UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique-Productique**

Arrêté ministérial : 7 août 2006

Présentée par

Van Thang PHAM

Thèse dirigée par **Didier GEORGES**
et codirigée par **Gildas BESANÇON**

préparée au sein du **laboratoire GIPSA-Lab**
et de **l'école doctorale EEATS**

Contributions à la commande prédictive des systèmes de lois de conservation

Thèse soutenue publiquement le **06 septembre 2012**,
devant le jury composé de :

M. Bernhard MASCHKE
Professeur, Université Claude Bernard, Président

M. Jean-Michel CORON
Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Rapporteur

M. Panagiotis D. CHRISTOFIDES
Professeur, University of California, Rapporteur

M. Denis DOCHAIN
Professeur, Université Catholique de Louvain, Examinateur

M. Didier GEORGES
Professeur, Grenoble INP, Directeur de thèse

M. Gildas BESANÇON
Professeur, Grenoble INP, Co-Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à adresser ma sincère et profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, Didier Georges et à mon co-directeur de thèse, Gildas Besançon, de qui j'ai reçu un soutien constant, des remarques et conseils pertinents. Grâce à eux, les trois ans de ma thèse ont été un réel plaisir.

Je remercie également les membres du Jury : M. Bernhard Maschke d'avoir présidé la soutenance dans une vraiment agréable ambiance, M. Jean-Michel Coron et M. Panagiotis D. Christofides d'avoir consacré leurs temps précieux pour me faire part de leurs remarques constructives sur ce mémoire, M. Denis Dochain d'être venu à ma soutenance et de m'avoir proposé des pistes intéressantes.

Je remercie tous les permanents du GIPSA-lab pour leur accompagnement, particulièrement aux membres de l'équipe SYSCO. Les échanges avec eux ont été toujours très ouvertes et sympathiques.

Je remercie toute l'équipe administrative, en particulier Virginie, Marie-Thérèse, Patricia, Isabelle, Caroline et Houria qui m'ont bien aidé à préparer les démarches administratives et les missions, toujours dans la bonne humeur.

Je remercie également Ministère d'Education et de Formation du Vietnam pour l'attribution de la bourse qui m'a permis effectuer mes études en France, M. Michel Dang et M. Tan-Phu Vuong qui m'ont suivi et soutenu tout au long de mon parcours, mes enseignants de l'ESISAR, mes tuteurs de master et mon tuteur au GI qui m'ont transmis avec passions leurs connaissances et leurs expériences précieuses, particulièrement à M. Eduardo Mendes, M. Laurent Lefèvre, M. Bastien Chopard, M. Damien Koenig, Mme. Nathalie Fulget et M. Pierre-Marie Boitel.

Je tiens aussi à remercier mes collèges et amis du laboratoire, avec lesquels j'ai partagé tant de chose et qui ont fait ma vie à Grenoble une expérience inoubliable : Lizeth, Joumana, Andra, Jennifer, Antoine, Irfan, Haiyang, Oumayma, Simona, Amine, Marouane, Federico, Sarah, Emilie, Valentina, Gabriel, Soheib, Sebastien, Humberto et Sonia. Je remercie particulièrement à mes *seniors* vietnamiens : Van, Lam et Hieu.

Je laisse la fin pour adresser un très grand remerciement à mon trésor, Luna, à mon amour, Nhung et à ma famille qui ont été et seront toujours un support solide de mon parcours.

Résumé

La Commande prédictive ou Commande Optimale à Horizon Glissant (COHG) devient de plus en plus populaire dans de nombreuses applications pratiques en raison de ses avantages importants tels que la stabilisation et la prise en compte des contraintes. Elle a été bien étudiée pour des systèmes en dimension finie même dans le cas non linéaire. Cependant, son extension aux systèmes en dimension infinie n'a pas retenu beaucoup d'attention de la part des chercheurs. Ce travail de thèse apporte des contributions à l'application de cette approche aux systèmes de lois de conservation.

Nous présentons tout d'abord une preuve de stabilité complète de la COHG pour certaines classes de systèmes en dimension infinie. Ce résultat est ensuite utilisé pour les systèmes hyperboliques 2×2 commandés aux frontières et appliqué à un problème de contrôle de canal d'irrigation. Nous proposons aussi l'extension de cette stratégie au cas de réseaux de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade avec une application à un ensemble de canaux d'irrigation connectés. Nous étudions également les avantages de la COHG dans le contexte des systèmes non linéaires et semi-linéaires notamment vis-à-vis des chocs. Toutes les analyses théoriques sont validées par simulation afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

Abstract

The predictive control or Receding Horizon Optimal Control (RHOC) is becoming increasingly popular in many practical applications due to its significant advantages such as the stabilization and constraints handling. It has been well studied for finite dimensional systems even in the nonlinear case. However, its extension to infinite dimensional systems has not received much attention from researchers. This thesis proposes contributions on the application of this approach to systems of conservation laws.

We present a complete proof of stability of RHOC for some classes of infinite dimensional systems. This result is then used for 2×2 hyperbolic systems with boundary control, and applied to an irrigation canal. We also propose the extension of this strategy to networks of cascaded 2×2 hyperbolic systems with an application to a set of connected irrigation canals. Furthermore, we study the benefits of RHOC in the context of nonlinear and semi-linear systems in particular with respect to the problem of shocks. All theoretical analyzes are validated by simulation in order to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Motivation et Principe de la COHG 1

1.2 Les systèmes de lois de conservation 4

1.3 Etat de l'art sur la commande des systèmes de lois de conservation . . . 7

1.4 Résumé des contributions 9

1.5 Organisation du mémoire 11

2 Stabilité de la commande prédictive en dimension infinie **13**

2.1 Lemme de stabilité de la COHG 14

2.2 Approche avec coût final 16

2.3 Approche avec état final fixé à zéro 19

2.4 Caractérisation de la commande optimale par l'état adjoint 24

2.4.1 Commande optimale avec coût final 24

2.4.2 Calcul de la solution numérique 26

2.4.3 Commande optimale avec état final fixé à zéro 27

2.4.4 Calcul de la solution numérique 28

2.5 Problème de commande frontière 29

2.6 Conclusion 30

3 COHG pour des systèmes hyperboliques 2×2 **33**

3.1 Régularité de la solution 34

3.2 Atteignabilité d'un système hyperbolique 2×2 avec 2 commandes frontières 39

3.3 Atteignabilité d'un système hyperbolique 2×2 avec 1 commande frontière 42

3.4 COHG pour des systèmes hyperboliques 2×2 44
3.4.1 Formulation abstraite 44
3.4.2 Approche avec coût final 47
3.4.3 Approche avec état final fixé à zéro 50
3.5 Conclusions 51

4 Les équations de Saint-Venant linéarisées 53
4.1 Introduction aux équations de Saint-Venant 54
4.2 Modèle linéarisé autour d'un profil uniforme 58
4.2.1 Stabilisation 58
4.2.2 Validation par simulation 60
4.3 Modèle linéarisé autour d'un profil non uniforme 64
4.3.1 Méthode de Galerkin 64
4.3.2 Application à l'approximation de la commande 65
4.3.3 Résultats de simulation 70
4.4 Conclusion 74

5 La COHG pour un réseau de systèmes hyperboliques 2×2 75
5.1 Réseau de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade 75
5.1.1 Existence de la solution 76
5.1.2 Atteignabilité 78
5.2 CHOG pour un réseau de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade 79
5.2.1 Formulation abstraite 79
5.2.2 Stabilité de la COHG avec état final fixé à zéro 82
5.3 Application à un réseau de canaux d'irrigation 83
5.4 Validation par simulation 85
5.5 Conclusions 85

6 COHG pour des systèmes de lois de conservation scalaires 89
6.1 La stabilité des systèmes hyperboliques scalaires avec commande frontière 89
6.1.1 Les conditions pour éviter le choc 90

6.1.2 La stabilité 91
6.2 La stabilité par COHG 93
6.2.1 Les conditions pour éviter le choc en présence d'une perturbation mesurable 96
6.2.2 La solution de la commande optimale 97
6.3 Exemple 98
6.3.1 Modèle de trafic routier 98
6.3.2 Résultats de simulation 100
6.4 Conclusion 100

7 COHG pour les équations de coup de bélier 103
7.1 Introduction 103
7.2 Formulation abstraite 105
7.3 Stabilité 111
7.4 Application de la COHG 115
7.4.1 La stabilité de la COHG 115
7.4.2 Calcul de la commande optimale 117
7.5 Résultat de simulation 118
7.6 Conclusion 120

8 Conclusions et Perspectives 123

A Résultats de la commande optimale en dimension infinie 127

B Régularité des systèmes hyperboliques 131

C Structure des matrices de la méthode Galerkin 135

Bibliographie 141

English summary 151

Table des figures

1.1 Principe de la COHG 2

1.2 Deux approches pour le problème de commande des systèmes en dimension infinie 7

3.1 Notions utilisées dans la preuve de la proposition 3.2.1 40

3.2 Notions utilisées dans la preuve de la proposition 3.3.1 43

4.1 Coupe longitudinale d'un canal à surface libre 54

4.2 Profils de niveaux pour différents régimes d'écoulement 58

4.3 Une grille avec 2 vitesses ($c > 0$) 61

4.4 Une grille avec 2 vitesses ($c < 0$) 61

4.5 Hauteur normalisée 63

4.6 Débit normalisé 63

4.7 Etats et commandes frontières 63

4.8 Norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$ 63

4.9 Niveau et débit en $x = 0$ 63

4.10 Niveau et débit en $x = L$ 63

4.11 Fonctions de base utilisées pour discrétiser le problème de commande optimale 67

4.12 Hauteur et débit d'équilibre 71

4.13 Coefficients du système linéarisé diagonalisé 71

4.14 Hauteur normalisée (deux commandes) 71

4.15 Débit normalisé (deux commandes) 71

4.16 Etats et commandes frontières (deux commandes) 72

4.17 Norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$ (deux commandes) 72

4.18 Niveau et débit en $x = 0$ 72

4.19 Niveau et débit en $x = L$ 72

4.20 Hauteur normalisée (une commande) 73

4.21 Débit normalisé (une commande) 73

4.22 Etat et commande frontière (une commande) 73

4.23 Norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$ (une commande) 73

4.24 Niveau et débit en $x = 0$ (une commande) 73

4.25 Niveau et débit en $x = L$ (une commande) 73

5.1 Un réseau des canaux d'irrigation 83

5.2 Hauteur et débit d'équilibre 85

5.3 Bief 1 : La hauteur normalisée 86

5.4 Bief 1 : Le débit normalisé 86

5.5 Bief 2 : La hauteur normalisée 86

5.6 Bief 2 : Le débit normalisé 86

5.7 Bief 3 : La hauteur normalisée 86

5.8 Bief 3 : Le débit normalisé 86

5.9 Les états et les commandes aux frontières 87

5.10 La norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$ 87

6.1 Caractéristiques et conditions pour éviter le choc 91

6.2 La relation entre T, T_f et t_0 94

6.3 Commande avec contrainte linéaire (ligne continue) et commande avec contrainte non linéaire (ligne pointillée) 101

6.4 Caractéristiques avec contrainte linéaire (à gauche) et non linéaire (à droit) 101

6.5 Commande en boucle ouverte (ligne continue) et commande sans conditions pour éviter le choc (ligne pointillée) 101

6.6 Caractéristiques avec la commande en boucle ouverte (à gauche) et avec la commande sans conditions pour éviter le choc (à droite) 101

6.7 Etat à la limite et commande dans le cas où il y a une perturbation asymptotiquement constante 102

7.1 Une canalisation sous pression 105

7.2 Niveau piézométrique en boucle ouverte 119

7.3 Vitesse en boucle ouverte 119

7.4 Niveau piézométrique avec COHG 119

7.5 Vitesse avec COHG 119

7.6 Niveau piézométrique avec commande par retour d'état 120

7.7 Vitesse avec commande par retour d'état 120

7.8 Etat à la limite et commande 120

Liste des tableaux

4.1 Paramètres du canal 62
4.2 Paramètres du système diagonalisé 62
4.3 Paramètres du schéma numérique 62
4.4 Paramètres de la commande 62
4.5 Paramètres de la commande 71

5.1 Paramètres de la commande 85

7.1 Paramètres du système 118
7.2 Paramètres de la commande 119
7.3 Paramètres du schéma numérique 119

Notations

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle u, v \rangle$ produit interne de u et v
$\mathcal{A}^*$	Opérateur adjoint de $\mathcal{A}$
$\mathbf{C}^k$	Classe des fonctions dont la dérivée d'ordre k est continue
$\mathbf{C}^\infty$	Classe des fonctions infiniment dérivables
$\mathbf{C}_0^\infty$	Classe des fonctions infiniment dérivables qui s'annulent à l'infini
$\mathbf{C}_{(0)}^\infty(V)$	Les restrictions dans V des fonctions de $\mathbf{C}_0^\infty$
$\mathbf{D}(\mathcal{A})$	Domaine de $\mathcal{A}$
$\mathbf{L}_2(p, q)$	Classe des fonctions de carré intégrable sur $[p, q]$
$\mathbf{L}_2([p, q], Z)$	Classe des fonctions à valeurs dans Z de carré intégrable sur $[p, q]$
$\mathbf{H}^1([p, q])$	Espace des fonctions absolument continues dont la dérivée est dans $\mathbf{L}_2([p, q])$ (Espace de Sobolev)
$\mathcal{L}(X)$	Espace des opérateurs linéaires bornés de X dans X
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y
I	Opérateur d'identité

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation et Principe de la COHG

La commande prédictive (CP) fait partie des techniques de commande à modèle interne (IMC : Internal Model Control) qui utilisent explicitement un modèle mathématique du processus pour le calcul de la commande. Nous nous intéressons plus particulièrement à la Commande Optimale à Horizon Glissant (COHG) dans laquelle la commande à chaque instant d'échantillonnage est calculée *en-ligne* en résolvant un problème de commande optimale à horizon fini en boucle ouverte en utilisant l'état courant comme condition initiale. Puis, la première partie de la solution obtenue est appliquée au système jusqu'à l'instant où la prochaine mesure est disponible. Ceci fait la différence majeure entre la COHG et les commandes traditionnelles, qui utilisent une loi de commande pré-calculée en fonction de l'état courant. La raison pour laquelle cette stratégie est employée est liée au fait qu'elle peut traiter les problèmes de commande optimale où un calcul *hors-ligne* de la loi de commande est difficile ou impossible. Parmi ces problèmes, nous pouvons mentionner quelques cas typiques suivants :

1. *Le problème de commande optimale des systèmes linéaires en présence de contraintes.* La commande optimale pour des systèmes linéaires a été bien étudiée depuis longtemps et a atteint une certaine maturité (voir par exemple [Kirk, 1998]). Nous pouvons résoudre le problème de commande optimale à *horizon infinie* hors-ligne, et la commande peut être mise en oeuvre sous la forme de retour d'état. Dans ce cas, la COHG et la commande LQG sont fortement connectées (voir [García et al., 1989]). Cependant, les processus réels fonctionnent toujours sous contraintes (la saturation de l'actionneur, les limites de sécurité, etc.). La présence des contraintes rend le problème de commande optimale non linéaire et par conséquent une formule générale de la commande sous la forme de retour d'état devient très difficile voire impossible. Nous ne pouvons calculer que la commande pour un

état spécifié ce qui motive l'utilisation de la COHG.

2. *Le problème de commande optimale des systèmes non linéaires avec ou sans contrainte.* Ce problème même dans le cas sans contrainte conduit à des équations aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi-Bellman, qui ne peuvent être résolues que pour certaines classes de systèmes particulières (voir [Primbs, 1999]) où doivent être résolues par des méthodes numériques (voir [Sargent, 2000]). Lorsque les contraintes sont prises en compte, le problème se complique davantage et il devient d'autant plus difficile de trouver une solution analytique.
3. *Le problème de commande optimale des systèmes en dimension infinie (linéaires ou non linéaires).* Les systèmes en dimension infinie sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Bien qu'il existe une formule explicite sous la forme de retour d'état de la commande LQR (sans contrainte) pour une classe de systèmes linéaires en dimension infinie, le gain optimal demande la résolution d'une équation différentielle de Riccati d'opérateur (dans le cas d'horizon fini) ou d'une équation de Riccati d'opérateur (dans le cas d'horizon infini) (voir [Curtain & Zwart, 1995] ou [Curtain, 1984]). La solution de ces équations d'opérateur ne peut être obtenue que pour certains cas particuliers (voir [Aksikas et al., 2009]), et en général, elle est très difficile à calculer. Le problème de commande optimale pour les systèmes non linéaires en dimension infinie accumule toutes les difficultés précédentes et l'utilisation d'une stratégie de type d'horizon glissant devient une solution favorable.

Le principe de la COHG peut être résumé comme suit.

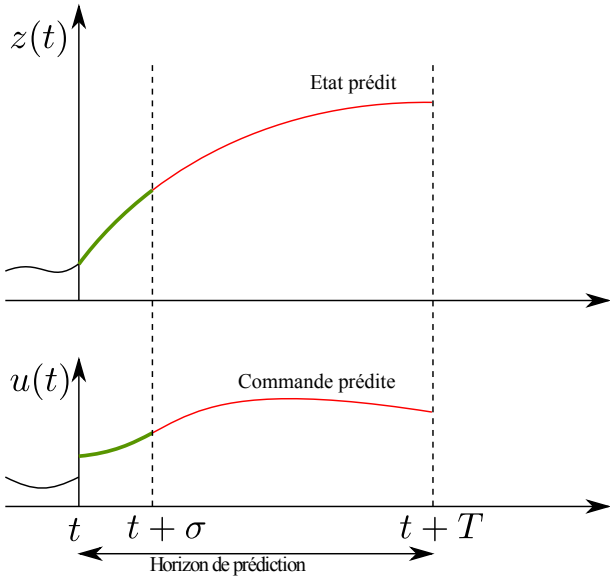

Fig. 1.1 – Principe de la COHG

Soient Z et U deux espaces de Hilbert. Nous considérons le problème consistant à stabiliser le système suivant :

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)), \quad z(0) = z_0 \tag{1.1.1}$$

où $z(t) \in Z$ et $u(t) \in U$ désignent l'état et la commande respectivement, $f : Z \times U \to Z$. Supposons que l'évolution du système se fasse sous les contraintes sur la commande et sur l'état pour tout $t \geq 0$:

$$z(t) \in Z_c, \quad u(t) \in U_c, \tag{1.1.2}$$

où $Z_c \subset Z$ et $U_c \subset U$ sont fermés et convexes.

Le principe de la COHG comporte les étapes suivantes :

- A chaque instant t, nous obtenons l'état actuel $z(t)$.
- Puis, pour un horizon de prédiction T donné, nous calculons la solution optimale parmi les fonctions $\bar{u} : [t, t+T] \to U$ de carré sommable (noté $\bar{u} \in \mathbf{L}_2([t, t+T], U)$) du problème sur l'intervalle $[t, t+T]$:

$$\min_{\bar{u} \in \mathbf{L}_2([t,t+T],U)} J(z(t); \bar{u}) = \int_t^{t+T} F(\bar{z}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau + E(\bar{z}(t+T))$$
$$\text{sous} \begin{cases} \dot{\bar{z}}(\tau) = f(\bar{z}(\tau), \bar{u}(\tau)), \forall \tau \in [t, t+T] \\ \bar{z}(\tau) \in Z_c, \quad \bar{u}(\tau) \in U_c, \quad \forall \tau \in [t, t+T] \\ \bar{z}(t) = z(t) \\ \bar{z}(t+T) \in \Omega \end{cases}, \tag{1.1.3}$$

  où la notation $\bar{\cdot}$ représente les variables prédites. La fonction $F(z, u)$, appelée coût intermédiaire, spécifie le critère à optimiser. La fonction $E(z)$ et l'ensemble $\Omega \subset Z_c$ sont appelés coût final et contrainte finale respectivement.
- La première partie de la commande optimale est appliquée au système pendant la période $[t, t+\sigma)$ pour un petit σ, et la procédure est recommencée à $t = t + \sigma$.

A partir de cette formulation, nous pouvons déduire les caractéristiques suivantes de la COHG (voir [Findeisen, Imsland, Allgöwer & Foss, 2003], [Mayne & Michalska, 1990]) :

- La COHG nous permet d'utiliser des modèles non linéaires pour la prédiction.
- La COHG permet la prise en compte explicite de contraintes sur les états et sur les commandes.
- Le coût final et la contrainte finale peuvent être choisis pour garantir la stabilité.
- La COHG nous donne une commande optimale par rapport à un critère donné.
- Le comportement prédictif est en général différent de celui de la boucle fermée.
- Pour faire la prédiction, l'état du système doit être mesuré ou estimé.

Parmi ces caractéristiques, nous nous intéressons particulièrement à la prise en compte de contraintes et à la capacité de garantir la stabilité en boucle fermée. Concernant la stabilité, deux approches peuvent généralement être considérées : soit utiliser une fonction de coût final E appropriée (cette approche sera appelée dans la suite la COHG avec coût final), soit imposer l'état final à zéro, c'est-à-dire $\Omega \equiv 0$ (cette approche sera appelée dans la suite la COHG avec état final fixé à zéro). La première approche est plus flexible en termes de la mise en oeuvre numérique, mais elle dépend de l'existence de la fonction de coût final, qui est souvent une fonction de Lyapunov locale ou globale.

La deuxième approche est moins compliquée théoriquement, mais elle demande l'atteignabilité du système à zéro (c'est-à-dire la possibilité de ramener le système de l'état initial à zéro), et elle pose plus de difficultés pour la mise en oeuvre numérique. Pour plus de détails, il est possible de consulter [Mayne & Michalska, 1990], [Chen & Allgöwer, 1998], [Mayne et al., 2000], ou [Findeisen & Allgöwer, 2002]. A part de ces deux approches, il est intéressant de mentionner qu'il existe également l'approche sans coût final, ni contrainte finale étudiée par [Grüne et al., 2009] ou l'approche par fonction de Lyapunov proposée par [Mhaskar et al., 2005], [Mhaskar et al., 2006] et [Liu et al., 2009] (voir aussi le chapitre 7 de ce manuscrit).

Grâce à ces caractéristiques, nous pouvons dire que la COHG est la seule stratégie de commande avancée (c'est-à-dire plus avancée que la commande PID traditionnelle) qui a eu un impact important sur le problème de commande des processus industriels ([Maciejowski, 2002]). Elle a attiré de plus en plus l'attention des chercheurs et a trouvé sa place dans de nombreux applications pratiques. Bien que cette stratégie ait été bien étudiée pour des systèmes en dimension finie, même dans le cas non linéaire (voir [Findeisen, Imsland, Allgöwer & Foss, 2003]), son application à des systèmes *en dimension infinie* retient moins d'attention, à part, à notre connaissance, des travaux de [Ito & Kunisch, 2002], [Dubljevic, El-Farra, Mhaskar & Christofides, 2006], [Christofides & Daoutidis, 1997] et [Georges, 2009]. Ce manuscrit vise à apporter des contributions à l'analyse de la COHG pour des systèmes en dimension infinie en général et pour des systèmes de lois de conservation en particulier.

1.2 Les systèmes de lois de conservation

Les systèmes de lois de conservation de n inconnues sont des équations aux dérivées partielles (EDPs) qui décrivent un grand nombre de problèmes physiques intéressants dans divers domaines tels que la dynamique des gaz (voir [Serre, 1999]), le trafic routier (voir par exemple [Bastin et al., 2007], [Colombo et al., 2011] et [Serre, 1999]), le trafic aérien (voir [Bayen et al., 2006]), le modèle des processus de transport-réaction (voir [Christofides & Daoutidis, 1998] et [Dubljevic et al., 2005*a*]), et les canaux à surface libre (voir [Georges, 2009] et [Georges & Litrico, 2002]). Pour le cas uni-dimensionnel (c'est-à-dire lorsque la dimension longitudinale est beaucoup plus grande que la dimension transversale), ces systèmes sont souvent modélisés sous une de trois formes suivantes :

- Forme dérivée :

$$\partial_t z(x,t) + \partial_x f(z(x,t)) = g(x,t,z), (x,t) \in \Omega \times [0,\infty) \tag{1.2.1}$$

où $z(x,t) = (z_1(x,t) \quad \cdots \quad z_n(x,t))^T$ est la grandeur conservée, $f(z) = (f_1(z) \quad \cdots \quad f_n(z))^T$ le flux, $\Omega \subset \mathbb{R}$ le domaine spatial du système et t le temps.

• Forme intégrale :

En intégrant l'équation ci-dessus sur le rectangle $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset \Omega \times [0, \infty)$, nous obtenons une autre forme équivalente :

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} z(x,t)dx + \int_{t_1}^{t_2} [f(z(x,t))]_{x_1}^{x_2} dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} g(x,t,z(x,t))dxdt \tag{1.2.2}$$

Ces équations représentent le bilan de la quantité z sous l'effet du flux $f(z)$ et de la contribution du terme de source $g(z)$.

• Forme d'un système hyperbolique :

Si le flux f est dérivable, nous pouvons mettre (1.2.1) sous la forme suivante :

$$\partial_t z(x,t) + J(z(x,t))\partial_x z(x,t) = g(x,t,z) \tag{1.2.3}$$

où nous faisons apparaître J le Jacobian de f. Si J possède n valeurs propres réelles, (1.2.3) est un système hyperbolique et sera appelé dans la suite système hyperbolique $n \times n$. Dans le cas où J ne dépend pas de z et g est linéaire en z, le système est linéaire ; si J ne dépend pas de z et g est une fonction non linéaire de z, le système est semi-linéaire ; si J dépend de z, le système est quasi-linéaire (pour plus de détails, voir [Courant & Hilbert, 1962]).

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de systèmes physiques gouvernés par des lois de conservation. Le problème de commande pour certains entre eux sera traité dans la suite de ce travail.

– *Equation de Burgers* (voir [Burgers, 1948]). Elle représente la conservation de la vitesse z sous l'effet du flux $f(z) = \dfrac{z^2}{2}$:

$$\partial_t z + \partial_x \frac{z^2}{2} = 0 \tag{1.2.4}$$

Malgré sa simplicité, l'équation de Burgers peut être utilisée dans la modélisation de la dynamique des gaz ou du trafic routier.

– *Equation de Lighthill-Whitham-Richards (LWR)* (voir [Lighthill & Whitham, 1955] et [Richards, 1956]). La dynamique de la densité des véhicules ρ dans un segment d'autoroute peut être modélisée par :

$$\partial_t \rho + \partial_x \Phi(\rho) = 0 \tag{1.2.5}$$

où $\Phi(\rho)$ est le flux des véhicules. Ce modèle sera pris comme exemple dans le chapitre 6.

– *Equations de Saint-Venant* (voir [Saint-Venant, 1871] ou [Graf & Altinakar, 2000]). Un écoulement à surface libre (comme dans les canaux ou les rivières) est généra-

lement modélisé par :

$$\begin{cases} B\partial_t h + \partial_x Q & = & 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\dfrac{Q^2}{Bh} + \dfrac{1}{2} B g h^2 \right) & = & gBh(I - J(Q,h)) \end{cases}, \ (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty) \tag{1.2.6}$$

où h est le niveau d'eau, Q le débit, g l'accélération de la gravité, B la largeur de l'écoulement, I, la pente et J, le terme de frottement. Ce système sera étudié dans les chapitres 4 et 5.

– *Equations de coup de bélier* (voir [Wylie & Streeter, 1978]). La dynamique d'un fluide dans une canalisation sous pression est modélisée par :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \frac{a^2}{g} \partial_x V &= 0, \\ \partial_t V + g \partial_x H &= -\frac{f}{2D} V|V|, \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

où du H est le niveau piézométrique, V, la vitesse de l'écoulement, $a > 0$, la vitesse de propagation d'onde, g, l'accélération de la gravité, α, la pente, f, le coefficient de frottement Darcy-Weisbach et D, le diamètre de la canalisation. Ce système fait l'objet de l'étude menée dans le chapitre 7.

Précisons quelques caractéristiques particulières de cette classe de systèmes :

– *Problème de commande frontière.* Les systèmes physiques sont toujours contenus dans un domaine fermé. Les interactions avec l'environnement extérieur sont faites grâce aux conditions frontières. Ces interactions peuvent être les entrées de commande ou des perturbations. D'un point de vue mathématique, les commandes frontières agissent sur le système à travers un opérateur non borné qui demande plus d'attention lors de l'analyse de la solution.
– *Présence de discontinuités dans la solution.* Une des difficultés des systèmes de lois de conservation est la possibilité d'avoir des discontinuités (appelées également *chocs*) dans la solution. Les discontinuités apparaissent à cause de la non-linéarité, de la discontinuité de la condition initiale ou de l'incompatibilité entre la condition initiale et la condition frontière. Les discontinuités se traduisent dans la réalité par des situations indésirables, comme les embouteillages dans une autoroute ou les tsunamis dans un écoulement à surface libre. D'un point de vue théorique, les singularités exigent beaucoup plus d'efforts pour analyser la solution (voir [Colombo et al., 2011], [Serre, 1999] et [Jacquet, 2006]).
– *Stabilité.* Malgré son nom de *lois de conservation*, la présence du terme de source et l'interaction avec les conditions frontières peuvent créer l'instabilité du système. La stabilité des systèmes de lois de conservation reste toujours une question ouverte, même dans des cas linéaires ([Bastin & Coron, 2010]).
– *Interconnexion entre sous-systèmes.* Les systèmes physiques gouvernés par les lois de conservation sont souvent interconnectés dans un réseau. Nous pouvons prendre

comme exemple les réseaux de canaux d'irrigation, de canalisations de gaz, de trafic routier ou de trafic aérien, etc... Les interactions entre les sous-systèmes créent un nouveau défi pour l'analyse et pour la stabilisation du système entier.

Ces caractéristiques ont fait l'objet de plusieurs de recherches dans divers domaines scientifiques de la physique et des mathématiques jusqu'à l'automatique. Un bref résumé de ces travaux est présenté au paragraphe ci-dessous.

1.3 Etat de l'art sur la commande des systèmes de lois de conservation

Les systèmes de lois de conservation font partie des systèmes en dimension infinie dont la commande a été étudiée depuis 1970 par [Lions, 1971]. Depuis, ce problème a attiré de plus en plus l'attention des chercheurs ([Russell, 1978], [Russell, 1973]), [Curtain & Zwart, 1995], [Curtain, 1984], [Lasiecka & Triggiani, 2000], [Fattorini, 1999], [Krstic, 2008], [Krstic & Smyshlyaev, 2008], [Christofides & Daoutidis, 1997], [Dubljevic et al., 2005*b*], [Coron et al., 2007], [Coron et al., 2009], [Coron et al., 1999], [Aksikas et al., 2009], [Aksikas et al., 2007*b*], [Aksikas et al., 2007*a*], [Bamieh et al., 2012]). La liste est bien sûr loin d'être complète et elle montre juste que ce problème devient un domaine de recherche de plus en plus étudié.

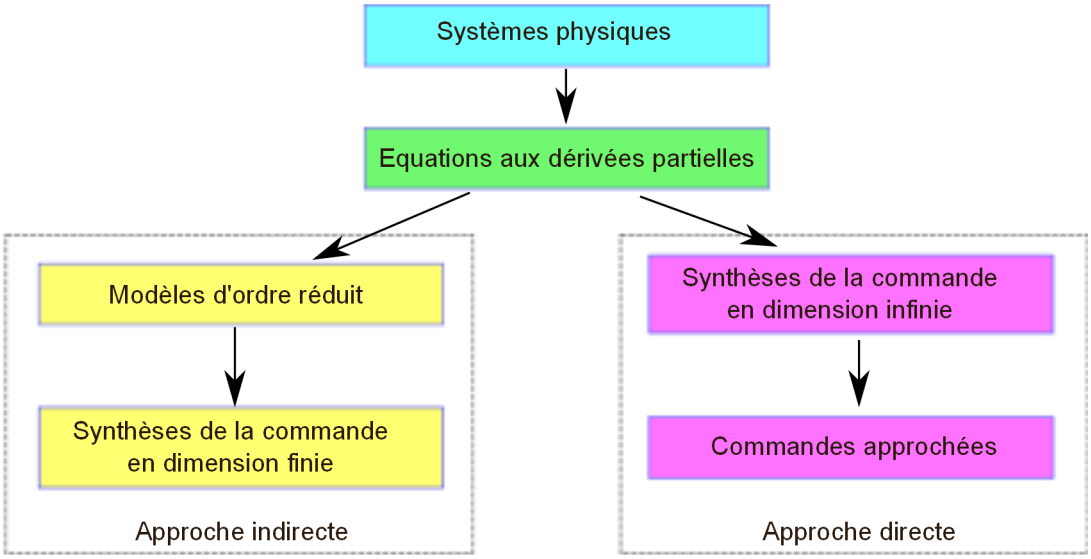

Fig. 1.2 – Deux approches pour le problème de commande des systèmes en dimension infinie

Afin de synthétiser la commande pour de tels systèmes, il existe deux approches différentes résumées par la figure 1.2. La première approche, dite indirecte, commence par

une approximation des équations aux dérivées partielles (EDPs) par des équations différentielles ordinaires (ODEs) (appelées également modèles d'ordre réduit) sur lesquels les méthodes de synthèse de commande en dimension finie sont appliquées (voir la figure 1.2). L'avantage d'une telle approche est la disponibilité des techniques de synthèse de commande pour les ODEs, telles que la commande linéaire quadratique, la commande prédictive ou la synthèse H_∞. Dans cette direction, nous pouvons citer, à titre d'exemple, l'approche de commande prédictive pour un réacteur chimique [Mohammadi et al., 2010], la commande optimale pour un écoulement à surface libre [Dulhoste et al., 2004] ou la commande robuste pour des équations paraboliques [Christofides & Daoutidis, 1997]. Un des inconvénients de cette approche est lié au fait que pour retrouver la dynamique du système en dimension infinie, il faut souvent augmenter l'ordre du modèle réduit, ce qui entraîne des difficultés pour la synthèse de la commande. En outre, l'approximation par des ODEs fait perdre parfois des dynamiques ou des caractéristiques importantes des EDPs (la discontinuité par exemple). Ces facteurs motivent la deuxième approche dans laquelle la synthèse de la commande est faite en se fondant directement sur les EDPs. La commande est ensuite approximée pour la mise en oeuvre numérique (voir la figure 1.2). Plusieurs techniques de synthèse de commande pour des systèmes en dimension finie ont été généralisées pour des systèmes en dimension infinie. Nous pouvons mentionner la commande optimale linéaire quadratique ([Curtain & Zwart, 1995], [Curtain, 1984], [Russell, 1973] et [Aksikas et al., 2009]), la commande robuste ([Curtain & Zwart, 1995] et [Foias et al., 1996]), la commande par fonction de Lyapunov ([Coron et al., 2007], [Coron et al., 1999] et [Coron et al., 2008]), l'analyse fréquentielle ([Litrico & Fromion, 2004] et [Litrico & Fromion, 2009*a*]), ou la commande prédictive ([Ito & Kunisch, 2002] et [Georges, 2009]). Cette deuxième approche nous permet également d'avoir une vue approfondie sur les caractéristiques intrinsèques de ces systèmes. C'est dans cette direction que nous menons le travail de recherche de cette thèse.

L'approche directe a été appliquée à des systèmes de lois de conservation dans plusieurs travaux. Il faut tout d'abord mentionner les études menées sur la solution des systèmes hyperboliques dans [Rauch, 1972], [Rauch & Massey, 1974], [Russell, 1978], [Serre, 1996], [Li et al., 2000] et [Lasiecka & Triggiani, 2000] et constitue la base mathématique pour le problème de commande. Les analyses de stabilité de ces systèmes ont été étudiées par la méthode des caractéristiques dans [Greenberg & Li, 1984], [Rauch & Taylor, 1974], [Prieur, 2009], [Halleux et al., 2003] et [Prieur et al., 2008] ou par la dissipativité dans [Coron et al., 2008] et [Coron et al., 2009]. La synthèse de la commande par fonction de Lyapunov a été proposée dans [Coron et al., 2007], [Coron et al., 2009], [Coron et al., 1999], [Xu & Sallet, 2002] et [Dick et al., 2010], et implémentée dans [Santos & Prieur, 2008]. L'approche par la commande optimale a été également considérée dans [Russell, 1973], [Jacquet, 2006], [Gugat et al., 2010] et [Bayen et al., 2006]. L'étude de ce système dans le domaine fréquentiel a été présentée dans [Georges & Litrico, 2002] et [Litrico & Fromion, 2009*b*]. La commande pour différents types de ré-

seaux de lois de conservation a été étudiée, par exemple, pour des canaux d'irrigation ([Georges & Litrico, 2002] ou [Litrico & Fromion, 2009*b*]), pour des canalisations de gaz ([Dick et al., 2010] ou [Prieur, 2009]), pour le trafic routier ([Gugat et al., 2010]) ou pour le trafic aérien ([Bayen et al., 2006]).

L'utilisation d'une stratégie de type à horizon glissant pour des systèmes en dimension infinie en général et des systèmes de lois de conservation en particulier, semble offrir un potentiel important, en raison de la capacité à prendre en compte des contraintes et à garantir la stabilité en boucle fermée rappelée précédemment. Néanmoins, a notre connaissance, il y a très peu de littérature étudiant cette problématique. A ce propos, nous pouvons citer l'étude de la COHG des systèmes en dimension infinie de [Ito & Kunisch, 2002]. Cependant ce travail ne concernait que le cas des commandes distribuées. Dans [Dubljevic, N. H. El-Farra & Christofides, 2006] et [Christofides & Daoutidis, 1997], les auteurs ont proposé la COHG pour des équations paraboliques en se fondant sur un modèle en dimension finie obtenu par décomposition spectrale. La COHG pour le problème de commande frontière des équations de Saint-Venant non linéaires a aussi été examinée dans [Georges, 2009] et [Chen & Georges, 1999] et résolu par l'approche du calcul variationnel. Une solution numérique de cette commande a été proposée et validée en simulation, mais aucune preuve de stabilité n'a été fournie. L'idée d'utiliser la COHG pour la commande de trafic routier a aussi été proposée dans [Jacquet, 2006], mais il manque également la preuve de stabilité. C'est la raison pour laquelle nous voudrions à travers ce travail apporter quelques contributions sur ce sujet qui seront résumées dans le paragraphe ci-après.

1.4 Résumé des contributions

L'objectif de ce travail est d'exploiter les avantages de la COHG dans le contexte de commande des systèmes en dimension infinie en général et des systèmes de lois de conservation en particulier.

Dans un premier temps, nous apportons une contribution au problème de stabilité de la COHG en dimension infinie. Les deux approches de COHG en dimension finie sont généralisées et appliquées à une classe de systèmes en dimension infinies avec une preuve complète de stabilité.

Dans un second temps, nous appliquons la COHG à des systèmes hyperboliques linéaires 2×2. En particulier, nous montrons que la COHG peut stabiliser un système dont les coefficients spatiaux ne sont pas constants. A notre connaissance, ce résultat et celui de [Vazquez et al., 2011] sont les premiers concernant la stabilité pour ce système. Nous généralisons également la COHG pour un réseau des systèmes hyperboliques en cascade. Toutes ces analyses sont appliquées aux systèmes des canaux d'irrigation à

surface libre et validées par simulation.

Comme indiqué précédemment, un des avantages de la COHG est la capacité à prendre en compte des contraintes et un des défis des systèmes de lois de conservation est la présence de discontinuités (chocs) dans la solution. Dans ce travail, nous montrons comment la COHG peut être utilisée pour éviter le choc et stabiliser des systèmes de lois de conservation scalaires non linéaires.

Enfin, nous apportons des contributions à l'analyse de stabilité des systèmes de canalisation sous pression, ainsi qu'à l'utilisation de la COHG pour les stabiliser.

Les contributions scientifiques de cette thèse peuvent être résumées ainsi :

1. Une preuve complète de stabilité de la COHG pour certaines classes des systèmes linéaires en dimension infinie.
2. La stabilité des systèmes linéaires hyperboliques 2×2 par la COHG avec des commandes frontières.
3. L'application de la COHG, avec une preuve de stabilité, à l'écoulement à surface libre.
4. La généralisation de la stabilité de la COHG à un réseau de systèmes hyperboliques 2×2 et l'application à un réseau de canaux d'irrigation.
5. Des conditions pour éviter les chocs dans des systèmes de lois de conservation scalaires non linéaires et l'utilisation de la COHG pour les stabiliser et pour éviter les chocs.
6. Les conditions suffisantes de stabilité pour des systèmes de canalisation sous pression et l'application de la COHG pour les stabiliser et prendre en compte des contraintes.
7. L'application de méthodes numériques différentes à la résolution du problème de commande optimale.

Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :

1. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2010], Infinite-dimensional Receding Horizon Optimal Control for an Open-channel System, *dans* 'Procedings of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems', Bologna, Italie.
2. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2010], On the Use of a Global Control Lyapunov Functional in Infinite-dimensional Predictive Control, *dans* 'Procedings of 4th IFAC Symposium on System, Structure and Control', Ancona, Italie.
3. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2010], Predictive Control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws, *dans* 'Proceding of 49th IEEE Conference on Decision and Control', Atlanta, Georgia USA

4. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2011], Receding Optimal Boundary Control of Non-linear Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *dans* 'Proceding of 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control', Milano, Italy
5. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2012], 'Receding Horizon Boundary Control of Nonlinear Conservation Laws with Shock Avoidance', *Automatica*, Vol 48/9, pages 2244-2251.
6. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2012], 'Infinite-dimensional predictive control for hyperbolic systems', version révisée soumise à *SIAM Journal of Control and Optimisation*
7. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2012], Predictive Control with terminal constraint for 2×2 hyperbolic systems of conservation laws, accepté à '51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)', Maui, Hawaii
8. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2012], Analyse de stabilité de la commande prédictive d'une classe de lois de conservation, Accepté à 'Septième Conférence Internationale Francophone d'Automatique', Grenoble, France.
9. Pham Van Thang, Didier Georges et Gildas Besançon [2012], Commande prédictive avec stabilité pour une classe de systèmes de lois de conservation, *JESA - Numéro spécial sur la commande prédictive*, Vol 46/2-3 - pages 251-265.

1.5 Organisation du mémoire

Les contributions ci-dessus sont présentées dans 6 chapitres (du chapitre 2 au chapitre 7) dont les contenus sont résumés dans ce qui suit.

Dans le chapitre 2, nous étudions la stabilité de la COHG pour des systèmes linéaires décrits sous forme abstraite. Dans un premier temps, nous proposons une généralisation du lemme 5.1 de [Curtain & Zwart, 1995] pour obtenir une condition suffisante de stabilité des systèmes bouclés par la COHG. Grâce à ce lemme, nous montrons la stabilité de la COHG pour certaines classes de systèmes, soit par l'approche avec coût final, soit par l'approche avec état final fixé à zéro. Dans les deux cas, nous utilisons le calcul variationnel pour caractériser la solution optimale en fonction de l'état adjoint, ce qui constitue la base des méthodes numériques pour calculer cette solution.

Nous discutons dans le chapitre 3 de la COHG pour des systèmes hyperboliques 2×2 avec des commandes frontières. Nous étudions tout d'abord la régularité de la solution puis nous présentons la démonstration de l'atteignabilité de ce système avec une ou deux commandes frontières. Le problème de commande frontière est ensuite reformulé sous forme abstraite et les théories présentées dans le chapitre 2 sont appliquées pour obtenir une stabilité exponentielle.

Le chapitre 4 est consacré à l'application de la COHG aux équations de Saint-Venant linéarisées. Nous considérons deux cas : la linéarisation autour d'un profil d'équilibre uniforme (où la hauteur d'eau et le débit d'équilibre sont constants tout au long du canal) et la linéarisation autour d'un profil d'équilibre non uniforme (où la hauteur d'eau et le débit d'équilibre varient par rapport à la variable spatiale). Pour le premier cas, en se fondant sur la fonction de Lyapunov proposée par [Coron et al., 2009], la COHG avec coût final peut être utilisée pour stabiliser le système. Quant au deuxième cas, nous combinons le résultat de l'atteignabilité avec la stabilité de la COHG avec état final fixé à zéro pour obtenir la preuve de stabilité de la boucle fermée. Les analyses sont validées par simulation.

Le chapitre 5 présente la généralisation de la COHG pour un réseau de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade et l'application de cette approche à un réseau de canaux d'irrigation. Le chapitre a la même structure que le chapitre 4. Nous montrons tout d'abord l'atteignablité de ce système, puis le problème de commandes frontières est mis sous forme abstraite, et la COHG avec état final fixé à zéro est appliquée pour garantir la stabilité. Enfin, des résultats de simulation sont fournis afin d'illustrer la validité de l'approche proposée.

Dans le chapitre 6, nous utilisons la capacité à prendre en compte des contraintes de la COHG pour éviter le choc dans la solution des systèmes de lois de conservation non linéaires scalaires avec commande frontière. Nous montrons qu'afin d'éviter le choc, un ensemble des contraintes sur la commande et l'état à la limite doit être satisfait. Puis, une démonstration de la stabilité du système est établie dès lors que ces contraintes sont vérifiées et que l'état à la limite est stable. Ces conditions sont garanties grâce à la COHG. Une simulation est enfin réalisée sur le modèle de trafic routier pour démontrer le potentiel de la commande proposée.

Le chapitre 7 traite du problème de stabilité des équations de coup de bélier. Des conditions pour garantir une convergence asymptotique du système à l'état d'équilibre sont introduites, puis la COHG est utilisée pour assurer ces conditions et pour minimiser en même temps une fonction de coût qui pénalise la variation du niveau piézométrique et du débit par rapport à un état d'équilibre. Cette approche est également validée en simulation.

Enfin, les conclusions sur les résultats de cette étude et quelques perspectives pour les travaux à venir sont présentées à la fin de ce mémoire.

Chapitre 2

Stabilité de la commande prédictive en dimension infinie

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité de la COHG pour une classe de systèmes en dimension infinie. Nous proposons également les algorithmes pour calculer la solution numérique du problème. Les résultats présentés fournissent ainsi la base théorique pour les développement proposés dans les chapitres 3, 4 et 5.

Considérons le système linéaire sous forme abstraite :

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t),\ z(t) \in Z,\ u(t) \in U,\ z(0) = z_0,\ y(t) = \mathcal{C}z(t), \tag{2.0.1}$$

où Z et U sont deux espaces de Hilbert, $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $\Phi(t)$ avec le domaine $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des opérateurs linéaires bornés ($\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(U, Z)$, $\mathcal{C} \in \mathfrak{L}(Z)$ respectivement). $z(\cdot)$, $u(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont l'état, la commande et la sortie, respectivement. Nous rappelons que la solution de (2.0.1) est donnée par (voir [Curtain & Zwart, 1995]) :

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-s)\mathcal{B}u(s)ds \tag{2.0.2}$$

Dans le paragraphe 2.1, nous commençons par proposer un résultat technique (généralisant le lemme 5.1 de [Curtain & Zwart, 1995]), qui nous donnera une condition suffisante de stabilité des systèmes bouclés par la COHG. Nous montrons ensuite dans les paragraphes 2.2 et 2.3 que la COHG peut être appliquée au système (2.0.1) pour garantir la stabilité exponentielle. S'il existe une fonction de Lyapunov globale pour ce système, nous pouvons l'utiliser pour construire la fonction de coût. Si le système est atteignable à l'origine, nous pouvons appliquer l'approche avec état final fixé à zéro. Dans le paragraphe 2.4, nous utilisons le calcul variationnel (voir [Lasiecka & Triggiani, 2000], [Georges, 2009], [Bayen et al., 2006] ou [Gugat et al., 2010]) pour exprimer la commande optimale en fonction de l'état adjoint, puis des algorithmes itératifs sont proposés pour

résoudre numériquement les problèmes. Le chapitre se termine par un bref résumé de la procédure pour reformuler des systèmes de commande frontière sous forme abstraite proposée par [Curtain & Zwart, 1995], permettant l'utilisation des résultats de ce chapitre pour différents systèmes spécifiques aux chapitres suivants.

2.1 Lemme de stabilité de la COHG

Un résultat important sur la stabilité des systèmes sous forme abstraite de type (2.0.1) tels qu'étudiés dans [Curtain & Zwart, 1995] notamment est une condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle de semi-groupe, énoncé comme suit dans [Curtain & Zwart, 1995] (lemme 5.1.2) :

Lemme 2.1.1. *Un C_0-semi-groupe $\Phi(t)$ sur un espace de Hilbert Z est exponentiellement stable si et seulement si :*

$$\forall z \in Z, \exists 0 \leq \gamma_z \leq \infty : \int_0^\infty \|\Phi(t)z\|^2 dt \leq \gamma_z. \tag{2.1.1}$$

Dans ce paragraphe nous proposons une extension de ce résultat, en vue de son utilisation pour la preuve de stabilité de la COHG.

Soient σ une constante positive et Z un espace de Hilbert. Considérons l'opérateur d'évolution $U : \Delta(\sigma) \to \mathcal{L}(Z)$ où

$$\Delta(\sigma) = \{(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,; 0 \leq s \leq t \leq \sigma\}$$

c'est-à-dire que U a les propriétés suivantes (voir [Curtain & Zwart, 1995], page 117) :

a. $U(s,s) = I$, $s \in [0,\sigma]$.

b. $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq \sigma$.

c. $U(\cdot,s)$ est fortement continu dans $[s,\sigma]$ et $U(t,\cdot)$ est fortement continu dans $[0,t]$.

Supposons que $\|U(t,s)\| \leq M_U$, $(t,s) \in \Delta(\sigma)$ avec $M_U > 1$. Nous définissons l'opérateur $H : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(Z)$ par :

$$H(t)z = U\left(\{t/\sigma\}\sigma, 0\right) U^{[t/\sigma]}(\sigma,0)z, \quad z \in Z \tag{2.1.2}$$

où nous utilisons la notation $[x]$ pour désigner l'entier tel que $[x] \leq x < ([x]+1)$ et $\{x\} = x - [x]$. En fait, $H(t)$ n'est pas un C_0-semigroupe, mais nous pouvons également établir un critère pour la stabilité exponentielle qui est similaire au lemme 5.1.2 de [Curtain & Zwart, 1995] :

Lemme 2.1.2. *Si pour chaque $z \in Z$ il existe une constante $0 < \gamma_z < \infty$ telle que :*

$$\int_0^\infty \|H(t)z\|^2 dt \leq \gamma_z, \tag{2.1.3}$$

alors $H(t)$ est exponentiellement stable, c'est-à-dire $\|H(t)\| \leq M_0 e^{-\omega_0 t}$, pour certaines constantes positives M_0 et ω_0.

Démonstration. Puisque $\|U(t,s)\| \leq M_U$, nous avons : $\|H(t)\| \leq M_U^{[t/\sigma]+1}$, $t \geq 0$. Pour chaque $n \geq 1$ l'opérateur Q_n défini par : $Q_n z := 1_{[0,n]}(t)H(t)z$, est un opérateur linéaire borné de Z dans $\mathbf{L}_2([0,\infty);Z)$ où $1_{[0,n]}(t)$ est égal à 1 si $t \in [0,n]$ et à 0 ailleurs. Nous avons :

$$\|Q_n z\|^2_{\mathbf{L}_2([0,\infty),Z)} = \int_0^n \|H(s)z\|^2 ds \leq \gamma_z \tag{2.1.4}$$

C'est-à-dire que la famille $\{Q_n z, n \geq 1\}$ est bornée pour chaque z, et donc par le théorème de Banach Steinhaus (voir le théorème 5.3.9, page 586 de [Curtain & Zwart, 1995] ou le théorème A.0.1 dans l'annexe A), $\|Q_n\|_{\mathbf{L}_2([0,\infty),Z)}$ est uniformément borné par rapport à n, ce qui signifie que $\|Q_n\|_{\mathbf{L}_2([0,\infty),Z)} \leq \gamma$ pour un certain γ indépendant de n. Alors pour tout $t \geq 0$:

$$\int_0^t \|H(s)z\|^2 ds \leq \int_0^n \|H(s)z\|^2 ds \leq \gamma^2 \|z\|^2, \qquad \text{avec } n > t. \tag{2.1.5}$$

Nous allons montrer maintenant que $\|H(k\sigma)\|$ est borné pour tout $k \geq 0$. Pour $k = 0$, $\|H(k\sigma)\| = 1$. Pour $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma(1 - M_U^{-2k})}{2 \ln M_U} \|H(k\sigma)z\|^2 = \int_0^{k\sigma} M_U^{-\frac{2s}{\sigma}} \|H(k\sigma)z\|^2 ds \\
= \; & \int_0^{k\sigma} M_U^{-\frac{2s}{\sigma}} \left\| U^{[s/\sigma]}(\sigma,0) U\left(\sigma, \sigma - \{s/\sigma\}\sigma\right) U\left(\sigma - \{s/\sigma\}\sigma, 0\right) U^{k-[s/\sigma]-1}(\sigma,0) z \right\|^2 ds \\
\leq \; & \int_0^{k\sigma} M_U^{-\frac{2s}{\sigma}} M_U^{2([s/\sigma]+1)} \|H(k\sigma - s)z\|^2 ds \qquad \text{car } U(t,s) \text{ est borné par } M_U \\
\leq \; & M_U^2 \int_0^{k\sigma} \|H(s)z\|^2 ds \\
\leq \; & M_U^2 \gamma^2 \|z\|^2 \qquad \text{d'après (2.1.5)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|H(k\sigma)\|^2 \leq \frac{2M_U^2 \gamma^2 \ln M_U}{\sigma(1 - M_U^{-2k})} \leq \frac{2M_U^2 \gamma^2 \ln M_U}{\sigma(1 - M_U^{-2})} \quad (\text{car } k \geq 1). \tag{2.1.6}$$

C'est-à-dire qu'il existe $M_H > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$, $\|H(k\sigma)\| \leq M_H$. De plus :

$$\begin{aligned}
& k\sigma \|H(k\sigma)z\|^2 = \int_0^{k\sigma} \|H(k\sigma)z\|^2 ds \\
= \; & \int_0^{k\sigma} \left\| U^{[s/\sigma]}(\sigma,0) U\left(\sigma, \sigma - \{s/\sigma\}\sigma\right) U\left(\sigma - \{s/\sigma\}\sigma, 0\right) U^{k-[s/\sigma]-1}(\sigma,0) z \right\|^2 ds \\
= \; & \int_0^{k\sigma} \left\| H\left([s/\sigma]\,\sigma\right) U\left(\sigma, \sigma - \{s/\sigma\}\sigma\right) H(k\sigma - s) z \right\|^2 ds \\
\leq \; & M_H^2 M_U^2 \int_0^{k\sigma} \|H(k\sigma - s)z\|^2 ds \leq M_H^2 M_U^2 \gamma^2 \|z\|^2
\end{aligned}$$

Donc $\|H(k\sigma)\| \leq \dfrac{M_H M_U \gamma}{\sqrt{k\sigma}}$; ceci implique qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|H(k\sigma)\| < 1$ pour tout $k \geq k_0$. Désormais, nous utilisons $\bar{H}(k) = H(k\sigma)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Posons

$$\bar{\gamma} = \|\bar{H}(k_0)\| < 1, \quad \text{et} \quad C = \max_{0 \leq k \leq k_0} \|\bar{H}(k)\|.$$

Pour chaque k, il existe n tel que $nk_0 \leq k < (n+1)k_0$. Alors

$$\|\bar{H}(k)\| = \|\bar{H}(nk_0)\bar{H}(k-nk_0)\| \leq C\bar{\gamma}^n \leq C\bar{\gamma}^{k/k_0-1} = \tilde{M}\tilde{\gamma}^k$$

où $\tilde{M} = C\bar{\gamma}^{-1}$ et $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma}^{1/k_0} < 1$. Pour tout $t > 0$, nous obtenons finalement :

$$\|H(t)\| = \|U(\{t/\sigma\}\sigma, 0)\, H([t/\sigma]\,\sigma)\| \leq M_U\tilde{M}\tilde{\gamma}^{[t/\sigma]} \leq M_U\tilde{M}\tilde{\gamma}^{t/\sigma-1} = M_0 e^{-\omega_0 t}$$

avec $M_0 = M_U\tilde{M}\tilde{\gamma}^{-1}$ et $\omega_0 = -\dfrac{1}{\sigma}\ln\tilde{\gamma} > 0$.

❑

2.2 Approche avec coût final

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la COHG au système (2.0.1) avec le problème de commande optimale suivant :

$$\begin{array}{l} \displaystyle\min_{\bar{u}\in\mathbf{L}_2([t,t+T],U)} J(z(t);\bar{u}) = \int_t^{t+T} F(\bar{z}(\tau),\bar{u}(\tau))d\tau + E(\bar{z}(t+T)) \\ \text{sous} \begin{cases} \dot{\bar{z}}(\tau) &= \mathcal{A}\bar{z}(\tau) + \mathcal{B}\bar{u}(\tau), \forall\tau\in[t,t+T],\ \bar{z}(t) = z(t) \\ \bar{y}(\tau) &= \mathcal{C}\bar{z}(\tau), \forall\tau\in[t,t+T] \end{cases} , \end{array} \tag{2.2.1}$$

où les fonctions de coût F et E prennent la forme quadratique :

$$F(z,u) = \langle y, \mathcal{Q}y\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle, \quad E(z) = \langle z, \mathcal{M}z\rangle \tag{2.2.2}$$

et $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ coercif (c'est-à-dire $\mathcal{R} \geq \epsilon I$ pour un certain $\epsilon > 0$), $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \geq 0$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \geq 0$. La notation $\langle\cdot,\cdot\rangle$ signifie, selon le contexte, le produit interne dans l'espace d'état Z ou dans l'espace de commande U. Nous pouvons démontrer le théorème de stabilité suivant :

Théorème 2.2.1. *Si E et F sont choisies telles que pour toutes conditions initiales z_0, il existe une commande $u_K(\tau)$ satisfaisant :*

$$\dot{E}(z(\tau)) + F(z(\tau), u_K(\tau)) \leq 0, \tag{2.2.3}$$

tout au long de la trajectoire de (2.0.1) et $F(z,u) \geq \epsilon\|z\|^2$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors la COHG garantit la stabilité exponentielle de la boucle fermée. La fonction E est appelée fonction de Lyapunov globale.

Démonstration. La démonstration est décomposée en trois parties. Tour d'abord, nous allons montrer l'existence de la solution du problème de commande optimale à chaque instant d'échantillonnage. Nous allons ensuite prouver que la trajectoire de la boucle fermée peut être mise sous la forme $z(t) = H(t)z_0$, où l'opérateur $H(t)$ a la forme (2.1.2). Enfin, par un raisonnement similaire à celui de la COHG en dimension finie, nous allons montrer que $H(t)$ satisfait le lemme 2.1.2 du paragraphe précédent, et par conséquent, que le système bouclé est exponentiellement stable.

Existence de la commande optimale

Comme le système est temps-invariant, le problème d'optimisation à résoudre à chaque instant d'échantillonnage est le suivant (où z_0 correspond à l'état courant) :

$$\begin{array}{l} \min\limits_{u\in\mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0;u) = \displaystyle\int_0^T F(z(\tau),u(\tau))d\tau + E(z(T)) \\ \text{sous} \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}(\tau) & = & \mathcal{A}z(\tau) + \mathcal{B}u(\tau), \forall\tau\in[0,T],\ z(0)=z_0 \\ y(\tau) & = & \mathcal{C}z(\tau), \forall\tau\in[0,T] \end{array} \right. , \end{array} \tag{2.2.4}$$

En appliquant les résultats du théorème 6.1.4 (page 272), du lemme 6.1.7 (page 277) et du théorème 6.1.9 (page 281) de [Curtain & Zwart, 1995] (voir le théorème A.0.3, le lemme A.0.4 et le théorème A.0.5 dans l'annexe A), nous obtenons, pour tout $T > 0$, le résultat suivant, qui est très similaire au résultat de la commande optimale en dimension finie :

- Il existe une unique commande $u_{min}(\cdot;z_0) \in \mathbf{L}_2([0,T],U)$ telle que $J(z_0;u_{min}(\cdot;z_0)) \leq J(z_0;u)$ pour tout $u \in \mathbf{L}_2([0,T],U)$.
- La commande optimale est déterminée par :

$$u_{min}(t;z_0) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)z_{min}(t;z_0),\ \forall t\in[0,T], \tag{2.2.5}$$

où l'opérateur $\Pi(\cdot)$ satisfait l'équation différentielle de Riccati d'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\langle z_2,\Pi(t)z_1\rangle & = & -\langle z_2,\Pi(t)\mathcal{A}z_1\rangle - \langle\mathcal{A}z_2,\Pi(t)z_1\rangle \\ & & -\langle\mathcal{C}z_2,\mathcal{Q}\mathcal{C}z_1\rangle + \langle\Pi(t)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)z_2,z_1\rangle, \\ \Pi(T) & = & \mathcal{M}, \end{array}$$

pour tout $t \in (0,T)$ et $z_1,\ z_2 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$.

- Le coût minimal, noté $V(z_0)$, est :

$$V(z_0) = \min_{u\in\mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0;u) = \langle z_0,\Pi(0)z_0\rangle. \tag{2.2.6}$$

- $\Pi(t)$ est un opérateur non-négatif pour tout $t \in [0,T]$.

Trajectoire de la boucle fermée

Définissons l'opérateur $U(t,s)$ dans le domaine $\Delta(\sigma) = \{(t,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,;0\leq s\leq t\leq\sigma\}$ par :

$$U(t,s)z = \Phi(t-s)z + \int_s^t \Phi(t-\alpha)D(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha \tag{2.2.7}$$

où $D(t) = -\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)$ et $\Phi(t)$ est le C_0-semigroupe généré par $\mathcal{A}$. Alors, $U(t,s)$ est un opérateur d'évolution et $U(t,s)z$ est la solution faible de :

$$\dot{\xi}(\tau) = (\mathcal{A} + D(\tau))\xi(\tau), \quad \xi(s) = z \tag{2.2.8}$$

Lorsque la COHG est appliquée à (2.0.1), la trajectoire de la boucle fermée $z(t)$ sur $[k\sigma, (k+1)\sigma]$ $(k = 0, 1, ...)$, et la solution $\xi(\tau)$ de (2.2.8) sur $[0, \sigma]$ avec la condition initiale $\xi(0) = z(k\sigma)$ sont identiques, c'est-à-dire :

$$z(t) = U(t - k\sigma, 0)z(k\sigma), \quad t \in [k\sigma, (k+1)\sigma]$$

Donc :

$$z(t) = H(t)z_0 \text{ avec } H(t)z_0 = U\left(\{t\}, 0\right) U^{[t]}(\sigma, 0)z_0, \quad \forall z_0 \in Z \tag{2.2.9}$$

Nous montrons que $U(t,s)$ est borné. Posons $K = \sup\limits_{0 \le t \le \sigma} \|\Phi(t)\|$. A partir de (2.2.7), pour tout $0 \le s \le t \le \sigma$:

$$\begin{aligned} \|U(t,s)\| &\le \|\Phi(t-s)\| + \int_s^t \|\Phi(t-\alpha)\|\|D(\alpha)\|\|U(\alpha,s)\|d\alpha \\ &\le K + \int_s^t K\|D\|\|U(\alpha,s)\|d\alpha \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Par le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|U(t,s)\| \le Ke^{K\|D\|(t-s)} \le Ke^{K\|D\|\sigma} \tag{2.2.11}$$

Donc il existe $M_U > 1$ tel que $\|U(t,s)\| \le M_U$, $0 \le s \le t \le \sigma$.

Stabilité

Premièrement, nous allons montrer que la fonction de coût minimum diminue. Il est utile de remarquer le fait qu'il n'y a aucune différence entre le modèle et le système, et donc $z(\tau) = z_{min}(\tau; z(t))$ pour tout $\tau \in [t, t+\sigma]$.

A l'instant $t + \sigma$, nous considérons la solution sous-optimale :

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} u_{min}(\tau; z(t)) & \tau \in [t+\sigma, t+T] \\ u_K(\tau) & \tau \in (t+T, t+T+\sigma] \end{cases}. \tag{2.2.12}$$

La trajectoire est alors $\tilde{z}$. La fonction de coût devient :

$$\begin{aligned} J(z(t+\sigma); \tilde{u}) &= \int_{t+\sigma}^{t+T+\sigma} F(\tilde{z}(\tau), \tilde{u}(\tau))d\tau + E(\tilde{z}(t+T+\sigma)) \\ = & -\int_t^{t+\sigma} F(z_{min}(\tau; z(t)), u_{min}(\tau; z(t)))d\tau + V(z(t)) \\ & + \int_{t+T}^{t+T+\sigma} F(\tilde{z}(\tau), u_K(\tau))d\tau + E(\tilde{z}(t+T+\sigma)) - E(\tilde{z}(t+T)). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la notation V de (2.2.6), $V(z(t+\sigma)) \leq J(z(t+\sigma);\tilde{u}(\cdot))$ et grâce à (2.2.3), nous avons :

$$\int_{t+T}^{t+T+\sigma} F(\tilde{z}(\tau), u_K(\tau))d\tau + E(\tilde{z}(t+T+\sigma)) - E(\tilde{z}(t+T)) \leq 0,$$

donc :

$$V(z(t+\sigma)) - V(z(t)) \leq -\int_t^{t+\sigma} F(z_{min}(\tau; z(t)), u_{min}(\tau; z(t)))d\tau. \tag{2.2.13}$$

Cette dernière inégalité signifie que $V(z(t))$ décroît en fonction de t. Grâce à la relation $F \geq \epsilon\|z\|^2$, (2.2.13) entraîne :

$$V(z(t+\sigma)) - V(z(t)) \leq -\epsilon \int_t^{t+\sigma} \|z(\tau)\|^2 d\tau. \tag{2.2.14}$$

Par récurrence, pour tout $k \geq 1$, nous obtenons :

$$V(z(k\sigma)) - V(z(0)) \leq -\epsilon \int_0^{k\sigma} \|z(\tau)\|^2 d\tau \Rightarrow \int_0^{k\sigma} \|z(\tau)\|^2 d\tau \leq \epsilon^{-1} V(z(0))$$

La dernière inégalité combinée avec l'expression (2.2.9) signifie que la trajectoire générée par la COHG satisfait le lemme 2.1.2, et donc le système en boucle fermée est exponentiellement stable, au sens où la solution de l'équation (2.0.1) où u provient de la COHG tend exponentiellement vers 0 quand $t \to \infty$.

❑

2.3 Approche avec état final fixé à zéro

Nous allons considérer une deuxième approche de la COHG pour stabiliser le système (2.0.1), avec le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{\bar{u}\in \mathbf{L}_2([t,t+T],U)} J(z(t);\bar{u}) = \int_t^{t+T} F(\bar{z},\bar{u})d\tau$$
$$\text{sous} \begin{cases} \dot{\bar{z}}(\tau) = \mathcal{A}\bar{z}(\tau) + \mathcal{B}\bar{u}(\tau), \forall \tau \in [t, t+T] \\ \bar{y}(t) = \mathcal{C}\bar{z}(t) \\ \bar{z}(t) = z(t) \\ \bar{z}(t+T) = 0 \end{cases}, \tag{2.3.1}$$

où la fonction de coût F prend également la forme quadratique :

$$F(z,u) = \langle y, \mathcal{Q}y\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle \tag{2.3.2}$$

et $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ coercif, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \geq 0$. Puisque nous utilisons l'état final fixé à zéro $\bar{z}(t+T) = 0$, pour garantir la faisabilité du problème d'optimisation, il faut que l'origine soit atteignable à $t+T$ à partir de l'état initial $z(t)$ à t. Cette remarque nous conduit à la définition suivante de l'opérateur d'atteignabilité G au temps T :

$$Gu = \int_0^T \Phi(t-s)\mathcal{B}u(s)ds \tag{2.3.3}$$

et aux définitions suivantes de commandabilité et atteignabilité [Curtain & Zwart, 1995] :

Définition 2.3.1. *a. Le système (2.0.1) est exactement commandable sur* $[0,T]$ *si tous les points de* Z *peuvent être atteints depuis l'origine au temps* T*, c'est-à-dire que :*

$$\mathrm{Im}(G) = Z \tag{2.3.4}$$

b. Le système (2.0.1) est exactement atteignable sur $[0,T]$ *dans* V*, un sous-espace linéaire de* Z *si tous les points de* V *peuvent être atteints depuis l'origine au temps* T*, c'est-à-dire que :*

$$\mathrm{Im}(G) = V \tag{2.3.5}$$

Nous avons besoin également de la notion suivante :

Définition 2.3.2. *Un sous-espace linéaire* V *de* Z *est dit invariant par rapport au système (2.0.1) si :*

$$z_0 \in V \Rightarrow z(t) \in V \quad \forall t \geq 0 \tag{2.3.6}$$

c'est-à-dire que si l'état initial est dans V*, la trajectoire du système reste dans* V *pour tout* $t \geq 0$*.*

Nous pouvons maintenant établir le théorème suivant concernant la stabilité de la COHG avec état final fixé à zéro :

Théorème 2.3.1. *Soit* V *un espace de Banach réflexif et sous-espace linéaire de* Z *avec une injection continue. Si les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

a. Le système (2.0.1) est exactement atteignable sur $[0,T]$ *dans* V*.*

b. V *est invariant par rapport au système (2.0.1).*

c. $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ *est coercif.*

Alors la COHG garantit la stabilité du système en boucle fermée.

Démonstration. La démonstration peut de nouveau se faire en trois temps : d'abord l'existence de la commande optimale, puis l'établissement de la trajectoire en boucle fermée, et enfin l'utilisation du lemme 2.1.2 pour conclure à la stabilité.

Solution optimale

Nous établissons tout d'abord l'existence de la solution optimale du problème suivant :

$$\min_{u\in\mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0;u) = \int_0^T F(z,u)d\tau$$
$$\text{sous} \begin{cases} \dot{z}(\tau) = \mathcal{A}z(\tau) + \mathcal{B}u(\tau), \forall\tau\in[0,T] \\ y(\tau) = \mathcal{C}z(\tau) \\ z(0) = z_0 \\ z(T) = 0 \end{cases}, \tag{2.3.7}$$

Puisque le système est exactement atteignable dans V, en appliquant le théorème 5.2 [Curtain, 1984] (voir le théorème A.0.6 dans l'annexe A), nous obtenons le résultat suivant :

- Il existe une commande optimale du problème (2.3.7) donnée par :

$$u_{min}(t;z_0) = -G_P^* W_P^{-1}\Phi_P(T,0)z_0 - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)z_{min}(t;z_0) \tag{2.3.8}$$

- Le coût minimal $V(z_0)$ est :

$$V(z_0) = \langle \Phi_P(T,0)z_0, W_P^{-1}\Phi_P(T,0)z_0\rangle + \langle z_0, \Pi(0)z_0\rangle \tag{2.3.9}$$

où $\Pi(t)$, $\Phi_P(t,s)$, G_P et W_P sont définis comme suit :

- L'opérateur $\Pi(t)$ est la solution unique de l'équation intégrale de Riccati d'opérateur suivante :

$$\Pi(t)z = \Phi^*(T-t)\mathcal{M}\Phi(T-t)z + \int_t^T \Phi^*(s-t)[\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} - \Pi(s)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(s)]\Phi(s-t)zds \tag{2.3.10}$$

avec un certain $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \geq 0$.

- L'opérateur $\Phi_P(t,s)$ défini par :

$$\Phi_P(t,s)z = \Phi(t-s)z - \int_s^t \Phi(t-r)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(r)\Phi_P(r,s)zdr \tag{2.3.11}$$

est l'opérateur d'évolution obtenu en perturbant le C_0-semigroupe $\Phi(t)$ par $D(t) = -\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)$.

- L'opérateur G_P défini par :

$$G_P u = \int_0^T \Phi_P(T,s)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}u(s)ds \tag{2.3.12}$$

est l'opérateur d'atteignabilité correspondant à l'opérateur d'évolution $\Phi_P(t)$ et l'opérateur de commande $\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}$.

- L'opérateur W_P défini par :

$$W_P = G_P G_P^* \tag{2.3.13}$$

est le Grammien de commandabilité.

Trajectoire en boucle fermée

Nous pouvons remarquer que la commande optimale a deux parties, une partie *feedforward* calculée par l'état initial et une partie de retour d'état avec le gain $-\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\Pi(t)$. Ainsi, comme dans le paragraphe précédent, la trajectoire en boucle fermée sur $[k\sigma, (k+1)\sigma]$ coïncide avec la solution de l'équation suivante sur $[0, \sigma]$:

$$\dot{\xi}(t) = \mathcal{A}\xi(t) + D(t)\xi(t) + \mathcal{K}z(k\sigma), \quad \xi(0) = z(k\sigma) \tag{2.3.14}$$

où $\mathcal{K} = -\mathcal{B}G_P^* W_P^{-1}\Phi_P(T, 0)$. Définissons l'opérateur $U(t, s)$ suivant :

$$U(t, s)z = \Phi_P(t, s)z + \int_s^t \Phi_P(t, r)\mathcal{K}z dr. \tag{2.3.15}$$

Alors, la trajectoire $z(t)$ en boucle fermée peut être exprimée sous la forme :

$$z(t) = H(t)z_0 \text{ avec } H(t)z_0 = U\left(\{t\}, 0\right) U^{[t]}(\sigma, 0)z_0, \quad \forall z_0 \in Z \tag{2.3.16}$$

A partir de (2.3.11), nous pouvons montrer (de façon similaire à (2.2.10) et (2.2.11)) que $\Phi_P(t, s)$ est borné :

$$\|\Phi_P(t, s)\| \leq M_\Phi, \quad 0 \leq s \leq t \leq \sigma \tag{2.3.17}$$

Ensuite, à partir de (2.3.15), nous avons l'inégalité suivante pour tout $0 \leq s \leq t \leq \sigma$:

$$\|U(t, s)\| \leq \|\Phi_P(t, s)\| + \int_s^t \|\Phi_P(t, r)\|\|\mathcal{K}\| dr \leq M_\Phi + \sigma M_\Phi \|\mathcal{K}\| = M_U \tag{2.3.18}$$

Stabilité

Il reste à montrer que la trajectoire satisfait le lemme 2.1.2. De façon similaire au cas précédent, au temps $t + \sigma$, nous considérons la commande sous-optimale :

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} u_{min}(\tau; z(t)), & \tau \in [t + \sigma, t + T] \\ 0, & \tau \in [t + T, t + T + \sigma] \end{cases}. \tag{2.3.19}$$

La trajectoire correspondante est donc $\tilde{z}$. Nous pouvons remarquer que $\tilde{z}(\tau) = 0$ pour tout $\tau \in [t + T, t + T + \sigma]$. Le coût de cette commande est :

$$J(z(t + \sigma); \tilde{u}) = \int_{t+\sigma}^{t+T+\sigma} F(\tilde{z}(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_t^{t+\sigma} F(z_{min}(\tau; z(t)), u_{min}(\tau; z(t)))d\tau \\
&\quad + \int_t^{t+T} F(z_{min}(\tau; z(t)), u_{min}(\tau; z(t)))d\tau \\
&\quad (\text{car } F(\tilde{z}(\tau), \tilde{u}(\tau)) = 0, \forall \tau \in [t+T, t+T+\sigma]) \\
&= V(z(t)) - \int_t^{t+\sigma} F(z_{min}(\tau; z(t)), u_{min}(\tau; z(t)))d\tau.
\end{aligned}
$$

De plus, nous avons $V(z(t+\sigma)) \leq J(z(t+\sigma); \tilde{u}(\cdot))$, alors :

$$V(z(t+\sigma)) - V(z(t)) \leq -\int_t^{t+\sigma} F(z_{min}(\tau; z(t)), u_{min}(\tau; z(t)))d\tau \tag{2.3.20}$$

Nous évaluons maintenant la fonction $F(z, u)$

$$F(z, u) = \langle y, \mathcal{Q}y\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle = \langle \mathcal{C}z, \mathcal{Q}\mathcal{C}z\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle = \langle z, \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle \tag{2.3.21}$$

Le fait que $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ est coercif entraîne :

$$F(z, u) \geq \epsilon\|z\|^2 \tag{2.3.22}$$

Ainsi, (2.3.20) nous donne :

$$V(z(t+\sigma)) - V(z(t)) \leq -\int_t^{t+\sigma} \epsilon\|z(\tau)\|^2 d\tau \tag{2.3.23}$$

Par récurrence, pour tout $k \geq 1$, nous avons :

$$V(z(k\sigma)) - V(z(0)) \leq -\int_0^{k\sigma} \epsilon\|z(\tau)\|^2 d\tau \Rightarrow \int_0^{k\sigma} \|z(\tau)\|^2 d\tau \leq \epsilon^{-1}V(z(0)). \tag{2.3.24}$$

La dernière inégalité montre bien que la trajectoire satisfait le lemme 2.1.2, et donc que le système en boucle fermée est exponentiellement stable.

❑

Remarque 2.3.1. Bien que l'opérateur $\mathcal{M}$ puisse être librement choisi pour résoudre l'équation de Riccati (2.3.10), la commande optimale obtenue (2.3.8) est unique. Ce fait peut être démontré par un simple raisonnement grâce à la convexité de la fonction de coût $F(z, u)$. Supposons qu'il y ait deux solutions optimales u_1 et u_2 du problème (2.3.7) et considérons la commande définie par :

$$\tilde{u}(\tau) = \frac{1}{2}(u_1(\tau) + u_2(\tau)), \quad \tau \in [0, T] \tag{2.3.25}$$

où la trajectoire correspondante est $\tilde{z}$. Par la linéarité du problème, nous avons :

$$\tilde{z}(\tau) = \frac{1}{2}(z_1(\tau) + z_2(\tau)), \quad \tau \in [0, T] \tag{2.3.26}$$

où z_1 et z_2 sont les trajectoires correspondantes à u_1 et u_2 respectivement. Ainsi, $\tilde{u}$ est également une solution admissible car $\tilde{z}(0) = z_0$ et $\tilde{z}(T) = 0$. Puisque la fonction de coût $F(z, u)$ est quadratique :

$$F(\tilde{z}, \tilde{u}) = \langle \tilde{z}, \mathcal{C}^* \mathcal{Q} \mathcal{C} \tilde{z} \rangle + \langle \tilde{u}, \mathcal{R} \tilde{u} \rangle \tag{2.3.27}$$

$$\leq \frac{1}{2}(\langle z_1, \mathcal{C}^* \mathcal{Q} \mathcal{C} z_1 \rangle + \langle z_2, \mathcal{C}^* \mathcal{Q} \mathcal{C} z_2 \rangle) + \frac{1}{2}(\langle u_1, \mathcal{R} u_1 \rangle + \langle u_2, \mathcal{R} u_2 \rangle) \tag{2.3.28}$$

$$= \frac{1}{2}(F(z_1, u_1) + F(z_2, u_2)) \tag{2.3.29}$$

Par conséquent :

$$J(z_0; \tilde{u}) \leq \frac{1}{2}(J(z_0; u_1) + J(z_0; u_2)) = J(z_0; u_1) \quad \text{car } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont optimales} \tag{2.3.30}$$

C'est-à-dire $\tilde{u}$ est aussi une solution optimale, et les inégalités de (2.3.29) deviennent des égalités. En particulier :

$$\langle u_1 - u_2, \mathcal{R}(u_1 - u_2) \rangle = 0, \tag{2.3.31}$$

ce qui signifie que $u_1 = u_2$.

2.4 Caractérisation de la commande optimale par l'état adjoint

Bien que les commandes précédemment obtenues puissent être exprimées explicitement sous forme de retours d'état (voir les équations (2.2.5) et (2.3.8)), elles nécessitent d'utiliser les solutions des équations de Riccati d'opérateur, qui ne sont pas facile à résoudre. En vue de permettre la mise en pratique de la COHG, nous proposons de caractériser la commande optimale en fonction de l'état adjoint, puis d'utiliser une méthode numérique pour calculer la solution approchée.

2.4.1 Commande optimale avec coût final

Rappelons le problème d'optimisation à résoudre à chaque instant d'échantillonnage :

$$\min_{u \in \mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0; u) = \int_0^T \langle y(\tau), \mathcal{Q} y(\tau) \rangle + \langle u(\tau), \mathcal{R} u(\tau) \rangle d\tau + \langle z(T), \mathcal{M} z(T) \rangle$$
$$\text{sous} \begin{cases} \dot{z}(\tau) &= \mathcal{A} z(\tau) + \mathcal{B} u(\tau), \forall \tau \in [0, T],\ z(0) = z_0 \\ y(\tau) &= \mathcal{C} z(\tau), \forall \tau \in [0, T] \end{cases}, \tag{2.4.1}$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. *Soient u_{min}, z_{min} la commande optimale et la trajectoire correspondante du problème (2.4.1). Il existe un état adjoint p_{min} satisfaisant :*

$$\dot{p}_{min}(\tau) = -\mathcal{A}^* p_{min}(\tau) - \mathcal{C}^* \mathcal{Q}\mathcal{C} z_{min}(\tau),\ \tau \in [0,T], \quad p_{min}(T) = \mathcal{M} z_{min}(T), \tag{2.4.2}$$

tel que la commande optimale peut être mise sous la forme :

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_{min}(\tau), \quad \tau \in [0,T] \tag{2.4.3}$$

Démonstration. La démonstration se fonde sur la méthode standard des multiplicateurs (voir par exemple [Lasiecka & Triggiani, 2000]). Rappelons que la trajectoire z correspondant à la commande u est exprimée par :

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-r)\mathcal{B}u(r)dr \tag{2.4.4}$$

Pour chaque $u \in \mathbf{L}_2([0,T],U)$, $z \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$ et $\lambda \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$, nous introduisons le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} L = \ & \int_0^T \{\langle \mathcal{C}z(\tau), \mathcal{Q}\mathcal{C}z(\tau)\rangle + \langle u(\tau), \mathcal{R}u(\tau)\rangle \\ & + \left\langle \lambda(\tau), \left(z(\tau) - \Phi(\tau)z_0 - \int_0^\tau \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u(r)dr\right)\right\rangle\Big\} d\tau \\ & + \left\langle \Phi(T)z_0 + \int_0^T \Phi(T-r)\mathcal{B}u(r)dr, \mathcal{M}\left(\Phi(T)z_0 + \int_0^T \Phi(T-r)\mathcal{B}u(r)dr\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Notons par L_u, L_z et L_λ la variation de L par rapport à u, z et λ respectivement. Par le théorème de Liusternik (voir [Luenberger, 1969], théorème 1, p. 243), il existe $(u_{min}, z_{min}, \lambda_{min})$ tels que $L_u = L_z = L_\lambda = 0$ à $(u_{min}, z_{min}, \lambda_{min})$. Ainsi, la condition $L_\lambda = 0$ nous donne :

$$z_{min}(\tau) = \Phi(\tau)z_0 + \int_0^\tau \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u_{min}(r)dr, \quad \tau \in [0,T] \tag{2.4.6}$$

La condition $L_z = 0$ nous donne :

$$\lambda_{min}(\tau) = -2\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(\tau), \quad \tau \in [0,T] \tag{2.4.7}$$

Pour calculer L_u, nous utilisons le fait que pour $\lambda \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$ et $u \in \mathbf{L}_2([0,T],U)$, les égalités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \lambda(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u(r)dr\right\rangle d\tau &= \int_0^T\int_0^\tau \langle \lambda(\tau), \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u(r)drd\tau\rangle \\ &= \int_0^T\int_r^T \langle \lambda(\tau), \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u(r)\rangle d\tau dr \\ &= \int_0^T\int_r^T \langle \mathcal{B}^*\Phi^*(\tau-r)\lambda(\tau), u(r)\rangle d\tau dr \\ &= \int_0^T \left\langle \int_\tau^T \mathcal{B}^*\Phi^*(\tau-r)\lambda(\tau)d\tau, u(r)\right\rangle dr \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Alors, $L_u = 0$ signifie que :

$$2\mathcal{R}u_{min}(\tau) - \int_\tau^T \mathcal{B}^*\Phi^*(r-\tau)\lambda(r)dr + 2\mathcal{B}^*\Phi^*(T-\tau)z_{min}(T) = 0 \tag{2.4.9}$$

En combinant avec (2.4.7), nous avons :

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\left(\Phi^*(T-\tau)z_{min}(T) + \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(r)dr\right) \tag{2.4.10}$$

Posons

$$p_{min}(\tau) = \Phi^*(T-\tau)z_{min}(T) + \int_\tau^T \Phi^*(\tau-r)\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(\tau)d\tau \tag{2.4.11}$$

alors p_{min} est la solution de (2.4.2) et u_{min} est donnée par (2.4.3).

❑

2.4.2 Calcul de la solution numérique

Dans le paragraphe 2.4.1, nous avons caractérisé la commande optimale en fonction de l'état adjoint. Nous allons utiliser ce résultat pour chercher la solution optimale par la méthode du gradient. L'algorithme est décrit ci-dessous :

1. Choisir une estimation initiale de la solution $u^{(0)}$.
2. Résoudre le système suivant sur $[0, T]$:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t), \quad z(0) = z_0, \quad z(t) \in \mathbf{D}(\mathcal{A}). \tag{2.4.12}$$

3. Utiliser l'état final à $t = T$ comme condition initiale pour l'état adjoint p et résoudre le problème suivant pour l'état adjoint de $t = T$ à $t = 0$:

$$\dot{p}(t) = -\mathcal{A}^*p(t) - \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z(t), \quad p(T) = \mathcal{M}z(T), \quad p(t) \in \mathbf{D}(\mathcal{A}^*). \tag{2.4.13}$$

4. Mettre à jour la commande par la méthode du gradient :

$$u^{k+1} = u^{(k)} - \kappa(u^{(k)} + \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*p) \tag{2.4.14}$$

   avec un pas de descente $\kappa > 0$ qui doit être réglé pour obtenir une compromise entre la rapidité et la stabilité numérique.
5. Répéter l'étape 2 tant que la norme du gradient

$$L_u = 2\int_0^T (\mathcal{R}u(t) + \mathcal{B}^*p(t))\, dt \tag{2.4.15}$$

   est supérieure à une tolérance donnée.

2.4.3 Commande optimale avec état final fixé à zéro

Considérons maintenant le problème d'optimisation (2.3.7) :

$$\min_{u\in\mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0;u) = \int_0^T \langle y(\tau), \mathcal{Q}y(\tau)\rangle + \langle u(\tau), \mathcal{R}u(\tau)\rangle d\tau$$
$$\text{sous} \begin{cases} \dot{z}(\tau) = \mathcal{A}z(\tau) + \mathcal{B}u(\tau), \forall\tau\in[0,T] \\ y(\tau) = \mathcal{C}z(\tau) \\ z(0) = z_0 \\ z(T) = 0 \end{cases}, \tag{2.4.16}$$

Nous pouvons énoncer cette fois le résultat suivant :

Théorème 2.4.2. *Soient u_{min}, z_{min} la commande optimale et la trajectoire correspondante du problème (2.4.16). Il existe un état adjoint p_{min} et Ψ_{min} satisfaisant :*

$$\dot{p}_{min}(\tau) = -\mathcal{A}^* p_{min}(\tau) - \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(\tau),\ \tau\in[0,T], \quad p_{min}(T) = \frac{1}{2}\Psi_{min}, \tag{2.4.17}$$

tel que la commande optimale peut être mise sous la forme :

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_{min}(\tau), \quad \tau\in[0,T] \tag{2.4.18}$$

Démonstration. Procédons aux mêmes calculs que ceux du théorème 2.4.1, avec le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} L = \ & \int_0^T \{\langle \mathcal{C}z(\tau), \mathcal{Q}\mathcal{C}z(\tau)\rangle + \langle u(\tau), \mathcal{R}u(\tau)\rangle \\ & + \left\langle \lambda(\tau), \left(z(\tau) - \Phi(\tau)z_0 - \int_0^\tau \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u(r)dr\right)\right\rangle\Big\} d\tau \\ & + \langle \Psi, \Phi(T)z_0 + \int_0^T \Phi(T-r)\mathcal{B}u(r)dr\rangle \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Il existe $(u_{min}, z_{min}, \lambda_{min}, \Psi_{min})$ tels que $L_u = L_z = L_\lambda = L_\Psi = 0$ à $(u_{min}, z_{min}, \lambda_{min}, \Psi_{min})$. Les conditions $L_\lambda = 0$ et $L_\Psi = 0$ donnent la dynamique de la trajectoire :

$$z_{min}(\tau) = \Phi(\tau)z_0 + \int_0^\tau \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u_{min}(r)dr, \quad \tau\in[0,T] \tag{2.4.20}$$

et

$$\Phi(T)z_0 + \int_0^T \Phi(T-r)\mathcal{B}u_{min}(r)dr = 0 \tag{2.4.21}$$

La condition $L_z = 0$ nous donne :

$$\lambda_{min}(\tau) = -2\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z(\tau), \quad \tau\in[0,T] \tag{2.4.22}$$

Comme précédemment, la condition $L_u = 0$ signifie que :

$$2\mathcal{R}u_{min}(\tau) - \int_\tau^T \mathcal{B}^*\Phi^*(r-\tau)\lambda_{min}(r)dr + \mathcal{B}^*\Phi^*(T-\tau)\Psi_{min} = 0 \tag{2.4.23}$$

Donc

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\left(\frac{1}{2}\Phi^*(T-\tau)\Psi_{min} + \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(r)dr\right) \tag{2.4.24}$$

Posons

$$p_{min}(\tau) = \frac{1}{2}\Phi^*(T-\tau)\Psi_{min} + \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(r)dr \tag{2.4.25}$$

Alors p_{min} est la solution de :

$$\dot{p}_{min}(\tau) = -\mathcal{A}^*p_{min}(\tau) - \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(\tau) \tag{2.4.26}$$

avec la condition terminale $p_{min}(T) = \frac{1}{2}\Psi_{min}$. La commande optimale peut être exprimée en fonction de p_{min} comme suit :

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*p_{min}(\tau). \tag{2.4.27}$$

❑

2.4.4 Calcul de la solution numérique

Considérons ici le problème de calcul numérique de la commande à partir de (2.4.17)-(2.4.18). Puisque l'état final est fixé à zéro $z(t) = 0$, nous obtenons un problème aux deux bouts (*two-point boundary value problem*) et par conséquent, la méthode du gradient ne peut pas être appliquée. Il nous faut utiliser une autre méthode, comme celle décrite ci-dessous.

Supposons que u_{min} est la commande optimale, z_{min}, la trajectoire et p_{min}, l'état adjoint correspondant. Conformément au paragraphe 2.4.3, la dynamique de l'état z_{min} et celle de l'état adjoint p_{min} doivent satisfaire :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{min}(t) \\ \dot{p}_{min}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* \\ -\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} & -\mathcal{A}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}^*), t \in [0,T] \tag{2.4.28}$$

avec les contraintes $z_{min}(0) = z(0)$ et $z_{min}(T) = 0$. Une méthode de discrétisation doit être employée pour résoudre le système ci-dessus pour obtenir z_{min} et p_{min}. La commande optimale est finalement calculée par :

$$u_{min} = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*p_{min}. \tag{2.4.29}$$

Une application concrète de cette procédure sera présentée en détail plus tard pour le système de canal à surface libre (voir chapitre 4).

2.5 Problème de commande frontière

En pratique, il arrive régulièrement que la commande ne soit pas appliquée sur tout le domaine, mais sur la frontière du système. Il s'agit de problèmes de commande frontière. Dans ce cas, l'opérateur de commande $\mathcal{B}$ n'est plus borné. Afin d'utiliser les analyses présentées précédemment pour ce type de problème, il nous faut mettre le système sous *forme abstraite* (2.0.1). Pour cela, nous résumons dans ce paragraphe la théorie de ([Curtain & Zwart, 1995]) qui sera utilisée plus tard dans les chapitre 3, 4 et 5. Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = \mathfrak{A}z(t), \quad z(0) = z_0, \\ &\mathfrak{B}z(t) = u(t), \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

où $\mathfrak{A} : \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \subset Z \mapsto Z$, $u(t) \in U$, un espace de Hilbert, et l'opérateur frontière $\mathfrak{B}$: $\mathbf{D}(\mathfrak{B}) \subset Z \mapsto U$ satisfait $\mathbf{D}(\mathfrak{A}) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{B})$.

Afin de reformuler l'équation (2.5.1) sous la forme (2.0.1), il faut imposer certaines conditions supplémentaires sur le système.

Définition 2.5.1. *Le système (2.5.1) est un système de commande frontière si :*

a. L'opérateur $\mathcal{A} : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \mapsto Z$ *avec* $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \cap \ker \mathfrak{B}$ *et*

$$\mathcal{A}z = \mathfrak{A}z \quad \textit{pour } z \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \tag{2.5.2}$$

est un générateur infinitésimal d'un C_0*-semigroupe dans* Z*.*

b. Il existe un $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$ *tel que pour tout* $u \in U$*,* $\mathcal{B}u \in \mathbf{D}(\mathfrak{A})$*, l'opérateur* $\mathfrak{A}\mathcal{B}$ *est un élément de* $\mathcal{L}(U, Z)$ *et*

$$\mathfrak{B}\mathcal{B}u = u, \quad u \in U \tag{2.5.3}$$

En introduisant une nouvelle variable :

$$v(t) = z(t) - \mathcal{B}u(t), \quad \text{et} \quad \tilde{u}(t) = \dot{u}(t) \tag{2.5.4}$$

nous avons :

$$\dot{v}(t) = \mathcal{A}v(t) - \mathcal{B}\tilde{u}(t) + \mathfrak{A}\mathcal{B}u(t), \quad v(0) = z_0 - \mathcal{B}u(0) \tag{2.5.5}$$

Nous pouvons considérer un espace d'état étendu $Z^e := U \oplus Z$ et une nouvelle variable d'état $z^e(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ et obtenons le système suivant :

$$\dot{z}^e(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{A}\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} z^e(t) + \begin{pmatrix} I \\ -\mathcal{B} \end{pmatrix} \tilde{u}(t), \tag{2.5.6}$$

$$z^e(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{2.5.7}$$

Par le lemme 3.2.2 de [Curtain & Zwart, 1995] (voir le lemme A.0.2 dans l'annexe A), l'opérateur $\mathcal{A}^e := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{A}\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}$ avec le domaine $\mathbf{D}(\mathcal{A}^e) = U \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A})$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe dans Z^e. De plus, nous avons $\begin{pmatrix} I \\ -\mathcal{B} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U, Z^e)$. Ainsi le système original est mis dans la forme abstraite (2.5.7).

2.6 Conclusion

Ce chapitre regroupe les analyses théoriques sur la COHG pour des systèmes linéaires en dimension infinie décrits sous forme abstraite. Une preuve complète de la stabilité de cette approche est présentée pour une certaine classe de systèmes. Pour la résolution numérique, la commande optimale est exprimée en fonction de l'état adjoint, et des algorithmes sont proposés afin de chercher une solution approchée au problème qui puisse être utilisée en pratique.

Deux approche de la COHG ont été étudiées : l'approche avec coût final et l'approche avec état final fixé à zéro. La première est plus flexible en termes de mise en oeuvre numérique mais sa stabilité dépend de l'existence d'une fonction de Lyapunov pour définir la fonction de coût final. La deuxième par contre laisse plus de marge de manoeuvre en vue du choix de la fonction de coût, mais elle pose plus de difficultés pour le calcul numérique de la commande optimale. Le choix entre ces deux approches dépend donc du problème considéré. Dans les chapitres 4 et 5, nous allons montrer que les deux approches peuvent être utilisées pour stabiliser des systèmes hyperboliques linéaires 2×2.

Notons que le lemme 2.1.2 est assez général et peut être exploité pour d'autres problèmes, même non linéaires. Tout d'abord, la période d'échantillonnage σ peut être variable (mais bornée) et la preuve de stabilité reste toujours valide. De plus, l'opérateur d'évolution $U(\cdot,\cdot)$ dans la définition (2.1.2) peut être remplacé par une famille d'opérateurs d'évolution uniformément bornés $\{U_n(\cdot,\cdot)\}$ (c'est-à-dire $\|U_n(\cdot,\cdot)\| \leq M_U$, $\forall n$). Enfin, en considérant un système qui possède une fonction E satisfaisant (2.2.3) localement dans l'ensemble Ω (voir [Ito & Kunisch, 2002]) et en supposant que le problème d'optimisation (2.2.1) avec une contrainte $\bar{z}(t+T) \in \Omega$ génère une trajectoire qui peut être mise sous la forme (2.1.2), alors la COHG garantit également la stabilité de la boucle fermée. La difficulté reste de déterminer l'expression (2.1.2) de la trajectoire optimale ce qui sera étudié dans nos travaux à venir.

Enfin, nous voulons rappeler que bien que les deux approches présentées dans ce chapitre garantissent une stabilité asymptotique globale, grâce au caractère global de la fonction de Lyapunov (pour l'approche avec coût final) et de l'atteignabilité (pour l'approche avec état final fixé à zéro), ces résultats peuvent être limités en réalité. Par exemple, lorsque des contraintes sont prises en compte, nous n'obtenons en général qu'une stabilité locale car il faut déterminer le domaine d'attraction correspondant à l'ensemble des états initiaux qui rendent les problèmes d'optimisation faisable. De plus, la COHG est souvent implémentée sous forme de fonctions constantes par morceau (la commande est maintenue constante entre deux échantillons temporels) ce qui n'entraîne pas à une stabilité asymptotique mais à une stabilité dite pratique (voir [Christofides et al., 2011]).

Chapitre 3

Application de la COHG à des systèmes hyperboliques linéaires 2×2

Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité de la COHG appliquée à des systèmes hyperboliques linéaires 2×2 ayant la forme :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \lambda_1(x)\partial_x y_1 + \gamma_1(x) y_1 + \delta_1(x) y_2 \\ \partial_t y_2 = \lambda_2(x)\partial_x y_2 + \gamma_2(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 \end{cases}, \quad (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty) \tag{3.0.1}$$

où λ_i, γ_i et δ_i $(i = 1, 2)$ sont les fonction régulière, $\lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x)$, $x \in [0, L]$. Les conditions initiales sont :

$$y_1(x,0) = y_{10}(x), \quad y_2(x,0) = y_{20}(x), \quad x \in [0,L]. \tag{3.0.2}$$

Les conditions frontières ont la forme :

$$\begin{cases} y_1(L,t) = g_1(t) + \alpha y_2(L,t) \\ y_2(0,t) = g_2(t) + \beta y_1(0,t) \end{cases}, \quad t \in [0,\infty) \tag{3.0.3}$$

où α, β sont deux constantes et $g_1(t)$, $g_2(t)$ sont des entrées de commande.

Les résultats obtenus dans ce chapitre seront appliqués aux équations de Saint-Venant (chapitres 4 et 5). Le paragraphe 3.1 est consacré à la démonstration de la régularité de la solution du système (3.0.1). En se fondant sur les résultats de [Rauch & Massey, 1974] et [Rauch, 1972], nous montrons que si la condition initiale et les conditions frontières sont régulières et compatibles, la solution reste régulière. Dans le paragraphe 3.2, nous montrons l'atteignabilité de ce système avec deux commandes frontières et dans le paragraphe 3.3, l'atteignabilité avec une commande frontière. Ces résultats sont utilisés pour

montrer la stabilité de la COHG dans le paragraphe 3.4. Pour cela, nous suivons tout d'abord les procédures décrites au paragraphe 2.5 pour mettre le problème (3.0.1) sous forme abstraite, puis utilisons les résultats du paragraphe 2.2 et du paragraphe 2.3 pour obtenir les preuves de stabilité de la COHG. L'approche avec coût final sera considérée au paragraphe 3.4.2 pour stabiliser un cas particulier de (3.0.1) où les coefficients sont constants. Dans ce cas, le coût final est inspiré de la fonction de Lyapunov proposée par [Coron et al., 2009]. L'approche avec état final fixé à zéro sera étudiée au paragraphe 3.4.3. En combinant avec le résultat d'atteignabilité aux paragraphes 3.2 et 3.3, nous allons montrer que cette approche peut garantir la stabilité pour les cas général de (3.0.1) où les coefficients ne sont plus constants. A notre connaissance, l'approche proposée ici et celle de [Vazquez et al., 2011] sont les premières qui peuvent garantir la stabilité de ce type de système.

3.1 Régularité de la solution

Considérons tout d'abord un opérateur $\mathcal{L}z$ plus général que celui du (3.0.1), ayant la forme :

$$\mathcal{L}z = \partial_t z - A(x,t)\partial_x z - B(x,t)z, \tag{3.1.1}$$

dans Ω, où

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}, \quad \text{avec ses frontières} \quad \partial\Omega_- = \{x = 0\}, \quad \partial\Omega_+ = \{x = L\}. \tag{3.1.2}$$

Les matrices A et B de dimension $n \times n$ sont régulières et

$$\begin{gathered} A = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix}, \\ A^+ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad A^- = \operatorname{diag}(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}) \\ \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} > \dots > \lambda_{p+q},\ x \in [0, L] \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Les conditions frontières sont définies à l'aide des opérateurs frontières M_+ et M_- (voir (3.1.25)). M_+ (resp. M_-) est une matrice $p \times n$ (resp. $q \times n$) et $\operatorname{rang}(M_+) = p$ (resp. $\operatorname{rang}(M_-) = q$).

Dans la suite, pour un certain m et pour $V \subset \mathbb{R}^m$, noterons $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, la classe des fonctions infiniment dérivables qui s'annulent à l'infini ; $\mathbf{C}_{(0)}^\infty(V)$, l'espace des restrictions dans V des fonctions de $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. La norme d'une fonction $\Psi = (\Psi_1 \quad \cdots \quad \Psi_n)^T$ de carré sommable dans V, notée $\Psi \in \mathbf{L}_2(V)$, est définie par :

$$\|\Psi\|_V^2 = \int_V \|\Psi\|_{\mathbb{R}^n}^2 dV, \tag{3.1.4}$$

où $\|\Psi\|_{\mathbb{R}^n}$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Nous allons alors établir la régularité des solutions d'un système défini par ces opérateurs à l'aide d'un résultat préliminaire que nous allons montrer :

Lemme 3.1.1. *Il existe des constantes C_0 et c telles que pour tout $z \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R} \times \Omega)$, nous avons la majoration :*

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_\Omega + \frac{c}{2}\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \leq\ & C_0 e^{2c(t-s)} \left(\|z(s)\|^2_\Omega + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|M_+ z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \right) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

avec $-\infty < s < t < \infty$.

Démonstration. Dans [Rauch, 1972], l'auteur a montré qu'il existe C (ne dépendant que des coefficients de l'opérateur $\mathcal{L}z$) et c telles que pour tout $z \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R} \times \Omega_-)$:

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_{\Omega_-,c} + c\|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} \\ & \leq C \left(\|z(s)\|_{\Omega,c} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \right) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

avec $\Omega_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ et la norme $\|\cdot\|_{I\times\Omega,c}$ est définie par :

$$\|\psi\|^2_{I\times\Omega,c} = \int_I \|\psi\|^2_\Omega e^{-2ct} dt \tag{3.1.7}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou peut être déduit à un point). Nous utilisons ce résultat pour prouver le lemme. Considérons deux fonctions $\phi_-(x) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi_+(x) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ satisfaisant :

$$\phi_-(x) = 1 \quad \text{si } x \leq 1/4, \quad \phi_-(x) = 0 \quad \text{si } x \geq 3/4 \tag{3.1.8}$$

et $\phi_+(x) = 1 - \phi_-(x), \quad x \in \mathbb{R}$. Posons :

$$z_- = \phi_- z, \quad z_+ = \phi_+ z \tag{3.1.9}$$

Alors $z = z_-|_{\mathbb{R}\times\Omega} + z_+|_{\mathbb{R}\times\Omega}$, où la notation $f|_V$ représente la restriction de f dans V.

Nous avons $z_- \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R}\times\Omega_-)$. En appliquant l'inégalité (3.1.6) à z_-, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|z_-(t)\|^2_{\Omega_-,c} + c\|z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \\ \leq\ & C \left(\|z_-(s)\|^2_{\Omega_-,c} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|M_- z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \right) \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Une inégalité similaire peut être obtenue pour $z_+ = \phi_+ z$:

$$\begin{aligned} & \|z_+(t)\|^2_{\Omega_+,c} + c\|z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \\ \leq\ & C \left(\|z_+(s)\|^2_{\Omega_+,c} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|M_+ z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \right) \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

avec $\Omega_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < L\}$. En combinant les deux inégalités ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|z_-(t)\|^2_{\Omega_-,c} + \alpha\|z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \\ & +\|z_+(t)\|^2_{\Omega_+,c} + \alpha\|z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \\ \leq\ & C\Big(\|z_-(s)\|^2_{\Omega_-,c} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|M_-z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \\ & \|z_+(s)\|^2_{\Omega_+,c} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|M_+z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c}\Big) \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Par le choix de ϕ_-, la valeur à la frontière $\partial\Omega_-$ de z_- est identique à celle de z :

$$\begin{aligned} \|z_-\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} &= \|z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} \\ \|M_-z_-\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} &= \|M_-z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

De façon similaire nous avons pour z_+ :

$$\begin{aligned} \|z_+\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} &= \|z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \|M_+z_+\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} &= \|M_+z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \|z(t)\|^2_{\Omega,c} &= \|z_-(t)|_\Omega + z_+(t)|_\Omega\|^2_{\Omega,c} \leq 2\left(\|z_-(t)\|^2_{\Omega_-,c} + \|z_+(t)\|^2_{\Omega_+,c}\right) \\ \|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} &= \|z_-(t)|_{[s,t]\times\Omega} + z_+(t)|_{[s,t]\times\Omega}\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} \leq 2\left(\|z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c}\right) \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Ainsi, le terme de gauche de (3.1.12) est supérieur à :

$$\|z(t)\|^2_{\Omega,c} + \alpha\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \tag{3.1.16}$$

Nous allons maintenant estimer le terme de droite de (3.1.12). Nous avons :

$$\begin{aligned} & \|z_-(s)\|^2_{\Omega_-,c} + \|z_+(s)\|^2_{\Omega_+,c} = \|\phi_-z(s)\|^2_{\Omega,c} + \|\phi_+z(s)\|^2_{\Omega,c} \\ \leq\ & \left(\|\phi_-\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)} + \|\phi_+\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\right)\|z(s)\|^2_{\Omega,c} \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Le terme $\mathcal{L}z_-$ peut être exprimé comme suit

$$\mathcal{L}z_- = \mathcal{L}(\phi_-z) = \partial_t(\phi_-z) + A\partial_x(\phi_-z) + B(\phi z) = \phi_-\mathcal{L}z + \phi'_-Az \tag{3.1.18}$$

alors :

$$\|\mathcal{L}z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} \leq \|\phi_-\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|\phi'_-\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|A\|^2_\infty\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} \tag{3.1.19}$$

Une majoration similaire peut être faite pour $\mathcal{L}z_+$:

$$\|\mathcal{L}z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} \leq \|\phi_+\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|\phi'_+\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|A\|^2_\infty\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} \tag{3.1.20}$$

A partir de (3.1.17), (3.1.19) et (3.1.20) (voir également (3.1.13) et (3.1.14)), nous déduisons que le terme de droite de (3.1.12) est inférieur à :

$$CK\left(\|z(s)\|^2_{\Omega,c} + \frac{1}{c}\left(\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c}\right) + \|M_-z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c}\|M_-z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c}\right) \tag{3.1.21}$$

avec K ne dépendant que de ϕ_-, ϕ_+ et A.

La combinaison de (3.1.21) et (3.1.16) nous donne :

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_{\Omega,c} + \left(c - \frac{CK}{c}\right) \|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \\ \leq \; & CK \left(\|z(s)\|^2_{\Omega,c} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|M_- z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \right) \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Nous avons d'une part $c - \dfrac{CK}{c} > \dfrac{c}{2}$ avec c suffisamment grand et, d'autre part :

$$e^{-2ct}\|\cdot\|^2_{[s,t]\times V} < \|\cdot\|^2_{[s,t]\times V,c} < e^{-2cs}\|\cdot\|_{[s,t]\times V} \quad \text{car} \quad c > 0, \tag{3.1.23}$$

où V représente Ω, $\partial\Omega_-$ ou $\partial\Omega_+$. Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_{\Omega} + \frac{c}{2}\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \leq \; & C_0 e^{2c(t-s)} \left(\|z(s)\|^2_{\Omega} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \right) \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

❑

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}z &= F && \text{dans } [0,T]\times\Omega \\ M_+ z &= g_+ && \text{dans } [0,T]\times\partial\Omega_+ \\ M_- z &= g_- && \text{dans } [0,T]\times\partial\Omega_- \\ z(0) &= f \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

pour $F \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\Omega)$, $f \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $g_+ \in \mathbf{L}_2([0,T]) \times \partial\Omega_+)$ et $g_- \in \mathbf{L}_2([0,T]) \times \partial\Omega_-)$.

Nous rappelons qu'une solution forte de (3.1.25) est la fonction $z \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\Omega)$ telle qu'il existe une suite $z^n \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}([0,T]\times\Omega)$ ainsi que $z_0 \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\partial\Omega_-)$ et $z_1 \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\partial\Omega_+)$ avec

$$\begin{aligned} & \|z^n - z\|_{[0,T]\times\Omega} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ & \|z^n - z_0\|_{[0,T]\times\partial\Omega_-} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \; \|z^n - z_1\|_{[0,T]\times\partial\Omega_+} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ & \|\mathcal{L}z^n - F\|_{[0,T]\times\Omega} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ & \|z^n(0,\cdot) - f\|_{\Omega} = 0, \\ & M_- z_0 = g_-, \; M_+ z_1 = g_+ \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

A l'aide de la majoration du lemme 3.1.1, la méthode présentée dans [Rauch & Massey, 1974] (voir l'annexe B) peut être utilisée pour obtenir les résultats suivants concernant l'existence et la régularité de la solution de (3.1.25) :

Proposition 3.1.2. *Pour tout $T > 0$, $F \in \mathbf{L}_2([0,T] \times \Omega)$, $f \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $g_+ \in \mathbf{L}_2([0,T]) \times \partial\Omega_+)$ et $g_- \in \mathbf{L}_2([0,T]) \times \partial\Omega_-)$, le problème (3.1.25) a une solution forte unique z. De plus, cette solution satisfait*

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|_\Omega^2 + \frac{c}{2}\|z\|_{[0,t]\times\Omega}^2 + \|z\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+}^2 \\ \leq \; & C_0 e^{2ct}\left(\|f\|_\Omega^2 + \frac{1}{c}\|F\|_{[0,t]\times\Omega}^2 + \|g_-\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|g_+\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\right) \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Proposition 3.1.3. *Soient $f \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, $F \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\Omega)$, $g_- \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega_-)$, $g_+ \in \mathbf{H}^s([0,T] \times \partial\Omega_+)$. La solution z de (3.1.25) appartient à $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \leq r \leq s$ si et seulement si les conditions de compatibilité en $(0,\partial\Omega_-)$ et $(0,\partial\Omega_+)$ sont satisfaites jusqu'à l'ordre s. De plus, les restrictions de z dans $[0,T]\times\partial\Omega_-$ (resp. dans $[0,T]\times\partial\Omega_+$) sont dans $\mathbf{H}^s([0,T] \times \partial\Omega_-)$ (resp. $\mathbf{H}^s([0,T] \times \partial\Omega_+)$).*

Nous rappelons que $\mathbf{H}^s(V)$ représente l'espace de Sobolev des fonctions dans V dont les dérivées jusqu'à l'ordre s appartiennent à $\mathbf{L}_2(V)$. Les conditions de compatibilité d'ordre 1 sont :

$$M_+ f = g_+(0), \quad M_- f = g_-(0) \tag{3.1.28}$$

et celles des ordres supérieurs sont obtenues en dérivant les équations ci-dessus (voir l'annexe B). En se fondant sur la proposition 3.1.3, nous pouvons établir le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.4. *Soit z la solution mentionnée dans la proposition 3.1.3, alors pour chaque $\xi \in \Omega$:*

$$z(\xi,\cdot) \in \mathbf{H}^s([0,T]) \tag{3.1.29}$$

Démonstration. Notons v, la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} Pv &= A^{-1}F && \text{dans} \quad \Omega_\xi \times [0,T], \\ v &= v_0 = z && \text{dans} \quad \{0\} \times [0,T], \\ M_p v &= M_p z && \text{dans} \quad \Omega_\xi \times \{0\}, \\ M_q v &= M_q z && \text{dans} \quad \Omega_\xi \times \{T\} \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

avec $\Omega_\xi = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \xi\}$. M_p (resp. M_q) est de dimension $p \times n$ (resp. $q \times n$) ayant la forme $M_p = (I_p \quad 0)$ (resp. $M_q = (I_q \quad 0)$) où I_p (resp. I_q) est la matrice d'identité de dimension $p \times p$ (resp. $q \times q$). L'opérateur P est défini par :

$$Pv = \partial_x v - A^{-1}\partial_t v + A^{-1}Bv \tag{3.1.31}$$

Puisque z est la solution dans $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \leq r \leq s$, les conditions de compatibilité pour v_0, $A^{-1}F$, $M_p z$ et $M_p z$ en $(0,0)$ et $(0,T)$ sont satisfaites jusqu'à l'ordre s.

Alors, v appartient à $\mathbf{C}^r(\Omega_\xi; \mathbf{H}^{s-r}([0,T]))$, $0 \leq r \leq s$. En particulier $v(\xi, \cdot) \in \mathbf{H}^s([0,T])$. Il est évident que z est aussi une solution de (3.1.30), et par l'unicité de la solution, $z \equiv v$ dans $\Omega_\xi \times [0,T]$. Par conséquent, $z(\xi, \cdot) \in \mathbf{H}^s([0,T])$.

❑

3.2 Atteignabilité d'un système hyperbolique 2×2 avec 2 commandes frontières

Revenons dans ce paragraphe au système (3.0.1)-(3.0.3). Nous pouvons constater qu'il s'agit d'un cas particulier du problème (3.1.1) avec $z = (y_1 \quad y_2)^T$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \; M_+ = (1 \quad -\alpha), \; M_- = (-\beta \quad 1). \tag{3.2.1}$$

C'est-à-dire que, en appliquant la proposition 3.1.3 avec $s = 1$, nous obtenons que pour un certain $T > 0$, si les conditions initiales $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ et les conditions frontières g_1, $g_2 \in \mathbf{H}^s([0,T])$ satisfont les conditions de compatibilité d'ordre 1 (3.1.28) en $(0,0)$ et $(0,L)$, alors la solution $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ de (3.0.1)-(3.0.3) appartient à $\mathbf{C}^r([0,T]; \mathbf{H}^{1-r}(\Omega))$, $0 \leq r \leq 1$. En se fondant sur ce résultat, nous allons établir l'atteignabilité de ce système :

Lemme 3.2.1. *Soient* $z_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ *et* $z_T = \begin{pmatrix} y_{1T} \\ y_{2T} \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega)$, T *satisfaisant :*

$$T > 2 \max \left\{ \int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)} \right\} \tag{3.2.2}$$

Il existe $g_1 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ *et* $g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ *tels que la solution de (3.0.1)-(3.0.3) satisfait :*

$$z(0) = z_0, \quad z(T) = z_T \tag{3.2.3}$$

De plus, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ *et* $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

Démonstration. Nous suivons la technique utilisée par [Cirina, 1969] (et généralisée par [Li et al., 2000] et [Wang, 2008]). Posons $T_1 = \displaystyle\int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}$ (resp. $T_2 = \displaystyle\int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)}$) le temps de propagation de l'onde issue du point $x = L$ (resp. $x = 0$) (voir la figure 3.1).

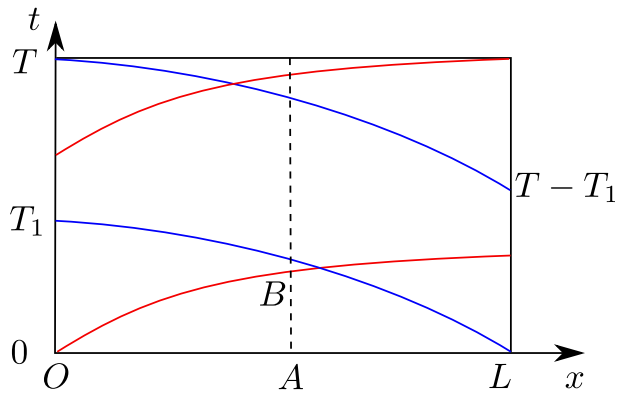

FIG. 3.1 – Notions utilisées dans la preuve de la proposition 3.2.1

Sans perte de généralité, supposons que $T_1 \geq T_2$. Prenons $\tilde{g}_1^d$, $\tilde{g}_2^d \in \mathbf{H}^1([0, T_1])$ satisfaisant les conditions de compatibilité :

$$\tilde{g}_1^d(0) = M_+ z_0(L), \quad \tilde{g}_2^d(0) = M_- z_0(0) \tag{3.2.4}$$

et résolvons le problème (3.0.1)-(3.0.3) dans $\Omega \times [0, T_1]$, avec g_i remplacé par $\tilde{g}_i^d$, $i = 1, 2$ et la condition initiale

$$z(0) = z_0, \quad \text{dans } \Omega \tag{3.2.5}$$

Par la proposition 3.1.3, la solution de ce problème z^d satisfait :

$$z^d(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ t \in [0, T_1]; \quad \text{et } z^d(\frac{L}{2}, \cdot) \in \mathbf{H}^1([0, T_1]) \tag{3.2.6}$$

Prenons ensuite $\tilde{g}_1^u$, $\tilde{g}_2^u \in \mathbf{H}^1(T - T_1, T)$ satisfaisant les conditions de compatibilité en $(0, T)$ et (L, T) :

$$\tilde{g}_1^u(T) = M_+ z_T(L), \quad \tilde{g}_2^u(T) = M_- z_T(0) \tag{3.2.7}$$

et résolvons le problème (3.0.1)-(3.0.3) dans $\Omega \times [T - T_1, T]$ en temps inverse de T à $T - T_1$, avec g_i, remplacé par $\tilde{g}_i^u$ $(i = 1, 2)$ et avec la condition à $t = T$:

$$z(T) = z_T \quad \text{dans } \Omega \tag{3.2.8}$$

Par la proposition 3.1.3, la solution z^u de ce problème satisfait :

$$z^u(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ t \in [T - T_1, T]; \quad \text{et } z^u(\frac{L}{2}, \cdot) \in \mathbf{H}^1([T - T_1, T]) \tag{3.2.9}$$

Maintenant, considérons la fonction $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ construite de façon suivante :

$$\xi(t) = \begin{cases} z^d(\frac{L}{2}, t),\ t \in [0, T_1] \\ z^u(\frac{L}{2}, t),\ t \in [T - T_1, T] \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Puisque $T > 2T_1$, la valeur de $\xi(t)$, $t \in [T_1, T - T_1]$ peut être choisie telle que $\xi \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

Considérons à présent le problème suivant :

$$\begin{aligned} \partial_x y_1 &= \lambda_1^{-1}\partial_t y_1 - \lambda_1^{-1}\gamma_1 y_1 - \lambda_1^{-1}\delta_1 y_2 \\ \partial_x y_2 &= \lambda_2^{-1}\partial_t y_2 - \lambda_2^{-1}\gamma_2 y_1 - \lambda_2^{-1}\delta_2 y_2 \end{aligned}, \tag{3.2.11}$$

dans $\Omega_l = [0, \frac{L}{2}] \times [0,T]$, qui a la même forme que (3.0.1) mais les rôles de x et de t sont échangés. La condition "initiale" est maintenant spécifiée à $x = \frac{L}{2}$:

$$z(\frac{L}{2}, t) = \xi(t),\ t \in [0,T], \tag{3.2.12}$$

et les conditions aux frontières sont spécifiées à $t = 0$ et à $t = T$:

$$y_1(x,0) = y_{10}(x),\ y_2(x,T) = y_{2T}(x),\ x \in [0, \frac{L}{2}]. \tag{3.2.13}$$

Notons la solution de (3.2.11)-(3.2.13) par $z^l = \begin{pmatrix} y_1^l \\ y_2^l \end{pmatrix}$. Nous constatons que z^d satisfait également (3.2.11)-(3.2.13) dans la triangle OAB (voir la figure 3.1). Par l'unicité de la solution, nous obtenons :

$$y_2^l(x,0) = y_2^d(x,0) = y_{20}(x), \quad x \in [0, L/2] \tag{3.2.14}$$

De même, nous avons :

$$y_1^l(x,T) = y_1^u(x,T) = y_{1T}(x), \quad x \in [0, L/2] \tag{3.2.15}$$

Considérons ensuite la solution $z^r = \begin{pmatrix} y_1^r \\ y_2^r \end{pmatrix}$ du problème :

$$\begin{aligned} \partial_x y_1 &= \lambda_1^{-1}\partial_t y_1 - \lambda_1^{-1}\gamma_1 y_1 - \lambda_1^{-1}\delta_1 y_2 \\ \partial_x y_2 &= \lambda_2^{-1}\partial_t y_2 - \lambda_2^{-1}\gamma_2 y_1 - \lambda_2^{-1}\delta_2 y_2 \end{aligned}, \tag{3.2.16}$$

dans $\Omega_r = [\frac{L}{2}, L] \times [0,T]$, avec la condition "initiale" :

$$z(\frac{L}{2}, t) = \xi(t),\ t \in [0,T], \tag{3.2.17}$$

et les conditions aux frontières :

$$y_2(x,0) = y_{20}(x),\ y_1(x,T) = y_{1T}(x),\ x \in [L/2, L], \tag{3.2.18}$$

En utilisant l'argument utilisé précédemment pour z^l, nous avons :

$$\begin{array}{l} y_1^r(x,0) = y_1^d(x,0) = y_{10}(x), \\ y_2^r(x,T) = y_2^u(x,T) = y_{2T}(x) \end{array}, \quad x \in [L/2, L] \tag{3.2.19}$$

Définissons maintenant $z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ étant z^l dans Ω_l, z^r dans Ω_r ; $g_1(t) = y_1(L,t) - \alpha y_2(L,t)$, $g_2(t) = y_2(0,t) - \beta y_1(0,t)$, alors z et g_i, $i = 1,2$ satisfont (3.0.1), (3.0.3) et (3.2.3). De plus $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ et $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

❑

Ce lemme garantit donc bien l'atteignabilité du système (3.0.1)-(3.0.3) au sens de la définition 2.3.1.

3.3 Atteignabilité d'un système hyperbolique 2×2 avec 1 commande frontière

Nous considérons ici le même système que (3.0.1), mais avec une seule commande g_1 à $x = L$. Nous avons également l'atteignabilité du système (3.0.1)-(3.0.3) :

Lemme 3.3.1. *Soient* $z_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ *et* $z_T = \begin{pmatrix} y_{1T} \\ y_{2T} \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega)$, T *satisfaisant :*

$$T > 2 \max \left\{ \int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)} \right\} \tag{3.3.1}$$

et $g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$, $g_2(0) = M_- z_0(0)$ *et* $g_2(T) = M_- z_T(0)$. *Il existe* $g_1 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ *tel que la solution de (3.0.1)-(3.0.3) satisfait :*

$$z(0) = z_0, \quad z(T) = z_T \tag{3.3.2}$$

De plus, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ *et* $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

Démonstration. Posons T_1 et T_2 comme dans la démonstration du lemme 3.2.1, et supposons aussi que $T_1 \geq T_2$.

Prenons $\tilde{g}_1^d \in \mathbf{H}^1([0,T_1])$ satisfaisant la condition de compatibilité :

$$\tilde{g}_1^d(0) = M_+ z_0(L) \tag{3.3.3}$$

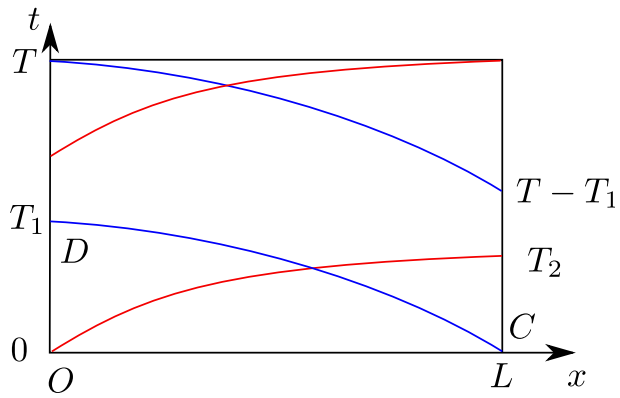

FIG. 3.2 – Notions utilisées dans la preuve de la proposition 3.3.1

et résolvons le problème (3.0.1)-(3.0.3) dans $\Omega \times [0, T_1]$, avec g_1 remplacé par $\tilde{g}_1^d$. Notons la solution obtenue par $z^d = \begin{pmatrix} y_1^d \\ y_2^d \end{pmatrix}$. De façon similaire, prenons $\tilde{g}_1^u \in \mathbf{H}^1([T - T_1, T])$ satisfaisant la condition de compatibilité :

$$\tilde{g}_1^u(T) = M_+ z_T(L) \tag{3.3.4}$$

et résolvons le problème (3.0.1)-(3.0.3) dans $\Omega \times [T - T_1, T]$ en temps inverse, avec g_1 remplacé par $\tilde{g}_1^u$. La solution de ce problème est donc $z^u = \begin{pmatrix} y_1^u \\ y_2^u \end{pmatrix}$. Nous construisons $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ de façon suivante :

$$\xi(t) = \begin{cases} z^d(0,t) & \text{si } t \in [0, T_1] \\ z^u(0,t) & \text{si } t \in [T - T_1, T] \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Choisissons ensuite $\xi_1(t)$, $t \in [T_1, T - T_1]$ tel que $\xi_1 \in \mathbf{H}^1([0, T])$. Prenons $\xi_2(t) = g_2(t) + \beta \xi_1(t)$, $t \in [T_1, T - T_1]$, alors $\xi_2 \in \mathbf{H}^1([0, T])$. Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{aligned} \partial_x y_1 &= \lambda_1^{-1} \partial_t y_1 - \lambda_1^{-1} \gamma_1 y_1 - \lambda_1^{-1} \delta_1 y_2 \\ \partial_x y_2 &= \lambda_2^{-1} \partial_t y_2 - \lambda_2^{-1} \gamma_2 y_1 - \lambda_2^{-1} \delta_2 y_2 \end{aligned}, \tag{3.3.6}$$

dans $\Omega \times [0, T]$, avec la condition initiale :

$$z(0,t) = \xi(t), \quad t \in [0, T] \tag{3.3.7}$$

et les conditions frontières :

$$y_2(x, 0) = y_{20}(x), \quad y_1(x, T) = y_{1T} x, \quad x \in \Omega. \tag{3.3.8}$$

Nous allons montrer que le solution $z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ de ce problème satisfait les conditions du lemme 3.3.1. Nous constatons que z^d est aussi une solution de (3.3.6)-(3.3.8) dans le

triangle OCD, et par l'unicité de la solution, nous avons :

$$y_1(x,0) = y_1^d(x,0) = y_{10}(x), \quad x \in \Omega \tag{3.3.9}$$

Par un même raisonnement, nous obtenons :

$$y_2(x,T) = y_2^u(x,T) = y_{2T}(x), \quad x \in \Omega \tag{3.3.10}$$

Prenons $g_1(t) = y_1(L,t) - \alpha y_2(L,t)$, $t \in [0,T]$, alors z et g_1 satisfont (3.0.1)-(3.0.3) et (3.3.2). Les faits que $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ et $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$ sont dérivés en utilisant la proposition 3.1.3.

❑

3.4 COHG pour des systèmes hyperboliques 2×2

Rappelons que le système à commander est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \lambda_1(x)\partial_x y_1 + \gamma_1(x) y_1 + \delta_1(x) y_2 \\ \partial_t y_2 = \lambda_2(x)\partial_x y_2 + \gamma_2(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 \end{cases}, \quad (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty) \tag{3.4.1}$$

avec les conditions initiales :

$$y_1(x,0) = y_{10}(x), \quad y_2(x,0) = y_{20}(x), \quad x \in [0,L]. \tag{3.4.2}$$

et les conditions frontières :

$$\begin{cases} y_1(L,t) = g_1(t) + \alpha y_2(L,t) \\ y_2(0,t) = g_2(t) + \beta y_1(0,t) \end{cases}, \quad t \in [0,\infty) \tag{3.4.3}$$

Afin de pouvoir mettre ce système sous forme abstraite (voir le paragraphe ci-dessous), nous ajoutons des intégrateurs sur les commandes g_1 et g_2 :

$$\dot{g}_1(t) = u_1(t), \quad \dot{g}_2(t) = u_2(t). \tag{3.4.4}$$

3.4.1 Formulation abstraite

Nous suivons la procédure décrite au paragraphe 2.5 pour mettre le système (3.4.1)-(3.4.3) sous forme abstraite (2.0.1). En fait, ce problème peut être reformulé sous la forme :

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = \mathfrak{A} z(t), \quad z(0) = z_0, \\ &\mathfrak{B} z(t) = g(t), \\ &z(t) \in Z, \quad g(t) \in G \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

où $Z = \mathbf{L}_2([0,L],\mathbb{R}^2)$, $G = \mathbb{R}^2$, $z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ et

$$\mathfrak{A}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4.6}$$

avec le domaine

$$\mathbf{D}(\mathfrak{A}) = \{h = (h_1\ h_2)^T \in Z \mid h \text{ est absolument continue}, \frac{dh}{dx} \in \mathbf{L}_2([0,L],\mathbb{R}^2)\}. \tag{3.4.7}$$

L'opérateur frontière $\mathfrak{B} : \mathbf{L}_2([0,L],\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ est définie par :

$$\mathfrak{B}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(L) - \alpha h_2(L) \\ -\beta h_1(0) + h_2(0) \end{pmatrix} \tag{3.4.8}$$

Définissons

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{3.4.9}$$

avec le domaine

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \cap \ker \mathfrak{B} = \ & \{h = (h_1 \quad h_2)^T \in \mathbf{L}_2([0,T],\mathbb{R}^2) \mid h \text{ est absolument continue}, \\ & \frac{dh}{dx} \in \mathbf{L}_2([0,L],\mathbb{R}^2),\ h_1(L) - \alpha h_2(L) = -\beta h_1(0) + h_2(0) = 0\} \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

et

$$\mathcal{B}g = \begin{pmatrix} \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{L-x}{L} \end{pmatrix} g, \quad g \in G \tag{3.4.11}$$

Avec la majoration (3.1.27), il est évident que $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe (voir aussi [Zwart et al., 2009]). De plus, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(G,Z)$, $\mathfrak{B}\mathcal{B}g = g$, $\forall g \in G$ et

$$\mathfrak{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 + \gamma_1 x}{L} & \frac{\delta_1(L-x)}{L} \\ \frac{\gamma_2 x}{L} & \frac{-\lambda_2 + \delta_2(L-x)}{L} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(G,Z). \tag{3.4.12}$$

Ainsi, le système (3.4.1)-(3.4.3) appartient à la famille de systèmes de commande frontière (voir définition 2.5.1) et peut être reformulé sous forme abstraite. En introduisant les nouvelles variables :

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = z(t) - \mathcal{B}g(t) \tag{3.4.13}$$

ou explicitement

$$v_1(x,t) = y_1(x,t) - \frac{x}{L} g_1(t), \quad v_2(x,t) = y_2(x,t) - \frac{L-x}{L} g_2(t), \tag{3.4.14}$$

les commandes auxiliaires :

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \dot{g}(t) \tag{3.4.15}$$

et l'état étendu $z^e(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in Z^e = \mathbb{R}^2 \oplus Z$, nous obtenons

$$\dot{z}^e(t) = \mathcal{A}^e z^e(t) + \mathcal{B}^e u(t), \quad z^e(0) = \begin{pmatrix} g(0) \\ z_0 - \mathcal{B} g(0) \end{pmatrix} \tag{3.4.16}$$

où

$$\mathcal{A}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{A}\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\lambda_1 + \gamma_1 x}{L} & \dfrac{\delta_1(L-x)}{L} & \lambda_1 \dfrac{d}{dx} + \gamma_1 & \delta_1 \\ \dfrac{\gamma_2 x}{L} & \dfrac{-\lambda_2 + \delta_2(L-x)}{L} & \gamma_2 & \lambda_2 \dfrac{d}{dx} + \delta_2 \end{pmatrix} \tag{3.4.17}$$

avec son domaine $\mathbf{D}(\mathcal{A}^e) = G \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A})$ est le générateur d'un C_0-semigroupe, et

$$\mathcal{B}^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{x}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{L-x}{L} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, Z^e), \tag{3.4.18}$$

Les variables originales sont retrouvées grâce à la relation :

$$\begin{pmatrix} g(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathcal{C} z^e(t), \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B} & I \end{pmatrix} \tag{3.4.19}$$

Ainsi, toutes les analyses présentées au chapitre 2 peuvent être appliquées au système (3.4.1)-(3.4.3).

3.4.2 Approche avec coût final

Afin d'appliquer l'approche avec coût final, nous avons besoin d'une fonction de coût final satisfaisant la relation du théorème 2.2.1, c'est-à-dire qu'il faut trouver des fonctions $E(z) = \langle z^e, \mathcal{M}z^e \rangle$ et $F(z^e, u) = \langle \mathcal{C}z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C}z^e \rangle + \langle u, \mathcal{R}u \rangle$ telles que pour toute condition initiale z_0^e, il existe une commande $u_K(\tau)$ satisfaisant :

$$\dot{E}(z^e(\tau)) + F(z^e(\tau), u_K(\tau)) \leq 0 \tag{3.4.20}$$

tout au long de la trajectoire de (3.4.16) et $F(z^e, u) \geq \epsilon \|z^e\|^2$ pour un certain $\epsilon > 0$. Pour les cas généraux de systèmes (3.4.1), trouver les fonctions E et F n'est pas une tâche facile. Il nous faut toujours faire l'hypothèse d'une forme particulière de E. Par exemple, si nous prenons :

$$E(z^e) = \int_0^L s_1(x)y_1^2(x) + s_2(x)y_2^2(x)dx + g^T P g = \int_0^T z^T S(x) z dx + g^T P g \tag{3.4.21}$$

où $S(x) = \mathrm{diag}(s_1(x), s_2(x))$, en utilisant la relation :

$$\begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{C}z^e, \text{avec } \mathcal{C} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B} & I \end{pmatrix} \tag{3.4.22}$$

$E(z^e)$ peut être mis sous la forme $E(z^e) = \langle z^e, \mathcal{M}z^e \rangle$, avec $\mathcal{M} = \mathcal{C}^* \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \mathcal{C}$.

Pour simplifier l'écriture, nous posons $\Lambda(x) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x))$ et $\Gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) & \delta_1(x) \\ \gamma_2(x) & \delta_2(x) \end{pmatrix}$. Alors, le long de la trajectoire de (3.4.1) :

$$\begin{aligned}
\dot{E}(z^e(\tau)) &= \int_0^L \partial_\tau z^T(x,\tau) S z(x,\tau) + z^T(x,\tau) S \partial_\tau z(x,\tau) dx + \dot{g}^T P g + g^T P \dot{g} \\
&= \int_0^L \Big[\partial_x z^T(x,\tau) \Lambda S z(x,\tau) + z^T(x,\tau) S \Lambda \partial_x z(x,\tau) \\
&\quad + z^T(x,\tau)(\Gamma^T S + S\Gamma) z(x,\tau) \Big] dx + 2g^T(\tau) P u(\tau) \\
&= \Big[z^T(x,\tau) \Lambda S z(x,\tau) \Big]_0^L + 2g^T(\tau) P u(\tau) \\
&\quad + \int_0^L z^T(x,\tau)(-(\Lambda S)' + \Gamma^T S + S\Gamma) z(x,\tau) dx
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

où la notation f' désigne la dérivée de f en x. Nous pouvons considérer une commande par retour d'état $u_K(\tau) = -Kg(\tau)$ $(K > 0)$ et la fonction F sous la forme :

$$\begin{aligned}
F(z^e, u) &= \int_0^L z^T Q(x) z dx + g^T P_f g + u^T R u \\
&= \langle \mathcal{C}z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C}z^e \rangle + \langle u, \mathcal{R}u \rangle
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

où $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} P_f & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ et $\mathcal{R} = R > 0$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.4.1. *Soient $Q(x)$, $P_f > 0$ et $\mathcal{Q}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(Z^e)$ ayant la forme*

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} P_f & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B} & I \end{pmatrix} \tag{3.4.25}$$

Alors $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ est coercif.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} &= \begin{pmatrix} I & \mathcal{B}^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_f & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_f & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B}^*Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q\mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}^*Q\mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

La dernière inégalité peut être mise sous la forme :

$$\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} = \begin{pmatrix} P_f + (1-\rho)\mathcal{B}^*Q\mathcal{B} & 0 \\ 0 & (1-\frac{1}{\rho})Q \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} I & \rho\mathcal{B}^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \rho\mathcal{B} & I \end{pmatrix} \tag{3.4.27}$$

avec une certaine constante $\rho > 1$. Puisque Q et $\mathcal{B}$ sont bornés, pour ρ assez proche de 1, il existe $\epsilon > 0$ telle que :

$$\begin{pmatrix} P_f + (1-\rho)\mathcal{B}^*Q\mathcal{B} & 0 \\ 0 & (1-\frac{1}{\rho})Q \end{pmatrix} \geq \epsilon I. \tag{3.4.28}$$

Ainsi, à partir de (3.4.27), nous obtenons : $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} \geq \epsilon I$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ est coercif.

❑

Une conséquence directe de ce lemme est $F(z^e, u) \geq \epsilon \|z^e\|^2$. Nous calculons maintenant :

$$\begin{aligned} & \dot{E}(z^e(\tau)) + F(z^e(\tau), u_K(\tau)) \\ = & \left[z^T(x,\tau)\Lambda S z(x,\tau)\right]_0^L + g^T(\tau)(P_f + K^T R K - 2PK)g(\tau) \\ & + \int_0^L z^T(x,\tau)(-(\Lambda S)' + \Gamma^T S + S\Gamma + Q)z(x,\tau)dx \end{aligned} \tag{3.4.29}$$

Nous allons traiter les termes aux frontières. Pour simplicité, nous notons $\lambda_{1L} = \lambda_1(L)$, $\lambda_{10} = \lambda_1(0)$ et ainsi de suite. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left[z^T(x,\tau)\Lambda S z(x,\tau)\right]_0^L + g^T(\tau)(P_f + K^T RK - 2PKg)(\tau) \\
= \;& \lambda_{1L}s_{1L}g_1^2 + 2\alpha\lambda_{1L}s_{1L}g_1y_{2L} + (\lambda_{1L}s_{1L}\alpha^2 + \lambda_{2L}s_{2L})y_{2L}^2 \\
&-(\lambda_{10}s_{10} + \lambda_{20}s_{20}\beta^2)y_{10}^2 - \lambda_{20}s_{20}g_2^2 - 2\beta\lambda_{20}s_{20}g_2y_{10}^2 + g^T(\tau)(P_f + K^T RK - 2PK)g(\tau) \\
= \;& (g_1 \quad y_{2L})G_1\begin{pmatrix} g_1 \\ y_{2L}\end{pmatrix} + (g_2 \quad y_{10})G_2\begin{pmatrix} g_2 \\ y_{10}\end{pmatrix} + g^T(\tau)(\Phi + P_f + K^T RK - 2PK)g(\tau)
\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

où

$$G_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{1L}s_{1L} - \phi_1 & \alpha\lambda_{1L}s_{1L} \\ \alpha\lambda_{1L}s_{1L} & \lambda_{1L}s_{1L}\alpha^2 + \lambda_{2L}s_{2L}\end{pmatrix}, \; G_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_{20}s_{20} - \phi_2 & -\beta\lambda_{20}s_{20} \\ -\beta\lambda_{20}s_{20} & -\lambda_{10}s_{10} - \lambda_{20}s_{20}\beta^2\end{pmatrix}$$

et $\Phi = \mathrm{diag}(\phi_1, \phi_2)$. Si

$$\lambda_{1L}s_{1L}\alpha^2 + \lambda_{2L}s_{2L} < 0 \quad \text{et} \quad -\lambda_{10}s_{10} - \lambda_{20}s_{20}\beta^2 < 0, \tag{3.4.31}$$

alors nous pouvons choisir ϕ_1 et ϕ_2 suffisamment grands, pour que $G_1 < 0$ et $G_2 < 0$. Nous prenons ensuite un P suffisamment grand pour que $\Phi + P_f + K^T RK - 2PK < 0$. Avec ces paramètres, les termes aux frontières de (3.4.29) sont négatifs. Nous constatons que si $\alpha = \beta = 0$, les conditions (3.4.31) sont satisfaites, et nous pouvons prendre $\phi_1 = \phi_2 = 0$ et $P = \dfrac{1}{2}RK$.

Le coeur du problème est de trouver les opérateur S et Q tels que :

$$Q(x) > 0, \text{ et } -(\Lambda S)' + \Gamma^T S + S\Gamma + Q \leq 0 \tag{3.4.32}$$

Dans [Bastin & Coron, 2010], les auteurs ont montré que l'existence de tels S et Q dépend de l'existence de la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\eta'(x) = |a(x) + b(x)\eta^2(x)|, \; x \in [0, L], \; \eta(0) = 0, \tag{3.4.33}$$

où

$$a(x) = \frac{\phi(x)\delta_2(x)}{\lambda_2(x)}, \quad b(x) = \frac{-\gamma_1(x)}{\phi(x)\lambda_1(x)}, \quad \phi(x) = e^{\int_0^x \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2} - \frac{\delta_1}{\lambda_2}\right)ds} \tag{3.4.34}$$

Nous voyons que vérifier la condition d'existence de (3.4.33) est très difficile analytiquement ainsi que numériquement. Dans la suite, nous considérons un cas particulier de (3.4.1) où les coefficients sont indépendants de x et $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta < 0$. Nous avons dans ce cas la forme explicite de E et F, qui est inspirée de la fonction de Lyapunov proposée dans [Coron et al., 2009]. Prenons :

$$s_1(x) = -\gamma e^{\mu x} > 0, \quad s_2(x) = -\delta e^{-\mu x} > 0, \quad x \in [0, L], \tag{3.4.35}$$

avec $\mu > 0$ à déterminer. Nous calculons

$$H(x) = -(\Lambda S)' + \Gamma S + S\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma(\lambda_1\mu - 2\gamma)e^{\mu x} & -\gamma\delta(e^{-\mu x} + e^{\mu x}) \\ -\gamma\delta(e^{-\mu x} - e^{\mu x}) & \delta(-\lambda_2\mu - 2\delta)e^{-\mu x} \end{pmatrix}. \tag{3.4.36}$$

En suivant l'analyse faite dans [Coron et al., 2009], il existe $\mu > 0$ tel que $H(x) < 0$ pour tout $x \in [0, L]$.

Prenons $Q(x) = \epsilon I$, avec $\epsilon = -\max_{x\in[0,L]} \lambda_{max}(H(x)) > 0$ où $\lambda_{max}(\cdot)$ désigne la partie réelle maximale des valeurs propres d'une matrice, alors les inégalités de (3.4.32) sont satisfaites. Ainsi, pour le cas où les coefficients sont constants et $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta < 0$, nous avons trouvé les fonctions E et F satisfaisant le théorème 2.2.1. Cela signifie que la CHOG peut être appliquée pour garantir la stabilité exponentielle dans ce cas.

Remarque 3.4.1. La démonstration de la stabilité de la COHG avec coût final présentée dans le paragraphe ci-dessus forme une base formelle qui nous permettra exploiter dans les travaux à venir les autres avantages de cette stratégie, telles que la robustesse ou la prise en compte de contraintes sur la commande et/ou sur l'état.

3.4.3 Approche avec état final fixé à zéro

Contrairement à l'approche avec coût final, la fonction de coût de l'approche avec état final fixé à zéro peut être librement choisie. Par contre, il nous faut vérifier la faisabilité du problème d'optimisation à chaque instant d'échantillonnage. En combinant les résultats sur la stabilité de la COHG (théorème 2.3.1) et sur l'atteignabilité des systèmes hyperboliques 2×2 (lemme 3.2.1), nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.4.2. *Supposons que y_{10} et $y_{20} \in \mathbf{H}^1([0, L])$ et g_1, g_2 satisfont les conditions de compatibilité*

$$y_{10}(L) = g_1(0) + \alpha y_{20}(L), \quad y_{20}(0) = g_2(0) + \beta y_{10}(0) \tag{3.4.37}$$

alors l'approche de COHG avec état final fixé à zéro (2.3.1) garantit la stabilité du système (3.4.1)-(3.4.3) avec la fonction de coût quadratique

$$F(z^e, u) = \langle \mathcal{C}z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C}z^e\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle \tag{3.4.38}$$

pour un certain opérateur $\mathcal{Q}$ coercif, et $T > 2\max\left\{\int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)}\right\}$.

Démonstration. Nous allons vérifier les conditions du théorème 2.3.1, avec $V = \mathbf{D}(\mathcal{A}^e) \subset Z^e$. Notons par $\tilde{z}^e(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ la solution de (3.4.1)-(3.4.3). Rappelons que l'état étendu

z^e est lié à l'état du système original par $z^e(t) = \mathcal{C}^{-1}\tilde{z}^e(t)$. Définissons l'ensemble $\tilde{V}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{V} = \{\tilde{z}^e = (g_1 \quad g_2 \quad y_1 \quad y_2)^T \mid y_1,\, y_2 \in \mathbf{H}^1([0,L]),\\ y_1(L) - \alpha y_2(L) = g_1,\, y_2(0) - \beta y_1(0) = g_2\}\end{aligned} \tag{3.4.39}$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{V} = \mathcal{C}V$. Considérons maintenant $z_T^e \in V$, alors $\mathcal{C}z_T^e \in \tilde{V}$. Puisque $\tilde{z}_0^e = (g_1(0) \quad g_2(0) \quad y_{10} \quad y_{20})^T \in \tilde{V}$ et en appliquent le lemme 3.2.1, le système (3.4.1)-(3.4.3) est exactement atteignable à $\tilde{V}$, il existe une commande $u \in \mathbf{L}_2([0,T])$ telle que $\tilde{z}^e(T) = \mathcal{C}z_T^e$. Alors, l'état étendu satisfait $z^e(T) = \mathcal{C}^{-1}\tilde{z}^e(T) = z_T^e$, c'est-à-dire que le système (3.4.16) est exactement atteignable à V sur $[0,T]$.

De plus, $\tilde{z}^e(t) \in \tilde{V}$ entraîne $z^e(t) \in V$ pour tout $t \in [0,T]$, ce qui signifie que V est invariant.

Finalement, en appliquent le lemme 3.4.1, $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ est coercif. Le théorème 2.3.1 s'applique et la stabilité de la boucle fermée avec l'approche de COHG est garantie.

❑

Par une même argumentation, nous pouvons utiliser le résultat du théorème 2.3.1 et celui du lemme 3.3.1 pour montrer la stabilité de la COHG pour le système (3.4.1)-(3.4.3) avec une seule commande frontière.

Théorème 3.4.3. *Supposons que* y_{10} *et* $y_{20} \in \mathbf{H}^1([0,L])$ *et* g_1 *satisfont les conditions de compatibilité*

$$y_{10}(L) = g_1(0) + \alpha y_{20}(L), \tag{3.4.40}$$

alors l'approche de CHOG avec état final fixé à zéro (2.3.1) garantit la stabilité du système (3.4.1)-(3.4.3) avec $g_2 \equiv 0$ *et la fonction de coût quadratique*

$$F(z^e, u) = \langle \mathcal{C}z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C}z^e\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle \tag{3.4.41}$$

pour un certain opérateur $\mathcal{Q}$ *coercif, et* $T > 2\max\left\{\int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)}\right\}$.

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié la régularité de la solution d'une classe de systèmes hyperboliques 2×2 et la propriété d'atteignabilité pour ce type de système. Les deux approches de la COHG, l'une avec coût final et l'autre avec état final fixé à zéro, ont été considérées et les preuves de stabilité ont été établies. La première approche dépend de l'existence de la fonction de coût final et ne peut être appliquée qu'à certains systèmes particuliers. Par contre, la deuxième approche, en combinant avec le résultat

de l'atteignabilité, peut être appliquée à tous les systèmes hyperboliques 2×2, ce qui fait la contribution majeure de ce chapitre.

Soulignons que la généralisation des résultats présentés dans ce chapitre pour des systèmes hyperboliques $n \times n$ est possible en suivant la même démarche. Un cas particulier de tels systèmes, correspondant à un réseau de systèmes hyperboliques 2×2, sera étudié au chapitre 5.

Chapitre 4

Les équations de Saint-Venant linéarisées

Ce chapitre est consacré à l'application de la COHG à la stabilisation d'un écoulement dans un canal à surface libre de type de canal d'irrigation ainsi que la mise en ouvre numérique de la commande. Le paragraphe 4.1 présente brièvement la modélisation de ce système ainsi que les modèles linéarisés qui seront utilisés pour la synthèse de la COHG en rappelant aussi que ce type d'application a fait l'objet de plusieurs étude ces dernières années (voir par exemple [Coron et al., 2007], [Coron et al., 2009] et [Litrico & Fromion, 2009*b*]). Dans le paragraphe 4.2, nous considérons le modèle linéarisé autour d'un profil d'équilibre uniforme dont la structure correspond à la configuration étudiée au paragraphe 3.4.2, ce qui nous permet d'utiliser l'approche de la COHG avec coût final. Une résolution numérique de la commande optimale est proposée en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseaux (MBR) dont l'efficacité et la précision ont été établies pour résoudre des EDPs diverses [Chopard & Droz, 2005], [Junk & Rheinlainder, 2008], et en particulier les équations de Saint-Venant [Pham, Chopard, Lefèvre, Ondo & Mendes, 2010]. Dans le paragraphe 4.3, nous étudions le modèle linéarisé autour d'un profil d'équilibre non uniforme. Dans ce cas, nous obtenons un système hyperbolique dont les coefficients ne sont plus constants. Cependant, comme montré au paragraphe 3.4.3, l'approche de la COHG avec état final fixé à zéro peut garantir la stabilité. Un schéma numérique pour calculer la commande optimale, fondant sur la méthode dite de Galerkin (voir par exemple [Fletcher, 1991] ou [Szymkiewicz, 2010]), est également élaboré. Des résultats de simulation sont présentés pour illustrer les performances et la validité des approches proposées.

4.1 Introduction aux équations de Saint-Venant

Nous considérons ici un écoulement dans un canal rectangulaire dont la longueur est L et la largeur est B. Le débit et la hauteur d'un tel écoulement sont classiquement modélisés par les équations dites de Saint-Venant qui sont obtenues à partir des lois de conservation du moment et de la masse sous certaines hypothèses. Ces hypothèses sont : la pente est faible, la longueur est beaucoup plus grande que la hauteur d'eau, la distribution de la pression est hydrostatique, le fluide est incompressible, et enfin la viscosité interne est négligée (voir [Litrico & Fromion, 2009*b*]). Les équations de Saint-Venant sont donc :

$$\begin{cases} B\partial_t h + \partial_x Q & = & 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\dfrac{Q^2}{Bh} + \dfrac{1}{2} B g h^2 \right) & = & gBh(I - J(Q,h)) \end{cases}, \ (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty) \tag{4.1.1}$$

où h est le niveau d'eau, Q le débit, g l'accélération de la gravité, I la pente du canal.

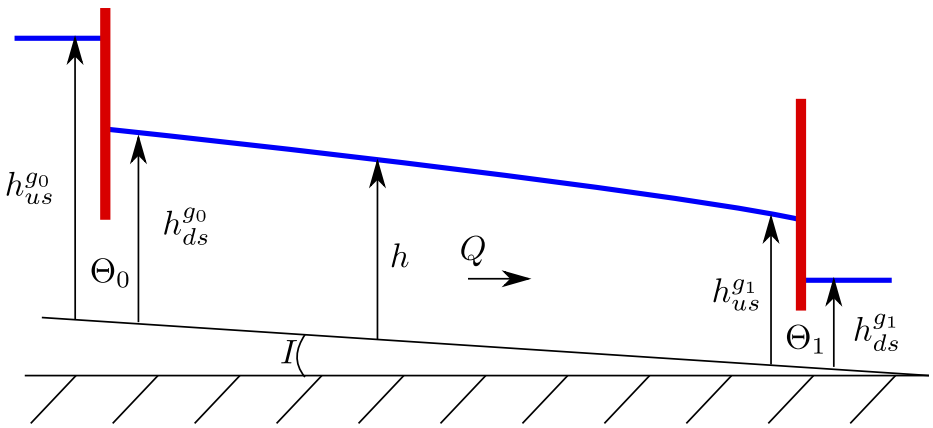

FIG. 4.1 – Coupe longitudinale d'un canal à surface libre

Le terme de frottement J peut être modélisé par la formule de Manning (voir [Graf & Altinakar, 2000]) :

$$J(h,Q) = \frac{Q^2}{k^2 B^2 h^2 \left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3}}, \tag{4.1.2}$$

où k est le coefficient de Manning-Strickler (noté MS dans la suite).

Les conditions frontières sont spécifiées par les équations de vanne à $x = 0$ et à $x = L$ (voir [Graf & Altinakar, 2000]) :

$$\begin{aligned} Q^2(0,t) &= K_0^2 \Theta_0^2(t) 2g(h_{us}^{g_0} - h_{ds}^{g_0}), \\ Q^2(L,t) &= K_1^2 \Theta_1^2(t) 2g(h_{us}^{g_1} - h_{ds}^{g_1}), \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

où $h_{us}^{g_i}$ est la hauteur d'eau à l'amont, $h_{ds}^{g_i}$ la hauteur d'eau à l'aval de la vanne i ($i = 0, 1$). Les ouvertures des vannes $\Theta_0(t)$ et $\Theta_1(t)$ sont les entrées de commande. Enfin, K_0 et K_1 sont des constantes qui dépendent de la structure de la vanne.

Nous considérons un profil d'équilibre du système $(\bar{h}(x), \bar{Q}(x))$ qui doit satisfaire :

$$\begin{aligned} &\bar{Q} = \text{constante} \\ &\partial_x \bar{h}(x) = \frac{I - J(\bar{h}, \bar{Q})}{1 - \overline{Fr}^2}, \quad \overline{Fr} = \frac{\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}}}{\sqrt{g\bar{h}}}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

où $\overline{Fr}$ est le nombre de Froude du profil d'équilibre, qui représente le rapport entre la vitesse de l'écoulement $\dfrac{\bar{Q}}{B\bar{h}}$ et la vitesse de l'onde gravitationnelle $\sqrt{g\bar{h}}$. Nous considérons ensuite la variation de h et Q autour du profil $(\bar{h}, \bar{Q})$:

$$\tilde{h} = h - \bar{h}, \quad \tilde{Q} = Q - \bar{Q}. \tag{4.1.5}$$

Alors :

$$\begin{aligned} B\tilde{h}_t + \tilde{Q}_x &= 0, \\ \tilde{Q}_t + \frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}}\tilde{Q}_x + \left(Bg\bar{h} - \frac{\bar{Q}^2}{B\bar{h}^2}\right)\tilde{h}_x &= \left[\frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}^2}\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_Q\right]\tilde{Q} \\ &\quad + \left[gB(I - \bar{J}) - 2\frac{\bar{Q}^2\bar{h}_x}{B\bar{h}^3} - Bg\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_h\right]\tilde{h}. \end{aligned}$$

Désormais, pour des raisons de simplicité, la notation *tilde* $\tilde{\cdot}$ sera omise, et nous noterons par f_α la dérivée de f en α, et $\bar{f}$ la valeur de f à l'état d'équilibre $(\bar{h}, \bar{Q})$. Les équations ci-dessus se ré-écrivent :

$$\begin{aligned} h_t &= -B^{-1}Q_x, \\ Q_t &= \alpha(x)h_x + \beta(x)Q_x + \rho(x)h + \phi(x)Q, \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

où :

$$\begin{aligned} &\alpha = -Bg\bar{h} + \frac{\bar{Q}^2}{B\bar{h}^2}, \quad \beta = -\frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}}, \quad \rho = gB(I - \bar{J}) - 2\frac{\bar{Q}^2\bar{h}_x}{B\bar{h}^3} - Bg\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_h, \\ &\phi = \frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}^2}\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_Q. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Les conditions frontières (4.1.3) deviennent :

$$\begin{aligned} Q(0,t) &= K_0\Theta_0(t)\sqrt{2g(h_{us}^{g_0} - h(0,t) - \bar{h}(0))} + \bar{Q}(0) \\ Q(L,t) &= K_1\Theta_1(t)\sqrt{2g(h(L,t) + \bar{h}(L) - h_{ds}^{g_1})} + \bar{Q}(L) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Posons :

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 & -B^{-1} \\ \alpha(x) & \beta(x) \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho(x) & \phi(x) \end{pmatrix}.$$

Nous constatons que la matrice G possède 2 valeurs propres réelles données par :

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} - \sqrt{g\bar{h}}. \tag{4.1.9}$$

Considérons la matrice P constituée des vecteurs propres de G :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -B\lambda_1 & B\lambda_2 \end{pmatrix}, \text{avec } P^{-1} = \frac{1}{-2B\sqrt{g\bar{h}}} \begin{pmatrix} B\lambda_2 & 1 \\ B\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.10}$$

La matrice P nous permet de diagonaliser G comme suit :

$$P^{-1}GP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{4.1.11}$$

En appliquant la transformation :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} h \\ Q \end{pmatrix}, \tag{4.1.12}$$

nous obtenons un nouveau système en $(y_1 \quad y_2)^T$:

$$\partial_t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{4.1.13}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = P^{-1}GP_x + P^{-1}HP.$$

Nous pouvons calculer les ouvertures des vannes afin d'implémenter les conditions aux frontières sous la forme suivante :

$$y_1(L,t) = g_1(t), \quad y_2(0,t) = g_2(t). \tag{4.1.14}$$

En fait, grâce à la transformation (4.1.12), nous avons :

$$\begin{aligned} -2B\sqrt{g\bar{h}(L)}y_1(L,t) &= B\lambda_2 h(L,t) + Q(L,t) \\ -2B\sqrt{g\bar{h}(0)}y_2(0,t) &= B\lambda_1 h(0,t) + Q(0,t) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Donc, les ouvertures des vannes peuvent être déterminées en utilisant les relations (4.1.8) :

$$\begin{aligned}\Theta_1(t) &= \frac{-2B\sqrt{g\bar{h}(L)}g_1(t) - B\lambda_2 h(L,t) - \bar{Q}(L)}{K_1\sqrt{2g(h(L,t) + \bar{h}(L) - h_{ds}^{g_1})}} \\ \Theta_0(t) &= \frac{-2B\sqrt{g\bar{h}(0)}g_2(t) - B\lambda_1 h(0,t) - \bar{Q}(0)}{K_0\sqrt{2g(h_{ds}^{g_1} - h(0,t) - \bar{h}(0))}}\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Nous pouvons également introduire deux intégrateurs sur les conditions aux frontières afin de reformuler le problème sous forme abstraite (voir paragraphe 3.4) :

$$\dot{g}_1(t) = u_1(t), \quad \dot{g}_2(t) = u_2(t). \tag{4.1.17}$$

Selon la valeur du nombre de Froude, nous avons deux régimes d'écoulement différents :

• Si $\overline{Fr} < 1$: nous sommes dans le régime fluvial. Les deux valeurs propres de la matrice G sont de signes opposés $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. La variable y_1 représente l'onde se propageant de $x = L$ à $x = 0$, et la variable y_2 représente l'onde se propageant dans le sens inverse.

• Si $\overline{Fr} > 1$: nous sommes dans le régime torrentiel. Les deux valeurs propres sont négatives $0 > \lambda_1 > \lambda_2$. Les deux ondes y_1 et y_2 se propagent de $x = 0$ à $x = L$.

Dans ce travail, nous nous limitons à étudier l'écoulement fluvial. Dans ce régime, selon la relation entre la pente I et le frottement $J(\bar{h}, \bar{Q})$, nous avons des profils différents de $\bar{h}$.

• Si $J(\bar{h}, \bar{Q}) = I$, nous avons un profil d'équilibre uniforme :

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_0, \quad \bar{Q}(x) = \bar{Q}_0 \ , \quad x \in [0, L] \tag{4.1.18}$$

• Si $J(\bar{h}, \bar{Q}) \neq I$, nous avons un profil d'équilibre non uniforme qui est, soit un profil d'accélération ($J(\bar{h}, \bar{Q}) < I$), soit un profil de décélération ($J(\bar{h}, \bar{Q}) > I$).
Les différents régimes d'écoulement sont présentés sur la figure 4.2.

Le problème de commande de ce système a été étudié dans divers travaux précédents. Une approche naturelle est de discrétiser ce système en espace afin d'obtenir un modèle en dimension finie et puis utiliser les méthodes classiques pour synthétiser la commande. Dans cette catégorie, nous pouvons mentionner la commande PID de [Skertchly & Miles, 1996], la commande H_∞ de [Litrico & Fromion, 2006] ou la commande par linéarisation entrée-sortie de [Dulhoste et al., 2004]. Des approches qui utilisent les modèles en dimension infinie ont également été considérées. Dans [Coron et al., 2007] les auteurs ont proposé une fonction de Lyapunov pour déduire les commandes frontières qui stabilisent le système non linéaire (4.1.1) dans le cas d'un canal sans pente ni frottement. Cette fonction de Lyapunov a été simplifiée dans [Coron et al., 2009] pour les équations de Saint-Venant linéarisées avec pente et frottement autour d'un profil uniforme.

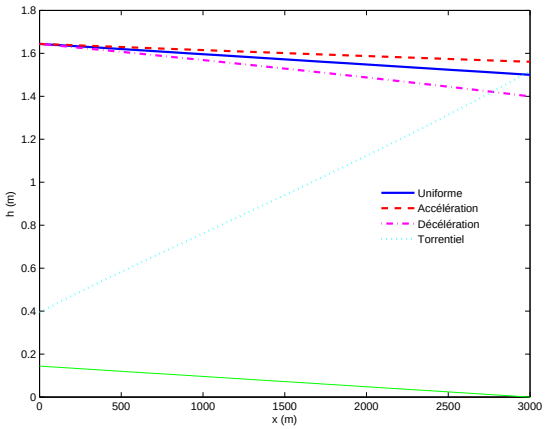

FIG. 4.2 – Profils de niveaux pour différents régimes d'écoulement

Cette commande a été testée expérimentalement dans [Santos et al., 2008] et [Santos & Prieur, 2008]. L'analyse de stabilité de ce système par la méthode des caractéristiques a été considérée dans [Prieur et al., 2008] et [Halleux et al., 2003]. L'approche de la COHG pour les *commandes frontières* des systèmes non linéaires (4.1.1) a aussi été étudiée dans [Georges, 2009], et résolue par l'approche du calcul variationnel. Une solution numérique de cette commande a également été proposée et validée en simulation, mais aucune preuve de la stabilité n'a été fournie.

En se fondant sur les analyses de stabilité présentées dans le chapitre précédent, nous allons étudier dans la suite deux approches de la COHG pour stabiliser deux modèles linéarisés du système (4.1.1) : autour d'un profil d'équilibre uniforme et autour d'un profil d'équilibre non uniforme.

4.2 Modèle linéarisé autour d'un profil uniforme

4.2.1 Stabilisation

La hauteur $\bar{h}$ et le débit $\bar{Q}$ doivent satisfaire la relation suivante :

$$I = J(\bar{h}, \bar{Q}) \tag{4.2.1}$$

Ainsi, étant donnée la hauteur $\bar{h}$, le débit correspondant est déterminé par :

$$\bar{Q} = kB\bar{h}\left(\frac{B\bar{h}}{B+2\bar{h}}\right)^{2/3}\sqrt{I}. \tag{4.2.2}$$

Nous allons montrer que le système (4.1.13) possède la structure étudiée au paragraphe 3.4.2. Puisque $\bar{Q}$ = constante et $\bar{h}$ = constante, nous avons :

$$\rho = -gB\bar{h}\bar{J}_h, \quad \phi = -gB\bar{h}\bar{J}_Q \tag{4.2.3}$$

et grâce à la structure particulière de H, P et P^{-1}, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = P^{-1}HP = -\frac{1}{2B\sqrt{g\bar{h}}} \begin{pmatrix} \rho - B\phi\lambda_1 & -\rho + B\phi\lambda_2 \\ \rho - B\phi\lambda_1 & -\rho + B\phi\lambda_2 \end{pmatrix} \tag{4.2.4}$$

alors $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -\dfrac{\rho - B\phi\lambda_1}{2B\sqrt{g\bar{h}}}$ et $\delta_1 = \delta_2 = \delta = -\dfrac{-\rho + B\phi\lambda_2}{2B\sqrt{g\bar{h}}}$.

Nous allons montrer que $\gamma < 0$ et $\delta < 0$. Tout d'abord, nous étudions la fonction suivante

$$f(h) = k^2B^2h^2\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3} \tag{4.2.5}$$

qui est le dénominateur du terme de frottement J. Alors :

$$f'(h) = k^2B^2\left[2h\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3} + \frac{4}{3}\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{7/3}\right] > 0 \tag{4.2.6}$$

Nous avons donc :

$$\rho = -gB\bar{h}\bar{J}_h = \frac{gB\bar{h}\bar{Q}^2f'(\bar{h})}{f^2(\bar{h})} > 0,\ \phi = -gB\bar{h}\bar{J}_Q = -\frac{2gB\bar{h}\bar{Q}}{f(\bar{h})} < 0 \tag{4.2.7}$$

Ces inégalités entraînent $\rho - B\phi\lambda_1 > 0$ (car $\lambda_1 > 0$), ce qui signifie que $\gamma < 0$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \delta < 0 \Leftrightarrow -\rho + B\phi\lambda_2 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{gB\bar{h}\bar{Q}^2f'(\bar{h})}{f^2(\bar{h})} + B\frac{2gB\bar{h}\bar{Q}}{f(\bar{h})}\left(\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2B\left(\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}\right) > \frac{\bar{Q}f'(\bar{h})}{f(\bar{h})} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Mais nous avons $\sqrt{g\bar{h}} > \dfrac{\bar{Q}}{B\bar{h}}$, et il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \frac{4}{\bar{h}} > \frac{f'(\bar{h})}{f(\bar{h})} \quad &\Leftrightarrow \quad 4f(\bar{h}) > \bar{h}f'(\bar{h}) \\ &\Leftrightarrow \quad 4k^2B^2h^2\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3} > 2k^2B^2h^2\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3} + \frac{4}{3}k^2B^2h\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{7/3} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{2}{3}\frac{B}{B+2h} \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

La dernière inégalité est toujours vraie, alors nous avons $\delta < 0$. Ainsi, selon les analyses du paragraphe 3.4.2, la COHG avec coût final peut garantir la stabilité du système (4.1.13).

4.2.2 Validation par simulation

Comme indiqué au paragraphe 2.4.2, afin de résoudre le problème de commande optimale par la méthode du gradient, il nous faut utiliser un schéma numérique pour les EDPs du modèle. Nous proposons dans ce travail la *méthode de Boltzmann sur réseaux* (MBR), compte tenu d'expériences précédentes ayant mis en évidence son efficacité pour ce type d'équation (voir [Pham, Chopard, Lefèvre, Ondo & Mendes, 2010]).

Méthode de Boltzmann sur Réseaux (MBR)

La MBR est attractive en raison de son efficacité pour simuler les écoulements de fluides et d'autres phénomènes physiques [Chopard & Droz, 2005].

Dans cette méthode, nous considérons le mouvement des particules sur une grille régulière (appelée aussi réseau). Les particules au point (x, t) sont représentées par plusieurs quantités $f_i(x, t)$ animées d'une vitesse v_i. L'algorithme consiste en l'alternance de deux phases : la phase de collision et la phase de propagation. Dans la phase de collision, les particules entrant dans le site x à l'instant t $f_i^{in}(x, t)$ se heurtent et entraînent une nouvelle distribution $f_i^{out}(x, t)$. Puis, pendant la période $[t, t + \Delta t]$ de la phase de propagation, la nouvelle distribution se déplace vers le site voisin dans le sens de la vitesse v_i. Ces deux phases peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Collision :} && f_i^{out}(x,t) = f_i^{in}(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i^{in}), \\ &\text{Propagation :} && f_i^{in}(x + v_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i^{out}(x,t), \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

où Δx est le pas d'espace et Δt est le pas de temps. La phase de collision ci-dessus est basée sur l'approximation de *Bhatnagar-Gross-Krook* (BGK) avec un temps de relaxation unique τ et les fonctions de distribution à l'équilibre f_i^{eq}, dont l'expression dépend du processus physique à modéliser. Nous allons indiquer sa forme plus tard, pour le cas d'une loi de conservation scalaire. Pour garantir la stabilité de ce schéma explicite, τ doit être supérieure à 0.5.

Les équations (4.2.10) peuvent être combinées pour obtenir l'équation d'évolution :

$$f_i(x + v_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i), \tag{4.2.11}$$

où f représente f^{in}.

Application de la MBR à une loi de conservation scalaire

Considérons le problème suivant :

$$\partial_t \lambda + c\partial_x \lambda = 0, \quad c > 0, \tag{4.2.12}$$

avec la condition initiale $\lambda(x,0) = \lambda_0(x)$. Comme $c > 0$, seule la condition à la limite $x = 0$ est à définir : $\lambda(0,t) = u(t)$. Nous proposons une grille avec 2 vitesses comme indiquée sur la figure 4.3 où $v_0 = 0$ et $v_1 = v = \Delta x/\Delta t$.

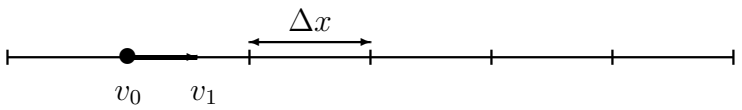

FIG. 4.3 – Une grille avec 2 vitesses ($c > 0$)

Les fonctions de distribution à l'équilibre doivent satisfaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_0^{eq} + f_1^{eq} & = & \lambda \\ v f_1^{eq} & = & c\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f_0^{eq} & = & \left(1 - \dfrac{c}{v}\right)\lambda \\ f_1^{eq} & = & \dfrac{c}{v}\lambda \end{array}\right. , \tag{4.2.13}$$

et λ est déterminé par $\lambda = \sum_i f_i = f_0 + f_1$. Avec ces fonctions de distribution à l'équilibre, on peut montrer que la MBR peut résoudre (4.2.12) avec une précision d'ordre $(\Delta x)^2$ et $(\Delta t)^2$ [Junk & Rheinlainder, 2008]. Dans ce cas, l'équation d'évolution (4.2.11) a la forme :

$$\begin{array}{rcl} f_0(x, t+\Delta t) & = & f_0(x,t) + \dfrac{1}{\tau}(f_0^{eq} - f_0), \\ f_1(x + v\Delta t, t+\Delta t) & = & f_1(x,t) + \dfrac{1}{\tau}(f_1^{eq} - f_1). \end{array} \tag{4.2.14}$$

Lorsqu'un terme de source F est présent à droite de l'équation (4.2.12), les équations ci-dessus prennent la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} f_0(x, t+\Delta t) & = & f_0(x,t) + \dfrac{1}{\tau}(f_0^{eq} - f_0) + \Delta t F, \\ f_1(x + v\Delta t, t+\Delta t) & = & f_1(x,t) + \dfrac{1}{\tau}(f_1^{eq} - f_1). \end{array} \tag{4.2.15}$$

La condition à la limite $x = 0$ est garantie en imposant :

$$f_1(0,t) = u(t) - f_0(0,t). \tag{4.2.16}$$

Dans le cas où $c < 0$ nous utilisons une grille avec $v_0 = 0$ et $v_1 = -v = -\Delta x/\Delta t$ (figure 4.4).

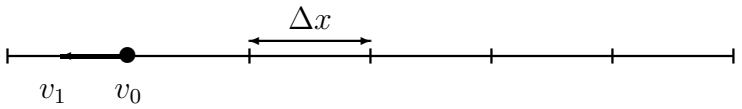

FIG. 4.4 – Une grille avec 2 vitesses ($c < 0$)

Longueur L (m)	Largeur B (m)	Pente I	Coefficient de frottement k
3000	4.36	2.4×10^{-4}	30

TAB. 4.1 – Paramètres du canal

Résultats de simulation

Considérons un canal dont les paramètres sont donnés dans le tableau 4.1.

Nous allons linéariser ce système autour d'un profil d'équilibre uniforme $\bar{h} = 1,97\,(m)$ et $\bar{Q} = kB\bar{h}\left(\frac{B\bar{h}}{B+2\bar{h}}\right)^{2/3}\sqrt{I} = 4,08\,(m^3/s)$ (voir 4.2.2). Alors, les paramètres du système diagonalisé sont donnés dans le tableau 4.2, où nous voyons bien que γ et δ sont négatifs.

λ_1	λ_2	γ	δ
3,92	-4,87	-0,0051	-0,0048

TAB. 4.2 – Paramètres du système diagonalisé

Pour le schéma numérique, en tenant compte la condition de stabilité et le temps de calcul (voir [Pham, Chopard, Lefèvre, Ondo & Mendes, 2010]), nous utilisons les paramètres donnés dans le tableau 4.3.

$\Delta x\,(m)$	$\Delta t\,(s)$	τ
300	1	1

TAB. 4.3 – Paramètres du schéma numérique

Les paramètres de la COHG selon les équations (3.4.21), (3.4.24) et (3.4.35) sont donnés dans le tableau 4.4.

$T\,(s)$	$\sigma\,(s)$	μ	ϵ	P_f	P	R
30	10	$0,2 \times 10^{-3}$	4×10^{-6}	$\mathrm{diag}(0,01; 0,01)$	$\mathrm{diag}(0,55; 0,55)$	$\mathrm{diag}(10, 10)$

TAB. 4.4 – Paramètres de la commande

Les résultats sont présentés sur les figures 4.5-4.8. Nous voyons bien que la hauteur et le débit normalisés convergent vers zéro, ce qui signifie que la hauteur et le débit réels convergent vers le profil d'équilibre $(\bar{h}, \bar{Q})$. La norme de l'état étendu est également présentée sur la figure 4.8. Les résultats obtenus sont donc bien en accord avec les analyses de stabilité du paragraphe 3.4.2.

Nous testons également la commande proposée sur un modèle non linéaire construits par la MBR à trois vitesses (voir [Pham, Chopard, Lefèvre, Ondo & Mendes, 2010]) avec

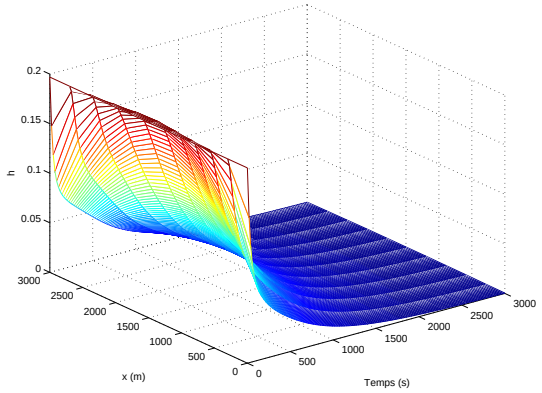

FIG. 4.5 – Hauteur normalisée

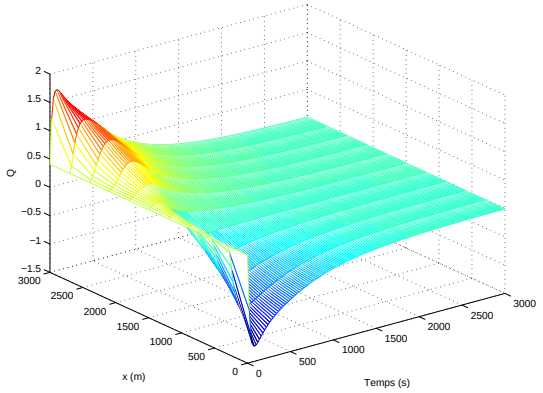

FIG. 4.6 – Débit normalisé

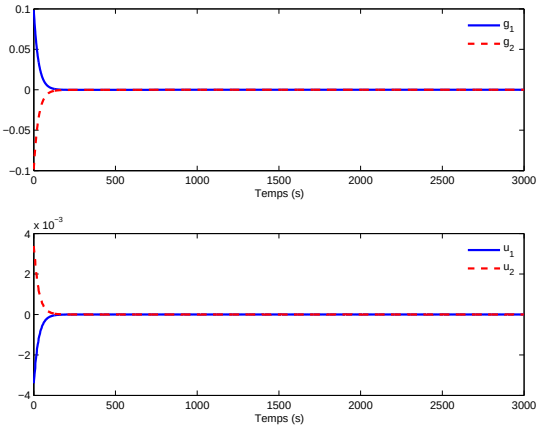

FIG. 4.7 – Etats et commandes frontières

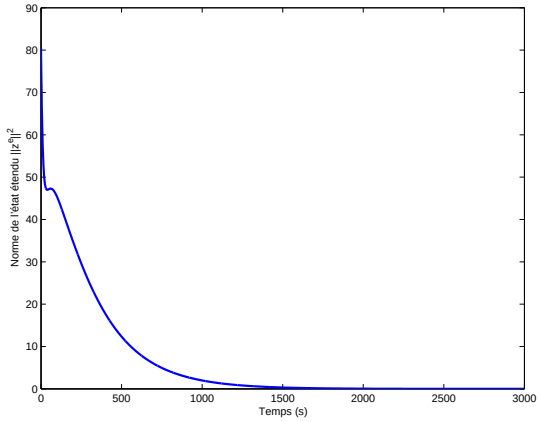

FIG. 4.8 – Norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$

les mêmes paramètres que le modèle linéaire (Δx, Δt et τ). Les évolutions aux points $x = 0$ et $x = L$ sont présentées sur les figures 4.9 et 4.10. Nous constatons bien que la commande garantit également la convergence du système non linéaire.

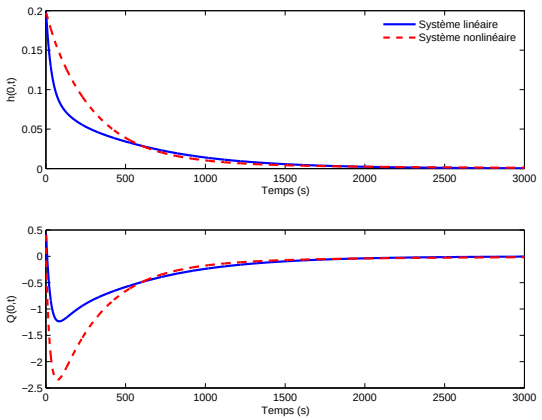

FIG. 4.9 – Niveau et débit en $x = 0$

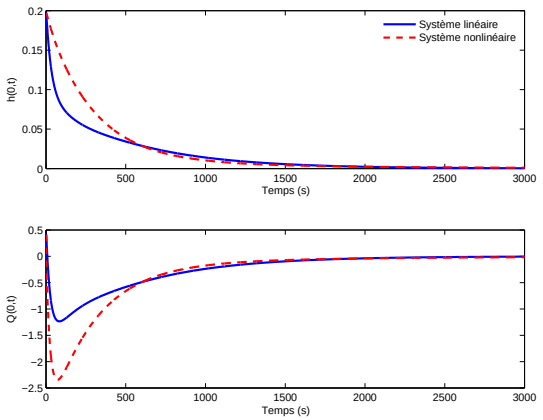

FIG. 4.10 – Niveau et débit en $x = L$

4.3 Modèle linéarisé autour d'un profil non uniforme

Reprenons maintenant le système (4.1.13)-(4.1.14) et considérons le cas d'un profil d'équilibre non uniforme. Nous allons montrer que la COHG avec état final fixé à zéro peut être utilisée pour la stabilité en boucle fermée. Pour cela, nous choisissons la fonction de coût suivante :

$$F(z^e, u) = \int_0^L z^T \begin{pmatrix} q_1(x) & 0 \\ 0 & q_2(x) \end{pmatrix} z dx + g^T \begin{pmatrix} p_{f1} & 0 \\ 0 & p_{f2} \end{pmatrix} g + u^T \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} u \tag{4.3.1}$$

où $z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et les pondérations q_i, p_{fi} et r_i $(i = 1, 2)$ sont toutes positives.

La stabilité de cette approche a été montrée au paragraphe 3.4.3. Il nous faut maintenant utiliser un schéma de discrétisation pour obtenir une approximation de la commande optimale qui soit implémentable. Dans ce travail, nous utilisons la méthode de Galerkin dont le principe est résumé dans le paragraphe ci-dessous, et qui a déjà fait ses preuves dans l'application numérique de commande optimale à ce type de systèmes [Dulhoste et al., 2004].

4.3.1 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin appartient à une famille des méthodes dites de résidus pondérés (pour plus de détails, consulter [Fletcher, 1991]). Le but est d'approximer la solution dans un sous-espace de l'espace d'état. Considérons un problème où nous voulons rechercher la solution $f(x, t)$ de l'équation abstraite suivante :

$$\Phi(f(x, t)) = 0 \quad \text{sur } \Pi \tag{4.3.2}$$

avec la condition frontière :

$$B(f(x, t)) = 0 \quad \text{sur la frontière } \partial\Pi. \tag{4.3.3}$$

La solution approchée est supposée ayant la forme :

$$f_a(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) N_i(x), \tag{4.3.4}$$

où $f_a(x, t)$ est l'approximation de la solution exacte $f(x, t)$, les $\alpha_i(t)$ sont des coefficients à déterminer et les $N_i(x)$ sont appelés les fonctions de base. En substituant cette approximation dans l'équation (4.3.2), nous obtenons :

$$\Phi(f_a(x, t)) = R, \tag{4.3.5}$$

où R est le résidu. Les coefficients $\alpha_i(t)$ sont déterminés de telle sorte que le produit interne du résidu avec des fonctions de pondération $w_k(x)$ soit zéro (c'est-à-dire que le résidu est orthogonal avec les $w_k(x)$) :

$$\langle R, w_k \rangle = 0. \tag{4.3.6}$$

Un choix particulier des fonctions de pondération consiste à utiliser les fonctions de base N_i :

$$w_k = N_k \tag{4.3.7}$$

Ce choix nous donne la *méthode de Galerkin*, qui sera utilisée pour la suite.

4.3.2 Application à l'approximation de la commande

Rappelons qu'il nous faut résoudre le système suivant (voir le paragraphe 2.4.4) :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}^e_{min}(t) \\ \dot{p}_{min}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^e & -\mathcal{B}^e\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{e*} \\ -\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} & -\mathcal{A}^{e*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^e_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^e_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}^*), t \in [0, T] \tag{4.3.8}$$

avec les contraintes $z^e_{min}(0) = z^e(0)$ et $z^e_{min}(T) = 0$. La commande optimale est calculée, selon l'équation (2.4.29), par :

$$u_{min} = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_{min}. \tag{4.3.9}$$

Dans la suite, pour des raisons de simplicité, l'indice $\cdot_{min}$ sera omis. Pour le cas des équations de Saint-Venant et de la fonction de coût (4.3.1), les opérateurs dans (4.3.8) sont donnés par :

$$\mathcal{A}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\lambda_1 + \gamma_1 x}{L} & \dfrac{\delta_1(L-x)}{L} & \lambda_1 \dfrac{d}{dx} + \gamma_1 & \delta_1 \\ \dfrac{\gamma_2 x}{L} & \dfrac{-\lambda_2 + \delta_2(L-x)}{L} & \gamma_2 & \lambda_2 \dfrac{d}{dx} + \delta_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.10}$$

avec le domaine

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathcal{A}^e) \;=\; & \{z^e = (g_1 \quad g_2 \quad v_1 \quad v_2)^T \in \mathbb{R}^2 \oplus \mathbf{L}_2([0, L], \mathbb{R}^2) \mid \\ & v_1,\, v_2 \text{ sont absolument continues}, \frac{dv_1}{dx}, \frac{dv_2}{dx} \in \mathbf{L}_2([0, L]), \\ & v_1(L) = v_2(0) = 0\}, \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

$$\mathcal{A}^{e*}p = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^L \frac{\lambda_1+\gamma_1 x}{L}\chi_1 dx + \int_0^L \frac{\gamma_2 x}{L}\chi_2 dx \\ \displaystyle\int_0^L \frac{\delta_1(L-x)}{L}\chi_1 dx + \int_0^L \frac{-\lambda_2+\delta_2(L-x)}{L}\chi_2 dx \\ -\lambda_1\dfrac{d\chi_1}{dx} + (-\lambda_1'+\gamma_1)\chi_1 + \gamma_2\chi_2 \\ \delta_1\chi_1 - \lambda_2\dfrac{d\chi_2}{dx} + (-\lambda_2'+\delta_2)\chi_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.12}$$

avec le domaine

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathcal{A}^{e*}) \;=\; & \{p = (\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \chi_1 \quad \chi_2)^T \in \mathbb{R}^2 \oplus \mathbf{L}_2([0,L],\mathbb{R}^2) \mid \\ & \chi_1,\, \chi_2 \text{ sont absolument continues}, \frac{d\chi_1}{dx},\, \frac{d\chi_2}{dx} \in \mathbf{L}_2([0,L]), \\ & \chi_2(L) = \chi_1(0) = 0\}, \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

$$\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z^e = \begin{pmatrix} p_{f1}g_1 + \displaystyle\int_0^L \frac{x^2 q_1}{L^2} g_1 dx + \int_0^L \frac{x q_1}{L} v_1 dx \\ p_{f2}g_2 + \displaystyle\int_0^L \frac{(L-x)^2 q_2}{L^2} g_2 dx + \int_0^L \frac{(L-x) q_2}{L} v_2 dx \\ \dfrac{x q_1}{L} g_1 + q_1 v_1 \\ \dfrac{(L-x) q_2}{L} g_2 + q_2 v_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

et finalement

$$\mathcal{B}^e\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{e*}p = \begin{pmatrix} r_1^{-1}\left(\zeta_1 - \displaystyle\int_0^L \frac{x}{L}\chi_1\right) \\ r_2^{-1}\left(\zeta_2 - \displaystyle\int_0^L \frac{L-x}{L}\chi_2\right) \\ r_1^{-1}\dfrac{x}{L}\left(\zeta_1 - \displaystyle\int_0^L \frac{x}{L}\chi_1\right) \\ r_2^{-1}\dfrac{L-x}{L}\left(\zeta_2 - \displaystyle\int_0^L \frac{L-x}{L}\chi_2\right) \end{pmatrix}. \tag{4.3.15}$$

Nous allons utiliser la méthode de Galerkin pour calculer une solution approchée du système (4.3.8). La procédure va être détaillée dans la suite.

Nous utilisons les fonctions triangulaires (voir la figure 4.11) comme fonctions de base. Nous divisons l'intervalle $[0, L]$ en $M-1$ segments par M points équidistants.

$$x_1 = 0,\, x_2 = \Delta x,\, \cdots,\, x_j = (j-1)\Delta x,\, \cdots,\, x_M = L, \quad \Delta x = \frac{L}{M-1}$$

L'équation de la fonction de forme N_j est donnée par :

$$N_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{\Delta x}, & x_{j-1} \le x \le x_j \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{\Delta x}, & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0 \quad x \le x_{j-1} \text{ ou } x \le x_{j+1} \end{cases} \tag{4.3.16}$$

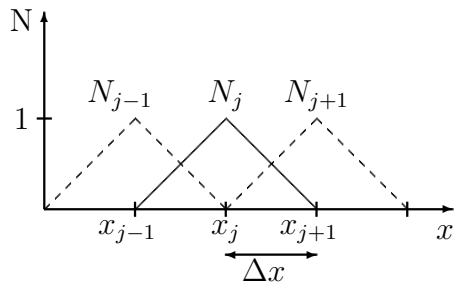

FIG. 4.11 – Fonctions de base utilisées pour discrétiser le problème de commande optimale

Il est facile de calculer :

$$N_j'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ -\dfrac{1}{\Delta x}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 \quad x \leq x_{j-1} \text{ ou } x \leq x_{j+1} \end{cases} \tag{4.3.17}$$

Pour une fonction $f \in \mathbf{L}_2([0, L])$, nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{I}_{i,j}^k(f) = \int_{x_i}^{x_j} f(x) N_k(x) dx, \quad \mathbf{I}_{i,j}^{k,l}(f) = \int_{x_i}^{x_j} f(x) N_k(x) N_l(x) dx \tag{4.3.18}$$

Alors

$$\mathbf{I}_{j,j+1}^j(1) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_j(x) dx = \frac{\Delta x}{6}, \text{ et } \mathbf{I}_{j,j+1}^{j,j}(1) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_j(x) N_j(x) dx = \frac{\Delta x}{3} \tag{4.3.19}$$

Les fonctions inconnues sont approximées par :

$$v_j(x,t) = \sum_{i=1}^{M} v_j^i(t) N_i(x), \quad \chi_j(x,t) = \sum_{i=1}^{M} \chi_j^i(t) N_j(x), \quad j = 1, 2 \tag{4.3.20}$$

Notons tout d'abord que la condition $(z^e \quad p)^T \in \mathbf{D}(\mathcal{A}^e) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}^{e*})$ impose que :

$$v_1^M = v_2^1 = 0, \quad \chi_1^1 = \chi_2^M = 0. \tag{4.3.21}$$

En remplaçant la solution approximée (4.3.20) dans l'équation (4.3.8), nous obtenons :
• Pour g_1 :

$$\dot{g}_1 = -\frac{1}{r_1}\zeta_1 + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{I}_{i-1,i+1}^i \left(\frac{x}{r_1 L}\right) \chi_1^i \tag{4.3.22}$$

• Pour g_2 :

$$\dot{g}_2 = -\frac{1}{r_2}\zeta_2 + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{I}_{i-1,i+1}^i \left(\frac{L-x}{r_2 L}\right) \chi_2^i \tag{4.3.23}$$

• Pour v_1 :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{M}\dot{v}_1^i N_i = & \frac{\lambda_1+\gamma_1 x}{L}g_1+\frac{\delta(L-x)}{L}g_2+\lambda_1\sum_{i=1}^{M}N_i' v_1^i+\gamma_1\sum_{i=1}^{M}v_1^i N_i+\delta\sum_{i=1}^{M}v_2^i N_i\\ & +\frac{x}{r_1 L}\zeta_1-\frac{x}{r_1 L}\sum_{i=1}^{M}\left(\int_0^L xN_i(x)dx\right)\chi_1^i\end{aligned}$$

En prenant le produit interne de l'équation ci-dessus avec N_k et en utilisant (4.3.17) et (4.3.19), nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta x\left(\frac{1}{6}\dot{v}_1^{k-1}+\frac{2}{3}\dot{v}_1^k+\frac{1}{6}\dot{v}_1^{k+1}\right) = & \mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{\lambda_1+\gamma_1 x}{L}\right)g_1+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{\delta(L-x)}{L}\right)g_2\\ & -\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k-1,k}^k(\lambda_1)v_1^{k-1}+\frac{1}{\Delta x}\left(\mathbf{I}_{k-1,k}^k(\lambda_1)-\mathbf{I}_{k,k+1}^k(\lambda_1)\right)v_1^k+\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k,k+1}^k(\lambda_1)v_1^{k+1}\\ & +\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(\gamma_1)v_1^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(\gamma_1)v_1^k+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(\gamma_1)v_1^{k+1}\\ & +\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(\delta_1)v_2^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(\delta_1)v_2^k+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(\delta_1)v_2^{k+1}\\ & +\mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{x}{r_1 L}\right)\zeta_1-\mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{x}{r_1 L}\right)\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{x}{L}\right)\chi_1^i\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

• Pour v_2, de façon similaire, nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta x\left(\frac{1}{6}\dot{v}_2^{k-1}+\frac{2}{3}\dot{v}_2^k+\frac{1}{6}\dot{v}_2^{k+1}\right) = & \mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{\gamma_2 x}{L}\right)g_1+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{-\lambda_2+\delta_2(L-x)}{L}\right)g_2\\ & +\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(\gamma_2)v_1^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(\gamma_2)v_1^k+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(\gamma_2)v_1^{k+1}\\ & -\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k-1,k}^k(\lambda_2)v_2^{k-1}+\frac{1}{\Delta x}\left(\mathbf{I}_{k-1,k}^k(\lambda_2)-\mathbf{I}_{k,k+1}^k(\lambda_2)\right)v_2^k+\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k,k+1}^k(\lambda_2)v_2^{k+1}\\ & +\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(\delta_2)v_2^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(\delta_2)v_2^k+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(\delta_2)v_2^{k+1}\\ & +\mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{L-x}{r_2 L}\right)\zeta_2-\mathbf{I}_{k-1,k+1}^k\left(\frac{L-x}{r_2 L}\right)\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{L-x}{L}\right)\chi_2^i\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

• Pour ζ_1 :

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 = & -\left(p_{f1}+\int_0^L\frac{x^2 q_1}{L^2}dx\right)g_1-\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{xq_1}{L}\right)v_1^i\\ & -\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{\lambda_1+\gamma_1 x}{L}\right)\chi_1^i-\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{\gamma_2 x}{L}\right)\chi_2^i\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

• Pour ζ_2 :

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 = & -\left(p_{f2}+\int_0^L\frac{(L-x)^2 q_2}{L^2}dx\right)g_2-\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{(L-x)q_2}{L}\right)v_2^i\\ & -\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{\delta_1(L-x)}{L}\right)\chi_1^i-\sum_{i=1}^{M}\mathbf{I}_{i-1,i+1}^i\left(\frac{-\lambda_2+\delta_2(L-x)}{L}\right)\chi_2^i\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

• Pour χ_1 :

$$\begin{aligned}
&\Delta x\left(\frac{1}{6}\dot{\chi}_1^{k-1}+\frac{2}{3}\dot{\chi}_1^{k}+\frac{1}{6}\dot{\chi}_1^{k+1}\right)\\
&=-\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k}\left(\frac{xq_1}{L}\right)g_1-\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(q_1)v_1^{k-1}-\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(q_1)v_1^{k}-\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(q_1)v_1^{k+1}\\
&-\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k-1,k}^{k}(\lambda_1)\chi_1^{k-1}+\frac{1}{\Delta x}\left(\mathbf{I}_{k-1,k}^{k}(\lambda_1)-\mathbf{I}_{k,k+1}^{k}(\lambda_1)\right)\chi_1^{k}+\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k,k+1}^{k}(\lambda_1)\chi_1^{k+1}\\
&+\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(\lambda_1'-\gamma_1)\chi_1^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(\lambda_1'-\gamma_1)\chi_1^{k}+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(\lambda_1'-\gamma_1)\chi_1^{k+1}\\
&+\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(-\gamma_2)\chi_2^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(-\gamma_2)\chi_2^{k}+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(-\gamma_2)\chi_2^{k+1}
\end{aligned}\tag{4.3.28}$$

• Pour χ_2 :

$$\begin{aligned}
&\Delta x\left(\frac{1}{6}\dot{\chi}_2^{k-1}+\frac{2}{3}\dot{\chi}_2^{k}+\frac{1}{6}\dot{\chi}_2^{k+1}\right)=\\
&=-\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k}\left(\frac{(L-x)q_2}{L}\right)g_2-\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(q_2)v_2^{k-1}-\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(q_2)v_2^{k}-\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(q_2)v_2^{k+1}\\
&+\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(-\delta_1)\chi_1^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(-\delta_1)\chi_1^{k}+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(-\delta_1)\chi_1^{k+1}\\
&-\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k-1,k}^{k}(\lambda_2)\chi_2^{k-1}+\frac{1}{\Delta x}\left(\mathbf{I}_{k-1,k}^{k}(\lambda_2)-\mathbf{I}_{k,k+1}^{k}(\lambda_2)\right)\chi_2^{k}+\frac{1}{\Delta x}\mathbf{I}_{k,k+1}^{k}(\lambda_2)\chi_2^{k+1}\\
&+\mathbf{I}_{k-1,k}^{k-1,k}(\lambda_2'-\delta_2)\chi_2^{k-1}+\mathbf{I}_{k-1,k+1}^{k,k}(\lambda_2'-\delta_2)\chi_2^{k}+\mathbf{I}_{k,k+1}^{k,k+1}(\lambda_2'-\delta_2)\chi_2^{k+1}
\end{aligned}\tag{4.3.29}$$

En tenant compte des conditions (4.3.21), nous pouvons enlever les termes concernant v_1^M, v_2^1, χ_1^1 et χ_2^M. Les autres termes sont mis dans les vecteurs des inconnues comme suit :

$$\begin{aligned}
&v_{1d}=(v_1^1\quad v_1^2\quad\cdots\quad v_1^{M-2}\quad v_1^{M-1})^T,\\
&v_{2d}=(v_2^2\quad v_2^3\quad\cdots\quad v_2^{M-1}\quad v_2^{M})^T,\\
&\chi_{1d}=(\chi_1^2\quad \chi_1^3\quad\cdots\quad \chi_1^{M-1}\quad \chi_1^{M})^T,\\
&\chi_{2d}=(\chi_2^1\quad \chi_2^2\quad\cdots\quad \chi_2^{M-2}\quad \chi_2^{M-1})^T,\\
&g=(g_1\quad g_2)^T,\quad \zeta=(\zeta_1\quad \zeta_2)^T, z_d^e=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ v_{1d}\\ v_{2d}\end{pmatrix},\quad p_d=\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \chi_{1d}\\ \chi_{2d}\end{pmatrix}
\end{aligned}\tag{4.3.30}$$

Alors, nous pouvons combiner les équations (4.3.22)-(4.3.29) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\dot{g} &= M_{g\zeta}\zeta+M_{g\chi}\chi_d,\\
E_v\dot{v}_d &= M_{vg}g+M_{vv}v_d+M_{v\zeta}\zeta+M_{v\chi}\chi_d,\\
\dot{\zeta} &= M_{\zeta g}g+M_{\zeta v}v_d+M_{\zeta\chi}\chi_d,\\
E_\chi\dot{\chi}_d &= M_{\chi g}g+M_{\chi v}v_d+M_{\chi\zeta}\zeta+M_{\chi\chi}\chi_d,
\end{aligned}\tag{4.3.31}$$

où les entrées de $M_{g\zeta}$, $M_{g\chi}$, etc. dépendent des fonctions de base N_k, l'opérateur $\mathcal{A}$ et la fonction de coût J, tandis que les entrées de E_v et E_χ dépendent seulement des fonctions de base N_k. Les équations peuvent être ré-écrites sous la forme :

$$\mathbf{E}\begin{pmatrix}\dot{z}_d^e\\ \dot{p}_d\end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix}z_d^e\\ p_d\end{pmatrix} \tag{4.3.32}$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & E_v & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_\chi\end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_{g\zeta} & M_{g\chi}\\ M_{vg} & M_{vv} & M_{v\zeta} & M_{v\chi}\\ M_{\zeta g} & M_{\zeta v} & 0 & M_{\zeta\chi}\\ M_{\chi g} & M_{\chi v} & M_{\chi\zeta} & M_{\chi\chi}\end{pmatrix}. \tag{4.3.33}$$

Les matrices $\mathbf{E}$ et $\mathbf{M}$ sont de dimension $4M \times 4M$ et leurs entrées sont données dans l'annexe C.

Finalement le système discrétisé a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_d^e\\ \dot{p}_d\end{pmatrix} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}\begin{pmatrix}z_d^e\\ p_d\end{pmatrix} \tag{4.3.34}$$

En ajoutant la condition initiale $z_d^e(0) = z_{0a}$ et la condition finale $z_d^e(T) = 0$, où z_{0a} est l'approximation de l'état initial z_0 dans la base des N_k, nous obtenons un problème aux deux bouts standard, qui peut être résolu par différentes méthodes (voir par exemple [Ascher et al., 1995]). Dans ce travail, nous utilisons la fonction *bvp5c* de Matlab® [Mathworks, 2010] qui se fonde sur un schéma de différences finies.

4.3.3 Résultats de simulation

Nous réalisons la simulation pour un canal dont les paramètres sont les mêmes que ceux utilisés au paragraphe 4.2. La linéarisation est faite autour d'un équilibre non-uniforme avec $\bar{Q} = 2\,(m^3/s)$ et $\bar{h}(L) = 1,97\,(m)$. La hauteur et le débit d'équilibre sont présentés sur la figure 4.12 et les coefficients du système linéarisé diagonalisé sont présentés sur la figure 4.13.

Le système est discrétisé par $M = 13$ points ($\Delta x = 250\,(m)$). Le pas de temps de simulation est $\Delta t = 75\,(s)$. Les paramètres de la commande sont donnés dans le tableau 4.5. Nous remarquons que l'horizon de prédiction est beaucoup plus important par rapport à l'approche avec coût final car il faut vérifier la condition d'atteignabilité (voir le paragraphe 3.4.3).

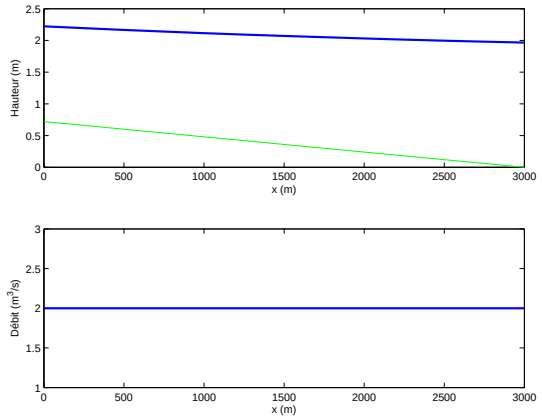

FIG. 4.12 – Hauteur et débit d'équilibre

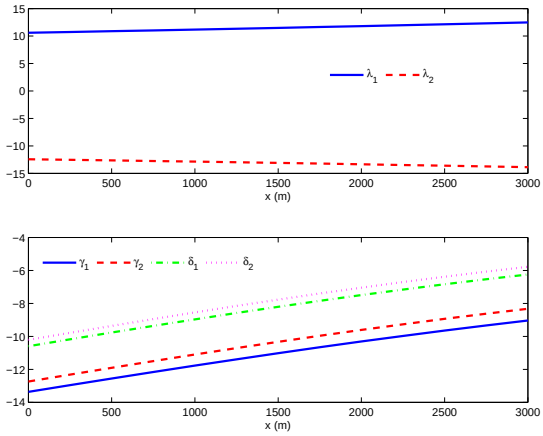

FIG. 4.13 – Coefficients du système linéarisé diagonalisé

$T\,(s)$	$\sigma\,(s)$	P_f	Q	R
3000	600	diag(1; 1)	diag(1; 1)	diag(0, 5; 0, 5)

TAB. 4.5 – Paramètres de la commande

Les évolutions de la hauteur et du débit normalisés sont données sur les figures 4.14 et 4.15, tandis que les états et les commandes sont présentés sur la figure 4.16. La figure 4.17 donne la convergence de la norme de l'état étendu z^e. On trouve bien les résultats de convergence attendus.

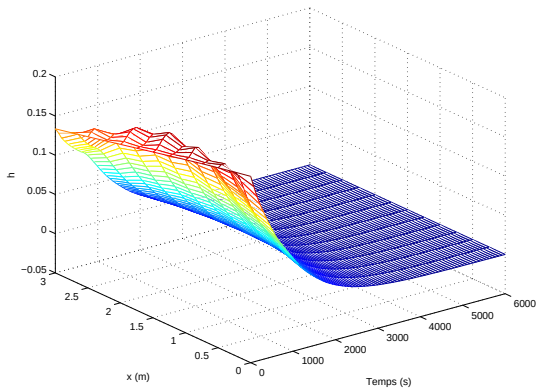

FIG. 4.14 – Hauteur normalisée (deux commandes)

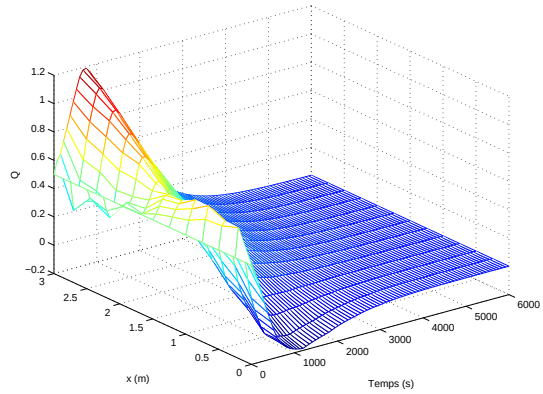

FIG. 4.15 – Débit normalisé (deux commandes)

Comme dans le paragraphe 4.2.2, nous testons aussi la commande proposée sur un modèle non linéaire construit par la MBR à trois vitesses. Les résultats sont présentés sur les figures 4.18 et 4.19. Nous constatons bien la convergence du système non linéaire malgré un écart statique lié aux erreurs de modélisation.

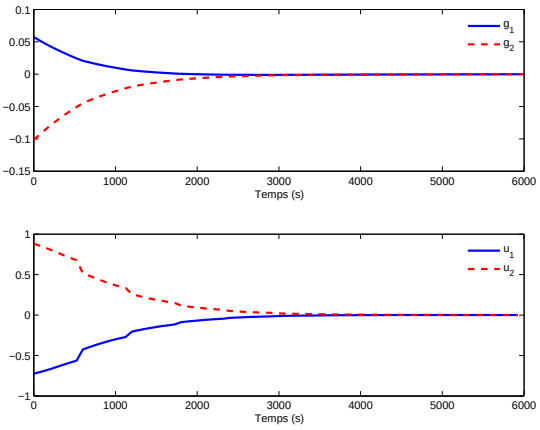

FIG. 4.16 – Etats et commandes frontières (deux commandes)

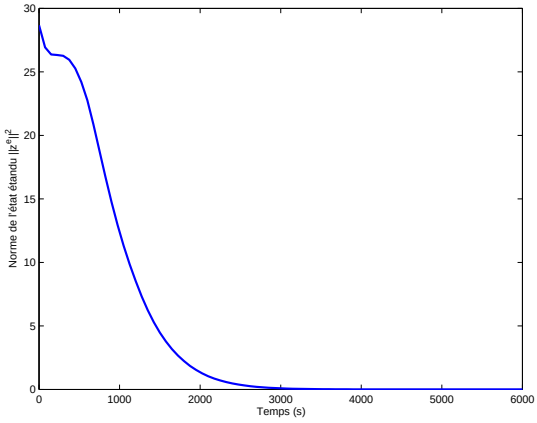

FIG. 4.17 – Norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$ (deux commandes)

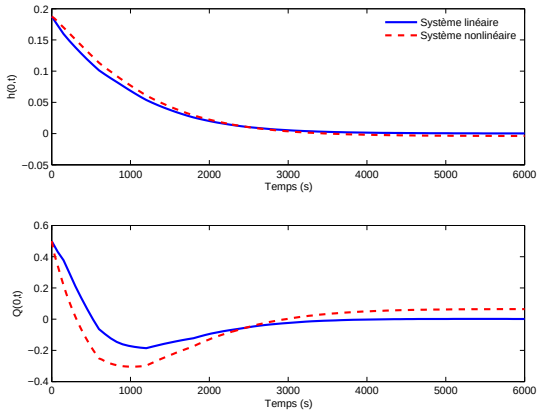

FIG. 4.18 – Niveau et débit en $x = 0$

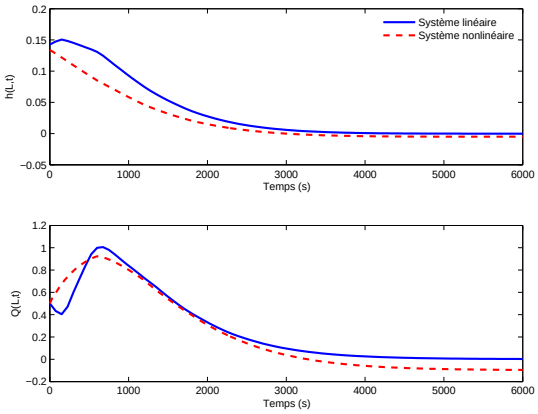

FIG. 4.19 – Niveau et débit en $x = L$

Une autre simulation est réalisée en utilisant juste une commande à $x = L$. Les résultats sont présentés sur les figures (4.20)-(4.23).

Nous constatons de nouveau la bonne convergence du système, ce qui est en accord avec les analyses du paragraphe 3.4.3. Cette commande est également testé sur un modèle non linéaire comme le cas précédent. Les résultats sont présentés sur les figures 4.24 et 4.25. Nous constatons également un écart statique dans la réponse du système non linéaire.

Nous voulons enfin souligner que le calcul de la commande optimale à chaque instant d'échantillonnage prend environ 10s pour un laptop Intel Core 2 Duo 2.4Ghz, 1.95Go RAM. Cela signifie qu'une application en temps réel est envisageable.

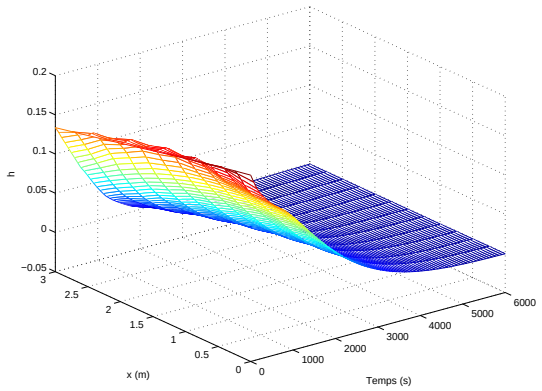

FIG. 4.20 – Hauteur normalisée (une commande)

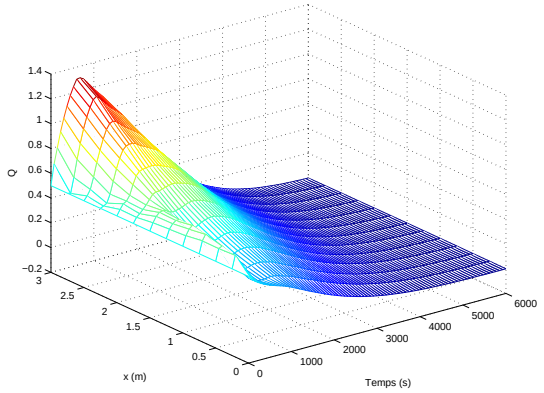

FIG. 4.21 – Débit normalisé (une commande)

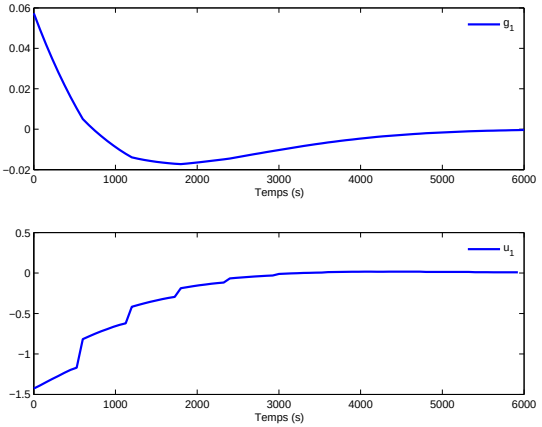

FIG. 4.22 – Etat et commande frontière (une commande)

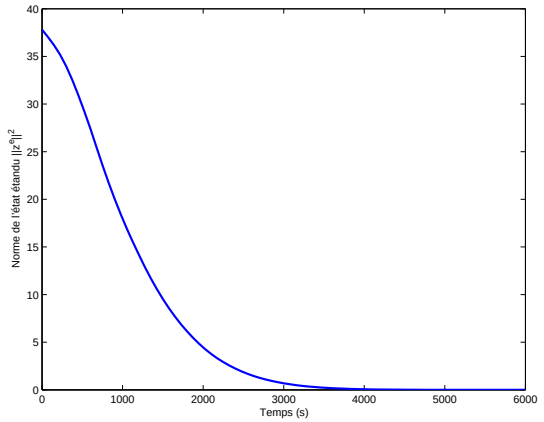

FIG. 4.23 – Norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$ (une commande)

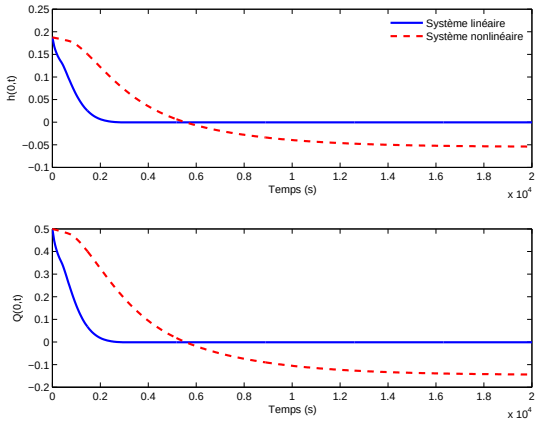

FIG. 4.24 – Niveau et débit en $x = 0$ (une commande)

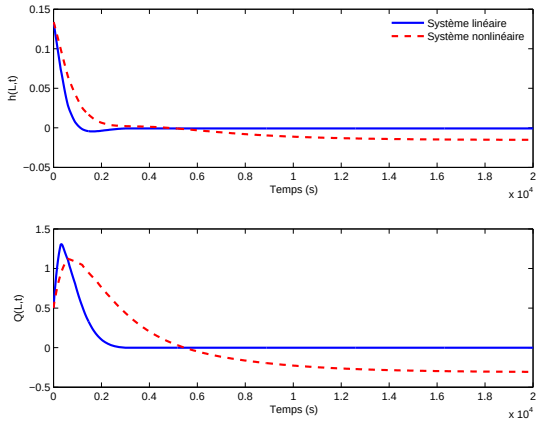

FIG. 4.25 – Niveau et débit en $x = L$ (une commande)

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les théories développées au chapitre 3 ont été appliquées aux équations de Saint-Venant linéarisées, puis validées en simulation. Les résultats obtenus sont encourageants pour l'application de ce type de commande à un canal réel, dans la limite où le modèle linéarisé reste valide. L'application de cette stratégie en pratique nécessite néanmoins la mise en oeuvre d'un observateur pour estimer l'état du système à partir des mesures aux frontières. Ce problème sera étudié dans nos travaux à venir.

Les résultats des chapitres 2, 3 et 4 font l'objet des publications suivantes : [Pham, Georges & Besançon, 2010*a*], [Pham, Georges & Besançon, 2010*b*], [Pham, Georges & Besançon, 2010*c*], [Pham, Georges & Besançon, 2012*a*], [Pham, Georges & Besançon, 2012*c*], [Pham, Georges & Besançon, 2012*e*] et [Pham, Georges & Besançon, 2012].

Chapitre 5

La COHG pour un réseau de systèmes hyperboliques 2×2

Dans ce chapitre, nous considérons l'extension des analyses de stabilité de la COHG du chapitre 3 dans le cas d'un *réseau* de systèmes hyperboliques 2×2, et l'application à un réseau de canaux d'irrigation. Le paragraphe 5.1 présente le système considéré ainsi que les résultats concernant la régularité et l'atteignabilité de la solution. Les preuves sont obtenues en appliquant de façon récurrente les résultats sur les systèmes hyperboliques 2×2 étudiés au chapitre 3. Dans le paragraphe 5.2, nous considérons la stabilisation de la COHG. Nous montrons tout d'abord que le réseau peut également être reformulé sous forme abstraite, puis la COHG avec état final fixé à zéro est utilisée afin de garantir la stabilité. Les analyses sont ensuite appliquées à un réseau de canaux d'irrigation, avec une validation par simulation au paragraphe 5.3.

5.1 Réseau de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade

Nous nous intéressons à un système constitué de n sous-systèmes hyperboliques 2×2 :

$$\begin{cases} \partial_t y_i = \lambda_i(x)\partial_x y_i + \gamma_i(x) y_i + \delta_i(x) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+i} + \gamma_{n+i}(x) y_i + \delta_{n+i}(x) y_{n+i} \end{cases}, (x,t) \in [0,L] \times [0,T], \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.1.1}$$

où λ_i, λ_{n+i}, γ_i, γ_{n+i}, δ_i et δ_{n+i} sont des fonctions suffisamment régulières. Nous ne considérons que les systèmes strictement hyperboliques, c'est-à-dire que $\lambda_i(x) > 0 > \lambda_{n+i}(x)$, $\forall x \in [0,L]$ $(i = 1,\dots,n)$. Les conditions frontières sont spécifiées par les relations entre les variables aux jonctions. Supposons que ces relations peuvent être mises

sous la forme suivante :

– Pour la première jonction :

$$y_{n+1}(0,t) = g_{n+1}(t). \tag{5.1.2}$$

– Pour les jonctions intermédiaires :

$$\begin{cases} y_{n+i+1}(0,t) &= \theta_i g_i(t) + \alpha_i y_{n+i}(L,t) + \beta_i y_{i+1}(0,t) \\ y_i(L,t) &= g_i(t) \end{cases}, i = 1, \dots, n-1 \tag{5.1.3}$$

où α_i, β_i and θ_i sont des constantes dépendant des caractéristiques de la jonction.

– Pour la dernière jonction :

$$y_n(L,t) = g_n(t). \tag{5.1.4}$$

Le problème est complété par la condition initiale :

$$y_i(\cdot,0) = y_i^0, \quad i = \overline{1,2n} \tag{5.1.5}$$

Pour la suite, notons $z_0 = (y_1^0 \ \dots \ y_n^0 \ y_{n+1}^0 \ \dots \ y_{2n}^0)^T$ et $z = (y_1 \ \dots \ y_n \ y_{n+1} \ \dots \ y_{2n})^T$, respectivement la condition initiale et la solution du système entier ; $z_i^0 = (y_i^0 \ \ y_{n+i}^0)^T$ et $z_i = (y_i \ \ y_{n+i})^T$, respectivement la condition initiale et la solution du sous-système i , $i = \overline{1,n}$.

5.1.1 Existence de la solution

Nous allons établir une majoration de la solution du système (5.1.1)-(5.1.4) dans l'esprit du lemme 3.1.1 du chapitre 3 :

Proposition 5.1.1. *Soient $z_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g_i \in \mathbf{L}^2([0,T])$, $i = \overline{1,n+1}$. Il existe une solution forte unique z de (5.1.1)-(5.1.4) et il existe certaines constantes C et c telles que :*

$$\|z(t)\|_\Omega^2 + \frac{c}{2}\|z\|_{[0,t]\times\Omega}^2 + \|z\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \leq Ce^{2ct}\left(\|z_0\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{n+1}\|g_i\|_{[0,t]}^2\right) \tag{5.1.6}$$

Démonstration. Nous allons montrer par récurrence que pour chaque $j = \overline{1,n}$, le système (5.1.1)-(5.1.4) (avec n remplacé par j) possède une solution et il existe des constantes C_j et c_j telles que :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{j}\left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_j}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\right) \\ &\leq C_j e^{2c_j t}\left(\sum_{i=1}^{j}\|z_i^0\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{j}\|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right) \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Nous allons appeler cette proposition P. Selon la proposition 3.1.2, la solution de (5.1.1)-(5.1.4) existe et la majoration (5.1.7) est vraie pour $j = 1$. Supposons que P est vraie pour $j = k$, c'est-à-dire que la solution de (5.1.1)-(5.1.4) comprenant k sous-système existe et satisfait :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\left(\|z_i(t)\|_\Omega^2+\frac{c_k}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega}+\|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2+\|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\right)\\&\leq C_k e^{2c_k t}\left(\sum_{i=1}^{k}\|z_i^0\|_\Omega^2+\sum_{i=1}^{k}\|g_i\|_{[0,t]}^2+\|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right)\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

pour certains C_k et c_k. Considérons maintenant le $(k+1)$ième sous-système. Posons

$$\tilde{g}_k(t) = \theta_k g_k(t) + \alpha_k y_{n+k}(L,t), \tag{5.1.9}$$

et considérons la solution du système suivant :

$$\begin{cases}\partial_t y_{k+1} = \lambda_{k+1}(x)\partial_x y_{k+1} + \gamma_{k+1}(x) y_i + \delta_{k+1}(x) y_{n+k+1}\\ \partial_t y_{n+k+1} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+k+1} + \gamma_{n+k+1}(x) y_{k+1} + \delta_{n+k+1}(x) y_{n+k+1}\end{cases}, (x,t)\in[0,L]\times[0,T] \tag{5.1.10}$$

avec la condition initiale

$$z_{k+1}(0) = z_{k+1}^0 \tag{5.1.11}$$

et les conditions frontières :

$$\begin{aligned}&y_{n+k+1}(0,t) = \tilde{g}_k(t) + \beta_{k+1} y_{k+1}(0,t),\\&y_{k+1}(L,t) = g_{k+1}(t)\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

En appliquant à nouveau la proposition 3.1.2, la solution z_{k+1} de ce système existe et satisfait

$$\begin{aligned}&\|z_{k+1}(t)\|_\Omega^2+\frac{\tilde{c}_{k+1}}{2}\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\Omega}^2+\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2+\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\\ \leq\ &\tilde{C}_{k+1}e^{2\tilde{c}_{k+1}t}\left(\|z_{k+1}^0\|_\Omega^2+\|\tilde{g}_k\|_{[0,t]}^2+\|g_{k+1}\|_{[0,t]}^2\right)\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

pour certains $\tilde{C}_{k+1}$ et $\tilde{\alpha}_{k+1}$. De plus :

$$\begin{aligned}&\|\tilde{g}_k\|_{[0,t]}^2 \leq 2\left(\theta_k^2\|g_k\|_{[0,t]}^2+c_k^2\|y_{n+k}(L,t)\|_{[0,t]}^2\right)\\&\leq 2\theta_k^2\|g_k\|_{[0,t]}^2+2c_k^2C_k e^{2c_k t}\left(\sum_{i=1}^{k}\|z_i^0\|_\Omega^2+\sum_{i=1}^{k}\|g_k\|_{[0,t]}^2+\|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right)\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Posons $c_{k+1} = c_k + \tilde{c}_{k+1}$, et en combinant (5.1.8), (5.1.13) et (5.1.14), nous avons :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\left(\|z_i(t)\|_\Omega^2+\frac{c_k}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega}+\|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2+\|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\right)\\&+\|z_{k+1}(t)\|_\Omega^2+\frac{\tilde{c}_{k+1}}{2}\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\Omega}^2+\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2+\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\\&\leq C_k e^{2c_k t}\left(\sum_{i=1}^{k}\|z_i^0\|_\Omega^2+\sum_{i=1}^{k}\|g_i\|_{[0,t]}^2+\|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right)\\&+\tilde{C}_{k+1}e^{2c_{k+1}t}\left(\|z_{k+1}^0\|_\Omega^2+2\theta_k^2\|g_k\|_{[0,t]}^2+\|g_{k+1}\|_{[0,t]}^2\right)\\&+2\alpha_k^2\tilde{C}_{k+1}C_k e^{2(c_k+\tilde{c}_{k+1})t}\left(\sum_{i=1}^{k}\|z_i^0\|_\Omega^2+\sum_{i=1}^{k}\|g_k\|_{[0,t]}^2+\|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right)\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Le partie gauche de (5.1.15) est supérieure à :

$$\rho \sum_{i=1}^{k+1} \left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_{k+1}}{2} \|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \right) \tag{5.1.16}$$

avec $\rho = \min \left\{ \frac{c_k}{c_k + \tilde{c}_{k+1}}, \frac{\tilde{c}_{k+1}}{c_k + \tilde{c}_{k+1}} \right\}$, et la partie droite est inférieure à :

$$Ce^{2c_{k+1}t} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \|z_i^0\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{k+1} \|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2 \right) \tag{5.1.17}$$

avec $C > \max \left\{ \tilde{C}_{k+1}, (2\theta_k^2 + 2c_k^2 C_k)\tilde{C}_{k+1} + C_k \right\}$. En prenant $C_{k+1} = \frac{C}{\rho}$, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k+1} \left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_{k+1}}{2} \|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \right) \\ &\leq C_{k+1} e^{2c_{k+1}t} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \|z_i^0\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{k+1} \|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2 \right) \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

La proposition est démontrée avec $j = n$.

❑

5.1.2 Atteignabilité

Nous allons établir l'atteignabilité de ce système avec les commandes g_i, $i = \overline{1, n+1}$.

Lemme 5.1.2. *Soient* $z_0 = (y_1^0 \ \dots \ y_n^0 \ y_{n+1}^0 \ \dots \ y_{2n}^0)^T \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $z_T = (y_1^T \ \dots \ y_n^T \ y_{n+1}^T \ \dots \ y_{2n}^T)^T \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, *et*

$$T > 2 \max_{i=\overline{1,2n}} \int_0^L \frac{dx}{|\lambda_i(x)|} \tag{5.1.19}$$

Alors il existe $g_i \in \mathbf{H}^1([0,T])$, $i = \overline{1, n+1}$ *tels que la solution* z *de (5.1.1)-(5.1.4) satisfait*

$$z(0) = z_0, \quad et \quad z(T) = z_T \tag{5.1.20}$$

De plus, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$.

Démonstration. La démonstration se fonde sur l'atteignabilité du système hyperbolique 2×2 avec deux commandes frontières (lemme 3.2.1) et avec une commande frontière (lemme 3.3.1). La méthode utilisée est inspirée de celle de [Li & Rao, 2004]. Considérons tout d'abord le premier système ($i = 1$ dans (5.1.1)), avec les conditions frontières :

$$\begin{aligned} y_{n+1}(0,t) &= g_{n+1}(t), \\ y_1(L,t) &= g_1(t) \end{aligned}, \quad t \in [0,T] \tag{5.1.21}$$

En appliquant le lemme 3.2.1, il existe v_1 et $v_{n+1} \in \mathbf{H}^1([0,T])$ tels que la solution de (5.1.1) avec $i = 1$ et (5.1.21) satisfait

$$z_1(0) = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_{n+1}^0 \end{pmatrix}, \quad z_1(T) = \begin{pmatrix} y_1^T \\ y_{n+1}^T \end{pmatrix} \tag{5.1.22}$$

Pour $i = 2$ jusqu'à $i = n$, nous répétons les étapes suivantes pour construire la solution dans chaque sous système :

- Posons $\tilde{g}_{i-1}(t) = \theta_{i-1} g_{i-1}(t) + \alpha_{i-1} y_{n+i-1}(L,t)$, qui est déterminé par la solution du sous-système $i-1$.
- Considérons le problème (5.1.1) avec les conditions frontières comme suit :

$$\begin{aligned} y_{n+i}(0,t) &= \tilde{g}_{i-1}(t) + \beta_i y_i(0,t), \\ y_i(L,t) &= g_i(t) \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

  et appliquons le lemme 3.3.1 : il existe alors $g_i \in \mathbf{H}^1([0,T])$ tel que

$$z_i(0) = \begin{pmatrix} y_i^0 \\ y_{n+i}^0 \end{pmatrix}, \quad z_i(T) = \begin{pmatrix} y_i^T \\ y_{n+i}^T \end{pmatrix} \tag{5.1.24}$$

Nous obtenons finalement $z = (y_1 \quad \dots \quad y_n \quad y_{n+1} \quad \dots \quad y_{2n})^T$ satisfaisant (5.1.20) et $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$.

❑

5.2 CHOG pour un réseau de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade

5.2.1 Formulation abstraite

Nous pouvons appliquer la même procédure que dans le cas d'un seul système afin de reformuler le problème (5.1.1)-(5.1.4) sous forme abstraite. Tout d'abord, nous constatons que ce système peut être mis sous la forme suivante :

$$\dot{z}(t) = \mathfrak{A} z(t), \quad z(0) = z_0, \mathfrak{B} z(t) = B g(t), z(t) \in Z, \quad g(t) \in G \tag{5.2.1}$$

avec $Z = \mathbf{L}_2([0,L], \mathbb{R}^{2n})$, $G = \mathbb{R}^{n+1}$,

$$z = (y_1 \quad y_2 \cdots y_{2n})^T,\ g = (g_1 \cdots g_{n+1})^T,\ z_0 = (y_1^0 \quad y_2^0 \cdots y_{2n}^0)^T$$

L'opérateur $\mathfrak{A}$ est défini par :

$$\mathfrak{A} h = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix} \frac{dh}{dx} + \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Delta_1 \\ \Gamma_2 & \Delta_2 \end{pmatrix} h \tag{5.2.2}$$

avec le domaine

$$\mathbf{D}(\mathfrak{A}) = \{h \in Z \mid h \text{ est absolument continue}, \frac{dh}{dx} \in Z\} \tag{5.2.3}$$

où $A^+ = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $A^- = \text{diag}(\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{2n})$, $\Gamma_1 = \text{diag}(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, $\Gamma_2 = \text{diag}(\gamma_{n+1}, \cdots, \gamma_{2n})$, $\Delta_1 = \text{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$, $\Delta_2 = \text{diag}(\delta_{n+1}, \cdots, \delta_{2n})$. Les opérateurs $\mathfrak{B}$ et B sont définis par :

$$\mathfrak{B}h = \begin{pmatrix} h_1(L) \\ h_2(L) \\ \vdots \\ h_n(L) \\ h_{n+1}(0) \\ h_{n+2}(0) - \alpha_1 h_{n+1}(L) - \beta_1 h_2(0) \\ \vdots \\ h_{2n}(0) - \alpha_{n-1} h_{2n-1}(L) - \beta_{n-1} h_n(0) \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \theta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \theta_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

Définissons l'opérateur $\mathcal{A}$ comme suit

$$\mathcal{A}h = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix} \frac{dh}{dx} + \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Delta_1 \\ \Gamma_2 & \Delta_2 \end{pmatrix} h \tag{5.2.5}$$

avec le domaine :

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \cap \ker(\mathfrak{B}) \\ &= \{h = (h_1 \cdots h_{2n})^T \in Z \mid h \text{ est absolument continue}, \frac{dh}{dx} \in Z, \text{ et } h_i(L) = 0, \, i = \overline{1, n}, \\ &\qquad h_{n+1}(0) = 0, \, h_{n+i+1}(0) - \alpha_i h_{n+i}(L) - \beta_i h_{i+1}(0) = 0, \, i = \overline{1, n-1}\} \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Grâce à la majoration du paragraphe 5.1.1, $\mathcal{A}$ avec son domaine est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe (voir aussi la démonstration par l'approche par fonction de transfert de [Zwart et al., 2009]).

Considérons l'opérateur $\mathcal{B}$ défini par :

$$\mathcal{B}g = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g_1 & g_2 \cdots & g_n & g_{n+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{x}{L} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{L} \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 \cdots & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 \cdots & 0 & \frac{L-x}{L} \\ \theta_1 \frac{L-x}{L} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 \cdots \theta_n \frac{L-x}{L} & & 0 \end{pmatrix} \end{array} g,\ g \in G.$$

Nous pouvons vérifier que $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(G, Z)$ et $\mathfrak{B}\mathcal{B}g = Bg$ pour tout $g \in G$. Donc les conditions frontières $\mathfrak{B}z(t) = Bg(t)$ se transforment en $v(t) \in \ker(\mathfrak{B})$. De plus, $\mathfrak{A}\mathcal{B} \in \mathcal{L}(G, Z)$, car explicitement :

$$\mathfrak{A}\mathcal{B} = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} g_1 & g_2 \cdots & g_{n-1} & g_n & g_{n+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \cdots & 0 & 0 & c \\ \theta_1 \tilde{d}_2 & a_2 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 \cdots & \theta_{n-1}\tilde{d}_n & a_n & 0 \\ \tilde{c}_1 & \cdots 0 & 0 & b_1 & \\ \theta_1 b_2 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & \theta_{n-1} b_n & \tilde{c}_n \end{pmatrix} \end{array},$$

avec

$$a_i = \frac{\lambda_i + \gamma_i x}{L}, b_i = \frac{-\lambda_{n+i} + \delta_{n+i}(L-x)}{L},$$
$$\tilde{c}_i = \frac{\gamma_{n+i} x}{L}, \tilde{d}_i = \delta_i \frac{L-x}{L},\ i = \overline{1, n},\ c = \frac{L-x}{L}.$$

Ainsi, le système (5.1.1)-(5.1.5) appartient à la famille de problèmes décrits au paragraphe 2.5. Nous introduisons la nouvelle variable

$$v(t) = z(t) - \mathcal{B}g(t), \tag{5.2.7}$$

la commande auxiliaire

$$u(t) = \dot{g}(t) \tag{5.2.8}$$

ainsi que l'état étendu $z^e = \begin{pmatrix} g \\ v \end{pmatrix} \in Z^e = G \oplus Z$. Nous obtenons alors la forme abstraite du système :

$$\dot{z}^e(t) = \mathcal{A}^e z^e(t) + \mathcal{B}^e u(t), \quad z^e(0) = z_0^e = \begin{pmatrix} g(0) \\ z_0 - \mathcal{B}g(0) \end{pmatrix}, \tag{5.2.9}$$

avec

$$\mathcal{A}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{A}\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \mathbf{D}(\mathcal{A}^e) = G \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}), \tag{5.2.10}$$

et

$$\mathcal{B}^e = \begin{pmatrix} I \\ -\mathcal{B} \end{pmatrix}. \tag{5.2.11}$$

5.2.2 Stabilité de la COHG avec état final fixé à zéro

Sur la base des résultats précédents, nous pouvons établir un théorème similaire au théorème 3.4.2 :

Théorème 5.2.1. *Supposons que $z_0 \in \mathbf{H}^1([0, L])$ et $g(0)$ satisfait les conditions de compatibilité*

$$\mathfrak{B} z_0 = Bg(0). \tag{5.2.12}$$

Alors l'approche de COHG avec état final fixé à zéro (paragraphe 2.3) garantit la stabilité du système (5.1.1)-(5.1.5), avec la fonction de coût quadratique

$$F(z^e, u) = \langle \mathcal{C} z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C} z^e \rangle + \langle u, \mathcal{R} u \rangle \tag{5.2.13}$$

avec l'opérateur $\mathcal{Q}$ coercif et $T > 2 \max\limits_{i=\overline{1,2n}} \int_0^L \frac{dx}{|\lambda_i(x)|}$.

Démonstration. Avec les même arguments que ceux utilisées dans la preuve du théorème 3.4.2, nous pouvons utiliser le lemme 5.1.2 pour montrer que $\mathbf{D}(\mathcal{A}^e)$ est exactement atteignable et invariant par rapport au système (5.2.9). De plus, par le lemme 3.4.1, $\mathcal{C}^* \mathcal{Q} \mathcal{C}$ est coercif. Nous obtenons enfin la conclusion du théorème 5.2.1 en appliquant le théorème 2.3.1.

❑

5.3 Application à un réseau de canaux d'irrigation

Nous considérons maintenant un système de canaux d'irrigation contenant n biefs interconnectés par $n+1$ vannes. Chaque bief est modélisé par les équations de Saint-Venant :

$$\begin{array}{lcl} B_i\partial_t h_i + \partial_x Q_i & = & 0 \\ \partial_t Q_i + \partial_x \left(\dfrac{Q_i^2}{B_i h_i} + \dfrac{1}{2} B_i g h_i^2 \right) & = & g B_i h_i (I_i - J(Q_i, h_i) \end{array}, \quad \begin{array}{l} (x,t) \in [0, L_i] \times [0, \infty) \\ i = 1, \ldots, n \end{array}. \tag{5.3.1}$$

où B_i et L_i sont la largeur et la longueur du bief i respectivement.

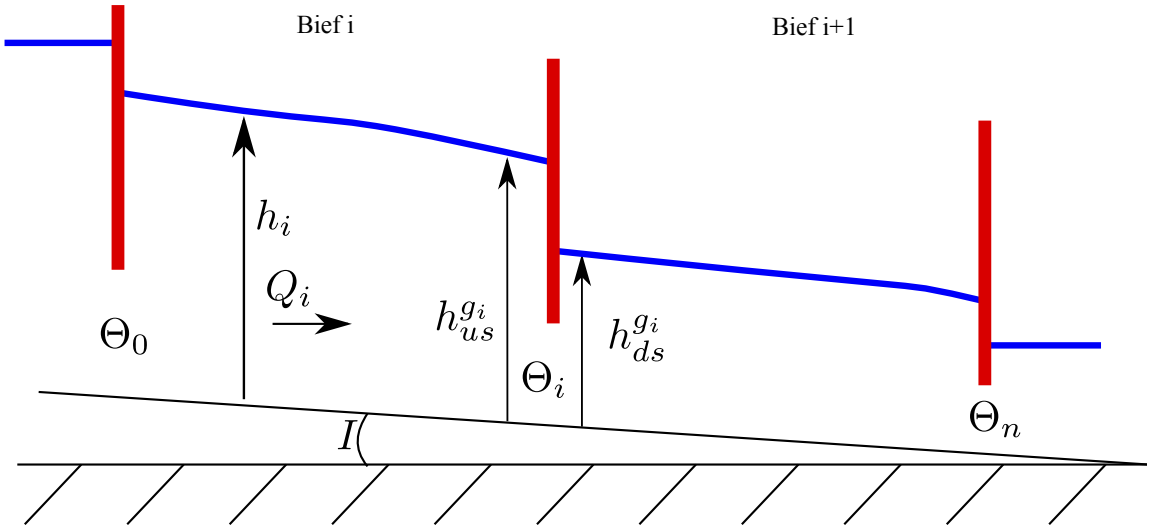

FIG. 5.1 – Un réseau des canaux d'irrigation

Les interconnexions entre les biefs sont contraintes par un ensemble de $n+1$ équations de vanne :

$$Q_{g_i}^2 = K_i^2 \Theta_i^2(t) 2g(h_{us}^{g_i} - h_{ds}^{g_i}), i = 0, \ldots, n \tag{5.3.2}$$

et $n-1$ équations de conservation du débit :

$$Q_i(L_i, t) = Q_{i+1}(0, t), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{5.3.3}$$

où pour la vanne i, Q_{g_i} est le débit à travers la vanne, K_i, le coefficient, Θ_i, l'ouverture, $h_{us}^{g_i}$ et $h_{ds}^{g_i}$ sont la hauteur d'eau à l'amont et à l'aval de la vanne respectivement.

Le problème de contrôle de ce type de systèmes a été considéré par exemple dans [Litrico & Fromion, 2009*b*] ou [Coron et al., 2009]. Cependant, la première contribution se fonde sur un modèle par fonction de transfert qui ne prend pas en compte la caractéristique distribuée du système, tandis que la deuxième contribution considère le modèle distribué mais linéarisé autour d'un profil uniforme. Concernant les autres réseaux de

lois de conservation, il est possible de consulter par exemple [Dick et al., 2010] pour un réseau de canalisation de gaz ou [Gugat et al., 2010] pour un réseau de trafic routier.

Dans la suite, nous allons utiliser la COHG pour stabiliser le système (5.3.1) linéarisé autour d'un profil d'équilibre non uniforme $(\bar{h}_i(x), \bar{Q}_i(x))$, $i = 1, \ldots, n$. En utilisant la même transformation que le cas d'un seul bief, nous obtenons :

$$\begin{cases} \partial_t y_i = \lambda_i(x)\partial_x y_i + \gamma_i(x) y_i + \delta_i(x) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+i} + \gamma_{n+i}(x) y_i + \delta_{n+i}(x) y_{n+i} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} (x,t) \in [0, L_i] \times [0, \infty) \\ i = 1, \cdots, n \end{array} \tag{5.3.4}$$

Pour chaque bief, nous introduisons une nouvelle variable d'espace $\tilde{x} = \dfrac{x}{L_i} L$, pour un certain L, alors le système (5.3.4) peut être ré-écrit comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t y_i = \tilde{\lambda}_i(\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} y_i + \gamma_i(\tilde{x}) y_i + \delta_i(\tilde{x}) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \tilde{\lambda}_{n+i}(\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} y_{n+i} + \gamma_{n+i}(\tilde{x}) y_i + \delta_{n+i}(\tilde{x}) y_{n+i} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} (\tilde{x},t) \in [0, L] \times [0, \infty) \\ i = 1, \cdots, n \end{array} \tag{5.3.5}$$

ou $\tilde{\lambda}_i = \dfrac{L\lambda_i}{L_i}$, $i = 1, \cdots, 2n$. Pour la suite, la notation $\tilde{\cdot}$ sera omise. Comme dans le cas d'un bief, nous pouvons calculer les ouvertures des vannes Θ_i, $i = 0, \cdots, n$ pour réaliser les conditions suivantes (voir (4.1.16) :

$$y_i(L,t) = g_i(t),\ \dot{g}_i = u_i,\ i = 1, \ldots, n; \quad y_{n+1}(0,t) = g_{n+1}(t),\ \dot{g}_{n+1} = u_{n+1}. \tag{5.3.6}$$

La conservation du débit à travers les vannes peut être exprimée en terme des nouvelles variables comme suit :

$$\begin{aligned} &B_i\lambda_i(L)y_i(L,t) + B_i\lambda_{n+i}(L)y_{n+i}(L,t) \\ &\qquad = B_{i+1}\lambda_{i+1}(0)y_{i+1}(0,t) + B_{i+1}\lambda_{n+i+1}(0)y_{n+i+1}(0,t). \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Cette relation peut être mise sous la forme :

$$y_{n+i+1}(0,t) = \theta_i y_i(L,t) + \alpha_i y_{n+i}(L,t) + \beta_i y_{i+1}(0,t), \tag{5.3.8}$$

avec :

$$\theta_i = -\frac{B_i\lambda_i(L)}{B_{n+i+1}\lambda_{i+1}(0)}, \quad \alpha_i = \frac{B_i\lambda_{n+i}(L)}{B_{n+i+1}\lambda_{i+1}(0)}, \quad \beta_i = \frac{\lambda_{i+1}(0)}{\lambda_{n+i+1}(0)}. \tag{5.3.9}$$

Ainsi, le système (5.3.5) avec les conditions aux frontières (5.3.6) et (5.3.8) a la forme du système étudié précédemment au paragraphe 5.2.2. Si la fonction de coût suivante est utilisée :

$$J = \int_0^T F(z^e, u)dt \tag{5.3.10}$$

avec

$$F(z^e, u) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^L z_i^T Q_i z_i dx + g^T P_f g + u^T R u,\ Q_i,\ P_f,\ R > 0, \tag{5.3.11}$$

le système des canaux d'irrigation peut également être stabilisé par l'approche de la COHG avec état final fixé à zéro, ce qui sera illustré par la simulation effectuée dans le paragraphe ci-après.

5.4 Validation par simulation

Nous considérons un système de 3 canaux en cascade dont les longueurs sont $L_1 = 1000\,(m)$, $L_2 = 2000\,(m)$ et $L_3 = 3000\,(m)$ respectivement. Les autres paramètres sont les mêmes que ceux du cas d'un bief (voir tableau 4.1). L'équilibre autour duquel nous faisons la linéarisation est présenté sur la figure 5.2.

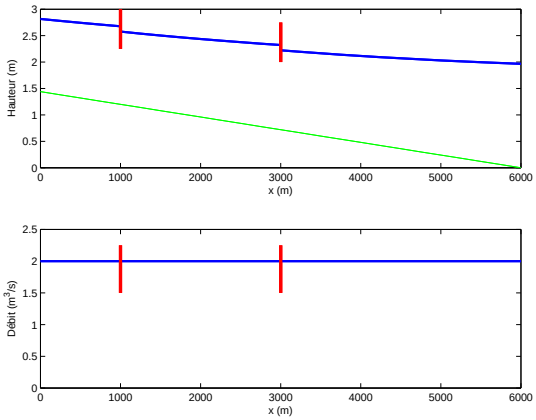

FIG. 5.2 – Hauteur et débit d'équilibre

Le système est discrétisé par la méthode de Galerkin comme dans le cas d'un bief, puis le problème aux deux bouts est résolu par la fonction *bvp5c* de Matlab®. Le nombre de points de discrétisation est $M_1 = 5$, $M_2 = 9$ et $M_3 = 13$ pour le bief 1, bief 2 et bief 3 respectivement (le pas d'espace $\Delta x = 250\,(m)$). Le pas de temps est $\Delta t = 75\,(s)$. Les paramètres de la commande sont donnés dans le tableau 5.1.

$T\,(s)$	$\sigma\,(s)$	P_f	Q_i	R
3000	600	diag(1; 1; 1; 1)	diag(1; 1)	diag(1; 1; 1; 1)

TAB. 5.1 – Paramètres de la commande

Les résultats de simulation sont présentés sur les figures 5.3-5.10. Nous constatons que la hauteur et le débit normalisé de chaque bief convergent bien vers l'origine ce qui signifie que la hauteur et le débit réels convergent vers le profil d'équilibre. Les résultats obtenus sont donc en accord avec les analyses du paragraphe 5.2.

5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré que la COHG peut être appliquée à la stabilisation d'un réseau de systèmes hyperboliques 2×2. La simulation réalisée avec un réseau de

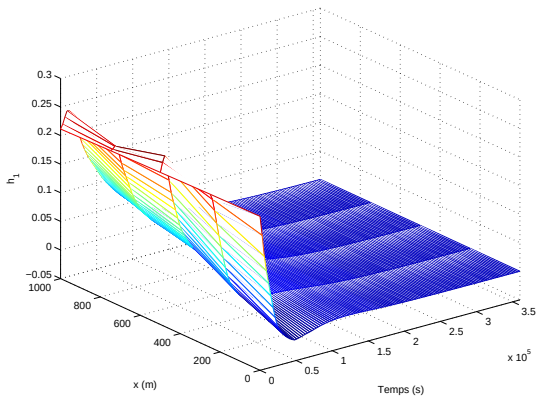

FIG. 5.3 – Bief 1 : La hauteur normalisée

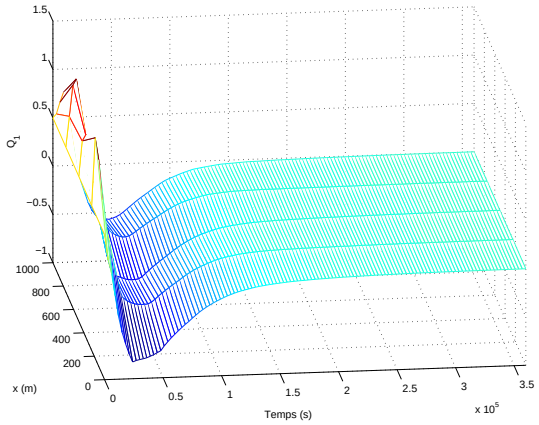

FIG. 5.4 – Bief 1 : Le débit normalisé

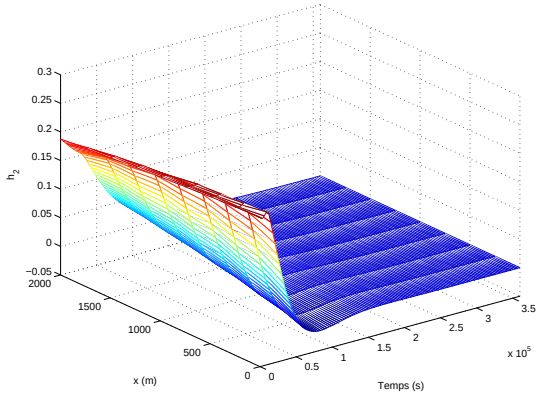

FIG. 5.5 – Bief 2 : La hauteur normalisée

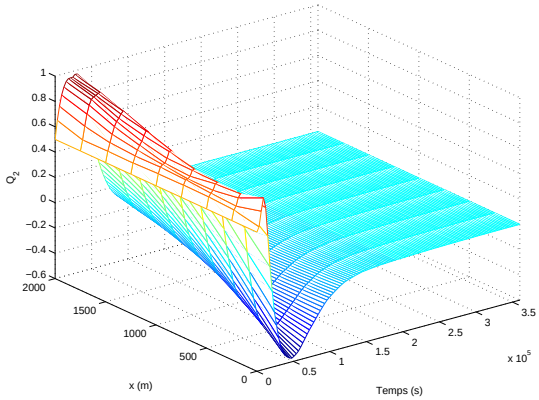

FIG. 5.6 – Bief 2 : Le débit normalisé

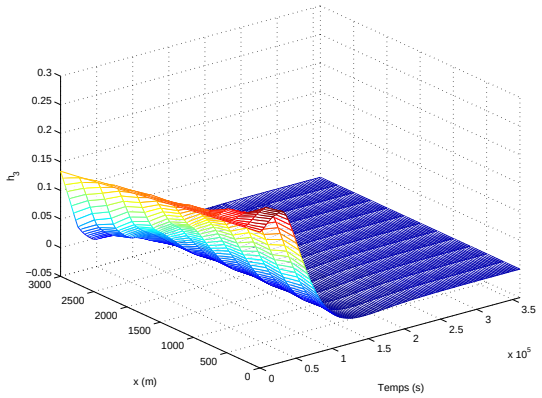

FIG. 5.7 – Bief 3 : La hauteur normalisée

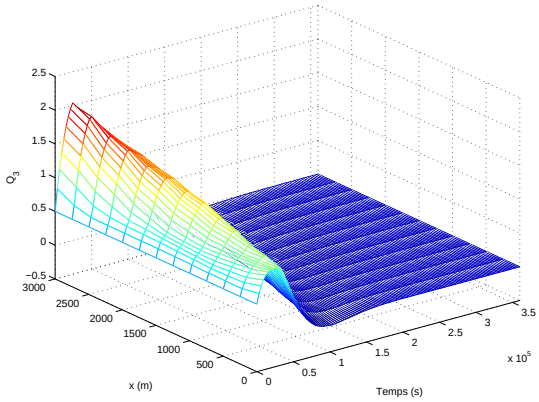

FIG. 5.8 – Bief 3 : Le débit normalisé

canaux d'irrigation indique que cette stratégie a un potentiel important pour des appli-

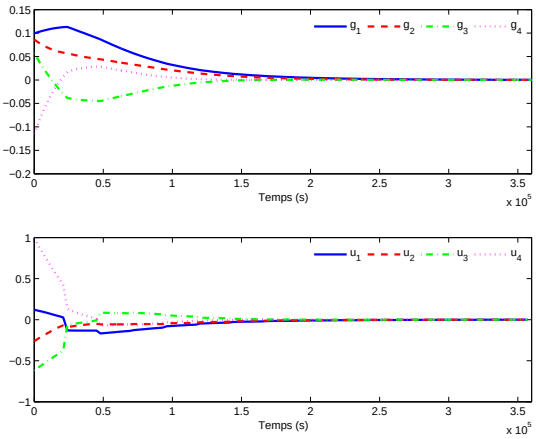

FIG. 5.9 – Les états et les commandes aux frontières

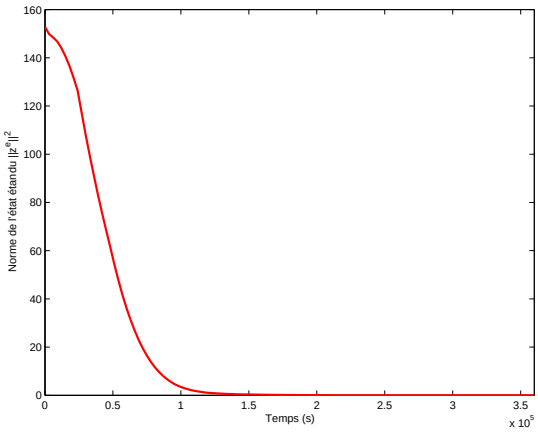

FIG. 5.10 – La norme de l'état étendu $\|z^e\|^2$

cations pratiques. Cependant, le réseau constitué de sous-systèmes en cascade est juste un cas particulier parmi les différentes structures envisageables en réalité. Nous voulons souligner que l'extension des résultats obtenus ici à des réseaux dont la complexité est plus élevée est totalement faisable, sachant que les résultats concernant l'atteignabilité de certaines structures des canaux d'irrigation (structure en étoile ou en arbre) ont été déjà considérés par [Li & Rao, 2004].

On remarquera qu'il reste un écart entre la COHG en dimension infinie et son approximation en dimension finie car la convergence du schéma numérique vers la solution exacte n'a pas été établie. Comme indiqué par [Zuazua, 2002], il est indispensable de vérifier la contrôlabilité du système approché ce qui peut être obtenu en suivant la méthode proposée par [Zuazua, 2004] ou [Zuazua, 2002].

Les travaux réalisés dans ce chapitre font l'objet de la publication [Pham, Georges & Besançon, 2012].

Chapitre 6

COHG pour une classe de systèmes de lois de conservation scalaires non linéaires

Ce chapitre traite du problème de commande frontière des systèmes de lois de conservation scalaires non linéaires. Un des problèmes dans ce cas est la présence possible de singularité dans la solution appelée "choc". L'objectif ici est d'éviter ce type de singularité et de stabiliser le système. Dans le paragraphe 6.1, la forme caractéristique du système est présentée et les conditions pour éviter le choc sont déduites. Nous montrons ensuite que la convergence de l'état à la limite garantit la convergence de l'état dans le domaine. La stabilité de la COHG est présentée au paragraphe 6.2. Le cas où il y a une perturbation mesurable est également traité. A titre d'exemple, dans le paragraphe 6.3, toutes les théories présentées dans ce chapitre sont appliquées au modèle de trafic routier et certains résultats de simulation sont donnés pour illustrer l'efficacité de cette approche.

6.1 La stabilité des systèmes hyperboliques scalaires avec commande frontière

Un des défis des systèmes de lois de conservation non linéaire est qu'ils admettent des singularités appelées chocs. La présence du choc dans la solution, d'un point de vue pratique, peut conduire à des situations (très) critiques telles que les embouteillages sur les flux de voitures ou les tsunamis pour des écoulements à surface libre. D'un point de vue théorique, les singularités exigent plus d'efforts pour l'analyse (voir par exemple [Bressan, 2000] , [Colombo et al., 2011] et [Colombo & Goatin, 2007]). Comme point

de départ, nous proposons dans cette étude une méthode pour éviter ces situations dans le cas des systèmes de lois de conservation *scalaires non linéaires*. L'extension de cette approche pour des systèmes $n \times n$ sera étudiée dans nos travaux à venir. Dans la suite, le système suivant sera considéré :

$$\partial_t a + \partial_x F(a) = 0,\ (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+,\ a(\cdot,0) = a_0 \tag{6.1.1}$$

Cette équation représente la conservation de la quantité a sous l'effet du flux $F(a)$. Nous supposons que la fonction F est suffisamment régulière (au moins $\mathbf{C}^2$) ce qui signifie que (6.1.1) peut également être écrit sous la forme :

$$\partial_t a + f(a)\partial_x a = 0 \tag{6.1.2}$$

où $f(a) = \dfrac{dF}{da}$. Sans perte de généralité, nous pouvons aussi supposer que la commande agit au point $x = 0$:

$$a(0,t) = w(t) \tag{6.1.3}$$

Pour garantir la régularité de la solution, nous introduisons un intégrateur pour l'état à la frontière :

$$\dot{w}(t) = u(t) \tag{6.1.4}$$

Le problème de contrôle d'un réseau de ces équations a été étudié précédemment par [Bastin et al., 2007]. Dans cet article, la stabilité est garantie par l'utilisation d'une approche de Lyapunov, mais le problème des chocs n'est pas explicitement traité. Le problème de commande optimale de ce système a été considéré par [Gugat et al., 2010] et [Jacquet, 2006] où les chocs sont pris en compte. L'objectif de ce chapitre est de manipuler la commande à la limite de manière à éviter le choc. L'idée est d'utiliser le modèle non linéaire afin d'anticiper le comportement du système et ensuite ajouter des contraintes à la commande, ce qui motive l'utilisation de l'approche de la COHG.

Les idées principales sont résumées comme suit : Nous allons tout d'abord introduire des contraintes pour l'état et la commande à la limite de telle sorte qu'un choc ne puisse pas apparaître, puis utiliser la COHG pour garantir en même temps ces contraintes et la convergence de la valeur à la limite $w(t)$. Nous allons voir plus tard que la convergence de $w(t)$ entraîne la convergence de l'état $a(x,t)$ sur le domaine entier.

6.1.1 Les conditions pour éviter le choc

Dans ce travail, nous allons essayer d'éviter une singularité dans la solution du système (6.1.2)-(6.1.4), c'est-à-dire garantir que $a(\cdot,t)$ est dans $\mathbf{C}^0([0,1])$, pour tout $t \geq 0$. Le problème est bien posé si $f(w(t)) \geq c > 0$ pour tout $t \geq 0$. Cette condition assure que la valeur de l'état dans le domaine $[0,1]$ est déterminée par celle à la limite $x = 0$. Il est bien connu que les courbes de caractéristique du système sont déterminées par

l'équation $\dfrac{dx}{dt} = f(a)$, et le long de ces courbes, la dérivée totale de la solution $a(x,t)$ est donc $\dfrac{da}{dt} = 0$ (voir [Serre, 1999] pour une introduction générale, voir [Shang et al., 2005] et [Shang et al., 2007] pour l'application de cette méthode à la synthèse de la commande pour des systèmes paraboliques et hyperboliques). Par conséquent, la variable a est constante le long des caractéristiques et ces dernières sont des lignes droites dont la pente est déterminée par la condition initiale ou par la condition à la limite.

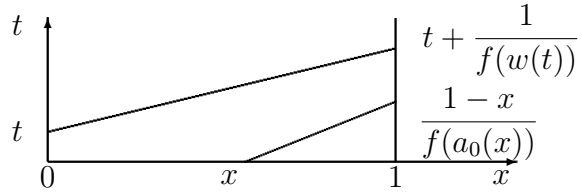

FIG. 6.1 – Caractéristiques et conditions pour éviter le choc

Nous nous référons à la figure 6.1 pour illustrer les conditions pour éviter le choc. Il est évident que pour éviter le choc, les caractéristiques ne doivent pas se croiser dans l'intervalle $[0,1]$. Par conséquent, l'ordonnée de l'intersection d'une caractéristique avec la ligne $x = 1$ doit être une fonction croissante du temps. Considérons 2 cas :

• Cas 1 : $t \leq \dfrac{1}{f(a_0(0))}$. Dans ce cas, la pente d'une caractéristique est déterminée par la condition initiale. L'intersection d'une caractéristique émise à partir du point $(x,0)$ avec la ligne $x = 1$ a l'abscisse $\dfrac{1-x}{f(a_0(x))}$ qui doit être une fonction croissante de x. Alors :

$$\frac{-f(a_0(x)) + (1-x)f'(a_0(x))a_0'(x)}{f^2(a_0(x))} > 0 \tag{6.1.5}$$

• Cas 2 : $t > \dfrac{1}{f(a_0(0))}$. La valeur au point $x = 1$ est gouvernée par la condition en $x = 0$. La caractéristique émise à partir du point $(0,t)$ arrive en $x = 1$ au temps $t + \dfrac{1}{f^(w(t))}$, et cette valeur doit être une fonction croissante de t. Cette condition entraîne :

$$1 - \frac{uf'(w)}{f^2(w)} > 0 \tag{6.1.6}$$

où $f' = \dfrac{df}{dw}$. Pour conclure, si la condition initiale satisfait (6.1.5) et la condition à la limite satisfait (6.1.6), il n'y a aucun choc dans l'intervalle $[0,1]$.

6.1.2 La stabilité

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la convergence de la valeur à la limite vers une référence donnée entraîne la convergence de la valeur dans le domaine entier.

Théorème 6.1.1. *Soit $\gamma > 0$ une constante suffisamment petite. Nous considérons le problème suivant :*

$$\begin{aligned} \partial_t a + f(a)\partial_x a = 0 \\ a(\cdot,0) = a_0, \quad a(0,t) = w(t), \quad \dot{w}(t) = u(t) \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

avec la commande $u(\cdot)$ et la trajectoire correspondante $w(\cdot)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} u(t) \in U \subset \mathbb{R}, \quad w(t) \in W \subset \mathbb{R} \\ 1 - \dfrac{f'(w(t))u(t)}{f^2(w(t))} \geq \gamma \end{cases}, \ t \geq 0. \tag{6.1.8}$$

Sous les hypothèses suivantes :

i) a_0 satisfait la condition pour éviter le choc (6.1.5).

ii) W et U sont des intervalles fermés de $\mathbb{R}$, $0 \in U$.

iii) $f(w) \geq c$ pour tout $w \in W$, pour une certaine constante $c > 0$.

Alors, si la commande $u(\cdot)$ stabilise $w(t)$ à une référence $w_r \in W$, $a(\cdot,t)$ converge également (dans la norme $\mathbf{C}^0$) vers cette référence.

Démonstration. Pour $t \geq \dfrac{1}{f(a_0(0))}$, nous allons montrer que $a(x,t)$ est continu en x. Puisque il n'y a aucun choc, la solution de (6.1.7) peut être déterminée par la méthode des caractéristiques :

$$a(x,t) = w(t - \frac{x}{f(a(x,t))}) \tag{6.1.9}$$

Notons $s = t - \dfrac{x}{f(a(x,t))} = t - \dfrac{x}{f(w(s))}$. Donc $x = (t-s)f(w(s))$ et :

$$dx = [-f(w(s)) + (t-s)f'(w(s))u(s)]\, ds$$

Nous évaluons le terme entre les parenthèses :

$$\begin{aligned} -f(w) + (t-s)f'(w)u &\leq -f(w) + \frac{x}{f(w)}(1-\gamma)f^2(w) \\ &\leq -\gamma f(w) \leq -\gamma c \end{aligned}$$

Pour un t fixé, nous calculons :

$$\begin{aligned} \left|\frac{da(x,t)}{dx}\right| &= \left|\frac{dw(s)}{[-f(w(s)) + (t-s)f'(w(s))u(s)]\, ds}\right| \\ &= \frac{|u(s)|}{|-f(w(s)) + (t-s)f'(w(s))u(s)|} \leq \frac{1}{\gamma c}\max_{\mu \in U}|\mu| \end{aligned}$$

Par conséquent, $a(x,t)$ est continue en x. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|a(x,t) - w_r\|_{\mathbf{C}^0} &= \max_{x\in[0,1]} |a(x,t) - w_r| \\ &= \max_{s\in[t-\tau,t]} |w(s) - w_r| \end{aligned}$$

où τ est déterminé par une relation implicite :

$$\tau = t - \frac{1}{f(w(\tau))} \geq t - \frac{1}{c} \tag{6.1.10}$$

Alors

$$\|a(x,t) - w_r\|_{\mathbf{C}^0} \leq \max_{s\in[t-1/c,t]} |w(s) - w_r| \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty.$$

❑

Remarque 6.1.1. Nous pouvons également démontrer que $a(x,t)$ est continue en x pour $t < 1/f(a_0(0))$ par une même argumentation.

6.2 La stabilité par COHG

Supposons que les trois hypothèses du théorème 6.1.1 sont vraies pour le système (6.1.7). Nous allons montrer que la COHG peut être utilisée pour obtenir une convergence asymptotique de w et garantir les conditions pour éviter le choc (6.1.6). Pour cela, nous considérons le problème d'optimisation consistant à résoudre à chaque instant d'échantillonnage :

$$\begin{aligned} &\min_{\bar{u}(\cdot)} J(\bar{a},\bar{w},\bar{u}) \\ &\text{sous} \begin{cases} \partial_t \bar{a} + f(\bar{a})\partial_x \bar{a} = 0, \\ \bar{a}(0,\tau) = w(\tau),\ \dot{\bar{w}}(\tau) = \bar{u}(\tau),\ \forall \tau \in [t, t+T] \\ \bar{a}(\cdot,t) = a(\cdot,t),\ \bar{w}(t) = w(t),\ \bar{u} \in U,\ \bar{w} \in W \\ 1 - \dfrac{f'(\bar{w})\bar{u}}{f^2(\bar{w})} \geq \gamma \end{cases} \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

où $a(\cdot,t)$ et $w(t)$ représentent l'état à l'instant t. Nous voulons réguler l'état en $x = 1$ autour d'une référence constante a_r, donc la fonction de coût prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} J(\bar{a},\bar{w},\bar{u}) = & \int_t^{t+T} (q.(\bar{a}(1,\tau) - a_r)^2 + r.\bar{u}^2(\tau))d\tau \\ & + q_f(\bar{a}(1,t+T) - a_r)^2 \end{aligned}$$

où $q > 0$, $r > 0$ et $q_f > 0$ sont les constantes de pondération. L'horizon de prédiction T est déterminé par la relation :

$$T = T_f + \frac{1}{f(w(t+T_f))} \tag{6.2.2}$$

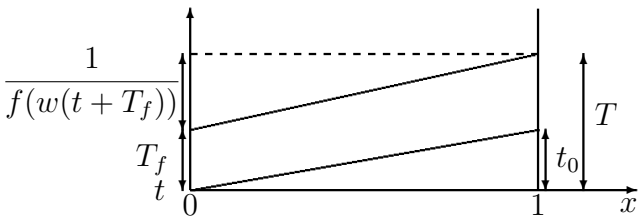

FIG. 6.2 – La relation entre T, T_f et t_0

avec une constante positive T_f (voir la figure 6.2).

La raison pour laquelle cet horizon est choisi est que le problème de commande optimale en dimension infinie (6.2.1) peut être transformé en un problème de commande optimale en dimension finie à la manière décrite ci-après.

La fonction de coût J peut être décomposée en 2 parties : l'une sous l'effet de la condition initiale et l'autre sous l'effet de la commande au point $x = 0$:

$$\begin{aligned} J(\bar{a}, \bar{w}, \bar{u}) =& \int_t^{t+t_0} q(\bar{a}(1,\tau) - a_r)^2 d\tau + \int_{t+t_0}^{t+T} q(\bar{a}(1,\tau) - a_r)^2 d\tau \\ &+ \int_t^{t+T_f} r\bar{u}^2(\tau) d\tau + \int_{t+T_f}^{t+T} r\bar{u}^2(\tau) d\tau + q_f(\bar{a}(1, t+T) - a_r)^2 \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

où $t_0 = \dfrac{1}{f(a(0,t))}$. Le premier terme ne dépend pas de $\bar{u}$. Pour le deuxième, nous avons $\bar{a}(1,\tau) = \bar{w}(s)$ où $s = \tau - 1/f(\bar{w}(s))$. Alors :

$$\begin{aligned} &\int_{t+t_0}^{t+T} q(\bar{a}(1,\tau) - a_r)^2 d\tau \\ &= \int_t^{t+T_f} q[\bar{w}(s) - a_r]^2 \left(1 - \frac{f'(\bar{w}(s))\bar{u}(s)}{f^2(\bar{w}(s))}\right) ds \end{aligned}$$

car $d\tau = \left(1 - \dfrac{f'(\bar{w}(s))\bar{u}(s)}{f^2(\bar{w}(s))}\right) ds$.

La commande dans l'intervalle $[t + T_f, t + T]$ n'a aucun effet sur l'état en $x = 1$ sur l'horizon de prédiction, donc peut être annulée pour minimiser la fonction de coût. Par conséquent, le quatrième terme dans (6.2.3) s'annule. Le problème original (6.2.1) est maintenant équivalent à :

$$\begin{aligned} &\min_{\bar{u}(\cdot)} J_1(\bar{z}, \bar{u}) = \int_t^{t+T_f} F(\bar{z}, \bar{u}) ds + E(\bar{z}(T_f)) \\ &\text{sous} \begin{cases} \dot{\bar{z}} = \bar{u}, \quad \bar{z}(t) = z(t) = w(t) - a_r, \\ \bar{u}(\tau) \in U,\ \bar{z}(\tau) \in Z = W - a_r, \tau \in [t, t+T_f] \\ 1 - \dfrac{g'(\bar{z})\bar{u}}{g^2(\bar{z})} \geq \gamma \end{cases} \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

où nous avons introduit une nouvelle variable $\bar{z} = \bar{w} - a_r$ et :

$$\begin{aligned} F(z,u) &= qz^2\left(1 - \frac{g'(z)u}{g^2(z)}\right) + ru^2, \\ E(z) &= q_f z^2,\ g(z) = f(z + a_r). \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Dans un premier temps, nous montrons l'existence de la solution optimale. Nous remarquons que pour tout $z(t) \in Z$ le problème ci-dessus a toujours une solution admissible $\bar{u}(\cdot) \equiv 0$. Nous définissons la zone (dépendant de l'état) de la commande :

$$\Omega(z) = \{u \in U \mid 1 - \frac{g'(z)u}{g^2(z)} \geq \gamma\} \tag{6.2.6}$$

et notons

$$N(z) = \{(F(z,u) + \delta, u) \mid \delta \geq 0, u \in \Omega(z)\} \tag{6.2.7}$$

Il est facile de vérifier que $N(z)$ est convexe pour tout $z \in \mathbb{R}$, donc l'existence de la solution optimale est garantie en appliquant le théorème de Fillipov-Cesari (voir [Hartl et al., 1995]).

Dans un second temps, nous établissons la preuve de stabilité. Il est évident que le coût intermédiaire F satisfait les conditions suivantes : $F(0,0) = 0$, $F(z,u) > 0$, $\forall (z,u) \in Z \times U \setminus (0,0)$ et $F(z,u) \geq \gamma q z^2$. Nous allons montrer que pour tout $z(t) \in Z$ nous pouvons trouver une commande admissible $\bar{u}_f$ (c'est-à-dire que cette commande satisfait toutes les contraintes (6.2.4)) telle que :

$$\frac{\partial E}{\partial z}\bar{u}_f(\tau) + F(\bar{z}(\tau), \bar{u}_f(\tau)) \leq 0, \quad \forall \tau \in [t, t + T_f] \tag{6.2.8}$$

Premièrement, nous voyons que :

$$F(z,u) \leq Qz^2,\ Q = \max_{z \in Z, u \in U}\left[q\left(1 - g'(z)u/g^2(z)\right)\right]$$

Deuxièmement, puisque $g'(\bar{z})$ est borné, il existe u_M tel que pour tout $\bar{u} \in U^{ad} = [-u_M, u_M]$:

$$|g'(\bar{z})\bar{u}| \leq (1-\gamma)c^2 \leq (1-\gamma)g^2(\bar{z}) \tag{6.2.9}$$

Nous considérons donc la commande par retour d'état sous la forme $\bar{u}_f = k\bar{z}$ où $k < 0$ et $kZ \subseteq U^{ad}$. Une telle constante existe car $(0,0) \in Z \times U^{ad}$. Alors, $\bar{u}_f$ est une commande admissible et si la constante de pondération final q_f est choisie de manière que :

$$2q_f k + Q + rk^2 \leq 0, \tag{6.2.10}$$

nous avons

$$\frac{\partial E}{\partial z}\bar{u}_f + F(\bar{z}(\tau), \bar{u}_f) \quad \leq \quad (2q_f k + Q + rk^2)\bar{z}^2 \leq 0. \tag{6.2.11}$$

Le théorème 2.1 présenté dans [Findeisen, Imsland, Allgöwer & Foss, 2003] peut être appliqué et garantit que $w(t)$ converge vers a_r, le domaine d'attraction étant l'ensemble Z. Finalement, en appliquant le théorème 6.1.1, l'état du système (6.1.7) converge également vers a_r.

Remarque 6.2.1. Afin d'éviter la contrainte non linéaire dans (6.2.4), nous pouvons la remplacer par la contrainte $\bar{u} \in U^{ad}$. Cela conduit à une solution pessimiste mais plus robuste car elle apporte une grande marge pour éviter le choc.

Remarque 6.2.2. Nous pouvons considérer une fonction de coût plus simple qui traite seulement l'état à la limite $x = 0$ de la manière suivante :

$$J(\bar{z}, \bar{u}) = \int_t^{t+T_f} \left[q\bar{z}^2(s) + r\bar{u}^2 \right] ds + q_f \bar{z}^2(T_f). \tag{6.2.12}$$

Cette fonction de coût garantit également la convergence de w vers a_r et par conséquent garantit la convergence de l'état du système entier, mais elle ne peut pas tenir compte d'une perturbation dans le domaine. Ce problème sera considéré au paragraphe ci-après.

6.2.1 Les conditions pour éviter le choc en présence d'une perturbation mesurable

Considérons le système (6.1.7) en présence d'une perturbation. Dans ce cas, l'équation de conservation prend la forme suivante :

$$\partial_t a + f(a)\partial_x a = p(x, t) \tag{6.2.13}$$

et les caractéristiques ne sont plus des lignes droites en général. Dans ce travail, nous traitons un problème plus simple dans lequel la perturbation agit à un point $x = x_p \in [0, 1]$. Alors elle prend la forme :

$$p(x, t) = \delta(x - x_p)p(t) \tag{6.2.14}$$

où $\delta(x)$ représente la fonction de Dirac. Nous supposons en plus que $p(t)$ est une fonction suffisamment régulière de t. Nous pouvons vérifier que les caractéristiques sont dans ce cas des lignes droites mais avec des pentes différentes dans $[0, x_p]$ et $[x_p, 1]$.

Comme dans le cas traité au paragraphe 6.1.1, pour éviter le choc dans $[0, x_p]$, nous avons besoin que :

$$I_1(t) = t + \frac{x_p}{f(w(t))} \tag{6.2.15}$$

soit une fonction croissante de temps. Ce qui signifie que :

$$\dot{I}_1 = 1 - \frac{x_p f'(w)u}{f^2(w)} > 0, \tag{6.2.16}$$

où la dépendance en t a été omise pour raison de simplicité. En outre, pour éviter le choc dans l'intervalle $[x_p, 1]$, la fonction :

$$I_2(t) = I_1(t) + \frac{(1 - x_p)}{f(w(t) + p(I_1(t))} \tag{6.2.17}$$

doit être également une fonction croissante. Nous obtenons alors la condition suivante :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \frac{(1-x_p)f'(w+p(I_1))(u+\dot{p}(I_1)\dot{I}_1)}{f^2(w+p(I_1))} > 0 \tag{6.2.18}$$

Ces conditions, ainsi que les conditions de problème bien-posé :

$$f(w(t)) \geq c > 0, \quad f(w(t)+p(I_1(t))) \geq c > 0 \tag{6.2.19}$$

ne peuvent pas être satisfaites en général car elles dépendent à la perturbation $p(t)$. Dans la suite, nous supposons que la perturbation et sa dérivée sont bornées, c'est-à-dire :

$$|p(t)| \leq \alpha, \quad |\dot{p}(t)| \leq \beta \quad \forall t \tag{6.2.20}$$

où α et β sont suffisamment petits. Dans ce cas, nous pouvons trouver les sous-ensembles $U_p^{ad} \subseteq U$ et $W_p^{ad} \subseteq W$ tels que les conditions (6.2.16), (6.2.18) et (6.2.19) soient satisfaites pour tout $u \in U_p^{ad}$ et $w \in W_p^{ad}$ comme décrit plus tard pour le modèle de trafic routier par exemple. Les autres systèmes peuvent être traités de façon identique. Nous pouvons implémenter directement ces conditions dans le schéma de la COHG, mais la preuve de stabilité devient très compliquée. Cette option ne sera donc pas considérée ici, mais dans un travail à venir.

6.2.2 La solution de la commande optimale

Le problème d'optimisation à résoudre à chaque instant d'échantillonnage est donc :

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} J(a,w,u) = & \int_0^T [q(a(1,t)-a_r)^2 + ru^2(t)]dt \\ & + q_f(a(1,T)-a_r)^2 \\ \text{sous} & \begin{cases} \partial_t a + f(a)\partial_x a = \delta(x-x_p)p(t) \\ a(0,t) = w(t),\ \dot{w}(t) = u(t) \\ a(x,0) = a_0(x),\ w(0) = w_0,\ u \in U,\ w \in W \\ \text{Contraintes pour éviter le choc (CEC)} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.2.21}$$

où CEC dépend du problème considéré :

- Sans perturbation :

$$CEC := \begin{cases} 1 - \dfrac{f'(w)u}{f^2(w)} \geq \gamma \text{ (Contrainte non linéaire)} \\ \text{or } u \in U^{ad} \quad \text{(Contrainte linéaire)} \end{cases} \tag{6.2.22}$$

- Avec perturbation :

$$CEC := u \in U_p^{ad}, \quad w \in W_p^{ad}$$

Les contraintes sur u et w sont traitées par la méthode de "barrière" (voir [Boyd & Vandenberghe, 2004]). Dans cette technique, chaque inégalité de type $C \geq 0$ est prise en compte en ajoutant un terme $\int_0^{T_f} -\mu \log C dt$ dans la fonction de coût, où μ est une constante positive suffisamment petite. Le problème d'optimisation devient le problème de minimiser la fonction de coût modifiée sans contrainte sur u et w. A ce stade, nous pouvons suivre la même procédure que celle décrite au paragraphe 6.2 afin de transformer le problème (6.2.21) en un problème d'optimisation en dimension finie. La solution est ensuite obtenue en utilisant une méthode standard, par exemple la méthode de gradient (voir [Boyd & Vandenberghe, 2004]).

6.3 Exemple

Nous appliquons ici, à titre d'exemple, les théories présentées précédemment pour le modèle de trafic routier. Les autres systèmes comme l'équation de Burgers (voir [Serre, 1999]) ou le modèle de l'onde diffusante pour les canaux à surface libre (voir [Georges & Litrico, 2002]) peuvent être traités de façon identique.

6.3.1 Modèle de trafic routier

Dans ce travail, nous considérons le modèle de Lighthill-Whitham-Richards (LWR) (voir [Garavello & Piccoli, 2006]). L'évolution de la densité des véhicules dans une autoroute est modélisée par :

$$\partial_t \rho + \partial_x F(\rho, v) = 0 \tag{6.3.1}$$

où $\rho \geq 0$ est la densité de véhicules, v, la vitesse moyenne des véhicules. Le flux du trafic $F(\rho, v)$ est calculé par $F(\rho, v) = \rho v$. L'hypothèse principale du modèle de LWR est que la vitesse moyenne ne dépend que de la densité. Ainsi, le flux est une fonction de ρ :

$$F(\rho) = \rho v(\rho) \tag{6.3.2}$$

qui est appelé le diagramme fondamental. Une propriété de v est qu'elle est une fonction décroissante de la densité. Le diagramme fondamental le plus simple est obtenu si nous supposons que v est une fonction linéaire de ρ :

$$v(\rho) = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_M}\right) \tag{6.3.3}$$

où v_f est la vitesse fluide (la vitesse à laquelle les véhicules roulent lorsque la densité est faible) et ρ_M est la densité maximale. Alors, nous avons :

$$f(\rho) = v_f \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_M}\right), \quad f'(\rho) = -\frac{2v_f}{\rho_M} \tag{6.3.4}$$

Supposons que la commande agit au point $x = 0$:

$$\rho(0,t) = w(t), \quad \dot{w}(t) = u(t), \quad u(t) \in U, \quad t \geq 0. \tag{6.3.5}$$

La commande auxiliaire u représente l'accroissement de densité à l'entrée de l'autoroute. L'ensemble W est choisi comme suit :

$$W = [0, w_{max}], \quad w_{max} = \frac{\rho_M}{2}\left(1 - \frac{c}{v_f}\right).$$

Alors la condition iii) du théorème 6.1.1 est satisfaite. Nous montrons maintenant comment trouver U_p^{ad} et W_p^{ad} afin d'assurer (6.2.16)-(6.2.19) dans le cas où il y a une perturbation. Les conditions (6.2.19) sont satisfaites si nous avons :

$$0 \leq w,\ w + p(I_1) \leq \frac{\rho_M}{2}\left(1 - \frac{c}{v_f}\right) \tag{6.3.6}$$

Nous pouvons choisir $w_M^{ad} = \frac{\rho_M}{2}\left(1 - \frac{c}{v_f}\right) - \alpha$ et $w_m^{ad} = \alpha$, alors (6.3.6) est vrai pour tout $w \in W_p^{ad} = [w_m^{ad}, w_M^{ad}]$. Le problème restant est de trouver une constante u_m^{ad} telle que les conditions (6.2.16) et (6.2.18) soient satisfaites pour tout $u \geq u_m^{ad}$. Pour (6.2.16), nous avons besoin que :

$$u_m^{ad} \geq -\frac{\rho_M v_f}{(2x_p)}.\left(1 - \frac{2w}{\rho_M}\right)^2, \forall w \in W_p^{ad} \tag{6.3.7}$$

Dans W_p^{ad}, le terme de droite de l'inégalité ci-dessus est une fonction croissante, alors son maximum est atteint en $w = w_M^{ad}$. L'équation (6.3.7) signifie que :

$$u_m^{ad} \geq -\frac{\rho_M v_f}{(2x_p)}.\left(1 - \frac{2w_M^{ad}}{\rho_M}\right)^2 = u_1. \tag{6.3.8}$$

La condition (6.2.18) signifie que $k_1 u_m^{ad} \geq -k_2$ où k_1 et k_2 sont donnés par :

$$k_1 = \frac{2x_p v_f}{\rho_M f^2(w)} + \frac{2(1-x_p)v_f}{\rho_M f^2(w + p(I_1))}\left(1 + \frac{2\dot{p}(I_1)x_p v_f}{\rho_M f^2(w)}\right)$$

$$k_2 = 1 + \frac{2(1-x_p)v_f \dot{p}(I_1)}{\rho_M f^2(w + p(I_1))}$$

Grâce aux relations (6.2.19) et (6.2.20), nous pouvons vérifier facilement que :

$$k_1 \leq \frac{2x_p v_f}{\rho_M c^2} + \frac{2(1-x_p)v_f}{\rho_M c^2}(1 + \frac{2\beta x_p v_f}{\rho_M c^2}) = k_{max},$$

$$k_2 \geq 1 - \frac{2(1-x_p)v_f \beta}{(\rho_M c^2)} = k_{min},$$

pour tout $w \in W_p^{ad}$, $|p| \leq \alpha$ et $|\dot{p}| \leq \beta$. Alors, nous pouvons choisir :

$$u_m^{ad} = \max\left(-\frac{k_{min}}{k_{max}}, u_1\right) + \gamma^{ad}, \tag{6.3.9}$$

où γ^{ad} est une petite constante positive introduite afin de garantir les inégalités (6.2.16) et (6.2.18). Alors U_p^{ad} peut être déterminé par $U_p^{ad} = [u_m^{ad}, \infty) \cap U$. Finalement, pour tout $u \in U_p^{ad}$ et $w \in W_p^{ad}$, les conditions (6.2.16), (6.2.18) et (6.2.19) sont satisfaites, ce qui garantit qu'il n'y a aucun choc dans le domaine.

6.3.2 Résultats de simulation

Afin d'illustrer l'approche proposée, nous présentons dans ce paragraphe des résultats de simulation du modèle de trafic routier avec $v_f = 80$ km/h et $\rho_M = 315$ véhicules/km. La fonction de coût a la forme (6.2.2) avec $q = 100$, $r = 1$ et $q_f = 1184$ qui satisfont (6.2.10) avec $k = 2,9$.

La première simulation est réalisée pour illustrer la capacité à éviter les chocs de l'approche proposée dans le cas où il n'y pas de perturbation. Nous testons les deux types de contrainte : la contrainte non linéaire (CNL) et la contrainte linéaire (CL) dans (6.2.22). Pour cela, nous initialisons le système à un point critique où $w \approx w_{max}$. A ce point, le choc apparaît facilement. Les résultats sont présentés sur la figure 6.4. Nous constatons que les deux types de contrainte peuvent empêcher la formation du choc, mais la CNL profite au maximum de l'avantage des conditions pour éviter le choc et converge plus rapidement que la CL.

Pour souligner le rôle essentiel des conditions pour éviter le choc, nous réalisons la même simulation mais avec une commande en boucle ouverte et une autre simulation sans contrainte (6.1.6). Les résultats sont présentés sur les figures 6.5 et 6.6. Dans les deux cas, l'intersection des caractéristiques signifie l'apparition d'un choc. Sur la figure 6.7, nous présentons le résultat de simulation dans le cas où il y a une perturbation asymptotiquement constante. Nous pouvons constater que la commande rejette complètement ce type de perturbation. Un point intéressant est que la commande réagit avant l'apparition de la perturbation, car l'évolution a été intégrée dans le calcul de la commande.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une preuve complète de la stabilité de la COHG pour une classe de systèmes hyperboliques scalaires non linéaires a été établie et validée par simulation. Tout d'abord, un ensemble de contraintes pour éviter les chocs a été introduit. Si ces

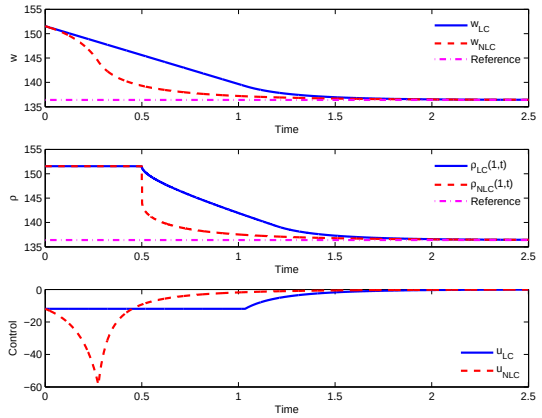

FIG. 6.3 – Commande avec contrainte linéaire (ligne continue) et commande avec contrainte non linéaire (ligne pointillée)

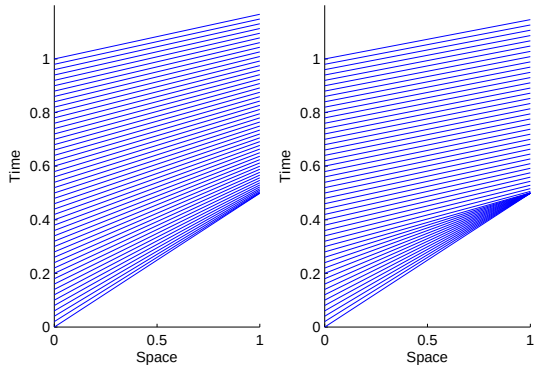

FIG. 6.4 – Caractéristiques avec contrainte linéaire (à gauche) et non linéaire (à droit)

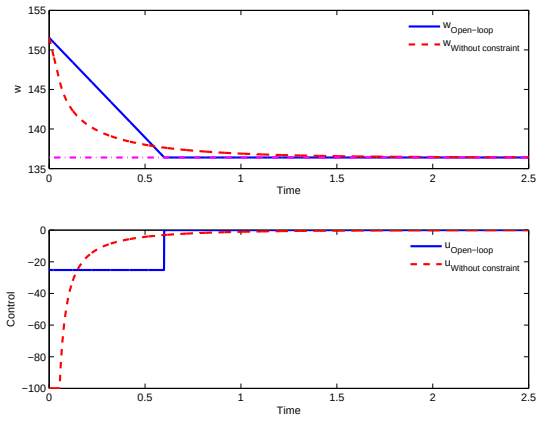

FIG. 6.5 – Commande en boucle ouverte (ligne continue) et commande sans conditions pour éviter le choc (ligne pointillée)

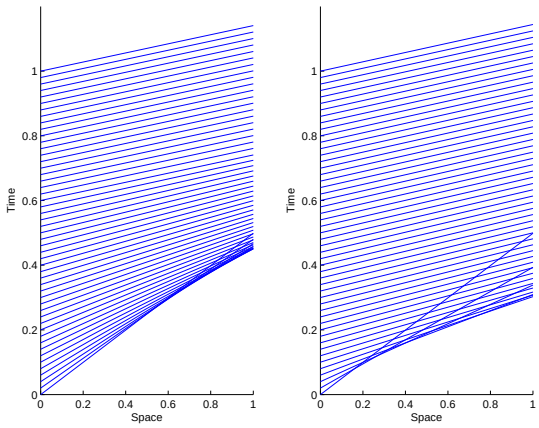

FIG. 6.6 – Caractéristiques avec la commande en boucle ouverte (à gauche) et avec la commande sans conditions pour éviter le choc (à droite)

contraintes sont satisfaites, la stabilité de l'état à la limite entraîne la stabilité du système entier. Nous avons montré que la COHG peut être utilisée pour assurer ces conditions. Finalement, une simulation avec le modèle du trafic routier a été fournie afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

Ces résultats nous ouvrent certaines directions pour les recherches à venir. Parmi celles-ci, nous pouvons mentionner la possibilité de généraliser les conditions pour éviter les chocs pour un réseau de systèmes de lois de conservation. Nous pouvons également étudier le cas où la perturbation ne peut pas être mesurée et doit être estimée à l'aide d'un observateur utilisant les mesures aux extrémités du domaine. Enfin, l'extension

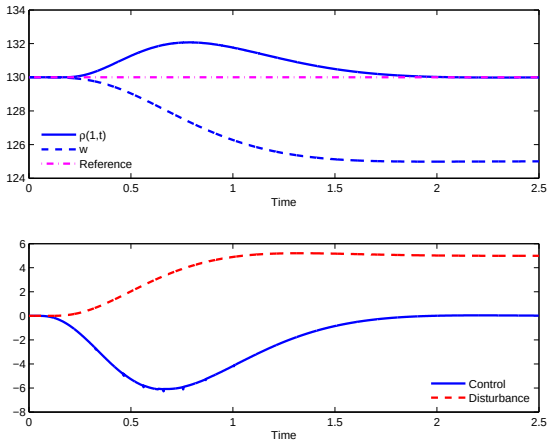

FIG. 6.7 – Etat à la limite et commande dans le cas où il y a une perturbation asymptotiquement constante

de la stratégie proposée pour des cas dans lesquels la présence du choc est inévitable (par exemple si la condition initiale créé un choc ou la référence se trouve en dehors de l'ensemble W) est aussi intéressante à étudier.

Les travaux réalisés dans ce chapitre font l'objet d'une publication suivante [Pham, Georges & Besançon, 2012*d*].

Chapitre 7

COHG pour les équations de coup de bélier

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'application de la COHG à la stabilisation d'une canalisation sous pression décrite par les équations dites de coup de bélier. Le paragraphe 7.1 présente le système étudié qui correspond à un système hyperbolique 2×2 semi-linéaire avec commande frontière. Dans le paragraphe 7.2, ce système est reformulé sous forme abstraite dans laquelle l'existence et l'unicité de la solution faible sont établies grâce à la théorie des C_0-semigroupes de contraction présentée dans [Luo et al., 1999]. Nous présentons ensuite certaines conditions pour garantir la stabilité asymptotique de la solution faible. Dans le paragraphe 7.4, nous présentons l'utilisation de la COHG pour à la fois minimiser une fonction de coût et garantir la stabilité de la boucle fermée. Enfin, nous proposons au paragraphe 7.5 quelques résultats de simulation réalisés à l'aide de la méthode de Boltzmann sur réseaux afin d'illustration l'application de de cette approche.

7.1 Introduction

Les canalisations sous pression se caractérisent souvent par le fait que la dimension longitudinale est beaucoup plus grande que la dimension transversale, de sorte qu'une approche unidimensionnelle suffit pour les modéliser, sous les hypothèses suivantes (voir [Prieur, 2009] ou [Larock et al., 2000]) :

- L'écoulement est orthogonal à la surface traversée A
- La pression p, la vitesse d'écoulement V et la densité ρ sont uniformes à travers la surface A.

Le modèle se fonde également sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement et s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t p + \rho a^2 \partial_x V + V \partial_x p &= 0 \\ \partial_t V + \frac{1}{\rho}\partial_x p + V\partial_x V + g\sin(\alpha) + \frac{fV|V|}{2D} &= 0 \end{aligned}, \quad (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+ \tag{7.1.1}$$

où L est la longueur, D, le diamètre de la canalisation, $a > 0$, la vitesse de propagation d'onde, g, l'accélération de la gravité, α, la pente, f, le coefficient de frottement Darcy-Weisbach. Nous introduisons une nouvelle variable appelée le niveau piézométrique $H = Z + \frac{p}{\rho g}$, où Z est la hauteur de la canalisation (notons que $\partial_x Z = \alpha$), et en supposons en plus que

- Il n'y a pas de déplacement vertical, alors $\partial_t Z = 0$.
- La vitesse de propagation d'onde a est grande par rapport à la vitesse d'écoulement V, alors le terme $C\partial_x$ est négligeable.

Alors, nous obtenons finalement un modèle simplifié qui modélise l'évolution du niveau piézométrique et la vitesse d'écoulement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \frac{a^2}{g}\partial_x V &= 0, \\ \partial_t V + g\partial_x H &= -\frac{f}{2D}V|V|, \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Le système est complété par les conditions initiales et aux frontières. Supposons que le niveau piézométrique à l'amont est fixé par une constante donnée H_0 :

$$H(0,t) = H_0, \tag{7.1.3}$$

c'est le cas d'une la canalisation connectée à un réservoir à l'amont. La condition à l'aval $x = L$ est assurée par une équation de vanne :

$$V(L,t) = K\Theta(t)\sqrt{2g(H(L,t) - H_L)}. \tag{7.1.4}$$

où K est le coefficient de la vanne, H_L, le niveau à l'aval de la vanne et Θ, l'ouverture de la vanne (voir la figure 7.1).

Le terme de frottement non linéaire $-\frac{f}{2D}V|V|$ rend le système (7.1.2) semi-linéaire. Bien que l'étude des systèmes semi-linéaires en dimension infinie ait été considérée dans de nombreux travaux précédents ([Haraux, 1988], [Haraux & Zuazua, 1987] et [Luo et al., 1999]), l'application de ces théories au problème de commande du système (7.1.2) n'a pas été considérée. Cependant, nous pouvons citer [Prieur, 2009] et [Dick et al., 2010] où les auteurs ont étudié la solution classique de (7.1.2), et montré que la *stabilité locale* (au voisinage d'un état équilibre) peut être obtenue en utilisant une commande par retour d'état à la limite. Une application du principe d'invariance de LaSalle (voir [Luo

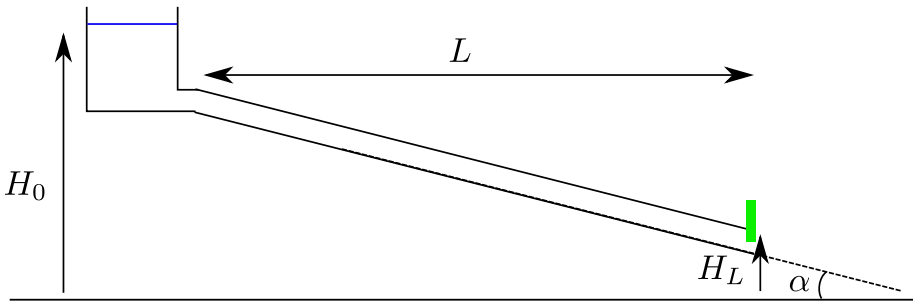

FIG. 7.1 – Une canalisation sous pression

et al., 1999]) à des systèmes semi-linéaires a été étudiée dans [Aksikas et al., 2007*a*]. La preuve de stabilité asymptotique s'appuie sur le fait que le terme non linéaire est *globalement* lipschitzien, ce qui n'est pas le cas pour le système (7.1.2).

Un autre défi pour les systèmes de canalisation sous-pression est une variation importante de la pression lors de la fermeture de la vanne (voir [Larock et al., 2000] ou [Bartman et al., 2009]). Ces pics de pression (appelés également "coups de bélier" ce qui explique le nom de ces équations) peuvent entraîner des conséquences indésirables telles que la vibration, la déformation ou des endommagements encore plus graves de la conduite (pouvant aller jusqu'à la rupture). L'objectif de ce travail est double. Nous voulons d'une part garantir la *stabilité asymptotique globale* de (7.1.2) et d'autre part minimiser la variation de la pression et de la vitesse, ce qui nous motive pour utiliser la COHG.

7.2 Formulation abstraite

Considérons un état d'équilibre $(\bar{H}, \bar{V})$ $(\bar{V} > 0)$ correspondant aux conditions frontières (H_0, V_L) donné par :

$$\bar{V} = V_L, \quad \bar{H}(x) = -\frac{f}{2Dg} V_L |V_L| x + H_0, \tag{7.2.1}$$

et un problème de commande dont le but est de stabiliser le système autour de cet équilibre. Notons :

$$\tilde{H}(x,t) = H(x,t) - \bar{H}(x), \quad \tilde{V}(x,t) = V(x,t) - \bar{V}, \tag{7.2.2}$$

nous obtenons les équations suivantes :

$$\partial_t \tilde{H} + \frac{a^2}{g} \partial_x \tilde{V} = 0, \tag{7.2.3}$$

$$\partial_t \tilde{V} + g \partial_x \tilde{H} = -m((\tilde{V} + \bar{V})|\tilde{V} + \bar{V}| - \bar{V}^2) \tag{7.2.4}$$

avec $m = f/2D$. Dans la suite, la notation *tilde* $\tilde{\cdot}$ sera omise pour des raisons de simplicité. Nous faisons le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g/a & 1 \\ g/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a/g & a/g \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{7.2.5}$$

Alors, le système est mis sous la forme des caractéristiques :

$$\begin{aligned} \partial_t y_1 &= a\partial_x y_1 - F(y_1, y_2) \\ \partial_t y_2 &= -a\partial_x y_2 - F(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

où

$$F(y_1, y_2) = F(V) = m[(V + \bar{V})|V + \bar{V}| - \bar{V}^2].$$

Les conditions initiales dans le système de coordonnées (H, V) peuvent être exprimées sous la forme :

$$y_1(\cdot, 0) = y_{10}, \quad y_2(\cdot, 0) = y_{20}. \tag{7.2.7}$$

La condition au point $x = 0$ dans le nouveau système de cordonnées devient :

$$y_2(0, t) = y_1(0, t). \tag{7.2.8}$$

Comme dans le cas des équations de Saint-Venant, l'ouverture de la vanne dans l'équation (7.1.4) peut être calculée de sorte que la condition au point $x = L$ soit réalisée sous la forme :

$$y_1(L, t) = w(t). \tag{7.2.9}$$

Afin de mettre les équations ci-dessus sous forme abstraite, nous introduisons un intégrateur sur w de la façon suivante :

$$\dot{w}(t) = -kw(t) + u(t), \quad w(0) = w_0 = y_{10}(L), \tag{7.2.10}$$

avec une certaine constante $k \geq \dfrac{a}{2}$. La raison pour laquelle nous ajoutons le retour d'état $-kw$ sera clarifiée plus tard. Nous notons $z = (w \quad y_1 \quad y_2)^T \in Z = \mathbb{R} \oplus [\mathbf{L}_2(0, L)]^2$. Il est évident que Z est un espace de Hilbert avec le produit interne :

$$\left\langle \begin{pmatrix} w \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z = w\bar{w} + \int_0^L (y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2)\, dx \tag{7.2.11}$$

alors les équations (7.2.6)-(7.2.10) peuvent être mises sous la forme :

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{F}(z(t)) + \mathcal{B}u(t), \quad z(0) = z_0, \tag{7.2.12}$$

où $z_0 = (w_0 \quad y_{10} \quad y_{20})^T$ et

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.2.13}$$

Les opérateurs $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{F}$ sont définis par

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & a\dfrac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -a\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix} \tag{7.2.14}$$

avec le domaine :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathcal{A}_0) = \{z = (w \quad y_1 \quad y_2)^T \in Z \mid y_1,\, y_2 \,\text{sont absolument continus,} \\ \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx} \in \mathbf{L}_2(0, L),\, y_2(0) = y_1(0),\, y_1(L) = w\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} w \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F(y_1, y_2) \\ -F(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \tag{7.2.15}$$

avec le domaine

$$\mathbf{D}(\mathcal{F}) = \{z = (w \quad y_1 \quad y_2)^T \in Z \mid y_1, y_2 \in \mathbf{L}_4(0, L)\}. \tag{7.2.16}$$

Afin d'étudier le comportement du système (7.2.12), nous rappelons les notations suivantes [Tucsnak & Weiss, 2006] :

Définition 7.2.1. *L'opérateur $\mathcal{A} : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \to Z$ est dit dissipatif si*

$$\langle \mathcal{A}z_1 - \mathcal{A}z_2, z_1 - z_2 \rangle_Z \leq 0, \forall z_1, z_2 \in \mathbf{D}(\mathcal{A}). \tag{7.2.17}$$

Définition 7.2.2. *L'opérateur $\mathcal{A} : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \to Z$ est dit dissipatif maximal (en bref m-dissipatif) si $\mathcal{A}$ est dissipatif et $Im(I - \mathcal{A}) = Z$, où $Im(T)$ signifie l'image de l'opérateur T.*

Pour montrer qu'un opérateur est m-dissipatif, nous énonçons la proposition suivante (voir la proposition 4.1.11 de [Tucsnak & Weiss, 2006]) :

Proposition 7.2.1. *Soit $\mathcal{A} : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \to Z$ dissipatif avec un domaine dense. Alors $\mathcal{A}$ est m-dissipatif si et seulement si $\mathcal{A}$ est fermé et $\mathcal{A}^*$ est dissipatif.*

Nous étudions maintenant l'opérateur $\mathcal{F}$ concernant le terme de frottement.

Lemme 7.2.2. *L'opérateur $\mathcal{F}$ satisfait $\langle \mathcal{F}z, z\rangle_Z \leq 0, \quad \forall z \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$.*

Démonstration. Pour $z = (w \quad y_1 \quad y_2)^T \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}z, z\rangle_Z &= -\langle F(y_1, y_2), y_1\rangle_{\mathbf{L}_2(0,L)} - \langle F(y_1, y_2), y_2\rangle_{\mathbf{L}_2(0,L)} \\ &= -\int_0^L (y_1 + y_2)F(y_1, y_2)dx \end{aligned} \tag{7.2.18}$$

Considérons 2 cas :

- $V + \bar{V} \geq 0$:

$$(y_1 + y_2)F(y_1, y_2) = 2mV^2(V + 2\bar{V}) \geq 2m\bar{V}V^2 \tag{7.2.19}$$

- $V + \bar{V} < 0$, alors $V < -\bar{V} < 0$. Nous avons :

$$(y_1 + y_2)F(y_1, y_2) = 2mV[-V^2 - 2V\bar{V} - 2\bar{V}^2] \tag{7.2.20}$$
$$= 2m(-V)[(V + \sqrt{2}\bar{V})^2 + 2(\sqrt{2} - 1)\bar{V}(-V)] \tag{7.2.21}$$
$$\geq 4m(\sqrt{2} - 1)\bar{V}V^2 \tag{7.2.22}$$

Ainsi, dans les 2 cas, nous avons :

$$(y_1 + y_2)F(y_1, y_2) \geq c_1V^2, \quad c_1 = 4m(\sqrt{2} - 1)\bar{V} \tag{7.2.23}$$

Par conséquent $\langle \mathcal{F}z, z\rangle \leq -\int_0^L c_1V^2dx \leq 0$.

❑

De plus, on peut montrer que $\mathcal{F}$ est localement lipschitzien, c'est-à-dire pour chaque r, il existe ω_r tel que :

$$\|\mathcal{F}z_1 - \mathcal{F}z_2\| \leq \omega_r\|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in B_r. \tag{7.2.24}$$

où

$$B_r = \{z \in \mathbf{D}(\mathcal{F}) \mid \|z\| \leq r\}. \tag{7.2.25}$$

Quant à l'opérateur $\mathcal{A}_0$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 7.2.3. *L'opérateur $\mathcal{A}_0$ est m-dissipatif.*

Démonstration. Il est évident que $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ est dense dans Z. Nous allons montrer que $\mathcal{A}_0$ est fermé. Pour cela, nous montrons que $\mathcal{A}_0$ est inversible avec $\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathcal{L}(Z)$. Définissons

l'opérateur $S : Z \to Z$:

$$S\begin{pmatrix}\omega\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k}\omega \\ -\frac{1}{a}\int_x^L y_1(s)ds - \frac{1}{k}\omega \\ -\frac{1}{a}\int_0^x y_2(s)ds - \frac{1}{a}\int_0^L y_1(s)ds - \frac{1}{k}\omega \end{pmatrix} \tag{7.2.26}$$

Nous voyons que $S \in \mathcal{L}(Z)$ et que $S\mathcal{A}_0 = I_{D(\mathcal{A}_0)}$ et $\mathcal{A}_0 S = I_Z$. Selon le théorème A.3.46 dans [Curtain & Zwart, 1995], nous obtenons que $\mathcal{A}_0$ est fermé. Ensuite, nous montrons :

$$\langle \mathcal{A}_0 z, z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \tag{7.2.27}$$

$$\langle \mathcal{A}_0^* z, z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) \tag{7.2.28}$$

où l'opérateur adjoint $\mathcal{A}_0^*$ est déterminé par

$$\mathcal{A}_0^*\begin{pmatrix}w\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kw + ay_1(L) & 0 & 0 \\ 0 & -a\frac{dy_1}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & a\frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} \tag{7.2.29}$$

avec le domaine :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) = \{z = (w \quad y_1 \quad y_2)^T \in Z \mid y_1,\, y_2 \,&\text{sont absolument continus,}\\ \frac{dy_1}{dx},\, \frac{dy_2}{dx} \in \mathbf{L}_2(0,L),\, y_1(0) = y_2(0),\, y_2(L) = 0\},&\end{aligned}$$

En fait :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_0 z, z\rangle &= -kw^2 + \int_0^L a\frac{dy_1}{dx}y_1 dx + \int_0^L -a\frac{dy_2}{dx}y_2 dx \\ &= -kw^2 + \frac{1}{2}[ay_1^2]_0^L + \frac{1}{2}[-ay_2^2]_0^L \\ &= (-k + \frac{1}{2}a)w^2 - \frac{1}{2}ay_2^2(L)\end{aligned}$$

Puisque $k \geq \frac{a}{2}$, nous avons :

$$\langle \mathcal{A}_0 z, z\rangle \leq 0 \tag{7.2.30}$$

Cette inégalité explique la raison pour laquelle le retour d'état $-kw$ a été ajouté dans la dynamique de w. De façon similaire, pour $z \in \mathbf{D}(\mathcal{A}_0^*)$, nous calculons :

$$\langle \mathcal{A}_0^* z, z\rangle = -kw^2 + awy_1(L) - \frac{1}{2}ay_1^2(L) \leq -\frac{a}{2}(w - y_1(L))^2 \leq 0. \tag{7.2.31}$$

Ainsi, l'opérateur $\mathcal{A}_0$ satisfait la proposition 7.2.1, et donc il est m-dissipatif.

❑

Nous rappelons la définition d'un semigroupe de contraction :

Définition 7.2.3. *$\Phi(t)$ est un semigroupe de contraction s'il est un C_0-semigroupe satisfaisant $\|\Phi(t)\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.*

Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 7.2.4. *L'opérateur $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{F}$ avec le domaine $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe de contraction $\Phi(t)$ dans $\mathbf{D}(\mathcal{F})$.*

Démonstration. Pour cela, il suffit montrer que

i. $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0) \cap \mathbf{D}(\mathcal{F})$ dense dans $\mathbf{D}(\mathcal{F})$.

ii. Pour chaque $r > 0$, il existe $\lambda_0 \in (0, +\infty)$ tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $Im(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})) \supset B_r$ et $\|(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F}))^{-1} v\| \leq \|v\|$ $\forall v \in B_r$.

Alors par le théorème 2 de [Oharu & Takahashi, 1987], $\mathcal{A}_0 + \mathcal{F}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe de contraction dans $\mathbf{D}(\mathcal{F})$.

La première condition est évidente car $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0) \cap \mathbf{D}(\mathcal{F}) = \mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ et $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ est dense dans $\mathbf{D}(\mathcal{F})$. Nous allons montrer la deuxième condition, en adaptant la méthode de [Oharu & Takahashi, 1986] lorsque l'opérateur non linéaire $\mathcal{F}$ est localement lipschitzien. Considérons $v \in B_r$. Choisissons une constante $\theta \in (0, 1)$, alors il existe $\omega_{r/\theta}$ tel que

$$\|\mathcal{F}z_1 - \mathcal{F}z_2\| \leq \omega_{r/\theta}\|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in B_{r/\theta} \tag{7.2.32}$$

Nous prenons ensuite λ_0 suffisamment petit satisfaisant $\lambda_0\omega_{r/\theta} + \theta < 1$. Considérons maintenant $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Pour chaque v dans B_r, nous définissons l'opérateur $P : B_{r/\theta} \to Z$ de façon suivante :

$$Pz = (I - \lambda\mathcal{A}_0)^{-1}(v + \lambda\mathcal{F}z) \tag{7.2.33}$$

Puisque $\mathcal{A}_0$ est m-dissipative, $J_\lambda = (I - \lambda\mathcal{A}_0)^{-1}$ est un opérateur linéaire de contraction de Z à $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ (voir par exemple le corollaire 2.10 page 20 de [Miyadera, 1991]), c'est-à-dire que :

$$\|J_\lambda z_1 - J_\lambda z_2\| \leq \|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in Z. \tag{7.2.34}$$

Pour tout $z \in B_{r/\theta}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|Pz\| &\leq \|Pz - P0\| + \|P0\| \\ &\leq \|J_\lambda(\lambda\mathcal{F}z)\| + \|J_\lambda v\| \\ &\leq \lambda\omega_{r/\theta}\|z\| + \|v\| \\ &\leq \lambda\omega_{r/\theta}\frac{r}{\theta} + r \leq \frac{r}{\theta} \end{aligned} \tag{7.2.35}$$

De plus :

$$\|Pz_1 - Pz_2\| \leq L\|z_1 - z_2\|, \quad L = \lambda\omega_{r/\theta} < 1. \tag{7.2.36}$$

Donc P est une application de contraction de $B_{r/\theta}$ à $B_{r/\theta}$. Par le théorème de point fixe de Banach (voir par exemple [Khalil, 1996]), il existe un unique z_λ tel que

$$Pz_\lambda = z_\lambda \Rightarrow z_\lambda - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})z_\lambda = v. \tag{7.2.37}$$

Cette dernière équation montre que $Im(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})) \supset B_r$. Finalement, nous avons :

$$\langle v, v\rangle = \langle z_\lambda - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})z_\lambda, z_\lambda - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})z_\lambda\rangle \geq \langle z_\lambda, z_\lambda\rangle \tag{7.2.38}$$

car $\langle(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})z_\lambda, z_\lambda\rangle \leq 0$. Par conséquent :

$$\|(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F}))^{-1}v\| \leq \|v\| \quad \forall v \in B_r. \tag{7.2.39}$$

❑

Ainsi, par les méthodes standards (voir [Schechter, 1983], [Pazy, 1983]), nous pouvons montrer que pour tout $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0,T])$ et $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$ le problème (7.2.12) a une solution unique faible donnée par :

$$z(t) = \Phi_0(t)z_0 + \int_0^t \Phi_0(t-s)(\mathcal{F}z(s) + \mathcal{B}u(s))ds \tag{7.2.40}$$

De plus, si $u(\cdot) \in \mathbf{C}^1([0,T])$ et $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ alors $z(t) \in \mathbf{C}^1([0,T], Z) \cap \mathbf{D}(\mathcal{A})$ pour tout $t \in [0,T]$.

7.3 Stabilité

Nous allons maintenant étudier la stabilité du système (7.2.12).

Théorème 7.3.1. *Soit $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0,\infty))$ satisfaisant*

$$\begin{cases} u(t)w(t) \leq (-\rho + k)w^2(t), \text{ si } w(t) \neq 0 \\ u(t) = 0, \text{ si } w(t) = 0 \end{cases}, \forall t \in [0,\infty), \tag{7.3.1}$$

pour un certain $\rho > 0$. Alors le système (7.2.12) avec $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$ est asymptotiquement stable autour de l'origine, c'est-à-dire que :

$$\|z(t)\|^2 \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty. \tag{7.3.2}$$

Démonstration. Nous considérons tout d'abord le cas où $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ et $u(\cdot) \in \mathbf{C}^1([0,\infty))$ satisfont (7.3.1). Dans ce cas, le système (7.2.12) a une solution classique $z(t)$. Considérons la fonction suivante :

$$S(t) = pw^2(t) + \|y_1(\cdot,t)\|^2 + \|y_2(\cdot,t)\|^2 \tag{7.3.3}$$

pour un certain $p > \dfrac{a}{2\rho}$. Puisque $z(t) \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ pout tout $t \geq 0$, nous pouvons calculer la dérivée de $S(t)$:

$$\dot{S}(t) = 2pw(-kw+u) + ay_1^2(L,t) - ay_2^2(L,t) - \int_0^L 2(y_1+y_2)F(y_1,y_2)dx \quad (7.3.4)$$

$$\leq (a-2p\rho)w^2 - \int_0^L 2(y_1+y_2)F(y_1,y_2)dx \leq 0 \quad (7.3.5)$$

car $p > \dfrac{a}{2\rho}$ et (7.2.23). Par le lemme de Barbalat (lemme 4.2, page 192 de [Khalil, 1996]), nous avons $\dot{S}(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, ce qui entraîne :

$$w^2(t) \to 0 \text{ et } \int_0^L 2(y_1+y_2)F(y_1,y_2)dx \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty \quad (7.3.6)$$

Par la relation (7.2.23), nous obtenons en plus :

$$\int_0^L V^2(x,t)dx \to 0 \quad (7.3.7)$$

Considérons maintenant la fonction suivante :

$$W = \frac{p}{2}w^4 + \int_0^L y_1^4(x,t)dx + \int_0^L y_2^4(x,t)dx \quad (7.3.8)$$

La dérivée de cette fonction est donc :

$$\begin{aligned}\dot{W} &= 2pw^3(-kw+u) + \int_0^L 4y_1^3(a\partial_x y_1 - F(y_1,y_2))dx + \int_0^L 4y_2^3(-a\partial_x y_2 - F(y_1,y_2))dx \\ &= 2pw^3(-kw+u) + [ay_1^4]_0^L + [-ay_2^4]_0^L - \int_0^L 4(y_1^3+y_2^3)F(y_1,y_2)dx \\ &\leq (a-2p\rho)w^4 - \int_0^L 4(y_1+y_2)(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)F(y_1,y_2)dx \leq 0\end{aligned}$$

Une fois à nouveau, par le lemme de Barbalat, nous avons :

$$\int_0^L (y_1+y_2)(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)F(y_1,y_2)dx \to 0 \quad (7.3.9)$$

D'autre part, nous avons :

$$y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 \geq \frac{1}{4}(y_1+y_2)^2 = V^2, \quad (7.3.10)$$

et en prenant compte (7.2.23), donc (7.3.9) implique que :

$$\int_0^L V^4 dx \to 0. \quad (7.3.11)$$

Nous allons montrer que $\displaystyle\int_0^L y_1^2(x,t)dx \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Par la méthode des caractéristiques, nous avons :

$$y_1(x,t) = y_1(L,\tau) - \int_\tau^t F(y_1,y_2)(\xi,s)ds \quad (7.3.12)$$

avec $\tau = t - \dfrac{L-x}{a}$ et $\xi = L - a(s-\tau)$. Alors :

$$\frac{1}{2}{y_1}^2(x,t) \leq y_1^2(L,\tau) + m^2\left[\int_\tau^t [(V+\bar{V})|V+\bar{V}| - \bar{V}^2](\xi,s)ds\right]^2 \tag{7.3.13}$$

Grâce à (7.3.7), dans la bande finie $\{(x,\tau) \mid 0 \leq x \leq L,\, t - \dfrac{L}{a} \leq \tau \leq t\}$, la mesure de l'ensemble des points où $V(x,\tau) + \bar{V} < 0$ tend vers zéro lorsque $t \to \infty$, donc nous pouvons considérer seulement le cas où $V(x,\tau) + \bar{V} \geq 0$. Dans ce cas, le deuxième terme dans (7.3.13) peut être borné comme suit :

$$m^2\left[\int_\tau^t (V^2 + 2\bar{V}V)ds\right]^2 \leq 2m^2\int_\tau^t (V^4 + 4\bar{V}^2V^2)ds \tag{7.3.14}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\int_0^L y_1^2(x,t) \leq \int_0^L y_1^2(L,\tau)dx + 2m^2\int_0^L\int_\tau^t (V^4 + 4\bar{V}^2V^2)dsdx. \tag{7.3.15}$$

En utilisant (7.3.6), (7.3.7) et (7.3.11), nous pouvons conclure que :

$$\int_0^L y_1^2(x,t)dx \to 0. \tag{7.3.16}$$

Nous avons en plus :

$$\int_0^L y_2^2(x,t)dx \leq \int_0^L [2(y_1+y_2)^2 + 2y_1^2]dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2}V^2 + y_1^2\right)dx. \tag{7.3.17}$$

Par conséquent :

$$\int_0^L y_2^2(x,t)dx \to 0. \tag{7.3.18}$$

Considérons maintenant le cas où $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ et $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0,\infty))$. Posons

$$\epsilon(t) = (-k+\rho)w(t) + u(t) \tag{7.3.19}$$

alors la condition (7.2.10) devient :

$$\dot{w}(t) = -\rho w(t) + \epsilon(t), \quad w(0) = w_0, \tag{7.3.20}$$

et la condition (7.3.1) est équivalente à

$$\epsilon(t)w(t) \leq 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{7.3.21}$$

Supposons que $w_0 \geq 0$, alors $w(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$ (le cas où $w_0 < 0$ peut être traité de façon similaire). L'inégalité ci-dessus devient :

$$\epsilon(t) \leq 0, \quad t \in [0,\infty) \tag{7.3.22}$$

Considérons une suite de fonctions $\{\epsilon^n\} \subset \mathbf{C}^1([0,\infty))$ telles que

$$\|\epsilon^n - \epsilon\|_{\mathbf{L}_2([0,\infty))} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{et } \epsilon^n(t) \leq 0, t \in [0,\infty). \tag{7.3.23}$$

Notons w^n, la solution de (7.3.20) avec ϵ remplacé par ϵ^n, et z^n, la solution de (7.2.12) avec u remplacé par $u^n = \epsilon^n + (k-\rho)w^n$. Alors :

$$\begin{aligned} w^n(t) &= e^{-\rho t} + \int_0^t e^{-\rho(t-s)}\epsilon^n(s)ds \\ z^n(t) &= \Phi_0(t)z_0 + \int_0^t \Phi_0(t-s)(\mathcal{F}(z^n(s)) + \mathcal{B}u^n(s))ds \end{aligned} \tag{7.3.24}$$

Pour un temps t fixé et pour tout $\tau \in [0,t]$, nous avons :

$$\begin{aligned} |w^n(\tau) - w(\tau)| = \left|\int_0^\tau e^{-\rho(\tau-s)}(\epsilon^n(s) - \epsilon(s)|ds\right| &\leq \int_0^\tau |\epsilon^n(s) - \epsilon(s)|ds \\ &\leq \sqrt{\tau}\|\epsilon^n - \epsilon\|_{\mathbf{L}_2([0,\tau])} \\ &\leq \sqrt{t}\|\epsilon^n - \epsilon\|_{\mathbf{L}_2([0,t])} \end{aligned} \tag{7.3.25}$$

C'est à dire :

$$\|w^n - w\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} \leq t^2\|\epsilon^n - \epsilon\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} \tag{7.3.26}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|u^n - u\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} &= \int_0^t \left(\epsilon^n(s) - \epsilon(s) + |k-\rho|(w^n(s) - w(s))\right)^2 ds \\ &\leq 2\|\epsilon^n - \epsilon\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} + 2|k-\rho|^2\|w^n - w\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} \\ &\leq 2(1 + t^2|k-\rho|^2)\|\epsilon^n - \epsilon\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} = C\|\epsilon^n - \epsilon\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} \end{aligned} \tag{7.3.27}$$

Ceci entraîne que $\|u^n - u\|_{\mathbf{L}_2[0,t])} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Par la continuité de $z(t)$ en u, nous avons $\|z^n(t) - z(t)\|_Z \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Mais selon le résultat de la première partie, $\|z^n(t)\|_Z \xrightarrow{t\to\infty} 0$, donc $\|z(t)\|_Z \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Enfin, pour le cas général où $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$ et $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0,\infty))$, en considérant une suite $\{z_0^n\} \subset \mathbf{D}(\mathcal{A})$ qui converge vers z_0, nous obtenons par un même raisonnement que $\|z(t)\|_Z \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

❑

Remarque 7.3.1. En examinant l'expression de $\dot{V}$ dans (7.3.5), on peut penser à utiliser le principe d'invariance de LaSalle [Luo et al., 1999], mais il y a 2 points qui freinent cette approche. Premièrement, le système n'est pas autonome, car nous voulons laisser un libre choix de la commande afin de minimiser un critère plus tard. Deuxièmement, même si nous considérons un système autonome (c'est-à-dire $u \equiv 0$), afin d'appliquer le principe d'invariance de LaSalle, nous avons besoin de la pré-compacité de l'orbite $\gamma(z_0)$ passant z_0 définie par :

$$\gamma(z_0) = \{\Phi(t)z_0, t \geq 0\} \tag{7.3.28}$$

ce qui n'est pas une tâche simple.

Remarque 7.3.2. Nous ajoutons le retour d'état à la dynamique de w dans (7.2.10) juste pour garantir la passivité de l'opérateur $\mathcal{A}_0$ et pour reformuler le problème original (7.2.6) sous la forme abstraite (7.2.12). Pour la stabilité, nous n'avons besoin que la condition (7.3.1) soit satisfaite. Si nous posons :

$$\tilde{u}(t) = -kw(t) + u(t), \tag{7.3.29}$$

alors la dynamique de w devient

$$\dot{w}(t) = \tilde{u}(t), \tag{7.3.30}$$

et la condition de stabilité devient

$$\tilde{u}(t)w(t) \leq -\rho w^2(t), \text{ si } w(t) \neq 0,\ \tilde{u}(t) = 0 \text{ si } w(t) = 0 \tag{7.3.31}$$

Ces relations signifient que pour garantir la stabilité, il suffit d'avoir une convergence exponentielle de w. Dans la suite, nous allons utiliser $\tilde{u}$ comme variable de commande car elle nous permet de contrôler directement la vitesse de convergence de w.

7.4 Application de la COHG

7.4.1 La stabilité de la COHG

Pour un certain horizon de prédiction $T > 0$, certaines fonctions de pondération $A(x) > 0$, $B(x) > 0$ $(x \in [0, L])$ et certaines constantes positives q et r, nous considérons la COHG avec le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} J = & \int_0^T \int_0^L [A(x)H^2(x,t) + B(x)V^2(x,t)]dxdt \\ & + \int_0^T [qw^2(t) + r\tilde{u}^2(t)]dt \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

sous les contraintes de la dynamique du système :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \frac{a^2}{g}\partial_x V &= 0, \\ \partial_t V + g\partial_x H &= -F(V) \ , \ t \in [0,T], \\ \dot{w}(t) &= \tilde{u}(t) \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

les conditions aux limites et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} & H(0,t) = 0, \quad V(L,t) = w(t) + \frac{g}{a}H(L,t),\ t \in [0,T], \\ & H(\cdot,0) = H_0,\ V(\cdot,0) = V_0,\ w(0) = w_0 = V_0(L) - \frac{g}{a}H_0(L) \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

la contrainte pour assurer la stabilité :

$$\tilde{u}(t)w(t) \leq -\rho w^2(t), \text{ si } w(t) \neq 0,\ \tilde{u}(t) = 0 \text{ si } w(t) = 0,\ t \in [0,T] \tag{7.4.4}$$

et enfin, nous ajoutons une contrainte pour prendre en compte la saturation de la commande :

$$|\tilde{u}(t)| \leq u_{max},\ t \in [0,T]. \tag{7.4.5}$$

Afin d'assurer que le terme de frottement est bien défini, on suppose que les conditions initiale H_0 et V_0 est dans $\mathbf{L}_4(0,L)$ (voir (7.2.16)). Le problème d'optimisation ci-dessus peut être ré-exprimé (à l'aide de la transformation (7.2.5)) en fonction de la variable z comme suit :

$$\min_{u(\cdot)} J = \int_0^T \langle z(t), \mathcal{Q}z(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R}u(t)\rangle dt = \int_0^T F(z(t),u(t))dt$$
$$\text{sous} \begin{cases} \dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{F}(z(t)) + \mathcal{B}u(t),\ t \in [0,T], \quad z(0) = z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F}), \\ u(t)w(t) \leq (-\rho + k)w^2(t), \text{ si } w(t) \neq 0,\ u(t) = 0 \text{ si } w(t) = 0,\ t \in [0,T] \\ |u(t) - kw(t)| \leq u_{max},\ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{7.4.6}$$

où l'opérateur $\mathcal{Q} : Z \to Z$ défini par

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a^2/g^2A(x) + B(x) & -a/gA(x) + B(x) \\ -a/gA(x) + B(x) & a^2/g^2A(x) + B(x) \end{pmatrix} \tag{7.4.7}$$

Nous pouvons montrer le résultat suivant :

Théorème 7.4.1. *La COHG avec le problème d'optimisation (7.4.6) stabilise le système (7.2.12) en boucle fermée.*

Démonstration. Puisque la commande optimale satisfait la condition du théorème 7.3.1, la stabilité de la boucle fermée est garantie. Le problème restant consiste à montrer la faisabilité à chaque instant d'échantillonnage. Pour cela, nous supposons que $w_0 \geq 0$, alors $w(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$ et la condition de stabilité devient :

$$u(t) \leq (-\rho + k)w(t), t \in [0,T]. \tag{7.4.8}$$

Pour un $z \in Z$ donné, définissons le domaine de la commande de la manière suivante :

$$\Omega(z) = \{u \in \mathbb{R} \mid |u - kw| \leq u_{max} \text{ et } u \leq (-\rho + k)w\}. \tag{7.4.9}$$

Il est évident que $\Omega(z)$ est convexe pour tout $z \in Z$ (c'est-à-dire pour tout $w \in \mathbb{R}$). Définissons ensuite l'ensemble suivant

$$N(z) = \{(f,y) \in \mathbb{R} \times Z \mid f \geq F(z,u),\ y = \mathcal{F}(z) + \mathcal{B}u,\ u \in \Omega(z)\} \tag{7.4.10}$$

Nous voyons facilement que $N(z)$ est aussi convexe pour tout $z \in Z$. Alors, notre problème d'optimisation satisfait les conditions du théorème 2.12 de [Yong, 1992], donc possède au moins une solution optimale.

❑

7.4.2 Calcul de la commande optimale

Nous allons formuler la commande optimale en fonction de l'état adjoint afin de l'utiliser plus tard pour le schéma numérique. Pour prendre en compte les contraintes sur la commande, nous utilisons à nouveau la méthode de barrière. Pour un certain $\mu > 0$ suffisamment petit, nous introduisons le critère modifié suivant :

$$J_m = \int_0^T \langle z(t), \mathcal{Q}z(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R}u(t)\rangle + \mathcal{G}(z(t), u(t))dt \tag{7.4.11}$$

où

$$\mathcal{G}(z,u) = -\mu \log\Big((-\rho + k)w^2 - uw)(u_{max}^2 - (u - kw)^2)\Big) \tag{7.4.12}$$

Comme au paragraphe 2.4, nous utilisons le calcul variationnel. Pour chaque $u \in \mathbf{L}_2([0,T],\mathbb{R})$, $z \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$ et $\lambda \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$, nous introduisons le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} L = \int_0^T \Big\{ & \frac{1}{2}\langle \mathcal{C}z(\tau), \mathcal{Q}\mathcal{C}z(\tau)\rangle + \frac{1}{2}\langle u(\tau), \mathcal{R}u(\tau)\rangle + \frac{1}{2}\mathcal{G}(z(\tau), u(\tau)) \\ & + \Big\langle \lambda(\tau), \Big(z(\tau) - \Phi_0(\tau)z_0 - \int_0^\tau \Phi_0(\tau - r)(\mathcal{F}(z(r)) + \mathcal{B}u(r)dr\Big)\Big\rangle \Big\} d\tau \end{aligned} \tag{7.4.13}$$

Notons L_u, L_z et L_λ les variations de L par rapport à u, z et λ respectivement. Par le théorème de Liusternik ([Luenberger, 1969]), il existe (u_m, z_m, λ_m) tels que $L_u = L_z = L_\lambda = 0$ à (u_m, z_m, λ_m). Ainsi, la condition $L_\lambda = 0$ nous donne :

$$z_m(\tau) = \Phi_0(\tau)z_0 + \int_0^\tau \Phi_0(\tau - r)(\mathcal{F}(z_m(r)) + \mathcal{B}u_m(r))dr, \quad \tau \in [0,T] \tag{7.4.14}$$

La condition $L_z = 0$ nous donne :

$$\lambda_m(\tau) = -\mathcal{P}(z_m(\tau), u_m(\tau)) + \mathcal{F}_z(z_m(\tau)) \int_\tau^T \Phi^*(r - \tau)\lambda_m(r)dr, \, \tau \in [0,T] \tag{7.4.15}$$

où $\mathcal{P}(z,u) = \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z - \frac{1}{2}\mathcal{G}_z(z,u)$, $\mathcal{F}_z$ et $\mathcal{G}_z$ représentent la dérivée en z de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement. La condition $L_u = 0$ implique que :

$$\mathcal{R}u_m(\tau) - \int_\tau^T \mathcal{B}^*\Phi^*(r - \tau)\lambda(r)dr + \frac{1}{2}\mathcal{G}_u(z_m(\tau), u_m(\tau)) = 0 \tag{7.4.16}$$

Posons

$$p_m(\tau) = -\int_\tau^T \Phi^*(r - \tau)\lambda_m(r)dr \tag{7.4.17}$$

alors, en utilisant (7.4.15) :

$$\begin{aligned} p_m(\tau) &= \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\left(\mathcal{P}(z_m(r),u_m(r)) - \mathcal{F}_z(z_m(r))\int_r^T \Phi^*(s-r)\lambda_m(s)ds\right)dr \\ &= \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\left(\mathcal{P}(z_m(r),u_m(r)) + \mathcal{F}_z(z_m(r))p_m(r)\right)dr \end{aligned} \tag{7.4.18}$$

Donc, nous pouvons considérer p_m comme solution de l'équation suivante :

$$\dot{p}_m(\tau) = -\mathcal{A}_0^* p_m(\tau) - \mathcal{F}_z(z_m(\tau))p_m(\tau) - \mathcal{P}(z_m(\tau),u_m(\tau)) \tag{7.4.19}$$

Finalement, la commande est la solution de :

$$u_m(\tau) + \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_m(\tau) + \frac{1}{2}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}_u(z_m(\tau),u_m(\tau)) = 0 \tag{7.4.20}$$

Sous cette forme, nous pouvons utiliser des méthodes numériques (la Méthode de Boltzmann sur réseau par exemple) pour les discrétiser et puis utiliser la méthode du gradient décrite au paragraphe 2.4.2 pour calculer la commande optimale à chaque instant d'échantillonnage. Ceci sera illustré dans le paragraphe ci-dessous.

7.5 Résultat de simulation

Afin d'illustrer la validation des analyses précédentes, nous avons réalisé quelques simulations avec le système dont les paramètres sont donnés dans le tableau 7.1. Supposons que nous voulons changer la vitesse d'écoulement de $V_0 = 0,87\,(m/s)$ à $V_f = 0$ (les variables considérées sont les variations par rapport au profil d'équilibre). Nous simulons tout d'abord la stratégie pour laquelle la vitesse diminue de façon linéaire. Les résultats sont présentés sur les figures 7.2 et 7.3. Nous voyons bien dans ce cas qu'il y a des ondes de pression (des coups de bélier) dans la canalisation.

Nous réalisons maintenant la simulation avec la COHG dont les paramètres sont ceux du tableau 7.2. Rappelons que le paramètre σ est la période d'échantillonnage (voir le chapitre 1).

L	a	f	D	$\bar{V}$	H_0
85 (m)	379 (m/s)	0,0223	0,0635 (m)	0,5 (m/s)	6,5 (m)

Tab. 7.1 – Paramètres du système

Les équations aux dérivées partielles sont discrétisées par la méthode de Boltzmann sur réseaux dont les paramètres sont donnés dans le tableau 7.3.

L'évolution du niveau piézométrique et celle de la vitesse sont présentées sur les figures 7.4 et 7.5. Nous voyons que le système converge bien vers l'origine. Nous pouvons

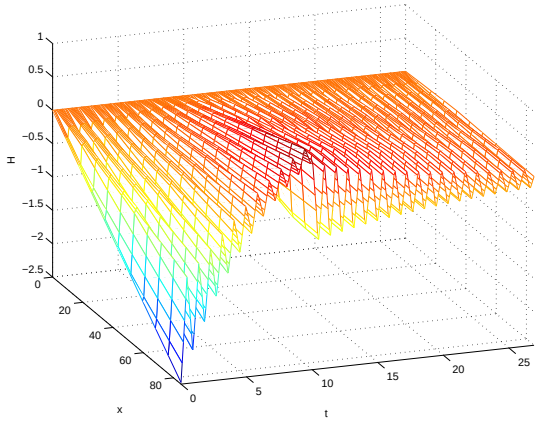

Fig. 7.2 – Niveau piézométrique en boucle ouverte

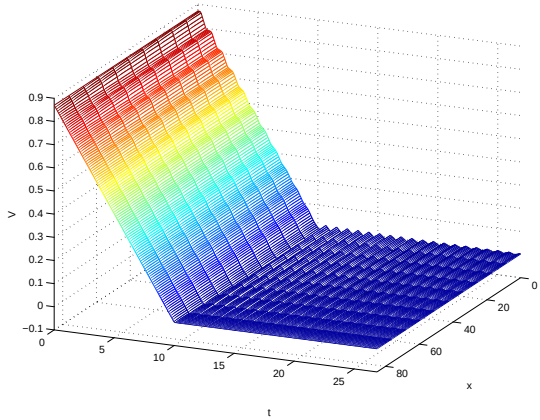

Fig. 7.3 – Vitesse en boucle ouverte

T	σ	A	B	q	r
0,5 (s)	0,0224 (s)	1	0,5	100	100

Tab. 7.2 – Paramètres de la commande

dx	dt	v	τ
1,7 (m)	$4,5 \times 10^{-3}$ (s)	379 (m/s)	0,7

Tab. 7.3 – Paramètres du schéma numérique

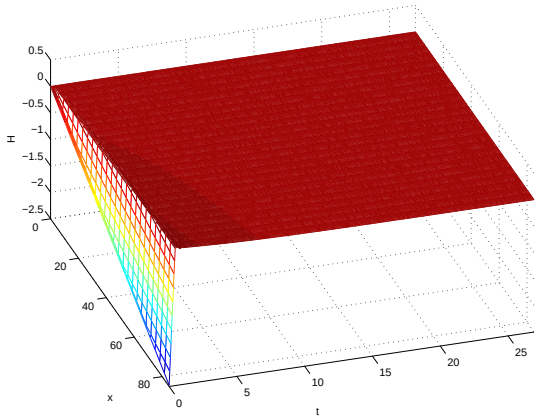

Fig. 7.4 – Niveau piézométrique avec COHG

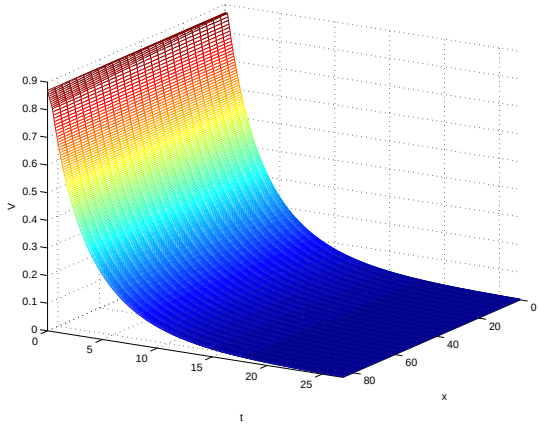

Fig. 7.5 – Vitesse avec COHG

également utiliser une commande par retour d'état à la limite sous la forme

$$\tilde{u}(t) = -\rho w(t) \tag{7.5.1}$$

qui satisfait la condition de stabilité et donc fait converger le système. Les résultats sont présentés sur les figures 7.6 et 7.7. L'évolution de l'état w et celle de la commande $\tilde{u}$ dans les deux cas (la COHG et la commande par retour d'état (7.5.1)) sont présentées

sur la figure 7.8. Nous constatons que les deux commandes ont une performance presque identique, mais la COHG nous assure d'avoir une commande optimale par rapport au critère (7.4.1).

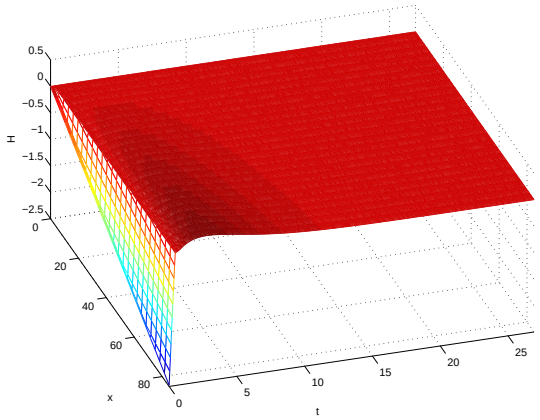

Fig. 7.6 – Niveau piézométrique avec commande par retour d'état

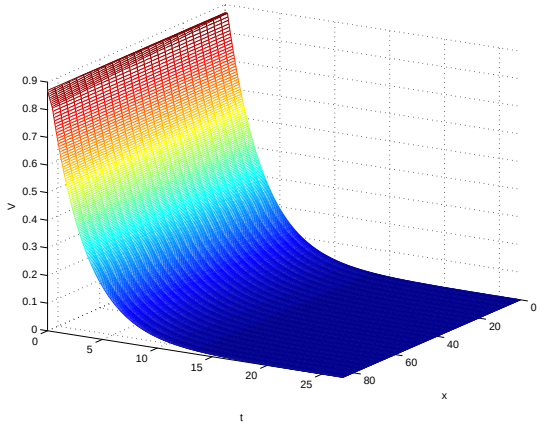

Fig. 7.7 – Vitesse avec commande par retour d'état

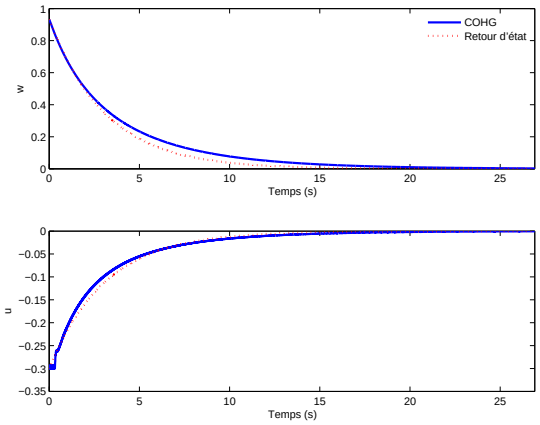

Fig. 7.8 – Etat à la limite et commande

7.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit des conditions suffisantes afin de garantir la stabilité asymptotique d'un système de canalisation sous pression. La COHG a été utilisée pour à la fois stabiliser le système, prendre en compte des contraintes et minimiser une fonction de coût portant sur la variation du niveau piézométrique et de la vitesse par rapport à un profil de référence. Les résultats de simulation ont montré que la COHG fait converger le système vers l'origine et ne crée pas d'ondes de pression.

Nous notons que, grâce aux conditions de stabilité, la COHG n'utilise pas de coût final ni de contrainte finale (cette approche a été considéré pour des systèmes en dimension finie dans, par exemple, [Mhaskar et al., 2005] et [Liu et al., 2009]). Il est vrai que la COHG n'est pas primordiale pour la stabilisation mais elle apport l'avantage de l'optimisation d'un critère et de la prise en compte de contraintes. Les contraintes par exemple sur le niveau piézométrique maximal ou sur la vitesse de la vanne pourraient être prises en compte. La difficulté principale demeure de montrer la faisabilité du problème d'optimisation. Ceci sera considéré dans nos travaux à venir.

Les travaux réalisés dans ce chapitre font l'objet de l'article [Pham, Georges & Besançon, 2012*b*].

Chapitre 8

Conclusions et Perspectives

Ce chapitre vise à résumer les contributions, les discussions ainsi que les perspectives déduites de ce travail de thèse dont, l'objectif principal était d'étudier l'extension de la Commande Optimale à Horizon Glissant (COHG) aux systèmes en dimension infinie en général et aux systèmes de lois de conservation en particulier. Deux aspects de la COHG ont été considérés et exploités : il s'agit de la stabilisation et la capacité à prendre en compte des contraintes.

Dans un premier temps, nous avons proposé et montré un résultat de stabilité d'opérateur généralisant une caractérisation de [Curtain & Zwart, 1995] (lemme 5.1), qui nous donne une condition suffisante de stabilité de la COHG pour une classe de systèmes en dimension infinie. En se fondant sur ce résultat, nous avons fourni les preuves complètes de stabilité de la COHG avec deux approches différentes : l'approche avec coût final et l'approche avec état final fixé à zéro.

Dans un second temps, nous avons montré la stabilité exponentielle de la COHG pour des systèmes hyperboliques 2×2 avec des commandes frontières. Pour cela, nous avons tout d'abord démontré la régularité et l'atteignabilité de ces systèmes. Le problème de commande frontière a été reformulé sous forme abstraite dans laquelle les preuves de stabilité de la COHG peuvent être appliquées.

Les analyses théoriques ont été appliquées à un système physique : un canal d'irrigation. La dynamique d'un tel système est décrite par les équations de Saint-Venant qui constituent un système de lois de conservation non linéaire 2×2. Deux modèles linéaires ont été considérés : l'un autour d'un profil d'équilibre uniforme et l'autre autour d'un profil d'équilibre non uniforme. Nous avons employé la COHG avec coût final pour le premier, et la COHG avec état final fixé pour le deuxième. Dans les deux cas, grâce aux résultats généraux obtenus pour des systèmes hyperboliques 2×2, nous avons pu montrer la stabilité exponentielle de la boucle fermée. Les analyses ont été validées en simulation, donnant des résultats encourageants.

L'application de la COHG pour un réseau de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade a été considérée. En utilisant les résultats concernant la régularité et l'atteignabilité de chaque sous-système, nous avons déduit la régularité et l'atteignabilité du réseau. Nous avons reformulé ce système sous forme abstraite puis montré que la COHG peut être utilisée pour garantir la stabilité. L'approche proposée a été testée par simulation, et les résultats obtenus en accord avec les analyses théoriques.

Nous avons également étudié l'application de la COHG à des systèmes de lois de conservation non linéaires scalaires. Un des défis de ces systèmes vient du fait qu'ils admettent des singularités appelées chocs dans la solution. Nous avons introduit des conditions suffisantes afin d'éviter cette situation. La COHG a été ensuite utilisée afin de garantir les conditions pour éviter le choc et garantir la convergence de la solution vers une référence. Cette approche a été validée par simulation avec le modèle du trafic routier. Pour cette application, nous avons exploité à la fois la capacité à prendre en compte des contraintes et la stabilité garantie de la COHG, ce qui démontre un potentiel important de la COHG pour cette classe de systèmes.

Enfin, l'utilisation de la COHG au problème de stabilisation d'une canalisation sous pression a été considérée. Les conditions suffisantes pour garantir la stabilité asymptotique de ce système ont été fournies. Nous avons montré que la COHG peut à la fois stabiliser le système, prendre en compte des contraintes et minimiser un critère donné. A travers cette application, nous avons abordé une stratégie de la COHG pour un système en dimension infinie sans coût final ni état final fixé ce qui n'avait pas été considérée auparavant, à notre connaissance.

Nous pouvons envisager d'étendre les travaux présentés dans cette étude selon plusieurs directions.

La première piste concerne l'application de la COHG à des réseaux des lois de conservation. L'extension des résultats du chapitre 5 à des réseaux dont la structure est plus complexe reste encore un travail à faire. Sachant que les résultats concernant l'atteignabilité de certaines structures de canaux d'irrigation (structure en étoile ou en arbre) sont disponibles (voir [Li & Rao, 2004]), cette proposition est tout à fait envisageable sans nouvelle difficulté théorique. En outre, considérer un réseau mixte de canaux d'irrigation et de canalisations sous pression est un problème très intéressant à approfondir d'un point de vue théorique ainsi que d'un point de vue pratique. Les interactions entre les sous-systèmes à travers des conditions frontières peuvent imposer des conditions supplémentaires pour la stabilité du système global. Cette difficulté permet à la COHG de valoriser davantage sa capacité à prendre en compte des contraintes. Enfin, l'application de la COHG au réseau de trafic routier apporte aussi un grand intérêt pour éviter des embouteillages.

La deuxième piste concerne le problème de stabilité de la COHG par retour de sortie.

Les théories développées dans ce travail se fondent sur l'hypothèse que tous les états sont mesurés ce qui n'est pas faisable en réalité. Il nous faut mettre en place un observateur afin d'estimer l'état du système à partir des mesures qui sont souvent aux frontières. Sachant que la stratégie à horizon glissant pour des observateurs a été considérée pour les systèmes en dimension finie ([Michalska & Mayne, 1995], [Alamir, 1999]), une extension de cette approche en dimension infinie est particulièrement intéressante à étudier. Une généralisation des résultats de stabilité de la COHG en couplage avec un observateur de [Findeisen, Imsland, Allgöwer, & Foss, 2003] dans le contexte des systèmes en dimension infinie sera également intéressante à considérer.

Une étude comparative en terme de performance et de robustesse de la commande proposée par rapport aux différentes stratégies existantes est aussi nécessaire. Nous pouvons mentionner par exemple la commande par la fonction de Lyapunov de [Xu & Sallet, 2002] ; la commande par retour des mesures aux frontières de [Coron et al., 2009], [Prieur, 2009] ; la commande par *backstepping* de [Vazquez et al., 2011], [Krstic & Smyshlyaev, 2008] et éventuellement l'approche d'Hamiltonienne à port de [Santos et al., 2009].

Finalement, l'approche de la COHG synthétisée complètement en dimension infinie pour d'autres classes de systèmes tels que des systèmes paraboliques ou des systèmes elliptiques est également à approfondir, sachant que la COHG par décomposition spectrale pour des systèmes paraboliques a déjà été considérée dans [Dubljevic et al., 2005*b*], [Dubljevic, N. H. El-Farra & Christofides, 2006] et [Dubljevic et al., 2005*a*]. Une autre possibilité est de généraliser les résultats du chapitre 2 au cas de systèmes ne possédant qu'une fonction de Lyapunov définie localement. De tels résultats, nous permettraient d'utiliser la COHG sur un plus grand nombre d'applications.

Pour conclure, les résultats obtenus montrent que l'application de la COHG à des systèmes en dimension infinie apporte un intérêt considérable, grâce à sa capacité de garantir la stabilité et son efficacité dans la prise en compte de contraintes. Cependant, plusieurs questions restent ouvertes qui nécessitent des recherches approfondies afin d'élargir le champ d'applications de cette approche.

Annexe A

Rappel des principaux résultats de la commande optimale en dimension infinie

Nous rappelons dans cette annexe les principaux résultats, notamment des résultats de [Curtain & Zwart, 1995], utilisés dans les preuves de ce travail. Notons que certaines notations sont modifiées pour s'adapter à celles employées dans ce manuscrit.

Théorème A.0.1. *Théorème A.3.19, page 586 de [Curtain & Zwart, 1995](Théorème de Banach Steinhaus).*

Soit $\{T_n\}$ une famille d'opérateurs bornés dans $\mathcal{L}(X, Y)$, où X est un espace de Banach et Y, un espace linéaire normé. Si la famille $\{T_n x\}$ est bornée pour chaque x (c'est-à-dire que :

$$\|T_n x\|_Y \leq M_x, \tag{A.0.1}$$

avec M_x dépendant de x, mais indépendant de n), alors la famille $\{\|T_n\|\}$ est uniformément bornée par rapport à n.

Lemme A.0.2. *Lemme 3.2.2, page 114 de [Curtain & Zwart, 1995].*

Soient $\Phi_1(t)$ et $\Phi_2(t)$ deux C_0-semigroupes dans leurs espaces de Hilbert Z_1 et Z_2, et avec leurs générateurs infinitésimaux $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ respectivement. Supposons que :

$$\|\Phi_i\| \leq M_i e^{\omega_i t}, \quad i = 1, 2, \tag{A.0.2}$$

et $D \in \mathcal{L}(Z_1, Z_2)$. Alors l'opérateur $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ D & \mathcal{A}_2 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$ est le générateur d'un C_0-semigroupe $\Phi(t)$ dans $Z = Z_1 \oplus Z_2$ donné par :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & 0 \\ S(t) & \Phi_2(t) \end{pmatrix}, \quad S(t)z = \int_0^t \Phi_2(t-s) D \Phi_1(s) z ds. \tag{A.0.3}$$

De plus, il existe une certaine constante positive M telle que :

$$\|\Phi(t)\| \leq Me^{\omega t}, \tag{A.0.4}$$

où $\omega = \max(\omega_1, \omega_2)$ si $\omega_1 \neq \omega_2$ et $\omega > \omega_1$ si $\omega_1 = \omega_2$.

Considérons Z, U et Y, les espaces de Hilbert, $\mathcal{A}$ avec le domaine $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $\Phi(t)$ dans Z, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Les résultats suivants concernent le problème d'optimisation du système

$$z(t) = \Phi(t - t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - s)\mathcal{B}u(s)ds, \quad y(t) = \mathcal{C}z(t). \tag{A.0.5}$$

avec la fonction de coût sur l'intervalle $[t_0, t_e]$:

$$J(z_0; t_0, t_e, u) = \langle z(t_e), \mathcal{M}z(t_e)\rangle + \int_{t_0}^{t_e} \langle y(s), y(s)\rangle + \langle u(s), \mathcal{R}u(s)\rangle ds \tag{A.0.6}$$

où $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \in \mathcal{L}(Z)$ non négative et $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(U)$ coercif.

Théorème A.0.3. *Théorème 6.1.4, page 272 de [Curtain & Zwart, 1995].*

Considérons le système (A.0.5) avec la fonction de coût (A.0.6). Pour tout $z_0 \in Z$, il existe une unique commande $u_{min}(\cdot; z_0, t_0, t_e) \in \mathbf{L}_2([t_0, t_e], U)$ telle que $J(z_0; t_0, t_e, u_{min}(\cdot; z_0, t_0, t_e)) \leq J(z_0; t_0, t_e, u)$ pour tout $u \in \mathbf{L}_2([t_0, t_e], U)$.

Lemme A.0.4. *Lemme 6.1.7, page 277 de [Curtain & Zwart, 1995].*

Pour un certain $t_1 \in [t_0, t_e]$, définissons l'opérateur suivant dans Z :

$$\Pi(t_1)z_0 := \Phi^*(t_e - t_1)\mathcal{M}z_{min}(t_e; z_0, t_1, t_e) + \int_{t_1}^{t_e} \Phi^*(t - t_1)\mathcal{C}^*\mathcal{C}z_{min}(t; z_0, t_1, t_e)dt. \tag{A.0.7}$$

Cet opérateur possède les propriétés suivantes :

a. $\Pi(t_1) \in \mathcal{L}(Z)$ *pour tout* $t_1 \in [t_0, t_e]$ *;*

b. Nous avons la relation suivante entre la trajectoire optimale et la commande optimale :

$$u_{min}(t_1; z_0, t_0, t_e) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t_1)z_{min}(t_1; z_0, t_0, t_e). \tag{A.0.8}$$

c. Nous avons la relation suivante entre le coût minimal et $\Pi(t_1)$

$$\min_{u \in \mathbf{L}_2([t_t, t_e], U)} J(z_0; t_1, t_e, u) = \langle z_0, \Pi(t_1)z_0\rangle; \tag{A.0.9}$$

d. $\Pi(t_1)$ *est un opérateur autoadjoint, non négatif;*

e. Si $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_e$, *alors* $\Pi(t_2) \leq \Pi(t_1)$ *;*

f. $\|\Pi(t_1)\| \leq \|\Pi(t_0)\|$ *;*

g. $\Pi(\cdot)$ *est fortement continu de la droite dans* $[t_0, t_e]$*, c'est-à-dire que* $\lim_{h\to 0} \Pi(t_1+h)z_0 = \Pi(t_1)z_0$ *pour tout* $z_0 \in Z$ *et* $t_1 \in [t_0, t_e]$*.*

Théorème A.0.5. *Théorème 6.1.9, page 281 de [Curtain & Zwart, 1995].*

Soit $\Pi(\cdot)$ *la fonction définie par l'équation (A.0.7). Alors pour* z_1, $z_2 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ *et* $t \in (t_0, t_e)$*, la fonction* $\langle z_1, \Pi(t)z_2\rangle$ *est différentiable et satisfait l'équation différentielle de Riccati d'opérateur :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle z_2, \Pi(t)z_1\rangle &= -\langle z_2, \Pi(t)\mathcal{A}z_1\rangle - \langle \mathcal{A}z_2, \Pi(t)z_1\rangle \\ &\quad -\langle \mathcal{C}z_2, \mathcal{C}z_1\rangle + \langle \Pi(t)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)z_2, z_1\rangle, \\ \Pi(T) &= \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{A.0.10}$$

De plus, il est la solution unique de cette équation différentielle d'opérateur dans la classe d'opérateurs fortement continues et autoadjoints dans $\mathcal{L}(Z)$ *tel que* $\langle z_1, \Pi(t)z_2\rangle$ *est différentiable pour* z_1, $z_2 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ *et* $t \in (t_0, t_e)$*.*

Considérons maintenant le problème d'optimisation de (A.0.5) avec état final fixé $z(t_e) = z_1$ et la fonction de coût suivante :

$$J(z_0, z_1; t_0, t_e, u) = \int_{t_0}^{t_e} \langle z(s), \mathcal{Q}z(s)\rangle + \langle u(s), \mathcal{R}u(s)\rangle ds. \tag{A.0.11}$$

Définissons les opérateurs $\Pi(t)$, $\Phi_P(t,s)$, G_P et W_P de la manière suivante :

• L'opérateur $\Pi(t)$ est la solution unique de l'équation intégrale de Riccati d'opérateur suivante :

$$\Pi(t)z = \Phi^*(T-t)\mathcal{M}\Phi(T-t)z + \int_t^T \Phi^*(s-t)[\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} - \Pi(s)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(s)]\Phi(s-t)zds \tag{A.0.12}$$

avec un certain $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \geq 0$.

• L'opérateur $\Phi_P(t,s)$ défini par :

$$\Phi_P(t,s)z = \Phi(t-s)z - \int_s^t \Phi(t-r)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(r)\Phi_P(r,s)zdr \tag{A.0.13}$$

est l'opérateur d'évolution obtenu en perturbant le C_0-semigroupe $\Phi(t)$ par $D(t) = -\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)$.

• L'opérateur G_P défini par :

$$G_P u = \int_0^T \Phi_P(T,s)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}u(s)ds \tag{A.0.14}$$

est l'opérateur d'atteignabilité correspondant à l'opérateur d'évolution $\Phi_P(t)$ et l'opérateur de commande $\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}$.

- L'opérateur W_P défini par :

$$W_P = G_P G_P^* \tag{A.0.15}$$

est le Grammien de commandabilité. Nous avons le théorème suivant concernant la commande optimale de ce problème :

Théorème A.0.6. *Théorème 5.2 de [Curtain, 1984].*

Soit V un espace de Banach réflexif et sous-espace linéaire de Z avec une injection continue. Supposons que

$$\xi = z_1 - \Phi(t_e, t_0) \in V \tag{A.0.16}$$

et (A.0.5) est exactement atteignable dans V, avec

$$G \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2([t_0, t_e], U), Z). \tag{A.0.17}$$

Alors, il existe une commande optimale pour le système (A.0.5) et le coût (A.0.11), avec état final fixé $z(t_e) = z_1$, donnée par :

$$u_{min}(t) = G_P^* W_P^{-1}(z_1 - \Phi_P(t_e, t_0)z_0) - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)z_{min}(t) \tag{A.0.18}$$

avec le coût minimal :

$$J(z_0, z_1; t_0, t_e, u_{min}) = \langle z_1 - \Phi_P(t_e, t_0)z_0, W_P^{-1}\Phi_P(t_1, t_0)z_0\rangle + \langle z_0, \Pi(t_0)z_0\rangle - \langle z_1, \mathcal{M}z_1\rangle. \tag{A.0.19}$$

Annexe B

Preuve de la régularité de la solution des systèmes hyperboliques

Afin de faciliter la lecture, nous présentons brièvement dans cette annexe le travail de [Rauch & Massey, 1974] qui étudie la régularité de la solution du système hyperbolique suivant :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}z = F \text{ dans } [0,T]\times\Omega, \quad Mz = g \text{ dans } [0,T]\times\partial\Omega, \\ &z(0,x) = f(x) \text{ pour } x\in\Omega. \end{aligned} \tag{B.0.1}$$

où $\mathcal{L}z = \partial_t z - Gz$ avec

$$Gz = \sum_{j=1}^{m} A_j(t,x)\partial_j z + B(t,x)z. \tag{B.0.2}$$

où $\partial_j = \partial/\partial x_j$ et $\partial_t = \partial/\partial t$. Les matrices A_j et B de dimension $k\times k$ sont régulières définies dans $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$. La solution $z(t,s)$ est un vecteur de k éléments. Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$ ayant la forme :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x\in\mathbb{R}^m \mid x_1 > 0\}, \\ \partial_\Omega &= \{x\in\mathbb{R}^m \mid x_1 = 0\}, \\ \bar{\Omega} &= \Omega\cup\partial\Omega, \\ x &= (x_1,\cdots,x_m). \end{aligned} \tag{B.0.3}$$

$M(t,x)$ est une matrice régulière de dimension $l\times k$ définie dans $\mathbb{R}\times\partial\Omega$, $\mathrm{Rang}(M) = l$, où l est le nombre de valeurs propres négatives de A_1.

Supposons qu'il existe certaines constantes C et β telles que :

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|_\Omega \le Ce^{\beta(t-s)}(\|z(s)\|_\Omega + \|\mathcal{L}z\|_{[s,t]\times\Omega}), \\ &\|v(s)\|_\Omega \le Ce^{-\beta(s-t)}(\|v(t)\|_\Omega + \|\mathcal{L}^*v\|_{[s,t]\times\Omega}), \end{aligned} \tag{B.0.4}$$

$-\infty < s \leq t < \infty$, pour tout z, $v \in \mathbf{C}^{\infty}_{(0)}(\mathbb{R}\times\Omega)$ tels que $Mz = 0$, $M^*v = 0$ dans $\mathbb{R}\times\partial\Omega$.

Ici, $\mathcal{L}^*$, l'adjoint de $\mathcal{L}$, est défini par

$$\mathcal{L}^* = -\partial_t v - G^* v, \quad \text{avec} \quad G^* v = -\sum \partial_j A_j^* v + B^* v, \tag{B.0.5}$$

où A_j^* représente la transposé conjuguée de A_j, et de façon similaire pour B^*. $M^*(t,x)$, l'opérateur frontière adjoint, est de dimension $(k-l)\times k$ et régulier dans $\mathbb{R}\times\Omega$.

Pour $V \subset \mathbb{R}^m$, notons $\mathbf{C}^{\infty}_0(\mathbb{R}^m)$, la classe des fonctions infiniment dérivables qui s'annulent à l'infini ; $\mathbf{C}^{\infty}_{(0)}(V)$, l'espace des restrictions dans V des fonctions de $\mathbf{C}^{\infty}_0(\mathbb{R}^m)$. La norme et le produit interne dans V sont notés par $\|\cdot\|_V$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ respectivement. $\mathbf{H}^s(V)$ représente l'espace de Sobolev des fonctions dans V dont les dérivées jusqu'à l'ordre s appartiennent à $\mathbf{L}_2(V)$. La norme dans cet espace est noté par $\|\cdot\|_{s,V}$.

La condition nécessaire pour que la solution z de (B.0.1) soit dans la classe $\mathbf{C}^p([0,T];\mathbf{H}^{s-p}(\Omega))$, $0 \leq p \leq s$ est la condition de compatibilité suivante :

$$\partial_t^p Mz = \partial_t^p g, \text{ dans } [0,T]\times\Omega \text{ pour } 0 \leq p \leq s-1, \tag{B.0.6}$$

ce qui entraîne

$$\sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} (\partial t^i M)(0) f_{p-i} = \partial_t^p g(0), \qquad \text{dans } \partial\Omega \text{ pour } 0 \leq p \leq s-1, \tag{B.0.7}$$

où $\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{i!(p-i)!}$ et les fonctions f_p sont définies par :

$$\begin{aligned} f_0 &= f, \\ f_p &= \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p-1 \\ i \end{pmatrix} G_i(0) f_{p-1-i} + (\partial_t^{p-1})(0), \end{aligned} \tag{B.0.8}$$

Nous allons montrer qu'elle est également la condition suffisante.

Pour $z \in \mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \leq r \leq s$, et $0 \leq t \leq T$, définissons

$$|||z(t)|||^2_{s,\Omega} = \sum_{j=0}^{s} \|\partial_t^j z(t)\|^2_{s-j,\Omega}. \tag{B.0.9}$$

Nous avons tout d'abord le résultat suivant concernant l'existence de la solution du problème avec condition frontière homogène (c'est-à-dire que $g = 0$ dans B.0.1)) suivant :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}z = F \text{ dans } [0,T]\times\Omega, \quad Mz = 0 \text{ dans } [0,T]\times\partial\Omega, \\ &z(0,x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{B.0.10}$$

Proposition B.0.1. *Pour chaque $F \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\Omega)$, $f \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, il existe une unique solution forte de (B.0.10). Cette solution appartient à la classe $\mathbf{C}([0,T];\mathbf{L}_2(\Omega))$ et satisfait :*

$$\|z(t)\|_\Omega \leq Ce^{\beta t}(\|f\|_\Omega + \|F\|_{[0,t]\times\Omega}), \tag{B.0.11}$$

$0 \leq t \leq T$, avec C et β sont les constantes dans (B.0.4).

Nous énonçons maintenant le résultat concernant la régularité de la solution du problème avec condition frontière homogène (B.0.10) :

Théorème B.0.2. *Soient $f \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, $\mathbf{H}^s([0,T]\times\Omega)$, et f_p défini par (B.0.8). Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution z de (B.0.10) appartienne à $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \leq r \leq s$ est que les conditions de compatibilité (B.0.7) soient satisfaites avec $g = 0$. Dans ce cas, il existe une constante C_s, indépendant de F et f, telle que :*

$$|||z(t)|||_{s,\Omega} \leq C_s(\|f\| + \|F\|_{[s,t]\times\Omega} + |||F(0)|||_{s-1,\Omega}, \tag{B.0.12}$$

pour $0 \leq t \leq T$.

Démonstration. La preuve du théorème B.0.2 utilise les quatre lemmes suivant :

Lemme B.0.3. *Soient $f \in \mathbf{H}^{2s+3}(\Omega)$, $F \in \mathbf{H}^{2s+3}([0,T]\times\Omega)$. Supposons que les conditions de compatibilité (B.0.7) sont satisfaites avec $g = 0$ pas seulement pour $0 \leq p \leq s-1$, mais aussi pour $p = s, s+1$ (où f_s, f_{s+1} sont définies par (B.0.8) avec $p = s, s+1$). Alors il existe $w \in \mathbf{H}^{s+2}([0,T]\times\Omega)$ tel que $Mw = 0$ dans $[0,T]\times\partial\Omega$, $w(0) = f$, et $\partial_t^p(\mathcal{L}w - F)(0) = 0$ pour $0 \leq p \leq s$.*

Lemme B.0.4. *Supposons que $z \in \mathbf{H}^{s+1}([0,T]\times\Omega)$ satisfait (B.0.10). Alors l'inégalité (B.0.12) est satisfaite.*

Lemme B.0.5. *Si f et F satisfont les hypothèses du théorème B.0.2 et $r \geq s+2$, alors il existe des suites $\{f_n\} \subset \mathbf{H}^r(\Omega)$, $\{F_n\} \subset \mathbf{H}^r([0,T]\times\Omega)$ avec $f_n \to f$ dans $\mathbf{H}^r(\Omega)$, $F_n \to F$ dans $\mathbf{H}^r([0,T]\times\Omega)$ et pour chaque n, f_n, F_n satisfont les conditions de compatibilité (B.0.7) avec $g = 0$ pour $0 \leq p \leq s+1$.*

Lemme B.0.6. *Si $f = 0$, $F = \mathbf{H}^s([0,T]\times\Omega)$ et $\partial_t^j F(0) = 0$ pour $0 \leq j \leq s-1$, alors la solution de (B.0.10) est dans $\mathbf{H}^s([0,T]\times\Omega)$.*

Pour les preuves de ces lemmes, il est possible de consulter [Rauch & Massey, 1974].

Supposons que f et F satisfont les hypothèses du lemme B.0.3. Nous allons montrer que la solution z de B.0.10 appartient à $\mathbf{H}^{s+1}([0,T]\times\Omega)$ et l'inégalité (B.0.12) est satisfaite. Pour cela, notons $v = z - w$, où w satisfait les conclusions du lemme B.0.3. Alors v est une solution forte de $\mathcal{L}v = F - \mathcal{L}w$, $Mv = 0$, $v(0) = 0$. Nous avons $F - \mathcal{L}w \in \mathbf{H}^{s+1}([0,T]\times\Omega)$ et $\partial_t^j(F - \mathcal{L}w)(0) = 0$, $0 \leq j \leq s$. En appliquant le lemme B.0.6, nous

obtenons que v appartient à $\mathbf{H}^{s+1}([0,T]\times\Omega)$. Donc z l'est également. De plus, par le lemme B.0.4, l'inégalité (B.0.12) est vraie pour z.

Supposons maintenant que f et F sont des données générales satisfaisant les hypothèses du théorème B.0.2, et considérons $\{f_n\}$ et $\{F_n\}$ les suites qui satisfont les conclusions du lemme B.0.5. Si z_n est la solution correspondant aux données f_n et F_n, alors l'inégalité (B.0.12) appliquée à $z_n - z_m$ montre que la suite $\{z_n\}$ converge dans $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \le r \le s$. Puisque $z_n \to z$ dans $\mathcal{L}_2([0,T]\times\Omega)$, z appartient à $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \le r \le s$.

❑

Le théorème B.0.2 peut être étendu au cas du problème avec condition frontière non homogène :

Proposition B.0.7. *Soit $f \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, $F \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\Omega)$, $g \in \mathbf{H}^{s+1/2}([0,T]\times\partial\Omega)$. Alors la solution z de (B.0.1) appartient à $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \le r \le s$ si et seulement si les conditions de compatibilité (B.0.7) sont satisfaites.*

Démonstration. Il existe $v \in \mathbf{H}^{s+1}([0,T]\times\Omega)$ tel que $Mv = g$ dans $[0,T]\times\partial\Omega$. Si $F' = F - \mathcal{L}v$ et $f' = f - v(0)$, alors on peut montrer que F' et f' satisfont (B.0.7) avec $g = 0$. Considérons w, la solution de (B.0.10) avec F et f remplacés par F' et f'. Par le théorème B.0.2, w appartient à $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \le r \le s$. Puisque $z = v + w$, z possède également cette propriété.

❑

Il est possible de réduire l'hypothèse sur g dans cette proposition à $g \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega)$ à condition que l'on puisse montrer l'inégalité suivante à la place de (B.0.4) :

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|_\Omega \le Ce^{\beta(t-s)}(\|z(s)\|_\Omega + \|\mathcal{L}z\|_{[s,t]\times\Omega} + \|Mz\|_{[s,t]\times\partial\Omega}), \\ &-\infty < s \le t < \infty, \quad z \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R}\times\Omega). \end{aligned} \tag{B.0.13}$$

De plus, si on peut ajouter le terme $\|z\|_{[s,t]\times\Omega}$ à gauche de (B.0.13), la restriction de z dans $[0,T]\times\partial\Omega$ est dans $\mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega$.

Annexe C

Structure des matrices du système discrétisé par la méthode de Galerkin

Nous donnons dans cette annexe la structure des matrices introduites au paragraphe 2.4.4. Rappelons que le système discrétisé a la forme :

$$\begin{aligned}
\dot{g} &= M_{g\zeta}\zeta + M_{g\chi}\chi_d, \\
E_v\dot{v}_d &= M_{vg}g + M_{vv}v_d + M_{v\zeta}\zeta + M_{v\chi}\chi_d, \\
\dot{\zeta} &= M_{\zeta g}g + M_{\zeta v}v_d + M_{\zeta\chi}\chi_d, \\
E_\chi\dot{\chi}_d &= M_{\chi g}g + M_{\chi v}v_d + M_{\chi\zeta}\zeta + M_{\chi\chi}\chi_d,
\end{aligned} \tag{C.0.1}$$

Pour des raisons de simplicité, notons $a = \lambda_1 + \gamma_1 x$, $b = -\lambda_2 + \delta_2(L - x)$, $c = \gamma_2 x$, $d = \delta_1(L - x)$, $\bar{\gamma}_1 = \lambda_1' - \gamma_1$ et $\bar{\delta}_2 = \lambda_2' - \delta_2$. Les matrices dans (C.0.1) ont les structures comme suit :

$$M_{g\zeta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{r_2} \end{pmatrix}, \tag{C.0.2}$$

$$M_{\zeta g} = \begin{pmatrix} -\left(p_{f1} + \displaystyle\int_0^L \frac{x^2 q_1}{L^2} dx\right) & 0 \\ 0 & -\left(p_{f2} + \displaystyle\int_0^L \frac{(L-x)^2 q_2}{L^2} dx\right) \end{pmatrix} \tag{C.0.3}$$

$$
\begin{aligned}
M_{\zeta v} &= \begin{pmatrix} M_{\zeta_1 v_1} & 0 \\ 0 & M_{\zeta_2 v_2} \end{pmatrix}, \\
M_{\zeta_1 v_1} &= \frac{1}{L}\begin{pmatrix} -\mathbf{I}^1_{1,2}(xq_1) & -\mathbf{I}^2_{2,3}(xq_1) & \cdots & -\mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(xq_1) \end{pmatrix} \\
M_{\zeta_2 v_2} &= \frac{1}{L}\begin{pmatrix} -\mathbf{I}^2_{1,3}((L-x)q_2) & -\mathbf{I}^3_{2,4}((L-x)q_2) & \cdots & -\mathbf{I}^{M}_{M-1,M}((L-x)q_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{C.0.4}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{g\chi} &= \begin{pmatrix} M_{g_1\chi_1} & 0 \\ 0 & M_{g_2\chi_2} \end{pmatrix}, \\
M_{g_1\chi_1} &= \frac{1}{L}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^2_{1,3}(x/r_1) & \mathbf{I}^3_{2,4}(x/r_1) & \cdots & \mathbf{I}^{M}_{M-1,M}(x/r_1) \end{pmatrix}, \\
M_{g_2\chi_2} &= \frac{1}{L}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^1_{1,2}((L-x)/r_2) & \mathbf{I}^1_{1,3}((L-x)/r_2) & \cdots & \mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}((L-x)/r_2) \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{C.0.5}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\zeta\chi} &= \begin{pmatrix} M_{\zeta\chi_1} & M_{\zeta\chi_2} \end{pmatrix}, \\
M_{\zeta\chi_1} &= \frac{1}{L}\begin{pmatrix} -\mathbf{I}^2_{1,3}(a) & -\mathbf{I}^3_{2,3}(a) & \cdots & -\mathbf{I}^{M}_{M-1,M}(a) \\ -\mathbf{I}^2_{1,3}(\delta_1(L-x)) & -\mathbf{I}^3_{2,3}(\delta_1(L-x)) & \cdots & -\mathbf{I}^{M}_{M-1,M}(\delta_1(L-x)) \end{pmatrix}, \\
M_{\zeta\chi_2} &= \frac{1}{L}\begin{pmatrix} -\mathbf{I}^1_{1,2}(\gamma_2 x) & -\mathbf{I}^2_{1,3}(\gamma_2 x) & \cdots & -\mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(\gamma_2 x) \\ -\mathbf{I}^1_{1,2}(b) & -\mathbf{I}^2_{1,3}(b) & \cdots & -\mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(b) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{C.0.6}
$$

$$
M_{v\zeta} = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^1_{1,2}(x/r_1) & \\ \mathbf{I}^2_{1,3}(x/r_1) & \\ \vdots & \\ \mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(x/r_1) & \\ & \mathbf{I}^2_{1,3}((L-x)/r_2) \\ & \mathbf{I}^3_{2,4}((L-x)/r_2) \\ & \vdots \\ & \mathbf{I}^{M}_{M-1,M}((L-x)/r_2) \end{pmatrix}
\tag{C.0.7}
$$

$$M_{vg} = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^1_{1,2}(a) & \mathbf{I}^1_{1,2}(d) \\ \mathbf{I}^2_{1,3}(a) & \mathbf{I}^3_{1,3}(d) \\ \vdots & \\ \mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(a) & \mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(d) \\ \mathbf{I}^2_{1,3}(c) & \mathbf{I}^2_{1,3}(b) \\ \mathbf{I}^3_{2,4}(c) & \mathbf{I}^3_{3,4}(b) \\ \vdots & \\ \mathbf{I}^M_{M-1,M}(c) & \mathbf{I}^M_{M-1,M}(b) \end{pmatrix} \tag{C.0.8}$$

$$M_{\chi g} = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} -\mathbf{I}^2_{1,3}(xq_1) & \\ -\mathbf{I}^3_{2,4}(xq_1) & \\ \vdots & \\ -\mathbf{I}^M_{M-1,M}(xq_1) & \\ & -\mathbf{I}^1_{1,2}((L-x)q_2) \\ & -\mathbf{I}^2_{1,3}((L-x)q_2) \\ \vdots & \\ & -\mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}((L-x)q_2) \end{pmatrix} \tag{C.0.9}$$

$$\begin{aligned} M_{v\chi} &= \begin{pmatrix} M_{v_1\chi_1} & 0 \\ 0 & M_{v_2\chi_2} \end{pmatrix}, \\ M_{v_1\chi_1} &= \frac{1}{r_1^2L^2}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^1_{1,2}(x) \\ \mathbf{I}^2_{1,3}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^2_{1,3}(x) & \mathbf{I}^3_{2,4}(x) & \cdots & \mathbf{I}^M_{M-1,M}(x) \end{pmatrix}, \\ M_{v_2\chi_2} &= \frac{1}{r_2^2L^2}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^2_{1,3}(L-x) \\ \mathbf{I}^3_{2,4}(L-x) \\ \vdots \\ \mathbf{I}^M_{M-1,M}(L-x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}^1_{1,2}(L-x) & \mathbf{I}^2_{1,3}(L-x) & \cdots & \mathbf{I}^{M-1}_{M-2,M}(L-x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{C.0.10}$$

$$M_{\chi v} = \begin{pmatrix} M_{\chi_1 v_1} & 0 \\ 0 & M_{\chi_2 v_2} \end{pmatrix}, \tag{C.0.11}$$

$$M_{\chi_1 v_1} = \begin{array}{c} \\ \chi_1^2 \\ \chi_1^3 \\ \vdots \\ \chi_1^M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 & \cdots & v_1^{M-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(q_1) & -\mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(q_1) & -\mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(q_1) & & \\ & -\mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(q_1) & -\mathbf{I}_{2,4}^{3,3}(q_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1,M}(q_1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$M_{\chi_2 v_2} = \begin{array}{c} \\ \chi_2^1 \\ \vdots \\ \chi_2^{M-2} \\ \chi_2^{M-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_2^2 & \cdots & v_2^{M-2} & v_2^{M-1} & v_2^M \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(q_2) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -\mathbf{I}_{M-3,M-1}^{M-2,M-2}(q_2) & -\mathbf{I}_{M-2,M-1}^{M-2,M-1}(q_2) & \\ & & -\mathbf{I}_{M-2,M-1}^{M-2,M-1}(q_2) & -\mathbf{I}_{M-1,M-1}^{M-1,M-1}(q_2) & -\mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1,M}(q_2) \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$M_{vv} = \begin{pmatrix} M_{v_1 v_1} & 0 \\ 0 & M_{v_2 v_2} \end{pmatrix} + D_{vv}, \tag{C.0.12}$$

$$M_{v_1 v_1} = \frac{1}{\Delta x} \begin{array}{c} \\ v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^{M-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1^1 & v_1^2 & \cdots & v_1^{M-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_{1,2}^1(\lambda_1) & \mathbf{I}_{1,2}^1(\lambda_1) & & \\ -\mathbf{I}_{1,2}^2(\lambda_1) & \mathbf{I}_{1,2}^2(\lambda_1) - \mathbf{I}_{2,3}^2(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_{M-2,M-1}^{M-1}(\lambda_1) - \mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1}(\lambda_1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$M_{v_2 v_2} = \frac{1}{\Delta x} \begin{array}{c} \\ v_2^2 \\ v_2^3 \\ \vdots \\ v_2^M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_2^2 & v_2^3 & \cdots & v_2^M \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{1,2}^2(\lambda_2) - \mathbf{I}_{2,3}^2(\lambda_2) & \mathbf{I}_{2,3}^2(\lambda_2) & & \\ \mathbf{I}_{2,3}^3(\lambda_2) & \mathbf{I}_{2,3}^3(\lambda_2) - \mathbf{I}_{3,4}^3(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_{M-1,M}^M(\lambda_2) \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$
D_{vv} = \begin{array}{c} \\ v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^{M-1} \\ v_2^2 \\ v_2^3 \\ \vdots \\ v_2^M \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} v_1^1 & v_1^2 & \cdots & v_1^{M-1} & v_2^2 & v_2^3 & \cdots & v_2^M \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-\mathbf{I}_{1,2}^{1,1}(\gamma_1) & \mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(\gamma_1) & & & \mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(\delta_1) & & & \\
-\mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(\gamma_1) & \mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(\gamma_1) & & & \mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(\delta_1) & \mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(\delta_1) & & \\
& & \ddots & & & & \ddots & \\
& & & \mathbf{I}_{M-2,M}^{M-1,M-1}(\gamma_1) & & & & \mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1,M}(\delta_1) \\
\mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(\gamma_2) & \mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(\gamma_2) & & & \mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(\delta_2) & \mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(\delta_2) & & \\
& \mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(\gamma_2) & & & \mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(\delta_2) & \mathbf{I}_{2,4}^{3,3}(\delta_2) & & \\
& & & & & & & \\
& & & \mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1,M}(\gamma_2) & & & & \mathbf{I}_{M-1,M}^{M,M}(\delta_2)
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

$$
M_{\chi\chi} = \begin{pmatrix} M_{\chi_1\chi_1} & 0 \\ 0 & M_{\chi_2\chi_2} \end{pmatrix} + D_{\chi\chi}, \tag{C.0.13}
$$

$$
M_{\chi_1\chi_1} = \frac{1}{\Delta x} \begin{array}{c} \\ \chi_1^2 \\ \chi_1^3 \\ \vdots \\ \chi_1^M \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \chi_1^2 & \chi_1^3 & \cdots & \chi_1^M \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\mathbf{I}_{1,2}^2(\lambda_1) - \mathbf{I}_{2,3}^2(\lambda_1) & \mathbf{I}_{2,3}^2(\lambda_1) & & \\
\mathbf{I}_{2,3}^3(\lambda_1) & \mathbf{I}_{2,3}^3(\lambda_1) - \mathbf{I}_{3,4}^3(\lambda_1) & & \\
& & \ddots & \\
& & & \mathbf{I}_{M-1,M}^M(\lambda_1)
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

$$
M_{\chi_2\chi_2} = \frac{1}{\Delta x} \begin{array}{c} \\ \chi_2^1 \\ \chi_2^2 \\ \vdots \\ \chi_2^{M-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \chi_2^1 & \chi_2^2 & \cdots & \chi_2^{M-1} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-\mathbf{I}_{1,2}^1(\lambda_2) & \mathbf{I}_{1,2}^1(\lambda_2) & & \\
-\mathbf{I}_{1,2}^2(\lambda_2) & \mathbf{I}_{1,2}^2(\lambda_2) - \mathbf{I}_{2,3}^2(\lambda_2) & & \\
& & \ddots & \\
& & & \mathbf{I}_{M-2,M-1}^{M-1}(\lambda_2) - \mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1}(\lambda_2)
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

$$
D_{\chi\chi} = \begin{array}{c} \\ \chi_1^2 \\ \chi_1^3 \\ \vdots \\ \chi_1^M \\ \chi_2^1 \\ \chi_2^2 \\ \vdots \\ \chi_2^{M-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \chi_1^2 & \chi_1^3 & \cdots & \chi_1^M & \chi_2^1 & \chi_2^2 & \cdots & \chi_2^{M-1} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(\bar{\gamma}_1) & \mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(\bar{\gamma}_1) & & & \mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(-\gamma_2) & \mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(-\gamma_2) & & \\
\mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(\bar{\gamma}_1) & \mathbf{I}_{2,4}^{3,3}(\bar{\gamma}_1) & & & & \mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(-\gamma_2) & & \\
& & \ddots & & & & \ddots & \\
& & & \mathbf{I}_{M-1,M}^{M,M}(\bar{\gamma}_1) & & & & \mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1,M}(-\gamma_2) \\
\mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(-\delta_1) & & & -\mathbf{I}_{1,2}^{1,1}(\bar{\delta}_2) & \mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(\bar{\delta}_2) & & & \\
\mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(-\delta_1) & \mathbf{I}_{2,3}^{2,3}(-\delta_1) & & & -\mathbf{I}_{1,2}^{1,2}(\bar{\delta}_2) & \mathbf{I}_{1,3}^{2,2}(\bar{\delta}_2) & & \\
& & & & & & & \\
& & & \mathbf{I}_{M-1,M}^{M-1,M}(-\delta_1) & & & & \mathbf{I}_{M-2,M}^{M-1,M-1}(\bar{\delta}_2)
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

$$
Ev = E_\chi = \begin{array}{c}
\\ v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^{M-1} \\ \hline v_2^2 \\ v_2^3 \\ \vdots \\ v_2^M
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 & \cdots & v_1^{M-1} & v_2^2 & v_2^3 & v_2^4 & \cdots & v_2^M \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & & & & \\
\hline
 & & & & & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & & & \\
 & & & & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & \frac{1}{3}
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Bibliographie

Aksikas, I., Fuxmana, A., Forbes, J. F. & Winkin, J. J. [2009], 'LQ control design of a class of hyperbolic PDE systems : Application to fixed-bed reactor', *Automatica* **45**, 1542–1548.

Aksikas, I., Winkin, J. J. & Dochain, D. [2007*a*], 'Asymptotic stability of infinite-dimensional semilinear systems : Application to a nonisothermal reactor', *Systems and Control Letters* **56**, 122–132.

Aksikas, I., Winkin, J. J. & Dochain, D. [2007*b*], 'Optimal LQ-feedback regulation of a nonisothermal plug flow reactor model by spectral factorization', *IEEE transactions on Automatic and Control* **52**, 1179–1193.

Alamir, M. [1999], 'Optimization based nonlinear observers revisited', *Int. J. Contr.* **72**(13), 1204–1217.

Ascher, U., Mattheij, R. & Russell, R. [1995], *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, 2 edn, SIAM, Philadelphia.

Bamieh, B., Paganini, F. & Dahleh, M. A. [2012], 'Distributed control of spatially invariant systems', *IEEE transactions on Automatic and Control* **47**(7), 1091–1107.

Bartman, A. R., McFall, C., Christofides, P. D. & Cohen, Y. [2009], 'Model predictive control of feed flow reversal in a reverse osmosis desalination process', *Journal of Process Control* **19**, 433–442.

Bastin, G. & Coron, J. [2010], Further results on boundary feedback stabilisation of 2×2 hyperbolic systems over a bounded interval, *in* 'Proceedings of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems'.

Bastin, G., Haut, B., Coron, J. & D'Andréa-Novel, B. [2007], 'Lyapunov stability analysis of networks of scalar conservation laws', *Networks and Heterogeneous Media* **2**(4), 749 – 757.

Bayen, A. M., Raffard, R. L. & Tomlin, C. J. [2006], 'Adjoint-based control of a new eulerian network model of air traffic flow', *IEEE transactions on Control systems technology* **14**(5), 804–818.

Boyd, S. & Vandenberghe, L. [2004], *Convex Optimization*, Cambrige University Press.

Bressan, A. [2000], *Hyperbolic Systems of Conservation Laws - The One-dimensional Cauchy Problem*, Oxford Univ. Press.

Burgers, J. M. [1948], 'A mathematical model illustrating the theory of turbulence', *Advances in Applied Mechanics* **1**, 171–199.

Chen, H. & Allgöwer, F. [1998], 'A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability', *Automatica* **34**(10), 1205–1217.

Chen, M. L. & Georges, D. [1999], Nonlinear optimal control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model, *in* 'Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control'.

Chopard, B. & Droz, M. [2005], *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambridge University Press.

Christofides, P. D. & Daoutidis, P. [1997], 'Finite-dimensional control of parabolic PDE systems using approximate inertial manifolds', *Journal of Mathematica Analysis and Applications* **216**, 398–420.

Christofides, P. D. & Daoutidis, P. [1998], 'Robust control of hyperbolic PDE systems', *Chemical Enoineering Science* **53**(1), 85–105.

Christofides, P. D., Liu, J. & a, D. M. P. [2011], *Networked and Distributed Predictive Control : Methods and Nonlinear Process Network Applications*, Advances in Industrial Control, Springer-Verlag.

Cirina, M. A. [1969], 'Boundary controllability of nonlinear hyperbolic systems', *SIAM Journal of Control* **7**, 198–212.

Colombo, R. & Goatin, P. [2007], 'A well posed conservation law with a variable unilateral constraint', *Journal of Differential Equations* **234**, 654–675.

Colombo, R. M., Goatin, P. & Rosini, M. D. [2011], 'On the modeling and management of traffic', *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **45**, 853–872.

Coron, J., Bastin, G. & D'Andréa-Novel, B. [2009], 'On Lyapunov stability of linearised Saint-Venant equations for a sloping channel', *Networks and Heterogeneous Media* **4**(2).

Coron, J., D'Andréa-Novel, B. & Bastin, G. [1999], A Lyapunov approach to control irrigation canals modeled by saint-venant equations, *in* 'Proceedings of European Control Conference'.

Coron, J., D'Andréa-Novel, B. & Bastin, G. [2007], 'A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws', *IEEE transactions on automatic control* **52**, 2 – 11.

Coron, J.-M., D'Andréa-Novel, B. B. & Bastin, G. [2008], 'Dissipative boundary conditions for one-dimensional nonlinear hyperbolic systems', *SIAM Journal on Control and Optimisation* **47**(3), 1460–1498.

Courant, R. & Hilbert, D. [1962], *Methods of Mathematical Physics*, Vol. Volume II Partial Differential Equations, Interscience Publishers.

Curtain, R. F. [1984], 'Linear-quadratic control problem with fixed endpoints in infinite dimensions', *Journal of optimization theory and application* **44**(1), 55–74.

Curtain, R. & Zwart, H. [1995], *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag.

Dick, M., Gugat, M. & Leugering, G. [2010], 'Classical solutions and feedback stabilization for the gas flow in a sequence of pipes', *Networks and Heterogeneous Media* **5**(4), 691–709.

Dubljevic, S., El-Farra, N. H., Mhaskar, P. & Christofides, P. D. [2006], 'Predictive control of parabolic PDEs with state and control constraints', *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **16**, 749–772.

Dubljevic, S., Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2005*a*], 'Predictive control of transport-reaction processes', *Computer and Chemical engineering* **29**, 2335–2345.

Dubljevic, S., Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2005*b*], 'Predictive control of transport-reaction processes', *Computers and Chemical Engineering* **11**(29), 2335Ű2345.

Dubljevic, S., N. H. El-Farra, P. M. & Christofides, P. D. [2006], 'Predictive control of parabolic PDEs with state and control constraints', *International Journal of robust and nonlinear control* **16**, 749–772.

Dulhoste, J., Georges, D. & Besançon, G. [2004], 'Nonlinear control of open-channel water flow based on a collocation control model', *Journal of Hydraulic Engineering* **30**, 254–266.

Fattorini, H. O. [1999], *Infinite dimensional optimization and control theory*, Cambrige University Press.

Findeisen, R. & Allgöwer, F. [2002], An introduction to nonlinear model predictive control, *in* 'Proceedings of 21st Benelux Meeting on Systems and Control', Veldhoven.

Findeisen, R., Imsland, L., Allgöwer, F., & Foss, B. A. [2003], 'Output feedback stabilization of constrained systems with nonlinear predictive control', *International Journal of robust and nonlinear control* **13**, 211–227.

Findeisen, R., Imsland, L., Allgöwer, F. & Foss, B. A. [2003], 'State and output feedback nonlinear model predictive control : An overview', *European Journal of Control* **9**(3), 179–195.

Fletcher, C. [1991], *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, 2 edn, Springer-Verlag.

Foias, C., Özbay, H. & Tannenbaum, A. [1996], *Robust Control of Infinite Dimensional Systems Frequency Domain Methods*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer.

Garavello, M. & Piccoli, B. [2006], *Traffic Flow on Networks*, AIMS.

García, C. E., Prett, D. M. & Morari, M. [1989], 'Model predictive control : Theory and practice - a survey', *Automatica* **25**(3), 335–348.

Georges, D. [2009], 'Infinite-dimensional nonlinear predictive control design for open-channel hydraulic systems', *Networks and Heterogeneous Media* **4**(2), 1–18.

Georges, D. & Litrico, X. [2002], *Automatique pour la gestion des ressources en eau*, Hermès.

Graf, W. H. & Altinakar, M. [2000], *Hydraulique fluviale - Écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*, Presses polytechniques et universitaires romandes.

Greenberg, J. & Li, T. [1984], 'The effect of boundary damping for the quasi-linear wave equation', *Journal of differential equation* **22**, 66–75.

Grüne, L., Pannek, J., Seehafer, M. & Worthmann, K. [2009], 'Analysis of unconstrained nonlinear MPC schemes with time varying control horizon', *SIAM Journal on Control and Optimization* **48**, 1206–1228.

Gugat, M., Herty, M., Klar, A. & Leugering, G. [2010], 'Optimal control for traffic flow networks', *journal of optimization theory and applications* **126**(3), 589–616.

Halleux, J. D., Prieur, C., Coron, J.-M., D'Andréa-Novel, B. B. & Bastin, G. [2003], 'Boundary feedback control in networks of open channels', *Automatica* **39**, 1365–1376.

Haraux, A. [1988], 'Recent results on semi-linear hyperbolic problems in bounded domains', *Partial Differential Equations* **1324**, 118–126.

Haraux, A. & Zuazua, E. [1987], 'Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems', *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **100**, 191–206.

Hartl, R. F., Sethi, S. P. & Vickson, R. G. [1995], 'A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints', *SIAM Review* **37**(2).

Ito, K. & Kunisch, K. [2002], 'Receding horizon optimal control for infinite dimensional systems', *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **8**, 741–760.

Jacquet, D. [2006], Modélisation macroscopique du traffic et contrôle des lois de conservation non linéaires associées, Technical report, Grenoble INP. Ph.D. Thesis.

Junk, M. & Rheinlainder, M. [2008], 'Regular and multiscale expansions of a lattice boltzmann method', *Progress in Computational Fluid Dynamics* **8**.

Khalil, H. K. [1996], *Nonlinear system*, 2 edn, Prentice Hall.

Kirk, D. E. [1998], *Optimal control theory - An introduction*, Dover Publications.

Krstic, M. [2008], *Boundary Control of PDEs - A Course on Backstepping Designs*, SIAM.

Krstic, M. & Smyshlyaev, A. [2008], 'Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays', *Systems & Control Letters* **57**, 750–758.

Larock, B. E., Jeppson, R. W. & Watters, G. Z. [2000], *Hydraulics of Pipeline Systems*, CRC Press.

Lasiecka, I. & Triggiani, R. [2000], *Control Theory for Partial Diffrential Equations : Continuous and Approximation Theories*, Vol. Volume II Abstract Hyperbolic-like Systems over a Finite Time Horizon, Cambrige University Press.

Li, T.-T. & Rao, B. [2004], 'Exact boundary controllability of unsteady flows in a tree-like network of open canals', *Methods and Applications of Analysis* **11**(3), 353–366.

Li, T. T., Rao, B. & Lin, Y. [2000], 'Semi-global C1 solution and exact boundary controllability for reducible quasilinear hyperbolic systems', *Modélisation mathématique et analyse numérique* **34**(2), 399–408.

Lighthill, M. J. & Whitham, G. B. [1955], 'On kinematic waves II : a theory of traffic flow on long crowded roads', *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* .

Lions, J. L. [1971], *Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag.

Litrico, X. & Fromion, V. [2004], Boundary control of linearized saint-venant equations oscillating modes, *in* 'Proceeding of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control'.

Litrico, X. & Fromion, V. [2006], 'H_∞ control of an irrigation canal poolwith a mixed control politics', *IEEE transactions on Control Systems Technology* **14**(1), 99–111.

Litrico, X. & Fromion, V. [2009*a*], 'Boundary control of hyperbolic conservation laws using a frequency domain approach', *Automatica* **45**, 647–656.

Litrico, X. & Fromion, V. [2009*b*], *Modeling and Control of Hydrosystems - A Frequency Domain Approach*, Springer-Verlag.

Liu, J., na, D. M. P., Christofides, P. D. & Davis, J. F. [2009], 'Lyapunov-based model predictive control of nonlinear systems subject to time-varying measurement delays', *INTERNATIONAL JOURNAL OF ADAPTIVE CONTROL AND SIGNAL PROCESSING* **23**, 788–807.

Luenberger, D. G. [1969], *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley.

Luo, Z., Guo, B. & Morgül, O. [1999], *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*, Springer.

Maciejowski, J. M. [2002], *Predictive Control with constraint*, Prentice Hall.

Mathworks [2010], 'Solve boundary value problems for ordinary differential equations'. http ://www.mathworks.fr/help/techdoc/ref/bvp5c.html.

Mayne, D. Q. & Michalska, H. [1990], 'Receding horizon control of nonlinear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7), 814–824.

Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V. & Scokaert, P. O. M. [2000], 'Constrained model predictive control : Stability and optimality', *Automatica* pp. 789–814.

Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2005], 'Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions', *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 1670–1680.

Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2006], 'Stabilization of nonlinear systems with state and control constraints using lyapunov-based predictive control', *Systems and Control Letters* **55**, 650–659.

Michalska, H. & Mayne, D. Q. [1995], 'Moving horizon observers and observer-based control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(6), 995–1006.

Miyadera, I. [1991], *Nonlinear Semigroup*, Vol. 109 of *Translations of mathematical monographs*, American mathematical society.

Mohammadi, L., Dubljevic, S. & Forbes, J. F. [2010], Robust characteristic-based MPC of a fixed-bed reactor, *in* 'Proceedings of 2010 American Control Conference'.

Oharu, S. & Takahashi, T. [1986], 'On semigroup generated by m-accrerive operators in a strict sense', *Proceedings of the American mathematical society* **96**(1).

Oharu, S. & Takahashi, T. [1987], 'Locally lipschitz continuous perturbations of linear dissipative operators and nonlinear semigroups', *Proceedings of the American mathematical society* **100**(1).

Pazy, A. [1983], *Semigroups of linear operators and Application to Partial Differential Equations*, Vol. 44 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer.

Pham, V., Chopard, B., Lefèvre, L., Ondo, D. A. & Mendes, E. [2010], 'Study of the 1d lattice boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network', *Journal of Computational Physics* **229**, 7373–7400.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2010*a*], Infinite-dimensional receding horizon optimal control for an open-channel system, *in* 'Proceedings of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2010*b*], On the use of a global control lyapunov functional in infinite-dimensional predictive control, *in* 'Proceedings of 4th IFAC Symposium on System, Structure and Control'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2010*c*], Predictive control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws, *in* 'Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*a*], Analyse de stabilité de la commande prédictive d'une classe de lois de conservation, *in* 'Proceedings of Septième Conférence Internationale Francophone d'Automatique'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*b*], 'Predictive control with guaranteed stability for water hammer equations', *IEEE transactions on automatic control* . In preparation.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*c*], Predictive control with terminal constraint for 2×2 hyperbolic systems of conservation laws, *in* 'Proceedings of 51th IEEE Conference on Decision and Control'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*d*], 'Receding horizon boundary control of nonlinear conservation laws with shockavoidance', *Automatica* .

Pham, V. T., Georges, D. & Besançon, G. [2012*e*], 'Commande prédictive avec stabilité pour une classe de systèmes de lois de conservation', *JESA - Numéro spécial sur la commande prédictive* .

Pham, V. T., Georges, D. & Besançon, G. [2012], 'Infinite-dimensional predictive control for hyperbolic systems', revised version submitted to SIAM Journal of Control and Optimisation.

Prieur, C. [2009], 'Control of systems of conservation laws with boundary errors', *Networks and Heterogeneous Media* **4**(2), 393–407.

Prieur, C., Winkin, J. & Bastin, G. [2008], 'Robust boundary control of systems of conservation laws', *Math. Control Signals Syst.* **20**, 173–197.

Primbs, J. A. [1999], Nonlinear optimal control : A receding horizon approach, Technical report, California Institute of Technology. Thesis.

Rauch, J. [1972], 'L_2 is a continuable initial condition for kreiss' mixed problems', *Communications on Pure and Applied Mathematics* pp. 265–285.

Rauch, J. B. & Massey, F. J. I. [1974], 'Differentiability of solution to hyperbolic initial boundary value problems', *Transactions of the American Mathematical Society* **189**, 303–318.

Rauch, J. & Taylor, M. [1974], 'Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains', *Indiana University Mathematics Journal* **24**(1), 79–86.

Richards, P. I. [1956], 'Shock waves on the highway', *Operations Research* **4**(1).

Russell, D. [1978], 'Controllability and stability theory for linear partial differential equations : Recent progress and open question', *SIAM Review* **20**(4), 639–739.

Russell, D. L. [1973], 'Quadratic performance criteria in boundary control of linear symmetric hyperbolic systems', *SIAM Journal of Control* **11**(3), 475–509.

Saint-Venant, B. [1871], 'Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit', *Comptes Rendus de l'Académie des Science de Paris* **73**.

Santos, V. D., Bastin, G., Coron, J.-M. & D'Andréa-Novel, B. [2008], 'Boundary control with integral action for hyperbolic systems of conservation laws : Stability and experiments', *Automatica* **25**(3), 335–348.

Santos, V. D., Maschke, B. & Gorec, Y. L. [2009], 'A Hamintonian perspective to the stabilization of systems of two conservation laws', *Networks and heterogeneous media* **4**(2), 249–266.

Santos, V. D. & Prieur, C. [2008], 'Boundary control of open channels with numerical and experimental validations', *IEEE transactions on Control systems technology* **16**(6), 1252–1264.

Sargent, R. [2000], 'Optimal control', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **124**, 361–371.

Schechter, E. [1983], 'Evolution generated by semilinear dissipative plus compact operators', *Transactions of the American Mathematical Society* **275**, 297–308.

Serre, D. [1996], *Systèmes de lois de conservation I*, Diderot Editeur, Arts et Sciences.

Serre, D. [1999], *Systems of Conservation law 1 : Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambrige University Press.

Shang, H., Forbes, J. F. & Guay, M. [2005], 'Feedback control of hyperbolic distributed parameter systems', *Chemical Engineering Science* **60**, 969–980.

Shang, H., Forbes, J. F. & Guay, M. [2007], 'Computationally efficient model predictive control for convection dominated parabolic systems', *Journal of Process Control* **17**, 379–386.

Skertchly, M. L. & Miles, J. [1996], 'Control of an irrigation canal', *Journal of Hydraulical Engineering* **122**, 403–410.

Szymkiewicz, R. [2010], *Numerical modeling in Open Channel Hydraulics*, Vol. 81 of *Water Science and Technology Library*, Springer.

Tucsnak, M. & Weiss, G. [2006], 'Passive and conservative linear systems'. Disponible à http ://www.ee.imperial.ac.uk/gweiss/personal/.

Vazquez, R., Krstic, M. & Coron, J. [2011], Backstepping boundary stabilization and state estimation of a 2x2 linear hyperbolic system, *in* 'Proceedings of 50th IEEE Conference on Decicion and Control and European Control Conference'.

Wang, Z. [2008], 'Global exact controllability for quasilinear hyperbolic systems of diagonal form with linearly degenerate characteristics', *Nonlinear Analysis* **69**, 510 – 522.

Wylie, E. B. & Streeter, V. L. [1978], *Fluid transients*, McGraw-Hill International Book Co.

Xu, C. & Sallet, G. [2002], 'Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems', *ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variations* **7**, 421–442.

Yong, J. [1992], 'Existence theory of optimal controls for distributed parameter systems', *Kodai Mathematical Journal* **15**, 193–220.

Zuazua, E. [2002], 'Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations', *Discrete and continuous dynamical systems* **8**(2), 469–513.

Zuazua, E. [2004], 'Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1-d wave equation', *Rendiconti di Matematica* **24**(2), 201–237.

Zwart, H., Gorrec, Y. L., Maschke, B. & Villegas, J. [2009], 'Well-posedness and regularity of hyperbolic boundary control systems on a one-dimensional spatial domain', *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **16**(4), 1077– 1093.

English summary

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique-Productique**

Arrêté ministérial : 7 août 2006

Présentée par

Van Thang PHAM

Thèse dirigée par **Didier GEORGES**
et codirigée par **Gildas BESANÇON**

préparée au sein du **laboratoire GIPSA-Lab**
et de **l'école doctorale EEATS**

Contribution to predictive control for systems of conservation laws

Thèse soutenue publiquement le **06 septembre 2012**,
devant le jury composé de :

M. Bernhard MASCHKE
Professeur, Université Claude Bernard, Président

M. Jean-Michel CORON
Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Rapporteur

M. Panagiotis D. CHRISTOFIDES
Professeur, University of California, Rapporteur

M. Denis DOCHAIN
Professeur, Université Catholique de Louvain, Examinateur

M. Didier GEORGES
Professeur, Grenoble INP, Directeur de thèse

M. Gildas BESANÇON
Professeur, Grenoble INP, Co-Directeur de thèse

Résumé

La Commande prédictive ou Commande Optimale à Horizon Glissant (COHG) devient de plus en plus populaire dans de nombreuses applications pratiques en raison de ses avantages importants tels que la stabilisation et la prise en compte des contraintes. Elle a été bien étudiée pour des systèmes en dimension finie même dans le cas non linéaire. Cependant, son extension aux systèmes en dimension infinie n'a pas retenu beaucoup d'attention de la part des chercheurs. Ce travail de thèse apporte des contributions à l'application de cette approche aux systèmes de lois de conservation.

Nous présentons tout d'abord une preuve de stabilité complète de la COHG pour certaines classes de systèmes en dimension infinie. Ce résultat est ensuite utilisé pour les systèmes hyperboliques 2×2 commandés aux frontières et appliqué à un problème de contrôle de canal d'irrigation. Nous proposons aussi l'extension de cette stratégie au cas de réseaux de systèmes hyperboliques 2×2 en cascade avec une application à un ensemble de canaux d'irrigation connectés. Nous étudions également les avantages de la COHG dans le contexte des systèmes non linéaires et semi-linéaires notamment vis-à-vis des chocs. Toutes les analyses théoriques sont validées par simulation afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

Abstract

The predictive control or Receding Horizon Optimal Control (RHOC) is becoming increasingly popular in many practical applications due to its significant advantages such as the stabilization and constraints handling. It has been well studied for finite dimensional systems even in the nonlinear case. However, its extension to infinite dimensional systems has not received much attention from researchers. This thesis proposes contributions on the application of this approach to systems of conservation laws.

We present a complete proof of stability of RHOC for some classes of infinite dimensional systems. This result is then used for 2×2 hyperbolic systems with boundary control, and applied to an irrigation canal. We also propose the extension of this strategy to networks of cascaded 2×2 hyperbolic systems with an application to a set of connected irrigation canals. Furthermore, we study the benefits of RHOC in the context of nonlinear and semi-linear systems in particular with respect to the problem of shocks. All theoretical analyzes are validated by simulation in order to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Table of contents

1 Introduction **1**

1.1 Motivation and principle of RHOC 1

1.2 Systems of conservation laws 4

1.3 State of the art in control problem for systems of conservation laws . . . 7

1.4 Contributions summary 9

1.5 Thesis outline 11

2 Exponential stability of infinite-dimensional RHOC **15**

2.1 Stability lemma 16

2.2 Final cost approach 17

2.3 Zero terminal equality constraint approach 18

2.4 Optimal control characterization by adjoint state 19

2.4.1 Optimal control for the final cost approach 19

2.4.2 Computation of the numerical solution 19

2.4.3 Optimal control for the zero terminal equality constraint approach 20

2.4.4 Computation of the numerical solution 21

2.5 Boundary control problem 21

2.6 Conclusions 22

3 RHOC for linear 2×2 hyperbolic systems **25**

3.1 Regularity of the solution 26

3.2 Reachability of a 2×2 hyperbolic system with two boundary controls . . 28

3.3 Reachability of a 2×2 hyperbolic system with one boundary control . . 29

3.4 RHOC for 2×2 hyperbolic systems 29
3.4.1 Abstract setting 30
3.4.2 RHOC with final cost approach 31
3.4.3 RHOC with zero terminal equality constraint approach 32
3.5 Conclusions 33

4 RHOC for linearized Saint-Venant equations 35
4.1 Introduction to Saint-Venant equations 35
4.2 Linearized model around a uniform equilibrium profile 38
4.2.1 Stabilization 38
4.2.2 Simulation validation 39
4.3 Linearized model around a nonuniform profile 40
4.4 Conclusions 43

5 RHOC for a network of hyperbolic systems 45
5.1 Network of hyperbolic systems 45
5.1.1 Existence of solution 46
5.1.2 Reachability 46
5.2 RHOC for network of hyperbolic systems 47
5.2.1 Abstract setting 47
5.2.2 Stability of RHOC with zero terminal equality constraint 48
5.3 Application to an open-channel network 49
5.4 Simulation results 50
5.5 Conclusions 51

6 RHOC for scalar nonlinear conservation laws 53
6.1 Stability of scalar nonlinear hyperbolic systems with boundary control . . 53
6.1.1 The well-posedness and shock-avoiding conditions 54
6.1.2 Stability 55
6.2 Stability of the RHOC scheme 56
6.2.1 Shock-avoiding conditions in the presence of measurable disturbances 57

6.2.2 Solution of optimal control 57
6.3 Example 58
6.3.1 Freeway traffic model 58
6.3.2 Simulation results 59
6.4 Conclusions 60

7 RHOC for water hammer equations 63
7.1 Water hammer equations 63
7.2 Abstract setting 64
7.3 Stability 67
7.4 Application of RHOC 67
7.4.1 Stability of RHOC 67
7.4.2 Optimal solution by calculus of variations approach 69
7.5 Simulation results 69
7.6 Conclusions 71

8 Conclusions and perspectives 73

A Paper presented in 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010, Atlanta, Georgia, USA 77

B Paper submitted to SIAM Journal on Control and Optimization 81

C Paper published in Automatica 113

D Paper submitted to IEEE Transactions on Automatic Control 117

Bibliography 121

List of Figures

1.1 Principle of RHOC 2

1.2 Two control approaches for infinite-dimensional systems 8

4.1 Longitudinal sights of an open channel 36

4.2 Normalized water depth 39

4.3 Normalized discharge 39

4.4 States and control at the boundaries 40

4.5 Norm of extended state $\|z^e\|^2$ 40

4.6 Water depth and discharge at $x = 0$ 40

4.7 Water depth and discharge at $x = L$ 40

4.8 Normalized water depth (with two boundary controls) 42

4.9 Normalized discharge (with two boundary controls) 42

4.10 States and boundary controls (with two boundary controls) 42

4.11 Norm of extended state $\|z^e\|^2$ (with two boundary controls) 42

4.12 Water depth and discharge at $x = 0$ 42

4.13 Water depth and discharge at $x = L$ 42

4.14 Normalized water depth (with one boundary control) 43

4.15 Normalized discharge (with one boundary control) 43

4.16 States and boundary controls (with one boundary control) 43

4.17 Norm of extended state $\|z^e\|^2$ (with one boundary control) 43

5.1 Pool 1: Normalized water depth 51

5.2 Pool 1: Normalized discharge 51
5.3 Pool 2: Normalized water depth 51
5.4 Pool 2: Normalized discharge 51
5.5 Pool 3: Normalized water depth 52
5.6 Pool 3: Normalized discharge 52
5.7 Boundary states and controls 52
5.8 Norm of extended state $\|z^e\|^2$ 52

6.1 Linear constraints control (solid line) and Nonlinear constraints control (dashed line) 60
6.2 The characteristics with linear (left) and nonlinear (right) constraints . . 60
6.3 Open-loop control (solid line) and no shock-avoiding control (dashed line) 60
6.4 The characteristics with open-loop control (left) and no shock-avoiding control (right) 60
6.5 States at the extremities and control in the presence of an asymptotically constant disturbance 61

7.1 Piezometric head speed in open-loop 70
7.2 Flow speed in open-loop 70
7.3 Piezometric head with RHOC 70
7.4 Flow speed with RHOC 70
7.5 The piezometric head with feedback control 71
7.6 The flow speed with feedback control 71
7.7 The boundary state and the control 71

Notations

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle u, v \rangle$ inner product of u and v
$\mathcal{A}^*$	Adjoint operator of $\mathcal{A}$
$\mathbf{C}^k$	Class of functions whose derivatives of order of to k are continuous
$\mathbf{C}^\infty$	Class of smooth functions
$\mathbf{C}_0^\infty$	Class of smooth functions that vanish at infinity
$\mathbf{C}_{(0)}^\infty(V)$	Restrictions to V of functions in $\mathbf{C}_0^\infty$
$\mathbf{D}(\mathcal{A})$	Domain of $\mathcal{A}$
$\mathbf{L}_2(p, q)$	Class of functions that are square integrable on $[p, q]$
$\mathbf{L}_2([p, q], Z)$	Class of square integrable functions from $[p, q]$ to Z
$\mathbf{H}^1([p, q])$	Space of absolutely continuous functions whose derivative is in $\mathbf{L}_2([p, q])$ (Sobolev space)
$\mathcal{L}(X)$	Space of linear bounded operators from X to X
$\mathcal{L}(X, Y)$	Space of linear bounded operators from X to Y
I	Identity operator

Chapter 1

Introduction

1.1 Motivation and principle of RHOC

Model Predictive Control (MPC) is one of the so-called Internal Model Control (IMC) techniques which use an explicit mathematical model of the process for computing the control. We are particularly interested in the Receding Horizon Optimal Control (RHOC) approach in which the control at each sampling time is computed *on-line* by solving a finite horizon open-loop optimal control using the current state as initial condition. Then, the first part of the solution obtained is applied to the system until the next measurement becomes available. This is the major difference between RHOC and conventional controls that use a pre-computed control law. The reason for which RHOC is employed lies on its ability to treat optimal control problems where an *off-line* computation of the control law is difficult or impossible. Among them, we can mention some typical cases as follows:

1. *The optimal control problem of linear systems in the presence of constraints.* The optimal control for linear systems has been well studied for a long time and has reached a certain maturity (see e.g. [Kirk, 1998]). We can solve off-line the *infinite horizon* optimal control problem, and the control can be implemented in the feedback form. In this case, the RHOC and the Linear Quadratic Gaussian (LQG) control are strongly connected (see [García et al., 1989]). However, real processes always operate under constraints (actuators saturation, safety limits, etc.). The presence of constraints makes the optimal control problem nonlinear and therefore it is not easy to get a general formula of the control in the feedback form. The fact that the optimal control can only be computed for a specified state motivates the use of RHOC.

2. *The optimal control problem of nonlinear systems with or without constraints.* This problem, even in the unconstrained case, leads to Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations that can only be solved for some special classes of systems (see [Primbs, 1999]) or by numerical methods (see [Sargent, 2000]). When constraints are taken into account, the problem becomes more complicated and an analytical solution is difficult to obtain.

3. *The optimal control problem of (linear or nonlinear) infinite-dimensional systems.* Infinite-dimensional systems are described by partial differential equations. Although there exists an explicit formula in feedback form for Linear Quadratic Regulator (LQR) (without constraint) for a class of infinite-dimensional linear systems, the optimal gain requires the solution of a Riccati differential operator equation (in finite horizon case) or a Riccati algebraic operator equation (in infinite horizon case) (see [Curtain & Zwart, 1995] or [Curtain, 1984]). Explicit solutions of these operator equations can only be obtained for special cases (see [Aksikas et al., 2009]), and in general are very difficult to compute. The optimal control problem for infinite-dimensional nonlinear systems accumulates all the previous difficulties and the adoption of a receding horizon strategy becomes a favorable option.

The principle of RHOC can be summarized as follows.

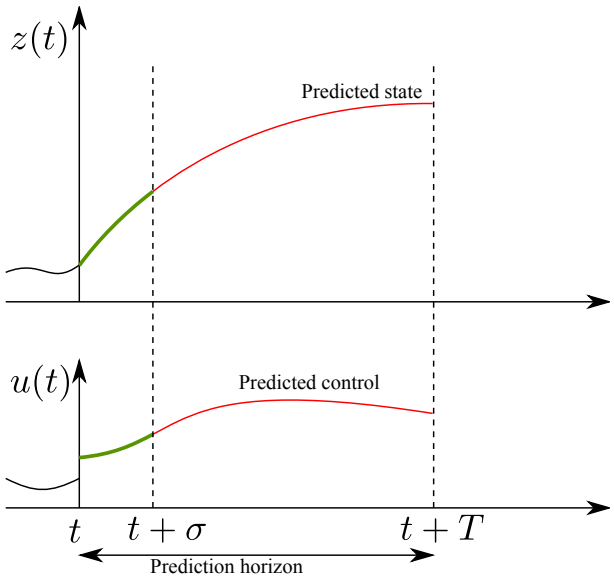

Figure 1.1: Principle of RHOC

Let Z and U be two Hilbert spaces. We consider the stabilization problem of the following system:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)), \quad z(0) = z_0, \tag{1.1.1}$$

where $z(t) \in Z$ and $u(t) \in U$ denote the state and control respectively, $f : Z \times U \to Z$. Suppose that the system evolution takes place under the following constraints on the control and the state for all $t \geq 0$:

$$z(t) \in Z_c, \quad u(t) \in U_c, \tag{1.1.2}$$

where $Z_c \subset Z$ and $U_c \subset U$ are closed and convex.

The principle of RHOC consists of the following steps:

- At each time t, we obtain the current $z(t)$.
- Then, for a given prediction horizon T, we compute the optimal solution $\bar{u} : [t, t+T] \to U$ among all square integrable functions (denoted by $\bar{u} \in \mathbf{L}_2([t, t+T], U)$) of the following problem on the interval $[t, t+T]$:

$$\begin{aligned} &\min_{\bar{u} \in \mathbf{L}_2([t,t+T],U)} J(z(t); \bar{u}) = \int_t^{t+T} F(\bar{z}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau + E(\bar{z}(t+T)) \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\bar{z}}(\tau) = f(\bar{z}(\tau), \bar{u}(\tau)), \forall \tau \in [t, t+T] \\ \bar{z}(\tau) \in Z_c, \quad \bar{u}(\tau) \in U_c, \quad \forall \tau \in [t, t+T] \\ \bar{z}(t) = z(t) \\ \bar{z}(t+T) \in \Omega \end{cases}, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

  where the notation $\bar{\cdot}$ represents the predicted variables. The function $F(z, u)$, called stage cost, specifies the criterion to be optimized. The function $E(z)$ and $\Omega \subset Z_c$ are called final cost and final region respectively.
- The first part of the optimal control is applied to the system during the period $[t, t+\sigma)$ for small σ, and the procedure is repeated at $t = t + \sigma$.

From this formulation, we can deduce the following characteristics of RHOC (see [Findeisen, Imsland, Allgöwer & Foss, 2003], [Mayne & Michalska, 1990]):

- RHOC can use nonlinear models for prediction.
- RHOC allows an explicit consideration of constraints on states and controls.
- The final cost and final region can be chosen to ensure stability.
- RHOC gives us an optimal control with respect to a given criterion.
- Predictive behavior is generally different from that of the closed-loop trajectory.
- To perform the prediction, the system states must be measured or estimated.

Among these features, we are particularly interested in the ability of constraints manipulation and the guaranteed stability. For the stability issue, two approaches can generally be considered: either use an appropriate final cost E and final region Ω (in the following called RHOC with final cost), or impose the final state to zero, which means that $\Omega \equiv 0$ (in the following called RHOC with zero terminal equality constraint). The first approach is more flexible in terms of numerical implementation, but it depends on the existence of the final cost function, which is often a local or global Lyapunov function. The second approach has less complexity in theory, but it requires the reachability of the system to zero (that is the ability of steering the system from any initial state to zero), and it causes more difficulties for the numerical implementation. For more details, it is possible to refer to [Mayne & Michalska, 1990], [Chen & Allgöwer, 1998], [Mayne et al., 2000] or [Findeisen & Allgöwer, 2002]. Besides these two approaches, one can mention the approach without final cost or zero terminal constraint studied in [Grüne et al., 2009] or Lyapunov-based approach proposed by [Mhaskar et al., 2005], [Mhaskar et al., 2006] and [Liu et al., 2009] (see also Chapter 7 of this manuscript) .

With these particular characteristics, we can say that the RHOC is the only advanced control strategy (in the sense of more advanced than the traditional PID control) that has had a significant impact on the industrial control engineering ([Maciejowski, 2002]). It has attracted more attention from researchers and has found its place in many practical applications. Although this strategy has been well studied for finite-dimensional systems, even in the nonlinear case (see [Findeisen, Imsland, Allgöwer & Foss, 2003]), its application to *infinite-dimensional* systems receives less attention, except in a few cases, such as the work of [Ito & Kunisch, 2002], [Dubljevic, El-Farra, Mhaskar & Christofides, 2006], [Christofides & Daoutidis, 1997] and [Georges, 2009]. This manuscript aims to make contributions to the analysis of RHOC for infinite-dimensional systems in general and for systems of conservation laws in particular.

1.2 Systems of conservation laws

Systems of conservation laws are partial differential equations (PDEs) that describe many interesting physical problems in various fields such as gas dynamics (see [Serre, 1999]), road traffic (see e.g. [Bastin et al., 2007], [Colombo et al., 2011] and [Serre, 1999]), air traffic (see [Bayen et al., 2006]), transport-reaction processes (see [Christofides & Daoutidis, 1998] and [Dubljevic et al., 2005*a*]), and open-channel systems (see [Georges, 2009] and [Georges & Litrico, 2002]). For the unidimensional case (in which the longitudinal dimension is much larger than the transverse dimension), these systems are often modeled by one of the three forms:

- Derivative form:

$$\partial_t z(x,t) + \partial_x f(z(x,t)) = g(x,t,z), (x,t) \in \Omega \times [0,\infty), \tag{1.2.1}$$

where $z(x,t) = (z_1(x,t) \quad \cdots \quad z_n(x,t))^T$ is the conserved quantity, $f(z) = (f_1(z) \quad \cdots \quad f_n(z))^T$, the flux, $\Omega \subset \mathbb{R}$, the space domain of the system. Here x and t classically stand for space and time coordinates.

- Integral form: By integrating the above equation on the rectangle $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset \Omega \times [0,\infty)$, we obtain another equivalent form:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} z(x,t)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(z(x,t))dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} g(x,t,z(x,t))dxdt, \tag{1.2.2}$$

These equations represent the balance of the quantity z under the effect of the flux $f(z)$ and the contribution of the source term $g(z)$.

- Hyperbolic form: If the flux f is differentiable, we can rewrite (1.2.1) as follows:

$$\partial_t z(x,t) + J(z(x,t))\partial_x z(x,t) = g(x,t,z) \tag{1.2.3}$$

where J is the Jacobian of f. If J has n real eigenvalues, (1.2.3) is a hyperbolic system and will be referred in the sequel as $n \times n$ hyperbolic system. In the case where J does not depend on z, and g is linear in z, the system is linear. If J does not depend on z, and g is a nonlinear function of z, the system is semi-linear. If J depends on z, the system is quasi-linear (for details, see [Courant & Hilbert, 1962]).

We give below some examples of physical systems governed by conservation laws. The control problem for some of them will be treated later in this work.

- *Burgers' equation* (see [Burgers, 1948]). It represents the conservation of speed z under the effect of the flux $f(z) = \dfrac{z^2}{2}$:

$$\partial_t z + \partial_x \frac{z^2}{2} = 0 \tag{1.2.4}$$

  Despite its simplicity, the Burgers' equation can be used for modeling different physical systems such as gas dynamics or traffic flow.

- *Lighthill-Whitham-Richards (LWR) equation* (see [Lighthill & Whitham, 1955] and [Richards, 1956]). The dynamics of the vehicle density ρ in a highway segment can be modeled by:

$$\partial_t \rho + \partial_x \Phi(\rho) = 0 \tag{1.2.5}$$

  where $\Phi(\rho)$ is the flow of vehicles. This model will be taken as an example in Chapter 6.

- *Saint-Venant equations or shallow-water equations* (see [Saint-Venant, 1871] or [Graf & Altinakar, 2000]). A free-surface flow (as in canals or rivers) is usually described by:

$$\begin{cases} B\partial_t h + \partial_x Q & = & 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\dfrac{Q^2}{Bh} + \dfrac{1}{2} B g h^2 \right) & = & gBh(I - J(Q,h)) \end{cases}, \ (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty) \tag{1.2.6}$$

  where h is the water depth, Q, the flow, g, the gravitational acceleration, B, the width of the flow, I, the slope, and J, the friction term. This system will be studied in Chapters 4 and 5.

- *Water hammer equations* (see [Wylie & Streeter, 1978]). The dynamics of a hydraulic pipeline system is modeled by:

$$\begin{aligned} \partial_t H + \frac{a^2}{g} \partial_x V &= 0, \\ \partial_t V + g \partial_x H &= -\frac{f}{2D} V|V|, \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

  where the H is the piezometric head, V, the flow velocity, $a > 0$, the propagation speed of the pressure wave, g, the gravitational acceleration, f, the Darcy-Weisbach friction coefficient and D, the diameter of the pipe. This system will be considered in Chapter 7.

Let us point out some special features of this class of systems:

- *Boundary control problem.* Physical systems are always contained in a closed domain. Interactions with the external environment are made through boundary conditions. These interactions may be controls or disturbances. From a mathematical point of view, the boundary controls act on the system through an unbounded operator which requires more attention in the analysis of the solution.

- *The presence of discontinuities in the solution.* One of the difficulties of systems of conservation laws is the fact that the solution can admit singularities (also called *shocks*), which arise because of the nonlinearity, discontinuity of the initial condition or incompatibility between initial condition and boundary condition. From a practical point of view, the singularities can lead to undesirable situations, such as congestion in a highway or a tsunami in open-channel flow. From a theoretical point of view, they require much more effort to analyze (see [Colombo et al., 2011], [Serre, 1999] or [Jacquet, 2006]).

- *Stability.* Despite its name *conservation laws*, the presence of the source term and the interaction with the boundary conditions can make the system unstable.

Stability of systems of conservation laws is still an open question, even in linear cases ([Bastin & Coron, 2010]).

- *Interconnection between subsystems.* Physical systems governed by conservation laws are often interconnected in a network, for example the networks of irrigation canals, gas pipeline systems, road or air traffic, etc. The interactions between subsystems create a new challenge for the analysis and the stabilization of the whole system.

These characteristics have motivated several scientific research in various fields from physics or mathematics to automatic control. A brief summary of these works will be presented in the following section.

1.3 State of the art in control problem for systems of conservation laws

Systems of conservation laws belong to the class of infinite-dimensional systems for which the control problem has been studied since 1970s by [Lions, 1971]. Since then, this problem has increasingly attracted attention of researchers ([Russell, 1978], [Russell, 1973]), [Curtain & Zwart, 1995], [Curtain, 1984], [Lasiecka & Triggiani, 2000], [Fattorini, 1999], [Krstic, 2008], [Krstic & Smyshlyaev, 2008], [Christofides & Daoutidis, 1997], [Dubljevic et al., 2005*b*], [Coron et al., 2007], [Coron et al., 2009], [Coron et al., 1999], [Aksikas et al., 2009], [Aksikas et al., 2007*b*], [Aksikas et al., 2007*a*], [Bamieh et al., 2012]). The list is of course far from being exhaustive and it shows that this problem becomes a more and more considered research field.

To synthesize the control for such systems, one can adopt either of two different approaches summarized in Figure 1.2. The first approach, called indirect, begins with an approximation of partial differential equations (PDEs) by ordinary differential equations (ODEs) (also called reduced-order models) to which finite-dimensional control techniques are applied (see Figure 1.2). The advantage of this approach is the availability of control synthesis techniques for ODEs, such as linear quadratic regulator, predictive control or H_∞ approach. In this direction, we can cite, for example, the predictive control approach for a chemical reactor [Mohammadi et al., 2010], the optimal control for open-channel flow [Dulhoste et al., 2004] or the robust control for parabolic equations [Christofides & Daoutidis, 1997]. A drawback of this approach lies on the fact that to recover the infinite-dimensional systems dynamics, it is often necessary to increase the order of the model, which causes much difficulties in the control synthesis. Furthermore, the approximation by ODEs looses sometimes important dynamics or features of PDEs (e.g. singularity). These factors motivate the second approach in which the control synthesis is based

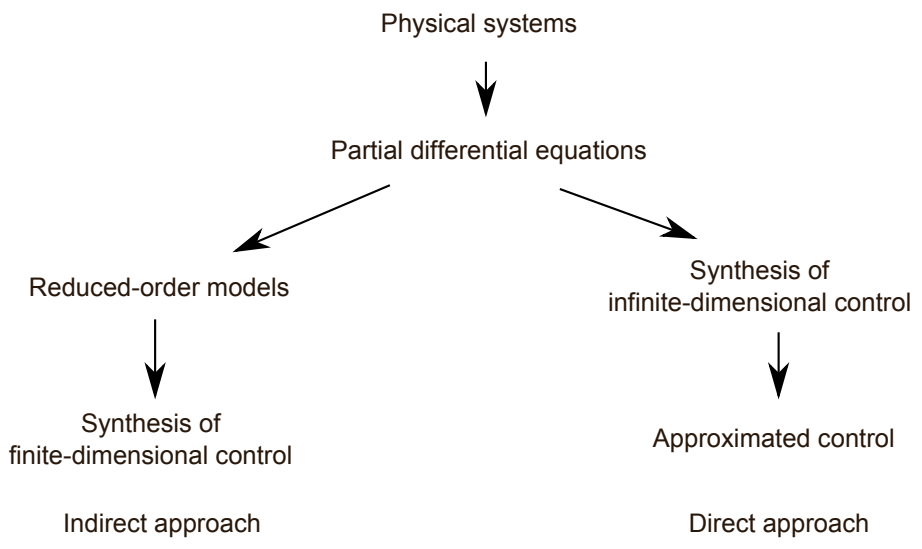

Figure 1.2: Two control approaches for infinite-dimensional systems

directly on PDEs. The control is then numerically approximated for implementation (see Figure 1.2). Several control synthesis techniques for finite-dimensional systems have been generalized to infinite-dimensional systems, such as the linear quadratic optimal control ([Curtain & Zwart, 1995], [Curtain, 1984], [Russell, 1973] and [Aksikas et al., 2009]), the robust control ([Curtain & Zwart, 1995] and [Foias et al., 1996]), the control Lyapunov function approach ([Coron et al., 2007], [Coron et al., 1999] and [Coron et al., 2008]), the frequency analysis ([Litrico & Fromion, 2004] and [Litrico & Fromion, 2009*a*]), or the predictive control ([Ito & Kunisch, 2002], [Dubljevic et al., 2005*b*] and [Georges, 2009]). This second approach also allows us to have a deeper insight on the intrinsic characteristics of these systems. This is the direction that we have chosen for the research in this thesis.

The direct approach has been applied to systems of conservation laws in several works. One can firstly mention the studies on the solution of hyperbolic systems in [Rauch, 1972], [Rauch & Massey, 1974], [Russell, 1978], [Serre, 1996], [Li et al., 2000] and [Lasiecka & Triggiani, 2000], which are the mathematical basis for the control problem. Stability analysis of these systems was studied by the method of characteristics in [Greenberg & Li, 1984], [Rauch & Taylor, 1974], [Prieur, 2009], [Halleux et al., 2003] and [Prieur et al., 2008] or by dissipativity in [Coron et al., 2008] and [Coron et al., 2009]. The control Lyapunov function approach was proposed in [Coron et al., 2007], [Coron et al., 2009], [Coron et al., 1999], [Xu & Sallet, 2002] and [Dick et al., 2010], and implemented in [Santos & Prieur, 2008]. The optimal control approach was considered in [Russell, 1973], [Jacquet, 2006], [Gugat et al., 2010] and [Bayen et al., 2006]. The study of these systems in the frequency domain was presented in [Georges & Litrico, 2002] and [Litrico & Fromion, 2009*b*]. The control problem for different types of networks of conservation

laws has been studied, for example, for irrigation canals ([Georges & Litrico, 2002] or [Litrico & Fromion, 2009*b*]), for gas pipeline system ([Dick et al., 2010] or [Prieur, 2009]), for highway traffic ([Gugat et al., 2010]) or for air traffic ([Bayen et al., 2006]).

Using a receding horizon strategy for infinite-dimensional systems in general and for systems of conservation laws in particular, seems to offer great potentials, because of the ability to take into account constraints and to ensure closed-loop stability as mentioned above. However, to the best of our knowledge, there are only few example in the literature examining this issue. Among them, we can cite the study of RHOC for infinite-dimensional systems by [Ito & Kunisch, 2002]. However this work only considered the case of distributed control. In [Dubljevic, N. H. El-Farra & Christofides, 2006] and [Christofides & Daoutidis, 1997], the authors proposed the RHOC for parabolic equations based on a finite-dimensional model obtained by spectral decomposition. The RHOC for the boundary control problem of nonlinear Saint-Venant equations was also discussed in [Georges, 2009] and [Chen & Georges, 1999], and solved by calculus of variations approach. A numerical solution of this control was proposed and validated in simulation, but no proof of stability was provided. The idea of using the RHOC for highway traffic was proposed in [Jacquet, 2006], but the proof of stability also lacking. That is the reason why we would like through this work to make some contributions on this subject.

1.4 Contributions summary

The objective of this work is to exploit the advantages of RHOC in the context of control problem of infinite-dimensional systems in general and of systems of conservation laws in particular.

Firstly, our work makes contributions to the stability problem of the *infinite-dimensional* RHOC strategy. Both finite-dimensional RHOC approaches mentioned above are generalized and applied to a class of infinite-dimensional systems with a complete proof of stability.

Secondly, we apply the RHOC to linear 2×2 hyperbolic systems. In particular, we show that the RHOC can stabilize a system whose coefficients are not constant in space. To our knowledge, this result and that of [Vazquez et al., 2011] are the first controls having this ability. We also generalize the RHOC for a network of cascaded hyperbolic systems. All these theoretical analyses are applied to an open-channel system and validated by simulation.

As mentioned previously, one of the advantages of RHOC is the ability to take into account constraints and one of the challenges of systems of conservation laws is the presence of discontinuities (shocks) in the solution. In this work, we show how the

RHOC can be applied to scalar nonlinear systems of conservation laws in order to, at the same time, avoid the shock and obtain the stability.

Finally, we make a contribution to the stability analysis of pipeline systems, and the application of RHOC to these systems.

The scientific contributions of this thesis can then be summarized as:

1. A complete stability proof of RHOC for a class of infinite-dimensional linear systems.
2. The stability of RHOC for linear 2×2 hyperbolic systems with boundary controls.
3. The application of RHOC with proof of stability to open-channel flows.
4. The extension of RHOC to a network of 2×2 hyperbolic systems and application to a network of open-channel flows.
5. The shock avoiding conditions for scalar nonlinear systems of conservation laws and the use of RHOC to stabilize them and to avoid shocks.
6. The sufficient stability conditions for pipeline systems and the application of RHOC to stabilize them and to manipulate constraints.
7. The application of different numerical methods to solve the optimal control problem.

This thesis has led to the following publications:

1. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2010], Infinite-dimensional Receding Horizon Optimal Control for an Open-channel System, *in* 'Proceedings of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems', Bologna, Italie.
2. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2010], On the Use of a Global Control Lyapunov Functional in Infinite-dimensional Predictive Control, *in* 'Proceedings of 4th IFAC Symposium on System, Structure and Control', Ancona, Italie.
3. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2010], Predictive Control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws, *in* 'Proceeding of 49th IEEE Conference on Decision and Control', Atlanta, Georgia USA
4. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2011], Receding Optimal Boundary Control of Non-linear Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *in* 'Proceeding of 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control', Milano, Italy

5. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2012], 'Receding Horizon Boundary Control of Nonlinear Conservation Laws with Shock Avoidance', Accepted for publication in *Automatica*

6. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2012], Analyse de stabilité de la commande prédictive d'une classe de lois de conservation, Accepted to 'Septième Conférence Internationale Francophone d'Automatique', Grenoble, France.

7. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2012], Commande prédictive avec stabilité pour une classe de systèmes de lois de conservation, Accepted to *JESA - Numéro spécial sur la commande prédictive*

And the following submitted/in preparation papers:

1. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2012], 'Infinite-dimensional predictive control for hyperbolic systems', Revised version submitted to *SIAM Journal of Control and Optimisation*

2. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2012], Predictive Control with terminal constraint for 2×2 hyperbolic systems of conservation laws, Submitted to '51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)', Maui, Hawaii

3. Pham Van Thang, Didier Georges and Gildas Besançon [2012], 'Predictive control with guaranteed stability for water hammer equations', In preparation for *IEEE transactions on automatic control.*

1.5 Thesis outline

The contributions above will be briefly presented in six chapters (from Chapter 2 to Chapter 7). More details about the proofs and calculations can be found in the French version, or in the indicated publications.

In Chapter 2, we study the stability of RHOC for linear systems described in abstract form. Firstly, we propose a generalization of Lemma 5.1 of [Curtain & Zwart, 1995] to obtain a sufficient condition for infinite-dimensional RHOC. With this lemma, the stability of RHOC for some classes of systems, either by final cost approach or by zero terminal equality constraint approach can be obtained. In both cases, we use the calculus of variations to characterize the optimal solution in function of the adjoint state, which is the basis of numerical methods used later for simulation.

Next, we discuss in Chapter 3 the RHOC for 2×2 hyperbolic systems with boundary controls. First of all, we study the regularity of the solution and present the proof of

the reachability of the system with one or two boundary controls. The boundary control problem is then reformulated in abstract form and the theories presented in Chapter 2 are applied to obtain an exponential stability.

Chapter 4 discusses the application of RHOC to linearized Saint-Venant equations. We consider two cases: the linearized model around a uniform equilibrium profile (for which the water depth and the flow are constant along the channel) and the linearized model around a non uniform equilibrium profile (for which the water depth and the flow vary with respect to the space variable). For the first case, by using the Lyapunov function proposed by [Coron et al., 2009], the RHOC with final cost can be used to stabilize the system. Whereas for the second one, by combining the results of the reachability and the stability of the RHOC with a zero terminal equality constraint, we obtain the stability proof of the closed-loop system. Those analyses are validated by simulation.

Chapter 5 presents the generalization of RHOC to a network of cascaded 2×2 hyperbolic systems and the application of this approach to a network of open-channel flows. The chapter has the same structure as that of Chapter 4. We firstly show the reachability of this system, then the boundary control problem is put in abstract form, and the RHOC with zero terminal equality constraint is applied to ensure the stability. Finally, simulation results are provided to illustrate the validity of the proposed approach.

In Chapter 6 we use the ability to manipulate constraints of RHOC to avoid shock in the solution of scalar nonlinear systems of conservation laws with boundary control. We show that in order to avoid the shock, a set of constraints on the control and on the value at the boundary must be satisfied. Then, a proof of the exponential stability of the system is established provided that there is no shock and that the state at the boundary is exponentially stable. These conditions can be achieved by RHOC approach. A simulation is finally carried out with the freeway traffic model to demonstrate the effectiveness of the here-proposed control.

Chapter 7 addresses the stabilization problem of water hammer equations. Sufficient conditions to guarantee an asymptotic stability are firstly introduced and then integrated in the RHOC scheme. For the implementation, the calculus of variations is employed to characterize the optimal solution in function of the adjoint state. This approach is finally validated in simulation.

Finally, Chapter 8 presents some conclusions and perspectives issued from the results of this thesis.

Chapter 2

Exponential stability of infinite-dimensional RHOC

In this chapter, we study the stability of the RHOC for a class of infinite-dimensional systems. We also propose algorithms to compute the numerical solution of the optimization problem. The results presented in this chapter thus provide the theoretical basis for the studies proposed in Chapters 3, 4 and 5.

Let us consider a system in abstract form:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad z(0) = z_0, \quad y(t) = \mathcal{C}z(t), \tag{2.0.1}$$

where Z and U are two Hilbert spaces, $\mathcal{A}$ with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ is the infinitesimal generator of a C_0-semi-group $\Phi(t)$ on Z, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(Z)$. The variables z, u and y are the state, the control and the output respectively.

Let us recall that the solution of (2.0.1) is given by (see [Curtain & Zwart, 1995]):

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-s)\mathcal{B}u(s)ds \tag{2.0.2}$$

In section 2.1, we firstly propose a technical result (a generalization of Lemma 5.1 of [Curtain & Zwart, 1995]), which will give us a sufficient condition for a closed-loop stability of the RHOC. We show next in sections 2.2 and 2.3 that the two approaches of the RHOC can be applied to system (2.0.1) to guarantee exponential stability. If the system has a global Lyapunov function, it can be used as final cost function. If the system is reachable to the origin, the approach with zero terminal equality constraint can be applied. In section 2.4, we use the calculus of variations (see [Lasiecka & Triggiani, 2000], [Georges, 2009], [Bayen et al., 2006] or [Gugat et al., 2010]) to express the optimal control in function of the adjoint state. Iterative algorithms are proposed to solve the problems numerically. We finally give a brief summary of the procedure proposed by [Curtain & Zwart, 1995] to reformulate boundary control systems in abstract form, which allows us to use the results presented here for different specific systems in the next chapters.

2.1 Stability lemma

In [Curtain & Zwart, 1995], the authors established the following important criterion for exponential stability of C_0-semigroup:

Lemma 2.1.1. *The C_0-semigroup $\Phi(t)$ on Z is exponentially stable if and only if for every $z \in Z$ there exists a positive constant $\gamma_z < \infty$ such that*

$$\int_0^\infty \|\Phi(t)z\|^2 dt \leq \gamma_z. \tag{2.1.1}$$

We propose in this section a generalization of the above lemma which gives us a sufficient condition for stability of systems controlled by RHOC.

Consider a positive constant σ and an evolution operator $U : \Delta(\sigma) \to \mathcal{L}(Z)$, where $\Delta(\sigma) = \{(t,s); 0 \leq s \leq t \leq \sigma\}$. We recall that an evolution operator has the following properties (see [Curtain & Zwart, 1995], p. 117):

i. $U(s,s) = I$, $s \in [0,\sigma]$.

ii. $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq \sigma$.

iii. $U(\cdot,s)$ is strongly continuous on $[s,\sigma]$ and $U(t,\cdot)$ is strongly continuous on $[0,t]$.

Suppose that $\|U(t,s)\| \leq M_U$, $(t,s) \in \Delta(\sigma)$ with $M_U > 1$. Define the operator $H : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(Z)$ as:

$$H(t)z = U\left(\{t/\sigma\}\sigma, 0\right) U^{[t/\sigma]}(\sigma,0)z, \quad z \in Z, \tag{2.1.2}$$

where $[x]$ denote the integer satisfying $[x] \leq x < [x]+1$ and $\{x\} = x - [x]$. We have the following lemma:

Lemma 2.1.2. *If for every $z \in Z$ there exists a positive constant $\gamma_z < \infty$ such that:*

$$\int_0^\infty \|H(s)z\|^2 ds \leq \gamma_z, \tag{2.1.3}$$

then $H(t)$ is exponentially stable, which means that $\|H(t)\| \leq M_0 e^{-\omega_0 t}$, for some positive constants M_0 and ω_0.

For the proof, see Lemma 2.1 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B). In the following, we will use this lemma to prove the stability of the RHOC with two different approaches: a final cost approach and a zero terminal constraint approach.

2.2 Final cost approach

In this section, we will apply the RHOC to system (2.0.1) with the following optimization problem:

$$\begin{aligned} &\min_{\bar{u}\in\mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z(t);\bar{u}) = \int_t^{t+T} F(\bar{z}(\tau),\bar{u}(\tau))d\tau + E(\bar{z}(t+T)) \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\bar{z}}(\tau) &= \mathcal{A}\bar{z}(\tau) + \mathcal{B}\bar{u}(\tau), \forall\tau\in[t,t+T],\ \bar{z}(t) = z(t) \\ \bar{y}(\tau) &= \mathcal{C}\bar{z}(\tau), \forall\tau\in[t,t+T] \end{cases}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

where the cost functions F and E have quadratic form:

$$F(z,u) = \langle y, \mathcal{Q}y\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle, \quad E(z) = \langle z, \mathcal{M}z\rangle, \tag{2.2.2}$$

with $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ coercive (which means that $\mathcal{R} \geq \epsilon I$ for some $\epsilon > 0$), $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \geq 0$ and $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \geq 0$. We can prove the following theorem:

Theorem 2.2.1. *If E and F are chosen such that for all initial conditions z_0, there exists a control $u_K(\tau)$ satisfying:*

$$\dot{E}(z(\tau)) + F(z(\tau), u_K(\tau)) \leq 0, \tag{2.2.3}$$

along the trajectory of (2.0.1) and $F(z,u) \geq \epsilon\|z\|^2$ for a certain $\epsilon > 0$, then the RHOC guarantees exponential stability of the closed-loop system. The function E is called a global Lyapunov functional.

The proof is decomposed into three parts. Firstly, we establish the existence of the optimal solution at each sampling time. We then show that the trajectory of the closed-loop can be put in the form $z(t) = H(t)z_0$, where the operator $H(t)$ has the form (2.1.2). Finally, by an argument similar to that of RHOC in finite dimension, we prove that $H(t)$ satisfies Lemma 2.1.2, hence the closed-loop system is exponentially stable. The proof was partly shown in [Pham, Georges & Besançon, 2010*c*] (Appendix A). For a fully detailed one, see Theorem 2.2.1 of the French version of the thesis.

2.3 Zero terminal equality constraint approach

In this section, we consider the second approach of the RHOC, with the following optimization problem:

$$\min_{\bar{u}\in\mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z(t);\bar{u}) = \int_t^{t+T} F(\bar{z},\bar{u})d\tau$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\bar{z}}(\tau) = \mathcal{A}\bar{z}(\tau) + \mathcal{B}\bar{u}(\tau), \forall\tau \in [t, t+T] \\ \bar{y}(t) = \mathcal{C}\bar{z}(t) \\ \bar{z}(t) = z(t) \\ \bar{z}(t+T) = 0 \end{cases}, \tag{2.3.1}$$

where the cost functions F also takes a quadratic form:

$$F(z,u) = \langle y, \mathcal{Q}y\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle \tag{2.3.2}$$

with $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ coercive and $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \geq 0$. We can prove the following result:

Theorem 2.3.1. *Consider system (2.0.1) with the cost function defined as:*

$$J(z(t);\bar{u}) = \int_t^{t+T} \langle \bar{y}, \mathcal{Q}\bar{y}\rangle + \langle \bar{u}, \mathcal{R}\bar{u}\rangle ds, \tag{2.3.3}$$

where $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(Z)$ is self-adjoint nonnegative and $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(U)$ is self-adjoint coercive. Given S a linear sub-space of Z with continuous injection, suppose that the following assumptions hold:

i) System (2.0.1) is exactly reachable to S on $[0,T]$.

ii) S is $\Phi(t)$-invariant (which means that $\Phi(t)S \subset S$ for all $t \geq 0$).

iii) $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ is coercive.

Then the RHOC guarantees exponential stability of the closed-loop system with the domain of attraction being S.

For the proof, see Theorem 2.2 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B). The existence of the optimal control at each sampling time is firstly proven on the basis of the result of [Curtain, 1984]. The trajectory of the closed-loop is then shown to satisfy Lemma 2.1.2, hence the exponential stability is guaranteed.

2.4 Optimal control characterization by adjoint state

Although the optimal controls obtained previously can be expressed explicitly in the feedback form (see [Curtain & Zwart, 1995], [Curtain, 1984] or [Pham, Georges & Besançon, 2010*c*], [Pham, Georges & Besançon, 2012]), they require the solutions of operator Riccati equations, which are not easy to solve. The purpose of this section is thus to propose a practical method for an actual computation of such an optimal control. The idea is to rely on the calculus of variations to characterize the optimal control in function of the adjoint state.

2.4.1 Optimal control for the final cost approach

Recall the optimization problem to be solved at each sampling time as follows:

$$\begin{aligned} \min_{u\in\mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0;u) &= \int_0^T \langle y(\tau),\mathcal{Q}y(\tau)\rangle + \langle u(\tau),\mathcal{R}u(\tau)\rangle d\tau + \langle z(T),\mathcal{M}z(T)\rangle \\ \text{s.t.} \begin{cases} \dot{z}(\tau) &= \mathcal{A}z(\tau)+\mathcal{B}u(\tau), \forall\tau\in[0,T],\ z(0)=z_0 \\ y(\tau) &= \mathcal{C}z(\tau), \forall\tau\in[0,T] \end{cases} & , \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

We have the following result:

Theorem 2.4.1. *Let u_{min}, z_{min} the optimal control and the corresponding trajectory of problem (2.4.1). There exists an adjoint state p_{min} which is the solution of:*

$$\dot{p}_{min}(\tau) = -\mathcal{A}^* p_{min}(\tau) - \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(\tau),\ \tau\in[0,T], \quad p_{min}(T) = \mathcal{M}z_{min}(T) \tag{2.4.2}$$

such that the optimal control can be expressed as:

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_{min}(\tau), \quad \tau\in[0,T] \tag{2.4.3}$$

The proof, inspired from [Lasiecka & Triggiani, 2000], is very similar to that presented in section 2.4 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

2.4.2 Computation of the numerical solution

We use the above result to compute the numerical solution of problem (2.4.1) by the steepest descend method. The algorithm is described below:

1. Choose an initial estimation of the solution $u^{(0)}$.

2. Solve the following problem in $[0, T]$:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t), \quad z(0) = z_0, \quad z(t) \in \mathbf{D}(\mathcal{A}). \tag{2.4.4}$$

3. Use the final condition at $t = T$ as initial condition for adjoint state p and solve the following problem from $t = T$ to $t = 0$:

$$\dot{p}(t) = -\mathcal{A}^* p(t) - \mathcal{C}^* \mathcal{Q}\mathcal{C} z(t), \quad p(T) = \mathcal{M} z(T), \quad p(t) \in \mathbf{D}(\mathcal{A}^*). \tag{2.4.5}$$

4. Update the estimation by the steepest descend method:

$$u^{k+1} = u^{(k)} - \kappa(u^{(k)} + \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p) \tag{2.4.6}$$

with the step $\kappa > 0$ which must be tuned to satisfy a trade-off between convergence speed and numerical stability.

5. Repeat step 2 while the norm of the gradient

$$L_u = 2\int_0^T (\mathcal{R}u(t) + \mathcal{B}^* p(t))\, dt \tag{2.4.7}$$

is larger than a given tolerance.

2.4.3 Optimal control for the zero terminal equality constraint approach

Consider now the following optimization problem:

$$\min_{u \in \mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0; u) = \int_0^T \langle y(\tau), \mathcal{Q}y(\tau)\rangle + \langle u(\tau), \mathcal{R}u(\tau)\rangle d\tau$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{z}(\tau) = \mathcal{A}z(\tau) + \mathcal{B}u(\tau), \forall \tau \in [0, T] \\ y(\tau) = \mathcal{C}z(\tau) \\ z(0) = z_0 \\ z(T) = 0 \end{cases}, \tag{2.4.8}$$

We can also characterize the optimal control in function of the adjoint state as follows:

Theorem 2.4.2. *Let u_{min}, z_{min} the optimal control and the corresponding trajectory of problem (2.4.1). There exists adjoints state p_{min} and Ψ_{min} satisfying:*

$$\dot{p}_{min}(\tau) = -\mathcal{A}^* p_{min}(\tau) - \mathcal{C}^* \mathcal{Q}\mathcal{C} z_{min}(\tau),\ \tau \in [0, T], \quad p_{min}(T) = \frac{1}{2}\Psi_{min} \tag{2.4.9}$$

and the optimal control can be expressed as:

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_{min}(\tau), \quad \tau \in [0, T] \tag{2.4.10}$$

For the proof, it is possible to refer to section 2.4 [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

2.4.4 Computation of the numerical solution

By combining the equations of the state and that of the adjoint state, we obtain:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{min}(t) \\ \dot{p}_{min}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* \\ -\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} & -\mathcal{A}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.4.11}$$

with the constraints $z_{min}(0) = z(0)$, $z_{min}(T) = 0$ and

$$\begin{pmatrix} z_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}^*), t \in [0, T].$$

In this form, an approximation method can be used to numerically solve for the partial differential equation in both state and adjoint state to finally get the optimal control. The procedure will be applied later in Chapter 4.

2.5 Boundary control problem

In practice, it often happens that the control does not apply on the whole domain of the system but only at the boundary. These are *boundary control* problems. In this case, the control operator $\mathcal{B}$ is not bounded. To use the analysis presented above for this type of problem, we must transform the system into abstract form (2.0.1). In this section we summarize the theory of ([Curtain & Zwart, 1995]) to that end, that will be used later in Chapters 3, 4 and 5. Consider the following system:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathfrak{A}z(t), \quad z(0) = z_0, \\ \mathfrak{B}z(t) &= u(t), \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

where $\mathfrak{A} : \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \subset Z \mapsto Z$, $u(t) \in U$. Z and U are two Hilbert spaces. Boundary operator $\mathfrak{B} : \mathbf{D}(\mathfrak{B}) \subset Z \mapsto U$ satisfies $\mathbf{D}(\mathfrak{A}) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{B})$.

To reformulate equation (2.5.1) into form (2.0.1), we must impose some additional conditions on the system.

Definition 2.5.1. *System (2.5.1) is a boundary control system if:*

a. Operator $\mathcal{A} : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \mapsto Z$ with $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \cap \ker \mathfrak{B}$ and

$$\mathcal{A}z = \mathfrak{A}z \quad \textit{for } z \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \tag{2.5.2}$$

is the infinitesimal generator of a C_0-semigroup in Z.

b. There exists $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$ such that for all $u \in U$, $\mathcal{B}u \in \mathbf{D}(\mathfrak{A})$, operator $\mathfrak{A}\mathcal{B}$ is in $\mathcal{L}(U, Z)$ and

$$\mathfrak{B}\mathcal{B}u = u, \quad u \in U \tag{2.5.3}$$

By introducing a new variable:

$$v(t) = z(t) - \mathcal{B}u(t), \quad \text{and} \quad \tilde{u}(t) = \dot{u}(t) \tag{2.5.4}$$

we obtain:

$$\dot{v}(t) = \mathcal{A}v(t) - \mathcal{B}\tilde{u}(t) + \mathfrak{A}\mathcal{B}u(t), \quad v(0) = z_0 - \mathcal{B}u(0) \tag{2.5.5}$$

Consider the extended state space as $Z^e := U \oplus Z$ and a new state variable as $z^e(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, we obtain finally:

$$\dot{z}^e(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{A}\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} z^e(t) + \begin{pmatrix} I \\ -\mathcal{B} \end{pmatrix} \tilde{u}(t), \tag{2.5.6}$$

$$z^e(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{2.5.7}$$

which has abstract form (2.0.1).

2.6 Conclusions

This chapter contains the theoretical analyses of RHOC for infinite-dimensional linear systems described in abstract form. A complete stability proof of this approach is presented for some class of systems. For the numerical implementation, the optimal control is expressed with the adjoint state, and some iterative algorithms are proposed to compute an approximate solution of the problem.

Two approaches of RHOC were studied: with a final cost and with a zero terminal equality constraint. The first one is more flexible in terms of numerical implementation but its stability proof depends on the existence of a Lyapunov function used as final cost. The second one instead leaves more freedom to choose the cost function, but it raises more difficulties for numerical computation. The choice between these two approaches depends on the considered problem. In Chapters 4 and 5, we show that both approaches can be used to stabilize linear 2×2 hyperbolic systems.

Note that Lemma 2.1.2 is quite general and can be applied to other problems, even nonlinear. Firstly, the sampling period σ can be variable (but bounded) and the stability

proof is still valid. Moreover, the evolution operator $U(\cdot,\cdot)$ in the definition (2.1.2) can be replaced by a uniformly bounded family of evolution operators $\{U_n(\cdot,\cdot)\}$ (i.e. $\|U_n(\cdot,\cdot)\| \leq M_U$, $\forall n$). Finally, by considering a system that has a function E satisfying (2.2.3) locally in the set Ω (see [Ito & Kunisch, 2002]) and assuming that the optimization problem (2.2.1) with a terminal constraint $\bar{z}(t+T) \in \Omega$ generates a trajectory that can be put into the form (2.1.2), then the RHOC also guarantees the stability of the closed loop. The difficulty is to put the optimal trajectory in form (2.1.2). This issue will be studied in our future work.

We would like finally remind that although the two approaches presented in this chapter guarantee a global asymptotic stability, thanks to the existence of a global Lyapunov function (for the approach with a final cost) and the exact reachability (for the approach with a zero terminal equality constraint), these results may be limited in reality. For example, when constraints are taken into account, we obtain in general only local stability because it is necessary to determine the domain of attraction which corresponds to the set of initial states that guarantee the feasibility of the optimization problems. In addition, the RHOC is often implemented as piecewise constant functions (the control is maintained constant between two sampling instants) that does not lead to an asymptotic stability but to the so-called practical stability (see [Christofides et al., 2011] for more details on this issue).

Chapter 3

RHOC for linear 2×2 hyperbolic systems

Here we consider the following problem:

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \lambda_1(x)\partial_x y_1 + \gamma_1(x) y_1 + \delta_1(x) y_2 \\ \partial_t y_2 = \lambda_2(x)\partial_x y_2 + \gamma_2(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 \end{cases}, (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty), \tag{3.0.1}$$

where λ_i, γ_i and δ_i $(i = 1, 2)$ are in $\mathbf{C}^1([0, L])$ and $\lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x)$, $\forall x \in [0, L]$. The initial and boundary conditions are:

$$\begin{cases} y_1(x,0) = y_{10}(x) \\ y_2(x,0) = y_{20}(x) \end{cases} \text{and} \begin{cases} y_1(L,t) = g_1(t) + \alpha y_2(L,t) \\ y_2(0,t) = g_2(t) + \beta y_1(0,t) \end{cases}. \tag{3.0.2}$$

where α, β are two constants and $g_1(t)$, $g_2(t)$ are control inputs.

The results obtained in this chapter will be applied to the Saint-Venant equations (Chapters 4 and 5). Section 3.1 is devoted to the proof of the regularity of the solution of system (3.0.1). By using the results of [Rauch & Massey, 1974] and [Rauch, 1972], we show that if the initial condition and boundary conditions are regular and compatible, the solution remains regular. We establish the reachability of the system with two boundary controls in section 3.2, and of the system with one boundary control in section 3.3. These results are used to prove the stability of the RHOC in section 3.4. To this end, we firstly follow the procedures described in section 2.5 to put the system (3.0.1)-(3.0.2) in abstract form, then apply the results of sections 2.2 and 2.3 to obtain the stability proof of the RHOC. The approach with final cost will be considered in section 3.4.2 to stabilize a particular case of (3.0.1) where the coefficients are constant. In this case, the final cost was inspired from the Lyapunov function proposed by [Coron et al., 2009]. The approach with zero terminal equality constraint will be discussed in section 3.4.3.

Thanks to the reachability result obtained in sections 3.2 and 3.3, we will show that this approach can guarantee the stability of general case of (3.0.1) where the coefficients are not constant. To our knowledge, the here-proposed approach and that of the very recent reference [Vazquez et al., 2011] are the first control strategies that achieve this stability.

3.1 Regularity of the solution

We firstly consider a more general operator having the form:

$$\mathcal{L}z = \partial_t z - A(x,t)\partial_x z - B(x,t)z, \tag{3.1.1}$$

in $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}$, with its boundaries $\partial\Omega_- = \{x = 0\}$, $\partial\Omega_+ = \{x = L\}$., where A and B are smooth matrices of dimension $n \times n$, and:

$$\begin{gathered} A = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix}, \quad A^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad A^- = \mathrm{diag}(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}), \\ \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} > \cdots > \lambda_{p+q},\ x \in [0, L]. \end{gathered} \tag{3.1.2}$$

The boundary conditions are imposed with the aid of boundary operators M_+ and M_- (see (3.1.6). M_+ (resp. M_-) is $p \times n$ (resp. $q \times n$) matrix and $\mathrm{rank}(M_+) = p$ (resp. $\mathrm{rank}(M_-) = q$).

For some m and $V \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{C}^\infty_{(0)}(V)$ denotes the space of functions on V which are the restrictions to V of function in $\mathbf{C}^\infty_0(\mathbb{R}^m)$, and $\mathbf{C}^\infty_0(\mathbb{R}^m)$ denotes the space of smooth functions vanishing at infinity. $\mathbf{L}_2(V)$ is the space of functions $\Psi = (\Psi_1 \quad \cdots \quad \Psi_n)^T$ which are square integrable. The norm in $\mathbf{L}_2(V)$ is denoted by $\|\Psi\|_V$.

We will establish the regularity of the solution of a system defined by these operators with a preliminary result given below:

Lemma 3.1.1. *There exist constants C_0 and c such that for all $z \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R} \times \Omega)$, we have the inequality:*

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_\Omega + \frac{c}{2}\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \leq\ & C_0 e^{2c(t-s)} \left(\|z(s)\|^2_\Omega + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|M_+ z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \right), \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

with $-\infty < s < t < \infty$.

The proof is based on the following result of [Rauch, 1972]:

Main estimate: *There exist C and c such that for all $z \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R} \times \Omega_-)$:*

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_{\Omega_-,c} + c\|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} \\ & \leq C \left(\|z(s)\|_{\Omega,c} + \frac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \right) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

with $\Omega_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ *and the norm* $\|\cdot\|_{I\times V,c}$ *is defined by:*

$$\|\psi\|^2_{I\times V,c} = \int_I \|\psi\|^2_V e^{-2ct} dt \tag{3.1.5}$$

where I *is an interval of* $\mathbb{R}$ *(or can be degenerated to a point).*

For a detail proof, it is possible to refer to Appendix A [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

Consider now the following problem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}z &= F && \text{in } [0,T]\times\Omega, \\ M_+ z &= g_+ && \text{in } [0,T]\times\partial\Omega_+, \\ M_- z &= g_- && \text{in } [0,T]\times\partial\Omega_-, \\ z(0) &= f, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

with $F \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\Omega)$, $f \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $g_+ \in \mathbf{L}_2([0,T]) \times \partial\Omega_+)$ and $g_- \in \mathbf{L}_2([0,T]) \times \partial\Omega_-)$.

Recall that a strong solution of (3.1.6) is a function $z \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\Omega)$ such that there exists $z^n \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}([0,T]\times\Omega)$ and $z_0 \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\partial\Omega_-)$, $z_1 \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\partial\Omega_+)$ with

$$\begin{aligned} &\|z^n - z\|_{[0,T]\times\Omega} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ &\|z^n - z_0\|_{[0,T]\times\partial\Omega_-} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ \|z^n - z_1\|_{[0,T]\times\partial\Omega_+} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ &\|\mathcal{L}z^n - F\|_{[0,T]\times\Omega} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ &\|z^n(0,\cdot) - f\|_\Omega = 0, \\ &M_- z_0 = g_-,\ M_+ z_1 = g_+. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Thanks to the inequality of Lemma 3.1.1, the method introduced in [Rauch & Massey, 1974] can be employed to obtain the following results concerning the existence and the regularity of the solution of (3.1.6):

Proposition 3.1.2. *For all* $T > 0$, $F \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\Omega)$, $f \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $g_+ \in \mathbf{L}_2([0,T])\times\partial\Omega_+)$ *and* $g_- \in \mathbf{L}_2([0,T])\times\partial\Omega_-)$, *problem (3.1.6) has a unique strong solution* z. *Furthermore, this solution satisfies*

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|^2_\Omega + \frac{c}{2}\|z\|^2_{[0,t]\times\Omega} + \|z\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_-} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \leq\ & C_0 e^{2ct}\left(\|f\|^2_\Omega + \frac{1}{c}\|F\|^2_{[0,t]\times\Omega} + \|g_-\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_-} + \|g_+\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_+}\right) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

for all $t \in [0,T]$.

Proposition 3.1.3. *Let* $f \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, $F \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\Omega)$, $g_- \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega_-)$, $g_+ \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega_+)$. *The solution* z *of (3.1.6) belongs to* $\mathbf{C}^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \leq r \leq s$

if and only if the compatibility conditions at $(0, \partial\Omega_-)$ *and at* $(0, \partial\Omega_+)$ *are satisfied up to order* s*. Moreover, the restrictions of* z *on* $[0,T] \times \partial\Omega_-$ *(resp. on* $[0,T] \times \partial\Omega_+$*) are in* $\mathbf{H}^s([0,T] \times \partial\Omega_-)$ *(resp.* $\mathbf{H}^s([0,T] \times \partial\Omega_+)$*).*

Remember that the compatibility condition of order 1 is:

$$M_+ f = g_+(0), \quad M_- f = g_-(0), \tag{3.1.9}$$

and the higher orders are obtained by differentiating the above equation (see [Rauch & Massey, 1974]). Based on Proposition 3.1.3, we can prove the following corollary, which will be used later in the proof of reachability:

Corollary 3.1.4. *Let* z *the solution mentioned in Proposition 3.1.3, then for each* $\xi \in \Omega$*:*

$$z(\xi, \cdot) \in \mathbf{H}^s([0,T]). \tag{3.1.10}$$

3.2 Reachability of a 2×2 hyperbolic system with two boundary controls

Let us return in this section to system (3.0.1)-(3.0.2). One can easily see that it is a particular case of (3.1.1) with $z = (y_1 \quad y_2)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \; M_+ = (1 \quad -\alpha), \; M_- = (-\beta \quad 1). \tag{3.2.1}$$

By applying Proposition 3.1.3 with $s = 1$, we have that for some $T > 0$, if the initial conditions $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ and the boundary controls g_1, $g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ satisfy the first order compatibility condition (3.1.9), then the solution $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ of (3.0.1)-(3.0.2) belongs to $\mathbf{C}^r([0,T]; \mathbf{H}^{1-r}(\Omega))$, $0 \le r \le 1$. As a consequence, we can establish the reachability of this system:

Lemma 3.2.1. *Let* $z_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ *and* $z_T = \begin{pmatrix} y_{1T} \\ y_{2T} \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{H}^1(\Omega)$*,* T *satisfying:*

$$T > 2 \max \left\{ \int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)} \right\}. \tag{3.2.2}$$

There exist $g_1 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ and $g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ such that the solution of (3.0.1)-(3.0.2) satisfies:

$$z(0) = z_0, \quad z(T) = z_T \tag{3.2.3}$$

Furthermore, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ and $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

The proof uses the techniques proposed by [Cirina, 1969] (reused by [Li et al., 2000] and [Wang, 2008]) can be found in Appendix B [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

3.3 Reachability of a 2×2 hyperbolic system with one boundary control

By the same argument used in Lemma 3.2.1, we can also establish the reachability of system (3.0.1)-(3.0.2) with only one boundary control at $x = L$:

Lemma 3.3.1. *Let $z_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ and $z_T = \begin{pmatrix} y_{1T} \\ y_{2T} \end{pmatrix}$ in $\mathbf{H}^1(\Omega)$, T satisfying:*

$$T > 2 \max \left\{ \int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)} \right\}, \tag{3.3.1}$$

$g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$, $g_2(0) = M_- z_0(0)$ and $g_2(T) = M_- z_T(0)$. There exists $g_1 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ such that the solution of (3.0.1)-(3.0.2) satisfies:

$$z(0) = z_0, \quad z(T) = z_T. \tag{3.3.2}$$

Furthermore, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ and $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

The proof can be found in section 3.3 of the French version of this thesis.

3.4 RHOC for 2×2 hyperbolic systems

Recall that the considered system is:

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \lambda_1(x)\partial_x y_1 + \gamma_1(x) y_1 + \delta_1(x) y_2 \\ \partial_t y_2 = \lambda_2(x)\partial_x y_2 + \gamma_2(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 \end{cases}, \quad (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty), \tag{3.4.1}$$

with initial conditions:

$$y_1(x,0) = y_{10}(x), \quad y_2(x,0) = y_{20}(x), \quad x \in [0,L], \tag{3.4.2}$$

and boundary conditions:

$$\begin{cases} y_1(L,t) = g_1(t) + \alpha y_2(L,t) \\ y_2(0,t) = g_2(t) + \beta y_1(0,t) \end{cases}, \quad t \in [0,\infty). \tag{3.4.3}$$

In order to put this system in abstract form (see below), we add integrators to the control inputs g_1 and g_2 as follows:

$$\dot{g}_1(t) = u_1(t), \quad \dot{g}_2(t) = u_2(t). \tag{3.4.4}$$

3.4.1 Abstract setting

The problem (3.4.1)-(3.4.4) will be reformulated in abstract form (2.0.1), then the stability of the RHOC scheme is given by applying Theorem 2.3.1. To this end, we closely follow the procedure described in 2.5.

Define now two new variables as:

$$v_1(x,t) = y_1(x,t) - \frac{x}{L} g_1(t), \text{ and } v_2(x,t) = y_2(x,t) - \frac{L-x}{L} g_2(t). \tag{3.4.5}$$

Then:

$$\begin{aligned} \partial_t v_1 &= \lambda_1 \partial_x v_1 + \gamma_1 v_1 + \delta_1 v_2 + \frac{\lambda_1 + \gamma_1}{L} g_1 + \delta_1 \frac{L-x}{L} g_2 - \frac{x}{L} u_1, \\ \partial_t v_2 &= \lambda_2 \partial_x v_2 + \gamma_2 v_1 + \delta_2 v_2 + \frac{\gamma_2 x}{L} g_1 + \frac{-\lambda_2 + \delta_2 (L-x)}{L} g_2 - \frac{L-x}{L} u_2. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

The boundary conditions are now homogeneous:

$$v_1(L,t) = 0, \quad v_2(0,t) = 0. \tag{3.4.7}$$

Equations (3.4.4) and (3.4.6) can be rewritten in the form:

$$\dot{z}^e(t) = \mathcal{A}^e z^e(t) + \mathcal{B}^e u(t), \quad z^e(0) = z_0^e, \tag{3.4.8}$$

where $z^e = [g_1 \ g_2 \ v_1 \ v_2]^T \in Z^e = \mathbb{R}^2 \oplus [\mathbf{L}_2(0,L)]^2$ is the new state, $u = [u_1 \quad u_2]^T \in U = \mathbb{R}^2$ the new control. The inner product in the Hilbert space Z^e is defined as:

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} + \int_0^L [z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2] dx. \tag{3.4.9}$$

Operators $\mathcal{A}^e$, $\mathcal{B}^e$ are determined as:

$$\mathcal{A}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_1 \end{pmatrix} + D_1, \quad \mathcal{B}^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{x}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{L-x}{L} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U, Z^e), \tag{3.4.10}$$

where

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\lambda_1 + \gamma_1 x}{L} & \dfrac{\delta_1(L-x)}{L} & \gamma_1 & \delta_1 \\ \dfrac{\gamma_2 x}{L} & \dfrac{-\lambda_1 + \delta_2(L-x)}{L} & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(Z^e), \tag{3.4.11}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \quad \text{with} \\ \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) &= \Big\{ h = [v_1 \quad v_2]^T \in [\mathbf{L}_2(0,L)]^2 | h \text{ is absolutely continuous,} \\ &\quad \frac{dh}{dx} \in [\mathbf{L}_2(0,L)]^2,\ v_1(L) - \alpha v_2(L) = -\beta v_1(0) + v_2(0) = 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

We have the following proposition (see Proposition 3.5 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B)):

Proposition 3.4.1. *$\mathcal{A}^e$ is an infinitesimal generator of a C_0 semi-group with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A}^e) = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}_1)$.*

This result shows that boundary control problem (3.4.1) - (3.4.4) is indeed transformed into abstract form (2.0.1), and the analyses of Chapter 2 can be applied.

3.4.2 RHOC with final cost approach

In order to establish stability, we need to find a final cost $E(z) = \langle z^e, \mathcal{M} z^e \rangle$ and stage cost $F(z^e, u) = \langle \mathcal{C} z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C} z^e \rangle + \langle u, \mathcal{R} u \rangle$ satisfying the relation of Theorem 2.2.1. This is not an easy task for general case of (3.4.1) (see [Bastin & Coron, 2010]). In the present section, we consider a special case of (3.4.1) where the coefficients are independent of x and $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta < 0$. We have in this case an explicit form of E and

F, which is inspired by the Lyapunov function proposed in [Coron et al., 2009]. Let us consider:

$$E(z^e) = \int_0^L s_1(x)y_1^2(x) + s_2(x)y_2^2(x)dx + g^T P g, \tag{3.4.13}$$

and

$$F(z^e, u) \;=\; \int_0^L z^T Q(x) z dx + g^T P_f g + u^T R u. \tag{3.4.14}$$

By using the relation:

$$\begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{C} z^e, \text{with } \mathcal{C} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B} & I \end{pmatrix}, \tag{3.4.15}$$

$E(z^e)$ and $F(z^e)$ can be expressed as

$$E(z^e) = \langle z^e, \mathcal{M} z^e \rangle, \quad F(z^e, u) = \langle \mathcal{C} z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C} z^e \rangle + \langle u, \mathcal{R} u \rangle, \tag{3.4.16}$$

where $\mathcal{M} = \mathcal{C}^* \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \mathcal{C}$, $S(x) = \text{diag}(s_1(x), s_2(x))$, $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} P_f & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ and $\mathcal{R} = R > 0$.
Let us take:

$$s_1(x) = -\gamma e^{\mu x} > 0, \quad s_2(x) = -\delta e^{-\mu x} > 0, \quad x \in [0, L]. \tag{3.4.17}$$

Then we can choose $Q(x)$, P_f, R, P coercive such that for any initial condition z_0^e, there is a feedback control $u_K(\tau) = -Kg(\tau)$ $(K > 0)$ satisfying:

$$\dot{E}(z^e(\tau)) + F(z^e(\tau), u_K(\tau)) \leq 0, \tag{3.4.18}$$

along the trajectory of (3.4.8). We still need to show that $F(z^e, u) \geq \epsilon \|z^e\|^2$ for some $\epsilon > 0$. To this end, we have the following lemma (see Lemma 3.6 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B)):

Lemma 3.4.2. *Let $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(Z^e)$ a coercive self-adjoint operator having the form:*

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4.19}$$

and $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(Z^e)$ an operator having the form:

$$\mathcal{C} = I + P, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4.20}$$

Then $\mathcal{C}^* \mathcal{Q} \mathcal{C}$ is coercive.

In conclusion, for the case where the coefficients of (3.4.1) are constants and $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta < 0$, we can find E and F satisfying Theorem 2.2.1 which means that the RHOC with final cost can be applied to guarantee exponential stability.

3.4.3 RHOC with zero terminal equality constraint approach

Contrary to the final cost approach, the cost function in zero terminal equality constraint approach can be freely chosen. However, we need to verify the feasibility of the optimization problem at each sampling time. By combining the results on the stability of the RHOC (Theorem 2.3.1) and the reachability of 2×2 hyperbolic systems (Lemma 3.2.1), we have the following result:

Theorem 3.4.3. *Suppose that y_{10}, $y_{20} \in \mathbf{H}^1([0, L])$ and g_1, g_2 satisfy the compatibility conditions:*

$$y_{10}(L) - \alpha y_{20}(L) = g_1(0), \quad y_{20}(0) - \beta y_{10}(0) = g_2(0). \tag{3.4.21}$$

The RHOC scheme with zero terminal equality constraint (2.3.1) guarantees the stability of (3.4.1) - (3.4.4) if $\mathcal{Q}$ is coercive and

$$T > 2 \max \left\{ \int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)} \right\}.$$

For the proof, see Theorem 3.7 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

By the same argument, we can use the result of Theorem 2.3.1 and that of Lemma 3.3.1 to prove the stability of the RHOC for system (3.4.1) - (3.4.4) with just one boundary control.

Theorem 3.4.4. *Suppose that y_{10}, $y_{20} \in \mathbf{H}^1([0, L])$ and g_1 satisfies the compatibility condition:*

$$y_{10}(L) = g_1(0) + \alpha y_{20}(L), \tag{3.4.22}$$

Then the RHOC scheme with zero terminal equality constraint (2.3.1) guarantees the stability of (3.4.1) - (3.4.4) with $g_2 \equiv 0$ if $\mathcal{Q}$ coercive and

$$T > 2 \max \left\{ \int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)} \right\}$$

.

3.5 Conclusions

In this chapter, we studied firstly the regularity and the reachability of the solution of a class of 2×2 hyperbolic systems. Both approaches of the RHOC, one with final cost and the other with zero terminal equality constraint, were then considered and stability proofs were established. The first approach depends on the existence of the final cost and can only be applied to particular systems. However, the second approach, by combining

with the result of reachability, can be applied to general 2×2 hyperbolic systems. This result makes the major contribution of this chapter.

Note that a generalization of the results presented in this chapter for $n \times n$ hyperbolic systems is possible by following the same approach. A special case corresponding to a network of cascaded 2×2 hyperbolic systems, will be discussed in Chapter 5.

Chapter 4

RHOC for linearized Saint-Venant equations

This chapter focuses on the application of RHOC to the stabilization of an open-channel flow, and on the numerical implementation of the control. Section 4.1 introduces briefly the system and the linearized models used for the synthesis of RHOC. We would like to mention that this problem was studied in the literature in recent years (see e.g. [Coron et al., 2007], [Coron et al., 2009] and [Litrico & Fromion, 2009*b*]). In section 4.2, we consider the linearized model around a uniform equilibrium profile which corresponds to the configuration studied in section 3.4.2, allowing us to use the RHOC with final cost approach. A numerical solution of the optimal control is proposed by using the Lattice Boltzmann Method (LBM) whose efficiency and accuracy have been established to solve various PDEs ([Chopard & Droz, 2005], [Junk & Rheinlainder, 2008]), particularly the Saint-Venant equations ([Pham, Chopard, Lefèvre, Ondo & Mendes, 2010]). In section 4.3, we study the linearized model around a nonuniform equilibrium profile. In this case, we obtain a hyperbolic system whose coefficients are not constant. However, as shown in section 3.4.3, the RHOC with zero terminal equality constraint approach can guarantee stability for this system. A numerical scheme based on the Galerkin method (see e.g. [Fletcher, 1991] or [Szymkiewicz, 2010]) to calculate the optimal control is also discussed. Simulation results are presented to illustrate the performance and the validity of the proposed approaches.

4.1 Introduction to Saint-Venant equations

An open-channel system is usually described by a set of two partial differential equations (PDEs) named Saint-Venant equations, which represent the mass and the momentum

conservation (see [Graf & Altinakar, 2000]):

$$\begin{cases} B\partial_t h + \partial_x Q & = & 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\dfrac{Q^2}{Bh} + \dfrac{1}{2} B g h^2 \right) & = & gBh(I - J(Q,h) \end{cases}, (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty), \quad (4.1.1)$$

where h denotes the water depth, Q, the discharge, g, the gravitational acceleration, B, the channel width, I, the slope and J, the friction term. Here t and x classically stand for time and space coordinates, and ∂_t, ∂_x denote the partial derivatives w.r.t. t, x respectively.

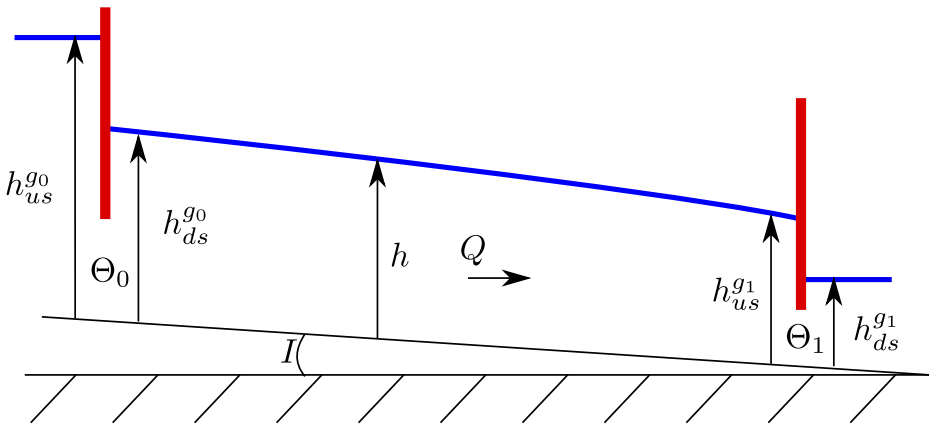

Figure 4.1: Longitudinal sights of an open channel

The friction can be modeled by the classical Manning formula [Graf & Altinakar, 2000]:

$$J(h,Q) = \frac{Q^2}{k^2 B^2 h^2 \left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3}}, \quad (4.1.2)$$

where k is the Manning-Strickler (MS) coefficient.

The boundary conditions may be specified by some the gate equations at each end:

$$\begin{aligned} Q^2(0,t) &= K_0^2 \Theta_0^2(t) 2g(h_{us}^{g_0} - h_{ds}^{g_0}), \\ Q^2(L,t) &= K_1^2 \Theta_1^2(t) 2g(h_{us}^{g_1} - h_{ds}^{g_1}), \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

where $h_{us}^{g_i}$ is the water height at the upstream, $h_{ds}^{g_i}$ the water height at the downstream of gate i. Here $\Theta_0(t)$ and $\Theta_1(t)$, the gate openings, correspond to the control variables, while K_0 and K_1 are constants which depend on the structure of the gates.

We consider a steady state of the system $(\bar{h}(x), \bar{Q}(x))$ which has to satisfy:

$$\begin{aligned} &\bar{Q} = \text{constant} \\ &\partial_x \bar{h}(x) = \frac{I - J(\bar{h}, \bar{Q})}{1 - \overline{Fr}^2}, \quad \overline{Fr} = \frac{\frac{\bar{Q}}{Bh}}{\sqrt{g\bar{h}}}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

where $\overline{Fr}$ is called Froude number of the equilibrium profile, which represents the ratio between the flow speed $\dfrac{\bar{Q}}{B\bar{h}}$ and the speed of gravitational wave $\sqrt{g\bar{h}}$. We consider next the deviation of the state h and Q around the steady state $(\bar{h}, \bar{Q})$:

$$\tilde{h} = h - \bar{h}, \quad \tilde{Q} = Q - \bar{Q}. \tag{4.1.5}$$

Then:

$$\begin{aligned} B\tilde{h}_t + \tilde{Q}_x &= 0, \\ \tilde{Q}_t + \frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}}\tilde{Q}_x + \left(Bg\bar{h} - \frac{\bar{Q}^2}{B\bar{h}^2}\right)\tilde{h}_x &= \left[\frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}^2}\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_Q\right]\tilde{Q} \\ &\quad + \left[gB(I-\bar{J}) - 2\frac{\bar{Q}^2\bar{h}_x}{B\bar{h}^3} - Bg\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_h\right]\tilde{h}. \end{aligned}$$

For the sake of simplicity, we omit the $\tilde{\cdot}$ and we adopt the notations where f_α represents de deviation of a function f in α, and $\bar{f}$ is the value of f at the steady state $(\bar{h}, \bar{Q})$. The above system can be reformulated as:

$$\begin{aligned} h_t &= -B^{-1}Q_x, \\ Q_t &= \alpha(x)h_x + \beta(x)Q_x + \gamma(x)h + \delta(x)Q, \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

where:

$$\begin{aligned} &\alpha = -Bg\bar{h} + \frac{\bar{Q}^2}{B\bar{h}^2}, \quad \beta = -\frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}}, \quad \gamma = gB(I-\bar{J}) - 2\frac{\bar{Q}^2\bar{h}_x}{B\bar{h}^3} - Bg\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_h, \\ &\delta = \frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}^2}\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_Q. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Let us set:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 & -B^{-1} \\ \alpha(x) & \beta(x) \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}.$$

We can see that the matrix G has two eigenvalues:

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} - \sqrt{g\bar{h}}. \tag{4.1.8}$$

By applying the transformation:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} h \\ Q \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -B\lambda_1 & B\lambda_2 \end{pmatrix},$$

we have a new system in the coordinate $[y_1 \quad y_2]^T$:

$$\partial_t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{4.1.9}$$

where:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = P^{-1} G d_x P + P^{-1} H P.$$

Without loss of generality, we can assume that the boundary conditions (4.1.3) can be implemented in the form:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(t), & \dot{g}_1(t) = u_1(t) \\ y_2(t) = g_2(t), & \dot{g}_2(t) = u_2(t) \end{cases} . \tag{4.1.10}$$

The system (4.1.9) along with the boundary conditions (4.1.10) has the form of (3.0.1) and can be stabilized by RHOC scheme. This will be illustrated in sections 4.2 and 4.3.

Depending on the value of the Froude number, we have two different flow regimes:

• If $\overline{Fr} < 1$: we are in sub-critical regime. The two eigenvalues of the matrix G have opposite signs $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. The variable y_1 is the wave propagating from $x = L$ to $x = 0$ and y_2 represents the wave propagating in the opposite direction.

• If $\overline{Fr} > 1$: we are in super-critical regime. Both eigenvalues are negative $0 > \lambda_1 > \lambda_2$. Both y_1 and y_2 propagate from $x = 0$ to $x = L$.

In this work, we limit ourselves to the study of the sub-critical regime in which, depending on the relationship between the slope I and the friction term $J(\bar{h}, \bar{Q})$, the water depth $\bar{h}$ of the equilibrium profile of has different form.

• If $J(\bar{h}, \bar{Q}) = I$, we have a uniform equilibrium profile.

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_0, \quad \bar{Q}(x) = \bar{Q}_0 \ , \quad x \in [0, L] \tag{4.1.11}$$

• If $J(\bar{h}, \bar{Q}) \neq I$, we have a nonuniform equilibrium profile, which is either an accelerating profil ($J(\bar{h}, \bar{Q}) < I$) or a decelerating profile ($J(\bar{h}, \bar{Q}) > I$).

Based on the stability analyses presented in Chapters 2 and 3, we will discuss in the following the application of the RHOC for the two linearized models of the system (4.1.1): around a uniform equilibrium profile and around a nonuniform equilibrium profile.

4.2 Linearized model around a uniform equilibrium profile

4.2.1 Stabilization

In this case, we can show that system (4.1.9) has the structure studied in section 3.4.2, which means that the coefficients are constants and $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta < 0$

(see section 4.2.1 in the French version). Hence, by the analyses of section 3.4.2, the RHOC with final cost can guarantee the stability of system (4.1.9).

4.2.2 Simulation validation

As mentioned in section 2.4.2, to solve the optimal control problem by the steepest descend method, we have to use a numerical scheme for PDEs. We propose in this work the *Lattice Boltzmann Method* (LBM), which has proven to be very efficient and accurate to solve various PDEs (see [Chopard & Droz, 2005]), and in particular Saint-Venant equations ([Pham, Chopard, Lefèvre, Ondo & Mendes, 2010]). For a brief introduction of this method and its application to system (4.1.9), it is possible to refer to [Pham, Georges & Besançon, 2010*c*] (Appendix A).

The parameters of the system are given in Table 4.1, and that of the control are in Table 4.2.

Length L (m)	Width B (m)	Slope I	MS coefficient k
3000	4.36	2.4×10^{-4}	30

Table 4.1: System parameters

$T\,(s)$	$\sigma\,(s)$	μ	ϵ	P_f	P	R
30	10	$0,2 \times 10^{-3}$	4×10^{-6}	$\mathrm{diag}(0,01; 0,01)$	$\mathrm{diag}(0,55; 0,55)$	$\mathrm{diag}(10, 10)$

Table 4.2: Control parameters

The simulation results are presented in Figures 4.2-4.5. We can see that the closed-loop system converges to the origin.

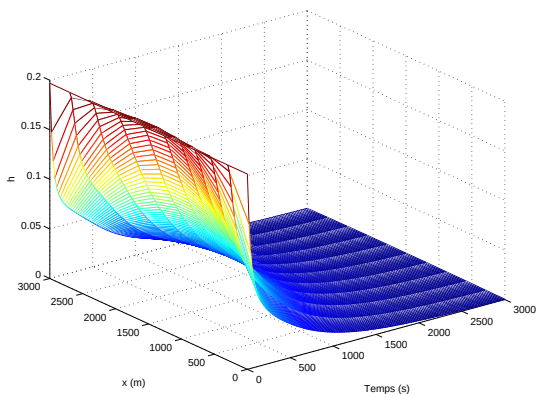

Figure 4.2: Normalized water depth

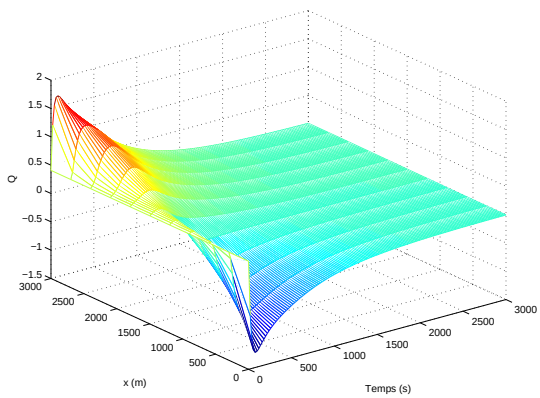

Figure 4.3: Normalized discharge

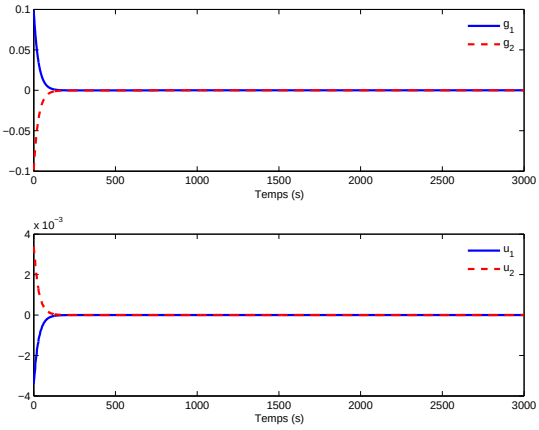

Figure 4.4: States and control at the boundaries

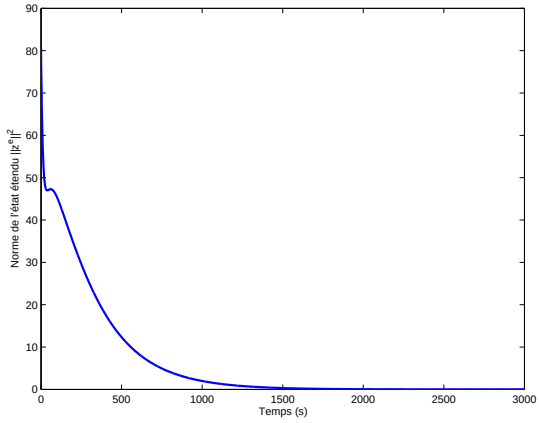

Figure 4.5: Norm of extended state $\|z^e\|^2$

Note that we also tested the proposed control with a nonlinear model of (4.1.1) made by the Lattice Boltzmann Method with three velocities (see [Pham, Chopard, Lefèvre, Ondo & Mendes, 2010]). The results are presented in Figures 4.6 and 4.7. We can also observe the convergence of the nonlinear model.

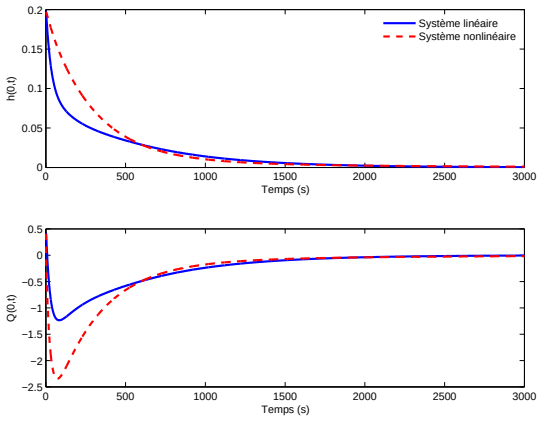

Figure 4.6: Water depth and discharge at $x = 0$

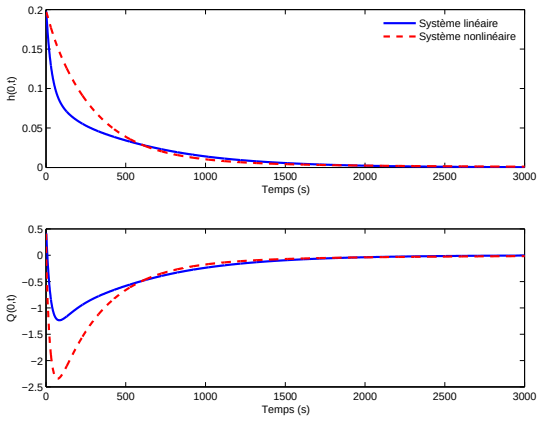

Figure 4.7: Water depth and discharge at $x = L$

4.3 Linearized model around a nonuniform profile

By considering the following cost function:

$$F(z^e, u) = \int_0^L z^T \begin{pmatrix} q_1(x) & 0 \\ 0 & q_2(x) \end{pmatrix} z dx + g^T \begin{pmatrix} p_{f1} & 0 \\ 0 & p_{f2} \end{pmatrix} g + u^T \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} u, \qquad (4.3.1)$$

where $z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ and the weight coefficients q_i, p_{fi} and r_i $(i = 1, 2)$ are all positive, we obtain the stability of the RHOC with zero terminal equality constraint as shown in section 3.4.3.

In order to compute the optimal control, we have to solve numerically the following problem (see section 2.4.4):

$$\begin{pmatrix} \dot{z}^e_{min}(t) \\ \dot{p}_{min}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^e & -\mathcal{B}^e\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{e*} \\ -\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} & -\mathcal{A}^{e*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^e_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^e_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}^*), t \in [0, T] \tag{4.3.2}$$

with the constraints $z^e_{min}(0) = z^e_0$ and $z^e_{min}(T) = 0$. The optimal control is given by equation (2.4.10):

$$u_{min} = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_{min}. \tag{4.3.3}$$

In this work, we use the Galerkin method which has already proven its effectiveness in the numerical implementation of optimal control for such systems [Dulhoste et al., 2004]. We first approximate equation (4.3.2) in a basis N_k to obtain an finite-dimensional approximation:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_d \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{M} \begin{pmatrix} z_d \\ p_d \end{pmatrix}, \quad z_d(0) = z_{0a}, \quad z_d(T) = 0, \tag{4.3.4}$$

where z_d, p_d and z_{0a} are the approximations of the state z^e_{min}, the adjoint state p_{min} and the initial condition z^e_0 respectively. The detail of the numerical approximation procedure can be found in section 5 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B). We can notice that (4.3.4) is a standard two-point boundary problem and can be solved by various methods such as the shooting method, the finite-difference scheme or the finite elements. Readers can refer, for instance to [Ascher et al., 1995], for more information. In this work, we use the *bvp5c* solver of Matlab based on a finite-difference scheme.

The simulation results are presented in Figures 4.8-4.11. We can observe that we obtain the convergence result as expected.

We also tested the proposed control on a nonlinear model of system (4.1.1) and the results are presented in Figures 4.12 and 4.13. We find again a good convergence of the nonlinear system despite a static offset, which can be explained by modeling errors.

Another simulation is carried out with just one boundary control at $x = L$. The results are presented in Figures 4.14-4.17. We can also observe the convergence of the system, even with nonlinear model.

We would like finally to emphasize that the computation of the optimal control at

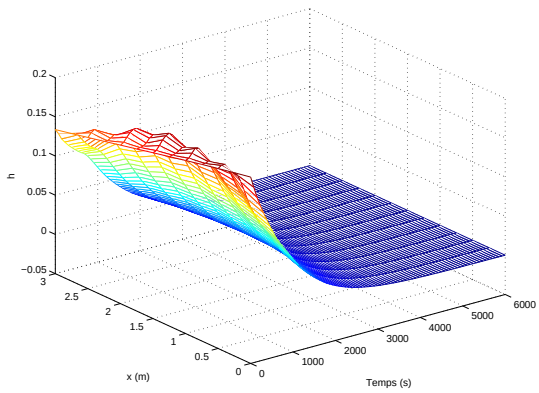

Figure 4.8: Normalized water depth (with two boundary controls)

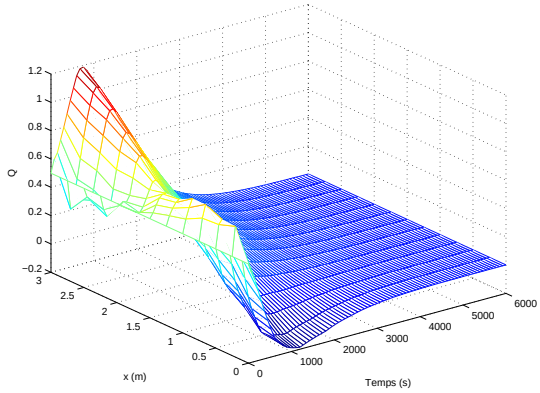

Figure 4.9: Normalized discharge (with two boundary controls)

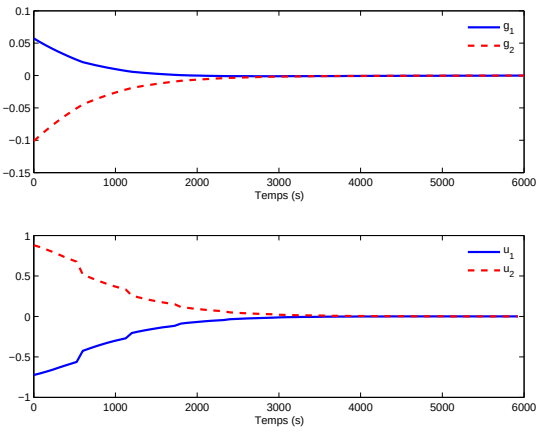

Figure 4.10: States and boundary controls (with two boundary controls)

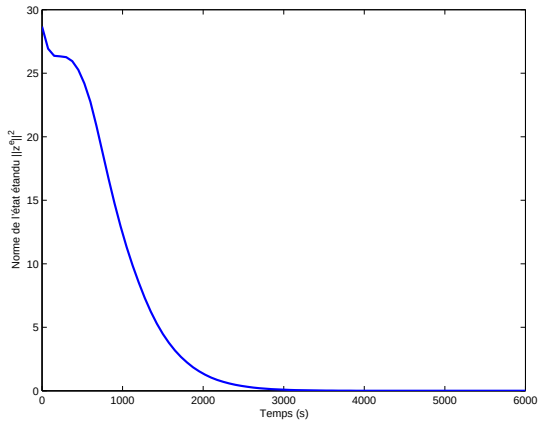

Figure 4.11: Norm of extended state $\|z^e\|^2$ (with two boundary controls)

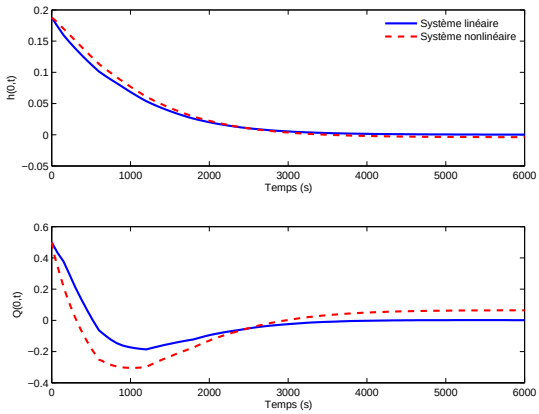

Figure 4.12: Water depth and discharge at $x = 0$

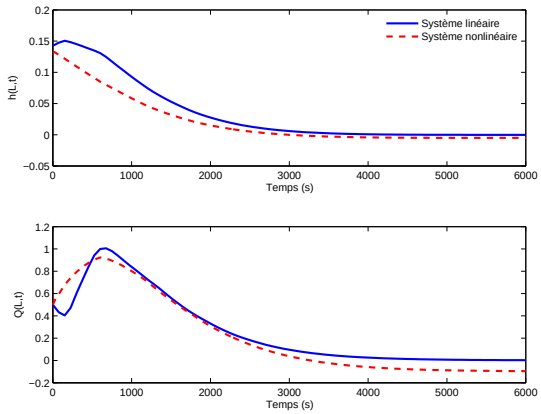

Figure 4.13: Water depth and discharge at $x = L$

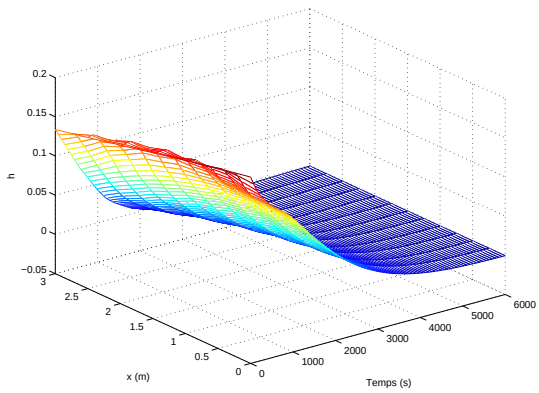

Figure 4.14: Normalized water depth (with one boundary control)

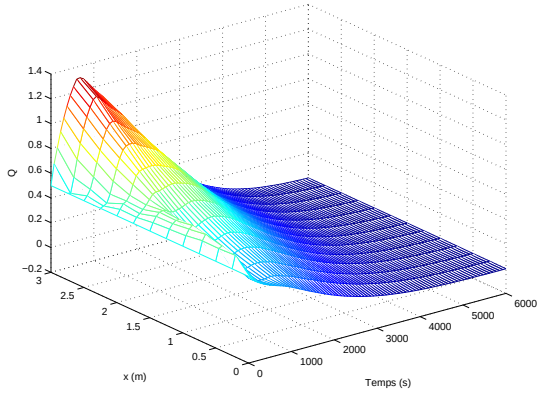

Figure 4.15: Normalized discharge (with one boundary control)

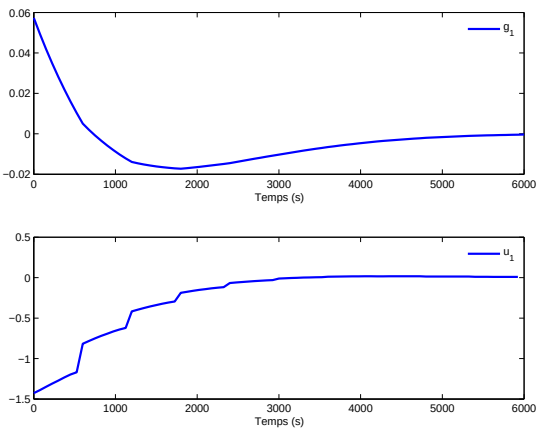

Figure 4.16: States and boundary controls (with one boundary control)

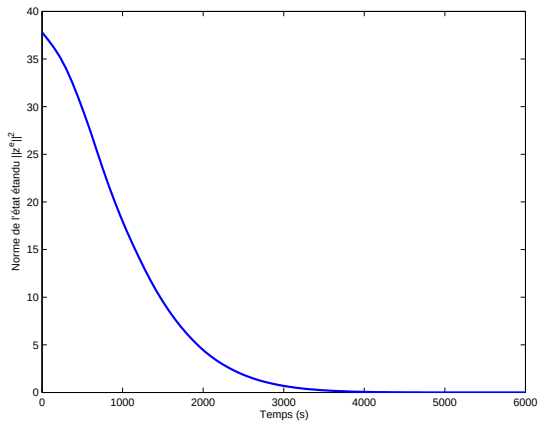

Figure 4.17: Norm of extended state $\|z^e\|^2$ (with one boundary control)

each sampling time takes about 10s for a laptop Intel Core 2 Duo 2.4Ghz, 1.95Go RAM. This means that a real-time control is feasible.

4.4 Conclusions

In this chapter, the theories developed in Chapter 3 were applied to the linearized Saint-Venant equations, and then validated by simulation. The obtained results encourages the implementation of the RHOC to a real channel, as long as the linearized model is still valid. A practical application requires however an observer to estimate the system state from boundary measures. This problem will be studied in our future work.

The results of Chapters 2, 3 and 4 are partly published in [Pham, Georges & Besançon, 2010*a*], [Pham, Georges & Besançon, 2010*b*], [Pham, Georges & Besançon,

2010*c*], [Pham, Georges & Besançon, 2012*a*], [Pham, Georges & Besançon, 2012*c*], [Pham, Georges & Besançon, 2012*e*] and [Pham, Georges & Besançon, 2012].

Chapter 5

RHOC for a network of hyperbolic systems

In this chapter, we extend the stability results of RHOC in Chapter 3 to a *network* of 2×2 hyperbolic systems. Section 5.1 presents the considered the system and the results concerning the regularity and the reachability of the solution. The proofs are obtained by applying repeatedly the results on 2×2 hyperbolic systems studied in Chapter 3. In section 5.2, we consider the stabilization of the RHOC. We firstly show that the network can also be reformulated in abstract form, then the RHOC with zero terminal equality constraint can be used to ensure the stability. The analyses are finally applied to a network of open-channel systems in section 5.3 and validated by simulation in section 5.4.

5.1 Network of hyperbolic systems

We now consider the following system of n 2×2 hyperbolic equations:

$$\begin{cases} \partial_t y_i = \lambda_i(x)\partial_x y_i + \gamma_i(x) y_i + \delta_i(x) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+i} + \gamma_{n+i}(x) y_i + \delta_{n+i}(x) y_{n+i} \end{cases}, x \in [0, L], \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.1.1}$$

where λ_i, λ_{n+i}, γ_i, γ_{n+i}, δ_i and δ_{n+i} are in $\mathbf{C}_1([0, L])$. The functions y_i and y_{n+i} are defined on $[0, L]$. In addition, we suppose that the system is strictly hyperbolic, namely $\lambda_i(x) > 0 > \lambda_{n+i}(x)$, $\forall x \in [0, L]$ $(i = \overline{1, n})$. The boundary conditions define the relationship between the variables at the junctions. Suppose that these conditions can be written as:

- For the first junction:

$$y_{n+1}(0, t) = g_{n+1}(t). \tag{5.1.2}$$

- For the intermediate junctions:

$$\begin{cases} y_{n+i+1}(0,t) &= \theta_i y_i(L,t) + \alpha_i y_{n+i}(L,t) + \beta_i y_{i+1}(0,t) \\ y_i(L,t) &= g_i(t) \end{cases}, i = \overline{1, n-1}, \tag{5.1.3}$$

  where θ_i, α_i and β_i are constants depending on the characteristics of the junction.

- For the last junction:

$$y_n(L,t) = g_n(t). \tag{5.1.4}$$

As in the case of a single system, we add integrators to the dynamics of g_i:

$$\dot{g}_i(t) = u_i(t), \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{5.1.5}$$

The problem is completed by initial conditions:

$$y_i(x,0) = y_{i,0}(x), \quad y_{n+i}(x,0) = y_{n+i,0}(x). \tag{5.1.6}$$

In the sequel, let us denote by $z_0 = (y_{1,0} \quad \dots \quad y_{n,0} \quad y_{n+1,0} \quad \dots \quad y_{2n,0})^T$ the initial condition, $z = (y_1 \quad \dots \quad y_n \quad y_{n+1} \quad \dots \quad y_{2n})^T$ the solution of the entire system and $z_i = (y_i \quad y_{n+i})^T$ the solution of sub-system i, $i = \overline{1, n}$.

5.1.1 Existence of solution

We can establish for this system an inequality similar to the one of Lemma 3.1.1 in Chapter 3:

Proposition 5.1.1. *Given $z_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g_i \in \mathbf{L}^2([0,T])$, $i = \overline{1, n+1}$. There exists a unique solution z of (5.1.1)-(5.1.6) and some constants C and c such that:*

$$\|z(t)\|_\Omega^2 + \frac{c}{2}\|z\|_{[0,t]\times\Omega}^2 + \|z\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \leq Ce^{2ct}\left(\|z_0\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{n+1}\|g_i\|_{[0,t]}^2\right). \tag{5.1.7}$$

The proof can be found in Appendix B of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

5.1.2 Reachability

By applying repeatedly the reachability of single system with two boundary controls (Lemma 3.2.1) and with one boundary control (Lemma 3.3.1), we obtain the following reachability of (5.1.1)-(5.1.6):

Lemma 5.1.2. *Given* $z_0 = (y_{1,0} \quad \dots \quad y_{n,0} \quad y_{n+1,0} \quad \dots \quad y_{2n,0})^T \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $z_T = (y_{1,T} \quad \dots \quad y_{n,T} \quad y_{n+1,T} \quad \dots \quad y_{2n,T})^T \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, *and*

$$T > 2 \max_{i=\overline{1,2n}} \int_0^L \frac{dx}{|\lambda_i(x)|}. \tag{5.1.8}$$

Then there exist $g_i \in \mathbf{H}^1([0,T])$, $i = \overline{1, n+1}$ *such that the solution* z *of (5.1.1)-(5.1.6) satisfies:*

$$z(0) = z_0, \quad \textit{and} \quad z(T) = z_T. \tag{5.1.9}$$

Furthermore, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$.

For the proof see Lemma 4.2 of [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

5.2 RHOC for network of hyperbolic systems

5.2.1 Abstract setting

We can apply the same procedure as the one described for a single system to put system (5.1.1)-(5.1.6) in abstract form. Firstly, we define the new variables:

$$v_i(x,t) = y_i(x,t) - \frac{x}{L} g_i(t), \quad \forall x \in [0,L], \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.2.1}$$

$$v_{n+1}(x,t) = y_{n+1}(x,t) - \frac{L-x}{L} g_{n+1}(t), \quad \forall x \in [0,L], \tag{5.2.2}$$

$$v_{n+i}(x,t) = y_{n+i}(x,t) - \theta_i \frac{L-x}{L} g_i(t), \quad \forall x \in [0,L] \quad i = \overline{2,n}. \tag{5.2.3}$$

The original system can be rewritten as:

For the first subsystem:

$$\begin{aligned} \partial_t v_1 &= \lambda_1 \partial_x v_1 + \gamma_1 v_1 + \delta_1 v_{n+1} + \left(\frac{\lambda_1 + \gamma_1 x}{L}\right) g_1 + \delta_1 \frac{L-x}{L} g_{n+1} - \frac{x}{L} u_1, \\ \partial_t v_{n+1} &= \lambda_{n+1} \partial_x v_{n+1} + \gamma_{n+1} v_1 + \delta_{n+1} v_{n+1} \\ &\quad + \frac{\gamma_{n+1} x}{L} g_1 + \left(\frac{-\lambda_{n+1} + \delta_{n+1}(L-x)}{L}\right) g_{n+1} - \frac{L-x}{L} u_{n+1}. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

For $i = 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \partial_t v_i &= \lambda_i \partial_x v_i + \gamma_i v_i + \delta_i v_{n+i} + \left(\frac{\lambda_i + \gamma_i x}{L}\right) g_i + \delta_i \frac{L_i - x}{L} g_{n+i} - \frac{x}{L} u_i, \\ \partial_t v_{n+i} &= \lambda_{n+i} \partial_x v_{n+i} + \gamma_{n+i} v_i + \delta_{n+i} z_{n+i} \\ &\quad + \frac{\theta_{i-1}(-\lambda_{n+i} + \delta_{n+i}(L-x))}{L} g_{i-1} + \frac{\gamma_{n+i} x}{L} g_i - \theta_{i-1} \frac{L-x}{L} u_{i-1}, \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

with the boundary conditions:

$$v_i(L,t) = 0,\ i = \overline{1,n},, \quad v_{n+i+1}(0,t) = \alpha_i v_{n+i}(L,t) + \beta_i v_{i+1}(0,t), \quad v_{n+1}(0,t) = 0.$$

Let us denote $Y = [\mathbf{L}_2(0,L)]^{2n}$. By inequality (5.1.7), we have the following theorem (see also [Zwart et al., 2009]):

Theorem 5.2.1. *Given λ_i and λ_{n+i} in $\mathbf{C}_1(0,L_i)$ and $\lambda_i(x) > 0 > \lambda_{n+i}(x)$, $\forall x \in [0,L_i]$ $(i = 1,\dots,n)$. The following operator:*

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix} \frac{d}{dx}, \quad A^+ = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad A^+ = diag(\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{2n}), \tag{5.2.6}$$

with the domain:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathcal{A}_n) = \{h = (f_1 \dots f_{2n})^T \in Y \mid h \text{ is absolutely continuous, } \frac{dh}{dx} \in Y, \text{ and} \\ f_i(L) = 0,\ i = \overline{1,n};\ f_{n+i+1}(0) = \alpha_i f_{n+i}(L) + \beta_i f_{i+1}(0),\ i = \overline{1,n-1}; \\ f_{n+1}(0) = 0\},\end{aligned}$$

is the infinitesimal generator of a C_0 semi-group on Y.

Hence, system of equations (5.2.4)-(5.2.5) can be rewritten in the abstract form:

$$\dot{z}^e(t) = \mathcal{A}_n^e z^e(t) + \mathcal{B}_n^e u(t), \tag{5.2.7}$$

with the state and control:

$$z^e = (g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_{n+1} \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_{2n})^T \in Z^e = \mathbb{R}^{n+1} \oplus Y, \tag{5.2.8}$$

$$u = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n \quad u_{n+1})^T, \tag{5.2.9}$$

and $\mathcal{A}_n^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_n \end{pmatrix} + D_n,$. The structure of $D_n \in \mathcal{L}(Z^e)$ and $\mathcal{B}_n^e \in \mathcal{L}(U, Z^e)$ can be found in [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

As in Proposition 3.4.1, $\mathcal{A}_n^e$ with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A}_n^e) = \mathbb{R}^{n+1} \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}_n)$ is also an infinitesimal generator of a C_0 semi-group on Z^e, which means that the analyses of Chapter 2 can be applied to (5.2.7).

5.2.2 Stability of RHOC with zero terminal equality constraint

Based on the above result, we can establish the following theorem:

Theorem 5.2.2. *Suppose that $z_0 \in \mathbf{H}^1([0,L])$ and $g(0)$ satisfy the first order compatibility condition. Then the RHOC with zero terminal equality constraint (2.3.1) guarantees the stability of system (5.1.1)-(5.1.6), with a quadratic cost function:*

$$F(z^e, u) = \langle \mathcal{C}z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C}z^e \rangle + \langle u, \mathcal{R}u \rangle \tag{5.2.10}$$

where $\mathcal{Q}$ coercive and $T > 2 \max_{i=\overline{1,2n}} \int_0^L \frac{dx}{|\lambda_i(x)|}$.

With the same arguments as those used in the proof of Theorem 3.4.3, we can use Lemma 5.1.2 to show that $\mathbf{D}(\mathcal{A}^e)$ is exactly reachable and invariant with respect to system (5.2.7). Moreover, by Lemma 3.4.2, $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ is coercive. We finally get the conclusion by applying Theorem 2.3.1.

5.3 Application to an open-channel network

We now apply the above result to an open-channel network consisting of n cascaded pools, which can be modeled by a system of n Saint-Venant equations:

$$\begin{array}{lcl} B_i\partial_t h_i + \partial_x Q_i & = & 0 \\ \partial_t Q_i + \partial_x \left(\dfrac{Q_i^2}{B_i h_i} + \dfrac{1}{2} B_i g h_i^2 \right) & = & g B_i h_i (I_i - J(Q_i, h_i) \end{array}, \quad \begin{array}{l} (x,t) \in [0, L_i] \times [0, \infty), \\ i = \overline{1,n} \end{array}. \tag{5.3.1}$$

Interconnections between pools are subject to a set of $n+1$ gate equations:

$$Q_{g_i} = K_i^2 \Theta_i^2(t) 2g(h_{us}^{g_i} - h_{ds}^{g_i}), i = \overline{0,n}, \tag{5.3.2}$$

and $n-1$ discharge conservation constraints:

$$Q_i(L_i, t) = Q_{i+1}(0,t), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{5.3.3}$$

where Q_{g_i} is the discharge through the gate, K_i the coefficient, Θ_i the opening of the gate, $h_{us}^{g_i}$ and $h_{ds}^{g_i}$ are the water levels at the upstream end and at the downstream end respectively.

Let us now consider the linearization of the system around a steady state $(\bar{h}_i, \bar{Q}_i)$, $i = \overline{1,n}$. By performing the same transformation as in the case of one pool, we obtain:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y_i = \lambda_i(x)\partial_x y_i + \gamma_i(x) y_i + \delta_i(x) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+i} + \gamma_{n+i}(x) y_i + \delta_{n+i}(x) y_{n+i} \end{array} \right., \quad \begin{array}{l} (x,t) \in [0, L] \times [0, \infty) \\ i = \overline{1,n} \end{array}. \tag{5.3.4}$$

For each pool, we introduce a new space variable as $\tilde{x} = \dfrac{xL}{L_i}$ for some $L > 0$, then system (5.3.4) can be written as:

$$\begin{cases} \partial_t y_i = \tilde{\lambda}_i(\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} y_i + \gamma_i(\tilde{x}) y_i + \delta_i(\tilde{x}) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \tilde{\lambda}_{n+i}(\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} y_{n+i} + \gamma_{n+i}(\tilde{x}) y_i + \delta_{n+i}(\tilde{x}) y_{n+i} \end{cases}, \quad \begin{matrix} (\tilde{x}, t) \in [0, L] \times [0, \infty) \\ i = \overline{1, n} \end{matrix} \tag{5.3.5}$$

where $\tilde{\lambda}_i = \dfrac{L\lambda_i}{L_i}$, $i = \overline{1, 2n}$. In the sequel, the notation $\tilde{\cdot}$ will be omitted.

Supposing that the $n+1$ gate equations (5.3.2) are used to control y_i, $i = \overline{1, n}$ at the downstream and y_{n+1} at the upstream, we have:

$$y_i(L, t) = g_i(t),\ \dot{g}_i = u_i,\ i = 1, \ldots, n; \quad y_{n+1}(0, t) = g_{n+1}(t),\ \dot{g}_{n+1} = u_{n+1}. \tag{5.3.6}$$

The discharge conservation can be expressed in terms of the new variables as:

$$\begin{aligned} &B_i\lambda_i(L) y_i(L, t) + B_i\lambda_{n+i}(L) y_{n+i}(L, t) \\ &\qquad = B_{i+1}\lambda_{i+1}(0) y_{i+1}(0, t) + B_{i+1}\lambda_{n+i+1}(0) y_{n+i+1}(0, t). \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

This can be rewritten in the form:

$$y_{n+i+1}(0, t) = \theta_i y_i(L, t) + \alpha_i y_{n+i}(L, t) + \beta_i y_{i+1}(0, t), \tag{5.3.8}$$

with:

$$\theta_i = \frac{B_i\lambda_i(L)}{B_{n+i+1}\lambda_{i+1}(0)}, \quad \alpha_i = \frac{B_i\lambda_{n+i}(L)}{B_{n+i+1}\lambda_{i+1}(0)}, \quad \beta_i = -\frac{\lambda_{i+1}(0)}{\lambda_{n+i+1}(0)}. \tag{5.3.9}$$

The system (5.3.4) along with the boundary conditions (5.3.6) and (5.3.8) has the form of the system studied previously in section 5.1. We consider the following cost function:

$$J = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{2n} \int_0^{L_i} f_i y_i^2 \, \mathrm{d}x \right) ds + \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^T q_i g_i^2 + r_i u_i^2 ds, \tag{5.3.10}$$

where f_i, q_i and r_i are real positive constants. System (5.1.1)-(5.1.6) is exactly controllable provided that the prediction horizon is sufficiently large, which means that, by applying Theorem 2.3.1, the RHOC with zero terminal equality constraint can again guarantee the stability of this system. This will be illustrated in simulation in the next section.

5.4 Simulation results

We consider a system of three cascaded pools whose lengths are $L_1 = 1000$ (m), $L_2 = 2000$ (m) and $L_3 = 3000$ (m). The other parameters are as in single system case.

The optimal control problem (4.3.2) is also approximated by Galerkin method and then solved by *bvp5c* solver of Matlab. The results are presented in Figures 5.1-5.8. We can clearly observe the convergence of the state of each pool, which suit well with the theories developed previously in this chapter.

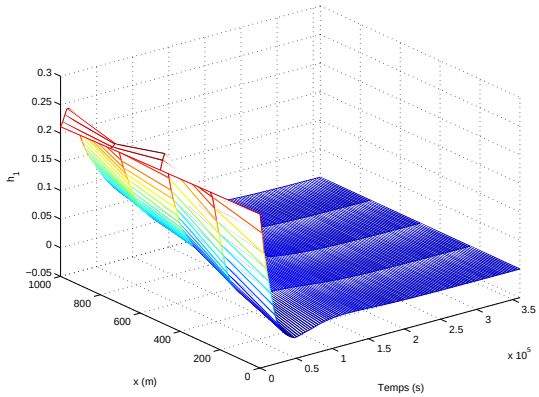

Figure 5.1: Pool 1: Normalized water depth

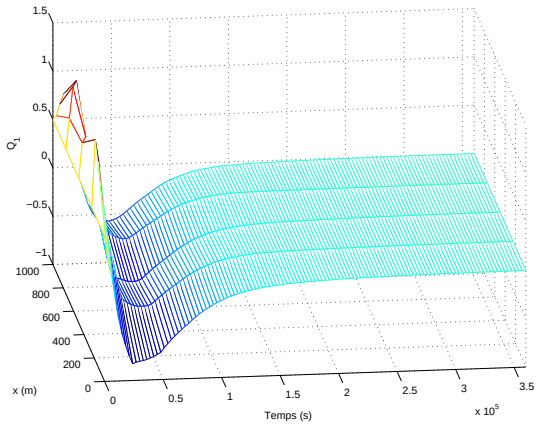

Figure 5.2: Pool 1: Normalized discharge

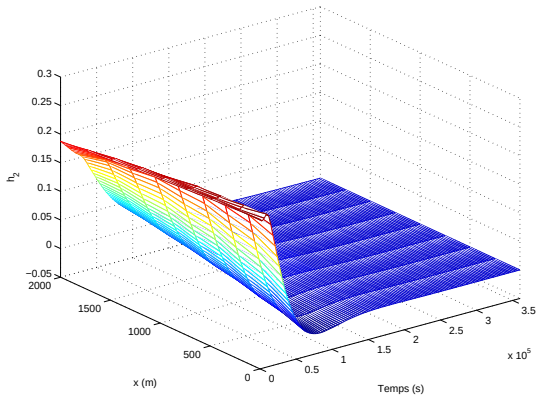

Figure 5.3: Pool 2: Normalized water depth

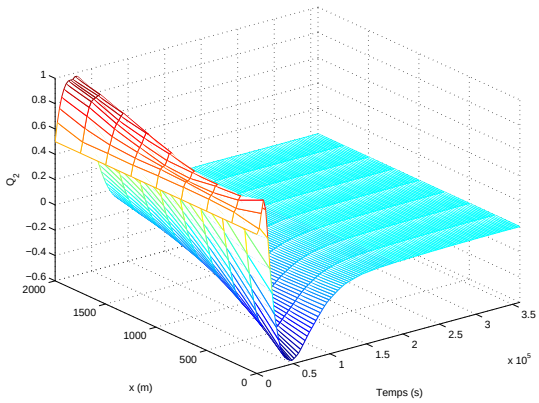

Figure 5.4: Pool 2: Normalized discharge

5.5 Conclusions

In this chapter, we have showed that the RHOC can guarantee the stability of a network of cascaded 2×2 hyperbolic systems. The application to an open-channel network was considered and validated in simulation. The results indicate a significant potential of this strategy for a real system. However, the network consisting of cascaded subsystems is just

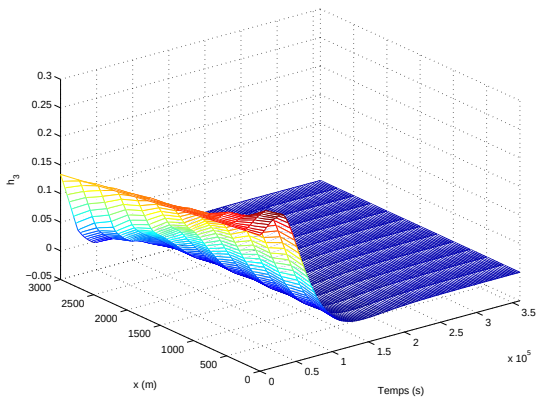

Figure 5.5: Pool 3: Normalized water depth

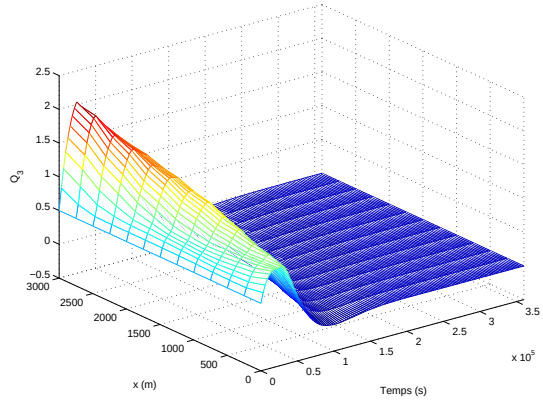

Figure 5.6: Pool 3: Normalized discharge

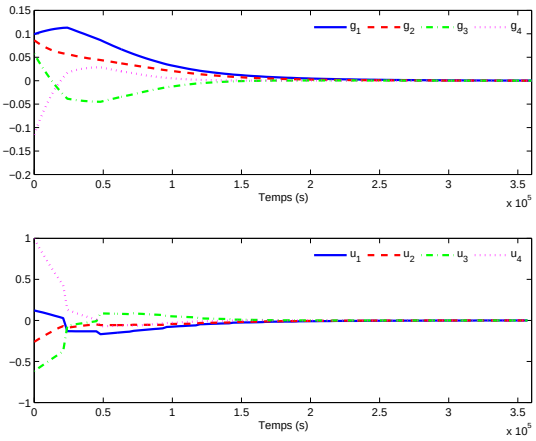

Figure 5.7: Boundary states and controls

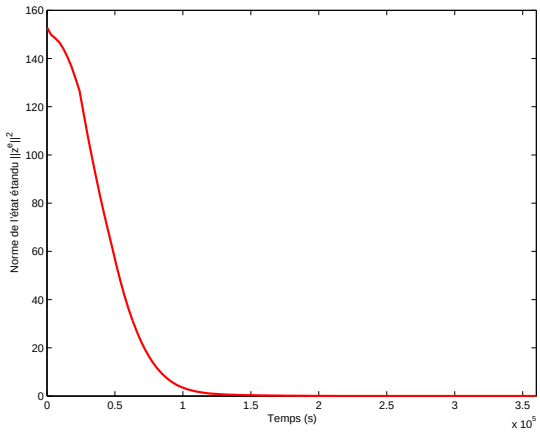

Figure 5.8: Norm of extended state $\|z^e\|^2$

a special case among a large number of different structures encountered in reality. We want to emphasize that the extension of the obtained results to more complex networks is totally possible, knowing that the results concerning the reachability of certain structures of open-channel systems (star-like or tree-like structure) were already considered by [Li & Rao, 2004].

However, one can notice that there is still a gap between the infinite-dimensional RHOC and the finite dimensional approximation since the convergence of the latter to the former was not proven. As indicated in [Zuazua, 2002], it is essential to verify the controllability of the approximate system, which will be considered in details in our future works, by following the method of [Zuazua, 2004] or [Zuazua, 2002].

The results of this chapter can also be found in [Pham, Georges & Besançon, 2012] (Appendix B).

Chapter 6

RHOC for scalar nonlinear conservation laws with shock avoidance

This chapter deals with the boundary control for scalar *nonlinear* hyperbolic systems of conservation laws. One of the issues arising from these systems is the occurrence of singularities (called shocks) in the domain. The objective here is to avoid this type of singularity and to stabilize the system. In section 6.1, the characteristic form of the system is presented and the conditions to avoid the shock are deduced. Then, a proof of the exponential stability of the system is established provided that there is no shock and that the state at the boundary is exponentially stable. These conditions are shown in section 6.2 to be achieved by the RHOC approach. The case where there is a measurable disturbance is also discussed. In section 6.3, all the theories presented in this chapter are applied to the traffic model and some simulation results are given to illustrate the effectiveness of this approach.

6.1 Stability of scalar nonlinear hyperbolic systems with boundary control

One among the challenges of scalar nonlinear hyperbolic systems is the fact that they are of infinite dimension. In addition, they are generally nonlinear and admit singularities called shocks. The presence of shocks in the solution, from a practical point of view, can lead to (very) critical situations such as traffic jams for car flows or tsunamis for coastal flows. From a theoretical point of view, the singularities require more effort in the analysis (see e.g. [Bressan, 2000], [Colombo et al., 2011] and [Colombo & Goatin, 2007]).

As a starting point here, let us restrict the proposed study to avoid these situations to the case of *scalar nonlinear* conservation laws. The extension of this approach to higher dimension will be studied in our future works. Then the following system is considered:

$$\partial_t a + \partial_x F(a) = 0,\ (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+,\ a(\cdot,0) = a_0 \tag{6.1.1}$$

This equation represents the conservation of the quantity a under the action of the flux $F(a)$. We suppose that F is sufficiently smooth (at least $\mathbf{C}^2$) which means that (6.1.1) can also be written as:

$$\partial_t a + f(a)\partial_x a = 0 \tag{6.1.2}$$

where $f(a) = \dfrac{dF}{da}$. Without loss of generality, we can also suppose that the control acts at the boundary $x = 0$ as:

$$a(0,t) = w(t) \tag{6.1.3}$$

For the regularity of the solution, an extended state at the boundary is introduced:

$$\dot{w} = u \tag{6.1.4}$$

The main ideas of the present chapter are summarized as follows: We first formulate the constraints for the boundary state and the boundary control so that the shock cannot appear, and then use RHOC to guarantee the verification of these constraints and the convergence of the boundary state. As shown later, the convergence of the state at boundary leads to the convergence of the state over the whole domain.

6.1.1 The well-posedness and shock-avoiding conditions

In this chapter, we will try to avoid the singularity in the solution of system (6.1.2)-(6.1.4) which means that $a(x,t)$ is in $\mathbf{C}^0([0,1])$ for all $t \geq 0$. The well-posedness of the above problem is guaranteed if $f(w(t)) \geq c > 0$ for all $t \geq 0$. This condition ensures that the state value in the domain is determined by the boundary value at $x = 0$. It is well known that the characteristics of the system are determined by $\dfrac{dx}{dt} = f(a)$ and along the characteristics, the total time derivation of the solution a is then $\dfrac{da}{dt} = 0$ (see [Serre, 1999] for a general introduction, see [Shang et al., 2005] and [Shang et al., 2007] for application of this method to design the control of hyperbolic and parabolic distributed parameter systems). It follows that a is constant and the characteristics are straight lines whose slopes are determined by the boundary or initial condition.

To avoid the shock, a characteristic should not intersect another one in the interval $[0,1]$. It follows that the ordinate of the intersection of the characteristic with the line $x = 1$ must be an increasing function of time. We consider 2 cases:

- Case 1: $t \leq \dfrac{1}{f(a_0(0))}$. In this case the value at $x = 1$ is governed by the initial

condition. The intersection emerging from the point $(x, 0)$ has the abscissa $\dfrac{1-x}{f(a_0(x))}$. This must be an increasing function of x, then:

$$\frac{-f(a_0(x)) + (1-x)f'(a_0(x))a_0'(x)}{f^2(a_0(x))} > 0 \tag{6.1.5}$$

• Case 2: $t > \dfrac{1}{f(a_0(0))}$. The value at $x = 1$ is governed by the condition at $x = 0$. The characteristics emerging from the point $(0, t)$ arrives at $x = 1$ at $t + \dfrac{1}{f(w(t))}$, and this must be also an increasing function of t. This condition leads to:

$$1 - \frac{uf'(w)}{f^2(w)} > 0 \tag{6.1.6}$$

where $f' = \dfrac{df}{dw}$. As a conclusion, if the initial condition satisfies (6.1.5) and the boundary control satisfies (6.1.6), there is no shock appearing in the domain.

6.1.2 Stability

In this section, we will show that the stability of the state at the boundary can lead to the stability of the state in the whole domain.

Theorem 6.1.1. *Let $\gamma > 0$ be a small constant. We consider the following problem:*

$$\begin{gathered} \partial_t a + f(a)\partial_x a = 0 \\ a(\cdot, 0) = a_0, \quad a(0, t) = w(t), \quad \dot{w}(t) = u(t) \end{gathered} \tag{6.1.7}$$

with measurable control $u(\cdot)$ and corresponding absolutely continuous $w(\cdot)$ that satisfy:

$$\begin{cases} u(t) \in U \subset \mathbb{R}, \quad w(t) \in W \subset \mathbb{R} \\ 1 - \dfrac{f'(w(t))u(t)}{f^2(w(t))} \geq \gamma \end{cases}, \; t \geq 0 \tag{6.1.8}$$

Under the following assumptions:

i) a_0 satisfies the shock-avoiding condition (6.1.5).

ii) W and U are closed intervals of $\mathbb{R}$, $0 \in U$.

iii) $f(w) \geq c$ with a constant $c > 0$ for all $w \in W$.

If the control $u(\cdot)$ stabilizes $w(t)$ to a reference $w_r \in W$ then $a(\cdot, t)$ converges (in $\mathbf{C}^0$ norm) to this one as well.

The proof can be found in [Pham, Georges & Besançon, 2012*d*] (Appendix C).

6.2 Stability of the RHOC scheme

Supposing that the three conditions of Theorem 6.1.1 hold for system (6.1.7). We show that the RHOC can be used to obtain the asymptotic convergence of w and to guarantee the shock avoiding condition (6.1.6). To this end, we consider the following cost function whose goal is to regulate the state at $x = 1$ around a constant reference a_r:

$$\begin{aligned} J(\bar{a}, \bar{w}, \bar{u}) = & \int_t^{t+T} (q.(\bar{a}(1,\tau) - a_r)^2 + r.\bar{u}^2(\tau))d\tau \\ & + q_f(\bar{a}(1, t+T) - a_r)^2 \end{aligned}$$

where $q > 0$, $r > 0$ and $q_f > 0$ are penalty constants. The prediction time T is determined by the relation:

$$T = T_f + 1/f(w(t + T_f)) \tag{6.2.1}$$

with a positive constant T_f.

Thanks to the shock-avoiding condition and the method of characteristic, we can show that this problem is equivalent to:

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{u}(\cdot)} J_1(\bar{z}, \bar{u}) = \int_t^{t+T_f} F(\bar{z}, \bar{u})ds + E(\bar{z}(T_f)) \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \dot{\bar{z}} = \bar{u}, \quad \bar{z}(t) = z(t) = w(t) - a_r, \\ \bar{u}(\tau) \in U,\ \bar{z}(\tau) \in Z = W - a_r, \tau \in [t, t+T_f] \\ 1 - \dfrac{g'(\bar{z})\bar{u}}{g^2(\bar{z})} \geq \gamma \end{cases} \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

where we introduced a new variable $\bar{z} = \bar{w} - a_r$ and:

$$\begin{aligned} & F(z, u) = qz^2 \left(1 - \frac{g'(z)u}{g^2(z)}\right) + ru^2, \\ & E(z) = q_f z^2,\ g(z) = f(z + a_r). \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

It turns out to be an RHOC for a finite-dimensional system. The existence proof of the optimal control can be obtained by applying the Fillipov-Cesari theorem (see [Hartl et al., 1995]). Theorem 2.1 presented in [Findeisen, Imsland, Allgöwer & Foss, 2003] can then be applied and guarantees that $w(t)$ converges to a_r with the domain of attraction being the whole set Z. Finally, by applying Theorem 6.1.1, the state of (6.1.7) converges to a_r as well. More details can be found in [Pham, Georges & Besançon, 2012*d*] (Appendix C).

Note: We can consider a simpler cost function, which treats only the state at the boundary $x = 0$ as follows:

$$J(\bar{z}, \bar{u}) = \int_t^{t+T_f} \left[q\bar{z}^2(s) + r\bar{u}^2\right] ds + q_f \bar{z}^2(T_f) \tag{6.2.4}$$

This cost function leads also to the convergence of w to a_r and as a consequence guarantees the convergence of the system, but it can not take into account a disturbance term in the domain. This case will be considered in the next section.

6.2.1 Shock-avoiding conditions in the presence of measurable disturbances

Let us consider system (6.1.7) in the presence of a disturbance. In this case, the conservation equation takes the form:

$$\partial_t a + f(a)\partial_x a = p(x,t) \tag{6.2.5}$$

and the characteristics are no longer straight lines in general. In this paper, let us deal with a simpler problem where the disturbance acts at one point $x = x_p$ of the domain. So it takes the form:

$$p(x,t) = \delta(x - x_p)p(t) \tag{6.2.6}$$

where $\delta(x)$ denotes the Dirac function. We assume in addition that $p(t)$ is a sufficiently smooth function of t. We can easily check that the characteristics are still straight lines, but with different slopes in $[0, x_p]$ and $[x_p, 1]$.

The shock avoiding condition in this case cannot be satisfied in general since they depend on the disturbance $p(t)$. However, if we assume that the disturbance and its variation are bounded, namely:

$$|p(t)| \leq \alpha, \quad |\dot{p}(t)| \leq \beta, \quad \forall t \geq 0, \tag{6.2.7}$$

where α and β are sufficiently small, we can find subsets $U_p^{ad} \subseteq U$ and $W_p^{ad} \subseteq W$ such that the shock avoiding conditions in presence of disturbance are satisfied for all $u \in U_p^{ad}$ and $w \in W_p^{ad}$, as illustrated latter for a freeway traffic model.

6.2.2 Solution of optimal control

The optimal problem to be solved at each time is then:

$$\begin{aligned}
\min_{u(\cdot)} J(a,w,u) = & \int_0^T [q(a(1,t) - a_r)^2 + ru^2(t)]dt \\
& + q_f(a(1,T) - a_r)^2 \\
\text{s.t.} & \begin{cases} \partial_t a + f(a)\partial_x a = \delta(x - x_p)p(t) \\ a(0,t) = w(t),\ \dot{w}(t) = u(t) \\ a(x,0) = a_0(x),\ w(0) = w_0,\ u \in U,\ w \in W \\ \text{Shock Avoiding Constraints (SAC)} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

where the SAC depend on the problem considered:
• Without disturbance:

$$SAC := \begin{cases} 1 - \dfrac{f'(w)u}{f^2(w)} \geq \gamma \text{ (Nonlinear constraint)} \\ \text{or } u \in U^{ad} \quad \text{(Linear constraint)} \end{cases} \tag{6.2.9}$$

• With disturbance:

$$SAC := u \in U_p^{ad}, \quad w \in W_p^{ad}$$

The constraints on u and w are handled by using the barrier method introduced by [Boyd & Vandenberghe, 2004]. In this technique, each inequality $C \geq 0$ is taken into account by adding the term $\int_0^{T_f} -\frac{1}{M} \log C dt$ in the cost function, where M is a sufficiently large positive constant. The optimal problem is now to minimize the modified cost function without the constraints on u and w. At this stage, we can follow the same procedure as the one described in section 6.2 to transform the above problem to an optimal problem in finite dimension. The solution is then obtained by iterating the steepest descend algorithm (see [Boyd & Vandenberghe, 2004]).

6.3 Example

We apply here the previously presented theories for a freeway traffic model as an example. Other models, such as the famous Burgers' equation (see [Serre, 1999]) or the diffusive wave model for open-channel system (see [Georges & Litrico, 2002]) can be treated in the same way.

6.3.1 Freeway traffic model

We consider the Lighthill-Whitham-Richards (LWR) model presented by [Garavello & Piccoli, 2006]. The governing equation is:

$$\partial_t \rho + \partial_x F(\rho, v) = 0 \tag{6.3.1}$$

where $\rho \geq 0$ is the vehicle density, and the traffic flux $F(\rho, v)$ is given by ρv. The main assumption of the LWR model is that the average velocity depends only on the density. The flux is then determined by $F(\rho) = \rho v(\rho)$ called the fundamental diagram. A reasonable property of v is that it is a decreasing function of the density. The simplest fundamental diagram is obtained by setting v to be a linear function of ρ:

$$v(\rho) = v_f \left(1 - \rho/\rho_M\right) \tag{6.3.2}$$

with v_f the free flow speed and ρ_M the maximal density. So we have:

$$f(\rho) = v_f\left(1 - 2\rho/\rho_M\right), \quad f'(\rho) = -2v_f/\rho_M \tag{6.3.3}$$

The control acts at point $x = 0$:

$$\rho(0,t) = w(t), \quad \dot{w}(t) = u(t) \tag{6.3.4}$$

The control u represents the increment of the vehicle density at the entry of the road. The set W is chosen as:

$$W = [0, w_{max}], \quad w_{max} = \frac{\rho_M}{2}\left(1 - \frac{c}{v_f}\right)$$

then condition iii) of Theorem 6.1.1 is satisfied. We can also choose U_p^{ad} and W_p^{ad} in order to satisfy the shock avoiding condition in case there is a disturbance (see [Pham, Georges & Besançon, 2012*d*] (Appendix C)).

6.3.2 Simulation results

To illustrate our approach, let us present in this section simulation results with the freeway traffic model where $v_f = 80$ km/h and $\rho_M = 315$ vehicles/km.

The first simulation is carried out to demonstrate the capacity of the here-proposed approach to prevent the formation of shocks when there is no disturbance by using either the nonlinear constraint (NLC) or linear constraint (LC) in (6.2.9). To this end, we set the system at the critical point where $w \approx w_{max}$ and $u \approx u_{min}$. At this point, the shock easily appears. The results are presented in Figure 6.1. We can see for both approaches that ρ at $x = 1$ converges to the reference after some delay in comparison with ρ at $x = 0$. The control of the LC at the beginning is saturated at its minimum while the control of the NLC can be much smaller to accelerate the convergence. The characteristics from $t = 0$ to $t = 1$ are presented in Figure 6.2. It can be noticed that both approaches can prevent from the formation of the shock, but the NLC takes the maximum advantage of the shock avoiding conditions and converges much more faster than the other approach.

To emphasize the essential role of the shock-avoiding conditions, we carry out the same simulation, but with an open-loop control and another simulation without constraint (6.1.6). The results are presented in Figure 6.3 and Figure 6.4. In the two cases, the intersecting characteristics mean that a shock appears. In Figure 6.5, we present the simulation result in the presence of an asymptotically constant disturbance. We can see that the control rejects completely this type of disturbance. An interesting point is that the control reacts before the disturbance appears since the evolution of the disturbance is included in the control scheme.

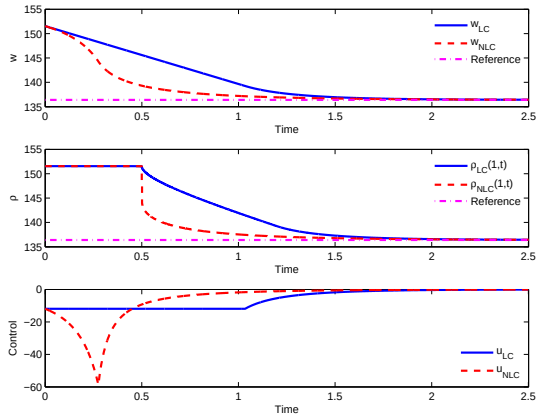

Figure 6.1: Linear constraints control (solid line) and Nonlinear constraints control (dashed line)

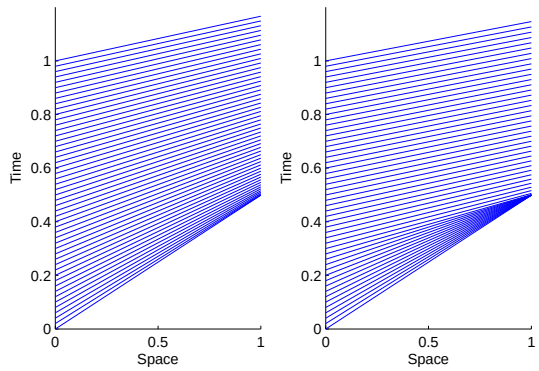

Figure 6.2: The characteristics with linear (left) and nonlinear (right) constraints

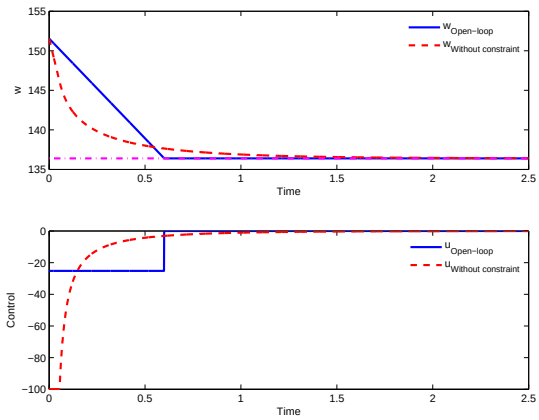

Figure 6.3: Open-loop control (solid line) and no shock-avoiding control (dashed line)

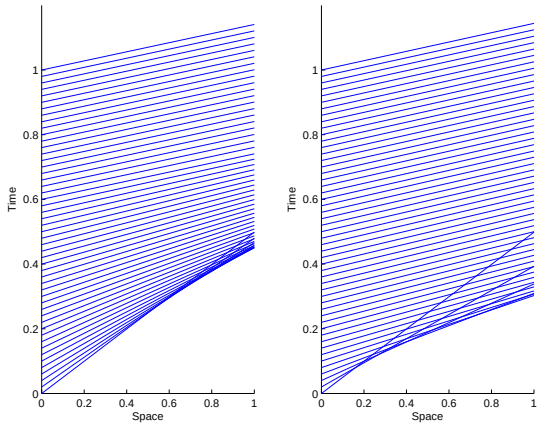

Figure 6.4: The characteristics with open-loop control (left) and no shock-avoiding control (right)

6.4 Conclusions

In this chapter, a complete proof of the stability of a RHOC scheme for scalar nonlinear hyperbolic systems is established and validated by simulation. Firstly, a set of constraints to avoid shocks is introduced. Once these constraints are satisfied, the stability of the boundary state results into the stability of the system. The RHOC is then used to guarantee all above conditions. Finally, a simulation with a freeway traffic model is given to illustrate the effectiveness of the here-proposed approach.

These results open some directions for our future works. Among them, we can mention that the same conditions to avoid shocks for a network of conservation laws can be

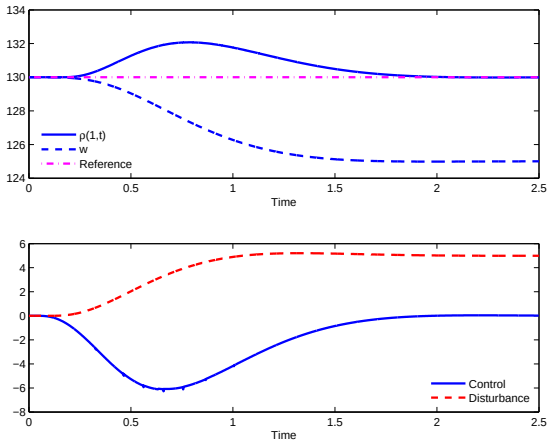

Figure 6.5: States at the extremities and control in the presence of an asymptotically constant disturbance

considered and implemented. We can also investigate the case where the disturbance can not be measured and we have to introduce an observer which uses only state measurements at the extremities of the domain. Finally, the extension of the proposed strategy in the case that the presence of shock is unavoidable (for instance initial condition creates shocks or the reference lies outside the set W) is also an interesting issue.

The problem studied in this chapter was published in [Pham, Georges & Besançon, 2012*d*] and [Pham et al., 2011] (see Appendix C).

Chapter 7

RHOC with guaranteed stability for water hammer equations

We study in this chapter the application of RHOC for hydraulic pipeline systems described by the so-called water hammer equations. Section 7.1 presents the considered system which turns out to be a semi-linear 2×2 hyperbolic system with boundary control. In section 7.2, this system is reformulated in abstract form in which the existence and uniqueness of weak solution is established by the theory of contraction C_0-semigroup presented in [Luo et al., 1999]. Section 7.3 introduces sufficient conditions to guarantee an asymptotic stability of the weak solution. In section 7.4, we present the application of RHOC in order to at the same time minimize a cost function and stabilize the system. Finally, some simulation results obtained by Lattice Boltzmann Method are presented in section 7.5 to illustrate the effectiveness of this approach.

The results in this chapter are gathered in [Pham, Georges & Besançon, 2012*b*] (Appendix D) to be submitted for publication.

7.1 Water hammer equations

Hydraulic pipelines systems are often characterized by the fact that the longitudinal dimension is much greater than the transversal dimension, then a one-dimensional model is sufficient, under the following assumptions (see [Prieur, 2009] or [Larock et al., 2000]):

- The flow is orthogonal to the cross-section A
- The pressure p, the flow speed V and density ρ are uniform in the cross-section A.
- There is no vertical displacement, then $\partial_t Z = 0$, where Z is the elevation of the pipe

- The wave speed a is much larger than the flow speed V, then the term $C\partial_x$ is negligible.

We get the so-called water hammer equations based on the conservation of mass and momentum which models the dynamics of the piezometric head and the flow speed as follows:

$$\begin{aligned} \partial_t H + \frac{a^2}{g}\partial_x V &= 0, \\ \partial_t V + g\partial_x H &= -\frac{f}{2D}V|V| \end{aligned}, \ (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+. \tag{7.1.1}$$

where H is the piezometric head defined as $H = Z + \frac{p}{\rho g}$, L, the length, D, the diameter of the pipe, $a > 0$, the wave speed, g, the gravitational acceleration, α, the slope, f, the friction coefficient.

The system is completed with initial conditions:

$$H(x,0) = H_i(x),\ V(x,0) = V_i(x),\ x \in [0,L], \tag{7.1.2}$$

and boundary conditions. Suppose that the piezometric head at the upstream is fixed at a given value H_0 as:

$$H(0,t) = H_0(t). \tag{7.1.3}$$

This is the case where the pipe is connected to a reservoir at the upstream. The downstream condition is governed by the valve equation:

$$V(L,t) = K\Theta(t)\sqrt{2g(H(L,t) - H_{ds})}. \tag{7.1.4}$$

where K is the valve head loss coefficient, H_{ds} the head at the downstream of the valve and Θ the valve's opening.

A challenge for pipeline systems is the significant variation of the pressure when closing the valve (see [Larock et al., 2000]). These pressure peaks (also called water hammers which explains the name of these equations) can lead to undesirable consequences such as vibration, distortion and even damage of the pipe. The objective of this work is twofold. We want to guarantee a *global asymptotic stability* of (7.1.1) and also minimize the variation of pressure and speed, which motivates us to use the RHOC.

7.2 Abstract setting

We denote by $(\bar{H}, \bar{V})$ $(\bar{V} > 0)$ the steady state corresponding to the boundary values (H_0, V_0) which is determined by:

$$\bar{V} = V_0, \quad \bar{H}(x) = -\frac{f}{2Dg}V_0|V_0|x + H_0 \tag{7.2.1}$$

Supposing that we want to regulate the system around this set point. By setting:

$$\tilde{H}(x,t) = H(x,t) - \bar{H}(x), \quad \tilde{V}(x,t) = V(x,t) - \bar{V}, \tag{7.2.2}$$

we obtain the following equations:

$$\partial_t \tilde{H} + \frac{a^2}{g}\partial_x \tilde{V} = 0, \tag{7.2.3}$$

$$\partial_t \tilde{V} + g\partial_x \tilde{H} = -m((\tilde{V} + \bar{V})|\tilde{V} + \bar{V}| - \bar{V}^2), \tag{7.2.4}$$

with $m = f/2D$. In order to put these equations in the characteristics form, we make the following transformation:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g/a & 1 \\ -g/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a/g & -a/g \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{7.2.5}$$

The dynamics in the new coordinate are then:

$$\begin{aligned} \partial_t y_1 + a\partial_x y_1 &= -F(y_1, y_2) \\ \partial_t y_2 - a\partial_x y_2 &= -F(y_1, y_2) \end{aligned}, \tag{7.2.6}$$

where $F(y_1, y_2) = F(\tilde{V}) = m[(\tilde{V} + \bar{V})|\tilde{V} + \bar{V}| - \bar{V}^2]$. The initial conditions can also be expressed in terms of the new variables as:

$$y_1(\cdot, 0) = y_{10}, \quad y_2(\cdot, 0) = y_{20}. \tag{7.2.7}$$

The boundary condition at $x = 0$ becomes:

$$y_2(0,t) = y_1(0,t). \tag{7.2.8}$$

The valve opening $\Theta(t)$ can be calculated in order to implement the boundary condition at $x = L$ in the form:

$$y_1(L,t) = w(t). \tag{7.2.9}$$

In order to put the above equations in abstract form, we introduce an integrator in the dynamics of w as follows:

$$\dot{w}(t) = -kw(t) + u(t), \quad w(0) = w_0 = y_{10}(L), \tag{7.2.10}$$

with some constant $k \geq \frac{a}{2}$. The reason why we add the state feedback $-kw$ will be clarified later. Let us denote $Z = \mathbb{R} \times [\mathbf{L}_2(0,L)]^2$ which is evidently a Hilbert space with the following inner product:

$$\left\langle (w \quad y_1 \quad y_2)^T, (\bar{w} \quad \bar{y_1} \quad \bar{y_2})^T \right\rangle_Z = w\bar{w} + \int_0^L (y_1\bar{y_1} + y_2\bar{y_2})\, dx. \tag{7.2.11}$$

Equations (7.2.6)-(7.2.10) can then be put in the form:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{F}(z(t)) + \mathcal{B}u(t), \quad z(0) = z_0, \tag{7.2.12}$$

where $z_0 = (w_0 \quad y_{10} \quad y_{20})^T$ and the operators $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{F}$ and $\mathcal{B}$ are defined as:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -a\dfrac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & a\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix} \tag{7.2.13}$$

with the domain:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{z = [w \ z_1 \ z_2]^T \in Z | z_1,\, z_2 \text{ are absolutely continuous,} \\ \frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx} \in \mathbf{L}_2(0, L),\, z_1(0) = z_2(0),\, z_2(L) = w\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} w \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F(y_1, y_2) \\ -F(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.14}$$

The operator $\mathcal{F}$ involving the friction has the following property:

Lemma 7.2.1. *Operator $\mathcal{F}$ is dissipative.*

About the operator $\mathcal{A}_0$, we have can prove the following property:

Lemma 7.2.2. *Operator $\mathcal{A}_0$ is m-dissipative.*

For the proofs of these lemmas, see [Pham, Georges & Besançon, 2012*b*] (Appendix D).

Since $\mathcal{A}_0$ is m-dissipative, it is the infinitesimal generator of a contraction C_0-semigroup $\Phi_0(t)$ (see [Luo et al., 1999] or [Schechter, 1983]). We also have that the operator $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{F}$ with the domain $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ is m-dissipative. Consequently, $\mathcal{A}$ is the infinitesimal generator of a contraction C_0-semigroup $\Phi(t)$ (see Proposition 2 in [Schechter, 1983]). Thus, for all $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0, T])$, system (7.2.12) has a unique weak solution given by (see [Schechter, 1983], page 301):

$$z(t) = \Phi_0(t)z_0 + \int_0^t \Phi_0(t-s)(\mathcal{F}z(s) + \mathcal{B}u(s))ds \tag{7.2.15}$$

In addition, if $u(\cdot) \in \mathbf{C}^1([0, T])$ and $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ then $z(t) \in \mathbf{C}^1([0, T], Z) \cap \mathbf{D}(\mathcal{A})$ for all $t \in [0, T]$ (see Theorem 3.1.3 in [Curtain & Zwart, 1995], or Theorem 1.5 in [Pazy, 1983]).

7.3 Stability

The stability of system (7.2.12) can be guaranteed by the following theorem:

Theorem 7.3.1. *Given $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0,\infty))$ satisfying:*

$$\begin{cases} u(t)w(t) \leq (-\rho + k)w^2(t), \text{ if } w(t) \neq 0 \\ u(t) = 0, \text{ if } w(t) = 0 \end{cases}, \forall t \in [0,\infty), \tag{7.3.1}$$

with some $\rho > 0$. Then system (7.2.12) is asymptotically stable at the origin, which means that:

$$\|z(t)\|^2 \to 0 \text{ when } t \to \infty. \tag{7.3.2}$$

The proof, that is based on a Lyapunov function approach, can be found in [Pham, Georges & Besançon, 2012*b*] (Appendix D).

Note: We add the state feedback to the dynamics of w in (7.2.10) just to prove the passivity of the operator $\mathcal{A}_0$ and to reformulate original problem (7.2.6) in abstract form (7.2.12). For stability, we need only that condition (7.3.1) holds. If we set:

$$\tilde{u}(t) = -kw(t) + u(t), \tag{7.3.3}$$

then the dynamics of w becomes:

$$\dot{w}(t) = \tilde{u}(t), \tag{7.3.4}$$

and the stability condition can be written as:

$$\tilde{u}(t)w(t) \leq -\rho w^2(t), \text{ if } w(t) \neq 0, \ \tilde{u}(t) = 0 \text{ if } w(t) = 0. \tag{7.3.5}$$

These relationships mean that to ensure stability, it is enough to have an exponential convergence of w. In what follows, we will use $\tilde{u}$ as the control input because it allows us to directly control the convergence speed of w.

7.4 Application of RHOC

7.4.1 Stability of RHOC

For a prediction horizon $T > 0$, some weighting functions $A(x) > 0$, $B(x) > 0$ $(x \in [0, L])$ and some positive constants q and r, we consider the following optimal control problem:

$$\min_{u(\cdot)} J = \int_0^T \int_0^L [A(x)\tilde{H}^2(x,t) + B(x)\tilde{V}^2(x,t)]dxdt + \int_0^T [qw^2(t) + r\tilde{u}^2(t)]dt, \tag{7.4.1}$$

under the constraints of the system dynamics:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{H} + \frac{a^2}{g}\partial_x \tilde{V} &= 0, \\ \partial_t \tilde{V} + g\partial_x \tilde{H} &= -F(V) \ , \ t \in [0,T], \\ \dot{w}(t) &= \tilde{u}(t), \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

boundary conditions and initial conditions:

$$\begin{aligned} &\tilde{H}(0,t) = 0, \quad \tilde{V}(L,t) = w(t) + \frac{g}{a}\tilde{H}(L,t),\ t \in [0,T], \\ &\tilde{H}(\cdot,0) = \tilde{H}_0,\ \tilde{V}(\cdot,0) = V_0,\ w(0) = w_0 = \tilde{V}_0(L) - \frac{g}{a}\tilde{H}_0(L), \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

constraint for stability:

$$\tilde{u}(t)w(t) \leq -\rho w^2(t), \text{ si } w(t) \neq 0,\ \tilde{u}(t) = 0 \text{ si } w(t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{7.4.4}$$

and finally, we add a constraint to take into account the saturation of the control:

$$|\tilde{u}(t)| \leq u_{max},\ t \in [0,T]. \tag{7.4.5}$$

The above optimal control problem can be transformed (using the transformation (7.2.5)) in terms of the variable z as follows:

$$\begin{aligned} &\min_{u(\cdot)} J(z_0;u) = \int_0^T \langle z(t), \mathcal{Q}z(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R}u(t)\rangle dt \\ &\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{F}(z(t)) + \mathcal{B}u(t),\ t \in [0,T], \quad z(0) = z_0, \\ u(t)w(t) \leq (-\rho + k)w^2(t), \text{ if } w(t) \neq 0,\ u(t) = 0 \text{ if } w(t) = 0,\ t \in [0,T], \\ |u(t) - kw(t)| \leq u_{max},\ t \in [0,T]. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

where the operator $\mathcal{Q} : Z \to Z$ is defined by:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a^2/g^2 A(x) + B(x) & -a/gA(x) + B(x) \\ -a/gA(x) + B(x) & a^2/g^2 A(x) + B(x) \end{pmatrix} \tag{7.4.7}$$

We can prove the following result:

Theorem 7.4.1. *The RHOC scheme applied to system (7.1.1) is asymptotically stable.*

Since the optimal control satisfies the condition of Theorem 7.3.1, the closed-loop stability is guaranteed. The remaining problem is to show the feasibility at each sampling time. To this end, the Theorem 2.12 of [Yong, 1992] can be applied, and the existence of optimal solution is guaranteed. For more details, see [Pham, Georges & Besançon, 2012*b*] (Appendix D).

7.4.2 Optimal solution by calculus of variations approach

We will formulate the optimal control in function of adjoint state in order to use it later for the numerical scheme. To handle the constraints, we also use the barrier method as in section 6.2.2. The optimal problem is now to minimize the modified cost function J_m without the constraints on u and w:

$$J_m = \int_0^T \langle z(t), \mathcal{Q}z(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R}u(t)\rangle + \mathcal{G}(z(t), u(t))dt \tag{7.4.8}$$

where

$$\mathcal{G}(z, u) = -\mu \log\Big((-\rho + k)w^2 - uw)(u_{max}^2 - (u - kw)^2)\Big) \tag{7.4.9}$$

By using the multiplier method as in section 2.4, we can characterize the optimal control in function of the adjoint state as follows:

$$u_m(\tau) + \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_m(\tau) + \frac{1}{2}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{G}_u(z_m(\tau), u_m(\tau)) = 0 \tag{7.4.10}$$

where p_m is the weak solution of the following equation:

$$\dot{p}_m(\tau) = -\mathcal{A}_0^* p_m(\tau) - \mathcal{F}_z(z_m(\tau))p_m(\tau) - \mathcal{P}(z_m(\tau), u_m(\tau)),\ p_m(T) = 0. \tag{7.4.11}$$

In this form, we can use a numerical method to approximate the optimal solution. In this work, we also use the Lattice Boltzmann Method (see [Pham, Georges & Besançon, 2012*b*] (Appendix D)).

7.5 Simulation results

In order to illustrate the validation of the above approach, we carried out some simulation with the parameters given in Table 7.1.

L	a	f	D	$\bar{V}$	H_0
85 (m)	379 (m/s)	0,0223	0,0635 (m)	0,5 (m/s)	6,5 (m)

Table 7.1: System parameters

Suppose that we want to change the flow velocity from $\tilde{V}_0 = 0.87\,(m/s)$ to $\tilde{V}_f = 0$. We simulate the first strategy where the velocity decreases linearly. The results are presented in Figures 7.1 - 7.2. We see clearly that in this case there are pressure waves (water hammer) in the pipeline.

We now perform the simulation with the RHOC. The evolution of the piezometric head and the flow speed are presented in Figures 7.3 and 7.4. We see that the system

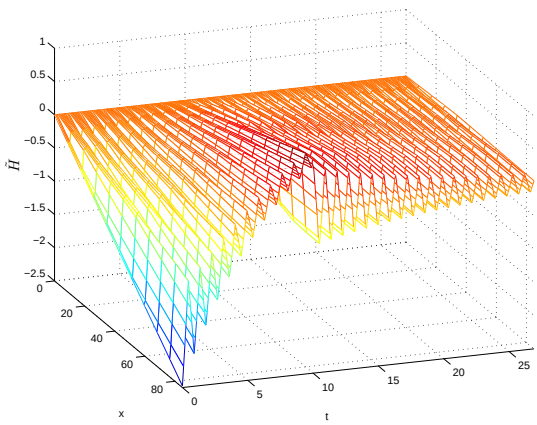

Figure 7.1: Piezometric head speed in open-loop

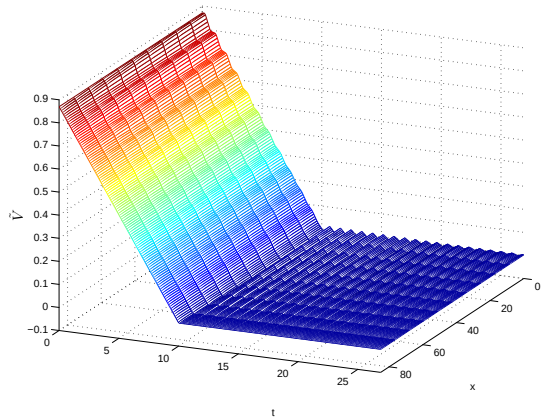

Figure 7.2: Flow speed in open-loop

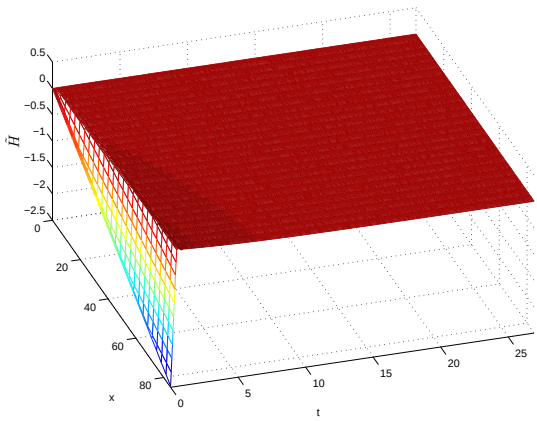

Figure 7.3: Piezometric head with RHOC

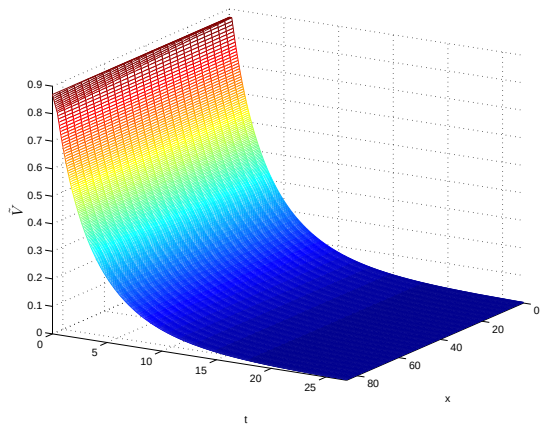

Figure 7.4: Flow speed with RHOC

converges to the origin. Note that we can also use the boundary feedback control as follows:

$$\tilde{u}(t) = -\rho w(t), \tag{7.5.1}$$

which satisfies the stability condition and therefore guarantees the convergence of the system. The results are presented in Figures 7.5 - 7.6. The evolution of the state w and the control $\tilde{u}$ in both cases (the RHOC and feedback control (7.5.1)) are presented in Figure 7.7. We find that the two controls have an almost identical performance, but the RHOC ensures that we have an optimal control with respect to criterion (7.4.1).

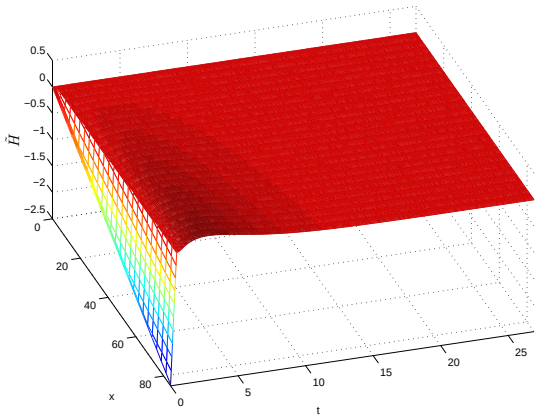

Figure 7.5: The piezometric head with feedback control

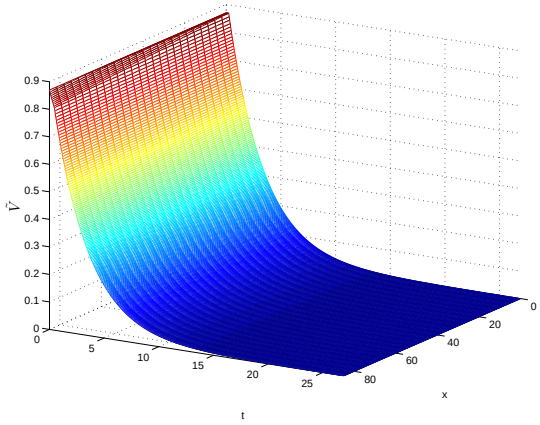

Figure 7.6: The flow speed with feedback control

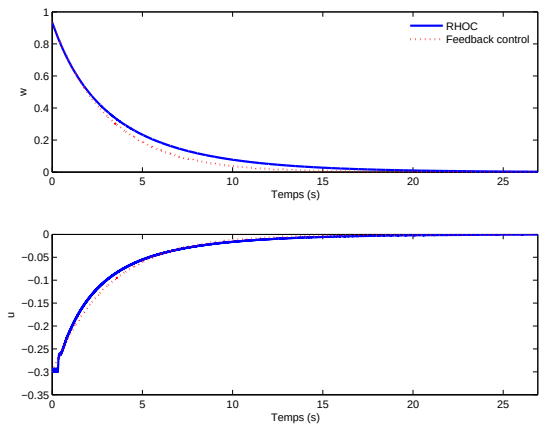

Figure 7.7: The boundary state and the control

7.6 Conclusions

In this chapter, we have introduced sufficient conditions to guarantee the asymptotic stability of a pipeline system. The RHOC was used to stabilize the system as well as handling constraints and minimize a cost function penalizing the variation the piezometric head and the flow speed around a reference profile. The simulation results showed that the RHOC guarantees the convergence of considered system and does not create pressure waves.

We note that thanks to the stability conditions the RHOC scheme does not use either final cost or zero terminal equality constraint. Although this approach was considered for finite-dimensional systems in e.g. [Mhaskar et al., 2005] and [Liu et al., 2009]), it was not extended to infinite-dimensional ones. The RHOC does not play a primordial role in the stabilization, it does however contribute to the optimality and to constraint handling. Constraints such as the maximal value of the head or the saturation of the

speed of the valve could be taken into account. The challenge is to ensure the feasibility of the optimization problem, which will be considered in our future work.

Chapter 8

Conclusions and perspectives

This chapter summarizes the contributions, discussions and perspectives derived throughout this thesis. The main objective of our work was to study the extension of the Receding Horizon Optimal Control (RHOC) to infinite-dimensional systems in general and systems of conservation laws in particular. Two aspects of the RHOC were considered and exploited: the stabilization and the explicit constraint manipulation.

First of all, we proposed and demonstrated a generalization of Lemma 5.1 of [Curtain & Zwart, 1995], which gives us a sufficient stability condition of RHOC for a class of infinite-dimensional systems. Based on this result, we provided a complete proof of exponential stability of this strategy with two different approaches: with final cost and with zero terminal equality constraint.

Next, we showed the exponential stability of RHOC for 2×2 hyperbolic systems with boundary controls. For this purpose, we established the regularity and the reachability of such systems. The boundary control problem was reformulated in abstract form in which the stability proof of RHOC can be applied.

Theoretical analyses were applied to an open-channel system. The dynamics of such a system is described by Saint-Venant equations that constitute a system of 2×2 non-linear conservation laws. Two linearized models were considered: one around a uniform equilibrium profile and the other around a non uniform one. We used the RHOC with final cost for the first one, and the RHOC with zero terminal equality constraint for the second one. In both cases, thanks to the general results obtained for 2×2 hyperbolic equations, we could obtain exponential stability of the closed-loop system. The analyses were validated in simulation and gave encouraging results.

The application of RHOC to a network of cascaded 2×2 hyperbolic systems was also considered. Using the results obtained on both the regularity and the reachability of a single system, we deduced the regularity and reachability for the whole network.

We showed that this system can also be reformulated in abstract form and that the RHOC can be used to ensure the stability. The proposed approach was applied to an open-channel network and tested by simulation. The obtained results were in agreement with theoretical analyses.

We also studied the application of RHOC to scalar nonlinear systems of conservation laws. One of the challenges of these systems is that they admit singularities called shocks in the solution. We introduced sufficient conditions to avoid this situation. The RHOC was then used to ensure these shock avoiding conditions and to guarantee the convergence of the solution to a reference. This approach was validated by simulation with the freeway traffic model. For this application, we exploited both the ability to manipulate constraints and the ability to guarantee stability, which shows a great potential of RHOC strategy for this class of systems.

After all, the application of RHOC for the stabilization problem of a pipeline system was considered. Sufficient asymptotic stability conditions of this system were provided. We have shown that the RHOC can at a same time stabilize the system, take into account the constraints and minimize a given criterion. Throughout this application, we discussed an RHOC strategy for infinite-dimensional systems using neither final cost nor zero terminal equality constraint, which was not considered before, to the best of our knowledge.

These results open some directions for our future works.

The first one concerns the application of RHOC to networks of conservation laws. The extension of the results of Chapter 5 to networks whose structure is more complex needs to be studied. Knowing that the results on the reachability of certain structures of open-channel systems (star-like or tree-like structure) are available (see [Li & Rao, 2004]), this extension is entirely possible without any new theoretical difficulty. Besides, considering a mixed network of open-channel systems and pipeline systems is a very interesting problem to be investigated from both theoretical and practical point of view. The interactions between subsystems through boundary conditions may impose additional conditions for the stability of the overall system. The RHOC is suitable to solve this problem due to its ability of handling constraints. Moreover, the application of the RHOC with shock avoiding conditions to networks of freeway traffic is also promising to avoid traffic jams.

The second direction concerns the stability of RHOC for output feedback problem. The theories developed in this work are based on the assumption that all states are measured, which is not feasible in reality. It is necessary to use an observer in order to estimate the state from the measurements that are often at the boundary. Knowing that the moving horizon strategy for observers has been considered for finite-dimensional systems ([Michalska & Mayne, 1995], [Alamir, 1999]), an extension of this approach to

infinite-dimensional systems is particularly interesting. A generalization of the stability results of RHOC coupled with an observer as in [Findeisen, Imsland, Allgöwer, & Foss, 2003] in the context of infinite-dimensional systems is interesting as well.

A comparative study in terms of performance and robustness between the proposed control and various existing strategies is also necessary. We can mention for example the control Lyapunov function approach of [Xu & Sallet, 2002] and [Coron et al., 2007]; the boundary feedback control of [Coron et al., 2009], [Prieur, 2009]; the backstepping control of [Vazquez et al., 2011] and [Krstic & Smyshlyaev, 2008] and the Hamiltonian structure approach [Santos et al., 2009].

The synthesis of infinite-dimension RHOC for other classes of systems such as parabolic or elliptic systems needs also further consideration, knowing that the RHOC based on spectral decomposition has already been considered for parabolic systems in [Dubljevic et al., 2005*b*], [Dubljevic, N. H. El-Farra & Christofides, 2006] and [Dubljevic et al., 2005*a*]. Another possibility is to generalize the results of Chapter 2 to the case of systems having only a local Lyapunov function. Such results would allow to apply the RHOC to a larger number of applications.

In conclusion, the obtained results show that the application of RHOC to infinite-dimensional systems is very promising thanks to the ability of guaranteeing stability and the effectiveness in constraint manipulation. However, several questions remain open that require further research to enlarge the application fields of this approach.

Appendix A

Paper presented in 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010, Atlanta, Georgia, USA

49th IEEE Conference on Decision and Control
December 15-17, 2010
Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA

Predictive Control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws

Van Thang Pham, Didier Georges and Gildas Besançon

***Abstract*— This paper deals with the Predictive Control for a linear hyperbolic system of conservation laws. A complete proof of the *exponential stability* of this control is established. The semi-group approach is used to prove the existence and uniqueness of the optimal solution. The cost function of the optimal control is inspired from the previously proposed candidate Lyapunov function for hyperbolic systems. Thanks to this choice, the exponential stability of the control is proven. For the implementation, calculus of variations is used to derive the adjoint state of the system and the recently proposed *Lattice Boltzmann method* is used to solve both direct and adjoint partial differential equations. This approach is finally validated in simulation.**

I. INTRODUCTION

Our work is motivated by the control problem for an open-channel system which is usually described by a set of two partial differential equations (PDEs) named Saint-Venant equations which represent the mass and the momentum conservation:

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t(Bh) + \partial_x Q = 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{Bh} + \frac{1}{2} B g h^2 \right) = 0 \end{array} \right. , \tag{1}$$

where h denotes the water depth, Q the discharge, g the gravitational acceleration and B the channel width. Here t and x classically stand for time and space coordinates, and ∂_t, ∂_x denote the partial derivative w.r.t. t, x respectively.

These equations can be linearized around a set point $h = h_e$, $Q = Q_e$ and normalized to obtain the following equations:

$$\partial_{\tilde{t}} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \partial_{\tilde{x}} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

where the notation *tilde* $\tilde{\cdot}$ represents the normalized variable defined as:

$$\tilde{h} = \frac{h - h_e}{h_e},\ \tilde{Q} = \frac{Q - Q_e}{Q_e},\ \tilde{x} = \frac{x}{L},\ \tilde{t} = \frac{Q_e t}{BLh_e},$$

with L is the canal's length and $\alpha = \left(1 - \frac{gB^2h_e^3}{Q_e^2}\right)$. From now on, for the sake of simplicity, notation *tilde* will be omitted. The above equations can be transformed to the so-called *Riemann coordinates* (see [2]) to finally obtain a diagonal form of the model as follows:

$$\partial_t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{3}$$

The authors are with Control Systems Department, GIPSA-lab, Grenoble, France. E-mail: {Van-Thang.Pham, Didier.Georges, Gildas.Besançon}@gipsa-lab.inpg.fr

where:

$$a = h + Q/c_2, \quad b = h + Q/c_1, \tag{4}$$

and $c_1 = -1 + \sqrt{1-\alpha}$, $c_2 = -1 - \sqrt{1-\alpha}$. Since only subcritical flows will be considered in this paper, it will be assumed that $c_1 > 0 > c_2$. The boundary conditions act as the control:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(1,t) = x_a(t) \\ b(0,t) = x_b(t) \end{array} \right. . \tag{5}$$

The above equations correspond to a class of infinite-dimensional systems which received a large amount of attention in various previous works. It can for instance be noticed that the theory of *optimal control* is well developed for such linear infinite-dimensional systems [3], but it results in differential Riccati equations *in operator form* which are not easily solved in practice. On the other hand, a strict Lyapunov function was proposed in [2] for the same case of hyperbolic systems and used to derive a boundary control with stability.

In addition, motivated by the numerous advantages of the predictive control based on a Receding Horizon Optimal Control (RHOC) approach for finite-dimensional systems, even in the nonlinear case (see e.g. [4], [8]), the extension of such an approach to infinite-dimensional systems was also investigated, as in [6]. But this work concerned only the case of *distributed control* and did not provide full closed-loop stability result. The RHOC approach for *boundary control* of nonlinear system (1) was considered in [5], and solved by the variational calculus approach. A numerical solution of this control was also proposed and validated in simulation, but no proof of stability was provided.

In the present paper, an RHOC approach is proposed for system (3)-(5) *with a complete proof of stability*, which was not done so far to the best of our knowledge.

We firstly reformulate the boundary problem in the abstract form as presented in [3]. We then introduce the cost function which is an extension of the candidate Lyapunov function proposed in [2] and proven to be a Global Control Lyapunov Functional (GCLF) for our system. The semigroup approach is finally used to prove the existence of the optimal control, and the exponential stability of the feedback system is established by using the argument introduced in [6]. For the implementation, we use the variational calculus as in [5] to derive the adjoint states and obtain a two-point boundary value problem. This problem consists of PDEs which can be solved by different methods. In the present paper, we use the *lattice Boltzman* approach which has proven to be very

efficient and accurate to solve various PDEs (see [1], [7]), and in particular such Saint Venant equations (see [9]).

The paper is organized as follows: In section II, the complete proof of the exponential stability of the RHOC is established. Firstly, the boundary problem is transformed into abstract form and the proof for the existence of the optimal control by using the semigroup approach is given. Then, the principle of the RHOC is recalled and the exponential stability is proven. In section III, the numerical computation of the optimal solution is considered. The calculus of variations is carried out to obtain the optimal control according to the adjoint state, and the Lattice Boltmann Method (LBM) is used to solve both the Saint Venant equations and the adjoint ones. Finally, some simulation results are provided in section IV to validate the proposed control approach, and some conclusions end the paper in section V.

II. EXPONENTIAL STABILITY OF RHOC

A. Existence of the optimal control

1) Abstract setting: Here we consider the following problem in $[0,1]\times[0,T]$:

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t a - c_1\partial_x a = 0\\ \partial_t b - c_2\partial_x b = 0\end{array}\right., \tag{6}$$

where $c_1 > 0 > c_2$. The boundary and initial conditions are:

$$\left\{\begin{array}{l}a(1,t) = x_a(t)\\ b(0,t) = x_b(t)\end{array}\right. \text{ and } \left\{\begin{array}{l}a(x,0) = a_0(x)\\ b(x,0) = b_0(x)\end{array}\right. . \tag{7}$$

To guarantee the regularity of the solution, the state at the boundary is extended as:

$$\dot{x}_\alpha = u_\alpha, \quad \alpha = a, b, \tag{8}$$

where the control u_α is in $L_2([0,T],R)$. Now, we follow closely the procedure described in [3] to reformulate the boundary control form to the abstract form. We denote $w = [x_a \quad x_b]^T$, $u = [u_a \quad u_b]^T$ and $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

The state at the boundaries can be written as:

$$\begin{array}{c}\dot{w} = A_w w + B_w u, \quad w(0) = [a_0(1) \quad b_0(0)]^T,\\ A_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{array} \tag{9}$$

We define a new variable $v = (v_1 \quad v_2)^T$ as:

$$v(t) = z(t) - \mathcal{B}C_w w(t), \quad C_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

where $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(R^2, [L_2(0,1)]^2)$ is defined by

$$\mathcal{B}h = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} h, \forall h \in R^2. \tag{11}$$

We can notice that the variable v allow us to distribute the boundary control in the domain throughout the operator $\mathcal{B}$. Next, we define the operator:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}, \tag{12}$$

with domain:

$$\begin{array}{rcl} D(\mathcal{A}) & = & \{h = (h_1 \quad h_2)^T \in [L_2(0,1)]^2 | h \text{ is absolutely continuous, } \frac{dh}{dx} \in [L_2(0,1)]^2, \\ & & \text{and } h_1(1) = 0,\ h_2(0) = 0\}. \end{array} \tag{13}$$

Then:

$$\begin{array}{rcl} \dot{v}(t) & = & \mathcal{A}v(t) - \mathcal{B}C_w\dot{w}(t) + CC_w w(t), \\ v_1(1,t) & = & 0, \quad v_2(0,t) = 0, \\ v(.,0) & = & z_0 - \mathcal{B}C_w w(0) = v_0 \in D(\mathcal{A}). \end{array} \tag{14}$$

Where $C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 \end{pmatrix}$. We consider the extended state space $Z^e := R^2 \oplus [L_2(0,1)]^2$ and the extended state $z^e(t) = (w(t) \quad v(t))^T$. The problem now has the abstract form:

$$\dot{z}^e(t) = \mathcal{A}^e z^e(t) + \mathcal{B}^e u(t), \quad z^e(0) = z_0^e, \tag{15}$$

where:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^e & = & \begin{pmatrix} A_w & 0 \\ CC_w - \mathcal{B}C_w A_w & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \\ D(\mathcal{A}^e) & = & R^2 \oplus D(\mathcal{A}), \\ \mathcal{B}^e & = & \begin{pmatrix} B_w \\ -\mathcal{B}C_w B_w \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}(R^2, Z^e), \\ z_0^e & = & \begin{pmatrix} w(0) \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{array} \tag{16}$$

It is well known that $\mathcal{A}$ is an infinitesimal generator of a C_0-semigroup and by Lemma 3.2.2 in [3] (page 114), $\mathcal{A}^e$ is an infinitesimal generator of a C_0-semigroup.

2) Linear quadratic optimal control: Now, we consider the optimal control of system (15) in a finite horizon $[0,T]$ with the cost function defined as:

$$\begin{array}{rl} J(z_0^e; u) = & \int_0^T \Big[\frac{\mu}{2} \int_0^1 (Ae^{\mu x/c_1} a^2(x,t) + Be^{\mu x/c_2} b^2(x,t))dx \\ & \quad + \frac{\mu}{2} w^T P w + u^T R u \Big] dt \\ & + \int_0^1 [Ae^{\mu x/c_1} a^2(x,T) + Be^{\mu x/c_2} b^2(x,T)]dx \\ & + w(T)^T P w(T), \end{array} \tag{17}$$

where μ, A, B are positive scalars and $P = P^T > 0$, $R = R^T > 0$. This function inspires the candidate Lyapunov function proposed in [2] and can be reformulated in the standard form [3]:

$$\begin{array}{rl} J(z_0^e; u) = & \int_0^T (\langle y^e(t), y^e(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R}u(t)\rangle)dt \\ & + \langle z^e(T), \mathcal{M}z^e(T)\rangle, \end{array} \tag{18}$$

where the inner product in the Hibert space Z^e is defined as:

$$\begin{array}{rl} \left\langle \begin{pmatrix} x_{a1} \\ x_{b1} \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{a2} \\ x_{b2} \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = & \begin{pmatrix} x_{a1} \\ x_{b1} \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} x_{a2} \\ x_{b2} \end{pmatrix} \\ & + \int_0^1 [Ae^{\mu x/c_1} a_1 a_2 + Be^{\mu x/c_2} b_1 b_2]dx. \end{array} \tag{19}$$

Then, forms (17) and (18) are equivalent with y^e, $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ defined as:

$$\begin{aligned} &y^e(t) = \mathcal{C}^e z^e(t), \quad \mathcal{C}^e = \sqrt{\tfrac{\mu}{2}} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B}C_w & I \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}(Z^e), \\ &\mathcal{R} = R, \quad \mathcal{M} = \tfrac{2}{\mu}\mathcal{C}^{e*}\mathcal{C}^e \in \mathfrak{L}(Z^e), \quad \mathcal{M}^* = \mathcal{M} > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

By applying Theorem 6.1.4 (page 272), Lemma 6.1.7 (page 277) and Theorem 6.1.9 (page 281) of [3], we have the following results:

- There exists a unique $u_{min}(.; z_0^e) \in L_2([0,T], R^2)$ such that $J(z_0^e; u_{min}(.; z_0^e)) \leq J(z_0^e; u)$ for all $u \in L_2([0,T], R^2)$.
- The optimal control is determined by:

$$u_{min}(t; z_0^e) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{e*}\Pi(t) z_{min}^e(t; z_0^e), \; \forall t \in [0,T], \tag{21}$$

where $\Pi(.)$ satisfies the operator differential Riccati equation:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\langle z_2, \Pi(t) z_1\rangle &= -\langle z_2, \Pi(t)\mathcal{A}^e z_1\rangle \\ &\quad -\langle \mathcal{A}^e z_2, \Pi(t) z_1\rangle - \langle \mathcal{C}^e z_2, \mathcal{C}^e z_1\rangle \\ &\quad +\langle \Pi(t)\mathcal{B}^e\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{e*}\Pi(t) z_2, z_1\rangle, \\ \Pi(T) &= \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{22}$$

for all $t \in (0,T)$ and z_1, $z_2 \in D(\mathcal{A}^e)$.

- The minimum cost named the value function $V(z_0^e)$ is

$$V(z_0^e) = \min_{u \in L_2([0,T],R^2)} J(z_0^e; u) = \langle z_0^e, \Pi(0) z_0^e\rangle. \tag{23}$$

- $\Pi(t)$ is a nonnegative operator for all $t \in [0,T]$.

Now, we will show that $\Pi(0)$ is positive. To this purpose, we have to prove that $V(z_0^e) = 0$ if and only if $z_0^e = 0$. Obviously, we have $V(z_0^e = 0) = 0$. Conversely, if we have $V(z_0^e) = 0$, so $\langle y_{min}^e(t), y_{min}^e(t)\rangle = 0$ almost everywhere in $[0,T]$. But $y_{min}^e(t)$ is continuous in t so $y_{min}^e(t) = 0, \forall t \in [0,T]$. As a consequence, $z_{min}(t) = 0$, $w_{min}(t) = 0, \forall t \in [0,T]$ which implies that $z_{min}^e(t) = 0, \forall t \in [0,T]$. Particularly, $z_{min}^e(0) = z_0^e = 0$. This means that $V(z_0^e)$ defines a norm in Z^e.

B. Stability of RHOC

1) Principle of RHOC: Let us consider system (15) and recall for it the principle of RHOC:

- At each time t, we obtain the current state $z^e(t)$.
- Then, for a given prediction time T and the cost function defined by (17), we compute the optimal solution of the problem:

$$\min_{\bar{u} \in L_2([t,t+T],R^2)} J(z^e(t); \bar{u}) \quad \text{s.t.} \begin{cases} \dot{\bar{z}}^e(\tau) = \mathcal{A}^e \bar{z}^e(\tau) + \mathcal{B}^e \bar{u}(\tau), \forall \tau \in [t, t+T] \\ \bar{z}^e(t) = z^e(t) \\ \bar{y}^e(\tau) = \mathcal{C}^e \bar{z}^e(\tau), \forall \tau \in [t, t+T] \end{cases}, \tag{24}$$

  where the notation $\bar{.}$ stands for the predicted variables.
- The first part of the optimal control is applied on the system in period $[t, t+\sigma]$ for a small σ, and the procedure restarts at $t = t + \sigma$.

2) Stability: Let us denote

$$\begin{aligned} E(z^e(t)) &= \langle z^e(t), \mathcal{M} z^e(t)\rangle, \\ F(z^e(t), u(t)) &= \langle y^e(t), y^e(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R} u(t)\rangle. \end{aligned} \tag{25}$$

We will show that if E is a GCLF, which means for all initial condition z_0^e there exists a control $u_K(\tau)$ so that:

$$\dot{E}(z^e(\tau)) + F(z^e(\tau), u_K(\tau)) \leq 0, \tag{26}$$

along the trajectory of (15), then the RHOC approach guarantees the exponential stability of the closed-loop system.

Firstly, we will prove that the value function decreases. It is useful to notice the fact that there is no difference between the model and the plant, so $z^e(\tau) = z^{e*}(\tau; z^e(t))$ for all $\tau \in [t, t+\sigma]$, where the notation * stands for the optimal variables.

At time $t + \sigma$, we consider the suboptimal solution:

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} u^*(\tau; z^e(t)) & \tau \in [t+\sigma, t+T] \\ u_K(\tau) & \tau \in [t+T, t+T+\sigma] \end{cases}. \tag{27}$$

The trajectory is then $\tilde{z}^e$. The corresponding cost function becomes:

$$\begin{aligned} &J(z^e(t+\sigma); \tilde{u}) \\ = &\int_{t+\sigma}^{t+T+\sigma} F(\tilde{z}^e(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau + E(\tilde{z}^e(t+T+\sigma)) \\ = &-\int_{t}^{t+\sigma} F(z^{e*}(\tau; z^e(t)), u^*(\tau; z^e(t))) d\tau + V(z^e(t)) \\ &+ \int_{t+T}^{t+T+\sigma} F(\tilde{z}^e(\tau), u_K(\tau)) d\tau \\ &+ E(\tilde{z}^e(t+T+\sigma)) - E(\tilde{z}^e(t+T)). \end{aligned} \tag{28}$$

However we have $V(z^e(t+\sigma)) \leq J(z^e(t+\sigma); \tilde{u}(.))$ and

$$\int_{t+T}^{t+T+\sigma} F(\tilde{z}^e(\tau), u_K(\tau)) d\tau + E(\tilde{z}^e(t+T+\sigma)) - E(\tilde{z}^e(t+T)) \leq 0, \tag{29}$$

because of (26) then:

$$V(z^e(t+\sigma)) - V(z^e(t)) \leq -\int_{t}^{t+\sigma} F(z^{e*}(\tau; z^e(t)), u^*(\tau; z^e(t))) d\tau. \tag{30}$$

This means that $V(t)$ decreases.

Secondly, we will show that V decreases exponentially. It can be noticed from (25) and (17) that $F \geq \mu/2E$, so (30) leads to:

$$V(z^e(t+\sigma)) - V(z^e(t)) \leq -\mu/2 \int_{t}^{t+\sigma} E(z^e(\tau)) d\tau. \tag{31}$$

For each $z^e(\tau)$, $\tau \in [t, t+\sigma]$, the feedback control u_K that satisfies (26) can be applied from τ to $\tau + T$ and the

corresponding trajectory is z_K^e. By integration, we have:

$$\int_{\tau}^{\tau+T} F(z_K^e(s), u_K(s))ds + E(z_K^e(\tau+T)) - E(z^e(\tau)) \leq 0, \quad (32)$$

which means that:

$$E(z^e(\tau)) \geq \int_{\tau}^{\tau+T} F(z_K^e(s), u_K(s))ds + E(z_K^e(\tau+T)) \geq V(z^e(\tau)). \quad (33)$$

Combining (31) and (33), we get:

$$V(z^e(t+\sigma)) - V(z^e(t)) \leq -\mu/2 \int_{t}^{t+\sigma} V(z^e(\tau))d\tau. \quad (34)$$

By taking the limit when $\sigma \to 0$, we obtain:

$$\dot{V} \leq -\mu/2V, \quad (35)$$

which implies the exponential convergence with rate $\mu/2$ of the value function. But this function is also a norm in Z^e, so the system is exponentially stable.

3) The Global control Lyapunov function: We show that the functions E and F defined by the cost function (17) satisfy (26). To prove this, we consider feedback control of the state at the boundaries:

$$u_K(\tau) = Kw(\tau), \quad (36)$$

such that $A_K = A_w + B_w K$ is stable. We have:

$$\begin{aligned} \dot{E} + F &= -\tfrac{\mu}{2}\int_0^1 [Ae^{\mu x/c_1}a^2(x,t) + Be^{\mu x/c_2}b^2(x,t)]dx \\ &\quad -Ac_1a^2(0,t) + Ac_1e^{\mu/c_1}a^2(1,t) \\ &\quad -Bc_2b^2(0,t) + Bc_2e^{\mu/c_2}b^2(1,t) \\ &\quad +w^TK^TRKw + w^T(A_K^TP + PA_K)w \\ &\quad +\tfrac{\mu}{2}w^TPw \\ &\leq w^T\begin{pmatrix} Ac_1e^{\mu/c_1} & 0 \\ 0 & -Bc_2 \end{pmatrix} w \\ &\quad +w^TK^TRKw + w^T(A_K^TP + PA_K)w \\ &\quad +\tfrac{\mu}{2}w^TPw. \end{aligned} \quad (37)$$

The problem is to choose the parameters so that:

$$Q + (A_K + \tfrac{\mu}{4}I)^TP + P(A_K + \tfrac{\mu}{4}I))^T \leq 0, \quad (38)$$

with

$$Q = \begin{pmatrix} Ac_1e^{\mu/c_1} & 0 \\ 0 & -Bc_2 \end{pmatrix} + K^TRK > 0. \quad (39)$$

If μ is chosen so that $\mu < -4\lambda_{max}(A_K)$, where $\lambda_{max}(.)$ denotes the the maximal real part of the eigenvalue of a matrix, then the Lyapunov equation:

$$Q + (A_K + \tfrac{\mu}{4}I)^TP + P(A_K + \tfrac{\mu}{4}I))^T = 0, \quad (40)$$

has a unique solution $P = P^T > 0$. As consequence (26) holds true. So, the cost function (17) guarantees the exponential stability of the RHOC.

III. NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMAL PROBLEM

In this section, we show that the variational calculus can be used to calculate the optimal control in function of the adjoint state and then a numerical scheme can be used to solve the optimal problem.

A. Variational calculus approach

We recall the system:

$$\begin{gathered} \partial_t a - c_1\partial_x a = 0,\ \partial_t b - c_2\partial_x b = 0, \\ \dot{w} = A_w w + B_w u,\ \begin{pmatrix} a(1,t) \\ b(0,t) \end{pmatrix} = C_w w, \\ w(0) = [a_0(1) \quad b_0(0)]^T,\ a(x,0) = a_0(x),\ b(x,0) = b_0(x), \end{gathered} \quad (41)$$

with the cost function determined by (17). We introduce the Lagrangian of the problem as follows:

$$\begin{aligned} L = &\int_0^T\int_0^1 \tfrac{\mu}{2}[Ae^{\mu x/c_1}a^2(x,t) + Be^{\mu x/c_2}b^2(x,t) \\ &\quad +\lambda_a(c_1\partial_x a(x,t) - \partial_t a(x,t)) \\ &\quad +\lambda_b(c_2\partial_x b(x,t) - \partial_t b(x,t))]dxdt \\ &+\int_0^T [\tfrac{\mu}{2}w^TPw + u^TRu \\ &\quad +\gamma^T(A_w w + B_w u - \dot{w})]dt \\ &+\int_0^1 [Ae^{\mu x/c_1}a^2(x,T) + Be^{\mu x/c_2}b^2(x,T)]dx \\ &+w^T(T)Pw(T), \end{aligned}$$

where λ_a and λ_b are the adjoint states corresponding to a and b, γ the adjoint states corresponding to w.

The first variation of this function must be zero at the optimal solution (since the controls are not bounded).

Integrating by part leads to:

$$\begin{aligned} L = &\int_0^T\int_0^1 \tfrac{\mu}{2}[Ae^{\mu x/c_1}a^2 + Be^{\mu x/c_2}b^2 - c_1a\partial_x\lambda_a \\ &\quad +a\partial_t\lambda_a - c_2b\partial_x\lambda_b + b\partial_t\lambda_b]dxdt \\ &+\int_0^T [c_1a\lambda_a]_0^1dt - \int_0^1 [a\lambda_a]_0^T dx \\ &+\int_0^T [c_2b\lambda_b]_0^1dt - \int_0^1 [b\lambda_b]_0^T dx \\ &+\int_0^T [\tfrac{\mu}{2}w^TPw + u^TRu \\ &\quad +\gamma^T(A_w w + B_w u) + w^T\dot{\gamma}]dt \\ &-[\gamma^Tw]_0^T \\ &+\int_0^1 [Ae^{\mu x/c_1}a^2(x,T) + Be^{\mu x/c_2}b^2(x,T)]dx \\ &+w^T(T)Pw(T). \end{aligned}$$

Then:

• First variations of $a(x,t)$ and $b(x,t)$ give the dynamics of the adjoint states:

$$\begin{cases} \partial_t\lambda_a - c_1\partial_x\lambda_a + \mu Aae^{\mu x/c_1} = 0 \\ \partial_t\lambda_b - c_2\partial_x\lambda_b + \mu Bbe^{\mu x/c_2} = 0 \end{cases}. \quad (42)$$

• First variations of $a(x,T)$, $b(x,T)$ and $w(T)$ impose the condition at $t=T$ for the adjoint states:

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_a(x,T) = 2a(x,T)Ae^{\mu x/c_1} \\ \lambda_b(x,T) = 2b(x,T)Be^{\mu x/c_2} \\ \gamma(T) = 2Pw(T) \end{array}\right. . \tag{43}$$

• First variations of $a(0,t)$, $a(1,t)$ and $b(0,t)$, $b(1,t)$ give the boundary conditions:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} c_1\lambda_a(1,t) \\ -c_2\lambda_b(0,t) \end{pmatrix} + \mu w^T P + \gamma^T A_w + \dot{\gamma}^T = 0, \\ \lambda_a(0,t) = 0, \quad \lambda_b(1,t) = 0. \end{array} \tag{44}$$

• First variations of u give the optimal condition:

$$u = 1/2R^{-1}B_w^T\gamma. \tag{45}$$

The gradient of the cost function which is used later in the steepest descend method is given by:

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \int_0^T [2R^T u + B_w^T\gamma]dt. \tag{46}$$

B. Lattice Boltzmann method (LBM)

The LBM starts to attract the researchers thanks to its powerful capacities to simulate the fluid flows and other physical phenomena (see [1]).

In this method, we consider the movement of the particles on a regular grid. The particles at point (x,t) are split in several quantities $f_i(x,t)$ which has the velocities v_i. The underlying algorithm consists of the alternative of two phases: collision phase and streaming phase. In the collision phase, the particles enter the site x at instant t $f^{in}(x,t)$ collide and result a new distribution $f_i^{out}(x,t)$. Then during the period $[t, t+\Delta t]$ of the streaming phase, the new distribution moves to the lattice site in the direction of the velocity v_i. These two phases can be formulated as:

$$\begin{array}{ll} \text{Collision :} & f_i^{out}(x,t) = f_i^{in}(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i^{in}), \\ \text{Streaming :} & f_i^{in}(x+v_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i^{out}(x,t), \end{array} \tag{47}$$

where Δx is the lattice spacing and Δt the time step. The collision phase above is based on the *Bhatnagar-Gross-Krook* (BGK) approximation with a single relaxation time τ and the so-called equilibrium distribution functions f_i^{eq} whose expression depends on the physical process to be described. We shall specify its form below, for the case of a scalar conservation law. To guarantee the stability of this explicit scheme, τ must be larger than 0.5.

Equations (47) may be combined to obtain the evolution equation:

$$f_i(x+v_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i), \tag{48}$$

where f stands for f^{in}.

C. Application of LBM to a scalar conservation law

The following problem is considered:

$$\partial_t\lambda + c\partial_x\lambda = 0, \quad c > 0, \tag{49}$$

with the initial condition $\lambda(x,0) = \lambda_0(x)$. As $c > 0$, only the boundary condition at $x = 0$ needs to be defined as $\lambda(0,t) = u(t)$. We propose a lattice with 2 velocities as in Fig. 1 where $v_0 = 0$ and $v_1 = v = \Delta x/\Delta t$.

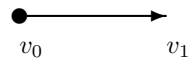

Fig. 1. Two velocities lattice ($c > 0$)

The equilibrium distribution function must satisfy:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_0^{eq} + f_1^{eq} & = & \lambda \\ v f_1^{eq} & = & c\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f_0^{eq} & = & \left(1 - \frac{c}{v}\right)\lambda \\ f_1^{eq} & = & \frac{c}{v}\lambda \end{array}\right. , \tag{50}$$

and λ is calculated by:

$$\lambda = \sum_i f_i = f_0 + f_1. \tag{51}$$

With this equilibrium distribution function, the lattice Boltzmann method can be proved to solve (49) to the precision $(\Delta x)^2$ and $(\Delta t)^2$ (see [7]).

In this simple case, the evolution equation (48) has the form:

$$\begin{array}{rcl} f_0(x,t+\Delta t) & = & f_0(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_0^{eq} - f_0), \\ f_1(x+v\Delta t, t+\Delta t) & = & f_1(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_1^{eq} - f_1). \end{array} \tag{52}$$

When a source term F exists in the right-hand side of (49), these equations will take the form:

$$\begin{array}{rcl} f_0(x,t+\Delta t) & = & f_0(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_0^{eq} - f_0) + \Delta t F, \\ f_1(x+v\Delta t, t+\Delta t) & = & f_1(x,t) + \frac{1}{\tau}(f_1^{eq} - f_1). \end{array} \tag{53}$$

The boundary condition at point $x = 0$ is guaranteed by imposing:

$$f_1(0,t) = u(t) - f_0(0,t). \tag{54}$$

In the case of $c < 0$ we use the lattice where $v_0 = 0$ and $v_1 = -v = -\Delta x/\Delta t$.

D. Computation of the numerical solution

We use here the steepest descend method to solve the problem. The algorithm is described below:

- Choose an initial estimation of the solution $u^{(0)}$.
- Solve the system (41) from $t = 0$ to $t = T$ by using the lattice Boltzmann method for the DPE and using the Euler explicit scheme for the ODE.
- Use the final state at $t = T$ as initial condition (43) and solve the adjoint state (42), (44) from $t = T$ to $t = 0$ also by using the lattice Boltzmann method for the PDE and using the Euler explicit scheme for the ODE.
- Update the estimation by the steepest descend method

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - K_u.S(u^{(k)}), \tag{55}$$

  where $S(u^{(k)}) = 2Ru^{(k)} + B_w^T\gamma$.
- Repeat step 2 while the norm of the gradient (46) is larger than a tolerance ϵ.

IV. SIMULATION VALIDATION

In order to illustrate and validate the proposed control technique and numerical implementation scheme, a simulation has been carried out with parameters of Table I.

TABLE I

SIMULATION PARAMETERS

Parameters	Values	Parameters	Values
c_1	1.5	c_2	-3
Δx	0.05	Δt	0.01
τ	0.7	μ	1
P	$\begin{pmatrix} 6.51 & 0 \\ 0 & 6.67 \end{pmatrix}$	T	$15\Delta t$
R	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	K_u	$\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$
A, B	3	ϵ	10^{-5}

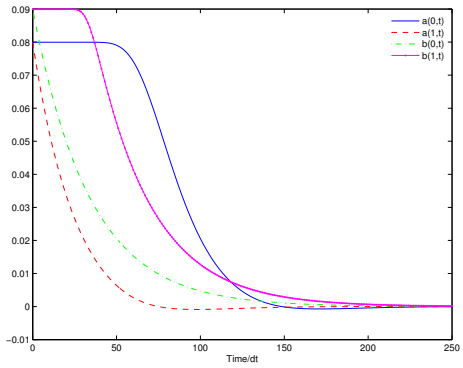

Fig. 2. State values at the boundaries

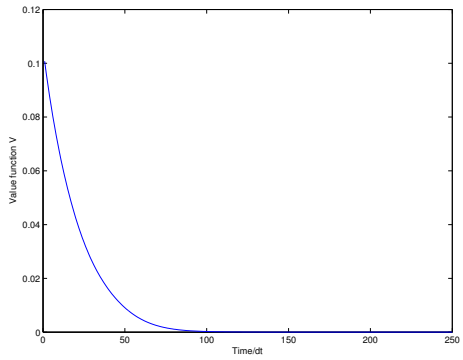

Fig. 3. Convergence of the value function

The results are presented in Fig. 2-Fig. 4. We can observe from Fig. 2 that the state of the system converges to the origin, and from Fig. 3 that the value function converges exponentially. To calculate the rate of the convergence, we can notice that (35) in discrete form is:

$$\frac{V(t+\Delta t)}{V(t)} \leq (1 - \mu/2\Delta t) = \alpha \tag{56}$$

These values are plotted in Fig. 4 and it can be seen that relation (56) is verified.

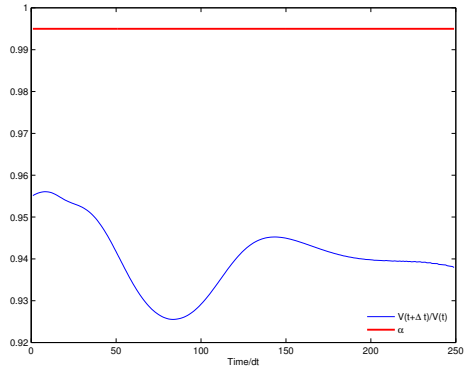

Fig. 4. Convergence rate of the value function, in comparison with the theoretical value

V. CONCLUSION

In this paper, a complete proof of the exponential stability of RHOC for a system of conservation laws is established and validated by simulation. The existence of the optimal solution is based on the semigroup approach and the stability is based on a GCLF. The infinite-dimensional optimal control problem was solved by using calculus of variations. Finally, a numerical simulation based on the Lattice Boltzmann method demonstrated the effectiveness of the here-proposed approach. The theory developed here encourages the implementation of the RHOC for a real canal upto when the linearized model is still valid.

Our future objective is to extend this technique for coupled systems described by partial differential equations such as network of channel. Another goal is to study the stability of RHOC for a *nonlinear* system. The advantages of the RHOC in terms of performance and robustness are also under investigation.

REFERENCES

[1] B. Chopard and M. Droz. *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press, 2005.

[2] J.M. Coron, B. d'Andréa Novel, and G. Bastin. A strict lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. *IEEE transactions on automatic control*, 52:2 – 11, 2007.

[3] R.F. Curtain and H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, 1995.

[4] R. Findensen and F. Allgower. An introduction to nonlinear model predictive control. In *21st Benelux Meeting on Systems and Control*, Veldhoven, 2002.

[5] D. Georges. Infinite-dimensional nonlinear predictive control design for open-channel hydraulic systems. *Networks and Heterogeneous Media*, 4(2):1–18, 2009.

[6] K. Ito and K. Funisch. Receding horizon optimal control for infinite dimensional systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 8:741–760, June 2002.

[7] M. Junk and M. Rheinlainder. Regular and multiscale expansions of a lattice boltzmann method. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 8, 2008.

[8] D. Q. Mayne and H. Michalska. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(7):814–824, 1990.

[9] V.T. Pham, B. Chopard, L. Lefèvre, Diemer Anda Ondo, and Eduardo Mendes. Study of the 1d lattice boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network. *Journal of Computational Physics*, 229:7373–7400, 2010.

Appendix B

Paper submitted to SIAM Journal on Control and Optimization

INFINITE-DIMENSIONAL PREDICTIVE CONTROL FOR HYPERBOLIC SYSTEMS

VAN THANG PHAM†, DIDIER GEORGES†, AND GILDAS BESANÇON†

Abstract. This paper presents a predictive control scheme, based on the Receding Horizon Optimal Control (RHOC) approach with *zero terminal constraint*, to guarantee the closed-loop stability of linear 2×2 hyperbolic systems with boundary control. The extension of this control scheme to networks of such hyperbolic systems is also considered. The boundary control problem is first reformulated in the abstract form for which the optimal control with terminal constraint was well studied. These results are then used in the RHOC scheme to give a complete proof of stability of the closed-loop system. For the implementation, the calculus of variations is used to derive the adjoint state which is then discretized and solved together with the state to obtain the optimal control. The analysis is applied to open-channel hydraulic systems in cases of single pool and multi-pools in cascade. Finally, simulations are carried out to illustrate the effectiveness the here-proposed approach.

Key words. Receding Horizon Optimal Control, Hyperbolic equations, Boundary Control, Semi-group, Open Channel Systems, Saint-Venant Equations

AMS subject classifications. 35Q93, 35Q35, 35F15, 35L65, 93D05, 93C20

1. Introduction. Our work aims to exploit the numerous advantages of the Receding Horizon Optimal Control (RHOC) in the class of infinite-dimensional systems described by 2×2 hyperbolic equations:

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \lambda_1(x)\partial_x y_1 + \gamma_1(x) y_1 + \delta_1(x) y_2 \\ \partial_t y_2 = \lambda_2(x)\partial_x y_2 + \gamma_2(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 \end{cases}, (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty), \tag{1.1}$$

with boundary controls:

$$y_1(L,t) = g_1(t) + \alpha y_2(L,t), \quad y_2(0,t) = g_2(t) + \beta y_1(0,t). \tag{1.2}$$

The RHOC was well studied for finite-dimensional systems, even in the nonlinear case (see e.g. [10] and [20]). Among its advantages, one can mention the ability to obtain a guaranteed stability. This can be done either by using an appropriate terminal cost or by imposing the terminal state to be at the origin. Both of these approaches were generalized for infinite-dimensional systems. In [14], the proof of the exponential stability of RHOC for systems with distributed control was established by using a Control Lyapunov Functional (CLF) as a terminal cost, but no proof of the existence of the optimal control was given. Our recent works ([23], [21] and [22]) combined the arguments of [14] with the Lyapunov functional proposed by [6] for linear boundary control hyperbolic systems to get a complete proof of the exponential stability of RHOC scheme. The second approach for *boundary control* of nonlinear hyperbolic systems was considered in [12], and solved by the calculus of variations approach. A numerical solution of this control was also proposed and validated in simulation, but no proof of stability was provided.

The first approach is more flexible in terms of numerical implementation but strongly depends on the existence of the CLF. Some forms of this functional were considered in the literature. In [14], a quadratic CLF was proposed for a class of

†Control Systems Department, Gipsa-lab Grenoble Institute of Technology-CNRS, ENSE3, BP 46 38402 St Martin d'Heres, France {Van-Thang.Pham, Didier.Georges, Gildas.Besancon}@gipsa-lab.inp-grenoble.fr

semi-linear infinite-dimensional systems. In case that (1.1) is dissipative, a CLF can be the energy of the system (as in [25]) or a weighted quadratic CLF (as in [29]). In [3] and [4], a weighted quadratic CLF was also used to stabilize system (1.1) for non-dissipative system but with constant coefficients. For general case (non-dissipative and non-constant coefficients), the authors of [2] showed that the existence of weighting functions used to form a CLF of system (1.1) depends on the existence of the solution of a *nonlinear ordinary differential equation*. It appears that the latter is not easy to check either numerically or analytically, which means that the stabilization of (1.1) is not completely solved.

In this paper, the terminal constraint approach will be used to obtain a guaranteed stability of (1.1). An extension of this approach for systems made of n subsystems of type (1.1) cascaded via boundary conditions will be also considered. One of the disadvantages pointed out in [9] is that this approach requires the feasibility of the problem in finite time. However, for the considered system (1.1) and the cascaded system, by relying on the method used in [5], this feasibility can be obtained. The existence of the optimal control is then shown by [8]. By combining these results and the arguments used in case of finite-dimensional systems, a proof of the stabilization by RHOC scheme can be given.

The paper is structured as follows: in the next section, the stability of the RHOC with zero terminal constraint for linear infinite-dimensional systems is established. The calculus of variations is then performed to derive the optimal control in function of the adjoint state to be used later in the numerical scheme. This approach is then applied to the hyperbolic boundary control problem in section 3. To this purpose, this problem is firstly rewritten in the abstract form, then RHOC is applied to get the stability property. The same analysis is performed for cascaded hyperbolic systems in section 4. Section 5 is devoted to a numerical method used to solve the optimal problem. The state and the adjoint state obtained by the calculus of variations approach are discretized by the finite element method. The proposed theory is finally applied to open-channel hydraulic systems in section 6, where some simulations results are given to demonstrate the effectiveness of the approach. The paper ends with some conclusions and perspectives.

2. Exponential stability of RHOC with zero terminal constraint.

2.1. Principle of RHOC. Let us consider a system in abstract form:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad z(0) = z_0, \quad y(t) = \mathcal{C}z(t), \tag{2.1}$$

where Z and U are two Hilbert spaces, $\mathcal{A}$ is the infinitesimal generator of a C_0-semi-group $\Phi(t)$ on Z with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(Z)$. The variables z, u and y are the state, the control and the output respectively. We recall the principle of RHOC:

- At each time t, we obtain the current state $z(t)$.
- Then, for a given prediction time T and a cost function J, we compute the optimal solution of the problem:

$$\min_{\bar{u} \in \mathbf{L}_2([t,t+T],U)} J(z(t); \bar{u})$$
$$\text{s.t. } \dot{\bar{z}}(\tau) = \mathcal{A}\bar{z}(\tau) + \mathcal{B}\bar{u}(\tau), \forall \tau \in [t, t+T], \quad \bar{z}(t) = z(t), \quad \bar{z}(t+T) = 0,$$

  where the notation $\bar{\cdot}$ stands for the predicted variables.
- The first part of the optimal control is applied on the system in period $[t, t+\sigma]$ for a small σ, and the procedure restarts at $t + \sigma$.

2.2. Stability lemma. We introduce in this section a generalization of Lemma 5.1.2 of [7] which allows us to prove the stability of the RHOC scheme.

Given a Hilbert space Z, a positive constant σ and an evolution operator $U : \Delta(\sigma) \to \mathcal{L}(Z)$, where $\Delta(\sigma) = \{(t,s); 0 \le s \le t \le \sigma\}$. We recall that an evolution operator has the following properties (see [7], p. 117):

i. $U(s,s) = I$, $s \in [0,\sigma]$.
ii. $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$, $0 \le s \le t \le \sigma$.
iii. $U(\cdot,s)$ is strongly continuous on $[s,\sigma]$ and $U(t,\cdot)$ is strongly continuous on $[0,t]$.

Suppose that $\|U(t,s)\| \le M_U$, $(t,s) \in \Delta(\sigma)$ with $M_U > 1$. Define the operator $H : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(Z)$ as:

$$H(t)z = U(\{t\},0)\, U^{[t]}(\sigma,0)z, \quad z \in Z, \tag{2.2}$$

where $[t]$ denote the integer satisfying $[t] \le \frac{t}{\sigma} < [t]+1$ and $\{t\} = t - [t]\sigma$. We have the following lemma:

LEMMA 2.1. *If for every $z \in Z$ there exists a positive constant $\gamma_z < \infty$ such that:*

$$\int_0^\infty \|H(s)z\|^2 ds \le \gamma_z, \tag{2.3}$$

then $H(t)$ is exponentially stable, which means that $\|H(t)\| \le M_0 e^{-\omega_0 t}$, for some positive constants M_0 and ω_0.

Proof. We have firstly

$$\|H(t)\| \le (M_U)^{[t]+1},\ t \ge 0. \tag{2.4}$$

For every $n \ge 1$ the operator Q_n defined by $Q_n z := 1_{[0,n]} H(t)z$, is a bounded linear operator from Z to $\mathbf{L}_2([0,\infty);Z)$ where $1_{[0,n]}$ denotes the function that is equal to 1 in $[0,n]$ and to 0 elsewhere. From (2.3), we have:

$$\|Q_n z\|^2_{\mathbf{L}_2([0,\infty),Z)} = \int_0^n \|H(s)z\|^2 ds \le \gamma_z. \tag{2.5}$$

This means that the family $\{Q_n z, n \ge 1\}$ is bounded for each z, and thus by the Banach Steinhaus Theorem (see Theorem A.3.19 in [7], p.586), $\|Q_n\|_{\mathbf{L}_2([0,\infty),Z)}$ is uniformly bounded in n. It follows that $\|Q_n\|_{\mathbf{L}_2([0,\infty),Z)} \le \gamma$ for some γ independent of n, hence

$$\int_0^n \|H(s)z\|^2 ds \le \gamma^2 \|z\|^2. \tag{2.6}$$

We now show that $\|H(k\sigma)\|$ is bounded for all $k \ge 0$. For $k = 0$, $\|H(k\sigma)\| = 1$. For $k \ge 1$, we have

$$\int_0^{k\sigma} M_U^{-\frac{2s}{\sigma}} \|H(k\sigma)z\|^2 ds = \frac{\sigma(1 - M_U^{-2k})}{2\ln M_U} \|H(k\sigma)z\|^2.$$

On the other hand, by using Property ii. of $U(t,s)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{k\sigma} M_U^{-\frac{2s}{\sigma}} \|H(k\sigma)z\|^2 ds \\ = & \int_0^{k\sigma} M_U^{-\frac{2s}{\sigma}} \left\| U^{[s]}(\sigma,0).U(\sigma,\sigma-\{s\})\, U(\sigma-\{s\},0)\, U^{k-[s]-1}(\sigma,0)z \right\|^2 ds \\ \le & \int_0^{k\sigma} M_U^{-\frac{2s}{\sigma}} M_U^{2([s]+1)} \|H(k\sigma - s)z\|^2 ds \le M_U^2 \int_0^{k\sigma} \|H(s)z\|^2 ds \le M_U^2 \gamma^2 \|z\|^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

As a consequence

$$\|H(k\sigma)\|^2 \leq \frac{2M_U^2\gamma^2 \ln M_U}{\sigma(1-M_U^{-2k})} \leq \frac{2M_U^2\gamma^2 \ln M_U}{\sigma(1-M_U^{-2})}. \tag{2.8}$$

Then for some $M_H > 0$ and all $k \geq 0$, we obtain:

$$\|H(k\sigma)\| \leq M_H, \tag{2.9}$$

and, moreover,

$$\begin{aligned} & k\sigma\|H(k\sigma)z\|^2 = \int_0^{k\sigma} \|H(k\sigma)z\|^2 ds \\ = & \int_0^{k\sigma} \left\| U^{[s]}(\sigma,0)U\left(\sigma,\sigma-\{s\}\right)U\left(\sigma-\{s\},0\right)U^{k-[s]-1}(\sigma,0)z\right\|^2 ds \\ = & \int_0^{k\sigma} \left\| H\left([s]\sigma\right)U\left(\sigma,\sigma-\{s\}\right)H(k\sigma-s)z\right\|^2 ds \\ \leq & M_H^2 M_U^2 \int_0^{k\sigma} \left\| H(k\sigma-s)z\right\|^2 ds \leq M_H^2 M_U^2 \gamma^2 \|z\|^2. \end{aligned}$$

Hence

$$\|H(k\sigma)\| \leq \frac{M_H M_U \gamma}{\sqrt{k\sigma}}, \tag{2.10}$$

which implies that there exists $k_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\|H(k\sigma)\| < 1 \quad \text{for all } k \geq k_0. \tag{2.11}$$

In the sequel, we denote $\bar{H}(k) = H(k\sigma)$ for $k \in \mathbb{N}$. Let $\gamma = \|\bar{H}(k_0)\| < 1$, then

$$\|\bar{H}(nk_0)\| \leq \|\bar{H}(k_0)\|^n = \gamma^n, \quad \forall n \geq 0. \tag{2.12}$$

Let $C = \max\limits_{0\leq k\leq k_0} \|\bar{H}(k)\|$. For each k, there exists n such that $nk_0 \leq k < (n+1)k_0$. Then

$$\|\bar{H}(k)\| = \|\bar{H}(nk_0)\bar{H}(k-nk_0)\| \leq C\gamma^n \leq C\gamma^{k/k_0-1} = \tilde{M}\tilde{\gamma}^k, \tag{2.13}$$

where $\tilde{M} = C\gamma^{-1}$ and $\tilde{\gamma} = \gamma^{1/k_0} < 1$. Consider now $t > 0$,

$$\|H(t)\| = \|U\left(\{t\},0\right)H\left([t]\sigma\right)\| \leq M_U\tilde{M}\tilde{\gamma}^{[t]} \leq M_U\tilde{M}\tilde{\gamma}^{t/\sigma-1} = M_0 e^{-\omega_0 t}, \tag{2.14}$$

with $M_0 = M_U\tilde{M}\tilde{\gamma}^{-1}$ and $\omega_0 = -\frac{1}{\sigma}\ln\tilde{\gamma} > 0$. ∎

2.3. Stability of RHOC. We will prove the following theorem:

THEOREM 2.2. *Consider system (2.1) with the cost function defined as:*

$$J(z(t);\bar{u}) = \int_t^{t+T} \langle \bar{y}, \mathcal{Q}\bar{y}\rangle + \langle \bar{u}, \mathcal{R}\bar{u}\rangle \mathrm{d}s, \tag{2.15}$$

where $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(Z)$ is self-adjoint nonnegative and $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(U)$ is self-adjoint coercive (which means that there exists $\epsilon > 0$ such that $\mathcal{R} \geq \epsilon I$). Given S a linear sub-space of Z with continuous injection, suppose that the following assumptions hold:

i) System (2.1) is exactly reachable to S on $[0,T]$.

ii) S is $\Phi(t)$-invariant (which means that $\Phi(t)S \subset S$ for all $t \geq 0$).
iii) $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ is coercive.
Then the RHOC guarantees exponential stability of the closed-loop system with the domain of attraction being S.

Proof. Consider $z_0 \in S$, then $z(t) \in S$ for all $t \geq 0$. We first establish the existence of the optimal control at each time step. Let us denote:

$$F(z,u) = \langle \mathcal{C}z, \mathcal{Q}\mathcal{C}z\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle, \tag{2.16}$$

and consider the quadratic optimal control problem:

$$\begin{aligned} &\min_{u\in \mathbf{L}_2([0,T],U)} J(z_0;u) = \int_0^T F\langle z,u\rangle \mathrm{d}s \\ &\text{s.t. } \dot{z}(\tau) = \mathcal{A}z(\tau) + \mathcal{B}u(\tau), \forall \tau \in [0,T], \quad z(0) = z_0, \quad z(T) = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

Since $z_0 \in S$ and the system is exactly reachable to S on $[0,T]$, Theorem 5.2. in [8] can be applied and yields:

- There exists an optimal control for (2.17) given by:

$$u_{min}(t) = -G_P^* W_P^{-1}\Phi_P(T,0)z_0 - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)z_{min}(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.18}$$

- The optimal cost called value function is given by:

$$V(z_0) = \langle \Phi_P(T,0)z_0, W_P^{-1}\Phi_P(T,0)z_0\rangle + \langle z_0, \Pi(0)z_0\rangle. \tag{2.19}$$

with $\Phi_P(t,s)$, G_P and W_P defined as follows:

The operator $\Phi_P(t,s)$ is defined as:

$$\Phi_P(t,s)h = \Phi(t-s)h - \int_s^t \Phi(t-r)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(r)\Phi_P(r,s)h\mathrm{d}r, \tag{2.20}$$

which is the evolution operator obtained by perturbing the C_0 semi-group $\Phi(t)$ by $\mathcal{D}(t) = -\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(t)$ where $\Pi(t)$ is the unique solution of the following integral Riccati equation:

$$\begin{aligned} \Pi(t)h = {} & \Phi^*(T-t)\mathcal{M}\Phi(T-t)h \\ & + \int_t^T \Phi^*(s-t)[\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} - \Pi(s)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^*\Pi(s)]\Phi(s-t)h\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.21}$$

with a certain $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \geq 0$. The operator $G_P \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2([0,T];U), Z)$ defined as:

$$G_P u = \int_0^T \Phi_P(T,s)\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1/2}u(s)\mathrm{d}s, \tag{2.22}$$

that is the reachability operator and finally:

$$W_P = G_P G_P^* \in \mathcal{L}(Z), \tag{2.23}$$

is the controllability Grammian. This result guarantees the existence of the optimal control at each iteration and gives us the value function (2.19) in function of the initial state.

When the RHOC scheme is applied to (3.32), for each time interval $[k\sigma,(k+1)\sigma)$, the trajectory is the solution of:

$$\dot{\xi}(\tau)=\mathcal{A}\xi(\tau)+\mathcal{D}(\tau)\xi(\tau)+\mathcal{K}z(k\sigma),\quad \tau\in[k\sigma,(k+1)\sigma),\quad \xi(k\sigma)=z(k\sigma),$$

where $\mathcal{K}=-\mathcal{B}G_P^*(W_P)^{-1}\Phi_P(T,0)$. Define $U(t,s)$ on $\Delta(\sigma)=\{(t,s);0\le s\le t\le\sigma\}$ as

$$U(t,s)z=\Phi_P(t,s)z+\int_s^t\Phi_P(t,r)\mathcal{K}z(k\sigma)dr.$$

Then $U(t,s)$ is an evolution operator and $z(\tau)$ can be expressed as

$$z(\tau)=U(\tau-k\sigma,0)z(k\sigma),\quad \tau\in[k\sigma,(k+1)\sigma). \tag{2.24}$$

As a consequence for all $t\ge 0$, $z(t)=H(t)z_0$ with:

$$H(t)=U\left(\{t\},0\right)\left[U(\sigma,0)\right]^{[t]}, \tag{2.25}$$

Let us now show that the operator $H(t)$ satisfies Lemma 2.1. At time $t+\sigma$, we consider the suboptimal solution:

$$\tilde{u}(\tau)=\left\{\begin{array}{c} u_{min}(\tau;z(t)),\quad \tau\in[t+\sigma,t+T] \\ 0,\quad \tau\in(t+T,t+T+\sigma]\end{array}\right. . \tag{2.26}$$

The trajectory is then $\tilde{z}$. We can notice that $\tilde{z}(\tau)=0$ for all $\tau\in[t+T,t+T+\sigma]$. The corresponding cost function becomes:

$$\begin{aligned} J(z(t+\sigma);\tilde{u}) &= \int_{t+\sigma}^{t+T+\sigma}F(\tilde{z}(\tau),\tilde{u}(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_t^{t+\sigma}F(z_{min}(\tau;z(t)),u_{min}(\tau;z(t)))\mathrm{d}\tau \\ &\quad +\int_t^{t+T}F(z_{min}(\tau;z(t)),u_{min}(\tau;z(t)))\mathrm{d}\tau \\ &\quad (\text{since } F(\tilde{z}(\tau),\tilde{u}(\tau))=0,\ \forall\tau\in(t+T,t+T+\sigma]) \\ &= V(z(t))-\int_t^{t+\sigma}F(z_{min}(\tau;z(t)),u_{min}(\tau;z(t)))\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

However we have $V(z(t+\sigma))\le J(z(t+\sigma);\tilde{u}(\cdot))$ then:

$$V(z(t+\sigma))-V(z(t))\le-\int_t^{t+\sigma}F(z_{min}(\tau;z(t)),u_{min}(\tau;z(t)))\mathrm{d}\tau \tag{2.27}$$

$$\le-\int_t^{t+\sigma}\epsilon\|z(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\quad(\text{since } \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} \text{ is coercive}). \tag{2.28}$$

By induction, for all $k\ge 1$, we have:

$$V(z(k\sigma))-V(z(0))\le-\int_0^{k\sigma}\epsilon\|z(\tau)\|^2d\tau\Rightarrow\int_0^{k\sigma}\|z(\tau)\|^2d\tau\le\epsilon^{-1}V(z(0)). \tag{2.29}$$

The last inequality shows that the closed-loop trajectory satisfies Lemma 2.1, then the system is exponentially stable. ∎

2.4. Calculus of variations approach. We have seen in previous sections how the optimal control can be given in a feedback form as a function of the state. However, in order to implement this control, we have to solve an operator Riccati equation of the form (2.21) which is not easy in practice. The purpose of this section is thus to propose a practical method for an actual computation of such an optimal control. The idea is to rely on the calculus of variations to obtain the optimal control in function of the adjoint state.

Consider the optimal control problem (2.17). The trajectory $z(t)$ can be expressed as:

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-r)\mathcal{B}u(r)\mathrm{d}r. \tag{2.30}$$

We apply the standard multiplier method (see for instance [15]) to obtain the necessary optimal condition. For each $u \in \mathbf{L}_2([0,T],U)$, $z \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$ and $\lambda \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$, we introduce the following lagrangian:

$$\begin{aligned} L = \quad & \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\langle \mathcal{C}z(\tau), \mathcal{Q}\mathcal{C}z(\tau)\rangle + \frac{1}{2}\langle u(\tau), \mathcal{R}u(\tau)\rangle \right. \\ & \left. + \left\langle \lambda(\tau), \left(z(\tau) - \Phi(\tau)z_0 - \int_0^\tau \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u(r)dr \right) \right\rangle \right\} \mathrm{d}\tau \\ & + \langle \Psi, \Phi(T)z_0 + \int_0^T \Phi(T-r)\mathcal{B}u(r)\mathrm{d}r\rangle. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Denote by L_u, L_z and L_λ the variation of L in u, z and λ respectively. By Liusternik's theorem (see Theorem 1 of [19], p. 243), there exists $(u_{min}, z_{min}, \lambda_{min}, \Psi_{min})$ such that $L_u = L_z = L_\lambda = L_\Psi = 0$ at $(u_{min}, z_{min}, \lambda_{min}, \Psi_{min})$.

The conditions $L_\lambda = 0$ and $L_\Psi = 0$ give the dynamics of the trajectory:

$$z_{min}(\tau) = \Phi(\tau)z_0 + \int_0^\tau \Phi(\tau-r)\mathcal{B}u_{min}(r)\mathrm{d}r, \quad \tau \in [0,T], \tag{2.32}$$

and

$$\Phi(T)z_0 + \int_0^T \Phi(T-r)\mathcal{B}u_{min}(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{2.33}$$

The condition $L_z = 0$ gives:

$$\lambda_{min}(\tau) = -\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z(\tau), \quad \tau \in [0,T]. \tag{2.34}$$

The condition $L_u = 0$ signifies that:

$$\mathcal{R}u_{min}(\tau) - \int_\tau^T \mathcal{B}^*\Phi^*(r-\tau)\lambda_{min}(r)\mathrm{d}r + \mathcal{B}^*\Phi^*(T-\tau)\Psi_{min} = 0. \tag{2.35}$$

Then,

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* \left(\Phi^*(T-\tau)\Psi_{min} + \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(r)\mathrm{d}r \right). \tag{2.36}$$

Denote

$$p_{min}(\tau) = \Phi^*(T-\tau)\Psi_{min} + \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z_{min}(r)\mathrm{d}r, \tag{2.37}$$

then p_{min} is the solution of:

$$\dot{p}_{min}(\tau) = -\mathcal{A}^* p_{min}(\tau) - \mathcal{C}^* \mathcal{Q}\mathcal{C} z_{min}(\tau), \tag{2.38}$$

with terminal condition $p_{min}(T) = \Psi_{min}$. The optimal control can be expressed in function of p_{min} as follows:

$$u_{min}(\tau) = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* p_{min}(\tau). \tag{2.39}$$

By combining the equations of the state and that of the adjoint state, we obtain:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{min}(t) \\ \dot{p}_{min}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* \\ -\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} & -\mathcal{A}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

with the constraints $z_{min}(0) = z(0)$, $z_{min}(T) = 0$ and

$$\begin{pmatrix} z_{min}(t) \\ p_{min}(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}^*), t \in [0, T].$$

In this form, an approximation method can be used to numerically solve for the partial differential equation in both state and adjoint state to finally get the optimal control. The procedure will be illustrated later in section 5.

3. Application to systems of 2x2 hyperbolic equations. Here we consider the following problem:

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \lambda_1(x)\partial_x y_1 + \gamma_1(x) y_1 + \delta_1(x) y_2 \\ \partial_t y_2 = \lambda_2(x)\partial_x y_2 + \gamma_2(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 \end{cases}, (x,t) \in [0, L] \times [0, \infty), \tag{3.1}$$

where λ_i, γ_i and δ_i $(i = 1, 2)$ are in $\mathbf{C}_1([0, L])$ and $\lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x)$, $\forall x \in [0, L]$. The initial and boundary conditions are:

$$\begin{cases} y_1(x, 0) = y_{10}(x) \\ y_2(x, 0) = y_{20}(x) \end{cases} \text{and} \begin{cases} y_1(L, t) = g_1(t) + \alpha y_2(L, t) \\ y_2(0, t) = g_2(t) + \beta y_1(0, t) \end{cases}. \tag{3.2}$$

where α and β are two constants. In the sequel, the dependence of the coefficients λ_i, γ_i and δ_i $(i = 1, 2)$ in x will be omitted for the sake of simplicity.

3.1. Reachability. Consider firstly the following operator:

$$\mathcal{L}z = \partial_t z - A(x)\partial_x z - B(x) z, \tag{3.3}$$

on $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}$ with its boundaries $\partial\Omega_- = \{x = 0\}$, $\partial\Omega_+ = \{x = L\}$, and

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

We define also the boundary operators as:

$$M_+ = (1 \quad -\alpha), M_- = (-\beta \quad 1). \tag{3.5}$$

The operator $\mathcal{L}z$ has the following property:

LEMMA 3.1. *There exists constants C_0 and c such that for all $z \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R}\times\Omega)$, we have the estimation:*

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_\Omega + \tfrac{c}{2}\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \leq\ & C_0 e^{2c(t-s)}\left(\|z(s)\|^2_\Omega + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega} + \|M_-z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-} + \|M_+z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+}\right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

with $-\infty < s < t < \infty$.

For $V \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{C}^\infty_{(0)}(V)$ denotes the space of functions on V which are the restrictions to V of function in $\mathbf{C}^\infty_0(\mathbb{R}^m)$, and $\mathbf{C}^\infty_0(\mathbb{R}^m)$ denotes the space of smooth functions vanished at infinity. The proof of the lemma is based on the estimation for the case $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ established in [24] and is reported to Appendix A.

Consider now the following problem:

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}z &=& F & \text{in } [0,T]\times\Omega, \\ M_+z &=& g_+ & \text{in } [0,T]\times\partial\Omega_+, \\ M_-z &=& g_- & \text{in } [0,T]\times\partial\Omega_-, \\ z(0) &=& f. & \end{array} \tag{3.7}$$

Using the estimate of Lemma 3.1, the method presented in [26] can be used and gives us the following results concerning the existence and regularity of the solution of (3.7). The proofs are just a repetition of ones in [26] therefore omitted in this paper.

PROPOSITION 3.2. *For all $T > 0$, $F \in \mathbf{L}_2([0,T]\times\Omega)$, $f \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $g_+ \in \mathbf{L}_2([0,T])\times\partial\Omega_+)$ and $g_- \in \mathbf{L}_2([0,T])\times\partial\Omega_-)$, problem (3.7) has a unique solution z. Furthermore, this solution satisfies*

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2_\Omega + \tfrac{c}{2}\|z\|^2_{[0,t]\times\Omega} + \|z\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_-} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \leq\ & C_0 e^{2ct}\left(\|f\|^2_\Omega + \tfrac{1}{c}\|F\|^2_{[0,t]\times\Omega} + \|g_-\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_-} + \|g_+\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_+}\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

for all $t \in [0,T]$.

PROPOSITION 3.3. *Given $f \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, $F \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\Omega)$, $g_- \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega_-)$, $g_+ \in \mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega_+)$. The solution z of (3.7) is in $C^r([0,T];\mathbf{H}^{s-r}(\Omega))$, $0 \leq r \leq s$ if and only if compatibility condition at $(0,\partial\Omega_-)$ and $(0,\partial\Omega_+)$ are hold up to order s. Furthermore, the restrictions of z in $[0,T]\times\partial\Omega_-$ (resp. in $[0,T]\times\partial\Omega_+$) are in $\mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega_-)$ (resp. $\mathbf{H}^s([0,T]\times\partial\Omega_+)$).*

We recall that the compatibility conditions of order 1 are:

$$M_+f = g_+(0), \quad M_-f = g_-(0), \tag{3.9}$$

and those of higher order are obtained by differentiating the above equations.

We can now prove the reachability for our system:

LEMMA 3.4. *Given $z_0 = (y_{10} \quad y_{20})^2$ and $z_T = (y_{1T} \quad y_{2T})^T$ in $\mathbf{H}^1(\Omega)$, and T satisfying:*

$$T > 2\max\left\{\int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)}\right\}. \tag{3.10}$$

There exist $g_1 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ and $g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ such that the solution of (3.1)-(3.2) satisfies:

$$z(0) = z_0, \quad z(T) = z_T. \tag{3.11}$$

Furthermore, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ *and* $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

Proof. We follow the technique used by [5] (see also [17]) to establish the proof. Denote by $T_1 = \int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}$ (resp. $T_2 = \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)}$) the propagation time of the wave issued from $x = L$ (resp. $x = 0$) (see Fig. 3.1). Without loss of generality, suppose

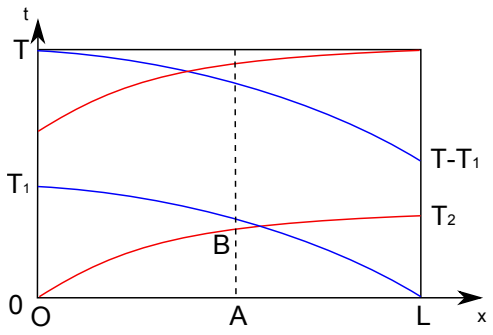

FIG. 3.1. *Notions used in Lemma 3.4*

that $T_1 \geq T_2$.

Let $\tilde{g}_1^d$, $\tilde{g}_2^d \in \mathbf{H}^1([0,T_1])$ satisfying the compatibility conditions

$$\tilde{g}_1^d(0) = M_+ z_0(L), \quad \tilde{g}_2^d(0) = M_- z_0(0), \tag{3.12}$$

and solve problem (3.1)-(3.2) in $\Omega \times [0,T_1]$, with g_i replaced by $\tilde{g}_i^d$, $i = 1,2$ and the initial condition

$$z(0) = z_0. \tag{3.13}$$

By Proposition 3.3, the obtained solution z^d satisfies

$$z^d(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ t \in [0,T_1]; \quad \text{et } z^d(\frac{L}{2},\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T_1]). \tag{3.14}$$

Let $\tilde{g}_1^u$, $\tilde{g}_2^u \in \mathbf{H}^1(T-T_1,T)$ satisfying compatibility conditions at $(0,T)$ and (L,T):

$$\tilde{g}_1^u(T) = M_+ z_T(L), \quad \tilde{g}_2^u(T) = M_- z_T(0), \tag{3.15}$$

and solve the problem (3.1)-(3.2) backward in time in $\Omega \times [T-T_1,T]$ with g_i replaced by $\tilde{g}_i^u$, $i = 1,2$ and the condition at $t = T$:

$$z(T) = z_T. \tag{3.16}$$

Again, by Proposition 3.3, the obtained solution z^u satisfies

$$z^u(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ t \in [T-T_1,T]; \quad \text{et } z^u(\frac{L}{2},\cdot) \in \mathbf{H}^1([T-T_1,T]). \tag{3.17}$$

We construct $\xi = (\xi_1 \quad \xi_2)^T$ in the following way:

$$\xi(t) = \begin{cases} y^d(\frac{L}{2},t),\ t \in [0,T_1] \\ y^u(\frac{L}{2},t),\ t \in [T-T_1,T] \end{cases}. \tag{3.18}$$

Since $T > 2T_1$, the value of $\xi(t)$, $t \in [T_1, T-T_1]$ can be chosen such that $\xi \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

We consider now the following problem:

$$\begin{array}{l} \partial_x y_1 = \lambda_1^{-1}\partial_t y_1 - \lambda_1^{-1}\gamma_1 y_1 - \lambda_1^{-1}\delta_1 y_2 \\ \partial_x y_2 = \lambda_2^{-1}\partial_t y_2 - \lambda_2^{-1}\gamma_2 y_1 - \lambda_2^{-1}\delta_2 y_2 \end{array}, \tag{3.19}$$

in $\Omega_l = [0, \frac{L}{2}] \times [0, T]$, which has the same form of (3.1) where the role of x and t are interchanged. The "initial" condition is now specified at $x = \frac{L}{2}$:

$$y(\tfrac{L}{2}, t) = \xi(t),\ t \in [0, T], \tag{3.20}$$

and the boundary conditions are specified at $t = 0$ and $t = T$:

$$y_1(x, 0) = y_{10}(x),\ y_2(x, T) = y_{2T}(x),\ x \in [0, \tfrac{L}{2}]. \tag{3.21}$$

We denote by $z^l = (y_1^l \quad y_2^l)^T$ the solution of (3.19)-(3.21). We notice that y^d also satisfies (3.19)-(3.21) on the triangle OAB (see Fig. 3.1). By the uniqueness of the solution (see e.g. [26]):

$$y_2^l(x, 0) = y_2^d(x, 0) = y_{20}(x), \quad x \in [0, L/2]. \tag{3.22}$$

Similarly, we have:

$$y_1^l(x, T) = y_1^u(x, T) = y_{1T}(x), \quad x \in [0, L/2]. \tag{3.23}$$

Consider next the problem:

$$\begin{array}{l} \partial_x y_1 = \lambda_1^{-1}\partial_t y_1 - \lambda_1^{-1}\gamma_1 y_1 - \lambda_1^{-1}\delta_1 y_2 \\ \partial_x y_2 = \lambda_2^{-1}\partial_t y_2 - \lambda_2^{-1}\gamma_2 y_1 - \lambda_2^{-1}\delta_2 y_2 \end{array}, \tag{3.24}$$

on $\Omega_r = [\frac{L}{2}, L] \times [0, T]$, with the initial condition:

$$y(\tfrac{L}{2}, t) = \xi(t),\ t \in [0, T], \tag{3.25}$$

and boundary conditions:

$$y_2(x, 0) = y_{20}(x),\ y_1(x, T) = y_{1T}(x),\ x \in [L/2, L], \tag{3.26}$$

and denote by $z^r = (y_1^r \quad y_2^r)^T$ the solution of (3.24)-(3.26). By the same argument as above for y^l, we have:

$$\begin{array}{l} y_1^r(x, 0) = y_1^d(x, 0) = y_{10}(x), \\ y_2^r(x, T) = y_2^u(x, T) = y_{2T}(x) \end{array}, \quad x \in [L/2, L]. \tag{3.27}$$

Define now z to be z^l on Ω_l, z^r on Ω_r, $g_1(t) = y_1(L, t) - \alpha y_2(L, t)$, $g_2(t) = y_2(0, t) - \beta y_2(0, t)$, then z, g_i, $i = 1, 2$ satisfy (3.1)-(3.2) and $z(0, \cdot)$, $z(L, \cdot) \in \mathbf{H}^1([0, T])$. □

3.2. Abstract setting. The problem (3.1)-(3.2) will be reformulated in the abstract form (2.1), then the stability of the RHOC scheme is given by applying Theorem 2.2. To this end, we closely follow the procedure described in [7] to reformulate the boundary control form in the abstract form.

We firstly add two integrators to g_1 and g_2 as follows:

$$\dot{g}_1(t) = u_1(t), \quad g_1(0) = y_{10}(L); \quad \dot{g}_2(t) = u_2(t), \quad g_2(0) = y_{20}(0). \tag{3.28}$$

Define now two new variables as:

$$v_1(x,t) = y_1(x,t) - \frac{x}{L}g_1(t), \text{ and } v_2(x,t) = y_2(x,t) - \frac{L-x}{L}g_2(t). \tag{3.29}$$

Then:

$$\begin{aligned}
\partial_t v_1 &= \lambda_1 \partial_x v_1 + \gamma_1 v_1 + \delta_1 v_2 + \frac{\lambda_1+\gamma_1}{L} g_1 + \delta_1 \frac{L-x}{L} g_2 - \frac{x}{L} u_1, \\
\partial_t v_2 &= \lambda_2 \partial_x v_2 + \gamma_2 v_1 + \delta_2 v_2 + \frac{\gamma_2 x}{L} g_1 + \frac{-\lambda_2 + \delta_2(L-x)}{L} g_2 - \frac{L-x}{L} u_2.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

The boundary conditions are now homogeneous:

$$v_1(L,t) = 0, \quad v_2(0,t) = 0. \tag{3.31}$$

Equations (3.28) and (3.30) can be put in the abstract form:

$$\dot{z}^e(t) = \mathcal{A}^e z^e(t) + \mathcal{B}^e u(t), \quad z^e(0) = z_0^e, \tag{3.32}$$

where $z^e = [g_1\ g_2\ v_1\ v_2]^T \in Z^e = \mathbb{R}^2 \oplus [\mathbf{L}_2(0,L)]^2$ is the new state, $u = [u_1 \quad u_2]^T \in U = \mathbb{R}^2$ the new control. The inner product in the Hilbert space Z^e is defined as:

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} + \int_0^L [z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2]\mathrm{d}x. \tag{3.33}$$

The initial condition is given by:

$$z_0^e = \begin{pmatrix} g_1(0) & g_2(0) & y_{10}(x) - \frac{x}{L}g_1(0) & y_{20}(x) - \frac{L-x}{L}g_2(0) \end{pmatrix}^T.$$

Operators $\mathcal{A}^e$, $\mathcal{B}^e$ are determined as:

$$\mathcal{A}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_1 \end{pmatrix} + D_1, \quad \mathcal{B}^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{L-x}{L} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U, Z^e), \tag{3.34}$$

where

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_1+\gamma_1 x}{L} & \frac{\delta_1(L-x)}{L} & \gamma_1 & \delta_1 \\ \frac{\gamma_2 x}{L} & \frac{-\lambda_1+\delta_2(L-x)}{L} & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(Z^e), \tag{3.35}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \text{with} \\
\mathbf{D}(\mathcal{A}_1) &= \Big\{ h = [v_1 \quad v_2]^T \in [\mathbf{L}_2(0,L)]^2 | h \text{ is absolutely continuous,} \\
&\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \in [\mathbf{L}_2(0,L)]^2,\ v_1(L) - \alpha v_2(L) = -\beta v_1(0) + v_2(0) = 0 \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

We have the following proposition:

PROPOSITION 3.5. *$\mathcal{A}^e$ is an infinitesimal generator of a C_0 semi-group with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A}^e) = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}_1)$.*

Proof. We deduce from estimation (3.8) that $\mathcal{A}_1$ with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A}_1)$ is an infinitesimal generator of a C_0 semi-group on $[\mathbf{L}_2(0,L)]^2$.

By applying Lemma 3.2.2 and Theorem 3.2.1 in [7] $\mathcal{A}^e$ with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A}^e)$ is also an infinitesimal generator of a C_0 semi-group on Z^e. □

This result shows that boundary control problem (3.1)-(3.2) is indeed transformed into abstract form (2.1).

3.3. Stability. Let us now consider the optimal control of system (3.1), (3.2) and (3.28) over a finite horizon $[0,T]$ with a quadratic cost function:

$$J(y_{10}, y_{20}; u) = \int_0^T \int_0^L (f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^T (q_1 g_1^2 + q_2 g_2^2 + r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2)\mathrm{d}s, \tag{3.37}$$

where f_i, q_i and r_i $(i = 1, 2)$ are positive constants. The above cost function can be viewed as:

$$J = \int_0^T \langle \mathcal{C} z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C} z^e \rangle + \langle u, \mathcal{R} u \rangle \mathrm{d}s,$$

where:

$$\mathcal{R} = \mathrm{diag}(r_1, r_2) \in \mathcal{L}(U), \quad \mathcal{Q} = \mathrm{diag}(q_1, q_2, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(Z^e), \tag{3.38}$$

and:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x}{L} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(Z^e). \tag{3.39}$$

Before establishing the proof of the stability, we need the following lemma:

LEMMA 3.6. *Let $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(Z^e)$ a coercive self-adjoint operator having the form:*

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

and $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(Z^e)$ an operator having the form:

$$\mathcal{C} = I + P, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Then $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ is coercive.

Proof. We have:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} &= (I + P_2^*)Q(I + P_2) \\ &= \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & P_2^* Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 P_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_2^* Q_2 P_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

This can be rewritten as:

$$\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} = \begin{pmatrix} Q_1 + (1-\alpha)P_2^* Q_2 P_2 & 0 \\ 0 & (1-\frac{1}{\alpha})Q_2 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[I + \begin{pmatrix} 0 & P_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \left[I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_2 & 0 \end{pmatrix}\right], \tag{3.43}$$

with a constant $\alpha > 1$. Since Q_2 and P_2 are bounded, for α sufficiently close to 1, there exists $\epsilon > 0$ such that:

$$\begin{pmatrix} Q_1 + (1-\alpha)P_2^* Q_2 P_2 & 0 \\ 0 & (1-\frac{1}{\alpha})Q_2 \end{pmatrix} \geq \epsilon I. \tag{3.44}$$

On the other hand, Q_2 is positive, then $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C} \geq \epsilon I$, which means that $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ is coercive. □

At this stage, we can establish the following result:

THEOREM 3.7. *Suppose that y_{10}, $y_{20} \in \mathbf{H}^1([0,L])$ and g_1, g_2 satisfy the compatibility conditions:*

$$y_{10}(L) - \alpha y_{20}(L) = g_1(0), \quad y_{20}(0) - \beta y_{10}(0) = g_2(0). \tag{3.45}$$

The RHOC scheme with cost function (3.37) and terminal constraints:

$$y_1(x,T) = 0,\ y_2(x,T) = 0,\ \forall x \in [0,L]; \quad g_1(T) = 0,\ g_2(T) = 0, \tag{3.46}$$

guarantees the stability of (3.1), (3.2) and (3.28) if $\mathcal{Q}$ is coercive and

$$T > 2\max\left\{\int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)}\right\}.$$

Proof. From the analysis in section 3.2, we see that the optimal control problem for (3.1), (3.2) and (3.28) with cost function (3.37) can be put in the abstract form:

$$\min_u J(z_0^e; u) = \int_0^T (\langle \mathcal{C}z^e, \mathcal{Q}\mathcal{C}z^e\rangle + \langle u, \mathcal{R}u\rangle)\mathrm{d}s, \tag{3.47}$$

$$\text{s.t. } \dot{z}^e(t) = \mathcal{A}^e z^e(t) + \mathcal{B}^e u(t), \quad z^e(0) = z_0^e, \quad z^e(T) = 0. \tag{3.48}$$

We will show that Theorem (2.2) can be applied, with $S = \mathbf{D}(\mathcal{A}^e) \subset Z^e$. Denote by $\tilde{z}^e(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ the solution of (3.1), (3.2) and (3.28). Recall that the extended state z^e is related to the one of the original system by $z^e(t) = \mathcal{C}^{-1}\tilde{z}^e(t)$. Let's define the set $\tilde{S}$ as follows:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \{\tilde{z}^e = (g_1 \quad g_2 \quad y_1 \quad y_2)^T \mid y_1,\, y_2 \in \mathbf{H}^1([0,L]), \\ y_1(L) - \alpha y_2(L) = g_1,\, y_2(0) - \beta y_1(0) = g_2\}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

It is easy to verify that $\tilde{S} = \mathcal{C}S$. Consider now $z_T^e \in S$, then $\mathcal{C}z_T^e \in \tilde{S}$. Since $\tilde{z}_0^e = (g_1(0) \quad g_2(0) \quad y_{10} \quad y_{20})^T \in \tilde{S}$ and by Lemma (3.4), system (3.1), (3.2) is reachable to $\tilde{S}$. This means that there exists $u \in \mathbf{L}_2([0,T])$ such that $\tilde{z}^e(T) = \mathcal{C}z_T^e$. The extended state satisfies then $z^e(T) = \mathcal{C}^{-1}\tilde{z}^e(T) = z_T^e$, which means that (3.48) is reachable to S on $[0,T]$.

In addition, $\tilde{z}^e(0) \in \tilde{S}$ implies that $z^e(t) \in S$ for all $t \in [0,T]$.

Finally, by Lemma 3.6, $\mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}$ is coercive. Theorem 2.2 can be applied and the stability of the closed-loop is then guaranteed. □

4. Systems of coupled hyperbolic equations. We now consider the following system of n 2×2 hyperbolic equations:

$$\begin{cases} \partial_t y_i = \lambda_i(x)\partial_x y_i + \gamma_i(x) y_i + \delta_i(x) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+i} + \gamma_{n+i}(x) y_i + \delta_{n+i}(x) y_{n+i} \end{cases}, x \in [0, L], \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.1}$$

where λ_i, λ_{n+i}, γ_i, γ_{n+i}, δ_i and δ_{n+i} are in $\mathbf{C}_1([0, L])$. The functions y_i and y_{n+i} are defined on $[0, L]$. In addition, we suppose that the system is strictly hyperbolic, namely $\lambda_i(x) > 0 > \lambda_{n+i}(x)$, $\forall x \in [0, L]$ $(i = \overline{1, n})$. The boundary conditions define the relationship between the variables at the junctions. Suppose that these conditions can be written as:

- For the first junction:

$$y_{n+1}(0, t) = g_{n+1}(t). \tag{4.2}$$

- For the intermediate junctions:

$$\begin{cases} y_{n+i+1}(0, t) &= \theta_i y_i(L, t) + \alpha_i y_{n+i}(L, t) + \beta_i y_{i+1}(0, t) \\ y_i(L, t) &= g_i(t) \end{cases}, i = \overline{1, n-1}, \tag{4.3}$$

  where θ_i, α_i and β_i are constants depending on the characteristics of the junction.
- For the last junction:

$$y_n(L, t) = g_n(t). \tag{4.4}$$

As in the case of a single system, we add integrators to the dynamics of g_i:

$$\dot{g}_i(t) = u_i(t), \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{4.5}$$

The problem is completed by initial conditions:

$$y_i(x, 0) = y_{i,0}(x), \quad y_{n+i}(x, 0) = y_{n+i,0}(x). \tag{4.6}$$

In the sequel, denote by $z_0 = (y_{1,0} \quad \dots \quad y_{n,0} \quad y_{n+1,0} \quad \dots \quad y_{2n,0})^T$ the initial condition, $z = (y_1 \quad \dots \quad y_n \quad y_{n+1} \quad \dots \quad y_{2n})^T$ the solution of the entire system and $z_i = (y_i \quad y_{n+i})^T$ the solution of sub-system i, $i = \overline{1, n}$.

4.1. Reachability. We announce firstly the proposition concerning the solution of system (4.1)-(4.6). The proof is reported to Appendix B.

PROPOSITION 4.1. *Given $z_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g_i \in \mathbf{L}^2([0, T])$, $i = \overline{1, n+1}$. There exists a unique solution z of (4.1)-(4.6) and some constants C and c such that:*

$$\|z(t)\|^2_\Omega + \tfrac{c}{2}\|z\|^2_{[0,t]\times\Omega} + \|z\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_-} + \|z\|^2_{[0,t]\times\partial\Omega_+} \leq Ce^{2ct}\left(\|z_0\|^2_\Omega + \textstyle\sum_{i=1}^{n+1}\|g_i\|^2_{[0,t]}\right). \tag{4.7}$$

Before establish the reachability of whole system, we need the reachability of a subsystem with just one control, which can be proved by a same argument as that of Lemma 3.4.

LEMMA 4.2. *Given $z_0 = (y_{10} \quad y_{20})^T$, $z_T = (y_{1T} \quad y_{2T})^T$ in $\mathbf{H}^1(\Omega)$, T satisfying:*

$$T > 2\max\left\{\int_0^L \frac{dx}{\lambda_1(x)}, \int_0^L \frac{dx}{-\lambda_2(x)}\right\}, \tag{4.8}$$

and $g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ *satisfying* $g_2(0) = M_- u_0(0)$, $g_2(T) = M_- z_T(0)$. *There exists* $g_1 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ *such that the solution of (3.1)-(3.2) satisfies:*

$$z(0) = z_0, \quad z(T) = z_T. \tag{4.9}$$

Furthermore, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ *and* $z(0,\cdot)$, $z(L,\cdot) \in \mathbf{H}^1([0,T])$.

We can now establish the reachability of (4.1)-(4.6):

LEMMA 4.3. *Given* $z_0 = (y_{1,0} \quad \dots \quad y_{n,0} \quad y_{n+1,0} \quad \dots \quad y_{2n,0})^T \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $z_T = (y_{1,T} \quad \dots \quad y_{n,T} \quad y_{n+1,T} \quad \dots \quad y_{2n,T})^T \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, *and*

$$T > 2 \max_{i=\overline{1,2n}} \int_0^L \frac{dx}{|\lambda_i(x)|}. \tag{4.10}$$

Then there exist $g_i \in \mathbf{H}^1([0,T])$, $i = \overline{1, n+1}$ *such that the solution* z *of (4.1)-(4.6) satisfies:*

$$z(0) = z_0, \quad \textit{and} \quad z(T) = z_T. \tag{4.11}$$

Furthermore, $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$.

Proof. The demonstration is based on the reachability of the 2×2 hyperbolic system hyperbolic with two boundary controls (Lemma 3.4) and with one boundary control (Lemma 4.2). The method is inspired from that of [16]. Consider the first system ($i = 1$ in (4.1)), with boundary conditions:

$$y_{n+1}(0,t) = g_{n+1}(t), \quad y_1(L,t) = g_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4.12}$$

By applying Lemma 3.4, there exists g_1 and $g_{n+1} \in \mathbf{H}^1([0,T])$ such that the solution of (4.1) with $i = 1$ and (4.12) satisfies

$$z_1(0) = (y_{1,0} \quad y_{n+1,T})^T, \quad z_1(T) = (y_{1,T} \quad y_{n+1,T})^T. \tag{4.13}$$

For $i = 2$ to $i = n$, we repeat the following steps to build the solution in each sub-system:

- Set $\tilde{g}_{i-1}(t) = \theta_{i-1} g_{i-1}(t) + \alpha_{i-1} y_{n+i-1}(L,t)$ who is determined by the solution of the sus-system $i-1$.
- Consider problem (4.1) with the following boundary conditions:

$$y_{n+i}(0,t) = \tilde{g}_{i-1}(t) + \beta_i y_i(0,t), \quad y_i(L,t) = g_i(t). \tag{4.14}$$

  By applying Lemma 4.2, there exists $g_2 \in \mathbf{H}^1([0,T])$ such that

$$z_i(0) = (y_{i,0} \quad y_{n+i,0})^T, \quad z_i(T) = (y_{i,T} \quad y_{n+i,T})^T. \tag{4.15}$$

We finally obtain $z = (y_1 \quad \dots \quad y_n \quad y_{n+1} \quad \dots \quad y_{2n})^T$ satisfying (4.11) and $z(t) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$. ∎

4.2. Abstract setting. We can apply the same procedure as the one described previously to put system (4.1)-(4.6) in the abstract form. Firstly, we define the new variables:

$$v_i(x,t) = y_i(x,t) - \frac{x}{L} g_i(t), \quad \forall x \in [0,L], \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.16}$$

$$v_{n+1}(x,t) = y_{n+1}(x,t) - \frac{L-x}{L} g_{n+1}(t), \quad \forall x \in [0,L], \tag{4.17}$$

$$v_{n+i}(x,t) = y_{n+i}(x,t) - \theta_i \frac{L-x}{L} g_i(t), \quad \forall x \in [0,L] \quad i = \overline{2,n}. \tag{4.18}$$

The original system can be rewritten as:

For the first subsystem:

$$\begin{aligned}\partial_t v_1 &= \lambda_1 \partial_x v_1 + \gamma_1 v_1 + \delta_1 v_{n+1} + \left(\frac{\lambda_1 + \gamma_1 x}{L}\right) g_1 + \delta_1 \frac{L-x}{L} g_{n+1} - \frac{x}{L} u_1, \\ \partial_t v_{n+1} &= \lambda_{n+1} \partial_x v_{n+1} + \gamma_{n+1} v_1 + \delta_{n+1} v_{n+1} \\ &\quad + \frac{\gamma_{n+1} x}{L} g_1 + \left(\frac{-\lambda_{n+1} + \delta_{n+1}(L-x)}{L}\right) g_{n+1} - \frac{L-x}{L} u_{n+1}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

For $i = 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}\partial_t v_i &= \lambda_i \partial_x v_i + \gamma_i v_i + \delta_i v_{n+i} + \left(\frac{\lambda_i + \gamma_i x}{L}\right) g_i + \delta_i \frac{L_i - x}{L} g_{n+i} - \frac{x}{L} u_i, \\ \partial_t v_{n+i} &= \lambda_{n+i} \partial_x v_{n+i} + \gamma_{n+i} v_i + \delta_{n+i} z_{n+i} \\ &\quad + \frac{\theta_{i-1}(-\lambda_{n+i} + \delta_{n+i}(L-x))}{L} g_{i-1} + \frac{\gamma_{n+i} x}{L} g_i - \theta_{i-1} \frac{L-x}{L} u_{i-1},\end{aligned} \tag{4.20}$$

with the boundary conditions:

$$v_i(L,t) = 0,\ i = \overline{1,n}, \quad v_{n+1}(0,t) = 0, \quad v_{n+i+1}(0,t) = \alpha_i v_{n+i}(L,t) + \beta_i v_{i+1}(0,t).$$

Let us denote $Y = [\mathbf{L}_2(0,L)]^{2n}$. By estimation (4.7), we have the following theorem:

THEOREM 4.4. *Given λ_i and λ_{n+i} in $\mathbf{C}_1(0,L_i)$ and $\lambda_i(x) > 0 > \lambda_{n+i}(x)$, $\forall x \in [0,L_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$. The following operator:*

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad A^+ = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad A^+ = diag(\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{2n}), \tag{4.21}$$

with the domain:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathcal{A}_n) = \{h = (f_1 \ \ldots \ f_{2n})^T \in Y \mid h \text{ is absolutely continuous, } \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \in Y, \text{ and} \\ f_i(L) = 0,\ i = \overline{1,n};\ f_{n+i+1}(0) = \alpha_i f_{n+i}(L) + \beta_i f_{i+1}(0),\ i = \overline{1,n-1}; \\ f_{n+1}(0) = 0\},\end{aligned}$$

is an infinitesimal generator of a C_0 semi-group on Y.

In order to simplify the notations, we introduce the following operators:

$$\begin{aligned}&a_i = \frac{\lambda_i + \gamma_i x}{L}, b_i = \frac{-\lambda_{n+i} + \delta_{n+i}(L-x)}{L}, \tilde{c}_i = \frac{\gamma_{n+i} x}{L}, \tilde{d}_i = \delta_i \frac{L-x}{L},\ i = \overline{1,n}; \\ &c = \frac{x}{L}, d = \frac{L-x}{L}.\end{aligned}$$

The system of equations (4.19)-(4.20) can then be rewritten in the abstract form:

$$\dot{z}^e(t) = \mathcal{A}_n^e z^e(t) + \mathcal{B}_n^e u(t), \tag{4.22}$$

with the state and control:

$$z^e = (g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_{n+1} \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_{2n})^T \in Z^e = \mathbb{R}^{n+1} \oplus Y, \tag{4.23}$$

$$u = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n \quad u_{n+1})^T, \tag{4.24}$$

and $\mathcal{A}_n^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_n \end{pmatrix} + D_n$, with

$$D_n = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccccccccc} g_1 & \cdots & g_{n-1} & g_n & g_{n+1} & v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v_{n+1} & v_{n+2} & \cdots & v_{2n} \end{array} \\ \begin{array}{c} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \\ g_{n+1} \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc} & & & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline a_1 & \cdots & 0 & 0 & d & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_1\tilde{d}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \theta_{n-1}\tilde{d}_n & a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_n & 0 & 0 & \cdots & \delta_n \\ \tilde{c}_1 & \cdots & 0 & 0 & b_1 & \gamma_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & \delta_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_1 b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{n+2} & \cdots & 0 & 0 & \delta_{n+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \theta_{n-1}b_n & \tilde{c}_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{2n} & 0 & 0 & \cdots & \delta_{2n} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{array}.$$

Finally, the operator $\mathcal{B}_n$ is defined as:

$$\mathcal{B}_n^e = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_{n-1} & u_n & u_{n+1} \end{array} \\ \begin{array}{c} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \\ g_{n+1} \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ \hline -c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -c & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -d \\ -\theta_1 d & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & -\theta_{n-1}d & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{array}.$$

As in Proposition 3.5, $\mathcal{A}_n^e$ with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A}_n^e) = \mathbb{R}^{n+1} \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}_n)$ is also an infinitesimal generator of a C_0 semi-group on Z.

4.3. Stability. We consider the following cost function:

$$J_n = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{2n} \int_0^{L_i} f_i y_i^2 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^T q_i g_i^2 + r_i u_i^2 \mathrm{d}s, \tag{4.25}$$

where f_i, q_i and r_i are real positive constants. As in the case of a single system, this cost function can be rewritten as:

$$J_n = \int_0^T \langle \mathcal{C}_n z, \mathcal{Q}_n \mathcal{C}_n z \rangle + \langle u, \mathcal{R}_n u \rangle \mathrm{d}s, \tag{4.26}$$

where:

$$\mathcal{R}_n = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_n, r_{n+1}), \quad \mathcal{Q}_n = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n, q_{n+1}, f_1, f_2, \cdots, f_{2n}), \tag{4.27}$$

and:

$$\mathcal{C}_n = \begin{array}{c} \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \\ g_{n+1} \\ \hline y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccccccccc} g_1 & \cdots & g_{n-1} & g_n & g_{n+1} & v_1 & v_2 & \cdots & v_n & z_{n+1} & v_{n+2} & \cdots & v_{2n} \\ 1 & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & 0 & & & & 1 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1 & & & & & 1 & & & \\ \theta_1 d_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \theta_{n-1} d_n & 0 & 0 & & & & & & & & 1 \end{array}\right).$$

It is obvious that $\mathcal{C}_n$ and $\mathcal{Q}_n$ satisfy Lemma 3.6, which means that $\mathcal{C}_n^* \mathcal{Q}_n \mathcal{C}_n$ is coercive. In addition, system (4.1)-(4.6) is exactly controllable provided that the prediction horizon is sufficiently large, which means that by applying Theorem 2.2, the RHOC can again guarantee the stability of this system.

5. Numerical solution of the optimal problem. In section 2.4, the optimal control was obtained in function of the adjoint state. For implementation, an approximation method must be used to solve the problem. In this work, we will use the Galerkin method. Other numerical schemes can of course be employed.

We briefly present here the idea of this approach. Readers can refer to [11] for more details. The goal of this method is to find an approximation of the solution in a subspace of the state space. Let us consider the problem of finding the solution $f(x,t)$ of the abstract equation:

$$\Phi(f(x,t)) = 0 \quad \text{in}\, \Pi, \tag{5.1}$$

with the boundary condition:

$$B(f(x,t)) = 0, \quad \text{in the boundary } \partial\Pi. \tag{5.2}$$

The approximate solution is assumed to have the general form:

$$f_a(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) N_i(x), \tag{5.3}$$

where $f_a(x,t)$ is the approximation of the exact solution $f(x,t)$, the $\alpha_i(t)$'s are the coefficients to be determined, and the $N_i(x)$'s are called trial functions. Substitution of this approximation in (5.1) yields:

$$\Phi(f_a(x,t)) = R,$$

where R is the equation residual. The coefficients $\alpha_i(t)$ are then determined in order that the residual is orthogonal to a set of trial functions $N_k(x)$:

$$\langle R, N_k(x)\rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

We will now apply this method to system (2.40) for a single system. A system of coupled sub-systems can be treated in a same manner. The subscript $\cdot_{min}$ will be omitted for the sake of simplicity.

The unknown variables are

$$z = (g_1 \quad g_2 \quad v_1 \quad v_2)^T \in Z \text{ and } p = (\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \chi_1 \quad \chi_2)^T \in Z.$$

The infinite dimensional part are approximated by:

$$v_j(x,t) = \sum_{i=1}^{M} v_j^i(t) N_i(x), \quad \chi_j(x,t) = \sum_{i=1}^{M} \chi_j^i(t) N_j(x), \quad j = 1, 2. \tag{5.4}$$

We note firstly that the condition $(z \quad p)^T \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) \oplus \mathbf{D}(\mathcal{A}^*)$ implies that:

$$v_1^M = v_2^1 = 0, \quad \chi_1^1 = \chi_2^M = 0. \tag{5.5}$$

The remaining unknown are put into vectors as following:

$$\begin{array}{l} g = (g_1 \quad g_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \zeta = (\zeta_1 \quad \zeta_2)^T \in \mathbb{R}^2, \\ v_d = (v_1^1 \quad v_1^2 \quad \cdots \quad v_1^{M-2} \quad v_1^{M-1} \quad v_2^2 \quad v_2^3 \quad \cdots \quad v_2^{M-1} \quad v_2^M)^T \in \mathbb{R}^{2M-2}, \\ \chi_d = (\chi_1^2 \quad \chi_1^3 \quad \cdots \quad \chi_1^{M-1} \quad \chi_1^M \quad \chi_2^1 \quad \chi_2^2 \quad \cdots \quad \chi_2^{M-2} \quad \chi_2^{M-1})^T \in \mathbb{R}^{2M-2}. \end{array} \tag{5.6}$$

By replacing (5.4) into (2.40) and taking the inner product with the trial function N_k, we obtain:

$$\begin{array}{lcl} \dot{g} & = & M_{g\zeta}\zeta + M_{g\chi}\chi_d, \\ E_v \dot{v}_d & = & M_{vg} g + M_{vv} v_d + M_{v\zeta}\zeta + M_{v\chi}\chi_d, \\ \dot{\zeta} & = & M_{\zeta g} g + M_{\zeta v} v_d + M_{\zeta\chi}\chi_d, \\ E_\chi \dot{\chi}_d & = & M_{\chi g} g + M_{\chi v} v_d + M_{\chi\zeta}\zeta + M_{\chi\chi}\chi_d, \end{array} \tag{5.7}$$

where the entries of matrices $M_{g\zeta}$, $M_{g\chi}$, etc. depend on the trial functions N_k, the coefficients of operator $\mathcal{A}$ and those of the cost function. Whereas the entries of E_v and E_χ depend only on the trial function N_k.

By setting $z_d = (g \quad v_d)^T \in \mathbb{R}^{2M}$, $\quad p_d = (\zeta \quad \chi_d)^T \in \mathbb{R}^{2M}$, we can put (5.7) in the form:

$$\mathbf{E}\begin{pmatrix} \dot{z}_d \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} z_d \\ p_d \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

with

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_\chi \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_{g\zeta} & M_{g\chi} \\ M_{vg} & M_{vv} & M_{v\zeta} & M_{v\chi} \\ M_{\zeta g} & M_{\zeta v} & 0 & M_{\zeta\chi} \\ M_{\chi g} & M_{\chi v} & M_{\chi\zeta} & M_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Finally, we obtain the following approximation problem:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_d \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}\begin{pmatrix} z_d \\ p_d \end{pmatrix}, \quad z_d(0) = z_{0a}, \quad z_d(T) = 0, \tag{5.10}$$

where z_{0a} is the approximation of the initial condition. We can notice that (5.10) is a standard two-point boundary problem and can be solved by various methods such as the shooting method, the finite-difference scheme or the finite elements. Readers can refer, for instance to [1], for more information.

6. Application to open-channel systems. In order to illustrate the proposed control technique and the numerical implementation scheme, let us present here an application to the linearized model of an open channel system.

6.1. Single pool. An open-channel system is usually described by a set of two partial differential equations (PDEs) named Saint-Venant equations, which represent the mass and the momentum conservation (see [13]):

$$\begin{cases} B\partial_t h + \partial_x Q & = & 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{Bh} + \frac{1}{2}Bgh^2\right) & = & gBh(I - J(Q,h) \end{cases}, (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty), \quad (6.1)$$

where h denotes the water depth, Q the discharge, g the gravitational acceleration, B the channel width, I the slope and J the friction term. Here t and x classically stand for time and space coordinates, and ∂_t, ∂_x denote the partial derivatives w.r.t. t, x respectively.

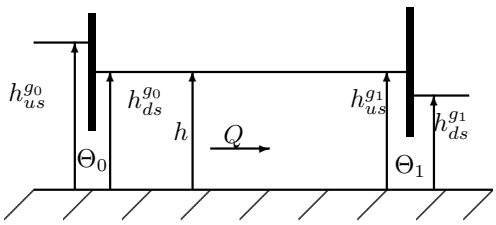

FIG. 6.1. *Longitudinal sights of an open channel*

The friction is modeled by the classical Manning formula [13]:

$$J(h,Q) = \frac{Q^2}{k^2B^2h^2\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3}}, \quad (6.2)$$

where k is the Manning-Strickler (MS) coefficient.

The boundary conditions are specified by the gate equations at each end:

$$\begin{array}{l} Q^2(0,t) = K_0^2\Theta_0^2(t)2g(h_{us}^{g_0} - h_{ds}^{g_0}), \\ Q^2(L,t) = K_1^2\Theta_1^2(t)2g(h_{us}^{g_1} - h_{ds}^{g_1}), \end{array} \quad (6.3)$$

where $h_{us}^{g_i}$ is the water height at the upstream, $h_{ds}^{g_i}$ the water height at the downstream of gate i. Here $\Theta_0(t)$ and $\Theta_1(t)$, the gate openings, correspond to the control variables, while K_0 and K_1 are constants which depend on the structure of the gates.

We consider a steady state of the system $(\bar{h}(x), \bar{Q}(x))$ which has to satisfy:

$$\begin{array}{l} \bar{Q} = \text{constant} \\ \partial_x\bar{h}(x) = \frac{I - J(\bar{h},\bar{Q})}{1-\overline{Fr}^2}, \quad \overline{Fr}^2 = \frac{\bar{Q}^2}{gB^2\bar{h}^3}. \end{array} \quad (6.4)$$

We consider next the deviation of the state h and Q around the steady state $(\bar{h}, \bar{Q})$:

$$\tilde{h} = h - \bar{h}, \quad \tilde{Q} = Q - \bar{Q}. \tag{6.5}$$

Then:

$$\begin{aligned} B\tilde{h}_t + \tilde{Q}_x &= 0, \\ \tilde{Q}_t + \frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}}\tilde{Q}_x + \left(Bg\bar{h} - \frac{\bar{Q}^2}{B\bar{h}^2}\right)\tilde{h}_x &= \left[\frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}^2}\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_Q\right]\tilde{Q} \\ &\quad + \left[gB(I-\bar{J}) - 2\frac{\bar{Q}^2\bar{h}_x}{B\bar{h}^3} - Bg\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_h\right]\tilde{h}. \end{aligned}$$

For sake of simplicity, we omit the $\tilde{\cdot}$ and we adopt the notations that f_α represents de deviation of a function f in α, and $\bar{f}$ is the value of f at the steady state $(\bar{h}, \bar{Q})$. The above system can be reformulated as:

$$\begin{array}{rcl} h_t &=& -B^{-1}Q_x, \\ Q_t &=& \alpha(x)h_x + \beta(x)Q_x + \gamma(x)h + \delta(x)Q, \end{array} \tag{6.6}$$

where:

$$\begin{array}{l} \alpha = -Bg\bar{h} + \frac{\bar{Q}^2}{B\bar{h}^2}, \quad \beta = -\frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}}, \quad \gamma = gB(I-\bar{J}) - 2\frac{\bar{Q}^2\bar{h}_x}{B\bar{h}^3} - Bg\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_h, \\ \delta = \frac{2\bar{Q}}{B\bar{h}^2}\bar{h}_x - gB\bar{h}\bar{J}_Q. \end{array} \tag{6.7}$$

Let us set:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 & -B^{-1} \\ \alpha(x) & \beta(x) \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix}.$$

In the sub-critical regime, the matrix G has two eigenvalues satisfying:

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}} > 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\bar{Q}}{B\bar{h}} - \sqrt{g\bar{h}} < 0. \tag{6.8}$$

By applying the transformation:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} h \\ Q \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -B\lambda_1 & B\lambda_2 \end{pmatrix},$$

we have a new system in $[y_1\ y_2]^T$:

$$\partial_t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

where:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = P^{-1}G\mathrm{d}_x P + P^{-1}HP.$$

Without loss of generality, we can assume that the boundary conditions (6.3) can be implemented in the form:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1(t) = g_1(t), & \dot{g}_1(t) = u_1(t) \\ y_2(t) = g_2(t), & \dot{g}_2(t) = u_2(t) \end{array} \right. . \tag{6.10}$$

The system (6.9) along with the boundary conditions (6.10) has the form of (3.1) and can be stabilized by the RHOC scheme. This will be illustrated in §6.3.

6.2. Multi-pools system. We now consider the extension to the case of n cascaded pools which can be modeled by a system of n Saint-Venant equations:

$$\begin{array}{lcl} B_i\partial_t h_i + \partial_x Q_i & = & 0 \\ \partial_t Q_i + \partial_x\left(\frac{Q_i^2}{B_i h_i} + \frac{1}{2}B_i g h_i^2\right) & = & gB_i h_i(I_i - J(Q_i, h_i) \end{array}, \quad \begin{array}{l} (x,t) \in [0, L_i] \times [0, \infty), \\ i = \overline{1,n} \end{array}. \tag{6.11}$$

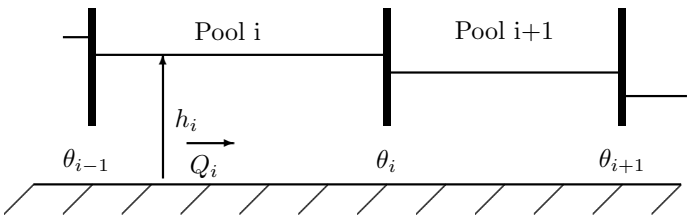

FIG. 6.2. *Multi-pool system*

Interconnections between pools are subject to a set of $n+1$ gate equations:

$$Q_{g_i} = K_i^2 \Theta_i^2(t) 2g(h_{us}^{g_i} - h_{ds}^{g_i}), i = \overline{0,n}, \tag{6.12}$$

and $n-1$ discharge conservation constraints:

$$Q_i(L_i, t) = Q_{i+1}(0, t), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{6.13}$$

where Q_{g_i} is the discharge through the gate, K_i the coefficient, Θ_i the opening of the gate, $h_{us}^{g_i}$ and $h_{ds}^{g_i}$ are the water levels at upstream and at downstream respectively.

Let us now consider the linearization of the system around a steady state $(\bar{h}_i, \bar{Q}_i)$, $i = \overline{1,n}$. By performing the same transformation as in the case of one pool, we obtain:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y_i = \lambda_i(x)\partial_x y_i + \gamma_i(x) y_i + \delta_i(x) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+i} + \gamma_{n+i}(x) y_i + \delta_{n+i}(x) y_{n+i} \end{array} \right., \quad \begin{array}{l} (x,t) \in [0, L] \times [0, \infty) \\ i = \overline{1,n} \end{array}. \tag{6.14}$$

For each pool, we introduce a new space variable as $\tilde{x} = \frac{xL}{L_i}$ for some $L > 0$, then system (6.14) can be written as:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y_i = \tilde{\lambda}_i(\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} y_i + \gamma_i(\tilde{x}) y_i + \delta_i(\tilde{x}) y_{n+i} \\ \partial_t y_{n+i} = \tilde{\lambda}_{n+i}(\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} y_{n+i} + \gamma_{n+i}(\tilde{x}) y_i + \delta_{n+i}(\tilde{x}) y_{n+i} \end{array} \right., \quad \begin{array}{l} (\tilde{x},t) \in [0, L] \times [0, \infty) \\ i = \overline{1,n} \end{array} \tag{6.15}$$

where $\tilde{\lambda}_i = \frac{L\lambda_i}{L_i}$, $i = \overline{1, 2n}$. In the sequel, the notation $\tilde{\cdot}$ will be omitted.

Supposing that the $n+1$ gate equations (6.12) are used to control y_i, $i = \overline{1,n}$ at the downstream and y_{n+1} at the upstream, we have:

$$y_i(L,t) = g_i(t),\ \dot{g}_i = u_i,\ i = 1, \ldots, n; \quad y_{n+1}(0,t) = g_{n+1}(t),\ \dot{g}_{n+1} = u_{n+1}. \tag{6.16}$$

The discharge conservation can be expressed in terms of new variables as:

$$\begin{aligned} &B_i\lambda_i(L) y_i(L,t) + B_i\lambda_{n+i}(L) y_{n+i}(L,t) \\ &\qquad = B_{i+1}\lambda_{i+1}(0) y_{i+1}(0,t) + B_{i+1}\lambda_{n+i+1}(0) y_{n+i+1}(0,t). \end{aligned} \tag{6.17}$$

This can be rewritten in the form:

$$y_{n+i+1}(0,t) = \theta_i y_i(L,t) + \alpha_i y_{n+i}(L,t) + \beta_i y_{i+1}(0,t), \tag{6.18}$$

with:

$$\theta_i = \frac{B_i \lambda_i(L)}{B_{n+i+1}\lambda_{i+1}(0)}, \quad \alpha_i = \frac{B_i \lambda_{n+i}(L)}{B_{n+i+1}\lambda_{i+1}(0)}, \quad \beta_i = -\frac{\lambda_{i+1}(0)}{\lambda_{n+i+1}(0)}. \tag{6.19}$$

The system (6.14) along with the boundary conditions (6.16) and (6.18) has the form of the system studied previously in §4. As a result, this multi-pool system can also be stabilized by RHOC scheme, and this will be illustrated below.

6.3. Simulation results. Let us finally present here some simulation results in order to illustrate the effectiveness of the infinite-dimensional control scheme discussed throughout the paper. The optimal control is obtained by performing the Galerkin method as presented in §5, where trial functions are hat functions (see for instance [11] or [28]) as presented in Fig. 6.3. The two-point boundary problem (5.10) of the solution approximation is solved by the *bvp5c* solver of Matlab based on a finite-difference scheme.

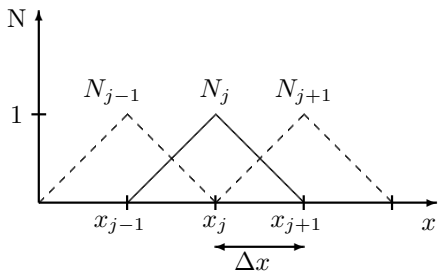

FIG. 6.3. *Trial functions used to discretize the optimal control problem*

We firstly consider a single pool with the parameters given in Table 6.1. The cost function (3.37) is formed with f_i and q_i equal to 1, r_i equal to 0.5. The prediction horizon T and the sampling period σ are set to be $3000(s)$ and $600(s)$ respectively. The numerical scheme is carried out with $\Delta x = 250(m)$ and $\Delta t = 75(s)$. The corresponding control results are presented in Fig. 6.4 and Fig. 6.5. We can observe from Fig. 6.4 that the state of the closed-loop system indeed converges to the origin, and from Fig. 6.5 that the norm of extended state indeed converges to the origin.

TABLE 6.1
Parameter of the pool

Length L (m)	Width B (m)	Slope I	MS coefficient k
3000	4.36	2.4×10^{-4}	30

We now consider a system of three cascaded pools whose lengths are $L_1 = 1000$ (m), $L_2 = 2000$ (m) and $L_3 = 3000$ (m). The other parameters are the same as in the previous case. We can see from the results (Fig. 6.6 and Fig. 6.7) that the state of the system and the value function still converge to the origin. These results suit well with the theories developed in the previous sections.

One final remark is that the computation time for the optimal control was around 10s for the single-pool and 20s for the multi-pools on an Intel Core 2 Duo 2.4Ghz, 1.95Go RAM Laptop. This means real-time control is possible.

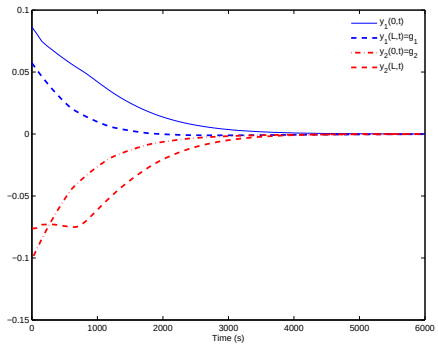

FIG. 6.4. *Single pool: State of the closed-loop system at the boundaries*

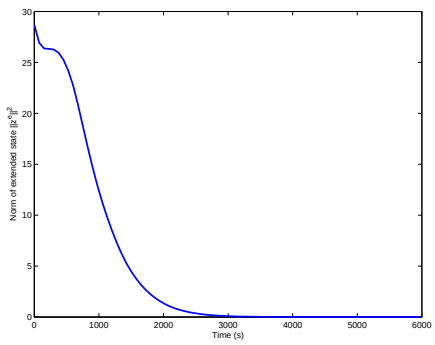

FIG. 6.5. *Single pool: Convergence of the norm of extended state*

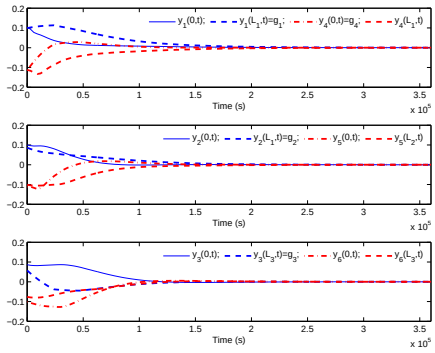

FIG. 6.6. *Multi-pool: State of the closed-loop system at the boundaries*

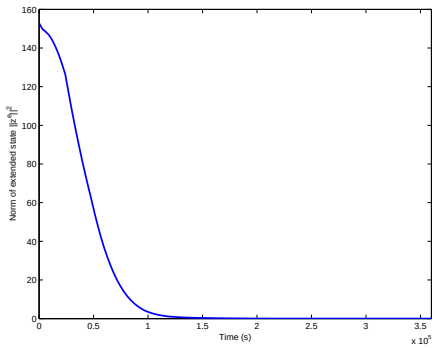

FIG. 6.7. *Multi-pool: Convergence of the norm of extended state*

7. Conclusion. In this paper, a complete proof of the exponential stability of RHOC with zero terminal constraint for linear infinite-dimensional systems has been established and this result has been applied to the boundary control of hyperbolic systems. The existence of the optimal solution is based on the semigroup approach and the stability is based on the decreasing of the value function. The calculus of variations has been used to obtain the adjoint state, and a weighted residual method has been used to numerically compute the optimal control by solving a classical boundary value problem. The application to linearized models of open channel systems both for the single pool case and for the multi-pools case was finally considered and validated by simulations, which demonstrates the effectiveness of the here-proposed approach. The theory developed here encourages the implementation of the RHOC for a real-time application, as long as the linearized model is still valid.

These results also open some directions for future works. Among them, we can mention the comparison of this approach with other ones (e.g. [6] or [18]) in terms of performance and robustness. We can also investigate the use of a decomposition-coordination scheme in case of multi-pool systems as proposed in [12] to reduce the computational complexity. Another goal is to study the stability in case of output feedback or develop a dual approach for observer design.

Appendix A. Proof of Lemma 3.1.

Proof. We consider a more general operator having the form:

$$\mathcal{L}z = \partial_t z - A(x,t)\partial_x z - B(x,t)z, \tag{A.1}$$

in Ω, where A and B are smooth matrices of dimension $n \times n$, and:

$$\begin{gathered} A = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix}, \quad A^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad A^- = \mathrm{diag}(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}) \\ \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} > \dots > \lambda_{p+q},\ x \in [0, L] \end{gathered} \tag{A.2}$$

The boundary operator M_+ (resp. M_-) is $p \times n$ (resp. $q \times n$) matrix and $\mathrm{rank}(M_+) = p$ (resp. $\mathrm{rank}(M_-) = q$).

In [24], the author showed that there exist C and c such that for all $z \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R} \times \Omega_-)$:

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|^2_{\Omega_-,c} + c\|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} \\ &\le C\left(\|z(s)\|_{\Omega,c} + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c}\right) \end{aligned} \tag{A.3}$$

with $\Omega_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ and the norm $\|\cdot\|_{I\times V,c}$ is defined by:

$$\|\psi\|^2_{I\times V,c} = \int_I \|\psi\|^2_V e^{-2ct} dt \tag{A.4}$$

where I is an interval of $\mathbb{R}$ (or can be degenerated to a point). We will used this result to prove the lemma. Consider two functions $\phi_-(x) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ and $\phi_+(x) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ satisfying:

$$\phi_-(x) = 1 \quad \text{if } x \le 1/4, \quad \phi_-(x) = 0 \quad \text{if } x \ge 3/4, \tag{A.5}$$

and $\phi_+(x) = 1 - \phi_-(x), \quad x \in \mathbb{R}$. Let us set:

$$z_- = \phi_- z, \quad z_+ = \phi_+ z. \tag{A.6}$$

Then $z = z_-|_{\mathbb{R}\times\Omega} + z_+|_{\mathbb{R}\times\Omega}$, where $f|_V$ represents the restriction of f in V.

We have $z_- \in \mathbf{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R} \times \Omega_-)$. By applying the estimation (A.3) for z_-, we obtain:

$$\begin{aligned} &\|z_-(t)\|^2_{\Omega_-,c} + c\|z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \\ \le\ & C\left(\|z_-(s)\|^2_{\Omega_-,c} + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|M_- z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c}\right) \end{aligned} \tag{A.7}$$

A similar estimation can be obtained for $z_+ = \phi_+ z$:

$$\begin{aligned} &\|z_+(t)\|^2_{\Omega_+,c} + c\|z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \\ \le\ & C\left(\|z_+(s)\|^2_{\Omega_+,c} + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|M_+ z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c}\right) \end{aligned} \tag{A.8}$$

with $\Omega_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < L\}$. By combining the two above estimations, we obtain:

$$\begin{aligned} &\|z_-(t)\|^2_{\Omega_-,c} + c\|z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \\ &+\|z_+(t)\|^2_{\Omega_+,c} + c\|z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \\ \le\ & C\Big(\|z_-(s)\|^2_{\Omega_-,c} + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|M_- z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} \\ &\quad \|z_+(s)\|^2_{\Omega_+,c} + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c} + \|M_+ z_+\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c}\Big) \end{aligned} \tag{A.9}$$

By the choice of ϕ_-, the value on the boundary $\partial\Omega_-$ of z_- is equal to that of z:

$$\begin{aligned} \|z_-\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} &= \|z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} \\ \|M_- z_-\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} &= \|M_- z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-} \end{aligned} \tag{A.10}$$

Similarly, for z_+, we have:

$$\begin{aligned} \|z_+\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} &= \|z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \\ \|M_+ z_+\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} &= \|M_+ z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+} \end{aligned} \tag{A.11}$$

In addition:

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|^2_{\Omega,c} = \|z_-(t)|_\Omega + z_+(t)|_\Omega\|^2_{\Omega,c} \le 2\left(\|z_-(t)\|^2_{\Omega_-,c} + \|z_+(t)\|^2_{\Omega_+,c}\right) \\ &\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} = \|z_-(t)|_{[s,t]\times\Omega} + z_+(t)|_{[s,t]\times\Omega}\|^2_{[s,t]\times\Omega,\alpha} \le 2\left(\|z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega_-,c} + \|z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega_+,c}\right) \end{aligned} \tag{A.12}$$

Therefore, the L.H.S. of (A.9) is greater than:

$$\|z(t)\|^2_{\Omega,c} + c\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \tag{A.13}$$

We will estimate the R.H.S. of (A.9). We have:

$$\begin{aligned} &\|z_-(s)\|^2_{\Omega_-,c} + \|z_+(s)\|^2_{\Omega_+,c} = \|\phi_- z(s)\|^2_{\Omega,c} + \|\phi_+ z(s)\|^2_{\Omega,\alpha} \\ \le\ &\left(\|\phi_-\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)} + \|\phi_+\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\right)\|z(s)\|^2_{\Omega,\alpha}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

The term $\mathcal{L}z_-$ can be written as:

$$\mathcal{L}z_- = \mathcal{L}(\phi_- z) = \partial_t(\phi_- z) + A\partial_x(\phi_- z) + B(\phi z) = \phi_-\mathcal{L}z + \phi'_- Az, \tag{A.15}$$

then:

$$\|\mathcal{L}z_-\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} \le \|\phi_-\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,\alpha} + \|\phi'_-\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|A\|^2_\infty\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,\alpha} \tag{A.16}$$

A similar estimation can be obtained for Lu_+:

$$\|\mathcal{L}z_+\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} \le \|\phi_+\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,\alpha} + \|\phi'_+\|^2_{\mathbf{C}^\infty(\Omega)}\|A\|^2_\infty\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,\alpha} \tag{A.17}$$

From (A.14), (A.16) and (A.17) (see also (A.10) and (A.11)), we deduce that the R.H.S.of (A.9) is smaller than:

$$CK\left(\|z(s)\|^2_{\Omega,c} + \frac{1}{c}\left(\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,\alpha}\right) + \|M_- z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,\alpha}\|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,\alpha}\right) \tag{A.18}$$

with K depends only on ϕ_-, ϕ_+ and A.

The combination of (A.18) and (A.13) gives us:

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|^2_{\Omega,c} + \left(\alpha - \tfrac{CK}{c}\right)\|z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,c} + \|z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,c} \\ \le\ &CK\left(\|z(s)\|^2_{\Omega,c} + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|^2_{[s,t]\times\Omega,c} + \|M_- z_-\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_-,\alpha}\|M_- z\|^2_{[s,t]\times\partial\Omega_+,\alpha}\right) \end{aligned}$$

We have $c - \frac{CK}{c} > \frac{c}{2}$ with c sufficiently large and:

$$e^{-2ct}\|\cdot\|^2_{[s,t]\times V} < \|\cdot\|^2_{[s,t]\times V,c} < e^{-2cs}\|\cdot\|_{[s,t]\times V} \quad \text{since} \quad c > 0, \tag{A.19}$$

where V represents Ω, $\partial\Omega_-$ or $\partial\Omega_+$. Finally, we obtain:

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|_\Omega^2 + \tfrac{c}{2}\|z\|_{[s,t]\times\Omega}^2 + \|z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+}^2 \\ \leq\ & C_0 e^{2c(t-s)}\left(\|z(s)\|_\Omega^2 + \tfrac{1}{c}\|\mathcal{L}z\|_{[s,t]\times\Omega}^2 + \|M_-z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|M_-z\|_{[s,t]\times\partial\Omega_+}^2\right) \end{aligned}$$

Q.E.D. □

Appendix B. Proof of Proposition 4.1.

Proof. We will show by induction that for each $j = \overline{1,n}$, system (4.1)-(4.6) (with n replaced by j) has a unique solution and there exist some constants C_j and c_j such that:

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{i=1}^j \left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_j}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\right) \\ & \leq C_j e^{2c_j t}\left(\textstyle\sum_{i=1}^j \|z_{i,0}\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^j \|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right) \end{aligned} \tag{B.1}$$

We call this proposition P. By Proposition 3.2, the solution of (4.1)-(4.6) exists and estimation (B.1) holds for $j = 1$. Suppose that P holds for $j = k$, which means that the solution of (4.1)-(4.6) composed by k sub-system exists and satisfies :

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{i=1}^k \left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_k}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2\right) \\ & \leq C_k e^{2c_k t}\left(\textstyle\sum_{i=1}^k \|z_{i,0}\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^k \|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right) \end{aligned} \tag{B.2}$$

for some C_k and c_k. Consider now the $(k+1)^{tm}$ sub-system. Set:

$$\tilde{g}_k(t) = \theta_k g_k(t) + c_k y_{n+k}(L,t), \tag{B.3}$$

and consider the solution of the following system:

$$\begin{cases} \partial_t y_{k+1} = \lambda_{k+1}(x)\partial_x y_{k+1} + \gamma_{k+1}(x) y_i + \delta_{k+1}(x) y_{n+k+1} \\ \partial_t y_{n+k+1} = \lambda_{n+i}(x)\partial_x y_{n+k+1} + \gamma_{n+k+1}(x) y_{k+1} + \delta_{n+k+1}(x) y_{n+k+1} \end{cases}, \tag{B.4}$$

with $(x,t) \in [0, L_{k+1}] \times [0,T]$, the initial condition:

$$z_{k+1}(0) = z_{k+1,0} \tag{B.5}$$

and the boundary conditions:

$$\begin{aligned} & y_{n+k+1}(0,t) = \tilde{g}_k(t) + \beta_{k+1} y_{k+1}(0,t), \\ & y_{k+1}(L_{k+1},t) = g_{k+1}(t) \end{aligned} \tag{B.6}$$

By applying once again Proposition 3.2, the solution z_{k+1} of this system exists and satisfies:

$$\begin{aligned} & \|z_{k+1}(t)\|_\Omega^2 + \tfrac{\tilde{c}_{k+1}}{2}\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\Omega}^2 + \|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \\ \leq\ & \tilde{C}_{k+1} e^{2\tilde{c}_{k+1} t}\left(\|z_{k+1,0}\|_\Omega^2 + \|\tilde{g}_k\|_{[0,t]}^2 + \|g_{k+1}\|_{[0,t]}^2\right) \end{aligned} \tag{B.7}$$

for some $\tilde{C}_{k+1}$ and $\tilde{c}_{k+1}$. Furthermore:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{g}_k\|_{[0,t]}^2 \leq 2\left(\theta_k^2\|g_k\|_{[0,t]}^2 + c_k^2\|y_{n+k}(L,t)\|_{[0,t]}^2\right) \\ & \leq 2\theta_k^2\|g_k\|_{[0,t]}^2 + 2c_k^2 C_k e^{2c_k t}\left(\textstyle\sum_{i=1}^k \|z_{i,0}\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^k \|g_k\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2\right) \end{aligned} \tag{B.8}$$

By setting $c_{k+1} = c_k + \tilde{c}_{k+1}$, and combining (B.2), (B.7) and (B.8), we have:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{k} \left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_k}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \right) \\
&+\|z_{k+1}(t)\|_\Omega^2 + \tfrac{\tilde{c}_{k+1}}{2}\|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\Omega}^2 + \|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_{k+1}\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \\
&\leq C_k e^{2c_k t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \|z_{i,0}\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{k} \|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2 \right) \\
&+\tilde{C}_{k+1} e^{2c_{k+1}t} \left(\|z_{k+1,0}\|_\Omega^2 + 2\theta_k^2 \|g_k\|_{[0,t]}^2 + \|g_{k+1}\|_{[0,t]}^2 \right) \\
&+2c_k^2 \tilde{C}_{k+1} C_k e^{2(c_k+\tilde{c}_{k+1})t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \|z_{i,0}\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{k} \|g_k\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

The L.H.S. of (B.9) is greater than:

$$\rho \textstyle\sum_{i=1}^{k+1} \left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_{k+1}}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \right) \tag{B.10}$$

with $\rho = \min\left\{ \frac{c_k}{c_k+\tilde{c}_{k+1}}, \frac{\tilde{c}_{k+1}}{c_k+\tilde{c}_{k+1}} \right\}$, and the R.H.S. is smaller than:

$$C e^{2c_{k+1}t} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \|z_{i,0}\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{k+1} \|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2 \right) \tag{B.11}$$

with some $C > \max\left\{ \tilde{C}_{k+1}, (2\theta_k^2 + 2c_k^2 C_k)\tilde{C}_{k+1} + C_k \right\}$. By taking $C_{k+1} = \frac{C}{\rho}$, we finally obtain:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{k+1} \left(\|z_i(t)\|_\Omega^2 + \frac{c_{k+1}}{2}\|z_i\|_{[0,t]\times\Omega} + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_-}^2 + \|z_i\|_{[0,t]\times\partial\Omega_+}^2 \right) \\
&\leq C_{k+1} e^{2c_{k+1}t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k+1} \|z_{i,0}\|_\Omega^2 + \sum_{i=1}^{k+1} \|g_i\|_{[0,t]}^2 + \|g_{n+1}\|_{[0,t]}^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

The proposition is proved with $j = n$. ∎

REFERENCES

[1] U.M. Ascher, R. Mattheij, and R. Russell, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 2 ed., 1995.

[2] G. Bastin and J.M. Coron, *Further results on boundary feedback stabilisation of 2x2 hyperbolic systems over a bounded interval*, in 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 2010.

[3] G. Bastin, J.M. Coron, and B. D'Andréa-Novel, *On the Lyapunov stability of linearised Saint-Venant equations for a slopping channel*, Network and Heterogeneous Media, 4 (June 2009), pp. 177–187.

[4] G. Bastin, B. Haut, J.M. Coron, and B. D'Andréa-Novel, *Lyapunov stability analysis of networks of scalar conservation laws*, Networks and Heterogeneous Media, 2 (2007), pp. 749 – 757.

[5] M. A. Cirina, *Boundary controllability of nonlinear hyperbolic systems*, SIAM Journal of Control, 7 (1969), pp. 198–212.

[6] J.M. Coron, B. D'Andréa-Novel, and G. Bastin, *A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws*, IEEE transactions on automatic control, 52 (2007), pp. 2 – 11.

[7] R.F. Curtain and H.J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[8] R. F. Curtain, *Linear-quadratic control problem with fixed endpoints in infinite dimensions*, Journal of optimization theory and application, 44 (1984), pp. 55–74.

[9] R. Findeisen and F. Allgöwer, *An introduction to nonlinear model predictive control*, in 21st Benelux Meeting on Systems and Control, Veldhoven, 2002.

[10] R. Findeisen, L. Imsland, F. Allgöwer, and B. A. Foss, *State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview*, European Journal of Control, 9 (2003), pp. 179–195.

[11] C.A.J. Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, Springer-Verlag, 2 ed., 1991.

[12] D. Georges, *Infinite-dimensional nonlinear predictive control design for open-channel hydraulic systems*, Networks and Heterogeneous Media, 4 (2009), pp. 1–18.

[13] W. H. Graf and M.S. Altinakar, *Hydraulique fluviale - Écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.

[14] K. Ito and K. Kunisch, *Receding horizon optimal control for infinite dimensional systems*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 8 (2002), pp. 741–760.

[15] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Control Theory for Partial Diffrential Equations: Continuous and Approximation Theories*, vol. Volume II Abstract Hyperbolic-like Systems over a Finite Time Horizon, Cambrige University Press, 2000.

[16] T.-T. Li and B. Rao, *Exact boundary controllability of unsteady flows in a tree-like network of open canals*, Methods and Applications of Analysis, 11 (2004), pp. 353–366.

[17] T. T. Li, B. Rao, and Y. Lin, *Semi-global* C1 *solution and exact boundary controllability for reducible quasilinear hyperbolic systems*, Modélisation mathématique et analyse numérique, 34 (2000), pp. 399–408.

[18] X. Litrico and V. Fromion, *Boundary control of hyperbolic conservation laws using a frequency domain approach*, Automatica, (2009).

[19] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, 1969.

[20] D. Q. Mayne and H. Michalska, *Receding horizon control of nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 35 (1990), pp. 814–824.

[21] V.T. Pham, D. Georges, and G. Besançon, *Infinite-dimensional receding horizon optimal control for an open-channel system*, in 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 2010.

[22] ———, *On the use of a global control lyapunov functional in infinite-dimensional predictive control*, in 4th IFAC Symposium on System, Structure and Control, 2010.

[23] ———, *Predictive control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws*, in 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010.

[24] J. Rauch, *L_2 is a continuable initial condition for kreiss' mixed problems*, Communications on Pure and Applied Mathematics, (1972), pp. 265–285.

[25] J. Rauch and M. Taylor, *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains*, Indiana University Mathematics Journal, 24 (1974), pp. 79–86.

[26] J. B. Rauch and F. J. III Massey, *Differentiability of solution to hyperbolic initial boundary value problems*, Transactions of the American Mathematical Society, 189 (1974), pp. 303–318.

[27] D.L. Russell, *Controllability and stability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open question*, SIAM Review, 20 (1978), pp. 639–739.

[28] R. Szymkiewicz, *Numerical modeling in Open Channel Hydraulics*, vol. 81 of Water Science and Technology Library, Springer, 2010.

[29] C.Z. Xu and G. Sallet, *Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems*, ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, 7 (2002), pp. 421–442.

Appendix C

Paper published in Automatica

Author's personal copy

Automatica 48 (2012) 2244–2251

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Automatica

journal homepage: www.elsevier.com/locate/automatica

Brief paper

Receding horizon boundary control of nonlinear conservation laws with shock avoidance[☆]

Thang V. Pham[a,1], Didier Georges[a], Gildas Besançon[a,b]

[a] Grenoble Institute of Technology–CNRS–Joseph Fourier University–Stendhal University, Control Systems Department, Gipsa-lab, BP 46 38402 St Martin d'Hères, France

[b] Institut Universitaire de France, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 22 April 2011
Received in revised form
13 January 2012
Accepted 26 March 2012
Available online 5 July 2012

Keywords:
Receding horizon
Optimal control
Boundary control
Nonlinear hyperbolic equation
Conservation laws

ABSTRACT

This paper deals with the boundary control for scalar *non-linear* hyperbolic systems of conservation laws. One of the issues arising from these systems is the occurrence of singularities (called shocks) in the domain. We will show that to avoid the shock, a set of constraints on both the control and the state at the boundary has to be fulfilled. Then, a proof of the exponential stability of the system is established provided that there is no shock and that the state at the boundary is exponentially stable. These conditions are shown to be achieved by the Receding Horizon Optimal Control approach. A simulation is finally carried out with the freeway traffic model to demonstrate the effectiveness of the here-proposed control.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Conservation laws are first-order partial differential equations (PDEs) which describe a number of interesting physical problems in various areas such as gas dynamics (see Serre (1999)), road traffic (see e.g. Bastin, Haut, Coron, and D'Andréa-Novel (2007), Colombo, Goatin, and Rosini (2011), Serre (1999)) and open-channel systems (see Georges (2009) and Georges and Litrico (2002)). One of the challenges of these systems is that they are of infinite dimension. In addition, they are generally nonlinear and admit singularities called shocks. The presence of shocks in the solution, from a practical point of view, can lead to (very) critical situations such as traffic jams for car flows or tsunamis for coastal flows. From a theoretical point of view, the singularities require more effort to analyze (see e.g. (Bressan, 2000), Colombo et al. (2011) and Colombo and Goatin (2007). As a starting point here, let us restrict the proposed study in order to avoid these situations to the case of *scalar nonlinear* conservation laws. The extension of this approach to higher dimension will be studied in our future works. Then the following system is considered:

$$\partial_t a + \partial_x F(a) = 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+, \qquad a(\cdot, 0) = a_0. \tag{1}$$

This equation represents the conservation of the quantity a under the action of the flux $F(a)$. We suppose that F is sufficiently smooth (at least $\mathbf{C}^2$) which means that (1) can also be written as:

$$\partial_t a + f(a)\partial_x a = 0 \tag{2}$$

where $f(a) = \frac{dF}{da}$. Without loss of generality, we can also suppose that the control acts at the boundary $x = 0$ as:

$$a(0,t) = w(t). \tag{3}$$

For the regularity of the solution, an extended state at the boundary is introduced:

$$\dot{w} = u. \tag{4}$$

The control problem for a network of such equations was previously studied by Bastin et al. (2007). In this former paper, the stability is guaranteed by using a Lyapunov approach but the problem of shocks is not explicitly treated. The objective of the present paper is to exploit the boundary control so as to prevent the shock to appear. The idea is to use the model in order to anticipate the behavior of the system and then add constraints to the control. This motivates the use of predictive control relying on the Receding Horizon Optimal Control (RHOC) approach. This method has been well studied for finite dimensional systems,

☆ The material in this paper was presented at the 18th IFAC World Congress, August 28–September 2, 2011, Milano, Italy. This paper was recommended for publication in revised form by Associate Editor Martin Guay under the direction of Editor Frank Allgöwer.

E-mail addresses: Van-Thang.Pham@gipsa-lab.grenoble-inp.fr (T.V. Pham), didier.georges@grenoble-inp.fr (D. Georges), Gildas.Besancon@gipsa-lab.grenoble-inp.fr (G. Besançon).

1 Tel.: +33 610849645; fax: +33 476826388.

0005-1098/$ – see front matter © 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.
doi:10.1016/j.automatica.2012.06.025

Author's personal copy

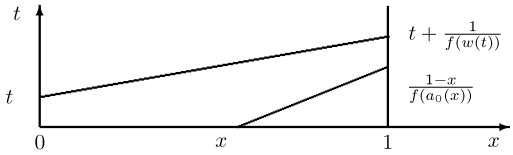

Fig. 1. Characteristics and shock-avoiding conditions.

even in nonlinear cases. It was shown to have various advantages such as the ability to manipulate explicitly the constraints and to use the nonlinear model (see Findeisen, Imsland, Allgöwer, and Foss (2003)). The extension of the RHOC approach to infinite-dimensional systems has already been investigated. Among those studies we can mention the work of Ito and Kunisch (2002) where RHOC strategy for infinite dimensional systems was analyzed and a proof of stability was given. Application of RHOC for first-order hyperbolic PDEs was studied and solved by the method of characteristics (see Mohammadi, Dubljevic, and Forbes (2010) and Shang, Forbes, and Guay (2004)). RHOC based on a finite-dimensional approximation of nonlinear parabolic and hyperbolic PDEs was also employed to deal with state and control constraints (see Dubljevic, Mhaskar, Christofides, and El-Farra (2005)). RHOC for *boundary control* of nonlinear Saint–Venant equations was considered in Georges (2009), and solved by using the variational calculus approach. A numerical solution of this control was also proposed and validated in simulation. A complete proof for the stability of RHOC for linear Saint–Venant equations was recently presented in Pham, Georges, and Besançon (2010).

The main ideas of the present article are summarized as follows: We first formulate the constraints for the boundary state and the boundary control so that the shock cannot appear, and then use RHOC to guarantee the verification of these constraints and the convergence of the boundary state. As shown later, the convergence of the state at boundary leads to the convergence of the state over the whole domain.

In the next section, the characteristic form of the system is presented and the shock-avoiding conditions are formulated. We will then show that the convergence of the boundary state leads to the convergence of the whole domain. The here proposed RHOC is then presented in Section 3. It is shown that this control guarantees the convergence of the boundary state. The case with a measurable disturbance is also treated. As an example, in Section 4, the whole theory presented in this paper will be applied to a freeway traffic model and some simulation will be carried out to illustrate the approach. Finally, some conclusions and perspectives are provided.

2. The stability of scalar boundary control hyperbolic systems

2.1. The well-posedness and shock-avoiding conditions

In this paper, we will try to avoid the singularity in the solution of system (2)–(4) which means that $a(x,t)$ is in $\mathbf{C}^0([0,1])$ for all $t \geq 0$. The well-posedness of the above problem is guaranteed if $f(w(t)) \geq c > 0$ for all $t \geq 0$. This condition ensures that the state value in the domain is determined by the boundary value at $x = 0$. It is well known that the characteristics of the system are determined by $\frac{dx}{dt} = f(a)$ and along the characteristics, the total time derivation of the solution a is then $\frac{da}{dt} = 0$ (see Serre (1999)) for a general introduction, (see Shang, Forbes, and Guay (2005, 2007)) for application of this method to design the control of hyperbolic and parabolic distributed parameter systems. It follows that a is constant and the characteristics are straight lines whose slopes are determined by the boundary or initial condition.

We refer to Fig. 1 to illustrate the shock-avoiding conditions. To avoid the shock, a characteristic should not intersect another one in the interval [0, 1]. It follows that the ordinate of the intersection of the characteristic with the line $x = 1$ must be an increasing function of time. We consider two cases:

- Case 1: $t \leq \frac{1}{f(a_0(0))}$. In this case the value at $x = 1$ is governed by the initial condition. The intersection emerging from the point $(x, 0)$ has the abscissa $\frac{1-x}{f(a_0(x))}$. This must be an increasing function of x, then:

$$\frac{-f(a_0(x)) + (1-x)f'(a_0(x))a_0'(x)}{f^2(a_0(x))} > 0. \tag{5}$$

- Case 2: $t > \frac{1}{f(a_0(0))}$. The value at $x = 1$ is governed by the condition at $x = 0$. The characteristics emerging from the point $(0, t)$ arrives at $x = 1$ at $t + \frac{1}{f(w(t))}$, and this must be also an increasing function of t. This condition leads to:

$$1 - \frac{uf'(w)}{f^2(w)} > 0 \tag{6}$$

where $f' = \frac{df}{dw}$. In conclusion, if the initial condition satisfies (5) and the boundary control satisfies (6), there is no shock appearing in the domain.

2.2. Stability

In this section, we will show that the stability of the state at the boundary can lead to the stability of the state in the whole domain.

Theorem 1. *Let $\gamma > 0$ be a small constant. We consider the following problem:*

$$\begin{aligned} &\partial_t a + f(a)\partial_x a = 0 \\ a(\cdot,0) = a_0, \quad &a(0,t) = w(t), \quad \dot{w}(t) = u(t) \end{aligned} \tag{7}$$

with measurable control $u(\cdot)$ and corresponding absolutely continuous $w(\cdot)$ that satisfy:

$$\begin{cases} u(t) \in U \subset \mathbb{R}, \quad w(t) \in W \subset \mathbb{R} \\ 1 - \dfrac{f'(w(t))u(t)}{f^2(w(t))} \geq \gamma, \end{cases} \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Under the following assumptions:

(i) *a_0 satisfies the shock-avoiding condition (5).*
(ii) *W and U are closed intervals of $\mathbb{R}$, $0 \in U$.*
(iii) *$f(w) \geq c$ with a constant $c > 0$ for all $w \in W$.*

If the control $u(\cdot)$ stabilizes $w(t)$ to a reference $w_r \in W$ then $a(\cdot,t)$ converges (in $\mathbf{C}^0$ norm) to this one as well.

Proof. For $t \geq \frac{1}{f(a_0(0))}$, we will show that $a(x,t)$ is continuous in x. Since there is no shock, the solution of (7) can be determined by the method of characteristics as:

$$a(x,t) = w(t - x/f(a(x,t))). \tag{9}$$

We set $s = t - x/f(a(x,t)) = t - x/f(w(s))$. Then $x = (t - s)f(w(s))$ and:

$$dx = [-f(w(s)) + (t-s)f'(w(s))u(s)]ds.$$

We evaluate the term within the brackets:

$$\begin{aligned} -f(w) + (t-s)f'(w)u &\leq -f(w) + \frac{x}{f(w)}(1-\gamma)f^2(w) \\ &\leq -\gamma f(w) \leq -\gamma c. \end{aligned}$$

With a fixed t, we calculate:

$$\begin{aligned} \left|\frac{da(x,t)}{dx}\right| &= \left|\frac{dw(s)}{[-f(w(s)) + (t-s)f'(w(s))u(s)]ds}\right| \\ &= \frac{|u(s)|}{|-f(w(s)) + (t-s)f'(w(s))u(s)|} \leq \frac{1}{\gamma c}\max_{\mu \in U}|\mu|. \end{aligned}$$

Author's personal copy

As a consequence, $a(x,t)$ is continuous in x. We have:

$$\|a(x,t)-w_r\|_{\mathbf{C}^0} = \max_{x\in[0,1]} |a(x,t)-w_r| = \max_{s\in[t-\tau,t]} |w(s)-w_r|$$

where τ is determined by an implicit relation:

$$\tau = t - 1/f(w(\tau)) \geq t - 1/c. \tag{10}$$

Then

$$\|a(x,t)-w_r\|_{\mathbf{C}^0} \leq \max_{s\in[t-1/c,t]} |w(s)-w_r| \to 0 \quad \text{as } t\to\infty. \quad \square$$

Note 1. We can also prove that $a(x,t)$ is continuous in x for $t < 1/f(a_0(0))$ by the same argument.

3. Receding Horizon Optimal Control (RHOC)

We now use the RHOC to guarantee the shock-avoiding conditions and the convergence of the boundary state at $x=1$ to a reference a_r. Firstly, we summarize the principle of RHOC, then the proof of the stability is given.

3.1. Principle of RHOC

Let us consider system (7) and recall for it the principle of RHOC:

- At time t, we obtain the current state $[a(.,t) \quad w(t)]^T$
- Then, for a given prediction time T and the cost function $J(\bar{a},\bar{w},\bar{u})$ which will be determined later, we compute the optimal solution of the problem:

$$\min_{\bar{u}(\cdot)} J(\bar{a},\bar{w},\bar{u})$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \partial_t\bar{a} + f(\bar{a})\partial_x\bar{a} = 0, & \\ \bar{a}(0,\tau) = w(\tau), & \dot{\bar{w}}(\tau) = \bar{u}(\tau), \quad \forall\tau\in[t,t+T] \\ \bar{a}(\cdot,t) = a(\cdot,t), & \bar{w}(t) = w(t), \quad \bar{u}\in U, \\ \bar{w}\in W & \\ 1 - \dfrac{f'(\bar{w})\bar{u}}{f^2(\bar{w})} \geq \gamma & \end{cases} \tag{11}$$

  where the notation $\bar{\cdot}$ stands for the predicted variables.
- The first part of the optimal control is applied on the system in period $[t, t+\sigma]$ for a small σ, and the procedure restarts at $t = t+\sigma$.

3.2. Stability of the RHOC scheme

Supposing that the three conditions of Theorem 1 hold for system (7). We show that the RHOC can be used to obtain the asymptotic convergence of w and to guarantee the shock avoiding condition (6). To this end, we consider the following cost function whose goal is to regulate the state at $x=1$ around a constant reference a_r:

$$J(\bar{a},\bar{w},\bar{u}) = \int_t^{t+T} (q.(\bar{a}(1,\tau)-a_r)^2 + r.\bar{u}^2(\tau))d\tau + q_f(\bar{a}(1,t+T)-a_r)^2 \tag{12}$$

where $q>0$, $r>0$ and $q_f>0$ are penalty constants. The prediction time T is determined by the relation:

$$T = T_f + 1/f(w(t+T_f)) \tag{13}$$

with a positive constant T_f (see Fig. 2).

The reason for which this prediction time is chosen is that the infinite dimensional optimal problem (11) can be transformed into a finite dimensional optimal problem as presented in what follows. The cost function can be separated into two parts: One under the effect of the initial condition and one under the effect of the control:

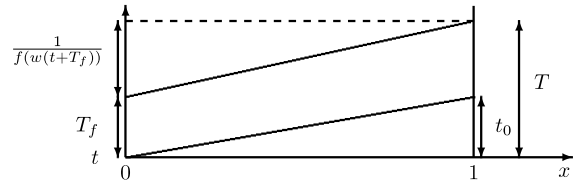

Fig. 2. Relation between T, T_f and t_0.

$$J(\bar{a},\bar{w},\bar{u}) = \int_t^{t+t_0} q(\bar{a}(1,\tau)-a_r)^2 d\tau + \int_{t+t_0}^{t+T} q(\bar{a}(1,\tau)-a_r)^2 d\tau + \int_t^{t+T_f} r\bar{u}^2(\tau)d\tau + \int_{t+T_f}^{t+T} r\bar{u}^2(\tau)d\tau + q_f(\bar{a}(1,t+T)-a_r)^2 \tag{14}$$

where $t_0 = 1/f(a(0,t))$. The first term does not depend on $\bar{u}$. For the second one, we have $\bar{a}(1,\tau) = \bar{w}(s)$ where $s = \tau - 1/f(\bar{w}(s))$. Then:

$$\int_{t+t_0}^{t+T} q(\bar{a}(1,\tau)-a_r)^2 d\tau = \int_t^{t+T_f} q[\bar{w}(s)-a_r]^2 \left(1 - \frac{f'(\bar{w}(s))\bar{u}(s)}{f^2(\bar{w}(s))}\right) ds \tag{15}$$

since $d\tau = (1 - \frac{f'(\bar{w}(s))\bar{u}(s)}{f^2(\bar{w}(s))})ds$.

The control in the interval $[t+T_f, t+T]$ does not affect the state at $x=1$ in the prediction horizon, so it can be set to zero in order to minimize the cost function. As a result, the fourth term in (14) is canceled. The original problem (11) is now equivalent to:

$$\min_{\bar{u}(\cdot)} J_1(\bar{z},\bar{u}) = \int_t^{t+T_f} F(\bar{z},\bar{u})ds + E(\bar{z}(T_f))$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\bar{z}} = \bar{u}, \quad \bar{z}(t) = z(t) = w(t) - a_r, \\ \bar{u}(\tau)\in U, \quad \bar{z}(\tau)\in Z = W - a_r, \quad \tau\in[t,t+T_f] \\ 1 - \dfrac{g'(\bar{z})\bar{u}}{g^2(\bar{z})} \geq \gamma \end{cases} \tag{16}$$

where we introduced a new variable $\bar{z} = \bar{w} - a_r$ and:

$$F(z,u) = qz^2\left(1 - \frac{g'(z)u}{g^2(z)}\right) + ru^2, \qquad E(z) = q_f z^2, \qquad g(z) = f(z+a_r). \tag{17}$$

We firstly prove the existence of the optimal solution. It can be noticed that for all $z(t) \in Z$ the above problem always has an admissible solution as $\bar{u}(.) \equiv 0$. We define now the (state-dependence) control region

$$\Omega(z) = \{u\in U | 1 - g'(z)u/g^2(z) \geq \gamma\} \tag{18}$$

and the set

$$N(z) = \{(F(z,u)+\delta, u) | \delta\geq 0, u\in\Omega(z)\}. \tag{19}$$

It is easy to verify that $N(z)$ is convex for all $z\in\mathbb{R}$, then the existence of the optimal solution is guaranteed by applying the Fillipov–Cesari theorem (see Hartl, Sethi, and Vickson (1995)).

We now establish the stability proof. Obviously, the stage cost satisfies the following conditions: $F(0,0) = 0$, $F(z,u) > 0$, $\forall(z,u)\in Z\times U\setminus(0,0)$ and $F(z,u)\geq\gamma qz^2$. We will show that for all $z(t)\in Z$ we can find a feasible control $\bar{u}_f$ (which means that this control satisfies all the constraints (16)) such that:

Author's personal copy

$$\frac{\partial E}{\partial z}\bar{u}_f(\tau) + F(\bar{z}(\tau), \bar{u}_f(\tau)) \le 0, \quad \forall \tau \in [t, t+T_f]. \tag{20}$$

Firstly, we can notice that:

$$F(z,u) \le Qz^2, \quad Q = \max_{z\in Z, u\in U}[q(1-g'(z)u/g^2(z))]. \tag{21}$$

Secondly, since $g'(\bar{z})$ is bounded, there exists u_M such that for all $\bar{u} \in U^{ad} = [-u_M, u_M]$:

$$|g'(\bar{z})\bar{u}| \le (1-\gamma)c^2 \le (1-\gamma)g^2(\bar{z}). \tag{22}$$

We then consider the feedback control in the form $\bar{u}_f = k\bar{z}$ where $k < 0$ and $kZ \subseteq U^{ad}$. Such a constant exists because $(0,0) \in Z \times U^{ad}$. Then $\bar{u}_f$ is a feasible control and:

$$\frac{\partial E}{\partial z}\bar{u}_f + F(\bar{z}(\tau), \bar{u}_f) \le (2q_f k + Q + rk^2)\bar{z}^2 \le 0 \tag{23}$$

if the terminal weight q_f is chosen such that:

$$2q_f k + Q + rk^2 \le 0. \tag{24}$$

Theorem 2.1 presented in Findeisen et al. (2003) can now be applied and guarantees that $w(t)$ converges to a_r with the domain of attraction being the whole set Z. Finally, by applying Theorem 1, the state of (7) converges to a_r as well.

Note 2. In order to avoid the nonlinear constraint in (16), we can replace it by the constraint $\bar{u} \in U^{ad}$. This leads to a conservative solution but more robust because it has a large margin for the shock-avoiding condition.

Note 3. We can consider a simpler cost function, which treats only the state at the boundary $x = 0$ as follows:

$$J(\bar{z}, \bar{u}) = \int_t^{t+T_f} [q\bar{z}^2(s) + r\bar{u}^2]ds + q_f\bar{z}^2(T_f). \tag{25}$$

This cost function leads also to the convergence of w to a_r and as a consequence guarantees the convergence of the system, but it can not take into account a disturbance term in the domain. This case will be considered in the next section.

3.3. Shock-avoiding conditions in the presence of measurable disturbance

Let us consider system (7) in the presence of a disturbance. In this case, the conservation equation takes the form:

$$\partial_t a + f(a)\partial_x a = p(x,t) \tag{26}$$

and the characteristics are no longer straight lines in general. In this paper, let us deal with a simpler problem where the disturbance acts at one point $x = x_p$ of the domain. So it takes the form:

$$p(x,t) = \delta(x - x_p)p(t) \tag{27}$$

where $\delta(x)$ denotes the Dirac function. We assume in addition that $p(t)$ is a sufficiently smooth function of t. We can easily check that the characteristics are still straight lines, but with different slopes in $[0, x_p]$ and $[x_p, 1]$.

As in the case treated in Section 2.1, to avoid the shocks in $[0, x_p]$, we need that:

$$I_1(t) = t + \frac{x_p}{f(w(t))} \tag{28}$$

is an increasing function of time. It implies:

$$\dot{I}_1 = 1 - \frac{x_p f'(w)u}{f^2(w)} > 0 \tag{29}$$

where the dependence in t is omitted for the sake of simplicity. In addition, to avoid the shock in the interval $[x_p, 1]$, the function:

$$I_2(t) = I_1(t) + \frac{(1-x_p)}{f(w(t)) + p(I_1(t))} \tag{30}$$

must also be increasing. So we have the following condition:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \frac{(1-x_p)f'(w+p(I_1))(u+\dot{p}(I_1)\dot{I}_1)}{f^2(w+p(I_1))} > 0. \tag{31}$$

These conditions, along with the well-posedness conditions:

$$f(w(t)) \ge c > 0, \qquad f(w(t) + p(I_1(t))) \ge c > 0 \tag{32}$$

can not be satisfied in general since they depend on the disturbance $p(t)$. In the following, we will assume that the disturbance and its variation are bounded, namely:

$$|p(t)| \le \alpha, \qquad |\dot{p}(t)| \le \beta \quad \forall t \tag{33}$$

where α and β are sufficiently small. In this case, we can find subsets $U_p^{ad} \subseteq U$ and $W_p^{ad} \subseteq W$ such that these conditions are satisfied for all $u \in U_p^{ad}$ and $w \in W_p^{ad}$ as presented later for the traffic model. The other systems can also be treated in a similar manner. We can also implement directly these constraints in the RHOC scheme, but the stability proof becomes very complicated so this option will not be considered in this paper.

3.4. Solution of optimal control

The optimal problem to be solved at each instant is then:

$$\min_{u(\cdot)} J(a,w,u) = \int_0^T [q(a(1,t)-a_r)^2 + ru^2(t)]dt + q_f(a(1,T)-a_r)^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \partial_t a + f(a)\partial_x a = \delta(x-x_p)p(t) \\ a(0,t) = w(t), \qquad \dot{w}(t) = u(t) \\ a(x,0) = a_0(x), \qquad w(0) = w_0, \qquad u \in U, \\ \quad w \in W \\ \text{Shock Avoiding Constraints (SAC)} \end{cases} \tag{34}$$

where the SAC depend on the problem considered:

- Without disturbance:

$$SAC := \begin{cases} 1 - \dfrac{f'(w)u}{f^2(w)} \ge \gamma \quad \text{(Nonlinear constraint)} \\ \text{or } u \in U^{ad} \quad \text{(Linear constraint).} \end{cases} \tag{35}$$

- With disturbance:

$$SAC := u \in U_p^{ad}, \qquad w \in W_p^{ad}. \tag{36}$$

The constraints on u and w are handled by using the barrier method introduced by Boyd and Vandenberghe (2004). In this technique, each inequality $C \ge 0$ is taken into account by adding the term $\int_0^{T_f} -\frac{1}{M}\log C dt$ in the cost function, where M is a sufficiently large positive constant. The optimal problem is now to minimize the modified cost function without the constraints on u and w. At this stage, we can follow the same procedure as the one described in Section 3.2 to transform the above problem to an optimal problem in finite dimension. The solution is then obtained by iterating the steepest descent algorithm (see Boyd and Vandenberghe (2004)).

4. Example

We apply here the previously presented theories for a freeway traffic model as an example. Other models, such as the famous Burgers' equation (see Serre (1999)) or the diffusive wave model for an open channel system (see Georges and Litrico (2002)) can be treated in the same way.

Author's personal copy

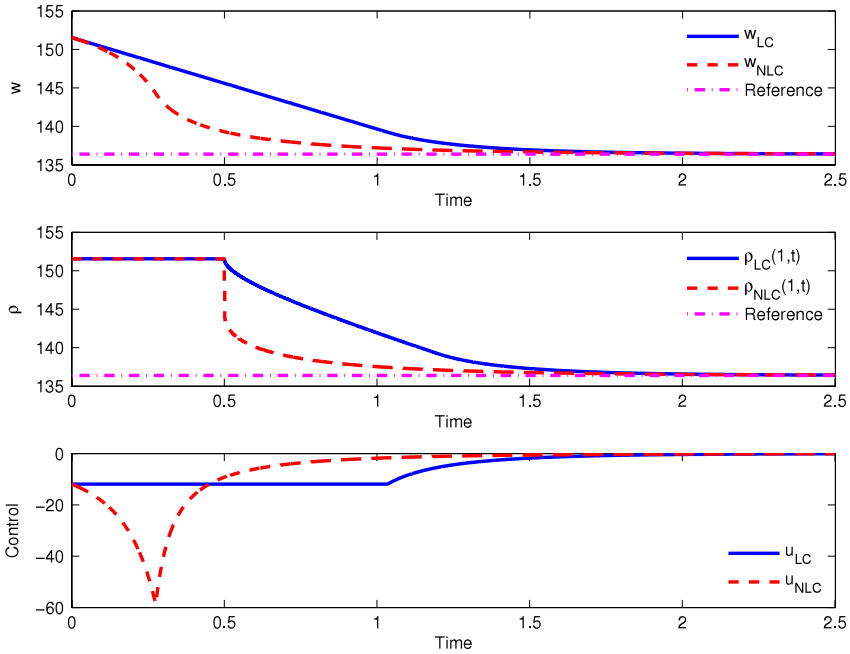

Fig. 3. Linear constraints control (solid line) and nonlinear constraints control (dashed line).

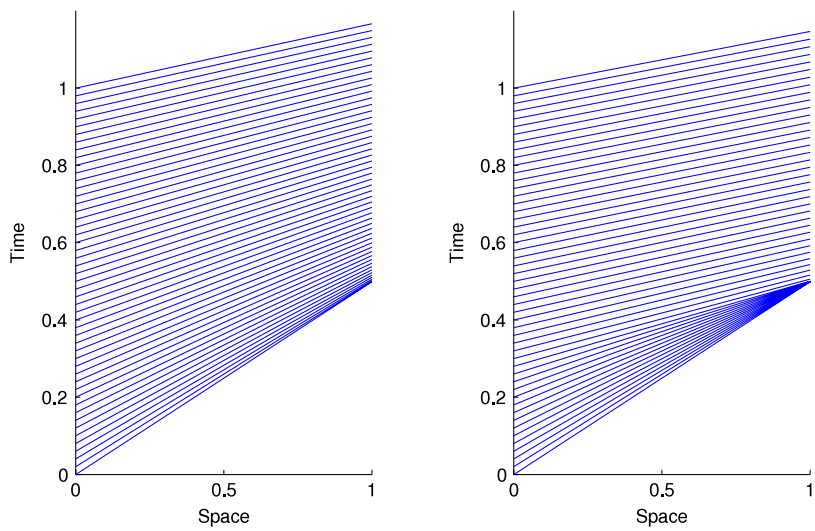

Fig. 4. The characteristics with linear (left) and nonlinear (right) constraints.

4.1. Freeway traffic model

We consider the Lighthill–Whitham–Richards (LWR) model presented by Garavello and Piccoli (2006). The governing equation is:

$$\partial_t \rho + \partial_x F(\rho, v) = 0 \tag{37}$$

where $\rho \geq 0$ is the vehicle density, and the traffic flux $F(\rho, v)$ is given by ρv. The main assumption of the LWR model is that the average velocity depends only on the density. The flux is then determined by $F(\rho) = \rho v(\rho)$ called the fundamental diagram. A reasonable property of v is that it is a decreasing function of the density. The simplest fundamental diagram is obtained by setting v to be a linear function of ρ:

$$v(\rho) = v_f(1 - \rho/\rho_M) \tag{38}$$

with v_f the free flow speed and ρ_M the maximal density. So we have:

$$f(\rho) = v_f(1 - 2\rho/\rho_M), \qquad f'(\rho) = -2v_f/\rho_M. \tag{39}$$

The control acts at point $x = 0$:

$$\rho(0, t) = w(t), \qquad \dot{w}(t) = u(t). \tag{40}$$

The control u represents the increment of the vehicle density at the entry of the road. The set W is chosen as:

$$W = [0, w_{max}], \quad w_{max} = \frac{\rho_M}{2}\left(1 - \frac{c}{v_f}\right)$$

then condition (iii) of Theorem 1 is satisfied. We show now how to find U_p^{ad} and W_p^{ad} in order to satisfy (29)–(32) if there is a disturbance. Conditions (32) are satisfied if we have:

$$0 \leq w, \quad w + p(I_1) \leq \frac{\rho_M}{2}\left(1 - \frac{c}{v_f}\right). \tag{41}$$

Author's personal copy

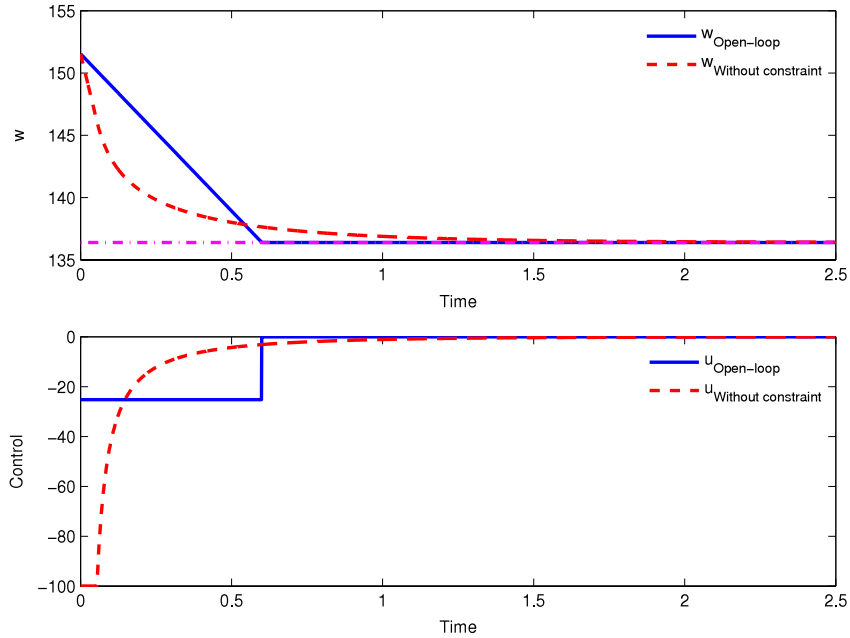

Fig. 5. Open-loop control (solid line) and no shock-avoiding control (dashed line).

We can choose $w_M^{ad} = \frac{\rho_M}{2}(1 - \frac{c}{v_f}) - \alpha$ and $w_m^{ad} = \alpha$, then (41) holds for all $w \in W_p^{ad} = [w_m^{ad}, w_M^{ad}]$. We will now find a value u_m^{ad} such that (29) and (31) are satisfied for all $u \geq u_m^{ad}$. For (29), we need that:

$$u_m^{ad} \geq -\frac{\rho_M v_f}{(2x_p)} \cdot \left(1 - \frac{2w}{\rho_M}\right)^2, \quad \forall w \in W_p^{ad}. \tag{42}$$

In W_p^{ad}, the right-hand side of the above inequality is an increasing function, then its maximum is attained at $w = w_M^{ad}$. Eq. (42) implies that:

$$u_m^{ad} \geq -\frac{\rho_M v_f}{(2x_p)} \cdot \left(1 - \frac{2w_M^{ad}}{\rho_M}\right)^2 = u_1. \tag{43}$$

Condition (31) implies that $k_1 u_m^{ad} \geq -k_2$ where k_1 and k_2 are given by:

$$k_1 = \frac{2x_p v_f}{\rho_M f^2(w)} + \frac{2(1-x_p)v_f}{\rho_M f^2(w + p(I_1))}\left(1 + \frac{2\dot{p}(I_1)x_p v_f}{\rho_M f^2(w)}\right)$$
$$k_2 = 1 + \frac{2(1-x_p)v_f \dot{p}(I_1)}{\rho_M f^2(w + p(I_1))}.$$

Thanks to relations (32) and (33), we can easily check that:

$$k_1 \leq \frac{2x_p v_f}{\rho_M c^2} + \frac{2(1-x_p)v_f}{\rho_M c^2}\left(1 + \frac{2\beta x_p v_f}{\rho_M c^2}\right) = k_{max},$$
$$k_2 \geq 1 - \frac{2(1-x_p)v_f \beta}{(\rho_M c^2)} = k_{min},$$

for all $w \in W_p^{ad}$, $|p| \leq \alpha$ and $|\dot{p}| \leq \beta$. Then we can choose:

$$u_m^{ad} = \max(-k_{min}/k_{max}, u_1) + \gamma^{ad} \tag{44}$$

where γ^{ad} is a small positive constant introduced to guarantee the inequality of (29) and (31). Then U_p^{ad} can be determined as $U_p^{ad} = [u_m^{ad}, \infty) \cap U$. Finally, for all $u \in U_p^{ad}$ and $w \in W_p^{ad}$, conditions (29), (31) and (32) are satisfied, which guarantees that no shock appears in the domain.

4.2. Simulation results

To illustrate our approach, let us present in this section simulation results with the freeway traffic model where $v_f = 80$ km/h and $\rho_M = 315$ vehicles/km. The cost function is in the form (12) with $q = 100$, $r = 1$ and $q_f = 1184$ which satisfy (24) with $k = 2.9$.

The first simulation is carried out to demonstrate the capacity of the here-proposed approach to prevent the formation of shocks when there is no disturbance by using either the nonlinear constraint (NLC) or linear constraint (LC) in (35). To this end, we set the system at the critical point where $w \approx w_{max}$ and $u \approx u_{min}$. At this point, the shock easily appears. The results are presented in Fig. 3. We can see for both approaches that ρ at $x = 1$ converges to the reference after some delay in comparison with ρ at $x = 0$. The control of the LC at the beginning is saturated at its minimum while the control of the NLC can be much smaller to accelerate the convergence. The characteristics from $t = 0$ to $t = 1$ are presented in Fig. 4. It can be noticed that both approaches can prevent the formation of the shock, but the NLC takes the maximum advantage of the shock avoiding conditions and converges much faster than the other approach.

To emphasize the essential role of the shock-avoiding conditions, we carry out the same simulation, but with an open-loop control and another simulation without constraint (6). The results are presented in Figs. 5 and 6. In the two cases, the intersecting characteristics mean that a shock appears. In Fig. 7, we present the simulation result in the presence of an asymptotically constant disturbance. We can see that the control rejects completely this type of disturbance. An interesting point is that the control reacts before the disturbance appears since the evolution of the disturbance is included in the control scheme.

5. Conclusion

In this paper, a complete proof of the stability of an RHOC scheme for scalar nonlinear hyperbolic systems is established and validated by simulation. Firstly, a set of constraints to avoid shocks is introduced. Once these constraints are satisfied, the stability of the boundary state results in the stability of the system. The RHOC is then used to guarantee all the above conditions. Finally,

Author's personal copy

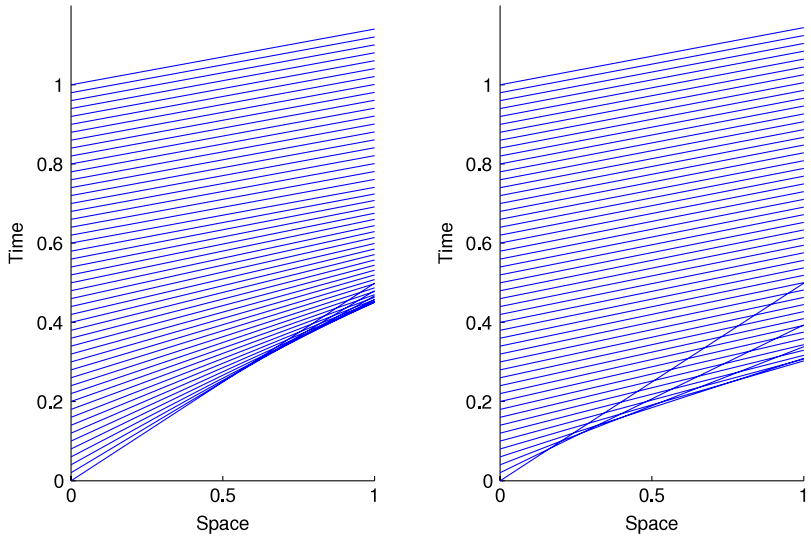

Fig. 6. The characteristics with open-loop control (left) and no shock-avoiding control (right).

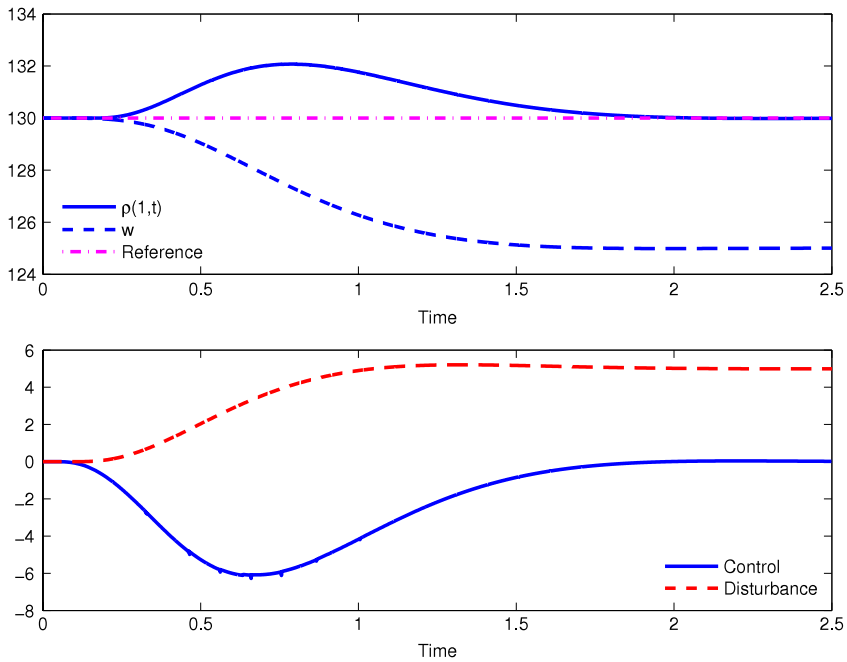

Fig. 7. States at the extremities and control in the presence of an asymptotic constant disturbance.

a simulation with a freeway traffic model is given to illustrate the effectiveness of the here-proposed approach.

These results open some directions for our future works. Among them, we can mention that the same conditions to avoid shocks for a network of conservation laws can be considered and implemented. We can also investigate the case where the disturbance can not be measured and we have to introduce an observer which uses only state measurements at the extremities of the domain. Finally, the extension of the proposed strategy in the case that the presence of shock is inevitable (for instance the initial condition creates shocks or the reference lies outside the set W) is also interesting to study.

References

Bastin, G., Haut, B., Coron, J. M., & D'Andréa-Novel, B. (2007). Lyapunov stability analysis of networks of scalar conservation laws. *Networks and Heterogeneous Media*, *2*(4), 749–757.

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambrige University Press.

Bressan, A. (2000). *Hyperbolic systems of conservation laws — the one-dimensional cauchy problem*. Oxford Univ. Press.

Colombo, R. M., & Goatin, P. (2007). A well posed conservation law with a variable unilateral constraint. *Journal of Differential Equations*, *234*, 654–675.

Colombo, R. M., Goatin, P., & Rosini, M. D. (2011). On the modeling and management of traffic. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, *45*, 853–872.

Dubljevic, S., Mhaskar, P., Christofides, P. D., & El-Farra, N. H. (2005). Predictive control of transport-reaction processes. *Computers and Chemical Engineering*, *11*(29), 2335–2345.

Findeisen, R., Imsland, L., Allgöwer, F., & Foss, B. A. (2003). State and output feedback nonlinear model predictive control: an overview. *European Journal of Control*, *9*(3), 179–195.

Garavello, M., & Piccoli, B. (2006). Traffic flow on networks. *AIMS*,.

Georges, D. (2009). Infinite-dimensional nonlinear predictive control design for open-channel hydraulic systems. *Networks and Heterogeneous Media*, *4*(2), 1–18.

Georges, D., & Litrico, X. (2002). *Automatique pour la gestion des ressources en eau*. Hermès.

Hartl, R. F., Sethi, S. P., & Vickson, R. G. (1995). A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, *37*(2).

Author's personal copy

Ito, K., & Kunisch, K. (2002). Receding horizon optimal control for infinite dimensional systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, *8*, 741–760.

Mohammadi, L., Dubljevic, S., & Forbes, J.F. (2010). Robust characteristic-based MPC of a fixed-bed reactor. In: *Proceedings of 2010 American Control Conference*.

Pham, V.T., Georges, D., & Besançon, G. (2010). Predictive control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws. In: *49th IEEE Conference on Decision and Control*.

Serre, D. (1999). *Systems of Conservation law 1: Hyperbolicity, entropies, shock waves*. Cambrige University Press.

Shang, H., Forbes, J. F., & Guay, M. (2004). Model predictive control for quasilinear hyperbolic distributed parameter systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, *43*, 2140–2149.

Shang, H., Forbes, J. F., & Guay, M. (2005). Feedback control of hyperbolic distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*, *60*, 969–980.

Shang, H., Forbes, J. F., & Guay, M. (2007). Computationally efficient model predictive control for convection dominated parabolic systems. *Journal of Process Control*, *17*, 379–386.

Thang V. Pham received the Electronics and Industrial Computing engineering degree in 2009 from ESISAR-Grenoble INP, Valence, France. He is currently doing his Ph.D. on the receding horizon optimal control for systems of conservation laws at the Control Systems Department, GIPSA-lab, Grenoble.

Didier Georges was born in Epinal, France in 1961. He received the Engineering degree from ESIEE Paris, France in 1984, the Docteur–Ingénieur degree in automatic control and applied mathematics from the Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, in 1987, and the Habilitation à Diriger des Recherches degree from the Institut National Polytechnique de Grenoble, France, in 1997. Since 1995, Georges has been with the Control System Department of GIPSA-lab (former Laboratoire d'Automatique de Grenoble). Presently, he is a Professor at Grenoble INP, Ecole Nationale Supérieure de l'Energie, de l'Eau et de l'Environnement, Grenoble, France. He is mainly interested in closed-loop nonlinear optimal control (predictive control, numerical solutions), modelling and control of complex systems governed by partial differential equations or systems in networks, and estimation or control of electrical and hydraulic systems. Since 2003, he has been a Member of IFAC Technical Committee 6.3 Power Plants and Power Systems.

Gildas Besançon received an electrical engineering diploma in 1993, and a Ph.D. degree in control in 1996, both in Grenoble, France. After a post-doctoral period at the *Dipartimento di Informatica e Sistemistica* of the University of Rome *La Sapienza*, Italy, he joined the *Institut National Polytechnique de Grenoble* on a teaching and research position in control. He is currently a full professor at *Grenoble INP*, distinguished as a member of *Institut Universitaire de France*. His research activities are held at the Control Systems Department of GIPSA-lab and address various topics of nonlinear and complex systems, including observer and control problems, with applications in energy, hydraulics or micro/nano-sciences.

Appendix D

Paper submitted to IEEE Transactions on Automatic Control

Predictive Control with guaranteed stability for water hammer equations

Van Thang Pham, Didier Georges and Gildas Besançon

Abstract

We study the application of the Receding Horizon Optimal Control (RHOC) for hydraulic pipeline systems described by the so-called water hammer equations. Sufficient conditions to guarantee an asymptotic stability to an equilibrium state are first introduced and then integrated in the RHOC scheme. For the implementation, calculus of variations is employed to characterize the optimal solution in terms of the adjoint state and the recently proposed Lattice Boltzmann method is used to solve both direct and adjoint partial differential equations. This approach is finally validated in simulation.

Index Terms

Receding Horizon Optimal Control, Water hammer equations, calculus of variations, Lattice Boltzmann Method.

I. Water hammer equations

Hydraulic pipelines systems are often characterized by the fact that the longitudinal dimension is much greater than the transversal dimension, then a one-dimensional model is sufficient. Under certain assumptions (see [24] or [13]), the dynamics of the piezometric head and the flow speed can be modeled by partial differential equations (PDEs) called water hammer equations which is based on the conservation of mass and momentum:

$$\begin{array}{rcl} \partial_t H + \frac{a^2}{g}\partial_x V & = & 0, \\ \partial_t V + g\partial_x H & = & -\frac{f}{2D}V|V| \end{array}, \ (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

where H is the piezometric head, V the flow speed, L is the length, D the diameter of the pipe, $a > 0$ the wave speed, g the gravitational acceleration, f the friction coefficient. The piezometric

The authors are with Control Systems Department, GIPSA-lab, Grenoble, France.

head H is related to the pressure p as $H = Z + \frac{p}{\rho g}$, where Z is the elevation and ρ the density of the fluid.

The system is completed with initial conditions:

$$H(x,0) = H_i(x),\ V(x,0) = V_i(x),\ x \in [0,L], \tag{2}$$

and boundary conditions. Suppose that the piezometric head at the upstream is fixed at a given value H_0 as $H(0,t) = H_0(t)$. This is the case where the pipe is connected to a reservoir at the upstream. The downstream condition is governed by the valve equation (see [13]):

$$V(L,t) = K\Theta(t)\sqrt{2g(H(L,t) - H_{ds})}, \tag{3}$$

where K is the valve head loss coefficient, H_{ds} the head at the downstream of the valve and Θ the valve opening.

One can notice that the nonlinear friction term $-\frac{f}{2D}V|V|$ makes system (1) semi-linear. Although the study of semi-linear systems in infinite dimensions has been considered in many previous works ([9], [10] and [16]), none of them was applied to the control problem of system (1). However, we can mention [24] and [6] where the authors studied the classical solution of (1), and showed that the *local* stability (in the proximity of an equilibrium state) can be obtained using a state feedback at the boundary. An application of LaSalle's invariance principle (see [16]) to semi-linear systems was studied in [1]. The proof of asymptotic stability is based on the fact that the nonlinear term is uniformly Lipschitz, which is not the case for system (1).

Another challenge for pipeline systems is the significant variation of the pressure when closing the valve (see [13]). These pressure peaks (also called water hammers which explains the name of these equations) can lead to undesirable phenomena such as vibration, distortion and even damage of the pipe. The objective of this work is twofold. We want to guarantee a *global asymptotic stability* of (1) and also minimize the variation of pressure and speed, which motivates us to use the Receding Horizon Optimal Control (RHOC).

The RHOC was well studied for finite-dimensional systems, even in the nonlinear case (see e.g. [7] and [17]). Among its advantages, one can mention the ability to obtain a guaranteed stability and to handle constraints. The extension of such an approach to infinite-dimensional systems was also investigated, as in [11]. But this work concerned only the case of distributed control. The RHOC approach for boundary control of nonlinear Saint-Venant equations was considered in [8], and solved by calculus of variations approach. A numerical solution of this

control was also proposed and validated in simulation, but no proof of stability was provided. Our recent works ([23] and [22]) combined the arguments of [11] with the Lyapunov functional proposed by [4] for *linear* boundary control hyperbolic systems to get a complete proof of the exponential stability of RHOC scheme.

The paper is organized as follows: In section II, system (1) is rewritten in the abstract form in which existence and uniqueness of a weak solution are established based on theories of contraction C_0-semigroup presented in [16]. Section III then presents sufficient conditions to guarantee the asymptotic stability of the weak solution. In section IV,the stability of the RHOC and the numerical computation of the optimal solution is considered. The calculus of variations is carried out to obtain the optimal control as a function of the adjoint state, and the Lattice Boltmann Method (LBM) is used to solve both the direct states and the adjoint states. Finally, some simulation results are provided in section V to validate the proposed control approach, and some conclusions end the paper in section VI.

II. Abstract setting

We denote by $(\bar{H}, \bar{V})$ $(\bar{V} > 0)$ the steady state corresponding to the boundary values (H_0, V_0) which is determined by:

$$\bar{V} = V_0, \quad \bar{H}(x) = -\frac{f}{2Dg} V_0 |V_0| x + H_0. \tag{4}$$

Supposing that we want to regulate the system around this set point. By introducing new variables $\tilde{H}(x,t) = H(x,t) - \bar{H}(x)$ and $\tilde{V}(x,t) = V(x,t) - \bar{V}$, we obtain the following equations:

$$\partial_t \tilde{H} + \frac{a^2}{g} \partial_x \tilde{V} = 0, \tag{5}$$

$$\partial_t \tilde{V} + g \partial_x \tilde{H} = -m((\tilde{V} + \bar{V})|\tilde{V} + \bar{V}| - \bar{V}^2), \tag{6}$$

with $m = f/2D$. In order to put these equations in the characteristics form, we make the following transformation:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g/a & 1 \\ g/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a/g & a/g \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

The dynamics in the new coordinate are then:

$$\begin{aligned} \partial_t y_1 &= a \partial_x y_1 - F(y_1, y_2) \\ \partial_t y_2 &= -a \partial_x y_2 - F(y_1, y_2) \end{aligned}, \tag{8}$$

where $F(y_1, y_2) = F(\tilde{V}) = m[(\tilde{V}+\bar{V})|\tilde{V}+\bar{V}|-\bar{V}^2]$, with $\tilde{V} = (y_1+y_2)/2$. The initial conditions can also be expressed in terms of the new variables as $y_1(\cdot, 0) = y_{10}$ and $y_2(\cdot, 0) = y_{20}$. The boundary condition at $x = 0$ becomes $y_2(0, t) = y_1(0, t)$. The valve opening $\Theta(t)$ can be computed in order to implement the boundary condition at $x = L$ in the form $y_1(L, t) = w(t)$. To put the above equations in abstract form, we introduce an integrator in the dynamics of w as follows:

$$\dot{w}(t) = -kw(t) + u(t), \quad w(0) = w_0 = y_{10}(L), \tag{9}$$

with some constant $k \geq \frac{a}{2}$. The reason why we add the state feedback $-kw$ will be clarified later. Let us denote $Z = \mathbb{R} \times [\mathbf{L}_2(0, L)]^2$ which is obviously a Hilbert space with the following inner product:

$$\left\langle (w \quad y_1 \quad y_2)^T, (\bar{w} \quad \bar{y}_1 \quad \bar{y}_2)^T \right\rangle_Z = w\bar{w} + \int_0^L (y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2)\, dx. \tag{10}$$

and let us denote by $\|\cdot\|$ the induced norme. Equations (8)-(9) can then be put in the form:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{F}(z(t)) + \mathcal{B}u(t), \quad z(0) = z_0, \tag{11}$$

where $z_0 = (w_0 \quad y_{10} \quad y_{20})^T$ and the operators $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{F}$ and $\mathcal{B}$ are defined as:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & a\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -a\frac{d}{dx} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}\begin{pmatrix} w \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F(y_1, y_2) \\ -F(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

The domain of $\mathcal{A}_0$ and that of $\mathcal{F}$ are determined by:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathcal{A}_0) &= \{z = [w\ y_1\ y_2]^T \in Z | z_1,\ z_2 \text{ are absolutely continuous,} \\ &\quad \tfrac{dy_1}{dx},\ \tfrac{dy_2}{dx} \in \mathbf{L}_2(0, L),\ y_2(0) = y_1(0),\ y_1(L) = w\}, \\ \mathbf{D}(\mathcal{F}) &= \{z = (w \quad y_1 \quad y_2)^T \in Z \mid y_1, y_2 \in \mathbf{L}_4(0, L)\}. \end{aligned} \tag{13}$$

The operator $\mathcal{F}$ involving the friction has the following property:

Lemma 2.1: Operator $\mathcal{F}$ satisfies $\langle \mathcal{F}z, z\rangle \leq 0, \quad \forall z \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$.

Proof: Indeed, with $z = (w \quad y_1 \quad y_2)^T \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$, we have:

$$\langle \mathcal{F}z, z\rangle_Z = -\langle F(y_1, y_2), y_1\rangle_{\mathbf{L}_2(0,L)} - \langle F(y_1, y_2), y_2\rangle_{\mathbf{L}_2(0,L)} = -\int_0^L (y_1 + y_2)F(y_1, y_2)dx. \tag{14}$$

Consider two cases:

- $\tilde{V} + \bar{V} \geq 0$: $(y_1 + y_2)F(y_1, y_2) = 2m\tilde{V}^2(\tilde{V} + 2\bar{V}) \geq 2m\bar{V}\tilde{V}^2$.
- $\tilde{V} + \bar{V} < 0$, then $\tilde{V} < -\bar{V} < 0$. We have:

$$(y_1 + y_2)F(y_1, y_2) = 2m\tilde{V}[-\tilde{V}^2 - 2\tilde{V}\bar{V} - 2\bar{V}^2] \geq 4m(\sqrt{2} - 1)\bar{V}\tilde{V}^2. \tag{15}$$

Then, in all cases, we have:

$$(y_1 + y_2)F(y_1, y_2) \geq c_1 \tilde{V}^2, \quad c_1 = 4m(\sqrt{2} - 1)\bar{V}. \tag{16}$$

As a consequence $\langle \mathcal{F}z, z\rangle \leq 0$. ■

About the operator $\mathcal{A}_0$, we can prove the following property:

Lemma 2.2: Operator $\mathcal{A}_0$ is *m-dissipative* (which means that $\mathcal{A}_0$ is dissipative and $\text{Ran}(I - \lambda_0\mathcal{A}_0) = Z$ for some $\lambda_0 > 0$, where $\text{Ran}(T)$ denotes the range of an operator T, I identity operator).

Proof: Clearly $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ is dense in Z. We will show that $\mathcal{A}_0$ is closed. To this end, we show that $\mathcal{A}_0$ is invertible with $\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathcal{L}(Z)$. Define the operator $S : Z \to Z$:

$$S\begin{pmatrix} \omega \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k}\omega \\ -\frac{1}{a}\int_x^L y_1(s)ds - \frac{1}{k}\omega \\ -\frac{1}{a}\int_0^x y_2(s)ds - \frac{1}{a}\int_0^L y_1(s)ds - \frac{1}{k}\omega \end{pmatrix}. \tag{17}$$

It is easy to see that $S \in \mathcal{L}(Z)$ and $S\mathcal{A}_0 = I_{\mathbf{D}(\mathcal{A}_0)}$ and $\mathcal{A}_0 S = I_Z$. According to Theorem A.3.46 in [5], we obtain that $\mathcal{A}_0$ is closed. Next, we will show that:

$$\langle \mathcal{A}_0 z, z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathbf{D}(\mathcal{A}_0) \text{ and } \langle \mathcal{A}_0^* z, z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathbf{D}(\mathcal{A}_0^*), \tag{18}$$

where $\mathcal{A}_0^*$ is the adjoint of $\mathcal{A}_0$ defined as:

$$\mathcal{A}_0^*\begin{pmatrix} w \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kw + ay_1(L) & 0 & 0 \\ 0 & -a\frac{dy_1}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & a\frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{D}(\mathcal{A}_0^*) = \ \{z = [w\ y_1\ y_2]^T \in Z \mid \\ y_1,\, y_2 \text{ are absolutely continuous,} \\ \frac{dy_1}{dx},\, \frac{dy_2}{dx} \in \mathbf{L}_2(0, L),\, y_1(0) = y_2(0),\, y_2(L) = 0\}. \end{array}$$

Indeed, since $k \geq \frac{a}{2}$, one has:

$$\langle \mathcal{A}_0 z, z\rangle = -kw^2 + \int_0^L a\frac{dy_1}{dx}y_1 dx + \int_0^L -a\frac{dy_2}{dx}y_2 dx = (-k + \frac{1}{2}a)w^2 - \frac{1}{2}ay_2^2(L) \leq 0.$$

This inequality explains why the state feedback $-kw$ was added in the dynamics of w. Similarly, for $z \in \mathbf{D}(\mathcal{A}_0^*)$, we calculate:

$$\langle \mathcal{A}_0^* z, z\rangle = -kw^2 + awy_1(L) - \frac{1}{2}ay_1^2(L) \leq -\frac{a}{2}(w - y_1(L))^2 \leq 0. \tag{19}$$

Thus, by the corollary 2.28 of [16], the operator $\mathcal{A}_0$ is m-dissipative. ■

We can now show the following result:

Proposition 2.3: Operator $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{F}$ with the domain $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ is the infinitesimal generator of a contraction C_0-semigroup $\Phi(t)$ on $\mathbf{D}(\mathcal{F})$.

Proof: To this end, we need to show that

1) $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0) \cap \mathbf{D}(\mathcal{F})$ is dense in $\mathbf{D}(\mathcal{F})$.
2) Given $r > 0$, there exists $\lambda_0 \in (0, +\infty)$ such that for each $\lambda \in (0, \lambda_0)$

$$\text{Ran}(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})) \supset B_r \text{ and } \|(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F}))^{-1} v\| \leq \|v\|, \forall v \in B_r,$$

where $B_r = \{z \in \mathbf{D}(\mathcal{F}) \mid \|z\| \leq r\}$.

Then by applying theorem 2 in [20], we get the proposition.

The first condition is obvious since $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0) \cap \mathbf{D}(\mathcal{F}) = \mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ and $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$ is dense in $\mathbf{D}(\mathcal{F})$. We will show the second one, by adapting the method in [19] for the case where $\mathcal{F}$ is locally Lipschitz. Consider $v \in B_r$. Chose a constant $\theta \in (0, 1)$, then there exists $\omega_{r/\theta}$ such that

$$\|\mathcal{F}z_1 - \mathcal{F}z_2\| \leq \omega_{r/\theta} \|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in B_{r/\theta}. \tag{20}$$

We take λ_0 sufficiently small satisfying $\lambda_0 \omega_{r/\theta} + \theta < 1$. Consider now $\lambda \in (0, \lambda_0)$. For each z in B_r, we define $P : B_{r/\theta} \to Z$ as $Pz = (I - \lambda\mathcal{A}_0)^{-1}(v + \lambda\mathcal{F}z)$. Since $\mathcal{A}_0$ is m-dissipative, $J_\lambda = (I - \lambda\mathcal{A}_0)^{-1}$ is a contraction operator from Z to $\mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$. For all $z \in B_{r/\theta}$, we have:

$$\|Pz\| \leq \|Pz - P0\| + \|P0\| \leq \|J_\lambda(\lambda\mathcal{F}z)\| + \|J_\lambda v\| \leq \lambda\omega_{r/\theta}\|z\| + \|v\| \leq \tfrac{r}{\theta}. \tag{21}$$

In addition $\|Pz_1 - Pz_2\| \leq L\|z_1 - z_2\|$ with $L = \lambda\omega_{r/\theta} < 1$. Then P is a contraction operator from $B_{r/\theta}$ to $B_{r/\theta}$. By the fix-point theorem, there exists a unique z_λ such that $Pz_\lambda = z_\lambda$, or equivalently $z_\lambda - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})z_\lambda = v$, which implies that $\text{Ran}(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})) \supset B_r$. Finally, since $\langle(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F})z, z\rangle_Z \leq 0, \forall z \in \mathbf{D}(\mathcal{A}_0)$, we have $\|(I - \lambda(\mathcal{A}_0 + \mathcal{F}))^{-1} v\| \leq \|v\|, \quad \forall v \in B_r$. ■

As a consequence, by the standards methods (see e.g. [25] or [21]), we can show that for all $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0, T])$ and $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$ the problem (11) has a unique mild solution given by:

$$z(t) = \Phi_0(t)z_0 + \int_0^t \Phi_0(t - s)(\mathcal{F}z(s) + \mathcal{B}u(s))ds \tag{22}$$

In addition, if $u(\cdot) \in \mathbf{C}^1([0, T])$ and $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$, $z(t) \in \mathbf{C}^1([0, T], Z) \cap \mathbf{D}(\mathcal{A})$ for all $t \in [0, T]$.

III. Stability

We will now study the stability of system (11).

Theorem 3.1: Given $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0, \infty))$ satisfying the following condition for all $t \in [0, \infty)$:

$$u(t)w(t) \leq (-\rho + k)w^2(t), \text{ if } w(t) \neq 0; \quad u(t) = 0, \text{ if } w(t) = 0, \tag{23}$$

with some $\rho > 0$. Then system (11) with $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$ is asymptotically stable at the origin.

Proof: We firstly consider the case where $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ and $u(\cdot) \in \mathbf{C}^1([0,\infty))$ satisfying (23). In this case, system (11) has a classical solution $z(t)$. Consider the following function:

$$S(t) = pw^2(t) + \|y_1(\cdot,t)\|^2 + \|y_2(\cdot,t)\|^2, \tag{24}$$

for some $p > \frac{a}{2\rho}$. Since $z(t) \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ for all $t \geq 0$, we can compute the time derivative of $S(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= 2pw(-kw+u) + ay_1^2(L,t) - ay_2^2(L,t) - \textstyle\int_0^L 2(y_1+y_2)F(y_1,y_2)dx \\ &\leq (a-2p\rho)w^2 - \textstyle\int_0^L 2(y_1+y_2)F(y_1,y_2)dx \leq 0 \quad \text{(from (23) and (16))}. \end{aligned} \tag{25}$$

By Barbalat's lemma, we have that:

$$w^2(t) \to 0 \text{ and } \int_0^L 2(y_1+y_2)F(y_1,y_2)dx \to 0 \text{ as } t \to \infty. \tag{26}$$

From (16), we have $\|\tilde{V}(\cdot,t)\|^2 \to 0$. Consider now the following function:

$$W(t) = \frac{p}{2}w^4(t) + \int_0^L y_1^4(x,t)dx + \int_0^L y_2^4(x,t)dx. \tag{27}$$

As for S, by using (23) the derivative of W can be bounded as:

$$\dot{W} \leq (a-2p\rho)w^4 - \textstyle\int_0^L 4(y_1+y_2)(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2)F(y_1,y_2)dx \leq 0 \quad \text{(from 16)}. \tag{28}$$

Once again, by Barbalat's lemma, we have:

$$\int_0^L (y_1+y_2)(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2)F(y_1,y_2)dx \to 0. \tag{29}$$

By the fact that $y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 \geq \frac{1}{4}(y_1+y_2)^2 = \tilde{V}^2$ and along with (16), (29) implies that $\int_0^L \tilde{V}^4 dx \to 0$. We now show that $\|y_1(\cdot,t)\|^2 \to 0$ as $t \to \infty$. Using the method of characteristics, we have $y_1(x,t) = y_1(L,\tau) - \int_\tau^t F(y_1,y_2)(\xi,s)ds$, with $\tau = t - \frac{L-x}{a}$ and $\xi = L - a(s-\tau)$. Then:

$$\frac{1}{2}y_1^2(x,t) \leq y_1^2(L,\tau) + m^2\left[\int_\tau^t [(\tilde{V}+\bar{V})|\tilde{V}+\bar{V}| - \bar{V}^2](\xi,s)ds\right]^2. \tag{30}$$

Since $\|\tilde{V}(\cdot,t)\|^2 \to 0$, on a finite band $\{(x,\tau) \mid 0 \leq x \leq L,\ t - \frac{L}{a} \leq \tau \leq t\}$, the measure of the set where $\tilde{V}(x,\tau) + \bar{V} < 0$ converges to 0 as $t \to \infty$, then we can only consider the case where $\tilde{V}(x,\tau) + \bar{V} \geq 0$. In this case (30) leads to:

$$\frac{1}{2}\int_0^L y_1^2(x,t) \leq \int_0^L y_1^2(L,\tau)dx + 2m^2\int_0^L\int_\tau^t (\tilde{V}^4 + 4\bar{V}^2\tilde{V}^2)dsdx. \tag{31}$$

This implies that $\|y_2(\cdot,t)\|^2 \to 0$. Finally, $\|y_2(\cdot,t)\|^2 \to 0$ since

$$\|y_2(\cdot,t)\|^2 \leq \textstyle\int_0^L [2(y_1+y_2)^2 + 2y_1^2]dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\tilde{V}^2 + y_1^2\right)dx. \tag{32}$$

Consider now the case where $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ and $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0,\infty))$. Let $\epsilon(t) = (-k+\rho)w(t)+u(t)$, then (9) becomes:

$$\dot{w}(t) = -\rho w(t) + \epsilon(t), \quad w(0) = w_0, \tag{33}$$

and condition (23) is equivalent to:

$$\epsilon(t)w(t) \leq 0 \text{ if } w(t) \neq 0;\ \epsilon(t) = 0 \text{ if } w(t) = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{34}$$

Suppose that $w_0 \geq 0$, then $w(t) \geq 0$ for all $t > 0$ (the case where $w_0 < 0$ can be treated similarly). Inequality (34) becomes: $\epsilon(t) \leq 0$ if $w(t) \neq 0$; $\epsilon(t) = 0$ if $w(t) = 0$, for all $t \in [0,\infty)$. Consider a sequence of functions $\{\epsilon^n\} \subset \mathbf{C}^1([0,\infty))$ such that:

$$\|\epsilon^n - \epsilon\|_{\mathbf{L}_2([0,\infty))} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{and } \epsilon^n(t) \leq 0, t \in [0,\infty). \tag{35}$$

We denote by w^n the solution of (33) with ϵ replaced by ϵ^n; and by z^n the solution of (11) with u replaced by $u^n = \epsilon^n + (k-\rho)w^n$. For a fixed t and for all $\tau \in [0,t]$, we have the following inequality:

$$\|w^n - w\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} \leq t^2 \|\epsilon^n - \epsilon\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])}. \tag{36}$$

As a consequence:

$$\begin{aligned} \|u^n - u\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} &= \int_0^t \left(\epsilon^n(s) - \epsilon(s) + |k-\rho|(w^n(s) - w(s))\right)^2 ds \\ &\leq 2\|\epsilon^n - \epsilon\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} + 2|k-\rho|^2 \|w^n - w\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])} \leq C\|\epsilon^n - \epsilon\|^2_{\mathbf{L}_2([0,t])}, \end{aligned}$$

with some constant C. This implies that $\|u^n - u\|_{\mathbf{L}_2([0,t])} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. By the continuity of $z(t)$ in u, we have $\|z^n(t) - z(t)\|_Z \xrightarrow{n\to\infty} 0$. On the other hand, $\|z^n(t)\|_Z \xrightarrow{t\to\infty} 0$, hence $\|z(t)\|_Z \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Finally, for the general case where $z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F})$ and $u(\cdot) \in \mathbf{L}_2([0,\infty))$, by considering a sequence $\{z_0^n\} \subset \mathbf{D}(\mathcal{A})$ converges to z_0, we obtain by the same reasoning that $\|z(t)\|_Z \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

■

Note 1: By examining the expression of $\dot{S}$ in (25), using LaSalle invariance principle (see [16]) seems to be possible, but there are two points that limit this approach. Firstly, the system is not autonomous, because we want to leave some degrees of freedom to the choice of the control to minimize a criterion specified later. Secondly, even if we consider an autonomous system (i.e. $u \equiv 0$), to apply LaSalle invariance principle, we need the pre-compactness of the orbit $\gamma(z_0) = \{\Phi(t)z_0, t \geq 0\}$ passing through z_0 (see [16]), which is not an easy task.

Note 2: We add the state feedback to the dynamics of w in (9) just to prove the dissipativity of the operator $\mathcal{A}_0$ and to reformulate original problem (8) in abstract form (11). For stability,

we need only that condition (23) holds. If we set $\tilde{u}(t) = -kw(t) + u(t)$, the dynamics of w becomes $\dot{w}(t) = \tilde{u}(t)$, and the stability condition can be written as:

$$\tilde{u}(t)w(t) \leq -\rho w^2(t), \text{ if } w(t) \neq 0,\ \tilde{u}(t) = 0 \text{ if } w(t) = 0. \tag{37}$$

These relationships mean that to ensure stability, it is enough to have an exponential convergence of w. In what follows, we will use $\tilde{u}$ as the control input because it allows us to directly control the convergence speed of w.

IV. Receding Horizon Optimal Control

A. Stability of RHOC

For a prediction horizon $T > 0$, some weighting functions $A(x) > 0$, $B(x) > 0\,(x \in [0, L])$ and some positive constants q and r, we consider the following optimal control problem:

$$\min_{u(\cdot)} J = \int_0^T \int_0^L [A(x)\tilde{H}^2(x,t) + B(x)\tilde{V}^2(x,t)]dxdt + \int_0^T [qw^2(t) + r\tilde{u}^2(t)]dt, \tag{38}$$

subject to the stability constraint (37) and the system dynamics:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{H} + \frac{a^2}{g}\partial_x \tilde{V} &= 0 \\ \partial_t \tilde{V} + g\partial_x \tilde{H} &= -F(\tilde{V}) \\ \dot{w}(t) &= \tilde{u}(t) \end{cases}, \text{ and } \begin{cases} \tilde{H}(0,t) &= 0, \quad \tilde{V}(L,t) = w(t) + \frac{g}{a}\tilde{H}(L,t) \\ \tilde{H}(\cdot,0) &= \tilde{H}_i,\ \tilde{V}(\cdot,0) = \tilde{V}_i \\ w(0) &= w_0 = \tilde{V}_i(L) - \frac{g}{a}\tilde{H}_i(L) \end{cases}, \tag{39}$$

Finally, we add a constraint $|\tilde{u}(t)| \leq u_{max}$ to take into account the saturation of the control. In order that the friction $\mathcal{F}$ is well-defined, we suppose that the initial condition is in $\mathbf{L}_4(0, L)$, which is generally satisfied in practice.

The above optimal control problem can be transformed (using the transformation (7)) in terms of the variable z as follows:

$$\begin{aligned} &\min_{u(\cdot)} J(z_0; u) = \int_0^T \langle z(t), \mathcal{Q}z(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R}u(t)\rangle dt \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{F}(z(t)) + \mathcal{B}u(t),\ z(0) = z_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{F}), \\ u(t)w(t) \leq (-\rho + k)w^2(t), \text{ if } w(t) \neq 0,\ u(t) = 0 \text{ if } w(t) = 0,\ t \in [0,T], \\ |u(t) - kw(t)| \leq u_{max},\ t \in [0,T]. \end{cases} \end{aligned} \tag{40}$$

where the operator $\mathcal{Q} : Z \to Z$ is defined by:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a^2/g^2 A(x) + B(x) & -a/gA(x) + B(x) \\ -a/gA(x) + B(x) & a^2/g^2 A(x) + B(x) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Since an analytical solution of the problem (40) can not be obtained, we will use the RHOC approach whose principle consists of the following steps:

- At each time t, we obtain the current state $z(t)$.
- Then, we compute the numerical solution of the problem (40) using $z(t)$ as initial condition.
- The first part of the optimal control is applied on the system in period $[t, t+\sigma]$ for a small σ, and the procedure restarts at $t = t + \sigma$.

We can prove the following result:

Theorem 4.1: The RHOC scheme applied to system (40) is asymptotically stable.

Proof: Since the optimal control satisfies the condition of Theorem 3.1, the closed-loop stability is guaranteed. The remaining problem is to show the feasibility at each sampling time. To this end, we assume that $w_0 \geq 0$, then $w(t) \geq 0$ for all $t > 0$ and the stability condition becomes:

$$u(t) \leq (-\rho + k)w(t), t \in [0, T]. \tag{42}$$

For a given $z \in Z$, define the region of the control as follows:

$$\Omega(z) = \{u \in \mathbb{R} \mid |u - kw| \leq u_{max} \text{ and } u \leq (-\rho + k)w\}. \tag{43}$$

Clearly $\Omega(z)$ is convex for all $z \in Z$ (i.e. for all $w \in \mathbb{R}$). Then define the following set:

$$N(z) = \{(f, y) \in \mathbb{R} \times Z \mid f \geq F(z, u),\ y = \mathcal{F}(z) + \mathcal{B}u,\ u \in \Omega(z)\}. \tag{44}$$

We see easily that $N(z)$ is convex for all $z \in Z$. So our problem satisfies the conditions of Theorem 2.12 of [26], and therefore has at least one optimal solution. ■

B. Optimal solution by calculus of variations approach

We will formulate the optimal control as a function of the adjoint state in order to be used for the numerical scheme. To handle the constraints, we use the barrier method (see [2]). In this technique, each inequality $C \geq 0$ is taken into account by adding the term $\int_0^{T_f} -\mu \log C dt$ in the cost function, for some $\mu > 0$. The optimal problem consists in minimizing the modified cost function J_m without the constraints on u and w for a sequence of positive barrier parameters k that converges to zero:

$$J_m = \int_0^T \langle z(t), \mathcal{Q}z(t)\rangle + \langle u(t), \mathcal{R}u(t)\rangle + \mathcal{G}(z(t), u(t))dt \tag{45}$$

where $\mathcal{G}(z,u) = -\mu \log\left((-\rho+k)w^2 - uw)(u_{max}^2 - (u-kw)^2)\right)$. For each $u \in \mathbf{L}_2([0,T],\mathbb{R})$, $z \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$ and $\lambda \in \mathbf{L}_2([0,T],Z)$, we introduce the following Lagrangian:

$$\begin{aligned} L = \int_0^T & \Big\{ \frac{1}{2}\langle \mathcal{C}z(\tau), \mathcal{Q}\mathcal{C}z(\tau)\rangle + \frac{1}{2}\langle u(\tau), \mathcal{R}u(\tau)\rangle + \frac{1}{2}\mathcal{G}(z(\tau),u(\tau)) \\ & + \big\langle \lambda(\tau), \big(z(\tau) - \Phi_0(\tau)z_0 - \textstyle\int_0^\tau \Phi_0(\tau-r)(\mathcal{F}z(r) + \mathcal{B}u(r)dr\big)\big\rangle \Big\}\, d\tau. \end{aligned} \tag{46}$$

We denote by L_u, L_z and L_λ the variation of L in u, z and λ respectively. By Liusternik's Theorem (see [15]), there exists (u_m, z_m, λ_m) such that $L_u = L_z = L_\lambda = 0$ at (u_m, z_m, λ_m). Thus, the condition $L_\lambda = 0$ gives:

$$z_m(\tau) = \Phi_0(\tau)z_0 + \int_0^\tau \Phi_0(\tau-r)(\mathcal{F}z_m(r) + \mathcal{B}u_m(r))dr, \quad \tau \in [0,T], \tag{47}$$

which means that z_m is the weak solution of:

$$\dot{z}_m(\tau) = \mathcal{A}_0 z_m(\tau) + \mathcal{F}z_m(\tau) + \mathcal{B}u_m(\tau),\ z_m(0) = z_0. \tag{48}$$

The condition $L_z = 0$ gives:

$$\lambda_m(\tau) = -\mathcal{P}(z_m(\tau), u_m(\tau)) + \mathcal{F}_z(z_m(\tau)) \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\lambda_m(r)dr,\ \tau \in [0,T], \tag{49}$$

where $\mathcal{P}(z,u) = \mathcal{C}^*\mathcal{Q}\mathcal{C}z - \frac{1}{2}\mathcal{G}_z(z,u)$, $\mathcal{F}_z$ and $\mathcal{G}_z$ signify the derivative in z of $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ respectively. Let's set:

$$p_m(\tau) = -\int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\lambda_m(r)dr, \tag{50}$$

then, by using (49):

$$p_m(\tau) = \int_\tau^T \Phi^*(r-\tau)\left(\mathcal{P}(z_m(r), u_m(r)) + \mathcal{F}_z(z_m(r))p_m(r)\right) dr. \tag{51}$$

Therefore, we can consider p_m as the weak solution of the following equation:

$$\dot{p}_m(\tau) = -\mathcal{A}_0^* p_m(\tau) - \mathcal{F}_z(z_m(\tau))p_m(\tau) - \mathcal{P}(z_m(\tau), u_m(\tau)),\ p_m(T) = 0. \tag{52}$$

Finally, the gradient of the cost function is given by:

$$L_u = \int_0^T \mathcal{R}u_m(\tau) + \mathcal{B}^* p_m(\tau) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_u(z_m(\tau), u_m(\tau)). \tag{53}$$

In this form, we can use a numerical method to approximate the optimal solution. In this paper, we propose the Lattice Boltzmann Method.

C. Lattice Boltzmann method (LBM)

The LBM is becoming more and more popular thanks to its powerful capacities to simulate the fluid flows and other physical phenomena (see [3]).

In this method, we consider the movement of the particles on a regular grid. The particles at point (x,t) are split in several quantities $f_i(x,t)$ with velocities v_i. The underlying algorithm consists in two alternative phases: collision phase and streaming phase. In the collision phase, the particles enter the site x at instant t $f_i^{in}(x,t)$ collide and a new distribution $f_i^{out}(x,t)$ results. Then during the period $[t, t+\Delta t]$ of the streaming phase, the new distribution moves to the lattice site in the direction of the velocity v_i. These two phases can be formulated as:

$$\begin{aligned} &\text{Collision :} \quad f_i^{out}(x,t) = f_i^{in}(x,t) + \tfrac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i^{in}) + F_i, \\ &\text{Streaming :} \quad f_i^{in}(x + v_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i^{out}(x,t), \end{aligned} \tag{54}$$

where F_i represents the contribution of the force term to the collision, Δx the lattice spacing and Δt the time step. The collision phase above is based on the *Bhatnagar-Gross-Krook* (BGK) approximation with a single relaxation time τ and the so-called equilibrium distribution functions f_i^{eq} whose expression depends on the physical process to be described. We shall specify its form below, for the case of a scalar conservation law. To guarantee the stability of this explicit scheme, τ must be larger than 0.5 (see [3]).

Equations (54) may be combined to obtain the evolution equation:

$$f_i(x + v_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(x,t) + \tfrac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) + F_i, \tag{55}$$

where f_i stands for f_i^{in}.

D. Application of LBM to a scalar conservation law

By examining the form of $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_0^*$ (see (12)), in order to compute the numerical optimal control, only the following scalar conservation law needs to be considered:

$$\partial_t \lambda + c\partial_x \lambda = F, \tag{56}$$

with the initial condition $\lambda(x,0) = \lambda_0(x)$. Consider firstly the case $c > 0$. Hence, only the boundary condition at $x = 0$ needs to be defined as $\lambda(0,t) = u(t)$. We propose a lattice with 2 velocities as in Fig. 1 where $v_0 = 0$ and $v_1 = v = \Delta x/\Delta t$.

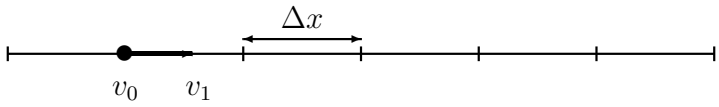

Fig. 1. Two velocities lattice ($c > 0$)

The equilibrium distribution function must satisfy:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_0^{eq} + f_1^{eq} & = & \lambda \\ v f_1^{eq} & = & c\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f_0^{eq} & = & \left(1 - \frac{c}{v}\right)\lambda \\ f_1^{eq} & = & \frac{c}{v}\lambda \end{array}\right. , \tag{57}$$

and λ is computed by $\lambda = \sum_i f_i = f_0 + f_1$. With this equilibrium distribution function, the LBM can be proved to solve (56) in the case without the source term F up to the precision $(\Delta x)^2$ and $(\Delta t)^2$ (see [12]).

In this simple case, the evolution equation (55) has the form:

$$\begin{array}{rcl} f_0(x, t + \Delta t) & = & f_0(x, t) + \frac{1}{\tau}(f_0^{eq} - f_0) + \Delta t F, \\ f_1(x + v\Delta t, t + \Delta t) & = & f_1(x, t) + \frac{1}{\tau}(f_1^{eq} - f_1). \end{array} \tag{58}$$

The boundary condition at point $x = 0$ is guaranteed by imposing $f_1(0, t) = u(t) - f_0(0, t)$. In the case of $c < 0$ we use the lattice where $v_0 = 0$ and $v_1 = -v = -\Delta x/\Delta t$.

E. Computation of the numerical solution

We use here the steepest descend method to solve the optimal problem (40):

1) Choose an initial estimation of the solution $u^{(0)}$.
2) Solve the system (48) from $t = 0$ to $t = T$ by using the LBM for the PDEs and using the Euler explicit scheme for the ordinary differential equation (ODE).
3) Solve the adjoint state (52) from $t = T$ to $t = 0$ also by using the LBM for the PDEs and using the Euler explicit scheme for the ODE.
4) Update the estimation by the steepest descend method

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - K_u L_u(u^{(k)}), \tag{59}$$

   with the step $K_u > 0$ which must be tuned to satisfy a trade-off between convergence speed and numerical stability.
5) Repeat step 2 while the norm of the gradient L_u is larger than a given tolerance.

V. Simulation results

In order to illustrate the validation of the above approach, we carried out some simulation with a system whose parameters are in Table I.

TABLE I

System parameters

L	a	f	D	$\bar{V}$	H_0
85 (m)	379 (m/s)	0.0223	0.0635 (m)	0.5 (m/s)	6.5 (m)

The LBM is used with $\Delta x = 1.7(m)$, $\Delta t = 4.5 \times 10^{-3}(s)$, $v = 379(m/s)$ and $\tau = 0.7$. Suppose that we want to change the flow velocity from $V_0 = 0.87\,(m/s)$ to $V_f = 0$ (the variables considered are the variations from the equilibrium profile). We simulate the first strategy where the velocity decreases linearly. The results are presented in Figures 2. We see clearly that in this case there are pressure waves (water hammer) in the pipeline.

We now perform the simulation with the RHOC with the cost function (38) having the following parameters: $T = 0.5\,(s)$, $\sigma = 0.0224\,(s)$, $A = 1$, $B = 0.5$, $q = r = 100$. The evolution of the piezometric head and the flow speed are presented in Figure 3. We see that the system converges to the origin.

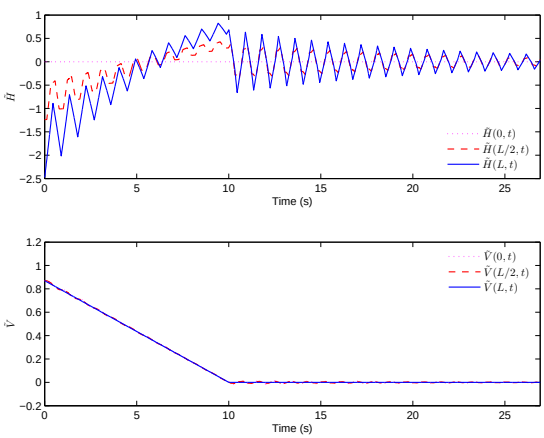

Fig. 2. The piezometric head and flow speed in open-loop

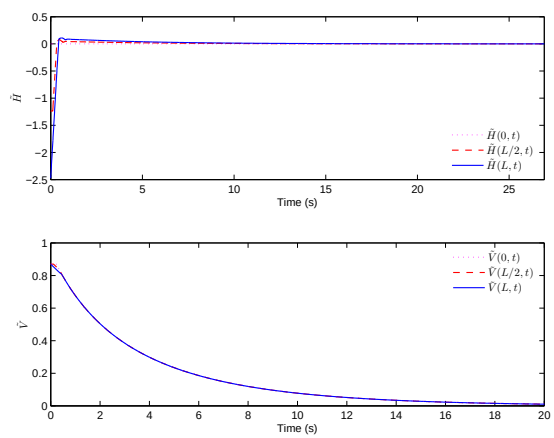

Fig. 3. The piezometric head and flow speed with RHOC

Note that we can also use the boundary feedback control as follows:

$$\tilde{u}(t) = -\rho w(t), \tag{60}$$

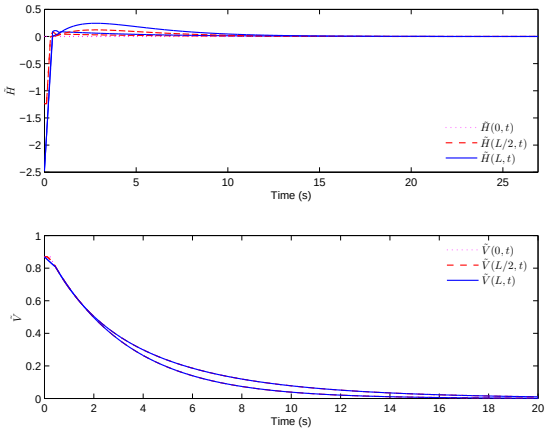

Fig. 4. The piezometric head and flow speed with feedback control

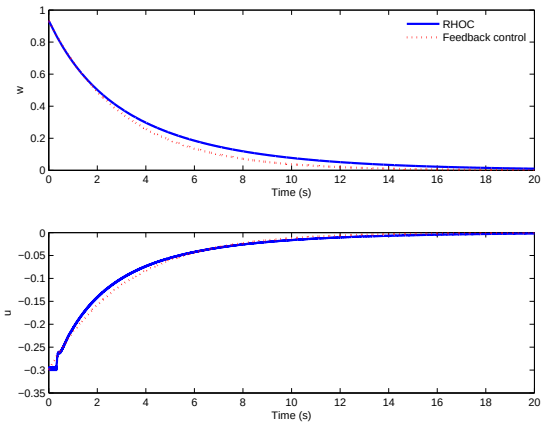

Fig. 5. The boundary state and the control

which satisfies the stability condition and therefore guarantees the convergence of the system. The results are presented in Figure 4. The evolution of the state w and the control $\tilde{u}$ in both cases (the RHOC and feedback control (60)) are presented in Figure 5. We find that both RHOC and state feedback guarantee stability with an almost identical performance, but RHOC ensures an optimal control minimizing criterion (38) and constraint satisfaction.

VI. Conclusions

In this paper, we introduced sufficient conditions to guarantee the asymptotic stability of a pipeline system. The RHOC was used to stabilize the system as well as handling constraints and minimize a cost function penalizing the variation the piezometric head and the flow speed around a reference profile. The simulation results showed that the RHOC guarantees the convergence of the system and does not create pressure waves.

We note that, thanks to the stability conditions, the RHOC scheme does not use either a final cost or a zero terminal equality constraint. Although this approach was considered for finite-dimensional systems in e.g. [18] and [14], it was not extended for infinite-dimensional cases. The RHOC does not play a primordial role in the stabilization, it does however contribute to the optimality and to constraint handling. Constraints such as the maximal value of the head or the saturation of the speed of the valve could be taken into account. The challenge is to ensure the feasibility of the optimization problem, which will be considered in our future work.

REFERENCES

[1] I. Aksikas, J. J. Winkin, and D. Dochain. Asymptotic stability of infinite-dimensional semilinear systems: Application to a nonisothermal reactor. *Systems and Control Letters*, 56:122–132, 2007.

[2] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambrige University Press, 2004.

[3] B. Chopard and M. Droz. *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press, 2005.

[4] J.M. Coron, B. D'Andréa-Novel, and G. Bastin. A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. *IEEE transactions on automatic control*, 52:2 – 11, 2007.

[5] R.F. Curtain and H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, 1995.

[6] M. Dick, M. Gugat, and G. Leugering. Classical solutions and feedback stabilization for the gas flow in a sequence of pipes. *Networks and Heterogeneous Media*, 5(4):691–709, 2010.

[7] R. Findeisen, L. Imsland, F. Allgöwer, and B. A. Foss. State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview. *European Journal of Control*, 9(3):179–195, 2003.

[8] D. Georges. Infinite-dimensional nonlinear predictive control design for open-channel hydraulic systems. *Networks and Heterogeneous Media*, 4(2):1–18, 2009.

[9] A. Haraux. Recent results on semi-linear hyperbolic problems in bounded domains. *Partial Differential Equations*, 1324:118–126, 1988.

[10] A. Haraux and E. Zuazua. Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 100:191–206, 1987.

[11] K. Ito and K. Kunisch. Receding horizon optimal control for infinite dimensional systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 8:741–760, 2002.

[12] M. Junk and M. Rheinlainder. Regular and multiscale expansions of a lattice boltzmann method. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 8, 2008.

[13] B. E. Larock, R. W. Jeppson, and G. Z. Watters. *Hydraulics of Pipeline Systems*. CRC Press, 2000.

[14] J. Liu, D. M. Pe na, P. D. Christofides, and J. F. Davis. Lyapunov-based model predictive control of nonlinear systems subject to time-varying measurement delays. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23:788–807, 2009.

[15] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley, 1969.

[16] Z. Luo, B. Guo, and O. Morgül. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. Springer, 1999.

[17] D. Q. Mayne and H. Michalska. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(7):814–824, 1990.

[18] P. Mhaskar, N. H. El-Farra, and P. D. Christofides. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50:1670–1680, 2005.

[19] S. Oharu and T. Takahashi. On semigroup generated by m-accrerive operators in a strict sense. *Proceedings of the American mathematical society*, 96(1), 1986.

[20] S. Oharu and T. Takahashi. Locally lipschitz continuous perturbations of linear dissipative operators and nonlinear semigroups. *Proceedings of the American mathematical society*, 100(1), 1987.

[21] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and Application to Partial Differential Equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1983.

[22] V.T. Pham, D. Georges, and G. Besançon. Infinite-dimensional receding horizon optimal control for an open-channel system. In *Proceedings of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2010.

[23] V.T. Pham, D. Georges, and G. Besançon. Predictive control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws. In *Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control*, 2010.

[24] C. Prieur. Control of systems of conservation laws with boundary errors. *Networks and Heterogeneous Media*, 4(2):393–407, 2009.

[25] E. Schechter. Evolution generated by semilinear dissipative plus compact operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, 275:297–308, 1983.

[26] J. Yong. Existence theory of optimal controls for distributed parameter systems. *Kodai Mathematical Journal*, 15:193–220, 1992.

Bibliography

Aksikas, I., Fuxmana, A., Forbes, J. F. & Winkin, J. J. [2009], 'LQ control design of a class of hyperbolic PDE systems: Application to fixed-bed reactor', *Automatica* **45**, 1542–1548.

Aksikas, I., Winkin, J. J. & Dochain, D. [2007*a*], 'Asymptotic stability of infinite-dimensional semilinear systems: Application to a nonisothermal reactor', *Systems and Control Letters* **56**, 122–132.

Aksikas, I., Winkin, J. J. & Dochain, D. [2007*b*], 'Optimal LQ-feedback regulation of a nonisothermal plug flow reactor model by spectral factorization', *IEEE transactions on Automatic and Control* **52**, 1179–1193.

Alamir, M. [1999], 'Optimization based nonlinear observers revisited', *Int. J. Contr.* **72**(13), 1204–1217.

Ascher, U., Mattheij, R. & Russell, R. [1995], *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, 2 edn, SIAM, Philadelphia.

Bamieh, B., Paganini, F. & Dahleh, M. A. [2012], 'Distributed control of spatially invariant systems', *IEEE transactions on Automatic and Control* **47**(7), 1091–1107.

Bastin, G. & Coron, J. [2010], Further results on boundary feedback stabilisation of 2×2 hyperbolic systems over a bounded interval, *in* 'Proceedings of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems'.

Bastin, G., Haut, B., Coron, J. & D'Andréa-Novel, B. [2007], 'Lyapunov stability analysis of networks of scalar conservation laws', *Networks and Heterogeneous Media* **2**(4), 749 – 757.

Bayen, A. M., Raffard, R. L. & Tomlin, C. J. [2006], 'Adjoint-based control of a new eulerian network model of air traffic flow', *IEEE transactions on Control systems technology* **14**(5), 804–818.

Boyd, S. & Vandenberghe, L. [2004], *Convex Optimization*, Cambrige University Press.

Bressan, A. [2000], *Hyperbolic Systems of Conservation Laws - The One-dimensional Cauchy Problem*, Oxford Univ. Press.

Burgers, J. M. [1948], 'A mathematical model illustrating the theory of turbulence', *Advances in Applied Mechanics* **1**, 171–199.

Chen, H. & Allgöwer, F. [1998], 'A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability', *Automatica* **34**(10), 1205–1217.

Chen, M. L. & Georges, D. [1999], Nonlinear optimal control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model, *in* 'Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control'.

Chopard, B. & Droz, M. [2005], *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambridge University Press.

Christofides, P. D. & Daoutidis, P. [1997], 'Finite-dimensional control of parabolic PDE systems using approximate inertial manifolds', *Journal of Mathematica Analysis and Applications* **216**, 398–420.

Christofides, P. D. & Daoutidis, P. [1998], 'Robust control of hyperbolic PDE systems', *Chemical Enoineering Science* **53**(1), 85–105.

Christofides, P. D., Liu, J. & a, D. M. P. [2011], *Networked and Distributed Predictive Control: Methods and Nonlinear Process Network Applications*, Advances in Industrial Control, Springer-Verlag.

Cirina, M. A. [1969], 'Boundary controllability of nonlinear hyperbolic systems', *SIAM Journal of Control* **7**, 198–212.

Colombo, R. & Goatin, P. [2007], 'A well posed conservation law with a variable unilateral constraint', *Journal of Differential Equations* **234**, 654–675.

Colombo, R. M., Goatin, P. & Rosini, M. D. [2011], 'On the modeling and management of traffic', *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **45**, 853–872.

Coron, J., Bastin, G. & D'Andréa-Novel, B. [2009], 'On Lyapunov stability of linearised Saint-Venant equations for a sloping channel', *Networks and Heterogeneous Media* **4**(2).

Coron, J., D'Andréa-Novel, B. & Bastin, G. [1999], A Lyapunov approach to control irrigation canals modeled by saint-venant equations, *in* 'Proceedings of European Control Conference'.

Coron, J., D'Andréa-Novel, B. & Bastin, G. [2007], 'A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws', *IEEE transactions on automatic control* **52**, 2 – 11.

Coron, J.-M., D'Andréa-Novel, B. B. & Bastin, G. [2008], 'Dissipative boundary conditions for one-dimensional nonlinear hyperbolic systems', *SIAM Journal on Control and Optimisation* **47**(3), 1460–1498.

Courant, R. & Hilbert, D. [1962], *Methods of Mathematical Physics*, Vol. Volume II Partial Differential Equations, Interscience Publishers.

Curtain, R. F. [1984], 'Linear-quadratic control problem with fixed endpoints in infinite dimensions', *Journal of optimization theory and application* **44**(1), 55–74.

Curtain, R. & Zwart, H. [1995], *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag.

Dick, M., Gugat, M. & Leugering, G. [2010], 'Classical solutions and feedback stabilization for the gas flow in a sequence of pipes', *Networks and Heterogeneous Media* **5**(4), 691–709.

Dubljevic, S., El-Farra, N. H., Mhaskar, P. & Christofides, P. D. [2006], 'Predictive control of parabolic PDEs with state and control constraints', *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **16**, 749–772.

Dubljevic, S., Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2005*a*], 'Predictive control of transport-reaction processes', *Computer and Chemical engineering* **29**, 2335–2345.

Dubljevic, S., Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2005*b*], 'Predictive control of transport-reaction processes', *Computers and Chemical Engineering* **11**(29), 2335Ű2345.

Dubljevic, S., N. H. El-Farra, P. M. & Christofides, P. D. [2006], 'Predictive control of parabolic PDEs with state and control constraints', *International Journal of robust and nonlinear control* **16**, 749–772.

Dulhoste, J., Georges, D. & Besançon, G. [2004], 'Nonlinear control of open-channel water flow based on a collocation control model', *Journal of Hydraulic Engineering* **30**, 254–266.

Fattorini, H. O. [1999], *Infinite dimensional optimization and control theory*, Cambrige University Press.

Findeisen, R. & Allgöwer, F. [2002], An introduction to nonlinear model predictive control, *in* 'Proceedings of 21st Benelux Meeting on Systems and Control', Veldhoven.

Findeisen, R., Imsland, L., Allgöwer, F., & Foss, B. A. [2003], 'Output feedback stabilization of constrained systems with nonlinear predictive control', *International Journal of robust and nonlinear control* **13**, 211–227.

Findeisen, R., Imsland, L., Allgöwer, F. & Foss, B. A. [2003], 'State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview', *European Journal of Control* **9**(3), 179–195.

Fletcher, C. [1991], *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, 2 edn, Springer-Verlag.

Foias, C., Özbay, H. & Tannenbaum, A. [1996], *Robust Control of Infinite Dimensional Systems Frequency Domain Methods*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer.

Garavello, M. & Piccoli, B. [2006], *Traffic Flow on Networks*, AIMS.

García, C. E., Prett, D. M. & Morari, M. [1989], 'Model predictive control: Theory and practice - a survey', *Automatica* **25**(3), 335–348.

Georges, D. [2009], 'Infinite-dimensional nonlinear predictive control design for open-channel hydraulic systems', *Networks and Heterogeneous Media* **4**(2), 1–18.

Georges, D. & Litrico, X. [2002], *Automatique pour la gestion des ressources en eau*, Hermès.

Graf, W. H. & Altinakar, M. [2000], *Hydraulique fluviale - Écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*, Presses polytechniques et universitaires romandes.

Greenberg, J. & Li, T. [1984], 'The effect of boundary damping for the quasi-linear wave equation', *Journal of differential equation* **22**, 66–75.

Grüne, L., Pannek, J., Seehafer, M. & Worthmann, K. [2009], 'Analysis of unconstrained nonlinear MPC schemes with time varying control horizon', *SIAM Journal on Control and Optimization* **48**, 1206–1228.

Gugat, M., Herty, M., Klar, A. & Leugering, G. [2010], 'Optimal control for traffic flow networks', *journal of optimization theory and applications* **126**(3), 589–616.

Halleux, J. D., Prieur, C., Coron, J.-M., D'Andréa-Novel, B. B. & Bastin, G. [2003], 'Boundary feedback control in networks of open channels', *Automatica* **39**, 1365–1376.

Hartl, R. F., Sethi, S. P. & Vickson, R. G. [1995], 'A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints', *SIAM Review* **37**(2).

Ito, K. & Kunisch, K. [2002], 'Receding horizon optimal control for infinite dimensional systems', *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* **8**, 741–760.

Jacquet, D. [2006], Modélisation macroscopique du traffic et contrôle des lois de conservation non linéaires associées, Technical report, Grenoble INP. Ph.D. Thesis.

Junk, M. & Rheinlainder, M. [2008], 'Regular and multiscale expansions of a lattice boltzmann method', *Progress in Computational Fluid Dynamics* **8**.

Kirk, D. E. [1998], *Optimal control theory - An introduction*, Dover Publications.

Krstic, M. [2008], *Boundary Control of PDEs - A Course on Backstepping Designs*, SIAM.

Krstic, M. & Smyshlyaev, A. [2008], 'Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays', *Systems & Control Letters* **57**, 750–758.

Larock, B. E., Jeppson, R. W. & Watters, G. Z. [2000], *Hydraulics of Pipeline Systems*, CRC Press.

Lasiecka, I. & Triggiani, R. [2000], *Control Theory for Partial Diffrential Equations: Continuous and Approximation Theories*, Vol. Volume II Abstract Hyperbolic-like Systems over a Finite Time Horizon, Cambrige University Press.

Li, T.-T. & Rao, B. [2004], 'Exact boundary controllability of unsteady flows in a tree-like network of open canals', *Methods and Applications of Analysis* **11**(3), 353–366.

Li, T. T., Rao, B. & Lin, Y. [2000], 'Semi-global C1 solution and exact boundary controllability for reducible quasilinear hyperbolic systems', *Modélisation mathématique et analyse numérique* **34**(2), 399–408.

Lighthill, M. J. & Whitham, G. B. [1955], 'On kinematic waves II: a theory of traffic flow on long crowded roads', *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* .

Lions, J. L. [1971], *Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag.

Litrico, X. & Fromion, V. [2004], Boundary control of linearized saint-venant equations oscillating modes, *in* 'Proceeding of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control'.

Litrico, X. & Fromion, V. [2009*a*], 'Boundary control of hyperbolic conservation laws using a frequency domain approach', *Automatica* **45**, 647–656.

Litrico, X. & Fromion, V. [2009*b*], *Modeling and Control of Hydrosystems - A Frequency Domain Approach*, Springer-Verlag.

Liu, J., na, D. M. P., Christofides, P. D. & Davis, J. F. [2009], 'Lyapunov-based model predictive control of nonlinear systems subject to time-varying measurement delays', *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **23**, 788–807.

Luo, Z., Guo, B. & Morgül, O. [1999], *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*, Springer.

Maciejowski, J. M. [2002], *Predictive Control with constraint*, Prentice Hall.

Mayne, D. Q. & Michalska, H. [1990], 'Receding horizon control of nonlinear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7), 814–824.

Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V. & Scokaert, P. O. M. [2000], 'Constrained model predictive control: Stability and optimality', *Automatica* pp. 789–814.

Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2005], 'Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions', *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 1670–1680.

Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. [2006], 'Stabilization of nonlinear systems with state and control constraints using lyapunov-based predictive control', *Systems and Control Letters* **55**, 650–659.

Michalska, H. & Mayne, D. Q. [1995], 'Moving horizon observers and observer-based control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(6), 995–1006.

Mohammadi, L., Dubljevic, S. & Forbes, J. F. [2010], Robust characteristic-based MPC of a fixed-bed reactor, *in* 'Proceedings of 2010 American Control Conference'.

Pazy, A. [1983], *Semigroups of linear operators and Application to Partial Differential Equations*, Vol. 44 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer.

Pham, V., Chopard, B., Lefèvre, L., Ondo, D. A. & Mendes, E. [2010], 'Study of the 1d lattice boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network', *Journal of Computational Physics* **229**, 7373–7400.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2010*a*], Infinite-dimensional receding horizon optimal control for an open-channel system, *in* 'Proceedings of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2010*b*], On the use of a global control lyapunov functional in infinite-dimensional predictive control, *in* 'Proceedings of 4th IFAC Symposium on System, Structure and Control'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2010*c*], Predictive control with guaranteed stability for hyperbolic systems of conservation laws, *in* 'Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2011], Receding optimal boundary control of non-linear hyperbolic systems of conservation laws, *in* 'Proceedings of 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*a*], Analyse de stabilité de la commande prédictive d'une classe de lois de conservation, *in* 'Proceedings of Septième Conférence Internationale Francophone d'Automatique'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*b*], 'Predictive control with guaranteed stability for water hammer equations', *IEEE transactions on automatic control* . In preparation.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*c*], Predictive control with terminal constraint for 2×2 hyperbolic systems of conservation laws, *in* 'Proceedings of 51th IEEE Conference on Decision and Control'.

Pham, V., Georges, D. & Besançon, G. [2012*d*], 'Receding horizon boundary control of nonlinear conservation laws with shockavoidance', *Automatica* .

Pham, V. T., Georges, D. & Besançon, G. [2012*e*], 'Commande prédictive avec stabilité pour une classe de systèmes de lois de conservation', *JESA - Numéro spécial sur la commande prédictive* .

Pham, V. T., Georges, D. & Besançon, G. [2012], 'Infinite-dimensional predictive control for hyperbolic systems', revised version submitted to SIAM Journal of Control and Optimisation.

Prieur, C. [2009], 'Control of systems of conservation laws with boundary errors', *Networks and Heterogeneous Media* **4**(2), 393–407.

Prieur, C., Winkin, J. & Bastin, G. [2008], 'Robust boundary control of systems of conservation laws', *Math. Control Signals Syst.* **20**, 173–197.

Primbs, J. A. [1999], Nonlinear optimal control: A receding horizon approach, Technical report, California Institute of Technology. Thesis.

Rauch, J. [1972], 'L_2 is a continuable initial condition for kreiss' mixed problems', *Communications on Pure and Applied Mathematics* pp. 265–285.

Rauch, J. B. & Massey, F. J. I. [1974], 'Differentiability of solution to hyperbolic initial boundary value problems', *Transactions of the American Mathematical Society* **189**, 303–318.

Rauch, J. & Taylor, M. [1974], 'Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains', *Indiana University Mathematics Journal* **24**(1), 79–86.

Richards, P. I. [1956], 'Shock waves on the highway', *Operations Research* **4**(1).

Russell, D. [1978], 'Controllability and stability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open question', *SIAM Review* **20**(4), 639–739.

Russell, D. L. [1973], 'Quadratic performance criteria in boundary control of linear symmetric hyperbolic systems', *SIAM Journal of Control* **11**(3), 475–509.

Saint-Venant, B. [1871], 'Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit', *Comptes Rendus de l'Académie des Science de Paris* **73**.

Santos, V. D., Maschke, B. & Gorec, Y. L. [2009], 'A Hamintonian perspective to the stabilization of systems of two conservation laws', *Networks and heterogeneous media* **4**(2), 249–266.

Santos, V. D. & Prieur, C. [2008], 'Boundary control of open channels with numerical and experimental validations', *IEEE transactions on Control systems technology* **16**(6), 1252–1264.

Sargent, R. [2000], 'Optimal control', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **124**, 361–371.

Schechter, E. [1983], 'Evolution generated by semilinear dissipative plus compact operators', *Transactions of the American Mathematical Society* **275**, 297–308.

Serre, D. [1996], *Systèmes de lois de conservation I*, Diderot Editeur, Arts et Sciences.

Serre, D. [1999], *Systems of Conservation law 1: Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambrige University Press.

Shang, H., Forbes, J. F. & Guay, M. [2005], 'Feedback control of hyperbolic distributed parameter systems', *Chemical Engineering Science* **60**, 969–980.

Shang, H., Forbes, J. F. & Guay, M. [2007], 'Computationally efficient model predictive control for convection dominated parabolic systems', *Journal of Process Control* **17**, 379–386.

Szymkiewicz, R. [2010], *Numerical modeling in Open Channel Hydraulics*, Vol. 81 of *Water Science and Technology Library*, Springer.

Vazquez, R., Krstic, M. & Coron, J. [2011], Backstepping boundary stabilization and state estimation of a 2x2 linear hyperbolic system, *in* 'Proceedings of 50th IEEE Conference on Decicion and Control and European Control Conference'.

Wang, Z. [2008], 'Global exact controllability for quasilinear hyperbolic systems of diagonal form with linearly degenerate characteristics', *Nonlinear Analysis* **69**, 510 – 522.

Wylie, E. B. & Streeter, V. L. [1978], *Fluid transients*, McGraw-Hill International Book Co.

Xu, C. & Sallet, G. [2002], 'Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems', *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations* **7**, 421–442.

Yong, J. [1992], 'Existence theory of optimal controls for distributed parameter systems', *Kodai Mathematical Journal* **15**, 193–220.

Zuazua, E. [2002], 'Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations', *Discrete and continuous dynamical systems* **8**(2), 469–513.

Zuazua, E. [2004], 'Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1-d wave equation', *Rendiconti di Matematica* **24**(2), 201–237.

Zwart, H., Gorrec, Y. L., Maschke, B. & Villegas, J. [2009], 'Well-posedness and regularity of hyperbolic boundary control systems on a one-dimensional spatial domain', *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* **16**(4), 1077– 1093.