regrouper un grand nombre de calculs similaires et conduit à regrouper plusieurs rayons pour un traitement si-

multané. Au contraire la parallélisation massive nécessite un partage des rayons et des données de la scène entre différents processeurs. Il serait alors nécessaire de procéder également à une étude détaillée du prétraitement que nous avons jusqu'ici tenu pour peu important devant le traitement proprement dit.

Annexe A

Intersection d'une droite et d'un domaine convexe

Cette partie donne la démonstration des résultats énoncés au paragraphe 6.1.1.

Les trois intégrales suivantes sont calculées sur le domaine d'intégration défini au paragraphe 6.1.1. La "norme 1" et la "norme δ " sont également définies au paragraphe 6.1.1.

$$\int_{r \in R_D} 1 \, dr \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_1 \, dr \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_\delta \, dr \quad (\text{A.3})$$

On note $V(D)$ le volume de D et $A(D)$ son aire. Le calcul est effectué en dimension n .

A.1 Calcul de l'intégrale (A.1)

$$\begin{aligned} \int_{r \in R_D} dr &= \int_{\vec{v} \in \Sigma} \int_{N \in S_{\vec{v}}} \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} \, d\sigma \\ &= \int_{M \in S} \overrightarrow{dS} \cdot \int_{\vec{v} \in \Sigma, \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} > 0} \vec{v} \, d\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

On doit intégrer \vec{v} sur une demi-sphère. Par raison de symétrie le résultat sera colinéaire à \overrightarrow{dS} , c'est-à-dire à $\overrightarrow{N_M}$ normale en M à S .

Nous allons effectuer le calcul dans le cas où $\vec{N}_M = \vec{e}_1$. On appelle alors Σ_+ la demi-sphère unité avec $x_1 > 0$, Σ_0 la portion de l'hyperplan $x_1 = 0$ située à l'intérieur de la sphère. Alors $\Sigma_+ \cup \Sigma_0$ est une surface fermée à laquelle on peut appliquer la formule du gradient. On note Δ_+ l'intérieur de la demi-sphère (voir figure A.1).

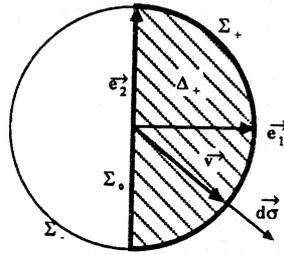


Figure A.1: Intégration sur la demi-sphère unité Σ_+ .

On note $k_n r^n$ le volume de la sphère de rayon r en dimension n .

$$\begin{aligned}
 \int_{\vec{v} \in \Sigma_+} \vec{v} d\sigma &= \int_{\vec{v} \in \Sigma_+} \vec{d}\sigma \\
 &= \oint_{\vec{v} \in \Sigma_+ \cup \Sigma_0} \vec{d}\sigma - \int_{\vec{v} \in \Sigma_0} \vec{d}\sigma \\
 &= \int_{\Delta_+} \vec{\nabla} 1 \, d\tau + \vec{e}_1 \int_{\vec{v} \in \Sigma_0} d\sigma \\
 &= k_{n-1} \vec{e}_1
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

En remplaçant dans l'équation (A.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{r \in R_D} dr &= \int_{M \in S} \vec{dS} \cdot k_{n-1} \vec{N}_M \\
 &= k_{n-1} \int_{M \in S} dS \\
 &= k_{n-1} A(D)
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2 Calcul de l'intégrale (A.2)

Σ est divisée selon les différents hyper-octants. L'hyper-octant Σ_ϵ est défini par :

$$\vec{v} \in \Sigma_\varepsilon \iff \forall i \in [1, n] \quad \varepsilon_i v_i \geq 0 \text{ et } \|\vec{v}\| = 1$$

$$\text{où } \varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in [1, n]} \in \{-1, 1\}^n$$

En séparant l'intégrale (A.2) selon les différents hyper-octants, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_1 dr &= \int_{\vec{v} \in \Sigma} \int_{N \in S_{\vec{v}}} \|\overrightarrow{MN}\|_1 \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} d\sigma \\ &= \sum_{\varepsilon} \int_{\vec{v} \in \Sigma_\varepsilon} \int_{N \in S_{\vec{v}}} \|\overrightarrow{MN}\|_1 \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La différence $N_i - M_i$ est du signe de ε_i , donc de signe constant sur un hyper-octant.

$$\|\overrightarrow{MN}\|_1 = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i (N_i - M_i)$$

Une partie de l'équation (A.7) correspondant à un hyper-octant devient :

$$\begin{aligned} \int_{N \in S_{\vec{v}}} (N_i - M_i) \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} &= \int_{M \in S - S_{\vec{v}}} M_i \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} + \int_{N \in S_{\vec{v}}} N_i \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} \\ &= \oint_{M \in S} M_i \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La formule du gradient nous donne :

$$\begin{aligned} \oint_{M \in S} M_i \overrightarrow{dS} &= \int_{M \in D} \overrightarrow{\nabla} M_i d\tau \\ &= \int_{M \in D} \vec{e}_i d\tau \\ &= V(D) \vec{e}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{N \in S_{\vec{v}}} \|\overrightarrow{MN}\|_1 \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \int_{N \in S_{\vec{v}}} (N_i - M_i) \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} \\ &= \sum_{i=0}^n V(D) \varepsilon_i \vec{e}_i \cdot \vec{v} \\ &= V(D) \sum_{i=0}^n \varepsilon_i v_i \\ &= V(D) \|\vec{v}\|_1 \end{aligned}$$

car ε_i est le signe de v_i sur cet hyper-octant.

L'équation (A.7) devient :

$$\begin{aligned}
\int_{r \in R_D} \|\vec{MN}\|_1 dr &= \int_{\vec{v} \in \bigcup_{\varepsilon} \Sigma_{\varepsilon}} \int_{N \in S_{\vec{v}}} \|\vec{MN}\|_1 d\vec{S} \cdot \vec{v} d\sigma \\
&= \int_{\vec{v} \in \bigcup_{\varepsilon} \Sigma_{\varepsilon}} V(D) \|\vec{v}\|_1 d\sigma \\
&= V(D) \int_{\vec{v} \in \Sigma} \|\vec{v}\|_1 d\sigma \tag{A.9}
\end{aligned}$$

On calcule cette intégrale en utilisant sa symétrie par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$, puis en utilisant le fait que l'intégrale doit être la même pour chaque coordonnée. On utilise alors le résultat de l'équation (A.5).

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{v} \in \Sigma} \|\vec{v}\|_1 d\sigma &= 2 \int_{\vec{v} \in \Sigma_+} \|\vec{v}\|_1 d\sigma \\
&= 2 n \int_{\vec{v} \in \Sigma_+} \vec{v} \cdot \vec{e}_1 d\sigma \\
&= 2 n \vec{e}_1 \cdot \int_{\vec{v} \in \Sigma_+} \vec{v} d\sigma \\
&= 2 n \vec{e}_1 \cdot (k_{n-1} \vec{e}_1) \\
&= 2 n k_{n-1}
\end{aligned}$$

Soit en reportant dans l'équation (A.9)

$$\int_{r \in R_D} \|\vec{MN}\|_1 dr = 2 n k_{n-1} V(D) \tag{A.10}$$

A.3 Calcul de l'intégrale (A.3)

On reprend les calculs de la section précédente en substituant $\|\vec{MN}\|_s$ à $\|\vec{MN}\|_1$ et en remplaçant chaque coordonnée par sa valeur absolue.

L'équation (A.8) devient

$$\int_{N \in S_{\vec{v}}} ([N_i] - [M_i]) d\vec{S} \cdot \vec{v} = \oint_{M \in S} [M_i] d\vec{S} \cdot \vec{v}$$

On applique également la formule du gradient mais le gradient est ici une distribution de Dirac concentrée dans les hyperplans $x_i = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\oint_{M \in S} [M_i] d\vec{S} &= \int_{M \in D} \vec{\nabla} [M_i] d\tau \\
&= \sum_{\lambda} \sigma_{i,\lambda} \vec{e}_i \\
&= V_i \vec{e}_i
\end{aligned}$$

Où $\sigma_{i,\lambda}$ désigne l'aire des sections de D par les hyperplans $x_i = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$. V_i est le volume d'un domaine approchant D par des cylindres de directrice \vec{e}_i de hauteur 1 et de base ces sections (figure A.2).

Soit \vec{V} défini par :

$$\vec{V} = \sum_{i=0}^n V_i \vec{e}_i \quad (\text{A.11})$$

En particulier si D est délimité par des plans de coordonnées entières, alors $\forall i, V_i = V(D)$.

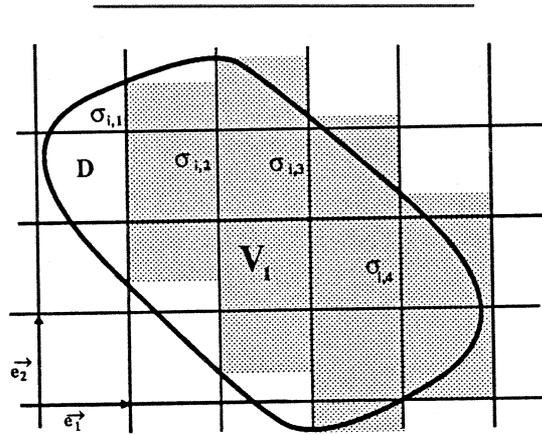


Figure A.2: Domaine engendré dans la direction x_1 en dimension 2.

L'équation (A.3) devient alors :

$$\int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_\delta dr = \int_{\vec{v} \in \Sigma} \vec{V} \cdot \vec{v} d\sigma \quad (\text{A.12})$$

Cas particulier

Si D est un parallélépipède isothétique en dimension n , le calcul peut être achevé comme dans la partie précédente et on aboutit au même résultat :

$$\int_{r \in R_D} \|\overrightarrow{MN}\|_\delta dr = 2 n k_{n-1} V(D) \quad (\text{A.13})$$

Annexe B

Etude du rapport volume sur aire pour un parallélépipède

L'équation (6.3) introduit le rapport volume sur aire pour un parallélépipède. Nous allons rechercher dans cette partie le maximum de cette expression.

On étudie un parallélépipède rectangle D de volume 1, d'arêtes de longueur a , b et $\frac{1}{ab}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}A(D) = A(a, b) &= 2(ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \\ \frac{\partial A}{\partial a}(a, b) &= 2(b - \frac{1}{a^2}) \\ \frac{\partial A}{\partial b}(a, b) &= 2(a - \frac{1}{b^2})\end{aligned}$$

Un extremum de l'aire est obtenu pour

$$\frac{\partial A}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial A}{\partial b}(a, b) = 0$$

c'est-à-dire pour $a^4 = b^2 = a$, soit $a = b = 1$. C'est un minimum car

$$A(1, 1+h) = 2((1+h) + 1 + (1-h + \frac{h^2}{2} + o(h^2))) = A(1, 1) + h^2 + o(h^2) > A(1, 1)$$

Lorsque a ou b tend vers 0 ou ∞ , $A(a, b)$ tend vers ∞ . Le minimum local de la fonction est donc un minimum global.

A volume constant, le minimum de l'aire d'un parallélépipède et donc le maximum du rapport volume sur aire est obtenu pour un cube.

Annexe C

Calculs pratiques d'intersections

Cette partie présente l'algorithme pratique de calcul de l'intersection d'un rayon avec un objet. Nous ne considérons que deux types d'objets : les sphères et les facettes planes convexes. Il est nécessaire, une fois qu'un point d'intersection est détecté, de pouvoir coder celui-ci sous une forme agréable pour l'algorithme utilisant le tracé de rayons (Cil ou l'algorithme de Whitted). Il est préférable que ce codage soit indépendant des changements de repère que l'on a éventuellement appliqués. Les paragraphes C.2.1, C.2.2 et C.2.3 définissent un paramétrage d'un point appartenant à un objet.

C.1 Intersection d'un rayon avec un objet

C.1.1 Intersection d'un rayon avec une sphère

Une sphère est représentée par son centre C et son rayon r , un rayon par son origine O et sa direction \vec{v} . On recherche λ tel que $O + \lambda\vec{v}$ soit un point de la sphère.

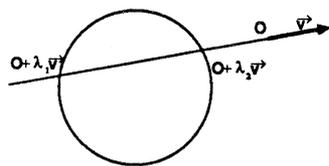
$$\begin{aligned}\|\vec{CO} + \lambda\vec{v}\| &= r \\ \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 + \lambda \vec{v} \cdot \vec{CO} + \|\vec{CO}\|^2 - r^2 &= 0\end{aligned}$$

On a alors une équation du deuxième degré. Soient λ_1 et λ_2 les deux solutions, si elles existent, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

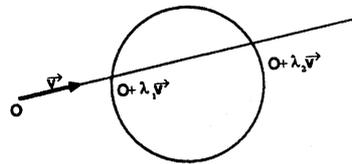
La figure C.1 montre alors les différents cas possibles.

C.1.2 Intersection d'un rayon avec une facette plane

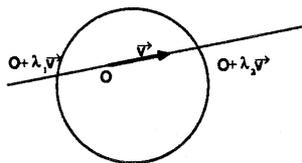
Une facette plane est définie par une liste de points M_i , $i \in [1, n]$. On suppose que ces points sont coplanaires et définissent un ensemble convexe. Cette défini-



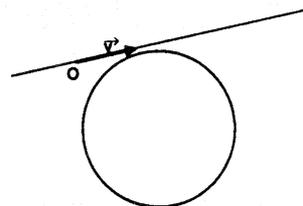
a : Pas d'intersection.



b : $O + \lambda_1 \vec{v}$.



c : $O + \lambda_2 \vec{v}$.



d : Pas d'intersection.

- **cas a** : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$. Le rayon s'éloigne de la sphère, il n'y a pas de point d'intersection.
- **cas b** : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Le rayon a deux points d'intersection avec la sphère, le plus proche est $O + \lambda_1 \vec{v}$.
- **cas c** : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$. L'origine du rayon est située à l'intérieur de la sphère, le point d'intersection est $O + \lambda_2 \vec{v}$.
- **cas d** : L'équation de degré 2 n'admet pas de solution. Dans ce cas le rayon ne coupe pas la sphère.

Figure C.1: Intersection d'un rayon avec une sphère.

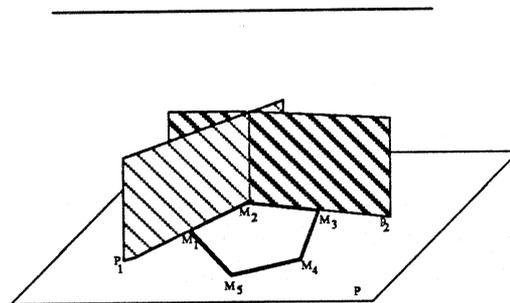


Figure C.2: Représentation d'un polygone.

tion du polygone n'est pas adaptée au calcul de l'intersection avec le rayon. Dans une phase de prétraitement sont établies les équations de différents plans (figure C.2) constituant une nouvelle représentation du polygone.

On calcule tout d'abord l'équation normalisée du plan P du polygone : $ax + by + cz + d$ avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On note également P l'application :

$$P(M) = ax_M + by_M + cz_M + d$$

et \vec{P} l'application :

$$\vec{P}(M) = ax_M + by_M + cz_M$$

On calcule les plans P_i définis par

- $P_i \perp P$
- $M_i \in P_i$
- $M_{i+1} \in P_i$
- $P_i(M_{i+2}) > 0$

On prendra une équation normalisée de P_i .

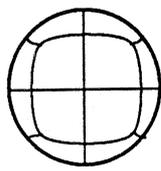
```

inter( rayon[O, v], facette[P, (P_i)_{i \in [1, n]}])
{
    lambda = P(O) / P(v);
    if (lambda < 0) return pas d'intersection;
    for (i=1; i <= n; i++)
        if (P_i(O + lambda*v) < 0) return pas d'intersection;
    return intersection : O + lambda*v;
}

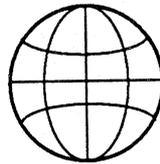
```

Figure C.3: Intersection d'un polygone et d'un rayon.

Examinons maintenant un rayon (O, \vec{v}) . On calcule le point d'intersection de ce rayon avec le plan.



a : Cube



b : Meridiens et parallèles

Figure C.4: Méthodes de subdivision d'une sphère.

$$\begin{aligned}P(O + \lambda \vec{v}) &= 0 \\P(O) + \lambda \vec{P}(\vec{v}) &= 0 \\ \lambda &= -\frac{P(O)}{\vec{P}(\vec{v})}\end{aligned}$$

Si λ est négatif alors le rayon s'éloigne du polygone, il n'y a pas d'intersection. Sinon on calcule $M = O + \lambda \vec{v}$. Ce point sera effectivement un point d'intersection avec la facette s'il se trouve à l'intérieur du polygone, c'est-à-dire (le polygone étant convexe) si M se trouve du bon côté de chaque P_i , soit :

$$\forall i \in [1, n], P_i(M) \geq 0$$

Si l'une des valeurs $P_i(M)$ est négative il n'y a pas de point d'intersection (voir figure C.3).

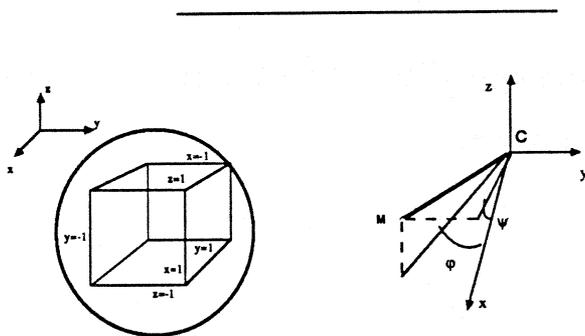
C.2 Paramétrage d'un point sur un objet

Etant donné un objet, et un point appartenant à la surface de cet objet, on veut coder ce point d'une manière rapide et pratique, notamment indépendante du repère. On veut que ce codage intervienne sous la forme d'un paramétrage par deux nombres u et v . Ce paramétrage permet facilement de plaquer sur l'objet une texture 2D, ou de subdiviser l'objet en micro-facettes pour le système Cil.

C.2.1 Paramétrage d'un point sur une sphère

On ne saurait trouver un paramétrage d'une sphère invariant par changement de repère puisque, en utilisant les symétries de la sphère, il existe un changement de repère laissant la sphère invariante amenant un point de la sphère sur n'importe quel autre. Le paramétrage dépend en fait de la manière de subdiviser la sphère. Les deux subdivisions exposées font intervenir des axes privilégiés, elles restent indépendantes par affinité et translation.

La méthode de subdivision de la sphère que nous utilisons (figure C.4a) utilise le cube isothétique inscrit dans la sphère comme première approximation de celle-ci, chaque face de ce cube est récursivement subdivisée en quatre et les points obtenus sont projetés sur la surface de la sphère. Cette méthode présente l'avantage d'éviter la création de singularité aux pôles comme dans une subdivision par les méridiens et les parallèles (figure C.4b).



a : Cas de subdivision.

b : Angles dans le cas de la face "x=1". $u = \operatorname{tg} \varphi$, $v = \operatorname{tg} \psi$.

Figure C.5: Définition des paramètres sur une sphère.

Soit un point M appartenant à une sphère de centre C et de rayon r . M se met sous la forme $M = C + r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Il faut d'abord déterminer sur quelle face du cube se trouve le point M . Cette face est déterminée par le nombre ayant la plus grande valeur absolue parmi x , y et z . On définit alors u et v comme étant les tangentes des angles que \overrightarrow{CM} forme avec les deux autres plans de coordonnées ($u, v \in [-1, 1]$). La

cas	u	v
$x = 1$	$-y/x$	$-z/x$
$y = 1$	$-x/y$	z/y
$z = 1$	x/z	y/z
$x = -1$	$-y/x$	z/x
$y = -1$	$-x/y$	$-z/y$
$z = -1$	$-x/z$	y/z

Tableau C.1: Cas de subdivision de la sphère.

figure C.5a détaille les différents cas selon la face du cube sur laquelle est M , la figure C.5b montre la définition de ces angles dans le cas où la face du cube est la face “ $x=1$ ”. Les valeurs de ces angles sont résumés dans le tableau C.1.

C.2.2 Paramétrage d’un point sur un triangle

Définition des paramètres

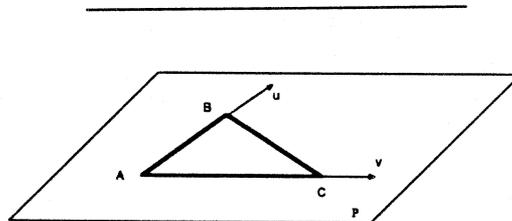


Figure C.6: Définition des paramètres sur un triangle.

Un triangle est défini par trois points A , B et C . Un point M appartenant à ce triangle s’exprime en coordonnées barycentriques (figure C.6).

$$\begin{aligned}
 M &= (1 - u - v)A + uB + vC \\
 &= A + u(B - A) + v(C - A)
 \end{aligned}$$

Cette équation permet de calculer un point ou tout attribut de l’objet en ce point (couleur, normale...) à partir de ses paramètres.

Equation d'une droite dans le plan P

L'équation d'une droite dans un plan P est une expression algébrique permettant de calculer la distance d'un point du plan à cette droite. C'est-à-dire que l'équation du plan orthogonal à P passant par la droite, lorsqu'on l'applique aux points de P , peut être vue comme l'équation de la droite. Les plans P_i calculés au paragraphe C.1.2 peuvent être utilisés comme équations des droites $M_i M_{i+1}$ dans le plan du polygone.

Calcul des paramètres

On cherche à calculer les paramètres u et v d'un point M appartenant au triangle A, B, C . On note P_{BC} une équation de la droite BC dans le plan ABC .

On a :

$$M = (1 - u - v)A + uB + vC$$

u peut s'exprimer en fonction de M et des équations des droites :

$$\begin{aligned} P_{AC}(M) &= P_{AC}((1 - u - v)A + uB + vC) \\ &= (1 - u - v) P_{AC}(A) + u P_{AC}(B) + v P_{AC}(C) \\ &= u P_{AC}(B) \\ u &= \frac{P_{AC}(M)}{P_{AC}(B)} \end{aligned}$$

de même

$$v = \frac{P_{AB}(M)}{P_{AB}(C)}$$

C.2.3 Paramétrage d'un point sur un quadrilatère

Définition des paramètres

Un quadrilatère est défini par quatre points A, B, C et D . On va définir u et v de manière à mettre en bijection le quadrilatère et $[0, 1]^2$ (figure C.7). M est situé sur une droite NN' combinaison linéaire des droites AB et CD côtés du quadrilatère, cette combinaison détermine le paramètre u ; v est la coordonnée barycentrique du point M sur le segment $[NN']$ (figure C.7).

$$\begin{aligned} N &= (1 - u)A + uC \\ N' &= (1 - u)B + uD \\ M &= (1 - v)N + vN' \\ M &= (1 - u)(1 - v)A + u(1 - v)B + uvC + (1 - u)vD \end{aligned}$$

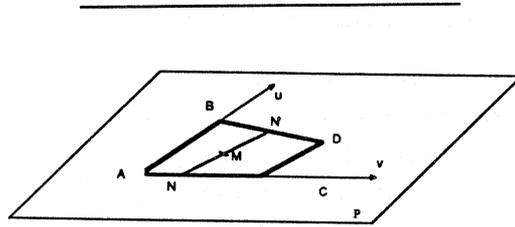


Figure C.7: Définition des paramètres sur un quadrilatère.

$$= A + u(B - A) + v(D - A) + uv(A + C - B - D)$$

Cette équation permet de recalculer un point à partir de ses paramètres.

Calcul des paramètres

Comme au paragraphe C.2.2, on note P_{AD} l'équation normalisée de la droite AD dans le plan du quadrilatère.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} P_{NN'} &= (1 - u)P_{AD} + uP_{BC} \\ 0 &= P_{NN'}(M) \\ &= (1 - u)P_{AD}(M) + uP_{BC}(M) \end{aligned}$$

$$u = \frac{P_{AD}(M)}{P_{AD}(M) + P_{BC}(M)}$$

de même

$$v = \frac{P_{AB}(M)}{P_{AB}(M) + P_{DC}(M)}$$

On peut utiliser pour P_{AB} l'équation du plan passant par A et B orthogonal au plan ABC défini au paragraphe C.1.2.

Annexe D

Images

L'algorithme de tracé de rayons utilisant les macro-régions et les macro-régions directionnelles a été implanté sur différents calculateurs dont un BULL-SPS9 (Ridge). C'est dans ce cadre qu'on a été calculées les images D.1, D.2, D.3 et D.4 au Laboratoire de l'Ecole Normale Supérieure.

L'image D.6 a également été calculé au LIENS en utilisant le système "CIL" qui intègre des méthodes de radiosité et de tracé de rayons. La subdivision en macro-régions est également utilisée par le système "CIL".

L'image D.5 a été calculée par Thomson Digital Image (TDI) en interfaçant le logiciel de rendu de TDI avec le tracé de rayons développé au LIENS. Cette image concerne un projet architectural en baie d'Osaka.

Les caractéristiques des images D.1, D.2, D.3 et D.4 sont exposées à l'annexe E.

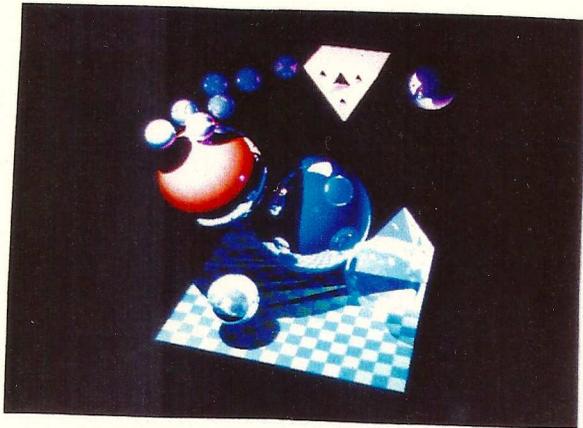


Figure D.1: Image "sphères".

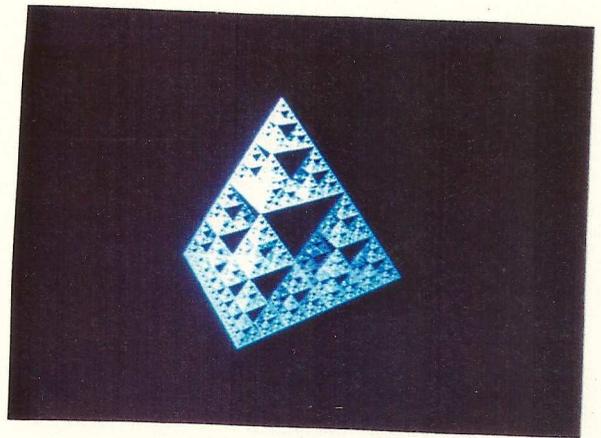


Figure D.4: Image "tétraèdre".

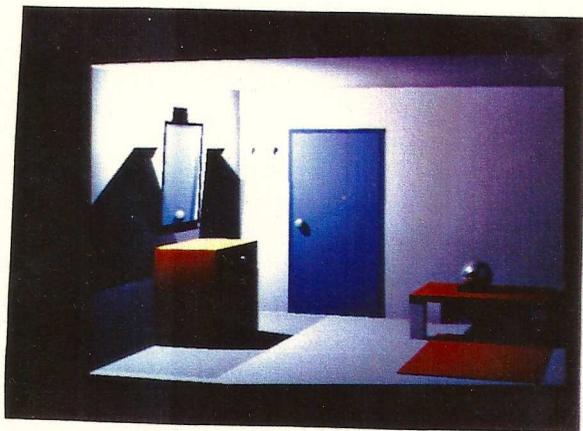


Figure D.2: Image "hall".

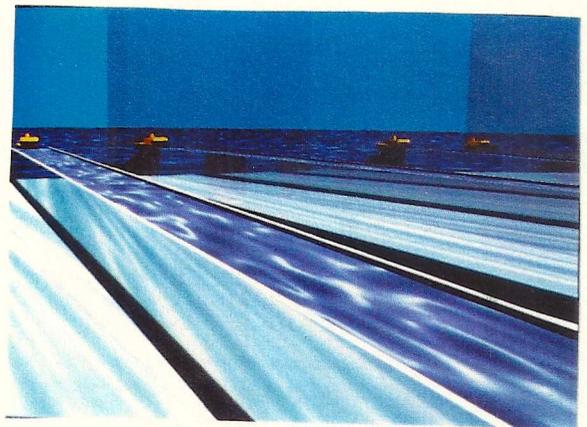


Figure D.5: Projet "Osaka".

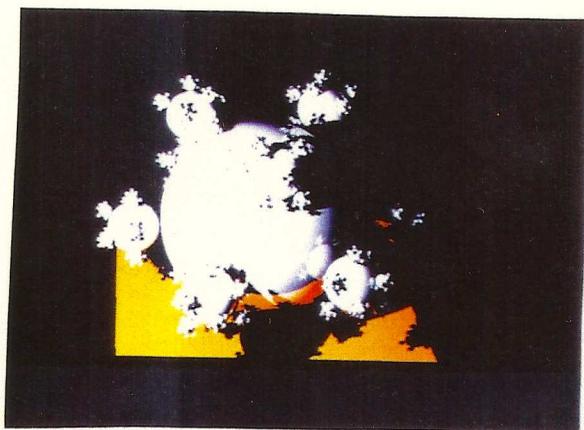


Figure D.3: Image "flocon".

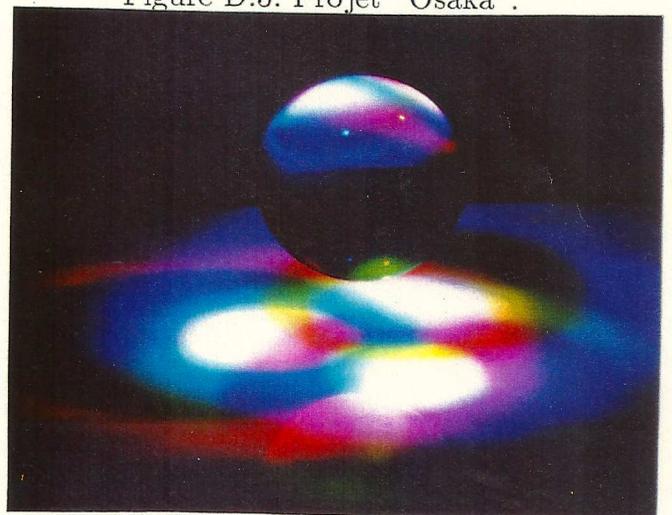


Figure D.6: Le système "CIL".

Annexe E

Temps d'exécution

Les tableaux suivants présentent différents temps de calcul et statistiques relatifs aux images de l'annexe D. Ces tableaux sont exploités aux chapitres 3, 6 et 7 (figures 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 6.7, 6.8, 7.1, 7.2)

L'implantation de ce travail a été menée en langage C sous système Unix sur différentes machines : un SPS9-800 (Ridge) ayant 8 mega-octets de mémoire vive, une station IRIS 3020 (Silicon Graphics), des stations SUN-3 et un Convex. Les temps de calcul donnés dans cette partie ont été obtenus sur le SPS9.

Le tableau E.1 présente les caractéristiques de définition des scènes à partir desquelles ces images ont été calculées (voir figures D.1 D.2 D.3 D.4), ainsi que le nombre de rayons nécessaires au calcul de ces images avec une résolution de 250×250 pixels.

Le tableau E.3 compare le taux d'occupation réel et le taux d'occupation calculé comme on l'a montré au paragraphe 7.1 équation (7.5), en fonction de la taille du grid.

Le tableau E.4 présente le temps de calcul des images D.1 D.2 D.3 D.4 en fonction de la taille du grid. Les images sont calculées sur 250×250 pixels en utilisant une structure de grid simple.

- N est la taille du grid
- C_r est le temps de calcul d'un rayon
- C_i est le temps de calcul des initialisations
- C_t est le temps de calcul total

Les tableaux E.5 et E.6 sont analogues au tableau E.4 mais en utilisant les structures de macro-régions et de macro-régions directionnelles.

Le tableau E.7 récapitule le nombre moyen d'intersections que l'on calcule pour un rayon. D'une part, on compte le nombre d'objets considérés pour chaque rayon, et d'autre part, le nombre de régions traversées dans le cas du grid.

Dans le cas des macro-régions, on calcule le nombre de régions traversées en distinguant si cette région est ou non réduite à un élément de grid.

Les quatre tableaux E.8 E.9 E.10 E.11 décrivent la répartition des macro-régions par taille. On prend comme taille d'une macro-région le rapport de 6 fois son volume sur sa surface ce qui correspond au nombre moyen d'éléments de grid qu'aurait traversés le rayon (voir paragraphe 6.1.4).

Images	Objets	Lampes	Profondeur	Nombre de rayons		
				de rendu	d'ombrage	total
Sphères	519	2	5	139010	91878	230888
Hall	101	2	3	64949	117093	182042
Flocon	7382	1	3	94709	36338	131047
Tétraèdre	16384	1	1	62500	8270	70770

Tableau E.1: Caractéristiques des scènes calculées.

Devant la difficulté pour définir un modèle statistique des scènes utilisées en synthèse d'images, Eric Haines [Hai87] a proposé un certain nombre de scènes "typiques". Nous avons testé la structure de macro-régions sur les bases de données fournies par Eric Haines (voir tableau E.2, la résolution est de 512×512). Dans le cas du tétraèdre, et d'une scène représentant 64 roues crantées, nous obtenons d'excellents résultats, par rapport à ceux fournis par Haines, ainsi que par rapport à ceux donnés par Snyder au Siggraph 87 [SB87].

En ce qui concerne la scène "flocon1", dans la base de données originale, la structure est posée sur un plan de grande taille qui rend la subdivision opérante au voisinage de celle-ci. Le programme calcule alors une subdivision beaucoup trop faible. En augmentant cette subdivision, on améliore le temps de calcul, mais on reste beaucoup moins performant que Haines. Par contre en réduisant la taille du plan support (flocon2), on obtient des temps de calcul bien meilleurs. Cette constatation débouche sur l'idée d'une structure hiérarchique adaptée non plus à la scène, mais aux rayons (voir le chapitre 8).

	Macro-régions	Eric Haines	Snyder
	SPS9	HP-320SRX	Appollo DN570
Flocon1 (grid 27)	16h03'	4h50'	
Flocon1 (grid 35)	9h20'	4h50'	
Flocon2 (grid 26)	43'		
Tétraèdre 6	8'31"	20'	
Tétraèdre 4	3'22"		10'39"
Roues	1h29'	10h46'	

Tableau E.2: Temps d'exécutions sur les bases de données d'Eric Haines.

Images	N	Taux d'occupation	
		réel	calculé
Sphères	1	519.0	643.0
	5	7.46	10.43
	10	1.74	2.54
	15	0.86	1.28
	20	0.53	0.84
	25	0.36	0.62
	30	0.29	0.50
	35	0.24	0.43
	40	0.20	0.38
	45	0.17	0.34
Hall	1	101.0	150.0
	5	2.27	3.84
	10	0.67	1.19
	15	0.39	0.66
	20	0.26	0.45
	25	0.21	0.34
	30	0.17	0.27
	35	0.14	0.22
	40	0.12	0.19
	45	0.11	0.17
Flocon	1	7382.0	7501.0
	5	62.28	64.78
	10	8.60	9.18
	15	2.85	3.18
	20	1.36	1.61
	25	0.79	1.01
	30	0.54	0.72
	35	0.37	0.56
	40	0.29	0.47
	45	0.23	0.40
Tétraèdre	1	16384.0	17144.0
	5	143.9	162.7
	10	20.15	24.71
	15	7.09	8.73
	20	3.18	4.32
	25	1.94	2.57
	30	1.25	1.70
	35	0.92	1.22
	40	0.62	0.92
	45	0.51	0.72

Tableau E.3: Taux d'occupation du grid.

Images	N	C_r (ms)	C_i (s)	C_t (mn)
Sphères	1	34.8	0.3	134.4
	5	2.07	0.3	8.01
	10	1.45	0.7	5.56
	15	1.36	1.3	5.23
	20	1.35	2.8	5.23
	25	1.38	6.8	5.45
	30	1.47	14.6	5.83
	35	1.57	29.9	6.38
	40	1.74	57.6	7.38
	45	1.70	103.5	8.28
Hall	1	8.17	0.0	24.78
	5	2.38	0.1	7.25
	10	1.99	0.1	5.63
	15	2.02	0.6	6.13
	20	2.00	1.5	6.10
	25	2.32	4.2	7.13
	30	2.31	9.5	7.10
	35	2.45	21.7	7.78
	40	2.69	44.8	8.91
	45	2.89	87.9	10.22
Flocon	1	434.3	2.7	942.75
	5	20.5	2.3	44.75
	10	5.37	2.7	11.73
	15	3.33	4.1	7.35
	20	2.59	8.6	5.80
	25	2.28	16.0	5.25
	30	2.27	32.3	5.50
	35	2.24	62.6	5.93
	40	2.28	111.3	6.85
	45	2.46	187.7	8.48
Tétraèdre	1	926.2	8.8	1097.5
	5	40.2	9.4	47.45
	10	11.02	9.9	13.17
	15	5.79	12.3	7.03
	20	3.79	19.9	4.48
	25	3.09	36.5	4.25
	30	2.76	70.1	4.43
	35	2.54	140.9	5.21
	40	2.47	252.7	7.12
	45	2.40	438.4	10.13

Tableau E.4: Temps en fonction de la taille du grid.

Images	N	C_r (ms)	C_i (s)	C_t (mn)
Sphères	10	1.43	0.6	5.50
	15	1.30	1.5	5.01
	20	1.23	3.7	4.80
	25	1.21	9.0	4.79
	30	1.21	19.3	5.00
	35	1.19	39.0	5.22
	40	1.29	73.2	6.17
	45	1.18	132.0	6.75
Hall	10	1.79	0.2	5.42
	15	1.78	0.8	5.42
	20	1.55	2.0	4.75
	25	1.76	5.1	5.42
	30	1.51	11.5	4.77
	35	1.43	25.0	4.77
	40	1.58	51.1	5.65
	45	1.50	96.1	6.15
Flocon	10	5.28	2.8	11.57
	15	3.14	3.9	6.93
	20	2.24	9.0	5.05
	25	1.82	18.1	4.28
	30	1.67	37.1	4.27
	35	1.54	71.7	4.57
	40	1.41	129.0	5.22
	45	1.39	218.1	6.68
Tétraèdre	10	10.46	10.8	12.52
	15	5.39	13.7	6.59
	20	3.33	22.4	4.30
	25	2.36	42.8	3.50
	30	1.88	81.8	3.58
	35	1.58	162.6	4.57
	40	1.65	296.6	6.89
	45	1.54	508.9	10.28

Tableau E.5: Temps en fonction de la taille du grid avec macro-régions.

Images	N	C_r (ms)	C_i (s)	C_t (mn)
Sphères	10	1.44	1.1	5.58
	15	1.33	3.4	5.18
	20	1.28	12.2	5.12
	25	1.25	36.2	5.43
	30	1.28	94.3	6.50
	35	1.29	226.1	8.73
	40	1.31	462.2	12.73
	45	1.23	929.7	20.22
Hall	10	1.87	0.8	5.70
	15	2.00	4.7	6.15
	20	1.78	16.6	5.67
	25	2.01	54.3	7.00
	30	1.80	152.9	8.03
	35	1.84	360.5	11.58
	40	2.18	791.2	19.8
	45	1.97	1614.3	32.88
Flocon	10	5.31	2.9	11.65
	15	3.23	7.0	7.17
	20	2.32	22.0	5.43
	25	1.88	55.0	5.03
	30	1.74	142.1	6.17
	35	1.73	318.4	9.08
	40	1.45	667.3	14.28
	45	1.53	1295.7	24.95
Tétraèdre	10	10.80	11.2	12.92
	15	5.68	20.0	7.03
	20	3.51	56.3	5.08
	25	2.67	168.9	5.97
	30	2.30	455.0	10.30
	35	2.00	1104.8	20.77
	40	1.61	2415.0	42.15
	45	1.24	4837.1	81.90

Tableau E.6: Temps en fonction de la taille du grid avec macro-régions directionnelles.

Images	N	Nombre moyen d'intersections du rayon avec les			
		objets	éléments de grid	régions pleines	macro-régions
Sphères	1	488.2	0.94		
	5	19.6	2.5		
	10	8.22	4.6	3.2	0.42
	15	5.60	6.8	3.64	0.82
	20	4.08	9.1	3.81	1.13
	25	3.33	11.3	3.78	1.40
	30	2.87	13.6	3.84	1.64
	35	2.59	15.8	3.63	1.88
	40	2.38	18.0	3.66	2.10
	45	2.17	20.3	3.42	2.24
Hall	1	101.0	0.99		
	5	19.49	4.2		
	10	9.04	9.1	4.61	1.26
	15	8.24	13.9	4.95	1.54
	20	5.48	18.9	4.96	1.48
	25	6.84	23.9	5.53	1.58
	30	3.52	28.7	5.73	1.84
	35	2.85	33.8	5.23	1.83
	40	3.52	38.6	5.61	2.76
	45	2.81	43.5	5.50	2.81
Flocon	1	7353.6	0.98		
	5	334.7	3.8		
	10	76.84	7.6	3.32	1.20
	15	38.14	11.3	2.86	1.86
	20	22.85	15.1	2.55	2.18
	25	15.15	18.8	2.57	2.51
	30	11.59	22.6	2.62	2.86
	35	8.71	26.3	2.59	3.10
	40	6.98	30.1	2.65	3.02
	45	5.98	33.9	2.62	3.30
Tétraèdre	1	11348	0.69		
	5	486.9	3.1		
	10	125.8	6.2	1.59	1.15
	15	61.7	9.3	1.33	1.59
	20	35.4	12.3	1.42	1.79
	25	24.8	15.4	1.30	2.08
	30	18.6	18.6	1.26	2.26
	35	14.8	21.6	1.31	2.34
	40	11.6	24.7	1.40	2.54
	45	9.9	27.8	1.41	2.66

Tableau E.7: Nombre moyen d'intersections du rayon.

Sphères								
Taille d'une macro-région	<i>N</i>							
	10	15	20	25	30	35	40	45
1	25	28	51	38	67	52	99	110
2	25	41	60	56	79	95	105	124
3	13	25	38	42	48	67	77	56
4	1	28	42	69	85	79	101	106
5		10	30	41	66	102	90	86
6		2	33	35	60	90	80	89
7			8	37	39	73	108	100
8			2	32	45	70	82	96
9			1	11	43	35	65	97
10				0	25	52	43	81
11				1	13	46	54	60
12					4	25	45	42
13					1	10	54	64
14						0	22	58
15						3	11	51
16							4	26
17							3	12
18								4
19								1
20								0
21								0
22								1

Tableau E.8: Répartition des macro-régions dans la scène “sphères”.

Hall								
Taille d'une macro-région	N							
	10	15	20	25	30	35	40	45
1	0	1	0	0	0	1	1	2
2	2	0	3	4	3	0	3	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	4	0	0	2	2	3	1
5	5	0	0	0	2	3	1	2
6	6	0	2	0	0	1	1	2
7		1	1	1	0	1	3	2
8		2	0	0	0	1	4	2
9		4	0	2	1	1	0	4
10			1	1	0	0	0	2
11			2	0	3	1	1	0
12			2	1	1	0	0	1
13			3	0	0	0	2	0
14				3	0	2	0	0
15				1	0	0	0	2
16				4	2	0	4	1
17					1	0	1	0
18					3	1	0	4
19					3	0	0	2
20					1	2	0	0
21						2	2	0
22						3	1	0
23						2	3	1
24						1	0	2
25							2	3
26							3	1
27							1	2
28								0
29								2
30								1
31								1

Tableau E.9: Répartition des macro-régions dans la scène “hall”.

Flocon								
Taille d'une macro-région	N							
	10	15	20	25	30	35	40	45
1	15	10	14	28	33	56	66	61
2	22	43	56	85	102	132	187	226
3	17	31	37	25	11	11	16	47
4	1	21	35	60	87	90	98	108
5		16	27	57	42	58	39	45
6		5	25	21	61	59	86	122
7			21	31	35	70	79	86
8			2	45	27	46	58	78
9			1	20	32	19	79	100
10				3	39	25	36	87
11				1	24	36	23	40
12					7	41	38	23
13					0	38	46	42
14					1	6	37	45
15						0	33	49
16						1	6	58
17							0	21
18							0	4
19							0	0
20							1	0
21								0
22								1

Tableau E.10: Répartition des macro-régions dans la scène “flocon”.

Tétraèdre								
Taille d'une macro-région	<i>N</i>							
	10	15	20	25	30	35	40	45
1	6	20	17	28	70	77	92	125
2	10	14	17	51	36	40	77	126
3	12	9	4	16	34	35	24	9
4	13	13	16	8	15	35	38	36
5	8	13	7	18	12	13	36	69
6		26	16	12	8	7	5	24
7		22	14	12	26	13	20	13
8		4	26	18	6	20	7	7
9			35	22	13	28	35	9
10			14	28	13	6	23	27
11			5	48	13	13	13	41
12				46	35	20	9	9
13				6	45	20	19	15
14				5	43	30	23	6
15					34	43	24	23
16					5	61	29	26
17					5	67	48	20
18						12	63	36
19						5	62	45
20						4	41	69
21							11	74
22							3	87
23							6	12
24								9
25								5
26								5

Tableau E.11: Répartition des macro-régions dans la scène "tétraèdre".

Annexe F

Lexique

arbre des rayons Arborescence des rayons engendrés par le calcul d'un rayon primaire (voir figures 1.7 1.8).

boîtes englobantes Méthode de subdivision de l'espace reposant sur un regroupement des objets par proximité (voir paragraphes 2.4 6.1.5).

cohérence On dit qu'un phénomène est cohérent, si on suppose qu'il possède une certaine structure à priori. On dira qu'une image est cohérente si la présence d'une frontière en un pixel permet de penser qu'on a de bonnes chances que cette frontière se poursuive sur le pixel voisin, c'est-à-dire en fait si cette image représente effectivement quelque chose et n'est pas réduite à du bruit. On dira de même que les rayons primaires sont cohérents car ils sont tous issus de l'œil et suivent des trajectoires voisines.

diffus Mode isotrope de réflexion de la lumière.

distance d'un rayon à un objet On appelle *distance d'un rayon* O, \vec{v} à un *objet* la plus petite valeur λ telle que $O + \lambda\vec{v}$ soit un point de l'objet, ceci quelle que soit la norme du vecteur \vec{v} (voir paragraphe 1.2).

écran Plan dans lequel on projette les objets de la scène. (voir figure 1.3).

grid Structure de subdivision de l'espace utilisant un maillage régulier (voir paragraphes 2.2 6.1.2 7.2).

isothétique A cotés parallèles aux axes.

macro-région Méthode de subdivision de l'espace développée au chapitre 3. Cette méthode est basée sur une structure de grid dans laquelle on a regroupé certaines régions du grid formant des parallélogrammes rectangles isothétiques à faible densité d'information. Une région de cette structure est soit une macro-région soit une région du grid initial que l'on appellera élément de grid (voir aussi le paragraphe 6.1.4).

macro-région directionnelle Extension de la méthode des macro-régions, où la macro-région considérée dépend de l'origine et de la direction du rayon (chapitre 4).

objet Élément de description de la scène, par exemple une facette polygonale ou une sphère.

octree Structure hiérarchique de subdivision de l'espace en octants (voir paragraphes 2.3 6.1.3 et [Sam84] [MPY87] [Yah86]).

œil Position de l'observateur (voir figure 1.3).

pixel Dans une subdivision du plan, un pixel est une région élémentaire de la subdivision, l'écran est notamment subdivisé en pixels. (voir figure 1.3).

quadtree Structure hiérarchique de subdivision du plan en quadrants (voir [Sam84] [MPY87] [Yah86]).

radiosité Technique de synthèse d'images modélisant la diffusion de la lumière (voir [GTGB84] [CG85] [WCG87] [DPS87]).

rayon Un rayon O, \vec{v} étant donné, le problème consiste à trouver le point d'intersection le plus proche de O entre la demi-droite O, \vec{v} et les objets de la scène. (voir paragraphe 1.2).

rayon primaire C'est un rayon issu de l'œil (voir figure 1.3).

rayon secondaire C'est un rayon issu d'un des points de la scène et dirigé dans la direction de la réflexion ou de la réfraction géométrique par rapport à un rayon incident (voir figures 1.5 1.6 1.7).

rayon d'ombrage C'est un rayon issu d'un des points de la scène et dirigé vers une source lumineuse (voir figures 1.4 1.7).

région Une région est l'élément de base d'une structure de subdivision de l'espace.

scène Description de l'ensemble des données géométriques décrivant l'environnement à synthétiser, c'est-à-dire l'ensemble des objets.

spéculaire Mode directionnel de réflexion de la lumière.

t_1 Temps de calcul de la traversée d'un élément de grid.

t_2 Temps de calcul de la traversée d'une macro-région ou d'une région de l'octree.

t_3 Temps de calcul de la recherche d'un voisin dans l'octree.

t_4 Temps de calcul de la sélection d'une boîte.

t_5 Temps de calcul d'une intersection rayon-objet.

tracé de rayons Technique de synthèse d'images permettant de modéliser les effets spéculaires (voir paragraphes 1.2 1.3).

voxel Dans le cadre d'une subdivision de l'espace, un voxel désigne une partie de l'espace de une structure de taille minimale. Dans un octree, un voxel correspond à un nœud de l'octree à profondeur maximale, que ce nœud existe ou non (voir paragraphe 2.3).

Bibliographie

- [AK87] James Arvo et David Kirk. Fast Ray Tracing by Classification. *Computer Graphics*, 21(4):55 – 64, Juillet 1987. Proceedings SIGGRAPH 1987 in Anaheim.
- [Ama84] John Amanatides. Ray-Tracing with Cones. *Computer Graphics*, 18:129–135, Juillet 1984. Proceedings SIGGRAPH 1984 in Minneapolis.
- [Arv86] James Arvo. Backward Ray-Tracing. Course of the SIGGRAPH, 1986. Developments in Ray-Tracing.
- [Bar86] Allan H. Barr. Ray-Tracing Deformed Surfaces. Course of the SIGGRAPH, 1986. Developments in Ray-Tracing.
- [BMPA87] Kadi Bouatouch, Mohamed Ouali Madani, Thierry Priol, et Bruno Arnaldi. *A New Algorithm of Space Tracing Using a CSG Model*. Rapport de recherche 335, IRISA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cédex, France, Janvier 1987.
- [CG85] Michael F. Cohen et Donald P. Greenberg. The Hemi-Cube : A Radiosity Solution for Complex Environments. *Computer Graphics*, 19(3):31 – 40, Juillet 1985. Proceedings SIGGRAPH 1985 in San Fransisco.
- [CGIB86] Michael F. Cohen, Donald P. Greenberg, David S. Immel, et Philip J. Brock. An Efficient Radiosity Approach for Realistic Image Synthesis. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(3):25–35, Mars 1986.
- [CPC84] Robert L. Cook, Thomas Porter, et Loren Carpenter. Distributed Ray Tracing. *Computer Graphics*, 18:137–147, Juillet 1984. Proceedings SIGGRAPH 1984 in Minneapolis.
- [CT82] Robert L. Cook et Kenneth E. Torrance. A Reflectance Model for Computer Graphics. *ACM Transactions on Graphics*, 1:7 – 24, 1982.
- [DP88] Olivier Devillers et Claude Puech. *Une subdivision spatiale en deux étapes pour le tracé de rayons*. Rapport de recherche, Labora-

toire d'Informatique de l'ENS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France, 1988. A paraître.

- [DPS87] Olivier Devillers, Claude Puech, et François Sillion. *CIL : un modèle d'illumination intégrant les réflexions diffuse et spéculaire*. Rapport de recherche 87-12, Laboratoire d'Informatique de l'ENS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France, Octobre 1987.
- [DPS88] Olivier Devillers, Claude Puech, et François Sillion. *Efficiency of Space Subdivision Structures for Ray Tracing*. Rapport de recherche 88-2, Laboratoire d'Informatique de l'ENS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France, Mars 1988.
- [Gla84] Andrew S. Glassner. Space Subdivision for Fast Ray-Tracing. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15-22, Octobre 1984.
- [Gou71] Henri Gouraud. *Computer Display of Curved Surfaces*. PhD thesis, University of Utah, 1971.
- [GTGB84] Cindy M. Goral, Kenneth E. Torrance, Donald P. Greenberg, et Bennett Battaile. Modeling the Interaction of Light Between Diffuse Surfaces. *Computer Graphics*, 18(3):213 - 222, Juillet 1984. Proceedings SIGGRAPH 1984 in Minneapolis.
- [Hai87] Eric Haines. A Proposal for Standard Graphics Environments. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3-5, Novembre 1987.
- [HH84] Paul S. Heckbert et Pat Hanrahan. Beam Tracing Polygonal Objects. *Computer Graphics*, 18:119-127, Juillet 1984. Proceedings SIGGRAPH 1984 in Minneapolis.
- [Kaj83] James T. Kajiya. New Techniques for Ray-Tracing Procedurally Defined Objects. *Computer Graphics*, 17:91-102, Juillet 1983. Proceedings SIGGRAPH 1983.
- [Kaj86a] James T. Kajiya. Ray-Tracing Complex Scenes. *Computer Graphics*, 20:269-278, Août 1986. Proceedings SIGGRAPH 1986 in Dallas.
- [Kaj86b] James T. Kajiya. The Rendering Equation. *Computer Graphics*, 20(4):143 - 150, Août 1986. Proceedings SIGGRAPH 1986 in Dallas.
- [MPY87] Claire Mathieu, Claude Puech, et Hussein Yahia. Average Efficiency of Data Structures for Binary Image Processing. *Information Processing Letters*, 26:89-93, Octobre 1987.
- [Mul85] Heinrich Müller. *Ray-Tracing Complex Scenes by Grids*. Rapport de recherche 22, Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik, Décembre 1985.

- [PAB87] Thierry Priol, Bruno Arnaldi, et Kadi Bouatouch. *A New Space Subdivision Method for Ray Tracing Csg Modelled Scenes*. Rapport de recherche 337, IRISA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cédex, France, Janvier 1987.
- [Pho73] Bui-Tuong Phong. *Illumination for Computer Generated Images*. PhD thesis, University of Utah, 1973.
- [Sam84] Hanan Q. Samet. The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures. *Computing Surveys*, 16:187–260, Juin 1984.
- [San76] Luis A. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Volume 1 of *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, Addison-Wesley, 1976.
- [SB87] John M. Snyder et Alan H. Barr. Ray Tracing Complex Models Containing Surface Tessellations. *Computer Graphics*, 21(4):119 – 128, Juillet 1987. Proceedings SIGGRAPH 1987 in Anaheim.
- [Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [Tot85] Daniel L. Toth. On Ray-Tracing Parametric Surfaces. *Computer Graphics*, 19(3):171 – 179, Juillet 1985. Proceedings SIGGRAPH 1985 in San Fransisco.
- [WCG87] John R. Wallace, Michael F. Cohen, et Donald P. Greenberg. A Two-Pass Solution to the Rendering Equation : a Synthesis of Ray-Tracing and Radiosity methods. *Computer Graphics*, 21(4):311 – 320, Juillet 1987. Proceedings SIGGRAPH 1987 in Anaheim.
- [WHG84] Hank Weghorst, Gary Hooper, et Donald P. Greenberg. Improved Computational Methods for Ray-Tracing. *ACM Transactions on Graphics*, 3:52–69, Janvier 1984.
- [Whi80] Turner Whitted. An Improved Illumination Model for Shaded Display. *Communications of the ACM*, 23:343–349, 1980.
- [Yah86] Hussein Yahia. *Analyse des structures de données arborescentes représentant des images*. Thèse de 3ème cycle, Université Paris XI, Décembre 1986.

